$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Aula 11}}$

1. Dependência e independência linear.
2. Bases.
3. Coordenadas.
4. Bases de $\mathbb{R}^3$ e produto misto.

Roteiro

1 Dependência e independência linear de vetores

Definição 1 (Dependência linear)**.** *Dizemos que os vetores*

$$\{u_1, u_2, \dots u_m\}$$

são linearmente dependentes *(l.d.) se existem números reais* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ *não todos nulos tais que*

$$\sigma_1\, u_1 + \sigma_2\, u_2 + \cdots + \sigma_m\, u_m = \bar{0}.$$

A definição implica que se os vetores $u_1, u_2, \dots, u_m$ são l.d. então algum vetor da coleção $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ pode ser escrito como combinação linear dos outros. Supondo, por exemplo, que $\sigma_1 \neq 0$, temos

$$u_1 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\, u_2 - \cdots - \frac{\sigma_m}{\sigma_1}\, u_m.$$

Portanto, u_1 é combinação linear dos vetores $u_2, \dots, u_n$.

Observe que se um vetor, por exemplo o vetor u_1, é combinação linear dos outros vetores, então a coleção de vetores es linearmente dependente:

$$u_1 = \sigma_2\, u_2 + \cdots + \sigma_m\, u_m.$$

Observe que não sabemos se os coeficientes $\sigma_2, \ldots, \sigma_m$ são diferentes de zero. Portanto,

$$u_1 - \sigma_2\, u_2 - \cdots - \sigma_m\, u_m = \bar{0}.$$

Como o coeficiente de u_1 é não nulo, os vetores são linearmente dependentes.

Observe que qualquer coleção de vetores contendo o vetor nulo é linearmente dependente. Por exemplo, $\{u_1, \bar{0}, u_2\}$, temos

$$\bar{0} = 0\, u_1, +(15)\, \bar{0} + 0\, u_2.$$

Exemplo 1. *Três vetores coplanares de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes. (Teste do produto misto): faça operações de escalonamento no determinante, o processo de escalonamento fornece a combinação linear dos vetores igual a zero.*

Por exemplo, considere os vetores

$$u_1 = (1, 2, 1), \quad u_2 = (2, 3, 1), \quad u_3 = (1, 0, -1).$$

Consideramos o determinante escrevendo no lado o vetor que representa cada linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}.$$

Cada operação com as linhas corresponde a uma operação com os vetores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 - 2\, u_1 \\ u_3 - u_1 \end{matrix}.$$

Trocando sinais nas duas últimas linhas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ 2\, u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{matrix}.$$

Finalmente,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ 2\, u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 - 2\,(2\, u_1 - u_2) \end{matrix}.$$

Obtemos assim,

$$\bar{0} = u_1 - u_3 - 2\,(2\, u_1 - u_2) = -3\, u_1 + 2\, u_2 - u_3.$$

Observamos que dois vetores paralelos de $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes.

Definição 2 (Independência linear). *Os vetores* $\{u_1, u_2, \dots u_m\}$ *são* linearmente independentes *(l.i.) se não são linearmente dependentes, isto é, a única forma de obter o vetor nulo como combinação linear dos vetores* $u_1, u_2, \dots u_m$ *é tomando todos os coeficientes* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ *iguais a zero:*

$$\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \cdots + \sigma_m u_m = \bar{0}$$

se, e somente se,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = 0.$$

Outra forma de entender a independência linear é a seguinte: nenhum vetor u_i pode ser escrito como combinação linear dos outros $(m-1)$ vetores $u_1, \dots u_{i-1}, u_{i+1}, \dots u_m$. Suponhamos que

$$u_i = \sigma_1 u_1 + \cdots + \sigma_{i-1} u_{i-1} + \sigma_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \sigma_m u_m,$$

então,

$$\sigma_1 u_1 + \cdots + \sigma_{i-1} u_{i-1} - u_i + \sigma_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \sigma_m u_m = \bar{0}$$

obtendo uma combinação linear não trivial (no mínimo o coeficiente de u_i é não nulo (!)) dando o vetor nulo.

