Álgebra Linear e Geometria Analítica

FAESA
Faça acontecer

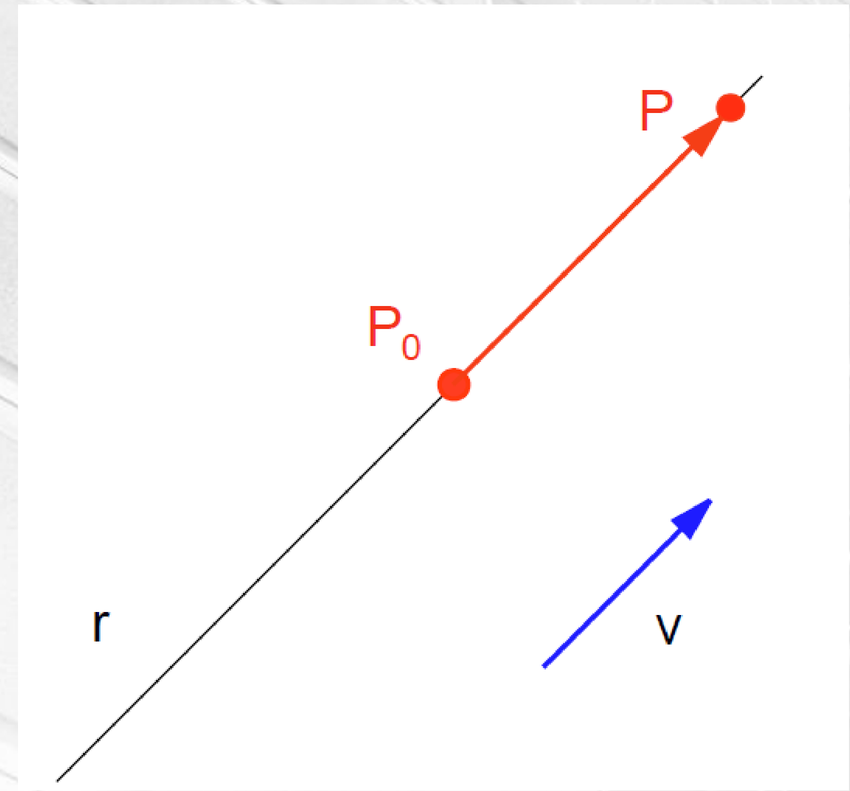
Prof. Me. Rober Marcone Rosi
Unidade de Engenharia, Computação e Sistemas

Unidade 5 – Retas e Planos

- Equações paramétricas e vetor diretor de uma reta;
- Equações paramétricas de uma reta;
- Equações de uma reta na forma simétrica;
- Vetor normal a um plano e equação geral do plano.

Equações paramétricas e vetor diretor de uma reta

Considere o espaço ambiente como o espaço tridimensional. Um vetor $v = (a, b, c)$ *determina uma direção* no espaço. Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$*, existe uma única reta r paralela ao vetor v passando pelo ponto* P_0.



Equações paramétricas e vetor diretor de uma reta

Um ponto *P = (x, y, z) pertence a esta reta se e somente* se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ *é paralelo a v, ou seja, se e somente se* $\overrightarrow{P_0P}$ *é múltiplo escalar de v, isto é,* $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$, para algum escalar *t*ϵ*R.*

Portanto, P pertence a esta reta se e somente se

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc),$$

ou seja, se e somente se

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases}$$

Assim, qualquer ponto *P de coordenadas* *(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) =* $\overrightarrow{OP_0}$ *+ tv pertence à reta dada.*

Esta equação é chamada uma **equação paramétrica da reta *r*** e ***v*** é *chamado um **vetor diretor da reta**.*

Equações paramétricas e vetor diretor de uma reta

FAESA
Faça acontecer

Exercício 1: *Encontre a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto P_0 = (1, 0,-2) e é paralela ao vetor v = (-5, 8, 3).*

$$\begin{cases} x &= 1 - 5t \\ y &= 8t \\ z &= -2 + 3t \end{cases}$$

Exercício 2: *Encontre uma equação paramétrica para a reta que passa pelos pontos P_1 = (1, 3,-2) e P_2 = (4,-5, -2).*

$$\begin{cases} x &= 1 - 3t \\ y &= 3 + 6t \\ z &= -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= 4 - 3t \\ y &= -5 + 6t \\ z &= -2 \end{cases}$$

