RODRIGO FERREIRA DE ABREU

UMA ABORDAGEM LÓGICO-HISTÓRICA DA GEOMETRIA EM ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO

LAVRAS – MG

2013

RODRIGO FERREIRA DE ABREU

UMA ABORDAGEM LÓGICO-HISTÓRICA DA GEOMETRIA EM ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador

Dr. José Antônio Araújo Andrade

LAVRAS – MG

2013

RODRIGO FERREIRA DE ABREU

UMA ABORDAGEM LÓGICO-HISTÓRICA DA GEOMETRIA EM ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO

Monografia apresentada ao Colegiado do Curso de Matemática, para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

APROVADA em 02 de setembro de 2013.

Dra. Rosana Maria Mendes	UFLA
Prof. João Paulo Rezende	UFSCar
Dra. Iraziet Charret Cunnha	UFLA

Dr. José Antônio Araújo Andrade

Orientador

LAVRAS – MG

2013

DEDICO

A minha família, aos professores de Matemática e aos professores e pesquisadores da Educação Matemática.

AGRADEÇO

A Deus por possibilitar mais uma vitória em minha vida.

À Maria mãe de Cristo, que sempre estendeu seu manto sobre mim.

Aos meus pais, Maria da Glória e Vantuir aqueles que mais acreditaram e incentivaram.

Aos meus irmãos Matheus e Letícia por todo amor e carinho.

A minha namorada Fiorita, que desde o começo esteve presente e me incentivou.

Ao professor Dr. José Antônio, que mais do que um orientador foi um amigo.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas, em especial Amanda, Rosana e Sílvia, pela competência e dedicação.

A todos os colegas de classe e companheiros do PIBID por todas as experiências e as amizades que fizemos principalmente Simone B., Camila, Dayana, Íris, Iara, Simone U., Juliana, Lívia e Paola.

À professora Stefânia, pela competência, atenção e as contribuições que me deu.

À banca examinadora, pelas contribuições.

Aos professores dos Estágios Supervisionados, Heloísa, Giane, João Batista e Simone, pelo acolhimento e atenção.

Ao Departamento de Ciências Exatas e a Universidade Federal de Lavras.

A Matemática é só um monte de números e símbolos sem significado se não humanizamos a situação em que ela é aplicada.

Leandro Teixeira

RESUMO

Esta é uma pesquisa que se constituiu em um estudo dos conceitos lógico-históricos, nexos conceituais e atividade orientadora de ensino. A partir da perspectiva lógico-histórica foi realizada uma exploração do desenvolvimento da Geometria ao longo do tempo e a investigação de quais seriam os nexos conceituais de Geometria. Foram elaboradas e desenvolvidas duas atividades orientadoras de ensino que contemplam os nexos conceituais com dezesseis estudantes do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Itutinga – MG, realizadas em duas manhãs de sábado. Tivemos como objetivo investigar como os estudantes compreendem os conceitos geométricos abordados sob o olhar da perspectiva lógico-histórica a partir da questão: **que elaborações um grupo de estudantes do Ensino Fundamental produzem sobre a Geometria, quando essa é desenvolvida a partir da exploração de seus nexos conceituais em atividades orientadoras de ensino?** Pudemos perceber a partir das elaborações dos estudantes, que eles se colocaram em atividade, puseram em jogo os seus conhecimentos, discutiram entre si, e que nas suas argumentações eles se utilizaram dos nexos conceituais de geometria para poder chegar à solução dos problemas. Esta é uma pesquisa de cunho qualitativo, que teve como instrumentos de coleta de dados: o gravador de áudio, os registros escritos elaborados pelos estudantes cuja metodologia de análise de dados foi pautada na análise de conteúdo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria. Nexos conceituais. Lógico-histórico. Atividade Orientadora de Ensino.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos dias atuais temos nos deparado com grandes desafios ao trabalharmos com a Matemática escolar, pois essa, por vezes, é vista como algo inútil, sem grandes aplicações no dia a dia por parte de muitos estudantes. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – de Matemática do Ensino Fundamental nos mostram que, apesar da escola ser o ambiente para potencializar o aprendizado e a construção do conhecimento, o que se tem observado é uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e um acúmulo de informações, em que as atividades são desenvolvidas em contextos pouco significativos e por vezes de forma superficial (BRASIL, 1997, p. 29).

Nesse sentido, buscar metodologias alternativas que contribuam para a melhoria no ensino e aprendizagem de Matemática tem sido o objetivo de investigação de muitos pesquisadores no campo da Educação Matemática. No entanto, apesar de todos os esforços feitos nesse sentido, quando se trata da prática em sala de aula podemos perceber que a implantação de novas metodologias ou alguma mudança na postura dos professores, com relação a algumas práticas mais tradicionais e cristalizadas, não ocorre de forma rápida, pois essa mudança ainda não foi incorporada por muitos, talvez até mesmo por desconhecimento de tais propostas. Isso pode ocorrer devido ao fato de muitos desses professores terem sido formados no modelo "3+1".

Tal modelo corresponde a três anos de bacharelado acrescido ao final de um ano de didática. Esse modelo segundo Andrade (2013, p. 58) "caracterizava uma acentuada falta de integração aliada à desarticulação entre a formação matemática específica e a formação prático-pedagógica". E que nesse modelo "a formação pedagógica se reduziria à didática e esta, por sua vez, a um conjunto de técnicas úteis para a transmissão do saber adquirido nos três anos inicias" (MOREIRA; DAVID, 2005 *apud* ANDRADE, 2013, p. 58).

Desse modo ao trabalhar a Matemática a partir dessas práticas mais tradicionais, a mesma pode adquirir uma conotação de ciência estática, um conjunto de conhecimentos prontos e acabados, não passíveis de serem discutidos ou questionados. Porém, a Matemática surgiu das necessidades da vida cotidiana e, como nos apontam os PCN, "converteu-se em um imenso sistema de variadas e extensas disciplinas. Como as demais ciências, reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e da natureza" (BRASIL, 1997, p. 23). Desse modo, a Matemática tem uma grande importância para o homem, pois está em movimento, tem a fluência, a interdependência entre os conceitos, tem uma história e um desenvolvimento como construção humana. Assim, é importante que haja uma prática pedagógica que leve isso em consideração, com a qual o estudante possa reconhecer a Matemática como algo além de simplesmente efetuar cálculos, como algo que seja importante para a sua própria formação.

Ao estudar a Matemática, acreditamos que um conceito só fica bem compreendido quando se entende o seu significado, aquilo que ele representa. Por isso, compreender o seu processo de construção, o seu desenvolvimento, a partir da necessidade pela qual se deu o seu surgimento – isto é, conhecer os elementos que são estruturantes dos conceitos – pode contribuir para que esse faça sentido a quem está aprendendo.

A partir disso, este trabalho foi desenvolvido apoiado por uma investigação iniciada durante uma participação no Programa Institucional Voluntário de Iniciação Científica da Universidade Federal de Lavras (PIVIC-UFLA). No período de abril de 2011 a março de 2012, foi realizado um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico ao longo do tempo, a partir da perspectiva lógico-histórica. Buscamos compreender o que são os nexos conceituais da Geometria, que elementos foram fundamentais para que a Geometria se estruturasse como um conjunto de conceitos matemáticos.

Tendo por base esses estudos, a proposta deste trabalho foi a de seguir a tendência de buscar metodologias alternativas que possam contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática, com foco na Geometria. Buscamos produzir Atividades Orientadoras de Ensino (AOE) que explorem alguns dos nexos conceituais de Geometria, de maneira que possam servir como uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem desse campo de conceitos.

Tendo em mente a importância da Geometria, optamos por investigar como estudantes do ensino fundamental compreendem os conceitos geométricos sob o olhar da perspectiva lógico-histórica, a partir da questão: **que elaborações um grupo de estudantes do Ensino Fundamental produzem sobre a Geometria, quando essa é desenvolvida a partir da exploração de seus nexos conceituais em atividades orientadoras de ensino?**

Ao adotar o termo "elaborações", seguimos a ideia apresentada por Cunha (2008, p. 2), apoiada em Lanner de Moura (2001), na qual se entende por elaborações as manifestações do pensamento (na forma oral ou escrita) sobre os conceitos colocados em movimento no momento da atividade.

Assim, a fim de oferecer suporte às ideias apresentadas, o trabalho está estruturado da seguinte maneira: o capítulo 1 **- Estrutura teórica da pesquisa: elementos que permitiram o desenvolvimento das atividades -** está organizado em dois tópicos. Fundamentado na tese de Sousa (2004), o tópico 1.1 trata da perspectiva lógico-histórica e os nexos conceituais, que são os elementos fundamentais ao desenvolvimento da pesquisa. No tópico 1.2 apresentamos uma interpretação da teoria da atividade apoiados principalmente nas obras de Moura (2001) e Moura et al (2010).

As obras desses autores nos deram embasamento para que, no capítulo 2 **- Considerações sobre o desenvolvimento lógico-histórico da geometria -** onde apresentamos alguns fatos que poderiam ter contribuído para o desenvolvimento da Geometria, tentássemos perceber alguns elementos, de como ocorreu seu desenvolvimento lógico-histórico.

No capítulo 3 **- Nexos Conceituais -** apresentamos aqueles que pudemos identificar nesse processo de estudo como nossos nexos conceituais de Geometria.

No capítulo 4, apresentamos a **Metodologia** da pesquisa, que está dividida em duas partes. A primeira trata dos sujeitos, o enfoque e a coleta de dados. Na segunda parte apresentamos como se deu a análise de dados pautada na Análise de conteúdo, para isso nos fundamentamos nas obras de Franco (2007) e Bardin (1977).

No capítulo 5 **- As atividades e algumas reflexões -** apresentamos as atividades desenvolvidas e a análise dos dados obtidos no desenvolvimento das mesmas. E ao final apresentamos as nossas considerações sobre os resultados e nossas percepções quanto à pesquisa.

1 ESTRUTURA TEÓRICA DA PESQUISA: ELEMENTOS QUE PERMITIRAM O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Neste capítulo são apresentados e discutidos os principais constructos teóricos desta investigação: lógico-histórico e nexos conceituais, embasados na tese de Sousa (2004) e uma interpretação da teoria da atividade dada por Moura (2001; 2010).

Na sequência, apresentamos algumas considerações a respeito de como ocorreu o desenvolvimento da Geometria, a partir da perspectiva lógico-histórica e quais são alguns dos nexos conceituais de Geometria que encontramos na investigação desse processo. Para isso, nos fundamentamos principalmente nas obras de Gerdes (1981), Hogben (1952) e Serres (1989).

1.1 A PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA E OS NEXOS CONCEITUAIS

Ao olhar para a História da Matemática podemos perceber que os conceitos matemáticos surgiram em diferentes épocas e sociedades, em função de uma necessidade prática ou cultural ou ainda devido a uma curiosidade humana e, ao longo do tempo, com o seu desenvolvimento, foram sofrendo mudanças. Assim, todos os conceitos têm uma história, a história da sua formação.

Esses conceitos, no entanto, não nascem prontos, estruturados e formalizados. Existe por trás dessa história um desencadeamento lógico pelo qual esses conceitos foram se desenvolvendo e se concretizando, e dessa maneira, estruturando os conhecimentos adquiridos pela humanidade até então. A partir disso, Sousa (2004) nos afirma que não há como dissociar o desenvolvimento lógico do histórico de um conceito, uma vez que eles se desenvolvem juntos e interdependentes. Assim, a esse movimento de estruturação dos conceitos, a essa dialética, denomina-se de lógico-histórico do conceito.

Observar esse processo lógico associado ao histórico nos possibilita relacionar, o processo de apropriação de um conceito ao seu movimento de constituir-se teórico. Esse processo não se dá de forma linear, pois se delineia aí um trajeto em que podemos nos deparar com incômodos, dúvidas, incertezas e impasse. Isso é o que instiga a uma busca pela construção dos conceitos em resposta às necessidades, possibilitando assim, que haja novas descobertas, que o conceito seja moldado, (re)elaborado, seja estruturado e se possa assim obter uma efetiva apropriação.

Muitas vezes, algumas dificuldades que os estudantes apresentam, em relação à compreensão de alguns conceitos ocorrem devido ao fato de que existe um salto do empírico ao abstrato, ou mesmo, os conceitos são apresentados já na forma abstrata. Sousa (2004), nos alerta ao desenvolver os conceitos a partir da perspectiva lógico-histórica, deve-se perpassar três etapas do pensamento: empírico-discursivo, flexível e teórico.

O pensamento empírico discursivo é mais sensorial e considera apenas os aspectos externos do objeto. Já o pensamento teórico é mais organizado formalmente, assim o pensamento flexível é o elo entre as outras duas formas de pensamento, pois ele preenche um vazio conceitual que existe entre os outros dois. De acordo com Sousa (2004), não podemos considerar apenas as extremidades formais dos pensamentos empírico-discursivo e teórico, mas temos que considerar o processo lógico-histórico do movimento do pensamento, da fluência elaborada nas abstrações nessa caminhada, no processo dialético de constituir-se teórico, uma vez que o conhecimento científico é mutável. Desse modo o pensamento flexível contém esse movimento lógico-histórico e é aí que se fundamentam os conceitos, contém a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensamento humano.

No pensamento flexível surgem as dúvidas e incertezas, o impasse, a busca pela construção e compreensão do conceito. A partir disso, o pensamento flexível contém o que Sousa (2004) denomina de nexos internos do conceito ou simplesmente nexos conceituais.

Os nexos conceituais levam em consideração os aspectos mais internos do conceito, são as estruturas fundamentadoras dos conceitos que foram se desenvolvendo dentro de um percurso histórico e sob um desencadeamento lógico até chegar a uma definição formal.

As características mais superficiais dos conceitos, que consideram apenas os seus elementos perceptíveis, que ficam por conta da linguagem e são formais, Sousa (2004) as denomina como nexos externos. A autora nos dá como exemplo a simples classificação dos ângulos em retos, agudos e obtusos, que são elementos formais, não pensando assim, nos significados mais intrínsecos ao conceito de ângulo.

Sousa (2004) nos atenta que os nexos externos dão pouca mobilidade ao sujeito para se apropriar do conceito e que:

> ensinar a partir dos nexos externos, traz resultados parciais ao aluno. Os prejuízos podem ser comprovados não só na falta da subjetividade do sujeito como também na formação do pensamento teórico. O pensamento teórico generaliza o conceito (p. 62).

Ao olhar para um conceito, não podemos pensá-lo relacionando-o apenas à presença física do objeto, pois o cerne do conceito não está em poder manipular o objeto, mas sim, no entendimento daquilo que ele carrega consigo, dos aspectos internos intrínsecos a ele, ou seja, os seus nexos conceituais.

A partir do entendimento do que é a perspectiva lógico-histórica e os nexos conceituais, nos dedicamos ao estudo do que são as atividades orientadoras de ensino. Apresentamos então, no tópico a seguir a nossa interpretação a esse assunto, embasados nos trabalhos de Moura (2001) e Moura et al (2011).

1.2 AS ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO (AOE)

A Geometria é um importante campo de conceitos da Matemática, os quais foram descobertos, estudados, estruturados e utilizados nas mais diversas civilizações ao longo do tempo. Hoje, quando nos deparamos com a Geometria presente nos livros didáticos e que é ensinada nas escolas essa é vista como um conhecimento pronto, acabado, estático. Geralmente, aprendemos e ensinamos Geometria de uma maneira mecânica, sem que isso tenha muito significado – simplesmente calculando áreas, por exemplo, assim como nos afirmam Proença e Pirola (2009, p. 380);

> Sabe-se que o tipo de ensino, baseado na aprendizagem memorística e mecânica, que utiliza a geometria apenas para validar fórmulas de cálculos como de área, perímetro e volume, tem gerado obstáculos na aquisição e apropriação de conceitos geométricos.

Pensando nisso, nos propomos a trabalhar com a Geometria de uma maneira que possa torná-la mais significativa, e por isso a opção de utilizar as atividades orientadoras de ensino.

De acordo com Moura (2001, p. 155), nessas atividades, os estudantes devem se sentir como agentes de todo o processo e que a atividade orientadora de ensino deve ser estruturada de modo a permitir que eles possam interagir mediados por um conteúdo e negociando significados, tendo como objetivo solucionar coletivamente uma situação problema. Segundo Moura (2001), a atividade é orientadora porque “define os elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados pelo professor” (p. 155).

A participação do professor, segundo Moura et al (2010), também é de grande importância, pois ao se colocar em atividade, ele

> continua se apropriando de conhecimentos teóricos que lhe permitem organizar ações que possibilitem ao estudante a apropriação de conhecimentos teóricos explicativos da realidade e o desenvolvimento do seu pensamento teórico, ou seja, ações que promovam a atividade de aprendizagem de seus alunos (MOURA, 2010, p. 214-215).

O autor continua sua discussão dizendo que tais ações do professor “na organização do ensino concorrem para que a aprendizagem também ocorra de forma sistemática, intencional e organizada” (MOURA et al, 2010, p. 215). Assim, o professor assume um papel fundamental de mediador da relação dos estudantes com o objeto do conhecimento.

A intencionalidade do professor é então, algo essencial numa AOE e como em Rezende (2010), a nossa foi a de possibilitar aos estudantes a necessidade da descoberta conceitual, denominada pelo autor de “incômodos”.

De acordo com Rezende (2010, p. 29), “os sujeitos incomodados pelas situações-problemas geradas nas atividades buscam recursos e levantam hipóteses, expondo-as no ambiente de discussão gerado durante o trabalho, na tentativa de sanar a situação-problema”.

Desse modo, devemos despertar nos estudantes a necessidade de participar da atividade. Ao discutir sobre isso, Moura (2001, p. 157), nos aponta que a atividade educativa deve ter por finalidade aproximar os estudantes de um determinado conhecimento e, que esse é o objeto a ser conhecido pelos estudantes que deverão ser sujeitos da aprendizagem. Aqui reside segundo o autor um ponto muito sensível da atividade de ensino:

> a definição do objeto de ensino, que deverá se transformar em objeto de aprendizagem, pois nem todo objeto de ensino é de aprendizagem. É isso que queremos dizer, pois para ser objeto de aprendizagem é necessário que seja uma necessidade dos sujeitos que aprendem. É por isso que dizemos que a elaboração da atividade implica uma atenção especial aos sujeitos que deverão aprender (MOURA, 2001, p. 157).

Assim, ao propor aos estudantes uma atividade ou uma sequência de atividades, é preciso observar esses fatores, para que, aquilo que se propõe como uma atividade orientadora de ensino não seja encarada pelos estudantes apenas como uma tarefa.

Desse modo acreditamos que possibilitar aos estudantes trabalhar dessa maneira é importante, pois assim têm a possibilidade de refletir, discutir entre si, elaborar ideias e tentar tirar as suas conclusões. E também de acordo com os apontamentos de Van de Walle (2009), acreditamos que "a aprendizagem é enriquecida em salas de aula onde se exige que os alunos avaliem suas próprias ideias e as de outros, sejam encorajados a fazer conjecturas matemáticas e a testá-las, e desenvolvam suas habilidades de raciocínio." (p. 21).

Quando nos propomos a trabalhar com as AOE a partir da perspectiva lógico-histórica, explorando os nexos conceituais de Geometria, não significa que devamos necessariamente, retratar exatamente a sua história de surgimento e formação na atividade. Concordamos com Sousa (2004) que essa busca consiste em possibilitar aos estudantes compreender como se deu o movimento do pensamento que chegou à formalização teórica dos conceitos, colocando-os em situações que os permitam elaborar formas de pensamento para a estruturação do conceito, de forma semelhante à sua história.

Desse modo, tivemos a intenção de através das AOE possibilitar aos sujeitos da pesquisa elaborar formas de pensamento que os permitissem estabelecer relações, compreender e utilizar os elementos que estruturam os conceitos geométricos, ou seja, os nexos conceituais.

2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA GEOMETRIA

A fim de que possamos definir e discutir sobre os nexos conceituais de Geometria, faz-se necessário trazer elementos que sirvam de suporte para tal. Desse modo, nos tópicos deste capítulo serão apresentados alguns fatos[1] da história da humanidade, nos quais possamos estudar que fatores podem ter contribuído para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Sabemos que as manifestações matemáticas datam desde os tempos mais primitivos, assim, é importante que tenhamos algum conhecimento sobre possíveis ações desenvolvidas pelo ser humano que contribuíram para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Desse modo vamos exibir como o ser humano se comportava diante de certas situações. Partindo então dos tempos primitivos, a atividade matemática se deu de forma mais intensa em alguns períodos. De acordo com Almeida (2009), os períodos de maior atividade do homem na pré-história, também conhecida como Idade da Pedra, que é o período em que o homem empregou o uso de ferramentas de pedra, são o Paleolítico e o Neolítico.

