Unidade 7

MOMENTUM LINEAR E COLISÕES

Momento Linear

O momento linear de uma partícula de massa m e movendo-se com velocidade **v** é dado por:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$$

O momento linear é uma grandeza vetorial

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Esta grandeza realiza a diferenciação entre partículas de massas diferentes movendo-se na mesma velocidade

Momento Linear

Newton chamou esta grandeza de *Quantidade de Movimento*

Expressando a segunda Lei em função do Momento Linear

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

Se, a partícula está isolada e a resultante de forças for nula o momento linear se conserva. Ou seja, não varia com o tempo

Momento Linear

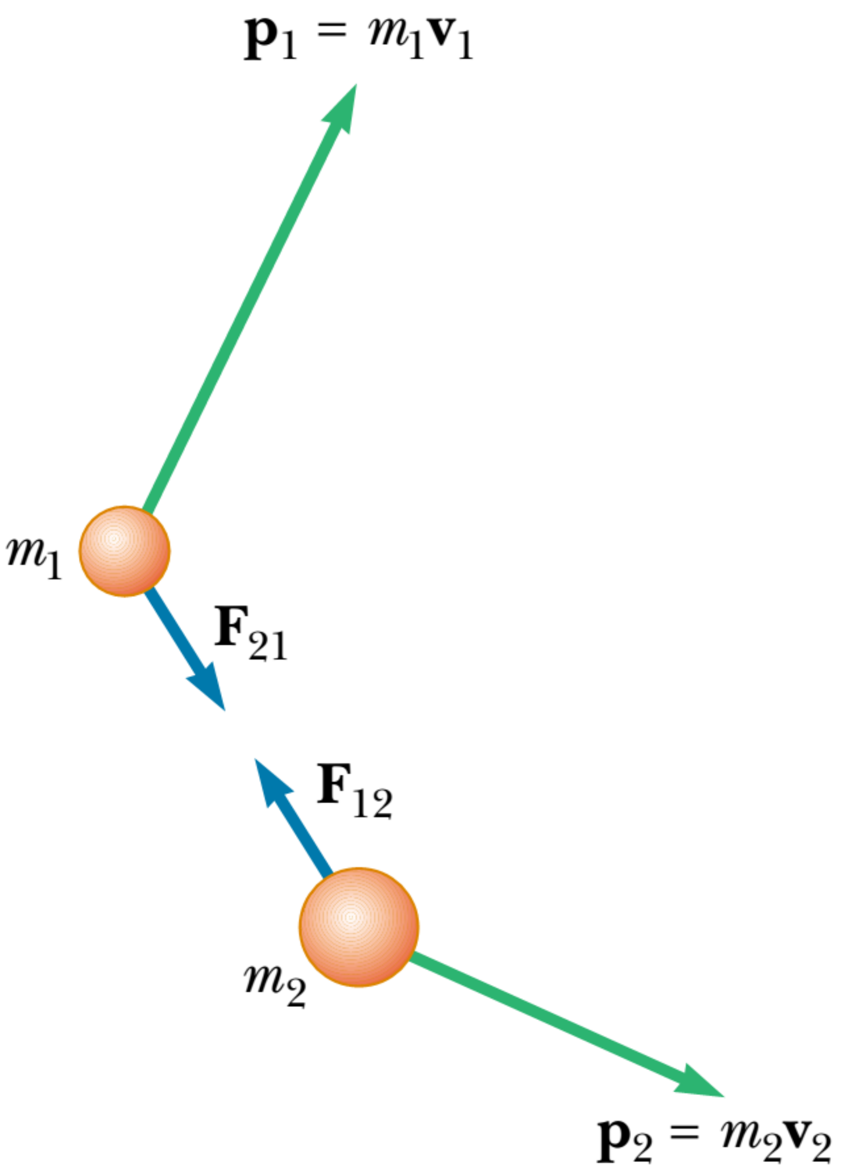
Considere duas partículas que podem interagir mutuamente mas isoladas

As duas forças formam um par ação-reação, assim:

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

Ou:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

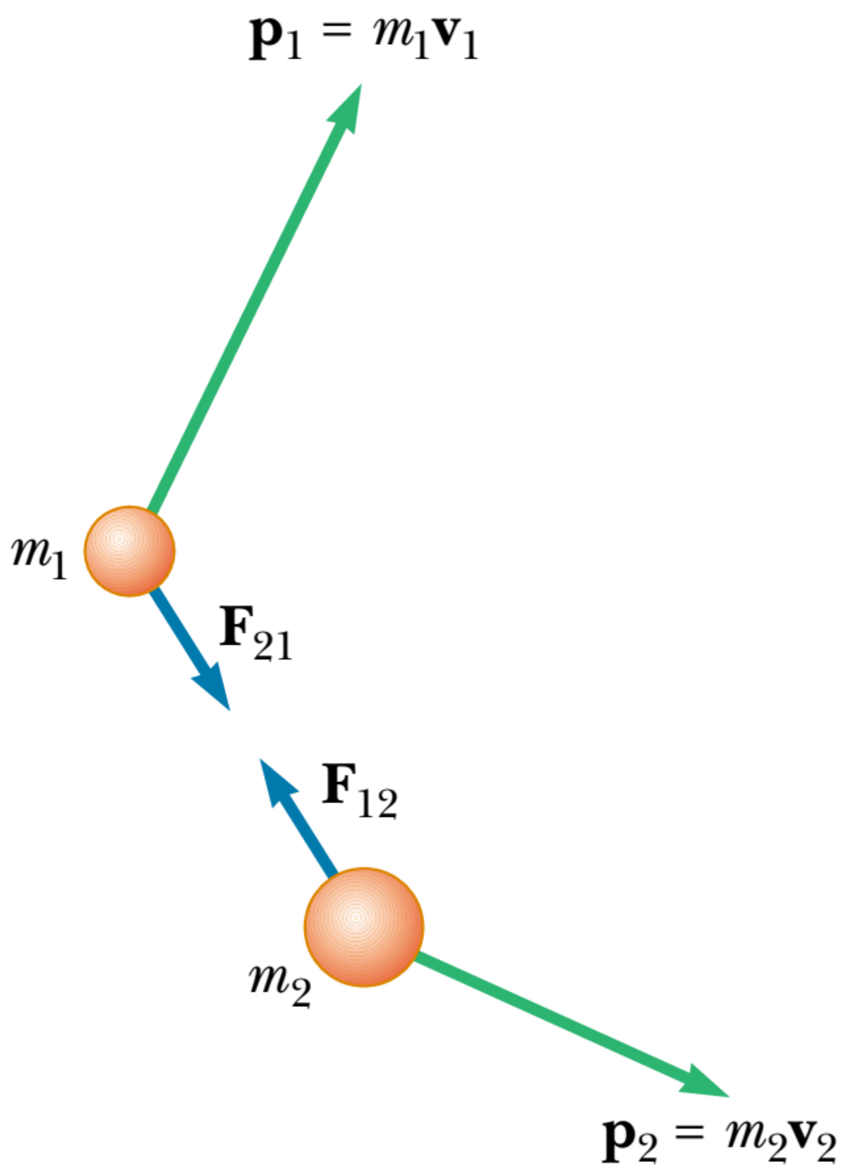


Momento Linear

Como a derivada é nulo, significa que a soma dos momentos lineares é constante:

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}$$

Em um sistema de partículas isolado, o momento linear total é constante



Momento Linear

Impulso

- De acordo com a segunda lei podemos escrever:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt \longrightarrow \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt$$

$$\boxed{\mathbf{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt = \Delta\mathbf{p}}$$

O impulso de uma foça agindo sobre uma determinada partícula é igual a variação do seu momento linear

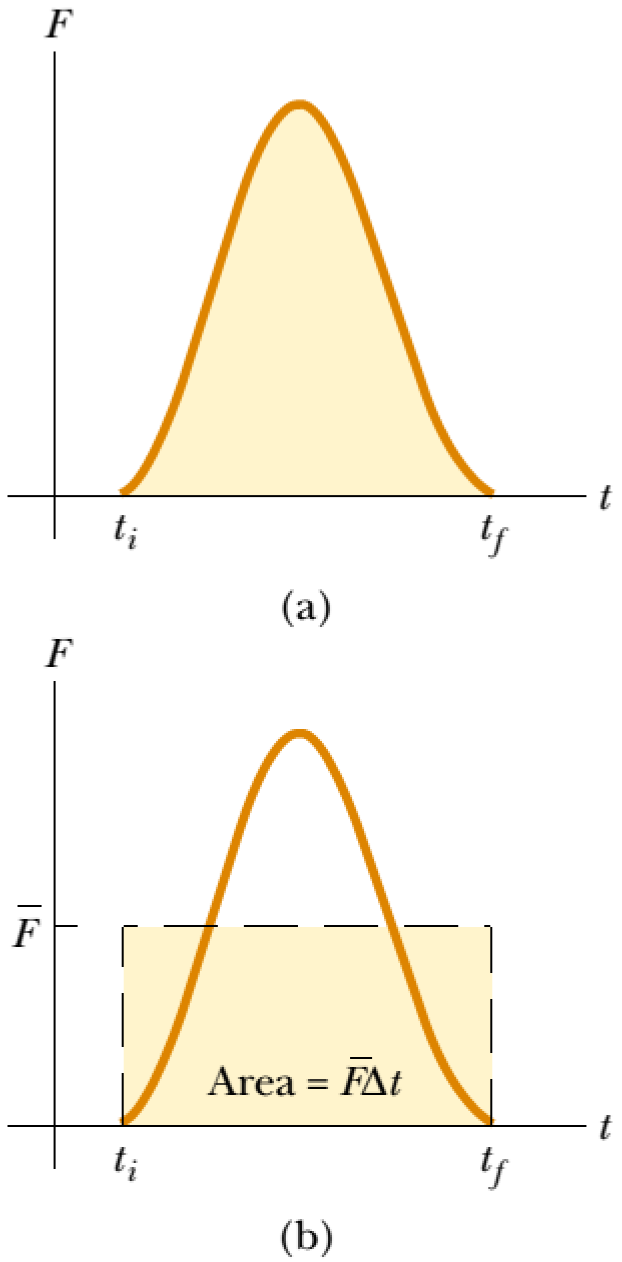
Momento Linear

Impulso

- força responsável pelo impulso pode variar tremendamente com o tempo
- Define-se a força média

$$\overline{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt$$

$$\boxed{\mathbf{I} \equiv \overline{\mathbf{F}}\, \Delta t}$$



Momento Linear

Exemplo:

Uma bola de golf de 50g é lançada. A força exercida na bola varia de zero ao máximo e então retorna a zero. Assumindo que a bola viaje 200 m, estime a intensidade do impulso causado pela colisão.

- Utilizando a equação de movimento balístico para se determinar a velocidade horizontal da bola, sabendo-se o alcance máximo horizontal (assumindo um ângulo de lançamento de 45º :

$$R = x_C = \frac{v_B^{2}}{g} \sin 2\theta_B \Rightarrow v_B = \sqrt{x_C g} = \sqrt{(200\ \mathrm{m})(9.80\ \mathrm{m/s^2})} = 44\ \mathrm{m/s}$$

