DETERMINAÇÃO DA FREQÜÊNCIA NATURAL DE EIXOS DE UM PROTÓTIPO DE MINI BAJA

Bernardo Pereira Foresti

Engenharia Mecânica – 1°. Período Contato: bpf@cce.campus.ufmg.br Professor: Rodney Josué Biezuner

Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

RESUMO:

O trabalho que se segue apresenta e explica uma aplicação prática do que é ensinado na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Uma parte de seu conteúdo foi transcrita a partir de um documento original desenvolvido por Rafael A. C. Laranja, Eder A. de Á. Martins, André Cervieri e Alberto Tamagna. Integrantes do Grupo de Mecânica Aplicada do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O título do documento é: "ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE EIXOS - APLICADA A UM PROTÓTIPO DE MINI BAJA" tal dissertação apresenta a comparação entre as análises numérica e experimental de um eixo traseiro de um protótipo de um veículo automotor do tipo mini baja e servirá como alicerce teórico daquilo que se segue.

1. INTRODUÇÃO

Na indústria automobilística, hoje em dia, existe uma crescente necessidade de testes em componentes ainda na fase de projeto a fim de prever seu desempenho quando em condições de operação. Fenômenos vibratórios como a ressonância de componentes automotivos em relação às velocidades de rotação do motor e tipos de terreno devem ser levados em consideração, pois podem levar a estrutura a esforços e desgastes excessivos diminuindo sua vida útil ou aumentando o desconforto do usuário. Atualmente, conforme o relato de Coutinho (1994), o procedimento utilizado pela indústria para testes sobre o comportamento vibracional é basicamente experimental, o que envolve um alto custo no desenvolvimento do produto.

Assim, é necessária a implantação de métodos numéricos simples e precisos de forma a predizer as freqüências naturais dos componentes e a faixa de sua atuação. Para tanto, o Método das Matrizes de Transferência oferece não só rapidez e precisão, como simplicidade e versatilidade conforme nos dizem Pestel e Leckie (1963), Thomson (1978), Coutinho (1994) e Matos (1997). O presente trabalho apresenta a comparação entre os resultados de análises dinâmicas experimentais e numéricas. A comparação é feita sobre o último eixo da transmissão de um protótipo de um veículo automotor do tipo mini baja, levando-se em conta toda a complexidade do problema.

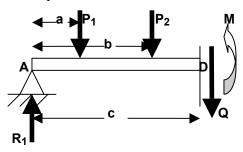
Para compreensão da análise que será feita se faz necessário prévio conhecimento de conteúdos da Mecânica, em particular sobre Resistência dos Materiais, Álgebra Linear, Geometria Analítica e Mecânica Vibratória. Como forma de auxílio se segue um glossário de termos:

1.1 GLOSSÁRIO TERMINOLÓGICO

Freqüência Natural: Se um sistema, após um distúrbio inicial, é deixado para vibrar por si próprio, a freqüência com a qual ele oscila sem a presença de forças externas é conhecida como sua *freqüência natural*. Um sistema vibratório com *n* graus de liberdade terá, em geral, *n* freqüências naturais distintas.

Momento Fletor e Esforço Cortante:

Figura 1: Barra submetida a esforços



O momento M da figura acima é chamado *momento fletor* da seção D. Seu valor pode ser obtido com o emprego da equação da estática que estabelece que a soma dos momentos, em relação a um ponto qualquer (e D em particular), é nula. Assim:

$$M = R_1x - P_1(x-a) - P_2(x-b)$$

O momento fletor M é o momento em D produzido por todos os esforços, ativos e reativos, que atuam naquela parte da estrutura que se conservou em equilíbrio (depois de abandonada a outra parte). Este momento deve também ser equivalente ao momento das tensões que se distribuem pelos diversos pontos da seção D. As tensões normais, únicas, que podem solicitar a seção de forma a produzirem um binário de momento M, são de tração, em determinada parte da seção, e de compressão na outra parte.

