Álgebra Linear I - Lista 12

Matrizes semelhantes. Diagonalização

Respostas

1) Determine quais das matrizes a seguir são diagonalizáveis. Nos caso afirmativos encontre uma base de autovetores e uma forma diagonal das matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: A matriz A é triangular. Seus autovalores são os elementos da diagonal, ou seja, 1, 2 e 3. Como são diferentes, é diagonalizável, e sua forma diagonal é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Seus autovetores são as soluções não triviais dos seguintes sistemas:

$\lambda = 1$,

$$x = x, \quad x + 2y = y, \quad x + y + 3z = z.$$

Uma solução não trivial é $(1, -1, 0)$.

$\lambda = 2$,

$$x = 2x, \quad x + 2y = 2y, \quad x + y + 3z = 2z.$$

Uma solução não trivial é $(0, 1, -1)$.

$\lambda = 3$,

$$x = 3x, \quad x + 2y = 3y, \quad x + y + 3z = 3z.$$

Uma solução não trivial é $(0,0,1)$.

Logo uma base de autovetores é $\beta = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$.

O polinômio característico da matriz B é

$$p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda) + \lambda = \lambda(\lambda - \lambda^2 + 1).$$

Ou seja, os autovalores são 0 e $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Verificamos que uma base de autovetores é

$$\{(0,1,0),((1+\sqrt{5})/2,0,1)((1-\sqrt{5})/2,0,1)\}.$$

Portanto, é diagonalizável. Finalmente, sua forma diagonal é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a matriz C é triangular. Seus autovalores são os elementos da diagonal, ou seja, 1 (duplo) e 2. Para calcular os autovetovetores associados a 1 resolvemos

$$x + y = 0.$$

Que fornece dois autovetores l.i. $(0,0,1)$ e $(1,-1,0)$. Finalmente, para os autovetores associados a 2 resolvemos

$$-x = 0, \quad x + y - z = 0.$$

Logo $(0,1,1)$ é autovetor. Uma base de autovetores é

$$\{(0,0,1),(1,-1,0),(0,1,1)\}.$$

Finalmente, uma forma diagonal é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz D não é diagonalizável, tem um único autovalor 1, e é possível encontrar no máximo um único autovetor l.i., (os autovetores são da forma $(t,0,0)$).

A matriz E é diagonalizável pois tem três autovalores diferentes (1, 2 e 3). Uma base de autovetores é $\beta = \{(1,0,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$.

A matriz F é diagonalizável pois tem três autovalores diferentes (1, 0 e 2). Uma base de autovetores é $\beta = \{(1,0,0),(0,1,-1),(0,1,1)\}$.

2) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Estude quais destas matrizes são diagonalizáveis. Nos casos afirmativos determine a forma diagonal D e uma matriz P tal que PDP^{-1} é a matriz original.

Resposta: As matrizes A e B não são diagonalizáveis. A matriz C sim é diagonalizável. Sua forma diagonal é

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Uma base de autovetores é $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ e a matriz P é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $B = PAP^{-1}$. Estude se B é diagonalizável. Caso afirmativo determine sua forma diagonal.

Resposta: A matriz B não é diagonalizável. Se fosse teríamos

$$B = MDM^{-1}$$

com D diagonal. Logo

$$B = MDM^{-1} = PAP^{-1}, \quad A = (P^{-1}M)D(M^{-1}P).$$

Observe que $T = P^{-1}M$ é inversível e sua inversa é $M^{-1}P$. Logo

$$A = TDT^{-1},$$

e A seria diagonalizável. Mas sabemos que a matriz A não é diagonalizável.

4) Considere as matrizes

$$A = PDP^{-1}, \qquad B = QTQ^{-1},$$

onde

$$[P] = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad [D] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule a soma dos autovalores de A^{10} e B^{10}.

Resposta: Observe que A^{10} e D^{10} são semelhantes:

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1}.$$

Portanto, possuem os mesmos autovalores. Os autovalores de D^{10} são 1 duplo e 2^{10}. Logo a soma pedida é $2^{10} + 2$ (estamos somando os autovalores considerando sua multiplicidade).

