Álgebra Linear I - Lista 7

Combinação e independência linear. Bases

Respostas

1) Determine a para que o vetor $v = (1, a, -a)$ seja combinação linear dos vetores $u_1 = (2, 1, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 1)$.

Resposta: Para que o vetor v seja combinação linear dos vetores u_1 e u_2 estes três vetores devem ser coplanares, isto é, seu produto misto deve ser zero (observe que u_1 e u_2 não são paralelos). Portanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,a - 2\,a = -4\,a = 0.$$

Portanto, $a = 0$.

Outra forma de raciocinar é a seguinte. Devemos ter

$$(1, a, -a) = x\,(2, 1, 1) + y\,(0, 1, 1),$$

para certos números reais x e y. Obtemos o sistema

$$1 = 2\,x, \quad a = x + y, \quad -a = x + y.$$

Este sistema deve ter solução. Escalonando obtemos $a = 0$.

2)

1. Considere vetores v e u linearmente independentes. Estude se os vetores $v + u$ e $v - u$ são linearmente independentes.

2. Faça o mesmo com os vetores $v + \sigma u$ e $v - \lambda u$ onde λ e σ são números reais não nulos.

3. Considere agora três vetores linearmente independentes v_1, v_2 e v_3. Estude se os vetores

$$w_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad w_2 = v_1 + v_3, \quad \text{e} \quad w_3 = v_2 + v_3$$

são linearmente independentes.

4. Faça o mesmo com os vetores

$$u_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_2 = v_1 + v_2, \quad \text{e} \quad u_3 = v_1.$$

5. Suponha, finalmente, que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Estude se os vetores

$$w_1 = a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3, \quad w_2 = a_4v_1+a_5v_2+a_6v_3, \quad w_3 = a_7v_1+a_8v_2+a_9v_3$$

são linearmente independentes.

Resposta: No item (1) a resposta é afirmativa, os vetores são linearmente independentes: suponha que

$$\lambda(u+v) + \sigma(u-v) = \bar{0}, \quad (\lambda+\sigma)u + (\lambda-\sigma)v = \bar{0}.$$

Como u e v são l.i., temos

$$\lambda + \sigma = 0 \quad \text{e} \lambda - \sigma = 0.$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$\lambda = \sigma = 0.$$

Logo os vetores são l.i..

No segundo item o raciocínio é a idêntico, suponhamos que para certos α e γ se verifica

$$\alpha\,(v + \sigma\, u) + \gamma(v - \lambda\, u) = \bar{0}, \quad (\alpha+\gamma)\, u + (\alpha\,\sigma - \gamma\,\lambda)\, u = \bar{0}.$$

Como u e v são l.i.,

$$(\alpha + \gamma) = 0, \quad (\alpha\,\sigma - \gamma\,\lambda) = 0,$$

Portanto

$$\alpha\,(\sigma + \lambda) = 0.$$

Logo se $\sigma = -\lambda$ o sistema admite infinitas soluções ($\alpha = -\gamma$, α qualquer número real), e portanto os vetores são l.d.. Caso contrário a única solução é $\alpha = \gamma = 0$ e os vetores são l.i.

Para o item (3), consideremos uma combinação linear dos vetores w_1, w_2 e w_3 que seja o vetor nulo:

$$xw_1 + yw_2 + zw_3 = \bar{0} = (x+y)v_1 + (x+z)v_2 + (x+y+z)v_3 = \bar{0}.$$

Desta forma obtemos uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3 que é o vetor zero. Como os vetores v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes temos

$$x + y = 0, \quad x + z = 0, \quad x + y + z = 0.$$

Logo temos que resolver este sistema. Veja que este sistema só admite a solução trivial $x = y = z = 0$. Logo os vetores w_1, w_2 e w_3 são linearmente independentes.

No item (4), o raciocinio é totalmente similar, e, portanto, será omitido (de fato no seguinte caso é considerado o caso geral).

