$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Lista 9}}$

Matrizes e Transformações lineares

Respostas

1) Sejam A e B matrizes quadradas do mesmo tamanho.

- Dê um exemplo onde $(A+B)^2 \neq A^2 + 2A\,B + B^2$.
- Complete: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + ?$ (determine [?]).
- Dê um exemplo onde $(A-B)^2 \neq A^2 - 2A\,B + B^2$.
- Complete: $(A-B)^2 = A^2 + B^2 + [?]$ (determine [?]).

Resposta: Para o primeiro item, tome as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde temos:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto termina o primeiro item.

Para o segundo item, observe que

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + B^2 + AB + BA.$$

Logo $? = AB + BA$.

Para o terceiro item, utilizando as mesmas matrizes do primeiro item, temos:

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$(A - B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mas

$$A^2 - 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, no último item temos

$$(A-B)^2 = (A+(-B))^2 = A^2+(-B)^2+A(-B)+(-B)A = A^2+B^2-AB-BA.$$

Logo $? = -(AB + BA)$.

2) Encontre, se possível, matrizes A e B, 3×3, tais que, para todo vetor coluna 3×1, se verifique

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta: No primeiro caso, temos

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo basta tomar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No segundo caso não é possível encontrar a matriz B, pois se existisse teria que satisfazer a seguinte relação:

$$B \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \lambda B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$B\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 xy\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\lambda^2\begin{pmatrix}xy\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\lambda^2 B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Agora é suficiente considerar $\lambda \neq 1$.

3) Estude se existem matrizes A, 2×1, e B, 1×2, tais que o produto $A\,B$ seja a identidade.

Resposta: Suponhamos que existem tais matrizes e que são iguais a:

$$A=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix}.$$

Como

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

então

$$\begin{pmatrix}ac & ad\\ bc & bd\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Logo, $ac=1$ implica $a\neq 0$ e como $ad=0$ então $d=0$, mas $bd=1$, logo temos um absurdo, portanto não é possível a existência de tais matrizes.

4) Estude se a seguinte afirmação é verdadeira. A matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

tem sempre determinante não nulo (independentemente do valor de a).

Resposta: A afirmação é verdadeira: o determinante da matriz é independente de a e vale -1.

5) Seja A uma matriz quadrada. Dizemos que uma matriz (quadrada) B é uma raiz quadrada de A se $B^2=B\,B=A$.

- Encontre duas raízes quadradas de

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

- Encontre quatro raízes quadradas da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Estude se a seguinte afirmação é verdadeira: toda matriz 2×2 possui no mínimo uma raiz quadrada.

- Estude se a seguinte afirmação é verdadeira. Represente por 0 a matriz com todas as entradas nulas. Se $AA = 0$ então $A = 0$.

Resposta:

- Seja

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

  tal que $BB = A$, então:

$$a^2 + bc = 2, \quad ab + bd = 2, \quad ac + dc = 2, \quad d^2 + bc = 2.$$

  É suficiente, $a = b = c = d = \pm 1$

- Tomando nesse caso $c = b = 0$ temos $a = \pm 2$ e $d = \pm 3$

- Se A possui uma raiz quadrada então existe matriz B tal que $BB = A$, donde $\det(B)^2 = \det(A)$, portanto $\det(A) > 0$, e por conseguinte se tomarmos uma matriz cujo determinante seja negativo esta não vai possuir raiz quadrada. Logo a afirmação é falsa.

- Falso tome $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) Determine as matrizes das seguintes transformações lineares:

1. $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S(u) = u \times (1, 1, 1)$, (exercício 3, lista 10);
2. $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $M(v) = (v \cdot u)u$, onde $u(1, 1, 1)$, (exercício 4, lista 10);
3. $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $N(v) = (v \cdot u)$, onde $u = (1, 1, 1)$,

4. $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $L(1,1,1) = (6,3)$, $L(2,1,0) = (5,1)$ e $L(2,0,1) = (7,2)$;

5. $K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $K(v) = (v \times w) \times w$, onde $w = (1,1,1)$.

