Resumo de Vetores

Abrantes Araújo Silva Filho

2018-11-05

Sumário

1 Espaços Vetoriais Euclidianos

1.1 Escalares *versus* vetores

A primeira coisa que precisa ficar bem clara a respeito dos vetores é entender exatamente o que é um vetor, e isso é bem simples: um *vetor é uma quantidade*, é alguma coisa que tem um valor, uma medida.

Mas se um vetor é uma *quantidade*, exatamente em quê um vetor é diferente de, por exemplo, o número de litros de água em uma caixa d'água? Ou a massa de uma pessoa em Kg? Como uma quantidade vetorial é diferente de algum outro tipo de quantidade qualquer?

Para entender a natureza diferenciada dos vetores, é preciso entender o seguinte: existem dois tipos de quantidades físicas:

- **Escalares**: são quantidades físicas que podem ser descritas simplesmente por um valor numérico, a *magnitude*, por exemplo: peso, altura, temperatura, comprimento, volume, área, densidade... não importa o que você está medindo, se bastar um único valor numérico para descrever tal quantidade, ela é uma quantidade escalar. A magnitude (o valor numérico) nos informa "quanto" da quantidade existe.

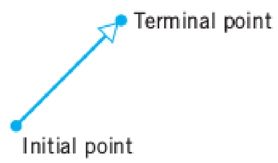
- **Vetores**: são quantidades físicas que *não* podem ser descritas simplesmente por um valor numérico, a *magnitude*, mas exigem adicionalmente a *direção* e o *sentido*, por exemplo: força, velocidade, deslocamento. A magnitude (o valor numérico) nos informa "quanto" do vetor existe, e a direção e o sentido nos informa "para onde" o vetor está indo.

Resumindo tudo: um vetor é uma quantidade física que tem *magnitude*, *direção* e *sentido*!

1.2 Ponto de vista geométrico: vetores bi, tri e n-dimensionais

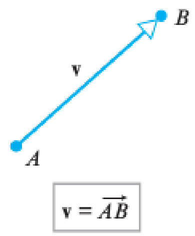
1.2.1 Representação geométrica de um vetor

A representação geométrica de um vetor em duas ou três dimensões é feita por uma flecha, sendo que:



- A direção e o sentido da flecha indicam a **direção** e o **sentido** do vetor;
- O comprimento da flecha indica a **magnitude** do vetor;
- A cauda da flecha é o **ponto inicial** do vetor, sua origem;
- A ponta da flecha é o **ponto final** do vetor, seu destino.

Existem inúmeras maneiras de representar um vetor em um texto, então a seguinte convenção será utilizada aqui: os vetores serão representados por letras minúsculas em negrito (**a**, **u**, **v**, ...) e os escalares serão representados por letras minúsculas em itálico (a, k, w, ...). Além disso, quando quisermos indicar que um determinado vetor **v** tem origem no ponto A e destino no ponto B, escrevemos: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$:



Um vetor cujos pontos de origem e destino são os mesmos, por exemplo $\mathbf{v} = \overrightarrow{AA}$, tem magnitude 0 e será chamado de **vetor zero**. Tal vetor será representado por **0**. ATENÇÃO: o vetor zero não tem direção nem sentido definido, então fica convencionado que ele terá a direção e o sentido mais conveniente à cada situação em particular. A mesma coisa ocorre para o número de elmentos do vetor zero: ele terá tantos elementos 0 quanto necessário para a situação em particular.

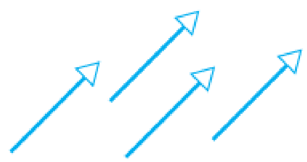
1.2.2 Equivalência (igualdade) de vetores

Dados quaisquer vetores, eles serão **equivalentes** se, e somente se:

- Tiverem a *mesma magnitude*
- Tiverem a *mesma direção*
- Tiverem o *mesmo sentido*

Note que os vetores equivalentes são **iguais**, pois têm a mesma magnitude, direção e sentido. Se dois vetores **u** e **v** são equivalentes, são representados como: $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

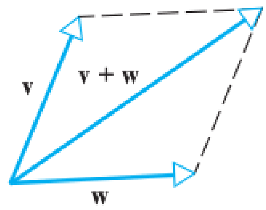
Note também o seguinte: a LOCALIZAÇÃO dos vetores no espaço (bi, tri ou n-dimensional) não tem influência nenhuma na determinação da equivalência entre eles! Os vetores podem estar localizados em locais completamente diferentes no espaço mas, se tiverem a mesma magnitude, direção e sentido, são iguais. Por exemplo, a figura abaixo mostra vetores iguais localizados em locais diferentes no espaço:



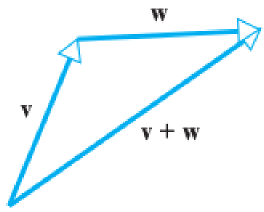
1.2.3 Soma de 2 vetores

Existem dois métodos para realizar a soma de 2 vetores de forma geométrica: o método do *paralelograma* e o método do *triângulo*:

- **Método do Paralelograma**: se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores no espaço bi- ou tri-dimensional e, se *forem posicionados* de modo que o ponto de origem de ambos seja o mesmo, então os dois vetores formam os lados adjacentes de um paralelograma e a *soma* $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ será o vetor representado por uma flecha que sai do ponto de origem comum de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ até o vértice oposto do paralelograma:



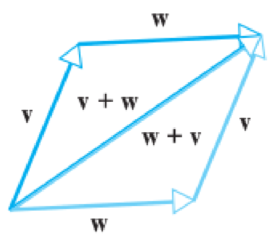
- **Método do Triângulo**: se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores no espaço bi- ou tri-dimensional e, se *forem posicionados* de modo que o ponto inicial de $\mathbf{w}$ coincida com o ponto final de $\mathbf{v}$, então a *soma* $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ será representada por uma flecha que sai do ponto inicial de $\mathbf{v}$ até o ponto final de $\mathbf{w}$, formando um triângulo:



Note que a adição vetorial é **comutativa**, ou seja:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v} \tag{1}$$

Prova geométrica de que a adição vetorial é comutativa:

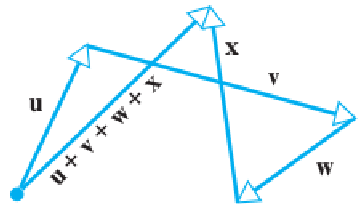


1.2.4 Soma de 3 ou mais vetores

A soma vetorial, além de ser comutativa (como visto na seção anterior), é **associativa**, de forma que a soma de três vetores **u**, **v** e **w** pode ser escrita como:

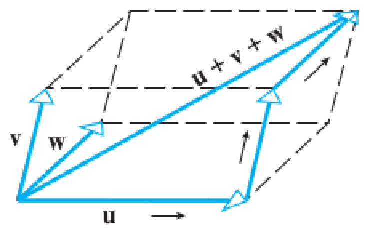
$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \tag{2}$$

A soma de 3 ou mais vetores é feita, geometricamente, colocando-se a origem de um vetor na "ponta" do outro, e então desenhar o vetor resultante partindo da origem do primeiro vetor e chegando na ponta do último. Por exemplo: a soma dos vetores **u**, **v**, **w** e **x**, dada por $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{x}$, é:



Note que o método ilustrado acima pode ser entendido grosseiramente como uma versão "aumentada" do método do triângulo para a soma de 2 vetores!

Se quisermos realizar a soma de 3 vetores em um espaço tridimensional com um ponto de origem comum, a soma será a diagonal do paralelepípedo que tem os vetores como lados adjacentes:



Note também que o método ilustrado acima pode ser entendido grosseiramente como uam versão "aumentada" do método do paralelograma para a soma de 2 vetores!

1.2.5 Subtração de 2 vetores

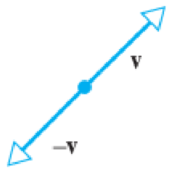
A subtração de vetores utiliza um artifício aritmético que nos permite expressar uma subtração em termos de uma soma. Por exemplo, sejam os escalares a e b, podemos expressar a diminuição como:

$$a - b = a + (-b) \tag{3}$$

Se **w** e **v** são vetores e queremos obter a subtração $\mathbf{w} - \mathbf{v}$, basta calcularmos a soma de **w** com o *vetor oposto* de **v**, o vetor -**v**:

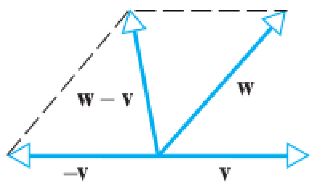
$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v}) \tag{4}$$

E o que é o *vetor oposto*? É um vetor que tem a mesma magnitude e direção, mas sentido contrário. Matematicamente o vetor oposto é obtido pela multiplicação do vetor original por -1. A figura abaixo mostra o vetor **v** e o seu vetor oposto, -**v**:

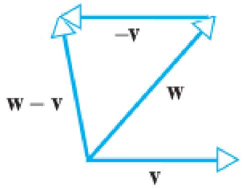


Depois de obter o vetor oposto -**v**, a subtração $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ pode ser resolvida expressando-a como a soma $\mathbf{w}+(-\mathbf{v})$ e utilizando o método do paralelograma ou do triângulo (o resultado será o mesmo).

