Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof. Me. Rober Marcone Rosi
Unidade de Engenharia, Computação e Sistemas

Unidade 1 – Matrizes

- Definir matriz;
- Construir matriz dada por lei.
- Identificar uma matriz especial;
- Determinar a transposta de uma matriz;
- Operar matrizes;
- Definir inversa de uma matriz;
- Listar as propriedades das operações com matrizes;
- Aplicar a álgebra matricial na solução de problemas.

Conceitos

MATRIZ. Uma matriz é um quadro retangular de números dispostos em linhas e colunas. Em geral, usamos letras maiúsculas para nomear uma matriz, e parênteses, colchetes ou barras duplas, para apresentar seus elementos.

Exemplo 1. As matrizes A e I abaixo são representadas por colchetes e a matriz B por parênteses.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 & 2{,}8 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & \sqrt{3} \\ 3 & -1 & 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2. As matrizes C e L são representadas por barras duplas.

$$C = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\| \qquad L = \left\| \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \right\|$$

Conceitos

Conceitos

ORDEM (OU TIPO) DE UMA MATRIZ. Uma matriz é do tipo (ou de ordem) **mxn** se ela possui **m** linhas e **n** colunas.

Exemplo 3. A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ é do tipo (ou de ordem) 2x3.

Exemplo 4. $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 & 2{,}8 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & \sqrt{3} \\ 3 & -1 & 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3x5.

- Se m = n, dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem n** e os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a **diagonal (principal) de A.**
- Uma matriz que só possui uma linha é chamada **matriz linha,** e uma matriz que só possui uma coluna é chamada **matriz coluna**.

Vamos Exercitar

FAESA
Faça acontecer

Atividades

Você é capaz de determinar:

1. A ordem da matriz $C = \left\|\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}\right\|$?

2. O tipo da matriz $L = \left\|\begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}\right\|$?

3. A ordem ou tipo da matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

4. Qual o número elementos de uma matriz do tipo 7x5?

Vamos Exercitar

Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 & 2{,}8 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & \sqrt{3} \\ 3 & -1 & 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$, você é capaz de determinar:

Atividades

a) Os elementos da terceira coluna da matriz A?

b) Os elementos da segunda linha da matriz B?

c) O elemento b_{25} da matriz B?

d) A representação do elemento 6 da matriz B?

e) Qual é o elemento nulo da matriz A?

Matriz Genérica

Uma **matriz** A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A ***i*-ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

Matriz Genérica

para $i = 1, \ldots, m$ e a **j-ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \ldots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A.

Vamos Exercitar: Construa as matrizes definidas genericamente pelas leis dadas abaixo:

1. Seja $A = (a_{ij})_{3x4}$, onde $a_{ij} = 2i - j$.
2. Seja $I = (a_{ij})_{3x3}$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$.
3. Seja $B = (b_{ij})_{5x4}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} i \text{ se } i > j \\ j \text{ se } i < j \\ i + j \text{ se } i = j \end{cases}$.

Igualdade de Matrizes

IGUALDADE DE MATRIZES. As matrizes A e B são iguais quando possuem a mesma ordem e, além disso, cada elemento a_{ij} da matriz A é igual ao correspondente b_{ij} na matriz B.

Conceitos

Exemplo 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes iguais.

Exemplo 2. Sabendo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ são iguais, conclui-se que a,b, x e y valem?

Igualdade de Matrizes

MATRIZ OPOSTA

Matriz oposta é uma matriz multiplicada por -1. Assim como o oposto de 9 é -9, a matriz oposta da matriz A é -A. Colocando de uma maneira mais simples: basta inverter o sinal dos elementos da matriz.

Exemplo 3. A oposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ é $(-A) =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matrizes Especiais

Conceitos

MATRIZ LINHA. Matriz linha é uma matriz que possui uma única linha.

Exemplo 1. $A = (2)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ são matrizes linhas.

Conceitos

MATRIZ COLUNA. Matriz coluna é uma matriz que possui uma única coluna.

