Lista de Exercícios – Retas e Planos no Espaço

1. Ache a equação do plano paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$ e que passa por $P = (1, -2, 1)$.

   Solução: Como o novo plano é paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$, então o vetor $N = (2, -1, 5)$ também é vetor normal do plano procurado. Assim, a equação dele é $2x - y + 5z + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (1, -2, 1)$ na equação do plano. Assim, a equação do plano é $2x - y + 5z - 9 = 0$.

2. Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P = (2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z + 2 = 0$ e $2x - y + 4z - 1 = 0$.
   Solução: Os vetores normais dos outros planos, $N1 = (1, 2, -3)$ e $N2 = (2, -1, 4)$, são paralelos a ao plano procurado π. Assim, o produto vetorial $N1 \times N2$ é um vetor normal a π. $N = (5, -10, -5)$. Assim, a equação de π é $5x - 10y - 5z + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (2, 1, 0)$ na equação do plano. Assim, a equação do plano π é $5x - 10y - 5z = 0$.

3. Encontrar a equação do plano que passa pelos pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y = z$.
   Solução: Como o plano procurado passa pelos pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y - z = 0$, então os vetores $PQ= (0, 0, 1)$ e o vetor normal do plano $y - z = 0$, $N1 = (0, 1, -1)$ são paralelos ao plano procurado π. Assim, o produto vetorial $PQ \times N_1$ é um vetor normal a π ($N_1 = (-1\ 0\ 0)$).

Assim, a equação de π é -x + d = 0. Para determinar d substituímos o ponto P = (1, 0, 0) na equação do plano, obtendo que a equação de π é -x + 1 = 0.

4. Determine a interseção da reta que passa pela origem e tem vetor diretor $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ com o plano 2x + y + z = 5.

   Solução: A equação da reta é (x, y, z) = (t, 2t, t). Substituindo-se o ponto da reta na equação do plano obtemos o valor de t = 1. Substituindo-se este valor de t nas equações paramétricas da reta obtemos o ponto P = (1, 2, 1).

5. Sejam P = (4, 1, -1) e r: (x, y, z) = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t).
   a. Mostre que P $\notin$ r;
   b. Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

   Solução:

   a) Substituindo-se o ponto P = (4, 1, -1) nas equações da reta r obtemos valores diferentes de t: t = 2, t = 3 e t = -1

   Logo não existe um valor de t tal que P = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t).

   b) O ponto Q = (2, 4, 1) é um ponto do plano π procurado. Assim, π é paralelo aos vetores PQ = (-2, 3, 2) e o vetor diretor da reta r, V = (1, -1, 2). Logo, o produto vetorial PQ x V é um vetor normal ao plano π (N = (8 6 -1)). Substituindo-se o ponto P ou o ponto Q na equação de π obtemos que a equação do plano π é 8x + 6y - z - 39 = 0.

6. Encontre as equações da reta que passa pelo ponto Q = (1, 2, 1) e é perpendicular ao plano x - y + 2z - 1 = 0.

   Solução: O vetor normal ao plano é um vetor diretor da reta procurada. Assim, as equações paramétricas de r são
   (x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 1 + 2t).

7. Ache equações da reta que passa pelo ponto P = (1, 0, 1) e é paralela aos planos 2x + 3y + z + 1 = 0 e x - y + z = 0.

   Solução: O vetor diretor da reta procurada é ortogonal ao mesmo tempo aos vetores normais dos dois planos, portanto o produto vetorial deles é um vetor diretor da reta procurada.
   Vd = (4 -1 -5), então:
   (x, y, z) = (1 + 4t,-t, 1 - 5t).

8. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos x + y - z = 0 e 2x - y +3z -1 = 0. Ache a equação do plano que passa por A = (1, 0, -1) e contém a reta r.

   Solução: A reta interseção dos planos é (x, y, z) = (1/3-2/3t, -1/3+5/3t, t). O vetor diretor V = (-2/3, 5/3, 1) desta reta é paralelo ao plano procurado. O ponto P = (1/3, -1/3, 0) é um ponto da reta e é também, portanto um ponto do plano procurado π. O vetor AP é também um vetor paralelo a π. Assim, o produto vetorial AP x V é um vetor normal a π.
   AP = [-2/3, -1/3, 1]
   N = [-2, 0, -4/3]
   Substituindo-se o ponto A ou o ponto P na equação -2x - 4/3z + d = 0 obtemos a equação do plano 6x + 4z - 2 = 0.