Se usarmos o método do paralelograma, o vetor $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ será dado pelo paralelograma formado com os vetores **w** e -**v**:



Se usarmos o método do triângulo, o vetor $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ será dado pelo triângulo formado com os vetores **w** e -**v**:



Atenção: a subtração de vetores, em geral, *não é comutativa*, ou seja:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{v} - \mathbf{u} \tag{5}$$

Se a subtração for expressa como uma soma, a operação será comutativa:

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{u} \tag{6}$$

1.2.6 Subtração de 3 ou mais vetores

A subtração de 3 ou mais vetores segue os mesmos princípios da subtração de 2 vetores, ou seja: expressamos os vetores através de seus opostos, e realizamos a soma:

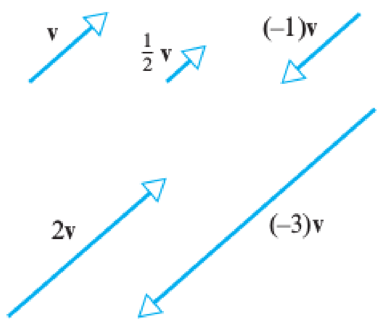
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{x} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) + (-\mathbf{x}) \tag{7}$$

1.2.7 Multiplicação de um vetor por um valor escalar

Sempre que multiplicamos um vetor qualquer, $\mathbf{u}$, por um valor escalar real qualquer, k, estamos realizando a operação $k\mathbf{u}$ e o resultado desse **produto escalar** pode ser:

- Se $k = 0$ ou se $\mathbf{u} = 0$: um vetor nulo ($\mathbf{0}$);
- Se $k > 0$: um vetor com a mesma direção e sentido do vetor original, mas com a magnitude alterada por um fator k, ou seja, a magnitude do vetor resultado será dada por $|k| \times \mathbf{u}$;
- Se $k < 0$: um vetor com a mesma direção, mas com sentido *oposto* ao do vetor original, e com a magnitude alterada por um fator k, ou seja, a magnitude do vetor resultado será dada por $|k| \times \mathbf{u}$.

A figura abaixo ilustra o produto escalar de um vetor $\mathbf{v}$ com os escalares $1/2$, (-1), 2, (-3). Note que a magnitude do vetor é alterada por um fator correspondente ao módulo do escalar ($|k|$), a direção não é alterada, e o sentido será o mesmo ou o oposto dependendo se o escalar é maior ou menor do que zero:

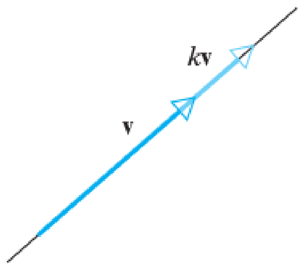


Note que o produto escalar pode ser utilizado sempre que queremos alterar a magnitude e/ou o sentido de um vetor.

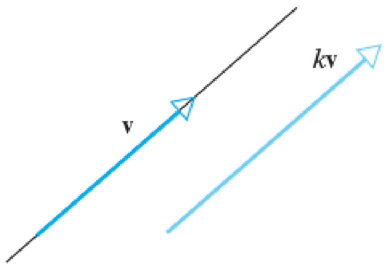
1.2.8 Vetores colineares e paralelos

Existe uma propriedade interessante do uso do conceito de produto escalar (a multiplicação de um vetor por um valor escalar) que é a seguinte: se um vetor

w for o produto escalar obtido a partir de um vetor **v**, de forma que $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, então eles são *colineares*:



Agora note o seguinte: por definição, a LOCALIZAÇÃO de um vetor no espaço não é importante! Assim o produto escalar, além de ser considerado colinear, também pode ser considerado como *paralelo*:



Isso causa uma certa confusão pois na matemática "normal" colinear não é a mesma coisa que paralelo. Mas, quando se trata de vetores, somos obrigados a considerar que colinear significa a mesma coisa que paralelo! Em resumo: se um vetor é o produto escalar de outro, eles são paralelos (ou colineares)!