LIMITE

O conceito de limite é uma das ideias que distinguem o cálculo da álgebra e da trigonometria. Nosso objetivo nesse assunto é aprender a calcular os limites de funções. As regras para os cálculos são simples, e a maioria dos limites dos quais precisamos pode ser obtida por análise gráfica, aproximação numérica, álgebra, substituição ou a partir da combinação dessas.

Os valores de algumas funções variam continuamente – quanto menor a variação na variável independente, menor a variação no valor da função. Os valores de outras funções podem saltar ou variar de maneira imprevisível, independentemente do modo como se controlam as variáveis. A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguirmos esses comportamentos. Também usamos limites para definir retas tangentes a gráficos de funções. Essa aplicação geométrica leva imediatamente ao importante conceito de derivada de uma função. A derivada fornece um caminho para quantificar a taxa a que os valores de uma função variam a cada instante.

NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

O objetivo nesta aula é apresentar a noção intuitiva de limite usando exemplos de sucessões numéricas.

Considerando-se que, no conjunto dos números reais, sempre podemos escolher um conjunto de números que obedeça a uma regra preestabelecida. Nesse caso estamos nos referindo a uma sucessão numérica.

Veja os exemplos, com suas respectivas análises, a seguir:

Exemplo 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . ; Perceba que nesse caso os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um LIMITE. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar, na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão *tendem para o infinito* ou que o *limite da sucessão é infinito*.

Como os termos da sucessão crescem ilimitadamente, então se denota: $x \to +\infty$

Exemplo 2: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$; Nessa sucessão, os termos crescem, mas não ilimitadamente. Os números aproximam-se cada vez mais do valor 1, sem nunca atingirem esse valor.

Denota-se: $x \to 1$

Exemplo 3: 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, . . .; Analogamente ao exemplo 1, podemos afirmar que os termos dessa sucessão *tendem para o infinito* ou que o *limite da sucessão é infinito*.

Como os termos da sucessão decrescem ilimitadamente, então se denota: $x \to -\infty$

Exemplo 4: $1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \frac{9}{8}, 9, \frac{11}{10}, 11, \ldots$; Nesse caso, os termos da sucessão oscilam sem tender para um limite. Portanto, não existe um limite ($\nexists\ limite$) para a sucessão.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

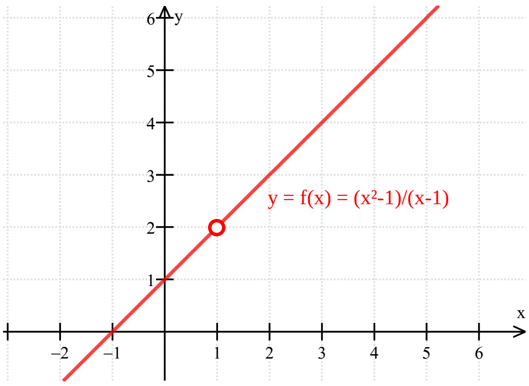
COMPORTAMENTO DE UMA FUNÇÃO NA VIZINHANÇA DE UM PONTO

Exemplo 5: Como a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ se comporta próximo de $x = 1$?

Observe que a função f só não está definida para $x = 1$, pois não é possível dividir por zero. Assim, para qualquer valor real x, desde que $x \neq 1$, podemos simplificar a expressão aplicando a fatoração e cancelando os fatores comuns, veja:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)} = x+1, \qquad para\ x \neq 1.$$

Neste caso, o gráfico[1] de $f(x) = x + 1$ é uma reta sem o ponto (1,2). Veja no gráfico abaixo que esse ponto é apresentado como um 'buraco'.



Utilizando a aproximação numérica é possível tomar valores para $'x'$, na vizinhança de 1, cada vez mais próximos de 1, veja:

i. na vizinhança à esquerda de 1, pode-se escolher valores tais como 0,9 < 0,99 < 0,999 < 0,9999 e calcular os respectivos valores de $f(x)$, isto é

x	**f(x)**
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999
↓ 1^-	↓ 2

Observe que à medida que $x \to 1^-$ (*x tende a 1 pela esquerda de 1, com valores menores que 1*) o limite da função $f(x)$ tende a 2. Nesse caso, diz-se que $f(x)$ tem limite lateral à esquerda em 1 e o denota-se assim:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

Ou ainda,

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$$

[1]Baixe no AVA o arquivo 'G1_f(x)=(x²-1)÷(x-1).wp2' e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

ii. na vizinhança à direita de 1, pode-se escolher valores tais como 1,1 > 1,01 > 1,001 > 1,0001 e calcular os respectivos valores de $f(x)$, isto é

x	**f(x)**
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
1,0001	2,0001
↓	↓
1^+	2

Analogamente ao item (ii), observe que à medida que $x \to 1^+$ (*x tende a 1 pela direita de 1, com valores maiores que 1*) o limite da função $f(x)$ tende a 2. Nesse caso, diz-se que $f(x)$ tem limite lateral à direita em 1 e o denota-se assim:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

Ou ainda,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$$

Uma função $f(x)$ terá um limite $'L'$ quando x se aproximar de $'c'$ se, e somente se, tiver um limite lateral à esquerda e um à direita e os dois limites laterais forem iguais.

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L}$$

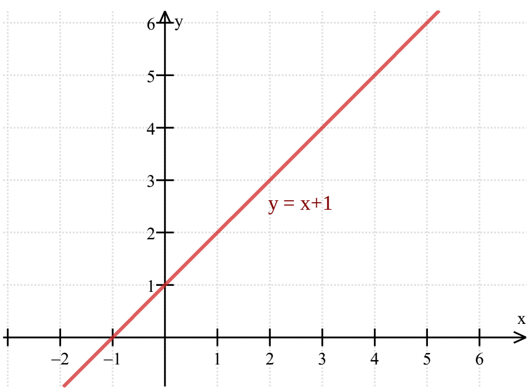
Por (i) existe o limite lateral à esquerda, sendo $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e por (ii) o limite também existe, sendo $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$. Além disso, vê-se que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$. Então,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2}$$

Noutras palavras: Tanto em (i) quanto em (ii), é notável que quanto mais próximo x está de 1, mais próximo $f(x)$ parece estar de 2. Logo, $f(x)$ se aproxima do limite 2 quando x se aproxima de 1, isto é:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$$

Observação: O gráfico[2] de f é idêntico ao da reta $y = x + 1$, exceto em $x = 1$, onde f não é definida.



[2] Baixe no AVA o arquivo 'G2_f(x) = x +1.wp2' e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

LIMITES DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS DAS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS E DOS CÁLCULOS ALGÉBRICOS

1. Calcule o limite $\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right)$,

a) algebricamente;

b) a partir de tabelas e valores de x cada vez mais próximos de -3;

2. Calcule o limite $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - x}{x} \right)$,

a) algebricamente;

b) a partir de aproximações numéricas;

3. Calcule o limite $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} \right)$,

a) algebricamente;

b) a partir de aproximações numéricas;

