

Álgebra Linear I - Aula 12

1. Transformações lineares.
2. Exemplos de Transformações lineares.

Roteiro

1 Transformações lineares

Definição 1 (Transformação linear). *Uma transformação linear T definida de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m (pense, por exemplo, em n e m iguais a 2 ou 3) é uma aplicação $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que verifica as seguintes propriedades:*

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$, para todo par de vetores u e v de \mathbb{R}^n ,
- $T(\sigma u) = \sigma T(u)$ para todo vetor u de \mathbb{R}^n e todo número real σ .

A definição significa que uma transformação linear preserva as operações de soma de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar. Como consequência da definição de transformação linear temos que

$$T(\bar{0}) = T(\bar{0} + \bar{0}) = T(2\bar{0}) = 2T(\bar{0}), \quad T(\bar{0}) = \bar{0}.$$

Observe que $T(\bar{0}) = \bar{0}$ é uma condição necessária para que a transformação T seja linear, mas esta condição não é suficiente. Veja o seguinte exemplo, a transformação T

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = x^2,$$

verifica $T(0) = 0$ mas, em geral, $T(x + y) \neq T(x) + T(y)$:

$$T(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \neq x^2 + y^2 = T(x) + T(y),$$

sempre que x e y sejam os dois simultaneamente não nulos.

Vejamos outros exemplos de transformações que não são lineares:

- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2, y + 1)$, não é uma transformação linear, pois $T(0, 0) = (2, 1) \neq (0, 0)$.
- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (\sin x, \sin y)$ verifica $T(0, 0) = (0, 0)$, porém não é uma transformação linear. Deixamos v. verificar os detalhes, observamos que o fato de T não ser linear segue de que, em geral, $\sin(x + x') \neq \sin(x) + \sin(x')$.

Da definição de transformação linear obtemos as seguintes propriedades (que v. deve verificar como exercício):

Propriedade 1.1. *Considere duas transformações de lineares T e S ,*

$$T, S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

e um número real λ . Então

- *A soma das transformações lineares $T + S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida como*

$$(T + S)(u) = T(u) + S(u),$$

é uma transformação linear,

- *O produto por um número real λ de uma transformação linear T , definida como $(\lambda T)(u) = \lambda(T(u))$, é uma transformação linear.*

Definição 2 (Conjunto imagem). *A imagem do conjunto \mathbb{V} pela transformação T é o conjunto:*

$$\text{im}(T(\mathbb{V})) = \{w \text{ tal que existe } v \in \mathbb{V} \text{ tal que } w = T(v)\}.$$

Propriedade 1.2. *Se \mathbb{V} é um subespaço vetorial e T é uma transformação linear, então a imagem $T(\mathbb{V})$ também é um subespaço.*

Em particular, a imagem por uma transformação linear de uma reta ou um plano que contém a origem também é uma reta ou um plano que contém a origem ou o vetor $\bar{0}$.

Prova: Para provar que $\text{im}(T(\mathbb{V}))$ é um subespaço considere vetores w_1 e w_2 de $\text{im}(T(\mathbb{V}))$. Temos que provar que $w_1 + w_2 \in \text{im}(T(\mathbb{V}))$. Da definição de imagem, existem vetores v_1 e $v_2 \in \mathbb{V}$ tais que

$$w_1 = T(v_1) \quad \text{e} \quad w_2 = T(v_2).$$

Como T é linear:

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2).$$

Como $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e \mathbb{V} é um subespaço, $v_1 + v_2 = v_3 \in \mathbb{V}$. Portanto,

$$w_1 + w_2 = T(v_3), \quad v_3 \in \mathbb{V}.$$

Logo, $w_1 + w_2 \in \text{im}(T(\mathbb{V}))$.

