

Método Dos Elementos Finitos Na Simulação De Tensão E Elasticidade Em Placas.

Michelle Fernandino Westin e Rafael Teixeira da Silva Ribeiro

Engenharia Mecânica – 1º. Período

Professor: Rodney Josué Biezuner

Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

Sumário

1. Introdução	2
1.1. Métodos Similares	2
1.2. Aplicação do Método de Elementos Finitos	2
1.3. Síntese Histórica do Método de Elementos Finitos	4
1.4. Problema Prático	6
1.5. Ferramentas Matemáticas Envolvidas	6
2. O Problema e seu Modelamento Matemático	6
2.1. Equações Básicas da Elasticidade Linear	6
2.2. Deslocamentos	6
2.3. Deformações	7
2.4. Tensões	8
2.5. Elementos de Elasticidade Plana	9
2.6. Estado De Tensões Planas	9
2.7. Estado de Deformações Planas	10
2.8. Triângulo de Deformações Constantes	11
2.8.1. Superposição de Elementos Triangulares	14
2.9. Elemento quadrilátero Isoparamétrico	16
2.10. Matriz de Rigidez e Vetor de Carga do Elemento Isoparamétrico	21
2.10.1. Cálculo da Matriz de Rigidez e do Vetor de Carga do Elemento	23
3. Exemplo Prático	24
3.1. Aplicação em barra prismática	26
3.2. Exemplo Comparativo de Algumas Malhas para um Estado Plano de Tensão	29
4. Conclusão	31
5. Referências Bibliográficas	31

1. Introdução

A Engenharia Mecânica utiliza-se de uma enorme gama de materiais para as várias construções e experiências profissionais. Dentre esses materiais, as placas, metálicas ou não, possuem grande utilização, desde desenvolvimentos mais resistentes como caçambas, caldeiras, autoclaves até peças sensíveis como próteses humanas, placas para controle entre outros.

Para o desenvolvimento de tais peças é necessária uma grande quantidade de testes preliminares com as placas utilizadas, as peças já usinadas prevendo o desgaste e possíveis falhas na fabricação e no decorrer do uso. Tais testes demandam grande custo financeiro e na maioria das vezes um tempo vasto nas experiências.

Por esses motivos e muitos outros foi desenvolvido um método numérico, muito disseminado entre as engenharias que barateia os custos e diminui o tempo de teste, o método de Elementos Finitos.

Neste trabalho, buscaremos demonstrar as ferramentas matemáticas utilizadas nesse método e sua aplicação prática na elasticidade e flexão de placas.

1.1. Métodos Similares

Existem outros métodos numéricos com função similar ao método dos elementos finitos dentre eles a teoria clássica que consiste na solução analítica dos problemas em sistemas contínuos, cujas equações utilizadas são diferenciais parciais, o método dos elementos de contorno que é aplicada à análise dinâmica dos sólidos, no qual a matriz de massa é obtida em função dos nós do contorno, método da matriz de transferência, o qual se aplica na segmentação múltipla de uma barra com segmentação transversal variável e análise de estabilidade sob ação de carga axial concentrada e distribuída, o método da matriz de rigidez dinâmica utiliza funções de interpolação exatas obtidas por meio da solução analítica das equações diferenciais governantes do movimento do elemento para aproximar a solução exata do problema e o método dos elementos compostos que é uma nova variação do método dos elementos finitos desenvolvido para vibração de placa fina elástica.

1.2. Aplicação do Método de Elementos Finitos

A Mecânica dos Meios Contínuos, e mais especificamente a Teoria da Elasticidade, tem como preocupação básica o desenvolvimento de modelos matemáticos que possam representar adequadamente a situação física real de componentes industriais sujeitos a esforços mecânicos. Em análise estrutural, o objetivo pode ser a determinação do campo de deslocamentos, as deformações internas ou as tensões atuantes no

sistema devido à aplicação de cargas, além de outros. A teoria matemática da Elasticidade, que muito tem auxiliado na determinação das variáveis envolvidas na deformação de componentes, deve muito a pesquisadores como Navier, Cauchy, Poisson, Green, dentre outros.

Porém, a aplicação de tais teorias a casos práticos apresenta dificuldades às vezes intransponíveis. Por exemplo, na análise estrutural, a perfeita representação matemática de carregamentos, geometria, condições de contorno, comportamento dos materiais etc, em muitas situações, apresenta-se de forma complexa, havendo, assim, a necessidade de se introduzir muitas hipóteses simplificativas no problema real, para permitir alguma forma de modelagem matemática que conduza a soluções mais simples.

Por outro lado, engenheiros têm demonstrado um interesse crescente por estudos mais precisos para a análise de estruturas. Este interesse vem unido a uma necessidade cada vez maior de se estudar o comportamento de elementos estruturais complexos, o que conduz a tratamentos analíticos mais elaborados, baseados em teorias gerais, e que são, via de regra, de soluções extremamente difíceis.

Desta forma, engenheiros têm procurado desenvolver e/ou aplicar métodos aproximados que permitam aplicar os princípios daquelas teorias de forma acessível e precisa. Dentre estes métodos, os que tem sido mais utilizados são aqueles baseados na divisão do meio contínuo em partes mais simples (a estrutura, o fluido, o gás, etc).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é seguramente o processo que mais tem sido usado para a discretização de meios contínuos. A sua larga utilização se deve também ao fato de poder ser aplicado, além dos problemas clássicos da mecânica estrutural elástico-linear - para os quais foi o método inicialmente desenvolvido - , também para problemas tais como:

- problemas não lineares, estáticos ou dinâmicos;
- mecânica dos sólidos;
- mecânica dos fluidos;
- eletromagnetismo;
- transmissão de calor;
- filtração de meios porosos;
- campo elétrico;
- acústica; etc.

Além disso, pode-se afirmar também que o MEF é muito utilizado face à analogia física direta que se estabelece, com o seu emprego, entre o sistema físico real (a estrutura em análise) e o modelo (malha de elementos finitos).

Como exemplo de aplicações práticas desses elementos são mostradas nas figuras. Figura 1.1 mostra a estrutura da fuzilagem e da asa modelada usando elementos de barra, placa e casca. Este modelo pode ser usado para análise estática de elasticidade, vibração livre, impacto na aterrissagem, vibração do painel e da asa e otimização voltada para menor peso e força máxima.

Figura 1.2 mostra um exemplo de um edifício hoteleiro de vários andares utilizando elementos de barra, coluna e placa. Esse modelo pode ser usado para vibrações estáticas ou livres, efeito causado por terremoto, equivalência estática e efeito de ventos aleatórios.

Figura 1.3 mostra a configuração externa de um aquecedor modelo 1200-MW a combustível fóssil preso a uma armação de aço. O sistema é modelado usando elementos de barra, coluna e placa com grau de liberdade de 1860°. Essa figura mostra que a estrutura vibra com uma frequência natural de 1.1 Hz. Tais frequências e formatos são aplicados na análise dos efeitos de um terremoto.

Figura 1.4 mostra o modelamento de uma coluna de sustentação e uma torre de refrigeração com uma imperfeição local tipo calombo. As colunas são modeladas usando elementos de coluna. A casca hiperbólica é modelada usando elementos de casca quadrilateral curva. Para modelar a área imperfeita são necessários quadriláteros menores. Quadriláteros de dimensões grandes e pequenos são conectados por elementos curvos triangulares de complementação. Este modelo pode ser usado para análise de efeito de terremotos e ventos aleatórios. Se a imperfeição inicial for levada em conta o comportamento pode se tornar geometricamente não linear.

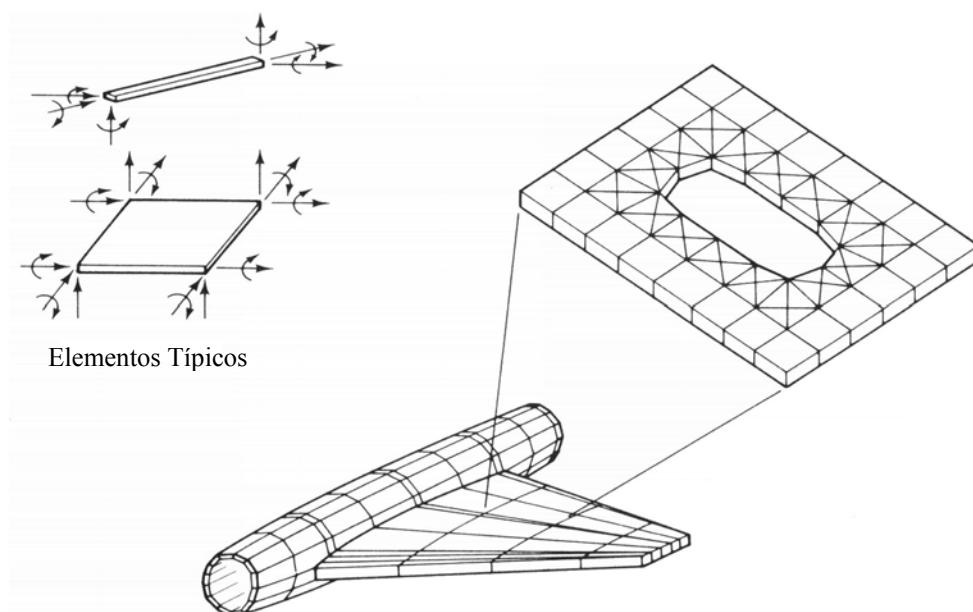


Figura 1.1 Fuzelagem e asa modeladas utilizando elementos estáticos, dinâmicos e de vibração, em barra, placa e casca.

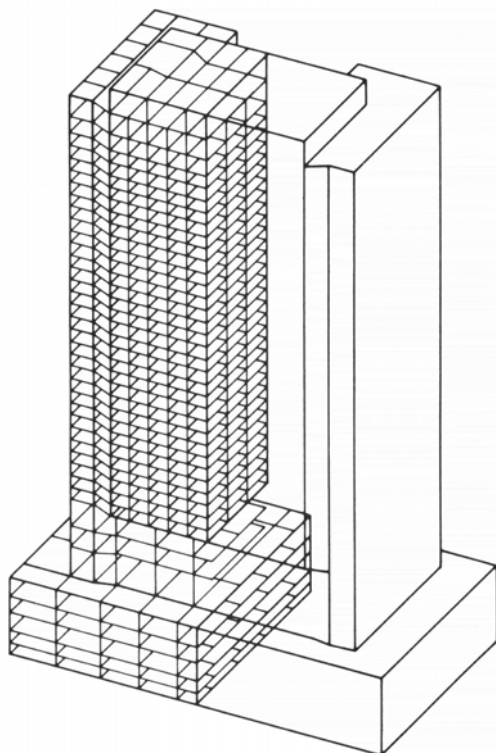


Figura 1.2 Edifício hoteleiro com vários andares modelado utilizando elementos estáticos de barra, coluna e placa para análise do efeito de terremotos e ventos aleatórios.