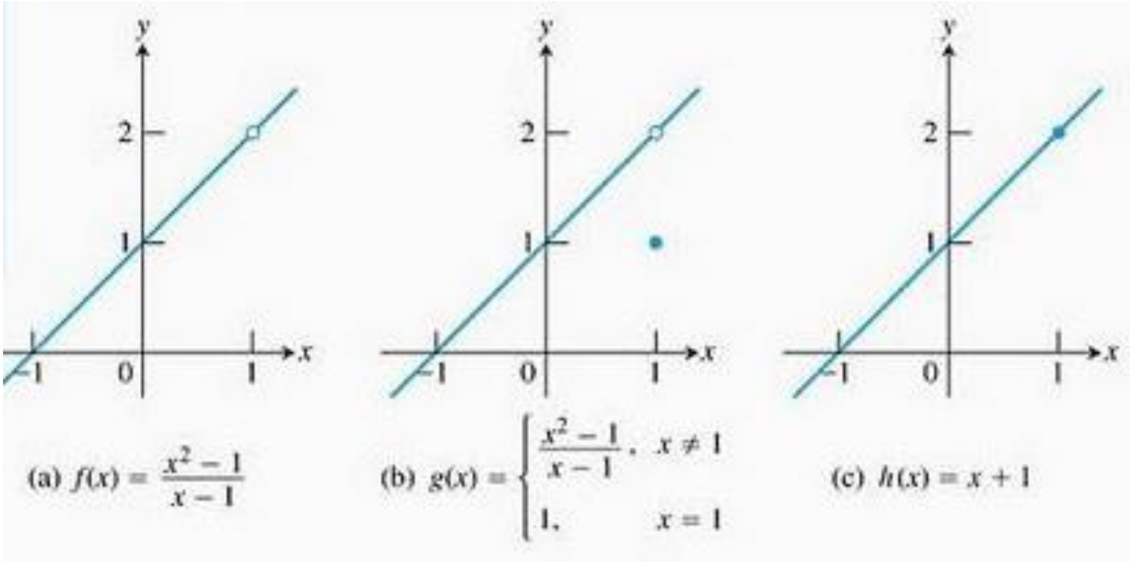
4. Calcule o limite $\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} \right)$,

a) algebricamente;

b) a partir de aproximações numéricas;

O valor do limite não depende do modo como a função é definida em x_0

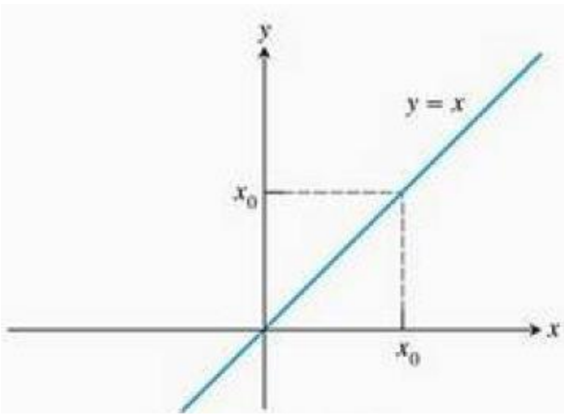
Observe os gráficos apresentados abaixo:



Note que:

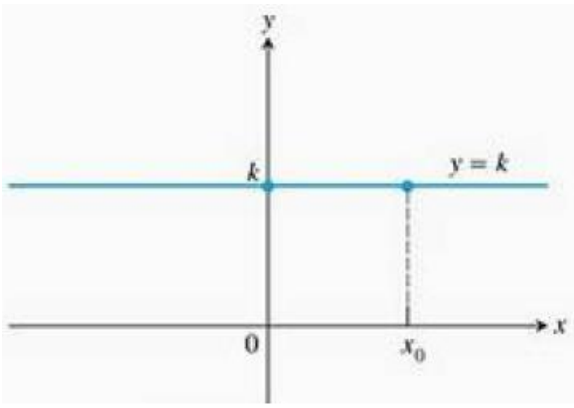
1. A função f apresenta limite 2 quando $x \to 1$, mesmo que f não esteja definida para $x = 1$.
2. A função g apresenta limite 2 quando $x \to 1$, mesmo que $g(1) \neq 2$.
3. A função h é a única cujo limite é igual ao seu valor em $x = 1$ quando $x \to 1$, ou seja, $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$. Essa relação de igualdade entre limite e valor da função é especial e será estudada mais adiante.

Duas funções que têm limites em todos os pontos



(a) $f(x)$ é a **função identidade** $f(x) = x$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

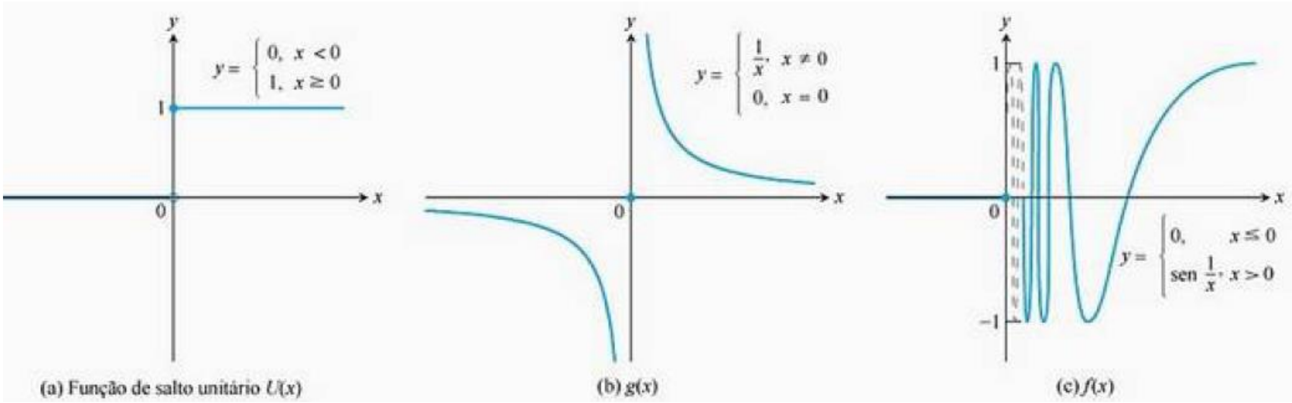


(b) $g(x)$ é a **função constante** $g(x) = k$, onde k é constante.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} k = k$$

Algumas situações em que os limites podem não existir

Observe as funções apresentadas abaixo:



Note que nenhuma dessas funções tem um limite à medida que x se aproxima de zero, ou seja:

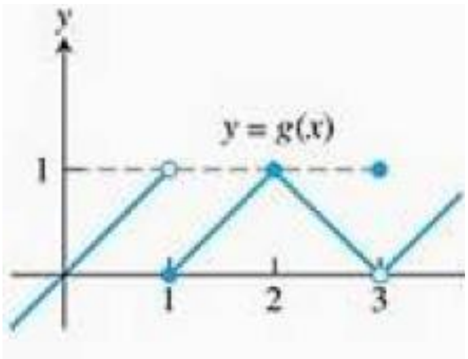
a) $\nexists \lim_{x \to 0} U(x)$ porque seus valores saltam em $x = 0$, ou seja, não há um único valor L ao qual $U(x)$ se aproxime quando $x \to 0$.

b) $\nexists \lim_{x \to 0} g(x)$ porque $g(x)$ cresce arbitrariamente muito em valor absoluto quando $x = 0$ e não se mantém próximo de nenhum valor real.

c) $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ porque os valores da função oscilam demais, entre $+1\ e\ -1$ em cada intervalo aberto que contém 0, para ter um limite.

5. Para a função $g(x)$ abaixo, encontre os seguintes limites ou explique por que eles não existem.

a) $\lim_{x \to 1} g(x) =$



b) $\lim_{x \to 2} g(x) =$

c) $\lim_{x \to 3} g(x) =$

6. Quais das seguintes afirmações sobre a função $y = f(x)$ abaixo são verdadeiras e quais são falsas?

( ) $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe.

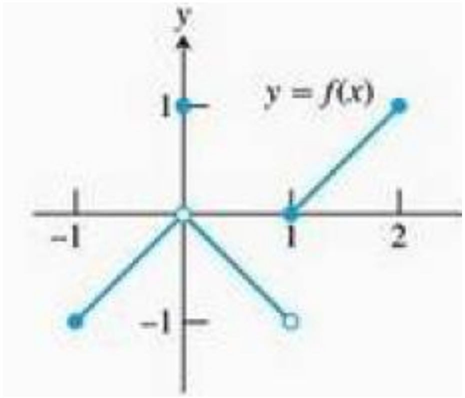
( ) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

( ) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

( ) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

( ) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

( ) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe no ponto x_0 em $(-1, 1)$.