A força aplicada em D, e que no caso está contida em D, recebe o nome de força cortante e se representa com a letra Q. (Se esta força fosse inclinada em relação à seção transversal considerada, a força cortante seria a componente paralela à seção, e a força normal seria a componente perpendicular à seção). No exemplo em questão, para que haja equilíbrio, é necessário que:

$$Q = R_1 - P_1 - P_2$$

Resumindo, pode-se dizer que: *momento fletor* numa seção qualquer é a soma algébrica dos momentos produzidos pelos esforços externos (ativos e reativos) no centro de gravidade da seção considerada (e considerados somente os esforços externos que atuam numa das partes da estrutura, isto é, à esquerda ou à direita do corte imaginário efetuado ao longo da seção); *força cortante* (ou *esforço cortante*), de maneira análoga, é a resultante desses esforços projetada sobre a seção considerada.

2. O PROBLEMA, SEU MODELAMENTO E A MATEMÁTICA APLICADA

Visamos ao cálculo da freqüência natural do eixo de um protótipo de carro. Para tal será usado o Método de Matriz de Transferência. O método aplicado consiste em:

a) Dividir o elemento complexo cujas propriedades envolvem muitas variáveis (muitas vezes nem todas elas são conhecidas) em grupos mais simples de propriedades elásticas e dinâmicas menos complicadas. Ou seja, um modelo é construído à partir do eixo real e dividido em partes.

- **b)** Associar matrizes às partes. As características elastodinâmicas das partes, juntamente com as variáveis que irão alterá-las, podem ser expressas por uma matriz. Portanto cada parte poderá ter uma matriz associada a si. Neste passo cabe realizar a associação. Os valores das variáveis citadas previamente são encontrados através de experiências simples, conforme é dito detalhadamente em "Análise Numérica e Experimental de Eixos Aplicada a um Protótipo de Mini Baja.".
- c) Medir ou calcular em um instante t=0 (o eixo está inerte e o veículo desligado) os deslocamentos (vertical e giro) e as forças internas (momento fletor e esforço cortante). Tais valores irão compor um vetor coluna V_0 de quatro linhas chamado vetor de estado.
- **d)** Submeter o eixo às variáveis (ligar o veículo) e após alguns instantes, com o veículo ligado, medir ou calcular novamente os deslocamentos e as forças internas. Um novo vetor coluna (V1) de quatro linhas é composto.
- e) Escrever matematicamente o ocorrido, ou seja, compor o sistema linear $V_1 = A_1 V_0$, onde A_1 é uma matriz descoberta conforme relatado no item (b). Todos os elementos da matriz são conhecidos, exceto a freqüência natural, que após a multiplicação matricial será facilmente encontrada.

Dessa forma é solucionado o problema de encontrar a freqüência natural de um elemento do eixo; contudo, a freqüência natural global ainda não foi encontrada.

Observa-se que:

$$V_{1} = A_{1}V_{0}$$

$$V_{2} = A_{2}V_{1}$$

$$V_{3} = A_{3}V_{2}$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1} = A_{n-1}V_{n-2}$$

$$V_{n} = A_{n}V_{n-1}$$

Portanto

$$V_n = A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 A_1 V_0$$

Definindo

$$G = A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 A_1$$

tem-se:

$$V_n = GV_0$$

Com o procedimento acima, é possível associar um tempo *t* qualquer, com o momento no qual o eixo está inerte (t=0). Da mesma forma possibilita-se a associação entre a freqüência de cada subsistema com o sistema verdadeiramente.

f) Para encontrar a freqüência natural global, deve-se resolver o sistema linear $V_n = GV_0$. A incógnita será sempre a freqüência natural.

