<u>תרגיל בית רטוב 1</u>

אריאל אברמוביץ 205552599

נמרוד קירמאיר 213155567

<u>3.1</u>

1. יש !9 צמתים בגרף (מצבים) כי זהו מספר הסידורים האפשריים של המספרים 0 עד 8.

האופן שבו נריץ Dijkstra בלי לאתחל מראש את כל הגרף הוא שבהתחלה נאתחל רק את צומת המקור עם מרחק 0 לעצמו. במהלך הריצה בכל פעם שמוציאים צומת u מה-priority queue נאתחל את השכנים שלו לתור ונכניס אותם לתור כך שלשכן v נשמור מרחק $d[u]+1$ (אם הצומת הזה כבר נכנס לגרף דרך מסלול קצר יותר אז נתעלם ממנו). נעצור כשנוציא מהתור את צומת היעד.

<u>3.2</u>

1. לכל מצב v, נסמן ב-v^j את המיקום של האריח ה-j ב-v, ונסמן ב-v_g את היעד.

נגדיר היוריסטיקה:

$$h(v) \coloneqq \sum_{j=1}^{8} MD\left(v^j, v_g^j\right)$$

טענה: h היא היוריסטיקה admissible.

הסבר:

כדי לעבור מ-v ל-v_g יש להזיז את כל אחד מהאריחים 1-8 מהמקום שלו ב-v למיקום שלו ב-v_g. בכל צעד ב-8-Puzzle, מזיזים בדיוק אריח אחד מבין המספרים 1-8 הזזה של משבצת אחת בדיוק באחד מהממדים. לכן:

א. מכיוון שבכל צעד מזיזים בדיוק אריח אחד, מספר הצעדים המינימלי הדרוש כדי לעבור מ-v ל-v_g הוא לפחות סכום של המסלולים הקצרים ביותר של כל אריח j מ-v^j ל-v_g^j.

ב. מכיוון שהמסלול שבו זז כל אריח j מ-v^j ל-v_g^j הוא מסלול של קפיצות של משבצת אחת לכל היותר בדיוק באחד מהממדים, אורך המסלול הקצר ביותר מ-v^j ל-v_g^j הוא לפחות $MD\left(v^j, v_g^j\right)$.

לכן $dist\left(v, v_g\right) \geq \sum_{j=1}^{8} MD\left(v^j, v_g^j\right) = h(v)$ כלומר h היא היוריסטיקה admissible.

3. ההיוריסטיקה החדשה היא admissible כי:

$$dist\left(v, v_g\right) \geq \sum_{j=1}^{8} MD\left(v^j, v_g^j\right) \geq \sum_{j=1}^{8} \mathbf{1}_{v^j \neq v_g^j}$$

בריצה על הדוגמה בקוד של התרגיל, בהיוריסטיקה של הסעיף הקודם (the Manhattan-distance heuristic) היו 595 ביקורים של צמתים שונים לעומת ההיוריסטיקה החדשה שבה היו 4951 ביקורים של צמתים (הרבה יותר). ההיוריסטיקה של הסעיף הקודם יותר טובה בהשוואה להיוריסטיקה החדשה כי היא קרובה יותר למרחק האמיתי של הצמתים מהיעד. זה גורם לכך שבריצה של A^*

מגיעים מהר יותר לצמתים שבאמת הכי קרובים ליעד וכך עוברים על פחות צמתים עד שמגיעים ליעד.

4. בחרנו בפאזל עם מצב התחלתי:
0 7 6
5 3 4
2 1 8
ומצב סופי:
0 1 2
3 4 5
6 7 8. המרחק בין שני המצבים הוא 26.

לקח לאלגוריתם Dijkstra 30.7 שניות ו-419320 ביקורי צמתים כדי להגיע ליעד.

לעומת זאת, לקח לאלגוריתם A^* 0.3 שניות (מאית מהזמן) ו-3399 ביקורי צמתים כדי להגיע ליעד.

