# $\boxed{\text{Álgebra Linear I - Aula 19}}$

1. Matrizes diagonalizáveis.
2. Matrizes diagonalizáveis. Exemplos.
3. Forma diagonal de uma matriz diagonalizável.

## 1 Matrizes diagonalizáveis

Uma matriz quadrada

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

é diagonal quando $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.

Observe que os autovalores de uma matriz diagonal são os elementos da sua diagonal.

Uma transformação linear $T$ é *diagonalizávelem* quando é semelhante a uma matriz diagonal. O raciocínio no exemplo na seção anterior mostra que se $T$ possui uma base de autovetores então é semelhante a uma matriz diagonal (de fato, semelhante à matriz diagonal cuja diagonal está formada pelos autovalores de $T$ com suas multiplicidades).

De fato o processo é o o mesmo que usamos nos exemplos precedentes. Suponhamos que estamos em $\mathbb{R}^3$, e assumimos que $T$ possui uma base de autovetores $\{u, v, w\}$ associados aos autovalores $\lambda$, $\sigma$ e $\rho$ (observemos que estes autovalores não necessitam ser todos diferentes, de fato, podem ser todos iguais!). Afirmamos que $T$ é semelhante à matriz

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Para ver isto devemos achar uma matriz $S$ tal que

$$T = S^{-1}\, D\, S, \text{ ou equivalentemente, } S\, T = D\, S.$$

É suficiente considerar $S$ definida por

$$S(u) = (1,0,0) = \mathbf{i}, \quad S(v) = (0,1,0) = \mathbf{j}, \quad S(w) = (0,0,1) = \mathbf{k}.$$

Observe que

$$D\,S(u) = D(\mathbf{i}) = \lambda\,\mathbf{i}, \quad D\,S(v) = D(\mathbf{j}) = \sigma\,\mathbf{j}, \quad D\,S(u) = D(\mathbf{k}) = \rho\,\mathbf{k}.$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} S\,T(u) &= S(\lambda\,u) = \lambda\,S(u) = \lambda\,\mathbf{i}, \\ S\,T(v) &= S(\sigma\,v) = \sigma\,S(v) = \sigma\,\mathbf{j}, \\ S\,T(w) &= S(\rho\,w) = \rho\,S(w) = \rho\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Portanto, $S\,T = D\,S$ na base $\{u, v, w\}$, logo as transformações lineares são iguais. Ou seja,

$$T = S^{-1}\,D\,S,$$

portanto, por definição, $T$ é diagonalizável.

Suponha agora que $T$ é semelhante a $D$, onde $D$ é uma matriz diagonal como acima. Afirmamos que $S^{-1}(\mathbf{i})$, $S^{-1}(\mathbf{j})$, e $S^{-1}(\mathbf{k})$, são autovetores de $T$ associados a $\lambda$, $\sigma$ e $\rho$, respetivamente. Como $S$ é inversível e $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são l.i., $\{S^{-1}(\mathbf{i}), S^{-1}(\mathbf{j}), S^{-1}(\mathbf{k})\}$ é uma base, formada por autovetores de $T$. Vejamos a afirmação para $S^{-1}(\mathbf{i})$:

$$T(S^{-1}(\mathbf{i})) = S^{-1}\,D\,S(S^{-1}(\mathbf{i})) = S^{-1}\,D(\mathbf{i}) = S^{-1}(\lambda\,\mathbf{i}) = \lambda S^{-1}(\mathbf{i}),$$

como queriamos provar.

# 2 Matrizes diagonalizáveis. Exemplos

Observe que os autovalores de uma matriz diagonal são os elementos da sua diagonal.

Uma transformação linear $T$ é *diagonalizável* quando existe uma base formada por autovetores. Vimos que neste caso a matriz de $T$ é semelhante a uma matriz diagonal. De fato, as duas propriedades seguintes são equivalentes:

- possuir base de autovetores,

- ser semelhante a uma matriz diagonal.