Para mostrar que o limite de $f(x)$ iguala-se ao número L quando $x \to x_0$, é preciso mostrar que o intervalo entre $f(x)$ e L pode ser tão pequeno quanto quisermos se x for mantido suficientemente próximo de x_0. Veja o exemplo a seguir:

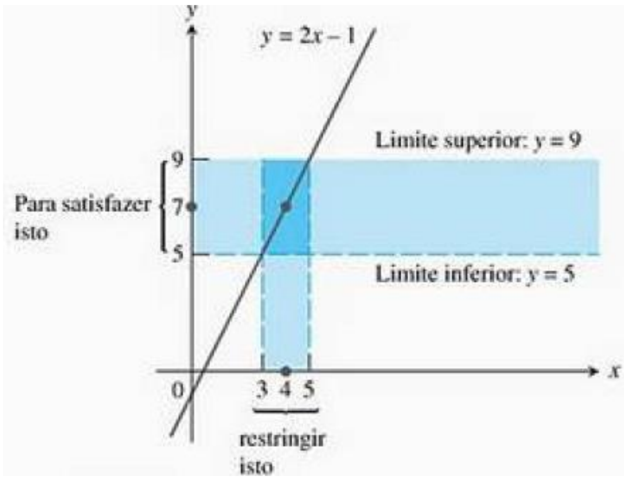
Exemplo 6: Quão próximo de $x_0 = 4$ devemos manter x para termos certeza de que $y = 2x - 1$ fique a uma distância menor do que 2 unidades de $y_0 = 7$?

Solução: Para que valores de x é $|f(x) - 7| < 2$? Devemos escrever $|f(x) - 7|$ em termos de x, isto é:

$|f(x) - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$, então

$$|2x - 8| < 2$$
$$-2 < 2x - 8 < 2$$
$$6 < 2x < 10$$
$$3 < x < 5$$
$$-1 < x - 4 < 1$$
$$|x - 4| < 1$$

Portanto, ao mantermos x variando 1 unidade em torno de $x_0 = 4$, manteremos y variando 2 unidades em torno de $y_0 = 7$.



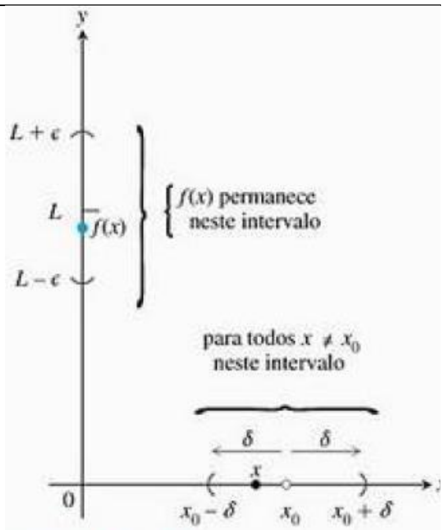
Definição Formal de Limite

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se para cada número $\epsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon .$$



Exemplo 7: Mostre que $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.

Solução: Seja $x_0=1$, $f(x)=5x-3$ e $L=2$ na definição de limite. Para qualquer $\epsilon>0$, precisamos encontrar um $\delta>0$ adequado, tal que se $x\neq 1$e x está a uma distância δ de $x_0=1$, isto é, se

$$\mathbf{0<|x-1|<\delta,}$$

então $f(x)$ está a uma distância ϵ de $L=2$, isto é,

$$\boldsymbol{|f(x)-2|<\epsilon.}$$

Encontramos δ ao resolver a $\epsilon-inequação$:

$$|(5x-3)-2|=|5x-5|<\epsilon$$

$$5|x-1|<\epsilon$$

$$|x-1|<\frac{\epsilon}{5}$$

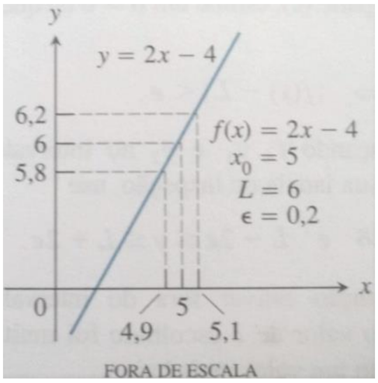
Então podemos tomar $\delta=\frac{\epsilon}{5}$. Se $0<|x-1|<\delta=\frac{\epsilon}{5}$, então

$$|(5x-3)-2|=|5x-5|=5|x-1|<5\cdot\frac{\epsilon}{5}=\epsilon$$

O que prova que $\lim_{x\to 1}(5x-3)=2$.

Observação: o valor de $\delta=\frac{\epsilon}{5}$ não é o único valor que fará $0<|x-1|<\delta\Longrightarrow|(5x-3)-2|<\epsilon$. Qualquer δ positivo menor fará o mesmo. A definição não pede o 'melhor' δ positivo, mas apenas um que funcione.

7. Use o gráfico abaixo para determinar um $\delta>0$ tal que, para todo x, $0<|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-L|<\epsilon$.



8. Encontre um intervalo aberto em torno de x_0 no qual a desigualdade $|f(x) - L| < \epsilon$ valha. Dê então um valor para $\delta > 0$ tal que para todo x satisfazendo $0 < |x - x_0| < \delta$ a desigualdade $|f(x) - L| < \epsilon$ seja verdadeira.

a) $f(x) = x + 1, L = 5, x_0 = 4, \epsilon = 0{,}01$

b) $f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \epsilon = 0{,}02$

VALOR ABSOLUTO E LIMITE DE FUNÇÃO VALOR ABSOLUTO

VALOR ABSOLUTO OU MÓDULO

Definição: o valor absoluto de $'a'$, denotado por $|a|$, é definido como

$$|a| = -a, se\ a < 0$$

$$|a| = a, se\ a \geq 0$$

Exemplo 8: Calcule o valor absoluto dos valores do conjunto X a seguir:

X = {-2; -1; -1/2; -0,000001; 0; 0,000001; 1/2; 1; 2}

Pela definição de valor absoluto temos,

i. para valores de x menores do que zero:
$|-2| = -(-2) = +2 = 2$
$|-1| = -(-1) = +1 = 1$
$|-1/2| = -(-1/2) = +1/2 = 1/2$
$|-0{,}000001| = -(-0{,}000001) = +0{,}000001 = 0{,}000001$

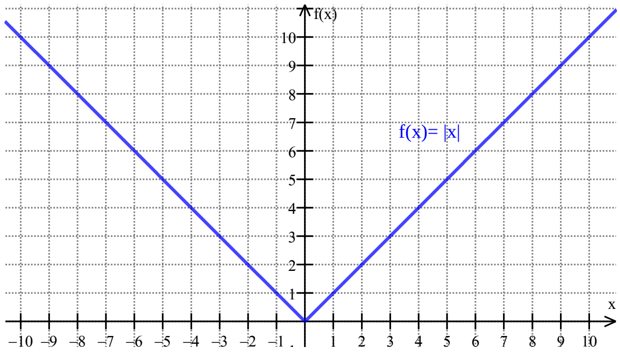
ii. para valores de x igual ou maiores do que zero:
$|0| = 0$
$|0{,}000001| = 0{,}000001$
$|1/2| = 1/2$
$|1| = 1$
$|2| = 2$

Interpretação Geométrica: Geometricamente o valor absoluto de $'a'$, também chamado módulo de $'a'$, representa a distância entre $'a'$ e 0. Escreve-se então $|a| = \sqrt{a^2}$.

FUNÇÃO VALOR ABSOLUTO OU FUNÇÃO MÓDULO

Seja a função $f(x) = |x|$ para todo x real. Pela aplicação da definição de valor absoluto a função f torna-se equivalente a: $f(x) = \begin{cases} -x, & se\ x < 0 \\ x, & se\ x \geq 0 \end{cases}$.

