Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

CONCEITO DA DERIVADA

---

*Se uma função $f(x)$, qualquer, é definida num intervalo $a \leq x \leq a+h$, com $h \neq 0$, então a **T**axa de **V**ariação **M**édia (**TVM**) da $f(x)$, nesse intervalo, pode ser calculada a partir da formulação abaixo:*

$$\underset{a \leq x \leq a+h}{T.V.M.} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

---

1. Determine a *Taxa de Variação Média (TVM)* para as funções e intervalos indicados abaixo:

a) $f(x) = x + 121$, definida em [0, 10];

b) $f(x) = 2x^2 + 3x$, definida em [2, 5];

c) $f(x) = x^3 - 65$, definida para $1 \leq x \leq 6$;

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

---

*Se uma função $f(x)$, qualquer, é definida num intervalo $a \leq x \leq a+h$, com $h \neq 0$, então a **T**axa de **V**ariação **I**nstantânea (**TVI**) da $f(x)$, em $x = a$, será dada por:*

$$f'(a) = \underset{x=a}{T.V.I.} = \lim_{h \to 0} \underset{a \leq x \leq a+h}{T.V.M.}$$ *e como* $$\underset{a \leq x \leq a+h}{T.V.M.} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$*, logo,*

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

desde que o limite exista.

---

2. Calcule a taxa de variação instantânea da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ no ponto x = 2. Qual o seu significado gráfico? ($Calcule\ \ limite\ \ al$gebricamente ou use $h = \pm 0{,}1;\ h = \pm 0{,}01\ e\ h = \pm 0{,}001\ para\ o\ cálculo\ dos\ limites\ laterais$)

3. O custo de uma empresa, para a fabricação de uma quantidade ‘q’, em toneladas, de determinado produto, pode ser calculado a partir da formulação $C(q) = 4q + 1500$, em milhares de reais. Diante do fato, determine a taxa de variação instantânea do custo para uma quantidade $q = 5$ toneladas. Qual a unidade de medida da TVI? Qual o seu significado numérico e gráfico? ($Calcule\ \ limite\ \ al$gebricamente ou use $h = \pm 0{,}1;\ h = \pm 0{,}01\ e\ h = \pm 0{,}001\ para\ o\ cálculo\ dos\ limites\ laterais$)

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

Como achar a Tangente à Curva

1. Calcule $f(x_0)$ e $f(x_0+h)$;

2. Calcule o coeficiente angular: $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$;

3. Se o limite existe, então determine a reta tangente quando: $y = y_0 + m(x - x_0)$;

Exemplo 1: Determine a equação da reta tangente à curva $f(x) = x^2 + 2x + 1$ em $x_0 = 5$.

Solução:

1. Cálculo de $f(x_0)$ e de $f(x_0+h)$;

   $f(5) = 5^2 + 2\cdot 5 + 1 = 36$

   $f(5+h) = (5+h)^2 + 2\cdot(5+h) + 1 = 25 + 10h + h^2 + 10 + 2h + 1 = h^2 + 12h + 36$

2. Cálculo do coeficiente angular 'm':

   $$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+12h+36)-(36)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+12h}{h} = \lim_{h\to 0} h + 12 = 0 + 12 = 12$$

3. Como o limite existe, então a reta tangente pode ser determinada:

   $y = y_0 + m(x - x_0)$, $m = 12$ e $(x_0, y_0) = (5, 36)$, então

   $y = 36 + 12(x-5) \;\Rightarrow\; y = 36 + 12x - 60 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = 12x - 24}$

4. Na comercialização de um componente químico líquido, utilizado na fabricação de aromatizantes e perfumes, a receita $'R'$ para a venda da quantidade $'q'$ é dada por R$(q) = 8q^2$, onde a receita é dada em reais (R$) e a quantidade é dada em litros (l).

   a) Determine a taxa de variação média da receita para o intervalo $0 \le q \le 10$. Qual a unidade de medida da TVM? Qual é o seu significado numérico e gráfico?

   b) Estime, numericamente, a taxa de variação instantânea da receita para $q = 5$. (use $h = \pm 0{,}1;\ h = \pm 0{,}01\ e\ h = \pm 0{,}001\ para\ o\ cálculo\ dos\ limites\ laterais$)

c) Qual é a relação da taxa de variação instantânea da receita em $q = 5$ com a derivada em $q = 5$, ou seja, $R'(5)$? Qual a unidade de medida dessa derivada? Qual é o significado numérico e gráfico dessa derivada?

d) Determine a equação da reta tangente à curva para $q = 5$. Faça o gráfico da função e represente a reta tangente no mesmo.

e) Encontre, algebricamente, a função derivada de R em relação a q, ou seja, $R'(q)$. A partir dessa função derivada determine $R'(5)$.

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

Definição: Função Derivada

*A **derivada** de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Exemplo 2 (*Aplicando a definição*)**:** Encontre a derivada de $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

Solução:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Rascunho:

$f(x) = \sqrt{x}$;

$f(x+h) = \sqrt{x+h}$;

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Multiplique por $\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

$$= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

5. Mostre, usando limite, que a derivada de $f(x) = 2$ é $f'(x) = 0$.

6. Mostre, usando limite, que a derivada de $g(x) = 2x + 4$ é $g'(x) = 2$.

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

Há várias maneiras de representar a derivada de uma função $y = f(x)$:

Notação	Leia		Autor
y'	y linha	Apropriada e breve, mas não fornece a variável independente;	Newton
$\frac{dy}{dx}$	dy dx ou (derivada de y em relação a x)	Fornece as variáveis e usa d para a derivada;	Leibniz
$\frac{df}{dx}$	df dx ou (derivada de f em relação a x)	Dá ênfase ao nome da função;	
$\frac{d}{dx}\,f(x)$	d dx de f(x) ou (derivada de f em relação a x)	Dá ênfase à idéia de que derivar é uma operação realizada em f.	

