Отчет по теме «Задачи оптимального управления»

Выполнил Абрамкин Юрий, 401 группа.

3 декабря 2015 г.

<u>Задача № 42</u>

1 Постановка задачи.

$$\int\limits_0^2 \left(\frac{t^r}{1+\dot{x}^2}\right) dt \to \inf,$$
$$x(0) = 0,\ \dot{x}(2) = 1,\ 0 \leq \ddot{x} \leq 16,$$
$$r = \{1; 2\} \text{ – параметр задачи.}$$

2 Формализация задачи.

$$\int\limits_0^2 \left(\frac{t^r}{1+x_2^2}\right) dt \to \inf,$$
$$x_1(0) = 0,\ x_2(2) = 1,\ 0 \leq u \leq 16,$$
$$r = \{1; 2\} \text{ – параметр задачи.}$$

3 Система необходимых условий оптимальности.

Основные конструкции:

функция Лагранжа: $\mathcal{L} = \int\limits_0^2 L dt + l$,

лагранжиан: $L = \lambda_0 \frac{t^r}{1+x_2^2} + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u) = p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - H$,

функция Понтрягина: $H = p_1 x_2 + p_2 u - \lambda_0 \frac{t^r}{1+x_2^2}$,

терминант: $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2(x_2(2) - 1)$.

Необходимые условия оптимальности:

а) Уравнения Эйлера-Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2$

$$\dot{p}_1 = 0,$$
$$\dot{p}_2 = \frac{-2\lambda_0 x_2 t^r}{(1+x_2^2)^2} - p_1.$$

б) Условие трансверсальности по $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_i(t_k)} = 0$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1$

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(2) = 0,$$
$$p_2(0) = 0, \quad p_2(2) = -\lambda_2.$$

в) Условие оптимальности по управлению:

$$\hat{u} = \underset{u\in[0;16]}{arg\ abs\ max}\,(p_2 u) = \begin{cases} 16,\ p_2 > 0 \\ \forall u \in [0,16],\ p_2 = 0 \\ 0,\ p_2 < 0. \end{cases}$$

г) Условия стационарности по t_0, t_1 отсутствуют, т.к. концы фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 2$).

д) Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geqslant 0$.

е) Множители Лагранжа не равны нулю одновременно

ж) Условие нормировки: множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя.

4 Краевая задача.

Для формирования краевой задачи принципа максимума необходимо выбрать нормировочный коэффициент. Проведем анализ возможности случая $\lambda_0 = 0$. В этом случае из условий а) и б) имеем:

$$\begin{array}{lllll} \dot{p}_1 = 0, & p_1(2) = 0 & \Rightarrow\ p_1 \equiv 0 & \Rightarrow & \lambda_1 = p_1(0) = 0, \\ \dot{p}_2 = -p_1, & p_2(0) = 0 & \Rightarrow\ p_2 \equiv 0 & \Rightarrow & \lambda_2 = -p_2(2) = 0. \end{array}$$

Таким образом, получаем, что все множители Лагранжа $\{p_i, \lambda_i\}$ одновременно равны нулю, что невозможно. Следовательно, $\lambda_0 > 0$, и в качестве условия нормировки задачи выбирается условие $\lambda_0 = 1/2$.

Таким образом, на основе принципа максимума решение рассматриваемой задачи вариационного исчисления сводится к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = \hat{u} = \begin{cases} 16,\ p_2 > 0 \\ \forall u \in [0,16],\ p_2 = 0 \\ 0,\ p_2 < 0. \end{cases}, & x_2(2) = 1, \\ \dot{p}_1 = 0, & p_1(0) = \lambda_1, p_1(2) = 0 \\ \dot{p}_2 = -p_1 - \frac{t^r x_2}{(1+x_2^2)^2}, & p_2(0) = 0, p_2(2) = -\lambda_2. \end{cases} \quad (1)$$

5 Численное решение задачи

Краевая задача (1) решается методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются значения $\beta_1 = x_2(0)$, $\beta_2 = p_1(0)$. Задав эти значения каким-либо образом, мы сможем решить задачу Коши на отрезке $[0, 1]$ и получить соответствующие выбранным значениям β_1, β_2 величины $x_2(2, \beta_1, \beta_2)$ и $p_1(2, \beta_1, \beta_2)$. Задача Коши для системы четырех дифференциальных уравнений, входящая составной частью в метод стрельбы, решается численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения β_1, β_2 так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} x_2(2, \beta_1, \beta_2) = 1, \\ p_1(2, \beta_1, \beta_2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

принимаемые в данном случае в качестве функций невязки.

Для решения системы неявных уравнений (2) относительно β_1, β_2 воспользуемся методом Ньютона. Обозначим

$$F_1(\beta_1, \beta_2) = x_2(2, \beta_1, \beta_2) - 1,$$
$$F_2(\beta_1, \beta_2) = p_1(2, \beta_1, \beta_2).$$

Производные по начальным условиям $\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}$, $\frac{\partial p_1}{\partial \beta_i}$, $i = 1, 2$, которые необходимо знать при использовании метода Ньютона, находим, интегрируя уравнения в вариациях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = \hat{u} = \begin{cases} 16,\ p_2 > 0 \\ \forall u \in [0, 16],\ p_2 = 0 \\ 0,\ p_2 < 0. \end{cases}, & x_2(0) = \beta_1, \\ \dot{p}_1 = 0, & p_1(0) = \beta_2, \\ \dot{p}_2 = -p_1 - \frac{t^r x_2}{(1+x_2^2)^2}, & p_2(0) = 0, \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}, & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}(0) = 0, \\ \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right)^{\cdot} = 0 & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}(0) = \delta_{1i}, \\ \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta_i}\right)^{\cdot} = 0, & \frac{\partial p_1}{\partial \beta_i}(0) = \delta_{2i}, \\ \left(\frac{\partial p_2}{\partial \beta_i}\right)^{\cdot} = -\frac{\partial p_1}{\partial \beta_i} - t^r \frac{\partial x_2}{\partial \beta_i} \frac{1-3x_2^2}{(1+x_2^2)^3}, & \frac{\partial p_2}{\partial \beta_i}(0) = 0, \end{cases}$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$, $i, j = 1, 2$.

Пусть $\beta_k = (\beta_{1_k}, \beta_{2_k})^T$ – приближенное решение (2). Тогда следующее приближение находится по формуле

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \beta_1}(2, \beta_k) & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2}(2, \beta_k) \\ \frac{\partial p_1}{\partial \beta_1}(2, \beta_k) & \frac{\partial p_1}{\partial \beta_2}(2, \beta_k) \end{pmatrix}}_{A}{}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} x_2(2, \beta_k) - 1 \\ p_1(2, \beta_k) \end{pmatrix}}_{F}$$

Процесс заканчивается, когда $\|A^{-1} \cdot F\| < \varepsilon$, где ε – наперёд заданная точность ($\| \cdot \|$ – обычная евклидова норма в $\mathbb{R}^2$). Начальное приближение β_0 берем из аналитического решения.