# Do Retangular ao Polar:

## Integrais duplas abandonam Descartes e abraçam Newton!

**Trabalho de Cálculo 3, prof. Kennedy**

# Grupo 1

Vila Velha, 07/11/2019

# Tópicos

**Grupo 1**

## Vocês *realmente* entenderam o que são as integrais duplas?

**Grupo 1**

### Responda "na lata":

$$\int_0^2 \int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 48$$

O que *significa* esse número 48? Escolha a opção correta:

a É a variação da função nesse intervalo

b É o ponto mais alto da função nesse intervalo

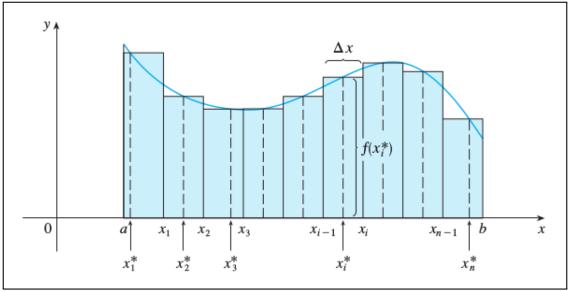
c É a área da função nesse intervalo

d É quanto $y$ varia em relação à $x$

e É o volume sob a função nesse intervalo

f Não sei nem errar essa pergunta! Só Jesus salva...

# Integrais simples e áreas



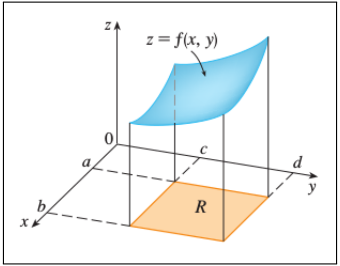

James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 884)

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \tag{1}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

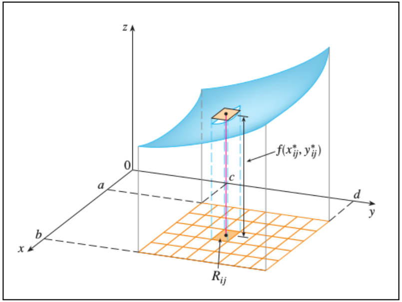
# Integrais duplas e volumes: visualização

**Grupo 1**




James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 884)

- $x$ varia de $a$ até $b$
- $y$ varia de $c$ até $d$
- $x$ e $y$ formam a base, a região retangular $R$, com área $A$
- $z = f(x, y)$ determina uma superfície acima da região $R$
- $x$, $y$ e $z$ determinam um sólido $S$ com volume $V$
- Qual o *volume* desse sólido?



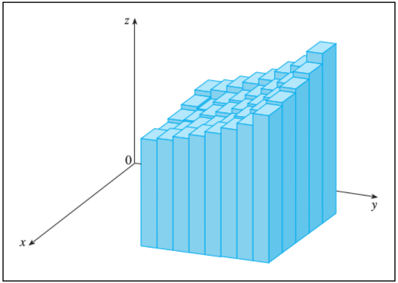

James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

- Dividimos a base retangular $R$ em vários retângulos menores: $R_{ij}$
- A área de cada $R_{ij}$ é: $\Delta A = \Delta x \Delta y$
- A altura de cada retângulo é: $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$

$$V_{R_{ij}} \approx f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \tag{3}$$

# Integrais duplas e volumes: visualização

**Grupo 1**



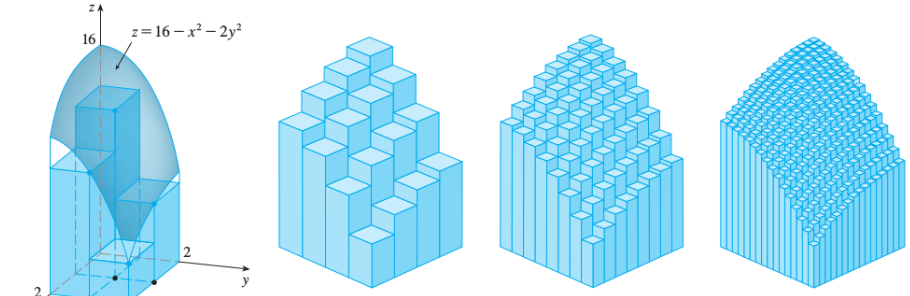

James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \tag{4}$$

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

# Integrais duplas e volumes: visualização

Grupo 1




(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

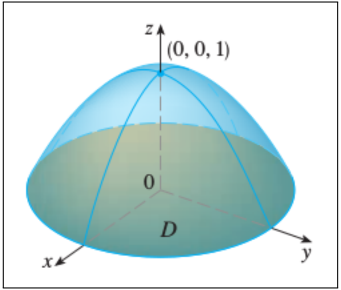
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

$$\int_0^2 \int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 48$$

# Tópicos

# Como calcular esse volume?

Qual o volume do sólido limitado abaixo pelo plano $z = 0$ e acima pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$?

