Álgebra Linear e Geometria Analítica

Prof. Me. Rober Marcone Rosi
Unidade de Engenharia, Computação e Sistemas

Unidade 4 – Vetores no plano e no espaço

- Vetor no plano e no espaço;
- Soma de vetores;
- Multiplicação por escalar;
- Norma de um vetor;
- Produto escalar;
- Projeção ortogonal;
- Produto vetorial,
- Produto misto;
- Propriedades das operações com vetores;
- Aplicações da álgebra vetorial.

Vetor no plano e no espaço

- Algumas grandezas como, por exemplo, a temperatura e a pressão, possuem apenas “magnitude” e por isso são representadas por um número real. Elas são chamadas de **grandezas escalares** ou simplesmente **escalares** e são o objeto da **aritmética**.

- Outras grandezas como, por exemplo, a força e a velocidade possuem, além da “magnitude”, “direção” e “sentido” e por isto são representadas por pares ou ternas ordenadas. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores** e são o objeto do **cálculo vetorial**.

Vetor no plano e no espaço

- Um vetor é representado graficamente por uma seta ou um segmento de reta orientado.

- O comprimento do segmento indica o módulo ou valor absoluto do vetor. O ângulo que ele forma com a horizontal indica a direção, e a seta aponta o sentido do vetor.

- Designaremos um vetor, na sua qualidade de segmento orientado, por duas letras maiúsculas sobrepostas por uma flecha horizontal, designando a primeira letra a origem e a outra a extremidade do vetor:

$$\overrightarrow{AB}$$

Vetor no plano e no espaço

- Quando não há o interesse na origem e extremidade do vetor, o vetor pode ser designado por uma letra minúscula encimada por uma flecha: $\vec{a}$

- Um vetor onde a origem e a extremidade coincidem é um vetor nulo.

- Vetores pertencentes a uma mesma reta ou retas paralelas são chamados colineares.

- **Definição**: Dois vetores são chamados iguais se são colineares, de comprimento igual e de mesmo sentido.

- Se dois vetores são iguais cada a um terceiro vetor, são iguais entre si.

Vetor no plano e no espaço

- Se dois vetores estão localizados em desenhos diferentes ou representados por segmentos de retas diferentes, mas com o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido, eles são iguais.

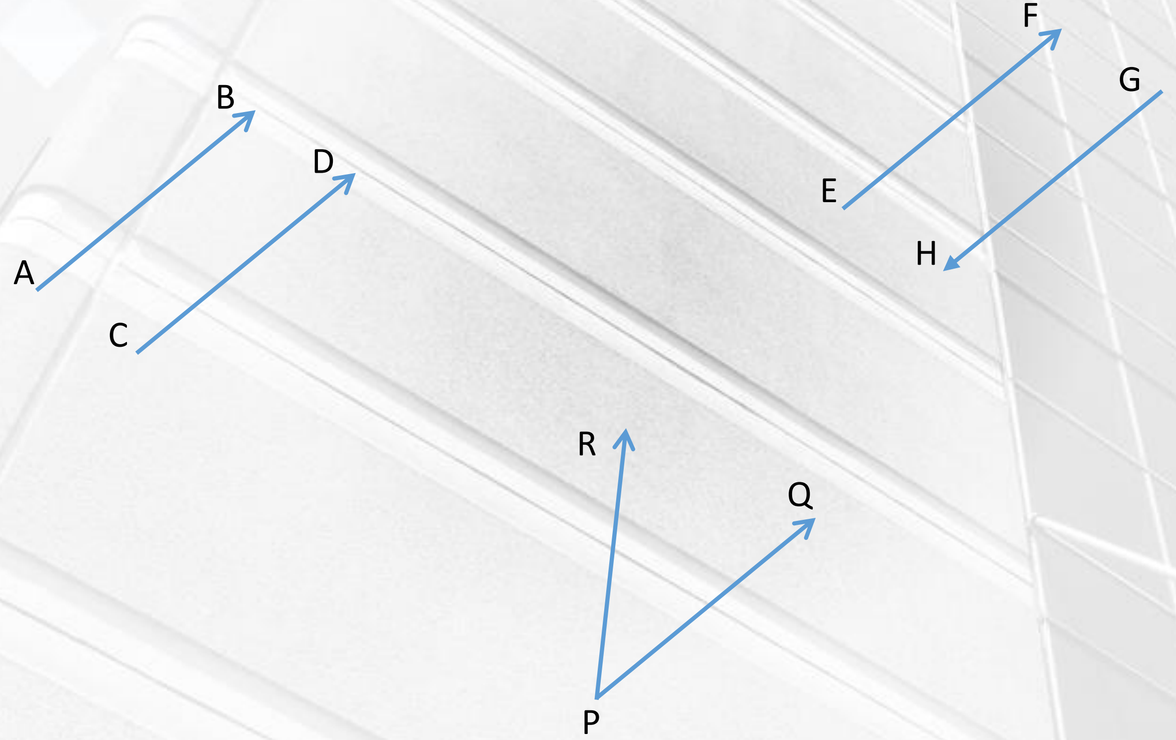
- O comprimento do segmento indica o módulo ou valor absoluto do vetor. O ângulo que ele forma com a horizontal indica a direção, e a seta aponta o sentido do vetor.

- Se $\vec{a} = \vec{b}$, então $|a| = |b|$.

- Podemos afirmar que a recíproca é verdadeira?

Vetor no plano e no espaço

❑**Exercício**: Qual a relação de igualdade entre os pares de vetores abaixo:



Vetor no plano e no espaço

- Quando escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, estamos afirmando que o vetor $\vec{v}$ é determinado pelo segmento orientado $\overline{\mathrm{AB}}$
- Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de $\overline{\mathrm{AB}}$ representa também o mesmo vetor $\vec{v}$. Assim sendo, cada ponto do espaço pode ser considerado como origem de um segmento orientado que é representante do vetor .
- Esta é a razão de o vetor $\vec{v}$ também ser chamado **Vetor Livre**, no sentido de que o representante pode ter sua origem colocada em qualquer ponto.

Vetor no plano e no espaço

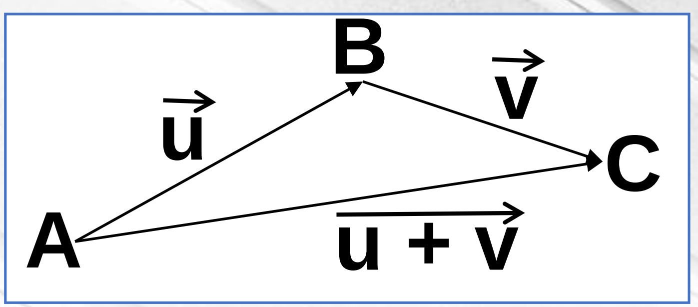
- A origem do vetor também é chamada de ponto de aplicação.
- O ponto de aplicação de todo vetor pode ser escolhido arbitrariamente.
- Em outras palavras, não se distinguem vetores que se deduziram um do outro por translação.
- Nesse sentido, se dizem que os vetores são livres.

Adição de Vetores

- *Há duas formas de somarmos dois vetores:*

I. Quando a extremidade do vetor está ligada com a origem de outro.

Ex: Dados dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ obtenha $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BC}$.

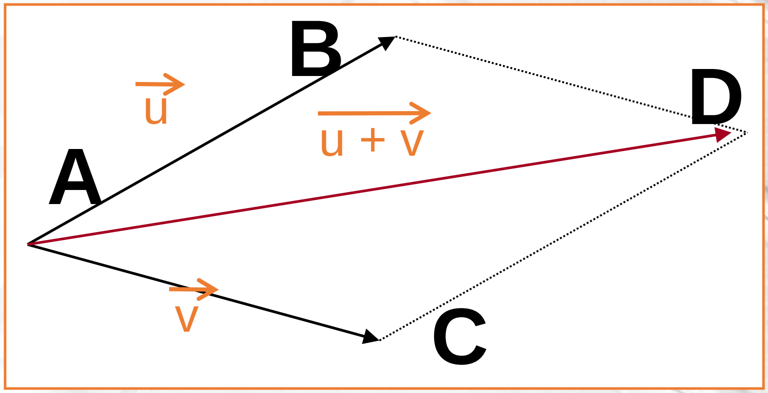


$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Basta "<u>fechar</u>" o triângulo formado pelos dois vetores para se obter a soma dos mesmos.

Adição de Vetores

II. Quando os dois vetores possuem a mesma origem:



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

A soma é obtida utilizando a <u>REGRA DO PARALELOGRAMO</u>.

Adição de Vetores

Observações Importantes:

I. O vetor resultante sempre "sai" da origem do sistema.

II. Quando os vetores não possuem as origens e as extremidades especificadas por letras, a soma dos vetores pode ser feita por qualquer um dos casos mostrados.

III. O vetor $\overrightarrow{BA}$ possui sentido oposto ao do vetor $\overrightarrow{AB}$, pode-se também representar $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Propriedades da Adição de Vetores

- A soma de vetores é **comutativa**, ou seja,

$$\vec{V} + \vec{W} = \vec{W} + \vec{V}, \quad (1.1)$$

para quaisquer vetores $\vec{V}$ e $\vec{W}$.

- Observamos também que a soma $\vec{V} + \vec{W}$ está na diagonal do paralelogramo determinado por $\vec{V}$ e $\vec{W}$, quando estão representados com a mesma origem.

Propriedades da Adição de Vetores

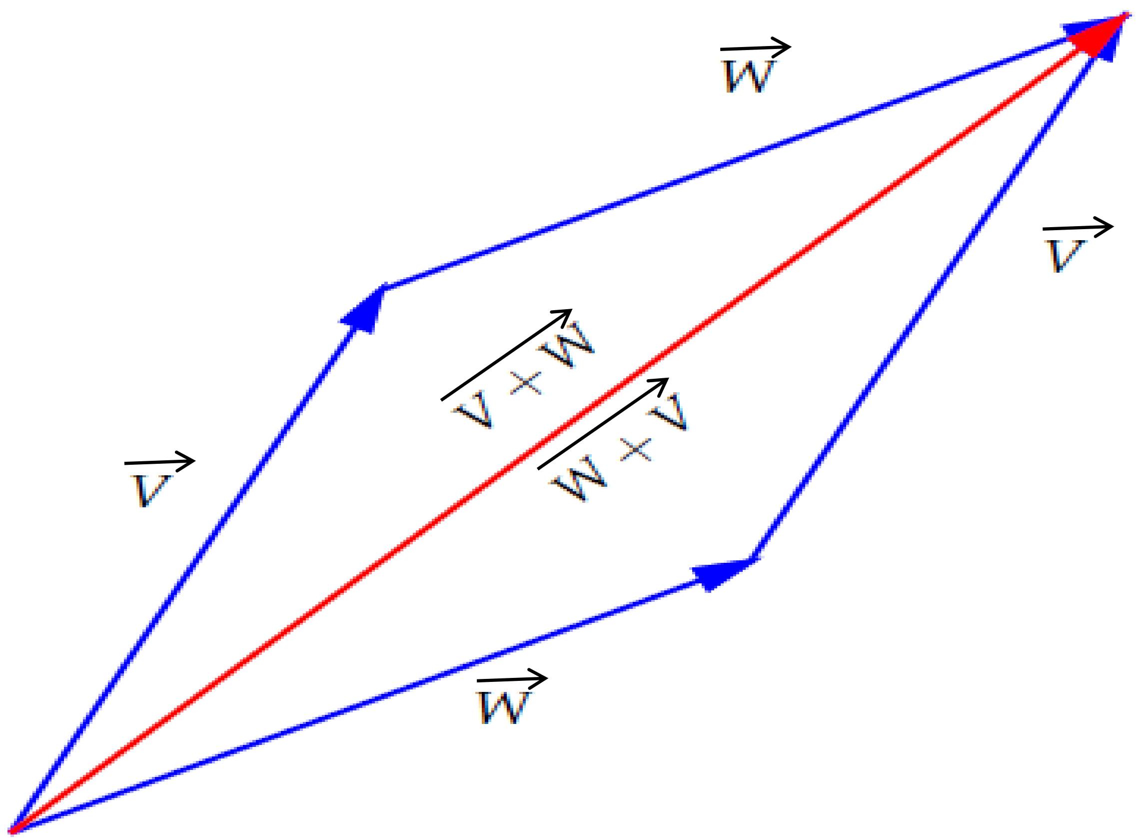


Figura 3.2 – $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V}$

Propriedades da Adição de Vetores

- A soma de vetores é **associativa**, ou seja,

$$\vec{V} + (\vec{W} + \vec{U}) = (\vec{V} + \vec{W}) + \vec{U}, \ (1.2)$$

para quaisquer vetores $\vec{V}$, $\vec{W}$ e $\vec{U}$.

