



# مسائل اپٹیک

دکترای دانشگاه‌های امریکا همراه با حل آنها

مولف: Lim Yung-Kuo

ترجمہ

دکتر محمد صادق ابریشمیان  
استاد انجمن صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

γ

# فهرست مطالب

- |   |                   |     |
|---|-------------------|-----|
| ۱ | نورشناخت هندسی    | ۵   |
| ۲ | نورشناخت موجی     | ۵۵  |
| ۳ | نورشناخت کوانتومی | ۱۶۱ |



## فصل ۱

### نورشناخت هندسی

۱۰۰۱

یک رنگین کمان بوسیله

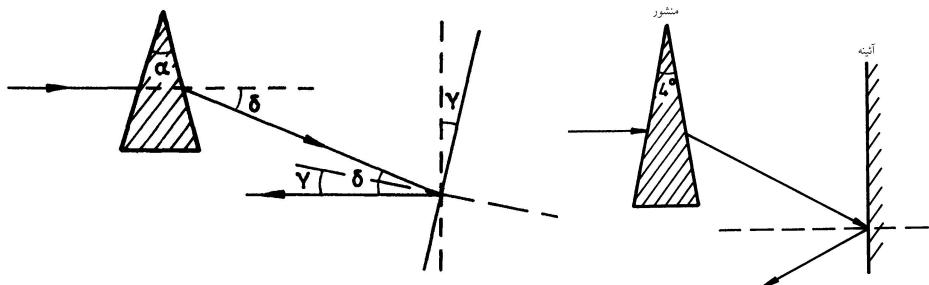
- الف- انكسار نور خورشید از قطرات باران در هوا تولید میشود.
- ب- انعکاس نور خورشید از مه تولید میشود.
- ج- انعکاس نور خورشید در چشم انسان تولید میشود.

(دانشگاه CCT)

حل:

جواب (الف) است.

۱۰۰۲



شکل ۲.۱ :

شکل ۱.۱ :

## فصل ۱. نورشناسی هندسی

یک پرتو افقی نور از درون یک منشور بضریب شکست  $1.50$  و زاویه راس  $4^\circ$  میگذرد و سپس بیک آئینه عمودی، مطابق شکل (۱.۱) برخورد میکند. تحت چه زاویهای آئینه باید بچرخد تا بعداز بازتاب پرتو افقی شود؟  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

چون زاویه راس خیلی کوچک است ( $\alpha = 4^\circ$ )، زوایه انحراف تقریباً میتواند چنین باشد:

$$\delta = (n - 1)\alpha = (1.5 - 1) \times 4^\circ = 2^\circ$$

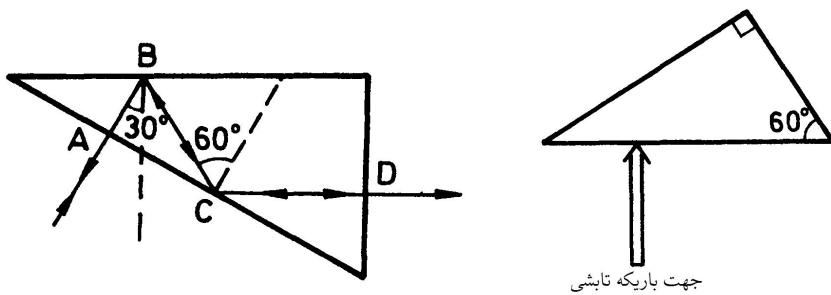
از شکل (۲.۱) مشاهده میشود که اگر پرتو بازتاب شده افقی شود، آئینه باید در جهت عقربههای ساعت باندازه  $\gamma$  بچرخد

$$\gamma = \frac{\delta}{2} = 1^\circ$$

۱۰۰۳

یک باریکه نازکی از نور روی یک منشور  $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$  مطابق شکل (۳.۱) میتابد. ضریب شکست منشور  $n = 2.1$  است. نشان دهید که تمام باریکه از وجه دست راست خارج میشود، یا در امتداد مسیر تابشی برمیگردد.  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**



شکل ۴.۱

شکل ۳.۱

بطوریکه از شکل (۴.۱) مشاهده میشود، برای تابش عمودی در سطح پائینی، زاویه تابشی در  $B$  برابر  $30^\circ$ ، و در  $C$  برابر  $60^\circ$ ، که از زاویه بحرانی منشور بزرگتر است،

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{1}{n} = 28^\circ 26'$$

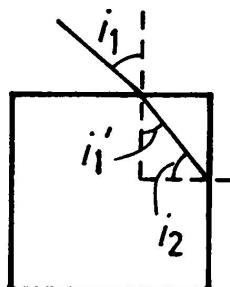
بنابراین پرتو انعکاس کلی در  $B$  و  $C$  دارد. همچنین، بخشی از پرتو در سطح پائینی و عمود بر سطح بر میگردد. لذا، تمام باریکه از وجه دست راست خارج میشود، یا در امتداد مسیر تابشی بر میگردد.

### ۱۰۴

یک مکعب شیشه‌ای به ضریب شکست  $n = 1.5$  مفروض است. باریکه نوری از سطح فوقانی بطور مورب وارد شیشه شده و به سطح مکعب برخورد میکند. آیا نور از این وجه خارج میشود؟ جواب خود را توجیه نمائید.

(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**



شکل ۵.۱:

فرض کنید که زاویه تابش و شکست در سطح فوقانی بترتیب  $i_1$  و  $i_1'$  باشد. بر طبق قانون إسنل داریم

$$\sin i_1 = n \sin i_1'$$

از شکل (۵.۱) داریم  $i_1' + i_2 = 90^\circ$ ، که در آن  $i_2 = 90^\circ - i_1'$  زاویه تابشی برای سطح دست راستی است. بنابراین خواهیم داشت

$$\sin i_1 = n \cos i_2$$

یا

$$i_2 = \cos^{-1} \left( \frac{\sin i_1}{n} \right)$$

وقتی  $i_1 = 90^\circ$  است،  $i_2$  کمترین مقدار را دارد.

$$i_2 = \cos^{-1} \frac{1}{1.5} = 48^\circ 10' > i_c = 42^\circ$$

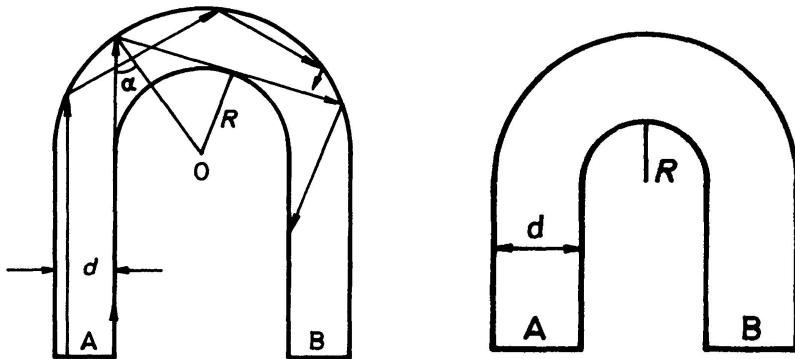
زاویه بحرانی بنابراین هیچگونه نوری از این سطح خارج نمیشود.

## ۱۰۰۵

یک میله شیشه‌ای با سطح مقطع مستطیلی، مطابق شکل (۶.۱) خم شده است. یک باریکه نور بطور عمودی بر روی سطح صاف  $A$  می‌افتد. حداقل مقدار نسبت  $R/d$  را طوری پیدا کنید که تمام نوری که وارد شیشه از سطح  $A$  می‌شود از سطح  $B$  شیشه خارج گردد. ضریب شکست شیشه ۱.۵ می‌باشد.

(دانشگاه ویسکانسین)

حل:



شکل ۱: ۶.۱

فرض کنید پرتوهای مطابق شکل (۷.۱) باشد. پرتوی که از سطح  $A$  شیشه وارد و سپس توسط سطوح میله تحت کوچکترین زاویه  $\alpha$  است که در آن پرتو بازتاب شده مماس بر سطح داخلی می‌باشد. ما باید شرایطی را در نظر گیریم که تحت آن، قبل از آنکه به  $B$  برسد، متوجه انعکاس کلی شود.

اگر  $\theta_c > \alpha$  باشد، زاویه بحرانی، که در آن انعکاس کلی رخ میدهد، تمام باریکه‌های تابشی از سطح  $B$  خارج می‌شوند. بنابراین لازم است که

$$\sin \alpha > \frac{1}{n}$$

از هندسه داریم

$$\sin \alpha = \frac{R}{(R+d)}$$

بنابراین

$$\frac{R}{R+d} \geq \frac{1}{n}$$

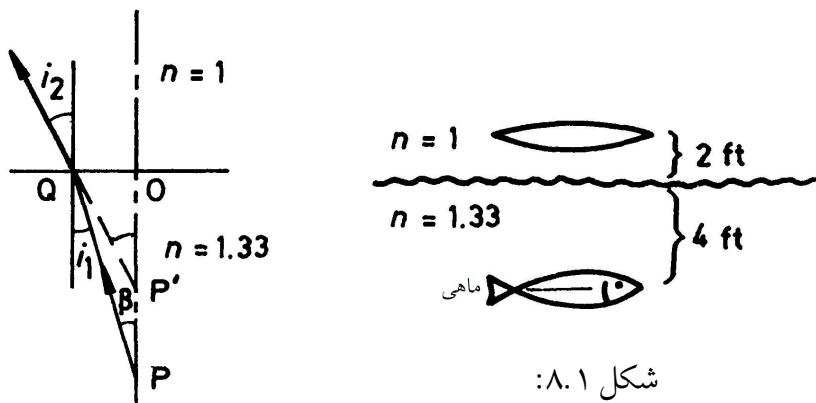
یا

$$\frac{R}{d} = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{1.5-1} = 2.$$

## ۱۰۶

یک ماهی که بفاصله چهار فوت از سطح آب دریاچه مندوتا<sup>۱</sup> است، از طریق یک عدسی نازک همگرا به فاصله کانونی سی فوت مشاهده می شود. اگر عدسی بفاصله دو فوت از سطح آب باشد (شکل ۸.۱)، تصویر ماهی کجا توسط بیننده مشاهده می شود؟ فرض کنید که ماهی روی محور نوری عدسی قرار دارد و ضریب شکست هوا  $n_{water} = 1.33$  و آب  $n_{air} = 1.0$  میباشد.  
(دانشگاه ویسکانسین)

حل:



شکل ۸.۱

شکل ۹.۱

یک جسم در نقطه  $P$  در آب، در نقطه  $P'$  در هوا، مطابق شکل (۹.۱)، مشاهده می شود. نو موازی محور که از نقطه  $P$  گسیل و خارج می شود، در سطح آب شکسته می شود، که برای آن

$$1.33 \sin i_1 = \sin i_2$$

چون  $i_1$  و  $i_2$  خیلی کوچک است، در تقریب داریم  $i_2 = 1.33 i_1$ .

$$i_2 = \alpha \approx \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP'}}, \quad i_1 = \beta \approx \frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}}.$$

از آنجا، داریم

$$\overline{OP'} = \frac{1}{1.33} \cdot \overline{OP} = 3 \text{ ft}.$$

<sup>۱</sup>Lake Mendota

## فصل ۱. نورشناخت هندسی

فرض کنید فاصله بین محل ظاهری ماهی و مرکز عدسی  $u$  باشد، در این صورت

$$u = 2 + \overline{OP'} = 5 \text{ ft}.$$

$$\text{از رابطه } \frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \text{ داریم}$$

$$v = -6 \text{ ft}.$$

بنابراین، تصویر ماهی هنوز هم همان جائی است که ماهی است، چهار فوت زیر سطح آب.

## ۱۰۰۷

ضریب شکست شیشه را میتوان با اضافه کردن و نفوذ ناخالصی افزایش داد. سپس میتوان از آن عدسی با ضخامت ثابت ساخت. یک دیسک بشعاع  $a$  و ضخامت  $d$  داده شده است. تغییرات شعاعی ضریب شکست  $n(r)$  را طوری پیدا کنید که یک عدسی به فاصله کانونی  $F$  تولید شود. عدسی را میتوانید نازک فرض نمائید  $(a \ll d)$ .

(دانشگاه شیکاگو)

### حل:

فرض کنید ضریب شکست مواد دیسک  $n$  و توزیع شعاعی ضریب شکست ناخالصی نفوذی دیسک با  $n(r)$  با  $n(0) = n_0$  نشان داده شود. موج صفحه ای تابشی که وارد عدسی می‌شود شگسته شده و در کانون  $F$  مطابق شکل (۱۰۱) متوجه شود. لذا داریم

$$[n(r) - n_0]d = -\sqrt{F^2 + r^2} + F$$

يعنى،

$$n(r) = n_0 - \frac{\sqrt{F^2 + r^2} - F}{d}$$

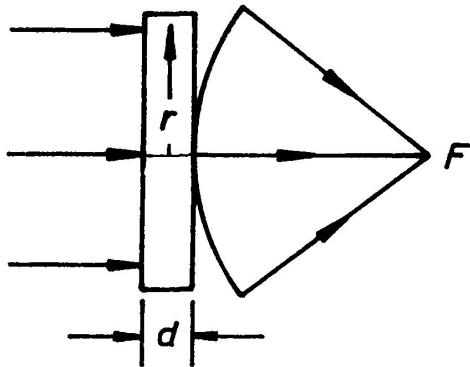
برای  $r \gg F$ ، بدست میآید

$$n(r) = n_0 - \frac{r^2}{2dF}$$

## ۱۰۰۸

ضریب شکست هوا در دمای  $K$  ۳۰۰ و یک اتمسفر فشار برابر ۱.۰۰۰۳ در وسط طیف نور مرئی است. فرض کنید اتمسفر در دمای ثابت<sup>۲</sup>  $K$  ۳۰۰ است، محاسبه کنید تحت چه ضربی اتمسفر زمین باید غلیظ و چکال باشد تا باعث شود که نور دور زمین با انحنای زمین در سطح دریا خم شود. (در آن صورت ما میتوانیم در تمام شب و آسمان بدون ابر غروب آفتاب را اصولاً مشاهده کنیم، اما با تصویری از خورشید نامنظم و بطور عمودی فشرده). شما میتوانید فرض کنید که ضریب

<sup>۲</sup>isothermal



شکل ۱۰.۱:

شکست  $n$  دارای خاصیتی است که  $n - 1$  متناسب با چگالی است. (راهنمائی: از اصل فرمای<sup>۳</sup> استفاده کنید). تحت ضریب  $1/e$ ، ارتفاع این اتمسفر دمای ثابت ۸۷۰۰ متر است.

(دانشگاه کالیفرنیا، برکلی)

### حل:

طبق مفروضات داده شده

$$n(r) - 1 = \rho e^{-\frac{r-R}{8700}}$$

که در آن  $m R = 6400 \times 10^3$  m شعاع زمین و  $\rho$  ضریب چگالی هوا است. در این صورت

$$n(r) = 1 + \rho e^{-\frac{r-R}{8700}} \quad (1)$$

$$\frac{dn(r)}{dr} = n'(r) = -\frac{1}{8700} \rho e^{-\frac{r-R}{8700}} \quad (2)$$

ضمیناً فرض بر این است که هوا این قدر غلیظ باشد که باعث شود نور دور زمین با انحنای زمین در سطح دریا، مطابق شکل (۱۱.۱)، خم شود. طول مسیر نوری از A تا B برابر است با

$$\ell = n(r)r\theta$$

بر طبق اصل فرمای، طول مسیر نوری از A تا B باید اکسترمم<sup>۴</sup> باشد، لذا

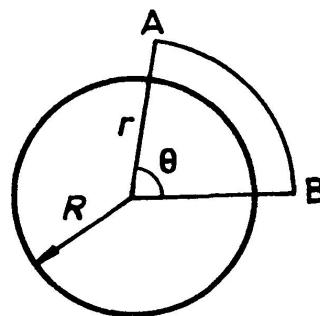
$$\frac{d\ell}{dr} = [n'(r)r + n(r)]\theta = 0$$

يعنى،

$$n'(r) = -\frac{n(r)}{r} \quad (3)$$

<sup>۳</sup>Fermat's Principle

<sup>۴</sup>extremum



شکل ۱۱.۱ :

با قرار دادن رابطه (۳) در رابطه (۲) خواهیم داشت

$$\frac{1}{8700} \rho e^{-\frac{r-R}{8700}} = \frac{n(r)}{r} \quad (4)$$

در سطح دریا،  $r = R = 6400 \times 10^3 \text{ m}$  است. این با رابطه (۱) و (۴) میدهد

$$\frac{\rho \times 6400 \times 10^3}{8700} = 1 + \rho$$

که میدهد

$$\rho = 0.00136$$

در سطح دریا، دمای  $K = 300$  و فشار یک اتمسفر،  $n_0 - 1 = \rho_0 = 0.0003$  است. بنابراین

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 4.53$$

لذا فقط وقتی هوا ۴.۵۳ برابر غلیظتر از هوای واقعی باشد، نور میتواند با شعاع انحنای زمین در سطح دریا خم شود.

### ۱۰۰۹

پرتوهای موازی تابشی با محور یک عدسی واگرا به طول کانونی  $cm = 20$  – زاویه  $5^\circ$  میسازد. محل تصویر را پیدا کنید.  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

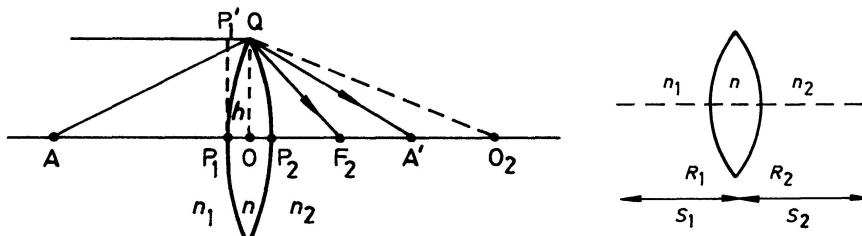
میدانیم  $20 \times \tan 5^\circ = 1.75 \text{ cm}$ . تصویر مجازی در صفحه کانونی  $cm = 1.75$  دور از محور نوری است.

### ۱۰۱۰

یک عدسی نازک با ضریب شکست  $n$  و شعاع انحنای  $R_1$  و  $R_2$  بین دو محیط به ضریب شکست‌های  $n_1$  و  $n_2$  مانند شکل ۱۲.۱ قرار دارد. اگر  $S_1$  و  $S_2$  بترتیب فواصل جسم و تصویر و  $f_1$  و  $f_2$  بترتیب فواصل کانونی باشند، ثابت کنید که

$$\frac{f_1}{S_1} + \frac{f_2}{S_2} = 1$$

(دانشگاه ویسکانسین)



شکل ۱۳.۱

شکل ۱۲.۱

### حل:

ابتدا رابطه بین  $f_1$  و  $f_2$ ،  $R_1$  و  $R_2$ ،  $n_1$  و  $n_2$  را مطالعه میکنیم. بطوریکه در شکل ۱۲.۱ نشان داده شده است، یک پرتو موازی محور در  $Q$  شکسته شده و در نقطه کانون دوم  $F_2$  محور را قطع میکند؛ پرتوی که در امتداد محور است از  $F_2$  نیز میگذرد. چون طول نوری این دو پرتو برابر است، خواهیم داشت

$$n_1 \overline{P'Q} + n_2 \overline{QF_2} = n_1 \overline{P_1P_2} + n_2 \overline{P_2F_2}. \quad (1)$$

چون  $\overline{QO_2} = \overline{P_1O_2} = R_1$  داریم

$$\overline{P_1O} = R_1 - \overline{OO_2} = R_1 - \sqrt{R_1^2 - h^2} \approx \frac{h^2}{2R_1}, \quad \left( \frac{h}{R_1} \ll 1 \right).$$

بهمان روش، داریم

$$\overline{P_2O} \approx \frac{h^2}{2R_2}.$$

$$\begin{aligned} \overline{P'_Q} &= \overline{P_1O} = \overline{P_1P_2} = \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \overline{QF_2} &= (h^2 + f_2^2)^{\frac{1}{2}} \approx f_2 \left( 1 + \frac{h^2}{2f_2^2} \right), \end{aligned}$$

$$\overline{P_2F_2} = f_2 - \overline{P_2O} = f_2 - \frac{h^2}{2R_2},$$

$$\text{با جاگذاری در رابطه ۱ بدست میآید} \quad (2)$$

$$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}$$

بهمان ترتیب داریم

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2} \quad (3)$$

فرض کنید  $A$  و  $A'$  یک زوج نقاط مزدوج<sup>۵</sup> باشند. داریم

$$\overline{AQ} = (h^2 + S_1^2)^{1/2} \approx S_1 \left(1 + \frac{h^2}{2S_1^2}\right), \quad \overline{A'Q} = S_2 \left(1 + \frac{h^2}{2S_2^2}\right),$$

$$\overline{AP_1} = S_1 - \overline{P_1O} = S_1 - \frac{h^2}{2R_1}, \quad \overline{AP_2} = S_2 - \frac{h^2}{2R_2}.$$

با قرار دادن اینها در معادله مسیر نوری

$$n_1 \overline{AQ} + n_2 \overline{A'Q} = n_1 \overline{AP_1} + n_1 \overline{P_1P_2} + n_2 \overline{A'P_2}$$

بدست می‌آید

$$\frac{n_1}{S_1} + \frac{n_2}{S_2} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}$$

با ترکیب روابط (2)، (3) و (4) نتیجه می‌شود

$$\frac{f_1}{S_1} + \frac{f_2}{S_2} = 1$$

## ۱۰۱۱

یک جسم خطی بطول ۵ mm در جلو عدسی یک دوربین عکاسی قرار دارد. تصویر روی صفحه فیلم متمرکز و کانونی شده و به بلندی ۱ mm است.

اگر صفحه فیلم بقدر ۱ cm عقب برده شود، عرض تصویر ۱ mm کدر می‌شود.

عدد  $F$  عدسی چقدر است؟ (دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

با جاگذاری  $u = 50\text{ cm}$  و  $\frac{v}{u} = \frac{1}{5}$  در فرمول عدسی گوسی

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

میدهد  $v = 10\text{ cm}$ ،  $f = 8.33\text{ cm}$  داشت

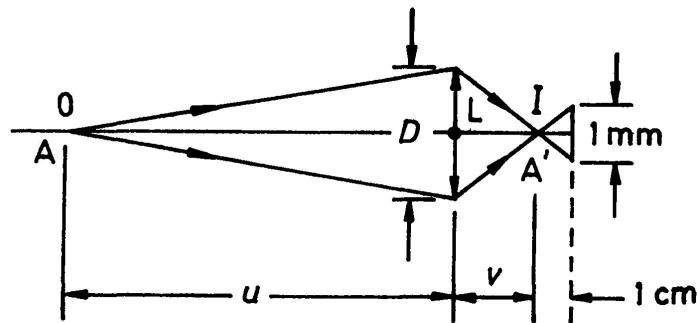
$$\frac{D}{v} = \frac{0.1}{1}$$

یا  $D = f/v = 8.33/10 = 0.833\text{ cm}$ . بنابراین،  $D = 0.1v = 1\text{ cm}$

## ۱۰۱۲

برای یک عدسی عکاسی "عمق میدان" فاصله‌ای است که یک نقطه از جسم میتواند از موقعیتی که دقیقاً میباشد کانونی باشد، دور باشد و هنوز هم دارای

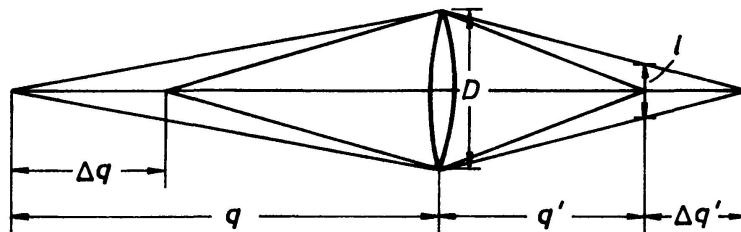
<sup>۵</sup>conjugate



شکل ۱۴.۱:

نوری از افتادن روی فیلم در درون "دایره اغتشاش"<sup>۶</sup> بقطر ، مثلاً  $\ell$  داشته باشد. برای یک عکس رابطه ای برای عمق میدان  $\Delta q$ ، بر حسب تابعی از فاصله جسم  $q$ ، طول کانونی عدسی  $f$  و  $\ell$  بدست آورید. (میتوانید فرض کنید که فاصله جسمی خیلی بیش از فاصله کانونی است).  
(دانشگاه ویسکانسین)

حل:



شکل ۱۵.۱:

فرمول عدسی گوسی

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f}$$

میدهد  $\frac{dq'}{dq} = -\left(\frac{q'}{q}\right)^2$ . بنابراین تغییر جزئی فاصله جسم ( عمق میدان)،  $\Delta q$ ، انحراف فاصله تصویری، برابر است با

$$|\Delta q'| \approx |\Delta q| \left(\frac{q'}{q}\right)^2$$

<sup>۶</sup> circle of confusion

از نمودار هندسی شکل (۱۵.۱) داریم

$$\frac{\Delta q'}{\ell} = \frac{(q' + \Delta q')}{D} \approx \frac{q'}{D}$$

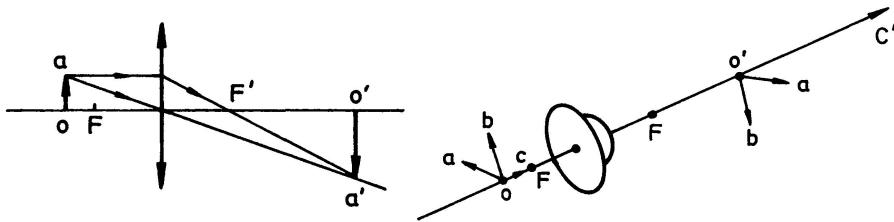
که در آن  $D$  قطر عدسی است. چون  $f \gg q'$  است،  $\frac{\Delta q'}{\ell} \approx \frac{q'}{f}$  خواهیم داشت

$$\Delta q \approx \frac{\ell q'}{D} \left( \frac{q'}{q'} \right)^2 \approx \frac{\ell f}{D} \left( \frac{q}{f} \right)^2 = \frac{\ell}{F} \left( \frac{q}{f} \right)^2$$

که در آن  $F = \frac{D}{f}$  و  $f$  .... عدسی است.

### ۱۰۱۳

از طریق ترسیم موقعیت و جهت تصویر سه جسم برداری شکل (۱۶.۱) را نمایش دهید. طول هر بردار  $1/2$  واحد و نقطه  $O$  بفاصله  $F = 3/2$  از مرکز عدسی محاسبه واحد) قرار دارد. طول بردارهای تصاویر را نیز محاسبه کنید.  
(دانشگاه ویسکانسین)



شکل ۱۷.۱ :

شکل ۱۶.۱ :

### حل:

تصویر بردار  $a$  در شکل (۱۷.۱) نشان داده شده است. از هندسه طول تصویر را بدست می‌آوریم، آن برابر یک واحد است. بعلت تقارن، طول بردار تصویر  $b$  نیز برابر خودش است. نوک پیکان بردار  $c$  درست در نقطه کانون  $F$  است؛ بنابراین، تصویرش از  $O'$  تا بینهایت است. شکل (۱۶.۱) موقعیت و جهت بردارهای تصاویر را نشان میدهد.

### ۱۰۱۴

یک مرد ۵۵ ساله میتواند اجسام از  $100\text{ cm}$  تا  $300\text{ cm}$  را بوضوح مشاهده نماید. اگر چشم را بصورت ساده یک عدسی بفاصله  $2\text{ cm}$  از شبکیه فرض نمائیم،

- الف - فاصله کانونی عدسی در نقطه دور چقدر است؟ (در  $300\text{ cm}$  کانونی می‌شود)

- ب - فاصله کانونی در نقطه نزدیک چقدر است؟ (در  $100\text{ cm}$  کانونی می‌شود)

- ج- چه عدسی تقویتی (فاصله کانونی) باید برای قسمت پائین عینک دو کانونی خود بچشم بگذارد تا  $25\text{ cm}$  را مشاهده نماید.

(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

الف-

$$\frac{1}{f_{far}} = \frac{1}{u_{far}} + \frac{1}{v} \quad far =$$

$$. v = 2\text{ cm}, u_{far} = 300\text{ cm}$$

ب-

$$\frac{1}{f_{near}} = \frac{1}{u_{near}} + \frac{1}{v} \quad near =$$

$f_{near} =$  از حل معادله خواهیم داشت  $v = 2\text{ cm}, u_{near} = 100\text{ cm}$   
 $.1.961\text{ cm}$

- ج- برای اینکه اشیاء در  $25\text{ cm}$  بوضوح مشاهده نماید، توان بینائی <sup>۵</sup> باید

$$\Phi = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{0.25} + \frac{1}{0.02} = 54 \quad diopters$$

و ترکیب توان برابر جمع توانهای چشم و عینک است  
 $\Phi = \Phi_{\text{چشم}} + \Phi_{\text{عینک}} =$

بنابراین

$$\Phi_{\text{عینک}} = \Phi - \Phi_{\text{چشم}} = 54 - \frac{1}{0.01961} = 3 \quad diopters$$

(برای  $\Phi_{\text{چشم}} = \frac{1}{f_{near}}$ ). او باید عینک دور بینی  $300^\circ$  استفاده کند. فاصله کانونی مربوطه خواهد بود

$$f_{\text{عینک}} = \frac{1}{\Phi_{\text{عینک}}} = \frac{1}{3} \text{ m} = 33.3\text{ cm}$$

## ۱۰۱۵

دستگاه بازگردن <sup>۶</sup> دستگاه نوری است که نور را بسوی جائی که فرستاده می‌شود برمیگرداند. مشهور ترین بازگردن کنج مکعب بازتابگر است، اما جدیداً شرگت ۳M کرهای "Scotchlite" را اختراع کرده است.

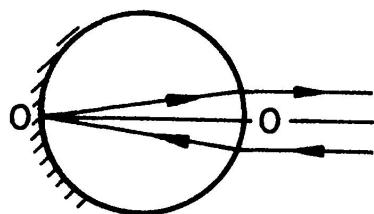
---

<sup>۶</sup> dioptric power  
<sup>۷</sup> retroreflector

- الف- ضریب شکست  $n$  و پارامتر دیگری که کره را به یک بازگران نور تبدیل میکند محاسبه نماید.

- ب- نحوه کار این دستگاه *Scotchlite* را رسم کنید و در باره پارامترهایی که در بازگردانی دخیل هستند بحث نمایید.

(دانشگاه کالیفرنیا، برکلی)



شکل ۱۸.۱ :

حل:

- الف- کره "Scotchlite" یک توب با ضریب شکست  $n$  است که نصف پشت کره یک سطح بازتابگر است. فاصله کانونی در فضای تصویر،  $f$ ، برای یک شکست چنین است

$$f = \frac{nr}{n-1}$$

که در اینجا  $r$  شعاع کره میباشد. ضریب شکست هوا واحد است. ضریب شکست شیشه طوری انتخاب میشود که نقطه کانونی عقبی برای نیم کره جلوئی روی راس مرز نیم کره عقبی واقع شود (به شکل ۱۸.۱ مراجعه کنید)، یعنی

$$f = 2r$$

از اینرو  $2 = n$  بدست میآید.

- ب- مرز نیم کره عقبی کره "Scotchlite" بخشی از نور وارد را با راندمان  $\eta$  بطرف فرستنده منعکس میکند

$$\eta = T^2 R$$

که در آن  $T$  شفافیت<sup>۹</sup> مرزنم کره جلوئی است بطوریکه نور نور دوبار منعکس میشود

$$T = \frac{4n}{(n+1)^2} = 0.89$$

---

<sup>۹</sup>transparency

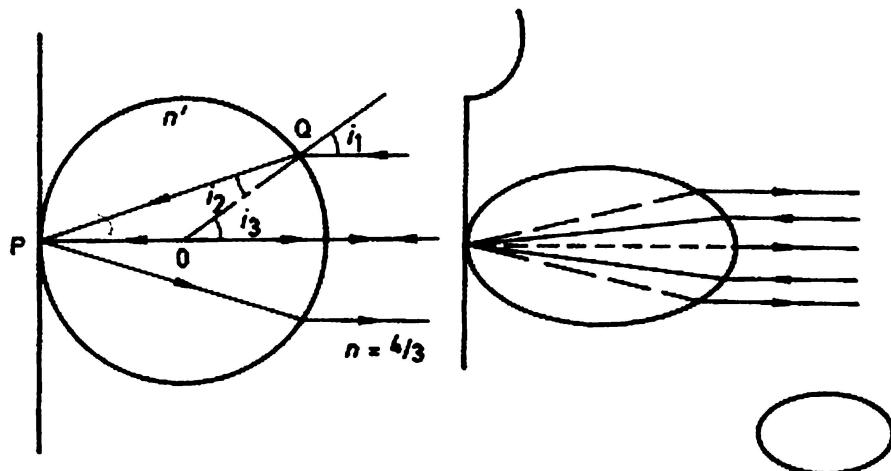
و  $R$  بازتابش<sup>۱۰</sup> مرنیم کرده عقبی است. در اینجا فرض کردیم که هیچگونه جذبی رخ نمیدهد. برای پوشش نقره،  $R = 0.95$ ، خواهیم داشت

$$\eta = 0.89^2 \times 0.95 = 75\%$$

### ۱۰۱۶

یک پرده مهره دار (شکل ۱۹.۱)، اگر نور به سطح عقبی متمرکز و کانونی شود، نور را بطرف منع بر میگرداند. برای استفاده غواصها در آب ( $n = \frac{4}{3}$ )، برای ساختن مهره ایده آل ضریب شکست ماده آن چقدر باید باشد؟  
(دانشگاه ویسکانسین)

حل:



شکل ۲۰.۱:

شکل ۱۹.۱:

فرض کنید ضریب شکست لازم  $n'$  باشد (به شکل ۲۰.۱ مراجعه کنید). اگر یک اشعه موازی محور مدادی که موازی محور،  $OP$ ، در نقطه  $P$  برخورد کند، پرتوهای موازی  $OP$  بازتاب میشوند. قانون شکست این‌لی  $n' \sin i_2 = n \sin i_1$  و برای زوایای کوچک  $i_1$  و  $i_2$  برابر  $n'i_2 = ni_1$  خواهد بود. چون  $i_1 = i_3 = 2i_2$ ،  $i_3 = 2i_2$  خواهیم داشت  
 $n' = 2n = \frac{8}{3}$  لذا  $i_1 = 2i_2$

### ۱۰۱۷

پرتوی از نور وارد یک قطره آب کروی به ضریب شکست  $n$  مطابق شکل (۲۱.۱) می‌شود.

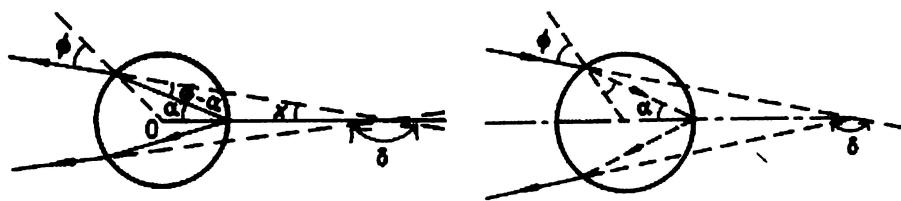
---

<sup>۱۰</sup> reflectance

## فصل ۱. نورشناخت هندسی

- الف- زاویه تابش  $\alpha$  روی سطح عقبی چقدر است؟ آیا این اشعه تماماً یا بخشی از آن بازتاب می‌شود؟
- ب- رابطه ای برای زاویه انحراف  $\delta$  بدست آورید.
- ج- زاویه  $\phi$  در آن زاویه انحراف کمینه است را پیدا نمائید.

$$\left( \frac{d\sin^{-1}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \text{ راهنمائی : } (CUSPEA)$$



شکل ۲۲.۱:

شکل ۲۱.۱:

**حل:**

- الف- شکل (۲۲.۱) زاویه‌های  $\phi$ ،  $\alpha$ ،  $\phi - \alpha$ ،  $x$ ،  $\delta$  را نشان میدهد. زاویه  $\alpha$  از قانون اسنل  $n \sin \alpha = \sin \phi$  بدست می‌آید. چون  $\sin \alpha = \frac{1}{n} \sin \phi < \frac{1}{n}$ ، یعنی، زاویه تابشی  $\alpha$  کوچکتر از زاویه بحرانی  $\sin^{-1} \frac{1}{n}$  است، نور تابشی از سطح عقبی کره قسمتی بازتاب می‌شود.

- ب- چون  $\delta = \pi - 2x = \pi - 4\alpha + 2\phi$  داریم  $x = 2\alpha - \phi$  یا  $\alpha = (\phi - \alpha) + x$ .

- ج- برای انحراف کمینه، لازم است که  $\frac{d\delta}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\delta}{d\phi} + 2 = 0$  باشد، لذا  $\frac{d\delta}{d\phi} = -4 \frac{d\alpha}{d\phi} + 2 = 0$  باشد. چون

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{1}{n} \sin \phi \right)$$

$$\text{خواهیم داشت } \frac{d\alpha}{d\phi} \frac{1}{n} \frac{\cos \phi}{\cos \alpha} \text{ و از آن بدست می‌آید}$$

$$1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \phi = \frac{4}{n^2} \cos^2 \phi$$

یا

$$1 = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} \cos^2 \phi$$

که میدهد

$$\cos^2 \phi = \frac{n^2 - 1}{3}$$

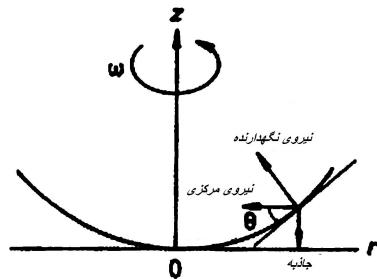
## ۱۰۱۸

یکبار پیشنهاد شد که یک آئینه تلسکوپ اخترشناسی را میتوان با چرخانیدن یک دیسک جیوه حول محور عمودی با سرعت زاویه ای مفروض  $\omega$  تولید کرد.

- الف- معادله سطح (آزاد) بازتاب چگونه بدست میآید؟
- ب- سرعت چرخش دیسک چقدر باشد تا آئینه ای با فاصله کانونی  $10\text{ cm}$  تولید شود؟

(دانشگاه ویسکانسین)

حل:



شکل ۲۳.۱:

- الف- بعلت تقارن سطح بازتابگر، لازم است که فقط آنرا در صفحه نصف النهار در نظر گیریم. فرض کنید معادله سطح بازتابگر طبق شکل (۲۳.۱) بصورت نمایش داده شود

$$x = f(r)$$

از ملاحظات دینامیکی برای المان حجم  $dV$  داریم

$$S \cos \theta = \rho g dV$$

$$S \sin \theta = \rho \omega^2 r dV$$

که در آن  $m$  و  $S$  بترتیب نمایشگر چگالی جیوه و نیروی نگهدارنده روی  $dV$  هستند. لذا

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 r}{g}$$

بطوریکه

$$\tan \theta = \frac{dz}{dr}$$

$$dz = \frac{\omega^2 r dr}{g}$$

با انتگرال گیری و قرار دادن  $z = 0$  برای  $r = 0$ ، خواهیم داشت

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

برای سطح کره ای بشعاع  $R$ ،

$$z = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R}$$

اگر  $R \ll r$  باشد. فاصله کانونی برای سطخ جیوه چرخان برابر است با

$$f = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}$$

- ب- برای  $f = 10 \text{ cm}$ ، لازم است که  $\omega = 7 \text{ rad/s}$  باشد.

### ۱۰۱۹

یک آئینه سلمانی کروی مقعر دارای شعاع انحنای دوازده اینچ است. وقتی صورت انسان بفاصله چهار اینچ از راس آئینه قرار دارد، بزرگنمائی آن چقدر است؟ نمودار پرتو تشکیل تصویر رارسم کنید.  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

فاصله کانونی آئینه مقعر کروی برابر  $f = \frac{r}{2} = \frac{1}{2}$  اینچ، فاصله جسم برابر  $u = 4$  اینچ است.

با استفاده از رابطه  $\frac{1}{f} + \frac{1}{v} = \frac{1}{u}$ ، فاصله تصویر برابر  $v = -12$  بدست می‌آید.  
علامت منفی مشخص کننده این است که تصویر مجازی است. بزرگنمائی برابر است با

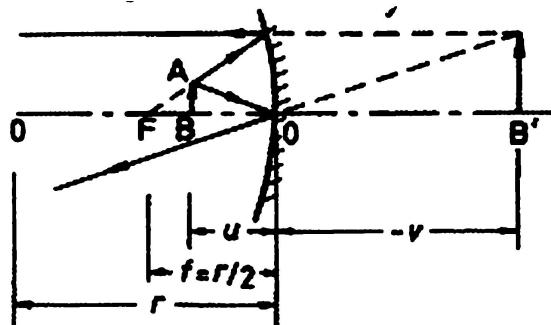
$$m = \left| \frac{v}{u} \right| = 3$$

نمودار پرتو تشکیل تصویر در شکل (۲۴.۱) نشان داده شده است.

### ۱۰۲۰

• الف- یک آئینه خمیده باریکه نور را در  $x = 20 \text{ cm}$  متمرکز و کانونی می‌کند

• ب- سپس آن با آبی به ضریب شکست  $n = \frac{4}{3}$  پر می‌شود و با نوری که از درون سوراخ کوچکی داخل یک کارت سفید میگذرد روشن می‌شود (شکل ۲۵.۱).

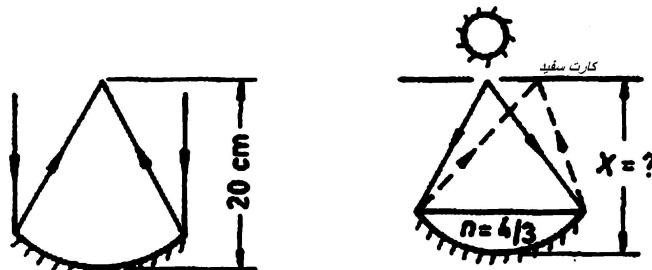


شکل ۲۴.۱:

در چه فاصله‌ای،  $X$ ، از صفحه کارت تصویر تشکیل می‌شود؟

(دانشگاه ویسکانسین)

حل:



(1)

(2)

شکل ۲۵.۱:

از بخش (الف) در میابیم که فاصله کانونی آئینه در هوا  $f_a = 20 \text{ cm}$  است. فرض کنید که فاصله کانونی وقتی آئینه پر از آب شود  $f_b$  می‌شود. هنگامی که یک پرتو موازی محور در سطح مسطح منکسر می‌شود، فاصله جسمی  $u$  و فاصله تصویری  $u'$  طبق رابطه زیر بهم مربوط هستند

$$u' = \frac{n'y}{n}$$

که در آن  $n$  و  $n'$  ضرایب شکست دو محیط است (به مسئله ۱۰۰۶ مراجعه کنید).

## فصل ۱. نورشناخت هندسی

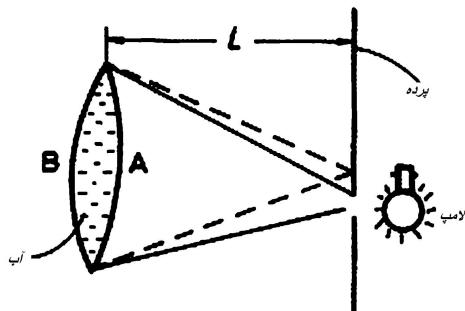
در این حال  $f_b = y' = \frac{f_a}{n} = \frac{20}{\frac{4}{3}} = 15 \text{ cm}$ ،  $n = 1.33$ ،  $n' = 1$ ،  $y = f_a$ . خواهیم داشت برای آئینه مقعر، اگر فاصله جسمی برابر فاصله تصویری باشد، در آن صورت آن دو برابر فاصله کانونی است، یعنی؛

$$X = 2f_b = 30 \text{ cm}$$

### ۱۰۲۱

دو شیشه ساعت را بهم می‌چسبانیم و سپس پشت یکی از آنها را نقره انود می‌کنیم. با استفاده از نمودار شکل (۲۶.۱)، کانون در  $L = 20 \text{ cm}$  بدست می‌آید. اگر فضای بین دو شیشه با آب پر شود،  $n = \frac{4}{3}$ ، در آن صورت فاصله  $L$  را پیدا کنید.  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**



شکل ۱: ۲۶.۱

وقتی بین دو شیشه هوا است، فقط شیشه نقره انود نور را منعکس و تصویر را تشکیل میدهد، یعنی؛ سیستم بعنوان یک آئینه مقعر عمل می‌کند. فرمول آئینه مقعر چنین است

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{r}$$

با زاء  $u = v = 20 \text{ cm}$  بدست می‌آید  $r = 20 \text{ cm}$ .

وقتی فاصله دو شیشه با آب پر می‌شود، قبل از آنکه تصویر نهائی تشکیل شود، نورتابشی دوبار؛ یکی در  $A$  و یکبار دیگر هم در  $B$ ، بازتاب می‌شود. توجه کنید که اولین تصویر توسط  $A$  پشت آئینه  $B$  تشکیل شده و آن برای آئینه  $B$  جسم مجازی محاسبه می‌شود. بهمین نحو، تصویر توسط  $B$  شده توسط  $A$  جسم مجازی برای  $A$  می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{1}{L} + \frac{n}{x} = \frac{n-1}{20}$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

$$-\frac{n}{y} + \frac{1}{L} = \frac{n-1}{20}$$

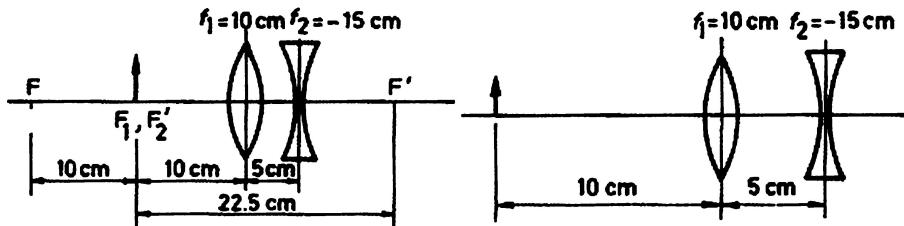
که از اینجا  $L = 12 \text{ cm}$  بدست می‌آید  
بنابراین، تصویر دقیق در  $L = 12 \text{ cm}$  تشکیل می‌شود.

## ۱۰۲۲

یک جسم بفاصله  $10 \text{ cm}$  در جلو یک عدسی همگرا بفاصله کانونی  $10 \text{ cm}$  قرار دارد. یک عدسی واگرا بفاصله کانونی  $15 \text{ cm}$  – پشت عدسی همگرا بفاصله  $5 \text{ cm}$  گذاشته می‌شود، شکل ۲۷.۱. موقعیت، اندازه و مشخصه تصویر نهائی را پیدا کنید.

(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**



شکل ۲۸.۱: شکل ۲۷.۱:

برای عدسی اول، جسم بفاصله  $u_1 = 10 \text{ cm}$  است. چون، همچنین  $v_1 = \infty$  است، فاصله تصویری  $v_1 = \infty$  می‌شود. سپس برای عدسی دوم، فاصله جسمی  $u_2 = \infty$  است. چون  $v_2 = -15 \text{ cm}$  است، لذا  $v_2 = -15 \text{ cm}$  بدست می‌آید. بنابراین، تصویر روی جسم منطبق است.

اکنون اندازه و مشخصه تصویر نهائی را در نظر گیرید. فاصله کانونی سیستم عدسی ترکیبی برابر است با  $f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = d - f_1 - f_2$  که در آن  $\Delta = d - f_1 - f_2 = 5 \text{ cm}$  می‌باشد. چون  $f_1 = 10 \text{ cm}$ ،  $f_2 = -15 \text{ cm}$ ،  $d = 5 \text{ cm}$ ؛ و طبق

شکل (۲۸.۱) بدست می‌آید

$$\overline{F_1 F_2} = \frac{f_1^2}{\Delta} = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{F_2 F'} = \frac{-f_2^2}{\Delta} = -22.5 \text{ cm}$$

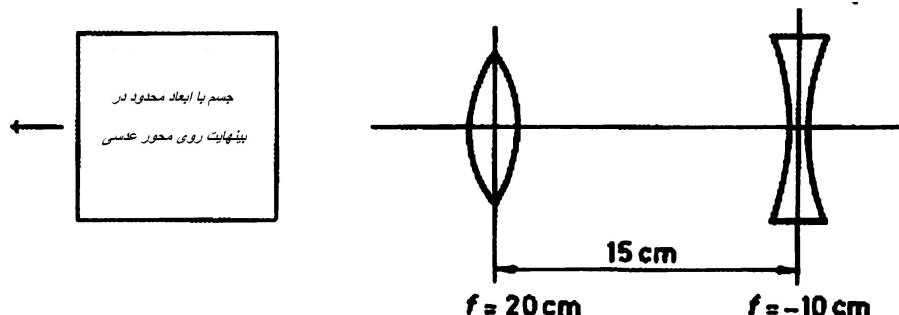
با استفاده از فرمول نیوتن،  $xx' = f^2$ ، بازاء  $x = -10 \text{ cm}$ ،  $xx' = -22.5 \text{ cm}$  خواهیم داشت

علامت منفی نشانده این است که تصویر سمت چپ  $F'$  است. بزرگنمایی برابر است با  $m = \frac{-f}{x} = \frac{-f}{-10} = 1.5$ . تصویر رو به بالا، عمودی و دارای بزرگنمایی ۱.۵ است.

### ۱۰۲۳

بطوریکه در شکل (۲۹.۱) نشان داده شده است، تصویر میباشد فقط بوسیله عدسی همگرا در فاصله ۰.۵ cm بین بالا و پائین بوجود آید. موقعیت و اندازه تصویر نهائی را محاسبه کنید. نمودار پرتوها را رسم کرده و تشکیل تصویر یک نقطه روی تصویر که روی محور عدسی نیست را نشان دهید. حداقل دو پرتو استفاده کنید. (پرتوها لازم نیست برای دو عدسی یکسان باشند). در باره نمودار خود توضیح دهید.

(دانشگاه ویسکانسین)



شکل ۱:

**حل:**

یک جسم در فاصله بینهایت دور تصویرش در پشت صفحه کانونی عدسی همگرا است، یعنی، در  $20 - 15 = 5 \text{ cm}$  پشت عدسی واگرا است. فرمول عدسی گوسی

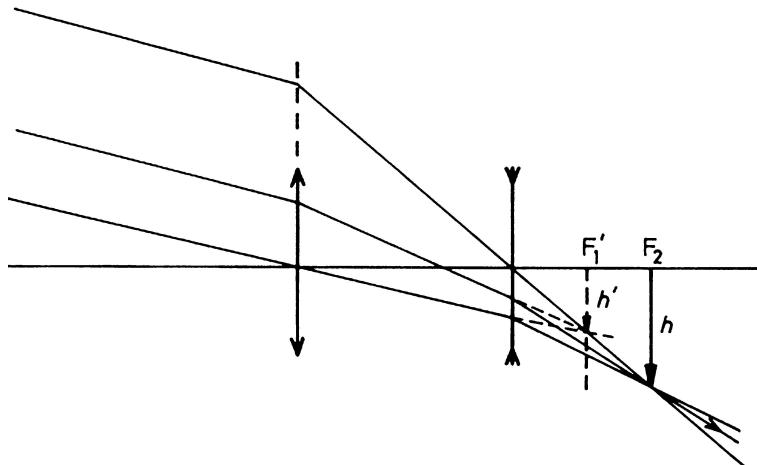
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

را برای عدسی واگرا بکار برد و سپس بازاء  $-5 \text{ cm}$  و  $u = -10 \text{ cm}$  داشت  $v = 10 \text{ cm}$ . بزرگنمایی اخیر برابر است با

$$m = \frac{h}{h'} = \frac{10}{5} = 2.$$

از اینرو اندازه تصویر نهائی برابر است با  $0.5 \times 2 = 1 \text{ cm}$ .

شکل (۳۰.۱) نمودار پرتو را نشان میدهد.



شکل ۳۰.۱:

## ۱۰۲۴

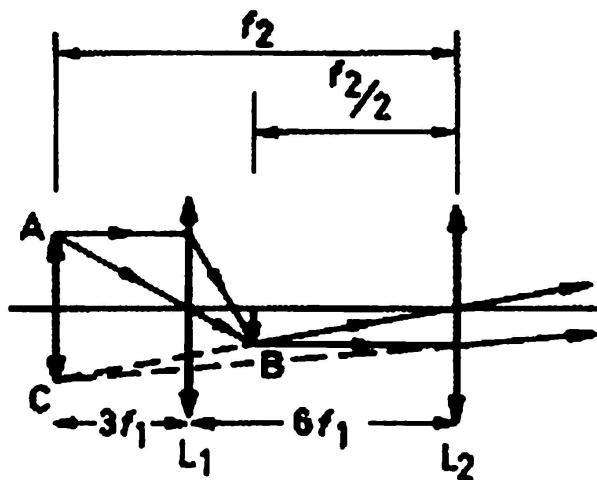
ترکیب دو عدسی همگرا که تصویری معکوس و مجازی در موقعیت جسم تولید کرده و همان اندازه است را تشریح و بدست آورید. با رسم نمودار تصویر نشان دهید که دستگاه بخوبی کار میکند.  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

دو عدسی همگرا  $L_1$  و  $L_2$  دارای مشخصات  $f_1$ ،  $f_2$ ،  $v_1$ ،  $u_1$ ،  $v_2$ ،  $u_2$ ، فاصله کانونی، فاصله جسمی و فاصله تصویری، مطابق شکل (۳۱.۱) هستند.  
ابتدا  $L_2$  را در نظر گیرید. جسم  $L_2$  باید در بین فاصله کانونی قرار داشته باشد تا تصویری مجازی ایجاد کند. اگر  $B$ ، تصویر  $L_1$  یا جسم  $L_2$  بفاصله  $\frac{f_2}{2}$  در جلو  $L_2$  باشد، تصویر نهائی  $C$  میباشد که در فاصله  $u_2 = -f_2$  در جلو عدسی  $L_2$  جائی که جسم حقیقی  $A$  قرار دارد و دو برابر  $B$  باشد، واقع شود.  
اکنون عدسی  $L_1$  را بین  $A$  و  $B$  طوری قرار میدهیم که  $C$  دو برابر اندازه  $B$  و برابر  $A$  باشد. بنابراین،  $u_1 = 2v_1$  است. بعلاوه، چون  $f_2 = u_1 + v_1 + u_2$  خواهیم داشت

$$u_1 = \frac{f_2}{3}, \quad v_1 = \frac{f_2}{6}$$

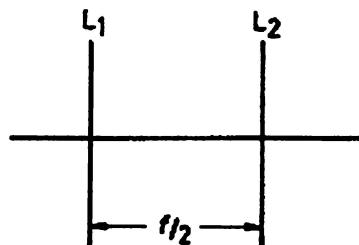
سپس رابطه عدسی های گوسی می دهد  $.9f_1 = f_2$   
عدسی های همگرا  $L_1$  و  $L_2$ ، که فاصله کانونی آنها  $f_2 = 9f_1$  باشد، جسم باید مطابق شکل (۳۱.۱) تنظیم و مرتب گردد.



