Resumo de Pré-Cálculo

Abrantes Araújo Silva Filho

2018-07-23

Sumário

1 Introdução

Este documento é um resumo de *Pré-Cálculo* que preparei durante o mês de julho de 2018, como estudo prévio para as disciplinas de "Cálculo Diferencial e Integral I" e "Álgebra Linear e Geometria Analítica", do curso de Ciência da Computação da FAESA Centro Universitário.

A FAESA não oferece um curso de Pré-Cálculo em sua grade de disciplinas, nem indica materiais de referência para estudo. Então, após algumas pesquisas na internet, resolvi utilizar os seguintes materiais para estudo:

- **Collingwood DH, Prince KD, Conroy MM. *Precalculus*. Seattle (WA): University of Washington, 2017.**

  Este é o livro texto adotado pelos professores da disciplina "Math 120 - Precalculus", da University of Washington, e está disponível para acesso e download público no site da disciplina. Nesse site estão disponíveis, além do livro, diversos outros materiais de auxílio ao aprendizado de pré-cálculo, como exercícios corrigidos, provas corrigidas e outros.

- **Simmons GF. *Precalculus Mathematics in a Nutshell: Geometry, Algebra, Trigonometry*. New York: Wipf and Stock Publishers, 2003.**

  Este livro está disponível para empréstimo on-line no Internet Archive ou aquisição na Amazon. É um livro bem objetivo e pequeno, mas com boa avaliação pelos leitores.

As seguintes ferramentas também foram importantes para o estudo (principalmente para ajudar na álgebra):

- Wolfram | Alpha
- GeoGebra
- Symbolab
- Photomat

ATENÇÃO: nenhum texto aqui é de minha autoria! Eu apenas resumi e retirei das fontes anteriormente citadas os principais conceitos de pré-cálculo para meu próprio estudo. Todo o crédito pertence aos autores originais!

2 Notas e orientações iniciais

2.1 Por que estudar pré-cálculo?

Porque em praticamente todas as áreas da ciência a matemática tornou-se a lingua básica para a troca de informações e o pré-cálculo é a porta de entrada para o entendimento mais avançado da matemática (cálculo, etc.).

O difícil no pré-cálculo (cálculo, álgebra linear, etc.) não é nem a matemática em si mesma, é a *interpretação* de um problema que está expresso em palavras. Você deve: 1) ler; 2) entender; 3) pensar; 4) relacionar conceitos; 5) esquematizar figuras; 6) investir tempo; e, somente no fim, 7) escolher fórmulas e contas para resolver o problema.

Note como o grosso do processo é a *interpretação* do problema, não o cálculo da resposta em si.

2.2 Os principais erros

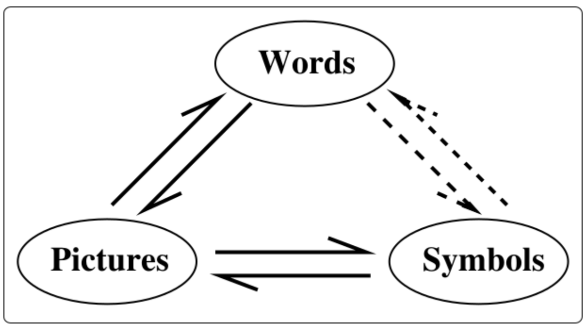
Os principais erros ao se resolver problemas matemáticos do nível de pré-cálculo (ou superiores) são:

- **Álgebra**: aqui é que a maioria se perde. Não conhecer as regras de manipulação algébrica garante horas e horas de frustração.
- **Visualização**: se você não desenhar um rascunho do problema, com figuras e indicações do que está ocorrendo, você não conseguirá resolver o problema ou gastará horas a mais do que o necessário.
- **Definições**: se você não souber as definições matemáticas envolvidas no problema, não conseguirá resolvê-lo.

2.3 Como resolver um problema?

Nunca passe diretamente do *texto* do problema para a sua representação *simbólica* (fórmulas, equações, variáveis, etc.). Sempre faça uma *visualização* do problema e, depois de ter certeza que entendeu tudo, aí sim você começa a representá-lo simbolicamente para resolvê-lo.

Figura 1: De palavras para figuras e depois para símbolos



Fonte: Collingwood DH et al. Precalculus, pág. x

3 Aquecimento

3.1 Diferença entre "graficar" e modelar

A primeira diferença importante a ter em mente é a diferença entre "*graficar*"[1] e *modelar*.

