Álgebra Linear I - Aula 3

1. Produto escalar. Ângulos.
2. Desigualdade triangular.

Roteiro

1 Produto escalar

Considere dois vetores $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$. O *produto escalar* de u e v é definido da seguinte forma:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3.$$

A definição para o produto escalar de dois vetores do plano $\mathbb{R}^2$ é similar, se $\bar{u} = (u_1, u_2)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2)$ então

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2.$$

As principais propriedades do produto escalar (todas de simples verificação) são as seguintes:

- **comutativo:** $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$,
- **distributivo:** $(\bar{u} + \bar{w}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{w} \cdot \bar{v}$,
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda\, \bar{u}) \cdot \bar{v} = \lambda\, (\bar{u} \cdot \bar{v})$.
- $\bar{u} \cdot \bar{u} = 0$ se, e somente se, $\bar{u} = \bar{0}$.

Observe que se verifica a seguinte propriedade do módulo de um vetor:

$$||\bar{u}||^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}.$$

1.1 Produto escalar e ângulos

Dizemos que dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ (não nulos) são *ortogonais* se verificam

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0.$$

Veremos a seguir que a noção de vetores ortogonais corresponde a noção de *perpendicularidade.* Por simplicidade, veremos esta propriedade no plano $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$\bar{u} = (u_1, u_2) \quad \text{e} \quad \bar{v} = (v_1, v_2).$$

Considere os pontos

$$A = (u_1, u_2) \quad \text{e} \quad B = (v_1, v_2).$$

Propriedade 1.1. *Os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são ortogonais ($\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$) se, e somente se, o triângulo de vértices* 0 *(a origem), A e B é retângulo.* (Veja a figura).

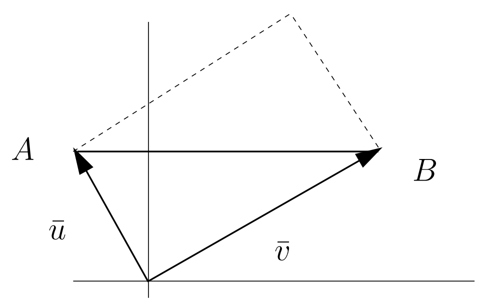

Figura 1: Ortogonalidade

Prova: Observamos, em primeiro lugar que, pelo teorema de de Pitágoras, o triângulo OAB é retângulo se, e somente se,

$$d(A, B)^2 = d(0, A)^2 + d(0, B)^2. \tag{1}$$

Observe que

$$d(A, B) = ||\bar{u} - \bar{v}||, \quad d(0, A) = ||\bar{u}||, \quad d(0, B) = ||\bar{v}||$$

e que se verificam as igualdades

$$||\bar{u} - \bar{v}||^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}), \quad ||\bar{u}||^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}, \quad ||\bar{v}||^2 = \bar{v} \cdot \bar{v},$$

A igualdade (1) é equivalente a:

$$(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{v}.$$

Usando as propriedades do produto escalar e simplificando, obtemos,

$$2\,(\bar{u} \cdot \bar{v}) = 0.$$

Ou seja, o triângulo é retângulo se, e somente se, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, como queremos provar. $\square$

A seguir veremos uma fórmula que relaciona produto escalar e ângulos e que imediatamente implica a Propriedade 1.1.

Propriedade 1.2. *O produto escalar dos vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ também é dado pela fórmula*

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}|\,\cos\alpha,$$

onde α é o ângulo formado por $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

Em particular, o ângulo α entre dois vetores é dado pela fórmula

$$\cos\alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}.$$

Prova: Provaremos a afirmação para vetores do plano. Suponhamos primeiro que os vetores são unitários. Como os vetores são unitários (veja a Aula 2) temos que

$$\bar{u} = (\cos\phi, \sin\phi), \quad \bar{v} = (\cos\theta, \sin\theta),$$

para certos ângulos ϕ e θ.

Logo, pela fórmula do coseno da soma de dois ângulos,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \cos\phi\,\cos\theta + \sin\phi\,\sin\theta = \cos(\phi - \theta) = \cos\alpha.$$

O que termina o caso em que os vetores são unitários.

No caso geral, escrevemos

$$\bar{u} = |\bar{u}|\,\bar{e} \quad \text{e} \quad \bar{v} = |\bar{v}|\,\bar{f},$$

onde $\bar{e}$ e $\bar{f}$ são vetores unitários paralelos a $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

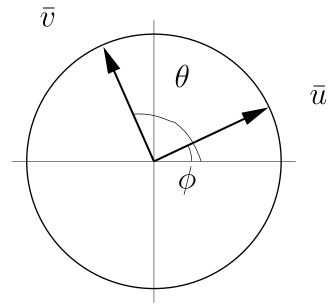

Figura 2: Produto escalar

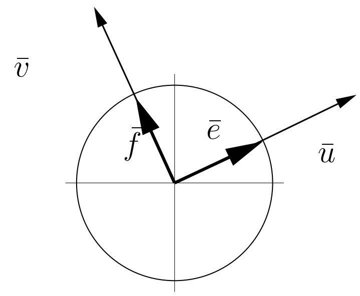

Figura 3: Produto escalar (continuação)

Aplicando as propriedades do produto escalar,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (|\bar{u}|\, \bar{e}) \cdot (|\bar{v}|\, \bar{f}) = (|\bar{u}|\, |\bar{v}|)\, (\bar{e} \cdot \bar{f}).$$

