Você verá de onde os épsilons vêm na prova fornecida no Apêndice 9. Resultados similares são verdadeiros para funções de mais de duas variáveis independentes.

> **DEFINIÇÃO** Uma função $z = f(x, y)$ é **diferenciável em** (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existem e Δz satisfaz uma equação da forma
>
> $$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$
>
> na qual $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$. Dizemos que f é **diferenciável** se ela é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, e dizemos que seu gráfico é uma **superfície lisa**.

Devido a essa definição, um corolário imediato do Teorema 3 diz que uma função é diferenciável em (x_0, y_0) se suas primeiras derivadas parciais são *contínuas* ali.

> **COROLÁRIO DO TEOREMA 3** Se as derivadas parciais f_x e f_y de uma função $f(x, y)$ são contínuas ao longo de uma região aberta R, então f é diferenciável em todos os pontos de R.

Se $z = f(x, y)$ é diferenciável, então a definição de diferenciabilidade assegura que $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ se aproxima de 0 quando Δx e Δy se aproximam de 0. Isso nos diz que uma função de duas variáveis é contínua em todos os pontos onde ela é diferenciável.

> **TEOREMA 4 — Diferenciabilidade implica continuidade** Se uma função $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então ela é contínua em (x_0, y_0).

Como podemos observar a partir do Corolário 3 e do Teorema 4, uma função $f(x, y)$ deve ser contínua em um ponto (x_0, y_0) se f_x e f_y forem contínuas por toda uma região aberta contendo (x_0, y_0). Entretanto, lembre-se de que ainda é possível que uma função de duas variáveis não seja contínua em um ponto no qual suas primeiras derivadas parciais existam, como vimos no Exemplo 8. A existência por si só das derivadas parciais em um ponto não é suficiente, mas a continuidade das derivadas parciais garante a diferenciabilidade.

Exercícios 14.3

Calculando derivadas parciais de primeira ordem

Nos Exercícios 1-22, encontre $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

1. $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$

2. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

3. $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$

4. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

5. $f(x, y) = (xy - 1)^2$

6. $f(x, y) = (2x - 3y)^3$

7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

8. $f(x, y) = (x^3 + (y/2))^{2/3}$

9. $f(x, y) = 1/(x + y)$

10. $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$

11. $f(x, y) = (x + y)/(xy - 1)$

12. $f(x, y) = \text{tg}^{-1}(y/x)$

13. $f(x, y) = e^{(x+y+1)}$

14. $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen}(x + y)$

15. $f(x, y) = \ln(x + y)$

16. $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

17. $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x - 3y)$

18. $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$

19. $f(x, y) = x^y$

20. $f(x, y) = \log_y x$

21. $f(x, y) = \int_x^y g(t)\,dt$ (g contínua para todo t)

22. $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \quad (|xy| < 1)$

Nos Exercícios 23-34, encontre f_x, f_y e f_z.

23. $f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

24. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

25. $f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

26. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

27. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}^{-1}(xyz)$

28. $f(x, y, z) = \sec^{-1}(x + yz)$

29. $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

30. $f(x, y, z) = yz \ln(xy)$

31. $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

32. $f(x, y, z) = e^{-xyz}$

33. $f(x, y, z) = \text{tgh}\,(x + 2y + 3z)$

34. $f(x, y, z) = \text{senh}\,(xy - z^2)$

Nos Exercícios 35-40, encontre a derivada parcial da função em relação a cada variável.

35. $f(t, \alpha) = \cos\,(2\pi t - \alpha)$

36. $g(u, v) = v^2 e^{(2u/v)}$

37. $h(\rho, \phi, \theta) = \rho\,\text{sen}\,\phi \cos\theta$

38. $g(r, \theta, z) = r(1 - \cos\theta) - z$

39. **Trabalho feito pelo coração** (Seção 3.11, Exercício 61)

$$W(P, V, \delta, v, g) = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

40. **Fórmula do tamanho do lote de Wilson** (Seção 4.6, Exercício 53)

$$A(c, h, k, m, q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

Calculando derivadas parciais de segunda ordem

Encontre todas as derivadas parciais de segunda ordem das funções nos Exercícios 41-50.

41. $f(x, y) = x + y + xy$

42. $f(x, y) = \text{sen}\,xy$

43. $g(x, y) = x^2y + \cos y + y\,\text{sen}\,x$

44. $h(x, y) = xe^y + y + 1$

45. $r(x, y) = \ln\,(x + y)$

46. $s(x, y) = \text{tg}^{-1}\,(y/x)$

47. $w = x^2\,\text{tg}\,(xy)$

48. $w = ye^{x^2-y}$

49. $w = x\,\text{sen}\,(x^2y)$

50. $w = \dfrac{x - y}{x^2 + y}$

Derivadas parciais mistas

Nos Exercícios 51-54, verifique que $w_{xy} = w_{yx}$.

