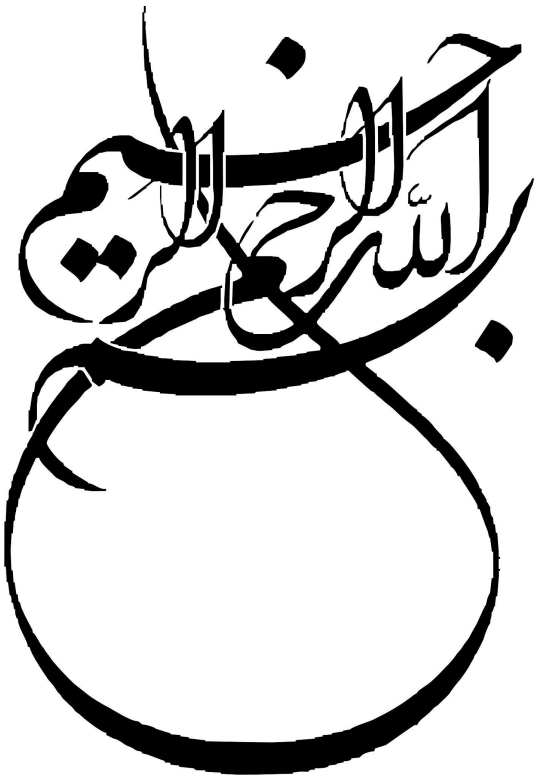


ای نسخه‌ی نامه الهی که تویی
ای آینه‌ی جمال شاهی که تویی
بیرون ز تو نیست آنچه در عالم هست
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مقدمه ای بر اصول و نظریه اساسی

نانو اُپتیک

نویسنده:
Ulrich Hohenester

ترجمه
دکتر محمد صادق ابریشمیان
استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۱.۰ پیشگفتار (نویسنده)

نانو اپتیک رویکرد تحقیقاتی اُپتیک و علم نانو را ترکیب می‌کند. از طریق نور، اطلاعاتی در مورد دنیای اطراف خود به‌دست می آوریم، و کنترل نور، ستون فقرات بسیاری از کاربردهای نوری، مانند ارتباطات مبتنی بر تارنوری یا برداشت انرژی نور را تشکیل می‌دهد. از سوی دیگر، علم نانو با ساخت و کنترل ماده در مقیاس اتمی سر و کار دارد و انقلاب دیجیتالی را هدایت کرده که زندگی روزمره ما را به‌طور غیرقابل برگشتی شکل داده است. به عنوان مثال، در قالب رایانه یا تلفن همراه. انتظار می رود ترکیبی از این زمینه بهترین‌های دو جهان را گرد هم آورد. با این حال، اُپتیک و علم نانو به‌راحتی با هم جمع نمی‌شوند. حدپراش حکم می‌کند که نور نمی‌تواند به‌حجم‌هایی با ابعاد کوچک‌تر از طول موج فشرده شود، که در حد میکرومتر هستند تا نانومتر، و برعکس در میکروسکوپ نوری تنها اجسامی که از هم دورتر از طول موج نور هستند، از نظر فاصله‌ای قابل تشخیص هستند

نانو اُپتیک با دستکاری نور در مقیاس‌های طولی قابل مقایسه یا کوچکتر از طول موج نور، در حالت ایده‌آل تا مقیاس نانومتر سر و کار دارد. در دهه‌های گذشته، دانشمندان موفق شده‌اند طرح‌هایی ابداع کنند تا اُپتیک‌ها را به‌سمت نانو تبدیل کنند. به‌عنوان مثال، میکروسکوپ محلی سازی و موچین‌های نوری جوایز نوبل سال ۲۰۱۴ و ۲۰۱۸ را برای دستکاری نور در منطقه آستانه حد پراش دریافت کرده‌اند. برای غلبه بر محدودیت، می‌توان نور را در مقیاس نانو جمع‌آوری کرد، به‌عنوان مثال، در میکروسکوپ روبش نوری میدان نزدیک، یا در میدان نور پلاسمونیک به‌نوسانات بار الکترون در سطح نانوساختارهای فلزی متصل شد و بدین وسیله نور را به‌حجم‌های زیرطول‌موج کشیده است.

این کتاب مقدمه‌ای بر نانو اُپتیک و پلاسمونیک ارائه می‌دهد. این بر اساس مجموعه سخنرانی‌هایی است که من طی چندین سال در دانشگاه گراتس و جاهای دیگر تدریس کرده‌ام. تمرکز اصلی من بر روی اصول اولیه و ابزارهای نظری مورد نیاز در نانو اُپتیک است، در حالی که کاربردها فقط به‌صورت مثالی مورد بحث قرار می‌گیرند. از این نظر، انتظار می‌رود که کتاب با اکثر کتاب‌های درسی مربوطه متفاوت باشد. من ارجاع به‌ادبیات تحقیق کنونی را تا حدی پراکنده نگه داشته‌ام، اما سعی کرده‌ام تا حد امکان به‌بسیاری از مقالات مروری عالی برای اطلاعات بیشتر اشاره کنم. من همچنین سعی کرده‌ام بحث را مستقل نگه دارم و در صورت امکان از استفاده از عبارت «می‌توان آن را نشان داد» یا معادل آن خودداری کردم. این ارائه را بسیار طولانی تر از آنچه در ابتدا فکر می‌کردم طولانی کرده است، اما امیدوارم خواندن کتاب را آسان کند.

کتاب به‌دو بخش تقسیم شده است. مورد اول به‌نانو اُپتیک کلاسیک می‌پردازد، که در آن کلاسیک را می‌توان هم بر حسب الکترودینامیک کلاسیک و هم بر حسب کلاسیک متعارف و موضوعی، درک شود. بخش دوم نانو اُپتیک را به‌قلمرو کوانتومی می‌آورد. من تلاش زیادی کرده‌ام که ارائه تا حد امکان سرگرم‌کننده باشد، اما با خواندن نسخه نهایی متوجه شدم که تا حدودی فنی و شلوغ شده است - از این بابت عذرخواهی می‌کنم. مثل همیشه روش طبیعی خواندن کتاب از ابتدا تا انتها است و اصولاً این رویکرد سنتی اشکالی ندارد. با این حال، از آنجایی که من خودم به‌ندرت به‌این دستور پایبند هستم، توصیه خاصی برای استفاده از کتاب ارائه نمی‌کنم: از هر کجا که جالب به‌نظر می‌رسد شروع به‌خواندن کنید و در صورت نیاز به‌اصول

اولیه بازگردید.

بسیاری از همکاران و دانشجویان به‌من کمک کردند تا کتاب را به‌شکل امروزی برسانم. آنها به‌طور جداگانه تشکر می‌شوند. من صمیمانه امیدوارم که این کتاب هم برای محققان باتجربه که به‌دنبال اطلاعات منتخب هستند و هم برای مبتدیان و علاقه‌مندانی که اولین بار به‌موضوع نگاه می‌کنند، مفید باشد. برای کل حوزه نانو اُپتیک، امیدوارم آینده‌اش مثل گذشته‌اش روشن و درخشان باشد.

اولریش هوهنستر

گراتس، اتریش، ژوئن ۲۰۱۹

۲.۰ پیشگفتار (مترجم)

وقتی در پنجاه سال پیش در دانشگاه درس مخابرات میخواندیم، ارتباطات در باند مایکرویو انجام میشد و بحث لیزر و مدولاتورهای لیزر در آزمایشگاه بود. در سال ۱۹۷۷ که در دانشگاه کالیفرنیا ایرواین بودم، با یک تکه فیبر و مدولاتورهای الکتروآکوستیکی تصویر دانشجویان را در فاصله یک و نیم متری بروی صفحه تلویزیون ارسال و نمایش میدادم. تلفات فیبر نوری درآن موقع زیاد بود و سرعت پردازش زیاد جالب نبود. اما علم روز بروز با سرعت پیش میرود و ما نیز مجبوریم خود و دانشجویان آینده را با علم روز آشنا و افق‌های آینده را برایشان روشن کنیم. درس نانو اپتیک نیز از دروسی است که دانشجویان رشته مخابرات باید با آن آشنا شوند. از آنجا که در این زمینه کتاب نانواپتیک در میان کتب دانشگاهی ما خالی بود بخش اول کتاب

Nano and Quantum Optics

An Introduction to Basic Principles and Theory

تحت عنوان

مقدمه‌ای بر اصول و نظریه اساسی

نانو اُپیتک

ترجمه شد و امیدوارم مورد استفاده دانشجویان قرار گیرد. و از خداوند متعال شاکرم که به‌من توفیق ترجمه و تدوین این کتاب را داد. ضمناً امیدوارم اساتید ارجمند بخش‌های بعدی همین کتاب تحت عنوان " نانو کوانتوم" که شامل بخش‌های ۱۸-۱۲ است، را ترجمه کنند. از تمام دوستان و دانشجویان تقاضا دارم اشباهاتی که در ترجمه و یا اصطلاحات بکار رفته مشاهده میکنند اینجانب را مطلع کنند که بزودی اصلاح و در دسترس همه قرار گیرد.

محمد صادق ابریشمیان

آذرماه ۱۴۰۰

فهرست مطالب

۱.۰ پیشگفتار (نویسنده) . . . . . .
۲.۰ پیشگفتار (مترجم) . . . . . .

۱ نانو اُپتیک چیست؟ ۷
۱.۱ معادله موج ۷
۱.۱.۱ امواج فضای یک بعدی ۷
۲.۱.۱ امواج فضای سه بعدی ۱۱
۲.۱ امواج محوشونده ۱۴
۳.۱ قلمرو نانو اُپتیک ۱۸
۱.۳.۱ خلاصه‌ای از فصل‌های ۱۱-۲ کتاب ۲۱

۲ مختصری از معادلات ماکسول ۲۵
۱.۲ مفهوم میدان ۲۵
۱.۱.۲ عملگر ∇ ۲۸
۲.۱.۲ قضیه هلم‌هولتز ۳۱
۳.۱.۲ قضیه گوس و استوکس ۳۲
۲.۲ معادلات ماکسول ۳۳
۱.۲.۲ پتانسیل‌های الکترومغناطیسی ۳۵
۳.۲ معادلات ماکسول در ماده ۳۷
۱.۳.۲ مواد خطی ۴۰
۲.۳.۲ شرایط مرزی ۴۱
۴.۲ میدان‌های هارمونیک زمانی ۴۳
۱.۴.۲ امواج سینوسی ۴۴
۵.۲ میدانهای طولی و عرضی ۴۶

۳ نمایش طیف زاویه‌ای ۵۱
۱.۳ تبدیل فوریه میدان‌ها ۵۱
۲.۳ نمایش میدان-دور ۵۵
۳.۳ تصویر میدان و کانونی کردن ۵۷

۴.۳ تقریب موازی محور و پرتوهای گوسی ۶۰
۵.۳ میدان‌های بشدت کانونی پرتو لیزر ۶۳
۶.۳ جزئیات تبدیل تصوربرداری و کانونی کردن ۶۶
۱.۶.۳ کانونی کردن میدان‌های دور ۶۶
۲.۶.۳ تصویربرداری میدان‌های دور ۷۰

۴ تقارن و نیروها ۷۷
۱.۴ نیروهای نوری ۷۷
۱.۱.۴ تقریب دوقطبی ۷۸
۲.۱.۴ نور هندسی ۸۲
۳.۱.۴ موچین نوری ۸۵
۲.۴ معادله پیوستگی ۸۵
۳.۴ قضیه پواین‌تینگ ۸۷
۴.۴ سطح مقطع‌های نوری ۸۹
۵.۴ اصل بقاء مومنتوم ۹۱
۶.۴ مومنتوم زاویه‌ای نوری ۹۵

۵ تابع گرین ۹۹
۱.۵ تابع گرین چیست؟ ۹۹
۲.۵ تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز ۱۰۱
۱.۲.۵ نمایش شکل معادله هلم‌هولتز ۱۰۲
۲.۲.۵ تابع گرین در مقابل جواب اصلی ۱۰۵
۳.۵ تابع گرین برای معادله موج ۱۰۶
۱.۳.۵ ناحیه میدان دور ۱۰۷
۲.۳.۵ رابطه نماینده برای معادله موج ۱۰۹
۴.۵ قضیه نوری ۱۰۹
۵.۵ جزئیات رابطه نماینده معادله موج ۱۱۱

۶ حد پراش و فراتر از آن ۱۱۷
۱.۶ تصویربرداری یک تک دوقطبی ۱۱۷
۲.۶ حد پراش نور ۱۲۳
۳.۶ میکروسکوپ نوری میدان نزدیک روبشی ۱۲۸
۱.۳.۶ مدل بیت-بووکامپ ۱۲۹
۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی ۱۳۲
۱.۴.۶ دقت موقعیت ۱۳۲
۲.۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی با عکس فعال ۱۳۴
۳.۴.۶ میکروسکوپ تخلیه تحریک شده ۱۳۶

۷ خواص مواد ۱۴۱
۱.۷ مدل درود-لورنتس و مدل درود ۱۴۳
۲.۷ از الکترومغناطیس میکروسکوپی تا ماکروسکوپی ۱۴۹
۳.۷ غیرمحلی بودن در زمان ۱۵۱
۱.۳.۷ بازنگری قضیه پواین‌تینگ ۱۵۵
۲.۳.۷ رابطه کرامرز-کرونیک ۱۵۷
۴.۷ قضیه هم‌پاسخی در اُپتیک ۱۶۰

۸ محیط‌های لایه لایه ۱۶۳
۱.۸ پلاسمون‌های سطحی ۱۶۳
۱.۱.۸ ساختار کرتشمن و اتو ۱۷۰
۲.۸ پلاسمون‌های گرافن ۱۷۴
۳.۸ روش ماتریس انتقال ۱۷۵
۱.۳.۸ ضرایب فرنل ۱۷۶
۲.۳.۸ ماتریس‌های انتقال ۱۷۹
۳.۳.۸ بازنگری پلاسمون‌های سطحی ۱۸۳
۴.۸ شکست منفی ۱۸۹
۱.۴.۸ عدسی وسلاگو ۱۹۲
۲.۴.۸ عدسی کامل ۱۹۳
۵.۸ تابع گرین برای محیط‌های لایه لایه ۱۹۵
۱.۵.۸ منبع واقع در بالاترین لایه ۱۹۸
۲.۵.۸ تصویربرداری با یک عدسی ناقص وسلاگو ۲۰۰
۳.۵.۸ حد میدان-دور ۲۰۱
۴.۵.۸ منبع واقع در داخل لایه ۲۰۵

۹ پلاسمون‌های ذره‌ای ۲۰۹
۱.۹ حد شبه‌استاتیک ۲۰۹
۲.۹ کره‌ها، بیضوی‌گون‌ها در حد شبه‌استاتیک ۲۱۱
۱.۲.۹ نظریه شبه‌استاتیک می ۲۱۱
۲.۲.۹ نظریه می-گانس ۲۱۷
۳.۲.۹ سطح مقطع نوری ۲۱۸
۳.۹ روش انتگرال مرزی برای حد شبه‌استاتیک ۲۲۱
۱.۳.۹ مودهای‌ویژه پلاسمونیک ۲۲۷
۲.۳.۹ تزویج ذرات ۲۳۳
۴.۹ نگاشت همدیس ۲۳۷
۱.۴.۹ چند نمونه منتخب ۲۳۹
۲.۴.۹ جزئیات نگاشت همدیس ۲۴۰
۳.۴.۹ استوانه‌های مماسی ۲۴۲
۵.۹ نظریه می ۲۴۵

۶.۹ روش انتگرال مرزی برای معادله موج ۲۴۹
۱.۶.۹ مودهای ویژه برای معادلات ماکسول کامل ۲۵۱
۷.۹ جزئیات تجزیه مود شبه‌استاتیک ۲۵۲
۱.۷.۹ تحلیل مود اویانگ و ایزاکسون ۲۵۲
۲.۷.۹ تجزیه مود ویژه تابع گرین ۲۵۴

۱۰ چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها ۲۵۹
۱.۱۰ نرخ فروپاشی تابشگر کوانتومی ۲۵۹
۱.۱.۱۰ چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها ۲۶۴
۲.۱۰ تابشگر کوانتومی در محیط فوتونیک ۲۶۶
۱.۲.۱۰ تابشگر کوانتومی بالای تیغه فلزی ۲۶۶
۲.۲.۱۰ تقریب شبه استاتیک ۲۶۷
۳.۲.۱۰ نظریه می ۲۷۰
۳.۱۰ افزونگی سطحی پراکندگی رامان ۲۷۴
۴.۱۰ انتقال انرژی تشدید فورستر ۲۷۹
۵.۱۰ طیف سنجی تلفات انرژی الکترون ۲۸۲
۱.۵.۱۰ میدان حاصل از الکترون‌های سریع ۲۸۵
۲.۵.۱۰ تجزیه به‌تلفات حجیم و سطحی ۲۸۶
۳.۵.۱۰ رابطه $EELS$ از طریق دایادیک گرین ۲۸۹
۴.۵.۱۰ حد شبه استاتیک ۲۹۲

۱۱ روش‌های محاسباتی در نانواُپتیک ۲۹۷
۱.۱۱ شبیه‌سازی تفاضل محدود در حوزه زمان ۲۹۷
۱.۱.۱۱ جادوگری روش $(FDTD)$ ۳۰۰
۲.۱.۱۱ حالت دو بُعدی ۳۰۲
۳.۱.۱۱ پایداری و پاشندگی ۳۰۴
۴.۱.۱۱ لایه‌های تطبیق کامل ۳۰۶
۵.۱.۱۱ خواص مواد ۳۰۹
۲.۱۱ روش اجزای مرزی ۳۱۰
۳.۱۱ روش گالرکین ۳۱۵
۱.۳.۱۱ ایده بزرگ روش گالرکین ۳۱۵
۲.۳.۱۱ شبکه بدون ساختار ۳۱۷
۴.۱۱ روش اجزای مرزی با رویکرد گالرکین ۳۲۰
۱.۴.۱۱ توابع پایه راویارت-توماس ۳۲۰
۲.۴.۱۱ طرح گالرکین برای معادلات ماکسول کامل ۳۲۲
۵.۱۱ روش اجزای محدود ۳۲۴
۱.۵.۱۱ روش اجزای محدود در حوزه فرکانس ۳۲۵
۲.۵.۱۱ عناصر ندلک $Nedelec$ ۳۲۷
۳.۵.۱۱ ناپیوستگیِ طرح گالرکین ۳۳۰

۴.۵.۱۱ جزئیات روش اجرای مرزی پتانسیل ۳۳۳

آ آنالیز مختلط ۳۴۱
آ.۰.۵ قضیه کوشی ۳۴۱
آ.۰.۶ قضیه باقیمانده ۳۴۲

ب تابع گرین طیفی ۳۴۵
ب.۱ تجزیه طیفی تابع گرین اسکالر ۳۴۵
ب.۲ نمایش طیفی تابع گرین دیادیک ۳۴۸
ب.۳ مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد ۳۵۰

پ معادله موج کروی ۳۵۷
پ.۱ چند جمله‌ای لوژاندر ۳۵۸
پ.۲ هارمونیک‌های کروی ۳۶۰
پ.۳ توابع بسل و هنکل کروی ۳۶۲

ت هارمونیک‌های کروی برداری ۳۶۷
ت.۱ هارمونیک‌های کروی برداری ۳۶۹
ت.۲ روابط متعامد ۳۷۰

ث نظریه می ۳۷۵
ث.۱ بسط چندقطبی میدان‌های الکترومغناطیسی ۳۷۵
ث.۲ ضرایب می ۳۷۷
ث.۳ تحریک با موج صفحه‌ای ۳۸۰
ث.۴ تحریک توسط دوقطبی ۳۸۴

ج تابع دلتای دیراک ۳۹۱
ج.۱ تابع دلتای طولی و عرضی ۳۹۲
نمایه ۴۰۶

فصل ۱

نانو اُپتیک چیست؟

در این فصل مفاهیم امواج منتشر شونده و محوشونده[۱] را معرفی می‌کنیم. حذف امواج اخیر در اُپتیک معمولی مسئول حد پراش نور است، که آن را بر اساس معادله موج اسکالر توضیح خواهیم داد. بحث در چهارچوب معادلات ماکسول در بخش‌های بعدی این کتاب ارائه خواهد شد. با معرفی معادله اسکالر یک بعدی بحث خود را شروع کرده سپس در مورد تعمیم ابعاد بالاتر متمرکز می‌شویم. خیلی از این مفاهیم، برای خوانندگان آشنا است، اما در اینجا برای روشن شدن مطلب تکرار می‌کنیم. وقتی این مراحل را پیمودیم، بر نقش امواج محوشونده و چگونگی زندگی با آن یا بدون آن را در میدان‌های نانو اپتیک متمرکز می‌شویم. و فصل را با خلاصه‌ای مختصر از فصل دوم تا یازدهم که اولین قسمت این کتاب است به‌پایان می‌بریم.

۱.۱ معادله موج

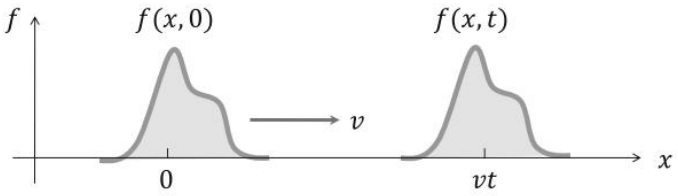
۱.۱.۱ امواج فضای یک بعدی

موج چیست؟ خوانندگان را تشویق می‌کنم که برای پاسخ به‌این سوال کمی تامل کنند تا به‌یک جواب معقولی برسند. از این گذشته، امواج در فیزیک فراوان هستند؛ از امواج آب و صوت گرفته تا امواج الکترومغناطیسی، که هدف این کتاب است. با این حال، نوضیح اینکه موج واقعاً چیست، بسیار دشوار به‌نظر میرسد. در کتاب "مقدمه‌ای بر الکترودینامیک" گریفیتز[۲] تعریف زیر آورده شده است [۱]:

موج اختلال در یک محیط پیوسته است که با یک شکل ثابت و سرعت ثابت منتشر می‌شود.

این تعریف تعداد زیادی سوال مطرح می‌کند (در مورد امواج الکترومغناطیسی، محیط پیوسته چیست؟ محیط پاشنده[۳] چیست؟)، و بعداً تعریفی اصلاح شده، هر چند فنی‌تر ارائه خواهم داد.

[۱] Evanescent Waves
[۲] Griffiths
[۳] Dispersive Media



شکل ۱.۱: موج در فضای یک بعدی. موج $f(x,t)$ با سرعت ثابت v بدون تغییر شکل منتشر می‌شود. بعداز گذشت زمان t مسافت vt را می‌پیماید.

برای شروع، اجازه دهید تعریف گریفیتز را مد نظر قرار دهیم و امواج را در فضای یک بعدی درنظر گیریم. اختلال موج منتشر شونده در امتداد x را با $f(x,t)$ نشان می‌هیم که در آن t زمان است. شکل (۱.۱) نمودار از انتشار موج را نشان می‌دهد. بعد از مدت t موج اولیه مسافت vt جابجا شده است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x,0) = g(x), \qquad f(x,t) = g(x - vt),$$

و نشان می‌دهد که f یک تابع متغیر ترکیبی $u = x - vt$ بجای دو متغیر مستقل x, t است. همین تحلیل در مورد موجی که به‌سمت چپ حرکت می‌کند و راه حل کلی، ترکیب موج‌های متحرک چپ و راست است.

$$f(x,t) = g_-(x - vt) + g_+(x + vt) = g_-(u_-) + g_+(u_+), \quad u_\pm = x \pm vt.$$

اکنون به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) g_-(u_-) = \left(\frac{\partial u_-}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial u_-}{\partial t}\right)\frac{dg(u_-)}{du_-} = \left(1 - \frac{v}{v}\right)\frac{dg(u_-)}{du_-} = 0$$

بنابراین، عملگر [۴] سمت چپ روی موجی که بسمت راست میرود را برابر صفر می‌کند. بهمین نحو، برای موجی که بسمت چپ میرود داریم:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) g_+(u_+) = \left(\frac{\partial u_+}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial u_+}{\partial t}\right)\frac{dg(u_+)}{du_+} = \left(1 - \frac{v}{v}\right)\frac{dg(u_+)}{du_+} = 0$$

اگر هر دو عملگر را روی تابع‌موج $f(x,t)$ اعمال کنیم، امواج چپ و راست رونده را صفر می‌کند و به‌یک معادله موج اسکالر فضای یک بعدی میرسیم.

معادله موج اسکالر در فضای یک بعدی

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) f(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(x,t) = 0. \qquad (۱.۱)$$

در ادامه، ساده ترین شکل موج را درنظر می‌گیریم، یک موج سینوسی که آنرا می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) \qquad (۲.۱)$$

[۴] Operator

در اینجا A دامنه، k عدد موج، ω فرکانس زاویه‌ای، و δ یک عامل فاز است. عدد موج و فرکانس زاویه‌ای با طول‌موج و زمان تناوب نوسان با رابطه زیر بهم مربوط هستند.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

با اینها، درمی‌یابیم که موج سینوسی نسبت به λ و T متناوب است؛

$$f(x+\lambda, t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+1\right) - \omega t + \delta\right] = f(x,t)$$

$$f(x, t+T) = A\cos\left[kx - 2\pi\left(\frac{t}{T}+1\right) + \delta\right] = f(x,t)$$

بنظر میرسد که می‌توانیم تعریف موج سینوسی خود را بسادگی در صفحه مختلط گسترش دهیم. از رابطه اولر شروع می‌کنیم:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi \tag{۳.۱}$$

که در آن ϕ آرگومان فاز است. موج سینوسی را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

$$f(x,t) = Re\left[Ae^{j(\omega t - kx)}e^{j\delta}\right] = Re\left[\tilde{A}e^{j(\omega t - kx)}\right], \qquad \tilde{A} = Ae^{j\delta}$$

در رابطه آخر، دامنه مختلط $\tilde{A}$ را معرفی کردیم. این حاصل‌ضرب A در عامل فاز $e^{j\delta}$ است. بنظر میرسد که استفاده از امواج مختلط و اعمال عملگر قسمت حقیقی (به‌منظور بدست آوردن بخش معنی‌دار فیزیکی) آنقدر مفید است که دیگر در سراسر کتاب به‌صراحت اعمال بخش حقیقی را نشان نمی‌دهیم.

موج سینوسی در فضای یک بعدی

$$f(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} \tag{۴.۱}$$

در آخر با گرفتن قسمت حقیقی از $Re\{\cdots\}$ به‌نتیجه می‌رسیم.

علامت سرکج را از روی دامنه$\tilde{A}$ برمیداریم و از این به‌بعد همیشه A را مختلط در نظر می‌گیریم. برای روشن شدن این نکته دوباره تاکید می‌کنیم: امواج فیزیکی همواره حقیقی هستند، نماد مختلط صرفاً بمنظور ساده شدن است وتلویحاً فرض می‌کنیم که موج "حقیقی" با گرفتن مقدار حقیقی از رابطه مختلط بدست می‌آید.

تا کنون موج سینوسی را بر حسب عدد موج k و فرکانس زاویه‌ای ω توصیف کردیم. در این روش چون $f(x,t)$ تابع مستقلی نسبت به x و t نیست و تابع متغیر تکی $x \mp vt$ است، ω و k با یکدیگر از طریق رابطه‌ای که به‌رابطه پاشندگی[۵] معروف است بهم مربوط هستند. رابطه را می‌توان با وارد کردن موج سینوسی در معادله موج اسکالر (۱.۱) بدست آورد.

[۵] Dispersion Relation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)Ae^{j(\omega t-kx)}=-\left(k^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)Ae^{j(\omega t-kx)}$$

برای تکمیل معادله موج بازاء مقادیر دلخواه x، t عبارت داخل پرانتز باید صفر شود. بنابراین رابطه پاشندگی را برای موج اسکالر بدست می‌آوریم.

رابطه پاشندگی برای معادله موج (یک بعدی)

$$\omega(k)=vk \tag{۵.۱}$$

در اینجا $\omega(k)$ فرکانس زاویه‌ای که تابع عدد موج k و v سرعت انتشار موج است. در ادامه نشان میدهیم که هر موج را می‌توان به‌موج سینوسی تجزیه و رابطه پاشندگی خواص انتشار امواج را تعیین کرد.

تبدیل فوریه

یکی از قضایای مهم در ریاضیات می‌گوید که هر تابع (که رفتار مناسبی داشته باشد) می‌توان به‌شبه امواج سینوسی از طریق رابطه زیر تجزیه کرد

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jkx}\tilde{f}(k)\frac{dk}{2\pi} \tag{۶.۱آ}$$

$$\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jkx}f(x)dx. \tag{۶.۱ب}$$

که در آن $\tilde{f}(k)$ تبدیل فوریه $f(x)$ نامیده می‌شود. نکته مهم معادله (۶.۱) این است که هر دو $\tilde{f}(k)$ و $f(x)$ اطلاعات یکسانی دارند. بنابراین، اگر تابع $f(x)$ معلوم باشد، می‌توانیم فوراً $\tilde{f}(k)$ را محاسبه کنیم و بر عکس. توجه کنید که عامل $1/(2\pi)$ در انتگرال‌گیری روی k را می‌توان به‌انتگرال‌گیری روی x انتقال داد یا هر دو آنها را برای تقارن در $1/\sqrt{2\pi}$ ضرب کرد. در این کتاب ما تعریف بالا را بکار برده و بندرت انرا تغییر می‌دهیم.

انتشار موج

فرض کنید که موج $f(x,0)$ در لحظه صفر داده شده است و می‌خواهیم شکل آنر در زمان بعد محاسبه کنیم. این را می‌توان بسادگی هنگام استفاده موج سینوسی و تبدیل فوریه انجام داد. در زمان صفر $f(x,0)$ را از طریق رابطه (۶.۱-آ) به‌امواج سینوسی تجزیه می‌کنیم. همچنانکه زمان جلو میرود، هر موج سینوسی بر طبق رابطه (۴-۱) خواهیم داشت:

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j[kx-\omega(k)t]}\tilde{f}(k)\frac{dk}{2\pi} \tag{۷.۱}$$

با این رابطه پاشندگی (۵.۱) برای معادله موج اسکالر می‌توانیم انتگرال را به‌صراحت انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jk(x-vt)}\tilde{f}(k)\frac{dk}{2\pi}=f(x-vt,0),$$

این با بحث اولیه که امواج بدون تغییر شکل خود منتشر می‌شوند، توافق دارد.

پاشندگی

اجازه دهید لحظه‌ای مکث کنیم و موضوع پیچیده رابطه پاشندگی را در نظر گیریم. در قسمت‌های بعدی این کتاب، وقتی در باره محیط پاشنده بحث می‌کنیم، با چنین تغییراتی روبرو می‌شویم. در اصل می‌توانیم هنوز هم از رابطه (۷.۱) برای انتشار امواج استفاده کنیم، اما اکنون محاسبه انتگرال، بعلت تابع اصلاح شده $\omega(k)$ خیلی پیچیده است. بعنوان مثال، تابع $\tilde{f}(k)$ یک تابع گوسی در اطراف k_0 با عرض σ_0^{-1} در نظر می‌گیریم. بازاء عرض کوچکی تابع در اطراف k_0 قله بزرگی دارد، و می‌توانیم $\omega(k)$ را بر حسب سری تیلور در اطراف k_0 تقریب زنیم.

$$\omega(k) \approx \omega_0 + v_g(k-k_0) + \frac{\beta}{2}(k-k_0)^2, \qquad v_g = \left[\frac{d\omega}{dk}\right]_{k_0}, \qquad \beta = \left[\frac{d^2\omega}{dk^2}\right]_{k_0}$$

در اینجا v_g سرعت گروهی، و β پارامتر پاشندگی است. همان طوری که در تمرین (۵.۱) بصراحت مشخص شده، انتگرال معادله (۷.۱) را می‌توان برای رابطه گوسی بصورت تحلیلی و رابطه پاشندگی را تقریبی حل کرد، بدست می‌آید:

$$f(x,t) = \sigma^{-\frac{1}{2}}(t) e^{j(\omega t - k_0 x)} \exp\left[-\frac{(x-v_g t)^2}{2\sigma^2(t)}\right], \quad \sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 - j\beta t} \qquad (۸.۱)$$

بنابراین، بسته‌موج گوسی با سرعت گروهی v_g منتشر می‌شود، اما بعلت β شکل خود را حفظ نمی‌کند و در طی حرکت عریضتر شده که با $\sigma(t)$ توصیف می‌شود. در بقیه این فصل، بیش از حد نگران محیط پاشنده نخواهیم بود. با این حال، این بحث مختصر را اینجا اضافه کردیم تا تاکید کنیم که بیشتر تحلیل ما نه‌تنها در کاربرد انتشار امواج در فضای آزاد و محیط غیرپاشنده است، بلکه می‌تواند براحتی در موقعیت‌های پیچیده‌تر گسترش یابد.

۲.۱.۱ امواج فضای سه بعدی

راستی وقتی از فضای یک بعدی به‌فضای سه بعدی می‌رویم، اوضاع چگونه تغییر می‌کند؟ اصولاً تغییر چندان زیادی نمی‌کند. بجای رابطه (۱.۱) داریم:

معادله موج اسکالر برای فضای سه بعدی

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\mathbf{r},t) = 0 \qquad (۹.۱)$$

که در آن $f(\mathbf{r},t)$ تابع موج اسکالر وابسته به $\mathbf{r} = (x,y,z)$، و ∇^2 عملگر معمولی لاپلاس است:

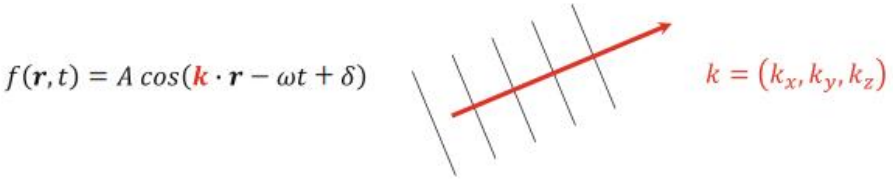
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

مانند تجزیه به‌امواج سینوسی رابطه (۴.۱)، امواج صفحه‌ای را معرفی می‌کنیم:

موج صفحه‌ای در فضای سه بعدی

$$f(\mathbf{r},t) = Ae^{j(\omega t - \mathbf{kr})} \tag{۱۰.۱}$$

که در آن A دامنه، $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$ بردار موج است که دارای طول $k = 2\pi/\lambda$ است که از طول‌موج λ تعیین و در جهت انتشار موج است (شکل ۲.۱). با این امواج صفحه‌ای می‌توانیم، شبیه به‌رابطه (۶.۱) تبدیل فوریه سه‌بعدی را تکمیل کنیم:



شکل ۲.۱: موج صفحه‌ای در فضای سه بعدی. بردار موج $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$ دارای طول عدد موج $k = 2\pi/\lambda$ و جهت انتشار $\hat{\mathbf{n}}$ و خط عمود بر صفحه‌ها با فاز ثابت $\mathbf{k}$ است.

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{۱۱.۱آ}$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d^3r. \tag{۱۱.۱ب}$$

سرانجام، با وارد کردن امواج صفحه‌ای در معادله موج اسکالر، خواهیم داشت:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

در اصل، جواب‌های مثبت و منفی برای ω بدست می‌آوریم. در هر حال، فقط جواب مثبت را نگه میداریم و دلیل آن در فصل پنجم، وقتی جواب‌های معادله موج را بر حسب امواج کروی داخل شونده یا خارج شونده بحث می‌کنیم، روشن می‌شود. فقط آن یکی که مربوط به‌فرکانس‌های مثبت و نیاز علیت را برآورده می‌کند باید حفظ شود. از اینرو برای رابطه پاشندگی موج در فضای سه بعدی را بدست می‌آوریم.

رابطه پاشندگی برای معادله موج در فضای سه بعدی

$$\omega(k) = v|\mathbf{k}| = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{۱۲.۱}$$

تاکید می‌کنیم که رابطه پاشندگی مستقیماً از معادله موج اسکالر بدست می‌آید، و هیچ تقریبی بکار برده نمی‌شود. بهمین دلیل، رابطه پاشندگی باید همیشه برآورده شود- محکم و

بدون قابل بحث. وقتی در مورد امواج محو شونده بحث می‌کنیم، به‌این موضوع باز خواهیم گشت. چند نکته دیگر ممکن است وجود داشته باشد.

خطی بودن

اولاً، معادله موج خطی است یعنی اگر f_1 و f_2 دو جواب معادله موج باشند، در آن صورت جمع f_1+f_2 نیز جواب معادله موج خواهد بود. تبدیل فوریه معادله (۱۱.۱) حالت خاص این است، که موج را به‌امواج صفحه‌ای ساده ویژه‌ای تجزیه کردیم. اگر بدانیم چگونه یک موج صفحه‌ای ساده زمان را در بر میگیرد، می‌توانیم تکامل زمان موج پیچیده را با تجزیه به‌اینگونه موج صفحه‌ای بحث کنیم. همان‌طور که در قضیه فوریه بیان شد، این همیشه بکار میرود، زیرا امواج صفحه‌ای مجموعه پایه کاملی را تشکیل می‌دهند.

میدان‌های هارمونیک زمانی

در خیلی از موارد دوست داریم موج با یک تک فرکانس ω نوسان کند. می‌توانیم جواب را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(\mathbf{r},t)=e^{j\omega t}f(\mathbf{r}) \tag{۱۳.۱}$$

که برای سادگی نمادین همان علامت را برای $f(\mathbf{r},t)$ و $f(\mathbf{r})$ نگه می‌داریم. شکل بالا محدودتر از چیزی است که به‌نظر میرسد زیرا همیشه می‌توان موج را به‌اجزای هارمونیکی (با استفاده از تبدیل فوریه) تجزیه کرد، و بنابراین کافی است تا میدان‌های هارمونیک زمانی را صرفاً به‌صورت معادله (۱۳.۱) بررسی کنیم. هر گونه شکل‌موج پیچیده‌تری را می‌توان از جمع این امواج ساده ایجاد کرد.

معادله موج

اگر رابطه (۱۳.۱) را در معادله موج (۹.۱) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(\nabla^2+k^2)f(\mathbf{r})=0$$

که در آن جمله زمانی $e^{j\omega t}$ را حذف کرده‌ایم. درابتدای این فصل، قول دادیم که تعریف کلی‌تری برای معادله موج ارائه دهیم. در واقع، می‌توانیم یک موج را به‌صورت جواب کلی معادله موج تعریف کنیم:

$$\left(\nabla^2+n^2(\omega)k^2\right)f(\mathbf{r})=0 \tag{۱۴.۱آ}$$

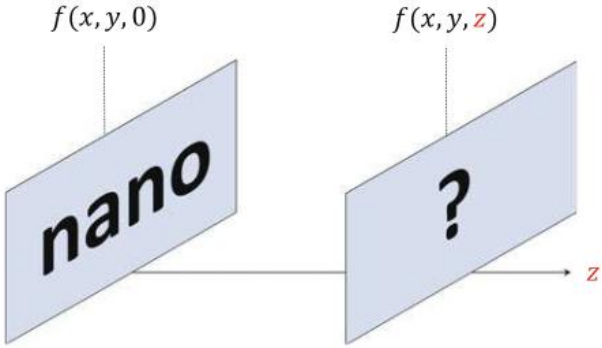
که در آن $n(\omega)$ ضریب شکست و تابع فرکانس است. ازاینرو شکل بالا برای محیط پاشنده نیز بکار برده می‌شود. می‌توانیم یک قدم جلوتر رفته و امواج را بصورت حل معادله موج ناهمگن تعریف کنیم:

$$\left(\nabla^2+n^2(\mathbf{r},\omega)k^2\right)f(\mathbf{r})=0 \tag{۱۴.۱ب}$$

که در آن ضریب شکست بستگی به‌مختصات مکانی و فرکانسی دارد. این تعاریف به‌اندازه آنچه گریفیتز[۶] ارائه می‌دهد آموزنده نیستند، اما هنگامی که با حل معادله (۱۴.۱) سروکار داریم، برای مراجعه به " امواج" یا " شبه امواج" راحتر هستند.

۲.۱ امواج محوشونده

اکنون آماده‌ایم با واقعیت روبرو شویم. وضعیتی که در نظر داریم، در شکل (۳.۱) نشان داده شده است.



شکل ۳.۱: فرض کنید میدان $f(x,y,0)$ را در $z=0$ میدانیم، در اینجا حروف "نانو" است. هنگام انتشار در فاصله z میدان چگونه تکمیل می‌شود؟

فرض کنید میدان اسکالر $f(x,y,0)$ را در موقعیت $z=0$ می‌دانیم. در اینجا حروف "نانو" است. و فرض کنید که میدان با تک فرکانس ω نوسان‌می‌کند. در ادامه سوال‌های زیر را مطرح می‌کنیم:

- هنگام انتشار در فاصله z میدان چگونه تکمیل می‌شود؟
- چگونه می‌توانیم میدان $f(x,y,z)$ را در موقعیت z محاسبه کنیم؟

در اصل، با ابزارهائی که در بخش قبل تدارک دیدیم، می‌توانیم موقعیت را خیلی ساده تجزیه و تحلیل کنیم.

تجزیه موج صفحه‌ای

با تجزیه میدان اولیه $f(x,y,0)$ بر اساس موج صفحه‌ای با استفاده از

$$f(x,y,0)=(2\pi)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(k_x x+k_y y)}\tilde{f}(k_x,k_y)dk_x dk_y$$

شروع می‌کنیم.

[۶] Griffiths

انتشار موج

هنگام دور شدن $z = 0$، می‌توان یک ابزار کلی را ایجاد کرد.

$$f(x,y,z) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y dk_z$$

با این حال، باید محدویت معادله موج را نیز تکمیل کرده و ازاینرو نمی‌توان ω و k_x, k_y, k_z را بطور مستقل انتخاب کنیم. بنابراین می‌توانیم یک متغیر، مثلاً k_z، را برحسب سایر متغیرها بیان کنیم:

$$f(x,y,z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-j\left[k_x x + k_y y + k_z(k_x, k_y) z\right]\right\} \tilde{f}(k_x, k_y) dk_x dk_y \qquad (۱۵.۱)$$

بطوری که بصراحت وابستگی k_z را به k_x, k_y نشان داده‌ایم. برای این رابطه مشاهده می‌شود که برای $z > 0$ هر موج صفحه‌ای یک فاز اضافی کسب می‌کند.

$$\tilde{f}(k_x, k_y) \underset{z>0}{\longrightarrow} e^{-jk_z z} \tilde{f}(k_x, k_y)$$

در اینجا یک نقطه مشکل‌ساز پدید می‌آید. استفاده از رابطه پاشندگی (۳.۱)، مولفه k_z از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \qquad k = \frac{\omega}{v} \qquad (۱۶.۱)$$

علامت مثبت یا منفی باید برای انتشار موج در جهت منفی یا مثبت z انتخاب شود. اکنون می‌توانیم دو حالت را از هم تمیز دهیم. برای $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ مولفه z بردارموج

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \qquad \text{(موج منتشر شونده)} \qquad (۱۷.۱)$$

حقیقی و مربوط به‌انتشار موج عمودی است. در هر حال، برای $k_x^2 + k_y^2 \geq k^2$ خواهیم داشت:

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \pm j\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} \equiv \pm jk \qquad \text{(موج محو شونده)} \qquad (۱۸.۱)$$

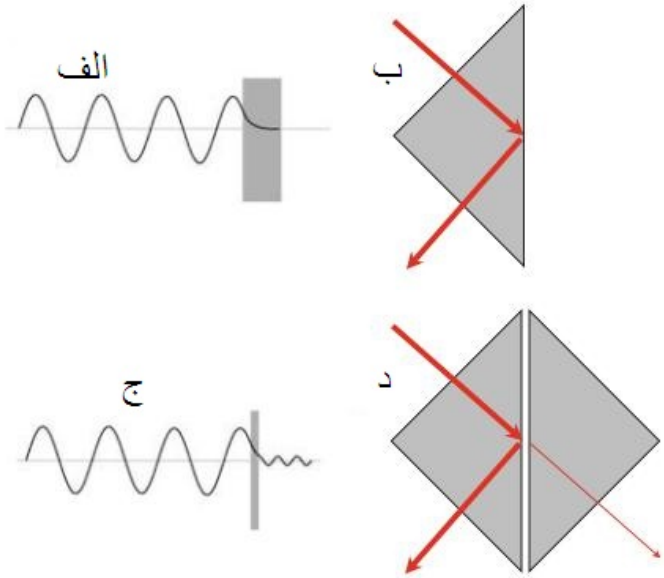
که مربوط به‌بردارموج موهومی است! خوانندگان آشنا با مفهوم امواج محوشونده[۷] از این یافته بیش از حد شگفت‌زده نخواهند شد. بهرحال، کسانی که با این مفهوم آشنا نیستند، باید وقت صرف کنند تا به‌دقت بررسی کنند که آیا تا اینجا همه کارها را به‌درستی انجام داده‌ایم یا چیز مهمی را از دست داده‌ایم. در هر صورت، تنها دو موضوع در استخراج امواج محوشونده؛ یکی تجزیه موج صفحه‌ای بر اساس قضیه فوریه است (که بهتر است آنرا زیر سئوال نبریم) و دیگری رابطه پاشندگی است که عمیقاً در معادله موج ریشه دارد (که اساس تجزیه و تحلیل کل کار ما را تشکیل میدهد.) بنابراین واضح است که با امواج محوشونده مشکلی نداریم و آنها در اینجا ماندگار هستند.

برای درک چگونه این امواج محوشونده منتشر می‌شوند، عدد موج موهومی را در معادله موج می‌گذاریم و خواهیم داشت:

[۷] Evanescent Waves

$$\exp\left[-j(k_x + k_y y \pm jkz)\right] = \exp\left[-j(k_x + k_y y \mp kz)\right]$$

بنابراین، امواج محوشونده هنگام دور شدن از z بطور نمائی رشد کرده یا میرا می‌شوند. از نظر مفهوم فیزیکی، فقط امواج میراشونده را برای $z > 0$ جمله e^{-kz} و برای $z < 0$ جمله e^{kz} را نگه می‌داریم. در مکانیک کوانتومی امواج محوشونده بهتر شناخته شده‌اند. شکل (۴.۱)-الف یک ذره مکانیک کوانتوم را نشان می‌دهد که بیک سد پتانسیل برخورد می‌کند. اگر انرژی جنبشی ذره کمتر از ارتفاع سد باشد، بازتاب می‌شود. در هر حال، بخشی از موج بداخل سد نفوذ کرده که در آنجا دامنه‌اش بطور نمائی میرا می‌شود. این شبیه امواج محوشونده برای معادله موج اسکالر است. اگر عرض سد پتانسیل کاهش یابد، شکل (۴.۱)-ج، ذره می‌تواند از درون سد تونل زده و دوباره به‌موج منتشر شونده تبدیل شود.



شکل ۴.۱: **(الف)** انتقال ذره مکانیک کوانتومی در یک سد پتانسیل. ذره بدرون سد تونل زده و بازتاب می‌شود. **(ج)** وقتی عرض سد کاهش می‌یابد، تابع موج بدرون سد نفوذ کرده و ذره مکانیک کوانتومی می‌تواند از درون ناحیه ممنوعه کلاسیک تونل بزند. **(ب)** موج کلاسیک شبیه تونل زنی کوانتومی است. موج نور از درون منشور عبور کرده و تحت شرایط بازتاب کلی منعکس می‌شود. موج در ناحیه کلاسیک ممنوعه در سمت منشور-هوا "تونل" میزند، و موج تغییر فاز کوچکی بدست آورده که معمولاً به‌تغییر فاز گوس-هانچن معروف است. **(د)** هنگامی که یک منشور دومی به‌نزدیکی منشور اولی آورده شود، اگر فاصله نسبت به‌طول‌موج قابل مقایسه باشد، نور می‌تواند از درون فاصله هوائی "تونل" بزند و در داخل منشور دومی به‌موج منتشر شونده تبدیل شود.

