Álgebra Linear I - Lista 6

Distâncias

1) Considere a reta r que passa por (1,0,1) e por (0,1,1). Calcule a distância do ponto (2,1,2) à reta r.

2) Ache o ponto P do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad (x, y, z) = (1 + 2t,\ t\,, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

que está mais próximo do ponto $Q = (-1, 0, 0)$, e determine a distância entre eles. Que propriedade verificam os vetores $\overline{PQ}$ e $(2, 1 - 1)$ (o vetor diretor da reta?).

3) Encontre o ponto do plano definido por $x + 2y + 3z = 6$ mais próximo do ponto $(1, 3, 0)$. Ache a distância entre o ponto e o plano.

4) Ache a distância entre os planos:

a) $3x + y - 5z = 4$ e $3x + y - 5z = 2$;

b) $2x - 4y + z = -12$ e $2x - 4y + z = 1$.

5)

a) Ache a distância entre a reta $\{t(1, -8, -1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ e e o plano $3x + y - 5z = 2$.

b) Considere o plano π que contém aos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, 3, 4)$ e é paralelo à reta r

$$\{(x, y, z) = (1, 2, 4) + t(1, 0, -1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Calcule a distância da reta r ao plano π.

6) Considere r_1 a reta que passa pelos pontos (1,0,0) e (0,2,0), e r_2 a reta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

Encontre a distância entre r_1 e r_2.

7)

- Encontre a equação do plano cujos pontos são todos equidistantes de $A = (1, 4, 2)$ a $B = (0, 2, -2)$. Encontre uma reta que seja equidistante dos pontos A e B. Estude quantas possibilidades há para tal reta.
- Encontre a equação do plano que equidista dos planos $x + y + 2z = 3$ e $3x + 3y + 6z = 0$.

8) Considere as retas r_1 de equações paramétricas

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

e r_2 cujas equações cartesianas são

$$y - z = 0, \quad 2\,x - y = 2.$$

a) Calcule a distância entre as retas r_1 e r_2.

b) Determine, se possível, um ponto P da reta r_2 tal que a distância entre P e r_1 seja $1/3$.

c) Considere os pontos $A = (1, 1, 1) \in r_1$ e $B = (2, 2, 2) \in r_2$. Determine um ponto C de r_1 tal que o triângulo de vértices A, B, C seja retângulo.

9) Considere o plano

$$\pi\colon x + y - z = 1,$$

e os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$ do plano. Determine pontos C e D de π tais que os pontos A, B, C, D sejam os vértices de um quadrado (contido em π).

10) Considere as retas

$$r = (1 + t, 2t, 1 - t),\ t \in \mathbb{R}, \quad s = (2t, 1 + t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

- Determine a reta perpendicular comum ℓ a r e s (ou seja, uma reta perpendicular a r e s que intercepta as duas retas).

- Determine pontos $P \in r$ e $Q \in S$ tais que a distância entre P e Q seja igual a distância entre as retas r e s.

11) Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, 1)$.

1. Determine o ponto M do segmento AB tal que $\mathrm{dist}(AM) = \mathrm{dist}(MB)$ (isto é, M é o ponto médio do segmento AB).

2. Determine a relação entre os vetores $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$.

3. Determine (em termos de distância) a propriedade que verificam os pontos do plano π que contém o ponto M e é ortogonal ao vetor $\overline{AB}$.

4. Determine o ponto T do segmento AB tal que $\mathrm{dist}(AT) = 2\,\mathrm{dist}(BT)$.

5. Estude a veracidade da seguinte afirmação: considere o plano ρ que contém o ponto T e é ortogonal ao vetor $\overline{AB}$. Então todo ponto X de ρ verifica $\mathrm{dist}(AX) = 2\,\mathrm{dist}(BX)$.