- **Graficar**: é o processo de desenhar um gráfico ou figura, a partir de equações ou fórmulas já definidas.
- **Modelar**: é o processo de estabelecer equações ou fórmular, a partir de dados brutos ou figuras.

A modelagem é um processo muito mais difícil do que a "graficagem"[2] pois requer experiência, intuição e um certo grau de tentativa e erro.

3.2 Números e unidades

Os números não ocorrem isoladamente, geralmente são interpretados associados à alguma *unidade* de medida. Acostume-se a UTILIZAR as unidades nos cálculos, como se fossem outro número qualquer, e manipule essas unidades exatamente como os números (por exemplo, cancelando as unidades comuns no numerador e denominador de uma fração).

3.3 Introdução às taxas

De modo bem básico e introdutório, uma taxa corresponde à variação de uma quantidade em relação à variação de uma outra quantidade. Por exemplo:

$$\text{taxa} = \frac{\Delta \text{ quantidade ``a''}}{\Delta \text{ quantidade ``b''}} \tag{1}$$

Geralmente o denominador de maior interesse de uma taxa é o *tempo*. Assim temos que as taxas de variação de maior interesse para nós são do tipo:

$$\text{taxa} = \frac{\Delta \text{ quantidade ``a''}}{\Delta \text{ tempo}} \tag{2}$$

Uma taxa pode ser:

- **Positiva** ou **Negativa**: uma quantidade está aumentando ou diminuindo em relação à outra;
- **Constante** ou **Variável**: a taxa permanece, ou não, constante durante o tempo.

[1] Obviamente a palavra "graficar" não existe em português mas estou usando esse neologismo para substituir a palavra inglesa *graphing* que significa plotar ou desenhar um gráfico.

[2] Mesmo caso que a nota anterior.

Se, e apenas se, uma taxa for constante no tempo, podemos calcular a mudança total em uma quantidade em um período de tempo através da fórmula:

$$\text{Mudança total em uma quantidade} = \text{Taxa} \times \text{Tempo} \tag{3}$$

3.4 O processo de modelagem

Toda vez que precisarmos resolver um problema tentando "descrever" o que está ocorrendo e "predizer" o que pode ocorrer, estamos envolvidos em algum processo de modelagem.

Na modelagem nos focamos em algumas características mais importantes, descartando as menos importantes, e tentamos descrever matematicamente o fenômeno observado através dessas características escolhidas.

4 Impondo um sistema de coordenadas

4.1 O que é um sistema de coordenadas?

Um sistema de coordenadas nos permite localizar pontos em um espaço (bi, tri ou multidimensional) usando números reais (dois, três ou mais números).

Em um plano nosso sistema de coordenadas será composto por 2 eixos perpendiculares entre si (horizontal, eixo-x, e vertical, eixo-y), que se cruzam em um ponto chamado de ORIGEM, $P_{origem} = (0, 0)$, dividindo o espaço bidimensional em 4 quadrantes.

4.2 Características de um sistema de coordenadas

Todo sistema de coordenadas tem que especificar:

- Origem
- Eixos
- Unidades (dos eixos)
- Escala (dos eixos)

A *escala* dos eixos deve ser indicada sempre que o comprimento de 1 unidade em um dos eixos for diferente do comprimento de 1 unidade no outro eixo, alterando assim o "aspect ratio" do gráfico.

$$\text{aspect ratio} = \frac{\text{comprimento de 1 unidade no eixo vertical}}{\text{comprimento de 1 unidade no eixo horizontal}} \tag{4}$$

4.3 A imposição de sistema de coordenadas é crítica na modelagem

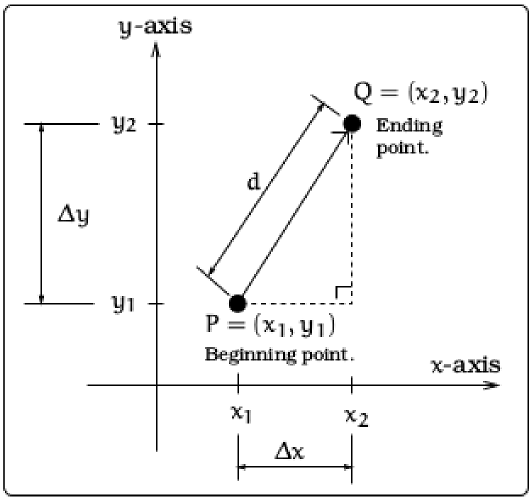
Na modelagem, que é sair de dados brutos e visualizações para obtermos as equações e fórmulas que descrevem um fenômeno, um passo crítico é a imposição de um sistema de coordenadas, da melhor forma possível, para facilitar o processo.

