Integrais duplas em coordenadas polares

Grupo 1

2019-11-08

Resumo

Trabalho acadêmico sobre integrais duplas em coordenadas polares, apresentado na disciplina de *Cálculo III* sob orientação do prof. Kennedy Scopel Gomes, como requisito parcial da terceira avaliação semestral.

Aborda uma revisão rápida sobre o conceito de integrais e o cálculo de áreas e volumes, discute quando o cálculo de volumes com integrais duplas em coordenadas retangulares é difícil de ser realizado, e apresenta uma solução através da utilização de coordenadas polares.

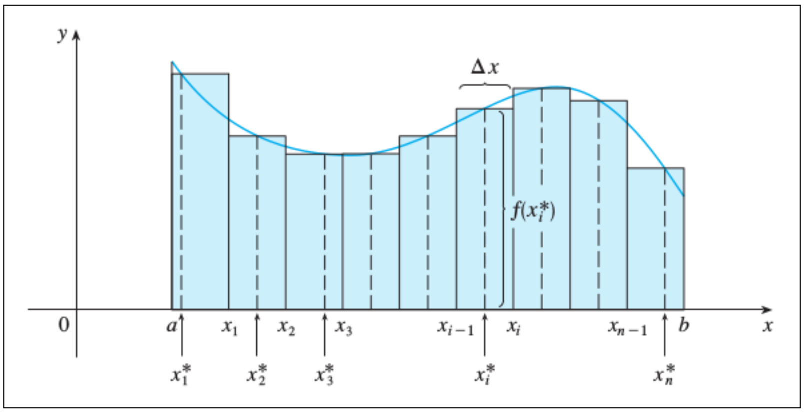
Sumário

1 Revisão rápida

1.1 Integrais simples e o cálculo de áreas

Um dos problemas fundamentais do cálculo é a determinação da *área* sob uma uma função $y = f(x)$ qualquer, quando x varia em um intervalo $a \leq x \leq b$. Esse problema é ilustrado na figura 1, abaixo:

Figura 1: Área sob funções: integral simples



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 884)

Sabemos que uma aproximação da área sob a função pode ser feita com o seguinte procedimento:

1. Dividimos o intervalo $a \leq x \leq b$ em n intervalos menores iguais, Δx. Esse intervalo formará a base de um retângulo que será utilizado para estimar a área sob a função.
2. Dentro de cada intervalo (de cada retângulo) Δx escolhemos um ponto de amostragem x_i^* e calculamos a altura do retângulo, $f(x_i^*)$.
3. A área de cada retângulo é dada então pela multiplicação de sua base (Δx) por sua altura ($f(x_i^*)$): área de cada retângulo é igual a $f(x_i^*)\Delta x$.
4. A aproximação da área total sob a função $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é dada pela *soma* das áreas de todos os retângulos, conforme a equação 1.

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \tag{1}$$

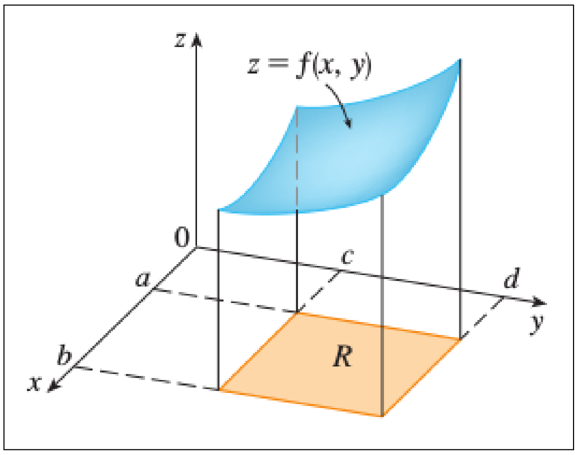
É fácil perceber que à medida em que dividimos o intervalo em um maior número n de retângulos (à medida em que diminuímos Δx), a aproximação da área será melhor. No limite, quando n tende ao infinito, a área sob a curva tende ao valor exato e essa é a idéia do cálculo integral (equação 2):

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2}$$

1.2 Integrais duplas e o cálculo de volumes

Uma expansão natural do problema do cálculo de áreas é o problema do cálculo de *volumes*, ou seja: dada uma função $z = f(x, y)$ qualquer, qual é o volume que está sob a função quando x varia no intervalo $a \leq x \leq b$ e y varia no intervalo $c \leq y \leq d$ (ver figura 2 abaixo):

Figura 2: O problema do cálculo do volume



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 884)

Como calcular o volume do sólido sob a função ilustrada na figura anterior? Note que a variação no eixo x e a variação no eixo y delimitam uma "base" retangular R sob a função $z = f(x, y)$. Isso nos permite expandir o raciocínio do cálculo de áreas e obter uma aproximação do volume com o seguinte procedimento (ver também figura 3 a seguir):

