$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Aula 13}}$

1. Exemplos de Transformações lineares (continuação).
2. Determinação de uma transformação linear.

Roteiro

1 Exemplos de Transformações lineares (continuação)

1.1 Rotações no plano

A Rotação no plano de ângulo θ no sentido anti-horário é definida como:

$$R_\theta(x,y) = ((\cos\theta)\, x - (\operatorname{sen}\theta)\, y, (\cos\theta\,)y + (\operatorname{sen}\theta)\, x),$$

veja a Figura 1.

Esta transformaçõe é uma caso particular das descritas acima, onde

$$a = \cos\theta, \quad b = -\operatorname{sen}\theta, \quad c = \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad d = \cos\theta.$$

Calcularemos o ângulo formado entre um vetor u e sua imagem $R_\theta(u)$, e veremos que este ângulo é θ. Considere o vetor $u = (a,b)$. Primeiro veremos que os módulos de u e $R_\theta(u)$ são iguais:

$$\begin{aligned}
|R_\theta(a,b)|^2 &= ((\cos\theta)^2\, a^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2\, b^2 - 2\,(\cos\theta)\, a\,(\operatorname{sen}\theta)\, b + \\
&\quad +(\cos\theta)^2\, b^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2\, a^2 + 2\,(\cos\theta)\, a\,(\operatorname{sen}\theta)\, b = \\
&= ((\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2)\, a^2 + ((\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2)\, b^2) = \\
&= a^2 + b^2 = |(a,b)|^2.
\end{aligned}$$

Por outra parte, e como $|u| = |R_\theta(u)|$,

$$u \cdot R_\theta(u) = |u|\,|R_\theta(u)| \cos\alpha = |u|^2 \cos\alpha,$$

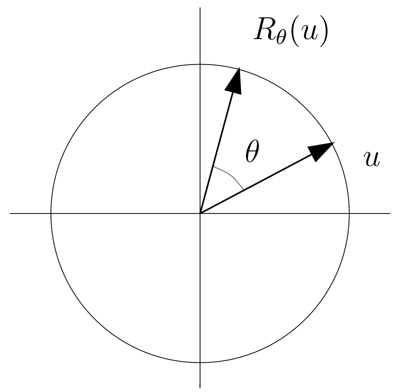

Figura 1: Rotação

onde α é o ângulo formado por u e $R_\theta(u)$. Calculemos agora o ângulo α.

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot R_\theta(a,b) \quad &= (a,b)\cdot((\cos\theta)\,a-(\operatorname{sen}\theta)\,b,(\cos\theta)\,b+(\operatorname{sen}\theta)\,a)= \\
&= (\cos\theta)\,a^2-(\operatorname{sen}\theta)\,a\,b+(\operatorname{sen}\theta)\,a\,b+(\cos\theta)\,b^2= \\
&= (\cos\theta)\,(a^2+b^2)=\cos\theta\,|u|^2.
\end{aligned}$$

Das duas fórmulas anteriores temos que o ângulo entre u e $R_\theta(u)$ é exatamente o ângulo de rotação θ.

Usando o mesmo tipo de raciocínio v. pode provar que o ângulo entre os vetores u e v é igual ao ângulo entre $R_\theta(u)$ e $R_\theta(v)$. Deixamos a prova da afirmação como exercício.

1.2 Projeção em uma reta r

Estudaremos agora a transformação linear *projeção em uma reta r de $\mathbb{R}^2$ na direção do vetor v*, onde a reta r contém a origem e o vetor v não é paralela à reta, veja a Figura 2.

Esta transformação é definida como segue. Considere a reta de projeção r de equação cartesiana $ax+by=0$ e o vetor $v=(c,d)$ que determina a direção de projeção. A imagem do vetor $u=(u_1,u_2)$ é o vetor $\overline{OP}$, onde P é o ponto de interseção das retas s de equação paramétrica

