Álgebra Linear I - Lista 1

Resolução de sistemas lineares

Respostas

1) Estude quais dos sistemas a seguir tem solução. Veja quais são determinados e quais indeterminados. Nos casos em que exista solução determine esta:

a) $x + y + 2z = 9, \quad 2x + 4y - 3z = 1, \quad 3x + 6y - 5z = 0,$

b) $2x + y + z = 5, \quad 4x - 6y = -2,$

c) $x + y = 2, \quad 2x + 2y = 4, \quad x - y = 0,$

d) $x + y + z = 1, \quad 2x + 2y + 5z = 8, \quad 4x + 4y + 8z = 0,$

e) $x + 2y - 3z = -1, \quad 3x - y + 2z = 7, \quad 5x + 3y - 4z = 2,$

f) $2x + y - 2z = 10, \quad 3x + 2y + 2z = 1, \quad 5x + 4y + 3z = 4,$

g) $x + 2y - 3z = 6, \quad 2x - y + 4z = 2, \quad 4x + 3y - 2z = 4.$

Resposta:

(a) solução única $(1, 2, 3)$,

(b) infinitas soluções, a reta $((-1 + 3t)/2, t, 6 - 4t)$, $t \in \mathbb{R}$,

(c) solução única $(1, 1)$,

(d) sem solução,

(e) sem solução,

(f) solução única $(1, 2, -3)$,

(h) sem solução.

2) Determine sistemas lineares de equações com duas incognitas (x, y) cuja soluções sejam da forma $(1, 3)$ (solução única), $(t, 2t)$, e $(t, 3)$, onde $t \in \mathbb{R}$.

Resposta: Para o primeiro caso: $x+y = 4$, $x = 1$. Outra opção: $x-y = -2$ e $3x - y = 0$.

Para o segundo caso, as equações do sistema são da forma $ax + by = d$. Observe que se $(t, 2t)$ é solução então $at + 2bt = d$ para todo t. Isto implica que $d = 0$ (justifique). Também temos $t(a + 2b) = 0$. Logo $a = -2b$. Ou seja, as equações são da forma $-2bx + by = 0$. Por exemplo, $2x - y = 0$.

Para o último caso, o argumento do caso anterior fornece $at + b = d$ para todo t. Logo $a = 0$ (justifique!). O sistema será $by = d$. Logo $b3 = d$. Por exemplo, $y = 3$.

3) Estude se existe um sistemas lineares de equações as seguintes propriedades:

- o sistema tem duas incognitas (x, y) e suas soluções são da forma $(\cos t, \sin t)$, $(\cos t, \cos t)$ ou (t, t^2).
- o sistema tem três incognitas (x, y, z) e suas solução são da forma (t, t^2, t^3).

Resposta: Veremos primeiro os sistemas com duas incógnitas. No primeiro caso a resposta é negativa. Considere uma equação do sistema, $ax + by = d$. Se $(\cos t, \sin t)$ fosse solução teríamos $a \cos t + b \sin t = d$. Fazendo $t = 0$ temos $a = d$. Fazendo $t = \pi$ temos $a = -d$. Logo $a = d = 0$. Finalmente, se $t = \pi/2$ temos $b = 0$. Portanto, $a = b = d$ e todas as equações do sistema são triviais.

No segundo caso, repetindo o argumento anterior, temos: se $t = 0$, $a+b = d$, se $t = \pi/2$, $d = 0$. Logo $a + b = 0$ e $a = -b$, e o sistema é da forma $ax - ay = 0$. É óbvio que os pontos $(\cos t, \cos t)$ são solução, mas existem outros pontos solução que não são desta forma: por exemplo o ponto $(5, 5)$!.

No último caso a resposta é negativa. Como nos casos anteriores, devemos ter $at + bt^2 = d$. Se b é não nulo, tomando limites quando $t \to \infty$ teriamos $d = \pm\infty$. Logo $b = 0$.

A resposta para os sistemas de três incógnitas é negativa. Considere uma equação do sistema, $ax+by+cz = d$. Se fosse solução terí amos $at+bt^2+ct^3 =$

d. Se $c \neq 0$, por exemplo positivo teriamos $d = \lim_{t \to +\infty} at + bt^2 + ct^3 = +\infty$. Logo $c = 0$. Analogamente teriamos $b = 0$ e $a = 0$.

4) Considere o sistema

$$x + y + 2z = a, \quad x + z = b, \quad 2x + y + 3z = c.$$

Veja que para este sistema admita solução as constantes a, b e c devem verificar $c = a + b$.

Resposta: Escalonando o sistema temos

$$x + y + 2z = a, \quad -y - z = b - a, \quad -y - z = c - 2a.$$

Restando a segunda equação da terceira temos

$$0 = c - 2a - b + a = c - a - b, \quad c = a + b.$$

5) Considere o sistema

$$x + my + z = 0, \quad mx + y - z = 4, \quad x - z = 2.$$

- Determine m para que o sistema tenha solução.
- Determine m para que o sistema seja possível e indeterminado.

Resposta: Escalonando o sistema temos (com $m \neq 0$)

$$\begin{aligned}
&x + my + z = 0,\\
&(1 - m^2)y + (-1 - m)z = 4,\\
&(m^2 - m - 2)z = -2m^2 + 4m + 2.
\end{aligned}$$

Para o sistema ser possível temos que:

$$(m^2 - m - 2) \neq 0$$

Logo $m \neq -1$ e $m \neq 2$

Para que o sistema seja possível e indeterminado.

$$(m^2 - m - 2) = 0$$

e

$$(-2m^2 + 4m + 2) = 0$$

Logo não existe nenhum valor de m.