

Álgebra Linear I - Aula 7

1. Equação cartesiana do plano.
2. Equação cartesiana da reta.
3. Posições relativas: de duas retas, de uma reta e um plano, de dois planos.

Roteiro

1 Equação cartesiana do plano

A equação cartesiana do plano π é da forma

$$\pi: ax + by + cz = d.$$

O vetor $\bar{n} = (a, b, c)$ é o *vetor normal* do plano.

Propriedade 1.1. *O vetor normal n do plano é ortogonal a qualquer vetor diretor ou paralelo do plano π .*

Prova: De fato, afirmamos que dados dois pontos quaisquer do plano $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ se verifica

$$\bar{n} \cdot \bar{PQ} = 0.$$

Observe que como os pontos pertencem ao plano π ,

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = d, \quad aq_1 + bq_2 + cq_3 = d,$$

e considerando a segunda equação menos a primeira obtemos

$$a(q_1 - p_1) + b(q_2 - p_2) + c(q_3 - p_3) = d - d = 0,$$

mas a última expressão é exatamente o produto escalar $\bar{n} \cdot \bar{PQ}$.

Agora é suficiente observar que qualquer vetor paralelo ao plano π é da forma \overline{PQ} , onde P e Q são pontos do plano. \square

1.1 Equações cartesianas e paramétricas

A seguir veremos as relações entre as equações cartesianas e paramétricas de um plano e como passar de uma equação à outra.

Veremos primeiro como passar de cartesianas e paramétricas. Para isso devemos determinar dois vetores diretores do plano π e um ponto do plano. Para isso é suficiente determinar três pontos do plano: por exemplo, assumindo que a , b e c são não nulos, obtemos três pontos do plano:

$$A = (d/a, 0, 0), \quad B = (0, d/b, 0), \quad C = (0, 0, d/c).$$

Agora já conhecemos um ponto e dois vetores paralelos do plano, dados suficientes para determinar uma equação paramétrica do plano.

Exemplo 1. Calcule a equação paramétrica do plano $x + 2y + z = 1$.

Resposta: Temos que três pontos do plano são: $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, -1)$. Logo dois vetores paralelos ao plano são: $(1, 0, -1)$ e $(1, -1, 1)$. Portanto, uma equação paramétrica é:

$$x = 1 + t + s, \quad y = -s, \quad z = -t + s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Obviamente, há outras (muitas) possibilidades de equações paramétricas. Por exemplo, $(2, -1, 0)$ e $(0, 1, -2)$ são vetores paralelos do plano (pois são ortogonais ao vetor normal) e o ponto $(0, 1, 1)$ pertence ao plano, assim

$$x = 2t, \quad y = -t + s, \quad z = 1 - 2s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

V. pode encontrar outras equações. □

Para passar da equação paramétrica à equação cartesiana há duas possibilidades:

- consideramos dois vetores v e w paralelos ao plano v e w . Obtemos o vetor normal do plano como $n = v \times w$. Como já conhecemos um ponto, a equação cartesiana está determinada.
- O método de eliminação dos parâmetros s e t que ilustramos a seguir com um exemplo.

Exemplo 2 (Eliminação de parâmetros). Dado o plano π de equações paramétricas

$$x = 1 - s, \quad y = 1 - t, \quad z = t - 2s,$$

Calcule sua equação cartesiana.

Resposta: Observe que da equação paramétrica obtemos dois vetores paralelos ao plano $\bar{v} = (-1, 0, -2)$ e $\bar{w} = (0, -1, 1)$ e um ponto dele $P = (1, 1, 0)$.

Obtemos

$$s = 1 - x, \quad t = 1 - y.$$

Substituindo na terceira equação obtemos:

$$2x - y - z = 1.$$

Verifique que $(2, -1, 1)$ é ortogonal aos vetores paralelos do plano $\bar{v} = (-1, 0, -2)$ e $\bar{w} = (0, -1, 1)$.

Usando a equação paramétrica do plano escolha três pontos de π não colineares e verifique que satisfazem a equação cartesiana. \square

Exemplo 3 (Equação cartesiana e produto vetorial). *Determine a equação cartesiana do plano paralelo aos vetores $u = (1, 2, 3)$ e $v = (2, 1, 1)$ que contém o ponto $A = (1, 2, 3)$.*

Resposta: Sabemos que um vetor normal do plano é

$$u \times v = (-1, 5, -3).$$

Logo a equação cartesiana é da forma

$$x - 5y + 3z = d.$$

Determinamos o valor de d pelo ponto $A = (1, 2, 3)$:

$$1 - 10 + 9 = d, \quad d = 0.$$

Assim temos sua equação cartesiana:

$$x - 5y + 3z = 0.$$

Note que isto implica que o plano contém a origem. \square

2 Equação cartesiana da reta

Para obter a *equação da cartesiana da reta* r a escrevemos como interseção de dois planos não paralelos π e ρ , onde os planos estão escritos em equações cartesianas:

$$r: ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d'.$$

Para passar de equações cartesianas a equações paramétricas o mais simples é resolver o sistema e escolhendo uma variável como parâmetro.

