Revisão sobre potenciação e radiciação

Abrantes Araújo Silva Filho

2019-04-05

Sumário

1 Introdução

Esta documento é uma revisão geral das propriedades da *potenciação* e da *radiciação* para os alunos da disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica, durante as atividades de monitoria.

Como o esperado é que os alunos já saibam esse conteúdo, não reescrevi toda a teoria de potências ou raízes, apenas preparei uma compilação com todas as propriedades que os alunos *devem dominar* para o sucesso na Álgebra Linear[1], e uma lista de exercícios a respeito dessas propriedades.

Espera-se que os alunos dominem as propriedades listadas aqui e façam os exercícios correspondentes. A correção dos exercícios, explicações extras e esclarecimento de dúvidas, serão realizadas nas atividades de monitoria.

CUIDADO: preste muita atenção aos detalhes de quando uma propriedade se aplica, por exemplo: existe uma propriedade que diz que qualquer número elevado a 0 é igual a 1 ($a^0 = 1$), mas essa propriedade só é valida se $a \neq 0$. Preste atenção nesses detalhes para não aplicar uma propriedade de forma errada!

Críticas e sugestões, favor entrar em contato através do e-mail: abrantesasf@gmail.com. Obrigado!

[1] E em outras disciplinas também, como cálculo, física, matemática discreta e outras.

2 Potenciação

A *potenciação*, ou exponenciação, é uma operação matemática que representa um número multiplicado por ele mesmo, várias vezes. Assim:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ vezes}} = b \tag{1}$$

Por exemplo: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
A nomenclatura correta para uma potenciação, $a^n = b$, é:

- *Base*: é o número que está sendo multiplicado por ele mesmo (a);
- *Expoente*[2]: é o número de vezes (n) que a base é multiplicada por ela mesma; e
- *Potência*: é o resultado do produto (b).

2.1 Propriedades da potenciação com expoente inteiro

As propriedades da potenciação com expoente inteiro[3] estão listadas a seguir. Preste atenção às condições nas quais cada propriedade se aplica!
Todo número elevado a 0 é 1:

$$a^0 = 1 \quad (\text{para } a \neq 0) \tag{2}$$

Por causa da condição na equação 2, não existe 0^0:

$$0^0 = \nexists \tag{3}$$

Cuidado com potências de números negativos:

$$-a^n = -(a^n) = -\left(\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ vezes}}\right) = -b \tag{4}$$

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \times (-a) \times (-a) \times \cdots \times (-a)}_{n \text{ vezes}} = \begin{cases} +b & \text{se } n \text{ for par} \\ -b & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases} \tag{5}$$

Produto de potências de mesma base:

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \tag{6}$$

[2]Cuidado: muita gente escreve expoNente, erroneamente. O correto é expOEnte!
[3]Potências com expoentes racionais serão vistas na Seção 4.

Divisão de potências de mesma base (todo mundo se lembra da propriedade na equação 7, mas a propriedade na equação 8 é equivalente e útil em algumas situações):

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0) \tag{7}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}} \quad (a \neq 0) \tag{8}$$

Potência de uma potência:

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{9}$$

Potência de um produto:

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{10}$$

Potência de um quociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \tag{11}$$

Potência com expoente negativo:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \tag{12}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad (a \neq 0) \tag{13}$$

Potência com um expoente que é uma potência:

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} \tag{14}$$

3 Radiciação

A *radiciação*, infelizmente, é uma operação difícil de se descrever em palavras, portanto preste atenção!

A radiciação é uma operação que realizamos quando temos um número conhecido e queremos descobrir que outro número que, multiplicado por ele mesmo uma determinada quantidades de vezes, resulta no valor que conhecemos. Alguns exemplos talvez facilitem:

- Eu tenho o número 125 e desejo descobrir que outro número, multiplicado por ele mesmo 3 vezes, resulta em 125. Ou seja, quero descobrir o número x, tal que $x^3 = 125$;
- Eu tenho o número 125 e desejo descobrir que outro número, multiplicado por ele mesmo 4 vezes, resulta em 125. Ou seja, quero descobrir o número x, tal que $x^4 = 125$.

Em termos mais formais: se n é um inteiro positivo e se $x^n = a$, então x é dito a n-ésima raiz de a. Em particular, x é chamado de raiz quadrada de a se $x^2 = a$, e chamado de raiz cúbica de a se $x^3 = a$.

Para indicar a radiciação usamos um símbolo especial:

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \text{(ou seja: } x^n = a) \tag{15}$$

Entendendo corretamente a notação:

- *Símbolo da radiciação*: é o símbolo $\sqrt{\ }$, e indica que estamos realizando uma operação de radiciação;
- *Índice do radical*: é o número n colocado acima do símbolo da radiciação, e indica quantas vezes o número que estamos procurando foi multiplicado por ele mesmo;
- *Radicando*: é o número a que conhecemos, é o resultado da multiplicação do número que estamos procurando.

Note que, por convenção, quando estamos querendo buscar a raiz quadrada (índice $n = 2$), não é necessário escrever o índice sobre o sinal da radiciação. Assim, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$, por convenção.

3.1 Propriedades da radiciação

As propriedades da radiciação estão listadas a seguir. Preste atenção às condições nas quais cada propriedade se aplica!