Finalmente, no item (5), para ver se w_1, w_2 e w_3 são l.i. escrevemos

$$x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = \bar{0},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(x_1a_1v_1 + x_1a_2v_2 + x_1a_3v_3) \quad &+(x_2a_4v_1 + x_2a_5v_2 + x_2a_6v_3)+ \\ &+(x_3a_7v_1 + x_3a_8v_2 + x_3a_9v_3) = \bar{0}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$(x_1a_1 + x_2a_4 + x_3a_7)v_1 + (x_1a_2 + x_2a_5 + x_3a_8)v_2 + (x_1a_3 + x_2a_6 + x_3a_9)v_3 = \bar{0}.$$

Como os vetores v_1, v_2 e v_3 são l.i. temos que,

$$x_1a_1 + x_2a_4 + x_3a_7 = 0, \quad x_1a_2 + x_2a_5 + x_3a_8 = 0 \quad x_1a_3 + x_2a_6 + x_3a_9 = 0.$$

Agora bem, a condição do determinante implica que este sistema homogêneo possui somente a solução trivial. Portanto, os vetores são l.i.

3) Sejam v e u vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$. Estude se u, v e $u \times v$ são linearmente independentes. Faça o mesmo com os vetores v e u e $(u \times v) + u$.

Resposta: Sim, são linearmente independentes: No primeiro caso é suficiente ver que o produto misto dos vetores $u \times v$, v e u é diferente de zero,

$$(u \times v) \cdot (u \times v) = |(u \times v)|^2 \neq 0,$$

mas isto segue do fato de que u e v não são paralelos, isto é, $u \times v \neq \bar{0}$.

No segundo caso é suficiente ver que o produto misto

$$(u \times v + u) \cdot (u \times v) = |(u \times v)|^2 + u \cdot (u \times v) = |(u \times v)|^2 \neq 0,$$

mas isto segue, novamente, do fato de que u e v não são paralelos.

4) Considere os vetores

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (1,1,0), \quad u_3 = (3,3,2), \quad u_4 = (2,2,2)$$

e o subespaço vetorial V gerado por u_1, u_2, u_3 e u_4.

a) Determine uma base β de V.

b) Determine uma base ortogonal β' de V (isto é, uma base formada por vetores mutuamente ortogonais).

c) Determine uma base ortogonal β'' de $\mathbb{R}^3$ que contenha a base β'.

d) Veja se $(2,2,4)$ pertence a V.

e) Escreva o vetor $(5,5,3)$ como combinação linear dos vetores da base β.

Resposta:
a) Como os vetores u_1 e u_2 não são paralelos (proporcionais) eles são linearmente independentes.

O vetor u_3 é combinação linear de u_1 e u_2. Isto pode ser verificado de duas formas. Veja que o determinante com linhas as coordenadas dos vetores u_1, u_2 e u_3 é nulo. Ou escreva

$$u_3 = x\,u_1 + y\,u_2.$$

Temos

$$3 = x + y, \quad 3 = x + y, \quad 2 = x.$$

Logo a solução é $u_3 = 2\,u_1 + u_2$.

Obviamente o vetor u_4 é combinação linear de u_1 e u_2 ($u_4 = 2\,u_1 + 0\,u_2$).

Portanto, uma base de V é $\beta = \{u_1, u_2\}$.

b) Para determinar β' determinamos a equação cartesiana de V. Como V é um plano e seu vetor normal é

$$u_1 \times u_2 = (-1, 1, 0)$$

e a equação cartesiana de V é

$$x - y = 0.$$

Por exemplo, $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ formam uma base ortogonal de V.

c) A base β'' já esta determinada (é suficiente acrescentar o vetor normal do plano à base β')

$$\beta'' = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, -1, 0)\}.$$

d) Como $2 - 2 = 0$, o vetor $(2, 2, 4)$ verifica a equação cartesiana de V, logo está em V.