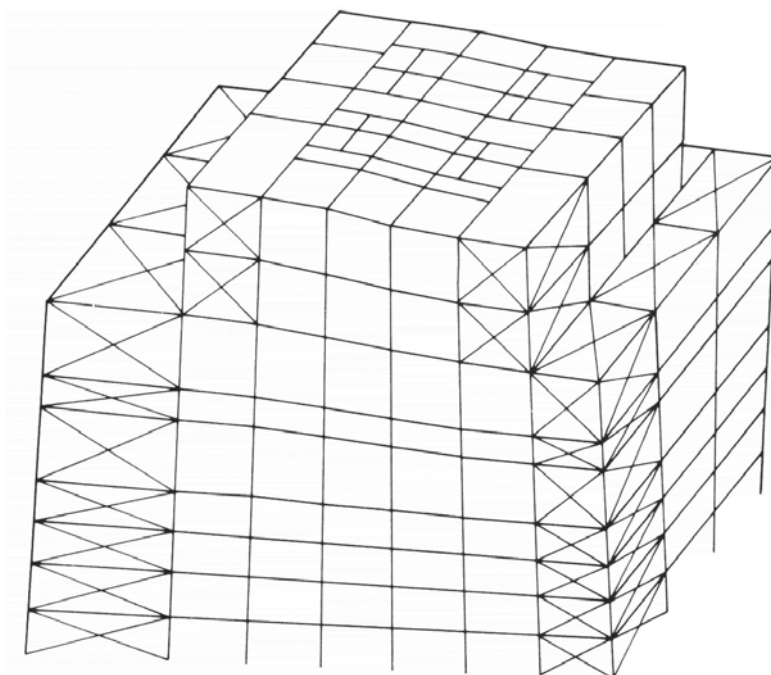


Figura 1.3 Aquecedor a carvão com suporte modelado utilizando elementos de barra, coluna e placa com 1860° de liberdade, vibrando com frequência natural de 1.1Hz.

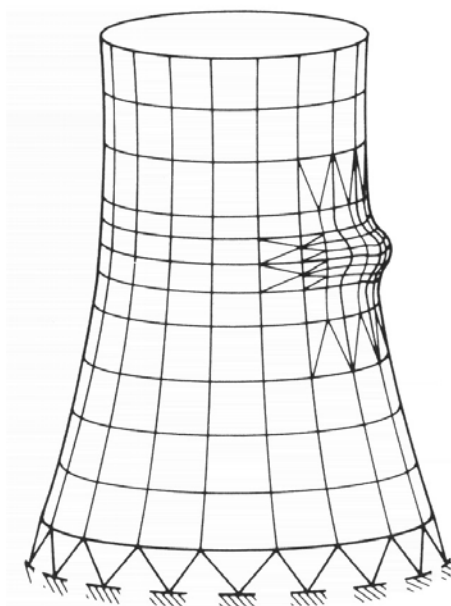


Figura 1.4 Torre de resfriamento imperfeita modelada utilizando elementos de colunas, casca quadrilátera e triangular curva para análise dos efeitos de terremotos e ventos aleatórios.

1.3. Síntese Histórica do Método de Elementos Finitos

As limitações da mente humana são tais que o homem não consegue dominar completamente o comportamento do complexo mundo que o cerca numa só operação global. Por isso, uma forma natural de proceder dos engenheiros, cientistas e outros profissionais, consiste em separar os sistemas em componentes básicos, ou seja, aplicar o processo de análise do método científico de abordagem de problemas. Com essa operação, tem-se a oportunidade de estudar o comportamento dos elementos - que é mais simples -, e depois sintetizar as soluções parciais para o estudo do sistema global.

A discretização de sistemas contínuos tem objetivos análogos aos acima descritos, ou seja, particionase o domínio - o sistema - em componentes cujas soluções são mais simples e, depois, unem-se as soluções parciais para obter a solução do problema.

Em alguns casos essa subdivisão prossegue indefinidamente e o problema só pode ser definido fazendo-se uso da definição matemática de infinitésimo. Isto conduz a equações diferenciais, ou expressões equivalentes, com um número infinito de elementos.

Com a evolução dos computadores digitais, os problemas discretos podem ser resolvidos geralmente sem dificuldades, mesmo que o número de elementos seja muito elevado. Entretanto, como a capacidade dos computadores é finita, os problemas contínuos só podem ser resolvidos de forma precisa com o uso da matemática.

A discretização de problemas contínuos tem sido abordada, ao longo dos anos, de forma diferente por matemáticos e engenheiros. Os matemáticos têm desenvolvido técnicas gerais aplicáveis diretamente a equações diferenciais que regem o problema, tais como: aproximações por diferenças finitas, métodos de resíduos ponderados, técnicas aproximadas para determinar pontos estacionários de funcionais. Os engenheiros procuram abordar problemas mais intuitivamente, estabelecendo analogias entre os elementos discretos reais e porções finitas de um domínio contínuo.

O conceito de análise de estruturas, pode-se afirmar, teve início logo após o período compreendido entre 1850 e 1875 - Escola Francesa com Navier e St. Venant -, com os trabalhos de Maxwell, Castigliano, Mohr e outros.

Progressos no desenvolvimento de teorias e de técnicas analíticas para o estudo de estruturas foram particularmente lentos entre 1875 e 1920. Isto foi devido, certamente, às limitações práticas na solução das equações algébricas. Neste período, as estruturas de interesse eram basicamente treliças e pórticos, que tinham um processo de análise aproximada baseada numa distribuição de tensões - com forças incógnitas - e que era universalmente empregado.

Por volta de 1920, em função dos trabalhos de Maney (EUA) e de Ostenfeld (Dinamarca), passou-se a utilizar a idéia básica de análise aproximada de treliças e pórticos baseada nos deslocamentos como incógnitas. Estas idéias são as precursoras do conceito de análise matricial de estruturas, em uso hoje em dia.

Várias limitações no tamanho dos problemas a solucionar, que podiam ter forças ou deslocamentos incógnitos, continuaram a prevalecer até 1932, quando Hardy Cross introduziu o Método da Distribuição de Momentos. Este método facilitou a solução de problemas de análise estrutural, e passou-se a poder trabalhar com problemas mais complexos do que os mais sofisticados problemas até então tratados. Este foi o principal método de análise estrutural que foi praticado pelos próximos 25 anos.

No começo de 1940, McHenry, Hreniko. e Newmark demonstraram - no campo da mecânica dos sólidos - que podiam ser obtidas soluções razoavelmente boas de um problema contínuo, substituindo-se pequenas porções do contínuo por uma distribuição de barras elásticas simples. Mais tarde, Argyris, Turner, Clough, Martin & Topp demonstraram que era possível substituir as propriedades do contínuo de um modo mais direto, e não menos intuitivo, supondo que as pequenas porções - os elementos - se comportavam de forma simplificada.

Computadores digitais apareceram por volta de 1950, mas a sua real aplicação à teoria e à prática não se deu, aparentemente, de forma imediata. Entretanto, alguns indivíduos previram o seu impacto e estabeleceram codificações para análise estrutural em forma adequada - a forma matricial. Contribuições deste tipo foram feitas por Argyris e Patton.

Dois publicações notáveis, que podem ser consideradas marcos no estudo do MEF, foram os trabalhos de Argyris & Kelsey e de Turner, Clough, Martin & Topp. Tais publicações uniram os conceitos de análise estrutural e análise do contínuo, e lançaram os procedimentos resultantes na forma matricial; elas representaram uma influência preponderante no desenvolvimento do MEF nos anos subseqüentes. Assim, as equações de rigidez passaram a ser escritas em notação matricial e resolvidas em computadores digitais. A publicação clássica de Turner et alli é de 1956. Com estas e com outras publicações um desenvolvimento explosivo do MEF aconteceu.

Mas já em 1941, o matemático Courant sugeria a interpolação polinomial sobre uma subregião triangular como uma forma de obter soluções numéricas aproximadas. Ele considerou esta aproximação como uma solução de Rayleigh-Ritz de um problema variacional. Este é o MEF como se conhece hoje em dia. O trabalho de Courant foi no entanto esquecido até que engenheiros, independentemente, o desenvolveram.

O nome Elementos Finitos, que identifica o uso preciso da metodologia geral aplicável a sistemas discretos, foi dado em 1960 por Clough.

É de 1950 o trabalho de Courant, McHenry & Hreniko., particularmente significativo por causa da sua ligação com problemas governados por equações aplicáveis a outras situações que não a mecânica estrutural.

Durante ainda a década de 1950, pesquisadores, motivados por uma formulação específica de elementos para o estado plano de tensões, estabeleceram elementos para sólidos, placas sob flexão, cascas finas e outras formas estruturais.

Tendo sido estabelecidos estudos para casos lineares, estáticos e análise elástica, a atenção voltou-se para fenômenos especiais, tais como: resposta dinâmica, estabilidade e materiais e geometria não lineares. Isto foi necessário não somente para estender a formulação dos elementos, mas também para generalizar a análise estrutural.

Este período foi seguido por um intensivo desenvolvimento de programas computacionais para colocar as potencialidades do MEF ao alcance dos usuários.

Em 1963 o método foi reconhecido como rigorosamente correto e tornou-se uma respeitável área de estudos acadêmicos. Até 1967, engenheiros e matemáticos trabalharam com elementos finitos, aparentemente, com desconhecimento uns dos outros. Hoje as duas áreas estão cientes uma da outra embora os matemáticos raramente se interessam pelos problemas da engenharia. Em contrapartida, os engenheiros raramente estão habilitados para entender a matemática.

Dez artigos foram publicados em 1961 sobre elementos finitos: 134 em 1966 e 844 em 1971. Em 1976, como apenas duas décadas de aplicações do MEF na engenharia, o número de publicações na área já excedia a 7000.

Hoje muitos pesquisadores continuam a se ocupar com o desenvolvimento de novos elementos e de melhores formulações e algoritmos para fenômenos especiais, e na elaboração de novos programas que facilitem o trabalho dos usuários.

Os interesses de estudos na área continuam com a análise de fenômenos não apenas estruturais. Por exemplo: análise termoestrutural, onde o cálculo de tensões térmicas é integrado com o cálculo do transiente de temperatura; a interação fluido-estrutura, na análise de hidroelasticidade e aeroelasticidade, e problemas multicampo em geral, tais como acústica da aeroelasticidade.

Mais recentemente, houve um enorme avanço na simplificação do procedimento das análises mais simples (elasticidade isotrópica linear), através da geração automática de malha e da adaptação automática da malha para a redução de erro. Desta maneira, finalmente, a ferramenta de elementos finitos está mais próxima do engenheiro comum. Como exemplo desta

popularização, basta citar que a grande tendência de hoje é a integração da análise de tensões, assim como da análise de movimento, em programas de CAD. Nas palavras de R. McNeal, a análise integrada aos programas de CAD estão transformando o método dos elementos finitos em uma ferramenta onipresente, e seu uso será cada vez mais similar ao de um motor de um automóvel: todos poderão usá-lo apenas com um entendimento básico de seu funcionamento. Poucos dos usuários realmente precisarão entender o método, para extrair dele um melhor desempenho e confiabilidade.

1.4. Problema Prático

Uma placa pode ser submetida a elasticidade e tensão. Cada situação cria um algoritmo diferente em todo o comprimento da placa. É de grande importância nas aplicações práticas da placa que se conheça a resistência máxima e as características das forças aplicadas, principalmente nas extremidades ou nos nós (locais de solda ou fixação) para uma simulação condizente com a realidade. O desenvolvimento do problema ocorrerá em situação prática simples para exemplificação, mostrando o comportamento de uma placa perante as diferentes variáveis propostas.