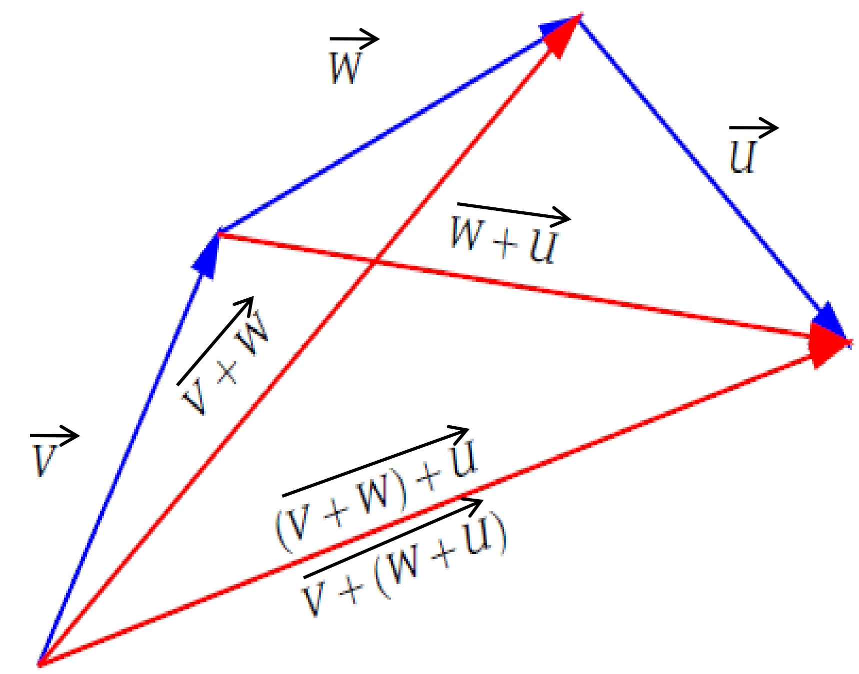


Figura 3.3 – $\vec{V} + (\vec{W} + \vec{U}) = (\vec{V} + \vec{W}) + \vec{U}$

Propriedades da Adição de Vetores

- O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo e denotado por 0.** Segue então, que

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{V} = \vec{V}, \quad (1.3)$$

para todo vetor $\vec{V}$.

- Para qualquer vetor $\vec{V}$, o **simétrico de $-\vec{V}$, denotado por $\vec{V}$, é o vetor que tem mesmo** comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de $\vec{V}$. Segue então, que

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}. \quad (1.4)$$

Propriedades da Adição de Vetores

- Definimos a **diferença W menos V, por**

$$\vec{V} - \vec{W} = \vec{V} + (-\vec{W}).$$

Segue desta definição, de (1.1), (1.2), (1.4) e de (1.3) que

$$\vec{W} + (\vec{V} - \vec{W}) = (\vec{V} - \vec{W}) + \vec{W} = \vec{V} + (-\vec{W} + \vec{W}) = \vec{V} + \vec{0} = \vec{V}.$$

- Assim, a diferença $\vec{V} - \vec{W}$ é um vetor que somado a $\vec{W}$ dá $\vec{V}$, portanto ele vai da extremidade de $\vec{W}$ até a extremidade de $\vec{V}$, desde que $\vec{V}$ e $\vec{W}$ estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

Propriedades da Adição de Vetores

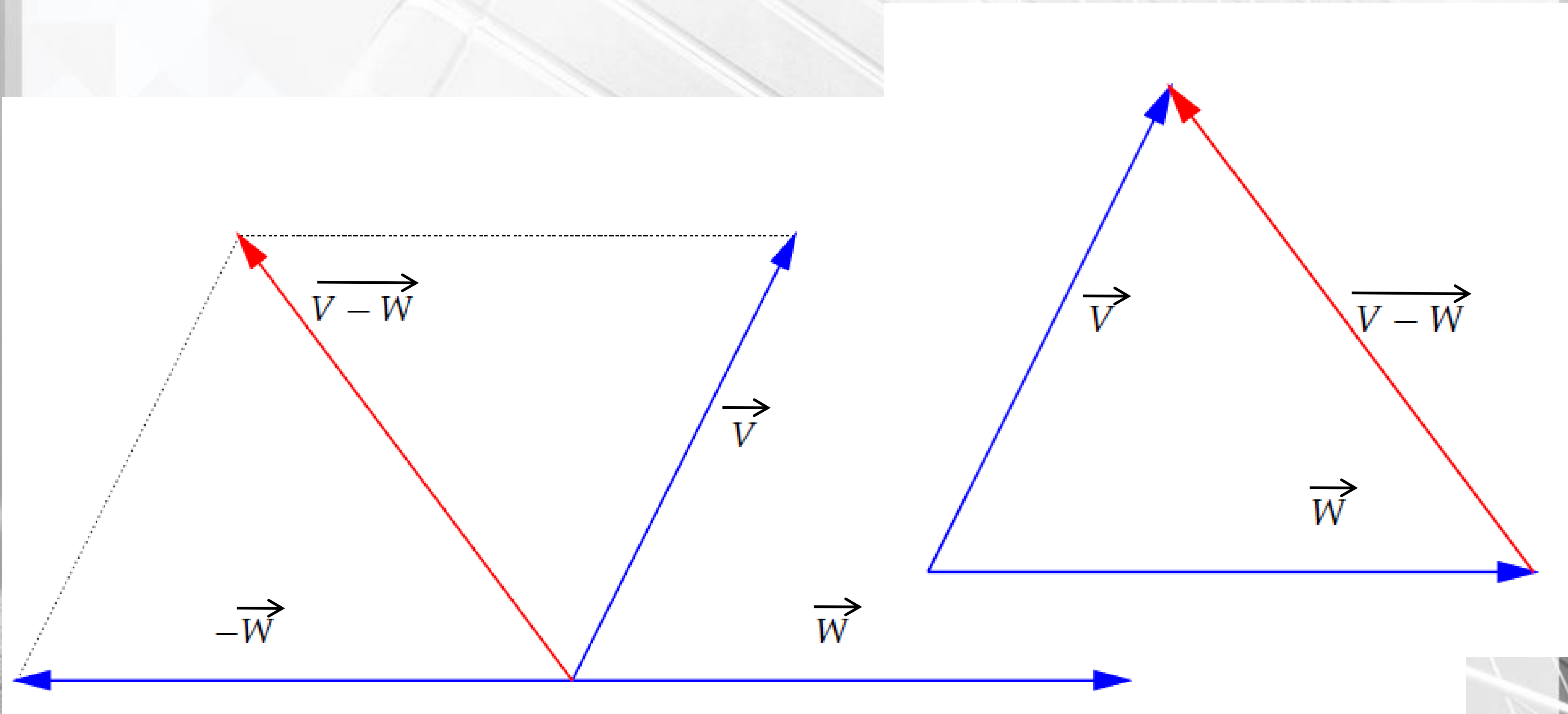


Figura 3.4 – A diferença $V - W$

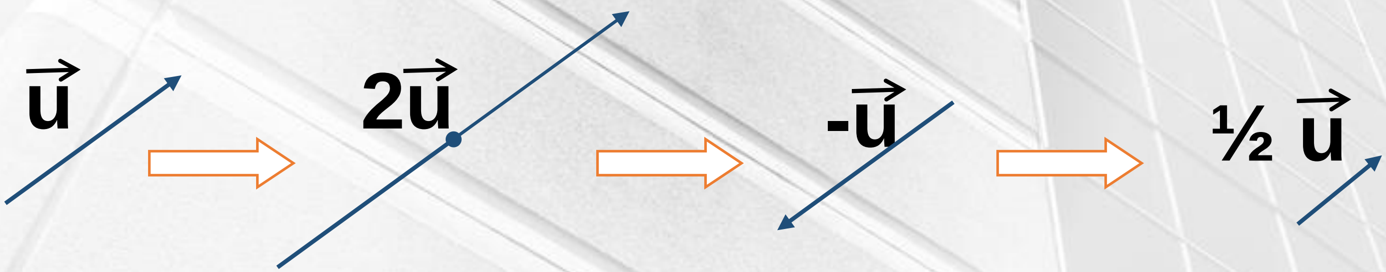
Multiplicação de um número real por um vetor

- A multiplicação de um vetor $\vec{V}$ por um escalar a, $a\vec{V}$, é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:
  - (a) É o vetor nulo, se *a = 0 ou* $\vec{V} = 0$,
  - (b) caso contrário,
    - i. tem comprimento |*a*| *vezes o comprimento de* $\vec{V}$,
    - ii. a direção é a mesma de $\vec{V}$ (neste caso, dizemos que eles são **paralelos**),
    - iii. tem o mesmo sentido de $\vec{V}$, se $a > 0$ *e* tem o sentido contrário ao de $\vec{V}$, se $a < 0$.

Multiplicação de um número real por um vetor

- Se $\vec{W} = a\vec{V}$, dizemos que $\vec{W}$ é um ***múltiplo escalar*** de $\vec{V}$. É fácil ver que dois vetores não nulos são **paralelos** (ou **colineares**) se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

Ex:



Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

- As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas**.
- Seja $\vec{V}$ um vetor no plano. Definimos as **componentes de V** como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final do representante de $\vec{V}$ que tem ponto inicial na origem.
- Vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente $\vec{V} = (v_1, v_2)$.

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

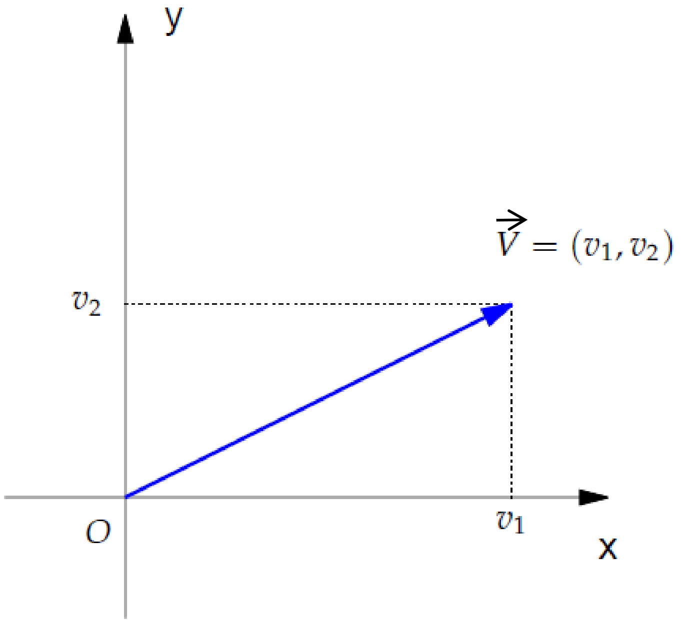


Figura 3.6 – As componentes do vetor plano

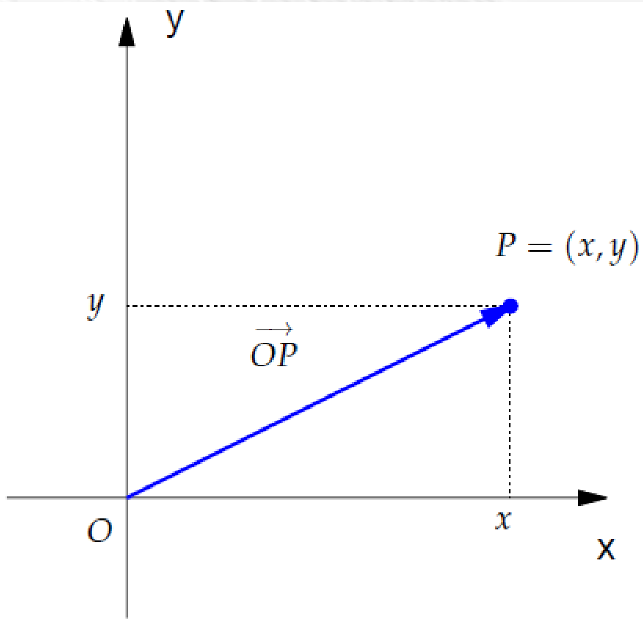


Figura 3.7 – As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

- Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

- A **soma de dois vetores** $\vec{V} = (v_1, v_2)$ e $\vec{W} = (w_1, w_2)$ é dada por:

$$\vec{V} + \vec{W} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);$$

- A **multiplicação de um vetor $\vec{V} = (v_1, v_2)$ por um escalar *a*** *é dada por:*

$$a\vec{V} = (av_1, av_2).$$

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

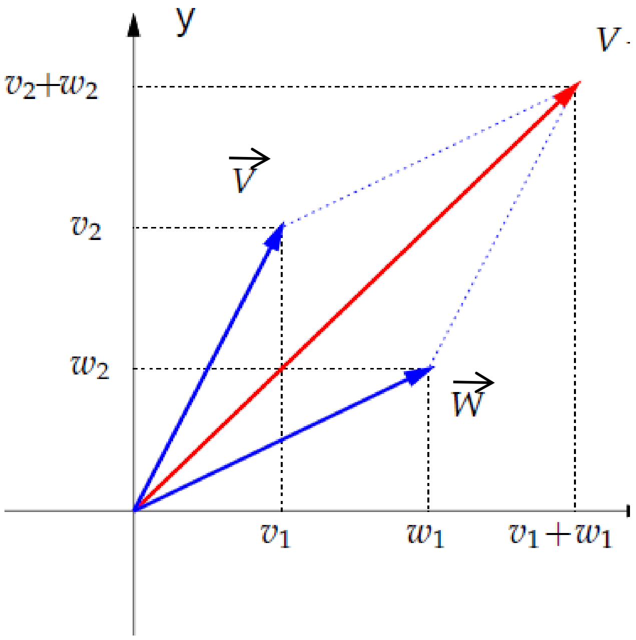


Figura 3.8 – A soma de dois vetores

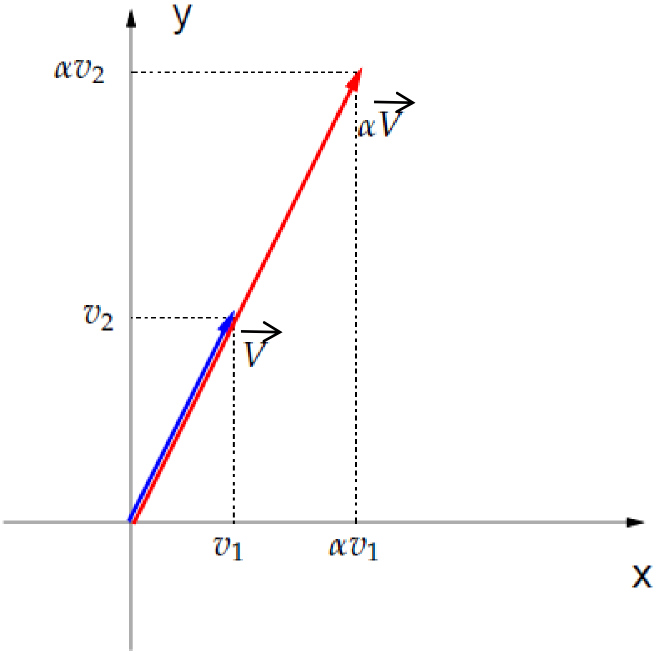


Figura 3.9 – A multiplicação de vetor por escalar no plano

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

- As coordenadas de um ponto P no espaço são determinadas também da maneira dada a seguir.

I. Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.

II. A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.

III. A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y

IV. A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

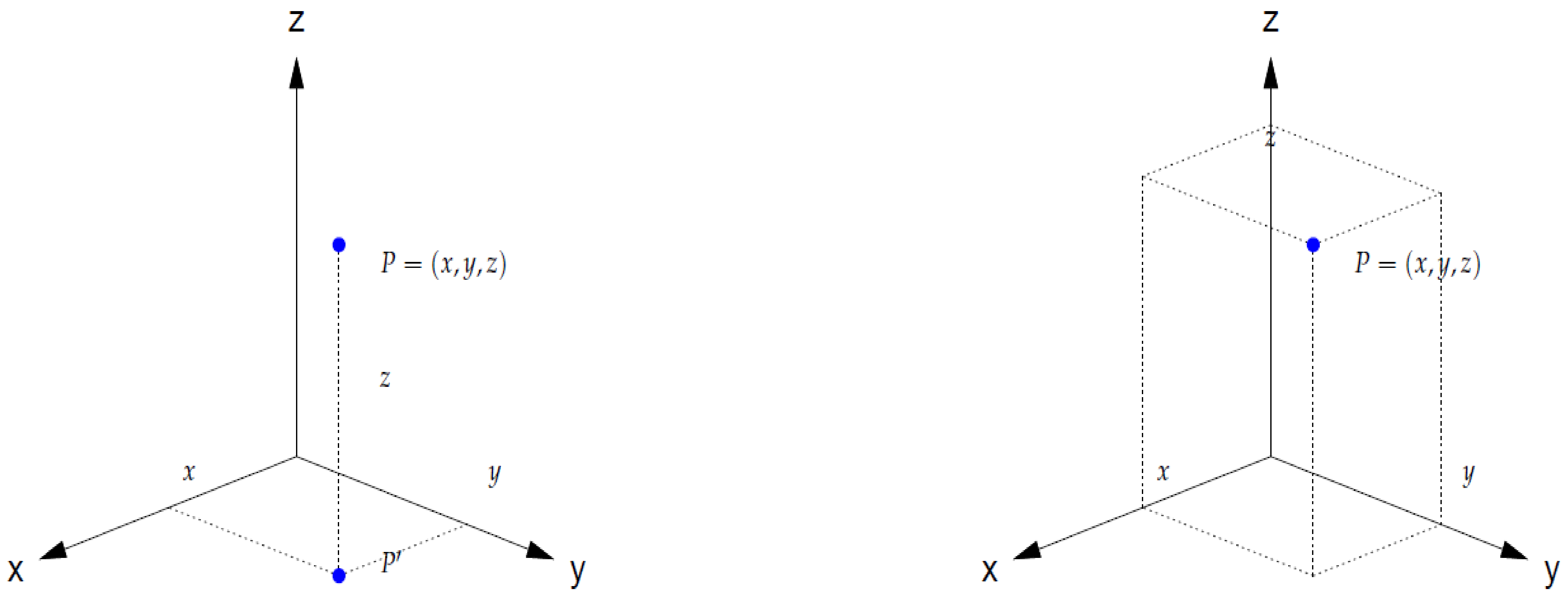


Figura 3.10 – As coordenadas de um ponto no espaço

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

FAESA
Faça acontecer

- Como no caso de vetores do plano, definimos as componentes de $\vec{V}$ como sendo as coordenadas (v1, v2, v3) do ponto final do representante de $\vec{V}$ que tem ponto inicial na origem.
- Também vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente $\vec{V}$ = (v1, v2, v3).

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

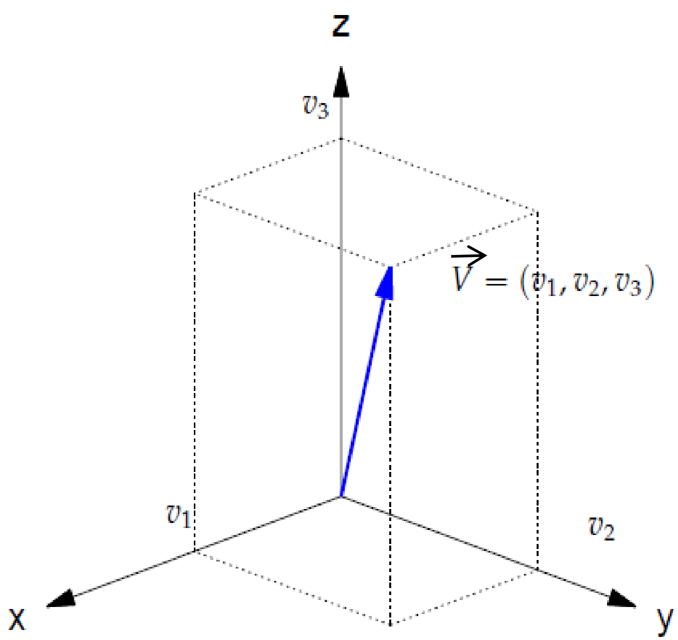


Figura 3.11 – As componentes de um vetor no espaço

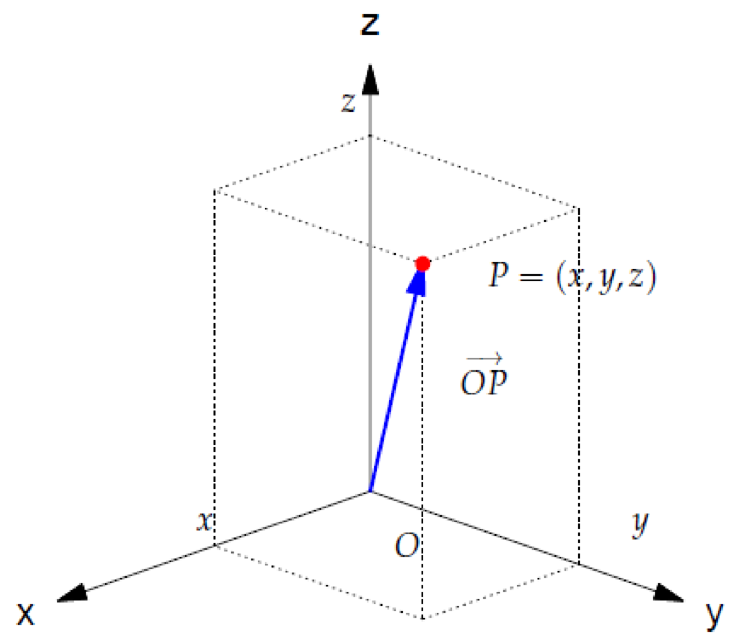


Figura 3.12 – As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

- Assim como fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.

- Se $\vec{V}$ = (v1, v2, v3) e $\vec{W}$ = (w1,w2,w3), então a adição de $\vec{V}$ com $\vec{W}$ é dada por $\vec{V}+\vec{W}$ = (v1 + w1, v2 + w2, v3 + w3);
- Se $\vec{V}$ = (v1, v2, v3) e *a é um escalar, então a multiplicação o de V por a é dada por a*$\vec{V}$ *= (av1, av2, av3).*

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

- Quando um vetor V está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem, digamos em $\vec{P} = (x_1, y_1, z_1)$, e ponto final em $\vec{Q} = (x_2, y_2, z_2)$, então as componentes do vetor $\vec{V}$ são dadas por $\vec{V} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} – \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.
- Portanto, as componentes de $\vec{V}$ são obtidas subtraindo-se as coordenadas do ponto Q (extremidade) das do ponto P (origem).
- O mesmo se aplica a vetores no plano.

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

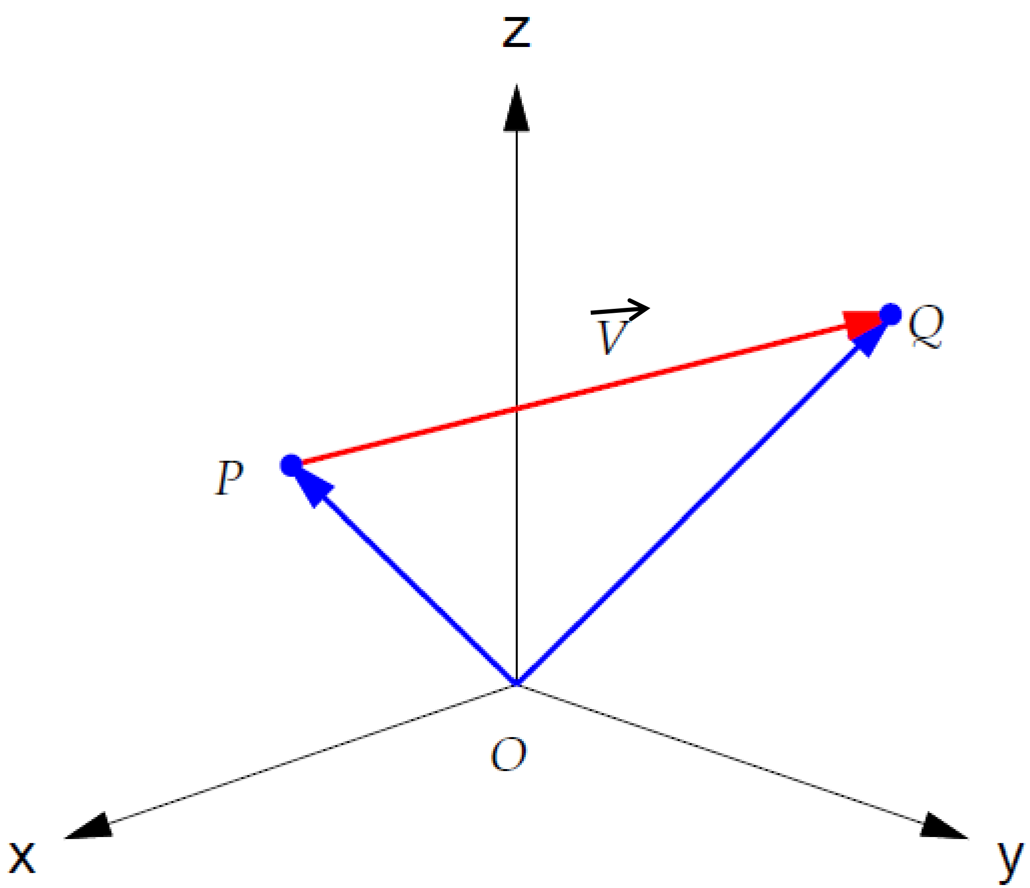


Figura 3.13 – $\vec{V} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

Exercício:

I. Calcule as componentes do vetor $\vec{V}$ que tem um representante com ponto inicial P = (5/2, 1, 2) e ponto final Q = (0, 5/2, 5/2).

II. Represente no espaço os vetores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{V}$.

Um vetor no espaço $\vec{V}$ = (v1, v2, v3) pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas

Teorema 3.1. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $U + V = V + U$;

(b) $(U + V) + W = U + (V + W)$;

(c) $U + \bar{0} = U$;

(d) $U + (-U) = \bar{0}$;

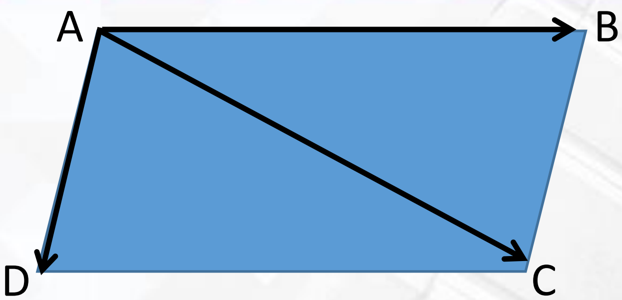
(e) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

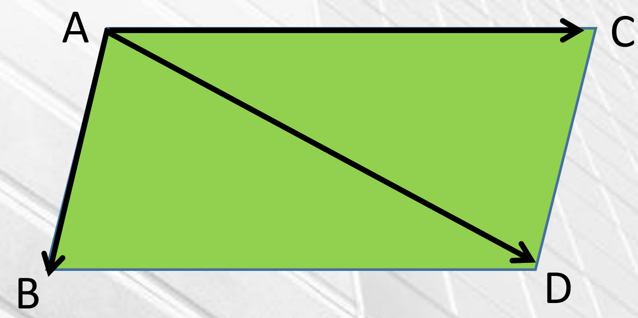
(f) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

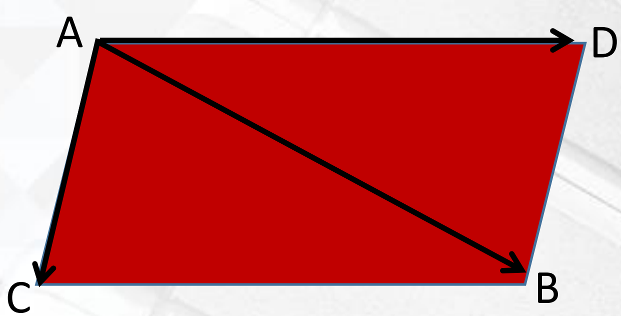
(g) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

(h) $1U = U$.