TÉCNICAS DE DERIVAÇÃO

1. Derivada de uma Função Constante

*Se **f** tem o valor constante $\boldsymbol{f(x) = c}$, então*

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\,(c) = 0, \textit{ ou seja, } f'(x) = 0$$

Exemplo 3: Se f tem o valor constante $\boldsymbol{f(x) = 7}$, então

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\,(7) = 0, \text{ ou seja, } f'(x) = 0$$

Solução:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{7-7}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

7. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = 67$

b) $g(x) = -145$

c) $u(x) = -1x^0$

d) $v(x) = 5x^0$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

---

2. Derivada de uma Função Potência de Expoente Inteiro Positivo

*Se **n** for um positivo inteiro, $\boldsymbol{f(x) = x^n}$, então*

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}, \text{ ou seja, } f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Exemplo 4: Seja $f(x)$ uma função potência, então sua derivada $f'(x)$ é

f	x	x^2	x^3	x^4	...
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	...

Para aplicar a regra da potenciação, subtraímos 1 do expoente original (n) e multiplicamos o resultado por n.

8. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = x^7$

b) $g(x) = -9x^8$

c) $u(x) = -6x^1$

d) $v(x) = 3x^2$

---

3. Derivada de uma Função multiplicada por uma Constante

*Se **f** é uma função derivável de **x** e **c** é uma constante, então*

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \cdot \frac{df}{dx}, \text{ ou seja, } (c.f)' = c \cdot f'$$

Exemplo 5: Seja a função $f(x) = x^2$ e a constante $c = 3$. Determine a derivada de $c \cdot f(x)$.

Solução: $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot \frac{dx^2}{dx} = 3 \cdot (2x) = 6x$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

9. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = 6x^3$

b) $g(x) = -2x^4$

c) $u(x) = -1x^1$

d) $v(x) = 5x^8$

---

4. Derivada de uma Soma de Funções

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são funções deriváveis de $\boldsymbol{x}$, então a soma das duas $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ é derivável em qualquer ponto onde ambas são deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \text{ ou seja, } (u + v)' = u' + v'$$

Observação: *tal regra se aplica a somas finitas com mais de duas funções.*

Exemplo 6: Sejam as funções $u(x) = x^4$ e $v(x) = 12x$. Determine a derivada da função soma $(u + v)(x) = x^4 + 12x$.

Solução: $$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{d(x^4 + 12x)}{dx} = \frac{d\,x^4}{dx} + \frac{d\,12x}{dx} = 4x^3 + 12$$

10. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $(f + g)(x) = (2x^2) + (x + 1)$

b) $(h + r)(x) = (x^4 + 2x^3) + (5x^2)$

c) $(u + v)(x) = \left(\sqrt{11}x^5\right) + (\pi x)$

d) $(p + t)(x) = \left(\frac{1}{8}x^4\right) + \left(\frac{5}{6}x^3\right)$

Da Regra da Soma e da Multiplicação por constante, obtém-se a Regra da Diferença:

---

5. Derivada de uma Diferença de Funções

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são funções deriváveis de $\boldsymbol{x}$, então a diferença das duas $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ é derivável em qualquer ponto onde ambas são deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=\frac{d}{dx}[\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{1})\boldsymbol{v}]=\frac{du}{dx}+(-\boldsymbol{1})\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}, \text{ ou seja, } (u-v)'=u'-v'$$

Exemplo 7: Sejam as funções $u(x)=x^4$ e $v(x)=12x$, então a derivada da função soma $(u-v)(x)=x^4-12x$ é

Solução: $$\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{d(x^4-12x)}{dx}=\frac{d\,x^4}{dx}-\frac{d\,12x}{dx}=4x^3-12$$

11. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $(f-g)(x)=(x^4-3x^3)-\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $(h-r)(x)=(2x^4)-(8x^3)$

c) $(u-v)(x)=(5x^6)-\left(\frac{2}{3}x^3\right)$

d) $(p-t)(x)=(ex^4)-(\pi x^2)$

Exemplo 8 (Derivada de um polinômio)**:** Seja o polinômio $y=x^3+\frac{4}{3}x^2-5x+1$. Determine $\frac{dy}{dx}$.

Solução:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3+\frac{4}{3}x^2-5x+1\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right)-\frac{d}{dx}(5x)+\frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+\frac{4}{3}\cdot 2x-5+0$$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+\frac{8}{3}x-5$$

12. Calcule a derivada das funções polinomiais abaixo:

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - \frac{1}{5}x + 8$

b) $g(x) = -5x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 86$

c) $u(x) = 14x^2 - \frac{5}{6}x + 75$

d) $v(x) = 7x + 12$

---

6. Derivada de um Produto de Funções

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são funções deriváveis de $\boldsymbol{x}$, então o produto $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ também é e,

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \text{ ou seja, } (u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

Exemplo 9: Sejam as funções $u(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. Determine a derivada do produto de u por v.

Solução:

$)u = \frac{1}{x}$ e $v = x^2 + \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] = 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\right] = 1 - \frac{2}{x^3}$$

13. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $(f \cdot g)(x) = (3x^2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{12}x + \pi\right)$

b) $g(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^3 + x)$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

---

7. Derivada de um Quociente de Funções

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são funções deriváveis de $\boldsymbol{x}$ e se $v(x) \neq 0$, então o quociente $\boldsymbol{u}/\boldsymbol{v}$ também é e,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \text{ ou seja, } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Exemplo 10: Sejam as funções $u(x) = x^2 - 1$ e $v(x) = x^2 + 1$. Determine a derivada do produto de u por v.