1.5. Ferramentas Matemáticas Envolvidas

Todo o método dos elementos finitos envolve várias teorias matemáticas. No interesse do trabalho, ou seja, a geometria analítica e a álgebra linear o método contém importantes demonstrações, seja na teoria de vetores analisados nos diversos pontos da estrutura. Como a análise descreve o comportamento em sistemas mais simples para depois criar o sistema total, o modelamento matemático utiliza matrizes para união dos sistemas e álgebra linear para resolução dos sistemas com diversas incógnitas.

2. O Problema e seu Modelamento Matemático

Para desenvolver os problemas de elasticidade e tensão em placas, é necessário a base de equações de elasticidade linear. À Partir dessa base pode-se descrever a elasticidade e a tensão plana. O método dos elementos finitos tem seu início nessas bases matemáticas.

2.1. Equações Básicas da Elasticidade Linear

A elasticidade linear infinitesimal trata do estudo das deformações e da distribuição dos esforços internos de um sólido sujeito a cargas externas. As limitações da teoria restringem a aplicação desta teoria apenas para deformações elásticas e de magnitude muito pequena.

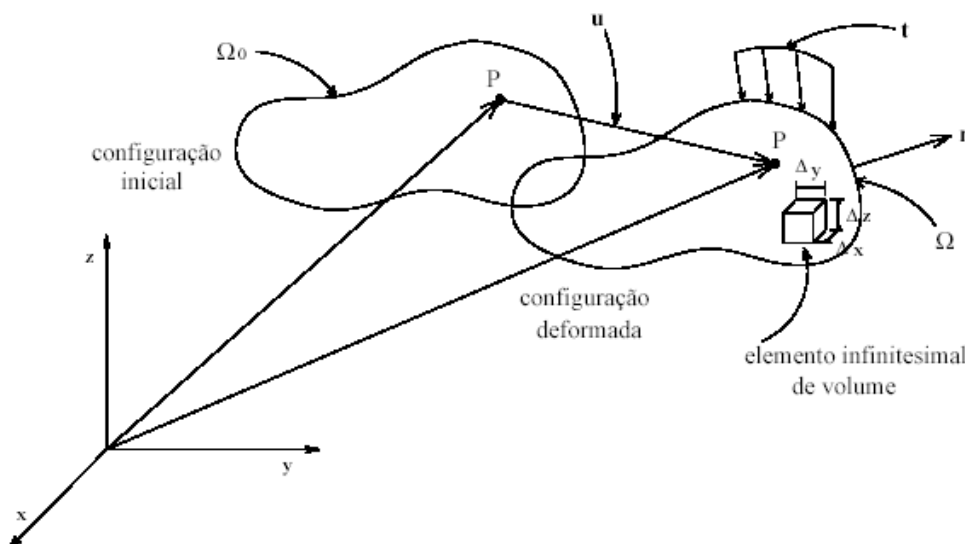


Figura 2.1: Descrição da deformação de um corpo

2.2. Deslocamentos

Considera-se um corpo deformável (ou estrutura) Ω_0 mostrada na figura 2.1 que se deforma sob a ação de um sistema de forças atingindo a configuração deformada Ω_f . O vetor u denota o deslocamento de um ponto genérico P de sua posição na configuração inicial para a nova posição na configuração deformada. Este vetor deslocamento é tratado como uma função contínua da posição inicial, isto é, para cada ponto x da peça existe um vetor $u(x)$. Esta descrição é possível devido a hipótese de um meio contínuo, que desconsidera a microestrutura do material.

2.3. Deformações

A partir dos deslocamentos, pode-se calcular as deformações em qualquer ponto da estrutura. As equações de deformações-deslocamentos para elasticidade infinitesimal linear tridimensional são:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde u_x , u_y e u_z são as componentes do vetor deslocamento u nas direções x , y e z respectivamente. Estas equações representam adequadamente as deformações somente se forem bem pequenas. Por exemplo, uma rotação de corpo rígido de um ângulo θ em torno do eixo z é escrita como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta - x \\ x \sin \theta + y \cos \theta - y \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

tem as deformações infinitesimais dadas por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \cos \theta - 1 \\
 \varepsilon_{yy} &= \cos \theta - 1 \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que não é zero, apesar do corpo não estar se deformando, apenas girando. Mas $\cos \theta - 1$ é muito próximo de zero para valores na ordem de décimos de grau, que pode ser tomado como o limite da validade da teoria infinitesimal. Se as deformações ultrapassarem a ordem de décimo-milésimo, recomenda-se utilizar a elasticidade finita, que utiliza a definição de deformações de Green.

As equações 2.1 podem ser colocadas na forma matricial $\{\varepsilon\} = [B] \{u\}$, onde se faz uso de uma representação vetorial para a deformação, somente com seis componentes. Esta notação, apesar de imprecisa, é mais compacta.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

2.4. Tensões

O tensor de tensão de Cauchy expressa os esforços internos em uma partícula de um sólido, para todas as direções. A força interna distribuída de um ponto sobre seu vizinho é determinada pela direção do vizinho n através da fórmula de Cauchy,

$$t_x = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \quad (2.5)$$

$$t_y = \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z$$

$$t_z = \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z,$$

Ou

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.6)$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

onde t é a força distribuída em N/m^2 , e σ é o tensor tensão. Na superfície do corpo, tomando n_x , n_y e n_z como as componentes do vetor normal n à superfície, t_x , t_y e t_z tem que equilibrar as forças aplicadas. A tensão em um ponto tem que ser representada por um tensor para poder expressar o vetor força em qualquer direção. Para o estudo do estado de tensões no interior do corpo deformado, isola-se um elemento infinitesimal de um volume de dimensões Δx , Δy , Δz .

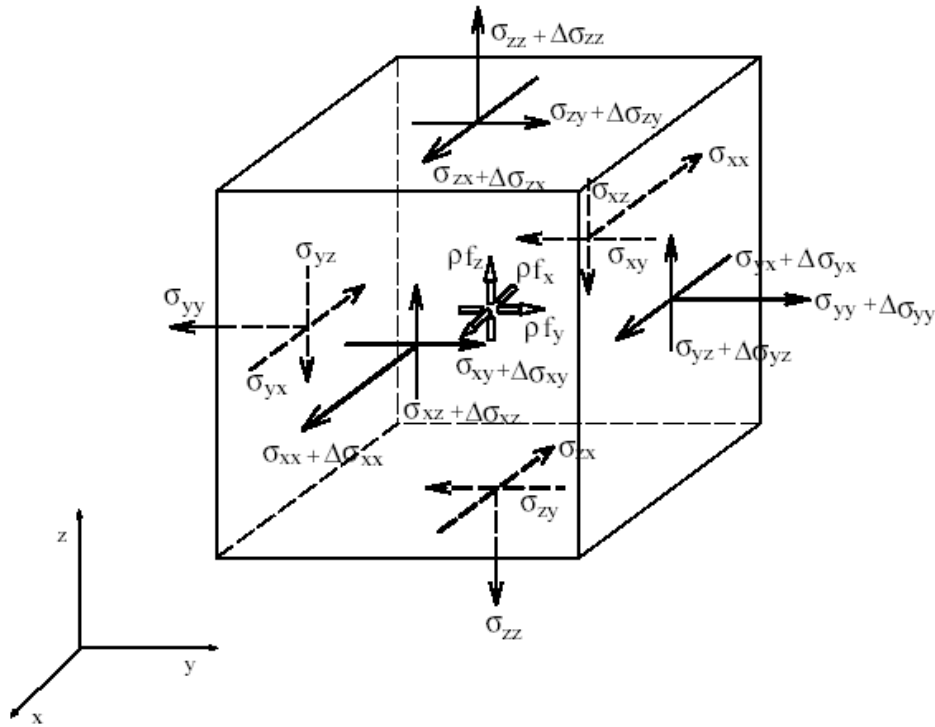


Figura 2.2: Estado de tensões em um elemento infinitesimal.

As tensões atuantes sobre este elemento de volume são mostradas na figura 24.1. Observe que $\Delta\sigma_{ij}$ representam os incrementos de tensão, devido à presença das forças de corpo ρf_i , por exemplo. Substituindo os incrementos de tensão e escrevendo as equações de equilíbrio nas direções x , y e z obtém-se as equações de equilíbrio para tensões, também

$$\Delta\sigma_{ij} \text{ por } \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_k} dx_k$$

chamadas de equações diferenciais de equilíbrio, ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = 0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \sigma_{yz}, \quad \sigma_{yx} = \sigma_{xy}, \quad (2.9)$$

onde 2.9 expressa a condição de simetria das componentes do tensor tensão.

2.5. Elementos de Elasticidade Plana

Nos itens 2.5 ao 2.10 são apresentados os fundamentos para a formulação de elementos de elasticidade plana, considerando os estados de tensão plana e deformação plana.

Processos mais utilizados e mais elaborados dentro da teoria de elementos finitos.

2.6. Estado De Tensões Planas

A figura 2.6.1 mostra uma viga e uma placa fina, sujeitas a carregamentos aplicados no plano que contém a estrutura, isto é, no plano $x - y$. A espessura de ambos os corpos é pequena comparada com as outras dimensões.

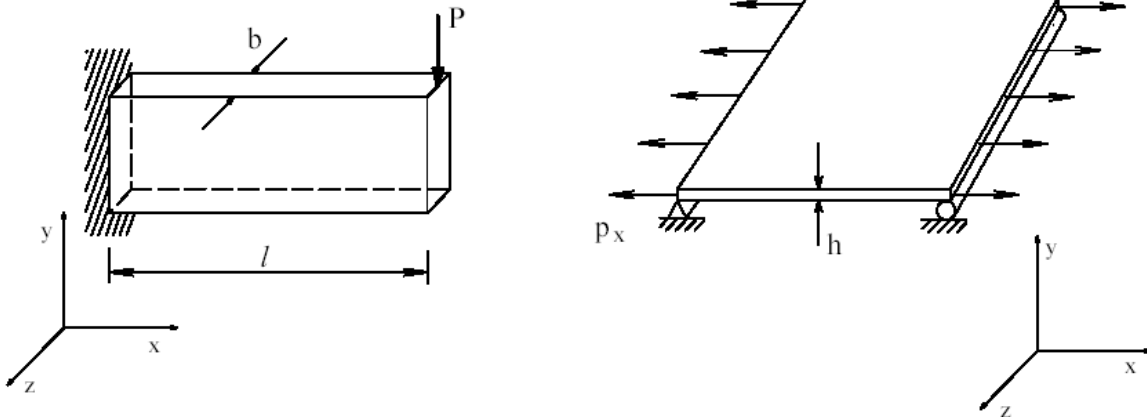


Figura 2.6.1: Estruturas estudadas com a aproximação do estado plano de tensões.

Estas condições permitem o uso da aproximação segundo a qual não ocorre variação das tensões na direção z , podendo-se desconsiderar as tensões σ_{zz} , σ_{xz} e σ_{yz} em presença das outras tensões. Então:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.10)$$

e somente σ_{xx} , σ_{xy} e σ_{yy} não são nulas. Este estado é chamado estado plano de tensões e as tensões não-nulas são representadas por
sendo funções de x e y somente. As componentes de deformações correspondentes são:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.11a)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.11b)$$

e considerar-se-ão apenas as componentes u_x e u_y dos deslocamentos, nas direções x e y respectivamente. A deformação na direção z depende das deformações nas direções x e y e pode ser calculada por

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) . \quad (2.12)$$

Como o material é linear, elástico e isotrópico, as equações reduzem-se a

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad (2.13)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy}$$

ou, em notação matricial,

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} , \quad (2.14)$$

onde $[C]$ é a matriz constitutiva. A hipótese do estado plano de tensões é justificável apenas como uma primeira aproximação

$$[C] = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} . \quad (2.15)$$

para problemas de placas finas carregadas apenas em seu plano. O engenheiro deve estar ciente da possibilidade de ocorrerem deformações fora do plano, seja por descentramento da carga em relação à espessura ou por flambagem de placa.

