Prova tipo C

P4 de Álgebra Linear I – 2003.2 Gabarito

1) Considere o ponto P = (2,0,1), a reta r de equação paramétrica

$$r: (2-t, 1+3t, 1+t), t \in \mathbb{R}.$$

- a) Escreva r como intereseção de dois planos (equação cartesiana) ρ e α , ρ paralelo ao eixo \mathbb{X} e α paralelo ao eixo \mathbb{Y} .
- b) Determine a equação cartesiana do plano τ que contém a reta r e o ponto P.
- c) Encontre, caso exista, o ponto R de interseção da reta r acima e da reta

$$r': (2+t, 3-t, 1-t), t \in \mathbb{R}.$$

Caso o ponto não exista escreva as retas são reversas.

d) Calcule a distância d entre o ponto P e a reta r.

Respostas:

- a) ρ : y 3z = -2, α : x + z = 3.
- **b)** τ : x + z = 3.
- c) R = (1, 4, 2).
- **d)** $d = \sqrt{2}/\sqrt{11}$.

- **2)** Considere a base $\beta = \{u_1 = (0,1,1); u_2 = (1,1,1); u_3 = (1,1,0)\}$ de \mathbb{R}^3 e a transformação linear $T, T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como segue: dado um vetor w da forma $w = a u_1 + b u_2 + c u_3$ temos $T(w) = (a + 2b + 3c) u_3$.
- a) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_{\beta}$ de T na base β .
- b) Determine (explicitamente) a matriz $[T]_{\epsilon}$ de T na base canônica.
- c) Determine (explicitamente) a matriz [M] de mudança de base da base β à base canônica.
- d) Considere agora o plano π : 2x y z = 0 e a base ξ do plano π , $\xi = \{(2,1,1); (0,1,1)\}$. Determine as coordenadas $(w)_{\xi}$ do vetor w = (4,4,4) na base ξ .

Respostas:

a)

$$[T]_{\beta} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

b)

$$[T]_{\epsilon} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

c)

$$[M] = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

d) $(w)_{\xi} = (2,2).$

3) Considere a projeção P no plano π

$$\pi$$
: $x + y - 2z = 0$

na direção do vetor v

$$v = (1, -1, 1).$$

- a) Determine a matriz [P] da projeção P na base canônica.
- b) Encontre uma base β de \mathbb{R}^3 tal que a matriz $[P]_\beta$ na base β seja

$$[P]_{\beta} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Respostas:

a)

$$[P] = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$\beta = \{(1, -1, 0); (1, -1, 1); (2, 0, 1)\}$$

4) Considere a matriz

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Escolha qual das afirmações a seguir é verdadeira para que a matriz M não seja diagonalizável.

b=2 e $a=1$	
b = 3 e a = 1	
b=2 e $a=2$	
b=0 e a qualquer número real	
nenhuma, M é sempre diagonalizável	X
todas as afirmações anteriores são falsas	
não sei	

5) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que a matriz $[T]_\epsilon$ de T na base canônica é simétrica. Sabendo que

- T(1,2,1) = (2,4,2),
- $\bullet\,$ todo vetor não nulo do plano x+2y+z=0 é um autovetor,
- \bullet o determinante de $[T]_{\epsilon}$ é 50, e
- o traço de $[T]_{\epsilon}$ é negativo.

Determine os autovalores de T com suas multiplicidades.

Resposta:

autovalores 2 e -5, 2 simples e -5 duplo ou de multiplicidade dois.

6) Considere a transformação linear T cuja matriz [T] na base canônica é o produto das matrizes

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

A transformação linear T é:

(a) A projeção ortogonal no plano x+y=0 seguida do espelhamento no plano x-y-2z=0.

a	b	\mathbf{c}	d	e	f	g	h	i	j	k	1	m	n	N
X														