شکل ۳۱.۱

## ۱۰۲۵

دو عدسی نازک مثبت  $L_1$  و  $L_2$  با فاصله کانونی‌های مساوی بفاصله نصف فاصله کانونی شان از هم قرار دارند (شکل ۳۲.۱):



شکل ۳۲.۱

- الف- موقعیت تصویر را برای جسمی که بفاصله  $4f$  در سمت چپ عدسی  $L_1$  قرار دارد تعیین نمایید.
- ب- موقعیت نقاط کانونی این عدسی‌های ترکیبی را وقتی بعنوان یک عدسی بررسی و نگاه میکنیم بدست آورید.
- ج- موقعیت صفحه‌های اصلی را برای این عدسی‌های ترکیبی، وقتی بعنوان یک عدسی در نظر می‌گیریم، تعیین نمایید.

(دانشگاه ویسکانسین)  
حل:

- الف- فرض کنید که  $u_1, v_1, u_2, v_2$  نمایشگر فواصل تصویری و جسمی بترتیب عدسی‌های  $L_1$  و  $L_2$  باشند.  $u_1 = 4f$ ,  $\frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{u_1} = \frac{3}{4f}$  لذا  $v_1 = \frac{4}{3}f$ . در این صورت چون  $u_2 = \frac{f}{2} - v_1 = -\frac{5}{6}f$  خواهیم داشت  $\frac{1}{v_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{u_2} = \frac{11}{5f}$  یا  $v_2 = \frac{5f}{11}$ . بنابراین، تصویر نهائی در  $\frac{5f}{11}$  سمت راست  $L_2$  است.

- ب- یک باریکه نور موازی که از سمت چپ روی  $L$  میافتد در نظر گیرید، در این صورت  $v_1 = f$  خواهد بود و  $u_2 = \frac{f}{2} - v_1 = -\frac{f}{2}$ .

بنابراین

$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{f} + \frac{2}{f} = \frac{3}{f}, \quad \text{یا} \quad v_2 = \frac{1}{3}f.$$

با توجه به تقارن، دو نقطه محلی ترکیب عدسی‌ها در  $f$  سمت چپ عدسی  $L_1$  و در  $\frac{1}{3}f$  سمت راست  $L_2$  قرار خواهد داشت.

- ج- در صفحات اصلی بزرگنمائی عرضی برابر واحد است. طبق تقارن، تصویر یک جسم در صفحه اصلی سمت چپ که بوسیله عدسی  $L_1$  تشکیل می‌شود، با تصویر همان جسم در صفحه اصلی سمت راستی که بوسیله  $L_2$  تشکیل می‌شود باید یکسان باشد و هر دو باید در وسط بین دو عدسی قرار گیرند.

فرض کنید که صفحه اصلی چپ بقدر  $x$  از  $L_1$  فاصله دارد. در این صورت  $x = -\frac{1}{3}f$ ,  $u_1 = x$ ,  $v_1 = \frac{1}{2}(\frac{f}{2}) = \frac{1}{4}f$  و از رابطه  $\frac{1}{f} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1}$  خواهیم داشت  $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{4}f}$ . بنابراین، دو صفحه اصلی در  $\frac{1}{3}f$  سمت راست  $L_1$  و  $\frac{1}{3}f$  سمت چپ  $L_2$  قرار دارند.

## ۱۰۲۶

یک جسم منور<sup>۱۱</sup> به بلندی  $h$  برابر  $cm$  ۴۰ در سمت چپ یک عدسی همگرا به فاصله کانونی  $cm$  ۱۰ قرار دارد. یک عدسی همگرا دیگر با فاصله کانونی  $cm$  ۲۰ و بفاصله  $cm$  ۳۰ در سمت راست عدسی اول میباشد.

- الف- محل تصویر نهائی را محاسبه کنید.
- ب- نسبت ارتفاع تصویر نهائی را به ارتفاع  $h$  جسم محاسبه نمائید.

<sup>۱۱</sup> self-luminous

## فصل ۱. نورشناسی هندسی

- ج- اشعه‌هایی که فقط برای نشان دادن تصویر نهائی از جسم منور لازم است را در نمودار پرتو رسم نمائید.

(دانشگاه ویسکانسین)  
حل:

الف- از رابطه  $u_1 = 40 \text{ cm}$  و  $f_1 = 10 \text{ cm}$  بازاء  $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1}$  بددست  
 $v_1 = 13\frac{1}{3} \text{ cm}$  می‌آید

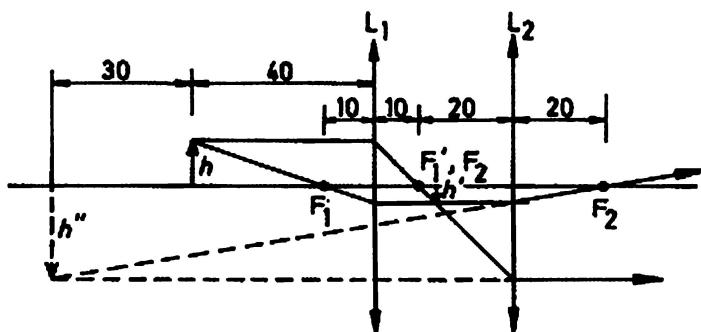
از رابطه  $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2}$  بازاء  $f_2 = 20 \text{ cm}$  و  $u_2 = (30 - \frac{40}{3}) \text{ cm}$  خواهیم داشت  
 $v_2 = -100 \text{ cm}$ . یعنی تصویر نهائی در  $100 \text{ cm}$  سمت چپ عدسی دوم قرار دارد.

- ب- نسبت ارتفاع تصویر نهائی به  $h$  را میتوان از فرمول زیر محاسبه کرد

$$m = m_2 \times m_1 = \left( \frac{v_2}{u_2} \right) \left( \frac{v_1}{u_1} \right) = -2$$

علامت منفی نشان دهنده معکوس بودن تصویر است.

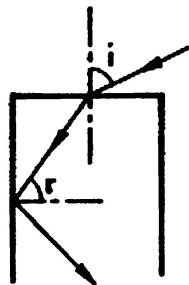
- ج- شکل (۳۳.۱) نمودار پرتو را نشان میدهد.



شکل ۱:

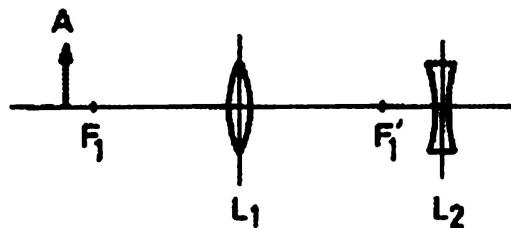
۱۰۲۷

- الف- ضریب شکست کمینه برای یک میله پلاستیکی (شکل ۳۴.۱) چقدر باشد تا مطمئن باشیم که هر نوری که در یک انتهای میله وارد می‌شود همواره در داخل میله انعکاس کلی می‌آید؟



شکل ۳۴.۱:

- ب- نمودار پرتوی رسم کنید که تشکیل تصویر در عدسی‌ها و جسم نشان داده شده در شکل (۳۵.۱) را نشان دهد. فاصله کانونی عدسی دوم را طوری انتخاب کنید که تصویر نهائی در بینهایت باشد. یک پیکان را بعنوان جسم استفاده کرده و حداقل دو پرتو برای تشکیل تصویر رسم نماید. نحو چگونگی رسیدن به جواب را مختصری توضیح دهید.



شکل ۳۵.۱:

تمام شکست‌ها را در صفحه‌های ۱ و ۲ انجام دهید.

- ج- چگونه می‌توان موقعیت عدسی (واگرا) دومی را تغییر داد تا ترکیب عدسی‌ها دوربین<sup>۱۲</sup> (تله فتو) شود؟

(دانشگاه ویسکانسین)  
حل:

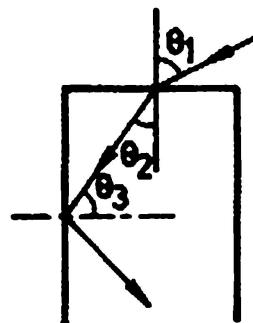
- الف- بطوریکه در شکل (۳۶.۱) نشان داده شده است، یک اشعه وقتی

<sup>۱۲</sup>telephoto

بازتاب کلی در میله میابد که

$$\theta_3 = \alpha = \sin^{-1} \left( \frac{1}{n} \right)$$

که در آن  $\alpha$  زاویه بحرانی،  $n$  ضریب شکست میله پلاستیکی و ضریب شکست



شکل ۱:

هوا را واحد فرض کنید. بنابراین لازم است که

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_3 < \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{n} \right)$$

یا

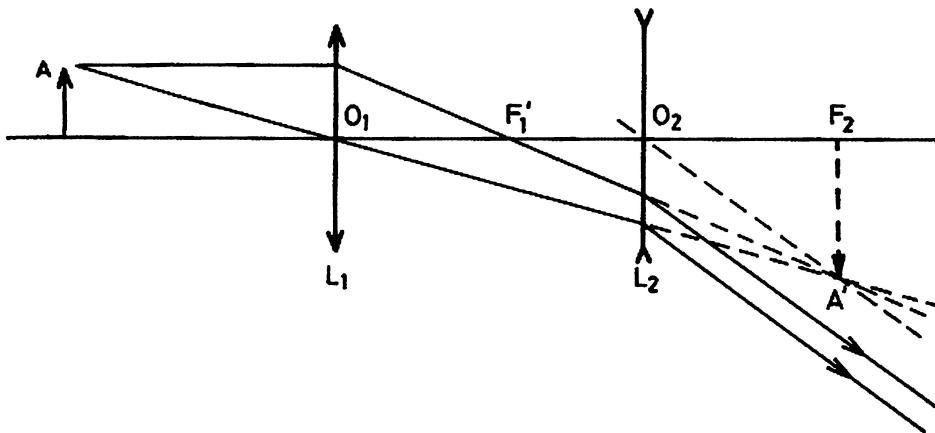
$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= n \sin \theta_2 < n \sin \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= n \cos \left( \sin^{-1} \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

چون  $\theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$  یا  $\sin \theta_1 \leq 1$  لازم است که  $n \cos \left( \sin^{-1} \frac{1}{n} \right) > 1$  برای تمام پرتوها در داخل میله انعکاس کلی انجام شود. بنابراین شرط اینکه بازتاب کلی خواهد بود

$$\sin^{-1} \left( \frac{1}{n} \right) < \cos^{-1} \left( \frac{1}{n} \right) \quad \text{یا} \quad n > \sqrt{2} = 1.414.$$

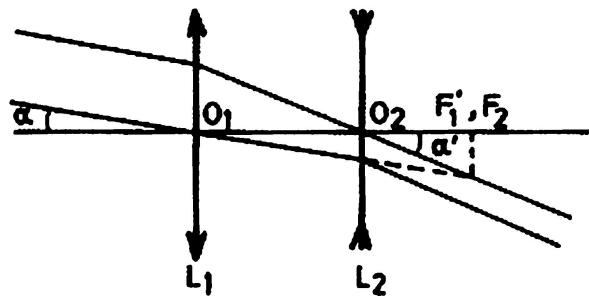
- ب- ابتدا بیائید فقط اثر اولین عدسی،  $L_1$ ، را در نظر گیریم ( به شکل ۳۷.۱ مراجعه کنید). از  $A$  یک پرتو موازی محور رسم کرده و سپس بواسیله  $L_1$  شکسته و از نقطه  $F'_1$  میگذرد. یک پرتو دیگر از  $A$  رسم کنید که از  $O_1$  مرکز عدسی  $L_1$ ، بگذرد. این پرتو با  $L_1$  شکسته نمیشود و خط قبلی را در  $A'$  قطع نموده و تصویر تشکیل میشود.  $A'F_2$  را عمود بر محور رسم کنید. اگر نقطه کانونی عدسی  $L_2$  باشد، پرتوهای  $AA'$  و  $F'_1A'$  در عدسی  $L_2$

شکست شده و موازی  $O_2A'$  می‌شوند، و آن بدین معنی است که تصویر نهائی در بینهایت خواهد بود.



شکل ۳۷.۱:

- ج- برای تولید عدسی‌های دوربین (تله فتو)، ما عدسی دوم را بین اولین عدسی و  $F'_1$  قرار میدهیم، بطوریکه  $F'_1$  بر  $F_2$  منطبق شود. توجه کنید که لازم است  $O_2F_2 < O_1F'_1$  باشد (به شکل ۳۸.۱ مراجعه کنید). پرتوهاییکه تحت زاویه  $\alpha$  وارد سیستم می‌شوند، با  $\alpha'$  بعداز گذر از درون سیستم نوری  $\alpha' > \alpha$  هستند. اینچنین سیستمی به تلسکوپ گالیله معروف است.



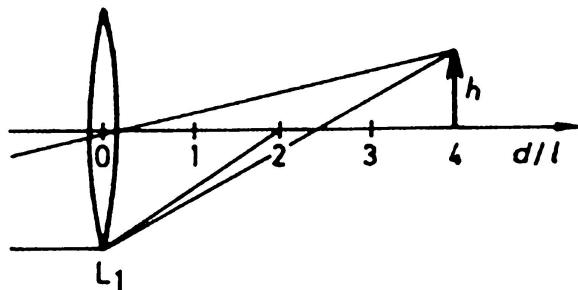
شکل ۳۸.۱:

## ۱۰۲۸

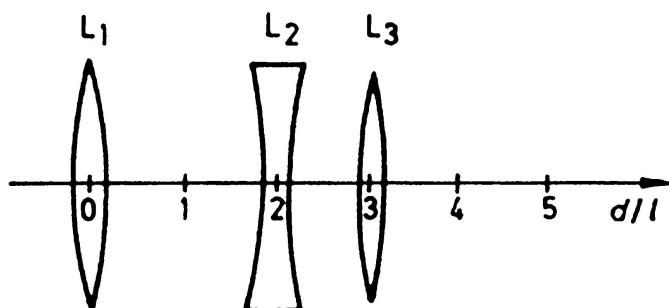
عدسی نازک مثبت  $L_1$  تصویری حقيقی از یک جسم که خيلي دور است، مطابق شکل (۳۹.۱)، درست می‌کند. تصویر بفاصله  $4l$  و به ارتفاع  $h$  قرار دارد. عدسی

## فصل ۱. نورشناسی هندسی

منفی  $L_2$ ، بفاصله کانونی  $l$  بفاصله  $2l$  از عدسی  $L_1$  است. یک عدسی مثبت دیگر بفاصله کانونی  $l$  و بفاصله  $3l$  از عدسی  $L_1$ ، مطابق شکل (۴۰.۱)، واقع است.



شکل ۳۹.۱



شکل ۴۰.۱

- الف- فاصله تصویر نهائی از عدسی  $L_1$  را پیدا کنید.

- ب- ارتفاع تصویر را بدست آورید.

(دانشگاه کلمبیا)

حل:

- الف- از فرمول عدسی گوسی  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$  استفاده میکنیم. با توجه به شکل (۴۱.۱) داریم

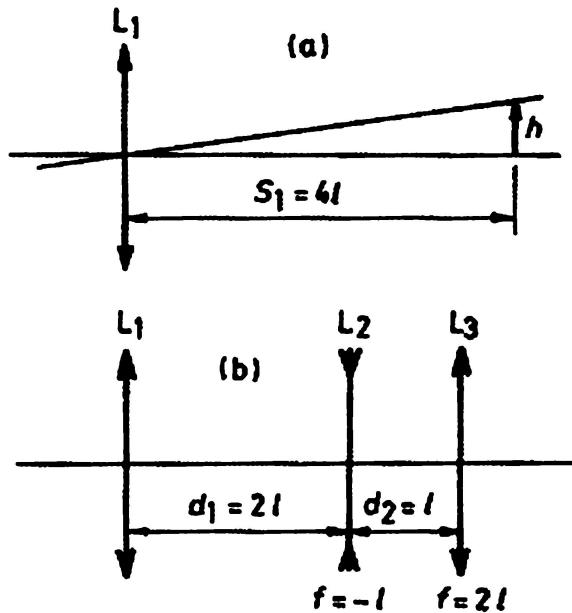
$$L_1 : \frac{v_1}{u} = \frac{4l}{l} \quad (41.1)$$

$$L_2 : f^2 = -l, u_2 = -(4-2)l = -2l, \rightarrow v_2 = -2l;$$

$$L_3 : f_3 = 2l, u_3 = 2l + l = 3l, \rightarrow v_3 = 6l$$

بنابراین، فاصله تصویر نهائی از  $L_1$  برابر است با  $3l + 6l = 9l$

- ب- بزرگنمایی عرضی برابر ۲ میباشد، یعنی ارتفاع تصویر  $h' = mh = 2h$ .



شکل ۴۱.۱:

### ۱۰۲۹

برای ترکیبی از یک منشور و دو عدسی مطابق شکل (۴۲.۱)، محل و اندازه تصویر نهائی را وقتی جسمی بطول  $1\text{ cm}$  مانند آنچه در شکل نشان داده شده است واقع میباشد، بدست آورید.  
(دانشگاه ویسکانسین)

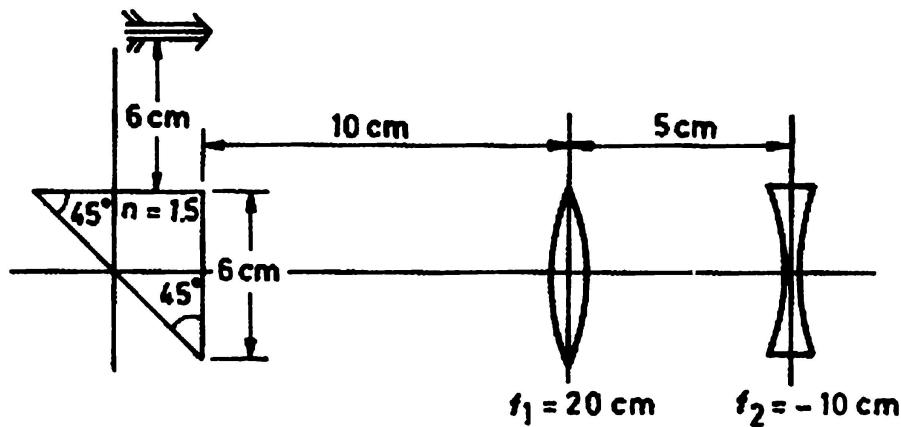
### حل:

برای منشور قائم الزاویه،  $n = 1.5$ ، زاویه بحرانی  $\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{n}) = 42^\circ$  است، که این از زاویه تابش  $45^\circ$  نسبت به وتر منشور کوچکتر است. بنابراین بازتاب کلی اتفاق میافتد، که تصویری مجازی تشکیل میدهد. منشور، معادل یک تیغه شیشه‌ای به ضخامت  $6\text{ cm}$  انتقال تصویر ایجاد میگند:

$$\Delta L = 6 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 2\text{ cm}.$$

لذا فاصله جسم موثر برای عدسی اول برابر است با  

$$u_1 = 10 + 6 + (6 - 2) = 20\text{ cm}$$



شکل ۱: ۴۲.۱

چون  $u_1 = f_1$  است، خواهیم داشت  $v_1 = \infty$ . در این صورت برای عدسی دوم  $u_2 = \infty$  است. با  $f_2 = -10 \text{ cm}$  بدست می‌آید:  
 $v_2 = f_2 = -10 \text{ cm}$

بنابراین تصویر نهائی معکوس و مجازی بفاصله  $10 \text{ cm}$  سمت چپ عدسی دوم قرار دارد.

اندازه تصویر برابر است با

$$l_2 = \left| \frac{f_2}{f_1} \right| \cdot 1 = 0.5 \text{ cm}$$

### ۱۰۳۰

یک عدسی دوربین عکاسی  $35 \text{ mm}$  با فاصله کانونی  $50 \text{ mm}$  با قرار دادن یک عدسی منفی بین فیلم و آن به عدسی دوربین تله فتو تبدیل می‌شود. (شکل ۴۲.۱). عدسی دوربین عکاسی  $L_1$ ،  $f_1 = 50 \text{ mm}$ ،  $L_2$ ؛ عدسی منفی  $f_2 = -100 \text{ mm}$  می‌باشد.

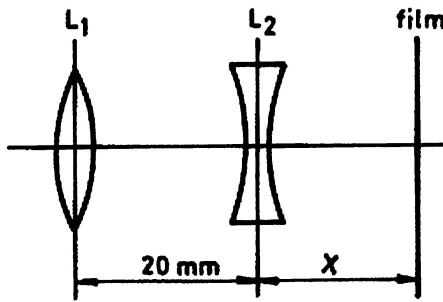
- الف- اگر سیستم برای یک جسم در فاصله  $50 \text{ cm}$  در جلو عدسی  $L_1$  کانونی و تنظیم شده باشد، فاصله  $x$  چقدر است؟

- ب- بزرگنمایی حاصل از ترکیب عدسی‌ها چقدر است؟

(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

فرض کنید که  $u_1, v_1, f_1, u_2, v_2, f_2$  نمایشگر، بترتیب فواصل جسمی، فواصل تصویری و فاصله‌های کانونی عدسی‌های  $L_1$  و  $L_2$  باشند.



شکل ۴۳.۱:

- الف- بازاء خواهیم  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$  با استفاده از رابطه  $u_1 = 50 \text{ cm} = 500 \text{ mm}$  داشت  $-v_1 = -\frac{320}{9} \text{ mm}$  و بازاء  $v_1 = \frac{500}{9} \text{ mm}$  می‌دهد  

$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{u_2} = \frac{29}{1600}, \quad \text{یا} \quad x = v_2 = 55.2 \text{ mm.}$$

- ب- بزرگنمائی ترکیب عدسی‌ها برابر حاصل ضرب بزرگنمائی هر یک است:

$$M = \left| \frac{v_1}{u_1} \right| \times \left| \frac{v_2}{u_2} \right| = \frac{\left[ \frac{(500 \times 1600)}{(9 \times 29)} \right]}{\left[ \frac{(500 \times 320)}{9} \right]} = \frac{5}{29} = 0.17$$

### ۱۰۳۱

در یک میکروسکوپ ترکیبی فاصله کانونی عدسی شیئی  $0.5 \text{ cm}$  و عدسی چشمی آن  $2 \text{ cm}$  است. اگر فاصله بین عدسی‌ها  $22 \text{ cm}$  باشد، فاصله جسم از عدسی شیئی چقدر باشد تا ناظر تصویر را در  $\infty$  مترکز و کانونی نماید؟ توان بزرگنمائی چقدر است؟ جواب در حدود ۱۰% باشد. تمام رابطه‌های لازم را از رابطه  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$  استخراج کنید. دید نزدیک عادی چشم را  $15 \text{ cm}$  در نظر گیرید.

(دانشگاه ویسکانسین)

### حل:

از معادله عدسی  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$  استفاده می‌کنیم. برای عدسی چشمی (با اندیس ۲) بازاء  $\infty$  داریم  $p_2 = f_2 = 2 \text{ cm}$ . برای عدسی شیئی (با اندیس ۱) داریم  $q_1 = d - p_2 = 20 \text{ cm}$

که در آن  $d$  فاصله بین عدسی‌ها است. بازاء  $f_1 = 0.5 \text{ cm}$  خواهیم داشت  $p_1 = 0.51 \text{ cm}$ . بنابراین، جسم بفاصله  $0.51 \text{ cm}$  در جلو عدسی شیئی است.

برای پیدا کردن توان بزرگنمائی، فرض کنید که طول جسم  $y$  باشد. طول تصویر تشکیل شده توسط عدسی شیئی برابر است با

$$y' = \frac{q_1}{p_1} y$$

زاویه ایکه تصویر نهائی با چشم دیده می‌شود برابر است با

$$\alpha' = \frac{y'}{f_2} = \frac{q_1}{p_1} \frac{y}{f_2}$$

چشم بدون استفاده از میکروسکوپ جسم را مشاهده میکند برابر است با

$$\alpha = \frac{y}{15}$$

بنابراین توان بزرگنمائی میکروسکوپ برابر است با

$$m = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{15q_1}{p_1 f_2} = 2.9 \times 10^2$$

## ۱۰۳۲

نموداری مانند شکل (۴۴.۱) در نظر گیرید. یک منبع شیاری را میاید در روی پرده مصور و نمایش دهیم. نور باید بین عدسی‌ها موازی باشد. ضریب شکست منشور برابر  $\lambda_0/\lambda$  است. در اینجا  $n(\lambda) = 1.5 + 0.02(\lambda - \lambda_0)$  است. در اینجا  $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$  است. سیستم در نور  $5000 \text{ \AA}$  تنظیم و مرتب شده است.

- الف- فاصله‌های کانونی عدسی‌ها چقدر است؟

- ب- بزرگنمائی خطی وزاویه ای شیار در روی پرده چقدر است؟ آیا تصویر معکوس است؟ نمودار پرتو را رسم نمائید

- ج- جابجائی خارج از محور نور از منبع  $\lambda = 5050 \text{ \AA}$  چقدر است؟ تا آنجا که ممکن است تقریب بکار برید.

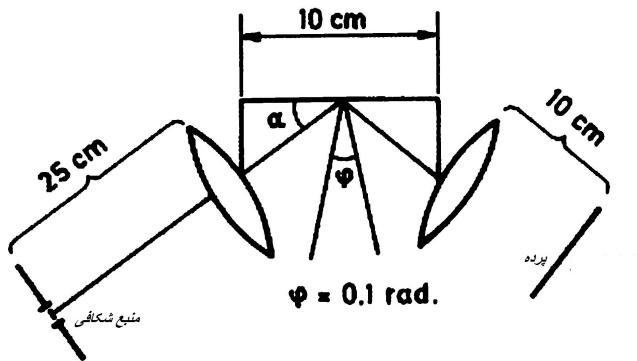
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

- الف- چون نور خارج شونده از عدسی اول  $L_1$  موازی است، شیار باید در صفحه کانونی عدسی  $L_1$  باشد، یعنی  $f_1 = 25 \text{ cm.}$

چون نور موازی خارج شده توسط عدسی دوم  $L_2$  روی پرده است، خواهیم داشت

$$f_2 = 10 \text{ cm.}$$



شکل ۴۴.۱:

- ب- نمودار شکل (۴۵.۱) را که نمایشگر سیستم نوری هم محوری معادل با اصلی است، در نظر گیرید. برای منشور با زاویه راس کوچک ( $\varphi = 0.1 \text{ rad}$ ) انحراف زاویه بسیار کوچک،  $\delta = \varphi(n - 1) = 0.05 \text{ rad}$  است، و میتوان فاصله بین دو عدسی  $L_1$  و  $L_2$  را  $\approx 10 \text{ cm}$  در نظر گرفت. موقعیت نقاط اصلی این ترکیب را بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta = d - f_1 - f_2 = -25 \text{ cm},$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = 10 \text{ cm},$$

$$\overline{A_1 H} = \frac{f d}{f^2} = 10 \text{ cm},$$

$$\overline{A_1 H'} = -\frac{f d}{f_1} = -4 \text{ cm},$$

$$\overline{F_1 F} = \frac{f_1^2}{\Delta} = -25 \text{ cm},$$

$$\overline{F_2 F'} = -\frac{f_2^2}{\Delta} = 4 \text{ cm}.$$

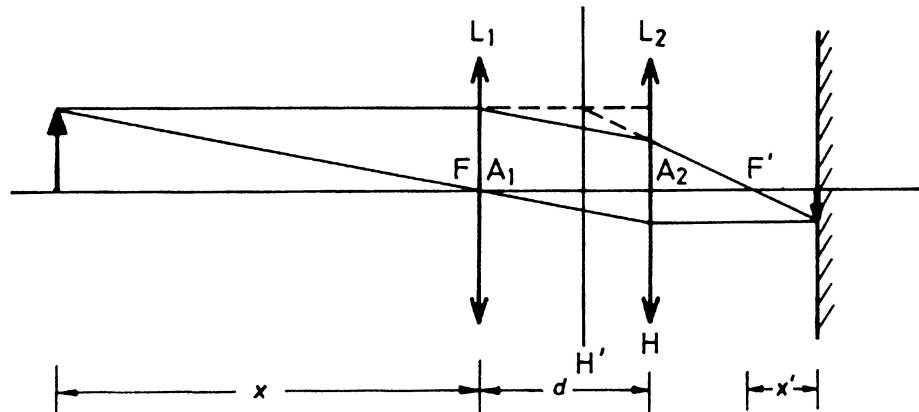
بنابراین  $F'$  برابر چهار سانتی متر در جلو پرده؛ یعنی،  $x' = 4 \text{ cm}$  است. لذا بزرگنمائی خطی برابر است با

$$m = -\frac{x'}{f} = -0.4.$$

علامت منفی نشان میدهد که تصویر معکوس است. نمودار پرتو در شکل (۴۵.۱) نشان داده شده است.

بزرگنمائی زاویه ای، که نسبت تانژانت شیب پرتوهای نسبت به محور است، چنین بدست می‌آید

$$M = \frac{-1}{f + x'} \left( \frac{1}{f + x} \right)^{-1} = -2.5.$$



شکل ۱: ۴۵.۱

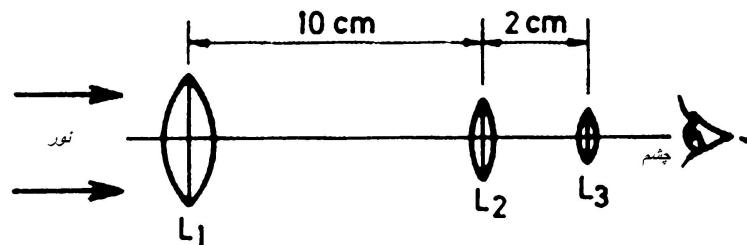
- ج- انحراف زاویه ای  $\delta$  تابع طول موج  $\lambda$  است  

$$\delta = [n(\lambda) - 1]\varphi$$
.

لذا

$$\Delta\delta = \varphi \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda = 0.1 \times \frac{0.02}{5000} \times (5050 - 5000) = 2 \times 10^{-5}.$$

۱۰۳۲



شکل ۱: ۴۶.۱

تلسکوپ ساده ای که از عدسی های زیر ساخته شده است در نظر گیرید:

$$L_1 : f_1 = 10 \text{ cm}, \text{Diameter} = 4 \text{ cm}$$

$$L_2 : f_2 = 2 \text{ cm}, D = 1.2 \text{ cm}$$

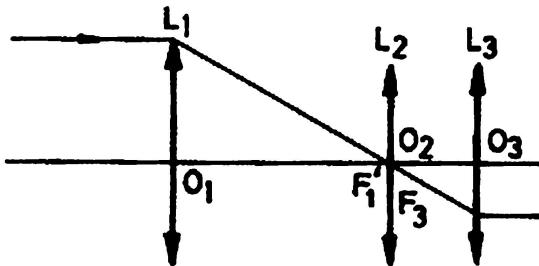
$$L_3 : f_3 = 2 \text{ cm}, D = 1.2 \text{ cm}$$

- الف- مسیر تعدادی از پرتوها را از درون سیستم دنبال کنید.
- ب- موقعیت مردمک چشم و قطر مردمک را محاسبه کنید.

- ج- کار عدسی  $L_2$  چیست؟
- د- آیا این دستگاه به چشم کاملاً تطبیق دارد؟ (توضیح دهید).  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

- الف- بیائید دسته ای از پرتوها را که بطور موازی روی عدسی  $L_1$  مطابق شکل (۴۷.۱) می افتد، در نظر گیریم. نقطه کانون عقبی عدسی  $L_1$  و نقطه کانونی جلوئی عدسی  $L_3$  با مرکز عدسی  $L_2$  منطبق هستند، بطوریکه پرتوهای موازی در  $L_2$  هیچگونه شکستی نداشتند.



شکل ۴۷.۱:

- ب- کار عدسی  $L_1$  بعنوان روزنہ و مردمک ورودی تلسکوپ است. تشکیل تصویر روزنہ  $L_1$  خروجی مردمک تلسکوپ بوده و موقعیت آنرا می‌توان با استفاده از رابطه عدسی‌ها محاسبه کرد:

$$\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S'_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{S_3} + \frac{1}{S'_3} = \frac{1}{f_3}$$

که در آن  $f_2 = f_3 = 2 \text{ cm}$ ،  $S_2 = 10 \text{ cm}$  است.  
از حل این دو معادله خواهیم داشت

$$S'_2 = 2.5 \text{ cm}, \quad S_3 = 2 - 2.5 = -0.5 \text{ cm}$$

و از اینرو

$$S'_3 = 0.4 \text{ cm}$$

یعنی، مردمک خروجی در  $0.4 \text{ cm}$  پشت  $L_3$  است. از همان مثلث داریم  $\frac{D'}{D} = \frac{f_3}{f_1}$ ، بطوریکه قطر مردمک خروجی برابر است با

$$D' = \frac{f_3}{f_1} D = 0.8 \text{ cm}$$

## فصل ۱. نورشناسی هندسی

- ج- عدسی  $L_2$  که در جلو نقطه کانونی  $L_3$  قرار داده می‌شود، عدسی میدان خوانده می‌شود و بعنوان توقف میدان در شکل خدمت می‌کند. وظیفه آن همگرائی پرتوها قبل از وارد شدن به عدسی چشمی  $L_3$  است، بطوریکه شخص میتواند تصویر راحتی با عدسی چشمی کوچکتر دریافت کند.علاوه استفاده از سیستم  $L_2$  و  $L_3$  از شیشه یکسان که تحت فاصله  $(f_2 + f_3)/2$  هستند، و برای تمام رنگها فاصله کانونی یکسانی دارند، بعنوان چشم سان<sup>۱۲</sup> مشاهده رنگی ناشی از آنرا حذف مینماید.
- د- علاوه بر داشتن روزنه بزرگ جسمی که توان تجزیه لازم را داشته باشد، اجسام فقط اگر بزرگنمایی بقدر کافی بزرگ باشد که جداسازی لازم را برای چشم نمایش دهد، تجزیه می‌کند. برای این منظور بزرگنمایی کمینه لازم برابر است با

$$m_0 = \frac{60}{\frac{140}{D}},$$

که در آن  $D$  بر حسب سانتی متر است. البته، برای راحتی چشم بزرگنمایی واقعی باید ۱.۵ تا ۲ برابر این مقدار کمینه باشد، یعنی

$$m = \frac{120D}{140} = 3.4$$

که در اینجا  $D = 4 \text{ cm}$  در نظر گرفته شده است.  
بزرگنمایی برای سیستم داده شده برابر است با

$$\frac{f_1}{f_3} = 5 > m.$$

بنابراین، تأنجاییکه به بزرگنمایی مربوط می‌شود، سیستم کاملاً استاندارد است. بعبارت دیگر، برای یک سیستم نوری خوب، مردمک خروجی باید بنحوی طراحی شود که بر چشم منطبق باشد و فاصله بین مردمک خروجی و سطح نوری آخری عدسی چشمی نباید کمتر از  $5 \text{ mm}$  باشد. این فاصله برای این سیستم  $4 \text{ mm}$  است، که به مژه اجازه میدهد به سطح نوری تماس داشته باشد.علاوه، اندازه مردمک خروجی یک تلسکوپ باید به بزرگی چشم، یعنی  $2 - 4 \text{ mm}$  باشد. قطر مردمک خروجی این سیستم  $8 \text{ mm}$  است، بطوریکه نور خرج شونده از تلسکوپ تمام آن وارد چشم نمی‌شود. برای این منظور، تلسکوپ برای تطبیق کامل با چشم خوب نیست.

<sup>۱۲</sup>ocular

## ۱۰۳۴

دو تلسکوپ عدسی‌های شیئی یکسانی با فاصله کانونی  $f_0$  دارند. یکی از تلسکوپها دارای عدسی همگرائی برای عدسی چشمی با فاصله کانونی  $f_c$  است. دیگری دارای عدسی واگرائی برای عدسی چشمی با فاصله کانونی  $f_d$  می‌باشد. بزرگنمائی برای این دو تلسکوپ وقتی جسم در بینهایت باشد، یکسان است. نسبت طول این دو تلسکوپ بر حسب بزرگنمائی  $M$  چقدر است؟ دلیل خوبی برای اینکه چرا از تلسکوپی که طول بلند‌تری برای یک  $M$  مفروض انتخاب می‌شود ارائه دهید.  
(دانشگاه ویسکانسین)

### حل:

این بزرگنمائی، معمولاً بزرگنمائی زاویه‌ای، برای ادوات دیدهگانی برابر نسبت زوایای  $\omega'$  و  $\omega$  که پرتوهای اصلی، از نوک جسم نسبت به محور بترتیب بدون چشم مسلح و با چشم مسلح، می‌سازند تعریف می‌شود:

$$M = \frac{\omega'}{\omega}$$

برای تلسکوپ

$$M = -\frac{f_0}{f_e}$$

که در آن  $f_0$  و  $f_e$  بترتیب فاصله کانونی عدسی‌های شیئی و چشمی هستند. یک دستگاه تلسکوپیز عدسی همگرا و یا واگرا بعنوان عدسی چشمی استفاده می‌کند. تلسکوپی که از عدسی چشمی همگرا استفاده می‌کند آنرا تلسکوپ کپلر<sup>۱۴</sup> و آنرا که از عدسی واگرا بکار می‌برد تلسکوپ گالیله<sup>۱۵</sup> می‌نامند. برای تلسکوپ‌های کپلر و گالیله بزرگنمائی بترتیب چنین است

$$M_K = -\frac{f_0}{f_e}$$

و

$$M_G = \frac{-f_0}{-f_d} = \frac{f_0}{f_d}$$

در اینجا علامت منفی دال بر معکوس بودن تصویر و علامت مثبت قائم بودن تصویر دارد. و در اینجا داریم  
 $-M_K = M_G = M,$

از این‌رو

$$f_c = f_d$$

برای یک تلسکوپ، نقطه کانونی دوم عدسی شیئی با نقطه کانونی اول عدسی چشمی برهمنطبق است. بنابراین طول تلسکوپ برابر است با  $L = f_0 + f_e$

<sup>۱۴</sup>Keplerian telescope

<sup>۱۵</sup>Galilean telescope

برای دو تلسکوپ مفروض، خواهیم داشت

$$L_K = f_0 + f_c, \quad L_G = f_0 - f_d$$

بدیهی است که،

$$L_K > L_G,$$

$$\frac{L_K}{L_G} = \frac{(f_0 + f_c)}{(f_0 - f_d)} = \frac{((f_0/f_c) + 1)}{((f_0/f_c) - 1)} = \frac{(M + 1)}{(M - 1)}$$

مقایسه با تلسکوپ گالیله، مزایای تلسکوپ کپلر بقرار ذیل است:

- الف- بین عدسی شیئی و چشمی یک صفحه تصویر حقیقی وجود دارد که در آنجا میتوان صفحه مدرج برای اندازه گیریهای مرجع قرار داد.
- ب-

### ۱۰۳۵

- الف- رابطه عدسی سازان را برای یک عدسی نازک بدست آورید

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

- ب- شیشه عدسی‌های *flint* و *crown* به یکدیگر چسبانیده شده تا یک عدسی بیرنگ<sup>۱۶</sup> ساخته شود. نشان دهید که فاصله کانونی مولفه‌های *flint* و *crown* در معادله زیر

$$\frac{\Delta_c}{f_c} + \frac{\delta_f}{f_f} = 0,$$

صدق می‌کند. در اینجا

$$\Delta = \frac{1}{\bar{n} - 1} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

- و  $\bar{n}$  مقدار ضریب شکست شیشه در مرکز طیف مرئی و  $\Delta\lambda$  عرض طیف مرئی ( $\sim 3000 \text{ \AA}$ ) است.

- ج- برای شیشه کرون  $\Delta_c = 0.0169$  و برای شیشه فلینت  $\Delta_f = 0.0384$  است. ثابت کنید که باید از چسبانیدن عدسی همگرا کرون و عدسی واگرا فلینت استفاده نمائیم تا یک عدسی بیرنگ همگرا داشته باشیم

(دانشگاه کلمبیا)  
حل:

- الف- لطفاً به کتابهای درسی مراجعه کنید.

---

<sup>۱۶</sup> achromatic

- ب- برای عدسی ترکیبی متشکل از دو جزء بهم، فاصله کانونی  $f$  در رابطه زیر صدق میکند.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{f_f} \quad (1)$$

با گرفتن مشتق نسبت به  $\lambda$  خواهیم داشت

$$\frac{1}{f^2} \frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{f_c^2} \left( \frac{df_c}{d\lambda} \right) + \frac{1}{f_f^2} \left( \frac{df_f}{d\lambda} \right). \quad (2)$$

با مشتق گرفتن از فرمول سازنده‌گان

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad (3)$$

خواهیم داشت

$$\frac{1}{f^2} \frac{df}{d\lambda} = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{dn}{d\lambda},$$

با استفاده از رابطه (۳)،

$$\frac{1}{f} \frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\bar{n} - 1} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\Delta}{\Delta\lambda},$$

یا

$$\frac{1}{f^2} \frac{df}{d\lambda} = \frac{\Delta}{\Delta\lambda} \frac{1}{f}$$

لذا داریم

$$\frac{1}{f_c^2} \frac{df_c}{d\lambda} = \frac{\Delta_c}{\Delta\lambda} \frac{1}{f_c}$$

و

$$\frac{1}{f_f^2} \frac{df_f}{d\lambda} = \frac{\Delta_f}{\Delta\lambda} \frac{1}{f_f}$$

با قرار دادن این رابطه در رابطه (۲) و با توجه به اینکه برای عدسی بیرنگ

$\frac{df}{d\lambda} = 0$  است، بدست می‌آید

$$\frac{\Delta_c}{f_c} + \frac{\Delta_f}{f_f} = 0 \quad (4)$$

- ج- با حل معادله (۱) و (۴)، خواهیم داشت

$$\frac{1}{f_c} = \frac{\Delta_f}{f(\Delta_f - \Delta_c)},$$

$$\frac{1}{f_f} = \frac{-\Delta_c}{f(\Delta_f - \Delta_c)}.$$

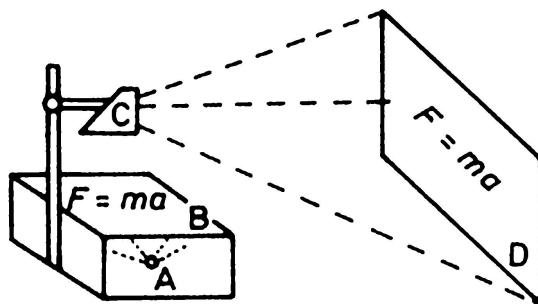
چون  $\Delta_f < \Delta_c < 0$  لازم است که

$$f_c > 0 \quad \text{and} \quad f_f < 0.$$

بنابراین، برای بدست آوردن یک عدسی بیرنگ همگرا، باید از عدسی همگرا با شیشه کرون و عدسی واگرا با شیشه فلینت استفاده کنیم

## ۱۰۳۶

عدسی چشمی معمولی یک دستگاه نوری یک ماشین منظره نگار<sup>۱۷</sup> است که در سخنرانی‌ها و سمینارها بکار می‌رود. شکل (۴۸.۱) نمایش ساده‌ای از این دستگاه را نشان می‌دهد.



شکل ۱: ۴۸.۱

یک یا دو عنصر نوری در موقعیت‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، و  $D$  قرار دارد. کار و وظیفه هر عضو در شکل ماشین منظره نگار را تشریح کنید. رابطه‌هایی که بین فواصل این عناصر باید حاکم باشند را بنویسید. کدام یک از این قطعات در سال ۱۹۰۰ موجود نبودند؟

(دانشگاه پرینستون)

**حل:**

دو نوع دستگاه منظره نگار وجود دارد، عبوری<sup>۱۸</sup> و بازتابی<sup>۱۹</sup>. دستگاه نشان داده شده متعلق به نوع قبلي است.

بخش  $A$  دستگاه روشن گننده و شامل یک لامپ و چند عدسی مرکز کننده است. بخش  $B$  ترانسپرنٹ (صفحه شفاف محتوی شکل) است که میبايس است افکننده شود. بخش  $C$  تشکیل تصویر است که سیستم پروژکتور شامل یک عدسی شیئی و آئینه است. بخش  $D$  پرده میباشد.

نور بوسیله لامپ تابیده و گسیل شده و با عدسی‌های مرکز و فشرده گشته و ”جسم“ که همان صفحه شفاف ترانسپرنٹ شامل شکل و نوشته‌ها است، روشن می‌کند. جسم با عدسی شیئی تصویر گشته و سپس با آینه منعکس و بر روی پرده برای تشکیل تصویری بزرگ شده تابیده می‌شود.

<sup>۱۷</sup>viewgraph

<sup>۱۸</sup>transmission

<sup>۱۹</sup>reflection

عدسی شیئی از عناصر کلیدی است، بطوریکه کیفیت تصویر نهائی به آن بستگی دارد. عدسی شیئی باید بطور خاصی طراحی و ساخته شود که تا آنجا که ممکن است از ابیراهی‌های<sup>۲۰</sup> کروی و رنگی، کج بینی<sup>۲۱</sup> (استیگماتیسم) و انحنای میدان را حذف نماید. بعضی وقتها حتی عدسی شیئی دوربین عکاسی را برای این منظور بکار می‌برند. لذا این در سال ۱۹۰۰ بسیار گران بوده باشد.

صفحه تصویر منبع تشکیل شده بوسیله عدسی متمرکز کننده باید بر مردمک عدسی شیئی منطبق باشد. یعنی باید کفت که لامپ و مردمک عدسی شیئی برای متمرکز کننده گی مزدوج هستند. ضمناً ترانس پرنت و پرده باید یک زوج مزدوج شیئ و تصویر برای عدسی شیئ باشند. فاصله بین ترانس پرنت و عدسی شیئ، فاصله بین عدسی شیئ و پرده ( شامل فاصله از عدسی شیئ تا مرکز آئینه و از مرکز آئینه تا پرده است) و فاصله کانونی عدسی شیئ باید از فرمول سازندگان عدسی پیروی کنند.

## ۱۰۳۷

یک عدسی با فاصله کانونی  $f$  تصویر خورشید روی صفحه کانونی خود تشکیل میدهد. ثابت کنید که درخشنده<sup>۲۲</sup> تصویر ( $W/cm^2$ ) تقریباً نزدیک سطح خورشید است.

(دانشگاه کلمبیا)

### حل:

خورشید را میتوان یک منع لامبرت<sup>۲۳</sup> با لومینانس یا درخشنده<sup>۲۴</sup>,  $L$  و سطح  $S$  در نظر گرفت. توان تشعشع شده بدرون عدسی ( به سطح  $A$  و فاصله کانونی  $f$  ) برابر است با

$$\Phi = \frac{LSA}{R^2},$$

که در آن  $R$  فاصله بین خورشید و زمین است. تمام توان جمع شده بسوی سطح  $S'$  ( تصویر  $S$  ) هدایت می‌شود.

لومینسانس ظاهری  $L'$  تصویر برابر است با  

$$\Phi' = L'S'd\Omega',$$

که در آن  $d\Omega'$  زاویه فضائی است که بوسیله عدسی، تصویر را دربر میگیرد، یعنی

$$d\Omega' = \frac{A}{f^2}$$

<sup>۲۰</sup>: aberrations

<sup>۲۱</sup>: astigmatism

<sup>۲۲</sup>: brightness

<sup>۲۳</sup>: Lambert

اگر از تضعیف اتمسفر و عدسی صرفنظر کنیم، در این صورت  $\Phi' \approx \Phi$ ، یعنی

$$\frac{LSA}{R^2} \approx \frac{L'AS'}{f^2}$$

چون  $S/R^2 = S'/f^2$ ، خواهیم داشت

$$L \approx L'$$

### ۱۰۳۸

(درخشندگی ظاهربین زاویه فضائی بزرگ منبع نور پراکنده ای را میتوان با عدسی افزایش داد. این مسئله آن حقیقت را برای یک تک عدسی روشن و مشخص میکند). یک منبع نور با درخشندگی  $S$  تحت زاویه فضائی که بیش از زاویه فضائی دریافت  $\Omega$  یک تلسکوپ مشاهده کننده است قرار دارد. منبع  $S$  واحد انرژی نوری را بر واحد سطح در واحد زاویه فضائی بر ثانیه بطور همسانگرد گسیل میدارد. عدسی شیئی تلسکوپ دارای سطح  $A$  و عدسی نازکی است.

- الف- ثابت کنید که انرژی وارد شده به تلسکوپ در یک ثانیه برابر  $S\Omega A$  میباشد.
- ب- ثابت کنید که حاصل ضرب سطح تشکیل تصویر با عدسی شیئی و زاویه فضائی تحت عدسی شیئی در تصویر دارد برابر  $\Omega A$  میباشد.
- ج- توضیح دهید که چرا نتایج بالا نشان میدهد که درخشندگی ظاهربین منع توسعه یافته با عدسی شیئی تلسکوپ تغییر نمیکند.

(دانشگاه کالیفرنیا - برکلی)

**حل:**

- الف- فلوی نور وارد به تلسکوپ در یک ثانیه برابر است با

$$\phi = \int (S d\Sigma d\Sigma' \cos \theta \cos' / r^2),$$

که در آن  $d\Sigma$  المان سطح منع و  $d\Sigma'$  المان سطح عدسی تلسکوپ،  $\theta$  زاویه ای است که محور تلسکوپ با عمود بر  $d\Sigma$  میسازد، و  $\theta'$  زاویه ای است که محور با عمود بر  $d\Sigma'$  درست میکند، و  $r$  فاصله بین  $d\Sigma$  و  $d\Sigma'$  است. چون  $\int (d\Sigma / r^2)$ ، زاویه فضائی تحت منع بیش از زاویه فضائی دریافت  $\Omega$  تلسکوپ است، فقط نور ساطح شده از سطح موثر  $\Omega r^2$  وارد تلسکوپ میشود، یعنی،  $\int (d\Sigma / r^2) = \Omega$  است. در این صورت چون  $\int d\Sigma' = A$ ، خواهیم داشت

$$\Phi = S\Omega A$$

در اینجا فرض میکنیم که فاصله بین منبع و تلسکوپ بسیار زیاد باشد بطوریکه تلسکوپ مستقیماً آنرا مشاهده نماید بقسمی که  $\cos \theta'$  و  $\cos \theta$  هر یک برابر واحد میباشند.

- ب- سطح تصویر'  $\sigma'$  برابر است با

$$\sigma' = \Omega f^2$$

که در آن  $f$  فاصله کانونی عدسی شیئی تلسکوپ است. زاویه فضائی'  $\Omega'$  که تحت آن عدسی در تصویر دارد برابر است با

$$\Omega' = \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) / f^2$$

که در آن  $D$  قطر عدسی است. بنابراین خواهیم داشت

$$\sigma' \Omega' = \frac{\pi D^2}{4f^2} \cdot \Omega f^2 = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Omega = A \cdot \Omega$$

- ج- فلوی نور در سطح تصویر برابر است با

$$\Phi' = \pi S' \sigma' \sin^2 u'$$

که در آن  $S'$  درخشندگی تصویر،  $u'$  زاویه نیم روزنه عدسی است که برابر  $\sin u' = \frac{D}{2f}$  میباشد. دراین صورت

$$\Phi' = \pi S' (\Omega f^2) \left( \frac{\pi D^2}{4f} \right)^2 = S' \Omega A.$$

چون ضریب انتقال عدسی کوچکتر از واحد است،  $\Phi' \leq \Phi$  و خواهیم داشت  $S' \leq S$ . یعنی، امکان ندارد درخشندگی ظاهری منع پراکنده را با تلسکوپ افزایش داد.

## ۱۰۳۹

وقتی خورشید بالای سر ما است، یک صفحه سفید مسطح دارای فلوی درخشندگی معینی میباشد. اکنون یک عدسی بشعاع  $r$  و فاصله کانونی  $f$  برای تمرکز و کانونی کردن تصویر خورشید روی صفحه بکار میرود. چقدر فلو در سطح تصویر زیاد میشود؟ برای یک  $r$  مفروض،  $f$  چقدر باشد تا عدسی مفروض هیچگونه افزایشی در فلوی تصویر بوجود نیازد؟ قطر خورشید تقریباً ۰.۰۱ رادیان از زمین است. فقط نور تصویر از درون عدسی است. (دانشگاه کالیفرنیا - برکلی)

**حل:**

فلوی لومینسانسی که به زمین میرسد برابر است با

$$\Phi = B \sigma' d\Omega$$

## فصل ۱. نورشناسی هندسی

که در آن  $B$  درخشندگی خورشید بر اساس تشعشع کننده لامبرت<sup>۱۴</sup>،  $\sigma'$  سطح روش  
شده در روی زمین،  $d\Omega$  زاویه فضائی که تحت آن خورشید  $\sigma'$  را در بر میگیرد و  
برابر است با

$$d\Omega = \pi \alpha^2$$

و  $\alpha$  زاویه سطح خورشید و برابر ۰.۰۱ رادیان میباشد.  
فلوی لومننسنس سطح تصویر پشت عدسی خواهد بود

$$\Phi' = \pi B \sigma' \sin^2 u' = \pi B \sigma' \left( \frac{r}{f} \right)^2$$

که در آن  $u'$  نمی زاویه سطح عدسی،  $r$  و  $f$  بترتیب شعاع و فاصله کانونی عدسی  
است. نسبت زیر را در نظر گیرید

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\pi B \sigma' \left( \frac{r^2}{f^2} \right)}{\pi B \sigma' (0.01)^2} = \frac{10^4 r^2}{f^2},$$

در اینجا شفافیت شیشه عدسی را واحد در نظر گرفتیم. بنابراین فلوی لومننسنس  
سطح تصویر  $10^4 r^2 / f^2$  برابر همان سطح روی زمین بدون عدسی است.  
برای  $1 \leq \Phi'/\Phi \leq 10^2 r$ ، خواهیم داشت  $f \geq 10^2 r$ . بنابراین، برای  $f \geq 100r$  عدسی  
هیچگونه افزایش فلئی روی سطح تصویر نخواهد داشت.

## ۱۰۴۰

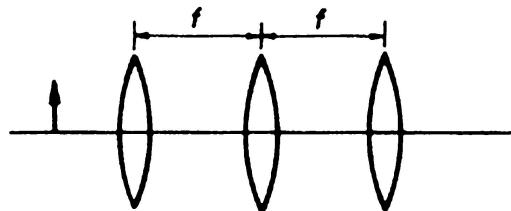
- الف- سه عدسی یکسان مثبت به فاصله کانونی  $f$  روی یک خط تحت فاصله  
 $f$  از یکدیگر، مطابق شکل (۴۹.۱) قرار دارند. یک جسم بفاصله  $f/2$  در  
جلوی عدسی نهائی سمت چپ گذاشته میشود. موقعیت و توان برزنگنایی  
تصویر حاصله را با استفاده روش ترسیمی پیدا کنید.

- ب- روش معروف نگاه از درون سوراخ کوچک دید را افزایش میدهد. اگر  
چشم شما نزدیک بین باشد و میتواند یک جسم را در ۲۰ cm بدون استفاده  
از عینک مشاهد نماید، قطر سوراخی که دید شما را افزایش میدهد تخمین  
و ارزیابی نمائید.

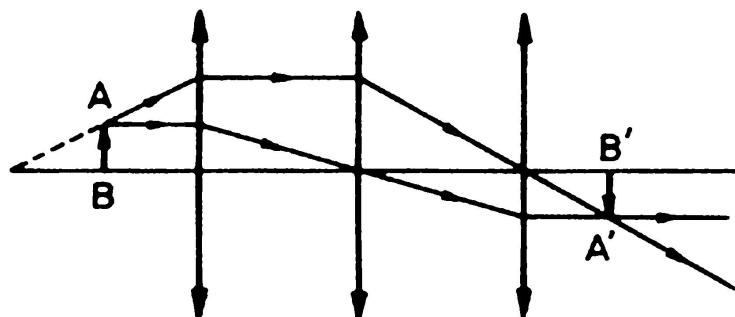
(دانشگاه کلمبیا)

## حل:

- الف- تصویر را با استفاده از دو اشعه که از بالای جسم عبور میکند،  
میسازیم: یکی موازی با محور افقی، و دیگری از نقطه کانونی جلو  $L_1$



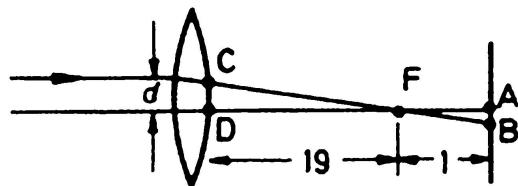
شکل ۴۹.۱:



شکل ۵۰.۱:

همان‌طوری که در شکل (۵۰.۱) نشان داده شده است. تصویر حاصل در فاصله  $f/2$  پشت عدسی سمت راست درست می‌شود. بزرگنمایی برابر -1 است.

