LISTA 02
VOLUME – MÉTODO DA CASCA

1 – Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações de cada item abaixo e calcule o volume do sólido gerado pela revolução desta área em torno do eixo dado, utilizando o método da casca:

a) Área entre $y=x^3$, $x=2$ e $y=0$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo y
b) Área entre $y-2x=0$, $y=2$ e o eixo y, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo x
c) Área entre $y=x^2+1$, $y=1$, $x=2$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo y
d) Área entre $x=\sqrt{2y}$, $x=0$ e $y=4$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo x
e) Área entre $y=\sqrt{1-x^2}$, $x=0$ e $y=0$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo y
f) Área entre $x=4y-y^2$ e $x=0$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo x
g) Área entre $y=1/x$, $x=1$, $x=4$ e $y=0$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo y

2 – Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações de cada item abaixo e calcule o volume do sólido gerado pela revolução desta área em torno do eixo dado, utilizando o método mais adequado:

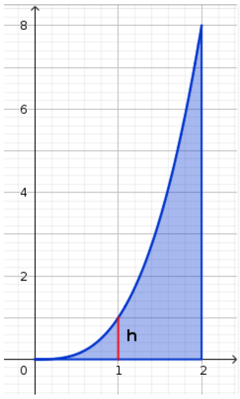
a) Área entre $y=x^2-2x+1$ e $y=1$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo y
b) Área entre $y=x^2-2x+1$ e $y=1$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo x
c) Área entre $y=5-x$ e $y=x^2-6x+9$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo y
d) Área entre $y=5-x$ e $y=x^2-6x+9$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo x
e) Área entre $y=x$ e $x=y^2$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo y
f) Área entre $y=x$ e $x=y^2$, no primeiro quadrante, girando em torno no eixo x

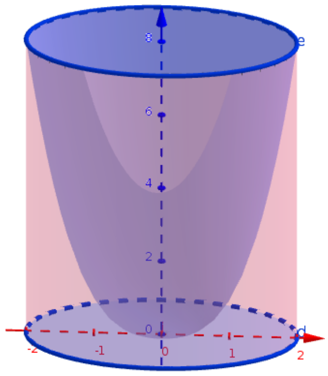
GABARITO

1 – a) $r=\Delta x=x$ $\quad\quad h=\Delta y=x^3$

$2\pi rh=2\pi x.x^3=2\pi x^4$

$$V=2\pi\int_0^2 (x^4)dx=2\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{64\pi}{5}\ u.V$$



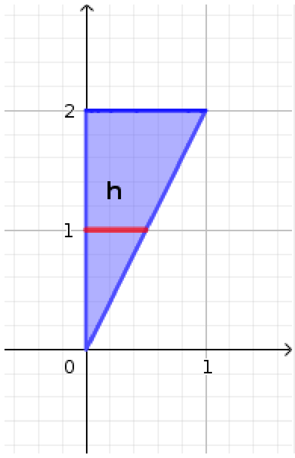


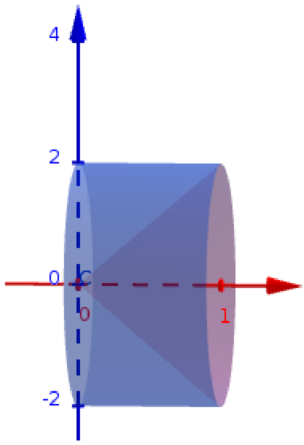
b) $r=\Delta y=y$

$y-2x=0\Rightarrow x=\frac{y}{2}$ $\quad\quad h=\Delta x=\frac{y}{2}$

$2\pi rh=2\pi y.\frac{y}{2}=\pi y^2$

$$V=\pi\int_0^2 y^2 dy=\pi\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\frac{8\pi}{3}\ u.V$$