Equações Simétricas da Reta no Espaço

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases}$$

Podemos resolver em *t, se todas as componentes do vetor v são não nulas, obtendo as equações simétricas* da reta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

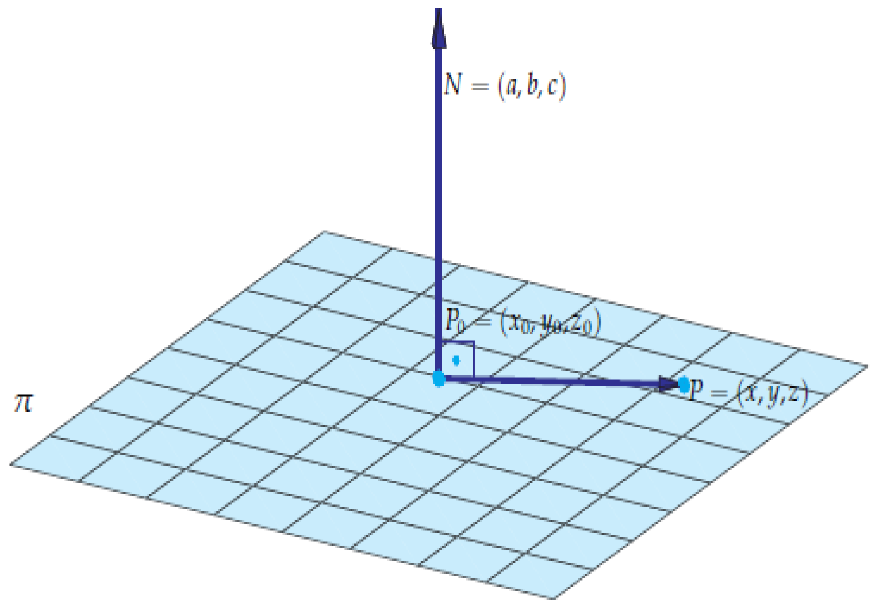
Equações Simétricas da Reta no Espaço

Exercício: *Encontre as equações simétricas da reta que passa pelo ponto P_0 = (1, 0,-2) e é paralela ao vetor v = (-5, 8, 3).*

$$\frac{1-x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z+2}{3}.$$

Equação Geral do Plano

- No espaço, a inclinação de um plano é dada por um vetor perpendicular a ele.
- Um plano no espaço é determinado de forma única por um vetor perpendicular a ele e um de seus pontos.
- Portanto, dado um **vetor normal** *$N = (a, b, c)$* e ***um ponto*** *$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, existe um único plano π perpendicular ao vetor N passando pelo* ponto *P_0*.



Plano perpendicular a $N = (a, b, c)$ e que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Equação Geral do Plano

Proposição 4.1. *A equação geral de um plano π que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor normal $N = (a, b, c)$ é*

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{4.1}$$

em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Demonstração. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor N, ou seja,

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0\,. \tag{4.2}$$

Como, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0\,.$$

Equação Geral do Plano

Exercício: *Encontre uma equação geral para o plano perpendicular ao vetor N = (-1, 4, 3) que passa pelo ponto (5, -2, 7). Encontre uma equação geral para o plano perpendicular a este mesmo vetor, mas que passa pelo ponto (0, 0, 0).*

Resposta. Uma equação geral deste plano terá a forma

$$-x + 4y + 3z + d = 0.$$

O coeficiente d será determinado pelo fato de que o ponto $(5, -2, 7)$ pertence a este plano:

$$-5 + 4(-2) + 3 \cdot 7 + d = 0 \Longrightarrow d = -8.$$

Portanto, uma equação geral para este plano será

$$-x + 4y + 3z - 8 = 0.$$

Uma equação geral para o plano perpendicular a N passando pela origem será

$$-x + 4y + 3z = 0.$$

Equação Geral do Plano

Exercício: *Encontre uma equação geral para o plano π que passa pelos pontos $P_1 = (5, -2, 7)$, $P_2 = (3, 4, -1)$ e $P_3 = (2, 2, 2)$.*

