Métodos de Contagem

PARTE 1

Técnicas de Contagem

Princípio da Regra da Soma:
Suponha que algum evento E possa ocorrer de m maneiras e um segundo evento F possa ocorrer de n maneiras. Suponha também que ambos os eventos não podem acontecer simultaneamente. Então E ou F podem ocorrer de $m + n$ maneiras.

Princípio da Regra do Produto:
Suponha que existe um evento E que possa ocorrer de m maneiras e, independente deste, há um segundo evento F que pode ocorrer de n maneiras. Então, combinações de E e F podem ocorrer de mn maneiras.

Técnicas de Contagem

Regra da Soma:

Se nenhum par de eventos pode ocorrer ao mesmo tempo, logo um dos eventos pode ocorrer de: $n1 + n2 + n3 + \cdots$ maneiras.

Regra do Produto:

Se os eventos ocorrem um após o outro, então todos os eventos podem ocorrer na ordem indicada de: $n1 \cdot n2 \cdot n3 \cdot ...$ maneiras.

Técnicas de Contagem

Exemplo: Suponha que uma faculdade tenha três disciplinas diferentes de história, quatro disciplinas diferentes de literatura e duas disciplinas diferentes de sociologia.

O número m de maneiras que um estudante pode escolher uma de cada tipo de disciplina é:

$$m = 3(4)(2) = 24$$

O número n de maneiras que um estudante pode escolher apenas uma disciplina é:

$$n = 3 + 4 + 2 = 9$$

Técnicas de Contagem

Há uma interpretação conjuntista dos dois princípios recém-vistos. Especificamente, suponha que n(A) denota o número de elementos em um conjunto A. Então:

(1) ***Princípio da Regra da Soma***: Suponha que A e B são conjuntos disjuntos. Logo,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

(2) ***Princípio da Regra do Produto***: Seja $A \times B$ o produto cartesiano dos conjuntos A e B. Logo,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Técnicas de Contagem

Função Fatorial

O produto dos inteiros positivos de 1 a n, inclusive, é denotado por $n!$ e se lê "n fatorial" ou "fatorial de n". Logo,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Consequentemente, $1! = 1$ e $n! = n(n-l)!$. É também conveniente definir $0! = 1$.

Técnicas de Contagem

Função Fatorial

(a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $5 = 5 \cdot 4! = 5(24) = 120$.

(b) $\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9!} = \dfrac{12!}{3!\,9!}$ e, em termos mais gerais,

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(c) Para valores grandes de n, usa-se a aproximação de Stirling (onde $e = 2{,}7128\ldots$):

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

Técnicas de Contagem

Coeficientes binomiais

O símbolo $\binom{n}{r}$, que se lê "nCr" ou "combinação de n por r", onde r e n são inteiros positivos com $r \leq n$, é definido como se segue:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Observe que $n-(n-r)=r$. Isso nos leva à importante relação a seguir:

Lema 5.1: $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$ ou, equivalentemente, $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$, onde $a+b=n$.

Técnicas de Contagem

Podemos agora definir 0!=1

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!}$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

Técnicas de Contagem

Exemplos:

(a) $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$; $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$; $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$.

Observe que $\binom{n}{r}$ tem exatamente r fatores tanto no numerador quanto no denominador.

(b) Suponha que queremos computar $\binom{10}{7}$. Haverá sete fatores em ambos numerador e denominador. Contudo, $10 - 7 = 3$. Logo, usamos o Lema 5.1 para calcular:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Técnicas de Contagem

Permutações

Qualquer disposição de um conjunto de n objetos em uma dada ordem é chamada de permutação dos objetos (tomados todos de uma vez).

Uma disposição de quaisquer $r \leq n$ desses objetos em uma dada ordem é chamada de “r-permutação” ou “permutação de n objetos tomados r por vez”.

Considere, por exemplo, o conjunto de letras A, B, C, D.

