Trabajo Práctico 2

Especialización en Inteligencia Artificial

Probabilidad y Estadistica

Abril Noguera

Universidad de Buenos Aires

Laboratorio de Sistemas Embebidos

Especialización en Inteligencia Artificial

Probabilidad y Estadística para la Inteligencia Artificial

Docente: Camilo Argoty

Nombre: Abril Noguera Código: a2017

Fecha: 13-04-2025

NOGUERA ABRIL

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

1. (3 puntos) Una variable aleatoria discreta X puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Las probabilidades para cada valor posible están dadas por la siguiente tabla:

X	0	1	2	3
p	$\frac{2\theta}{3}$	$\frac{4\theta}{3}$	$\frac{1-2\theta}{3}$	$\frac{2(1-2\theta)}{3}$

Si experimentalmente se obtienen los siguientes datos:
$(3, 3, 0, 1, 3, 2, 2, 3, 0, 2)$,
determine el valor de θ usando el método de máxima verosimilitud.

In [ ]:
```
import pandas as pd
import sympy as sp
from collections import Counter

# Variable simbólica
theta = sp.Symbol('theta', real=True, positive=True)

# Datos del problema
valores_x = [0, 1, 2, 3]

# Probabilidades asociadas a cada valor de X
p_simbolicas = [
    (2 * theta) / 3,
    (4 * theta) / 3,
    (1 - 2 * theta) / 3,
```

```
    (2 * (1 - 2 * theta)) / 3
]

# Crear un DataFrame
df = pd.DataFrame({
    'X': valores_x,
    'p(theta)': p_simbolicas
})

# Datos Originales
df
```

Out[ ]:

	X	p(theta)
0	0	2*theta/3
1	1	4*theta/3
2	2	1/3 - 2*theta/3
3	3	2/3 - 4*theta/3

In [ ]:

```
# Datos observados
datos = [3, 3, 0, 1, 3, 2, 2, 3, 0, 2]

# Contar la cantidad de veces que aparece cada valor
conteo = Counter(datos)
df['conteo'] = df['X'].map(conteo).fillna(0).astype(int)

# Columna: log(p(theta))
df["log(p(theta))"] = df["p(theta)"].apply(sp.log)

# Columna: conteo * log(p(theta))
df["conteo * log(p(theta))"] = df["conteo"] * df["log(p(theta))"]

# Columna: p(theta) ** conteo
df["p(theta)^conteo"] = df["p(theta)"] ** df["conteo"]

# Columna: verosimilitud parcial (producto individual)
df["verosimilitud parcial"] = df["p(theta)^conteo"]

# Mostramos proceso
df
```

Out[ ]:

	X	p(theta)	conteo	log(p(theta))	conteo * log(p(theta))	p(theta)^conteo	verosi
0	0	2*theta/3	2	log(2*theta/3)	2*log(2*theta/3)	4*theta**2/9	4*the
1	1	4*theta/3	1	log(4*theta/3)	log(4*theta/3)	4*theta/3	4*
2	2	1/3 - 2*theta/3	3	log(1/3 - 2*theta/3)	3*log(1/3 - 2*theta/3)	(1/3 - 2*theta/3)**3	2*thet
3	3	2/3 - 4*theta/3	4	log(2/3 - 4*theta/3)	4*log(2/3 - 4*theta/3)	(2/3 - 4*theta/3)**4	4*thet

In [16]:
```python
# Calculamos la log-verosimilitud
log_likelihood = sum(df['conteo * log(p(theta))'])
log_likelihood_deriv = sp.diff(log_likelihood, theta)

# Resolvemos para encontrar el valor óptimo de theta
theta_mle = sp.solve(log_likelihood_deriv, theta)
print('θ = ', theta_mle[0])
```

```
θ =  3/20
```

2. (3 puntos) Se pretende estimar los valores de producción Y (en miles de toneladas) de cierto material, en función del tiempo transcurrido X (en meses) usando los valores de la tabla:

X	Y
2	8
5	50
14	145
17	237
20	477

Se plantea un modelo de la forma $Y = a + bx + cx^2$. Encontrar los estimadores de mínimos cuadrados para a, b y c en este modelo.