Agora é suficiente observar que, pela primeira parte, $\bar{e} \cdot \bar{f}$ é o coseno do ângulo entre $\bar{e}$ e $\bar{f}$ que é igual ao ângulo entre $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

Os argumentos acima fornecem o seguinte: o ângulo α entre dois vetores é dado pela fórmula

$$\cos \alpha = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}. \tag{2}$$

Isto termina a prova da propriedade. $\square$

Observação 1. *A fórmula em (2) implica que se $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ então os vetores são ortogonais: $|\bar{u}|\, |\bar{v}| \cos \theta = 0$, onde θ é o ângulo formado por $\bar{u}$ e $\bar{v}$, logo, como $|\bar{u}| \neq 0 \neq |\bar{v}|$, $\cos \theta = 0$, e, portanto, $\theta = \pi/2$ ou $3\pi/2$.*

Exemplo 1. *Considere os vetores $\bar{u} = (1, k)$ e $\bar{v} = (2, 1)$. Determine k para que os vetores sejam ortogonais e para que formem um ângulo de $\pi/4$.*

Resposta: Para que os vetores sejam ortogonais devemos ter a relação

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 = 2 + k = 0,$$

logo $k = -2$.

Para que os vetores formem um ângulo de $\pi/4$ devemos ter a relação

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 2 + k = \sqrt{5}\,\sqrt{1 + k^2}\,(\sqrt{2}/2).$$

Agora é suficiente resolver a equação de segundo grau:

$$4 + k^2 + 4\,k = 5\,(1 + k^2)\,\frac{1}{2} = 0, \qquad 3\,k^2 - 2\,k - 3 = 0.$$

Ou seja,

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 36}}{6} = \frac{2 \pm 2\,\sqrt{10}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Tente justifivar geometricamente porquê neste caso temos duas soluções para k e no caso precedente (vetores ortogonais) apenas uma solução. $\square$

Exemplo 2. *Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e suas arestas.*

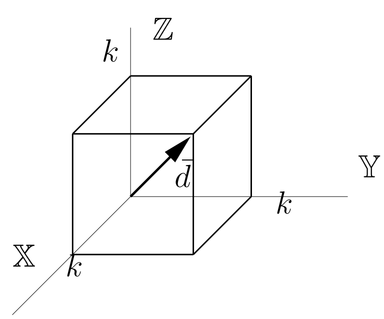

Figura 4: Cubo com vetor diagonal

Resposta: Consideraremos o cubo com arestas paralelas aos eixos coordenados. Sejam a origem $(0, 0, 0)$ e os pontos $(k, 0, 0)$, $(0, k, 0)$ e $(0, 0, k)$ quatro vértices do cubo (veja a figura). Considere agora o *vetor diagonal,* isto é, o vetor $\bar{d}$ obtido considerando a origem e o vértice oposto (k, k, k). Então, o ângulo θ entre o vetor diagonal e a aresta (por exemplo) $u_x = (k, 0, 0)$ é obtido como segue:

$$\bar{d} \cdot \bar{u}_x = (k, k, k) \cdot (k, 0, 0) = |\bar{d}| \cdot |\bar{u}_x| \cos\theta, \quad k^2 = \sqrt{3\,k^2}\,k\,\cos\theta,$$

Logo, $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$, e $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, onde escolhemos a determinação do arccos em $(0, \pi)$. Os ângulos com as outras arestas são iguais.

Observe que o ângulo obtido é sempre independente da escolha de k $\square$

2 A desigualdade triangular (novamente)

Usando as fórmulas do produto escalar podemos obter novamente a a *desigualdade triangular:*

Propriedade 2.1 (Desigualdade triangular)**.** *Dados dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ se verifica*

$$||\bar{u} + \bar{v}|| \leq ||\bar{u}| + ||\bar{v}||.$$

Além disto a igualdade $\|\bar{u} + \bar{v}\| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$ se verifica, e somente se, $\bar{u} = \lambda\,\bar{v}$ ou $\bar{v} = \lambda\,\bar{u}$ para algum número real λ (isto é, se os vetores são paralelos).

Prova: Observe que é suficiente provar

$$(\|\bar{u} + \bar{v}\|)^2 \leq (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2.$$

Temos as igualdades

$$\begin{aligned}(\|\bar{u} + \bar{v}\|)^2 \quad &= (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + 2\,\bar{u} \cdot \bar{v} + \|\bar{v}\|^2, \\ (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2 \quad &= \|\bar{u}\|^2 + 2\,\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\| + \|\bar{v}\|^2.\end{aligned}$$

Portanto, para provar a desigualdade é suficiente observar que

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\,\cos\alpha \leq \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|,$$

onde α é o ângulo entre os vetores.

Para ver a segunda parte da propriedade, observe que se verifica

$$\|\bar{u} + \bar{v}\| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$$

se, e somente se,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \, \cos\alpha = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|,$$

ou seja, $\alpha = 0$. Logo $\bar{u} = \lambda \, \bar{v}$ para $\lambda \geq 0$. $\square$

Exercício 1. *Mostre a identidade:*

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = 2\,(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2).$$

Resposta: É suficiente observar que:

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \quad (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\,\bar{u} \cdot \bar{v},$$

$$\|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = \quad (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\,\bar{u} \cdot \bar{v}.$$

Somando as duas expressões obtemos,

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = 2\,\|\bar{u}\|^2 + 2\,\|\bar{v}\|^2,$$

obtendo o resultado pedido. $\square$