Álgebra Linear I - Aula 14

1. Matrizes.
2. Forma matricial de uma transformação linear.
3. Composição de transformações lineares e produto de matrizes.
4. Determinante do produto de matrizes.

Roteiro

1 Matrizes

Uma matriz $n \times m$ (onde n representa o número de linhas e m o número de colunas) M é definida como segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Dizemos que $(a_{j,1}, a_{j,2}, a_{j,m})$ é a j-ésima linha de A e que $(a_{1,j}, a_{2,j}, a_{n,j})$ é a j-ésima coluna de A. Quando $n = m$, dizemos que a matriz é quadrada.

Dadas duas matrizes A e B das mesmas dimensões $n \times m$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,m} \end{pmatrix},$$

definimos a *soma* e a *substração* de matrizes $S = A + B$ e $D = A - B$, como segue,

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,m} + b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \dots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix},$$

e

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & \dots & a_{1,m} - b_{1,m} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & \dots & a_{2,m} - b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} - b_{n,1} & a_{n,2} - b_{n,2} & \dots & a_{n,m} - b_{n,m} \end{pmatrix},$$

isto é, S e D são matrizes das mesmas dimenões $n \times m$ que A e B, onde os coefientes $s_{i,j}$ e $d_{i,j}$ das matrizes soma S e substração D são:

$$s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad d_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}.$$

A multiplicação da matriz A pelo escalar λ é a matriz E, $n \times m$, cujos coeficientes são

$$e_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}.$$

Finalmente, dadas matrizes A, $n \times m$, e B, $r \times k$, o produto $P = A\,B$ está definido quando $r = m$ e é uma matriz $n \times k$, o coeficiente $p_{i,j}$ da matriz produto é dado por

$$p_{i,j} = a_{i,1}\, b_{1,j} + a_{i,2}\, b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}\, b_{m,j}.$$

Mais tarde veremos como o produto de duas matrizes aparece de forma natural: a regra de multiplicação ficará clara quando estudemos a composição de transformações lineares.

V. pode interpretar os coeficientes da matriz produto como segue. Escreva

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix},$$

onde cada ℓ_i é um vetor *linha* de $\mathbb{R}^m$ da forma

$$\ell_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m}).$$

Analogamente, escreva

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_k \end{pmatrix}$$

cada c_j é um vetor *coluna* de $\mathbb{R}^m$ da forma

$$c_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{m,j} \end{pmatrix}.$$

Então, $p_{i,j}$ é obtido como o produto escalar dos vetores ℓ_i e c_j,

$$p_{i,j} = \ell_i \cdot c_j.$$

Observe que o produto $A\,B$ de duas matrizes pode estar definido e o produto $B\,A$ pode não esta-lo. Por exemplo, se a matriz A é 3×2 e B é 2×1. Neste caso $A\,B$ é uma matriz 3×1 e não é possível fazer o produto $B\,A$.

Também pode acontecer que os dois produtos estejam definidos e os resultados dos produtos serem matrizes de dimensões diferentes. Por exemplo, se A é 3×2 e B é 2×3, temos que $A\,B$ está definido e é uma matriz 3×3, e $A\,B$ também está definido e é uma matriz 2×2. Portanto, o produto de matrizes não é (em geral) comutativo: mesmo quando as matrizes $A\,B$ e $B\,A$ têm as mesmas dimensões. Um exemplo desta situação é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os dois produtos estão definidos, porém

$$A\,B \neq B\,A.$$

2 Forma matricial de uma transformação linear

Lembramos que se T e L são transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são da forma:

$$\begin{aligned}
&T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\\
&\qquad T(x,y,z) = (a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z, b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z, c_1\,x + c_2\,y + c_3\,z),\\
&L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\\
&\qquad L(x,y) = (a_1\,x + a_2\,y, b_1\,x + b_2\,y).
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (a_1, b_1, c_1),\\
T(0,1,0) &= (a_2, b_2, c_2),\\
T(0,0,1) &= (a_3, b_3, c_3),\\
L(1,0) &= (a_1, b_1),\\
L(0,1) &= (a_2, b_2).
\end{aligned}$$

As transformações lineares T e L têm as seguintes representações matriciais (representando os vetores na sua forma coluna):

$$[T]\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \quad [L]\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$$

Isto significa que se escrevemos um vetor v na forma coluna $[v]$ e fazemos o produto das matrizes $[T]\,[v]$ obtemos como resultado o vetor $T(v)$ na forma coluna: seja $v = (x,y,z)$, então

$$[v] = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

e

$$[T]\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z\\ b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z\\ c_1\,x + c_2\,y + c_3\,z\end{pmatrix}.$$

Pelos comentários já feitos temos a seguinte interpretação das colunas da matriz $[T]$.

