# Álgebra Linear I - Aula 8

1. Distância de um ponto a uma reta.
2. Distância de um ponto a um plano.
3. Distância entre uma reta e um plano.
4. Distância entre dois planos.
5. Distância entre duas retas.

## Roteiro

## 1 Distância de um ponto $P$ a uma reta $r$

Dado um ponto $P$ e uma reta $r$, a distância do ponto $P$ à reta $r$ é o menor comprimento dos segmentos $PQ$ onde $Q$ é um ponto da reta. Este mínimo é atingido quando o vetor $\overline{PQ}$ é ortogonal ao vetor diretor da reta. Observe que, neste caso, dado qualquer ponto $R$ da reta $r$, os pontos $P$, $Q$ e $R$ são os vértices de um triângulo retângulo, onde os segmentos $PQ$ e $QR$ são os catetos e $PR$ a hipotenusa. Portanto, temos

$$|PQ| = |PR| \operatorname{sen}(\theta),$$

onde $\theta$ é o ângulo formado pelos segmentos $PR$ e $RQ$; como $\operatorname{sen}(\theta) \leq 1$, temos que $|PQ| \leq |PR|$, o que prova a afirmação. Veja a Figura 1

Vejamos primeiro como calcular a distância no plano. Neste caso, escolhemos qualquer ponto $R$ da reta, a distância é o módulo da projeção ortogonal do vetor $\overline{RP}$ no vetor normal da reta, $n$ (em $\mathbb{R}^2$ a direção do vetor está bem determinada, isto não ocorre em $\mathbb{R}^3$, justifique). Observe que este cálculo é independente do ponto $R$. Isto é: a projeção ortogonal de $\overline{RP}$ em $n$ é igual à projeção ortogonal de $\overline{AP}$ em $n$, para qualquer ponto $A$ de $r$ (justifique também esta afirmação!).

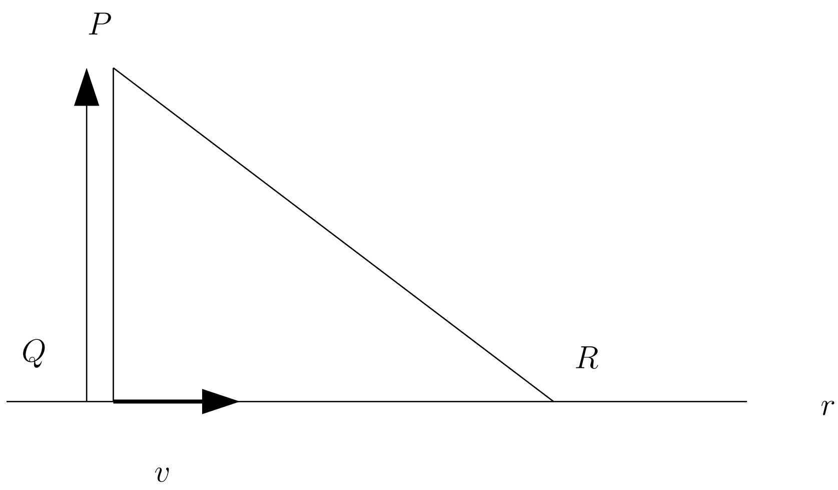


Figura 1: Distância entre ponto e reta

Vejamos agora o cálculo da distância de $P$ a $r$ no caso geral. Pelos comentários anteriores, o problema consiste em achar o ponto $Q$ tal que $\overline{PQ}$ seja ortogonal a $r$.

**Método 1:** Considere o plano $\pi$ normal a $r$ que contém $P$. Calcule o ponto de interseção $Q$ de $\pi$ e $r$. A distância procurada é a distância entre $P$ e $Q$. Veja a Figura 2.

**Método 2:** Considere um ponto qualquer $R$ de $r$ e o vetor diretor $v$ de $r$. Calcule o produto vetorial $\overline{PR} \times v$. Então a distância $d$ procurada é

$$d = \frac{||\overline{PR} \times v||}{||v||}.$$

Veja a Figura 3.

Para ver esta afirmação observe que a área do paralelogramo determinado por $\overline{PR}$ e $v$ é

$$||\overline{PR} \times v|| = (\text{base } b \text{ do paralelogramo})\,(\text{altura } h \text{ do paralelogramo}).$$

Onde $b = ||v||$ e $h$ é a distância procurada.

