Matemática Discreta

INTRODUÇÃO A TEORIA DOS GRAFOS

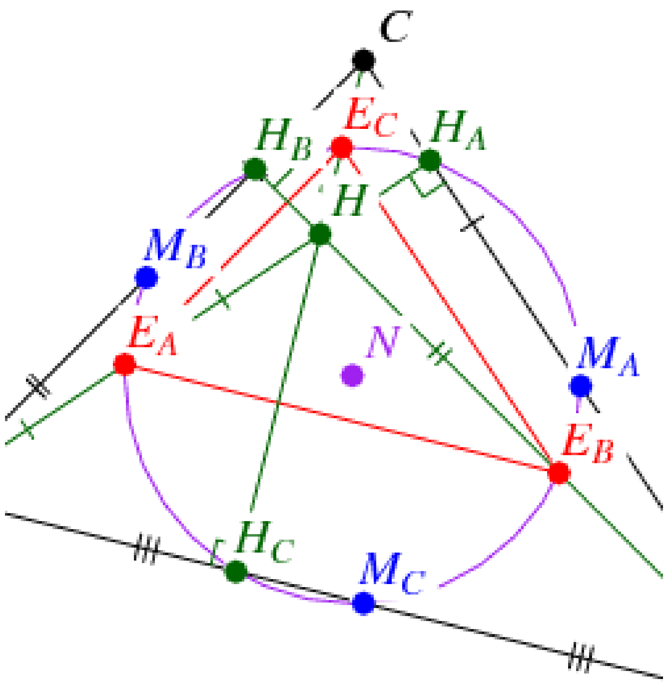
Introdução

Principais termos: Conjuntos Discretos, análise combinatório, topologia

Principais nomes: Euler, Hamilton, Leibniz

Grande desenvolvimento no século XX:

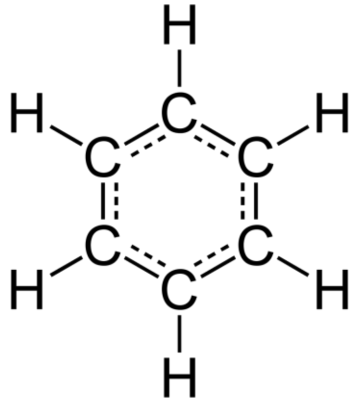
- Para resolução de problemas de otimização organizacional
- Pesquisa Operacional
- Problemas computacionais: complexidade e outros
- Buscas de caminhos: Navegadores, Roteadores e telecomunicações
- Redes sociais
- .....



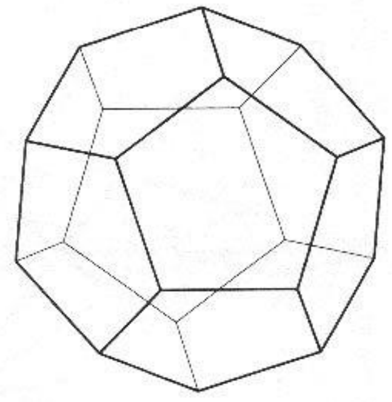
Introdução

1847 Kirchkoff, utilizou grafos (árvores) no estudo de circuitos elétricos

1857 Cayley, utilizou grafos no estudo hidrocarbonetos alifáticos(acíclicos) saturados



1859 Hamilton, inventou um jogo que consistia em achar um percurso fechado, envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado apenas uma vez.

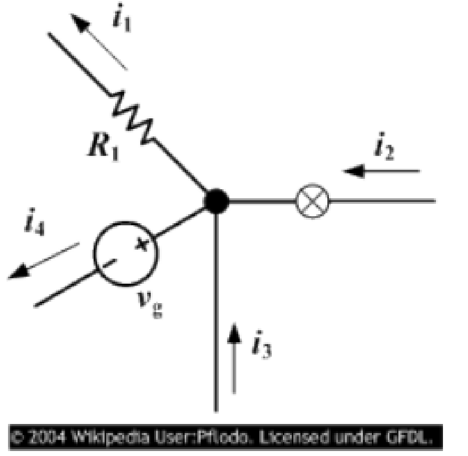


1926 Menger, utilizou no estudo de desconexão de itinerários

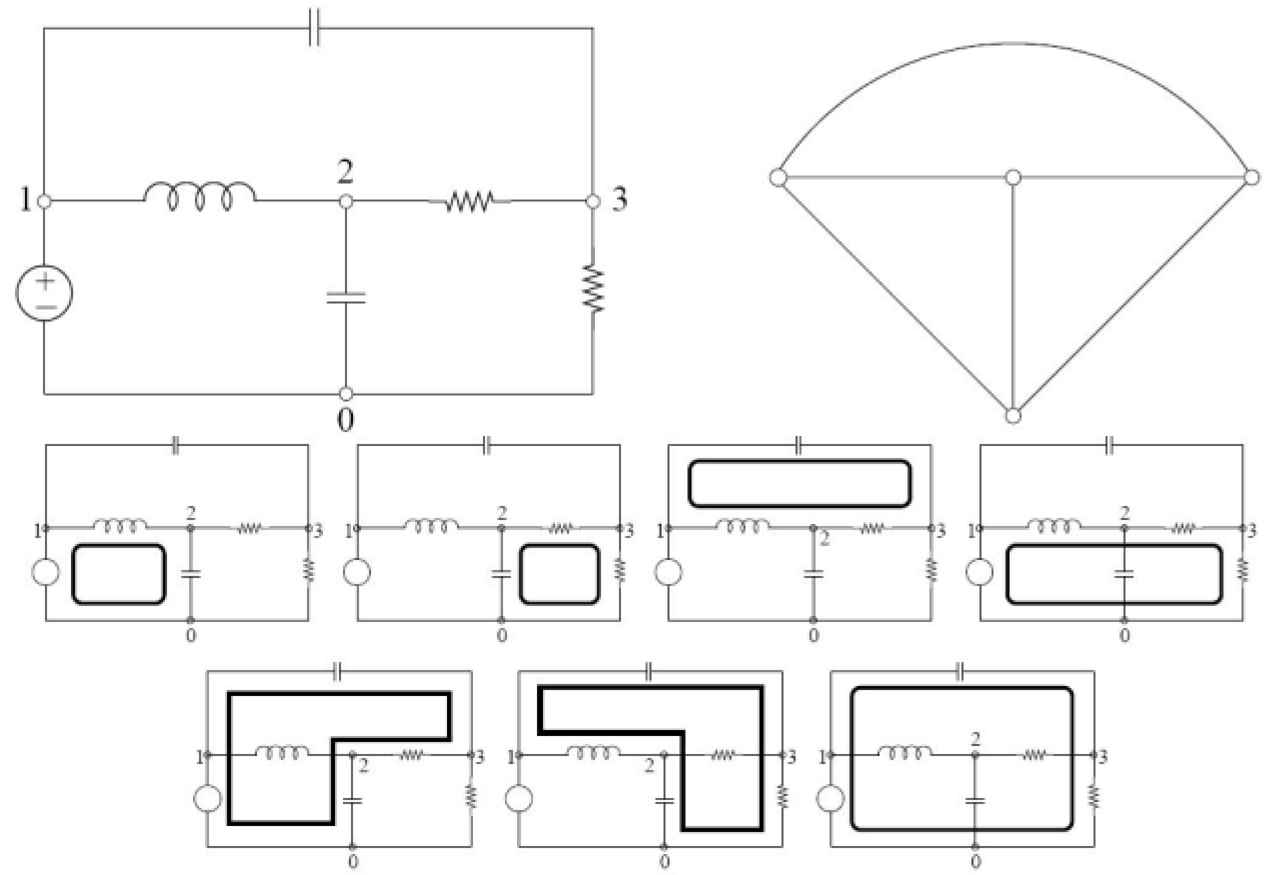
E, assim, segue.....

Introdução

Gustav Kirchoff (1824–1887), físico alemão. Foi o primeiro a analisar o comportamento de “árvores matemáticas” com a investigação de circuitos elétricos.

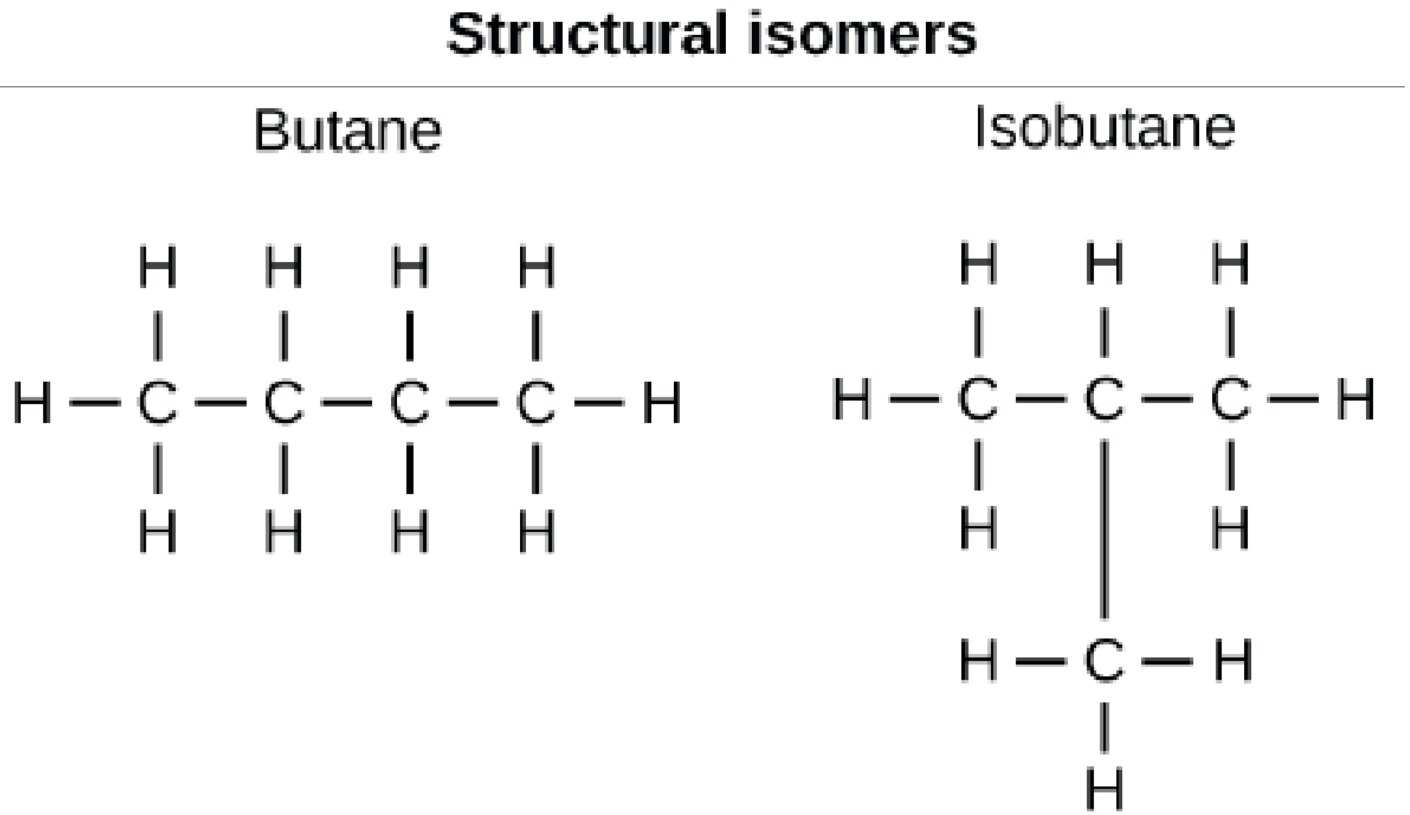


$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3$$



Introdução

Arthur Cayley (1821– 1895), matemático inglês. Logo após o trabalho de Kirchoff, Cayley usou “árvores matemáticas” para enumerar todos os isômeros para certos hidrocarbonetos.