- ب- در چشم انسان فاصله بین عدسی و شبکیه 20 میلی‌متر است. با استفاده از رابطه  $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$  فاصله کانونی را  $f = 20 \text{ cm}$  برای تصویر به فاصله  $2.0 \text{ cm}$  و جسم به فاصله  $20 \text{ cm}$  از آن بدست می‌آوریم. به‌طوری که در شکل (۵۱.۱)



شکل ۵۱.۱:

نشان داده شده است، عدسی، جسمی که در بین‌نهایت دور قرار دارد را در

نقطه کانونی  $F$  بصورت یک دیسک  $AB$  به شعاع ۱.۰ سانتی‌متر پشت  $F$  روی شبکیه تشکیل می‌دهد. یک دریچه (دیافراگم) در جلو عدسی چشم قطر پرتو  $d = \overline{CD} = 19\overline{AB}$  نور وارد چشم را تعیین می‌کند. از هندسه میدانیم که  $1' = 3 \times 10^{-4} rad$  است، محدودیت تفکیک چشم، که در حدود  $\overline{AB}_m = 3 \times 10^{-4} \times 20 = 6 \times 10^{-3} mm$  است، محدودیت تفکیک عرضی را در نظر می‌گیریم. اگر قطر دریچه  $d < 19 \times 6 \times 10^{-3} = 0.12 mm$  باشد، دید خوبی برای اجسام در فاصله دور خواهیم داشت.

## ۱۰۴۱

یک طرف یک دیسک، به سطح  $1 cm^2$ ، بطور یکنواخت و همسانگرد با درخشندگی یک وات بر سانتی‌متر مربع در یک فرکانس ثابتی در ناحیه دید انسان تشعشع می‌کند (تابشگر قانون لامبرت)

- الف- نرخ کلی انرژی که از سطح این دیسک تشعشع می‌کند چقدر است؟
- ب- یک عدسی گواترز فیوزد ( $n = 1.5$ ) به قطر ده سانتی‌متر و فاصله کامونیک متر داده شده است. نشان دهید که چطور تصویر تابشگر یک دیسک که سطح آن یک چهارم سانتی‌متر مربع است تشکیل می‌شود.
- ج- شار انرژی کل که به سطح دیسک یک چهارم سانتی‌متر مربع میرسد، با چند درصد تخمین زنید.
- د- با تغییر  $n$  و ابعاد عدسی، می‌توان شار انرژی وارد به دیسک یک چهارم سانتی‌متر مربع را افزایش داد. بچه دلیل می‌توان شار انرژی بیشینه را برای دیسک یک چهارم سانتی‌متر مربع تعیین کرد؟

(امتحان فیزیک چین-امریکا: <sup>۲۵</sup>CUSPEA)

**حل:**

- الف-

$$\Phi = BS \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi BS = 3.14W,$$

که در آن  $B$  درخشندگی منبع،  $S$  سطح منبع،  $\theta$  زاویه بین جهت نور تابشی و عمود بر سطح منبع است.

<sup>۲۵</sup> CUSPEA (China-U.S. Physics Examination and Application)

- ب- بزرگنمائی برابر است با

$$m = \frac{D'}{D} = \left( \frac{S'}{S} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.5,$$

که در آن  $D'$ ،  $D$ ،  $S'$  و  $S$  بترتیب قطرها و سطح تصویر و شئی هستند. چون  
است داریم  $m = \frac{v}{u} = 0.5$

معادله عدسی می‌دهد  $v = \frac{3f}{2} = 150\text{ cm}$ ،  $u = 3f = 300\text{ cm}$ . بنابراین، اگر  
شئی و تصویر بترتیب در  $300\text{ cm}$  و  $150\text{ cm}$  واقع شوند، عدسی تصویر منبع  
را روی دیسکی به سطح  $0.25\text{ سانتی‌متر مربع}$  می‌دهد.

- ج- اگر عدسی تلفات ایجاد نکند، شار انژی که به دیسک یک چهارم  
سانتی‌متر مربع میرسد برابر انژی که به عدسی میرسد. زاویه فضائی که  
عدسی منبع را در بر می‌گیرد برابر است با:

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{u^2}$$

و شار انژی کل که به عدسی میرسد برابر است با:

$$\Phi' = BS\Omega = 1 \times 1 \times \pi \frac{5^2}{300^2} = 8.7 \times 10^{-4}W$$

- د- بر طبق قانون دوم ترمودینامیک، درخشندگی تصویر نمی‌تواند از درخشندگی  
شیع بیشتر باشد. بنابراین شار انژی بیشینه که به دیسک یک چهارم سانتی‌متر  
مربع میرسد برابر است با:

$$\Phi'' = \frac{\Phi S'}{S} = \frac{\Phi}{4} = 0.785 W$$



## فصل ۲

# نورشناخت موجی

### ۲۰۰۱

عرض خط طیفی در طول موج  $500 \text{ نانومتر} = 500 \times 10^{-9} \text{ متر}$  است. بیشترین اختلاف مسیری که حلقه‌های تداخل تولید شده با این نور بطور واضح قابل مشاهده باشد بطور تقریبی چقدر است؟  
(ویسکانسین)

حل:

$$\lambda_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{(500 \times 10^{-9})^2}{1.25 \times 10^{-3}} \text{ cm.}$$

اگر اختلاف مسیر نوری تقریباً یک چهارم  $l_c = \frac{1}{4} \lambda_c = \frac{1}{4} \times 1.25 \times 10^{-3} \text{ cm} = 3 \text{ باشد}$ ، می‌توان بطور واضح حلقه‌ها را مشاهده کرد.

### ۲۰۰۲

منبع نقطه‌ای  $S$  در مبدأ مختصات قرار دارد و امواج سینوزوئیال کروی با میدان الکتریکی  $E_1 = A \left( \frac{D}{r} \right) \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$  تشعشع می‌کند. در اینجا  $r$  فاصله از  $S$  است. علاوه بر این، یک موج صفحه‌ای در طول محور  $x$  ها می‌ منتشر می‌شود. این موج با رابطه زیر داده شده است.

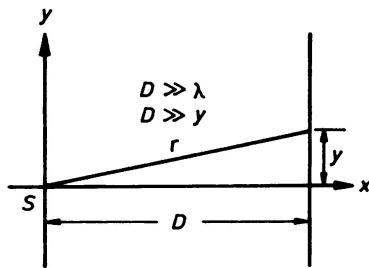
$$E_2 = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

(توجه کنید که هر دو موج  $E_1$  و  $E_2$  را در این مسئله اسکالر درنظر می‌گیریم). هر دو موج بر روی پرده‌ای عمود بر محور  $x$  ها و به فاصله  $D$  از مبدأ، همان‌طور که در

---

<sup>۱</sup>Coherence length

شکل (۱.۲) نشان داده شده، می تابد. شدت نور منتجه  $I$  ناشی در روی پرده را بر حسب تابعی از  $y$  فاصله از محور  $x$  ها که نسبت به  $D$  کوچک است، محاسبه کنید.  
شدت  $I$  را بر حسب  $\lambda, y, D, I_0$  و شدت  $I_0$  بازاء  $y = 0$  بیان کنید.  
(ویسکانسین)



شکل ۱.۲ :

حل:

میدان الکتریکی  $E$  در نقطه  $r$  از مبدأ، روی پرده برابر است با:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = A \left[ \left( \frac{D}{r} \right) \cos \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \right] \\ &\approx A \left[ \cos \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \right] \end{aligned}$$

که در آن از تقریب  $D \approx D$  استفاده شده است.  
برای  $y \ll D$ ، داریم:

$$r = (D^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \approx D \left( 1 + \frac{y^2}{2D^2} \right)$$

وازایزو

$$\begin{aligned} E &= A \left[ \cos \left( \omega t - \frac{2\pi D \left( 1 + \frac{y^2}{2D^2} \right)}{\lambda} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi D}{\lambda} \right) \right] \\ &= 2A \cos \frac{\pi y^2}{D\lambda} \cdot \cos \left( \omega t - \frac{2\pi D \left( 1 + \frac{y^2}{4D^2} \right)}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

بنابراین

$$I \propto E^2 \propto \cos^2 \frac{\pi y^2}{D\lambda}$$

فرض کنید در  $0 = I = I_0$ ،  $y = 0$  باشد، در این صورت داریم:

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi y^2}{D\lambda} \right)$$

هر قدر فاصله از مرکز افزایش یابد، حلقه‌ها بهم نزدیک‌تر می‌شوند.  
این شبیه صفحه مناطق فرنل<sup>۲</sup> است.

### ۲۰۰۳

آزمایش دو شکاف تداخلی یانگ<sup>۳</sup> مانند شکل (۲.۲) چینش شده است؛  $\lambda = \text{Å}$  5000. وقتی یک فیلم نازک از مواد شفاف پشت یکی از شکاف‌ها قرار داده شود، حلقه مرتبه اول به موقعیت اولش که بوسیله حلقه مرتبه چهارم اشغال شده بود حرکت می‌کند. ضریب شکست فیلم  $n = 1.2$  است. ضخامت فیلم را محاسبه کنید.

(ویسکانسین)

### حل:

شدت بیشینه وقتی اختلاف مسیر نوری  $m\lambda = \Delta$  باشد، اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$\delta\Delta = \lambda\delta m$$

وقتی فیلم مطابق شکل (۲.۲) قرار داده می‌شود، تغییر مسیر نوری برابر است با:

$$\delta\Delta = t(n - 1)$$

که در آن  $t$  ضخامت فیلم است. همانطور الگوی تداخلی با ۴ حلقه انتقال می‌یابد،

$$\delta m = 4.$$

از اینرو  $t(n - 1) = 4\lambda$  می‌دهد:

$$t = \frac{4\lambda}{n - 1} = 10 \mu\text{m}$$

### ۲۰۰۴

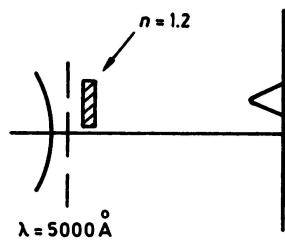
الگوی تداخلی از سه شکاف شکل (۳.۲) را در نظر گیرید. فرض کنید که دریچه (دیافراگم) همه شکاف‌ها یکسان ( $\frac{\lambda}{2}$ ) است.

- الف- بازاء چه مقدار  $\theta$  اولین بیشینه اصلی است؟ (یعنی موجک‌های هر سه شکاف هم فاز هستند).

---

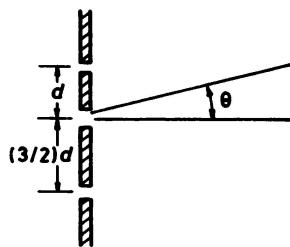
<sup>۲</sup>Fresnel's Zone Plate

<sup>۳</sup>Young's Interference



شکل ۲.۲:

- ب- اگر نتیجه (الف) را  $\theta_1$  بنامیم، شار در جهت بیشینه مرتبه صفر ( $\theta = 0$ ) برابر  $F_0$  است. شار (بر حسب واحد  $F_0$ ) در جهت  $\frac{\theta_1}{2}$  چقدر است؟ (بفرض  $\lambda \ll d$ ). (ویسکانسین)



شکل ۳.۲:

حل:

- الف- میدان الکتریکی  $E(\theta)$  روی پرده برابر جمع میدان‌های تولید شده توسط هر شکاف است:

$$E(\theta) = E_1 + E_2 + E_3 = A + Ae^{j\delta} + Ae^{j\frac{5}{2}\delta}$$

که در آن

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

در این صورت شدت کل در زاویه  $\theta$  برابر است با:

$$I(\theta) \sim E(\theta) \cdot E^*(\theta) = A^2 \left\{ 3 + 2 \left[ \cos \delta + \cos \left( \frac{3\delta}{2} \right) + \cos \left( \frac{5\delta}{2} \right) \right] \right\}$$

برای  $\theta = 0$  داریم:

$$I(0) \sim 9A^2.$$

رابطه  $I(\theta)$  نشان میدهد که اولین بیشینه اصلی در  $\delta = 4\pi$  اتفاق می‌افتد،  
یعنی:

$$\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \sin \theta_1 = 4\pi$$

یا

$$\theta_1 \approx \sin \theta_1 \sim \frac{2\lambda}{d}.$$

• ب-

$$I\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sim A^2[3 + 2(\cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 5\pi)] = A^2 \sim \frac{I(0)}{9}$$

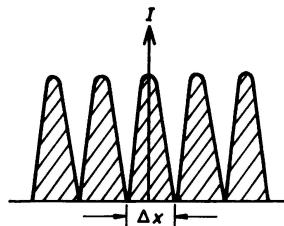
## ۲۰۰۵

یک پرده مات با دو شکاف موازی در جلو یک عدسی قرار دارد و با نور یک منبع نقطه‌ای دور روشن می‌شود.

- الف- الگوی تداخلی تولید شده را رسم کنید. (توزيع شدت نور در صفحه کانونی عدسی بطور تقریبی رسم کنید).
- ب- با رسم منحنی دومی و توضیح مختصری اثر حرکت دور شدن شکاف‌ها از یکدیگر را مشخص کنید.
- ج- با رسم منحنی سومی و توضیح مختصری اثر افزایش اندازه منبع که در بر گیرنده زاویه معینی از عدسی باشد را مشخص کنید.

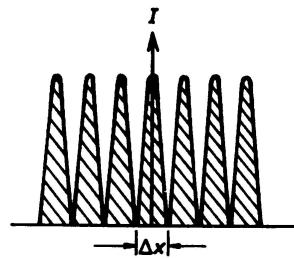
(ویسکانسین)  
حل:

- الف- تصویر تداخل در شکل (۴.۲) نشان داده شده است. فاصله حلقه‌ها



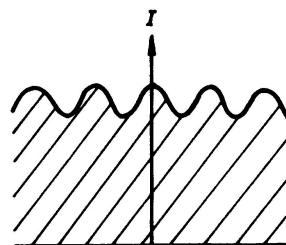
شکل ۴.۲:

و در آن  $d$  فاصله بین دو شکاف،  $f$  فاصله کانونی عدسی است.



شکل ۵.۲:

- ب- هر قدر  $d$  افزایش یابد،  $\Delta x$  کوچک می‌شود و حلقه‌ها متراکم‌تر می‌شوند.  
الگوی تداخل در شکل (۵.۲) نشان داده شده است.
- ج- جمع اثر تمام الگوهای تداخل شکاف دوگانه و ناهمدوس که با قسمت‌های منع تولید شده است، تمایز الگوی حاصل را، همان طور که در شکل (۶.۲) نشان داده شده است، کاهش میدهد.

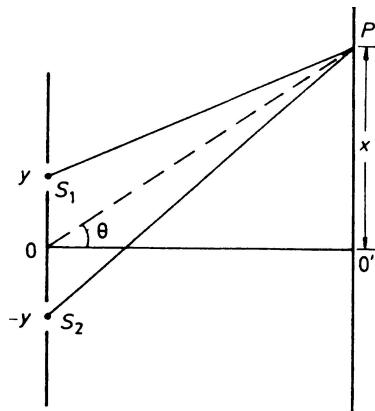


شکل ۶.۲:

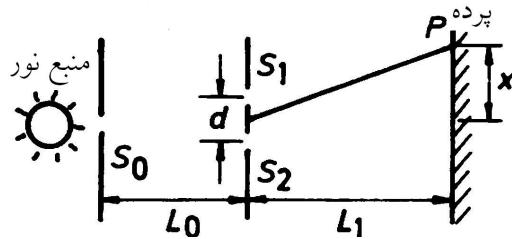
## ۲۰۰۶

آزمایش تداخل یانگ در شکل (۷.۲) نشان داده شده است.  
فرض کنید طول موج نور  $6000\text{\AA}$  عرض شکاف‌ها یکسان  $= S_0 = S_1 = S_2$  است.  
و فاصله شکاف‌ها  $L_1 = 3.0m$  و  $d = 2.0mm$  و  $0.2mm$  است.

- الف- طول  $L_0$  چقدر باشد تا الگوی تداخل خوبی روی پرده بوجود آید؟
  - ب- فاصله بین مرکز و اولین حلقه روشنائی روی پرده چقدر است؟
- (ویسکانسین)  
حل:



شکل ۸.۲



شکل ۷.۲

- الف- بر طبق قضیه زرنیک<sup>۴</sup>، طول همدوس جانبی منبع شکاف در گستردگی برابر است با:

$$I_s = \frac{\lambda}{\theta_s}$$

که در آن  $\theta_s$  زاویه دربرگیرنده شکاف در نقطه مورد نظر بر حسب رادیان است. برای آن که الگوی تداخل واضحی داشته باشیم، فاصله بین  $S_1$  و  $S_2$  باید کمتر از  $l_s$  باشد، یعنی

$$d < l_s,$$

یا

$$\theta_s < \frac{\lambda}{d}$$

چون

$$\theta_s = \frac{S_0}{L_0}$$

لازم است که

$$L_0 > \frac{d}{\lambda} S_0 = \frac{2 \times 10^{-4}}{6000 \times 10^{-10}} \times 2 \times 10^{-3} = 0.67 \text{ m}$$

- ب- با توجه به شکل (۸.۲)، جمع تاثیر گذاران دامنه در نقطه  $P$  پرده بعرض  $dy$  در نقاط  $y$  و  $-y$  بترتیب شکاف‌های  $S_1$  و  $S_2$  را در نظر گیرید. هر قدر  $d$  باشد، آن بترتیب متناسب با  $S_1, S_2$

---

<sup>۴</sup>Van Cittert Zernike

$$\left[ e^{-jk(x-y \sin \theta)} + e^{-jk(x+y \sin \theta)} \right] dy = e^{-jkx} \cos(ky \sin \theta) dy$$

خواهد بود. در اینجا  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  است.

سپس دامنه کل در  $P$  برابر است با:

$$A \propto \int_{\frac{d}{2} - \frac{S}{2}}^{\frac{d}{2} + \frac{S}{2}} \cos(ky \sin \theta) dy$$

چون  $S_1 = S_2 = S$  است. با درنظر گرفتن  $\sin \theta \approx \frac{x}{L_1}$ , داریم

$$A(x) = 2A_0 S \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{\lambda L_1} S}{\frac{\pi x}{\lambda L_1} S} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi x}{\lambda L_1} d \right),$$

که در آن  $A_0$  مقداریست ثابت. بنابراین شدت  $I(x)$  خواهد بود:

$$I(x) \propto \cos^2 \left( \frac{\pi x}{\lambda L_1} d \right).$$

با زاء  $\pi$ ، اولین بیشینه رخ میدهد رخ مربوط است به:

$$x = \frac{\lambda L_1}{d} = 0.9 \text{ mm}$$

بنابراین، اولین حلقه روشنائی در  $0.9 \text{ mm}$  دور از مرکز الگوی تداخل است.

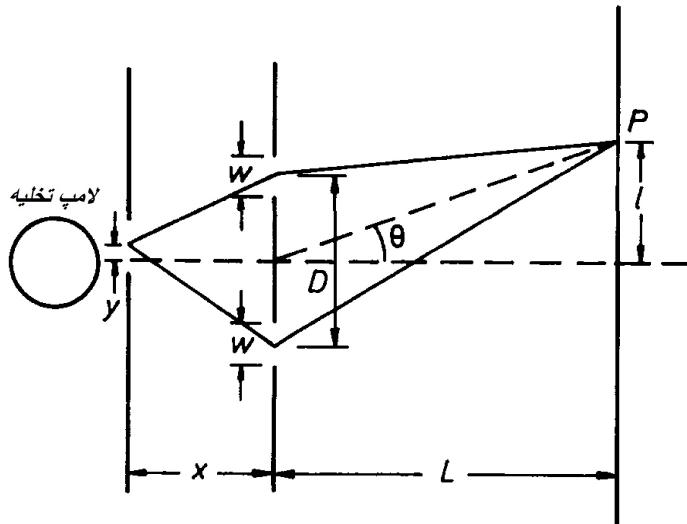
## ۲۰۰۷

الگوی تفرق دو شکاف بوسیله چینش شکل (۹.۲) تولید می‌شود. لامپ تخلیه نوری با طول موج  $\lambda$  تولید کرده که از درون شکاف کوچک  $S$  جلو لامپ عبور می‌کند. فاصله مرکز دو شکاف بعرض  $w$  برابر  $D$  است. شرایط را پیدا کنید که شدت بیشینه در فاصله  $l$  از مرکز پرده مشاهده شود. فرض کنید  $L < l < D$  و  $w$  بسیار کوچک است. چقدر  $w$  بزرگ باشد قبل از آنکه الگوی تداخل ازبین رود؟ اگر  $w$  افزایش یابد، آیا اولین بیشینه و کمینه نزدیک وسط صفحه یا دورترین آنها ازبین میرود؟ اثر افزایش عرض  $w$  شکاف در منبع روی شدت و تیزی الگو تداخل چگونه است؟ (ویسکانسین)

## حل:

توزيع شدت روی پرده بوسیله عرض  $dy$  منابع شکاف تولید می‌شود:

$$dI = 2I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 (1 + \cos \delta) dy$$



شکل ۹.۲:

که در آن  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  و  $\sin \theta = \frac{1}{L}$  و  $\beta = \frac{\pi w l}{\lambda L} = \frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}$  و همچنین

$$\delta_1 = 2\pi D \sin \theta / \lambda, \quad \delta_1 = 2\pi D y / \lambda x$$

و  $I_0$  مقداری است ثابت. با انتگرال‌گیری از توزیع شدت تولید شده توسط منبع شکاف خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \int_{-\frac{S}{2}}^{\frac{S}{2}} (1 + \cos \delta) dy \\ &= 2I_0 S \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{\sin \left( \frac{\pi D S}{\lambda x} \right)}{\left( \frac{\pi D S}{\lambda x} \right)} \cos \left( \frac{2\pi D}{\lambda} \sin \theta \right) \right\} \end{aligned}$$

اگر  $l = \frac{n\lambda L}{D}$ ، یعنی  $2\pi D \sin \theta / \lambda = 2\pi D l / \lambda L = 2n\pi$  باشد، شدت بیشینه روی پرده بفاصله  $l$  از مرکز صفحه مشاهده می‌شود. اگر  $\sin \beta = 0$  یا  $\beta = \pi wl / (\lambda L) = \pi$  باشد، الگوی تداخل برای اولین بار ازبین می‌رود. بطور کلی،  $w = \frac{\lambda L}{l} = D$  یا  $w = \frac{D}{n}$  است. هر قدر  $w$  افزایش یابد،  $n$  کم می‌شود. می‌توان گفت که بیشینه و کمینه اول از وسط صفحه از بین می‌رود.

حلقه‌های قابل مشاهده از رابطه زیر بدست می‌آید:

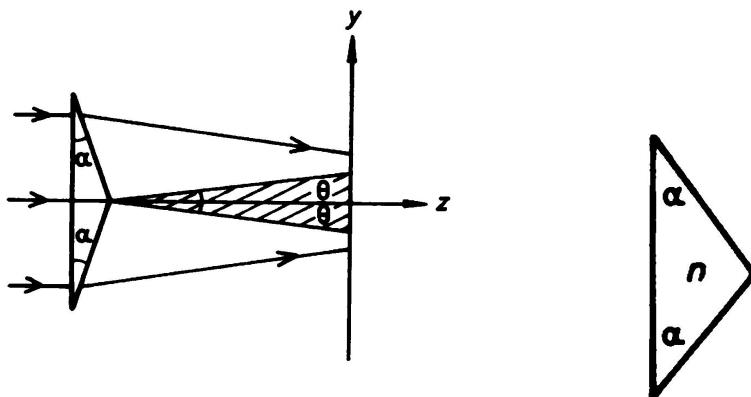
$$V = \left( \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \right) = \left| \frac{\sin \frac{\pi D S}{\lambda x}}{\frac{\pi D S}{\lambda x}} \right|$$

## فصل ۲. نورشناخت موجی

که در آن  $I_{max}$  و  $I_{min}$  بیشینه و کمینه شدت الگوی حلقه‌ها است. اگر  $\frac{\pi DS}{\lambda x} = n\pi$  در آن  $n$  عددی است صحیح، باشد، در این صورت  $V = 0$  است. بازاء  $S_0 = \lambda x/D$  هر قدر  $S$  افزایش یابد، روشنائی حلقه‌ها کاهش می‌یابد. برای رابطه  $I$ ، بدیهی است که شدت روی پرده متناسب با عرض  $S$  شکاف در منبع است.

### ۲۰۰۸

دو منشور فرنل<sup>۵</sup> در یک دو منشور فرنل، ضریب شکست  $n$  و دو زاویه حاده  $\alpha$  قاعده، همانطوری که در شکل (۱۰.۲) نشان داده شده است برابر هستند.



شکل ۱۱.۲ :

شکل ۱۰.۲ :

- الف- پرتوی از نور از سمت چپ بطور عمودی بر قاعده منشور تابیده و وارد نیمه بالائی و یا پائینی منشور می‌شود. انحراف زاویه  $\theta$  را برای دو حالت بدست آورید. زاویه  $\alpha$  را کوچک فرض کنید. طرح خود را رسم و علامت گذاری کنید.

- ب- یک موج صفحه‌ای بطور عمودی بر قاعده منشور می‌تابد و کل منشور را روشن می‌کند. حلقه‌های تداخل روى پرده موازی قاعده منشور مشاهده می‌شود. اصول این حلقه‌ها چیست؟ رابطه‌ای برای حلقه‌ها بر حسب زاویه انحراف  $\theta$  پرتو تابشی بدست آورید. طرح خود را رسم و علامت گذاری کنید.

- ج- در یک دومنشور در نور زرد، فاصله حلقه‌ها صد میکرومتر ( $10^{-2} cm$ ) مشاهده می‌شود. زاویه قاعده  $\alpha$  این منشور را بر حسب درجه تخمین زنید. انتخاب ضریب شکست و طول موج نور زرد را مشخص و توجیه کنید.

<sup>۵</sup>Fresnel biprism

(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)  
حل:

- الف- پرتوی که بطور قائم بر قاعده منشور می‌تابد، در دو سطح شکسته می‌شود. اشعه‌ای که از قسمت نیمه بالائی منشور وارد می‌شود بطور مورب بسوی پائین حرکت می‌کند و با توجه به تقارن، نوری که از قسمت نیمه پائینی منشور وارد می‌شود بسمت بالا، مانند شکل (۱۱.۲)، منحرف می‌شود. اندازه انحراف زاویه برای هر دو حالت یکسان است، و چون  $\alpha$  کوچک است، داریم

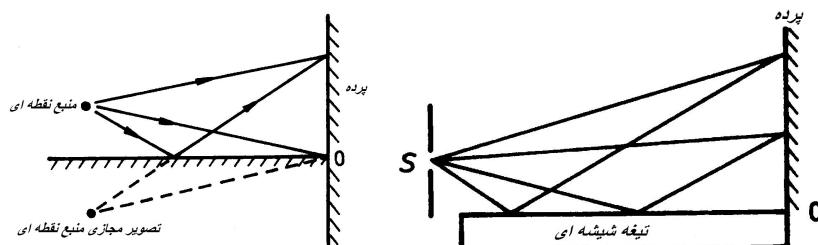
$$\theta = (n - 1)\alpha$$

- ب- دو پرتو موازی نوری که بطور متقارن از نیمه‌های بالا و پائین منشور وارد می‌شوند، با یکدیگر تداخل کرده و حلقه‌های تداخل را در طول محور  $x$  روى پرده تولید می‌کنند. فاصله حلقه‌ها برابر است با:

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \approx \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{\lambda}{2(n - 1)\alpha}$$

- ج- برای نور زرد  $\lambda = 6000\text{Å}$  و ضریب شکست دومنشور  $n = 1.5$  و  $\alpha = 6 \times 10^{-3}\text{rad} = 21'\text{}$  انتخاب می‌شود، بنابراین  $100\mu\text{m}$

۲۰۰۹



شکل ۱۳.۲:

شکل ۱۲.۲:

آینه لوید<sup>۶</sup> (شکل ۱۲.۲) را می‌توان برای تولید حلقه‌های تداخل روی پرده ناشی از یک منبع تکی که در شکل نشان داده شده است، استفاده کرد. دو سامانه منبع همدوس که معادل آن است رسم کنید. اولین حلقه (در نقطه ۰) تاریک است. این به چه معنا است؟

<sup>۶</sup>Lloyd's mirror

(ویسکانسین)  
حل:

معادل سامانه دو منبع برای آینه لوید در شکل (۱۳.۲) نشان داده شده است. حلقه تاریک در نقطه صفر بدین معنی است که پرتو بازتاب شده از سطح آینه به اندازه صد و هشتاد درجه ( $\pi$ ) در بازتاب اختلاف فاز پیدا کرده است.

## ۲۰۱۰

تداخل سنج مایکلسون<sup>v</sup> وقتی با منبع نوری به طول موج  $\lambda = 5000\text{\AA}$  روشن شود، الگوی حلقه‌های مدور هم مرکز تولید می‌کند. چقدر باید بازوی محرک را تغییر مکان دهیم تا هزار حلقه از مرکز خال ظاهر شود؟ اگر مرکز روشن باشد، ساعت زاویه‌ای اولین حلقه تاریک را بر حسب اختلاف طول مسیر بین دو بازو و طول موج  $\lambda$  محاسبه کنید.

(ویسکانسین)  
حل:

دایره‌های هم مرکز، که به حلقه‌های تمایل برابر<sup>۴</sup> نامیده می‌شوند، وقتی دو آینه بازتابگر دقیقاً عمود بر یکدیگر باشند، بدست می‌آید. اختلاف طول مسیر  $\Delta$  دو بازو از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta = 2nd \cos \theta = 2n(l_1 - l_2) \cos \theta$$

که در آن  $n$  ضریب شکست محیط (برای هوا  $n = 1$ )،  $d = l_1 - l_2$  اختلاف طول مسیر<sup>۵</sup> یا OPD بین دو بازوی  $l_1$  و  $l_2$  و  $\theta$  زاویه تابش نور در آینه است.  
(۱) برای ظاهر شدن هزار حلقه از مرکز،  $\Delta$  باید  $1000\lambda$  تغییر کند. بنابراین  $2d = 1000\lambda$  یا  $d = 500\lambda = 0.25mm$  یعنی بازوی متحرک  $0.25mm$  تغییر مکان دهد.

(۲) اگر مرکز روشن باشد، داریم:

$$2d = m\lambda,$$

که در آن  $m$  عدد صحیح است.  
برای اولین حلقه تاریک، داریم:

$$2d \cos \theta = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda,$$

<sup>v</sup> Michelson interferometer

<sup>۴</sup> Equal inclination

<sup>۵</sup> Path length difference (OPD)

با کم کردن بدست می‌آید

$$2d(1 - \cos \theta) = \frac{\lambda}{2}.$$

برای  $\theta$  های کوچک،  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ، از اینرو

$$\theta \approx \sqrt{\lambda/2d} \text{ rad.}$$

$\theta = 0.032 \text{ rad} = 1.8^\circ$ ، خواهیم داشت:  $d = 0.25 \text{ mm}$

## ۲۰۱۱

ضخامت یک فیلم حباب صابون را که تداخل سازنده مرتبه دوم برای نور قرمز ( $\lambda = 7000 \text{ \AA}$ ) تولید می‌کند بدست آورید. ضریب شکست فیلم ۱.۳۳ است. فرض کنید پرتو موازی نور تابشی  $30^\circ$  نسبت به خط قائم منحرف می‌شود.

(شیکاکو)

حل:

در یک ناحیه محدود، فیلم را می‌توان یک تیغه موازی با ضریب شکست  $n = 1.33$  فرض کرد. اختلاف مسیر نوری پرتو بازتاب شده در سطح‌های بالائی و پائینی برابر است با:

$$\Delta = 2nd \cos \theta + \frac{\lambda}{2}$$

برای تداخل افزاینده مرتبه دوم، داریم:

$$\Delta = 2\lambda,$$

یا

$$d = \frac{3\lambda}{4n \cos \theta}$$

که در آن  $\theta$  زاویه شکست بداخل فیلم است. از قانون اسنل<sup>۱۰</sup> داریم:

$$\sin \theta_0 = n \sin \theta,$$

يعني؛

$$\sin \theta = \frac{1}{n} \sin \theta_0 = \frac{1}{2n}$$

یا

$$\cos \theta = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2}$$

در نتیجه

$$d = 4260 \text{ \AA}$$

---

<sup>۱۰</sup> Snell's Law

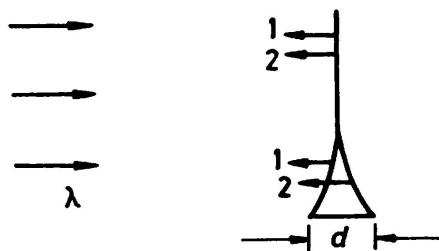
## ۲۰۱۲

یک فیلم قائم صابون بطور افقی با نور سدیم ( $\lambda = 589 \times 10^{-9} m$ ) بازتاب شده از آن مشاهده می‌شود. بالای فیلم آنقدر نازک است که در تمام رنگ‌ها سیاه بنظر می‌آید. پنج حلقه روشن، که مرکز پنجمی در پائین است، بوجود می‌آید. ضخامت فیلم صابون چقدر است؟ ضریب شکست آب ۱.۳۳ است.

(ویسکانسین)

**حل:**

ضخامت بالای فیلم خیلی کمتر از  $(2n)/\bar{\lambda}$  است. در اینجا  $\bar{\lambda}$  طول موج متوسط



شکل ۱۴.۲ :

طیف قابل مشاهده که در حدود  $nm = 550$  است و از آن می‌توان صرفنظر کرد. اختلاف فاز بین پرتوها (که با ۱ و ۲ در شکل ۱۴.۲ نشان داده شده)، سمت چپ و راست سطوح بازتاب شده به  $\pi$  نزدیک می‌شود ازاینرو فیلم بوسیله نور بازتاب شده سیاه بنظر می‌آید.

اختلاف فاز بین دو پرتو در پائین برابر است با:

$$\delta = \pi + \frac{2nd}{\lambda} \cdot 2\pi$$

که در آن  $d$  ضخامت است. برای مرکز حلقه پنجم، داریم:

$$\delta = 10\pi$$

با استفاده از مقادیر داده شده برای  $\lambda$  و  $n$ ، بدست می‌آید:

$$d = 1.0 \mu m$$

## ۲۰۱۳

نور سفیدی بر یک فیلم نازک بضخامت  $5000 \text{ \AA}$  که ضریب شکست آن  $n = 1.5$  است، بطور قائم می‌تابد. بازاء چه طول موجی از طیف نور مرئی  $(4000 - 7000) \text{ \AA}$  است،

شدت نور بازتاب شده بیشینه است؟  
(ویسکانسین)

**حل:**

وقتی تداخل افزاینده رخ میدهد که:

$$OPD = 2nt = k\lambda + \frac{\lambda}{2},$$

در آن  $t$  ضخامت فیلم و  $k$  عددی صحیح است. بنابراین بازتاب بیشینه در طول موج‌های زیر داریم:

$$\lambda = \frac{4nt}{2k+1} = \begin{cases} 6000\text{\AA} & \text{برای } k=2 \\ 4285\text{\AA} & \text{برای } k=3 \end{cases}$$

### ۲۰۱۴

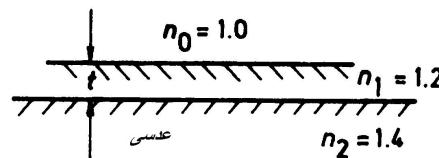
یک عدسی با فیلم نازکی به ضریب شکست ۱.۲ پوشش داده می‌شود تا بازتاب از سطح را در طول موج  $\lambda = 5000\text{\AA}$  کاهش دهند. ضریب شکست شیشه عدسی ۱.۴ است که در شکل (۱۵.۲) نشان داده شده است.

- الف- کمترین ضخامت پوشش چقدر باشد تا شدت بازتاب نور را کمینه کند؟

- ب- در حالت بالا شدت نور بازتاب شده کم است اما صفر نیست. دلیل آنرا توضیح دهید. چه چیزی را باید تغییر داد و چقدر تا شدت بازتاب نور به صفر برسد؟

(ویسکانسین)

**حل:**



شکل ۱۵.۲:

- الف- اگر پرتوهای نور بازتاب شده از دو سطح فیلم پوششی اختلاف فاز  $\pi$  داشته باشند، یعنی

$$2n_1 t = \lambda/2$$

## فصل ۲. نورشناخت موجی

در این صورت  $t = \lambda/(4n_1) = 0.10 \mu m$  و شدت نور بازتاب شده کمینه خواهد بود.

- ب- وقتی نور تابشی بطور عمودی از محیط  $A$  که دارای ضریب شکست  $n_A$  است وارد محیط  $B$  که دارد ضریب شکست  $n_B$  است شود؛ ضریب بازتاب  $R$  خواهد بود:

$$R = [(n_A - n_B)/(n_A + n_B)]^2.$$

ضرایب بازتاب از سطح های بالائی و پائینی پوشش بترتیب خواهند بود:

$$R_1 = \left( \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \right)^2 = \left( \frac{1}{1.1} \right)^2$$

و

$$R_2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{1}{1.3} \right)^2$$

چون  $R_1 \neq R_2$  است، شدت پرتو نورهای بازتاب شده از دو سطح فیلم یکسان نیست و شدت شدت نور حاصله، حتی تداخل کاهنده هم رخ دهد، صفر نخواهد بود. اگر ضریب شکست پوشش برابر  $n'_1$  باشد تا  $R_1 = R_2$  شود، یعنی

$$\left( \frac{n'_1 - n_0}{n'_1 + n_0} \right)^2 = \left( \frac{n'_1 - n_2}{n'_1 + n_2} \right)^2$$

شدت نور بازتاب شده حاصل صفر خواهد شد. در این صورت لازم است که

$$n' = \sqrt{n_0 n_2} = 1.18$$

## ۲۰۱۵

یک صفحه نازک شیشه‌ای به ضخامت  $1.2 \times 10^{-6} m$  و ضریب شکست  $n = 1.50$  داده شده است. به این شیشه یک نور مرئی بین  $400 nm$  و  $700 nm$  بطور عمودی می‌تابد. در چه طول موجی بیشترین شدت نور را از صفحه خواهیم داشت؟ ( $nm = 10^{-9} m$ ) (ویسکانسین)

**حل:**

تداخل افزاینده وقتی رخ می‌دهد که

$$OPD = 2nd + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

که در آن  $d$  ضخامت شیشه و  $k$  عدد صحیحی است. برای آنکه بیشینه بازتاب را داشته باشیم؛

$$\lambda = \frac{2nd}{k - \frac{1}{2}}$$

که در ردیف طول موج  $400\text{ nm}$  و  $700\text{ nm}$ ، طول موج بیشترین بازتاب برابر با  $\lambda_1 = 424\text{ nm}$  (برای  $k = 7$ )،  $\lambda_2 = 480\text{ nm}$  (برای  $k = 8$ )،  $\lambda_3 = 554\text{ nm}$  (برای  $k = 9$ ) و  $\lambda_4 = 655\text{ nm}$  (برای  $k = 6$ ) است.

## ۲۰۱۶

یک فیلم از  $TiO_2$  به ضریب شکست ۲.۵ روی شیشه‌ای به ضریب شکست ۱.۵ قرار داده می‌شود تا ضریب شکست را در ناحیه مرئی را افزایش دهد. طول موج و ضخامت لایه بر حسب میکرون انتخاب کرده و بازتابش این انتخاب را بدست آورید.

(ویسکانسین)

### حل:

فرض کنید  $n_0$ ،  $n_1$  و  $n_2$  بترتیب ضریب شکست هوا،  $TiO_2$  و شیشه و  $d$  ضخامت لایه پوششی باشد. تداخل کاهنده بین نورهای بازتاب شده وقتی رخ می‌دهد که

$$OPD = 2nd - \frac{\lambda}{2} = \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda$$

که در آن  $k$  عددی صحیح است. و نصف طول موج به علت اختلاف فاز در فصل مشترک  $TiO_2$  و هوا است.  
برای  $k = 0$  و طول موج  $\lambda = 5500\text{\AA}$ ، داریم  $d = \lambda/(4n_1) = 0.055\mu m$ . بنابراین بازتابش برابر است با:

$$R_{\lambda_0} = \left( \frac{n_0 - \frac{n_1^2}{n_2}}{n_0 + \frac{n_1^2}{n_2}} \right)^2 = 0.376$$

## ۲۰۱۷

یک فیلم صابون ( $n = 4/3$ ) به ضخامت  $d$  با نوری به طول موج  $500\text{ nm}$  که بطور قائم به آن می‌تابد، روشن می‌شود. بطور تقریبی بیشینه و کمینه شدت نور بازتاب از فصل مشترک را نسبت به شدت نورتابشی، وقتی  $d$  تغییر می‌کند، محاسبه کنید.

(ویسکانسین)

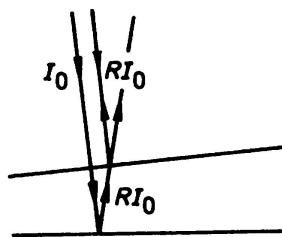
### حل:

بازتابش <sup>۱۱</sup> از هر سطح فیلم صابون برابر است با:

$$R = \left[ \frac{(n - n_0)}{(n + n_0)} \right]^2 = \left[ \frac{(\frac{4}{3} - 1)}{(\frac{4}{3} + 1)} \right]^2 \approx 0.02.$$

---

<sup>۱۱</sup> Reflectivity



شکل ۱۶.۲:

برای یک فیلم با بازتابش کم  $R$ ، شدت نور بازتاب شده از هر یک از سطح‌ها را می‌توان تقریباً  $RI_0$  در نظر گرفت. در اینجا  $I_0$  شدت نور با تابش عمودی است. بنابراین الگوی تداخل شدت نور برابر است با:

$$I = 2RI_0(1 + \cos \delta)$$

که در آن  $\delta$  اختلاف فاز بین پرتوهای نور بازتاب شده از دو سطح فیلم صابون است.

$$\delta = \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \right) \cos \theta$$

در اینجا  $\theta$  زاویه انحراف دو سطح است.  
بنابراین

$$I_{max}/I_0 = 4R = 0.08$$

$$I_{min}/I_0 = 0.$$

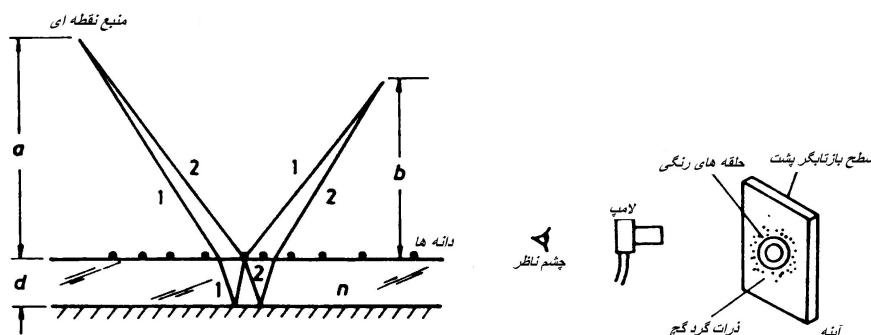
### ۲۰۱۸

چگونگی تشکیل حلقه‌های رنگی را در آزمایشی که در شکل (۱۷.۲) نشان داده شده است توضیح دهید و اندازه حلقه‌ها که توضیح شما توانسته دارد تخمین زنید.  
چرا حلقه‌ها اینقدر روشن هستند؟

راهنمایی: مسائل آینه شامل "اپتیک تاشده" است این مسئله تا نشده است.  
(پرینستون)

### حل:

دو پرتو همدوس که از یک منبع نقطه‌ای خارج می‌شوند، مانند شکل (۱۸.۲) درنظر گیرید. پرتو شماره ۱ بوسیله آینه بازتاب شده و سپس بوسیله یک دانه بطرف نقاط



شکل ۱۸.۲:

شکل ۱۷.۲:

معنی از فضای پراشیده<sup>۱۲</sup> می‌شود. پرتو دوم ابتدا بوسیله دانه بسوی آینه پراشیده شده و سپس بازنگشته شده بسوی نقطه موردنظر می‌رود.  
پرتو  $OPD$  حاصله تداخل را در این نقطه تعیین می‌کند. برای برخورد قائم، الگوی تداخل یک سری حلقه‌های بشاععهای  $r$  است:

$$r = \left( \frac{nm\lambda a^2 b^2}{d(a^2 - b^2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن  $n$  ضریب شکست شیشه،  $d$  ضیحامت تیغه شیشه،  $\lambda$  طول موج نور،  $a$  فاصله بین تیغه و منبع نقطه‌ای،  $b$  فاصله بین تیغه و نقطه تداخل و  $m$  عددی است صحیح.

برای منبع نور سفید، حلقه‌های رنگی در فرکانس‌های مختلف و در حلقه‌های مختلف تشکیل می‌شود.  
حلقه‌ها روشن هستند زیرا تداخل سازنده است.

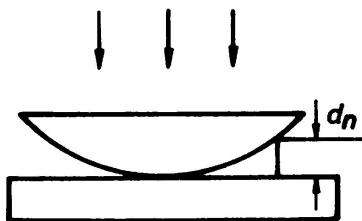
## ۲۰۱۹

یک شیشه پنج میلی‌متر و به قطر دو سانتی‌متر ادعا می‌شود که هر سطح آن در حدود یک چهارم طول موج نور سبز ( $\lambda = 546 nm$ ) صاف، و هر دو سطح موازی در حدود ۵ ثانیه انجانا دارند (هر یک ثانیه منحنی برابر با  $4.85 \times 10^{-6}$  رادیان است). چگونه می‌توانید این خاصیت را اندازه‌گیری کنید و مشخصات تولیدکننده را تائید کنید. می‌توانید ضریب شکست شیشه  $n = 1.500$  فرض کنید. (ویسکانسین)

<sup>۱۲</sup>Scattered

**حل:**

برای آزمایش صاف بودن یک صفحه، یک عدسی محدب-مسطح با فاصله کانونی



شکل ۱۹.۲ :

طويل از طرف انحنا روی آن قرار داده، سپس از بالا نور سبز جيوه، مطابق شكل (۱۹.۲)، می تابانيم. در اين صورت حلقه های نيوتن تشکيل و مشاهده می شود. فاصله بين دو حلقه مجاور به تغيير ضخامت فاصله هوائي  $\frac{\lambda}{2}$  مربوط است. برای صاف بودن در حدود  $\frac{\lambda}{4}$ ، اعوجاج يك حلقه باید کمتر از نصف اين فاصله باشد.

برای آزمایش موازی بودن سطوح شیشه پنجره، آنرا بصورت يك گوه شیشه ای با ضریب شکست  $n = 1.500$  در نظر می گیریم. با روشن کردن آن از بالا، حلقه های تداخل مشاهده می شود بطوری که از يك حلقه به بعدی، ضخامت  $d$  بقدر  $\frac{\lambda}{2n}$  تغيير می کند. برای يك گوه به زاويه  $\theta$  فاصله برابر است با

$$S = \frac{\Delta d}{\theta} = \frac{\lambda}{2n\theta}$$

$$\text{برای } \theta \lesssim 5 \times 4.85 \times 10^{-6} \text{ rad} \text{ لازم است که} \\ S \gtrsim \frac{546 \times 10^{-7}}{2 \times 1.5 \times 24.25 \times 10^{-6}}$$

هر دو شرط بالا باید برقرار تا ادعای تولیدکننده تائید شود.

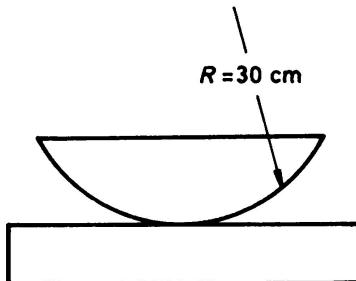
## ۲۰۲۰

شعاع انحنا سطح محدب يك عدسی محدب-مسطح  $30\text{cm}$  است. عدسی را از طرف محدب ش روی يك شیشه مسطح قرار داده و از بالا با نور قرمز به طول موج  $650 \text{ nm}$  روشن می شود (شکل ۲۰.۲).

- الف- قطر سومین حلقه روشن در الگوی تداخل را بدست آورید.

- ب- ثابت کنید که برای  $R$  بزرگ این قطر تقریباً متناسب با  $R^{1/2}$  است.

(سانی، بوفالو<sup>۱۳</sup>)  
حل:



شکل ۲۰.۲

- الف- شعاع حلقه‌های روشن نیوتن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$r_j = \sqrt{(2j+1) \frac{\lambda}{2} R} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

برای سومین حلقه روشن،  $j = 2$ ، و شعاع خواهد بود:

$$r = \sqrt{(4+1) \times \frac{650 \times 10^{-7}}{2} \times 30} = 0.7 \text{ mm}$$

یعنی، قطر آن برابر است با:  
 $d = 2r = 1.4 \text{ mm}$

- ب- بطوری از رابطه مشاهده می‌شود،  $d = 2r \propto \sqrt{R}$  است. بایستی توجه کرد که برای بدست آوردن این رابطه از تقریب  $R$  بزرگ استفاده شده است.

## ۲۰۲۱

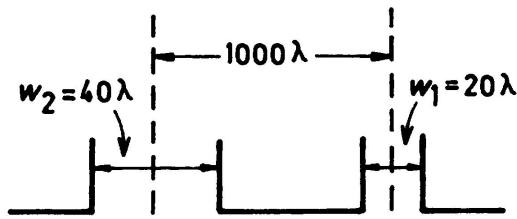
یک تداخل دو شکاف با موج صفحه‌ای به طول موج  $\lambda$  که از درون دو شکاف با عرض‌های متفاوت، مثلاً  $w_1 = 20\lambda$  و  $w_2 = 40\lambda$  و فاصله مرکز آنها  $1000\lambda$  است می‌گذرد، ساخته می‌شود. اگر مشاهده بر روی پرده‌ای خیلی دور از دو شکاف، مثلاً فاصله  $L >> 1000\lambda$ ، انجام شود، خواسته‌های زیر را تعیین کنید.

- الف- فاصله  $x$  بین دو بیشینه مجاور.

---

<sup>۱۳</sup>SUNY, Buffalo

- ب- عرض‌های  $\Delta x_1$  و  $\Delta x_2$  بیشینه‌های مرکزی الگوهای پراش هر یک از شکاف‌ها (یعنی، فاصله بین اولین صفرها).
- ج- تعداد حلقه‌های تولید شده که از هم پوشانی بیشینه‌های مرکزی تولید می‌شود.
- د- نسبت بین شدت بیشینه و گمینه در مرکز الگوهای تداخلی.
- ه- یک رابطه تحلیلی برای شدت روی پرده بر حسب  $x$  و قتنی  $x = 0$  دقیقاً مرکز الگوی تداخلی است.  
دلائل خود را عنوان کنید.  
(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)



شکل ۲۱.۲ :

حل:

- الف- چون  $L >> w_1, w_2$ ، می‌توانیم بردارهای دامنه میدان الکتریکی تولید شده توسط هر یک از شکاف‌های  $S_1$  و  $S_2$  را بترتیب  $E$  و  $2E$  درنظر گیریم. از آنجائی که  $I \propto E^2$  است، شدت‌های مربوطه  $I_1 = I_0$  و  $I_2 = 4I_0$  خواهد بود.

برای تداخل دو شکاف، دامنه منتجه از جمع بردارهای  $E_1$  و  $E_2$  که با هم زاویه  $\delta$  می‌سازند و ناشی از اختلاف فاز است، بدست می‌آید. بنابراین:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \\ &= I_0 + 4I_0 + 4I_0 \cos(2\pi \sin \theta / \lambda) = 5I_0 + 4I_0 \cos(2000\pi \sin \theta) \end{aligned}$$

که در آن  $d$  فاصله مرکزهای دو شکاف و برابر با  $1000\lambda$ ،  $\frac{s}{L} \approx \sin \theta \approx \frac{\delta}{1000}$  و  $x$  فاصله از مرکز الگوی تداخلی است. چون  $x >> d$  است،  $\sin \theta \simeq \theta$  و بیشینه‌های مجاور وقتی  $\delta \theta = \frac{1}{1000} 2000\pi \delta \theta = 2\pi$  است، رخ میدهد؛

$$\delta \theta = L \delta \theta = \frac{L}{1000}$$

- ب- توزیع شدت پراش ناشی از شکاف با عرض  $w$  برابر با  $\sim \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2$  و در آن  $\theta = \frac{\pi w}{\lambda} \sin \theta$  است، بنابراین

$$I_1 = I_0 (\sin \beta_1 / \beta_1)^2, \quad \beta_1 = \pi w_1 \sin \theta / \lambda = 20\pi \sin \theta$$

$$I_2 = 4I_0 (\sin \beta_2 / \beta_2)^2, \quad \beta_2 = \pi w_2 \sin \theta / \lambda = 40\pi \sin \theta$$

اولین صفر در فاصله زاویه‌ای از مرکز  $\theta_1$  و  $\theta_2$  اتفاق می‌افتد

$$20\pi \sin \theta_1 \simeq 20\pi \theta_1 = \pi \quad \text{یا} \quad \theta_1 = \frac{1}{20}, \quad \text{و} \quad \theta_2 = \frac{1}{40}$$

بنابراین عرض زاویه‌ای بیشینه‌های مرکزی برابر است با:

$$\Delta \theta_1 = 2\theta_1 = \frac{1}{10}, \quad \text{و} \quad \Delta \theta_2 = \frac{1}{20}$$

و عرض‌های مربوطه خواهند بود:

$$\Delta_1 = L\theta_1 = L/10 \quad \text{و} \quad \Delta x_2 = \frac{L}{20}$$

- ج- عرض همپوشانی این بیشینه‌های مرکزی برابر با  $\frac{L}{20}$ ، و تعداد حلقه‌ها برابر با  $(L/20)/(L/1000) = 50$  است.