2.1 MATRIZES

As matrizes que podem ser associadas aos vetores de estado são:

Matriz A:

$$\begin{bmatrix} c_{0} - \sigma c_{2} & \ell[c_{1} - (\sigma + \tau)c_{3}] & ac_{2} & \frac{a\ell}{\beta^{4}}[-\sigma c_{1} + (\beta^{4} + \sigma^{2})c_{3}] \\ \frac{\beta^{4}}{\ell} c_{3} & c_{0} - \tau c_{2} & \frac{a}{\ell}(c_{1} - \tau c_{3}) & ac_{2} \\ \frac{\beta^{4}}{a} c_{2} & \frac{\ell}{a}[-\tau c_{1} + (\beta^{4} + \tau^{2})c_{3}] & c_{0} - \tau c_{2} & \ell[c_{1} - (\sigma + \tau)c_{3}] \\ \frac{\beta^{4}}{a\ell}(c_{1} - \sigma c_{3}) & \frac{\beta^{4}}{a} c_{2} & \frac{\beta^{4}}{\ell} c_{3} & c_{0} - \tau c_{2} \end{bmatrix}$$

onde **E** é módulo de Elasticidade; σ é o parâmetro de freqüência para deformação por corte; τ é o parâmetro de freqüência para inércia rotacional; **a** é o parâmetro de rigidez; Λ é o inverso da soma das raízes características; $\lambda 1, \lambda 2$ são as raízes características; **c0**, **c1** e **c2** são coeficientes da equação característica; ω frequência natural.

$$\sigma = \frac{\mu \omega^2 \ell^2}{GA_s} \qquad \lambda_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \frac{1}{4}(\sigma - \tau)^2} - \frac{1}{2}(\sigma + \tau)}$$

$$\tau = \frac{\mu i_y^2 \omega^2 \ell^2}{EJ_y} \qquad \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \frac{1}{4}(\sigma - \tau)^2} + \frac{1}{2}(\sigma + \tau)}$$

$$\beta^4 = \frac{\mu \omega^2 \ell^4}{EJ_y} \qquad c_0 = \Lambda(\lambda_2^2 \cosh \lambda_1 + \lambda_1^2 \cos \lambda_2)$$

$$a = \frac{\ell^2}{E^* J_y} \qquad c_1 = \Lambda\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sinh \lambda_2\right)$$

$$\Lambda = 1/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \qquad c_2 = \Lambda(\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2)$$

Matriz B:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -I_t \omega^2 & I & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

onde **m** é a massa concentrada; **l** é o momento de Inércia; w é a freqüência natural, conforme elemento 6 da figura 4.

Matriz C:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & k & I & 0 \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

onde **m** é a massa concentrada; **l** é o momento de Inércia; ω é a freqüência natural; **k** é a constante de mola, conforme elemento 2 da figura 4.

Matriz D:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & k & I & 0 \\ -m_1\omega^2 - \frac{km_2\omega^2}{k - m_2\omega^2} & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

onde **m1** é a massa concentrada solidária ao eixo; **m2** é a massa concentrada suspensa; **l** é o momento de Inércia; ω é a freqüência natural; **k** é a constante de mola, conforme elemento 4 da figura 4.

2.2 VALORES EMPÍRICOS

Os valores que se seguem foram obtidos experimentalmente e serão substituídos nas matrizes enumeradas anteriormente.

Tabela 1: Dados empíricos

Propriedades											
Elemento	L	E	G	1	Α	μ	m	l _t	K	m _{sup}	m _{inf}
N°	[m]	[x 10 ¹¹ Pa]	[x 10 ¹¹ Pa]	[x 10 ⁻⁸ m ⁴]	[x 10 ⁻⁴ m ²]	6,18	[kg]	[x 10 ⁻³ kg.m ²]	[x 10 ⁴ N/m]	[kg]	[kg]
1	0,1182	2,11	0,84	3,98	7,07	6,18					
2							6,52		21,3		
3	0,1317	2,11	0,84	3,98	7,07	6,18					
4									3,038	49,03	5,25
5	0,1123	2,11	0,84	3,98	7,07	6,18					
6							3,45	4,5			
7	0,3532	2,11	0,84	3,98	7,07	6,18					
8							3,16	5,56			
9	0,1536	2,11	0,84	3,98	7,07	6,18					
10									3,03	38,67	5,25
11	0,1242	2,11	0,84	3,98	7,07	6,18					
12							6,52		21,3		
13	0,1079	2,11	0,84	3,98	7,07						