Exemplo 2. $M = (-2)$, $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ são matrizes colunas.

Estas matrizes já foram utilizadas por nós para representar quais elementos?

Matrizes Especiais

Conceitos

MATRIZ NULA. Matriz nula é uma matriz que possui todos os seus elementos nulos.

Em geral, uma matriz nula de ordem mxn é denominada O_{mxn}.

Exemplo 3. $O_{1x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $O_{4x1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ são matrizes nulas.

Matrizes Especiais

MATRIZ QUADRADA. Matriz quadrada é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e de colunas. Em geral uma matriz quadrada com n linhas e n colunas é chamada de matriz quadrada de ordem n.

Conceitos

Exemplo 4. As matrizes $A = [7]$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ são quadradas, de ordem 1, 3 e 4, respectivamente.

DIAGONAIS DE UMA MATRIZ QUADRADA. Em uma matriz quadrada de ordem n os elementos tais que $i = j$ formam a **diagonal principal**. Os elementos tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Conceitos

Com relação à matriz $A = (a_{ij})_{4x4}$, tal que $a_{ij} = 2i + 3j$:

Atividades

a) Liste os elementos da diagonal principal.

b) Liste os elementos da diagonal secundária.

Matrizes Especiais

Conceitos

MATRIZ DIAGONAL. Matriz diagonal é uma matriz quadrada onde todos os elementos que **não** estão na diagonal principal **nulos**.

Exemplo 6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ são matrizes diagonais.

Conceitos

MATRIZ TRIANGULAR. Matriz triangular é uma matriz quadrada onde todos os elementos que estão abaixo (ou acima) da diagonal principal são nulos.

Exemplo 7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ são matrizes triangulares.

Matrizes Especiais

Conceitos

MATRIZ IDENTIDADE. Matriz identidade é uma matriz diagonal onde todos os elementos que estão na diagonal principal são unitários.

Em geral, uma matriz identidade de ordem n é denominada I_n.

Exemplo 8. $I_1 = [1]$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes identidade.

Matrizes Especiais

Conceitos

TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ. A transposta de uma matriz A de ordem mxn é a matriz A^t de ordem nxm tal que as linhas da matriz A passam a ser as colunas da matriz A^t. Da mesma forma, as colunas da matriz A passam a ser as linhas da matriz A^t.

Exemplo 9. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ então $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Exemplo 10. Se $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ então $B^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 11. Se $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ então $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Matrizes Especiais

FAESA
Faça acontecer

Atividades

1. Escreva as matrizes:

a) Nula de ordem 3x4, O_{3x4}.

b) Identidade de ordem 5, I_5.

2. Escreva a transposta da matriz $C = (c_{ij})_{2x5}$ onde $c_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ se } i < j \\ 1 \text{ se } i = j \\ -2 \text{ se } i > j \end{cases}$.

Atenção

PROPRIEDADE DA TRANSPOSTA: $(A^t)^t = A$.

Matrizes Especiais

Conceitos

MATRIZ SIMÉTRICA. Uma matriz é simétrica se ela é igual à sua transposta.

Exemplo 12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ são matrizes simétricas.

Conceitos

MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA. Uma matriz é anti-simétrica se ela é igual à oposta de sua transposta.

Exemplo 13. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes anti-simétricas.

Matrizes Especiais

Reflexão

Será que existe uma matriz nula, quadrada, linha, coluna, diagonal, triangular, simétrica e anti-simétrica?

Será que existe uma matriz nula, diagonal e triangular?

O que toda matriz anti-simétrica tem de especial em sua diagonal principal?

Operações com Matrizes

- Para codificar uma mensagem, cada letra foi associado a um número de acordo com a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Figura 1. Quadro do valor numérico de cada letra.

