

Álgebra Linear I - Aula 5

1. Produto vetorial.
2. Aplicações.
3. Produto misto.

Roteiro

1 Produto vetorial

Definição: Dados vetores $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de \mathbb{R}^3 definimos o *produto vetorial* $\bar{u} \times \bar{v}$ como o vetor

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),$$

onde

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

1.1 Propriedades do produto vetorial

- O vetor $\bar{u} \times \bar{v}$ é ortogonal aos vetores \bar{u} e \bar{v} , isto é,

$$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0.$$

Para provar a afirmação é suficiente interpretar $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$ como um determinante com duas linhas iguais. Veja que

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

- $\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$ (a troca da ordem de duas linhas de um determinante muda o sinal).
- $\bar{u} \times \bar{u} = 0$ (um determinante de uma matriz com duas linhas iguais vale zero).
- $(\bar{u} + \bar{u}') \times \bar{v} = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u}' \times \bar{v})$,
- $(\sigma \bar{u}) \times \bar{v} = \sigma(\bar{u} \times \bar{v})$, para todo $\sigma \in \mathbb{R}$.
- $\bar{u} \times \bar{v} = 0$ se, e somente se, os vetores \bar{u} e \bar{v} são paralelos ($\bar{v} = \sigma \bar{u}$).

Também temos as seguintes propriedades:

- O **módulo do produto vetorial** $\bar{u} \times \bar{v}$ é a área de um paralelogramo de lados \bar{u} e \bar{v} , (lembre o significado geométrico de um determinante dois por dois como área de um paralelogramo).
- O módulo do produto vetorial verifica a fórmula:

$$||\bar{u} \times \bar{v}|| = ||\bar{u}|| ||\bar{v}|| \sin \alpha,$$

onde α é o ângulo entre os vetores \bar{u} e \bar{v} .

- **Orientação do vetor $\bar{u} \times \bar{v}$:** o sentido de $\bar{u} \times \bar{v}$ pode ser determinado usando a *regra da mão direita*, se θ é o ângulo formado pelos vetores \bar{u} e \bar{v} , e \bar{u} é girado um ângulo até coincidir com \bar{v} , se os dedos da mão direita se fecharem no sentido desta rotação então o polegar aponta no sentido de $\bar{u} \times \bar{v}$. Dito de outra forma, primeiro colocamos o canto da mão coincidindo com o primeiro vetor com a parte que corresponde ao dedo polegar sobre a origem do vetor. Depois fazemos girar a mão até coincidir com o vetor \bar{v} (usando o caminho mais curto), deste jeito, o polegar apontará no sentido do vetor $\bar{u} \times \bar{v}$.

Exemplo 1. *Verificam-se as igualdades*

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Observação 1. Não é válida, em geral, a fórmula

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}.$$

Por exemplo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = 0$$

pois $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$). Porém

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}.$$

Portanto, a expressão $\bar{u} \times \bar{v} \times \bar{w}$ não tem sentido: são necessários parênteses para saber quais são os produtos vetoriais que devemos calcular.

2 Aplicações do produto vetorial

2.1 Cálculo da área de um paralelogramo

Exemplo 2. Determine a área do paralelogramo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 1)$.

Resposta: A área é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 1)$. Temos que

$$(1, 2, 3) \times (2, 1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 5, -3).$$

Verifique que este vetor é ortogonal aos vetores $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 1)$. Temos

$$\|(-1, 5, 3)\| = \sqrt{1+5^2+3^2} = \sqrt{35}.$$

Portanto, a área é $\sqrt{35}$. □

Questão 1. O quarto vértice do paralelogramo do exemplo anterior está determinado? Quantas possibilidades existem? (um desenho ajuda, veja os desenhos do significado geométrico do determinante).

Exemplo 3. Considere um paralelogramo P cujos vértices são a origem, o ponto $A = (1, 2, 3)$ e um terceiro vértice C na reta (t, t, t) . Determine C de forma que o paralelogramo P tenha área 1.

Resposta: Para cada t , sejam $C_t = (t, t, t)$ e P_t um paralelogramo com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ e (t, t, t) . A área de P_t é $|t|\sqrt{6}$ (justifique). Logo o ponto procurado é (por exemplo) $C = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$.

