Grupo Discente de Estudos da Disciplina:
Álgebra Linear e Geometria Analítica

— Revisão da Unidade 1: Matrizes —

Agosto/2018

1 Conceitos básicos sobre matrizes

1. De forma geral, o que é uma matriz?

   É um quadro retangular de números dispostos em linhas e colunas.

2. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

   (a) __F__ Em geral, as matrizes são identificadas por letras minúsculas

   (b) __F__ As matrizes só podem ser delimitadas por parênteses ou colchetes

   (c) __V__ A representação “$A = [-3]$” indica uma matriz chamada A que contém um único elemento, -3.

   (d) __V__ Os números que formam a matriz são chamados de elementos.

   (e) __F__ A seguinte matriz é uma matriz coluna: $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

3. O que é a *ordem* (ou *tipo*) de uma matriz? Como a *ordem* é representada?

   A *ordem* de uma matriz indica a quantidade de linhas e colunas que a matriz tem. É representada por $m \times n$, onde m indica a quantidade de *linhas* e n indica a quantidade de *colunas*.

4. Qual a ordem da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$? E o tipo da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & \sqrt{3} \\ 3 & -1 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$?

   A matriz A é da ordem 2×3, e a matriz B é da ordem 3×5.

5. O que é uma matriz *quadrada* de ordem n?

   É uma matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, tem a ordem $m \times n, \ m = n$.

6. Em uma matriz quadrada A de ordem n, podemos afirmar que sua *diagonal principal* é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$? Por quê?

   Sim, pois se a matriz é quadrada sua diagonal principal será formada por todos os elementos nos quais $m = n$, ou seja, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$.

   Por exemplo: se B é uma matriz quadrada de ordem 3, sua diagonal principal é:

   $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

7. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
   (a) **F** Matrizes que não são quadradas, não têm diagonal principal
   (b) **F** Matrizes que não são quadradas, não têm diagonal secundária
   (c) **V** Toda matriz tem uma, e somente uma, diagonal principal
   (d) **V** Toda matriz tem uma, e somente uma, diagonal secundária
   (e) **F** Matriz quadrada de ordem n não têm diagonal secundária
   (f) **V** Os elementos formados pelos números "1" na matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, representam sua diagonal principal
   (g) **F** Os elementos formados pelos números "1" na matriz $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, representam sua diagonal principal
   (h) **V** Uma matriz com ordem $1 \times n$ é uma matriz linha
   (i) **V** Uma matriz com ordem $m \times 1$ é uma matriz coluna
   (j) **F** Uma matriz com ordem 7×5 tem 75 elementos
   (k) **V** Em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos tais que $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária

8. A representação da seguinte matriz está correta? Por quê?
   $A = \left\| \begin{matrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{matrix} \right\|_{3\times 2}$

   Não, pois a matriz não é do tipo 3×2, e sim do tipo 2×3.

9. O que significa dizer que uma determinada matriz tem 2 elementos nulos?

   Que 2 de seus elementos são 0.

10. Uma matriz A pode ser representada pela notação $A = (a_{ij})_{m\times n}$ onde a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o elemento na linha i e coluna j dessa matriz. Em relação a essa forma de notação, marque a resposta correta:
    ○ Se uma matriz B tem ordem 3×2, o elemento b_{42} estará localizado em alguma das diagonais da matriz (principal ou secundária)
    ○ Uma matriz C com ordem 4×2 não pode ter um elemento na posição c_{31}
    ○ Não existe como indicar todos os elementos da j-ésima coluna de uma matriz
    √ **A i-ésima linha de uma matriz A qualquer, com ordem $m \times n$, corresponde aos elementos $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{in}$**
    ○ A j-ésima linha de uma matriz A qualquer, com ordem $m \times n$, corresponde aos elementos $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \cdots, a_{mj}$

11. Sabendo-se que uma matriz qualquer A de ordem $m \times n$ tem a forma genérica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

construa a matriz $B = (b_{ij})_{5\times 4}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} i \times j & \text{se } i < j \\ j \div i & \text{se } i > j \\ i + j & \text{se } i = j \end{cases}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 4 & 6 & 8 \\ 1/3 & 2/3 & 6 & 12 \\ 1/4 & 2/4 & 3/4 & 8 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