Solução:

$u = x^2 - 1$ e $v = x^2 + 1$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}\left((x^2-1)\right) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{(x^2+1)\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

14. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $(f \div g)(x) = (5x^2 - x) \div (x^3 - 1)$

b) $(u \div v)(x) = \frac{1}{x} \div (x^2 + 2)$

c) $m(x) = \frac{20x+3}{x+10}$

d) $n(x) = \frac{x+1}{x^3}$

---

8. Derivada de uma Função Potência de Expoente Inteiro Negativo

Se $\boldsymbol{n}$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x^n) = n \cdot x^{n-1}, \text{ ou seja, } f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Exemplo 11: Sejam as funções $f(x) = \frac{4}{x^3}$. Determine $f'(x)$.

Solução: $f(x) = \frac{4}{x^3}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{4}{x^3}\right] = \frac{d}{dx}\,4x^{-3} = 4\frac{d}{dx}\,x^{-3} = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

15. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = -\frac{1}{5}x^{-5}$

b) $g(x) = -5x^{-4} - \frac{1}{3x} + \frac{3}{x^{-2}}$

c) $h(x) = x^{-1}$

d) $y = \frac{1}{x^2}$

---

9. Derivada da Função Exponencial numa base 'a' qualquer ($0 < a \neq 1$): $\boldsymbol{y = a^x}$

*Se **f** é uma função derivável de **x**, onde **a** é um nº real tal que $0 < a \neq 1$, então*

$$\frac{d}{dx}\,f = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a, \text{ ou seja, } y' = a^x \cdot \ln a$$

Exemplo 12: Determine a derivada da função $f(x) = 2^x$.

Solução: $\frac{d}{dx}\,(2^x) = 2^x \cdot \ln 2$

16. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = 10.000 \cdot 1{,}05^x$

b) $g(x) = 5^x$

c) $u(x) = -8^x$

d) $v(x) = 2{,}034^x$

---

10. Derivada da Função Exponencial na base 'e': $y = e^x$

*Se **f** é uma função derivável de **x**, onde **e** $\cong 2{,}71828$ é considerada a base, então*

$$\frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \cdot \ln e = e^x, \text{ ou seja, } y' = e^x$$

Exemplo 13: Determine a derivada da função $f(x) = 2e^x$.

Solução: $\frac{d}{dx}(2e^x) = 2 \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = 2e^x$

17. Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $f(x) = 5 \cdot e^x$

b) $g(x) = -2e^x + x^e + 3e$

c) $u(x) = 5e^x + x^{5e} + \sqrt{5e}$

d) $v(x) = e^{12}$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

---

11. Derivada da Função Logaritmo Natural: $\boldsymbol{y = \ln x}$

*Se **f** é uma função derivável de **x**, onde* $x > 0$ *, então*

$$\frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \text{ ou seja, } y' = \frac{1}{x}$$

Exemplo 14: Determine a derivada da função $f(x) = 5 \ln x\,,\ x > 0$.

Solução: $$\frac{d}{dx}(5 \ln x) = 5 \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

18. Calcule a derivada das funções abaixo, considerando $x > 0$:

a) $f(x) = 3 \ln x$

b) $g(x) = (x + 1) \cdot \ln x$

c) $u(x) = \frac{\ln x}{4}$

d) $v(x) = \frac{\ln x}{x}$

---

12. Derivada da Função Seno: $\boldsymbol{y = sen\ x}$

A derivada da função seno é a função cosseno.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sen\ x) = \cos x, \text{ ou seja, } y' = \cos x$$

Exemplo 15: Determine a derivada da função $f(x) = x^2 - sen\ x$.

Solução: $$\frac{d}{dx}(x^2 - sen\ x) = \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(sen\ x) = 2x - \cos x$$

19. Calcule a derivada da função $y = \frac{sen\ x}{x}$, onde $x > 0$.

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

13. Derivada da Função Cosseno: $\boldsymbol{y = cos\ x}$

A derivada da função cosseno é a oposta da função seno.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cos\ x)\ = -\mathrm{sen}\, x \text{, ou seja, } y' = -\mathrm{sen}\, x$$

Derivadas de outras funções trigonométricas básicas

Como $sen\, x$ *e* $\cos x$ *são funções deriváveis de x, as funções relacionadas*

$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$; $cotg\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}$; $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $cosec\ x = \frac{1}{sen\ x}$;

são deriváveis para qualquer valor de x nos quais elas são definidas.

14. Derivada da Função Tangente: $\boldsymbol{y = tg\ x}$

A derivada da função tangente é a função secante ao quadrado.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(tg\ x)\ = \sec^2 x \text{, ou seja, } y' = \sec^2 x$$

15. Derivada da Função Secante: $\boldsymbol{y = sec\ x}$

A derivada da função secante é o produto das funções secante e tangente.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sec\ x)\ = \sec x \cdot tg\ x \text{, ou seja, } y' = sec\, x \cdot tg\ x$$

16. Derivada da Função Cotangente: $\boldsymbol{y = cotg\ x}$

A derivada da função cotangente é a oposta da função cossecante ao quadrado.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cotg\ x)\ = -\mathrm{cosec}^2\, x \text{, ou seja, } y' = -\mathrm{cosec}^2\, x$$

17. Derivada da Função Cosecante: $\boldsymbol{y = cosec\ x}$

A derivada da função cosecante é a oposta do produto das funções cosecante x cotangente.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cosec\ x)\ = -\mathrm{cosec}\, x \cdot cotg\ x \text{, ou seja, } y' = -\mathrm{cosec}\, x \cdot cotg\ x$$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