تونل زنی یک پدیده کلی موج است و نه تنها در مکانیک کوانتوم بلکه در الکترودینامیک نیز قابل مشاهده است. شکل (۴.۱)-ج یک منشور را نشان میدهد که یک پرتو نور تحت شرایط بازتاب کلی منعکس می‌شود. شبیه این وضع در شکل (۴.۱)-الف نشان داده شده است؛ بازتاب سریع نیست بلکه بخشی از میدان نور بدرون هوای سمت منشور نفوذ کرده و بطور نمائی میرا

می‌شود (موج محوشونده). این پدیده را می‌توان بعنوان تغییر فاز گوس-هانچن[۸] که یک موج بازتاب شده در مقایسه با موج بازتاب شده ناگهانی دچار می‌شود مشاهده کرد[۲]. وقتی یک منشور دومی، شکل (۴.۱)-د، به‌نزدیکی منشور اولی آورده شود، اگر فاصله نسبت به‌طول‌موج قابل مقایسه باشد، نور می‌تواند از درون فاصله هوائی "تونل" بزند و در داخل منشور دومی به‌موج منتشر شونده تبدیل شود.

انتشار موج اسکالر $(z > 0)$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (2\pi)^{-2}\int_{k^2>k_x^2+k_y^2} e^{-j(k_x x+k_y y+\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2})}\tilde{f}(k_x,k_y)dk_x dk_y \\ &+ (2\pi)^{-2}\int_{k^2<k_x^2+k_y^2} e^{-j(k_x x+k_y y-\sqrt{k_x^2+k_y^2-k_z^2})}\tilde{f}(k_x,k_y)dk_x dk_y \end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

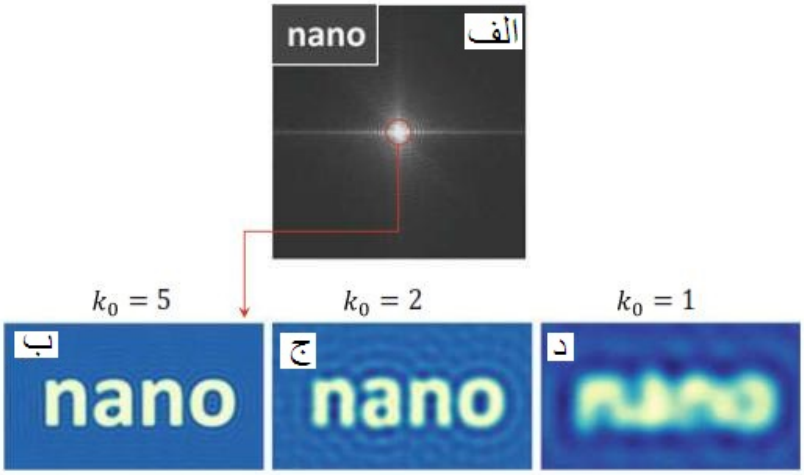
با وجودی که مثال‌های بالا کاربردهای محدودی دارند، امواج محوشونده نقش خیلی مهمی در فهم محدویت تفکیک نور دارند. به‌تجزیه موج صفحه‌ای فبلی خود معادله (۱۵.۱) برمی‌گردیم، و میدان‌های مقادیر بزرگ z زیر را در نظر می‌گیریم.

در اینجا جمله‌های خط اول و دوم بترتیب مربوط به‌امواج منتشر شونده و محوشونده هستند. امواج محو شونده بطور نمائی میرا می‌شوند و در نزدیکی $z = 0$ وجود دارند. هرچه بیشتر از این صفحه دور می‌شویم، امواج محوشونده بیشتر بطور نمائی میرا می‌شوند. در بخش‌های بعدی کتاب نشان خواهیم داد که امواج محوشونده همواره به‌ماده قید و بند می‌شوند. شکل (۵.۱) تاثیر میرائی امواج محوشونده را نشان میدهد. شکل (۵.۱)-الف تبدیل فوریه تصویر تشکیل شده توسط حروف "نانو" را در داخل نشان می‌دهد. برای مثال، وقتی بخشی از فضای-k حذف می‌شود، از طریق میرائی امواج محوشونده، تبدیل فوریه معکوس یک تابع اصلاح شده می‌دهد. شکل (۵.۱)-ب تابع بازسازی شده از مولفه‌های فوریه واقع در داخل دایره (۵.۱)-الف را نشان می‌دهد، و (۵.۱)-(ج و د) تصاویری را با کاهش بیشتر محتوای فضای k بیان می‌دارد. از این تصاویر واضح است که مولفه‌های عددموج بزرگ $\tilde{f}(k_x,k_y)$ اطلاعات وضوح بالاتری را حمل می‌کنند. هر قدر این امواج بیشتر از موج منتشر شده $f(x,y,z)$ حذف شوند، کار بیشتر تار شده و همه جزئیات پاک می‌شوند.

اکنون در موقعیتی هستیم که از نظر کیفی حدپراش نور را بحث کنیم. همانطور که در شکل (۶.۱) نشان داده شده است، فقط بردارموج با مدول کوچک کافی مربوط به‌امواج منتشر شونده هستند، درحالی که مولفه‌های با عدد موج بزرگ، که وضوح مکانی بالائی را حمل می‌کنند، مربوط به‌امواج محوشونده هستند که وقتی از صفحه $z = 0$ دور می‌شوند بطور نمائی میرا می‌شوند. اگر فرض کنیم که وضوح مکانی Δ تقریباً با بزرگترین عددموج موجود k_{max} بدست می‌آید، خواهیم داشت

$$\Delta \approx \frac{2\pi}{k_{max}}$$

[۸] Goos–Hänchen



شکل ۵.۱: وابستگی تفکیک روی پارامتر قطع k_0. **(الف)** تبدیل فوریه حروف "نانو". دایره قرمز عددموج با $k_0 = 5$ را گزارش می‌کند. (ب-د) تبدیل فوریه معکوس برای پارامترهای قطع مختلف، با $k_x^2 + k_y^2 \leq k_0^2$ در واحد دلخواه.

بزرگترین عدد موج مربوط به‌مود منتشر شونده را می‌توان از رابطه پاشندگی بدست آورد:

$$\sup\left(k_x^2 + k_y^2\right) = k_{max} = \frac{\omega}{v}$$

از ترکیب این دو معادله، بهترین وضوح را می‌توان از مود منتشر شونده بدست آورد.

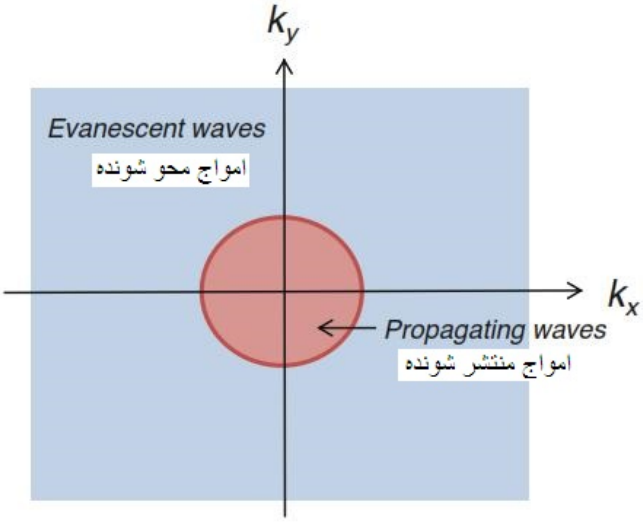
حد پراش معادله موج اسکالر (تقریبی)

$$\Delta \approx \frac{2\pi v}{\omega} = \lambda \qquad (۲۰.۱)$$

بنابراین، تفکیک مکانی تقریباً با طول‌موج λ (که از فرکانس ω بدست می‌آید) داده می‌شود. در بخش‌های بعدی این کتاب ما تحلیل دقیق‌تری برای حد پراش نور ارائه خواهیم داد و نشان می‌دهیم که برابر $\Delta \approx \frac{\lambda}{2}$ است. با این حال، مشاهده این که این تحلیل ساده برآورد معقولی ارائه می‌دهد، خوشحال کننده است. به‌طور خلاصه، تمام اطلاعات وضوح بالای یک موج بوسیله مولفه‌های موج محوشونده حمل می‌شوند، که بطور نمائی در فواصل دور میرا شده و هیچ روشی نمی‌تواند آنها بازگردانید.

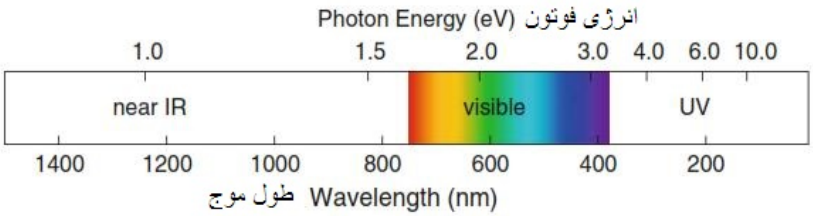
۳.۱ قلمرو نانو اُپتیک

شکل (۷.۱) طول‌موج (زیر محور) و انرژی فوتون (بالای محور) را برای قسمت فروسرخ نزدیک، نور مرئی، و فرابنفش طیف الکترومغناطیسی را نشان میدهد. ناحیه نور مرئی بین $380 - 750$ نانومتر قرار دارد و بهمین ترتیب حدپراش در حالت میکرومتر بجای نانومتر است. بنابراین،



شکل ۶.۱: حد پراش نور. فقط بخش داخلی فضای بردار موج مربوط به‌موج منتشر شونده است. مولفه‌های بزرگتر، اطلاعات محتوای جزئیات $f(x,y)$ حمل می‌کنند، مربوط به‌امواج محوشونده هستند و وقتی از صفحه $z=0$ دور می‌شوند بطور نمائی میرا می‌شوند. خیلی دور تر از این صفحه فقط امواج منتشر شونده باقی می‌ماند و در بازسازی تصویر نوری تمام وضوح ازبین میرود.

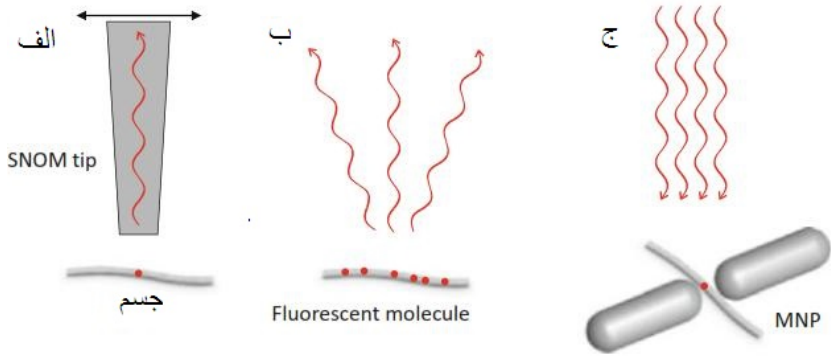
اُپتیک و علم نانو به‌طور طبیعی باهم ترکیب نمی‌شوند! نانو اُپتیک علمی است که سعی می‌کند اُپتیک را با وجود محدویت‌ها بسوی مقیاس نانو سوق دهد.



شکل ۷.۱: طول‌موج (زیر محور) و انرژی فوتون (بالای محور) برای قسمت فروسرخ نزدیک ($770-3000$ نانومتر)، نور مرئی ($380-750$ نانومتر) و فرابنفش ($10-380$ نانومتر)

ابتدا، و از همه مهم‌تر، باید بدانیم که حد پراش بر اساس قوانین بنیادین فیزیک است، و از همه مهم‌تر رابطه پاشندگی است که در معادله موج بنیادی بطور ژرف ریشه دارد. از رابطه پاشندگی متوجه شدیم که دو نوع موج وجود دارد، امواج منتشر شونده و دیگری محو شونده که میرائی امواج اخیر مسئول از دست دادن وضوح است. با استفاده از اُپتیک معمولی نمی‌توان اجسامی را که نسبت به‌یکدیگر از طول موج λ نزدیکتر هستند را ازهم تفکیک کرد، و برعکس نمی‌توانیم نور را بر نقاطی که ابعاد آنها کوچکتر از λ هستند متمرکز و کانونی کنیم. برای غلبه بر حد پراش نور، بسختی می‌توان بر قوانین اساسی فیزیک رقابت کرد، بنابراین باید قوانین بازی را تغییر دهیم. نانو اُپتیک چندین راه حل موفق ارائه کرده است که در این کتاب به‌تفصیل مورد

بحث قرار می‌گیرد. شکل (۸.۱) سه نمونه را نشان می‌دهد.



شکل ۸.۱: سه نمونه از چگونه سامانه‌های اُپتیکی در مقیاس نانو کار می‌کنند. **(الف)** در میکروسکوپ میدان نزدیک پویشی(SNOM) یک فیبر نوری به‌نزدیک جسم نانوئی آورده میشود. از طریق تزویج میدان‌های نزدیک امواج محوشوندگی جسم به‌فیبر نوری، آن به‌فوتون‌های منتشر شونده تبدیل و می‌توان در انتهای دیگر فیبر آشکار شوند. با پویش مورب بر روی نمونه جسم نانوئی، می‌توان اطلاعاتی درباره میدان‌نزدیک با وضوح نانومتری بدست آورد. **(ب)** در میکروسکئپ محلی‌سازی ملکول‌های مهتابی به‌اجسام نانوئی که مورد بررسی هستند متصل می‌شوند. در میدان دور می‌توان محل این مولکول‌ها را با وضوح مکانی نانومتری اندازه‌گیری کرد و ازاینرو غیر مستقیم اطلاعاتی با وضوح مکانی زیاد در باره اجسام نانوئی مورد تحقیق بدست آورد. **(ج)** در پلاسمونیک یک یا چند نانو ذرات فلزی به‌عنوان نانو آنتن عمل کرده به‌طوری که تابش میدان دور را به‌میدان‌های محوشونده تبدیل کرده و اجازه می‌دهد نور در مقیاس نانو تحویل داده شود.

اُپتیک میدان نزدیک

در میکروسکوپ نوری میدان نزدیک پویشی (SNOM)[۹] یک فیبر نوری در مجاورت یک جسم نانوئی (شکل ۸.۱-الف) آورده می‌شود. از طریق نوک فیبر نوری، میدان‌های نزدیک محوشونده جسم نانوئی می‌تواند به‌فوتون‌های منتشر شونده تبدیل شوند. این فوتون‌ها توسط سر دیگر فیبر آشکار می‌شود. با پویش مورب[۱۰] بر روی نمونه جسم نانوئی، می‌توان اطلاعاتی درباره میدان‌نزدیک با وضوح نانومتری بدست آورد.

میکروسکوپ محلی‌سازی

در حالی که در اُپتیک معمولی هیچ اطلاعاتی در باره سامانه مورد مطالعه در دسترس نیست، در میکروسکوپ محلی‌سازی[۱۱] اشیاء مورد مطالعه (معمولاً سامانه‌های بیولوزیکی مانند سلول‌ها) با مولکول‌های مهتابی تزئین شده‌اند. در سامانه‌های اپتیکی میدان دور مرسوم، موقعیت مولکول‌های مهتابی شده را می‌توان با وضوح نانومتری اندازه‌گیری کرد، مشروط بر آنکه مولکول‌های

[۹] Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

[۱۰] Raster-Scanning

[۱۱] Localization Microscopy

فعال نوری از طول‌موج نور فاصله بیشتری داشته باشند، تا بشما این امکان را دهد که تصاویر نوری از اجسام نانوئی را با وضوح نانو متری بدست آورید. جایزه نوبل شیمی میکروسکوپ محلی‌سازی در سال 2014 اهدا شده است.

پلاسمونیک

در پلاسمونیک‌ها از نوسانات بار الکترون همدوس در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک، که به‌پلاسمون‌های سطحی یا پلاسمون‌های ذره‌ای معروف هستند، برای تبدیل تابش میدان دور به‌پلاسمون بهربرداری می‌شود. این پلاسمون‌ها همراه با امواج محوشوندگی موضعی قوی، اجازه می‌دهد تا نور را در مقیاس نانو منتقل کند. بهمین منوال، یک گسیل‌کننده کوانتومی که در نزدیکی یک نانو ذره پلاسمونی قراردارد، می‌توان ذره را به‌عنوان نانو آنتن استفاده کرد تا نور را بطور موثری ساطح کند. این اصل، اساس فناوری افزایش سطحی فلورسانس[۱۲] یا افزایش سطحی پراکندگی رامان[۱۳] است.

۱.۳.۱ خلاصه‌ای از فصل‌های ۱۱-۲ کتاب

این کتاب مقدمه‌ای بر مفاهیم نظری در نانواُپتیک و پلاسمونیک است. فصل‌های ۱۱-۲ بخش اول کتاب را تشکیل می‌دهند و با استفاده از چار چوب الکترودینامیک کلاسیک، به‌مفاهیم می‌پردازد، در حالی که فصل‌های ۱۸-۱۲ جنبه‌های کونتومی را دربر می‌گیرد. بطور خلاصه، مطالب فصل‌هائی که قسمت اول را تشکیل می‌دهند به‌شرح زیر خلاصه می‌شود.

فصل دوم: مختصری از معادلات ماکسول با ارائه خلاصه‌ای کوتاه از نظریه الکترودینامیک ماکسول شروع می‌کنیم. خوانندگانی که قبلاً با موضوع آشنائی دارند می‌توانند به‌راحتی از این فصل چشم‌پوشی کنند.

فصل سوم: نمایش طیف زاویه‌ای این فصل ابزارهای موردنیاز برای توصیف نظری تصویر برداری نوری را ارائه می‌دهد. نحوه محاسبه میدان‌های دور نوری و نحوه توصیف نظری عمکرد عدسی‌های تجمیع و تصویربرداری را نشان خواهیم داد.

فصل چهارم: تقارن و نیروها در اینجا تقارن در معادلات ماکسول به‌ویژه اصل بقاء مومنتوم (تکانه)، نیروهای نوری، اصل بقاء انرژی، سطح مقطع نوری و مومنتوم زاویه‌ای مداری[۱۴] را بررسی می‌کنیم. هم‌چنین در مورد اصول کار موچین‌های نوری[۱۵] بحث می‌کنیم. نصف جایزه نوبل فیزیک ۲۰۱۸ برای آنها اهدا شده است.

فصل پنجم: توابع گرین این فصل مقدمه‌ای بر مفاهیم گرین ارائه می‌دهد که در زمینه نانو اُپتیک اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. تابع گرین را برای معادلات موج هلم‌هولتز و معادلات موج برداری استخراج کرده و روابط مربوطه را بدست می‌آوریم.

فصل ششم: حد پراش و فراتر از آن در اینجا بحث کاملی در باره حدپراش نور ارائه داده و نحوه غلبه بر حد پراش را با استفاده از میکروسکوپ نوری میدان نزدیک[۱۶] و میکروسکوپ

[۱۲] surface-enhanced fluorescence

[۱۳] surface-enhanced Raman scattering (SERS)

[۱۴] Orbital Angular Momentum (OAM)

[۱۵] Optical Tweezers

[۱۶] Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

محلی‌سازی[۱۷] که جایزه نوبل شیمی ۲۰۱۴ برای آن اهدا شد، نشان می‌دهیم.

فصل هفتم: خواص مواد این فصل پایان بخش مربوط به‌میدان‌های نوری را مشخص می‌کند. مدل‌های عمومی برای پاسخ مواد، از آن جمله مدل درود[۱۸] و درود-لورنتس[۱۹] را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که چگونه از طریق میانگین‌گیری مناسب روی خواص ماکروسکوپی معادلات ماکسول می‌توان آنها را بدست آورد.

فصل هشتم: محیط‌های لایه‌ای ساده‌ترین سامانه هایبرید که معادلات ماکسول را با مواد درگیر می‌کند، محیط‌های طبقه‌ای هستند که از چیدمان لایه‌های مسطح مواد مختلف تشکیل شده است. نشان میدهیم که نوع جدیدی از تحریک در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک که به‌آن پلاسمون اطلاق می‌شود وجود دارد و چگونه اینها و تحریک‌های مربوطه را می‌توان برای کاربردهای متعددی طراحی و بهره‌برداری کرد، بحث می‌کنیم.

فصل نهم: پلاسمون‌های ذره‌ای پلاسمون‌های سطحی در ناحیه محدود (" ذرات") باعث ایجاد پلاسمون‌های ذره‌ای می‌شوند که تشدید از خود نشان داده و همراه با میدان نزدیک محلی قوی ظاهر می‌شود. ما ناحیه ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که مدل‌های تحلیلی برای آنها موجود است و طرح‌های نوصیف کلی برای اشکال پیچیده‌تر ذرات را توسعه خواهیم داد.

فصل دهم: چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها از طریق ترکیب نانو درات پلاسمونی با گسیل‌کننده‌های کوانتومی امکان تغییر کامل خواص موری ساطع کننده‌ها وجود دارد. با افزایش سطحی فلورسانس و پراکندگی رامان[۲۰] آشنا شده، و اصول اساسی طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون[۲۱] را مورد بحث قرار می‌دهیم.

فصل یازدهم: روش‌های محاسباتی نانو اُپتیک فصل پایانی قسمت اول به‌روش‌های محاسباتی در نانو اُپتیک و فوتونیک می‌پردازد، از آن جمله روش شبیه سازی تفاضلات محدود در حوزه زمان[۲۲]، روش عنصر مرزی[۲۳] و روش اجزاء محدود[۲۴] را می‌توان نام برد.

تمرینات

- **تمرین ۱** عدد مختلط $z = x + jy$ و مختلط مزدوج آنرا $z^* = x - jy$ در نظر گیرید. بخش حقیقی $Re(z)$ و بخش مجازی $Im(z)$ را بر حسب z و z^* بیان کنید.
- **تمرین ۲** ثابت کنید که موج ساکن $f(x,t) = A\sin(kz)\cos(kvt)$ در معادله موج صدق می‌کند، و آن‌را به‌صورت مجموع موج‌هائی که به‌چپ و راست حرکت می‌کنند بیان کنید.
- **تمرین ۳** جواب معادله موج یک بعدی (۱.۱) را از طریق جداسازی متغیرها، $f(x,t) = \phi(x)\psi(t)$، بدست آورید.

[۱۷] Localization Microscopy
[۱۸] Drude
[۱۹] Drude-Lorentz
[۲۰] Surface Enhanced Fuorescence and Raman Scatterings (SERS)
[۲۱] Electron Energy Loss Spectroscopy (EELS)
[۲۲] Fnite Difference Time Domain (FDTD)
[۲۳] Boundary Element Method (BEM)
[۲۴] Fnite Element Method (FEM)

- **تمرین ۴** بسته موج گوسی زیر را درنظر گیرید:

$$f(x,0) = A\exp\left[-jk_0x + \frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

تبدیل فوریه آنرا محاسبه کرده و با استفاده از رابطه (۷.۱) موج را در لحظه t بدست آورید. انتگرال گوسی زیر ممکن است مفید باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

- **تمرین ۵** همان تمرین (۴.۱) است، اما رابطه پاشندگی بصورت زیر است:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \frac{\beta}{2}(k-k_0)^2.$$

نتایج نهائی را تفسیر کنند:

۱. موج چگونه در زمان انتشار می‌یابد؟

۲. عرض بسته‌موج چگونه بر حسب زمان تغییر می‌کند؟

- **تمرین ۶** نقطه $x=0$ دو محیط را از هم جدا می‌کند:
-برای $x<0$ سرعت موج v_1 است و
-برای $x>0$ سرعت موج v_2 است.
یک موج از دست چپ به‌سطح مشترک وارد می‌شود. بخشی از موج بازتاب شده و بخش دیگر انتقال می‌یابد،

$$x<0: \qquad f(x,t) = e^{j(\omega t - k_1x)} + Re^{j(\omega t + k_1x)}$$

$$x>0: \qquad f(x,t) = Te^{j(\omega t - k_2x)}$$

که در آن R و T ضریب بازتاب و انتقال هستند.

۱. با استفاده از رابطه پاشندگی k_1 و k_2 را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید تابع و مشتق آن در $x=0$ پیوسته است. R,T را محاسبه کنید.

- **تمرین ۷** مانند تمرین ۶ است اما دو بعدی. یک موج مورب با عدد موج k_y (با $k_y<\omega/v_1$) در نظر گیرید.

$$x<0: \qquad f(x,y,t) = e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_yy)} + Re^{j(\omega t + k_{1x}x - k_yy)}$$

$$x>0: \qquad f(x,y,t) = Te^{j(\omega t - k_{2x}x - k_yy)}$$

۱. این تابع چه نوع جوابی را توصیف می‌کند؟

۲. با استفاده از رابطه پاشندگی k_{1x} و k_{2x} را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید که تابع و مشتق آن در جهت x در $x = 0$ پیوسته است. R, T را محاسبه کنید.

۴. بحث کنید که تحت چه شرایطی جواب برای $x > 0$ دارای مشخصه محوشدگی است.

- **تمرین ۸** امروزه در ساخت تراشه‌های کامپیوتر از فوتون‌های با انرژی حدود $10eV$ استفاده می‌شود. با استفاده از حد پراش نور، کوچکترین اندازه ساختاری‌که می‌توان بدست آورد را برآورد کرده و آنرا با طول گذرگاه واقعی[۲۵] در حدود $15nm$ مقایسه کنید.

[۲۵] Actual Gate Lengths

فصل ۲

مختصری از معادلات ماکسول

در این کتاب فرض می‌کنیم که خوانندگان از قبل با مفاهیم اساسی الکترودینامیک آشنا هستند. کتاب‌های درسی زیادی در این زمینه یافت می‌شود و به‌طور کلی همه آنها به‌عنوان یک نقطه شروع مناسب و کافی خواهند بود. "الکترودینامیک کلاسیک" جکسون[۲] بطور حتم یکی از جامع‌ترین در میان کتب درسی است. کتاب مورد علاقه من برای آموزش " مقدمه‌ای بر الکترودینامیک " اثر گریفیتس[۱] است، و خوانندگان که با این کتاب آشنا هستند احتمالاً در اینجا برخی نمادها آن را تشخیص داده‌اند. در ادامه، ایده‌های اساسی الکترودینامیک را، بدون آنکه بیش از حد به‌جزئیات بپردازیم، خلاصه می‌کنیم

۱.۲ مفهوم میدان

الکترواستاتیک را می‌توان از طریق قانون کولمب بطور اختصار توضیح داد که چگونه یک ذره با بار q_1 که در موقعیت $\mathbf{r}_1$ است توسط ذره دومی به‌بار q_2 در موقعیت $\mathbf{r}_2$ جذب یا دفع می‌شود.

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{۱.۲}$$

در اینجا ϵ_0 گذردهی الکتریکی خلاء است که بدلیل دستگاه آحاد SI ظاهر می‌شود. $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ فاصله برداری بین دو بار، و $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ بردار واحد در امتداد $\mathbf{r}_{12}$ است. اجازه دهید چند نکته مهم در باره قانون کولمب (۱.۲) تاکید کنم.

تقارن قانون کولمب فقط بستگی به‌فاصله نسبی بردار $\mathbf{r}_{12}$ دارد. به‌همین این دلیل، همگنی فضا (هیچ نقطه‌ای از فضا نسبت به‌نقطه دیگر متمایز نمی‌شود) و همسانگری فضا (هیچ جهتی در فضا نسبت به‌مکان دیگر متمایز نیست) اهمیت دارد. در فصل چهارم، وقتی در مورد تقارن میدان‌های الکترومغناطیسی بحث می‌کنیم، به‌این نکته باز می‌گردیم. هم‌چنین متوجه می‌شویم که وابستگی $1/r^2$ قانون کولمب تنها وابستگی فاصله‌ای است که با فوتون‌های بدون جرم به‌عنوان حامل نیروی میدان سازگار است[۲]. **جمع اثرها** وقتی دو یا چند ذره باردار وجود دارد،

می‌توان کل نیرو را از جمع نیروهای مربوطه به‌آسانی محاسبه کرد:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=2}^{n}\frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2}\hat{\mathbf{r}}_{1j} \tag{۲.۲}$$

این اصل بعنوان، اصل جمع‌اثرها یا اصل برهم‌نهی معروف است که به‌صورت تجربی با بالاترین درجه دقت آزمایش شده است[۲]، و نقش مهمی در نظریه الکترومغناطیس ایفا می‌کند.

توزیع بار در بسیاری از موارد نمی‌خواهیم با ذرات نقطه‌ای برخورد کنیم، از اینرو توزیع بار پیوسته $\rho(\mathbf{r})$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنید تعداد زیادی ذرات در داخل عنصر حجم ΔV_i وجود داشته و فقط میدان‌های بقدر کافی دور در مقیاس طولی مطلوب ما باشد. در این صورت می‌توان ذرات را در دسته‌های کوچک Δq_i تقسیم کرده و آنها را به‌توزیع بار $\rho(\mathbf{r})$ از طریق رابطه زیر ارتباط دهیم:

$$\Delta q_i \approx \rho(\mathbf{r}_i)\Delta V_i$$

هرچند حد $\Delta V \to 0$ برای ذرات نقطه مانند بی‌معنی است، اما همچنان می‌توانیم توزیع بار پیوسته $\rho(\mathbf{r})$ را معرفی کنیم، و انتظار میرود به‌صورت تابعی هموار از $\mathbf{r}$ تغییر کند (برای بحث بیشتر برای این‌چنین روش میانگین‌گیری به‌فصل هفتم مراجعه کنید) و بجای معادله (۲.۲) از رابطه زیر بدست آید

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{q_1\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|^2}\hat{\mathbf{R}}_1 d^3r' \tag{۳.۲}$$

که در آن $\hat{\mathbf{R}}_1$ بردار واحد که در جهت $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'$ است.

از روابط (۲.۲) و (۳.۲) مشاهده می‌شود که می‌توان بار q_1 را از جمع یا انتگرال بیرون کشید. این را می‌توان انجام داد زیرا اصل جمع اثرها (یا اصل برهم‌نهی) اجازه می‌دهد نیروی‌های چندگانه را به‌دو نیروی متقابلاً دوگانه جدا کرد. در زمینه الکترواستاتیک معرفی میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ بصورت زیر کار راحت‌تر می‌شود.

میدان الکتریکی توزیع بار

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|^2}\hat{\mathbf{R}} d^3r' \tag{۴.۲}$$

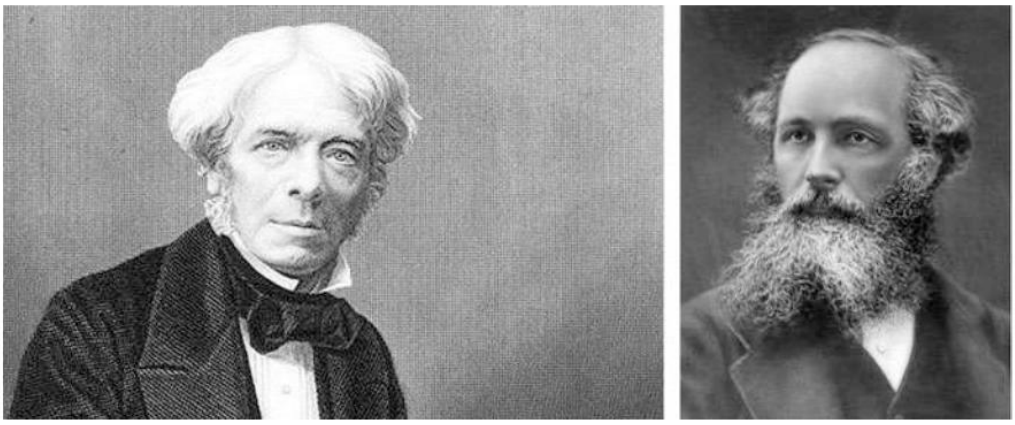
که در آن $\hat{\mathbf{R}}$ بردار واحد در جهت $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'$ است. میدان $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ یک تابع بردار است که به‌هر نقطه فضائی یک بردار اختصاص می‌دهد. نیروی وارد بر بار q_1 در موقعیت $\mathbf{r}_1$ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{F}_1 = q_1\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{۵.۲}$$

بنابراین میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ نیروی وارد بر واحد بار در موقعیت $\mathbf{r}$ است.

تا اینجا میدان الکتریکی بصورت یک دستگاه کاملاً کمکی ظاهر شده است. آن پاسخ این سوال را در اختیار ما قرار می‌دهد که اگر ذره‌ای در آنجا وجود داشته باشد، نیروی وارد بر آن چگونه خواهد بود. با این حال، هیچ چیز مابع نمی‌شود که یک قدم جلوتر برویم و یک حس فیریکی به $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ بدهیم. درحقیقت، موفقیت فوق‌العاده نظریه الکترومغناطیس، شناسائی میدان‌های الکترومغناطیسی به‌عنوان مرکز اهداف نظریه است. به‌طوری که در باقیمانده این فصل بحث خواهیم کرد، میدان‌های الکترومغناطیسی دارای توانائی هستند که نه فقط توسط توزیع بار و جریان که بعنوان منبع عمل می‌کنند محاسبه شوند، بلکه توسط خود میدان‌های الکترومغناطیسی نیز تعیین می‌شوند. به‌این ترتیب میدان‌ها می‌توانند از منابع جدا شده و به‌طور مستقل در فضا منتشر شوند.

قبل از آنکه مجموعه کامل معادلات ماکسول را در بخش ۲-۲ ارائه دهیم، باید یک قدم به‌عقب برگردیم و در مورد نظریه میدان‌های بردای قدری تامل کنیم. در واقع، هدف مرکزی در الکترودینامیک میدان الکتریکی برداری $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ و میدان مغناطیسی برداری $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ هستند که به‌مختصات فضا و زمان بستگی دارند. معادلات ماکسول تحوه تغییر این میدان‌ها در فضا و زمان را بیان می‌کنند و جواب‌ها باید بوسیله شرایط مرزی مناسب تهیه شوند. تغییرات مکانی به‌بهترین وجه بوسیله عملگر موسوم به نابلا[۱] "∇" توصیف می‌شود، که در ادامه به‌معرفی آن می‌پردازیم.



شکل ۱.۲: دو نفر از بنیانگذاران الکترودینامیک. مایکل فاراده (سمت چپ، ۱۸۶۷-۱۷۹۱) اولین کسی است که "خطوط نیرو"را به‌عنوان سنگ بنای الکترودینامیک تصور کرد، اما او مهارت ریاضی برای بیان نطریه ریاضی سخت را نداشت. این کار توسط جمز کلرک ماکسول (سمت راست، ۱۸۷۹-۱۸۳۱) انجام شد که اولین معادلات را که اکنون بنام او نامگذاری شده است، نوشت.

[۱] Nabla "$\boldsymbol{\nabla}$"

خطوط نیروی فاراده مفهوم میدان در ابتدا توسط مایکل فاراده، یک آزمایشگر مبتکر با مهارت محدود ریاضی، مطرح شد که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است. در مقاله‌ای از باسیل ماهون[آ][۳]، که به‌مناسبت صدوپنجاهمین سالگرد معادله ماکسول در مجله نیچر فوتونیکس[ب] چاپ شد و کاملاً ارزش خواندن دارد، نوسینده توضیح می‌دهد که چگونه" خطوط نیرو" همانطور که فارادی آنها را نامید، از زمان خود جلوتر بودند.

افکار فاراده کاملاً متفاوت از افکار دیگران بود. نظر کلی دانشمندان هنوز این بود که نیروهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از جسم مادی است که از راه دور بر یکدیگر تاثیر می‌گذارند و فضای مداخله کننده فقط نقش غیرفعالی ایفا می‌کند. ستاره شناش سلطنت، سر جورج بیدل ایری، وقتی برای جمعی صحبت میکرد، او خطوط نیرو فاراده را "مبهم و متغیر" توصیف کرد. می‌توان این دیدگاه را درک کرد. اثر در فاصله رابطه‌های دقیقی ارائه می‌دهد در حالی که فاراده هیچ‌کدام را ارائه نکرد. در حالی که فاراده را بعنوان یک آزمایشگر فوق‌العاده احترام می‌گذاشتند، دانشمندان تصور می‌کردند که او مشکل نظریه دارد، زیرا ریاضی نمی‌داند. فاراده با آگاهی از چنین دیدگاهی، هنگام انتشار افکار خود در مورد خطوط نیرو احتیاط میکرد. تنها یک بار، در سال 1846، او به‌گمانه‌زنی روی آورد. یکی از همکارانش، چالز ویتسون، قرار بود در موسسه سلطنتی در مورد یکی از اختراعات خود صحبت کند، اما در آخرین لحظه ترسید. فاراده تصمیم گرفت خودش سخنرانی کند، اما قبل از پایان ساعت اختصاصی، چیزهائی که برای گفتن در مورد موضوع اصلی وجود داشت، وقت تمام شد. در خارج صحن، اجازه داد تا افکار خصوصی خود فرار کنند و به‌ناظران طرح کلی حیرت انگیزی از نظریه الکترومغناطیسی نور را ارائه داد. او تمام فضا را پر شده با خطوط الکتریکی و مغناطیسی تصور میکرد که وقتی مختل شوند، نوسان کرده و امواج انرژی در طول با سرعتی سریع ولی محدود ارسال می‌شود. وی اظهار داشت، نور احتمالاً یکی از تجلیات این " نوسانات پرتو" است. اکنون می‌دانیم که آن به‌حقیقت نزدیک است، اما اکثر دانشمندان نوسانات پرتو فارده را یک خیال پوچ می‌پنداشتند. حتی حامیان وی نیز خجالت زده شده و فاراده پشیمان شد که حامیان را از دست داده است. او همتایان خود را پشت سر گذاشته بود ولی فردی چهل سال از او جوانتر، با قامتی برابر و استعدادی کامل پیدا شد تا عظمت واقعی فاراده را آشکار کند. آن مرد جیمز کلراک ماکسول بود.

[آ] Basil Mahon
[ب] Nature Photonics

۱.۱.۲ عملگر ∇

گرادیان[۲].

تابع اسکالر $f(x,y,z)$ که بستگی به‌تمام سه مختصات مکانی دارد را در نظرگیرید. مشتق کل f می‌شود:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla f \cdot d\mathbf{l} \tag{۶.۲}$$

ما تغییرات جزئی موقعیت را بصورت زیر

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz$$

[۲] شیب

و عملگر نابلا را بصورت زیر معرفی کردیم:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۷.۲}$$

برای معنادار بودن، ∇، باید روی تابعی مانند $f(\mathbf{r})$ در رابطه (۶.۲) عمل کند. اگر معادله (۶.۲) را بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$df = |\nabla f||d\mathbf{l}|\cos\theta$$

که در آن θ زاویه بین ∇f و $d\mathbf{l}$ است. مشاهده می‌کنیم که df وقتی بیشترین است ک هر دو بردار موازی باشند این بازاء $\theta = 0$ حاصل می‌شود. بعبارت دیگر، اگر در همان جهت ∇f حرکت کنیم، تغییر کلی df کمینه می‌شود. بنابراین، ∇f که معمولاً "گرادیان" f نامیده می‌شود، در جهتی است که تابع $f(\mathbf{r})$ بیشترین تغییرات را دارد.

دیورژانس[۳]. عملگر نابلا نیز می‌تواند روی تابع برداری $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ بصورت ضرب داخلی $\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})$ که به‌آن دیورژانش اطلاق می‌شود یا بصورت ضرب خارجی $\nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r})$ که به‌آن کرل گفته می‌شود عمل کند. بیائید ابتداء دیورژانس را بحث کنیم:

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial F_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial F_z(\mathbf{r})}{\partial z} \tag{۸.۲}$$

برای دریافت بینشی از مفهوم فیزیکی دیورژانس، مشتق‌ها را با تفاضل‌هلای محدود تقریبی نشانداده و برای سادگی فرض می‌کنیم که F به z بستگی نداشته باشد، دراین صورت:

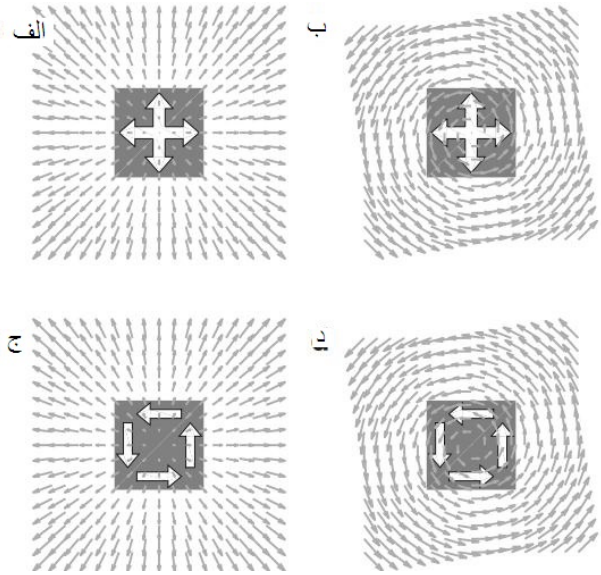
$$\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) \approx \frac{F_x(x+\frac{\Delta x}{2},y) - F_x(x-\frac{\Delta x}{2},y)}{\Delta x} \frac{F_y(x,y+\frac{\Delta y}{2}) - F_y(x,y-\frac{\Delta y}{2})}{\Delta x} \tag{۹.۲}$$

می‌توانیم این معادله را از نظر شکلی بصورت زیر نمایش دهیم:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} \approx (\Delta x)^{-1}\left\{ \Rightarrow + \Leftarrow \right\} + (\Delta y)^{-1}\left\{ \Uparrow + \Downarrow \right\} \equiv \Updownarrow .$$

بردار سمت راست، مولفه برداری F_x را در موقعیت $x+\Delta/2$، و بردار سمت چپ، مولفه $-F_x$ را در موقعیت $x-\Delta/2$ و بهمین تفسیر برای جهت بالا و پائین است. با اعمال علامت در یک میدان برداری، می‌توان دیورژانس را بدست آورد. هنگامی که در باره $\mathbf{F}$ یک سیال فکر می‌کنیم، دیورژانس اطلاعاتی در باره منبع چشمه یا چاهک سیال بما میدهد. $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ به‌این معنی است که سیال به‌سادگی از طریق عنصر مربع داده شده جاری می‌شود، اما مقداری که وارد می‌شود همان قدر هم خارج می‌شود. در حالی که $\nabla\cdot\mathbf{F} > 0$ به‌این معنی است که مقداری که وارد می‌شود بیش از آن است که خارج می‌شود. شکل (۲.۲) مثال‌هائی از میدان‌های منبع

[۳] واگرائی



شکل ۲.۲: کاربردهای (**الف و ب**) دیورژانش و (**ج و د**) کرل میدان‌های برداری. (**الف**) $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$ برای منبع نقطه‌ای، (**ب**) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ برای میدان کرل، (**ج**) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ برای منبع نقطه‌ای و $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$ برای میدان کرل.

نقطه مانند و میدان‌های کرل را نشان می‌دهد

کرل[۴]. سرانجام ضرب خارجی $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ را بحث می‌کنیم که به‌صورت زیر است:

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \qquad (۱۰.۲)$$

با استفاده از تفاضل محدود، مولفه z کرل را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}))_z \quad \approx \quad & \frac{F_y(x+\frac{\Delta x}{2}, y) - F_y(x-\frac{\Delta x}{2}, y)}{\Delta x} \\ & - \frac{F_x(x, y+\frac{\Delta y}{2}) - F_x(x, y-\frac{\Delta y}{2})}{\Delta y}\end{aligned} \qquad (۱۱.۲)$$

شبیه نمادی که برای دیورژانس در نظر گرفتیم، برای کرل بصورت زیر است:

$$(\nabla \times F)_z \approx (\Delta x)^{-1}\Big\{ \Uparrow + \Downarrow \Big\} + (\Delta y)^{-1}\Big\{ \Leftarrow + \Rightarrow \Big\} \equiv \circlearrowleft,$$

که به‌طور نمادین نحوه جمع بندی مشارکت میدان‌ها را برای بدست آوردن کرل یک میدان برداری توضیح می‌دهد. از این نمایش گرافیکی، می‌توان دریافت که این عملگر چگونه کار بردار "کرل" را در یک نقطه مورد نظر ارزیابی می‌کند. از نظر سیالات، کرل را می‌توان به‌صورت گردابی تفسیر کرد که در آن شخص در یک سفر رفت و برگشت، انرژی از دست میدهد، یا بدست می‌آورد. شکل (۲.۲)-(ج، د) نمونه‌هائی از میدان‌های منبع و کرل را نشان می‌دهد.

[۴] چرخش

در فصل یازدهم، وقتی در مورد روش تفاضل محدود در حوزه زمان[۵] (FDTD) بحث می‌کنیم، به‌اینگونه تقریب‌های تفاضل محدود برمی‌گردیم.

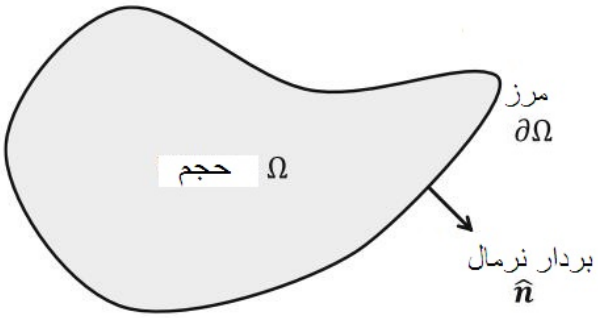
۲.۱.۲ قضیه هلم‌هولتز

معمولاً با مسائلی مواجه می‌شویم که بدنبال میدان برداری $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ در یک حجم معین Ω هستیم. در سراسر این کتاب مرز حجم را با نماد $\partial\Omega$ نشان می‌دهیم. مرز $\partial\Omega$ می‌تواند از چندین قسمت متصل نشده تشکیل شود، و غالباً حجم Ω کل فضا را پُر می‌کند به‌طوری که ممکن است $\partial\Omega$ بسمت بی‌نهایت کشیده شود. به‌شکل (۳.۲) مراجعه کنید. با این وجود، یک مرز همیشه وجود دارد و باید مراقب رفتار $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ در مرزها بود. یک قضیه مهم در تحلیل برداری وجود دارد که چنین بیان می‌کند:

قضیه هلم‌هولتز
تابع برداری $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ بطور یکتا و منحصر بفرد بر اساس دانسته مقادیر زیر تعیین می‌شود:

$$\nabla\cdot\mathbf{F},\quad \nabla\times\mathbf{F},\quad \text{و}\quad \mathbf{F}(\mathbf{r})\in\partial\Omega \quad \text{در مرز}$$

در زیر معادلات ماکسول را با توجه به‌قضیه هلم‌هولتز تفسیر می‌کنیم. در بسیاری از موارد، شرایط مرزی به‌صراحت بیان نمی‌شوند، بلکه به‌نحوی که در جواب ایجاد می‌شود، مانند امواج خارج شونده در بی‌نهایت یا میدان‌های الکتریکی که در بی‌نهایت صفر هستند.



شکل ۳.۲: حجم و مرزها. در حل معادلات ماکسول اغلب با اجسام دی‌الکتریک یا فلز سر و کار داریم. ناحیه داده از فضا (حجم) را با Ω و مرز حجم را با $\partial\Omega$، و بردار عمود بر مرز که بسمت بیرون از حجم است را با $\hat{\mathbf{n}}$ مشخص می‌کنیم.