- د- بیشینه و کمینه شدت در مرکز الگوی تداخلی بترتیب از  $\cos \delta = 1$  و  $\cos \delta = -1$  بدست می‌آید. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{9I_0}{I_0} = 9.$$

- ه- با به حساب آوردن اثر پراش میدان‌های حاصل از دو شکاف  $S_1$  و  $S_2$ ، خواهیم داشت:

$$E_1 = E_0 (\sin \beta_1 / \beta_1), \quad \text{و} \quad E_2 = E_0 (\sin \beta_2 / \beta_2)$$

که در  $E_0$  مقداریست ثابت. با توجه به  $\beta_2 = 2\beta_1$ ، داریم:

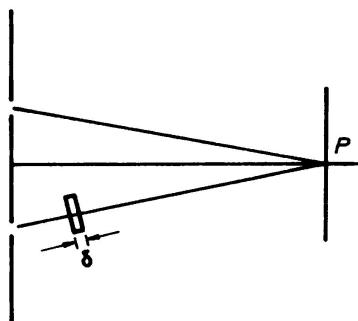
$$E = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2| = E_0 \frac{\sin \beta_1}{\beta_1} (5 + 4 \cos \delta)^{\frac{1}{2}}$$

و بنابراین شدت خواهد بود:

$$I(x) = I_0 \left( \frac{\sin \frac{20\pi x}{L}}{\frac{20\pi x}{L}} \right)^2 \left( 5 + 4 \cos \frac{2000\pi x}{L} \right)$$

## ۲۰۲۲

شکل (۲۰.۲) آزمایش دو شکاف تداخل را که با نور تکرنک همدوس به طول موج  $\lambda$  توسط منبع دوری روشن می‌شود نشان میدهد. عرض هر شکاف  $w$ ، ( $w > \lambda$ ) و الگوی تداخل در روی پرده دوری از دو شکاف مشاهده می‌شود. یک قطعه شیشه نازک به ضخامت  $\delta$  و ضریب شکست  $n$  بین یکی از شکاف‌ها و پرده و عمود بر مسیر نور قرار داده می‌شود. می‌خواهیم شدت نور در نقطه مرکزی  $P$  را بر حسب تابعی از ضخامت  $\delta$  بدست آوریم. فرض کنید که شیشه نور را بازتاب یا تضعیف نکند. اگر شدت نور برازی  $I_0$  باشد:



شکل ۲۰.۲

- الف- شدت نور را در نقطه  $P$  بر حسب ضخامت  $\delta$  چقدر است؟
- ب- بازاء چه مقدار  $\delta$  شدت نور در  $P$  کمینه است؟
- ج- فرض کنید که عرض  $w$  یکی از شکاف‌ها به  $2w$  افزایش یابد و دیگر شکاف تغییر نکند. شدت نور را در نقطه  $P$  بر حسب ضخامت  $\delta$  چقدر است؟

(دانشگاه کلمبیا)

حل:

- الف- برای دستگاه دو شکاف، شدت نور در یک نقطه روی پرده برابر است با:

$$I \sim 4a^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)$$

که در آن  $a$  دامنه ناشی از هر شکاف و  $4a^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)$  جمله پراش تک شکاف و جمله  $\cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)$  جمله تداخل است. در اینجا

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\delta$$

اختلاف فاز بین امواج ناشی از دو شکاف و  $n$  ضریب شکست شیشه و  $\delta$  ضخامت صفحه شیشه است. شدت نور در نقطه مرکزی  $P$  وقتی  $0 \rightarrow \beta$ ، خواهیم داشت  $1 \rightarrow \frac{\sin \beta}{\beta}$ ، بنابراین

$$I \sim 4a^2 \cos^2 \left[ \frac{\pi}{\lambda}(n-1)\delta \right]$$

یا

$$I = I_0 \cos^2 \left[ \frac{\pi}{\lambda}(n-1)\delta \right]$$

که در آن  $I_0$  شدت نور در نقطه  $P$  بازاء  $0 = \delta$  است.

- ب- برای  $\pi\delta(n-1)/\lambda = (2k+1)\pi/2, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\delta = \frac{(2k+1)\lambda}{2(n-1)}$$

شدت نور در نقطه  $P$  کمینه خواهد بود. در حالت خاض برای  $0 = k$ ، داریم:

$$\delta_{min} = \frac{\lambda}{2(n-1)}$$

توجه کنید که شدت نور در کمینه‌ها، برای شکاف با عرض معین، دقیقاً صفر نیست.

- ج- هرگاه عرض یکی از شکاف‌ها به  $2w$  افزایش یابد، دامنه ناشی از این شکاف به  $2a$  تغییر می‌کند. اکنون شدت نور امواج حاصله در نقطه  $P$  خواهد بود:

$$\begin{aligned} I &\sim a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \phi \\ &= a^2 + (2a)^2 + 2a \cdot (2a) \cos \phi \\ &= a^2(5 + 4 \cos \phi) = a^2[5 + 4 \cos(2\pi(n-1)\delta/\lambda)] \end{aligned}$$

برای  $\delta = 0$ ، شدت نور در نقطه  $P$  بیشینه،  $I'_0 = 9a^2$  است. با مقایسه با بخش الف، خواهیم داشت:

$$\frac{I'_0}{I_0} = \frac{9a^2}{4a^2} = 2.25$$

## ۲۰۲۳

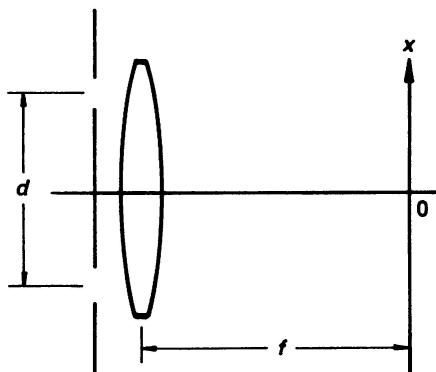
یک دستگاه تداخل سنج دو شکاف یانگ نوری از یک ستاره را دریافت کرده و توسط عدسی، مانند شکل (۲۳.۲)، روی صفحه متمرکز می‌کند.

- الف- الگوی تداخل را بر حسب تابعی از  $x$  تعیین کنید.

- ب- اگر تداخل سنج از روی زمین بطرف ستاره گرفته شود، اگر زاویه بیشتر از  $\theta_{min}$  باشد، الگوی تداخل ناپدید می‌شود. دلیل آنرا توضیح داده و زاویه  $\theta_{min}$  را بدست آورید.

(دانشگاه کلمبیا)

حل:



شکل ۲: ۲۳.۲

- الف- فرض کنید عرض هر شکاف  $a$  و اندازه زاویه‌ای ستاره  $\theta$  باشد. با تقریب خوب الگوی توزیع شدت تداخل با استفاده از نتایج مسئله ۲۰۰۷ خواهد بود:

$$I(x, \theta) \sim \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( 1 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \gamma \right)$$

که در آن

$$\beta = \frac{\pi ax}{\lambda f}, \quad \alpha = \frac{\pi d\theta}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{2\pi dx}{\lambda f}$$

- ب- قابلیت دید<sup>۱۴</sup> الگوی تداخل برابر است با:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

که در آن  $I_{max}$  و  $I_{min}$  بترتیب شدت‌های مجاور بیشینه و کمینه هستند. بنابراین:

$$V = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

---

<sup>۱۴</sup>Visibility

وقتی  $\theta$  از صفر تا  $\theta_{min}$  افزایش می‌یابد،  $V$  از یک تا صفر کاهش می‌یابد و در آن  $\theta_{min}$  برابر است با:

$$\frac{\pi d\theta_{min}}{\lambda} = \pi, \quad \text{یا} \quad \theta_{min} = \frac{\lambda}{d}$$

الگوی تداخل نیز وقتی  $\theta \geq \theta_{min}$  شود، ناپدید می‌شود. در واقع، آنسوی  $\theta_{min}$ ، الگوی تداخل ظاهر و سپس دوباره ناپدید و همین طور چندین بار تکرار، اما تغییرات  $V$  در اطراف صفر کوچکتر و کوچکتر می‌شود.

## ۲۰۲۴

یک سامانه پراش دو شکاف با نور همدوسی به طول موج  $\lambda$  بطور عمودی روشن می‌شود. فاصله دو شکاف  $a$  است. شدت نور در فاصله دور (نسبت به  $a$ ) روی پرده، وقتی یکی از شکاف‌ها پوشانیده شده است،  $I_0$  آشکار می‌شود.

• الف- برای وقتی هر دو شکاف باز هستند، پاسخ آشکارساز را بر حسب تابعی از  $\theta$ ، که در آن  $\theta$  زاویه نسبت به خط عمود بر سامانه است، محاسبه و رسم کنید.

• ب- اکنون فرض کنید که فاصله دو شکاف "می‌لرزد" بطوری که فاصله  $a$  بین دو شکاف بر حسب زمان تغییر می‌کند و آن از زمان تناوب نور خیلی بزرگتر و نسبت به پاسخ زمانی آشکارساز شدت نور کوچکتر است. فرض کنید که فاصله  $a$  دارای توزیع احتمال گوسی با عرض  $\Delta$  و مقدار متوسط  $\bar{a}$ ، ضمناً  $\lambda > \Delta > \bar{a}$  است. بدون انجام محاسبات مفصل، الگوی شدت نور اندازه‌گیری شده توسط آشکارساز را برای این حالت رسم کنید.

(دانشگاه ام آی تی)

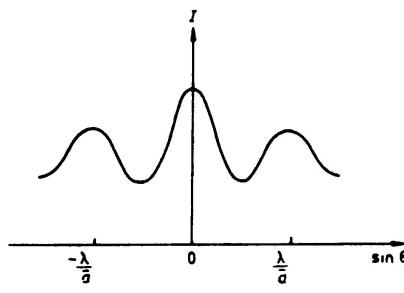
**حل:**

• الف- فرض کنید عرض دو شکاف خیلی کوچکتر از  $\lambda$  است، در این صورت لازم نیست پراش تولیده شده توسط هر شکاف را درنظر گیرید. فقط تداخل بین دو پرتو شکاف‌ها را لازم است درنظر گیرید.

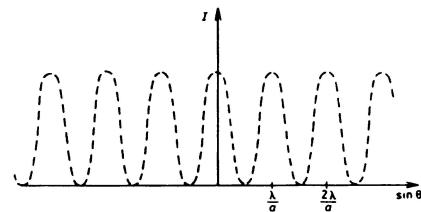
دامنه هر موج در روی پرده که بوسیله هر شکاف تولید می‌شود، برابر است با:

$$E_1 = A e^{-j k r_1}$$

$$E_2 = A e^{-j k r_2} = A e^{-j k r_1} \cdot e^{-j k a \sin \theta}$$



شکل ۲۵.۲ :



شکل ۲۴.۲ :

که در آن  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  و  $r_1, r_2$  فاصله بین نقطه مورد نظر و هر شکاف است. شدت نور منتجه برابر است با:

$$\begin{aligned} I \sim EE^* &= 2A^2 [1 + \cos(ka \sin \theta)] \\ &= 4A^2 \cos^2 \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

و این در شکل (۲۴.۲) رسم شده است.

- ب- چون فاصله شکاف‌ها نسبت به زمان تغییر می‌کند و این نسبت به پاسخ زمانی آشکارساز کوچک است، الگوی شدت نور گویای توزیع احتمال فاصله دو شکاف بطور گوسی است:

$$p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} e^{-\frac{(a-\alpha)^2}{2\Delta^2}}$$

بنابراین شدت آشکارشده دارای توزیع زیر خواهد بود:

$$I \sim p(a) \cos^2 \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)$$

ازاینرو موقعیت بیشینه اصلی ثابت باقی می‌ماند در حالی که تمایز<sup>۱۵</sup> یا قابلیت دید<sup>۱۶</sup> الگوی شدت نور بر حسب  $\theta$  کاهش می‌یابد. (شکل ۲۵.۲).

## ۲۰۲۵

در یک یا دو پاراگراف کوتاه، شرایطی را که تحت آن سرایط ناظر ممکن است یا ممکن نیست بتواند مستقیماً اثرات تداخل ناشی از دو زوج نور یا مولد صوت

<sup>۱۵</sup>Contrast

<sup>۱۶</sup>Visibility

مستقل را احساس کند تشریح کنید.

(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)

### حل:

یک ناظر ممکن است بتواند مستقیماً اثرات تداخل دو موج نور یا صوت مستقل را که هم‌فاز باشند درک کند مشروط بر آنکه زمان تناوب آن بیشتر از زمان پاسخ عضو حسگر انسان (چشم یا گوش) و توان دو مولد قابل مقایسه با یکدیگر باشد. تابشگر نور و مولد صوت معمولی این شرط اخیر را ارضاء نمی‌کند. بنابراین، انسان بقدرت می‌تواند مستقیماً اثرات تداخل را مشاهده نماید. برای نور لیزر با همدوسى زیاد، انسان مستقیماً می‌تواند اثرات تداخل را مشاهده نماید.

### ۲۰۲۶

• الف- وجه تفاوت پراش فرانهوفر<sup>۱۷</sup> و فرنل<sup>۱۸</sup> را بر حسب آزمایش‌های مورد استفاده بیان کنید.

• ب- بطور ترسیمی چینش آزمایشگاهی که می‌توان پراش فرانهوفر را مشاهده کرد نشان دهید.

• ج- الگوی تداخل روی پرده پراش فرانهوفر از یک شکاف (به عرض  $a$ ) و دو شکاف (به عرض  $a$  و فاصله  $d$ ) را رسم کنید. ویژگی‌های الگوی تداخل هر یک را مشخص کنید.

• د- الگوی تداخل حاصل از سه شکاف که با فاصله و عرض مساوی، بجای دو شکاف آزمایش یانگ، (روی پرده‌ای دور از شکاف‌ها) را محاسبه کنید.

(سانی، بوفالو<sup>۱۹</sup>)

### حل:

• الف- پراش فرانهوفر پراشی است که وقتی منبع نور و پرده مورد مشاهده خیلی دور از شکاف‌ها هستند از اینزو پرتوهای تابشی و پراشیده را می‌توان موج صفحه‌ای در نظر گرفت (شکل ۲۶.۲). از نظر تجربی نور منبع موازی با یک عدسی ارائه و بوسیله یک عدسی دیگر که پشت روزنه است روی پرده متمرکز می‌شود. پراش فرنل وقتی مشاهده می‌شود که منبع یا پرده یا هر دو در فاصله معینی از روزنه قرار دارند. در اینجا جبهه موج بجای صفحه‌ای

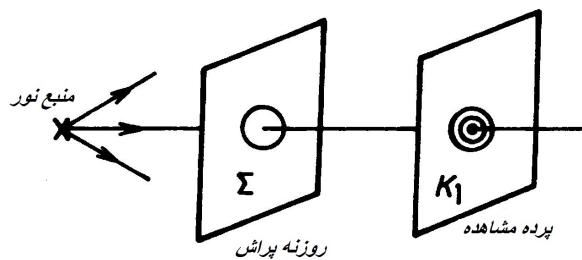
<sup>۱۷</sup>Flaunhofer

<sup>۱۸</sup>Fresnel

<sup>۱۹</sup>SUNY, Buffalo

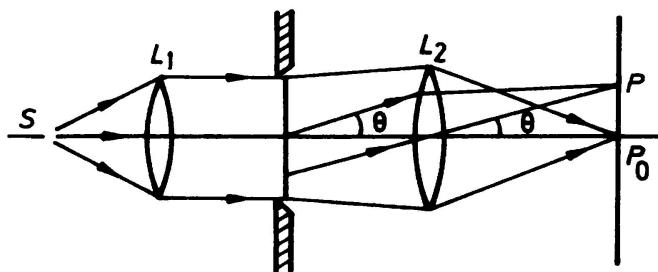
## فصل ۲. نورشناخت موجی

بودن پخش و واگرا می‌شود. و عدسی برای مشاهده پراش فرنل لازم نیست.



شکل ۲۶.۲:

- ب- منبع نور در صفحه کانوئی جلوئی عدسی محدب  $L_1$  واقع شده و نوری که از آن ظاهر می‌شود موج صفحه‌ای است. امواج روی روزنه پراش می‌افتد که در پشت عدسی محدب  $L_2$  قرار دارد. روی صفحه کانوئی عقبی  $L_2$  پرده مشاهده قرار دارد، شکل (۲۷.۲)، و در روی آن الگوی پراش فرانهوفر ظاهر می‌شود،

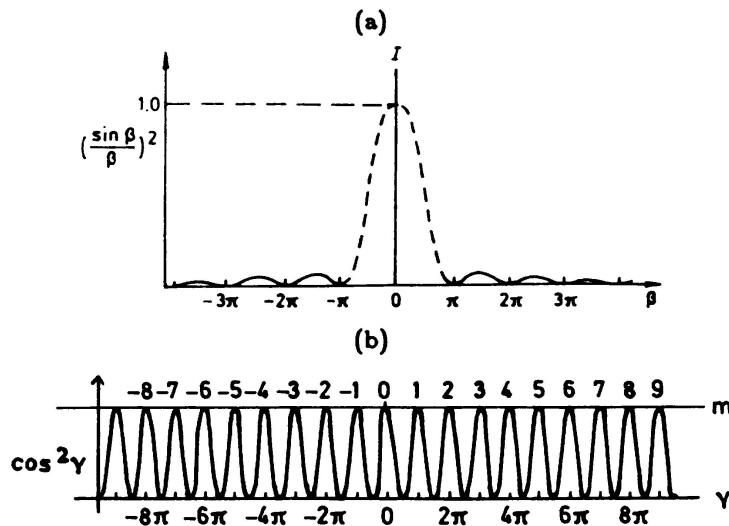


شکل ۲۷.۲:

- ج- توزیع شدت پراش از یک شکاف تکی به عرض  $a$  از رابطه زیر بدست می‌آید

$$I \sim A_0^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

که در آن  $\beta = \pi a \sin \theta / \lambda$  است. توزیع شدت در شکل (۲۸.۲) نشان داده شده است. ویژگی‌های آن بقرار زیر است.



شکل : ۲۸.۲

۱. بیشینه اصلی وقتی  $\theta$  به صفر می‌کند، اتفاق می‌افتد، بنابراین  $(\sin \beta / \beta)^2$  برابر با واحد می‌شود. نیم عرض زاویه در روزنه از رابطه  $\beta = \pi$  یا  $\theta \simeq \lambda/a$  بدست می‌آید. بنابراین هر قدر عرض کوچکتر باشد، الگوی پراش عریضتر خواهد بود.

۲. شدت نور پراش در زاویه‌ها  $\sin \theta = k\lambda/a$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) صفر می‌شود. بین دو کمینه مجاور یک بیشینه کوچک قرار دارد که شدت آن خیلی کمتر از بیشینه اصلی است و با افزایش  $k$  کاهش می‌یابد.

۳. عرض زاویه‌ای بیشینه شدت اصلی دو برابر سایر بیشینه‌ها است. توزیع شدت نور پراشیده با  $N$  شکاف، که عرض هر کدام  $a$  و تحت فاصله  $d$  هستند از رابطه زیر بدست می‌آید.

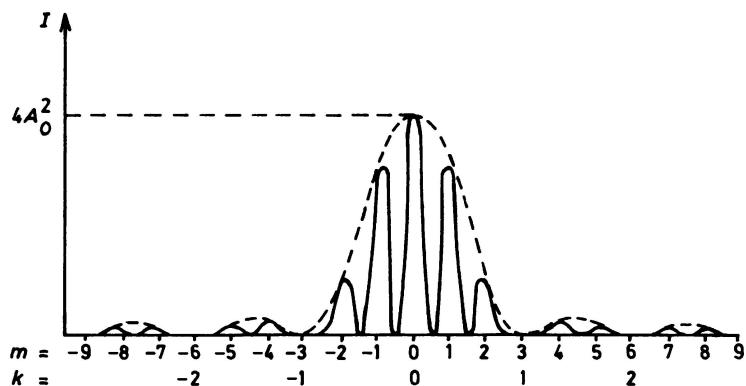
$$I = A_0^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \times \left( \frac{\sin N\gamma}{\gamma} \right)^2$$

که در آن  $\beta = \pi d \sin \theta / \lambda$ ،  $\gamma = \pi a \sin \theta / \lambda$ ،  $(\sin \beta / \beta)^2$  ضریب پراش،  $(\sin N\gamma / \sin \gamma)^2$  تداخل چند تداخل نامیده می‌شود. بازه  $N = 2$ ، توزیع شدت نوریکه با دو شکاف پراشیده می‌شود، برابر است با:

$$I = 4A_0^2 (\sin \beta / \beta)^2 \cos^2 \gamma$$

## فصل ۲. نورشناخت موجی

الگوی شدت نور پراشیده با دو شکاف که تحت فاصله  $d$  (مثلاً  $d = 3a$ ) هستند در شکل (۲۹.۲) نشان داده شده که تداخل الگوی شدت دو شکاف (شکل ۲۸.۲-ب) ضربدر الگوی پوش شدت نور پراش تک شکاف (شکل ۲۸.۲-الف) است. اگر  $\sin \theta = m\lambda/d$  یا  $\gamma = m\pi$  که در آن  $\dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  بیشینه‌ها بترتیب اتفاق می‌افتد. کمینه الگوی تداخل از  $\sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda/d$  بدست می‌آید. کمینه‌های پراش از  $\sin \theta = k\lambda/a$ , ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) جائی که ضربی پراش صفر می‌شود بدست است بوجود می‌آید. در این صورت بیشینه تداخل  $m$ ام و کمینه تداخل  $k$ ام مربوط به همان زاویه  $\theta$  ظاهر نخواهد شد و یا لاقل با دامنه خیلی کوچک است. بازاء  $d = 3a$ , مرتب سوم، ششم، نهم و  $\dots$ , بطوری که در شکل (۲۹.۲) نشان داده شده است، ظاهر نخواهد شد.



شکل ۲۹.۲

• د- شدت نور برای سه شکاف برابر است با:

$$I = A_0^2 \frac{\sin^2(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})}{(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda})^2} \cdot \frac{\sin^2(\frac{3\pi d \sin \theta}{\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda})}$$

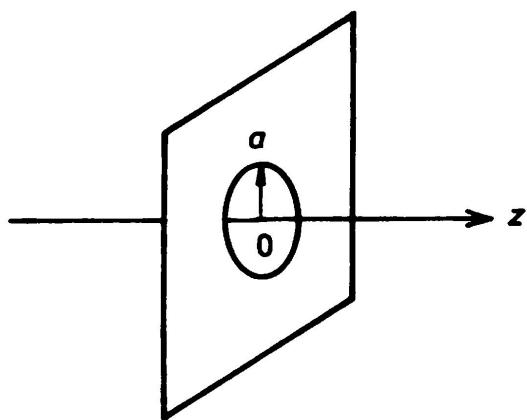
۲۰۲۷

ثابت کنید که نواحی نیم تناوب فرنل برای روزنہ دایره‌ای تمام دارای سطوح‌های مساوی هستند.  
(ویسکانسین)  
حل:

اثبات را می‌توان در بیشتر کتاب‌های درسی اپتیک پیدا کرد و بنابراین از آوردن آن صرفنظر می‌شود.

### ۲۰۲۸

یک روزنه دایره‌ای بشعاع  $a$  بطور یکنواخت با یک موج صفحه‌ای به طول موج  $\lambda$  روشن می‌شود. فرض کنید محور  $z$ ‌ها با محور روزنه در نقطه  $z = 0$  هم محور هستند و امواج تابشی از سمت مقدار منفی  $z$  بسوی  $0$  (شکل ۳۰.۲)، حرکت می‌کند.



شکل: ۳۰.۲

در روی محور  $z$ ‌ها نقاطی را بدست آورید که شدت روشنائی صفر باشد (پراش فرنل). فرض کنید  $a \gg z$  است.  
(دانشگاه ام آی تی)

**حل:**

ساختار منطقه نیم‌تناوب فرنل نشان میدهد که اگر تعداد مناطق نیم‌تناوب حتی برای یک نقطه از محور، شدت روشنائی در آن نقطه صفر خواهد بود. بنابراین

$$N = \frac{a^2}{\lambda z}$$

یا

$$z = \frac{a^2}{\lambda N}$$

شدت روشنائی بازاء  $N = 2, 4, 6, \dots$  در روی محور  $z$ ‌ها صفر است.

## ۲۰۲۹

یک نور تکرنگ به طول موج  $\lambda$  بطور عمودی بر روی صفحه‌ای که یک سوراخ دایره‌ای به شعاع  $R$  دارد می‌تابد. آن سوی سوراخ روی محور شدت نور در برخی نقاط از بین میروند؛ دورترین نقطه‌ای که نور از بین می‌رود چقدر از صفحه فاصله دارد؟ فرض کنید که  $1 < R/\lambda$  است. (ویسکانسین)

**حل:**

دورترین نقطه‌ای که نور از بین می‌رود  $R^2/(2\lambda)$  از صفحه فاصله دارد.

## ۲۰۳۰

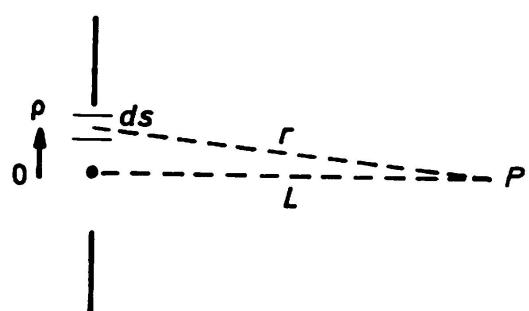
نوری به طول موج  $\lambda$  و شدت  $I_0$  بطور عمودی بر روی

- الف- یک دیسک دایره‌ای مات به شعاع  $R$

- ب- یک صفحه مات با سوراخ دایره‌ای به شعاع  $R$ .

می‌تابد. در هر حالت، شدت نور در آن سوی جسم به فاصله  $L$  را روی مسیری که از مرکز دایره می‌گذرد بدست آورید. فرض کنید  $R >> L$  است. (ویسکانسین)

**حل:**



شکل ۳۱.۲:

ابتدا بیائید پراش از یک سوراخ (شکل ۳۱.۲) را در نظر گیریم. میدان در نقطه روی محور در فاصله  $L$  از سوراخ از رابطه زیر بدست می‌آید

$$A = A_0 \iint \frac{K e^{-jkr} ds}{r}$$

که در آن  $K$  ضریب انحراف<sup>۲۰</sup> و برابر با  $\frac{j}{\lambda}$  بازاء  $R >> L$  و عدد موج،

---

<sup>۲۰</sup> Obliquity factor

جزء سطح و مختصات استوانه‌ای  $\rho$  برابر  $ds = 2\pi\rho d\rho$  و

$$r = \sqrt{\rho^2 + L^2}$$

فاصله بین نقطه  $P$  و جزء  $ds$  است. از آنجا که  $L >> R \geq \rho$  است،  $r$  را می‌توان در مخرج کسر و  $L(1 + \rho^2/2L^2)$  تقریب زد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{jA_0}{\lambda} \frac{e^{-jkL}}{L} \int_0^R 2\pi\rho e^{-jk\rho^2/2L} d\rho \\ &= A_0 \left[ e^{-jkL} - e^{-jk(L + \frac{R^2}{2L})} \right] \end{aligned}$$

که در اینجا برخی عوامل ثابت را حذف کردہ‌ایم. بنابراین شدت نور برابر است با:

$$I \sim |A|^2 = 4I_0 \sin^2(kR^2/4L),$$

که در آن  $I_0 = |A|^2$  است.

برای پراش از یک دیسک دایره‌ای مات،  $A'$  در نقطه  $P$  از اصل بابینه<sup>۲۱</sup> بدست می‌آید.

$$A + A' = A_\infty = A_0 e^{-jkL}$$

که در آن  $A$  میدان در نقطه  $P$  ناشی از پراش بوسیله سوراخ،  $A_\infty$  میدان ناشی از پراش بوسیله سوراخ در اندازه بی‌نهایت است. بنابراین

$$A' = A_0 e^{-jkL} - A = A_0 \exp \left[ -jk \left( L + \frac{R^2}{2L} \right) \right]$$

که می‌دهد

$$I' \sim |A'|^2 = I_0$$

یعنی، شدت نور تقریباً بهمان اندازه بدون صفحه پراشنده است مشروط بر آنکه جسم مات کوچک باشد.

## ۲۰۳۱

یک نور تکرنگ بطور قائم بر روی یک صفحه مات که یک سوراخ دایره‌ای به شعاع  $r$  دارد، می‌تابد و در روی محور به فاصله  $L$  آنسوی سوراخ آشکارسازی می‌شود. شدت نور بطور متناوب وقتی  $r$  از صفر تا بی‌نهایت افزایش می‌یابد، تغییر می‌کند.

- الف- برای اولین بیشینه شعاع  $r_a$  سوراخ را تعیین کنید.
- ب- برای اولین کمینه شعاع  $r_b$  سوراخ را تعیین کنید.

---

<sup>۲۱</sup>Babinet's principle

## فصل ۲ . نورشناسی موجی

- ج- نسبت شدت نور در  $r = r_a$  را به شدت نور در  $r = r_\infty$  بدست آورید.
- د- فرض کنید که صفحه با یک دیسک مات بشعاع  $r_a$  عوض شود، شدت نور چقدر است؟

(شیکاکو)  
حل:

برای نور تابشی موازی و یک نقطه به فاصله  $L$  از سوراخ، شعاع مناطق فرنل از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$r_k = \sqrt{k\lambda L}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

- الف- برای اولین بیشینه  $r_a = r_1 = \sqrt{\lambda L}$ ،  $k = 1$
- ب- برای اولین کمینه  $r = r_2 = \sqrt{2\lambda L}$ ،  $k = 2$
- ج- وقتی  $k$  بستم بی‌نهایت می‌رود، دامنه کل برابر است با:

$$A_\infty = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right)$$

$$\left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \approx \frac{A_1}{2},$$

چون

$$A_2 \approx \frac{1}{2}(A_1 + A_3), \quad A_4 \approx \frac{1}{2}(A_3 + A_5), \dots$$

$$I_\infty \sim A_\infty^2 = A_1^2/4 \sim I_1/4$$

که در آن  $I_1$  شدت نور تولیدی بوسیله اولین منطقه نیم تناوب در نقطه مورد نظر است. بعبارت دیگر، نسبت شدت نور برای  $r = r_a$  به شدت نور برای  $r = r_\infty$  برابر ۴ است.

- د- از اصل بابینه، مجموع دامنه  $A_1$  و  $A'_1$  ناشی از زوج مکمل صفحه برابر  $A_\infty$  دامنه بدون صفحه است. یعنی  $A_\infty = A'_1 + A'_1 = A_1 + A'_1$  که دامنه میدان تولید شده بوسیله دیسک مات بشعاع  $r_a$  است. بنابراین، شدت نور برابر است با:

$$I' \sim (A_\infty - A_1)^2 \sim I_1/4 = I_\infty$$

## ۲۰۳۲

یک صفحه مات دارای سوراخی به شعاع  $0.5\text{ mm}$  است. اگر یک موج صفحه‌ای به طول موج ( $\lambda = 5000\text{\AA}$ ) بر این صفحه بتابد، بیشینه فاصله‌ای از این صفحه که باید یک پرده قرار داد تا نور در نقطه‌ای روی آن متمرکز شود را بدست آورید. شدت نور در این نقطه نسبت به شدت نور بدون صفحه مات چقدر است؟ نحوه رسیدن به هر پاسخ را مشخص کنید.  
(ویسکانسین)

فاصله بیشینه  $r$  پرده از سوراخ برای آنکه نور بصورت نقطه‌ای نورانی متمرکز شود، سطح سوراخ مربوط به اولین منطقه فرنل باید

$$\rho_1^2 = \lambda r,$$

که در آن  $\rho$  شعاع سوراخ است. بنابراین

$$r = \frac{\rho_1^2}{\lambda} = \frac{0.5^2}{5000 \times 10^{-7}} = 500\text{ mm}.$$

بدون صفحه مات تعداد مناطق فرنل بی‌نهایت است، دامنه کل برابر است با:

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 + A_3 - \dots \\ &= \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \\ &\approx \frac{A_1}{2}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$I' \sim A_1^2/4, \quad \text{يعني} \quad I' = I_1/4$$

بنابراین شدت نور اکنون  $1/4$  قبل از آنکه صفحه مات برداشته شود است.

## ۲۰۳۳

یک موج صفحه‌ای به طول موج  $\lambda = 1\text{ cm}$  بر یک صفحه مات که یک روزنہ دایره‌ای با شعاع متغیر دارد می‌تابد. یک آشکارساز که دارای سطح خیلی حساس کوچکی دارد در روی محور روزنہ به فاصله یک متر پشت روزنہ قرار دارد. اگر شعاع روزنہ بتدریج از صفر افزایش یابد، در چه ساعی آشکارساز اولین مقدار بیشینه را آشکار می‌کند؟ کمینه دوم بعداز اولین بیشینه ساعع چقدر است؟ در ساعع اخیر موقعیت بیشینه و کمینه روی محور را بدست آورید.  
(ویسکانسین)

**حل:**

## فصل ۲ . نورشناخت موجی

برای تابش امواج صفحه‌ای شعاع‌های مناطق فرنل از رابطه  $\rho_m = \sqrt{mr_0\lambda}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  بدست می‌آید، که در آن  $r_0$  فاصله آشکارساز اط روزنه است. برای اولین بیشینه،  $m = 1$ ,  $\rho_1 = 0.1m$  بدست می‌آید.  
با زاء  $m = 4$  سطح سوراخ مربوط به چهارمین منطقه فرنل، آشکارساز به دومین کمینه پاسخ می‌دهد. بنابراین

$$\rho_4 = \sqrt{4r_0\lambda} = 0.2 m.$$

در شعاع  $m = 2$ , موقعیت بیشینه و کمینه را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\rho_4 = \sqrt{kr_0\lambda} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

یا  $r_k = \rho_4^2/(k\lambda)$   
برای  $k$  های عدد صحیح فرد،  $r_5 = 0.8 m$ ,  $r_3 = 1.33 m$ ,  $r_1 = 4 m$ , ... بیشینه  
رخ می‌دهد؛ برای  $k$  های عدد صحیح زوج،  $r_6 = 0.67 m$ ,  $r_4 = 1 m$ ,  $r_2 = 2 m$ , ... کمینه رخ می‌دهد.

### ۲۰۳۴

یک صفحه مناطق فرنل با تقسیم تصاویر فیلم عکاسی به پنج منطقه درست می‌شود. اولین منطقه شامل یک دیسک دایره‌ای مات بشعاع  $r_1$  است. دومین یک حلقه شفاف از  $r_1$  تا  $r_2$  که با حلقه مات از  $r_2$  تا  $r_3$  ادامه می‌یابد. حلقه بعدی از  $r_3$  تا  $r_4$  شفاف و آخرین منطقه از  $r_4$  تا بینهایت سیاه است. شعاع‌های از  $r_4$  تا  $r_1$  به نسبت‌های زیر است:

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{4}.$$

این صفحه مناطق فرنل در صفحه  $x-y$  قرار دارد و با نور تکرنگی به طول موج  $5000\text{\AA}$  روشن می‌شود. بیشترین نقطه روشنائی در پشت صفحه روی محور به فاصله یک صفحه مناطق فرنل تشکیل می‌شود.

- الف- شعاع  $r_1$  چقدر است؟
- ب- شدت نور در نقطه نورانی نسبت به شدت نور موج تابشی چقدر است؟
- ج- کجا انتظار دارید روی محور بیشینه شدت نور را پیدا کنید؟

(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)  
حل:

- الف- فاصله کانونی مناطق از رابطه زیر بدست می‌آید

$$f = \frac{r_j^2}{j\lambda}$$

با زاء  $1$  ، شعاع برابر  $r_1 = 0.707 \text{ mm}$  ،  $\lambda = 5000 \text{ Å}$  ،  $f = 1 \text{ m}$  ،  $j = 1$  بدست می‌آید.

- ب- دامنه حاصل از مناطق شفاف دوم و چهارم برابر است با:
- $$A = A_2 + A_4 \approx 2A_1$$

که در آن  $A_1$  دامنه تولید شده با اولین منطقه است اگر شفاف باشد. چون  $A_\infty$  است،  $A_\infty = 2A_1$  دامنه میدان وقتی است که صفحه مناطق فرنل برداشته شود. بدست می‌آید:

$$I \sim A^2 \approx 16A_\infty^2 \sim 16I_0$$

- ج- صفحه مناطق فرنل دارای یک سری فواصل کانونی است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_m = \frac{1}{m} \left( \frac{r_1^2}{\lambda} \right)$$

که در آن  $m$  اعداد صحیح فرد هستند. بنابراین می‌توان شدت نور بیشینه را روی محور به فاصله  $m$  ،  $1/3 \text{ m}$  ،  $1/5 \text{ m}$  ،  $1/7 \text{ m}$  ، ... از صفحه مناطق بدست آورد.

## ۲۰۳۵

نوری از یک منبع تکرنگ به طول موج  $\lambda$  تصویر نقطه‌ای توسط یک صفحه مناطق فرنل که دارای صد منطقه نیم‌تناوب فرد (1, 3, 5, ...) شفاف و تمام مناطق زوج مات است. شدت نقطه تصویر با همان نقطه بدون صفحه مناطق فرنل و برای یک عدسی با همین فاصله کانونی و هم‌چنین قطر مربوط به دویست صفحه مناطق نیم‌تناوب مقایسه کنید. فرض کنید که قطر دهانه (دیافراگم) نسبت به فاصله از منبع و تصویر کم است.

(دانشگاه کلمبیا)

### حل:

فرض کنید که دامنه‌های نور از مناطق نیم‌تناوب برابر  $A_1, A_3, \dots, A_{199}$  باشد. از آنجا که تمام آنها تقریباً یکسان  $A_1$  هستند، دامنه منتجه برای صفحه مناطق فرنل خواهد بود:

$$A = A_1 + A_3 + \dots + A_{199} \approx A_1.$$

و شدت نور برابر است با:

$$I \sim A^2 \sim 10^4 \times A_1^2.$$

## فصل ۲ . نورشناخت موجی

وقتی یک عدسی با همان فاصله کانونی صفحه مناطق فرنل تعویض می‌شود، تمام دامنه‌های  $A_1, A_3, \dots, A_{199}, A_{200}$  که هم‌فاز هستند متمرکز و کانونی می‌شوند. بنابراین دامنه متنجه'  $A'$  برابر است با:

$$A' = \sum_{i=1}^{200} A_i \approx 200A_1,$$

که می‌دهد:

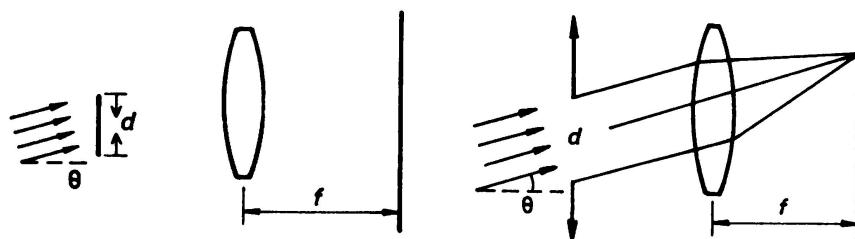
$$I' \sim 4 \times 10^4 \times A_1^2.$$

بنابراین

$$I'/I = 4.$$

شدت نور با عدسی چهار برابر صفحه مناطق فرنل است.

۲۰۳۶



شکل ۳۳.۲ :

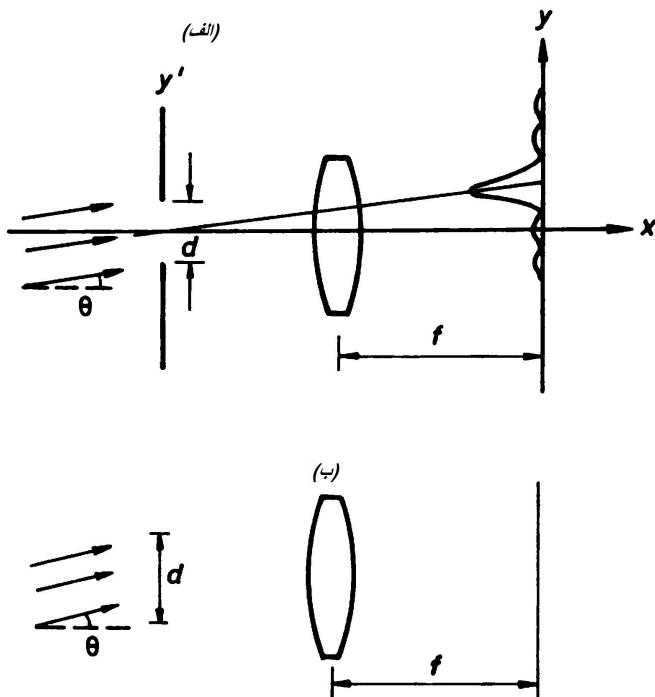
شکل ۳۲.۲ :

- الف- یک موج صفحه‌ای همدوس به طول موج  $\lambda$  بر روی صفحه‌ای با یک شکاف به عرض  $d$  و طول بی‌نهایت می‌تابد. جهت انتشار پرتو عمود بر شکاف و با نرمال بر صفحه زاویه  $\theta$  می‌سازد (شکل ۳۲.۲). توزیع شدت نور را آنسوی شکاف در صفحه کانون یک عدسی به فاصله کانونی  $f$  بدست آورید. (فرض کنید قطر عدسی بی‌نهایت است).

- ب- اگر بجای صفحه با شکاف، یک نوار به عرض  $d$  (شکل ۳۳.۲) باشد، توزیع شدت نور را در صفحه کانونی بدست آورید.

(دانشگاه کلمبیا)

حل:



شکل ۳۴.۲:

- الف- با استفاده از مختصات شکل (۳۴.۲)، موج صفحه‌ای تابشی با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta}$$

توزيع دامنه در صفحه کانونی عدسی پراش فرانهوفر بوسیله شکاف را معلوم میدارد:

$$A \sim \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta y'} e^{j 2\pi f_y y'} dy'$$

$$\sim \frac{\sin \left[ \pi \left( \pi \frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{y}{\lambda f} \right) d \right]}{\left[ \pi \left( \pi \frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{y}{\lambda f} \right) d \right]}$$

که در آن

$$f_y = \frac{y}{\lambda f}$$

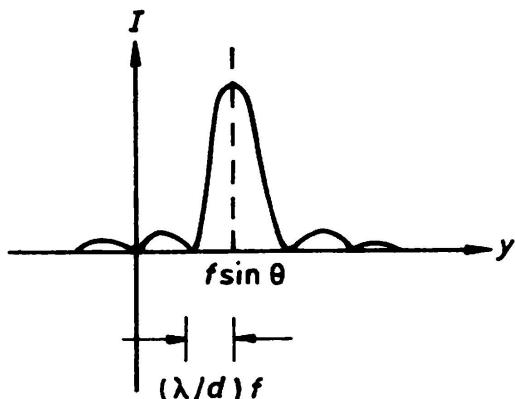
بنابراین

$$I = a^2 \frac{\sin^2 \left[ \pi \left( \frac{\sin \theta}{\lambda f} - \frac{y}{\lambda f} \right) d \right]}{\left[ \pi \left( \frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{y}{\lambda f} \right) d \right]^2}$$

در اینجا  $a$  مقدار ثابتی است.

بیشینه اصلی از رابطه  $y = f \sin \theta$  یا  $\frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{y}{\lambda f} = 0$  بدست می‌آید. کمینه از رابطه  $y = f \sin \theta - \frac{k \lambda f}{d}$  یا  $\pi \left( \frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{y}{\lambda f} \right) d = k \pi$  که در آن  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  است، تعیین می‌شود.

- ب- اگر شکاف در صفحه با نوار مکمل به عرض  $d$  عوض شود؛ بر طبق اصل بابینه توزیع شدت در صفحه کانونی بدون تغییر بجز اطراف نقطه مرکزی مانند شکل (۳۵.۲)، باقی می‌ماند.



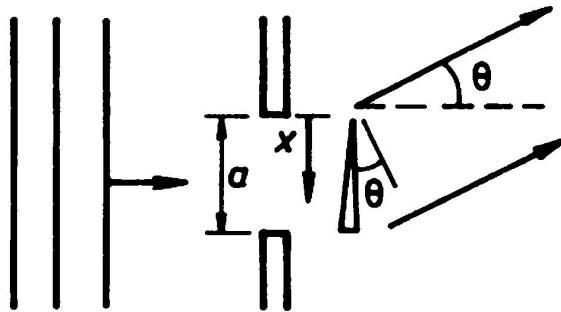
شکل ۳۵.۲

## ۲۰۳۷

یک موج صفحه‌ای به عدد موج  $k$  بر روی شکافی به عرض  $a$  می‌تابد. شکاف با گوه شفاف که ضخامت آن متناسب با فاصله از بالای شکاف است ( $t = \gamma x$ ) پوشانیده می‌شود (شکل ۳۶.۲). ضریب شکست گوه شفاف  $n$  است. شدت نور در زاویه  $\theta$  از رابطه زیر بدست می‌اید:

$$I \sim \frac{\sin^2(\beta a)}{(\beta a)^2}$$

رابطه‌ای برای  $\beta$  بر حسب  $k, n, \gamma$  و  $\theta$  بدست آورید.  
(ویسکانسین)



شکل: ۳۶.۲

**حل:**

برای گوه با ضخامت ( $t = \gamma x$ )، زاویه راس  $\gamma$  (بر حسب رادیان) با تقریب خوب برابر است با:

$$\delta = (n - 1)\gamma$$

توزيع شدت نور ناشی از پراش یک شکاف تک برابر است با:

$$I \sim \frac{\sin^2(\frac{1}{2}ak \sin \theta)}{(\frac{1}{2}ak \sin \theta)^2}$$

که در آن  $k = 2\pi/\lambda$  و  $\theta$  زاویه‌ای است که نور پراشیده با محور می‌سازد. برای شکاف پوشیده شده با گوه، باید  $\delta - \theta$  را با  $\theta$  در رابطه بالا تعویض کنیم؛ یعنی:

$$I \sim \frac{\sin^2 \left\{ \frac{1}{2}ak \sin [\theta - (n - 1)\gamma] \right\}}{\left\{ \frac{1}{2}ak \sin [\theta - (n - 1)\gamma] \right\}^2}$$

بنابراین

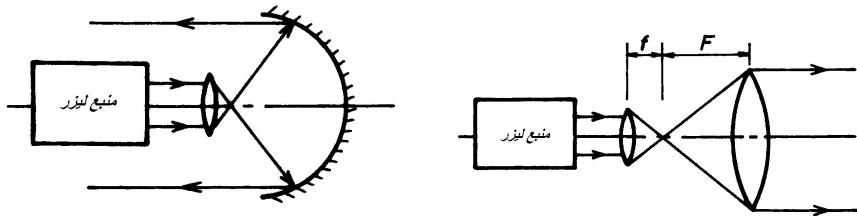
$$\beta = \frac{1}{2}k \sin [\theta - (n - 1)\gamma]$$

در نتیجه توزیع مانند پراش تک شکاف است بجز آنکه مرکز باندازه زاویه  $(n - 1)\gamma$  تغییر مکان می‌دهد.

**۲۰۳۸**

فرض کنید می‌خواهید بازتاب نور لیزری را از ماه مشاهده کنید. توضیح دهید که چگونه می‌توانید از عدسی تلکسکوپ با روزنه بزرگ یا یک آینه همراه با یک لیزر و عدسی با فاصله کانونی کوتاه برای دریافت پرتوی با واگرائی بسیار کوچک استفاده

کنید. مشخصه‌ای که عدسی تلسکوپ و عدسی با فاصله کانونی کوتاه برای دریافت پرتوی با عرض زاویه  $10^{-6}$  رادیان (اولین کمینه در یک سمت تا اولین کمینه در سمت دیگر) چقدر است؟ می‌توانید اگر بخواهید روزنه را مستطیلی در نظر گیرید. (ویسکانسین)



شکل ۳۸.۲:

شکل ۳۷.۲:

### حل:

واگرایی پرتو نور که اصولاً بواسیله پراش روزنه حاصل می‌شود، واگرایی زاویه‌ای بطور معکوس متناسب با شعاع روزنه است. بنابراین واگرایی را می‌توان با توسعه سطح مقطع پرتو کاهش داد. نیل به این هدف، شکل (۳۷.۲) و (۳۸.۲) چیش را با استفاده از عدسی با روزنه نسبتاً بزرگ و یک آینه نشان می‌دهد. این را می‌توان بعنوان یک تلسکوپ بطور معکوس تصور کرد.

پرتو لیزر از منبع دارای شعاع  $r$  و از اینرو واگرایی زاویه‌ای زیر است:

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{r}$$

از یک عدسی با فاصله کانونی کوتاه و عدسی با روزنه بزرگ (یا آینه) بترتیب به شعاع و فاصله کانونی  $r$  و  $F$  استفاده می‌کنیم. واگرایی زاویه‌ای نور از سامانه عدسی برابر است با:

$$\theta_2 = \frac{\theta_1 f}{F} = \frac{1.22 \lambda f}{r F}$$

در حالی که برای آینه خواهد بود:

$$\theta_3 = 1.22 \frac{\lambda}{R}$$

برای  $\theta_2, \theta_3 \leq 10^{-6}$  رادیان، اگر  $\lambda = 5000\text{\AA}$  و  $r = 6\text{ mm}$  فرض کنیم، لازم است که  $R \geq 0.6\text{ m}$  یا  $\frac{F}{f} \geq 100$  باشد.

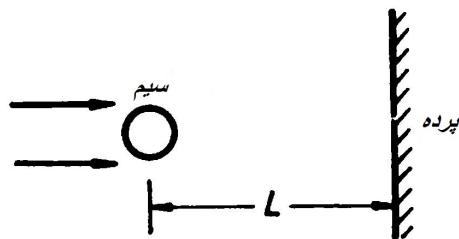
## ۲۰۳۹

روی میز تدریس یک چینش ترتیب دهید که نشان دهد می‌توان "طول موج نور لیزر را با خط کش اندازه‌گیری" کرد. مشاهدات را واضح انجام دهید (تجهیزات را دستکاری نکنید زیرا تنظیم آن مشکل است) و از داده‌های خود برای محاسبه طول موج لیزر استفاده کنید.

(دانشگاه پرینستون)

**حل:**

همان طوری که در شکل (۳۹.۲) نشان داده شده است، پرتو را لیزری بر یک



شکل: ۳۹.۲

سیم نازک بقطر  $d$  می‌تابد. قطر این سیم قبل از اندازه‌گیری شده است. حلقه‌های پراش روی صفحه پشت سیم ظاهر می‌شود. می‌توانیم طول موج نور لیزر را با یک خط کش، فاصله  $L$  بین سیم و پرده و  $\Delta$  فاصله حلقه‌ها، با استفاده از رابطه  $\frac{d\Delta}{L} = \lambda$  اندازه‌گیری کنیم.

## ۲۰۴۰

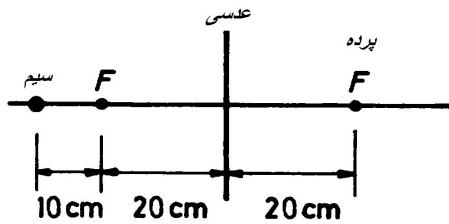
یک سیم افقی به قطر  $0.01$  میلی‌متر به فاصله سی سانی‌متر در مقابل یک عدسی نازک به فاصله کانونی  $cm + 20$  قرار دارد.

• الف- در چه فاصله‌ای از عدسی و با چه بزرگنمائی تصویر واضح سیم متمرکز می‌شود؟

• ب- اگر دسته نور از سمت چپ، به صورت موازی محور، بتابد و یک پرده در پشت صفحه کانونی (بیست سانتی‌متر عقب) عدسی قرار داده شود، چه الگوی پراشی مشاهده خواهد شد؟ تاجائی که می‌توانید کمیت را بکار ببرید.

(دانشگاه پرینستون)

**حل:**



شکل ۴۰.۲

- الف- رابطه عدسی چنین است:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

که در آن  $f = 20 \text{ cm}$ ،  $u = 30 \text{ cm}$ ،  $v = 60 \text{ cm}$  است و در نتیجه  $b = -\frac{u}{v} = -2$  بزرگنمائی حاصل خواهد بود.

- ب- چون نور تابشی ستونی است، پراش فرانهوفر بوسیله سیم بوجود می‌آید. بر طبق اصل بازیمه، الگو پراش روی پرده، بجز در ناحیه مرکزی، همانند یک شکاف با همان عرض است، توزیع شدت نور به صورت زیر خواهد بود:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

که در آن  $(f\lambda)/(\pi d \sin \theta) \approx \pi dy/\lambda$  و  $y$  فاصله روی پرده از محور نوری، و  $d$  قطر سیم است.

## ۲۰۴۱

آپدیزاسیون<sup>۲۲</sup>، (دستکاری شده)، نوری فرآیندی است که تابع روزنه سامانه‌ای بنحوی تغییر کند که توزیع انرژی الگوی پراش شکل خاصی گیرد. برای افزایش قابلیت تفکیک، مثالی را در نظر گیرید که در آن فرستندگی با تابع کسینوسی  $\cos \pi x/b$  بین  $-b/2$  و  $b/2$  که در آن  $b$  عرض شکاف است، اصلاح شود.

- الف- موقعیت کمینه  $a$ م الگوی پراش فرانهوفر تک-شکاف را محاسبه کرده و آنرا با موقعیت کمینه  $a$ م بدون آپدیزاسیون شکاف با همان عرض  $b$  مقایسه کنید.

<sup>۲۲</sup>Apodisation

- ب- شدت نوری که در نیم راه الگوی پراش آپودیزه بین کمینه  $(n-1)$  و  $n$  ام که نزدیک بیشینه  $n$  ام ظاهر می شود را محاسبه کنید. در هر حالت، جواب خود را با شدت نور اولین بیشینه نرمالیزه کنید.

(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)

**حل:**

- الف- برای روزنه آپودیزه، دامنه نور پراش میدان های دور برابر است با:

$$\begin{aligned} A(\nu) &= \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jkx \sin \theta} \cos \left( \frac{\pi x}{b} \right) dx \\ &= \cos \left( \frac{\nu b}{2} \right) \left( \frac{1}{\nu - \frac{\pi}{6}} - \frac{1}{\nu + \frac{\pi}{6}} \right), \end{aligned}$$

یا

$$I \sim A^2 = \cos^2 \left( \frac{\nu b}{2} \right) \frac{4 \left( \frac{\pi}{b} \right)^2}{\left[ \nu^2 - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2}$$

که در آن

$$\frac{\nu b}{2} = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad \text{يعني} \quad \nu = \frac{2\pi}{\lambda} \sim \theta$$

موقعیت کمینه  $n$  ام خواهد بود:

$$\frac{\nu b}{2} = \frac{\pi}{2}(2n+1)$$

یا

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2b}(2n+1).$$

برای روزنه بدون آپودیزه، شدت پراش فرانهوفر برابر است با:

$$I \sim b^2 \left( \frac{\sin \frac{\nu b}{2}}{\frac{\nu b}{2}} \right)^2$$

و موقعیت کمینه  $n$  ام برابر با  $\frac{\nu b}{2} = n\pi$  یا

$$\sin \theta' = \frac{n\lambda}{b}$$

بنابراین

$$\sin \theta - \sin \theta' = \frac{\lambda}{2b}$$

## فصل ۲ . نورشناسی موجی

- ب- موقعیت کمینه  $(n - 1)$  ام برای روزنه آپودیزه خواهد بود:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2b} (2n - 1)$$

موقعیت وسط راه بین کمینه  $(n - 1)$  ام و  $n$  ام از رابطه  $\sin \theta = n\lambda/b$  بدست می‌آید. مشاهده می‌شود که شدت در نزدیگی بیشینه  $n$  ام از  $n\pi = \frac{\nu b}{2}$  بدست می‌آید. بنابراین در این موقعیت شدت نور برابر است با:

$$I \sim A^2 = \frac{4}{(\frac{\pi}{b})^2 (4n^2 - 1)^2}$$

فرض کنید شدت نور در اولین بیشینه برابر  $I_0$  باشد که از رابطه  $0 = \frac{\nu b}{2}$  بدست می‌آید. بنابراین، برای روزنه آپودیزه

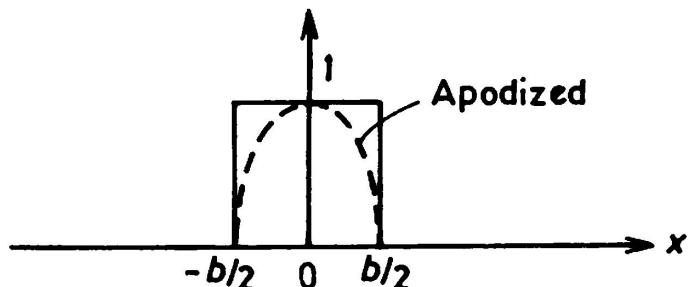
$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{(4n^2 - 1)^2},$$

در حالی که برای روزنه بدون آپودیزه،  $I$  از رابطه  $\frac{\nu b}{2} = n\pi - \frac{\pi}{2}$  بدست می‌اید، از این‌رو

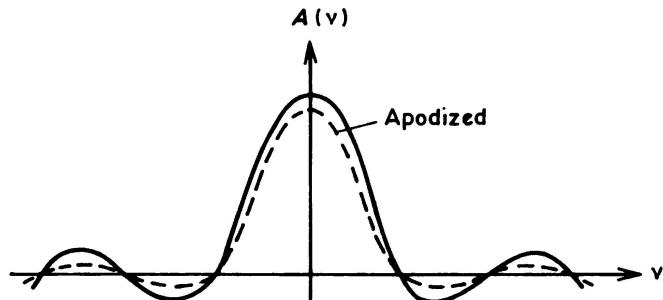
$$\frac{I}{I_0} = \frac{4}{[(2n - 1)\pi]^2},$$

شکل (۴۱.۲) و شکل (۴۲.۲) نشان می‌دهند که چگونه روزنه آپودیزه شده انرژی را بسمت بیشینه مرکزی در مقابل از دست رفتن بیشینه دوم قرار می‌دهد.

