Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Aplicação de Álgebra Linear à Engenharia Civil: Projeto de Estrutura Metálica

Prof. Ricardo Takahashi – DMAT

Considere o problema do projeto de uma estrutura metálica como esboçada na Figura 1. Trata-se de um guindaste que deverá içar cargas. O problema consiste em determinar qual é o esforço mecânico em cada viga da estrutura, de modo que se possa escolher as vigas com a resistência adequada.

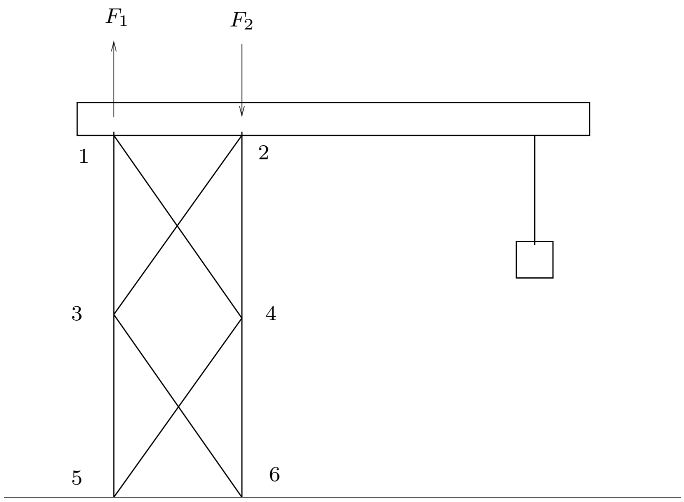

Figura 1: Diagrama de estrutura metálica composta de vigas.

O cálculo das forças que incidem na estrutura, F_1 e F_2, é imediato, conhecendo-se a massa que irá ser suspensa e o comprimento do braço do guindaste. Com essas forças, é preciso agora calcular a força exercida por cada viga nos nós (pontos de interseção de duas ou mais vigas) para que a estrutura permaneça em equilíbrio. Essas forças serão denotadas pelas variáveis f_{ij}, em que os índices indicam os nós ligados por esta viga. Assim, por exemplo, a força f_{41} significa a força exercida sobre o nó 4 pela viga que liga o nó 4 ao nó 1.

A somatória das forças em cada nó, de 1 a 6, deve ser nula tanto na direção horizontal quanto na direção vertical. Para montar o conjunto de equações, tomemos como exemplo o nó 1. O nó 1 é afetado pelas vigas que o ligam aos nós 2, 3 e 4. As equações que implicam no equilíbrio de forças sobre o nó 1 são:

$$\begin{aligned} f_{12}\cos\theta_{12} + f_{13}\cos\theta_{13} + f_{14}\cos\theta_{14} &= F_1 \\ f_{12}\sin\theta_{12} + f_{13}\sin\theta_{13} + f_{14}\sin\theta_{14} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

sendo que θ_{ij} representa o ângulo entre a viga (ij) e a vertical. Construindo cada equação da somatória das forças em cada um dos nós, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$
\begin{aligned}
&f_{12}\cos\theta_{12} + f_{13}\cos\theta_{13} + f_{14}\cos\theta_{14} = F_1\\
&f_{12}\sin\theta_{12} + f_{13}\sin\theta_{13} + f_{14}\sin\theta_{14} = 0\\
&f_{21}\cos\theta_{21} + f_{23}\cos\theta_{23} + f_{24}\cos\theta_{24} = F_2\\
&f_{21}\sin\theta_{21} + f_{23}\sin\theta_{23} + f_{24}\sin\theta_{24} = F_2\\
&f_{31}\cos\theta_{31} + f_{35}\cos\theta_{35} + f_{32}\cos\theta_{32} + f_{36}\cos\theta_{36} = 0\\
&f_{31}\sin\theta_{31} + f_{35}\sin\theta_{35} + f_{32}\sin\theta_{32} + f_{36}\sin\theta_{36} = 0\\
&f_{41}\cos\theta_{41} + f_{45}\cos\theta_{45} + f_{42}\cos\theta_{42} + f_{46}\cos\theta_{46} = 0\\
&f_{41}\sin\theta_{41} + f_{45}\sin\theta_{45} + f_{42}\sin\theta_{42} + f_{46}\sin\theta_{46} = 0\\
&f_{35}\sin\theta_{35} + f_{46}\sin\theta_{46} + f_{54}\sin\theta_{54} + f_{63}\sin\theta_{63} = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

A última equação diz respeito ao equilíbrio de toda a estrutura, que não deve ter em conjunto nenhuma aceleração horizontal.

