Física III

A Lei de Gauss

FAESA

Prof. VICTOR M. MIRANDA

Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- Como determinar a quantidade de carga no interior de uma superfície fechada examinando o campo elétrico sobre a superfície;
- O que significa fluxo elétrico e como calculá-lo;
- Como a lei de Gauss relaciona o fluxo elétrico através de uma superfície fechada à carga englobada pela superfície;
- Como usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico produzido por distribuições simétricas de carga;
- Como usar a lei de Gauss para determinar a distribuição de carga a partir do campo elétrico;
- Como calcular o campo elétrico ou a distribuição de carga em um condutor carregado e em um corpo isolante uniformemente/não uniformemente carregado, para ambos com e sem cavidade.

Fluxo de um Campo Elétrico Uniforme

- Para uma **superfície plana e campo elétrico uniforme:**

$$\Phi_E = EA$$

- Descreveremos o fluxo elétrico, Φ_E, como o número de linhas de campo elétrico que atravessam uma dada área A.

  - ✓ Quando a **área aumenta**, um **número maior de linhas de $\vec{E}$** passa através dela, fazendo **aumentar o fluxo elétrico**.

  - ✓ Sabemos que **campos elétricos mais fortes** correspondem a **linhas de campo agrupadas mais compactamente** e, portanto, **mais linhas de campo por unidade de área (densidade de fluxo)**, de modo que novamente o **fluxo elétrico é maior.**

Fluxo de um Campo Elétrico Uniforme

Generalizando:

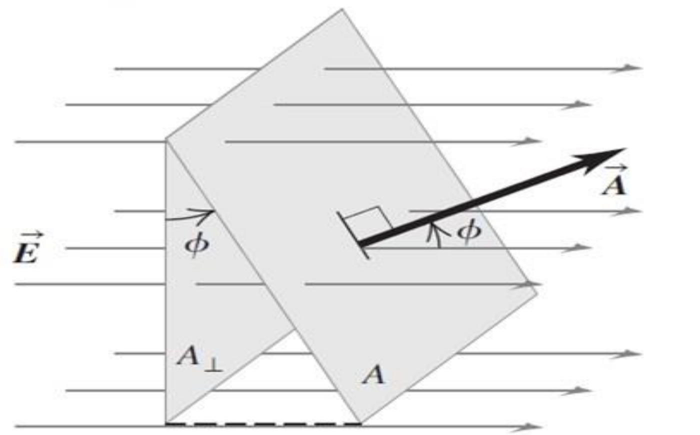
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

$$\Phi_E = EA \cos \phi$$

$$\Phi_E = E_{\perp} A$$

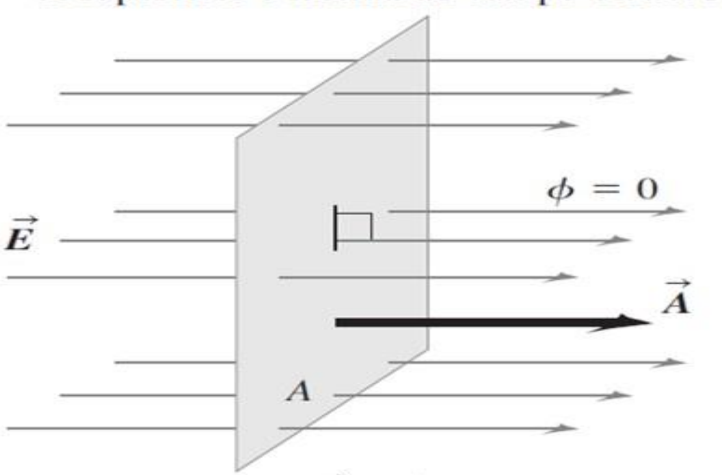
onde $E_{\perp}$ é o componente de $\vec{E}$ perpendicular ao plano da espira.

A superfície está inclinada em relação a uma orientação frontal, formando um ângulo ϕ:



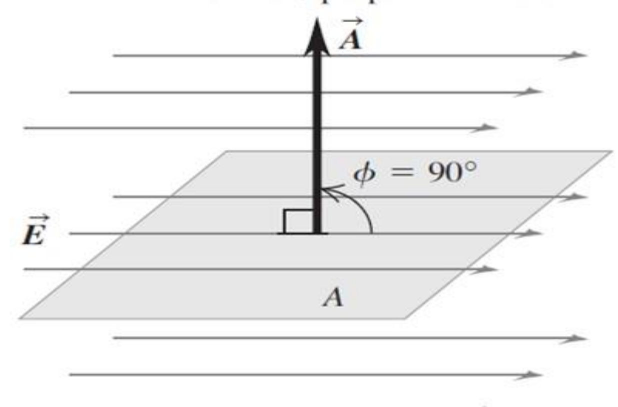
O ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{A}$ é ϕ.
O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.

A superfície é frontal ao campo elétrico:



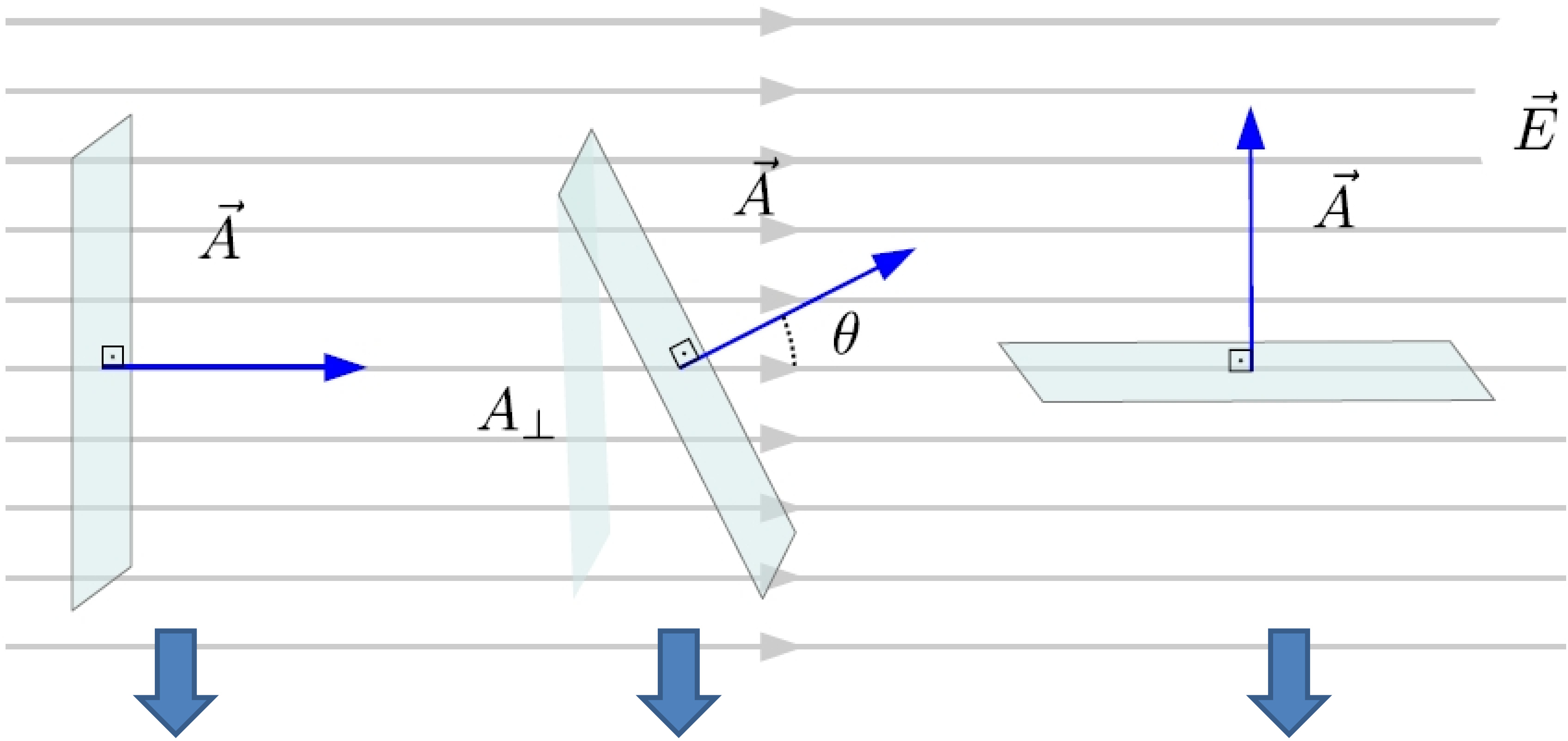
(o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{A}$ é $\phi = 0$)
O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.

A superfície é lateral ao campo elétrico:
$\vec{E}$ e $\vec{A}$ são perpendiculares



O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90° = 0$.

Fluxo de um Campo Elétrico Uniforme



$\Phi = E\,A$ $\qquad$ $\Phi = E\,A_\perp = E(A\,\cos\theta)$ $\qquad$ $\Phi = 0$

Unidade de Fluxo de Campo:

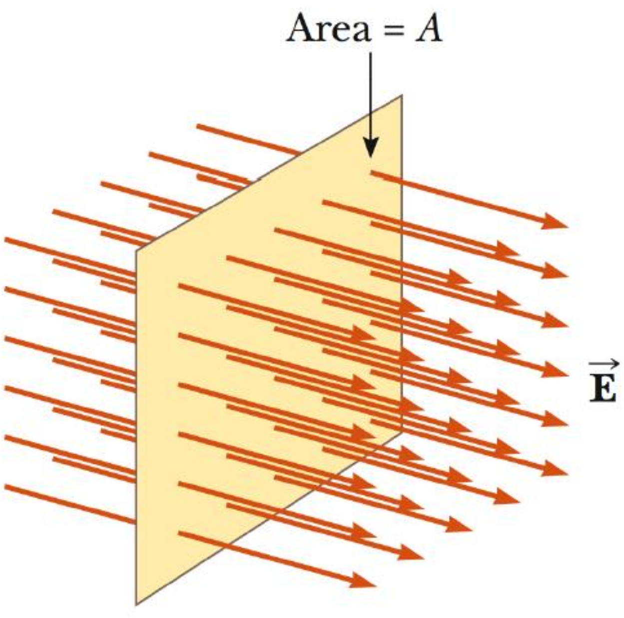
$$[\Phi] = [E][A] = Nm^2/C$$

Fluxo de um Campo Elétrico Uniforme

No S.I. a unidade de fluxo elétrico sera: Nm^2/C.

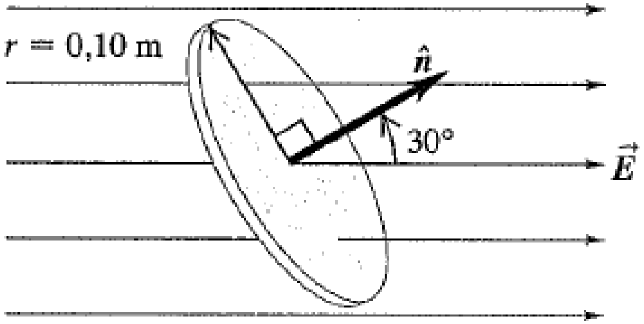
Podemos representar o vetor $\vec{A}$ por: $\vec{A} = A\hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície.

Uma superfície possui dois lados, portanto existem dois sentidos para o vetor $\vec{A}$ e $\hat{n}$. Devemos sempre especificar qual é o sentido escolhido.



Exemplo: Fluxo de um Campo Elétrico Uniforme

FLUXO ELÉTRICO ATRAVÉS DE UM DISCO Um disco com raio igual a 0,10 m está orientado de modo que seu vetor unitário normal $\hat{n}$ forme um ângulo de 30° com um campo elétrico uniforme $\vec{E}$, cujo módulo é igual a $2{,}0 \times 10^3$ N/C (Figura 22.7). (Como essa superfície não é fechada, não podemos especificar um lado 'interno' nem 'externo'. Por essa razão, tivemos de escolher o sentido de $\hat{n}$ na figura.) (a) Qual é o fluxo elétrico através do disco? (b) Qual é o fluxo elétrico através do disco depois que ele gira e passa a ocupar uma posição perpendicular ao vetor $\vec{E}$? (c) Qual é o fluxo elétrico através do disco quando sua normal é paralela ao vetor $\vec{E}$?



SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: este problema trata de uma superfície plana em um campo elétrico uniforme, portanto podemos aplicar os conceitos abordados nesta seção.

PREPARAR: a orientação do disco é semelhante à do retângulo na Figura 22.6b. Calculamos o fluxo elétrico usando a Equação (22.1).

