Álgebra Linear I - Lista 14

Bases e matrizes ortogonais

Respostas

1) Considere os vetores

$$u = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad w = (1, 0, 0).$$

a) Mostre que u, v e w são ortogonais entre si e a norma de cada deles é igual a um;

b) Determine o volume do paralelepípedo formado pelos vetores u, v e w;

c) Mostre que u, v e w são linearmente independentes;

d) Sabendo que T é uma transformação linear e que

$$T(1, 0, 0) = u, \ T(0, 1, 0) = v \text{ e } T(0, 0, 1) = w,$$

determine a forma matricial de T. A transformação linear T é inversível?

e) Escreva cada vetor (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de u, v e w;

f) Calcule

$$(x, y, z) \cdot u, \quad (x, y, z) \cdot v, \quad (x, y, z) \cdot w.$$

Compare os resultados com o item anterior. Interprete geometricamente.

g) Determine T^{-1}.

Resposta: Para o item (a) é suficiente calcular os produtos escalares. O volume do paralepípedo é um (isto decorre do fato de que os vetores são ortogonais e unitários, v. também pode calcular o produto misto dos três vetores). Como o produto misto é não nulo, os vetores são linearmente independentes.

A forma matricial de T é

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A transformação T é inversível, pois seu determinante é não nulo. Como T é ortogonal sua inversa é sua transposta.

Para responder aos itens (e) e (f) é suficiente observar que, como u, v e w são ortonormais,

$$(x, y, z) = (x, y, z)\cdot u + (x, y, z)\cdot v + (x, y, z)\cdot w = (y+z)/\sqrt{2}u + (z-y)/\sqrt{2}v + xw.$$

Finalmente, como a matriz é ortogonal, sua inversa é sua trasposta.

2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix}.$$

Estude que condições devem satisfazer os números reais a e b para que a matriz seja ortogonal.

Resposta: Os vetores $(a+b, a-b)$ e $(b-a, a+b)$ devem ser ortogonais e unitários. Ou seja

$$(a+b, a-b)\cdot(b-a, a+b) = (a+b)(b-a) + (a-b)(a+b) = (b^2-a^2) + (a^2-b^2) = 0.$$

Logo a condição de ortogonalidade é sempre verificada. Para ver que os vetores são unitários,

$$(a+b, a-b)\cdot(a+b, a-b) = a^2 + b^2 + 2\,a\,b + a^2 + b^2 - 2\,a\,b = 2\,(a^2+b^2) = 1.$$

Analogamente,

$$(b-a, a+b)\cdot(b-a, a+b) = b^2+a^2-2\,a\,b+a^2+b^2+2\,a\,b = 2\,(a^2+b^2) = 1.$$

Ou seja, a condição é

$$a^2+b^2 = 1/2.$$

3) Considere a transformação linear T definida pela matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/(3\sqrt{5}) & 5/(3\sqrt{5}) & 4/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

- Estude se a transformação linear T é inversível. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(1,0,0)$, $T^{-1}(0,1,0)$ e $T^{-1}(0,0,1)$.
- Resolva (usando T^{-1}) o sistema

$$T(X) = v, \quad \text{onde } X = (x,y,z)^t \text{ e } v = (1,1,0)^t.$$

- Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{5} & 0 & -4/\sqrt{5} \\ 4/3 & -8/3 & 8/3 \\ 8/(3\sqrt{5}) & 20/(3\sqrt{5}) & 16/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

  Determine M^{-1}.

Resposta: A matriz é ortogonal: é muito rápido ver que as linhas formam uma base ortogonal. As contas usando colunas são mais enfadonhas, mas, obviamente, também dão certo. A inversa de T é sua trasposta. Portanto, $T^{-1}(1,0,0)$, $T^{-1}(1,0,0)$ e $T^{-1}(0,0,1)$ são as linhas da matriz T.

Para resolver o sistema é necessário observar somente que

$$X = T^{-1}T(X) = T^{-1}(v).$$

Observe que

$$M = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{5} & 0 & -4/\sqrt{5} \\ 4/3 & -8/3 & 8/3 \\ 8/(3\sqrt{5}) & 20/(3\sqrt{5}) & 16/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix} =$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/(3\sqrt{5}) & 5/(3\sqrt{5}) & 4/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix} = 4\,[T],$$

onde $[T]$ é ortogonal. Portanto, $[T]^{-1} = [T]^t$ e

$$M^{-1} = \frac{1}{4}\,[T]^t.$$

4) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Determine uma base de autovetores A.

(c) Determine uma forma diagonal D de A.

(d) Escreva A da forma $A = MDM^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(e) Escreva, caso exista, a matriz A^{-1} inversa de A da forma $A^{-1} = NEN^{-1}$, onde E é uma matriz diagonal. Determine explicitamente N e N^{-1}.

Resposta: O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (6-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9)) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

Observe que o polinômio $(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$ tem raízes $\lambda = 4$ e $\lambda = -2$. Logo as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda = 6, 4, -2$. Observe que este resultado é coerente com o traço ser 8 e o determinante ser -48.

Uma base de autovetores é obtida da seguinte forma.
autovetores associados a 6**:** são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 0 & 3 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 3 & 0 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-5x + 3y = 0, \quad 3x - 5y = 0.$$

As soluções são da forma $(0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(0, 1, 0)$.

autovetores associados a 4**:** são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 3 \\ 0 & 6-4 & 0 \\ 3 & 0 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-3x + 3y = 0, \quad 3y = 0, \quad 3x - 3y = 0.$$

As soluções são da forma $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(1, 0, 1)$.

autovetores associados a -2**:** Como a matriz é simétrica, os autovetores associados a -2 devem ser ortogonais a $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. Logo um autovetor é $(1, 0, -1)$.

Portanto, uma base de autovetores é

$$\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}.$$

Na base β a matriz de A é diagonal da forma

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Considerando agora uma base ortonormal de autovetores de A,

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0,1,0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\},$$

temos

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como M é ortogonal,

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M.$$

Como A tem determinante não nulo (o produto dos autovetores é diferente de zero) existe A^{-1}. Temos

$$A^{-1} = (MDM^{-1})^{-1} = MD^{-1}M^{-1} = MD^{-1}M.$$

Logo $N = N^{-1} = M$. Finalmente,

$$E = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$