Deixamos como exercício verificar que se $w \in \text{im}(T(\mathbb{V}))$ e λ é um número real então $\lambda w \in \text{im}(T(\mathbb{V}))$. Veja que se $w = T(v)$, $v \in \mathbb{V}$, então $\lambda w = T(\lambda v)$ onde $\lambda v \in \mathbb{V}$, (complete os detalhes). \square

Considere uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Veremos que a imagem de uma reta r que contém a origem é ou outra reta que contém a origem ou o vetor nulo. A princípio, como a imagem da reta deve ser um subespaço de \mathbb{R}^3 , a imagem da reta poderia ser um plano que contém a origem ou todo \mathbb{R}^3 . Seja v o vetor diretor da reta, então: $r: \{tv, t \in \mathbb{R}\}$.

Seja $w = T(v)$. Afirmamos que $T(r)$ é a reta r' que contém a origem cujo vetor diretor é w , isto é,

$$r': \{tw, t \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que se $w = \bar{0}$, então $T(r) = \bar{0}$ (deixamos v. conferir esta afirmação). Vejamos as duas inclusões:

$T(r) \subset r'$: seja $u \in T(r)$, então $u = T(tv)$ para certo t . Como T é linear, $u = tT(v) = tw$. Portanto, $u \in r'$.

$r' \subset T(r)$: seja $u \in r'$, então $u = tw = tT(v)$, para certo t . Como T é linear, $u = T(tv) = T(\ell)$, onde (por definição) $\ell \in r$. Portanto, $u \in T(r)$.

De forma análoga temos que a imagem por uma transformação linear de um plano π que contém a origem é ou um plano ou uma reta contendo a origem ou o vetor nulo. Suponha que o plano π é gerado pelos vetores v e w . As equações paramétricas de π são,

$$\pi: u = tv + sw, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Sejam $T(v) = v'$ e $T(w) = w'$. Temos as seguintes possibilidades para a imagem $T(\pi)$:

- um plano ρ : se os vetores v' e w' não são paralelos e são não nulos. De fato, o plano ρ é o plano que contém a origem e é paralelo aos vetores v' e w' .
- uma reta r : se os vetores v' e w' são paralelos e um deles não é nulo (por exemplo, $v' \neq \bar{0}$). De fato, r é a reta que contém a origem e é paralela a v' .
- o vetor $\bar{0}$: se v' e w' são nulos.

Vejam, por exemplo, que se $v' = T(v) \neq \bar{0}$ e $w' = T(w) \neq \bar{0}$ não são paralelos, se verifica que o plano ρ paralelo a v' e w' que contém a origem contém a $T(\pi)$ (as outras inclusões e os outros casos seguem exatamente como no exemplo acima e serão omitidos). Seja $\ell' \in T(\pi)$, então, por definição, existe um vetor $\ell \in \pi$ tal que $T(\ell) = \ell'$. Como $\ell \in \pi$, $\ell = t v + s w$. Como T é linear,

$$\ell' = T(\ell) = T(t v + s w) = t T(v) + s T(w) = t v' + s w'.$$

Assim, pela definição de ρ , $\ell \in \rho$.

2 Exemplos de Transformações lineares

A seguir veremos alguns exemplos de transformações lineares (v. deve completar os detalhes).

1. A transformação linear *nula*, definida por $T(u) = \bar{0}$ para todo vetor u .
2. A transformação linear *identidade*, $T(u) = u$ para todo vetor u .
3. Transformações de *escala*, $T(u) = \sigma u$ para todo vetor u , onde $\sigma \in \mathbb{R}$. Se $|\sigma| < 1$ dizemos que é uma *contração* e se $|\sigma| > 1$ é uma *dilatação*.
4. Transformações $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de *cisalhamento vertical* e

$$V(x, y) = (x, \alpha x + y)$$

e $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de *cisalhamento horizontal*

$$H(x, y) = (x + \alpha y, y).$$

Veja a Figura 1.