Sabendo que a matriz codificadora é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

e que a mensagem codficada é dada pela matriz abaixo (produto da matriz A pela matriz M):

$$AM = \begin{pmatrix} 66 & 60 & 22 & 82 & 42 & 54 & 74 & 76 & 32 & 50 & 82 & 86 & 86 & 118 & 70 & 52 & 48 & 102 & 56 & 108 \\ 78 & 54 & 20 & 95 & 30 & 66 & 79 & 83 & 19 & 40 & 80 & 100 & 88 & 122 & 80 & 41 & 33 & 105 & 43 & 108 \end{pmatrix}$$

Encontre a mensagem representada pela matriz M.

Operações com Matrizes

ADIÇÃO DE MATRIZES

Nem sempre é possível somar duas matrizes. A adição de matrizes só existe para matrizes de mesma ordem.

ADIÇÃO DE MATRIZES. Se $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$, são matrizes de mesma ordem então a $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Conceitos

Na prática, somar duas ou mais matrizes de mesma ordem, significa somar seus elementos correspondentes.

Operações com Matrizes

Adição

Dadas duas matrizes A e B, somaremos os elementos de A com seus correspondentes em B, ou seja, se tomarmos um elemento na primeira linha e primeira coluna de A devemos somá-los com o elemento na primeira linha e primeira coluna de B.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 \\ \boxed{4} & 0 \\ \boxed{2} & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{0} & 4 \\ \boxed{-2} & 5 \\ \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 \\ \boxed{2} & 5 \\ \boxed{3} & 5 \end{bmatrix}$$

É sempre possível somar matrizes?

Não!

Somente quando estas forem de mesma **ordem.**

Se liguem, o mesmo vale pra subtração.

Operações com Matrizes

1. Considerando as matrizes A e B dadas abaixo, determine as matrizes: A + B, B + A, A – B e B – A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 9 \\ 3 & 3 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & -1 & 9 & 3 \\ -7 & 3 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

2. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B^t = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -9 \end{pmatrix}$, determine as matrizes $A + B^t$ e $A^t + B$.

Operações com Matrizes

FAESA *Faça acontecer*

Atenção

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES. Se A, B e C são matrizes de mesma ordem, então valem as propriedades:

Comutativa: $A + B = B + A$.

Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Existência do elemento neutro: $A + O = A$.

Existência do elemento oposto: $A + (-A) = O$.

Transposta de matrizes: $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Atenção

Subtrair é somar com a oposta.

$A - B = A + (-B)$

Operações com Matrizes

Multiplicação por escalar (número real qualquer) → multiplicamos todos os elementos da matriz por este número.

$$-2.\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2 & -2.10 \\ -2.1 & 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz A **Matriz -2A**

Operações com Matrizes

Atividades

Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$, encontre as matrizes:

a) $C = 3A$.

b) $D = A - 2B^t$.

c) $E = \dfrac{2}{3}B$.

d) X e Y tais que $\begin{cases} X + Y = B \\ X - Y = A \end{cases}$.

Operações com Matrizes

Atenção

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR.

Se A e B são matrizes de mesma ordem e α e β são escalares, então valem as propriedades:

Distributiva: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Associativa: $(\alpha \beta)A = \alpha(\beta A)$.

Operações com Matrizes:

Multiplicação de matriz por matriz

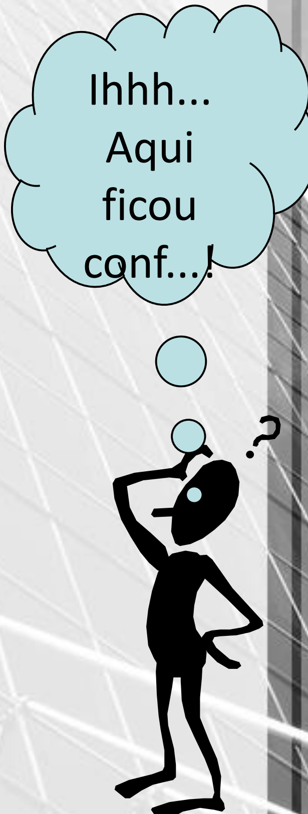
Nem sempre é possível multiplicar duas matrizes. A multiplicação entre A e B só existe quando o número de colunas da primeira matriz, A, é igual ao número de linhas da segunda matriz, B.