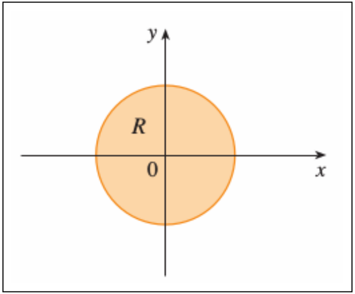



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 906)

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}A \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \textbf{ vixe!, complicou\ldots}
\end{aligned} \tag{6}
$$

# Por que complicou? Culpa de Descartes!





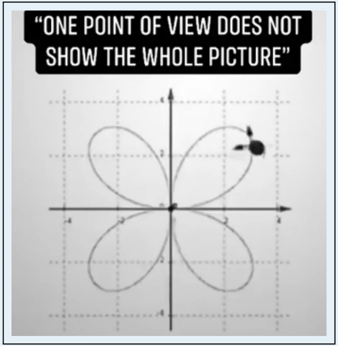

James Stewart: *Cálculo* ($8^a$ ed., vol. 2, pg. 904)

- Nosso referencial, até agora foi o sistema de *coordenadas retangulares* (ou cartesianas)
- Aqui, o disco formado por $x$ e $y$ não pode ser descrito por uma única função integrável: $y$ não é $f(x)$
- Algum corajoso aí para integrar quebrando a função em duas? Por simetria? E depois, como considerar o eixo $z$?

# Como resolver?

**Grupo 1**

## Basta mudar o ponto de vista!




www.youtube.com/watch?v=Dmc3mQ87GiQ

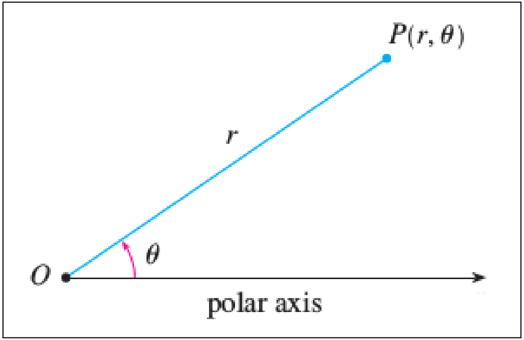
- Sai Descartes e o sistema de coordenadas retangulares
- Entra Newton e o sistema de *coordenadas polares*

# Tópicos

**Grupo 1**

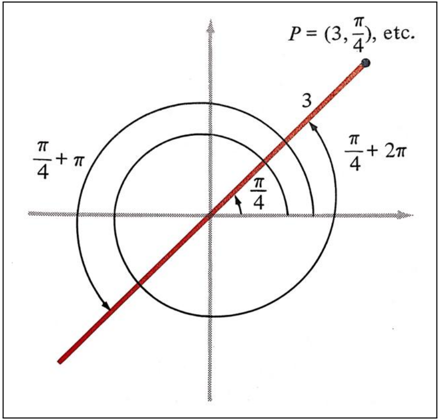
# Sistema de coordenadas polares






James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 596)

- Especialmente útil para curvas com "afinidade pela origem", como a trajetória de um planeta
- Essas curvas são mais facilmente descritas como a trajetória de um ponto móvel cuja posição é especificada pela sua *direção* a partir da origem e sua *distância* da origem
- A direção é dada pelo ângulo $\theta$, em radianos, e a distância $r$ é calculada da origem até o ponto
- O par ordenado $P = (r, \theta)$ são as *coordenadas polares* do ponto

