

Бреслав А. А.
**Автоматизация разработки механизмов композиции в
предметно-ориентированных языках**

Оглавление

Глава 1. Расширение предметно-ориентированных языков механизмами композиции	2
§ 1. Объектно-ориентированные модели	2
1.1. Синтаксис моделей	3
1.2. Классы и типы	11
1.3. Модели и мета-модели	20
Приложение 1. Преобразование объектного представления метамodelей в классы	27

Глава 1.

Расширение предметно-ориентированных языков механизмами композиции

В этой главе...

§ 1. Объектно-ориентированные модели

Объектно-ориентированные модели (для краткости, ниже мы будем писать просто “модели”) были предложены в начале 1990-х годов [?, ?] и с течением времени были описаны консорциумом OMG (Object Managenemt Group, [?]) в виде ряда промышленных стандартов. Наибольшую известность среди “модельно-ориентированных” подходов получил унифицированный язык моделирования — UML (Unified Modelling Language, [?]); также очень широко используется библиотека EMF (Eclipse Modelling Framework, [?]), основанная на принципах основанная на принципах MOF (Meta-Object Facitylity, [?]), являющейся частью UML (Infrastructure). По сути, объектно-ориентированные модели — это не привязанные к конкретному языку программирования структуры, представляющие данные (и способы их обработки) в объектно-ориентированном стиле.

Следуя работам [?, ?], в последующих разделах мы будем использовать модели как универсальный способ описания предметно-ориентированных языков, однако на этом пути нас ждет небольшое затруднение: промышленные стандарты, упомянутые выше, не предоставляют математической базы для работы с моделями. В литературе описаны различные подходы к формализации этой области [?, ?, ?], в основном нацеленные на описание полной MOF. Использование этих

формализаций затруднительно в первую очередь потому, что MOF — это довольно объемная система, а следовательно, и формальные теории, ее описывающие, получаются достаточно громоздкими. С другой стороны, на практике, при реализации предметно-ориентированных языков, как правило, используется не вся MOF, а лишь небольшая ее часть, “ядро”, которое называется EMOF (Essential MOF, [?]), именно ей соответствует реализация моделей, предоставляемая популярной библиотекой EMF, упомянутой выше. В данном разделе строится формальная теория, описывающая объектно-ориентированные модели, соответствующие EMOF.

1.1. Синтаксис моделей

Чтобы строго определить понятие модели, мы вводим ряд вспомогательных определений, начиная со структурного представления и постепенно вводя ограничения.

Определение 1.1 (Модельный терм). *Модельным термом* называется формула, построенная по следующим правилам¹:

$$\begin{aligned}
 \text{MT} &::= \text{object } \text{MT}_{id} : \text{MT}_{cl} \{P_1, \dots, P_n\}, n \geq 0 \\
 &\quad | \text{@MT}_{id} \\
 &\quad | [MT_1, \dots, MT_n], n \geq 0 \\
 &\quad | \{MT_1, \dots, MT_n\}, n \geq 0 \\
 &\quad | \text{null} \mid \Sigma^* \mid \mathbb{Z} \mid \mathbb{B}, \\
 P &::= \text{MT}_p = \text{MT}_v
 \end{aligned}$$

где \mathbb{Z} — множество целых чисел, Σ — некоторый конечный алфавит символов, а $\mathbb{B} = \{\text{true}, \text{false}\}$.

¹ Для краткости мы пишем t_1, \dots, t_n вместо использования рекурсивных продукций вида

$$tList ::= t \mid t, tList$$

Записывая модельные термы, мы, как правило, не будем заключать строки в кавычки, а будем лишь выделять их шрифтом, чтобы отличать от *метапеременных*: так, `abc` — это строка из трех символов, а *x* — метапеременная, которая, в частности может принимать значение `abc`.

Для различных видов модельных термов мы будем использовать специальные названия. Приведем примеры таких термов и обозначим названия:

- `{abc, 239, null}` — *множество*, состоящее из трех констант: строки, числа и специального значения `null`;
- `[1, 2, 3]` — *список* из трех чисел;
- `@x` — *ссылка* на идентификатор *x*.
- `object a : @b {c = false}` — *объект*, где *a* — *идентификатор*, `@b` — *ссылка на класс*, а `c = false` — *свойство с маркером c и значением false*.

Метапеременные позволяют кратко описать множества термов, обладающих схожей структурой. Если в модельном терме используется метапеременная *a*, это означает, что на место нее может быть подставлен любой подтерм, синтаксически допустимый в данном контексте. Так, например, запись `{a, b}` описывает все термы-множества, состоящие из двух элементов, а `@a` — ссылки на все возможные идентификаторы.

Модельные термы удобны для представления структур абстрактного синтаксиса различных языков `[?, ?]`. В качестве примера рассмотрим λ -исчисление `[?]`. Абстрактный синтаксис λ -исчисления

задается тремя конструкторами:

Конструктор	Пример конкретного синтаксиса
$LT ::= \mathbf{Abs}(v, LT)$	$\lambda x . t$
$\quad \mathbf{App}(LT_1, LT_2)$	$(f x)$
$\quad \mathbf{Var}(v)$	x

где v — алфавит имен переменных. Например, λ -терм $\lambda x . x x$ в абстрактном синтаксисе записывается как $\mathbf{Abs}(x, \mathbf{App}(\mathbf{Var}(x), \mathbf{Var}(x)))$, что соответствует *абстрактному синтаксическому дереву* (Abstract Syntax Tree, AST [?]) для данного терма. То же самое AST можно представить также в виде объекта; см. Рис. 1.1.

```

object t1 : @Abstraction {
  var = object x : @Variable {name = x},
  body = object t2 : @Application {
    function = object t3 : @Usage {var = @x},
    argument = object t4 : @Usage {var = @x}
  }
}

```

Рис. 1.1: Представление AST для терма $\lambda x . x x$ в виде объектов

Из Рис. 1.1 видно, что объекты модельного терма образуют дерево, соответствующее абстрактному синтаксическому представлению λ -терма, причем роль конструкторов выполняют ссылки на классы. Обратите внимание на использование ссылок в объектах t3 и t4: значения свойства `var` является *ссылкой* на идентификатор объекта, соответствующего определению переменной x .

Модельный терм можно рассматривать как граф: объекты являются вершинами, а отношение вложенности и ссылки — ребрами. AST является остовным деревом в этом графе — в нем участвуют только ребра вложенности объектов.

1.1.1. Графическая нотация для модельных термов

Наравне с нотацией, введенной выше, мы будем использовать для изображения объектов графическую нотацию, основанную на диаграммах объектов языка UML [?]. На Рис. 1.2 в виде такой диаграммы изображены объекты, приведенные на Рис. 1.1.