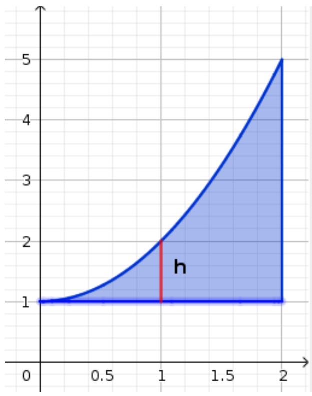


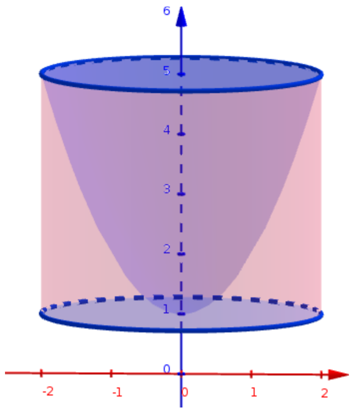
c) $r=\Delta x=x$

$h=\Delta y=(x^2+1)-(1)=x^2$

$2\pi rh=2\pi x.x^2=2\pi x^3$

$$V=2\pi\int_0^2 x^3 dx=2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=8\pi\ u.V$$





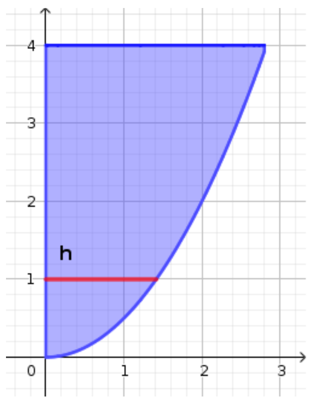
d) $r=\Delta y=y$

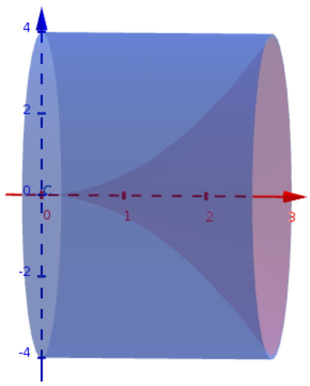
$h=\Delta x=\sqrt{2y}$

$2\pi rh=2\pi y.\sqrt{2y}=2\sqrt{2}\pi.y^{3/2}$

$$V=2\sqrt{2}\ \pi\int_0^4 y^{3/2}dy$$

$$V=2\sqrt{2}\ \pi\left[\frac{2y^{5/2}}{5}\right]_0^4=\frac{128\sqrt{2}\ \pi}{5}\ u.V$$



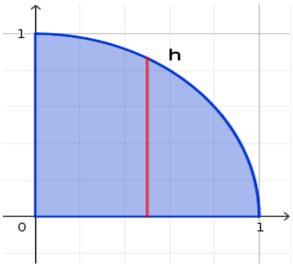


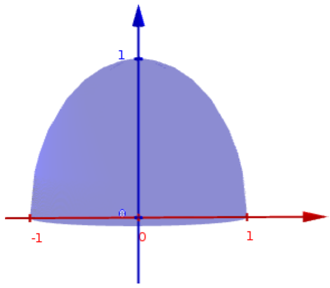
e) $r=\Delta x=x-0=x$

$h=\Delta y=\sqrt{1-x^2}$

$2\pi rh=2\pi x\sqrt{1-x^2}$

$V=2\pi\int_0^1\left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx$





Vamos fazer a integral por substituição

Substituindo

$$u=1-x^2\ \Rightarrow\ du=-2x\,dx\ \Rightarrow\ -\frac{du}{2x}=dx$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int x\sqrt{u}\frac{du}{2x}=-\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du=-\frac{1}{2}\frac{2u^{3/2}}{3}=-\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}$$