Vários sistemas de coordenadas, com origens em diversos locais, irão funcionar para a modelagem. O "pulo do gato" é escolher o sistema de coordenadas que irá ser mais natural ao processo e facilitar a obtenção das equações e fórmulas.

4.4 Distância no plano

Para saber a distância, no plano, entre um ponto $P = (x_1, y_1)$ e um ponto $Q = (x_2, y_2)$ podemos usar o Teorema de Pitágoras e calcular a Distância Euclidiana entre os pontos:

Figura 2: Distância no plano entre dois pontos



Fonte: Collingwood DH et al. Precalculus, pág. 18

Como os deltas podem ser negativos mas as distâncias são sempre positivas, usamos o valor absoluto dos deltas para o cálculo. Assim temos:

$$\begin{aligned} d^2 &= (|\Delta x|)^2 + (|\Delta y|)^2 \\ d^2 &= (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2 \\ d &= \sqrt{(|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Note também que:

- d é a distância no plano entre os pontos P e Q
- Δx é a distância direta no eixo x
- Δy é a distância direta no eixo y

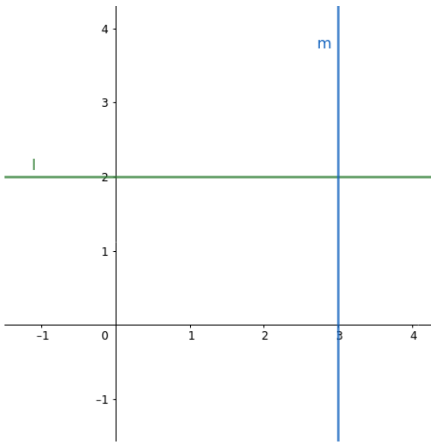
5 Três curvas simples

ATENÇÃO: em matemática, uma "curva" refere-se a qualquer traçado em um sistema de coordenadas, mesmo que esse traçado seja uma reta! As três curvas simples que serão descritas nesta seção são: linhas horizontais, linhas verticais e os círculos.

5.1 As curvas mais simples: linhas horizontais e verticais

As curvas mais simples são as linhas retas horizontais e verticais. Veja a linha horizontal l e a linha vertical m, abaixo:

Figura 3: As curvas mais simples são as linhas horizontais e verticais



A linha horizontal l é descrita pela equação:

$$\begin{aligned} l &= \{(x, k) | x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}, k = \text{constante}\} \\ \therefore y &= k \end{aligned} \tag{6}$$

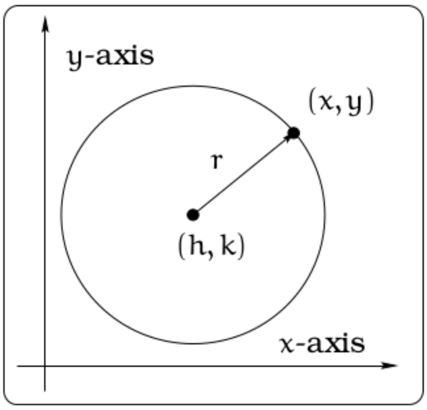
A linha vertical m é descrita pela equação:

$$\begin{aligned} m &= \{(h, y) | h \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, h = \text{constante}\} \\ \therefore x &= h \end{aligned} \tag{7}$$

5.2 Círculos

Um círculo no plano é uma curva se, e apenas se, a distância de todos os pontos (x, y) da curva à origem (h, k) for a mesma. Note que essa distância é o raio r do círculo.

