

Do Retangular ao Polar:
Integrais duplas abandonam Descartes e abraçam Newton!

Trabalho de Cálculo 3, prof. Kennedy

Grupo 1

Vila Velha, 07/11/2019

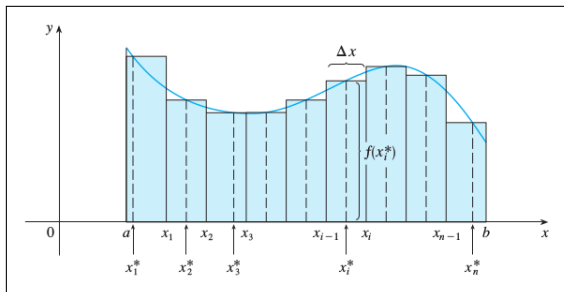
- 1 Checagem prévia e revisão rápida
- 2 Onde a coisa complica e qual a solução?
- 3 Sistema de coordenadas polares
- 4 Integrais simples em coordenadas polares
- 5 Integrais duplas em coordenadas polares

Responda “na lata”:

$$\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) \, dy \, dx = 48$$

O que *significa* esse número 48? Escolha a opção correta:

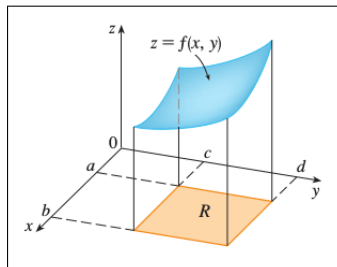
- a É a variação da função nesse intervalo
- b É o ponto mais alto da função nesse intervalo
- c É a área da função nesse intervalo
- d É quanto y varia em relação à x
- e É o volume sob a função nesse intervalo
- f Não sei nem errar essa pergunta! Só Jesus salva...



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 884)

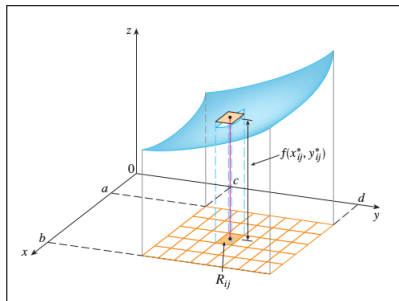
$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 884)

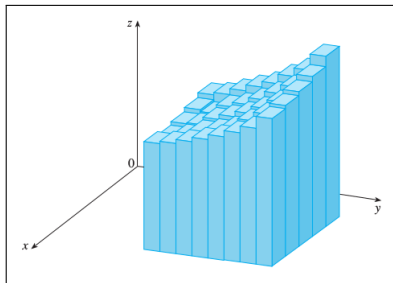
- x varia de a até b
- y varia de c até d
- x e y formam a base, a região retangular R , com área A
- $z = f(x, y)$ determina uma superfície acima da região R
- x , y e z determinam um sólido S com volume V
- Qual o *volume* desse sólido?



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

- Dividimos a base retangular R em vários retângulos menores: R_{ij}
- A área de cada R_{ij} é: $\Delta A = \Delta x \Delta y$
- A altura de cada retângulo é: $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$

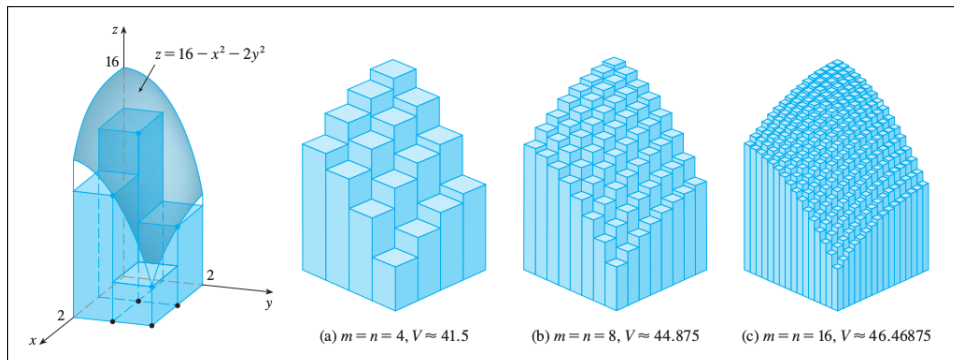
$$V_{R_{ij}} \approx f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (3)$$



