

Алгоритм Тарского

Авторы: Ерохин С., Устинов Н., Климовицкий И.,
Смыкалов В., Тыщук К., Савенков К., Явейн А.

Руководитель: Бреслав А. А.

Реализация алгоритма
Тарского для случая одной
переменной

ФМЛ 239, 10-1

Постановка задачи:

Реализация алгоритма Тарского для одной переменной: выяснить верно ли выражение.

$$\forall x : \left[\begin{array}{l} \neg \left\{ \begin{array}{l} x^4 + x^2 - 5 > 0 \\ \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x - 4 > 0 \end{array} \right. \\ x > 0 \end{array} \right.$$

Структурные части алгоритма:

- преобразование вводимой формулы в дерево
 - лексер
 - парсер
 - арифметика длинных чисел
 - натуральных
 - рациональных
 - арифметика полиномов
 - дополнение данной системы полиномов до насыщенной системы
 - построение таблицы знаков полиномов
 - проверка истинности формулы
-
- построение графиков исходных многочленов

Парсер

Синтаксис входного языка:

- натуральные числа: **28 872 9**
- рациональные числа: **-2 67/8 -3/4**
- переменные: **x _67h f_7y**
- знаки: **+ - * \ ^**
- знаки неравенства: **> < >= <= = <>**
- логические связки: **and or --> not(!)**
- кванторы: **E A**

Пример формулы:

```
E x {  
    [x^3*5/(4 + 1) > 5*x]  
    and  
    [[2 < 6] --> [x^7 - 1/3 = 2]]  
}
```

Преобразование данных

$$[23 > 0] \rightarrow [2 < x]$$

$$[\text{not } [23 > 0]] \text{ or } [2 < x]$$

$$x^2/5 + (-7*x + 6)*2 \leq -4*x^3$$

$$4*x^3 + 1/5*x^2 - 14*x + 12 \leq 0$$

$$(x^3 + 7 - 4*x^5)*x^2 - 1 > 35*x^7$$

$$-39*x^7 + x^5 + 7*x^2 - 1 > 0$$

Представление данных

Дерево:

- корневая вершина: квантор
- внутренняя вершина: and, or или not
- лист: неравенство

Неравенство:

- знак
- полином

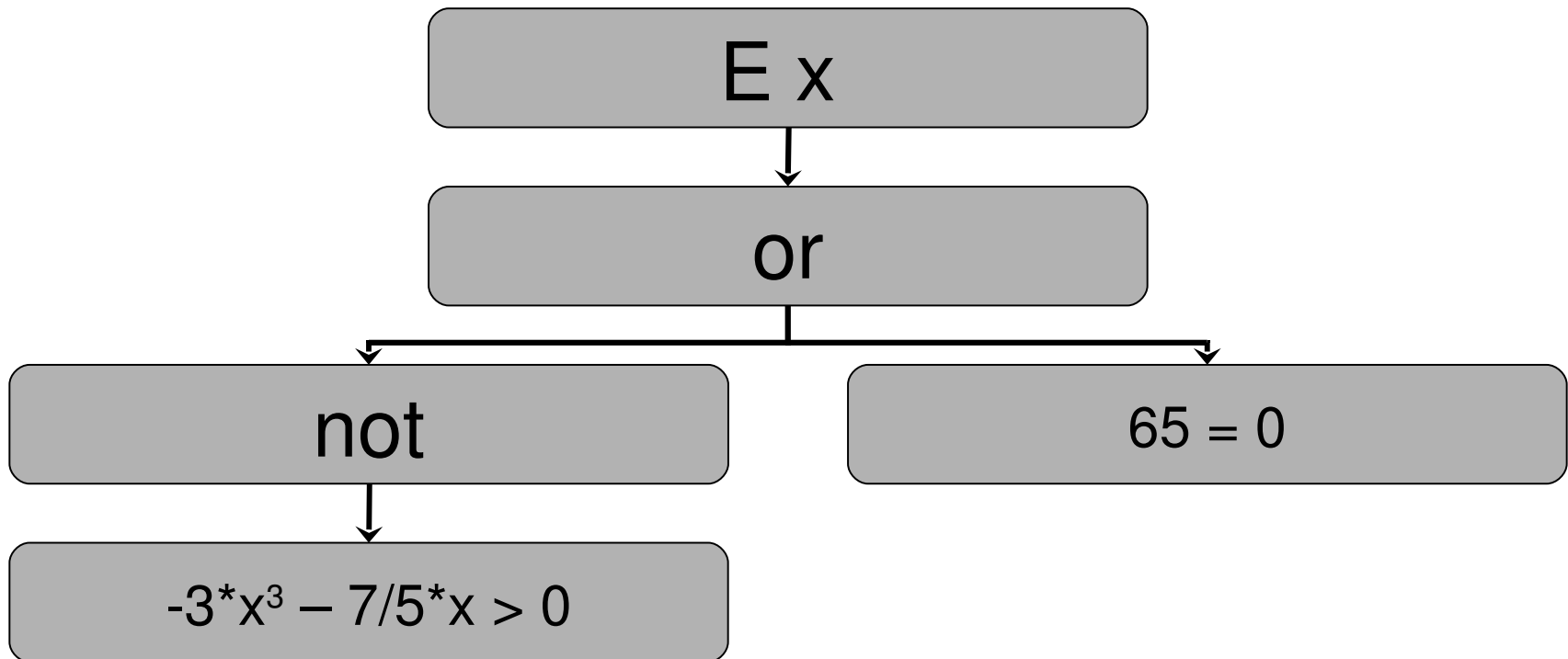
Полином — массив рациональных коэффициентов при степени x , в i -той ячейке коэффициент при x^i .

Рациональное число — знак и два натуральных числа - числитель и знаменатель.