In [29]:
```python
import numpy as np
# Datos proporcionados
X = np.array([2, 5, 14, 17, 20])  # meses
Y = np.array([8, 50, 145, 237, 477])  # miles de toneladas
```

Solución Análitica

In [33]:
```python
# Solución analítica de las ecuaciones normales
n = len(X)
sum_X = sum(X)
sum_X2 = sum(X**2)
sum_X3 = sum(X**3)
sum_X4 = sum(X**4)
sum_Y = sum(Y)
sum_XY = sum(X*Y)
sum_X2Y = sum(X**2 * Y)

# Matriz del sistema
M = np.array([
    [n, sum_X, sum_X2],
    [sum_X, sum_X2, sum_X3],
    [sum_X2, sum_X3, sum_X4]
])

# Vector de términos independientes
v = np.array([sum_Y, sum_XY, sum_X2Y])

# Resolvemos el sistema
a, b, c = np.linalg.solve(M, v)

print(f"Solución analítica:")
print(f"a = {a:.4f}")
print(f"b = {b:.4f}")
```

```python
print(f"c = {c:.4f}")
print(f"Modelo estimado: Y = {a:.4f} + {b:.4f}X + {c:.4f}X²")
```

```
Solución analítica:
a = 83.6492
b = -27.2415
c = 2.2744
Modelo estimado: Y = 83.6492 + -27.2415X + 2.2744X²
```

Solución con Statsmodels

In [39]:

```python
import pandas as pd
import statsmodels.api as sm
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore", category=UserWarning)

# Creamos un DataFrame con los datos
data = pd.DataFrame({'X': X, 'Y': Y})

# Añadimos el término cuadrático
data['X²'] = data['X']**2

# Ajustamos el modelo
model = sm.OLS(data['Y'], sm.add_constant(data[['X', 'X²']]))
results = model.fit()

print(results.summary())
a = results.params['const']
b = results.params['X']
c = results.params['X²']
```

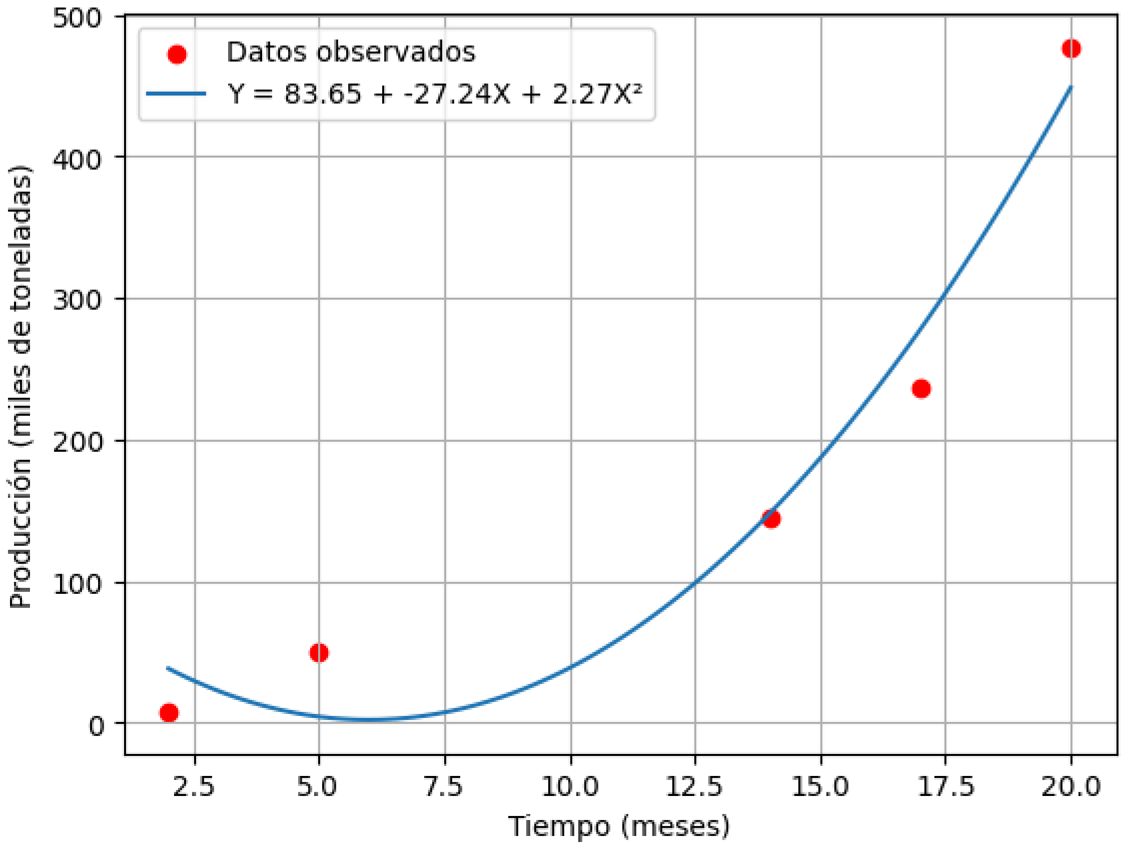
```
                            OLS Regression Results
============================================================================
==
Dep. Variable:                      Y   R-squared:                       0.9
61
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.9
21
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     24.
34
Date:                Tue, 08 Apr 2025   Prob (F-statistic):             0.03
95
Time:                        20:22:01   Log-Likelihood:                -24.5
98
No. Observations:                   5   AIC:                             55.
20
Df Residuals:                       2   BIC:                             54.
02
Df Model:                           2
Covariance Type:            nonrobust
============================================================================
==
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.97
5]
----------------------------------------------------------------------------
--
const         83.6492     72.033      1.161      0.365    -226.286     393.5
84
X            -27.2415     18.295     -1.489      0.275    -105.960      51.4
77
X²             2.2744      0.836      2.720      0.113      -1.323       5.8
72
============================================================================
==
Omnibus:                          nan   Durbin-Watson:                   2.6
18
Prob(Omnibus):                    nan   Jarque-Bera (JB):                0.5
25
Skew:                           0.124   Prob(JB):                        0.7
69
Kurtosis:                       1.433   Cond. No.                         75
0.
============================================================================
==

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is corre
ctly specified.
```