Isômeros são moléculas de substâncias orgânicas que apresentam a mesma fórmula molecular, mas possuem propriedades e características estruturais diferentes

Introdução

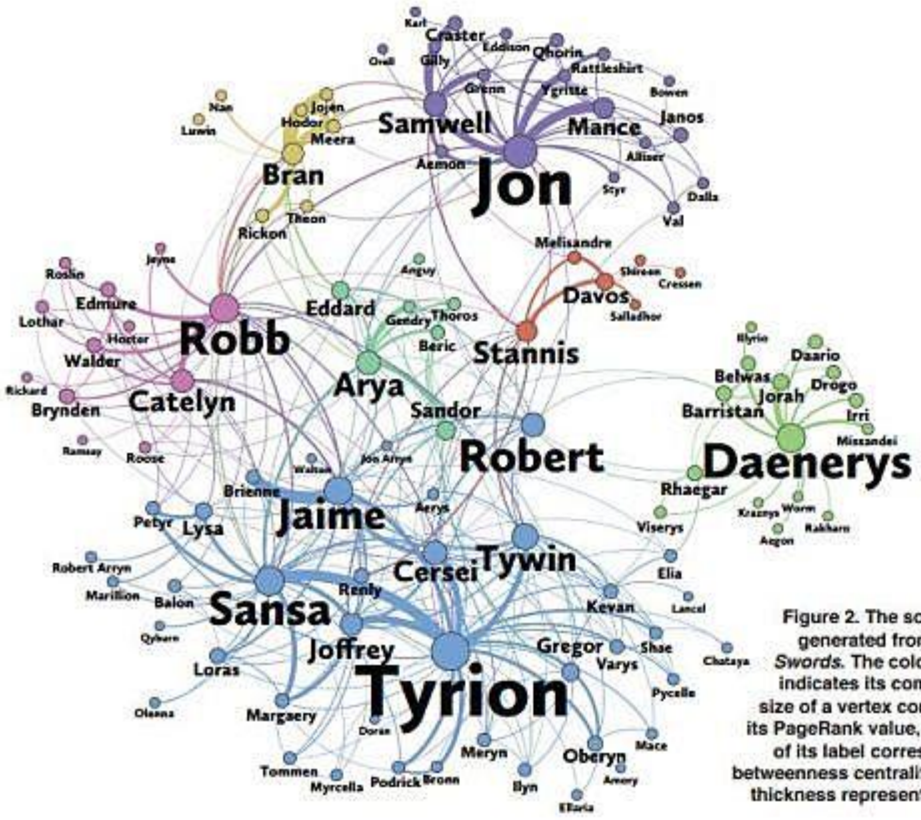
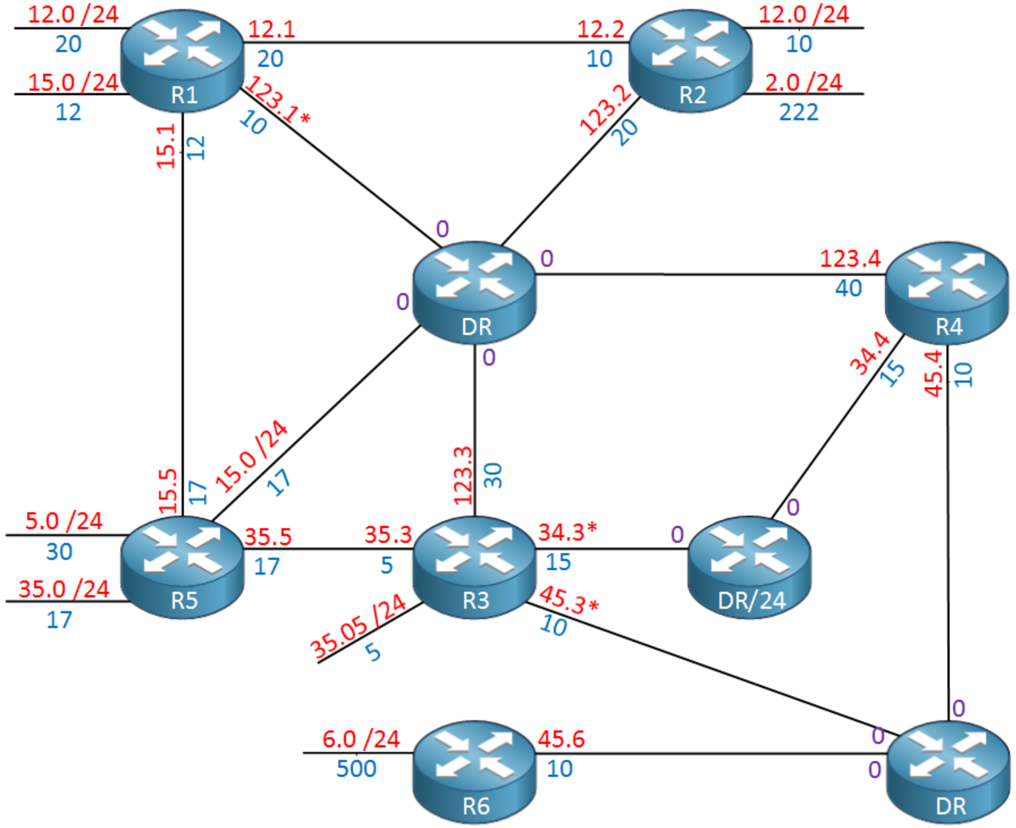


Figure 2. The social network generated from *A Storm of Swords*. The color of a vertex indicates its community. The size of a vertex corresponds to its PageRank value, and the size of its label corresponds to its betweenness centrality. An edge's thickness represents its weight.

Sociometria

Introdução

Comunicação de Dados

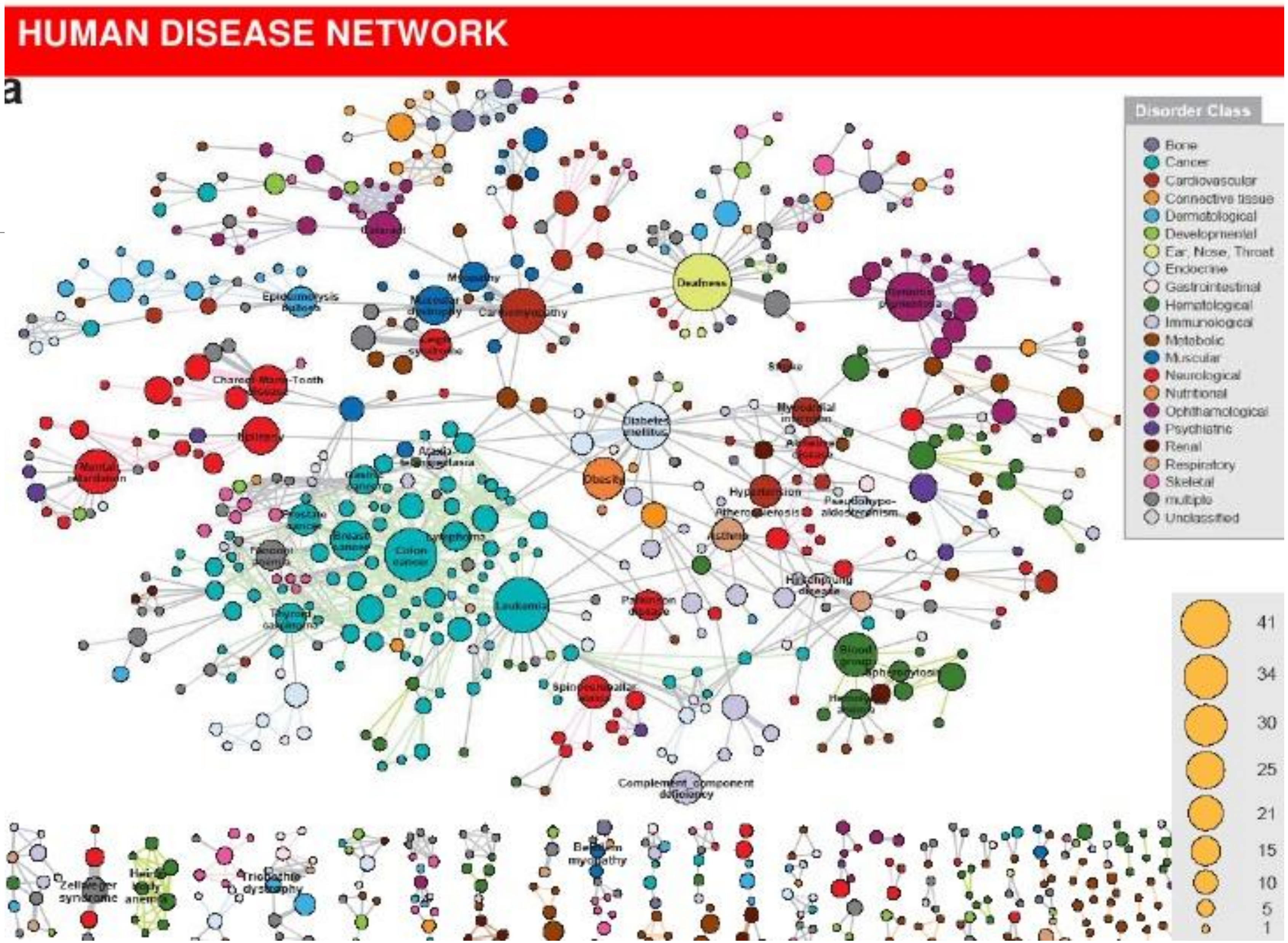


Introdução

Rotas / Logística

Introdução

Ciências de Dados (Data Science)



Introdução

Seja uma região formada por vegetarianos e canibais.

Inicialmente, dois vegetarianos e dois canibais estão na margem esquerda (ME) de um rio.

Existe um barco que pode transportar no máximo duas pessoas e sempre atravessa o rio com pelo menos uma pessoa.

O objetivo é achar uma forma de transportar os dois vegetarianos e os dois canibais para a margem direita (MD) do rio.

Em nenhum momento, o número de canibais numa margem do rio pode ser maior que o número de vegetarianos.

Introdução

Solução:

– Notação para representar cada cenário possível.
– Modelo para representar a mudança de um cenário em outro válido

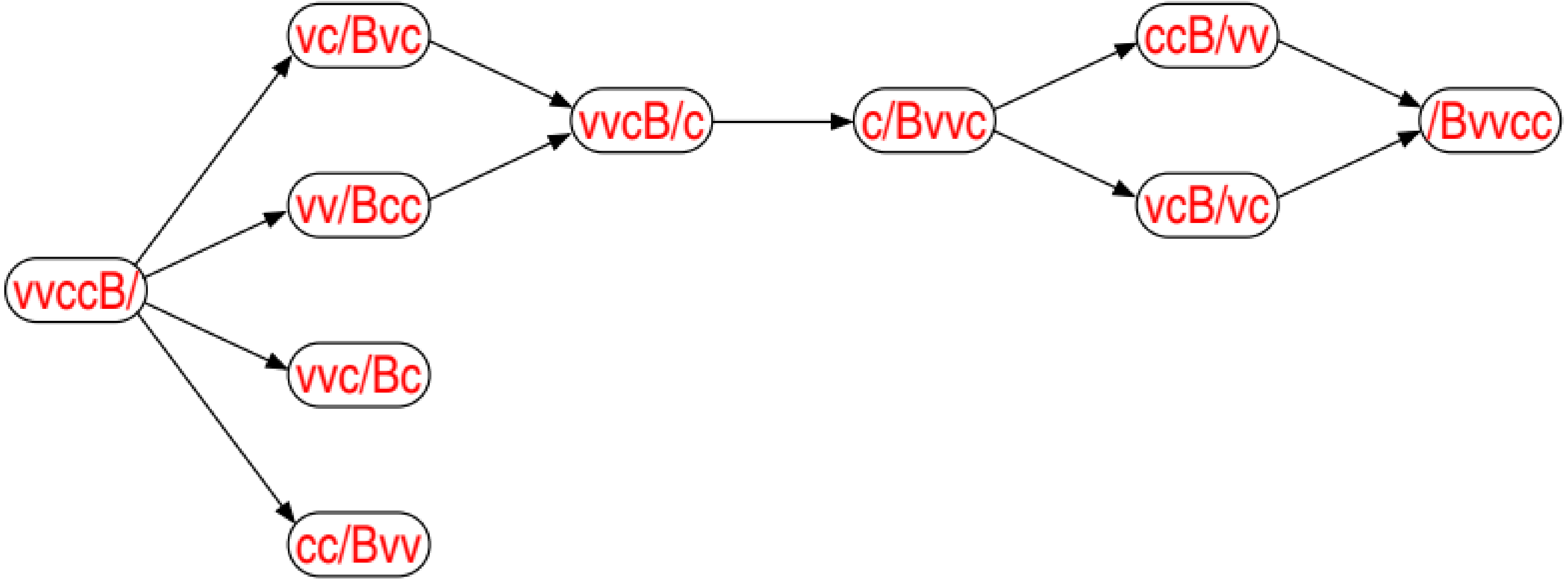
Notação: ME/MD

– vvccB/ → ME: 2v, 2c e o barco (B); MD: –.
– vc/Bvc → ME: 1v, 1c; MD: B, 1v e 1c.