2 Matrizes especiais

12. Já vimos e estudamos 12 (doze) tipos de matrizes especiais, ou seja, aquelas matrizes que apresentam alguma particularidade que as diferenciam de outras matrizes genéricas. Liste todas as matrizes especiais:

1. Matriz Quadrada
2. Matriz Linha
3. Matriz Coluna
4. Matriz Nula
5. Matriz Diagonal
6. Matriz Triangular
7. Matriz Identidade
8. Matriz Transposta
9. Matriz Oposta
10. Matriz Simétrica
11. Matriz Anti-Simétrica
12. Matriz Inversa

13. O que é uma *matriz nula*? Que letra geralmente é utilizada para representar tal matriz?

> É uma matriz na qual todos os seus elementos são nulos, ou seja, são zeros. É geralmente representada pela letra O. Por exemplo, uma matriz $O_{2\times 3}$ é a matriz nula de ordem 2×3.

14. A matriz nula $O = (0)$ é uma matriz quadrada, uma matriz linha ou uma matriz coluna?

> Essa matriz pode ser considerada tudo isso ao mesmo tempo pois sua ordem é 1×1 (e portanto é quadrada), tem apenas 1 linha (e portanto é uma matriz linha) e tem apenas 1 coluna (e portanto é uma matriz coluna).

15. O que é uma *matriz diagonal*?

> É uma matriz *quadrada* na qual todos os elementos que *não estão* na diagonal principal são nulos.

16. O que é uma *matriz triangular*?

> É uma matriz *quadrada* na qual todos os elementos que *estão acima* OU que *estão abaixo* da diagonal principal são nulos.

17. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
    (a) **F** Em situações especiais, como na multiplicação de matrizes, uma matriz nula pode conter um elemento com o valor 1
    (b) **F** Uma matriz retangular de ordem $m \times n$ com $m \neq n$ não pode ser nula
    (c) **F** Uma matriz diagonal é uma matriz retangular de ordem $m \times n$ com $m \neq n$, na qual todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos
    (d) **V** Uma matriz diagonal pode ter a diagonal principal com todos os elementos nulos
    (e) **F** Uma matriz triangular de ordem n é aquela onde todos os elementos que estão acima da diagonal principal, E MAIS todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal, são nulos.
    (f) **V** Para que uma matriz seja considerada triangular, todos os elementos que estão acima OU abaixo da diagonal principal (não simultaneamente) devem ser nulos.
    (g) **F** Uma matriz diagonal nunca poderá ser uma matriz nula

18. O que é uma *matriz identidade*? Que letra geralmente é utilizada para representar tal matriz?

> É uma matriz diagonal na qual todos os elementos da *diagonal principal* são unitários, ou seja, são o valor 1. É geralmente representada pela letra I.

19. O que é uma *matriz transposta*? Como é representada?

> É aquela na qual as linhas de uma matriz passam a ser as colunas da outra, e é representada pela letra "t" sobrescrita, por exemplo: A^t é a matriz transposta de A.
>
> Mais especificamente, a transposta de uma matriz A de ordem $m \times n$, é a matriz A^t de ordem $n \times m$ tal que as linhas da matriz A passam a er as colunas ma matriz A^t.

20. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
    (a) __**F**__ Uma matriz nula O de ordem 1 pode ser uma matriz identidade
    (b) __**F**__ Uma matriz identidade não precisa ser quadrada
    (c) __**F**__ A diagonal secundária de uma matriz identidade tem todos os seus elementos nulos
    (d) __**V**__ A diagonal principal de uma matriz identidade tem todos os seus elementos unitários
    (e) __**V**__ Existe uma matriz identidade de ordem 1, ou seja, $I_1 = [1]$
    (f) __**F**__ Para que uma matriz A seja transposta em A^t, é necessário que ela seja quadrada
    (g) __**F**__ Dada uma matriz identidade I qualquer, sua transposta I^t não é mais uma matriz identidade
    (h) __**F**__ A transposta de uma matriz nula O de ordem $m \times n$ com $m \neq n$, também será uma matriz nula O^t com a mesma ordem
    (i) __**V**__ A matriz transposta B^t de uma matriz B só terá a mesma ordem da matriz B se a matriz B for quadrada
    (j) __**V**__ $(A^t)^t = A$