EXECUTAR: (a) A área é $A = \pi\,(0{,}10\text{ m})^2 = 0{,}0314\text{ m}^2$ e o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{A} = A\hat{n}$ é $\Phi = 30°$, portanto

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\text{ N/C})\,(0{,}0314\text{m}^2)\,(\cos 30°)$$
$$= 54\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

(b) A normal ao disco é agora perpendicular a $\vec{E}$; logo, $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ e $\Phi_E = 0$. Neste caso, não existe nenhum fluxo elétrico através do disco.

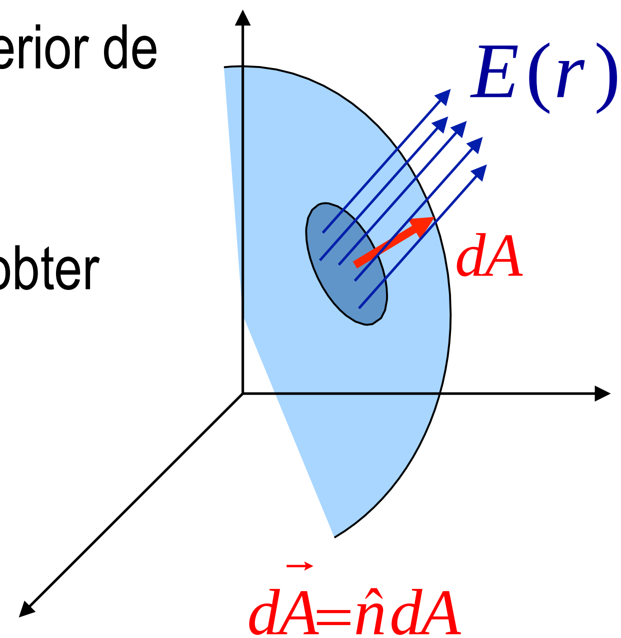
(c) A normal ao disco é paralela a $\vec{E}$; logo, $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ e o fluxo elétrico atinge seu valor máximo. Pela Equação (22.1),

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2{,}0 \times 10^3\text{ N/C})\,(0{,}0314\text{m}^2)\,(1)$$
$$= 63\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

AVALIAR: para conferir os resultados obtidos, note que a resposta ao item (a) é menor do que a resposta ao item (c). É assim que deve ser?

Fluxo de um Campo Elétrico NÃO-Uniforme

- Se o campo elétrico $\vec{E}$ **não é uniforme** e a **superfície é curva (e aberta)**, então:
  - ✓ Dividimos A em pequenos elementos de superfície *dA*, cada um deles possui um vetor unitário $\hat{n}$, perpendicular ao elemento de área *dA*, de tal forma que: $\boldsymbol{d\vec{A} = \hat{n}dA}$.
  - ✓ Como os elementos são arbitrariamente pequenos, o $\vec{E}$ pode ser considerado constante no interior de cada um.
  - ✓ Calculamos o fluxo elétrico em cada um dos elementos de área e integramos para obter o fluxo elétrico total por:



$$\Phi_E = \int E\,cos\phi\, dA = \int E_{\perp}\, dA = \int \vec{E}.d\vec{A}$$

Integral de superfície de $\vec{E}.d\vec{A}$

Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

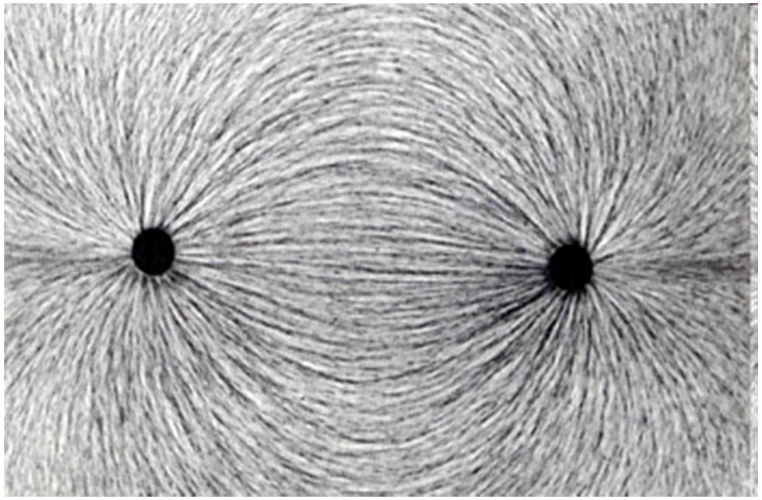
Michael Faraday (1791-1867)

- Autodidata, com apenas educação primária
- Grandes contribuições na química e na física
- Habilidade com experimentos
- Descobriu algumas leis que regem a eletricidade e o magnetismo
- Propôs a representação do campo elétrico através de linhas de força
  - Recusado pelos matemáticos da época
  - Provado posteriormente por Maxwell

Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

<u>Michael Faraday</u>

- Cargas opostas mergulhadas em óleo com barbantes finos – comprovação da existência das linhas de campo elétrico

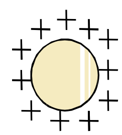


  - Como medir este fluxo elétrico?

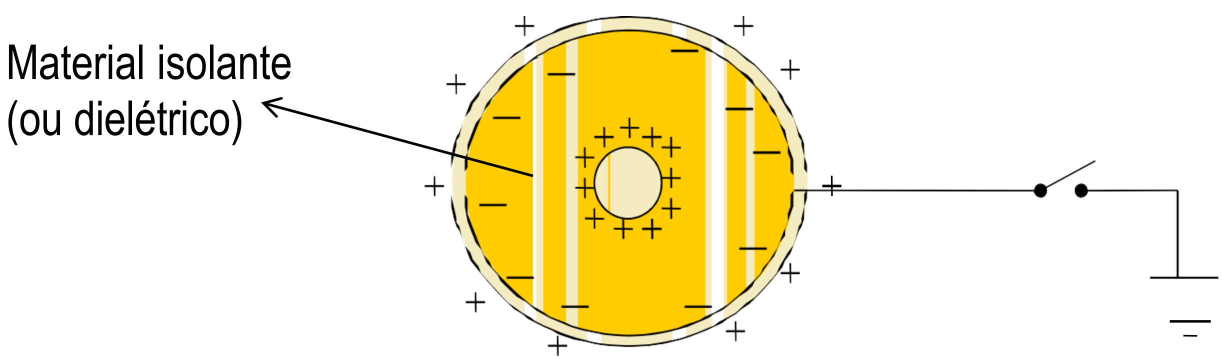
Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

Experimento de Faraday

– Seja uma esfera metálica com carga +Q



– Colocando esta esfera no interior de outra esfera metálica
  - Carga –Q induzida na parte interna
  - Carga +Q induzida na parte externa

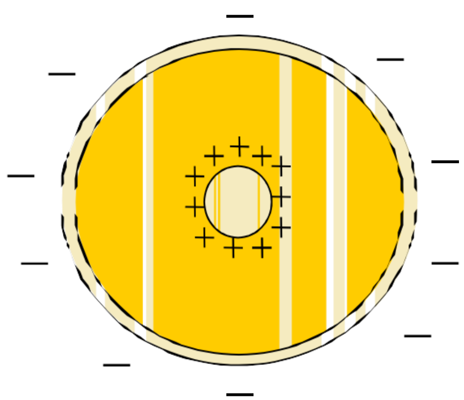


Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

Experimento de Faraday

– Ligando a esfera à terra

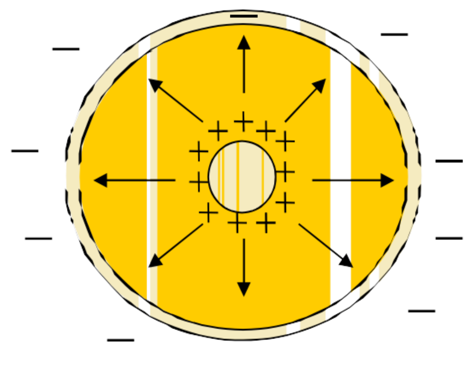
  - Carga positivas "se deslocarão" para a terra
  - Esfera externa com carga negativa (de magnitude igual à carga original com que a esfera interna era carregada).



Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

Experimento de Faraday

- Faraday interpretou o fenômeno como um fluxo de deslocamento de cargas da esfera interna para a externa



- Este fluxo é proporcional à carga total (líquida) da esfera interna:

$$\Phi \sim Q$$

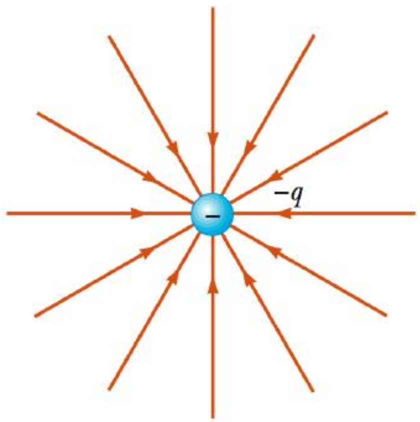
- As trajetórias de deslocamento de carga são denominadas linhas de fluxo e são indicadas por linhas de força (campo).

Linhas de Campo (ou de Força) - Revisão

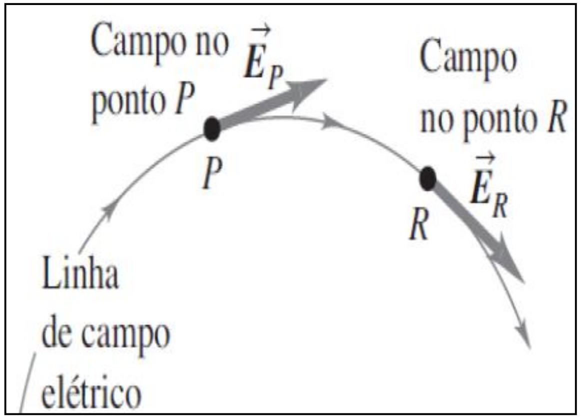
O conceito de campo elétrico pode parecer um pouco abstrato/ilúsório porque não se pode vê-lo diretamente.

As ***linhas de força*** são linhas imaginárias a partir das quais pode-se visualizar a configuração do campo elétrico de uma dada distribuição de cargas no espaço. Elas são traçadas de forma que:

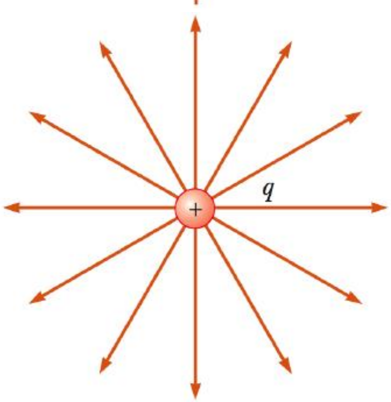
a) A tangente a cada ponto da linha fornece a direção e o sentido do campo elétrico;



b) O número de linhas por unidade de área de uma superfície perpendicular à direção das linhas, ou seja, o espaçamento entre as linhas, é proporcional ao módulo do campo;



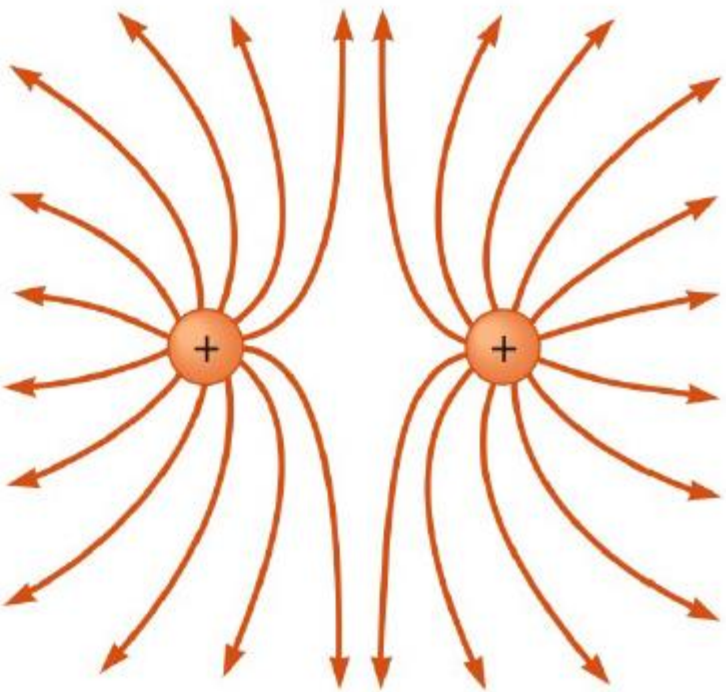
c) As linhas saem das cargas positivas e chegam nas cargas negativas.



