Álgebra Linear I - Aula 15

1. Transformação linear inversa.

2. Condições para a existência da inversa.

Roteiro

1 Transformação linear inversa

Definição 1. *Dada uma transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *sua* inversa *é uma nova transformação linear* T^{-1} *que verifica a seguinte propriedade: para todo vetor* u,

$$T^{-1} \circ T(u) = T \circ T^{-1}(u) = u, \quad (\textit{isto é, } T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = Id).$$

Observamos que, em geral, há transformações lineares que não têm inversa. Por exemplo, considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,1) = \bar{0}$, por exemplo, a transformação linear

$$T(x,y,z) = (x-y, x-z, y-z).$$

Se a transformação linear inversa de T existisse, T^{-1} deveria verificar

$$T^{-1}(0,0,0) = (1,1,1),$$

pois $T^{-1} \circ T(1,1,1) = (1,1,1)$, isto é, $T^{-1}(0,0,0) = (1,1,1)$. Mas se T^{-1} for linear então $T^{-1}(0,0,0) = \bar{0}$.

Em qualquer caso, mesmo se a T^{-1} não for linear haveria um problema: como T é linear, temos $T(1,1,1) = \bar{0} = T(2,2,2)$. Portanto, $T^{-1}(0,0,0)$ deveria tomar dois valores, $(1,1,1)$ e $(2,2,2)$, o que é impossível.

Na próxima seção veremos condições para a existência da transformação linear inversa T^{-1}.

Observe que se a transformação inversa T^{-1} existe então é uma transformação linear: Suponha que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$, logo $T(u_1 + u_2) = v_1 + v_2$. Isto significa que,

$$T^{-1}(v_1) = u_1, \quad T^{-1}(v_2) = u_2, \quad T^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2.$$

Finalmente,

$$T^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2).$$

Para verificar a condição

$$T^{-1}(\sigma\, v_1) = \sigma\, T^{-1}(v_1)$$

observe que $T(\sigma\, u_1) = \sigma\, T(u_1) = \sigma\, v_1$. Logo

$$T^{-1}(\sigma\, v_1) = \sigma\, u_1 = \sigma\, T^{-1}(v_1).$$

Finalmente, observe que

$$[T^{-1}] \circ [T] = [T] \circ [T^{-1}] = Id.$$

Logo, usando as propriedades do determinante, obtemos que:

- $\det[T^{-1}] = 1/\det[T]$.
- Se T tem inversa então $\det[T] \neq 0$, (de fato veremos que isto é condição necessária e suficiente).

2 Definição de T^{-1}. Condições para a existência da inversa

Veremos agora como definir a transformação T^{-1}. Em primeiro lugar observe que se $T(u) = v$ então, necessariamente pela definição de inversa, $T^{-1}(v) = u$. Portanto, uma condição necessária para a existência de inversa é que a transformação seja injetora, isto é, se $u \neq w$ então $T(u) \neq T(w)$ (veremos na Observação 1 que no caso das transformações lineares ser injetora é equivalente a $T(u) = \bar{0}$ se, e somente se, $u = \bar{0}$).

Suponha que há vetores diferentes u e v tais que $T(u) = T(v) = w$ (de fato isto acontecia no exemplo anterior, por exemplo $T(1,2,2) = T(2,3,3) = T(0,1,1) = (-1,-1,0)$), então deveriamos ter $T^{-1}(w) = v$ e $T^{-1}(w) = u$, o que é impossível.

As condições (necessárias e suficientes) para a existência de transformação linear inversa são:

- Injetividade: Se $u \neq w$ então, $T(u) \neq T(w)$. Observe que se $T(u) = T(w) = v$ então, $T^{-1}(u) = v$ e $T^{-1}(u) = w$, logo u deveria tomar dois valores!.

- Sobrejetividade de T: para todo vetor u existe v tal que $T(v) = u$. Se a transformação for injetora o vetor v é único. Em tal caso, $T^{-1}(u) = v$:

$$T^{-1} \circ T(v) = T^{-1}(u) = v, \quad T \circ T^{-1}(v) = T(u) = v.$$

Estas duas condições se verificam se, e somente se, $\det[T]$ é não nulo. Pensaremos as condições anteriores em termos de sistemas de equações. Suponha, para simplificar, que $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e que

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dado um vetor $v = (\alpha, \beta)$, para calcular $T^{-1}(v)$ devemos encontrar um vetor (x, y) tal que $T(x, y) = (\alpha, \beta)$ (e em tal caso $T^{-1}(\alpha, \beta) = (x, y)$). Ou seja, devemos resolver o sistema a seguir e verificar que tal sistema tem solução única:

$$ax + by = \alpha, \quad cx + dy = \beta.$$

Isto é, para que exista a inversa o sistema anterior deve ter solução sempre, e dita solução deve ser única. Estas condições estão garantidas se (e somente se) $\det[T] \neq 0$.