Momento Linear

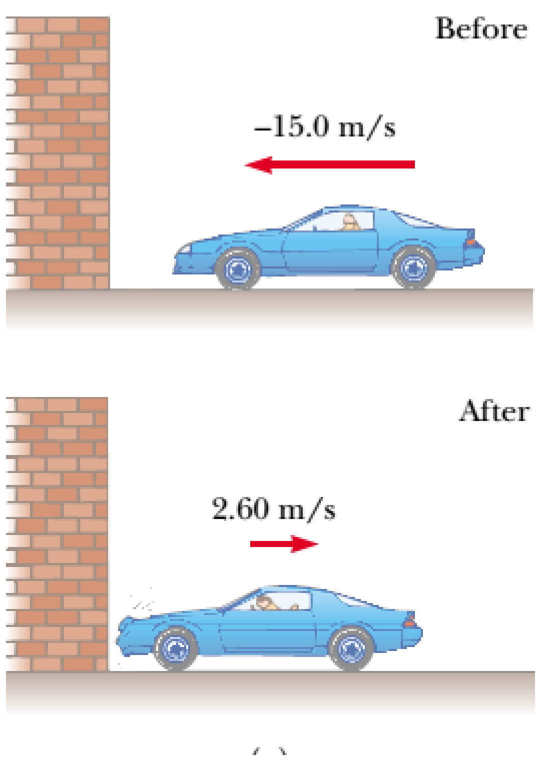
Exemplo:

- Considerando que a velocidade inicial da bola seja nula, temos:

$$I = \Delta p = mv_{\mathrm{B}} - mv_{\mathrm{A}} = (50 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg})(44\,\mathrm{m/s}) - 0$$

$$= \boxed{2.2\,\mathrm{kg \cdot m/s}}$$

Momento Linear



Exemplo: Um carro de massa de 1500kg colide contra uma parede. A velocidade inicial do carro é de -15 m/s e a velocidade final é de 2,60 m/s. Se, o tempo de colisão for de 0,150s. Qual o impulso causado pela colisão e qual a força média?

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i = (1\,500 \text{ kg})(-15.0\mathbf{i} \text{ m/s}) = -2.25 \times 10^4\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\mathbf{p}_f = m\mathbf{v}_f = (1\,500 \text{ kg})(2.60\mathbf{i} \text{ m/s}) = 0.39 \times 10^4\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

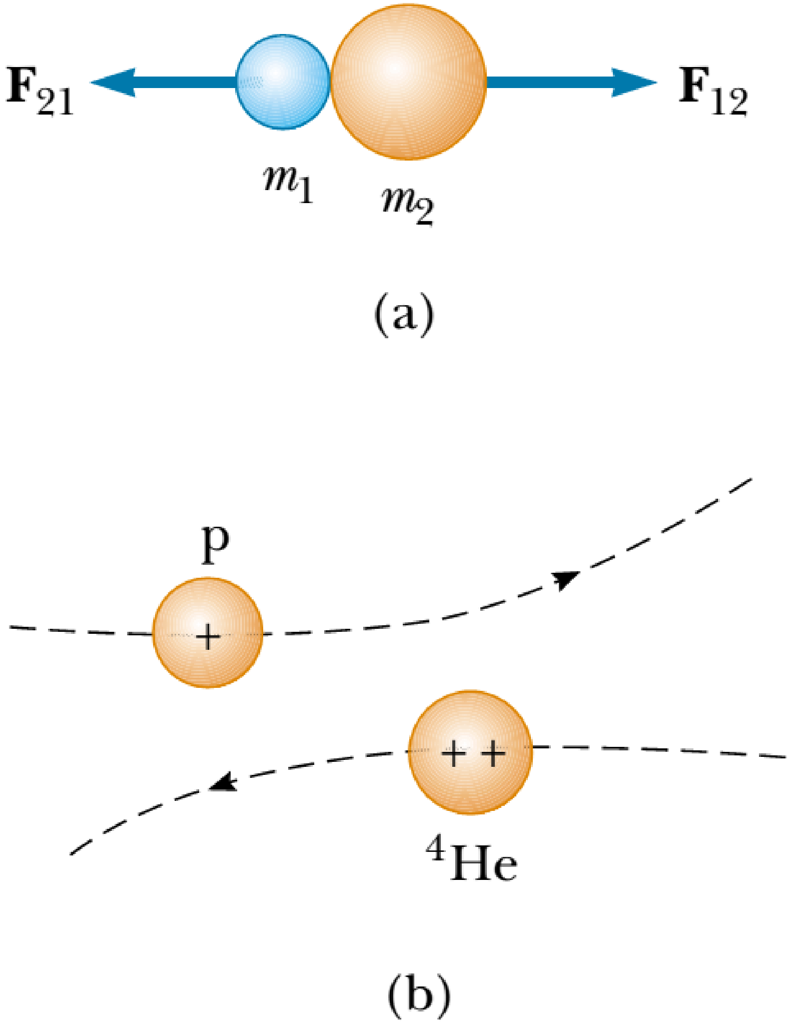
$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0.39 \times 10^4\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s})$$

$$\mathbf{I} = \boxed{2.64 \times 10^4\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s}} \rightarrow \overline{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\mathbf{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150 \text{ s}} = \boxed{1.76 \times 10^5\mathbf{i} \text{ N}}$$

Colisões

Representa o evento de que duas partículas ficam unidas por um pequeno intervalo de tempo e no entanto produzem forças impulsivas em cada uma.

Estas forças são assumidas muito maiores do que qualquer força externa

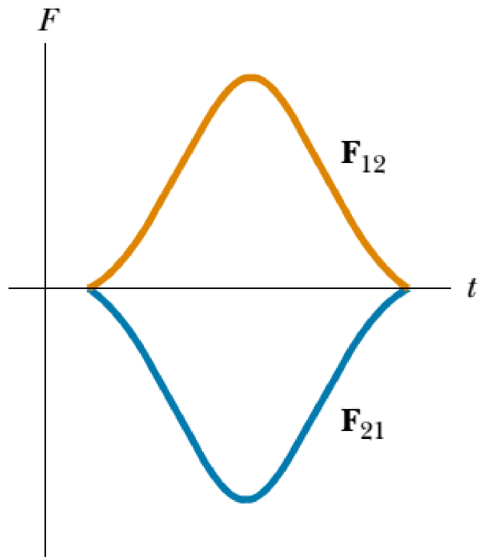


Colisões

Levando-se em conta a conservação do momento linear, pode-se afirmar:

O momento linear total em um sistema isolado antes da colisão é igual ao momento linear total após a colisão.