1. Dividimos a base retangular R em vários retângulos menores, R_{ij}

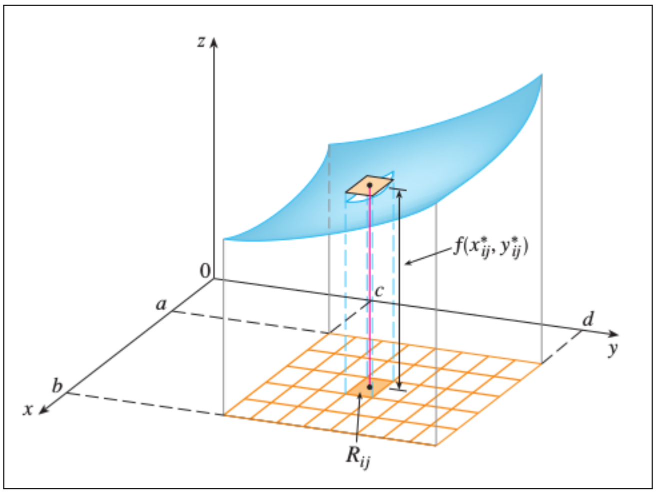
2. A *área de cada retângulo* R_{ij} é então: $\Delta A = \Delta x \Delta y$

3. Dentro de cada retângulo R_{ij} escolhemos um ponto de amostragem (x_{ij}^*, y_{ij}^*) e usamos esse ponto para calcular a altura do prisma, dada por: $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$

4. O *volume de cada prisma*, $V_{R_{ij}}$, é dado então pela multiplicação da área de sua base, ΔA, por sua altura, $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, da seguinte maneira:

$$V_{R_{ij}} \approx f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \tag{3}$$

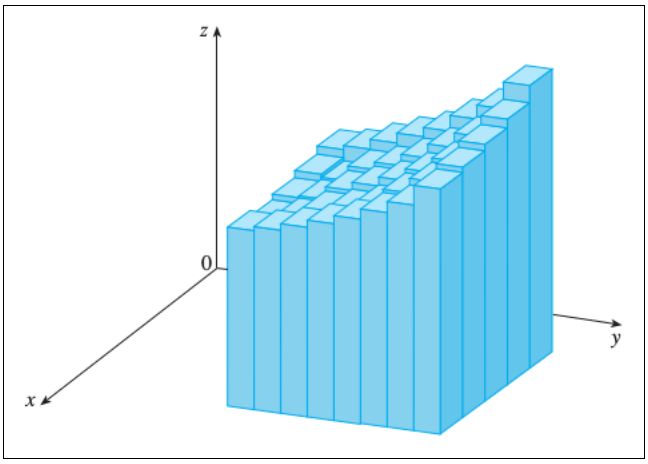
Figura 3: Dividindo o sólido sob a função em prismas



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

Para obter a estimativa do volume total sob a função, basta então somar os volumes de todos os prismas (ver figura 4 e equação 4):

Figura 4: Estimativa do volume sob a função

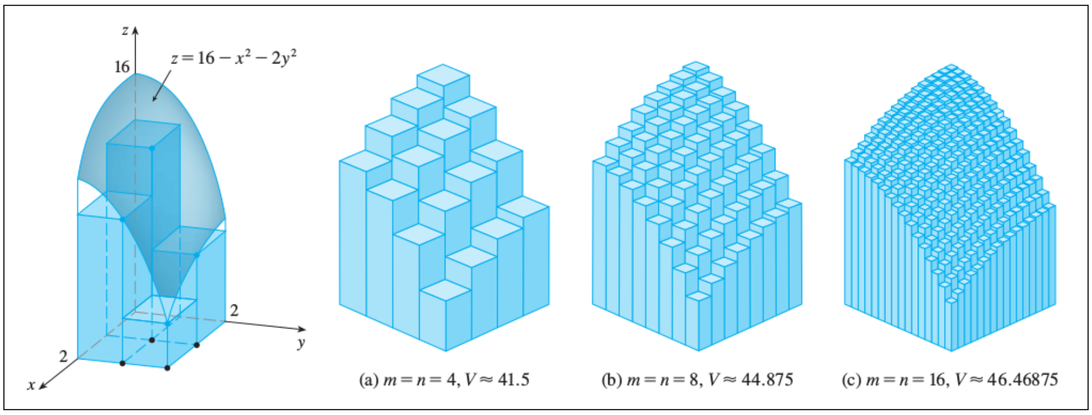


James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \tag{4}$$

Note que à medida em que dividimos o volume sob a função em um maior número de prismas (maior número de retângulos R_{ij}, com intervalos Δx e Δy menores e, portanto, com áreas ΔA menores), a aproximação do volume será melhor (ver figura 5, a seguir):

Figura 5: Melhorando a estimativa do volume



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

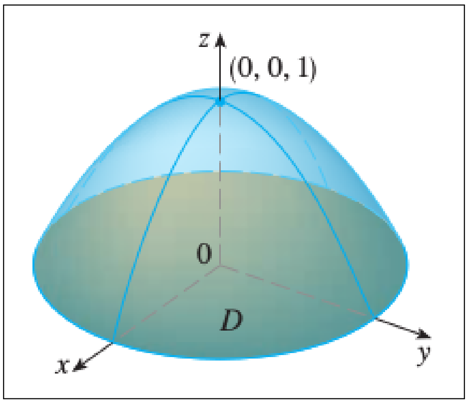
No limite, quanto o número de prismas tende ao infinito, o volume sob a curva tende ao valor exato, e essa é a idéia do uso de integrais duplas para o cálculo de volumes (equação 5):

$$\begin{aligned} V &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &= \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}A \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5}$$

2 Volumes com cálculo complicado

O uso de integrais duplas para o cálculo de volumes (ver equação 5) é aplicável em diversas situações e em diferentes funções. Entretanto, existem funções nas quais o cálculo do volume é difícil. Considere, por exemplo, o cálculo do volume do sólido limitado abaixo pelo plano $z = 0$ e acima pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ (figura 6):

Figura 6: Como calcular esse volume?