Modelo: grafo
– Vértice: cenário válido.
– Aresta: transição válida de um dado cenário em outro.

Introdução

Uma possível sequência válida de cenários é :



Introdução

Relembrando

$\in$ → pertence

$\notin$ → não pertence

$\forall$ → para todo e qualquer

$\varnothing$ → conjunto vazio

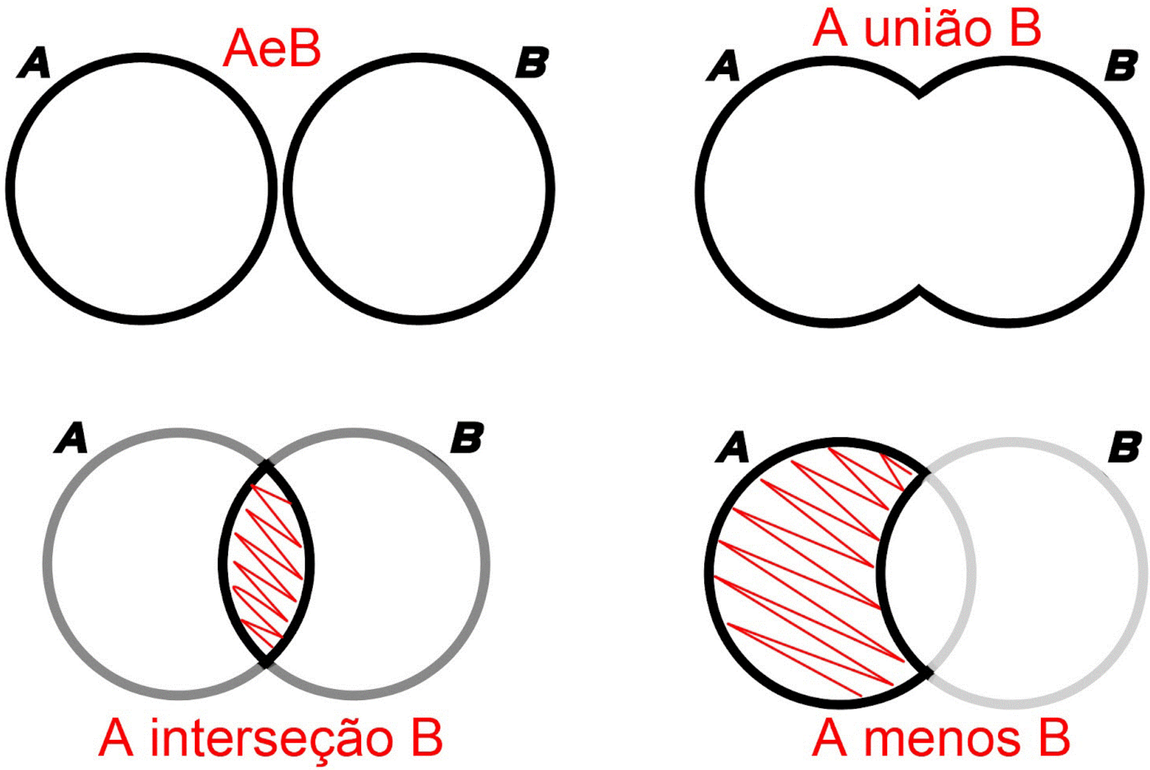
$\cap$ → intersecção

$\cup$ → união

$A \subset B$ → A está contido em B

$A \not\subset B$ → A não está contido em B

$B \supset A$ → B contem A



Principais Noções

Família Enumerável

- Coleção de objetos iguais ou diferentes, que podem ser citados em correspondência biunívoca com os números naturais.

Grau de Multiplicidade

- Grau de multiplicidade *p* de uma família enumerável é o maior número de elementos iguais nela encontrado
- p=1, a família se reduz a um conjunto.

Conjunto das Partes

- O conjunto de subconjuntos de um conjunto **X**. Será denotado de **P(X)**
- O conjunto de partes de **X** com **k** elementos será denotado por $\mathbf{P_k(X)}$ – corresponde as combinações **k** a **k** dos elementos de **X**
- A potência $\mathbf{X^k}$ é o conjunto de todas as k-uplas ordenadas $(\mathbf{x_1,\dots,x_n})$ onde $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{X}, \mathbf{1} \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{k}, \mathbf{1} \le \boldsymbol{k} \le |\boldsymbol{X}|$. Corresponde aos arranjos com repetição **k** a **k** dos elementos de **X**

Principais Noções

Mas, o que é um Grafo?

Um grafo é um estrutura **G=(V,E)** onde **V** é um conjunto discreto, e **E** é uma família de elementos não vazios, definidos em função dos elementos de **V**.

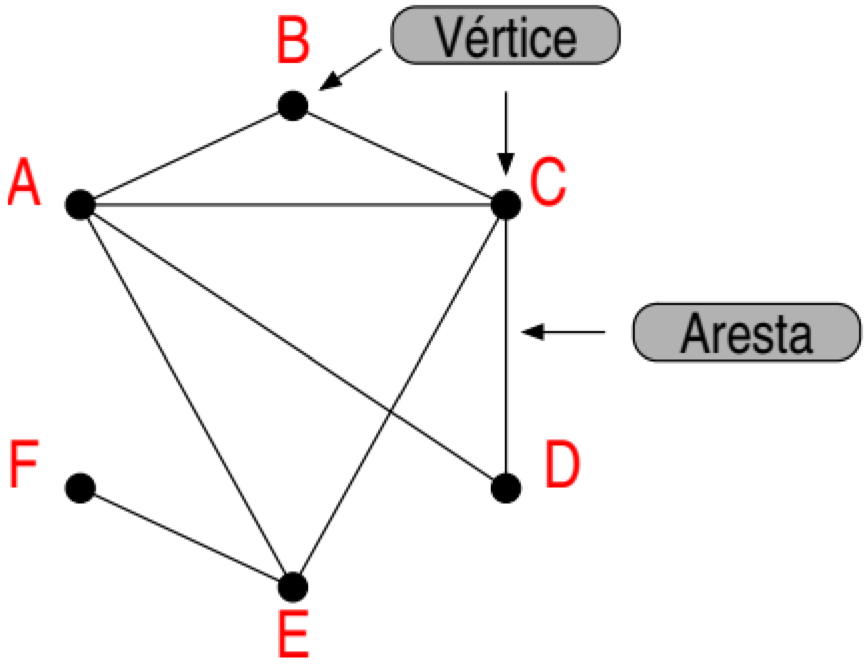
Os elementos **V** são chamados vértices, nós ou pontos. E o valor **n = |V| é ordem do grafo**

Uma família **E** pode ser entendida como sendo a relação ou conjunto de relações de *adjacências*, cujo os elementos são chamados de:

- **Arestas – quando não orientadas**
- **Arcos – quando orientadas**

m=|E| => Tamanho do grafo

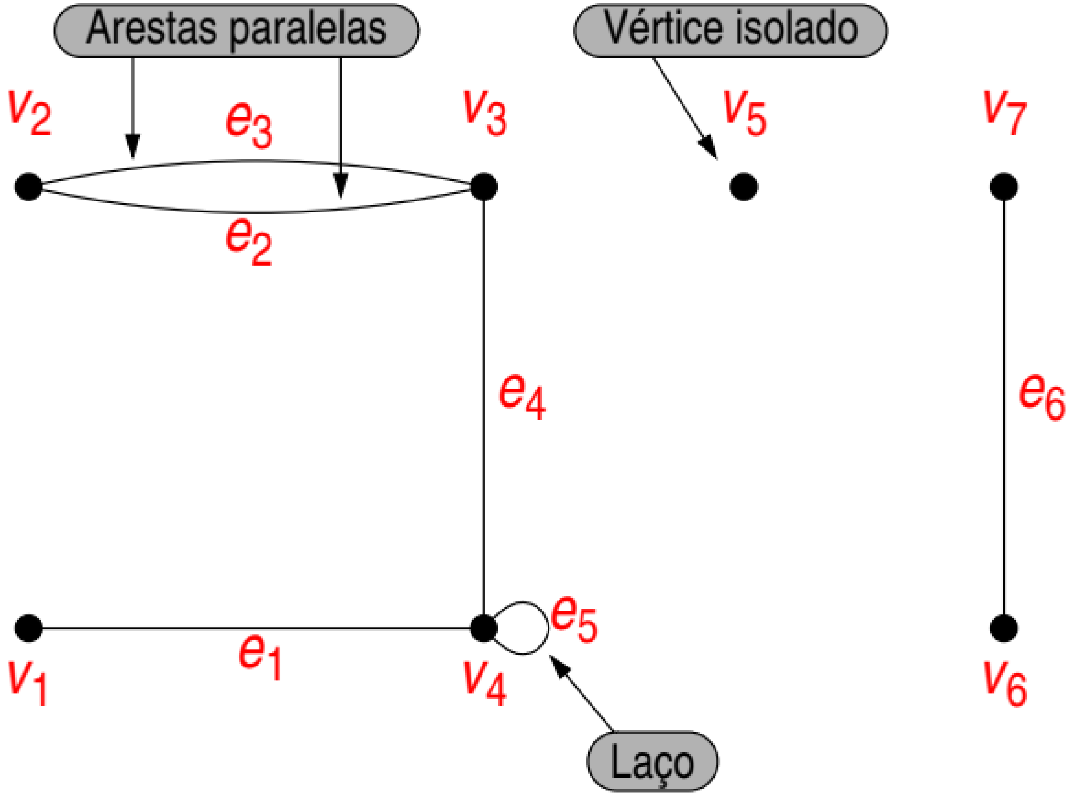
Principais Noções



Principais Noções

- Cada aresta está associada a um conjunto de um ou dois vértices, chamados nós terminais
- **Extremidade** de uma aresta: vértice da aresta
- Função aresta–extremidade: associa aresta a vértices
- **Laço** (*Loop*): aresta somente com nó terminal.
- Arestas **paralelas**: arestas associadas ao mesmo conjunto de vértices
- Uma aresta é dita **conectar** seus nós terminais
- Dois vértices que são conectados por uma aresta são chamados de **adjacentes**
- Um vértice que é nó terminal de um laço é dito ser **adjacente a si próprio**
- Uma aresta é dita ser **incidente** a cada um de seus nós terminais
- Duas arestas incidentes ao mesmo vértice são chamadas de **adjacentes**
- Um vértice que não possui nenhuma aresta incidente é chamado de **isolado**
- Um grafo com nenhum vértice é chamado de **vazio**