Graficamente[3], temos:



LIMITE DE UMA FUNÇÃO VALOR ABSOLUTO

Exemplo 9: Seja a função[4] dada pela expressão $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Prove que não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

TEOREMA[5] 1: REGRAS DO LIMITE

Se L, M, c e k são números reais e $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, então:

Regra da Adição: o limite da soma de duas funções é a soma de seus limites.

$$\lim_{x \to c} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M$$

Regra da Diferença: o limite da diferença de duas funções é a diferença de seus limites.

$$\lim_{x \to c} \left[f(x) - g(x) \right] = L - M$$

Regra do Produto: o limite do produto de duas funções é o produto de seus limites.

$$\lim_{x \to c} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L \cdot M$$

[3] Baixe no AVA o arquivo 'G3_f(x) = módulo de x.wp2' e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

[4] Baixe no AVA o arquivo 'G4_f(x) = x ÷ módulo de x.wp2' e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

[5] Fato matemático verdadeiro que pode ser demonstrado a partir de outros teoremas ou de axiomas. Um axioma é um fato matemático aceito sem demonstração, sem prova. Sinônimo de Postulado.

Regra da Multiplicação por Constante: o limite de uma constante multiplicada pela função é a constante multiplicada pelo limite da função.

$$\lim_{x\to c}\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot L$$

Regra do Quociente: o limite do quociente de duas funções é o quociente de seus limites, desde que o limite do denominador não seja zero.

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L}{M},\quad M\neq 0$$

Regra da Potenciação: o limite de uma potência racional de uma função é a potência do limite da função, desde que a última seja um número real.

Se r e s são inteiros e $s\neq 0$, então $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^{r/s}=L^{r/s}$

Exemplo 10: $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}=?$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}&=\sqrt{\lim_{x\to -2}4x^2-3} && \text{Regra da potência com n=1/2.}\\&=\sqrt{\lim_{x\to -2}4x^2-\lim_{x\to -2}3} && \text{Regra da adição e da diferença.}\\&=\sqrt{4\cdot(-2)^2-3} && \text{Regra do produto e da multiplicação.}\\&=\sqrt{16-3}\\&=\sqrt{13}\end{aligned}$$

9. Utilize as observações $\lim_{x\to c}k=k$ e $\lim_{x\to c}x=c$ e as propriedades dos limites para obter os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)=$

b) $\lim_{x\to c}\frac{x^4+x^2-1}{x^2+5}=$

c) $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}=$

TEOREMA 2: Os limites de funções polinomiais podem ser obtidos por substituição.

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0$, então

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0 c^0$$

TEOREMA 3: Os limites de funções racionais podem ser obtidos por substituição, caso o limite do denominador não seja zero.

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$, então $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$.

Exemplo 11: $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$

Cancelando um Fator Comum

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = ?$$

Observe que nesse caso não se pode substituir x por 1, pois resulta em um denominador zero. Então, considerando $x \neq 1$, temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+2)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

Criando e Cancelando um Fator Comum

Exemplo 12: Calcule o limite $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$.

Solução:

Rascunho:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot 1 \\
&= \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{2 + h - 2}{h \cdot \left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{h}{h \cdot \left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Calculando o limite:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

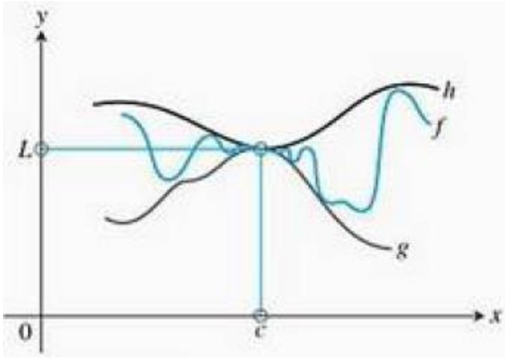
TEOREMA 4: Teorema do Confronto

Suponha $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente em $x = c$. Suponha também que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Então,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

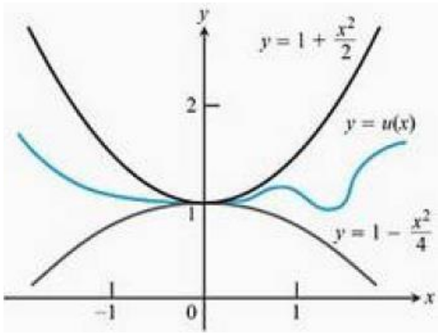


Exemplo 13: Seja $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$, para qualquer $x \neq 0$, procure $\lim_{x \to 0} u(x)$.

Solução:

Como o $\lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1$ e o $\lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1$, então pelo Teorema do Confronto o $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$.

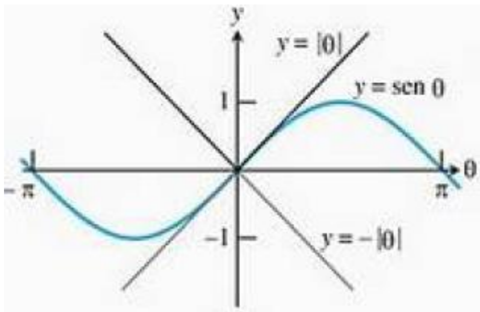
Qualquer função $u(x)$ cujo gráfico esteja na região entre $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ e $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ tem limite 1 quando $x \to 0$.



Exemplo 14: Seja $-|\theta| \leq \operatorname{sen} \theta \leq |\theta|$, para qualquer θ, procure o $\lim_{\theta \to 0} sen\ \theta$.

Solução:

Uma vez que $-|\theta| \leq \operatorname{sen} \theta \leq |\theta|$ para qualquer θ e o $\lim_{\theta \to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta \to 0}|\theta| = 0$, então pelo Teorema do Confronto que o $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$.



Definição: *Limites Laterais à Esquerda*

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto (c, a), onde $c < a$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de M conforme x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que f tem limite lateral à esquerda $\boldsymbol{M}$ em a e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

Definição: *Limites Laterais à Direita*

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto (a, b), onde $a < b$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L conforme x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que f tem limite lateral à esquerda $\boldsymbol{L}$ em a e escrevemos

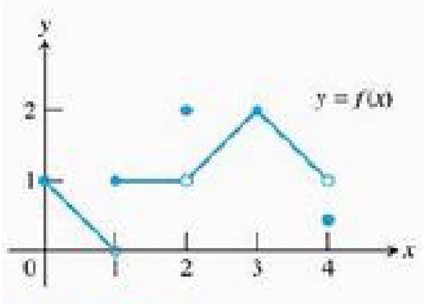
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

TEOREMA 5: *Relação entre os limites Lateral e Bilateral*

Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de a se e somente se tiver um limite lateral à esquerda e um à direita e os dois limites forem iguais.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff^{6} \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

10. Seja a função $y = f(x)$ dada pelo gráfico apresentado abaixo. Calcule o limite da $f(x)$,



a) em $x = 0$;

b) em $x = 1$;

c) em $x = 2$;

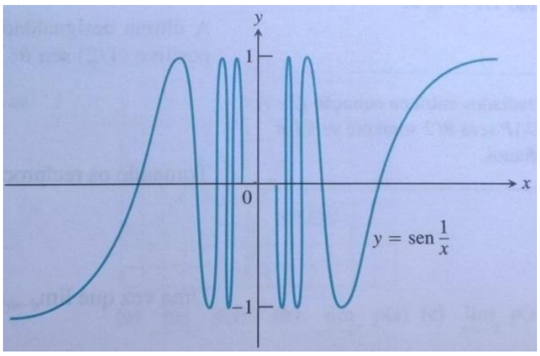
d) em $x = 3$;

e) em $x = 4$;

Exemplo 15: A função $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não tem nenhum limite lateral quando x se aproxima de zero de ambos os lados.

Solução:

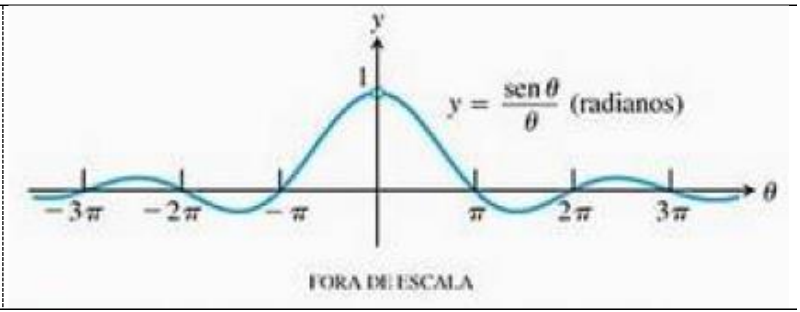
Conforme x se aproxima de zero, seu recíproco, $\frac{1}{x}$, cresce sem limitação e os valores de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ repetem-se ciclicamente de -1 a $+1$. Não há nenhum número $\boldsymbol{L}$ do qual os valores da função vão ficando cada vez mais próximos conforme x tende a zero, o que é válido mesmo quando restringimos a x a valores positivos ou negativos. A função não tem limite à direita nem à esquerda em $x = 0$.