Sendo: L o comprimento [m]; m a massa distribuída [kg]; m a massa concentrada [kg]; E o módulo de elasticidade [Pa]; I o momento de inércia [m4]; G o módulo de cisalhamento [Pa]; A a área da seção [m2]; k o coeficiente de rigidez [N/m]; It o momento transversal de inércia [kg.m2]; Ip o momento polar de inércia [kg.m2].

Cada elemento enumerado na tabela corresponde a um subsistema. Os subsistemas serão descritos no próximo item.

2.3 MODELO DO EIXO PARA ANÁLISE PELO MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

O modelo aplicado foi montado da seguinte forma: o eixo (sistema) representado pela figura 2 foi dividido em 13 elementos (subsistemas), cada um representado por um tipo de matriz de transferência. A figura 3 mostra as dimensões principais e a figura 4 o modelo utilizado.

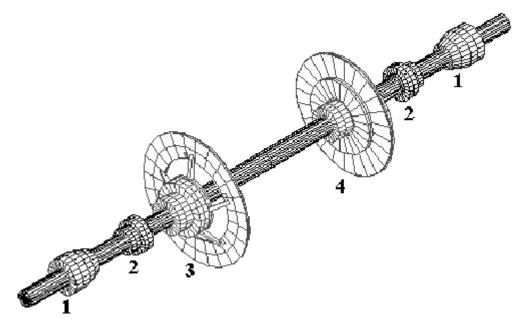
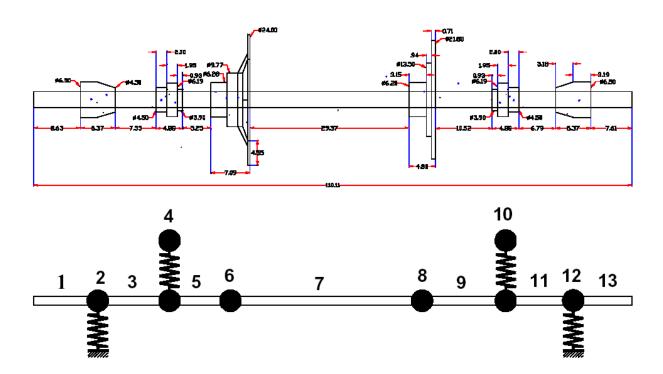


Figura 2: Desenho do eixo com seus principais componentes: 1) cubo de rodas; 2) mancais de fixação do eixo na balança; 3) coroa de acionamento e seu suporte; 4) disco de freio com suporte.



Figuras 3,4: Desenho esquemático do eixo traseiro de transmissão analisado com suas principais dimensões e o modelo simplificado (incluindo a suspensão), onde estão numerados os elementos para a análise pelo método de Matriz de Transferência.

- · Elemento 1 (segmento de eixo): Matriz A.
- · Elemento 2 (representa o conjunto roda e pneu lado direito): Matriz C.
- · Elemento 3 (segmento de eixo): Matriz A.
- **Elemento 4** (representa o efeito do peso da balança sobre o eixo, a mola equivalente da suspensão e o efeito do peso do chassi sobre tal mola): Matriz D.
- · Elemento 5 (segmento de eixo): Matriz A.
- · Elemento 6 (representa a coroa de transmissão): Matriz B.
- · Elemento 7 (segmento de eixo): Matriz A.
- · Elemento 8 (representa o disco de freio): Matriz B.
- · Elemento 9 (segmento de eixo) Matriz A.
- **Elemento 10** (representa o efeito do peso da balança sobre o eixo, a mola equivalente da suspensão e o efeito do chassi sobre tal mola): Matriz D.
- · Elemento 11 (segmento de eixo): Matriz A.
- · Elemento 12 (representa o conjunto roda e pneu lado direito): Matriz C.
- · Elemento 13 (segmento de eixo): Matriz A.