Operações com Vetores x Sistema de Coordenadas Cartesianas







- Para ser um paralelogramo um dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ tem que ser igual à soma dos outros dois.

Norma e Produto Escalar

- O comprimento de um vetor $\vec{V}$ é definido como sendo o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam.
- O comprimento do vetor $\vec{V}$ também é chamado de **norma de V** e é denotado(a) por $\|\vec{V}\|$.
- Segue do **Teorema de Pitágoras** que a norma de um vetor pode ser calculada usando as suas componentes, no plano por:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

e no espaço por:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Norma e Produto Escalar

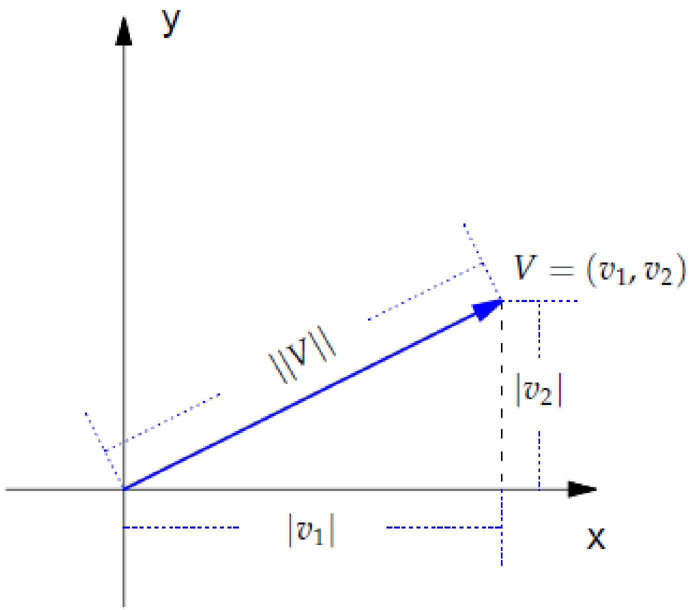


Figura 3.14 – A norma de um vetor V no plano

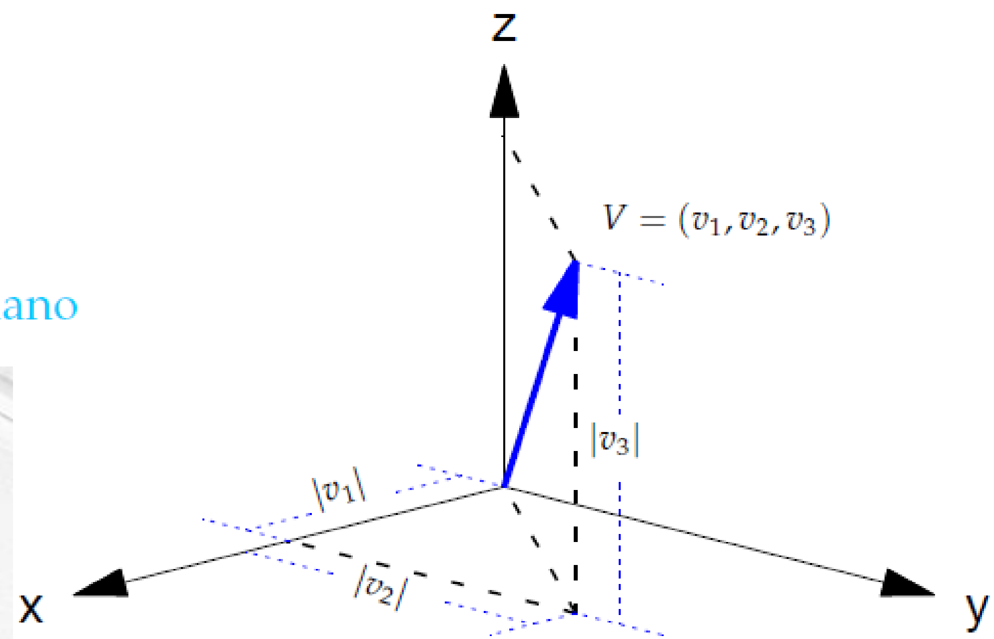


Figura 3.15 – A norma de um vetor V no espaço

Norma e Produto Escalar

- Um vetor d etor **unitário**.

- A distância e Q = (x_2, y_2, z_2) é igual

- Como $\overrightarrow{PQ}$ =), então a distância de F

dist(P,Q) = $z_1)^2$.

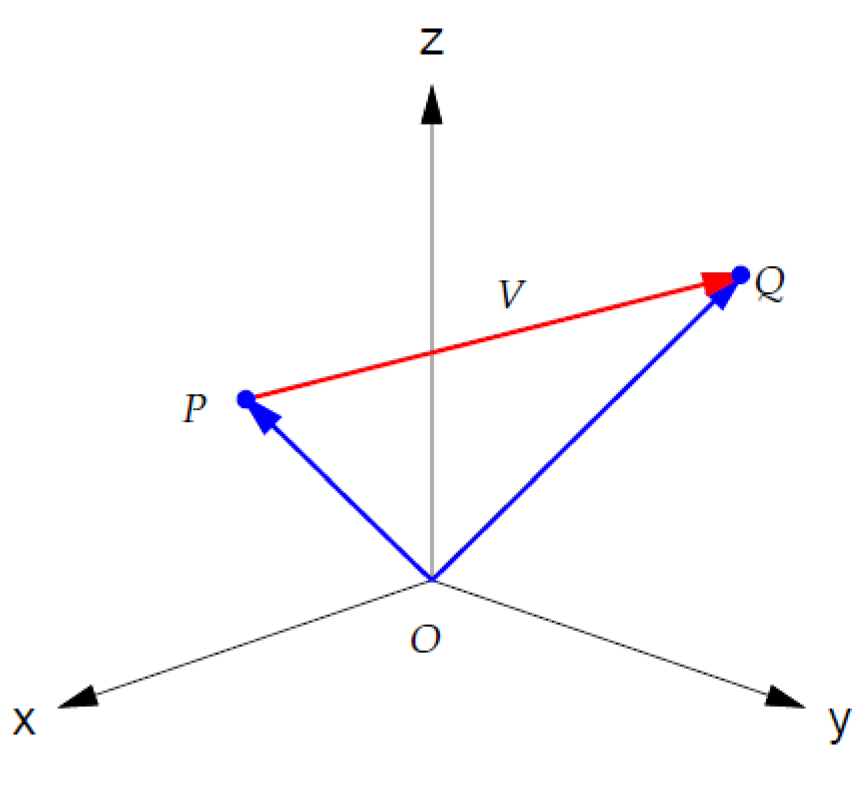


Figura 3.13 – $V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Norma e Produto Escalar

- Analogamente, a distância entre dois pontos P = (x_1, y_1) e Q = (x_2, y_2) no plano é igual à norma do vetor PQ, que é dada por dist(P,Q) = $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Se $\vec{V}$ = (v_1, v_2, v_3) e ***a*** *é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por* escalar e da norma de um vetor segue-se que:

$$\left\|a\vec{V}\right\| = \left\|(av_1, av_2, av_3)\right\| = \sqrt{(av_1)^2 + (av_2)^2 + (av_3)^2} = \sqrt{a^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}.$$

ou seja

$$\left\|a\vec{V}\right\| = |a|\left\|\vec{V}\right\|$$

Norma e Produto Escalar

- Dado um vetor $\vec{V}$ **não nulo,** o vetor: $\vec{U} = \left(\frac{1}{\|\vec{V}\|}\right)\vec{V}$
- é um **vetor unitário na direção de $\vec{V}$.**
- O ângulo entre dois vetores não nulos, $\vec{V}$ e $\vec{W}$, é definido pelo ângulo θ *determinado* por $\vec{V}$ e $\vec{W}$ que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, *quando eles estão representados com a mesma* origem.
- Quando o ângulo θ *entre dois vetores $\vec{V}$ e $\vec{W}$ é reto (θ = 90º), ou um deles é o vetor* nulo, dizemos que os vetores V e W são **ortogonais** ou **perpendiculares entre si.**

Norma e Produto Escalar

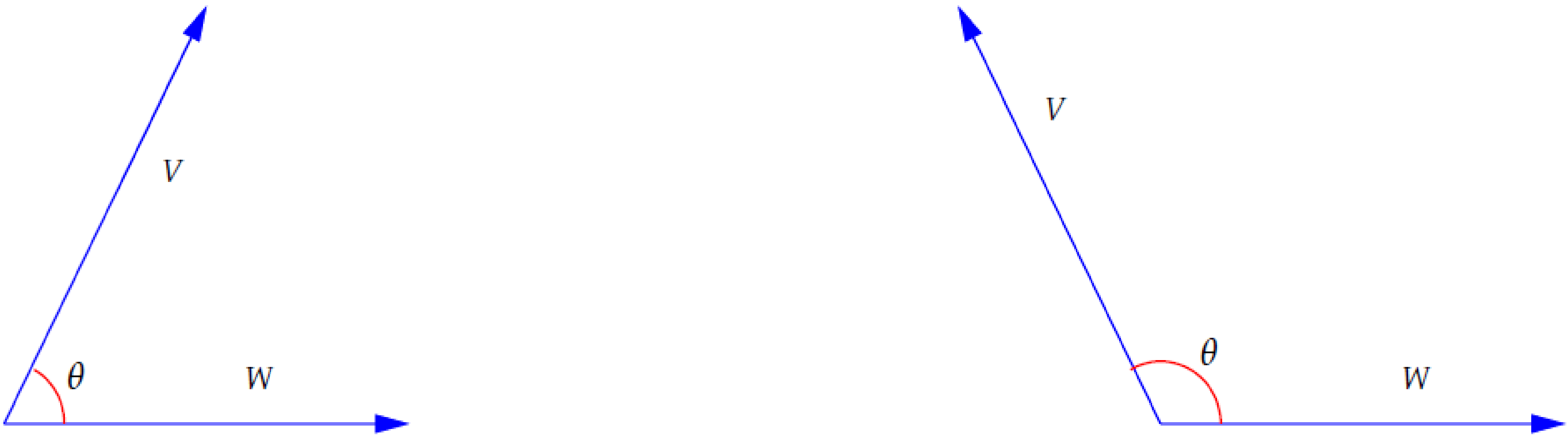


Figura 3.16 – Ângulo entre dois vetores, agudo (à esquerda) e obtuso (à direita)

Norma e Produto Escalar

- Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um escalar. Por isso ele é chamado **produto escalar**.

- O **produto escalar** ou **interno** de dois vetores $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{W}$ é definido por:

$$\vec{V} \bullet \vec{W} = \begin{cases} 0, \text{se } \vec{\mathrm{V}} \text{ ou } \vec{\mathrm{W}} \text{ é o vetor nulo,} \\ \|V\|\|W\| \cos\theta, \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que θ *é o ângulo entre eles.*

- Quando os vetores são dados em termos das suas componentes não sabemos diretamente o ângulo entre eles.