O segundo caso é similar ao anterior. Observe que

$$[T^2] = \begin{bmatrix} 1^2 & a_2 & b_2 \\ 0 & 2^2 & c_2 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}.$$

Indutivamente,

$$[T^{10}] = \begin{bmatrix} 1^{10} & a_{10} & b_{10} \\ 0 & 2^{10} & c_{10} \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix}.$$

Observe agora, como no exercício precedente, que B^{10} e T^{10} são semelhantes:

$$B^{10} = QT^{10}Q^{-1}.$$

Portanto, possuem os mesmos autovalores. Os autovalores de T^{10} são 1, 2^{10} e 3^{10}. Logo a soma pedida é $3^{10} + 2^{10} + 1$.

5) Considere T uma transformação linear que satisfaz

$$\begin{aligned} T(1,\,-1,\,1) &= 2(1,\,-1,\,1), \\ T(1,\,1,\,0) &= 3(1,\,1,\,0), \\ T(1,\,0,\,-1) &= 3(1,\,0,\,-1). \end{aligned}$$

Encontre, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ feita de autovetores de T ortogonais entre si. Estude se T é diagonalizável. Caso afirmativo determine sua forma diagonal.

Resposta: Considere a base de autovetores $\{(1,-1,1),(1,1,0),(-1,1,2)\}$ (verifique). Como os três autovetores são l.i., formam uma base de autovetores. A matriz é portanto diagonalizável e sua forma diagonal é

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6) Determine para que valores de a e b as matrizes abaixo são diagonalizáveis:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano $\pi\colon x + y = 0$ sejam autovetores da matriz abaixo e o vetor $(17, 21, 356)$ não seja um autovetor:

c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas: Observe primeiro que todas as matrizes são triangulares, portanto seus autovalores são as entradas da diagonal principal com as multiplicidades correspondentes. Logo,

- a matriz do item (a) tem um único autovalor $\lambda = 3$ de multiplicidade 2,
- a matriz do item (b) tem autovalores $\lambda = 2$ de multiplicidade 2 e 1 simples, e
- a matriz do item (c) tem um único autoavalor $\lambda = 3$ de multiplicidade 3.

Lembre também que uma matriz é diagonalizável se, e somente se, possui uma base de autovetores.

Para a matriz
$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
devemos ver quando existem dois autovetores linearmente independentes associados a 3. Isto é, o sistema
$$\begin{pmatrix} 3-3 & a \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ay = 0$$
deve ter $\mathbb{R}^2$ como soluções. Portanto, $a = 0$.

Para que a matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
seja diagonalizável, o autovalor 2 de multiplicidade dois deve ter dois autovetores linearmente independentes, ou seja as soluções do sistema
$$\begin{pmatrix} 1-2 & b & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

devem formar um plano. Temos que as soluções devem verificar

$$-x + by = 0,$$

que sempre é um plano, independentemente do valor de b. Ou seja, para todo $b \in \mathbb{R}$ a matriz é diagonalizável.

Finalmente, para o item (c) observe que os autovetores da matriz (associados a 3) devem verificar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad dx = 0, \quad cx + cy = 0.$$

Observe que se $d \neq 0$ então $x = 0$. Neste caso há vetores não nulos do plano $x + y = 0$ (por exemplo $(1, -1, 0)$) que não são autovetores (pois não são solução do sistema). Portanto $d = 0$. Logo a solução do sistema é

$$cx + cy = 0.$$

Se $c = 0$, (como já sabemos que $d = 0$) qualquer vetor é solução do sistema, em particular o vetor $(17, 21, 356)$. Logo $c \neq 0$. Neste caso as soluções formam o plano $x + y = 0$. Portanto, a resposta é $d = 0, c \neq 0$.

7) Estude a veracidade das afirmações a seguir:

- Seja A uma matriz 3×3 diagonalizável. Suponha que $B = PAP^{-1}$ (onde P é uma matriz 3×3 inversível). Então B é diagonalizável.
- Seja A uma matriz diagonalizável. Então A^3 também é diagonalizável.
- A matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2222 & 3333 & 5555 \\ 4444 & 6666 & 11110 \\ 6666 & 9999 & 16665 \end{pmatrix}$$
tem autovalores 0 (de multiplicidade 2) e $2222 + 6666 + 16665 = 25553$.
- Duas matrizes 2×2 com o mesmo polinômio característico, o mesmo traço e o mesmo determinante são semelhantes.