51. $w = \ln\,(2x + 3y)$

52. $w = e^x + x\ln y + y\ln x$

53. $w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

54. $w = x\,\text{sen}\,y + y\,\text{sen}\,x + xy$

55. Qual ordem de derivação calculará f_{xy} mais rapidamente: primeiro x ou y? Tente responder sem fazer anotações.

a. $f(x, y) = x\,\text{sen}\,y + e^y$

b. $f(x, y) = 1/x$

c. $f(x, y) = y + (x/y)$

d. $f(x, y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln\,(y^2 + 1)$

e. $f(x, y) = x^2 + 5xy + \text{sen}\,x + 7e^x$

f. $f(x, y) = x\ln xy$

56. A derivada parcial de quinta ordem $\partial^5 f/\partial x^2\partial y^3$ é zero para cada uma das funções a seguir. Para mostrar isso o mais rapidamente possível, em relação a qual variável você diferencia primeiro: x ou y? Tente responder sem fazer anotações.

a. $f(x, y) = y^2x^4e^x + 2$

b. $f(x, y) = y^2 + y(\text{sen}\,x - x^4)$

c. $f(x, y) = x^2 + 5xy + \text{sen}\,x + 7e^x$

d. $f(x, y) = xe^{y^2/2}$

Utilizando a definição de derivada parcial

Nos Exercícios 57-60, utilize a definição limite de derivada parcial para calcular as derivadas parciais das funções nos pontos especificados.

57. $f(x, y) = 1 - x + y - 3x^2y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} \quad \text{em } (1, 2)$

58. $f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} \quad \text{em } (-2, 1)$

59. $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y - 1}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} \quad \text{em } (-2, 3)$

60. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,(x^3 + y^4)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} \quad \text{em } (0, 0)$

61. Seja $f(x, y) = 2x + 3y - 4$. Encontre o coeficiente angular da reta tangente a essa superfície no ponto $(2, -1)$ que está no **a.** plano $x = 2$ **b.** plano $y = -1$.

62. Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$. Encontre o coeficiente angular da reta tangente a essa superfície no ponto $(-1, 1)$ que está no **a.** plano $x = -1$ **b.** plano $y = 1$.

63. **Três variáveis** Seja $w = f(x, y, z)$ uma função de três variáveis independentes, e escreva a definição formal da derivada parcial $\partial f/\partial z$ em (x_0, y_0, z_0). Utilize essa definição para encontrar $\partial f/\partial z$ em $(1, 2, 3)$ para $f(x, y, z) = x^2yz^2$.

64. **Três variáveis** Seja $w = f(x, y, z)$ uma função de três variáveis independentes, e escreva a definição formal da derivada parcial $\partial f/\partial y$ em (x_0, y_0, z_0). Utilize essa definição para encontrar $\partial f/\partial y$ em $(-1, 0, 3)$ para $f(x, y, z) = -2xy^2 + yz^2$.

Diferenciando implicitamente

65. Encontre o valor de $\partial z/\partial x$ no ponto $(1, 1, 1)$ se a equação

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

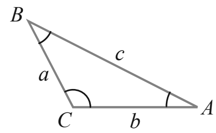
define z como uma função de duas variáveis independentes x e y e se a derivada parcial existe.

66. Encontre o valor de $\partial x/\partial z$ no ponto $(1, -1, -3)$ se a equação

$$xz + y\ln x - x^2 + 4 = 0$$

define x como uma função de duas variáveis independentes y e z e se a derivada parcial existe.

Os Exercícios 67 e 68 estão relacionados com o triângulo mostrado a seguir.



67. Expresse A implicitamente com uma função de a, b e c e calcule $\partial A/\partial a$ e $\partial A/\partial b$.

68. Expresse a implicitamente como uma função de A, b e B e calcule $\partial a/\partial A$ e $\partial a/\partial B$.

69. **Duas variáveis dependentes** Expresse v_x em termos de u e y se as equações $x = v\ln u$ e $y = u\ln v$ definem u e v como funções das variáveis independentes x e y e se v_x existe. (Sugestão: diferencie ambas as equações em relação a x e resolva para v_x eliminando u_x.)

70. **Duas variáveis dependentes** Encontre $\partial x/\partial u$ e $\partial y/\partial u$ se as equações $u = x^2 - y^2$ e $v = x^2 - y$ definem x e y como funções das variáveis independentes u e v, e as derivadas parciais existem. (Veja a sugestão do Exercício 69.) Em seguida, seja $s = x^2 + y^2$ e encontre $\partial s/\partial u$.

71. Seja $f(x, y) = \begin{cases} y^3, & y \geq 0 \\ -y^2, & y < 0. \end{cases}$

Encontre f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} e diga qual é o domínio para cada derivada parcial.