Norma e Produto Escalar

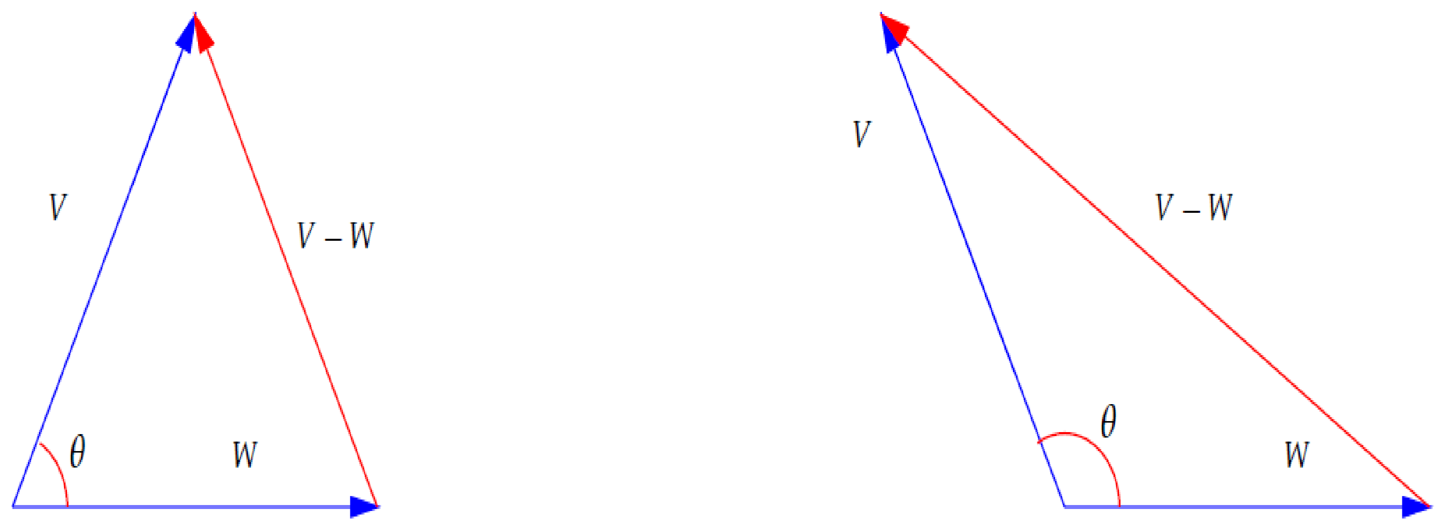
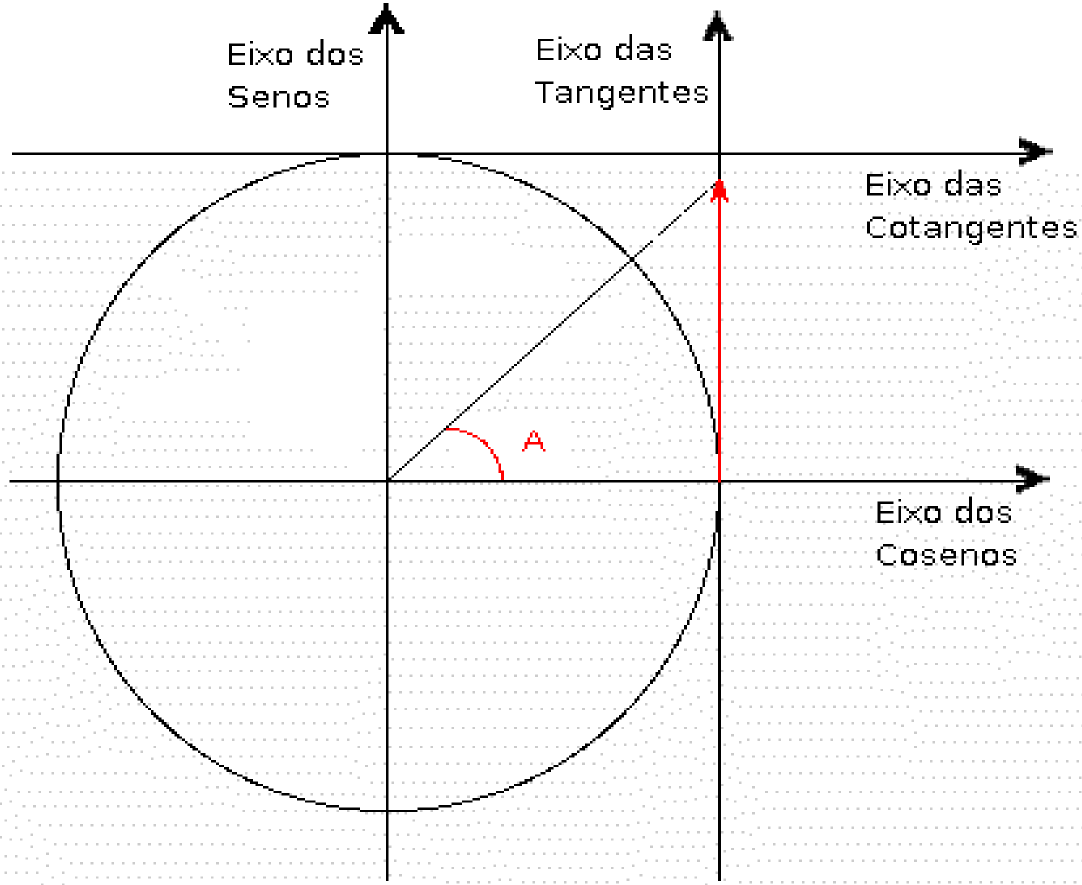
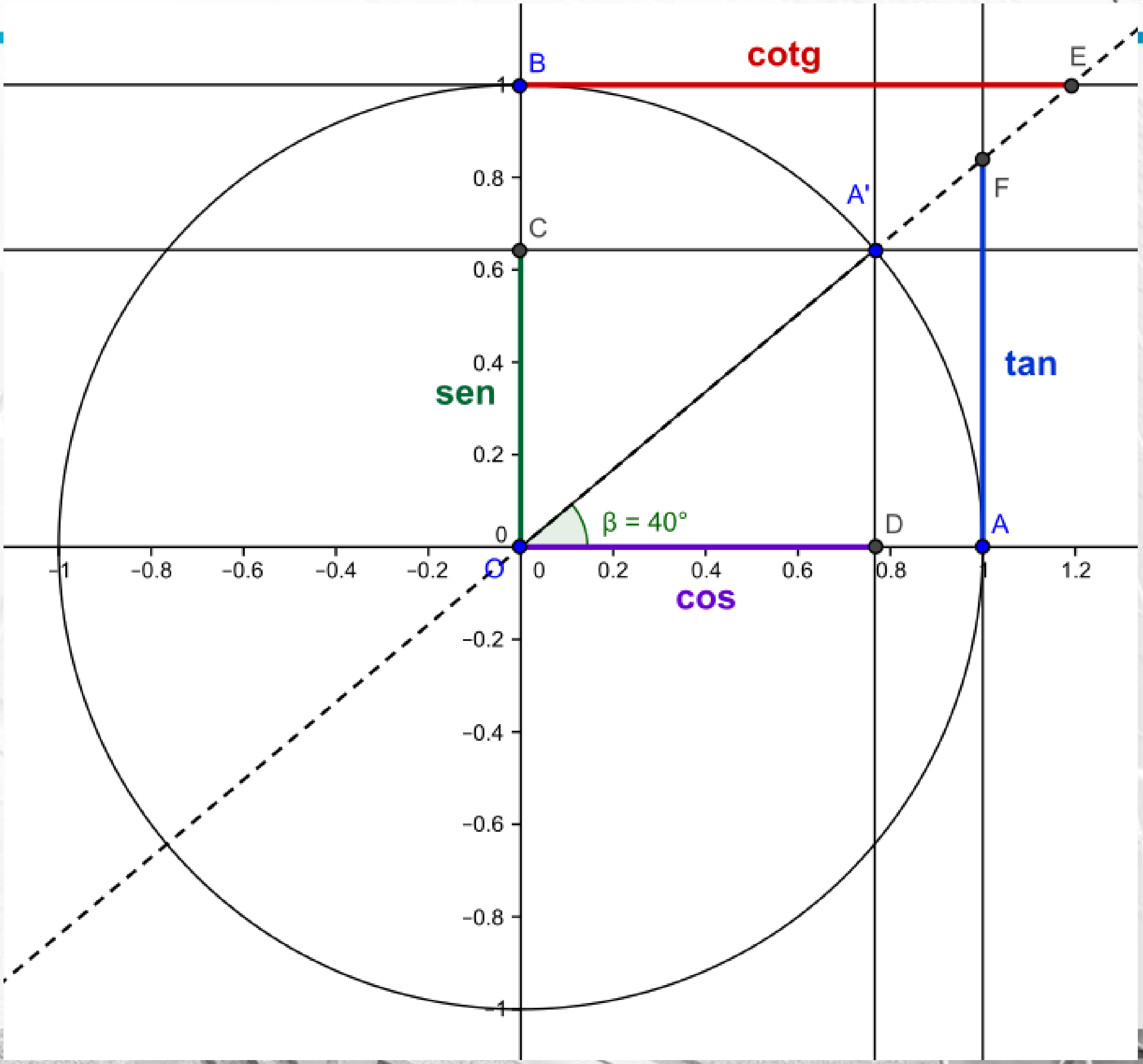


Figura 3.17 – Triângulo formado por representantes de V, W e $V - W$. À esquerda o ângulo entre V e W é agudo e à direita é obtuso.

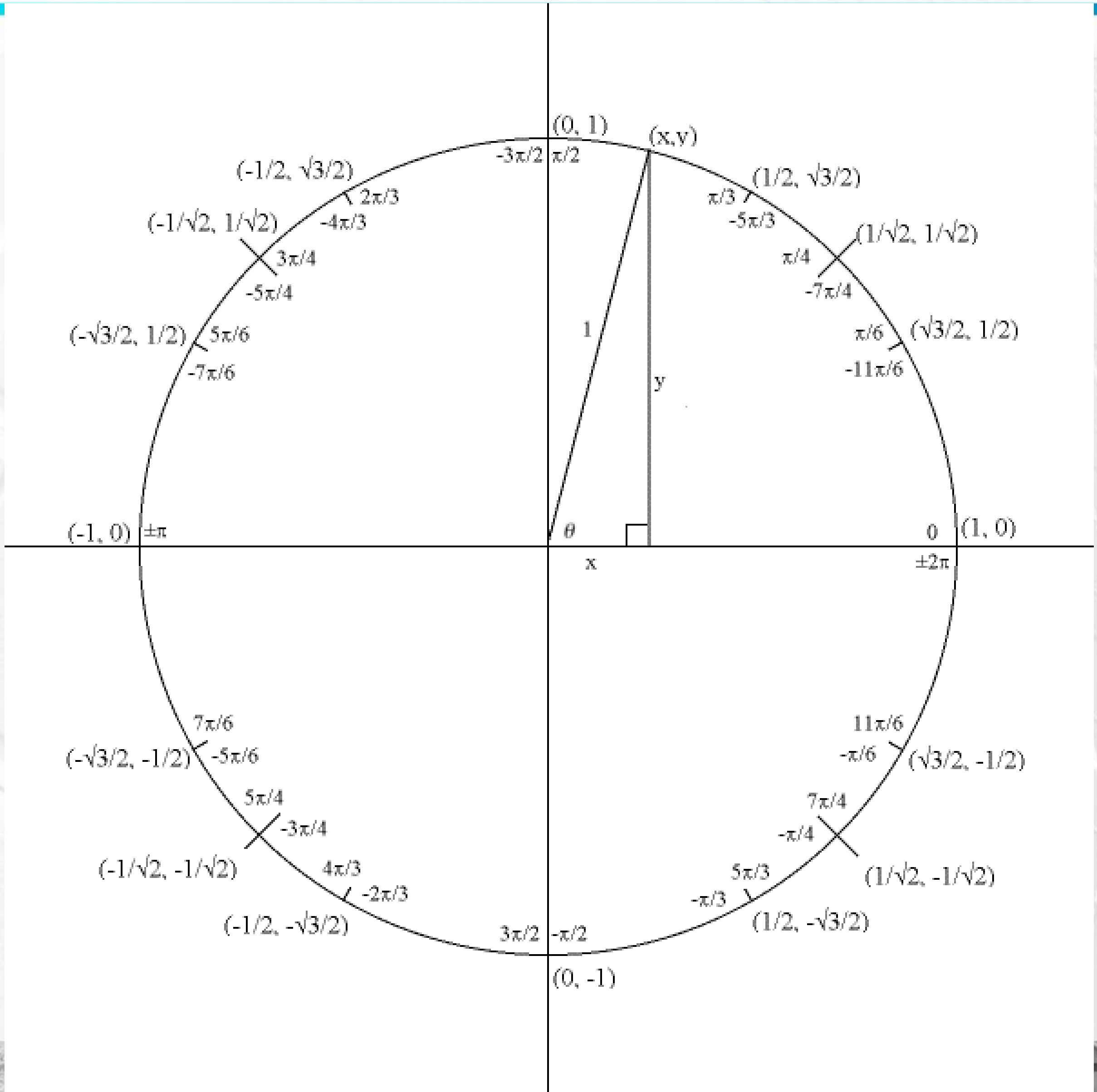
Revisão: Circulo Trigonométrico



Revisão: Trigonometria



Revisão: Círculo Unitário



Revisão: Lei dos Cossenos

Considerando a figura, podemos observar 3 triângulos:[2]

$$ABC, BCD, BAD$$

Destes, pode-se extrair as seguintes relações:

$$b = n + m$$

e

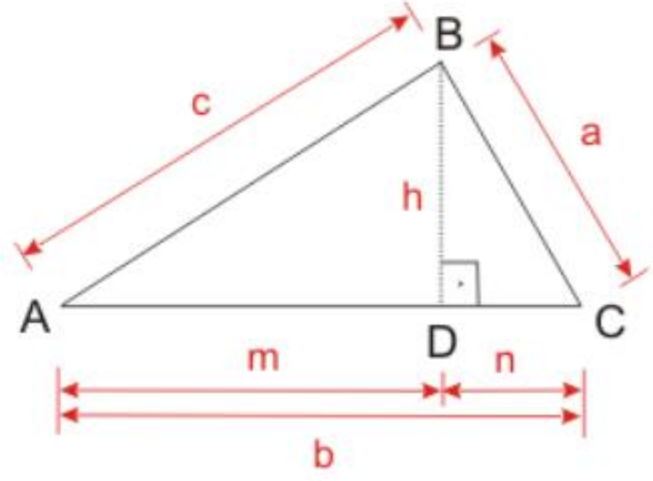
$$m = c \cdot cos\hat{A}$$

Usando o Teorema de Pitágoras para obter uma relação entre os lados dos triângulos, temos para BCD:[2]

$$a^2 = n^2 + h^2$$

e para BAD:

$$c^2 = m^2 + h^2$$



Revisão: Lei dos Cossenos

Substituindo:

$$n = b - m$$

e

$$h^2 = c^2 - m^2$$

em

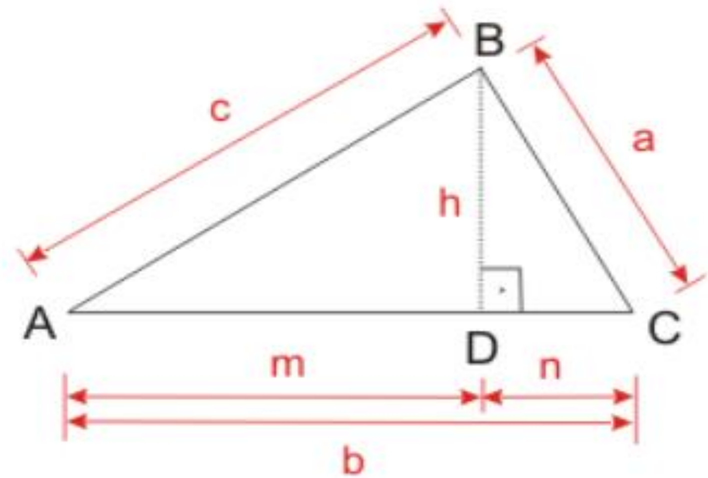
$$a^2 = n^2 + h^2$$

teremos:

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 - 2b \cdot m + m^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot m$$