### Aperture function



شکل ۴۱.۲



شکل ۴۲.۲

نور خورشید از درون یک سوراخ مربع شکل به ضلع  $cm\ 2$ ، که با مجموعه‌ای سیم‌های موازی به عرض  $w/2$  و فاصله بین مراکز سیم‌ها  $w$ ، پوشیده شده است، وارد اطاق تاریکی می‌شود. سپس نور خورشید بر روی یک صفحه عکاسی که بفاصله  $d$  پشت سوراخ است می‌تابد، (شکل ۴۲.۲). قطر زاویه‌ای خورشید تقریباً  $0.01$  رادیان است؛ مشخصه بر جسته تصویر را برای حالت‌های زیر توصیف کنید:

## • الف-

$$w = 1mm, \quad d = 1mm$$

## • ب-

$$w = 1mm, \quad d = 10m$$

## • ج-

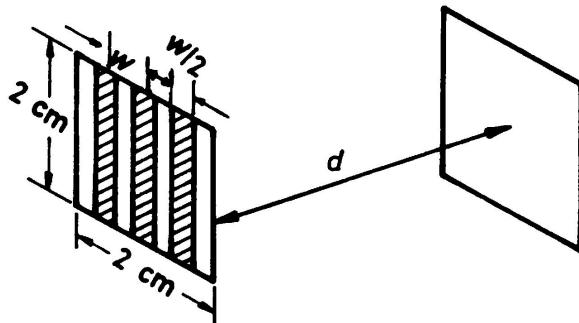
$$w = 0.005mm, \quad d = 10m$$

(ویسکانسین)  
حل:

- الف- چون  $w = d$  است، نور هندسی را استفاده می‌کنیم. سایه سوراخ مربع شکل و سیم‌ها وجود دارد.

- ب- چون  $d << w$  است، الگوی پراش فرانهوفر روی صفحه تشکیل می‌شود. معادله توری  $m\lambda = m\theta = w\sin\theta$  می‌دهد. برای  $\lambda = 5000\text{\AA}$  می‌دهد  $\alpha \approx \lambda/w = 0.0005$ . بنابراین الگوی پراش بوسیله سیم‌ها، رنگ‌های مختلفی که با هم تداخل می‌کنند شدت یکنواختی، یعنی بدون حلقه‌های پراش روی صفحه، ایجاد می‌کنند.

- ج- بازاء  $w = 0.005\text{ mm}$  است. الگوهای رنگی پراش در روی صفحه مشاهده می‌شود.



شکل ۲: ۴۳.۲

## ۲۰۴۳

• الف- الگوی پراش فرانهوفر ناشی از دو شکاف نامساوی را درنظر گیرید. فرض کنید  $a$  و  $b$  عرض‌های نامساوی دو شکاف و  $c$  فاصله بین مرکزهای آنها باشد. رابطه‌ای برای شدت نور الگوی بر حسب زاویه  $\theta$  پراش بدست آورید. بفرض کنید چیش بوسیله موجی به طول موج  $\lambda$  بطور عمودی تابانیده می‌شود.

• ب- با استفاده از رابطه بخش (الف) رابطه‌ای برای الگوی پراش برای حالت‌های خاص زیر بدست آورید و آنها را رسم کنید:

- (1)  $a = b$
- (2)  $a = 0$ .

(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)  
حل:

• الف- دامنه‌های پراش ناشی از شکاف  $a$  و  $b$  هر یک جداگانه برابر است با:

$$A_a = \frac{a \sin u}{u}, \quad u = \frac{1}{2}ka \sin \theta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

$$A_b = \frac{b \sin v}{v}, \quad v = \frac{1}{2}kb \sin \theta = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$$

شدت منتجه ناشی از تداخل آنها برابر است با:

$$I(\theta) = |A_a + A_b|^2 = A_a^2 + A_b^2 + 2A_a A_b \cos w,$$

که در آن

$$w = \frac{2\pi c \sin \theta}{\lambda}$$

بنابراین

$$I(\theta) = a^2 \frac{\sin^2 u}{u^2} + b^2 \frac{\sin^2 v}{v^2} + 1ab \frac{\sin u \sin v}{u v} \cos w.$$

- ب- وقتی  $a = b$  باشد، در این صورت  $u = v$  و

$$I(\theta) = 2a^2 \frac{\sin^2 v}{v^2} (1 + \cos w) = 4a^2 \frac{\sin^2 v}{v^2} \cos^2 \frac{w}{2}.$$

- وقتی  $a = 0$  باشد:

$$I(\theta) = b^2 \frac{\sin^2 v}{v^2}.$$

## ۲۰۴۴

فرض کنید پرتو نور تکرنگی بر روی یک تک شکاف می‌تابد. طول موج نور  $\lambda$ ، عرض شکاف  $w = 5\lambda$  (شکل ۴۴.۲) است.

- الف- الگوی شدت نور را بر حسب تابعی از زاویه در ناحیه دور از شکاف رسم کنید.

- ب- موقعیت اولین بیشینه و اولین کمینه را محاسبه کنید.

- ج- اکنون لازم است اختلاف فاز یکنواخت دقیقاً  $180^\circ$  روی نیمه بالائی شکاف (یعنی  $w/2 > y$ ) بتابد. دستگاه ایده‌الی را طراحی کنید که این عمل را انجام دهد و الگوی شدت نور حاصله را رسم کنید.

- د- شدت نور را بر حسب زاویه محاسبه کنید. موقعیت اولین کمینه را تعیین کرده و موقعیت اولین بیشینه را تخمین زنید.

(دانشگاه شیکاگو)

**حل:**

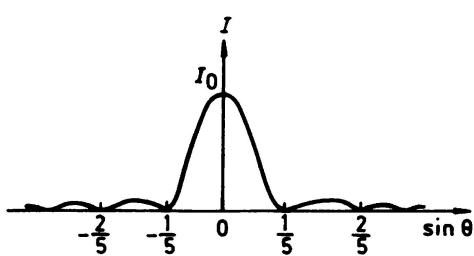
- الف- الگوی شدت نور پراش فرانهوفر که روی پرده دور از شکاف مشاهده خواهد شد در شکل (۴۵.۲) بر حسب تابعی از زاویه  $\theta$  از محور تقارن، نشان داده شده است.

از نظر تحلیلی توزیع شدت نور برابر است با:

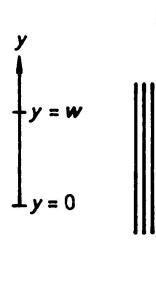
$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

که در آن

$$u = \frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}$$



شکل ۴۵.۲ :



شکل ۴۴.۲ :

- ب- موقعیت اولین کمینه از رابطه زیر بدست می‌اید:

$$\frac{\pi w \sin \theta}{\lambda} = 5\pi \sin \theta = \pm \pi.$$

درنتیجه

$$\theta = \sin^{-1} \left( \pm \frac{1}{5} \right) = \pm 11.5^\circ$$

موقعیت بیشینه‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dI(u)}{du} = 0,$$

یا

$$\tan u = u$$

این معادله متعالی <sup>۲۳</sup> است، و جواب را می‌توان از طریق ترسیمی بدست آورد. نزدیک بیشینه مرکزی که در  $u = 0$  قرار دارد، اولین بیشینه در

$$u_1 = \pm 1.43\pi$$

قرار دارد، بنابراین

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left( \pm \frac{1.43}{5} \right) = \pm 16.6^\circ$$

- ج- با چسبانیدن یک نوار شفاف به ضریب شکست  $n$  و ضخامت یکنواخت  $d = \lambda/[2(n-1)]$  به نیمه بالائی شفاف، اختلاف فاز  $180^\circ$  بدست می‌اید. این چیز معادل دستگاه دو شفاف با عرض مساوی  $w/2$  و فاصله بین مرکزهای  $w/2$  است. توزیع شدت پراش نور خواهد بود:

---

<sup>۲۳</sup> Transcendental Equation

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u'}{u'^2} \cdot \cos^2 v$$

که در آن

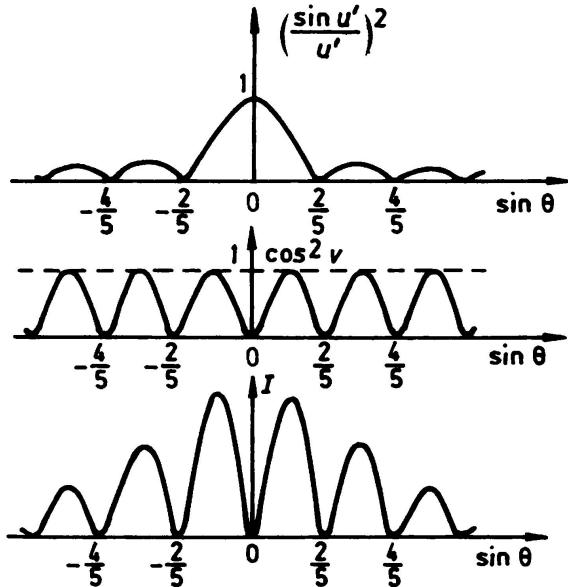
$$u' = \frac{\pi w \sin \theta}{2\lambda} = \frac{5}{2}\pi \sin \theta,$$

$$v = \frac{\pi w \sin \theta}{2\lambda} + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi \sin \theta + \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه

$$I = I_0 \sin^4 \left( \frac{5}{2}\pi \sin \theta \right) / \left( \frac{5}{2}\pi \sin \theta \right)^2.$$

شکل (۴۶.۲) را بر حسب  $\sin \theta$  نشان می‌دهد.



شکل : ۴۶.۲

- د- اولین کمینه در  $\sin \theta = 0$  یعنی در مرکز اتفاق می‌افتد. کمینه بعدی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{5}{2} \sin \theta = \pm \pi$$

یعنی در

$$\sin \theta = \pm \frac{2}{5}$$

یا

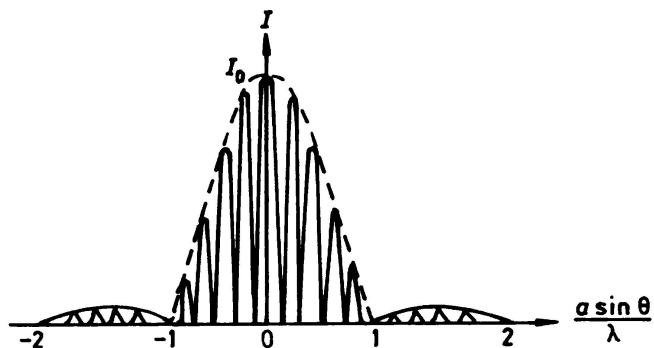
$$\theta = \sin^{-1} \left( \pm \frac{2}{5} \right) = \pm 23.5^\circ$$

توجه کنید که در این حالت، بیشینه مرکزی ناپدید می‌شود.

### ۲۰۴۵

الگوی تداخل روی صفحه در نقطه کانونی عدسی همگرا را که ناشی از دو شکاف که توسط نور تکرنکی روشن می‌شود رسم کنید. دو شکاف یکسان و دارای عرض  $a$  و فاصله مرکزهای  $d$ ،  $\frac{d}{a} = 5$  است. (ویسکانسین)

**حل:**



شکل ۲: ۴۷.۲

توزیع شدت روی پرده خواهد بود:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma$$

که در آن

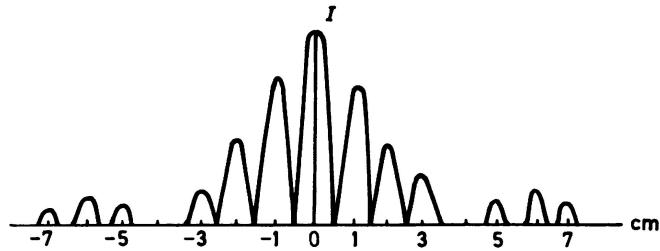
$$\beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = 5\beta$$

الگوی تداخل در شکل (۴۷.۲) نشان داده شده است. توجه کنید که برای  $\frac{d}{a} = 5$ ، مراتب ... ۵, ۱۰, ۱۵, ... حذف می‌شود.

### ۲۰۴۶

یک موج صفحه‌ای از یک لیزر به طول موج  $6000\text{\AA}$  بر روی یک شکاف دوگانه می‌تابد. بعداز عبور از شکاف دوگانه نور روی پرده‌ای که به فاصله صد سانتی‌متر

پشت شکاف دوگانه است می‌افتد. توزیع شدت الگوی تداخل روی پرده در شکل (۴۸.۲) نشان داده شده است. عرض هر شکاف و فاصله دو شکاف از یکدیگر چقدر است؟ (ویسکانسین)



شکل ۴۸.۲:

**حل:**

برای تداخل شکاف دوگانه داریم:

$$I \sim \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma,$$

که در آن

$$\beta = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}, \quad \sin \theta \approx \frac{y}{D}$$

و عرض هر شکاف،  $d$  فاصله مرکزهای دو شکاف،  $D$  فاصله بین پرده و شکاف دوگانه، و  $\lambda$  طول موج نور تابشی است. کمینه‌ها از رابطه  $\gamma = (n + \frac{1}{2})\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  بدست می‌آید. بنابراین فاصله حلقه‌ها  $\Delta y$  برابر است با:

$$\Delta y = \frac{\Delta \gamma}{\pi} \frac{\lambda D}{d} = \frac{\lambda D}{d}$$

بنابراین، برای  $\Delta y = 1$  از شکل (۴۸.۲) داریم:

$$d = \lambda D / \Delta y = 6 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

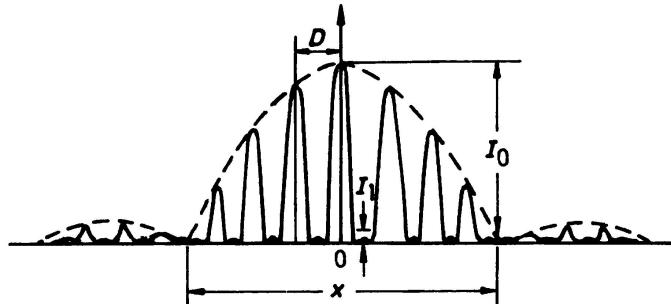
الگوی تداخل نشان میدهد که حذف بازاء مرتبه  $d/b = 4$  صورت می‌گیرد که در اینجا عرض هر شکاف  $b = d/4 = 1.5 \times 10^{-3}$  متر خواهد بود.

## ۲۰۴۷

در شکل (۴۹.۲) الگوی پراش فرانهوفر ناشی از سه شکاف را نشان می‌دهد. عرض شکاف‌ها  $w$ , فاصله شکاف‌ها  $d$ , فاصله بین پرده و شکاف‌ها  $f$ , و طول موج  $\lambda$  است.

## فصل ۲. نورشناخت موجی

رابطه‌ای برای  $x$ ،  $D$ ، و  $I_0/I_1$  بر حسب پارامترهای این آزمایش بدست آورید.  
(ویسکانسین)



شکل ۴۹.۲

حل:

توزیع شدت نور ناشی از سه شکاف برابر است با:

$$I \sim A_0^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left[ \frac{\sin(3\gamma)}{\sin \gamma} \right]^2$$

که در آن

$$\beta = \frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}, \quad \sin \theta \approx \frac{x}{2f}.$$

از آنجائی که  $3 \rightarrow 3$  است، بیشینه اصلی در  $\theta = 0$  است،  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ،  $\lim_{\gamma \rightarrow m\pi} \frac{\sin(3\gamma)}{\sin \gamma}$  قرار دارد. اولین بیشینه وقتی  $\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pi$  رخ می‌دهد. فاصله حلقه‌ها از  $\pi$  یا  $\Delta\gamma = \pi$  بحسب می‌آید؛ یعنی

$$D \approx \frac{\lambda f}{d}.$$

اولین کمینه شدت پراش وقتی  $\frac{\pi w \sin \theta}{\lambda} = \pi$  رخ می‌دهد، یا

$$x = \frac{2\lambda f}{w}$$

اولین و دومین کمینه تداخل وقتی  $\frac{3\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pi$  یا  $2\pi$  می‌شود، بوجود می‌آید. اولین بیشینه زیر مجموعه بین اینها بوجود می‌آید، یعنی وقتی

$$3\gamma \approx 3\pi/2 \quad \text{یا} \quad \sin \approx \frac{\lambda}{2d}$$

بنابراین می‌دهد:

$$I_1 \sim A_0^2 \cdot \left( \frac{\sin \frac{\pi w}{2d}}{\frac{\pi w}{2d}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right)^2 = A_0^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi w}{2d}}{\frac{\pi w}{2d}} \right)^2$$

ضمناً برای بیشینه مرکزی وقتی  $\beta = \gamma = 0$  است، خواهیم داشت:

$$I_0 \sim 9A_0^2$$

بنابراین اگر  $w/d < 1$  باشد،  $I_0/I \approx 9$  بدهست می‌آید.

## ۲۰۴۸

الگوی پراش شکل (۵۱.۲) روی پرده بوسیله نوری که از درون سه شکاف به عرض  $w$  و به فاصله  $d$  (شکل ۵۰.۲) قرار دارند تولید می‌شود. چگونه عرض پوش  $A$  و فاصله پیک‌های  $B$  تغییر می‌کند اگر:

- الف- عرض شکاف  $w$  افزایش یابد؟

- ب- فاصله شکاف  $d$  افزایش یابد؟

- ج- طول موج نور تابشی افزایش یابد؟

دامنه‌های میدان  $E$  که وارد نقطه ۲ روی پرده می‌شوند را از جمع سه بردار مساوی با فاز مناسب در این نقطه می‌توان نشان داد (شکل ۵۲.۲). همان طوری که نشان داده شده است، آنها صفر شده‌اند و این دلیل آن است که شدت نور در این نقطه روی پرده صفر است. نموداری شبیه این بردار که نمایشگر فازهای نسبی است:

- د- برای نقطه ۱ بدهست آورید.

- ه- برای نقطه ۳ بدهست آورید.

(ویسکانسین)

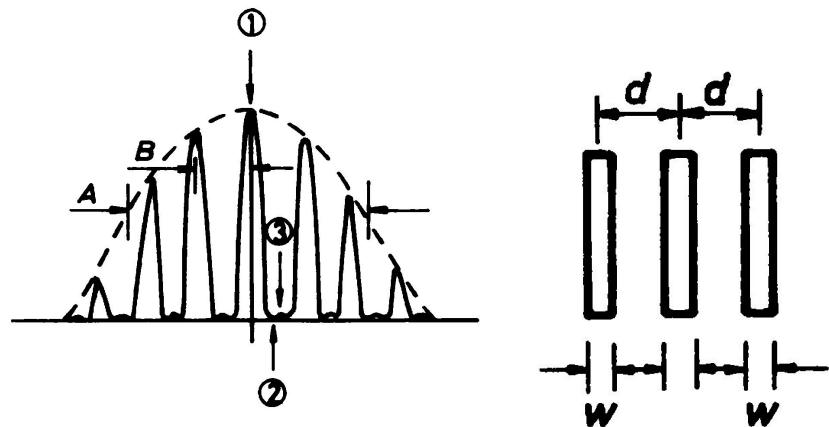
## حل:

توزيع شدت نور روی پرده با رابطه زیر نمایش داده می‌شود:

$$I \sim \left( \frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin \frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

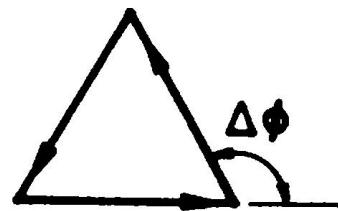
که در آن  $N = 3$ ،  $\sin \theta \approx x/l$ ،  $\lambda$  فاصله کانونی عدسی که پشت شکاف یا فاصله بین پرده و شکاف است).

از این رابطه عرض پوش  $w \sim A$  و فاصله پیک‌ها  $B \sim \lambda l/d$  بدهست می‌ایدو بنابراین چنین استنباط می‌شود که:



شکل ۵۰.۲:

شکل ۵۰.۲:



شکل ۵۲.۲:

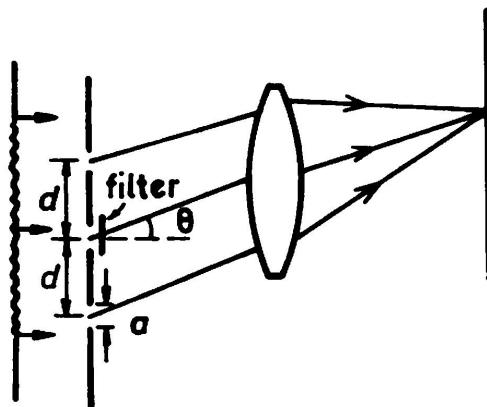
- الف- وقتی  $w$  افزایش می‌یابد،  $A$  افزایش و  $B$  ثابت بدون تغییر باقی می‌ماند.
- ب- وقتی  $d$  افزایش می‌یابد،  $A$  ثابت و  $B$  افزایش می‌یابد.
- ج- وقتی طول موج افزایش می‌یابد، هر دو  $A$  و  $B$  افزایش می‌یابند.
- د- نمودار برداری در نقطه ۱ به صورت →→→ خواهد بود.
- ه- نمودار برداری در نقطه ۳ به صورت ⇌ خواهد بود.

۲۰۴۹

یک موج صفحه‌ای به طول موج  $\lambda$  بر روی سامانه سه شکاف به عرض  $a$  و فاصله  $d$  می‌تابد. شکاف میانی با یک فیلتر که  $180^\circ$  اختلاف فاز ایجاد می‌کند پوشیده می‌شود.

زاویه  $\theta$  را برای موارد زیر محاسبه کنید:

- الف- کمینه پراش اول
- ب- کمینه تداخل اول
- ج- بیشینه تداخل اول



شکل ۵۳.۲:

(ویسکانسین)  
حل:

براساس هویگنس-فرنل، دامنه در نقطه‌ای روی پرده (برای پراش فرانهوفر) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{A_0}{a} e^{j\omega t} \left[ \int_0^a e^{-j2\rho x} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_d^{d+a} e^{-j(2\rho x + \pi)} dx + \int_{2d}^{2d+a} e^{-j2\rho x} dx \right] \\
 &= A_0 e^{j\omega t} e^{-j\rho a} \frac{\sin(\rho a)}{\rho a} (1 - e^{-j2\rho d} + e^{-j4\rho d}) e^{-j2\rho d} \\
 &= A_0 e^{-j(\beta + 4\gamma - \omega t)} \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\cos(3\gamma)}{\cos \gamma}
 \end{aligned}$$

که در آن  $\gamma = \rho d$ ،  $\beta = \rho a$ ،  $\rho = \frac{\pi}{\lambda} \sin \beta$  است، بنابراین

$$I \sim \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left[ \frac{\cos(3\gamma)}{\cos \gamma} \right]^2$$

- الف- وقتی کمینه پراش اول بوجود می آید که

$$\beta = \pm\pi, \quad \text{يعني} \quad \theta = \pm \sin^{-1} \left( \frac{\lambda}{a} \right)$$

- ب- وقتی کمینه تداخل اول بوجود می آید که

$$3\gamma = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{يعني} \quad \theta = \pm \sin^{-1} \left( \frac{\lambda}{6d} \right)$$

- ج- وقتی بیشینه تداخل اول بوجود می آید که

$$\gamma = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{يعني} \quad \theta = \pm \sin^{-1} \left( \frac{\lambda}{2d} \right)$$

## ۲۰۵۰

یک پرده مات با پنج شکاف باریک فواصل مساوی (به فاصله  $d$ ) که با یک موج صفحه تکرنگ به طول موج  $\lambda$  بطور عمودی روشن می شود، در نظر گیرید. شدت موج ارسالی را نسبت به زاویه با خط عمود در  $0 = \theta$  و تقریباً  $\theta = 1/5$  رادیان رسم کنید. فرض کنید که  $d/\lambda = 10$  است. منحنی ترسیمی شما باید شدت موج کمینه و بیشینه را نشان دهد. تقریباً نسبت شدت در قله های کمینه و بیشینه چقدر است؟ تقریباً فاصله زاویه ای بین اولین قله شدت از زاویه  $0 = \theta$  چقدر است؟ (ویسکانسین)

**حل:**

تداخل برای شکاف چندگانه عبارت است از:

$$I \sim \left( \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = \left( \frac{\sin \frac{5\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 = \left( \frac{\sin 50\pi \sin \theta}{\sin 10\pi \sin \theta} \right)^2$$

با زاء  $\frac{1}{5}$  تا  $0 = \theta$  رادیان، می توانیم تقریباً  $\theta \approx \sin \theta$  در نظر گیریم. بنابراین

$$I \sin \left( \frac{\sin 50\pi \theta}{\sin 10\pi \theta} \right)^2$$

از اینرو، بیشینه شدت وقتی  $10\pi\theta = m\pi$  یعنی  $\theta = \frac{m}{10}$  که در آن  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  است، بوجود می آید و کمینه شدت وقتی  $50\pi\theta = n\pi$  یعنی  $\theta = n/50$  که در آن  $n$  اعداد صحیح  $\dots, 0, \pm 5, \pm 10, \dots$  است، رخ می دهد.

شکل (۵۴.۲) توزیع شدت موج را نشان می دهد. پیک شدت حداقل بین دو پیک شدت حداقل مجاور است، یعنی



شکل: ۵۴.۲

$$\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = 0.05 \text{ rad}$$

نسبت پیک شدت حداکثر به حداکثر برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{I(\theta=0.05)}{I(\theta=0)} &= \left( \frac{\sin(50\pi \times 0.05)}{\sin(10\pi \times 0.05)} \right)^2 / \left( \frac{\sin(50\pi \times 0)}{\sin(10\pi \times 0)} \right)^2 \\ &= \left[ \frac{\sin(2.5\pi)}{\sin(0.5\pi)} \right]^2 / \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(50\pi\epsilon)}{\sin(10\pi\epsilon)} \right]^2 = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

منحنی نشان می‌دهد که فاصله زاویه‌ای بین اولین پیک از  $\theta = 0$  است:

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{50} = 0.03 \text{ rad}$$

## ۲۰۵۱

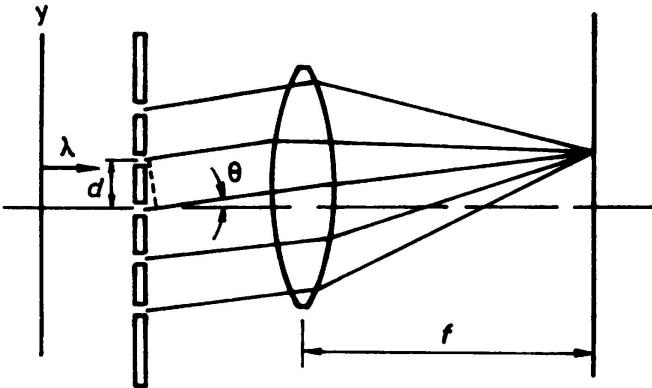
یک موج تکرنگ به طول موج  $\lambda$  بر یک سامانه پنج شکاف که به فاصله  $d$  از یکدیگر قرار دارند، (شکل ۵۵.۲)، می‌تابد. عرض هر شکاف را می‌توانید خیلی کوچکتر از  $d$  در نظر گیرید. برای الگوی تداخل منتجه، که روی پرده مرکز می‌شود، بطور تحلیلی یا تقریبی خواسته‌های زیر را محاسبه کنید. (راهنمایی: استفاده از نمودارهای فاز می‌تواند مفید باشد).

- الف- عرض زاویه تصویر مرکزی (زاویه بین بیشینه اصلی و کمینه اولی).
- ب- شدت نور بیشینه کناری نسبت به شدت بیشینه اصلی.

- ج- موقعیت زاویه‌ای اولین بیشینه کناری.

(ویسکانسین)

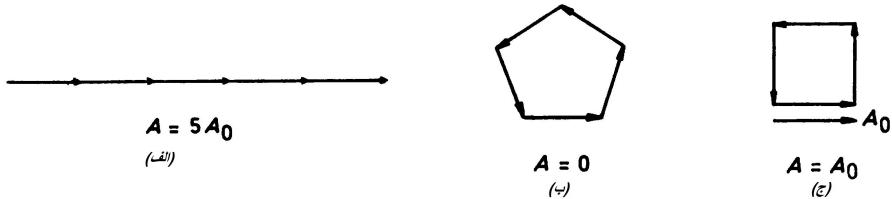
حل:



شکل ۵۵.۲

هر شکاف یک فاز برابر  $A_0$  شرکت می‌کند. این شرکت و همکاری را می‌توان با استفاده از نمودار فیزوری شکل (۵۶.۲) بدست آورید. وقتی  $\theta = 0$  است، تمام پنج فیزور هم‌فاز هستند و فیزور منتجه خط مستقیم  $A = 5A_0$  است، که نمایشگر بیشینه اصلی است (شکل ۵۶.۲-الف). برای کمینه اول، نمودار فیزور بیک پنج ضلعی تقلیل می‌یابد (شکل ۵۶.۲-ب). در اینجا داریم  $\delta = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = \frac{2}{5}\pi$ ، یعنی  $\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{5d}$ . برای بیشینه کناری، فیزور منتجه، (شکل ۵۶.۲-ج)، برابر  $A_0$  خواهد بود. در این حالت

$$\delta = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}; \quad \text{یعنی} \quad \theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{4d}$$



شکل ۵۶.۲

- الف- عرض زاویه‌ای تصویر مرکزی برابر  $\frac{\lambda}{5d} \approx \theta$  است.
- ب- نسبت شدت بیشینه کناری به شدت بیشینه اصلی برابر است با:

$$\left(\frac{A_0}{5A_0}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

- ج- موقعیت زاویه بیشینه کناری اول تقریباً برابر  $\frac{\lambda}{4d} \approx \theta$  است.

## ۲۰۵۲

یک موج صفحه‌ای به طول موج  $\lambda$  بر روی یک توری شامل شش شکاف موازی یکسان به فاصله  $d$  بطور عمودی می‌تابد.

- الف- تحت چه زاویه با خط قائم تداخل بیشینه است؟
- ب- عرض زاویه‌ای بیشینه تداخل، مثلاً از این بیشینه تا نزدیکترین کمینه، چقدر است؟
- ج- نسبت شدت بیشینه تداخل به شدت یک تک شکاف چقدر است؟
- د- الگوی تداخل را بر حسب زاویه رسم کنید.

(ویسکانسین)  
حل:

- الف- توزیع شدت برای پراش فرانهوفر بقرار زیر است:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

که در آن  $N$  تعداد شکاف‌ها (در اینجا  $N = 6$ )،  $w$  عرض شکاف و  $d$  ثابت توری،  $I_0$  شدت در زاویه  $0 = \theta$  ناشی از یک شکاف است.

بیشینه تداخل وقتی  $\sin \theta = \frac{k\lambda}{d} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = k\pi$ ، ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) یعنی اتفاق می‌افتد.

- ب- کمینه، شدت صفر، وقتی اتفاق می‌افتد که

$$\frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda} = m\pi, \quad (m = 0, \pm N, \pm 2N, \dots)$$

یعنی:

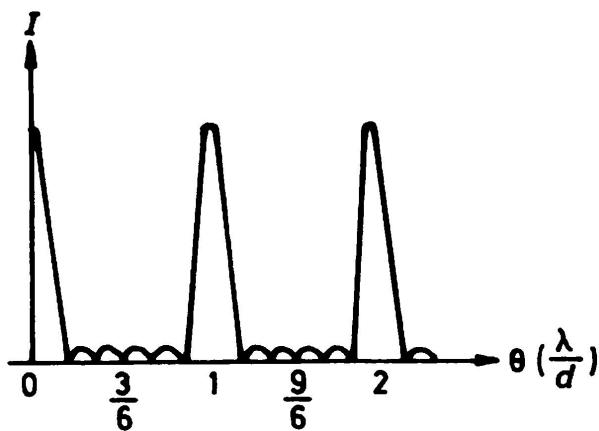
$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pm\pi/N, \pm 2\pi/N$$

بنابراین، عرض زاویه‌ای بیشینه تداخل  $\Delta\theta \approx \lambda/(Nd)$  است.

• ج-

$$I(0) = N^2 I_0 = 36I_0$$

- د- توزیع شدت بر حسب زاویه در شکل (۵۷.۲) نشان داده شده است.



شکل ۵۷.۲:

## ۲۰۵۳

در یک توری پراش<sup>۲۴</sup> که دارای 250 خط بر میلی‌متر است، با نور مرئی که بطرور عمودی بر صفحه شیارها می‌تابد، روشن می‌شود.  
چه طول موجی در پراش زاویه  $30^\circ$  ظاهر می‌شود، و آن دارای چه رنگی است؟  
(ویسکانسین)

حل:

معادله توری  $d = 1/250 \text{ mm}$ ، عدد صحیح  $k = d \sin \theta / \lambda$  بازاء و  $\theta = 30^\circ$  می‌دهد:

$$\lambda = 20000/k\text{\AA}.$$

برای نور سفید ( $4000\text{\AA} - 7000\text{\AA}$ )، این رنگ‌ها را دریافت می‌کنیم:

$$\lambda_1 = 4000\text{\AA} \quad (k = 5) \quad \text{بنفش}$$

$$\lambda_2 = 5000\text{\AA} \quad (k = 4) \quad \text{سبز}$$

$$\lambda_3 = 6670\text{\AA} \quad (k = 3) \quad \text{قرمز}$$

---

<sup>۲۴</sup>Diffraction Grating

## ۲۰۵۴

یک توری پراش با  $N$  خط که بفاصله  $\lambda$  از یکدیگر هستند تشکیل شده است. یک نور تکرنگ به طول موج  $\lambda$  بطور عمودی از سمت چپ بر توری می‌تابد؛ امواج تشعشع شده از توری در سمت راست دارای زاویه  $\theta$  هستند و توسط عدسی بر روی پرده متتمرکز می‌شوند.

- الف- رابطه‌ای برای توزیع شدت نور الگوی تداخل مشاهده شده روی پرده برحسب زاویه  $\theta$  بدست آورید. از اثر پراش ناشی از عرض شکاف صرفنظر کنید.

- ب- توان تفکیک توری  $\Delta\lambda/\lambda$  سنجشی از کوچکترین اختلاف طول موجی است که توری می‌تواند تفکیک نماید. با استفاده از معیار رایلی برای قابلیت تفکیک و نتایج بخش (الف)، نشان دهید که توان تفکیک مرتبه  $m$  برابر با  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}$  است.

(ویسکانسین)  
حل:

- الف- اختلاف فاز بین اشعه واردۀ از شکاف‌های مجاور  $\phi = kd \sin \theta = 2\pi/\lambda d \sin \theta$  است. بنابراین میدان الکتریکی کل در نقطه‌ای روی پرده جمع  $N$  جمله است:

$$\begin{aligned} E &= Ae^{jkr_1} \left| 1 + e^{j\phi} + e^{j2\phi} + \dots + e^{j(N-1)\phi} \right| \\ &= Ae^{jkr_1} \cdot e^{j(N-1)\phi/2} \cdot \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \end{aligned}$$

در این صورت، شدت الگوی تداخل

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

- ب- معیار ریلی <sup>۲۵</sup> می‌گوید که دو خط طیف مجاور وقتی از یکدیگر قابل تفکیک هستند که بیشینه یکی روی کمینه دیگری قرار گیرند. بنابراین لازم است که نور با طول موج  $\lambda + \Delta\lambda$  بیشینه اصلی مرتبه  $m$  خودش را در همان زاویه که برای کمینه اول دز طول موج  $\lambda$  در آن مرتبه تشکیل دهد. برای مرتبه

---

<sup>۲۵</sup> Rayleigh criterion

## فصل ۲. نورشناخت موجی

$m$  بیشینه اصلی از  $m\pi - \pi = \frac{N\phi}{2}$  و کمینه اول از  $\frac{\phi}{2}$  بدست می‌آید. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\frac{N\pi}{\lambda + \Delta\lambda} d \sin \theta = Nm\pi - \pi, \quad \frac{N\pi}{\lambda} d \sin \theta = Nm\pi$$

با گرفتن نسبت، خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = \frac{Nm}{Nm - 1} \quad \text{یا} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm - 1} \approx \frac{1}{Nm}$$

### ۲۰۵۵

- الف- توزیع شدت تشعشع پراشیده از یک توری که عرض آن قابل صرفنظر کردن است را محاسبه کنید.
- ب- تعداد بیشینه‌های کناری بین بیشینه‌های اصلی را بدست آورید
- ج- آیا شدت نور بیشینه‌های کناری یکسان هستند؟ توضیح دهید.

(ویسکانسین)

حل:

- الف- شدت نور برابر  $I = I_0 \frac{\sin^2 N\phi/2}{\sin^2 \phi/2}$  که در آن  $\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$  اختلاف فاز بین پرتوهای پراش مجاور،  $d$  ثابت توری،  $N$  تعداد خطوط است.

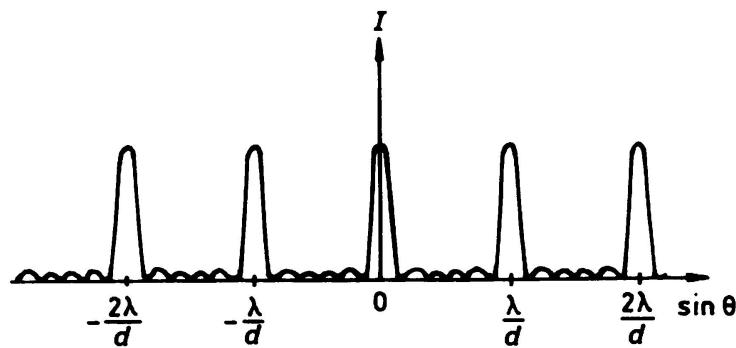
• ب-

- ج- شدت نور این بیشینه‌های کناری یکسان نیستند، زیرا بین  $0$  و  $\pi/2$  افزایش می‌یابد، در حالی که تعداد تناوبی تابع  $N\phi/2$  است، مخرج افزایش می‌یابد. شدت‌ها متناسب با ضریب‌ها ثابت نمی‌مانند. توزیع شدت برای  $N = 6$  در شکل (۵۸.۲) نشان داده شده است.

### ۲۰۵۶

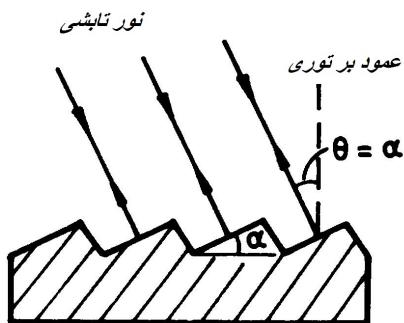
یکی از پیکربندی توری نوری مفید، پراش نور در پشت خود است.

- الف- اگر  $N$  خط توری بر واحد طول باشد، در چه طول موجی پراش موج به همان زاویه  $\theta$  تابش برگشت می‌کند؟  $\theta$  زاویه بین خط نرمال بر توری و جهت تابش است.
- ب- اگر دو طول موج، مثل  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$ ، بتابند، آیا امکان دارد پرتو را با این پیکربندی تکرنک کرد؟ چگونه؟



شکل: ۵۸.۲

(ویسکانسین)  
حل:



شکل: ۵۹.۲

- الف- این نوع توری به عنوان توری فروزان<sup>۲۶</sup> است. همان طوری که در شکل ۵۹.۲ نشان داده شده است، زاویه تابش،  $\theta$ ، برابر با  $\alpha$  است، که زاویه بین صفحه شیار و صفحه توری است. هر خط در طول آن یک اختلاف مسیر نوری  $d$  دارد، که در آن  $d = 1/N$  است. طول موج هائی که در معادله توری ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) صدق می کند در جهت تابش به عقب پراشیده می شوند.

<sup>۲۶</sup> Blazed Grating

- ب- یک توری که طول موج خاص  $\lambda_1$  را فروزان می‌کند، طول موج‌های  $\lambda_1/2$ ،  $\lambda_1/3$  و غیره را نیز فروزان می‌نماید. بنابراین این توری نمی‌تواند طول موج‌های  $\lambda_1/2$  را تفکیک کند. در این صورت نمی‌توان نور که شامل  $\lambda_1$  و  $\lambda_1/2$  باشد را تکرنگ کرد.

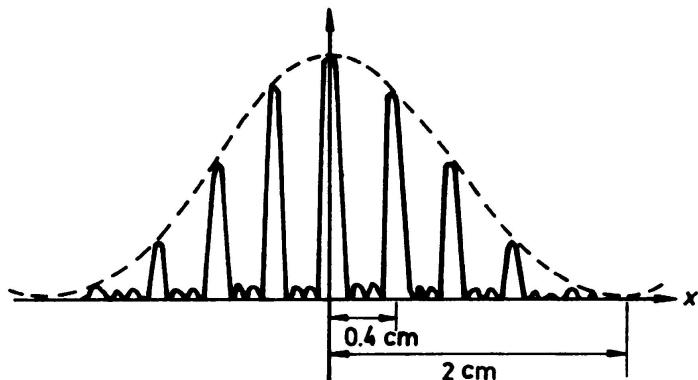
### ۲۰۵۷

الگوی شدت  $I$  بر حسب موقعیت  $x$  در شکل (۶۰.۲) نشان داده شده است که در روی دیوار به فاصله ۲۰ متر از دستگاه  $N$  شکاف موازی یکسان اندازه‌گیری شده است. نوری با طول موج  $\lambda = 6000\text{\AA}$  از درون شکاف‌ها گذشته و هر یک دارای عرض  $a$  و به فاصله  $d$  از یکدیگر قرار دارند.

- الف- مقدار  $N$ ،  $a$ ، و  $d$  چقدر است؟ (برای هر جواب خود دلیل ارائه دهید).
- ب- رابطه‌ای برای منحنی خط‌چین که پوشی برای بیشینه‌ها است بیان کنید و اهمیت فیزیکی آنرا توضیح دهید.

(ویسکانسین)

حل:



شکل ۲: ۶۰.۲

- الف- رابطه توزیع شدت نور ناشی از پراش نوری به صورت زیر خواهد بود:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

در اینجا  $N=2$  بیشینه کناری بین دو بیشینه اصلی وجود دارد. چون  $2 = N$  در این الگوی پراش است، داریم  $4$

صفر پراش اول وقتی  $\sin \theta = \pi \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = \pi$  رخ می‌دهد. این می‌دهد و از اینرو

$$a = \frac{\lambda}{\sin \theta} = 0.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

بیشینه اصلی اول وقتی رخ می‌دهد که  $\sin \theta = \pi \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = \pi$  باشد. این می‌دهد  $= 0.4 \text{ cm}/20\text{m}$ ؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta} = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$$

- ب- منحنی خطچین برای یک تک پراش برابر است با:

$$\left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2$$

که نمایشگر توزیع شدت نور پراشیده از هر شکاف است. توزیع شدت تداخل  $N$  شکاف، از ضرب عامل تداخل

$$\left[ \frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right]^2$$

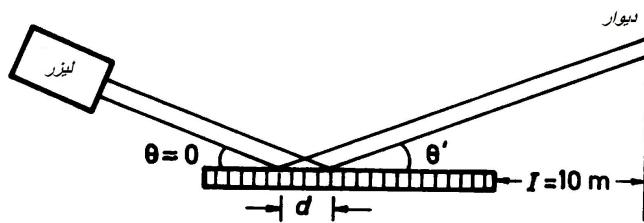
بدست می‌آید که همان پوش مدوله شده در توزیع پراش است.

## ۲۰۵۸

یک پرتو لیزر ( $\lambda = 6.3 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ) بسوی یک خطکش فلزی (که با  $1/16$  اینج مدرج شده است) تابیده می‌شود. تور بازتاب شده از سطح خطکش روی دیواری عمودی به فاصله ده متر (شکل ۶۱.۲) افکنده می‌شود.

- الف- شرطی برای  $\theta'$  بدست آورید که بیشینه تداخل روی دیوار بوجود آید. برای سادگی، فرض کنید که پرتو لیزر، در ابتدا تقریباً موازی خطکش است.
- ب- اولین جدائی عمودی نقطه مرتبه صفر و اول الگوی تداخل بر روی دیوار چقدر است؟

(ویسکانسین)  
حل:



شکل ۶۱.۲

- الف- اختلاف مسیر نوری نور موازی که در شکل ۶۱.۲ نشان داده شده، برابر است با:

$$\Delta = d(\cos \theta - \cos \theta') \approx d(1 - \cos \theta')$$

چون  $0 \approx \theta$  است. بیشینه‌های تداخل وقتی  $m$  عدد صحیح است، اتفاق می‌افتد، یا

$$\cos \theta' = 1 - m\lambda/d$$

- ب- وقتی  $m = 0$  است،  $0 = \theta'$  می‌شود. وقتی  $m = 1$  است، با گرفتن  $d = 1$  قسمت ( $\frac{1}{16}$  اینچ)  $\theta'_1 = 1 - \lambda/d = 0.9996$ . تفکیک عمودی روی دیوار بین نقطه صفر و اولین مرتبه برابر است با:

$$x = l \cdot \tan \theta'_1 = 0.28 \text{ m}$$

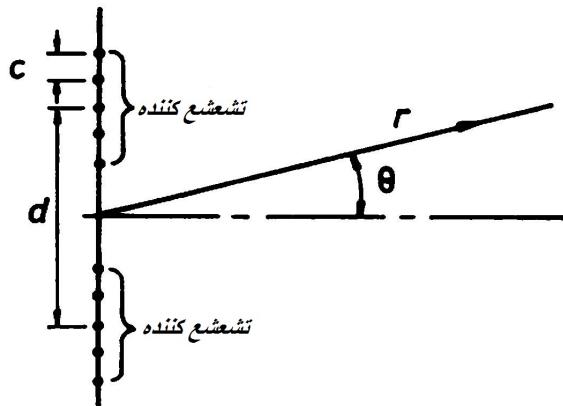
## ۲۰۵۹

یک میدان صوتی بوسیله چینش منابع خطی یکسان در دو آزایه یکسان حاوی  $N$  منبع، مطابق شکل ۶۲.۲ ساخته می‌شود.  
تمام تشعشع کننده‌ها در یک صفحه عمود بر صفحه شکل قرار دارند و امواجی با طول موج  $\lambda$  تولید می‌کنند.

- الف- فرض کنید  $r >> d, c, \lambda$  است. شدت صوت تولید شده را بصورت تابعی از شدت بیشینه  $I_m, \lambda, \theta, B, c$  و  $d$  فاصله بین مرکز آرایه‌ها بدست آورید.
- ب- با گرفتن یک حد مناسب، یک نتیجه تقریبی برای الگوی تداخل تولید شده توسط دو شکاف بعرض  $a$  و به فاصله  $d$  از هم بدست آورید.

(دانشگاه سانی-بوفالو)

حل:



شکل ۶۲.۲

الف- توزیع شدت تولید شده توسط هر آرایه بصورت زیر است

$$I \sim \left( \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2$$

که در آن  $\lambda/\lambda$  است. رابطه

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$$

$$\begin{aligned} I &= 2I_1(1 + \cos \phi) \\ &= 4I_1 \cos^2(\phi/2) \\ &\sim 4 \left( \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

ب- برای سامانه دو شکاف،  $N \rightarrow \infty$  میل و  $Nc = a$  قرار می‌دهیم. در اینجا عرض هر شکاف است.

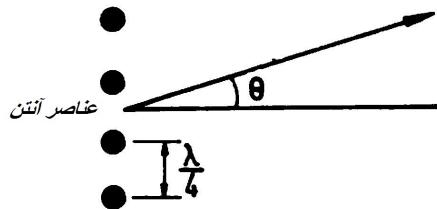
$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} I &= \lim_{N \rightarrow \infty} I_m \frac{\sin^2(\frac{a\pi}{\lambda} \sin \theta)}{N^2 \sin^2(\frac{a\pi}{N\lambda} \sin \theta)} \cos^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} I_m \frac{\sin^2(\frac{a\pi}{\lambda} \sin \theta) \cos^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\sin^2(\frac{a\pi}{\lambda} x \sin \theta)}{x^2}} \\ &= \frac{\sin^2(\frac{a\pi}{\lambda} \sin \theta)}{(\frac{a\pi}{\lambda} \sin \theta)} \cos^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta) \end{aligned}$$

## ۲۰۶۰

شکل (۶۲.۲) یک رادار آتن آرایه‌ای فازی که هر عنصر بفاصله  $\lambda/4$  از یکدیگر هستند را نشان می‌دهد. اختلاف فاز هر عنصر نسبت به بعدی  $\pi/6$  است یعنی

## فصل ۲. نورشناخت موجی

عنصر صفر دارای فاز صفر درجه عنصر اول دارای فاز  $\pi/6$  و عنصر دوم دارای فاز  $2\pi/6$  و عنصر سوم  $3\pi/6$  و الی آخر.



شکل ۶۳.۲

- الف- در چه زاویه‌ای از  $\theta$  الگوی تداخل گلبرگ فرستنده صفر است.
- ب- آیا گلبرگ دومی وجود دارد؟

(ویسکانسین)

**حل:**

فرض کنید دامنه مختلط موج فرستنده عنصر صفر برابر  $A$  باشد. دامنه مختلط عناصر بعدی اول و دوم و الی آخر بترتیب  $Ae^{-j\delta}$ ,  $Ae^{-j2\delta}$ ,  $Ae^{-j3\delta}$  و الی آخر باشد. در اینجا

$$\delta = \frac{2\pi\lambda}{4\lambda} \sin \theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \left( \sin \theta + \frac{1}{3} \right)$$

دامنه منتجه برابر است با:

$$A + Ae^{-j\delta} + Ae^{-j2\delta} + \dots + Ae^{-j(N-1)\delta} = A \frac{e^{jN\delta/2} \sin \frac{N\delta}{2}}{e^{j\delta/2} \sin \frac{\delta}{2}}$$

و شدت منتجه برابر  $I \sim A^2 [\sin(N\delta/2)/\sin(\delta/2)]^2$  می‌شود. گلبرگ ارسال تداخل سازنده وقتی رخ می‌دهد که  $\delta/2 = m\pi$  و  $m = \frac{\pi}{4}(\sin \theta + \frac{1}{3})$  عدد صحیح یا است.

- الف- وقتی  $\sin \theta = -1/3$ ,  $m = 0$  است. بنابراین بیشینه مرتبه صفر وقتی بوجود می‌آید که  $\theta = \arcsin(-1/3)$  باشد.

- ب- بیشینه دوم بازاء  $m = \pm 1$  یا  $|\sin \theta| < 1$  است. چون  $\sin \theta = \pm \frac{11}{3}$  گلبرگ دوم نمی‌تواند بوجود آید.

تداخل سنج فبری-پرو<sup>۲۷</sup> را شرح دهید. معادله‌ای برای موقعیت‌های بیشینه بدست آورده و شکل آنها را مشخص کنید. توان تفکیک این دستگاه چقدر است؟ (کلمبیا)  
حل:

این دستگاه برای تولید حلقه‌های تداخل نور ارسالی به آن است که بعداز چندین مرتبه بازتاب بین دو صفحه شیشه با پوشش داخلی از نقره که در فاصله کمی در هوا قرار دارند، استفاده می‌شود. یک عدسی پشت صفحه‌ها امواج ارسالی موازی را برای تداخل فراهم می‌کند. حلقه‌های هم مرکز با بیشینه‌ای که از رابطه زیر بدست می‌اید قرار دارند:

$$2d \cos \theta = m\lambda$$

که در آن  $d$  فاصله بین سطوح نقره اندود،  $\theta$  زاویه نیم‌راس که یک حلقه را به مرکز عدسی در بر می‌گیرد، و  $m$  عدد صحیح است. برای اثبات رابطه بالا به کتاب‌های درسی اپتیک مراجعه کنید.

توان تفکیک این دستگاه از نسبت  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  دو طول موج  $\lambda$  و  $\Delta\lambda + \lambda$  به نحوی که بیشینه شدت دو از  $I = \frac{1}{2}I_{max}$  می‌گذرد محاسبه می‌شود.

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \frac{\pi r}{1 - r^2}$$

که در آن  $r^2$  بازتابش سطح‌ها است.

## ۲۰۶۲

زاویه تفکیک دو ستاره توسط یک تلسکوپ بازتابی با مشخصات زیر را بر حسب ثانیه قوس دو ستاره پیدا کنید: عدسی شیئی 8 سانتی‌متر، فاصله کانونی 1.5 متر، بزرگنمائی عدسی چشمی  $80X$  است. طول موج را  $6000\text{\AA} = 10^{-8}$  سانتی‌متر فرض کنید.  
(ویسکانسین)

حل:

توان تفکیک زاویه‌ای تلسکوپ برابر است با

$$\Delta\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{6000 \times 10^{-8}}{8} \approx 2''$$

توان تفکیک چشم انسان تقریباً یک دقیقه قوس است. با استفاده از بزرگنمائی چشمی  $80X$ ، توان تفکیک چشم برابر  $2'' < 1'/80$  است. بنابراین، قابلیت تفکیک ستاره‌ها توسط تلسکوپ برابر  $2'' = Max(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2) = Max(1.22 \times 10^{-8}, 1.22 \times 80 \times 10^{-8})$  است.

<sup>۲۷</sup>Fabry-Perot interferometer

## ۲۰۶۳

فرض کنید می‌خواهید از یک ماہواره در شب از کره زمین عکس بگیرید. اگر از یک دوربین که فاصله کانونی عدسی آن پنجاه میلی‌متر با عدد  $f$  برای ۲۷ استفاده کنید، آیا می‌توانید دو چراغ جلو یک خودرو که بفاصله صد کیلومتر از ماہواره فاصله دارد را از یکدیگر تفکیک کنید.  
(ویسکانسین)

**حل:**

معیار ریلی برای توان تفکیک زاویه‌ای بقرار زیر است:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \frac{\lambda}{f'/f} \\ &\approx 1.22 \times \frac{0.6 \times 10^{-3}}{50/2} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ (rad)}\end{aligned}$$

چون، طبق تعریف:

$$f' = \frac{f'}{D}$$

که در آن  $f'$  فاصله کانونی عدسی دوربین عکاسی، و  $D$  قطر روزنہ است. با در نظر گرفتن فاصله دو چراغ جلو خودرو برابر یک متر، تفکیک زاویه‌ای از ماہواره برابر است با:

$$\theta \approx \frac{1}{100 \times 10^3} \approx 1 \times 10^{-5} \text{ rad} < \theta_1$$

بنابراین، نمی‌توانیم نور دو چراغ جلو یک خودرو را از یکدیگر تفکیک کنیم.

