Álgebra Linear I - Aula 1

1. Resolução de Sistemas Lineares.
2. Métodos de substituição e escalonamento.
3. Coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Roteiro

1 Resolução de Sistemas Lineares

Uma *equação linear* é uma equação onde todas as incógnitas (que denotaremos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou simplesmente por x, y, z quando há apenas três ou menos incógnitas) que aparecem têm todas grau igual a um. Por exemplo:

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b$$

é uma equação linear com n incógnitas.

Por exemplo $x^2 + y = 5$ e $x\, y = 3$ não são equações lineares.

Uma *solução* da equação anterior é qualquer conjunto ordenado $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ de n números tal que

$$a_1\, \ell_1 + a_2\, \ell_2 + \cdots + a_n\, \ell_n = b.$$

Em geral (eliminando os casos triviais, quais?) uma equação linear tem sempre solução. Por exemplo, se supomos que $a_1 \neq 0$ temos que $(b/a_1, 0, \ldots, 0)$ é uma solução da equação. Analogamente, se supomos que $a_2 \neq 0$ temos que $(0, b/a_2, 0, \ldots, 0)$ também é uma solução. Porém, em geral há soluções mais complicadas. Por exemplo, se consideramos a equação

$$x + y = 1$$

é simples verificar que as soluções são da forma $(t, 1-t)$, onde $t \in \mathbb{R}$. Usando o método anterior, obteriamos (apenas) as soluções $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Um *sistema linear* de m equações com n incógnitas é um conjunto de m equações lineares com as mesmas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_n$. Uma diferença importante entre os sistemas e as equações lineares é que (novamente eliminando os casos triviais) os primeiros nem sempre têm solução. Por exemplo, as duas equações lineares $x = 1$ e $x = 2$ têm solução. Porém o sistema linear de duas equações

$$x = 1, \quad x = 2$$

não tem solução. Ao longo do curso (e nesta aula) veremos casos mais interessantes de sistemas lineares sem solução.

O objetivo desta aula é relembrar como *resolver sistemas lineares* de forma simples.

Existem dois tipos de sistemas lineares, os que não admitem solução (*impossíveis*) e os que admitem solução. Estes últimos se subdividem em *determinados* (a solução é única) e *indeterminados* (existem infinitas soluções). Vejamos alguns exemplos:

- Impossível:
$$x + y = 1, \quad x + y = 2.$$
- Com solução única (determinado):
$$x + y = 1, \quad x - y = 1.$$
- Com infinitas soluções (indeterminado):
$$x + y = 1, \quad 2x + 2y = 2.$$

Mostraremos dois métodos de resolução de sistemas: método de *substituição* e de *escalonamento* ou de *eliminação gaussiana.* Observamos que no caso em que o sistema não tem solução estes métodos fornecem esta informação.

1.1 Método de substituição

Neste método isolamos uma das variáveis e a escrevemos em função das outras.

Exemplo 1. *Resolva o sistema* $x + y = 2, \quad x - y = 1.$

Resposta: Da primeira equação temos, $x = 2 - y$. Substituindo o valor de x na segunda equação, $2 - y - y = 1$, logo $y = 1/2$. Portanto, $x = 3/2$. Neste exemplo, temos um sistema (com solução) determinado (única). $\square$

Lembre sempre de verificar que o resultado está certo!

Exemplo 2. *Resolva o sistema linear de duas equaçẽs*

$$x + y = 2, \quad 2x + 2y = 4.$$

Resposta: Da primeira equação obtemos

$$x = 2 - y.$$

Substituindo o valor de x na segunda equação,

$$4 - 2y + 2y = 4, \quad 4 = 4.$$

Isto é, a segunda equação não impõe nenhuma condição nova (de fato, é obtida multiplicando a primeira por 2 (!)). As soluções do sistema são da forma

$$x = 2 - y, \quad (2 - y, y),$$

onde y pode ser qualquer valor de $\mathbb{R}$. Isto é as soluções do sistema determinam uma reta no plano $\mathbb{R}^2$. Logo o sistema admite infinitas soluções (indeterminado).

