Álgebra Linear I - Lista 13

Matriz em uma Base. Mudança de Base

Respostas

1) Considere as seguintes transformações lineares:

1. P_1, projeção ortogonal no plano $x + y + z = 0$,
2. P_2, projeção ortogonal na reta $(t, -t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$,
3. P_3, projeção no plano $x + y + z = 0$ na direção do vetor $(1, 0, 1)$,
4. E_1, espelhamento no plano $x + y + z = 0$,
5. E_2, espelhamento na reta $(t, -t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Encontre bases onde as matrizes de P_1 e P_3 sejam da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as matrizes de P_2, E_1 e E_2 da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

respetivamente.

Resposta:

- para a projeção P_1: $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$,
- para a projeção P_3: $\{(1, 0, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$,
- para a projeção P_2: $\{(2, 0, -1), (1, -1, 2), (1, 1, 0)\}$,
- para o espelhamento E_1: $\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 1)\}$,

- para o espelhamento E_2: $\{(1,1,0),(1,-1,2),(2,0,-1)\}$.

2) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(v) = v \times (1,1,1).$$

Determine a matriz de T nas seguintes bases:

1. $\beta = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-2,1)\}$,
2. $\gamma = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-1,0)\}$,
3. $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Sejam $[T]_\beta$, $[T]_\gamma$ e $[T]_\mathcal{E}$ das matrizes acima.
Veja que estas matrizes são semelhantes. Escreva

$$[T]_\beta = P^{-1}\,[T]_\gamma\,P, \quad [T]_\beta = Q^{-1}\,[T]_\mathcal{E}\,Q,$$

e interprete as matrizes P e Q.

Resposta: Observe que

$$T(1,1,1) = \bar{0}, \quad T(1,0,-1) = (1,-2,1), \quad T(1,-2,1) = (-3,0,3).$$

Portanto,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escreva,

$$(1,-2,1) = a(1,1,1) + b(1,0,-1) + c(1,-1,0),$$

e veja que $a = 0$, $b = -1$ e $c = 2$.
Veja também que

$$T(1,-1,0) = (-1,-1,2),$$

e escreva

$$(-1,-1,2) = a(1,1,1) + b(1,0,-1) + c(1,-1,0),$$

onde $a = 0$, $b = -2$ e $c = 1$. Portanto,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$[T]_{\mathcal{E}} = A^{-1}[T]_\beta A, \quad [T]_{\mathcal{E}} = B^{-1}[T]_\gamma B,$$

onde A é a matriz de mudança da base canônica á base β e B é a matriz de mudança da base canônica á base γ. Portanto,

$$\begin{aligned} [T]_\beta &= A[T]_{\mathcal{E}}A^{-1} = A(B^{-1}[T]_\gamma B)A^{-1} = (AB^{-1})[T]_\gamma(BA^{-1}) = \\ &= (BA^{-1})^{-1}[T]_\gamma(BA^{-1}). \end{aligned}$$

Agora é suficiente considerar $P = BA^{-1}$, que é a matriz de mudança de base da base β á base γ.

3) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que os autovalores de A são 5, 0 e 2.

- Ache um autovetor associado a cada autovalor.
- Determine uma base β de autovetores de A.
- Determine a matriz de A na base β.
- Encontre a forma diagonal de A.
- Encontre uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.
- Interprete P.

Resposta: O autovetor associado a 5 é $(1,0,2)$, o autovetor associado a 0 é $(0,1,-2)$, e o autovetor associado a 2 é $(0,1,-3)$.

A forma diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz P é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz representa a mudança de base da base β à base canônica.

4) Seja A uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de A na base canônica tem determinante zero e traço 2. Sabendo que $A(1,1) = (0,0)$ que os autovetores associados a autovetores diferentes são ortogonais:

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Determine uma base de autovetores de A.

(c) Determine a matriz A.

Resposta: Um autovalor de A é 0 (pois $A(1,1) = (0,0) = 0(1,1)$). O traço de A é 2, e como ele é igual à soma dos autovalores (contados com multiplicidade) de A, se λ é o outro autovalor de A, temos:

$$0 + \lambda = 2, \quad \lambda = 2.$$

Como os autovetores de A associados a 0 e 2 são ortogonais, portanto, os autovetores associados a 2 são ortogonais a $(1,1)$, logo um autovetor associado a 2 é $(1,-1)$. Portanto, uma base de autovetores de A é $\{(1,1)(1,-1)\}$.

Finalmente, para determinar a matriz de A escrevemos A na base ortonormal β de autovetores $\{(2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), (2/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2})\}$,

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, é suficiente considerar a matriz P de mudança da base β à canônica

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

e escrever

$$\begin{aligned} A &= P[A]_\beta P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verifique que a matriz A está certa.

5) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que a matriz de A na base β seja

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: O polinômio característico de A é:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (-\lambda)\,(1-\lambda)\,(2-\lambda) - (-1\,(2-\lambda)+1) = \\ &= (-\lambda)\,(\lambda^2 - 3\,\lambda + 2) + 1 - \lambda = \\ &= -\lambda^3 + 3\,\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Portanto, 1 é o único autovalor que tem multiplicidade 3.

Para determinar os autovetores de 1 devemos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o sistema

$$-x+y=0 \quad -x+z=0, \quad -x+z=0.$$

As soluções são da forma (t,t,t), $t \in \mathbb{R}$. Portanto, somente é possível encontrar um autovetor linearmente independente. Por exemplo, $(1,1,1)$.

Observe que a matriz não é diagonalizável, pois não existe uma base de autovetores. Procuramos agora uma base $\beta = \{u, v, w\}$ tal que

$$A(u) = u+v, \quad A(v) = v+w, \quad A(w) = w.$$

Portanto, w é um autovetor de A associado a 1. Podemos escolher $(1,1,1)$.

Portanto,

$$A(v) = v + (1,1,1).$$

Em coordenadas temos $v = (x,y,z)$ (na base canônica):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$y = x+1, \quad -x+y+z = y+1, \quad -x+2z = z+1.$$

Ou seja,

$$-x+y=1, \quad -x+z=1, \quad -x+z=1.$$

Podemos escolher o vetor $v = (0,1,1)$.

Finalmente,

$$A(u) = u+v = u+(0,1,1).$$

Em coordenadas temos $u = (x,y,z)$ (na base canônica):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$y = x+0, \quad -x+y+z = y+1, \quad -x+2z = z+1.$$

Ou seja,

$$-x+y=0, \quad -x+z=1, \quad -x+z=1.$$

Podemos escolher o vetor $u=(0,0,1)$.

Portanto,

$$\beta=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}.$$

Verifique que:

$$\begin{aligned} A(0,0,1) &= (0,1,2)=(0,0,1)+(0,1,1), \\ A(0,1,1) &= (1,2,2)=(0,1,1)+(1,1,1), \\ A(1,1,1) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

6) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine o polinômio característico p_T de T.

b) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta=\{(0,-1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}.$$

c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β.

d) Determine a primeira coluna da matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

e) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_\gamma=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas: O polinômio característico p_T de T 'e

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9.$$

Portanto, os autovalores são 1 (simples) e 3 (multiplicidade 2).

Os autovetores associados a 1 são as soluções não nulas do sistema

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $y = 0 = z$. Logo os autovetores associados a 1 são da forma $(t, 0, 0)$, $t \neq 0$.

Analogamente, os autovetores associados a 3 são as soluções não nulas do sistema

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é, $z = 0$, $x = 0$. Logo os autovetores associados a 3 são da forma $(0, t, 0)$, $t \neq 0$.

Observe que não existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 3 de multiplicidade 2, portanto a matriz não é diagonalizável.

Observe que a matriz de mudança de base da base β à base canônica é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de mudança de base da base canônica à base β é

$$P = M^{-1}.$$

Usaremos o método de escalonamento para calcular a matriz inversa de M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$[T]_\beta = P\ [T]_\mathcal{E}\ P^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [T]_\beta &= \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que $[T]_\beta$ e $[T]_\mathcal{E}$ têm o mesmo traço e confira que

$$\begin{array}{lll} T(0,-1,1) & = (1,-2,3) & = 2\,(0,-1,1) + 0\,(0,1,1) + 1\,(1,0,1); \\ T(0,1,1) & = (1,4,3) & = -1\,(0,-1,1) + 3\,(0,1,1) + 1\,(1,0,1); \\ T(1,0,1) & = (2,1,3) & = 0\,(0,-1,1) + 1\,(0,1,1) + 2\,(1,0,1). \end{array}$$

Seja $\gamma = \{u, v, w\}$. Observe que pela definição de $[T]_\gamma$,

$$T(u) = u, \quad T(v) = 3v, \quad , T(w) = 3w + v.$$

Portanto, u e v devem ser autovetores de T associados a 1 e 3, respetivamente. Pelo segundo item podemos escolher

$$u = (1,0,0), \quad v = (0,1,0).$$

Escrevamos (na base canônica) $w = (a, b, c)$. Sabemos que

$$T(w) = (a + c, 3b + c, 3c).$$

Portanto,

$$(a + c, 3b + c, 3c) = (3a, 3b, 3c) + (0, 1, 0).$$

Logo

$$a = 1/2, \quad c = 1, \quad b = \mathrm{t}, t \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$\gamma = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1/2, t, 1)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$