Figura 4: A terceira curva simples é o círculo



Fonte: Collingwood DH et al. Precalculus, pág. 27

O círculo é definido por:

$$\text{Círculo} = \left\{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \forall x \forall y \; r^2 = (|\Delta x|)^2 + (|\Delta y|)^2\right\} \tag{8}$$

A distância de qualquer ponto (x, y), no círculo, à origem no ponto (h, k), é o raio r desse círculo e é dado por:

$$\begin{aligned} r^2 &= (|\Delta x|)^2 + (|\Delta y|)^2 \\ &= (|x-h|)^2 + (|y-k|)^2 \\ r &= \sqrt{(|x-h|)^2 + (|y-k|)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

Existe um caso especial que ocorre quando a origem do círculo estiver no ponto $(0, 0)$: nessa situação o cálculo do raio r simplifica-se por:

$$\begin{aligned} r^2 &= (|\Delta x|)^2 + (|\Delta y|)^2 \\ &= (|x-h|)^2 + (|y-k|)^2 \\ &= (|x-0|)^2 + (|y-0|)^2 \\ &= (|x|)^2 + (|y|)^2 \\ r &= \sqrt{(|x|)^2 + (|y|)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Um círculo de especial interesse matemático é o *Círculo Unitário*, que é aquele que tem origem em $(0, 0)$ e raio igual a 1 unidade:

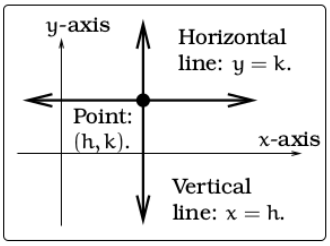
$$\text{Círculo Unitário} = \left\{(x,y)|x, y \in \mathbb{R}, \forall x \forall y \; r^2 = (|\Delta x|)^2 + (|\Delta y|)^2 = 1\right\} \tag{11}$$

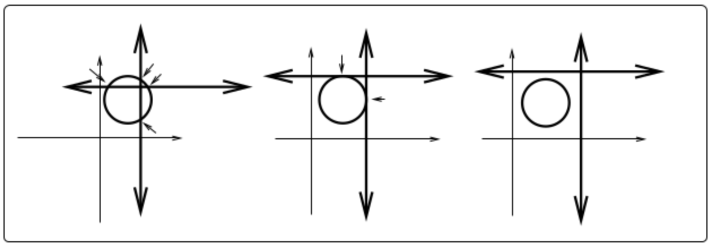
5.3 Cruzamento de curvas — I

Obviamente, curvas horizontais não se cruzam (da mesma forma que curvas verticais também não se cruzam).

Uma curva horizontal e uma curva vertical se cruzam apenas 1 única vez. Já curvas horizontais ou verticais podem cruzar ou não um círculo em diferentes situações: a) não cruzar o círculo; b) cruzar em apenas 1 ponto (a curva é uma tangente ao círculo) ou c) cruzar em 2 pontos (a curva é uma secante ao círculo).

Figura 5: Cruzamento de curvas





Fonte: Collingwood DH et al. Precalculus, pág. 29

O modo geral de se encontrar o ponto P onde as curvas de cruzam é resolver um sistema de equações, uma para cada curva, e simultaneamente resolver ambas as equações.

6 Modelagem linear

6.1 Relacionando linhas e equações

Já temos as equações para linhas horizontais e verticais. Relembrando, para linhas horizontais a equação é:

$$\begin{aligned} l &= \{(x,k) | x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}, k = \text{constante}\} \\ \therefore y &= k \end{aligned} \tag{12}$$

Para linhas verticais, a equação é:

$$\begin{aligned} m &= \{(h,y) | h \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, h = \text{constante}\} \\ \therefore x &= h \end{aligned} \tag{13}$$

O problema é: qual a equação para *linhas INCLINADAS não verticais*? A equação desse tipo de linha é uma das mais importantes na matemática pois é a base para muitas outras coisas. Lembre-se de que 2 pontos diferentes completamente determinam uma linha reta.

6.2 Linhas não verticais

A primeira coisa a determinar quando estamos tratando de uma linha não vertical, é seu ***slope*** (sua inclinação), comumente representado pela letra m. Por exemplo, dados os pontos $P1 = (x_1, y_1)$ e $P2 = (x_2, y_2)$, o slope é:

$$\begin{aligned} \text{Slope} = m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \tag{14}$$

O slope pode assumir diferentes valores:

- Positivo: y aumenta a medida que x aumenta;
- Negativo: y diminui a medida que x aumenta;
- Zero: y permanece o mesmo a medida que x aumenta (linha horizontal)

Note que linhas verticais ($x = h$), por definição, não têm slope definido na matemática pois $\Delta x = 0$ e $m = \frac{\Delta y}{0}$, que não é definido.