Observa-se que os elementos que se assemelham morfologicamente têm a mesma matriz de transferência associada.

2.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os autores do trabalho que originou o presente encontraram numericamente os seguintes resultados para a freqüência natural global do eixo:

Tabela 2: Resultados obtidos numericamente.

Modo	Frequência [Hz]
1	17,82
2	22,52
3	62,09

2.5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os autores do trabalho que deu origem a este encontraram através de processos experimentais descritos em "Análise Numérica e Experimental de Eixos – Aplicada a um Protótipo de Mini Baja." os seguintes valores para a fregüência natural global do eixo.

Tabela 3: Listagem das freqüências obtidas de um ruído branco como sinal de excitação.

Modo	Frequência [Hz]
1	8,0
2	21,0
3	63,5

Tabela 4: Listagem das frequências obtidas da "varredura" senoidal.

Modo	Frequência [Hz]
1	8,0
2	21,5
3	64.4

As figuras 5, 6 e 7 mostram a aparelhagem utilizada para descobrir experimentalmente o valor da freqüência natural.



Figura 5: Vista lateral do veículo com a roda dianteira esquerda apoiada sobre a mesa vibratória.



Figura 6: Detalhe da balança dianteira e fixação do acelerômetro piezoelétrico de monitoramento do sinal de entrada.

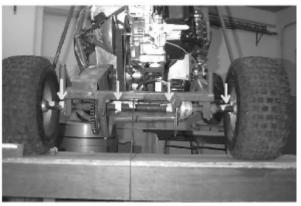


Figura 7: Detalhe da suspensão traseira, as setas destacam a posição de fixação dos acelerômetros no último eixo da transmissão.

4. EXEMPLO DE SOLUÇÃO

Supondo que o eixo do veículo é composto apenas pelos elementos 2, 4, 6, 8, 10 e 12 estamos interessados em calcular a freqüência natural global desse eixo. Já possuímos todos os dados empíricos, tais como todos os valores que constam na tabela da Subseção 2.2. Por cálculos específicos encontramos os vetores de estado R1 e R2, sendo que R2 foi encontrado 20 segundos depois de o carro ter sido ligado:

>R1:=matrix([[1],[1],[20],[30]]);

$$RI := \begin{bmatrix} 1\\1\\20\\30 \end{bmatrix}$$

> R2:=matrix([[1],[1],[-1.3],[60]]);

$$R2 := \begin{bmatrix} 1\\1\\-1.3\\60 \end{bmatrix}$$

Substituindo os dados empíricos em cada matriz, teremos a seguinte associação:

Elemento 2 - representa o conjunto roda e pneu do lado direito > Matriz A1

>A1:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,21.3,1,0], [-6.52*w^2,0,0,1]]);
$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 21.3 & 1 & 0 \\ -6.52 & w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 4 - representa o efeito do peso da balança sobre o eixo, a mola equivalente da suspensão e o efeito do peso do chassi sobre tal mola > **Matriz A2**