2.7. Estado de Deformações Planas

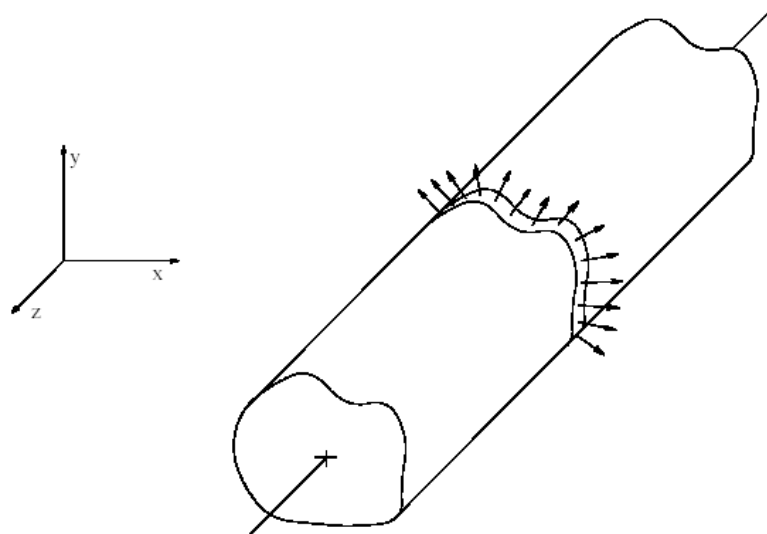


Figura 2.7.1: Aproximação usando deformações planas.

Em casos em que a espessura da estrutura é grande comparada com as dimensões nas direções x e y, como mostra a figura 2.7.1, e onde os carregamentos apenas no plano transversal da estrutura, pode-se assumir que o deslocamento u_z na direção z é desprezível e que os deslocamentos u_x e u_y são funções de x e y, somente. Neste caso:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

e as tensões são agrupadas, similarmente ao estado de tensões planas, como:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

sendo que σ_{zz} depende das outras componentes de tensão, sendo dada por

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (2.17)$$

Em vista de 2.17 as deformações são:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

e a equação constitutiva é dada por:

$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \quad (2.19a)$$

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (2.19b)$$

Como pode ser observado, os problemas de tensões planas e deformações planas, embora fisicamente bastante diversos, têm estrutura similar. Na prática pode-se obter as equações de deformações planas das equações de tensões planas pela substituição

de E por $\frac{E}{(1-\nu)}$ e de $(1-\nu)$ por $\frac{1}{(1-\nu)}$

A hipótese do estado plano tem pouco interesse prático, embora alguns poucos casos possam justificar seu uso como aproximação.

2.8. Triângulo de Deformações Constantes

Nesta seção é estudado o elemento plano mais simples possível. Considere um triângulo retirado de uma estrutura sob o estado plano de tensões, como uma placa, por exemplo.

Na figura 2.8.1, $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ são os deslocamentos nodais, que podem ser representados por

Necessita-se agora relacionar este vetor deslocamentos nodais $\{q\}$ com os vetores deformação $\{\varepsilon\}$, vetor tensão $\{\sigma\}$ e,

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

eventualmente, com as forças nodais correspondentes para poder-se escrever a matriz de rigidez deste elemento. Para tanto, necessita-se da relação entre forças nodais e tensões, a qual é encontrada usando apenas argumentos de equilíbrio. Inicialmente, assume-se que as deformações ao longo do elemento são constantes (donde o nome do elemento):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= a \\ \varepsilon_{yy} &= b \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = c.\end{aligned}\tag{2.21}$$

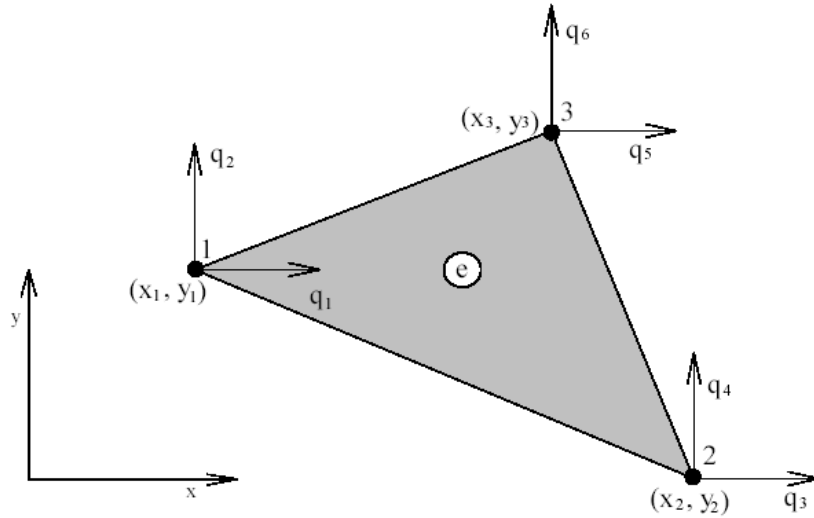


Figura 2.8.1: Elemento triangular de 3 nós.

Considera-se o triângulo inscrito numa placa retangular de material uniforme, sob a ação de tensão constante em uma direção, que pode ser y, como mostra a figura 2.8.2.

A figura 2.8.3 mostra o diagrama explodido da figura 2.8.2, onde o triângulo apresenta carregamentos concentrados nos pontos médios dos lados. Este possível tipo de carregamento manteria o triângulo em equilíbrio. Uma metodologia muito melhor seria considerar cada um destes carregamentos concentrados em duas partes e colocá-las em cada nó próximo.

Pode-se então constatar que, por exemplo,

$$Q_4 = \sigma_{yy} (x_1 - x_3) \frac{h}{2}$$

Os outros valores para Q_1, \dots, Q_6 podem se achados para este carregamento σ_{yy} .

O mesmo procedimento pode ser adotado para as tensões σ_{xx} , e σ_{xy} obtendo-se os respectivos Q_1, \dots, Q_6 . Os resultados da análise total podem ser colocados na forma matricial

$$\{P\} = [\xi] \{\sigma\}\tag{2.22}$$

onde a matriz $[\xi]$ representa o uso das relações de equilíbrio.

O próximo passo é encontrar a relação entre os deslocamentos u_x e u_y ao longo do elemento e os deslocamentos nodais $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$. Primeiramente, integra-se as relações deformaçõesdeslocamentos 2.1, ou seja,

$$u_x(x, y) = \int \varepsilon_{xx} dx\tag{2.23}$$

$$= a x + f(y)\tag{2.24}$$

$$u_y(x, y) = \int \varepsilon_{yy} dy\tag{2.25}$$

$$= b y + g(x)\tag{2.26}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = c\tag{2.27}$$

$$f'(y) + g'(x) = c\tag{2.28}$$

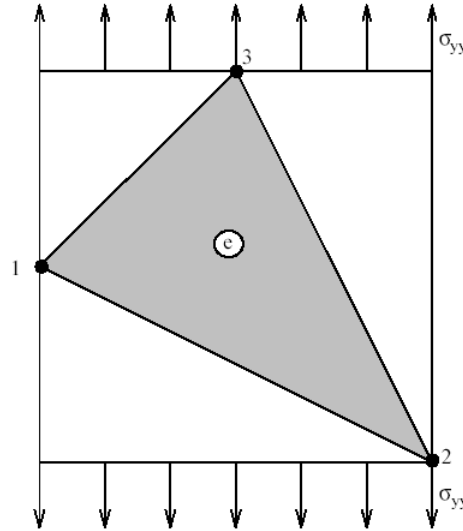


Figura 2.8.2: Triângulo inscrito numa placa.

donde se vê que as derivadas de $f(y)$ e $g(x)$ são constantes. Escolhendo arbitrariamente $f'(y) = A$, então $g'(x) = c - A$. Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y & 1 & 0 \\ 0 & y & x & -x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ A \\ B \\ C \end{Bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [\Phi] \{\alpha\}. \quad (2.30)$$

Isto parece não ajudar em muito, desde que apenas um novo vetor de coeficientes constantes foi definido (três dos quais são deformações constantes e as constantes de integração são movimentos de corpo rígido). Mas, é muito fácil relacionar estas constantes aos deslocamentos nodais, pois

$$\begin{aligned} u_{x1} &= u_x(x_1, y_1) = ax_1 + Ay_1 + B \\ u_{y1} &= u_y(x_1, y_1) = by_1 + (c - A)x_1 + G \\ &\vdots \\ u_{y6} &= u_y(x_3, y_3) = by_3 + (c - A)x_3 + C \end{aligned} \quad (2.31)$$

e em forma matricial

$$\{q\} = [A] \{\alpha\} \quad (2.32)$$

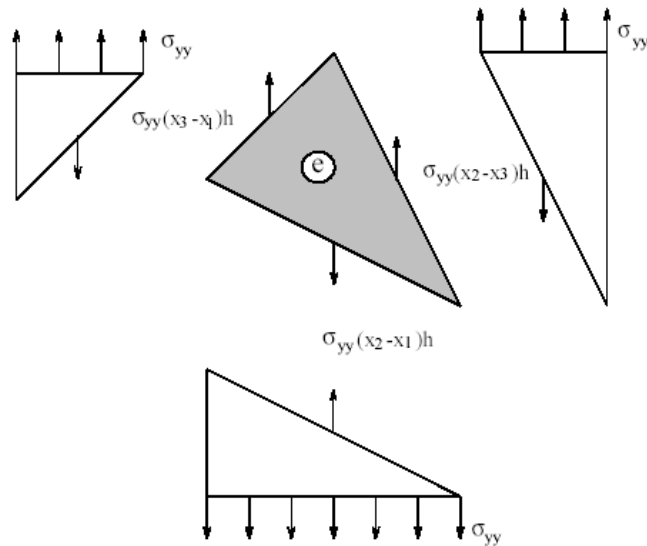


Figura 2.8.3: Visão explodida.

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{u\}. \quad (2.33)$$

Colocando todos estes resultados em uma mesma expressão, isto é:

$$\begin{aligned} \{P\} &= [\xi] \{\sigma\} \\ &= [\xi] [C] \{\varepsilon\} \\ &= [\xi] [C] [B] \{q\} \\ &= [\xi] [C] [B] [\Phi] \{\alpha\} \\ &= [\xi] [C] [B] [\Phi] [A]^{-1} \{u\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

obtém-se a relação

$$\{P\} = [K^e] \{q\} \quad (2.35)$$

onde $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elemento triangular de deformações constantes dada por

$$[K^e] = [\xi] [C] [B] [\Phi] [A]^{-1}. \quad (2.36)$$

A obtenção da matriz de rigidez foi feita usando-se o método direto, ou de equilíbrio, que funciona a contento aqui, mas que se tornaria muito difícil para elementos mais complicados. Devem ser usados, nestes casos, os métodos energéticos.