21. O que é uma *matriz oposta*? Como é representada?

> É uma matriz que foi multiplicada por -1, ou seja, teve todos os seus elementos multiplicados por -1. É representada por um menos unário no nome da matriz, por exemplo, a matriz $-C$ é a oposta da matriz C.

22. O que é uma *matriz simétrica*?

> É uma matriz que é idêntica à sua transposta, ou seja, uma matriz B é simétrica se $B = B^t$.

23. Uma matriz de ordem $m \times n$ com $m \neq n$ pode ser simétrica? Por quê?

> Não, pois a ordem da transposta não seria igual à ordem da matriz original e isso indica que a matriz original não é idêntica à sua transposta.

24. O que é uma *matriz anti-simétrica*?

> É uma matriz que é idêntica à oposta de sua transposta, ou seja, uma matriz B é anti-simétrica se $B = -(B^t)$.

25. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ◯ Matriz Identidade
- $\surd$ **Matriz Nula**
- ◯ Matriz Coluna
- $\surd$ **Matriz Diagonal**
- ◯ Matriz Triangular

26. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

- ◯ Matriz Identidade
- $\surd$ **Matriz Quadrada**
- ◯ Matriz Nula
- $\surd$ **Matriz Linha**
- $\surd$ **Matriz Coluna**

27. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\surd$ **Matriz Diagonal**
- $\surd$ **Matriz Simétrica**
- ◯ Matriz Anti-Simétrica
- ◯ Matriz Triangular
- ◯ Matriz Identidade

28. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◯ Matriz Identidade

◯ Matriz Triangular

◯ Matriz Diagonal

√ **Matriz Simétrica**

◯ Matriz Nula

29. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

◯ Matriz Identidade

◯ Matriz Triangular

◯ Matriz Diagonal

√ **Matriz Anti-Simétrica**

◯ Nenhuma das respostas acima

30. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
   (a) **V** Existe uma matriz nula, quadrada, linha, coluna, diagonal, simétrica e anti-simétrica
   (b) **F** Existe uma matriz nula, diagonal e triangular
   (c) **V** Toda matriz anti-simétrica tem sua diagonal principal composta por elementos nulos (zeros)
   (d) **V** Se $A = -1B$, então B é a oposta de A
   (e) **F** Se $A = A^t$, então elas não são simétricas
   (f) **V** Se $B = -(B^t)$, então elas são anti-simétricas
   (g) **F** $A \neq (A^t)^t$

3 Operações com matrizes

31. Quais as 2 condições necessárias para afirmarmos que uma matriz A é igual a uma matriz B?

- As matrizes A e B devem ter a mesma ordem
- Cada elemento a_{ij} da matriz A deve ser idêntico ao elemento b_{ij} correspondente da matriz B

32. É possível somar ou diminuir matrizes de ordens diferentes? Por quê?

> Não, pois a soma ou a diminuição de matrizes é feita somando-se seus elementos correspondentes. Se as matrizes são de ordem diferentes, não haverá correspondência para todos os elementos e a soma ou subtração não pode ser feita.

33. Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são matrizes da mesma ordem, então é verdade que $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$?

> Sim, o enunciado simplesmente está descrevendo a operação de somas de matrizes de mesma ordem, onde cada elemento de uma matriz deve ser somado ao elemento correspondente (mesmo ij) da outra matriz.

34. Se $C = (c_{ij})_{m\times n}$ e $D = (d_{ij})_{m\times n}$ são matrizes da mesma ordem, então é verdade que $E = (e_{ij})_{m\times n}$ tal que $e_{ij} = c_{ij} - d_{ij}$?

