# Álgebra Linear I - Aula 17

1. Propriedades dos autovetores e autovalores.
2. Matrizes semelhantes.

## 1 Propriedades dos autovetores e autovalores

**Propriedade 1:** *Sejam $\lambda$ e $\beta$ autovalores diferentes de $T$ e $u$ e $v$ autovetores associados a $\lambda$ e $\beta$, respectivamente. Então os vetores $u$ e $v$ são l.i..*

Caso contrário teriamos $v = \sigma u$ para algúm $\sigma \neq 0$ (note que os vetores são paralelos e diferentes e não nulos). Logo

$$T(v) = T(\sigma u) = \sigma T(u) = \sigma \lambda u.$$

Por outra parte, $T(v) = \beta v = \beta \sigma u$. Logo

$$\sigma \lambda u = \beta \sigma u, \quad \beta = \lambda,$$

o que é absurdo.

A afirmação anterior é verdadeira para qualquer número de autovalores: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores dois a dois diferentes de $T$ e $u_1, \dots, u_n$ autovetores associados a estes autovalores. Então $u_1, \dots, u_n$ são l.i.. Veremos esta propriedade quando $n = 3$ (quando $n > 3$ a prova é similar, em qualquer caso, em $\mathbb{R}^3$ teremos no máximo três autovalores distintos).

Suponha que a afirmação é falsa. Então, por exemplo,

$$u_1 = \sigma_2\, u_2 + \sigma_3\, u_3.$$

Portanto,

$$T(u_1) = T(\sigma_2\, u_2 + \sigma_3\, u_3) = \sigma_2\, T(u_2) + \sigma_3\, T(u_3) = (\sigma_2\, \lambda_2)\, u_2 + (\sigma_3\, \lambda_3)\, u_3.$$

Por outra parte,

$$T(u_1) = \lambda_1\, u_1 = \lambda_1\, (\sigma_2\, u_2 + \sigma_3\, u_3) = (\lambda_1\, \sigma_2)\, u_2 + (\lambda_1\, \sigma_3)\, u_3.$$

Igualando as expressões, temos,

$$(\sigma_2\, \lambda_2)\, u_2 + (\sigma_3\, \lambda_3)\, u_3 = (\lambda_1\, \sigma_2)\, u_2 + (\lambda_1\, \sigma_3)\, u_3.$$

Portanto, obtemos a seguinte combinação linear dos vetores $u_2$ e $u_3$ dando o vetor nulo

$$\sigma_2\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,u_2 + \sigma_3\,(\lambda_3 - \lambda_1)\,u_3 = \bar{0}.$$

Como os vetores $u_2$ e $u_3$ são l.i. (já vimos o caso de dois autovetores associados a autovalores distintos)

$$\sigma_2\,(\lambda_2 - \lambda_1) = 0 = \sigma_3\,(\lambda_3 - \lambda_1).$$

Como, por hipótese, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_3 - \lambda_1$, temos $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e $u_1 = \bar{0}$, o que é absurdo.

**Propriedade 2:**

- *Se um autovalor $\lambda$ de $T$ tem multiplicidade $k$ é possível encontrar no máximo $k$ autovalores l.i. de $T$ associados a $\lambda$.* (Veja os exemplos das matrizes $C$, $D$ e $E$).

- *Se um autovalor $\lambda$ tem $k$ autovetores l.i. então sua multiplicidade é no mínimo $k$.* (Veja os exemplos das matrizes $B$ e $D$).

**Exemplo 1.** *Calcule os autovalores e autovetores de*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Resposta:** O polinômio característico é

$$p(\lambda) = (3 - \lambda)\,(2 - \lambda)\,(1 - \lambda).$$

Logo os autovetores são 3, 2 e 1.

Os autovetores associados se, por exemplo para $\lambda = 3$, obtem resolvendo

$$(A - 3I)(v) = 0, \qquad \begin{pmatrix} 3-3 & 5 & 0 \\ 0 & 2-3 & 0 \\ 0 & 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos o sistema,

$$5y = 0, \quad -y = 0, \quad 2y - 2z = 0.$$

Logo a solução é $(t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, e os autovetores são os vetores não nulos desta forma.