2.8.1. Superposição de Elementos Triangulares

Uma viga engastada, carregada com uma carga F , é discretizada usando-se elementos triangulares de 3 nós, como mostra a figura 2.8.5.

Para cada elemento 1, 2 e 3 tem-se a equação

$$\{Q\} = [K^e] \{q\}$$

sendo a matriz de rigidez $[K^e]$ uma matriz 6x6. Para obter-se a matriz de rigidez da estrutura “somamse” as matrizes de rigidez de cada elemento, isto é, superpõe-se estas matrizes, obtendo-se a matriz global

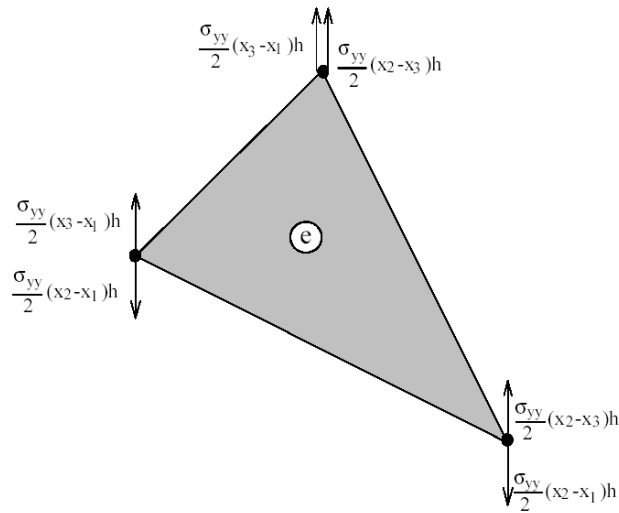


Figura 2.8.4

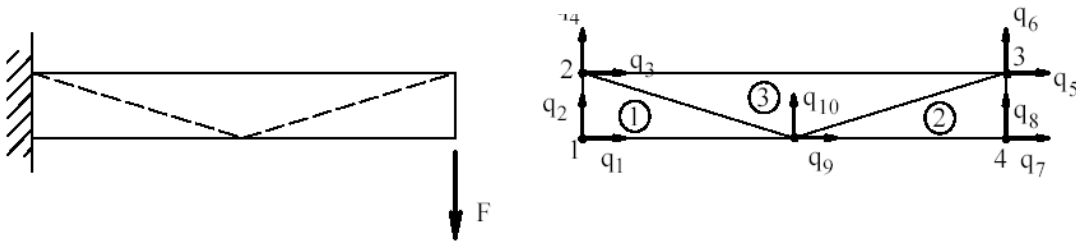


Figura 2.8.5: Viga discretizada.

$$[K^G] = [K^1] + [K^2] + [K^3] \quad (2.37)$$

na forma: Figura 2.8.4 Carregamentos nodais.

$$[K^G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3 & 3 & & 1+3 & 1+3 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3 & 3 & & 1+3 & 1+3 \\ & & 3 & 3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 3+2 \\ & & 3 & 3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 3+2 \\ & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & & & & & & 2 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 1+2+3 \\ 1 & 1 & 1+3 & 1+3 & 3+2 & 3+2 & 2 & 2 & 1+2+3 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Nota: Para o triângulo de 3 nós da Figura 2.8.3, se for usado um sistema de coordenadas local onde $x_1 = 0$ e $y_1 = y_2 = 0$, chega-se à matriz de rigidez obtida por Martin, Turner, Clough & Topp (1956).

2.9. Elemento quadrilátero Isoparamétrico

Considere a estrutura da figura 2.9.1, discretizada usando elementos quadriláteros. O problema é plano e a terceira dimensão (z) é incluída especificando-se espessura unitária para o caso do estado plano de deformações, ou espessura h para o caso do estado plano de tensões.

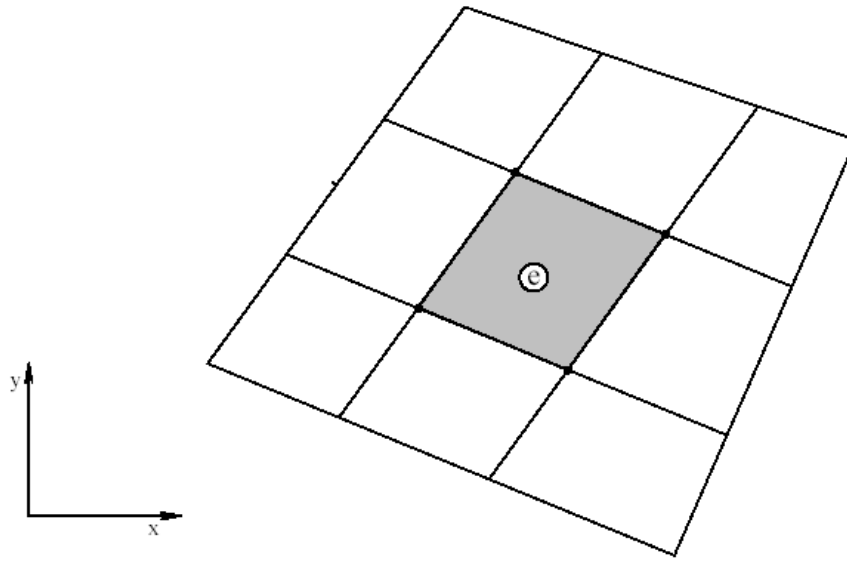


Figura 2.9.1: Estrutura plana.

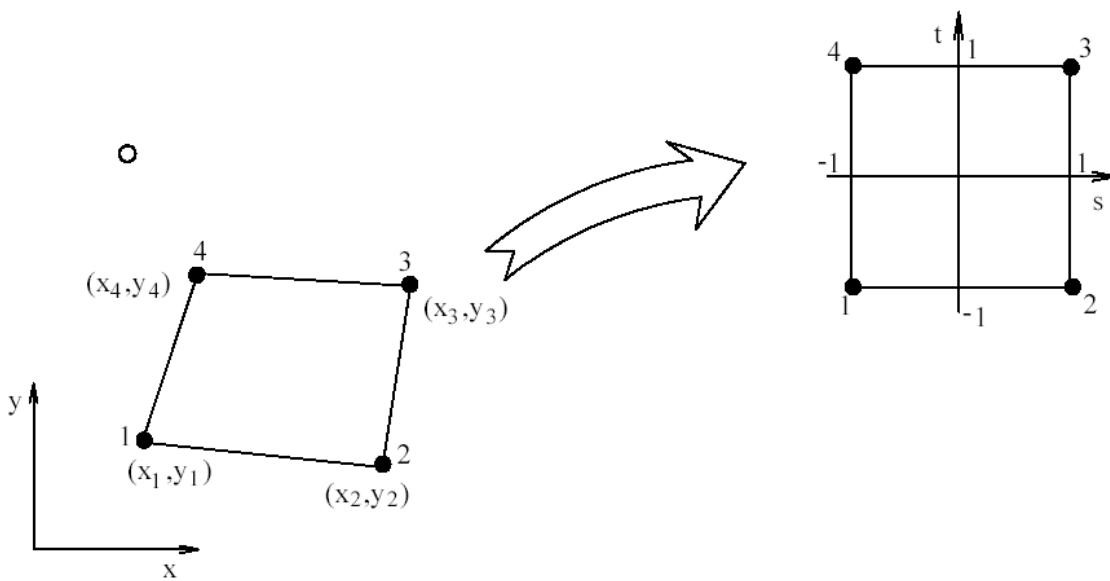


Figura 2.9.2: Elemento quadrilátero.

Considerando-se o elemento e , na figura 2.9.2, pode-se observar que existe uma relação entre os nós do elemento quadrilátero e os nós de elemento-mestre, o que ficará claro em instantes.

As variáveis neste problema são os deslocamentos u_x e u_y , os quais serão aproximados por relações bilineares

(2.39)

$$u_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$u_y(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$

ou, em forma matricial,

$$\{u\} = [\phi] \{\alpha\} \quad (2.40)$$

onde

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$\{\alpha\}^T = \{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \} \quad (2.42)$$

e $[\Phi]$ é a matriz de coordenadas, similar à matriz $[\phi]$ para elemento triangular, mas agora 2×8 . Note que o termo xy caracteriza bilinearidade, mas a relação ainda é linear em uma dada direção.

Calculando-se $u_i(x, y)$ e $u_{yi}(x, y)$ nos nós fornece

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i y_i, \quad i = 1, 4 \\ u_{yi} &= \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 x_i y_i \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde

$$\{q\} = [A] \{\alpha\} \quad (2.44)$$

$$\{q\}^T = \{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad u_{y4} \} \quad (2.45)$$

é o vetor dos deslocamentos nodais e $[A]$ é a matriz quadrada (8×8) das coordenadas nodais. Pode-se também escrever

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{q\} \quad (2.46)$$

que substituída em 2.40 fornece os deslocamentos $u_x(x, y)$ e $u_y(x, y)$ em qualquer ponto do elemento em termos dos deslocamentos nodais, isto é:

$$\{u\} = [\Phi] [A]^{-1} \{q\} = [N] \{q\}. \quad (2.47)$$

A matriz $[N] = [\Phi] [A]^{-1}$ é uma matriz (2×8) e é chamada de matriz das funções de interpolação, sendo composta por funções N_i , $i = 1, 4$ definidas, em termos das coordenadas s e t do elemento-mestre, como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - s) (1 - t) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + s) (1 - t) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + s) (1 + t) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - s) (1 + t). \end{aligned} \quad (2.48)$$

As coordenadas s e t são adimensionais e a figura 2.9.3 mostra qual a forma de cada uma destas funções. A geometria, isto é, as coordenadas x e y de qualquer ponto do elemento podem ser expressas em termos das mesmas funções de interpolação N_i , $i = 1, 4$:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

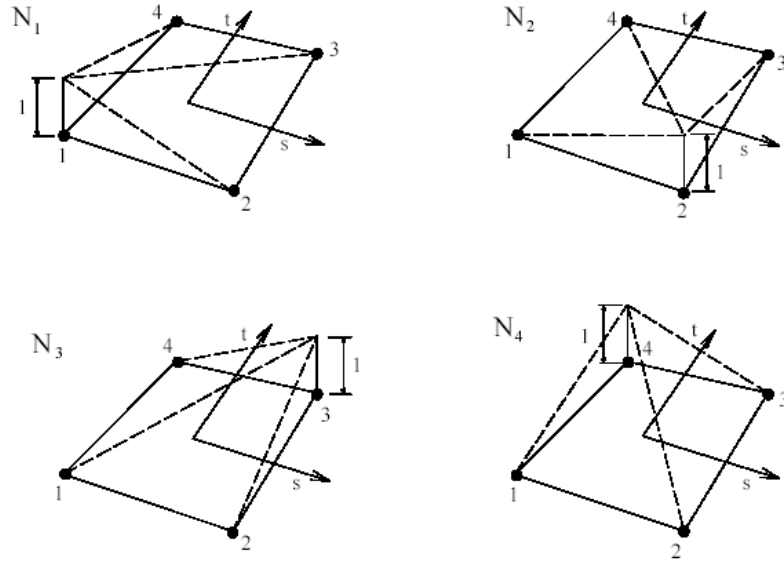


Figura 2.9.3: Distribuição das funções de interpolação N_1 , N_2 , N_3 , N_4 .
ou, em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