Então:

(i) BDCA, DCBA e ACDB são permutações das quatro letras (tomadas todas de uma vez).

(ii) BAD, ACB e DBC são permutações das quatro letras tomadas três por vez.

(iii) AD, BC e CA são permutações das quatro letras tomadas duas por vez.

Técnicas de Contagem

Permutações

Geralmente, estamos interessados na quantia de tais permutações sem listá-las. O número de permutações de n objetos tomados r por vez é denotado por P(n, r)

Teorema 5.4: $P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Enfatizamos que existem r fatores em $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

Técnicas de Contagem

Permutações

Encontre o número m de permutações de seis objetos, digamos, A, B, C, D, E, F, tomados três por vez. Em outras palavras, determine a quantia de "palavras de três letras" usando apenas as seis letras dadas sem repetição.

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

Técnicas de Contagem

Permutações com repetições

Frequentemente, queremos saber o número de permutações de um multiconjunto, ou seja, um conjunto de objetos tais que alguns são repetidos. Denotamos por $P(n; n_1, n_2,..., n_r)$

O número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são repetidos, n_2 são repetidos,..., n_r são repetidos. A fórmula geral é a seguinte:

Teorema 5.6: $$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

Técnicas de Contagem

Permutação com repetições

Encontre o número m de palavras de sete letras que podem ser formadas, usando as letras da palavra “BENZENE”.

Buscamos o número de permutações de 7 objetos, dos quais 3 são indistinguíveis (os três E’s), e 2 são indistinguíveis (os dois N’s). Pelo Teorema:

$$m = P(7;\ 3,\ 2) = \frac{7!}{3!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 420$$

Técnicas de Contagem

Amostras ordenadas

Muitos problemas se referem à escolha de um elemento a partir de um conjunto S, digamos, com n elementos.

Quando escolhemos um elemento após o outro, digamos, r vezes, chamamos a escolha de amostra ordenada de tamanho r.

Amostragem com reposição

Aqui o elemento é devolvido ao conjunto S antes que o próximo objeto seja escolhido.

Assim, em cada vez existem n maneiras para escolher um elemento (repetições são permitidas). A Regra do Produto nos diz que o número de tais amostras é:

$$n \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n(r \text{ fatores}) = n^r$$

Amostragem sem reposição

Aqui o elemento não é devolvido ao conjunto S antes que o próximo seja escolhido. Logo, não há repetição na amostra ordenada.
Tal amostra é simplesmente uma r-permutação.
Assim, o número de tais amostras é:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Técnicas de Contagem

Exemplo

Três cartas são escolhidas uma após a outra em uma baralho de 52 cartas. Encontre o número m de maneiras que isso pode ser feito: (a) com reposição; (b) sem reposição.

(a) Cada carta pode ser escolhida de 52 maneiras. Logo, m = 52(52)(52) = 140 608.

(b) Aqui não há devolução. Portanto, a primeira carta pode ser escolhida de 52 maneiras, a segunda de 51, e a terceira de 50 maneiras. Logo, m = P(52,3) = 52(51)(50) = 132 600

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES

Seja S um conjunto com n elementos.

Uma combinação desses n elementos tomados r por vez é qualquer seleção de r dos elementos, onde a ordem não interessa.

Tal seleção é chamada de r-combinação; é simplesmente um subconjunto de S com r elementos.