In [ ]:

```
print("Parámetros estimados:")
print(f"a = {a:.4f}")
print(f"b = {b:.4f}")
print(f"c = {c:.4f}")
print(f"Modelo estimado: Y = {a:.4f} + {b:.4f}X + {c:.4f}X²")
```

```
Parámetros estimados:
a = 83.6492
b = -27.2415
c = 2.2744
Modelo estimado: Y = 83.6492 + -27.2415X + 2.2744X²
```

In [34]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Generamos puntos para la curva ajustada
x_fit = np.linspace(X.min(), X.max(), 100)
y_fit = a + b*x_fit + c*x_fit**2

plt.scatter(X, Y, color='red', label='Datos observados')
plt.plot(x_fit, y_fit, label=f'Y = {a:.2f} + {b:.2f}X + {c:.2f}X²')
plt.xlabel('Tiempo (meses)')
plt.ylabel('Producción (miles de toneladas)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



3. (4 puntos) Don Francisco tiene 6 clientes a los que les ha vendido mercancías a crédito y, de ellos, 1 están en mora con el pago prometido. Matías, teniendo en cuenta la información disponible, considera que puede modelar el porcentaje p de morosidad según una distribución $\mathcal{B}(1,4)$. Para determinar los parámetros α y β, decide usar inferencia bayesiana. Con esto, pretende explicarle a Don Francisco, cómo será el comportamiento de pago de sus clientes a crédito. Determinen la distribución a posteriori del parámetro p de porcentaje de morosidad (α y β). Determinar su media y su varianza.

In [35]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import beta
```

```python
# Datos del Problema
n_clientes = 6
n_morosidad = 1

# Distribución a priori Beta(1, 4)
alpha_prior = 1
beta_prior = 4

# Media y Varianza a priori
media_prior = alpha_prior / (alpha_prior + beta_prior)
var_prior = (alpha_prior * beta_prior) / ((alpha_prior + beta_prior)**2 * (a

