$\boxed{\text{Álgebra Linear I - Aula 8}}$

1. Posições relativas e sistemas de equações.
2. Distância de um ponto a uma reta.
3. Distância de um ponto a um plano.

Roteiro

1 Sistemas de equações lineares (posição relativa de três planos)

Considere os planos em equações cartesianas

$$\begin{aligned} \pi_1 \quad &: a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1, \\ \pi_2 \quad &: a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2, \\ \pi_3 \quad &: a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3, \end{aligned}$$

e o sistema linear de equações

$$\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y + c_2\,z &= d_1, \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z &= d_2, \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z &= d_3. \end{aligned}$$

Os planos se interceptam se (e somente se) o sistema tem solução. Se a solução é única então a interseção é um ponto, caso contrário será uma reta ou um plano.

As oito posições possíveis dos planos π_1, π_2 e π_3 são as seguintes:

a) os três planos coincidem,

b) dois planos coincidem e são paralelos a um terceiro,

c) dois planos coincidem e interceptam ao terceiro ao longo de uma reta,

d) os três planos são paralelos entre si,

e) dois planos são paralelos e o terceiro os intercepta ao longo de retas paralelas,

f) os três planos têm uma reta em comum (interseção ao longo de uma reta),

g) os planos se interceptam dois a dois ao longo de retas paralelas,

h) os três planos se interceptam em exatamente um ponto.

Considere vetores normais aos planos n_1, n_2 e n_3.

Se $n_1 \cdot (n_2 \times n_3) \neq 0$ (vetores não coplanares) então o sistema tem solução única, isto é, os planos se interceptam em um ponto (esta afirmação se justifica usando escalonamento).

Consideraremos agora as diferentes possibilidades que podem aparecer quando $n_1 \cdot (n_2 \times n_3) = 0$.

1.1 Sistemas com solução (os planos têm intersecção comum)

Se $n_1 \cdot (n_2 \times n_3) = 0$ os vetores são coplanares. Então teremos, por exemplo

$$n_1 = \sigma_2 \, n_2 + \sigma_3 \, n_3.$$

Então necessariamente, para que o sistema tenha solução deveremos ter

$$d_1 = \sigma_2 \, d_2 + \sigma_3 \, d_3.$$

As possibilidades são:

- Os planos têm interseção ao longo de uma reta (por exemplo, n_2 e n_3 não paralelos, $n_1 = \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3$, e $d_1 = \sigma_2 d_2 + \sigma_3 d_3$.
- dois planos são iguais e o terceiro não é paralelo.
- os três planos são iguais ($n_2 = \sigma_2 n_1$ e $n_3 = \sigma_3 n_3$, $d_2 = \sigma_2 d_1$ e $d_3 = \sigma_3 d_1$).

1.2 Sistemas sem solução (os planos não se intersectam)

As possibilidades são as seguintes:

- Três planos paralelos diferentes,
- Dois planos paralelos (por exemplo π_1 e π_2) e o terceiro π_3 intersecta π_1 e π_2 de forma que $r_1 = \pi_1 \cap \pi_3$ e $r_2 = \pi_2 \cap \pi_3$ são retas paralelas.
- Os planos se interceptam dois a dois ao longo de retas paralelas $r_1 = \pi_1 \cap \pi_3$, $r_2 = \pi_1 \cap \pi_2$, e $r_3 = \pi_2 \cap \pi_3$, e são retas paralelas.

1.3 Exemplos

Exemplo I: Considere os planos

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + y + z = 1, \\ \pi_2: &\quad 2x + 2y + 2z = 2, \\ \pi_3: &\quad 5x + 5y + 5z = 5. \end{aligned}$$

Os três planos são iguais (caso (a))

Exemplo II: Considere os planos

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + y + z = 1, \\ \pi_2: &\quad 2x + 2y + 2z = 2, \\ \pi_3: &\quad 3x + 3y + 3z = 1. \end{aligned}$$

Os dois primeiros planos são iguais e π_3 é paralelo a π_1 e π_2 (caso (b)).

Exemplo III: Considere os planos

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + y + z = 1, \\ \pi_2: &\quad 2x + 2y + 2z = 2, \\ \pi_3: &\quad x + 2y + 3z = 1. \end{aligned}$$

Os dois primeiros planos são iguais e π_3 os intersecta ao longo de uma reta (caso (c)).