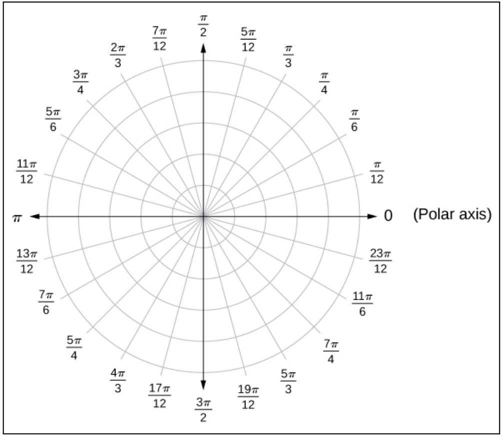



George Simmons: *Calculus with Analytic Geometry* (2ª ed., pg. 560)

- $P = (r, \theta)$ determina um ponto único, mas um ponto não determina uma coordenada polar única (cada ponto tem muitas coordenadas polares)
- $r = 0$ especifica a origem, independente de $\theta$
- $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$

# O sistema de coordenadas polares

**Grupo 1**

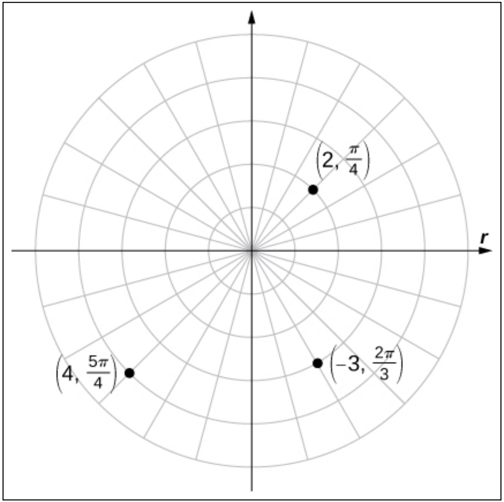



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 645)

- Pense em termos de *ao redor* e de *distância* em relação ao centro (polo)
- Esqueça o pensamento cartesiano de eixo-x (esquerda e direita) e eixo-y (para cima e para baixo)
- Ao aumentarmos $\theta$ por $\pi$ $(\theta + \pi)$ estamos na mesma "reta", mas na direção contrária
- Ao aumentarmos $\theta$ por qualquer múltiplo de $2\pi$ $(\theta + 2\pi)$, voltamos no mesmo ponto após dar uma ou mais voltas

# Como plotar os pontos

**Grupo 1**




Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 646)

## Gráfico de equações polares

O **gráfico de uma equação polar** $r = f(\theta)$ ou, mais genericamente, $F(r, \theta) = 0$, consiste de todos os pontos $P$ que têm *pelo menos uma representação* $(r, \theta)$ cujas coordenadas satisfaçam a equação polar.

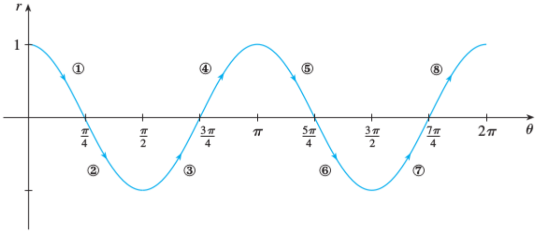



**FIGURE 12**
$r = \cos 2\theta$ in Cartesian coordinates

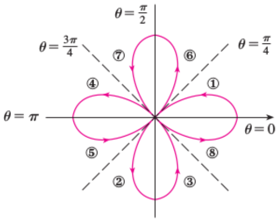


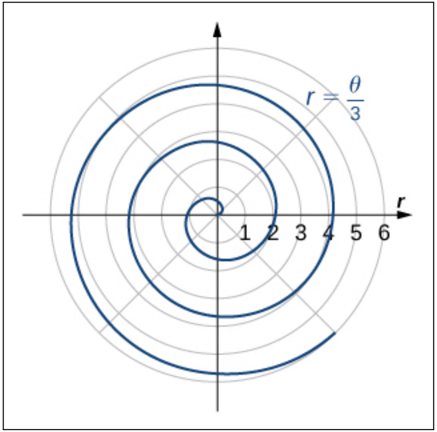

**FIGURE 13**
Four-leaved rose $r = \cos 2\theta$

James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 600)

