Álgebra Linear I - Lista 12

Matrizes semelhantes. Diagonalização

1) Determine quais das matrizes a seguir são diagonalizáveis. Nos caso afirmativos encontre uma base de autovetores e uma forma diagonal das matrizes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Estude quais destas matrizes são diagonalizáveis. Nos casos afirmativos determine a forma diagonal D e uma matriz P tal que PDP^{-1} é a matriz original.

3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $B = PAP^{-1}$. Estude se B é diagonalizável. Caso afirmativo determine sua forma diagonal.

4) Considere as matrizes

$$A = PDP^{-1}, \qquad B = QTQ^{-1},$$

onde

$$[P] = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad [D] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule a soma dos autovalores de A^{10} e B^{10}.

5) Considere T uma T.L. satisfazendo

$$\begin{array}{ll} T(1,\,-1,\,1) & = 2(1,\,-1,\,1), \\ T(1,\,1,\,0) & = 3(1,\,1,\,0), \\ T(1,\,0,\,-1) & = 3(1,\,0,\,-1). \end{array}$$

Encontre, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ feita de autovetores de T ortogonais entre si. Estude se T é diagonalizável. Caso afirmativo determine sua forma diagonal.

6) Determine para que valores de a e b as matrizes abaixo são diagonalizáveis:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano $\pi\colon x + y = 0$ sejam autovetores da matriz abaixo e o vetor $(17, 21, 356)$ não seja um autovetor:

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix}.$$

7) Estude a veracidade das afirmações a seguir:

- Seja A uma matriz 3×3 diagonalizável. Suponha que $B = PAP^{-1}$ (onde P é uma matriz 3×3 inversível). Então B é diagonalizável.
- Seja A uma matriz diagonalizável. Então A^3 também é diagonalizável.
- A matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2222 & 3333 & 5555 \\ 4444 & 6666 & 11110 \\ 6666 & 9999 & 16665 \end{pmatrix}$$
tem autovalores 0 (de multiplicidade 2) e $2222 + 6666 + 16665 = 25553$.
- Duas matrizes 2×2 com o mesmo polinômio característico, o mesmo traço e o mesmo determinante são semelhantes.

8)

- Seja A uma matriz diagonalizável tal que A^{10} é a matriz nula (todos os coeficientes são zero). Determine A.
- Seja A uma matriz diagonalizável cujos autovalores são números reais positivos. Sabendo que A^{10} é a identidade determine A.

9) Seja A uma matriz 3×3. Suponha que
$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 2).$$

a) Estude se A é inversível.

b) Estude se A pode ser encontrada de maneira que A seja semelhante à matriz diagonal
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
isto é, $A = PDP^{-1}$,

c) Estude se A pode ser encontrada de maneira que A seja semelhante à matriz
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$