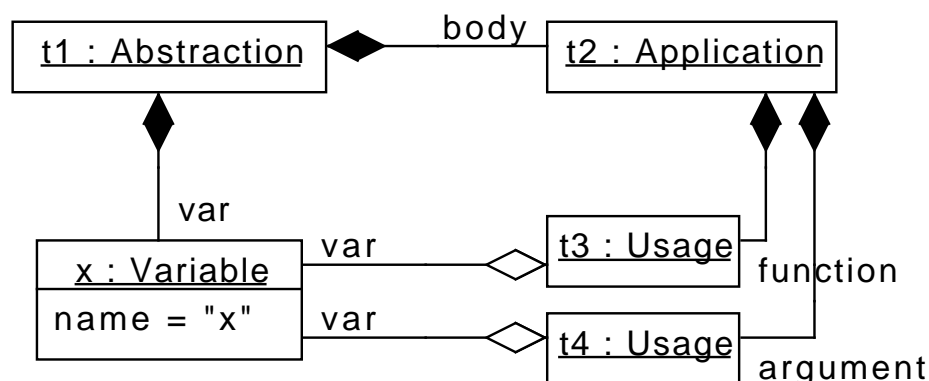


Рис. 1.2: Графическое представление для термина $\lambda x . x x$

Объекты обозначаются прямоугольниками. В верхней части прямоугольника располагается подчеркнутая надпись: это идентификатор объекта и *имя класса*. О классах подробно говорится ниже, а пока лишь заметим, что объекты, относящиеся к одному классу, имеют одинаковую структуру. Значения свойств изображаются либо под горизонтальной чертой в самом прямоугольнике (как для объекта x), либо в виде ребер графа. Ближе к концу ребра написано имя свойства, а в начале ребра изображается ромб: незакрашенный, если ребро соответствует ссылке², и закрашенный, если значением свойства является объект, то есть имеет место *встраивание*³ — один объект является частью другого. Таким образом, если рассматривать только ребра с закрашенными ромбами, из графа объектов выделяется дерево, соответствующее текстовой нотации, введенной выше (см. Рис. 1.1).

²Что соответствует *агрегации* в терминах UML.

³*Композиция* — в терминах UML

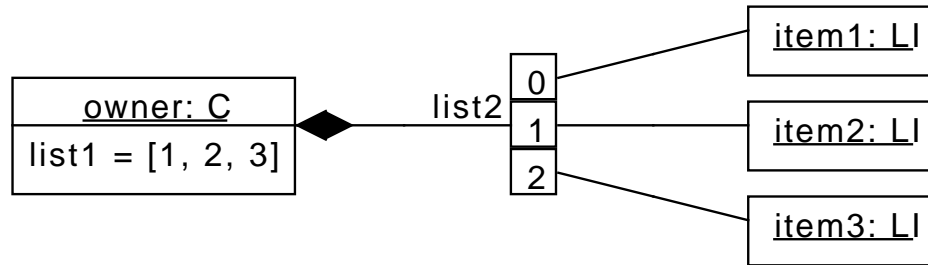


Рис. 1.3: Графическое представление упорядоченных списков

Если значением свойства является множество, оно изображается несколькими ребрами с одинаковой пометкой. В случае списка важен порядок следования элементов, поэтому мы отклоняемся от нотации UML и вводим промежуточный блок с индексами, от ячеек которого отходят ребра к элементам списка. Пример использования данной нотации приведен на Рис. 1.3: список чисел `list1` записан непосредственно в теле объекта, а список (встраиваемых) объектов `list2` изображен графически.

1.1.2. Конгруэнтность и правильно построенные термы

Определение 1.2. Отношение *конгруэнтности* на модельных термах, $\cong \subset \text{MT} \times \text{MT}$, есть минимальное отношение эквивалентности, обладающее следующими свойствами:

1. Константы конгруэнтны сами себе:

$$x \cong x, \text{ для любого } x \in \{\text{null}\} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{B} \cup \Sigma^*;$$

2. Ссылки на конгруэнтные идентификаторы конгруэнтны:

$$@x \cong @y, \text{ если } x \cong y;$$

3. Списки сравниваются поэлементно:

$$[x_1, \dots, x_n] \cong [y_1, \dots, y_n], \text{ если } x_i \cong y_i \text{ для любого } i \in [1; n];$$

4. Множества сравниваются поэлементно, без учета порядка:

$\{x_1, \dots, x_n\} \cong \{x'_{\pi(1)}, \dots, x'_{\pi(n)}\}$, если существует перестановка π размера n такая, что $x_i \cong x'_{\pi(i)}$ при $i \in [1; n]$.

5. Объекты сравниваются без учета порядка свойств:

$$\mathbf{object} \ id_1 : c_2 \left\{ \begin{array}{l} p_1 = v_1, \\ \dots, \\ p_n = v_n \end{array} \right\} \cong \mathbf{object} \ id_2 : c_2 \left\{ \begin{array}{l} p'_{\pi(1)} = v'_{\pi(1)}, \\ \dots, \\ p'_{\pi(n)} = v'_{\pi(n)} \end{array} \right\},$$

если $id_1 \cong id_2$, а также $c_1 \cong c_2$, и существует перестановка π размера n такая, что $p_i \cong p'_{\pi(i)}$ и $v_i \cong v'_{\pi(i)}$.

Приведем несколько примеров:

- $@abc \cong @abc$, поскольку идентификаторы конгруэнтны;
- $[1, 2] \not\cong [2, 1]$, при сравнении списков порядок элементов важен;
- а при сравнении множеств — не важен: $\{1, 2\} \cong \{2, 1\}$;
- также не важен порядок свойств при сравнении объектов:

$$\mathbf{object} \ abc : @c \left\{ \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \cong \mathbf{object} \ abc : @c \left\{ \begin{array}{l} c = d \\ a = b \end{array} \right\},$$

- но значения свойств важны:

$$\mathbf{object} \ abc : @c \left\{ \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \not\cong \mathbf{object} \ abc : @c \left\{ \begin{array}{l} c = \textcolor{red}{b} \\ a = \textcolor{red}{d} \end{array} \right\}.$$

Введем функцию $\mathcal{S}(t)$, вычисляющую множество всех поддер-мов терма t :

$$\mathcal{S}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{t\} \cup \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}(id) \cup \mathcal{S}(c) \cup \bigcup_i \mathcal{S}(p_i) \cup \bigcup_i \mathcal{S}(v_i), & t = \mathbf{object} \ id : c \{p_1 = v_1, \dots, p_n = v_n\} \\ \mathcal{S}(r), & t = @r \\ \bigcup_i \mathcal{S}(x_i), & t = [x_1, \dots, x_n] \text{ или } t = \{x_1, \dots, x_n\} \\ \emptyset, & \text{в остальных случаях} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Пример: $\mathcal{S}(\text{object } a : @b \{1 = [\text{null}, \text{false}]\}) = \{$
 $a, \quad @b, \quad b, \quad 1,$
 $[\text{null}, \text{false}], \quad \text{null}, \quad \text{false}$
 $\text{object } a : @b \{1 = [\text{null}, \text{false}]\}\}.$

Как правило, нам будут нужны множества подтермов какого-то определенного вида, например, множество подтермов термина t , являющихся ссылками, мы будем обозначать $\mathcal{S}_{ref}(t)$. Пример:

$$\mathcal{S}_{ref}(\text{object } a : @b \{1 = [\text{null}, \text{false}]\}) = \{@b\}.$$

Аналогично $\mathcal{S}_{set}(t)$ — для подтермов-множеств и $\mathcal{S}_{obj}(t)$ — для подтермов-объектов.

