Álgebra Linear I - Aula 4

1. Projeção ortugonal de vetores.
2. Determinantes (revisão). Significado geométrico.
3. Cálculo de determinantes.

Roteiro

1 Projeção ortogonal em um vetor

Dado um vetor não nulo $\bar{u}$, a *projeção ortogonal* do vetor $\bar{v}$ no vetor $\bar{u}$ é um novo vetor (paralelo ao vetor $\bar{v}$) definido como:

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{v}) = \left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u} \cdot \bar{u}}\right) \bar{u}.$$

Interpretação geométrica da projeção ortogonal: o vetor $\pi_{\bar{u}}(\bar{v})$ é a *componente vetorial* do vetor $\bar{v}$ na direção $\bar{u}$. Dito de outra forma, o vetor $\bar{v}$ é a soma da sua projeção ortogunal no vetor $\bar{u}$ e um vetor ortogonal a $\bar{u}$ (veja a figura e o comentário a seguir).

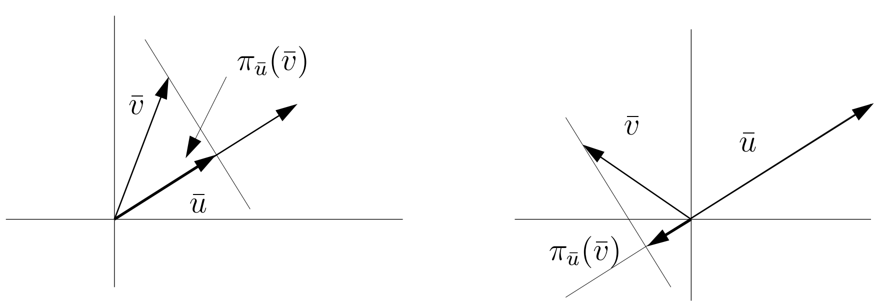

Figura 1: Projeção ortogonal

Propriedade 1.1. *O vetor $(\bar{v} - \pi_{\bar{u}}(\bar{v}))$ é ortogonal a $\bar{u}$.*

Prova: Para comprovar a propriedade é suficiente calcular o produto escalar $\bar{u} \cdot (\bar{v} - \pi_{\bar{u}}(\bar{v}))$ e ver que é nulo:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} - \pi_{\bar{u}}(\bar{v})) = \bar{u} \cdot \bar{v} - \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u} \cdot \bar{u}}\, \bar{u} \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \bar{v} = 0.$$

Assim a propriedade está provada. □

Exemplo 1. *Estude se é possível ter dois vetores diferentes e não nulos $\bar{u}$ e $\bar{v}$ tais que*

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{v}) = \pi_{\bar{v}}(\bar{u}).$$

Resposta: Observe em primeiro lugar que se os vetores são ortogonais, isto é, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, então $\pi_{\bar{u}}(\bar{v}) = \pi_{\bar{v}}(\bar{u}) = \bar{0}$, e a resposta é afirmativa.

Vejamos agora que acontece quando os vetores não são ortogonais. Neste caso a resposta é negativa. Em primeiro lugar, os vetores devem ser paralelos (justifique!). Logo $\bar{v} = \lambda\, \bar{u}$ para algum λ. Portanto, usando as fórmulas das projeções, temos,

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u} \cdot \bar{u}}\, \bar{u} = \frac{\lambda\, \|u\|^2}{\|u\|^2} \bar{u} = \lambda\, \bar{u} = \bar{v}.$$

Analogamente,

$$\pi_{\bar{v}}(\bar{u}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}}\, \bar{v} = \frac{\lambda\, \|u\|^2}{\lambda^2 \|u\|^2}\, \lambda\, \bar{u} = \bar{u}.$$

Logo a única possibilidade é $\bar{u} = \bar{v}$, logo a resposta é negativa.

Resumindo, $\pi_{\bar{u}}(\bar{v}) = \pi_{\bar{v}}(\bar{u})$ se e somente $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ ou $\bar{u} = \bar{v}$. □

2 Determinantes (revisão rápida)

2.1 Cálculo de determinantes

Em primeiro lugar, lembramos como calcular determinantes 2×2 e 3×3 e introduziremos uma notação para o determinante.