e) Escrevemos,

$$(5, 5, 3) = x\,u_1 + y\,u_2.$$

Temos

$$5 = x + y, \quad 5 = x + y, \quad 3 = x.$$

Logo $x = 3$ e $y = 2$, isto é,

$$(5, 5, 3) = 3\,(1, 1, 1) + 2(1, 1, 0).$$

5) Considere os vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0), & v_2 &= (2, 0, 1), & v_3 &= (1, -3, 2), \\ v_4 &= (2, 2, 0), & v_5 &= (3, 1, 1), & v_6 &= (2, 3, a). \end{aligned}$$

a) Determine o valor de **a** no vetor v_6 para que os vetores v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 gerem um plano π.

b) Usando os vetores do item anterior, determine uma base β do plano π (ou seja os vetores da base são escolhidos entre os vetores $v_1, \dots, v_6$) e determine as coordenadas do vetor $(5, 1, 2)$ na base β.

c) Encontre uma base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que o vetor $v = (1, 2, 3)$ tenha coordenadas $(1, 2, 0)$ na base α.

Resposta:

(a) Os vetores devem pertencer ao mesmo plano. Observe que v_1 e v_2 não são coplanares. Portanto, determinam um plano cujo vetor normal é

$$(1, 1, 0) \times (2, 0, 1) = (1, -1, -2),$$

ou seja o plano

$$\pi\colon x - y - 2z = 0.$$

Veja que os vetores $(1, -3, 2)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 1, 1)$ pertencem ao plano. Finalmente, para o vetor $v_6 = (2, 3, a)$ pertencer ao plano π deve verificar a equação cartesiana do mesmo, ou seja

$$2 - 3 - 2a = 0, \quad a = -1/2.$$

Ou de outra forma, o vetor $v_6 = (2, 3, a)$ deve ser combinação linear (por exemplo) dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(2, 0, 1)$, isto é,

$$(2, 3, a) = \lambda(1, 1, 0) + \sigma(2, 0, 1),$$

para certos valores de λ e σ. Portanto,

$$\lambda + 2\sigma = 2, \quad \lambda = 3, \quad \sigma = a.$$

Resolvendo obtemos $\sigma = -1/2 = a$.

(b) Uma base β do plano é, por exemplo,

$$\beta = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1)\}.$$

De fato, é suficiente escolher dois vetores não paralelos da coleção $v_1, \ldots, v_6$ para obter uma base do plano gerado pelos seis vetores. As coordenadas do vetor $(5,1,2)$ na base β são (x,y) onde

$$(5,1,2) = x(1,1,0) + y(2,0,1), \qquad 5 = x + 2y, \quad x = 1, \quad 2 = y.$$

Portanto, as coordenadas do vetor $(5,1,2)$ na base β são

$$(5,1,2)_\beta = (1,2).$$

(c) Devemos ter

$$(1,2,3) = u_1 + 2\,u_2 + 0\,u_3, \quad (1,2,3) = u_1 + 2\,u_2,$$

ou seja, os vetores $(1,2,3), u_1, u_2$ devem ser coplanares. Escolhemos $u_1 = (1,0,0)$ (de fato, temos total liberdade para a escolha do primeiro vetor). Portanto,

$$(1,2,3) = (1,0,0) + 2\,u_2, \quad u_2 = (0,1,3/2).$$

Finalmente, o vetor u_3 deve ser qualquer vetor não coplanar com u_1 e u_2, por exemplo $(0,0,1)$. Por construção estes vetores são não coplanares e formam uma base. Em qualquer caso, verifique que

$$(1,0,0) \cdot ((0,1,3/2) \times (0,0,1)) \neq 0.$$

6)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)\}$$

Determine as coordenadas $(v)_\beta$ do vetor $v = (4,2,0)$ na base β.

(b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (3,3,4),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ.

