Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof. Me. Rober Marcone Rosi
Unidade de Engenharia, Computação e Sistemas

Unidade 2 – Determinantes

- ❑Definir determinante de uma matriz quadrada;
- ❑Calcular o determinante de uma matriz 1x1;
- ❑Calcular o determinante de uma matriz 2x2;
- ❑Calcular o determinante de uma matriz 3x3;
- ❑Calcular o determinante de uma matriz utilizando Regra de Sarrus;
- ❑Calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n utilizando o Teorema de Laplace;
- ❑Utilizar propriedades para calcular determinantes;
- ❑Calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n utilizando a Regra de Chió;
- ❑Determinar a inversa de uma matriz utilizando determinantes.

Conceitos

Conceitos

DETERMINATE. Determinante é um número que está associado a toda matriz quadrada.

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, representamos seu determinante por det A, ou por $|A|$.

1.2. DETERMINANTE DE MATRIZ 1x1

Conceitos

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ 1x1. Uma matriz quadrada de ordem 1 tem um único elemento. O determinante é igual a esse elemento.

Atenção

Esta regra só calcula determinante de matriz 1x1.

Exemplo 1. O determinante da matriz $A = [2]$ é 2, ou seja det $A = 2$.

Exemplo 2. O determinante da matriz $B = (-7)$ é det $B = -7$.

Conceitos

1.3. DETERMINANTE DE MATRIZ 2x2

Conceitos

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ 2x2. O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Atenção

Esta regra só calcula determinante de matriz 2x2.

Atividade de Fixação

FAESA
Faça acontecer

Atividades

1. Qual é o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$?

2. Qual é o determinante da matriz $C = \begin{pmatrix} 5 & -2/3 \\ -4 & 7/2 \end{pmatrix}$?

3. Se $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2$, qual é o valor de x?

4. Qual o determinante da matriz nula de ordem 2?

5. Qual o determinante da matriz identidade de ordem 2?

Regra de Sarrus

FAESA
Faça acontecer

1.4. DETERMINANTE DE MATRIZ 3x3

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ 3x3. O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser calculado pela Regra de Sarrus.

Conceitos

A Regra de Sarrus só calcula determinante de matriz 3x3.

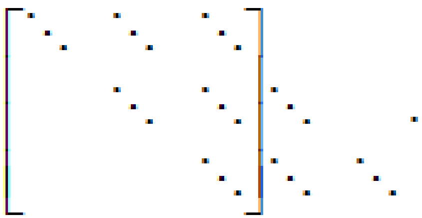
Atenção

Para calcular o determinante de uma matriz 3x3 pela Regra de Sarrus repetem-se, em ordem, as duas primeiras colunas da matriz logo após a última.

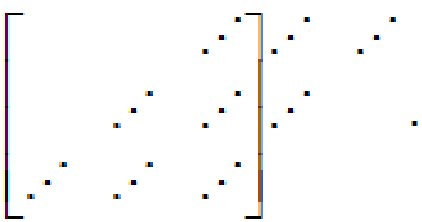
Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, fazemos $\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$.

Regra de Sarrus

Os produtos de cada três elementos, no sentido da diagonal principal, indicados na figura seguinte serão somados.

Assim: 

Os produtos de cada três elementos, no sentido da diagonal secundária, indicados na figura seguinte, serão subtraídos.

Assim: 

Então, calculamos o determinante:

$$\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{12}$$

Atividade de Fixação

1. Qual é o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$?

2. Qual é o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$?

3. Se $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & x & 1 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, qual é o valor de x?

4. Qual o determinante da matriz nula de ordem 3?

5. Qual o determinante da matriz identidade de ordem 3?

6. Para encontrar o determinante da matriz B, definida da seguinte forma: B = $(b_{ij})_{3x3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 3 \text{ se } i < j \\ 1 \text{ se } i = j \\ -2 \text{ se } i > j \end{cases}$ devemos, inicialmente, escrever a matriz:

TEOREMA DE LAPLACE

O teorema de Laplace utiliza os conceitos de **menor complementar** e de **cofator**.

Conceitos

MENOR COMPLEMENTAR. Seja a_{ij} um elemento de uma matriz quadrada A. Denominamos **menor complementar de a_{ij}** e indicamos por D_{ij}, o determinante da matriz que obtemos após eliminar de A a linha **i** e a coluna **j**.