Sejam $A$ uma transformação linear diagonalizável, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de autovetores de $A$ e $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ os autovalores associados a $v_1, \dots, v_n$. Uma forma diagonal de $A$ é

$$D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Observe que $A$ pode ter diferentes formas diagonais (é suficiente mudar a ordem dos vetores da base de autovetores!).

**Exemplos 1.** *Espelhamentos e projeções (ortogonais ou não) são transformações lineares diagonalizáveis.*

**Prova:** Para provar a afirmação devemos encontrar uma base de autovetores. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$ e considerando projeções $P$ e espelhamentos $E$ no plano

$$\pi\colon a\,x + b\,y + c\,z = 0,$$

podemos considerar dois vetores não nulos $v$ e $w$ não paralelos do plano e o vetor $\ell$ correspondente à direção de projeção ou de espelhamento. Obtemos assim a base

$$\beta = \{v, w, \ell\}.$$

Trata-se de uma base de autovetores de $P$ e de $E$:

$$P(v) = v, \quad P(w) = w, \quad \text{e} \quad P(\ell) = \bar{0}.$$

Também temos

$$E(v) = v, \quad E(w) = w, \quad \text{e} \quad E(\ell) = \ell.$$

No caso de projeções e espelhamentos em retas o raciocínio é similar. $\square$

**Exemplos 2.** *A transformações lineares $A, B, C\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujas matrizes na base canônica são*

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad [C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*não são diagonalizáveis.*

**Prova:** Por exemplo, a matriz $A$ possui um único autovalor igual a 1 de multiplicidade 3. Faça os cálculos e veja que os autovetores de $A$ são os vetores não nulos da forma $(t, 0, 0)$. Portanto, no máximo é possível um autovetor l.i. de $A$. Logo $A$ não possui uma base de autovetores.

No caso da matriz $B$, os autovalores são 2 (simples ou de multiplicidade um) e 1 de multiplicidade 2. Associados a 2 obtemos autovetores da forma $(0, 0, t)$. Os autovetores associados a 1 são da forma $(t, 0, 0)$. Portanto, somente é possível obter dois autovetores l.i. de $B$. Logo $B$ não possui uma base de autovetores.

Nos dois casos anteriores o fato de não ser possível obter uma base de autovetores é devido a que há um autovalor de multiplicidade $k$ (3 no caso da matriz $A$ e 2 no caso de $B$) que possui um número de autovetores l.i. menor do que $k$ (em ambos os casos 1).

O fato da matriz $C$ não ser diagonalizável é devido a outros motivos: tem um autovalor complexo (não real). $\square$

**Exemplos 3.** *As formas diagonais das projeções (ortogonais ou não) $P$ e espelhamentos $R$ em $\mathbb{R}^2$ são, respectivamente,*

$$D_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*As formas diagonais das projeções (ortogonais ou não) $P_1$ em uma reta e $P_2$ em um plano de $\mathbb{R}^3$ são, respectivamente,*

$$D_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*As formas diagonais dos espelhamentos $E_1$ em torno de uma reta e $E_2$ em torno de um plano em $\mathbb{R}^3$ são, respectivamente,*

$$D_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exemplos 4.** *A transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$T(1, 1, 2) = 2(1, 1, 2), \quad T(1, 0, 1) = 2(1, 0, 1), \quad T(1, 1, 1) = 3(1, 1, 1)$$

*é diagonalizável:* $\{(1,1,2),(1,0,1),(1,1,1)\}$ *formam uma base de autovetores cuja forma diagonal é*

$$D_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Uma condição suficiente, porém não necessária, para uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ser diagonalizável é ter $n$ autovalores reais distintos. Para ver isto, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores e $v_1, \ldots, v_n$ os autovetores associados a estes autovalores. Por resultados já vistos, como $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são diferentes, os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são l.i.. Portanto, formam uma base (de autovetores) de $\mathbb{R}^n$($n$ vetores l.i. de $\mathbb{R}^n$ formam uma base).