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (4)$$

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx \quad (5)$$



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 885)

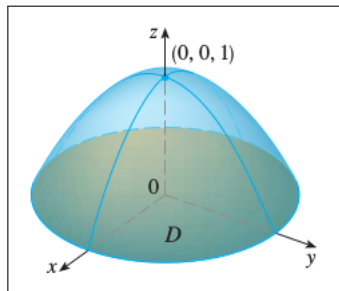
$$\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) \, dy \, dx = 48$$

- 1 Checagem prévia e revisão rápida
- 2 Onde a coisa complica e qual a solução?
- 3 Sistema de coordenadas polares
- 4 Integrais simples em coordenadas polares
- 5 Integrais duplas em coordenadas polares

Como calcular esse volume?

Grupo 1

Qual o volume do sólido limitado abaixo pelo plano $z = 0$ e acima pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$?

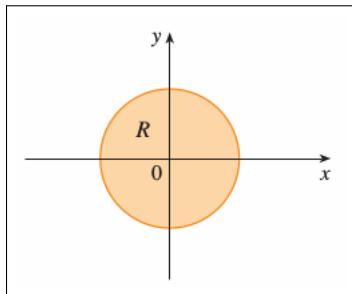


James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 906)

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) \, dy \, dx \quad (6) \\ &= \textbf{vixe!, complicou...} \end{aligned}$$

Por que complicou? Culpa de Descartes!

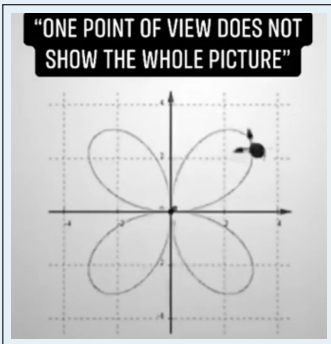
Grupo 1



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 904)

- Nosso referencial, até agora foi o sistema de *coordenadas retangulares* (ou cartesianas)
- Aqui, o disco formado por x e y não pode ser descrito por uma única função integrável: y não é $f(x)$
- Algum corajoso aí para integrar quebrando a função em duas? Por simetria? E depois, como considerar o eixo z ?

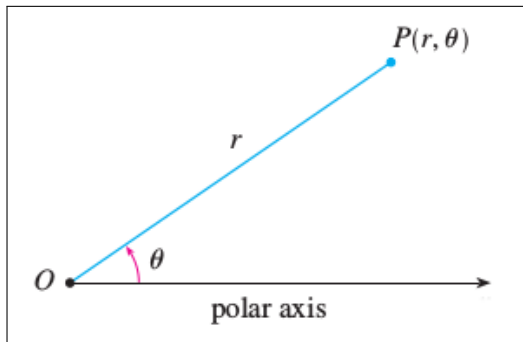
Basta mudar o ponto de vista!



www.youtube.com/watch?v=Dmc3mQ87GiQ

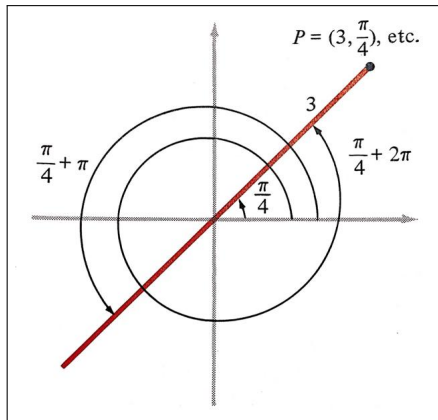
- Sai Descartes e o sistema de coordenadas retangulares
- Entra Newton e o sistema de *coordenadas polares*

- 1 Checagem prévia e revisão rápida
- 2 Onde a coisa complica e qual a solução?
- 3 Sistema de coordenadas polares
- 4 Integrais simples em coordenadas polares
- 5 Integrais duplas em coordenadas polares