Os outros autovetores são $(5t, -t, -2t)$ e $(0, 0, t)$, $t \neq 0$. $\square$

**Exemplo 2.** *Calcule os autovalores e autovetores de*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Resposta:** O polinômio característico é

$$p(\lambda) = (3-\lambda)\,[(4-\lambda)^2 - 1] = -(3-\lambda)^2\,(\lambda - 5).$$

As raízes são 3 (de multiplicidade 2) e 5. Os autovetores associados a 3 são da forma $x + z = 0$, (não nulos), e os associados a 5 da forma $(t, 2t, t)$, $t \neq 0$. □

**Propriedade 3:** *Suponha que $u$ e $v$ são autovetores l.i. de $T$ associados ao mesmo autovalor $\sigma$. Então todo vetor não nulo $w$ da forma $w = \lambda u + \beta v$ é um autovetor de $T$ com autovalor $\sigma$.*

Em outras palavras, *o plano paralelo a $u$ e $v$ que contém a origem está formado por autovetores associados a $\sigma$, excluido o vetor $\bar{0}$.*

Considere o vetor $w = \lambda u + \beta v$, temos

$$\begin{aligned} T(w) &= T(\lambda\, u + \beta\, v) = \lambda\, T(u) + \beta\, T(v) = \\ &= \lambda\, \sigma\, u + \beta\, \sigma\, v = \sigma\,(\lambda\, u + \beta\, v) = \sigma\, w. \end{aligned}$$

O que prova a afirmação.

**Propriedade 4:** *Seja $T$ uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Então a soma das multiplicidades dos autovalores (reais e complexos) de $[T]$ é $n$.*

# 2 Matrizes semelhantes

**Definição 1** (Matrizes semelhantes)**.** *Considere duas matrizes quadradas $A$ e $B$. A matriz $A$ é* semelhante *à matriz $B$ se, e somente se, existe uma matriz inversível $P$ tal que*

$$A = PBP^{-1}.$$

Observe que se $A$ é semelhante a $B$ então $B$ é semelhante a $A$: multiplicando a expressão anterior por $P^{-1}$ à esquerda e por $P$ à direita, temos

$$P^{-1}AP = P^{-1}PBP^{-1}P = B.$$

Logo

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1} = Q\,B\,Q^{-1},$$

onde $Q = P^{-1}$. Portanto, diremos que as matrizes $A$ e $B$ são *semelhantes.*

**Propriedade 2.1.** *Duas matrizes quadradas semelhantes $A$ e $B$ verificam as seguintes propriedades:*

1. $\det(A) = \det(B)$*,*

2. *$A$ é inversível se, e somente se, $B$ é inversível,*

3. *$A$ e $B$ têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade (mas, em geral, não têm os mesmos autovetores),*

4. *$A$ e $B$ têm o mesmo polinômio característico,*

5. *$A$ e $B$ têm o mesmo traço.*

**Prova:** Suponhamos que $A$ e $B$ são semelhantes e que $A = P\,B\,P^{-1}$.

A afirmação sobre os determinantes segue do fato do determinante do produto de matrizes ser o produto dos determinantes, portanto,

$$\det(A) = \det(P)\,\det(B)\,\det(P^{-1}) = \det(P)\,\det(B)\,\frac{1}{\det(P)} = \det B.$$

A afirmação sobre a inversibilidade decorre da propriedade sobre os determinantes: $A$ é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Portanto, se $A$ e $B$ são semelhantes $\det(A) = 0$ se, e somente se, $\det(B) = 0$.

Vejamos que se $\lambda$ é um autovalor de $B$ e $u$ é um autovetor de $B$ associado a $\lambda$, então $P(u)$ é um autovetor de $A$ associado ao mesmo autovalor $\lambda$. Observe primeiro que como $P$ é inversível e $u \neq \bar{0}$, então, $P(u) \neq \bar{0}$. Temos,

$$A(P(u)) = P\,B\,P^{-1}(P(u)) = P\,B(u) = P(\lambda\,u) = \lambda\,P(u),$$

e, como $P(u) \neq \bar{0}$, $P(u)$ é um autovetor de $A$ associado ao autovalor $\lambda$.

Vejamos agora que os polinômios característicos $P_A$ e $P_B$ de duas matrizes semelhantes $A$ e $B$ são iguais. O polinômio característico de $A$ é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda\,I) = \det(P\,B\,P^{-1} - P(\lambda\,I)\,P^{-1}) = \\ &= \det(P\,(B - \lambda I)\,P^{-1}) = \det(P)\,\det(B - \lambda\,I)\,\det P^{-1} = \\ &= \det(B - \lambda\,I) = p_B(\lambda), \end{aligned}$$

logo os polinômios característicos são iguais.

