Álgebra Linear I - Lista 11

Autovalores e autovetores

Respostas

1) Calcule os autovalores e autovetores das matrizes abaixo.

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(c)} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(e)} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{(g)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(h)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

Resposta:

(a)

- autovalores: 3, 2,
- autovetores: $t(2,1)$, $t(1,1)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(b)

- autovalores: 1 (multiplicidade 2),
- autovetores: $t(1,0)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(c)

- autovalores: 2, -1,
- autovetores: $t(2,1)$, $t(1,1)\, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(d)

- autovalores: 0, 3, 1,
- autovetores: $t(1,1,1)$, $t(-1,0,2)$, $t(1,1,0)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(e)

- autovalores: 3, 2, 1,
- autovetores: $t(1,0,0)$, $t(5,-1,-2)$, $t(0,0,1)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(f)

- autovalores: 1, $1 \pm \sqrt{6}i$,
- autovetores associados a 1: $t(1,1,-2)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(g)

- autovalores: $0, \pm i\sqrt{2}$,
- autovetores associados a 0: $t(1,0,-1)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(h)

- autovalores: 1, $(1 \pm i)\sqrt{2}/2$,
- autovetores associados a 0: $t(0,0,1)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

(i)

- autovalores: $0, \pm\sqrt{6}i$,
- autovetores associados a 0: $t(1,-2,2)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

2) Estude se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- se λ e σ são autovalores de uma transformação linear T então $\lambda + \sigma$ também é um autovalor,
- se u e v são autovetores de uma transformação linear T então $u + v$ é um autovetor,

- não existe nenhuma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tendo somente dois autovalores distintos e no máximo dois autovetores linearmente independentes,

- os autovalores de uma matriz triangular são os elementos da diagonal.

Resposta: A primeira e a segunda afirmações são falsas, considere, por exemplo, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verifique 1 e 2 são autovalores, mas 3 não é autovalor. Os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ são autovetores, mas $(1,1)$ não é autovetor, verifique este fato.

A terceira afirmação também é falsa, considere, por exemplo, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A quarta afirmação é verdadeira (calcule o polinômio característico).

3) Seja A uma matriz quadrada. Veja que A e A^t (sua transposta) tem os mesmos autovalores. Veja se A e A^t também têm os mesmos autovetores.

Resposta: Sim, já que as matrizes A e A^t têm o mesmo polinômio característico. Porém, as matrizes A e A^t não tem os mesmos autovetores: considere por exemplo a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Sejam A e B matrizes 3×3 com polinômios característicos

$$\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + \lambda + 5 \quad \text{e} \quad \lambda^3 - 2\,\lambda^2.$$

Calcule os determinantes de A e B.

Resposta: Observe que de fato, escrevemos os polinômios trocados de sinal (justifique), logo a resposta é -5 e 0 (o determinante é o termo independente do polinômio característico).

5) Prove que se λ é um autovalor da matriz A e v um autovetor associado a λ então, para todo número real s, v é um autovetor de autovalor $\lambda - s$ de $A - s(Id)$.

Calcule agora os autovalores e encontre uma base de autovetores das matrizes

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Veja que se v é um vetor não nulo e $A(v) = \lambda v$ (isto é, v é um autovetor de A associado a λ) então:

$$(A - sI)(v) = A(v) - sI(v) = \lambda v - s v = (\lambda - s) v,$$

isto é, v é um autovetor de $A - sI$ associado a $\lambda - s$.

Os autovalores da matriz M do exercício são 1, 2 e 3 (verifique que a soma destes autovalores é o traço da matriz). Para determinar os autovetores associados a 1 resolvemos

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 2 & 3 \\ -2 & 3-1 & 2 \\ -4 & 2 & 5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja o sistema

$$-3x + 2y + 3z = 0, \quad -2x + 2y + 2z = 0, \quad -4x + 2y + 4z = 0.$$

As soluções do sistema são da forma $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $(1, 0, 1)$ é um autovetor de M.

Analogamente, temos que $(1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$ são autovetores de M associados a 2 e 3 (verifique).

Logo uma base de autovetores da matriz M é

$$\beta = \{(1, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$$

Como $N = M - 3I$, a primeira parte do exercício implica que os autovalores de N são -2, -1 e 0 e que β é uma base de autovetores de N.

6) Seja A uma matriz 3×3 tal que $A^2 = A$. Encontre um autovalor de A.

Resposta: Como o polinômio característico tem grau 3 sabemos que A tem um autovalor real σ. Seja v um autovetor associado. Temos,

$$A^2(v) = A(\sigma v) = \sigma A(v) = \sigma^2 v.$$

Mas, como $A^2 = A$,

$$A^2(v) = A(v) = \sigma v.$$

Logo,

$$\sigma^2 v = \sigma v,$$

isto é, $\sigma^2 = \sigma$, $\sigma = 1$ ou $\sigma = 0$. Se a matriz é inversível, 1 é um autovalor, caso contrário, 0 é necessariamente um autovalor.

7) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde a, b, c e d são números inteiros tais que $a + b = c + d$. Veja que $a + b$ e $a - c$ são autovalores de A.

Resposta: Considere

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

e faça $\lambda = (a + b)$ e $(a - c)$. No primeiro caso obtemos,

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ c & -c \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz tem duas linhas proporcionais, existe um vetor não nulo que é transformado no vetor zero. Logo $(a + b)$ é um autovalor. De fato, $(1, 1)$ é um autovetor associado a $(a + b)$.

No segundo caso, temos

$$\begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Repetimos o argumento anterior o obtemos que um autovetor associado é $(-b, c)$.

8) Estude a veracidade das afirmações a seguir. Seja A uma matriz 3×3.

1. Se $A(v) = \lambda\, v$ para algum número real não nulo, então v é um autovetor de A.

2. Se λ não é um autovalor de A então o sistema linear $\lambda\,(Id) - A)(X) = 0$ somente possui a solução trivial.

3. Se $\lambda = 0$ é um autovalor de A então $\det(A^2)$ é zero.

4. Se $\det(A^2)$ é zero então 0 é um autovalor de A.

Resposta: A primeira afirmação é falsa: $A(\bar{0}) = \lambda\,\bar{0}$ para todo λ e $\bar{0}$ não é autovetor, é necessário exigir que o vetor seja não nulo.

A segunda afirmação é verdadeira.

A terceira é verdadeira, se λ é um autovalor de A então $\det(A) = 0$, como $\det(A^2) = \det(A)\ \det(A)$, obtemos a afirmação.

A última afirmação é verdaderia, $\det(A^2) = 0$ se, e somente se, $\det(A) = 0$, e $\det(A) = 0$ se, e somente se, $\lambda = 0$ é um autovalor de A.