Álgebra Linear I - Lista 15

Diagonalização. Matrizes Simétricas

Respostas

1) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encontre matrizes ortogonais P e Q tais que $P^T AP$ e $Q^T BQ$ sejam diagonais.

Resposta:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2) Seja

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $M = PDP^{-1}$. Explicite P^{-1}.

Resposta: A matriz D é

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz P e sua inversa são

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Observe que $P^{-1} = P^t$ (pois P é ortogonal).

3) Considere a matriz

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (-1,1,0)$ e $\vec{w} = (1,1,-2)$ são autovetores de B, diagonalize a matriz B por uma matriz ortogonal (ou seja, encontre P ortogonal, D diagonal e a inversa P^{-1} tais que $B = PDP^{-1}$).

Resposta: A matriz é simétrica, portanto diagonalizável, admitindo uma base ortogonal de autovetores.

Fazendo os cálculos temos que o autovalor de $\vec{u} = (1,1,1)$ é 2, o autovalor de $\vec{v} = (-1,1,0)$ é -1, e o autovalor de $\vec{w} = (1,1,-2)$ é 1. Também vemos que estes vetores são ortogonais. Portanto,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que como P é ortogonal P^{-1} é sua transposta.

4) Seja A uma transformação linear tal que

- $A(1,1,1) = (0,0,0)$, $A(1,1,0) = (5,5,0)$ e $A(0,1,1) = (0,2,2)$. Estude se A é simetrica. É diagonalizável? Qual é sua forma diagonal?
- $A(1,1,1) = (0,0,0)$, $A(1,0,-1) = (2,0,-2)$ e $A(1,-1,0) = (2,-2,0)$. Estude se A é simetrica. É diagonalizável? Qual é sua forma diagonal? Determine a matriz de A.

Resposta: A matriz do primeiro item não é simétrica, pois não possui uma base ortogonal de autovetores. A matriz é diagonalizável, pois possui uma base de autovetores. Sua forma diagonal é a matriz diagonal cuja diagonal é (por exemplo) $0, 5, 2$.

Para o segundo item, observe que o plano $x + y + z = 0$ normal ao autovetor $(1,1,1)$ associado a 0 é um plano formado por autovetores. Portanto, existe uma base ortogonal de autovetores. Logo a matriz é simétrica e diagonalizável. Sua forma diagonal é a matriz diagonal cuja diagonal é (por exemplo) $0, 2, 2$.

5) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Determine uma base de autovetores A.

(c) Determine uma forma diagonal D de A.

(d) Escreva A da forma $A = MDM^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(e) Escreva, caso exista, a matriz A^{-1} inversa de A da forma $A^{-1} = NEN^{-1}$, onde E é uma matriz diagonal. Determine explicitamente N e N^{-1}.

Resposta: O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (6-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9)) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

Observe que o polinômio $(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$ tem raízes $\lambda = 4$ e $\lambda = -2$. Logo as raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda = 6, 4, -2$. Observe que este resultado é coerente com o traço ser 8 e o determinante ser -48.

Uma base de autovetores é obtida da seguinte forma.
autovetores associados a 6: são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 0 & 3 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 3 & 0 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-5x + 3y = 0, \quad 3x - 5y = 0.$$

As soluções são da forma $(0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(0, 1, 0)$.

autovetores associados a 4**:** são as soluções não triviais do sistema,

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 0 & 3 \\ 0 & 6-4 & 0 \\ 3 & 0 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema,

$$-3x + 3y = 0, \quad 3y = 0, \quad 3x - 3y = 0.$$

As soluções são da forma $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, um autovetor é, $(1, 0, 1)$.

autovetores associados a -2**:** Como a matriz é simétrica, os autovetores associados a -2 devem ser ortogonais a $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. Logo um autovetor é $(1, 0, -1)$.

Portanto, uma base de autovetores é

$$\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}.$$

Na base β a matriz de A é diagonal da forma

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Considerando agora uma base ortonormal de autovetores de A,

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\},$$

temos

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como M é ortogonal,

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M.$$

Como A tem determinante não nulo (o produto dos autovetores é diferente de zero) existe A^{-1}. Temos

$$A^{-1} = (MDM^{-1})^{-1} = MD^{-1}M^{-1} = MD^{-1}M.$$

Logo $N = N^{-1} = M$. Finalmente,

$$E = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

6)

- Estude se existe uma matriz simétrica com autovalores $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, e $\lambda = 3$ e autovetores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(1, -2, 1)$.

