Álgebra Linear e Geometria Analítica

— Atividade de Recuperação da Aprendizagem —

Abril/2019

1 Matrizes: conceitos fundamentais

1. De forma geral, o que é uma matriz?

2. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
   (a) ___ Em geral, as matrizes são identificadas por letras minúsculas
   (b) ___ As matrizes só podem ser delimitadas por parênteses ou colchetes
   (c) ___ A representação "$A = [-3]$" indica uma matriz chamada A que contém um único elemento, -3.
   (d) ___ Os números que formam a matriz são chamados de elementos.
   (e) ___ A seguinte matriz é uma matriz coluna: $C = [3 \quad 4 \quad 5]$

3. O que é a *ordem* (ou *tipo*) de uma matriz? Como a *ordem* é representada?

4. Qual a ordem da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$? E o tipo da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & \sqrt{3} \\ 3 & -1 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$?

5. O que é uma matriz *quadrada* de ordem n?

6. Em uma matriz quadrada A de ordem n, podemos afirmar que sua *diagonal principal* é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$? Por quê?

7. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
   (a) ___ Matrizes que não são quadradas, não têm diagonal principal
   (b) ___ Matrizes que não são quadradas, não têm diagonal secundária
   (c) ___ Toda matriz tem uma, e somente uma, diagonal principal
   (d) ___ Toda matriz tem uma, e somente uma, diagonal secundária
   (e) ___ Matriz quadrada de ordem n não têm diagonal secundária

(f) ___ Os elementos formados pelos números "1" na matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, representam sua diagonal principal

(g) ___ Os elementos formados pelos números "1" na matriz $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, representam sua diagonal principal

(h) ___ Uma matriz com ordem $1 \times n$ é uma matriz linha

(i) ___ Uma matriz com ordem $m \times 1$ é uma matriz coluna

(j) ___ Uma matriz com ordem 7×5 tem 75 elementos

(k) ___ Em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos tais que $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária

8. A representação da seguinte matriz está correta? Por quê?

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{Vmatrix}_{3\times 2}$$

9. O que significa dizer que uma determinada matriz tem 2 elementos nulos?

10. Uma matriz A pode ser representada pela notação $A = (a_{ij})_{m\times n}$ onde a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o elemento na linha i e coluna j dessa matriz. Em relação a essa forma de notação, marque a resposta correta:

- ◯ Se uma matriz B tem ordem 3×2, o elemento b_{42} estará localizado em alguma das diagonais da matriz (principal ou secundária)
- ◯ Uma matriz C com ordem 4×2 não pode ter um elemento na posição c_{31}
- ◯ Não existe como indicar todos os elementos da j-ésima coluna de uma matriz
- ◯ A i-ésima linha de uma matriz A qualquer, com ordem $m \times n$, corresponde aos elementos $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{in}$
- ◯ A j-ésima linha de uma matriz A qualquer, com ordem $m \times n$, corresponde aos elementos $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \cdots, a_{mj}$

11. Chama-se *traço* de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Determine o traço de cada uma das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Matrizes: construção a partir de regras

12. Sabendo-se que uma matriz qualquer A de ordem $m \times n$ tem a forma genérica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

construa a matriz $B = (b_{ij})_{5\times4}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} i \times j & \text{se } i < j \\ j \div i & \text{se } i > j \\ i + j & \text{se } i = j \end{cases}$

13. Escreva a matriz $C = (c_{ij})_{4\times1}$, onde $c_{ij} = i^2 + j$.

14. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$, onde: $a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & \text{se } i \geq j \\ i - j & \text{se } i < j \end{cases}$

3 Matrizes especiais

15. Já vimos e estudamos 12 (doze) tipos de matrizes especiais, ou seja, aquelas matrizes que apresentam alguma particularidade que as diferenciam de outras matrizes genéricas. Liste todas as matrizes especiais:

    1. ________________________
    2. ________________________
    3. ________________________
    4. ________________________
    5. ________________________
    6. ________________________
    7. ________________________
    8. ________________________
    9. ________________________
    10. ________________________
    11. ________________________
    12. ________________________