O número de tais combinações é denotado por:

$$C(n, r)$$

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES

Exemplo: Encontre o número de combinações de 4 objetos A, B, C, D, tomados 3 por vez. Cada combinação de três objetos determina 3! = 6 permutações dos objetos como se segue:

$$\begin{array}{lllllll}
ABC: & ABC, & ACB, & BAC, & BCA, & CAB, & CBA \\
ABD: & ABD, & ADB, & BAD, & BDA, & DAB, & DBA \\
ACD: & ACD, & ADC, & CAD, & CDA, & DAC, & DCA \\
BCD: & BDC, & BDC, & CBD, & CDB, & DBC, & DCB
\end{array}$$

Assim, o número de combinações multiplicado por 3! nos dá o número de permutações; ou seja:

$$C(4, 3) \cdot 3! = P(4, 3) \quad \text{ou} \quad C(4, 3) = \frac{P(4, 3)}{3!}$$

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES

Teorema 5.7: $C(n, r) = \dfrac{P(n, r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Lembre que o coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ foi definido como $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$; logo,

$$\boxed{C(r, n) = \binom{n}{r}}$$

Devemos usar $C(n, r)$ e $\binom{n}{r}$ como sinônimos.

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES

Exemplo: Um fazendeiro compra 3 vacas, 2 porcos e 4 galinhas de um homem que tem 6 vacas, 5 porcos e 8 galinhas. Encontre o número m de escolhas que o fazendeiro tem.

O fazendeiro pode escolher as vacas de C(6, 3) maneiras, os porcos de C(5, 2) e as galinhas de C(8, 4). Assim, o número m de escolhas é o seguinte:

$$m = \binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \cdot 10 \cdot 70 = 14\,000$$

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES

Princípio da Casa dos Pombos

Se n casas são ocupadas por n + 1 ou mais pombos, então pelo menos uma casa é ocupada por mais de um pombo.

Esse princípio pode ser aplicado a muitos problemas nos quais queremos mostrar que uma dada situação pode acontecer.

Exemplos

(a) Suponha que um departamento contém 13 professores. Então dois dos professores (pombos) nasceram no mesmo mês (casa).

(a) Encontre o menor número de elementos necessários para tirar do conjunto S = {1, 2, 3,..., 9} para ter certeza de que dois dos números somam 10. Aqui as casas são os cinco conjuntos {1, 9}, {2, 8}, {3, 7}, {4, 6} e {5}. Assim, qualquer escolha de seis elementos (pombos) de S garante que dois dos números somam 10.

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES

Princípio generalizado da casa dos pombos

Se n casas são ocupadas por kn + 1 ou mais pombos, onde k é um inteiro positivo, então pelo menos uma casa é ocupada por k + 1 ou mais pombos.

Exemplo

Encontre o número mínimo de estudantes em uma turma para ter certeza de que três deles nasceram no mesmo mês.

Aqui n = 12 meses são as casas, e k + 1 = 3; assim, k = 2.

Logo, entre kn + 1 = 25 estudantes (pombos), três deles nasceram no mesmo mês.

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES - PRINCÍPIO DE INCLUSÃO-EXCLUSÃO

Sejam A e B conjuntos finitos quaisquer.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Em outras palavras, para encontrar o número $n(A \cup B)$ de elementos na união de A com B, somamos $n(A)$ e $n(B)$ e então subtraímos $n(A \cap B)$; ou seja, “incluímos” $n(A)$ e $n(B)$ e “excluímos” $n(A \cap B)$.

Isso segue do fato de que, quando somamos $n(A)$ e $n(B)$, contamos os elementos de $(A \cap B)$ duas vezes.

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES - PRINCÍPIO DE INCLUSÃO-EXCLUSÃO

Para quaisquer conjuntos finitos A, B e C temos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Ou seja, “incluímos” $n(A)$, $n(B)$ e $n(C)$, “excluímos” $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$ e $n(B \cap C)$, e finalmente “incluímos” $n(A \cap B \cap C)$.

Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES - PRINCÍPIO DE INCLUSÃO-EXCLUSÃO

Exemplo: Encontre o número de alunos de matemática, em uma faculdade, estudando pelo menos um dos idiomas francês, alemão e russo, dadas as seguintes informações:

65 estudam francês,

20 estudam francês e alemão,

45 estudam alemão,

25 estudam francês e russo,

8 estudam as três línguas.

42 estudam russo,

15 estudam alemão e russo.