- Estude se existe uma matriz simétrica com autovalores $\lambda = 1$ e e autovetores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(1, -2, 1)$.

Resposta: A resposta à primeira questão é negativa, pois autovetores associados a autovalores diferentes de uma matriz simétrica são ortogonais.

A resposta à segunda questão é positiva, por exemplo o espelhamento no plano $x - 2y + z = 0$ (os vetores $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 3)$ são vetores do plano e autovetores associados ao autovalor 1, e $(1, -2, 3)$ é um autovetor associado a -1).

7) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1), \quad T(1, 1, -2) = (1, 1, -2).$$

Sabendo que a matriz de T é simétrica e possui determinante zero:

(a) Determine os autovalores de T.

(b) Determine uma base de autovetores de T.

(c) Escreva T da forma $T = PDP^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal.

(d) Calcule explicitamente T^{1000}.

Resposta: Das hipóteses $T(1,1,1) = (-1,-1,-1) = -1(1,1,1)$ e $T(1,1,-2) = (1,1,-2)$ temos que 1 e -1 são autovalores. Como o determinante é nulo e é igual ao produto dos autovalores, o terceiro autovalor é 0.

Já conhecemos dois autovetores. Como a matriz é simétrica, o terceiro autovalor deve ser perpendicular aos outros dois, ou seja, paralelo a $(1,1,1) \times (1,1,-2) = (-3,3,0)$. Logo uma base de autovetores é $\beta = \{(1,1,1),(1,1,-2),(1,-1,0)$.

Escolhendo a base ortonormal de autovetores

$$\gamma = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0).$$

Observe que na base γ a matriz de T é diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$[T] = PDP^{-1},$$

onde

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como P é ortogonal, temos

$$P^{-1} = P^t.$$

Finalmente,

$$T^{1000} = PD^{1000}P^{-1}.$$

Observe que

$$D^{1000} = \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & (1)^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
T^{1000} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1/3+1/6 & 1/3+1/6 & 1/3-2/6 \\ 1/3+1/6 & 1/3+1/6 & 1/3-2/6 \\ 1/3-2/6 & 1/3-2/6 & 1/3+4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Veja que o resultado é coerente: uma matriz simétrica com traço 2.

8) Estude se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

1. Se A é diagonalizável, também é diagonalizável qualquer potência de A.
2. Se A^2 é diagonalizável, então A é diagonalizável.
3. Seja A diagonalizável com PAP^{-1} diagonal. Então PA^2P^{-1} é diagonal. Então PA^nP^{-1} é diagonal para todo n.
4. Se A é diagonalizável, então existe uma única matriz P tal que PAP^{-1} é diagonal.

Resposta:

1. Se A é diagonalizável, também é diagonalizável qualquer potência de A: verdadeiro, qualquer autovetor de A com autovalor λ é autovetor de A^n com autovalor λ^n. Logo a base de autovetores de A é uma base de autovetores de A^n.

   Outra forma de provar a mesma afirmação é a seguinte. Se A é diagonalizável então
   $$A = P^{-1}\, D\, P.$$
   Portanto,
   $$A^2 = (P^{-1}\, D\, P)(P^{-1}\, D\, P) = P^{-1}\, D^2\, P.$$

Observe agora o seguinte,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{-2} \end{pmatrix},$$

portanto, D^2 é diagonal e o mesmo ocorre com qualquer potência de D.

Repetindo o processo, $A^{n-1} = P^{-1}\, D^{n-1}\, P$, e

$$A^n = (P^{-1}\, D\, P)(P^{-1}\, D^{n-1}\, P) = P^{-1}\, D^n\, P.$$

Logo A^n é semelhante à matriz diagonal D^n.

2. Se A^2 é diagonalizável, então A é diagonalizável: Falso, considere uma rotação no plano de $\pi/2$.

3. Seja A diagonalizável com PAP^{-1} diagonal. Então PA^2P^{-1} é diagonal. Então PA^nP^{-1} é diagonal para todo n: Verdadeiro. Se $PAP^{-1} = D$ então $PA^nP^{-1} = D^n$ e a potência de uma matriz diagonal é diagonal.

4. Se A é diagonalizável, então existe uma única matriz P tal que PAP^{-1} é diagonal. Falso. Por exemplo $2P$ também diagonaliza.... Deixo para v. encontrar casos mais interessantes... (por exemplo, considere diagonalização de projeções em $\mathbb{R}^3$).