$$\mathbf{p}_{\text{system}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{constant}$$



Colisões

Exemplo: um carro de massa de 1800kg, parado no sinal, é batido na traseira por um carro de 900kg, os dois carros permanecem unidos depois da batida. Se o carro menor se movia com uma velocidade de 20 m/s antes da colisão. Qual a velocidade dos carros após a colisão?

$$p_i = m_1 v_{1i} = (900 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s}) = 1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_f = (m_1 + m_2) v_f = (2\,700 \text{ kg}) v_f$$

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{1.80 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{2\,700 \text{ kg}} = \boxed{6.67 \text{ m/s}}$$

Colisões

Colisão Elástica

- É aquela na qual a energia cinética total (assim como o momento) é o mesmo antes e depois da colisão

Colisão Inelástica

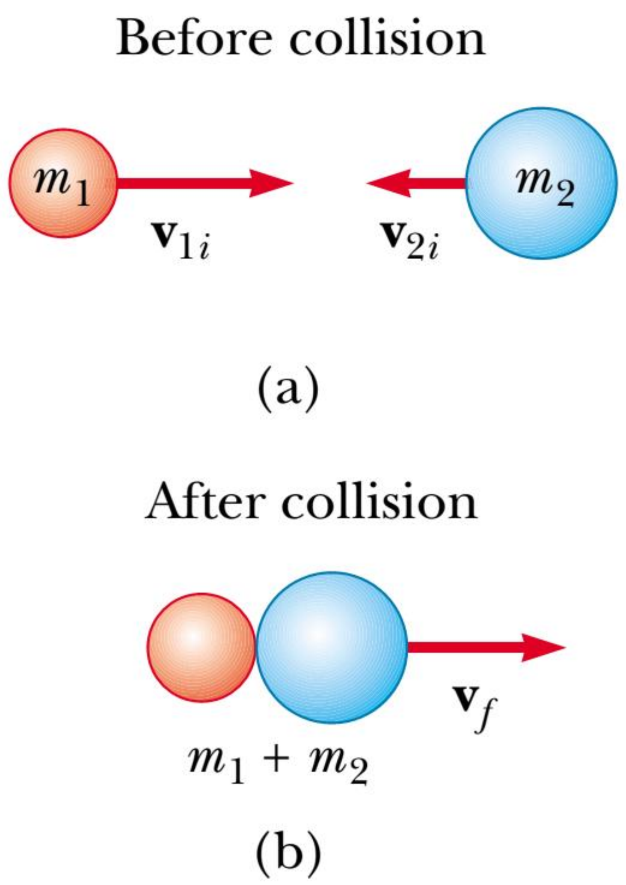
- É aquela aonde a energia cinética total não se conserva. Mas, o momento sim.
- A colisão inelástica perfeita é aquela que os dois objetos permanecem juntos após a colisão

Colisões

Colisão Inelástica Perfeita:

$$m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_f$$

$$\mathbf{v}_f = \frac{m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

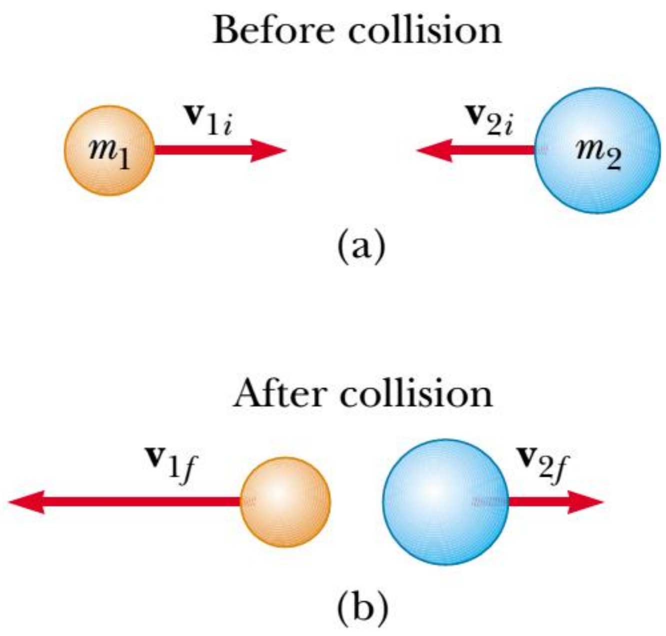


Colisões

Colisão Elástica:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$$



Colisões

Colisão Elástica:

- Trabalhando as duas equações anteriores, isolando as velocidades finais, temos:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

Colisões

Colisão Elástica

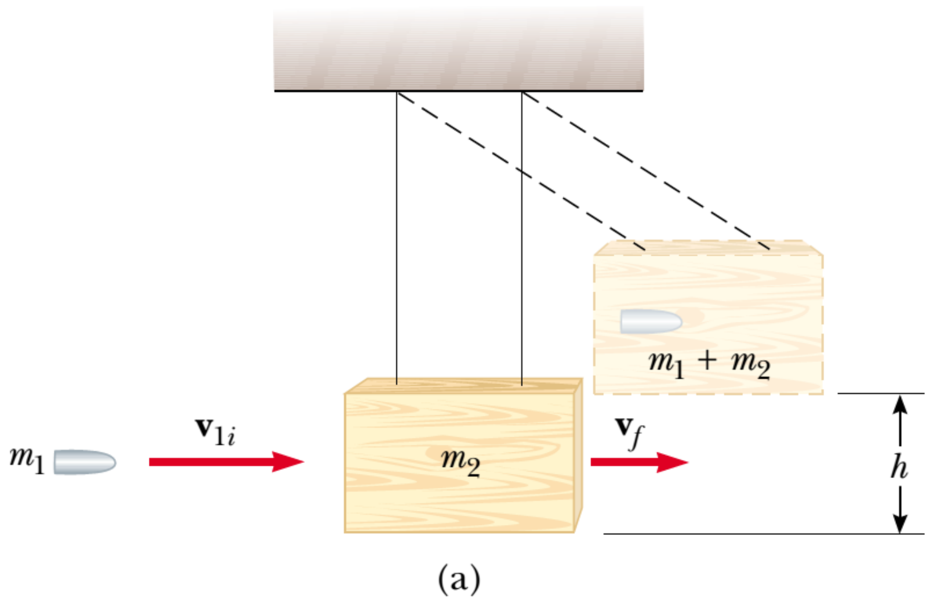
- Se a partícula 2 estiver em repouso inicialmente: $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

Colisões

Exemplo: Uma bola é atirada contra um bloco de madeira pesado e suspenso. Ao colidir o sistema é elevado de uma altura *h*. A colisão é perfeitamente inelástica.