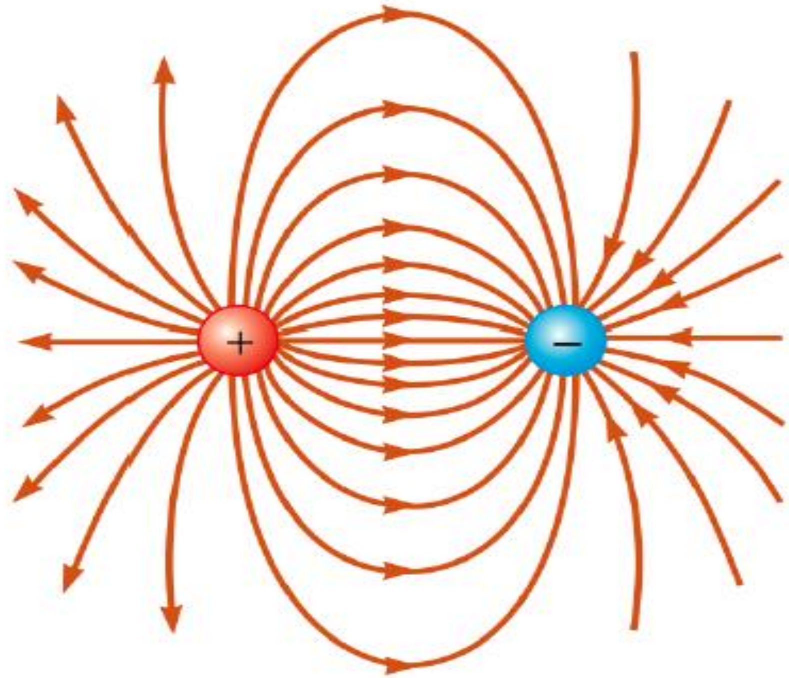
⇨ Duas linhas de campo nunca se cruzam.

http://www.youtube.com/watch?v=7vnmL853784

Linhas de Campo (ou de Força) - Revisão



Duas Cargas Iguais



Dipolo Elétrico

Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

– No capítulo anterior...

– Perguntamos: Qual é o campo elétrico produzido por uma dada distribuição de cargas em um ponto P do espaço?

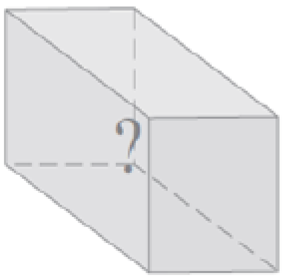
– Se invertermos a pergunta temos:

– Caso você saiba a configuração de campos elétricos em uma dada região, o que poderíamos afirmar sobre a distribuição de cargas nessa região?

Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

Superfície fechada(imaginária): engloba completamente um dado volume, não produz nenhum efeito sobre qualquer campo elétrico.

Uma caixa com uma quantidade de carga desconhecida

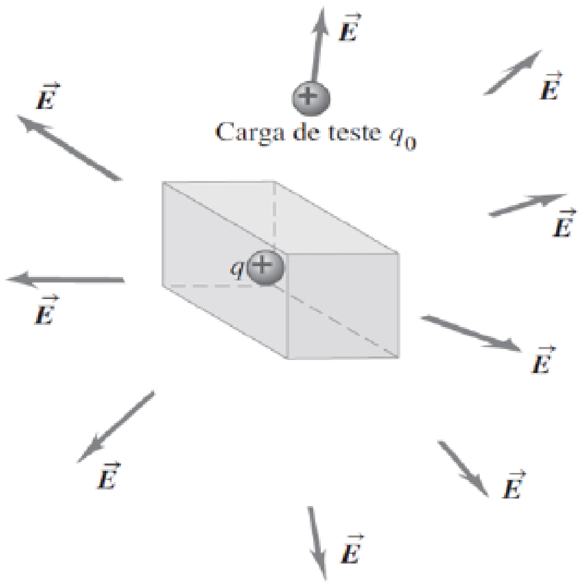


Como você pode determinar a quantidade de carga(caso haja) existente no interior da caixa?

Medindo a força $\vec{F}$ exercida sobre uma carga de teste q_0, você faz um mapa tridimensional do campo $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ existente no exterior da caixa.

Examinando os detalhes do mapa, você poderá calcular o valor exato da carga existente no interior da caixa.

Para determinar o conteúdo da caixa, basta, na verdade medir $\vec{E}$ sobre a superfície da caixa.



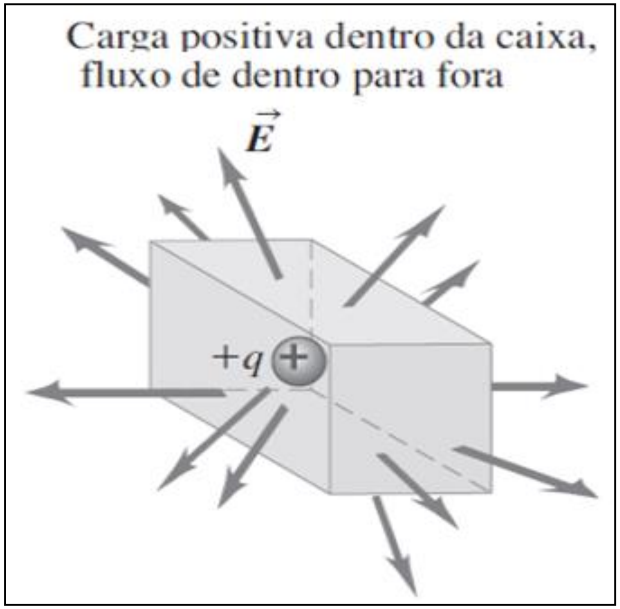
Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

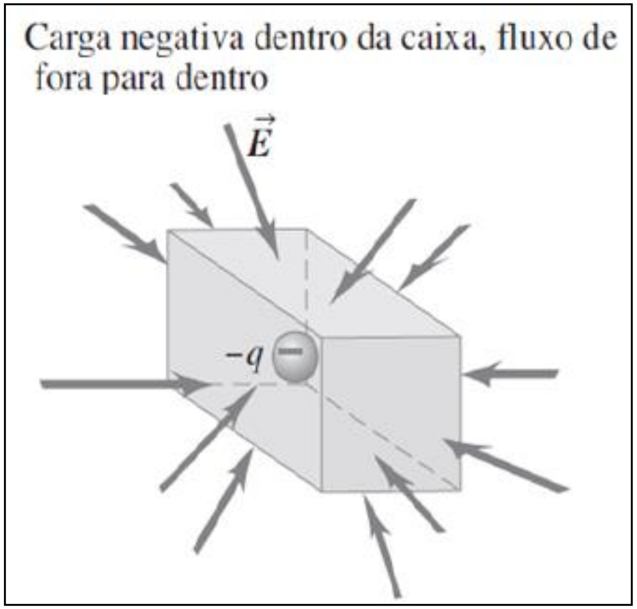
1) O sinal da carga existente no interior de uma superfície fechada determina se o fluxo está entrando ou saindo da superfície considerada.

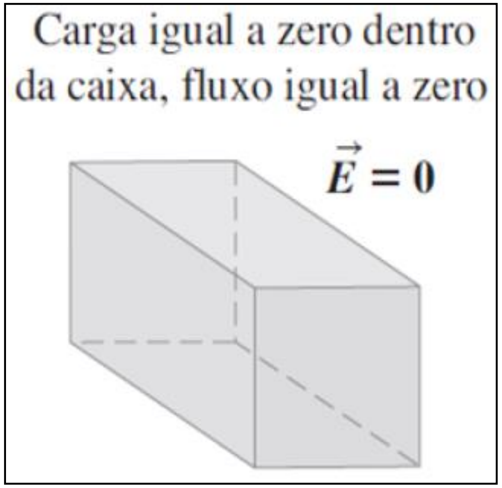
(Se q > 0 / $\vec{E}, \vec{D}$ aponta para fora ↔ fluxo elétrico sai da superfície) → $\Phi_E > 0$

(Se q < 0 / $\vec{E}, \vec{D}$ aponta para dentro ↔ fluxo elétrico entra na superfície) → $\Phi_E < 0$

(Se q = 0 no interior da superfície) → $\Phi_E = 0$



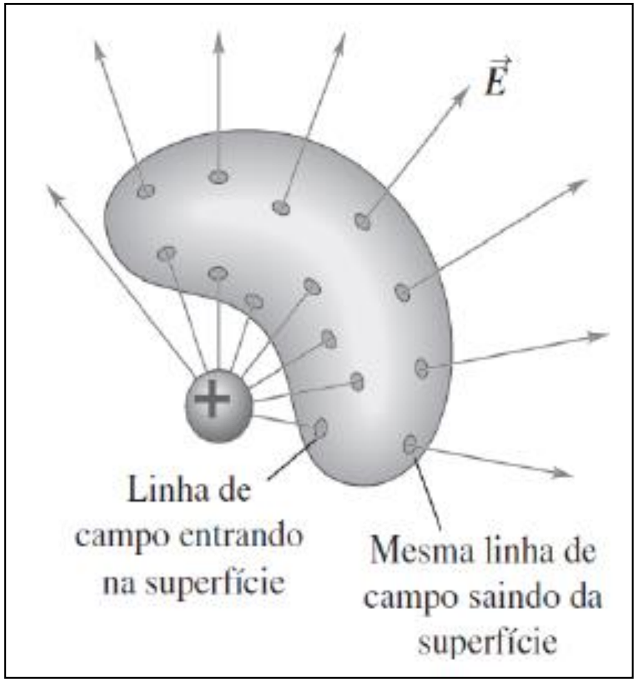


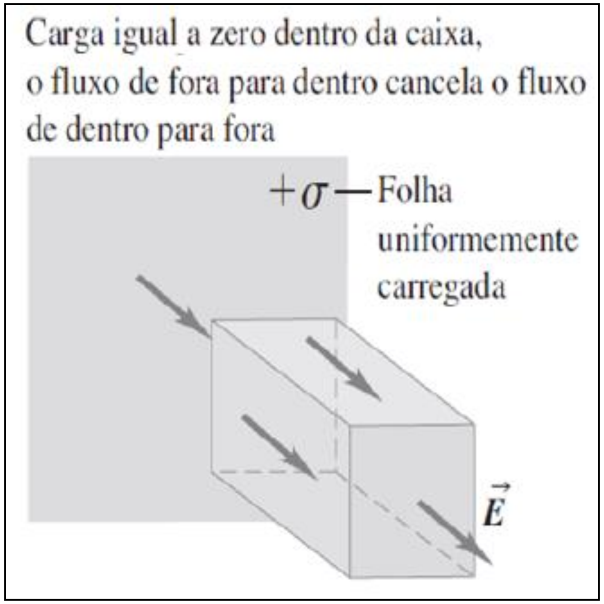


Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

2) Cargas no exterior da superfície fechada não fornecem fluxo líquido através da superfície.

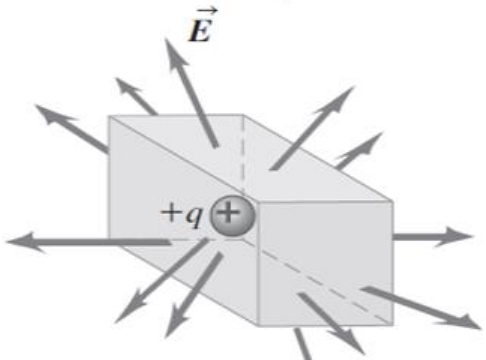
Quaisquer linhas de campo produzidas por estas cargas que entram na superfície em um dado ponto devem sair da superfície em outro ponto.



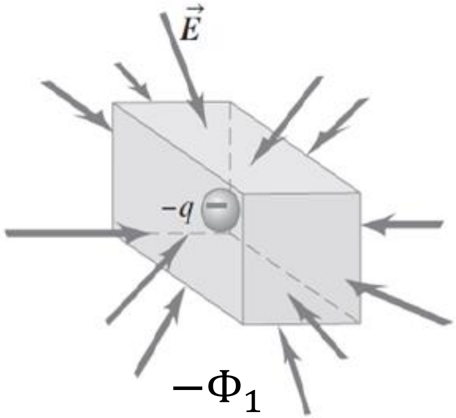


Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

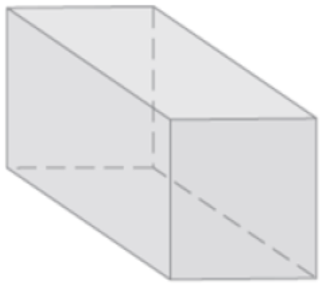
3.1) O fluxo elétrico é diretamente proporcional à carga líquida existente no interior da superfície fechada.