Veja que este método é independente da escolha do ponto $R$.

**Exemplo 1.** *Calcule a distância do ponto* $P = (1,0,1)$ *à reta* $(t, 2t, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

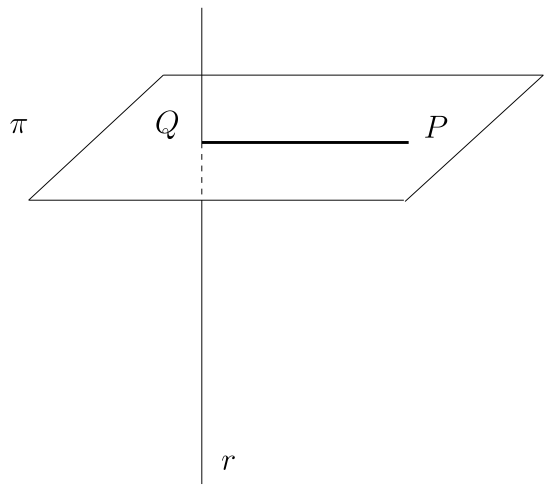


Figura 2: Distância entre ponto e reta

**Resposta:** Usando o primeiro método, temos que o plano $\pi$ normal a $r$ que contém o ponto $P$ é da forma

$$\pi\colon x + 2\,y = d.$$

Como $(1,0,1) \in \pi$ temos $d = 1$.

A interseção de $r$ e $\pi$ ocorre para o parâmetro $t$ que verifica

$$t + 2\,(2\,t) = 1,$$

logo $t = 1/5$. Temos que o ponto $Q$ de interseçao é $(1/5, 2/5, 3)$. Logo

$$\overline{PQ} = (-4/5, 2/5, 10/5)$$

que tem módulo $\sqrt{16+4+100}/5 = \sqrt{120}/5 = \sqrt{24/5}$. Este módulo é a distância procurada.

Para o segundo método escolhemos um ponto $R$ qualquer de $r$ (por exemplo, $(0,0,3)$). Logo

$$\overline{PR} = (1, 0, -2).$$

Temos $(1,2,0) \times (1,0,-2) = (4,-2,2)$. Logo a distância é

$$|(4,-2,2)|/|(1,0,-2)| = \sqrt{24}/\sqrt{5}.$$

Obviamente obtemos o mesmo resultado. $\square$

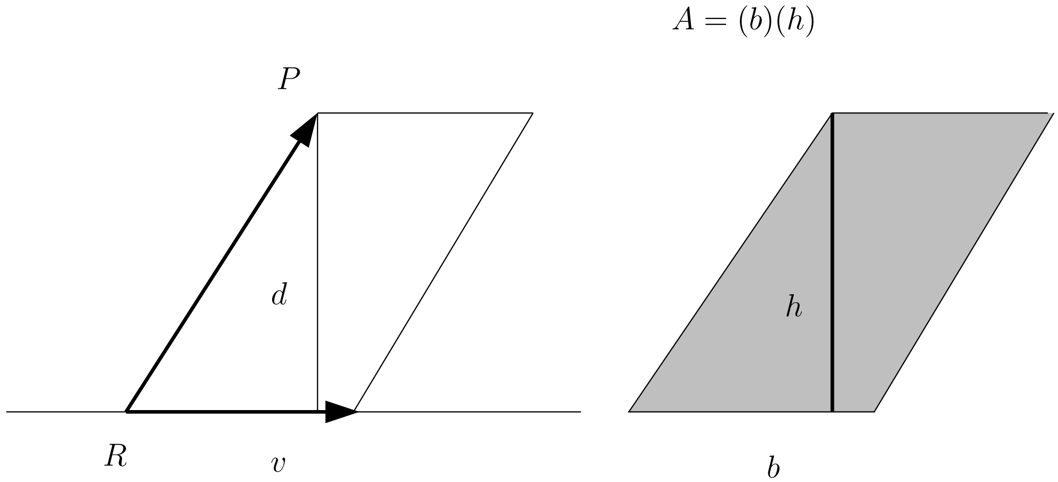


Figura 3: Distância entre ponto e reta: usando produto vetorial

# 2 Distância de um ponto $P$ a um plano $\pi$

Dado um ponto $P$ e um plano $\pi$, a distância entre $P$ e $\pi$ é a menor das distâncias $d(P, Q)$, onde $Q$ é um ponto de $\pi$. Como no caso da distância de um ponto a uma reta, este mínimo ocorre quando o vetor $\overline{PQ}$ é ortogonal ao plano (ou seja, paralelo ao vetor normal do plano). Esta afirmação é obtida exatamente como no caso da distância de um ponto a uma reta.