16. O que é uma *matriz nula*? Que letra geralmente é utilizada para representar tal matriz?

17. A matriz nula $O = (0)$ é uma matriz quadrada, uma matriz linha ou uma matriz coluna?

18. O que é uma *matriz diagonal*?

19. O que é uma *matriz triangular*?

20. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
    (a) ___ Em situações especiais, como na multiplicação de matrizes, uma matriz nula pode conter um elemento com o valor 1
    (b) ___ Uma matriz retangular de ordem $m \times n$ com $m \neq n$ não pode ser nula
    (c) ___ Uma matriz diagonal é uma matriz retangular de ordem $m \times n$ com $m \neq n$, na qual todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos
    (d) ___ Uma matriz diagonal pode ter a diagonal principal com todos os elementos nulos
    (e) ___ Uma matriz triangular de ordem n é aquela onde todos os elementos que estão acima da diagonal principal, E MAIS todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal, são nulos.
    (f) ___ Para que uma matriz seja considerada triangular, todos os elementos que estão acima OU abaixo da diagonal principal (não simultaneamente) devem ser nulos.
    (g) ___ Uma matriz diagonal nunca poderá ser uma matriz nula

21. O que é uma *matriz identidade*? Que letra geralmente é utilizada para representar tal matriz?

22. O que é uma *matriz transposta*? Como é representada?

23. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
    (a) ___ Uma matriz nula O de ordem 1 pode ser uma matriz identidade
    (b) ___ Uma matriz identidade não precisa ser quadrada
    (c) ___ A diagonal secundária de uma matriz identidade tem todos os seus elementos nulos

(d) ___ A diagonal principal de uma matriz identidade tem todos os seus elementos unitários

(e) ___ Existe uma matriz identidade de ordem 1, ou seja, $I_1 = [1]$

(f) ___ Para que uma matriz A seja transposta em A^t, é necessário que ela seja quadrada

(g) ___ Dada uma matriz identidade I qualquer, sua transposta I^t não é mais uma matriz identidade

(h) ___ A transposta de uma matriz nula O de ordem $m \times n$ com $m \neq n$, também será uma matriz nula O^t com a mesma ordem

(i) ___ A matriz transposta B^t de uma matriz B só terá a mesma ordem da matriz B se a matriz B for quadrada

(j) ___ $(A^t)^t = A$

24. O que é uma *matriz oposta*? Como é representada?

____

____

25. O que é uma *matriz simétrica*?

____

____

26. Uma matriz de ordem $m \times n$ com $m \neq n$ pode ser simétrica? Por quê?

____

____

27. O que é uma *matriz anti-simétrica*?

____

____

28. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◯ Matriz Identidade

◯ Matriz Nula

◯ Matriz Coluna

◯ Matriz Diagonal

◯ Matriz Triangular

29. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$D = (7)$$

◯ Matriz Identidade

◯ Matriz Quadrada

◯ Matriz Linha

◯ Matriz Coluna

30. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◯ Matriz Diagonal

◯ Matriz Simétrica

◯ Matriz Anti-Simétrica

◯ Matriz Triangular

◯ Matriz Identidade

31. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◯ Matriz Identidade

◯ Matriz Triangular

◯ Matriz Diagonal

◯ Matriz Simétrica

◯ Matriz Nula

32. Marque a(s) alternativa(s) que corresponde(m) à seguinte matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

◯ Matriz Identidade

◯ Matriz Triangular

◯ Matriz Diagonal

◯ Matriz Anti-Simétrica

◯ Nenhuma das respostas acima

33. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

(a) ___ Existe uma matriz nula, quadrada, linha, coluna, diagonal, simétrica e anti-simétrica

(b) ___ Existe uma matriz nula, diagonal e triangular

(c) ___ Toda matriz anti-simétrica tem sua diagonal principal composta por elementos nulos (zeros)

(d) ___ Se $A = -1B$, então B é a oposta de A

(e) ___ Se $A = A^t$, então elas não são simétricas

(f) ___ Se $B = -(B^t)$, então elas são anti-simétricas

(g) ___ $A \neq (A^t)^t$

4 Operações com matrizes

34. Quais as 2 condições necessárias para afirmarmos que uma matriz A é igual a uma matriz B?

35. É possível somar ou diminuir matrizes de ordens diferentes? Por quê?

36. Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são matrizes da mesma ordem, então é verdade que $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$?

37. Se $C = (c_{ij})_{m\times n}$ e $D = (d_{ij})_{m\times n}$ são matrizes da mesma ordem, então é verdade que $E = (e_{ij})_{m\times n}$ tal que $e_{ij} = c_{ij} - d_{ij}$?

38. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
    (a) ___ A adição de matrizes é comutativa: $A + B = B + A$
    (b) ___ A adição de matrizes não é associativa: $A + (B + C) \neq (A + B) + C$
    (c) ___ Não existe um elemento nulo tal que: $A + O = A$
    (d) ___ Somar uma matriz com sua oposta resulta em uma matriz nula: $A + (-A) = O$
    (e) ___ Transposição da soma é diferente da soma das transposições: $(A+B)^t \neq A^t+B^t$
    (f) ___ Subtrair é somar com a oposta: $A - B = A + (-B)$

39. Como é feita a multiplicação de um valor escalar por uma matriz, por exemplo: seja α um número real qualquer, e B uma matriz qualquer de ordem $m \times n$, como é feita a multiplicação $\alpha \times B$?

40. Se A e B são matrizes de mesma ordem e α e β são escalares, assinale a(s) propriedades(s) correta(s):
    - ◯ Distributiva: $A(\alpha + \beta) = A\alpha\beta$
    - ◯ Distributiva: $A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta$
    - ◯ Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
    - ◯ Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha AB$
    - ◯ Associativa: $\alpha(\beta A) = \alpha A + \beta$
    - ◯ Associativa: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

41. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Para realizar a multiplicação entre elas, basta que cada elemento a_{ij} seja multiplicado pelo elemento correspondente b_{ij} ?

42. As matrizes $A = (a_{ij})_{5\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{5\times 3}$ podem ser multiplicadas? Por quê?

43. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s):
    - ○ A multiplicação de matrizes é comutativa: $AB = BA$
    - ○ Multiplicar as matrizes $A = (a_{ij})_{50\times 33}$ e $B = (b_{ij})_{33\times 1}$ resultará na matriz $C = (c_{ij})_{50\times 1}$
    - ○ Para realizar a multiplicação de duas matrizes, o número de linhas em ambas as matrizes deverá ser o mesmo
    - ○ A multiplicação de matrizes é associativa: $A(BC) = (AB)C$
    - ○ A multiplicação de matrizes não é distributiva: $A(B + C) \neq AB + AC$
    - ○ A multiplicação de uma matriz A por uma matriz Identidade apropriada, resulta na mesma matriz A: $AI = A$
    - ○ A transposição de um produto de duas matrizes é igual ao produto das transposições: $(AB)^t = A^t B^t$

44. Data a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, determine:
    a. A transposta de A
    b. A oposta de A

45. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{6\times 4}$, tal que $a_{ij} = i - j$, $B = (b_{ij})_{4\times 5}$, tal que $b_{ij} = j - i$, e $C = AB$, determine o elemento c_{42}.

5 Determinantes: conceitos

46. O que é o *determinante* de uma matriz?

47. Para que serve o cálculo do determinante de uma matriz?

48. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):
   (a) ___ Nem toda matriz quadrada tem determinante.
   (b) ___ As matrizes nulas de ordem n terão determinante igual ao número de elementos da matriz.
   (c) ___ É correto afirmar que $A = [2]$ representa uma matriz, e que $\det(A) = |2|$ representa o determinante da matriz de ordem 1 que contém apenas o elemento 2.
   (d) ___ A matriz identidade de ordem 1 tem determinante 0.
   (e) ___ O determinante da matriz nula de ordem 3 também é 3.
   (f) ___ Não é possível calcular o determinante de uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 4}$.

49. Seja a matriz $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, de ordem 2, onde a, b, c e d representam números reais. Como podemos calcular o $\det(B)$?

50. Sobre a *Regra de Sarrus*, indique se as sentenças abaixo são verdadeiras (V) ou falsas (F):
   (a) ___ O determinante da matriz identidade de ordem 3 é igual a 1.
   (b) ___ Podemos aplicar a Regra de Sarrus para matrizes de ordem 4.
   (c) ___ Não é possível utilizar a Regra de Sarrus para encontrar o determinante de uma matriz nula de ordem 3.
   (d) ___ A Regra de Sarrus só pode ser aplicada para matriz quadradas de ordem 3.

51. Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem, podemos utilizar o *Teorema de Laplace*, que obtém o determinante através do cálculo do ***menor complementar*** e do ***cofator*** de cada elemento da matriz. Explique o que é o ***menor complementar*** e o ***cofator***.

52. Qual o determinante da matriz identidade de ordem 4?

53. O que é o Teorema de Laplace? O que ele diz?

54. Por que devemos escolher uma linha (ou uma coluna) com o maior número de elementos 0 (zero) no cálculo do determinante pelo método de Laplace?