20. Determine as derivadas das funções trigonométricas abaixo:

a) $y = -10x + 3\cos x$

b) $y = \frac{3}{x} + 5\,\text{sen}\,x$

c) $y = \text{cosec}\,x - 4\sqrt{x} + 7$

d) $y = tg\ x - x$

e) $y = x^2 - \sec x + 1$

f) $y = \text{cotg}\,x - \frac{1}{x^2}$

g) $y = x^2 \cdot cotg\ x$

h) $y = (sen\ x + \cos x) \cdot \sec x$

i) $y = \frac{\cos x}{1 + sen\ x}$

j) $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{cos\ x}$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

---

18. Regra da Cadeia *(Derivada de uma função composta)*

Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x, então a função composta $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ é derivável em x e

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$

Na notação de Leibniz: Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}} \cdot \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$, onde dy/du é calculada em $u = g(x)$.

Exemplo 16: Um objeto se desloca ao longo do eixo x de modo que em qualquer instante $t \geq 0$ sua posição seja dada pela equação $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determine a velocidade do objeto em função de t.

Solução: Sabemos que a velocidade é dx/dt. Neste exemplo, x é uma função composta, ou seja,

$\boldsymbol{x} = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{u}$ *e sua derivada em relação a u é:* $\frac{dx}{du} = -sen(u)$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$ *e sua derivada em relação a t é:* $\frac{du}{dt} = 2t$

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -sen\,u \cdot 2t \\ &= -sen\,(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t sen\,(t^2 + 1) \end{aligned}$$

Regra do Externo-Interno: É mais fácil notar a Regra da Cadeia para $y = f\big(g(x)\big)$, a partir da notação:

$$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{f}'\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$

Ou seja, derive a *função 'externa'* f, calcule-a na função interna $g(x)$ isolada, multiplicando-a em seguida pela derivada da *função 'interna'.*

Exemplo 17 (Derivando de Fora para Dentro): Derive $sen\,(x^2 + x)$ em relação a x.

Solução:

$$\frac{d}{dx} sen\left(\underbrace{x^2 + x}_{dentro}\right) = \cos\left(\underbrace{x^2 + x}_{\substack{dentro \\ como\ está}}\right) \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\substack{derivada \\ da\ de\ dentro}}$$

---

19. Regra da Cadeia para Potências

Se f é derivável de u e u é uma função derivável de x, então ao substituir $y = f(u)$ na fórmula da Regra da Cadeia $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ obtém-se $\frac{d}{dx}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}) \cdot \frac{du}{dx}$. Assim, se $f(u) = u^n$ e n é um inteiro, então

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Exemplo 18 (Regra da Cadeia para Potências): Derive $y = (1-2x)^3$ em relação a x.

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(1-2x)^3 &= 3\cdot\ (1-2x)^{3-1}\cdot\frac{d}{dx}(1-2x)\\
\frac{d}{dx}(1-2x)^3 &= 3\cdot\ (1-2x)^2\cdot 2\\
\frac{d}{dx}(1-2x)^3 &= 6\cdot\ (1-4x+4x^2)\\
\frac{d}{dx}(1-2x)^3 &= 24x^2-24x+6
\end{aligned}$$

Exemplo 19 (Regra da Cadeia para Potências): Derive $y = sen^4\, x$ em relação a x.

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}sen^4\, x &= 4\cdot\ sen^{4-1}\, x\cdot\frac{d}{dx}(sen\, x)\\
\frac{d}{dx}sen^4\, x &= 4\cdot\ sen^3\, x\cdot\cos x
\end{aligned}$$

21. Determine as derivadas das funções abaixo utilizando a regra da cadeia:

a) $y = 2^{x^3}$

b) $y = \frac{1}{5+10x}$

c) $y = e^{5x}$

d) $y = (5x^2+2x)^4$

e) $y = (4-3x)^9$

f) $y = \sec\,(tg\, x)$

g) $y = sen^3\, x$

h) $y = cotg\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$

Função na Forma Implícita: Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$ se, ao substituirmos y por $f(x)$ em $F(x, y) = 0$, esta equação se transforma numa identidade.

Por exemplo, a equação $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ define implicitamente a função $y = 2(1 - x^2)$. Para nos certificar desse fato basta substituir o y da equação por seu equivalente $2(1 - x^2)$ e verificar se essa equação se transforma numa identidade. Ou seja,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\mathbf{2}}(\mathbf{1} - \boldsymbol{x^2}) - 1 &= 0 \\ \cancel{x^2} + (\mathbf{1} - \cancel{\boldsymbol{x^2}}) - 1 &= 0 \\ \cancel{\mathbf{1}} - \cancel{1} &= 0 \\ 0 &= 0 \textit{ (Identidade)} \end{aligned}$$

Derivação Implícita (*Quatro passos*):

i. Derive os dois lados da equação em relação a x, considerando y como uma função derivável;
ii. Reúna os termos que contêm dy/dx em um lado da equação;
iii. Fatore isolando dy/dx;
iv. Encontre dy/dx.