Propriedade 1.1. *Se um vetor* v *pode se escrever como combinação linear dos vetores* u_1, u_2, u_3 *de duas formas diferentes, então* u_1, u_2, u_3 *são linearmente dependentes.*

Prova: Suponha que existem números reais x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 com $(x_1, x_2, x_3) \neq (y_1, y_2, y_3)$ tais que

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3.$$

Logo,

$$(x_1 - y_1) u_1 + (x_2 - y_2) u_2 + (x_3 - y_3) u_3 = \bar{0}.$$

Como $(x_1 - y_1)$, $(x_2 - y_2)$ e $(x_3 - y_3)$ não são todos nulos, obtemos uma combinação linear de não trivial de u_1, u_2 e u_3 dando o vetor nulo. Portanto, os vetores u_1, u_2 e u_3 são l.d.. □

Exemplo 2. *Os vetores*

- $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$ *são l.i..*

- $(1,1,1)$, $(1,2,2)$ *e* $(1,2,3)$ *são l.i.*
- *Os vetores* $(1,1,1)$, $(1,1,2)$ *e* $(2,2,3)$ *não são l.i..*
- $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(2,2,3)$, *e* $(0,0,1)$ *não são l.i..*

Temos as seguintes propriedades sobre dependência linear:

Propriedade 1.2.

- *Um conjunto de vetores de* $\mathbb{R}^3$ *com quatro ou mais vetores é l.d..*
- *Um conjunto de vetores de* $\mathbb{R}^2$ *com três ou mais vetores é l.d..*

Prova: Vejamos o caso de $\mathbb{R}^2$. Consideremos um conjunto com três vetores u_1, u_2 e u_3.

Se u_1 e u_2 são paralelos, então $u_2 = \sigma u_1$ (por exemplo) e $u_2 - \sigma u_1 = \bar{0}$, logo os vetores são l.d..

Se u_1 e u_2 não são paralelos então geram $\mathbb{R}^2$. Logo $u_3 = \sigma u_1 + \beta u_2$, logo $u_3 - \sigma u_1 - \beta u_2 = \bar{0}$ e os vetores são l.d..

Repita este tipo de argumento com quatro vetores de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Exemplos 1. *Estude se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:*

a) *Se* $\{v_1, v_2\}$ *é um conjunto de vetores linearmente dependente então se verifica* $v_1 = \sigma\, v_2$ *e* $v_2 = \lambda\, v_1$ *para certos números reais* λ *e* σ*.*

b) *Se* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é um conjunto de vetores linearmente independente também o é o conjunto* $\{\kappa\, v_1, \kappa v_2, \kappa\, v_3\}$ *para todo* κ *não nulo.*

c) *Se* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é um conjunto de vetores linearmente dependente então cada vetor pode ser obtido como combinação linear dos outros dois.*

d) *Se* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é um conjunto de vetores linearmente independente também o é o conjunto* $\{\kappa\, v_1, \lambda v_2, \sigma\, v_3\}$ *para todo* κ, λ, σ *não nulos.*

Resposta: As afirmações (a) e (c) são falsas. Para a afirmação (a) considere os vetores $(1,1)$ e $(0,0)$, por exemplo. Para a afirmação (c) considere $v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,2,2), v_3 = (1,0,1)$. Claramente, o vetor v_3 não pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2.

A afirmação (b) e verdadeira: considere uma combinação linear os vetores $\kappa\, v_1, \kappa v_2, \kappa\, v_3$, que seja o vetor nulo:

$$\sigma_1\, \kappa\, v_1 + \sigma_2\, \kappa\, v_2 + \sigma_3\, \kappa\, v_3 = \bar{0}.$$

Ou seja

$$\kappa\, (\sigma_1\, v_1 + \sigma_2\, v_2 + \sigma_3\, v_3) = \bar{0}.$$

Como $\kappa \neq 0$, temos

$$\sigma_1\, v_1 + \sigma_2\, v_2 + \sigma_3\, v_3 = \bar{0}.$$

E como v_1, v_2 e v_3 são l.i., $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, logo os vetores são l.i..

Finalmente, a afirmação (d) também é verdadeira, e a prova segue como o caso anterior. Complete os detalhes. $\square$

2 Bases

Definição 3 (Base)**.** *Considere um subespaço vetorial* $\mathbb{W}$ *e um conjunto de vetores* $u_1, u_2, \dots, u_m$ *de* $\mathbb{W}$. *Dizemos que*

$$\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

é uma base de $\mathbb{W}$ *se*

- *os vetores de* β *geram* $\mathbb{W}$, *isto é, todo vetor* $v \in \mathbb{W}$ *pode ser escrito da forma* $v = \sigma_1\, u_1 + \sigma_2\, u_2 + \cdots + \sigma_m\, u_m$ *(ou seja, todo vetor de é combinação linear dos vetores da base* β*).*

- *os vetores de* β *são linearmente independentes.*

Por exemplo, os vetores

$$\beta = \{(1,1,1), (1,2,2), (1,3,3), (1,2,1), (2,1,1)\}$$

geram $\mathbb{R}^3$, é suficiente verificar que os vetores $(1,1,1), (1,2,2), (1,2,1)$ não são coplanares

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Porém estes vetores não formam uma base pois não são linearmente independentes (um conjunto de mais de três vetores de $\mathbb{R}^3$ não é linearmente independente).