Para calcular a distância de $P$ a $\pi$ veremos três métodos:

- **Método 1:** Considere a reta $r$ normal ao plano $\pi$ que contém $P$. Calcule o ponto de interseção $Q$ de $\pi$ e $r$. A distância procurada é a distância entre $P$ e $Q$.

- **Método 2:** Considere um ponto qualquer $R$ de $\pi$ e o vetor normal $n$ de $\pi$. Calcule o vetor $w$ obtido como a projeção do vetor $\overline{PR}$ em $n$. O módulo de $w$ é a distância procurada.

- **Método 3:** Usando o produto misto. Considere dois vetores $v$ e $w$ paralelos ao plano $\pi$ e um ponto $Q$ do plano $\pi$. Considere o paralelepípedo $\Pi$ com arestas $v$, $w$ e $\overline{PQ}$. O volume do paralelepípedo $\Pi$ é
$$|\overline{PQ} \cdot (v \times w)| = (\text{área base}) \cdot ([\text{h}]\text{altura}) = ||v \times w|| \cdot h.$$

Temos que $h$ é exatamente a distância de $P$ a $\pi$.

**Exercício 1.** *Com a notação acima, que propriedade verifica o ponto* $T = P - w$*?*

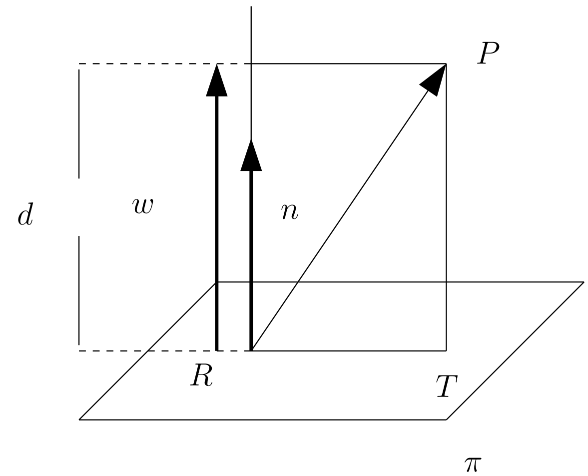


Figura 4: Distância entre ponto e plano: usando projeções

**Exemplo 2.** *Calcule a distância do ponto* $P = (1, 0, 1)$ *ao plano* $\pi\colon x + 2\,y - z = 1$.

**Resposta:** Usando o primeiro método, temos que $r = (1 + t, 2t, 1 - t)$. A interseção da reta $r$ e do plano $\pi$ ocorre quando $t$ verifica (substituindo a equação da reta na do plano)

$$(1 + t) + 2\,(2\,t) - (1 - t) = 1,$$

isto é, $t = 1/6$. Logo $Q = (7/6, 2/6, 5/6)$ e $\overline{PQ} = (1/6, 2/6, -1/6)$. A distância é o módulo de $\overline{PQ} = (1/6, 2/6, -1/6)$, ou seja, $1/\sqrt{6}$.

Usando o segundo método escolhemos o ponto $R = (1, 0, 0)$ do plano $\pi$, logo $\overline{PR} = (0, 0, -1)$. Consideremos um vetor unitário normal ao plano $n = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$. A projeção de $\overline{PR}$ em $n$ é

$$(\overline{PR} \cdot n)\, n = 1/\sqrt{6}(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = (1/6, 2/6, -1/6).$$

Este vetor tem módulo (que é a distância procurada) igual a $1/\sqrt{6}$.