55. Existem 4 situações nas quais podemos afirmar, com certeza, que o determinante de uma matriz é 0 (zero). Quais são essas situações (propriedades)?

    1. ______________________________
    2. ______________________________
    3. ______________________________
    4. ______________________________

56. O que ocorre com o determinante de uma matriz cada vez que permutamos (trocamos de lugar) duas linhas (ou colunas)?

57. É correto dizer que quando multiplicamos todos os elementos de uma única linha (ou uma única coluna) de uma matriz A por um número real k qualquer, obtém-se uma matiz B cujo determinante é igual ao determinante da matriz A multiplicado por k, ou seja, $det(B) = k \times det(A)$? Sim ou não? Se sim, demonstre que a propriedade é verdadeira em uma matriz quadrada de ordem 2 qualquer. Se não, vá para a próxima questão.

58. Se multiplicarmos todos os elementos de uma matriz C quadrada qualquer de ordem n por um escalar k, o que podemos dizer do determinante $det(kC)$?

59. Um aluno afirmou que o determinante de uma matriz transposta A^t é o inverso do determinante de matriz A, ou seja, ele afirmou que $det(A^t) = \dfrac{1}{det(A)}$. A justificativa que o aluno deu foi a seguinte: "já que a matriz transposta é uma espécie de inversão de linhas por colunas, então o determinante da matriz transposta também será uma espécie de inverso do determinante da matriz original". Você concorda com esse aluno? Por quê?

60. Como calcular o determinante de uma matriz triangular qualquer?

61. O que é o Teorema de Jacobi?

62. Podemos afirmar que o determinante do produto de duas matrizes, A e B, é igual ao produto dos determinantes das matrizes individuais, ou seja, podemos afirmar que $det(AB) = det(A) \times det(B)$?

63. Existe uma propriedade dos determinantes que diz que $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$. O que isso quer dizer?

64. Para que serve a Regra de Chió?

6 Determinantes: cálculo

65. Seja a matriz $A = [-2]$, de ordem 1. Calcule o $\det(A)$, ou seja, o determinante dessa matriz.

66. Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule o $\det(B)$.

67. Se $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2$, qual é o valor de x?

68. A *Regra de Sarrus* é utilizada para calcular o determinantes de matrizes quadradas de ordem 3. Data a matriz genérica abaixo, calcule seu determinante aplicando a Regra de Sarrus:
$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$

69. Calcule o determinante da matriz $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$:

70. Se $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & y & 1 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10$, qual é o valor de y?

71. (FEI-SP) As faces de um cubo foram numeradas de 1 a 6; depois, em cada face, foi registrada uma matriz de ordem 2, com elementos definidos por $a_{ij} = \begin{cases} 2i+f & \text{se } i = j \\ j & \text{se } i \neq j \end{cases}$, onde f é o valor associado à face correspondente. Qual o valor do determinante da matriz registrada na face 5?

72. Seja $S = (s_{ij})$ a matriz de ordem 3 em que $s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i < j \\ i+j & \text{se } i = j \\ i-j & \text{se } i > j \end{cases}$. Calcule o determinante de S.

73. (FUVEST-SP) Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

74. Calcule os determinantes usando Chio e Laplace:

   a. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

   b. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -6 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7 Matriz inversa: conceitos

75. O que é uma *matriz inversa*? Como é representada?

____

____

76. Indique se a sentença é verdadeira (V) ou falsa (F):

   (a) ___ Se $B = A^{-1}$, então $B = \dfrac{1}{A}$

   (b) ___ Se $AB = BA = I_n$, então $B = A^{-1}$

   (c) ___ Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = \dfrac{1}{AB}$

   (d) ___ Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

   (e) ___ Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

   (f) ___ Matrizes que não são quadradas são inversíveis

77. Por que é importante calcular uma matriz inversa?

____

____

____

78. É correto dizer que toda matriz quadrada possui inversa?

79. Para o cálculo da inversa de uma matriz quadrada A qualquer é necessário encontrarmos a *adjunta* de A, simbolizada por $adj(A)$, pois a matriz inversa é dada pela equação $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \times adj(A)$. O que é a *ajunta* de uma matriz?

8 Matriz inversa: cálculo

80. Decida se a matriz $F = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ é inversível e, se for, calcule sua inversa.

81. Decida se a matriz $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ é inversível e, se for, calcule sua inversa.