## ۲۰۶۴

با درنظر گرفتن پراش نوری که از درون یک تک شیار به عرض  $D$  عبور می‌کند، قطر کوچکترین دهانه روی ماه را با یک تلسکوپ به قطر عدسی شئی نیم متر که می‌توان تشخیص داد محاسبه کنید. طول موج نور را  $m = 10^{-7} \times 5$  و فاصله زمین تا ماه را  $m = 3.8 \times 10^8$  فرض کنید.  
(ویسکانسین)

**حل:**

توان تفکیک زاویه‌ای تلسکوپ برابر است با:

$$\theta_1 \approx \lambda/D = 10^{-6} \text{ rad.}$$

قطر کوچکترین دهانه قابل تفکیک برابر است با:

$$3.8 \times 10^8 \times 10^{-6} = 380 \text{ m.}$$

## ۲۰۶۵

دو چراغ جلو خودروئی به فاصله ۱.۳ متر از یکدیگر فاصله دارند. قطر مردمک چشم انسان چهار میلی‌متر و طول موج متوسط نور  $\lambda = 5500\text{\AA}$  است. فاصله‌ای را تخمین زنید که بتوان این دو چراغ را از یکدیگر تفکیک کرد.  
(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)

**حل:**

توان تفکیک زاویه‌ای چشم برابر  $\theta = \frac{1.22\lambda}{D} = 1.68 \times 10^{-4} \text{ rad}$  است. بنابراین فاصله‌ای که می‌توان آن دو را از هم تفکیک کرد برابر  $d = \frac{1.3}{\theta} = 7.75 \text{ km}$  است.

## ۲۰۶۶

یک تلسکوپ فضائی، بطوری که جدیداً طرح شده است، آینه‌ای به قطر دو متر خواهد داشت و در بالای جو زمین گردش خواهد کرد. فاصله بین دو ستاره که در فاصله  $10^{22} \text{ cm}$  از زمین هستند را که می‌توان با این تلسکوپ از هم تفکیک کرد چقدر است (حدود آنرا تخمین زنید).  
(دانشگاه کلمبیا)

**حل:**

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{6 \times 10^{-5}}{2 \times 10^2} = 3 \times 10^{-7} \text{ rad},$$

$$d \approx 3 \times 10^{-7} \times 10^{22} = 3 \times 10^{15} \text{ cm} = 3 \times 10^{10} \text{ km}$$

## ۲۰۶۷

• الف- ثابت کنید که برای پراش فرانهوفر توسط یک شکاف جهت اولین کمینه در هر طرف بیشینه اصلی از رابطه  $\theta = \lambda/w$  بدست می‌آید که در آن  $w$  عرض شکاف و  $\lambda$  طول موج است.

• ب- عرض یک روزنه چهارگوش در مقابل یک تلسکوپ چقدر باشد تا بتواند خطوط موازی یک کیلومتر از هم را روی سطح ماه تفکیک کند؟ فرض کنید که نور دارای طول موج  $m = 500 \times 10^{-9} \text{ m} = 500 \text{ nm}$  و فاصله ماه از زمین ۴۰۰,۰۰۰ کیلومتر است.

(ویسکانسین)  
**حل:**

## فصل ۲. نورشناخت موجی

- الف- توزیع شدت نور از رابطه  $I \sim \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2$  بدست می‌آید که در آن  $\beta = \frac{\pi w \sin \theta}{\lambda}$  است. برای اولین کمینه  $\beta = \pi$  و بنابراین  $\sin \theta = \frac{\lambda}{w}$  یا  $\theta \approx \frac{\lambda}{w}$  به طوری که  $w >> \lambda$  است.

• ب-

$$\theta = \frac{1}{4 \times 10^3}, \quad w = \frac{5 \times 10^{-7}}{\theta} = 0.2 \text{ m}$$

## ۲۰۶۸

یک دوربین عکاسی دارای عدسی  $35 \text{ mm}$  با فاصله کانونی  $50 \text{ mm}$  است. این را می‌خواهند برای عکسبرداری از یک شخص به ارتفاع  $175 \text{ cm}$  استفاده کنند بطوری که ارتفاع تصویر  $30 \text{ mm}$  شود.

- الف- فاصله دوربین از شخص چقدر باید باشد؟
- ب- اگر طول موج را  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  و قطر روزنه عدسی را یک سانتی‌متر فرض کنیم، بهترین قابلیت تفکیک را تخمین زنید.

(ویسکانسین)  
حل:

• الف-

$$\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{5} \\ m = \frac{3}{175} = \frac{u}{v} \end{cases}$$

از اینجا بدست می‌آید:

$$u = 296.7 \text{ cm}, \quad v = 50.9 \text{ cm}$$

شخص باید در فاصله  $297$  سانتی‌متری از دوربین قرار گیرد.

- ب- توان قابلیت تفکیک عدسی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

چون  $\Delta\theta = \frac{\Delta x}{v}$  خواهیم داشت

$$\Delta x = \Delta\theta \cdot v = 1.22\lambda v/D = 1.22 \times 5000 \times 10^{-8} \times 51 = 3.1 \times 10^{-3} \text{ cm.}$$

## ۲۰۶۹

دو ستاره به اندازه  $1 \times 10^{-6}$  رادیان جدائی زاویه‌ای دارند. آنها توری به طول موج‌های ۵۷۷۰ Å تا ۵۷۹۰ Å ساطع می‌کنند.

- الف- قطر عدسی تلکسوب چقدر باشد با بتوان تصویرهای دو ستاره را از هم جدا کرد؟

- ب- بلندی یک توری پراش چقدر باشد تا بتواند دو طول موج داده شده را جدا کرد؟

(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)  
حل:

- الف- توان تفکیک زاویه‌ای یک تلسکوپ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

برای ۵۷۹۰ Å داریم:

$$D = \frac{1.22 \times 5790 \times 10^{-8}}{1 \times 10^{-6}} = 70.6 \text{ cm.}$$

چون این مقدار بزرگتر از ۵۷۷۰ Å است، قطر لازم برای جداسازی دو ستاره باید حداقل ۷۰.۶ cm باشد.

- ب- توان تفکیک طول موجی یک توری برابر است با:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

که در آن  $N$  تعداد خطوط توری،  $\lambda$  طول موج متوسط و  $m$  مرتبه پراش است.

غالباً برای استفاده از مرتبه یک و سه برای رصد کردن استفاده می‌کنند. بازاء  $N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{5770+5790}{5790-5770} = 289$ ،  $m = 3$  و برای  $N = 96$  می‌شود.

بنابراین یک توری پراش ۲۸۹ خطی برای جدا سازی طول موج‌های داده شده لازم است.

## ۲۰۷۰

دو آنتن شلجمی رادیوئی هریک به قطر  $D$  به فاصله  $d >> D$  مستقیم رو به بالا قرار دارند. هر یک از آنتن‌ها با فرستنده‌ای به فرکانس  $f$  و طول موج  $\lambda (= C/f) << D$  تغذیه می‌شوند. مطمئن شوید که بطور صحیح تمام طرح و نقشه‌های خود را برچسب گذاری کرده‌اید.

- الف- شکل تقریبی الگوی تشعشعی در فاصله دور ( $r >> D^2/\lambda$ ) برای یک آنتن اگر بطور تکی کار کند چگونه است؟
- ب- شکل تقریبی الگوی تشعشعی در فاصله دور ( $r >> d, r >> D^2/\lambda$ ) اگر هر دو آنتن بطور هم‌فاز با یک فرستنده کار کنند چگونه است؟
- ج- فرض کنید هر آنتن با فرستنده جداگانه‌ای در فرکانس  $f$  کار کنند. اگر الگوی تشعشعی بخش (ب) بالا برای فاصله زمانی  $t$  ثابت باقی بماند، پایداری فرکانسی لازم برای دو فرستنده چقدر خواهد بود؟

(ویسکانسین)  
حل:

- الف- الگوی تشعشعی در فاصله  $r$  خیلی دور از یکی از آنتن‌ها تقریباً پراش فرانهوفر از یک روزنه دایره‌ای است:

$$I = I(0) \left[ \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \right]^2$$

که در آن  $D/2 = R$ ،  $\sin \theta = \rho/r$ ،  $k = 2\pi/\lambda$ ،  $\rho = \theta$ . فاصله شعاع نقطه مورد نظر از مرکز الگوی تشعشعی و  $J_1$  تابع بسل<sup>۲۸</sup> نوع اول مرتبه یکم است.

- ب- امواج خارج شده از دو آنتن که بواسیله یک فرستنده هم‌فاز تغذیه می‌شوند با یکدیگر تداخل کرده و توزیع شدت آنها خواهد بود:

$$I = I(0) \left[ \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \right]^2 \cos^2 \alpha$$

که در آن  $\alpha = kd \sin \theta/2$  است.

- ج- اگر الگوی تشعشعی بخش (ب) بالا در فاصله زمانی  $t$  ثابت باقی بماند، دو فرستنده باید بطور جزئی همدوس باشند. زمان همدوسی  $t_c$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$t_c \cdot \Delta f \approx 1$$

که باید بزرگتر از  $t$  باشد. بنابراین لازم است که داشته باشیم:

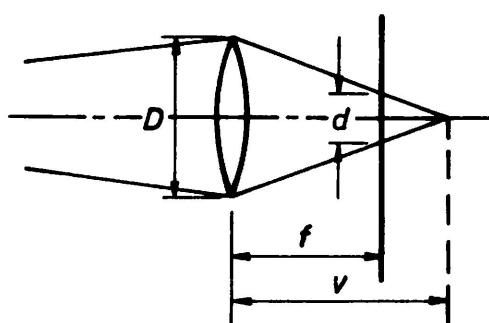
$$\Delta f \approx \frac{1}{t_c} < \frac{1}{t}$$

<sup>۲۸</sup>Bessel's Function

## ۲۰۷۱

در یک دوربین عکاسی (فاصله کانونی عدسی ۵۰ سانتی‌متر و قطر روزنه  $D$ ، حساسیت دید نور به تندی روی ستاره‌ها متوجه شود؛ سپس آنرا بدون تغییر تمکز برای یک جسم در فاصله صد متر بکار می‌برند. بطور تقریبی چه روزنه  $D$  بهترین قابلیت تفکیک را برای این جسم میدهد؟  $D$  را بر حسب سانتی‌متر محاسبه کنید.

(ویسکانسین)



شکل ۶۴.۲:

### حل:

چون دوربین عکاسی به تندی روی ستاره‌ها متوجه شده است، فیلم دقیقاً در فاصله کانونی پنجاه سانتی‌متر از عدسی قرار دارد. برای جسم در فاصله صد متر، تصویر از رابطه عدسی بدست می‌آید:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

که پشت فیلم قرار دارد. نقطه روشنی از جسم در روی محور نوری روی فیلم به صورت یک دیسک بقطر  $d$  ظاهر می‌شود. اگر  $d$  بهمان اندازه که دیسک ایری<sup>۲۹</sup> عدسی است باشد، خواهیم داشت:

$$d = \frac{1.22\lambda f}{D}$$

از هندسه شکل (۶۴.۲) داریم:

$$\frac{d}{D} = \frac{v - f}{v}$$

<sup>۲۹</sup> Airy disk

ازاینرو لازم است که:

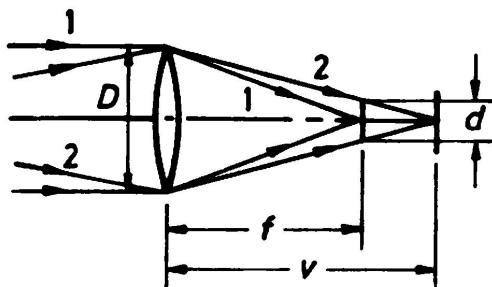
$$d = \frac{(v - f)D}{D} = \frac{fD}{u} = \frac{1.22\lambda f}{D}$$

یا با در نظر گرفتن  $D = \sqrt{1.22\lambda u} \approx 0.82 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 5500 \text{ Å}$  بدست می‌آید.

## ۲۰۷۲

فاصله کانونی یک عدسی دوربین عکاسی عالی  $60 \text{ mm}$  بطور دقیق روی جسمی در  $15 \text{ m}$  متراکز شده است. برای روزنه‌ای (دیافراگم) (باز یا بسته بودن) تار بودن پراش نور مرئی تقریباً برابر تار بودن غیر متراکز برای ستاره ( $\infty$ ) است؟ (ویسکانسین)

حل:



شکل ۶۵.۲

رابطه عدسی

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

تصویر در فاصله

$$v = \frac{uf}{u-f}$$

بدست می‌آید. تاری پراش از معیار ریلی<sup>۳۰</sup>  $\frac{1.22\lambda}{D} = \theta$  بدست می‌آید. در این صورت، قطر تار بودن برابر است با:

$$d = \theta v = \frac{1.22\lambda v}{D}$$

تاری غیر متراکز<sup>۳۱</sup> از هندسه شکل (۶۵.۲) بدست می‌آید:

<sup>۳۰</sup> Rayleigh criterion

<sup>۳۱</sup> Defocus blur

$$d = \frac{(v - f)D}{f}$$

اگر این دو با هم برابر باشند، خواهیم داشت:

$$D = \sqrt{\frac{1.22\lambda vf}{(v - f)}} = \sqrt{1.22\lambda u}$$

برای طول موج  $\lambda = 5500\text{\AA}$  نور مرئی و  $u = 15\text{ m}$ ، بدست می‌آید:

### ۲۰۷۳

یک آینه شلجمی با روزنہ نسبتاً کوچک (قطر ده سانتی‌متر و طول کانونی پنج متر) برای عکسبرداری از ستاره‌ها بکار می‌رود. محدودیت اصلی وضوح تصویر اول روی محور سپس خارج از محور است. بطور تقریبی اندازه تصویر "لکه" برای ستاره روی محور در نور مرئی چقدر است؟ (ویسکانسین)

### حل:

برای عکسبردار از ستاره‌ها، محدودیت اصلی تفکیک پراش فرانهوفر با روزنہ تلسکوب است. قطر تصویر "لکه" (دیسک ایری) یک ستاره روی محور برابر است با:

$$d = \frac{1.22\lambda f}{D}.$$

با  $\lambda = 5000\text{\AA}$ ،  $f = 500\text{ cm}$ ،  $D = 10\text{ cm}$  داریم:

$$d = 0.3 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

برای خارج از محور اشعه زاویه  $\theta$  با محور تلسکوب می‌سازد. قطر موثر روزنہ به مقدار  $D \cos \theta$  کاهش می‌یابد، و قطر دیسک ایری خواهد شد:

$$d' = \frac{1.22\lambda f}{D \cos \theta}.$$

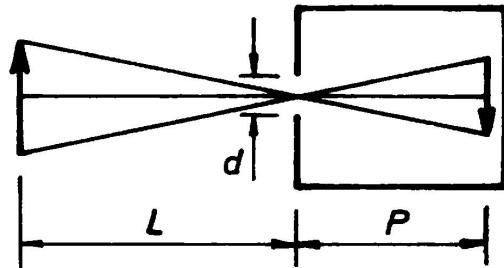
### ۲۰۷۴

یک دوربین سوراخ سوزنی شامل یک قوطی است که تصویر روی صفحه فیلم بفاصله  $P$  از سوراخ بقطر  $d$  تشکیل می‌شود. جسم در فاصله  $L$  از سوراخ قرار دارد، و طول موج نور  $\lambda$  استفاده می‌شود (شکل ۶۶.۲).

- الف- بازاء تقریباً چه قطر  $d$  بهترین وضوح تصویر را خواهیم داشت؟
- ب- با استفاده از سوراخ سوزنی بخش (الف)، کمینه فاصله  $D$  بین سوراخ و جسم چقدر باشد تا تصویر واضح بدست آید؟

(ویسکانسین)

حل:



شکل ۶۶.۲

- الف- از نور هندسی میدانیم که یک نقطه از جسم یک دیسک روشن روی فیلم به قطر  $\Delta_1$  درست می‌کند.

$$\frac{\Delta_1}{L+P} = \frac{d}{L}$$

بعارت دیگر، چون پراش بوسیله سوراخ سوزنی، یک دیسک ایری روی فیلم به قطر

$$\Delta_2 \approx \frac{\lambda P}{d}$$

درست می‌کند، قطر تصویر منتجه آن نقطه خواهد شد:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{(L+P)d}{L} + \frac{\lambda P}{d}$$

با کمینه کردن  $\Delta$  نسبت به  $d$  خواهیم داشت:

$$d = \sqrt{\frac{\lambda LP}{L+P}}$$

- ب- برای تصویر تفکیک دو نقطه نزدیک بهم از جسم، فاصله بین دو تصویر باید کوچکتر از  $\Delta_2$  باشد. نور هندسی میدهد:

$$\frac{D}{L} = \frac{\Delta_2}{P}$$

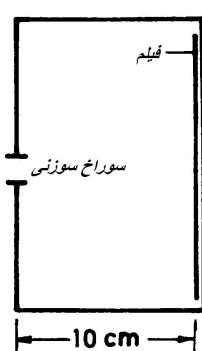
$$D = \frac{\lambda L}{d} = \sqrt{\frac{\lambda L(L+P)}{P}}$$

بنابراین

## ۲۰۷۵

اندازه بھینه برای روزنہ یک دوربین سوراخ سوزنی را تخمین زنید. می توانید فرض کنید که شدت کافی است و جسم در بی نهایت قرار دارد. صفحه قرار گرفتن صفحه فیلم از سوراخ سوزنی (شکل ۶۷.۲) ده سانتی متر است.

(ام آی تی)  
حل:



شکل ۶۷.۲

بر طبق حل مسئله ۲۰۷۴، اندازه بھینه روزنہ

$$d = \sqrt{\frac{\lambda LP}{L + P}} \approx \sqrt{\lambda P}$$

برای

$$L \gg P$$

است. بنابراین بازاء  $\lambda = 5500\text{Å}$  خواهیم داشت:

## ۲۰۷۶

اختلاف بین کارکرد نوری در نزدیکی طول موج  $100\text{Å}$  و  $5000\text{Å}$  بویژه تمایز<sup>۳۲</sup> را برای موارد زیر بحث کنید:

- الف- استفاده از عدسی‌ها.
- ب- استفاده از آینه‌ها.
- ج- توان تفکیک تکرنگی توری با عرض ثابت.

---

<sup>۳۲</sup>Contrast

- د- کمترین قابلیت تفکیک جداسازی زاویه‌ای یک سامانه تشکیل تصویر با قطر ثابت.

(ویسکانسین)  
حل:

- الف- طول موج نزدیک  $\text{\AA} 5000$  ناحیه مرئی است، در حالیکه در اطراف  $\text{\AA} 100$  در محدوده اشعه ایکس است و با چشم قابل رویت نیست.

چون ضریب شکست شیشه برای نور مرئی بیش از واحد، و برای اشعه ایکس کمتر یک است، عدسی‌های معمولی را می‌توان بر کانونی کردن نور مرئی بکار برد، در حالی که اشعه ایکس را فقط می‌توان توسط کریستال‌ها منكسر کرد.

- ب- بر خلاف نور مرئی که می‌تواند بوسیله آینه‌های معمولی بازتاب کرد، اشعه ایکس می‌تواند بدرون بیشتر مواد نفوذ کند و فقط می‌تواند هنگام تابش زاویه بحرانی، منعکس شود.

- ج- توان قابلیت تفکیک تکرنگی یک توری از رابطه  $mN = \lambda/\Delta\lambda$  بدست می‌آید که در آن  $\Delta\lambda$  اختلاف طول موج کمترین قابلیت تفکیک،  $N$  تعداد کل خطوط و  $m$  مرتبه پراش است. برای یک  $m$  و  $N$  مفروض، هر قدر  $\lambda$  برای اشعه ایکس کوچکتر باشد،  $\Delta\lambda$  نیز باریکتر خواهد بود.

- د- کمترین زاویه تفکیک از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta\theta = 1.22\lambda/D$$

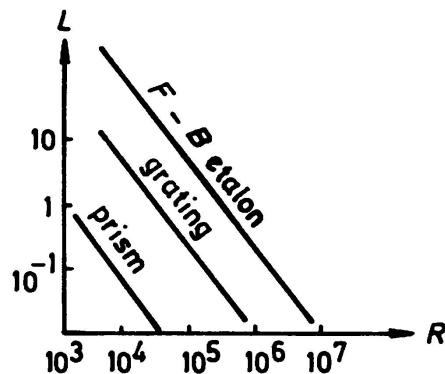
که در آن  $D$  قطر روزنه است. چون  $\lambda \sim \Delta\theta$  است، کمترین جداسازی زاویه‌ای قابل تفکیک برای اشعه ایکس باید بمراتب کوچکتر باشد.

## ۲۰۷۷

مزایای سه دستگاه زیر را برای مطالعه طیف اتمی (در ناحیه نور مرئی) مقایسه کنید.

۱. توری پراش صفحه‌ای.
۲. منشور شیشه‌ای  $60^\circ$ .
۳. تداخل سنج فبری-پرو

تا آنجا که ممکن است ویژگی هایی مانند وضوح، پاشندگی، ناحیه و ماهیت منبع نور و غیره را از نظر کمی در نظر گیرید. در هر مورد خصوصیات فیزیکی و هندسی مهم را به روشنی نشان دهید. (به منظور قطعیت، ممکن است فرض کنید که هر سه دستگاه دارای "روزنہ" یکسانی هستند) (ویسکانسین)



شکل ۶۸.۲:

### حل:

برای تمایز طول موج ها، منشور شیشه‌ای دارای کمترین توان تفکیک است، در حالی که تداخل سنج فبری-پرو دارای بالاترین بوده و می‌تواند برای مطالعه ساختار دقیق طیف بکار برد شود. توان تفکیک رنگ یک طیف سنج بصورت  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  تعریف می‌شود. برای منشور،  $R = B(\frac{dn}{d\lambda})$  است که در آن  $B$  طول قاعده و  $n$  ضریب شکست برای طول موج  $\lambda$  است. برای توری صفحه‌ای،  $R = mN$ ، که در آن  $m$  مرتبه پراش و  $N$  تعداد کل خطوط است. برای فبری-پرو،  $R = \frac{m\pi}{1-r}\sqrt{r}$ ، که در آن  $r$  بازتابش آینه و  $m$  مرتبه تداخل و  $\approx \frac{2s}{\lambda}$  است. در آن  $s$  فاصله صفحه‌ها است. به عنوان مثال برای طول موج  $500 nm$ ، یک منشور با شیشه فلینت<sup>۳۳</sup> ( $\frac{dn}{d\lambda} \approx 8 \times 10^2 cm^{-1}$ ) با  $B = 10 cm$  دارای  $R \sim 10^4$  است، و یک توری صفحه‌ای با  $14000$  خط در اینچ و عرض  $6$  اینچ دارای  $R \sim 10^6 - 10^7$ ، و فبری-پرو دارای  $R \sim 10^6 - 10^7$  است.

تفکیک زاویه‌ای به صورت  $\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$  تعریف می‌شود که برای یک منشور شیشه‌ای با زاویه بازتاب  $\alpha$  در انحراف کمینه است. برای یک توری صفحه‌ای  $\frac{m}{d \cos \theta}$  که در آن  $d$  فاصله توری است. برای تداخل سنج فبری-پرو،  $\frac{\cos \theta}{\lambda}$  است. برای دستگاه‌های بالا، پاشندگی زاویه‌ای بترتیب  $1.3 \times 10^3$ ,  $10^4$ ، و

<sup>۳۳</sup>Flint glass

برای محدوده طول موج‌های یک منشور که باید مطالعه شود، فقط محدودیت جذب مواد است. برای توری محدودیت اجتناب از همپوشانی طول موج‌های پراش است. اگر  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  در مرتبه  $m$  و  $(m+1)$  ام مشاهده شود، اگر  $\lambda_1 \lambda_2 < (m+1)m$  باشد، همپوشانی خواهیم داشت. محدودیت برای فبری-پرو مرتبه  $(m+1)$  ام طول موج  $\lambda$  که با مرتبه  $m$  طول موج  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$  را در نظر گیرید. مقدار  $\frac{\lambda^2}{2d \cos \theta} \approx \frac{\lambda^2}{2d}$  برای  $0 < \theta \approx \pi$  بیشترین ناحیه طول موجی است که دستگاه باید روشن باشد تا از همپوشانی رنگ‌های مختلف دور باشد و این به عنوان ناحیه طیف آزاد معروف است.

توان جمع‌آوری نور  $L$  یک دستگاه بستگی به کل انتقال  $T$ ، روزنه  $A$  و زاویه حجمی  $\Omega$  که تحت آن نور دریافت می‌شود برابر  $L \approx TA\Omega$  است. شکل (۴۸.۲) محدودیت  $R$  و  $L$  را برای سه دستگاه بالا نشان می‌دهد. کارائی یک دستگاه اغلب به صورت  $E = RL$  بیان می‌شود.

## ۲۰۷۸

یک پرتو نور با قطبش بیضی جزئی<sup>۳۴</sup> که در جهت  $z$ ها منتشر می‌شود، از درون یک تحلیلگر قطبش خطی کامل<sup>۳۵</sup> عبور می‌کند. وقتی محور انتقال تحلیلگر در امتداد محور  $x$ ها است، شدت ارسالی بیشینه و مقدار آن  $1.5I_0$  است. هنگامی که محور انتقال در امتداد محور  $y$ ها است، شدت ارسالی کمینه و مقدار آن  $I_0$  است.

- الف- وقتی محور انتقال با محور  $x$ ها زاویه  $\theta$  می‌سازد، شدت چقدر است؟ آیا جواب شما بستگی به چه کسری از نور غیرقطبیده است، دارد؟

ب- نور اصلی را در ابتدا از درون یک تیغه ربع موج<sup>۳۶</sup> عبور داده و سپس از درون تحلیلگر قطبش خطی عبور می‌دهیم. محورهای تیغه ربع موج با محورهای  $x$  و  $y$  همسو هستند. اکنون درمی‌یابیم که وقتی محور انتقال تحلیلگر با محور  $x$ ها زاویه  $30^\circ$  می‌سازد، شدت بیشینه از درون دو دستگاه عبور می‌کند.

شدت بیشینه را بدست آورده و معلوم کنید چه کسری از شدت تابشی قطبیده نیست.

(CUSPEA)  
حل:

<sup>۳۴</sup>Partially Elliptically Polarised

<sup>۳۵</sup>Perfect Linear Polarization Analyzer

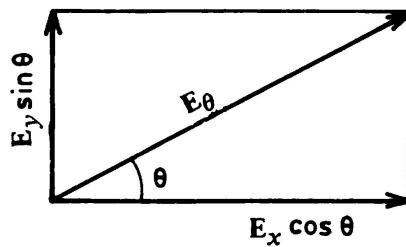
<sup>۳۶</sup>Quarter-wave plate

- الف- فرض کنید شدت نور غیرقطبیده بعداز عبور از تحلیلگر برابر  $I_u$  باشد. این علی رغم اینکه محور انتقال با محور  $x$  ها چه زاویه‌ای داشته باشد، ثابت باقی می‌ماند. فرض کنید شدت مولفه‌های  $x$  و  $y$  نور قطبیده بیضی بترتیب  $I_{ey}$  و  $I_{ex}$  باشد. در این صورت داریم:

$$I_x = 1.5I_0 = I_u + I_{ex}$$

$$I_y = 1.0I_0 = I_u + I_{ey}$$

تغییرات بیضی گونه را می‌توان بصورت دو نور خطی با اختلاف فاز  $90^\circ$



شکل ۶۹.۲:

متعامد، مانند شکل (۶۹.۲)، در نظر گرفت. بردار میدان الکتریکی آن را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_x \cos \theta + \mathbf{E}_y \sin \theta$$

شدت مولفه قطبیگی برابر  $I_e$  برابر  $|E_0|^2$  یا

$$I_e = I_{ex} \cos^2 \theta + I_{ey} \sin^2 \theta$$

خواهد بود. در این صورت با نوشتن  $I_u = I_u \cos^2 \theta + I_u \sin^2 \theta$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_e + I_u = (I_{ex} + I_u) \cos^2 \theta + (I_{ey} + I_u) \sin^2 \theta \\ &= 1.5I_0 \cos^2 \theta + I_0 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

از اینرو  $I(\theta)$  بستگی به چه کسری از نور قطبیده است ندارد.

- ب- تیغه  $\frac{\lambda}{4}$  اختلاف فاز  $90^\circ$  بین دو مولفه متقابلاً متعامد تولید می‌کند و نور با قطبش بیضی را به قطبش خطی تبدیل می‌کند. چون

$$\frac{\sqrt{I_{ey}}}{\sqrt{I_{ex}}} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

داریم

$$I_{ey} = \frac{I_{ex}}{3}$$

ترکیب آن با دو معادله اولیه بدست می‌آید:

$$I_{ex} = 0.75I_0, \quad I_{ey} = 0.25I_0$$

$$I_u = 0.75I_0$$

در نتیجه شدت بیشینه وقتی  $\theta = 30^\circ$  است، خواهد بود:

$$I_{ex} + I_{ey} + I_u = 1.75I_0$$

شدت تابش کسری از نور غیرقطبیده برابر است با:

$$\frac{2I_u}{1.5I_0 + I_0} = 0.60$$

### ۲۰۷۹

چهار تیغه قطبشگر کامل <sup>۳۵</sup> بهم طوری بسته شده‌اند که محور هریک  $30^\circ$  ساعت گرد نسبت به تیغه بعدی چرخیده است. اگر پرتو نور غیرقطبیده به‌این مجموعه تابیده شود، چه شدت نوری از آن خارج می‌شود؟ (ویسکانسین)

**حل:**

نور غیرقطبیده را می‌توان نتیجه مولفه‌های دو نور قطبیده غیرهمدوس با صفحه‌های قطبیده متقابلاً عمود در نظر گرفت. در این صورت اگر شدت نور تابشی  $I_0$  باشد، شدت نور خارج شده از تیغه اول  $I_0/2$  خواهد بود. بر طبق قانون مالوس <sup>۳۸</sup> شدت نور خارج شونده از تیغه قطبیده  $\cos^2 \theta$  برابر شدت نور تابشی با قطبش خطی خواهد بود. در اینجا  $\theta$  زاویه بین محور انتقال تیغه و صفحه قطبش نور تابشی است. بنابراین شدت نور خارج شونده از چهارمین تیغه خواهد بود:

$$I_4 = I_3 \cos^2 \theta = I_2 \cos^4 \theta = I_1 \cos^6 \theta = \frac{I_0 \cos^6 \theta}{2} = \frac{27I_0}{128}$$

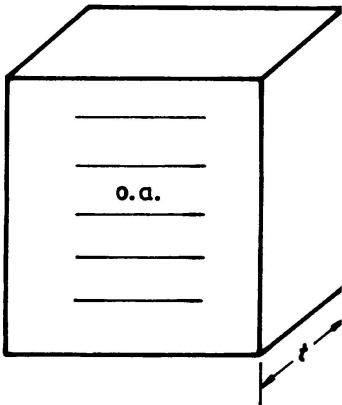
### ۲۰۸۰

یک کریستال نازک کوارتز به ضخامت  $t$  به‌ نحوی بریده می‌شود که محور نوری <sup>۳۹</sup> آن موازی سطح کریستال باشد (<sup>۷۰.۲</sup>). برای نور سدیوم  $\lambda = 589 nm$ ، ضریب شکست کریستال ۱.۵۵ برای نور غیرقطبیده موازی محور نوری است و ۱.۵۴ برای نور قطبیده عمود بر محور نوری است.

<sup>۳۷</sup>Perfect Polarizing Plate

<sup>۳۸</sup>Malus' law

<sup>۳۹</sup>Optical Axis (o.a.)



شکل ۷۰.۲:

- الف- اگر دو پرتو نور، که بترتیب موازی و عمود بر محور نوری قطبیده هستند، هم فاز به این کریستال وارد شوند، ضیخامت این کریستال چقدر باشد تا پرتو خارج شده  $90^\circ$  اختلاف فاز داشته باشند؟
- ب- بطور دقیق شرح دهید که چگونه کریستال بالا را باید بکار برد تا نوری با قطبش دایره‌ای تولید کند.

(ویسکانسین)  
حل:

- الف- از رابطه  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} t(n_e - n_o) = \frac{\pi}{2}$  داریم:

$$t = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 14.7 \mu m.$$

- ب- فرض کنید یک نور غیر قطبیده از درون این تیغه قطبشگر بگذرد و نور قطبیده شود. نور قطبیده را بطور عمودی بر کریستال بالا می‌تابانیم. اگر محور انتقال تیغه قطبشگر زاویه  $45^\circ$  با محور نوری کریستال بسازد، نور خارج شونده نوری با قطبش دایره‌ای خواهد بود

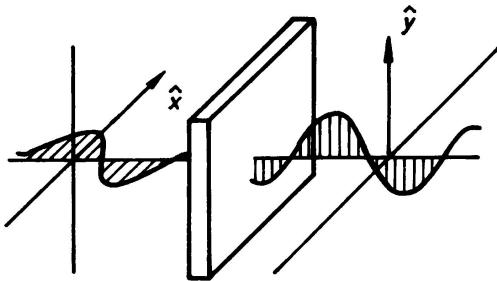
## ۲۰۸۱

فرض کنید تعدادی صفحه‌های از دو نوع مواد فعال نوری بشما داده‌اند. صفحه‌ها از نوع  $P$  قطبشگرهای کاملی هستند: وقتی نوری بطور عمودی به آنها تابیده

## فصل ۲. نورشناخت موجی

شود، نوری قطبیده، موازی با محور  $\hat{n}$  خارج و نور عمود بر  $\hat{n}$  را جذب می‌کند. صفحه‌های نوع  $Q$  تیغه‌های ریع موج هستند: آنها فاز موج تابش عمودی که قطبش آن موازی محور  $\hat{m}$  است بقدر  $2/\pi$  نسبت به نوری با قطبش عمود بر  $\hat{m}$  جلو می‌اندازد.

- الف- تشریح کنید که چگونه می‌توان با ترکیب این مواد دستگاهی تولید کرد که نور تابشی قطبش موازی با محور  $\hat{X}$  به نور خارج شده به قطبش عمود بر محور  $\hat{X}$  تبدیل کند (شکل ۷۱.۲). در این دستگاهی که شما طرح کرده‌اید چه مقدار شدت نور تلف می‌شود؟



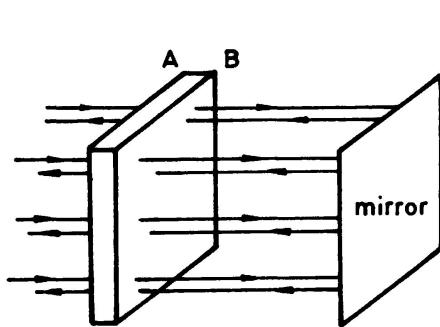
شکل ۷۱.۲:

- ب- تشریح کنید که چگونه می‌توان با این مواد یک موج با قطبش "دایره‌ای" درست کرد- دستگاهی که نور غیرقطبیده از سمت  $A$  وارد و نوری با قطبش دایره‌ای از سمت  $B$  خارج شود (شکل ۷۲.۲). کمترین تلفات ممکن شدت نور در این فرآیند چقدر است؟

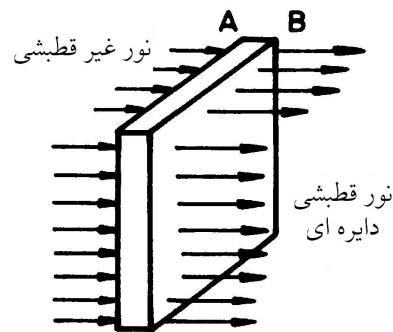
- ج- اگر توان وارد بر طرف  $A$  برابر  $I_0$  با طول موج  $\lambda$  باشد، مقدار بزرگی تورک <sup>۴۰</sup> قطبشگر دایره‌ای در بخش (ب) چقدر است؟

- د- اگر نور خارج شونده از قطبشگر دایره‌ای بطور عمودی بر یک آینه بتاولد، چه مقدار شدت نور پس از عبور برای بار دوم از قطبشگر دایره‌ای، تلف می‌شود؟ (شکل ۷۳.۲)

- ه- دو تیغه از قطبشگر دایره‌ای که در بخش (ب) طرح کرده‌اید، در نظر گیرید. یکی را برگردانید و آنها را مانند شکل (۷۴.۲) کنار هم قرار دهید.



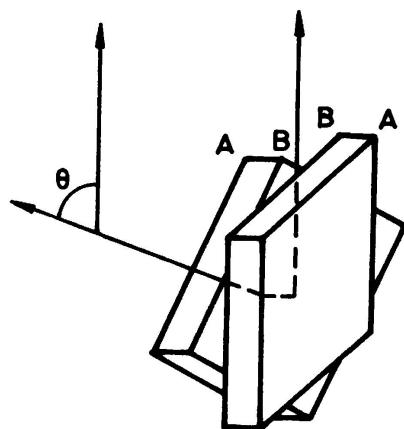
شکل ۷۳.۲:



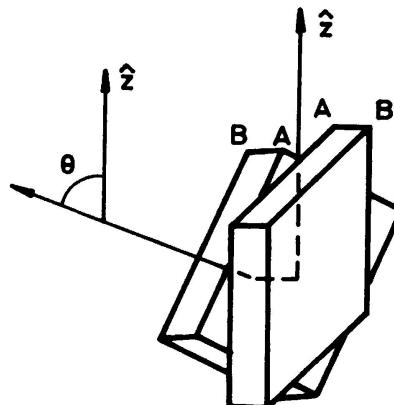
شکل ۷۲.۲:

فرض کنید که نور غیرقطبیده‌ای بطور عمودی بر این سامانه می‌تابد. چه شدت نوری بر حسب تابعی از  $\theta$  انتقال می‌یابد؟

- و- اکنون ترتیب را بر عکس کنید، شکل (۷۵.۲). چه شدت نوری بر حسب تابعی از  $\theta$  انتقال می‌یابد؟



شکل ۷۵.۲:



شکل ۷۴.۲:

(ام آی تی)  
حل:

- الف- دو تیغه نوع  $P$  را بقسمی که محور  $\hat{n}$  اولین تیغه زاویه  $45^\circ$  با محور  $\hat{X}$

## فصل ۲. نورشناخت موجی

و محور  $\hat{n}$  دومین تیغه  $90^\circ$  با محور  $\hat{X}$  می‌سازد پیش هم قرار می‌دهیم. ترکیب تیغه‌ها نوری که قطبش آن موازی محور  $\hat{X}$  است را به نوری با قطبش عمود بر محور  $\hat{X}$  تبدیل می‌کند. شدت نور خارج شده  $I_0 \cos^4 45^\circ = I_0/4$  طبق قانون مالوس است، دراینجا  $I_0$  شدت نور تابشی است.

- ب- قطبشگر (طرف A) و تیغه  $\frac{\lambda}{4}$  (طرف B) را ترکیب کرده بطوری که محورهای  $\hat{n}$  و  $\hat{m}$  نسبت به یکدیگر زاویه  $45^\circ$  داشته باشند. ترکیب این دو تیغه نور غیرقطبیده را به نوری با قطبش دایره‌ای تبدیل می‌کند. اگر تلفات تیغه  $\frac{\lambda}{4}$  قابل چشم پوشی باشد، شدت نور خارج شده به  $I_0/2$  کاهش می‌یابد.

- ج- گستاور زاویه‌ای  $J$  و انرژی  $W$  نور قطبیده دایره‌ای طبق رابطه  $J = W\omega^{-1}$  بهم مربوط هستند. در اینجا  $2\pi\nu = \omega$  و  $\nu$  فرکانس نور است. تورک نور قطبیده دایره‌ای برابر است با:

$$\tau = \frac{dJ}{dt} = \omega^{-1} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} I_0 \omega^{-1} = \frac{I_0 \lambda}{4\pi c}$$

چون فقط  $I_0/2$  به نور قطبیده دایره‌ای تبدیل می‌شود.

- د- نور قطبیده دایره‌ای از طریق تیغه موج  $\frac{\lambda}{4}$  به عقب برگشت داده می‌شود؛ نتیجه یک موج صفحه‌ای قطبیده خواهد بود که قطبش آن عمود بر محور انتقال قطبشگر (طرف A) است. بنابراین، هیچگونه نوری از طریق ترکیب آنها به عقب انتقال داده نمی‌شود.

- ه- شدت نور انتقال یافته برابر است با:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta$$

- و- شدت نور انتقال یافته برابر است با:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \theta$$

## ۲۰۸۲

یک ترمیم کننده بازینه<sup>۴۱</sup> در شکل (۷۶.۲) نشان داده شده است. این دستگاه از دو قطعه مواد نوری تکمحوری<sup>۴۲</sup> با ضریب شکست  $n_e$  و  $n_o$  بترتیب برای نور قطبیده برای محورهای نوری عمودی و موازی ساخته شده است. یک پرتو باریک نور در

<sup>۴۱</sup>Babinet Compensator

<sup>۴۲</sup>Uniaxial

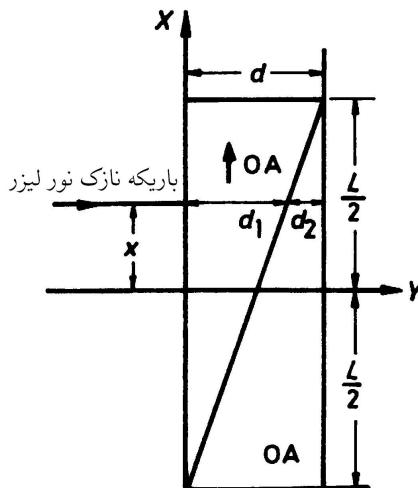
طول موج  $\lambda$  خلاء در صفحه  $XZ$  تحت زاویه  $45^\circ$  به  $X$  و  $Z$  قطبیده شده است و از درون یک ترمیم‌کننده از سمت چپ به راست، مانند شکل (۷۶.۲)، در امتداد محور  $+Y$  منتشر می‌شود.

- الف- بازاء  $L \ll d$  اختلاف فاز مولفه‌های  $X$  و  $Z$  نور قطبیده خارج شده را محاسبه کنید. جواب خود را بر حسب  $n_o, n_e, \lambda, L, d, x$  بیان کنید.

- ب- نور خارج شونده بازاء چه مقدار  $x$  دارد:

۱. قطبیش خطی است.

۲. قطبیش دایروی است.



محور نوری در صفحه کاغذ و موازی محور  $X$  ها =  $OA$

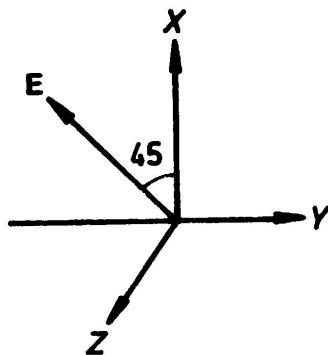
محور نوری عمود بر صفحه کاغذ و موازی محور ها =  $Z$

$d \ll L$ .

شکل ۷۶.۲:

(دانشگاه شیکاگو)  
حل:

- الف- چون نور تابشی دارای قطبیش  $45^\circ$  نسبت به محور  $X$  و  $Z$  است، دو مولفه از نظر دامنه در جهت  $X$  و  $Z$  برابر هستند:



شکل ۷۷.۲

$$E_x = E_z = E/\sqrt{2}.$$

فاز نسبی دو مولفه بترتیب از حرکت درون منشور سمت چپ و منشور سمت راست حاصل می‌شود:

$$\Delta\phi_1 = 2\pi d_1(n_o - n_e)/\lambda$$

و

$$\Delta\phi_2 = 2\pi d_2(n_e - n_o)/\lambda$$

که در آن  $d_1$  و  $d_2$  بترتیب مسافت طی شده درون منشور چپ و راست است. چون منشور اولی دارای ضریب شکست  $n_o$  و  $n_e$  برای بترتیب مولفه‌های  $X$  و  $Z$  است و بر عکس آن برای منشور دومی صادق است. اختلاف فاز نسبی مولفه‌های  $X$  و  $Z$  برابر است با:

$$\Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = 2\pi(n_o - n_e)(d_1 - d_2)/\lambda.$$

از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{\frac{L}{2} + x}{L}$$

بنابراین، چون  $d = d_1 + d_2$  است:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda}(n_o - n_e) \frac{xd}{L}.$$

• ب- نور خارج شونده خواهد بود.

### ۱. دارای قطبش خطی است اگر

$$\Delta\phi = N\pi, \quad \text{يعنى} \quad x = \frac{N\lambda L}{4(n_o - n_e)d},$$

### ۲. دارای قطبش دایره‌ای است اگر

$$\Delta\phi = \frac{(2N+1)\pi}{2} \quad \text{يعنى} \quad x = \frac{(2N+1)}{8} \frac{\lambda L}{4(n_o - n_e)d}$$

که در آن  $N = 0$  یا اعداد صحیح هستند.

## ۲۰۸۳

چینش آزمایش دو شکاف یانگ اصلاح شده، شکل (۷۸.۲) را در نظر گیرید:  $Q$  یک منبع نور نقطه‌ای تکرنگ به طول موج  $\lambda$  است.  $S_1$  پرده‌ای است که یک شکاف باریک دارد و  $S_2$  پرده‌ای است که روی آن دو شکاف به عرض  $a$  با فاصله  $d > a$  از هم وجود دارند.  $P_1, P_2, P_3$  و  $P_4$  فیلترهای قطبشگر هستند. هریک از چینش‌های زیر را بطور خلاصه تشریح کنید و الگوی شدت نور را روی پرده  $S_3$  توضیح دهید.

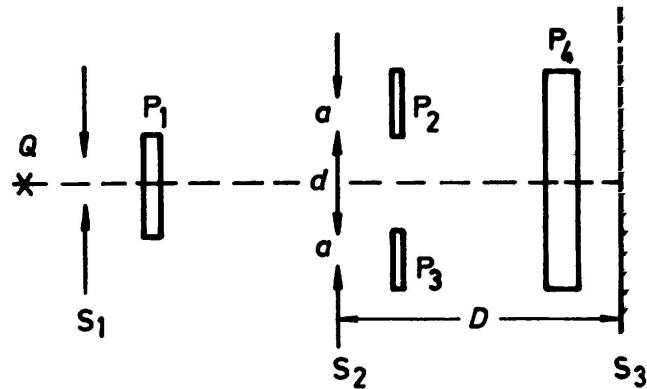
- الف- تمام قطبشگرها برداشته میشوند. (در این حالت رابطه الگوی شدت نور روی پرده  $S_3$  را بدست آورید).
- ب- قطبشگر  $P_1$  حذف،  $P_2$  و  $P_3$  محور عبور آنها متعامد در حالی که محور  $P_2$  با  $P_4$  زاویه  $45^\circ$  میسازد.
- ج- مانند حالت (ب) اما  $P_4$  حذف میشود.
- د- قطبشگر  $P_1$  در جایش است و با  $P_2$  زاویه  $45^\circ$  درجه میسازد.  $P_2$  و  $P_3$  نیز هم اکنون متعامدند، بر  $P_1$  عمود است.

(CUSPEA)  
حل:

- الف- توزیع شدت نور روی پرده  $S_3$  از حلقه‌های تداخل ناشی از شکاف دوگانه مدوله شده بوسیله ضریب پراش تک شکاف و به صورت زیر است:

$$I(\theta) \propto \cos^2 \left( \frac{1}{2}kd \sin \theta \right) \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2}ka \sin \theta \right)}{\sin^2 \theta},$$

که در آن  $k = 2\pi/\lambda$  و  $\theta$  زاویه بین جهت پراش و محور است.



شکل ۷۸.۲

- ب- چون نور وارد بر  $S_2$  غیرقطبیده است، پرتوها خارج شده از  $P_2$  و  $P_3$  (و  $P_2$  متعامدند) ناهمدوس بوده و خواه از  $P_4$  عبور کنند یا نکنند، تداخل نخواهد کرد. نتیجه می‌گیریم که الگوی تداخل برای (ب) و (ج) اتفاق نمی‌افتد. فقط تصویرهای پراش تک شکاف‌ها دیده می‌شوند.
- د- چون نور وارد به  $S_4$  دارای قطبش خطی است، پرتوهای خارج شونده از  $P_2$  و  $P_3$  همدوس بوده و مولفه‌ها در امتداد محور  $P_4$  از طریق اختلاف فاز  $\pi$  بین دو مولفه تداخل می‌کنند. دوباره الگوی تداخل را خواهیم داشت، اما تمایز<sup>۴۳</sup> آنها با مقایسه با حالت (الف) معکوس است.

## ۲۰۸۴

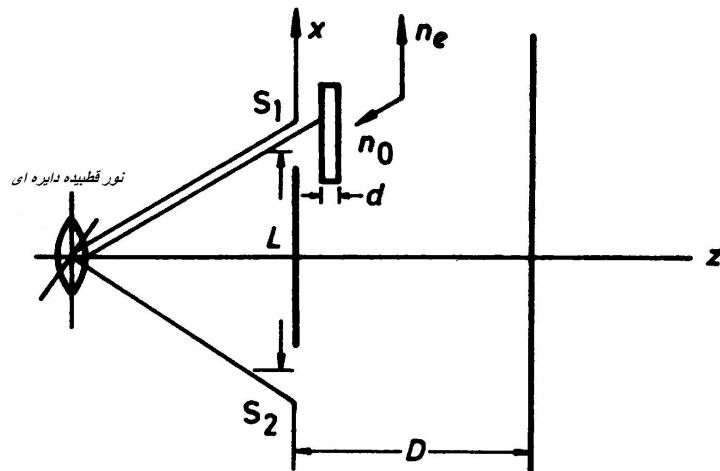
یک منع نور با قطبش دایره‌ای یک پرده با دو شکاف باریک بفاصله  $L$  را روشن می‌کند (شکل ۷۹.۲). یک تیغه دو شکستی<sup>۴۴</sup> بهضخامت  $d$  در جلو یکی از شکاف‌ها قرار داده می‌شود. ضریب شکست  $n_o$  موازی با شکاف و  $n_e$  عمود بر محور شکاف است. یک پرده دومی، موازی با اولی، در فاصله  $L >> D$  پشت پرده اول گذاشته می‌شود. اگر یکی از این شکاف‌ها پوشانیده شود، شدت نور روی پرده دوم  $I_0$  است (از اثرات پراش صرفنظر می‌شود). اگر هر دو شکاف باز باشد، چه الگوی تداخل توسط شخصی که شدت کل جمع دو قطبش را اندازه می‌کند مشاهده می‌نماید؟

(دانشگاه کالیفرنیا- برکلی)

<sup>۴۳</sup>Contrast

<sup>۴۴</sup>Birefringence

حل:



شکل ۷۹.۲:

عبور از درون تیغه دوشکستی پشت  $S_1$  باعث اختلاف فاز نسبی بین دو مولفه متعامد (پرتو  $E$  و  $O$ ) می‌شود،

$$\delta = 2\pi d(n_o - n_e)/\lambda$$

در حالی که فازهای دو مولفه متعامد نور خارج شونده از  $S_2$  ثابت باقی می‌ماند. مولفه‌های  $O$ <sup>۴۵</sup> و  $E$ <sup>۴۶</sup> که بعد از عبور از  $S_1$  و  $S_2$  به پرده دوم میرسند را در نظر گیرید. اختلاف مسیر نوری بین پرتوهای خارج شونده از  $S_1$  و  $S_2$  برای دو مولفه بترتیب برابر است با:

$$\Delta_o = (n_o - 1)d$$

و

$$\Delta_e = (n_e - 1)d$$

بدیهی است که فقط وقتی  $(n_o - n_e)d = m\lambda$  (عددیست صحیح) است، پرتوهای  $O$  و  $E$  کاملاً در همان زمان همدوس هستند. تمایز حلقه‌های برابر با واحد خواهد بود. در غیر این صورت، تمایز کمتر از یک است، بویژه وقتی

$$(n_o - n_e)d = (m + 1/2)\lambda$$

است، حلقه‌های تداخل محو می‌شود.

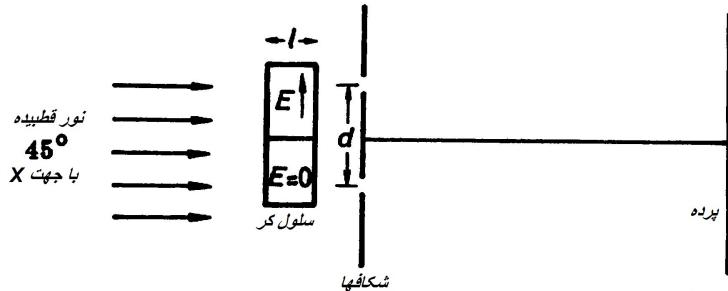
<sup>۴۵</sup>Ordinary Ray

<sup>۴۶</sup>Extraordinary Ray

## ۲۰۸۵

یک پرتو نور به طول موج  $\lambda = 5000\text{\AA}$  در جهت  $z$  ها با قطبش  $45^\circ$  نسبت به محور  $x$  ها حرکت می‌کند. این نور از درون سلول کر<sup>۴۷</sup> یعنی موادی که  $n_x - n_y = KE^2$  در آن ضریب شکست  $n_x$  و  $n_y$  بترتیب در جهت  $x$  و  $y$  دارد، عبور می‌کند.  $E$  شدت میدان الکتریکی اعمالی خارجی در جهت  $x$  ها است. طول سلول یک سانتی‌متر و  $K = 2.5 \times 10^{-6} (\text{meter}^2/\text{Volts}^2)$  است.

- الف- اگر نور بعد از عبور از درون سلول کر، از درون یک تحلیلگر قطبشی<sup>۴۸</sup> که صفحه قطبش آن عمود بر پرتو اولیه است عبور کند، کمترین مقدار  $E$  که بیشترین انتقال را میدهد، محاسبه کنید. فرض کنید اثر میدان الکتریکی روی بازتاب در سلول کر قابل چشم‌پوشی است.
- ب- اگر مقدار  $E^2$  نصف حالت (الف) باشد، وضع قطبش نور خارج شونده از سلول کر چگونه است؟
- ج- چینش شکل (۸۰.۲) را در نظر گیرید.



شکل ۸۰.۲:

میدان الکتریکی فقط به نیمه بالائی سلول کر اعمال می‌شود و بعد از عبور از درون سلول کر، نور از درون دو شکاف، همان طور که در شکل نشان داده شده است، عبور می‌کند. تحلیلگر قطبش بعد از شکاف‌ها وجود ندارد. فرض کنید که میدان الکتریکی روی  $n_x$  اثر گذار و روی  $n_y$  بی اثر است. در فواصل دور از شکاف‌ها، بازاء مقادیر مختلف  $E^2$ ، الگوی تداخل را بحث کنید.