Determinantes 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinantes 3×3**:**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Neste caso, dizemos que desenvolvemos o determinante pela primeira linha. É possível desenvolver o determinante usando outras linhas (ou colunas), obtendo o mesmo resultado. O desenvolvimento pela segunda linha fornece:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Finalmente, o desenvolvimento pela terceira linha é:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}.$$

De forma mais geral, consideramos o determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

e denotamos por A_{ij} o determinante 2×2 onde eliminamos a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Por exemplo,

$$A_{13} = \begin{vmatrix} & \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Temos que o desenvolvimento do determinante pela i-ésima linha é

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1}\, A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}\, A_{i2} + (-1)^{i+3} a_{i3}\, A_{i3}.$$

De forma similar, o desenvolvimento do determinante pela i-ésima coluna é

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+i} a_{1i}\, A_{1i} + (-1)^{2+i} a_{2i}\, A_{2i} + (-1)^{3+i} a_{3i}\, A_{3i}.$$

Obviamente, a melhor estratégia é desenvolver o determinante por uma linha ou coluna com "muitos" zeros.

Notação: Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad w = (w_1, w_2, w_3).$$

Usaremos a seguinte notação: $\det(u, v, w)$ representa o determinante que tem por linhas as coordenadas dos vetores u, v e w:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

2.2 Propriedades dos determinantes

Os determinantes verificam as seguintes propriedades (que formularemos para determinantes 3×3):

- Dado qualquer número real σ, $\det(u, \sigma u, w) = 0 = \det(u, v, \sigma u)$ (um determinante com uma linha proporcional a outra é nulo).
- $\det(u, v, w) = -\det(v, u, w) = -\det(w, v, u)$ (ao permutar duas linhas de um determinante este muda o sinal).
- $\det(u + u', v, w) = \det(u, v, w) + \det(u', v, w)$.
- Dado qualquer número real σ se verifica,

$$\det(\sigma u, v, w) = \det(u, \sigma v, w) = \det(u, v, \sigma w) = \sigma \det(u, v, w).$$

Exercício 1. *Verifique as propriedades acima para determinantes* 2×2.

As propriedades anteriores também podem ser formuladas usando colunas em vez de linhas (verifique no caso 2×2).

2.3 Exemplos de cálculo de determinantes

A seguir calcularemos alguns determinantes usando as propriedades dos determinantes da seção precedente (operações com linhas e/ou colunas).

Exemplo 2. *Verifique que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)(c-b).$$

Restando da segunda coluna a primera e da terceira a primeira obtemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}.$$

Agora, desenvolvendo pela primeira linha, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)\,(b+a) & (c-a)\,(c+a) \end{vmatrix}.$$

Como $(b-a)$ e $(c-a)$ multiplicam a primeira e a segunda coluna temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (b+a) & (c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ (b+a) & (c-b) \end{vmatrix}.$$

Na última operação consideramos a segunda coluna menos a primeira. Agora é suficiente desenvolver o determinante pela primeira linha.

Exemplo 3. *Calcule o determinante*

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix}.$$

Consideramos as seguintes operações com as linhas: segunda menos 2 vezes a primeira, e terceira menos 3 vezes a primeira:

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix} = 3333 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo o último determinante pela primeira coluna obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} 3333 & 3333 & 3333 \\ 6666 & 6667 & 6668 \\ 9999 & 1000 & 1002 \end{vmatrix} = 3333.$$

Exemplo 4. *Sem calcular diretamente verifique que*

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

Observe que

$$\sin(\alpha+\delta) = \sin\alpha\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\alpha.$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma\,\cos\delta + \sin\delta\,\cos\gamma \end{vmatrix}.$$

Pelas propriedades dos determinantes, este não muda se restamos da terceira coluna $(\cos\delta)$ vezes a primeira coluna mais $(\sin\delta)$ vezes a segunda coluna. Mas este resultado fornece uma coluna (a terceira) formada exclusivamente por zeros. Desenvolvendo por esta coluna obtemos o resultado.

2.4 Interpretação geométrica dos determinantes 2×2: Área de um paralelogramo.

Significado geométrico do determinante: *O valor absoluto do determinante*

$$\left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = |ad - bc|.$$

é igual a área do paralelogramo P que tem por vértices a origem e os pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$.

Observe que a área do paralelogramo anterior é independente da escolha do quarto vértice. Veja figura. Escolheremos o quarto vértice C do paralelogramo P da forma $C = (a + c, b + d)$.