- A primeira coluna é a imagem de $T(1,0,0)$,
- a segunda coluna é a imagem de $T(0,1,0)$,
- a última coluna é a imagem de $T(0,0,1)$.

Comentários análogos podem ser feitos para a matriz $[L]$.

Exemplos 1.

- *As transformações lineares identidade e nula têm como matrizes associadas as matrizes identidade (diagonal igual a* 1 *e todos os outros coeficientes nulos) e a matriz nula (todos os coeficientes são zero).*

- *As matrizes das transformaçõeso lineares de cisalhamento horizontal* $H(x,y) = (x, \alpha x + y)$ *e vertical* $V(x,y) = (x + \alpha y, y)$ *são*

$$[H] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad [V] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Lembrando que a projeção ortogonal no vetor unitário* (a,b,c) *de* $\mathbb{R}^3$ *é da forma*

$$P(x,y,z) = (a^2x + aby + acz, abx + b^2y + bcz, acx + bcy + c^2z).$$

temos

$$[P] = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

- *Lembrando a fórmula das reflexões* R *e* S *(em* $\mathbb{R}^2$*) em torno dos eixos* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *e* T *em torno da origem*

$$R(x,y) = (x, -y), \quad S(x,y) = (-x, y), \quad T(x,y) = (-x, -y),$$

(veja a última aula) temos

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [T] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *Lembrando a expressão da rotação de ângulo θ no sentido anti-horário*

$$R_\theta(x,y) = ((\cos\theta)\,x - (sen\theta)\,y, (\cos\theta\,)y + (sen\theta)\,x),$$

temos

$$[R_\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- *Consideremos agora a de projeção T na reta $ax+by=0$ segundo a direção do vetor $v=(c,d)$. Pelos resultados da aula anterior,*

$$T(x,y) = \left(x - \frac{ax+by}{ac+bd}\,c, y - \frac{ax+by)}{ac+bd}\,d\right).$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{ac}{ac+bd} & -\dfrac{bc}{ac+bd} \\ -\dfrac{ad}{ac+bd} & 1 - \dfrac{bd}{ac+bd} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1. *Determine a matriz da transformação linear*

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(u) = u \times v,$$

onde $v=(1,1,1)$.

Resposta: Para isto determinaremos a forma geral de T. Observe que

$$T(x,y,z) = (x,y,z)\times(1,1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z, z-x, x-y).$$

Portanto,

$$T(1,0,0) = (0,-1,1), \quad T(0,1,0) = (1,0,-1), \quad T(0,0,1) = (-1,1,0).$$

Finalmente, obtemos

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 2. *Determinar a matriz da transformação linear*

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(u) = (u \cdot v)\, w,$$

onde $v = (1,1,1)$ *e* $w = (1,2,3)$.

Resposta: Calcularemos as imagens dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= ((1,0,0)\cdot(1,1,1))\,(1,2,3) = (1,2,3),\\ T(0,1,0) &= ((0,1,0)\cdot(1,1,1))\,(1,2,3) = (1,2,3),\\ T(0,0,1) &= ((0,0,1)\cdot(1,1,1))\,(1,2,3) = (1,2,3). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Analogamente, dada uma matriz $[T]$ temos uma transformação linear T associada a dita matriz. Dada a matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

sua transformação linear associada é

$$T(x,y,z) = (a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z, b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z, c_1\,x + c_2\,y + c_3\,z).$$

Ou de outra forma, escrevendo os vetores em froma coluna,

$$[T]\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}.$$

3 Composição de transformações lineares. Produto de matrizes

Considere duas transformações lineares T e L,

$$T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \quad L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell.$$

Se ℓ é igual a m temos que dado um vetor u de $\mathbb{R}^n$ sua imagem $L(u)$ está em $\mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^m$, que é o domínio de T, portanto podemos aplicar T a $L(u)$, obtendo $T(L(u))$. Neste caso podemos definir a composição $T \circ L$ como

$$T \circ L(u) = T(L(u)).$$

Analogamente, se k é igual a n, dado qualquer vetor v de $\mathbb{R}^m$ sua imagem $T(v)$ está em $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$, que é o domínio de L, portanto podemos aplicar L a $T(v)$, obtendo $L(T(v))$. Neste caso podemos definir a composição $L \circ T$.