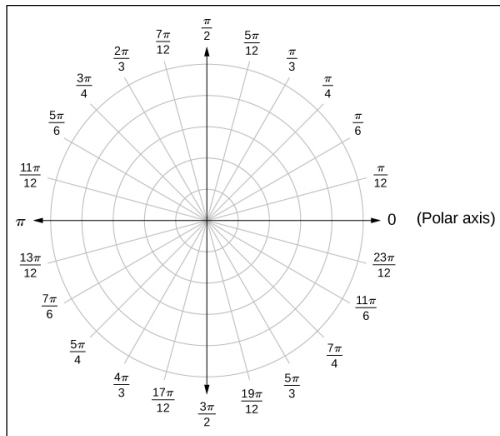
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 596)

- Especialmente útil para curvas com “afinidade pela origem”, como a trajetória de um planeta
- Essas curvas são mais facilmente descritas como a trajetória de um ponto móvel cuja posição é especificada pela sua *direção* a partir da origem e sua *distância* da origem
- A direção é dada pelo ângulo θ , em radianos, e a distância r é calculada da origem até o ponto
- O par ordenado $P = (r, \theta)$ são as *coordenadas polares* do ponto



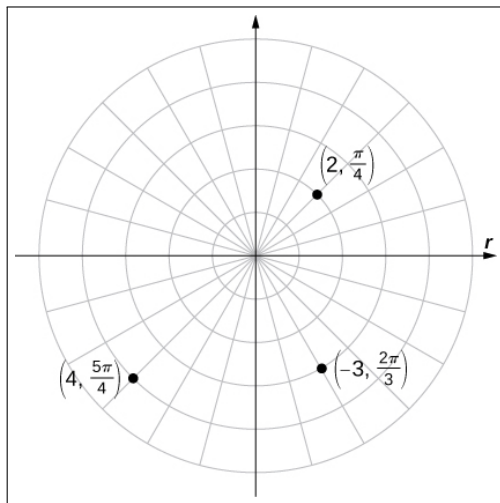
George Simmons: *Calculus with Analytic Geometry*
(2ª ed., pg. 560)

- $P = (r, \theta)$ determina um ponto único, mas um ponto não determina uma coordenada polar única (cada ponto tem muitas coordenadas polares)
- $r = 0$ especifica a origem, independente de θ
- $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 645)

- Pense em termos de *ao redor* e de *distância* em relação ao centro (polo)
- Esqueça o pensamento cartesiano de eixo-x (esquerda e direita) e eixo-y (para cima e para baixo)
- Ao aumentarmos θ por π ($\theta + \pi$) estamos na mesma “reta”, mas na direção contrária
- Ao aumentarmos θ por qualquer múltiplo de 2π ($\theta + 2\pi$), voltamos no mesmo ponto após dar uma ou mais voltas



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 646)

Gráfico de equações polares

O **gráfico de uma equação polar** $r = f(\theta)$ ou, mais genericamente, $F(r, \theta) = 0$, consiste de todos os pontos P que têm *pelo menos uma representação* (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação polar.

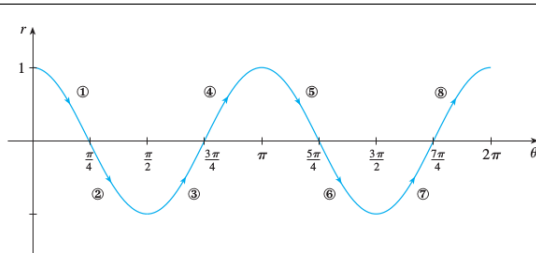


FIGURE 12
 $r = \cos 2\theta$ in Cartesian coordinates

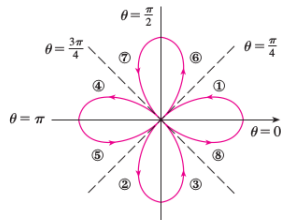
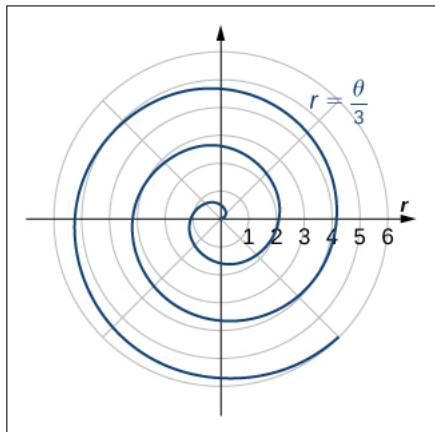