Para verificar que a solução está correta substituimos nas equações:

$$\begin{array}{l} (2 - y) + y = 2, \quad 2 = 2, \\ 2(2 - y) + 2y = 4, \quad 4 - 2y + 2y = 4, \quad 4 = 4. \end{array}$$

A resolução do exemplo agora está completa. $\square$

Exemplo 3. *Resolva o sistema linear*

$$x + y = 2, \quad x + y = 3.$$

Resposta: Da primeira equação temos $x = 2 - y$. Substituindo na segunda,

$$2 - y + y = 3,$$

isto é, $2 = 3$(!), o que é absurdo. Portanto, o sistema não admite solução (impossível). $\square$

Exemplo 4. *Resolva o sistema linear*

$$x + y + z = 1, \quad x - y = 2.$$

Resposta: Da segunda equação, temos $x = 2 + y$, e substituindo na primeira,

$$2 + 2y + z = 1, \quad z = -1 - 2y.$$

Portanto, as soluções são da forma

$$(2 + t, t, -1 - 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que estamos escolhendo $y = t$ como parâmetro. Logo, para cada valor de t, obtemos uma solução. As soluções formam uma reta.

Verifiquemos que a resposta é correta: Substituindo nas equações:

$$x + y + z = (2 + t) + t + (-1 - 2t) = 1, \quad x - y = (2 + t) - t = 2.$$

Observamos que poderiamos ter escolhido outra variável como parâmetro. Por exemplo, escolhendo x como parâmetro, temos, $x = t$, $y = x - 2 = -2 + t$ e $z = 1 - x - y = 3 - 2t$.

Observe que não é possível escolher a variável z como parâmetro (tente!, justifique!). □

Exemplo 5. *Determine k para que o sistema o linear*

$$x + y = 1, \quad 2x + 2y = k$$

tenha solução. Estude se em tal caso o sistema é determinado ou indeterminado.

Resposta: Da primeira equação obtemos $x = 1 - y$. Substituindo na segunda, $2 - 2y + 2y = k$, logo $k = 2$. O sistema tem infinitas soluções (indeterminado): todo ponto da forma $(1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ é solução. Verifique sua resposta. □

1.2 Método de escalonamento

Este método consiste em, dado um sistema linear, encontrar outro sistema linear *equivalente* (com as mesmas soluções) tal que no novo sistema na segunda equação apareça (no mínimo) uma incógnita a menos que na primeira, e assim sucessivamente. Desta forma, isolaremos uma variável e a partir desta, obteremos sucessivamente as outras.

Por exemplo o sistemas

$$x + y = 4, \quad 2\,x + 3\,y = 11$$

e

$$x + y = 4, \quad y = 3$$

são equivalentes (a única solução dos sistemas é $x = 1$ e $y = 3$, confira). Mas é muito mais simples resolver os segundo: já conhecemos o valor de y. De fato, o segundo sistema já está em forma de *escada*.

Vejamos o método de escalonamento com um exemplo, considere o sistema

$$x + y + z = 2, \quad 2x - y + z = 5, \quad x - 2y + 3z = 9.$$

Em primeiro lugar, eliminaremos a variável x das segunda e terceira equações. Para isto, efetuamos as seguintes operações:

- substituimos a segunda equação pela segunda equação menos duas vezes a primeira equação, e
- substituimos a terceira equação pela terceira equação menos a primeira.

Assim obtemos,

$$x + y + z = 2, \quad -3\,y - z = 1, \quad -3y + 2z = 7.$$

Este sistema linear é *equivalente* ao primeiro (isto é, tem as mesmas soluções). Para eliminar a variável y da terceira equação, consideraremos a terceira menos a segunda, obtendo

$$x + y + z = 2, \quad -3\,y - z = 1, \quad +3\,z = 6.$$

Portanto, $z = 2$. Da segunda equação, temos, $y = -1$ e finalmente $x = 1$. Portanto, o sistema tem solução única (determinado). Verifique que a solução achada é correta.