Principais Noções



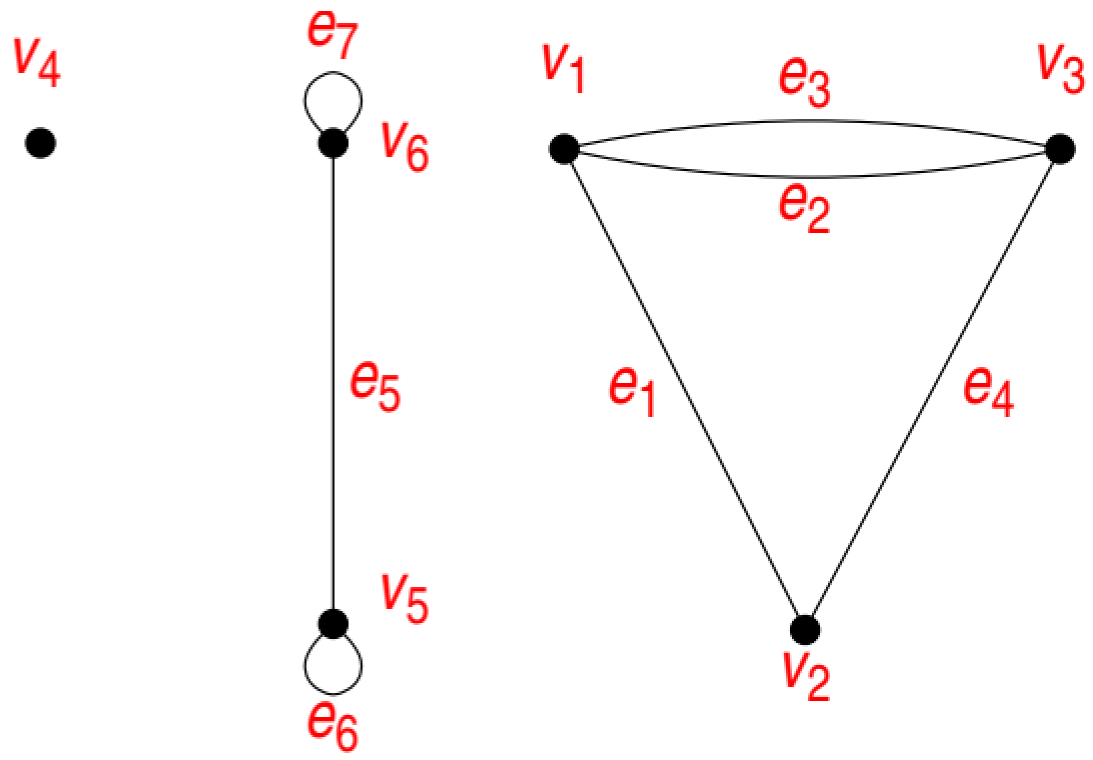
Principais Noções

Conjunto de vértices: *{v1; v2; v3; v4; v5; v6}*

Conjunto de arestas: *{e1; e2; e3; e4; e5; e6; e7}*

Função aresta–vértice:

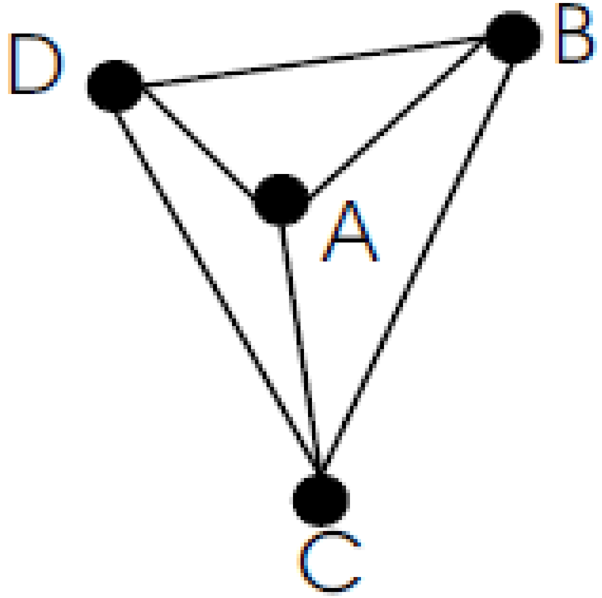
Aresta	Vértice
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_3\}$
e_3	$\{v_1, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_3\}$
e_5	$\{v_5, v_6\}$
e_6	$\{v_5\}$
e_7	$\{v_6\}$



Principais Noções

Grafo simples

Um grafo simples é um grafo que não possui laços nem arestas paralelas. Num grafo simples, uma aresta com vértices (nós terminais) *u* e *v* é representada por *uv*

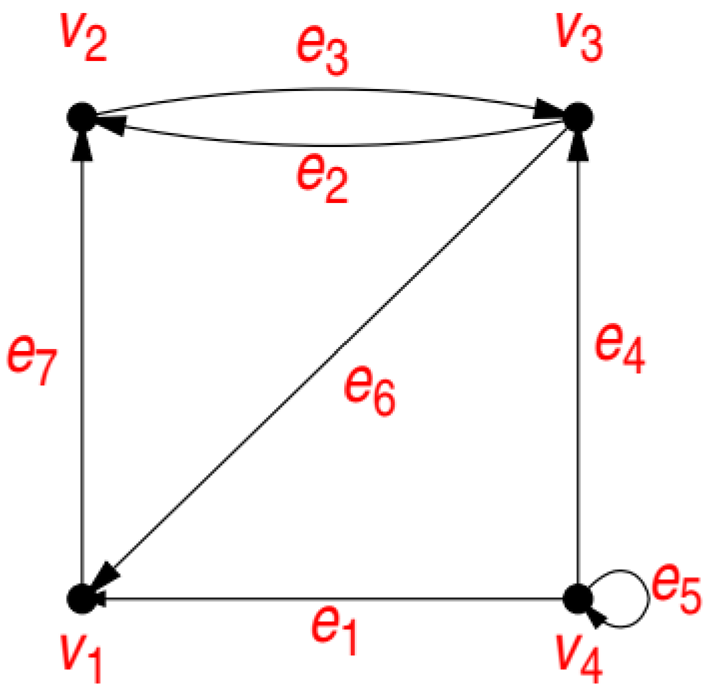


Principais Noções

Grafo dirigido

Um grafo dirigido ou dígrafo ou direcionado *G* consiste de dois conjuntos finitos:

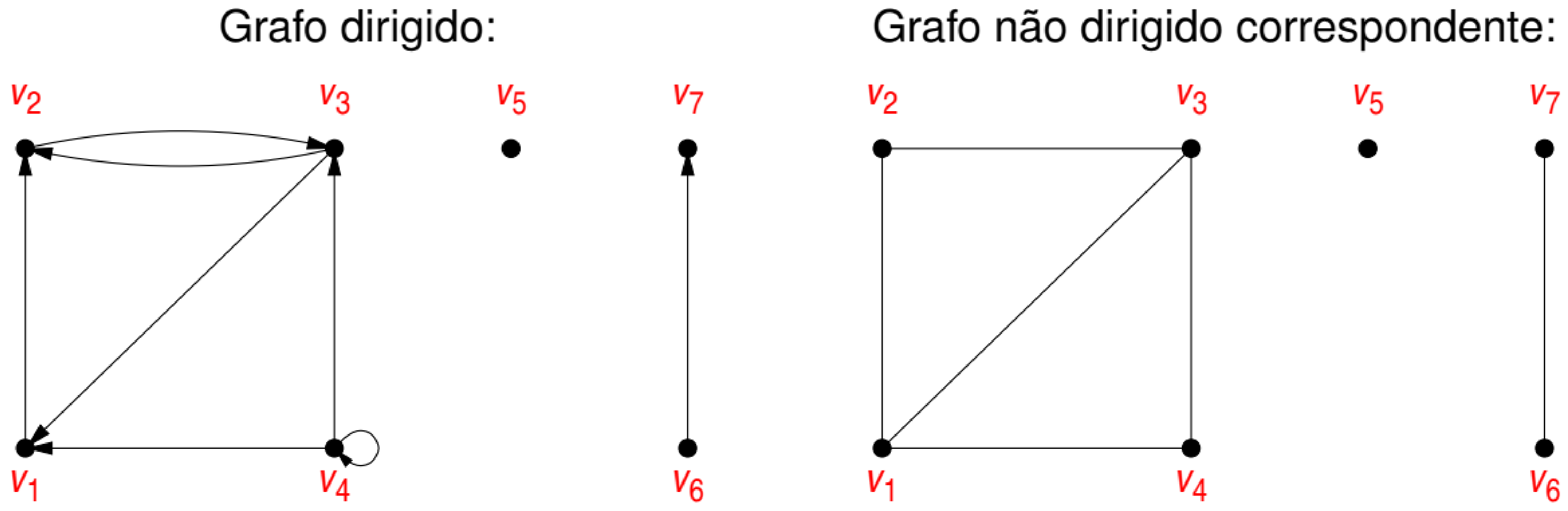
1. Vértices *V* (*G*)
2. Arestas dirigidas *E*(*G*), onde cada aresta é associada a um par ordenado de vértices chamados de nós terminais. Se a aresta ***e*** é associada ao par (*u; v*) de vértices, diz-se que ***e*** é a aresta dirigida de *u* para *v*.



Principais Noções

Grafo dirigido

Para cada grafo dirigido, existe um grafo simples (não dirigido) que é obtido removendo as direções das arestas, e os *loops*



Principais Noções

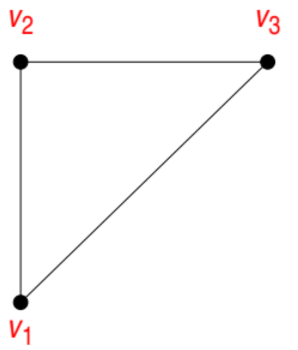
Grafo dirigido

A versão dirigida de um grafo não dirigido $G = (V; E)$ é um grafo dirigido $G' = (V'; E')$ onde:
$(u; v) \in E'$ e $(u; v) \in E$

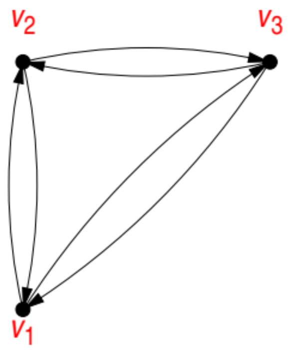
Cada aresta não dirigida $(u; v)$ em G é substituída por duas arestas dirigidas $(u; v)$ e $(v; u)$

Em um grafo dirigido, um vizinho de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não dirigida de G.

Grafo não dirigido:



Grafo dirigido correspondente:

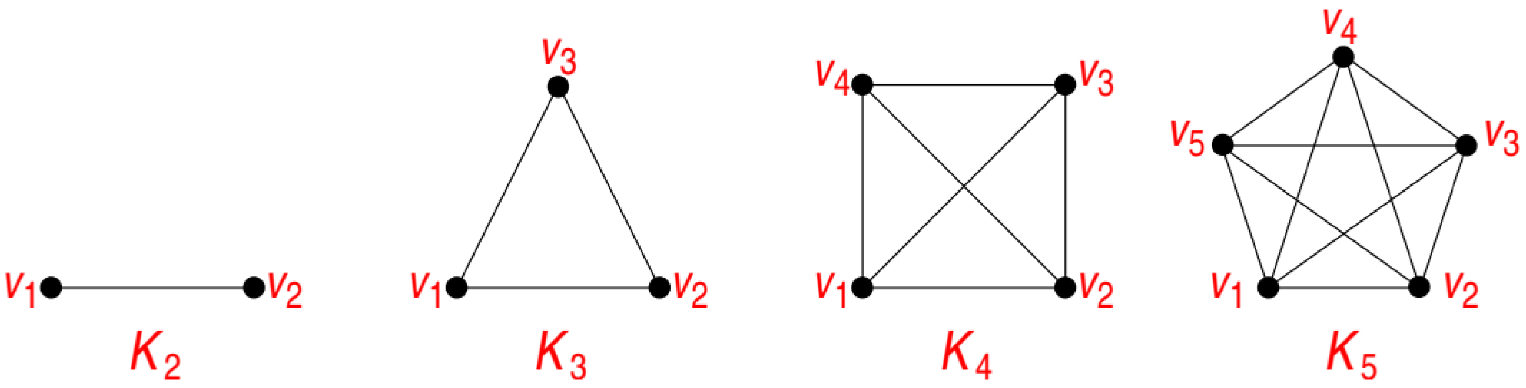


Principais Noções

Grafo completo

Um grafo completo de n vértices, denominado K_n, é um grafo simples com n vértices v_1; v_2 ... v_n, cujo conjunto de arestas contém exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

A letra *K* representa a letra inicial da palavra *komplett* do alemão, que significa “completo”.