Φ_1

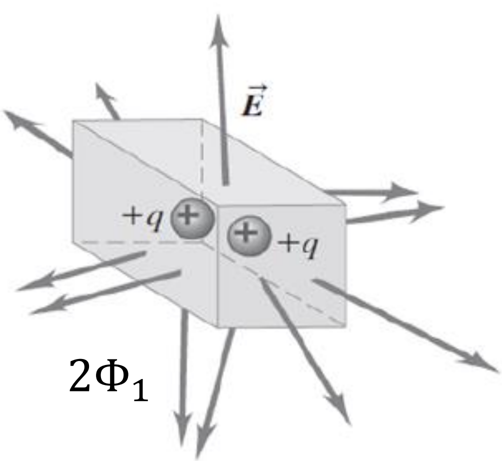


$-\Phi_1$

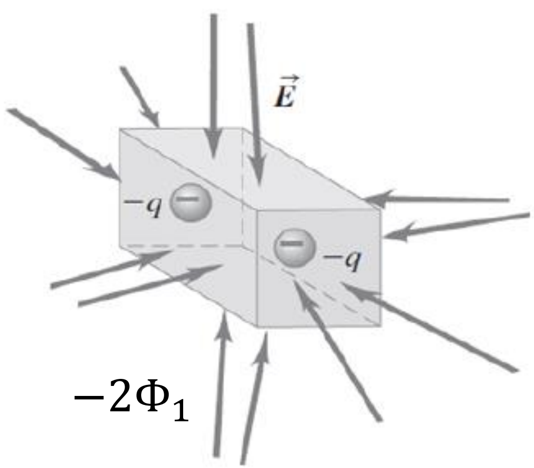


$\Phi = 0$

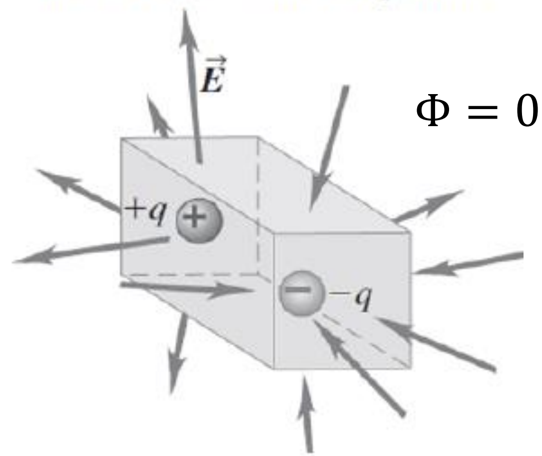
Carga *líquida* igual a zero dentro da caixa, o fluxo de fora para dentro cancela o fluxo de dentro pra fora



$2\Phi_1$



$-2\Phi_1$

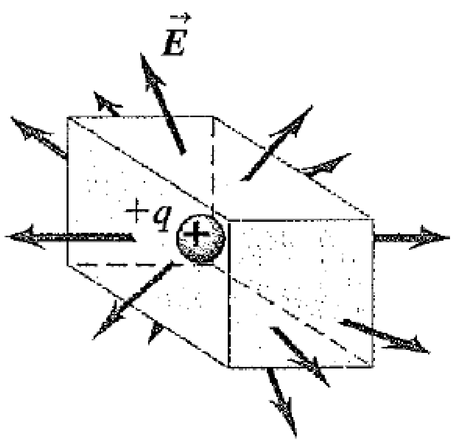


$\Phi = 0$

Fluxo Elétrico e Carga Elétrica

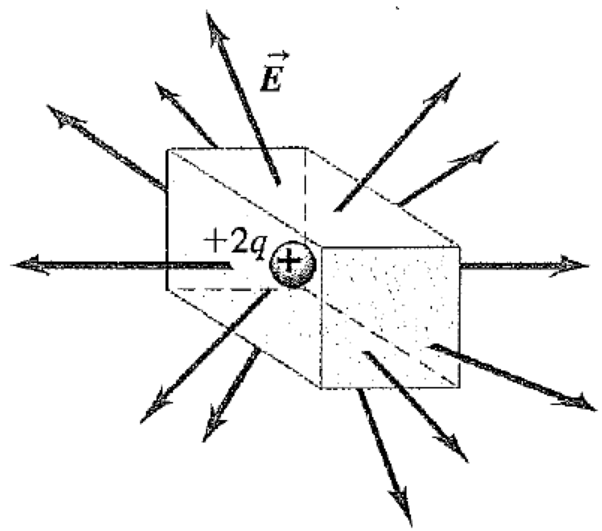
3.2) O fluxo elétrico não depende do tamanho da superfície escolhida.

(a) Uma caixa contendo uma carga



E_1, A_1, Φ_1

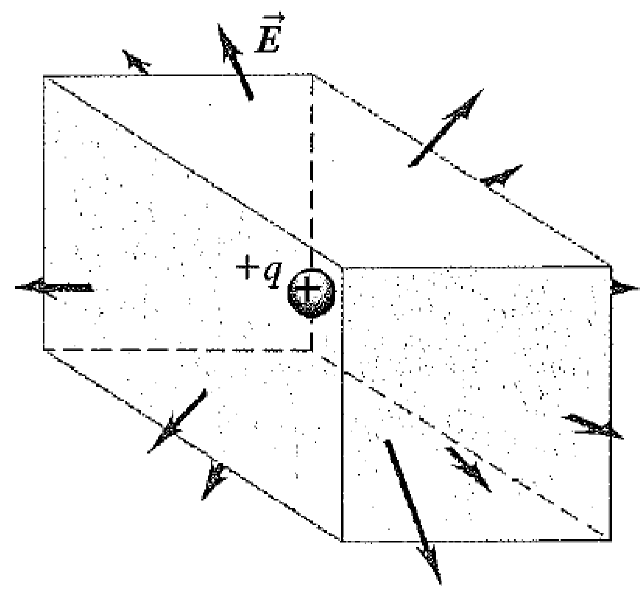
(b) Duplicar a carga englobada equivale a duplicar o fluxo



$> q, > E, > \Phi$

$q_2 = 2q_1 \rightarrow \Phi_2 = 2\,\Phi_1$

(c) Duplicar as dimensões da caixa *não altera* o fluxo



$> A, < E,$ *mantém* Φ

$A_3 = 4A_1$ *(dobro dimensões)*

$E_3 = (1/4)\,E_1$

Lei de Gauss

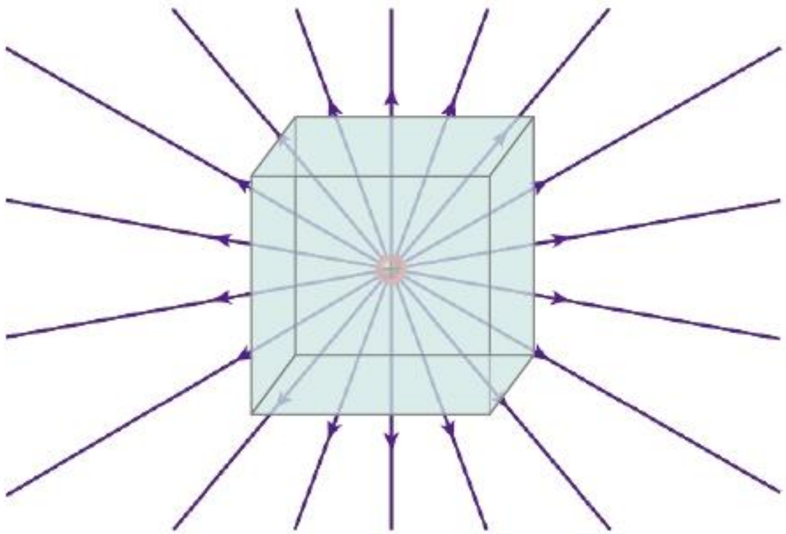
- Uma ferramenta importante para simplificar um problema é a utilização de propriedades de **simetria**.

- A lei de Gauss usa considerações de **simetria** para a determinação de campos elétricos.

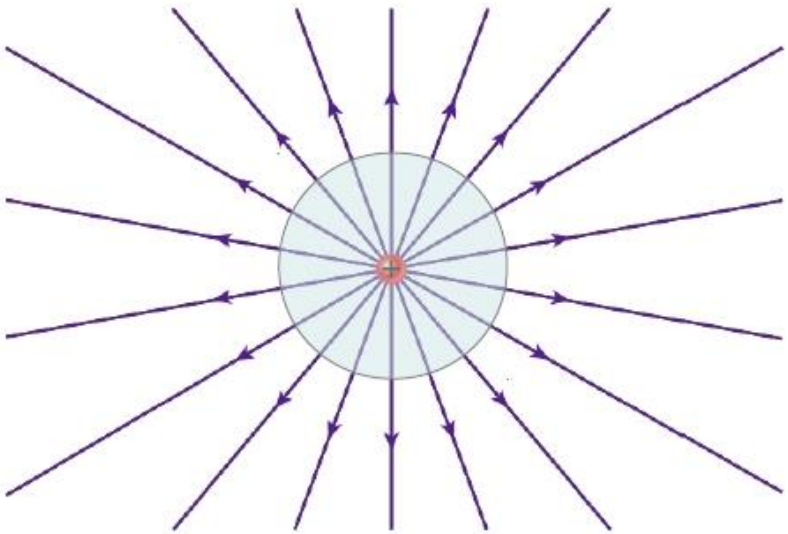
- A **Lei de Gauss relaciona a carga total existente no interior de uma superfície imaginária fechada com o campo elétrico (densidade de fluxo) de todos os pontos sobre esta superfície.**

Lei de Gauss

A Lei de Gauss pode ser aplicada a qualquer problema, rico ou pobre de simetrias. No entanto é em problemas com alta simetria que ela se mostra eficiente.



Simetria não explorada.



Simetria esférica bem explorada.

Lei de Gauss

- Para uma **superfície fechada, todos os vetores $d\vec{A}$ sempre são perpendiculares à superfície gaussiana e apontam para fora da superfície.**

- A Forma Geral da Lei de Gauss afirma que "**o fluxo elétrico total que atravessa qualquer superfície fechada é proporcional à carga elétrica total (líquida) existente no interior da superfície fechada**".

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inter}}{\epsilon_0}}$$

Integral de superfície <u>fechada</u> de $\vec{E}.d\vec{A}$

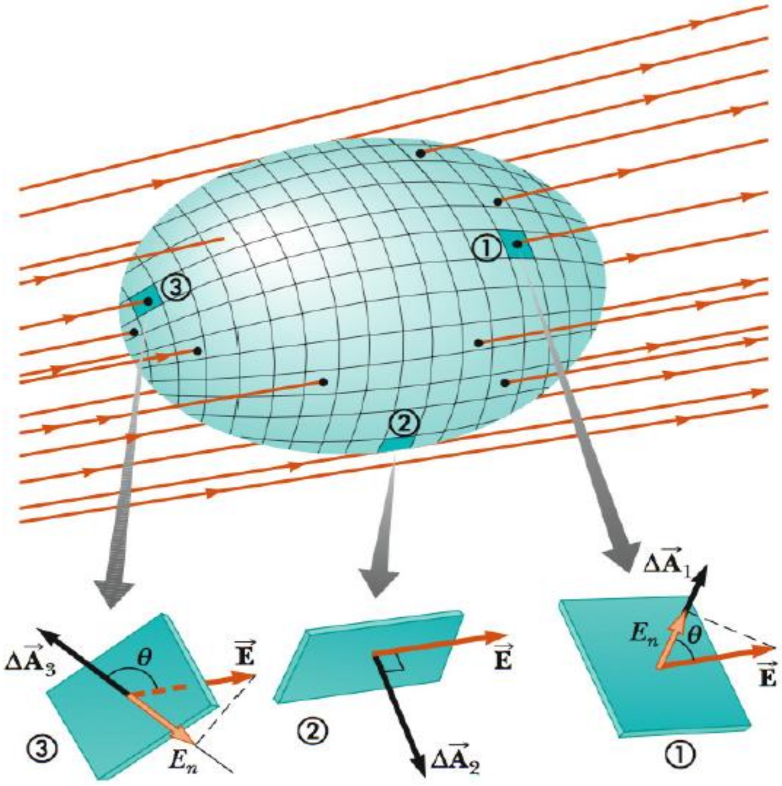
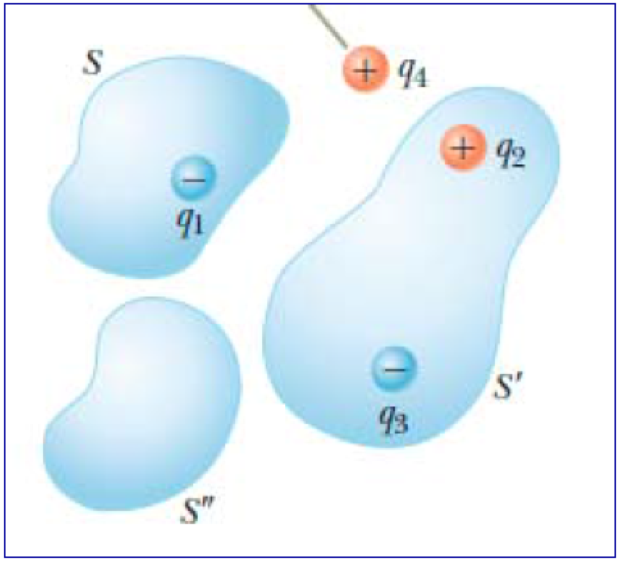


Figura 2.3: Fluxo elétrico através da superfície A. O fluxo é positivo, zero e negativo nos pontos 1, 2 e 3 respectivamente, de acordo com o ângulo θ.