> A2:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-49.03*w^2-3.036*5.25*w^2/(3.038-5.25*w^2),0,0,1]]);
$$A2:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -49.03 & w^2 - \frac{15.93900 & w^2}{3.038 - 5.25 & w^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 6 - representa a coroa de transmissão > Matriz A3

```
> A3:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,-4.5*w^2,1,0],[-3.45*w^2,0,0,1]]);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.5 w^2 & 1 & 0 \\ -3.45 w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 8 - representa o disco de freio > Matriz A4

> A4:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,-5.56*w^2,1,0],[-3.16*w^2,0,0,1]]);
$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5.56 & w^2 & 1 & 0 \\ -3.16 & w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 10 - representa o efeito do peso da balança sobre o eixo, a mola equivalente da suspensão e o efeito do chassi sobre tal mola > **Matriz A5**

>A5:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[-38.67*w^2-3.03*5.25*w^2/(3.03-5.25*w^2),0,0,1]]);
$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -38.67 & w^2 - \frac{15.9075 & w^2}{3.03 - 5.25 & w^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 12 - representa o conjunto roda e pneu lado direito > Matriz A6

>A6:=matrix([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,21.3,1,0],[-6.52*w^2,0,0,1]]);
$$A6 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 21.3 & 1 & 0 \\ -6.52 & w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz que se origina da multiplicação de A1 por A2 por A3 por A4 por A5 por A6 é a matriz de transferência global e determina todas as variáveis que irão modificar os vetores de estado.

$$G := \text{multiply (A1, A2, A3, A4, A5, A6)};$$

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42.6 - 10.06 w^2 & 1 & 0 \\ -107.35 w^2 - \frac{15.93900 w^2}{3.038 - 5.25 w^2} - \frac{15.9075 w^2}{3.03 - 5.25 w^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembrando o que foi dito no item 2, R1=G*R2, que pode ser escrito como: R1=T, donde T=G*R2

```
> T:=multiply(G,R2);

T := \begin{bmatrix}
1. \\
1. \\
41.3 - 10.06 w^{2} \\
-107.35 w^{2} - \frac{15.93900 w^{2}}{3.038 - 5.25 w^{2}} - \frac{15.9075 w^{2}}{3.03 - 5.25 w^{2}} + 60.
\end{bmatrix}
```

Igualando termo a termo de R1 e T, temos:

```
> solve( {41.3-10.06*w^2=20}, {w}); 
 {w=-1.455093201}, {w=1.455093201}
> solve( {-107.35*w^2-15.93900*w^2/(3.038-5.25*w^2)-15.9075*w^2/(3.03-5.25*w^2)+60=30}, {w} ); 
 {w=-0.4893618834}, {w=0.4893618834}, {w=-0.7601964900}, 
 {w=0.7601964900}, {w=-0.8212199658}, {w=0.8212199658}
```

Apenas os resultados positivos têm significado físico. Cada resultado equivale a um modo de vibração do eixo.

OBS: Todo a Seção 3 foi desenvolvido através do software MAPLE versão 7.0.

4. CONCLUSÕES

De acordo com os autores que realizaram a análise descrita, "a diferença encontrada entre as análises numérica e experimental ocorre principalmente devido à complexidade do problema. Porque há impossibilidade de se isolar o componente a ser analisado de todo o conjunto sem que ocorram alterações nos resultados se faz necessária a correta observação e interpretação do fenômeno físico. Entretanto a diferença não invalida o uso da análise numérica, se levarmos em conta a análise específica do eixo traseiro onde ambas coincidiram com os resultados."

Foi possível observar que o Método de Matriz de Transferência é simples em comparação com a complexidade do problema e preciso se interpretado com bom senso.

Extrapolando, concluí-se que a criatividade, presente na aplicação do método para esta problemática, é capaz dentre outras coisas reduzir custos.

5. BIBLIOGRAFIA

- Rao, S. S., 1995, "Mechanical Vibrations", Addison-Wesley, New York.
- Nash, W. A., 1982, "Resistência dos Materiais"
- Graham, A., 1988, "Matrix Theory and Applications for Engineers and Mathematicians", Ellis Horwood Limited, Chichester.
- Laranja, R.A.C., Martins, E.A.A., Cervieri, A., Tamagna, A. "Análise Numérica e Experimental de Eixos – Aplicada a um Protótipo de Mini Baja." Departamento de Engenharia Mecânica, Grupo de Mecânica Aplicada, Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.