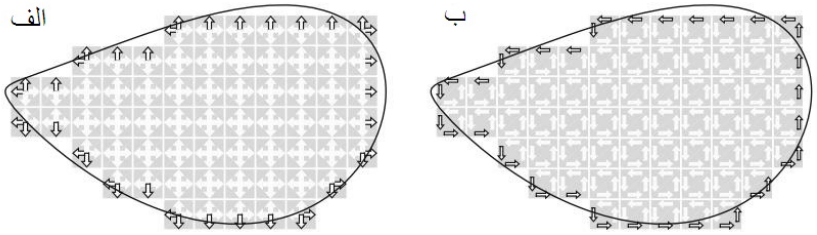
[۵] Fnite Difference Time Domain (FDTD)

۳.۱.۲ قضیه گوس و استوکس

اغلب با دو قضیه انتگرالی استفاده می‌کنیم. نخست **قضیه گوس** است:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})\ d^3r = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \tag{۱۲.۲}$$

که می‌گوید انتگرال $\nabla \cdot \mathbf{F}$ روی حجم Ω برابر با جریان (جهت‌دار) میدان برداری از مرز $\partial\Omega$ حجم است. در اینجا $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}dS$ که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار خارج شونده عمود بر سطح و $d\mathbf{S}$ نمایشگر عنصر سطح بسیار کوچکی است. شکل (۴.۲)-الف تفسیر گرافیکی این قضیه را بر حسب نمودارهای برداری که قبلاً معرفی شد نشان می‌دهد. از آنجا که دیورژانس سنجش اختلاف خالص بین جریان داخل و خارج شونده از عنصر مربع شکل داده شده است، شار داخل و خارج شونده دو عنصر مجاور دقیقاً یکدیگر را حذف می‌کنند، و فقط ناپدید نشده‌ها در مرز باقی می‌مانند.



شکل ۴.۲: نایش گرافیکی **(الف)** قضیه گوس و **(ب)** قضیه استوکس. در قضیه گوس $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ در یک حجم انتگرال‌گیری می‌شود که در آن $\mathbf{F}$ از عنصر حجم به‌مجاور خود جریان می‌یابد و شارهای داخل و خارج به‌استثنای شرایط مرزی یکدیگر را جبران می‌کنند. و به‌طور مشابه، هنگام انتکرال‌گیری کرل روی یک مرز باز، کرل عناصر مجاور به‌استثنای عناصر مرزی که مجاور ندارند یکدیگر را حذف می‌کنند.

دومین قضیه **قضیه استوکس** است.

$$\int_{S} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \tag{۱۳.۲}$$

که می‌گوید انتگرال‌گیری کرل یک تابع بردار روی سطح S برابر انتگرال‌گیری خطی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ در امتداد مرز ∂S سطح است. شکل (۴.۲)-ب تفسیر گرافیکی این قضیه را بر حسب نمودارهای برداری که قبلاً معرفی شد، نشان می‌دهد. مشارکت کرلدر لبه‌های عناصر مجاور، مانند یکدیگر را حذف می‌کنند و فقط آنها که در حذف مشارکت ندارند و روی مرز سطح هستند باقی می‌مانند.

در کدام جهت عمود بر سطح $d\mathbf{S} = \hat{n}dS$ است؟ و در کدام جهت $d\mathbf{l}$ است؟ در حالت قضیه گوس، $\hat{n}$ بسوی خارج از حجم است. اگر کسی بخواهد مرز را بطریق دیگر تعریف کند، و ما در قسمت‌های بعدی کتاب این کار را انجام می‌دهیم، باید در این مورد مراقب باشیم. شبیه همین، جهت $d\mathbf{S}$ مشخص می‌کند که چرخش $d\mathbf{l}$ بر طبق قاعده دست راست است، یعنی اگر کسی با انگشت شست دست راست بسمت بالا باشد (در جهت $\hat{n}$ باشد)، انگشتان دیگر در جهت $d\mathbf{l}$ خواهند بود.

۲.۲ معادلات ماکسول

در الکترودینامیک با میدان‌های الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ و مغناطیسی $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ وابسته به‌زمان سروکار داریم. نیروی وارد بر بار q در موقعیت $\mathbf{r}$ که با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند را می‌توان از رابطه **نیروی لورنتس** محاسبه کرد:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)] \tag{۱۴.۲}$$

میدان‌های الکترومغناطیسی خودشان بوسیله توزیع بار $\rho(\mathbf{r},t)$ و جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ تولید می‌شوند. پویائی این میدان‌ها بوسیله معادلات ماکسول تعیین می‌شود که اساس نظریه الکترودینامیک را تشکیل می‌دهد.

معادلات ماکسول

(۱۵.۲آ) قانون گوس $$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(۱۵.۲ب) بی نام $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(۱۵.۲ج) قانون فاراده $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(۱۵.۲د) قانون آمپر $$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

که در آن μ_0 نفوذپذیری خلاء است. چندین روش برای "خواندن" معادلات ماکسول وجود دارد. اولین آن بر حسب قضیه هلم‌هولتز شروع می‌شود که میگوید وقتی دیورژانس و کرل همراه شرایط مرزی مشخص باشد، تابع برداری تعیین می‌شود. در این روش، قانون گوس و فاراده میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ را تعیین می‌کنند، در حالی که معادله دوم (بی نام) و قانون آمپر میدان مغناطیسی $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ را تعیین می‌کنند. علاوه بر این میبایست شرایط مرزی مناسب را نیز مشخص کنیم. معادلات ماکسول را می‌توان بصورت زیر تفسیر کرد

قانون گوس. چشمه یا چاهک میدان‌های الکتریکی بوسیله توزیع بار داده می‌شود.
بی نام. بار مغناطیسی وجود ندارد.
قانون فاراده. میدان مغناطیسی متغیر با زمان کرل میدان الکتریکی تولید می‌کند. این معادله به‌قانون القاء نیز خوانده می‌شود و در مدارات الکتریکی نیروی محرکه الکتریکی تولید می‌کند که اهمیت فوق‌العاده‌ای در موتورها و ژنراتورها دارد.
قانون آمپر. میدان کرل مغناطیسی یا از طریق جریان الکتریکی یا از طریق میدان الکتریکی متغیر با زمان تولید می‌شود. واژه اخیر برای اولین بار توسط ماکسول معرفی شد و معمولاً به‌عنوان "جریان جابجائی ماکسول" نامیده می‌شود.

گسترش معادلات ماکسول

ماکسول معادلات "خود" را به‌این صورت معروف امروزی (۱۵.۲) ننوشته است، اما از معادلات پیچیده‌تری، که هم میدان‌های الکترومغناطیسی و هم پتانسیل‌ها را به‌عنوان مقادیر اساسی حفظ میکرد، استفاده کرد. به‌همین دلیل، در ابتدا مورد استقبال جامعه قرار نگرفت و بیست سال دیگر طول کشید تا این که هویساید، با تابع پله واحد معروف "خود" آنرا به‌شکل امروزی به‌جامعه فیزیک معرفی کرد[۳].

تا زمان مرگ ماکسول، در سال ۱۸۷۹، و چند سال پس از آن، هیچ‌کس نظریه او را درک نکرد. مانند یک نمایشگاه در یک محفظه شیشه‌ای نشسته بود، برخی آن را تحسین می‌کردند اما دور از دسترس بود. مردی که آنرا در دسترس قرار دادئ او یک اپراتور تلگراف خودآموخته به‌نام الیور هویساید بود. در سال ۱۸۸۵ او نظریه را به‌صورتی که اکنون بنام چهار معادله ماکسول بیان می‌کنیم خلاصه کرد.

هویساید با استفاده از سامانه جدید تحلیل برداری، که در آن بردارها سه بعدی با حروف نمایش داده می‌شوند، و پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی در پس زمینه قرار دارند، کارها را بسیار ساده کرد. هنگامی‌که هنریش هرتز در سال ۱۸۸۸ امواج الکترومغناطیسی را کشف کرد، باعث افزایش علاقه به‌الکترومغناطیس شد و مردم نه به‌بیان اصلی نظریه ماکسول، بلکه به‌نسخه جمع و جور هویساید روی آوردند.

بمنظور درک چگونگی بیرون آمدن امواج الکترومغناطیسی از نظریه ماکسول، تحولات زیر را نظر می‌گیریم:

- توزیع جریان متغیر با زمان $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ که بر طبق قانون آمپر، (۱۵.۲)-د، است منجر به
- میدان مغناطیسی متغیر با زمان $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ می‌شود. بر طبق قانون فاراده، رابطه (۱۵.۲)-ج، این باعث
- میدان الکتریکی متغیر با زمان $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ می‌شود که بصورت جریان جابجائی در رابطه (۲ .۱۵)-د عمل کرده و منجر به
- میدان مغناطیسی متغیر با زمان $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ می‌شود و این ادامه دارد.

از طریق معادلات کرل تزویجی، میدان‌ها می‌توانند از منبع دور و جدا شده منتشر شوند. یک محاسبه رسمی‌تر از امواج الکترومغناطیسی، حل معادلات ماکسول در فضای آزاد با در نظر گرفتن $\rho = \mathbf{J} = 0$ و هم‌چنین گرفتن کرل از دو طرف قانون فاراده است:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B},$$

در اینجا از اتحادهای برداری معمولی برای توابع برداری، (تمرین ۶-۲)، استفاده کرده و جای مشتق زمانی و مکانی را در سمت چپ عوض کرده‌ایم. در عدم وجود هر گونه منبع، $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ هستند، و ازاینرو همراه با قانون آمپر معادله موج زیر را خواهیم داشت:

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0. \qquad (۱۶.۲)$$

شبیه همین رابطه را می‌توان برای میدان مغناطیسی، (تمرین ۸-۲)، بدست آورد. از رابطه بالا مشاهده می‌شود که امواج الکترومغناطیسی با سرعت سیر نور منتشر می‌شوند که می‌توان به‌صورت زیر آنرا بیان کرد:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

در بخش ۴-۲ با جزئیات بیشتری به‌امواج الکترومغناطیسی بر می‌گردیم.

تشعشع کیهانی مثال مورد علاقه من قدرت پیش‌بینی معادله ماکسول، تابش اشعه کیهانی است که حدود 400000 سال پس از انفجار عظیم ایجاد شد، هنگامی‌که دمای پلاسما اولیه به‌اندازه کافی سرد شده بود که اتم‌ها تشکیل شوند و تابش از پلاسما آزاد شوند. از آن زمان به بعد طبق قوانین معادلات ماکسول، این تابش آزادنه منتشر شده است، اگر چه فرکانس تابش به‌دلیل گسترش جهان کاهش یافته و امروزه بیشینه توزیع در ناحیه ریزموج[۶] است. به‌نظرم جالب است که قوانین فیزیک حتی در میلیاردها سال به‌خوبی اجرا شده‌اند و معادلات ماکسول چقدر خوب پویائی امواج الکترومغناطیسی را توصیف می‌کند. اگر چه معمولاً این موفقیت را مسلم می‌دانیم، اما فکر می‌کنم که گاهی اوقات باید از این ابزارهای قدرتمندی که برای توصیف طبیعت در دست داریم بیشتر سپاسگزار باشیم.

۱.۲.۲ پتانسیل‌های الکترومغناطیسی

پتانسیل‌های الکترومغناطیسی نقش مهمی در الکترودینامیک ایفا می‌کنند[۱، ۲]، اما در زمینه نانو اُپتیک اهمیت کمتری دارند. همان طور که در فصل پنجم بحث خواهیم کرد، در نانو اُپتیک معمولاً اجسام مختلف با توابعی موسوم به‌تابع گرین، که بسیاری از مزایای پتانسیل‌های الکترومغناطیسی را بر عهده دارند، معرفی می‌شود. با این وجود، در چند جا، که در اُپیتک کوانتومی بسیار قابل توجه است، بر مفهوم پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تکیه می‌کنیم.

با "مطالعه" معادلات ماکسول به‌گونه‌ای شروع می‌کنیم که در بخش بعدی، از نظر معادلات همگن و ناهمگن، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. ناهمگنی در معادلات ماکسول توزیع بار و جریان خارجی است. ایده پشت پتانسیل‌های الکترودینامیکی معرفی مقادیر جدید است، پتانسیل اسکالر $V(\mathbf{r},t)$ و برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که معادلات همگن ماکسول را بطور خوکار برآورده کنند. معادلاتی که این پتانسیل‌ها را تعیین می‌کنند، سپس بوسیله معادلات ماکسول ناهمگن تهیه می‌شوند.

با $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ شروع می‌کنیم. اکنون می‌توانیم $\mathbf{B}$ را به**بردار پتانسیل** $\mathbf{A}$ از طریق رابطه زیر مربوط سازیم:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{۱۷.۲}$$

با این انتخاب مطمئن می‌شویم که میدان مغناطیسی چشمه (منبع) یا چاهک ندارد زیرا دیورژانس کرل یک میدان $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ همواره صفر است. برای سایر معادله همگن، قانون فاراده، داریم:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \times \nabla V = 0$$

[۶] Microwave

در اینجا رابطه داخل پرانتز را با $-\nabla V$ جایگزین کرده‌ایم زیرا کرل گرادیان بطور خودکار صفر است. V **پتانسیل اسکالر** است. علامت منفی بطور قراردادی از الکترواستاتیک انتخاب شده است که در آنجا پتانسیل را بکار انجام شده بوسیله بار در میدان الکتریکی می‌توان مربوط کرد[۲]. بنابراین میتوانیم میدان الکتریکی را برحسب پتانسیل اسکالر و برداری بیان کنیم و بر عکس.

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{۱۸.۲}$$

با این روابط بین $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ و پتانسیل‌های $V, \mathbf{A}$ معادلات ماکسول همگن نمی‌توانند بطور منحصر بفرد تعریف شوند اما میتوانیم چیز معلومی را به‌آنها اضافه کنیم بدون آنکه تغییری در $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ حاصل شود. فرض کنید $\lambda(\mathbf{r}, t)$ یک تابع دلخواه اسکالر است. در این صورت می‌توانیم V و $\mathbf{A}$ را بصورت زیر اصلاح کنیم:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda, \qquad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \tag{۱۹.۲}$$

به‌طوری که از طریق محاسبات مستقیم بسادگی می‌توان اثبات کرد، هر دو V و $\mathbf{A}$ و همین‌طور V' و $\mathbf{A}'$ منجر به‌میدان‌های الکترومغناطیسی یکسان $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ می‌شوند. ما از روابط (۱۹.۲) که به**تبدیلات معیاری**[۷] موسومند، در چند لحظه بعد استفاده خواهیم کرد.

تعیین معادله برای V و $\mathbf{A}$ با قرار دادن روابط $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ بر حسب پتانسیل‌های الکترومغناطیسی در معادلات ماکسول غیرهمگن یعنی قانون گوس (۱۵.۲)-الف و قانون آمپر (۱۵.۲)-د بدست می‌آید. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) &= -\nabla^2 V - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right). \end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

همانطور که به‌درستی توسط گریفیتز[۱] اشاره شده است، این مجموعه معادلات زشتی است و ممکن است در مورد دلیل معرفی پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تعجب کنید. خوشبختانه، یک راه ساده برای برون رفت وجود دارد و می‌توانیم با شرطی موسوم به معیار لورنس را معرفی کرده تا دو معادله V و $\mathbf{A}$ جدا شوند. اغلب در ادبیات سر در گُمی وجود دارد که آیا این تبدیل باید به Loren(t)z با یا بدون t نسبت داده شود، اما اخیراً به‌نظر میرسد که باید به‌درستی" شرط لورنس[۸]" را پس از مخترع خود لودویک لورنس[۹] نامید. می‌توانیم شرط اضافی معیار لورنس را بر پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تحمیل کنیم (همچنین به‌تمرین ۹-۲ مراجعه کنید).

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{۲۱.۲}$$

[۷] Gauge Transformations

[۸] Lorenz condition

[۹] Ludvig Lorenz

به‌منظور جدا کردن معادلات برای V و $\mathbf{A}$، و مجموعه معادلات زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(\mathbf{r},t) &= -\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0}\\ \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= -\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r},t)\end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

بنابراین، در معیار لورنس هر دو V و $\mathbf{A}$ از معادلات موج پیروی می‌کنند. در فصل پنجم به‌حل معادلات بر می‌گردیم. معیار مشهور دیگری مانند معیار یا تبدیل کولمب وجود دارد که در قسمت‌های بعدی این کتاب در زمینه کوانتیزه کردن معادلات ماکسول مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳.۲ معادلات ماکسول در ماده

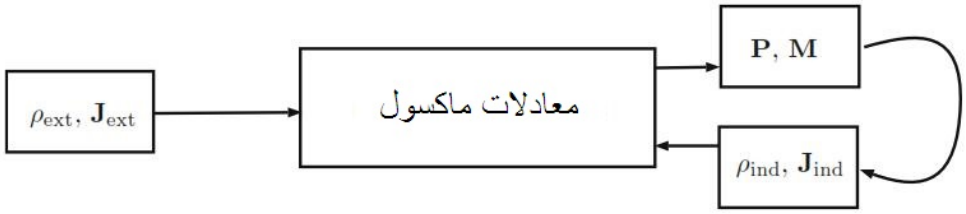
مطالعه خود را با معادلات ماکسول بر حسب معادلات همگن و ناهمگن ادامه می‌دهیم. ظاهراً، ناهمگنی بار ρ و توزیع بار $\mathbf{J}$ وسیله‌ای برای نحوه ارتباط جهان مادی با میدان‌های الکترومغناطیسی است. در واقع، یکی از دلایل اصلی این که چرا اُپتیک و نانو اُپتیک در سال‌های اخیر چنین پیشرفت فوق‌العاده داشته‌اند، پیشرفت در علوم نانو است. این امر بارهای الکتریکی جدید و منابع جریان را ایجاد کرده است که امکان کنترل بی‌سابقه اثرمتقابل ماده و نور را فراهم کند. اگر فقط بخش الکترومغناطیسی معادلات ماکسول بود، احتمالاً میدان الکترودینامیک به‌یک رشته کاملاً خسته کننده تبدیل می‌شد.

هنگام برخورد با معادلات ماکسول در ماده، مناسب است که بار و توزیع جریان را به‌قسمت‌های خارجی، که از خارج قابل کنترل هستند، تقسیم کرده و مشارکت ناشی از قطبی شدگی[۱۰] و مغناطیس شوندگی[۱۱] را القاء می‌کند. دومی را معمولاً نمی‌توان به‌آسانی کنترل کرد، اما در صورت وجود قطبش‌ها و مغناطیس شوندگی میکروسکوپی که در ماده القاء می‌شود، به‌ناچار بر میدان‌های عمل خواهد کرد. شکل (۵.۲) طرح مختصری از اصل زیربنای این جداسازی را ارائه می‌دهد. تفکیک مشارکت خارجی و القائی همیشه کاملاً روشن نیست، و گاهی اوقات آزادی انتخاب "خارجی" و "القائی" وجود دارد.

در ادامه، بعلت رابطه نزدیک توزیع بار و جریان، **قطبش** $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ را به‌عنوان گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم و **مغناطیس شوندگی** $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ را به‌عنوان گشتاور دوقطبی مغناطیسی در واحد حجم معرفی می‌کنیم. این مقادیر پاسخ مواد را در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی نشان می‌دهند، و باید نسخه‌ای از نحوه ارتباط آنها با میدان‌های الکترومغناطیسی ارائه دهیم. با استفاده از $\mathbf{P}$ و $\mathbf{M}$ می‌توانیم توزیع بار و جریان را با بار آزاد و مقید بر طبق [۱، ۲] جداسازی کنیم.

[۱۰] Polarizations

[۱۱] Magnetizations



شکل ۵.۲: نمودار معادلات ماکسول در ماده. منابع بار الکتریکی و جریان به‌مشارکت خارجی و القائی تفکیک می‌شوند. ρ_{ext}، $\mathbf{J}_{ext}$ را می‌توان بطور خارجی کنترل کرد و بعنوان منابع برای معادلات ماکسول عمل می‌کنند. علاوه بر این، میدان‌های الکترومغناطیسی $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ قطبش $\mathbf{P}$ و مغناطیس شوندگی $\mathbf{M}$ را القاء می‌کنند که بعنوان مشارکت القائی ρ_{ind} و $\mathbf{J}_{ind}$ در معادلات ماکسول عمل می‌کنند.

بار القائی و خارجی و توزیع جریان

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{ext} + \rho_{ind} = \rho_{ext} - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_{ind} = \mathbf{J}_{ext} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

این فرآیند جدا سازی بطور مبسوط در فصل هفتم بحث خواهد شد. استراتژی بعدی که باید دنبال شود، توسعه نظریه‌ای است که فقط به‌منابع خرجی وابسته است و حذف منابع مقید که از خارج قابل کنترل نیستند. ابتدا توزیع بار معادله (۲۳.۲) را وارد قانون گوس می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{ext} - \nabla \cdot \mathbf{P} \Longrightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{ext}$$

رابطه داخل پرانتز معمولاً **جابجائی دی‌الکتریک** خوانده می‌شود .

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{۲۴.۲}$$

توزیع جریان رابطه (۲۳.۲) را در قانون آمپر کرده و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_{ext} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

رابطه داخل پرانتز معمولاً **میدان مغناطیسی** خوانده می‌شود.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{۲۵.۲}$$

میدان مغناطیسیخوانندگان هوشیار ممکن است متوجه شده باشند که من قبلاً $\mathbf{B}$ را نیز به‌عنوان "میدان مغناطیسی" نشان داده‌ام و در واقع در این مورد ادبیات دچار سردگمی می‌شود. جدول ۱.۲ راحت‌ترین نمادها را برای مقادیر مختلف که در الکترودینامیک در ماده ظاهر می‌شوند، خلاصه شده است.

جدول ۱.۲: فهرست کمیات مختلف درمعادلات ماکسول برای مواد

معادله ماکسول	نماد	نام
فضای آزاد	$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$	میدان الکتریکی
	$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$	القای مغناطیسی
	ϵ_0	گذردهی خلاء
	μ_0	نفوذپذیری خلاء
ماده	$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$	قطبش الکتریکی
	$\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$	مغناطیس شوندگی
	$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$	جابجائی عایقی
	$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{M}$	میدان مغناطیسی
مواد خطی	$\mathbf{P}=\epsilon_0\chi_e\mathbf{E}$	پذیرندگی الکتریکی χ_e
	$\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$	پذیرندگی مغناطیسی χ_m
	$\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$	گذردهی الکتریکی ϵ
	$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$	نفوذپذیری مغناطیسی μ

برای "القای مغناطیسی" نماد $\mathbf{B}$ و برای "میدان مغناطیسی" برای $\mathbf{H}$. در طول این کتاب از اصطلاحات مناسب شناخته شده استفاده خواهم کرد ولی اغلب $\mathbf{B},\mathbf{H}$ میدان مغناطیسی می‌نامم، اما معنای دقیق آن باید همیشه از متن مشخص شود.
با این تعاریف جدید، می‌توانیم معادلات ماکسول را در ماده بصورت زیر بیان کنیم:

معادلات ماکسول در ماده

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{ext} \qquad \text{قانون گوس} \qquad (۲۶.۲آ)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \text{بی نام} \qquad (۲۶.۲ب)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{قانون فاراده} \qquad (۲۶.۲ج)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_{ext}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{قانون آمپر} \qquad (۲۶.۲د)$$

توجه کنید که معادلات همگن همواره ثابت می‌مانند، و فقط در مواد ناهمگن باید اصلاح شوند زیرا منبع را به‌مشارکت جملات خارجی و القائی تجزیه می‌کنیم.
روابط ساختاری معادلات (۲۶.۲)-(الف-د) یک مجموعه بسته‌ای از معادلات را تشکیل نمی‌دهند، اما باید بوسیله روابط ساختاری تکمیل شوند:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}),$$

که $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ را به‌میدان‌های واقعی $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ مربوط میسازند. این را می‌توان بوسیله استفاده از توصیف میکروسکوپی یا پدیده‌شناسی[۱۲] قطبش و مغناطس شوندگی یا بوسیله مواد خطی انجام داد.
میدان‌های واقعی در مقابل کمکی. میدان‌های "واقعی" در الکترودینامیک $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ هستند. جابجائی عایقی $\mathbf{D}$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ که وقتی با معادلات ماکسول در ماده سروکار داریم مفید هستند. متاسفانه، برخی ابهامات تاریخی در مورد نقش $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ وجود دارد که در بخش بعدی بیشتر مشخص می‌شود. در نتیجه، کار با میدان‌های الکترومغناطیسی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ راحت‌تر است، زیرا عبارت‌ها متقارن‌تر می‌شوند. در این کتاب از هر دو توصیف بر حسب $\mathbf{E}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$، $\mathbf{H}$ استفاده می‌کنیم، با این حال، خوانندکان باید در پس ذهن خود میدان‌های واقعی ناشی از ذرات باردار، همواره با $\mathbf{E}$، $\mathbf{B}$ احساس می‌شوند.

۱.۳.۲ مواد خطی

برای دسته وسیعی از مواد می‌توانیم رابطه خطی بین پاسخ مواد و میدان‌های خارجی را فرض کنیم. بطور دقیق‌تر داریم:

مواد خطی

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{۲۷.۲}$$

در اینجا χ_e و χ_m بترتیب پذیرندگی الکتریکی و مغناطیسی هستند.
قطبش . بیائید ابتدا رابطه قطبش را بحث کنیم. چیزی که دوست دارم گفتگو کنم، انگیزه فیزیکی قوی برای ارتباط $\mathbf{P}$ با میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است. نخست بیاد آوریم که $\mathbf{D}$ یک میدان کمکی است که صرفاً توسط توزیع بار خارجی ρ_{ext} ایجاد می‌شود. اگر به‌اشتباه $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{D}$ (رابطه اشتباه) را فرض کرده بودیم، قطبش در موقعیت مفروض فقط ناشی از میدان خارجی خواهد بود. اما در حقیقت، میدان واقعی $\mathbf{E}$ مجموع میدان خارجی و میدان قطبش است، که توسط کل جسم قطبیده مورد بررسی، مطابق با انتخاب معادله (۲۷.۲) تولید می‌شود.
مغناطیس شوندگی . شرایط برای مغناطیس‌شوندگی متفاوت است، که فقط توسط جریان‌های آزاد حاکم بر $\mathbf{H}$ ایجاد می‌شود. این امر بطور مستقیم به‌سر در گمی که قبلاً اشاره شد در مورد نقش مناسب $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ اشاره می‌کند. خوشبختانه اوضاع آنقدرها هم که به‌نظر می‌رسد بد نیست. برای همه مواد مورد مطالعه، مغناطیس بسیار کوچک است و به‌همین دلیل خطای حاصل از $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ در مقایسه با انتخاب درست $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B}$ (رابطه اشتباه) معمولاً ناچیز است.
اکنون می‌توانیم رابطه بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ برقرار کنیم.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \tag{۲۸.۲}$$

[۱۲] Phenomenological

که در آن گذردهی الکتریکی $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e)$ را تعریف می‌کنیم و به‌همین نحو، خواهیم داشت:

$$\mathbf{B} = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \tag{۲۹.۲}$$

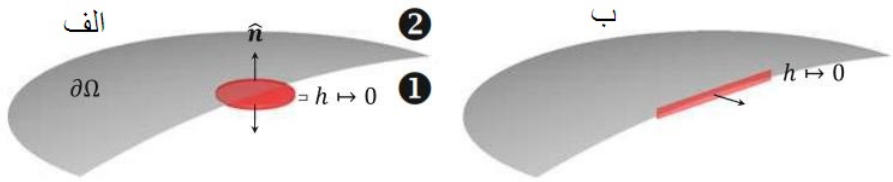
که در آن نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = \mu_0(1+\chi_m)$ را تعریف می‌کنیم. در مورد مواد ناهمسانگرد هر دو ϵ و μ به‌مقادیر تانسوری تبدیل می‌شوند، اما چنین موادی را در نظر نخواهیم گرفت مگر اینکه بطور متفاوت بیان کنیم. در نهایت، معادلات ماکسول برای یک محیط خطی می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\epsilon\mathbf{E} &= \rho_{ext}, & \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\epsilon\mathbf{B} &= 0, & \nabla\times\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} &= \mathbf{J}_{ext} + \epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{۳۰.۲}$$

۲.۳.۲ شرایط مرزی

در الکترودینامیک و نانو اُپتیک اغلب با مشکلاتی مواجه می‌شویم که اجسام متشکل از مواد مختلف با مرزهای تیزی از هم جدا شده‌اند. از معادلات ماکسول در مواد، معادله (۲۶.۲)، می‌توانیم شرایط مرزی از میدان‌های بالا و پائین مرزمشترک بدست آوریم. در ادامه، نماد $\hat{\mathbf{n}}$ یک بردار واحد است که عمود بر سطح مشترک است و از محیط پائین به‌بالا نشان می‌دهد. در تحلیل باید در مورد لایه‌های احتمالی بارهای سطحی یا جریان‌هائی که مستقیماً در رابطه‌ها هستند دقت کنیم. در ادامه قضایای انتگرالی استفاده شده در بخش ۳.۱.۲ را بشرح زیر در نظر می‌گیریم:

قضیه گوس. برای معادلات ماکسول که اختلاف میدان‌های الکترومغناطیسی را مشخص می‌کند، روی



شکل ۶.۲: انتگرال‌گیری حجم و سطح برای بدست آوردن شرایط مرزی در معادلات ماکسول. **الف** معادله دیورژانس را روی یک قوطی کوچک به‌ارتفاع $h \to 0$ انتگرال گرفته و سپس انتگرال‌ها را از طریق قضیه گوس به‌انتگرال مرزی تبدیل می‌کنیم. $\hat{\mathbf{n}}$ عمود بر سطح خارجی مرز $\delta\Omega$ است که محیط بالائی 2 را از محیط پائینی 1 جدا می‌کند. **ب** معادله کرل را روی سطح کوچکی به‌ارتفاع $h \to 0$ انتگرال‌گیری کرده، و انتگرال‌ها را از طریق قضیه استوکس به‌انتگرال خطی تبدیل می‌کنیم.

یک استوانه بسیار نازک $\delta\Omega$ به‌ارتفاع $h \to 0$، انتگرال‌گیری می‌کنیم، فرض می‌شود که رویه بالای دیسک دقیقاً بالای سطح مشترک و رویه پائین آن دقیقاً زیر سطح مشترک، شکل (۶.۲)، باشد. با استفاده از قضیه گوس، انتگرال حجم را به‌انتگرال مرزی تبدیل می‌کنیم، جائی که سهم بدنه کناری استوانه در حد $h \to 0$ صفر می‌شود.

قضیه استوکس. برای معادلات ماکسول که کرل میدان‌های الکترومغناطیسی را تعریف می‌کند، بر

روی یک مستطیل بسیار نازک δS_h به‌ارتفاع $h \to 0$ انتگرال‌گیری می‌کنیم. از قضیه استوکس برای تبدیل انتگرال‌مرزی به‌انتگرال خطی استفاده می‌کنیم که در آنجا فقط موازی با سطح مشترک در حد $h \to 0$ مشارکت می‌کنند. برای هردو حالت استوانه و مستطیل، فرض می‌کنیم که اندازه‌ها بقدر کافی کوچک هستند که می‌توانیم بخوبی میدان‌ها و منابع درون ناحیه انتگرال را با مقادیر ثابت تقریب بزنیم.
بیائید با قانون گوس رابطه (۲۶.۲)-الف شروع کنیم. با توجه به‌توضیح شکل بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_{\delta\Omega_h}\nabla\cdot\mathbf{D}d^3r &= \lim_{h\to 0}\int_{\delta\Omega_h}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\\ &= (\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}\delta S = \lim_{h\to 0}\int_{\delta\Omega_h}\rho_{ext}d^3r = \sigma_{ext}\delta S\end{aligned}$$

در اینجا σ_{ext} نمانگر بار سطحی ممکن که در سطح مشترک توزیع شده است و زیرنماد 1 و 2 نمانگر نواحی زیر و بالا سطح مشترک است. توجه کنید که $\mathbf{D}_1$ منفی است زیرا عمود بر سطح $-\hat{\mathbf{n}}$ در جهت پائین است. از این رابطه و با استفاده از تحلیل مشابه برای $\nabla\cdot\mathbf{B}$، به‌اولین شرایط مرزی میرسیم:

اولین مجموعه شرایط مرزی

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma_{ext},\qquad \hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0 \tag{۳۱.۲}$$

سپس قانون فاراده را در نظر می‌گیریم و روی یک مستطیل کوچک انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_{\delta S_h}\nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} &= \lim_{h\to 0}\int_{\delta S_h}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot d\mathbf{l}\\ &= -\lim_{h\to 0}\int_{\delta S_h}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -\lim_{h\to 0}\int_{\delta S_h}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0.\end{aligned}$$

در آخرین مرحله استفاده می‌کنیم که شار میدان مغناطیسی از طریق یک مستطیل در حد $h \to 0$ صفر می‌شود شبیه تحلیلی که برای قانون آمپر برقرار است (۲۶.۲)-الف، به‌رابطه زیر می‌رسیم:

$$(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)\cdot\delta\mathbf{l} = \lim_{h\to 0}\mathbf{J}_{ext}\delta\mathbf{S}_h$$

در اینجا باید در مورد توزیع جریان سطحی $\mathbf{K}_{ext}$ مراقب باشیم که ممکن است در حد $h \to 0$ صفر نشود. سرانجام این دومین شرایط مرزی را تدارک می‌نماید.

دومین مجموعه شرایط مرزی

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0,\qquad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{K}_{ext}. \tag{۳۲.۲}$$

در بیشتر حالت‌های مورد علاقه، در این کتاب با توزیع بار آزاد یا جریان سروکار نداریم. شرایط مرزی معادلات ماکسول در سطح مشترک بین دو محیط را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد:

- مولفه‌های قائم $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ پیوسته است.
- مولفه‌های موازی $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ پیوسته است.

۴.۲ میدان‌های هارمونیک زمانی

به‌ویژه برای مواد خطی، غالباً وقتی با تحریک نور تک فرکانس ω سروکار داریم، و به‌دلیل خطی بودن واکنش مواد، سامانه پس از گذرای اولیه با همان فرکانس ω نوسان می‌کند. در اینجا نماد فصل مقدمه دنبال کرده و میدان‌های الکترومغناطیسی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = e^{j\omega t}\mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = e^{j\omega t}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{۳۳.۲}$$

جا دارد چند کلمه احتیاطی بیان کنیم؛ اولاً، میدان‌های الکترومغناطیسی واقعی، البته مقادیر حقیقی هستند. هر وقت طالب این میدان‌های حقیقی هستیم، باید قسمت حقیقی رابطه‌های مربوط را بدست آوریم. ثانیاً از نماد مشابه برای $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ و $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ استفاده می‌کنیم. به‌طور کلی، این نباید باعث سردگمی‌های زیاد شود زیرا همیشه به‌وضوح بیان می‌کنیم که آیا در حوزه زمان کار می‌کنیم یا از میدان‌های هارمونیک زمانی استفاده می‌کنیم. برای میدان‌های هارمونیک زمانی و پاسخ مواد خطی، معادلات ماکسول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

معادلات ماکسول

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\epsilon\mathbf{E} &= \rho, & \nabla\times\mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{B} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, & \nabla\times\tfrac{1}{\mu}\mathbf{B} &= \mathbf{J}+j\omega\epsilon\mathbf{E} \end{aligned} \tag{۳۴.۲}$$

به‌صراحت نشان نداده‌ایم که ρ و $\mathbf{J}$ مربوط به‌بار و توزیع جریان خارجی هستند و از این زمان به‌بعد هر وقت وابستگی در متن معلوم باشد این حذف خواهد شد.

ضرب میدان‌های هارمونیک زمانی بعضی وقت‌ها به‌محاسبه میانگین زمانی دو عبارت که با فرکانس ω نوسان می‌کنند، نیاز داریم.

$$\langle fg\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T Re\left(fe^{j\omega t}\right) Re\left(ge^{j\omega t}\right) dt$$

کدر آن $T = 2\pi/\omega$ است. نمونه معمولی بردار پواین‌تینگ[۱۳] است که مقدار متوسط انرژی را محاسبه می‌کند. این را با جزئیات بیشتر در فصل چهارم بحث خواهیم کرد. بسط بخش حقیقی به‌صورت زیر خواهد بود:

[۱۳] Poynting

$$\langle fg\rangle = \frac{1}{4T}\int_0^T \left(fe^{j\omega t} + f^* e^{-j\omega t}\right)\left(ge^{j\omega t} + g^* e^{-j\omega t}\right) dt$$

بعداً خواهیم دید که جملاتی که بصورت $e^{\pm 2j\omega t}$ نوسان می‌کنند وقتی انتگرال‌گیری در یک تناوب انجام می‌دهیم، صفر می‌شوند. فقط جملات زیر باقی می‌مانند:

$$\langle fg\rangle = \frac{1}{4}\langle(fg^* + f^* g) = \frac{1}{2}Re(fg^*). \tag{۳۵.۲}$$

۱.۴.۲ امواج سینوسی

هر میدان الکتریکی را می‌توان بصورت امواج صفحه‌ای توسط تبدیل فوریه بسط داد:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\ \mathbf{E}_k \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \tag{۳۶.۲}$$

در اینجا $\mathbf{k}$ نمایشگر بردار موج و $\mathbf{E}_k$ مولفه فوریه است. برای میدان مغناطیسی نیز به‌همین رویه بدست می‌آید. سپس یک موج تک سینوسی در نظر گیرید

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_k e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_k e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{۳۷.۲}$$

اگر مطلوب ما انتشار میدان پیچیده‌تری باشد، همیشه می‌توانیم میدان را با استفاده از معادله (۳۶.۲)، به‌امواج صفحه‌ای که هر مولفه بطور جداگانه منتشر می‌شوند، تجزیه کرده و سرانجام نتایج را جمع کنیم. کار عملگر ∇ برای موج صفحه‌ای $\nabla \to -j\mathbf{k}$ می‌شود، به‌تمرین ۱۰-۲ مراجعه کنید. بنابراین در غیاب منابع $\rho = \mathbf{J} = 0$ معادلات ماکسول به‌صورت زیر خواهد بود:

معادلات ماکسول برای موج صفحه‌ای

$$\begin{aligned} \epsilon\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_k &= 0, & \mathbf{k}\times\mathbf{E}_k &= \omega\mathbf{B}_k \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} &= 0, & \mathbf{k}\times\mathbf{B}_k &= -\omega\mu\epsilon\mathbf{E}_k \end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

چند نکته مهم را می‌توان مشتقیماً از این معادلات استنباط کرد. اولاً، امواج الکترومغناطیسی امواج عرض هستند که $\mathbf{E}_k$ و $\mathbf{B}_k$ بر بردار موج $\mathbf{k}$ عمود هستند، و بطوری که مشاهد می‌شود $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_k = \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_k = 0$ است. ثانیاً $\mathbf{E}_k$، $\mathbf{B}_k$ و $\mathbf{k}$ یک دستگاه متعامد دست راست را تشکیل می‌دهند. سرانجام

$$\mathbf{k}\times\mathbf{k}\times\mathbf{E}_k = -k^2\mathbf{E}_k = \omega\mathbf{k}\times\mathbf{B}_k = -\omega^2\mu\epsilon\mathbf{E}_k$$

با استفاده از معادله موج همراه با رابطه پاشندگی[۱۴] داریم

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{۳۹.۲}$$

می‌توانیم این رابطه را همراه قانون فاراده بکار برده

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_k = \omega\mu\mathbf{H}_k$$

تا رابطه بین $\mathbf{E}_k$ و $\mathbf{H}_k$ را بدست آوریم:

$$Z\mathbf{H}_k = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_k \tag{۴۰.۲}$$

در اینجا امپدانس زیر را معرفی می‌کنیم:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{۴۱.۲}$$

که بما اجازه میدهد از طریق رابطه (۴۱.۲) میدان الکتریکی $\mathbf{E}_k$ بر حسب میدان مغناطیسی $\mathbf{H}_k$ بهم مربوط کنیم و برعکس.

میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی عرضی این بخش را با بحث مختصری از میدان الکتریکی عرضی TE و میدان مغناطیسی عرضی TM که در بخش بعدی این کتاب مهم خواهد بود، به‌پایان بردیم. فرض کنید که $\hat{\mathbf{n}}$ یک بردار عمود بر سطح مشترک باشد. در این صورت می‌توانیم میدان‌های الکترومغناطیسی را به‌مولفه‌های عمودی (عرضی) و موازی $\hat{\mathbf{n}}$ تجزیه کنیم،

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= [\mathbf{E}_k - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E}_k] + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E}_k) = \mathbf{E}_k^{TE} + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E}_k) \\ \mathbf{H}_k &= [\mathbf{H}_k - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{H}_k] + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{H}_k) = \mathbf{H}_k^{TM} + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{H}_k) \end{aligned} \tag{۴۲.۲}$$

سپس از معادله (۴۰.۲) برای بیان مولفه عمودی $\mathbf{H}_k$ بر حسب مولفه موازی $\mathbf{E}_k$ استفاده می‌کنیم،

$$Z\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{H}_k = \hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_k \underset{c.p}{=} \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E}_k\times\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E}_k^{TE}\times\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_k^{TE}.$$

در رابطه بالا، از تبدیل دوری[۱۵] $(c.p.)$ در ضرب سه‌گانه استفاده کردیم. بنابراین این به‌تجزیه میدان‌های الکترومغناطیسی به‌صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= \mathbf{E}_k^{TE} - \hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{H}_k^{TM}\right)Z \\ \mathbf{H}_k &= \mathbf{H}_k^{TM} + \hat{\mathbf{n}}\left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_k^{TE}\right)Z^{-1} \end{aligned} \tag{۴۳.۲}$$

نکته خوب در مورد این تجزیه، این است که معمولاً هنگام استفاده از میدان‌های الکتریکی عرضی $\mathbf{E}_k^{TE}$ و میدان‌های مغناطیسی عرضی $\mathbf{H}_k^{TM}$، مثلاً وقتی شرایط مرزی را در سطح مشترک دو محیط بکار می‌بریم، آسان‌تر است. رابطه (۴۳.۲) نشان می‌دهد که هر میدان را می‌توان بطور منحصر بفرد به‌مولفه‌های TE و TM تجزیه کرد.

[۱۴] Dispersion

[۱۵] Cyclic Permutation (c.p.)

۵.۲ میدانهای طولی و عرضی

این فصل را با بحث مختصری در مورد میدان‌های طولی و عرضی به‌پایان می‌بریم. نقطه شروع قضیه هلم‌هولتز است که در بخش ۲.۱.۲ معرفی شد. آن می‌گوید که هر میدان برداری را با دانستن دیورژانس و کرل آن، همراه با شرایط مرزی مناسب مشخص می‌شود. در روح این قضیه، هر تابع برداری مانند $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ را می‌توان به‌بخش طولی وعرضی تجزیه کرد.

تجزیه $\mathbf{F}$ به‌دو بخش طولی و عرضی

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^L(\mathbf{r}) + \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) \tag{۴۴.۲}$$

که در آن $\mathbf{F}^L$ و $\mathbf{F}^\perp$ بر طبق روابط زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{F}^L(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}), & \nabla\times\mathbf{F}^L(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) &= 0, & \nabla\times\mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) &= \mathbf{g}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{۴۵.۲}$$

در اینجا $f(\mathbf{r})$ و $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ توابع اسکالر و برداری دلخواه هستند. بخش طولی دیورژانس آن صفر نیست و بخش عرضی آن کرل صفر نیست. تجزیه بالا بویژه برای امواج سینوسی به‌صورت معادله (۳۷.۲) خیلی شفاف خواهد بود. بخش طولی (نسبت به‌بردارموج $\mathbf{k}$) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_k^L = \hat{\mathbf{k}}F_k^L = \hat{\mathbf{k}}\left(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{F}\right) = \mathbb{P}_k^L\cdot\mathbf{F}_k$$

که در انتهای رابطه، ماتریس تصویری را تعریف کردیم:

$$\left(\mathbb{P}_k^L\right)_{ij} = \hat{k}_i\hat{k}_j$$

تابع برداری $\mathbf{F}_k$ را می‌توان تحت رابطه زیر به‌قسمت‌های طولی و عرضی تجزیه کرد

$$\mathbf{F}_k = \left(\mathbb{P}_k^L\right)\cdot\mathbf{F}_k + \left(\mathbb{I}+\mathbb{P}_k^L\right)\cdot\mathbf{F}_k = \left(\mathbb{P}_k^L\right)\cdot\mathbf{F}_k + \left(\mathbb{P}_k^\perp\right)\cdot\mathbf{F}_k \tag{۴۶.۲}$$

در اینجا $\mathbb{I}$ ماتریس واحد است و در انتهای رابطه ماتریس تصویری روی بخش عرضی تعریف کردیم. از معادله (۴۵.۲) می‌توانیم بخش طولی را بدست آوریم:

$$ikF_k^L = f_k \tag{۴۷.۲}$$

بهمین نحو، بخش عرضی را بدست می‌آوریم:

$$-j\mathbf{k}\times\mathbf{F}_k^\perp = \mathbf{g}_k \Longrightarrow -jk\mathbf{F}_k^\perp = -\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{g}_k \tag{۴۸.۲}$$

بنابراین، روش تفکیک در رابطه (۴۴.۲) یک بردار به‌بخش‌های طولی و عرضی این است که آنرا با استفاده از تبدیل فوریه، به‌مولفه‌های سینوسی تجزیه کرده، ماتریس‌های تصویری را اعمال نموده، و سرانجام برای نیل به‌تفکیک مطلوب عکس تبدیل فوریه انجام دهیم.

معادلات ماکسول

با توجه به‌بحث بالا، می‌توانیم معادلات ماکسول (۳۴.۲) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} -j\mathbf{k}\cdot\epsilon\mathbf{E}_k^L &= \rho_k, & \mathbf{k}\times\mathbf{E}^\perp &= \omega\mathbf{B}_k \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_k^L &= 0, & \mathbf{k}\times\mathbf{B}_k^\perp &= j\mu\mathbf{J}_k - \omega\mu\epsilon\mathbf{E}_k \end{aligned} \tag{۴۹.۲}$$

هر زمان که در متن لازم باشد، مشخصه طولی و عرضی را نشان داده‌ایم. ρ_k و $\mathbf{J}_k$ بترتیب تبدیل فوریه بار و توزیع جریان هستند. بدیهی است که مولفه طولی $\mathbf{B}_k^L$ صفر و میدان مغناطیسی کاملاً عرض است. با استفاده از رابطه (۴۷.۲)، از قانون گوش بدست می‌آوریم:

$$E_k^L = j\frac{\rho_k}{\epsilon k} \tag{۵۰.۲}$$

معادله پیوستگی توزیع بار را به‌مولفه توزیع جریان طولی مربوط میدارد:

$$\omega\rho_k = kJ_k^L \Longrightarrow J_k^L = \frac{\omega\rho_k}{k} = -j\omega\epsilon E_k^L.$$

بنابراین، قانون آمپر (۴۹.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{k}\times\mathbf{B}_k^\perp = j\mu\mathbf{J}_k^\perp - \omega\mu\epsilon\mathbf{E}_k^\perp \tag{۵۱.۲}$$

چون مولفه‌های طولی J_k^L و E_k^L یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین مشاهده می‌شود که در رابطه (۴۹.۲) دو معادله دیورژانس مشخص کننده مولفه‌های طولی $\mathbf{E}_k$ و $\mathbf{B}_k$ است، در حالی که معادله‌های کرل مولفه‌های عرضی میدان الکترومغناطیسی را بهم مربوط می‌کند.