(c) Determine k para que os vetores

$$\{(1,2,1);(2,k,1);(k,3,k)\}$$

não formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

(a) Escreva

$$(4,2,0) = x\,(1,1,0) + y\,(1,0,1) + z\,(0,1,1).$$

Em coordenadas,

$$4 = x + y, \quad 2 = x + z, \quad 0 = y + z.$$

Portanto $z = -y$,

$$4 = x + y, \quad 2 = x - y, \quad 6 = 2\,x, \quad x = 3.$$

Logo

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = -1.$$

Portanto,

$$(v)_\beta = (3,1,-1).$$

(b) Sejam $(w)_\delta = (x,y,z)$ as coordenadas de w na base δ. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= x\,(u_1 + u_2) + y\,(u_2 + u_3) + z\,(u_3 + u_1) = \\ &= (x + z)\,u_1 + (x + y)\,u_2 + (y + z)\,u_3. \end{aligned}$$

Como, por hipótese as coordenas de w na base α são $(3,3,4)$,

$$w = 3\,u_1 + 3\,u_2 + 4\,u_3$$

e as coordenadas de um vetor em uma base (no caso na base α) são únicas:

$$3 = x + z, \quad 3 = x + y, \quad 4 = y + z.$$

Portanto,

$$z - y = 0, \quad z = y, \quad z = y = 2, \quad x = 1.$$

Logo

$$(w)_\delta = (1,2,2).$$

(c) Para que os vetores não formem uma base não devem ser linearmente independentes. Ou seja,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^2 - 3) - 2\,(2\,k - 3) + k\,(2 - k) = -2\,k + 3 = 0.$$

Portanto,

$$k = 3/2.$$

7) Considere a família de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \{(1,2,3), (1,1,2), (2,2,4), (1,1,1), (2,2,2)\}.$$

a) Estude se os vetores da família $\mathcal{E}$ são linearmente independentes.

b) Determine todas as bases de $\mathbb{R}^3$ formadas por vetores diferentes que podem ser obtidas usando os vetores de $\mathcal{E}$ (isto é, bases formadas pelos mesmos vetores em ordem diferente contam como a mesma, ou seja, as bases $\{u, v, w\}$ e $\{v, w, u\}$ contam uma única vez).

Considere agora a família de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (0,1,1)\}.$$

c) Veja que β é uma base de $\mathbb{R}^3$.

d) Determine as coordenadas do vetor $(3,6,5)$ na base β.

e) Considere agora o vetor w que na base β tem coordenadas $(1,1,1)_\beta$ (isto é, $w = 1\,u_1 + 1\,u_2 + 1\,u_3$). Determine as coordenadas de w na base canônica.

f) Considere agora os vetores w_1, w_2 e w_3 que na base β têm coordenadas

$$w_1 = (1,1,0)_\beta, \quad w_2 = (1,2,2)_\beta, \quad w_3 = (0,-2,-1)_\beta.$$

Estude se os vetores w_1, w_2 e w_3 formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

item (a): Os vetores da família $\mathcal{E}$ não são l.i.: um conjunto com mais de três vetores de $\mathbb{R}^3$ nunca é l.i. (o maior número de vetores l.i. em $\mathbb{R}^3$ é três).

V. também pode obter explicitamente combinações lineares não trivias cujo resultado é o vetor nulo. Por exemplo:

$$(2,2,2) - 2\,(1,1,1) = (0,0,0).$$

item (b): Observe que uma base de $\mathbb{R}^3$ não pode conter simultaneamente os vetores $(1,1,2)$ e $(2,2,4)$, pois $(2,2,4) = 2\,(1,1,2)$, e, portanto, toda família de vetores contendo $(1,1,2)$ e $(2,2,4)$ é l.d..

Similarmente, uma base de $\mathbb{R}^3$ não pode conter simultaneamente os vetores $(1,1,1)$ e $(2,2,2)$, pois $(2,2,2) = 2\,(1,1,1)$, e, portanto, toda família de vetores contendo $(1,1,1)$ e $(2,2,2)$ é l.d..

Feitas estas observações, construiremos as bases possíveis, lembrando antes que uma base de $\mathbb{R}^3$ está formada por três vetores l.i.