FIGURE 13
Four-leaved rose $r = \cos 2\theta$

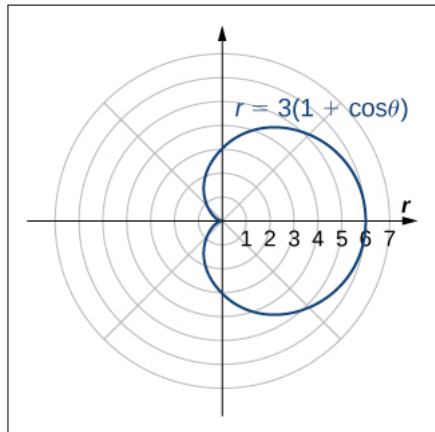
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 600)

Espiral



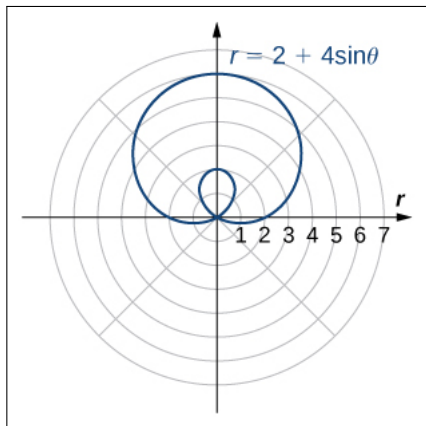
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 651)

Cardíode



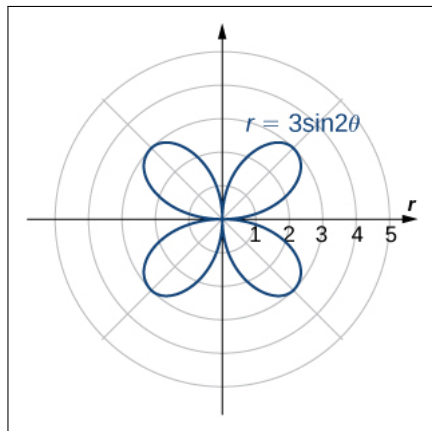
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

Limaçon



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

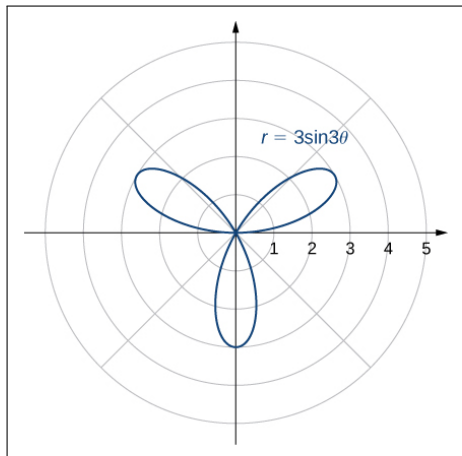
Rosácea



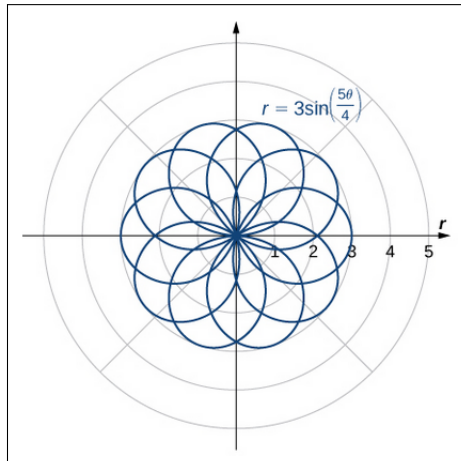
Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

A beleza polar (3): visualize, entenda e aprecie!

Grupo 1

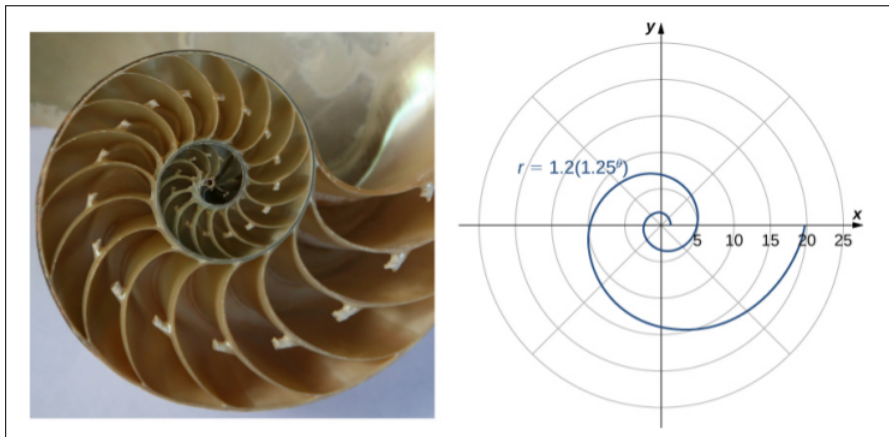


Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 652)

