Prova tipo A

P3 de Álgebra Linear I – 2005.1

Data: 6 de junho 2005 Horário: 17:10 – 19:00

| Nome: | Matrícula: | |
|------------|------------|--|
| Assinatura | Turma | |

| Questão | Valor | Nota | Revis. |
|---------|-------|-------|--------|
| | | riota | nevis. |
| 1a | 0.5 | | |
| 1b | 0.5 | | |
| 1c | 1.0 | | |
| 2a | 0.5 | | |
| 2b | 1.0 | | |
| 2c | 1.0 | | |
| 2d | 1.0 | | |
| 2e | 1.0 | | |
| 3a | 1.0 | | |
| 3b | 1.0 | | |
| 4a | 0.5 | | |
| 4b | 1.0 | | |
| Total | 10.0 | | |

Instruções

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova e as folhas de rascunho. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.
- Entregar somente este caderno com as respostas. Faça os cálculos nas folhas de rascunho.
- <u>Verifique</u>, <u>revise</u> e <u>confira</u> cuidadosamente suas respostas. Escreva de forma clara e legível.

1) Determine para que valores de a e b as matrizes abaixo são diagonalizáveis:

a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano $\pi\colon y+z=0$ sejam autovetores da matriz abaixo e o vetor (17,21,356) não seja um autovetor:

c)
$$\begin{pmatrix} 2 & c & c \\ 0 & 2 & d \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

c)
$$c = d =$$

2) Considere a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine o polinômio característico p_T de T.
- b) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

Considere a base β de \mathbb{R}^3

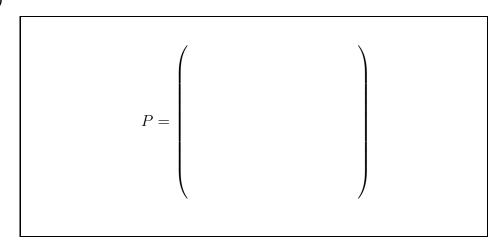
$$\beta = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}.$$

- c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β .
- d) Determine a primeira coluna da matriz $[T]_{\beta}$ de T na base β .
- e) Encontre uma base γ de \mathbb{R}^3 tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

- a) polinômio característico p_T :
- b) autovalores e autovetores:



d)

primeira coluna de
$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \{$$

a) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P. Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e a direção v de projeção.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \quad \text{onde} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtida como a composição da projeção ortogonal no plano π e o espelhamento no plano ρ , onde

$$\pi$$
: $x - y + 2z = 0$, ρ : $x - y - z = 0$.

Encontre uma matriz Rtal que a matriz de Tna base canônica seja o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^t.$$

Respostas:

a) plano π : direção v:

 $R = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

4) Considere a matriz

$$A = \frac{1}{3} \left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Sabendo que (1,1,1) é um autovetor de A e que 2 é um autovalor de A.

- a) Determine uma forma diagonal D da matriz A.
- b) Determine uma base ortonormal β de autovetores de A tal que a matriz de A na base β seja a matriz D obtida no item anterior.

Respostas:

a)

$$D = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

b)
$$\beta = \{$$