# Determinantes

**Abrantes Araújo Silva Filho**

Vila Velha, 15/09/2019

# Tópicos

1. Introdução
2. Métodos de cálculo
3. Propriedades dos determinantes
4. Regra de Chió

# O que é um determinante?

Um *determinante* ou, mais precisamente, *funções determinante*, são **funções que associam um número real a uma matriz quadrada**.

# Como representar um determinante?

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. O seu determinante é representado por:

- $\det(A)$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

# Domínio das funções determinante

Os determinantes são definidos para ***matrizes quadradas***, ou seja, matrizes $n \times n$. Matrizes não quadradas não têm determinante definido.

# Tópicos

# Determinante de matrizes 1x1

## Determinante de matriz 1x1

Corresponde ao próprio elemento da matriz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

# Determinante de matrizes 2x2

## Determinante de matriz 2x2

É dado pelo produto dos elementos da diagonal principal, **menos** o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{vmatrix} =$$

# Determinante de matrizes 3x3: Sarrus

## Determinante de matriz 3x3

Calculamos o determinante pelo **método de Sarrus**:

1. Repetir as duas primeiras colunas
2. Calcular a soma do produto das "diagonais principais"
3. Calcular a soma do produto das "diagonais secundárias"
4. Determinante = (resultado em 2) − (resultado em 3)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

# Determinante de matrizes 4x4: Laplace

## Determinante de matriz 4x4

Calculamos o determinante pelo **método de Laplace**:

1. Escolha uma linha ou coluna da matriz com o maior número de elementos nulos
2. Calcule o **menor complementar** e o **cofator** de cada elemento não nulo da linha ou coluna escolhida
3. Determinante $= \sum_{k=1}^{n} (\text{elemento}_k \times \text{cofator}_k)$, onde $n$ é o número de elementos não nulos na linha ou coluna escolhida

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

# Determinante de matrizes 4x4: Laplace

## Menor complementar

O **menor complementar** de um elemento $a_{ij}$ é representado por $M_{ij}$ e corresponde ao determinante da matriz resultante ao eliminarmos a linha $i$ e a coluna $j$ correspondentes ao elemento $a_{ij}$ escolhido.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

## Cofator

O **cofator** de um elemento $a_{ij}$ é representado por $C_{ij}$ e é obtido pela fórmula:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

# Determinante de matrizes 4x4: Laplace

## Cálculo do determinante

Determinante = $\sum_{k=1}^{n}(\text{elemento}_k \times \text{cofator}_k)$, onde $n$ é o número de elementos não nulos na linha ou coluna escolhida

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

# Determinante de matrizes 4x4: Laplace

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

# Tópicos

# Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

# Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

# Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 9 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

# Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 21 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 12 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

# Determinante igual a zero

As seguintes situações resultam em determinante igual a zero, não importando o tamanho da matriz quadrada:

1. Linhas (ou colunas) **nulas**
2. Linhas (ou colunas) **repetidas**
3. Linhas (ou colunas) **proporcionais**
4. Linhas (ou colunas) que são **combinações lineares** de outras duas linhas (ou colunas)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & -5 & 12 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 12 & 16 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

# Permutações de linhas ou colunas

**A cada vez que permutamos** duas linhas (ou duas colunas), o novo determinante é o oposto do determinante original (ou seja: o valor absoluto é o mesmo, mas **o sinal é trocado**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies det(A) = 16$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies det(B) = -det(A) = -16$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies det(C) = -det(B) = -(-16) = 16$$

# Escalar × uma ÚNICA linha (ou coluna)

Se multiplicarmos uma **única** linha (ou coluna) de uma matriz $A$ por um número escalar real $k$, o determinante da matriz $B$ resultante é igual ao determinante de $A$ multiplicado por $k$: $det(B) = k \times det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies det(A) = 174$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \implies det(B) = -2 \times det(A)$$

$$= -2 \times 174$$

$$= -348$$

# Escalar × TODAS as linhas

Se multiplicarmos **todas** as linhas (e, por conseqüência, todas as colunas) de uma matriz $A$ por um número escalar real $k$, o determinante da matriz $B$ resultante é igual ao determinante de $A$ multiplicado por $k$ elevado à ordem da matriz:
$det(B) = k^n \times det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies det(A) = 174$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -12 & -2 & 4 \\ -4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \implies det(B) = (-2)^3 \times det(A)$$

$$= -8 \times 174$$

$$= -1392$$

# Determinante de uma matriz transposta

O determinante de uma matriz transposta $A^t$ é igual ao determinante da matriz original $A$ (não transposta):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \implies det(A) = 174$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \implies det(A^t) = det(A) = 174$$

# Determinante de matriz triangular/diagonal

O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) ou de uma matriz diagonal, é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 346 & \pi & \sqrt[5]{3} \\ 0 & 9 & -500 & 2^{-189} \\ 0 & 0 & -1 & 432 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \implies det(A) = 2 \cdot 9 \cdot (-1) \cdot (-4)$$

$$= 72$$

O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto do determinante de cada matriz:
$det(AB) = det(A) \times det(B)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies det(B) = 21$$

$$AB = \begin{pmatrix} 24 & -9 & -1 \\ 8 & 27 & 33 \\ 19 & -18 & -12 \end{pmatrix} \implies det(AB) = det(A) \times det(B)$$

$$= 30 \times 21$$

$$= 630$$

# Teorema de Jacobi

Se $B$ for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha (ou coluna) de uma matriz $A$ é somado a uma outra linha (ou coluna) de $A$, então $det(B) = det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies det(A) = 30$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies det(B) = det(A) = 30$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies det(C) = det(A) = 30$$

# Determinante de matriz inversa

O determinante de uma matriz inversa $A^{-1}$ é igual ao inverso multiplicativo (recíproco) do determinante da matriz $A$ original, ou seja, $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \implies det(A) = 21$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & -1/7 \\ 10/21 & -4/7 & -19/21 \\ -3/7 & 5/7 & 5/7 \end{pmatrix} \implies det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

$$= \frac{1}{21}$$

# Determinante da soma de matrizes

## Cuidado!

Em geral o determinante de uma soma de matrizes **não é** igual à soma dos determinantes, ou seja:

$$det(A+B) \neq det(A) + det(B)$$

# Tópicos

# Regra de Chió

Calcula o determinante "rebaixando" a ordem da matriz:

## Regra de Chió

1. Se o elemento $a_{11}$ da matriz não for unitário, utiliza-se alguma propriedade para transformá-lo em 1
2. Elimina-se a primeira linha e a primeira coluna da matriz, rebaixando-se assim sua ordem
3. De cada elemento $a_{ij}$ na matriz rebaixada resultante, **subtrai-se** o produto $a_{i1} \times a_{1j}$
4. A matriz obtida tem o mesmo determinante que a matriz original

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \implies det(A) = ?$$

# Regra de Chió

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$