Conceitos

COFATOR. Seja a_{ij} um elemento de uma matriz quadrada A. Denominamos **cofator de a_{ij}** e indicamos por A_{ij}, o número real obtido do produto entre $(-1)^{i+j}$ e o menor complementar de a_{ij}. Ou seja, $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

TEOREMA DE LAPLACE

Conceitos

TEOREMA DE LAPLACE. O determinante de uma matriz quadrada de ordem n é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) por seus cofatores.

Atenção

O Teorema de Laplace pode ser utilizado para calcular o determinante de qualquer matriz quadrada.

TEOREMA DE LAPLACE

Exemplo 1. Para encontrar o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ pelo teorema de Laplace é preciso escolher uma fila. Pode ser qualquer linha ou qualquer coluna. Se, por exemplo, escolhemos a primeira linha, então o determinante será igual à soma dos produtos de cada elemento da linha 1 pelos seus cofatores.

$\text{Det } A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$

$\text{Det } A = 2 \text{x} 26 + 6\text{x}(-30) + (-1)\text{x}16 = 52 - 180 - 16 \rightarrow \det A = -144.$

TEOREMA DE LAPLACE

Reflexão

Um determinante de ordem 3, em geral, é mais fácil calcular pela Regra de Sarrus.

Atenção

O Teorema de Laplace deve ser aplicado sobre a fila que tiver o maior número de elementos nulos.

Exemplo 2. Para calcular o determinante de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ deve-se escolher uma fila e aplicar o teorema de Laplace.

$$\det A = a_{12} x A_{12} + a_{22} x A_{22} + a_{32} x A_{32} + a_{42} x A_{42}$$

$$\det A = 2x47 + 0xA_{22} + 3x(-13) + 0xA_{42} = 94 - 39 \Rightarrow \det A = 55.$$

Atividade de Fixação

Atividades

Resolva os exercícios abaixo e observe neles algumas propriedades dos determinantes que serão vistas a seguir:

1. Qual é o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 7 & 7 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$?

2. Qual é o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$?

3. Qual o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Qual o determinante de uma matriz quadrada nula qualquer?

5. Qual o determinante de uma matriz identidade qualquer?

6. Seja a matriz A quadrada de ordem 6. Qual é o número máximo de determinantes de ordem 3 que teremos que calcular para encontrar o determinante de A?

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 1. Se uma matriz tem uma linha (ou coluna) de zeros, seu determinante é nulo.

Exemplo1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0.$

Obs. A terceira linha é nula.

Propriedade 2. Se uma matriz tem duas linhas (ou colunas) iguais, seu determinante é nulo.

Exemplo 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0.$

Obs. A primeira linha é igual à terceira.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 3. Se uma matriz tem duas linhas (ou colunas) proporcionais, seu determinante é nulo.

Exemplo 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 18 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0.$

Obs. A terceira coluna é o triplo da primeira.

Propriedade 4. Se uma linha (ou coluna) de uma matriz é combinação linear de outras linhas (ou colunas) desta matriz, seu determinante é nulo.

Exemplo 4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & -5 & 12 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0.$

Obs. A segunda linha é igual à soma da terceira linha com o dobro da primeira, ou seja, a segunda linha é combinação linear da primeira e da terceira linha.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 5. Quando permutamos (trocamos) duas linhas (ou colunas) de uma matriz A, obtemos uma matriz B cujo determinante é o oposto da determinante A, ou seja, det B = – det A.

Exemplo 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 55.$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = -55.$

Obs. A segunda linha e a terceira linha da matriz A, foram trocadas.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 6. Quando se multiplica os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz A por um número real **k**, obtém-se uma matriz B cujo determinante é igual ao determinante da matriz A multiplicado por **k**, ou seja, det B = k det A.

Exemplo 6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 13.$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = -26$

Obs. A terceira linha da matriz A foi multiplicada por (–2), então o determinante foi também multiplicado por (–2).