A partir do *slope* e da informação sobre um ou mais pontos, podemos determinar a equação para linhas não verticais de 3 modos diferentes! Considere que:

- $\boldsymbol{P = (x, y)}$ é um ponto arbitrário qualquer na linha (não sabemos o valor de x ou y);

- $\boldsymbol{Q = (x_0, y_0)}$ é um ponto conhecido, ou seja, sabemos o valor de x (x_0) e o valor de y (y_0);

- $\boldsymbol{R = (x_1, y_2)}$ é outro ponto conhecido, ou seja, sabemos o valor de x (x_1) e o valor de y (y_1); e

- $\boldsymbol{m}$ é o slope da linha.

Se soubermos o valor de m e de algum ponto $Q = (x_0, y_0)$, podemos definir a **Equação POINT-SLOPE** da linha para qualquer ponto desconhecido $P = (x, y)$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ m &= \frac{y - y_0}{x - x_0} \\ m(x - x_0) &= y - y_0 \\ y - y_0 &= m(x - x_0) \\ \therefore \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= m(x - x_0) + y_0} \end{aligned} \tag{15}$$

Se soubermos o valor de dois pontos, $Q = (x_0, y_0)$ e $R = (x_1, y_1)$, podemos definir a **Equação TWO-POINT** da linha para qualquer ponto desconhecido $P = (x, y)$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ m &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &\therefore \\ y - y_0 &= \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) \\ \therefore \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + y_0} \end{aligned} \tag{16}$$

Se soubermos o valor de m e de algum ponto $Q = (x_0, y_0)$, e se essa linha cruzar o eixo-y nesse ponto (portanto $x_0 = 0$ e $y_0 =$ intercepto-y), podemos definir a **Equação SLOPE-INTERCEPT** da linha para qualquer ponto desconhecido $P = (x, y)$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ m &= \frac{y - y_0}{x - x_0} \\ m &= \frac{y - y_0}{x - 0} \\ m &= \frac{y - y_0}{x} \\ m(x) &= y - y_0 \\ y - y_0 &= mx \\ \therefore \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{mx + y_0} \end{aligned} \tag{17}$$

Em resumo, até agora, já vimos 3 equações para linhas não verticais:

- **Equação POINT-SLOPE**: define a linha com m e um ponto conhecido:

  $y = m(x - x_0) + y_0$

- **Equação TWO-POINT**: define a linha com 2 pontos:

  $y = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + y_0$

- **Equação SLOPE-INTERCEPT**: define a linha com m e intercepto-y:

  $y = mx + y_0$

6.3 Linhas em geral

Além das 3 equações anteriores para linhas não verticais, qualquer linha no plano pode ser obtida através da **Equação LINEAR GERAL** (sendo A, B e C constantes)[3]:

$$Ax + By + C = 0 \tag{18}$$

Essa equação linear geral no plano pode ser derivada, a partir de 2 pontos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
&\therefore \\
y - y_0 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
(y - y_0)(x_1 - x_0) &= (y_1 - y_0)(x - x_0) \\
x_1y - x_0y - x_1y_0 + x_0y_0 &= xy_1 - x_0y_1 - xy_0 + x_0y_0 \\
x_1y - x_0y - x_1y_0 + \cancel{x_0y_0} &= xy_1 - x_0y_1 - xy_0 + \cancel{x_0y_0} \\
xy_1 - x_0y_1 - xy_0 &= x_1y - x_0y - x_1y_0 \\
xy_1 - x_0y_1 - xy_0 - x_1y + x_0y + x_1y_0 &= 0 \\
xy_1 - xy_0 + x_0y - x_1y + x_1y_0 - x_0y_1 &= 0 \\
&\therefore \\
\boldsymbol{(y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y + (x_1y_0 - x_0y_1)} &\boldsymbol{= 0}
\end{aligned} \tag{19}$$

A equação linear geral pode ser utilizada para definir uma linha vertical, ao contrário das outras equações que já vimos. Por exemplo: $-4x + 0y + 12 = 0$ define uma linha vertical com $x = 3$.