Lei de Gauss

Lei de Gauss

- Relaciona o campo elétrico em uma superfície gaussiana à carga elétrica contida no interior dela
- Independente da forma da superfície gaussiana



$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- q_{int} ➡ Carga total dentro da superfície gaussiana
- $d\vec{A}$ ➡ Sempre saindo da superfície gaussiana
- $\vec{E}$ ➡ Campo elétrico na superfície gaussiana
    - Pode ser criado por cargas dentro e fora da superfície

Lei de Gauss

Suponha que, no interior da superfície fechada, exista não apenas uma carga puntiforme, mas diversas cargas $q_1, q_2, q_3, \ldots$ O campo elétrico total (resultante) $\vec{E}$ em qualquer ponto é dado pela soma vetorial do campo elétrico oriundo da ação de cada carga individual.

Então $Q_{inter} = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$ (soma algébrica)

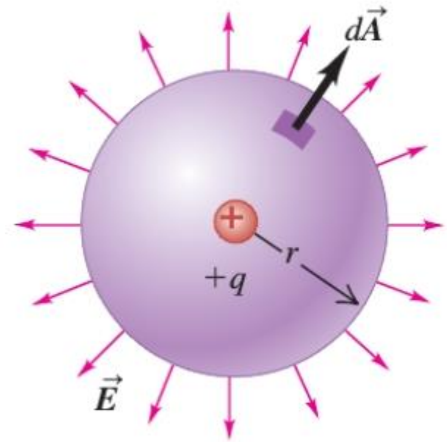
ATENÇÃO As superfícies gaussianas são imaginárias Lembre-se de que a superfície fechada na lei de Gauss é *imaginária*. Não é necessário nenhum objeto material na posição da superfície. Freqüentemente, nos referimos à superfície fechada usada na lei de Gauss como uma **superfície gaussiana.**

Exemplo: Lei de Gauss

Superfície esférica com raio r em torno de uma carga $+q$.

$$
\begin{aligned}
\Phi_E &= \oint E_\perp dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA \\
\Phi_E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

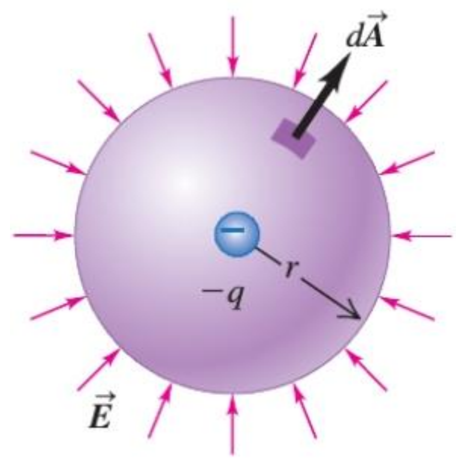
Superfície gaussiana em torno de uma carga positiva: fluxo positivo (para fora)



Superfície esférica com raio r em torno de uma carga $-q$.

$$
\begin{aligned}
\Phi_E &= \oint E_\perp dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dA \\
\Phi_E &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

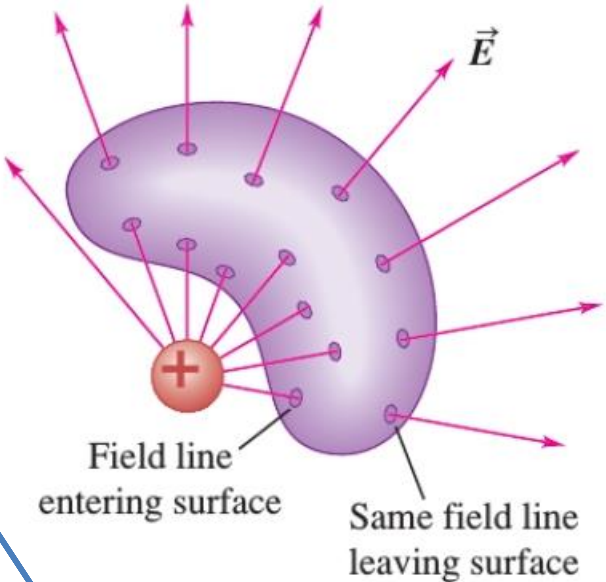
Superfície gaussiana em torno de uma carga negativa: fluxo positivo (para dentro)



Exemplo: Lei de Gauss

Superfície qualquer sem carga no interior.

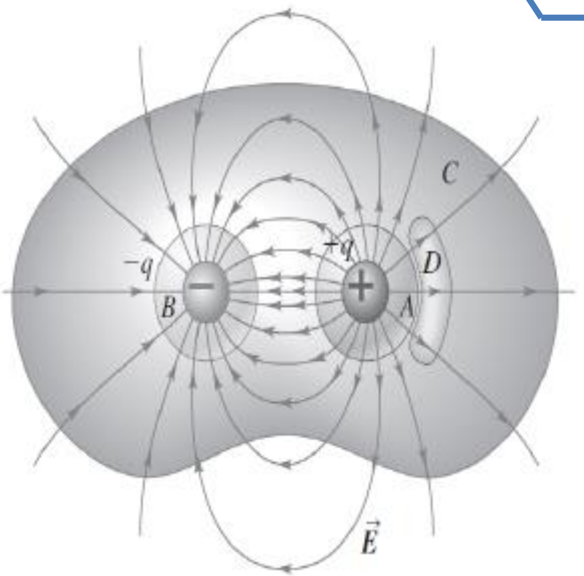
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

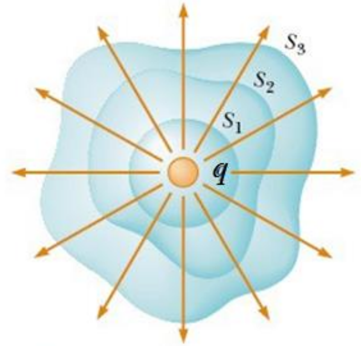


Determine o fluxo elétrico através das superfícies fechadas A, B, C e D.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inter}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E^A = \frac{q}{\epsilon_0}$$
$$\Phi_E^B = \frac{-q}{\epsilon_0}$$
$$\Phi_E^C = 0$$
$$\Phi_E^D = 0$$





Superfícies fechadas de vários formatos envolvendo uma carga q. O fluxo através de todas as superfícies é o mesmo.

Exemplo: Lei de Gauss

A Figura 23-7 mostra cinco pedaços de plástico eletricamente carregados e uma moeda neutra. A figura mostra também uma superfície gaussiana S vista de perfil. Qual é o fluxo elétrico que atravessa a superfície S se $q_1 = q_4 = +3{,}1$ nC, $q_2 = q_5 = -5{,}9$ nC e $q_3 = -3{,}1$ nC?

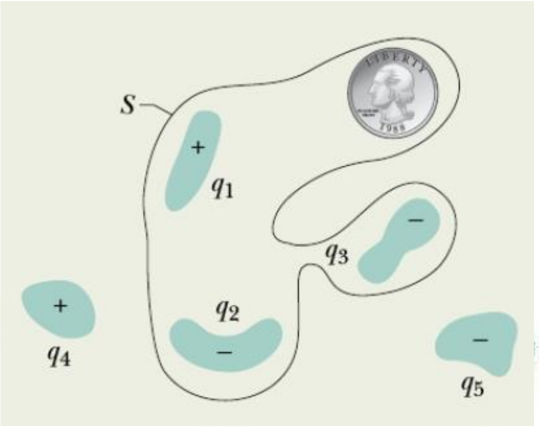


FIG. 23-7 Cinco pedaços de plástico eletricamente carregados e uma moeda neutra. Uma superfície gaussiana, vista de perfil, envolve três dos pedaços de plástico e a moeda.

IDÉIA-CHAVE O fluxo *total* Φ que atravessa a superfície S depende da carga *total* q_{env} envolvida pela superfície.

Cálculo: A moeda não contribui para Φ porque é neutra e, portanto, contém quantidades iguais de cargas positivas e negativas. As cargas q_4 e q_5 não contribuem porque estão do lado se fora da superfície S. Assim, q_{env} é igual a $q_1 + q_2 + q_3$, e a Eq. 23-6 nos dá

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$
$$= \frac{+3{,}1 \times 10^{-9}\,\mathrm{C} - 5{,}9 \times 10^{-9}\,\mathrm{C} - 3{,}1 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2}}$$
$$= -670\ \mathrm{N \cdot m^2/C}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo indica que o fluxo total que atravessa a superfície é para dentro e, portanto, a carga total envolvida pela superfície é negativa.

Exemplo: Lei de Gauss

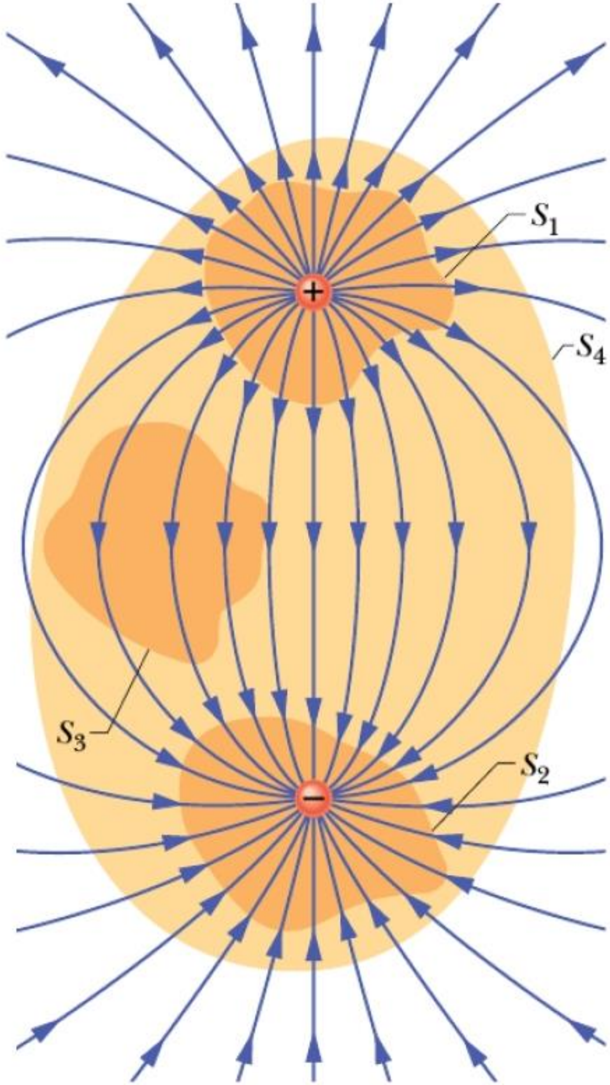
Superfície S_1. O campo elétrico aponta para fora em todos os pontos da superfície; assim, o fluxo do campo elétrico através da superfície é positivo e, de acordo com a lei de Gauss, a carga envolvida pela superfície também é positiva. (Em outras palavras, se Φ é positivo na Eq. 23-6, q_{env} também deve ser positiva.)

Superfície S_2. O campo elétrico aponta para dentro em todos os pontos da superfície; assim, o fluxo do campo elétrico é negativo e, portanto, de acordo com a lei de Gauss, a carga envolvida também é negativa.

Superfície S_3. De acordo com a lei de Gauss, como a superfície não envolve nenhuma carga o fluxo do campo elétrico através da superfície é nulo. Isso é razoável, já que todas as linhas de campo que entram na superfície pela parte de cima saem pela parte de baixo.

Superfície S_4. A carga *total* envolvida pela superfície é nula, já que as cargas positiva e negativa envolvidas pela superfície têm o mesmo valor absoluto. Assim, de acordo com a lei de Gauss o fluxo do campo elétrico através dessa superfície deve ser zero. Isso é razoável, já que o número de linhas de campo que entram na superfície pela parte de baixo é igual ao número de linhas de campo que saem pela parte de cima.