Exemplo 6. *Resolva o sistema linear de três equações*

$$x + y + z = 0, \quad 2x + y = 4, \quad x - z = 4.$$

Resposta: Eliminaremos a variável x da segunda e da terceira equações. Para isto, subtrairemos da segunda equação duas vezes a primeira e da terceira a primeira. Obtemos,

$$x + y + z = 0, \quad -y - 2z = 4, \quad -y - 2z = 4.$$

Vemos que as duas últimas equações estão repetidas. Podemos suprimir uma delas e obtemos o sistema de duas equações nas três variáveis

$$x + y + z = 0, \quad y + 2z = -4.$$

Isto significa que no sistema inicial uma das equações não fornece informação alguma: a terceira equação é a segunda equação menos a primeira.

Neste ponto já não é possível fazer mais eliminações. Escolhemos z como parâmetro e escrevemos as outras variáveis em função de $z = t \in \mathbb{R}$. Temos,

$$y = -4 - 2\,t, \quad x = -y - z = 4 + 2\,t - t = 4 + t.$$

Logo, a solução é da forma:

$$(4 + t, -4 - 2\,t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o sistema é indeterminado (existem infinitas soluções). $\square$

Exemplo 7. *Resolva o sistema linear,*

$$x + y + z = 1, \quad x - y - z = 2, \quad 3x + y + z = 10.$$

Resposta: Eliminaremos x da segunda e da terceira equações (segunda menos primeira e terceira menos três vezes a primeira). Obtemos,

$$x + y + z = 1, \quad -2y - 2z = 1, \quad -2y - 2z = 7.$$

Ao eliminar y da terceira equação temos,

$$0 = 6,$$

o que é impossível, logo o sistema é impossível e por isso não admite solução. $\square$

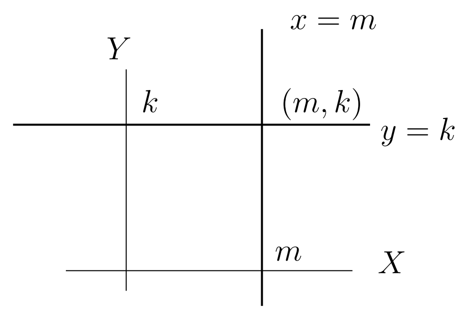

Figure 1: Retas paralelas aos eixos

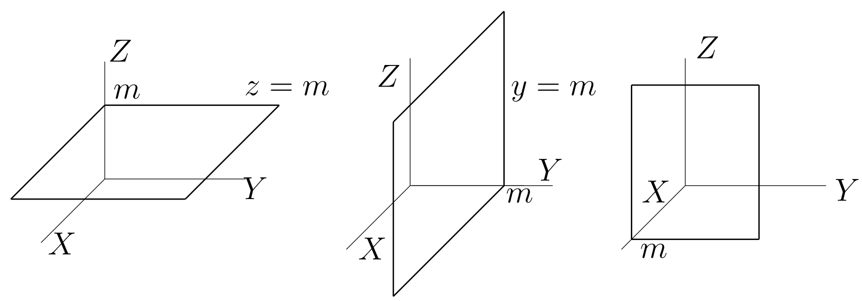

Figure 2: Planos paralelos aos eixos

2 Coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Em primeiro lugar lembramos o significado geométrico das equações $x = k$, $y = k$ (em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$) e $z = k$ (em $\mathbb{R}^3$).

Equações das retas e planos paralelos aos planos e os eixos coordenados.

Exemplo 8. *Seja P um paralelepípedo com faces paralelas aos planos coordenados. Sabendo que $A = (1, 1, 1)$ e $B = (3, 4, 5)$ são dois vértices determine os outros 6.*

Resposta: $(1, 1, 5)$, $(1, 4, 1)$, $(1, 4, 5)$, $(3, 4, 1)$, $(3, 1, 1)$ e $(3, 1, 5)$. □