Observação 1 (Sobre a condição de injetividade)**.** *No caso em que T é injetora se verifica $T(u) = \bar{0}$ se e somente se $u = \bar{0}$.*

Para ver a afirmação é suficiente observar que se T não é injectiva existem vetores diferentes u e v tais que $T(u) = T(v)$. Portanto,

$$T(u) - T(v) = \bar{0}, \quad T(u - v) = \bar{0},$$

onde $u - v \neq \bar{0}$. Claramente, se T é injetiva $T(0) = \bar{0}$ e para todo vetor não nulo u temos $T(u) \neq \bar{0}$.

Propriedade 2.1 (Injetividade e sobrejetividade)**.** *Quando uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é injetora também é sobrejetora, e vice-versa.*

Veremos a afirmação anterior quando $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Veremos que se é injetora também é sobrejetora. Considere uma base de $\mathbb{R}^3$, u_1, u_2 e u_3. Afirmamos que os vetores $T(u_1)$, $T(u_2)$ e $T(u_3)$ são linearmente independentes. Caso contrário um deles poderia ser escrito como combinação linear dos outros. Por exemplo,

$$T(u_3) = \lambda\, T(u_1) + \sigma\, T(u_2) = T(\lambda\, u_1 + \sigma\, u_2).$$

Como T é injetora,

$$u_3 = \lambda\, u_1 + \sigma\, u_2, \quad \lambda\, u_1 + \sigma\, u_2 - u_3 = 0.$$

Obtemos assim uma combinação linear dos vetores u_1, u_2 e u_3 dando o vetor nulo, o que é impossível pois os vetores são l.i..

Agora como $T(u_1)$, $T(u_2)$ e $T(u_3)$ são l.i. formam uma base. Para terminar a prova, é suficiente ver que dado qualquer $w \in \mathbb{R}^3$ existe u tal que $T(u) = w$. Como $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\}$ é uma base,

$$w = \lambda\, T(u_1) + \sigma\, T(u_2) + \gamma\, T(u_3) = T(\lambda\, u_1 + \sigma\, u_2 + \gamma\, u_3).$$

Isto termina a prova.

Fica como exercício verificar que se T é sobrejetora então é injetora. Para motivar e como dica veremos o caso $\mathbb{R}^2$. Se T não for injetora existe um vetor não nulo u tal que $T(u) = \bar{0}$. Considere agora uma base $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ contendo o vetor u. Suponha que $T(v) = w$. Suponhamos que $w \neq \bar{0}$.

Afirmamos que a imagem de T é reta de vetor diretor w (portanto, não é $\mathbb{R}^2$). Dado um vetor ℓ temos $\ell = \lambda\, v + \sigma\, u$, logo $T(\ell) = \sigma\, w$, e portante sua imagem está na reta vetorial de vetor diretor w que contém a origem.

Exemplos 1. *Estudar se as transformações lineares a seguir possuem inversas. Determine estas caso existam.*

- $T(x, y) = (2x, x + y)$.
- $T(x, y, z) = (2x + y + z, x + y + z, x)$.

Resposta: No primeiro caso existe inversa: para determinar $T^{-1}(u)$ e suficiente encontrar v tal que $T(v) = u$ e ver que esta solução é única. Isto é, se $u = (a, b)$ devemos resolver o sistema:

$$2x = a, \quad x + y = b.$$

A solução é $x = a/2$ e $y = b - a/2$. Ou seja,

$$T^{-1}(a, b) = (a/2, b - a/2).$$

Portanto, temos,

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique que $[T^{-1}] \circ [T] = [T] \circ [T^{-1}] = Id$.

No segundo caso não existe inversa. A transformação T não é nem sobrejetiva nem injetiva. Veremos isto resolvendo um sistema da forma.

$$2x + y + z = a, \quad x + y + z = b, \quad x = c,$$

isto é, dado um vetor (a, b, c) estamos calculando os vetores (x, y, z) tais que $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Escalonando,

$$x = c, \quad y + z = a - 2c, \quad y + z = b - c.$$

Continuando o escalonamento,

$$x = c, \quad y + z = a - 2c, \quad 0 = b + c - a.$$

Ou seja, para que o sistema admita solução o vetor deve ser da forma $(a, b, a-b)$. Isto é, não é possível definir (por exemplo) $T^{-1}(1, 1, 1)$.