A igualdade dos polinômios característicos implica que as matrizes $A$ e $B$ têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades. Como o traço de uma matriz é igual à soma dos autovalores contados com multiplicidade, as matrizes $A$ e $B$ têm o mesmo traço. $\square$

## 2.1 Exemplos e comentários

Observamos que se as matrizes $A$ e $B$ são semelhantes, e as matrizes $B$ e $C$ também são semelhantes, então, $A$ e $C$ também são semelhantes. Observe que

$$A = PBP^{-1}, \quad B = QCQ^{-1},$$

onde (obviamente) $P$ e $Q$ são inversíveis. Portanto,

$$A = P\,B\,P^{-1} = P\,(Q\,C\,Q^{-1})\,P^{-1} = (P\,Q)\,C\,Q^{-1}\,P^{-1}.$$

Como

$$(P\,Q)^{-1} = Q^{-1}\,P^{-1},$$

temos

$$A = (P\,Q)\,C\,(P\,Q)^{-1},$$

e $A$ e $C$ são semelhantes.

Observe que se $A$ e $B$ são inversíveis e semelhantes, então $A^{-1}$ e $B^{-1}$ também são semelhantes:

$$A = P\,B\,P^{-1},$$

logo

$$A^{-1} = (P\,B\,P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}\,B^{-1}\,P^{-1} = P\,B^{-1}\,P^{-1}.$$

Usando o fato de que matrizes semelhantes têm o mesmo traço, temos que a matriz de uma projeção em um plano de $\mathbb{R}^3$ não pode ser semelhante à matriz de uma projeção em uma reta. Analogamente, matrizes de projeções em um plano nunca são semelhantes a matrizes de espelhamentos. Embora as matrizes de uma projeção em uma reta de $\mathbb{R}^3$ e de um espelhamento em um plano tenham traço 1, não são semelhantes, pois têm diferentes autovalores (ou diferentes determinantes).

**Exemplo 3.** *Veja quais das matrizes a seguir são semelhantes.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Resposta:** Temos

$$\mathrm{tr}(A) = 5, \quad \mathrm{tr}(B) = 5, \quad \mathrm{tr}(C) = 1, \quad \mathrm{tr}(D) = 1.$$

Portanto, as únicas matrizes que podem ser semelhantes são as matrizes $A$ e $B$ e as matrizes $C$ e $D$.

Também temos

$$\det(A) = 5, \quad \det(B) = 5, \quad \det(C) = 0, \quad \det(D) = -2.$$

Ou seja, $A$ e $B$ podem ser semelhantes, mas $C$ e $D$ não podem ser.

O polinômio característico de $A$ é

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

O polinômio característico de $B$ é

$$p_B(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5.$$

Portanto, as matrizes $A$ e $B$ ainda podem ser semelhantes. Concluiremos a prova na próxima seção. □

## 2.2 Construção da matriz de semelhança

Observe que para verificar que as duas matrizes $A$ e $B$ do Exemplo 3 são semelahantes devemos encontrar uma matriz inversível $T$ tal que $A = T^{-1}\, B\, T$. A seguir obteremos essa matriz.

Em primeiro lugar, temos que os autovalores de $A$ e de $B$ são:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, as matrizes têm dois autovalores reais diferentes.

Sejam $v_A$ e $w_A$ dois autovetores de $A$ associados a

$$\lambda = (5 + \sqrt{5})/2, \qquad \text{e} \qquad \sigma = (5 - \sqrt{5})/2,$$

respectivamente.

Observe que $\{v_A, w_A\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$: os vetores $v_A$ e $w_A$ são autovetores associados a autovalores diferentes, portanto são l.i., e dois vetores l.i. formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Considere agora dois autovetores $v_B$ e $w_B$ de $B$ associados a $\lambda$ e $\sigma$. Observe que raciocinando como acima temos que que $\{v_B, w_B\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como segue,

$$T(v_A) = v_B, \quad T(w_A) = w_B.$$

Como uma transformação linear está totalmente determinada conhecidas as imagens dos vetores de uma base, a transformação linear $T$ está única e totalmente determinada.

Seja $[T]$ a matriz de $T$. Afirmamos que esta matriz é inversível. Isto pode ser obtido observando que o determinante de $[T]$ é não nulo (justifique e complete). A seguir, construiremos explicitamente $T^{-1}$.