Principais Noções

Grafo completo

Dado o grafo completo K_n temos que:

Vértice	está conectado aos vértices (não conectados ainda)	através de # arestas
v_1	$v_2, v_3, \ldots, v_n$	$n-1$
v_2	$v_3, v_4, \ldots, v_n$	$n-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_{n-1}	v_n	1
v_n	–	0

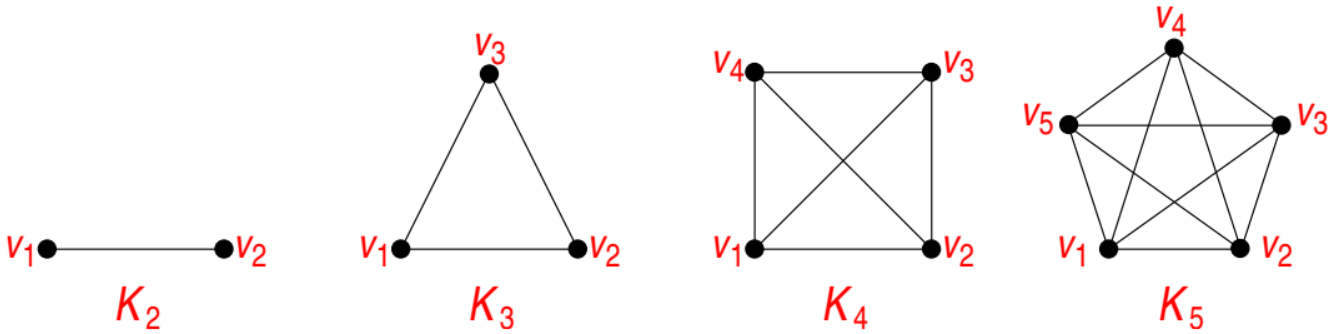
ou seja, se contarmos o número total de arestas de *Kn* temos

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{(|V|^2-|V|)}{2}}$$

Principais Noções

Grafo completo

Os grafos K_2, K_3, K_4, e K_5



Possuem a seguinte quantidade de arestas:

Grafo	# arestas
K_2	1
K_3	3
K_4	6
K_5	10

Principais Noções

Quantidade de grafos distintos com *n* vértices

O número total de grafos distintos com *n* vértices ($|V|$) é

$$\boxed{2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{(|V|^2-|V|)}{2}}}$$

que representa a quantidade de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de:

$$\boxed{\frac{n^2-n}{2} = \frac{(|V|^2-|V|)}{2}}$$

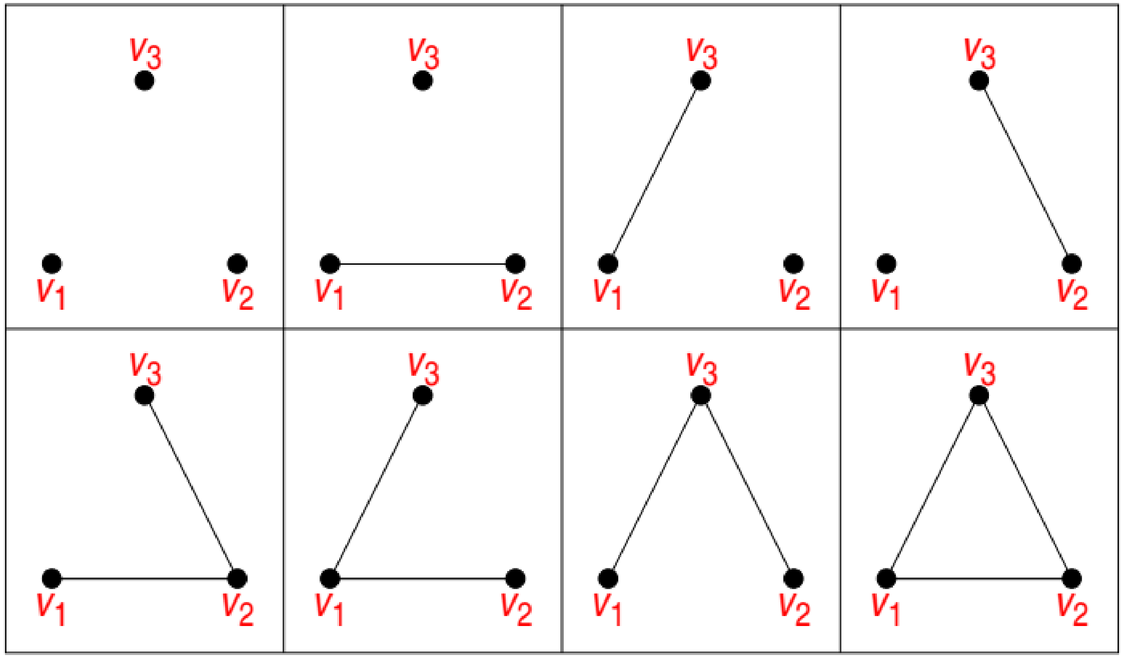
possíveis arestas de um grafo com *n* vértices.

Principais Noções

Quantidade de grafos distintos com *n* vértices

Exemplo: Quantos grafos distintos com 3 vértices existem?

$$\boxed{2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{3^2-3}{2}} = 2^3 = 8}$$

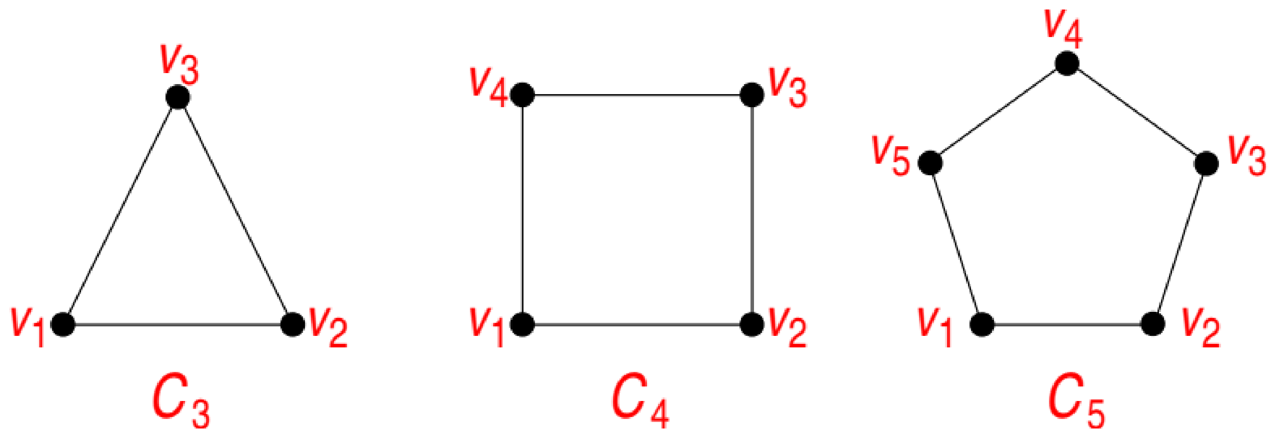


Principais Noções

Grafo ciclo

Um grafo ciclo de n vértices, denominado C_n, $n \geq 3$, é um grafo simples com n vértices $v_1, v_2, \ldots v_n$, e arestas v_1v_2, v_2v_3, ..., $v_{n-1}v_n$, v_nv_1.

Exemplo: Grafos ciclos de 3, 4, e 5 vértices :

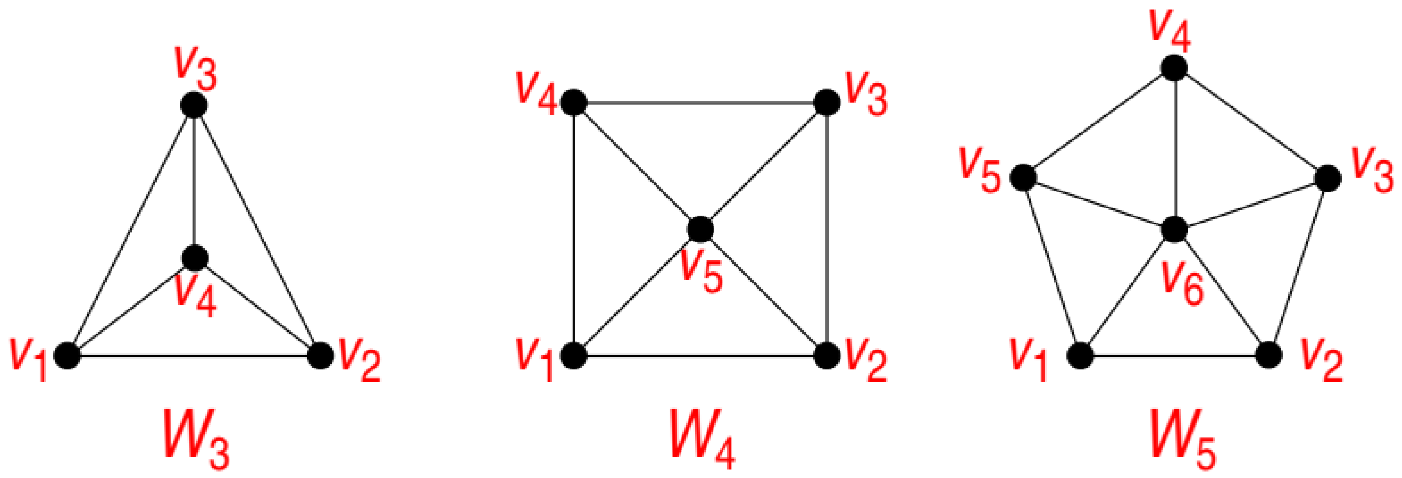


Principais Noções

Grafo roda

Um grafo roda, denominado W_n, é um grafo simples com $n + 1$ vértices que é obtido acrescentado um vértice ao grafo ciclo C_n, $n \geq 3$, e conectando este novo vértice a cada um dos n vértices de C_n.

Exemplo: Grafos rodas de 3, 4, e 5 vértices

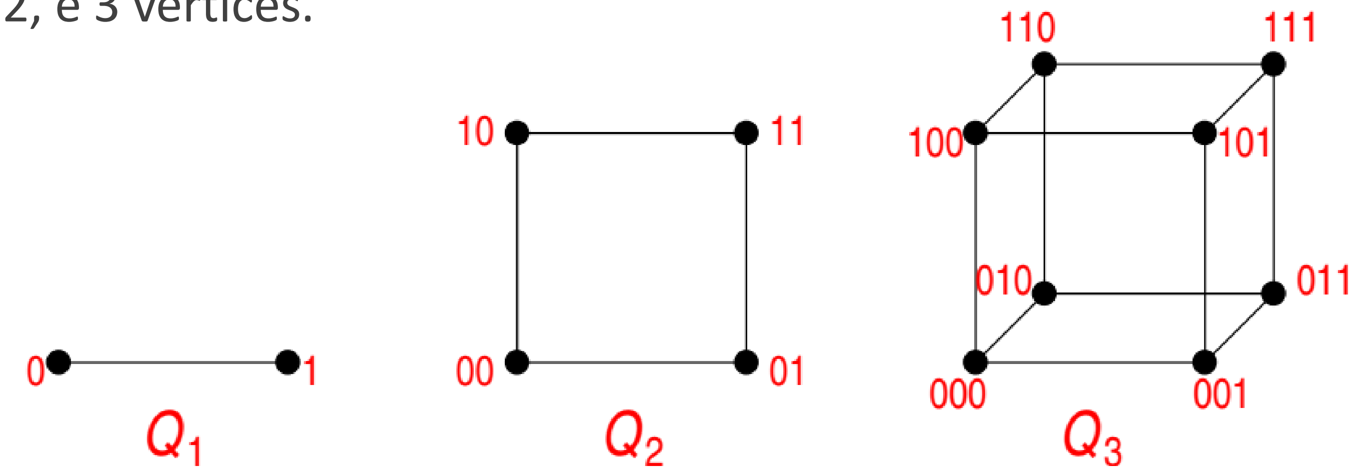


Principais Noções

Grafo Cubo-*n*

Um grafo cubo-*n* de 2^n vértices, denominado Q_n, é um grafo simples que representa os 2*n* strings de *n* bits. Dois vértices são adjacentes se as strings que eles representam diferem em exatamente uma posição.

Exemplo: Grafos Q_n, para n = 1, 2, e 3 vértices.