پتانسیل‌های الکترومغناطیسی

مفهوم میدان‌های طولی و عرضی را نیز می‌توان بر پتانسیل‌های الکترومغناطیسی V و $\mathbf{A}$ که در بخش ۱.۲.۲ معرفی شد اعمال کرد. واضح است که میدان مغناطیسی از مولفه عرضی $\mathbf{A}_k$ بدست می‌آید:

$$\mathbf{B}_k^\perp = -j\mathbf{k}\times\mathbf{A}_k^\perp \tag{۵۲.۲}$$

میدان الکتریکی دارای هر دو مولفه طولی و عرضی است:

$$E_k^L = jkV_k - j\omega A_k^L, \qquad \mathbf{E}_k^\perp = -j\omega\mathbf{A}_k^\perp \tag{۵۳.۲}$$

تبدیلات معیاری[۱۶] که بصورت رابطه (۱۹.۲) ارائه شد، در این صورت مولفه عرضی $\mathbf{A}_k^{\perp}$ را بی‌تاثیر رها کنید و فقط بصورت زیر اصلاح کنید

$$\mathbf{A}_k^{L'} = \mathbf{A}_k^{L} - j\mathbf{k}\lambda_k, \qquad V_k' = V_k - j\omega\lambda_k$$

تمرینات

قبل از شروع تمرینات، می‌خواهم یک مطلب تبلیغاتی شخصی در باره نمادهای مولفه اضافه کنم و آن تانسور لوی-سیویتا[۱۷] است. هر دو مفهوم برای ارزیابی عبارت‌های پیچیده بسیار مفید هستند.

ضرب داخلی ضرب داخلی را می‌توان برحسب شکل $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i$ انوشت.

قرارداد جمع انیشتن[۱۸] قرارداد جمع انیشتن میگوید، باید روی اندیس‌هائی (شاخص‌ها) که دوبار در یک رابطه، مثل i در رابطه ضرب داخلی، ظاهر می‌شوند جمع انجام گیرد.

ضرب خارجی ضرب خارجی را می‌توان بصورت $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$ بیان کرد. در اینجا ϵ_{ijk} تانسور لوی-سیویتا یا بطور اختصار تانسور ϵ است.

تانسور لوی-سیویتا تانسور لوی-سیویتا یا به‌اختصار تانسور ϵ، یک تانسور کاملاً غیرمتقارن است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{برای تبدیل دوری زوج} \quad \epsilon_{123},\ \epsilon_{312},\ \epsilon_{231} \\ -1 & \text{برای تبدیل دوری فرد} \quad \epsilon_{213},\ \epsilon_{321},\ \epsilon_{132} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۵۴.۲}$$

از رابطه بالا واضح است که می‌توان به‌طور چرخه‌ای شاخص‌ها را تغییر داد، $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$ و وقتی دو شاخص را عوض می‌کنیم، علامت آن تغییر می‌کند، برای مثال $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$.

مهمترین رابطه برای تانسور لوی- سیویتا رابطه زیر است:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{۵۵.۲}$$

بشما تاکید می‌کنم که این رابطه را بخاطر بسپارید زیرا می‌تواند بشما کمک کند تا بیشتر عباراتی را که در این کتاب با آن مواجه می‌شوید، بسازید.

- **تمرین ۱** با استفاده از تانسور لوی-سیویتا عبارات زیر را محاسبه کنید:
  (الف)- $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
  (ب)- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$. نشان دهید که جواب با شکل (الف) تفاوت دارد.
- **تمرین ۲** با استفاده از تانسور لوی-سیویتا رابطه زیر را اثبات کنید:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

[۱۶] Gauge transformations
[۱۷] Levi-Civita tensor
[۱۸] Einstein's Sum Convention

- **تمرین ۳** با استفاده از تعریف رابطه (۴۵.۲) ثابت کنید $\epsilon_{imn}\epsilon_{jmn} = 2\delta_{ij}$
- **تمرین ۴** برای دو تابع برداری $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ و $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ رابطه زیر را اثبات کنید

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{G} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

راهنمائی: قاعده ضرب را برای عملگر ∇ که روی دو تابع برداری از طرف راست اثر می‌کند بکار برید. در عبارت بالا و در خیلی از قسمت‌های این کتاب از پرانتز برای مشخص کردن عملگر ∇ که فقط روی عبارت اثر می‌کند استفاده خواهیم کرد.

- **تمرین ۵** با استفاده از تعریف رابطه (۵۴.۲) بحث کنید که چرا $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ است.
- **تمرین ۶** ثابت کنید که $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$ برای هر تابع برداری مانند $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ صادق است.
- **تمرین ۷** عملگر دیورژانس $\nabla\cdot$ را روی دو طرف قانون آمپر، (۱۵.۲)-د بکار برده و رابطه پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ را استخراج کنید. برای این کار لازم است از یکی دیگر از معادله ماکسول استفاده کنید. این کدام معادله است؟
- **تمرین ۸** عملگر کرل $\nabla\times$ را روی دو طرف قانون آمپر، (۱۵.۲)-د بکار برده و معادله موج برای $\mathbf{B}$ را با استفاده از $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ بدست آورید. برای این منظور نیاز به‌استفاده از قانون فاراده را دارید.
- **تمرین ۹** ثابت کنید که با استفاده از شرط معیار لورنس در رابطه (۲۱.۲)، معادله موج برای پتانسیل‌های الکترومغناطیسی بدست می‌آید. به‌معادله (۲۲.۲) رجوع کنید.
- **تمرین ۱۰** برای موج صفحه‌ای $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ که در آن بردارهای $\mathbf{E}_0$ و $\mathbf{k}$ ثابت هستند، $\nabla \cdot \mathbf{E}$ و $\nabla \times \mathbf{E}$ را محاسبه کنید. سپس بحث کنید که چرا برای موج صفحه‌ای می‌توانیم از $\nabla \to -j\mathbf{k}$ استفاده کنیم.
- **تمرین ۱۱** در یک لحظه معین از زمان، مثلاً $t = 0$، میدان الکتریکی یک موج که در امتداد zها منتشر می‌شود را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\hat{\mathbf{x}} E_x(z) + \hat{\mathbf{y}} E_y(z) = Re\left[E_0 \hat{\mathbf{e}} e^{-jkz}\right]$$

که در آن E_0 دامنه (فرض کنید حقیقی است) و $\hat{\mathbf{e}}$ بردار قطبش موج است. مولفه‌های $E_x(z)$ و $E_y(z)$ را برای بردارهای قطبش زیر محاسبه کنید:

- الف- $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{x}}$
- ب- $\hat{\mathbf{e}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}}$ که در آن θ یک زاویه حقیقی است.
- ج- $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}$
- د- $\hat{\mathbf{e}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + j\sin\theta\hat{\mathbf{y}}$ که در آن θ یک زاویه حقیقی است.

- **تمرین ۱۲** با استفاده از موج تمرین یازدهم، مولفه‌های میدان مغناطیسی $B_x(z)$ و $B_y(z)$ را بدست آورید. با استفاده از قانون فاراده $\mathbf{E}$ را به $\mathbf{B}$ مربوط سازید. برای بردارهای مختلف قطبش، میدان $\mathbf{B}(z)$ چگونه بنظر می‌رسد؟

- **تمرین ۱۳** موج $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0\hat{\mathbf{y}}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ را که در آن بردار موج مختلط بصورت $\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} - jk_z\hat{\mathbf{z}}$ است در نظر گیرید. اینگونه امواج را موج محوشونده[۱۹] می‌نامند که در جهت xها بطور نمائی با $z > 0$ تضعیف می‌شود. بخش حقیقی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را محاسبه کرده و در باره خواص قطبش آن بحث کنید.

[۱۹] Evanescent Wave

فصل ۳

نمایش طیف زاویه‌ای

وضعیتی که در این فصل در نظر خواهیم گرفت، در شکل (۱.۳) نشان داده شده است و می‌توان آن را به‌شرح زیر خلاصه کرد. فرض کنید میدان الکتریکی را در صفحه معین $z = 0$ می‌شناسیم،

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0(x, y)$$

اکنون سولات زیر را مطرح می‌کنیم. وقتی از صفحه دور می‌شویم، میدان $\mathbf{E}(x, y, z)$ چگونه تکامل می‌یابد؟ میدان $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ در فواصل دور چگونه رفتار می‌کند؟ و وقتی میدان‌های دور را از طریق یک عدسی یا یک سامانه عدسی متمرکز و کانونی می‌کنیم، چه اتفاق می‌افتد؟ برای پاسخ به‌این سوال‌ها، چند مفهوم جدید را معرفی می‌کنیم که نقش مهمی در زمینه نانو اُپتیک ایفا می‌کنند.

نمایش طیف زاویه‌ای . در نمایش طیف زاویه‌ای میدان $\mathbf{E}_0(x, y)$ را به‌مولفه‌های فوریه $\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y)$ تجزیه می‌کنیم. سپس این مولفه‌ها را می‌توان با افزودن فازهای مناسب به‌راحتی از $z = 0$ منتشر کرد.

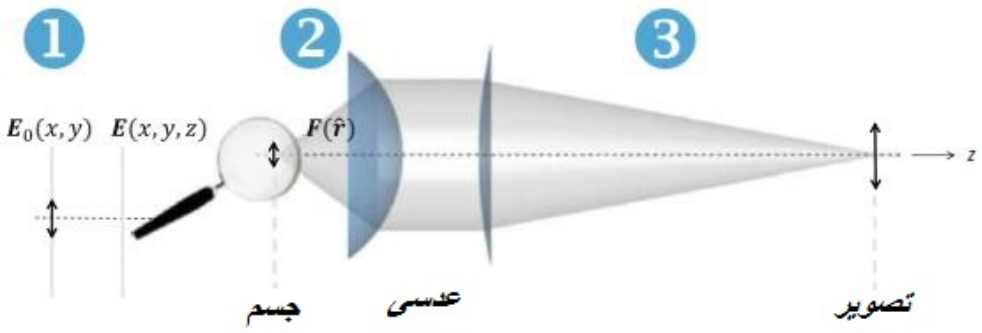
نمایش میدان دور برای محاسبه میدان‌های الکترومغناطیسی خیلی دور از صفحه $z = 0$، مفهوم تقریب ثابت بودن فاز را معرفی می‌کنیم. در می‌یابیم که میدان‌های دور منتشر شونده خیلی نزدیک به $\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y)$ مربوط می‌شوند.

کانونی کردن میدان‌ها در آزمایش‌های کانونی کردن میدان بمنظور بازیابی تصویر توزیع میدان اولیه $\mathbf{E}_0(x, y)$، این کار توسط عدسی‌های نوری انجام می‌شود. در نانو اُپتیک نظری می‌توان تبدیلی برای میدان‌های دور انجام داد تا عملکرد عدسی را تقلید کند.

۱.۳ تبدیل فوریه میدان‌ها

فرض کنید که توزیع میدان الکتریکی $\mathbf{E}_0(x, y)$ را در صفحه $z = 0$ میدانیم. می‌توانیم تبدیل فوریه زیر را تعریف کنیم:

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) = (2\pi)^{-2} \int e^{j(kxx + k_y y)} \mathbf{E}_0(x, y) dx dy \qquad (۱.۳)$$



شکل ۱.۳: ترسیم نمایش طیف زاویه‌ای و تصویرسازی برای یک جسم که در کانون عدسی $z = 0$ قرار دارد. در این فصل نشان خواهیم داد که (۱) چگونه میدان‌های $\mathbf{E}(x, y, z)$ را با استفاده از نمایش طیف زاویه‌ای می‌توانند دور از جسم منتشر شوند. (۲) چگونه میدان‌های دور $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$ خیلی دور از جسم را محاسبه کرد، و (۳) چگونه تصویر یک جسم را با استفاده سامانه‌ای از عدسی‌ها که بر حسب کره‌های مرجع گوسی تعریف می‌شوند بدست آورد. در انتقال میدان‌های نزدیک به‌مناطق دور، هم امواج محو شونده که مسئول حد پراش نور هستند و در فصل ششم بحث می‌شوند، از توزیع میدان حذف می‌شوند.

که میدان‌ها را به‌مولفه بردارموج‌شان تجزیه می‌کند. بدیهی است که از طریق عکس تبدیل فوریه

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \int e^{-j(kxx+k_y y)} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) dxdy \tag{۲.۳}$$

می‌توانیم دوباره میدان‌های اولیه را بدست آوریم. وقتی از $\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0(x, y)$ دور می‌شویم، هر مولفه فوریه مقداری فاز بدست می‌آورد.

$$e^{-jk_z z} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y)$$

که در آن k_z را می‌توان ازمقدار k که از فرکانس نور و رابطه پاشندگی[۱] داده می‌شود، بدست آورد:

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \tag{۳.۳}$$

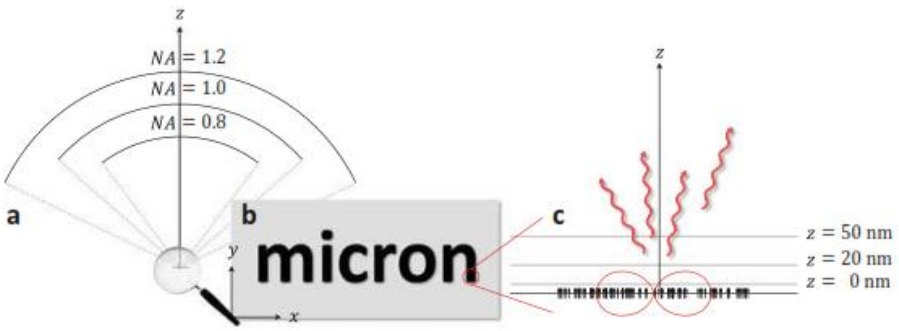
علامت مثبت و منفی را باید از از انتشار موج در جهت مثبت یا منفی z تعیین کرد. برای $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ عدد موج موهومی مربوط به‌میدان محو شوندگی بدست می‌آوریم و علامت بطریقی تعیین شود که موج با دور شدن از $z = 0$ میرا شود. بنابراین، برای نیم فضای با $z > 0$، بر طبق رابطه (۱۹.۱) برای معادله موج اسکالر، نمایش طیف زاویه‌ای زیرا را بدست می‌آوریم

[۱] Dispersion

نمایش طیف زاویه‌ای $(z > 0)$

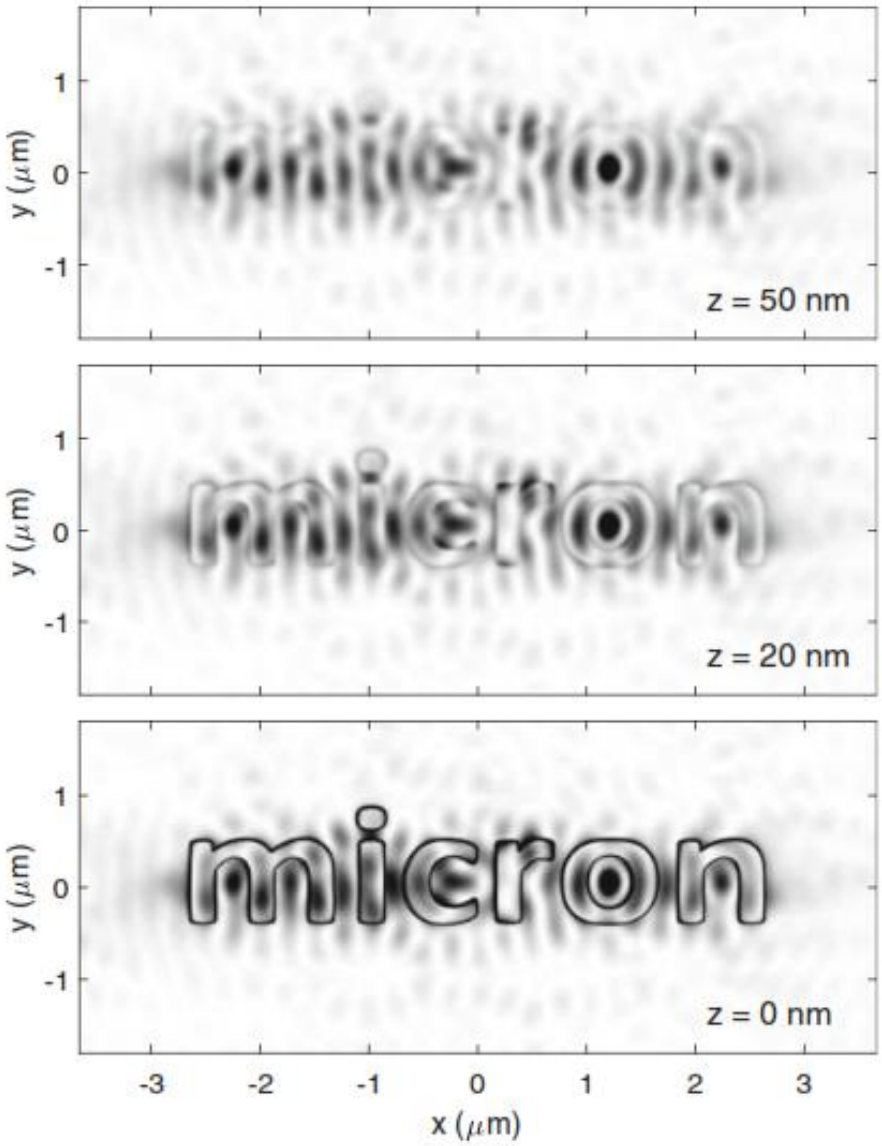
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z) &= \int_{k^2>k_x^2+k_y^2} e^{-j(k_x x+k_y y+\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}z)}\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x,k_y)dk_x dk_y \\ &+ \int_{k^2<k_x^2+k_y^2} e^{-j(k_x x+k_y y-\sqrt{k_x^2+k_y^2-k^2}z)}\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x,k_y)dk_x dk_y\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

عبارت‌های خط اول و دوم بترتیب مربوط به‌امواج منتشر شونده و محو شونده هستند. از رابطه (۴.۳) می‌توان دریافت که برای محاسبه میدان‌های دور از یک صفحه مفروض، باید ابتداء $\mathbf{E}(x,y,0)$ را به‌مولفه‌های فوریه تجزیه کرد، و سپس هر مولفه فوریه، وقتی از صفحه $z=0$ دور می‌شوند، براحتی فاز یا میرائی نمائی بدست آورند. بدیهی است که هر قدر از صفحه $z=0$ دورتر شویم، میدان‌های محو شونده بیشتر میرا شده و فقط موج منتشر شونده بازاء طول انتشار z طویل باقی می‌ماند.



شکل ۲.۳: شمای نمایس طیف زاویه‌ای و تصویر میدان‌های ساطع شده از یک جسم "میکرون". **(الف)** جسم در مبداء، در مرکز شیشه ذره‌بین. قوس‌ها طیف وسیعی از مولفه‌های بردار موج را نشان میدهند که توسط عدسی‌ها با روزنه‌های عدی مختلف NA گرفته شده است. ضمناً به‌شکل (۶.۳) نیز مراجعه کنید. **(ب)** جسم شامل دوقطبی‌های متراکم است که در امتداد جهت z همسو شده‌اند، به‌بخش **(ج)** مراجعه کنید که حرف "میکرون" را تشکیل داده است. **(ج)** نمای نزدیک از ورق دوقطبی و لایه‌هائی که میدان‌ها در شکل (۶.۳) نشان داده شده است. گلبرگ قرمزالگوی انتشار دور یک دوقطبی را نمایش می‌دهد.

به‌عنوان یک مثل نمایشی، وضعیت نشان داده شده در شکل (۲.۳) را بررسی می‌کنیم. آن شامل مجموعه‌ای از دوقطبی‌های متراکم است که در امتداد جهت z همسو شده‌اند و حرف "میکرون" را تشکیل می‌دهند. همان طور که در شکل (۳.۳) نشان داده شده است، تصویر در هنگام دور شدن از ورق دو قطبی‌ها، هم در اثر از دست دادن امواج محو شونده و هم در عدم تمرکز، تار می‌شود.



شکل ۳.۳: محاسبه نمایش طیف زاویه‌ای معادله (۴.۳). برای توزیع میدان اولیه $\mathbf{E}_0(x,y)$ حرف "میکرون"که با دو قطبی‌ها نوسانی در طول موج $620\ nm$ پر شده و در امتداد محور zها است در نظر می‌گیریم. این در شکل (۲.۳) نشان داده شده است. $\mathbf{E}_0(x,y)$ مربوط به‌میدان‌های ده نانو متر بالای لایه دوقطبی است. وقتی از این صفحه دور می‌شویم، (مثلاً به‌داخل نگاه کنید)، بویژه بعلت میرائی میدان‌های محو شونده و بعلت عدم کانونی کردن، میدان تار است. در بخش ۳.۳ نشان خواهیم داد که تصویر میدان را می‌توان از توزیع میدان دور با استفاده از سامانه عدسی‌ها بدست آورد.

۲.۳ نمایش میدان-دور

برای انتشار در فواصل دور، میدان‌های الکتریکی معادله (۴.۳) امواج خارج شونده هستند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \underset{kr\gg 1}{\longrightarrow} \frac{e^{-jkr}}{r}\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{۵.۳}$$

که بوسیله دامنه میدان دور مدوله شده‌اند.

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r\to\infty}\int_{k_x^+ k_y^2 \le k^2} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x,k_y)dk_x dk_y \tag{۶.۳}$$

در عبارت بالا، از امواج محو شونده چشم پوشی کرده‌ایم. معادله (۶.۳) شبیه به‌یک انتگرال ناجور است که برای $kr\to\infty$ شروع به‌نوسان کرده و باید در محاسبه آن دقت کنیم.

خوشبختانه، **تقریب فاز ثابت**[۲]،[۴]، دستوالعمل برای برخورد با اینگونه انتگرال‌ها را تدارک می‌کند. می‌توان نشان داد که مشارکت اصلی در این انتگرال از آن نواحی می‌آید که تابع در نما کمترین تغییرات را دارد. این بنام نقاط ثابت موسوم و وابسه به‌اکسترمم تابع در نما است. دور از این اکسترمم، نوسان‌های شدت نمائی منجر به‌تداخل مخرب می‌شود و مشارکت در انتگرال صفر می‌شود. در ادامه، روش تقریب فاز ثابت را بطور مختصر معرفی می‌کنیم.

تقریب فاز ثابت به‌عنوان قدم اول، انتگرال یک بعدی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$I \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b e^{j\lambda g(u)}f(u)du$$

این انتگرال بیشتر در اطراف اکسترمم $g(u)$ مشارکت دارد[۴]. برای سادگی، فرض می‌کنیم که $g(u)$ دارای یک اکسترمم در u_0 در محدوه انتگرال دارد. سپس $g(u)$ را بر حسب سری تیلور در اطراف u_0 بسط داد و فرض می‌کنیم که تغییرات $f(u)$ در آنجام آرام است بطوریکه می‌توانیم تقریب زیر را بنویسیم:

$$I \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda[g(u_0)+\frac{1}{2}g''(u_0)(u-u_0)^2]}du = \left[\frac{2\pi}{\lambda|g''(u_0)|}\right]^{\frac{1}{2}} f(u_0)e^{j\lambda g(u_0)\pm j\frac{\pi}{4}}$$

علامت بالا و پائین مثبت و منفی در عبارت آخر بر طبق علامت $g''(u_0)$ است. برای محاسبه این انتگرال آنرا کرانه‌های انتگرال را به‌بی‌نهایت برده که این تقریب خوبی است زیرا زیرانتگرال فقط در اطراف اکسترمم قرار دارد و در غیر این صورت بعلت تداخل غیر سازنده صفر است. ضمناً از خواص انتگرال فرنل[۳] استفاده کردیم. شبیه همین روش را می‌توان برای انتگرال دو بعدی بکار برد:

$$I \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \int e^{j\lambda g(u,v)}f(u,v)dudv.$$

در اینجا نیز فرض می‌کنیم که انتگرال گیری $g(u,v)$ دارای یک اکسترمم در ناحیه (u_0,v_0) و $g(u,v)$ را می‌توان در حوالی این نقطه بسط داد:

$$g(u,v) \approx g(u_0,v_0) + \frac{1}{2}g_{uu}(u-u_0)^2 + \frac{1}{2}g_{vv}(v-v_0)^2 + g_{uv}(u-u_0)(v-v_0),$$

[۲] Stationary Phase Approximation

[۳] Fresnel integrals; $\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \int_0^\infty \sin(t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

که مشتقات جزئی g در نقطه (u_0, v_0) محاسبه می‌شود. سپس یک محور اصلی را برای چرخانیدن محورهای u و v انجام داده به‌طوری که سامانه مختصات چرخشی، انتگرال دوگانه را به‌انتگرال یک بعدی تبدیل کند، بنابراین می‌توانیم بر طبق رابطه زیر انتگرال‌گری را محاسبه کنیم.

$$I \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{2\pi j}{\lambda\sqrt{\Delta}} f(u_0, v_0) e^{j\lambda g(u_0,v_0)}, \qquad \Delta = g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2 \tag{۷.۳}$$

فرض کردیم که نقطه ثابت یک اکسترمم با $\Delta > 0$ است و علامت عبارت بالا باید با توجه به‌علامت $g_{uu} + g_{vv}$ (مربوط به‌بیشینه یا کمینه) انتخاب شود. جدا از عامل نرمالیزه کردن، Δ خمیدگی گوس g در نقطه ثابت است. سپس تقریب فاز ثابت را در معادله (۶.۳) بکار می‌بریم. ضمناً r را بجای λ قبلی استفاده می‌کنیم. تابع g خواهد شد:

$$g(k_x, k_y) = k_x\hat{r}_x + k_y\hat{r}_y k_z(k_x, k_y)\hat{r}_z$$

در اینجا بردار واحد $= (\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z)$ را معرفی می‌کنیم. توجه کنید که از طریق رابطه پاشندگی (۶.۳)، k_z بستگی به k_x و k_y دارد. برای پیدا کردن اکسترمم g مشتقات جزئی را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial k_x} = \hat{r}_x - \frac{k_x}{k_z}\hat{r}_z = 0 \Longrightarrow \frac{\hat{r}_x}{k_x} = \frac{\hat{r}_z}{k_z}$$
$$g_y = \frac{\partial g}{\partial k_y} = \hat{r}_y - \frac{k_y}{k_z}\hat{r}_z = 0 \Longrightarrow \frac{\hat{r}_y}{k_y} = \frac{\hat{r}_z}{k_z}$$

واضح است که، در اکسترمم $\mathbf{r}$ و $\mathbf{k}$ موازی هستند، بطواریکه ممکن است تا کنون حدس زده باشید، از $\mathbf{r}\cdot\mathbf{k} = rk\cos\theta$ بازاء $\theta = 0$ بیشینه است. از آنجا که مقدار $\mathbf{k}$ در فرکانس نوری ثابت است، می‌توانیم اکسترمم را در $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{r}}$ قرار دهیم. محاسبه مشتق دوم در نقطه ساکن را ادامه می‌دهیم:

$$g_{xx} = -\frac{\hat{r}_x^2 + \hat{r}_z^2}{k\hat{r}_z^2}, \quad g_{yy} = -\frac{\hat{r}_y^2 + \hat{r}_z^2}{k\hat{r}_z^2}, \quad g_{xy} = -\frac{\hat{r}_x\hat{r}_y}{k\hat{r}_z^2}$$

بنابراین، همراه با رابطه (۷.۳)، به‌عبارت نهائی خود برای ئامنه میدان-دور میدان‌های الکترومغناطیسی هدایت می‌شویم.

نمایش میدان دور

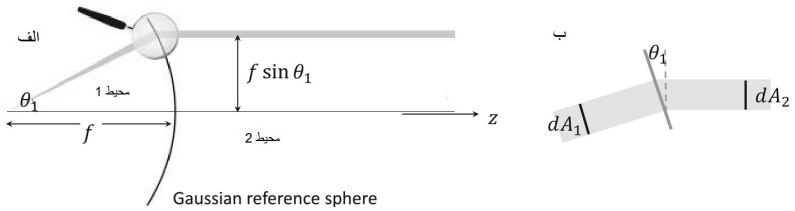
$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = 2\pi j k\hat{r}_z\tilde{\mathbf{E}}_0(k\hat{r}_x, k\hat{r}_y) \tag{۸.۳}$$

این عبارت کاملاً قابل توجه است. اولاً، با وجود مشتقات نسبتاً پیچیده آن، نتیجه ساده‌ای را بیان می‌کند که میدان الکتریکی منتشر شده در یک جهت معین را می‌توان توسط یک مولفه تکی فوریه تعیین کرد. سایر تمام مولفه‌ها در ناحیه میدان دور تداخل غیر سازنده دارند. ثانیاً، نشان می‌دهد که طبیعت می‌تواند خودش تبدیل فوریه انجام دهد! بطوری که بعداً بحث خواهیم

کرد، آنچه باید در تصویر برداری نوری انجام داد این است که از عدسی‌ها یا سایر وسایل نوری برای ترکیب صحیح مولفه‌های فوریه که در جهت‌های مختلف منتشر می‌شوند استفاده کرده تا تصویری از توزیع میدان اولیه $\mathbf{E}_0(x,y)$ بدست آورد. آنچه در حال حاضر باید روشن باشد، در این پردازش تمام امواج محو شونده از بین رفته که محدودیت اساسی برای وضوح تصویر نوری فراهم می‌کند.

۳.۳ تصویر میدان و کانونی کردن

مرحله نهائی در تحلیل ما تصویر برداری است جائی که باید مولفه میدان دور را به‌درستی کنار هم قرار داد تا تصویری از میدان‌های جسم $\mathbf{E}_0(x,y)$ بدست آورد. می‌توان کوشش کرد با محاسبه نوری موج کامل را برای تبدیل کامل میدان‌های دور توسط وسائل عدسی بکار برد، با این حال چنین رویکردی بسیار دشوار است و در بیشتر موارد عملی مفید نخواهد بود. یکی از روش‌های جایگزین توسط ریچارد و ولف [۴] پیشنهاد شده است[۵] و بر این فرض است که جسم دارای ویژگی‌های تصویری آپلاناتیک[۵] کاملی همانطور که در شکل (۴.۳) نشان داده شده است. فرض می‌کنیم جسمی که تابش میدان $\mathbf{E}_0(x,y)$ از آن ساطع می‌شود در کانون f عدسی اول



شکل ۴.۳: در رویکرد نظری خود، عدسی‌ها را از طریق **(الف)** کره‌های مرجع گوسی توصیف می‌کنیم. اشعه‌ای از کانون بیرون می‌آید و از کره گوسی میگذرد، سپس به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که موازی محور نوری منتشر می‌شود. برعکس، یک پرتو موازی به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که به‌سمت کانون منتشر می‌شود. **(ب)** هنگام عبور از کره مرجع، سطح باریکه در طول جهت انتشار تغییر کرده، بنحوی که شدت باریکه حفظ می‌شود.

قرار دارد و ابعاد جسم بسیار کوچکتر از f است. تصویر برداری با استفاده از فرضیات زیر انجام می‌شود:

نور هندسی با میدان‌های نوری $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$ شروع می‌کنیم و با استفاده از قوانین نور هندسی، این میدان‌ها را در امتداد اشعه از طریق سامانه نوری ردیابی می‌کنیم. برای مسائل مورد علاقه خود، از وضعیتی که موسوم به‌سینوسی است، استفاده می‌کنیم و عدسی آپلاناتیک را از طریق یک کره بشعاع f که به‌**کره مرجع گوسی**[۶] معروف است، مدل می‌کنیم. اشعه‌ای که از کانون بیرون می‌آید و از کره گوسی می‌گذرد، سپس به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که موازی محور نوری منتشر می‌شود. برعکس، یک پرتو موازی به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که به‌سمت کانون منتشر می‌شود.

[۴] Richards and Wolf

[۵] Aplanatic

[۶] Gaussian reference sphere

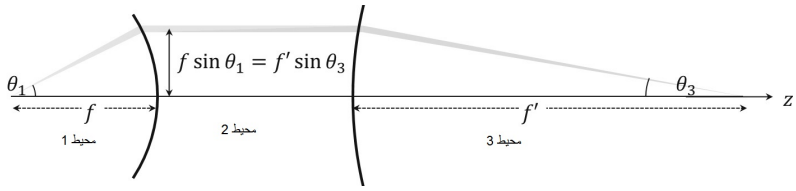
قانون شدت جریان انرژی در طول هر پرتو باید حفظ شود. مقدار میانگین زمانی جریان انرژی را می‌توان از بردار پوایِن‌تینگ $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ محاسبه کرد، که بطور مبسوط در فصل چهارم بحث خواهد شد، و می‌توان توان ارسالی توسط پرتو را از رابطه زیر بدست آورد:

$$dP = \frac{1}{2} Z^{-1} |\mathbf{E}|^2 dA \tag{۹.۳}$$

که در آن Z امپدانس رابطه (۴۱.۲) و dA جزء سطح مقطع عمود بر انتشار پرتو است. برای انتقال پرتو از جسم به‌طرف عدسی که در شکل (۴.۳) نشان داده شده است، سپس از سطح‌های بین دو محیط را از طریق $\cos\theta_1 = dA_2/dA_1$ و دامنه میدان الکتریکی را از رابطه زیر بهم مربوط می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} Z_1^{-1} |\mathbf{E}_1|^2 dA_1 = \frac{1}{2} Z_2^{-1} |\mathbf{E}_2|^2 \cos\theta_1 dA_2$$

انتقال. در فصل مشترک بین دو محیط، مانند بین محیط جسم و شیشه عدسی، فقط بخشی از



شکل ۵.۳: تصویربرداری از طریق عدسی‌های آپلانتاتیک. یک جسم که در کانون اولین عدسی (محیط ۱) قرار دارد از طریق یک کره مرجع گوسی با شعاع f توصیف می‌شود. بعداز عبور از کره مرجع، پرتو در درون عدسی (محیط ۲) بموازات محور نوری $\hat{\mathbf{z}}$ منتشر می‌شود. بعداز عبور از کره مرجع گوسی به‌شعاع $f' \gg f$ پرتو بسوی کانون (محیط ۳) هدایت می‌شود.

نور منتقل و بقیه بازتاب می‌شود. بازتاب و انتقال از فصل مشترک مسطح را د فصل هشتم بررسی خواهیم کرد. در آنجا میدان‌های الکتریکی ورودی را با توجه به‌معادله (۳۴.۲) به‌مولفه‌های TE و TM تجزیه خواهیم کرد:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{TE} + \mathbf{E}^{TM}$$

که در آن $\mathbf{E}^{TE}$ مولفه موازی فصل مشترک و $\mathbf{E}^{TM}$ باقی مانده است. در این صورت میدان انتقال یافته بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{E}_{trans} = T^{TE}\mathbf{E}^{TE} + T^{TM}\mathbf{E}^{TM}$$

که در آن T^{TE} و T^{TM} ضرایب عبور هستند. در ادامه اینگونه ضرایب را که ممکن است برای عدسی‌هائی با پوشش ضد بازتاب تقریب زده باشند، مشخص نمی‌کنیم. شکل (۵.۳) چیدمان را برای تصویر برداری میدان، که شامل مجموعه‌ای عدسی با فاصله کانونی f و یک عدسی تصویری با فاصله کانونی $f' \gg f$ است، نشان میدهد. تعیین معادله کار برای اینگونه تصویربرداری بطور کلی الهام بخش نیست و برای خوانندگان علاقمند بخش ۶.۳ ارائه شده است. به‌طور خلاصه،

برای تبدیل تصویربرداری از میدان‌های دور ورودی $\mathbf{F}_1(\theta,\phi)$ به‌میدان‌های تصویر $\mathbf{E}_3(\rho,\phi,z)$ عبارت زیر است.

تصویربرداری میدان‌های دور $\mathbf{F}_1(\theta,\phi)$ توسط عدسی‌های آپلاناتیک

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_3(\rho,\phi,z) &= \sqrt{\frac{n_1}{n_3}}\frac{-jk_3e^{-j(k_1f-k_3f')}}{2\pi}\frac{f}{f'}\int_0^{\theta_{max}}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta d\theta \\ &\times\int_0^{2\pi}d\phi\mathbb{R}^{im}\cdot\mathbf{F}_1(\theta,\phi)e^{jk_3\cos\theta_3 z}e^{-jk_1(\frac{\rho}{M})\sin\theta\cos(\phi-\varphi)}\end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

مفهوم اصطلاحات مختلف آن به‌قرار زیر است:

- **دستگاه مختصات.** در سمت جسم (محیط ۱) از مختصات کروی (θ,ϕ) و در سمت تصویر (محیط ۳) مختصات استوانه‌ای (ρ,ϕ,z) با $z=0$ مربوط به‌صفحه کانونی استفاده می‌کنیم.
- **محیط.** ضریب شکست n_1 و عدد موج k_1 برای ناحیه جسم و n_3 و k_3 برای ناحیه تصویر است و برای عددسی‌ها در اینجا مهم نیست.
- **ماتریس تبدیل.** جهت بردار میدان الکتریکی هنگام عبور از کره‌های مرجع گوسی که با تبدیل $\mathbb{R}^{im}$ توصیف می‌شود به‌صراحت با معادله (۳۴.۳) ارائیه شده است. در اصل، این ماتریس ضرایب انتقال را نیز شامل می‌شود، اگر چه معمولاً آنرا برابر یک قرار می‌دهیم.
- **خواص عدسی‌ها.** شعاع کره‌های مرجع در سمت جسم و تصویر بترتیب f و f' است که در شکل (۵.۳) نشان داده شده است. ضریب بزرگنمائی را بصورت زیر معرفی می‌کنیم

$$M=\frac{n_1}{n_3}\frac{f'}{f} \qquad \textbf{ضریب بزرگنمائی} \tag{۱۱.۳}$$

و فرض می‌کنیم که $f'\gg f$ تا به‌رابطه (۱۰.۳) برسیم. زاویه θ_{max} بیشینه زاویه پذیرش عدسی در سمت جسم است. به‌نظر میرسد بهتر است که زاویه قطع را به‌روزنه عددی[۷] که عددی بدون دیمانسیون است، مرتبط کنیم:

$$NA=n\sin\theta_{max} \qquad \textbf{روزنه عددی} \tag{۱۲.۳}$$

هر چه NA بالاتر باشد وضوح فضائی بهتر است. در عبارت بالا θ_{max} تعیین می‌کند که چه مقدار از فضای-k توسط عدسی گرفته شده است و ضریب شکست n محیط خارج از عدسی، طول‌موج موثر نور در محیط را کنترل می‌کند.

[۷] Numerical aperture

شکل (۶.۳) مثال حروف "میکرون" را نشان می‌دهد که قبلاً در شکل (۳.۳) مورد بحث قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که وضوح با افزایش مقدار NA افزایش می‌یابد، زیرا بخش بیشتری از فضای-k برای بازسازی تصویر در دسترس قرار می‌گیرد. در همه موارد، مولفه‌های محوشدگی در فرآیند تصویربرداری از بین می‌روند. در فصل ششم، هنگامی که توابع گسترش نقطه و حد پراش نور را بحث می‌کنیم، به‌این نقطه بر می‌گردیم.

کانونی‌کردن میدان. عبارت مشابه معادله (۱۰.۳) را می‌توان برای کانونی کردن میدان بدست آورد. وضعیتی که در فکر خود داریم در شکل (۷.۳)، پرتو میدان الکتریکی $\mathbf{E}_{inc}(\rho,\phi)$ که موازی محور نوری منتشر شده، بیک کره مرجع کوشی با فاصله کانونی f برخورد کرده و کانونی می‌شود را نشان می‌دهد. میدان‌های کانونی $\mathbf{E}(\rho,\phi,z)$ را می‌توان به‌میدان وارده $\mathbf{E}_{inc}$ از طریق رابطه زیر مربوط کرد:

میدان‌های کانونی برای میدان‌های ورودی $\mathbf{E}_{inc}(\rho,\phi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\rho,\phi,z) &= \frac{jkfe^{jkf}}{2\pi}\sqrt{\frac{n_{inc}}{n}}\int_0^{\theta_{max}}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta d\theta \\ &\times\int_0^{2\pi} d\phi\mathbb{R}^{foc}\cdot\mathbf{E}(f\sin\theta,\phi)e^{jkz\cos\theta}e^{-jk\rho\sin\theta\cos(\phi-\varphi)}.\end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

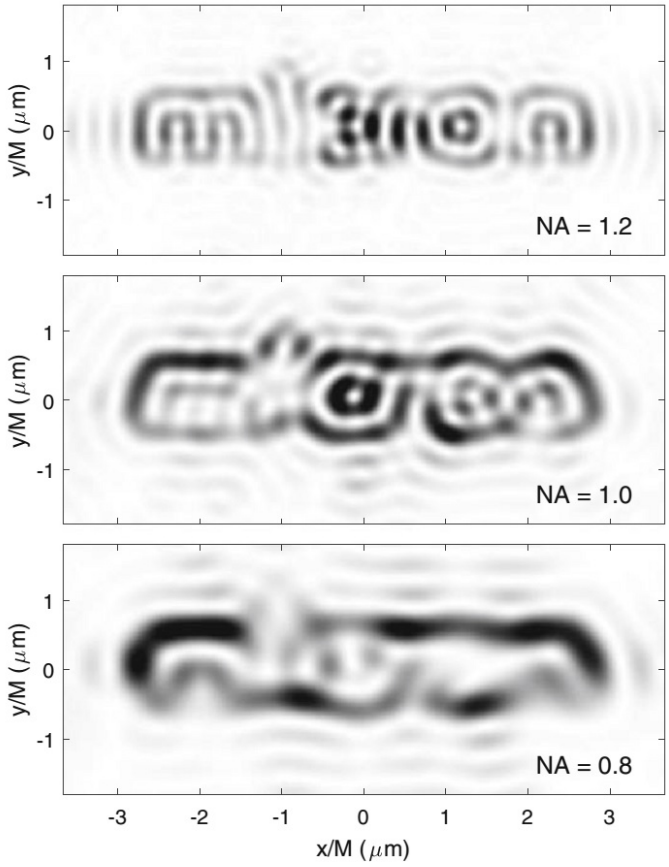
استخراج عبارت بالا در بخش ۶.۳ بطور مفصل آورده شده است. از مختصات استوانه‌ای (ρ,φ,z) برای سمت کانونی $z=0$ که مربوط به‌صفحه کانونی است استفاده کردیم. ضرایب شکست n_{inc} و n به‌ترتیب برای عدسی و محیط سمت کانون و $k=nk_0$ با k_0 عدد موج فضای آزاد است. $\mathbb{R}^{foc}$ ماتریس تبدیل برای میدان‌های الکتریکی که بطور صراحت در معادله (۲۷.۳) بیان شده است. عبارت بالا، هنگامی که میدان‌های کانونی پرتوهای لیزر را بررسی می‌کنیم، استفاده خواهد شد.

۴.۳ تقریب موازی محور و پرتوهای گوسی

در خیلی از حالت‌های مور علاقه، نور در جهت خاصی مثلاً z منتشر و به‌آرامی فقط در جهت عرضی پخش می‌شود. یک مثال معروف، انتشار پرتو لیزر است که در بخش بعدی در زمینه کانونی کردن فشرده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه فرض می‌کنیم $k_x,k_y \ll k$ که تحزیه و تحلیل ما را بطور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند. بویژه، تقریب موازی‌محور[۸] را به‌کار خواهیم برد.

$$k_z = k\sqrt{1-\frac{k_x^2+k_y^2}{k^2}} \approx -\frac{k_x^2+k_y^2}{2k} \tag{۱۴.۳}$$

[۸] Paraxial Approximation



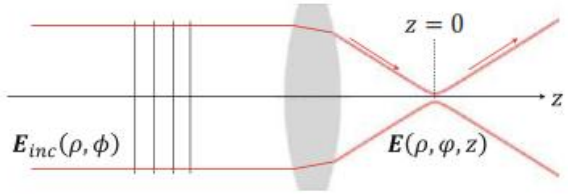
شکل ۶.۳: تصویربرداری میدان دور جسم "میکرون" که در شکل (۳.۳) نشان داده شده است. در اینجا از رابطه (۱۰.۳) برای محاسبه میدان‌های صفحه کانونی با $n_1 = 1.33$، $n_3 = 1$ بازاء روزنه عددی مختلف استفاده کرده‌ایم. برای مقادیر بزرگ NA بخش بزرگتری از فضای-k نمونه بردار شده و وضوح فضائی افزایش یافته است.

علاوه بر این پرتو لیزر را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \tag{۱۵.۳}$$

که در آن $\mathbf{E}_0 = E_0\epsilon$ دامنه و بردار قطبش ϵ را شامل می‌شود. در عبارت بالا w_0 شعاع کمربند پرتو است. تبدیل فوریه توزیع میدان در $z = 0$ را می‌توان بطور تحلیلی محاسبه کرد:

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2} - j(k_x x + k_y y)} dxdy = \mathbf{E}_0 \frac{w_0^2}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(k_x^2+k_y^2)}$$

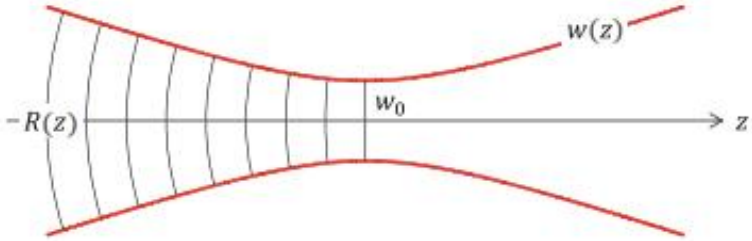


شکل ۷.۳: کانونی کردن میدان‌های ورودی. یک میدان ورودی با میدان الکتریکی $\mathbf{E}_{inc}$ از سمت چپ بر یک عدسی متمرکز کننده می‌تابد و کانونی می‌شود. معادله (۱۳.۳) چگونگی محاسبه میدان $\mathbf{E}(\rho, \phi, z)$ روی سمت کانون تشریح می‌کند.

که در آن از انتگرال گوس بهره‌برداری کرده‌ایم. با انتخاب پوش گوسی، نمایش طیف زاویه‌ای معادله (۴.۳) می‌شود:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 \frac{w_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}w_0^2(x^2+y^2)} e^{-j\left[k_x x + k_y y + \left(k - \frac{k_x^2+k_y^2}{2k}\right)z\right]} dk_x dk_y \qquad (۱۶.۳)$$

که می‌توان آنرا بطور تحلیلی حل کرد. استخراج مفصل در تمرین ۵.۳ ترسیم شده است و به‌نظر می‌رسد که پارامترهای جدید $z_0 = \frac{1}{2}kw_0^2$ را که در مختصات قطبی ρ و z معرفی کردیم، راحتر است. سپس مشخصات میدان الکتریکی یک پرتو گوسی را بدست می‌آوریم.



شکل ۸.۳: شکل پرتو گوسی که از رابطه (۱۶.۳) محاسبه شده است. خطوط قرمز کمربند $w(z)$ پرتو و خطوط سیاه شعاع انحناء $R(z)$ برای مقادیر معلوم z است.

میدان الکتریکی شکل پرتو گوسی

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\left(1 + \frac{jz}{z_0}\right) - jkz\right] \qquad (۱۷.۳)$$

شعاع پرتو $w(z) = w_0\sqrt{1 + (z/z_0)^2}$ است. شکل (۸.۳) شمای میدان الکتریکی را نشان میدهد. در اصل، عبارت بالا را می‌توان حتی بصورت واضح‌تری عنوان کرد، برای مثال به‌بخش ۳.۳ مرجع[۶] یا تمرین ۶.۳ مراجعه کنید، اما در اینجا جزئیات را حذف کرده‌ایم. چند نکته هست که ذکر آن در باره رابطه (۱۷.۳) ارزشمند است:

- پرتوهای گوسی جواب‌های مناسیب برای معادلات ماکسول نیستند. زیرا تقریب موازی‌محور آنها شامل مولفه‌های امواج طولی نیز هستند.
- کانونی کردن قوی پرتو، مربوط به‌مقادیر کوچک w_0 است، در نتیجه منجر به‌عدم تمرکز سریع میدان‌ها می‌شود.
- با توجه به‌پرتوهای بدون تمرکز، پرتو گوسی یک تغییر فاز را نشان می‌دهد، که معمولاً به‌عنوان تغییر فاز گوی[۹] نشان داده می‌شود.