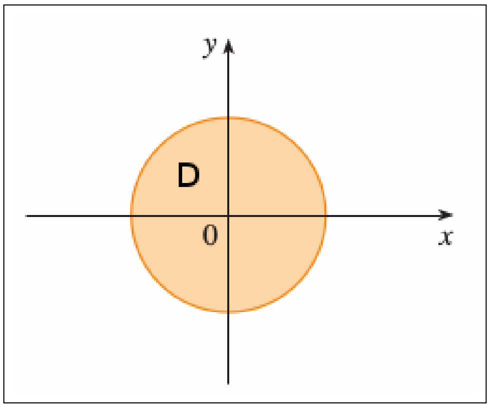
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 906)

Note que a base não é mais um retângulo, é um disco D. Se tentarmos calcular o volume através da utilização direta da equação 5, chegaremos em uma expressão muito difícil de resolver:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}A \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

E por que é difícil calcular o volume de funções parecidas com a ilustrada na figura 6? Pois a "base" do sólido não é mais um retângulo, é um disco, e, já que estamos utilizando o sistema de *coordenadas retangulares*, não é possível descrever o disco D formado por x e y por uma única função (ver figura 7):

Figura 7: O disco D não pode ser descrito por uma única função



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 904)

Para poder calcular esses volumes difíceis temos que mudar nosso ponto de vista[1]: precisamos sair do sistema de coordenadas retangulares e utilizar o sistema de *coordenadas polares*.

A próxima seção explicará o que é o sistema de coordenadas polares para, a partir desse conhecimento, demonstrar como o cálculo integral pode ser feito utilizando-se esse referencial.

3 O sistema de coordenadas polares

Um *sistema de coordenadas* serve para representar a *localização* de um ponto no plano, através de um *par ordenado* de números chamados de *coordenadas*.

Usualmente, quando representamos um ponto no plano, estamos nos referindo ao **sistema de coordenadas retangulares** (cartesianas), que são distâncias orientadas a partir de dois eixos perpendiculares.

[1]Uma animação interessante que mostra como mudar o ponto de vista muda nosso entendimento sobre uma função pode ser vista em http://www.youtube.com/watch?v=Dmc3mQ87GiQ.

No sistema de coordenadas retangulares a localização de um ponto P é dada por

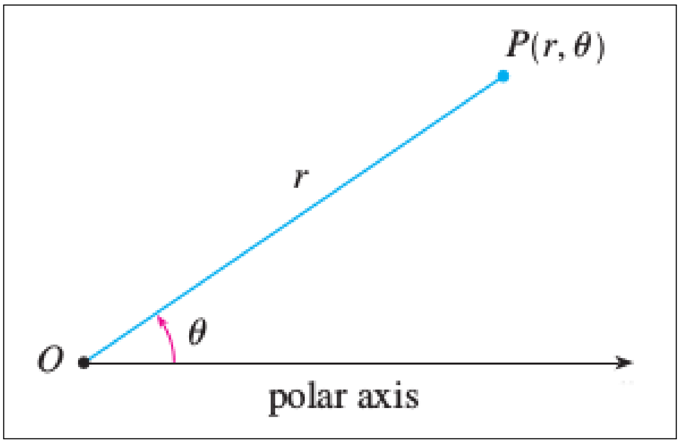
$$P = (a, b) \tag{6}$$

onde a é a projeção de P no eixo x, e b é a projeção de P no eixo y.

Entretanto, para descrever curvas que exibem uma espécie de "afinidade especial por um ponto de origem", como um círculo ou a trajetória de um planeta ao longo de sua órbita, é melhor utilizar um outro sistema de coordenadas, o sistema de coordenadas polares.

No **sistema de coordenadas polares** uma curva é descrita como a trajetória de um ponto móvel cuja posição é especificada pela sua *direção a partir da origem* e pela sua *distância até a origem*. Assim, qualquer ponto é localizado através de sua *direção* e sua *distância* em relação à origem (figura 8):

Figura 8: O eixo polar



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 596)

A direção é dada pelo ângulo θ em relação ao eixo polar (geralmente em *radianos*), e a distância r é a distância direta da origem até o ponto.

Esses dois números, r e θ, são o par ordenado que formam as *coordenadas polares* da localização de um ponto no plano.

