$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Aula 10}}$

1. Combinação linear de vetores.
2. Subespaços e geradores.

Roteiro

1 Combinação linear de vetores

Definição 1 (Combinação linear de vetores). *Dada um conjunto de vetores $\mathcal{U} = \{u_1,\, u_2, \dots, u_m\}$ uma combinação linear dos vetores de $\mathcal{U}$ é um vetor v da forma*

$$v = \lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \cdots + \lambda_m\, u_m,$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são números reais.

Por exemplo, o vetor $v = (1, 1, 4)$ de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, pois

$$v = 1\,\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}.$$

O vetor v também é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$. Para provar esta afirmação devemos encontrar números reais x, y, z tais que

$$(1, 1, 4) = x\,(1, 0, 1) + y\,(1, 1, 0) + z\,(0, 1, 1).$$

Escrevendo a equação em coordenadas obtemos o sistema:

$$1 = x + y, \qquad 1 = y + z, \qquad 4 = x + z.$$

Verifique que o sistema admite a solução única

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 2.$$

Portanto, obtemos a combinação linear

$$(1, 1, 4) = 2\,(1, 0, 1) - (1, 1, 0) + 2(0, 1, 1).$$

Caso o sistema anterior não tivesse solução, teriamos que o vetor não seria combinação linear do conjunto de vetores considerado. Veremos a seguir um exemplo dessa situação.

Exercício 1. *Veja que o vetor* $(1, 2, 3)$ *não é combinação linear dos vetores* $(1, 1, 1)$*,* $(1, 0, 1)$*,* $(2, 1, 2)$ *e* $(0, 1, 0)$*.*

Resposta: Como no exemplo acima, devemos ver se existem números reais x, y, z e w tais que

$$(1, 2, 3) = x\,(1, 1, 1) + y\,(1, 0, 1) + z\,(2, 1, 2) + w\,(0, 1, 0).$$

Escrevendo em coordenadas, obtemos o sistema de equações:

$$1 = x + y + 2z, \quad 2 = x + z + w, \quad 3 = x + y + 2z.$$

Escalonando,

$$1 = x + y + 2z, \quad 1 = -y - z + w, \quad 2 = 0.$$

Logo o sistema não tem solução. Portanto, o vetor $(1, 2, 3)$ não é combinação linear dos vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$ e $(0, 1, 0)$. □

Resumindo, para determinar se um vetor é combinação linear de outros vetores (e em caso afirmativo encontrar uma combinação linear), devemos resolver um sistema de equações lineares. Quando o sistema não tem solução o vetor não é combinação linear dos vetores dados.

Observamos que, em certas situações, um vetor pode se escrever de mais de uma forma como combinação linear de um conjunto de vetores

Exemplo 1. *Considere o vetor* $(1, 2, -3)$ *e o conjunto de vetores*

$$\mathcal{U} = \{(1, 1, -2), (1, 0, -1), (-1, 2, -1)\}.$$

Então se verifica

$$(1, 2, -3) = 2\,(1, 1, -2) - (1, 0, -1)$$

e também

$$(1, 2, -3) = 2\,(1, 0, -1) - (1, 2, -1).$$

De fato, o vetor $(1, 2, 3)$ *pode ser escrito de infinitas formas como combinação linear dos vetores de* $\mathcal{U}$*. Encontre novas combinações lineares.*

Exemplo 2. *Determinar o conjunto dos vetores que são combinação linear dos vetores coplanares* $(1, 1, 1)$*,* $(1, 0, 1)$*,* $(2, 1, 2)$ *e* $(0, 1, 0)$*.*

Resposta: Raciocinando como nos exemplos anteriores, temos que um vetor (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$ e $(0, 1, 0)$ se, e somente se, o sistema abaixo tem solução:

$$a = x + y + 2z, \quad b = x + z + w, \quad c = x + y + 2z,$$

O sistema anterior é equivalente a

$$a = x + y + 2z, \quad b - a = -y - z + w, \quad c - a = 0,$$

Logo uma condição necessária é $a = c$. Logo, a priori, os vetores que são combinação linear são vetores da forma (a, b, a). Observe que o sistema

$$a = x + y + 2z, \quad b - a = -y - z + w,$$

admite solução, por exemplo, $x = a$, $y = z = 0$, $w = (b - a)/2$. De fato, é fácil ver que este sistema admite infinitas soluções (encontre v. mesmo outras soluções). Portanto, os vetores da forma (a, b, a) podem ser escritos de infinitas formas diferentes como combinação linear dos vetores dados.