مودهای لیزر

پرتوهای گوسی اغلب به‌عنوان تقریبی عالی برای مودهای لیزر هستند که می‌توانند در فواصل دور بدون پاشندگی قابل توجه در جهت عرضی منتشر شوند. برای مودهای لیزری مرتبه بالاتر اغلب بین مودهای عرضی مختلف تمایز قائل می‌شویم.
مودهای هرمیت-گوسی. این مودها معمولاً از لیزرهائی با کاواک مستطیلی و آینه‌های انتهائی بیرون می‌آیند. مودها با m و n گره[۱۰] در جهت x و y می‌توانند از مود اصلی معادله (۱۶.۳) برطبق رابطه زیر تولید شوند:

$$E^H_{mn}(x,y,z) = w_0^{m+n}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n}E(x,y,z). \qquad (۱۸.۳)$$

ارزیابی مشتق‌ها را می‌توان با توجه به‌این نکته ساده کرد که چندجمله‌ای‌های حاصل از x و y دقیقاً چندجمله‌ای هرمیت هستند. شکل (۹.۳) چند شکل میدان انتخاب شده را نشان می‌دهد.
مودهای لاگور-گوس این مودها بطور معمول از لیزرهای با کاواک دایره‌ای و آینه‌های انتهائی خارج می‌شود. آنها را می‌توان به‌شیوه مشابه از رابطه زیر بدست آورد

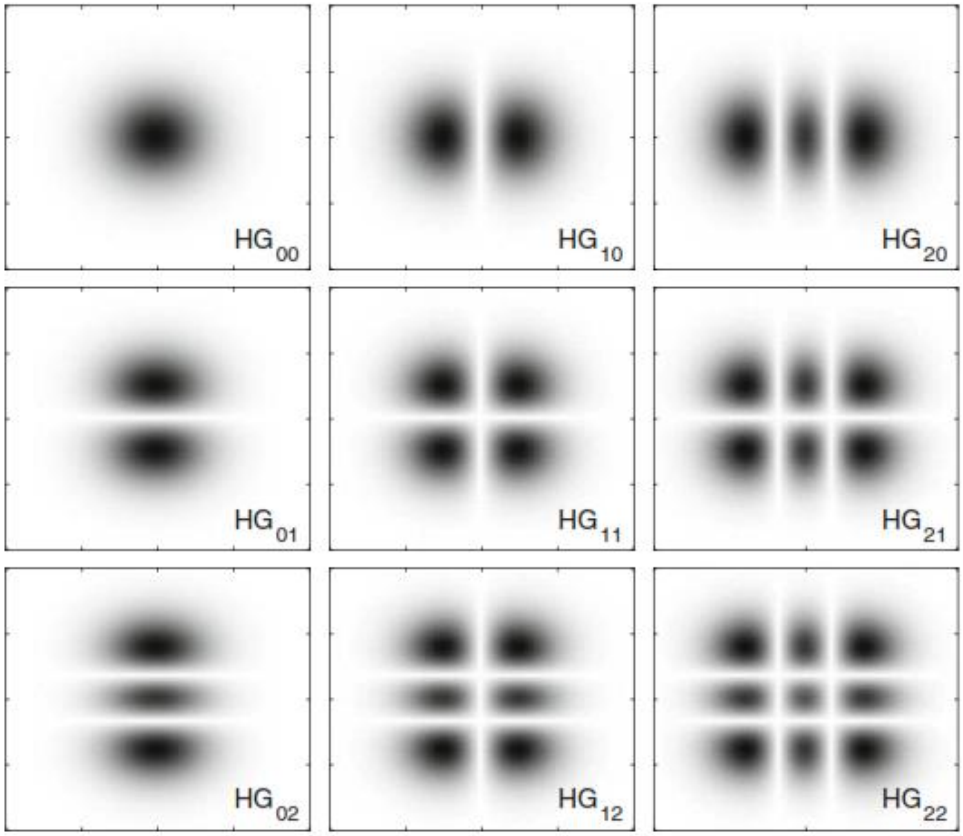
$$E^L_{mn}(x,y,z) = k^n w_0^{2n+m} e^{-jkz}\left(\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \partial^n \partial z^n e^{jkz} E(x,y,z). \qquad (۱۹.۳)$$

۵.۳ میدان‌های بشدت کانونی پرتو لیزر

سرانجام پرتو هرمیت- گوسی و لاگور-گوسی بشدت کانونی را از درون یک عدسی با روزنه عددی بالا در نظر می‌گیریم. با نمایش طیف زاویه‌ای میدان‌های کانونی که توسط رابطه (۱۳.۳) داده می‌شود شروع کرده و چند تقریب را معرفی می‌کنیم:

- تابش میدان دور بر کره مرجع گوسی بوسیله مود لیزر $\mathbf{E}(x,y,z=0)$ تقریب زده می‌شود که تقریبی عالی است زیرا پاشندگی پرتو لیزر در جهت عرضی معمولاً بسیار کوچک است.
- ضریب انتقال عدسی تقریباً یک است.
- برای پرتو لیزر بردار قطبش را ϵ درنظر می‌گیریم.

[۹] Gouy phase shift
[۱۰] Node



شکل ۹.۳: چند نمونه انتخابی از پرتو هرمیت-گوسی، رابطه (۱۸.۳). مقادیر قدرمطلق میدان‌های الکتریکی در صفحه $z = 0$ ترسیم شده است.

میدان لیزر ارسالی را مستقیماً پس از عبور از کره مرجع گوسی درنظر گیرید:

$$\mathbf{E}_{inc}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \cos^{1/2}\theta E^H_{mn}(f \sin\theta, \phi, 0)\mathbb{R}^{foc} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$$

که در آن n_{inc} و n بترتیب ضرایب شکست سمت لیزر وارده و نقطه کانونی، و f فاصله کانونی عدسی است. $\mathbb{R}^{foc}$ ماتریس تبدیل رابطه (۲۷.۳) است که میدان ورودی را در کره مرجع منتشر می‌شود و $\rho = f \sin\theta$ مختصات استوانه‌ای پرتو لیزر ورودی را با مختصات کروی برای کره مرجع مربوط می‌کند. در این صورت میدان‌های کانونی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

میدان‌های بشدت کانونی پرتو لیزر

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\rho,\phi,z) &= \frac{jkfe^{jkf}}{2\pi}\sqrt{\frac{n_{inc}}{n}}\int_0^{\theta_{max}}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta d\theta \\ &\times\int_0^{2\pi}d\phi\mathbf{E}_{inc}(\theta,\phi)e^{jkz\cos\theta}e^{-jk\rho\sin\theta\cos(\phi-\varphi)}.\end{aligned} \tag{۲۰.۳}$$

اجازه دهید بطور خلاصه محاسبه این گونه انتگرال‌ها را در مثال مود اصلی با موج وارده با بردار قطبش $\hat{\mathbf{x}}$ بحث کنیم،

$$\mathbf{E}_{00}^{H} = E_0 e^{-f^2\sin^2\theta/w_0^2}\hat{\mathbf{x}}$$

امحاسبه رابطه (۲۰.۳) بقرار زیر است.

- بردار قطبش در مختصات دکارتی بیان شده است.
- از اتحادهای مثلثاتی برای جملات $\mathbb{R}^{foc}$ که بصورت $\cos n\phi$ و $\sin n\phi$ ناشی شوند استفاده شده است. به‌رابطه (۲۷.۳) مراجعه کنید.
- انتگرال‌ها در زاویه سمت را می‌توان با استفاده از اتحادهای زیر انجام داد.

$$\int_0^{2\pi}\left\{\begin{array}{c}\sin n\phi\\ \cos n\phi\end{array}\right\}e^{jx\cos(\phi-\varphi)}d\phi = 2\pi j^n J_n(x)\left\{\begin{array}{c}\sin n\phi\\ \cos n\phi\end{array}\right\} \tag{۲۱.۳}$$

  که در آن $J_n(x)$ تابع بسل مرتبه nام است.
- سایر انتگرال‌های باقیمانده یک بعدی نسبت به θ را بروش عددی حل می‌کنیم

با بیان بردار قطبش، در مختصات دکارتی شروع کرده و برای بدست آوردن $t^{\rho}=t^{\phi}=1$ از اتحادهای مثلثاتی تمرین ۴.۳ استفاده می‌کنیم.

$$\mathbb{R}^{foc}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}(1+\cos\theta)-(1-\cos\theta)\cos 2\phi\\ -(1-cos\theta)\sin 2\phi\\ -2\sin\theta\cos\phi\end{array}\right)$$

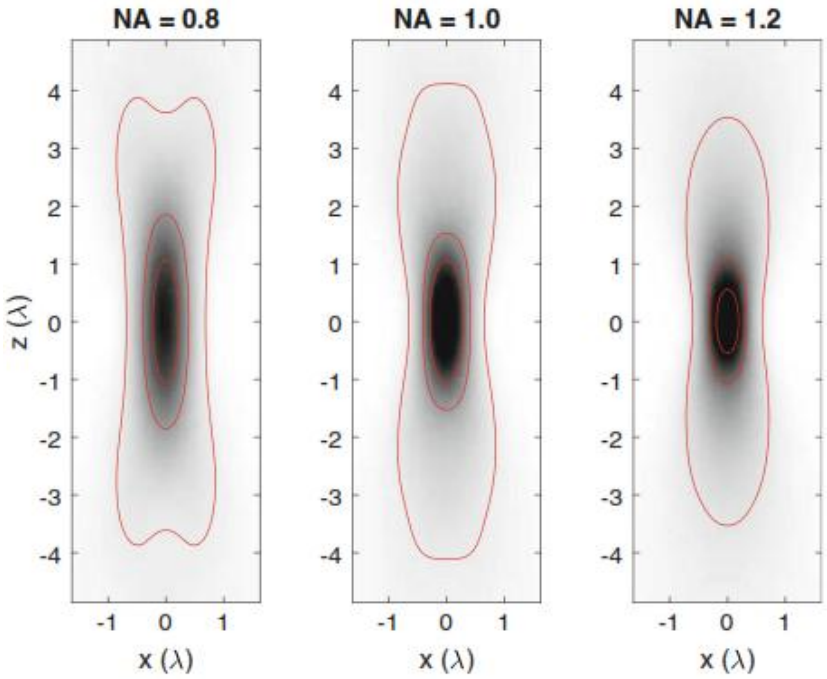
در آخر تابع زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{I}_m\left(g(\theta)\right) = j^n\int_0^{\theta_{max}}e^{-f^2\sin^2\theta/w_0^2}e^{-jkz\cos\theta}J_n(k\rho\sin\theta)g(\theta)\sin\theta\cos^{1/2}\theta d\theta \tag{۲۲.۳}$$

بنابراین، میدان مود اصلی لیزر که به‌شدت کانونی شده است را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(\rho,\phi,z) = -jkfe^{jkf}\sqrt{\frac{n_{inc}}{n_{foc}}}\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}\mathcal{I}_0(1+\cos\theta)-\mathcal{I}_2(1-\cos\theta)\cos 2\phi\\ -\mathcal{I}_2(1-cos\theta)\sin 2\phi\\ -\mathcal{I}_1(\sin\theta)\cos\phi\end{array}\right) \tag{۲۳.۳}$$

که محاسبه آن مستلزم محاسبه عددی سه انتگرال $\mathcal{I}_0$، $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ است. شکل (۱۰.۳) نمودار شدت محاسبه شده را از رابطه (۲۳.۳) برای NAهای مختلف نشان می‌دهد. بطوریکه مشاهده می‌شود، با افزایش روزنه عددی، میدان‌ها بشدت متمرکز شده، اما وقتی از $z = 0$ دور می‌شود سریع‌تر واگرا می‌شود. در فصل بعد به‌نقاط بشدت کانونی شده لیزر در زمینه تله نوری[۱۱] باز می‌گردیم.



شکل ۱۰.۳: کانونی کردن مود لیزر E_{00}^{H} بازاء مقادیر مختلف NA که از رابطه (۲۳.۳) محاسبه شده است. کانتورها را بازاء 10، 15، 80 درصد شدت بیشینه همراه با شکل شدت در صفحه xz گزارش می‌کنیم. از طول موج $\lambda_0 = 620\ nm$ با ضریب شکست محیط 1.33 استفاده شده است.

۶.۳ جزئیات تبدیل تصوربرداری و کانونی کردن

در این بخش جزئیات استخراج معادلات (۱۰.۳) و (۱۳.۳) که تصویر بردای و کانونی کردن میدان را توصیف می‌کند ارائه می‌کنیم.

۱.۶.۳ کانونی کردن میدان‌های دور

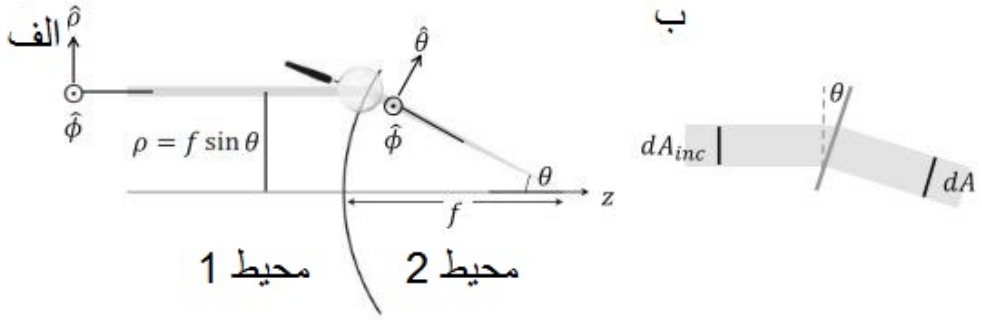
بحث خود را با حالت کانونی کردن شروع می‌کنیم. چیدمانی که در نظر خواهیم گرفت در شکل (۱۱.۳) نشان داده شده و شامل میدان‌های دور وارد بر کره مرجع گوسی است که آنها

[۱۱] Optical Trapping

بسوی کانون هدایت می‌شوند. برای دو محیط امپدانس، ضریب شکست و دستگاه مختصات زیر را استفاده می‌کنیم.

محیط ۱	$n_{inc}, Z_{inc},$	مختصات استوانه ای	ρ, ϕ, z
محیط ۲	$n, Z,$	مختصات کروی	r, θ, ϕ

نکته مهم، مختصات سمت در هر دو دستگاه منطبق هستند. این به‌این دلیل است که هر دو



شکل ۱۱.۳:

دستگاه محور z را به‌عنوان محور نوری شریک هستند. با در نظر گرفتن تبدیل هنگام رفتن از عدسی به‌سمت کانون شروع می‌کنیم. نمای دقیق در شکل (۱۱.۳) نمایش داده شده است. ابتدا متوجه می‌شویم که مقطع عرضی دو محیط طبق $\cos\theta = dA_{inc}/dA$ بهم مربوط هستند. بنابراین، از قانون توان معادله (۹.۳) بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2}Z_{inc}^{-1}|\mathbf{E}_{inc}|^2 dA = \frac{1}{2}Z^{-1}|\mathbf{E}|^2\frac{dA}{\cos\theta}$$

اشعه ارسالی دارای دامنه زیر است:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}}\cos^{1/2}\theta|\mathbf{E}_i nc| \tag{۲۴.۳}$$

که در آن نفوذپذیری را μ_0 فرض کرده و امپدانس را بر حسب ضریب شکست بیان می‌کنیم. در مرحله بعد، میدان‌های طرف عدسی (محیط ۱) را به‌مولفه شعاعی و سمت تجزیه می‌کنیم:

$$\mathbf{E}_{inc} = (\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\mathbf{E}_{inc})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\mathbf{E}_{inc})\hat{\boldsymbol{\phi}} = E_{inc}^{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + E_{inc}^{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

مولفه z صفر است زیرا امواج الکترومغناطیسی عرضی هستند. همانطور که در شکل (۱۱.۳) مشاهده می‌شود، وقتی از کره مرجع گوسی عبور می‌کند مولفه‌های سمت بیک دیگر تبدیل می‌شوند در حالی که مولفه $\hat{\rho}$ به $\hat{\theta}$ تبدیل می‌شود. برای این انتقال مولفه $\hat{\phi}$ دارای مشخصه TE است در حالی که مولفه $\hat{\rho}$ دارای مشخصه TM است. با جمع کردن تمام نتایج میدان‌های الکتریکی تبدیل شده زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}}\cos^{1/2}\theta\left(t^{\rho}E_{inc}^{\rho}\hat{\boldsymbol{\theta}} + t^{\phi}E_{inc}^{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{۲۵.۳}$$

که در آن t^ρ و t^ϕ ضرایب انتقال برای TE و TM استفاده کردیم. در محاسبات خود همواره این ضرایب را با یک تقریب می‌زنیم

ماتریس تبدیل

به‌نظر میرسد انجام کارهای اضافی در این مرحله راحت است. بطور خاص، بدنبال ماتریس تبدیل $\mathbb{R}^{foc}$ هستیم که بما اجازه میدهد معادله (۲۵.۳) را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}}\cos^{1/2}\theta\ \mathbb{R}^{foc}\cdot\mathbf{E}_{inc}.$$

با کار روی یک بردار، ماتریس $\mathbb{R}^{foc}$ کارهای زیر را انجام می‌دهد:

- بردار را روی پایه اولین دستگاه مرجع تصویر می‌کند.
- ضرایب انتقال TE و TM را اضافه می‌کند، و
- بردار را دوباره در پایه دستگاه مرجع دوم بسط می‌دهد

برای ارائه مفید ماتریس تبدیل، باید دو دستگاه مختصات را به‌هم مربوط کنیم. در این حالت زوایای سمت یکسان هستند، در حالی که برای مختصات دیگر از $\rho = f\sin\theta$ استفاده می‌کنیم. ماتریس تبدیلی که خواص بالا را داشته باشد می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$\mathbb{R}^{foc} = t^\rho\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}^T\right) + t^\phi\left(\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}^T\right),$$

که در آن T نشانده ترانهاده (ترانسپوزه)[۱۲] جمله قبلی است. برای محاسبه صریح ماتریس، بردارهای واحد مختلف را در مختصات دکارتی بیان می‌کنیم. برای مشاهده جزئیات به‌تمرین ۳.۳ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\phi\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\ \hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin\phi\ \hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\ \hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\phi\cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\cos\theta\ \hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\ \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

سپس بلافاصله به**ماتریس تبدیل عدسی کانونی** می‌رسیم که میدان‌ها را قبل و بعد از عبور از کره مرجع گوسی از طریق رابطه زیر بهم مربوط می‌کند.

$$\mathbb{R}^{foc} = \begin{pmatrix} t^\rho\cos^2\phi\cos\theta + t^\phi\sin^2\phi & \frac{1}{2}(t^\rho\cos\theta - t^\phi)\sin 2\phi & 0\\ \frac{1}{2}(t^\rho\cos\theta - t^\phi)\sin 2\phi & t^\rho\sin^2\phi\cos\theta + t^\phi\cos^2\phi & 0\\ -t^\rho\cos\phi\sin\theta & -t^\rho\sin\phi\sin\theta & 0\end{pmatrix} \tag{۲۷.۳}$$

چگونه میدان‌های کانونی را محاسبه کنیم. فرض کنید که میدان دور $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$ بعداز عبور از کره مرجع گوسی به‌شعاع کانونی f می‌شناسیم. در ادامه نحوه محاسبه میدان‌ها در موقعیت طرف کانون (محیط ۲) را نشان می‌دهیم. نقطه شروع معادله (۲۴.۳) است که میدان‌های الکتریکی را به‌مولفه‌های فوریه از طریق رابطه زیر بهم مربوط می‌کند.

[۱۲] Transpose

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\int_{k_x^2+k_y^2<k_{max}^2} e^{-j(k_x x+k_y y-k_z z)}\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x,k_y)dk_x dk_y$$

که در آن k_{max} عدد موج قطع است که بوسیله زاویه بازکننده عدسی تعیین می‌شود. توجه کنید که در نما برای جمله $k_z z$ علامت منفی انتخاب کردیم زیرا اکنون در مقایسه با نمایش طیف زاویه‌ای رابطه (۲۴.۳) انتشار معکوس شده است، یعنی از کره مرجع گوسی بسوی کانون است. در مرحله بعد از معادله (۲۸.۳) استفاده می‌کنیم که میدان‌های دور را به‌مولفه‌های فوریه مرتبط می‌کند،

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}=2\pi j k_z\ \tilde{\mathbf{E}}_0(k\hat{r}_x,k\hat{r}_y)$$

این را عبارت را می‌توانیم ترکیب کنیم:

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{-j}{2\pi}\int_{k_x^2+k_y^2<k_{max}^2} e^{-j(k_x x+k_y y-k_z z)}\mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}})\frac{1}{k_z}dk_x dk_y \qquad (۲۸.۳)$$

برای ادامه کار، دو تغییر مختصات را انجام می‌دهیم. برای انتگرال‌گیری فضای-k مختصات کروی را معرفی می‌کنیم:

$$k_x=k\sin\theta\cos\phi,\quad k_y=k\sin\theta\sin\phi,\quad k_z=k\cos\theta$$

انتگرال‌گیری دو بعدی $dk_x dk_y$ را باید با استفاده از ژاکوبین تبدیل کرد:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial k_x}{\partial\theta} & \frac{\partial k_x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial k_y}{\partial\theta} & \frac{\partial k_y}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k\cos\theta\cos\phi & -k\sin\theta\sin\phi\\ k\cos\theta\sin\phi & k\sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}=k^2\sin\theta\cos\theta$$

بنابراین، $k_z^{-1}dk_x dk_y=k\sin\theta d\theta d\phi$ است. برای موقعیت کانون، به‌مختصات استوانه‌ای روی می‌آوریم؛ $(x,y,z)=(\rho\cos\phi,\rho\sin\varphi,z)$. با این تغییر، می‌توانیم جمله نمائی (۲۸.۳) را بصورت زیر بیان کنیم:

$$k_x x+k_y y=k\sin\theta\cos\phi\rho\cos\varphi+k\sin\theta\sin\phi\rho\sin\varphi=k\rho\sin\theta\cos(\phi-\varphi)$$

این تبدیل مختصات بما اجازه می‌دهد تا رابطه (۲۸.۳) بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathbf{E}(\rho,\varphi,z)=\frac{-jk}{2\pi}\int_0^{\theta_{max}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\ \mathbf{F}(\theta,\phi)e^{jkz\cos\theta}e^{-jk\rho\sin\theta\cos(\phi-\varphi)} \qquad (۲۹.۳)$$

که در آن θ_{max} زاویه باز کننده عدسی است. مرحله آخر ارتباط میدان‌های دور ورودی و پس از عبور از کره مرجع گوسی از طریق ماتریس تبدیل (۲۷.۳) است:

$$\left(\frac{e^{-jkf}}{f}\right)\mathbf{F}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{n_{inc}}{n}}\sqrt{\cos\theta}\ \mathbb{R}^{foc}\cdot\mathbf{E}_{inc}(f\sin\theta,\phi)$$

با وارد کردن این میدان دور در رابطه (۲۹.۳) در این صورت ما را به‌عبارت نهائی (۱۳.۳)، که میدان ورودی $\mathbf{E}_{inc}$ را به‌میدان کانونی مربوط می‌کند، می‌رساند.

۲.۶.۳ تصویربرداری میدان‌های دور

اکنون به‌مشکل پیچیده‌تر تصویر برداری از میدان دور (شکل ۵.۳) توسط دو عدسی باز می‌گردیم. ماشین آلاتی که مجهز برای کانونی کردن میدان است بسیار شبیه به‌هم هستند. برای سه محیط ضریب شکست، امپدانس و دستگاه مختصات زیر استفاده می‌شوند:

محیط ۱	$n_1, Z_1,$	مختصات کروی	ρ_1, θ_1, ϕ
محیط ۲	$n_2, Z_2,$	مختصات استوانه ای	ρ_2, ϕ, z_2
محیط ۳	$n_3, Z_3,$	مختصات کروی	ρ_3, θ_3, ϕ

در آنجا دوباره زوایای سمت در تمام دستگاه‌های مرجع منطبق هستند. سپس اشعه را از طریق دستگاه عدسی‌ها ردیابی می‌کنیم.

- **شیئی به‌عدسی** برای انتقال اشعه از جسم بطرف عدسی، سطح مقطع عرضی را در دو محیط از طریق $\cos\theta_1 = dA_2/dA_1$ بهم مربوط می‌کنیم. بنابراین از رابطه توان (۹.۳) داریم:

$$\frac{1}{2}Z_1^{-1}|\mathbf{E}_1|^2 dA_1 = \frac{1}{2}Z_2^{-1}|\mathbf{E}_2|^2 \cos\theta_1 dA_1$$

اشعه ارسالی به‌محیط دوم دارای مقدار زیر است.

$$|\mathbf{E}_2| = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\cos^{-1/2}\theta_1 \mathbf{E}_1, | \tag{۳۰.۳}$$

که در آن دوباره تمام نفوذپذیری‌ها را μ_0 در نظر گرفته و امپدانس‌ها را برحسب ضرایب شکسا بیان می‌کنیم. وقتی از کره مرجع گوسی می‌گذریم، مولفه‌های سمت به‌یکدیگر تبدیل می‌شوند. در آنجا مولفه $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ به‌مولفه $\hat{\boldsymbol{\rho}}_2$ تبدیل می‌شود. با قراردادن تمام نتایج پیش هم، میدان الکتریکی در ناحیه عدسی را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}_2 = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\cos^{-1/2}\theta_1 \tilde{t}\left(E_1^\theta \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 + E_1^\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{۳۱.۳}$$

ضریب $\tilde{t}$ برای عبور میدان الکتریکی عرضی از فصل مشترک است.

- **عدسی به‌تصویر** برای انتقال عدسی به‌تصویر بهمان شیوه‌ای که در بخش ۳.۳ بحث شد عمل می‌کنیم، و خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}_3 = \sqrt{\frac{n_2}{n_3}}\cos^{-1/2}\theta_3\left(t^\rho E_2^\rho \hat{\boldsymbol{\theta}}_3 + t^\phi E_2^\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}\right). \tag{۳۲.۳}$$

- **شیی به‌تصویر** دو معادله بالا را می‌توان با هم ترکیب کرد تا میدان‌های روی جسم و تصویر را بر طبق رابطه زیر بهم مربوط کرد:

$$\mathbf{E}_3 = \sqrt{\frac{n_1}{n_3}}\sqrt{\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_1}}\left(t^\theta E_1^\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_3 + t^\phi E_1^\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}\right). \tag{۳۳.۳}$$

که در آن t^θ و t^ϕ ضرایب انتقال برای کل ساختار است.

شبیه با حالت کانونی کردن، اکنون می‌توانیم یک ماتریس تبدیل برای دستگاه تصویربرداری معرفی کنیم:

$$\mathbb{R}^{im} = t^{\theta}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T\right) + t^{\theta}\left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}^T\right)$$

که میدان‌های دو طرف دستگاه تصویر برداری را طبق رابطه زیر بهم مربوط می‌کند.

$$\mathbf{E}_3 = \sqrt{\frac{n_1}{n_3}}\sqrt{\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_1}}\ \mathbb{R}^{im} \cdot \mathbf{E}_1.$$

گاهی اوقات می‌توان انتگرال‌گیری را بر روی مختصات سمت به‌صورت تحلیلی انجام داد، به‌شرطی که انتگرال از شکل $\sin n\phi,\ \cos n\phi$ باشد. اما شامل مربع یا حاصل‌ضربی از توابع مثلثاتی نباشد. پس از چند دستکاری ساده، که در تمرین ۴.۳ ترسیم شده است، ماتریس تبدیل را برای عدسی‌های تصویربرداری بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{im}_{xx} &= \tfrac{1}{2}\left\{(\tilde{t}^{\theta}\cos\theta_1\cos\theta_3 + \tilde{t}^{\phi}) + (\tilde{t}^{\theta}\cos\theta_1\cos\theta_3 - \tilde{t}^{\phi})\cos 2\phi\right\} \\
\mathcal{R}^{im}_{xy} &= \tfrac{1}{2}(\tilde{t}^{\theta}\cos\theta_1\cos\theta_3 - \tilde{t}^{\phi})\sin 2\phi \\
\mathcal{R}^{im}_{xz} &= -\tilde{t}^{\theta}\cos\phi\sin\theta_1\cos\theta_3 \\
\mathcal{R}^{im}_{yx} &= \tfrac{1}{2}(\tilde{t}^{\theta}\cos\theta_1\cos\theta_3 - \tilde{t}^{\phi})\sin 2\phi \\
\mathcal{R}^{im}_{yy} &= \tfrac{1}{2}\left\{(\tilde{t}^{\theta}\cos\theta_1\cos\theta_3 + \tilde{t}^{\phi}) - (\tilde{t}^{\theta}\cos\theta_1\cos\theta_3 - \tilde{t}^{\phi})\cos 2\phi\right\} \qquad (۳۴.۳) \\
\mathcal{R}^{im}_{yz} &= -\tilde{t}^{\theta}\sin\phi\sin\theta_1\cos\theta_3 \\
\mathcal{R}^{im}_{zx} &= -\tilde{t}^{\theta}\cos\phi\cos\theta_1\cos\theta_3 \\
\mathcal{R}^{im}_{zy} &= -\tilde{t}^{\theta}\sin\phi\cos\theta_1\sin\theta_3 \\
\mathcal{R}^{im}_{zz} &= -\tilde{t}^{\theta}\sin\theta_1\sin\theta_3
\end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم کل پردازش تصویربرداری را کنار هم قرار دهیم. نقطه شروع توسط معادله (۳.۲۹) داده شده است که می‌شود:

$$\mathbf{E}_3(\rho_3,\varphi_3,z) = \frac{-jk_3}{2\pi}\times\int_0^{\theta_{3,max}}\sin\theta_3 d\theta_3$$
$$\times\int_0^{2\pi} d\phi\mathbf{F}_3(\theta_3,\phi)e^{jk_3\cos\theta_3 z}e^{-jk_3\rho_3\sin\theta_3\cos(\phi-\varphi_3)}.$$

در اینجا $\mathbf{F}_3$ میدان دور در طرف تصویر است. برای انجام این معادله، باید میدان‌های دور را بر حسب θ_1 نه θ_3 بیان کنیم. همانطور که در شکل (۵.۳) مشاهده می‌شود، فاصله اشعه مزدوج از محور نوری در سمت جسم و تصویر یکسان است و بدست می‌آید:

$$f\sin\theta_1 = f'\sin\theta_3 \qquad (۳۵.۳)$$

با گرفتن مشتق از دو طرف رابطه خواهیم داشت:

$$f\cos\theta_1 d\theta_1 = f'\cos\theta_3 \Longrightarrow d\theta_3 = \frac{f\cos\theta_1}{f'\cos\theta_3}d\theta_1 \underset{f'\gg f}{\longrightarrow} \frac{f}{f'}\cos\theta_1 d\theta_1$$

در عبارت آخر، از تقریب $\cos\theta_3 \approx 1$ استفاده شده است که معمولاً برای $f' \gg f$ صادق است. عبارت در در تابع نمائی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$k_3\rho_3\sin\theta_3 = \left(\frac{n_3}{n_1}k_1\rho_3\right)\left(\frac{f}{f'}\sin\theta_3\right) = k_1\frac{\rho}{M}\sin\theta_1$$

که در آن ضریب بزرگنمائی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$M = \frac{n_1}{n_3}\frac{f'}{f}$$

دامنه میدان‌های دور را می‌توان از طریق رابطه زیر بهم مرتبط ساخت:

$$\left(\frac{e^{-jk_3 f'}}{f'}\right)\mathbf{F}_3 \approx \sqrt{\frac{n_1}{n_3}}\cos^{-1/2}\theta_1\mathbb{R}^{im}\cdot\left(\frac{e^{-jk_1 f}}{f}\right)\mathbf{F}_1(\theta_1,\phi),$$

که در آن از تقریب $\cos\theta_3 \approx 1$ استفاده شده است. سرانجام تمام آنها را پیش هم قرار داده تا به‌رابطه (۱۰.۳) برای نگاشت از میدان‌های دور در سمت جسم به‌میدان‌های کانونی سمت تصویر، میرسیم.

شبیه سازی تصویربرداری در کامپیوتر رابطه بدست آمده در این فصل برای تصویربرداری عبارت بسیار مفیدی برای محاسبه میدان تصویر $\mathbf{E}^{im}$ وقتی میدان جسم $\mathbf{E}^{obj}$ در صفحه $z=0$ معلوم باشد، است. در ادامه فرض می‌کنیم که میدان‌های الکتریکی در موقعیت سبکه مستطیلی، همان طور که معمولاً برای محاسبات عددی صادق است، ارائه می‌شود.

$\mathbf{E}_i^{im}$ میدان تصویر در موقعیت (Mx_i, My_i)

$\mathbf{E}_i^{obj}$ میدان جسم در موقعیت (x_i, y_i)

در اینجا M بزرگنمائی دستگاه عدسی است. در این صورت رابطه تصویربرداری معادله (۱۰.۳) نگاشت خطی بین دو میدان را بر طبق رابطه زیر تدارک می‌نماید

$$E_{i\alpha}^{im} = T_{i\alpha,j\beta} E_{j\beta}^{obj} \tag{۳۶.۳}$$

که در آن α, β نمایشگر مختصات دکارتی است که از قرارداد جمع انیشتن استفاده شده است. ممکن است کسی دوست داشته باشد تا میدان‌های تصویر را با استفاده از عبارت بالا محاسبه کند، و در واقع این کار را در قسمت‌های بعدی کتاب انجام خواهیم داد. با این حال، اگر کسی از معادله (۳۶.۳) مستقیماً برای تصویربرداری تعداد بسیار زیاد n موقعیت، مثلاً در حدود یک میلیون، استفاده کند، تقریباً مطابق با وضعیت نشان داده شده در شکل (۶.۳)، متوجه می‌شوید که نگاشت محاسباتی بسیار کند می‌شود. دلیل این امر این است که تبدیل بالا شامل ضرب ماتریس است و بنابراین به n^2 عملیات نیاز دارد، یا به‌اصطلاح علوم کامپیوتر الگوریتم دارای $\mathcal{O}(n^2)$ پیچیدگی است.

خوشبختانه رویکرد متفاوتی با $\mathcal{O}(n)$ پیچیدگی وجود دارد. این مبتنی بر تبدیل فوریه سریع[۱۳] FFT است، یک آلگوریتم قابل توجه است که مجله محاسبات در علوم و مهندسیIEEE جزء ده آلگوریتم برتر قرن بیستم کنجانیده شده است[۷]. این الگوریتم اجازه می‌دهد تا تبدیل فوریه را با $\mathcal{O}(n \log n)$ پیچیدگی انجام شود که برای ضرب ماتریس بطور قابل توجهی سریعتر از $\mathcal{O}(n^2)$ است. از آنجا که تبدیل تصویر برداری ریشه عمیق در تبدیل فوریه دارد، در ادامه تصویربرداری را مجدداً مرور کرده و نحوه انجام $\mathcal{O}(n)$ عملیات را نشان خواهیم داد. اصل آن بر اساس روابط زیر است:

$$\mathbf{E}_i^{obj} \underset{FFT}{\longrightarrow} \tilde{\mathbf{E}}_i \longrightarrow \cdots \underset{FFT^{-1}}{\longrightarrow} \mathbf{E}_i^{im}.$$

با میدان‌های جسم که به‌فضای عددموج تبدیل می‌شوند شروع می‌کنیم. بعداً، با تعدادی عملیات روی مولفه‌های فوریه عمل کرده تا کارائی دستگاه عدسی را، قبل از اینکه به‌میدان‌های واقعی $\mathbf{E}_i^{im}$ باز گردیم، شبیه سازی کنیم. تبدیلات مختلف این آلگوریتم را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

- **تبدیل فوریه** این آلگوریتم با تبدیل فوریه سریع میدان‌های جسم شروع می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{E}} i\alpha^{obj} = \mathcal{F}\{\mathbf{E}^{obj}\}$$

  نکته ظریفی وجود دارد که چگونه می‌توان عددموج گسسته FFT را به‌فضای عددموج پیوسته تحت تحلیل $\mathbf{k}_i$ مرتبط کرد و خوانندگان علاقمند را برای بحث کامل به‌ادبیات تخصصی ارجاع می‌دهیم[۸].

- **میدان‌های دور طرف جسم** تبدیل فوریه میدان‌ها را می‌توان با دامنه میدان‌های دور با استفاده از رابطه (۸.۳) مربوط کرد، و خواهیم داشت

$$\mathbf{F}_{i\alpha} = 2\pi j k_{z,i} \theta_{step} (k_{max} - |\mathbf{k}_i|) \tilde{E}_{i\alpha}^{obj}$$

  که در آن $k_{max} = n_1 k_0 \sin\theta_{max} = NAk_0\theta_{step}$ و در اینجا θ_{step} تابع پله واحد هویساید است.

- **عدسی‌ها** میدان‌هائی که باید از طریق دستگاه عدسی با استفاده از نور هندسی و قانون شدت منتشر شوند، به‌رابطه (۳۳.۳) رجوع کنید،

$$\left(\frac{e^{-jk'f'}}{f'}\right) \mathbf{F}_{i\alpha}^{im} \approx \left(\frac{e^{-jkf}}{f}\right) \sqrt{\frac{n}{n'}} \cos^{-1/2}\theta_i \left(\tilde{t}_i^{\theta} F_i^{\theta} \hat{\rho}_{i\alpha} + \tilde{t}_i^{\phi} F_i^{\phi} \hat{\phi}_{i\alpha}\right).$$

  مشارکت‌های متفاوت این رابطه دارای معانی زیر است:

[۱۳] Fast Fourier Transform (FFT)

- از k و n برای طرف جسم و از k' و n' برای طرف تصویر استفاده می‌کنیم.
- بردارهای واحد $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$، $\hat{\boldsymbol{\rho}}_i = \cos\phi_i\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi_i\hat{\mathbf{y}}$ طرف جسم تعریف می‌شوند (به تمرین ۸.۳ مراجعه کنید).
- F_i^θ, F_i^ϕ تصویر بردارهای میدان دور روی بردارهای واحد.

- **میدان‌های سمت تصویر** مولفه‌های فوریه در طرف تصویر را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\tilde{E}_{i\alpha}^{im} = \frac{-j}{2\pi k'} F_{i\alpha}^{im}$$

که در آن از تقریب $k'_{i,z} \approx k'$ با توجه به‌تقریب موازی محور استفاده شده است.

- **تبدیل فوریه معکوس** سرانجام، میدان‌های تصویر را از طریق عکس تبدیل فوریه سریع بدست می‌آوریم:

$$\tilde{E}_{i\alpha}^{im} = \frac{1}{M^2}\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\mathbf{E}}^{im}\},$$

که در آن M ضریب بزرگنمائی تعریف شده در رابطه (۱۱.۳) است. عامل پیشین بدین علت است که در عبارت تبدیل میدان‌های دور به‌میدان‌های تصویر، معادله (۲۸.۳)، باید $dk'_x dk'_y$ را به $dk_x dk_y$ مربوط کنیم تا با قیاس کامل با استخراج عبارت تصویر برداری معادله (۱۰.۳)، از تبدیل معکوس فوریه استفاده کنیم.

تمرینات

این کتاب به‌همراه مجموعه‌ای از فایل‌های متلب[۱۴] ارائه می‌شود که از آنها به‌عنوان **جعبه ابزار NANOPT Toolbox** (مخفف کلمه"نانو اُپتیک") یاد می‌کنیم و می‌توانید آنها را در صفحه وب[۱۵] ناشر یا صفحه وب نویسنده در دانشگاه گراتس[۱۶] بارگیری کنید. جعبه ابزار همراه با شرح شیوه نصب و استفاده از آن ارائه می‌شود. کُد[۱۷] تا حد امکان ساده و ابتدائی است و تمرکز اصلی نمایش نحوه اجرای روش‌های خاصی را که در این کتاب مورد بحث قرار گرفته به‌صورت عددی پیاده‌سازی کرد. چندین تمرین کتاب در جعبه ابزار اجرا می‌شود و معمولاً به‌فایل‌های خاصی اشاره می‌کنیم که باید توسط خواننده اصلاح شوند.

- **تمرین ۱** با استفاده از فایل جعبه ابزار نانو اُپتیک demomicron01.m، شکل (۳.۳) را بدست آورید. برای تحقیق نکات زیر، کد اصلی را اصلاح کنید:

  ۱. اگر دو قطبی ها در جهت xها باشند، چه اتفاق می‌افتد؟ میدان‌ها را در همان صفحه z مانند شکل (۳.۳) محاسبه کنید.

  ۲. اگر اندازه حروف با ضریب ده افزایش یابد، چه اتفاق می‌افتد؟

- **تمرین ۲** با استفاده از فایل جعبه ابزار نانو اُپتیک demomicron02.m، شکل (۶.۳) را بدست آورید. برای تحقیق نکات زیر، کد اصلی را اصلاح کنید:

[۱۴] MATLAB
[۱۵] Webpage
[۱۶] University of Graz
[۱۷] Code

۱. اگر دو قطبی ها در جهت xها باشند، چه اتفاق می‌افتد؟ همان مقدار NA شکل (۳.۳) استفاده کنید.

۲. اگر اندازه حروف با ضریب ده افزایش یابد، چه اتفاق می‌افتد؟

۳. در مقداردهی اولیه نمایش طیف زاویه‌ای میدان‌ها را با $k_x \leq 0$ تا صفر تنظیم کنید. این تصویر چگونه تغییر می‌کند؟ نتیجه را تفسیر کنید.

- **تمرین ۳** در مختصات کروی (ρ, ϕ, θ)، از بردار $\mathbf{r}$ شروع کرده و روابط زیرا را محاسبه کنید.

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{d\mathbf{r}}{d\rho}, \quad \boldsymbol{\phi} = \frac{d\mathbf{r}}{d\phi}, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}.$$

هر بردار را بر نورم خودش تقسیم کرده و بردارهای واحد را محاسبه کرده و نتیجه را با رابطه (۲۶.۳) مقایسه کنید.

- **تمرین ۴** با استفاده از نتایج تمرین ۳.۳ ماتریس تبدیل $\mathbb{R}^{foc}$ رابطه (۲۷.۳) را بدست آورید. می‌توانید از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده کنید.

$$\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi, \quad \cos^2\phi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\phi), \quad \sin^2\phi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\phi).$$

- **تمرین ۵** شکل میدان الکتریکی رابطه (۱۶.۳) را برای پرتو گوسی بدست آورید. برای این کار از انتگرال گوسی تمرین ۴.۱ استفاده کنید.

- **تمرین ۶** ثابت کنید که شکل میدان الکتریکی برای پرتو گوسی رابطه (۱۷.۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\left(-jkz - \eta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}\right)\right]$$

که شعاع شکل‌موج $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$ و تصحیح فاز $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$ است.

- **تمرین ۷** با استفاده از فایل جعبه ابزار نانو اُپتیک demomicron02.m و demomicron04.m میدان‌های کانونی شده شکل ۱۰.۳) را تحقیق کنید.

۱. وقتی مقدار NA تغییر کند چه اتفاق می‌افتد؟

۲. وقتی مرتبه مودهای لیزر تغییر کند چه اتفاق می‌افتد؟

۳. از نظر عددی نشان دهید که شدت نور لیزر کانونی شده در صفحه xy به z بستگی ندارد. این نتیجه را تفسیر کنید.

- **تمرین ۸** ثابت کنید که برای ماتریس تبدیل برای تصویر و برای $f' \gg f$، مولفه $\hat{\theta}$ در سمت جسم به‌مولفه $\hat{\rho}$ در سمت تصویر، تبدیل می‌شود. آن از رابطه (۳۴.۳) با قرار دادن $\sin\theta_3 \approx 0$ و $\cos\theta_3 \approx 1$ بدست می‌آید.

فصل ۴

تقارن و نیروها

بدون امی نوتر[۱] وقضیه مشهور او کجا بودیم؟ او به‌علم فیزیک با مرتبط کردن تقارن به‌قوانین بقاء و بر عکس، یک اصل راهبردی ضروری داده است.

در این فصل مفاهیم قضیه نیتر[۲] را برای معادلات ماکسول مورد بحث قرار می‌دهیم. در فضای آزاد، مومنتوم، مومنتوم زاویه‌ای، و انرژی امواج الکترومغناطیسی مقادیر حفظ شده[۳] هستند. در حضور ماده می‌توان از این حقیقت که الکترودینامیک یک نظریه میدان است، بهره برد. فرض کنید تمام مواد مورد بررسی در حجم معین Ω قرار دارند. با تعیین شار مومنتوم، مومنتوم زاویه‌ای یا انرژی از طریق مرز $\partial\Omega$ که حجم را محصور می‌کند، بلافاصله می‌توانیم اندازه مقادیر انتقال یافته از نور به‌ماده و یا بر عکس را بدست آوریم. تحلیلی که در این فصل ارائه شده است مستقیماً بر معادلات ماکسول استوار است و این مزیت را دارد که رویکرد ما را ساده کرده اما این عیب را دارد که اتصال آن به‌تقارن در مقایسه با سایر طرح‌ها، به‌ویژه آنهائی که بر اساس توابع لاکرانژ[۴] هستند، کمتر آشکار است.

۱.۴ نیروهای نوری

یک فوتون مومنتوم $\hbar k$ را حمل می‌کند. برای نوری با طول‌موج $600\ nm$ تقریباً داریم:

$$\hbar k \approx 10^{-34}\frac{2\pi}{600\times 10^{-9}} \approx 10^{-27} mkgs^{-1} \tag{۱.۴}$$

هرگاه نور توسط جسم دی‌الکتریک پراکنده[۵] یا پراش[۶] شود، بخشی از مومنتوم فوتون از نور به‌ماده منتقل می‌شود. در حالی که نیروهای نور نقش مهمی در اجسام ماکروسکوپی ندارند، می‌توانند تاثیر قابل توجهی بر اجسام نانو و کوچک داشته باشند. نیروهای معمولی تولید شده توسط پرتور لیزر بشدت کانونی شده می‌توانند در محدوده فمتو تا پیکو نیوتن باشند، که برای

[۱] Emmy Noether
[۲] Noether's theorem
[۳] Conserved Quantities
[۴] Lagrange functions
[۵] Scattered
[۶] Diffracted

به‌دام انداختن ذرات با وسائل نوری کاملاً کافی است. در دو دهه گذشته موچین نوری[۷] برای به‌دام انداختن و دستکاری ذرات میکروسکوپی پدیدار شده است. بعداً در مورد چند کاربرد انتخابی بحث خواهیم کرد، اما خوانندگان علاقمند را بر کسب جزئیات بیشتر به‌مراجع [۹، ۱۰] ارجاع می‌دهیم.

اصول اساسی تله نوری[۸] را می‌توان بر اساس معادلات ماکسول و تقارن‌های زیرین آن به‌خوبی درک کرد. در این فصل نیروهای نوری را در سه چهارچوب مختلف شرح خواهیم داد.

- **تقریب دوقطبی** برای ذرات خیلی کوچکتر از طول‌موج می‌توان از تقریب دوقطبی استفاده کرده و ذرات قطبی شده را در حضور میدان‌های نوری قوی به‌عنوان یک دوقطبی نقطه‌ای توصیف کرد. برای جزئیات بیشتر به‌بخش ۱.۱.۴ مراجعه کنید.
- **نور هندسی** برای ذرات خیلی بزرگتر از طول‌موج می‌توان از چهارچوب نور هندسی استفاده کرد که شبیه حالت کانونی کردن نور است که در فصل قبلی بحث شد. برای جزئیات به‌بخش ۴.۱.۲ مراجعه کنید.
- **نور موجی** برای ذرات با اندازه متوسط باید از معادلات کامل ماکسول استفاده کرد. همان طور که در بخش ۵.۴ بحث خواهد شد، نیروها را می‌توان از تانسور تنش[۹] ماکسول بدست آورد.