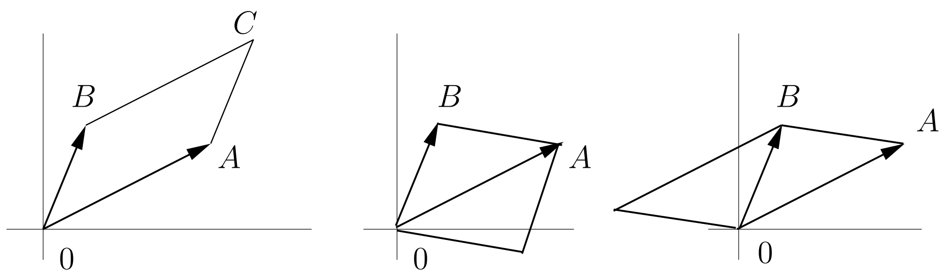

Figura 2: Paralelogramos com vértices 0, A e B

Estratégia: Para obter o resultado transformaremos o paralelogramo P em um paralelogramo da mesma área com lados paralelos aos eixos coordenados e tendo a origem como vértice. Portanto, calcular a área deste novo paralelogramo é muito simples!.

Passo 1: A área de P é igual à área de qualquer paralelogramo P' com vértices 0, A e B' e C', onde B' e C' estão na reta r determinada pelos pontos B e C (veja a figura). A afirmação decorre da fórmula área de P,

$$\text{área}(P) = \text{(b)ase} \times \text{(h)altura},$$

todos estes paralelogramos têm a mesma base b (o segmento $0A$) e a mesma altura h:

$$h = |0B| \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos segmentos $0A$ e $0B$. Veja a figura.

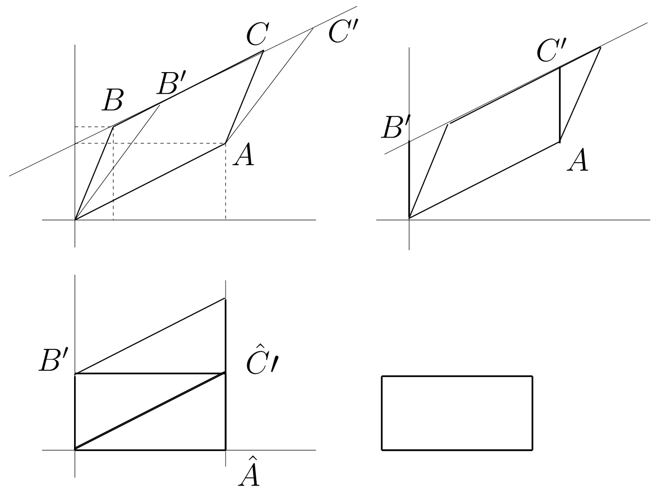

Figura 3: Significado geométrico do determinante

Dos paralelogramos acima, escolheremos o que tem o vértice B' no eixo $\mathbb{Y}$. Para determinar B' devemos calcular as coordenadas da interseção da reta r contendo a B e C e o eixo $\mathbb{Y}$. A equação paramétrica da reta r acima é

$$r\colon (c + ta, d + tb),\ t \in \mathbb{R}.$$

A reta r intercepta o eixo $\mathbb{Y}$ quando $t = -c/a$. Logo o ponto de interseção da reta r e o eixo $\mathbb{Y}$ é

$$B' = (0, d - (cb)/a).$$

Passo 2: A área de P' é igual à área de qualquer paralelogramo $\hat{P}$ com vértices 0, $\hat{A}$ e B' e $\hat{C}'$, onde $\hat{A}$ e $\hat{C}'$ estão na reta s determianda pelos pontos A e C' (veja a figura). Observe que s reta s é paralela ao eixo $\mathbb{Y}$ e sua equacao parametrica é

$$s\colon (a, d + t)t \in \mathbb{R}.$$

Escolhemos $\hat{A}$ como o ponto de intersecao de s com o eixo $\mathbb{X}$, ou seja $\hat{A} = (a, 0)$.

Passo 3: O retângulo $\hat{P}$ tem como vértices os pontos

$$(0,0), \quad B' = (0, d - (cb)/a) \quad \text{e} \quad \hat{A} = (a, 0).$$

Portanto, sua área é

$$a\,(d - (cb)/a) = ad - cb,$$

que é exatamente o determinante procurado.