Cálculo II
Trabalho sobre Área - C1
Prof.: Cinthia Caliari

Alunos: Abrantes Araújo Silva Filho
Jordhan Honorato Félix
Luan Andrade Loose

Abril/2019

Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações de cada item abaixo e calcule sua área.

a) $\begin{cases} y + x^2 = 6 \\ y + 2x - 3 = 0 \end{cases}$

Para esboçar os gráficos, reorganizamos as equações em:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Agora encontramos as raízes (intercepta-x) de cada equação:

Para: $y = -x^2 + 6$

$0 = -x^2 + 6$

$x^2 = 6$

$\boxed{x = \pm\sqrt{6}} \approx \pm 2{,}45$

Para: $y = -2x + 3$

$0 = -2x + 3$

$2x = 3$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$

Agora achamos alguns pontos $(x, f(x))$:

$y = -x^2 + 6$

$(-\sqrt{6}, 0)$

$(0, 6)$

$(\sqrt{6}, 0)$

$y = -2x + 3$

$(3/2, 0)$

$(0, 3)$

$(-1, 5)$

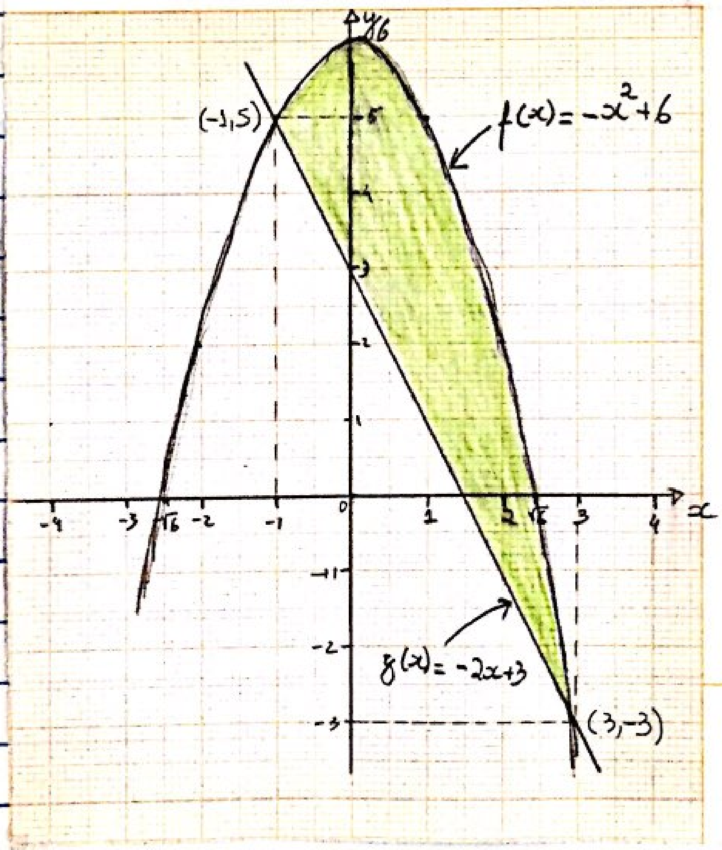
②

E calculamos onde as curvas se cruzam:

$$-x^2+6 = -2x+3$$
$$x^2-6 = 2x-3$$
$$x^2-2x-6+3=0$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x(x-2)-3=0$$

$\therefore$ as curvas se cruzam quando $x=-1$ e $x=3$.

Agora plotamos o gráfico das equações (a área colorida é a área de interesse):



Pelo gráfico percebe-se que a área é dada por:

$$A=\int_{-1}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

Resolvendo a integral, temos:

$$A = \int_{-1}^{3} \left[(-x^2+6) - (-2x+3) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2+6+2x-3)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2+2x+3)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} -x^2\, dx + \int_{-1}^{3} 2x\, dx + \int_{-1}^{3} 3\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{3} x^2\, dx + 2\int_{-1}^{3} x\, dx + 3\int_{-1}^{3} dx$$

$$= \left. \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{-(3)^3}{3} + 3^2 + 3(3) - \left[\frac{-(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right]$$

$$= -\cancel{9} + 9 + \cancel{9} - \left(\tfrac{1}{3} + 1 - 3 \right)$$

$$= 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \boxed{\frac{32}{3} \text{ u.a.}}$$

Portanto, a área delimitada pelas curvas $(y = -x^2+6)$ e $(y = -2x+3)$ é de exatamente $\frac{32}{3}$ unidades de área.

④

b) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = x^2 \end{cases}$

Em primeiro lugar, encontramos as raízes (intercepto-x) de cada equação.

