Lista de Exercícios - Sistemas Lineares

Desenvolvas a solução dos sistemas de equações lineares abaixo utilizando, quando for possível, os métodos: Regra de Cramer, Método de Gauss e Inversa de Matriz.

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases};$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases};$$

$$\text{(c)} \begin{cases} - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}.$$

a)

Regra de Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2 \times x_3 = 8 \\ -x_1 - 2 \times x_2 + 3 \times x_3 = 1 \\ 3 \times x_1 - 7 \times x_2 + 4 \times x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 52$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 10 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 156;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 52;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 104;$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = \frac{156}{52} = 3$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = \frac{52}{52} = 1$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = \frac{104}{52} = 2$$

Resposta:

$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

$x_3 = 2$

Método de Gauss

Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right) \times(1) \quad L_2-(-1)\times L_1 \rightarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right) \times(-3) \quad L_3-3\times L_1 \rightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right) \times(-10) \quad L_3-10\times L_2 \rightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2\times x_3 = 8 \\ -x_2 + 5\times x_3 = 9 \\ -52\times x_3 = -104 \end{cases} \quad (1)$$

Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável x_3:

$-52\times x_3 = -104, x_3 = 2$

Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável x_2:

$-x_2 = -5\times x_3 + 9,\ -x_2 = -5\times 2 + 9, x_2 = 1$

Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável x_1:

$x_1 = -x_2 - 2\times x_3 + 8, x_1 = -1 - 2\times 2 + 8, x_1 = 3$

Resposta:

$x_1 = 3$,

$x_2 = 1$,

$x_3 = 2$

A solução geral: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)Regra de Cramer

Solução utilizando a Regra de Cramer

$$\begin{cases} 2\times x_1 + 2\times x_2 + 2\times x_3 = 0 \\ -2\times x_1 + 5\times x_2 + 2\times x_3 = 1 \\ 8\times x_1 + x_2 + 4\times x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Para solucionar por Regra de Cramer o determinante da matriz dos coeficientes (matriz da sistema) deve ser distinto de zero

Método de Gauss

Solução utilizando o Método de Gauss

(Algorithmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \times(1) \ \sim \ L_2-(-1)\times L_1 \rightarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \times(-4) \ \sim \ L_3-4\times L_1 \rightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{array}\right) \times(1) \ \sim \ L_3-(-1)\times L_2 \rightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2\times x_1 + 2\times x_2 + 2\times x_3 = 0 \\ 7\times x_2 + 4\times x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável x_2:

$7\times x_2 = -4\times x_3 + 1, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\times x_3$

Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável x_1:

$2\times x_1 = -2\times x_2 - 2\times x_3,\ 2\times x_1 = -2\times\left(\frac{-4}{7}\times x_3 + \frac{1}{7}\right) - 2\times x_3, x_1 = \frac{-1}{7} - \frac{3}{7}\times x_3$

Resposta:

$x_1 = \frac{-3}{7}\times x_3 - \frac{1}{7}$,

$x_2 = \frac{-4}{7}\times x_3 + \frac{1}{7}$,

$x_3 = x_3$

A solução geral: $X = \begin{pmatrix} \frac{-3}{7}\times x_3 - \frac{1}{7} \\ \frac{-4}{7}\times x_3 + \frac{1}{7} \\ x_3 \end{pmatrix}$

OBS: Se preferir, substitua a variável x_3 por uma letra qualquer, por exemplo, $x_3 = a$

c) **SI**