Por convenção, o par de coordenadas polares é escrito primeiro informando-se a distância, e depois o ângulo:

$$P = (r, \theta) \tag{7}$$

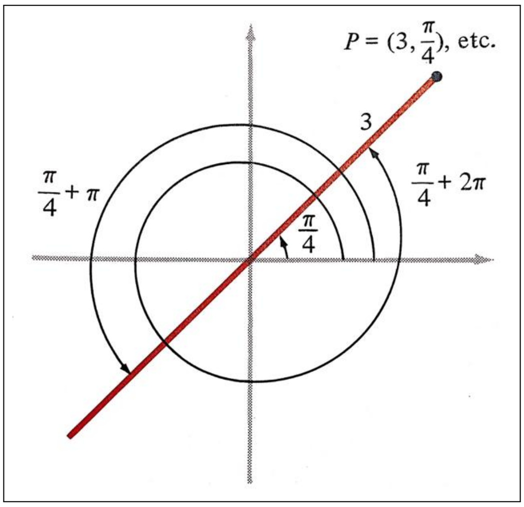
Note o seguinte (figura 9):

- Esqueça o pensamento cartesiano de esquerda/direita (eixo x) e acima/abaixo (eixo y).
- Pense em termos de *ao redor* e de *distância* em relação ao *polo*, a origem.
- $r = 0$ especifica a origem, independente de θ.
- Cada ponto tem muitos pares de coordenadas polares, pois qualquer múltiplo de 2π adicionado ou subtraído de θ faz uma "volta completa" na direção, parando no mesmo ponto.

- Cada coordenada polar define exatamente um ponto.
- Se aumentarmos θ por π, estamos na mesma "reta" mas na direção contrária:

$$(r, \theta + \pi) = (-r, \theta) \tag{8}$$

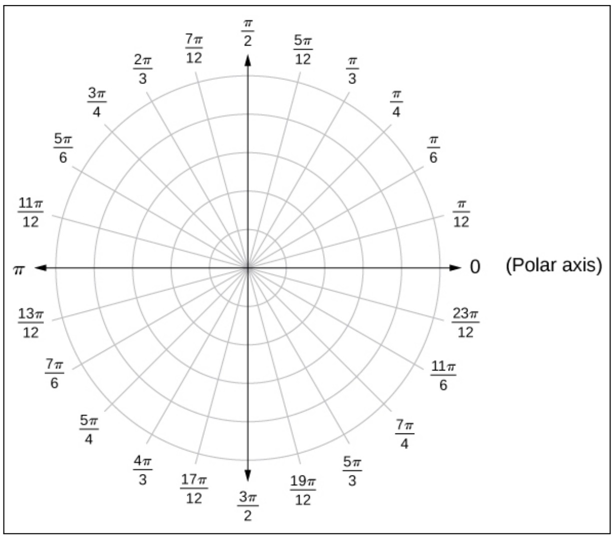
Figura 9: Particularidades das coordenadas polares



George Simmons: *Calculus with Analytic Geometry* (2ª ed., pg. 560)

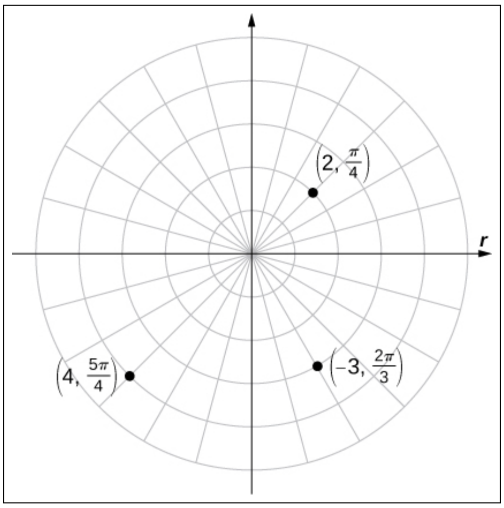
Uma representação interessante do sistema de coordenadas polares e de como os pontos são localizados é exibida nas figuras 10 e 11, abaixo:

Figura 10: O sistema de coordenadas polares



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 645)

Figura 11: Os pontos estão ao redor da origem

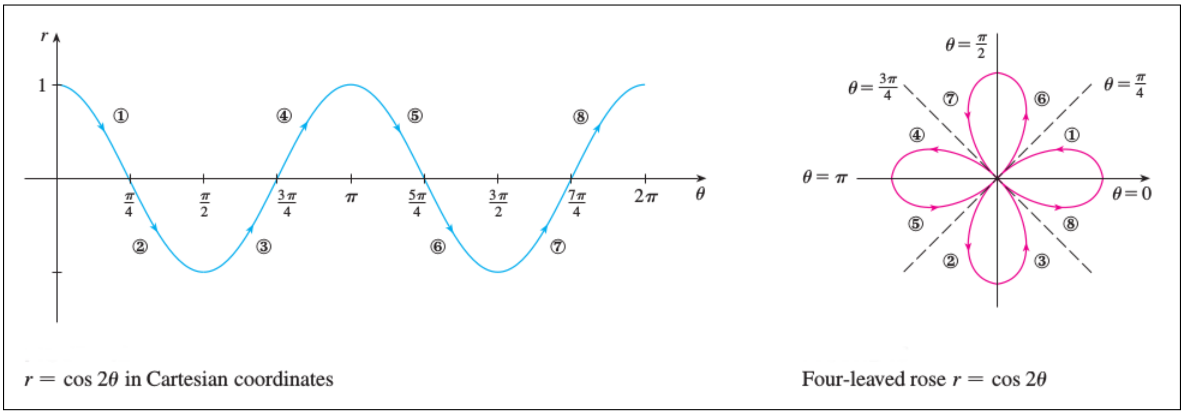


Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 646)

3.1 Equações e curvas polares

Para ilustrar de modo cristalino como uma mesma função pode ser entendida de forma diferente dependendo do sistema de coordenadas utilizado (retangular ou polar), considere a seguinte função: $r = \cos(2\theta)$. Se essa função for plotada em coordenadas retangulares, será uma onda; se for plotada em coordenadas polares será uma rosa (figura 12):