Observe que é possível, obter uma base de $\mathbb{R}^3$ a partir da coleção β, eliminando alguns vetores. Por exemplo,

$$\beta' = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$. Já vimos que são linearmente independentes, e três vetores linearmente independentes geram $\mathbb{R}^3$.

Observamos que se acrescentamos qualquer vetor a β', os vetores geram $\mathbb{R}^3$, porém não serão linearmente independentes (justifique!), portanto, não formam uma base.

Observe também que se a família de vetores $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ é uma base de $\mathbb{W}$ então, se eliminamos qualquer vetor u_i da base β, o novo conjunto não é gerador de $\mathbb{W}$. É suficiente observar que o vetor $u_i \in \mathbb{W}$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores restantes: caso fosse escrito os vetores de β não seriam linearmente independentes, e portanto não formariam uma base. Complete os detalhes.

Propriedade 2.1. *As seguintes propriedades sobre bases se verificam:*

- *Uma base de* $\mathbb{R}^2$ *sempre tem dois vetores.*
- *Uma base de* $\mathbb{R}^3$ *sempre tem três vetores.*
- *Uma base de um plano de* $\mathbb{R}^3$ *(contendo a origem) sempre tem dois vetores.*
- *Uma base de uma reta de* $\mathbb{R}^3$ *ou* $\mathbb{R}^2$ *(contendo a origem) sempre tem um vetor.*
- *Dois vetores linearmente independentes de* $\mathbb{R}^2$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^2$*.*
- *Três vetores linearmente independentes de* $\mathbb{R}^3$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*
- *Dois vetores linearmente independentes de um plano* π *de* $\mathbb{R}^3$ *contendo a origem formam uma base de* π*.*

Exemplos 2.

- $\mathcal{E} = \{\mathbf{i} = (1,0), \mathbf{j} = (0,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^2$*, a chamada base canônica.*

- $\mathcal{E} = \{\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*, a chamada base canônica.*

- $\beta_1 = \{(1,1),(1,2)\}$*,* $\beta_2 = \{(3,1),(1,4)\}$ *e* $\beta_3 = \{(1,0),(1,1)\}$*, são bases de* $\mathbb{R}^2$*.*

- $\beta_1 = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,0,1)\}$*,* $\beta_2 = \{(2,1,2),(1,4,1),(3,5,0\}$ *e* $\beta_3 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$*, são bases de* $\mathbb{R}^3$*.*

- *Os vetores* $(1,0,1)$ *e* $(1,-1,-1)$ *formam uma base do plano de equação cartesiana* $\pi\colon x + 2\,y - z = 0$*.*

Exercício 1. *Suponha que* $\gamma = \{u_1, u_2, u_3\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*. Estude se* $\beta = \{u_1, u_2, u_1 + u_2 + u_3\}$ *também é uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Resposta: Pela propriedade acima (três vetores l.i. de $\mathbb{R}^3$ formam uma base) é suficiente ver que os vetores são linearmente independentes. Escreva

$$x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + x_3\,(u_1 + u_2 + u_3) = \bar{0},$$

isto é,

$$(x_1 + x_3)\,u_1 + (x_2 + x_3)\,u_2 + x_3\,u_3 = \bar{0}.$$

Como os vetores u_1, u_2 e u_3 são l.i., todos os coeficiente de uma combinação linear dando o vetor zero devem ser necessariamente nulos,

$$x_1 + x_3 = 0 = x_2 + x_3 = x_3.$$

Portanto, resolvendo os sistema, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Assim, os vetores são l.i. e formam uma base de $\mathbb{R}^3$. $\square$

3 Coordenadas em uma base β

Definição 4 (Coordenadas)**.** *Considere uma base* $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*. As coordenadas do vetor* v *na base* β*, denotada* $(v)_\beta$*, são* $(v)_\beta = (x_1, x_2, x_3)$*, onde*

$$v = x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + x_3\,u_3.$$

Observe que as coordenadas de v na base $\gamma = \{u_2, u_3, u_1\}$ são $(v)_\gamma = (x_2, x_3, x_1)$.

Idênticos comentários valem para bases em $\mathbb{R}^2$.

