

Álgebra Linear
— *monitoria* —



— *Exercício 1: conceitos sobre matrizes* —

Setembro/2019

1 Conceitos básicos sobre matrizes

1. De forma geral, o que é uma matriz?

2. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

- (a) ___ Em geral, as matrizes são identificadas por letras minúsculas
- (b) ___ As matrizes só podem ser delimitadas por parênteses ou colchetes
- (c) ___ A representação " $A = [-3]$ " indica uma matriz chamada A que contém um único elemento, -3 .
- (d) ___ Os números que formam a matriz são chamados de elementos.
- (e) ___ A seguinte matriz é uma matriz coluna: $C = [3 \quad 4 \quad 5]$

3. O que é a *ordem* (ou *tipo*) de uma matriz? Como a *ordem* é representada?

4. Qual a ordem da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$? E o tipo da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & \sqrt{3} \\ 3 & -1 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$?

5. O que é uma matriz *quadrada* de ordem n ?

6. Em uma matriz quadrada A de ordem n , podemos afirmar que sua *diagonal principal* é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$? Por quê?

7. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

- (a) ___ Matrizes que não são quadradas, não têm diagonal principal
- (b) ___ Matrizes que não são quadradas, não têm diagonal secundária
- (c) ___ Toda matriz tem uma, e somente uma, diagonal principal
- (d) ___ Toda matriz tem uma, e somente uma, diagonal secundária
- (e) ___ Matriz quadrada de ordem n não têm diagonal secundária

- (f) ___ Os elementos formados pelos números “1” na matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, representam sua diagonal principal
- (g) ___ Os elementos formados pelos números “1” na matriz $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, representam sua diagonal principal
- (h) ___ Uma matriz com ordem $1 \times n$ é uma matriz linha
- (i) ___ Uma matriz com ordem $m \times 1$ é uma matriz coluna
- (j) ___ Uma matriz com ordem 7×5 tem 75 elementos
- (k) ___ Em uma matriz quadrada de ordem n , os elementos tais que $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária

8. A representação da seguinte matriz está correta? Por quê?

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{array} \right\|_{3 \times 2}$$

9. O que significa dizer que uma determinada matriz tem 2 elementos nulos?

10. Uma matriz A pode ser representada pela notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$ onde a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o elemento na linha i e coluna j dessa matriz. Em relação a essa forma de notação, marque a resposta correta:

- ☐ Se uma matriz B tem ordem 3×2 , o elemento b_{42} estará localizado em alguma das diagonais da matriz (principal ou secundária)
- ☐ Uma matriz C com ordem 4×2 não pode ter um elemento na posição c_{31}
- ☐ Não existe como indicar todos os elementos da j -ésima coluna de uma matriz
- ☐ A i -ésima linha de uma matriz A qualquer, com ordem $m \times n$, corresponde aos elementos $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}$
- ☐ A j -ésima linha de uma matriz A qualquer, com ordem $m \times n$, corresponde aos elementos $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{mj}$

11. Sabendo-se que uma matriz qualquer A de ordem $m \times n$ tem a forma genérica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

construa a matriz $B = (b_{ij})_{5 \times 4}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} i \times j & \text{se } i < j \\ j \div i & \text{se } i > j \\ i + j & \text{se } i = j \end{cases}$

2 Matrizes especiais

12. Já vimos e estudamos 12 (doze) tipos de matrizes especiais, ou seja, aquelas matrizes que apresentam alguma particularidade que as diferenciam de outras matrizes genéricas. Liste todas as matrizes especiais:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____
7. _____
8. _____
9. _____
10. _____
11. _____
12. _____

13. O que é uma *matriz nula*? Que letra geralmente é utilizada para representar tal matriz?

14. A matriz nula $O = (0)$ é uma matriz quadrada, uma matriz linha ou uma matriz coluna?

15. O que é uma *matriz diagonal*?

16. O que é uma *matriz triangular*?

17. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

- (a) ___ Em situações especiais, como na multiplicação de matrizes, uma matriz nula pode conter um elemento com o valor 1
- (b) ___ Uma matriz retangular de ordem $m \times n$ com $m \neq n$ não pode ser nula
- (c) ___ Uma matriz diagonal é uma matriz retangular de ordem $m \times n$ com $m \neq n$, na qual todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos
- (d) ___ Uma matriz diagonal pode ter a diagonal principal com todos os elementos nulos
- (e) ___ Uma matriz triangular de ordem n é aquela onde todos os elementos que estão acima da diagonal principal, E MAIS todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal, são nulos.
- (f) ___ Para que uma matriz seja considerada triangular, todos os elementos que estão acima OU abaixo da diagonal principal (não simultaneamente) devem ser nulos.
- (g) ___ Uma matriz diagonal nunca poderá ser uma matriz nula

18. O que é uma *matriz identidade*? Que letra geralmente é utilizada para representar tal matriz?

19. O que é uma *matriz transposta*? Como é representada?

20. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

- (a) ___ Uma matriz nula O de ordem 1 pode ser uma matriz identidade
- (b) ___ Uma matriz identidade não precisa ser quadrada
- (c) ___ A diagonal secundária de uma matriz identidade tem todos os seus elementos nulos
- (d) ___ A diagonal principal de uma matriz identidade tem todos os seus elementos unitários
- (e) ___ Existe uma matriz identidade de ordem 1, ou seja, $I_1 = [1]$
- (f) ___ Para que uma matriz A seja transposta em A^t , é necessário que ela seja quadrada
- (g) ___ Dada uma matriz identidade I qualquer, sua transposta I^t não é mais uma matriz identidade
- (h) ___ A transposta de uma matriz nula O de ordem $m \times n$ com $m \neq n$, também será uma matriz nula O^t com a mesma ordem

