UNIDADE 1 - Integrais

1.1 – INTEGRAIS INDEFINIDAS

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

Os dois mais importantes instrumentos do Cálculo são a derivada e a integral. A derivada foi motivada por problemas de determinação do coeficiente angular de uma tangente e de definição de velocidade. A integral definida surge quando consideramos o problema da determinação da área de uma região do plano xy. Mas essa é uma das muitas aplicações da integral definida.

Os conceitos de antiderivada ou integral indefinida podem ser encarados como o inverso da determinação da derivada de uma função. Logo, existe uma relação entre a derivada e a integral de uma função.

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

Anteriormente queríamos encontrar a derivada de uma dada f(x).

Então, dada $f(x)=x^2$, obtemos $f'(x)=g(x)=2x$

O problema aqui é o caminho inverso: dada uma função g(x), obtenha uma função f(x) tal que $f'(x)=g(x)$

Esse procedimento é chamado **integração**.

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

derivação

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x = g(x)$$

$$g(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C$$

integração

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

Por que $f(x)=x^2+C$

Observe: $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$

$f(x)=x^2+3 \Rightarrow f'(x)=2x$

$f(x)=x^2-5 \Rightarrow f'(x)=2x$

Logo, $f(x)=x^2$ é uma solução para o problema proposto, mas não é a única.

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

Chama-se integral indefinida de g(x) o valor de uma primitiva qualquer de g(x) adicionada a

$$\int g(x)\,dx = f(x) + C$$

Ex.: $\int 2x\,dx = x^2 + C$

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

Então, se a integração é a volta da derivação…

a) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n$

b) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(\ln x + C\right) = \frac{1}{x}$

c) $\int \cos x \, dx = sen\, x + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(sen\, x + C\right) = \cos x$

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

d) $\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(-\cos x + C\right) = sen\,x$

e) $\int sec^2 x\,dx = tg\,x + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(tg\,x + C\right) = sec^2 x$

f) $\int cosec^2 x\,dx = -cotg\,x + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(-cotg\,x + C\right) = cosec^2 x$

g) $\int sec\,x\,tg\,x\,dx = sec\,x + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(sec\,x + C\right) = sec\,x\,.\,tg\,x$

h) $\int cosec\,x\,cotg\,x\,dx = -cosec\,x + C$ porque

$$\frac{d}{dx}\left(-cosec\,x + C\right) = cosec\,x\,.\,cotg\,x$$

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

i) $\int e^x dx = e^x + C$ porque $\frac{d}{dx}\left(e^x + C\right) = e^x$

j) $\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ ¿

k) $\int c.f(x)\, dx = c.\int f(x)\, dx$

EXEMPLOS

1 – Integre:

a) $\int x^2 - 2x + 5\, dx =$

b) $\int \frac{x^3 - x + 8}{x^2}\, dx =$

c) $\int (x + \cos x)\, dx =$

d) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\, dx =$

ANTI-DERIVADA OU PRIMITIVA

É possível ainda encontrar uma primitiva específica, se for dada uma condição inicial.

Por exemplo:

2 – Encontre a primitiva da função $f'(x) = x^2 - 2x + 1$, que satisfaz à condição $f(0) = -3$

EXEMPLO

3 – Determine a curva cujo coeficiente angular no ponto (x, y) é $3x^2$ sabendo que ela passa pelo ponto $P(1,-1)$

4 – Suponha que a velocidade de um corpo seja $v=9{,}8t-3$, determine a função deslocamento (s), sabendo que s = 5 quando t=0

5 – Um balão que sobe à taxa de 12 pés/s está a uma altura de 80 pés acima do solo quando um pacote cai. Sabendo que a aceleração da gravidade é 32 pés/s^2, e que nenhuma outra força atue sobre o pacote, calcule a função velocidade e a função altura do pacote.