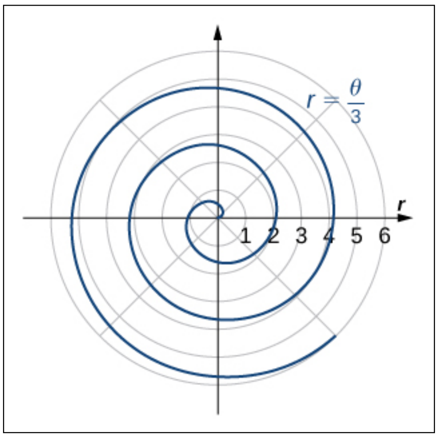
Figura 12: Mesma função, dois pontos de vista



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 600)

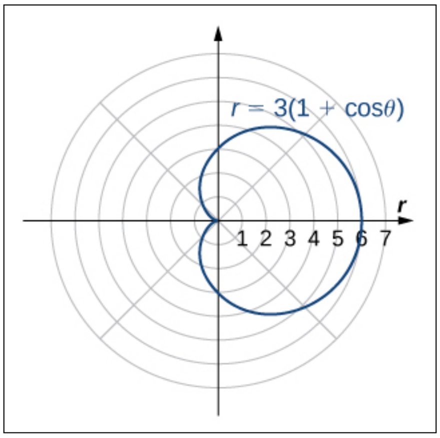
O gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$ ou, mais genericamente, $F(r, \theta) = 0$, consiste de todos os pontos P que têm *pelo menos uma* representação (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação polar. Isso faz com que as equações polares, quando plotadas, assumam formas belas e inusitadas (ver figuras: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19).

Figura 13: A beleza polar: espiral



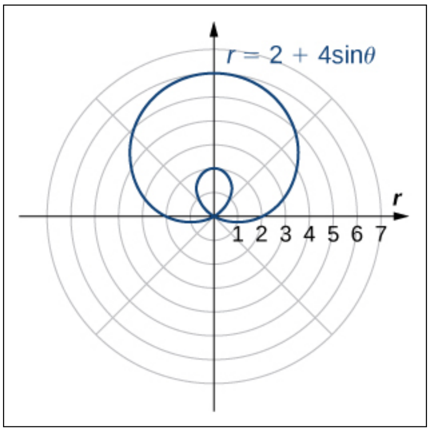
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 651)

Figura 14: A beleza polar: cardióde



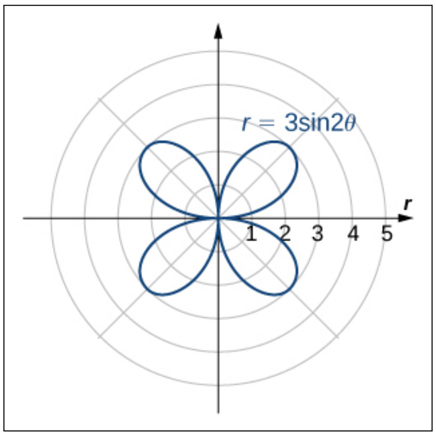
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

Figura 15: A beleza polar: Limaçon



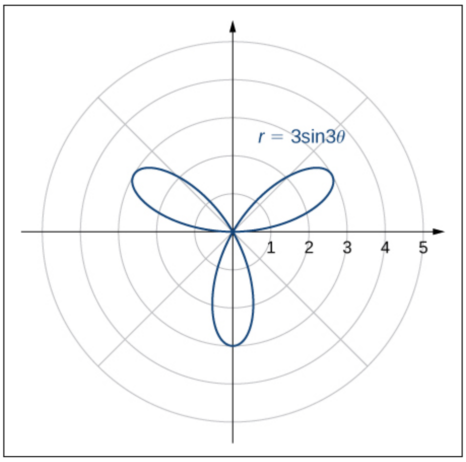
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

Figura 16: A beleza polar: rosácea



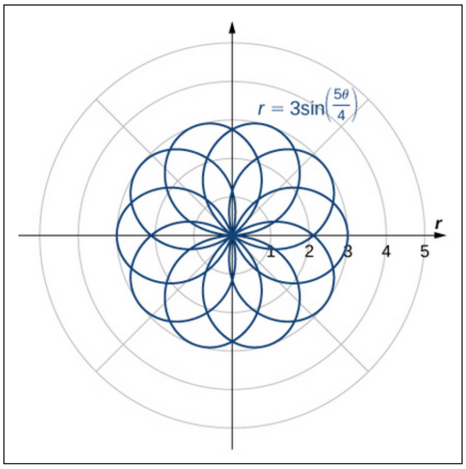
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