print("Distribución a priori:")
print(f"Beta(α={alpha_prior}, β={beta_prior})")
print(f"Media a priori: {media_prior:.4f} ({media_prior*100:.2f}%)")
print(f"Varianza a priori: {var_prior:.6f}\n")
```

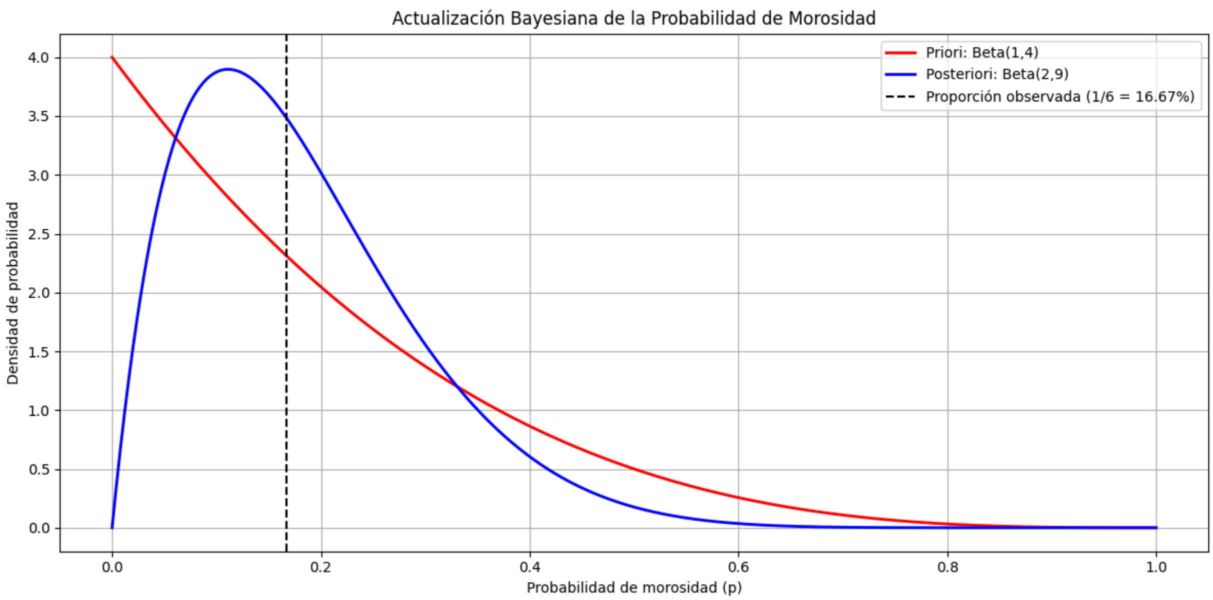
```
Distribución a priori:
Beta(α=1, β=4)
Media a priori: 0.2000 (20.00%)
Varianza a priori: 0.026667
```

In [36]:

```python
# Actualización bayesiana para obtener la distribución a posteriori
alpha_post = alpha_prior + n_morosidad
beta_post = beta_prior + n_clientes - n_morosidad

# Media y Carianza a posteriori
media_post = alpha_post / (alpha_post + beta_post)
var_post = (alpha_post * beta_post) / ((alpha_post + beta_post)**2 * (alpha_

print("Distribución a posteriori:")
print(f"Beta(α={alpha_post}, β={beta_post})")
print(f"Media a posteriori: {media_post:.4f} ({media_post*100:.2f}%)")
print(f"Varianza a posteriori: {var_post:.6f}\n")
```

```
Distribución a posteriori:
Beta(α=2, β=9)
Media a posteriori: 0.1818 (18.18%)
Varianza a posteriori: 0.012397
```

In [38]:
```python
# Visualización comparativa
p = np.linspace(0, 1, 1000)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(p, beta.pdf(p, alpha_prior, beta_prior), 'r-', lw=2, label=f'Priori
plt.plot(p, beta.pdf(p, alpha_post, beta_post), 'b-', lw=2, label=f'Posterio
plt.axvline(x=n_morosidad/n_clientes, color='k', linestyle='--',
            label=f'Proporción observada ({n_morosidad}/{n_clientes} = {n_mo

plt.title('Actualización Bayesiana de la Probabilidad de Morosidad')
plt.xlabel('Probabilidad de morosidad (p)')
plt.ylabel('Densidad de probabilidad')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
```



Link al Notebook

Se puede encontrar el trabajo completo en el siguiente link: Repositorio GitHub