Segundo o autor, o período do Paleolítico "se divide em inferior, médio e superior. O superior é o período das magníficas pinturas nas cavernas da Espanha e do sul da França" (p. 39) e o Neolítico é caracterizado por "ferramentas de pedra extremamente bem elaboradas, por cerâmica de bom acabamento, e pelo desenvolvimento da agricultura, da navegação e arquitetura megalítica" (ALMEIDA, 2009, p. 39).

[1] A fim de ilustrar os fatos exibidos neste capítulo, algumas Figuras foram utilizadas. As mesmas foram inspiradas nas ilustrações do livro "Hogben, L. **Mathematics for The Million.** New York: W.W. Norton & Company, 1967".

Considerando então os períodos Paleolítico e Neolítico, Almeida (2009, p. 115) nos mostra que os povos paleolíticos eram caçadores-coletores, e que esses não alteravam o seu habitat, a suas influencias no ambiente eram mínimas, pois ficavam por conta de caçar animais pequenos e coletar frutos. Já os povoeolíticos eram agricultores-criadores, e por isso alteravam o ambiente para suprir as suas necessidades.

Desse modo apresentamos a seguir como esses povos contribuíram para o desenvolvimento da Geometria, mostrando algumas colaborações da Astronomia até chegar aos egípcios e gregos. Fazer esse estudo das elaborações do homem ao longo do tempo, sobre os conceitos geométricos foi o que nos propiciou ao olhar para as elaborações dos estudantes nas atividades, a percepção das relações que eles estabelecem e como compreendem os conceitos desenvolvidos a partir da exploração de seus nexos conceituais.

2.1 FORMA E MATÉRIA

Com relação aos povos caçadores-coletores do período Neolítico, Gerdes (1981) traz em seu trabalho, que a Geometria teria se desenvolvido nesse período e atribui o surgimento da mesma ao próprio contato dos seres humanos com o ambiente, em isso "está relacionado com a observação activa da natureza" (p. 21).

Uma situação apresentada pelo autor, para ilustrar como a observação da natureza contribuiu para o surgimento da Geometria, está relacionada com a busca por alimento. Um caçador, por exemplo, ao encontrar o lugar onde se encontrava um grupo de os animais, deveria reportar ao restante do grupo como chegar até lá e poder capturá-los e. Para isso, o caçador deveria observar e obter alguns conhecimentos empíricos de tal lugar.

A situação apresentada por Gerdes (1981) é de um caçador que encontra os animais numa planície e tem que reportar aos outros componentes do seu grupo, que não conhecem o lugar e até então não têm em mente o que é o significado da palavra “planície”.

Uma forma hipotética, com a qual esse caçador poderia reportar ao restante do grupo é comparando essa planície a uma lagoa quando não há vento, ou seja, na melhor situação para se pescar e a partir disso poderia dizer: “vi estes animais numa região que parece uma lagoa quando não há vento, que parece uma lagoa quando se pode pescar” (GERDES, 1981, p. 22). A partir de comparações dessa natureza poderiam ter surgido, aos poucos, as primeiras ideias do conceito de plano.

A partir da relação com o ambiente, os seres humanos aprenderam que certas formas são melhores para atender a determinadas necessidades. Assim, de acordo com Gerdes (1981, p. 22), ao cortar a carne dos animais, os caçadores perceberam que ferramentas pontudas e afiadas, poderiam facilitar o seu trabalho. Desse processo de fabricação e aperfeiçoamento de objetos, “o Homem aprendeu uma coisa muito importante, aprendeu que forma e matéria são coisas distintas, aprendeu que podemos dar forma a um certo objecto. Um animal não conhece a diferença entre forma e matéria” (GERDES, 1981, p. 22) .

No próprio processo de trabalho, o ser humano descobriu que é possível dar forma à matéria e como reflexo disso, no seu pensamento desenvolveram-se as ideias de matéria e forma e com isso foi possível que pudesse analisar melhor as formas. Ao fabricar o arco e a flecha, a corda para o arco, cestos, panelas de barro entre outros objetos, segundo o autor “o homem sente que pode dar forma à natureza, quer dizer, pode dar forma à matéria, pode transformar a natureza.

Ao mesmo tempo obtém também as primeiras ideias geométricas" (GERDES, 1981, p. 23).

Para retratar isso, Gerdes (1981, p. 23) argumenta que a partir da corda para o arco pode surgir a ideia de linha reta, um fio ou até mesmo uma árvore muito fina pode dar essa mesma ideia. Ou então, olhando para as bordas de um cesto ou o formato da lua cheia poder-se-ia obter uma primeira noção de circunferência. Desse modo, segundo Gerdes (1981) "na base da comparação, a Humanidade inventou palavras para indicar situações concretas, inventou os seus conceitos geométricos" (p. 23).

2.2 ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DA ASTRONOMIA

Seguindo mais adiante, no período Neolítico, temos as sociedades de agricultores-criadores que, segundo Almeida (2009), tinham as características das matemáticas que utilizavam fundamentalmente diferentes dos povos no Paleolítico, isso por que tanto a forma de pensar e o modo vida se contrastavam.

O agricultor-criador tem necessidade de alterar o ambiente para poder adequá-lo às suas necessidades. Para se trabalhar com a criação de animais e com a agricultura, exige-se muito mais habilidades do que uma pessoa que necessite somente coletar frutos ou caçar animais pequenos.

Almeida (2009) enfatiza ainda que:

> a criação envolve captura de espécies, seleção, domesticação, construção de cercados, controle de doenças, alimentação, seleção de matrizes, partos. Enquanto que o modo de vida do caçador-coletor requer somente um mínimo de conhecimento de matemática, o oposto, o modo de vida do agricultor, com seu alto grau de alteração do meio-ambiente e divisão de trabalho entre especialistas,

> acarreta uma necessária sofisticação de seu conhecimento de matemática (p. 116).

O problema da contagem de grandes quantidades, que culminou com a origem do número, de acordo com Hogben (1952, p. 43) só se fez sentir a partir do momento em que os homens começaram a cuidar de suas boiadas e rebanhos. O pastor e o boiadeiro precisavam saber contar o número de seus animais, para se certificarem de que nenhum se extraviou e antes mesmo do homem residir em cidades, ele já havia descoberto a maneira de contá-los em grupos.

Hogben (1952, p. 44) nos afirma que não dispomos de elementos para poder dizer que a utilização dos números na contagem de animais antecedeu ou não alguma outra aplicação que a humanidade poderia ter lhes dado, tão logo emergiu do estado primitivo em que se limitava a coletar e a caçar. Entretanto, para o autor não resta dúvida de que foi ao começar a cultivar a terra e criar animais, que somente se reproduzem em determinadas épocas do ano, que o homem sentiu a necessidade de registrar as estações.

A partir disso o homem observou que, no período de duas luas cheias, a mesma nasce e se põe um pouco mais tarde a cada noite, e assim, segundo Hogben (1952), começou agrupar os dias em luas, ou meses de trinta dias. Observaram também que as constelações do céu noturno variam com as estações, e que a cada noite, elas nascem e se põem mais cedo que na noite anterior, e quase todos os povos primitivos sabiam reconhecer as estações, observando as primeiras constelações que surgiam após o pôr do sol, e também contando quantas luas transcorriam entre as estações chuvosas e secas.

Segundo esse autor, os povos egípcios antes do ano 4000 a. C., já haviam determinado a duração do ano em 365 dias, observando a quantidade de dias entre as duas aparições sucessivas da estrela Sírius. Outra maneira de se medir a duração do ano apresentada por Hogben (1952), consistiu na observação da sombra solar.

Ao meio dia, a sombra solar apresenta o seu cumprimento mais curto e sempre aponta na mesma direção. Essa direção divide o horizonte por uma linha, a linha do meridiano, que vai do Norte ao Sul da Terra. Em certas estações do ano, o sol nasce e se põe mais próximo do Norte e do Sul do horizonte, e nesses casos é onde a sombra do sol ao meio dia é respectivamente mais curta e mais longa.

O dia em que a sombra é mais curta, ao meio dia, é o solstício de verão, e o dia em que a sombra, ao meio dia, é a mais longa, é o solstício de inverno. A partir disso, os homens podiam determinar o ano, como o número de dias transcorridos entre dois solstícios de verão consecutivos.

Os equinócios são os dias em que dia e noite tem a mesma duração, e são os dias que marcam o início da primavera e o outono. Nos equinócios o sol nasce exatamente a Leste e se põe exatamente a Oeste e segundo Hogben (1952), esses dias davam motivos para celebrações especiais dos povos antigos. Através da observação da sombra do sol em cada estação o homem aprendeu marcar o tempo, a definir o calendário.

Na figura abaixo temos indicado o meio-dia nos equinócios em uma latitude qualquer da Terra, a partir da sombra projetada pelo obelisco ou gnômon. O zênite é o nome que os astrônomos atribuem ao ponto do céu que está situado bem acima de nossas cabeças.

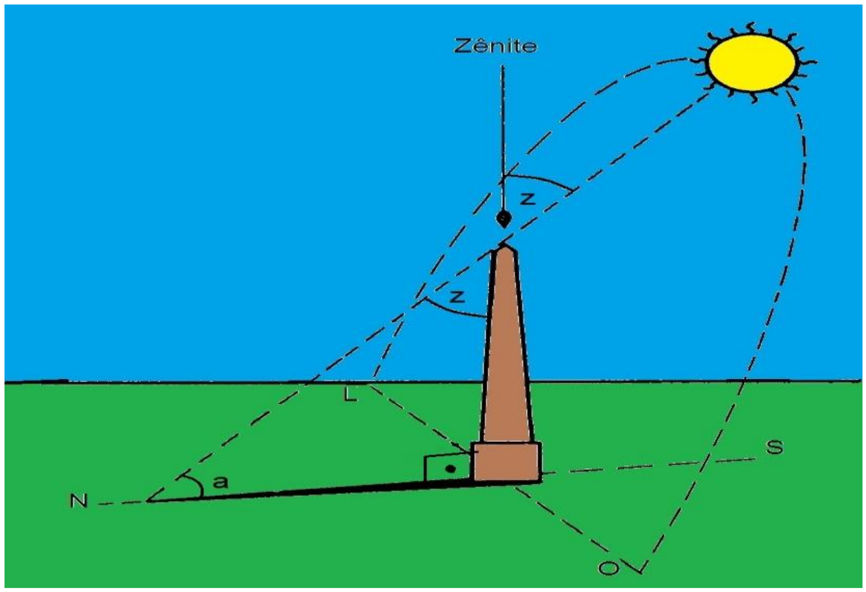


Figura 1 Meio dia em um equinócio

De acordo com Hogben (1952), o ângulo **a** é a altura do sol e é formada pelas linhas que os raios do sol determinam com o horizonte. O ângulo **z,** formado pelo fio de prumo (ou a vertical) e os raios solares, é chamado distância zenital do sol.

Registrar o tempo através de observações astronômicas foi algo fundamental para o desenvolvimento dos povos antigos. Segundo Hogben (1952, p. 54), a realização dessas observações é o que culminou com a necessidade das medições exatas. De acordo com o autor, é quase certo que o homem aprendeu a medir ângulos muito antes de se dar ao trabalho de medir cumprimentos.

Como mostrado anteriormente, os egípcios quando se fixaram as margem do rio Nilo determinaram a duração do ano através de duas aparições sucessivas da estrela Sírius. Mas, para poder observar o nascimento da estrela era necessário saber em que ponto do horizonte ela surgiria e assim, “tudo parece indicar que o homem neolítico construía monumentos rudimentares destinados a fixar a direção de certos fenômenos celestes, muito antes de construir cidades, que tenham deixado restos permanentes” (HOGBEN, 1952, p. 55).

Para poder reconhecer a direção em que um objeto surge no horizonte, Hogben (1952) nos mostra que se deve observá-lo e fazer referência a uma direção fixa. Assim, o homem teria eleito duas linhas fundamentais de referência: “o primeiro meridiano, que liga os pontos norte e sul do horizonte e outra linha perpendicular a êle, que liga os pontos leste e oeste” (p. 55). Ou seja, desse modo, estaria determinando as linhas que apontam na direção dos quatro pontos cardiais.

Hogben (1952) apresenta outra aplicação que os povos antigos deram aos ângulos e que consistiu na orientação das suas construções. O monumento de *Stonehenge* construído na Inglaterra, por exemplo, revela a posição em que o sol nascia e se punha nos dias do solstício. Essa posição era fixada por um alinhamento de duas colunas de alturas diferentes.

Esse autor ainda nos mostra que, possivelmente, o homem fixou o equinócio observando o nascer e o por do sol nos solstícios. Como na Figura 2 abaixo, A e B representam duas colunas alinhadas com o por do sol no solstício de inverno. A coluna representada por C está alinhada com A, indicando a posição do sol poente no solstício de verão e, temos que C e B estão na mesma distância de A. A posição do sol poente equinocial, que é o meio caminho entre os dois extremos (sol poente no solstício de verão e no solstício de inverno) poderia desse modo, ser encontrada a partir do traçado da bissetriz do ângulo BÂC.

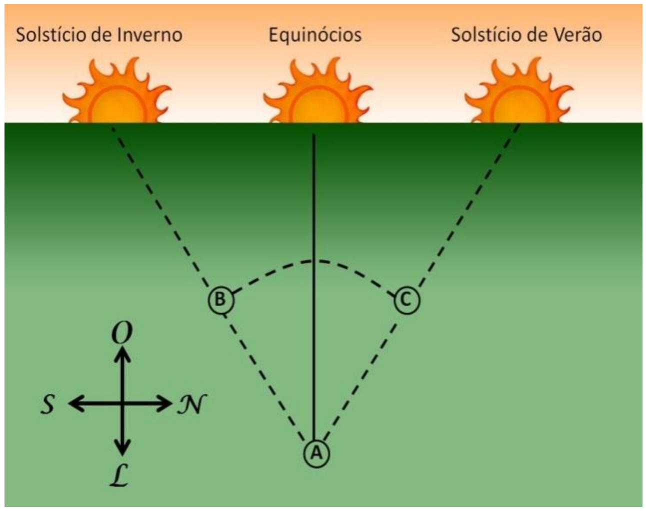


Figura 2 Determinação do equinócio pelos solstícios

As pirâmides de Quéops e Sneferú foram construídas segundo um mesmo plano geométrico. As quatro faces das pirâmides dão exatamente para os pontos cardiais, e a relação do perímetro dos quatro lados com a altura da pirâmide é a mesma relação do perímetro de uma circunferência e o seu raio, ou seja, 2π. De acordo com Hogben (1952), ao cortar o meridiano, os raios da estrela Sírius ficavam perpendiculares à face Sul da Grande Pirâmide, e penetravam na câmara real por meio de um canal de ventilação indo até o lugar onde estava o finado faraó, iluminando a sua cabeça.

Através da observação do movimento dos astros no céu permitiu como dito anteriormente, a determinação da duração do ano. Para os povos babilônicos, o ano tinha 360 dias, o acréscimo de cinco dias aos doze meses egípcios (cada um com 30 dias) são segundo Hogben (1952), dias santificados, indicando que as primeiras medições dos egípcios para o ano, também foram de 360 dias. Desse modo, a trajetória circular aparente do sol na eclíptica, fora estimada em 360 etapas, cada uma dela correspondendo a um dia e uma noite. "Não resta dúvida de que, dessas trezentas e sessenta divisões naturais do passeio do sol pelo arco descrito em sua trajetória circular, completa, se originou o grau" (p. 59).

Por muito tempo, o ser humano contentou-se em utilizar unidades de medidas grosseiras na maior parte das necessidades práticas. Porém, segundo Hogben (1952), a construção de templos exigia grande precisão e os homens foram buscá-la na arte de medir a sombra solar. Calculavam as alturas em função do comprimento da sombra e o ângulo que ela fazia com o horizonte, mas a realização desse processo exigia que tivessem certos conhecimentos de algumas relações entre os lados dos triângulos[2].

De acordo com Hogben (1952), as primeiras descobertas matemáticas pertencem a essa classe de problemas e que, desde a antiguidade, os babilônios já sabiam traçar ângulos de 60°, inscrevendo um hexágono regular em uma circunferência e nos mostra ainda que, com base em documentos encontrados, os povos antigos conheciam um método muito simples de se traçar o ângulo reto, baseando-se no fato de todo triângulo de lados de 3, 4 e 5 unidades de comprimento ser necessariamente retângulo.

Além disso, Hogben (1952) afirma que há cinco ou seis mil anos os Egípcios e Babilônios já haviam descoberto o que conhecemos hoje como teorema de Pitágoras. O método, pelo qual os arquitetos sacerdotais egípcios traçavam o ângulo reto, consistia em emendar segmentos de corda de comprimentos proporcionais a 3, 4 e 5. Era necessário somente dobrar a corda emendada pelos nós e se obtinha um triângulo retângulo.

Com o progresso da arquitetura, o ângulo reto formado pelo nível das águas e o fio de prumo, foi de acordo com Hogben (1952) se tornando cada vez mais importante como medida angular. O ângulo urbano dos construtores era

---

[2] Tais relações serão abordadas no tópico 2.3.

expresso como uma fração do ângulo reto e não dado em graus. Quando se dispôs os templos em relação aos pontos cardiais,

> verificou-se que o ângulo do trimestre (¼ de 360º = 90°) e o ângulo do esquadro eram iguais. O FIO DE PRUMO e o NÍVEL D'ÁGUA deram-nos a definição do ângulo reto como unidade de medida angular. A coluna do Templo é vertical quando se inclina igualmente sobre a linha do horizonte, de cada lado de um fio de prumo. O ângulo reto é também aquêle que o fio de prumo faz com o horizonte (HOGBEN, 1952, p. 68).

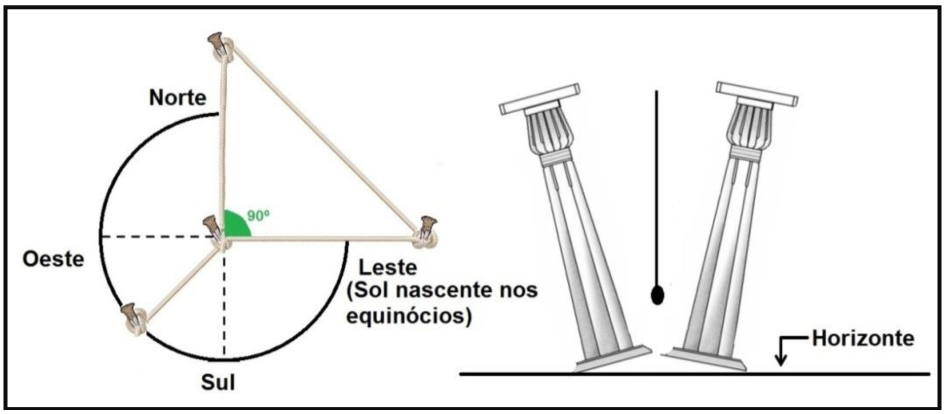


Figura 3 O ângulo urbano dos construtores

A partir dessa ideia podemos pensar também no conceito de paralelismo. Conhecemos a definição de Euclides para o paralelismo de duas retas, que é a de que duas retas são paralelas, se por mais que as prolonguemos jamais se encontrarão. Para Hogben (1952, p. 134), essa definição,

> depois de conduzir-nos ao sétimo céu, abandona-nos, como Platão, no espaço. Porque a verdade é que não conhecemos nenhuma superfície tão plana que nos permita prolongar indefinidamente duas linhas, conservando-as retas. Nossos pedaços são feitos em pedaços tão reduzidos da terra que, em comparação com o restante, nos parecem realmente planos.

Assim, o autor observa que muito mais lógico seria inquirir como se pode reconhecer quando duas linhas são paralelas. E uma das maneiras que se poderia fazê-lo, seria fixar que duas vigas são paralelas quando estão igualmente inclinadas sobre uma terceira em que ambas se apoiam. Poderíamos aplicar essa situação às colunas do templo citadas anteriormente. As duas colunas são paralelas, pois são verticais ao plano do horizonte, ou seja, estão inclinadas sob o mesmo ângulo, o ângulo reto.

Hogben (1952) diz que quando a construção de templos degenerou em verdadeira mania, os sacerdotes abandonaram a medição dos ângulos a uma classe artesã, de escravos e libertos, que deixaram como vestígios dos seus conhecimentos, apenas a perfeição de suas obras. Assim, de acordo com o autor, a única razão de ser atribuído aos gregos, o título de primeiros matemáticos, deve-se ao fato de os egípcios não terem deixado nenhuma literatura explicativa dos prodígios que realizaram com as suas medições.

Os poucos documentos deixados pelos egípcios são alguns papiros como o de Rhind escrito pelo escriba Ahmes. Hogben (1952) diz que tão escassa literatura dos egípcios deve-se ao motivo de que a "sua classe letrada não tinha a menor disposição para irradiar seus segredos sacerdotais, e a classe artífice, de mestres de obras, engenheiros, arquitetos e navegantes, por não saberem escrever, transmitiam seus conhecimento de forma oral" (p. 66).