Exemplo 20: Derive implicitamente a função $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ em relação a x, ou seja, obtenha $\frac{dy}{dx}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) &= 0 \\ 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx} - 0 &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dx} &= -2x \\ \boldsymbol{\frac{dy}{dx}} &= \boldsymbol{-4x} \end{aligned}$$

Exemplo 21: Derive implicitamente a função $x^2y^2 + x \cdot sen\, y = 0$ em relação a x, ou seja, obtenha $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Lembrando que $y = f(x)$ e derivando em relação a x com o auxílio da regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2y^2) + \frac{d}{dx}(x \cdot sen\, y) &= 0 \\ \left(2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx}\right) + \left(sen\, y + x \cdot \cos y \cdot \frac{dy}{dx}\right) &= 0 \\ (x^2 \cdot 2y + x \cdot \cos y) \cdot \frac{dy}{dx} &= -2xy^2 - sen\, y \\ \boldsymbol{\frac{dy}{dx}} &= -\boldsymbol{\frac{2xy^2 + sen\, y}{2x^2y + x\cos y}} \end{aligned}$$

22. Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, determinar dy/dx.

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

---

20. Derivada de uma Função Potência de Expoente Racional

Se n é um número racional, então x^n é derivável em qualquer ponto interior do domínio de x^{n-1} e

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{x^n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x^{n-1}}$$

Exemplo 22: Derive $y = \sqrt{x}$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

23. Determine a derivada primeira das funções abaixo:

a) $y = x^{\frac{2}{3}}$

b) $y = x^{\frac{9}{4}}$

c) $y = \sqrt[3]{x}$

d) $y = \sqrt[5]{x^7}$

---

21. Regra da Cadeia para Potências de Expoente Racional

Se n é um número racional e u é uma função derivável de x, então u^n é uma função derivável de x e

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{u^n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u^{n-1}}\frac{du}{dx}$$

desde que $u \neq 0$ se $n < 1$.

Exemplo 18: Derive $y = (1 - x^2)^{1/4}$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2)^{1/4} = \frac{1}{4} \cdot (1 - x^2)^{-3/4} \cdot (-2x) = -\frac{x}{2 \cdot (1 - x^2)^{3/4}}$$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

24. Determine a derivada primeira das funções abaixo:

a) $y = \sqrt[3]{2x}$

b) $y = 7\sqrt{x+6}$

c) $y = (1-6x)^{2/3}$

d) $y = \sqrt{x^2+2x+1}$

25. Calcule a derivada de cada uma das funções nos pontos indicados utilizando as regras de derivação:

a) $f(x) = x^2$, em $x_0 = 4$

b) $f(x) = x^2 - 3x$, em $x_0 = 2$

c) $f(x) = -3x$, em $x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, em $x_0 = 5$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

26. Obtenha a derivada de cada uma das funções abaixo, aplicando a técnica de derivação adequada.

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{2}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2} x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

e) $f(x) = 10x^3 + 5x^2$

f) $f(x) = \dfrac{1200000}{(x-300)^{1,3}}$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

g) $f(x) = 10\ln x - 3x + 6$

h) $f(x) = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[7]{x}$

i) $f(u) = 15u^3 - 2u^2 + 5u - 1$

j) $f(x) = 3e^x + 5\ln x$

k) $f(x) = e^{5x^2} + 5\ln x^2$

l) $f(x) = (5x^2 + 2x)^4$

LINEARIZAÇÃO

---

22. Linearização

Se f é derivável em $x = a$, então a função aproximação,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

*é a **linearização** de f em a.*

A aproximação $f(x) \approx L(x)$ é a aproximação linear padrão de f em a. O ponto $x = a$ é o centro da aproximação.

Exemplo 19: Determine a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x = 0$ e quando $x = 3$.

Solução: Quando $x = 0$,

$$L(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0),\ f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2}\ ,\ f(0) = 1 \text{ e } f'(0) = 1/2, \text{ então}$$

$$\boldsymbol{L(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x}$$

Conforme nos afastamos de zero, perdemos exatidão. Observe no gráfico abaixo:

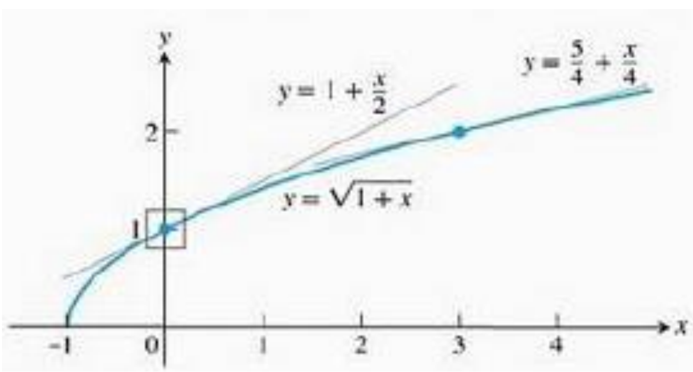
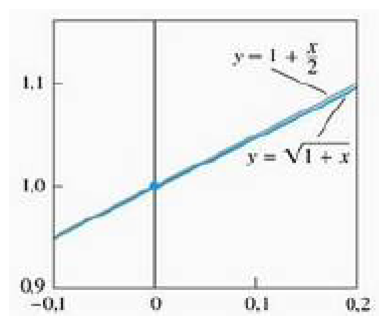


Gráfico da função $f(x) = \sqrt{1+x}$ e sua linearização quando $x = 0$ e $x - 3$.



Vista ampliada na região destacada ao redor de 1, no eixo y.