$$s\colon (u_1+t\,c,u_2+t\,d),\quad t\in\mathbb{R},$$

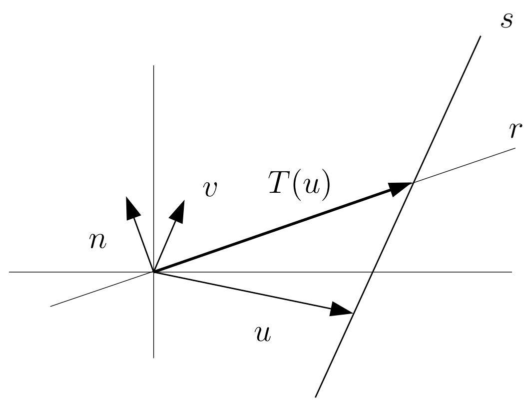

Figura 2: Projeção não ortogonal em uma reta

e a reta r de projeção, $r\colon ax+by=0$ (equação cartesiana). Determinaremos o valor de t que fornece o ponto de interseção,

$$a(u_1+t\,c)+b(u_2+t\,d)=0, \quad t(a\,c+b\,d)=-(a\,u_1+b\,u_2),$$

isto é,

$$t=\frac{-(a\,u_1+b\,u_2)}{a\,c+b\,d}.$$

Observe que se verifica

$$a\,c+b\,d\neq 0,$$

isto decorre do fato da direção de projeção não ser paralela à reta de projeção, ou seja (c,d) não é ortogonal ao vetor normal $n=(a,b)$ da reta (isto é, $0\neq(c,d)\cdot(a,b)=a\,c+b\,d$). Logo

$$T(u_1,u_2)=\left(u_1-\frac{a\,c\,u_1+b\,c\,u_2}{a\,c+b\,d}, u_2-\frac{a\,d\,u_1+b\,d\,u_2}{a\,c+b\,d}\right).$$

Pela discussão acima, T é uma transformação linear.

1.3 Projeção em um plano π

Estudaremos agora a transformação linear *projeção em um plano* π *de* $\mathbb{R}^3$ *na direção do vetor* v, onde o plano contém a origem e o vetor v não é paralelo ao plano.

Esta transformação é definida como segue. Considere o plano de projeção π de equação $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ e o vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ que determina a direção de projeção. A imagem do vetor $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o vetor $\overline{OP}$, onde P é a interseção da reta s de equação paramétrica

$$s\colon (u_1 + tv_1, u_2 + tv_2 + u_3 + tv_3), \quad t \in \mathbb{R},$$

e o plano $\pi\colon a\,x+b\,y+c\,z = 0$ (equação cartesiana). Determinaremos o valor de t que fornece o ponto de interseção,

$$a\,(u_1 + t\,v_1) + b\,(u_2 + t\,v_2) + c\,(u_3 + t\,v_3) = 0,$$

logo,

$$t\,(a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3) = -(a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3),$$

isto é,

$$t = \frac{-(a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3)}{a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3}.$$

Observe que se verifica $a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 \neq 0$, isto decorre do fato da direção de projeção não ser paralela ao plano de projeção, ou seja (v_1, v_2, v_3) não é ortogonal ao vetor normal $n = (a, b, c)$ do plano (isto é, $0 \neq (v_1, v_2, v_3) \cdot (a, b, c) = a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3$). Logo

$$\begin{aligned}
T(u_1, u_2, u_3) = \quad & ((1 - (\tfrac{av_1}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_1 - (\tfrac{bv_1}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_2 - (\tfrac{cv_1}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_3, \\
& , -(\tfrac{av_2}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_1 + (1 - (\tfrac{bv_2}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_2 - (\tfrac{cv_2}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_3, \\
& , -(\tfrac{av_3}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_1 - (\tfrac{bv_3}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_2 + (1 - (\tfrac{cv_3}{av_1+bv_2+cv_3})\,u_3).
\end{aligned}$$

Pela discussão acima, T é uma transformação linear.

2 Determinação de uma transformação linear

Uma transformação linear T fica totalmente determinada quando são conhecidas as imagens dos vetores de uma base do espaço de *saida* de T (domínio). Por exemplo, suponhamos que T é uma transformação linear cujo domínio é $\mathbb{R}^3$. Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha determinadas as imagens dos vetores da base:

$$w_1 = T(v_1), \quad w_2 = T(v_2), \quad w_3 = T(v_3).$$

Como β é uma base temos que dado qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$,

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

para certos (únicos) λ_1, λ_2 e λ_3. Portanto, como T é uma transformação linear,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \lambda_3 T(v_3) = \\ &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3, \end{aligned}$$

logo a imagem $T(v)$ de qualquer vetor v está determinada pelas imagens dos vetores da base β.