Durante esse período de construção de templos pelo Egito, outros fatos que contribuíram para o desenvolvimento da Geometria estão relacionados com a agricultura. De acordo com Hogben (1952), a exploração dos agricultores pela mesma casta dirigente que ordenava a construção dos templos e túmulos extraordinários, culminou em um sistema de taxação da terra no Egito. Encontramos na obra de Caraça (2011), um relato a esse respeito, do historiador grego Heródoto, que viveu no século V antes de Cristo, em que diz:

> disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egipto entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber o quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois foi passada aos gregos (p. 32).

Seguindo esse pensamento, para que o faraó pudesse cobrar os devidos impostos sobre as terras dos agricultores, necessitava de saber com que quantidade de terras estava lidando e, como as águas do rio consumiam partes dessas terras nas cheias, o que derrubava os marcos fixados no ano anterior, era preciso que se medisse o que foi tomado pelas águas. Em algumas ocasiões, as águas não consumiam toda a região de cultivo e alguns lados ficavam preservados, então eles tinham que reconstruir os limites, a partir de informações parciais. Porém, quando toda a propriedade era tomada, se tratava de refazer os marcos de modo que se conservasse nas propriedades a mesma quantidade de terra de antes, poderiam assim terem surgido os primeiros conceitos de cálculos sobre áreas (BARKER, 1976).

Essa necessidade dos egípcios de realizar tais medições, segundo Barker (1976), possibilitou que eles se tornassem

> hábeis delimitadores de terras e devem ter descoberto e utilizado inúmeros princípios úteis relativos às características de linhas, ângulos e figuras – como, por exemplo, o de que a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, e o de que a área de um paralelogramo é igual à do retângulo que tenha a mesma base a mesma altura (p. 27).

Essas disputas sobre impostos e direitos de propriedades deram origem a uma classe profissional de agrimensores, mas, além da agrimensura, Hogben (1952) diz que os egípcios dedicavam grande atenção aos planos de irrigação, principalmente os baseados nas profecias sobre as enchentes do rio Nilo. A partir disso a agronomia egípcia teria acrescentado à medição de ângulos, a medição de superfícies, mas não se sabe ao certo, o motivo dos homens terem escolhido o quadrado como unidade de área. Hogben (1952, p. 67) aponta que uma razão plausível para isso, é de quando se começou a pavimentar assoalhos utilizando ladrilhos quadrados.

Questionar sobre quanto espaço plano contém uma muralha, de acordo com Hogben (1952, p. 68), equivale a questionar quantos ladrilhos quadrados de um tamanho padrão são necessários para calçar esse espaço e que a espessura dos ladrilhos não tem a menor importância nesse caso. Ainda segundo esse autor, as medições que realizamos para saber quantos tijolos serão necessários para calçar um pavimento (superfície), para construir a base de um muro ou parede (comprimento) e preencher um determinado espaço (volume), estarão relacionadas entre si, desde que sejam utilizados os mesmos tijolos, ou seja, estipular uma unidade de medida padrão.

Com relação ao volume de determinado objeto, ou seja, o quanto é necessário para preenchê-lo, Hogben (1952) atribui aos Sumerianos o fato de serem os primeiros a utilizar os cubos com lados de comprimento padrão, como unidade de medida para o volume. Esses povos desenvolveram sua civilização na região sul da Mesopotâmia, entre os rios Tigre e Eufrates e habitaram esta região, conhecida como Suméria, entre os anos 4000 e 1950 a.C.

O fato de serem os primeiros a utilizar os cubos uma medida padrão de volume teria ocorrido em função da expansão das suas rotas comerciais. Tornou-se uma necessidade social estabelecer um padrão comum que se pudessem comparar vasilhas de várias capacidades, uma vez que os diferentes povos através dos seus costumes impunham formas e dimensões variáveis aos seus vasilhames.

De acordo com Hogben (1952), os povos sumerianos eram comerciantes desde a mais remota antiguidade. Foram os fundadores de Tiro, um dos maiores portos comerciais da antiguidade e desde 1500 a. C. seus barcos já navegavam rumo ao norte, para comercializar com as comunidades megalíticas da Bretanha, do Coranwall e Devon. Quando navegaram para o Sul e ultrapassaram o equador, ruiu a economia sacerdotal das velhas civilizações, pois a medição das estrelas passou a incorporar a ciência marítima. Desse modo, segundo Hogben (1952), as civilizações da Mesopotâmia e Ásia menor precederam a do Egito na criação de um sistema de pesos e medidas.

Podemos perceber com esses fatos, que a partir das necessidades do ser humano em registrar as estações para poder lidar com o cultivo da terra e a criação de animais, as observações astronômicas, possibilitaram muitos avanços na construção de conceitos geométricos, como ângulos, paralelismo, perpendicularidade, comprimento, área e volume, como viemos mostrando ao longo do texto.

2.3 ALGUMAS RELAÇÕES SOBRE TRIÂNGULOS

Em Geometria uma das figuras mais elementares é o triângulo, que pode ser usado como ferramenta, por exemplo, para um agrimensor ao medir um terreno e a partir dos fatos exibidos anteriormente, possivelmente os povos antigos se utilizavam disso, como no caso dos egípcios. Conhecendo-se a maneira de calcular a área de um triângulo qualquer, pode-se dividir a área total do terreno em triângulos e somar as áreas desses triângulos, conforme a Figura 4 abaixo.

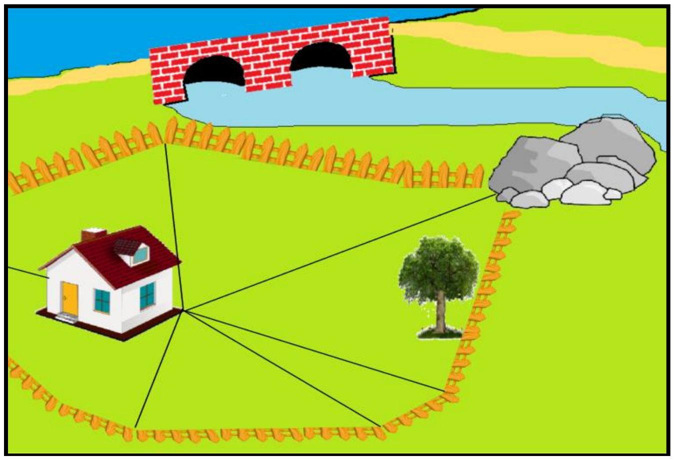


Figura 4 Divisão de uma região em triângulos

Na antiguidade o triângulo foi largamente utilizado, especialmente por ser um elemento facilmente abstraído da relação da sombra solar projetada pelo gnômon (o ponteiro, relógio de sol, estaca). Um exemplo muito conhecido é o da medida da altura da pirâmide de Quéops através de sua sombra, feito esse, supostamente realizado por Tales de Mileto.

Mas, como Tales poderia realizar tão grandioso feito somente com a sombra solar?

Provavelmente Tales teria se utilizado de algumas relações entre os lados dos triângulos. Não sabemos ao certo qual foi o processo que Tales desenvolveu para conseguir calcular a altura da pirâmide.

Hogben (1952) nos traz um exemplo de como se poderia chegar a isso.

Partindo do quadrado como unidade de medida, Hogben (1952) nos mostra que podemos calcular a área de um retângulo a partir de uma soma desses quadrados e que, podemos obter um retângulo, duas vezes maior que um triângulo retângulo dado. Um triângulo qualquer pode ser divido em dois triângulos retângulos, traçando qualquer uma de suas alturas, que são segmentos que saem de um dos vértices até o lado oposto atingindo-o perpendicularmente. Assim torna-se possível calcular a área de qualquer triângulo.

Segundo Hogben (1952), era de conhecimento dos geômetras egípcios, que em um triângulo retângulo onde os outros ângulos medem 45°, os catetos têm o mesmo comprimento. Sabiam também que em certo dia, ao meio dia naquela região, o sol ficava a uma altura de 45° - como ilustrado na Figura 5. Portanto, a sombra de um barranco, uma árvore ou qualquer outra coisa teria o mesmo tamanho da sua altura nesse momento. O problema dessa situação é que o sol somente se encontrava nessa posição em dois dias do ano, o que tornava inviável esperar tais dias para fazer medições, no caso em questão, a pirâmide de Quéops. Assim, fez-se necessário buscar outro caminho para isso.

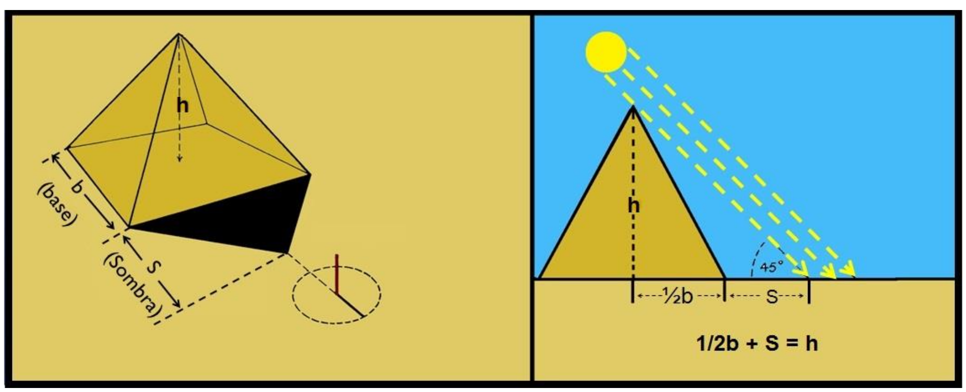
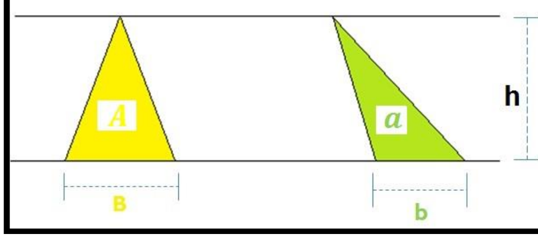


Figura 5 Determinação da altura da pirâmide com o Sol a 45°

Vejamos o que se pode concluir da comparação entre triângulos. Considerando a Figura 6, se um triângulo tem base **B**, altura **h** e área **A**, e outro tem base **b**, altura **h** e área **a**, a relação entre as suas áreas pode ser expressa como:



$$\frac{A}{a} = \frac{\frac{1}{2}h.B}{\frac{1}{2}h.b} = \frac{B}{b}$$

Figura 6 Relação entre as áreas de triângulos de mesma base

Ou seja, em triângulos de mesma altura, a razão de suas áreas é igual à razão de suas bases. Vejamos agora uma importante relação mostrada por Hogben (1952, p.157): “A relação dos lados correspondentes dos triângulos semelhantes é a mesma”. O processo para compreender isso é o seguinte:

Tracemos dois triângulos semelhantes ABC e DEF (Figura 7), de modo que seus ângulos sejam congruentes e suas bases sejam paralelas. Podemos ter então os triângulos abaixo:

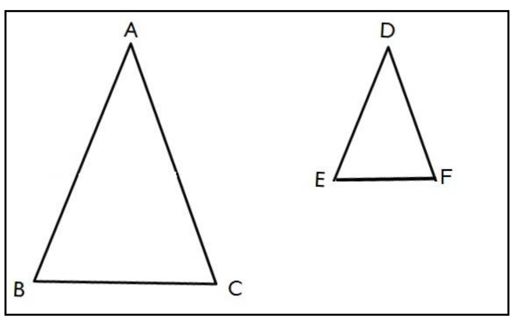


Figura 7 Triângulos ABC e DEF

Podemos sobrepor o triângulo DEF ao triângulo ABC, da seguinte maneira: primeiro tracemos sobre o lado AB o comprimento DE, obtendo assim AG e sobre o lado AC o comprimento DF, obtendo assim AH. Depois tracemos um segmento GH (Figura 8).

Os triângulos AGH e DEF, por construção, possuem as mesmas medidas de lados e ângulos e como a base de DEF é lado correspondente à base de ABC, temos então que GH é paralelo a BC.

Comparando os triângulos AGH e ABC, é possível verificar que os ângulos GAH = BAC, AGH = ABC e AHG = ACB.

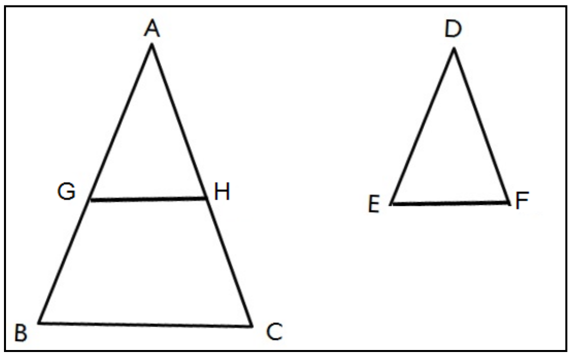


Figura 8 Construindo o triângulo AGH

Ao traçar os seguimentos GC e HB no triângulo ABC e, em seguida, rotacioná-los, percebemos que a área dos triângulos BGH e GHC é a mesma, pois tem a mesma base e altura.

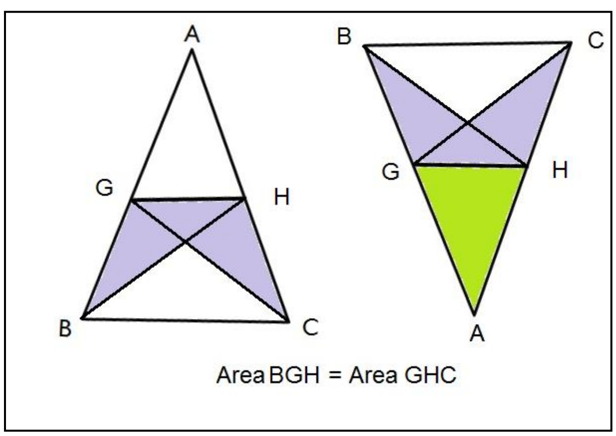


Figura 9 Comparando as áreas

Se tomarmos agora, os triângulos BGH e GHC separadamente e agregarmos a eles AGH, temos então que:

Área (ΔAGH+ ΔBGH) = Área (ΔAGH+ ΔGCH).

Observando os triângulos AHB e AGH, podemos ver que eles têm a mesma altura no vértice H. Do mesmo modo, AGH e AGC têm a mesma altura no vértice G. Utilizando-se da relação exposta acima: em triângulos de mesma altura, a razão de suas áreas é igual à razão de suas bases, temos que:

$\frac{\text{Área } \Delta AHB}{\text{Área } \Delta AGH} = \frac{AB}{AG}$ e $\frac{\text{Área } \Delta AGC}{\text{Área } \Delta AGH} = \frac{AC}{AH}$ e como Δ AHB e Δ AGC são equivalentes, segue que $\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$.

Com isso, em relação aos triângulos ABC e DEF, temos que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. A partir disso, segundo Hogben (1952), podemos encontrar também que $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ e que $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$, e utilizando-se dessas relações Tales teria conseguido medir a altura da pirâmide de Quéops.

Pela Figura 10 abaixo e a partir dessas relações, temos que $\frac{h}{\frac{1}{2}b+S} = \frac{p}{S}$ em que *p* é o tamanho do bastão. Desse modo a altura da pirâmide é encontrada como h== $\frac{p}{S}(\frac{1}{2}b + S)$. Com esses conhecimentos, se pode medir a altura da pirâmide sem que seja necessário esperar os dois dias específicos mencionados anteriormente.

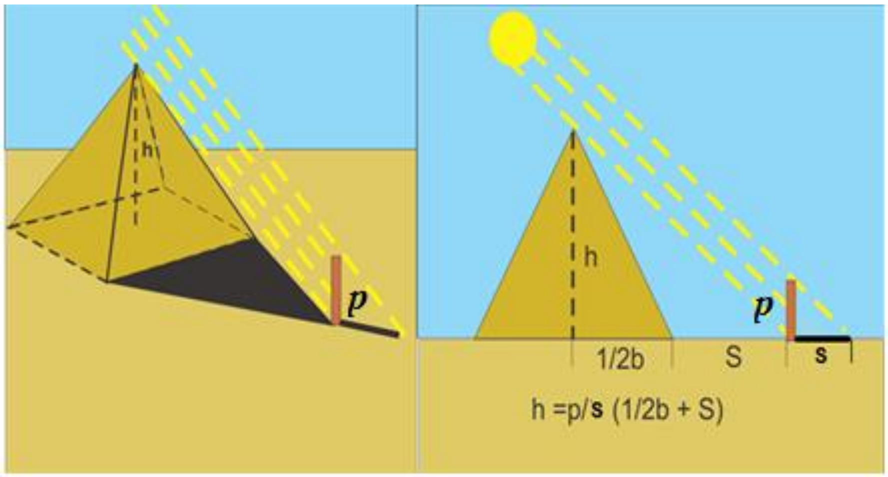


Figura 10 Determinação da altura da pirâmide em um dia qualquer do ano

O método mais rudimentar para calcular medidas assim, seria o de fazer uma figura em escala. Porém, “existe um método melhor que o precedente: o da socializada, ou trigonometria (tal como a costumamos chamar) dos alexandrinos” (HOGBEN, 1952, p. 160).

Esse método consiste em organizar em uma tabela, as razões entre o comprimento do bastão e a sua sombra para vários ângulos de inclinação. Hogben (1952) exemplifica a relação do bastão e a sombra para um ângulo de inclinação A. Essa relação na linguagem dicionária da trigonometria, denomina-se tangente de A e sua representação é **tg A**. E de acordo com o autor isso significa: “procurai um número num dicionário (tábua de tangentes) organizado de uma vez para tôdas, ao invés de vos dar ao trabalho de fazer uma figura em escala cada vez que quiserdes estimar uma altura ou uma distância” (p. 161). Ainda de acordo com Hogben (1952), todos os triângulos retângulos que têm um mesmo ângulo A são semelhantes. Assim a razão entre as suas alturas e bases, serão sempre iguais desde que A seja o mesmo e, só existe um número que represente essa razão.

As outras razões entre os lados dos triângulos retângulos, ou seja, os tamanhos do bastão e a sombra projetada no plano do horizonte (os quais se denominam catetos), e o comprimento do caminho entre o topo do bastão e o extremo da sombra projetada (a qual denomina-se hipotenusa) então nos dicionários chamados senos e cossenos.

O dicionário dos senos mostra o número que expressa a razão entre o cateto oposto ao ângulo A e a hipotenusa, e é representado como **sen A**, e o dicionário dos cossenos, a razão entre o cateto adjacente ao ângulo A e a hipotenusa, representado como **cos A**. Os inversos dessas razões denominam-se respectivamente, **cotg A**, **cosec A** e **sec A**.

A grande utilidade dessas novas relações consiste principalmente no cálculo de medidas inacessíveis. Uma aplicação mostrada por Hogben (1952) é a medida da altura de um barranco, quando não se tem acesso à sua base. Vejamos:

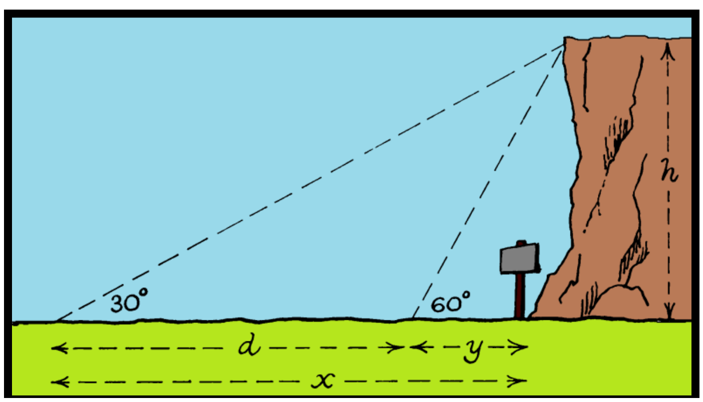


Figura 11 Medindo a altura do penhasco

Na figura acima, não podemos medir o comprimento x da base ou o comprimento y, mas podemos medir d = x-y e assim y = x-d. Desse modo podemos obter:

$\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{x}} = \mathrm{tg}30° \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{tg}30°}$ e $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{y}} = \mathrm{tg}60° \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{tg}60°}$. Consultando a tábua de tangentes encontramos que $\mathrm{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\mathrm{tg}\,60° = \sqrt{3}$. Assim $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{h}\sqrt{3}$ e $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{y}} = \sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{3}}$.

Como x – d = y, temos que $\mathrm{h}\sqrt{3}$ -d $= \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{3}}$. Multiplicando ambos os lados por $\sqrt{3}$ encontramos $3\mathrm{h}\text{-}\mathrm{d}\sqrt{3} = \mathrm{h} \Rightarrow 3\mathrm{h}\text{-}\mathrm{h} = \mathrm{d}\sqrt{3} \Rightarrow 2\mathrm{h} = \mathrm{d}\sqrt{3}$ e assim encontramos que a altura h do barranco é $\mathrm{h} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{3}}{2}$.

Esse exemplo foi feito com os ângulos de 30° e 60°, mas é igualmente aplicável para valores diferentes desses, pois podemos consultar o valor da tangente de qualquer ângulo na tábua de tangentes.