Определение 1.3. Модельный терм t называется *правильно построенным*, если выполняются следующие условия:

1. Среди подтермов t не существует двух объектов с конгруэнтными идентификаторами;
2. В $\mathcal{S}_{obj}(t)$ не существует объекта, содержащего два свойства с конгруэнтными именами;
3. В $\mathcal{S}_{set}(t)$ не существует множества, содержащего два конгруэнтных элемента.

Так, например, терм $[\text{object } a : @c \{\}, \text{object } a : @c \{x = y\}]$ не является правильно построенным (пункт 1). Терм $\text{object } a : @c \{a = b, a = c\}$ тоже не является правильно построенным, но по другой причине см. пункт 2. Согласно пункту 3, терм $\{1, 2, 1\}$ также не является правильно построенным.

1.1.3. Ссылочные контексты и пред-модели

Определение 1.4 (Ссылочный контекст). Будем называть *ссылочным контекстом* частичную функцию $\Psi : \text{MT} \rightarrow \text{MT}$, обладающую следующими свойствами:

1. Если $\Psi(id)$ определено, то $\Psi(id) = \{\mathbf{object} \ id' : \dots \{\dots\}\}$, где $id \cong id'$;
2. $\Psi(id) \cong \Psi(id')$ тогда и только тогда, когда $id \cong id'$.

Другими словами, ссылочный контекст “находит” объект по его идентификатору. Для удобства мы будем писать $\Psi(id) = \perp$ в случае, если $\Psi(id)$ не определено.

Обозначим множество всех подтермов, упомянутых в контексте Ψ , то есть являющихся подтермами элементов области определения Ψ и/или области значений Ψ , через $\mathcal{S}(\Psi)$. Аналогично вводятся $\mathcal{S}_{ref}(\Psi)$ и $\mathcal{S}_{obj}(\Psi)$.

Определение 1.5. Будем называть ссылочный контекст Ψ *замкнутым*, если

$$o = \mathbf{object} \ id : \dots \{\dots\} \in \mathcal{S}_{obj}(\Psi) \Rightarrow \Psi(id) = o$$

и

$$r = @id \in \mathcal{S}_{ref}(\Psi) \Rightarrow \Psi(id) \neq \perp$$

Все объекты, упомянутые в замкнутом контексте, могут быть получены по своим идентификаторам, и каждая ссылка ссылается на существующий объект. Из этого, в частности, следует, что в таком контексте каждому объекту присвоен уникальный идентификатор. Так, например, следующий контекст является замкнутым (здесь функция рассматривается как множество пар вида “аргумент \mapsto результат”):

$$\Psi(id) = \{a \mapsto \mathbf{object} \ a : @a \{\}\}$$

Приведем также пример незамкнутого контекста:

$$\Psi(id) = \{a \mapsto \mathbf{object} \ a : @b \{c = \mathbf{object} \ b : @a \{\}\}\}$$

в последнем примере нарушаются оба требования определения 1.5:

- объект, упомянутый в контексте, не принадлежит области его значений;
- ссылка, упомянутая в контексте, не принадлежит его области определения.

Определение 1.6. Пусть Ψ_1 и Ψ_2 – согласованные ссылочные контексты:

$$\forall x \in \mathbf{dom}(\Psi_1), y \in \mathbf{dom}(\Psi_2) : x \cong y \Rightarrow \Psi_1(x) \cong \Psi_2(y).$$

Тогда их *объединение* определяется следующей формулой:

$$(\Psi_1 \cup \Psi_2)(id) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Psi_1(id), & \Psi_1(id) \neq \perp \\ \Psi_2(id), & \Psi_2(id) \neq \perp \\ \perp, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По модельному терму t можно построить ссылочный контекст, упоминаящий все объекты, входящие в t :

$$\Psi_t \stackrel{\text{def}}{=} \{id \mapsto o \mid o = \mathbf{object} \ id : \dots \{ \dots \} \in \mathcal{S}_{obj}(t)\}$$

Определение 1.7 (Пред-модель). Будем называть правильно построенный модельный терм t *пред-моделью в контексте* Ψ_0 , если контекст $\Psi_0 \cup \Psi_t$ является замкнутым.

Пред-модель обладает важным свойством: любой объект в ней однозначно определяется своим идентификатором, и любая ссылка указывает на известный объект.

1.2. Классы и типы

На практике для удобства навигации по моделям и контроля над их корректностью вводятся дополнительные ограничения (в виде системы типов), регулирующие структуру моделей. В этом разделе мы вводим понятие *класса* для объектов, которое является основой для таких ограничений.

Определение 1.8 (Класс). *Классом* называется кортеж $\langle abs, id, S, P \rangle$, где

1. abs — признак абстрактного класса, принимает значения `true` или `false`; Если $abs = \text{false}$, класс называется *конкретным*, иначе — *абстрактным*,
2. id — *идентификатор* класса (имя),
3. S — множество классов, называемых *предками* данного класса (*суперклассов*),
4. P — множество пар вида $p : \tau$, где p — *идентификатор* свойства, а τ — *тип* свойства (множество типов определяется ниже).

Множество P не содержит различных пар, в которых совпадают идентификаторы свойств.

Для удобства, мы будем обозначать конкретный класс $\langle \text{false}, id, S, P \rangle$ через `class id : S {P}`, а абстрактный класс $\langle \text{true}, id, S, P \rangle$ — через `class id : S {P}`. Когда значения признака абстрактного класса не важно или однозначно определяется из контекста, мы будем использовать обозначение `class id : S {P}`.

Определение 1.9. *Перечислением* называется кортеж $\langle id, \{L_1, \dots, L_n\} \rangle$, где id — *идентификатор* перечисления, а L_i — *литералы* перечисления.

Мы будем обозначать перечисления следующим образом: `enum id {L1, ..., Ln}`.

Определение 1.10. Множество типов \mathcal{T} описывается следующим об-

разом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} ::= & \text{Char} \mid \text{String} \mid \text{Int} \mid \text{Bool} \\ & \mid \mathfrak{T}^? \mid \{\mathfrak{T}^+\} \mid \{\mathfrak{T}^*\} \mid [\mathfrak{T}^+] \mid [\mathfrak{T}^*] \\ & \mid \text{val}(c) \mid \text{ref}(c), \text{ где } c \text{ — идентификатор некоторого класса} \\ & \mid \text{enum}(e), \text{ где } e \text{ — идентификатор некоторого перечисления} \\ & \mid \top \end{aligned}$$

Поясним интуитивное значение данного определения:

- Char, String, Int, Bool обозначают примитивные типы: символы, строки, целые числа и булевские значения соответственно.
- Тип $\tau^?$ допускает значение null или значение типа τ , например, $\text{Char}^?$ соответствует множеству значений $\Sigma \cup \{\text{null}\}$.
- $\{\tau^*\}$ обозначает тип множеств, содержащих ноль или более элементов типа τ . Например, $\{\text{String}^*\}$ — это множества строк, а $\{\{\text{Int}^*\}^*\}$ — множества множеств целых чисел.
- Аналогично, $[\tau^*]$ обозначает списки.
- Если вместо “*” используется “+”, то множество или список должны содержать не менее одного элемента. Например, $\{\tau^+\}$ — непустые множества, составленные из элементов τ .
- $\text{val}(c)$, где c — некоторый класс (точнее, его идентификатор), соответствует *встраиваемому* объекту класса c . Напомним, *встраиванием* называется ситуация, при которой один объект входит в другой как подтерм, например: $\text{object } a : @c \{a = \text{object } b : @c \{\}\}$.
- $\text{ref}(c)$ обозначает тип ссылок на объекты класса c , то есть значений вида $@a$, где a — идентификатор объекта, принадлежащего к классу c (см. ниже).