O que aconteceria se colocássemos uma carga gigantesca Q nas proximidades da superfície S_4 da Fig. 23-6? A configuração de linhas de campo certamente seria modificada, mas o fluxo total através das quatro superfícies gaussianas continuaria o mesmo. Isso é uma conseqüência do fato de que todas as linhas de campo produzidas pela carga Q atravessariam totalmente as quatro superfícies gaussianas sem contribuir para o fluxo total. O valor de Q não apareceria de nenhuma forma na lei de Gauss, já que Q estaria do lado de fora das quatro superfícies gaussianas que estamos discutindo.



Lei de Gauss

Forma Geral da Lei de Gauss (em termos do campo elétrico):

$$\Phi_E = \boxed{\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \oint E\,dA\,cos\phi} = \boxed{\frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho\,dV = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_A \sigma\,dA = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_L \lambda\,dL}$$

Refere-se à SUPERFÍCIE GAUSSIANA

Refere-se à DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS

Lei de Gauss

Forma Geral da Lei de Gauss (em termos da densidade de fluxo):

$$\Phi_E = \boxed{\oint (\varepsilon_o \vec{E}) \, . \, d\vec{A} = \oint (\vec{D}) . \, d\vec{A}} = \boxed{Q_{int} = \int_V \rho \, dV = \int_A \sigma \, dA = \int_L \lambda \, dL}$$

Refere-se à SUPERFÍCIE GAUSSIANA

Refere-se à DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS

Lei de Gauss

– Lembra daquelas perguntas no início do capítulo ???

➢ Qual é o campo elétrico produzido por uma dada distribuição de cargas em um ponto P do espaço?

– Caso você saiba a configuração de campos elétricos em uma dada região, o que poderíamos afirmar sobre a distribuição de cargas nessa região?

Lei de Gauss

– A Lei de Gauss é válida para *qualquer* **distribuição de cargas** e para *qualquer* **superfície fechada.**

- Quando conhecemos a distribuição de cargas, usando a Lei de Gauss, obtemos o campo elétrico;

- Quando conhecemos o campo elétrico, usando a Lei de Gauss, podemos determinar a distribuição de cargas.

Exemplo: Lei de Gauss

Teste sua compreensão da Seção 22.3 A Figura 22.16 mostra seis cargas puntiformes, todas elas localizadas no mesmo plano. Cinco superfícies gaussianas – S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 – englobam cada qual uma parte desse plano, e a Figura 22.16 mostra a intersecção de cada superfície com o plano. Classifique essas cinco superfícies por ordem do fluxo elétrico que as atravessa, desde o mais positivo até o mais negativo. ■

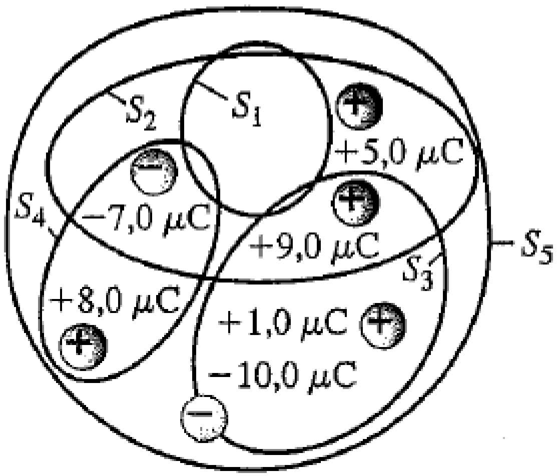


Figura 22.16 Cinco superfícies gaussianas e seis cargas puntiformes.

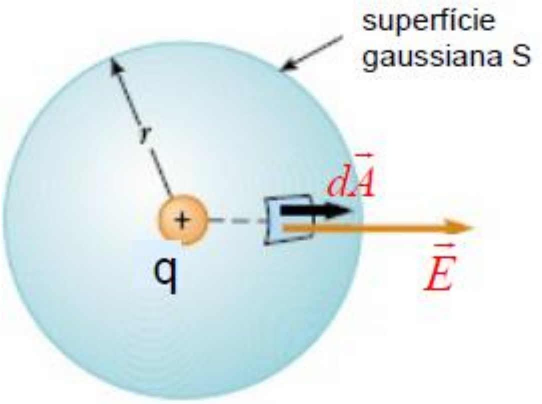
Aplicações da Lei de Gauss

A lei de Gauss é *geral*, mas a sua utilidade no cálculo do campo elétrico criado por uma distribuição de cargas depende da simetria desta distribuição.

1) Carga puntiforme (ou pontual): simetria esférica

- ✓ Gaussiana: superfície esférica de raio *r* em torno de *q*

$$\text{Nos pontos de } S: \begin{cases} \vec{E} \quad \text{paralelo} \quad \text{a} \quad d\vec{A} \\ |\vec{E}| = \text{uniforme} \end{cases}$$



$$\frac{q}{\varepsilon_o} = \oint_{esfera} \vec{E}.d\vec{A} = \oint_{esfera} E\, dA \cos(0^o)$$

$$\frac{q}{\varepsilon_o} = E\,(4\pi r^2)$$

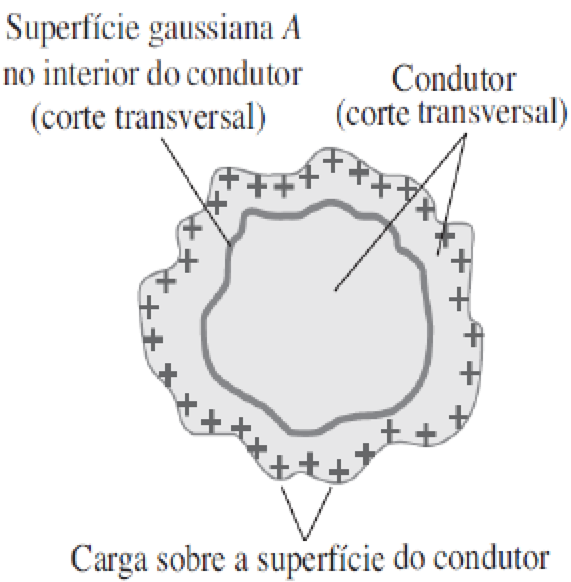
$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\,\hat{r}}$$

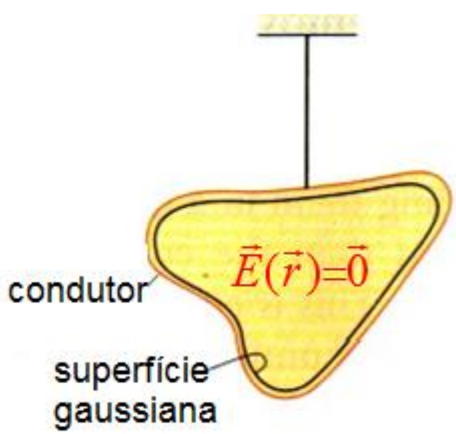
(Campo elétrico $\vec{E}$ **produzido por** uma carga puntiforme *q*)

Cargas em Condutores

- O campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é sempre nulo. Assim sendo, a lei de Gauss nos permite demonstrar que, nesta situação, todo o excesso de carga no condutor deverá ficar inteiramente localizado sobre a sua superfície e não no interior do material.

- Veremos posteriormente o caso quando há uma cavidade no interior do condutor.





No equilíbrio eletrostático, $\vec{E} = 0$ em qualquer ponto do interior de um condutor sem buracos; caso contrário, as cargas estariam em movimento.

Aplicações da Lei de Gauss

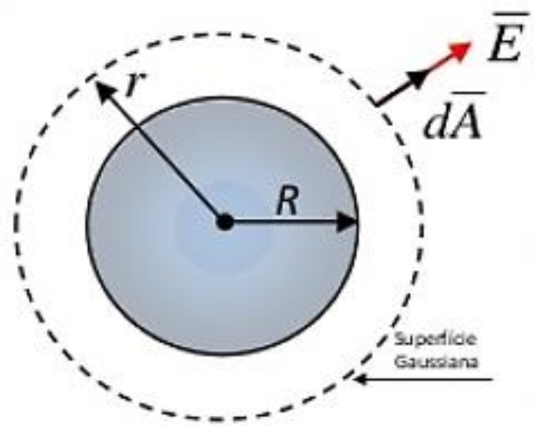
2) Campo de uma esfera condutora carregada com carga *q*

a.1) $r \geq R$ (fora)

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inter}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$



(Campo elétrico $\vec{E}$ no **exterior** de uma **esfera condutora carregada** em função de q)

a.2) $r = R$ (na superfície)

Para $r = R$:

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

(Campo elétrico $\vec{E}$ na superfície de uma **esfera condutora carregada** em função de q)

Aplicações da Lei de Gauss

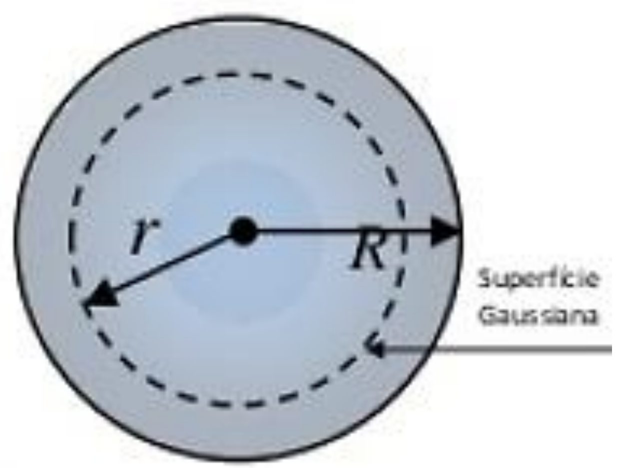
2) Campo de uma esfera condutora carregada com carga *q*

b) $r < R$ **(dentro)**

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inter}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_o}(0)$$

$$\boxed{E = 0}$$



(Campo elétrico $\vec{E}$ no **interior** de uma **esfera condutora carregada** em função de q)

Aplicações da Lei de Gauss

2) Campo de uma esfera condutora carregada com carga *q* (RESUMO e ANÁLISE GRÁFICA)

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inter}}{\epsilon_0}$$

Para $r > R$:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

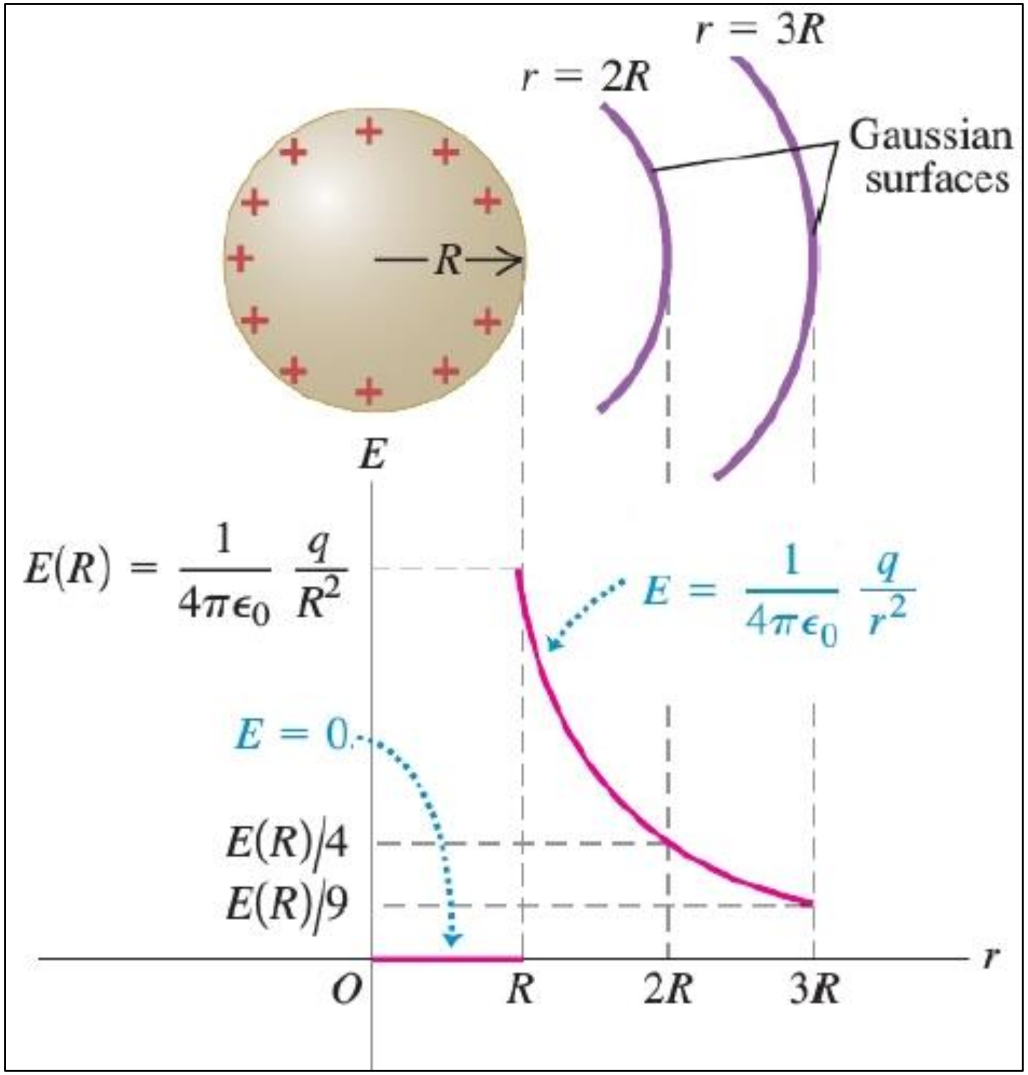
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Para $r = R$:

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Para $r < R$:

$$E = 0$$

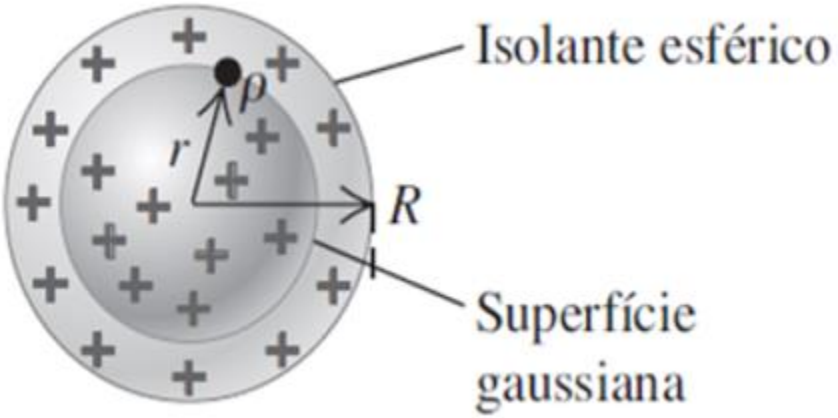


Aplicações da Lei de Gauss

3) Esfera Isolante Uniformemente Carregada

Uma carga Q positiva é **distribuída uniformemente** ao longo do **volume** de uma esfera **isolante** de raio R e densidade volumétrica ρ.

Determinar o módulo de $\vec{E}$ em um ponto P a uma distância *r* do centro da esfera.



Solução:

- Sistema possui simetria esférica;
- Sup. Gaussiana: esfera concêntrica à distribuição de cargas, com raio *r.*
- Pela simetria, $|\vec{E}|$ é o mesmo em todos os pontos sobre a superfície gaussiana e a direção de $\vec{E}$ é radial em todos os pontos da superfície.

Aplicações da Lei de Gauss

a) $\boldsymbol{r \geq R}$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inter}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

(Campo elétrico $\vec{E}$ no **exterior** de uma **esfera isolante / uniformemente carregada** em função de Q)

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_o}\int_V \rho\, dV = \frac{1}{\epsilon_o}\int_0^r \rho\, dV\,;$$

$$\int_0^r \rho\, dV = \int_0^R \rho\, dV + \cancel{\int_R^r 0\, dV} = \rho\int_0^R dV$$

Dica!! Tome a seguinte relação: $dV = 4\pi r^2 dr$

$$\rho\int_0^R dV = \rho\int_0^R 4\pi r^2 dr$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_o}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_o}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r^2}}$$

(Campo elétrico $\vec{E}$ no **exterior** de uma **esfera isolante/ uniformemente carregada** em função de ρ)

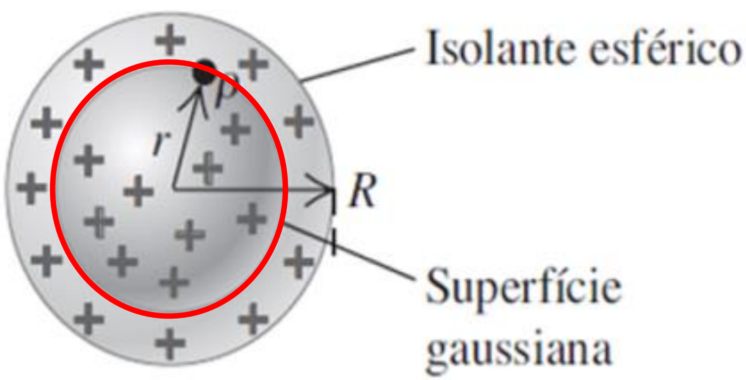
Aplicações da Lei de Gauss

b) $\mathbf{0 \leq r \leq R}$ Dica!! Tome a seguinte relação: $\boldsymbol{dV = 4\pi r^2 dr}$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_o}\int_V \rho\, dV = \frac{\rho}{\epsilon_o}\int_0^r dV = \frac{\rho}{\epsilon_o}\int_0^r 4\pi r^2\, dr = \frac{\rho}{\epsilon_o}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

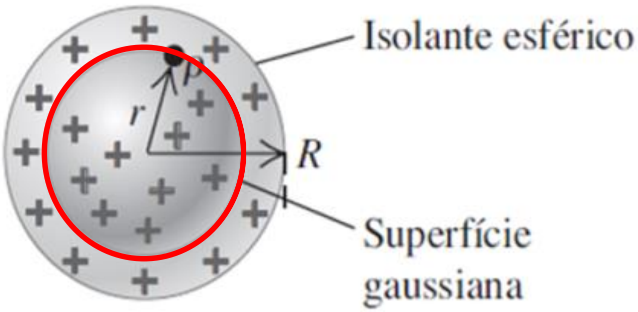
$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_o}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho\, r}{3\epsilon_o}}$$

(Campo elétrico $\vec{E}$ no **interior** de uma **esfera isolante / uniformemente carregada** em função de ρ)



Aplicações da Lei de Gauss

b) $0 \leq r \leq R$



Sabemos que, $\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$, o volume interno englobada pela superfície gaussiana é $V_{int} = \frac{4\pi r^3}{3}$, assim a carga interna será:

$$Q_{inter} = \rho V_{int} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

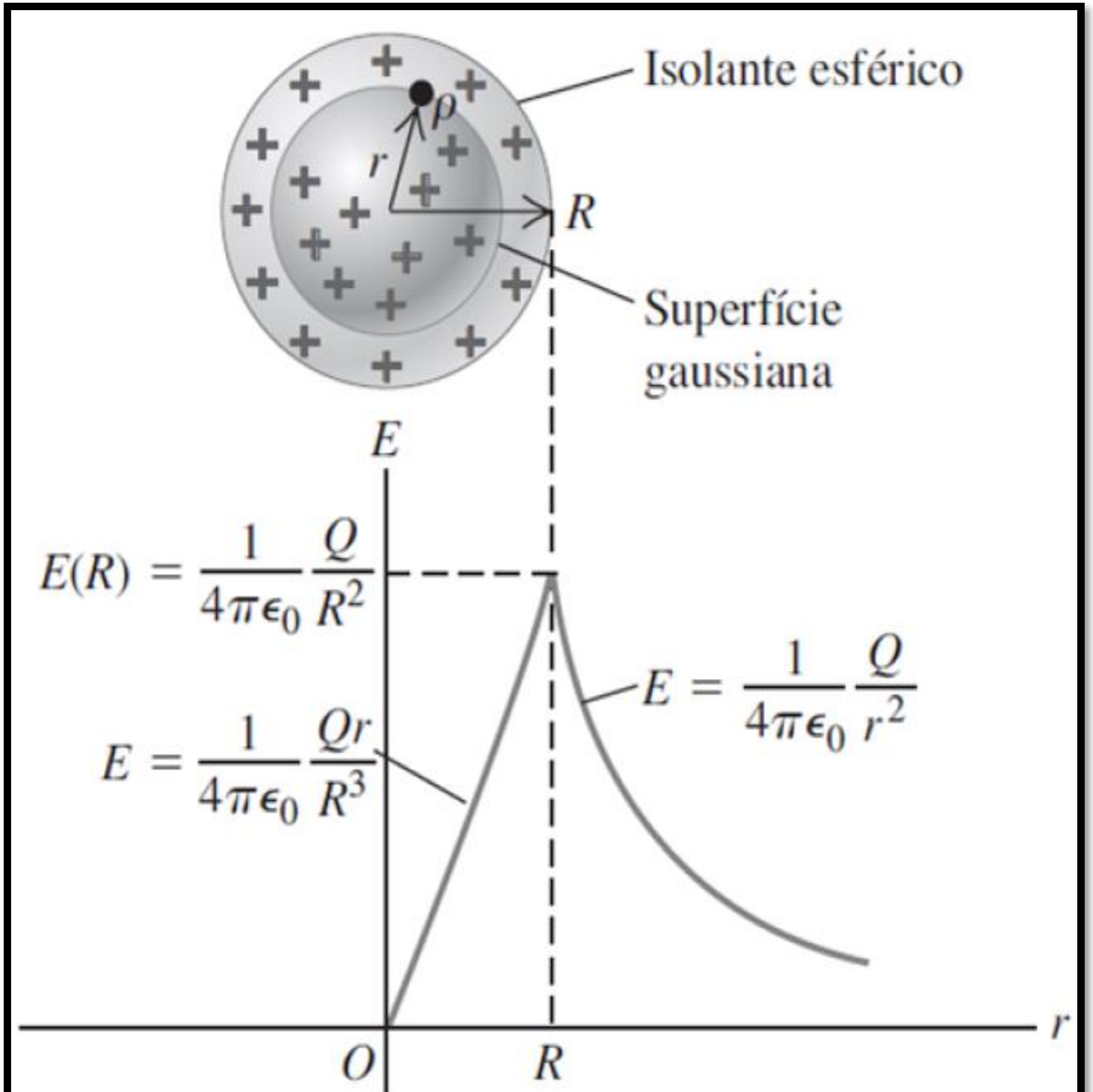
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}}$$

(Campo elétrico $\vec{E}$ no **interior** de uma **esfera isolante/ uniformemente carregada** em função de Q)

Aplicações da Lei de Gauss

RESUMO: Esfera Isolante Uniformemente Carregada



Aplicações da Lei de Gauss

3) Esfera Isolante Uniformemente Carregada (RESUMO)

Campo Elétrico	em função de Q	em função de ρ
Dentro da esfera	$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}\hat{r}$	$\vec{E} = \frac{\rho . r}{3\varepsilon_o}\hat{r}$
Fora da esfera	$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}$	$\vec{E} = \frac{\rho . R^3}{3\varepsilon_o r^2}\hat{r}$

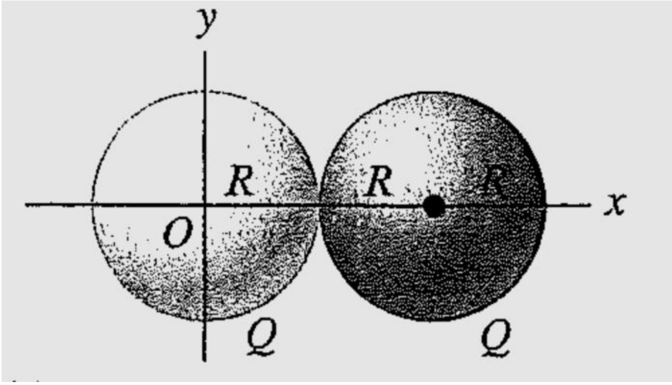
Exemplo: Esfera Isolante (Uniformemente Carregada)

Ex: Uma carga positiva $\boldsymbol{Q}$ está **distribuída uniformemente** ao longo de cada **volume** de duas esferas, ambas de raio $\boldsymbol{R}$. Uma das esferas está centralizada na origem e a outra está centralizada no ponto $x = 2R$. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico produzido por estas duas distribuições de cargas, nos seguintes pontos sobre o eixo Ox.

a) $x = 0$;

b) $x = R/2$;

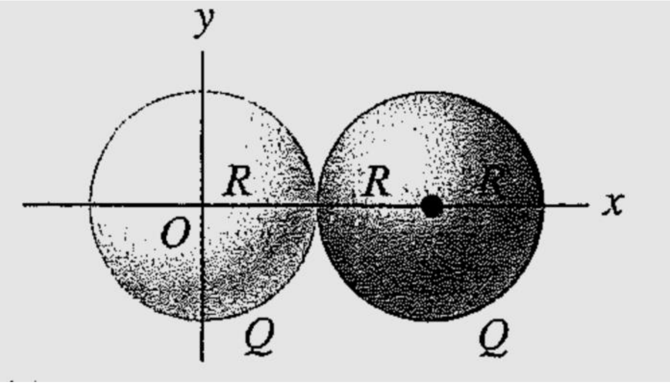
c) $x = 3R$.



Exemplo: Esfera Isolante (Uniformemente Carregada)

Ex: Uma carga positiva $\boldsymbol{Q}$ está **distribuída uniformemente** ao longo de cada **volume** de duas esferas, ambas de raio $\boldsymbol{R}$. Uma das esferas está centralizada na origem e a outra está centralizada no ponto $x = 2R$. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo elétrico produzido por estas duas distribuições de cargas, nos seguintes pontos sobre o eixo Ox.

a) $x = 0$;
b) $x = R/2$;
c) $x = 3R$.



IDENTIFY: The electric field at each point is the vector sum of the fields of the two charge distributions.

SET UP: Inside a sphere of uniform positive charge, $E = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}$.

$\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$ so $E = \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$, directed away from the center of the sphere. Outside a sphere of uniform positive charge, $E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, directed away from the center of the sphere.

EXECUTE: (a) $x = 0$. This point is inside sphere 1 and outside sphere 2. The fields are shown in Figure 22.63a.

$E_1 = \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 0$, since $r = 0$.

Figure 22.63a

$E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ with $r = 2R$ so $E_2 = \dfrac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^2}$, in the $-x$-direction.

Thus $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \dfrac{-Q}{16\pi\epsilon_0 R^2}\hat{i}$.

Exemplo: Esfera Isolante (Uniformemente Carregada)

(b) $x = R/2$. This point is inside sphere 1 and outside sphere 2. Each field is directed away from the center of the sphere that produces it. The fields are shown in Figure 22.63b.

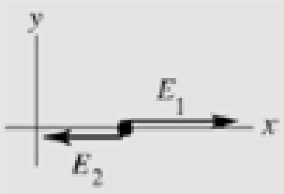


Figure 22.63b

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ with } r = R/2 \text{ so}$$

$$E_1 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ with } r = 3R/2 \text{ so } E_2 = \frac{Q}{9\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\boxed{E = E_1 - E_2 = \frac{Q}{72\pi\epsilon_0 R^2}, \text{ in the } +x\text{-direction and } \vec{E} = \frac{Q}{72\pi\epsilon_0 R^2}\hat{i}}$$

(c) $x = R$. This point is at the surface of each sphere. The fields have equal magnitudes and opposite directions, so $E = 0$.

(d) $x = 3R$. This point is outside both spheres. Each field is directed away from the center of the sphere that produces it. The fields are shown in Figure 22.63c.

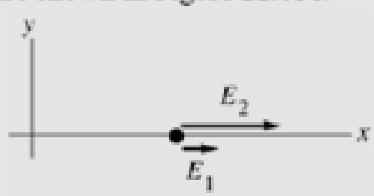


Figure 22.63c

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ with } r = 3R \text{ so}$$

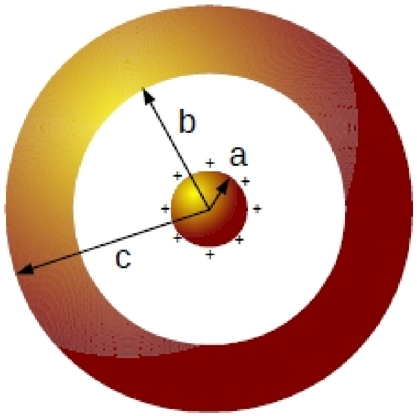
$$E_1 = \frac{Q}{36\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ with } r = R \text{ so } E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\boxed{E = E_1 + E_2 = \frac{5Q}{18\pi\epsilon_0 R^2}, \text{ in the } +x\text{-direction and } \vec{E} = \frac{5Q}{18\pi\epsilon_0 R^2}\hat{i}}$$

Exemplo: Casca Esférica (1)

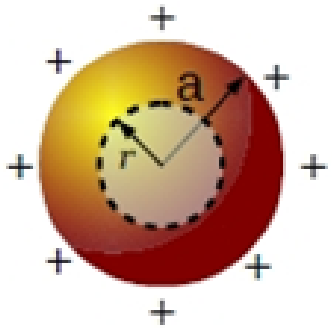
Uma esfera condutora de raio a é carregada com uma carga positiva Q. Esta esfera é colocada dentro de uma casca esférica condutora de raio interno b e externo c, com carga $2Q$. Determine o campo elétrico em todo espaço



Calculando o campo em cada região:

- $r < a$:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_t}{\epsilon_0}$$



Como não há carga no interior da superfície Gaussiana,

$$q_t = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

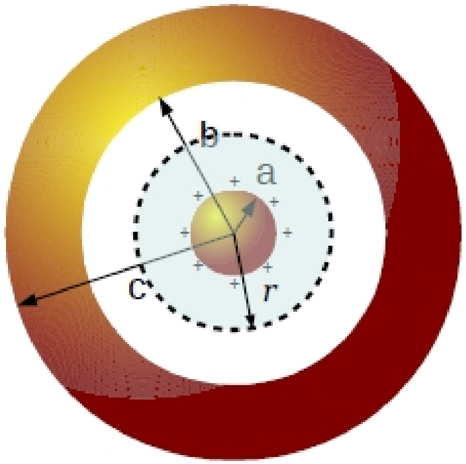
Exemplo: Casca Esférica (2)

- $a < r < b$:

A carga total dentro da superfície é a própria carga Q.

$$q_t = Q$$

Aplicando a Lei de Gauss:



$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_t}{\epsilon_0}$$

$$\oint E\, dA \cos 0° = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

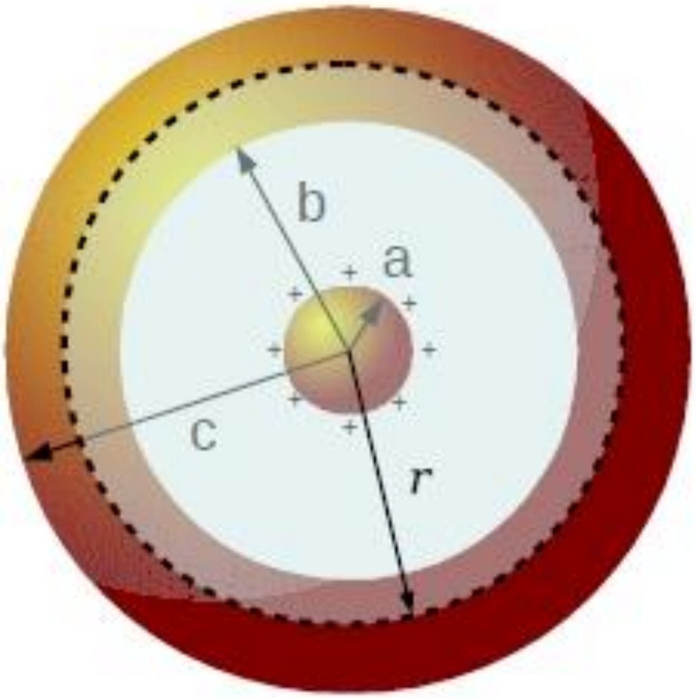
$$E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Exemplo: Casca Esférica (3)

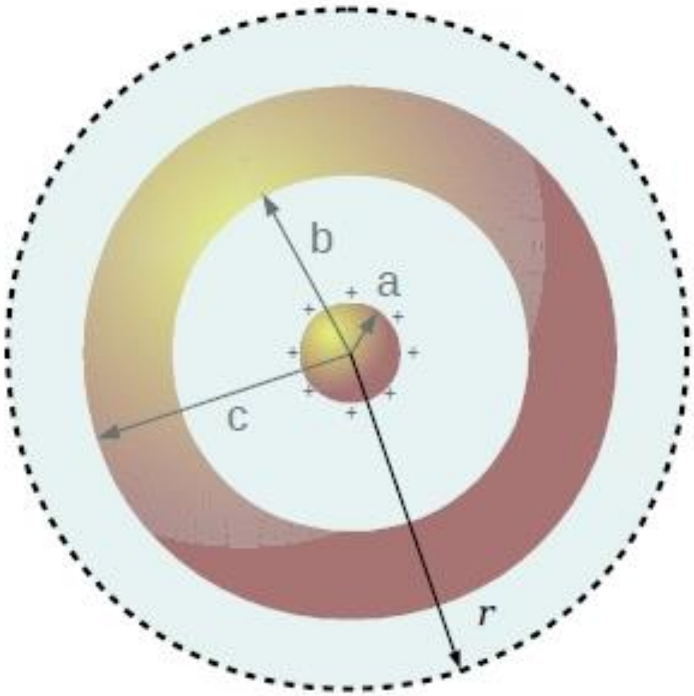
- $b < r < c$:

Esta superfície está dentro da casca condutora e portanto o campo é nulo. Pela Lei de Gauss, isto implica que a carga dentro desta superfície deve ser nula:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_t}{\epsilon_0} \Rightarrow q_t = 0$$



Exemplo: Casca Esférica (4)



- $c < r$:

A carga total na superfície:

$$q_t = q_{ext} + q_{ind} + Q = 3Q$$

Aplicando a Lei de Gauss na superfície:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_t}{\epsilon_0}$$

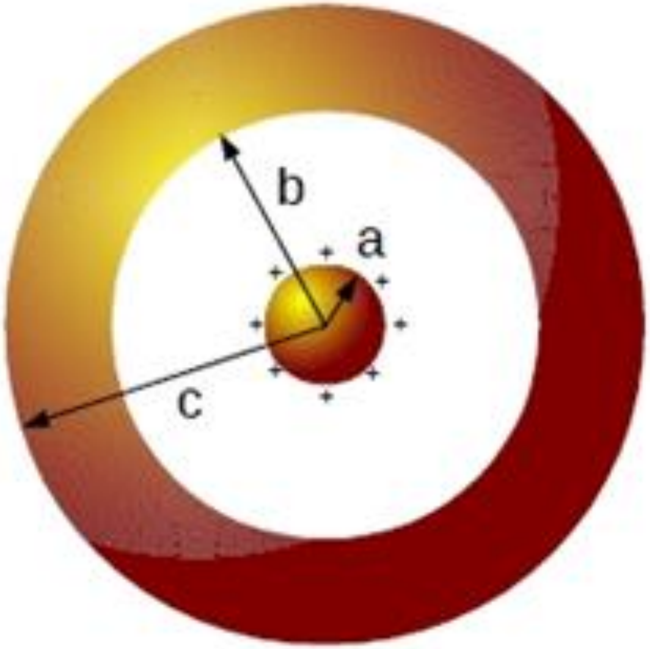
$$\oint E\, dA \cos 0° = \frac{3Q}{\epsilon_0}$$

$$E \oint dA = \frac{3Q}{\epsilon_0} \;\Rightarrow\; E\, 4\pi r^2 = \frac{3Q}{\epsilon_0} \;\Rightarrow\; E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{r^2}$$

Exemplo: Casca Esférica (5)

Portanto o campo será:

$$E = \begin{cases} 0 & , r < a \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & , a < r < b \\ 0 & , b < r < c \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{3Q}{r^2} & , c < r \end{cases}$$



Exemplo: Distribuição Volumétrica de Cargas (1)

Seja uma distribuição de cargas com simetria esférica com densidade volumétrica dada por:

$$\rho_V = \begin{cases} \dfrac{\rho_o r}{R}; 0 \leq r \leq R \\ 0; r > R \end{cases}$$

Determine o $\vec{E}$ em um ponto qualquer.

DICA: Tome a seguinte relação: $\boldsymbol{dV = 4\pi r^2 dr}$

Exemplo: Distribuição Volumétrica de Cargas (2)

Resolução:

$$\varepsilon_o \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc} = \int \rho_v \, dv$$

(a) Para $r < R$

$$\varepsilon_o E_r \, 4\pi r^2 = Q_{enc}$$

$$= \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\rho_o r}{R} \, dr = \frac{\rho_o \pi r^4}{R}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_o r^2}{4\varepsilon_o R} \mathbf{a}_r}$$

Exemplo: Distribuição Volumétrica de Cargas (3)

Resolução:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} = \int \rho_v \, dv$$

(b) Para $r > R$

$$\varepsilon_0 E_r 4\pi r^2 = Q_{\text{enc}}$$

$$= \int_0^R \frac{\rho_0 r}{R} 4\pi r^2 \, dr + \int_R^r 0 \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \pi \rho_0 R^3$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r}$$

Dúvidas ??

BONS ESTUDOS !!!

Prof. Victor M. Miranda