# A beleza polar (1): visualize, entenda e aprecie!

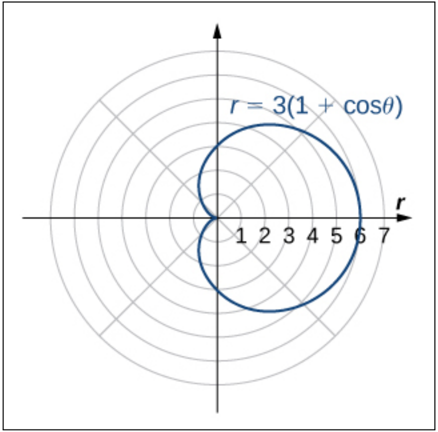
**Grupo 1**

Espiral




Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 651)

Cardióde

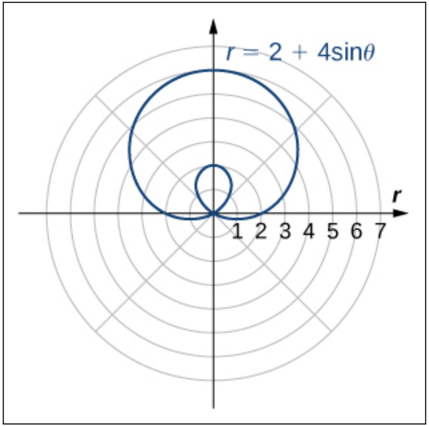



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

# A beleza polar (2): visualize, entenda e aprecie!

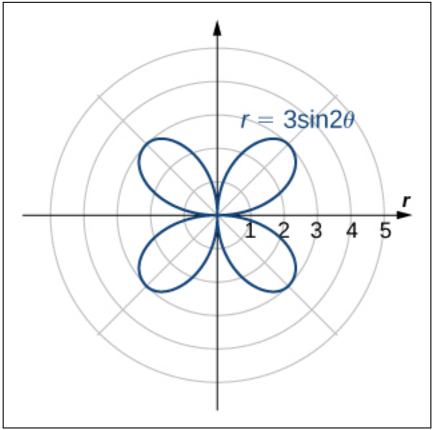
**Grupo 1**

Limaçon




Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

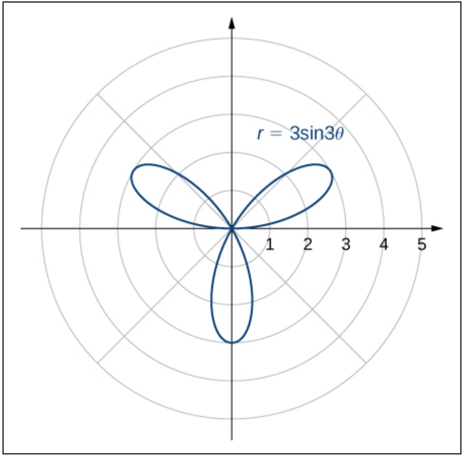
Rosácea



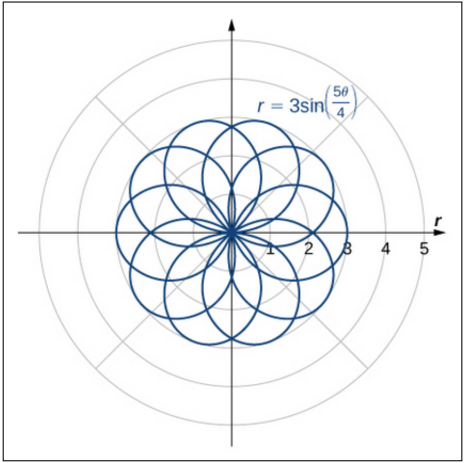

Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

# A beleza polar (3): visualize, entenda e aprecie!

**Grupo 1**




Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

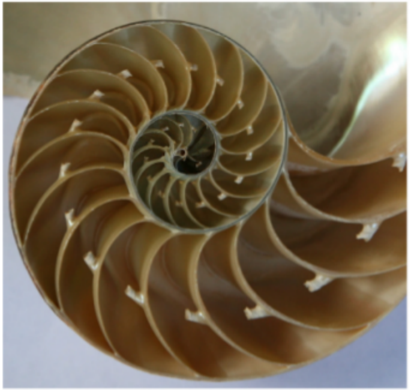
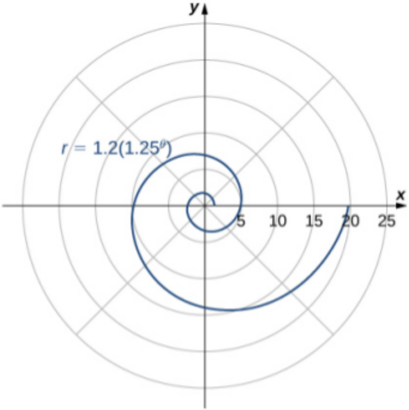