A organização dessas razões, de acordo com Hogben (1952), não foi um feito dos gregos, mas sim dos Alexandrinos que se utilizaram para calcular medidas astronômicas, como no caso de Aristarco ao calcular a distância da Terra à lua e ao Sol. Outro que se dedicou a calcular grandes distâncias foi Eratóstenes[3], que nasceu em Cirene na Grécia, estudou em Cirene, Atenas e Alexandria onde morreu. Erastóneses com uma grande precisão fez a estimativa do comprimento do perímetro da Terra. Vejamos na Figura 12[4] a seguir:

[3] http://pt.wikipedia.org/wiki/Eratóstenes
[4] Figura baseada em <http://meioambiente.culturamix.com/projetos/calcular-a-circunferencia-da-terra> Acesso em: 20 ago 2013

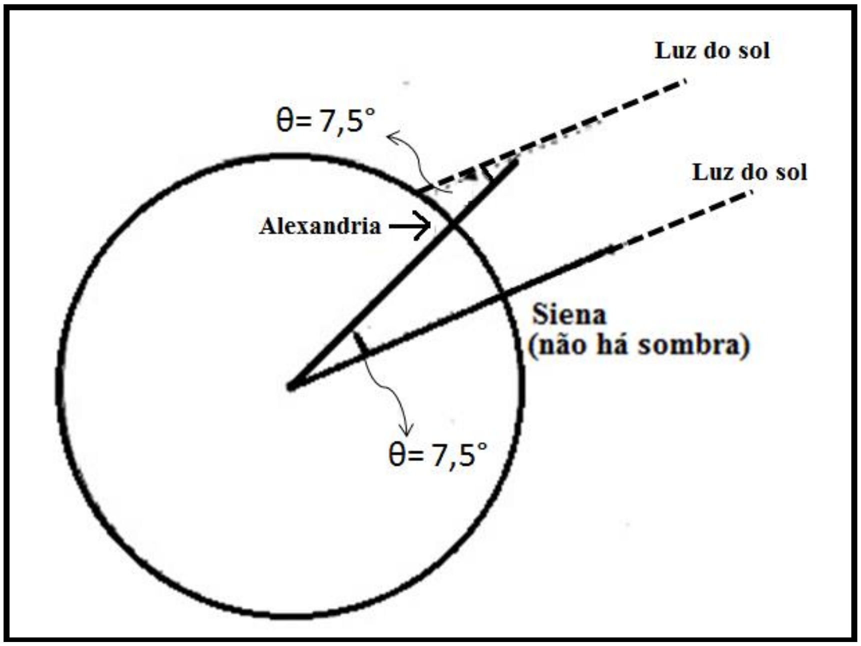


Figura 12 medindo o perímetro da Terra

As cidades de Alexandria e Siena separadas por uma distância de aproximadamente 800 quilômetros estão localizadas na mesma longitude. Eratóstenes em um dia de 21 de junho fez o cálculo do perímetro da Terra pela observação da sombra solar projetada pelo gnômon.

Nessa data Eratóstenes percebeu que a distância zenital do sol ao meio dia em Siena era 0°. Podendo observar que os raios iluminam o fundo de um poço reto. Ao meio dia dessa mesma data em Alexandria, a distância zenital do sol estimada por Eratóstenes foi de 7,5º.

Esse ângulo foi aproximado por Eratóstenes como a quinquagésima parte da circunferência, ou seja, $7{,}5° \cong \frac{1}{50}\, 360°$. Desse modo, bastava multiplicar 800 quilômetros por 50, encontrando assim que a circunferência da Terra mede 40.000 quilômetros.

Com os conhecimentos atuais sabemos que a Terra não é uma esfera perfeita e não há como tomar um único perímetro para a mesma, mas considerando a linha do equador[5], essa tem um perímetro de 40 075 km, o que mostra a precisão da medição de Eratóstenes, mesmo utilizando-se de instrumentos rústicos.

2.4 TENSÃO ENTRE MOVIMENTO E AXIOMATIZAÇÃO

Como mostrado até o presente momento, muitos dos conhecimentos produzidos pela humanidade surgiram em função das suas necessidades práticas. Percebemos que ao se estabelecer em um lugar fixo e começar a cultivar a terra e criar animais, o ser humano começou a desenvolver e a aguçar mais os seus conhecimentos. Conforme as descobertas vão acontecendo, esses conhecimentos vão sendo estruturados e servindo também de suporte para outras investigações e descobertas.

A partir disso, algo que surgiu empiricamente vai então se formalizando, existe aí um processo de abstração, onde não é necessário sempre ter que construir ou produzir algo para se obter um resultado. Começa-se a perceber que certas propriedades são igualmente aplicáveis em outras situações. Aquilo que era empírico, ao ser utilizado passou a ser observado de outro modo, questionado, investigado e vai agora se tornando formal e estático.

Os gregos antigos foram povos que tiveram grande influência sobre o pensamento matemático, perceberam o conhecimento que os egípcios e babilônios construíram até então e assimilaram seus princípios empíricos e, para esse conhecimento, como mostrado anteriormente em um fragmento de texto de Heródoto, deram o nome de Geometria, que quer dizer, “medida da Terra”.

[5] Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Linha_do_equador. Acesso em: 09 abr 2013

Mas, segundo Barker (1976), os gregos deram um caráter diferente dos egípcios para esse conhecimento, procuraram na Geometria, observar não apenas as suas aplicações práticas, mas também a observavam em virtude do seu interesse teórico, em querer compreender a matéria por ela mesma e não em termos de suas utilidades. Para os gregos, o interesse estava em descobrir as leis acerca do espaço que regem as aplicações práticas da Geometria, não bastando assim o critério empírico e a forma com que procuraram fazer isso, foi através de rígidas demonstrações dedutivas sobre essas leis.

Os gregos lançaram questões acerca da natureza do conhecimento e, com eles todo o conhecimento produzido até então passou a se estruturar formalmente. Eles passaram a observar e extrair das situações, propriedades/características que dão cada vez mais consistência à Geometria, abandonando-se um caráter estritamente prático e intuitivo. Fundaram muitas escolas, as quais passaram a se tornar centros de produção do saber grego. A escola Jônica foi a primeira a emergir desse contexto, seu fundador foi Tales considerado por Aristóteles, o pai da filosofia, e o precursor da Geometria demonstrativa.

Mas, tratando-se da Geometria, o que teria contribuído para que ela, das necessidades práticas da agricultura, se tornasse este conjunto formal de conhecimentos, onde temos os seus conceitos vistos aí de maneira estática?

Uma resposta a essa pergunta podemos encontrar em um instrumento já citado anteriormente: o gnômon, um simples instrumento que projeta a sombra solar.

Esse instrumento nos possibilita pensar nos processos de abstração. Reportemo-nos novamente em um apontamento de Gerdes (1981, p. 23): “na base da comparação, a Humanidade inventou palavras para indicar situações concretas, inventou os seus conceitos geométricos”. Se refletirmos sobre os lugares na natureza que podemos encontrar a forma de um triângulo, isso não é tão imediato como, por exemplo, comparar a lua ou o sol a um círculo. Se pensarmos então na relação sol-gnômon-sombra podemos encontrar aí a forma de um triângulo, que podemos abstrair relações, simplesmente observando o seu funcionamento automático.

Costa (1997) diz que quem escreveu sobre o gnômon, foi o historiador Heródoto em que "foram os gregos que deram o nome **Gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, mas também já havia sido utilizado pelos egípcios entes de 1500 a. C." (p. 12). Essa projeção de sombras por um ponteiro para marcar as horas de trabalho, fixar direções, calcular comprimentos viemos trabalhando no decorrer deste texto e, um exemplo em especial torna-se importante novamente para nossas discussões: o cálculo de Tales para a altura da pirâmide de Quéops.

No exemplo citado, Tales relaciona a sombra desse túmulo do faraó com a de um bastão tomando-o como referência e percebe a invariância na forma apresentada, exceto em seu tamanho. Serres (1989) nos traz novos elementos para discussão desse momento que para muitos é um marco para o desenvolvimento de todo conhecimento geométrico grego.

O autor leva essa discussão para outra dimensão, onde o túmulo, a estaca ou próprio Tales e suas respectivas sombras ou ainda o próprio faraó são analisados com um mesmo grau de importância, sendo desconsiderado, por exemplo, a resistência da pirâmide com relação à de uma estaca. Isso nos mostra que a partir das propriedades extraídas de situações de outrora, Tales pôde estabelecer relações para fazer o cálculo da altura da pirâmide e também para outras situações onde esses conhecimentos pudessem ser igualmente utilizados.

Ao longo do texto, mostramos algumas descobertas astronômicas a partir da observação das sombras. De acordo com Serres (1989), desde

Anaximandro, os físicos gregos observavam essas projeções das sombras produzidas pelo gnômon, ou “máquina”, já que não precisava do contato do homem para funcionar – por isso o funcionamento automático – e a esse bastava observar e abstrair/extrair o que nele produzir, e assim relacionar com certos acontecimentos no céu, como o movimento dos astros.

Pensando assim, é possível que o próprio Tales tenha abstraído daí elementos e tenha sido influenciado pela capacidade de interpretação do movimento solar proporcionada pelo Gnômon, no seu feito no Egito. Assim,

> este enunciado semidizendo a presença ou a semelhança ou melhor, a homotetia no sentido literal de tudo o que pode servir de tronco ou eixo a um tal observatório, é preciso chamá-lo de histórico, porque ele descreve a astronomia dos Jônios e dos seus primeiros modelos do mundo, assim como o que se seguiu geometricamente (SERRES, 1989, p. 86).

Nesse movimento o Gnômon vai ganhando outras conotações. Assim,

> utilizando uma versão puramente geométrica do *gnomon* introduzido na Grécia por Anaximandro — versão que o transforma esquematicamente em esquadro, os pitagóricos investigam as diferentes séries numéricas. E verificam que o crescimento gnomônico da série dos números pares determina sempre uma figura oblonga retangular, enquanto a série dos ímpares cresce como um quadrado, ou seja, como um quadrilátero que conserva seus lados sempre iguais, embora aumente de tamanho (SOUZA e CAVALCANTE, 1999, p.18).

Crescimento gnomônico é aquele em que se acrescenta um elemento que não altere a forma do objeto.

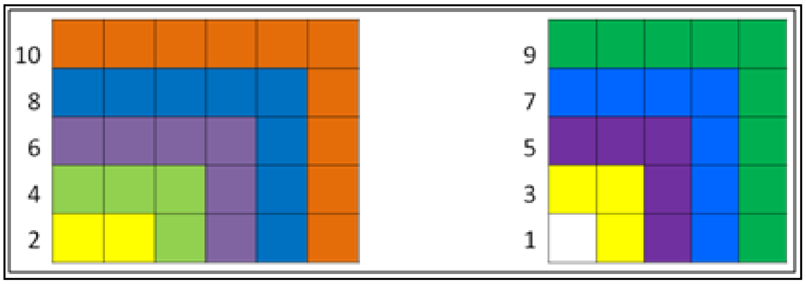


Figura 13 Crescimento gnomônico

Essa é também a forma como Euclides o vê, o Gnômon ou esquadro se decompõe em régua e compasso, ou seja, o Gnômon perde sua automaticidade, e passa a ser simples ferramenta, independente da relação sol-sombra, estabelecida de maneira isenta. O Gnômon, um "elemento", acabou gerando "elementos" (compasso e régua), mas isso não significa dizer que o Gnômon estatizou a Geometria e sim que ele criou "elementos" para isso, ou seja: "o elemento escreve elementos, abstraídos dos elementos" (SERRES, 1989, p. 102).

Uma justificativa para o motivo da utilização somente da régua e compasso nos é dada por Roque (2012). A autora nos mostra que o fato de nos Elementos de Euclides as construções serem realizadas com esses objetos, deu origem à crença de que essa seria uma restrição da Geometria imposta pelos cânones da época. Desse modo a autora recorre à filosofia platônica e nos aponta que:

> para valorizar a matemática teórica, Platão teria desprezo pelas construções mecânicas, realizadas com equipamentos de verdade. A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição. Na realidade, nos *Elementos*, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato (ROQUE, 2012, p. 160).

Assim, com esses instrumentos e também com o fio de prumo é que Serres (1989) vê a origem estática da Geometria, no caso do fio prumo pelo seu funcionamento automático. Para entendermos melhor esse caso podemos nos reportar ao exemplo dado pelo autor, da atividade do pedreiro, na qual observamos essa reconstrução do saber geométrico presente, mas que devido ao seu caráter prático, nesse contexto, torna-se um processo automático fruto de uma memória artificial e de uma relação não perceptível do pedreiro com a Geometria.

Ao observarmos essa caminhada do saber geométrico para axiomatização percebemos a todo o momento, a transformação da ideia de abstração e consequentemente uma perda de movimento, isto é, existem aí os questionamentos, as dúvidas, a busca pela construção do conceito, existe uma tensão da perda da relação da Geometria - de suas características e propriedades - com o meio de onde fora abstraída. Desse modo podemos perceber que existe um movimento lógico-histórico de construção dos conceitos, em que a Geometria surge em função das necessidades do homem, vai se desenvolvendo, estruturando, formalizando os conceitos e vai adquirindo assim uma conotação mais estática.

3 NEXOS CONCEITUAIS DE GEOMETRIA

A partir dos fatos exibidos no trabalho, pudemos refletir sobre alguns aspectos que foram fundamentais para o desenvolvimento da Geometria. Neste capítulo será exposto, aquilo que, com base nas nossas investigações a partir da perspectiva lógico-histórica, constituem-se como nexos conceituais.

É importante destacar que, ao apresentar os nexos conceituais de Geometria que encontramos, não implica em dizer que eles sejam exclusivos da Geometria, mas que, para o desenvolvimento da mesma se mostraram como essenciais.

3.1 FORMA

Como mostrado anteriormente no tópico “**2.1 FORMA E MATÉRIA**”, nos primórdios da humanidade, o homem começa a perceber algumas regularidades na natureza. Começou a perceber que os seus instrumentos de caça ou coleta de frutos, seriam mais eficientes se a sua forma fosse diferente, como por exemplo, uma pedra com uma forma mais afiada seria melhor para cortar a carne dos animais.

A forma pela qual a ponta da lança fosse produzida seria mais eficaz para perfurar a pele dos animais, a forma de como o arco e flecha fossem manufaturados seria mais útil na caça, a forma de um cesto que melhor se adequaria ao transporte dos frutos são exemplos de como o ser humano se valeu da forma para melhorar seus instrumentos, ou seja, o homem pôde diferenciar sobre forma e matéria, aprendeu que podia dar forma à matéria e que poderia melhorar as formas.

Mas, a importância da ideia de forma não se restringe a isso. Pensemos agora, nas sociedades de agricultores e criadores.

Ao se estabelecer em certo lugar, o ser humano precisa estruturar o local onde pretende residir. Vamos nos reportar a um exemplo mostrado por Gerdes (1981), sobre as moradias primitivas das sociedades do Egito e Babilônia.

Esses povos em um primeiro momento começaram a utilizar formas mais irregulares para os blocos de pedra ou tijolos de barro nas suas construções.

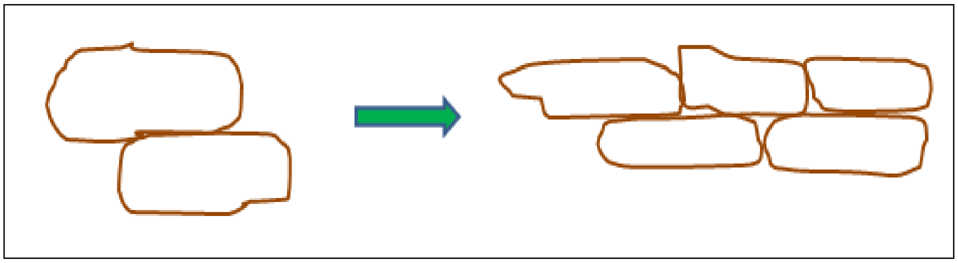


Figura 14 modelando as formas

Eles perceberam, no entanto, que essas formas mais irregulares dificultavam a construção e deixavam espaços entre si, onde a ação do tempo, como vento e chuva interferia em seu espaço interno. Num momento posterior, no processo de trabalho dessas construções, os homens começaram a perceber que mudando a forma desses tijolos, poderiam obter formas mais regulares, que pudessem sanar tais problemas.

Desse modo, podemos então, a partir da ideia de forma, analisar se algo arredondado, retangular, pontudo, reto ou curvo é adequado para atender a certa necessidade. Ter a percepção de forma é algo que se mostra então, fundamental para a Geometria e, desse modo pode-se classificá-la como nexo conceitual.

3.2 MEDIDA

A necessidade de cultivar a terra e a criação de animais exigiu dos seres humanos, um grau mais elevado de sofisticação matemática.

A questão da utilização de ângulos foi mostrada em diversos momentos no decorrer do trabalho. A utilização dos ângulos, no entanto só foi eficiente quando se analisava o que eles indicavam, assim fez-se necessário a medida dos ângulos.

Voltemos ao exemplo da determinação dos equinócios pelo por do sol nos solstícios (Figura 2, página 26). Os dias do equinócio podem ser fixados como a meia jornada do sol entre os solstícios de verão e inverno, ou seja, a metade do ângulo formado a partir de uma referência entre essas duas posições do por do sol.

Temos também que a medição dos ângulos foi largamente utilizada para a construção e orientação dos edifícios dos povos antigos.

Como vimos anteriormente, outra prática agregada à medição de ângulos foi a da medição de superfícies. Ao se estimar o quanto de alimento seria suficiente ao sustento de uma família, ou mesmo a um povo, era necessário que se soubesse o quanto a terra poderia produzir. Assim houve a necessidade de se medir comprimentos, distâncias, medir também as dimensões da terra e calcular áreas, para que desse modo se desse a distribuição das terras aos agricultores, e o taxamento ser feito pelas classes dominantes.

Com relação à criação de animais, o uso da medida pode ser aplicado aos cercados construídos para conter os animais. Os homens deviam saber o quanto de espaço seria necessário para comportar todos os animais, e também o quanto de material seria suficiente para cercar ou cobrir esse espaço.

Além desses exemplos, podemos nos reportar ao comércio onde a medida também tem papel importante. Os Sumérios que eram povos navegantes e comerciantes estabeleceram um sistema de medidas, a fim de padronizar as quantidades dos produtos. Os diferentes vasilhames, de variadas formas comportavam quantidades diferentes, assim a utilização de uma medida padrão, constitui-se fundamental para a relação entre os povos.

As propriedades das figuras geométricas, como a de que perímetro e raio de uma circunferência e o perímetro dos quatro lados da grande pirâmide e sua altura relacionam-se por uma razão de 2π. Ou então que em triângulos retângulos onde os outros ângulos são a metade de um ângulo reto, os lados menores tem o mesmo tamanho, entre outros tantos exemplos, só se foi possível descobrir porque o ser humano se deu ao trabalho de medir.

3.3 VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

No decorrer do tempo, através da sua prática diária, o ser humano começou a apropriar-se de certos conceitos, de propriedades acerca da Geometria. Podemos pensar no caso dos egípcios que deviam ter aprendido sobre o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos ou de que um paralelogramo tem a mesma área de um retângulo de mesma base e mesma altura (BARKER, 1974).

A partir disso, torna-se muitas vezes desnecessário construir marcações, edificar monumentos para que se verifique algo. Conhecendo-se as propriedades, torna-se mais prático e eficiente fazer as representações dessas situações para analisá-las.

Podemos citar como o exemplo, o fato de que conhecendo as dimensões de um terreno irregular, podemos representá-lo em uma folha de papel e analisá-lo e dividir em triângulos para calcular sua área. Ou também podemos pensar em um telhado. Se quisermos saber, quantas telhas de uma determinada medida são necessárias para cobrir certo espaço, e esse telhado deve ficar a certa inclinação, não é necessário que se edifique uma estrutura e ao final se faça o cálculo das telhas, basta que se represente essa situação e o podemos obter com precisão o resultado.

Outra situação imaginável é com relação ao volume. Se possuirmos certa quantidade de material para produzir um recipiente que possa ocupar o maior volume possível, não seria viável ficar produzindo recipientes e medindo para saber qual ocupa o maior volume. A situação poderia ser representada e calculada, e dessa maneira a situação seria resolvida mais facilmente.

No entanto, como representar algo que não se compreende bem? Nesse sentido a visualização torna-se importante, pois, de acordo com Santos (2009, p. 19-20), "a base da construção do pensamento geométrico é a visualização do espaço e de suas formas. Após visualizar o espaço é possível atribuir-lhe características que permitam a criação da imagem mental do mesmo".

Santos (2009) nos afirma que a visualização não é apenas o ato de ver, no sentido de utilizar um órgão sensorial, mas que ela está relacionada com a capacidade de "analisar o que se percebe como parte do mundo real e memorizar aspectos que caracterizem os objetos vistos. Refere-se então a contato visual físico, mas também a contato mental (imaginário) com o espaço" (p. 21).