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES. Se $A = (a_{ij})_{mxp}$ e $B = (b_{ij})_{pxn}$, então a matriz $C = AB$ existe e é a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$, tal que $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$.

Operações com Matrizes: Multiplicação de matriz por matriz

CONDIÇÃO: Só podemos efetuar o produto de duas matrizes A_{mxn} e B_{lxp} se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda ($n = l$). A matriz C = AB será de ordem m x p.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3x2} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 2.1+1.0 & 2(-1)+1.4 \\ 4.1+2.0 & 4(-1)+2.4 \\ 5.1+3.0 & 5(-1)+3.4 \end{bmatrix}_{3x2}$$



O produto da primeira linha pela primeira coluna, gera o elemento C_{11}.

O produto da primeira linha pela segunda coluna, gera o elemento C_{12}.

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Em geral $AB \neq BA$, ou seja, o produto de matrizes não comutativo

Pode ser possível efetuar *AB* e não ser possível efetuar *BA*.

Operações com Matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3x2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Observe, multiplicamos ordenadamente os termos, ou seja, multiplicamos o primeiro elemento da elemento com o primeiro da coluna e por aí vai...

$$\begin{bmatrix} 2.1 + 1.0 & 2.(-1) + 1.4 \\ 4.1 + 2.0 & 4.(-1) + 2.4 \\ 5.1 + 3.0 & 5.(-1) + 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES. Se A, B e C são matrizes tais que os produtos indicados existem, então valem as propriedades:

Associativa: $A(BC) = (AB)C$.

Existência do elemento neutro: $AI = A$.

Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$.

Operações com Matrizes

Calcule o produto das matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Operações com Matrizes

A matriz A de ordem 2 x 3 definida por $a_{i,j} = i.j$ é dada por:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Operações com Matrizes

Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule a matriz $A - B^t$ é:

Operações com Matrizes

Se $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 9 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e I_3 é a matriz identidade de ordem três, encontre o produto de B por I_3:

Operações com Matrizes

Transposta de matrizes: $(AB)^t = B^t A^t$..

1. Se a matriz A é do tipo 120x 486 e a matriz B é do tipo 486x 960, é possível determinar a matriz AB? E a matriz BA? Em caso afirmativo, qual é o tipo da matriz resultante?

2. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, encontre, se existirem, as matrizes:

a) AB.

b) BA.

c) $A^t B^t$.

d) $B^t A^t$.

e) $A I_2$.

Matriz Inversa

Algumas matrizes possuem inversa e, nestes casos, elas são ditas inversíveis ou invertíveis.

Conceitos

MATRIZ INVERSA. Se A é uma matriz quadrada de ordem n e existe uma matriz B, de mesma ordem, tal que $AB = BA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n, então B é a inversa de A. Neste caso, dizemos que $B = A^{-1}$.

Atenção

PROPRIEDADE DA INVERSA. Se A e B são matrizes inversíveis, então vale a propriedade:

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Matriz Inversa

Exemplo 1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ é a inversa de $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$, pois:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 5 + 2\times(-7) & 3\times(-2) + 2\times 3 \\ 7\times 5 + 5\times(-7) & 7\times(-2) + 5\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 3 + (-2)\times 7 & 5\times 2 + (-2)\times 5 \\ -7\times 3 + 3\times 7 & -7\times 2 + 3\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz Inversa

PROPRIEDADE DA INVERSA. Se A e B são matrizes inversíveis, então vale a propriedade:

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Exercício: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ tem inversa, ela é quadrada de ordem 2.

Suponha que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $AA^{-1} = I_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

Matriz Inversa

Exercício: Se $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ tem inversa, seja $B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Sabemos que $BB^{-1} = I_2$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$