

# Determinantes

**Abrantes Araújo Silva Filho**



Vila Velha, 15/09/2019

- 1 Introdução
- 2 Métodos de cálculo
- 3 Propriedades dos determinantes
- 4 Regra de Chió

## O que é um determinante?

Um *determinante* ou, mais precisamente, *funções determinante*, são **funções que associam um número real a uma matriz quadrada**.

Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . O seu determinante é representado por:

- $\det(A)$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Os determinantes são definidos para *matrizes quadradas*, ou seja, matrizes  $n \times n$ . Matrizes não quadradas não têm determinante definido.

- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- ...

- Resolução de sistemas de equações lineares

$$A = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- ...

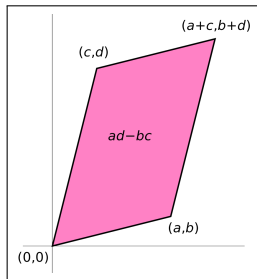
- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & -1/7 \\ 10/21 & -4/7 & -19/21 \\ -3/7 & 5/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- ...



- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de áreas

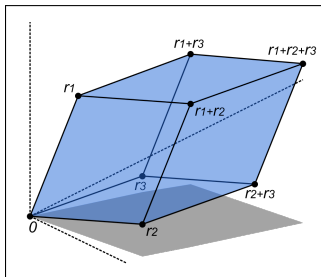


Fonte: Jitse Niesen

([https://en.wikipedia.org/wiki/File:Area\\_parallellogram\\_as\\_determinant.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Area_parallellogram_as_determinant.svg))

- Cálculo de volumes
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- ...

- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes



Fonte: Claudio Rocchini

([https://en.wikipedia.org/wiki/File:Determinant\\_parallellepiped.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Determinant_parallellepiped.svg))

- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- ...

- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)

$$\det(A - \gamma I) = 0$$

- ...

- 1 Introdução
- 2 Métodos de cálculo
- 3 Propriedades dos determinantes
- 4 Regra de Chió

## Determinante de matriz 1x1

Corresponde ao próprio elemento da matriz:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

## Determinante de matriz 2x2

É dado pelo produto dos elementos da diagonal principal, **menos** o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{vmatrix} =$$

## Determinante de matriz 3x3

Calculamos o determinante pelo **método de Sarrus**:

- 1 Repetir as duas primeiras colunas
- 2 Calcular a soma do produto das “diagonais principais”
- 3 Calcular a soma do produto das “diagonais secundárias”
- 4 Determinante = (resultado em 2) – (resultado em 3)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

## Determinante de matriz 4x4

Calculamos o determinante pelo **método de Laplace**:

- 1 Escolha uma linha ou coluna da matriz com o maior número de elementos nulos
- 2 Calcule o **menor complementar** e o **cofator** de cada elemento não nulo da linha ou coluna escolhida
- 3 Determinante =  $\sum_{k=1}^n (\text{elemento}_k \times \text{cofator}_k)$ , onde  $n$  é o número de elementos não nulos na linha ou coluna escolhida

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$



### Menor complementar

O **menor complementar** de um elemento  $a_{ij}$  é representado por  $M_{ij}$  e corresponde ao determinante da matriz resultante ao eliminarmos a linha  $i$  e a coluna  $j$  correspondentes ao elemento  $a_{ij}$  escolhido.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

## Cofator

O **cofator** de um elemento  $a_{ij}$  é representado por  $C_{ij}$  e é obtido pela fórmula:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

## Cálculo do determinante

Determinante =  $\sum_{k=1}^n (\text{elemento}_k \times \text{cofator}_k)$ , onde  $n$  é o número de elementos não nulos na linha ou coluna escolhida

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

## Determinante de matrizes 4x4: Laplace

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

- 1 Introdução
- 2 Métodos de cálculo
- 3 Propriedades dos determinantes**
- 4 Regra de Chió

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

- ① Linhas (ou colunas) **nulas**
- ② Linhas (ou colunas) **repetidas**
- ③ Linhas (ou colunas) **proporcionais**
- ④ Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

- 1 Linhas (ou colunas) **nulas**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- 2 Linhas (ou colunas) **repetidas**
- 3 Linhas (ou colunas) **proporcionais**
- 4 Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

- ① Linhas (ou colunas) **nulas**
- ② Linhas (ou colunas) **repetidas**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 9 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

- ③ Linhas (ou colunas) **proporcionais**
- ④ Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)



As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

- ① Linhas (ou colunas) **nulas**
- ② Linhas (ou colunas) **repetidas**
- ③ Linhas (ou colunas) **proporcionais**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 21 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 12 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

- ④ Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

- ① Linhas (ou colunas) **nulas**
- ② Linhas (ou colunas) **repetidas**
- ③ Linhas (ou colunas) **proporcionais**
- ④ Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & -5 & 12 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 12 & 16 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

**A cada vez que permutamos** duas linhas (ou duas colunas), o novo determinante é o oposto do determinante original (ou seja: o valor absoluto é o mesmo, mas o **sinal é trocado**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 16$$

