Álgebra Linear I - Aula 18

1. Matriz de uma transformação linear em uma base. Exemplo e motivação
2. Matriz de uma transformação linear T na base β

1 Matriz de uma transformação linear em uma base. Exemplo e motivação

Considere a a transformação linear T projeção no plano $\pi\colon x - y + z = 0$ na direção paralela a $(1, 1, 1)$. Temos que para qualquer vetor v do plano π se verifica $T(v) = v$ e que $T(1, 1, 1) = \bar{0}$. Portanto,

1. $T(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$;
2. $T(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$;
3. $T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$.

De (1) e (2) obtemos

$$T(0, 0, 1) = T(1, 1, 1) - T(1, 0, 0) = (-1, -1, 0).$$

Assim,

$$T(0, 1, 1) = T(0, 1, 0) + T(0, 0, 1) = (0, 1, 1),$$

e portanto,

$$T(0, 1, 0) = (0, 1, 1) - (-1, -1, 0) = (1, 2, 1).$$

Finalmente,

$$T(1, 1, 0) = T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) = (1, 1, 0),$$

logo

$$T(1, 0, 0) = (1, 1, 0) - T(0, 1, 0) = (1, 1, 0) - (1, 2, 1) = (0, -1, -1).$$

Portanto, a matriz de T (na base canônica) é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

é uma base de autovetores de T.

Usando os argumentos da seção anterior, veremos que a matriz T é semelhante à seguinte matriz muito simples:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que três autovetores linearmente independentes de D são $(1,0,0)$ (associado a 0) e $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ (associados a 1). Veja também que as matrizes T e D têm o mesmo traço, o mesmo determinante e o mesmo polinômio característico.

Como nos exemplos anteriores, consideraremos a transformação linear que leva os autovetores de T nos autovetores de D (preservando os autovalores), ou seja consideramos a transformação linear S que verifica

$$S(1,1,1) = (1,0,0), \quad S(1,1,0) = (0,1,0), \quad S(0,1,1) = (0,0,1).$$

A matriz de S é

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Devemos verificar que

$$T = S^{-1}\, D\, S.$$

Ou de forma equivalente (e assim evitamos ter que calcular a matriz inversa de S, embora determinar a inversa de S seja imediato...), multiplicando à esquerda por S, a

$$S\, T = D\, S,$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
ST &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0+1-1 & 1-2+1 & -1+1+0 \\ 0-1+1 & 0+2-1 & 0-1+0 \\ 0-1+0 & -1+2+0 & 1-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
DS &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Como queremos ver.

Observação 1. *De fato, veremos que D é a* matriz de T na base β. *Isto significa que, usando as coordenadas apropriadas (ou seja escolhendo uma base apropriada), a expressão de T é muito simples. Nosso objetivo é, dada uma transformação linear, encontrar coordenadas (ou seja, uma base) onde a forma de T seja o mais simples possível. No exemplo anterior, dizemos que D é uma* forma diagonal *de T.*

2 Matriz de uma transformação linear T na base β

Para fixar idéias, consideremos transformações lineares

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Considere uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Suponha que

$$
\begin{aligned}
T(v_1) &= a_{1,1}\, v_1 + a_{2,1}\, v_2 + a_{3,1}\, v_3 \\
T(v_2) &= a_{1,2}\, v_1 + a_{2,2}\, v_2 + a_{3,2}\, v_3 \\
T(v_3) &= a_{1,3}\, v_1 + a_{2,3}\, v_2 + a_{3,3}\, v_3.
\end{aligned}
$$

Então, a matriz de T na base β, denotada por $[T]_\beta$, é

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Observe que estamos repetindo o já feito na hora de calcular a matriz de uma transformação linear (na base canônica). Vejamos isto com atenção.

A afirmação acima significa o seguinte, se temos um vetor w com coordenadas (a, b, c) na base β, escreveremos $(w)_\beta = (a, b, c)$, isto é,

$$w = a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3.$$

Portanto, como T é linear,

$$T(w) = T(a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3) = a\, T(v_1) + b\, T(v_2) + c\, T(v_3).$$

Substituindo os valores de $T(v_1)$, $T(v_2)$ e $T(v_3)$, obtemos,

$$\begin{aligned} T(w) \quad &= a\,(a_{1,1}\, v_1 + a_{2,1}\, v_2 + a_{3,1}\, v_3) + b\,(a_{1,2}\, v_1 + a_{2,2}\, v_2 + a_{3,2}\, v_3) \\ &+ c\,(a_{1,3}\, v_1 + a_{2,3}\, v_2 + a_{3,3}\, v_3). \end{aligned}$$

Finalmente, agrupando os coeficientes que multiplicam aos vetores v_1, v_2 e v_3 da base, obtemos

$$\begin{aligned} T(w) \quad &= (a_{1,1}\, a + a_{1,2}\, b + a_{1,3}\, c)\, v_1 + (a_{2,1}\, a + a_{2,2}\, b + a_{2,3}\, c)\, v_2 + \\ &+ (a_{3,1}\, a + a_{3,2}\, b + a_{3,3}\, c)\, v_3. \end{aligned}$$