- Energia cinética final:

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$$

- Da conservação do momento linear e com $v_{2i}=0$:

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

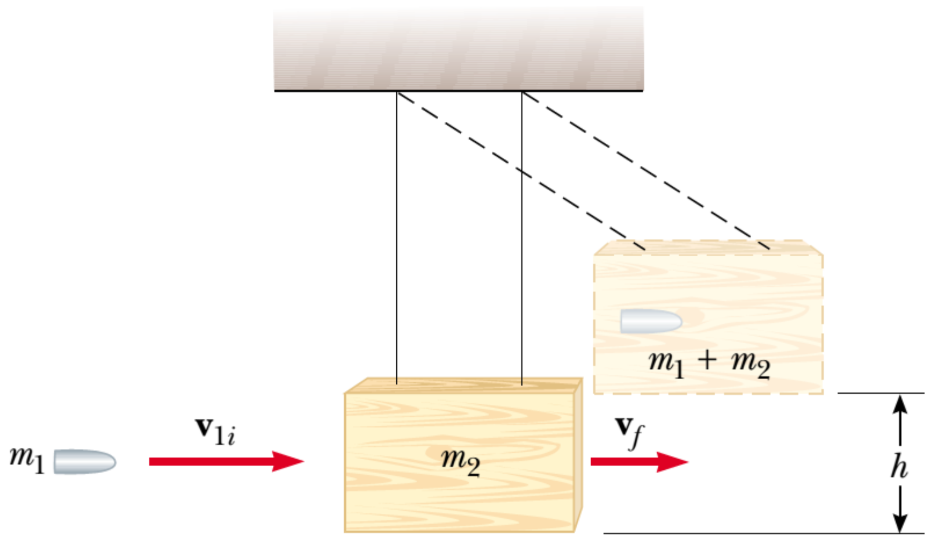
$$K_f = \frac{m_1^2 v_{1i}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Colisões

Exemplo: Uma bola é atirada contra um bloco de madeira pesado e suspenso. Ao colidir o sistema é elevado de uma altura *h*. A colisão é perfeitamente inelástica. (Cont...)

- Pela conservação da Energia Mecânica Total:

$$\frac{m_1{}^2 v_{1i}{}^2}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2) g h$$



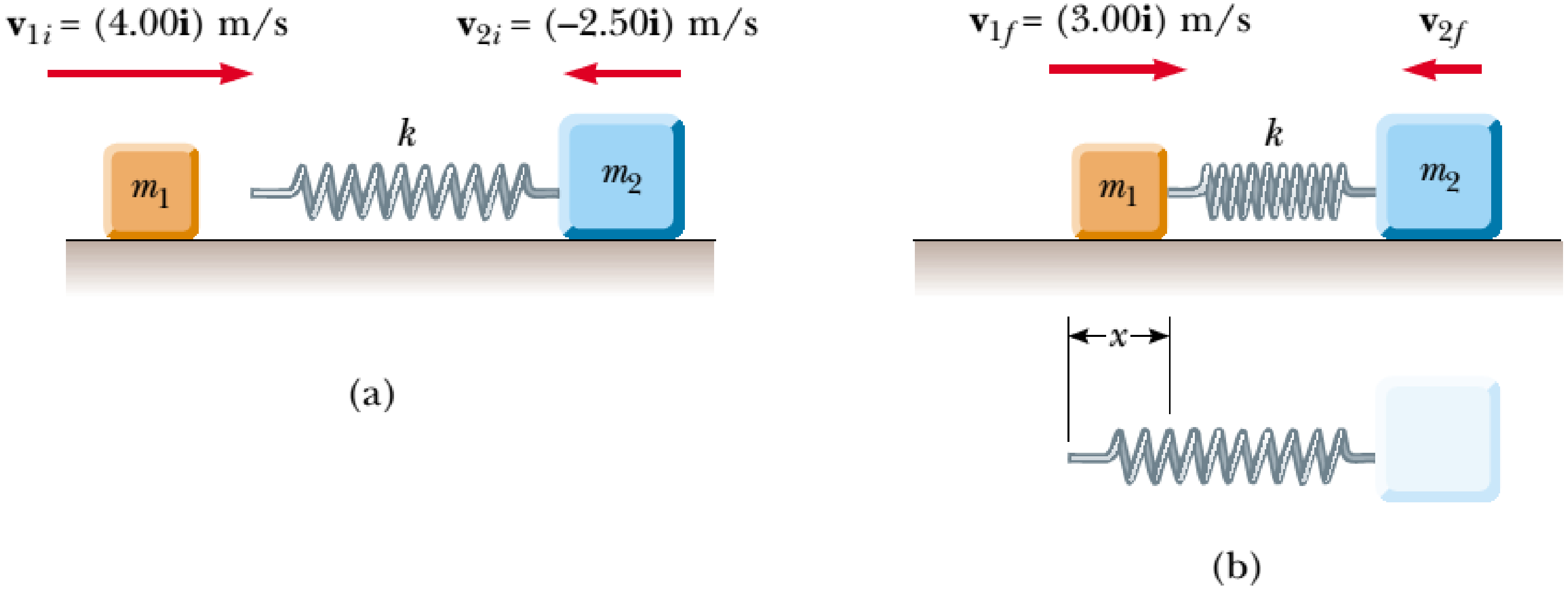
(a)

$$v_{1i} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$$

- No final do movimento de pêndulo, devido ao impacto com a bala, toda a energia cinética é convertida em energia potencial

Colisões

Exemplo: Um bloco de massa m1 = 1,60 Kg inicialmente em movimento para direita com uma velocidade de 4,0 m/s colide com uma mola presa a um segundo bloco de massa m2 = 2,10 Kg inicialmente movendo-se para esquerda com uma velocidade 2,50 m/s. A constante de mola é de k=600 N/m.