De fato, obtemos que o conjunto de vetores procurado é o plano vetorial ρ: $x - z = 0$. Isto é, o conjunto de vetores $w = \overline{OP}$, onde P é um ponto do plano ρ. □

2 Subespaços vetorias (de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$). Geradores

Definição 2 (Subespaços)**.** *Dizemos que um conjunto $\mathbb{V}$ de vetores de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial se para cada par de vetores u e v de $\mathbb{V}$ e todo número real λ se verifica que*

- $u + v \in \mathbb{V}$ *e*
- $\lambda\, u \in \mathbb{V}$.

Em particular, $\bar{0} \in \mathbb{V}$ (é suficiente considerar $0\,\bar{u} = \bar{0}$).

De forma análoga a como fizemos acima, a retas e planos podemos associar conjuntos de vetores. A uma reta r lhe associamos o conjunto de vetores $\mathbb{V}_r$ formado pelos vetores w da forma $w = \overline{OP}$, onde $P \in r$. Analogamente, a um plano π lhe associamos o conjunto de vetores $\mathbb{V}_\pi$ formado pelos vetores w da forma $w = \overline{OP}$, onde $P \in \pi$.

Exemplos 1. *Retas e planos que contém a origem são os subsespaços de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$. *Isto é, se* r *e* π *são retas e planos que contém a origem então* $\mathbb{V}_r$ *e* $\mathbb{V}_\pi$ *são subespaços vetorias.*

De fato, estes conjuntos são os únicos subespaçõs vetorias não triviais (diferentes do vetor $\bar{0}$, *que é um subespaço vetorial (!), verifique) de* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$. *Em outras palavras,*

- *se* $\mathbb{V}$ *é um subespaço de* $\mathbb{R}^2$ *diferente de* $\{\bar{0}\}$ *e de* $\mathbb{R}^2$ *então existe uma reta* r *que contém a origem tal que* $\mathbb{V} = \mathbb{V}_r$,

- *se* $\mathbb{V}$ *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *diferente de* $\{\bar{0}\}$ *e de* $\mathbb{R}^3$ *então existem uma reta* r *ou um plano* π *que contém a origem tais que* $\mathbb{V} = \mathbb{V}_r$ *ou* $\mathbb{V} = \mathbb{V}_\pi$.

Resposta: Considere uma reta r que contém a origem (de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). Para ver que $\mathbb{V}_r$ é um subespaço vetorial usaremos a equação paramétrica da reta r. Um ponto P pertence a r se, e somense se, o vetor $\overline{OP}$ é paralelo ao vetor diretor $\bar{u}$ da reta r: $\overline{OP} = t\,\bar{u}$. Portanto,

$$\mathbb{V}_r \colon \bar{v} = t\,\bar{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\bar{u}$ é um vetor diretor da reta r.

Se consideramos dois vetores $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ de $\mathbb{V}_r$ temos $\bar{v}_1 = \overline{OP_1} = t_1\,\bar{u}$ e $\bar{v}_2 = \overline{OP_2} = t_2\,\bar{u}$, onde P_1 e P_2 são pontos da reta. Portanto,

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = t_1\,\bar{u} + t_2\,\bar{u} = (t_1 + t_2)\,\bar{u} = \overline{OP_3},$$

onde P_3 é um ponto de r. Portanto, o vetor soma $v_1 + v_2 \in \mathbb{V}_r$.

Para o produto de um vetor por um escalar procedemos de forma análoga (deixamos como exercício v. completar os detalhes).

Para ver que se π é um plano de $\mathbb{R}^3$ que contem a origem então $\mathbb{V}_\pi$ é um subespaço vetorial, usaremos também a equação paramétrica do plano π. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se,

$$\overline{OP} = t\,\bar{u} + s\,\bar{w}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

onde $\bar{u}$ e $\bar{w}$ são dois vetores diretores do plano não paralelos.