Existem outras possibilidades? Em caso afirmativo determine os diferentes casos. \square

2.2 Cálculo do vetores ortogonais a dois vetores dados

u e v

Observe que dados dois vetores \bar{u} e \bar{v} para determinar um vetor ortogonal aos dois vetores é suficiente calcular $\bar{u} \times \bar{v}$.

Exemplo 4. Determine um vetor ortogonal a $\bar{u} = (1, 2, 3)$ e $\bar{v} = (2, 1, 1)$.

Resposta: Por exemplo, o vetor $\bar{u} \times \bar{v} = (-1, 5, -3)$ (verifique, usando o produto escalar, a ortogonalidade). \square

3 Produto Misto

Dados três vetores de \mathbb{R}^3

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad \bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

definimos o produto misto $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ como

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Observe que a expressão $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \times \bar{w}$ não faz sentido: não é possível calcular o produto vetorial de um número $(\bar{u} \cdot \bar{v})$ por um vetor.

3.1 Significado geométrico do produto misto

Propriedade 3.1 (Volume e produto misto). *O valor absoluto*

$$|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$$

é o volume do paralelepípedo de arestas \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} .

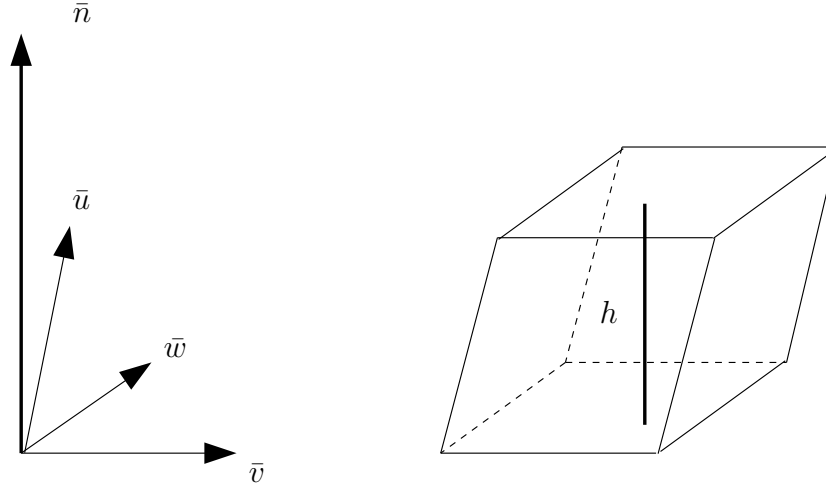


Figura 1: Produto misto

Prova: Para provar a propriedade considere o vetor $\bar{n} = \bar{v} \times \bar{w}$. Suponha que a base do paralelepípedo *contém* os vetores \bar{v} e \bar{w} . A área A da base é $A = |\bar{n}|$ (esta afirmação segue do significado geométrico do produto vetorial). Então, a altura h do paralelepípedo é $|\bar{u}| \cos \alpha$, onde α é o ângulo formado por \bar{n} e \bar{u} . Portanto, o volume do paralelepípedo é base por altura, isto é,

$$A h = |\bar{n}| |\bar{u}| \cos \alpha = |\bar{u} \cdot \bar{n}| = |\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w}|.$$

Obtemos assim a propriedade. □

3.2 Propriedades do produto misto

Enumeraremos as principais propriedades do produto misto. Estas propriedades decorrem das propriedades dos determinantes.

- $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0 = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{u})$, pois $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{n}$ é ortogonal a \bar{u} , logo $\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$ (v. também pode interpretar como um determinante com duas linhas iguais).
- O produto misto verifica as seguintes relações (correspondentes a trocar a ordem de colunas em um determinante): $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = -\bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{v}) = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{w} \cdot (\bar{v} \times \bar{u})$, etc.

- $\bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{w}) = 0 = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{w}).$

Exemplo 5. *Sabendo que*

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 2$$

determine

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{w}), \quad \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}), \quad \bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{v}).$$

Observe que

$$\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{w}) = -\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = -2.$$

Também

$$\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = -\bar{u} \cdot (\bar{w} \times \bar{v}) = \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 2.$$