Revisão: Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot m$$

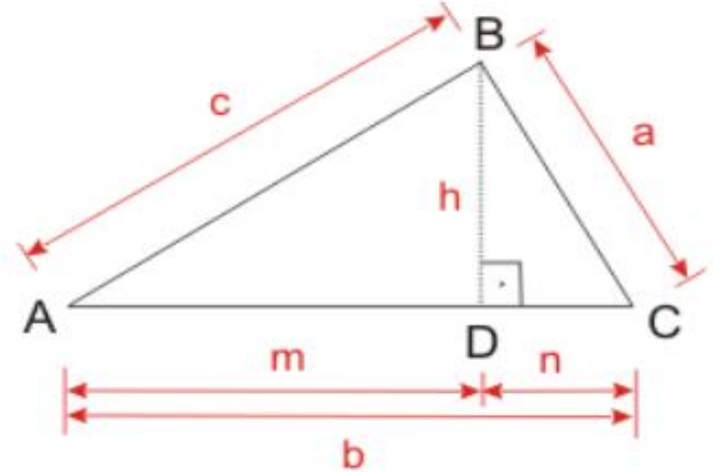
Entretanto, pode-se substituir a relação $m = c \cdot cos\widehat{A}$, do triângulo BAD, na equação acima.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot cos\widehat{A}$$

Da mesma forma, pode-se demonstrar as demais relações:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cos\widehat{C}$$



Norma e Produto Escalar

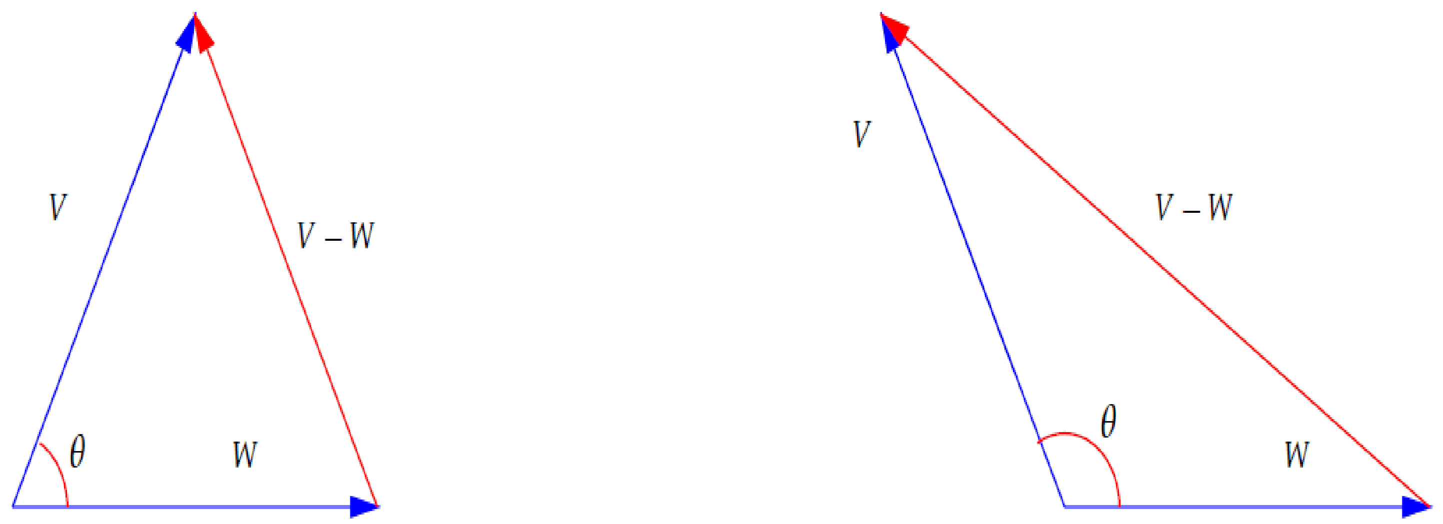


Figura 3.17 – Triângulo formado por representantes de V, W e $V - W$. À esquerda o ângulo entre V e W é agudo e à direita é obtuso.

Produto Escalar

- Se $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{W}$ são dois vetores não nulos e q é o ângulo entre eles, então pela lei dos cossenos:

$$\left\|\vec{V}-\vec{W}\right\|^2 = \left\|\vec{V}\right\|^2 + \left\|\vec{W}\right\|^2 - 2\left\|\vec{V}\right\|\left\|\vec{W}\right\|\cos\theta$$

Assim,

$$\vec{V}\bullet\vec{W} = \left\|\vec{V}\right\|\left\|\vec{W}\right\|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{V}\right\|^2 + \left\|\vec{W}\right\|^2 - \left\|\vec{V}-\vec{W}\right\|^2\right)$$

- Substituindo-se as coordenadas dos vetores na fórmula acima, obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

Produto Escalar

$$\vec{V} \bullet \vec{W} = \|\vec{V}\|\|\vec{W}\|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\vec{V}\|^2 + \|\vec{W}\|^2 - \|\vec{V} - \vec{W}\|^2\right) \quad \text{(I)}$$

- Substituindo-se as coordenadas dos vetores na fórmula acima, obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

- Por exemplo, se $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{W} = (w_1,w_2,w_3)$ são vetores no espaço, então substituindo-se $||\vec{V}||^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, $||\vec{W}||^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$ e $||\vec{V} - \vec{W}||^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2$ em (I), os termos v_i^2 e w_i^2 são cancelados e obtemos:

$V.W = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$.

Produto Escalar

- Podemos usar o resultado anterior para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos, $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{W}$. O cosseno do ângulo entre $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{W}$ é, então, dado por:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V} \bullet \vec{W}}{\|\vec{V}\| \|\vec{W}\|}$$

Se $\overrightarrow{V}$ e $\overrightarrow{W}$ são vetores não nulos e *q é o ângulo entre eles, então:*

(a) *q é agudo (0 <= q < 90º) se, e somente se,* $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{W} > 0$,

(b) *q é reto (q = 90º) se, e somente se,* $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{W} = 0$ *e*

(c) *q é obtuso (90º < q <= 180º) se, e somente se,* $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{W} < 0$.

Produto Escalar

Exercício: Vamos determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Sejam $\vec{V}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{V}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{V}_3 = (0, 0, 1)$

Então

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou seja

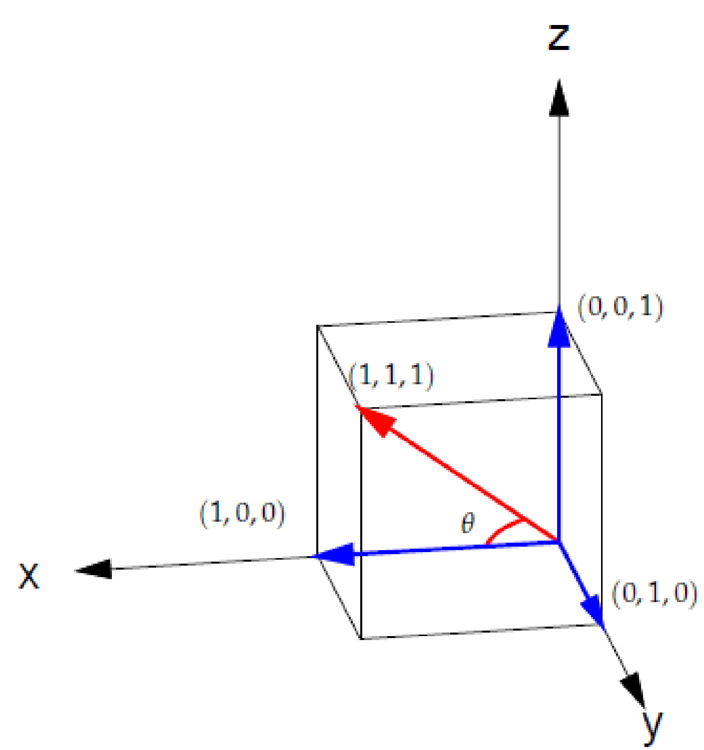


Figura 3.18 – Ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas

Produto Escalar

Teorema 3.3. *Sejam U, V e W vetores e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) *(comutatividade)* $U \cdot V = V \cdot U$;

(b) *(distributividade)* $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) *(associatividade)* $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2 \geq 0$, *para todo* V *e* $V \cdot V = 0$ *se, e somente se,* $V = \bar{0}$.

Demonstração. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$.

(a) $U \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = V \cdot U$;

(b) $U \cdot (V + W) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) = (u_1v_1 + u_1w_1) + (u_2v_2 + u_2w_2) + (u_3v_3 + u_3w_3) = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) $\alpha(U \cdot V) = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 = (\alpha U) \cdot V$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2$ é uma soma de quadrados, por isso é sempre maior ou igual à zero e é zero se, e somente se, todas as parcelas são iguais a zero. ■

Projeção Ortogonal

Exercício: Sejam $\vec{V} = (2,-1,3)$ e $\vec{W} = (4,-1,2)$. Vamos encontrar dois vetores $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$ tais que $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$, $\vec{V_1}$ é paralelo a $\vec{W}$ e $\vec{V_2}$ é perpendicular a $\vec{W}$.

Projeção Ortogonal

Projeção Ortogonal

Dados dois vetores V e W a **projeção ortogonal de** V **sobre** W denotada por

$$\text{proj}_W V$$

é o vetor que é paralelo a W tal que $V - \text{proj}_W V$ seja ortogonal a W

Projeção ortogonal do vetor V sobre o vetor W

Projeção Ortogonal

Proposição 3.4. *Seja W um vetor não nulo. Então, a projeção ortogonal de um vetor V em W é dada por*

$$\text{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2} \right) W .$$

Demonstração. Sejam $V_1 = \text{proj}_W V$ e $V_2 = V - \text{proj}_W V$. Como V_1 é paralelo a W, então

$$V_1 = \alpha W. \tag{3.7}$$

Assim,

$$V_2 = V - \alpha W .$$

Multiplicando-se escalarmente V_2 por W e usando o Teorema 3.3 (d) obtemos

$$V_2 \cdot W = (V - \alpha W) \cdot W = V \cdot W - \alpha ||W||^2. \tag{3.8}$$

Mas, V_2 é ortogonal a W, então $V_2 \cdot W = 0$. Portanto, de (3.8) obtemos

$$\alpha = \frac{V \cdot W}{||W||^2} .$$

Substituindo este valor de α na equação (3.7) segue-se o resultado.

Projeção Ortogonal

Exercício: Sejam $\vec{V} = (2,-1, 3)$ e $\vec{W} = (4,-1, 2)$. Vamos encontrar dois vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ tais que $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, $\vec{V}_1$ é paralelo a $\vec{W}$ e $\vec{V}_2$ é perpendicular a $\vec{W}$.

$$V \cdot W = 2 \cdot 4 + (-1)(-1) + 3 \cdot 2 = 15$$

$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21\,.$$

$$V_1 = \mathrm{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W)}{||W||^2}\right) W = \left(\frac{15}{21}\right)(4,-1,2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$V_2 = V - V_1 = (2,-1,3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7})\,.$$

Exercícios

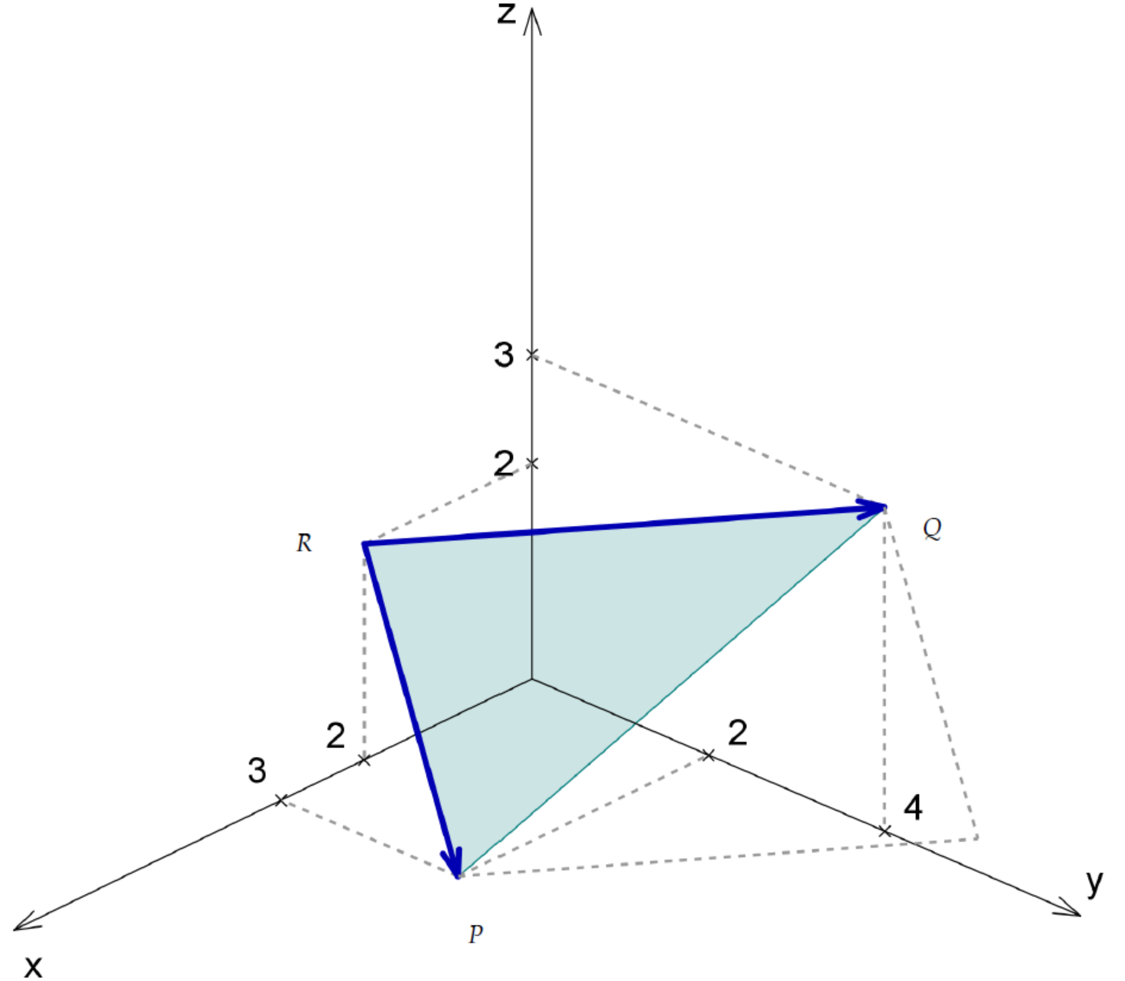


Figura 3.24. Área do triângulo PQR

Exercício:

Dados os pontos P(3,2,0), Q(0,4,3) e R(1,0,2), calcule a área do triângulo PQR.

