

# Aula 9

## Aritmética Binária

**SEL 0414 - Sistemas Digitais**

**Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira**

# 1. SOMA DE DOIS NÚMEROS BINÁRIOS

## Álgebra Booleana (OR)

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

## Aritmética (+)

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ e "vai um"} = (10)$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ e "vai um"} = (11)$$

“Carry”

# 1. SOMA DE DOIS NÚMEROS BINÁRIOS

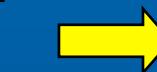
$$\begin{array}{r} 0 \\ + 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$



→ “e vai um”

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ + 1 \\ \hline 11 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

→ “e vai um”

# 1. Exemplos

Nº 1

A binary addition diagram. The top row has digits 1, 1, 1, 0, 0, 1 with arrows pointing to the sum digits below. The bottom row has digits 1, 0, 1, 1, +. A horizontal line separates the two rows. Below the line is the result 1001100. A green curly brace on the right side groups the sum digits (1, 1, 1, 0, 0, 1) and the plus sign.

$$\begin{array}{r} 1100101 \\ + 100100 \\ \hline 1001100 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 11 \\ \hline 36 \end{array}$$

# 1. Exemplos

Nº 2

$$\begin{array}{r} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & | & | & | & | \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ & | & | & | & | \\ 1 & 1 & 1 & 1 & + \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r} 09 \\ 15 + \\ \hline 24 \end{array}$$

# 1. Exemplos

Nº 3

$$\begin{array}{r} 1 & 1 & 1 & , & 1 \\ 1 & 1 & , & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & , & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & , & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r} 3,375 \\ 2,750 + \\ \hline 6,125 \end{array}$$

## 2. SOMA DE DOIS NÚMEROS BCD

$$\begin{array}{r} \underline{52} \\ 43 + \\ \hline 95 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r} 01010010 \\ 01000011 + \\ \hline 10010101 \end{array} \right.$$

## 2. SOMA DE DOIS NÚMEROS BCD

Quando a soma for maior do que 9?

$$\begin{array}{r} 6 \\ \underline{+ 7} \\ 13 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{r} 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ + 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \longrightarrow \text{BCD para 6} \\ \begin{array}{r} 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ + \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array} \longrightarrow \text{BCD para 7} \\ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \longrightarrow \text{BCD Inválido!} \end{array} \right.$$

Sumar 6 (0110) ao resultado final para corrigir o código BCD inválido e adicionar o “carry” que será gerado!

## 2. SOMA DE DOIS NÚMEROS BCD

$$\begin{array}{r} \underline{26} \\ \underline{57} + \\ \hline 83 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r} 0010 \\ 0101 \\ \hline 0111^1 \\ \hline 1000 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0110 \\ 0111 \\ \hline 0111 \\ \hline 0011 \\ 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Adicione 6} \\ \longrightarrow \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of two BCD numbers, 26 and 57, resulting in 83. The numbers are shown in binary-coded decimal (BCD) format. The first addend, 26, is decomposed into its BCD components: 0010 and 0101. The second addend, 57, is also decomposed into its BCD components: 0110 and 0111. The sum of these components is 0111, which is highlighted with a red arrow pointing to the carry bit (1) above the fourth column. A note indicates that a 6 must be added to the result to obtain the final sum of 83.

## 2. SUBTRAÇÃO BINÁRIA

### Aritmética ( - )

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - 1 = 1 \text{ e "empresta um"}$$

“Borrow”

## 2. SUBTRAÇÃO BINÁRIA

$$\begin{array}{r} 0 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ - 0 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ - 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 10 \text{ (2)} \\ - 1 \text{ (1)} \\ \hline 1 \text{ (2-1=1)} \end{array}$$

“empresta um”  
 $(2 - 1 = 1)$

### 3. Exemplos

Nº 1

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{0} \textcircled{0} \textcircled{1} \\ - 1 0 1 1 - \\ \hline 0 1 1 1 0 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r} \underline{25} \\ - 11 - \\ \hline 14 \end{array}$$

### 3. Exemplos

Nº 2

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 - \\ \hline \end{array}$$

?


$$\begin{array}{r} 11 \\ 25 - \\ \hline -14 \end{array}$$

## 4. Números negativos

### BIT DE SINAL

Bit mais significativo (MSB) = indicador de sinal:

- se  $MSB = 0 \Rightarrow +$
- se  $MSB = 1 \Rightarrow -$

Portanto, o número binário pode ser representado por:

SINAL / MAGNITUDE



MSB

(n-1) bits restantes

Sistema Sinal-Magnitude

# SISTEMA SINAL-MAGNITUDE

A <sub>6</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>0</sub>	
0	1	1	0	1	0	0	= +52 <sub>10</sub>

Bit de sinal (+)      Magnitude = 52<sub>10</sub>

B <sub>6</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>0</sub>	
1	1	1	0	1	0	0	= - 52 <sub>10</sub>

Bit de sinal (-)      Magnitude = 52<sub>10</sub>

Não é muito utilizado!