۱.۱.۴ تقریب دوقطبی

ابتدا یک ذره قطبی شده با اندازه بسیار کوچکتر از طول موج نور را در نظر بگیرید. بعداً مشخص می‌کنیم که چگونه این ذره قطبی می‌شود، در حال حاضر کافی است فرض کنیم که دارای مقداری گشتاور دو قطبی $\mathbf{p}$ است. به‌عنوان یک مدل کلی، دو قطبی را با دو ذره با بار $\pm q$ توصیف می‌کنیم که توسط بردار فاصله $\mathbf{s}$ از هم جدا شده‌اند (شکل ۱.۴). گشتاور دو قطبی $\mathbf{p} = q\mathbf{s}$ است و مختصات مرکز جرم را با $\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم. با ایت کار، بارها، مختصات و سرعت دو ذره تشکیل دهنده دوقطبی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$q_1 = -q, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \tfrac{1}{2}\mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}} - \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}$$

$$q_2 = +q, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \tfrac{1}{2}\mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}} + \tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}$$

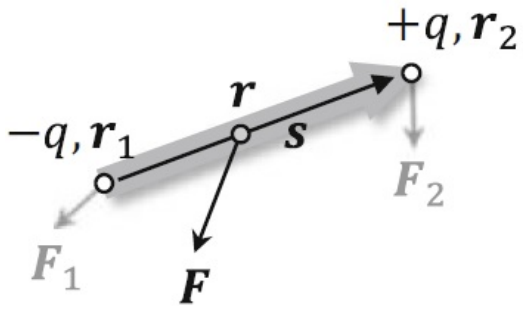
نیروی الکترومغناطیسی و بین اتمی $\mathbf{f}$ که بر روی دو ذره اثر می‌کند خواهد بود:

$$\mathbf{F}_1 = -q\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_1)\right] + \mathbf{f}_{12}$$

$$\mathbf{F}_2 = +q\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)\right] + \mathbf{f}_{21}$$

برای دوقطبی‌های به‌اندازه کافی کوچک می‌توان میدان الکتریکی را در اطراف مرکز جرم $\mathbf{r}$

[۷] Optical tweezers
[۸] Optical Trapping
[۹] Maxwell stress tensor



شکل ۱.۴: نیروی وارده بر دو قطبی. دو قطبی دو بار $\pm q$ است که در موقعیت $\mathbf{r}_{1,2}$ قرار دارد. فاصله نسبی بردار $\mathbf{s}$ و مرکز جرم مختصات $\mathbf{r}$ است.

بسط داد.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} \pm \frac{1}{2}\mathbf{s}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial r_k} s_k = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{2}(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

با عبارتی مشابه برای میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ بدست می‌آید. برای محاسبه کل نیروی وارد بر دو قطبی، متوجه می‌شویم که نیروهای بین‌اتمی به‌صفر می‌رسند، $\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} = 0$، در حالی که مجموع نیروهای الکترومغناطیسب برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -q\left[\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{E} + \left(\dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}\right)\times\left(\mathbf{B} - \frac{1}{2}(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{B}\right)\right] \\ &\quad +q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{2}(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{E} + \left(\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}\right)\times\left(\mathbf{B} + \frac{1}{2}(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{B}\right)\right].\end{aligned}$$

در اینجا و در ادامه وابستگی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ به $\mathbf{r}$ را حذف می‌کنیم و عبارت بالا به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E} + \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{B} + \dot{\mathbf{r}}\times(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{B}. \tag{۲.۴}$$

جمله دوم را می‌توان بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}\times\mathbf{B} = \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{B} + \mathbf{p}\times\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial r_k}\dot{r}_k + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) = \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{B} - \mathbf{p}\times(\nabla\times\mathbf{E}) + (\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{B}.$$

از $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ که بطور ضمنی به‌مختصات $\mathbf{r}$ دو قطبی بستگی دارد استفاده و قانون فاراده را وارد کرده تا به‌عبارت آخر رسیدیم. در ادامه فرض می‌کنیم که تغییرات میدان‌ها نسبت به‌خود میدان‌ها کوچک است و حرکت دوقطبی در مقیاس زمانی نوسان میدان ناچیز است.

$$|(\hat{\mathbf{p}}\cdot\nabla)\mathbf{B}| \ll B, \qquad |\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{B}| \ll \left|\mathbf{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right|.$$

بنابراین از آخرین جمله رابطه (۲.۴) و همین طور $(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ صرفنظر می‌کنیم. با این کار خواهیم داشت:

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{p}\times(\nabla\times\mathbf{E}) + \frac{d}{dt}\mathbf{p}\times\mathbf{B}.$$

وقتی میدان‌های هارمونیک زمانی و میانگین‌گیری روی یک تناوب نوسانی را درنظر می‌گیریم، جمله مشتق زمانی صفر می‌شود. نیروی وارد بر دوقطبی $\mathbf{p}$ در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی ناهمگن می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود (به‌تمرین ۱.۴ مراجعه کنید).

نیروی نوری بر دوقطبی

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{2} Re \left\{ \sum_k p_k \nabla E_k^*(\mathbf{r}) \right\} \tag{۳.۴}$$

برای سادگی از قرارداد جمع انیشتن اشتفاده نکردیم، اما به‌طور صریح مجموع k را در مختصات دکارتی نشان دادیم.

سپس ذره قابل قطبی شدن که در حضور میدان الکتریکی گشتاور دوقطبی بدست می‌آورد را در نظر گرفتیم:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \tag{۴.۴}$$

در اینجا α قطبی شدگی ذره است. در بخش بعد این کتاب نشان خواهیم داد که چگونه این کمیت را می‌توان برای ذرات دی‌الکتریک یا فلز محاسبه کرد، اما برای حال حاضر فرض می‌کنیم که α معلوم است. با قرار دادن رابطه (۴.۴) در رابطه (۳.۴) و بطور صریح بخش حقیقی عبارت خواهیم داشت:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\alpha'}{4}(E_k \nabla E_k^* + E_k^* \nabla E_k) + \frac{-j\alpha''}{4}(E_k \nabla E_k^* - E_k^* \nabla E_k)$$

اولین جمله را می‌توان بازنویسی کرد:

$$\nabla E_k^* E_k = 2\nabla \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle$$

که در اینجا از علامت $\langle \cdots \rangle$ برای میانگین‌گیری میدان‌های هارمونیک زمانی استفاده کرده‌ایم (۳۵.۲). برای جمله دوم از تمرین ۲.۴ استفاده کردیم:

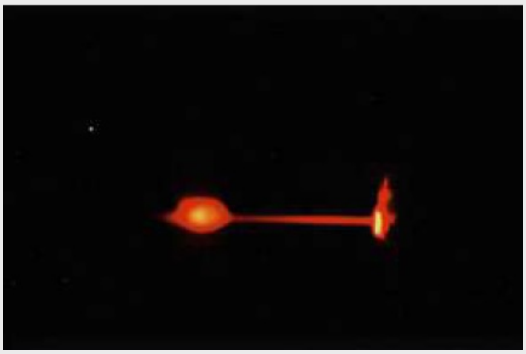
$$E_k \nabla E_k^* - E_k^* \nabla E_k = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}^*) - \mathbf{E}^* \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*). \tag{۵.۴}$$

همراه با قانون فاراده $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$ به‌عبارت نهائی برای نیرو نوری وارده بر یک دوقطبی میرسیم

نیروی نوری بر ذرات قابل قطبی شدن

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\alpha'}{2} \nabla \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle + \omega \alpha'' \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle + \frac{-j\alpha''}{4} \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*) \tag{۶.۴}$$

ملاس نوری



بنیانگذار حوزه تله نوری آرتور اشکین[آ] است. استفان چو[ب]، که در سال ۱۹۹۷ به‌دلیل "توسعه روش‌های خنک سازی و به‌دام انداختن اتم‌ها با نور لیزر" جایزه نوبل را دریافت کرد و از ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۳ در دولت پرزیدنت اوباما وزیر انرژی ایالات متحده بود، اولین بحث خود را با اشکین در مورد چگونگی به‌دام انداختن اتم‌های خنثی با استفاده از نور به‌یاد می آورد[۱۲].

در حین گفتگو با آرت اشکین، همسایه اداری در هولمدل، من درباره رویای او برای به‌دام انداختن اتم‌ها با نور آموختم. او شنونده‌ای بسیار علاقمند پیدا کرده و شروع به‌شرح مقالات تجدید چاپ شده خود کرد.

یکی از مشکلات اصلی خنک کردن اتم‌ها به‌اندازه کافی کوچک بود به‌گونه‌ای که نیروهای نوری برای نگه داشتن آنها در یک تله نوری کافی باشد، که با فناوری که امروزه تحت عنوان خنک کننده لیزری شناخته می‌شود، به‌آن دست یافتند. پس از انجام این کار، می‌توانید اتم‌های به‌دام افتاده را با چشم غیر مسلح در داخل محفظه خلاء مشاهده کنید.

اولین علائم اتم‌های محدود شده در ملاس نوری ثابت شد که زمان افزونگی چندین ده میلی ثانیه است، اما اندکی بعد مدت زمان ذخیرسازی زا بیش از یک مرتبه افزایش دادیم. بطور شکفت انگیزی، یک هفته پس از دستیابی به ملاس[ج]، با چشمان خود داخل قوطی خلاء را بجای لوله چندبرابرکننده نوری[د] ملاحظه کنیم. هنکامی که در نهایت این کار انجام شد، با مشاهده تصویر بالا پاداش خود را گرفتیم.

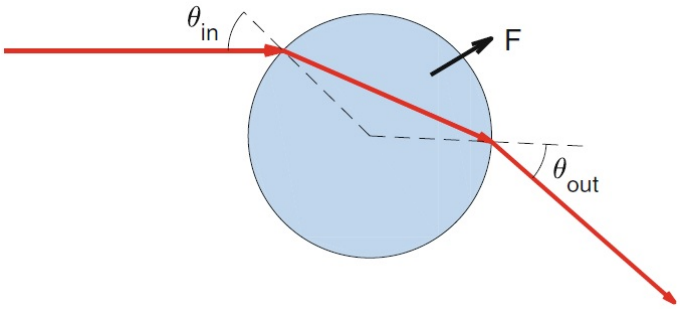
اندکی پس از اعلام جایزه نوبل فیزیک ۱۹۹۷، آرتور اشکین در مصاحبه‌ای ابراز خوشحالی برای برنده این جایزه کرد و پیش بینی کرد که تله نوری منجر به‌دو جایزه نوبل دیگر، یعنی جایزه "تراکم بوز-اینشتین(*BEC*)[ه] و اتم لیزر شود. و امیدوارم کارهای بزرگی که زیست شناشان با موچین نوری انجام می‌دهند با پاداش دیگری پاداش بگیرند." اشگین راست می‌گفت. جایزه (*BEC*) در سال ۲۰۰۱ دنبال شد، برای دومین جایزه تا سال ۲۰۱۸ طول کشید تا زمانی که اشکین آن را برای "موچین نوری و کاربرد آنها در سامانه‌های بیولوژیکی" دریافت کرد. در آن زمان او ۹۶ ساله و مسن ترین برنده تاریخ بود.

شکل بالا از مرجع [۱۲] گرفته شده است.

[آ] Arthur Ashkin
[ب] Stephen Chu
[ج] Optical Molasses
[د] Photomultiplier tube
[ه] Bose–Einstein condensation (BECs)

۲.۱.۴ نور هندسی

برای ذراتی که به‌طور قابل توجهی بزرگتر از طول‌موج هستند، می‌توان از روش نور هندسی استفاده کرد.برای مثال، شکل (۲.۴) اساس نور هندسی در یک کره دی‌الکتریک نشان می‌دهد. تحلیل ما دقیقاً ادامه بحث بخش ۳.۳ برای ردیابی در سامانه‌های عدسی نوری است. محاسبه نیروها از طریق تحلیل ردیابی ساده اشعه است که می‌توان آنرا به‌مراحل زیر تقسیم کرد:



شکل ۲.۴: ردیابی اشعه درون کره دی‌الکتریک. پرتو از سمت چپ به‌کره دی‌الکتریک برخورد کرده و هنگام عبور از آن پراشیده می‌شود. از طریق تغییر جهت پرتو (در اینجا به‌سمت پائین)، نیروئی بر کره (در اینجا به‌سمت بالا) اثر می‌کند. برای مدل سازی واقع‌بینانه‌تر، می‌توان ضرایب بازتاب و انتقال فرنل را برای ورود و خروج اشعه در مرز کره در نظر گرفت.

- **اشعه** فرض می‌کنیم که در یک مود لیزر مفروض از طریق یک عدسی با روزنه عددی بزرگ، بشدت کانونی می‌شود و شرح پرتو خود را قبل عدسی کانونی شروع می‌کنیم. در اینجا میدان‌ها در جهت z منتشر شده و توان کل بستگی به $I(x,y)$ دارد.

$$P = \int I(x,y)dxdy \approx \sum_i P_i(x_i,y_i). \tag{۷.۴}$$

میدان‌های نور وارده را با نمایش پرتوهائی با توان P_i به‌مختصات x_i, y_i تقریب می‌زنیم.

- **عدسی کانونی** در عدسی کانونی، پرتو به‌سمت کانون شکسته می‌شود. هنگام عبور از کره مرجع گوسی، میدان‌های وارده بر طبق رابطه (۳۲.۳) تبدیل می‌شوند.

- **انتقال و بازتاب** وقتی یک پرتو از مرز یک کره دی‌الکتریک می‌گذرد، که در نزدیکی کانون عدسی قرار دارد، بخشی از آن بازتاب شده و بخشی منتقل می‌شود. به‌طور کلی، می‌توانیم احتمال بازتاب و انتقال برای فصل‌مشترک مسطح را با استفاده از ضرایب فرنل که در بخش ۸.۳.۱ بحث شد، محاسبه کنیم. قدرت ورودی باید حفظ شود،

$$P_i = P_r + P_t, \tag{۸.۴}$$

که در آن P_r و P_t بترتیب توان بازتاب و عبوری هستند. علاوه براین، از قانون اسنل برای محاسبه زاویه‌ها نسبت به‌خط عمود بر کره بسمت بیرون استفاده می‌کنیم

$$\theta_i = \theta_r, \qquad n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t. \tag{۹.۴}$$

در اینجا n_i و n_t بترتیب ضریب شکست محیط اطراف و کره دی‌الکتریک هستند.

- **بازتاب داخلی** هر پرتوی که وارد کره دی‌الکتریک می‌شود، در نقطه خروجی پرتو یا منتقل شده یا بازتاب می‌شود. انتقال و بازتاب را می‌توان به‌همان شیوه‌ای که در بالا بحث شد، محاسبه کرد. به‌طور کلی، باید تصمیم گرفت که آیا بازتاب‌های متعدد داخلی را در نظر بگیریم یا خیر، اگر جواب مثبت است چند تا از آنها را باید در نظر بگیریم.

- **انتقال مومنتوم** برای هر بازتاب و انتقال پرتو در مرز کره، مومنتوم بین نور و ذره رد و بدل می‌شود. نیروی وارد بر ذره را می‌توان از تغییر مومنتوم محاسبه کرد (همچنین به‌بحث بخش ۴.۵ مراجعه کنید).

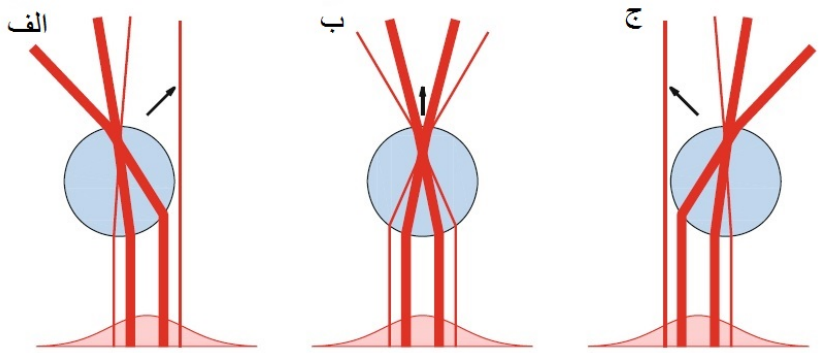
$$\mathbf{F}_{pat} = \frac{n_i P_i}{c}\hat{\mathbf{k}}_i - \frac{n_t P_t}{c}\hat{\mathbf{k}}_t \tag{۱۰.۴}$$

که در آن $\hat{\mathbf{k}}$ جهت انتشار برای پرتوهای مختلف است. نیروی تک تک پرتوها را می‌توان برای بدست آوردن کل نیروی وارد بر ذره جمع کرد، و یا می‌توان از مولفه نیروی هر کدام برای محاسبه گشتاور وارد بر ذره استفاده کرد.

- **تصویربرداری**

پرتوهای خروجی را می‌توان با یک عدسی دوم جمع آوری کرد تا اطلاعاتی در مورد موقعیت کره بدست آورد. تصویر برداری درست مانند با بحث قبل انجام می‌شود.

شکل (۳.۴) موقعیت یک کره در میدان نوری ناهمگن را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم که در وحله اول تمام پرتوهای نور بسمت بالا منتشر می‌شوند، و مطلوب ما نیروهای عرضی در جهت xها است. شکل ۳.۴)-الف، وقتی کره در سمت چپ نسبت به‌بیشینه توزیع میدان نور قرار دارد، نور بسمت چپ پراکنده می‌شود. بر طبق قانون کنش-واکنش نیوتن، نیروی در جهت مثبت xها بر کره وارد شده که آنرا به‌ناحیه شدت میدان بیشینه به‌عقب میراند. به‌طور مشابه، شکل (۳.۴)-ب، یک کره در مرکز هیپ نیروی خالصی را در جهت عرضی احساس نمی‌کند، و شکل (۳.۴)-ج کره در سمت راست بیشینه دوباره به‌منطقه بیشینه شدت میدان عقب رانده می‌شود.



شکل ۳.۴: کره دی‌الکتریک در یک میدان ناهمگن نوری. **(الف)** هنگامی که کره در سمت چپ بیشینه توزیع میدان قرار دارد، نور عمدتاً در سمت چپ پراکنده می‌شود. بر اساس قانون سوم نیوتن، کنش-واکنش، نیروئی بر کره اعمال می‌شود که آن را بطرف بیشینه رانده می‌شود. **(ب)** وقتی کره در مرکز میدان نور ناهمگن هست، نیروی خالص در جهت عرضی وجود ندارد. **(ج)** کره در سمت راست بیشینه ذوبار بسمت بیشینه رانده می‌شود.

اولین تله نوری

اندکی پس از اعلام جایزه نوبل ۱۹۹۷ به‌استیون چو، کلود-کوهن تانودجی، و ویلیام فیلیپس "برای توسعه روش‌های خنک سازی و به‌دام انداختن اتم‌ها با نور لیزری"، آرتور اشکین در مصاحبه‌ای با آزمایشگاه‌های بل نیوز در مورد کشف خود صحبت کرد. تله‌های نوری، که او بیش از ۲۰ سال بعد جایزه نوبل فیزیک ۲۰۱۸ را دریافت کرد.

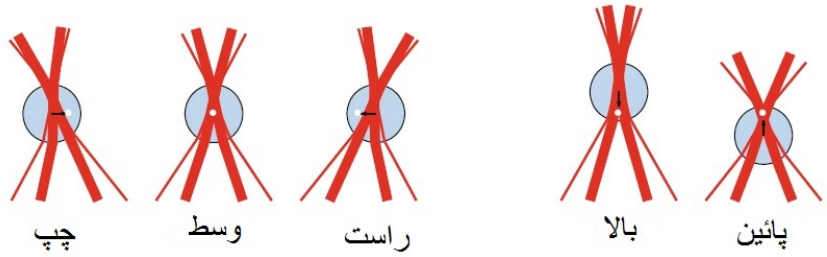
من مدتها به‌فشار تابش علاقه داشتم. حتی در کلمبیا، زمانی که من برای میلمن مگاوات مگنترون می‌ساختم، به‌این فکر می‌کردم" با این قدرت می‌توانی چه کار کنی؟ شاید بتوان به‌چیزهای کوچک فشار آورد...." بنابراین برای خودم یک میکروفن گرفتم و پالس‌های روی آن گذاشتم. این زمانی بود که من هنوز سال دوم بودم. من صدائی شنیدم و گفتم: " آه، من اثرات فشار تابش را می‌بینم" معلوم است، میدانید، من مطمئن نیستم که آیا این اثرات را مشاهده کرده‌ام یا نه، به‌هر حال، من این مسئله را هشدار دادم.

و وقتی به‌یک کنفرانس رفتم، آن را به‌یاد آوردم و مردی بود که آزمایش لیزر و ذرات کوچک را در حفره لیزر انجام داده بود، او دید که ذرات در حفره می‌مانند و به‌جلو وعقب حرکت می‌کنند و کارهای دیوانه واری انجام می‌دهد. او آنها را دونده و گول‌زن [1] نامید. مردم مجذوب این موضوع شدند. من این صحبت را شنیدم و او در آن زمان گفت: "ما فکر می‌کنیم که فشار تابشی باشد."

وقتی به‌خانه آمدم، محاسبه‌ای انجام دادم و متوجه شدم، با توجه به‌اندازه پرتو و ذرات، نمی‌تواند فشار تابشی باشد. به‌احتمال زیاد، من فکر کردم ، این است که ذرات گرم شده‌اند و این منجر به‌رفتار دیوانه واری شده است.این باعث شد دوباره به‌فشار تابش فکر کنم. تصمیم گرفتم فشار تابش را ببینم. محاسبه کردم که مقدار آن در یک کره کوچک شفاف چقدر خواهد بود. این کار را برای من آغاز کرد. کاری که من انجام دادم این بود که یک پرتو را بر روی کره‌های کوچک آب کانونی می‌کردم و آنها را در کنار هم فشار می‌دادم و به‌طرز مرموزی در دیوار اطاقک دستگاه جمع می‌شدند. من سعی کردم این را درک کنم و با استفاده از نمودارهای ساده پرتو آن را فهمیدم.

سپس، دیوار شیشه‌ای را با پرتو مخالف دیگری جایگزین کردم تا ذرات را فقط با نور در جای خود نگه دارد. من تلاش کردم و آن انجام شد. این اولین تله نوری بود. این یک کشف بسیار مهم بود. این منجر به‌دریافت جایزه نوبل استیو شد و به‌اعتقاد من، این دو جایزه نوبل دیگر را در پی خواهد داشت.

[1] Runners and Bouncers



شکل ۴.۴: به‌دام انداختن کره دی‌الکتریک در سه بعد فضائی. کره در کانون یک پرتو لیزر به‌اندازه کافی قوی قرار دارد. هر وقت از نقطه مرکزی خارج می‌شود (نقطه با رنگ سفید نشان داده شده)، نور به‌صورت نامتقارن پراکنده می‌شود و نیروئی بر کره اثر کرده که آن را به‌منطقه بیشینه شدت نور بار می‌گرداند.

۳.۱.۴ موچین نوری

اصل فوق را می‌توان برای به‌دام انداختن ذرات در هر سه بعد فضایی تعمیم داد. اصل اساسی در شکل (۴.۴) نشان داده شده است، جایی که یک کره دی‌الکتریک ادر بیشینه ناحیه یک پرتو لیزر بشدت کانونی واقع شده است. هر وقت که کره از کانون خارج می‌شود، نور اعمال شده از طریق نور پراکنده آن را به‌عقب می‌راند. توجه داشته باشید که برای کره‌های به‌اندازه کافی بزرگ، موقعیت تعادل مربوط به‌یک مرکز کره کمی جابجا شده است، به‌طوری که نیروی خالص نور پراکنده مجموعاً صفر شود.

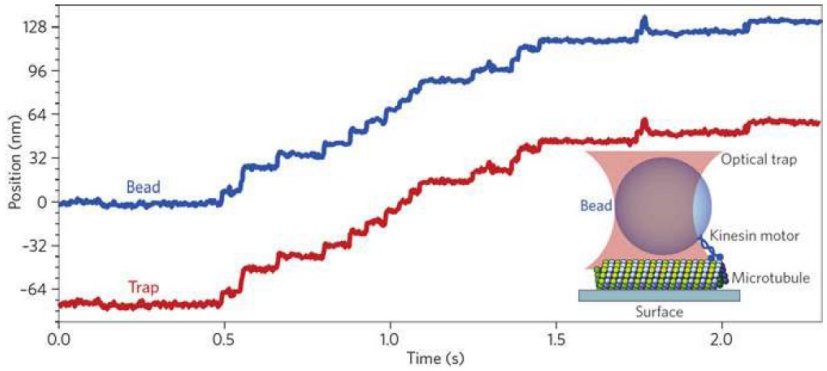
موچین نوری در گذشته مورد توجه زیادی در علوم زیستی قرار گرفته است. بویژه با پیشرفت سریع لیزر و استفاده از مدولاتورهای خاص نوری، امروزه می‌توان پتانسیل‌های تله نوری مجتمع را تولید کرده، با یک یا چند کمینه که می‌توانند جابجائی، چرخش، و تغییر شکل مورد دلخواه را انجام داد. برای بحث مفصل، خوانندگان علاقمند را به‌مطالعه مراجع [۹، ۱۱، ۱۳]، توصیه می‌کنیم.

شکل (۵.۴) یکی از چندین نمونه زیبا برای به‌دام انداختن نور را نشان می‌دهد[۱۳]. یک کره دی‌الکتریک به‌یک موتور کینسین[۱۰] متصل شده است که در امتداد یک ریز لوله[۱۱] حرکت می‌کند. با قرار دادن کره در یک تله نوری و پیروی از موقعیت آن، اطلاعاتی در مورد جزئیات انتشار موتور مولکول زیستی به‌دست می‌آید. همچنین می‌توان با بیرون کشیدن کره دی‌الکتریک از طریق جابجایی حداقل دام، نیرویی به‌سامانه وارد کرد. خطوط آبی و قرمز در تصویر انتشار در غیاب و وجود چنین بار را گزارش می‌دهند.

۲.۴ معادله پیوستگی

یک مثال اولیه برای قوانین بقاء در فیزیک توسط معادله پیوستگی ارائه می‌شود، که در ادامه به‌آن می‌پردازیم زیرا به‌عنوان نقشه‌ای برای سایر قوانین بقاء عمل می‌کند. از قانون آمپر شروع می‌کنیم، از دو طرف معادله (۱۵.۲)-د دیورژانس می‌گیریم.

[۱۰] Kinesin Motor
[۱۱] Microtubule



شکل ۵.۴: کاربردهای بیولوژیکی موچین‌های نوری در پله‌موتور کینسین و تا شدن RNA. ثبت حرکت برای یک تک موتور کینسین تحت شرایط force-clamped، با نمایش گام‌های گسسته هشت نانومتری (مسیر آبی) هنگام حرکت در امتداد ریزلوله. موقعیت تله تحت کنترل کامپیوتر برای حفظ فاصله ثابت در پشت مهره مشاهده می‌شود، در نتیجه بار چند پیکونیوتن را در جهتی که مانع حرکت می‌شود تحمل می‌کند (مسیر قرمز). شکل و زیر نویس از مرجع [۱۳] گرفته شده است.

$$\nabla \cdot \nabla \times \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

توجه کنید که عبارت صفر است زیرا دیورژانس کرل یک میدان برداری همواره صفر است. همراه با قانون گوس $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ به‌رابطه پیوستگی میرسیم:

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \tag{۱۱.۴}$$

برای درک بهتر این عبارت، خوب است که از هر دو طرف این رابطه در حجم مفروض Ω انتگرال‌گیری کرده و از قضیه گوس برای طرف چپ رابطه استفاده کنیم،

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3r = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho\, d^3r = -\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{J}\, d^3r = -\oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

بنابراین به‌شکل انتگرالی معادله (۱۱.۴) میرسیم که میگوید:

$$\frac{dQ_\Omega}{dt} = -\oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{۱۲.۴}$$

که در آن Q_Ω بار داخل حجم Ω است. مفاهیم این معادله را می‌توان به‌شرح زیر خلاصه کرد:

- **اصل بقاء بار (جهانی)** اگر حجم را به‌بی‌نهایت $\Omega \to \infty$ ببریم جمله دست راست صفر می‌شود و متوجه می‌شویم که این بار حفظ شده است.

- **اصل بقاء بار (محلی)** با این حال، معادله پیوستگی بقاء بار جهانی نیست بلکه هنوز هم می‌تواند به‌معنای نانودی بار در جائی از فضا و بلافاصله در جائی دیگر تولید شده باشد. چنین عمل وحشتناکی از راه دور توسط معادله (۱۲.۴) ممنوع است که میگوید هر زمان که بار در یک حجم تغییر کند،(سمت چپ معادله)، باید از طریق چگالی جریان محلی $\mathbf{J}$ به‌داخل یا خارج از حجم منتقل شود، (سمت راست معادله).

به‌همین دلیل، الکترودینامیک را گاهی اوقات "نظریه میدان محلی" می‌نامند. در اینجا " محلی" بدین معنی است که همه مقادیر، مانند میدان یا بار، به‌صورت محلی تغییر می‌کنند و باید به‌طریقی به‌موقعیت دیگر منقل شوند. این باعث می‌شود این رویکرد با نظریه نسبیت سازگار باشد، که می‌گوید هیچ اطلاعاتی نمی‌تواند سریعتر از سرعت نور منتشر شود. معادلات (۱۱.۴) و (۱۲.۴) به‌عنوان نقشه‌ای برای سایر قوانین بقاء خدمت می‌کنند.

۳.۴ قضیه پواین‌تینگ

در ادامه انتقال انرژی را در یک ماده خطی و بدون تلفات مطالعه خواهیم کرد. این بدین معنا نیست که این محدویت‌ها باید در همه جا در فضا اعمال شود، اما باید در حجمی باشد که به‌صراحت در انتقال شرح خواهیم داد. مواد خطی و با اتلاف در فصل هفتم بررسی خواهد شد.

تحلیل خود را با یک بار نقطه‌ای شروع می‌کنیم که با سرعت v در حضور میدانهای الکترومغناطیسی حرکت می‌کند. کار (بی‌نهایت کوچک) انجام شده توسط میدان‌های روی بار در انتشار مسافت $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$ در فاصله زمانی dt را می‌توان بصورت عبارت زیر بیان کرد:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt.$$

میدان‌های مغناطیسی را برای انجام کار بکار نبردیم زیرا نیروی $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ عمود بر $\mathbf{v}dt$ است. در این صورت داریم:

$$\frac{dW}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \Longrightarrow \frac{dW}{dt} = \int_\Omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, d^3r \tag{۱۳.۴}$$

که نتیجه خود را برای یک بار به‌یک توزیع بار تعمیم داده‌ایم. برای جزئیات میانگین‌گیری به‌فصل هفتم مراجعه کنید. سپس توزیع جریان را از طریق قانون آمپر (۳۰.۲) برای میدان‌های الکترومغناطیسی بیان می‌کنیم

$$\frac{dW}{dt} = \int_\Omega \left(\nabla \times \frac{1}{\mu}\mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E}\, d^3r$$

جمله دوم را می‌توان ساده کرد

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right),$$

و در جمله اول اتحاد بردار بکار می‌بریم (به تمرین ۳.۴ مراجعه کنید).

$$\nabla \cdot \frac{1}{\mu}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \frac{1}{\mu}\mathbf{B}\,.$$

با کنارهم گذاشتن نتایج، خواهیم داشت:

$$\frac{dW}{dt} = \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \nabla\cdot\frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)\right]\ d^3r$$

در جمله اول داخل پرانتز از قانون فاراده برای بیان $\nabla\times\mathbf{E}$ بر حسب $\mathbf{B}$ استفاده می‌کنیم و سرانجام پس از چند باز آرائی قضیه پواین‌تینگ به‌صورت انتگرالی زیر بدست می‌آید:

شکل انتگرالی قضیه پواین‌تینگ

$$\frac{dW}{dt} + \frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)\ d^3r = -\oint_{\partial\Omega}\frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{S} \qquad (۱۴.۴)$$

از قضیه گوس برای تغییر انتگرال روی جمله دیورژانس به‌انتگرال مرز استفاده می‌کنیم. این عبارت را می‌توان شبیه رابطه پیوستگی (۱۲.۴) تفسیر کرد. جملات سمت چپ برای تغییرات انرژی مکانیکی dW/dt ذخیره شده در منبع و برای انرژی الکترومغناطیسی ذخیره شده در میدان‌ها به‌حساب می‌آیند. زیر انتگرال را می‌توان به‌عنوان چگالی انرژی الکترومغناطیسی u_{em} تفسیر کرد.

$$u_{em} = \frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \qquad (۱۵.۴)$$

جمله سمت راست، عبور انرژی از طریق مرز را توصیف می‌کند، در حالی که چگالی شار انرژی را معمولاً بردار پواین‌تینگ می‌نامند.

بردار پواین‌تینگ

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad (۱۶.۴)$$

این شکل بقاء انرژی دو باره با نظریه میدان محلی سازگاری دارد. هرگاه انرژی در ناحیه مفروضی از فضا تغییر کند، باید از طریق امواج الکترومغناطیسی یا سایر انرژی مکانیکی که با dW/dt توصیف می‌شوند، انتقال یابند.

موج صفحه‌ای برای یک موج صفحه‌ای می‌توانیم نتایج بخش ۴.۲ را برای امواج صفحه‌ای هارمونیک زمانی استفاده کنیم. با توجه به $Z\mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}$ برای میانگین گیری زمانی بردار پواین‌تینگ داریم:

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}Z^{-1}|\mathbf{E}|^2\hat{\mathbf{k}}\ . \qquad (۱۷.۴)$$

برای رسیدن به‌عبارت آخر از $\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E} = 0$ استفاده شده است. این نتیجه در فصل قبل در معادله (۹.۳) برای عبور توان پرتوها در زمینه کانونی کردن میدان بکار برده شده است. می‌توانیم جلوتر

رفته و چگالی انرژی رابطه (۱۵.۴) میدان‌های مغناطیسی را با استفاده از $Z^{-1}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}$ جایگزین کرده و میانگین زمانی عبور انرژی را بدست آوریم:

$$\langle u_{em}\rangle = \frac{1}{2}Re\left(\frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \frac{\mu}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\right) = \frac{\epsilon}{2}|\mathbf{E}|^2 \ . \tag{۱۸.۴}$$

بنابراین معادله (۱۷.۴) را می‌توان به‌شکل بهتری نوشت:

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \langle u_{em}\rangle\frac{c}{n}\hat{\mathbf{k}} \ . \tag{۱۹.۴}$$

این نشان می‌دهد که برای موج صفحه‌ای، بردار پوایِن‌تینگ فقط چگالی انرژی موج است که با سرعت نور در جهت $\hat{\mathbf{k}}$ در محیط منتقل می‌شود. در اینجا n ضریب شکست است.

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$$

امواج محو شونده یک میدان الکتریکی بصورت زیر ($z>0$) در نظر گیرید.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{y}}E_0, \qquad \mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} - jk\hat{\mathbf{z}}$$

این موج در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ قطبی شده، در جهت xها منتشر و دارای مشخصه محو شوندگی در امتداد zها، جائی که میدان بطور نمائی میرا می‌شود. برای میدان مغناطیسی خواهیم داشت:

$$Zk\mathbf{H}(k_x\hat{x} - jk\hat{\mathbf{z}})\times e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{y}}E_0 = (k_x\hat{\mathbf{z}} - jk\hat{\mathbf{x}})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}E_0$$

با این رابطه، میانگین زمانی بردار پوایِن‌تینگ برابر است با:

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2Zk}Re\{\hat{\mathbf{y}}\times(k_x\hat{\mathbf{z}} - jk\hat{\mathbf{x}})\}|E_0|^2 = \frac{1}{2}Z^{-1}|E_0|^2\hat{k}_x\hat{\mathbf{x}} \ . \tag{۲۰.۴}$$

قابل توجه است که هیچ انرژی در جهت zها انتقال نمی‌یابد زیرا قسمت حقیقی میانگین گیری برابر صفر است بنابراین در امواج محوشونده انرژی انتقال پیدا نمی‌کند.

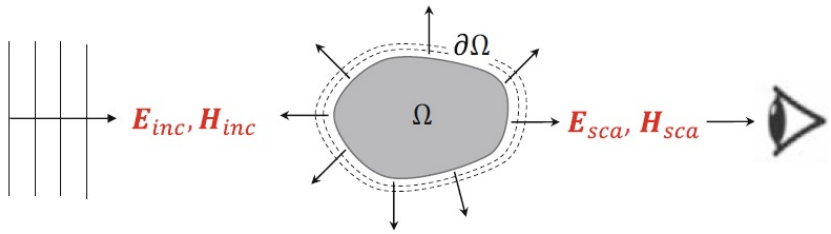
۴.۴ سطح مقطع‌های نوری

قضیه پوایِن‌تینگ نقش مهمی در محاسبه سطح مقطع نوری دارد. تصوری که در ذهن خود داریم در شکل (۶.۴) ترسیم شده است و شامل برخورد یک موج صفحه‌ای به‌یک ذره است. بخشی از انرژی توسط ذره پراکنده یا جذب می‌شود. در ادامه مرز $\partial\Omega$ که ذره را دربر گرفته است را در نظر گرفته، و عبور انرژی بدرون مرز یا خارج از آنرا ارزیابی می‌کنیم.

به‌نظر میرسد که بهتر است میدان‌های الکترومغناطیسی را به‌یک بخش ورودی وابسته به‌موج صفحه‌ای محرک و بخش دیگر پراکندگی که وابسته به‌پاسخ ذره است از یکدیگر جدا کرد.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{sca} \tag{۲۱.۴}$$

اکنون به‌آسانی می‌توان دریافت که توان جذب شده مربوط به‌عبور انرژی $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ میدان‌های کل بدرون مرز $\partial\Omega$ است، در حالی که توان پراکنده مربوط به $\mathbf{E}_{sca}\times\mathbf{H}_{sca}$ از مناطق پراکنده خارج از



شکل ۶.۴: شمای سطح مقطع نوری. ذره‌ای که در محیطی قرار دارد و با یک موج صفحه‌ای با میدان‌های $\mathbf{E}_{inc}$ و $\mathbf{H}_{inc}$ تحریک می‌شود. پاسخ ذره توسط $\mathbf{E}_{sca}$ و $\mathbf{H}_{sca}$ توصیف می‌شود. با محاسبه عبور انرژی به‌داخل و خارج از مرز $\partial\Omega$، سطح مقطع نوری را بدست می‌آوریم. تضعیف میدان‌ها در جهت موج وارده، نماد چشم سمت راست، مربوط به‌سطح‌مقطع انقراضی است که مجموع جذب و پراکندگی است.

مرز است. برای میدان‌های هارمونیک زمانی و با میانگین‌گیری در یک دوره تناوب، توان جذب و پراکنده شده را پیدا می‌کنیم.

توان جذب و پراکندگی

$$P_{abs} = -\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} Re(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot d\mathbf{S} \qquad (۲۲.۴آ)$$

$$P_{sca} = -\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} Re(\mathbf{E}_{sca}\times\mathbf{H}^*_{sca})\cdot d\mathbf{S}. \qquad (۲۲.۴ب)$$

یک علامت منفی در تعریف P_{abs} انتخاب کردیم تا عبارت مثبت شود. توجه داشته باشید که تعاریف بالا برای تحریک‌هائی که امواج صفحه‌ای نیستند، مثل پرتوهای لیزر بشدت کانونی شده، صادق است.

برای امواج صفحه‌ای می‌توانیم توان جذب یا پراکنده شده را به‌شدت میدان‌های وارده I_{inc} مربوط کنیم:

$$I_{inc} = \frac{1}{2}Re\left(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E}_{inc}\times\mathbf{H}^*_{inc}\right) = \frac{1}{2}Z^{-1}|\mathbf{E}_{inc}|^2\ , \qquad (۲۳.۴)$$

که دارای دیمانسیون توان بر سطح است، و قبلاً در رابطه (۱۷.۴) محاسبه شد. سپس می‌توانیم **سطح مقطع نوری** را به‌صورت نسبت بین توان جذب یا پراکنده P و I_{inc} تعریف کنیم.

$$\sigma_{abs} = P_{abs}/I_{inc}, \qquad \sigma_{sca} = P_{sca}/I_{inc}\ . \qquad (۲۴.۴)$$

دیمانسیون سطح مقطع برحسب واحد سطح است. اغلب جمع سطح مقطع پراکندگی و جذب را سطح مقطع انقراضی می‌نامند. در آزمایش می‌توان با قرار دادن یک آشکارساز نوری که در جهت انتشار $\hat{\mathbf{k}}_0$ در پشت پراکنده کننده قرار دارد اندازه‌گیری کرد و معلوم کرد که چه مقدار از

توان ورودی کاهش یافته است. ظاهراً، هر چیزی که از موج جهت وارده پراکنده یا جذب شده باشد، در اندازه‌گیری این کاهش مشارکت دارد.

به‌نظر میرسد که از لحاظ نظری نیز یک روش ساده برای محاسبه سطح مقطع انقراضی وجود دارد. ار تعاریف جذب و پراکندگی امواج در معادله (۲۲.۴) شروع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P_{ext} &= \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} Re(-\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}_{sca}\times\mathbf{H}^*_{sca})\cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} Re(\mathbf{E}_{sca}\times\mathbf{H}^*_{inc} + \mathbf{E}_{inc}\times\mathbf{H}^*_{sca})\cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

جائی که ما استفاده کردیم، انتگرال شار انرژی میدان‌های ورودی در کل مرز صفر است (برای موج صفحه‌ای، شار ورودی باید برابر شار خروجی باشد). برای تحریک موج صفحه‌ای با دامنه E_0، و بردار قطبش ϵ_0 و بردار موج $\hat{\mathbf{k}}_0$، میدان الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 e^{-j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\epsilon}_0, \qquad Z\mathbf{H}_{inc} = E_0 e^{-j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}\hat{\mathbf{k}}_0\times\boldsymbol{\epsilon}_0$$

در این صورت توان انقراضی خواهد شد:

$$P_{ext} = -\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} Re\left[E_0^* e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}\left(Z^{-1}\mathbf{E}_{sca}\times\left(\hat{\mathbf{k}}_0\times\boldsymbol{\epsilon}_0\right) + \boldsymbol{\epsilon}_0^*\times\mathbf{H}_{sca}\right)\right]\cdot d\mathbf{S} \qquad (۲۵.۴)$$

این عبارت را می‌توان به‌میدان‌های دور پراکنده شده مربوط کرد:

$$\mathbf{E}_{sca}(\mathbf{r}) \underset{kr\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-jkr}}{r}\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \qquad (۲۶.۴)$$

بطوری که در فصل بعد در بخش ۴.۵ نشان خواهیم داد، توان انقراضی رابطه (۲۵.۴) را می‌توان بر حسب دامنه میدان دور از طریق رابطه زیر بیان کرد؛

توان انقراض

$$P_{ext} = \frac{2\pi}{k}Z^{-1}Re\left[E_0^*\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0)\right] \qquad (۲۷.۴)$$

این عبارت به‌عنوان **قضیه نوری** نیز شناخته می‌شود. به‌طور مشابه در مورد آزمایش، هر جا که انقراض از تضعیف موج در امتداد جهت انتشار حاصل می‌شود، قدرت انقراض را می‌توان از میدان دور پراکنده در جهت انتشار موج $\hat{\mathbf{k}}_0$ محاسبه کرد.

۵.۴ اصل بقاء مومنتوم

در ادامه نحوه انتقال مومنتوم توسط امواج الکترومغناطیسی و انتقال آن به‌حرکت مکانیکی را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. این قبلاً در ابتدای این فصل برای ذرات کوچک و بزرگ در مطلب

موچین نوری مورد بحث قرار گرفته است. مطلوب ما از قضیه پواین‌تینگ پیروی می‌کند، اما کمی پیچیده‌تر است. نیروئی که توسط میدان‌های الکترومغناطیسی بر روی یک ذره نقطه مانند اثر می‌کند توسط نیروی لورنس داده می‌شود.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

می‌توانیم نیرو را برای توزیع بار الکتریکی تعمیم داده، و تغییر مومنتوم مکانیکی $\mathbf{P}$ را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_\Omega (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3r = \int_\Omega \mathbf{f} d^3r, \tag{۲۸.۴}$$

که در اینجا چگالی نیرو $\mathbf{f}$ را معرفی کردیم. بطوری که برای دستیابی قضیه پواین‌تینگ، جملات منبع ρ، $\square$ را به‌میدان‌های الکترومغناطیسی با استفاده از معادلات ماکسول ناهمگن مربوط کردیم،

$$\mathbf{f} = (\epsilon\nabla \cdot \mathbf{E}) + \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \times \mathbf{B} \tag{۲۹.۴}$$

با

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

می‌توانیم جمله آخر سمت راست معادله (۲۹.۴) را بازنویسی کنیم، بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{dt} = +\frac{d}{dt}\int_\Omega \epsilon\mathbf{E} \times \mathbf{B}\ d^3r = \int_\Omega [&\epsilon\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \epsilon\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &+\frac{1}{\mu}\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu}\mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{B})\Big]\ d^3r\end{aligned} \tag{۳۰.۴}$$

جمله $\nabla \cdot \mathbf{B}$ که همواره صفر است را اضافه کرده تا رابطه‌ای متقارن بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ ساخته شود. جمله دوم سمت چپ را می‌توان به‌کل مومنتوم الکترومغناطیسی $\mathbf{P}_{em}$ در حجم Ω اختصاص داد،

$$\mathbf{P}_{em} = \int_\Omega \epsilon\mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3r = \int_\Omega \mu\epsilon\mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3r. \tag{۳۱.۴}$$

سپس جمله سمت راست معادله (۳۰.۴) را به‌انتگرال مرزی تبدیل می‌کنیم. با مقایسه با قضیه پواین‌تینگ، که چگالی انرژی الکترومغناطیسی u_{em} با بردار پواین‌تینگ $\mathbf{S}$ مربوط می‌کند، نشان میدهد که چگالی مومنتوم باید بجای برداری، تانسوری باشد. در ادامه یک نماد مولفه‌ای همراه با قرارداد جمع انیشتن برای شاخص‌هائی که دو بار ظاهر می‌شوند را اتخاذ می‌کنیم. مولفه‌های میدان الکتریکی در داخل براکت معادله (۳۰.۴) را می‌توان با استفاده از تانسور لوی- سیویتا معادله (۵۴.۲) بازنویسی کنیم:

$$E_i\partial_j E_j - \epsilon_{ijk}E_j\epsilon_{klm}\partial_l E_m$$

$$= E_i\partial_j E_j - (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, E_j\partial_l E_m$$

$$= E_i\partial_j E_j + (E_j\partial_j E_i - E_j\partial_i E_j) = \partial_j E_i E_j - \tfrac{1}{2}\partial_i E_j E_j.$$

بنابراین بدست می‌آید

$$[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})]_i = \partial_j\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E_kE_k\right],$$

و عبارت مربوط به $\mathbf{B}$ خواهیم داشت. اکنون تعریف تانسور متقارن آسان است:

$$T_{ij} = \epsilon E_iE_j + \frac{1}{\mu}B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\epsilon E_kE_k + \frac{1}{\mu}B_kB_k\right) \tag{۳۲.۴}$$

این عبارت وقتی بر حسب $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بازنویسی شود تا ما را به‌صورت نهائی تانسور تنش ماکسول برساند، بهتر بنظر میرسد:

تانسور تنش ماکسول

$$T_{ij} = \epsilon E_iE_j + \mu H_iH_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\epsilon E^2 + \mu H^2\right) \tag{۳۳.۴}$$

این چگونگی انتقال و تبدیل مومنتوم را با میدان‌های الکترومغناطیسی توضیح می‌دهد. با استفاده از تانسور تنش[۱۲] می‌توانیم رابطه (۳۰.۴) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} + \mathbf{P}_{em}) = \int_\Omega \nabla\cdot\mathbb{T}\; d^3r = \oint_{\partial\Omega}\mathbb{T}\cdot\hat{\mathbf{n}}\; dS \tag{۳۴.۴}$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ عمود بر سطح مرز است. بنابراین، هرگاه مومنتوم مکانیکی یا الکترومغناطیسی در حجم مفروضی تغییر کند، باید به‌صورت میدان‌های الکترومغناطیسی به‌خارج منتقل شود. کمیتی که برای انتقال مومنتوم به‌حساب می‌آید دقیقاً تانسور تنش ماکسول است.

