$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Aula 21}}$

1. Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis: exemplos
2. Matrizes simétricas.

Roteiro

1 Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis: exemplos

Exemplo 1. *Considere a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 2 é um autovalor de M, encontre uma matriz ortogonal P que diagonalize a matriz. Isto é, devemos encontrar uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tais que $M = P\,D\,P^t$ onde P é ortogonal.

Prova: Observe que os vetores coluna de P são autovetores de M. Como P é ortogonal, as colunas de P devem formar uma base ortonormal de autovetores de M.

Determinaremos em primeiro lugar os autovetores associados a 2. Devemos resolver o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 & 2 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 2 & 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos que os autovetores $v = (x, y, z)$ associados a dois verificam

$$x + y + z = 0.$$

Portanto, é possivel obter dois autovetores linearmente independentes associados a 2. Assim, a multiplicidade de 2 é 2 ou 3. Mas o último caso pode ser eliminado, se a multiplicidade for 3 então o traço de M seria $2+2+2=6 \neq 4+4+4=12$. Logo o autovalor 2 tem multiplicidade 2.

Usando o traço da matriz M temos que o outro autovalor σ de M verifica

$$2+2+\sigma = 4+4+4, \quad \sigma = 8.$$

Para determinar os autovetores associados a 4 devemos resolver o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 4-8 & 2 & 2 \\ 2 & 4-8 & 2 \\ 2 & 2 & 4-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos

$$2\,x - y - z = 0, \quad x - 2\,y + z = 0, \quad x + y - 2\,z = 0.$$

Isto é

$$x - 2\,y + z = 0, \quad x + y - 2\,z = 0, \quad 2\,x - y - z = 0.$$

Escalonando,

$$x - 2\,y + z = 0, \quad 3\,y - 3\,z = 0, \quad -3\,y + 3\,z = 0.$$

Assim um autovetor associado a 8 é $(1,1,1)$.

Uma base ortonormal de autovetores de M é

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$$

onde os vetores são autovetores associados a 4, 2 e 2.

A matriz de M na base β é

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$M = P\,D\,P^t, \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exemplo 2. *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Determine os autovalores de A.*

(b) *Determine uma base ortonormal de autovetores A.*

(c) *Determine uma forma diagonal D de A.*

(d) *Escreva A da forma $A = MDM^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.*

(e) *Escreva, caso exista, a matriz A^{-1} inversa de A da forma $A^{-1} = NEN^{-1}$, onde E é uma matriz diagonal. Determine explicitamente N e N^{-1}.*

Resposta: O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (6-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9)) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

Observe que o polinômio $(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$ tem raízes $\lambda = 4$ e $\lambda = -2$. Logo as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda = 6, 4, -2$. Observe que este resultado é coerente com o traço ser 8 e o determinante ser -48.

Uma base de autovetores é obtida da seguinte forma.
autovetores associados a 6: são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 0 & 3 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 3 & 0 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-5x + 3y = 0, \quad 3x - 5y = 0.$$

As soluções são da forma $(0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(0, 1, 0)$.

autovetores associados a 4: são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 3 \\ 0 & 6-4 & 0 \\ 3 & 0 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-3x + 3y = 0, \quad 3y = 0, \quad 3x - 3y = 0.$$

As soluções são da forma $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(1, 0, 1)$.

autovetores associados a -2: Como a matriz é simétrica, os autovetores associados a -2 devem ser ortogonais a $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. Logo um autovetor é $(1, 0, -1)$.

Portanto, uma base de autovetores é

$$\gamma = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}.$$

Esta base é ortogonal. Uma base ortonormal de autovetores é

$$\beta = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

Na base β a matriz de A é diagonal da forma

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Considerando agora uma base ortonormal de autovetores de A,

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\},$$

temos

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como M é ortogonal,

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M.$$

Como A tem determinante não nulo (o produto dos autovetores é diferente de zero) existe A^{-1}. Temos

$$A^{-1} = (MDM^{-1})^{-1} = MD^{-1}M^{-1} = MD^{-1}M.$$

Logo $N = N^{-1} = M$. Finalmente,

$$E = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3. *Considere a matriz*

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontre P ortogonal e D diagonaltais que $B = PDP^t$.

Resposta: Isto significa que P é uma matriz ortogonal cujos vetores são autovetores de B.

Calculando o polinômio característico e fazendo os cálculos temos que os autovalores de B são 2, 1 e -1.

Resolvendo sistemas lineares obtemos que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ é um autovetor associado a 2, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ é é um autovetor associado a -1, e $\vec{w} = (1, 1, -2)$ é um autovetor associado a 1. Também vemos que estes vetores são ortogonais. Normalizando obtemos uma base ortonormal de autovetores.

Portanto,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que como P é ortogonal P^{-1} é sua transposta.

2 Matrizes simétricas

Na seção precedente, vimos exemplos de transformações lineares diagonalizáveis onde o processo de diagonalização pode ser feito usando matrizes ortogonais. Chamaremos a este tipo de matrizes *ortogonalmente diagonalizáveis.*

A propriedade anterior (ser ortogonalmente diagonalizável) é equivalente a existência de uma base ortogonal de autovetores. Veja primeiro que se

$$M = PDP^{-1},$$

onde D é uma matriz diagonal, então as colunas de P são autovetores de M. De fato, se

$$P = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

temose que (a, b, c) é um autovetor associado a λ, (d, e, f) é um autovetor associado a σ, e (g, h, i) é um autovetor associado a ρ. Verificaremos está afirmação com o vetor (a, b, c), observe que como $P(\mathbf{i}) = (a, b, c)$ então se verifica $P^{-1}(a, b, c) = \mathbf{i}$. Também temos, $D(\mathbf{i}) = \lambda\, \mathbf{i}$. Portanto

$$PDP^{-1}(a, b, c) = PD(\mathbf{i}) = P(\lambda\, \mathbf{i}) = \lambda P(\mathbf{i}) = \lambda\, (a, b, c).$$

A seguir veremos novos exemplos desta situação.

