ОТЧЕТ

Постановка задачи

Задано логическое условие на вещественную переменную x. Условие формулируется в виде нескольких выражений вида $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)=0$ ($f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами), соединенных между собой при помощи операций and, or, not. Требуется ответить на два вопроса.

1) Верно ли, что данное условие выполняется при всех вещественных x?
2) Верно ли, что данное условие выполняется хотя бы при каком-то вещественном x?

Структурными частями алгоритма являются:

1) Реализация работы с натуральными числами произвольной величины.
2) Представление рациональных чисел как тройки (знак, числитель, знаменатель) и реализация арифметических действий с рациональными числами.
3) Разработка методов работы с многочленами. Многочлен хранится в виде массива из указателей на рациональные числа (коэффициенты многочлена). Реализованы сложение, вычитание, умножение многочленов, нахождение остатка при делении многочленов, а также операция дифференцирования.
4) Таблица знаков хранится в виде списка; элемент списка — это массив из знаков (+, –, 0).

Основные понятия, используемые в *алгоритме Тарского*.

Упорядочивание многочленов

Будем считать, что многочлен f больше многочлена g (записывается: $f>g$) в двух случаях:
1) степень f больше степени g; 2) в случае равенства степеней разность $f-g$ имеет положительный старший коэффициент.

Насыщенная система многочленов — это конечный набор S многочленов, отличных от константы, удовлетворяющий следующим условиям:

а) Для любого многочлена $f\in S$ его производная, если она отлична от константы, также содержится в S.

б) Для любой пары многочленов $f, g\in S$, $f>g$, остаток от деления f на g, если он отличен от константы, содержится в S.

Условимся записывать насыщенную систему многочленов в порядке возрастания многочленов. Ясно, что первый многочлен в насыщенной системе — линейный.

Таблица знаков

Пусть дана насыщенная система S многочленов. Рассмотрим таблицу, строчкам которой сопоставлены многочлены из системы S (в порядке возрастания сверху вниз), а столбцам – различные числа a_1, a_2, …, a_n (в порядке возрастания слева направо); Каждое из этих чисел должно быть корнем хотя бы одного из многочленов S, и все такие корни должны содержаться в этом списке. Дополнительно условимся считать, что $a_0=-\infty$, $a_{n+1}=+\infty$. На пересечении строки, соответствующей многочлену f и столбца, соответствующего числу a, стоит “знак” числа $f(a)$: “+”, “–”, или 0. Знаки многочленов в точках $\pm\infty$ определяются естественным образом. Описанную конструкцию назовем таблицей знаков для насыщенной системы S.

Пример таблицы знаков для насыщенной системы $x-3$, $2x$, x^2 приведен ниже.

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$	3	$+\infty$
$X-3$	–	–	–	–	0	+
$2x$	–	–	0	+	+	+
X^2-5	+	0	–	0	+	+

Таблица 1

Описание основной части алгоритма.

I. На первом шаге алгоритма строится насыщенная система многочленов S, содержащая все многочлены, участвующие в постановке задачи.

II. Далее, строится таблица знаков для системы S. При этом корни многочленов из S не вычисляются в процессе построения таблицы.

Заметим, что любой начальный отрезок насыщенной системы сам является насыщенной системой. Для насыщенной системы из одного многочлена (линейного) таблица знаков строится элементарно. Например, для многочлена $x-3$ она выглядит так:

	$-\infty$		$+\infty$
$X-3$	–	0	+

Таблица 2

Далее, опишем алгоритм добавления к уже построенной таблице знаков для многочленов $f_1(x)$, …, $f_{m-1}(x)$ строки, соответствующей многочлену $f_m(x)$.

Прежде всего, в новой строке проставляются знаки $f_m(\pm\infty)$ – это делается исходя из знания старшего коэффициента многочлена $f_m(x)$ и его степени. Далее, заполним конкретную клетку в этой строке. Поскольку число $a_{i,}$,соответствующее этому столбцу, является корнем одного из многочленов $f_j(x)$ $(1\leq j\leq m-1)$, то знак $f_m(a_i)$ совпадает со знаком значения в точке a_i остатка от деления f_m на f_j. В уже построенной таблице присутствует строка, соответствующая этому остатку, поэтому требуемый знак уже содержится в таблице. В случае, если этот остаток является константой (и поэтому не содержится в таблице), знак $f_m(a_i)$ совпадает со знаком этой константы.

Таким образом, заполняются клетки новой строки, содержащиеся в уже существующих столбцах таблицы. Кроме того, появление многочлена $f_m(x)$ вынуждает нас добавить в таблицу столбцы, соответствующие его корням. Между любыми двумя соседними клетками новой строки, содержащими знаки "+" и "–", вставляется столбец, соответствующий корню многочлена $f_m(x)$. (Очевидно, что между ними должен находиться корень f_m; кроме того, если бы их было два или больше, то между ними содержался бы корень производной, и тогда эти столбцы не могли быть соседними в исходной таблице.) Знаки в клетках этого столбца, содержащихся в строках исходной таблицы, легко устанавливаются исходя из знаков в двух соседних столбцах.

III. Нетрудно видеть, что при добавлении к списку a_1, …, a_n еще одного числа (точнее, после вставки его между двумя имеющимися числами) в таблице знаков появляется новый столбец, знаки в котором легко устанавливаются исходя из знаков в двух соседних столбцах. Например, после вставки в таблице 1 между числами $\sqrt{5}$ и 3 нового столбца, в нем будут стоять знаки –, +, +.

Очевидно, что подобными добавлениями столбцов можно добиться таблицы, удовлетворяющей следующему условию: между любыми двумя столбцами, которые соответствовали корням ранее построенных многочленов, есть еще хотя бы один столбец.

Например, из таблицы 1 вставлением столбцов получается следующая таблица:

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		3	$+\infty$
$X-3$	–	–	–	–	–	–	–	0	+
$2x$	–	–	–	0	+	+	+	+	+
x^2-5	+	0	–	–	–	0	+	+	+

Таблица 3

Нетрудно понять, что, имея такую таблицу, можно однозначно ответить на поставленный в задаче вопрос.

Таким образом, ответ на вопрос “существует ли такой x, что $x-3<0$, $2x>0$, $x^2-5>0$” положителен. Ответ на вопрос “существует ли такой x, что $x-3>0$, $2x<0$, $x^2-5>0$” отрицателен.