Obviamente, $T$ é o ponto $Q$ do primeiro método! (isto responde ao Exercício 1). □

# 3 Distância de uma reta $r$ a um plano $\pi$

A distância entre uma reta $r$ e um plano $\pi$ é a menor das distâncias entre pontos $P$ da reta $r$ e $Q$ do plano $\pi$. Obviamente, se a reta e o plano se intersectam a distância é nula.

Seja $n$ um vetor normal ao plano $\pi$ e $v$ um vetor diretor da reta $r$. Existem duas possibilidades:

- ou a reta é paralela ao plano (em tal caso $n \cdot v = 0$),
- a reta não é paralela ao plano (isto ocorre se $n \cdot v \neq 0$). Neste caso a reta intersecta o plano em um ponto, a distância é zero.

No primeiro caso, a distância de $r$ a $\pi$ é a distância de qualquer ponto $P$ de $r$ a $\pi$. Logo é suficiente escolher qualquer ponto de $r$ e calcular a distância a $\pi$, caindo em um caso já estudado. A afirmação é obtida como segue: sejam $P$ e $Q$ pontos da reta, e sejam $T$ e $R$ os pontos do plano mais próximos de $P$ e de $Q$, então os vetores $\overline{PT}$ e $\overline{QR}$ são paralelos e os quatro pontos determinam um retângulo, portanto, $|PT| = |QR|$.

**Exemplo 3.** *Calcule a distância da reta* $r = (1+t, -t, 1-t)$ *ao plano* $\pi \colon x + 2\,y - z = 1$.

**Resposta:** Temos que que um vetor diretor da reta é $(1, -1, -1)$ e um vetor normal do plano é $(1, 2, -1)$. Como

$$(1, -1, -1) \cdot (1, 2, -1) = 0,$$

temos que o vetor diretor da reta é ortogonal ao vetor normal ao plano. Portanto, a reta é paralela ao plano.

Como o ponto $(1, 0, 1)$ pertence a $r$, o exercício já está resolvido no exemplo distância entre ponto e plano, e a distância é $1/\sqrt{6}$. $\square$

# 4 Distância entre dois planos $\pi$ e $\rho$

A distância entre os planos $\pi$ e $\rho$ é a menor das distâncias entre pontos $P$ de $\pi$ e $Q$ de $\rho$.

Sejam $n$ e $m$ vetores normais dos plano $\pi$ e $\rho$, respectivamente. Existem duas possibilidades: ou os planos são paralelos (em tal caso $n = \sigma\, m$ para algum $\sigma \neq 0$) ou não. No último caso, os planos se intersectam e a distância é zero.

No primeiro caso, a distância de $\rho$ a $\pi$ é a distância de qualquer ponto $P$ de $\rho$ a $\pi$. Logo é suficiente escolher qualquer ponto de $\rho$ e calcular a distância a $\pi$, caindo em um caso já estudado.

**Exemplo 4.** *A distância entre os planos*

$$\pi\colon x + y + z = 0 \quad e \quad \rho\colon 2x + y - z = 0$$

*é zero, pois os planos não são paralelos (os vetores normais não são paralelos) e portanto se intersectam.*

**Exemplo 5.** *Calcule a distância entre os planos paralelos* $\pi\colon x + y + z = 0$ *e* $\rho\colon x + y + z = 1$.

**Resposta:** Podemos calcular a distância como segue: considere o ponto $P = (0, 0, 0) \in \pi$ e o ponto $Q = (1, 0, 0) \in \rho$. A distância é o módulo da projeção de $\overline{PQ} = (1, 0, 0)$ no vetor normal $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ do plano,

$$w = ((1, 0, 0) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}))(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

A distância é $||w|| = 1/\sqrt{3}$. □

# 5 Distância entre duas retas $r$ e $s$

Calcularemos a distância entre duas retas $r$ e $s$, que denotaremos por $d(r, s)$. Esta distância é o mínimo das distâncias $\mathrm{dist}(P, Q)$, onde $P$ é um ponto na reta $r$ e $Q$ é um ponto na reta $s$.

Obviamente, se as retas se intersectam a distância $d(r, s) = 0$. Neste caso, podemos escolher $P = Q$ o ponto de interseção das retas. Portanto, consideraremos que as retas são disjuntas.