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

# A beleza polar (4): visualize, entenda e aprecie!

**Grupo 1**

Espiral logarítmica


Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 655)

## Polar para Retangular

$$x = r\cos(\theta) \tag{7}$$

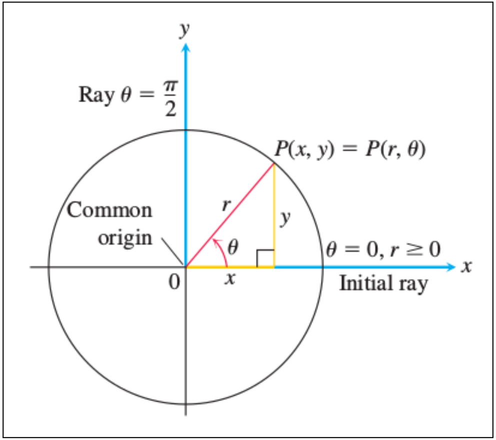
$$y = r\sin(\theta) \tag{8}$$

## Retangular para Polar

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{9}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{10}$$

Cuidado para que o sinal de $r$ e a escolha de $\theta$ sejam consistentes com o quadrante no qual o ponto $(x, y)$ está.




George Thomas: *Thomas' Calculus: early transcedentals* (14ª ed., 2017, pg. 683)

# Exercícios: polar para retangular e vice-versa!

**Grupo 1**

## Polar para Retangular

**3–4** Plot the point whose polar coordinates are given. Then find the Cartesian coordinates of the point.

**3.** (a) $(2, 3\pi/2)$ (b) $(\sqrt{2}, \pi/4)$ (c) $(-1, -\pi/6)$

**4.** (a) $(4, 4\pi/3)$ (b) $(-2, 3\pi/4)$ (c) $(-3, -\pi/3)$

James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 603)

# Exercícios: polar para retangular e vice-versa!

**Grupo 1**

## Retangular para Polar

**5–6** The Cartesian coordinates of a point are given.

(i) Find polar coordinates $(r, \theta)$ of the point, where $r > 0$ and $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

(ii) Find polar coordinates $(r, \theta)$ of the point, where $r < 0$ and $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

**5.** (a) $(-4, 4)$ (b) $(3, 3\sqrt{3})$

**6.** (a) $(\sqrt{3}, -1)$ (b) $(-6, 0)$

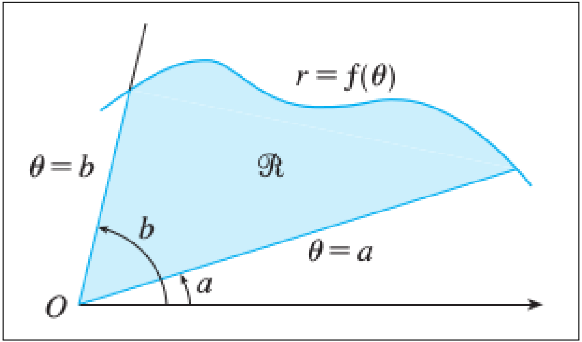
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 603)

# Tópicos

# Área em coordenadas polares: como calcular?

**Grupo 1**

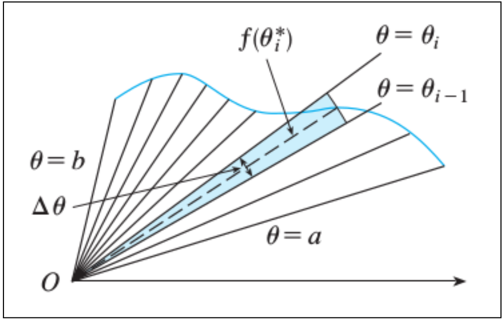
Dada uma equação polar qualquer $r = f(\theta)$, como encontrar a área da região $R$ delimitada pelos ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$?




James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)

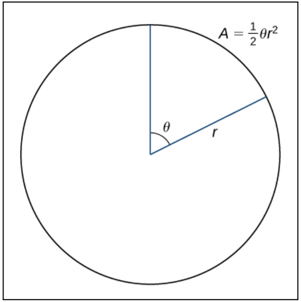
# Mesmo raciocínio: dividir para conquistar!