Aproximação	$\lvert Valor\ real - aproximação \rvert$
$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+0{,}2} = \sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{0{,}2}{2} = 1{,}10$	$< 10^{-2}$
$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+0{,}005} = \sqrt{1{,}05} \approx 1 + \frac{0{,}05}{2} = 1{,}025$	$< 10^{-3}$
$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+0{,}005} = \sqrt{1{,}005} \approx 1 + \frac{0{,}005}{2} = 1{,}00250$	$< 10^{-5}$
$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} \approx 1 + \frac{3{,}2}{2} = 2{,}6$	

Quando $x = 3$,

$$L(x) = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3),\ f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2}\ ,\ f(3) = 2 \text{ e } f'(3) = 1/4, \text{ então}$$

$$L(x) = 2 + \tfrac{1}{4} \cdot (x - 3) \therefore \boldsymbol{L(x) = \tfrac{5}{4} + \tfrac{x}{4}}$$

Aproximação	$\lvert Valor\ real - aproximação \rvert$
$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3{,}2} = 2{,}04939 \approx \frac{5}{4} + \frac{3{,}2}{2} = 1{,}250 + 0{,}800 = 2{,}050$	$< 10^{-3}$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

27. Determine a linearização $L(x)$ de $f(x)$ quando $x = a$.

a) $f(x) = x^3 - 2x + 3,\ a = 2;$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x},\ a = 1;$

Exemplo 20: A aproximação linear mais importante para raízes e potências é

$$\boldsymbol{(1+x)^k \approx 1 + kx,}$$ **(x próximo de 0, sendo k qualquer número)**

Essa aproximação, boa para valores de x suficientemente próximos de zero, tem uma vasta aplicação.

28. Demonstre que a linearização de $f(x) = (1+x)^k$ quando $x = 0$ é $L(x) = 1 + kx$.

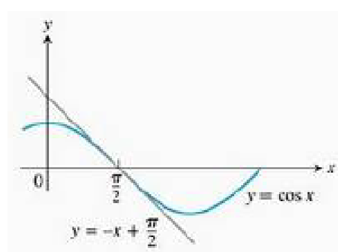
Exemplo 21: Determine a linearização de $f(x) = cos\ x$ quando $x = \pi/2$

Solução:

Como $L(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'(\frac{\pi}{2}) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$f'(x) = -sen\ x$ e $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, então

$$\boldsymbol{L(x) = -x + \frac{\pi}{2}}$$



29. Determine a linearização $L(x)$ de $f(x) = tg\ x$ quando $a = \pi$.

30. Use a aproximação $(1+x)^k \approx 1+kx$ para estimar:

a) $(1{,}0002)^{50}$

b) $\sqrt[3]{1{,}009}$

DIFERENCIAIS

23. Diferenciais

Na notação de Leibniz, dada uma função derivável $y = f(x)$, temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

e se considerarmos dy e dx como variáveis, podemos então escrever

$$\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot dx}$$

Ao contrário da variável independente dx, a variável dy é sempre dependente, tanto de x quanto de dx.

Exemplo 22: Dada a função $y = 10x^4$, obtenha a diferencial dy.

Solução:

$$f'(x) = 10 \cdot \left(4x^{4-1}\right) = 40x^3$$

Assim, a diferencial dy é dada por $dy = 40x^3 \cdot dx$.

31. Determine a diferencial dy para as funções abaixo:

a) $y = x^5 + 37x$

b) $y = sen\, 3x$

Se $dx \neq 0$, então o quociente da diferencial dy pela diferencial dx é igual à derivada $f'(x)$, pois

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)dx}{dx} = f'(x)$$

É comum escrevermos $df = f'(x)dx$, denominando df a **diferencial de f**.

Exemplo 23: Determine a diferencial df da função $f(x) = 3x^2 - 6$.

Solução:

A diferencial df é dada por $df = d(3x^2 - 6) = 6x \cdot dx$.

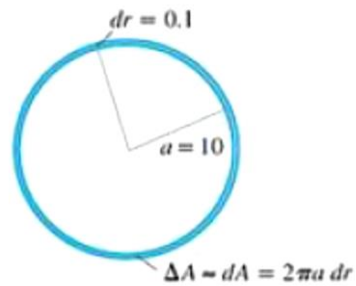
---

24. Estimativa de Variação com Diferenciais

Seja f(x) derivável quando $x = a$. A variação aproximada do valor de f quando x varia de a para $a + dx$ é

$$\boldsymbol{df = f'(a) \cdot dx}$$

Exemplo 24: O raio de uma circunferência aumenta de $a = 10m$ para $10{,}1m$, conforme figura abaixo. Utilize dA para estimar o aumento na área A da circunferência. Compare essa estimativa com a variação ΔA.



Solução: Como $A = \pi r^2$, então:

Variação estimada: $dA = A'(a) \cdot dr = 2\pi a \cdot dr = 2\pi \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2\pi m^2$.

Variação real: $\Delta A = \pi(10{,}1)^2 - \pi(10)^2 = (102{,}01 - 100)\pi = \left(\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0{,}01\pi}_{erro}\right) m^2$

Quando dr é pequeno em comparação com a, como é o caso quando o $dr = 0{,}1$ e $a = 10$, a diferencial $dA = 2\pi a \cdot dr$ dá uma boa aproximação de ΔA.

A variação percentual estimada para a área da circunferência é: $\frac{dA}{A(a)} \cdot 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \cdot 100 = 2\%$

A variação percentual real para a área da circunferência é: $\frac{\Delta A}{A(a)} \cdot 100 = \frac{2{,}01\pi}{100\pi} \cdot 100 = 2{,}01\%$

Conforme nos deslocamos de a para $a + dx$ próximo, podemos descrever a variação de f da seguinte forma:

	Real	**Estimada**
Variação absoluta	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)dx$
Variação relativa	$\frac{\Delta f}{f(a)}$	$\frac{df}{f(a)}$
Variação percentual	$\frac{\Delta f}{f(a)} \cdot 100$	$\frac{df}{f(a)} \cdot 100$

32. O raio de uma circunferência aumentou de $2{,}00m$ para $2{,}02m$.

a) Estime a variação resultante na área.