## 5. Complemento de um número

Em binário:

**Complemento**  $\Rightarrow (2^n - 1)$  - número

$\Rightarrow$  substituem-se todos os “0” por “1” e vice-versa

$$\text{Comp. de } 10110 = 01001$$

$$(2^5 - 1) = 32 - 1 = 31 \Rightarrow 11111 \text{ (31)} - 10110 \text{ (22)} = 01001 \text{ (9)}$$

# Complemento

Comp. de **11011010 = 00100101**

$(2^8 - 1) = 255 \rightarrow 11111111$  (255) - 11011010 (218) = 00100101 (37)

# Complemento de 2

Em binário:

**Complemento de 2**  $\Rightarrow$   $(2^n)$  - número

- $\Rightarrow$  substituem-se todos os “0” por “1” e vice-versa
- $\Rightarrow$  soma-se “1” ao resultado

$$\text{Comp. de 2 de } 10110 = 01010$$

$$(2^5) = 32 \Rightarrow 100000 (32) - 10110 (22) = 01010 (10)$$

# Complemento de 2

Comp. de 2 de 11011010 = 00100110

$(2^8) = 256 \rightarrow 100000000 (256) - 11011010 (218) = 00100110 (38)$

## 6. Representação de números com sinal usando complemento de 2

### COMPLEMENTO DE 2

Bit mais significativo (MSB) = indicador de sinal:

- se  $MSB = 0 \Rightarrow +$  SINAL / MAGNITUDE
- se  $MSB = 1 \Rightarrow -$  SINAL / COMPLEMENTO DE 2

Sistema de  
complemento de 2

# SISTEMA COMPLEMENTO DE 2

0	1	0	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---

Bit de sinal (+)

Forma binária direta

$$= +45_{10}$$

1	0	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---

Bit de sinal (-)

Complemento de 2

$$= -45_{10}$$

Muito utilizado!

## Exemplos 1

+13 → 01101

- 9 → 01001 → 10110 + 1 → 10111

- 8 → 01000 → 10111 + 1 → 11000

## Exemplos 2

01100  $\rightarrow + 12$

11010  $\rightarrow 00101 + 1 \rightarrow 00110 \rightarrow - 6$

6



10001  $\rightarrow 01110 + 1 \rightarrow 01111 \rightarrow - 15$

15



# Subtração como soma de complementos

Subtração = soma com o complemento do subtraendo

$$A - B = A + (-B)$$

Em decimal, por ex.:  $8 - 6 = 2$

Complemento de 6 = 4



$$\begin{array}{r} 8 \\ + 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

## Negação

Negamos um número calculando seu complemento de 2

$$+13 = 01101 \rightarrow$$

$$\rightarrow -13 = 10010 + 1 = 10011 \rightarrow$$

$$\rightarrow +13 = 01100 + 1 = 01101$$

## 7. Subtração por complemento de 2

Ex1:  $\begin{array}{r} 51 \\ - 18 \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{r} 0110011 \\ - 0010010 \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{comp. 2: } 1101110$$

$$\begin{array}{r} 0110011 \\ + 1101110 \\ \hline 1010001 \end{array}$$

Desprezado quando estiver à esquerda do bit de sinal

Resultado final (+33)

## 7. Subtração por complemento de 2

Ex2: 
$$\begin{array}{r} 18 \\ - 51 \\ \hline \end{array}$$
      
$$\begin{array}{r} 0010010 \\ - 0110011 \\ \hline \end{array}$$
       $\rightarrow$  comp. 2: 1001101

$$\begin{array}{r} 0010010 \\ + 1001101 \\ \hline 1011111 \end{array}$$

$\rightarrow$  0100001  
33

Resultado final (-33)

# 0's e 1's à esquerda

A quantidade de 0's colocados à esquerda de um número positivo ou 1's colocados à esquerda de um número negativo não altera seu valor

$$+13 = 01101$$



$$+13 = 00001101$$

$$-13 = 10010 + 1 = 10011$$



$$-13 = 1110011$$

Usado para representar qualquer número binário, positivo ou negativo, com o número de bits desejado.