5. כאשר מגדילים את α הערך של h_α גדל. באלגוריתם A^*, ככל שנגדיל את h_α ה-priority queue יתחשב פחות במרחק מהמקור ויותר ב-h_α וכך יוציא מהתור צמתים לפי הערכים של h (כי סדר הצמתים הממוינים לפי h ולפי h_α הוא זהה). לכן ככל שנקטין את α ה-priority queue יתחשב יותר במרחק מהמקור ופחות ב-h, ויתנהג באופן יותר דומה ל-Dijkstra ולהיפך.
לכן כאשר $\alpha = 0$, האלגוריתם לא מתחשב ב-h ומתנהג בדיוק כמו Dijkstra.
כאשר $\alpha \to \infty$, האלגוריתם מזניח את המרחק מהמקור (הכי קטן שמצאנו עד כה) ובוחר צמתים באופן גרידי לפי h ("greedy best-first search").
כאשר $\alpha = 1$, מתקיים $h_\alpha = h$ ולכן האלגוריתם מתנהג בדיוק כמו A^* עם היוריסטיקה h.
כאשר $\alpha > 1$, האלגוריתם יתעדף את h על פני המרחק מהמקור. לכן אם h היא admissible נצפה שאלגוריתם יגיע מהר לצמתים עם מרחק קטן מהיעד וימצא מהר מסלול ליעד (גם אם לא קצר ביותר).

עבור $\alpha = 0$ והפאזל מהסעיף הקודם עם the Manhattan-distance heuristic, זמן הריצה של אלגוריתם A^* היה 42.1 שניות, והוא תכנן מסלול באורך 26 וביקר 419320 צמתים. תוצאות אלה מתאימות לאמור לעיל שכאשר $\alpha = 0$, האלגוריתם לא מתחשב ב-h ומתנהג בדיוק כמו Dijkstra. ראינו בהרצאה שDijkstra מבקר בהרבה יותר צמתים בהשוואה ל-A^* וזה לוקח לו יותר זמן.

עבור $\alpha = 1$ והפאזל מהסעיף הקודם עם the Manhattan-distance heuristic, זמן הריצה של אלגוריתם A^* היה 0.3 שניות, והוא תכנן מסלול באורך 26 וביקר 3399 צמתים. תוצאות אלה מתאימות לאמור לעיל שכאשר $\alpha = 1$, , מתקיים $h_\alpha = h$ ולכן האלגוריתם מתנהג בדיוק כמו A^*. ראינו בהרצאה שDijkstra מבקר בהרבה יותר צמתים בהשוואה ל-A^* וזה לוקח לו יותר זמן וזה מתאים לתוצאות שלנו.

עבור $\alpha = 100$ $(*)$ והפאזל מהסעיף הקודם עם the Manhattan-distance heuristic, זמן הריצה של אלגוריתם A^* היה 0.04 שניות, והוא תכנן מסלול באורך 46 וביקר 444 צמתים. תוצאות אלה מתאימות לאמור לעיל שכאשר $\alpha > 1$, האלגוריתם יתעדף את ההיוריסטיקה על פני המרחק מהמקור. לכן אם ההיוריסטיקה היא admissible כמו במקרה של Manhattan-distance נצפה שאלגוריתם יגיע מהר לצמתים עם מרחק קטן מהיעד וימצא מהר מסלול ליעד גם אם לא קצר ביותר.

$(*)$ - המקרה הזה רץ באופן דומה כאשר $\alpha \to \infty$ כי עבור the Manhattan-distance heuristic מתקיים $h \geq 1$ לכל מצב שאינו היעד, ואם מכפילים את הערך הזה ב-100 הוא יזניח את המרחק מהמקור, כי המרחק שנשמר לכל צומת מהמקור הוא לכל היותר 26.