Logo: $V=2\pi\int_0^1\left(x\sqrt{1-x^2}\right)dx=2\pi\left[-\sqrt{\frac{\left(1-x^2\right)^3}{3}}\right]_0^1=2\pi\left[0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]_0^1=\frac{2\pi}{3}\ u.V.$

f) $r=\Delta y=y$

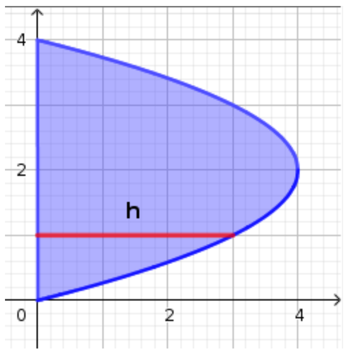
$h=\Delta x=4y-y^2$

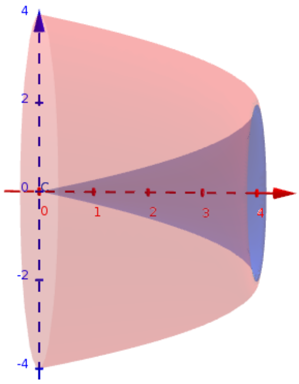
$2\pi rh=2\pi y(4y-y^2)=2\pi(4y^2-y^3)$

$V=2\pi\int_0^4(4y^2-y^3)dy$

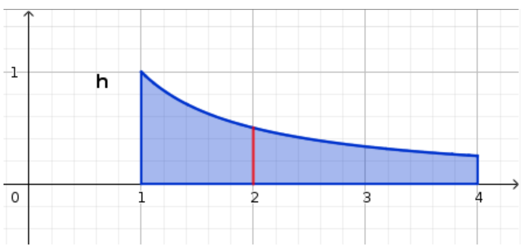
$V=2\pi\left[\frac{4y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^4=2\pi\left[\frac{256}{3}-64\right]$

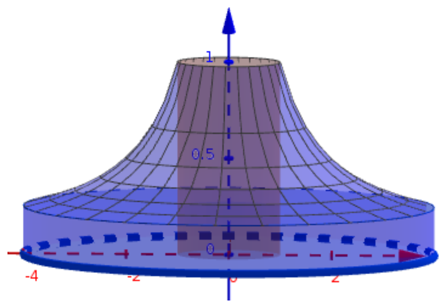
$V=\frac{128\pi}{3}\ u.V$





g)



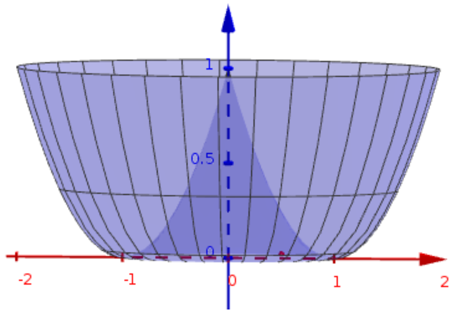


$r=\Delta x=x$ $\qquad\qquad$ $h=\Delta y=\frac{1}{x}$

$2\pi rh=2\pi x.\frac{1}{x}=2\pi$

$V=2\pi\int_1^4 dx=2\pi[x]_1^4=6\pi\ u.V$

2 – a) Como temos y = f(x), devemos usar dx, fazendo uma barra vertical. Ao girar essa barra em torno do eixo y, teremos uma casca. Então vamos usar o método da casca:



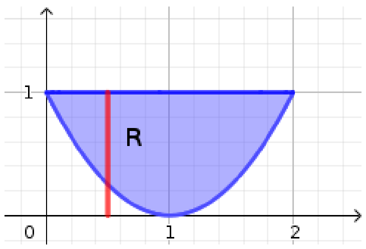
$$r=\Delta x=x$$

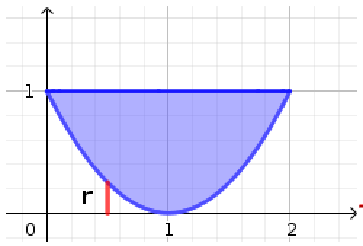
$$h=\Delta y=1-(x^2-2x+1)=-x^2+2x$$

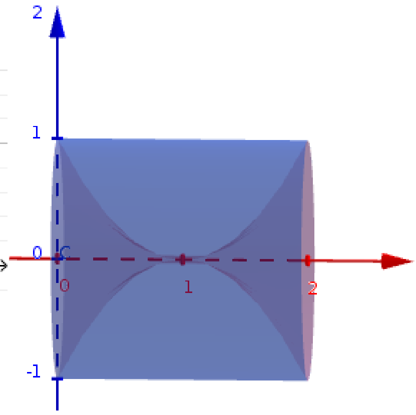
$$2\pi rh=2\pi x(2x-x^2)=2\pi(2x^2-x^3)$$

$$V=2\pi\int_0^2 (2x^2-x^3)dx=2\pi\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{8\pi}{3}\ u.V$$

b)







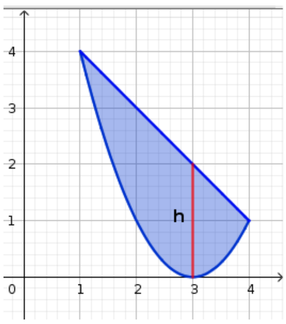
Como temos y = f(x), devemos usar dx, fazendo uma barra vertical. Ao girar essa barra em torno do eixo x, teremos uma arruela. Então vamos usar o método da arruela:

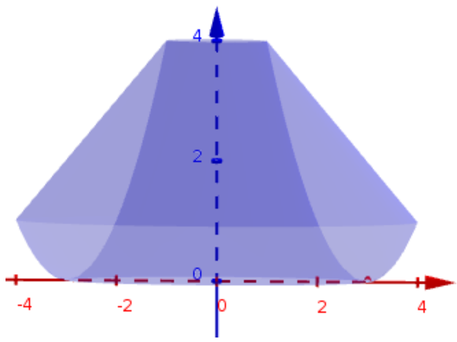
$$R=1\ \Rightarrow\ R^2=1 \qquad\qquad r=x^2-2x+1\ \Rightarrow\ r^2=(x^2-2x+1)^2\ \Rightarrow\ r^2=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$$

$$R^2-r^2=1-x^4+4x^3-6x^2+4x-1=-x^4+4x^3-6x^2+4x$$

$$V=\pi\int_0^2 (-x^4+4x^3-6x^2+4x)\ dx=\pi\left[-\frac{x^5}{5}+x^4-2x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8\pi}{5}\ u.V$$

c) Como temos y = f(x), devemos usar dx, fazendo uma barra vertical. Ao girar essa barra em torno do eixo y, teremos uma casca. Então vamos usar o método da casca:





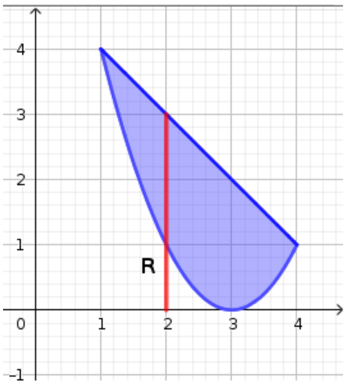
$$r=\Delta x=x$$

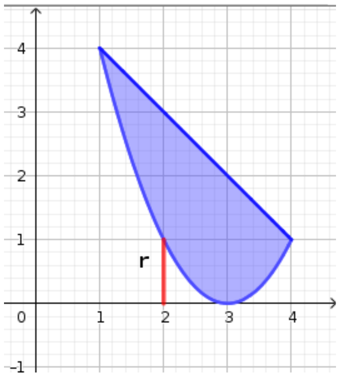
$$h=\Delta y=5-x-(x^2-6x+9)=-x^2+5x-4$$

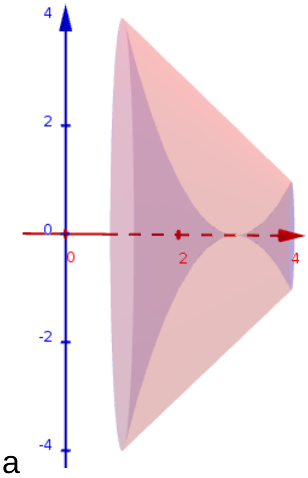
$$2\pi rh=2\pi(-x^3+5x^2-4x)$$

$$V=2\pi\int_0^4 (-x^3+5x^2-4x)dx=2\pi\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}-2x^2\right]_0^4=\frac{64\pi}{3}\ u.V$$

d)