Além disso, de acordo com Barbosa (2011, p. 5) a visualização e a representação são elementos indissociáveis. Apoiada em Gutiérrez (1996) a autora considera dois processos realizados na visualização que são i) a "interpretação visual de informações", para que se possa criar as imagens mentais, e isso pode se dar por exemplo, através do uso de materiais manipulativos/objetos, e ii) a "interpretação de imagens mentais", para gerar informações verbais ou gráficas.

No entanto, Barbosa (2011, p. 5) aponta que:

> o raciocinar/pensar em objetos ou desenhos, em termos de imagens mentais, deve acontecer de maneira sistematizada, ou seja, levando em consideração as características e propriedades dos objetos. A representação, também entendida como em Gutiérrez (1996), é um importante instrumento para expressar conhecimentos e ideias geométricas. A representação ajuda a criar ou transformar imagens mentais e produzir o raciocínio visual. Essa representação pode ser gráfica, através de um desenho em uma folha de papel ou de modelos concretos, ou mesmo através do uso da linguagem e gestos.

Assim, essa dialética visualização-representação, constitui-se para nós como nexo conceitual de Geometria.

3.4 INVARIÂNCIA

Tendo em mente esse processo de visualização e representação, podemos pensar naquelas observações que surgem de processos empíricos. A partir da percepção de certas características e padrões que se mantém, torna-se possível fazer "agrupamentos" desses elementos. Podemos assim analisá-los quanto a alguns aspectos que permanecem os mesmos, mesmo que estejam sujeitos a algumas transformações. Nesse sentido introduzimos aqui a ideia de invariância.

Quando buscamos no dicionário[6] o significado da palavra invariância, um dos resultados que encontramos é: "[Física, Matemática] Propriedade que um sistema e as suas grandezas apresentam de se manterem inalterados quando aplicado um conjunto de transformações".

A partir disso podemos pensar na invariância da Geometria sob dois aspectos. Um sobre a invariância na forma e na medida, como por exemplo, área e volume quando se aplicam certas transformações, o outro aspecto está relacionado com a invariância nas propriedades dos objetos geométricos.

No primeiro aspecto, vamos nos justificar apoiados em González (2011). O autor nos mostra como exemplo um pedreiro quando trabalha com pisos. Ao tirar um azulejo da caixa ele pode supor que a forma e o tamanho não se modificam com a movimentação até que esteja em definitivo no chão. Desse modo a forma e as dimensões do azulejo são invariantes para a rotação e a translação, que são operações necessárias para colocar o azulejo em uma posição definitiva. E a partir disso o autor completa:

> na Geometria euclidiana, que reinou absoluta durante dois mil anos, a forma e a área de uma figura são invariantes por translações e rotações: transladando e rotacionando uma figura no plano euclidiano, o resultado será sempre uma figura da mesma forma e da mesma área. Se um triângulo tem um ângulo reto, poderemos transladá-lo a qualquer parte do plano e rotá-lo de qualquer maneira que continuará tendo um ângulo reto (GONZÁLEZ, 2011, p. 730-731).

Outro exemplo dado por esse autor se constitui em rotacionar um triângulo pelo seu eixo de simetria. O resultado seria um triângulo com os mesmos valores para ângulos, lados, áreas, etc. Desse modo a área e a medida dos ângulos permanecerão invariantes por simetrias.

[6] Dicionário Priberam da Língua Portuguesa. Disponível em: <http://www.priberam.pt/dlpo >. Acesso em: 02 jun 2013.

Com relação ao segundo aspecto podemos pensar que os triângulos possuem propriedades próprias que se mantêm, como por exemplo, que a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos, mesmo que mudemos a sua posição, ou se alteramos suas medidas. Toda circunferência, independente de suas medidas gozam das mesmas propriedades, como a de que a razão entre o perímetro e o seu raio é igual a 2π. Todo polígono pode ser divido em triângulos e a partir disso, podemos encontrar a soma dos ângulos internos de qualquer polígono como o produto do número de lados menos dois por 180°.

Esses são apenas alguns exemplos da invariância. Ela nos permite organizar os objetos geométricos em grupos, aqueles que obedecem a certos padrões ou possuem as mesmas propriedades.

A partir da observação das características, percebe-se que certas propriedades dos objetos se mantêm, ou seja, percebe-se que existe aí uma invariância nas propriedades. Isso possibilita que organizemos os conceitos e os estruturemos, dando suporte também para a compreensão de outros objetos ou conceitos mais complexos.

Suponhamos a situação de lidar com trapézios. A princípio podemos não conhecer suas propriedades e como encontrar sua área, por exemplo, mas sabemos isso para os triângulos e sabemos que o trapézio pode ser dividido em triângulos e a partir disso podemos estudar o que acontece com os trapézios. Desse modo podemos estruturar, organizando a Geometria como um campo de conceitos que respeitam determinadas propriedades.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, buscamos descrever como se deu o processo de realização das atividades[7]. Tivemos como objetivo investigar como estudantes do ensino fundamental compreendem os conceitos geométricos sob o olhar da perspectiva lógico-histórica, a partir da questão: **“que elaborações um grupo de estudantes do Ensino Fundamental produzem sobre a Geometria, quando esta é desenvolvida a partir da exploração de seus Nexos Conceituais em Atividades Orientadoras de Ensino?”**.

Durante o processo que percorremos, no estudo do desenvolvimento da Geometria ao longo da história e dos nexos conceituais, procuramos observar que elaborações o homem teria produzido naquele contexto. Assim, a partir dessas observações nos questionamos de que modo seria possível estruturar nossas atividades de modo a permitir aos estudantes participar do processo de construção dos conceitos. Fomos então amadurecendo nossas ideias com as discussões e decidimos organizar as atividades sem mencionar explicitamente que conceitos geométricos seriam abordados. Propomos as situações e procuramos observar que conceitos ou estratégias os estudantes lançariam mão para buscar a solução do problema.

Desse modo, na primeira parte apresentamos como foram escolhidos os sujeitos da pesquisa, explicitamos qual é o nosso enfoque e quais foram os instrumentos de construção dos dados.

Na segunda parte, apresentamos como foi o processo de análise de dados pautada na metodologia da análise de conteúdo, tendo por base as obras de Bardin (1977) e Franco (2007).

---

[7] As atividades aparecem na análise dos dados de maneira fragmentada, mas estão na íntegra nos anexos.

4.1 SUJEITOS, ENFOQUE E INSTRUMENTOS DE CONSTRUÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA

Os sujeitos escolhidos para a participação nesta pesquisa foram estudantes do ensino fundamental de uma de uma escola pública estadual da cidade de Itutinga – MG. Escolhemos essa escola devido à viabilidade da situação. Aplicar as atividades propostas em alguma escola no período regular de aulas na cidade de Lavras talvez não fosse possível, pois para isso seria necessário que houvesse a disponibilidade da escola e também do professor da classe selecionada e, como o período de férias se aproximava seria um período de provas na maioria das escolas do município.

Desse modo escolhemos a escola da cidade de Itutinga, pois já havia um contato da UFLA com essa escola, em que alguns estudantes do curso de licenciatura em Matemática desenvolviam um projeto de extensão com os estudantes da escola. Assim, entramos em contato com os estudantes que foram voluntários para participar da pesquisa em horários extraclasse, mais especificamente em duas manhãs de sábado.

Os estudantes tinham entre 12 e 14 anos de idade e cursavam o 7°, 8° e 9° anos do Ensino Fundamental. Ao fazer referência às falas ou aos registros dos mesmos, os nomes verdadeiros não serão mencionados, por isso usaremos nomes fictícios para os estudantes. Foram recolhidas as autorizações da escola e dos responsáveis pelos estudantes para a execução da pesquisa. Desse modo, identificaremos aqui apenas as classes as quais eles estavam cursando:

- 9° ano: Ana, Paula, Rubens, Marcela e Cristina;
- 8° ano: Kléber, Rosana, Rita, Joana, César e Tamara;

- 7° ano: Talita, Carla, Raquel, Letícia e Suzana.

No primeiro sábado de aplicação da atividade os dezesseis estudantes estavam presentes, já no segundo estavam apenas sete estudantes Rubens, Marcela, Tamara, Letícia, Suzana , Rosana e Rita.

O fato de haver estudantes em níveis diferentes de escolaridade, não foi determinante para a realização da atividade, pois não tínhamos nenhum pré-requisito estabelecido. Contudo, temos consciência que os estudantes podem lançar mão de outros conhecimentos adquiridos anteriormente, pois conforme Moura (2001, p. 154), "os sujeitos ao aprenderem não o fazem como se nada soubessem, eles partem de conhecimentos já adquiridos para a construção de novos significados". Desse modo, como as atividades foram planejadas de maneira aberta, poderia surgir diversas estratégias para a solução dos problemas.

O nosso enfoque para a análise dos dados obtidos nas atividades desenvolvidas neste trabalho é de cunho qualitativo. Fazer uma análise qualitativa dos dados de uma pesquisa segue um caminho distinto dos meios quantitativos. Assim, de acordo com Neves (1996, p. 1):

> enquanto estudos quantitativos geralmente procuram seguir com rigor um plano previamente estabelecido (baseado em hipóteses claramente indicadas e variáveis que são objeto de definição operacional), a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo de seu desenvolvimento; além disso, não busca enumerar ou medir eventos e, geralmente, não emprega instrumental estatístico para análise dos dados; seu foco de interesse é amplo e parte de uma perspectiva diferenciada da adotada pelos métodos quantitativos. Dela faz parte a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação objeto de estudo.

Ainda de acordo com Neves (1996), em pesquisas qualitativas é frequente que o pesquisador ao procurar entender a situação em estudo, o faça segundo a perspectiva dos sujeitos e, a partir daí situe a sua interpretação. Assim, para analisar os dados obtidos na realização das atividades foram utilizados como instrumentos: o diário de campo do pesquisador, gravador de áudio e os registros elaborados pelos estudantes.

O diário de campo contém as percepções imediatas do pesquisador no momento da pesquisa. De acordo com Lima et. al (2007, p.99), ele deve ser utilizado de modo a "garantir a maior sistematização e detalhamento possível de todas as situações ocorridas no dia e das entrelinhas nas falas dos sujeitos durante a intervenção". Podemos anotar no diário de campo as nossas percepções quanto aos gestos, às expressões dos sujeitos, que podem de alguma maneira expressar algum fator relevante para a análise dos dados.

Contudo, o diário de campo vem carregado das emoções do momento, as experiências, a subjetividade do pesquisador. Assim, a utilização de outros instrumentos de coleta de dados, como os registros elaborados pelos estudantes e as gravações de áudio também se constituem importantes ferramentas, pois de acordo com Ponte (1997, p. 2) "é através da comunicação oral e escrita que os alunos dão sentido ao conhecimento matemático que vai sendo construído".

Nesta pesquisa desenvolvemos duas atividades e para a execução das mesmas dispúnhamos de três gravadores de áudio. Durante a realização da atividade, os estudantes se organizaram em quatro grupos[8], assim um dos grupos ficou sem gravador por um período de tempo, portanto as primeiras discussões que foram feitas nesse grupo específico não puderam ser gravadas. Contudo acreditamos que não houve prejuízos à análise dos dados, pois como estávamos sempre presentes fazendo anotações no diário de campo e também com os registros escritos, pudemos coletar informações consistentes dos momentos da atividade.

[8] Faremos um detalhamento maior desta organização no capítulo 5.

Optamos pela utilização de mais de um tipo de instrumento de coleta de dados, pois isso nos possibilita analisá-los em distintos momentos e pontos de vista, o que contribui para que possamos manter a fidelidade dos resultados desta pesquisa.

4.2 ANÁLISE DOS DADOS

Com os dados em mãos, pautamos nossa análise a partir da metodologia da análise de conteúdo, que tem como ponto de partida, segundo Franco (2007), a mensagem. De acordo com a autora a mensagem pode ser "verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada" (p. 19). E de acordo com a definição de Bardin (1977, p. 42) a análise de conteúdo pode ser considerada como:

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Nesta pesquisa, as mensagens que obtemos foram geradas no decorrer da atividade, de forma verbal, pelos registros escritos, orais e gestuais dos estudantes nos seus envolvimentos com a atividade e também silenciosas, pelas impressões e sentimentos do pesquisador, anotados no diário de campo.

A partir das mensagens, não podemos nos ater apenas à descrição das características das mesmas. Franco (2007, p. 25) nos alerta que isso pouco contribui para a compreensão das características de quem as produz. Mas, quando as submetemos à indagação sobre os efeitos ou as causas da mensagem, a análise de conteúdo cresce em significado e assim, exige uma maior abordagem teórica. Desse modo, tomando como referências as obras de Franco (2007) e Bardin (1977), apresentamos na Figura 15, abaixo, como está organizada a análise dos dados da pesquisa:

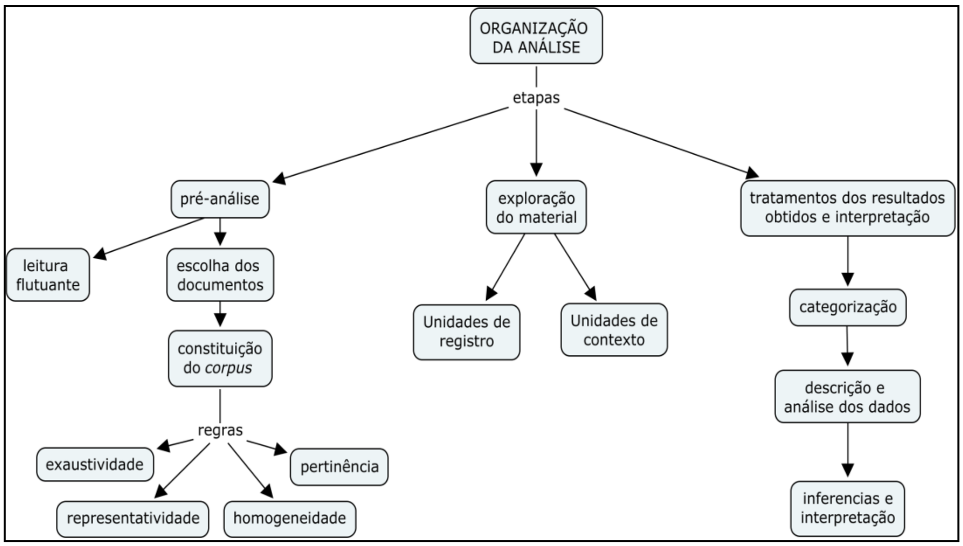


Figura 15 Análise dos dados

A pré-análise é a etapa de organização dos dados e de acordo com Bardin (1977) corresponde "a um período de intuições, mas tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise".

Em um primeiro momento fizemos a leitura flutuante dos dados, que segundo Bardin (1977, p. 96), é um processo que "consiste em estabelecer contacto com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações".

Na sequencia partimos para a escolha de documentos, que viriam a constituir o *corpus* deste trabalho. De acordo com Bardin (1977, p. 96), o *corpus* é “o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos processos analíticos”. Assim, nossos documentos constituíram-se daqueles obtidos com os registros escritos dos estudantes, as transcrições das gravações de áudio e as anotações do diário de campo do pesquisador. Para a constituição do nosso *corpus,* procedemos às regras apresentadas pela autora:

● **regra da exaustividade –** segundo Bardin (1977), uma vez que temos definido o campo do *corpus* (no nosso caso as atividades aplicadas), é preciso ter em conta todos os elementos desse *corpus*. Desse modo, tínhamos os registros escritos e orais e também as observações do diário de campo. Debruçamo-nos então sobre o nosso *corpus*, lemos, relemos, pensamos e repensamos a fim de conseguir fazer a nossa análise;

● **regra da representatividade –** de acordo com a autora, a análise pode ocorrer numa amostra, desde que o material se preste a isso. “A amostragem se diz rigorosa se a amostra for uma parte representativa do universo inicial. Neste caso, os resultados os resultados obtidos para a amostra serão generalizados ao todo” (BARDIN, 1977, p. 97). No nosso caso, não procedemos a uma amostragem pelo fato de ser uma pesquisa qualitativa e nosso universo era possível de ser analisado completamente;

● **regra da homogeneidade** – a retirada dos documentos deve ser homogênea, ou seja, “devem obedecer a critérios precisos de escolha e não apresentar demasiada singularidade fora destes critérios de escolha” (BARDIN, 1997, p. 98). Nesta pesquisa, as atividades aplicadas foram as mesmas para todos os estudantes, desse modo, entendemos que essa regra foi satisfeita;

● **regra da pertinência –** “os documentos retidos devem ser adequados, enquanto fonte de informação, de modo a corresponderem ao objetivo que suscita a análise” (BARDIN, 1997, p. 98). Entendemos que nossos documentos correspondem ao que buscamos a partir da questão de investigação da pesquisa e que fornecem as informações necessárias à análise.

De acordo com Bardin (1977, p. 101), se “as diferentes operações da pré-análise foram convenientemente concluídas, a fase da análise propriamente dita, não é mais do que a administração sistemática das decisões tomadas”. Realizados então, esses processos, passamos para a etapa da exploração do material, com o objetivo de estabelecer **unidades de análise**, e nesse contexto temos as **unidades de registro** e as **unidades de contexto**.

Começamos então a busca pelas unidades de registro. A unidade de registro, segundo Bardin (1977, p.104), “é a unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando à categorização”. Uma unidade de registro pode ser estabelecida por meio de: palavra, tema, objeto ou referente, personagem, acontecimento e documento.

Assim, escolhemos o tema como unidade de registro. O tema segundo Bardin (1977, p. 105) “é a unidade de significação que se liberta naturalmente de um texto analisado segundo certos critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura”. Nesse sentido, podemos recortar o texto em enunciados, ideias constituintes e proposições, portadores de significações isoláveis.

Ao olhar para os nossos dados, percebemos que poderíamos agrupar as unidades de registro a partir de quatro temas relacionados às elaborações produzidas sobre os nexos conceituais de Geometria: i) elaborações sobre a forma; ii) elaborações sobre a medida; iii) elaborações sobre a visualização e representação e iv) elaborações sobre a invariância.

Na sequência partimos para o entendimento das unidades de contexto que, de acordo com Bardin (1977, p. 107) servem

> de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores às da unidade de registro) são óptimas para que se possa compreender a significação exacta da unidade de registro.

As unidades de contexto também podem, segundo Franco (2007, p. 46), “ser consideradas como “pano de fundo” que imprime significado às Unidades de Análise”. Elas podem ser obtidas através do recurso a dados que explicitem a caracterização dos informantes, suas condições de subsistência, as suas inserções em grupos sociais diversificados, etc.

Ainda de acordo com Franco (2007, p. 47), a unidade de contexto é a parte mais ampla do conteúdo a ser analisado, mas é indispensável para a necessária análise e interpretação dos dados a serem codificados. Bardin (1977), afirma que a determinação da unidade de contexto é regida por dois critérios: o custo e a pertinência. O autor justifica:

> é evidente que uma unidade de contexto alargado, exige uma releitura do meio, mais vasta. Por outro lado, existe uma dimensão óptima, ao nível do sentido: se a unidade de contexto for demasiado pequena ou demasiado grande, já não se encontra adaptada; também aqui são determinantes, quer o tipo de material, quer o quadro teórico (p.108).

Assim tínhamos dois contextos: o do primeiro sábado, em que foi trabalhada a Atividade 1: quanto cabe? E estavam presentes os dezesseis estudantes e, o do segundo sábado em que trabalhamos com a Atividade 2: explorando e estavam presentes sete estudantes. Olhamos então, para esses dois momentos e tentamos perceber como as elaborações dos estudantes sobre os conceitos geométricos ocorreram nas atividades.

Desse modo, tendo as unidades de análise definidas, torna-se necessário estabelecer categorias de análise. “A categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação seguida de um reagrupamento baseado em analogias, a partir de critérios definidos" (FRANCO, 2007, p. 59).

As categorias de análise podem ser criadas *a priori* e podem não ser definidas *a priori* (FRANCO, 2007). No primeiro caso, as categorias e seus indicadores são pré-determinados em função da busca de uma resposta específica do investigador. Já no segundo, as categorias "emergem da "fala", do discurso, do conteúdo das respostas e implicam constante ida e volta do material de análise à teoria" (p. 61). As categorias vão sendo criadas à medida que surgem nas respostas e depois são interpretadas utilizando as teorias explicativas.

Ao olhar para os nossos dados, começamos a buscar o que seriam as nossas categorias de análise e, não foi nossa intenção defini-las *a priori*. Assim, ao olhar para os dados, percebemos que temas i) elaborações sobre a forma e ii) elaborações sobre a medida, assim como os temas iii) elaborações sobre a visualização e representação e iv) elaborações sobre a invariância, poderiam ser agrupados. Desse modo definimos duas categorias de análise, a primeira são as elaborações sobre a forma e a medida, e a segunda, as elaborações sobre a invariância e a visualização e representação.