Produto Vetorial

- É denominado de **produto vetorial**, pois o resultado deste produto é um vetor.

Definição 3.2. Sejam V e W dois vetores no espaço. Definimos o **produto vetorial**, $V \times W$, como sendo o vetor com as seguintes características:

(a) Tem comprimento dado numericamente por

$$||V \times W|| = ||V||\,||W||\operatorname{sen}\theta,$$

ou seja, a *norma* de $V \times W$ é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por V e W.

(b) Tem direção perpendicular a V e a W.

(c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita (Figura 3.21): Se o ângulo entre V e W é θ, giramos o vetor V de um ângulo θ até que coincida com W e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $V \times W$.

Norma do Produto Vetorial

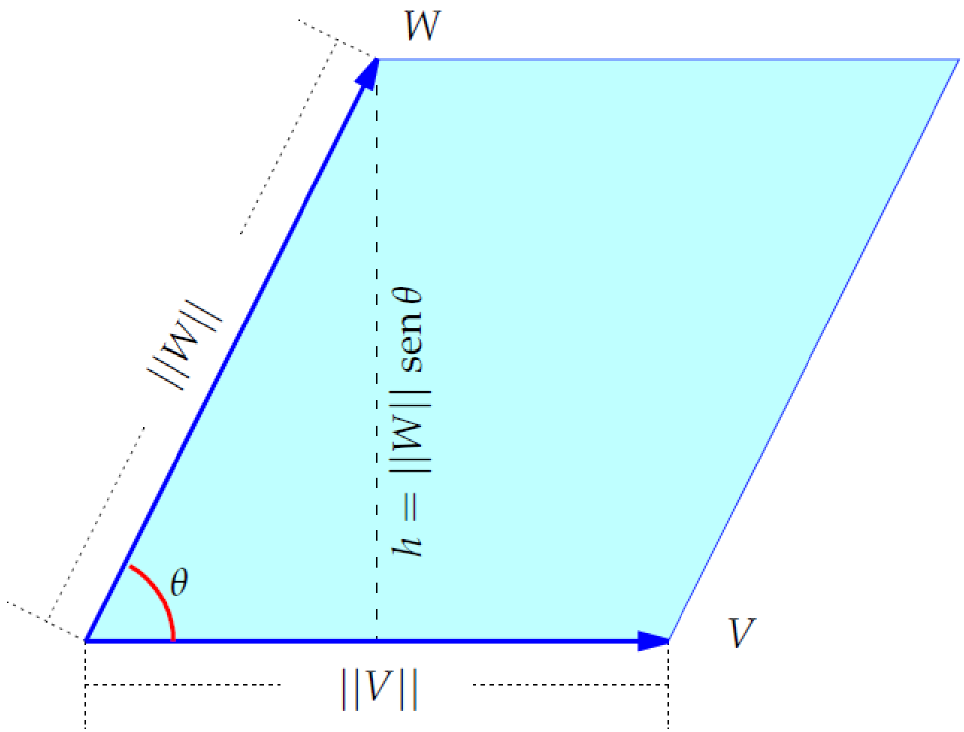


Figura 3.20 – Área de um paralelogramo determinado por dois vetores

Produto Vetorial

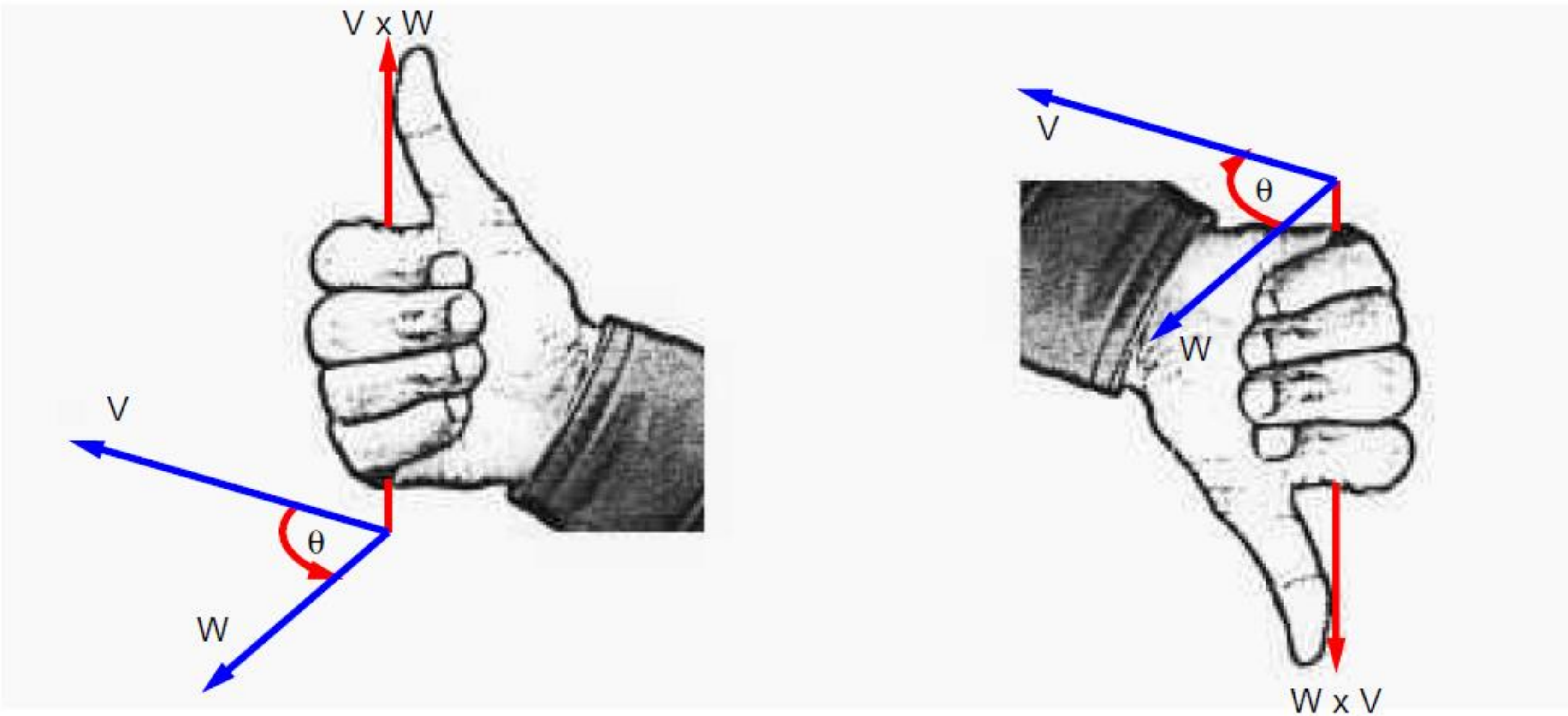


Figura 3.21 – Regra da mão direita

Produto Vetorial

Teorema 3.5. *Sejam U, V e W vetores no espaço e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $V \times W = -(W \times V)$ *(anti-comutatividade).*

(b) $V \times W = \bar{0}$ *se, e somente se,* $V = \alpha W$ *ou* $W = \alpha V$.

(c) $(V \times W) \cdot V = (V \times W) \cdot W = 0$.

(d) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$.

(e) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ *e* $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$ *(Distributividade em relação a soma de vetores).*

Exercícios

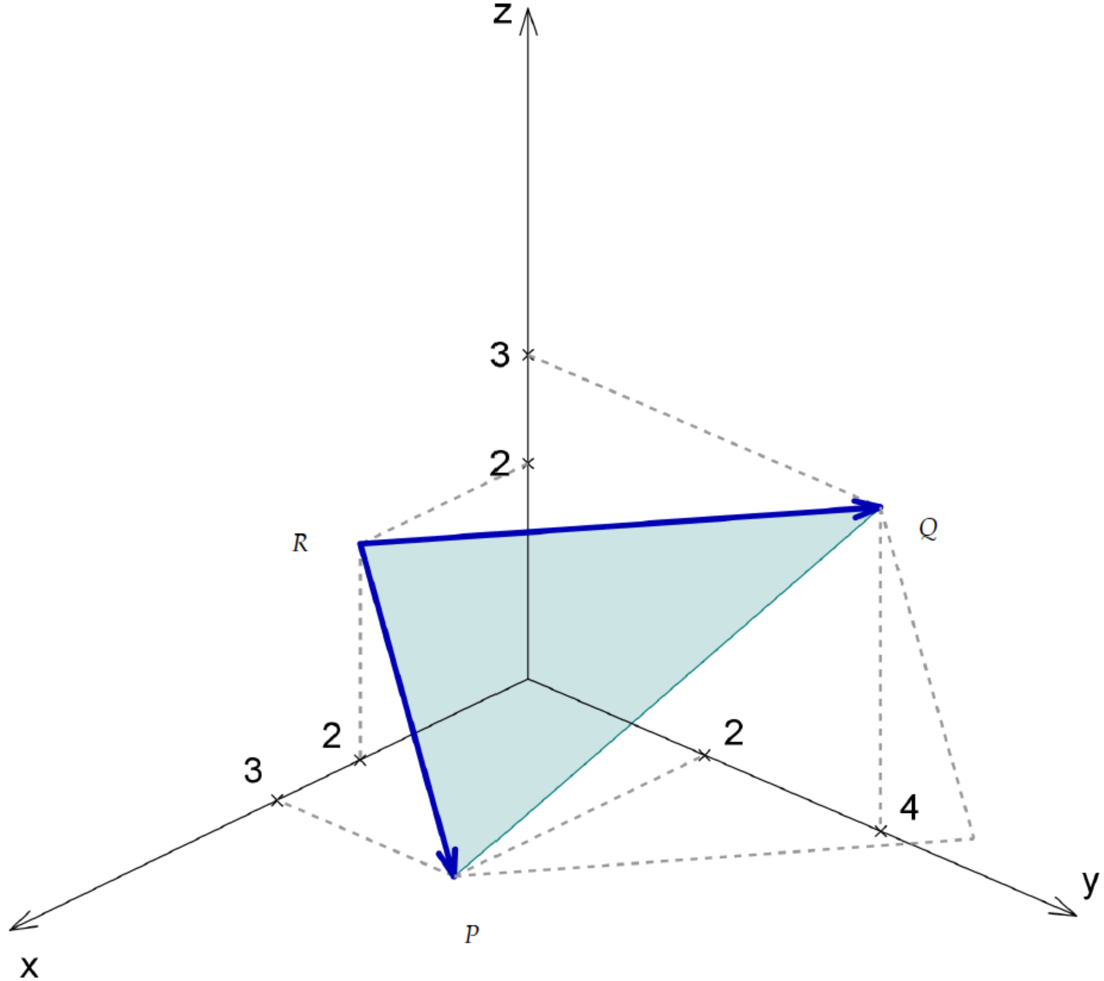


Figura 3.24. Área do triângulo PQR

Exercício:

Dados os pontos P(3,2,0), Q(0,4,3) e R(1,0,2), calcule a área do triângulo PQR.