Principais Noções

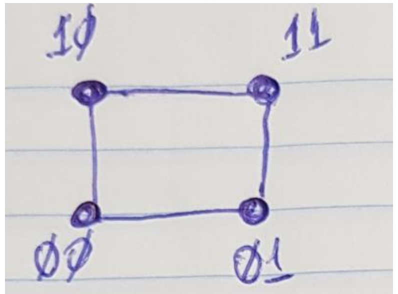
Grafo Cubo-*n*

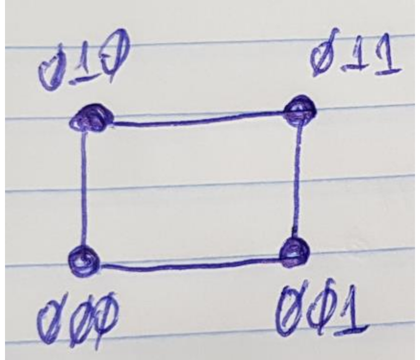
O grafo Q_{n+1} pode ser obtido a partir do grafo Qn usando o seguinte algoritmo:

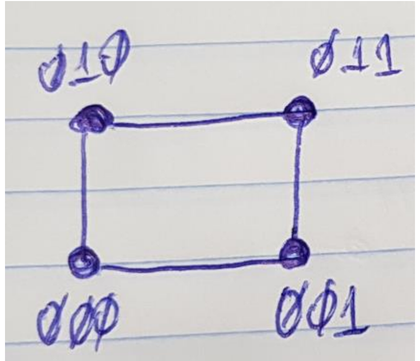
1. Faça duas cópias de Q_n;
2. Prefixe uma das cópias de Q_n com 0 e a outra com 1;
3. Acrescente uma aresta conectando os vértices que só diferem no primeiro bit.

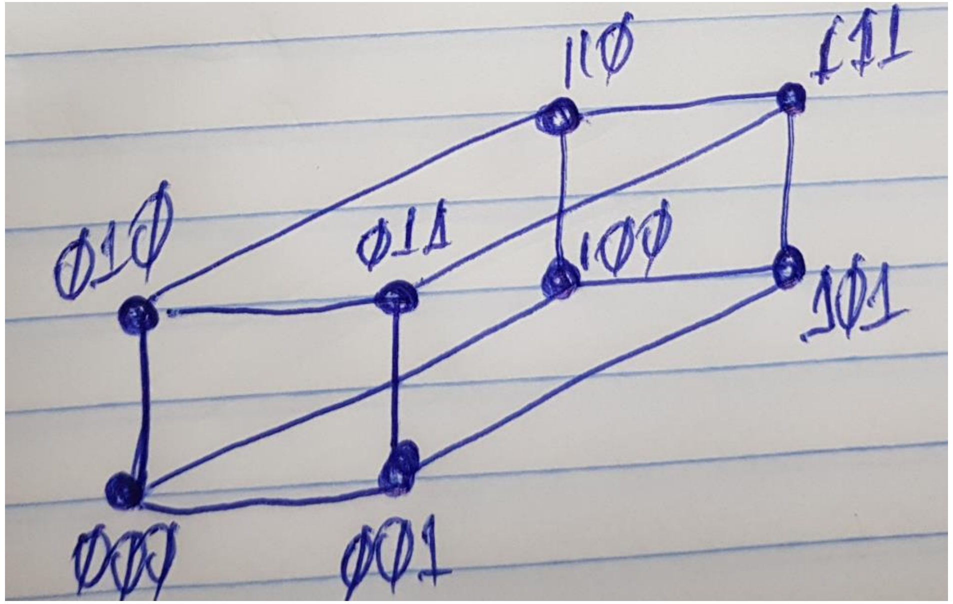
Principais Noções

Grafo Cubo-*n*









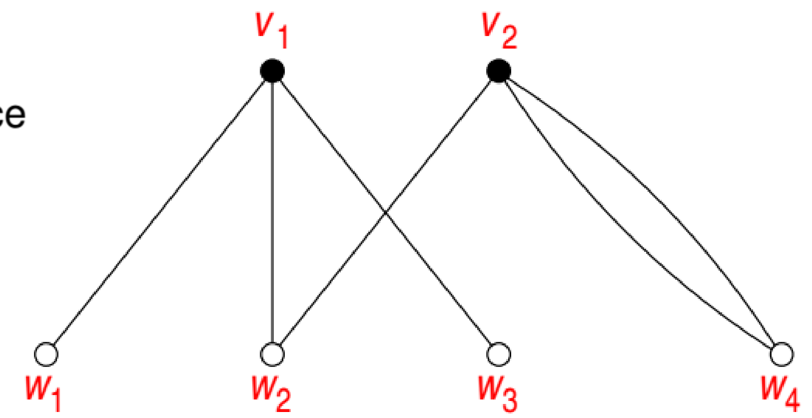
Principais Noções

Grafo bipartido

Um grafo bipartido é um grafo com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e $w_1, w_2, \ldots, w_n$, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall \quad i, k = 1, 2, \ldots, m \wedge$$
$$\forall \quad j, l = 1, 2, \ldots, n$$

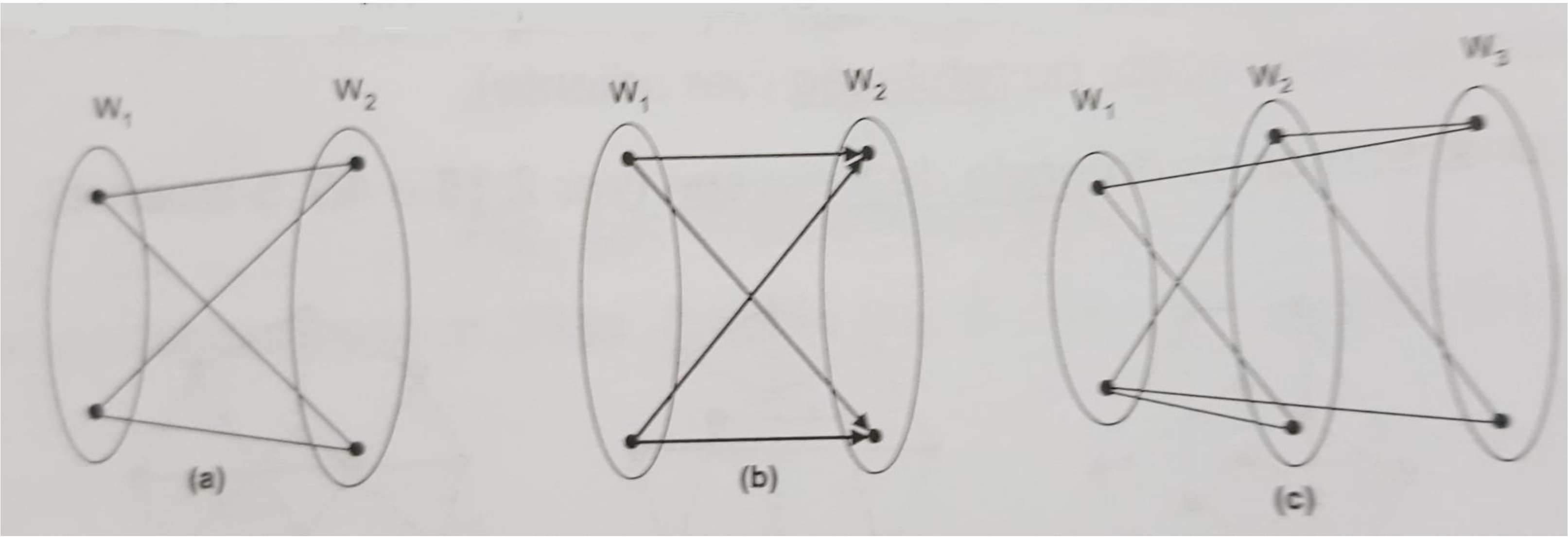
1. $\forall$ as arestas do grafo, cada aresta conecta algum vértice v_i a algum vértice w_j;
2. $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices v_i e v_k;
3. $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices w_j e w_l;



Principais Noções

Grafo bipartido (outra definição)

Um grafo G(V,E) é dito k-partido se existir uma partição **P**= {$\mathbf{W_i}$ | i=1,...,k , $\mathbf{W_i} \cap \mathbf{W_j} = \emptyset$, i≠j} do seu conjunto de vértices, tal que não existam ligações entre elementos de um mesmo $\mathbf{W_i}$ (todas as ligações de G são da forma (p,q), sendo p ∈ $\mathbf{W_j}$, j ≠ i)



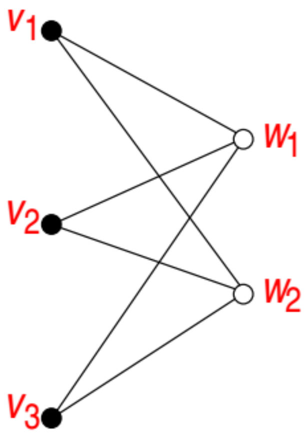
Principais Noções

Grafo bipartido completo

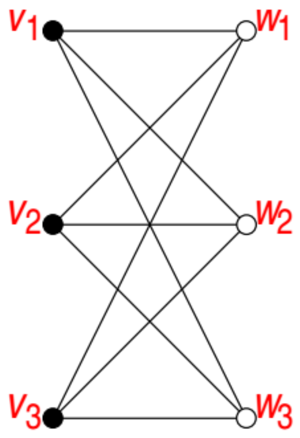
Um grafo bipartido é um grafo com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e $w_1, w_2, \ldots, w_n$, que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\forall \quad i, k = 1, 2, \ldots, m \wedge$$
$$\forall \quad j, l = 1, 2, \ldots, n$$

1. $\exists$ uma aresta entre **cada par** de vértices v_i e w_j;
2. $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices v_i e v_k;
3. $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices w_j e w_l;



$K_{3,2}$

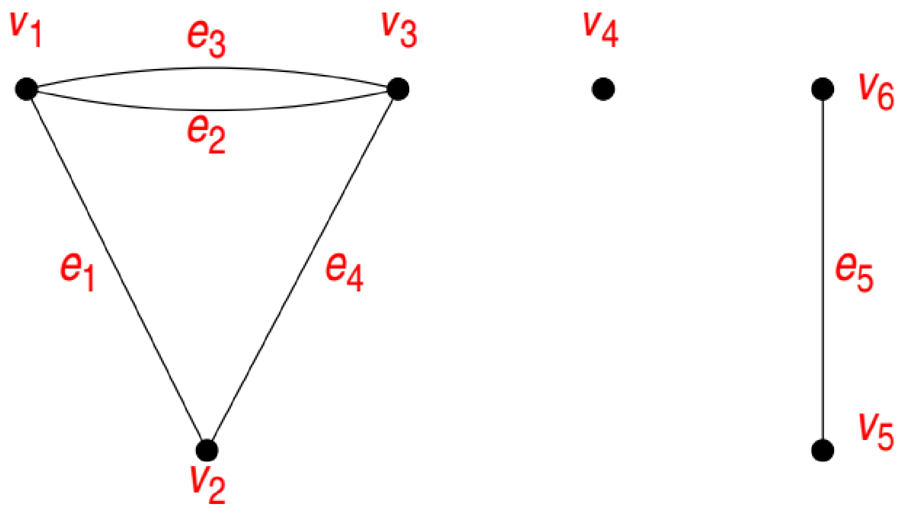


$K_{3,3}$

Principais Noções

Multigrafo

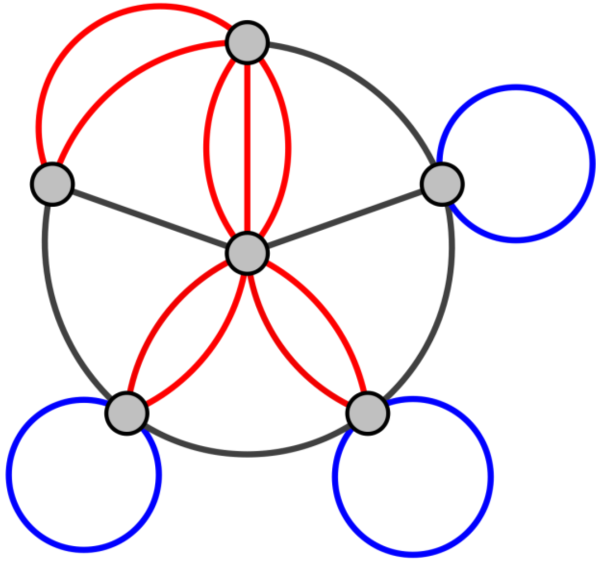
Um multigrafo é um grafo que não possui laços mas pode ter arestas paralelas. Formalmente, um multigrafo *G* = (*V, E*) consiste de um conjunto *V* de vértices, um conjunto *E* de arestas, e uma função *f* de *E* para $\{\{u,v\} \mid u, v \in \mathbf{V}, u \neq v\}$. As arestas *e*1 e *e*2 são chamadas múltiplas ou paralelas se *f*(*e*1) = *f*(*e*2).