(دانشگاه کالیفرنیا- برکلی)

<sup>۴۷</sup>Kerr cell

<sup>۴۸</sup>Polarization Analyzer

## حل:

- الف- سلول کر دو شکستی بوجود می آورد. چون جهت میدان الکتریکی زاویه  $45^\circ$  نسبت به جهت قطبش نور میسازد، دامنه مولفه های موازی با جهت های  $x$  و  $y$  یکسان است. وقتی اختلاف فاز  $\delta$  بین مولفه ها برابر

$$\delta = \frac{2\pi l(n_x - n_y)}{\lambda} = \frac{2\pi l KE^2}{\lambda} == (2j + 1)\pi, \quad j = 0$$

شود، سلول کر مانند یک تیغه نیم موج عمل می کند و صفحه قطبش را  $90^\circ$  می چرخاند بطوری که با محور انتقال تحلیل گر قطبش همسو و بیشترین انتقال را میدهد. با قرار دادن  $j = 0$ ، کمترین  $E_{min}$ ، حاصل می شود که برای  $l = 1 \text{ cm}$  خواهیم داشت:

$$E_{min}^2 = \frac{\lambda}{2Kl} = 10 \text{ V}^2/\text{m}^2$$

- ب- اگر  $\delta = \frac{\pi}{2}$  باشد، نور خارج شونده، قطبش دایره ای خواهد داشت.

- ج- الگوی تداخل روی پرده مانند سامانه دو شکاف است، اما تمایز آن بستگی به حالت قطبش پرتو نور خارج شونده از شکاف های بالا و پائین دارد. حالت قطبش نور خارج شونده از شکاف پائین بد و تغییر باقی می ماند، در حالی که نور خارج شونده از شکاف بالائی بستگی به شدت میدان الکتریکی اعمالی دارد. وقتی  $\delta = 2j\pi$  که  $j$  یک عدد صحیح است باشد،

$$E^2 = \frac{j\lambda}{Kl}$$

حالت قطبش پرتوهای نور خارج شونده از شکاف ها یکسان خواهند بود. این یک الگوی تداخلی کامل با تمایز واحد بوجود می آورد. وقتی

$$\delta = (2j + 1)\pi \quad \text{یا} \quad E^2 = \frac{(2j + 1)\lambda}{2Kl}$$

باشد، صفحه قطبشنور خارج شونده از شکاف بالائی عمود بر شکاف پائینی است. اکنون هیچگونه تداخلی بین دو پرتو صورت نمی گیرد. در حالت بین این دو، تمایز بین یک و صفر خواهد بود.

## ۲۰۸۶

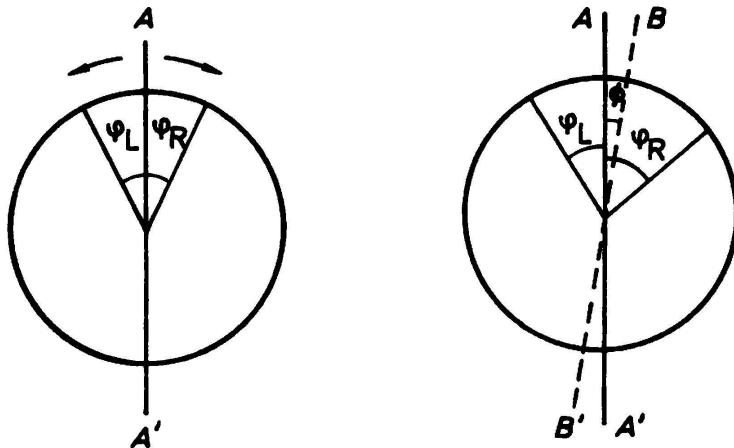
صفحه قطبش یک نور قطبیده در امتداد محور نوری کریستال ویژه ای (مثل کوارتز یا کریستال شکر) بوسیله ضیاخته کریستال چرخش می یابد. ضریب شکست شکست  $n_R$  و  $n_L$  برای نور چپگرد و راستگرد در اینگونه کریستال ها متفاوت است.

- الف- این پدیده را چه می‌نامند؟ بطور مختصر چگونگی چرخش را بیان کنید.

- ب- رابطه‌ای برای زاویه  $\phi$  بدست آورید بطوری که صفحه قطبش نوری با فرکانس  $\omega$  وقتی از درون این ماده به ضخامت  $d$  عبور می‌کند بچرخد.

(ویسکانسین)

حل:



الف- قبل از وارد شدن به داخل ماده

ب- بعداز طی مسافت  $d$  درون ماده

شکل ۲: ۸۱.۲

- الف- این پدیده را فعالیت نوری<sup>۴۹</sup> می‌نامند. فرآیند مواد فعال نوری دو ضریب شکست، یکی  $n_R$  برای چرخش راستگرد، و دیگر  $n_L$  برای چرخش چپگرد است. چون موج قطبیده خطی تابشی را می‌توان جمع دو موج قطبیده دایره‌ای راستگرد  $R$  و چپگرد  $L$  بیان کرد، در تعویض یک نمونه فعال نوری، فاز نسبی بین دو مولفه را تغییر خواهد داد و نتیجه دو نور قطبیده خطی بصورت چرخش صفحه قطبش ظاهر خواهد شد.

- ب- اگر  $n_L \neq n_R$  باشد، چرخش زاویه مولفه  $L$  بعد از عبور از ضخامت  $d$  ماده خواهد بود:

<sup>۴۹</sup> Optical Activity

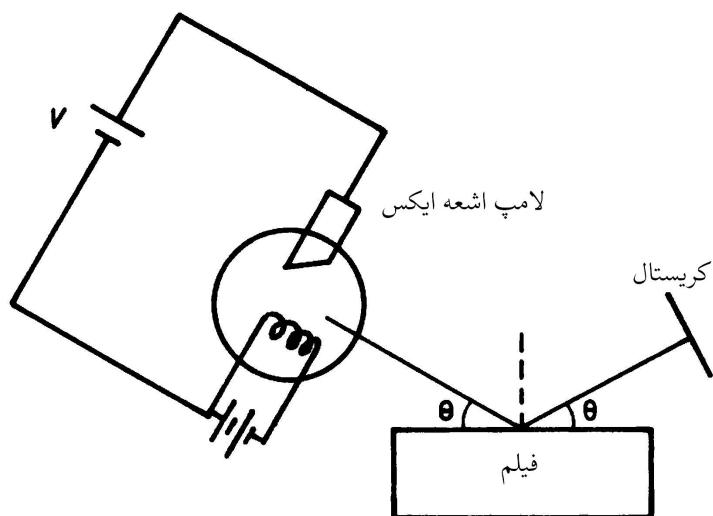
$$\phi_L = \frac{\omega d}{c} n_L$$

و زاویه چرخش مولفه  $\phi_R = \frac{\omega d}{c} n_R$  برابر  $R$  خواهد بود، زیرا شرعت انتشار بترتیب برابر  $c/n_L$  و  $c/n_R$  است. زاویه  $\phi$  صفحه قطبش نور منتجه سبب چرخش می‌شود (شکل ۸۱.۲).

$$\phi = \frac{\phi_R - \phi_L}{2} = \frac{\omega d}{c} (n_R - n_L).$$

## ۲۰۸۷

چینش شکل (۸۲.۲) داده شده است. در آن فرض براین است که کریستال دارای صفحات اتمی موازی تحت فاصله  $d$  است. لامپ اشعه ایکس دارای اختلاف



شکل: ۸۲.۲

پتانسیل آند-کاتد  $V$  است. زاویه  $\theta$  قابل تغییر است. زاویه  $\theta_m$  چقدر باشد تا شدت اشعه ایکس روی فیلم ثبت شود؟<sup>۵۰</sup>  
بطور نیمه کمی توضیح دهید که چگونه می‌توان، از منبع نور غیر قطبیده، با استفاده از یک قطبینده خطی و یک تیغه کریستال کوارتز (همسانگرد) و یک گیره فشرده کننده، نوری با قطبیدگی دایره‌ای تولید کرد.  
(دانشگاه کالیفرنیا- برکلی)

<sup>۵۰</sup> Compressor Clamp

حل:

- الف- وقتی قانون برگ<sup>۵۱</sup> برقرار باشد،

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

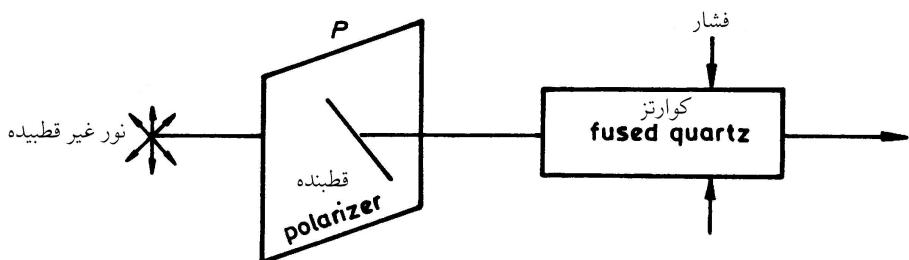
می‌توانیم لکه‌های شدت را روی فیلم داشته باشیم. طول موج از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\lambda = \sqrt{150/V} \text{ \AA}$$

کمترین زاویه  $\theta$  برای فیلم از  $m = 1$  بدست می‌آید

$$\theta_{min} = \sin^{-1} \left( \frac{\lambda}{2d} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{150}{V}} \right)$$

- ب- برخی از مواد نوری حساس به فشار، از قبیل شیشه، پلاستیک و کوارتز ذوب شده، را می‌توان بوسیله کاربرد فشار مکانیکی ناهمسانگرد نوری درست کرد. این را فتوالاستیسیتی<sup>۵۲</sup> می‌نامند. محور نوری موثر در جهت فشار و دوشکستی  $(n_e - n_o)l$  ایجاد می‌شود. در اینجا / ضخامت در امتداد فشار و متناسب با فشار است. پرتو نور غیرقطبیده که از ادرون قطبشگر عبور می‌کند، بطور خطی قطبیده می‌شود. این نور بطور عمودی بر تیغه کوارتز ذوب شده که در جهت عمود بر پرتو تحت فشار قرار گرفته است و با محور قطبشگر زاویه  $45^\circ$  می‌سازد، مانند شکل (۸۳.۲)، می‌تابد. اگر اعمال فشار طوری باشد که  $(n_e - n_o)l = \lambda/4$  شود، تیغه بعنوان یک تیغه ربع موج عمل کرده و قطبش خطی را به قطبش دایره‌ای تبدیل می‌کند.



شکل ۸۳.۲:

<sup>۵۱</sup> Bragg's law

<sup>۵۲</sup> Photoelasticity

## ۲۰۸۸

فرض کنید یک نور با قطبش دایره‌ای راستگرد (وقتی نور بسمت ناظر می‌آید ساعتگرد است) بر یک تیغه جاذب می‌تابد. تیغه با نخ عمودی آویزان شده است. نور بطرف بالا هدایت و به ضلع پائین تیغه می‌تابد.

- الف- اگر نور با قطبش دایره‌ای دارای توان یک وات و طول موج  $6200\text{\AA}$  و اگر تمام این نور بوسیله تیغه جذب شود، چه تورکی<sup>۵۳</sup>  $\tau_0$ ، بر حسب دین-سانتی متر بر تیغه وارد می‌کند.
- ب- فرض کنید که بجای تیغه جاذب از سطح آینه معمولی نقره‌اندود استفاده می‌کردیم، بطوری که نور با  $180^\circ$  بطرف عقب، میسر اولیه، بازتاب می‌شد. اکنون تورک  $\tau_0$  بر حسب همین واحد چقدر است؟
- ج- فرض کنید، تیغه شفاف نیم موج باشد. نور از درون تیغه گذشته و به چیز دیگری برخورد نمی‌کند. تور  $\tau_0$  بر حسب همین واحد چقدر است؟
- د- اگر تیغه شفاف نیم موج ولی سطح بالائی آن نقره‌اندود باشد، تور  $\tau_0$  بر حسب همین واحد چقدر است؟

(دانشگاه شیکاگو)  
حل:

- الف- اگر نور با قطبش دایره‌ای بطور کامل بوسیله جسمی که به آن می‌تابد جذب شود، مومنتوم زاویه‌ای

$$\tau_0 = W/\omega$$

به جسم منتقل شده بطوری که تورک بحسیم وارد می‌شود. در اینجا  $W$  مقدار انرژی جذب شده در ثانیه و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای نور است. بنابراین

$$\begin{aligned} \tau_0 &= W/\omega = \frac{W\lambda}{2\pi c} = \frac{1 \times 0.62 \times 10^{-6}}{2\pi \times 3 \times 10^8} \\ &= 3.3 \times 10^{-16} \text{ N.m} = 3.3 \times 10^{-9} \text{ dyn.cm.} \end{aligned}$$

- ب- کل نور بعقب بازتاب شده بطوری که جهت چرخش سطح قطبش در فضا بدون تغییر باقی خواهد ماند، از اینرو تورک صفر است.

<sup>۵۳</sup> Torque

## فصل ۲. نورشناخت موجی

- ج- بعداز عبور از تیغه نیم موج، نور قطبیده دایره‌ای راستگر به نور قطبیده چپ‌گرد تبدیل می‌شود. تورک وارده برابر با تغییر مومنتوم زاویه که برابر  $2\pi$  است.

- د- نور از درون دو تا تیغه نیم موج عبور می‌کند و در همان حالت خارج می‌شود. بنابراین هیچ‌گونه تورکی به تیغه وارد نمی‌شود.

**۲۰۸۹**

یک منع نور ویژه یک وات به یک دیسک سیاه تخت (صد در صد جاذب) بطوری که محور آن موازی پرتو است، شکل (۸۴.۲)، می‌تابد. وقتی نور را جذب می‌کند، هدف شروع به چرخش می‌کند.



شکل ۸۴.۲:

- الف- در باره نور چه می‌توان گفت؟
- ب- هدف را از سطح سیاه به سطح آینه‌ای تغییر می‌دهیم. برای تورک چه اتفاقی رخ میدهد؟ چرا؟
- ج- آیا می‌توانید هدف را طوری اصلاح کنید که تورک مقادیر بالائی که برای حالت (الف) و (ب) محاسبه کرده‌اید، افزایش یابد؟ برای سهولت هدف را در حالت تابش عمودی درنظر گیرید.
- د- فرض کنید طول موج نور مرئی ( $5000\text{\AA}$ ) است. تورک را برای حالت جذب (الف) محاسبه کنید.

(دانشگاه کالیفرنیا- برکلی)

**حل:**

- الف- از این حقیقت که دیسک تمام نور را جذب می‌کند و شروع به چرخش می‌نماید، استنباط می‌کنیم که نور قطبش دایره‌ای دارد. مقدار تورک  $\tau_0 = W/\omega$

- بر دیسک وارد می‌شود. در اینجا  $W$  توان و  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای نور است.
- ب- اکنون نور بطور کامل بازتاب می‌شود بطوری که جهت چرخش صفحه قطبش نور در فضا بدون تغییر ثابت باقی می‌ماند. هیچگونه تورکی به هدف وارد نمی‌شود و هدف ثابت باقی می‌ماند.
  - ج- یک تیغه ربع موج قل از سطح آینه حالت (ب) قرار میدهیم. عبور دو بار نور از تیغه  $\lambda/4$ ، نور چپگرد  $L$  (یا راستگرد  $R$ ) را به راستگرد  $R$  (یا چپگرد  $L$ ) تبدیل می‌کند. این تورک را به  $2\tau_0$  افزایش میدهد. برای حالت (الف) نتیجه‌ای نخواهد داشت.
  - د- تورک برای حالت جذب (الف) برابر است با:

$$\tau = \frac{W}{\omega} = \frac{W\lambda}{2\pi c} = \frac{1 \times 0.5 \times 10^{-6}}{2\pi \times 3 \times 10^8} = 2.65 \times 10^{-16} N.m.$$



## فصل ۳

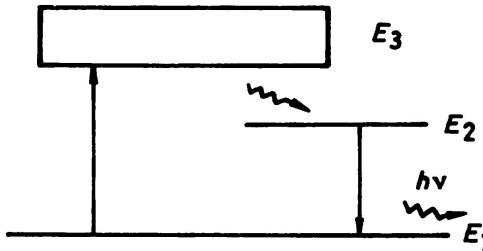
# نورشناخت کوانتومی

۳۰۰۱

یک لیزر یاقوتی نوری به طول موج  $6943\text{\AA}$  ساطع میدارد که تقریباً موج صفحه‌ای خیلی خوبی است.

- الف- بطور کمی چگونگی کار این لیزر را از طریق نمودار سطوح انرژی اتم‌های مربوطه تشریح کنید.
- ب- طول این نور وقتی از درون آب (ضریب شکست  $n = 4/3$ ) عبور می‌کند چقدر است؟
- ج- چه کسری از هر یک از مولفه قطبش نور لیزر وقتی تحت زاویه  $45^\circ$  نسبت به خط عمود بر سطح، به آب بتابد بازتاب می‌شود؟
- د- اگر توان پرتو این موج در آب صد میلی‌وات بر سانتی‌متر مربع باشد، دامنه بردار میدان الکتریکی و مغناطیسی این موج صفحه‌ای وقتی در آب منتشر می‌شود، چقدر است؟
- ه- اگر عرض باند لیزر  $30 = \Delta\nu$  مگاهرتز باشد، طول همدوسی آن در خلاء چقدر است؟ (طول همدوسی طولی است که نور در  $1/4$  طول موج همدوس باقی می‌ماند).

(دانشگاه کلمبیا)  
حل:



شکل ۱.۳ :

• الف- لیزر یاقوتی یک سامانه پمپ نوری سه تراز است. نمودار سطوح انرژی ساده شده در شکل (۱.۳) نشان داده شده است. از آنجا که یاقوت بوسیله چراغ‌های با شدت زیاد روشن می‌شود، اتم‌های تراز اولیه  $E_1$  تحریک شده و به تراز  $E_3$  می‌روند، سپس سریع در تراز متاستابل  $E_2$  بدون هیچ گونه انتقال تابشی آرامش می‌گیرد زیرا طول عمر در  $E_3$  بسیار کوتاه (تقریباً  $10^{-9}$  ثانیه) است. چون میرائی از  $E_2$  نسبتاً کند است، اگر انرژی لامپ فلاش بقدر کافی قوی و پمپ نوری اعمال شود، وارونگی جمعیت<sup>۱</sup> بین  $E_1$  و  $E_2$  رخ می‌دهد. وقتی این شرایط بدست آید، تقویت در طول موج مربوط به  $E_2 - E_1$  اتفاق می‌افتد. در این صورت اتم‌ها از تراز  $E_2$  به تراز پایه  $E_1$  پائین می‌آید و تابش رنگ قرمز یاقوت در این طول موج به صورت یک پالس قوی گسیل می‌شود. پمپ نوری با استفاده از دو آینه تخت که در دو انتهای یاقوت برای تشکیل کاواک تشیدید<sup>۲</sup> بکار بردۀ می‌شود صورت می‌گیرد. آینه‌ها بازتابی عمل کرده و نور بطور دائم تقویت کرده و مودهای طیف که در امتداد محور منتشر می‌شوند با فرکانس‌های کاواک تشیدید و نوسان می‌کنند. این‌ها باید محدوده عرض‌باند بهره طیف یاقوت باشند.

• ب- طول موج در آب برابر است با:

$$\lambda_{\text{آب}} = \frac{\lambda_{\text{هواء}}}{n} = \frac{6943}{\frac{4}{3}} \approx 5207 \text{ Å}$$

• ج- زاویه شکست از قانون اسنل<sup>۳</sup> بدست می‌آید:

<sup>۱</sup>Population Inversion

<sup>۲</sup>Resonant Cavity

<sup>۳</sup>Snell's law

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{3}{4} \sin 45^\circ \right) \approx 32^\circ$$

بازتابش مولفه قطبش عمود بر صفحه تابش برابر است با:

$$R_{\perp} = \left[ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2 \approx 0.05$$

و بازتابش مولفه قطبش موازی با صفحه تابش برابر است با:

$$R_{\parallel} = \left[ \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \right]^2 \approx 0.0028$$

- د- برای یک موج صفحه‌ای  $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$  برقرار است. توان متوسط پرتو بر واحد سطح برابر شدت آن می‌شود:

$$I = \langle EH \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 = \frac{n}{2c\mu} E_0^2$$

که در آن  $E_0$  دامنه میدان الکتریکی،  $c$  سرعت سیر نور در فضای آزاد و  $n$  ضریب شکست آب است. چون نفوذپذیری مغناطیس آب برابر

$$\mu \approx \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m.$$

است، ازینرو

$$E_0 = \sqrt{\frac{2Ic\mu}{n}} = 7.5 V/m,$$

$$B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{E_0 n}{c} = 3.3 \times 10^{-8} T,$$

که در آن  $B_0$  دامنه القاء مغناطیسی است.

- ه- از اصل عدم قطعیت<sup>۴</sup> می‌دانیم که

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \sim 1$$

که در آن  $\Delta \nu$  عرض خطوط طیف نور لیزر،  $\Delta t$  زمان همدوسی است. بنابراین طول همدوسی برابر است با:

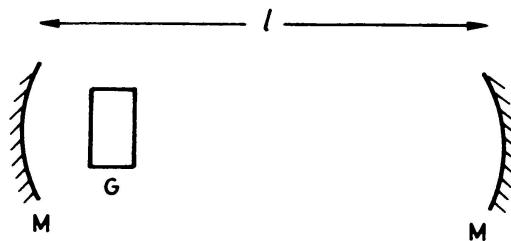
$$\underline{\Delta l = \frac{c}{\Delta \nu} = \frac{3 \times 10^8}{30 \times 10^6} = 10 m}$$

---

<sup>۴</sup>Uncertainty Principle

## ۳۰۰۲

یک لیزر رنگی، شکل (۲.۱۳)، شامل دو آینه تقریباً بازتاب کامل،  $M$ ، و یک محیط تقویت کننده،  $G$ ، به عرض باند  $\Delta f$  در فرکانس مرکزی  $f_0$  است.



شکل ۲.۳:

- الف- فرکانس های مجاز برای کار لیزر در این کاواک تشید چیست؟ جواب خود را برحسب ، $\tau$ ، زمانی که نور طول می کشد یک رفت و برگشت را در کاواک انجام دهد بیان کنید.
- ب- فرض کنید که لیزر در تمام مودهای ممکن کاواک در عرض باند بهره کار می کند. همچنین، فرض کنید که این مودها تماماً پایدار هم فاز هستند، یعنی، تغییرات در فاز وجود ندارد. ضمناً، فرض کنید که فازها طوری تنظیم شده اند که تمام مودها در لحظه  $t = 0$  همزمان در یک فاز باشند. چگونه خروجی لیزر نسبت به زمان تغییر می کند؟
- ج- اگر لازم باشد تا یک پالس با زمان طی یک بیکوثانیه ( $sec^{-12}$ ) در طول موج  $6000\text{\AA}$  تولید شود، عرض باند لازم  $\Delta f$  چقدر است؟ این چند عدد از مودهای لیزر را شامل می شود؟ ( $l = 1.5 \text{ m}$  فرض کنید).

(CUSPEA)  
حل:

- الف- مودهای مجاز در کاواک امواج ساکنی هستند که طول موج  $\lambda$  و فرکانس  $f$  از رابطه زیر پیروی کنند:

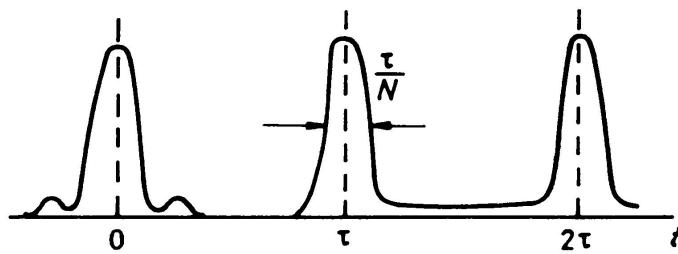
$$n\lambda = 2l, \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{2l} = \frac{n}{r},$$

که در آن  $n$  یک عدد صحیح است.

- ب- فرض کنید  $N$  مود در محدوده عرض باند بهره وجود دارد. خروجی لیزر، تحت شرایط داده شده، را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$E(t) = \sum_n^N \left( A_n \cos \frac{2\pi n t}{\tau} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{\tau} \right)$$

- ج- معادله اخیر نشان می‌دهد که خروجی یک تابع متناوب زمانی با زمان تناوب  $\tau$  است، شکل (۳.۳). وقتی اختلاف فاز بین بالاترین مود و پائین‌ترین مود برابر  $2\pi$  شود، خروجی متوقف می‌شود. زمان طی پالس<sup>۵</sup>،  $\Delta t$ ، از رابطه زیر بدست می‌آید.



شکل ۳.۳:

$$\frac{2\pi(N-1)\Delta t}{\tau} = 2\pi, \quad \Delta t \approx \frac{\tau}{N}$$

اصل عدم قطعیت،  $\Delta \cdot \Delta f \sim 1$ ، می‌دهد:

$$\Delta f \sim \frac{1}{\Delta t} = 10^{12} \text{ Hz}$$

چون  $d\lambda = -\frac{\lambda^2}{c} df$  یا  $\lambda f = c$  باشد، مربوط به طول موج برابر است با:

$$\Delta \lambda = \Delta f \frac{\lambda^2}{c} \approx 12 \text{ Å}$$

با تعریف،

$$\tau = \frac{2l}{c} = 10^{-8} \text{ s}$$

که میدهد:

$$N \approx \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 10^4$$

<sup>۵</sup>Pulse Duration

## ۳۰۰۳

یک لیزر هلیوم-نئون<sup>۶</sup> که در طول موج  $6328\text{\AA}$  کار می‌کند دارای کاواک تشديدي با دو آينه تخت به فاصله  $0.5m$  از هم است. فاصله فرکانسي بین مودهای محوري اين لیزر را محاسبه کنيد. تخمين زnid اين لیزر می‌تواند در يك يا چندين فرکانس محوري بشرط آنكه عرض خط  $6328\text{\AA}$  در گسیل خودبخودی متداول  $0.016\text{\AA}$  مشاهد شود، کار کند.

(ويسکانسين)

**حل:**

فرکانس‌های محوري لیزر از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\lambda n}{2} = l \quad \text{يا} \quad f = \frac{nc}{2l}$$

که در آن  $l$  طول کاواک است. تفاوت فرکانسی بین دو مود متوالی برابر است با:

$$\Delta f = \frac{c}{2l}$$

عرض باند فرکانسی خط لیزر هلیوم-نئون  $6328\text{\AA}$  خواهد بود:

$$\Delta f' = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}$$

که در آن  $\Delta \lambda = 0.016\text{\AA}$ ،  $\lambda = 6328\text{\AA}$  است، بنابراین

$$\frac{\Delta f'}{\Delta f} = \frac{2l \Delta \lambda}{\lambda^2} = 3.998,$$

لیزر در چهار (حداقل سه) فرکانس محوري کار خواهد کرد.

## ۳۰۰۴

اولین لیزر الکترون آزاد<sup>۷</sup> در اوخر سال 1976 يا اوائل سال 1977 بکار کمارده شد.

• الف- لیزر مخفف چه لغاتی است؟

• ب- خروجی لیزر چیست؟

• ج- خروجی در لیزر الکترون آزاد FEL چگونه تولید می‌شود؟ (چگونه انرژی به آن تغذیه می‌شود؟ چگونه آن به خروجی لیزر تبدیل می‌شود؟)

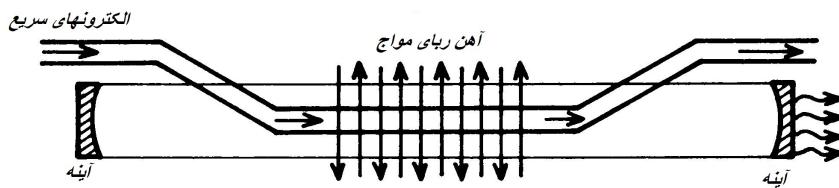
• د- مزیت ویژه لیزر FEL را نسبت به انواع قبلی لیزر مشخص کنید.

<sup>6</sup>He-Ne laser

<sup>7</sup>Free-Electron Laser (FEL)

(ویسکانسین)  
حل:

- الف- لیزر از اول لغات "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" LASER یعنی "تقویت نور بوسیله گسیل برانگیخته تابشی" گرفته شده است
- ب- خروجی لیزر نور بسیار همدوس زمانی و مکانی است و پرتوی بسیار توجیهی دارد.
- ج- بطوری که در شکل (۴.۳) نشان داده شده است، پرتو الکترون‌های



شکل ۴.۳:

پُر انرژی از یک میدان مغناطیسی عرضی و موج<sup>۸</sup> عبور می‌کند. الکترون‌ها شتاب مثبت و منفی<sup>۹</sup> عرضی گرفته و تشعشع الکترومغناطیسی بوسیله برمسترالونک<sup>۱۰</sup> تولید می‌شود. امواج الکترومغناطیسی اولیه ممکن است تولید لیزر کنند. اگر شرط همزمانی بین سرعت الکترونها و سرعت فاز امواج وجود داشته باشد، انرژی ممکن است از الکtron به امواج منتقل شود. امواج در کاواک بین دو آینه تولید می‌شود و سرانجام خروجی لیزر بوجود می‌آید.

- د- مزایای FEL بقرار زیر است:
  ۱. لیزر FEL قابل تنظیم است. با تغییر انرژی الکترون‌ها می‌توان تابشی همدوس برای طول‌موج‌های ریزموچ (مایکروویو) تا نور مرئی و بالاتر تولید کرد.
  ۲. آن می‌تواند توان پیک بالا، پهن‌باند و تابش همدوسی تولید کند.

۳۰۰۵

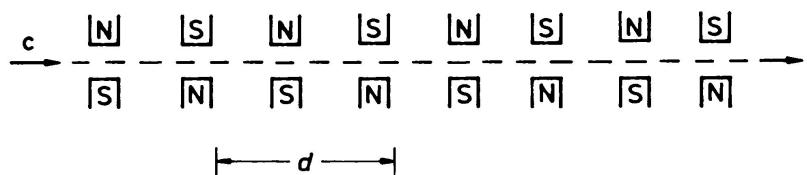
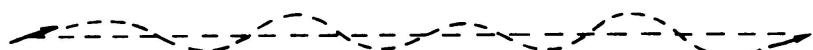
<sup>۸</sup>Undulating

<sup>۹</sup>Acceleration and Deceleration

<sup>۱۰</sup>Bremsstrahlung

### فصل ۳. نورشناخت کوانتمومی

یک موج زا<sup>۱۱</sup> شامل یک رشته تناوب خطی از آهنربا با قطب‌های متناوب است. هر کدام از واحدها در رشته آهنربا دارای طول  $d$  و دارای  $N$  سلول است. یک الکترون با سرعت  $v$  ( $c \sim v$ ) از درون این موج زا عبور کرده و با انحراف کمی، همان طور که در شکل (۵.۳) نشان داده شده است، طی مسیر می‌کند. حرکت الکترون در امتداد این مسیر تشعشع تولید کرد که در فرکانس اصلی خاصی مربوط به طول موج  $\lambda$  بیشترین شدت را دارد.



شکل ۵.۳:

- الف- نشان دهید که برای کدام بخش از مسیر تشعشع الکترومغناطیسی در جهت رفت تولید خواهد شد.
- ب- با استفاده از شرط اینکه این تشعشع از بخش‌های متوالی باید تداخل افزاینده داشته باشد، طول موج  $\lambda$  را بدست آورید
- ج- اگر موج زا شامل  $N$  بخش بطول  $d$  باشد، عرض طیف  $\Delta\lambda/\lambda$  تشعشع تولید شده بوسیله پرتو الکترون‌های تک-انرژی<sup>۱۲</sup> چقدر است؟
- د- شدت تشعشع جلو رونده در تمام موج زا با مقایسه با یک بخش از آن چگونه است؟
- ه- اگر سرعت الکترون‌ها از سرعت سیر نور یک در  $10^6$  متفاوت باشد، طول موج تشعشع تولید شده موج زا با  $d = 10 \text{ cm}$  را محاسبه کنید.

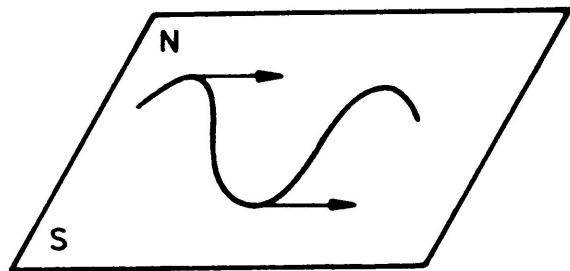
(CUSPEA)

حل:

<sup>۱۱</sup>Undulator

<sup>۱۲</sup>Mono-Energetic Electrons

- الف- بطوری که در شکل (۶.۳) نشان داده شده است، تشعشع الکترومغناطیسی در حهت جلوروند در نقاطی که تانژانت مسیر موازی محور باشد تولید خواهد شد.



شکل ۶.۳:

- ب- شرط لازم برابر است با:

$$kr - \omega t = k(r + d) - \omega \left( t + \frac{d}{v} \right) + 2\pi$$

يعنى

$$\frac{c}{\lambda} \frac{d}{v} = \frac{d}{v} + 1$$

با قرار دادن  $\beta = \frac{d}{c}$  خواهیم داشت:

$$\lambda = d \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)$$

$$\Delta\lambda/\lambda = 1/N \quad \bullet$$

$$I \approx N^2 \quad \bullet$$

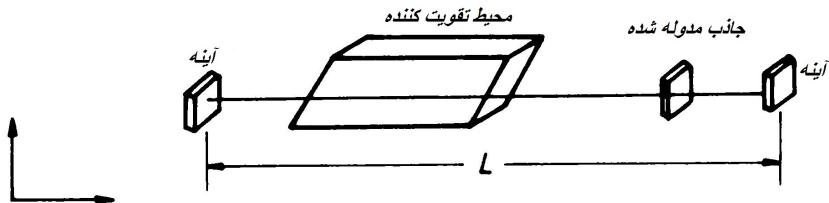
$$\beta = 1 - 10^{-6} \quad \bullet$$

$$\lambda \approx d(\beta - 1) = 10 \times 10^{-6} \text{ cm} = 1000 \text{ \AA}$$

### ۳۰۰۶

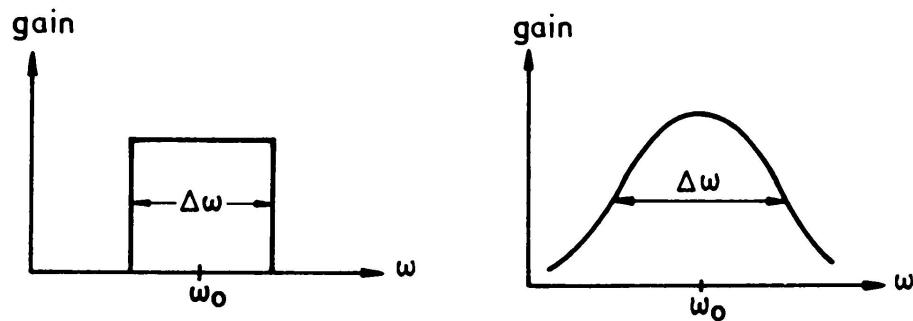
یکی از روش‌های تجربی جدید و مهم که در چندین زمینه فرعی فیزیک مورد استفاده قرار می‌گیرد، استفاده از پالس‌های نور بسیار کوتاه برای تنظیم پدیده‌های سریع است. پالس‌های بسیار کوتاه بوسیله لیزرها قفل مودی<sup>۱۳</sup> است- روشی

### فصل ۳. نورشناخت کوانتومی



شکل ۷.۳:

که در این مسئله مطالعه خواهد شد. لیزر مودی شامل یک کاواک به طول  $L$  با ابعاد عرضی  $d$  که دو آینه مطابق شکل (۷.۲) ساخته می‌شود. محیط تقویت کننده (ممکن است جامد، مایع و یا گاز باشد) را می‌توان با طیف بهره شکل (۸.۲) مشخص نمود؛ نوری که فقط در این باند فرکانسی قرار دارد تقویت خواهد شد. برای سهولت در محاسبات، فرض کنید که طیف چهارگوش مطابق شکل (۹.۳) است.



شکل ۹.۳:

شکل ۸.۳:

برای محیط تقویت کننده، مشخصات محیط را  $Nd = 1.8 \times 10^{12} \text{ sec}^{-1}$ ،  $L = 150 \text{ cm}$  و طول  $\Delta\omega = 6 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1}$  در نظر گیرید.

- الف- عرض  $\delta\omega_L$  بین دو مود مجاور کاواک را بدست آورید. از مدولاسیون در این قسمت از مسئله صرفنظر کنید. همچنین برای سهولت از پاشنده‌گی چشم‌پوشی کرده و ضریب شکست محیط تقویت کننده را یک در نظر گیرید.
- ب- طیف بهره چهارگوش در محدوده باند بهره تقویت کننده در هر مود

ثابت است. اگر شدت هر مود  $I_0$  باشد، شدت کل وقتی فازهای نسبی  $\phi_n$  مودهای مختلف بطور تصادفی توزیع شده باشند، چقدر است؟

- ج- با وارد کردن یک جاذب مدوله شده در کاواک، میتوان فاز تمام مودها در همان مقدار قفل کرد، بطوری که امواج متحرک بطور افزاینده تداخل کرده و پالس نوری تولید کنند. شدت را بر حسب تابعی از زمان در این حالت قفل فاز یا قفل مودی بدست آورید. عرض پالس و فاصله پالسها و شدت پیک (بر حسب  $I_0$ ) چقدر است؟ فقط یک قطبش را درنظر گیرید.  
(البته ربطی به این مسئله ندارد، اما برای اطلاع شما، جاذب مدوله شده، جذب موثری دارد که تابع زمان است، یعنی  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega t)$ . هر مود کاواک با فاز اشتباه نسبت به این مدولاسیون متحمل تضعیف می‌شود بنابراین فقط مودهای فاز فقل شده تقویت می‌شوند)

(دانشگاه پرینستون)  
حل:

- الف- مودهای طولی که می‌توانند در کاواکی بطول  $L$  وجود داشته باشند که دارای:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{یعنی}$$

$$\omega_L = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{\pi n c}{L}$$

بنابراین فاصله بین دو مود مجاور برابر است با:

$$\delta\omega_L = \frac{\pi c}{L} = 6.3 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

- ب- اگر فاز نسبی  $\phi_n$  مودهای مختلف بطور تصادفی توزیع شده باشند، مودها نسبت بهم ناهمدوس هستند، و شدت کل مجموع شدت‌ها است، ازایزو

$$I = \left( \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \right) \cdot I_0 = 9549 I_0$$

- ج- برای شدت با قفل مود، باید اول جمع میدانهای الکتریکی را بدست آورد و سپس شدت را محاسبه کرد:

$$I(t) = I_0 |e^{j\omega_1 t} + \dots + e^{j\omega_n t}|^2 = I_0 \left[ \frac{\sin \frac{n\delta\omega_L t}{2}}{\sin \frac{\delta\omega_L t}{2}} \right]^2$$

### فصل ۳. نورشناخت کوانتموی

که در آن

$$\omega_n = n\delta\omega_L, \quad n = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} = 9549$$

عرض پالس خواهد بود:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{n\delta\omega_L} = \frac{2L}{nc} = 1.05 \times 10^{-12} s$$

و جدائی پالسها از فاصله بین بیشینه‌های متوالی بدست می‌آید:

$$\Delta_t = \frac{2\pi}{\delta\omega_L} = 10^{-8} s$$

شدت پیک در  $t = 0$  حاصل می‌شود:

$$I(0) = I_0 \cdot n^2 = 9.12 \times 10^7 I_0$$

### ۳۰۰۷

مشاهده می‌شود که یک فوتون پرتابه با فرکانس  $f$  در قاب ساکن الکترون هدف را در  $90^\circ$  - با فرکانس  $f'$  پراکنده می‌کند در حالی که هدف در  $\theta_0$  پراکنده می‌شود.

- الف - رابطه  $f/f'$  را نسبت به  $\theta$  تعیین کنید.
- ب - کل انرژی الکترون را بر حسب  $f, f'$  و جرم الکترون  $m$  بدست آورید.
- ج - اگر انرژی فوتون از دست رفته ۰.۲ انرژی ساکن الکترون باشد، سرعت الکترون پراکنده شده چقدر است؟
- د - وقتی برخورد الکترون - فوتون اتفاق می‌افتد، ناظر  $O$  در جهت موازی با جهت فوتون تابشی با سرعت  $u$  حرکت می‌کند. چه رابطه‌ای ناظر  $O$  برای اندازه‌گیری انرژی الکترون در حالت پراکنده (برحسب  $m, u, v$  و  $c$ ) باید بکار برد؟

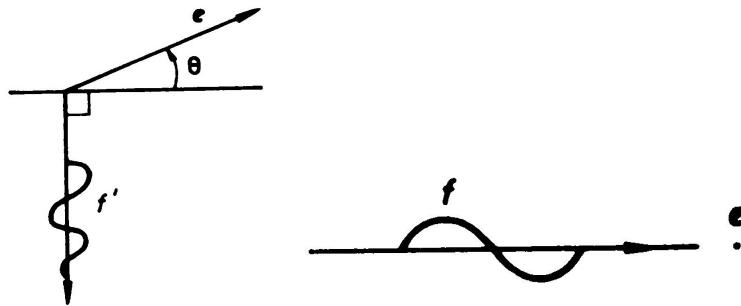
(دانشگاه سانی-بوفالو)  
حل:

- الف - با توجه به شکل (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم:  
 $p_e \sin \theta = p_{f'}, \quad p_e \cos \theta = p_f$

که در آن

$$p_e = mv, \quad p_f = \frac{hf}{c} \quad p_{f'} = \frac{hf'}{c}$$

. $\tan \theta = f'/f$



شکل ۱۱.۳:

شکل ۱۰.۳:

- ب- انرژی کل الکترون برابر است با:

$$E = [m^2 c^4 + P_e^2 c^2]^{1/2} = [m^2 c^4 + (f^2 + f'^2)h^2]^{1/2}$$

- ج- جرم ساکن الکترون برابر  $mc^2$  و افت انرژی فوتون  $0.2mc^2$  است. بر طبق اصل بقاء انرژی، داریم:

$$mc^2 + hf = \gamma mc^2 + hf'$$

که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

با

$$hf - hf' = (\gamma - 1)mc^2 = 0.2mc^2$$

بدست می‌آید:

$$\gamma = 1.2 \quad \text{یا} \quad v = 0.53c$$

$$E' = \frac{E - p_0 \cdot u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{E - p_0 u \cos \theta}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \bullet$$

که در آن

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad p_0 = hf/c$$

### ۳۰۰۸

فرض کنید یک فوتون مرئی با انرژی  $3 \text{ eV}$  در یکی از مخروطهای (حسگر نوری) چشم شما جذب شود و سبب تحریک پتانسیل فعال<sup>۱۴</sup> و تولید ۰,۰۷ ولت روی عصب بینائی بظرفیت  $10^{-9} \text{ F}$  شود.

<sup>۱۴</sup>Action Potential

- الف- بار الکتریکی لازم را محاسبه کنید.
- ب- انرژی پتانسیل فعال را محاسبه کنید.

(دانشگاه ویسکانسین)

حل:

الف-

$$Q = CV = 0.07 \times 10^{-9} = 7 \times 10^{-11} \text{ Coulomb}$$

$$E = \frac{QV}{2} = \frac{1}{2} \times 7 \times 10^{-11} \times 0.07 = 2.5 \times 10^{-12} \text{ Joule.}$$

## ۳۰۰۹

یک منبع نقطه‌ای  $Q$ ، نوری همدوش بطور همسانگرد در دو فرکانس  $\omega$  و  $\omega + \Delta\omega$  با توان برابر  $I$  ژول بر ثانیه در هر فرکانس گسیل می‌دارد. دو آشکارساز،  $A$  و  $B$ ، هر یک با سطح کوچک حساس  $S$  توانائی پاسخ به فoton‌های مجزا در فواصل  $l_A$  و  $l_B$  از  $Q$  را، همانطور که در شکل (۱۲.۳) نشان داده شده است، دارند. در ادامه، در نظر گرفته و فرض کنید که در خلاء انجام می‌شود.

- الف- نرخ شمارش فoton‌های مجزا (فoton بر ثانیه) در  $A$  و  $B$  در بر حسب تابعی از زمان محاسبه کنید. معیار زمان را  $\omega/1/\Delta\omega$  در نظر گیرید.
- ب- اگر پالس‌های خروجی از  $A$  و  $B$  را به یک مدار همرویداد<sup>۱۵</sup> با تفکیک زمانی  $\tau$  اعمال کنیم، نرخ شمارش همرویداد متوسط زمانی چقدر است؟ فرض کنید که  $1/\Delta\omega < \tau$  و بخارط داشته باشید که اگر دو پالس ورودی در طی زمان  $\tau$  هر یک به مدار برسند، مدار همرویداد یک پالس تولید می‌کند.

(CUSPEA)  
حل:

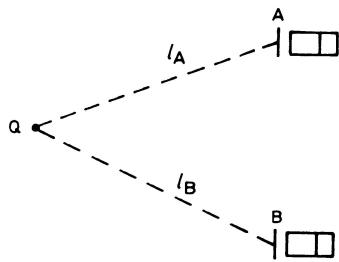
- الف- امواجی که با فرکانس زاویه  $\omega_1$  و  $\omega_2$  به  $A$  مسرستند بصورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$E_1 = \frac{E_0}{l_A} e^{-j(\omega_1 t - k_1 l_A)}$$

$$E_2 = \frac{E_0}{l_A} e^{-j(\omega_2 t - k_2 l_A)}$$

که در آنها  $\omega = \omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$  هستند. موج حاصل در  $A$  خواهد بود:

<sup>۱۵</sup>Coincidence Circuit



شکل ۱۲.۳:

$$E_A = E_1 + E_2 = (E_0/l_A) [e^{-j(\omega_1 t - k_1 l_A)} + e^{-j(\omega_2 t - k_2 l_A)}]$$

و شدت در  $A$ ، بصورت متوسط زمانی برابر است با:

$$I_A \sim \frac{1}{2} E_A E_A^* = \left( \frac{E_0}{l_A} \right)^2 \{1 + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 - k_1)l_A]\}$$

ثابت اختلاف فاز  $(k_2 - k_1)l_A$  را می‌توان با مبداء زمانی مناسب صفر درنظر گرفت. شدت موج  $\omega_1$  در  $A$  برابر است با:

$$I_1 \sim \frac{1}{2} E_1 E_1^* = \frac{1}{2} \left( \frac{E_0}{l_A} \right)^2$$

چون منبع دارای توان  $I$  و همسانگرد است:

$$I_1 = \frac{I}{4\pi l_A^2}$$

با در نظر گرفتن

$$\left( \frac{E_0}{l_A} \right)^2 \sim \frac{I}{4\pi l_A^2}$$

بنابراین

$$I_A = \frac{I}{2\pi l_A^2} [1 + \cos(\Delta\omega t)]$$

نرخ شمارنده فوتون در  $A$  برابر است با:

$$R_A(t) = \frac{I_A(t)S}{\hbar\omega} = \frac{IS}{2\pi\hbar\omega l_A^2} [1 + \cos(\Delta\omega t)]$$

بهمین منوال، داریم

$$I_B(t) = \frac{I}{2\pi l_B^2} \{1 + \cos[\Delta t + (l_B - l_A)(k_1 - k_2)]\}$$

چون

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} = \frac{\omega}{c}$$

$$k_2 = \frac{\omega_2}{c} = \frac{\omega \Delta \omega}{c}$$

$$k_1 - k_2 = \frac{\Delta \omega}{c}$$

داریم

$$I_B(t) = \frac{I}{2\pi l_B^2} \left\{ 1 + \cos \left[ \Delta \omega t + \frac{(l_A - l_B)}{c} \Delta \omega \right] \right\}$$

که می‌دهد

$$R_B(t) = \frac{IS}{2\pi \hbar \omega l_A^2} \left\{ 1 + \cos \left[ \Delta \omega t + \frac{(l_A - l_B)}{c} \Delta \omega \right] \right\}$$

- ب- احتمال این که سیگنال  $A$  در زمان  $t$  با سیگنال  $B$  در طی زمان  $\tau \pm \tau$  همزمان شوند، برابر  $2\tau R_B(t)$  است. از این‌رو نرخ شمارنده همرویداد برابر است با:

$$\begin{aligned} R_{AB}(t) &= R_A(t)R_B(t)(2\tau) \\ &= \frac{IS^2\tau}{2\pi^2 \hbar \omega^2 l_A^2 l_B^2} [1 + \cos(\Delta \omega t)] \left\{ 1 + \cos \left[ \Delta \omega \left( t + \frac{l_A - l_B}{c} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

### ۳۰۱۰

بطور مختصر کار لامپ فروزن‌ساز نوری<sup>۱۶</sup> تشریح کنید. آیا این لامپ را می‌توان برای تشخیص دو فوتون که انرژی آنه پنجاه در صد با هم اختلاف دارند، بکار برد؟  
(دانشگاه کلمبیا)

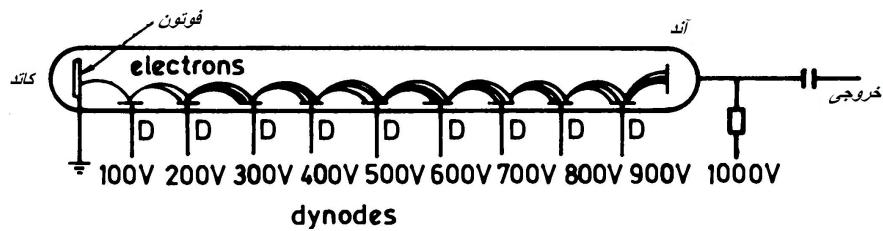
حل:

یک لامپ افزون‌ساز نوری دستگاهی است که یک تک فوتون-الکترون را پنج یا شش مرتبه از نظر مقداری افزایش می‌دهد. علوه بر کاتد گسیل نوری،<sup>۱۷</sup> چندین داینود<sup>۱۸</sup> دارد که بتدريج پتانسیل آنها افزایش می‌يابد (شکل ۱۲.۳). بطور کلی، پتانسیل در هر مرحله صد ولت از یک داینود به بعدی افزای می‌يابد. اختلاف پتانسیل شتاب الکترون‌ها طوری است که وقتی به سطح یک داینود برخورد می‌کند، آنها باعث بیرون اندازی سه یا چهار الکترون ثانویه می‌شوند. اين الکترون‌های ثانویه

<sup>۱۶</sup> photomultiplier tube

<sup>۱۷</sup> Photo-Emission Cathode

<sup>۱۸</sup> Dynode



شکل : ۱۳.۳

به نوبه خود بسوی داینود بعدی شتاب گرفته و فرآیند ادامه می‌یابد. در این رفتار، یک الکترون در کاتد را می‌توان چند برابر کرده و به یک میلیون الکترون در طبقه دهم ارتقاء داد.

جریان حاصل آند  $I$ ، که متناسب با تعداد متوسط  $\bar{N}$  الکترون در کاتد است، بطور متوسط متناسب با انرژی  $E$  فوتون وارد است. تعداد  $N$  الکترون جمع شده از توزیع پواسون پیروی می‌کند:

$$P(N) = \bar{N}^N e^{-\bar{N}} / N!$$

وقتی  $\bar{N}$  بزرگ باشد، توزیع پواسون به توزیع گوس نزدیک می‌شود:

$$P(N) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\sigma^2}\right], \quad \sigma = \sqrt{\bar{N}}$$

نیم-عرض توزیع،  $\Delta N$ ، شکل (۱۵.۳) می‌دهد:

$$P\left(\bar{N} + \frac{\Delta N}{2}\right) / P(\bar{N}) = \frac{1}{2} = \exp\left[-\frac{(\Delta N/2)^2}{2\sigma^2}\right]$$

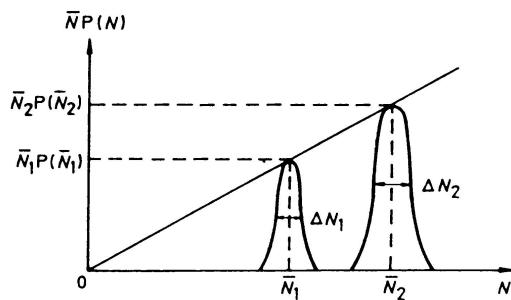
که در آن

$$\Delta N = 2\sqrt{2 \ln 2 \cdot \sigma^2} = 2\sqrt{2\bar{N} \ln 2}.$$

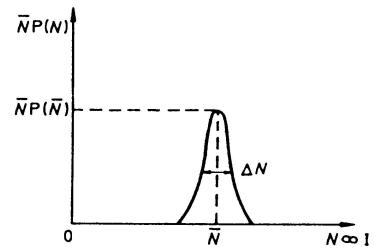
برای لامپ ده داینود، هر پنج نرخ گسیل ثانویه،  $5^{10} \simeq \bar{N}$  است. بطوری که از شکل (۱۵.۳) مشاهده می‌شود، برای تشخیص دو فوتون با انرژی‌های  $E_1$  و  $E_2$  با پنجاه درصد اختلاف لازم است که:

$$\frac{\Delta N}{\bar{N}} \approx 2\sqrt{\frac{2 \ln 2}{5^{10}}} \leq 50\%$$

وقتی این اوضاع شود، نتیجه می‌گیریم که لامپ می‌تواند دو فوتون مختلف را تمیز و تشخیص دهد.



شکل ۱۵.۳ :



شکل ۱۴.۳ :

## • الف- منظور از

۱. عرض خط داپلر<sup>۱۹</sup> چیست؟۲. عرض خط طبیعی<sup>۲۰</sup> یک خط طیف<sup>۲۱</sup> چیست؟• ب- آزمایشی برای اندازه‌گیری خطوط طیفی "بدون داپلر"<sup>۲۲</sup> توضیح دهید.

(لازم نیست کمی باشد، اما پاسخ شما باید مشخص کند که اصول فیزیک را درک کرده‌اید).

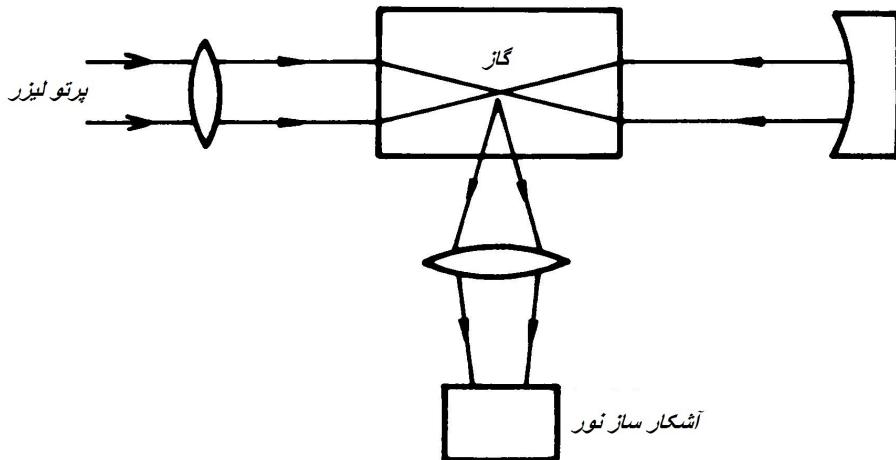
(دانشگاه ویسکانسین)

حل:

## • الف-

۱. گسترش داپلر خطوط طیفی توسط حرکت تصادفی اتم‌های تابشی بوجود می‌آید و متناسب با  $T^{1/2}$  و در اینجا  $T$  دمای مطلق منبع است.۲. بر طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ،  $\Delta t \cdot \Delta E \sim h$ ، حالت برانگیخته طول عمر  $\Delta t$  یک اتم، عدم قطعیت انرژی  $\Delta E$  دارد. خط طیف مربوطه برابر  $\nu = \frac{E}{h} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \sim \frac{1}{\Delta t}$  است.• ب- روش جذب دوگانه فوتون را می‌توان برای اندازه‌گیری خطوط طیفی "بدون داپلر" بکار برد. یک ملکول که دارای جذب دو فوتون (که  $\hbar\omega_1(k_1)$  و  $\hbar\omega_2(k_2)$  است، می‌تواند از حالت  $i$  به حالت  $f$  برانگیخته شود. اگر ملکول بدون حرکت باشد،<sup>۱۹</sup>Doppler line width<sup>۲۰</sup>Natural line width<sup>۲۱</sup>Spectral line<sup>۲۲</sup>Doppler free

$E_f - E_1 = \hbar[\omega_1 + \omega_2 - \nu \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)]$ ,  
و انتقال داپلر  $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \nu$  اتفاق می‌افتد. اگر  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$  باشد، انتقال داپلر صفر است.