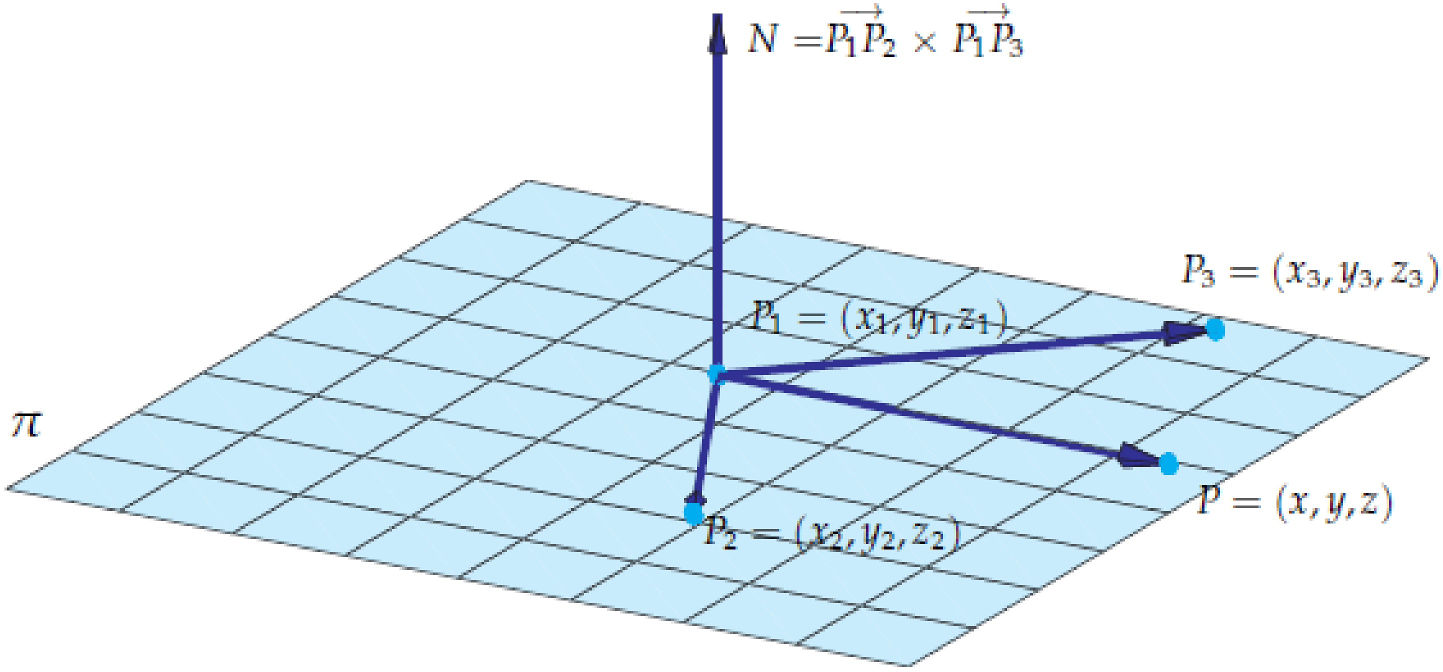


Figura 4.7 – Plano que passa por três pontos

Equação Geral do Plano

Exercício: *Encontre uma equação geral para o plano π que passa pelos pontos P_1 = (5, -2, 7), P_2 =(3, 4, -1) e P_3 = (2, 2, 2).*

Resposta. Primeiro precisamos encontrar um vetor perpendicular a este plano. Como os segmentos orientados $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, por exemplo, pertencem a este plano, seu produto vetorial $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ será perpendicular ao plano:

$$N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi.$$

Podemos então obter uma equação geral para o plano usando este vetor N e qualquer um dos pontos P_1, P_2 ou P_3, da mesma maneira que fizemos no exemplo anterior.

Outra maneira de se obter uma equação geral para o plano π é notar que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π que contém os pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ se e somente se os vetores $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são coplanares.

Solução: *x + 7y + 5z - 26 = 0*