## 7. Subtração por complemento de 2

Ex3:  $\begin{array}{r} 5 \\ \underline{-25} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11001 - \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 000101 \\ 011001 - \\ \hline \end{array}$$

Preencha com zeros à esquerda até que os bits de sinal fiquem alinhados

$$\begin{array}{r} 000101 \\ 100111 + \\ \hline 101100 \end{array} \rightarrow$$

010100  
20

Resultado final (-20)

## 7. Subtração por complemento de 2

Ex4:  $\begin{array}{r} 25 \\ - 5 \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{r} 11001 \\ - 101 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 011001 \\ - 000101 \\ \hline \end{array}$$

Preencha com zeros à esquerda até que os bits de sinal fiquem alinhados

$$\begin{array}{r} 011001 \\ + 111011 \\ \hline \cancel{1010100} \end{array} \rightarrow \text{Resultado final (+20)}$$

Desprezado quando estiver à esquerda do bit de sinal

## 8. Representação de números com sinal usando complemento de 2

FAIXA COMPLETA DE VALORES QUE PODEM SER  
REPRESENTADOS

$$- 2^{(n-1)} \rightarrow + (2^{(n-1)} - 1)$$

sendo  $n$  o número de bits

## Exemplo

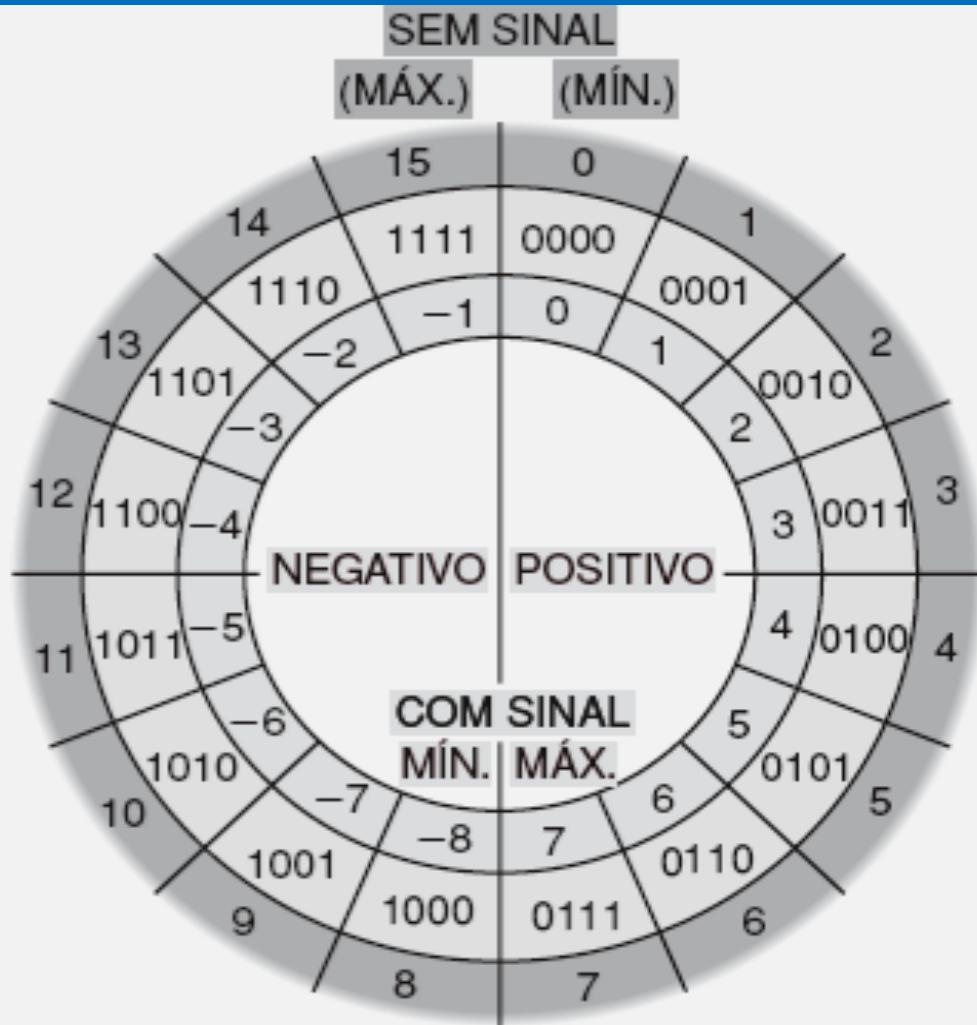
“Quantos números **com sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”

$$-(2^{n-1}) \rightarrow + (2^{n-1} - 1) = 1000 (-8) \rightarrow 0111 (+7)$$

“Quantos números **sem sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”

$$2^n = 16 \rightarrow 0 \rightarrow 15$$

“Quantos números **com sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”



## Caso especial de complemento de 2

$$1000 \rightarrow 0111 + 1 \rightarrow 1000$$

?

