Determinantes

Abrantes Araújo Silva Filho

Vila Velha, 15/09/2019

Tópicos

O que é um determinante?

Um *determinante* ou, mais precisamente, *funções determinante*, são **funções que associam um número real a uma matriz quadrada**.

Domínio das funções determinante

Os determinantes são definidos para ***matrizes quadradas***, ou seja, matrizes $n \times n$. Matrizes não quadradas não têm determinante definido.

Como representar um determinante?

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Seu determinante é representado por:

- $\det(A)$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Importância dos determinantes

- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- ...

Importância dos determinantes

- Resolução de sistemas de equações lineares

$$A = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- ...

Importância dos determinantes

- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & -1/7 \\ 10/21 & -4/7 & -19/21 \\ -3/7 & 5/7 & 5/7 \end{pmatrix}$$

- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- ...

Importância dos determinantes

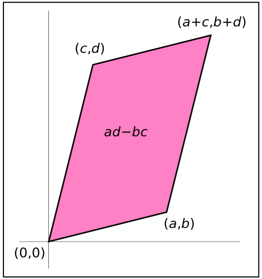
- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes
- ...

Importância dos determinantes

- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- Cálculo de áreas



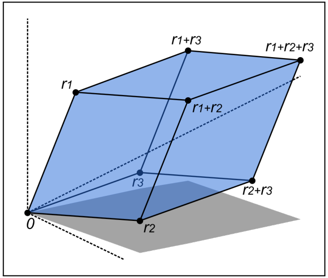
Fonte: Jitse Niesen

(https://en.wikipedia.org/wiki/File:Area_parallelogram_as_determinant.svg)

- Cálculo de volumes
- ...

Importância dos determinantes

- Resolução de sistemas de equações lineares
- Cálculo de matrizes inversas
- Cálculo de *eigenvalues* (autovalores)
- Cálculo de áreas
- Cálculo de volumes



Fonte: Claudio Rocchini

(https://en.wikipedia.org/wiki/File:Determinant_parallelepiped.svg)

- ...

Tópicos

Determinante de matrizes 1x1

Determinante de matriz 1x1

Corresponde ao próprio elemento da matriz:

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}$$

Determinante de matriz 2x2

É dado pelo produto dos elementos da diagonal principal, **menos** o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{vmatrix} =$$

Determinante de matriz 3x3

Calculamos o determinante pelo **método de Sarrus**:

1. Repetir as duas primeiras colunas
2. Calcular a soma do produto das “diagonais principais”
3. Calcular a soma do produto das “diagonais secundárias”
4. Determinante = (resultado em 2) − (resultado em 3)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Determinante de matrizes 4x4: Laplace

Determinante de matriz 4x4

Calculamos o determinante pelo **método de Laplace**:

1. Escolha uma linha ou coluna da matriz com o maior número de elementos nulos
2. Calcule o **menor complementar** e o **cofator** de cada elemento não nulo da linha ou coluna escolhida
3. Determinante = $\sum_{k=1}^{n}(\text{elemento}_k \times \text{cofator}_k)$, onde n é o número de elementos não nulos na linha ou coluna escolhida

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Menor complementar

O **menor complementar** de um elemento a_{ij} é representado por M_{ij} e corresponde ao determinante da matriz resultante ao eliminarmos a linha i e a coluna j correspondentes ao elemento a_{ij} escolhido.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Cofator

O **cofator** de um elemento a_{ij} é representado por C_{ij} e é obtido pela fórmula:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Cálculo do determinante

Determinante = $\sum_{k=1}^{n}(\text{elemento}_k \times \text{cofator}_k)$, onde n é o número de elementos não nulos na linha ou coluna escolhida

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Determinante de matrizes 4x4: Laplace

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Tópicos

Propriedades dos determinantes

1. Situações em que o determinante é zero
2. Permutações de linhas ou colunas
3. Multiplicação da matriz por um escalar
4. Matriz transposta
5. Matrizes triangulares e diagonais
6. Teorema de Binet: determinante de um produto de matrizes
7. Teorema de Jacobi: soma de linhas ou colunas
8. Matriz inversa
9. Soma de matrizes

Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de *outras duas* linhas (ou colunas)

Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de *outras duas* linhas (ou colunas)

Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 9 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de *outras duas* linhas (ou colunas)

Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 21 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 12 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de *outras duas* linhas (ou colunas)

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de *outras duas* linhas (ou colunas)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & -5 & 12 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 12 & 15 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Permutações de linhas ou colunas

A cada vez que permutamos duas linhas (ou duas colunas), o novo determinante é o oposto do determinante original (ou seja: o valor absoluto é o mesmo, mas **o sinal é trocado**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 16$$

Permutações de linhas ou colunas

A cada vez que permutamos duas linhas (ou duas colunas), o novo determinante é o oposto do determinante original (ou seja: o valor absoluto é o mesmo, mas **o sinal é trocado**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 16$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(B) = -\det(A) = -16$$