Espiral logarítmica



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 655)

Polar para Retangular

$$x = r \cos(\theta) \quad (7)$$

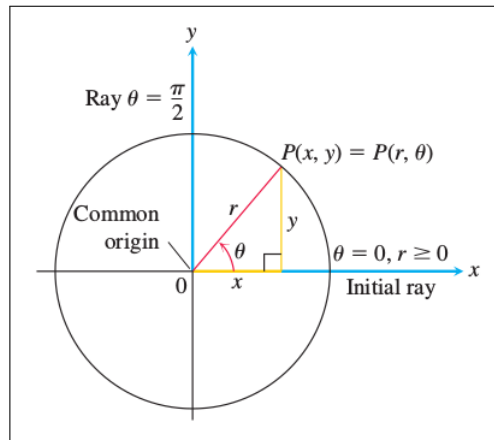
$$y = r \sin(\theta) \quad (8)$$

Retangular para Polar

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (9)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (10)$$

Cuidado para que o sinal de r e a escolha de θ sejam consistentes com o quadrante no qual o ponto (x, y) está.



George Thomas: *Thomas' Calculus: early transcendentals* (14^a ed., 2017, pg. 683)

Polar para Retangular

3–4 Plot the point whose polar coordinates are given. Then find the Cartesian coordinates of the point.

3. (a) $(2, 3\pi/2)$ (b) $(\sqrt{2}, \pi/4)$ (c) $(-1, -\pi/6)$

4. (a) $(4, 4\pi/3)$ (b) $(-2, 3\pi/4)$ (c) $(-3, -\pi/3)$

James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 603)

Retangular para Polar

5–6 The Cartesian coordinates of a point are given.

- (i) Find polar coordinates (r, θ) of the point, where $r > 0$ and $0 \leq \theta < 2\pi$.
- (ii) Find polar coordinates (r, θ) of the point, where $r < 0$ and $0 \leq \theta < 2\pi$.

5. (a) $(-4, 4)$

(b) $(3, 3\sqrt{3})$

6. (a) $(\sqrt{3}, -1)$

(b) $(-6, 0)$

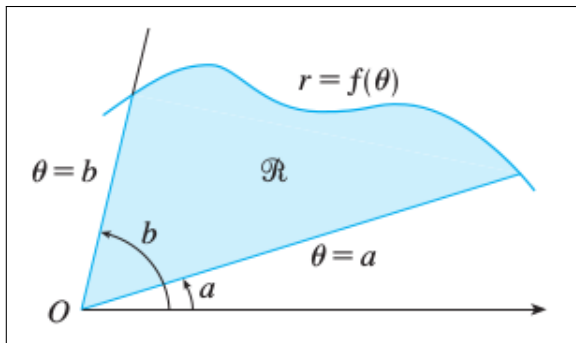
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 603)

- 1 Checagem prévia e revisão rápida
- 2 Onde a coisa complica e qual a solução?
- 3 Sistema de coordenadas polares
- 4 Integrais simples em coordenadas polares**
- 5 Integrais duplas em coordenadas polares

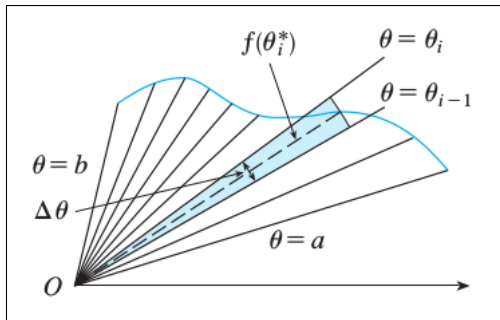
Área em coordenadas polares: como calcular?