Resposta: A primeira afirmação é verdadeira. É exatamente a definição matriz diagonalizável: ser semelhante a uma matriz diagonal. Observe que $A = MDM^{-1}$ onde D é diagonal, logo

$$B = PMDM^{-1}P^{-1} = (PM)D(PM)^{-1}.$$

A segunda afirmação também é verdadeira. É suficiente provar que existe uma base de autovetores de A^3. Como A é diagonalizável, existe uma base de autovetores de A, $\beta = \{u, v, w\}$ com $A(u) = \lambda\, u$, $A(v) = \sigma\, v$ e $A(w) = \tau\, w$ (onde λ, σ e τ não são necessariamente diferentes). Temos $A^3(u) = \lambda^3\, u$, $A^3(v) = \sigma^3\, v$ e $A^3(w) = \tau^3\, w$. Portanto, u, v e w são autovetores de A^3, assim β é uma base de autovetores de A^3 e A^3 é diagonalizável.

Outra forma,

$$A = PDP^{-1}, \quad A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}, = PD^3P^{-1}.$$

Como D^3 é diagonal, se segue a afirmação.

A terceira afirmação é verdadeira. Como as linhas da matriz são proporcionais (a segunda linha é obtida multiplicando por dois a primeira, e a terceira linha é obtida multiplicando por três a primeira), o determinante é nulo. Como o determinante é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade), existe um autovalor nulo. Os autovetores associados a 0 são os vetores não nulos do plano

$$222\, x + 333\, y + 555\, z = 0,$$

ou seja, há dois autovetores l.i. associados ao autovalor 0, e portanto a multiplicidade de 0 é no mínimo 2. Não pode ser 3. pois em tal caso o traço da matriz seria nulo, ou seja, a multiplicidade de 0 é 2. Logo falta por determinar um autovalor, para isso usamos que a soma dos autovalores contados com multiplicidade é o traço, temos que, se λ é o terceiro autovalor,

$$0 + 0 + \lambda = 222 + 666 + 16665 = 25553,$$

o que prova a afirmação.

Finalmente, a última afirmação é falsa. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\det(A) = \det(B) = 1, \quad \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 2,$$

e os polinômios caraterísticos são $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2$.

8)

- Seja A uma matriz diagonalizável tal que A^{10} é a matriz nula (todos os coeficientes são zero). Determine A.
- Seja A uma matriz diagonalizável cujos autovalores são números reais positivos. Sabendo que A^{10} é a identidade determine A.

Resposta: A matriz A do primeiro item é a matriz nula: Se $A = PDP^{-1}$ temos

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = 0.$$

Multiplicando por P^{-1} à esquerda e por P à direita, temos

$$D^{10} = 0.$$

Como D^{10} é diagonal

$$D^{10} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{10} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{10} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots \lambda_n^{10} & \end{bmatrix}, \quad D^{10} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots \lambda_n & \end{bmatrix}$$

temos $\lambda_i^{10} = 0$, logo $\lambda_i = 0$. Isto implica que $D = 0$ e portanto $A = 0$.

A matriz A do segundo item é identidade. Raciocine como no item precedente.

9) Seja A uma matriz 3×3. Suponha que

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 2).$$

a) Estude se A é inversível.

b) Estude se A pode ser encontrada de maneira que A seja semelhante à matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

isto é, $A = PDP^{-1}$,

c) Estude se A pode ser encontrada de maneira que A seja semelhante à matriz

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta: A matriz A sim é inversível. Os autovalores de A são as raizes do polinômio característico. Ou seja 2 e 3 (com multiplicidade dois). Podemos ver que A é inversível de duas formas: primeiro, como A não tem autovalor zero é inversí'vel. Ou de outra forma, o determinante de A é o produto dos autovalores contados com multiplicicade, no caso 18. Como o determinante é não nulo é inversível.

A resposta ao item (b) é negativa. Podemos ver isto de duas formas. Duas matrizes semelhantes têm o mesmo determinante. O determinante de A é 18, como vimos, o de D é 12. Logo não são semelhantes.

De outra forma, as matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade. Mas a matriz D tem o autovalor 2 com multiplicidade 2 e 3 com multiplicidade 1. Logo não são semelhantes.

Para o item (c) a resposta é novamente negativa. Um método é calcular os determinantes. Veja que o determinante de D é $16 \neq 18$.

Outra forma, veja que D tem polinômio característico $(\lambda - 2)((\lambda - 3)^2 - 1) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$. Logo seus autovalores são 4 e 2, que são diferentes dos autovalores de A. Portanto, as matrizes não são semelhantes.