Exemplo 1. *Estudas se existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{aligned} T(1,0,1) &= (2,1), \quad & T(1,1,1) &= (1,1), \\ T(1,1,0) &= (2,3), \quad & T(3,1,1) &= (5,6). \end{aligned}$$

Resposta: Observe que os vetores $(1,0,1), (1,1,1)$ e $(1,1,0)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Para isto é suficiente verificar que não são coplanares (ou que são linearmente independentes),

$$(1,0,1) \cdot ((1,1,1) \times (1,1,0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Consideramos a base

$$\beta = \{(1,0,1), (1,1,1), (1,1,0)\}$$

Portanto, caso a transformação linear T exista, ela está totalmente determinada pelas imagens dos três vetores da base β. Verifique que:

$$(3,1,1) = 2\,(1,0,1) - (1,1,1) + 2\,(1,1,0).$$

Portanto, como T é linear,

$$\begin{aligned} T(3,1,1) &= 2\,T(1,0,1) - T(1,1,1) + 2\,T(1,1,0) = \\ &= 2\,(2,1) - (1,1) + 2\,(2,3) = (7,9) \neq (5,6). \end{aligned}$$

Portanto, não existe tal transformação linear. $\square$

Exemplo 2. *Determine uma transformação linear T que transforme o paralelogramo de vértices*

$$A = (0,0), \quad B = (2,1), \quad C = (1,4) \quad e \quad D = (3,5),$$

(os lados do paralelogramo são os segmentos AB, AC, BD e CD) no paralelogramo de vértices

$$A' = A = (0,0), \quad B' = (-1,-1), \quad C' = (2,6), \quad e \quad D^1 = (1,5),$$

(os lados são $A'B'$, $A'C'$, $B'D'$ e $C'D'$).

Resposta: Pelas afirmações acima, uma estratégia é considerar a transformação que leva os lados do primeiro retângulo nos lados do segundo. Mais precisamente, considere os vetores

$$\begin{array}{ll} u = \overline{AB} = (2,1), & v = \overline{AC} = (1,4), \\ w = \overline{A'B'} = (-1,-1), & \ell = \overline{A'C'} = (2,6) \end{array}$$

e a transformação linear T definida por

$$T(u) = T(2,1) = w = (-1,-1), \quad T(v) = T(1,4) = (2,6) = \ell.$$

Como $\{(2,1),(1,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, a transformação T está totalmente determinada. Por construção, T transforma os vértices do primeiro paralelogramo nos vértices do segundo paralelogramo (confira). Afirmamos que também transforma os lados do primeiro paralelogramo nos lados do segundo paralelogramo.

Vejamos, por exemplo, que T transforma o segmento (lado) BD no segmento (lado) $B'D'$. Observe primeiro que o segmento BD está formado pelos pontos X tais que

$$\overline{OX} = \overline{AX} = \overline{AB} + t\,\overline{AC} = u + t\,v, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Analogamente, o segmento $B'D'$ está formado pelos pontos Y tais que

$$\overline{OY} = \overline{A'X} = \overline{A'B'} + t\,\overline{A'C'} = w + t\,\ell, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Considere um ponto X do lado BD, então, como T é linear,

$$\overline{OY} = T(\overline{OX}) = T(u) + t\,T(v) = w + t\,\ell, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Portanto, o extremo Y do vetor $T(\overline{OX})$ verifica a condição de pertencer ao segmento $B'D'$. Portanto, a imagem do lado BD do primeiro paralelogramo está contida no lado $B'D'$ do segundo paralelogramo. Para ver a inclusão em sentido contrário, considere qualquer ponto Y do segmento $B'D'$ e escreva

$$\overline{OY} = w + t\,\ell, \quad \text{onde } t \in [0,1].$$

Por definição, temos,

$$\overline{OY} = w + t\,\ell = T(u) + t\,T(v) = T(u + t\,v) = T(\overline{OX}).$$

Como $t \in [0,1]$, temos que o ponto X pertence ao lado BD.

Um raciocínio idêntico (que omitimos) mostra que a transformação leva os lados AB, AC, BD e CD do primeiro paralelogramo nos lados $A'B'$, $A'C'$, $B'D'$ e $C'D'$, respetivamente, do segundo paralelogramo. $\square$