Se consideramos dois vetores $\bar{v}_1 = \overline{OP_1}$ e $\bar{v}_2 = \overline{OP_2}$, $P_1, P_2 \in \pi$, de $\mathbb{V}_\pi$ temos

$$\bar{v}_1 = t_1\,\bar{u} + s_1\,\bar{w} \quad \text{e} \quad \bar{v}_2 = t_2\,\bar{u} + s_2\,\bar{w}.$$

Assim,
$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (t_1 + t_2)\,\bar{u} + (s_1 + s_2)\,\bar{w} = \overline{OP_3},$$
onde $P_3 \in \pi$ Portanto, o vetor soma $v_1 + v_2$ pertence a $\mathbb{V}_\pi$.

Para verificar que o produto de um vetor por um escalar pertence procedemos de forma análoga (mais uma vez, deixamos como exercício v. completar os detalhes).

V. pode fazer os raciocínios anteriores usando as equações cartesianas de retas e planos. Por exemplo, para ver que se π é um plano de equação cartesiana $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ então $\mathbb{V}_\pi$ é um subespaço vetorial. Observe que um vetor $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ pertence a $\mathbb{V}_\pi$ se, e somente se, as coordenadas do vetor u verificam a equação do plano:
$$a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = 0.$$
Isto é equivalente a
$$u \cdot n = 0,$$
onde n é o vetor normal do plano.

Devemos ver que dados dois vetores u e v quaisquer de $\mathbb{V}_\pi$ se verifica $u + v \in \mathbb{V}_\pi$. Mas $u \in \mathbb{V}_\pi$ é equivalente a $u \cdot n = 0$. Analogamente, $v \in \mathbb{V}_\pi$ se, e somente se, $u \cdot n = 0$. Portanto, devemos ver que $(u + v) \cdot n = 0$. Mas isto decorre das propriedades do produto escalar:
$$(u + v) \cdot n = u \cdot n + v \cdot n = 0.$$
Analogamente, é imediato conferir que $\lambda\, v \in \mathbb{V}_\pi$ para todo número real.

É simples ver que uma reta r ou um plano π não contém a origem então $\mathbb{V} = \mathbb{V}_r$ ou $\mathbb{V} = \mathbb{V}_\pi$ não é um subespaço. Em primeiro lugar, é suficiente ver que não verifica a condição necessária de subespaço: $\bar{0} \notin \mathbb{V}$. Também podemos raciocinar diretamente. Vejamos no caso de um plano. A equação cartesiana do plano π é
$$\pi\colon a\,x + b\,y + c\,z = d.$$
Como o plano não contén a origem, temos que $d \neq 0$. Escolhemos dois vetores de $\mathbb{V}_\pi$, $v = \overline{OP_1} = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = \overline{OP_2} = (w_1, w_2, w_3)$ onde $P_1, P_2 \in \pi$. Isto é, as coordenadas dos vetores verificam
$$a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 = d, \qquad a\,w_1 + b\,w_2 + c\,w_3 = d.$$

Somando as equações:

$$a\,(v_1 + w_1) + b\,(v_2 + w_2) + c\,(v_3 + w_3) = 2\,d \neq d.$$

Ou seja, as coordenadas do vetor soma $\bar{v} + \bar{w}$ não verificam a equação do plano. Portanto, $\bar{u} + \bar{v} \neq \overline{OP_3}$, para qualquer ponto $P_3 \in \pi$.

Por exemplo, dada a circunferência C centrada em $(-1, 0)$ de raio 1 temos que $\mathbb{V}_C$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. A circunferência contém a origem, portanto o vetor $\bar{0}$ pertence a $\mathbb{V}_C$. Mas isto não é suficiente para $\mathbb{V}_C$ ser um subespaço. O vetor $(-2, 0)$ pertence a $\mathbb{V}_C$. Mas se multiplicamos este vetor por qualquer número diferente de zero ou de 1 o vetor resultante w não pertence $\mathbb{V}_C$: $w \neq \overline{0P}$ para todo $P \in C$. □

Resumindo, considere uma reta r ou um plano π (suponhamos em cartesianas para simplificar). Se consideramos $\mathbb{V}_r$, um vetor $w = (a, b, c)$ pertence a $\mathbb{V}_r$ se e somente $P = (a, b, c)$ verifica a equação da reta. Se consideramos $\mathbb{V}_\pi$, um vetor $w = (a, b, c)$ pertence a $\mathbb{V}_\pi$ se e somente $P = (a, b, c)$ verifica a equação do plano π.