Propriedades da equação linear geral:

- Slope: $-\frac{A}{B}$
- Intercepto-y: $-\frac{C}{B}$
- Intercepto-x: $-\frac{C}{A}$
- Se $B = 0$, linha é vertical e slope não é definido (intercepto-y também não faz sentido)
- Se $B \neq 0$, linha não é vertical

[3] A equação linear geral serve para linhas em mais de dois planos, por exemplo: em um sistema de coordenadas tri-dimensional, a equação linear geral é $Ax + By + Cz + D = 0$, com A, B, C e D constantes.

As propriedades da equação linear geral listadas acima podem ser derivadas através de simples manipulações algébricas:

$$\begin{aligned}
Ax + By + C &= 0 \\
By &= -Ax - C \\
y &= \frac{-Ax - C}{B} \\
\boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}} \\
&\therefore \\
\text{slope} &= -\frac{A}{B} \\
\text{intercepto-y} &= -\frac{C}{B} \\
\text{intercepto-x} &= -\frac{C}{A}
\end{aligned} \tag{20}$$

6.4 Linhas e taxas de variação

Já deve estar bem claro que, para linhas não verticais, o slope da linha corresponde à taxa de variação de y em relação à x, sendo essa taxa constante.

Se x for uma medida de tempo, o slope fornecerá uma taxa muito comum e importante: a *velocidade*:

$$\text{velocidade} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta \text{tempo}} \tag{21}$$

Assim, a equação para a localização de um objeto que se move a uma velocidade constante (m = velocidade; x = tempo; y_0 = posição inicial), é dada por:

$$\begin{aligned}
y &= mx + y_0 \\
y &= vt + y_0
\end{aligned} \tag{22}$$

6.5 O que é necessário para construir um modelo linear?

Conforme percebemos por todas as equações das linhas que estudamos até agora, para se definir um modelo, uma equação linear, sempre precisamos de DUAS INFORMAÇÕES:

- Um ponto e um slope; ou
- Dois pontos; ou
- Um slope e um intercepto-y.

6.6 Linhas paralelas e perpendiculares

Duas linhas não verticias podem se cruzar em diversos ângulos, mas 2 situações são especiais.

O primeiro caso é quando duas linhas, 1 e 2, são paralelas. Nessa situação, o slope das linhas será igual:

$$\text{Linhas Paralelas} \equiv m_1 = m_2 \tag{23}$$

O segundo caso é quando duas linhas, 1 e 2, são perpendiculares. Nessa situação o slope de uma será o inverso negativo da outra:

$$\begin{aligned} \text{Linhas Perpendiculares} \equiv m_1 &= -\frac{1}{m_2} \\ m_1 m_2 &= -1 \end{aligned} \tag{24}$$

6.7 Cruzamento de curvas — II

Já vimos que para resolver problemas que envolvem o cruzamento de linhas ou de linhas com curvas (círculos, por exemplo), temos que trabalhar com um sistema de equações com as variáveis x e y.

Frequentemente a fórmula quadrática ($ax^2 + bx + c = 0$) será necessária. A solução da fórmula quadrática é dada por:

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - (4ac)}}{2a} \tag{25}$$

As duas raízes encontradas, x' e x'', indicam em que valores no eixo-x a curva do círculo se cruza com esse eixo.

6.8 Movimento linear uniforme

Quando um objeto se move ao longo de uma linha em um plano a uma velocidade constante, dizemos que ele está em *movimento linear uniforme*.

Nessa situação, se conhecermos a localização do objeto em 2 pontos no tempo, podemos substituir a equação linear que envolve 2 variáveis (x e y) por um sistema de equações que envolve somente 1 variável (t = tempo). Esse sistema de equações é dado por:

$$\begin{aligned} x &= a + bt \\ y &= c + dt \end{aligned} \tag{26}$$

Esse sistema de equações é chamado de *Equações Paramétricas do Movimento* e só depende do parâmetro t (tempo), com A, B, C e D constantes.