- $\text{enum}(e)$, где перечисление e определяется как $\text{enum } e \{L_1, \dots, L_n\}$ обозначает тип, значениями которого являются литералы L_1, \dots, L_n и только они.
- \top (“Top”) — супертип всех остальных типов (см. ниже).

1.2.1. Графическая нотация для классов

Наравне с текстовой, мы будем использовать для классов графическую нотацию, основанную на диаграммах классов языка UML (см. Рис. 1.4). Класс обозначается прямоугольником, разделенным на две секции: верхняя секция содержит имя класса (*курсивом* в случае абстрактного класса), а нижняя — его свойства.

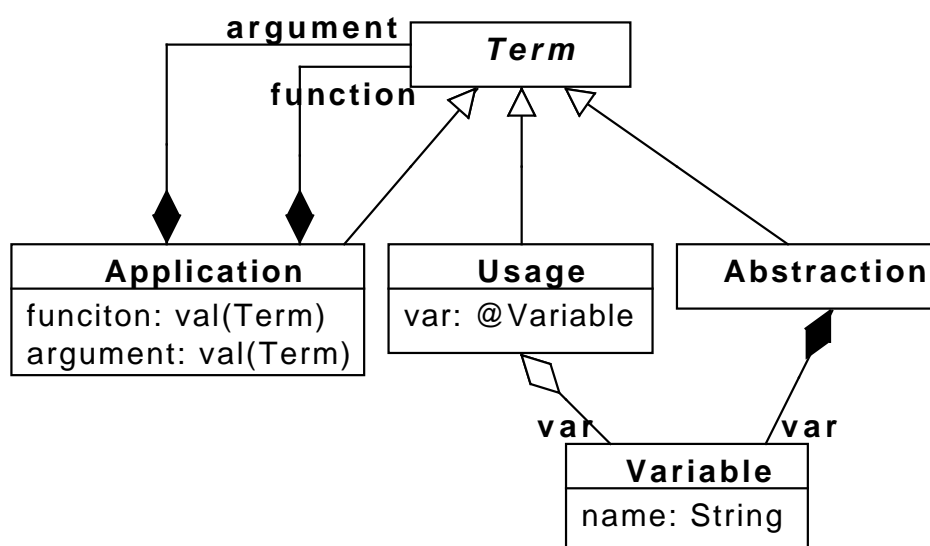


Рис. 1.4: Графическая нотация для классов λ -исчисления

Для обозначения отношения “подкласс-суперкласс” или *наследования* на диаграммах используются ребра с треугольником на конце, обозначающим суперкласс. Заметим, что циклов по наследованию и встраиванию на диаграмме классов быть не должно.

Как и в случае с объектами, некоторые свойства могут обозначаться ребрами (вместо или одновременно с записью в теле класса). Начало ребра обозначается закрашенным или незакрашенным ромбом — для встраивания ($\text{val}(\tau)$) и ссылок ($\text{ref}(\tau)$) соответственно, а имя свойства пишется ближе к концу ребра, причем для обозначения множеств и списков используется нотация, проиллюстрированная на Рис. 1.5. Для обозначения свойства $\text{bset} : \{\text{val}(B)^*\}$ на диаграм-

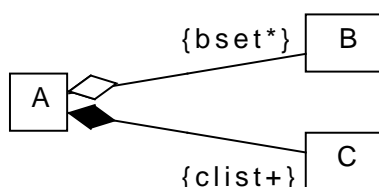


Рис. 1.5: Нотация для множеств и списков на диаграмме классов

ме изображается ребро от класса A , в котором объявлено свойство, к классу B , ближе к концу ребра пишется имя свойства — bset заключенное в фигурные скобки вместе со знаком “*”, обозначающие что тип свойства — множество объектов класса B . На Рис. 1.5 начало ребра, изображающего свойство bset отмечено закрашенным ромбом, следовательно элементы множества встраиваются в объекты класса A , что завершает описание типа свойства — $\{\text{val}(B)^*\}$. Аналогично, для обозначения списка $\text{clist} : [\text{ref}(C)^+]$ начало ребра отмечено незакрашенным ромбом, а в конце ребра мы пишем $[\text{clist}+]$.

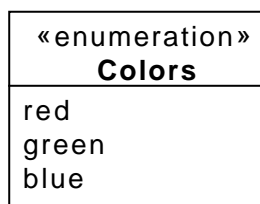


Рис. 1.6: Пример графической нотации для перечислений

Перечисления также отображаются в виде прямоугольников (см. Рис. 1.6), но над идентификатором пишется *стереотип* «enumeration», а под чертой перечисляются литералы.

1.2.2. Типы как множества значений

Для типа τ , множество упомянутых в данном типе классов определяется следующим образом:

$$\overline{C}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{c\}, & \tau \in \{\mathbf{val}(c), \mathbf{ref}(c)\} \\ \overline{C}(\sigma), & \tau \in \{[\sigma^+], [\sigma^*], \{\sigma^+\}, \{\sigma^*\}, \sigma^?\} \\ \emptyset, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Пусть дано множество классов

$$C = \{\mathbf{class} \ id_i : S_i \{p_j^i : \tau_j^i \mid j \in [1; m_i]\} \mid i \in [1; n]\},$$

обозначим $\overline{S}(C) \stackrel{\text{def}}{=} C \cup \overline{S}(\bigcup_1^n S_i)$ множество всех классов из C , их предков, предков их предков и т.д.

Аналогично определяется множество всех свойств класса $c = \mathbf{class} \ id : S \{p_i : \tau_i\}$. Кроме свойств p_i , объявленных в самом c , рассматриваются также свойства, *унаследованные* из суперклассов: $\overline{P}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n \{p_j^i : \tau_j^i \mid j \in [1; m_i]\} \cup \overline{P}(\overline{S}(c))$. Определим также множество всех классов, встраиваемых в c :

$$\overline{C}_{comp}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{c' \mid \exists (p : \tau) \in \overline{P}(c), \text{ где } \tau \in \{\mathbf{val}(c'), \{\mathbf{val}(c')^+\}, [\mathbf{val}(c')^+]\}\}.$$

Определение 1.11. Конечный набор классов C называется *корректным*, если выполняются следующие свойства:

1. Все предки классов из C содержатся в C : $\overline{S}(C) = C$.
2. Все типы свойств классов из C упоминают только классы из C : пусть $c \in C$ и $\overline{P}(c) = \{p_i : \tau_i\}$, тогда $\bigcup_i \overline{C}(\tau_i) \subseteq C$.