Observamos que as coordenadas de um vetor v em uma base β são <u>únicas</u>: se houvesse mais possibilidades de coordenadas teríamos o seguinte. Suponhamos que as coordenadas de v na base β sejam simultaneamente (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3). Então,

$$v = x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + x_3\, u_3 = y_1\, u_1 + y_2\, u_2 + y_3\, u_3.$$

Portanto,

$$(x_1 - y_1)\, u_1 + (x_2 - y_2)\, u_2 + (x_3 - y_3)\, u_3 = \bar{0}.$$

Como os vetores u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes, temos

$$x_1 - y_1 = 0 = x_2 - y_2 = x_3 - y_3.$$

Logo

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

4 Bases de $\mathbb{R}^3$ e produto misto

Propriedade 4.1. *Considere três vetores u, v e w de $\mathbb{R}^3$. Se $u \cdot (v \times w) \neq 0$ então os vetores são l.i.. Portanto, formam uma base de $\mathbb{R}^3$. O recíproco é verdadeiro (complete os detalhes). Portanto,* três vetores de $\mathbb{R}^3$ formam uma base se, e somente se $u \cdot (v \times w) \neq \bar{0}$.

Exercício 2. *Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por dois vetores paralelos ao plano $x - y - z = 0$ e outro ortogonal a estes vetores.*

Resposta: $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, -1, -1)\}$. □

Exemplo 3. *Considere vetores não nulos u e v de $\mathbb{R}^3$ tais que*

$$(u + v) \cdot (u + v) = (u - v) \cdot (u - v).$$

Então

$$\beta = \{u \times v, u, v\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores ortogonais.

Resposta: Da condição $(u+v)\cdot(u+v)=(u-v)\cdot(u-v)$ obteremos que $u\cdot v=0$. Temos

$$(u+v)\cdot(u+v)=u\cdot u+u\cdot v+v\cdot u+v\cdot v=u\cdot u+2\,(u\cdot v)+v\cdot v,$$

e

$$(u-v)\cdot(u-v)=u\cdot u-u\cdot v-v\cdot u+v\cdot v=u\cdot u-2\,(u\cdot v)+v\cdot v.$$

Igualando estas equações obtemos

$$u\cdot u+2\,(u\cdot v)+v\cdot v=u\cdot u-02\,(u\cdot v)+v\cdot v.$$

Isto é,

$$4\,(u\cdot v)=0, \quad u\cdot v=0.$$

Logo os vetores u e v são ortogonais (e portanto, l.i.). Claramente $u\times v$ é ortogonal a u e v. Logo os vetores de β são ortogonais. Logo somente falta ver que estes vetores são l.i..

Também sabemos o produto misto de $u\times v$, u e v é não nulo:

$$(u\times v)\cdot(u\times v)=|u\times v|^2=(|u||v|\mathrm{sen}(\pi/2))^2\neq 0.$$

Logo os vetores não são coplanares. Logo são l.i.. O argumento termina observando que três vetores l.i. formam uma base de $\mathbb{R}^3$. $\square$

Exemplo 4. *Considere uma base $\beta=\{u_1,u_2,u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Veja que*

$$\gamma=\{u_1,u_2,u_1+u_2+u_3\}$$

também é uma base de $\mathbb{R}^3$. Finalmente, sabendo que as coordenadas de v na base β são $(v)_\beta=(x_1,x_2,x_3)$, determine as coordenadas de $(v)_\gamma=(y_1,y_2,y_3)$ de v na base γ.

Resposta: Para ver que γ é uma base é suficiente observar que

$$\begin{aligned}(u_1+u_2+u_3)\cdot(u_1\times u_2) &= u_1\cdot(u_1\times u_2)+u_2\cdot(u_1\times u_2)+u_3\cdot(u_1\times u_2)=\\ &= u_3\cdot(u_1\times u_2)=u_1\cdot(u_2\times u_3)\neq 0.\end{aligned}$$

Onde a última afirmação decorre da independência linear dos vetores u_1, u_2 e u_3. (Justifique cuidadosamente todas as passagens do raciocínio anterior).

Para o cálculo das coordenadas, sabemos que

$$v = y_1\, u_1 + y_2\, u_2 + y_3\, (u_1 + u_2 + u_3) = (y_1 + y_3)\, u_1 + (y_2 + y_3)\, u_2 + y_3\, u_3.$$

Logo, da unicidade das coordenadas na base β,

$$x_1 = y_1 + y_3, \quad x_2 = y_2 + y_3, \quad \text{e} \quad x_3 = y_3.$$

Logo

$$y_1 = x_1 - x_3, \quad y_2 = x_2 - x_3, \quad y_3 = x_3.$$

Completamos assim a resposta. $\square$