Cálculo III
Professor: Kennedy
Aluno: Abrantes

Exercícios:
Máximo, Mínimo, Sela

Outubro/2019

Ⅰ - Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

⑤ - $f(x,y) = 9-2x+4y-x^2-4y^2$

Cálculo dos pontos críticos que ocorrem quando $f_x(a,b)=0$ e $f_y(a,b)=0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(9-2x+4y-x^2-4y^2) = -2-2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(9-2x+4y-x^2-4y^2) = 4-8y$$

| | | |
|---|---|---|
| $\therefore f_x = 0$ | $f_y = 0$ | O único ponto crítico é $f(-1, 1/2)$. |
| $-2-2x=0$ | $4-8y=0$ | |
| $-2x=2$ | $-8y=-4$ | |
| $x=-1$ | $y=1/2$ | |

Cálculo das derivadas de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-2-2x) = -2 \qquad f_{xx}(-1, 1/2) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4-8y) = -8 \qquad f_{yy}(-1, 1/2) = -8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-2-2x) = 0 \qquad f_{xy}(-1, 1/2) = 0$$

$$D(a,b) = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2$$
$$= (-2)(-8) - 0$$
$$= 16$$

Como $D > 0$ e $f_{xx}(-1, 1/2) < 0$, $f(-1, 1/2)$ é máximo local.

②

$f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

Cálculo dos pontos críticos:

$\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3y + 12x^2 - 8y) = 3x^2y + 24x$

$\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3y + 12x^2 - 8y) = x^3 - 8$

$f_y = 0$
$x^3 - 8 = 0$
$x^3 = 8$
$x = 2$

$f_x = 0$
$3x^2y + 24x = 0$
$3(2)^2y + 24(2) = 0$
$12y + 48 = 0$
$y = -4$

O único ponto crítico é então $f(2,-4)$.

Cálculo das derivadas de 2ª ordem:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y + 24x) = 6xy + 24$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^3 - 8) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2y + 24x) = 3x^2$

$f_{xx}(2,-4) = 6xy + 24 = -24$
$f_{yy}(2,-4) = 0$
$f_{xy}(2,-4) = 3x^2 = 12$

$D(2,-4) = (-24)(0) - 12^2 = -144$

Como $D(2,-4) < 0$, o ponto $(2,-4)$ é sela.

7 - $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$

Cálculo dos pontos críticos para

$f(x,y) = x - x^2y - y + xy^2$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2 - x^2y + x - y) = y^2 - 2xy + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 - x^2y + x - y) = 2xy - x^2 - 1$$

$f_y = 0$

$2xy - x^2 - 1 = 0$

$2xy = x^2 + 1$

$y = \dfrac{x^2+1}{2x}$

$y = \dfrac{(-1)^2+1}{2(-1)} = \dfrac{2}{-2} = -1$

$y = \dfrac{(1)^2+1}{2(1)} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\therefore y = 1$ ou $y = -1$

$f_x = 0$

$y^2 - 2xy + 1 = 0$

$\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)^2 - \cancel{2x}\left(\dfrac{x^2+1}{\cancel{2x}}\right) + 1 = 0$

$\dfrac{x^4+2x^2+1}{4x^2} - x^2 \cancel{-1} \cancel{+1} = 0$

$x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^4 = 0$

$-3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

$-3x^4 + 2x^2 = -1$

$\therefore x = 1$ ou $x = -1$

Essa função tem 4 pontos críticos a serem analisados:

$f(1,1)$ $f(1,-1)$

$f(-1,1)$ $f(-1,-1)$

Cálculo das derivadas de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 2xy + 1) = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2 - 1) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 2xy + 1) = 2y - 2x$$

(4)

Análise dos pontos críticos:

Para $f(1,1)$:

$f_{xx}(1,1) = -2y = -2$ $\Big\}$ $f_{yy}(1,1) = 2x = 2$ $\Big\}$ $f_{xy}(1,1) = -2y - 2x = 0$

$D(1,1) = (-2)(2) - 0^2 = -4$

$\therefore f(1,1)$ é ponto de sela

Para $f(1,-1)$:

$f_{xx}(1,-1) = -2y = 2$ $\Big\}$ $f_{yy}(1,-1) = 2x = -2$ $\Big\}$ $f_{xy}(1,-1) = 2y - 2x = -4$

$D(1,-1) = (2)(-2) - (-4)^2$
$= -4 - 16 \quad = -20$

$\therefore f(1,-1)$ é ponto de sela

Para $f(-1,1)$:

$f_{xx}(-1,1) = -2y = -2$ $\Big\}$ $f_{yy}(-1,1) = 2x = -2$ $\Big\}$ $f_{xy}(-1,1) = 2y - 2x = 2 - 2(-1) = 4$

$D(-1,1) = (-2)(-2) - 4^2 = -12$

$\therefore f(-1,1) =$ ponto de sela

Para $f(-1,-1)$:

$f_{xx}(-1,-1) = -2y = 2$ $\Big\}$ $f_{yy}(-1,-1) = 2x = -2$ $\Big\}$ $f_{xy}(-1,-1) = 2y - 2x = -2 + 2 = 0$

$D(-1,-1) = 2(-2) - 0^2 = -4$

$\therefore f(-1,-1)$ é ponto de sela