Esta metodologia, em que a geometria, isto é, as coordenadas x e y , e as variáveis, isto é, os deslocamentos u_x e u_y , são ambos aproximados pelas mesmas funções de interpolação, é chamada de conceito isoparamétrico. O elemento finito assim formulado é denominado elemento isoparamétrico. Quando a geometria do elemento é aproximada por polinômios de grau menor do que os polinômios que aproximam as variáveis, ele recebe o nome de elemento subparamétrico. Quando a geometria elemento é

aproximada usando-se polinômios de grau superior aos graus dos polinômios usados na aproximação das variáveis, tem-se o elemento superparamétrico. A equação 2.50 junto com a equação 2.47 caracteriza o elemento isoparamétrico aqui usado. Considere agora as equações deformações-deslocamentos 2.1 na sua versão para o estado plano de tensões. Então:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2.51)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \quad (2.52)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \quad (2.53)$$

Como as funções de interpolação são escritas em termos de s e t , usa-se o seguinte resultado matemático baseado no uso da regra da cadeia para diferenciação, no sentido de obter-se ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} :

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

que pode ser representada, na forma matricial, por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

onde a matriz $[J]$ é chamada de matriz Jacobiana. A equação 2.55 representa um conjunto de equações simultâneas onde $\frac{\partial}{\partial x}$

e $\frac{\partial}{\partial y}$ são as incógnitas. Resolvendo 2.55 usando a Regra de Kramer resulta em

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana e é chamado de jacobiano, sendo dado por

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (2.57)$$

Os termos da equação 2.57 podem ser calculados usando expressões para x e y (equação 2.50) e N_i (equação 2.48). Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{4} (1-s)(1-t)x_1 + \frac{1}{4} (1+s)(1-t)x_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (1+s)(1+t)x_3 + \frac{1}{4} (1-s)(1+t)x_4 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{1}{4} (1-t)x_1 + \frac{1}{4} (1-t)x_2 + \frac{1}{4} (1+t)x_3 - \frac{1}{4} (1+t)x_4 \quad (2.58)$$

e assim também podem ser calculados os outros termos. Já

$$\frac{\partial N_1}{\partial s} = -\frac{1}{4}(1-t) \quad (2.59)$$

é mais facilmente calculada, como também o são os outros termos. Então, $|J|$ é calculado como:

$$\begin{aligned} |J| &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \frac{\partial N_j}{\partial t} y_j \right) - \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} x_i \frac{\partial N_j}{\partial s} y_j \right) \right] \\ |J| &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[x_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial N_j}{\partial s} \right) y_j \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

e fazendo i variar de 1 a 4 e j de 1 a 4 para cada i , obtém-se $|J|$ em notação matricial como:

$$|J| = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1-t & -s+t & -1+s \\ -1+t & 0 & 1+s & -s-t \\ s-t & -1-s & 0 & 1+t \\ 1-s & s+t & -1-t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (2.61)$$

Multiplicando-se as matrizes em 2.61 resulta-se:

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{1}{8} \{ (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3) + \\ &\quad + s[(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)] + \\ &\quad + t[(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)] \}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

O uso da equação 2.56 permite o cálculo de $\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y}$ nas equações 2.51 a 2.53 como:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{|J|} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \right) \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{1}{|J|} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i \right) \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{|J|} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \right) \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{1}{|J|} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \right). \quad (2.66)$$

Da equação 2.47

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial s} &= \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i \end{aligned} \quad (2.67)$$

e substituindo-se as equações 2.67 e 2.63 a 2.66 na equação 2.51 resulta em:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{|J|} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[u_{xi} \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial N_j}{\partial t} - \frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial N_j}{\partial s} \right) \right]. \quad (2.68)$$

Adotando-se o mesmo procedimento para as equações 2.52 e 2.53, e considerando 2.68, pode-se escrever na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \end{bmatrix} \{q\} \quad (2.69)$$

Ou

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad (2.70)$$

onde $\{q\}$ é definido em 2.44 e $[B]$ é uma matriz cujos elementos têm a forma:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{8|J|} (y_{24} - y_{34}s - y_{23}t) \\ B_{12} &= \frac{1}{8|J|} (-y_{13} - y_{34}s - y_{14}t) \\ B_{13} &= \frac{1}{8|J|} (-y_{24} + y_{12}s - y_{14}t) \\ B_{14} &= \frac{1}{8|J|} (y_{13} - y_{12}s + y_{23}t) \\ B_{21} &= \frac{1}{8|J|} (-x_{24} - x_{34}s - x_{23}t) \\ B_{22} &= \frac{1}{8|J|} (x_{13} - x_{34}s - x_{14}t) \\ B_{23} &= \frac{1}{8|J|} (-x_{24} + x_{12}s - x_{14}t) \\ B_{24} &= \frac{1}{8|J|} (x_{13} - x_{12}s + x_{23}t) \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde $x_{ij} = x_i - x_j$ e $y_{ij} = y_i - y_j$.

2.10. Matriz de Rigidez e Vetor de Carga do Elemento Isoparamétrico

Para obter a matriz de rigidez e o vetor de carga do elemento, será utilizado o Princípio da Mínima Energia Potencial Total. A energia potencial total é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz}) d\Omega - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\rho f_x u_x + \rho f_y u_y + \rho f_z u_z) d\Omega - \int_{\Gamma} (t_x u_x + t_y u_y + t_z u_z) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.72)$$

que, considerando as aproximações impostas pela consideração do estado plano de tensões, e usando a

notação matricial, pode ser escrita como:

$$\Pi = \frac{h}{2} \int_S \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dS - \frac{h}{2} \int_S \{u\}^T \{X\} dS - h \int_l \{u\}^T \{T\} dl \quad (2.73)$$

onde $\{X\}$ é o vetor das componentes das forças de corpo, dada por:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \rho f_x \\ \rho f_y \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

$\{T\}$ é o vetor das componentes das trações na fronteira, nas direções x e y

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

h é a espessura do elemento e S é a área do elemento. Substituindo na equação geral resulta em

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{h}{2} \{q\}^T \int_S [B]^T [C] [B] dS \{q\} - h \{q\}^T \int_S [N]^T \{X\} dS \\ & - h \{q\}^T \int_l [N]^T \{T\} dl. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Como a energia potencial total está expressa em termos dos deslocamentos nodais $\{q\}$, toma-se derivadas parciais de Π em relação às componentes de $\{q\}$, isto é, u_{x1}, u_{y1}, \dots , e iguala-se cada uma destas derivadas a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x1}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x2}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x3}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{x4}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y1}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y2}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y3}} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_{y4}} &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}} = 0. \quad (2.77)$$

Faz-se assim a minimização da energia potencial total, usando o Princípio da Mínima Energia Potencial Total. A equação 2.77 representa oito equações de equilíbrio para o elemento, que podem ser escritas como:

$$[K^e] \{q\} = \{P\} \quad (2.78)$$

onde $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$[K^e] = h \int_S [B]^T [C] [B] dS \quad (2.79)$$

e $\{P\}$ é o vetor de carga do elemento, dado por:

2.10.1. Cálculo da Matriz de Rigidez e do Vetor de Carga do Elemento

Os coeficientes da matriz $[K_e]$ são funções das coordenadas s e t . Para calculá-los é mais conveniente usar integração numérica,

$$[K^e] \cong h \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N [B(s_i, t_i)]^T [C] [(s_i, t_i)] |J(s_i, t_i)| W_i W_j \quad (2.81)$$

como segue:

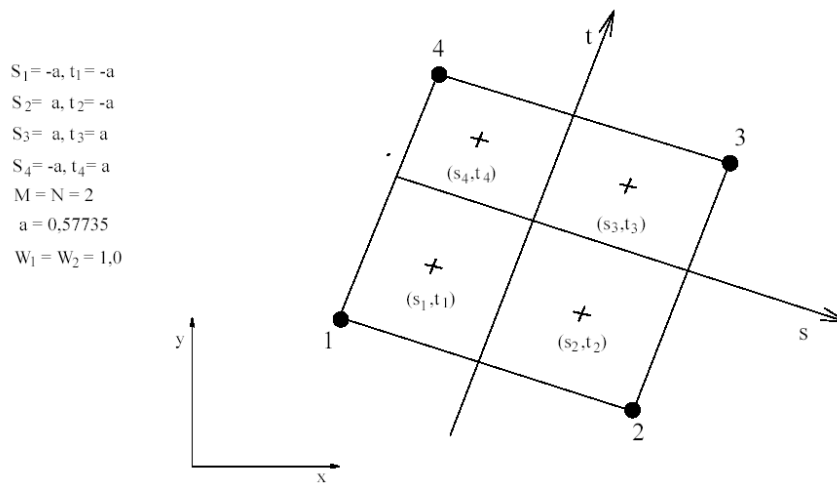


Figura 2.10.1: Integração numérica: esquema 2x2 pontos.

onde (s_i, t_i) denotam as coordenadas do ponto de integração i , e W_i denota o peso relativo do ponto de integração i na soma. Para elementos quadriláteros de 4 nós, normalmente usa-se o esquema 2x2 (ou 4 pontos) de integração (veja figura 2.10.1).

A primeira parte do vetor de carga, ou seja, $\{P_1\}$, pode ser calculada por

$$\{P_1\} \cong h \sum_{i=1}^N [N(s_i, t_i)]^T W_i \quad (2.82)$$

onde, se a força de corpo ρf_y [força/volume] for uniforme e $\rho f_x = 0$, tem-se o vetor $\{P_1\}$ como:

$$\{P_1\} = h \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}_{(s_i, t_i)} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \rho f_y \end{array} \right\} |J(s_i, t_i)| W_i \quad (2.83)$$

onde (s_i, t_i) denota que a matriz é calculada em pontos (s_i, t_i) . Por exemplo, a quinta componente de $\{P_1\}$ é:

$$P_{1(5)} \cong h \sum_{i=1}^N N_1(s_i, t_i) |J(s_i, t_i)| W_i \rho f_y \quad (2.84)$$

dando a força nodal, na direção y, no nó 1.