مشاجره ابراهام-مینکوفسکی

مجادله ابراهام-مینکوفسکی[۱۳] ، که گاهی اوقات از آن نام برده می‌شود، حداقل یک داستان عجیب و غریب است. این مسئله مربوط به‌مومنتوم حمل شده توسط انتشار یک فوتون در محیطی با ضریب شکست n است، اما، برای روشن شدن این نکته از اول، مجادله هیچ جنبه کوانتومی را شامل نمی‌شود و همچنین در تحلیل صرفاً بر اساس الکترودینامیک کلاسیک ظاهر می‌شود. اولین مشارکت در این موضوع توسط هرمان مینکوفسکی (۱۹۰۸) و ماکس آبراهام

[۱۲] در سراسر این کتاب تانسورها را با $\mathbb{T}$ نشان می‌دهیم. مولفه‌های اینگونه تانسورها $(\mathbb{T})_{ij} = T_{ij}$ هستند.

[۱۳] Abraham–Minkowski

(۱۹۰۹) انجام شد، برای جزئیات بیشتر در مورد تاریخ و همچنین برای شرح جامع موضوع، خوانندگان را به‌مرجع [۱۴] ارجاع می‌دهیم. در حالی که ابراهام نتیجه گرفت که حرکت فوتون باید به‌صورت زیر باشد؛

$$P_{photon} = \frac{\hbar k_0}{n} \qquad \text{مومنتوم ابراهام}$$

که در آن k_0 عدد موج نور در خلاء و n ضریب شکست محیط است. مینکوفسکی نتیجه گرفت که آن باید به‌صورت زیر باشد؛

$$P_{photon} = n\hbar k_0 \qquad \text{مومنتوم مینکوفسکی}$$

در نگاه اول این یک شوخی بد به‌نظر می‌رسد، و ممکن است فکر کنید که یک آزمایش ساده باید به‌نفع یکی از این تعاریف باشد. در واقع، آزمایشات قطعی بسیاری به‌نفع تعریف ابراهام وجود دارد. متأسفانه تعداد مساوی آزمایشاتی وجود دارد که به‌نظر می‌رسد از تعریف مینکوفسکی پشتیبانی می‌کند. بنابراین بدیهی است که در اینجا اتفاق ناخوشایندی در حال رخ دادن است.

امروزه اجماع وجود دارد که بحث یا معضل توسط بارنت[۱۴]حل شده است[۱۵] و به‌موضوعی مربوط می‌شود که در فصل سیزدهم بیشتر در مورد آن بحث خواهیم کرد؛ یعنی تمایز بین مومنتوم جنبشی[۱۵] و مومنتوم متعارف[۱۶]. اولین مورد فقط مربوط به‌مومنتوم نور است. دومی مومنتوم در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی است. تعریف ابراهام مربوط به‌مومنتوم جنبشی است، در حالی که شکل مینکوفسکی به‌معنای متعارف است.با این وجود، این سوال که در تفسیر کدام آزمایش باید از کدام شکل استفاده شود، همچنان مشکل است. در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم، اما امیدواریم هر خواننده‌ای که در آینده از این مشکل عبور کند، از سابقه طولانی تاریخ و همچنین مشکلات احتمالی در تصمیم‌گیری برای تعریف آبراهام یا مینکوفسکی آگاه باشد.

نیروهای نوری و گشتاورها

تانسور تنش ماکسول را می‌توان برای محاسبه نیروهای نوری و گشتاور برای ذرات با شکل و اندازه دلخواه استفاده کرد. به‌طور کلی، به‌موقعیت‌هائی علاقه داریم که ذره توسط میدان‌های نوری که با فرکانس ω در حال نوسان هستند، تابیده شود و نیروها آنقدر ضعیف هستند که قبل از حرکت ذره به‌جای دیگر، چندین بار میدان نوسان دارد. در این شرایط فرض بر میدان‌های هارمونیک زمانی و متوسط نیروهای خالص در یک زمان تناوب T است. میانگین نیروی الکترومغناطیسی

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}_{em}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\mathbf{P}_{em}}{dt} dt = 0$$

برای میدان‌های هارمونیک زمانی صفر می‌شود و در اینجا $\mathbf{P}_{em}$ مومنتوم الکترومغناطیسی است که در رابطه (۳۱.۴) تعریف شد. تانسور تنش ماکسول را می‌توان در یک دوره تناوب

[۱۴] Barnett
[۱۵] Kinetic Momentum
[۱۶] Canonical Momentum

میانگین‌گیری کرد که اکنون برای قضیه پواین‌تینگ و موج‌صفحه‌ای بحث شد، و داریم:

$$\langle T_{ij}\rangle = \frac{1}{2}Re\left[\epsilon E_i E_j^* + \mu H_i H_j^* - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\epsilon E_k E_k^* + \mu H_k H_k^*)\right] \qquad (۳۵.۴)$$

اکنون می‌توانیم نیروی عمل‌کننده بر ذره که با مرز $\partial\Omega$ احاطه شده است، محاسبه کنیم. برای ذرات با مرزهای تیز، حتی می‌توانیم سطح ذرات را خودمان بگیریم. مومنتوم خالص به‌داخل یا خارج این مرز، نیرو یا گشتاور وارد شده به‌ذره را می‌دهد؛

نیروی نوری و گشتاور برای میدان‌های هارمونیک زمانی

$$\langle \mathbf{F}\rangle = \oint_{\partial\Omega} \langle \mathbb{T}\rangle \cdot d\mathbf{S} \qquad (۳۶.۴آ)$$

$$\langle \mathbf{M}\rangle = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{r}\times\langle \mathbb{T}\rangle \cdot d\mathbf{S} \qquad (۳۶.۴ب)$$

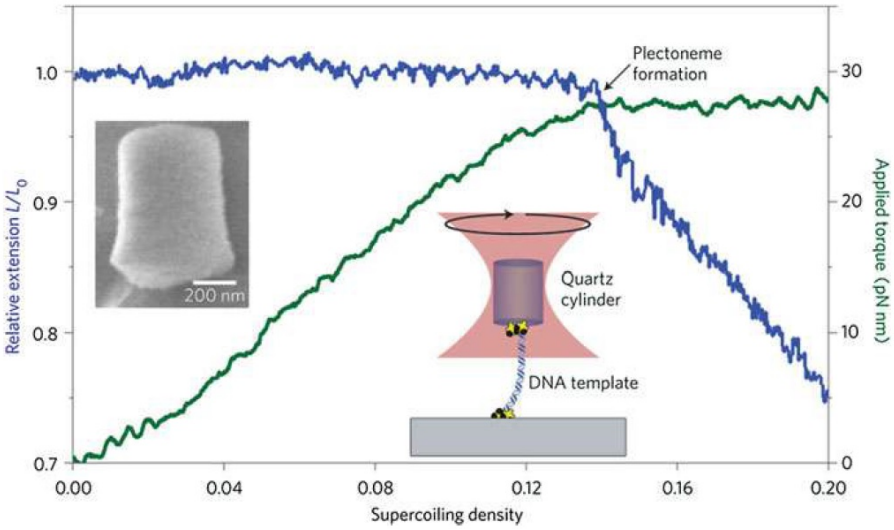
بنابراین، هنگامی که میدان‌های الکترومغناطیسی برای مشکل مورد مطالعه شناخته شدند، می‌توان فوراً نیروهای نوری و گشتاورها را با استفاده از عبارت‌های بالا محاسبه کرد. در فصل‌های بعدی نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان معادلات ماکسول را برای ذرات با مرزهای تیز حل کرد ، در این صورت می‌توانیم از معادلات فوق برای محاسبه فوری نیرو یا گشتاور اعمال شده توسط میدان های الکترومغناطیسی بر ذره استفاده کنیم. معادلات (۳۶.۴) عبارتهای کلی میدان‌ها و گشتاورهایی هستند که بر روی ذرات با اندازه دلخواه عمل می‌کنند، برای ذرات بسیار کوچکتر یا بزرگتر از طول موج نور می‌توانیم مجدداً از تقریب‌های ساده‌تر دوقطبی یا ردیابی پرتو که قبلاً بحث شد استفاده کنیم.

۶.۴ مومنتوم زاویه‌ای نوری

علاوه بر مومنتوم خطی، نور می‌تواند مومنتوم زاویه‌ای را نیز حمل کند. همانطور که از طریق بردار قطبش (غیر عادی) $\epsilon_\pm = \hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}$ توضیح داده شده است، ساده‌ترین شکل، نور با قطبش دایره‌ای است. به‌عنوان مثال، شکل (۷.۴) نشان می‌دهد که یک رشته DNA در یک طرف به‌یک بستر و در طرف دیگر به‌یک استوانه کوارتز متصل شده است. با قرار دادن سامانه در داخل یک تله نوری و استفاده از نور با قطبش دایره‌ای، می‌توان مومنتوم زاویه‌ای را از نور به‌استوانه کوارتز منتقل کرد و رشته DNA را به‌سمت بالا برد. از طریق اندازه‌گیری موقعیت استوانه، اطلاعات مفصل در مورد گشتاور اعمال شده و فشرده سازی رشته DNA به‌دست می‌آید.

شکل (۸.۴) ایجاد یک پرتو نور را نشان می‌دهد که مومنتوم زاویه‌ای مداری[۱۷] (OAM) را حمل می‌کند [۱۶، ۱۷]. یک پرتو نور کانونی شده از یک مارپیچ دی‌الکتریک عبور می‌کند که ارتفاع آن به‌زاویه سمت (آزیموتال) بستگی دارد، به‌طوری که پس از عبور، یک مومنتوم زاویه‌ای

[۱۷] Orbital Angular Momentum (OAM)



شکل ۷.۴: ورودی، سمت چپ: میکروگراف الکترونی روبشی از یک استوانه کوارتز نانو ساخته شده است. ورودی، راست: شمای چینش آزمایشی، که در آن یک مولکول DNA در یک سر به‌استوانه و در طرف دیگر به‌یک سطح شیشه‌ای متصل می‌شود. در اینجا، DNA با نیروی 3 pN کشیده شده و با سرعت ثابت 0.5 دور در ثانیه می‌پیچد. امتداد نسبی DNA (اثر آبی) و گشتاور اعمال شده (اثر سبز) به‌عنوان تابعی از چگالی ابرصفحه ترسیم شده است که نشان دهنده میزان پیچش معرفی شده است. هنگامی که چگالی ابرپیچشی در حدود0.14 است، DNA پیچ خورده تحت گذار فازی از حالت پیچ خورده به‌حالت پلکتونمی قرار می‌گیرد، که توسط فلات در گشتاور اعمال شده و کاهش یکنواختی در امتداد نسبی نشان داده می‌شود. شکل و زیرنویس برگرفته از مرجع [۱۳] است.

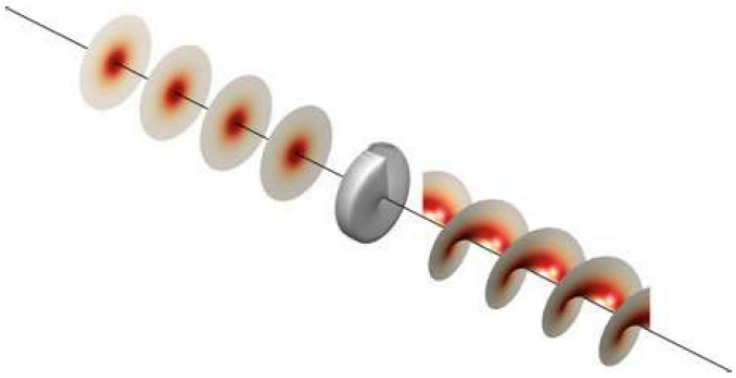
مداری به‌دست می‌آورد. روش‌های دیگری برای ایجاد نور با (OAM) وجود دارد، برای مثال، با استفاده از هولوگرام. برای پرتوهای گوس -لاگر که در فصل قبل بحث شد، دامنه میدان الکتریکی را می‌توان به‌صورت [۱۸] بیان کرد.

$$E(\rho,\phi,z=0)=E_0\left[e^{-jl\phi}\right]\tanh\left(\frac{\rho}{w_v}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \qquad (۳۷.۴)$$

که در آن E_0 بیشینه دامنه را مشخص می‌کند، w_0 دور کمر پوش کوسی است، l یک عدد صحیح است که بار توپولوژی (یا عدد کوانتم (OAM)) نامیده می‌شود، و w_v اندازه هسته گرداب[۱۸] است. سهم مهم در بحث ما عبارت $e^{-jl\phi}$ در داخل براکت است که مومنتوم زاویه‌ای مداری را در بر می‌گیرد. شکل شدت $|E|^2$ با هسته گرداب سیاه[۱۹] داده می‌شود، به‌دلیل کل تداخل مخرب در مبداء که ϕ تعریف نشده است.

- **تمرین ۱** ثابت کنید که $(\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{E}+\mathbf{p}\times(\nabla\times\mathbf{E})$ را می‌توان به‌صورت رابطه (۳.۴) بازنویسی کرد.
- **تمرین ۲** رابطه (۲.۴) در امتداد خطوط بحث شده در کتاب بدست آورید.

[۱۸] Vortex core size
[۱۹] Dark vortex core



شکل ۸.۴: ایجاد یک پرتو نور با مومنتوم زاویه‌ای مداری. یک پرتو کانونی شده با قطبش خطی یا دایره‌ای از سمت چپ به‌یک صفحه فاز برخورد می‌کند که از دی‌الکتریک ساخته شده و به‌شکل مارپیچ است و ارتفاع آن با افزایش زاویه سمت افزایش می‌یابد. وقتی از این دستگاه عبور می‌کند، نور یک زاویه تاخیر وابسته به‌فاز را به‌دست آورده و پس از عبور، نور یک مومنتوم زاویه‌ای مداری را حمل می‌کند.

- **تمرین ۳** ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است.
$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

- **تمرین ۴** موقعیتی را در نظر گیرید که یک پرتو لیزر با توان صد میلی وات بر روی سطح مربع طول‌موج λ^2 کانونی می‌شود.
  - **الف** شدت میدان در نقطه کانونی را برآورد کنید. طول‌موج نور را $500\ nm$ در نظر گرفته و فرض کنید که توزیه میدان همگن است.
  - **ب** تعداد فوتون‌های عبوری از سطح مربع λ^2 در ثانیه را محاسبه کنید.
  - **ج** فرض کنید که هر فوتون، مومنتوم $\hbar k$ را انتقال میدهد. نیروی اعمال شده بوسیله کل شار فوتون ورودی را تخمین بزنید.

- **تمرین ۵** با استفاده از جعبه‌ابزار NANOPT فایل demofocus01.m، میدان الکتریکی مود لیزر هرمیت-گوس بشدت کانونی شده را محاسبه کنید.
  - **الف** شدت میدان بر حسب ولت بر متر را برای یک لیزر صد میلی وات محاسبه کنید.
  - **ب** میدان مغناطیسی را از قانون فاراده و استفاده از معادله (۱۰.۲)، تقریب تفاضل محدود برای کرل، محاسبه کنید.
  - **ج** مولفه z بردار پوایتینگ محاسبه کرده و آنرا روی صفحه xy انتگرال‌گیری کنید. ثابت کنید وقتی میدان‌ها خارج از کانون $z = 0$ هستند، شار تغییر نمی‌کند.

- **تمرین ۶** قطبی‌شدگی[۲۰] یک کره کوچک دی‌الکتریک از رابطه زیر بدست می‌آید:

[۲۰] Polarizability

$$\alpha = 4\pi\epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) a^3$$

که در آن a شعاع کره و ϵ_1, ϵ_2 بترتیب گذردهی الکتریکی داخل و خارج کره است. یک کره شیشه‌ای $(n_1 = 1.5)$ در آب $(n = 1.33)$ قرار دارد و قطر کره صد نانو متر است. با استفاده از تمرین ۵.۴ نیروی دوقطبی رابطه (۶.۴) که بر کره شیشه‌ای در نقطه کانونی و خارج از آن وارد می‌شود را محاسبه کنید. این نیرو را بر حسب پیگو نیوتن بیان کنید.

- **تمرین ۷** مانند تمرین ۶.۴ اما برای کره طلا با گذردهی $-2.5 - 3.6j$ در طول موج $500\ nm$، و قطر $50\ nm$ است. ضمناً پراکندگی و نیروی گرادیان قطبش را محاسبه کنید.

- **تمرین ۸** کار مکانیکی رابطه (۱۴.۴) بشکل زیر

$$W = \int_\Omega u_{mech} d^3r,$$

با چگالی انرژی مکانیکی u_{mech} را ، به‌صورت قضیه پواین‌تینگ دیفرانسیلی مانند رابطه پیوستگی (۱۱.۴) بنویسید.

- **تمرین ۹** یک موج صفحه‌ای با بردار قطبش مختلط $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ در نظر گیرید. چگالی انرژی و بردار پواین‌تینگ را مانند رابطه (۱۹.۴) محاسبه کنید.

- **تمرین ۱۰** یک موج صفحه‌ای با قطبش خطی درنظر گیرید. از طریق یک محاسبات صریح، ثابت کنید که کل شار بردار پواین‌تینگ که از درون مرزهای یک کره عبور می‌کند صفر است.

- **تمرین ۱۱** تانسور تنش ماکسول رابطه (۳۳.۴) را برای یک موج صفحه‌ای با قطبش دلخواه محاسبه کنید. نتیجه خود را بر حسب مومنتوم و مومنتوم زاویه‌ای حمل شده توسط موج را تفسیر کنید.

- **تمرین ۱۲** با استفاده از قطبی شدگی تمرین ۶.۴، و یک ذره دی‌الکتریک به‌گذردهی حقیقی $\epsilon_1 = \epsilon_1'$ که با میدان هارمونیک زمانی $\mathbf{E}_0$ تحریک می‌شود در نظر گیرید.
  - **الف** گشتاور دوقطبی القائی کره را محاسبه کنید.
  - **ب** میدان‌های یک دو قطبی را با استفاده از الکترواستاتیک محاسبه کنید. این نتایج برای یک دوقطبی نوسانی در ناحیه میدان نزدیک نیز صادق است.
  - **ج** در ناحیه میدان نزدیک تانسور تنش ماکسول را محاسبه کنید.

فصل ۵

تابع گرین

توابع گرین راهی ساده و زیبا برای حل معادلات دیفرانسیل مانند معادله موج در الکترودینامیک است و نقش مهمی در نانو نوری ایفاء می‌کند. در این فصل با معرفی مفاهیم اساسی توابع گرین برای معادله اسکالر ساده شده شروع می‌کنیم و سپس در مورد راه حل‌های معادلات کامل ماکسول تعمق می‌نمائیم.

۱.۵ تابع گرین چیست؟

یک معادله دیفرانسیل خطی اما در غیراین صورت نامشخص برای تابع $f(\mathbf{r})$ در نظر گیرید.

$$L(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r}) \tag{۱.۵}$$

که در آن $L(\mathbf{r})$ یک عملگر دیفرانسیلی از قبیل ∇^2 برای معادله پوآسون یا $\nabla^2 + k^2$ برای معادله هلم‌هولتز، و Q جمله منبع خارجی است. در اصل L نیز می‌تواند یک عملگر غیرمحلی شامل انتگرال‌گیری روی یک فضا باشد، اگر چه در ادامه به‌شکل ساده‌تری که در معادله (۱.۵) داده شده است می‌پردازیم. برای حل معادله دیفرانسیل بالا، تابع گرین $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

تعریف تابع گرین

$$L(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{۲.۵}$$

با شرایط مرزی مناسب.

که تابع $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ پاسخ سامانه به‌منبع نقطه‌ای واقع در $\mathbf{r}_0$ است که با تابع دلتای دیراک $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ مشخص می‌شود (به پیوست **و** مراجعه کنید). نکته مهم این که تابع گرین قبلاً در شرایط مرزی مناسب برای امواج منتشر شده در بی‌نهایت معادله هلم‌هولتز که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد، درست شده است.

گرین و تابع گرین

قبل از اینکه وارد عملکرد تابع گرین شویم، لازم است تا چندی در بار شخصی که این تابع را تدوین کرد و چند سال پیش مقاله‌ای در مجله فیزیک امروز [۱۹] آنرا " تابع گرین آقای گرین" نامید، اعتبار دهیم. در آنجا نویسنده بحث می‌کند که تا آنجا که معلوم است جورج گرین هیچ‌گونه تحصیلات ریاضی نداشته، بلکه پنج سال در نانوائی پدرش کار کرده و سپس به‌او آموزش داده شد تا در برج آسیابی که پدرش نزدیک ناتینگهام ساخته بود کار کند. در آن زمان خیابان‌های ناتینگهام محل مطمئن و سالمی برای قدم زدن بعد از تاریکی هوا نبود، بنابراین گرین روزها و شب‌های زیادی را در کارخانه آسیاب گذراند. احتمالاً در این زمان بود که او اولین اثر خود را در مورد " داستان کاربرد تحلیل ریاضی نظریه الکتریسته و مغناطیس" نوشت و آنرا برای یکی از مجلات آموزشی معروف [۱۹] که گرین جرأت ارسال آنرا نداشت فرستاد:

اما گرین، بدون داشتن صلاحیت و بدون ارتباط با نهاد علمی، احساس می‌کرد که ارسال مقاله خود به‌مجله جسورانه خواهد بود. بنابراین او هزینه چاپ مقاله خود را در ناتینگهام پرداخت. روش احتمالی رویکرد وی به‌انتشار در پیشگفتار وی آشکار است. وی در آنجا ابراز امیدواری کرد: "دشواری این موضوع ریاضیدانان را وادار می‌کند تا این اثر را با کمال میل بخوانند، به‌ویژه هنگامی که به‌آنها اطلاع داده شود که این اثر توسط یک مرد جوان نوشته شده است، که موظف به‌کسب اطلاعات کمی است که در اختیار دارد." در چنین فواصل زمانی و با استفاده از این ابزارها ، مانند دیگر تلاشهای ضروری که فرصتهای کمی برای بهبود[....]

هدف اصلی گرین از انتشار این بود که آثار او را مورد توجه ریاضیدانان در بریتانیا و خارج از کشور قرار گیرد. با این حال، به‌نظر می‌رسد که به‌جز یک استثنا، پاسخ کمی یا هیچ پاسخی وجود نداشت. این باید بسیار مأیوس کننده باشد.

گرچه در توافق با او خوش شانس نبود، گار گرین احتمالاً کشف نشده باقی ماند. امروزه توابع گرین در زمینه فیزیک فراوان هستند و یکی از ابزارهای اصلی برای حل معادلات دیفرانسیل تبدیل شده است.

نکته جالب در باره $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ این است که اجازه می‌دهد بلافاصله جواب معادله (۱.۵) را به‌صورت زیر بنویسند

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r' \qquad (۳.۵)$$

با اعمال از سمت چپ معادله دیفرانسیل $L(\mathbf{r})$ می‌دهد:

$$L(\mathbf{r})\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r' = -\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r' = -Q(\mathbf{r})$$

که نشان می‌دهد رابطه (۱.۵) دقیقاً برآورده شده است. تابع $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ برای شرایط مرزی مناسب قبلاً ساخته شده، همچنین تابع $f(\mathbf{r})$ شرایط مرزی مناسب را به‌ارث می‌برد.

آنچه باید انجام شود محاسبه توابع گرین مربوطه برای عملگرهای دیفرانسیل خاص $L(\mathbf{r})$ است. همانطور که در زیر نشان خواهیم داد، این کار اغلب ساده‌تر از چیزی است که در نگاه اول به‌نظر می‌رسد. این بخش را با تأکید بر اینکه رویکرد تابع گرین به‌دلیل خطی بودن عملگر

$L(\mathbf{r})$ کار می‌کند، به‌نتیجه میرسانیم. تابع $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ پاسخ منبع یک نقطه را توصیف می‌کند، و با استفاده از جمع اثر در معادله (۳.۵) و پیدا کردن پاسخها برای همه منابع $Q(\mathbf{r})$، می‌توانیم جواب کامل $f(\mathbf{r})$ را بدست آوریم.

۲.۵ تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز

به‌عنوان مثال اول، معادله هلم‌هولتز را در نظر گیرید

$$(\nabla^2 + k^2)f(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r}) \tag{۴.۵}$$

که در آن k عدد موج است. با دستورالعمل بخش قبل، در جستجوی جواب تابع گرین هستیم

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{۵.۵}$$

برای یک محیط بدون مرز همگن، تابع گرین فقط می‌تواند بستگی به‌مسافت $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ از قبیل $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = g(|\mathbf{r},\mathbf{r}'|)$ داشته باشد. بنابراین، برای $r \neq 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right) + k^2 g = 0$$

که در آن عملگر لاپلاس را در مختصات کروی بیان کرده و از همه مشتق‌ها نسبت به‌زاویه‌ها بعلت تقارن چشم‌پوشی کردیم. همان طور که می‌توان براحتی از طریق محاسبه صریح ثابت کرد، جواب معادله بالا امواج کروی خارج و وارد شونده هستند.

$$g(r) = C\frac{e^{-jkr}}{r} + D\frac{e^{+jkr}}{r} \tag{۶.۵}$$

در اینجا C و D پارامترهائی هستند که از شرایط مرزی برای $g(r)$ بدست می‌آیند. از آنجا که به‌جواب‌هائی که علیت را حفظ می‌کنن علاقه‌مند هستیم، فقط جواب‌های که به‌اصطلاح جواب‌های تاخیری[۱] می‌نامند [۲] شامل موج خارج شونده را نگه میداریم یعنی $D = 0$ قرار می‌دهیم. پارامتر C را می‌توان با انتگرال‌گیری رابطه (۵.۵) روی کره کوچکی بشعاع a و حجم Ω_a که مرکز مختصات را دربر می‌گیرد تعیین کرد.

$$\lim_{a\to 0}\left(\int_{\Omega_a}\nabla\cdot\nabla\frac{Ce^{-jkr}}{r}d^3r + k^2\int_{\Omega_a}\frac{Ce^{-jkr}}{r}d^3r\right) = -1$$

در سمت راست یک حجم بی‌نهایت کوچک استفاده کردیم و براین استدلال که تابع دلتا دیراک در انتگرال‌گیری، حجم صفر شود، یک عدد می‌دهد. جمله دوم در داخل پرانتز سمت چپ مختصات کروی را با $d^3r = 4\pi r^2 dr$ معرفی کرده و فوراً مشاهده می‌کنیم که وقتی $a \to 0$ میل کند صفر می‌شود. با استفاده از قضیه گوس برای جمله اول، انتگرال حجم را به‌انتگرال سطح تبدیل می‌کنیم:

[۱] Retarded Solutions

$$\lim_{a\to 0}\oint \nabla\left(\frac{Ce^{-jkr}}{r}\right)\cdot d\mathbf{S} = \lim_{a\to 0}\oint \frac{d}{dr}\left(\frac{Ce^{-jkr}}{r}\right)ds$$

$$= \lim_{a\to 0} 4\pi a^2 \frac{d}{da}\left(\frac{Ce^{-jka}}{a}\right) = -4\pi$$

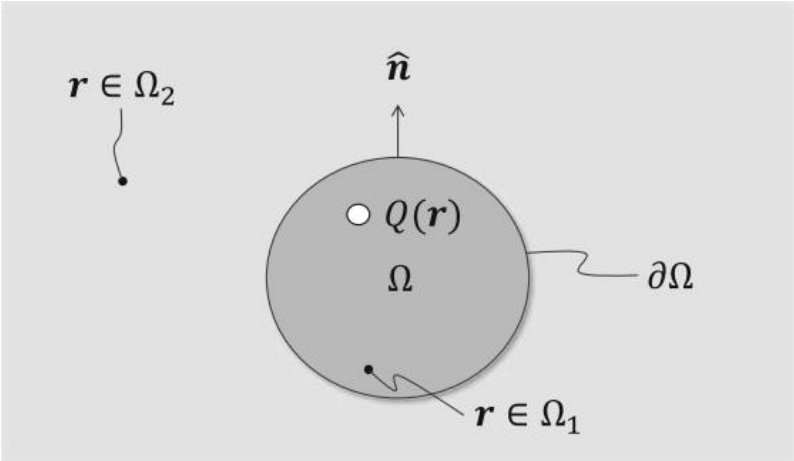
در اینجا از انتگرال‌گیری سطح که $d\mathbf{S}$ عمود بر سطح کره و بسوج خارج است استفاده می‌کنیم. بنابراین، از رابطه بالا $C = 1/(4\pi)$ را بدست می‌آوریم. تابع گرین برای معادله موج اسکالر و یک محیط همگن بدون مرز با موج خارج شونده بسوی بی‌نهایت بقرار زیر خواهد بود:

تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{Ce^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{۷.۵}$$

۱.۲.۵ نمایش شکل معادله هلم‌هولتز

تابع گرین را می‌توان برای بدست آوردن روابط بسیار مفید که به‌عنوان رابطه نماینده از آن یاد می‌کنند، و ما در بخش‌های بعدی این کتاب استفاده خواهیم کرد، بکار برد. موقعیتی که در ذهن داریم در شکل (۱.۵) نشان داده شده است و شامل حجم Ω با مرز تیز $\partial\Omega$ تشکیل شده است. ساده‌تر است که داخل و خارج حجم Ω را جداگانه در نظر گیریم.



شکل ۱.۵: شمای نمایش رابطه. حجم Ω را با مرز $\partial\Omega$ در نظر می‌گیریم. $\Omega_1 = \Omega$ و Ω_2 داخل و خارج حجم مشخص می‌کنیم. $\hat{\mathbf{n}}$ عمود بر سطح بسوی خارج حجم Ω است. برای نمایش رابطه موقعیتی را در نظر می‌گیریم که $\mathbf{r}$ داخل یا خارج حجم Ω باشد. $Q(\mathbf{r})$ منبع است که در داخل حجم Ω_1 قرار دارد.

- ناحیه داخل حجم Ω را با اندیس یک، ازاینرو عددموج و تابع گرین Ω_1 را بترتیب با k_1 و G_1 مشخص می‌کنیم.

- ناحیه خارج از حجم Ω را با اندیس دو، از اینرو عددموج و تابع گرین Ω_2 را بترتیب با k_2 و G_2 مشخص می‌کنیم.

با ناحیه داخلی شروع می‌کنیم و رابطه (۴.۵) را در $G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ و رابطه (۵.۵) را در $f(\mathbf{r})$ ضرب می‌کنیم. با جابجائی $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$ خواهیم داشت:

$$G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left(\nabla'^2 + k^2\right) f(\mathbf{r}') = -G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}') \qquad (\text{آ}۸.۵)$$

$$f(\mathbf{r}')\left(\nabla'^2 + k^2\right) G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (\text{ب}۸.۵)$$

این معادله‌ها را در حجم Ω_1 انتگرال‌گیری می‌کنیم. با معرفی یک میدان وارده که با توزیع منبع واقع در Ω_1 تولید شده است، معرفی می‌کنیم:

$$f_1^{inc}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_1} G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r' \qquad (۹.۵)$$

این‌گونه میدان‌ها می‌توانند جواب معادله هلم‌هولتز در یک محیط همگن با عددموج k_1 در غیاب مرز اضافی باشند. این رابطه نماینده را در چند لحظه دیگر بدست می‌آوریم، بشرط آنکه میدان اصلاح شده در حضور اینگونه مرزها باشد. وقتی از رابطه (۸.۵) روی حجم Ω_1 انتگرال‌گیری می‌کنیم باید در باره آخرین جمله رابطه (۸.۵)-ب مواظب باشیم که وقتی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ در حجم‌های مختلف قرار داشته باشند. سپس دو رابطه (۸.۵) را از هم کم کرده و روی حجم Ω_1 انتگرال‌گیری می‌کنیم، و خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{r}\in\Omega_1: & f(\mathbf{r}) \\ \mathbf{r}\in\Omega_2: & 0 \end{array}\right\} = \int_{\Omega_1}\left(G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'^2 f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}')\nabla'^2 G_1(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right)d^3r' + f_1^{inc}$$

اکنون می‌توانیم قضیه گرین را برای دو تابع $\phi(\mathbf{r})$ و $\psi(\mathbf{r})$ بکار ببریم [۲] (به تمرین ۱.۵ مراجعه کنید).

$$\int_{\Omega_1}\left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right)d^3r = \oint_{\partial\Omega_1}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS. \qquad (۱۰.۵)$$

در اینجا $\partial\Omega$ مرز حجم Ω و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر سطح بطرف حجم Ω_1 است. ضمناً مشتق عمودی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\psi \qquad (۱۱.۵)$$

با استفاده از قضیه گرین برای $f(\mathbf{r})$ به‌رابطه نماینده زیر می‌رسیم.

نمایش رابطه‌ای برای انتگرال‌گیری روی Ω_1

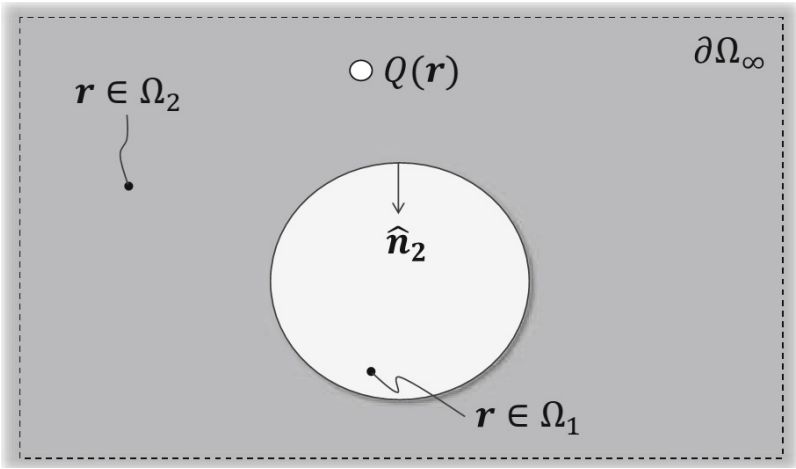
$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{r}\in\Omega_1: & f(\mathbf{r}) \\ \mathbf{r}\in\Omega_2: & 0 \end{array}\right\} = f_1^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega}\left[G_1(\mathbf{r},\mathbf{s}')\frac{\partial f(\mathbf{s}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_1(\mathbf{r},\mathbf{s}')}{\partial n'}f(\mathbf{s}')\right]dS'. \qquad (۱۲.۵)$$

می‌توان آن را به‌شرح زیر تفسیر کرد: اگر مقادیر تابع $f(\mathbf{s}')$ و مشتق طبیعی $\partial f(\mathbf{s}')/\partial n'$ را در یک ناحیه محدود مشخص بدانیم می‌توانیم مقدار تابع $f(\mathbf{r})$ را در هر جای دیگر در ناحیه داخلی بدست آوریم. از این به‌بعد موقعیت‌ها را در کنار مرز با نماد $\mathbf{s}$ نشان میدهیم.

عبارت مشابه (۱۲.۵) را می‌توان برای ناحیه خارج از Ω_2 نیز بدست آورد. با روشی مشابه مربوط به‌داخل، میدان‌های ورودی مربوط به‌منابع در Ω_2 را معرفی کرده و از اینرو در موقعیت $\mathbf{r}$ توسط G_2 و نه G_1 منتشر می‌شوند.

$$f_2^{inc}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_2} G_2(\mathbf{r},\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r' \qquad (۱۳.۵)$$

توجه کنید اینگونه میدانها که در غیاب مرز وجود دارند جواب معادله هلم‌هولتز هستند. در مقایسه با حالت داخلی، دو نکته را باید با دقت بیشتری در نظر گرفت. اول، شرایط مرزی اضافی $\partial\Omega_\infty$ در خارج از حجم است، شکل (۲.۵)، که در اکثر موارد مطلوب می‌تواند بسمت بی‌نهایت میل کند. از آنجا که تابع گرین در شرایط مرزی در فواصل دور تدوین شده است، در باره هلم‌هولتز میدان‌های خروجی معادله (۷.۵)، مجبور نیستیم بطور صریح این مرز را بحساب آوریم. دوم، عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}_2$ بسوی داخل حجم Ω_1 است. به‌شکل (۲.۵) مراجعه و مخالف $\hat{\mathbf{n}}$



شکل ۲.۵: شمائی برای رابطه نماینده و انتگرال‌گیری روی Ω_2. هنگامی که انتگرال‌گیری روی Ω_2 است، دو اختلاف نسبت به‌وضعیت شکل (۱.۵) وجود دارد. اول، یک مرز نیز در بینهایت $\partial\Omega_\infty$ وجود دارد (خط نقطه چین). در اکثر موارد مورد علاقه، شرایط مرزی در بی‌نهایت بدرستی در جواب تابع گرین تدارک دیده شده است. به‌عنوان مثال، استفاده از میدانهای خارج و وارد شونده هستند. دوم، عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}_2$ بسوی داخل حجم Ω_1 است. در بیشتر موارد مورد علاقه، در تحلیل‌های خود فقط عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}$ حجم Ω بکار می‌بریم که در آن $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}$ است. Q منبعی است که در Ω_2 قرار دارد.

را مشاهده کنید. به‌نظر میرسد که ساده‌تر است فقط $\hat{\mathbf{n}}$ را نگه داشته و علامت منفی در رابطه نماینده ارائه شود. بنابراین خواهیم داشت:

نمایش رابطه‌ای برای انتگرال‌گیری روی Ω_2

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{r}\in\Omega_1: & 0 \\ \mathbf{r}\in\Omega_2: & f(\mathbf{r}) \end{array}\right\} = f_2^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega}\left[G_2(\mathbf{r},\mathbf{s}')\frac{\partial f(\mathbf{s}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_2(\mathbf{r},\mathbf{s}')}{\partial n'}f(\mathbf{s}')\right]dS'. \quad (۱۴.۵)$$

هر دو رابطه نماینده یادآور طیف زاویه‌ای معرفی شده در فصل سوم هستند، جائی که میدان‌های الکترومغناطیسی در صفحه $z=0$ را به‌میدان‌های محو شدگی و میدان‌های دور شونده از صفحه مربوط کردیم. آنها نیز در تعدادی از زمینه‌های مختلف مانند زیر مفید هستند:

- **مسئله دیریشله در مقابل نیومن** در اصل، معادلات (۱۲.۵) و (۱۴.۵) به‌ما این امکان را می‌دهد که تابع f را بر حسب مشتق عمودی و بر عکس بیان کنیم. هنگامی که $\mathbf{r}$ بطرف مرز میل می‌کند، رابطه‌ای که تابع و مشتق سطحی را بهم مرتبط می‌کند بدست می‌آوریم. بنابراین، دانستن مقدار تابع در مرز (مسئله دیریشله) یا مشتق سطحی (مسئله نیومن) کافی است.
- **مسئله انتقال** برای اجسام با مواد همگن k_1 و k_2، می‌توانیم از رابطه نماینده در محدوده داخل و خارج با توابع گرین مقادیر تابع و مشتق‌های عمودی مرز را با شرایط مرزی مناسب استفاده کنیم. در فصل نهم به‌این موضوع بازمی‌گردیم:

$$f(\mathbf{r}) = f_j^{inc}(\mathbf{r}) + \tau_j \oint_{\partial\Omega}\left[G_j(\mathbf{r},\mathbf{s}')\left(\frac{\partial f(\mathbf{s}')}{\partial n'}\right) - \left(\frac{\partial G_j(\mathbf{r},\mathbf{s}')}{\partial n'}\right)f(\mathbf{s}')\right]dS'. \quad (۱۵.۵)$$

که در آن $\mathbf{r}\in\Omega_j$ و از نماد $\tau_{1,2}=\pm1$ برای تغییر عمود بر سطح در حالت جواب خارجی بکار بردیم. معادله‌های باقی‌مانده با صفر در سمت چپ را می‌توان گاهی اوقات برای دستگاری‌های بیشتر برای رابطه نماینده استفاده کرد.

۲.۲.۵ تابع گرین در مقابل جواب اصلی

در فیزیک از توابع گرین در زمینه‌های مختلف استفاده می‌شود که بعضی وقت‌ها باعث سردرکمی می‌شود. ابتدا منبع $Q(\mathbf{r})$ را که در فضای نامحدود واقع شده است در نظر می‌گیریم. سپس مانند آنچه در قسمت قبل بحث شد، می‌توانیم جواب را مستقیماً از تابع گرین $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ محاسبه کنیم.

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r'$$

با این حال، برای یک محیط فوتونی متشکل از منابع $Q(\mathbf{r})$ همراه نانو ذرات دی‌الکتریک یا فلز اضافی، مانند شکل (۲.۵)، باید به‌معادله (۱۵.۵) یا شکلی معادل برای در نظر گرفتن شرایط مرزی اضافی که باید در محدوده نانو ذرات انجام شود. در این مورد، تابع گرین معادله (۷.۵) برای یک محیط نامحدود دیگر کافی نیست تا بطور منحصر بفرد جواب $f(\mathbf{r})$ را تعیین کرد.

در اصل، می‌توانیم یک تابع گرین "کلی" $G_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ جدید برای اینگونه شرایط مرزی صلاح شده در نظر گیریم ، که جواب و منابع را بهم مربوط کند:

$$f(\mathbf{r}) = \int G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')Q(\mathbf{r}')d^3r'$$

فرض کنید ماشینی در اختیار داریم که اجازه میدهد معادله دیفرانسیل با منابع دلخواه $Q(\mathbf{r})$ را حل کنیم. در باره اینگونه روش راه حلها در فصل نهم روی ذرات پلاسمون‌ها بیشتر یاد خواهیم گرفت. سپس منابع نقطه‌ای مانند، $Q_\delta(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$، را معرفی کرده تا مقدار تابع f_δ و مشتق‌ها را در مرز با استفاده از ماشینی که بحث خواهد شد محاسبه و از رابطه (۱۵.۵) تابع گرین کلی $G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = f_\delta(\mathbf{r})$ را بدست آوریم. با ساخت، تابع گرین کلی سپس پاسخ مناسب جواب منبع نقطه مانند حاصل شده و بوسیله اصل جمع اثرها می‌توانیم از طریق انتگرال‌گیری روی تمام منابع نقطه مانند، پاسخ کل را بدست آوریم.

ادبیات ریاضی اصطلاحات دقیق‌تری را اتخاذ کرده است که جواب محیط نامحدود $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ را جواب اصلی میداند و عبارت تابع گرین را بطور کلی برای $G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ محفوظ میدارد. بنابراین تابع گرین همواره برای شرایط مرزی مربوط به‌مسئله مورد تحقیق مناسب است. در اینجا اصطلاح اضافی اتخاذ نمی‌کنیم اما هر زمان که لازم باشد یک کلمه احتیاط را اضافه می‌کنیم.

۳.۵ تابع گرین برای معادله موج

معادله موج زیر را برای میدان الکتریکی هارمونیک زمانی در نظر گیرید:

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}), \tag{۱۶.۵}$$

که در آن $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$ است. در اصل می‌توانیم تابع گرین شبیه معادله هلم‌هولتز تعریف کنیم، اما در اینجا قدر متفاوت خواهد بود. ابتدا متوجه می‌شویم که میدان الکتریکی در حوزه فرکانس می‌تواند به V و $\mathbf{A}$ از طریق $\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega\mathbf{A}$ مرتبط باشد. ضمناً شرط معیار لورنتس $\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon V$ را می‌توانیم برای بدست آوردن معادله هلم‌هولتز برای بردار پتانسیل استفاده کنیم.

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu\mathbf{J}(\mathbf{r})$$

بدیهی است که می‌توانیم تابع گرینی که در رابطه (۷.۵) برای معادله هلم‌هولتز تعریف کرده بودیم، برای $\mathbf{A}$ بصورت زیر استفاده کنیم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r' \tag{۱۷.۵}$$

اکنون می‌توانیم شرط معیار لورنتس را برای محاسبه پتانسیل اسکالر بکار بریم:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})}{j\omega\mu\epsilon} = \frac{j\omega\mu}{k^2}\nabla \cdot \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{A}(\mathbf{r}')d^3r'$$

که در آن $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$ است. میدان الکتریکی را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$E_i(\mathbf{r}) = -j\omega A_i(\mathbf{r}) - \partial_i V(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int \left(\delta_{ij} + \frac{\partial_i\partial_j}{k^2}\right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')J_j(\mathbf{r}')d^3r' \tag{۱۸.۵}$$

که در آن ∂_i نماد مشتق نسبت به iامین مولفه دستگاه دکارتی است و قرارداد انیشتن را برای j فرض می‌کنیم. اکنون ساده‌تر است که تابع گرین دیادیک را معرفی کنیم:

تابع گرین دیادیک

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial_i\partial_j}{k^2}\right)\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{۱۹.۵}$$

و میدان الکتریکی و جریان را از طریق رابطه زیر بهم مربوط سازیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\int \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r' \tag{۲۰.۵}$$

در اینجا $G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ را باید بدین گونه تفسیر کرد که برای منبع $J_j(\mathbf{r}')$ در جهت j میدان الکتریکی $E_i(\mathbf{r})$ را در جهت i بما می‌دهد. گاهی اوقات از علامت ماتریس فشرده نیز استفاده می‌کنیم.

$$\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

که در اینجا بطور صریح فرض می‌کنیم که $(\nabla\nabla)_{ij} = \partial_i\partial_j$ است. ماتریس $\bar{\bar{G}}$ را اغلب بنام تابع گرین دیادیک یا بطور خلاصه دیادیک گرین می‌نامند و نقش مهمی در میدان‌های نانو اپتیک ایفا می‌کند. شبیه معادله موج برای میدان الکتریکی، رابطه (۱۶.۵)، تابع گرین $\bar{\bar{G}}$ در معادله زیر صدق می‌کند، (به تمرین ۶.۵ مراجعه کنید).

$$-\nabla\times\nabla\times\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + k^2\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbb{I} \tag{۲۱.۵}$$

برای کامل کردن مطلب، نشان میدهیم که چگونه میدان مغناطیسی را می‌توان بر اساس تابع گرین دیادیک بیان کرد. قانون فاراده بر میدان‌های هارمونیک زمانی می‌گوید:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

با گرفتن کرل از دو طرف معادله (۲۰.۵) خواهیم داشت:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla\times\int \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r' \tag{۲۲.۵}$$

۱.۳.۵ ناحیه میدان دور

در بسیاری از موارد، دوست داریم تا میدان‌های دور از منبع جریان را داشته باشیم. در اصل، می‌توانیم ناحیه میدان‌های دور تابع گرین را داشته باشیم. با این حال، در اینجا تا حدودی متفاوت عمل کرده و از معادله (۱۷.۵) که توزیع جریان را به‌بردار پتانسیل مربوط می‌کند، شروع می‌کنیم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r'$$

در ادامه، فرض می‌کنیم که $r \gg r'$ است بقسمی که می‌توان از تقریب استفاده کرد:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\theta+\left(\frac{r'}{r}\right)^2} \approx r\left(1-\frac{r'}{r}\cos\theta\right) = r-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'$$

در اینجا θ زاویه بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ است و ضمناً فقط کمترین بسط سری تیلور رادیکال را انتخاب کردیم. بنابراین با توجه به‌ناحیه $r \gg r'$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \underset{r\gg r'}{\longrightarrow} \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)\mu \int e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r'$$

و میدان مغناطیسی در ناحیه میدان دور را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} \longrightarrow -\frac{jk}{\mu}\,\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{A}$$

جائی بسیار دور از منبع بطوری که میدان‌های الکترومغناطیسی خارج شونده بشکل امواج صفحه‌ای بوده و در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ منتشر می‌شوند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \underset{r\gg r'}{\longrightarrow} \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)(-jk\hat{\mathbf{r}})\times\int e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r' \tag{۲۳.۵}$$

سرانجام می‌توانیم از معادله (۴۰.۲) برای مربوط کردن میدان الکتریکی و مغناطیسی در ناحیه دور، به همراه $-jkZ = -j\omega\mu$ که در آن Z امپدانس است، برای بیان میدان الکتریکی استفاده کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \underset{r\gg r'}{\longrightarrow} \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)(j\omega\mu)\int e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\hat{\mathbf{r}}\times[\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')]\,d^3r' \tag{۲۴.۵}$$

بر طبق ناحیه میدان دور برای میدان الکتریکی رابطه (۵.۳)، می‌توانیم دامنه موج کروی را بیرون آورده و رابطه بالا را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \underset{r\gg r'}{\longrightarrow} \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)(j\omega\mu)\int \frac{e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}}{4\pi}\left(\delta_{ij}-\hat{r}_i\hat{r}_j\right)J_j(\mathbf{r}')d^3r'$$

جائی که بصراحت ضرب خارجی را در انتگرال بکار بردیم. با مقایسه رابطه بین میدان الکتریکی و توزیع جریان رابطه (۲۰.۵)، این اجازه را خواهیم داشت که محدوده میدان دور تابع گرین دایادیک را به‌صورت زیر بنویسیم

تابع گرین دیادیک در ناحیه میدان دور

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \underset{r\gg r'}{\longrightarrow} \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\frac{e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}}{4\pi}\left(\delta_{ij}-\hat{r}_i\hat{r}_j\right). \tag{۲۵.۵}$$

۲.۳.۵ رابطه نماینده برای معادله موج

برای وضعیتی که در شکل (۱.۵) و (۲.۵) نشان داده شده است، می‌توانیم درست شبیه معادله هلم‌هولتز، یک رابطه نماینده که میدان الکتریکی $\mathbf{E}_j\mathbf{r})$ را در یک نقطه از فضا به‌میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مماسی در مرز $\delta\Omega$ مرتبط می‌کند، بدست آوریم:

رابطه نماینده برای معادلات ماکسول

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) - \tau_j \oint_{\delta\Omega} \\ &\times \left\{-j\omega\mu\bar{\bar{G}}_j(\mathbf{r},\mathbf{s}')\cdot\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}(\mathbf{s}') - \left[\nabla'\times\bar{\bar{G}}_j(\mathbf{r},\mathbf{s}')\right]\cdot\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}(\mathbf{s}')\right\} dS'\end{aligned} \tag{۲۶.۵}$$

در اینجا $r \in \Omega_j$ ممکن است در داخل یا خارج از حجم Ω باشد و علامت $\tau_{1,2} = \pm 1$ مطابق آن انتخاب شود. جزئیات مربوط به‌نحوه بدست آوردن آن در بخش ۵.۵ آورده شده است. در عبارت بالا، میدان‌های تابشی که توسط جریان منبع در Ω_j تولید می‌شود را به‌صورت زیر معرفی کردیم:

$$\mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_{\Omega_j} \bar{\bar{G}}_j(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r' \tag{۲۷.۵}$$

معادله (۲۶.۵) یک رابطه کاملاً قابل توجه است که می‌گوید با دانستن میدان‌های مماسی الکتریکی و مغناطیسی در مرزهای یک حجم، می‌توان میدان‌های الکترومغناطیسی را در هر جای دیگر محاسبه کرد.