Colisões

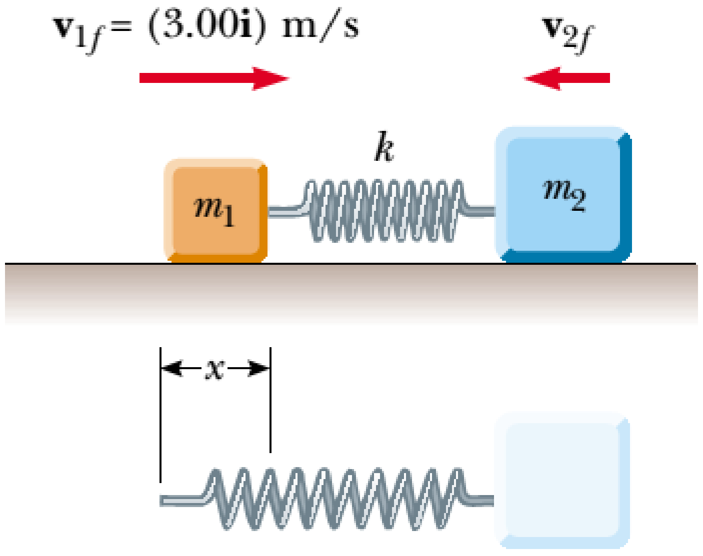
(a) Após a colisão o bloco 1 tem uma velocidade de 3,0 m/s

- Pela conservação do momento linear:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(1.60\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})(-2.50\ \text{m/s}) = (1.60\ \text{kg})(3.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})\, v_{2f}$$

$$v_{2f} = \boxed{-1.74\ \text{m/s}}$$



(b)

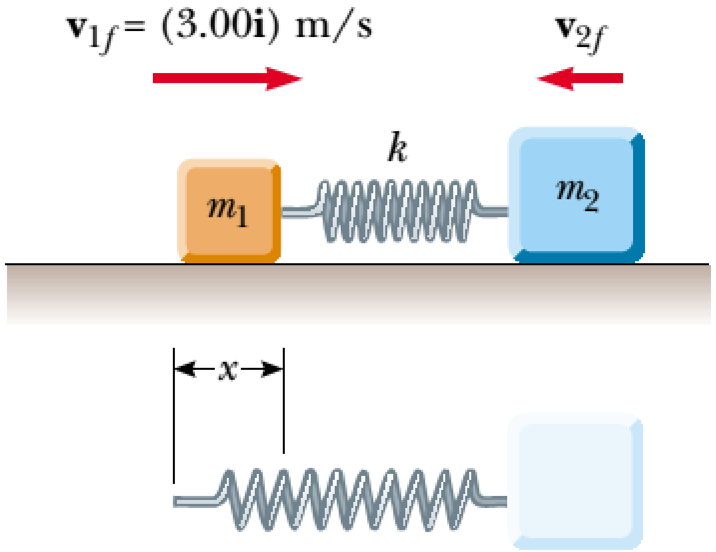
Colisões

(b) Qual a compressão da mola no instante da colisão

- Como não existem forças de atrito, podemos aplicar a conservação da energia mecânica