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 7. O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$$\text{Exemplo 7. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 13.$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = 13.$$

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 8. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 12 & 17 \\ 0 & -4 & 12 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \text{x} (-4) \text{x} (-1) \text{x} 9 \text{x} 2 = 72.$

Obs. A matriz A é triangular, pois todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal são nulos.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 9. Teorema de Jacobi – Quando se soma aos elementos de uma linha (coluna) de uma matriz A, os elementos de outra linha (coluna) multiplicada por uma constante, obtém-se uma matriz B cujo determinante é igual ao da matriz A.

Exemplo 9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -144.$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = -144.$

Obs. A terceira coluna da matriz B é a soma da terceira coluna de A com o dobro da primeira coluna da matriz A.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 10. Teorema de Binet – O determinante do produto de duas matrizes, A e B, é igual ao produto dos determinantes destas matrizes, ou seja, det (AB) = det A x det B.

Exemplo 10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -21.$

$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 27.$

$AB = \begin{bmatrix} 13 & -2 & -1 \\ 11 & -2 & 12 \\ -12 & 5 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \det AB = -567.$

Veja que: det (AB) = det A x det B = (–21) x 27 = – 567.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 11. O determinante da inversa de uma matriz é igual ao inverso do determinante da matriz.

Obs. Esta propriedade é uma aplicação do teorema de Binet, pois como o produto de uma matriz pela sua inversa é a matriz identidade e o determinante da identidade é igual a 1, segue que:

$$A\,A^{-1} = I \Rightarrow \det(A\,A^{-1}) = \det I \Rightarrow (\det A)(\det(A^{-1})) = 1$$

Então, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

REGRA DE CHIÓ

Esta é uma regra prática para calcular determinantes rebaixando a ordem do mesmo. Existem várias versões da mesma regra. Veja a seguinte:

REGRA DE CHIÓ.

1º. O elemento a_{11} da matriz deve ser unitário. Caso não seja, use alguma propriedade para transformá-lo em 1.

2º. Elimine a primeira linha e a primeira coluna da matriz A, reduzindo assim a ordem da mesma.

3º. De cada elemento a_{ij} restante na matriz A subtraia o produto de a_{i1} por a_{1j}.

4º. A matriz obtida tem o mesmo determinante que a matriz A.

REGRA DE CHIÓ

Veja no exemplo a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ \mathbf{1} & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

De cada elemento da nova matriz subtrairemos o produto dos elementos suprimidos (elementos coloridos).

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 - \mathbf{1}.0 & 1 - 2.\mathbf{1} & -2 - \mathbf{1}.1 \\ -1 - 3.0 & 3 - 2.3 & 0 - 1.3 \\ -2 - 0.0 & 4 - 2.0 & -4 - 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

REGRA DE CHIÓ

Exemplo 2. Na matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ o elemento $b_{11} = 2$. É preciso aplicar alguma propriedade para torná-lo unitário sem alterar o valor do determinante.

1. Trocando a primeira linha com a terceira, o determinante inverte o sinal (propriedade 5).
2. Agora, trocando a primeira coluna com a terceira, o determinante inverte o sinal (propriedade 5).

REGRA DE CHIÓ

Exemplo 3. O determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ pode ser obtido de diversos modos.

- Vamos utilizar a propriedade 9 (teorema de Jacobi) para tornar $b_{11} = 1$.
- Somamos aos elementos da primeira linha, os elementos da terceira. O determinante não será alterado.

Atividades

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -2 & \\ -2 & 0 & 8 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

Encontre seu determinante de duas maneiras diferentes aplicando a Regra de Chió.

MATRIX INVERSA

MATRIZ INVERSA. A inversa de uma matriz quadrada é igual ao produto do inverso do determinante da matriz pela transposta da matriz de seus cofatores.

Conceitos

Assim: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\overline{A})^t$, onde $\overline{A}$ é a matriz dos cofatores.

Se o determinante de uma matriz é nulo, então ela **não** é inversível.

Atenção

Exemplo 1: Encontre a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

APLICAÇÕES

Uma aplicação interessante e bastante útil dos determinantes é o cálculo de áreas.

Se os vértices A, B e C de um triângulo estão representados num sistema de coordenadas cartesianas por pares ordenados $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, então a área do triângulo ABC é dada por $S = \frac{|D|}{2}$, onde $|D|$ é o módulo ou valor absoluto do determinante construído a partir das coordenadas dos vértices, $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Os topógrafos usam esta fórmula para calcular áreas.