# Álgebra Linear I - Aula 22

1. Potência de uma matriz.

## 1 Potência de uma matriz

Nesta seção, explicaremos como calcular a potência $n$-ésima de uma matriz diagonalizável. Primeiro observe que

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Portanto, se $A$ é diagonalizável e $D$ é sua forma diagonal, temos

$$A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}.$$

Onde calcular $D^2$ é muito simples.

Em geral, e indutivamente,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

**Exemplo 1.** *Calcular $A^{10}$ onde*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Resposta:** Observe que $A$ é diagonalizável e que sua forma diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Também,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{10} = P \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$\square$

**Exercício 1.** *Considere as matrizes*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

*Defina a matriz* $C = E\,A\,E$.

- *Calcule* $E^2$.
- *Encontre a forma diagonal de* $A$.
- *Calcule* $C^{15}$.

**Resposta:** Temos

$$E^2 = E\,E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $A$ é simétrica, é diagonalizável. Escreveremos

$$A = B\,D\,B^{-1},$$

onde $D$ é diagonal e $B$ ortogonal. Calculemos agora $D$ e $B$.

O polinômio caraterístico de $A$ é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

e seus autovalores são 4 e $-2$.

A forma diagonal de $A$ é

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

A matriz $B$ terá por colunas autovetores (unitários) de $A$ l.i.. O autovetor $u = (x, y)$ associado a 3 verifica $-3x + 3y = 0$, $x = y$, $u = (1, 1)$ ou $v =$

$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ já normalizado. O outro autovetor será perpendicular, ou seja $w = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. A matriz $B$ é

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para calcular $C^{15}$ observamos que $B = B^t = B^{-1}$ e escrevemos

$$\begin{aligned} C^2 &= (E\,B\,D\,B^{-1}\,E)\,(E\,B\,D\,B\,E) = E\,B\,D\,B^{-1}(-I)\,B\,D\,B\,E = \\ &= -E\,B\,D^2\,B\,E. \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned} C^3 &= -(E\,B\,D^2\,B^{-1}\,E)\,(E\,B\,D\,B\,E) = -E\,B\,D^2\,B^{-1}(-I)\,B\,D\,B\,E = \\ &= E\,B\,D^3\,B\,E. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} C^4 &= (E\,B\,D^3\,B^{-1}\,E)\,(E\,B\,D\,B\,E = E\,B\,D^3\,B^{-1}(-I)\,B\,D\,B\,E = \\ &= -(E\,B\,D^4\,B\,E). \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$C^{2k} = -E\,B\,D^{2k}\,B^{-1}\,E, \quad C^{2k+1} = E\,B\,D^{2k+1}\,B^{-1}\,E$$

Logo,

$$C^{15} = E\,B\,D^{15}\,B^{-1}\,E.$$

Portanto,

$$C^{15} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{15} & 0 \\ 0 & (-2)^{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

onde a primera e a última matriz correspondem aos produtos $E\,B$ e $B\,E$. $\square$