Por este motivo, quando consideramos retas e planos, com certo abuso de notação, simplesmente escrevemos $\mathbb{V}_r = r$ e $\mathbb{V}_\pi = \pi$.

Definição 3 (Subsespaço gerado por vetores)**.** *Dado um conjunto de vetores* $\mathcal{W} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *o* subespaço $\mathbb{W}$ gerado *pelos vetores de* $\mathcal{W}$ *é o de conjunto de vetores que podem se escrever da forma*

$$v = \lambda_1\,u_1 + \lambda_2\,u_2 + \cdots + \lambda_m\,u_m,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *são números reais.*

Observamos que $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial. Devemos verificar que para todo par de vetores $u, v \in \mathbb{W}$ e todo número real $\sigma \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$u + v \in \mathbb{W} \quad \text{e} \quad \sigma\,u \in \mathbb{W}.$$

Veja que se

$$v = \lambda_1\,u_1 + \lambda_2\,u_2 + \cdots + \lambda_m\,u_m \quad \text{e} \quad w = \sigma_1\,u_1 + \sigma_2\,u_2 + \cdots + \sigma_m\,u_m,$$

então

$$v + w = (\lambda_1 + \sigma_1)\,u_1 + (\lambda_2 + \sigma_2)\,u_2 + \cdots + (\lambda_m + \sigma_m)\,u_m$$

e

$$\sigma\, v = (\sigma\, \lambda_1)\, u_1 + (\sigma\, \lambda_2)\, u_2 + \cdots + (\sigma\, \lambda_m)\, u_m.$$

Portanto, por definição de subespaço gerado, os vetores soma e produto por um escalar pertencem a $\mathbb{W}$.

Exemplo 3. *Pelos argumentos da seção anterior, o subespaço vetorial gerado pelos vetores*

$$\mathcal{W} = \{(1,1,1), (1,0,1), (2,1,2), (0,1,0)\}$$

é o conjunto de vetores

$$\mathbb{W} = \{(x, y, x) \colon x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Ou seja, o plano que contém a origem e tem vetores paralelos $(1,0,1)$ *e* $(0,1,0)$. *Ou em forma cartesiana, o plano de equação* $x - z = 0$*,*

Definição 4 (Geradores de um subespaço)**.** *Dado um subespaço vetorial* $\mathbb{W}$ *dizemos que* u_1*,* $u_2 \dots, u_m$ *são* geradores de $\mathbb{W}$ *se todo vetor* w *de* $\mathbb{W}$ *pode se escrever como combinação linear dos vetores* u_1*,* $u_2 \dots, u_m$.

Observe que a equação paramêtrica de um plano π e a equação paramétrica de uma reta r (contendo a origem) determinam os geradores de $\mathbb{V}_\pi$ e $\mathbb{V}_r$:

- Um plano é gerado por dois vetores paralelos ao plano não paralelos entre si.
- Uma reta é gerada pelo seu vetor diretor.

Por exemplo, para determinar os geradores do plano vetorial $\mathbb{V}_\pi \colon x - z = 0$ é suficiente considerar dois vetores paralelos a π e não paralelos entre si. Por exemplo, $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$. Observe que $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ e $(1,2,1)$ também são geradores. Veremos, que o mais conveniente é encontrar um conjunto de geradores com o menor número possível de elementos.

Exemplos 2. *Determinar dois vetores que gerem o plano vetoria* $\mathbb{V}_\pi \colon x + y - 2\,z = 0$. *Determinar um vetor que gere a reta vetorial definida como a interseção dos planos vetorias* $x + y + z = 0$ *e* $x + 2\,y + 3\,z = 0$.