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

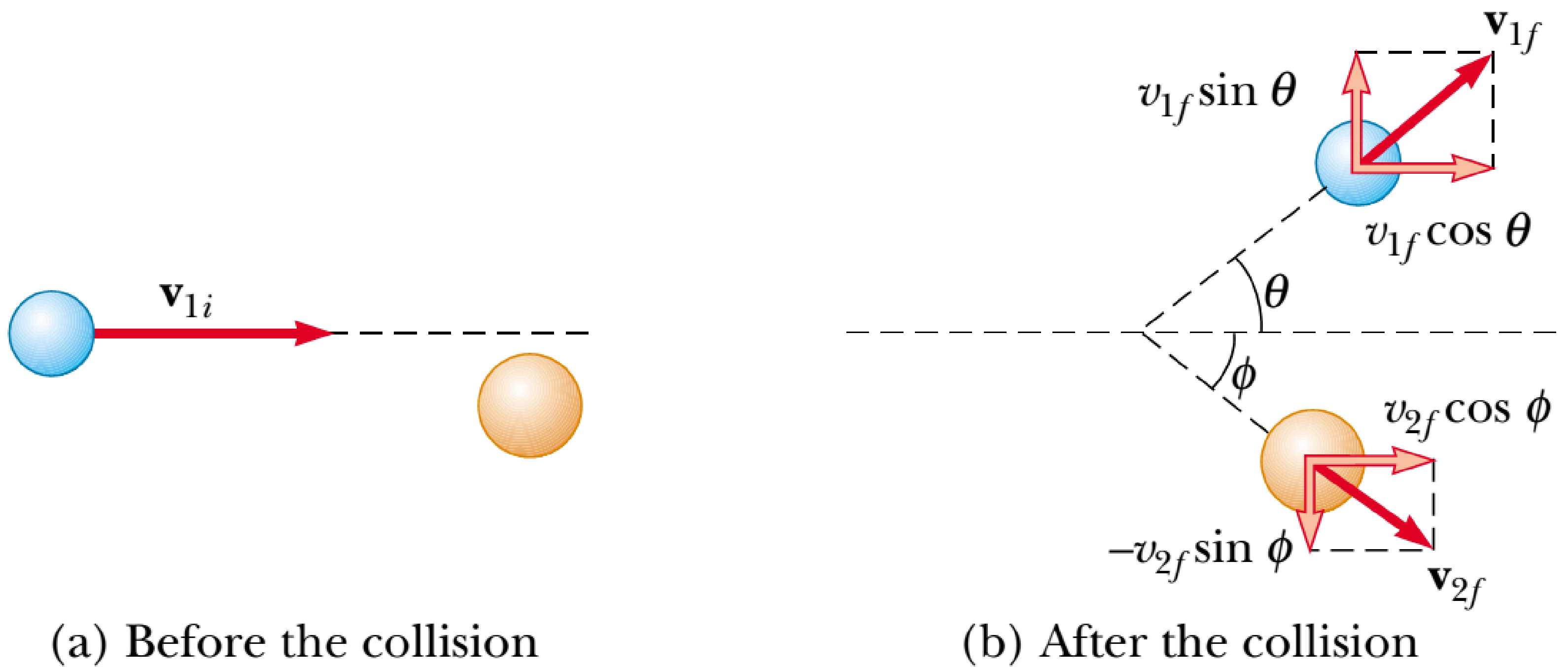
$$x = \boxed{0.173 \text{ m}}$$



(b)

Colisões

Colisões em 2-Dimensões



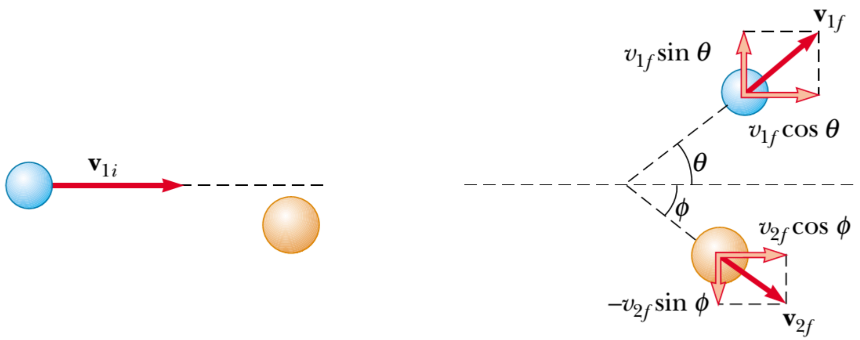
Colisões

Colisões em 2-Dimensões

- Aplicando a conservação do momento linear

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$



(a) Before the collision (b) After the collision

- para o caso em que a segunda partícula esteja em repouso inicialmente

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{1f}\sin\theta - m_2 v_{2f}\sin\phi$$

- Se colisão for elástica ainda temos:

$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$$

Colisões

Em um jogo de bilhar um jogador que atingir a bola 2 na caçapa do canto. Se o ângulo para canto é de 35º, qual é o ângulo que a bola branca é refletida?

- A bola alvo está em repouso, então:

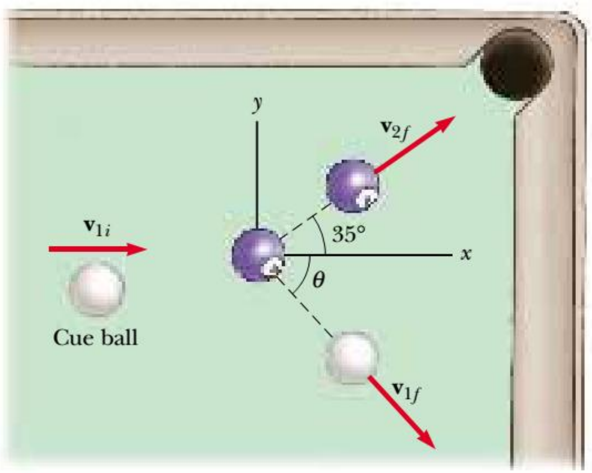
$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2$$

- Como m1 = m2:

$${v_{1i}}^2 = {v_{1f}}^2 + {v_{2f}}^2$$

- Aplicando a conservação do momento em duas dimensões:

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$



Colisões

- Elevando ao quadrado a última equação:

$$v_{1i}^{\,2} = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) = v_{1f}^{\,2} + v_{2f}^{\,2} + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

- O Ângulo entre v_{1f} e v_{2f} é θ+35º : $\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f} = v_{1f} v_{2f} \cos(\theta + 35°)$

- Assim:

$$\left.\begin{aligned} v_{1i}^{\,2} &= v_{1f}^{\,2} + v_{2f}^{\,2} + 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35°) \\ v_{1i}^{\,2} &= v_{1f}^{\,2} + v_{2f}^{\,2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 &= 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35°) \\ 0 &= \cos(\theta + 35°) \end{aligned}$$

$$\theta = \boxed{55°}$$

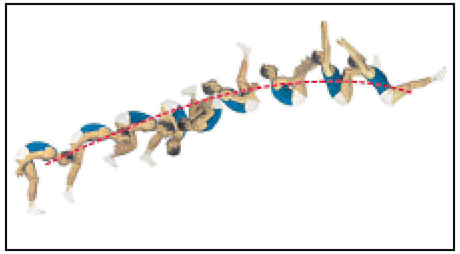
Centro de Massa

O centro de massa de um sistema se move como se toda a massa do sistema esteja concentrada nesse ponto.