Principais Noções

Pseudografo

Um pseudografo é um grafo que pode ter laços e arestas paralelas. Formalmente, um pseudografo $G = (V,E)$ consiste de um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para $\{\{u,v\} \mid u, v \in \mathbf{V}\}$.



Mais abrangente que o Multigrafo!

Principais Noções

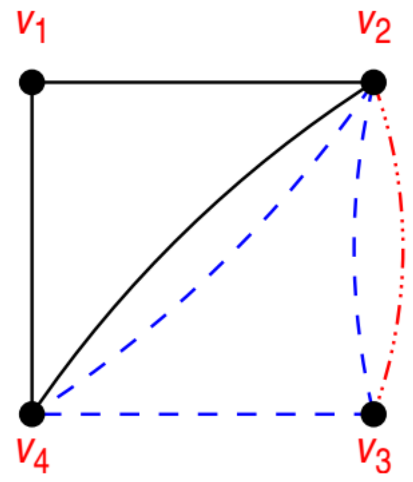
Hipergrafo

Um hipergrafo $H(V; F)$ é definido pelo par de conjuntos V e F , onde:

- V é um conjunto não vazio de vértices;
- F é um conjunto que representa uma "família" e partes não vazias de V

Um hipergrafo é um grafo não dirigido em que cada aresta conecta um número arbitrário de vértices. Seja, por exemplo, o grafo $H(V; F)$ dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \\
F &= \{\{v_1, v_2, v_4\}, {\color{blue}\{v_2, v_3, v_4\}}, {\color{red}\{v_2, v_3\}}\}
\end{aligned}
$$



Principais Noções

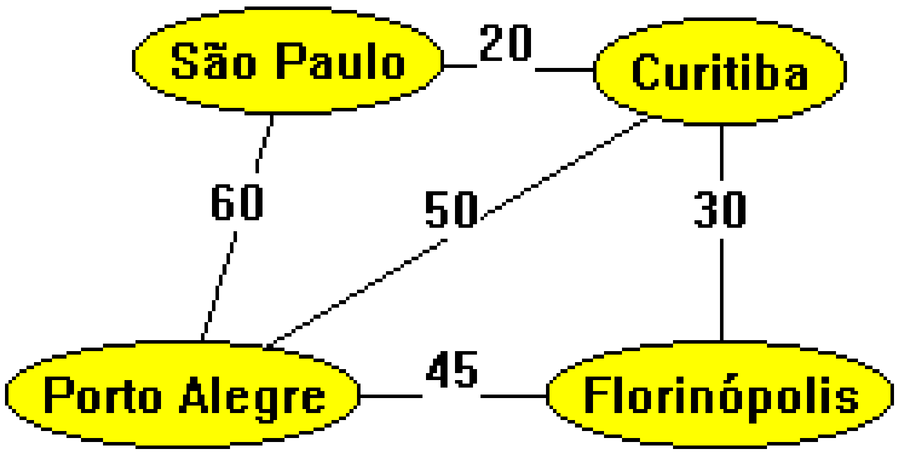
Terminologia de grafos

Tipo	Aresta	Arestas múltiplas?	Laços permitidos?
Grafo simples	Não dirigida	Não	Não
Multigrafo	Não dirigida	Sim	Não
Pseudografo	Não dirigida	Sim	Sim
Grafo dirigido	Dirigida	Não	Sim
Multigrafo dirigido	Dirigida	Sim	Sim

Principais Noções

Grafo valorado

Um grafo valorado é um grafo em que cada aresta tem um valor associado. Formalmente, um grafo valorado *G* = (*V, E*) consiste de um conjunto *V* de vértices, um conjunto *E* de arestas, e uma função *f* de *E* para *P* , onde *P* representa o conjunto de valores (pesos) associados às arestas.



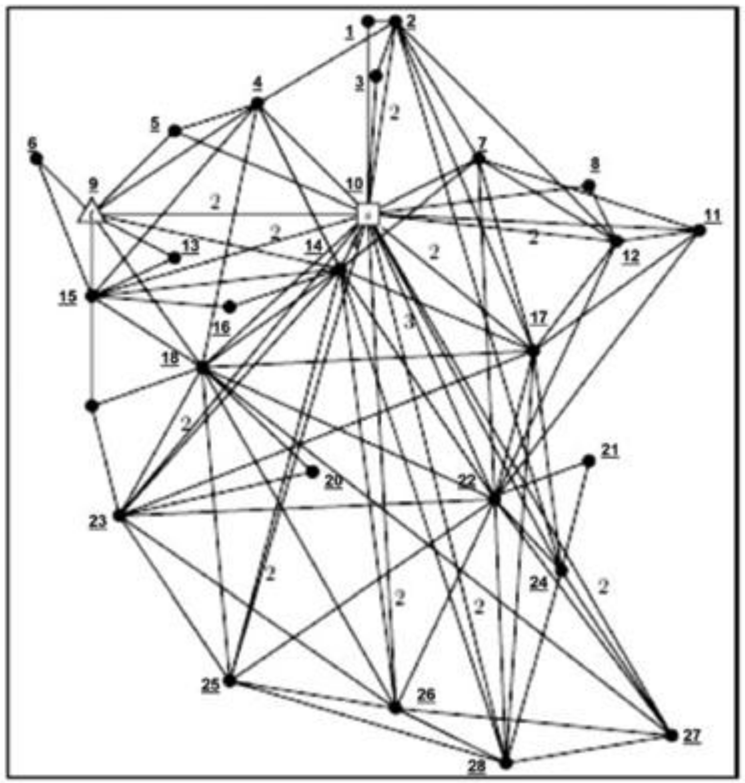


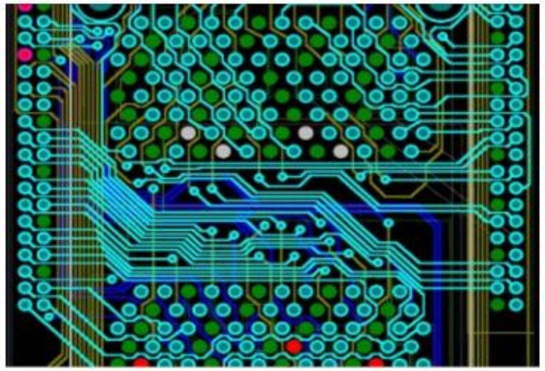
Fig. 4.4 – The TRANSPAC network.

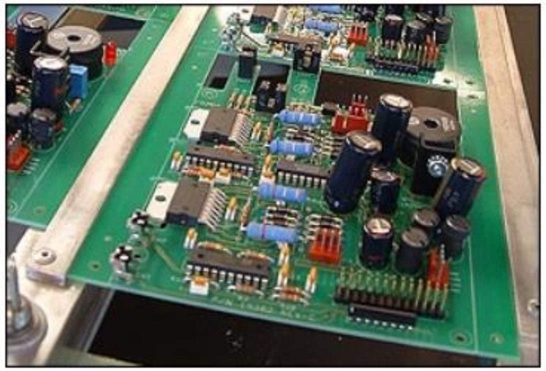
Principais Noções

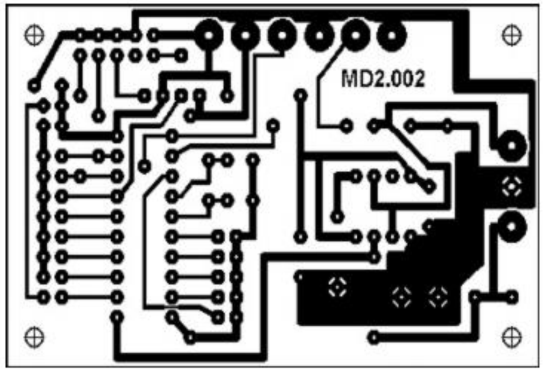
Grafo imersível
Um grafo é imersível em uma superfície *S* se puder ser representado geograficamente em *S* de tal forma que arestas se cruzem nas extremidades (vértices)

Um **grafo planar** é um grafo que é imersível no plano.

As conexões de uma placa de circuito impresso devem ser representadas por um grafo planar.







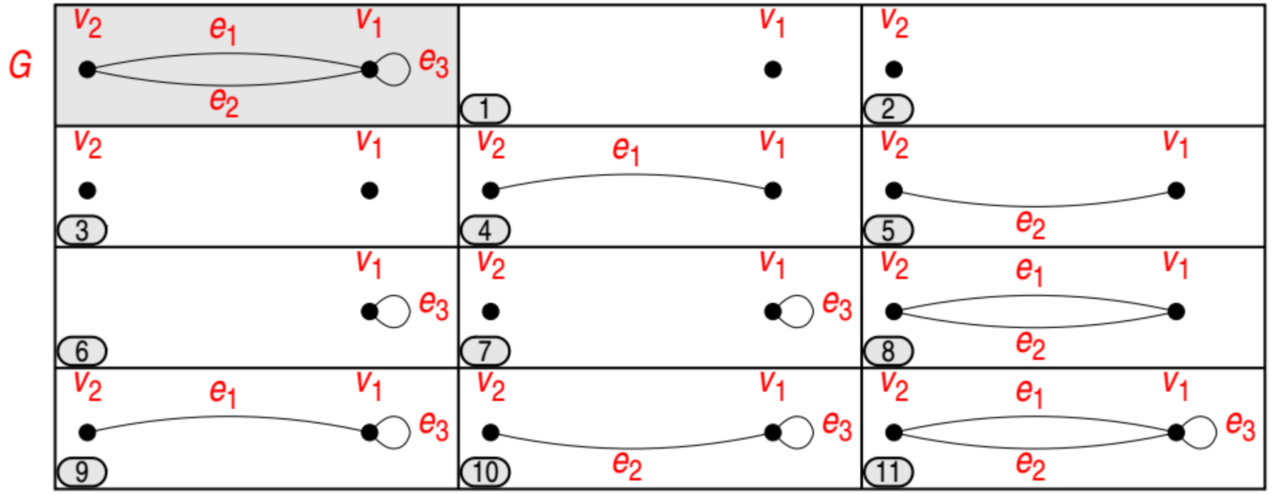
Principais Noções

Subgrafo

Um grafo $H = (V', E')$ é dito ser um subgrafo de um grafo $G = (V; E)$ se:

1. Cada vértice de H é também um vértice de G, ou seja, $V' \subseteq V$;
2. Cada aresta de H é também uma aresta de G, ou seja, $E' \subseteq E$; e
3. Cada aresta de H tem os mesmos nós terminais em G, ou seja, se $(u, v) \in E'$ então $(u, v) \in E$.

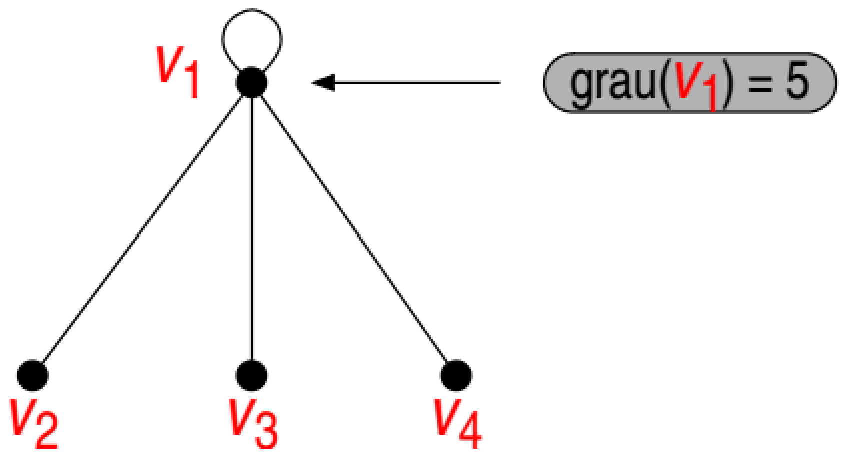
Todos os subgrafos do grafo G:



Principais Noções

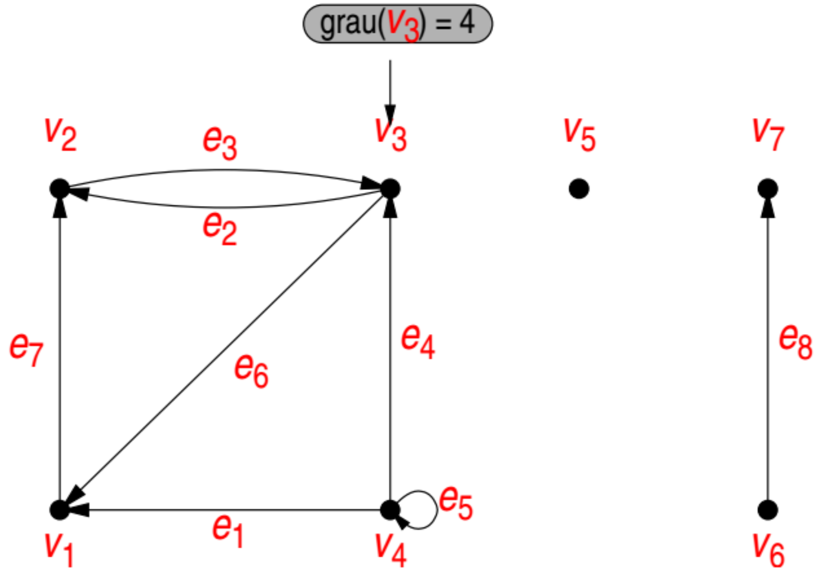
Grau de um vértice
Seja *G* um grafo e um vértice *v* de *G*. O grau de *v*, denominado *grau*(*v*) (*deg*(*v*)), é igual ao número de arestas que são incidentes a *v*, com uma aresta que seja um laço contada duas vezes.

