Álgebra Linear I - Lista 15

Diagonalização. Matrizes Simétricas

1) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encontre matrizes ortogonais P e Q tais que $P^T AP$ e $Q^T BQ$ sejam diagonais.

2) Seja

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $M = PDP^{-1}$. Explicite P^{-1}.

3) Considere a matriz

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (-1,1,0)$ e $\vec{w} = (1,1,-2)$ são autovetores de B, diagonalize a matriz B por uma matriz ortogonal (ou seja, encontre P ortogonal, D diagonal e a inversa P^{-1} tais que $B = PDP^{-1}$).

4) Seja A uma transformação linear tal que

- $A(1,1,1) = (0,0,0)$, $A(1,1,0) = (5,5,0)$ e $A(0,1,1) = (0,2,2)$. Estude se a matriz de A na base canônica $[A]$ é simetrica. É diagonalizável? Qual é sua forma diagonal?

- $A(1,1,1) = (0,0,0)$, $A(1,0,-1) = (2,0,-2)$ e $A(1,-1,0) = (2,-2,0)$. Estude se a matriz de A na base canônica $[A]$ é simetrica. É diagonalizável? Qual é sua forma diagonal? Determine a matriz $[A]$.

5) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Determine uma base de autovetores A.

(c) Determine uma forma diagonal D de A.

(d) Escreva A da forma $A = MDM^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(e) Escreva, caso exista, a matriz A^{-1} inversa de A da forma $A^{-1} = NEN^{-1}$, onde E é uma matriz diagonal. Determine explicitamente N e N^{-1}.

6)

- Estude se existe uma matriz simétrica com autovalores $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, e $\lambda = 3$ e autovetores $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ e $(1,-2,1)$.
- Estude se existe uma matriz simétrica com autovalores $\lambda = 1$ e e autovetores $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ e $(1,-2,1)$.

7) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,1,1) = (-1,-1,-1), \quad T(1,1,-2) = (1,1,-2).$$

Sabendo que a matriz $[T]$ de T na base canônica é simétrica e possui determinante zero:

(a) Determine os autovalores de T.

(b) Determine uma base de autovetores de T.

(c) Escreva $[T]$ da forma $[T] = PDP^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal.

(d) Calcule explicitamente $[T]^{1000}$.

8) Estude se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

1. Se A é diagonalizável, também é diagonalizável qualquer potência de A.
2. Se A^2 é diagonalizável, então A é diagonalizável.
3. Seja A diagonalizável com PAP^{-1} diagonal. Então PA^2P^{-1} é diagonal. Então PA^nP^{-1} é diagonal para todo n.
4. Se A é diagonalizável, então existe uma única matriz P tal que PAP^{-1} é diagonal.