Se a massa total do sistema é M e a resultante de forças sobre o sistema seja $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$

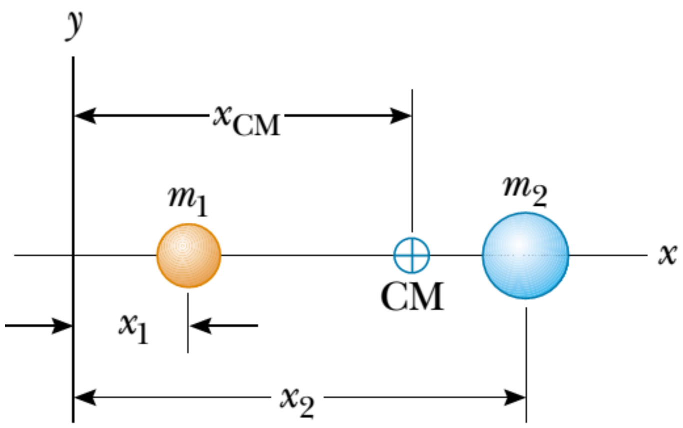
Então a aceleração do CM é dada por:

$$\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} / M.$$



Centro de Massa

O centro de massa de duas partículas sobre o eixo x:



$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Centro de Massa

Estendendo para n partículas

$$x_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Em mais de uma dimensão

$$y_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \qquad z_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

Centro de Massa

Representação vetorial

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = x_{\mathrm{CM}}\mathbf{i} + y_{\mathrm{CM}}\mathbf{j} + z_{\mathrm{CM}}\mathbf{k}$$

$$= \frac{\sum_i m_i x_i \mathbf{i} + \sum_i m_i y_i \mathbf{j} + \sum_i m_i z_i \mathbf{k}}{M}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

$$\mathbf{r}_i \equiv x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$$

Centro de Massa

Em corpos sólidos:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \, \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \, dm$$

O centro de massa de qualquer corpo simétrico está no eixo de simetria e em qualquer plano de simetria

Centro de Massa

Qual o centro de massa do sistema?

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

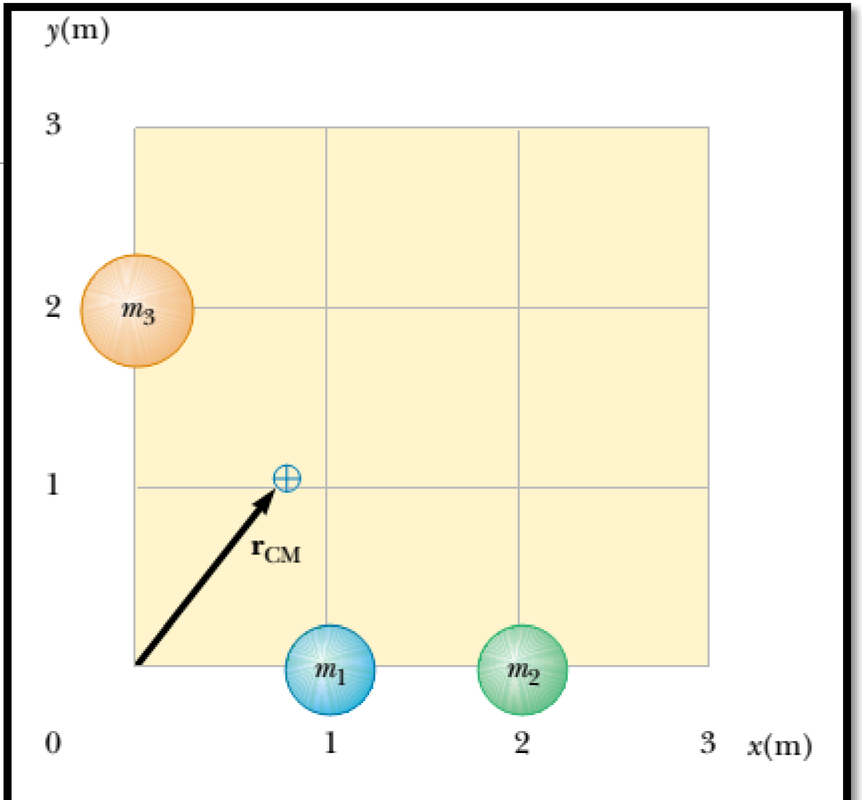
$$= \frac{(1.0\text{ kg})(1.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (2.0\text{ kg})(0\text{ m})}{1.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg} + 2.0\text{ kg}}$$

$$= \frac{3.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 0.75\text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(0) + (1.0\text{ kg})(0) + (2.0\text{ kg})(2.0\text{ m})}{4.0\text{ kg}}$$

$$= \frac{4.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 1.0\text{ m}$$

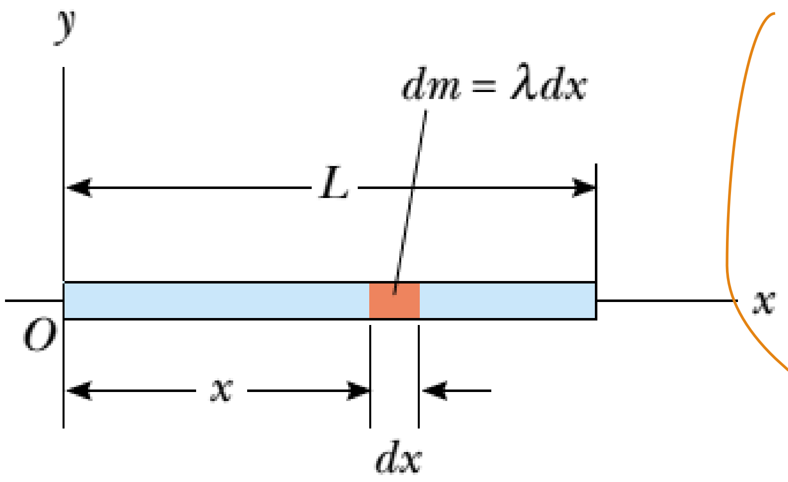


(a)

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\mathbf{i} + y_{CM}\mathbf{j} = \boxed{0.75\mathbf{i}\text{ m} + 1.0\,\mathbf{j}\text{ m}}$$

Centro de massa

Centro de massa de uma haste



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{\lambda}{M}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$\lambda = M/L$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2}}$$

Movimento de um sistema de partículas

A velocidade do centro de massa

$$\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M}$$

Momento Linear

$$M\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{\mathrm{tot}}$$

Movimento de um sistema de partículas

Aceleração do centro de massa

$$\mathbf{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

Segunda lei de Newton

$$M\mathbf{a}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$\sum \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = M\mathbf{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\mathbf{p}_{\mathrm{tot}}}{dt}$$