شکل ۱۶.۳:

دو پرتو نور لیزر با فرکانس  $\omega$  در دو جهت مخالف روی یک نمونه گاز، مانند شکل (۱۶.۳)، منتشر می‌شوند. جذب دو فوتون که بوقوع می‌پیوندد را می‌توان با گذار فلورسنت  $m \rightarrow f$  آشکار کرد.

### ۳۰۱۲

الف- گسیل یا جذب یک نور مرئی را توسط یک ملکول‌های یک گاز داغ درنظر گیرید. رابطه‌ای برای توزیع فرکانس  $\nu_f$  مورد انتظار برای یک خط طیف، با فرکانس مرکزی  $\nu_0$  ناشی از گسترش داپلر بدست آورید. گاز را ایده‌آل در دمای  $T$  با جرم ملکولی  $M$  فرض کنید.

یک ظرف که با گاز آرگون در فشار  $Torr 10$  (یک تور برابر یک میلی‌متر جیوه است) و دمای  $C 200^\circ$  در نظر گیرید. یک قطعه کوچک سدیم را داخل ظرف حرارت داده بطوری که ظرف شامل مقدار بخار سدیم شود. خط جذب سدیم در طول موج  $5896\text{\AA}$  در نور رشته تنگستن که در ظرف قرار دارد را مشاهده می‌کنیم.

<sup>۲۲</sup>Fluorescent Transition

- ب- مقدار گسترش داپلر خط را بدست آورید.

- ج- مقدار گسترش تصادم خط را بدست آورید.

فرض کنید که تعداد اتم‌های سدیم خیلی نسبت به تعداد اتم‌های آرگون کم است. برآورد مناسبی از مقادیر که نیاز است اما داده نشده برای بیان جواب گسترش خط بر حسب آنگسترم ارائه دهید. وزن اتمی سدیم برابر ۲۳ است.

(CUSPEA)  
حل:

- الف- انتقال فرکانس داپلر که در جهت محور  $z$  ها مشاهده می‌شود برابر است با:

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{v_z}{c} \right)$$

يعني،

$$v_z = c \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right)$$

سرعت مولکول‌ها از توزیع ماکسول-بولتزمن<sup>۲۴</sup> پیروی می‌کنند:

$$dP = \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} e^{-\frac{M\nu^2}{2RT}} dv_y dv_z$$

که در آن  $M$  وزن ملکولی گاز و  $R$  ثابت گاز است. با انتگرال‌گیری نسبت به  $v_y$  و  $v_z$  از صفر تا بینهایت توزیع برای  $v_x$  بدست می‌آید:

$$dP = \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{1/2} e^{-\frac{Mc^2}{2RT} v_x^2} dv_x$$

که توزیع فرکانس را می‌دهد:

$$dP = \frac{1}{\nu_0} \left( \frac{Mc^2}{2\pi RT} \right)^{1/2} e^{-\frac{Mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2RT\nu_0^2}} d\nu$$

- ب- توزیع فرکانس شکلی بصورت توزیع گوسی با انحراف معیار  $\sigma$  است:

$$\sigma^2 = \frac{RT\nu_0^2}{Mc^2}$$

ازین رو

$$\Delta\nu \approx \sqrt{\frac{RT}{Mc^2}} \nu_0$$

---

<sup>۲۴</sup> Maxwell-Boltzmann distribution

یا

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &\approx \sqrt{\frac{RT}{Mc^2}}\lambda_0 = \sqrt{\frac{(8.3)(473)}{(40 \times 10^{-3})}} \frac{\lambda_0}{(3 \times 10^8)} \\ &= 1.04 \times 10^{-6} \lambda_0 = 1.04 \times 10^{-6} \times 5896 \text{ Å} = 6.13 \times 10^{-3} \text{ Å}\end{aligned}$$

• ج- مسیر آزاد متوسط  $A$  برابر است با:

$$A = \frac{1}{n\sigma},$$

که در آن  $\sigma = \pi r^2 \approx 3 \times 10^{-20} m^2$  با در نظر گرفتن  $r \approx 10^{-10} m$ . تعداد ملکول‌ها در واحد حجم خواهد بود:

$$n = \frac{A}{V} = \frac{pA}{RT},$$

که در آن  $A$  عدد آوگادرو <sup>۲۵</sup> است، بنابراین

$$n = \frac{(1.01 \times 10^5 \times 10/760)}{(8.3)(473)} \times 6.02 \times 10^{23} = 2.04 \times 10^{23} m^{-3}$$

با جاگذاری  $A = 1.7 \times 10^{-4} m$  بدست می‌آید. زمان متوسط بین دو تصادم برابر  $\tau = A/v$  سرعت متوسط اتم‌های سدیم است.

$$v \approx \sqrt{\frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{(8.3)(473)}{23 \times 10^{-3}}} \approx 413 ms^{-1}$$

بنابراین

$$\tau = \frac{1.7 \times 10^{-4}}{413} = 4 \times 10^{-7} s$$

گسترش ناشی از تصادم از فرکانس تصادم  $\Delta\nu/\tau$  بدست می‌آید. گسترش بر حسب طول موج برابر است با:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu^2} \Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c\tau} = 3 \times 10^{-5} \text{ Å}$$

### ۳۰۱۳

گاز اتم‌های  $A$  را در دمای  $T = 300 K$  و فشار  $p = 100 Torr$  در نظر گیرید. جرم هر اتم  $4.2 \times 10^{-27} kg$  و ثابت بولتزمن  $1.4 \times 10^{-23} J/K$  است. برخی از اتم‌ها به حالت  $A^*$  برانگیخته شده و تابشی با فرکانس  $\nu$  گسیل میدارند.

---

<sup>۲۵</sup> Avogadro's number

- الف- عرض داپلر  $\Delta\nu_D/\nu$  را برآورد کنید.

- ب- برای تصادم  $A \cdot A^*$  سطح مقطع مناسب فرض کرده و عرض گسترش-فشار خط  $\Delta\nu_p/\nu$  را برآورد کنید.

(دانشگاه ویسکانسین)

حل:

- الف-

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{1}{3 \times 10^8} \sqrt{\frac{1.4 \times 10^{-23} \times 300}{4.2 \times 10^{-27}}} = 3 \times 10^{-6}$$

- ب- عرض گسترش-فشار <sup>۲۶</sup>  $\Delta\nu_p$  برابر فرکانس تصادم مولکول گاز است:

$$\Delta\nu_p = v/A$$

که در آن  $v$  سرعت متوسط است که از رابطه  $\sqrt{kT/m}$  بدست می‌آید و مسیر آزاد متوسط مولکول‌ها است که از رابطه حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{\pi r^2 n} = \frac{1}{\pi r^2} \sqrt{\frac{kT}{p}}$$

در این رابطه  $r$  شعاع مولکول و تقریباً  $10^{-10} m$ ، و  $n$  تعداد مولکول در واحد حجم است. بنابراین:

$$\Delta\nu_p = \pi r^2 n \sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{\pi p r^2}{\sqrt{kmT}} = 7.2 \times 10^7 Hz$$

برای نور مرئی  $\nu = 6 \times 10^{14} Hz$  یا  $\lambda \approx 5000 \text{\AA}$  داریم:

$$\Delta\nu_p/\nu = 1.2 \times 10^{-7}.$$

### ۳۰۱۴

یک گذر الکترونیکی در یون  $^{12}_C$  منجر به گسیل فوتون در نزدیکی  $\lambda = 500 nm$  می‌شود. این یون در دمای  $kT = 20 eV$ ،  $n = 10^{24}/m^3$ ، چگالی  $p$ ، و میدان مغناطیسی غیرخطی  $B = 1 Tesla$  به میسرد، در تعادل حرارتی است.

- الف- بطور مختصر سازوکارهای گسترش را که ممکن است باعث شود عرض  $\Delta\lambda$  مشاهده شده بیشتر از بدست آمده برای مقادیر  $kT$ ،  $n$ ، و  $B$  باشد، بحث کنید.

<sup>۲۶</sup> Pressure-Broadened Width

- ب- برای یکی از این سازوکارها عرض گسترش  $\Delta\lambda$  را با استفاده از براورد مقدار پارامترهای مورد نیاز محاسبه کنید.

(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

- الف- حرکت حرارتی یون‌ها خطوط طیفی را بعلت اثر داپلر گسترش می‌دهد. این گسترش متناسب با  $\sqrt{T}$  که در آن  $T$  دمای مطلق است. تصادم بین یون‌ها نیز باعث گسترش؛ گسترش تصادم یا فشار که متناسب است، چگالی تعداد یون‌ها  $n$  یا فشار گاز  $p$  می‌شود. وقتی یک منبع در میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، خط طیف ممکن است با انتقال انرژی متناسب با میدان مغناطیسی  $B$  شکسته شود. این تقسیم به اثر زیمن<sup>۲۷</sup> معروف است. اگر میدان مغناطیسی غیر یکنواخت باشد، انتقال طیفی از صفر تا یک مقدار بیشینه که بستگی به  $B$  دارد تغییر می‌کند. یعنی خطوط طیف متناسب با  $B$  گسترش می‌یابد.

- ب- گسترش داپلر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{1}{3 \times 10^8} \left( \frac{20 \times 1.6 \times 10^{-19}}{12 \times 1.67 \times 10^{-27}} \right)^{1/2} \approx 4 \times 10^{-5}$$

بنابراین

$$\Delta\lambda = 5000 \times 4 \times 10^{-5} = 0.2 \text{ Å}$$

گسترش تصادم چنین خواهد بود:

$$\Delta\nu \approx r^2 n \sqrt{\frac{kT}{m}} = 10^{-20} \times 10^{24} \times 1.3 \times 10^4 = 1.3 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

یا

$$\Delta\lambda = \lambda^2 \Delta\nu / c \approx 0.1 \text{ Å}$$

انتقال انرژی خط طیف باعث اثر زیمن می‌شود که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta E = \mu_B B \Delta(Mg),$$

که در آن  $M$  عدد کوانتمی مغناطیسی،  $g$  ضریب لند<sup>۲۸</sup>،  $\mu_B$  مگنتون بوهر<sup>۲۹</sup> است.

<sup>۲۷</sup>Zeeman effect

<sup>۲۸</sup>Lande factor

<sup>۲۹</sup>Bohr magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{4\pi mc} = 0.93 \times 10^{-23} A \cdot m^{-2}$$

با در نظر گرفتن  $B = 1 \text{ Tesla}$  و  $\Delta(Mg) \sim 1$  خواهیم داشت:

$$\Delta E \approx 10^{-23} J.$$

ازینرو

$$\Delta E \lambda = \frac{\lambda^2 \Delta \nu}{c} = \frac{\lambda^2 \Delta}{hc} \approx \left( \frac{5000^2 \times 10^{-23}}{6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{18}} \right) = 0.1 \text{ Å}$$

### ۳۰ ۱۵

در روزهایی که ابر وجود ندارد و جو نسبتاً عاری از گرد و غبار (دود) و رطوبت کمی دارد، آسمان دور از خورشید، رنگ آبی بسیار عمیقی دارد. این ناشی از پراش ملکولی<sup>۳۰</sup> است.

- الف- اگر قطبش الکتریکی مولکولی ناشی از میدان الکتریکی  $E$  فوتون مستقل از فرکانس است، ثابت کنید که چگونه این باعث وابستگی به طول موج پراش نور خورشید شیوه آنچه مشاهده می‌شود منجر می‌شود. وابستگی پراش به زاویه را بحث کنید.
- ب- اگر عنصر حجمی هوا  $\Delta V$  که ابعاد آن نسبت به طول موج  $\lambda$  کوچک است تعداد متوسط مولکولها  $N_0 \Delta V >> 1$  باشد، و اگر هیچگونه تغییراتی در باره این تعداد متوسط وجود نداشته باشد، نشان دهید که هیچ پراش خالص وجود ندارد.
- ج- اگر ریشه میانگین مریع تغییرات تعداد ملکولها برابر با مریع ریشه تعداد میانگین باشد، نشان دهید که شدت پراش خالص به گونه‌ای است که گوئی هر مولکول به طور مستقل بدون تداخل بین مولکولها پراشیده شده است.
- د- وقتی رطوبت نسبی نزدیک به 100% است، مشاهده می‌شود که پراش (نسبت به حالت-ج) برای مولکول‌های آب افزایش می‌یابد. توضیح دهید.

(دانشگاه کلمبیا)  
حل:

- الف- میدان الکتریکی  $E = E_0 \cos(\omega t)$  نور تابشی ملکول‌های هوا را قطبیده و بهنوسان و امیدارد. گشتاور هر دو قطبی  $p_0 \cos(\omega t)$  است که در آن

$$p_0 = \frac{e^2}{m} \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

در این رابطه  $e$  بار الکتریکی،  $m$  جرم الکترون،  $\omega_0$  فرکانس مشخصه است. برای فرکانس‌های نوری  $\omega_0 < \omega$  بطوری که قطبندگی  $e^2/m\omega_0^2$ <sup>۳۱</sup> مستقل از فرکانس است.

میدان تشعشی پراشیده توسط دوقطبی القائی بنحوی است که دامنه در فواصل دور  $r$  از دوقطبی برابر است با:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin\theta}{r} p_0 \quad (1.3)$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین  $r$  و جهت دو قطبی است. شدت پراش مربوطه برابر است با:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} EH = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{\omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 p_0^2 \\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 \\ &= \alpha^2 I_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

که در آن  $\alpha$  شعاع کلاسیک یک الکترون و  $I_0$  شدت نور تابشی است. بنابراین  $I \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$ ، از اینرو پراش نور مرئی رنگ آبی بر دیگر رنگها رجحان دارد. این دلیل برآبی بودن آسمان است مشروط بر آنکه در خط دید تماشای خورشید نباشیم.

شدت پراشیده توزیع زاویه  $\theta \sim \sin^2\theta$  دارد. برای نور تابشی غیرقطبیده، فرض کنید که جهت انتشار در جهت  $z$ ها و نور پراکنده شده در جهتی در صفحه  $xz$  که با محور  $z$ ها زاویه  $\psi$  می‌سازد، مانند شکل ۱۷.۳)-الف باشد. در یک لحظه، میدان الکتریکی نور تابشی در دوقطبی،  $E_0$ ، (و از اینرو دوقطبی القائی) زاویه  $\phi$  با محور  $x$ ها می‌سازد. از هندسه می‌دانیم که:

$$\cos\theta = \cos\phi \sin\psi$$

چون  $\phi$  تصادفی است، باید از  $\sin^2\theta$  روی  $\phi$  میانگین بگیریم:

---

<sup>۳۱</sup>Polarizability

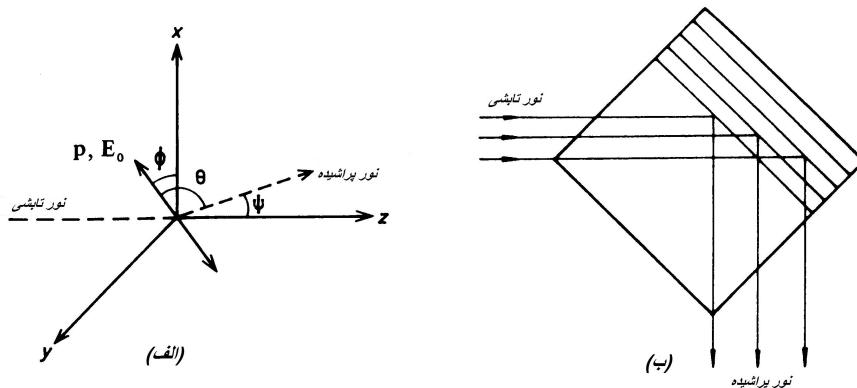
### فصل ۳. نورشناخت کوانتوموی

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \phi \sin^2 \psi) d\phi = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \psi)$$

بنابراین شدت نور پراکنده برای نور تابشی غیر قطبیده، توزیع زاویه‌ای  $\sim (1 + \cos^2 \psi)$  دارد. شدت پراکندگی در جهت رو به جلو و معکوس بیشینه و در جهت عرض کمینه است.

- ب- یک عنصر حجم کوچک  $r^3 \ll \lambda^3 \ll \Delta V$  در نظر گیرید. تصور کنید که از  $q$  لایه‌های مساوی تشکیل شده، هر یک دارای ضخامت  $\lambda$ ، بفاصله  $\sqrt{2}\lambda/q$  از یکدیگر بوده و با نور تابشی زاویه  $\frac{\pi}{4}$ ، مانند شکل (۱۷.۳)-ب، می‌سازند. اختلاف فاز بین هر دو لایه مجاور برابر است با:

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\sqrt{2}\lambda}{q} = \frac{2\pi}{q}$$



شکل ۱۷.۳ :

فرض کنید میدان نور پراکنده شده در جهت  $\psi$  توسط لایه  $k$  ام برابر  $E_k \cos(\omega t - \delta_k)$  باشد. میدان منتجه در آن جهت خواهد بود:

$$E = \sum_{k=1}^q E_k \cos(\omega t - \delta_k)$$

با

$$\delta_k - \delta_{k-1} = \frac{2\pi}{q}$$

اگر ملکول‌ها در عنصر حجم بطور یکنواخت با هیچ‌گونه تغییراتی توزیع شده باشند، در این صورت  $E_1 = E_2 = \dots = E_q$ ، ارایزو

$$\begin{aligned} E &= E_1 \sum_{k=1}^{q-1} \cos \left( \omega t - \delta_1 + \frac{2k\pi}{q} \right) \\ &= E_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t - \delta_1)} \sum_{k=1}^{q-1} e^{j \frac{2\pi k}{q}} \right\} \\ &= E_1 \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t - \delta_1)} \left( \frac{1 - e^{j2\pi}}{1 - e^{\frac{j2\pi}{q}}} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

بنابراین، هیچ‌گونه پراکنده‌گی خالص وجود ندارد.

- ج- اگر تعداد  $N$  ملکول در هر لایه حول میانگین  $\bar{N}$  تغییر کنند،  $[E_k]$  نیز حول میانگین  $\bar{E}$  تغییر خواهد کرد:

$$E_k = \bar{E} + \Delta_k$$

در این صورت

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^q (\bar{E} + \Delta_k) \cos(\omega t - \delta_k) \\ &= \sum_{k=1}^q \Delta_k \cos(\omega t - \delta_k) \end{aligned}$$

ضماین

$$\begin{aligned} E^2 &= \sum_{k=1}^q (\bar{E} + \Delta_k) \cos(\omega t - \delta_k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^q \sum_{l \neq k} \Delta_k \Delta_l \cos(\omega t - \delta_k) \cos(\omega t - \delta_l) \\ &\approx \sum_{k=1}^q \Delta_k^2 \cos(\omega t - \delta_k) \end{aligned}$$

زیرا  $\Delta_k$ ‌ها مستقل از یکدیگر و احتمالاً مثبت و منفی هستند. می‌توان نوشت:

$$E^2 \approx q \langle \Delta_k^2 \rangle \cos^2(\omega t - \delta)$$

از رابطه (۱.۲۳) مشاهده می‌شود که:

$$\Delta_k^2 = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 \left( \frac{\sin\theta}{r} \right)^2 (N_k - \bar{N})^2 p_0^2$$

بنابراین

$$\langle \Delta_k^2 \rangle = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 \left( \frac{\sin\theta}{r} \right)^2 \overline{N} 2p_0^2$$

چون  $\langle (N_k - \overline{N})^2 \rangle = \overline{N}$  را داده‌اند.

بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} q \langle \Delta_k^2 \rangle \\ &= \frac{\omega^4}{32\pi^2\epsilon c^3} \left( \frac{\sin\theta}{r} \right)^2 q \overline{N} p_0^2 \end{aligned}$$

اکنون  $q\overline{N}$  تعداد کل مولکول‌ها در  $\Delta V$  است. مقایسه موارد بالا با (۲.۲) نشان می‌دهد که اگر هر یک از مولکول‌ها بطور مستقل و بدون تداخلی بین آنها پراکنده شوند، شدت پراکندگی خالص یکسان است. برای یک گاز رقیق با حجم  $V$  و  $N_0$  مولکول در واحد حجم، از رابطه (۲.۲) داریم:

$$I = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) I_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \left( \frac{\sin\theta}{r} \right)^2 N_0 V$$

اگر ضریب شکست آن  $n$  باشد، از رابطه کلاوزیوس-موسوتی<sup>۳۲</sup> داریم:

$$n^2 - 1 = \frac{N_0 e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

که میدهد:

$$I = \pi^2 I_0 \frac{(n^2 - 1)^2}{\lambda^4} \frac{V}{N} \left( \frac{\sin\theta}{r} \right)^2$$

این به رابطه ریلی<sup>۳۳</sup> معروف است.

- وقتی رطوبت نسبی به ۱۰۰٪ نزدیک شود، مولکول‌های آب متراکم شده و دوقطبی تشکیل می‌دهند. این ذرات ریز، هنگامی که نور سفید از درون آن می‌گذرد، رنگ آبی را پراکنده می‌کند. این بعنوان پراش تیندال<sup>۳۴</sup> معروف و از پراش ریلی خیلی قوی‌تر است.

## ۳۰۱۶

دلیل اینکه در روز روشن آسمان آبی بنظر میرسد این است که:

<sup>۳۲</sup>Clausiua-Mossotti relation

<sup>۳۳</sup>Rayleigh's formula

<sup>۳۴</sup>Tyndall scattering

- الف- بازتاب از سطح دریا است.

ب- تغییرات چگالی جو زمین باعث پراکندگی می شود.

- ج- بخار کوبالت در جو زمین است.

(CCT)

**حل:**

جواب (ب) است.

### ۳۰۱۷

مولکول‌های یک گاز معمولی، باند جذب را در تمام طیف الکترومغناطیس از اشعه ایکس تا امواج رادیوئی نشان می‌دهد. برحسب حالت ساختمان اتمی و مولکولی، فرآیند جذب مسئول باند جذب در ناحیه‌های طیف زیر هست.

- الف- اشعه ایکس،
- ب- فرابنفش و مرئی
- ج- نزدیک فروسرخ
- د- دور از فروسرخ و رادیوئی

(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

وقتی امواج الکترومغناطیسی از درون یک گاز عبور کرده به طیف‌نما<sup>۳۵</sup> میرسند، طول موج‌هایی که محیط در صورت بالا بودن بقدر کافی ساطع میدارد، جذب می‌شوند، بطوری که طیف شامل خطوط تاریکی در ناحیه مربوط به گذر صعودی بین سطوح انرژی اتم‌ها یا مولکول‌های گاز است.

- الف- اشعه ایکس: انتقال یک الکترون از پوسته داخلی یک اتم به پوسته خارجی یا خارج از اتم.
- ب- فرابنفش و نور مرئی: گذار بین حالت‌های انرژی یک الکترون اتم در حال چرخش مداری.
- ج- نزدیک فروسرخ: گذار بین ترازهای نوسانی مولکول‌ها.
- د- دور از فروسرخ و رادیوئی: گذار بین ترازهای چرخشی مولکول‌ها.

---

<sup>۳۵</sup>Spectroscope

## ۳۰۱۸

جو زمین که شامل  $O_2, N_2, CO_2, N_2O, H_2O, O_3, \dots$  هستند را در نظر گیرید. برای هر یک از ناحیه فرکانسی زیر آیا جو زمین بطور معقول شفاف است یا به شدت جذب می‌شوند، بحث کنید.

- الف-  $10^8 - 10^9$  هرتز
- ب- دور از فروسرخ
- ج- نزدیک فروسرخ
- د- نور مرئی
- ه- فرابنفش
- و- اشعه ایکس
- ح- اشعه گما

(دانشگاه کلمبیا)

**حل:**

- الف- فرکانس‌های ریزموچ (مایکروویو)،  $10^8 - 10^9$  هرتز، بشدت بوسیله  $N_2O, H_2O, O_2$  جذب می‌شوند.
- ب- نور دور از فروسرخ بشدت بوسیله  $CO_2$  جذب می‌شود.
- ج- نور نزدیک فروسرخ بشدت بوسیله  $H_2O$  جذب می‌شود.
- د- نور دور از فروسرخ بشدت بوسیله  $O_3$  جذب می‌شود.
- ه- و- ح- جو زمین برای اشعه ایکس، اشعه گما و نور مرئی شفاف است گچه برخی از خطوط طیفی نورمرئی توسط  $O_3$  جذب می‌شوند.

## ۳۰۱۹

اصول فیزیکی که شامل پدیده‌های زیر است را توضیح دهید:

- الف- آبی بون آسمان.
- ب- قرمز بودن خورشید در غروب.
- ج- رنگین کمان.

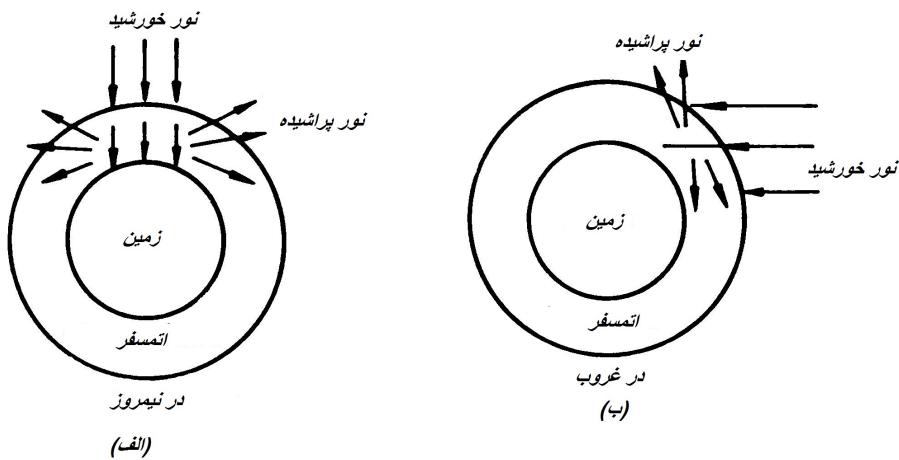
• د- چشمکزدن ستاره‌ها

(دانشگاه کلمبیا)

**حل:**

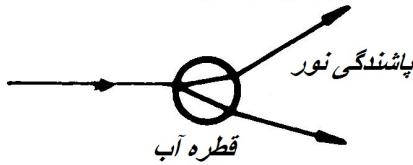
• الف- بر طبق رابطه پراش ریلی، شدت تشعشع امواج پراکنده بوسیله ملکول‌های هوا با توان چهارم طول موج نسبت عکس دارد. بنابراین، مولفه طول موج‌های کوتاه‌تر (رنگ آبی) نور مرئی خورشید، وقتی در جهت مشاهد خورشید نیستیم، خیلی قوی‌تر پراکنده و آسمان آبی بنظر (شکل ۱۸.۳-الف) میرسد.

• ب- در غروب یا طلوع آفتاب، نور خورشید از درون لاشه ضخیم‌تر جو نسبت به ظهر عبور کرده و مولفه‌های نور آبی بخارج پراکنده می‌شوند. در نتیجه خورشید قرمز بنظر میرسد (شکل ۱۸.۳-ب).



شکل ۱۸.۳ :

• ج- بعداز باران قطرات ریز آب در جو زمین باقی می‌ماند و سبب شکست نور خورشید می‌شود. چون ضریب شکست آب به طول موج وابسته است، مولفه‌های نور خورشید با طول موج‌های مختلف یا رنگ‌های الوان در زاویه‌های مختلف شکسته شده و رنگین کمان ایجاد می‌کند، (شکل ۱۹.۳).



شکل ۱۹.۳:

- د- تغییرات تصادفی چگالی هوا باعث چشمکزدن ستاره‌ها می‌شود.

۳۰۲۰

مدت زمانی که طول می‌کشد تا نور خورشید به زمین برسد چقدر است؟

- الف- یک ساعت.
- ب- هشت دقیقه.
- ج- هشت ثانیه.

(CCT)

حل:

جواب (ب) است.

۳۰۲۱

نور خورشید بر سطح آب با ضریب شکست  $n = 1.33$  بطور عمودی می‌تابد.

- الف- رابطه ضریب انتقال  $T$  و بازتاب  $R$  انرژی را بدست آورید، ( $R+T = 1$ ).
- ب- اگر شارتابشی یک کیلووات بر متر مربع باشد، چه فشاری نور خورشید بر سطح آب وارد می‌کند؟

مراقب باشید: بطور مستقیم که شما فکر می‌کنید، ممکن است بخش (ب) دنبال بخش (الف) نباشد!

(دانشگاه کالیفرنیا-برکلی)

حل:

- الف- رابطه‌های فرنل<sup>۳۶</sup> برای تابش قائم بصورت زیر است:

---

<sup>۳۶</sup>Fresnel's formulae

$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 = \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 = 0.02,$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} = \frac{4n}{(n + 1)^2} = 0.98,$$

$$R + T = 1.$$

- ب- از دیدگاه نظریه فوتونی، فشار نور نتیجه انتقال مومنتوم نور وارده بر هدف است. اگر  $W$  چگالی شار تابشی و  $R$  ضریب شکست باشد، تغییر مومنتوم بر واحد سطح برابر است با:

$$\frac{WR}{c} - \left( -\frac{W}{c} \right) = \frac{(1+R)W}{c}$$

طبق تعریف فشار نور  $p$ :

$$p = \frac{(1 + 0.02) \times 100}{3 \times 10^8} = 3.34 \times 10^{-6} N/m^2$$

## ۳۰۲۲

یک موج الکترومغناطیسی ( $E_0, H_0$ ) در محیطی به ضریب شکست  $n_1$  منتشر می‌شود و به محیطی به ضریب شکست  $n_2$  برخورد می‌کند. زاویه‌ای که موج با خط قائم بر سطح مشترک می‌سازد  $\theta_1$  است. معادلات کلی فرنل را برای امواج بازنتاب و شکست بدست آورید. قانون بروستر<sup>۳۷</sup> را برای حالت خاص این معادلات بدست آورید.

(دانشگاه کلمبیا)

### حل:

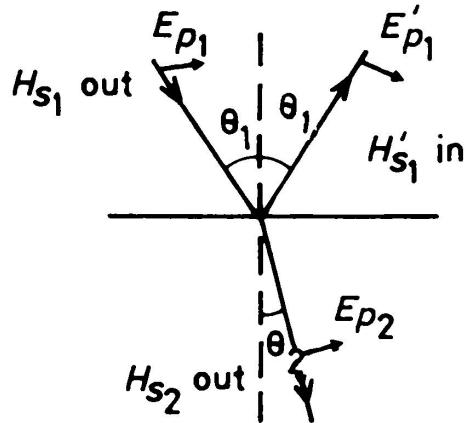
اگر موج الکترومغناطیسی تابشی بدون قطبش باشد، آنرا می‌توان به دو مولفه، یکی قطبیده شده با میدان الکتریکی موازی صفحه تابش، و دیگری قطبیده شده با میدان الکتریکی عمود بر صفحه تابش در نظر گرفت. حالت اول را در نظر گیرید و فرض کنید بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی تابشی، بازنتاب و شکست امواج را بترتیب با  $E_{p1}, E'_{p1}, E_{p2}$  و  $H_{s1}, H'_{s1}, H_{s2}$ ، شکل (۲۰.۳)، نشان دهیم. شرط مرزی برای بردارها می‌دهد:

$$E_{p1} \cos \theta_1 + E'_{p1} \cos \theta_1 = E_{p2} \cos \theta_1 \quad (۳.۳)$$

$$H_{s1} - H'_{s1} = H_{s2} \quad (۴.۳)$$

---

<sup>۳۷</sup>Brewster's law



شکل ۲۰.۳

برای یک موج الکترومغناطیسی صفحه‌ای:

$$\sqrt{\epsilon_1} E_{p1} = \sqrt{\mu_1} H_{s1}$$

$$\sqrt{\epsilon_1} E'_{p1} = \sqrt{\mu_1} H'_{s1}$$

$$\sqrt{\epsilon_2} E_{p2} = \sqrt{\mu_2} H_{s2}$$

فرض کنید محیط غیرفرومغناطیسی است، از این داریم:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

و نیز

$$n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}$$

رابطه (۴.۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$n_1 E_{p1} - n_1 E'_{p1} = n_2 E_{p2} \quad (5.3)$$

قانون اسنل میدهد  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . با ترکیب این رابطه با معادلات (۳.۳) و (۴.۳) بدست می‌آید:

$$r_p \equiv \frac{E'_{p1}}{E_{p1}} = \frac{\tan(\theta_2 - \theta_1)}{\tan(\theta_2 + \theta_1)}, \quad t_p \equiv \frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 + \theta_1) \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

که در آن  $r_p$  و  $t_p$  را بترتیب ضریب بازنگار و ضریب عبور می‌نامند.  
بهمنین نحو، برای مولفه تابشی با بردار میدان الکتریکی عمود بر صفحه تابش داریم:

$$r_s \equiv \frac{E'_{s1}}{E_{s1}} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

$$t_s \equiv \frac{E_{s2}}{E_{s1}} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}$$

توجه کنید وقتی  $\theta_2 + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$  است، ضریب  $r_p = 0$  یعنی

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cos \theta_2$$

یا

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

این را بعنوان قانون بروستر بیان می‌کنند: وقتی زاویه تابش برابر  $\tan^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$  باشد، مولفه میدان الکتریکی  $E$  که در صفحه تابشی است بازتاب نمی‌شود و موج بدون قطبش در بازتاب به‌موجی قطبیده صفحه‌ای تبدیل می‌شود.

### ۳۰۲۳

نسبت شدت یک موج بازتاب شده به شدت موج تابشی یک موج نوری که بطور قائم بر سطح آب عمیقی به ضریب شکست  $n = 1.33$  می‌تابد، را محاسبه کنید.  
(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**

معادله فرنل برای تابش عمودی خواهد بود:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 = 0.02$$

### ۳۰۲۴

در حالی که یک آکواریوم از آب پُر می‌شود (ضریب شکست  $n > 1$ )، یک ماهی بدون حرکت با بالا آمدن سطح آب، به بالا (بطور عمودی) به منبع نور تکرنک موج صفحه‌ای نگاه می‌کند، آیا ماهی منبع را انتقال بسمت آبی (فرکانس بالاتر)، انتقال بسمت قرمز (فرکانس پائین‌تر) یا همان فرکانس بدون تغییر خواهد دید؟ دلائل خود را توضیح دهید.  
(دانشگاه کلمبیا)

**حل:**

سرعت انتشار نور در درون محیطی که ضریب شکست  $n$  با سرعت  $V$  نسبت به ناظر است از رابطه فرنل بدست می‌آید

$$u = \frac{c}{n} \sim V \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

### فصل ۳. نورشناخت کوانتوسی

که این عملاً بوسیله فیسو<sup>۲۸</sup> تائید شده است. طول موج انتشار نور در آب برابر است با:

$$\lambda_{آب} = \frac{c}{n\nu}$$

که در آن  $c$  و  $\nu$  سرعت و فرکانس نور در خلاء است. فرکانس نور توسط ماهی چنین مشاهده می‌شود:

$$\nu' = \lambda_{آب} = \nu - V \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \left( \frac{n\nu}{c} \right)$$

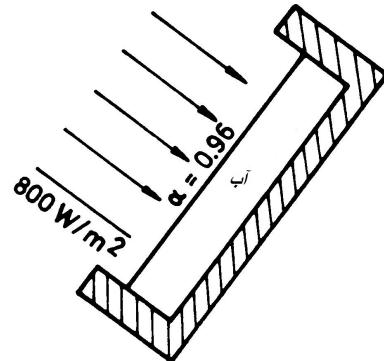
برای  $n > 1$ ،  $\nu' < \nu$ ، یعنی ماهی نور را بسمت قرمز انتقال یافته می‌بیند.

### ۳۰۲۵

انرژی خورشیدی با نرخ  $800W/m^2$  به یک صفحه خورشیدی مسطح برای گرمایش آب بخورد می‌کند. اگر صفحه دارای ضریب جذب ۰.۹۶ برای تمام طول موج‌ها و اضلاع عایق کامل باشد، دمای بیشینه آب را محاسبه کنید. اگر ضریب جذب به نصف تقلیل یابد، چقدر این روی دمای نهائی تاثیر دارد؟

(دانشگاه ویسکانسین)

**حل:**



: ۲۱.۳

تحت تعادل، قانون استفان-بولتزمن<sup>۲۹</sup> می‌دهد:

$$\alpha\phi = \sigma T^4$$

<sup>۲۸</sup>Fiseau

<sup>۲۹</sup>Stefan-Boltzmann law

که در آن  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$  ثابت استفان،  $\phi$  چگالی شار انرژی خورشیدی، و  $\alpha$  ضریب جذب صفحه خورشیدی است. با مقادیر

$$\begin{aligned}\sigma &= 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4, \\ \alpha &= 0.96, \\ \phi &= 800 W/m^2\end{aligned}$$

دما بیشینه  $T = 341 K$  برای آب بدست می‌آید. چون

$$T \propto \alpha^{1/4},$$

است، وقتی  $\alpha' = \alpha/2$  است، داریم:

$$T' = (1/2)^{1/4} T = 286 K.$$

بنابراین اگر ضریب جذب  $1/2$  تقلیل یابد، بیشینه دما 286 کاهش می‌یابد.

### ۳۰۲۶

شدت نور ماه را در روی زمین برآورد کنید.

- الف- بر حسب وات بر سانتی متر مربع.

- ب- بر حسب فوتون بر سانتی متر مربع بر ثانیه (در ناحیه نور مرئی).

(دانشگاه کلمبیا)  
حل:

- الف- فرض کنید نوری که از خورشید به ماه می‌تابد، بطور کلی بوسیله سطح ماه بازتاب شود و شدت نور خورشید روی سطح ماه برابر روی سطح زمین، ثابت  $I$  است:

$$I = 1.4 kW/m^2$$

فرض کنید  $r$  شعاع ماه، و  $R$  فاصله بین ماه و زمین باشد. شدت شار بازتاب شده از ماه بر واحد زاویه فضائی برابر  $2\pi r^2 / 2\pi$  است. واحد سطح زمین تحت زاویه فضائی  $1/R^2$  در ماه قرار می‌گیرد. بنابراین شدت نور ماه در روی زمین برابر است با:

$$I_m = I(r/R)^2 \approx 3 \times 10^{-6} W/cm^2$$

با در نظر گرفتن  $R = 3.8 \times 10^5 km$  و  $r = 1.74 \times 10^3 km$

### فصل ۳. نورشناخت کوانتمی

- ب- انرژی فوتون  $h\nu = hc/\lambda$  است. برای نور مرئی  $5000\text{ \AA} \approx \lambda$ ، و تعداد فوتون‌های وارد بر سانتی‌متر مربع در ثانیه برابر است با:

$$I_m/(hc/\lambda) = 7.5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

### ۳۰۲۷

کارائی (وات مرئی بر وات ورودی) دو عدد از منابع نوری زیر را برآورد کنید: نور گاز، لامپ رشته‌ای، دیود نوری، لامپ فلورسنت، قوس بخار جیوه و سدیم، لیزر.  
(دانشگاه کلمبیا)

**حل:**

کارائی روشنائی منابع نوری را نسبت مقدار انرژی تشعشع شده در واحد زمان در محدوده طول موج  $7600\text{ \AA} - 4000\text{ \AA}$  که بعنوان طیف مرئی شناخته می‌شود، به کل انرژی مصرف شده توسط منبع در واحد زمان است. علاوه بر تلفات انرژی بوسیله هدایت و انتقال، فقط کسر گوچکی انرژی بصورت طیف مرئی تشعشع می‌شود.

کارائی روشنائی برخی از منابع نوری بقرار زیر است

نور گاز = 0.001	قوس جیوه = 0.08
لامپ رشته‌ای = 0.02	قوس سدیم = 0.08
لامپ فلورسنت = 0.09	لیزر = 0.4

### ۳۰۲۸

مقدار مناسب از مقادیر داده شده زیر را انتخاب کنید:

- الف- زاویه بحرانی بازتاب کلی در آب برابر است با:

$$5^\circ, 20^\circ, 50^\circ, 80^\circ$$

- ب- شار انرژی نور خورشید در روی شعاع مدار زمین برابر است با:  
 $10^6, 10^2, 10^{-1}, 10^{-5} \text{ W/cm}^2$

- ج- جند عدد الکترون در ثانیه از درون فیلامان یک لامپ عبور می‌کند؟

$$10^{10}, 10^{15}, 10^{19}, 10^{25}$$

(دانشگاه کلمبیا)  
**حل:**

- الف- برای آب  $n = 4/3$  است، بنابراین زاویه بحرانی

$$\theta_c = \sin^{-1}(1/n) = 48.6^\circ$$

و انتخاب  $50^\circ$  معقول است.

- ب-  $10^{-1} W/cm^2$

- ج- وات یک لامپ برابر  $VI = W$  است. برای یک لامپ تقریباً صد وات و ولتاژ برق شهر را تقریباً صد ولت در نظر گیریم، جریان تقریباً یک آمپر خواهد بود. بنابراین تعداد الکترون‌های عبور کننده در واحد زمان برابر است با:

$$\frac{I}{e} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \approx 10^{19} s^{-1}$$

### ۳۰۲۹

برای سامانه‌های نوری زیر، توضیحی شامل اصول فیزیکی مربوط به آنها ارائه دهید:

- الف- چیدمان عدسی یا آینه برای تبدیل منبع نور کروی هزار شمعی به قطر ده سانتی‌متر به چراغ قوه به توان شمع<sup>۶</sup>. (از جذب نور توسط آینه یا عدسی‌ها چشم‌پوشی شود).
- ب- دستگاهی که قادر به تولید نوری با قطبش دایره‌ای باشد و مولفه‌ای نور قطبش دایره‌ای را تجزیه و تحلیل کند. (می‌توانید فرض کنید که نور تکنگ است).
- ج- سامانه‌ای (در محدوده نور مرئی یا فرکانس‌های رادیوئی) برای برآورد و تخمین منبع تابشی اندازه ستارگان دور.

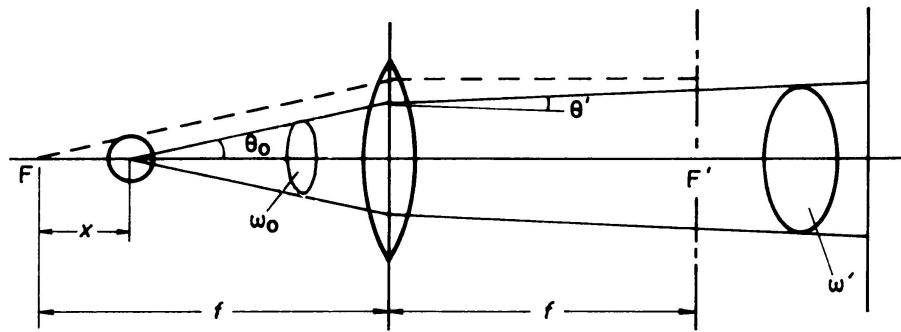
(دانشگاه کلمبیا)

**حل:**

- الف- همان طوری که در شکل (۲۲.۳) نشان داده شده است، یک عدسی یا آینه مقعر می‌تواند نور منبعی که نزدیکی نقطه کانونی قرار دارد را به پرتوی موازی تبدیل کند.
- شدت روشنائی بر واحد زاویه فضائی منبع را  $I$  برابر با هزار توان شمع<sup>۴</sup> در نظر گیرید. منع را نزدیک یک عدسی یا آینه مقعر که نور را در زاویه حجمی

---

<sup>۴</sup> Candel-Powers



شکل ۲۲.۳

$\omega$  به پرتوی بهزاویه حجمی  $\omega'$  تبدیل می‌کند قرار دهید. توان شمع پرتو چراغ قوه برابر است با :

$$I \frac{\omega_0}{\omega'} = I \left( \frac{\theta_0}{\theta'} \right)^2 = 10^3 \left( \frac{\theta_0}{\theta'} \right)^2 = 10^6$$

شرط آنکه

$$\frac{\theta_0}{\theta'} = 31.6$$

نسبت  $\frac{\theta_0}{\theta'}$  برابر بزرگنمایی زاویه است. از هندسه داریم:

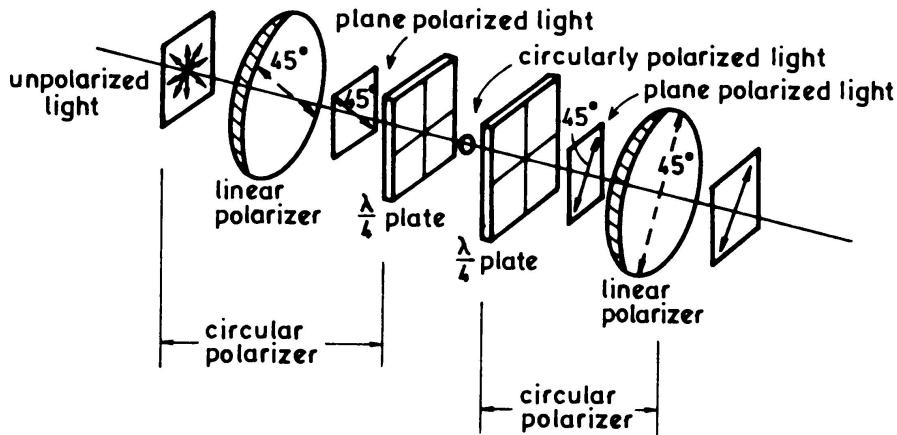
$$\theta' f = \theta_0 x$$

و از آنجا

$$x = \frac{f}{31.6}$$

که در آن  $x$  فاصله لازم بین منبع و نقطه کانونی عدسی است. با قرار دادن منبع خواه سمت چپ یا راست نقطه کانونی، چراغ قوه پرتوی  $10^6$  توان شمع تولید خواهد کرد.

- ب- شکل (۲۳.۳) چیدمانی شامل یک قطبند خطی و یک تیغه ربیع موج بعداز آن که محور نوری آنها نسبت بهم زاویه  $45^\circ$  میسازد قرار دارد. وقتی پرتو نور غیرقطبیده از درون قطبشگر عبور می‌کند، بطور خطی قطبیده می‌شود. چون بردار میدان الکتریکی با محور نوری تیغه ربیع موج زاویه  $45^\circ$  میسازد، نور خارج شونده از این تیغه قطبیده دایره‌ای است. فراتر از این، در چینش یک تیغه ربیع موج و یک قطبشگر خطی برای آشکارسازی نور قطبیده دایره‌ای وجود دارد. نور بعداز عبور تیغه ربیع موج، نور قطبیده دایره‌ای به خطی تبدیل می‌شود. با چرخانیدن قطبشگر خطی که بعد از این هست، شدت نور خارج



شکل : ۲۳.۳

شونده از بیشینه به صفر میرسد و نشان میدهد که نور دارای قطبش خطی است.

- ج- تداخل سنج ستاره شناشی مایکلسون، شکل (۲۴.۳)، دو آینه تخت  $M_1$  و  $M_2$  است که نور ستارگاه دور را بترتیب روی دو آینه  $M_3$  و  $M_4$  بازتاب می‌کند. این‌ها بنوبه خود دو پرتو موازی نور، بعداز گذراز دو شکاف باریک  $S_1$  و  $S_2$  بفاصله  $d$  ازیکدیگر، بدرون تکسکوپ شئی بازتاب می‌کنند. هر پرتو یک تصویر از ستاره روی صفحه کانونی تشکیل داده و از حلقه‌های روی دیسک پراش عبور کرده و تصویر جمع می‌شود. قابلیت دید حلقه‌ها بستگی به  $h$  دارد. با افزایش  $h$ ، اولین ناپدیدی حلقه‌ها رخ میدهد

$$h = 1.22 \frac{\lambda}{\alpha}$$

که در آن  $\alpha$  اندازه زاویه دیسک ستاره است.

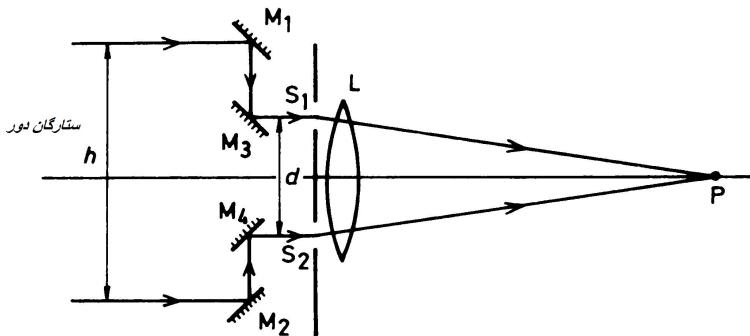
### ۳۰۳۰

توری پراش فلزی.  
پورسل<sup>۴۱</sup> نشان داد، وقتی یک پرتوی از ذرات باردار از نزدیکی یا موازی با سطح توری عبور می‌کند، امواج الکترومغناطیسی از توری پراش فلزی ساطع می‌شود. سرعت ذرات باردار برابر  $v$  و فاصله توری  $d$  است. فقط نوری را که در صفحه عمود بر توری گسیل شده و شامل مسیر ذرات است، درنظر گیرید.

- الف- چگونه فرکانس تابش ساطع شده بستگی به جهت دارد؟

<sup>۴۱</sup>Purcell (Phys. Rev. 92, 1069)

## فصل ۳. نورشناخت کوانتموی

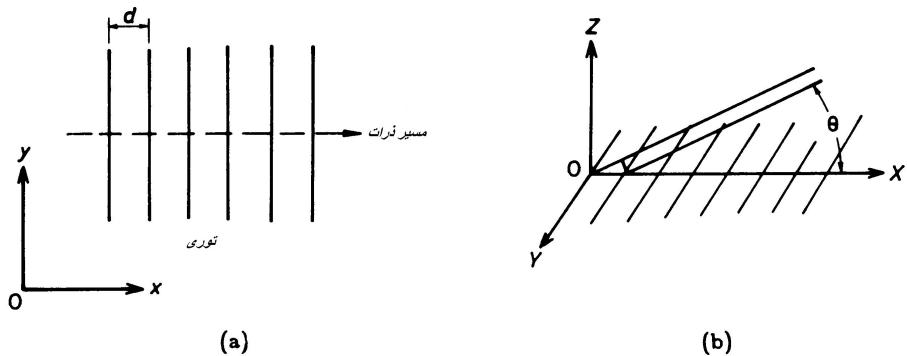


شکل ۲۴.۳ :

- ب- فرض کنید توری فلزی با یک توری انتقال <sup>۴۲</sup> عوض شود، مثلاً، یک قطعه شیشه با تضاریصی حک شده با همان فاصله  $d$ . در صورت وجود، چگونه این تغییر تشعشع ساطع می‌کند؟ بصورت کیفی توضیح دهید.

(دانشگاه ویسکانسین)

حل:



شکل ۲۵.۳ :

- الف- عبور ذرات باردار الکترون‌هایی درون توری فلزی القاء و وادار به حرکت می‌کند. حرکت بوسیله سیم‌های بسیار ظرفیف توری محدود شده و الکترون‌ها شتاب معکوس <sup>۴۳</sup> گرفته و باعث ترمز تشعشع <sup>۴۴</sup> می‌شود. تابش

<sup>۴۲</sup>Transmission Grating<sup>۴۳</sup>Decelerate<sup>۴۴</sup>bremssstrahlung

ساطع شده در صفحه  $XOZ$  (شکل ۲۵.۳) که با خط عمود بر توری زاویه  $\theta$  میسازد را در نظر گیرید. تابش ساطع شده از هر دو سیم مجاور دارای زمان تاخیر زیر است:

$$\Delta t = \frac{d}{v} - \frac{d \cos \theta}{c}$$

وقتی  $c\Delta t = m\lambda$  که در آن  $m$  اعداد صحیح هستند برقرار باشد، تابش‌ها تداخل افزاینده خواهند داشت. بنابراین فرکانس نشاهده شده در زاویه  $\theta$  برابر است با:

$$\lambda(\theta) = \frac{d}{m} \left( \frac{c}{v} - \cos \theta \right)$$

بازاء  $\lambda(\theta) = d(\frac{c}{v} - \cos \theta)$ ،  $m = 1$  است.

- ب- چون الکترون‌های شیشه نمی‌توانند حرکت آزاد داشته باشند، ترمز تشعشع بوقوع می‌پیوندد یعنی تشعشع ساطع نخواهد شد.

# نمايه

- ضریب انحراف، ۸۸  
ضریب لند، ۱۸۳  
طول همدوس، ۵۵  
طیف نما، ۱۸۹  
عدد آواگادرو، ۱۸۱  
عرض خط داپلر، ۱۷۸  
  
فبری-پرو، ۱۲۷  
فتوالاستیسیتی، ۱۵۶  
فرانهوفر، ۸۳  
فرنل، ۸۳  
فعالیت نوری، ۱۵۴  
فیسو، ۱۹۶  
قابلیت دید، ۸۲، ۸۰  
قانون استقان-بولتزمن، ۱۹۶  
قانون اسنل، ۶۷  
قانون بروستر، ۱۹۳  
قانون برگ، ۱۵۶  
قانون مالوس، ۱۴۲  
قطبیش بیضی جزئی، ۱۴۰  
قطبندگی، ۱۸۵  
لامپ فزونساز نوری، ۱۷۶  
لیزر هلیوم-نئون، ۱۶۶  
لیزرهای قفل مودی، ۱۶۹  
محور نوری، ۱۴۲  
مدار همروبرداد، ۱۷۴  
معادله متعالی، ۱۰۶  
معیار ریلی، ۱۱۹، ۱۳۴  
موج زا، ۱۶۸  
مگنتون بوهر، ۱۸۳  
  
آزمایش دو شکاف یانگ، ۵۷  
آپردیزاسیون، ۱۰۰  
آینه لوید، ۶۵  
اثر زیمن، ۱۸۲  
اصل بابینه، ۸۹  
اصل عدم قطعیت، ۱۶۳  
تابع بسل، ۱۳۲  
تحلیلگر قطبشی، ۱۵۲  
تداخل سنج مایکلسون، ۶۶  
ترمز تشعشع، ۲۰۲  
ترمیم کننده بابینه، ۱۴۶  
تمایز، ۸۲، ۱۳۷  
تورک، ۱۴۴، ۱۵۷  
توری انتقال، ۲۰۲  
توری فروزان، ۱۲۱  
توری پراش، ۱۱۸  
توزیع ماکسول-بولتزمن، ۱۸۰  
تک محوری، ۱۴۶  
داینود، ۱۷۶  
دو شکستی، ۱۵۰  
دو منشور فرنل، ۶۴  
دیسک ایری، ۱۳۳  
رابطه ریلی، ۱۸۸  
رابطه فرنل، ۱۹۲  
زنیک، ۶۱  
زمان طی پالس، ۱۶۵  
سلول کر، ۱۵۲  
شیشه فلینت، ۱۳۹  
صفحه مناطق فرنل، ۵۷

وارونگی جمعیت، ۱۶۲

پتانسیل فعال، ۱۷۳

پراش تیندال، ۱۸۸

پراش ملکولی، ۱۸۴

پراشیده، ۷۳

کاواک تشید، ۱۶۲

کلاوزیوس-موسوتی، ۱۸۸

گذار فلورستن، ۱۷۹