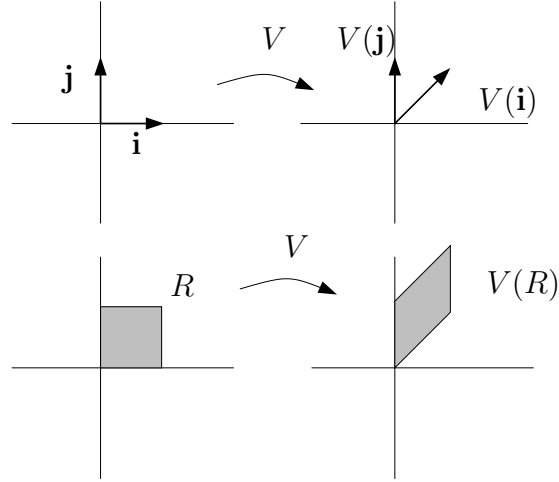


Figura 1: Cisalhamento vertical

5. *Projeção ortogonal em um vetor u* definida por

$$P(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u.$$

Veja a Figura 2.

Escreveremos $P(x, y, z)$ em coordenadas. Podemos supor, sem perda de generalidade que o vetor $u = (a, b, c)$ é unitário. Em coordenadas temos,

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= ((x, y, z) \cdot (a, b, c)) (a, b, c) = (a x + b y + c z) (a, b, c) = \\ &= (a^2 x + a b y + a c z, a b x + b^2 y + b c z, a c x + b c y + c^2 z). \end{aligned}$$

6. *Reflexões em torno dos eixos coordenados \mathbb{X} e \mathbb{Y}* , definidas como

$$R(x, y) = (x, -y), \quad S(x, y) = (-x, y),$$

respectivamente. Veja a Figura 3.

7. *Reflexão na origem*,

$$T(x, y) = (-x, -y).$$

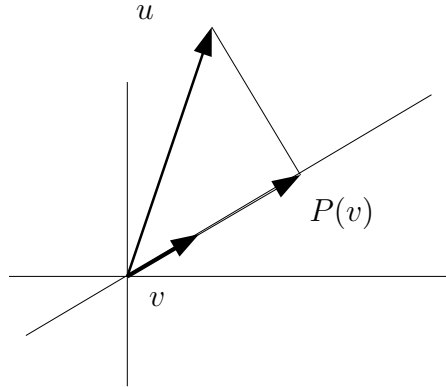


Figura 2: Projeção ortogonal

8. Dado um vetor u de \mathbb{R}^3 , definimos a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como $T(v) = v \cdot u$ (*produto escalar*). O fato de T ser linear segue das propriedades do produto escalar.
9. Dado um vetor u de \mathbb{R}^3 , definimos a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $T(v) = v \times u$ (*produto vetorial*). O fato de T ser linear segue das propriedades do produto vetorial.

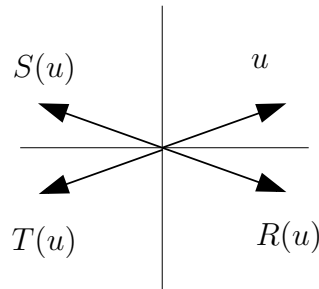


Figura 3: Reflexões

Deixamos, como exercício, verificar que as transformações anteriores são lineares.

Observe que todas as transformações lineares exibidas até agora são da forma

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

no caso de transformações do plano no plano, e da forma

$$T(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + kz),$$

no caso de transformações de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 . Por exemplo, a transformação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(v) = v \times w,$$

para certo vetor w tem a seguinte forma. Suponha que $w = (a, b, c)$, então

$$T(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = (cy - bz, az - bx, bx - ay).$$

Finalmente, no caso da transformação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(v) = v \cdot u,$$

se o vetor $u = (a, b, c)$ temos

$$T(x, y, z) = ax + by + cz.$$

Temos também que as seguintes transformações são lineares:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & T(x, y) &= ax + by, \\ T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & T(x, y, z) &= ax + by + cz, \\ T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & T(x, y, z) &= (ax + by + cz, dx + ey + fz) \\ T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & T(x, y) &= (ax + by, cx + dy, ex + fy), \end{aligned}$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais.

De fato, temos o seguinte, *toda transformação linear tem a forma das transformações acima.*