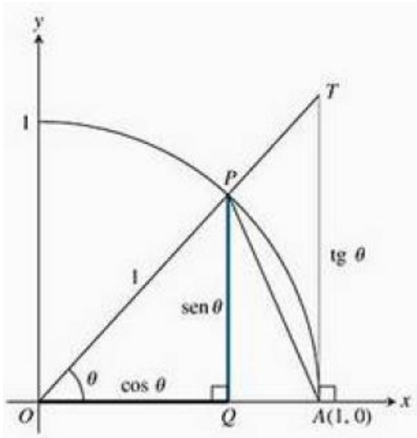
[6] O símbolo $\iff$ é lido como "se e somente se". É uma combinação dos símbolos $\Rightarrow$ (implica) e $\Leftarrow$ (é implicado por).

TEOREMA 6:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \ \ (\theta \ em \ radianos)$$



Objetivo: Mostrar que os limites à esquerda e à direita são iguais a 1.



Demonstração:
Considere os valores positivos de θ menores que $\pi/2$ e observe que:

$$Área\ \Delta OAP < \text{Área do setor } OAP < Área\ \Delta OAT$$

Ou seja,

$$Área\ \Delta OAP = \frac{1}{2} base \cdot altura = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Área do setor } OAP = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \theta = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \theta = \frac{\theta}{2}$$

$$Área\ \Delta OAT = \frac{1}{2} base \cdot altura = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$$

Logo, $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$

(Como a última desigualdade não se altera ao se dividir toda a desigualdade por "$\frac{1}{2}\boldsymbol{\operatorname{sen}\theta}$" já que $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ é positivo)

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Tomando os recíprocos a desigualdade é revertida:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \cos\theta$$

E como o $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos\theta = 1$, pelo Teorema do Confronto resulta que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Como $\operatorname{sen}\theta$ e θ são ambos funções ímpares, então $f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ é uma função par, com um gráfico simétrico em relação ao eixo y. Essa simetria implica que o limite à esquerda em 0 existe e tem valor igual ao limite à direita:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$$

então

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1. \qquad \text{(De acordo com o Teorema do Confronto)}$$

11. Calcule os limites por substituição. Se possível, confirme suas respostas num computador ou numa calculadora.

a) $\lim_{x \to 2} 2x =$

e) $\lim_{x \to 0} 2x =$

b) $\lim_{x \to 1/3} (3x - 1) =$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(3x-1)} =$

c) $\lim_{x \to -1} 3x \cdot (2x - 1) =$

g) $\lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{(2x-1)} =$

d) $\lim_{x \to \pi/2} (x \cdot \operatorname{sen} x) =$

h) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{(1-\pi)} =$

12. Suponha que $\lim_{x \to c} f(x) = 5$ e $\lim_{x \to c} g(x) = -2$. Determine:

a) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) =$

c) $\lim_{x \to c} 2f(x) \cdot g(x) =$

b) $\lim_{x \to c} (f(x) + 3g(x)) =$

d) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)} =$

13. Suponha que $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 4} g(x) = -3$. Determine:

a) $\lim_{x \to 4} (g(x) + 3) =$

c) $\lim_{x \to 4} xf(x) =$

b) $\lim_{x \to 4} (g(x))^2 =$

d) $\lim_{x \to 4} \frac{g(x)}{f(x)-1} =$

14. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -7}(2x+5) =$

i) $\lim_{t\to -5}\frac{t^2+3t-10}{t+5} =$

b) $\lim_{t\to 6} 8\cdot(t-5)\cdot(t-7) =$

j) $\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2} =$

c) $\lim_{y\to 2}\left(\frac{y+2}{y^2+5y+6}\right) =$

k) $\lim_{y\to 1}\left(\frac{y-1}{\sqrt{y+3}-2}\right) =$

d) $\lim_{h\to 0}\left(\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}\right) =$

l) $\lim_{x\to 3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right) =$

e) $\lim_{r\to -2}(r^3-2r^2+4r+8) =$

m) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}\right) =$ (Racionalize e fatore.)

f) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{x+6}\right) =$

n) $\lim_{\theta\to 1}\frac{\theta^4-1}{\theta^3-1} =$ (Divida o denominador por ‘θ - 1’.)

g) $\lim_{x\to -3}(5-y)^{4/3} =$

o) $\lim_{t\to 9}\frac{3-\sqrt{t}}{9-t} =$ (Racionalize e fatore.)

h) $\lim_{\theta\to 5}\frac{\theta-5}{\theta^2-25} =$

p) $\lim_{s\to \pi}\left(s\cdot\frac{\pi-s}{2}\right) =$

15. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} =$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} =$

d) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} =$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}} =$

f) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2} =$

g) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25} =$

h) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3} =$

i) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5} =$

j) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{3h+1}-1}{h} =$

k) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} =$

l) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2} =$

m) $\lim\limits_{t\to 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1} =$

n) $\lim\limits_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} =$

o) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2} =$

p) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2} =$

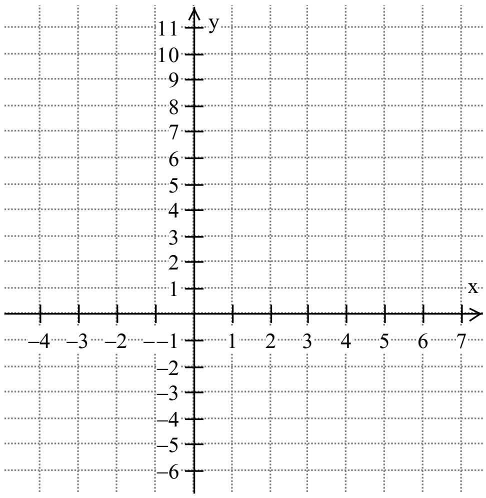
16. Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 3 \\ 3x-7, & x > 3 \end{cases}$. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

d) Esboce o gráfico de $f(x)$.



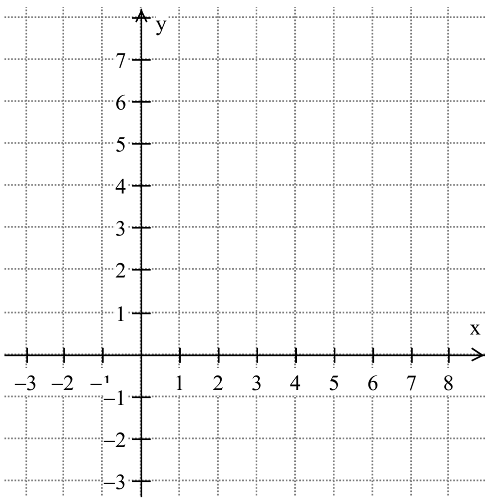
17. Seja $f(x) = |x-4|$. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

d) Esboce o gráfico de $f(x)$.