Grupo 1

Dada uma equação polar qualquer $r = f(\theta)$, como encontrar a área da região R delimitada pelos ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$?

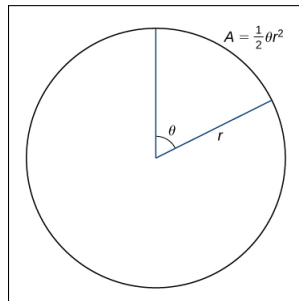


James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)

$$\begin{aligned}\Delta A_i &\approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \\ &\approx \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta\end{aligned}\quad (7)$$



Gilbert Strang & Edwin Herman: *Calculus* (ed. online, 2017, vol. 2, pg. 663)

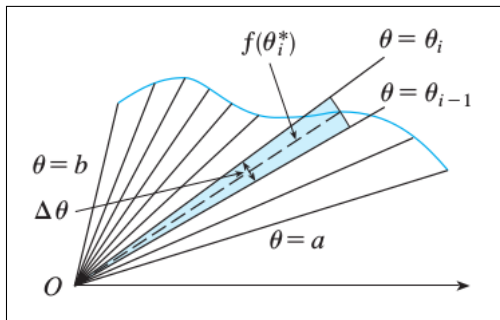
Área é proporcional ao ângulo θ :

$$A = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} \theta r^2 \quad (8)$$

No limite, a integral e a área em coordenadas polares!

Grupo 1

Dada uma equação polar qualquer $r = f(\theta)$, como encontrar a área da região R delimitada pelos ângulos $\theta = a$ e $\theta = b$?



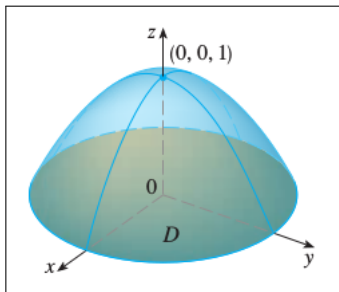
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 606)

$$A \approx \sum_i^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta \end{aligned} \quad (10)$$

- 1 Checagem prévia e revisão rápida
- 2 Onde a coisa complica e qual a solução?
- 3 Sistema de coordenadas polares
- 4 Integrais simples em coordenadas polares
- 5 Integrais duplas em coordenadas polares

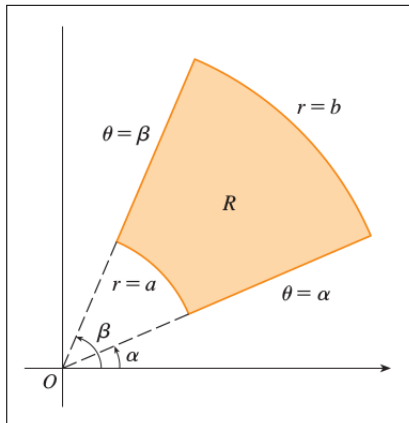
Qual o volume do sólido limitado abaixo pelo plano $z = 0$ e acima pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$?



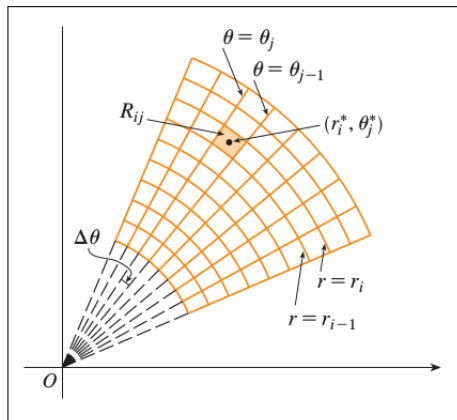
James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 906)

- Mesmo raciocínio: uma integral é a “responsável” pela área do disco, e a outra integral é a “responsável” pelo volume
- A diferença aqui é que os cálculos da área do disco serão feitos com *retângulos polares*!