**Grupo 1**




James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \approx \frac{1}{2}\left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta \tag{7}$$




Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 663)

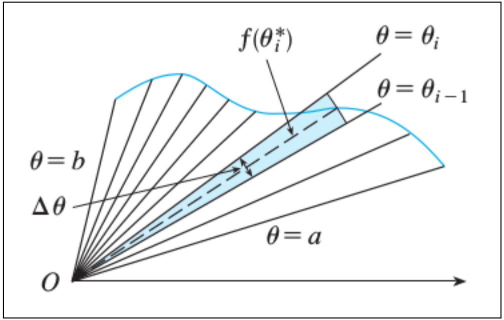
Área é proporcional ao ângulo $\theta$:

$$A = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}\theta r^2 \tag{8}$$

# No limite, a integral e a área em coordenadas polares!



Dada uma equação polar qualquer $r = f(\theta)$, como encontrar a área da região $R$ delimitada pelos ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$?




James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)

$$A \approx \sum_{i}^{n} \frac{1}{2} \left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta \tag{9}$$

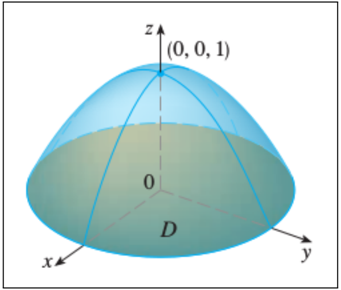
$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i}^{n} \frac{1}{2} \left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \left[f(\theta)\right]^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{10}$$

# Tópicos

# Lembra-se desta figura? Como calcular o volume agora?



Qual o volume do sólido limitado abaixo pelo plano $z = 0$ e acima pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$?



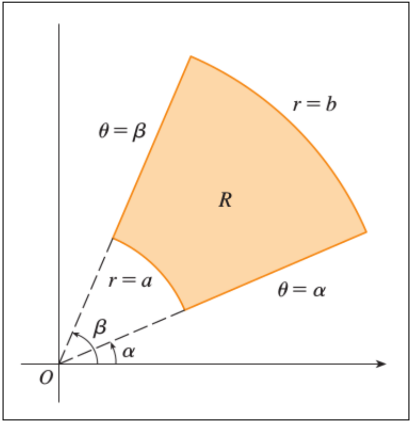

James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 906)

- Mesmo raciocínio: uma integral é a "responsável" pela área do disco, e a outra integral é a "responsável" pelo volume
- A diferença aqui é que os cálculos da área do disco serão feitos com *retângulos polares*!

# Entendendo o retângulo polar



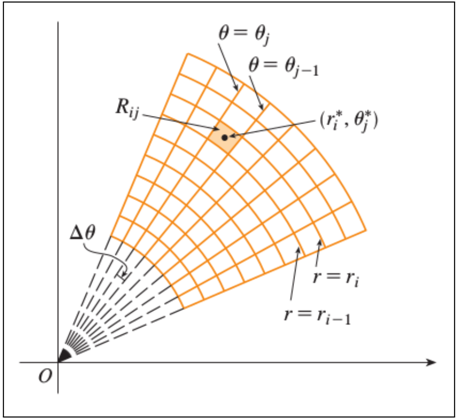
$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$




James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 904)

# Dividindo uma área em retângulos polares

**Grupo 1**



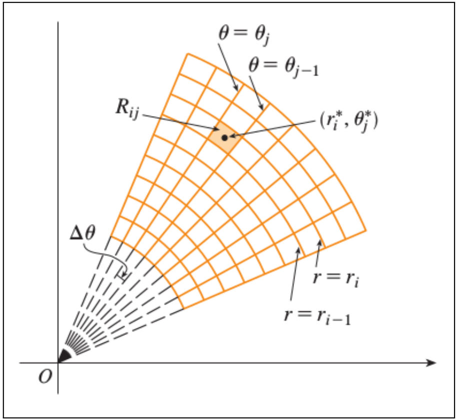

James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 904)

- O intervalo $[a, b]$ é dividido em $m$ intervalos $[r_{i-1}, r_i]$, de larguras $\Delta r = \dfrac{b-a}{m}$
- O intervalo $[\alpha, \beta]$ é dividido em $n$ intervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, de larguras $\Delta\theta = \dfrac{\beta-\alpha}{n}$
- O centro do retângulo é dado por $r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$ e $\theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$

