Álgebra Linear I - Lista 14

Bases e matrizes ortogonais

1) Considere os vetores

$$u = \big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big), \quad v = \big(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big), \quad w = (1,0,0).$$

a) Mostre que u, v e w são ortogonais entre si e a norma de cada deles é igual a um;

b) Determine o volume do paralelepípedo formado pelos vetores u, v e w;

c) Mostre que u, v e w são linearmente independentes;

d) Sabendo que T é uma transformação linear e que

$$T(1,0,0) = u, \; T(0,1,0) = v \text{ e } T(0,0,1) = w,$$

determine a forma matricial de T. A transformação linear T é inversível?

e) Escreva cada vetor (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de u, v e w;

f) Calcule

$$(x,y,z)\cdot u, \quad (x,y,z)\cdot v, \quad (x,y,z)\cdot w.$$

Compare os resultados com o item anterior. Interprete geometricamente.

g) Determine T^{-1}.

2) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix}.$$

Estude que condições devem satisfazer os números reais a e b para que a matriz seja ortogonal.

3) Considere a transformação linear T definida pela matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/(3\sqrt{5}) & 5/(3\sqrt{5}) & 4/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

- Estude se a transformação linear T é inversível. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(1,0,0)$, $T^{-1}(0,1,0)$ e $T^{-1}(0,0,1)$.
- Resolva (usando T^{-1}) o sistema

$$T(X) = v, \quad \text{onde } X = (x,y,z)^t \text{ e } v = (1,1,0)^t.$$

- Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{5} & 0 & -4/\sqrt{5} \\ 4/3 & -8/3 & 8/3 \\ 8/(3\sqrt{5}) & 20/(3\sqrt{5}) & 16/(3\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

  Determine M^{-1}.

4) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Determine uma base de autovetores A.

(c) Determine uma forma diagonal D de A.

(d) Escreva A da forma $A = MDM^{-1}$ onde D é uma matriz diagonal. Determine explicitamente M e M^{-1}.

(e) Escreva, caso exista, a matriz A^{-1} inversa de A da forma $A^{-1} = NEN^{-1}$, onde E é uma matriz diagonal. Determine explicitamente N e N^{-1}.