Raiz n-ésima de um número elevado à n-ésima potência:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{se } a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n = \text{par} \\ a & \text{se } a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n = \text{ímpar} \end{cases} \tag{16}$$

Alteração do índice através de multiplicação ou divisão:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \quad (a \in \mathbb{R}, (n,p) \in \mathbb{N} > 1) \tag{17}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}} \quad (a \in \mathbb{R}, (n,p) \in \mathbb{N} > 1) \tag{18}$$

Raiz de um produto:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} > 1, (a,b) \in \mathbb{R} \\ \text{se } (a,b) \geq 0, n \text{ deve ser par} \end{cases} \tag{19}$$

Raiz de um quociente:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (n \in \mathbb{N} > 1, (a,b) \in \mathbb{R}, b \neq 0) \tag{20}$$

Potência de uma raiz:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}} \tag{21}$$

Raiz de uma raiz:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \tag{22}$$

Multiplicação de radicais com índices diferentes:

$$\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[p]{b^k} = \sqrt[MMC(n,p)]{a^{\frac{MMC(n,p)}{n}m}} \times \sqrt[MMC(n,p)]{b^{\frac{MMC(n,p)}{p}k}} = \sqrt[MMC(n,p)]{a^{\frac{MMC(n,p)}{n}m} b^{\frac{MMC(n,p)}{p}k}} \tag{23}$$

Divisão de radicais com índices diferentes:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[p]{b^k}} = \frac{\sqrt[MMC(n,p)]{a^{\frac{MMC(n,p)}{n}m}}}{\sqrt[MMC(n,p)]{b^{\frac{MMC(n,p)}{p}k}}} = \sqrt[MMC(n,p)]{\frac{a^{\frac{MMC(n,p)}{n}m}}{b^{\frac{MMC(n,p)}{p}k}}} \tag{24}$$

3.2 Situações especiais

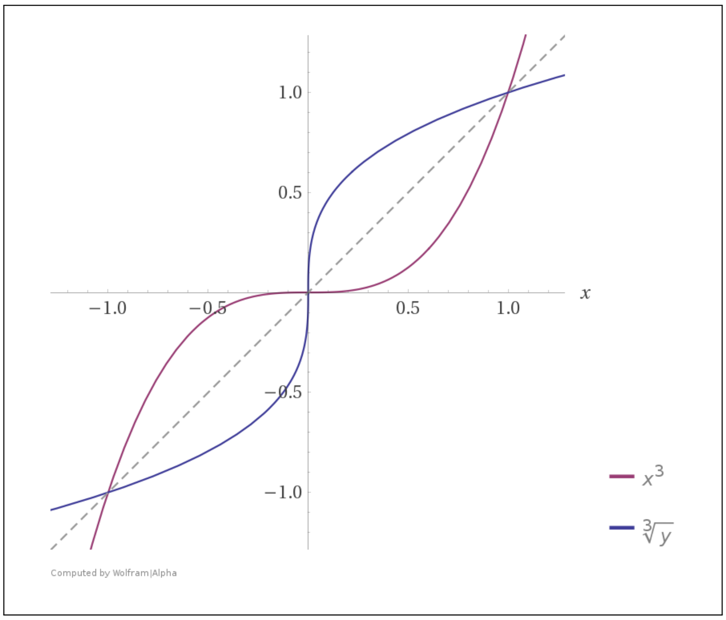
É necessário ficar atento à algumas situações e casos especiais da radiciação:

- Se $a \geq 0$ e $n =$ (par ou ímpar), $\sqrt[n]{a} \geq 0$;
- Se $a < 0$ e $n =$ par, $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$;
- Se $a < 0$ e $n =$ ímpar, $\sqrt[n]{a} < 0$;
- $\sqrt[1]{a} = a$;
- $\sqrt[0]{a}$ não tem sentido matemático; e
- Todo número $a > 0$ tem duas raízes quadradas, numericamente iguais mas opostas em sinal: a raiz positiva é dita raiz principal, e é a essa raiz que estamos nos referindo quando falamos $\sqrt{a}$.

4 Potencias *versus* Raízes: são funções inversas

Como você já sabe, a potenciação é a operação *inversa* da radiciação, e vice-versa. Assim, dada uma função de potenciação, por exemplo $y = x^3$, a função inversa será $x = \sqrt[3]{y}$ (veja a figura a seguir):

Figura 1: $y = x^3$ é a inversa de $x = \sqrt[3]{y}$ (e vice-versa)



Como essas duas operações matemáticas são relacionadas e inversas, existem ainda algumas outras propriedades que "conectam" as potências com as raízes, e ocorrem quando temos potências com expoentes racionais.

4.1 Propriedades da potenciação com expoente racional

Potência com expoente racional é uma raiz:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}) \tag{25}$$

Algumas vezes é útil entender os expoentes racionais como:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\left(\frac{1}{n}\right)(m)} \tag{26}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{(m)\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{27}$$

5 Racionalização de denominadores (ou numeradores)

Em muitos cálculos é conveniente remover as raízes do denominador (e, em algumas vezes, do numerador). O processo de remover uma raiz de um denominador é chamado de *racionalização do denominador* (e o processo de remover uma raiz de um numerador é chamado de *racionalização do numerador*).

Se uma raiz está isolada no denominador:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \tag{28}$$

Se a raiz no denominador tem um índice e o radicando é uma outra potência:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \times \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{m+n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b} \tag{29}$$

Se a raiz no demonimador faz parte de uma soma (ou subtração), usamos o conjugado:

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{(b+\sqrt{c})} \times \frac{(b-\sqrt{c})}{(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c} \tag{30}$$

A racionalização do numerador é menos freqüênte que a racionalização do denominador mas, caso seja necessária, pode ser feita utilizando-se uma das técnicas acima, obviamente aplicadas ao numerador!