Abrantes Araújo Silva Filho

Disciplina: Cálculo III
Professor: Kennedy
Exercícios: Lista 1: limites

Vila Velha
2019

1 - Prove que:

a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \left(\frac{3x-4y}{3xy}\right) = \frac{1}{3}$

Partindo do pressuposto da questão, que o limite existe e é igual à $\frac{1}{3}$, como a função é uma função racional contínua com domínio $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o limite pode ser calculado por substituição. Assim:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3x-4y}{3xy} = \frac{3(2)-4(1)}{3(2)(1)} = \frac{6-4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim_{(x,y,z)\to(2,2,-1)} \left(5x^3yz + 7xyz^3 + \frac{2xy^2 + x^2yz}{x-yz}\right) = -106$

Pressupondo que o limite existe e é igual à -106, e a função é contínua no domínio $(x-yz) \neq 0$, o limite pode ser calculado por substituição. Assim:

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,2,-1)} \left(5x^3yz + 7xyz^3 + \frac{2xy^2 + x^2yz}{x-yz}\right) =$$

$$= 5(2)^3(2)(-1) + 7(2)(2)(-1) + \frac{2(2)(2)^2 + 2^2(2)(-1)}{2-2(-1)} =$$

$$= -80 - 28 + \frac{16-8}{4}$$

$$= -108 + 2 = -106$$

②

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right) = 0$

Pressupondo que o limite existe e é igual a 0, conforme o enunciado, e que a função considerada é contínua e definida para $(x-y) \neq 0$, o limite pode ser calculado como:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}}\right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+xy+y^2) = 0^2+(0)(0)+0^2 = 0$$

② - Ressalva:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(\frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3}\right) = ?$

Para calcular o limite, é necessário considerar caminhos de aproximação diferentes de $(x,y)\to(0,1)$. Consideraremos: $x\to 0, y=1$; $y\to 1, x=0$.

a) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=1}} \left(\frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=1}} \left(\frac{x-x+3}{x^2+5x-1}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=1}} \frac{3}{-1} = -3$$

b) $$\lim_{\substack{y\to 1\\ x=0}} \left(\frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3}\right) = \lim_{\substack{y\to 1\\ x=0}} \left(\frac{0-0(y)+3}{0^2+5(0)y-y^3}\right) = \lim_{\substack{y\to 1\\ x=0}} \frac{3}{-1} = -3$$

Isso é uma indicação que o limite existe e é igual a -3.

b) $\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = ?$

a) $\lim_{\substack{x\to 3\\ y=-4}} \sqrt{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 3\\ y=-4}} \sqrt{x^2+16} = \sqrt{3^2+16} = 5$

b) $\lim_{\substack{y\to -4\\ x=3}} \sqrt{x^2+y^2} = \lim_{\substack{y\to -4\\ x=3}} \sqrt{9+y^2} = \sqrt{9+16} = 5$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) = ?$

a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\dfrac{x^2-x(0)}{\sqrt{x}-\sqrt{0}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} x^{3/2} = 0$

b) $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\dfrac{0^2-0(y)}{\sqrt{0}-\sqrt{y}}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \dfrac{0}{-\sqrt{y}} = 0$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) = ?$

a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\dfrac{x^2-0^2}{1+x^2+0^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\dfrac{0^2-y^2}{1+0^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(-\dfrac{y^2}{1+y^2}\right) = -\dfrac{0}{1} = 0$

4

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{3+x^2-xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) = ?$

a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{3+x^2-xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{3+x^2-x(0)}{\sqrt{x}-\sqrt{0}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{3+x^2}{\sqrt{x}}\right) = \infty$?

b) $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\frac{3+x^2-xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\frac{3+0^2-0y}{\sqrt{0}+\sqrt{y}}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right) = \infty$

f) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \left(\frac{2x^2-3xy}{4+x^2+y^2}\right) = ?$

a) $\lim_{\substack{x\to 2\\ y=1}} \left(\frac{2x^2-3xy}{4+x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 2\\ y=1}} \left(\frac{2x^2-3x}{4+x^2+1}\right) = \frac{2(2)^2-3(2)}{2^2+5} = \frac{8-6}{9} = \frac{2}{9}$ //

b) $\lim_{\substack{y\to 1\\ x=2}} \left(\frac{2x^2-3xy}{4+x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{y\to 1\\ x=2}} \left(\frac{2(2)^2-3(2)y}{4+2^2+y^2}\right) = \frac{8-6}{9} = \frac{2}{9}$ //

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{10}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\right) = ?$

a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{10}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{10}{\sqrt{25-x^2}}\right) = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$ //

b) $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\frac{10}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\frac{10}{\sqrt{25-y^2}}\right) = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$ //

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(e^{\sin(4x+2y)} + \cos(3xy) \right) = ?$

a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(e^{\sin(4x)} + \cos(0) \right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(e^{\sin(4x)} + 1 \right) = e^0 + 1 = 1+1 = 2$ //

b) $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(e^{\sin(2y)} + \cos(0) \right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(e^{\sin(2y)} + 1 \right) = e^0 + 1 = 1+1 = 2$ //

③ – Prove que o limite não existe:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 + \sin^2 x}{2x^2 + y^2} \right)$

a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{x^2 + \sin^2 x}{2x^2 + 0^2} \right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{x^2 + \sin^2 x}{2x^2} \right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \left(\frac{2x + 2\sin(x)\cos(x)}{4x} \right) =$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{2 + 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{4} = \frac{2 + 2\cos^2(0) - 2\sin^2(0)}{4} = \frac{2+2}{4} = 1$ //

b) $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\frac{0^2 + \sin^2(0)}{2(0)^2 + y^2} \right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \left(\frac{0}{y^2} \right) = 0$ //

como os limites são diferentes, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 + \sin^2 x}{2x^2 + y^2} \right)$ //

6

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y^4}{x^4+3y^4} \right)$

a) $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=0}} \left(\frac{0^4}{x^4+3(0)^4} \right) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=0}} \left(\frac{0}{x^4} \right) = 0$

b) $\lim_{\substack{y\to 0 \\ x=0}} \left(\frac{y^4}{0^4+3y^4} \right) = \lim_{\substack{y\to 0 \\ x=0}} \left(\frac{y^4}{3y^4} \right) = \frac{1}{3}$

como os limites não são iguais, não existe!

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y^4}{x^4+3y^4} \right)$

Ferramentas utilizadas no estudo e resolução da lista:

- Cálculo, James Steward, Vol. 2, seção 14.2
- Calculadora HP-50G
- Wolfram Alpha
- Geogebra