Isto significa que

$$(T(w))_\beta = (a_{1,1}\, a + a_{1,2}\, b + a_{1,3}\, c, a_{2,1}\, a + a_{2,2}\, b + a_{2,3}\, c, a_{3,1}\, a + a_{3,2}\, b + a_{3,3}\, c),$$

Por outra parte, se aplicamos a matriz às coordenadas do vetor w na base β obtemos as coordenadas de $T(w)$ na base β,

$$(T(w))_\beta = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\, a + a_{1,2}\, b + a_{1,3}\, c \\ a_{2,1}\, a + a_{2,2}\, b + a_{2,3}\, c \\ a_{3,1}\, a + a_{3,2}\, b + a_{3,3}\, c \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$(T(w))_\beta = (a_{1,1}\, a + a_{1,2}\, b + a_{1,3}\, c, a_{2,1}\, a + a_{2,2}\, b + a_{2,3}\, c, a_{3,1}\, a + a_{3,2}\, b + a_{3,3}\, c).$$

E obtemos o mesmo resultado.

Exemplos 1. *Encontre uma base γ tal que as matrizes na base γ projeção ortogonal P no plano $x + y + z = 0$ e o espelhamento E no mesmo plano sejam da forma*

$$[P]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [E]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prova: Observe que

$$\beta = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (1,0,-1)\}$$

é uma base de autovetores de P e de E, simultaneamente. Obviamente,

$$(v_1)_\beta = (1,0,0)_\beta, \quad (v_2)_\beta = (0,1,0)_\beta, \quad (v_3)_\beta = (0,0,1)_\beta.$$

Observe que

$$\begin{array}{l} P(v_1) = \bar{0}, \quad (P(v_1))_\beta = (0,0,0)_\beta, \\ P(v_2) = v_2, \quad (P(v_2))_\beta = (0,1,0)_\beta, \\ P(v_3) = v_3, \quad (P(v_3))_\beta = (0,0,1)_\beta. \end{array}$$

Logo

$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para o espelhamento,

$$\begin{array}{l} E(v_1) = -v_1, \quad (E(v_1))_\beta = (-1,0,0)_\beta, \\ E(v_2) = v_2, \quad (E(v_2))_\beta = (0,1,0)_\beta, \\ E(v_3) = v_3, \quad (E(v_3))_\beta = (0,0,1)_\beta. \end{array}$$

Logo

$$[E]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Observe que se nos exemplos anteriores mudamos a ordem dos vetores das bases obtemos bases distintas e as matrizes mudam. Por exemplo, se consideramos a base

$$\beta' = \{v_2 = (1,-1,0), v_3 = (1,0,-1), v_1 = (1,1,1)\}$$

temos

$$[P]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [E]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deixamos como exercício, para v. determinar as matrizes de P e E nas bases

$$\begin{aligned} \gamma &= \{v_2 = (1,-1,0), v_1 = (1,1,1), v_3 = (1,0,-1)\} \\ \rho &= \{v_1 = (1,1,1), v_3 = (1,0,-1), v_2 = (1,-1,0)\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1. *Considere a transformação linear T cuja matriz na base canônica é*

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Encontre bases β e γ tais que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad [T]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prova: Como a matriz é triangular seus autovalores são os elementos da diagonal. Como todos autovalores são diferentes a matriz é diagonalizável. Determinaremos os autovetores.

Os autovetores $v = (x,y,z)$ associados a 1 verificam,

$$[T - I](v) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução é $(t,0,0)$, $t \neq 0$.

Os autovetores $v = (x,y,z)$ associados a 2 verificam,

$$[T - 2I](v) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução é $(2t,t,0)$, $t \neq 0$.

Os autovetores $v = (x,y,z)$ associados a 3 verificam,

$$[T - 3I](v) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução é $(9t, 6t, 2t)$, $t \neq 0$.

Uma base de autovetores de T é

$$\kappa = \{(1,0,0), (2,1,0), (9,6,2)\}$$

Observe que

$$[T]_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Agora v. mesmo pode concluir que

$$\begin{array}{ll} \beta & = \{(1,0,0), (9,6,2), (2,1,0)\} \\ \gamma & = \{(2,1,0), (9,6,2), (1,0,0)\}. \end{array}.$$

$\square$

Exemplo 2. *Considere a transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$T(v) = v \times (1,1,1).$$

Determine a matriz de T *nas seguintes bases:*

1. $\beta = \{(1,1,1), (1,0,-1), (1,-2,1)\}$,
2. $\gamma = \{(1,1,1), (1,0,-1), (1,-1,0)\}$,

Resposta: Observe que

$$T(1,1,1) = \bar{0}, \quad T(1,0,-1) = (1,-2,1), \quad T(1,-2,1) = (-3,0,3).$$

Portanto,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escreva,

$$(1,-2,1) = a(1,1,1) + b(1,0,-1) + c(1,-1,0),$$

e veja que $a = 0$, $b = -1$ e $c = 2$.

Veja também que

$$T(1,-1,0) = (-1,-1,2),$$

e escreva

$$(-1,-1,2) = a(1,1,1) + b(1,0,-1) + c(1,-1,0),$$

onde $a = 0$, $b = -2$ e $c = 1$. Portanto,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$