שאלה 3.3:

1. משוואת התנועה של הבעיה כפי שהוצגו בתרגול:

$$(M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + ml\dot{\theta}\sin(\theta) = F$$

$$l\ddot{\theta} - g\sin(\theta) = \ddot{x}\cos(\theta)$$

בקירוב מסביב ל$\theta = 0$ נקבל $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$
כך שהמשוואות יהיו כעת:

$$(M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} = F$$
$$l\ddot{\theta} - g\dot{\theta} = \ddot{x}$$

כעת נגדיר את ה*control* ואת וקטור מרחב המצב

$$u = F$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

כך שמתקבלת המשוואה הדיפרנציאלית הבאה, על פי תבנית *LQR*:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \bar{A}\boldsymbol{x} + \bar{B}u$$

כאשר (מהתרגול):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{l}(1+\frac{m}{M}) & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{pmatrix}$$

כעת נבצע דיסקריטיזציה למשוואות בעזרת הגדרת הנגזרת:

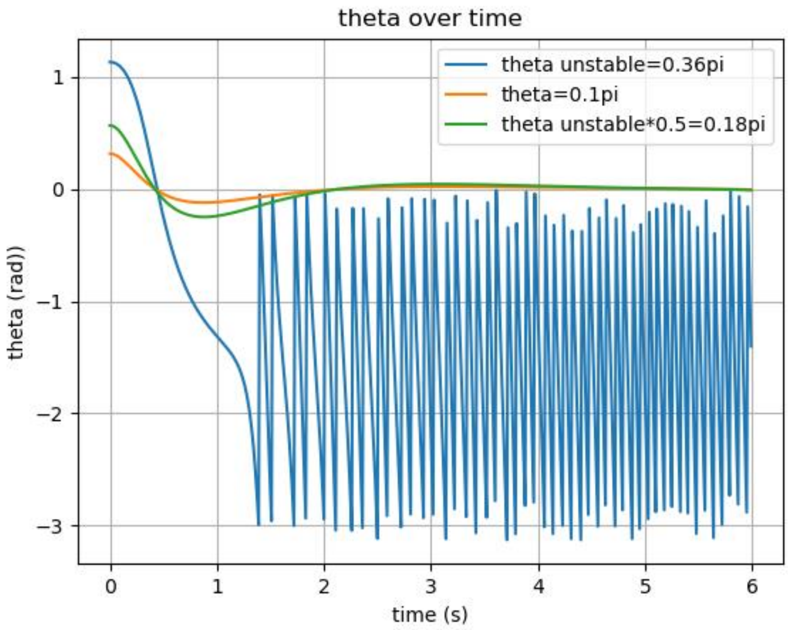
$$\bar{A}\boldsymbol{x} + \bar{B}u = \dot{\boldsymbol{x}} \approx \frac{\boldsymbol{x}_{t+dt} - \boldsymbol{x}_t}{dt} ==> \qquad \boldsymbol{x}_{t+dt} = (I + \bar{A}dt)\boldsymbol{x}_t + \bar{B}dt \cdot u_t$$

כאשר נגדיר $A = I + \bar{A}dt$ $B = \bar{B}dt$ ונקבל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{m}{M}g \cdot dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & \frac{g}{l}(1+\frac{m}{M}) \cdot dt & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{pmatrix} \cdot dt$$

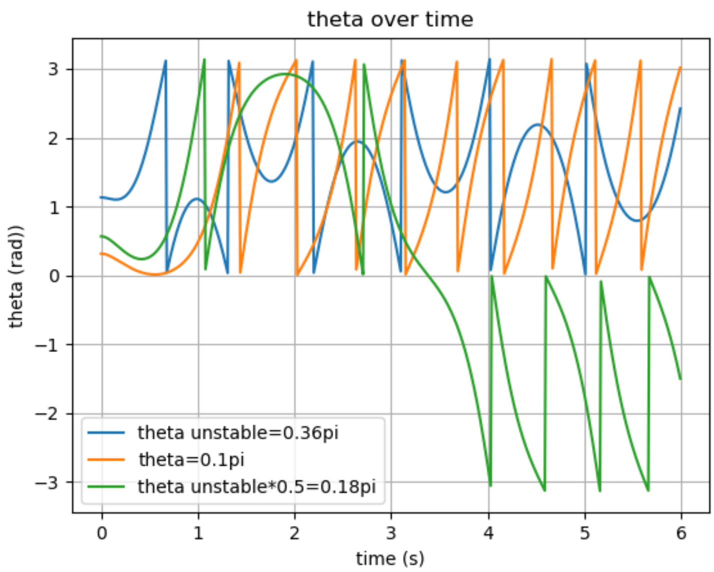
2. כפי שמצויין בתרגול, בחרתי ב $Q = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $R = w_3$. שיחקתי עם הפרמטרים השונים כאשר כפי שהומלץ בקוד כולם קטנים מ1 ואיזנתי ביניהם בעזרת ניסיונות חוזרים ונשנים עד לקבלת פרמטרים שהביאו את המערכת לייצוב.