Exemplo IV: Considere os planos

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + y + z = 1, \\ \pi_2: &\quad x + y + z = 2, \\ \pi_3: &\quad x + y + z = 3. \end{aligned}$$

Os três planos são paralelos e diferentes (caso (d)).

Exemplo V: Considere os planos

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x - 2y + 3z = 4, \\ \pi_2: &\quad 2x - 4y + 6z = 0, \\ \pi_3: &\quad x + y + z = 3. \end{aligned}$$

Os planos π_1 e π_2 são paralelos e diferentes e π_3 os intersecta ao longo de retas paralelas (caso (e)).

Exemplo VI: Considere os planos

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + 2y - 3z = 4, \\ \pi_2: &\quad 2x + 3y + 4z = 5, \\ \pi_3: &\quad 4x + 7y - 2z = 13. \end{aligned}$$

Os planos π_1, π_2 e π_3 têm uma reta em comum (caso (f)).

Exemplo VII: Considere os planos

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + 2y - 3z = 4, \\ \pi_2: &\quad 2x + 3y + 4z = 5, \\ \pi_3: &\quad 4x + 7y - 2z = 3. \end{aligned}$$

Os planos π_1, π_2 e π_3 se intersectam dois a dois ao longo de retas paralelas diferentes (caso (g)).

2 Distâncias

2.1 Distância de um ponto P a uma reta r

Dado um ponto P e uma reta r, a distância do ponto P à reta r é a menor comprimento dos segmentos PQ onde Q é um ponto da reta. Este mínimo é atingido quando o vetor $\overline{PQ}$ é ortogonal ao vetor diretor da reta. Observe que, neste caso, dado qualquer ponto R da reta r, os pontos P, Q e R são os vértices de um triângulo retângulo, onde os segmentos PQ e QR são os catetos e PR a hipotenusa. Portanto, temos

$$|PQ| = |PR| \operatorname{sen}(\theta),$$

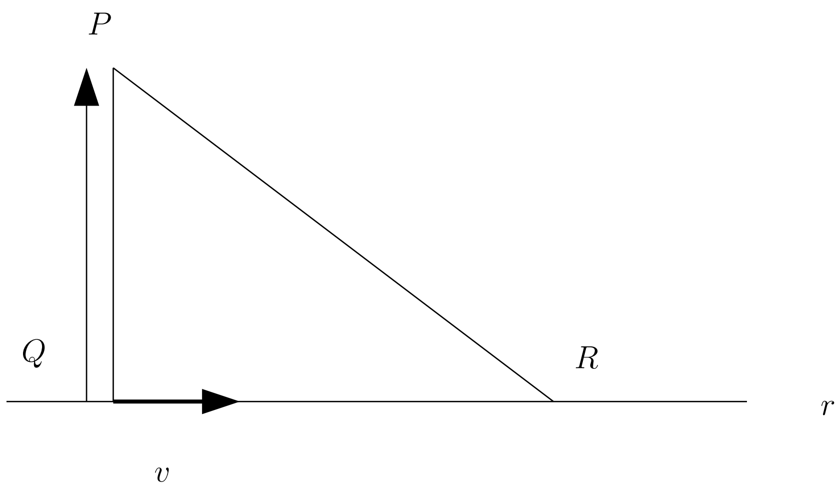

Figura 1: Distância entre ponto e reta

onde θ é o ângulo formado pelos segmentos PR e RQ, como sen $(\theta) \leq 1$, temos que $|PQ| \leq |PR|$, o que prova a afirmação. Veja a Figura 2.1

Vejamos primeiro como calcular a distância no plano. Neste caso, escolhemos qualquer ponto R da reta, a distância é o módulo da projeção ortogonal do vetor $\overline{RP}$ no vetor normal da reta, n (em $\mathbb{R}^2$ a direção do vetor está bem determinada, isto não ocorre em $\mathbb{R}^3$, justifique). Observe que este cálculo é independente do ponto R. Isto é: a projeção ortogonal de $\overline{RP}$ em n é igual à projeção ortogonal de $\overline{AP}$ em n, para qualquer ponto A de r (justifique também esta afirmação!).

Vejamos agora o cálculo da distância de P a r no caso geral. Pelos comentários anteriores, o problema consiste em achar o ponto Q tal que $\overline{PQ}$ é ortogonal a r.

