

Álgebra Linear I - Lista 10

Transformações inversas. Matriz inversa

- 1) Estude se existe uma matriz A tal que

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$$

para todos os valores de a, b, c e d .

- 2) Estude se as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Sejam A e B matrizes tais que AB é a matriz identidade. Então A é inversível e B é sua inversa.
2. Seja A uma matriz 2×2 inversível. Suponha que $A^2 = 2A$. Então $\det A = 2$.
3. Suponha que A é uma matriz inversível. Seja B a matriz obtida a partir de A substituindo a segunda linha de A pela soma da segunda e primeira linha de A . Então B é inversível.
4. Se A é inversível e AB é a matriz 0 , então $B = 0$.
5. Se A é inversível e $AB = A^3$, então $B = A^2$ e B é inversível.
6. Se A é uma matriz quadrada singular (isto é, com determinante nulo), então escalonando A é possível obter uma matriz com uma linha formada por zeros.
7. Suponha que A é uma matriz 3×3 inversível e X a matriz coluna $(x, y, z)^t$. Então o sistema $AX = B$, $B = (a, b, c)^t$, tem solução única. Caso a resposta seja afirmativa, determine a solução do sistema.
8. Suponha que A é uma matriz inversível e X é a matriz $(x, y, z)^t$. Então o sistema $AX = X$ tem solução única.

3) Ache a matriz inversa A^{-1} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verifique explicitamente (fazendo o produto de matrizes) que a primeira coluna de $A^{-1}A$ é

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) Encontre, quando possível, as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5) Determine, se possível, a e b de forma que as matrizes A e B sejam inversíveis:

$$A = \begin{pmatrix} a+b+1 & 3918 & 1457 \\ 0 & a-b+1 & 1789 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 1569 & a-b & 0 \\ \pi & 7894 & a+b \end{pmatrix}.$$

6)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B , (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{1,2}$ da matriz C .

7) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \\ c & d & 4/9 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a inversa da matriz A .

b) Sabemos que $C = B^{-1}$. Determine a, b, c e d .