Segundo Bardin (1977), para que as categorias de análise sejam boas, devem atender a algumas qualidades. E verificamos que as mesmas são atendidas nas categorias que definimos. Tais qualidades são:

● **exclusão mútua –** "essa condição estipula que cada elemento não pode existir em mais de uma divisão" (BARDIN, 1977, p. 120). Os dados não estão incluídos em mais de uma categoria;

● **homogeneidade –** para atender a esse critério, de acordo com o autor, "o princípio da exclusão mútua depende da homogeneidade das categorias. Um único princípio de classificação deve governar a sua organização". Como as categorias são os próprios temas, isso está satisfeito;

● **pertinência** – "uma categoria é considerada pertinente quando está adaptada ao material de análise escolhido, e quando pertence ao quadro teórico definido" (BARDIN, 1977, p. 120);

● **objetividade e fidelidade** – de acordo com a autora, quando se aplica a mesma grelha categorial a diferentes partes de um mesmo material, essas "devem ser codificadas da mesma maneira, mesmo quando submetidas a várias análises" (BARDIN, 1977, p. 120);

● **produtividade** – "um conjunto de categorias é produtivo se fornece resultados férteis: férteis em índices de inferências, em hipóteses novas e em dados exactos" (BARDIN, 1977, p. 120-121).

As próximas etapas "descrição e análise de dados" e "inferências e interpretação" serão apresentadas no capítulo seguinte, em que as categorias serão analisadas separadamente nas duas atividades aplicadas.

5 AS ATIVIDADES E ALGUMAS REFLEXÕES

Neste capítulo apresentaremos as atividades que elaboramos a partir dos nossos pressupostos teóricos e aplicamos aos sujeitos da pesquisa. Elas serão apresentadas separadamente e ao final de cada uma faremos a descrição e análise dos dados e as inferências e interpretação.

Franco (2007) nos aponta que produzir inferências é o que confere relevância teórica ao procedimento de análise, elas dão relevância teórica uma vez que há de se fazer comparações. Assim, a análise de conteúdo implica em fazer comparações, uma vez que "um dado sobre o conteúdo de uma mensagem (escrita, falada e/ou figurativa) é sem sentido até que seja relacionado a outros dados. O vínculo entre eles é representado por alguma forma de teoria" (FRANCO, 2007, p. 30).

A inferência é mostrada por Franco (2007), como um processo intermediário que permite a passagem da etapa da descrição (que é a enumeração das características do texto, resumida após um tratamento inicial), para a etapa da interpretação (que é a significação concedida a essas características).

Buscamos então inferir sobre os dados da atividade, a partir das elaborações do pensamento manifestadas pelos estudantes, como eles percebem e relacionam os nexos conceituais de Geometria.

5.1 ELABORAÇÕES SOBRE FORMA E MEDIDA

Neste tópico apresentamos as elaborações produzidas pelos estudantes a respeito da forma e a medida. Percebemos que essas elaborações surgiram nas duas atividades aplicadas e que na maior parte das ocorrências a forma e a medida apareceram relacionadas entre si.

Levando em consideração o apontamento de Van de Walle (2009, p. 49), de que a aprendizagem é enriquecida “quando o estudante se compromete e se envolve com os outros, explorando, todos juntos, as mesmas ideias”, planejamos as atividades de maneira que os estudantes trabalhassem em grupos.

Pensando nisso já na elaboração da questão 1 da primeira atividade “qual é o melhor jeito”? Exposta na Figura 16, abaixo, nosso intuito foi o de que na própria organização da sala para a execução das atividades, os estudantes já se colocassem em discussão e que, ao colocar as carteiras da maneira que julgarem ser mais adequada, já estariam trabalhando com o nexo forma.

1) Para esta atividade organizem-se em grupos entre 3 e 5 estudantes de maneira que todos possam se ver.

Vocês acham que desta maneira que se organizaram é a mais adequada? Por quê?

Figura 16 Atividade 1 - questão 1

Os 16 estudantes se organizaram em quatro grupos da seguinte maneira:

- **grupo 1:** Ana, Paula, Rubens, Marcela e Cristina. Organizaram-se como um pentágono;
- **grupo 2:** Kléber, Rosana, Rita e Joana. Organizaram-se como quadrado;
- **grupo 3:** Talita, Carla, Raquel. Organizaram-se em forma de triângulo;
- **grupo 4:** César, Tamara, Letícia, Suzana. Organizaram-se em forma de quadrado.

A partir daí começamos a caminhar pela sala, observando o desenvolvimento da atividade pelos estudantes e à medida que apresentavam suas respostas, eram questionados e deveriam argumentar sobre as suas ideias.

As primeiras respostas dadas à primeira questão foram as seguintes:

Grupo 1 – *Sim, pois assim conseguimos nos comunicar melhor e de outra maneira não.*

Grupo 2 - *Sim. Porque da maneira que estamos podemos nos ouvir e ver muito bem, e assim, trabalhar melhor como uma equipe.*

Grupo 3 - *Sim. Porque a forma de se comunicar facilita o jeito do grupo fazer suas atividades.*

Grupo 4 - *Nos achamos que desse jeito é melhor pois todo mundo se comunica melhor. De outra maneira ficaríamos ruim para se comunicar.*

Os grupos **1**e **4** apontaram que de outra maneira essa organização não seria boa, assim eles foram questionados a argumentar sobre isso e exibir qual seria então, uma maneira ruim:

Questionamento ao **Grupo 4:**

Pesquisador – *Vocês são quatro pessoas aqui. Teria alguma outra maneira de que vocês poderiam se sentar aqui neste grupo, que seria melhor ou pior do que esse jeito que vocês estão?*

Tamara – *Pior tinha, mas melhor não.*

Pesquisador – *Por quê?*

Tamara – *porque a gente vê todo mundo.*

César – *poderia colocar as carteiras assim ó (fazendo gestos e o desenho de um losango na carteira).*

Suzana – *é um losango!*

César – *porque aí fica todo mundo olhando pra todos.*

Pesquisador – *Certo, entendi e que maneira ficaria ruim?*

César – *se a gente colocar elas assim ó (fazendo gestos mostrando que é era com as carteiras lado a lado).*

Na resposta entregue na folha da atividade, o grupo fez uma representação na forma de desenho mencionado na discussão acima, conforme a Figura 17, para indicar qual era a maneira mencionada acima.

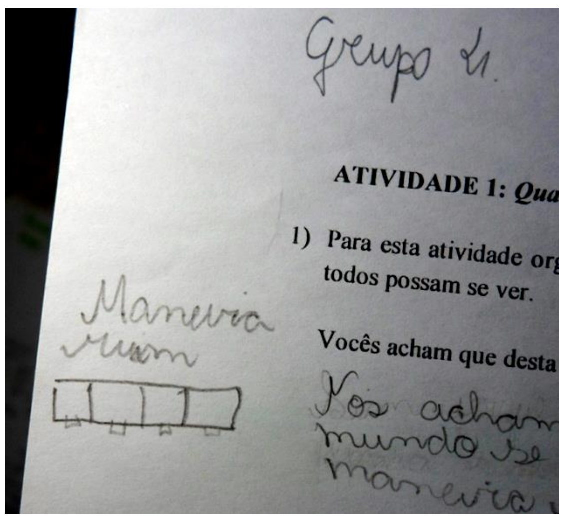


Figura 17 Resposta do Grupo 4 à questão 1

Questionamento ao **Grupo 1:**

Pesquisador – *Vocês poderiam mostrar outro modo de se organizar que não seja tão bom e porque motivo é pior do que o jeito que vocês estão agora?*

Cristina – *olha a melhor forma de se organizar é de modo que conseguimos ver os outros, tipo em rodas.*

Pesquisador – *vocês podem me explicar isso melhor?*

A partir disso responderam por escrito:

Com um grupo de poucas pessoas não conseguimos saber muitas opiniões e com um grupo de muitas pessoas a situação "sai do controle", então um grupo intermédio fica melhor e a melhor forma de se organizar é um de frente para o outro, pois conseguimos nos comunicar melhor. Uma maneira ruim seria em linha reta, pois a comunicação fica difícil.

De acordo com Moura (2010, p. 225), na "Atividade Orientadora de Ensino, a solução da situação-problema pelos estudantes deve ser realizada na coletividade". Podemos perceber a partir dessas discussões e das respostas dadas pelos grupos sobre a organização das carteiras vão ao encontro desse apontamento do autor, pois os estudantes utilizaram como argumento para a organização das carteiras, o fato de que todos poderiam trabalhar como uma equipe, ou seja, de que todos poderiam participar e contribuir para o desenvolvimento da atividade.

Na sequência da atividade, nosso intuito na segunda questão, foi o de investigar como os grupos trabalhariam com a medida a partir das diferentes formas dos objetos.

Na Figura 18 a seguir estão os dois primeiros itens trabalhados nessa parte da atividade:

2) Vocês receberam uma caixa com os lados retangulares e quatro tipos de objetos diferentes: bolinhas de gude, pequenos cubos, pequenos paralelepípedos e algumas pedras.

   a) Preencham a caixa utilizando o objeto que vai conseguir ocupar a maior quantidade de espaço possível.

   b) Qual foi o objeto escolhido? Por qual motivo e qual a vantagem de utilizar este objeto em relação aos demais?

Figura 18 Atividade 1 - questão 2

Conforme acima, cada grupo recebeu uma caixa em formato de paralelepípedo com uma das faces aberta (Figura 19). Desses materiais que receberam para preencher a caixa, os cubos e as bolinhas de gude entre si tinham as mesmas dimensões, enquanto que as pedras e os blocos eram de tamanhos variáveis. Os estudantes deveriam utilizar esses objetos para preencher a caixa da melhor maneira possível.

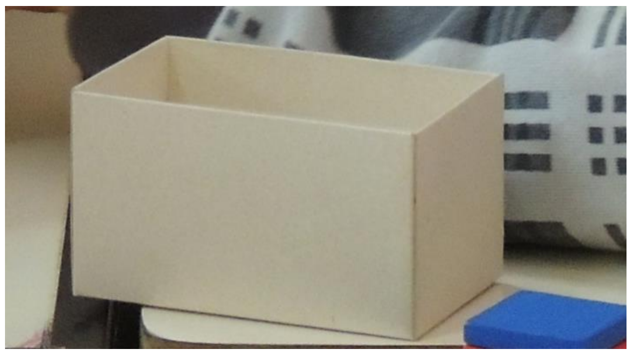


Figura 19 Caixas utilizadas na atividade

A partir das discussões que desenvolveram nesse momento, os grupos apresentaram as seguintes respostas:

Grupo 1: *Pequenos cubos, porque tem a mesma forma assim completando a caixa corretamente. As outras formas por serem irregulares vão obter espaço entre si, pois suas formas não se encaixam perfeitamente.*

Essa foi a resposta escrita dada pelo grupo. Podemos perceber aqui, que os estudantes mostraram ter elaborações semelhantes às que exibimos no tópico.

2.1 FORMA E MATÉRIA, em que os seres humanos aprenderam que certas formas são melhores que outras para atender a certas necessidades. No trecho abaixo está transcrita a discussão ocorrida até a formulação dessa resposta exibida acima:

Rubens – *a bolinha de gude não dá, sabe por quê? Porque elas são redondas e não vão conseguir ocupar o espaço muito bem.*

Cristina – *eu acho que isso aqui (blocos) é melhor.*

Ana – *Mas se a gente tiver a quantidade de cubinhos certa, como que a gente vai saber se é o cubinho ou se é isso aqui (blocos)?*

Paula – *esse aqui (blocos) não vai caber!*

Rubens – *espera aí! Só um teste... Nossa não vai dar, essas formas aqui (blocos) não... pera aí! Deixa eu só ver aqui... não vai dar.*

Paula – *e as pedras?*

Marcela – *as pedras não, porque elas são formas irregulares, elas vão sempre ter alguns espaços que não vai ter...*

Ana – *encaixe.*

Cristina – *não vai ficar preenchido.*

Paula – *vai ser os cubinhos!*

Percebemos novamente nessa discussão, as elaborações dos estudantes quanto à forma, de maneira semelhante aos povos do Egito e Babilônia, no exemplo mostrado por Gerdes (1981) exibido anteriormente. No exemplo em questão, ao construir as suas moradias com as pedras ou tijolos irregulares existia a ação do clima devido aos buracos entre eles e posteriormente a percepção de que mudando para formas mais regulares poderiam sanar sete problemas. Assim, na discussão, os estudantes mostram que as formas irregulares das pedras e os blocos de tamanhos diferentes não encaixam perfeitamente e, que os cubinhos seriam os melhores.

Grupo 2: *Os cubinhos do material dourado. Eles são todos do mesmo tamanho e cabem perfeitamente na caixa.*

Depois de apresentarem essa reposta, o grupo foi questionado quanto à utilização dos outros objetos e apresentaram a seguinte justificativa:

Nossa primeira tentativa foram os paralelepípedos de madeira, concluímos que essa não poderia ser a resposta certa porque suas dimensões não cabem na caixa.

Na segunda tentativa, as bolinhas de gude, percebemos que, entre elas há um espaço sobrando, sendo assim, não poderia ocupar mais espaço do que a terceira tentativa, os cubinhos, que são todos do mesmo tamanho e encaixam perfeitamente dentro da caixa. A quarta tentativa, a brita, fracassou, sendo elas muito irregulares, se embaixo eu conseguisse preencher, em cima pode ser que não.

Percebemos nesse ponto, que os estudantes também trabalharam com a ideia de medida, fazendo relações entre as dimensões da caixa com as dos objetos. Argumentaram também aqui sobre o fato de se ter um tamanho igual para os objetos para que se possa "encaixá-los" da melhor maneira. É o que também podemos perceber na resposta do grupo 3:

Grupo 3: *Os pequenos cubos, pois suas formas se encaixam de maneira mais adequada com as medidas da caixa do que os outros.*

Com os pequenos paralelepípedos tentamos preencher mais faltou, tipo não preencheu todo o espaço da caixa, pois não achei como preencher ele. Com as pedras da pra completar, a gente achou que também não dar para ficar tudo certo, ia faltar um único espaço que seja.
Com as bolinhas de gude já coloquei ela na caixa com uma certeza que não ia dar e não deu, pois suas somas não dão com a da caixa.

Enquanto as integrantes do grupo tentavam realizar esta etapa da atividade, foi possível perceber que a estudante Talita estava "incomodada" com a situação. Ela tentava insistentemente preencher a caixa com os blocos com formato de paralelepípedo. Ao questionar o grupo quanto à utilização dos outros materiais, Talita disse que já tinha certeza que os cubos dariam certo, mas que mesmo assim depois iria completar a caixa com eles.

No caso da bolinha de gude, ao escrever "pois suas somas não dão com a da caixa", o intuito foi o de expressar que ao completar a caixa, a soma te todas as bolinhas não iria cobrir todo o espaço, pois elas são de forma arredondada e entre elas não haveria nada. Ao final a estudante ainda fez um desenho (Figura 20) para poder explicar do que se tratava:

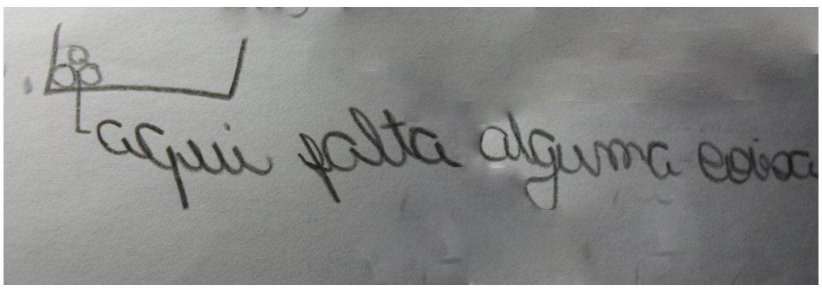


Figura 20 Representação da estudante Talita

Grupo 4: *Os quadradinhos ficariam legal pois são da mesma forma e tem uma superfície plana o que ajuda.*
- *as formas (referindo-se aos blocos) = Não ficaria legal, pois são diferentes.*
- *as bolas de gude =Também não ficaria legal pois são em forma de esfera.*
- *as britas = porque não são uma superfície plana*.

Essa resposta foi apresentada depois de alguns questionamentos feitos ao grupo. As primeiras ideias apresentadas pelos estudantes foram com relação às bolinhas de gude, os cubinhos e as pedras.

Quanto às bolinhas de gude, eles afirmaram que entre elas ficariam espaços vazios pelo formato arredondado. Com os cubinhos conseguiram preencher toda a caixa e a pedra eles não sentiram a necessidade de preencher, pelo fato de serem de tamanhos diferentes e formas irregulares, não podendo assim fazer o mesmo que fizeram para os cubinhos.

Foi sobre os paralelepípedos que tiveram mais discussão:

César – *agora vamos tirar o quadradinho daqui pra tentar com esse aqui (paralelepípedos).*

Suzana – *esse aí a gente já testou*

César – *esse aqui não.*

Pesquisador – *vocês acham que esse aqui dá?*

Tamara – *eu acho que eles têm que ser da mesma forma pra dar igual.*

Pesquisador – *então esses paralelepípedos aqui têm que ser todos iguais? De tamanhos diferentes não vai ajudar?*

Tamara – *eu acho que não, é porque olha aqui, se você botar ele assim oh...*

César – *tem que ir tentando.*

Tamara – *porque assim não dá, se botar assim vai sobrar um certo espaço*

César – *é isso aqui Tamara, o certo é isso aqui, um em pé e outro deitado.*

Pesquisador – *Se eles fossem todos iguais, o que vocês acham?*

César – *eu acho que não?*

Pesquisador – *por quê?*

César – *porque num dá certo. Eu acho que não. Ela (Tamara) acha que sim eu acho que não*

Tamara – *eu acho que se colocar tudo diferente vai ficar... igual, a gente colocou todos diferentes sobrou um espaço, por isso que não dá certo com esses aqui. Se fosse tudo igual daria certo.*

César – *humn ... entendi agora.*

A partir dessas respostas apresentadas pelos quatro grupos, pudemos perceber que os estudantes lançaram mão da utilização dos nexos, forma e medida para explicar suas ideias e formular suas conclusões. Foi um consenso entre os estudantes que os cubinhos preencheriam a caixa mais perfeitamente em função de ter a sua superfície plana e serem todos de mesmo tamanho. Todos também perceberam que as bolinhas de gude e as pedras deixariam espaços entre elas e que os paralelepípedos por serem de tamanhos diferentes, não se encaixariam muito bem deixando alguns espaços vazios. Ou seja, puderam perceber a influência da forma para a solução do problema que eles tinham que nesse caso era a medida do maior espaço a ser ocupado na caixa.

A questão seguinte da atividade (Figura 21) teve como objetivo verificar que estratégias os estudantes encontrariam para descobrir quantas unidades dos objetos que escolheram anteriormente, seriam necessárias para preencher o espaço da caixa.

c) Se escolhermos um desses objetos para preencher a caixa, o que podemos fazer para poder saber qual a quantidade necessária para ocupar este espaço da caixa?

d) O mesmo raciocínio pode ser feito para os demais objetos? Por quê?

Figura 21: Atividade 1 - questão 2 (c e d)

O Grupo 1 nessa questão chegou rapidamente à conclusão de que era o volume que deveriam calcular. A resposta dada pelo grupo foi:

Como escolhemos os pequenos cubos, nós precisamos saber quantos cubos formam a altura, o comprimento e a largura, assim calculamos o volume da caixa em cubos.