Método 1: Considere o plano π normal a r que contém P. Calcule o ponto de interseção Q de π e r. A distância procurada é a distância entre P e Q. Veja a Figura 2.

Método 2: Considere um ponto qualquer R de r e o vetor diretor v de r. Calcule o produto vetorial $\overline{PR} \times v$. Então a distância d procurada é

$$d = \frac{||\overline{PR} \times v||}{||v||}.$$

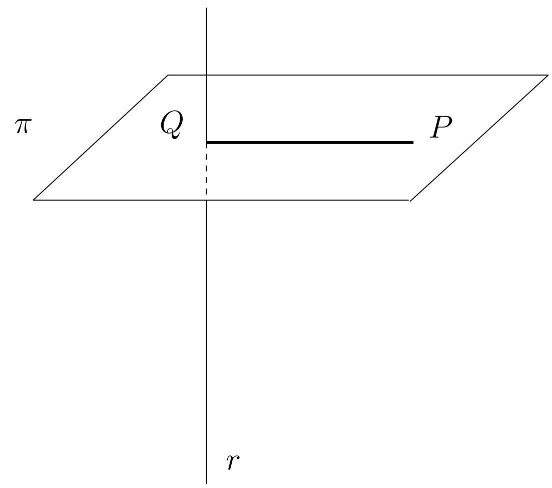

Figura 2: Distância entre ponto e reta

Veja a Figura 3.

Para ver esta afirmação observe que a área do paralelogramo determinado por $\overline{PR}$ e v é

$$||\overline{PR} \times v|| = (\text{base } b \text{ do paralelogramo})\,(\text{altura } h \text{ do paralelogramo}).$$

Onde $b = ||v||$ e h é a distância procurada.

Veja que este método é independente da escolha do ponto R.

Exemplo 1. *Calcule a distância do ponto $P = (1, 0, 1)$ à reta $(t, 2t, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Resposta: Usando o primeiro método, temos que o plano π normal a r que contém o ponto P é da forma

$$\pi\colon x + 2\,y = d.$$

Como $(1, 0, 1) \in \pi$ temos $d = 1$.

A interseção de r e π ocorre para o parâmetro t que verifica

$$t + 2\,(2\,t) = 1,$$

logo $t = 1/5$. Temos que o ponto Q de interseçao é $(1/5, 2/5, 3)$. Logo

$$\overline{PQ} = (-4/5, 2/5, 10/5)$$

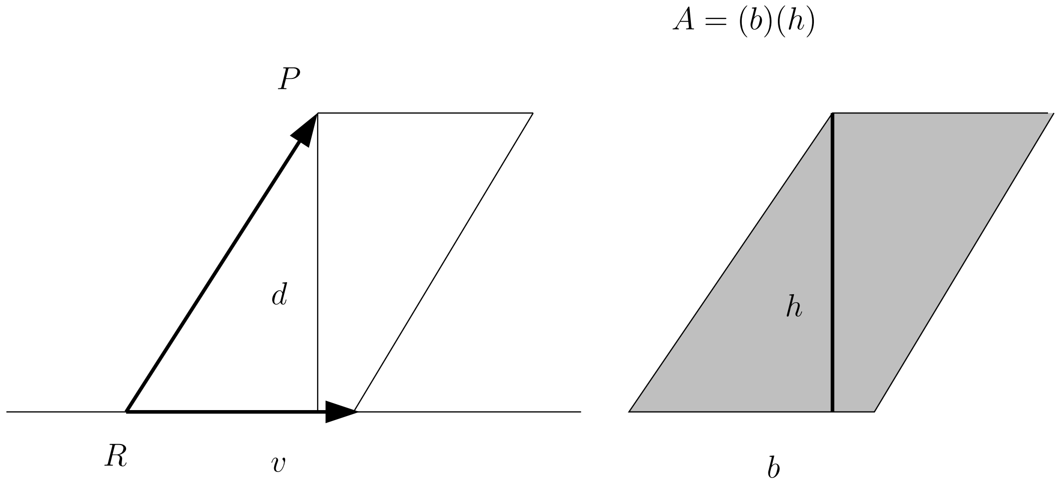

Figura 3: Distância entre ponto e reta: usando produto vetorial

que tem módulo $\sqrt{16+4+100}/5 = \sqrt{120}/5 = \sqrt{24/5}$. Este módulo é a distância procurada.