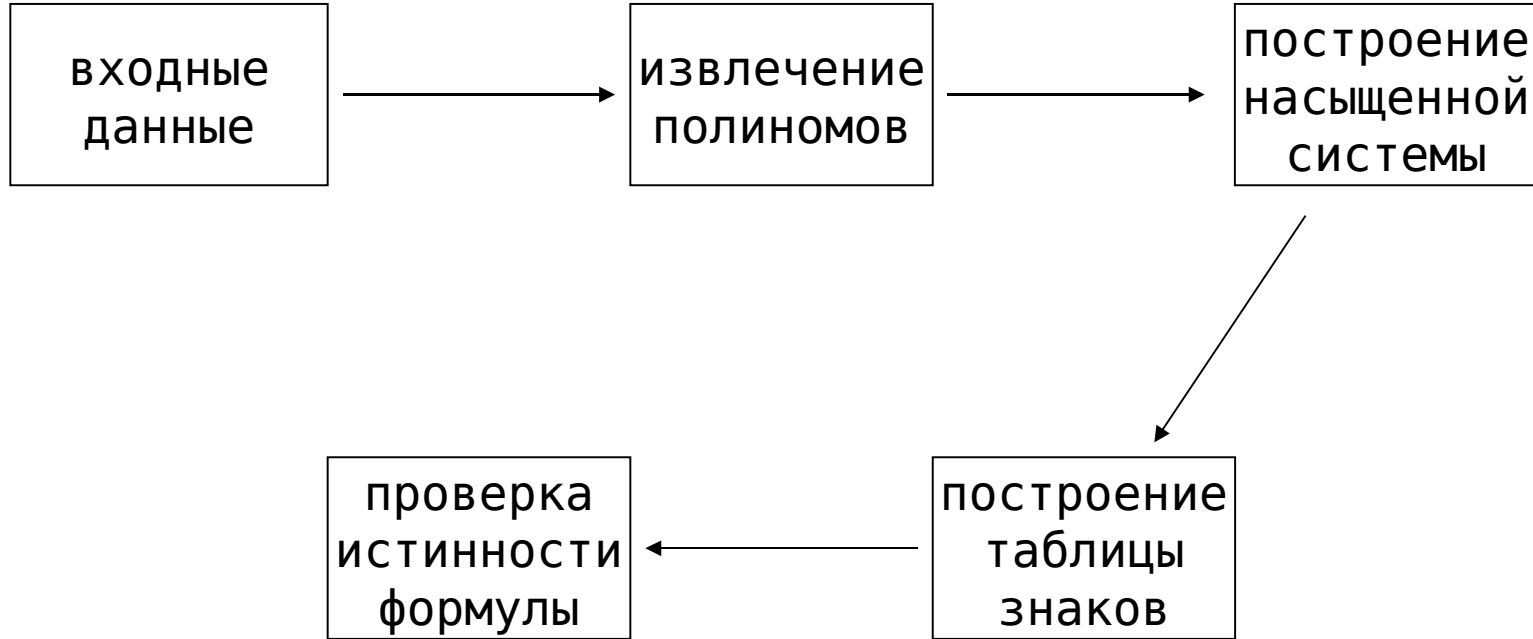
Натуральное число — динамический массив чисел типа Word.

Пример дерева

$E x \{ [-7/5 * x > 3 * x^3] \rightarrow [(x - 5) * x = x^2 - 5 * x - 65] \}$



Алгоритм



Построение насыщенной системы

Упорядочивание полиномов

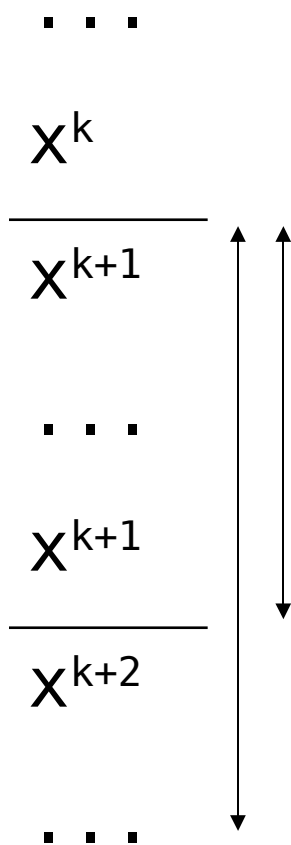
Будем считать полином f больше полинома g (записывается: $f > g$), если:

- степень f больше степени g ;
- в случае равенства степеней разность $f - g$ имеет положительный старший коэффициент

Построение насыщенной системы происходит индуктивно, от старших степеней к младшим.

На всех этапах построения множество полиномов отсортировано по возрастанию.

Построение насыщенной системы



Получение полиномов k -ой степени:

- дифференцирование полиномов $k+1$ степени;
- деление с остатком всех полиномов $k+1$ степени и выше на полиномы $k+1$ степени

Исключаются дубликаты и константы.

Построение таблицы знаков

	$-\infty$	$+\infty$
x^1		
\dots		

Заполняется последовательно, по строчкам.

При добавлении нового столбца, столбец полностью заполняется.

	$-\infty$	\dots		\dots	$+\infty$
\dots					
x^k	+	0	-		
\dots					

заполняем

Проверка истинности формулы

	$-\infty$	-3	0	3		7	$+\infty$
$x-7$	-	-	-	-	-	0	+
$2*x$	-	-	0	+	+	+	+
x^2-9	+	0	-	0	+	+	+

При кванторе существования
поиск подходящего столбца.

При кванторе всеобщности
поиск неподходящего столбца.

$\forall x : [x^2 - 9 > 0] \rightarrow [x - 7 < 0]$ ← не верно

$\exists x : [x^2 - 9 > 0] \rightarrow [x - 7 < 0]$ ← верно