3. Никакой класс из C не является прямым или непрямым предком самого себя: если $c = \text{class } id : S \{ \dots \} \in C$, то $c \notin \bar{S}(S)$.
4. Никакой класс из C прямо или косвенно не встраивается сам в себя: $c \notin \bar{C}_{comp}(c)$.

На типах, порожденных корректным набором классов C , вводится отношение “подтип” (\preceq) — это наименьшее транзитивное рефлексивное отношение, обладающее следующими свойствами⁴:

$$\frac{\text{class } c : S \{ \dots \} \in C \quad s \in S}{\text{val}(c) \preceq \text{val}(s) \wedge \text{ref}(c) \preceq \text{ref}(s)} \text{ subclass}$$

Другими словами, подклассы порождают подтипы. Кроме того, тип $\tau^?$ шире типа τ , поскольку свойства этого типа могут принимать на одно значение — `null` — больше⁵:

$$\frac{}{\tau \preceq \tau^?} \text{ nullable}$$

Аналогично для списков и множеств:

$$\frac{\tau \preceq \sigma \quad \iota, \kappa \in \{+, *\} \quad \iota \leq \kappa}{\{\tau^\iota\} \preceq \{\sigma^\kappa\}} \text{ set} \quad \frac{\tau \preceq \sigma \quad \iota, \kappa \in \{+, *\} \quad \iota \leq \kappa}{[\tau^\iota] \preceq [\sigma^\kappa]} \text{ list}$$

Здесь отношение порядка на знаках $+$ и $*$ определяется правилом

$$+ < *.$$

Классы и типы используются для описания множеств допустимых модельных термов. Пусть зафиксирован замкнутый ссылочный контекст Ψ . Ниже мы определим функцию $\llbracket \bullet \rrbracket_\Psi^C : \mathfrak{T} \rightarrow 2^{\text{MT}}$, которая для корректного набора классов C сопоставляет каждому типу множество его значений. Для этого мы сначала введем вспомогательную функцию $\lceil \bullet \rceil_\Psi : \mathfrak{T} \rightarrow 2^{\text{MT}}$, которая возвращает все модельные

⁴Здесь и далее, следуя нотации изображения правил вывода в классической логике, мы записываем *посылки* над горизонтальной чертой, а *заключение* — под чертой; справа курсивом указывается имя или номер, на который мы будем ссылаться в тексте.

⁵Правила, не имеющие посылок над горизонтальной чертой, являются *аксиомами*, то есть выполняются для любых значений метапеременных.

термы, упомянутые в контексте Ψ , принадлежащие к данному типу и ни к какому другому, то есть не согласует отношение “подтип” с отношением вложенности множеств: $\tau \preceq \rho \not\Rightarrow \lceil \tau \rceil_\Psi \subseteq \lceil \rho \rceil_\Psi$. Эта функция задается следующим образом. Типу $\text{val}(c)$ ставится в соответствие множество $\lceil \text{val}(c) \rceil_\Psi$ всех объектов из $\mathcal{S}_{obj}(\Psi)$, в которых ссылкой на класс является терм $@_c$, и имеющих все свойства из множества $\overline{P}(c)$ и только их, причем значение каждого свойства имеет тип, указанный для данного свойства в классе:

$$\frac{\text{class } c : S \{ \dots \} \quad \overline{P}(c) = \{p_1 : \tau_1, \dots, p_n : \tau_n\}}{\lceil \text{val}(c) \rceil_\Psi = \{ \text{object } id : @_c \{p_i = v_i\} \in \mathcal{S}_{obj}(\Psi) \mid v_i \in \llbracket \tau_i \rrbracket_\Psi^C \}} \text{ objects}$$

Другие типы характеризуются следующим образом:

$$\frac{\text{class } c : S \{ \dots \}}{\lceil \text{ref}(c) \rceil_\Psi = \{ @id \in \mathcal{S}_{ref}(\Psi) \mid \Psi(id) \in \lceil \text{val}(c) \rceil_\Psi \}} \text{ refs}$$

$$\overline{\lceil \{\tau^+\} \rceil_\Psi} = \overline{\{ \{x_1, \dots, x_n\} \mid x_i \in \lceil \tau \rceil_\Psi \}} \text{ set}$$

$$\overline{\lceil [\tau^+] \rceil_\Psi} = \overline{\{ [x_1, \dots, x_n] \mid x_i \in \lceil \tau \rceil_\Psi \}} \text{ list}$$

$$\overline{\lceil \{\tau^*\} \rceil_\Psi} = \overline{\lceil \{\tau^+\} \rceil_\Psi \cup \{\{\}\}} \text{ eset} \quad \overline{\lceil [\tau^*] \rceil_\Psi} = \overline{\lceil [\tau^+] \rceil_\Psi \cup \{[]\}} \text{ elist}$$

$$\overline{\lceil \tau^? \rceil_\Psi} = \overline{\lceil \tau \rceil_\Psi \cup \{\text{null}\}} \text{ null}$$

$$\overline{\lceil \text{Int} \rceil} = \overline{\mathbb{Z}} \text{ int} \quad \overline{\lceil \text{Bool} \rceil} = \overline{\mathbb{B}} \text{ bool}$$

$$\overline{\lceil \text{Char} \rceil} = \overline{\Sigma} \text{ char} \quad \overline{\lceil \text{String} \rceil} = \overline{\Sigma^*} \text{ string}$$

$$\frac{\text{enum } e \{L_1, \dots, L_n\}}{\lceil \text{enum}(e) \rceil = \{L_1, \dots, L_n\}} \text{ enum}$$

Теперь нам осталось лишь “склеить” значения функции $\llbracket \bullet \rrbracket_\Psi$ согласно отношению \preceq , чтобы получить $\llbracket \bullet \rrbracket_\Psi^C$:

$$\begin{aligned}\llbracket \tau \rrbracket_\Psi^C &= \llbracket \tau \rrbracket_\Psi \cup \bigcup_{\sigma \preceq \tau} \llbracket \sigma \rrbracket_\Psi \\ \llbracket \top \rrbracket_\Psi^C &= \bigcup_{\tau} \llbracket \tau \rrbracket_\Psi\end{aligned}$$

Определение 1.12. Будем называть объекты, входящие в множество $\llbracket \text{val}(c) \rrbracket_\Psi^C$, *экземплярами* класса c .