Claramente, $f_{ij} = -f_{ji}$. Assim, por exemplo, $f_{12} = -f_{21}$. O conjunto de variáveis a serem determinadas, portanto, pode ser arranjado no vetor:

$$
f = \begin{bmatrix} f_{12}\\ f_{13}\\ f_{14}\\ f_{23}\\ f_{24}\\ f_{35}\\ f_{36}\\ f_{45}\\ f_{46} \end{bmatrix}.
$$

Definindo um vetor F e uma matriz Ω da seguinte forma:

$$
F = \begin{bmatrix} F_1\\ 0\\ F_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\Omega = \begin{bmatrix}
\cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & \cos\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\sin\theta_{12} & \sin\theta_{13} & \sin\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\cos\theta_{12} & 0 & 0 & \cos\theta_{23} & \cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\sin\theta_{12} & 0 & 0 & \sin\theta_{23} & \sin\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\cos\theta_{13} & 0 & -\cos\theta_{23} & 0 & \cos\theta_{35} & \cos\theta_{36} & 0 & 0\\
0 & -\sin\theta_{13} & 0 & -\sin\theta_{23} & 0 & \sin\theta_{35} & \sin\theta_{36} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\cos\theta_{14} & 0 & -\cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{46}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_{35} & \sin\theta_{36} & \sin\theta_{45} & \sin\theta_{46}
\end{bmatrix},
$$

é fácil verificar que a Equação (2) é equivalente à equação matricial:

$$\Omega f = F \tag{3}$$

Qual é a vantagem de se escrever (2) na forma (3)? Há inúmeras vantagens: Deve ter ficado claro para o leitor que há uma regra simples que leva diretamente do desenho da Figura 1 para as entradas da matriz Ω. Qualquer que fosse a estrutura composta de vigas que se ligam em nós, a regra seria a mesma. Seria possível representar por meio de uma matriz Ω qualquer estrutura, e essa representação poderia ser obtida automaticamente (por meio de um programa de computador). Uma vez nessa forma, torna-se pertinente perguntar: quais são as soluções desse problema? Quais são os valores necessários para as resistências que as vigas devem suportar? Dado um conjunto de forças externas F, o conjunto de forças sobre as vigas será dado por:

$$f = \Omega^{-1} F$$

Note-se que a matriz Ω deve ser invertível para que o problema tenha solução. Se não for invertível, isso quer dizer que a estrutura correspondente não é capaz de se manter de pé, e tem de ser trocada.

Considere agora a estrutura da Figura 2:

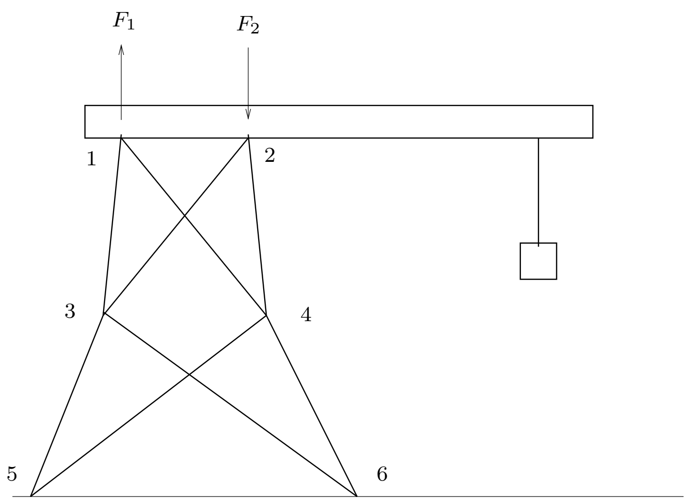

Figura 2: Diagrama de outra estrutura metálica composta de vigas.

A equação que resolve essa outra estrutura possui exatamente a mesma forma que a equação anterior. Só mudam os ângulos das vigas em relação à vertical, ou seja, as entradas da matriz Ω. É possível portanto mexer nas posições dos nós da estrutura, e resolver novamente o sistema a cada nova configuração. Dessa forma, é possível escolher a melhor geometria possível para a estrutura, de forma a obter, por exemplo, as soluções que representem o mínimo gasto de metal, ou a máxima resistência da estrutura, etc.

Em que esses exemplos diferem de um exemplo real de engenharia? Na prática, as estruturas com que se trabalha são maiores, possuindo um número muito maior de vigas. As estruturas também teriam profundidade, além de largura e altura (em outras palavras, seriam estruturas tridimensionais). Por fim, as vigas teriam cada uma o seu peso. Todos esses detalhes a mais iriam conduzir a equações maiores, mas que, essencialmente, teriam a mesma forma que a equação mostrada aqui.