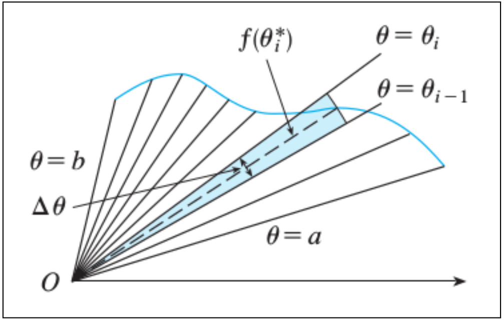
$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \left(\frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta\right) - \left(\frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \dots \\ &= {\color{red} r_i^*} \Delta r \Delta\theta \end{aligned} \tag{11}$$

# Por que retângulos e não setores?

**Grupo 1**




James Stewart: *Cálculo*
($8^a$ ed., vol. 2, pg. 904)

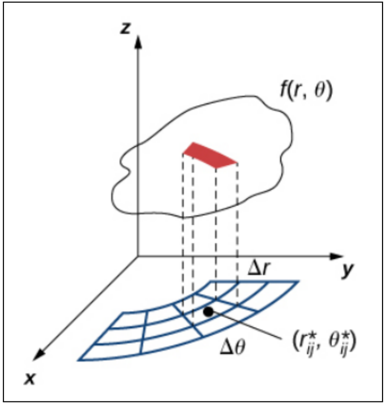



James Stewart: *Cálculo*
($8^a$ ed., vol. 2, pg. 606)

# Porque queremos achar o volume!

**Grupo 1**

$$V_{R_{ij}} \approx f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)]\Delta A_i$$



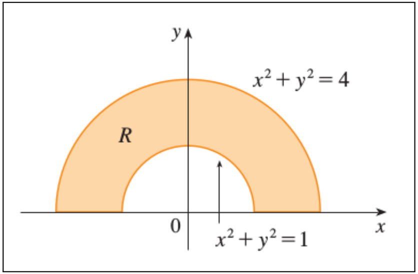

Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 3, pg. 527)

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)]\Delta A_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)] r_i^* \Delta r \Delta\theta \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} V &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)]\Delta A_i \\ &= \iint_R f[r\cos(\theta), r\sin(\theta)]\,\mathrm{d}A \\ &= \int_\alpha^\beta \int_a^b f[r\cos(\theta), r\sin(\theta)] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{13}$$

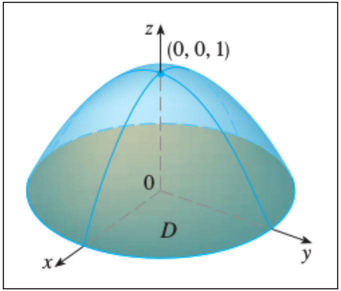
## Grupo 1

1) Calcule $\displaystyle\iint_R (3x + 4y^2)\,\mathrm{d}A$, onde $R$ é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$:




James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 904)

2) Calcule (finalmente!) o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$:




James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 906)

# Vá estudar!


- James Stewart: *Cálculo*, 8ª edição, volume 2 (seções 10.3, 10.4, 15.3)
- George F. Simmons: *Calculus with Analytic Geometry*, 2ª edição (seções 16.1, 16.2, 16.3, 20.4)
- George B. Thomas, JR: *Thomas' Calculus: early transcedentals*, 14ª (seções 11.3, 11.4, 11.5, 15.4)
- Gilbert Strang & Edwin "Jed" Herman: *Calculus*, edição online de 2017, volume 2 (seções 7.3, 7.4)
- Gilbert Strang & Edwin "Jed" Herman: *Calculus*, edição online de 2017, volume 3 (seções 1.3, 1.4, 5.3)

# Integrantes do Grupo 1



- Abrantes Araújo Silva Filho
- Alecsandro Queiroz
- Anderson Kirmse Rodrigues
- Anna Karolyna Lima Santos
- Antônio Carlos da Silva Alberto
- Beatriz Sauvalaio Benezolli
- Braian dos Santos Calot
- Bruno Brasil Ferreira
- Bryan Lucas Barbosa Lima
- Danielle Marcelino Cicilioti