Figura 17: A beleza polar: rosácea com 3 pétalas



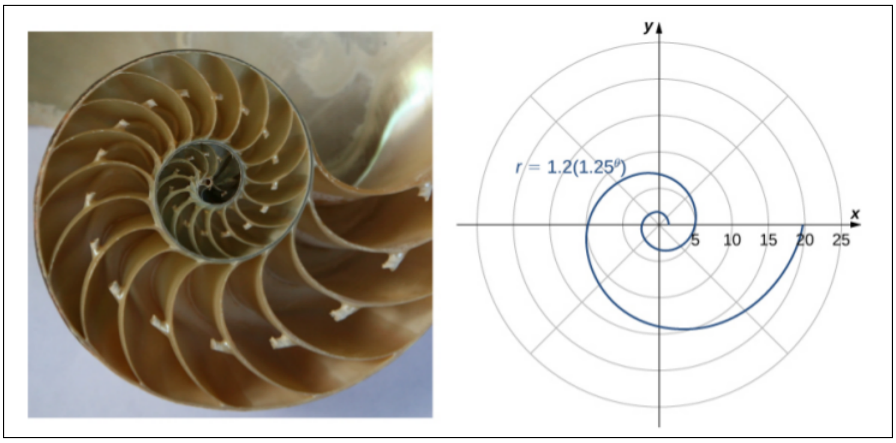
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

Figura 18: A beleza polar: formas inusitadas



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

Figura 19: A beleza polar: espiral logarítmica



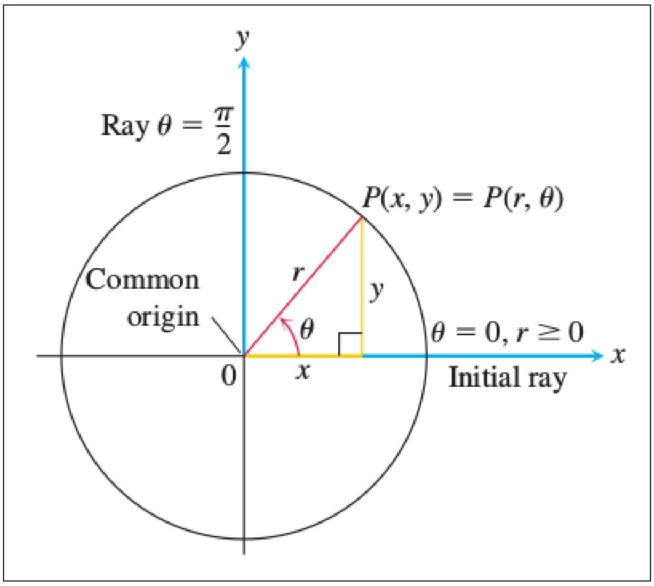
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 655)

Não é possível deixar de notar, pela figura 19, como uma simples função matemática, $r = 1.2(1.25^{\theta})$, pode ser utilizada para descrever uma obra de Deus, uma obra da criação. Isso nos faz pensar que Galileu Galilei estava correto ao dizer que "a matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o universo"[2].

3.2 De retangular para polar e vice-versa

Como uma mesma função pode ser expressa tanto em coordenadas retangulares quanto em coordenadas polares, existe um modo direto de transformar coordenadas retangulares em polares e vice-versa (figura 20) utilizando-se trigonometria:

Figura 20: Retangular $\leftrightarrows$ Polar



George Thomas: *Thomas' Calculus: early transcedentals* (14ª ed., 2017, pg. 683)

[2]Apesar de universalmene conhecida e atribuída à Galileu, sabe-se que ele não escreveu exatamente isso. Uma simples pesquisa na internet mostrará diversas citações semelhantes e polêmicas quanto a versão exata ou correta da frase.

A transformação de coordenadas polares em coordenadas retangulares é dada por:

$$x = r\cos(\theta) \tag{9}$$

$$y = r\sin(\theta) \tag{10}$$

E a transformação de coordenadas retangulares em coordenadas polares é dada por (cuidado para que o sinal de r e a escolha de θ sejam consistentes com o quadrante no qual o ponto (x, y) está):

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{11}$$

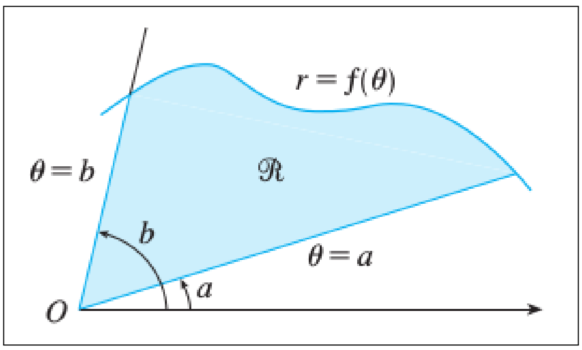
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{12}$$

Essas transformações entre coordenadas retangulares e polares serão fundamentais para o cálculo do volume utilizando-se integrais.

4 Integrais simples em coordenadas polares

O problema do cálculo de áreas examinado na seção 1.1, com coordenadas retangulares, tem um equivalente em coordenadas polareas, ou seja: dada uma equação polar qualquer $r = f(\theta)$, como encontrar a área da região R delimitada pelos ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$ (figura 21)?