Resposta: Temos que os vetores $(2,0,1)$ e $(1,-1,0)$ são paralelos ao plano, é suficiente ver que ão ortogonais ao vetor normal do plano

$$(2,0,1)\cdot(1,1,-2)=0, \quad (1,-1,0)\cdot(1,1,-2)=0.$$

Obviamente, estes vetores não são paralelos entre si. Portanto, $(2,0,1)$ e $(1,-1,0)$ geram o plano π. Assim, uma equação paramétrica de π é

$$\pi\colon (2t+s,-s,t), \quad t,s\in\mathbb{R}.$$

Finalmente, um vetor diretor da reta é $(1,1,1)\times(1,2,3)=(1,-2,1)$. Obviamente, o vetor $(1,-2,1)$ gera a reta. □

2.1 Geradores de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Para gerar $\mathbb{R}^2$ necessitamos dois vetores não paralelos. Por exemplo $(1,0)$ e $(0,1)$. Ou $(1,1)$ e $(1,2)$. Por exemplo, $(1,1)$, $(2,2)$ e $(3,3)$ não geram $\mathbb{R}^2$, somente geram a reta (t,t), $t\in\mathbb{R}$.

Para gerar $\mathbb{R}^3$ necessitamos três vetores não coplanares. Sabemos qual é o teste de coplanaridade:

- *u, v e w são coplanares se, e somente se, $u\cdot(v\times w)=0$.*

Exemplos 3.

- $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$ *geram* $\mathbb{R}^3$.
- $(1,1,1)$, $(1,2,2)$ *e* $(1,2,3)$ *geram* $\mathbb{R}^3$. *Para ver isto, verifique que* $(1,1,1)\cdot(1,2,2)\times(1,2,3)=1$.
- *Os vetores* $(1,1,1)$, $(1,1,2)$ *e* $(2,2,3)$ *não geram* $\mathbb{R}^3$. *Veja que seu produto misto é zero. Veja também que o vetor* $(1,2,3)$ *não está no subespaço gerado por estes vetores. Finalmente, verifique que o subespaço gerado por estes três vetores é o plano vetorial* $x=y$.

Exercício 2. *Verifique se* $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(2,2,3)$, *e* $(0,0,1)$ *geram* $\mathbb{R}^3$.

Resposta: A resposta é negativa: veja que são coplanares. Observe que neste caso não é possível calcular o produto misto (pois temos quatro vetores!). Raciocinamos da seguinte forma:

- Os vetores $(1,1,1)$ e $(1,1,2)$ são não paralelos. Temos que geram o plano vetorial $\mathbb{V}_\pi\colon x-y=0$.

- O vetor $(2,2,3)$ pertence a π. Isto pode ser feito de duas formas. Calculando $(2,2,3)\cdot(1,1,1)\times(1,1,2)$ e vendo que é zero (portanto, os três vetores são coplanares, e o plano determinado é necessariamente π). Ou vendo que $(2,2,3)$ verifica $x-y=0$. Isto significa que os conjuntos de vetores $\{(1,1,1),(1,1,2)\}$ e $\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ geram o mesmo subespaço (ou seja, o vetor $(2,2,3)$ nada acrescenta).

- Finalmente, repetimos o argumento anterior com o vetor $(0,0,1)$: este vetor está no plano $x-y=0$.

Conclusão, a família de vetores $\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3),(0,0,1)\}$ gera o plano $x-y=0$.

Voltando ao conjunto de vetores do exemplo. Se

$$\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3),(0,0,1)\}$$

gerasse $\mathbb{R}^3$. todo vetor (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ poderia ser escrito da forma

$$(a,b,c)=x\,(1,1,1)+y\,(1,1,2)+z\,(2,2,3)+w\,(0,0,1).$$

Isto é, o sistema

$$a=x+y+2\,z,\quad b=x+y+2\,z,\quad c=x+2\,y+3\,z+w,$$

sempre tería solução. Escalonando o sistema temos,

$$a=x+y+2\,z,\quad b-a=0,\quad c-a=y+z+w.$$

Logo somente podemos obter vetores da forma (a,a,c). Portanto, obtemos o plano $x-y=0$. $\square$