7 Funções e gráficos

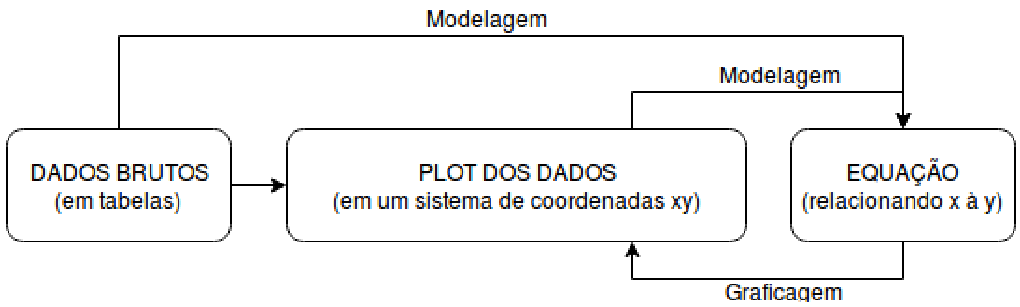
7.1 Relacionando dados, plots (traçados) e equações

Existem 3 maneiras de descrevermos o relacionamento entre uma variável y à outra variável x:

- Uma tabela
- Um gráfico
- Uma equação

A partir da tabela de dados podemos plotar um gráfico em um sistema de coordenadas e, a partir desse gráfico (ou desses dados), podemos realizar uma *modelagem* para obtermos uma *equação* que relacione y à x:

Figura 6: Relação entre dados, plots e equações

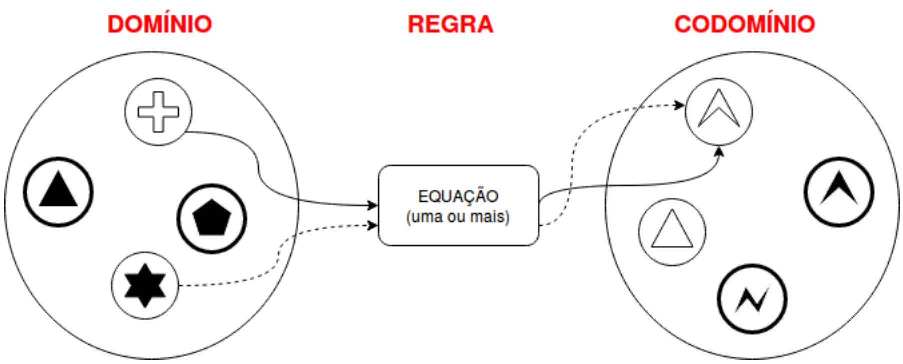


Obviamente a equação é muito mais poderosa do que somente a tabela de dados, pois ela nos mostra exatamente como y varia *em função* de x. Agora temos um outro conceito importante, o conceito de FUNÇÃO!

7.2 O que é uma função?

Uma função é uma *regra* (equação) que nos informa como relacionar cada elemento de um conjunto de inputs aceitáveis (*domínio*, D) a um, e somente um, elemento de um conjunto de outputs (*codomínio* ou *range* R).

Figura 7: Esquema de uma função



Note que cada elemento do domínio deve estar relacionado a um, e apenas um, elemento do range, mas o mesmo elemento do range pode estar relacionado a mais de um elemento do domínio. Se um elemento do domínio estiver relacionado a mais de um elemento do codomínio, a regra em questão não é uma função!

Uma função sempre tem 3 partes:

- **DOMÍNIO**: é o conjunto de inputs aceitáveis:

  $D = \{x \mid x \text{ é aceitável}\}$

- **REGRA**: é a regra (geralmente na forma de uma ou mais equações) que informa como relacionar os elementos do domínio aos elementos do range. As regras são identificadas por letras (f, g, h, ...):

  $f(x) = \text{equação}$

- **RANGE ou CODOMÍNIO**: é o conjunto de outputs:

  $R = \{f(x) \mid f(x) \text{ é único para cada } x\}$

Note a diferença na notação:

- $f(x)$: refere-se à *regra* da função;
- $y = f(x)$: refere-se à função em si, ou seja, estamos dizendo que y varia em função de x através da regra f.