A segunda parte do vetor de carga, ou seja, $\{P_2\}$, aparece devido à trações aplicadas na superfície da estrutura; mais precisamente, na fronteira do elemento. Muitas vezes, esta parcela pode ser calculada usando-se integração fechada, ou seja, a integração numérica é desnecessária. Por exemplo, considere t_{x1} e t_{y1} como trações aplicadas no lado 1-2 do elemento da Figura 2.10.2. Então:

$$\{P_2\} = h \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ N_3 & 0 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & N_2 \\ 0 & N_3 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} t_{x1} \\ t_{y1} \end{matrix} \right\} dS \quad (2.85)$$

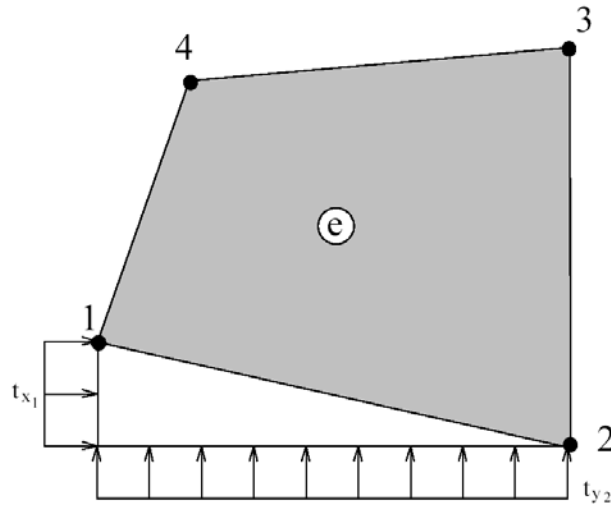


Figura 2.10.2: Trações no lado do elemento.

como, ao longo do lado 1-2, $s = -1$, e $t = -1$,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} (1 - s) \\ N_2 &= \frac{1}{2} (1 + s) \\ N_3 &= N_4 = 0 \end{aligned}$$

com a aplicação de fórmulas têm-se que

$$\{P_2\} = \frac{h l_1}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{1-s}{2} & 0 \\ \frac{1+s}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-s}{2} \\ 0 & \frac{1+s}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{x1} \\ t_{y1} \end{Bmatrix} dS \quad (2.86)$$

onde $s = \frac{2s}{l_1} ds = |J| ds$ e l_1 é o lado 1-2. Após integrar,

$$\{P_2\} = \frac{h l_1}{2} \begin{Bmatrix} t_{x1} \\ t_{x1} \\ 0 \\ 0 \\ t_{y1} \\ t_{y1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.87)$$

Este resultado implica que o carregamento aplicado é distribuído igualmente entre dois nós que pertencem ao lado 1-2. Isto é uma consequência do fato da função de interpolação ser linear ao longo dos lados do quadrilátero.

3. Exemplo Prático

No desenvolver desse exemplo, buscaremos exemplificar de forma simples os conhecimentos demonstrados acima. Tal situação é comulmente presente na Engenharia Mecânica, nas construções mecânicas e na utilização destes materiais nas várias áreas da construção, seja ela qual for.

3.1. Aplicação em barra prismática

A figura 3.1.1 ilustra as definições do problema, ambas com um plano de simetria; logo só é necessário analisar uma metade vertical na barra. A figura 3.1.2 mostra a metade direita do domínio computacional Ω com um candidato a discretização em quatro elementos Ω^h . Para esse problema baseia-se de tensão. A constante de Dirich-let é $U=0$ nos nós da linha de simetria e

$U=0=V$ nos nós de suporte de rigidez superior, figura 3.1.3. Ambos limites verticais são livres de tração e $\frac{\partial v^h}{\partial x} = 0$ é a

compressão homogênea ao longo do eixo de simetria.

Somente duas orientações de elementos finitos estão envolvidas na discretização, figura 3.1.2. Assumindo que a discretização é uniforme para cada Ω_e de comprimento l e largura ω medido paralelo ao eixo y e x respectivamente.

A partir das equações de mudança de coordenada

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial \zeta_j} \right]_{e=1,3} &= \begin{bmatrix} Y_2 - Y_3 & X_3 - X_2 \\ Y_3 - Y_1 & X_1 - X_3 \\ Y_1 - Y_2 & X_2 - X_1 \end{bmatrix}_{e=1,3} = \begin{bmatrix} -l & 0 \\ l & -\omega \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \\ \left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial \zeta_j} \right]_{e=2,4} &= \begin{bmatrix} Y_2 - Y_3 & X_3 - X_2 \\ Y_3 - Y_1 & X_1 - X_3 \\ Y_1 - Y_2 & X_2 - X_1 \end{bmatrix}_{e=2,4} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ l & 0 \\ -l & \omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e a área plana de cada elemento finito Ω_e é $A_e = 0.5l\omega$.

Essa informação facilmente computa a matriz de rigidez obtendo

$$\begin{aligned} [KU(U)]_{e=1,3} &= \frac{1}{2l\omega} \begin{bmatrix} k_v l^2 & -k_v l^2 & 0 \\ -k_v l^2 & k_v l^2 + \omega^2 & -\omega^2 \\ 0 & -\omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix} \\ [KU(U)]_{e=2,4} &= \frac{1}{2l\omega} \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & k_v l^2 & -k_v l^2 \\ -\omega^2 & -k_v l^2 & k_v l^2 + \omega^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comparando as matrizes acima, os elementos da matriz de rigidez são idênticos, com exceção do local da carga k_v . Logo, a partir da primeira matriz determina-se que

$$\begin{aligned} [KU(U)]_{e=1,3} &= \frac{1}{2l\omega} \begin{bmatrix} l^2 & -l^2 & 0 \\ -l^2 & l^2 + k_v \omega^2 & -k_v \omega^2 \\ 0 & -k_v \omega^2 & k_v \omega^2 \end{bmatrix} \\ [KV(V)]_{e=2,4} &= \frac{1}{2l\omega} \begin{bmatrix} k_v \omega^2 & 0 & -k_v \omega^2 \\ 0 & l^2 & -l^2 \\ -k_v \omega^2 & -l^2 & l^2 + k_v \omega^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A resolução das operações são repetidas, agora pela derivada parcial da matriz de rigidez. As formas expandidas do elemento finito genérico Ω_e são

$$\begin{aligned}
[KU(V)]_{e=1,3} &= (4A_e)^{-1} \begin{bmatrix} k_v \zeta_{11} \zeta_{12} - \zeta_{12} \zeta_{11} & k_v \zeta_{11} \zeta_{22} - \zeta_{12} \zeta_{21} & k_v \zeta_{11} \zeta_{32} - \zeta_{12} \zeta_{31} \\ k_v \zeta_{21} \zeta_{12} - \zeta_{22} \zeta_{11} & k_v \zeta_{21} \zeta_{22} - \zeta_{22} \zeta_{21} & k_v \zeta_{21} \zeta_{32} - \zeta_{22} \zeta_{31} \\ k_v \zeta_{31} \zeta_{12} - \zeta_{32} \zeta_{11} & k_v \zeta_{31} \zeta_{22} - \zeta_{32} \zeta_{21} & k_v \zeta_{31} \zeta_{32} - \zeta_{32} \zeta_{31} \end{bmatrix} \\
[KV(V)]_{e=2,4} &= (4A_e)^{-1} \begin{bmatrix} k_v \zeta_{12} \zeta_{11} - \zeta_{11} \zeta_{12} & k_v \zeta_{12} \zeta_{21} - \zeta_{11} \zeta_{22} & k_v \zeta_{12} \zeta_{31} - \zeta_{11} \zeta_{32} \\ k_v \zeta_{21} \zeta_{11} - \zeta_{21} \zeta_{12} & k_v \zeta_{22} \zeta_{21} - \zeta_{21} \zeta_{22} & k_v \zeta_{22} \zeta_{31} - \zeta_{21} \zeta_{32} \\ k_v \zeta_{32} \zeta_{11} - \zeta_{31} \zeta_{12} & k_v \zeta_{32} \zeta_{21} - \zeta_{31} \zeta_{22} & k_v \zeta_{32} \zeta_{31} - \zeta_{31} \zeta_{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pela matriz acima pode-se verificar que $[KV(U)]_e = [KU(V)]_e^T$. Logo, é necessária somente uma matriz de rigidez para cada Ω_e . A última matriz a ser formada se relaciona com a tração ou a força gravitacional. Em duas dimensões a força BY é uma constante uniforme igual à unidade do peso. Com isso, $A_e \{BY/G\}_e$ é igual ao peso W_e do Ω_e dividido pelos módulos corte G que pode ser escrito como $W_e G^{-1} \{1\}$. Transformando-se em

$$\begin{aligned}
\{bx\}_e &= \{0\} \\
\{by\}_e &= A_e [B200L] \{BY/G\}_e = \frac{W_e G^{-1}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \{1\} = \frac{W_e}{G} \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

A equação acima expressa a equivalência nodal da carga gravitacional do peso do corpo, que representa somente 1/3 do peso do elemento, dividido por G, em cada nó de Ω_e . O desenvolvimento para definição da superfície de tração deve contar para sua distribuição. Na orientação da figura 3.1.1, somente TY existe e a contribuição da carga se torna

$$\begin{aligned}
\{bx\}_e &= \{0\} \\
\{by\}_e &= l_e [A200L] \{TY/G\}_e = \frac{l_e}{6G} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} TY1 \\ TY2 \end{Bmatrix}_e = \frac{l_e}{6G} \begin{Bmatrix} 2TY1 + TY2 \\ TY1 + 2TY2 \end{Bmatrix}_e
\end{aligned}$$

A entrada da matriz coluna acima expressa a equivalência de carga nodal associada à distribuição de tração paralela ao eixo y. Isso completa a especificação de todos os elementos da matriz necessários para formar a matriz global. Concentrando na matriz de rigidez $[K]_e$ para cada domínio genérico Ω_e . A figura 3.1.2 mostra o local dos nós numéricos e a ordem conveniente para os graus de liberdade (UI, VI), $1 \leq I \leq 4$.

Formando com as equações anteriores a matriz de rigidez

$$\begin{aligned}
[K]_e \{Q\}_{e=1} &= \begin{bmatrix} [KU(U)]_e & [KU(V)]_e \\ [KV(U)]_e & [KV(V)]_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_e \\ \{V\}_e \end{Bmatrix}_{e=1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} k_v l / \omega & -k_v l / \omega & 0 \\ -k_v l / \omega & k_v l / \omega + \omega / l & -\omega / l \\ 0 & -\omega / l & \omega / l \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & k_v & -k_v \\ -1 & 1 - k_v & k_v \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ k_v & 1 - k_v & -1 \\ -k_v & k_v & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} l / \omega & -l / \omega & 0 \\ -l / \omega & l / \omega + k_v \omega / l & -k_v \omega / l \\ 0 & -k_v \omega / l & k_v \omega / l \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U1 \\ U2 \\ U4 \\ V1 \\ V2 \\ V4 \end{Bmatrix}_{e=1}
\end{aligned}$$

E a entrada $\{Q\}_{e=1}$ é numericamente englobada. Note que $[K]_e$ acima é simétrica, assim será para qualquer elemento Ω_e na discretização. A expressão correspondente para $\Omega_{e=2}$ é

$$[K]_e \{Q\}_{e=2} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \omega/l & 0 & -\omega/l \\ 0 & k_v l/\omega & -k_v l/\omega \\ -\omega/l & -k_v l/\omega & k_v l/\omega + \omega/l \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -k_v & k_v \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & k_v & 1-k_v \end{bmatrix} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -k_v & 0 & k_v \\ k_v & -1 & 1-k_v \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k_v \omega/l & 0 & -k_v \omega/l \\ 0 & l/\omega & -l/\omega \\ -k_v \omega/l & -l/\omega & l/\omega + k_v \omega/l \end{bmatrix} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U1 \\ U4 \\ U3 \\ V1 \\ V4 \\ V3 \end{array} \right\}_{e=2}$$