LIMITE INFINITO

Definição de Limites Infinitos

Dizemos que $f(x)$ **tende ao infinito quando x tende a x_0** e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

se para cada número real positivo B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B\ .$$

Dizemos que $f(x)$ **tende a menos infinito quando x tende a x_0** e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

se para cada número real negativo -B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B\ .$$

Exemplo 16: Seja $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}},\ \mathrm{x} \neq 0$. Construa o gráfico[7] dessa função e determine $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Exemplo 17: Seja $\mathrm{g(x)} = \frac{1}{|\mathrm{x}|},\ \mathrm{x} \neq 0$. Construa o gráfico[8] dessa função e determine $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

Exemplo 18: Seja $\mathrm{h(x)} = -\frac{1}{\mathrm{x}^2},\ \mathrm{x} \neq 0$. Construa o gráfico[9] dessa função e determine $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

---

[7] Baixe no AVA o arquivo ‘G5_f(x) = 1÷x.wp2’ e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

[8] Baixe no AVA o arquivo ‘G6_f(x) = 1÷módulo de x.wp2’ e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

[9] Baixe no AVA o arquivo ‘G7_f(x) = - 1÷x².wp2’ e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

LIMITE NO INFINITO

O símbolo para o infinito (∞) não representa nenhum número real e não pode ser empregado na aritmética na maneira usual. Além disso, o símbolo ∞ representa $+\infty$. Ambos podem ser empregados indiscriminadamente. Usamos ∞ para descrever o comportamento de uma função quando os valores em se domínio ou imagem ultrapassam todos os limites finitos.

Definições de Limite com $x \to \pm\infty$

1. Dizemos que $f(x)$ possui o limite L quando x tende ao infinito e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

se, à medida que x se distancia da origem no sentido positivo, $f(x)$ fica cada vez mais próximo de L.

2. Dizemos que $f(x)$ possui o limite L quando x tende a menos infinito e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

se, à medida que x se distancia da origem no sentido negativo, $f(x)$ fica cada vez mais próximo de L.

Exemplo 19: Seja $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (Mesmo gráfico do Exemplo 16)

Observação: As regras para limites quando $x \to \pm\infty$ são como as do Teorema 1 e as aplicaremos do mesmo modo.

Exemplo 20: Cálculo do $\lim_{x\to+\infty} 5 + \frac{1}{x}$ usando a regra da soma:

$$\lim_{x\to+\infty} 5 + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$$

Exemplo 21: Cálculo do $\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$ usando a regra do produto:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Exemplo 22: Seja $f(x) = \frac{1}{x} + 1, x \neq 0$. Construa o gráfico[10] dessa função e determine $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exemplo 23: Seja $f(x) = x$. Construa o gráfico[11] dessa função e determine $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

[10] Baixe no AVA o arquivo ‘G8_f(x) = (1÷x) +1.wp2’ e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

[11] Baixe no AVA o arquivo ‘G9_f(x) = x.wp2’ e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

Exemplo 24: Seja $f(x) = -x$. Construa o gráfico[12] dessa função e determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Limites de funções Racionais quando $x \to \pm\infty$

Exemplo 25 (Numerador e Denominador de Mesmo Grau)**:** Determine o $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$.

Resolução: Divida o numerador e o denominador por x^2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

Exemplo 26 (Grau do Numerador Menor que o Grau do Denominador)**:** Determine o $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{11x+2}{2x^3-1}$.

Resolução: Divida o numerador e o denominador por x^3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$$

Exemplo 27 (Grau do Numerador Maior que o Grau do Denominador)**:**

a) Determine o $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3}{7x+4}$.

Resolução: Divida o numerador e o denominador por x. O numerador agora tende a $-\infty$ ao passo que o denominador tende a 7, então a razão tende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} = -\infty$$

b) Determine o $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10}$.

Resolução: Divida o numerador e o denominador por x^2. O numerador agora tende a ∞ ao passo que o denominador tende a 2, então a razão tende a ∞.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} = \infty$$

Exemplo 28: Seja $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$. Construa o gráfico[13] dessa função e determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

[12] Baixe no AVA o arquivo 'G10_f(x) = -x.wp2' e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

[13] Baixe no AVA o arquivo 'G11_f(x) = (2x+1)÷(x-2).wp2' e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

Definições de Assíntotas Verticais e Horizontais

A reta $\boldsymbol{y = b}$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Uma reta $\boldsymbol{x = a}$ é uma **assíntota vertical** do gráfico se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

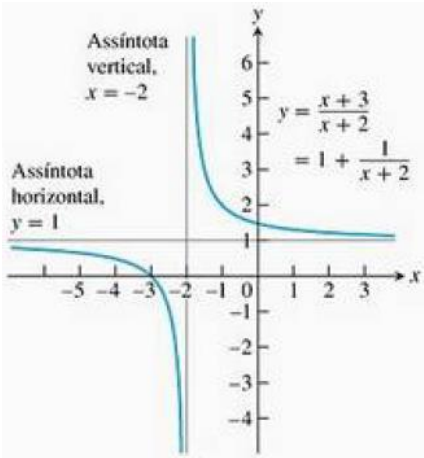
Exemplo 29: Encontre as assíntotas do gráfico de $y = \frac{x+3}{x+2}, x \neq -2$. Construa o gráfico[14] dessa função e represente suas assíntotas.

Resolução:

Basta avaliar o comportamento da curva quando $x \to \pm\infty$ e $x \to -2$ (onde o denominador se anula).

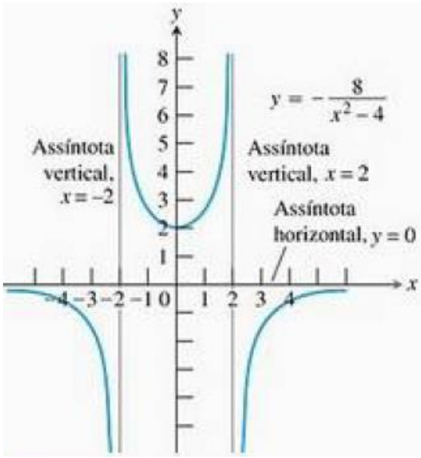
A partir de uma divisão polinomial de $x + 3$ por $x + 2$ é possível reescrever a função como $y = 1 + \frac{1}{x+2}$.

Assim, vemos que essa curva é o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ deslocado 1 unidade para cima e 2 para a esquerda. Portanto, as assíntotas não são os eixos coordenados $y = 0$ e $x = 0$ da função $y = \frac{1}{x}$, mas as retas $y = 1$ e $x = -2$.



Exemplo 30: Assíntotas não são necessariamente bilaterais.

No gráfico da função $y = -\frac{8}{x^2-4}$ representado ao lado, percebe-se que a curva se aproxima do eixo x apenas por um lado. As assíntotas não precisam ser bilaterais.



[14] Baixe no AVA o arquivo 'G12_f(x) = (x+3)÷(x+2).wp2' e veja o gráfico dessa função através do software Winplot.

Assíntotas Oblíquas

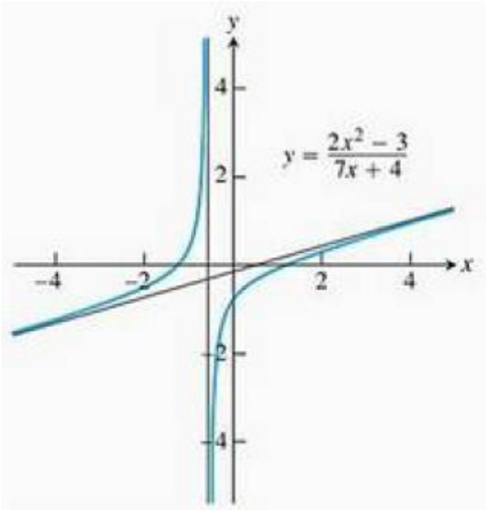
Caso o numerador de uma função racional tenha um grau maior do que o denominador, o gráfico da função $y = f(x)$ apresentará uma **assíntota oblíqua (inclinada)**. Encontramos uma equação para a assíntota dividindo o numerador pelo denominador para expressar f como uma função linear mais um resto que é igual a zero quando $x \to \pm\infty$.

Exemplo 31: Encontre a assíntota oblíqua para o gráfico de $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$.

Resolução:

Dividindo o numerador pelo denominador da função $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$, obtém-se:

$$f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4} = \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{Função\ linear\ g(x)} + \underbrace{\left(\frac{-115}{49(7x+4)}\right)}_{Resto}$$



Quando $x \to \pm\infty$, o resto, cuja magnitude fornece a distância vertical entre os gráficos de f e g, vai a zero, tornando a reta (inclinada) $g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ uma assíntota do gráfico de f, conforme apresentado no gráfico ao lado. A reta $y = g(x)$ é uma assíntota tanto à direita, quanto à esquerda.