- (i) ___ A matriz transposta B^t de uma matriz B só terá a mesma ordem da matriz B se a matriz B for quadrada
- (j) ___ $(A^t)^t = A$

21. O que é uma *matriz oposta*? Como é representada?

22. O que é uma *matriz simétrica*?

23. Uma matriz de ordem $m \times n$ com $m \neq n$ pode ser simétrica? Por quê?

24. O que é uma *matriz anti-simétrica*?

25. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ☐ Matriz Identidade
- ☐ Matriz Nula
- ☐ Matriz Coluna
- ☐ Matriz Diagonal
- ☐ Matriz Triangular

26. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$D = (7)$$

- ☐ Matriz Identidade
- ☐ Matriz Quadrada
- ☐ Matriz Nula
- ☐ Matriz Linha
- ☐ Matriz Coluna

27. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ☐ Matriz Diagonal
- ☐ Matriz Simétrica

- ☐ Matriz Anti-Simétrica
- ☐ Matriz Triangular
- ☐ Matriz Identidade

28. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ☐ Matriz Identidade
- ☐ Matriz Triangular
- ☐ Matriz Diagonal
- ☐ Matriz Simétrica
- ☐ Matriz Nula

29. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- ☐ Matriz Identidade
- ☐ Matriz Triangular
- ☐ Matriz Diagonal
- ☐ Matriz Anti-Simétrica
- ☐ Nenhuma das respostas acima

30. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

- (a) ___ Existe uma matriz nula, quadrada, linha, coluna, diagonal, simétrica e anti-simétrica
- (b) ___ Existe uma matriz nula, diagonal e triangular
- (c) ___ Toda matriz anti-simétrica tem sua diagonal principal composta por elementos nulos (zeros)
- (d) ___ Se $A = -1B$, então B é a oposta de A
- (e) ___ Se $A = A^t$, então elas não são simétricas
- (f) ___ Se $B = -(B^t)$, então elas são anti-simétricas
- (g) ___ $A \neq (A^t)^t$

3 Operações com matrizes

31. Quais as 2 condições necessárias para afirmarmos que uma matriz A é igual a uma matriz B ?

32. É possível somar ou diminuir matrizes de ordens diferentes? Por quê?

33. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são matrizes da mesma ordem, então é verdade que $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$?

34. Se $C = (c_{ij})_{m \times n}$ e $D = (d_{ij})_{m \times n}$ são matrizes da mesma ordem, então é verdade que $E = (e_{ij})_{m \times n}$ tal que $e_{ij} = c_{ij} - d_{ij}$?

35. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

(a) ___ A adição de matrizes é comutativa: $A + B = B + A$

(b) ___ A adição de matrizes não é associativa: $A + (B + C) \neq (A + B) + C$

(c) ___ Não existe um elemento nulo tal que: $A + O = A$

(d) ___ Somar uma matriz com sua oposta resulta em uma matriz nula: $A + (-A) = O$

(e) ___ Transposição da soma é diferente da soma das transposições: $(A + B)^t \neq A^t + B^t$

(f) ___ Subtrair é somar com a oposta: $A - B = A + (-B)$

36. Como é feita a multiplicação de um valor escalar por uma matriz, por exemplo: seja α um número real qualquer, e B uma matriz qualquer de ordem $m \times n$, como é feita a multiplicação $\alpha \times B$?

37. Se A e B são matrizes de mesma ordem e α e β são escalares, assinale a(s) propriedade(s) correta(s):

☐ Distributiva: $A(\alpha + \beta) = A\alpha\beta$

☐ Distributiva: $A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta$

☐ Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

☐ Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha AB$

☐ Associativa: $\alpha(\beta A) = \alpha A + \beta$

☐ Associativa: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

38. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Para realizar a multiplicação entre elas, basta que cada elemento a_{ij} seja multiplicado pelo elemento correspondente b_{ij} ?

39. As matrizes $A = (a_{ij})_{5 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{5 \times 3}$ podem ser multiplicadas? Por quê?

40. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s):

- ☐ A multiplicação de matrizes é comutativa: $AB = BA$
- ☐ Multiplicar as matrizes $A = (a_{ij})_{50 \times 33}$ e $B = (b_{ij})_{33 \times 1}$ resultará na matriz $C = (c_{ij})_{50 \times 1}$
- ☐ Para realizar a multiplicação de duas matrizes, o número de linhas em ambas as matrizes deverá ser o mesmo
- ☐ A multiplicação de matrizes é associativa: $A(BC) = (AB)C$
- ☐ A multiplicação de matrizes não é distributiva: $A(B + C) \neq AB + AC$
- ☐ A multiplicação de uma matriz A por uma matriz Identidade apropriada, resulta na mesma matriz A : $AI = A$
- ☐ A transposição de um produto de duas matrizes é igual ao produto das transposições: $(AB)^t = A^t B^t$

4 Matriz inversa

41. O que é uma *matriz inversa*? Como é representada?

42. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

- (a) ___ Se $B = A^{-1}$, então $B = \frac{1}{A}$
- (b) ___ Se $AB = BA = I_n$, então $B = A^{-1}$
- (c) ___ Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = \frac{1}{AB}$
- (d) ___ Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- (e) ___ Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- (f) ___ Matrizes que não são quadradas são inversíveis