Suponhamos em primeiro lugar que as retas $r$ e $s$ são paralelas. Neste caso, a distância $d$ entre as retas é igual a distância entre qualquer ponto $P \in r$ e a reta $s$, caso já considerado (distância de ponto a reta). Observe que a escolha do ponto $P$ é totalmente irrelevante.

Suponhamos agora que as retas não são paralelas (isto é, são reversas). Um método para calcular a distância é o seguinte. Consideremos pontos $P$ e $Q$ de $r$ e $s$, respectivamente, e vetores diretores $v$ e $w$ de $r$ e $s$, respectivamente.

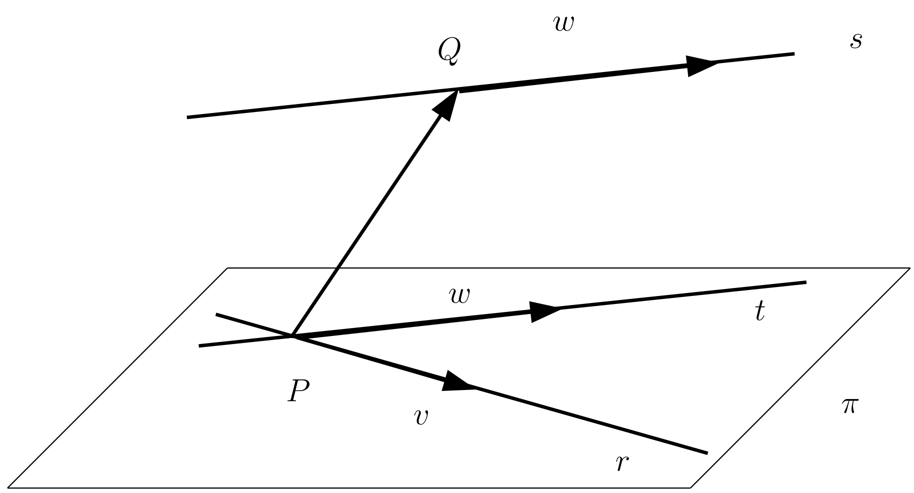


Figura 5: Distância entre duas retas

- Considere os planos $\pi$ paralelo a $s$ que contém $r$ e $\rho$ paralelo a $r$ que contém $s$. No desenho, a reta $t$ é uma reta paralela a $s$ contida em $\pi$ com vetor diretor $w$. Escolhemos como ponto $P$ a interseção das retas $t$ e $r$.
- Observe que estes planos são paralelos e que dois vetores (não paralelos) de $\pi$ e $\rho$ são $v$ e $w$.
- Observe que a distância $d$ entre as retas $r$ e $s$ é a distância entre os dois planos.
- Esta distância $d$ é, por exemplo, a distância de qualquer ponto $Q$ da reta $s$ ao plano $\pi$. Esta distância pode ser calculada usando o produto misto como fizemos anteriormente. Consideramos vetores diretores $v$ e $w$ das retas $r$ e $s$, obtendo:

$$d = \frac{|\overline{PQ} \cdot (v \times w)|}{||v \times w||}.$$

## 5.1 Posição relativa de duas retas não paralelas

O método anterior fornece um sistema para saber se duas retas **não paralelas** se intersectam (sem necessidade de resolver um sistema): as retas se intersectam se e somente se

$$\overline{PQ} \cdot (v \times w) = 0.$$

Mais uma vez, a escolha dos pontos $P$ e $Q$ é irrelevante.

**Exemplo 6.** *Calcule a distância entre as retas* $r = (t, 1+t, 2\,t)$ *e* $s = (t, t, 1)$.

**Resposta:** Vetores diretores das retas $r$ e $s$ são $v = (1, 1, 2)$ e $w = (1, 1, 0)$, respectivamente. Um ponto $P \in r$ é $(0, 1, 0)$ e um ponto $Q \in s$ é $(0, 0, 1)$, logo $\overline{PQ} = (0, -1, 1)$. Portanto, a distância $d$ entre $r$ e $s$ é

$$d = \frac{|(0,-1,1)\cdot(1,1,2)\times(1,1,0)|}{|(1,1,2)\times(1,1,0)|} = \frac{|(0,-1,1)\cdot(-2,2,0)|}{|(-2,2,0)|} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo a distância é $1/\sqrt{2}$. □