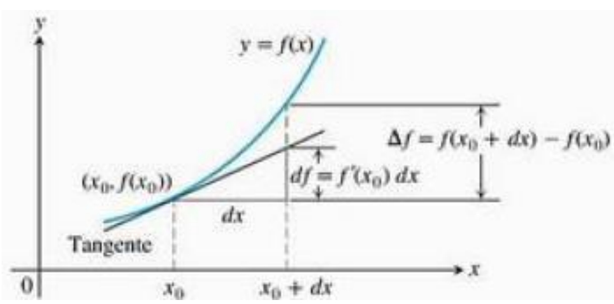
b) Expresse a estimativa como uma porcentagem da área inicial da circunferência.

33. A produção *P* (em litros) de óleo combustível depende da quantidade q de insumo utilizada (em Kg). Determinou-se que $P(q) = 9000\sqrt[3]{q}$.

a) Usando diferencial de função, calcule aproximadamente a variação da produção quando a quantidade de insumo passa de 500 Kg para 500,2 kg.

b) Calcule $P(500)$, $P(500{,}2)$ e, em seguida, calcule a diferença $P(500{,}2) - P(500)$. Compare o resultado obtido na questão anterior, com o resultado da diferença $P(500{,}2) - P(500)$. Que conclusão pode-se tirar a respeito?

34. De modo geral uma função f varia quando x varia de a para $a + dx$, conforme o gráfico abaixo. Determine para a função $f(x) = x^2 + 2x$, $a = 0$ e $dx = 0{,}1$, a variação absoluta (Δf), a variação estimada (df) e o erro de aproximação $|\Delta f - df|$.



REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração.** 6ª ed. revista e ampliada, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010.

THOMAS, George B., FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R., Tradução: BOSCHCOV, P. **Cálculo.** Vol 1, 10ª ed., São Paulo, Pearson Addison Wesley, 2002.

SILVA, Sebastião Medeiros da et al. **Matemática**: **para os cursos de Economia, Administração, Ciências Contábeis.** 6ª ed., São Paulo, Atlas, 2010.

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

R E S P O S T A S

1. a) 1; b) 17; c) 43

2. $\underset{x=2}{TVI\ f(x)} = f'(2) = 1$;
Significado gráfico: A $TVI\ de\ f(x)\ para\ x = 2$ representa a inclinação da reta tangente à curva de $f(x)$ no ponto (2, 0).

3. $\underset{q=5}{TVI\ C(q)} = C'(5) = 4\frac{milhares\ de\ R\$}{tonelada}$;
Significado numérico: A taxa de variação instantânea do custo é de 4 milhares de reais a cada 1 tonelada de produto fabricada;
Significado gráfico: A $TVI\ de\ C(q)\ para\ q\ = 5$ representa a inclinação da reta tangente à curva de $C(q)$ no ponto $(5, 1.520)$.

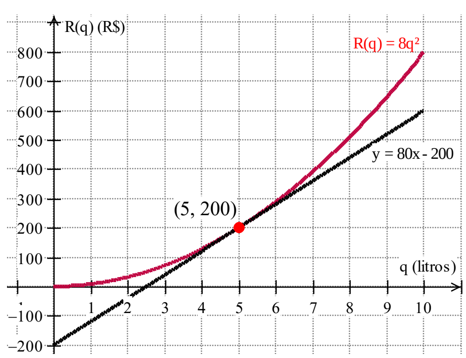
4. a) $\underset{0 \leq q \leq 10}{TVM\ R(q)} = 80\frac{reais}{litro}$;
Unidade de medida: $\frac{reais}{litro}$;
Significado numérico: A taxa de variação média da receita é de 80,00 reais a cada 1 litro do componente químico líquido vendido;
Significado gráfico: A $TVM\ de\ R(q)\ para\ 0 \leq q \leq 10$ representa a inclinação da reta secante à curva de $R(q)$ nos pontos $(0, 0)$ e $(10, 800)$.

b) $\underset{q=5}{TVI\ R(q)} = 80\frac{reais}{litro}$;

a) $\underset{q=5}{TVI\ R(q)} = R'(5) = 80\frac{reais}{litro}$;
Unidade de medida: $\frac{reais}{litro}$;
Significado numérico: A taxa de variação instantânea da receita é de 80 reais a cada 1 litro do componente químico líquido vendido;

Significado gráfico: A $TVI\ de\ R(q)\ para\ q\ = 5$ representa a inclinação da reta tangente à curva de $R(q)$ no ponto $(5, 200)$.

b) Equação da reta tangente à curva R(q) no ponto (5, 200): $y = 80x - 200$;



c) $R'(q) = 16q$ e, portanto, $R'(5) = 80\ reais/litro$.

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

5. $f'(x) \underset{x_0=x}{\overset{T.V.I.}{=}} \lim_{h\to 0} \underset{x\le x_0\le x+h}{\overset{T.V.M.}{f(x)}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \therefore f'(x) = 0.$

6. $f'(x) \underset{x_0=x}{\overset{T.V.I.}{=}} \lim_{h\to 0} \underset{x\le x_0\le x+h}{\overset{T.V.M.}{f(x)}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)+4-(2x+4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x+2h+4-2x-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2 \therefore f'(x) = 2.$

7. a) $f'(x) = 0$ b) $g'(x) = 0$ c) $u'(x) = 0$ d) $v'(x) = 0$

8. a) $f'(x) = 7x^6$ b) $g'(x) = -72x^7$ c) $u'(x) = -6$ d) $v'(x) = 6x$

9. a) $f'(x) = 18x^2$ b) $g'(x) = -8x^3$ d) $u'(x) = -1$ d) $v'(x) = 40x^7$

10. a) $(f+g)'(x) = 4x+1$ b) $(h+r)'(x) = 4x^3+6x^2+10x$

c) $(u+v)'(x) = 5\sqrt{11}x^4+\pi$ d) $(p+t)'(x) = \frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2$