Para: $y = x^3$

$0 = x^3$

$\boxed{x = 0}$

Para: $y = x^2$

$0 = x^2$

$\boxed{x = 0}$

Agora precisamos determinar onde as curvas se cruzam:

$x^3 = x^2$

$x^3 - x^2 = 0$

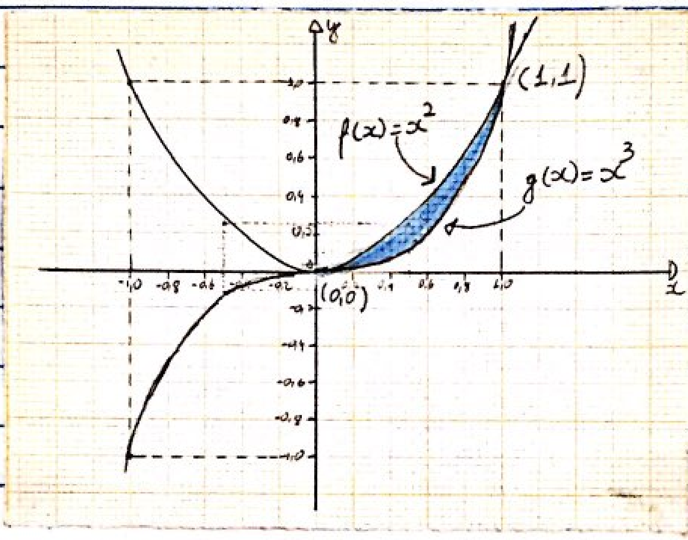
$x^2(x-1) = 0$

$\therefore$ as curvas se cruzam quando $x = 0$ e $x = 1$.

Para plotar o gráfico, achamos alguns pontos:

$y = x^3$	$y = x^2$
(-1, -1)	(-1, 1)
(-0,5, -0,125)	(-0,5, 0,25)
(0, 0)	(0, 0)
(0,5, 0,125)	(0,5, 0,25)
(1, 1)	(1, 1)

O gráfico com as curvas está abaixo, com a área de interesse em azul:



Pelo gráfico percebe-se que a área é dada por:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} - \cancel{\left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4}\right]}^{\,0}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}\ u.a.}$$

Portanto, a área delimitada pelas curvas $(y = x^3)$ e $(y = x^2)$ é de exatamente $\frac{1}{12}$ unidades de área.

⑥

c) $\begin{cases} y = x^{-2} \\ y = -x^2 \end{cases}$, $x = 1$ e $x = 2$

Em primeiro lugar, devemos encontrar as raízes (intercepto-x) de cada equação.

Para: $y = \frac{1}{x^2}$

$0 = \frac{1}{x^2}$ $\therefore \nexists$ intercepto-x, temos assíntota vertical quando $x=0$, y sempre > 0.

Para: $y = -x^2$

$0 = -x^2$

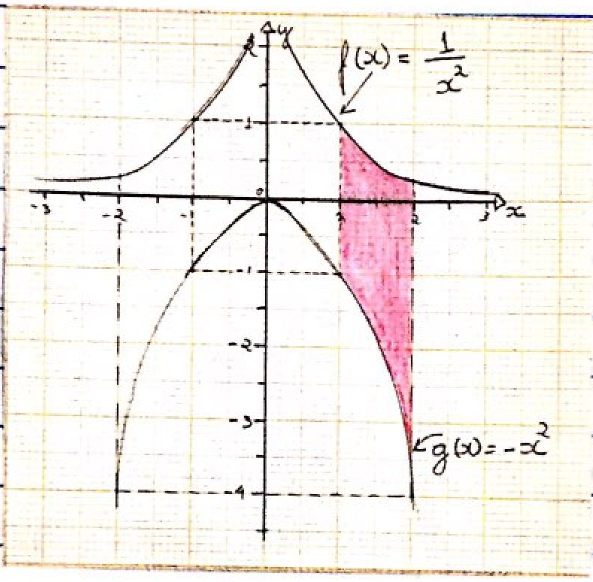
$\boxed{x = 0}$

Agora temos que determinar onde as curvas se cruzam. Como $y = x^{-2}$ é sempre maior do que zero, e como $x=0$ não está no domínio de $y = x^{-2}$ (há uma assíntota vertical), e como $y = -x^2$ é sempre negativa para $\forall x \neq 0$, as curvas não se cruzam.

