Álgebra Linear I - Aula 9

1. Distância entre uma reta e um plano.
2. Distância entre dois planos.
3. Distância entre duas retas.

Roteiro

1 Distância de uma reta r a um plano π

A distância entre uma reta r e um plano π é a menor das distâncias entre pontos P da reta r e Q do plano π. Obviamente, se a reta e o plano se interceptam a distância é nula.

Seja n um vetor normal ao plano π e v um vetor diretor da reta r. Existem duas possibilidades:

- ou a reta é paralela ao plano (em tal caso $n \cdot v = 0$),
- a reta não é paralela ao plano (isto ocorre se $n \cdot v \neq 0$). Neste caso a reta intercepta ao plano em um ponto a distância é zero.

No primeiro caso, a distância de r a π é a distância de qualquer ponto P de r a π. Logo é suficiente escolher qualquer ponto de r e calcular a distância a π, caindo em um caso já estudado. A afirmação é obtida como segue: sejam P e Q pontos da reta, e sejam T e R os pontos do plano mais próximos de P e de Q, então os vetores $\overline{PT}$ e $\overline{QR}$ são paralelos e os quatro pontos determinan um retângulo, portanto, $|PT| = |QR|$.

Exemplo 1. *Calcule a distância da reta $r = (1+t, -t, 1-t)$ ao plano $\pi\colon x + 2\,y - z = 1$.*

Resposta: Temos que que um vetor diretor da reta é $(1, -1, -1)$ e um vetor normal do plano é $(1, 2, -1)$. Como

$$(1, -1, -1) \cdot (1, 2, -1) = 0,$$

temos que o vetor diretor da reta é ortogonal ao vetor normal ao plano. Portanto, a reta é paralela ao plano.

Como o ponto $(1,0,1)$ pertence a r, o exercício já está resolvido no exemplo distância entre ponto e plano, e a distância é $1/\sqrt{6}$. $\square$

2 Distância entre dois planos π e ρ

A distância entre os planos π e ρ é a menor das distâncias entre pontos P de π e Q de ρ.

Sejam n e m vetores normais dos plano π e ρ, respectivamente. Existem duas possibilidades: ou os planos são paralelos (em tal caso $n = \sigma\, m$ para algum $\sigma \neq 0$) ou não. No último caso, os planos se interceptam e a distância é zero.

No primeiro caso, a distância de ρ a π é a distância de qualquer ponto P de ρ a π. Logo é suficiente escolher qualquer ponto de ρ e calcular a distância a π, caindo em um caso já estudado.

Exemplo 2. *A distância entre os planos*

$$\pi\colon x+y+z=0 \quad e \quad \rho\colon 2x+y-z=0$$

é zero, pois os planos não são paralelos (os vetores normais não são paralelos) e portanto se interceptam.

Exemplo 3. *Calcule a distância entre os planos paralelos $\pi\colon x+y+z=0$ e $\rho\colon x+y+z=1$.*

Resposta: Podemos calcular a distância como segue: considere o ponto $P=(0,0,0)\in\pi$ e o ponto $Q=(1,0,0)\in\rho$. A distância é o módulo da projeção de $\overline{PQ}=(1,0,0)$ no vetor nomal $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ do plano,

$$w=((1,0,0)\cdot(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}))(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=(1/3,1/3,1/3).$$

A distância é $||w||=1/\sqrt{3}$. $\square$

3 Distância entre duas retas r e s

Calcularemos a distância entre duas retas r e s, que denotaremos por $d(r, s)$. Esta distância é o mínimo das distâncias dist (P, Q), onde P é um ponto na reta r e Q é um ponto na reta s.

Obviamente, se as retas se interceptam a distância $d(r, s)$. Neste caso, podemos escolher $P = Q$ o ponto de interseção das retas. Portanto, consideraremos que as retas são disjuntas.

Suponhamos em primeiro lugar que as retas r e s são paralelas. Neste caso, a distância d entre as retas é igual a distância entre qualquer ponto $P \in r$ e a reta s, caso já considerado (distância de ponto a reta). Observe que a escolha do ponto P é totalmente irrelevante.

Suponhamos agora que as retas não são paralelas (isto é, são reversas). Um método para calcular a distância é o seguinte. Consideremos pontos P e Q de r e s, respectivamente, e vetores diretores v e w de r e s, respectivamente.

- Considere os planos π paralelo a s que contem r e ρ paralelo a r que contem s. No desenho, a reta t é uma reta paralela a s contida em π com vetor diretor w. Escolhemos como ponto P a interseção das retas t e r.

- Observe que estes planos são paralelos e que dois vetores (não paralelos) de π e ρ são v e w.

- Observe que a distância d entre as retas r e s é a distância entre os dois planos.

- Esta distância d é, por exemplo, a distância de qualquer ponto Q da reta s ao plano π. Esta distância pode ser calculada usando o produto misto como fizemos anteriormente. Consideramos vetores diretores v e w das retas r e s, obtendo:

$$d = \frac{|\overline{PQ} \cdot (v \times w)|}{||v \times w||}.$$

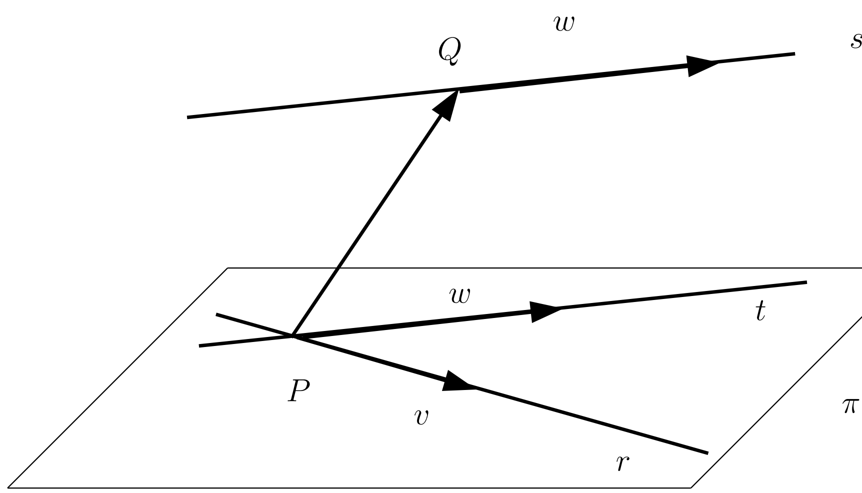

Figura 1: Distância entre duas retas

3.1 Posição relativa de duas retas não paralelas

O método anterior fornece um sistema para saber se duas retas **não paralelas** se interceptam (sem necessidade de resolver um sistema): as retas se interceptam se e somente se

$$\overline{PQ} \cdot (v \times w) = 0.$$

Mais uma vez, a escolha dos pontos P e Q é irrelevante.

Exemplo 4. *Calcule a distância entre as retas* $r = (t, 1+t, 2\,t)$ *e* $s = (t, t, 1)$.

Resposta: Vetores diretores das retas r e s são $v = (1,1,2)$ e $w = (1,1,0)$, respectivamente. Um ponto $P \in r$ é $(0,1,0)$ e um ponto $Q \in s$ é $(0,0,1)$, logo $\overline{PQ} = (0,-1,1)$. Portanto, a distância d entre r e s é

$$d = \frac{|(0,-1,1)\cdot(1,1,2)\times(1,1,0)|}{|(1,1,2)\times(1,1,0)|} = \frac{|(0,-1,1)\cdot(-2,2,0)|}{|(-2,2,0)|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo a distância é $1/\sqrt{2}$. $\square$