Resposta:

$$(1)\quad [S] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)\quad [M] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(3)\quad [N] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4)\quad [L] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(5)\quad [K] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7) Considere a base $\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)$ e para cada vetor v escreva

$$v = v_1(1,1,1) + v_2(1,1,0) + v_3(0,1,1).$$

Considere $T_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação definida como

$$T_\beta(v) = v_1(1,1,1) + v_2(1,1,0).$$

- Veja que T_β é uma transformação linear.
- Determine a forma geral de $T_\beta(x,y,z)$ e a matriz associada a T_β.
- Interprete T_β como uma projeção.
- Encontre uma base β' tal que a transformação $T_{\beta'}$ (definida como acima) seja uma projeção ortogonal em um plano.

Resposta: Veja que

$$(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1) = u_1 - u_3$$

De forma análoga temos,

$$(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0) = u_1 - u_2,$$

e

$$(0,1,0) = -(1,1,1) + (0,1,1) + (1,1,0) = -u_1 + u_2 + u_3.$$

Logo

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= u_1 = (1,1,1), \\ T(0,1,0) &= -u_1 + u_2 = (0,0,-1), \\ T(0,0,1) &= u_1 - u_2 = (0,0,1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x,y,z) = (x, x, x - y + z).$$

Veja que T é a projeção no plano paralelo a $(1,1,1)$ e $(1,1,0)$ (ou seja $x - y = 0$) que passa pela origem segundo a direção de $(1,1,0)$.

É suficiente considerar qualquer base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

8) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 = (1,1,2), \quad u_2 = (2,0,1)$$

e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = (v \cdot u_1)\, u_1 + (v \cdot u_2)\, u_2.$$

(a) Determine a matriz de T na base canônica.

(b) Determine o conjunto de vetores v tais que $T(v) = v$.

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T.

(d) Considere o plano

$$\mathbb{V}\colon x + y + 2\,z = 0.$$

Determine uma base do subespaço $T(\mathbb{V})$, a imagem do plano $\mathbb{V}$ pela transformação linear T.

Resposta:

(a) Devemos determinar $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Estes vetores serão as colunas da matriz de T na base canônica.

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{i}) \quad &= ((1,0,0)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((1,0,0)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\
&= (1,1,2) + (4,0,2) = (5,1,4); \\
\\
T(\mathbf{j}) \quad &= ((0,1,0)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((0,1,0)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\
&= (1,1,2); \\
\\
T(\mathbf{k}) \quad &= ((0,0,1)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((0,0,1)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\
&= (2,2,4) + (2,0,1) = (4,2,5).
\end{aligned}$$

Portanto

$$[T] = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Devemos encontrar vetores $v = (x,y,z)$ tais que

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Isto é, resolver o sistema de equações

$$5\,x + y + 4\,z = x, \quad x + y + 2\,z = y, \quad 4\,x + 2\,y + 5\,z = z.$$

Assim obtemos o sistema linear homogêneo

$$4\,x + y + 4\,z = 0, \quad x + 2\,z = 0, \quad 4\,x + 2\,y + 4\,z = 0.$$

Escalonando (considerando a terceira equação menos a primeira)

$$4\,x + y + 4\,z = 0, \quad x + 2\,z = 0, \quad y = 0.$$

Isto é,

$$x + z = 0, \quad x + 2\,z = 0, \quad y = 0.$$

Portanto,

$$x + z = 0, \quad z = 0, \quad y = 0.$$

Logo o sistema homogêneo admite somente a solução trivial. Portanto, $T(v) = v$ se, e somente se, $v = \bar{0}$.

(c) A imagem de T é gerada pelos vetores

$$T(\mathbf{i}) = (5,1,4), \quad T(\mathbf{j}) = (1,1,2) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{k}) = (4,2,5).$$

Os dois primeiros vetores geram o plano vetorial de vetor normal

$$(5,1,4) \times (1,1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-6,4).$$