Para plotar o gráfico, achamos alguns pontos:

$y = x^{-2}$	$y = -x^2$
(-2, 0,25)	(-2, -4)
(-1, 1)	(-1, -1)
(-0,2, 25)	(0, 0)
(0,2, 25)	(1, -1)
(1, 1)	(2, -4)
(2, 0,25)	

O gráfico com as duas curvas está abaixo, com a área de interesse preenchida de vermelho:



Pelo gráfico podemos ver que a área é:

$$A = \int_1^2 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^2 [x^{-2} - (-x^2)]\,dx$$

$$= \int_1^2 (x^{-2} + x^2)\,dx = \int_1^2 x^{-2}\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$$

$$= \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left.-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{2^3}{3} - \left[-\frac{1}{1} + \frac{1^3}{3}\right] = -\frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{17}{6} \text{ u.a.}}$$

Portanto, a área entre as curvas $(y = x^{-2})$ e $(y = -x^2)$, no intervalo $1 \leq x \leq 2$, é de exatamente $\frac{17}{6}$ unidades de área.

8

d) $\begin{cases} y^2 = -x \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\quad y = -1$ e $y = 2$

Para esboçar os gráficos, reorganizamos as equações:

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ x = 4 + y \end{cases}$$

Como essas equações colocam x em função de y, vamos potar alguns pontos para ter uma idéia geral das curvas:

$x = -y^2$

$\begin{cases} 0 = -y^2 \\ y = 0 \quad (0,0) \end{cases}$

$\begin{cases} -1 = -y^2 \\ 1 = y^2 \quad (-1,1) \\ y = \pm 1 \quad (-1,-1) \end{cases}$

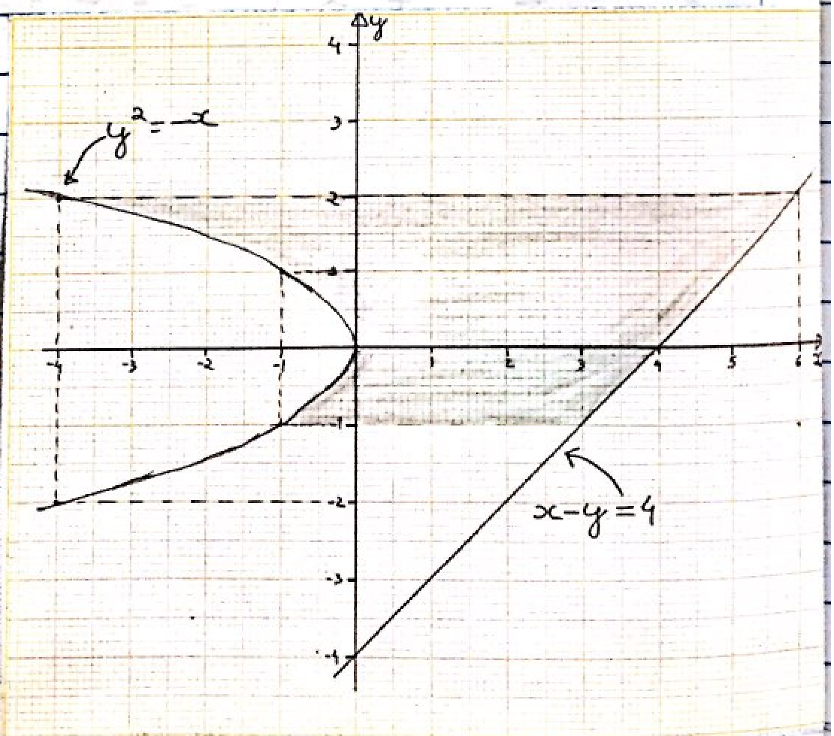
$\begin{cases} -4 = -y^2 \\ 4 = y^2 \quad (-2,2) \\ y = \pm 2 \quad (-2,-2) \end{cases}$

$x = 4 + y$

$\begin{cases} 0 = 4 + y \quad (0,-4) \\ y = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 = 4 + y \quad (4,0) \\ y = 0 \end{cases}$

O gráfico com as duas curvas está ao lado, com a área de interesse preenchida em cinza.



Como as funções são inversas, faremos a integração em relação à y. E como, as inversas seriam $(y=-x^2)$ e $(y=4+x)$, a função $(y=4+x)$ é sempre maior do que $(y=-x^2)$, portanto a área será dada por:

$$A=\int_{-1}^{2}[(y+4)-(-y^2)]\,dy$$

$$=\int_{-1}^{2}(y+4+y^2)\,dy$$

$$=\left.\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+4y\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+4(2)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+4(-1)\right)$$

$$=\frac{8}{3}+2+8-\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}-4\right)$$

$$=\frac{8}{3}+10+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4=\boxed{\frac{33}{2}\text{ u.a.}}$$

Portanto, a área entre as curvas $(y^2=-x)$ e $(x-y=4)$, no intervalo $-1\leq y\leq 2$ é de exatamente $\frac{33}{2}$ unidades de área.

—————— // —————— // ——————

As seguintes ferramentas foram utilizadas durante a preparação deste trabalho:

- GeoGebra Graphing
- WolframAlpha