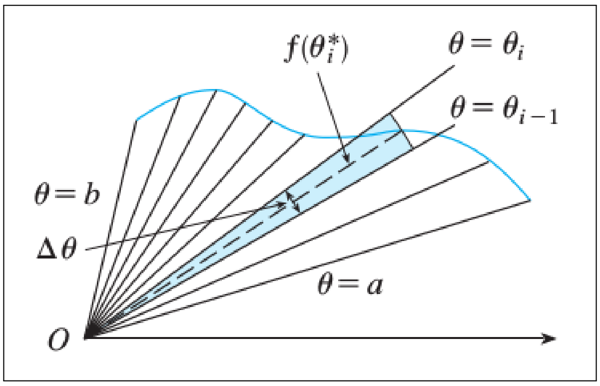
Figura 21: O problema da área em coordenadas polares



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)

A solução é dividir a região R em vários setores, calcular a área de cada setor e somar todas as áreas (figura 22), de forma análoga ao procedimento para o cálculo de áreas em coordenadas retangulares:

Figura 22: Divisão da região R em vários setores

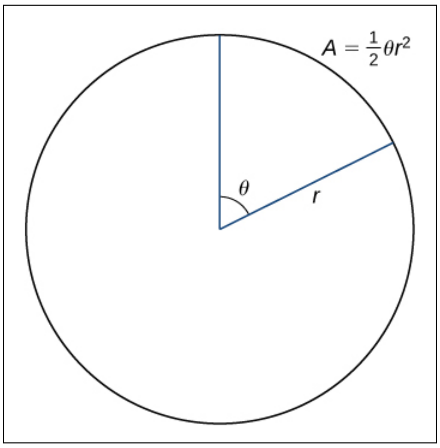


James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)

Sabemos que a área de um setor de um círculo é proporcional ao ângulo θ (figura 23) e dada por:

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\theta r^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Figura 23: Área de um setor de um círculo



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 663)

Como o raio r na equação 13 corresponde à $f(\theta_i^*)$, podemos calcular a área de *cada setor* na figura 22 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta A_i &\approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \\ &\approx \frac{1}{2}\left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta \end{aligned} \tag{14}$$

Para calcular a estimativa da área total da região R sob a função $r = f(\theta)$, delimitada pelos ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$, basta somar as áreas de cada setor individual:

$$A \approx \sum_{i}^{n} \frac{1}{2} \left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta \tag{15}$$

É fácil perceber que à medida em que aumentamos o números de setores a estimativa do cálculo da área fica mais precisa. No limite, quando o número de setores tende ao infinito, a área tende ao valor exato, e essa é a idéia do cálculo de áreas em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i}^{n} \frac{1}{2} \left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \left[f(\theta)\right]^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{16}$$

5 Integrais duplas em coordenadas polares

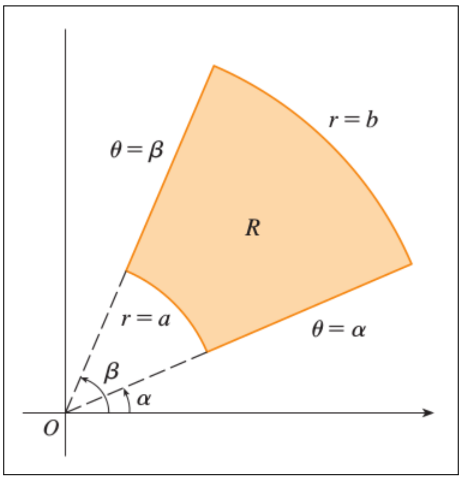
Tendo como base o conhecimento acumulado nas seções anteriores, agora é possível expandir o problema do cálculo de área em coordenadas polares para o problema do volume em coordenadas polares.

Revisitando o problema do cálculo do volume do sólido limitado abaixo pelo plano $z = 0$ e acima pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ (ver figura 6 na página 5), utilizaremos um artifício para dividir a base do sólido (o disco D) em diversos *retângulos polares* e, a partir desses retângulos, faremos o cálculo do volume.

Um **retângulo polar** (figura 24) é a região formada pelo conjunto de coordenadas polares delimitadas por dois ângulos e duas distâncias:

$$R = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\} \tag{17}$$

Figura 24: O retângulo polar



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 904)

Usando o conceito de retângulos polares, dividimos a base do sólido (o disco D na figura 6) em vários retângulos polares, conforme ilustrado na figura 25 a seguir, com as seguintes características:

- O intervalo $[a, b]$ é dividido em m intervalos $[r_{i-1}, r_i]$, de larguras *iguais*:

$$\Delta r = \frac{b-a}{m}$$

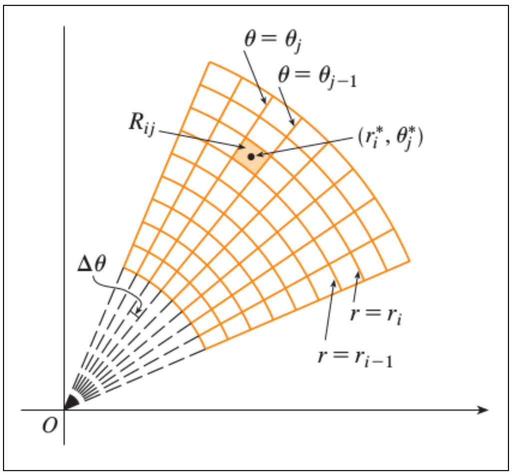
- O intervalo $[\alpha, \beta]$ é dividido em n intervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, de larguras *iguais*:

$$\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$$

- O centro de cada retângulo polar é dado por:

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \text{e} \qquad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Figura 25: Divisão da base do sólido em retângulos polares



James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 904)