A redução da matriz global para uma discretização M=2 é

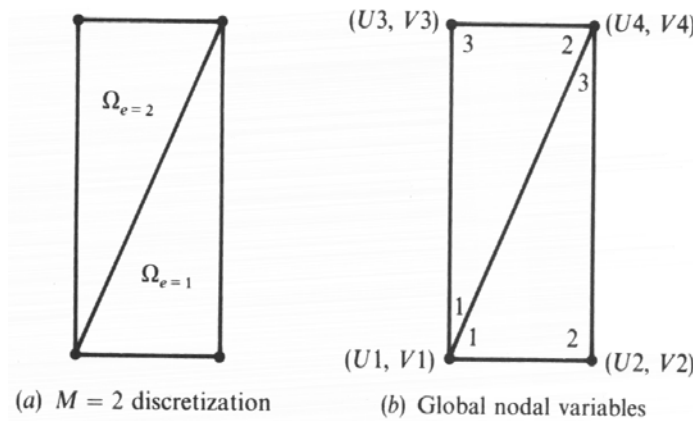
$$S_e([K]_e \{Q\}_e - \{b\}_e) = \{0\}$$

$$= \begin{bmatrix} l/\omega + k_v \omega/l & -1 & -l/\omega \\ -1 & k_v l/\omega + \omega/l & 1-k_v \\ -l/\omega & 1-k_v & l/\omega + k_v \omega/l \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} V1 \\ U2 \\ V2 \end{Bmatrix} + \frac{2W_e}{3G} \begin{Bmatrix} 1+1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

A matriz é simétrica. O último passo para resolvê-la para $\{Q\} = \{V1, U2, V2\}^T$. A solução geral é $\{Q\} = [K]^{-1} \{b\}$, e a inversa da matriz de rigidez 3x3 se forma pelos valores de $l, \omega, k_v = 1 + (1+\nu)/(1-\nu) = 2/(1-\nu)$ e o módulo de corte $G = E/(2(1+\nu))$. Para aço, os valores são $\nu \cong \frac{1}{4}$ e $E \cong 3 \times 10^7 \text{ lb/in}^2$; logo $k_v \cong \frac{8}{3}$ e $G \cong 10^7 \text{ lb/in}^2$. A discretização não suporta um l/ω ser muito grande, assumindo-o igual a 3, correspondendo a uma divisão da barra igual a 1.5. Assumindo que cada elemento pesa W_e igual a 150 lb a matriz se torna

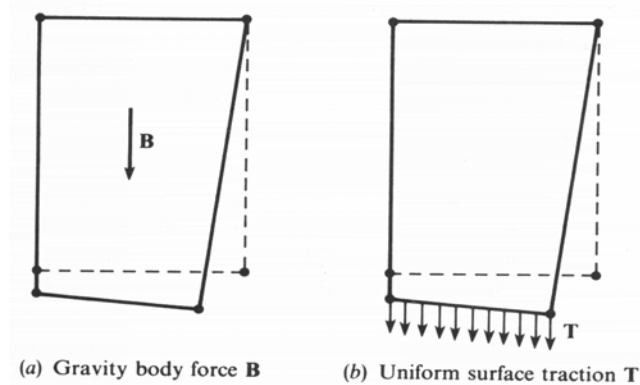
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 8.3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V1 \\ U2 \\ V2 \end{Bmatrix} = -10^{-5} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ e a solução é } \{Q\} = \begin{Bmatrix} V1 \\ U2 \\ V2 \end{Bmatrix} = 10^{-5} \begin{Bmatrix} -7.35 \\ -4.05 \\ -7.79 \end{Bmatrix} \text{ in}$$

Com isso, a parte de baixo da barra amassou e se estreitou porque $U2 < 0$. A figura 3.1.4 mostra o dano feito pela gravidade. (em uma escala exagerada)



Figuras 3.1.1 e 3.1.2

Descretização por elementos finitos de um segmento de barra.



Figuras 3.1.3 e 3.1.4

Barra original e efeito da gravidade em uma barra

3.2. Exemplo Comparativo de Algumas Malhas para um Estado Plano de Tensão

Considere a viga abaixo, engastada em uma extremidade e livre na outra, onde são aplicadas cargas conforme mostrado (Figura 3.2.1). A viga tem 9 unidades de comprimento, 1 de largura e 3 de altura, possuindo um módulo de elasticidade igual a 1 e coeficiente de Poisson igual a 0.

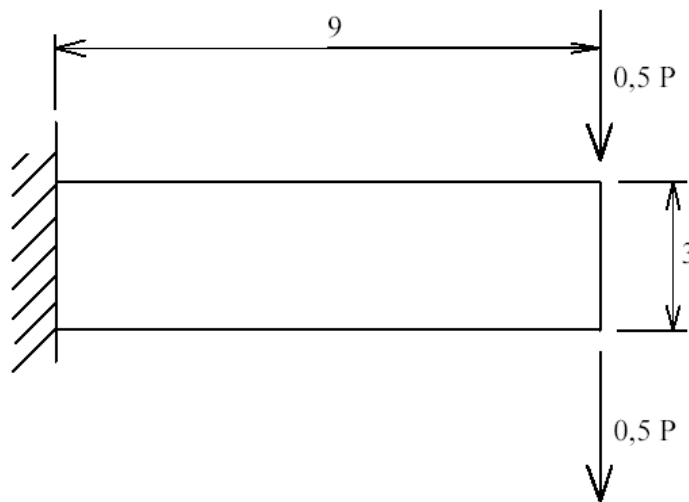


Figura 3.2.1: Viga engastada numa extremidade e livre na outra (espessura = 1 unidade).

O problema foi resolvido utilizando-se cinco (05) malhas diferentes com elementos triangulares e quadrangulares. Os elementos utilizados foram:

- CST (Constant Strain Triangle) . Triângulo de deformação constante - onde as deformações são consideradas constantes dentro do elemento
- LST (Linear Strain Triangle) . Triângulo de deformação linear - onde as deformações são consideradas variando linearmente no elemento
- elemento quadrangular, com variação linear de deformações
- elemento quadrangular com expansão de u_x e u_y em polinomial de quarta ordem (incluindo rotação no plano $x - y$).

Os resultados obtidos deslocamentos u_y na direção estão mostrados na figura 3.2.2 e 3.2.3, onde são comparados com a solução analítica. Os resultados mostram a superioridade do elemento quadrangular sobre o triangular (simples). Melhores resultados são obtidos com triângulo LST.

Um outro dado importante na escolha do elemento é o tempo de computação. A figura 3.2.4 abaixo apresenta o tempo de computação para cada tipo de elemento/malha utilizado.

		MALHA	TIPO DE ELEMENTO	Nº DE NÓS	Nº DE ELEMENTOS
MALHA 1		1		8	6
				8	3
				21	6
				8	3
MALHA 2		2		21	24
				21	12
				65	24
				21	12
MALHA 3		3		40	54
				40	27
				133	54
				40	27
MALHA 4		4		65	96
				65	48
				—	—
				65	48
MALHA 5		5		133	216
				133	108
				—	—
				133	108

Figura 3.2.2: Malhas utilizadas

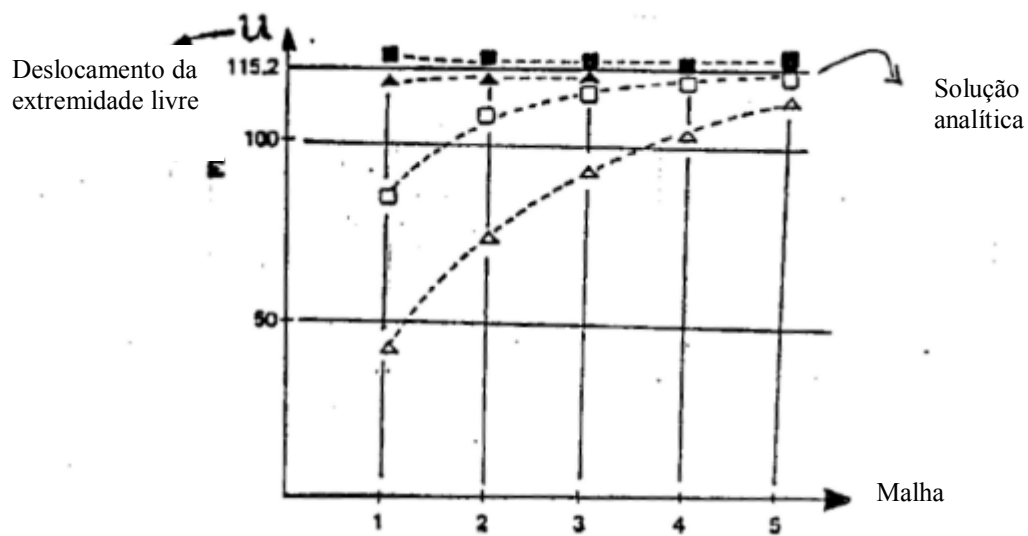


Figura 3.2.3: Deslocamento da extremidade livre x malha.

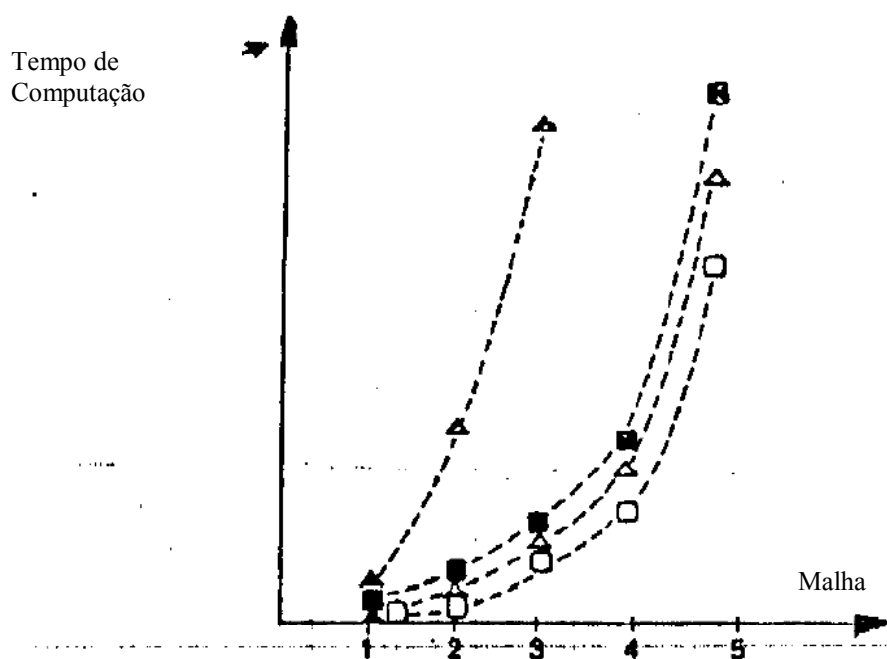


Figura 3.2.4: Tempo de computação x malha.

4. Conclusão

O método dos elementos finitos utiliza-se de uma ampla quantidade de ferramentas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, sendo empregado em simulações computacionais em Engenharia Mecânica.

5. Referências Bibliográficas

- ARNDT, M. O método dos elementos compostos aplicado à análise de vibrações. Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo programa de Pós-Graduação em métodos numéricos em Engenharia - Área Mecânica Computacional, dos setores de exatas e tecnologia da Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2001. p. 171
- BAKER, A. J., PEPPER, D. W. Finite elements 1-2-3. McGraw-Hill, Inc. 1991. p.341
- FONSECA, J. Ferramentas de simulação em mecânica: elementos finitos. Material compilado para a disciplina de Elementos Finitos para Graduação e Pós-graduação em Engenharia Mecânica. UFRGS. 2002. p. 88
- MACNEAL, R. H. Finite elemnts: their design and performance. Marcel Dekker, Inc, New York, USA. 1994. p. 531
- YANG, T. Y. Finite element structural analysys. Prentice-Hall, Inc, New Jersey, USA. 1986. p. 543
- ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method. V.1. Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill International, 1994. p.648