Queremos encontrar $n = (F \cup G \cup R)$, onde F, G e R denotam os conjuntos de alunos estudando francês, alemão e russo, respectivamente.
Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão:

$$
\begin{aligned}
n(F \cup G \cup R) &= n(F) + n(G) + n(R) - n(F \cap G) - n(F \cap R) - n(G \cap R) + n(F \cap G \cap R) \\
&= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100
\end{aligned}
$$

Técnicas de Contagem

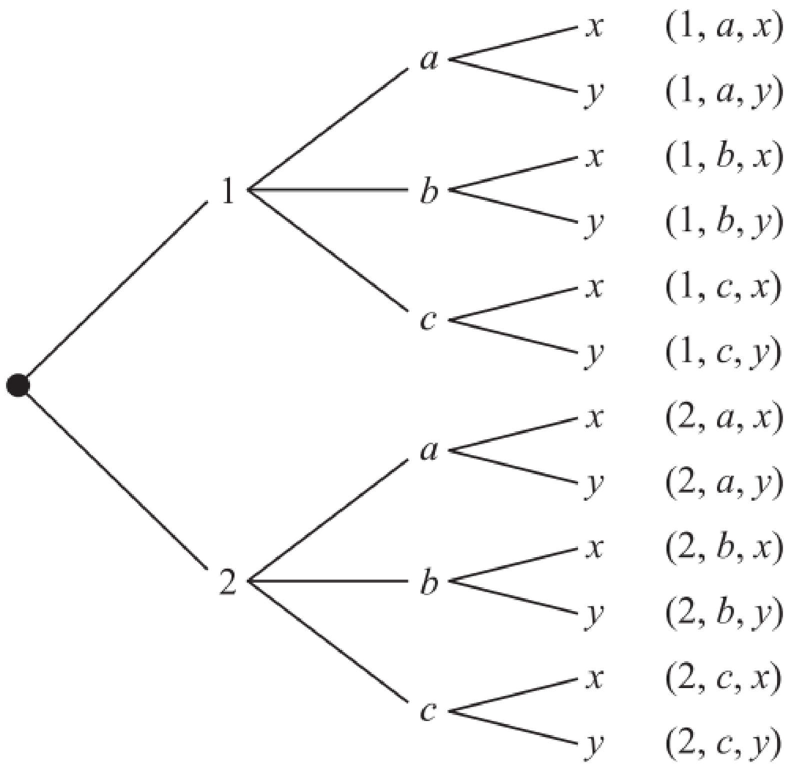
COMBINAÇÕES – Diagrama em Árvore

Um diagrama em árvore é um dispositivo usado para enumerar todos os possíveis resultados de uma sequência de eventos, onde cada evento pode ocorrer em uma quantia finita de maneiras.

Encontre o produto cartesiano A × B × C, onde A = {l, 2}, B = {a, b, c} e C = {x, y}.

A árvore é construída da esquerda para a direita, e o número de ramos em cada ponto corresponde aos possíveis resultados do próximo evento.
Cada ponto terminal (folha) da árvore é rotulado pelo elemento correspondente de A × B × C.

Como observado anteriormente, A × B × C tem n = 2(3)(2) = 12 elementos.



Técnicas de Contagem

COMBINAÇÕES – Diagrama em Árvore

Marcos e Érico jogarão em um torneio de tênis. A primeira pessoa que vencer dois jogos seguidos, ou aquele que ganhar um total de três jogos, vence o torneio. Encontre o número de maneiras que o torneio pode desenvolver.

A árvore é construída de cima para baixo em vez da esquerda para a direita. (Isto é, a “raiz” está no topo da árvore.)
Observe que há 10 pontos terminais, e eles correspondem às dez maneiras a seguir que o torneio pode ocorrer:

MM, MEMM, MEMEM, MEMEE, MEE, EMM, EMEMM, EMEME, EMEE, EE