De fato, $T^{-1}$ é a transformação linear $S$ determinada por

$$S(v_B) = v_A, \quad S(w_B) = w_A.$$

Vejamos que $S \circ T = Id$. Considere qualquer vetor $u$, devemos ver que

$$S \circ T(u) = u.$$

Como $\{v_A, w_A\}$ é uma base, dado qualquer vetor $u$ podemos escreve-lo da forma $u = \alpha\, v_A + \gamma\, w_A$. Então,

$$\begin{aligned} S \circ T(u) &= S(T(\alpha\, v_A + \gamma\, w_A)) = S(\alpha\, T(v_A) + \gamma\, T(w_A)) = \\ &= S(\alpha\, v_B + \gamma\, w_B) = \alpha\, S(v_B) + \gamma\, S(w_B) = \\ &= \alpha\, v_A + \gamma\, w_A = u, \end{aligned}$$

como queremos provar.

Vejamos agora que

$$A = T^{-1}\, B\, T.$$

Para provar esta afirmação é suficiente ver que estas duas matrizes coincidem em uma base, por exemplo, na base $\{v_A, w_A\}$. Veremos que as imagens de $v_A$ são iguais (o caso $w_A$ é idêntico). Temos

$$A(v_A) = ((5 + \sqrt{5})/2) v_A.$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} T^{-1}\,B\,T(v_A) &= T^{-1}\,B(v_B) = T^{-1}((5+\sqrt{5})/2)v_B) = \\ &= (5+\sqrt{5})/2)T^{-1}(v_B) = (5+\sqrt{5})/2)v_A, \end{aligned}$$

como queremos provar.

Terminaremos este exemplo com algum comentários. Em primeiro lugar observamos que a matriz $[T]$ é um caso particular de *matriz de mudança de base* que veremos nas próximas aulas.

Os argumentos acima mostram o seguinte:

*Sejam $A$ e $B$ duas matrizes (por exemplo, $3\times 3$) que têm os mesmos autovalores (todos reais e diferentes). Então, $A$ e $B$ são semelhantes.*

Suponhamos que os autovalores são $\lambda, \sigma$ e $\gamma$. A ideia é repetir o argumento do exemplo anterior. Considere autovetores de $A$, digamos $v_A, u_A, w_A$ associados aos autovalores $\lambda, \sigma$ e $\gamma$, respetivamente, e autovetores de $B$, digamos $v_B, u_B, w_B$ associados a $\lambda, \sigma$ e $\gamma$. Como os autovalores são diferentes temos que

$$\beta_A = \{v_A, u_A, w_A\}, \qquad \beta_B = \{v_B, u_B, w_B\}$$

são duas bases de $\mathbb{R}^3$. Considere agora transformação linear $T$ que verifica

$$T(v_A) = v_B, \quad T(u_A) = u_B, \quad T(w_A) = w_B.$$

Como $\beta_A$ é uma base, $T$ está totalmente definida.

Exatamente como no exemplo anterior temos que

$$A = T^{-1}\,B\,T.$$

Complete os detalhes raciocinando como no caso anterior.

Muita atenção (!), na frase anterior o adjetivo *diferente* é essencial. Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

têm o mesmo determinante (4), o mesmo traço (4), o mesmo polinômio característico ($(2-\lambda)^2$), e os mesmos autovalores (2, de multiplicidade 2), mas não são semelhantes. Isto é devido a que o autovalor 2 tem multiplicidade dois. A seguir estudaremos este exemplo.

As matrizes $A$ e $B$ não são semelhantes pois $A$ possui uma base de autovetores (a base $\{(1,0),(0,1)\}$) e a matriz $B$ não tem uma base de autovetores (somente é possível encontrar - no máximo - um autovetor l.i., por exemplo $(0,1)$). Se $A$ e $B$ fossem semelhantes,

$$B = PAP^{-1},$$

então $\{P(1,0)$ e $P(0,1)\}$ formariam uma base de autovetores de $B$, que sabemos que não existe (!).

Completaremos sucintamente os detalhes das afirmações acima.

- Como $P$ é inversível, transforma vetores l.i. em vetores l.i., portanto, $\{P(1,0), P(0,1)\}$ é uma base.
- Em tal caso,

  $$B(P(1,0)) = P\,A\,P^{-1}(P(1,0)) = P\,A(1,0) = P(2,0) = 2\,P(1,0),$$

  portanto $P(1,0)$ é autovetor de $B$. Analogamente, $P(0,1)$ é outro vetor de $B$. Portanto, $B$ possui uma base de autovetores, o que é absurdo.