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$



James Stewart: *Cálculo* (8ª ed., vol. 2, pg. 904)



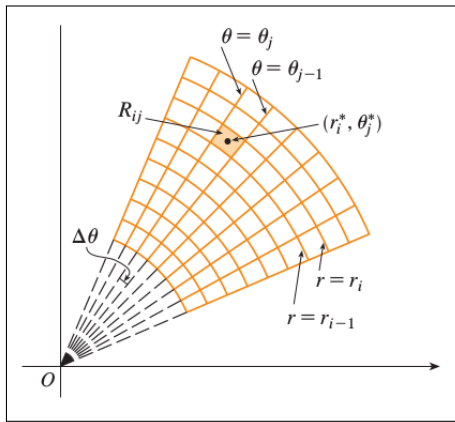
James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 904)

- O intervalo $[a, b]$ é dividido em m intervalos $[r_{i-1}, r_i]$, de larguras $\Delta r = \frac{b-a}{m}$
- O intervalo $[\alpha, \beta]$ é dividido em n intervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, de larguras $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$
- O centro do retângulo é dado por $r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i)$ e $\theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$

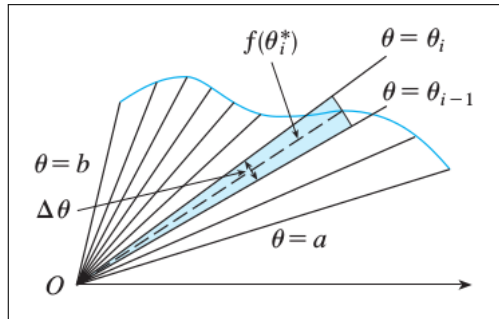
$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \left(\frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta \right) - \left(\frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta \\ &= \dots \\ &= r_i^* \Delta r \Delta\theta\end{aligned}\tag{11}$$

Por que retângulos e não setores?

Grupo 1

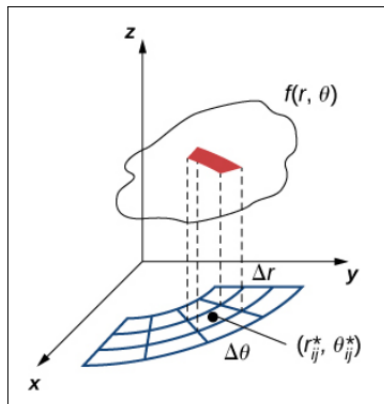


James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 904)



James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 606)

$$V_{R_{ij}} \approx f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)] \Delta A_i$$



Gilbert Strang & Edwin Herman:
Calculus (ed. online, 2017, vol. 3,
 pg. 527)

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)] \Delta A_i \quad (12)$$

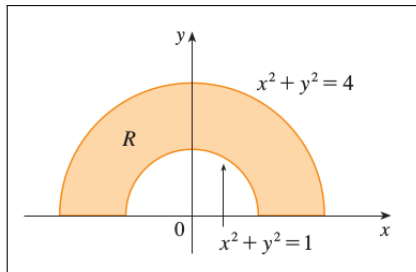
$$\approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)] r_i^* \Delta r \Delta \theta$$

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f[r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)] \Delta A_i$$

$$= \iint_R f[r \cos(\theta), r \sin(\theta)] dA \quad (13)$$

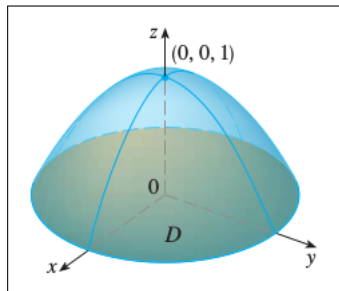
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f[r \cos(\theta), r \sin(\theta)] r dr d\theta$$

- 1) Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) \, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$:



James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 904)

- 2) Calcule (finalmente!) o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$:



James Stewart: *Cálculo*
(8ª ed., vol. 2, pg. 906)

Vá estudar!

- James Stewart: *Cálculo*, 8ª edição, volume 2 (seções 10.3, 10.4, 15.3)
- George F. Simmons: *Calculus with Analytic Geometry*, 2ª edição (seções 16.1, 16.2, 16.3, 20.4)
- George B. Thomas, JR: *Thomas' Calculus: early transcendentals*, 14ª (seções 11.3, 11.4, 11.5, 15.4)
- Gilbert Strang & Edwin “Jed” Herman: *Calculus*, edição online de 2017, volume 2 (seções 7.3, 7.4)
- Gilbert Strang & Edwin “Jed” Herman: *Calculus*, edição online de 2017, volume 3 (seções 1.3, 1.4, 5.3)