Permutações de linhas ou colunas

A cada vez que permutamos duas linhas (ou duas colunas), o novo determinante é o oposto do determinante original (ou seja: o valor absoluto é o mesmo, mas **o sinal é trocado**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 16$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(B) = -\det(A) = -16$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(C) = -\det(B) = -(-16) = 16$$

Escalar × uma ÚNICA linha (ou coluna)

Se multiplicarmos uma **única** linha (ou coluna) de uma matriz A por um número escalar real k, o determinante da matriz B resultante é igual ao determinante de A multiplicado por k: $\det(B) = k \times \det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

Escalar $\times$ uma ÚNICA linha (ou coluna)

Se multiplicarmos uma **única** linha (ou coluna) de uma matriz A por um número escalar real k, o determinante da matriz B resultante é igual ao determinante de A multiplicado por k: $\det(B) = k \times \det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \det(B) = -2 \times \det(A)$$

$$= -2 \times 174$$

$$= -348$$

Escalar × TODAS as linhas

Se multiplicarmos **todas** as linhas (e, por conseqüência, todas as colunas) de uma matriz A por um número escalar real k, o determinante da matriz B resultante é igual ao determinante de A multiplicado por k elevado à ordem da matriz: $\det(B) = k^n \times \det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

Escalar × TODAS as linhas

Se multiplicarmos **todas** as linhas (e, por conseqüência, todas as colunas) de uma matriz A por um número escalar real k, o determinante da matriz B resultante é igual ao determinante de A multiplicado por k elevado à ordem da matriz: $\det(B) = k^n \times \det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -12 & -2 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \implies \det(B) = (-2)^3 \times \det(A)$$

$$= -8 \times 174$$

$$= -1392$$

Determinante de uma matriz transposta

O determinante de uma matriz transposta A^t é igual ao determinante da matriz original A (não transposta):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

Determinante de uma matriz transposta

O determinante de uma matriz transposta A^t é igual ao determinante da matriz original A (não transposta):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 174$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A^t) = \det(A) = 174$$

Determinante de matriz triangular/diagonal

O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) ou de uma matriz diagonal, é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 346 & \pi & \sqrt[5]{3} \\ 0 & 9 & -500 & 2^{-189} \\ 0 & 0 & -1 & 432 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 2 \cdot 9 \cdot (-1) \cdot (-4)$$

$$= 72$$

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto do determinante de cada matriz: $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 21$$

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto do determinante de cada matriz: $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 21$$

$$AB = \begin{pmatrix} 24 & -9 & -1 \\ 8 & 27 & 33 \\ 19 & -18 & -12 \end{pmatrix} \implies \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

$$= 30 \times 21 = 630$$

Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha (ou coluna) de uma matriz A é somado a uma *outra* linha (ou coluna) de A, então $\det(B) = \det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha (ou coluna) de uma matriz A é somado a uma *outra* linha (ou coluna) de A, então $\det(B) = \det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(B) = \det(A) = 30$$

Teorema de Jacobi

Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha (ou coluna) de uma matriz A é somado a uma *outra* linha (ou coluna) de A, então $\det(B) = \det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies \det(B) = \det(A) = 30$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies \det(C) = \det(A) = 30$$

Determinante de matriz inversa

O determinante de uma matriz inversa A^{-1} é igual ao inverso multiplicativo (recíproco) do determinante da matriz A original, ou seja, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 21$$

Determinante de matriz inversa

O determinante de uma matriz inversa A^{-1} é igual ao inverso multiplicativo (recíproco) do determinante da matriz A original, ou seja, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 21$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & -1/7 \\ 10/21 & -4/7 & -19/21 \\ -3/7 & 5/7 & 5/7 \end{pmatrix} \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$= \frac{1}{21}$$

Determinante da soma de matrizes

Cuidado!

Em geral o determinante de uma soma de matrizes **não é** igual à soma dos determinantes, ou seja:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 28$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 47$$

Determinante da soma de matrizes

Cuidado!

Em geral o determinante de uma soma de matrizes **não é** igual à soma dos determinantes, ou seja:

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 28$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \implies \det(B) = 47$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \implies \det(A+B) = 78$$

Tópicos

Calcula o determinante "rebaixando" a ordem da matriz:

Regra de Chió

1. Se o elemento a_{11} da matriz não for unitário, use as propriedades dos determinantes para transformá-lo em 1
2. Elimina-se a primeira linha e a primeira coluna da matriz, rebaixando-se assim sua ordem
3. De cada elemento a_{ij} na matriz rebaixada resultante, **subtrai-se** o produto $a_{i1} \times a_{1j}$
4. A matriz obtida tem o mesmo determinante que a matriz original

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = ?$$

Regra de Chió

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$