**A cada vez que permutamos** duas linhas (ou duas colunas), o novo determinante é o oposto do determinante original (ou seja: o valor absoluto é o mesmo, mas o  **sinal é trocado**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 16$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(B) = -\det(A) = -16$$

**A cada vez que permutamos** duas linhas (ou duas colunas), o novo determinante é o oposto do determinante original (ou seja: o valor absoluto é o mesmo, mas o  **sinal é trocado**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 16$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(B) = -\det(A) = -16$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(C) = -\det(B) = -(-16) = 16$$

Se multiplicarmos uma **única** linha (ou coluna) de uma matriz  $A$  por um número escalar real  $k$ , o determinante da matriz  $B$  resultante é igual ao determinante de  $A$  multiplicado por  $k$ :  $\det(B) = k \times \det(A)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

Se multiplicarmos uma **única** linha (ou coluna) de uma matriz  $A$  por um número escalar real  $k$ , o determinante da matriz  $B$  resultante é igual ao determinante de  $A$  multiplicado por  $k$ :  $\det(B) = k \times \det(A)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} &\implies \det(B) = -2 \times \det(A) \\ &= -2 \times 174 \\ &= -348 \end{aligned}$$

Se multiplicarmos **todas** as linhas (e, por consequência, todas as colunas) de uma matriz  $A$  por um número escalar real  $k$ , o determinante da matriz  $B$  resultante é igual ao determinante de  $A$  multiplicado por  $k$  elevado à ordem da matriz:  
 $\det(B) = k^n \times \det(A)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$



Se multiplicarmos **todas** as linhas (e, por consequência, todas as colunas) de uma matriz  $A$  por um número escalar real  $k$ , o determinante da matriz  $B$  resultante é igual ao determinante de  $A$  multiplicado por  $k$  elevado à ordem da matriz:

$$\det(B) = k^n \times \det(A):$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -12 & -2 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \end{pmatrix} &\implies \det(B) = (-2)^3 \times \det(A) \\ &= -8 \times 174 \\ &= -1392 \end{aligned}$$

O determinante de uma matriz transposta  $A^t$  é igual ao determinante da matriz original  $A$  (não transposta):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

O determinante de uma matriz transposta  $A^t$  é igual ao determinante da matriz original  $A$  (não transposta):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A^t) = \det(A) = 174$$

O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) ou de uma matriz diagonal, é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 346 & \pi & \sqrt[5]{3} \\ 0 & 9 & -500 & 2^{-189} \\ 0 & 0 & -1 & 432 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 2 \cdot 9 \cdot (-1) \cdot (-4) \\ = 72$$

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto do determinante de cada matriz:  $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 21$$

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto do determinante de cada matriz:  $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 21$$

$$\begin{aligned} AB = \begin{pmatrix} 24 & -9 & -1 \\ 8 & 27 & 33 \\ 19 & -18 & -12 \end{pmatrix} &\implies \det(AB) = \det(A) \times \det(B) \\ &= 30 \times 21 = 630 \end{aligned}$$

Se  $B$  for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha (ou coluna) de uma matriz  $A$  é somado a uma *outra* linha (ou coluna) de  $A$ , então  $\det(B) = \det(A)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

Se  $B$  for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha (ou coluna) de uma matriz  $A$  é somado a uma *outra* linha (ou coluna) de  $A$ , então  $\det(B) = \det(A)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(B) = \det(A) = 30$$



Se  $B$  for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha (ou coluna) de uma matriz  $A$  é somado a uma *outra* linha (ou coluna) de  $A$ , então  $\det(B) = \det(A)$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(B) = \det(A) = 30$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \det(C) = \det(A) = 30$$

O determinante de uma matriz inversa  $A^{-1}$  é igual ao inverso multiplicativo (recíproco) do determinante da matriz  $A$  original, ou seja,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 21$$

O determinante de uma matriz inversa  $A^{-1}$  é igual ao inverso multiplicativo (recíproco) do determinante da matriz  $A$  original, ou seja,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 21$$

$$\begin{aligned} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & -1/7 \\ 10/21 & -4/7 & -19/21 \\ -3/7 & 5/7 & 5/7 \end{pmatrix} &\implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

## Cuidado!

Em geral o determinante de uma soma de matrizes **não é** igual à soma dos determinantes, ou seja:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 28$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 47$$

## Cuidado!

Em geral o determinante de uma soma de matrizes **não é** igual à soma dos determinantes, ou seja:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 28$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 47$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \implies \det(A + B) = 78$$

- 1 Introdução
- 2 Métodos de cálculo
- 3 Propriedades dos determinantes
- 4 Regra de Chió**

Calcula o determinante “rebaixando” a ordem da matriz:

## Regra de Chió

- 1 Se o elemento  $a_{11}$  da matriz não for unitário, use as propriedades dos determinantes para transformá-lo em 1
- 2 Elimina-se a primeira linha e a primeira coluna da matriz, rebaixando-se assim sua ordem
- 3 De cada elemento  $a_{ij}$  na matriz rebaixada resultante, **subtrai-se** o produto  $a_{i1} \times a_{1j}$
- 4 A matriz obtida tem o mesmo determinante que a matriz original

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = ?$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$