Álgebra Linear I - Lista 13

Matriz em uma Base. Mudança de Base

1) Considere as seguintes transformações lineares:

1. P_1, projeção ortogonal no plano $x + y + z = 0$,
2. P_2, projeção ortogonal na reta $(t, -t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$,
3. P_3, projeção no plano $x + y + z = 0$ na direção do vetor $(1, 0, 1)$,
4. E_1, espelhamento no plano $x + y + z = 0$,
5. E_2, espelhamento na reta $(t, -t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Encontre bases onde as matrizes de P_1 e P_3 sejam da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as matrizes de P_2, E_1 e E_2 da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

respetivamente.

2) Considere a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(v) = v \times (1, 1, 1).$$

Determine a matriz de T nas seguintes bases:

1. $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, -2, 1)\}$,
2. $\gamma = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$,
3. $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Sejam $[T]_\beta$, $[T]_\gamma$ e $[T]_\mathcal{E}$ das matrizes acima.

Veja que estas matrizes são semelhantes. Escreva

$$[T]_\beta = P^{-1}\,[T]_\gamma\,P, \quad [T]_\beta = Q^{-1}\,[T]_\mathcal{E}\,Q,$$

e interprete as matrizes P e Q.

3) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que os autovalores de A são 5, 0 e 2.

- Ache um autovetor associado a cada autovalor.
- Determine uma base β de autovetores de A.
- Determine a matriz de A na base β.
- Encontre a forma diagonal de A.
- Encontre uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.
- Interprete P.

4) Seja A uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de A na base canônica tem determinante zero e traço 2. Sabendo que $A(1,1) = (0,0)$ que os autovetores associados a autovetores diferentes são ortogonais:

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Determine uma base de autovetores de A.

(c) Determine a matriz A.

5) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que a matriz de A na base β seja

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é

$$[T]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine o polinômio característico p_T de T.

b) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(0,-1,1), (0,1,1), (1,0,1)\}.$$

c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β.

d) Determine a primeira coluna da matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

e) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$