Obtemos o plano

$$x + 3\,y - 2\,z = 0.$$

Observe que o vetor $T(\mathbf{k}) = (4,2,5)$ pertence a este plano

$$4 + 6 - 10 = 0.$$

Logo a imagem é o plano

$$x + 3\,y - 2\,z = 0.$$

Obviamente, v. pode também proceder como segue. Observando primeiro que os vetores $(1,1,2)$ e $(2,0,1)$ estão na imagem de T. Por exemplo, se consideramos um vetor perpendicular a $(2,0,1)$, por exemplo $\mathbf{j}$, temos $T(\mathbf{j}) = (1,1,2)$. Para ver que $(2,0,1)$ também está na imagem considere um vetor perpendicular a $(1,1,2)$ (que não seja perpendicular a $(2,0,1)$), por exemplo $(0,-2,1)$. Temos que

$$\begin{aligned} T(0,-2,1) \quad &= ((0,-2,-1)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((0,-2,1)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\ &= (2,0,1). \end{aligned}$$

A seguir calculamos o plano vetorial gerado por estes vetores (obtendo plano $x + 3\,y - 2\,z = 0$). Finalmente, observamos que, por definição, a imagem de qualquer vetor v é combinação linear de $(1,1,2)$ e $(2,0,1)$ e portanto está nesse plano.

(c) Para calcular a imagem do plano $\mathbb{V}\colon x+y+2\,z = 0$ escolhemos uma base do plano, por exemplo,

$$\beta = \{(1,-1,0),(2,0,-1)\},$$

e observamos que $T(\mathbb{V})$ está gerada pelas imagens destes dois vetores:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Estes dois vetores são parelelos a $(2,0,1)$. Assim a imagem $T(\mathbb{V})$ de $\mathbb{V}$ é a reta vetorial

$$(2\,t, 0, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

9)

a) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & c \\ 2 & b & d \end{pmatrix}.$$

Sabendo que o espaço imagem de T é uma reta determine os valores de a, b, c e d.

b) Considere a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & A & C \\ 2 & B & D \end{pmatrix}.$$

Determine explicitamente valores A, B, C e D para que a imagem de L seja o plano de equação cartesiana

$$x + y - z = 0.$$

c) Considere a transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$M(1,1,1) = (0,1,1), \quad M(1,0,1) = (2,1,1), \quad M(0,1,1) = (0,1,1)$$

Determine a matriz de M na base canônica.

Resposta:

a) A imagem de T é gerada pelos vetores $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Como a imagem é uma reta estes vetores devem ser paralelos a $T(\mathbf{i}) = (1,1,2)$. Portanto,

$$T(\mathbf{j}) = (2,a,b) = k\,(1,1,2), \quad k=2, \quad a=2,\ b=4,$$
$$T(\mathbf{k}) = (0,c,d) = k\,(1,1,2), \quad k=0, \quad c=0,\ d=0.$$

Obtemos

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Raciocinando como no item anterior, os vetores $(1,1,2)$, $(0,A,B)$ e $(2,C,D)$ devem gerar o plano $x+y-z=0$. Portanto, é suficiente escolher três vetores do plano não paralelos entre si (se eles são paralelos obteremos uma reta como imagem). Uma possibilidade é

$$A=B=0, \quad C=0, D=2.$$

Certamente, há outras possibilidades.... algumas delas...

$$A=B=1, \quad C=-2, D=0,$$
$$A=B=1, \quad C=1, D=3.$$

c)

$$M(1,1,1) = (0,1,1), \quad M(1,0,1) = (2,1,1), \quad M(0,1,1) = (0,1,1)$$

Devemos determinar $M(\mathbf{i})$, $M(\mathbf{j})$ e $M(\mathbf{k})$. Estes vetores serão as colunas da matriz de T na base canônica. Observe que

$$M(1,1,1) - M(1,0,1) = M(0,1,0) = (0,1,1) - (2,1,1) = (-2,0,0).$$

Temos também

$$M(0,1,0) + M(0,0,1) = M(0,1,1) = (0,1,1),$$

logo

$$M(0,0,1) = (0,1,1) - M(0,1,0) = (0,1,1) + (2,0,0) = (2,1,1).$$

Finalmente,

$$M(1,0,0) + M(0,0,1) = M(1,0,1) = (2,1,1),$$

logo

$$M(1,0,0) = (2,1,1) - M(0,0,1) = (2,1,1) - (2,1,1) = (0,0,0).$$

Portanto,

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$