A função $f(x)$ fica arbitrariamente grande em valor absoluto quando x se aproxima de $-4/7$, ponto em que o denominador se torna zero.

18. Encontre o limite das funções abaixo quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

a) $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{2+1/x}$

c) $h(x) = \frac{-5+(7/x)}{3-(1/x^2)}$

d) $u(x) = \frac{3-(2/x)}{4+(\sqrt{2}/x^2)}$

19. Determine o limite das funções racionais abaixo quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

a) $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

c) $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

d) $f(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

e $f(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8})$

f) $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$

g) $f(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

h) $f(x) = \frac{-x^2}{x^4-7x^3+7x^2+9}$

20. Determine o limite das funções abaixo. (Dica: *Divida o numerador e o denominador pela maior potência de x no denominador e continue a partir daí.*)

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} =$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} =$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} =$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}} =$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4} =$

21. Esboce o gráfico das funções descritas, incluindo suas assíntotas.

a) $y = \frac{1}{x-1}$

b) $y = \frac{x^2-1}{x}$

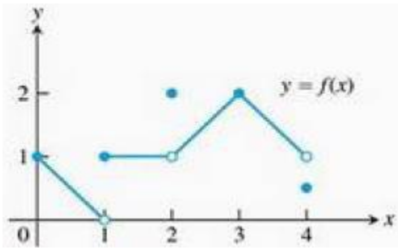
c) $y = \frac{100x+300}{x+10}$

d) $y = \frac{50x+200}{x+5}$

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Uma *função contínua* é uma função cujos valores variam continuamente e não saltam de um valor para outro sem assumir todos os valores entre eles. Assim, qualquer função $y = f(x)$ cujo gráfico possa ser esboçado sobre seu domínio em um único movimento contínuo, sem levantar o lápis, é um exemplo de *função contínua*.

Exemplo 32: Na figura abaixo, a função $y = f(x)$ é contínua em $[0, 4]$ exceto em $x = 1$, $x = 2$, e $x = 4$. Nesses pontos há saltos no gráfico.



Pontos em que f é contínua:		**Pontos em que f não é contínua:**	
$x = 0$,	$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.	$x = 1$,	$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.
$x = 3$,	$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.	$x = 2$	$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \neq f(2)$
$0 < c < 4,\ c \neq 1, 2,$	$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.	$x = 4$	$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1 \neq f(4)$
		$c < 0,\ c > 4$	estes pontos não estão no domínio de f.

Para definirmos a continuidade em um ponto do domínio de uma função, precisamos definir a continuidade em um ponto interno (o que envolve um limite bilateral) e em um ponto final (o que envolve limite lateral).

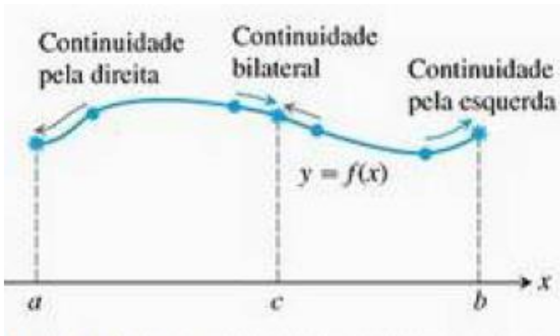
Definição *Continuidade em um Ponto*

Ponto interior: Uma função $\boldsymbol{y = f(x)}$ é **contínua em um ponto interior c** de seu domínio quando

$$\lim_{x \to c} \boldsymbol{f(x)} = f(c)$$

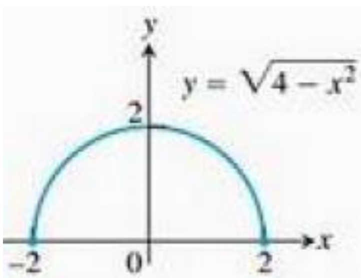
Extremidades: Uma função $\boldsymbol{y = f(x)}$ é **contínua na extremidade esquerda a** ou é **contínua na extremidade b** de seu domínio quando, respectivamente,

$$\lim_{x \to a^+} \boldsymbol{f(x) = f(a)} \quad ou \quad \lim_{x \to b^-} \boldsymbol{f(x) = f(b)}.$$



Se uma função f não é contínua em um ponto c, dizemos que f é descontínua em c e que c é um ponto de descontinuidade. Observe que c não precisa pertencer ao domínio de f.

Exemplo 33: A figura ao lado é o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, que é contínua em todos os pontos de seu domínio, [-2, 2], inclusive em $x = -2$, quando f é contínua à direita, e $x = 2$, quando f é contínua à esquerda.



Exemplo 34: A função '*salto unitário*' é definida por $U(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ 1, & se\ x \geq 0 \end{cases}$ e está traçada na figura abaixo. Observe que $\mathbf{0} \in \boldsymbol{D}$, ou seja, o zero está no domínio da função e $U(x)$ apresenta um salto em $x = 0$. A função é contínua em $x = 0$?

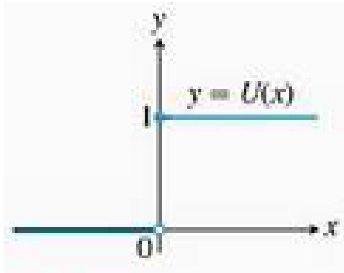
Resolução:

Nesse caso, vamos avaliar os limites bilaterais da função em torno de $x = 0$.

i) $\lim_{x \to 0^-} U(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \neq 1 = U(0)$, não é contínua à esquerda de $x = 0$;

ii) $\lim_{x \to 0^+} U(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 = U(0)$, é contínua à direita de $x = 0$;

Portanto, como os limites bilaterais calculados em (i) e (ii) são diferentes, então $\nexists \lim_{x \to 0} U(x)$ e há uma descontinuidade **irremovível**[15] em $x = 0$, onde a função apresenta um salto.

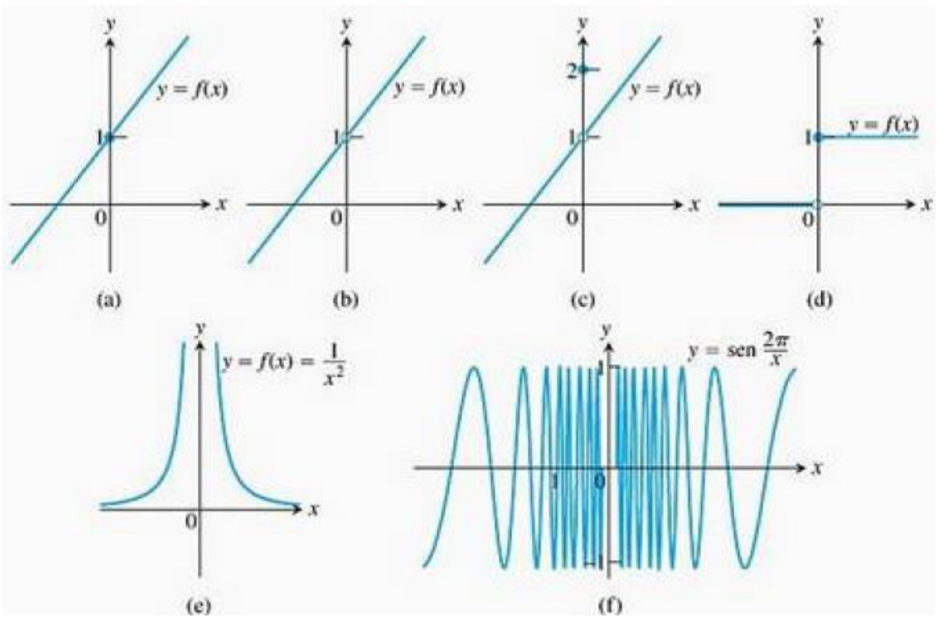


Teste de Continuidade

Uma função $\boldsymbol{f(x)}$ será contínua em $x = \boldsymbol{c}$ se, e somente se, ela obedecer às três condições abaixo:

1. $f(c)\ existe$; (c está no domínio de f)
2. $\lim_{x \to c} \boldsymbol{f(x)}$ existe; (f tem um limite quando $x \to c$)
3. $\lim_{x \to c} \boldsymbol{f(x)} = f(c)$ (o limite é igual ao valor da função)

Exemplo 35: Na figura (a) a função é contínua para $x = 0$. Em (b) seria contínua se tivesse $f(0) = 1$, em (c) seria contínua se $f(0)$ fosse 1 em vez de 2. As descontinuidades em (b) e (c) são **removíveis**. Cada função tem um limite quando $x \to 0$, e podemos remover a descontinuidade fazendo $f(0)$ igual ao seu limite. Já nas figuras (d), (e) e (f) as descontinuidades ocorrem pois $\lim_{x \to 0} \boldsymbol{f(x)}$ **não existe,** e não existe forma de melhorara situação trocando f em 0. Em (d) os limites laterais existem, mas têm valores distintos. Em (e) tem uma descontinuidade infinita. Em (f) há uma descontinuidade oscilante: ela oscila demais para ter um limite quando $x \to 0$.