Мы будем изображать объекты и классы на одной диаграмме, проводя пунктирные ребра от экземпляров к классам⁶. Чтобы не загромождать рисунки, мы будем проводить лишь некоторые такие ребра. Так, например, на Рис. 1.7 к объектам с Рис. 1.2 добавлены некоторые классы с Рис. 1.4. Обратите внимание на то, что один и тот же

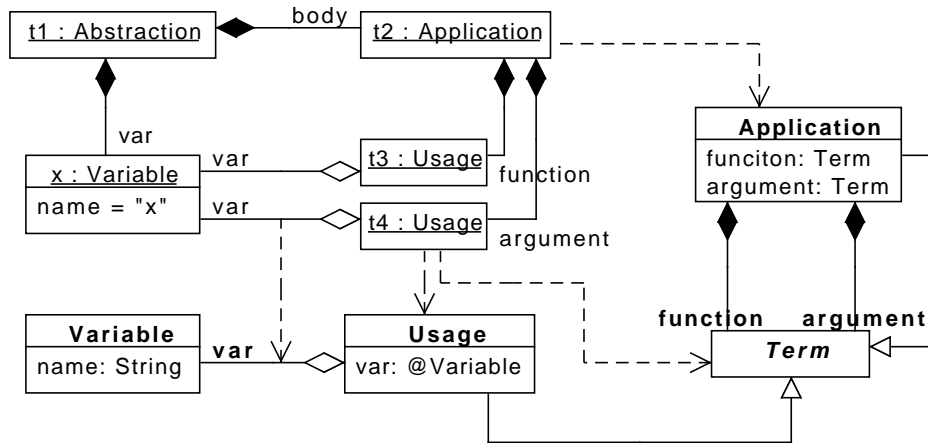


Рис. 1.7: Классы и их экземпляры

объект может являться экземпляром сразу нескольких классов: $t4$ является экземпляром классов `Usage` и `Term` одновременно. Заметим, что все экземпляры одного класса имеют общий набор свойств, описанный в этом классе: все экземпляры класса `Term` разделяют пустой

⁶В нотации UML на таких ребрах пишется стереотип «instance of», который мы опускаем, чтобы сэкономить место на рисунках.

набор свойств, а все экземпляры `Usage` — набор из одного свойства `var`. Таким образом, классы *регламентируют структуру своих экземпляров*, гарантируя наличие тех или иных свойств у объектов.

1.3. Модели и мета-модели

Выше мы потребовали, чтобы экземпляры класса $C = \text{class } c : S\{P\}$, имели вид `object id : @c {...}`, то есть содержали ссылку на идентификатор класса c . Если класс C сам не является объектом, то контекст, в котором упоминаются его экземпляры, не может быть замкнутым. Для того, чтобы устранить это неудобство, мы представим классы в виде объектов и сделаем, таким образом, синтаксис модельных термов замкнутым.

На Рис. 1.8 приведена диаграмма, охватывающая основные аспекты представления классов в виде объектов: приведены представления класса `Class`, экземпляры которого обозначают классы, класса `Type` — для типов и `Property` — для свойств. Пунктирные ребра на этой диаграмме проведены не между классами и объектами, а между объектами, представляющими классы, и объектами, являющимися экземплярами этих классов. Также проведено пунктирное ребро между ребром, изображающим одно из значений свойства `@properties` объекта `Class`, и объектом описывающим это свойство. Обратите внимание на то, что идентификаторы свойств на этой диаграмме имеют вид `@x`, то есть являются ссылками на объекты, описывающие сами свойства. Такое кодирование наиболее удобно, поскольку позволяет, например, узнать тип свойства, просто получив описывающий его объект по идентификатору.

У некоторых объектов на диаграмме Рис. 1.8 не указаны идентификаторы. Это сделано для краткости: эти идентификаторы нигде не используются, соответственно, единственное, что требуется — это чтобы они не совпадали ни с какими другими идентификаторами объ-

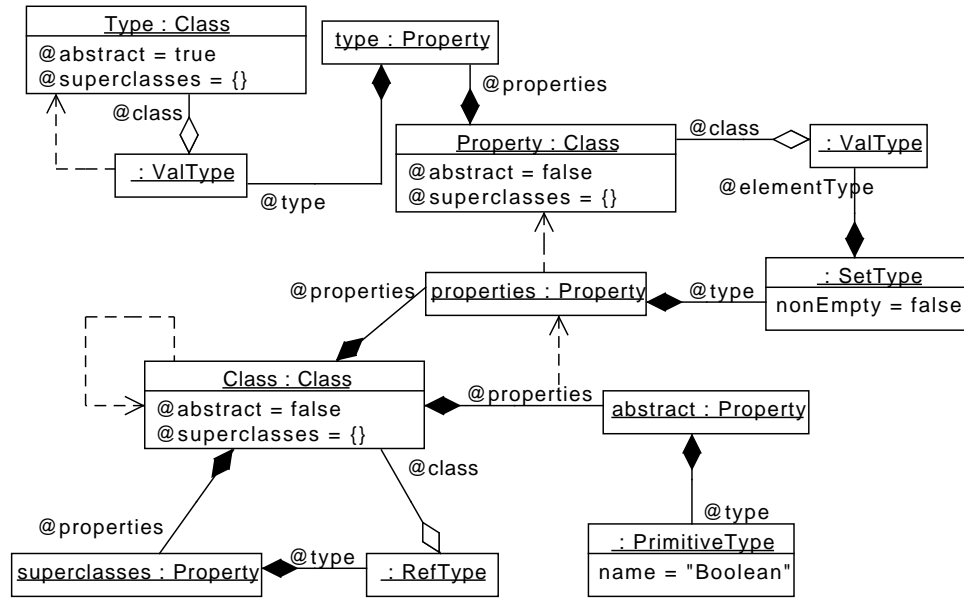


Рис. 1.8: Классы как объекты

ектов. Поскольку такие несовпадающие идентификаторы всегда можно выбрать, мы можем позволить себе не изображать их на рисунке.

Формальное правило для преобразования объектного представления в классы (см. Приложение 1), описанные выше, записывается довольно длинно и довольно тривиально, поэтому мы не приводим его здесь целиком. Основная идея состоит в том, что объекты вида $\text{object } c : @\text{Class } \{p\}$ преобразуются в классы вида $\text{class } c : S \{P\}$, где S , P и признак абстрактности вычисляются из значений соответствующих свойств из p .

Представление типов приведено на Рис. 1.9 и Рис. 1.10. Оно также непосредственно трансформируется в типы, определенные выше (см. Приложение 1).

Определение 1.13 (Типовой контекст). Пусть m является пред-моделью в некотором ссылочном контексте Ψ_0 , и $\Psi = \Psi_0 \cup \Psi_m$. Если по множеству всех экземпляров класса Class , упомянутых в Ψ , стро-

ится корректный набор классов C , то функция

$$\mathfrak{T}_m(t) = \begin{cases} \tau, & \text{где } t \in \llbracket \tau \rrbracket_\Psi^C, \\ \perp, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

называется *типовым контекстом*, порожденным m . Термы t для которых $\mathfrak{T}_m(t) \neq \perp$, называются *типизируемыми* в контексте \mathfrak{T}_m .

Заметим, что из типизируемости терма m следует типизируемость всех его подтермов. Заметим также, что m может не содержать описания классов, составляющих C , а лишь ссылаться на них, поскольку сами объекты, описывающие эти классы, могут быть упомянуты в контексте Ψ_0 .

Основная идея определения 1.13 в том, что “правильные” термы являются типизируемыми. В дальнейшем мы будем работать только с такими термами:

Определение 1.14 (Модель). Пусть типовый контекст \mathfrak{T}_m построен по пред-модели m (в контексте Ψ_0) согласно определению 1.13. Если $\mathfrak{T}_m(m) \neq \perp$, то m называется *моделью* в контексте Ψ_0 .

Отметим следующее важное наблюдение:

Предложение 1.1. *Модельный терм \mathfrak{M} , изображенный на Рис. 1.8, Рис. 1.9 и Рис. 1.10 (в совокупности) является моделью в пустом контексте Ψ_\emptyset : $\Psi_\emptyset(id) \equiv \perp$.*

Доказательство. Для доказательства этого утверждения необходимо убедиться в том, что

- а) \mathfrak{M} является пред-моделью в контексте Ψ_\emptyset ,
- б) из \mathfrak{M} извлекается корректный набор классов,
- в) $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \neq \perp$.

Эти утверждения проверяются непосредственно. □

Фактически, ссылочный контекст $\Psi_{\mathcal{M}}$ является минимальным контекстом, необходимым для извлечения классов из любого модельного термина. Это связано с тем, что любое описание классов будет содержать ссылки на подтермы \mathcal{M} , такие как `Class`, `Property`, `ValType` и т.д. Чтобы проиллюстрировать это соображение, рассмотрим представление классов для λ -исчисления, приведенных на Рис. 1.4, в виде объектов: см. Рис. 1.11. Обратите внимание на то, что все ссылки

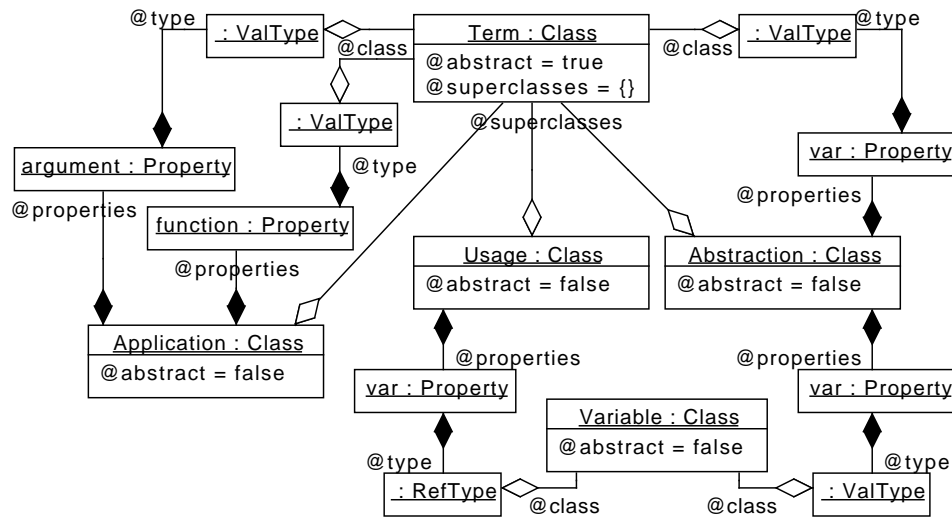


Рис. 1.11: Классы для λ -исчисления (см. Рис. 1.4) в виде объектов

на подтермы \mathcal{M} на Рис. 1.11 являются не значениями свойств объектов, а лишь ссылками на классы и маркерами свойств, то есть они лишь играют роль “разметки” для данных, задавая их структуру. Эта “разметка” называется *метаинформацией*. Такая ситуация является типичной: хотя объекты могут ссылаться на классы как на равноправные себе сущности, первоочередная роль классов в том, чтобы контролировать структуру термов. Удобно отделять описание классов от данных, структуру которых они регламентируют, поэтому мы вводим понятие *метамодели* как множества всех классов, составляющих метаинформацию для данной модели. Для этого нам понадобится определить несколько вспомогательных понятий.

Пусть m является моделью в контексте Ψ_0 , и пусть $\mathcal{M}_0(m)$ — множество всех описаний классов, на которые указывают ссылки на классы из объектов в $\mathcal{S}_{obj}(m)$:

$$\mathcal{M}_0(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \Psi_m(cid) \mid \text{object } id : @cid \{ \dots \} \in \mathcal{S}_{obj}(m) \}.$$

Фактически, $\mathcal{M}_0(m)$ — это множество тех классов, которые регламентируют структуру модели m .

Пусть $\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(t)$ — множество всех объектов, упомянутых в терме t и термах, на которые t ссылается, но не только в качестве метайнформации (мы считаем, что сам терм t упомянут в замкнутом контексте Ψ_m):

$$\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{t\} \cup \mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(id) \cup \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(v_i), & \text{при } t = \text{object } id : c \{p_1 = v_1, \dots, p_n = v_n\}, \\ \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(x_i), & \text{при } t = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ или } t = [x_1, \dots, x_n], \\ \mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(\Psi_m(a)), & \text{при } t = @a, \\ \emptyset, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Функция $\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(\bullet)$ естественным образом распространяется на множества термов: $\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(T) = \bigcup_{t \in T} \mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(t)$.

Определение 1.15 (Метамодель). Если m — модель, то множество $\mathcal{M}(m) = \mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}_0(m))$ называется *метамоделью* для m .

$\mathcal{M}(m)$ — это множество всех объектов, непосредственно вовлеченных в описание классов из $\mathcal{M}_0(m)$, эти объекты составляют полную метайнформацию для m . Некоторая громоздкость функции $\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(T)$ объясняется тем, что сами объекты из $\mathcal{M}(m)$ тоже имеют метайнформацию (из \mathfrak{M}), которая может быть не задействована непосредственно при описании структуры m . Функция $\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(T)$ призвана исключить эту “метайнформацию для метайнформации”.

Ниже мы называем метамоделью не только множество $\mathcal{M}(m)$, но и терм-множество

$$\{t_1, \dots, t_n\},$$

где t_i — элементы множества $\mathcal{M}(m)$.

Предложение 1.2. *Метамодель $\mathcal{M}(m)$ (как терм) является моделью в контексте $\Psi_{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. В самом деле, $\mathcal{M}_0(m)$ состоит из описаний классов, которые удовлетворяют структурным требованиям классов из \mathfrak{M} , то есть $\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}_0(m)) = \mathcal{M}(m)$ состоит только из объектов, типизируемых в контексте $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$. С другой стороны, функция $\mathcal{S}_{obj}^{\overline{\mathcal{M}}}(\bullet)$ гарантирует разрешение всех ссылок, упомянутых прямо или косвенно в $\mathcal{M}_0(m)$, то есть обеспечивает замкнутость контекста $\Psi_{\mathcal{M}(m)} \cup \Psi_{\mathfrak{M}}$. \square

Предложение 1.3. *Метамодель $\mathcal{M}(\mathfrak{M})$ совпадает с \mathfrak{M} .*

Доказательство. Это утверждение проверяется непосредственно. \square

Предложение 1.3 показывает, что терм \mathfrak{M} имеет важную особенность: *классы в нем контролируют структуру своего собственного описания*⁷. Такая роль \mathfrak{M} настолько важна, что заслуживает отдельного термина:

Определение 1.16 (Метаметамодель). Модельный терм \mathfrak{M} называется *метаметамоделью*.

⁷Но не только: например, они же контролируют структуру описания классов на Рис. 1.11

Приложение 1. Преобразование объектного представления метамodelей в классы

Ниже приводится программа на языке HASKELL [?], которая преобразует модельный терм (такой, например, как на Рис. 1.8) набор классов (согласно определению 1.8). Вначале определяются типы данных для модельных термов (согласно определению 1.1):

```
import Data.List

data ModelTerm
  = Object {
      id :: ModelTerm,
      classRef :: ModelTerm,
      properties :: [Property]
    }
  | Ref { base :: ModelTerm }
  | List [ModelTerm]
  | Set [ModelTerm]
  | Null
  | Int Int
  | Bool Bool
  | Char Char
  | String String
  deriving (Eq)

data Property = Property {
  name :: ModelTerm,
  value :: ModelTerm
}
  deriving (Eq)
```

Далее определяется функция $\mathcal{S}(t)$ (см. формулу 1.1).

```
subterms :: ModelTerm -> [ModelTerm]
subterms o = o : case o of
  Object id cr p -> (subterms id) ++ (subterms cr) ++ (concat (map pSubterms p))
  Ref b         -> subterms b
  List l        -> concat (map subterms l)
  Set l         -> concat (map subterms l)
  _             -> []

pSubterms :: Property -> [ModelTerm]
pSubterms (Property n v) = (subterms n) ++ (subterms v)
```

Тип данных и функция для построения ссылочных контекстов (см. определение 1.4):

```
type RContext = [(ModelTerm, ModelTerm)]

rcontext :: ModelTerm -> RContext
rcontext t = map toPair (filter isObject (subterms t))
```

```

where
  toPair o@(Object id _ _) = (id, o)

  isObject (Object _ _ _) = True
  isObject _                = False

```

Типы данных для классов и типов (см. определения 1.8, 1.9 и 1.10):

```

data Class = Class {
  abstract :: Bool,
  class_id :: String,
  superclasses :: [Class],
  propertyDescriptors :: [PropertyDescriptor]
}

data PropertyDescriptor = PropertyDescriptor String Type

data Enum = Enum {
  enum_id :: String,
  literals :: [String]
}

data Type
= CharT
| StringT
| IntT
| BoolT
| NullableT Type
| SetT Type Bool
| ListT Type Bool
| ValT Class
| RefT Class
| TopT

```

Функция, преобразующая модельный терм в набор классов (см. раздел 1.3):

```

extractClasses :: ModelTerm -> [Class]
extractClasses t@(Set objects) = map (extractClass (rcontext t)) objects

extractClass :: RContext -> ModelTerm -> Class
extractClass context (Object (String id) (Ref (String "Class") props))
  = Class
    (extractAbstract props)
    id
    (concat (map (superclasses context) props))
    (concat (map (toDescriptors context) props))

extractAbstract :: [Property] -> Bool
extractAbstract l = head (concat (map isAbstract l))

isAbstract :: Property -> [Bool]
isAbstract (Property (Ref (String "Class.abstract")) (Bool v)) = [v]
isAbstract _ = []

superclasses :: RContext -> Property -> [Class]

```

```

superclasses context
  (Property
    (Ref (String "Class.superclasses"))
    (Set refs)) = map (toClass context) refs
superclasses _ _ = []

toClass :: RContext -> ModelTerm -> Class
toClass context (Ref id) =
  case lookup id context of
    Just a -> extractClass context a
toClass _ r = Class False ("E: " ++ (show r)) [] []

toDescriptors :: RContext -> Property -> [PropertyDescriptor]
toDescriptors context
  (Property
    (Ref (String "Class.propertyDescriptors"))
    (Set s)) = map (toDescriptor context) s
toDescriptors _ _ = []

toDescriptor :: RContext -> ModelTerm -> PropertyDescriptor
toDescriptor context
  (Object
    (String id)
    (Ref (String "PropertyDescriptor"))
    [Property
      (Ref (String "PropertyDescriptor.type"))
      propType]) = PropertyDescriptor id (toType context propType)

toType :: RContext -> ModelTerm -> Type
toType context
  (Object
    —
    (Ref (String "PrimitiveType"))
    [(Property
      (Ref (String "PrimitiveType.type"))
      (String "Boolean"))]) = BoolT
toType context
  (Object
    —
    (Ref (String "PrimitiveType"))
    [(Property
      (Ref (String "PrimitiveType.type"))
      (String "String"))]) = StringT
toType context
  (Object
    —
    (Ref (String "PrimitiveType"))
    [(Property
      (Ref (String "PrimitiveType.type"))
      (String "Integer"))]) = IntT
toType context
  (Object
    —
    (Ref (String "PrimitiveType"))
    [(Property
      (Ref (String "PrimitiveType.type"))
      (String "Char"))]) = CharT

```

```

toType context
  (Object
    —
    (Ref ( String "NullableType"))
    [(Property
      (Ref ( String "NullableType.type"))
      body)]) = NullableT (toType context body)
toType context
  (Object
    —
    (Ref ( String "ReferenceType"))
    [(Property
      (Ref ( String "ClassType.class"))
      (classRef)))] = RefT (toClass context classRef)
toType context
  (Object
    —
    (Ref ( String "ObjectType"))
    [(Property
      (Ref ( String "ClassType.class"))
      (classRef)))] = ValT (toClass context classRef)

toType context
  (Object
    —
    (Ref ( String "SetType"))
    [
      (Property
        (Ref ( String "CollectionType.nonEmpty"))
        ( Bool nonEmpty)),
      (Property
        (Ref ( String "CollectionType.elementType"))
        elementType)
    ]) = SetT (toType context elementType) nonEmpty
toType context
  (Object
    —
    (Ref ( String "ListType"))
    [
      (Property
        (Ref ( String "CollectionType.nonEmpty"))
        ( Bool nonEmpty)),
      (Property
        (Ref ( String "CollectionType.elementType"))
        elementType)
    ]) = ListT (toType context elementType) nonEmpty

toType context
  (Object
    —
    (Ref ( String "EnumType"))
    [Property
      (Ref ( String "EnumType.enum"))
      (Ref enumId)]) = EnumT ( toEnum ( lookup enumId context))

toType context (Object _ (Ref ( String "AnyType")) []) = TopT

```

```
toType context _ = TopT
```

```
toEnum :: Maybe ModelTerm -> Main.Enum
```

```
toEnum (Just
```

```
  (Object
```

```
    (String id)
```

```
    (Ref (String "Enum"))
```

```
    [Property
```

```
      (Ref (String "Enum.literals"))
```

```
      (List literals)]) = Enum id (map toLiteral literals)
```

```
toLiteral :: ModelTerm -> String
```

```
toLiteral
```

```
(Object
```

```
  (String id)
```

```
  (Ref (String "EnumLiteral"))
```

```
  []) = id
```