A *especificação completa* de uma função é dada pela regra e pelo domínio aceitável:

$$y = f(x) = ax + b \quad \mid D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \tag{27}$$

Dependendo do domínio aceitável, uma mesma regra pode definir funções diferentes. Nesse caso, usamos letras diferentes:

$$\begin{aligned} y = f(x) = ax + b \quad &\mid D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \\ y = g(x) = ax + b \quad &\mid D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \end{aligned} \tag{28}$$

Ainda em relação ao domínio de uma função, ele pode ser:

- Toda linha numérica
- Um intervalo da linha numérica, incluindo ou não os pontos extremos desse intervalo: $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b)
- Um conjunto finito de intervalos da linha linha numérica (também incluindo ou não os pontos extremos desses intervalos)

7.3 Gráfico de uma função

Já vimos que para especificarmos uma função $y = f(x)$, além da regra f temos que especificar o domínio D. Ao especificarmos a regra e o domínio, o gráfico de uma função será o conjunto de pontos $(x, f(x))$ para todo $x \in D$.

7.4 O teste da linha vertical

Ao analisarmos o gráfico de alguma curva, podemos dizer facilmente se essa curva é, ou não, o gráfico de uma função.

Já que uma função produz um, e apenas um, output para cada input, se uma linha vertical (perpendicular) ao eixo-x cruzar a curva em 2 ou mais pontos, essa curva NÃO é uma função (pois isso implica em dizer que há mais de um codomínio para cada elemento do domínio).

7.5 Funções lineares

A equação da linha reta não vertical, que já conhecemos, é, na verdade, uma função: $y = f(x) = mx + b$.

Um dos principais conteúdos do pré-cálculo é o estudo de diversas funções pois as funções são fundamentais no cálculo.

8 Análise gráfica

8.1 Análise visual de um gráfico

Ao realizar a análise de um gráfico de uma função, temos que procurar pelas suas 6 características qualitativas básicas:

1. **Domínio** e **Range**: qual o domínio e o range da função?

2. **Sign Plot**: em quais segmentos $y = f(x)$ é positiva ou negativa?

3. **Dinâmica Visual**: como $f(x)$ varia em função de x? Em que segmentos $f(x)$ aumenta, diminui ou permanece constante em relação à x?

4. **Y-intercepto**: em que valor de x a função cruza o eixo-y? Note que, uma função, só cruza o eixo-y em no máximo 1 único local. Assim, uma função pode não ter intercepto-y, ou pode ter apenas 1 único intercepto-y.

5. **X-intercepto**: em que locais a curva da função cruza o eixo-y? Note que uma função pode não cruzar o eixo-x, ou cruzá-lo em 1 ou vários pontos. Cada ponto onde a curva cruza o eixe-x são os "zeros" ou "raízes" da função $y = f(x)$.

6. **Máximos** e **Mínimos "locais"**: são os pontos onde a função "pára" na curva (no topo de um morro ou no fundo de uma depressão).

8.2 Círculos e semi-círculos

Já sabemos que um círculo é uma curva onde a distância de qualquer ponto (x, y) à origem (h, k) é a mesma, ou seja, é r (o raio):

$$\text{Círculo} = \Big\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, \forall x \forall y\; r^2 = (|\Delta x|)^2 + (|\Delta y|)^2 = \text{constante}\Big\} \tag{29}$$

Na equação do círculo, $\Delta x = x - h$ e $\Delta y = y - k$. Note que a equação do círculo não é uma função, pois para cada valor de x existem 2 valores $f(x)$. Mas podemos obter 2 funções correspondentes aos semi-círculos: superior e inferior!

$$\begin{aligned} r^2 &= (|\Delta x|)^2 + (|\Delta y|)^2 \\ r^2 &= (x-h)^2 + (y-k)^2 \\ (y-k)^2 &= r^2 - (x-h)^2 \\ y - k &= \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= k \pm \sqrt{r^2 - (x-h)^2}} \end{aligned} \tag{30}$$

As equações das funções que representam cada semi-círculo são, então:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= k + \sqrt{r^2 - (x-h)^2} \\ y = g(x) &= k - \sqrt{r^2 - (x-h)^2} \end{aligned} \tag{31}$$

8.3 Funções com múltiplas partes

Uma função $y = f(x)$ será uma função com múltiplas partes quando, em seu domínio, existirem mais de uma regra $f(x)$:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x < -1 \\ 1 + \sqrt{1 - x^2} & se\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & se\ x > 1 \end{cases} \tag{32}$$

ATENÇÃO: em uma função com múltiplas partes temos que tera certeza de que essas múltiplas partes, quando tomadas em conjunto, realmente formam um função, ou seja, se realmente só haverá um único elemento no range para cada elemento do domínio.

9 Modelagem quadrática

9.1 Parábolas e Vértice