E para ilustrar isso mostraram da seguinte maneira:

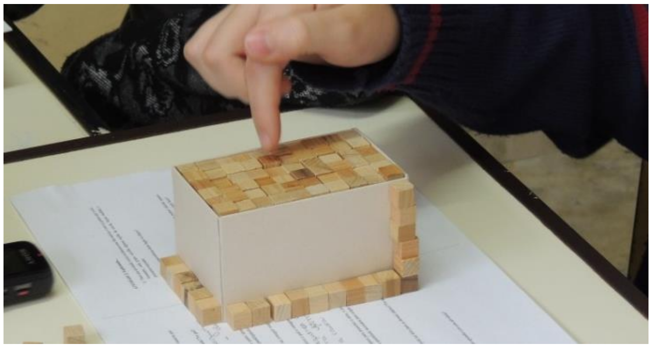


Figura 22 Calculando o volume pelos cubos

Na discussão que seguiu após esse momento, foi possível perceber que o grupo fez associações da forma com a medida, mostrando o porquê de acharem que o cubo é melhor:

Pesquisador - *Se a gente quer saber quanto espaço ocupa qual que vai ser o melhor?*

Rubens - *Seria calcular o volume se as peças forem regulares. Se as peças forem irregulares fica difícil de calcular.*

Pesquisador - *Por quê?*

Rubens - *Porque como elas não têm a mesma forma, a gente não pode dizer quantos de cada, o total que vai caber.*

Pesquisador - *Ah certo. Mas esses aqui (paralelepípedos,) eles não têm as formas lisas?*

Rubens - *Sim. Eles até conseguem formar, mas a gente teria que colocar num...*

Cristina - *Num dá pra completar corretamente a quantidade por que eles não têm a mesma medida.*

Pesquisador - *Aí não tem como saber o volume exatamente se eu ...*

Cristina - *Se os lados não tiverem a mesma medida.*

Pesquisador - *Como assim se eles não têm a mesma medida?*

Marcela - *Não tem o mesmo número de lados*

Cristina - *Aí tipo, que nós temos um maior que o outro,*

Rubens - *um quadrado e um retângulo eles não tem a mesma medida, são* *diferentes. Por exemplo, este quadrado equivale à metade deste retângulo. Aí tipo a gente poderia calcular em quantos retângulos formam ou em quantos quadrados.*

Pesquisador - *você está querendo dizer que eles têm que ter, todos um tamanho igual?*

Rubens - *É!*

Pesquisador - *O melhor jeito é se tiver um tamanho igual?Isso aí é um quadrado?*

Rubens - *É um retângulo na verdade, isso é um retângulo... ah é um paralelepípedo! Eu confundi as coisas. Mas de qualquer jeito...*

Marcela - *Eles têm a forma retangular!*

Rubens - *mas eles não conseguem. Tem que usar um pra calcular, por exemplo, ou em paralelepípedos retangulares ou em paralelepípedos quadrados. Assim a gente poderia calcular.*

Com essa discussão, pudemos perceber que o grupo conseguiu argumentar, da maneira que exibimos anteriormente a partir da obra de Hogben (1952), que para calcular o volume devemos fazer uso de objetos iguais, de mesmo tamanho, ou seja, seria mais fácil se houvesse um tamanho padrão, seja com paralelepípedos ou com cubos desde que tenham as mesmas dimensões.

O Grupo 2 e o Grupo 3 , utilizaram argumentos semelhantes ao grupo 1, em que poderiam encontrar o volume a partir da multiplicação da quantidade de cubos da altura, largura e volume. Contudo, a princípio não pensaram em contar quantos cubos caberiam em cada dimensão da caixa, como podemos notar nas transcrições abaixo:

Grupo 2:

Pesquisador - *Vocês escolheram os cubinhos para preencher a caixa, certo? Como a gente pode fazer para saber quantos vão caber no total?*

Joana - *a gente mede com a régua pra saber o tamanho da caixa.*

Pesquisador - *mas como que mede a caixa?*

Joana - *a gente multiplica essa medida por essa e por essa (comprimento pela largura e pela altura).*

Kléber - *calcular o volume.*

Rita - *nós temos que medir os cubinhos não é?*

Pesquisador - *como assim?*

Rita - *ver quantos cabem aqui.*

Pesquisador - *Humn... Mas teria como fazer isso sem a régua?*

Kléber - *se a gente pegasse os cubinhos e colocasse assim como... e multiplicasse...*

Joana - *tipo assim, altura, largura e comprimento.*

Grupo 3:

Pesquisador - *se eu quero saber quantos cubinhos eu consigo colocar dentro da caixinha, como a gente faz para saber?*

Talita - *tipo... medindo.*

Pesquisador - *como a gente mede?*

Talita - *pode pegar a régua e medir.*

Pesquisador - *mas a gente vai medir o quê?*

Talita - *o volume.*

Pesquisador - *eu posso fazer a mesma coisa para as pedrinhas?*

Talita - *não, porque as formas são diferentes.*

Pesquisador - *então se as formas são diferentes, não tem como saber usando esse raciocínio?*

Talita - eu acho que cada forma geométrica tem que usar um raciocínio.

Pesquisador - e se a gente fosse calcular os cubinhos sem régua, teria como?

Talita - dá pra contar quanto que cabe de cada lado e multiplicar.

Como foi possível perceber, a primeira ideia que surgiu foi a de usar a régua e só depois de questionados pensaram nos cubos propriamente. Podemos refletir sobre isso, a partir da fala de Moura (2001) mostrada anteriormente, de que os estudantes não partem para uma atividade como se nada soubessem, mas trazem consigo conhecimentos adquiridos anteriormente para a construção de novos significados. Nesse caso a ideia de medir o volume pela régua é algo que já trouxeram pelas suas próprias experiências, mas quando questionados quanto a fazer isso sem a utilização desse instrumento, puderam atribuir novos significados à ideia do cálculo de volume.

Nessa parte da atividade, poderíamos utilizar o mesmo raciocínio dos cubos com as bolinhas de gude para calcular o volume, mas apenas o **Grupo 4** mostrou isso. Como podemos ver na discussão abaixo:

Letícia - *vai ter que calcular*

Pesquisador - *vai dar pra calcular com a pedra?*

Letícia - *Dá. Só você contar, tipo quantas aqui, a medida daqui aí você vê.*

Pesquisador - *aí eu posso dizer quantas pedrinhas cabem ali dentro?*

Letícia - *se você tiver certeza só.*

César - *aqui eu acho assim, põe as pedras, cubos qualquer coisa, põe aqui e vê quantos que tem.*

Pesquisador - *mas as pedras não têm tamanhos diferentes?*

César - *tem! Então, por isso eu acho que as pedras não vão dar, porque os cubinhos são mais fáceis pra pôr.*

Pesquisador - *daria certo se eu fizesse isso com a bolinha de gude?*

Suzana - *não!*

César - *dá.*

Pesquisador - *por quê?*

César - *porque ela é assim, aí vai contando do mesmo jeito. Porque o tamanho* *dela é igual. Quando o tamanho é diferente aí num dá não, mas quando é igual dá.*

Pesquisador - *Desses objetos, quais serviriam pra calcular quanto cabe então?*

César - *os cubinhos e as bolinhas de gude.*

Pesquisador - *mas as bolinhas de gude não vão deixar espaço entre elas?*

César - *não, só se for pra montar (no sentido de preencher a caixa completamente).*

Pesquisador - *se eu escolho as pedrinhas e quero saber quantas vai caber aqui dentro, você já me falou que não tem jeito porque elas têm tamanhos diferentes. O cubinho você já me explicou também, com aquele ali não daria certo por quê?*

César - *porque os tamanhos são diferentes.*

Pesquisador - *e a bolinha de gude daria certo por quê?*

Suzana - *porque os tamanhos são iguais.*

Pesquisador - *Com os cubinhos como que a gente faz pra saber quantos cabem aí dentro?*

César - *vendo a altura, comprimento e a largura.*

Pesquisador - *e com as bolinhas de gude teria como eu fazer a mesma coisa? Se eu colocar elas na largura, na altura e no comprimento, vai dar pra saber quantas vão caber no total?*

César - *sim, mas você tem que ver se aqui deu o tamanho da bolinha, pra ver se dá certo comparado com esse e comparado com esse (se referindo aqui que as bolinhas de gude deveriam caber exatamente nas dimensões da caixa).*

Após essa discussão apresentaram por escrito esta resposta:

Daria certo olhando a altura e a largura da caixa e o tamanho dos objetos diferente não daria para preencher a caixa. Objetos iguais = cubo, bola de gude. Objetos diferentes = paralelepípedos e pedra.

Observamos nessas discussões, que os estudantes conseguiram argumentar a respeito da necessidade de estabelecer uma unidade de medida padrão e que a forma influencia ao tentar encontrar uma medida.

Acreditamos que essa atividade atingiu os objetivos de colocar os estudantes em situações que deveriam se utilizar dos nexos, forma e medida. E isso também fica evidente na última questão da atividade 1, em que os estudantes foram questionados sobre o que puderam aprender com essa atividade. As respostas foram:

Grupo 1 - *A trabalhar em grupo, e que formas iguais formam melhor uma outra forma diferente (regular)*

Grupo 2 - *Podemos concluir que formas regulares apresentam mais facilidade em preenche um espaço do que formas irregulares.*

Grupo 3 - *Que cada objeto são diferentes como paralelepípedo eles tem uma forma diferentes, o raciocínio e uma espécies especifica para desenvolver as atividades. A matemática nos da muitas dúvidas, por isso você tem que tentar usar seu raciocínio.*

Grupo 4 - *Que a gente deve observar o tamanho e a forma dos objetos para preencher completamente a caixa***.**

Partindo para a atividade 2 “Explorando”, tentamos trabalhar com os nexos, forma e medida na primeira questão (Figura 23). Como mencionado anteriormente, nessa atividade estavam presente sete estudantes: Rubens, Marcela, Tamara, Letícia, Suzana, Rosana e Rita. Assim acharam melhor montar um único grupo para poder fazer as discussões.

ATIVIDADE 2: Explorando...

1) Para esta atividade vocês receberam uma fita métrica e com os grupos que vocês formaram, cada grupo escolha alguma região da escola, façam medidas e procurem responder:

   a) Quais as características deste lugar ou objeto?

   b) Vocês acham que com as medidas que fizeram podem calcular quanto espaço este lugar ou objeto ocupa? Se sim de que maneira se pode fazer?

Figura 23 Atividade 2 - questão 1

O lugar escolhido pelos estudantes para realizar as medições foi o espaço da quadra de voleibol. Pegaram as trenas e começaram a tirar as medidas e na sequência construíram as respostas abaixo:

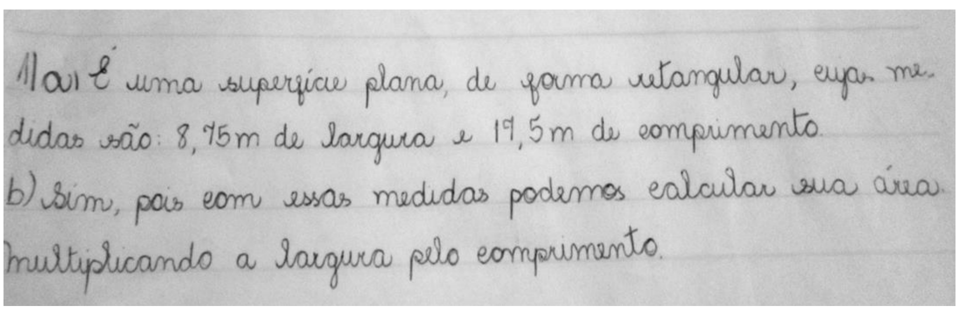

1) a) É uma superfície plana, de forma retangular, cujas medidas são: 8,75m de largura e 17,5m de comprimento.
b) Sim, pois com essas medidas podemos calcular sua área multiplicando a largura pelo comprimento.

Figura 24 Respostas da questão 1

Ao caracterizar essa quadra, podemos perceber que além de indicarem as características quanto à forma, também mostraram as medidas associadas a ela. Isso evidencia uma apropriação das ideias de forma e medida pelos estudantes, uma vez que puderam abstrair do objeto real a ideia matemática e fizeram relações entre esses dois nexos conceituais. Ao planejar essa questão o intuito era o de que escolhessem alguma região diferente, ou mesmo outros objetos, como por exemplo, a coluna de concreto. Questionados sobre a escolha da quadra, argumentaram que era porque seria mais fácil, devido ao fato de ser plana e que os cálculos também seriam mais exatos. Ao fazerem isso os estudantes chegaram a resultados que não eram esperados, mas conforme Moura (2001), isso é algo que pode ocorrer em uma AOE, pois o professor

> estabelece os objetivos, define as ações e elege os instrumentos auxiliares de ensino, porém não detém todo o processo, justamente porque aceita que os sujeitos em interação partilhem significados que se modificam diante do objeto de conhecimento em discussão (p. 155).

Como fizeram essa parte da atividade rapidamente, iniciamos então alguns questionamentos no intuito de enriquecer a atividade:

Pesquisador - *vocês já mediram a quadra e encontraram a sua área, se agora a gente fosse cobrir ela toda com pisos, qual vai ser o tamanho deles, para que a gente consiga cobrir a quadra exatamente?*

Tamara - *Nossa isso é difícil!*

Rubéns - *A quadra não dá os metros certinho, a gente não pode arredondar as medidas?*

Pesquisador - *pode sim.*

Rubens - *Aí fica mais fácil. Se arredondar as medidas vão ser nove metros de largura e 18 de comprimento.*

Tamara - *a gente pode dividir a quadra no meio então e pegar dois pisos.*

A partir daqui os estudantes perceberam que se fossem dividindo esses pisos maiores, poderiam encontrar outros tamanhos de piso que dariam certo. O estudante Rubens, teve uma percepção interessante, que a princípio não era esperada, ele disse que poderia fazer aqui o mdc (máximo divisor comum) de 9 e

18 que todos os divisores comuns serviriam como dimensões para fazer pisos quadrados. Apresentou então o desenho abaixo:

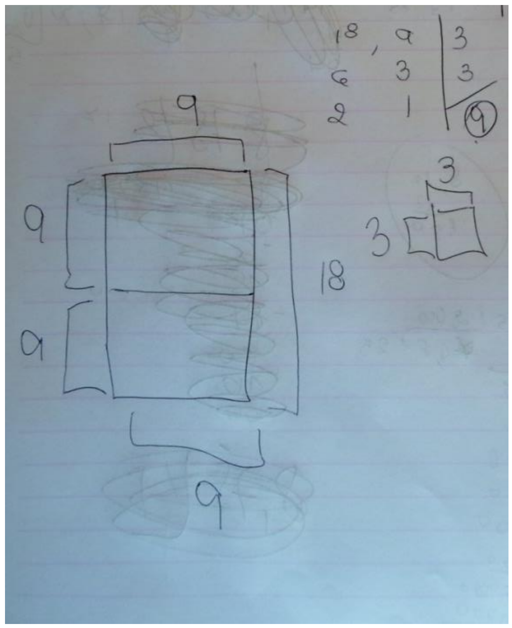


Figura 25 Encontrando o tamanho do piso

Essa situação nos mostra que para o estudante, a atividade proposta se tornou objeto de investigação conforme nos mostram Grando, Nacarato e Gonçalves (2008, p. 44):

> se o aluno tiver um domínio restrito dos conceitos geométricos, muito provavelmente a tarefa venha a ficar no nível da exploração, mas, caso seja um aluno que apresente um domínio maior dos conteúdos geométricos, existe a possibilidade de que a tarefa se torne, para ele, investigativa.

Com as possibilidades de tamanho encontradas, por fim, concluíram que o piso de 1m² é o que seria melhor para se trabalhar, porque não era muito grande nem muito pequeno.

Foi possível perceber com base nas discussões das duas atividades, que os estudantes durante todo o processo trabalharam com os nexos, forma e medida. Perceberam que certas formas são melhores que outras para atender uma necessidade, que algumas medidas, para poderem ser realizadas, dependem da forma e que algumas formas também podem mudar em conformidade com medida que se tem.

5.2 ELABORAÇÕES SOBRE A INVARIÂNCIA E A VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

Observando os dados que obtivemos percebemos que as elaborações sobre visualização e representação surgiram nas duas atividades aplicadas e as elaborações quanto à invariância surgiram na segunda atividade. Nesta seção vamos apresentar as elaborações dos estudantes a respeito da visualização e representação, nas duas atividades aplicadas.

Na atividade 1 "Quanto cabe?" a princípio não foi nosso objetivo trabalhar com a visualização e representação, mas ela apareceu em dois momentos. No primeiro momento, o Grupo 4, composto pelos estudantes César, Tamara, Letícia e Suzana, quando deveriam organizar as carteiras da maneira que todos pudessem se ver, fizeram a sua organização na forma de um quadrado e afirmaram que de outro modo ficaria ruim. Quando questionados que outra maneira ficaria ruim, responderam em forma de desenho, como mostrado anteriormente na Figura 17 da página 73.

A segunda situação ocorreu em um momento de discussão sobre a questão 2, em que os estudantes deveriam preencher a caixa com os objetos que julgavam melhores para preencher toda a caixa e justificar. No Grupo 3, composto pelas estudantes Talita, Carla e Raquel, ao preencher a caixa, a estudante Talita disse que as bolinhas de gude ela já tinha certeza que não daria certo porque ficariam espaços vazios entre as bolinhas e, para representar isso utilizou-se a Figura 20 da página 78.

Essas duas situações apresentadas, vão ao encontro do que apresentamos anteriormente apoiados em Barbosa (2011), sobre a representação das ideias geométricas. Os estudantes fizeram isso através da representação pelo desenho. E essa representação ajuda a transformar ou criar imagens mentais e produzir o raciocínio visual.

Do mesmo modo que nas situações anteriores, na primeira questão da atividade 2 “Explorando” (Figura 25), pudemos identificar a utilização da visualização e representação pelos estudantes. No entanto nessa questão, a representação foi feita tanto de forma verbal como por desenho.

2) Observando o espaço da escola e seu entorno podemos perceber que existem muitos objetos diferentes.

   a) Vocês poderiam listar alguns dos que viram e dizer qual a sua aparência?

   b) Se quisermos organizar estes objetos em grupos, como podemos fazer?

c) Porque motivo eles foram organizados desta maneira?

Figura 26 Atividade 2 - questão 2

Como mostrado anteriormente, ao apresentar as características da quadra que escolheram para fazer as suas medidas, as descreveram utilizando os conceitos geométricos, mostrando que tiveram uma interpretação visual das informações, criando as imagens mentais e gerando as informações verbais. Ou seja, estabeleceram comparações, e assim como em um trecho citado anteriormente: “na base da comparação, a Humanidade inventou palavras para indicar situações concretas, inventou os seus conceitos geométricos” (GERDES, 1981, p. 23), os estudantes representaram a situação concreta como conceitos geométricos abstratos.

A necessidade da representação na forma de desenho, demonstrado na Figura 25, surgiu no momento em que os estudantes tiveram que calcular a quantidade de pisos que conseguiria cobrir exatamente o espaço da quadra, pois como não eram números inteiros, então os cálculos aritméticos ficaram complicados. Assim resolveram arredondar as medidas dos lados e fazer o desenho para poder analisar o que se poderia fazer.

Ao representar como desenho, isso indica conforme Nacarato (2000), que os estudantes conseguiram associar o concreto ao abstrato, uma vez que o desenho exige certo nível de complexidade, pois “exige leitura e interpretação, associando-o ao objeto real e, portanto, exigindo imagens mentais” (p. 187). Assim, a construção dessas imagens mentais pelos estudantes poderia ter contribuído para que chegassem à solução do problema.

Na segunda questão tínhamos como intuito investigar quais elaborações os estudantes produziriam em relação à invariância. Retomando o que foi apresentado no tópico 3.4, temos a invariância na forma e medida quando se aplicam transformações e a quanto à invariância nas propriedades dos conceitos.

Na Figura 27 a seguir estão as questões propostas aos estudantes:

2) Observando o espaço da escola e seu entorno podemos perceber que existem muitos objetos diferentes.

   a) Vocês poderiam listar alguns dos que viram e dizer qual a sua aparência?

   b) Se quisermos organizar estes objetos em grupos, como podemos fazer?

c) Porque motivo eles foram organizados desta maneira?

Figura 27 Atividade 2 - questão 2

As primeiras respostas que os estudantes deram oralmente foram aleatórias, sem preocupação em estabelecer algum tipo de relação matemática, como por exemplo: mesa, lixeira, torneira, telhado.

A partir das respostas dadas por eles iniciamos o seguinte questionamento:

Pesquisador - *Vocês conseguem observar que tem um monte de coisas que tem aparências diferentes. E na segunda, o que eu estou pedindo? Se a gente pudesse agrupar elas, como que a gente agruparia?*

Rubens - *Coisas retangulares, tipo o pátio e a quadra*.

Tamara - *Aparentemente retangulares*.

Suzana - *A quadra e aquelas mesas ali podem ser*.

Pesquisador - *Tá, vocês estão agrupando o que então? Grupo 1, o que vocês conseguem colocar, e no outro grupo?*

Rubens - *Coisas retangulares. Como a Quadra, mesas retangulares, pátio retangular, janela retangular*.

Tamara - *A gente podia agrupar os retângulos e os quadrados*.

Pesquisador - *num lugar só?*

Rubens - *Sim eles são quadriláteros.*

Nesse momento da discussão, ao agrupar os objetos, como nas figuras 28 e 29 a seguir, os estudantes fizerem como o primeiro grupo a seguir: Grupo I => retângulos e quadrados => pátio, quadra, quadro negro, etc. Ao indicar essas regiões ou objetos como retângulos e quadrados, fizeram isso os relacionando de acordo com a forma geométrica que possuem, ou seja, não estavam querendo dizer, por exemplo, que o quadro negro, um objeto concreto era um quadrado, que é um conceito abstrato.

Assim, os estudantes começaram a agrupar os objetos a partir do segundo aspecto da invariância, quanto à invariância nas propriedades dos conceitos.