Consideremos agora as bases que contém o vetor $(2,2,2)$. Como os vetores $(2,2,2)$ e $(1,1,2)$ não são paralelos podem formar parte de uma base. Similarmente, os vetores $(2,2,2)$ e $(2,2,4)$ podem formar parte da mesma base.

Pelos comentários já feitos,

- uma base contendo os vetores $(2,2,2)$ e $(1,1,2)$ não pode conter nem $(1,1,1)$ nem $(2,2,4)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é

  $$\beta_1 = \{(2,2,2),(1,1,2),(1,2,3)\},$$

  faltando conferir que os vetores são l.i..

- uma base contendo os vetores $(2,2,2)$ e $(2,2,4)$ não pode conter nem $(1,1,1)$ nem $(1,2,2)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é

  $$\beta_2 = \{(2,2,2),(2,2,4),(1,2,3)\},$$

  faltando conferir que os vetores são l.i..

Observe que conferir que os vetores de β_1 e β_2 são l.i. é o mesmo (os determinante cujas linhas são os vetores são um múltiplo do outro). Para ver que são l.i.,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\,(6-8) - 2\,(6-4) + 2\,(4-2) =$$
$$= -4 - 4 + 4 = 4 \neq 0.$$

Logo os vetores são l.i.

Consideremos agora as bases que contém o vetor $(1,1,1)$. Como os vetores $(1,1,1)$ e $(1,1,2)$ não são paralelos podem formar parte de uma base. Similarmente, os vetores $(1,1,1)$ e $(2,2,4)$ podem formar parte da mesma base. Como no caso anterior,

- uma base contendo os vetores $(1,1,1)$ e $(1,1,2)$ não pode conter nem $(2,2,2)$ nem $(2,2,4)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é

  $$\beta_3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\},$$

  faltando conferir que os vetores são l.i.. Mas isto decorre como no caso da base β_1.

- uma base contendo os vetores $(1,1,1)$ e $(2,2,4)$ não pode conter nem $(2,2,2)$ nem $(1,2,2)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é

  $$\beta_4 = \{(1,1,1),(2,2,4),(1,2,3)\},$$

  faltando conferir que os vetores são l.i.. Mas isto decorre como nos casos anteriores.

De fato já obtivemos todas as bases possíveis. Se consideramos agora as bases contendo $(2,2,4)$ obteremos bases com os mesmos vetores que β_2 e β_4. Se consideramos agora as bases contendo $(1,1,2)$ obteremos bases com os mesmos vetores que β_1 e β_3. Finalmente, toda base deve necessariamente conter o vetor $(1,2,3)$: isto é decorre dos vetores $(1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,1,2)$ e $(2,2,2)$ serem coplanares, todos estão no plano $x-y=0$, que não contém o vetor $(1,2,3)$.

V. poderia fazer de outra forma. Primeiro observar que os vetores $(1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,1,2)$ e $(2,2,4)$ são coplanares (todos estão no plano $\pi\colon\, x-y=0$) portanto, como o vetor $(1,2,3)$ não pertence ao plano π, necessariamente deve formar parte das bases. Fazendo uma árvore, obtemos