3. גם כאן, בעזרת ניסוי ותהיה קיבלנו $\theta_{unstable} = 0.36\pi$. קיבלנו את הגרף הבא:



ניתן לראות שעבור $\theta_{unstable}$ לא מתקבלת התייצבות של המערכת סביב זווית אפס. לעומת זאת בשתי הניסיונות האחרים מקבלים התייצבות. נשים לב כי ככל שהזווית ההתחלתית קטנה יותר נקבל התייצבות מהירה יותר.

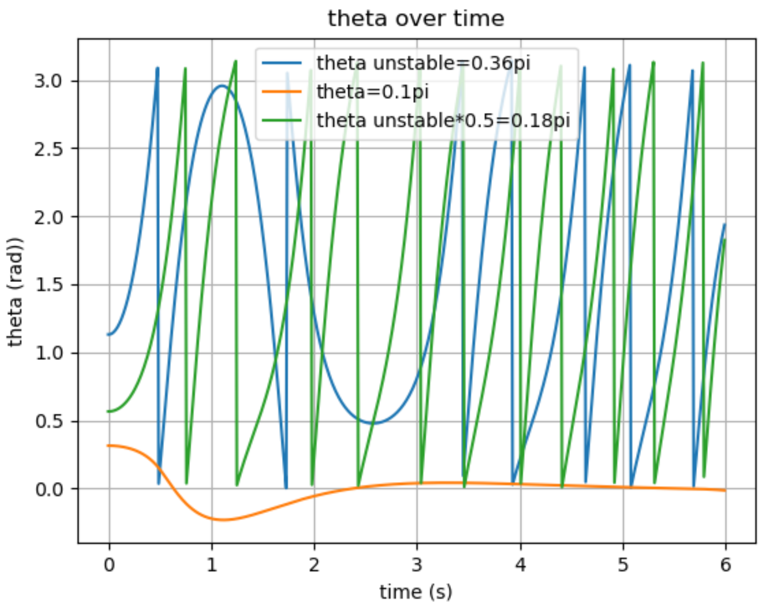
4. כעת השתמשנו ב feedforward control law אשר האלגוריתם חוזה במקום ב feedback control law. קיבלנו את הגרף הבא:



כפי שניתן לראות בשיטת feedforward control law המערכת אינה מתכנסת להתייצבות סביב זווית אפס באף מקרה. המוט נופל ומתחיל להסתובב גם עבור זוויות התחלתיות שהובילו להתייצבות בסעיף הקודם. זאת מאחר ובמקרה הנוכחי האלוגריתם מסתמך על

חיזוי מוקדם של כל המצבים בהם תמצא המערכת ולא מתחשב במצבה הנוכחי של המערכת כך שאינו יודע להסתגל ולתקן את עצמו בזמן הריצה כמו בסעיף הקודם.

5. בשלב זה הגבלנו את הכוח הפועל על העגלה וקיבלנו את הגרף הבא:



נשים לב כי במקרה זה לא נקבל התכנסות מערכת עבור זווית התחלתית $\theta_{unstable} * 0.5$ כלומר נקבל כי $\theta_{unstable}$ קטנה. הסיבה לשינוי זה בתוצאות היא שהפרמטרים שבחרנו עבור פונקציית העלות של המערכת בסעיף (2) הותאמו לכוח גדול יותר. כלומר אנחנו מנסים לייצב את המערכת עם פרמטרים של האלגוריתם המתאימים לכוח שלא מופעל בה ולכן היא לא תתכנס כמו בסעיף (3). על מנת לקבל התכנסות של המערכת גם עבור $\theta_{unstable} * 0.5$ נצטרך לשנות את הפרמטרים של פונקציות העלות כך שיתאימו לכוח הקטן.