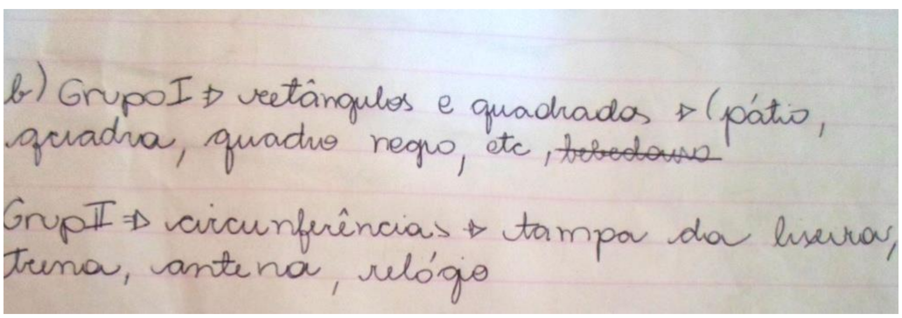


Figura 28 Classificação dos grupos I e II

À medida que iam respondendo, os estudantes foram questionados para argumentar sobre aquilo que estavam fazendo. A partir do momento em que classificaram o Grupo II foram feitas algumas intervenções:

Pesquisador - *Se fosse pra fazer outro grupo aqui. Que outro tipo de coisa que daria para colocar?*

Rúbens - *Coisas irregulares.*

Letícia - *Ai a gente pode colocar objetos irregulares no grupo 3 ?*

Pesquisador - *Fica à vontade.*

Letícia - *Extintor, água, mato.*

Marcela - *A coluna ali também.*

Tamara - *Aqui no retângulo a gente pode colocar o bebedouro.*

Letícia - *Mas tem alguns que são... os sólidos.*

Pesquisador - *Sólidos?*

Letícia - *É, a gente podia agrupar também.*

Pesquisador - *Como assim?*

Letícia - *a gente coloca as coisas planas e que tem volume.*

Ao apresentar essas ideias, os estudantes concluíram que seria melhor colocar o bebedouro no Grupo IV, pois ele tinha um formato de prisma, como demonstrado na Figura 29 a seguir, e assim fizeram um traço em cima do bebedouro que estava no Grupo I (Figura 28).

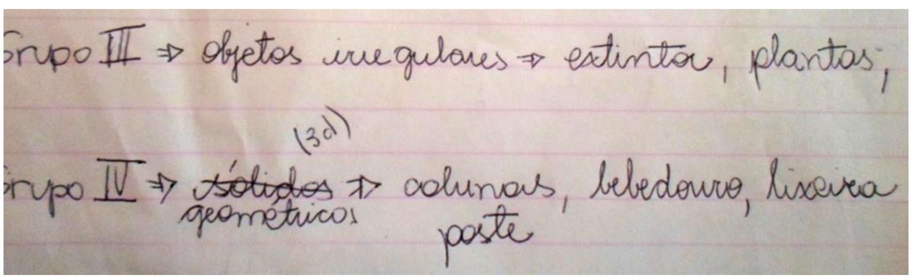


Figura 29 Classificação dos grupos III e IV

Esse momento da atividade evidencia o que Moura (2001) propõe que deva ocorrer numa AOE: os estudantes mediados por um conteúdo, negociando significados, tendo como objetivo solucionar coletivamente uma situação problema. Aqui eles puderam rever o que já tinham feito antes e concluíram que poderiam fazer a classificação de uma maneira melhor.

Na sequencia das discussões, a estudante Rosana apresentou uma ideia de que os grupos que já tinham poderiam constituir outros grupos:

Rosana - *Mas alguns grupos se encaixam em outros grupos, então ao invés de colocar os objetos coloca os grupos.*

Pesquisador - *Como é?*

Rosana - *Alguns grupos acabam fazendo parte de outros grupos, então é só fazer um grupo e depois subdividir, subgrupos.*

Pesquisador - *Agrupar eles desse jeito... por que seria interessante agrupar em grupos? Ajudaria em que?*

Rosana - *Ajudaria a separar o que são.*

Rita - *A medir.*

Pesquisador - *Para medir você separa eles em grupo então, e fica mais fácil de entender?*

Rita - *sim.*

O momento que seguiu, foi interessante, pois ao tentar classificar os grupos que já tinham definidos, em outros grupos podemos perceber que a estudante Tamara se utilizou do processo de visualização para classificar o que tinham observado, percebendo algumas regularidades entre eles evidenciando o que foi exposto no tópico 3.4 sobre a invariância.

Pesquisador - *Deixa eu ver, você colocou o grupo retângulos e quadrados, aí circunferências, objetos irregulares e outros sólidos. Você disse que tem alguns aqui que dá para entrarem outros grupos. Quais aqui dariam para colocar dentro de outros grupos?*

Marcela - *Quase tudo aí está no grupo dos sólidos.*

Rubens - *Ué, esse Grupo I dá para colocar no grupo de sólidos.*

Tamara - *Mas tipo assim, sólido é de forma espacial. O que mais é sólido gente?*

Marcela - *Chão, celular.*

Tamara - *Gente eu quero alguma coisa que tenha forma, tipo retângulo,* *círculo.*

Rubens - *Triângulo é a rampa***.**

Tamara - *A lixeira é sólida, um cilindro.*

Rubens - *É um cilindro sem tampa***.**

Ao dizer a lixeira é sólida, Tamara quis fazer referência que o formato da lixeira era o de um cilindro e Rubens, ao dizer que era um cilindro sem tampa, quis dizer que não era um cilindro maciço, ou seja, era uma casca cilíndrica. Esse momento nos mostra que houve por parte dos estudantes, a realização dos processos de interpretação visual de informações e a interpretação de imagens mentais já que conseguiram expor e argumentar as suas ideias.

Na sequência das discussões e encaminhando-se para o final da atividade, os estudantes foram questionados se havia a possibilidade de criar mais um grupo. E surgiram como respostas:

Rubens - *Coloca grupo 5, outras coisas.*

Letícia - *O que sobrou***.**

Tamara - *Mas o que sobrou está nos objetos irregulares***.**

Rubens - *Então deixa assim. Acabou***.**

Pesquisador - *Vocês acham que fazer esses agrupamentos é útil para alguma coisa nesta situação que estamos aqui?*

Rubens - *É.*

Pesquisador - *Para quê?*

Rubens - *Para dividir as coisas.*

Pesquisador - *Por que vocês organizaram os grupos dessa maneira?*

Rubens - *A gente fez de acordo com as suas características. Ter características semelhantes.*

Pesquisador - *Características em relação a quê?*

Rubens - *ao formato***.**

Letícia - *ao formato geométrico***.**

Rubens - *ao formato geométrico, mais ou menos assim.*

A partir desses resultados, acreditamos que o objetivo da atividade foi alcançado, os estudantes interagiram e colocaram em discussão e argumentaram suas ideias e lançaram mão da visualização e representação, conseguiram criar as imagens mentais e trabalharam com ideia de invariância.

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Chegamos ao final deste trabalho convencidos de que os objetivos do trabalho foram alcançados e que uma prática pedagógica, pautada na perspectiva lógico-histórica contribui para que os estudantes possam ter uma compreensão significativa dos conceitos geométricos.

A partir da nossa questão de investigação, investigamos quais as elaborações um grupo de estudantes do Ensino Fundamental produziu sobre a Geometria, quando essa foi desenvolvida a partir da exploração de seus nexos conceituais em Atividades Orientadoras de Ensino.

Com os dados construídos com as transcrições das gravações de áudio, os registros escritos elaborados pelos estudantes e as observações do pesquisador no diário de campo, pudemos fazer a nossa análise a partir da metodologia da Análise de Conteúdo. Definimos duas categorias de análise que nos permitiram observar essas elaborações.

Percebemos que as atividades que propomos, pelo envolvimento, a vontade dos estudantes em querer chegar à solução dos problemas, o fato de que colocaram em jogo as suas experiências, formularam hipóteses, discutiram e encontraram soluções coletivamente, por todo esse processo, constituíram-se como Atividades Orientadoras de Ensino.

Percebemos que a partir dos nexos conceituais o grupo de estudantes pode atribuir significados aos conceitos geométricos que foram abordados nas duas atividades propostas.

Uma contribuição importante para a formação do estudante e futuro professor Rodrigo, que esta pesquisa proporcionou, foi a percepção de que os estudantes pensam em elementos que o professor muitas vezes não pensa, que algo pode parecer muito simples aos olhos do professor, mas não é para os estudantes. Talvez, alguns conceitos considerados simples sejam de difícil compreensão para os estudantes, porque anteriormente, aquelas características intrínsecas aos conceitos, aquilo que confere significado a eles, ou seja, os nexos conceituais não foram levados em consideração.

Desse modo é preciso considerar a Matemática como uma ciência em movimento, que tem uma fluência e que é passível de ser recriada e que como nos mostra Caraça (2011, p. XIII):

> a Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contribuições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.
> [...] A Ciência, encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.

Até chegar aqui, delineou-se um longo processo, muitas vezes árduo, mas também gratificante. Para quem ao início do curso pensava não ser capaz de chegar ao final dessa empreitada, com o apoio de todos aqueles que acreditaram e apoiaram, foi possível chegar até aqui e realizar esta pesquisa.

Há uma frase de Antoine de Saint-Exupéry em que diz:

“Cada um que passa em nossa vida passa sozinho, mas não vai só nem nos deixa sós. Leva um pouco de nós mesmos, deixa um pouco de si mesmo”.

Assim cada colega, cada professor, cada um daqueles que possibilitou momentos de reflexões e aprendizagens ao longo de quase cinco anos, deixou um pouco de si nesta pesquisa. Pois, todas essas experiências vividas e saberes adquiridos, de certa forma influenciaram em todo o processo de estudo, planejamento e execução das atividades deste trabalho.

E este trabalho é uma apenas uma gota de água no imenso oceano. Mas fica aqui o anseio, de que novas pesquisas no campo da Educação Matemática possam ser desenvolvidas, que se possa ir mais longe e encontrar novos horizontes, tentando contribuir para que se possa alcançar uma melhoria no ensino e aprendizagem de Matemática e em especial da Geometria.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. C. **Origens da matemática: a pré-história da matemática**, vol. I: a matemática paleolítica. Curitiba. Editora Progressiva, 2009

ANDRADE, J. A. A. **O estágio na Licenciatura em Matemática:** Um espaço de formação compartilhada de professores. 2012. Tese de Doutorado São Carlos, SP: (UFScar).

BARBOSA, C. P. **Desenvolvendo o pensamento geométrico nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta de ensino para professores e formadores de professores.** Departamento de Matemática – UFOP, 2011. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Produto_Educacional _Cirleia.pdf>. Acesso em: 20 jul 2013.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1977.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2ª ed, 1974.

BRASIL. SEF. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ livro03.pdf>. Acesso em: 20 jan 2013.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 2011.

CUNHA, M. R. K. da. **Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino**. 2008. Tese de Doutorado Campinas, SP: (UNICAMP).

FRANCO, M. L. P. B. **Análise do Conteúdo**. Séria Pesquisa. Brasília: Líber Livro, 2007.

GERDES, P. **A Ciência Matemática**. Editor: INDE/Núcleo Editorial. Maputo. 1981.

GONZALEZ, C. G. **Paradoxos, o infinito e a intuição geométrica**. Educação e Filosofia (UFU. Impresso), v. 25, p. 717-739, 2011.

GRANDO, R. C., NACARATO, A. M., GONÇALVES, L. M. G. **Compartilhando saberes em geometria:** investigando e aprendendo com nossos alunos. *Cad. CEDES*, Abr 2008, vol.28, no.74, p.39-56. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a04.pdf>. Acesso em: 10 ago 2013.

HOGBEN, L**. As Maravilhas da Matemática:** influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

LIMA, T. C. S. de, MIOTO, R. C. T., PRÁ, K. R. D. **A documentação no cotidiano da intervenção dos assistentes sociais:** algumas considerações acerca do diário de campo. Textos & Contextos (Porto Alegre), v. 6, p. 93-104, 2007.

MOURA, M. O. de. **A atividade de ensino como ação formadora**, In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. de (org.) **Ensinar a ensinar:** didática para a escola fundamental e média. 1ª ed. São Paulo: Pioneira, 2001. cap. 8, p. 143-162

MOURA, M. O. de; ARAÚJO, E. S.; MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M. L.; RIBEIRO, F. D. **Atividade orientadora de ensino:** unidade entre ensino e aprendizagem. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

NACARATO, A. M. **A educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação:** currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando Geometria. 2000. Tese de Doutorado Campina, SP: (UNICAMP).

NEVES, J. L. **Pesquisa Qualitativa – Características, usos e possibilidades**, In Caderno de Pesquisas em Administração. São Paulo. V. 1, N° 3, 2° Sem., 2007. Disponível em: <http://www.ead.fea.usp.br/cad-pesq/arquivos/c03-art06. pdf>. Acesso em: 20 jan. 2013.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., & ABRANTES, P. **Didáctica da Matemática.** Lisboa: DES do ME, 1997.

PROENÇA**,** M. C. de, PIROLA, N. A. (2009). **Investigação em formação conceitual:** o conhecimento de alunos do ensino médio sobre polígonos. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XIII** (pp. 379-387). Santander: SEIEM.

REZENDE, João P. **Nexos conceituais de número natural como sustentação para o desenvolvimento de atividades de ensino**. 2010. (Trabalho de Conclusão de Curso). Lavras: Gráfica da UFLA, 2010.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SERRES, M. **Gnómon: os começos da geometria na Grécia** in SERRES, M. História das ciências. Ed. Terramar. 1989. Vol.1 (Cap. 3)

SANTOS, C de O. **A importância da visualização no ensino da geometria plana e espacial.** 2009. Trabalho de Conclusão de Curso Jussara, GO: (UEG).

SOUSA, M. C. de. **O ensino de álgebra numa perspectiva Lógico-Histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. Tese de Doutorado Campinas, SP: (UNICAMP).

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação na sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2009.

ANEXOS

ANEXO A – TCLE

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido TCLE

Nome:____

As informações contidas neste termo visam firmar acordo por escrito, mediante o qual o responsável pelo menor ou o próprio sujeito objeto de pesquisa, autoriza sua participação, com pleno conhecimento da natureza dos procedimentos e riscos a que se submeterá, com capacidade de livre arbítrio e sem qualquer coação.

I - TÍTULO DO TRABALHO EXPERIMENTAL:

UMA ABORDAGEM LÓGICO-HISTÓRICA DA GEOMETRIA EM ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO

Pesquisador Responsável: Prof. Dr. José Antônio Araújo Andrade
Assistente: Rodrigo Ferreira de Abreu

II - OBJETIVOS

Temos como objetivo analisar a utilização dos registros escritos e gravados em áudio no processo de ensinar e aprender Geometria. Verificar as elaborações dos estudantes sobre a Geometria em atividades orientadoras de ensino e analisar as possíveis contribuições desses registros no processo de ensinar e aprender conceitos Geométricos.

III – JUSTIFICATIVA

Este trabalho é uma pesquisa qualitativa, que analisará as elaborações produzidas pelos estudantes sobre a geometria trabalhada a partir da perspectiva lógico-histórica. Os resultados obtidos poderão auxiliar os docentes das escolas básicas a melhorarem suas metodologias e ajudarão também os (as) estudantes da pesquisa a desenvolverem outros métodos próprios para melhorar a aprendizagem.

IV - PROCEDIMENTOS DO EXPERIMENTO

AMOSTRA- Estudantes do Ensino Fundamental da Escola Estadual Jaime Ferreira Leite na cidade de Itutinga - MG. Os estudantes tem faixa etária entre 13 e 15 anos de idade e são voluntários a participar das atividades aos sábados.

EXAMES- São aplicadas atividades sobre geometria a partir da perspectiva lógico-histórica.

V – RISCOS ESPERADOS

Por entender que toda pesquisa é passível de resultar em riscos para os sujeitos da mesma, o pesquisador responsável se compromete a realizar a pesquisa de forma que os riscos aos voluntários sejam minimizados. Assim, os voluntários serão informados sobre os detalhes da pesquisa e sobre sua total liberdade em participar da mesma ou declinar do convite antes, durante ou após a coleta dos dados, sem a necessidade de explicitar os motivos que o levaram a desistir e sem prejuízos a suas atividades corriqueiras dentro da escola.

VI – BENEFÍCIOS

Os alunos serão beneficiados, pois terão a oportunidade de participar de aulas com metodologias diferenciadas, com o objetivo de ensinar e aprender Geometria, compreendendo o processo de construção dos conceitos e a relação dos mesmos com o nosso entorno.

VII - RETIRADA DO CONSENTIMENTO

O responsável pelo menor ou o próprio sujeito tem a liberdade de retirar seu consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem qualquer prejuízo ao atendimento a que está sendo ou será submetido.

VII – CRITÉRIOS PARA SUSPENDER OU ENCERRAR A PESQUISA

Qualquer critério justificado é valido

VIII - CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO

Eu____,
RG ____ responsável pelo menor ____, certifico que, tendo lido as informações acima e suficientemente esclarecido (a) de todos os itens, estou plenamente de acordo com a realização do experimento. Assim, eu autorizo a execução do trabalho de pesquisa exposto acima.

Itutinga, _____ de __________________ de 20____.

ASSINATURA ____

ATENÇÃO: A sua participação em qualquer tipo de pesquisa é voluntária. Em caso de dúvida quanto aos seus direitos, escreva para o Comitê de Ética em Pesquisa em seres humanos da UFLA. Endereço – Campus Universitário da UFLA, Pró-reitoria de pesquisa, COEP, caixa postal 3037. Telefone: 3829-1127. No caso de qualquer emergência entrar em contato com o pesquisador responsável no Departamento de Ciências Exatas. Telefones de contato: 35- 3829-1653.

ANEXO B – TCLE da escola

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Projeto de pesquisa: **"UMA ABORDAGEM LÓGICO-HISTÓRICA DA GEOMETRIA EM ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO"**

Eu, ____, Diretor (a) da Escola Estadual Jaime Ferreira Leite, localizada na cidade de Itutinga – MG, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para que o projeto de pesquisa **"UMA ABORDAGEM LÓGICO-HISTÓRICA DA GEOMETRIA EM ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO"** seja realizado na escola, sob a responsabilidade do pesquisador José Antônio Araújo Andrade (professor orientador da Universidade Federal de Lavras - UFLA) e Rodrigo Ferreira de Abreu (discente do curso de Licenciatura em Matemática da UFLA). Assinando este Termo de Consentimento estou ciente de que:

1 - O objetivo da pesquisa é trabalhar durante o primeiro semestre letivo da UFLA, com atividades orientadoras de ensino sobre a geometria e analisar os registros escritos e em áudio dos (as) estudantes, para o processo de ensinar e aprender Geometria. Os resultados da análise serão apresentados em um trabalho de conclusão de curso do discente Rodrigo Ferreira de Abreu.
2 - Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a autorização da realização do projeto;
3 - Estou livre para interromper a qualquer momento o projeto de pesquisa;
4 – Os dados pessoais dos (as) estudantes participantes da pesquisa serão mantidos em sigilo e os resultados gerais obtidos na pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, expostos acima, incluída sua publicação na literatura científica especializada;
6 – Serão tiradas fotos, recolhidos trabalhos e registros dos(as) estudantes;
7- Este Termo de Consentimento é feito em duas vias, sendo que uma permanecerá em meu poder e outra com o pesquisador responsável.

________________________, _____________
Local/data

____

Assinatura e carimbo do(a) diretor (a) da Escola Estadual Jaime Ferreira Leite

ANEXO C – ATIVIDADE 1

ATIVIDADE 1: Qual é o melhor jeito?

1) Para esta atividade organizem-se em grupos entre 3 e 5 estudantes de maneira que todos possam se ver.

   Vocês acham que desta maneira que se organizaram é a mais adequada? Por quê?

2) Vocês receberam uma caixa com os lados retangulares e quatro tipos de objetos diferentes: bolinhas de gude, pequenos cubos, pequenos paralelepípedos e algumas pedras.

   a) Desses objetos, preencha a caixa com aquele que vocês acham que será o melhor para ocupar todo o espaço da mesma.

   b) Qual foi o objeto escolhido? Por qual motivo e qual a vantagem de utilizar este objeto em relação aos demais?

   c) Se escolhermos um desses tipos de objetos para preencher a caixa, o que podemos fazer para poder saber qual a quantidade necessária desse objeto para ocupar o espaço da caixa?

   d) O mesmo raciocínio pode ser feito para os demais objetos? Por quê?

3) O que vocês puderam aprender com esta atividade?

ANEXO D – ATIVIDADE 2

ATIVIDADE 2: Explorando...

1) Para esta atividade vocês receberam uma fita métrica e com os grupos que vocês formaram, cada grupo escolha alguma região da escola, façam medidas e procurem responder:

   a) Quais as características deste lugar ou dos objetos?

   b) Vocês acham que com as medidas que fizeram podem calcular quanto espaço este lugar ou objeto ocupa? Se sim de que maneira se pode fazer?

2) Observando o espaço da escola e seu entorno podemos perceber que existem muitos objetos diferentes.

   a) Vocês poderiam listar alguns dos que viram e dizer qual a sua aparência?

   b) Se quisermos organizar estes objetos em grupos, como podemos fazer?

   c) Porque motivo eles foram organizados desta maneira?