**Exemplo 1.** *Suponha que $A$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ cujo polinômio característico é*

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

*Estude se $A$ é diagonalizável e calcule sua forma diagonal.*

**Prova:** A transformação é diagonalizável: tem três autovalores distintos: 1,2,3. Sua forma diagonal é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

**Exemplo 2.** *Estude se a afirmação a seguir é verdadeira: Suponha que $A$ é transformação linear de $\mathbb{R}^3$ cujo polinômio característico é $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, então $A$ não é diagonalizável.*

**Prova:** A afirmação é falsa. Da afirmação deduzimos que $A$ tem um autovalor 1 (de multiplicidade 2) e um autovalor 2 simples. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tem polinômio característico $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ e é diagonalizável (de fato, já é diagonal!). Porém, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tem o mesmo polinômio característico e não é diagonalizável. Ou seja, no caso em que existem raízes repetidas não é possível deduzir se é diagonalizável ou não somente com a análise do polinômio característico (é necessário estudar os autovetores). □

**Exemplo 3.** *Sabendo que a matriz $P$,*

$$P = \begin{pmatrix} 5/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & 2/6 & 2/6 \\ 1/6 & 2/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

*representa um espelhamento ou uma projeção ortogonal em um plano determine a opção válida. Determine o plano de projeção ou de espelhamento.*

**Resposta:** A matriz tem traço 2. Logo não pode ser um espelhamento. Será, portanto, uma projeção. Para determinar o plano de projeção há três opções. Determinar os autovetores associados a 1 (obtendo assim o plano), determinar os autovetores de 0 (obtendo a direção normal do plano) ou como segue. Observe que $P(1,0,0)$ e $P(0,1,0)$ são vetores do plano. Logo $(5,-2,1)$ e $(-1,1,1)$ são vetores paralelos do plano. Logo o vetor normal do plano é $(1,2,-1)$. Verifique que $P(1,2,-1) = \bar{0}$. □

**Exemplo 4.** *Considere a transformação linear $T$,*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Estude se $T$ é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine sua forma diagonal. Determine seu significado geométrico.*

**Resposta:** Uma projeção ortogonal na reta $(1,1,1)$ seguida de uma multiplicação por 3. É diagonalizável e sua forma diagonal é

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja que os autovalores são 3 (simples) e 0 (multiplicidade 2). Os autovetores são $(t,t,t)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, e os vetores não nulos de $x+y+z=0$. Observe que existe uma base ortogonal de autovetores

$$\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2)\}$$

de $T$ □

**Exemplo 5.** *Mostre que $\lambda$ é um autovalor de uma matriz inversível $A$ se, e somente se, $\lambda^{-1}$ é um autovalor de $A^{-1}$. Os autovetores associados são os mesmos?*

**Prova:** Seja $v$ um autovetor de $A$ e $\sigma \neq 0$ seu autovalor (pelo exercício anterior sabemos que $\sigma$ é não nulo). Temos,

$$v = A^{-1}A(v) = A^{-1}(\sigma v) = \sigma A^{-1}(v).$$

Portanto,

$$A^{-1}(v) = (1/\sigma)\, v.$$

Logo $v$ é um autovetor de $A^{-1}$ com autovalor associado $\sigma^{-1}$. □

Observe que o argumento anterior prova que se $A$ é inversível, então $A$ é diagonalizável se, e somente se, $A^{-1}$ é diagonalizável.

Outra forma de provar esta propriedade é a seguinte: suponha que $A$ é inversível e diagonalizável, então

$$A = P^{-1}\, D, P,$$

onde $D$ é diagonal. Como o determinante do produto é o produto dos determinantes, $D$ tem determinante não nulo e portanto é inversível. De fato, a inversa de uma matriz diagonal é outra matriz diagonal, mais precisamente:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix},$$

observe que $\det(D) \neq 0$ implica que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são todos diferentes de 0.

Finalmente, como $(C\,E)^{-1} = E^{-1}\,C^{-1}$, temos

$$A^{-1} = (P^{-1}\,D\,P)^{-1} = P\,D^{-1}\,P^{-1},$$

e $A^{-1}$ é semelhante a $D^{-1}$ que é diagonal. Portanto, $A^{-1}$ é diagonalizável.