Álgebra Linear e Geometria Analítica

FAESA
Faça acontecer

Prof. Me. Rober Marcone Rosi
Unidade de Engenharia, Computação e Sistemas

Unidade 3 – Sistemas Lineares

- Definir equação linear;
- Reconhecer uma solução de uma equação linear;
- Definir sistema de equações lineares;
- Reconhecer uma solução de um sistema de equação linear;
- Classificar de um sistema de equações lineares;
- Resolver sistemas lineares Regra de Cramer;
- Resolver sistemas lineares Método de Gauss-Jordan;
- Resolver sistemas lineares homogêneos;
- Resolver sistemas com inversa de matrizes.

Situação Problema 1

- Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas, outras por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por 2 pessoas é?

- Essa questão pode ser expressa pelo sistema linear:

$$\begin{cases} Q + D = 12 \\ 4Q + 2D = 38 \end{cases}$$

- (Q representa a quantidade de mesas ocupadas por quatro pessoas e D representa a quantidade de mesas ocupadas por duas pessoas.)

$$\begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 225 \\ 688 \\ 321 \\ 441 \end{pmatrix}$$

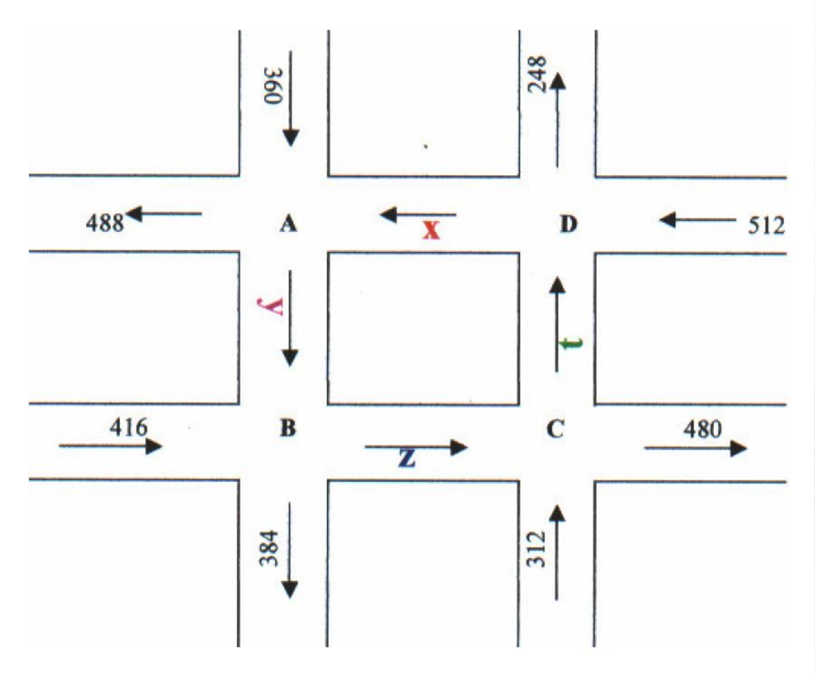
Problema 2

Tabela 2 - **HORAS POR DIA PARA CADA ATIVIDADE**

	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Segunda-feira	1,0	0,0	1,0	0,0
Terça-feira	0,0	0,0	0,0	2,0
Quarta-feira	0,4	0,5	0,0	0,0
Quinta-feira	0,0	0,0	0,5	2,0
Sexta-feira	0,4	0,5	0,0	0,0

- As informações do aluno Fernando estão localizadas na Tabela 1, segunda linha.
- Essa informação pode ser representada por uma matriz X_{4x1} e as da Tabela2, através de uma matriz A_{5x4}.
- Então, por meio destas informações podemos dizer quantas calorias Fernando vai queimar após cada dia de exercício físico, simplesmente calculando A . X

Situação Problema 3



❑Tendo em vista que, em cada cruzamento o número de veículos que entra tem que ser igual ao de veículos que sai, levando em consideração as setas indicadas pela figura.

❑Como mostra a figura no cruzamento A, o número de veículos que entra é x + 360 e o número de veículos que sai é y + 488.

Situação Problema 3

$x + 360 = y + 488$ (cruzamento A)

$y + 416 = z + 384$ (cruzamento B)

$z + 312 = t + 480$ (cruzamento C)

$t + 512 = x + 248$ (cruzamento D)

Resolução da matriz para este sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -264 \end{pmatrix}$$

Conceitos

EQUAÇÃO LINEAR. Uma equação é linear quando é da forma:

$$a_{13}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b.$$

Conceitos

Os números reais a_{13}, a_{12}, a_{13},..., a_{1n} são denominados coeficientes das variáveis x_1, x_2, x_3,... , x_n, respectivamente. O número real b é chamado termo independente da equação.

Conceitos

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR. Solução de uma equação linear é uma n-upla que satisfaz a equação linear.

Se a n-upla $(b_1, b_2, b_3,..., b_n)$ é solução da equação linear

$a_{13}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + ...\, a_{1n}\,x_n = b$, então $a_{13}\,b_1 + a_{12}\,b_2 + a_{13}\,b_3 + ...\, a_{1n}\,b_n = b$.

Obs.: Uma n-upla é um conjunto ordenado com n elementos. Em particular, se este conjunto tiver dois elementos, chamamos de par ou dupla, se tiver três de terna ou de quadra se tiver quatro elementos.

Exemplo 1. A terna (1; 3; -1) é solução da equação $2x + 3y – z = 12$, pois $2x1 + 3x3 – (–1) = 12$.

A quadra (1; 0; -1; 0) **não** é uma solução da equação $x + y – z + t = 1$, pois $1 + 0 – (–1) + 0 \neq 1$.

Conceitos

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES. Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares.

Conceitos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Exemplo 1. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 4x + y + 5z = 1 \\ 3x - 7y - z = 46 \end{cases}$ é um sistema de equações lineares. Este é um sistema 3x3, pois tem 3 equações e 3 incógnitas.

Conceitos

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES. Solução de um sistema de equações lineares é uma n-upla que satisfaz a todas as equações do sistema.

Se a n-upla $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ é solução da equação linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ então}$$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + a_{m3}c_3 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}.$$

Conceitos

Atividade de Fixação

Atividades

1. Qual deve ser o valor de K para que a terna (1, 3, 5) seja solução da equação linear $2x - Ky + z = 2$?

2. Escreva um sistema 2x2 tal que o par (2, 1) seja solução.

3. Qual deve ser o valor de K para que (0, 0, 0) seja solução do sistema $\begin{cases} 2t - 4v - w = 0 \\ t + 9v - Kw = 0 \end{cases}$?

Classificação de Sistemas Lineares

Conceitos

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES:

Um sistema que tem uma única solução é chamado de **possível e determinado** (SPD).

O sistema que tem infinitas soluções é denominado **possível e indeterminado** (SPI).

O que não tem solução é **impossível** ou **incompatível** (SI).

Exemplo 1. O sistema abaixo é SPD, pois tem uma única solução, que é o par (2, 1).

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exemplo 2. O sistema abaixo é SPI. As duplas (10, –7), (0, 3) e (1, 2) são algumas de suas soluções.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exemplo 3. O sistema abaixo é SI.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Atividade de Fixação

Exercício: Resolver o sistema pelo método da substituição e pelo método da adição:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

Forma Matricial de um Sistema Linear

FAESA
Faça acontecer

FORMA MATRICIAL DE UM SISTEMA LINEAR. Todo sistema de equações lineares

Conceitos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial pela equação

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ou } AX = B.$$

A matriz A é denominada **matriz dos coeficientes**. A matriz X, das **variáveis**. A matriz B, por sua vez, dos **termos independentes**.

Atividade de Fixação

Atividades

Represente por uma equação matricial os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ 4x + y - 2z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + y = 10 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + z - w + t = -1 \\ x - y + 2z - 2w + 2t = 0 \\ 3x + w - t = 1 \\ 2y + 4w - 5t = -2 \end{cases}$

Regra de Cramer

SISTEMA NORMAL. Um sistema é normal quando o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Conceitos

REGRA DE CRAMER: Um sistema normal com determinante da matriz dos coeficientes não nulo é sempre SPD. Cada variável terá valor igual ao quociente entre o determinante da matriz que se obtém substituindo a coluna dos coeficientes dessa variável pelos termos independentes e o determinante da matriz dos coeficientes.

Conceitos

Regra de Cramer

Exemplo 1. Resolva o sistema pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

Exemplo 2. Resolva o sistema pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y - z - t = 0 \\ 2x + 2z + t = -1 \end{cases}$$

Regra de Cramer

Conceitos

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES NORMAIS.

Um sistema é possível e determinado (SPD), se $D \neq 0$.

Se $D = D_x = D_y = D_z = \ldots = 0$ então o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Se $D = 0$ e $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ ou $D_z \neq 0$ ... então o sistema é impossível ou incompatível (SI).

Os **sistemas possíveis e indeterminados** serão resolvidos pelo **Método de Gauss ou Gauss-Jordan**.

Regra de Cramer

Exemplo 3. Demonstre que o sistema normal $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$ é SPI.

Reflexão

Você se lembra da propriedade 4 dos determinantes?

Todos os determinantes acima são nulos, pois a última linha é igual à segunda menos a primeira.

Sistema Escalonado

SISTEMA ESCALONADO. Se em cada equação de um sistema existe pelo menos um coeficiente não nulo e o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação, então o sistema está escalonado.

Exemplo 1. Não há nenhuma dificuldade em resolver sistemas do tipo $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Método Gauss

MÉTODO DE GAUSS Consiste em realizar sobre um sistema operações chamadas elementares até que ele se torne um sistema escalonado.

OPERAÇÃO ELEMENTAR. É uma operação que pode ser realizada sobre o sistema sem modificar suas soluções. São elas:

1ª. Trocar de posição duas equações.

2ª. Multiplicar uma equação por um número real não nulo.

3ª. Substituir uma equação pela soma dela à outra previamente multiplicada por uma constante.

Método Gauss

Atenção

As operações elementares são realizadas sobre as linhas da **MATRIZ AMPLIADA (ou AUMENTADA)** do sistema.

Conceitos

MATRIZ AMPLIADA. A matriz ampliada de um sistema é a matriz dos coeficientes acrescida, após à ultima coluna, da matriz dos termos independentes.

Método Gauss

Exemplo 1. O sistema $\begin{cases} -x+y-z=5 \\ x+2y+4z=4 \\ 3x+y-2z=-3 \end{cases}$ já foi resolvido pela Regra de Cramer e a solução é $S = \{(-2, 3, 0)\}$.

Vamos resolvê-lo agora pelo Método de Gauss

Exemplo 2. O sistema $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+y-z-t=0 \\ 2x+2z+t=-1 \end{cases}$ já foi resolvido pela Regra de Cramer e a solução é $S = \{(4, \frac{1}{2}, -\frac{11}{2}, 2)\}$.

Vamos resolvê-lo pelo Método de Gauss

Escalonamento de Matriz

FAESA
Faça acontecer

Conceitos

ALGORITMO PARA ESCALONAMENTO DE MATRIZ:

Seja A uma matriz nxm. Para i = 1, 2, 3, ..., n faça:

Passo 1. Escolha o maior valor não nulo, em módulo, entre os elementos $\{a_{i\,i}, a_{i+1\,i}, a_{i+2\,i}, \ldots, a_{n\,i}\}$. Chame este **elemento de pivô**.

Passo 2. Faça a linha que contém o pivô ser a linha i.

Passo 3. Divida toda a linha i pelo pivô.

Passo 4. Para cada linha k maior que i faça: se $a_{k\,i} = 0$, mantenha a linha, caso contrário, substitua a linha k pela soma dela com a linha i previamente multiplicada por $(-a_{ki})$.

Escalonamento de Matriz

Exemplo 1: Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+y-z-t=0 \\ 2x+2z+t=-1 \end{cases}$ utilizando o algoritmo para escalonamento de matriz.

Sistemas Indeterminados

Exemplo 1: Já foi mostrado que o sistema $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$ é SPI. Vamos resolvê-lo por Gauss-Jordan e tentar não trabalhar com frações.

Exemplo 2. Veja como fica um sistema impossível pelo Método de Gauss

$$\begin{cases} 4x + 5y - 7z = 4 \\ 2x + 7y + z = 20 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Atenção

Se durante o escalonamento de um sistema ocorrer uma linha do tipo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, toda nula, ela deverá ser suprimida do sistema.

Se durante o escalonamento de um sistema ocorrer uma linha do tipo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$, tendo somente o último elemento $k \neq 0$, o sistema será impossível.

Atividade de Fixação

Atividades

Resolva o sistema pelo Método de Gauss

a) $\begin{cases} 2x - 7y = 15 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + y + z = -5 \\ 2x + 4y - z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2y - z + t = -2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + t = -1 \end{cases}$

Sistemas Homogêneos

FAESA
Faça acontecer

SISTEMA HOMOGÊNEO. Um sistema é homogêneo quando a matriz dos termos independentes é nula.

Conceitos

Exemplo 1. O sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - 5y + z = 0 \end{cases}$ é homogêneo.

Exemplo 2. O sistema $\begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ y - 5z + 2t = 0 \\ x + 2z + 2t = 0 \end{cases}$ também é homogêneo.

Um sistemas homogêneo pode ser impossível?

Matriz Inversa

1. Podemos utilizar as operações elementares para determinar a **inversa de uma matriz**.
2. O método consiste em colocar num quadro a matriz da qual se pretende encontrar a inversa, e, a seu lado, a matriz identidade, de mesma ordem que aquela.
3. Fazemos operações elementares sobre a matriz até que ela se torne a identidade (**Método Gauss-Jordan**). A identidade se tornará a inversa da matriz.

Exemplo 1. Encontre a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz Inversa

1. Podemos utilizar as operações elementares para determinar a **inversa de uma matriz**.
2. O método consiste em colocar num quadro a matriz da qual se pretende encontrar a inversa, e, a seu lado, a matriz identidade, de mesma ordem que aquela.
3. Fazemos operações elementares sobre a matriz até que ela se torne a identidade. A identidade se tornará a inversa da matriz.

Exemplo 1. Encontre a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Exemplo 2. Resolva o sistema $\begin{cases} x + 5y + 2z = 2 \\ -x + 3y = 7 \\ y + 4z = 3 \end{cases}$ utilizando a inversa da matriz dos coeficientes.

Matriz Inversa

Atividades

Resolva os sistemas dados utilizando a inversa da matriz de seus coeficientes:

a) $\begin{cases} -x+y-z=5 \\ x+2y+4z=4 \\ 3x+y-2z=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+y-z-t=0 \\ 2x+2z+t=-1 \end{cases}$.