Como temos y = f(x), devemos usar dx, fazendo uma barra vertical. Ao girar essa barra em torno do eixo x, teremos uma arruela. Então vamos usar o método da arruela:

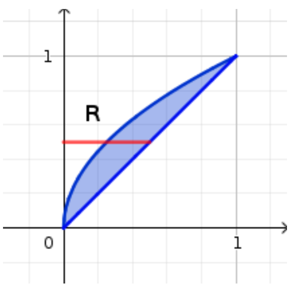
$$R=5-x \Rightarrow R^2=(5-x)^2 \Rightarrow R^2=25-10x+x^2$$

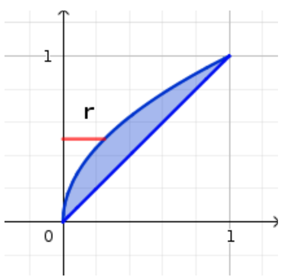
$$r=x^2-6x+9 \Rightarrow r^2=(x^2-6x+9)^2 \Rightarrow r^2=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$$

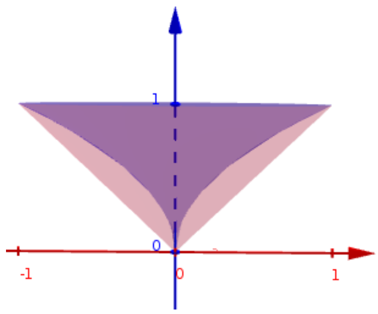
$$R^2-r^2=25-10x+x^2-x^4+12x^3-54x^2+108x-81=-x^4+12x^3-53x^2+98x-56$$

$$V=\pi\int_1^4(-x^4+12x^3-53x^2+98x-56)\,dx=\pi\left[-\frac{x^5}{5}+3x^4-\frac{53x^3}{3}+49x^2-56x\right]_0^2=\frac{72\pi}{5}\ u.V$$

e)





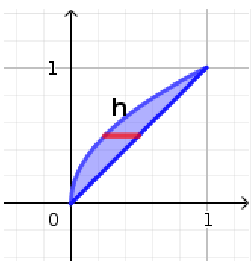


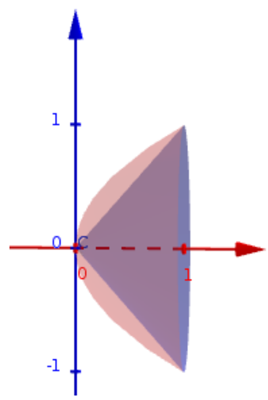
Como temos x = g(y), devemos usar dy, fazendo uma barra horizontal. Ao girar essa barra em torno do eixo y, teremos uma arruela. Então vamos usar o método da arruela:

$$R=y \Rightarrow R^2=y^2 \qquad r=y^2 \Rightarrow r^2=y^4 \qquad R^2-r^2=y^2-y^4$$

$$V=\pi\int_0^1(y^2-y^4)\,dy=\pi\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{2\pi}{15}\ u.V$$

f) Como temos x = g(y), devemos usar dy, fazendo uma barra horizontal. Ao girar essa barra em torno do eixo x, teremos um cilindro. Então vamos usar o método da casca cilíndrica:





$$r=\Delta y=y$$

$$h=\Delta x=y-y^2$$

$$2\pi rh=2\pi(y^2-y^3)$$

$$V=2\pi\int_0^1(y^2-y^3)\,dy=2\pi\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}\ u.V$$