Exercícios

$$P = (3, 2, 0), \quad Q = (0, 4, 3) \quad \text{e} \quad R = (1, 0, 2).$$

Sejam

$$V = \overrightarrow{RP} = (3 - 1, 2 - 0, 0 - 2) = (2, 2, -2)$$

$$W = \overrightarrow{RQ} = (0 - 1, 4 - 0, 3 - 2) = (-1, 4, 1).$$

Então,

$$V \times W = (10, 0, 10) = 10(1, 0, 1).$$

A área do triângulo PQR é a metade da área do paralelogramo com lados determinados por V e W. Assim,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}||V \times W|| = 5\sqrt{2}.$$

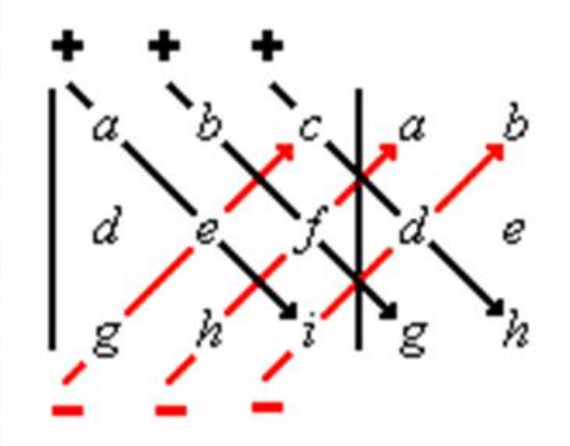
Revisão: Determinantes

- O determinante de uma matriz de segunda ordem é a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e o produto dos termos da diagonal secundária. Esses produtos se chamam, respectivamente, *termo principal* e *termo secundário* da matriz.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

- Para calcular o determinante de matrizes de terceira ordem, utilizamos a chamada regra de Sarrus, que resulta no seguinte cálculo:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + dbi).$$



Vetores Canônicos

Os **vetores canônicos**

$$\boxed{\vec{i} = (1,0,0), \qquad \vec{j} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0,0,1)}$$

são vetores unitários (de norma igual à um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor

$$V = (v_1, v_2, v_3)$$

pode ser escrito como uma soma de múltiplos escalares de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ (combinação linear), pois

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) &= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = \\ &= v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = \\ &= v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Vetores Canônicos

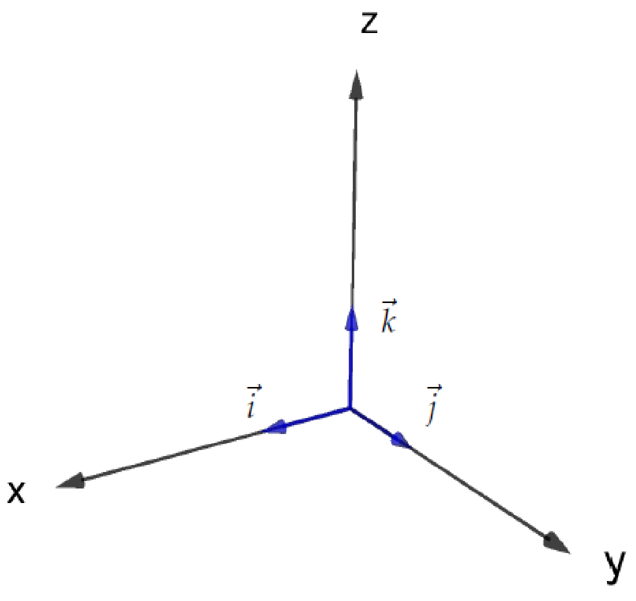


Figura 3.22. Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

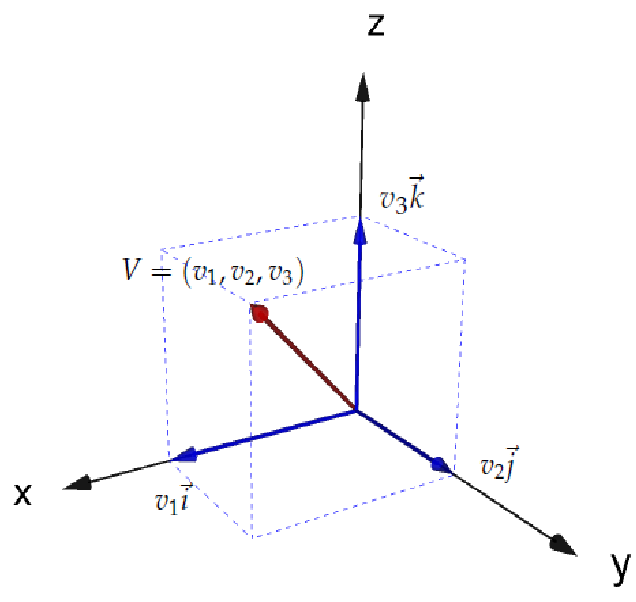


Figura 3.23. $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

Vetores Canônicos

Da definição de produto vetorial podemos obter facilmente as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
&\vec{i} \times \vec{i} = \bar{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \bar{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \bar{0},\\
&\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},\\
&\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.
\end{aligned}
$$

$$V = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k} \quad \text{e} \quad W = w_1\,\vec{i} + w_2\,\vec{j} + w_3\,\vec{k}.$$

$$
\begin{aligned}
V \times W &= (v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}) \times (w_1\,\vec{i} + w_2\,\vec{j} + w_3\,\vec{k})\\
&= v_1w_1(\vec{i} \times \vec{i}) + v_1w_2(\vec{i} \times \vec{j}) + v_1w_3(\vec{i} \times \vec{k}) +\\
&\quad + v_2w_1(\vec{j} \times \vec{i}) + v_2w_2(\vec{j} \times \vec{j}) + v_2w_3(\vec{j} \times \vec{k}) +\\
&\quad + v_3w_1(\vec{k} \times \vec{i}) + v_3w_2(\vec{k} \times \vec{j}) + v_3w_3(\vec{k} \times \vec{k})\\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k}
\end{aligned}
$$

Vetores Canônicos

FAESA
Faça acontecer

$$\begin{aligned} V \times W &= (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \times (w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}) \\ &= v_1w_1(\vec{i} \times \vec{i}) + v_1w_2(\vec{i} \times \vec{j}) + v_1w_3(\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &\quad + v_2w_1(\vec{j} \times \vec{i}) + v_2w_2(\vec{j} \times \vec{j}) + v_2w_3(\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &\quad + v_3w_1(\vec{k} \times \vec{i}) + v_3w_2(\vec{k} \times \vec{j}) + v_3w_3(\vec{k} \times \vec{k}) \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k} \end{aligned}$$

Usando os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ o produto vetorial $V \times W$, pode ser escrito em termos do "determinante"

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \vec{i} - \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} \vec{j} + \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \vec{k}.$$

Produto Vetorial

Exercício: Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{k}$. Vamos determinar o produto vetorial $V \times W$. Como

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) = (2, -7, -6).$$

Produto Misto

O produto $(V \times W) \cdot U$ é chamado **produto misto** de U, V e W. O resultado abaixo mostra como calcular o produto misto usando as componentes dos vetores.

Teorema 3.7. *Sejam* $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ *e* $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. *Então,*

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(V \times W) \cdot U &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= u_1 \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} - u_2 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + u_3 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Produto Misto

Exercício: O produto misto dos vetores $U = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $V = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ é

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -84.$$

Exercício: Sejam $V = 4\vec{i}$, $W = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ e $U = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. O volume do paralelepípedo com um vértice na origem e arestas determinadas por U, V e W é dado por

$$\text{volume} = |(V \times W) \cdot U| = |\det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}| = |80| = 80\,.$$

Volume do Paralelepípedo

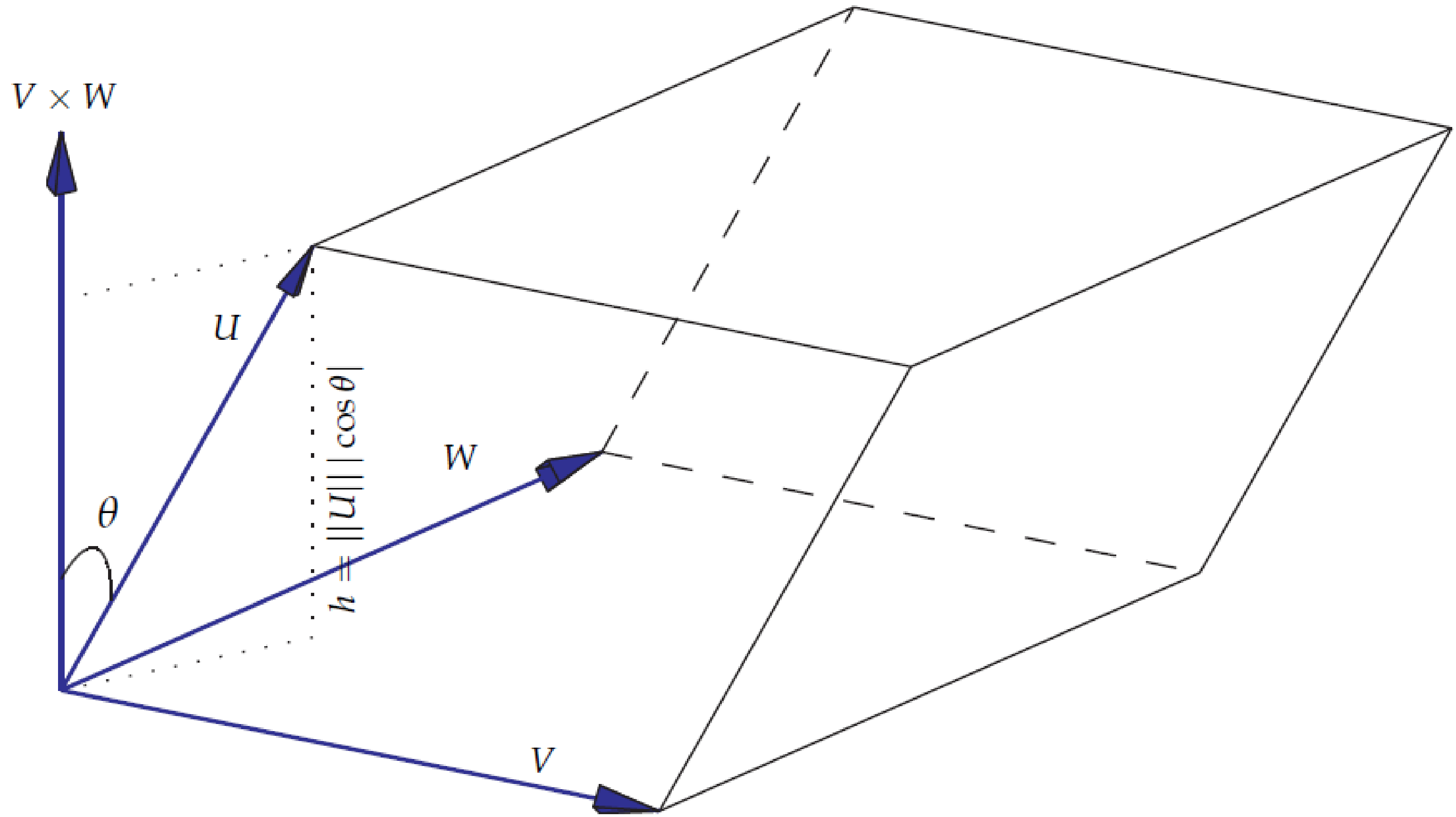


Figura 3.25. Volume do paralelepípedo determinado por V, W e U

Volume do Paralelepípedo

Demonstração. O volume do paralelepípedo determinado por U, V e W é igual ao produto da área da base pela altura, ou seja, pela definição do produto vetorial, o volume é dado por

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, h\,.$$

Mas, como vemos na Figura 3.25 a altura é $h = ||U||\,|\cos\theta|$, o que implica que

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, ||U||\,|\cos\theta| = |(V \times W) \cdot U|\,.$$

Volume do Paralelepípedo

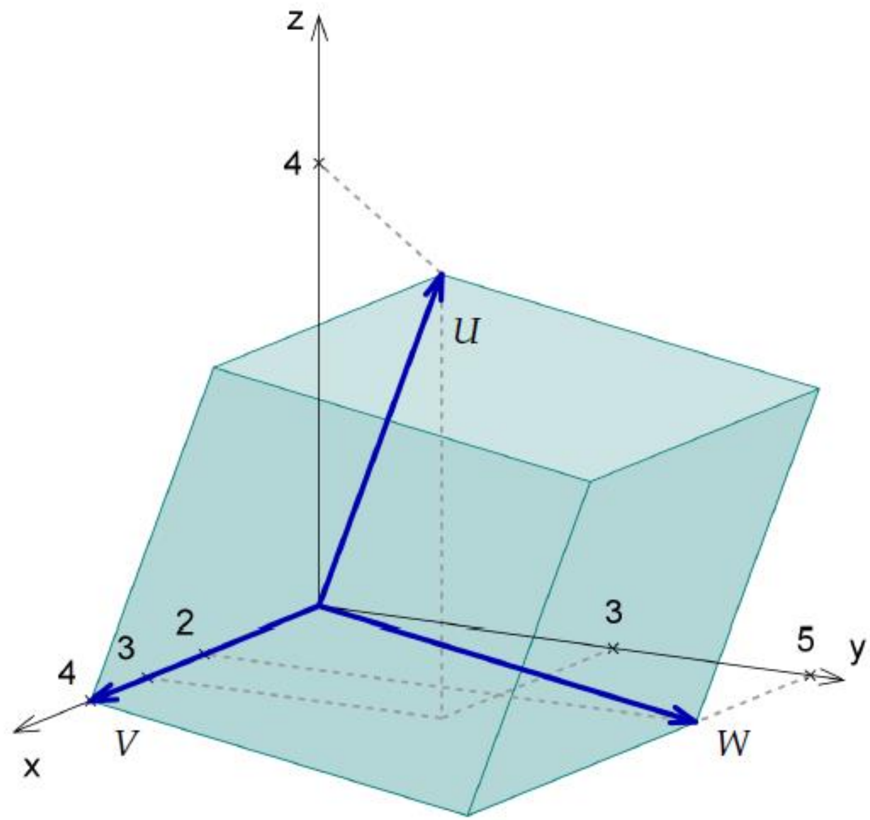


Figura 3.26. Paralelepípedo determinado por U, V e W do Exemplo 3.14

Vetores Coplanares

Vamos verificar que os pontos $P = (0,1,1)$, $Q = (1,0,2)$, $R = (1,-2,0)$ e $S = (-2,2,-2)$ são **coplanares**, isto é, pertencem a um mesmo plano. Com estes pontos podemos construir os vetores

$$\overrightarrow{PQ} = (1-0, 0-1, 2-1) = (1,-1,1),$$

$$\overrightarrow{PR} = (1-0, -2-1, 0-1) = (1,-3,-1) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{PS} = (-2-0, 2-1, -2-1) = (-2,1,-3)$$

Os pontos P, Q, R e S pertencem a um mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ são coplanares. E isto acontece se, e somente se, o produto misto deles é igual zero.

$$(\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}) \cdot \overrightarrow{PQ} = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, P, Q, R e S são coplanares.

Vetores Coplanares

Corolário 3.9. *Sejam* $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ *e* $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. *Estes vetores são* ***coplanares*** *(isto é, são paralelos a um mesmo plano) se, e somente se,*

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = 0.$$