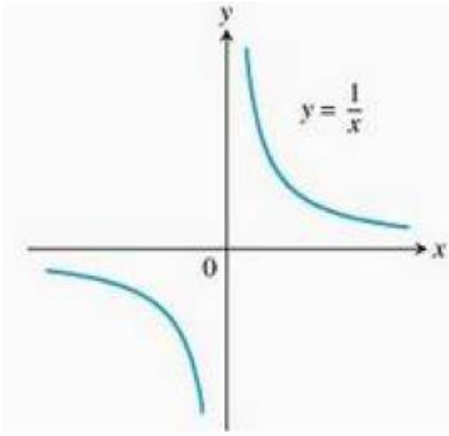


[15] Descontinuidades irremovíveis ocorrem, evidentemente, em abcissas do domínio da função nas quais o limite não existe.

Funções Contínuas

Uma *função é contínua* em um intervalo *se e somente se* for contínua em cada ponto do intervalo. Uma *função contínua* é aquela que é contínua em cada ponto de seu domínio. Uma *função contínua* não precisa ser contínua em todo intervalo. Por exemplo, $y = 1/x$ não é contínua em [-1, 1], veja no exemplo a seguir.

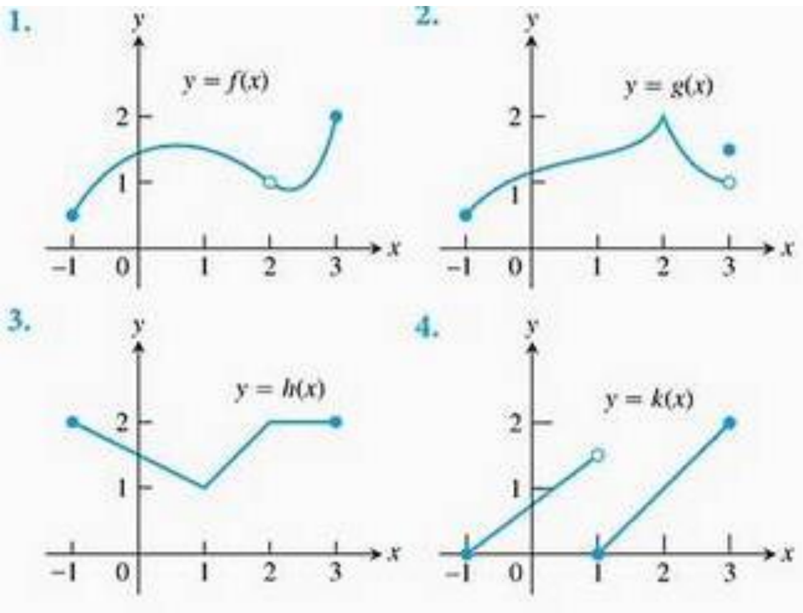
Exemplo 36: A função $y = 1/x$ representada na figura ao lado é uma função contínua por ser contínua em cada ponto de seu domínio. Entretanto, ela apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 0$, porque aí não é definida.



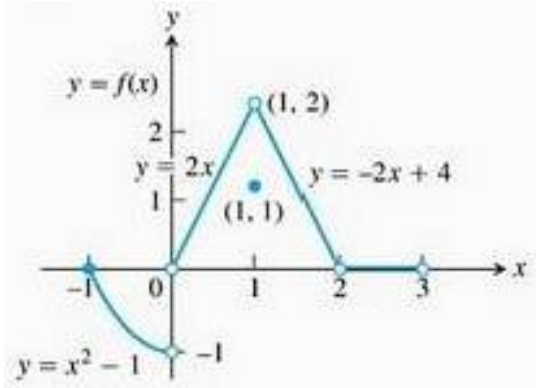
Tipos de funções contínuas em cada ponto de seus domínios:

- ✓ Funções polinomiais;
- ✓ Funções racionais;
- ✓ Função raiz ($y = \sqrt[n]{x}, com\ n\ inteiro\ e\ n > 1$);
- ✓ Funções trigonométricas;
- ✓ Funções trigonométricas inversas;
- ✓ Funções exponenciais;
- ✓ Funções logarítmicas.

22. Avalie se as funções, apresentadas abaixo, são contínuas em [-1, 3]. Se não, onde ela deixa de ser contínua e por quê?



23. Sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$ e seu gráfico apresentado abaixo, avalie as questões a seguir:



a) Existe $f(-1)$?

b) Existe $\lim_{x \to -1^+} f(x)$?

c) Existe $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$?

d) f é contínua em $x = -1$?

e) Existe $f(1)$?

f) Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?

g) Existe $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$?

h) f é contínua em $x = 1$?

i) f é definida em $x = 2$?

j) f é contínua em $x = 2$?

k) Em quais valores de x f é contínua?

l) Qual valor deve ser atribuído para $f(2)$ para tornar a função estendida contínua em $x = 2$?

m) Para qual novo valor $f(1)$ deve ser mudada para remover a descontinuidade?

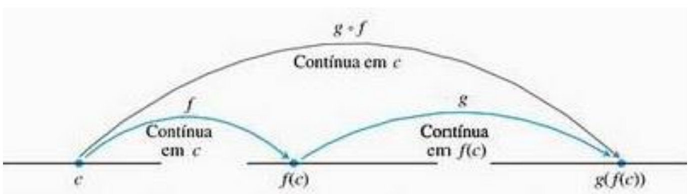
TEOREMA 7: *Propriedades de Funções Contínuas*

Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x = c$, então as seguintes combinações são contínuas em $x = c$.

1. Somas: $f + g$
2. Diferenças: $f - g$
3. Produtos: $f \cdot g$
4. Constantes múltiplas: $k \cdot f$
5. Quocientes: f/g, uma vez que $g(c) \neq 0$.

TEOREMA 8: *Compostas de Funções Contínuas são Contínuas*

Se $\boldsymbol{f}$ é contínua em $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{g}$ é contínua em $\boldsymbol{f(c)}$, então a composta $\boldsymbol{g \circ f}$ é contínua $\boldsymbol{c}$.



EXPRESSÕES INDETERMINADAS

As expressões apresentadas abaixo são ditas indeterminadas.

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Sejam as funções f e g tais que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Nada se pode afirmar, a priori, sobre o limite do quociente $\frac{f}{g}$. Dependendo das funções f e g ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Exprimimos isso, dizendo que $\frac{0}{0}$ é um símbolo de indeterminação, por exemplo:

Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$, mas $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração.** 6ª ed. revista e ampliada, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010.

THOMAS, George B., FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R., Tradução: BOSCHCOV, P. **Cálculo.** Vol 1, 10ª ed., São Paulo, Pearson Addison Wesley, 2002.

SILVA, Sebastião Medeiros da et al. **Matemática**: **para os cursos de Economia, Administração, Ciências Contábeis.** 6ª ed., São Paulo, Atlas, 2010.

http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=exe&cod=_winplot