## Prova tipo D

# P3 de Álgebra Linear I - 2003.2

Data: 17 de novembro 2003 Horário: 17:05 - 18:55

Nome:	Matrícula:
Assinatura:	Turma

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	1.5		
2a	0.5		
2b	0.5		
3a	1.0		
3b	0.5		
3c	1.0		
4a	0.7		
4b	0.7		
4c	0.5		
5	1.2		
6a	1.0		
6b	1.0		
Total	10.1		

## Instruções:

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use " $\mathbf{N}=$  não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta  $\mathbf{N}$  vale 0. Respostas confusas e/ou rasuradas valerão como erradas. A pontuação das respostas erradas segue a seguinte tabela:

Núm. questões erradas	1	2	3	4	5
Pontos negativos	0	0.3	0.7	1.2	1.5

Marque no quadro abaixo as respostas. Não é necessário justificar

Itens	$\mathbf{V}$	$\mathbf{F}$	N
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			

- **1.a)** Existe uma matriz M,  $3 \times 3$ , ortogonal e simétrica cujo traço é igual a dois.
  - 1.b) Considere as matrizes

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Defina a matriz M como

$$M = PDP^{-1}.$$

A matriz M é simétrica.

**1.c)** Sejam  $\beta = \{u, v\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  e [M] e [N] as matrizes na base canônica das transformações lineares  $M, N \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  que verificam

$$M(u) = 5 u,$$
  $M(v) = 7 v$   
 $N(u) = \overline{0},$   $N(v) = 3 v.$ 

As matrizes produto [N][M] e [M][N] são iguais e simétricas.

1.d) Seja E um espelhamento em um plano de  $\mathbb{R}^3$ . Existe uma base  $\beta$  tal que a matriz de E na base  $\beta$  é

$$[E]_{\beta} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1.e) Considere a matriz

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 11 & 111 & 1111 \\ 33 & 333 & 3333 \\ 77 & 777 & 7777 \end{array}\right).$$

Os autovalores de M são 0 (de multiplicidade dois) e 8121.

2) Considere os vetores

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad v = (-1/\sqrt{6}, a, b), \quad w = (-1/\sqrt{2}, 0, c).$$

- (2.a) Determine a, b, c para que os vetores u, v, w formem uma base ortonormal.
- (2.b) Considere agora a base  $\beta = \{u, v, w\}$  do item anterior. Determine a primeira coordenada do vetor (3, 2, 3) na base  $\beta$ .

Marque nos quadros abaixo as respostas. Não é necessário justificar

a) 
$$a = ,b = ,c =$$

b) primeira coordenada =

3) Considere a transformação linear

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(u) = (1, 0, -1) \times u$$

e a base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

- (3.a) Determine a matriz de T na base  $\beta$ .
- (3.b) Determine os autovalores de T.
- (3.c) Interprete T como a composição de uma projeção ortogonal, uma rotação e a multiplicação por um escalar (determinando o plano/reta de projeção e o eixo e o ângulo de rotação).

Justifique cuidadosamente sua resposta

Resposta:

4) Considere a matriz M dada por

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Sabendo que 3 é um autovalor e que (1, 2, -1) é uma autovetor de M:

- (4.a) Determine os autovalores de M.
- (4.b) Determine uma base  $\beta$  ortogonal de autovetores de M.
- (4.c) Determine duas formas diagonais  $D \in E$  diferentes de M.

Marque nos quadros abaixo as respostas. Não é necessário justificar

**4.a**) autovalores:

**4.b**) base  $\beta =$ 

4.c)  $[D] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad [E] = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ 

### Complete com caneta os quadros abaixo. Não é necessário justificar

Seja R uma matriz de rotação em  $\mathbb{R}^3$  de eixo (17t, t, 52t),  $t \in \mathbb{R}$ , e ângulo  $\pi/4$  radianos e considere a matriz [R] de R na base canônica.

	Sim	Não
[R] é simétrica		
[R] é ortogonal		

O traço de $[R]$ é	
O determinante de $[R]$ é	

Seja P uma projeção de  $\mathbb{R}^3$  na reta (19t, 16t, 0),  $t\in\mathbb{R}$ , na direção do plano 13x+12y+17z=0. Considere a matriz [P] de P na base canônica.

	Sim	Não
[P] é simétrica		
[P] é ortogonal		

O traço de $[P]$ é	
$oxed{O}$ determinante de $[P]$ é	

### Pontuação:

Cada quadro completo <br/>  $\underline{\text{totalmente correto}}$  vale0.3pontos

Não há pontuações intermediarias

6) Escolha quais das afirmações a seguir é a verdadeira.

### Marque com caneta nos quadros abaixo. Não é necessário justificar

Atenção: responda todos os itens, use "N = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta errada vale -0.1 ponto.

#### **6.1**) A matriz *A*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

representa:

- (a) Uma rotação de ângulo  $\pi/4$  e eixo de rotação a reta  $(t, -t, -2t), t \in \mathbb{R}$ .
- (b) Uma rotação de ângulo  $\pi/4$  e eixo de rotação a reta  $(t, t, 0), t \in \mathbb{R}$ .
- (c) Uma rotação de ângulo  $\pi/4$  e eixo de rotação a reta  $(t, -t, t), t \in \mathbb{R}$ .
- (d) O espelhamento no plano x + y = 0.
- (e) O espelhamento no plano x y 2z = 0.
- (f) O espelhamento no plano x y + z = 0.
- (g) Uma rotação de ângulo  $\pi/4$  e eixo de rotação a reta  $(t,-t,-t),\,t\in\mathbb{R}$ .
- (h) A projeção ortogonal no plano x + y = 0.
- (i) Uma rotação de ângulo  $\pi/4$  e eixo de rotação a reta  $(t,t,0),\,t\in\mathbb{R}$ .
- (j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	a	b	c	$\mathbf{d}$	e	f	g	h	i	j	N
6.1											

**6.2)** A matriz *S* 

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

representa:

(a) O espelhamento na reta  $(t, 0, t), t \in \mathbb{R}$ .

(b) Uma projeção no plano x + y + z = 0 na direção do vetor (1, 1, 0).

(c) A projeção ortogonal no plano x+y-z=0 seguida da projeção ortogonal no plano x-y+z=0.

(d) A projeção ortogonal no plano x+y+z=0.

(e) A projeção ortogonal no plano x-y-z=0.

(f) A projeção ortogonal na reta  $(t, 0, t), t \in \mathbb{R}$ .

(g) A projeção no plano x + y + z = 0 na direção do vetor (1, 0, 1).

(h) A projeção na reta  $(t,0,t),\,t\in\mathbb{R}$  na direção do plano x+y+z=0.

(i) O espelhamento no plano x + y + z = 0.

(j) Nenhuma das opções acima é verdadeira.

Itens	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	N
6.2											