Para o segundo método escolhemos um ponto R qualquer de r (por exemplo, $(0,0,3)$). Logo

$$\overline{PR} = (1, 0, -2).$$

Temos $(1,2,0) \times (1,0,-2) = (4,-2,2)$. Logo a distância é

$$|(4,-2,2)|/|(1,0,-2)| = \sqrt{24}/\sqrt{5}.$$

Obviamente obtemos o mesmo resultado. □

2.2 Distância de um ponto P a um plano π

Dado um ponto P e um plano π, a distância entre P e π é a menor das distâncias $d(P,Q)$, onde Q é um ponto de π. Como no caso da distância de um ponto a uma reta, este mínimo ocorre quando o vetor $\overline{PQ}$ é ortogonal ao plano (ou seja, paralelo ao vetor normal do plano). Esta afirmação é obtida exatamente como no caso da distância de um ponto a uma reta.

Para calcular a distância de P a π veremos dois métodos:

- **Método 1:** Considere a reta r normal ao plano π que contém P. Calcule o ponto de interseção Q de π e r. A distância procurada é a distância entre P e Q.

- **Método 2:** Considere um ponto qualquer R de π e o vetor normal n de π. Calcule o vetor w obtido como a projeção do vetor $\overline{PR}$ em n. O módulo de w é a distância procurada.

- **Método 3:** Usando o produto misto. Considere dois vetores v e w paralelos ao plano π e um ponto Q do plano π. Considere o paralelepípedo Π com arestas v, w e $\overline{PQ}$. O volume do paralelepípedo Π é

  $$|\overline{PQ} \cdot (v \times w)| = (\text{área base}) \cdot (\text{[h]altura}) = ||v \times w|| \cdot h.$$

  Temos que h é exatamente a distância de P a π.

Exercício 1. *Com a notação acima, que propriedade verifica o ponto* $T = P + w$*?*

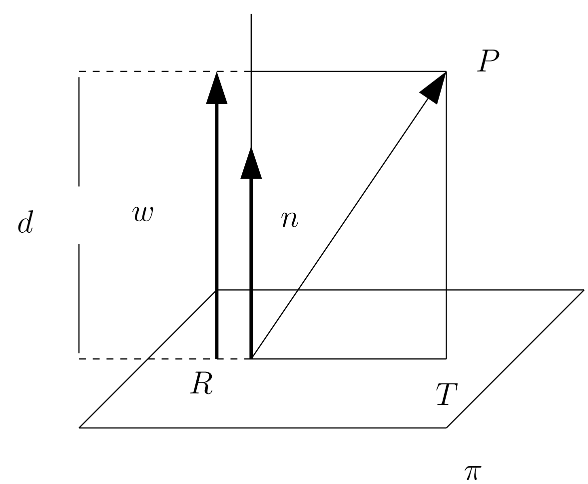

Figura 4: Distância entre ponto e plano: usando projeções

Exemplo 2. *Calcule a distância do ponto* $P = (1, 0, 1)$ *ao plano* $\pi\colon x + 2y - z = 1$.

Resposta: Usando o primeiro método, temos que $r = (1+t, 2t, 1-t)$. A interseção da reta r e do plano π ocorre quando t verifica (substituindo a equação da reta na do plano)

$$(1+t) + 2\,(2\,t) - (1-t) = 1,$$

isto é, $t = 1/6$. Logo $Q = (7/6, 2/6, 5/6)$ e $\overline{PQ} = (1/6, 2/6, -1/6)$. A distância é o módulo de $\overline{PQ} = (1/6, 2/6, -1/6)$, ou seja, $1/\sqrt{6}$.

Usando o segundo método escolhemos o ponto $R = (1, 0, 0)$ do plano π, logo $\overline{PR} = (0, 0, -1)$. Consideremos um vetor unitário normal ao plano $n = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$. A projeção de $\overline{PR}$ em n é

$$(\overline{PR} \cdot n)\, n = 1/\sqrt{6}(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = (1/6, 2/6, -1/6).$$

Este vetor tem módulo (que é a distância procurada) igual a $1/\sqrt{6}$.

Obviamente, T é o ponto Q do primeiro método! (isto responde ao Exercício 1). $\square$