Exemplo 4. Calcule a equação paramétrica da reta r de equações cartesianas

$$x - y + z = 0 \quad e \quad 2x - y + 2z = 1.$$

Resposta: Escalonando, obtemos o sistema,

$$x - y + z = 0, \quad y = 1.$$

Logo, $z = 1 - x$. Escolhendo x como parâmetro, a equação de r é,

$$(t, 1, 1 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verifiquemos que o resultado está certo: é suficiente ver que este verifica as equações dos planos. Por exemplo, substituindo no primeiro:

$$t - 1 + (1 - t) = 0.$$

Verifique que o vetor diretor da reta é ortogonal aos vetores normais dos planos. \square

Observação 1. Por construção, o vetor diretor da reta é perpendicular aos dois vetores normais dos planos

$$\pi: ax + by + cz = d, q \quad \rho: a'x + b'y + c'z = d'.$$

Portanto, um vetor diretor da reta é

$$n = (a, b, c) \times (a', b', c').$$

Observação 2. Nem sempre é possível escolher qualquer variável como parâmetro. Por exemplo, no exemplo anterior não é possível escolher y como parâmetro. Veja também que na reta de equações cartesianas $x - y = 2$ e $z = 2$ não é possível escolher z como parâmetro.

Outra forma de calcular a equação paramétrica da reta é determinar dois pontos A e B da reta (isto é, encontrar duas soluções do sistema). Assim temos o vetor diretor \overline{AB} e um ponto A .

3 Posições relativas

3.1 Posição relativa de duas retas

As posições relativas de duas retas $r: P + tv$ e $s: Q + tw$ podem ser:

- *paralelas* (se $v = \sigma w$, $\sigma \in \mathbb{R}$);
 - iguais (se $Q \in r$);
 - disjuntas (se $Q \notin r$);
- *reversas*: as retas não são paralelas e não se interceptam (isto é, v e w não são paralelos e $\overline{PQ} \cdot (v \times w) \neq 0$);
- *concorrentes*: se interceptam em um ponto (se v e w não são paralelos e $\overline{PQ} \cdot (v \times w) = 0$).

Exemplo 5.

- As retas $r: (1 + t, 2t, t)$ e $s: (5 + 2t, 4t, 2t + 2)$ são paralelas e não disjuntas.
- As retas $r: (1 + t, 2t, t)$ e $s: (t, 1, 2t + 2)$ são reversas (escolha $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 2)$ $v = (1, 2, 1)$ e $w = (1, 0, 2)$ e veja que

$$\begin{aligned}\overline{PQ} \cdot (v \times w) &= (-1, 1, 2) \cdot ((1, 2, 1) \times (1, 0, 2)) = \\ &= (-1, 1, 2) \cdot (4, -1, -2) = -4 - 1 - 4 = -9 \neq 0.\end{aligned}$$

3.2 Posição relativa de reta e plano

As posições relativas de uma reta $r: P + tv$ e o plano $\pi: ax + by + cz = d$ podem ser:

- paralelos (se $v \cdot n = 0$, onde $n = (a, b, c)$),
 - r contida em π (se $P \in \pi$)
 - disjuntos (se $P \notin \pi$)
- interseção em um ponto ($n \cdot v \neq 0$).

Exemplo 6. A reta $(1 + t, t, 2t)$ é paralela ao plano $\pi: x + y - z = 1$ e o ponto $(1, 0, 0)$ pertence ao plano, logo a reta está contida no plano. A reta (t, t, t) intercepta π em um ponto (no ponto $(1, 1, 1)$).

3.3 Posição relativa de dois planos

As posições relativas de dois planos

$$\pi: ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad \rho: a'x + b'y + c'z = d'$$

são:

- paralelos (se $n = \sigma n'$, onde $\sigma \neq 0$, $n = (a, b, c)$ e $n' = (a', b', c')$)
 - iguais (se $n = \sigma n'$ e $d = \sigma d'$)
 - disjuntos (se $n = \sigma n'$ e $d \neq \sigma d'$)
- se interceptam ao longo de uma reta (se n e n' não são paralelos).

Exemplo 7. Planos

- paralelos e diferentes: $\pi: x + y + z = 1$ e $\rho: 3x + 3y + 3z = 1$,
- iguais: $\pi: x + y + z = 1$ e $\rho: 3x + 3y + 3z = 3$,
- se interseção ao longo de uma reta: $\pi: x + y + z = 1$ e $\rho: x + 2y + 3z = 1$.