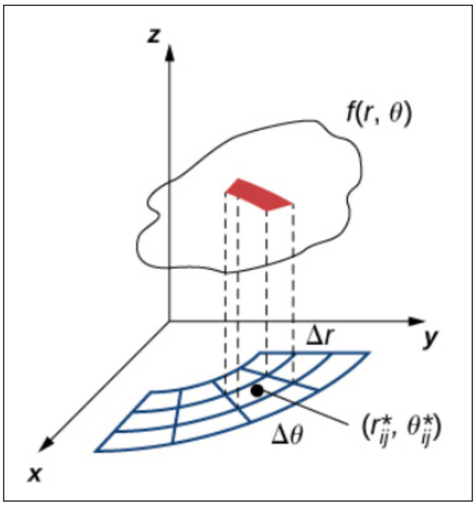
Podemos então calcular a área de *cada retângulo polar* usando a equação 13 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Delta A_i &= \left(\frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta\right) - \left(\frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\
&= \dots \\
&= r_i^*\Delta r\Delta\theta
\end{aligned} \tag{18}$$

Note que na equação 18, que calcula a área de cada retângulo polar, surgiu um fator r_i^* que multiplica $\Delta r\Delta\theta$. Esse fator é necessário para levar em conta que retângulos mais distantes da origem terão área maior (do contrário, como dividimos os setores em larguras iguais, todos os retângulos teriam a mesma área, o que não faz sentido[3]).

Agora que já sabemos como calcular a área de cada retângulo polar da base de nosso sólido, vamos expandir o raciocínio para o volume do prisma que tem como base o retângulo polar e altura até a superfície da função, conforme ilustrado na figura 26 a seguir:

Figura 26: Volume do sólido que tem como base o retângulo polar



Gilbert Strang & Edwin Herman:
Calculus (ed. online, 2017, vol. 3, pg. 527)

O volume de cada prisma será dado pela multiplicação da área de sua base, ΔA_i, com sua altura, dada em coordenadas polares por $f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)]$:

$$V_{R_{ij}} \approx f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)]\Delta A_i \tag{19}$$

E a estimativa do volume total sob o sólido é dada pela somatória do volume individual de todos os prismas:

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)]\Delta A_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)] r_i^* \Delta r \Delta\theta \end{aligned} \tag{20}$$

Perceba que à medida em que aumentamos o número de prismas (à medida em que os retângulos polares ficam menores), a estimativa do cálculo do volume fica mais precisa. No limite, quando o número de retângulos polares tendo ao infinito, o volume tende ao valor exato, e essa é a idéia de usar coordenadas polares para o cálculo de volumes:

[3]Um vídeo disponível em uma página da Universidade do Texas fornece uma explicação interessante para isso: https://web.ma.utexas.edu/users/m408m/Display15-4-2.shtml

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)] \Delta A_i \\
&= \iint\limits_R f[r\cos(\theta), r\sin(\theta)]\, \mathrm{d}A \qquad (21) \\
&= \int_\alpha^\beta \int_a^b f[r\cos(\theta), r\sin(\theta)] \textcolor{red}{r}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

Em resumo, quando temos uma função de difícil integração quando expressa em coordenadas retangulares, $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$, podemos reexpressar a mesma função em coordenadas polares, $\int_\alpha^\beta \int_a^b f[r\cos(\theta), r\sin(\theta)] r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$, para facilitar o cálculo.

A Bibliografia consultada

- James Stewart: *Cálculo*, 8ª edição, volume 2 (seções 10.3, 10.4, 15.3)
- George F. Simmons: *Calculus with Analytic Geometry*, 2ª edição (seções 16.1, 16.2, 16.3, 20.4)
- George B. Thomas, JR: *Thomas' Calculus: early transcedentals*, 14ª (seções 11.3, 11.4, 11.5, 15.4)
- Gilbert Strang & Edwin "Jed" Herman: *Calculus*, edição online de 2017, volume 2 (seções 7.3, 7.4)
- Gilbert Strang & Edwin "Jed" Herman: *Calculus*, edição online de 2017, volume 3 (seções 1.3, 1.4, 5.3)
- Mauri C. Nascimento. *Coordenadas Polares.*. Dep. de Matemática, Unesp/Bauru. Disponível online em http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Down/Polares.pdf.
- Bosco Nogueira. *Integrais Duplas*. Departamento de Matemática, UFPB. Disponível online em http://www.mat.ufpb.br/bosco/calculoiii2011/nciii.pdf
- Lorenzo Sadun. *Double Integrals in Poolar Coordinates*. M408M, Texas University Learning Module Pages. Disponível online em https://web.ma.utexas.edu/users/m408m/Display15-4-2.shtm

B Integrantes do Grupo 1

- Abrantes Araújo Silva Filho
- Alecsandro Queiroz
- Anderson Kirmse Rodrigues
- Anna Karolyna Lima Santos
- Antônio Carlos da Silva Alberto
- Beatriz Sauvalaio Benezolli
- Braian dos Santos Calot
- Bruno Brasil Ferreira
- Bryan Lucas Barbosa Lima
- Danielle Marcelino Cicilioti

C Fontes em LaTeX

Este trabalho (juntamente com os slides para apresentação) foram escritos utilizando-se TeX e LaTeX. O código fonte deste trabalho está disponível online para estudantes interessados em aprender a utilizar essas ferramentas em: https://github.com/abrantesasf/matematica/tree/master/calculus/faesa/calculo3/polar