11. a) $(f-g)'(x) = 4x^3-9x^2-\frac{1}{2}$ b) $(h-r)'(x) = 8x^3-24x^2$

c) $(u-v)'(x) = 30x^5-2x^2$ d) $(p-t)'(x) = 4ex^3-2\pi x$

12. a) $f'(x) = 21x^2-2x-\frac{1}{5}$ b) $g'(x) = -20x^3-x^2+2x$ c) $u'(x) = 28x-\frac{5}{6}$ d) $v'(x) = 7$

13. a) $(f\cdot g)'(x) = \frac{3}{4}x^2+6\pi x-\frac{1}{12}$ b) $g'(x) = 2x$

14. a) $(f \div g)'(x) = \frac{-5x^4+2x^3-10x+1}{x^6-2x^3+1}$ b) $(u/v)'(x) = \frac{-2-3x^2}{x^6+4x^4+4x^2}$

c) $m'(x) = \frac{197}{x^2+20x+100}$ d) $n'(x) = -\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$

15. a) $f'(x) = \frac{1}{x^6}$ b) $g'(x) = \frac{20}{x^5}+\frac{1}{3x^2}+6x$ c) $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d) $y' = -\frac{2}{x^3}$

16. a) $f'(x) = 10.000\cdot 1{,}05^x\cdot \ln 1{,}05$ b) $g'(x) = \ln 5\cdot 5^x$ c) $u'(x) = -\ln 8\cdot 8^x$ d) $v'(x) = \ln 2{,}034\cdot 2{,}034^x$

17. a) $f'(x) = 5e^x$ b) $g'(x) = -2e^x+ex^{e-1}$ c) $u'(x) = 5e^x+5ex^{5e-1}$ d) $v'(x) = 0$

18. a) $f'(x) = \frac{3}{x}$ b) $g'(x) = \ln x+\frac{1}{x}+1$ c) $u'(x) = \frac{1}{4x}$ d) $v'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

19. $y' = \frac{x\cdot cosx - sen\,x}{x^2}$

20. a) $y' = -10-3sen\,x$ b) $y' = -\frac{3}{x^2}+5\cos x$ c) $y' = -cosec\,x\cdot cotg\,x-\frac{2}{\sqrt{x}}$

d) $y' = \sec^2 x-1$ e) $y' = 2x-\sec x\cdot tg\,x$ f) $y' = -cosec^2\,x+\frac{2}{x^3}$

g) $y' = 2x\cdot cotg\,x-x^2\cdot cosec^2\,x$ h) $y' = \sec^2 x$ i) $y' = -\frac{1}{1+sen\,x}$

j) $y' = \left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{cos^2\,x}\right)\cdot(x\cdot sen\,x+\cos x)$

Lista de Exercícios II - Conceito da derivada, Técnicas de derivação, Linearização e Diferenciais.

21. a) $y' = 3x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^3}$ b) $y' = \frac{-10}{(5+10x)^2}$ c) $y' = 5e^{5x}$

d) $y' = (5x^2 + 2x)^3 \cdot (40x + 8)$ e) $y' = -27 \cdot (4 - 3x)^8$ f) $y' = \sec(tg\ x) \cdot tg\ (tg\ x) \cdot \sec^2 x$

g) $y' = 3sen^2\ x \cdot \cos x$ h) $y' = -cosec^2\left(\pi - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$

22. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

23. a) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ b) $y' = \frac{9}{4}x^{5/4}$ c) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ d) $v'(x) = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$

24. a) $y' = \frac{2}{3(2x)^{2/3}}$ b) $y' = \frac{7}{2\sqrt{x+6}}$ c) $y' = -\frac{4}{\sqrt[3]{1-6x}}$ d) $y' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

25. a) $f'(4) = 8$ b) $f'(2) = 1$ c) $f'(1) = -3$ d) $f'(5) = -\frac{1}{25}$

26. a) $f'(x) = 5x^4$ b) $f'(x) = -\frac{15}{x^4} - \frac{2}{x^2}$ c) $f'(x) = x$ d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $f'(x) = 30x^2 + 10x$ f) $f'(x) = -\frac{1.560.000}{(x-300)^{2,3}}$ g) $f'(x) = \frac{10}{x} - 3$ h) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{7\sqrt[7]{x^6}}$

i) $f'^{(u)} = 45u^2 - 4u + 5$ j) $f'(x) = 3e^x + \frac{5}{x}$ k) $f'(x) = 10xe^{5x^2} + \frac{10}{x}$ l) $f'(x) = (40x + 8)(5x^2 + 2x)^3$

27. a) $L(x) = 10x - 13$ b) $L(x) = 2$

28.

29. $L(x) = x - \pi$

30. a) 1,01 b) 1,003

31. a) $dy = (5x^4 + 37)dx$ b) $dy = (3\cos 3x)dx$

32. a) $0{,}08\pi m^2$ b) 2%

33. a) $dp = 9{,}56\ litros$.

b) $\Delta P = P(500{,}2) - P(500) = 9{,}52\ litros$. Como $dq = 0{,}2$kg é pequeno em comparação com $a = 500kg$, a diferencial $dP = 9{,}56\ litros$ (valor estimado) dá uma boa aproximação de $\Delta P = 9{,}52\ litros$ (valor real), com um erro de apenas 0,04 litros.

34. $\Delta f = 0{,}21$ $df = 0{,}2$ $|\Delta f - df| = 0{,}01$