O grau total de *G* é a soma dos graus de todos os vértices de *G*.



Principais Noções

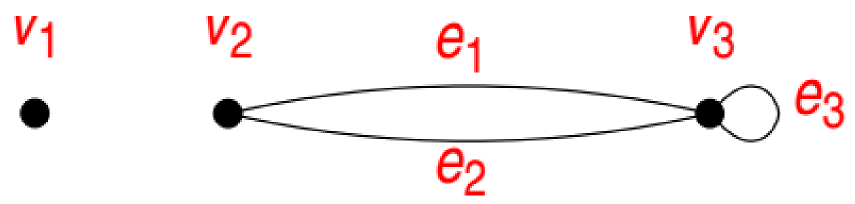
Grau de um vértice
Em um grafo dirigido o grau de um vértice *v* é o número de arestas quem saem dele (*out-deg*(*v*)) mais o número de arestas que chegam nele (*in-deg*(*v*)).



Principais Noções

Grau de um vértice

Seja o grafo G abaixo. Determine o grau de cada vértice e o grau total de G.



- *grau*($v1$) = 0, já que não existe aresta incidente a $v1$, que é um vértice isolado.
- *grau*($v2$) = 2, já que $e1$ e $e2$ são incidentes a $v2$.
- *grau*($v3$) = 4, já que $e1$, $e2$ e $e3$ são incidentes a $v3$, sendo que $e3$ contribui com dois para o grau de $v3$.

→ Grau de G = *grau*($v1$) + *grau*($v2$) + *grau*($v3$) = 0 + 2 + 4 = 6

→ Grau de G = 2 × número de arestas de G, que é 3, ou seja, cada aresta contribui com dois para o grau total do grafo.

Principais Noções

Grau de um vértice

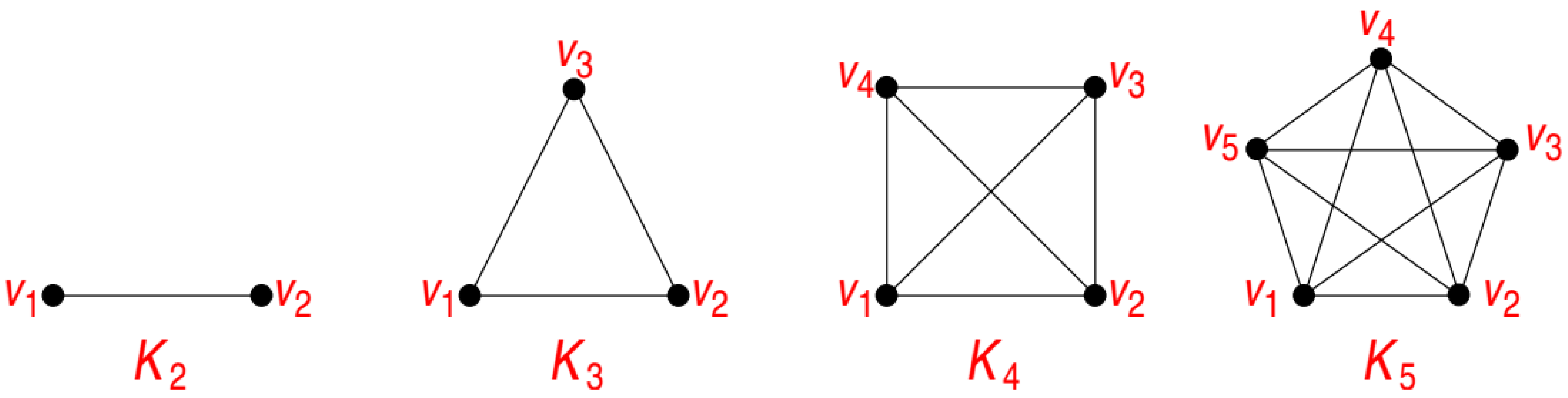
<u>Teorema (do aperto de mãos ou *handshaking*)</u>: Seja G um grafo. A soma dos graus de todos os vértices de G é duas vezes o número de arestas de G. Especificamente, se os vértices de G são v_1, v_2, ..., v_n, onde n é um inteiro positivo, então:

$$\begin{aligned}\text{Grau de } G &= \textit{grau}(v_1) + \textit{grau}(v_2) + \ldots + \textit{grau}(v_n) \\ &= 2 \times \text{número de arestas de } G.\end{aligned}$$

Corolário: O grau total de um grafo é par

Principais Noções

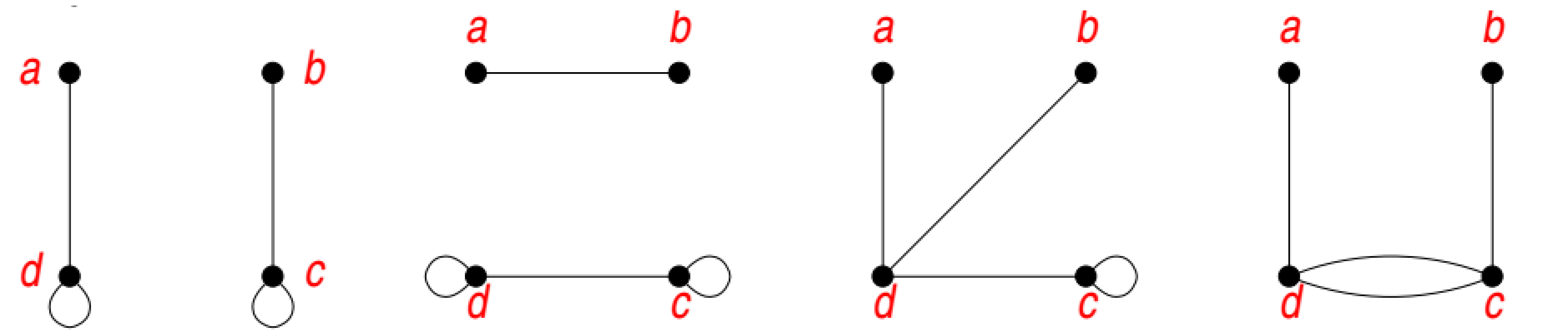
Grafo regular
Um grafo é dito ser regular quando todos os seus vértices têm o mesmo grau.



Principais Noções

Determinando a existência de certos grafos

- ✓ É possível ter um grafo com quatro vértices de graus 1, 1, 2, e 3?
  - ✓ Não. O grau total deste grafo é 7, que é um número ímpar
- ✓ É possível ter um grafo com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3?
  - ✓ Sim



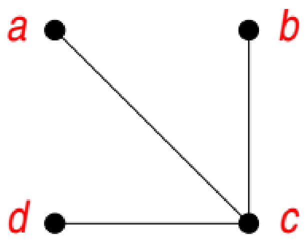
Principais Noções

Determinando a existência de certos grafos

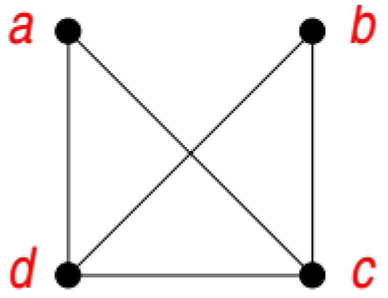
É possível ter um grafo simples com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3? Não

Prova (Por contradição)

Suponha que exista um grafo simples G com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3. Chame a e b os vértices de grau 1, e c e d os vértices de grau 3. Como $grau(c) = 3$ e G não possui laços ou arestas paralelas, devem existir arestas que conectam c aos vértices a, b e d



Pelo mesmo raciocínio devem existir arestas que conectam da os vértices a, b e c.



Mas o $grau(a) \geq 2$ e $grau(b) \geq 2$, o que contradiz a suposição que estes vértices têm grau 1.

A suposição inicial é falsa e, consequentemente, não existe um grafo simples com quatro vértices com graus 1, 1, 3, e 3.

Principais Noções

Determinando a existência de certos grafos
É possível num grupo de nove pessoas, cada um ser amigo de exatamente cinco outras pessoas? Não!

Prova (por contradição):

– Suponha que cada pessoa represente um vértice de um grafo e a aresta indique uma relação de amizade entre duas pessoas (vértices).
– Suponha que cada pessoa seja amiga de exatamente cinco outras pessoas.
– Então o grau de cada vértice é cinco e o grau total do grafo é 45.

Isto contradiz o corolário que o grau total de um grafo é par e, consequentemente, a suposição é falsa.

Principais Noções

Característica de um grafo

Teorema: Em qualquer grafo *G*, existe um número par de vértices de grau ímpar

Prova:

Suponha que *G* tenha *n* vértices de grau ímpar e *m* vértices de grau par, onde *n* e *m* são inteiros não negativos. [Deve-se mostrar que *n* é par.]
Se *n* = 0, então *G* tem um número par de vértices de grau ímpar

Suponha que *n* ≥ 1. Seja *P* a soma dos graus de todos os vértices de grau par, *I* a soma dos graus de todos os vértices de grau ímpar, e *T* o grau total de *G*.
Se p_1, p_2, ..., p_m são os vértices de grau par e i_1, i_2, ... , i_n são os vértices de grau ímpar

$$
\begin{aligned}
P &= \textit{grau}(p_1) + \textit{grau}(p_2) + \ldots + \textit{grau}(p_m), \\
I &= \textit{grau}(i_1) + \textit{grau}(i_2) + \ldots + \textit{grau}(i_n), \\
T &= \textit{grau}(p_1) + \textit{grau}(p_2) + \ldots + \textit{grau}(p_m) + \\
&\quad \textit{grau}(i_1) + \textit{grau}(i_2) + \ldots + \textit{grau}(i_n) \\
&= P + I \quad \text{[que deve ser um número par]}
\end{aligned}
$$

- *P* é par, já que *P* = 0 ou *P* é a soma de *grau*(p_r), $0 \le r \le m$, que é par.
- Mas *T* = *P* + *I* e *I* = *T* - *P* . Assim, *I* é a diferença de dois inteiros pares, que par.
- Pela suposição, *grau*(i_s), $0 \le s \le n$, é ímpar. Assim, *I*, um inteiro par, é a soma de *n* inteiros ímpares *grau*(i_1) + *grau*(i_2) + . . . + *grau*(i_n).
- Mas a soma de *n* inteiros ímpares é par, então *n* é par [o que devia ser mostrado].

Principais Noções

Determinando a existência de certos grafos
É possível ter um grafo com 10 vértices de graus 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, e 6? **Não.**

Duas formas de provar:

1. Este grafo supostamente possui três vértices de grau ímpar, o que não é possível.

2. Este grafo supostamente possui um grau total = 29, o que não é possível

Referências

Boa Ventura,Paulo, **Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos**, 5ª edição, Editora Blucher

Loureiro, Antonio Alfredo Ferreira, **http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro**