Cálculo III

Professor: Kennedy

Aluno: Abrantes

Exercícios:

Derivada direcional

Vetor Gradiente

Outubro/2019

I - Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\vec{v}$.

11 - $f(x,y) = e^{x} \sin y$, $(0, \pi/3)$, $\vec{v} = (-6, 8)$

A derivada direcional (D_u) nos permite encontrar a taxa de variação de uma função em uma direção qualquer dada por um vetor unitário $\vec{u}$. Ela é dada por (para 3 variáveis):

$$\boxed{D_u f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\,a + f_y(x,y,z)\,b + f_z(x,y,z)\,c}$$

onde $\vec{u} = (a, b, c)$ é o vetor unitário que indica a direção da derivada.

A equação da derivada direcional (D_u) pode ser reescrita como um dot produt entre o vetor unitário $\vec{u}$ e o vetor gradiente ∇f:

$$D_u f(x,y,z) = \left(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\right) \cdot (a, b, c)$$

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u}$$

onde: $\nabla f(x,y,z)$ é o vetor gradiente
$\vec{u}$ é o vetor unitário

Note que o vetor gradiente é dado por:

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = f_x\,\hat{i} + f_y\,\hat{j} + f_z\,\hat{k}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

②

Cálculo do $\nabla f(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{x}\sin(y) = \sin(y)\frac{\partial}{\partial x} e^{x} + \cancel{e^{x}\frac{\partial}{\partial x}\sin(y)}^{\,0}$$

$$= e^{x}\sin(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{x}\sin(y) = \cancel{\sin(y)\frac{\partial}{\partial y} e^{x}}^{\,0} + e^{x}\frac{\partial}{\partial y}\sin(y)$$

$$= e^{x}\cos(y)$$

$$\therefore \nabla f(x,y) = (e^{x}\sin(y),\ e^{x}\cos(y))$$

$$\nabla f(0,\pi/3) = (e^{0}\sin(\pi/3),\ e^{0}\cos(\pi/3))$$
$$= (\sqrt{3}/2,\ 1/2)$$

Cálculo do vetor unitário:

$$\vec{v} = (-6, 8)$$
$$\|\vec{v}\|^2 = (-6)^2 + (8)^2$$
$$= 36 + 64$$
$$= 100$$
$$\|\vec{v}\| = 10$$

$$\vec{u} = \frac{1}{10}\vec{v}$$
$$= (-6/10,\ 8/10)$$
$$= (-3/5,\ 4/5)$$

Cálculo da $D_u f(x,y)$:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{u}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{-3}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{-3\sqrt{3}}{10} + \frac{4}{10}$$
$$= \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$$ //

13 - $g(p,q) = p^4 - p^2q^3$, $(2,1)$, $\vec{v} = \hat{i} + 3\hat{j}$

Cálculo de $\nabla g(p,q)$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(p^4 - p^2q^3) = 4p^3 - 2pq^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(p^4 - p^2q^3) = -3q^2p^2$$

$$\therefore \nabla g(p,q) = (4p^3 - 2pq^3, -3q^2p^2)$$

$$\nabla g(2,1) = (4(2)^3 - 2(2)(1)^3, -3(1)^2(2^2))$$
$$= (28, -12)$$

Cálculo do $\vec{u}$:

$\vec{v} = (1, 3)$

$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 3^2$

$= 10$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{v}$

$\vec{u} = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$

Cálculo de $D_u g(p,q)$:

$$D_u g(2,1) = \nabla g(2,1) \cdot \vec{u}$$
$$= \frac{28}{\sqrt{10}} - \frac{36}{\sqrt{10}}$$
$$= -\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

15 - $f(x,y,z) = xe^{y} + ye^{z} + ze^{x}$, $(0,0,0)$, $\vec{v} = (5, 1, -2)$

Cálculo do $\nabla f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}) = e^{y} + ze^{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}) = xe^{y} + e^{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(xe^{y}+ye^{z}+ze^{x}) = ye^{z} + e^{x}$$

$$\therefore \nabla f(x,y,z) = (e^{y}+ze^{x},\ e^{z}+xe^{y},\ e^{x}+ye^{z})$$

$$\nabla f(0,0,0) = (e^{0}+0(e^{0}),\ e^{0}+0(e^{0}),\ e^{0}+0(e^{0}))$$
$$= (1,\ 1,\ 1)$$

Cálculo de $\vec{u}$:

$\vec{v} = (5, 1, -2)$

$\|\vec{v}\|^2 = 5^2 + 1^1 + (-2)^2$

$= 25 + 1 + 4$

$= 30$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{30}$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{v}$

$= (5/\sqrt{30},\ 1/\sqrt{30},\ -2/\sqrt{30})$

Cálculo de $D_u f(x,y,z)$:

$$D_u f(0,0,0) = \nabla f(0,0,0) \cdot \vec{u}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{30}} - \frac{2}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}} \;//$$

17. $h(r,s,t) = \ln(3r+6s+9t)$, $(1,1,1)$, $\vec{v} = 4\hat{i} + 12\hat{j} + 6\hat{k}$

Cálculo de $\nabla h(r,s,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln(3r+6s+9t) = \frac{\partial}{\partial u}\ln(u)\,\frac{\partial}{\partial r}(3r+6s+9t)$$

$$= \frac{3}{3r+6s+9t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{6}{3r+6s+9t} \quad \Big\} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{9}{3r+6s+9t}$$

$$\therefore \nabla h(r,s,t) = \left(\frac{3}{3r+6s+9t}, \frac{6}{3r+6s+9t}, \frac{9}{3r+6s+9t}\right)$$

$$\nabla h(1,1,1) = (3/18,\ 6/18,\ 9/18)$$

Cálculo de $\vec{u}$:

$$\vec{v} = (4, 12, 6) \quad \Big\} \quad \vec{u} = \frac{1}{14}\vec{v} = (4/14,\ 12/14,\ 6/14)$$

$$\|\vec{v}\|^2 = 4^2 + 12^2 + 6^2 \qquad = (2/7,\ 6/7,\ 3/7)$$

$$= 196$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{196} = 14$$

Cálculo da $D_u h(r,s,t)$:

$$D_u h(1,1,1) = \nabla h(1,1,1) \cdot \vec{u}$$

$$= \frac{3}{18}\cdot\frac{2}{7} + \frac{6}{18}\cdot\frac{6}{7} + \frac{9}{18}\cdot\frac{3}{7}$$

$$= \frac{6}{126} + \frac{36}{126} + \frac{27}{126}$$

$$= \frac{23}{42}$$

IV. Encontre as direções nas quais as funções aumentam e diminuem mais rapidamente em P_0. Em seguida, encontre as derivadas das funções nessas direções.

19. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P_0(-1, 1)$

O valor máximo de uma derivada direcional $D_u f(x,y,z)$ ocorre quando $\vec{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(x,y,z)$. Esse valor máximo é dado pelo módulo do vetor gradiente, $\|\nabla f(x,y,z)\|$.

Cálculo do $\nabla f(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy+y^2) = 2x+y \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+y^2) = 2y+x$$

$$\therefore \nabla f(x,y) = (2x+y,\ 2y+x)$$

$$\nabla f(-1,1) = (2(-1)+1,\ 2(1)-1) = (-1,\ 1)$$

Assim, a direção da maior taxa de variação é $\nabla f(-1,1) = (-1,1)$, e o valor da maior taxa é:

$$\|\nabla f(-1,1)\|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$$

$$\|\nabla f(-1,1)\| = \sqrt{2}$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla f(-1,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Concluindo:

$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}) \\ D_u f(-1,1) = \sqrt{2} \end{array}\right\}$ aumento

$\left.\begin{array}{l} -\vec{u} = (1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}) \\ D_{-u} f(-1,1) = -\sqrt{2} \end{array}\right\}$ diminuição

21 - $f(x,y,z) = (x/y) - yz$, $P_0 = (4, 1, 1)$

Cálculo de $\nabla f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} - yz\right) = \frac{y\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x}y}{y^2} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} - yz\right) = \frac{y\frac{\partial}{\partial y}x - x\frac{\partial}{\partial y}y}{y^2} - z = \frac{-x}{y^2} - z$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{y} - yz\right) = -y$$

$$\therefore \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2} - z, -y\right)$$

$$\nabla f(4,1,1) = \left(\frac{1}{1}, \frac{-4}{1^2} - 1, -1\right) = (1, -5, -1)$$

Cálculo do módulo:

$$\|\nabla f(4,1,1)\|^2 = 1^2 + (-5)^2 + (-1)^2 = 27$$

$$\|\nabla f(4,1,1)\| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Cálculo de $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{-5}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{3\sqrt{3}}\right) \quad \therefore \quad -\vec{u} = \left(\frac{-1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

$D_u f(4,1,1) = 3\sqrt{3}$ $\quad\therefore\quad$ $D_{-u} f(4,1,1) = -3\sqrt{3}$

$\Uparrow$ aumenta mais rápido $\qquad$ $\Uparrow$ diminui mais rápido

⑧

(23) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$, $P_0 = (1, 1, 1)$

Cálculo do $\nabla f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)) = \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{2}{z}$$

$$\therefore \nabla f(x,y,z) = (2/x, 2/y, 2/z)$$
$$\nabla f(1,1,1) = (2, 2, 2)$$

Cálculo da maior taxa de variação:

$$\|\nabla f(1,1,1)\|^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2$$
$$= 12$$
$$\|\nabla f(1,1,1)\| = 2\sqrt{3}$$

Cálculo das direções:

$$\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \nabla f(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \therefore -\vec{u} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$D_u f(1,1,1) = 2\sqrt{3}$ $\therefore D_{-u} f(1,1,1) = -2\sqrt{3}$

$\Updownarrow$ aumenta $\Updownarrow$ diminui

— // — // — // —

Ferramentas utilizadas:

- Calculadora HP-50g
- Mathematica 12.0