“Sempre que o número com sinal tiver um 1 no bit de sinal e zero em todos os outros bits, seu equivalente decimal será  $-2^n$ , sendo n o número de bits da magnitude”

$$\begin{aligned}1000 &= -2^3 = -8 \\10000 &= -2^4 = -16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}01000 &= +8 \\010000 &= +16\end{aligned}$$

## 9. Overflow

Ex1: 18

$$\underline{60 +}$$

Pode ser representado com 5 bits. Precisa de  
6 bits para representar o sinal

$$\begin{array}{r} 0010010 \\ + 0111100 \\ \hline \end{array}$$

Pode ser representado com 6 bits. Precisa de 7  
bits para representar o sinal

$$\textcircled{1}001110$$

$\rightarrow 78$  (precisa de 7 bits!)

**Não é bit de sinal!**

O resultado não pode ser  
representado com 6 bits,  
pois é maior do que  $2^6 = 64$ !

Com bit de sinal, seriam  
necessários 8 bits!

$\rightarrow 01001110 \rightarrow +78$  (precisa de 8 bits!)

## 9. Overflow

Ex2: - 18

$$\begin{array}{r} - 60 \\ \hline - (18+60) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 + \\ \hline 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

→ +78 (precisa de 8 bits!)

bit de sinal!

comp. 2: 1 0 1 1 0 0 1 0

Resultado final (-78)

## 9. Overflow

Ex2:

$$\begin{array}{r} -18 \\ -60 \\ \hline \end{array}$$

Precisa ser representado com  
no mínimo 6 bits

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ + 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$$

Precisa ser representado com  
no mínimo 7 bits

$$1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \rightarrow (\text{precisa de 8 bits!})$$

bit de sinal!

$$\text{comp. 2: } 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0$$

78

Resultado final (-78)

## 9. Overflow

- Só pode ocorrer overflow quando dois números positivos ou dois números negativos são somados. Assim, não pode haver mudança de sinal na resposta.
- Nesse caso, a necessidade de um bit extra é detectada quando o bit de sinal da resposta é diferente dos números somados.
- Quando isso ocorrer, um bit de sinal deve ser adicionado no bit mais significativo.

## 10. MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \times \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

$$25 \times 3 = 75$$

## 10. MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

Multiplicamos um número binário por 2 cada vez que seus bits são rotacionados para a **esquerda** e o zero é colocado no bit **menos** significativo.

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 = 9 \\ \swarrow \searrow \swarrow \searrow \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 = 9 \times 2 = 18 \\ \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 = 9 \times 4 = 36 \end{array}$$

## 11. DIVISÃO BINÁRIA

Dividimos um número binário por 2 cada vez que seus bits são rotacionados para a **direita** e o **zero** é colocado no bit **mais** significativo.

Atenção: Usar vírgula quando o bit menos significativo for igual a 1!

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 = 18 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 = 18 : 2 = 9 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0,1 = 18 : 4 = 4,5 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0,0 \ 1 = 18 : 8 = 2,25 \end{array}$$

## 11. DIVISÃO BINÁRIA

A  
B  
R Q

25  
2  
1 12

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ -1 \ 0 \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \\ -1 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \\ -0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 1 \\ -0 \ 0 \\ \hline 0 \ 1 \end{array} \quad \boxed{10}$$

1100 ÷ 10 = 110 R 0

## 11. DIVISÃO BINÁRIA

$$25 \div 2 = 12,5$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ -1\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 0 \\ -1\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ -1\ 0 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array} \quad \boxed{10} \quad \underline{\quad} \quad \begin{array}{l} 1100,1 \end{array}$$

## Exercícios

1.  $100011 \div 101 \Rightarrow (111)$
2.  $100111 \div 110 \Rightarrow (110,1)$
3.  $21 - 13 \Rightarrow (01000)$
4.  $14 - 17 \Rightarrow (11101)$

FIM