Uma matriz M é dita *simétrica* se $M = M^t$.

Propriedade fundamental das matrizes simétricas: *Uma matriz M quadrada é simétrica se, e somemente se, possui uma base ortogonal de autovetores. Portanto, é ortogonalmente diagonalizável.*

Conseqüência: *As matrizes das projeções ortogonais e de espelhamentos na base canônica são matrizes simétricas. A propriedade também implica que matrizes de rotações não são matrizes simétricas.*

Veremos a propriedade fundamental anterior para matrizes 2×2. Dividiremos a prova em diferentes passos.

Propriedade 2.1. *Uma matriz simétrica possui autovalores reais e é diagonalizável.*

Prova: Considere a matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de M é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2),$$

e suas raízes são

$$\begin{aligned}\frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}}{2} &= \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2}}{2} = \\ &= \frac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.\end{aligned}$$

Como o radicando é positivo, o polinômio tem duas raízes reais.

Observe que, se as duas raízes são iguais, o radicando deve ser nulo, ou seja, necessariamente $b = 0$ a $a = c$. Neste caso, já temos que a matriz M é diagonal. No outro caso, existem dois autovalores distintos, portanto seus autovetores são linearmente independentes e M é diagonalizável. □

Propriedade 2.2. *Dados dois vetores $u = (x, y)$ e $v = (z, w)$ se verifica*

$$M(u) \cdot v = u \cdot M(v).$$

Prova: Temos,

$$M(u) = (ax + by, bx + cy) \quad \text{e} \quad M(v) = (az + bw, bz + cw).$$

Logo

$$\begin{aligned} M(u) \cdot v &= (ax + by, bx + cy) \cdot (z, w) = axz + byz + bxw + cyw, \\ M(v) \cdot u &= (az + bw, bz + cw) \cdot (x, y) = azx + bwx + bzy + cwy. \end{aligned}$$

O que implica nossa afirmação. □

Propriedade 2.3. *Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Prova: A propriedade decorre automaticamente da Propriedade 2.2. Suponha que

$$M(u) = \lambda\, u \quad \text{e} \quad M(v) = \sigma\, v,$$

onde u e v são vetores não nulos e $\sigma \neq \lambda$. Pela propriedade anterior,

$$\lambda\,(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = M(u) \cdot v = u \cdot M(v) = \sigma u \cdot v = \sigma\,(u \cdot v).$$

Como $\lambda \neq \sigma$ necessariamente temos $u \cdot v = 0$. □

Exemplo 4. *Considere a matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 2 é um autovalor de multiplicidade dois de M, encontre uma matriz ortogonal que diagonalize a matriz.

Prova: Usando o traço da matriz M temos que o outro autovalor σ de M verifica

$$2 + 2 + \sigma = 4 + 4 + 4, \quad \sigma = 8.$$

Um autovetor associado a 8 é $(1, 1, 1)$. Afirmamos que todo vetor não nulo de $x + y + z = 0$ é um autovetor associado a 2.

Para isto, observe que pelas propriedades já vistas, todo autovetor associado a 2 está em π (pois é ortogonal a $(1, 1, 1)$). Como M é diagonalizável existem dois autovetores l.i. associados a 2 (os dois em π). Logo estes autovetores geram π. E como os autovalores associados são iguais, $M(w) = 2w$ para todo vetor w de π.

Uma base ortonormal de autovetores de M é

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$$

A matriz de M na base β é

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$M = PDP^t, \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

□

2.1 Comentários e exemplos

Observe que o produto de matrizes ortogonais M e N é uma nova matriz ortogonal. Para ver isto, mais uma vez, não é necessário fazer cálculos, somente é necessário lembrar que uma transformação linear é ortogonal se, somente se, preserva o produto escalar (isto é, módulos e ângulos). Dados dois vetores u e v veja que

$$(MN)(u) \cdot (MN)(v) = M(N(u)) \cdot M(N(v)),$$

como M e N são ortogonais (preservam o produto escalar),

$$M(N(u)) \cdot M(N(v)) = N(u) \cdot N(v) = u \cdot v,$$

terminando a prova.

Por outra parte, o produto de duas matrizes simétricas não é necessariamente uma matriz simétrica. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

que não é simétrica.

V. pode conferir que o quadrado de uma matriz simétrica é simétrica. Observe que não é necessário fazer nenhum cálculo: ser A simétrica é equivalente a existir uma base de autovetores ortogonal. Observe que todo autovetor de A também é autovetor de A^2: se v é um autovetor de A associado a λ então v é um autovetor de A^2 associado a λ^2, pois

$$A^2(v) = A(A(v)) = A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v.$$

Portanto, a base ortogonal de autovetores de A também é uma base de autovetores de A^2, e A^2 é simétrica.

Observe A^2 pode ser simétrica e A não ser simétrica. Por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

não é simétrica, mas $A^2 = -Id$ é simétrica.