Calcule agora a matriz associada a T e determine seu determinante (obviamente, $\det(T) = 0$, justifique sem fazer as contas!). $\square$

3 Métodos para determinar T^{-1}

Explicaremos de forma sucinta dois métodos para calcular a matriz de T^{-1}. Para fixar ideias suporemos que a matriz associada a T é 3×3.

3.1 Via sistemas de equações

Este método já foi esboçado no exemplo da seção anterior. Devemos determinar T^{-1} dos vetores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Conhecidos estes vetores a matriz $[T^{-1}]$ terá por colunas estes vetores. Para isto é suficiente resolver os sistemas

- $T(x, y, z) = (1, 0, 0)$, cuja solução é $T^{-1}(1, 0, 0)$,
- $T(x, y, z) = (0, 1, 0)$, cuja solução é $T^{-1}(0, 1, 0)$,
- $T(x, y, z) = (0, 0, 1)$, cuja solução é $T^{-1}(0, 0, 1)$.

Exemplo 1. *Determine a matriz inversa da transformação linear T cuja matriz associada é*

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta: Resolveremos o sistema geral $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Temos o sistema,

$$x + y + z = a, \quad y + z = b, \quad x + y = c.$$

A solução deste sistema é

$$(a - b, b - a + c, a - c).$$

Fazendo (a, b, c) igual a $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ obtemos

$$\begin{aligned} T^{-1}(1, 0, 0) &= (1, -1, 1), \\ T^{-1}(0, 1, 0) &= (-1, 1, 0), \\ T^{-1}(0, 0, 1) &= (0, 1, -1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verifique que $[T^{-1}]$ é de fato a inversa de $[T]$ (calcule $[T^{-1}][T]$ e veja que o resultado é a matriz identidade). □

3.2 Método de Gauss

Outra forma para encontrar a inversa de uma matriz A é o *método de Gauss,* que consiste em, utilizando *operações elementares,* transformar a matriz A na matriz identidade. Este método segue a mesma filosofia do método de resolução de equações lineares usando o método de escalonamento. V. repete cada operação efetuada na matriz A na matriz identidade, e o resultado final é a matriz inversa A^{-1} (justificaremos esta afirmação mais tarde).

Entendemos por operações elementares:

- multiplicação de uma linha por um número diferente de zero,
- permutações na ordem das linhas,
- substituir uma linha ℓ por uma nova linha obtida como combinação linear de essa linha e outras linhas da matriz (o coeficiente de ℓ não é nulo)

Exemplo 2. *Usando o método de Gauss, calcule a inversa de*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{a}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{b}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{c}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{d}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{e}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verifique!. $\square$

As operações elementares efetuadas nos diferentes passos foram:

a) segunda linha menos primeira linha, e terceira linha menos a primeira,

b) terceira linha menos duas vezes a segunda,

c) a terceira linha é multiplicada por (-1).

d) segunda linha menos terceira linha, e primeira menos terceira,

e) primeira menos segunda.

A seguir identificaremos cada passo como as multiplicações das matrizes T e Id por matrices A, B, C, D e E correspondentes aos passoa (a), (b), (c), (d) e (e).

Passo (a) multiplicar (à esquerda) por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Passo (b) multiplicar (à esquerda) por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Passo (c) multiplicar (à esquerda) por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Passo (d) multiplicar (à esquerda) por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Passo (e) multiplicar (à esquerda) por

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que obtivemos duas matrizes

$$(EDCBA)T = Id, \quad EDCBA.$$

Onde $(EDCBA)$ é (por definição) a inversa de T.

Descobra agora quais seriam as matrices envolvidas caso v. multiplicase pela direita, em vez de pela esquerda.

Tente repetir o processo anterior com a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

O determinante é nulo, portanto não é inversível. Quando v. repete o processo obtem o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Interprete!.

Finalmente, quando a matriz é dois por dois, o *método dos cofatores* (que não explicaremos agora) é muito prático: a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

onde $ad - bc \neq 0$ (isto é, $\det(A) \neq 0$) é dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d/\det A & -b/\det A \\ -c/\det A & a/\det A \end{pmatrix}.$$

Verifique que $A \circ A^{-1} = Id = A^{-1} \circ A$.