2ª Lista de Exercícios - Integrais Por Substituição

1 – Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1) $I=\int sen\ 3x\ \ dx$	2) $\int \sec\ 2t\ \ tg\ 2t\ \ dt$	3) $\int 28(7x-2)^{-5}\ dx$
4) $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}}\ dr$	5) $\int \sqrt{x}\ sen^2(x^{3/2}-1)\ dx$	6) $\int \cos ec^2 2\theta\ \cot g\ 2\theta\ dx$
7) $\int \sqrt{3-2s}\ ds$	8) $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\ ds$	9) $\int \theta\ \sqrt[4]{1-\theta^2}\ d\theta$
10) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$	11) $\int \cos(3z+4)\ dz$	12) $\int tg\ x\ dx$
13) $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5\ dr$	14) $\int x^{1/2} sen\ (x^{3/2}+1)\ dx$	15) $\int \frac{sen\ (2t+1)}{\cos^2\ (2t+1)} dt$
16) $\int \frac{1}{\theta^2} sen\ \frac{1}{\theta}\ \cos\frac{1}{\theta} d\theta$	17) $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$	18) $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)ds$
19) $I=\int \sqrt{\frac{1-x}{x^5}}\ dx$	20) $\int (\cos x)\ e^{sen\ x}\ dx$	21) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}}\sec^2(e^{\sqrt{x}}+1)\ dx$
22) $\int \frac{dx}{x\ \ln\ x}$		

2 – Encontre a função f(x) sabendo que $\frac{df}{dx}=12x(3x^2-1)^3$ e que $f(1)=3$.

3 – A velocidade de uma partícula em movimento de um lado para outro de uma reta é $v=\frac{ds}{dt}=6\ sen(2t)\ m/s$, para qualquer t . Se $s=0$ quando $t=0$, determine o valor de s quando $t=\frac{\pi}{2}\ s$.

FAESA CENTRO UNIVERSITÁRIO

RESOLUÇÃO

1) $I=\int sen\ 3x\ dx$, fazendo

$u=3x$, temos que $du=3dx \Rightarrow dx=\frac{1}{3}du$

Assim, ao substituirmos:

$I=\int sen\ u\ \frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int sen\ u\ du=-\frac{1}{3}\cos u+C$,

logo: $I=-\frac{\cos 3x}{3}+C$

2) $I=\int \sec\ 2t\ tg\ 2t\ dt$, fazendo

$u=2t$, temos que $du=2dt \Rightarrow dt=\frac{1}{2}du$

Assim, ao substituirmos:

$I=\frac{1}{2}\int \sec\ u\ tg\ u\ du=\frac{1}{2}\sec\ u+C$, logo:

$I=\frac{\sec\ 2t}{2}+C$

3) $I=\int 28(7x-2)^{-5}\ dx$, fazendo

$u=7x-2$, temos que $du=7dx \Rightarrow dx=\frac{1}{7}du$

Assim, ao substituirmos:

$I=\frac{1}{7}28\int\ u^{-5}=4\int\ u^{-5}du=4\frac{u^{-4}}{-4}+C$, logo:

$I=-(7x-2)^{-4}+C$

4) $I=\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}}\ dr$, fazendo

$u=1-r^3$, temos que

$du=-3r^2dr \Rightarrow dr=-\frac{du}{3r^2}$

Assim, ao substituirmos:

$I=\int \frac{9r^2}{\sqrt{u}}\left(-\frac{du}{3r^2}\right)=-3\int\ u^{-1/2}du=-3\frac{u^{1/2}}{1/2}+C$,

logo:

$I=-6\sqrt{1-r^3}+C$

5) $I=\int \sqrt{x}\ sen^2(x^{3/2}-1)\ dx$, fazendo

$u=x^{3/2}-1$, temos que

$du=\frac{3}{2}x^{1/2}dx \Rightarrow dr=\frac{2du}{3\sqrt{x}}$

Assim, ao substituirmos:

$I=\int \sqrt{x}\ sen^2(u)\ \frac{2du}{3\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\int\ sen^2u\ du$, antes de derivar, devemos usar a identidade trigonométrica

$sen^2u=\frac{1-\cos\ 2u}{2}$

logo:

$I=\frac{2}{3}\int\ \frac{1-\cos 2u}{2}\ du=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\int(\ 1-\cos\ 2u)\ du$

$I=\frac{1}{3}\int\ (1-\cos\ 2u)\ du=\frac{1}{3}\left(\int\ 1\ du-\int\ \cos\ 2u\ du\right)$

Mas, é necessário fazer substituição de novo:

$\int \cos\ 2u\ du$, temos:

$v=2u \Rightarrow dv=2du \Rightarrow du=\frac{dv}{2}$

$\int \cos\ 2u\ du=\int\ \cos\ v\ \frac{dv}{2}=\frac{sen\ v}{2}+C$

$=\frac{sen\ 2u}{2}+C$

Logo:

6) $I=\int \cos ec^2 2\theta\ \cot g\ d\theta$

a) Fazendo $u=\cot g\ 2\theta$, temos que

$du=-2\ \cos ec^2\ 2\theta\ d\theta$

$d\theta=-\frac{du}{2\ \cos ec\ 2\theta}$

Assim, ao substituirmos:

$I=-\int\ \cos ec^2 2\theta\ u\ \frac{du}{2\cos ec^2\ 2\theta}=-\frac{1}{2}\int u\ du$,

$I=-\frac{1}{2}\frac{u^2}{2}+C=-\frac{1}{4}\cot g^2\ 2\theta+C$

b) $I=\int \cos ec^2 2\theta\ \cot g\ 2\theta\ dx$

a) Fazendo $u=\cos ec\ 2\theta$, temos que

$du=-2\ \cot g\ 2\theta\ \cos ec\ 2\theta$

$d\theta=-\frac{du}{2\cot g\ 2\theta\ \cos ec\ 2\theta}$

Assim, ao substituirmos:

$I=-\int\ \cos ec^2 2\theta\ u\ \frac{du}{2\cot g\ 2\theta\ \cos ec\ 2\theta}$,

$I=-\frac{1}{2}\int \cos ec\ 2\theta\ du=I=-\int\ u\ du$

$I=-\frac{1}{2}\frac{u^2}{2}+C=-\frac{1}{4}\cos ec^2\ 2\theta+C$

$$I=\frac{1}{3}\left(u-\frac{sen\ 2u}{2}\right)+C$$

$$I=\frac{x^{3/2}-1}{3}-\frac{sen\ 2\left(x^{3/2}-1\right)}{6}+C$$

7) $I=\int \sqrt{3-2s}\ ds$, fazendo

, $u=3-2s$ temos que $du=-2ds\Rightarrow ds=-\frac{1}{2}du$

Assim, ao substituirmos:

$$I=-\frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du=-\frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2}+C=-\frac{1}{2}\frac{2u^{3/2}}{3}+C$$,

logo:

$$I=-\frac{(3-2s)^{3/2}}{3}+C$$

8) $I=\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\ ds$, fazendo

$u=5s+4$, temos que $du=5ds\Rightarrow ds=\frac{1}{5}du$

Assim, ao substituirmos:

$$I=\frac{1}{5}\int u^{-1/2}\ du=\frac{1}{5}\frac{u^{1/2}}{1/2}+C=\frac{2u^{1/2}}{5}+C$$, logo:

$$I=\frac{2\sqrt{5s+4}}{5}$$

9) $I=\int \theta\ \sqrt[4]{1-\theta^2}\ d\theta$, fazendo

$u=1-\theta^2$, temos que

$$du=-2\theta\ d\theta\Rightarrow d\theta=-\frac{1}{2\theta}du$$

Assim, ao substituirmos:

$$I=-\frac{1}{2}\int \theta\ u^{1/4}\frac{du}{\theta}=-\frac{1}{2}\int u^{1/4}\ du=-\frac{1}{2}\frac{u^{5/4}}{5/4}+C$$

$$I=-\frac{1}{2}\frac{4u^{5/4}}{5}+C$$, logo:

$$I=-\frac{2\left(1-\theta^2\right)^{5/4}}{5}+C$$

10) $I=\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$, fazendo

$u=1+\sqrt{x}$, temos que

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow dx=2\sqrt{x}\ du$$

Assim, ao substituirmos:

$$I=2\int \frac{1}{\sqrt{x}\ u^2}\sqrt{x}\ du=I=2\int u^{-2}\ du=2\frac{u^{-1}}{-1}+C$$,

logo:

$$I=-\frac{2}{1+\sqrt{x}}+C$$

11) $I=\int \cos(3z+4)\ dz$, fazendo

$u=3z+4$, temos que $du=3dz\Rightarrow dz=\frac{1}{3}du$

Assim, ao substituirmos:

$$I=\frac{1}{3}\int \cos u\ du=\frac{1}{3}\ sen\ u+C$$,

logo: $I=\frac{sen\ (3z+4)}{3}+C$

12) $I=\int tg\ x\ dx=\int \frac{sen\ x}{\cos\ x}dx$, fazendo

$u=\cos x$, temos que

$$du=-sen\ x\ dx\Rightarrow dx=-\frac{du}{sen\ x}$$

Assim, ao substituirmos:

$$I=-\int \frac{sen\ x}{u}\frac{du}{sen\ x}=-\int \frac{1}{u}du=-\ln|u|+C$$, logo:

$$I=-\ln|\cos\ x|+C$$

Que também pode ser escrita da forma:

$$I=\ln\left|(\cos\ x)^{-1}\right|+C=\ln|\sec\ x|+C$$

13) $I=\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5\ dr$, fazendo

$u=\frac{r^3}{18}-1$, temos que

$$du=\frac{3r^2}{18}dr\Rightarrow dr=\frac{6}{r^2}du$$

Assim, ao substituirmos:

14) $I=\int x^{1/2}sen\ \left(x^{3/2}+1\right)\ dx$, fazendo

$u=x^{3/2}+1$, temos que

$$du=\frac{3}{2}x^{1/2}dx\Rightarrow dx=\frac{2}{3x^{1/2}}du$$

Assim, ao substituirmos:

$$I=\int x^{1/2}sen\ u\ \frac{2}{3x^{1/2}}du=\frac{2}{3}\int sen\ u\ du$$, logo:

$I=\int r^2 u^5 \dfrac{6}{r^2}du=6\int u^5 du=6\dfrac{u^6}{6}+C$, logo:

$I=\left(\dfrac{r^3}{18}-1\right)^6+C$

$I=-\dfrac{2}{3}\cos u+C=-\dfrac{2\cos\left(x^{3/2}+1\right)}{3}+C$

15) $I=\int \dfrac{sen\,(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}dt$, fazendo

$u=\cos(2t+1)$, temos que

$du=-2\,sen\,(2t+1)dt \Rightarrow dt=-\dfrac{1}{2\,sen\,(2t+1)}du$

Assim, ao substituirmos:

$I=-\int \dfrac{sen\,(2t+1)}{u^2}\dfrac{1}{2\,sen\,(2t+1)}du$

$I=-\dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{u^2}du=-\dfrac{1}{2}\int u^{-2}du$, logo:

$I=-\dfrac{1}{2}\dfrac{u^{-1}}{-1}+C \Rightarrow I=\dfrac{1}{2\cos(2t+1)}+C$

16) $I=\int \dfrac{1}{\theta^2}sen\,\dfrac{1}{\theta}\cos\dfrac{1}{\theta}d\theta$, fazendo

$u=sen\,\dfrac{1}{\theta}=sen\,\theta^{-1}$, temos que

$du=-\theta^{-2}\cos\theta^{-1}d\theta=-\dfrac{1}{\theta^2}\cos\dfrac{1}{\theta}d\theta$

Assim, ao substituirmos:

$I=-\int u\,du=-\dfrac{u^2}{2}+C \Rightarrow I=-\dfrac{sen^2\dfrac{1}{\theta}}{2}+C$, logo:

17) $I=\int \dfrac{1}{t^2}\cos\left(\dfrac{1}{t}-1\right)dt$, fazendo

$u=\dfrac{1}{t}-1=t^{-1}-1$, temos que

$du=-t^{-2}dt=-\dfrac{1}{t^2}dt \Rightarrow dt=-t^2du$

Assim, ao substituirmos:

$I=-\int \dfrac{1}{t^2}\cos u\;t^2du=-\int \cos u\;du$, logo:

$I=-\;sen\;u+C \Rightarrow I=-sen\left(\dfrac{1}{t}-1\right)+C$

18) $I=\int \left(s^3+2s^2-5s+5\right)\left(3s^2+4s-5\right)ds$

$u=s^3+2s^2-5s+5$, temos que

$du=\left(3s^2+4s-5\right)ds$

Assim, ao substituirmos:

$I=\int u\;du=\dfrac{u^2}{2}+C$, logo:

$I=\dfrac{\left(s^3+2s^2-5s+5\right)^2}{2}+C$

19)

$I=\int \sqrt{\dfrac{1-x}{x^5}}dx=\int \sqrt{\dfrac{1-x}{x^4 x}}dx=\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}dx$

$I=\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}\,dx$, fazendo

$u=\dfrac{1}{x}-1=x^{-1}-1$, temos que

$du=-x^{-2}dt=-\dfrac{1}{x^2}dx \Rightarrow dt=-x^2du$

Assim, ao substituirmos:

$I=-\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{u}\;x^2du=-\int u^{1/2}du$, logo:

$I=-\dfrac{u^{3/2}}{3/2}+C=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^{3/2}+C$

20) $I=\int (\cos x)\,e^{sen\,x}\,dx$, fazendo

$u=sen\;x \Rightarrow du=\cos x\;dx$

Assim, ao substituirmos:

$I=\int e^u\,du$, logo:

$I=e^u+C=e^{sen\;x}+C$

21) $I=\int \frac{1}{\sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}}\sec^2\left(e^{\sqrt{x}}+1\right)\,dx$ $I=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\sec^2\left(e^{\sqrt{x}}+1\right)\,dx$, fazendo $u=e^{\sqrt{x}}+1$, temos que $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx \Rightarrow \frac{du}{2}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ Assim, ao substituirmos: $I=\frac{1}{2}\int \sec^2 u\;du=\frac{1}{2}\,tg\;u+C$, logo: $I=\frac{1}{2}\,tg\,\left(e^{\sqrt{x}}+1\right)+C$	22) $I=\int \frac{dx}{x\;\ln\;x}$, fazendo $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx=\frac{dx}{x}$ Assim, ao substituirmos: $I=\int \frac{1}{u}du=\ln\lvert u\rvert+C=\ln\lvert\ln x\rvert+C$

2 – $\frac{df}{dx}=12\,x\,\left(3x^2-1\right)^3 \Rightarrow df=12\,x\,\left(3x^2-1\right)^3 dx \Rightarrow f(x)=\int 12x\,\left(3x^2-1\right)^3 dt$

Fazendo: $u=3x^2-1$, temos que $du=6\,x\;dx \Rightarrow dx=\frac{du}{6x}$

Assim, ao substituirmos: $f(x)=\int 12\,x\;u^3\;\frac{du}{6t} \Rightarrow \int 2\;u^3\;du=2\frac{u^4}{4}+C$, logo: $f(x)=\frac{\left(3x^2-1\right)^4}{2}+C$

Sabendo que $f(1)=3$, fazemos: $f(1)=\frac{\left(3.1^2-1\right)^4}{2}+C=3 \Rightarrow 8+C=3 \Rightarrow C=-5$

$$f(x)=\frac{\left(3x^2-1\right)^4}{2}-5$$

3 – $\frac{ds}{dt}=6\;sen\;(2t) \Rightarrow ds=6\;sen\;(2t)\;dt \Rightarrow s(t)=\int 6\;sen\;(2t)\;dt$

Fazendo: $u=2t$, temos que $du=2\;dt \Rightarrow dt=\frac{du}{2}$

$$s(t)=\int 6\;sen\;u\;\frac{du}{2}=\int 3\;sen\;u\;du=-3\cos u+C=-3\cos(2t)+C$$

Sabemos que $s(0)=0$, então: $s(0)=-3\cos(2.0)+C=0 \Rightarrow -3+C=0 \Rightarrow C=3$

A função velocidade é: $s(t)=-3\cos(2t)+3$ e, quando $t=\frac{\pi}{2}\;s$,

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\cos\left(2.\frac{\pi}{2}\right)+3=-3(-1)+3=6\;m$$