Dadas duas transformações lineares

$$T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \quad L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

a composição $T \circ L$

$$T \circ L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,$$

é uma nova transformação linear:

- $T \circ L(u+v) = T(L(u+v)) = T(L(u)+L(v)) = T(L(u)) + T(L(v)) = T \circ L(u) + T \circ L(v)$,
- $T \circ L(\sigma u) = T(L(\sigma u)) = T(\sigma L(u)) = \sigma T(L(u)) = \sigma(T \circ L(u))$.

Observação 1. *Como no caso do produto de matrizes, a composição de transformações lineares* **não é comutativa**. *Em alguns casos a composição $T \circ L$ pode estar definida e não esta-lo a composição $L \circ T$. Mesmo quando as duas composições estão definidas pode acontecer que $T \circ L \neq L \circ T$. Por exemplo, considere os cisalhamentos*

$$T(x,y) = (x + \alpha\, y, y), \quad e \quad L(x,y) = (x, \beta\, x + y).$$

Então

$$L \circ T(x,y) = L((x + \alpha\, y, y)) = (x + \alpha\, y, y + \beta\, \alpha\, y + \beta\, x),$$

e

$$T \circ L(x,y) = T((x, \beta\, x + y)) = (x + \alpha\, y + \alpha\, \beta\, x, y + \beta x),$$

que obviamente são (em geral) diferentes. Dê v. mesmo outros exemplos.

A seguir calcularemos a matriz associada à composição de duas transformações lineares. Por simplicidade, faremos os cálculos em $\mathbb{R}^2$, os cálculos em $\mathbb{R}^3$ são idênticos.

Sejam T e L transformações lineares cujas matrizes são

$$[T] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad [L] = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar a matriz de $L \circ T$ é suficiente calcular $L \circ T(1,0)$ e $L \circ T(0,1)$, que serão as colunas da nova matriz.

$$\begin{aligned} L \circ T(1,0) \quad &= L((a_1, b_1)) = a_1\, L(1,0) + b_1\, L(0,1) = \\ &= a_1\,(c_1, d_1) + b_1\,(c_2, d_2) = \\ &= (a_1\, c_1 + b_1\, c_2, a_1\, d_1 + b_1\, d_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L \circ T\,(0,1) \quad &= L((a_2, b_2)) = a_2\, L(1,0) + b_2\, L(0,1) = \\ &= a_2\,(c_1, d_1) + b_2\,(c_2, d_2) = \\ &= (a_2\, c_1 + b_2\, c_2, a_2\, d_1 + b_2\, d_2). \end{aligned}$$

Obtendo a nova matriz:

$$[L \circ T] = \begin{pmatrix} c_1\, a_1 + c_2\, b_1 & c_1\, a_2 + c_2\, b_2 \\ d_1\, a_1 + d_2\, b_1 & d_1\, a_2 + d_2\, b_2. \end{pmatrix}.$$

Finalmente, observamos que os cálculos feitos para calcular o produto de duas matrizes fornece a seguinte regra geral. Considere os vetores $c = (c_1, c_2)$ e $d = (d_1, d_2)$ que determinam as linhas de $[L]$, e os vetores $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$ que determinam as colunas de $[T]$. Temos a seguinte expressão:

$$[L][T] = \begin{pmatrix} c \cdot u & c \cdot v \\ d \cdot u & d \cdot v \end{pmatrix}.$$

4 Determinante do produto de duas matrizes

Considere as matrizes triangulares

$$[A] \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [B] \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Denote por $\det[M]$ o determinante de uma matriz quadrada (mesmo número de linhas que de colunas). Observe que

$$\det[A] = a\, c \quad \det[B] = d\, f.$$

Observe que

$$[AB] = [A][B] = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

e que

$$\det[AB] = (a\,d)\,(c\,f) = \det[A]\ \det[B].$$

Neste caso temos que *o determinante da matriz produto é o produto dos determinantes.*

De fato, sempre, o produto de duas matrizes é o produto dos determinantes das duas matrizes. Uma justificativa é a seguinte: reduzindo à forma escalonada, o determinante não muda, assim a afirmação decorre da afirmação sobre o produto de matrizes triangulares.