Álgebra Linear I - Lista 11

Autovalores e autovetores

1) Calcule os autovalores e autovetores das matrizes abaixo.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(c)** $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, **(e)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, **(f)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **(h)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(i)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Estude se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- se λ e σ são autovalores de uma transformação linear T então $\lambda + \sigma$ também é um autovalor,
- se u e v são autovetores de uma transformação linear T então $u + v$ é um autovetor,
- não existe nenhuma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tendo somente dois autovalores distintos e no máximo dois autovetores linearmente independentes,
- os autovalores de uma matriz triangular são os elementos da diagonal.

3) Seja A uma matriz quadrada. Veja que A e A^t (sua transposta) tem os mesmos autovalores. Veja se A e A^t também têm os mesmos autovetores.

4) Sejam A e B matrizes 3×3 com polinômios característicos

$$-\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + \lambda + 5 \quad \text{e} \quad -\lambda^3 - 2\,\lambda^2.$$

Calcule os determinantes de A e B.

5) Prove que se λ é um autovalor da matriz A e v um autovetor associado a λ então, para todo número real s, v é um autovetor de autovalor $\lambda - s$ de $A - s(Id)$.

Calcule agora os autovalores e encontre uma base de autovetores das matrizes

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) Seja A uma matriz 3×3 tal que $A^2 = A$. Ache um autovalor de A.

7) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde a, b, c e d são números inteiros tais que $a + b = c + d$. Veja que $a + b$ e $a - c$ são autovalores de A.

8) Estude a veracidade das afirmações a seguir. Seja A uma matriz 3×3.

1. Se $A(v) = \lambda\, v$ para algum número real não nulo, então v é um autovetor de A.

2. Se λ não é um autovalor de A então o sistema linear $\lambda\,(Id) - A)(X) = 0$ somente possui a solução trivial.

3. Se $\lambda = 0$ é um autovalor de A então $\det(A^2)$ é zero.

4. Se $\det(A^2)$ é zero então 0 é um autovalor de A.