> Sim, o enunciado simplesmente está descrevendo a operação de subtração de matrizes de mesma ordem, onde cada elemento de uma matriz deve ser subtraído do elemento correspondente (mesmo ij) da outra matriz.

35. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
    (a) **V** A adição de matrizes é comutativa: $A + B = B + A$
    (b) **F** A adição de matrizes não é associativa: $A + (B + C) \neq (A + B) + C$
    (c) **F** Não existe um elemento nulo tal que: $A + O = A$
    (d) **V** Somar uma matriz com sua oposta resulta em uma matriz nula: $A + (-A) = O$
    (e) **F** Transposição da soma é diferente da soma das transposições: $(A+B)^t \neq A^t + B^t$
    (f) **V** Subtrair é somar com a oposta: $A - B = A + (-B)$

36. Como é feita a multiplicação de um valor escalar por uma matriz, por exemplo: seja α um número real qualquer, e B uma matriz qualquer de ordem $m \times n$, como é feita a multiplicação $\alpha \times B$?

> Basta multiplicar cada elemento da matriz pelo escalar.

37. Se A e B são matrizes de mesma ordem e α e β são escalares, assinale a(s) propriedade(s) correta(s):
    ◯ Distributiva: $A(\alpha + \beta) = A\alpha\beta$
    √ **Distributiva:** $A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta$
    √ **Distributiva:** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
    ◯ Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha AB$

◯ Associativa: $\alpha(\beta A) = \alpha A + \beta$

$\surd$ **Associativa:** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

38. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Para realizar a multiplicação entre elas, basta que cada elemento a_{ij} seja multiplicado pelo elemento correspondente b_{ij} ?

Não, pois a multiplicação de matrizes *não é feita* apenas com a multiplicação dos elementos correspondentes em cada matriz. É um processo mais complexo onde é feita a multiplicação de cada linha de uma matriz, por todas as colunas da outra matriz, elemento a elemento, e realizando a soma dessas multiplicações. Considere o seguinte:

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$, a matriz $C = A \times B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Exemplo: sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

A matriz $C = (c_{ij})_{3\times 3} = A \times B$ é dada por:

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) & (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}) \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21}) & (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}) & (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}) \end{pmatrix}$$

39. As matrizes $A = (a_{ij})_{5\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{5\times 3}$ podem ser multiplicadas? Por quê?

Não, pois para que duas matrizes possam ser multiplicadas, o número de colunas da primeira tem que ser igual ao número de linhas da segunda.

40. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s):

◯ A multiplicação de matrizes é comutativa: $AB = BA$

$\surd$ **Multiplicar as matrizes** $A = (a_{ij})_{50\times 33}$ **e** $B = (b_{ij})_{33\times 1}$ **resultará na matriz** $C = (c_{ij})_{50\times 1}$

◯ Para realizar a multiplicação de duas matrizes, o número de linhas em ambas as matrizes deverá ser o mesmo

$\surd$ **A multiplicação de matrizes é associativa:** $A(BC) = (AB)C$

◯ A multiplicação de matrizes não é distributiva: $A(B + C) \neq AB + AC$

$\surd$ **A multiplicação de uma matriz A por uma matriz Identidade apropriada, resulta na mesma matriz A:** $AI = A$

$\surd$ **A transposição de um produto de duas matrizes é igual ao produto das transposições:** $(AB)^t = A^tB^t$

4 Matriz inversa

41. O que é uma *matriz inversa*? Como é representada?

> Uma matriz *quadrada* B, da mesma ordem da matriz quadrada A, é dita inversa se $AB = BA = I_n$ (onde I_n é a matriz identidade de ordem n).
>
> A representação é dada por: $B = A^{-1}$ (B é a matriz inversa de A).

42. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
    (a) **F** Se $B = A^{-1}$, então $B = \frac{1}{A}$
    (b) **V** Se $AB = BA = I_n$, então $B = A^{-1}$
    (c) **F** Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = \frac{1}{AB}$
    (d) **F** Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
    (e) **V** Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
    (f) **F** Matrizes que não são quadradas são inversíveis