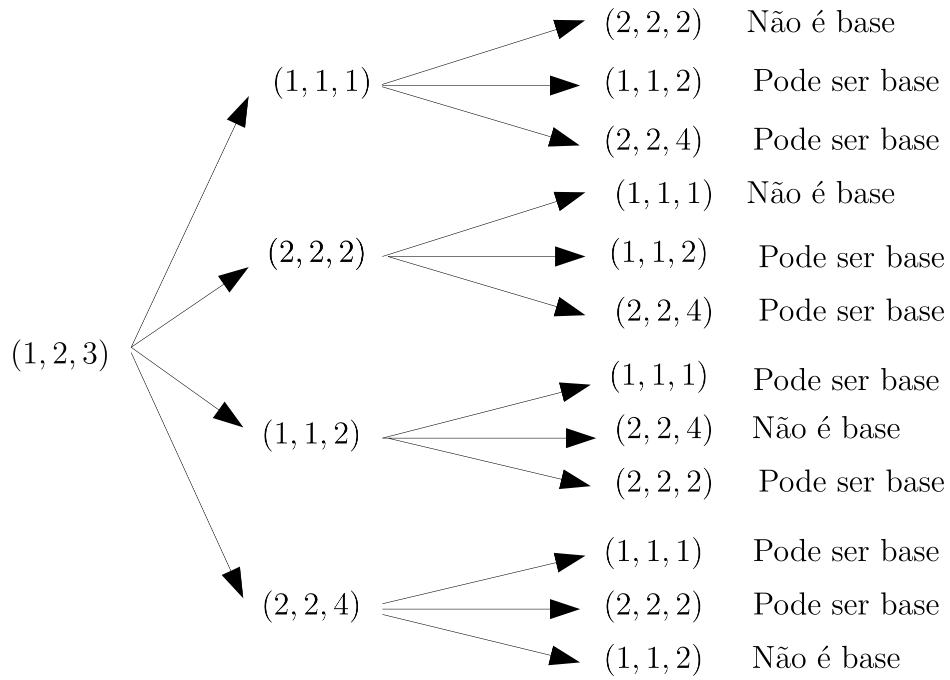

Figure 1: Bases contendo $(1,2,3)$

Observe que v. obtem oito bases, mas somente quatro com vetores diferentes.

item (c): É suficiente ver que os vetores são l.i., ou seja que seu produto misto é não nulo. Temos

$$\begin{aligned}(1,1,1)\cdot[(1,2,1)\times(0,1,1)] &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1\,(2-1) - 1\,(1-0) + 1\,(1-0) = \\ &= 1-1+1 = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Logo os vetores são l.i. e, portanto, β é uma base (três vetores l.i. de $\mathbb{R}^3$ formam uma base).

item (d): Devemos escrever

$$w = (3, 6, 5) = x\,(1, 1, 1) + y\,(1, 2, 1) + z\,(0, 1, 1),$$

onde (x, y, z) serão as coordenadas de w na base β. Temos os sistema

$$3 = x + y, \quad 6 = x + 2\,y + z, \quad 5 = x + y + z.$$

Da primeira e terceira equações obtemos $z = 2$. Logo, substituindo $z = 2$ nas duas primeiras equações,

$$3 = x + y, \quad 4 = x + 2\,y.$$

Logo $y = 1$ e $x = 2$. Portanto, as coordenadas de w na base β são $(2, 1, 2)$.

item (e): Temos que

$$w = (1, 1, 1) + (1, 2, 1) + (0, 1, 1) = (2, 4, 3).$$

Logo as coordenadas de w na base canônica são $(2, 4, 3)$.

item (f): Para ver que os vetores formam uma base é suficiente ver que são l.i., ou seja, que a única combinação linear destes vetores que fornece o vetor nulo é a trivial (todos os coeficientes iguais a zero). Suponhamos que

$$x\,w_1 + y\,w_2 + z\,w_3 = \bar{0}.$$

Temos que ver que $x = y = z = 0$. Escrevendo os vetores w_1, w_2 e w_3 em função de u_1, u_2 e u_3,

$$x\,(u_1 + u_2) + y\,(u_1 + 2\,u_2 + 2\,u_3) + z\,(-2\,u_2 - u_3) = \bar{0}.$$

Ou seja

$$(x + y)\,u_1 + (x + 2\,y - 2\,z)\,u_2 + (2\,y - z)\,u_3.$$

Como os vetores u_1, u_2 e u_3 são l.i.,

$$x + y = 0, \quad x + 2\,y - 2\,z = 0, \quad 2\,y - z = 0.$$

Da primeira e da última equação temos, $x = -y$ e $z = 2\,y$. Logo, substituindo na segunda, $-y + 2\,y - 4\,y = -3\,y = 0$, $y = 0$. Logo $x = y = z = 0$, portanto a única combinação linear dos vetores w_1, w_2, w_3 que é o vetor nulo é a trivial. Logo, os vetores são l.i., e, portanto, base.

8) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, -1, 2), \quad v_3 = (0, 3, -1).$$

(a) Determine a equação cartesiana do subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3.

(b) Determine uma base γ do subespaço $\mathbb{W}$ e as coordenadas do vetor $(2, 1, 3)$ nessa base γ.

(c) Determine uma base ortonormal $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de forma que w_1 seja paralelo a v_1 e w_2 esteja no plano gerado por v_1 e v_2.

(d) Considere o vetor $v_4 = (a, b, c)$. Determine a, b e c para que

$$\alpha = \{v_1, v_2, v_4\}$$

seja uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que as coordenadas do vetor $u = (4, 3, 1)$ na base α sejam $(u)_\alpha = (2, 1, 1)$.

Resposta:

item (a): Observe que os vetores v_1 e v_2 não são paralelos. Veja que eles geram o plano vetorial $\mathbb{U}$ cujo vetor normal é

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5, -1, -3),$$

isto é,

$$\mathbb{U}\colon 5\,x - y - 3\,z = 0.$$

O vetor v_3 pertence ao plano $\mathbb{W}$:

$$0 - (3) - 3\,(-1) = -3 + 3 = 0.$$

Portanto, $\mathbb{U} = \mathbb{W}$ e

$$\mathbb{W}\colon 5\,x - y - 3\,z = 0.$$

item (b): É suficiente escolher dois vetores linearmente independentes do plano

$$\mathbb{W}\colon 5\,x - y - 3\,z = 0.$$

Por exemplo $(1,2,1)$ e $(1,-1,2)$, obtendo a base

$$\gamma = \{(1,2,1),(1,-1,2)\}.$$

As coordenadas do vetor $(2,1,3)$ na base γ são (x,y) onde

$$(2,1,3) = x\,(1,2,1) + y\,(1,-1,2),$$

logo

$$2 = x + y, \quad 1 = 2\,x - y, \quad 3 = x + 2\,y.$$

Assim (terceira menos primeira)

$$y = 1.$$

Também temos $x = 1$. Assim,

$$(2,1,3)_\gamma = (1,1).$$

Bom, poderiamos ter sido mais espertos e escolher a base

$$\gamma = \{(2,1,3),(1,2,1)\}.$$

Nesse caso, de forma direta,

$$(2,1,3)_\gamma = (1,0).$$

item (c): Primeiro escolheremos uma base $\{h_1,h_2,h_3\}$ ortogonal (vetores perpendiculares entre si) e depois normalizaremos a base (escolheremos vetores unitarios $w_i = h_i/|h_i|$, $i = 1,2,3$).

O primeiro vetor deve ser $h_1 = (1,2,1)$. O segundo vetor h_2 deve ser ortogonal a h_1 e estar no plano $\mathbb{W}$, isto é, deve ser ortogonal ao vetor normal do plano, $(5,-1,-3)$. Portanto,

$$h_2 = (1,2,1) \times (5,-1,-3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-5,8,-11).$$

Observe que $h_3 = (5, -1, -3)$. Temos que a base

$$\{h_1 = (1, 2, 1), h_2 = (5, -8, 11), h_3 = (5, -1, -3)\}$$

é ortogonal. Normalizando

$$\beta = \left\{ w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1, 2, 1),\; w_2 = \frac{1}{\sqrt{200}}\,(5, -8, 11),\; w_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}\,(5, -1, -3) \right\}.$$

item (d): Para que as coordenadas de $u = (4, 3, 1)$ na base α sejam $(u)_\alpha = (2, 1, 1)$ Devemos ter

$$(4, 3, 1) = 2\,(1, 2, 1) + (1, -1, 2) + (a, b, c),$$

isto é

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 1 + a, & a &= 1, \\ 3 &= 4 - 1 + b, & b &= 0, \\ 1 &= 2 + 2 + c, & c &= -3. \end{aligned}$$

Logo

$$v_4 = (1, 0, -3).$$