۴.۵ قضیه نوری

در این بخش قضیه نوری بخش ۴.۴ را اثبات می‌کنیم، برای اثبات دو مرحله پیش میرویم. ابتدا حد میدان دور را برای رابطه نماینده (۲۶.۵) محاسبه می‌کنیم. سپس این عبارت را با P_{ext} رابطه (۲۵.۴) مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که این دو رابطه می‌توانند به‌یکدیگر مرتبط باشند.

حد میدان دور رابطه نماینده

از رابطه بین میدان الکتریکی و تابع گرین دیادیک (۲۰.۵)، درمی‌یابیم که جمله اول در براکت رابطه نماینده را می‌توان بعنوان میدان الکتریکی برای منبع $\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}(\mathbf{r})$ تفسیر کرد. بهمین نحو، با مقایسه رابطه (۲۲.۵) نشان می‌دهد که جمله دوم میدان مغناطیسی به‌منبع $\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}(\mathbf{r})$ مربوط می‌شود. بنابراین، می‌توانیم بطور مستقیم از محدوده میدان دور برای میدان‌های الکترومغناطیسی روابط (۲۳.۵) و (۲۴.۵) استفاده کرده و حد میدان دور رابطه نماینده خارج از

حجم Ω را بدست آوریم.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \underset{r\gg r'}{\longrightarrow} \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) + \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)\hat{\mathbf{r}}\times\oint_{\delta\Omega} e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\left\{j\omega\mu\hat{\mathbf{r}}\times\left[\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}(\mathbf{r}')\right]-jk\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right\}dS' \tag{۲۸.۵}$$

برای ساده‌تر کردن مقایسه با توان انقراضی، اکنون فرض می‌کنیم که محدوده میدان دور، موج خارج شونده در جهت $\hat{\mathbf{k}}_0$ منتشر می‌شود، و هر دو طرف معادله را در $\boldsymbol{\epsilon}_0^*$ ضرب می‌کنیم. جمله با میدان مغناطیسی مماسی را می‌توان با استفاده از

$$\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\hat{\mathbf{k}}_0\times\left(\hat{\mathbf{k}}_0\times\mathbf{u}\right)=\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\left[\hat{\mathbf{k}}_0\left(\hat{\mathbf{k}}_0\cdot\mathbf{u}\right)-\mathbf{u}\right]=-\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{u},$$

ساده کرد که در آن $\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\hat{\mathbf{k}}_0=0$ استفاده کرده و $\mathbf{u}$ یک بردار دلخواه است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{E}(r\hat{\mathbf{k}}_0) \underset{r\gg r'}{\longrightarrow} \boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{E}_{inc}(r\hat{\mathbf{k}}_0) + \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)(-j\omega\mu)\oint_{\delta\Omega} e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}'}\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\left\{\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}(\mathbf{r}')+Z^{-1}\hat{\mathbf{k}}_0\times\left[\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right]\right\}dS' \tag{۲۹.۵}$$

که در آن $-jk=-j\omega\mu Z^{-1}$ است. با توجه به‌استخراج سطح مقطع نوری، میدان الکتریکی را $\mathbf{E}=\mathbf{E}_{inc}+\mathbf{E}_{sca}$ بدو میدان تابشی و پراکندگی و شبیه به‌آن برای میدان مغناطیسی تجزیه می‌کنیم. بطوری که در تمرین ۹.۵ بحث شده است، می‌توانیم کرانه انتگرال (۲۹.۵) را با میدان‌های پراکندگی عوض کنیم. بنابراین، برای دامنه میدان دور رابطه (۲۶.۴) رابطه نهائی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0) = \frac{-jkZ}{4\pi}\oint_{\delta\Omega} e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}'}\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\left\{\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}_{sca}(\mathbf{r}')+Z^{-1}\hat{\mathbf{k}}_0\times\left[\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}_{sca}(\mathbf{r}')\right]\right\}dS' \tag{۳۰.۵}$$

توان انقراضی

در ادامه توان انقراضی رابطه (۲۵.۴) را بررسی می‌کنیم:

$$P_{ext}=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}\mathbf{Re}\left\{E_0^*e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}\left[\mathbf{H}_{sca}(\mathbf{r})\times\boldsymbol{\epsilon}_0^*+Z^{-1}\left(\hat{\mathbf{k}}_0\times\boldsymbol{\epsilon}_0^*\right)\times\mathbf{E}_{sca}(\mathbf{r})\right]\right\}\cdot d\mathbf{S}$$

که برای راحتی جای دو جمله را در داخل آکولاد و همین طور ضرب خارجی را عوض کرده‌ایم. جمله آخر در داخل آکولاد را می‌توان می‌توان با تبدیل دوری برای ضرب خارجی از طریق رابطه زیر ساده کرد:

$$\left(\hat{\mathbf{k}}_0\times\boldsymbol{\epsilon}_0^*\right)\cdot(\mathbf{E}_{sca}\times\hat{\mathbf{n}})=\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\left[\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}}_0\cdot\mathbf{E}_{sca})-\mathbf{E}_{sca}(\hat{\mathbf{k}}_0\cdot\hat{\mathbf{n}})\right]=\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\hat{\mathbf{k}}_0\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{sca})$$

بنابراین، در نهایت به‌رابطه زیر میرسیم:

$$P_{ext} = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} \mathbf{Re}\left\{E_0^* e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \left[\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}_{sca} + Z^{-1}\hat{\mathbf{k}}_0\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{sca})\right]\right\} dS \qquad (۳۱.۵)$$

مقایسه با رابطه (۳۰.۵) نشان می‌دهد که P_{ext} را می‌توان با دامنه میدان دور برطبق

$$P_{ext} = \mathbf{Re}\left[\frac{2\pi}{-jkZ}E_0\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0)\right] = \frac{2\pi}{k}Z^{-1}\mathbf{Im}\left[E_0\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0)\right],$$

مطابق با رابطه (۲۷.۴) بهم مربوط کرد. این اثبات قضیه نوری را تکمیل می‌کند.

۵.۵ جزئیات رابطه نماینده معادله موج

در این بخش نحوه دستیابی به‌رابطه نماینده معادله ماکسول (۲۶.۵) را نشان می‌دهیم. نحوه دستیابی رابطه نماینده دقیقاً از کتاب چو[۲۰] پیروی می‌کند. با معادله میدان الکتریکی شروع، و سمت راست را با تابع گرین دیادیک ضرب می‌کنیم.

$$[-\nabla'\times\nabla'\times\mathbf{E}(\mathbf{r}')]\cdot\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = j\omega\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}')\cdot\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

برای سهولت بعدی، معادله موج را برای موقعیت پریم دار $\mathbf{r}'$ بجای بدون پریم نوشته‌ایم. به‌طور مشابه، معادله موج را برای تابع گرین دیادیک از سمت چپ در $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ضرب می‌کنیم،

$$-\mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\times\nabla'\times\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

سپس دو معادله را روی $\mathbf{r}'$ انتگرال‌گیری کرده و از هم کم می‌کنیم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_\Omega \left\{[-\nabla'\times\nabla'\times\mathbf{E}(\mathbf{r}')]\cdot\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\times\nabla'\times\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\right\} d^3r'$$

$$= -\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ در یک حجم قرار دارند. جمله داخل برکت حاوی کرل را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$-\nabla'\cdot\left\{[\nabla'\times\mathbf{E}(\mathbf{r}')]\times\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}')\times\left[\nabla'\times\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\right]\right\}. \qquad (۳۲.۵)$$

برای اثبات این، در رابطه (۳۲.۵) از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم

$$\nabla\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b}).$$

برای سهولت وابستگی $\mathbf{E}$ و $\bar{\bar{G}}$ به $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ را حذف می‌کنیم و اثبات بصورت زیر تکمیل می‌شود.

$$-\left\{\nabla'\times\nabla'\times\mathbf{E} - (\nabla'\times\mathbf{E})\cdot(\nabla'\times\bar{\bar{G}}) + (\nabla'\times\mathbf{E})\cdot(\nabla'\times\bar{\bar{G}}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla'\times\nabla'\times\bar{\bar{G}})\right\}$$

سپس این عبارت اصلاح شده را برای جمله داخل براکت کرل دار داخل انتگرال حجمی استفاده کرده و قضیه گوس را برای انتگرال مرزی بکار می‌بریم

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) \\ &- \oint_{\partial\Omega} \left\{ [\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \left[\nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS'\end{aligned} \tag{۳۳.۵}$$

که در اینجا بطور صریح عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}'$ روی مرز را مشخص کرده‌ایم. معادله (۳۳.۵) اولین با توسط استراتون و چو[۲] [۲۱] بدست آورده شد و معادلات مرتبط با شکل بالا بنام این مولفان نامیده می‌شود. اولین جمله در براکت کرل‌دار را می‌توان با انجام تبدیل دوری ضرب سه‌گانه و استفاده از قانون فاراده برای کرل $\mathbf{E}$ ساده کرد.

$$[\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}' = -j\omega\mu\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

در جمله دوم تبدیل دوری ضرب سه‌گانه انجام می‌دهیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \left[\nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

با وارد کردن این عبارت‌ها در معادله (۳۲.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) \\ &- \oint_{\partial\Omega} \left\{ -j\omega\mu\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) \right\} dS'\end{aligned}$$

سرانجام از تانسور متقارن $\bar{\bar{G}}$ (به بخش ۴.۷ مراجعه کنید) برای تغییر ترتیب بین دو جمله در ضرب‌های اسکالر استفاده می‌کنیم. با هم

$$[\nabla' \times G(\mathbf{r}',\mathbf{r})]_{ij} = [\nabla' \times G(\mathbf{r}',\mathbf{r})\mathbb{I}]_{ij} = -[\nabla' \times G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]_{ji}$$

از آنجائی که کرل گرادیان همواره صفر است، سرانجام به‌رابطه نمایس (۲۶.۵) میرسیم که برای کامل شدن مطلب دوباره آنرا تکرار می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) \\ &-\tau_j \oint_{\delta\Omega} \left\{ -j\omega\mu\bar{\bar{G}}_j(\mathbf{r},\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{s}') - \left[\nabla' \times \bar{\bar{G}}_j(\mathbf{r},\mathbf{s}')\right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{s}') \right\} dS'\end{aligned}$$

در اینجا علامت $\tau_{1,2} = \pm 1$ در جلو انتگرال را برای انتخاب عمود بر سطح که نقطه در داخل یا خارج حجم باشد معرفی کردیم. این نقطه بطور مفصل در محتوای معادله (۱۴.۵) بحث شده است.

[۲] Stratton and Chu

پتانسیل‌های تک لایه و دو لایه

رابطه نماینده را می‌توان به‌صورت فشرده‌تر نوشت. در زیر میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی را با نماد اختصاری $\mathbf{U}_E = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$ و $\mathbf{U}_H = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ معرفی می‌کنیم.

- **تک لایه** با اولین عبارت داخل براکت برای چیزی که بنام عملگر انتگرالی تعریف می‌کنیم (و اندیس میدان الکتریکی را برای $\mathbf{u}$ حذف می‌کنیم) شروع می‌کنیم.

$$[\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \left[\left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right) G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\right] \cdot \mathbf{u}(\mathbf{s}')\, dS'$$

برای جمله دوم از $\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ به‌همراه

$$(\nabla G)\cdot\mathbf{u} = -(\nabla' G)\cdot\mathbf{u} = G\nabla'\cdot\mathbf{u} - \nabla'\cdot(G\mathbf{u})$$

استفاده می‌کنیم. جمله آخر را می‌توان با نوع دوبعدی قانون گوس[۳]، (۱۲.۲)، برای یک مرز به‌انتگرال خطی که برای مرز بسته صفر می‌شود، تبدیل کرد. بنابراین به‌رابطه زیر می‌رسیم:

$$[\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \left[G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}') + \frac{1}{k^2}\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\nabla'\cdot\mathbf{u}(\mathbf{s}')\right] dS'. \qquad (۳۴.۵)$$

در ادبیات ریاضی معمولاً از $\mathbb{S}$ به‌دلایل رسمی به‌عنوان عملگر انتگرالی **تک لایه** یاد می‌شود.

- **دو لایه** برای جمله دوم در داخل براکت معادله (۲۶.۵) با رابطه زیر شروع می‌کنیم

$$\nabla'\times\left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\nabla\times\left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\nabla\times\mathbb{I}G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

در مرحله آخر از کرل گرادیان که همواره صفر است استفاده می‌کنیم. بنابراین، سرانجام به‌انتگرال زیر می‌رسیم

$$[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \nabla'\times\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{s}')\cdot\mathbf{u}(\mathbf{s}')\, dS' = -\oint_{\delta\Omega} \nabla\times G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}')\, dS' \qquad (۳۵.۵)$$

در آن نماد $\mathbb{D}$ معرفی کردیم که در ادبیات ریاضی به‌آن معمولاً به‌عنوان عملگر انتکرالی **دو لایه** می‌نامند.

رابطه بین عملگرها با محاسبه کرل پتانسیل تک لایه در معادله (۳۵.۵)، به‌رابطه زیر می‌رسیم

$$\nabla\times[\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \nabla\times G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}')\, dS' = -[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r})$$

[۳] در زمینه هندسه دیفرانسیلی قضیه‌ای بنام استوکس-کارتون وجود دارد که می‌توان از قانون گوس، استوکس و گرین بدست آورد. این چهارچوب اجازه میدهد تا این قوانین را در بعد دلخواه و فضای منحنی عمومیت دهیم. برای مثال نوع قانون گوس دوبعدی برای مرز منحنی است که ما در این فصل بدون اثبات استفاده کردیم

در جمله دوم عملگرد کرل گرادیان که همواره صفر است را استفاده کردیم. به‌همین نحو، با محاسبه کرل پتانسیل دو لایه در رابطه (۳۵.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\nabla\times[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}) &= -\oint_{\delta\Omega}\nabla\times\nabla\times G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}')\,dS'\\ &= -\oint_{\delta\Omega}\left\{\nabla\left[\nabla\cdot G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}')\right]-\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}')\right\}\,dS'\\ &= -k^2\left[\mathbb{S}\mathbf{u}\right](\mathbf{r}),\end{aligned}$$

که در آنجا تعریف معادله تابع گرین اسکالر (۵.۵) را برای $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$ برای بازنویسی جمله دوم داخل براکت بکار بردیم. بنابراین، رابطه بین عملگر انتگرالی تک لایه و دو لایه را بدست آوردیم:

$$\nabla\times[\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r})=-[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}),\qquad \nabla\times[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r})=-k^2[\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) \tag{۳۶.۵}$$

با استفاده از رابطه نماینده میدان الکتریکی همراه با قانون فاراده $-g\omega\mu\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{E}$، می‌توانیم رابطه (۲۶.۵) را بازنویسی کرده و عبارت مربوط به‌میدان مغناطیسی بصورت فشرده زیر بیان کنیم

رابطه نماینده برای معادلات ماکسول II

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r})-\tau_j\left\{-j\omega\mu[\mathbb{S}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}](\mathbf{r})-[\mathbb{D}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}](\mathbf{r})\right\}\\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_j^{inc}(\mathbf{r})-\tau_j\left\{j\omega\epsilon[\mathbb{S}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}](\mathbf{r})-[\mathbb{D}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}](\mathbf{r})\right\}\end{aligned} \tag{۳۷.۵}$$

در اینجا $j=1,2$ را باید برای $\mathbf{r}\in\Omega_{1,2}$ همراه با $\tau_{1,2}=\pm1$ بکار برده و عملگر انتگرالی $\mathbb{S}$ و $\mathbb{D}$ را در معادلات (۳۴.۵) و (۳۵.۵) تعریف کردیم. میدان‌های الکترومغناطیسی $\mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r})$ و $\mathbf{H}_j^{inc}(\mathbf{r})$ بوسیله منابع جریان واقع در حجم Ω_j تولید شده است. بعداً در فصل نهم به‌روابط نماینده، هنگامی که روش انتگرال مرزی را بحث می‌کنیم، برمی‌گردیم.

تمرینات

- **تمرین ۱** قضیه گرین را اثبات کنید:

$$\int_\Omega\left(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\right)d^3r=\oint_{\delta\Omega}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS$$

و نشان دهید که جمله داخل پرانتزها را می‌توان بصورت $\nabla\cdot(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)$ نوشت و با استفاده از قضیه گوس (۱۲.۲) انتگرال حجم را به‌انتگرال مرز تبدیل کنید.

- **تمرین ۲** تابع گرین پیشرفته را برای معادله هلم‌هولتز بدست آورید. از رابطه (۶.۵) شروع کرده و فقط جمله دوم را همراه موج کروی تابشی نگه دارید. این را برای تعیین D تکرار کنید

- **تمرین ۳** در داخل $\mathbf{r} \in \Omega_2$ جواب معادله هلم‌هولتز برای میدان‌های تابشی و پراکنده تجزیه کنید.

$$f(\mathbf{r}) = f_{inc}(\mathbf{r}) + f_{sca}(\mathbf{r})$$

نشان دهیدکه در سمت راست رابطه نماینده (۱۴.۵)، می‌توانیم بجای میدان‌های کل نیز میدان‌های پراکنده استفاده کنیم. برای این منظور، به‌رابطه اضافی (۱۲.۵) برای $\mathbf{r} \in \Omega_2$ نیاز دارید

- **تمرین ۴** تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز

$$g(R) = \frac{e^{\pm jkR}}{4\pi R}$$

را باستفاده از تبدیل فوریه به‌همراه رابطه پاشندگی $\omega = kc$ به‌حوزه زمان تبدیل کنید. نتایج را برای تاخیر یافته (با علامت مثبت) و تابع گرین پیشرفته (با علامت منفی) مقایسه کرده و تفسیر کنید.

- **تمرین ۵** تابع گرین را برای معادله هلم‌هولتز یک بعدی بدست آورید

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) G(x) = -\delta(x)$$

نشان دهید که با انتگرال‌گیری این معادله روی ناحیه کوچکی در اطراف مبداء مختصات می‌توان شرایط مرزی زیر را بدست آورد:

$$G(0^+) = G(0^-), \qquad \left.\frac{dG}{dx}\right|_{0^+} - \left.\frac{dG}{dx}\right|_{0^-} = -1,$$

که در آن $0^\pm$ نمایشگر موقعیت بسیار کوچک کمتر یا بیشتر صفر است. برای بدست آوردن تابع گرین تاخیر یافته، جواب مربوط به‌موج خارج شونده در بی‌نهایت را انتخاب کنید.

- **تمرین ۶** تعریف معادله (۲۱.۵) را برای تابع گرین اثبات کنید. این معادله را به‌صورت زیر بازنویسی کرده

$$-\left(\epsilon_{ikl}\partial_k\right)\left(\epsilon_{lmn}\partial_m\right) G_{ni}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + k^2 G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

و G را با استفاده از (۱۹.۵) بیان کنید.

- **تمرین ۷** نشان دهید که تابع گرین دایادیک $\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ رابطه (۱۹.۵) را می‌توان به‌صورت مرجع [۶] (رابطه ۸.۵۵) نوشت.

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left[\left(\delta_{ij} - \hat{R}_i\hat{R}_j\right) - j\left(\frac{\delta_{ij} - 3\hat{R}_i\hat{R}_j}{kR}\right) - \left(\frac{\delta_{ij} - 3\hat{R}_i\hat{R}_j}{k^2R^2}\right)\right]\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

که در آن $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ و بردار واحد $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ است.

- **تمرین ۸** با استفاده از نتیجه تمرین ۷.۵ نشان دهید که میدان الکتریکی بصورت زیر است

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu_0\omega^2\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},0)\cdot\mathbf{p}$$

و در آن $\mathbf{p}$ دوقطبی الکتریکی که در مبداء قرار دارد را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{k^2(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p})\times\hat{\mathbf{r}}\frac{e^{-jkr}}{r} + [3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}]\left(\frac{1}{r^3}+\frac{jk}{r^2}\right)e^{-jkr}\right\}$$

- **تمرین ۹** نشان دهید که در معادله (۲۹.۵) می‌توانیم میدان‌های کل را توسط میدان‌های پراکندگی عوض کنیم. مشارکت میدان‌های تابشی را درنظر گیرید

$$\oint_{\delta\Omega} e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\epsilon}_0^*\cdot\left\{\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{k}}_0\times\mathbf{E}_{inc})+\hat{\mathbf{k}}_0\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_{inc})\right\}dS$$

که در آن $\mathbf{E}_{inc} = E_0\boldsymbol{\epsilon}_0^* e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}$ است. با استفاده از $\mathbf{k}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* = 0$ روی جملات داخل براکت کار کنید و نشان دهید که تنها جمله باقی مانده متناسب با $\oint_{\delta\Omega} d\mathbf{S} = 0$ است.

- **تمرین ۱۰** رابطه نماینده (۲۶.۵) را برای معادله موج با استفاده از حجم Ω اما موقعیت $\mathbf{r}\notin\Omega$ بدست آورید. می‌توانید از بحث مربوط به‌معادله هلم‌هولتز کمک بگیرید. از نتیجه استفاده کرده و نشان دهید که

$$\oint_{\delta\Omega}\left\{-j\omega\mu\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{s}')\cdot\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}_{inc}(\mathbf{s}'-\left[\nabla'\times\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{s}')\right]\cdot\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{s}'\right\}dS' = 0$$

است.

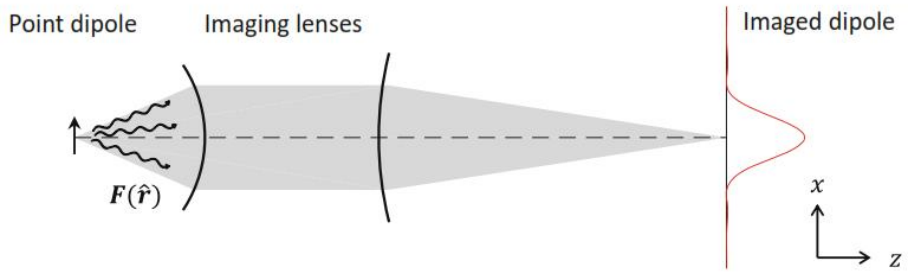
فصل ۶

حد پراش و فراتر از آن

اکنون همه مواد لازم را برای بحث در باره حد پراش نور در دست داریم. در این فصل تجزیه و تحلیل تصویربرداری از یک دو قطبی نوسانی را شروع کرده و سپس در مورد مفاهیم حد پراش برای میکروسکوپ نوری معمولی را تعمق می‌کنیم. در ادامه میکروسکوپ روبش نوری میدان نزدیک[۱] فناوری که امکان تصویربرداری میدان نزدیک را فراهم می‌کند و همچنین میکروسکوپ محلی‌سازی نوری[۲] که برای آن جایزه نوبل ۲۰۱۴ اهدا شد، بحث می‌کنیم.

۱.۶ تصویربرداری یک تک دوقطبی

با در نظر گرفتن یک دوقطبی که در موقعیت r_0 قراردارد و از طریق یک دستگاه عدسی تصویربرداری می‌شود، با استفاده از فناوری‌های پیشرفته که در فصل سوم توصیف شد، شروع می‌کنیم. برای میدان‌های دور تابش دو قطبی از تابع گرین که در فصل گذشته معرفی شد استفاده می‌کنیم. در مجموع، رویکرد را می‌توان به‌مراحل زیر تقسیم کرد (شکل ۱.۶):



شکل ۱.۶: تصویربرداری از یک دوقطبی نقطه‌ای. یک دوقطبی نقطه‌ای در کانون یک عدسی (از طریق کره مرجع گوسی ترسیم شده، شکل(۴.۳) قرار دارد و میدان‌های دور $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ساطع شده از دوقطبی را جمع‌آوری می‌کند. عدسی دوم تصویری با نقطه حد پراش ناشی از حذف میدان‌های محو شونده تولید می‌کند. در ابتدای این فصل فرآیند تصویربرداری را بطور نظری نشان می‌دهیم.

[۱] Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

[۲] Optical localization microscopy

- محاسبه توزیع جریان یک دوقطبی،
- محاسبه میدان‌های دور دوقطبی با استفاده از رابطه (۲۴.۵)،
- میدان‌های دور عبارت تصویربرداری رابطه (۱۰.۳) را ارائه میدهیم و
- برای روزنه عددی کوچک تمام انتگرال‌ها را به‌صورت تحلیلی انجام می‌دهیم.

کار اولیه، توزیع جریان یک دوقطبی نوسانی است که طول آن بسیار کوچکتر از هر مقیاسی طولی است که مسئله مورد مطالعه دارد و بنابراین می‌توان نوشت

توزیع جریان یک دوقطبی نقطه‌ای واقع در $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = j\omega\mathbf{p}\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \tag{۱.۶}$$

در اینجا $\mathbf{r}_0$ موقعیت دوقطبی، $\mathbf{p}$ گشتاور دوقطبی، و ω فرکانس نوسان است.
اثبات رابطه (۱.۶) : برای محاسبه توزیع جریان دوقطبی، از رابطه زیر شروع می‌کنیم.

$$\nabla\cdot x\mathbf{J} = \partial_i x J_i = \delta_{i1}J_i + x\nabla\cdot\mathbf{J}$$

عبارت آخر را می‌توان به‌توزیع بار الکتریکی توسط رابطه پیوستگی برای میدان‌های هارمونیک زمانی مربوط کرد

$$-j\omega\rho = \nabla\cdot\mathbf{J}.$$

سپس از J_1 روی یک حجم کوچک که دوقطبی در آن قرار دارد، انتگرال‌گیری می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\int_\Omega J_1(\mathbf{r})d^3r = \oint_{\partial\Omega} x\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + j\omega\int_\Omega x\rho(\mathbf{r})d^3r = j\omega p_1$$

همین نتیجه را می‌توان با توزیع جریان که در رابطه (۱.۶) است بدست آورد و اثبات تکمیل می‌شود. برای بدست آوردن عبارت بالا، از توزیع جریان در مرز $\partial\Omega$ صفر است، استفاده کرده‌ایم زیرا $\mathbf{J}$ در داخل Ω تعریف شده است و کشتاور دوقطبی تولید کرده است

$$\mathbf{p} = \int_\Omega \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})d^3r \tag{۲.۶}$$

میدان دور الکتریکی این توزیع را می‌توان با استفاده از رابطه (۲۴.۵) محاسبه کرد، و خواهیم داشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \underset{r\gg r_0}{\longrightarrow} -\left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)\omega^2\mu\ e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0}\left[\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p})\right] = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$$

همراه با

$$-\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}) = \mathbf{p}_\perp$$

سپس دامنه میدان دور را بدست می‌آوریم

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon}\left(e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0}\right)\mathbf{p}_\perp \tag{۳.۶}$$

در مرحله بعد رابطه (۳.۶) برای بیان تصویربرداری معادله (۱۰.۳) ارائه و در اینجا برای روشن شدن مطلب آنرا تکرار می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_3(\rho,\phi,z) &= \sqrt{\frac{n_1}{n_3}}\frac{-jk_3\ e^{-j(k_1 f - k_3 f')}}{2\pi}\frac{f}{f'}\int_0^{\theta_{max}}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta d\theta \\ &\times\int_0^{2\pi} d\phi\ \bar{\bar{R}}^{im}\cdot\mathbf{F}_1(\theta,\phi)e^{jk_3\cos\theta_3 z}e^{-jk_1(\frac{\rho}{M})\sin\theta\cos(\phi-\varphi)}.\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{F}_1$ دامنه میدان دور دوقطبی، $\mathbf{E}_3$ میدان تصویر، و برای کانون سمت تصویر و جسم f و f' و ضریب شکست‌ها n_1 و n_3 و عددموج‌ها k_1 و k_3 را بکار می‌بریم. شکل (۵.۳) را که بحث آن در بخش ۳.۳ داده شد را ملاحظه کنید. محاسبه زیر را می‌توان به‌صورت نماد زیر خلاصه کرد

$$\bar{\bar{R}}^{im}\cdot\mathbf{p}_\perp = \bar{\bar{R}}^{im}\cdot\mathbf{p},$$

چون تبدیل ماتریس فقط روی جهت عرضی $\hat{\mathbf{r}}$ است. ضمناً فرض می‌کنیم $f' \gg f$ است بطوری که $\cos\theta_3 \approx 1$ ، $\sin\theta_3 \approx 0$ و

$$\cos\theta_3 = \sqrt{1-\left(\frac{f}{f'}\right)^2\sin^2\theta_1} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{f}{f'}\right)^2\sin^2\theta_1$$

برای دوقطبی در مبداء $\mathbf{r}_0 = 0$، و بطور افقی بسوی محور نوری است، سپس از معادله (۳۴.۳) بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\bar{\bar{R}}^{im}\cdot\hat{\mathbf{x}} &= R^{im}_{xx}\hat{\mathbf{x}} + R^{im}_{yx}\hat{\mathbf{y}} + R^{im}_{zx}\hat{\mathbf{z}} \\ &\approx \frac{1}{2}\left\{(\cos\theta+1)+(\cos\theta-1)\cos 2\phi\right\}\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}(\cos\theta-1)\sin 2\phi\ \hat{\mathbf{y}} \\ \bar{\bar{R}}^{im}\cdot\hat{\mathbf{y}} &= R^{im}_{xy}\hat{\mathbf{x}} + R^{im}_{yy}\hat{\mathbf{y}} + R^{im}_{zy}\hat{\mathbf{z}} \\ &\approx \frac{1}{2}(\cos\theta-1)\sin 2\phi\ \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\left\{(\cos\theta+1)-(\cos\theta-1)\cos 2\phi\right\}\ \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

که در اینجا $t^\theta = t^\phi = 1$ را قرار دادیم. بهمین نحو، برای دوقطبی که بطور عمودی بسوی محور نوری است خواهیم داشت

$$\bar{\bar{R}}^{im}\cdot\hat{\mathbf{z}} = R^{im}_{xz}\hat{\mathbf{x}} + R^{im}_{yz}\hat{\mathbf{y}} + R^{im}_{zz}\hat{\mathbf{z}} \approx -\sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}}$$

بعداً معادله (۲۱.۳ را برای حل انتگرال‌ها در زوایای سمت بطور تحلیلی در اختیار می‌گیریم و انتگرال‌گیری را برای زوایای قطبی معرفی می‌کنیم

$$\tilde{\mathcal{I}}_n = (-j)^n \int_0^{\theta_{max}} e^{jk_3 z\left[1-\left(\frac{f}{f'}\right)^2 \sin^2\theta\right]} J_n(k_1 \frac{\rho}{M}\sin\theta) g(\theta)\sin\theta\cos^{1/2}\theta d\theta \qquad (۴.۶)$$

با کنار هم گذاشتن همه نتایج بالا، به‌سمت میدان‌های الکتریکی $\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{p}}}$ روی سمت تصویر هدایت می‌شویم که توسط دوقطبی نوسانی در کانون مجموعه عدسی قرار گرفته و در امتداد $\hat{\mathbf{p}}$ است، تولید می‌شود.

تصویربرداری میدان‌های دوقطبی

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{x}}}(\rho,\varphi,z) &= \tfrac{1}{2}A\left\{\tilde{\mathcal{I}}_0(1+\cos\theta)\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathcal{I}}_2(1-\cos\theta)(\cos 2\varphi\hat{\mathbf{x}} + \sin 2\varphi\hat{\mathbf{y}}\right\} \\
\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{y}}}(\rho,\varphi,z) &= \tfrac{1}{2}A\left\{\tilde{\mathcal{I}}_0(1+\cos\theta)\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\mathcal{I}}_2(1-\cos\theta)(\sin 2\varphi\hat{\mathbf{x}} - \cos 2\varphi\hat{\mathbf{y}}\right\} \qquad (۵.۶) \\
\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{z}}}(\rho,\varphi,z) &= -A\tilde{\mathcal{I}}_1(\sin\theta)(\cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\hat{\mathbf{y}})
\end{aligned}$$

در اینجا ضریب A را معرفی کردیم که جدا از فاز بی‌اهمیت ψ، داریم

$$A = e^{-j\psi}\frac{\sqrt{n_1 n_3}}{4\pi\epsilon_0}k_0^3 p\left(\frac{f}{f'}\right)$$

برای روزنه عددی کوچک می‌توانیم تقریب $\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx 1$ را بکار بریم. این حد مربوط به‌تقریب موازی‌محور[۳] است. انتگرال‌گیری روی توابع بسل را می‌توان بازاء $z = 0$ بطور تحلیلی حل کرد؛

$$\int u^{\nu+1}J_\nu(u)du = u^{\nu+1}J_{\nu+1}(u).$$

با معرفی شعاع بدون بعد،

$$\tilde{\rho} = \frac{nk_0\theta_{max}\rho}{M} = \frac{NA}{M}k_0\rho \qquad (۶.۶)$$

که در آن NA روزنه عددی است، بدست می‌آید

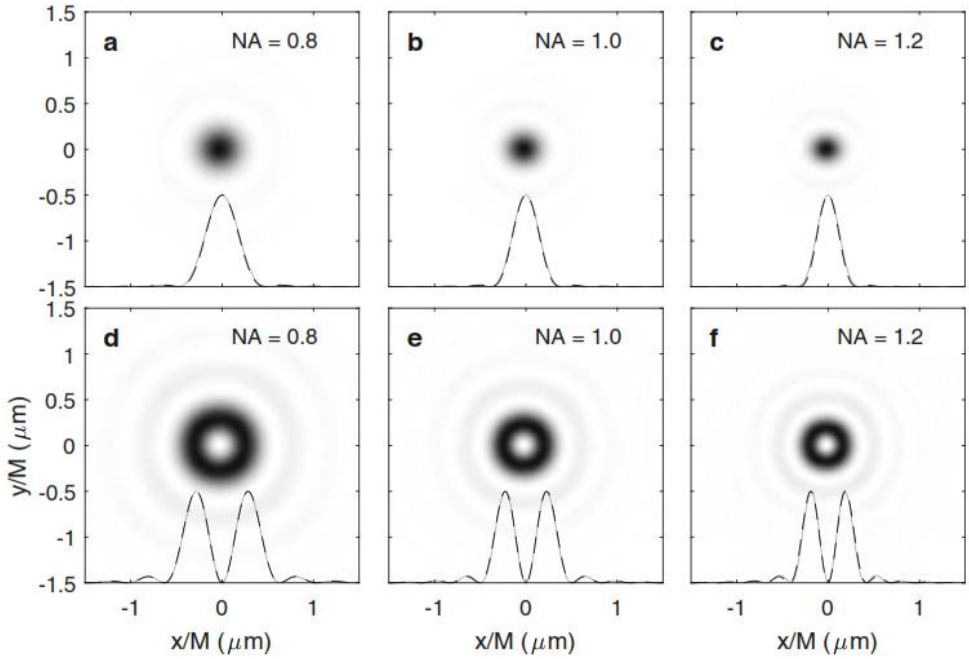
$$\int_0^{\theta_{max}} \theta^{\nu+1}J_\nu(k_1\theta\rho/M)d\theta = \left(\frac{M}{k_1\rho}\right)^{\nu+2}\int_0^{\rho} u^{\nu+1}J_\nu(u)du = \theta_{max}^{\nu+2}\frac{J_{\nu+1}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}$$

بنابراین، میدان‌های تصویر دوقطبی را در تقریب موازی‌محور بدست می‌آید.

[۳] Paraxial Approximation

تصویربرداری میدان‌های دوقطبی در تقریب موازی‌محور

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{x}}}(\rho,\varphi,0) &\approx A\theta_{max}^2\left[\frac{J_1(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}\right]\hat{\mathbf{x}} \\
\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{y}}}(\rho,\varphi,0) &\approx A\theta_{max}^2\left[\frac{J_1(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}\right]\hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{z}}}(\rho,\varphi,0) &\approx -A\theta_{max}^3\left[\frac{J_2(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}\right](\cos\varphi\hat{\mathbf{x}}+\sin\varphi\hat{\mathbf{y}})
\end{aligned} \tag{۷.۶}$$



شکل ۲.۶: تصویربرداری دوقطبی نقطه‌ای که توسط رابطه (۵.۶) محاسبه شده است. ردیف‌های بالا و پائین شدت میدان‌های را دوقطبی که به‌ترتیب در جهت x و z توجیه شده و دارای مقادیر مختلف NA هستند. در پائین تصاویر، برش‌هائی را در شدت (خط پُر) نشان می‌دهیم و آنها را با نتایج تقریبی محوری‌محور (خط چین، تقریباً غیرقابل تشخیص) مقایسه می‌کنیم.

شکل (۲.۶) نمودار شدت دوقطبی بسوی $(a-c)$ عمودی و $(d-e)$ موازی محور نوری $\hat{\mathbf{z}}$ را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که دوقطبی نقطه‌ای با ویژگی گسترده‌تر با عرض قابل مقایسه با طول‌موج نور تصویر می‌شود. به‌نظر میرسد راحتر است کمیات زیر را معرفی کنیم:

- **تابع گرین** در مقایسه با تابع گرین دیادیک که در رابطه (۱۹.۵) معرفی شد، تابع گرین گسترش نقطه‌ای $\bar{\bar{G}}_{PSF}$ را معرفی می‌کنیم

$$\mathbf{E}(\rho,\varphi,z)=\omega^2\mu\bar{\bar{G}}_{PSF}(\rho,\varphi,z)\cdot\mathbf{p}, \tag{۸.۶}$$

که میدان‌های تصویر را در موقعیت (ρ,φ,z) برای دوقطبی نقطه‌ای که در مبداء قرار دارد می‌دهد. با مقایسه با رابطه (۵.۶) اجازه می‌دهد تا تابع گرین را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$\bar{\bar{G}}_{PSF}=\frac{1}{2}\omega^2\mu A\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{I}}_0-\tilde{\mathcal{I}}_2\cos 2\varphi & -\tilde{\mathcal{I}}_2\sin 2\varphi & -2\tilde{\mathcal{I}}_1\cos\varphi\\ -\tilde{\mathcal{I}}_2\sin 2\varphi & \tilde{\mathcal{I}}_0+\tilde{\mathcal{I}}_2\cos 2\varphi & -2\tilde{\mathcal{I}}_1\sin\varphi\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{۹.۶}$$

در اینجا آرگومان‌های توابع $\tilde{\mathcal{I}}_n$ را حذف کرده‌ایم. همچنین، توانستیم تقریب موازی‌محور را در رابطه (۷.۶) استفاده کنیم.

- **تابع گسترش نقطه** تصویر $I(\rho,\varphi,z)$ یک واحد دوقطبی با شدت میدان زیر داده می‌شود:

$$I(\rho,\varphi,z)=\left|\bar{\bar{G}}_{PSF}(\rho,\varphi,z)\cdot\mathbf{p}\right|^2,$$

که در آن همه عوامل ثابت را کنار گذاشته‌ایم. فرض کنید گشتاور دوقطبی ثابت نیست بلکه به‌طور تصادفی، همان‌طوری که در مورد مولکولهای محلول اتفاق می‌افتد، مچرخد. در این صورت می‌توانیم جهت‌های مختلف دوقطبی را با استفاده از روش میانگین‌گیری محاسبه کنیم.

$$I(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{4\pi}\oint\left|\bar{\bar{G}}_{PSF}(\rho,\varphi,z)\cdot\mathbf{p}\right|^2 d\Omega=\frac{2}{3}\left(|\tilde{\mathcal{I}}_0|^2+|\tilde{\mathcal{I}}_2|^2+2|\tilde{\mathcal{I}}_1|^2\right)$$

در اینجا $\hat{\mathbf{p}}$ گشتاور دوقطبی واحد و $\oint ...d\Omega$ نمایشگر انتگرال‌گیری روی تمام جهات دوقطبی است. گاهی اوقات انسان $\langle I(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\rangle$ را با تابع گسترش نقطه‌ای (برای یک گسیل کننده دوقطبی با توجیه تصادفی) که توضیح می‌دهد چگونه تصویر دوقطبی واقع در $\mathbf{r}_0$ در پردازش تصویر گسترش می‌یابد، وابسته می‌کند. در صورت وجود چندین دوقطبی، باید از معادله (۸.۶) اصل جمع اثرهای میدان‌های الکتریکی، استفاده کرده سپس تصویر را از مدول مربع میدان الکتریکی کل بدست آوریم. اگر تداخل میدان نادیده گرفته شود، و جهت دوقطبی تصادفی باشد، می‌توان تابع گسترش نقطه‌ای $\langle I(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\rangle$ را با موقعیت دوقطبی مرتبط[۴] ساخت.

- **دیسک ایری**[۵] توابع بسل در رابطه (۷.۶) را برای یک دوقطبی که در امتداد جهت x یا y قرار دار درنظر گیرید. اولین صفر $J_1(x_0)=0$ تابع بسل تقریباً $x_0\approx 3.83$ است. شعاع r_{Airy} که در آن توزیع میدان الکتریکی صفر میشود را شعاع ایری می‌نامند،

$$\left(\frac{NA}{M}\right)\frac{2\pi r_{Airy}}{\lambda}\approx 3.83\Longrightarrow r_{Airy}\approx 0.61\frac{M\lambda}{NA} \tag{۱۰.۶}$$

دیسکی که با شعاع r_{Airy} باشد را بنام دیسک ایری اطلاق می‌کنند.

[۴] Convolute
[۵] Airy Disk

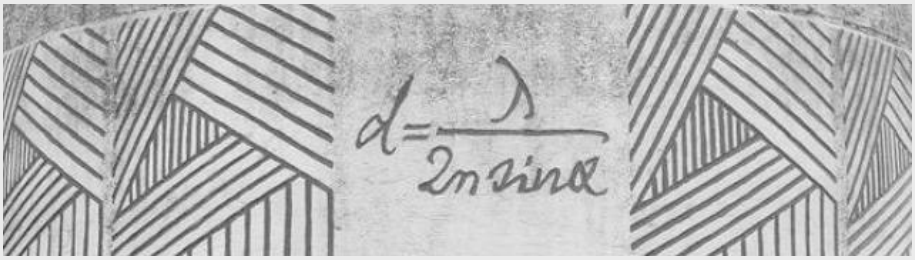
۲.۶ حد پراش نور

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم به‌حد پراش[۶] نور بپردازیم. اولین مطالعه دقیق این موضوع احتمالاً از آن ارنست آبه[۷] [۲۲] است، که از یک تحلیل نیمه کمی برای بدست آوردن حد پراش معروف خود استفاده کرد و بیان کرد که دو جسم دارای حداقل فاصله قابل تفکیک هستند.

حد پراش آبه

$$d = \frac{\lambda}{2NA} = \frac{\lambda}{2n\sin\theta_{max}} \tag{۱۱.۶}$$

ارنست آبه



هنگام نوشتن آخرین فصل‌های این کتاب، در بهار ۲۰۱۹ از شهر جنا *Jena* آلمان بازدید کردم. پس از مدتی کار بر روی جنبه‌های مختلف نانواُپتیک و حد پراش نور، از بنای یادبود آبه (در بالا نشان داده شده) که تقریباً ویژگی مذهبی دارد دیدن کردم.

زمانی که آبه برای کار در کارل زایس*Carl Zeiss* برای بهبود روند تولید ابزارهای نوری، که در آن زمان تا حد زیادی بر اساس سعی و خطا بود، استخدام شد، استاد دانشگاه جنا بود. او زمان زیادی را به‌توصیف نظری ابزارهای نوری و تصویربرداری نوری اختصاص داد، حد پراش اساسی نور را بدست آورد، در میان بسیاری از موارد عبارت روزنه عددی را معرفی کرد و میکروسکوپ نوری را به‌علم مهندسی آورد. در سالهای بعد او وظایف سازمان در شرکت زایس را بر عهده گرفت و به‌طور جدی نگران بهبود شرایط کار و زندگی کارکنان بود: او ۸ ساعت کار روزانه را معرفی کرد، یک صندوق بازنشستگی و مرخصی ایجاد کرد و از تحصیلات عالی کارگران در امور فرهنگی و سیاسی حمایت کرد.

من شگفت زده بودم که شرکت زایس چقدر شکوفایی شهر را شکل داده است و همچنان به‌درک خود از شهروندان کمک می‌کند. دیدن چنین شکل فشرده‌ای که چگونه یک ایده علمی می‌تواند در چیزی بسیار بزرگتر گسترش یابد و زندگی هزاران نفر را تحت تأثیر قرار دهد، یک تجربه فوق العاده مثبت است.

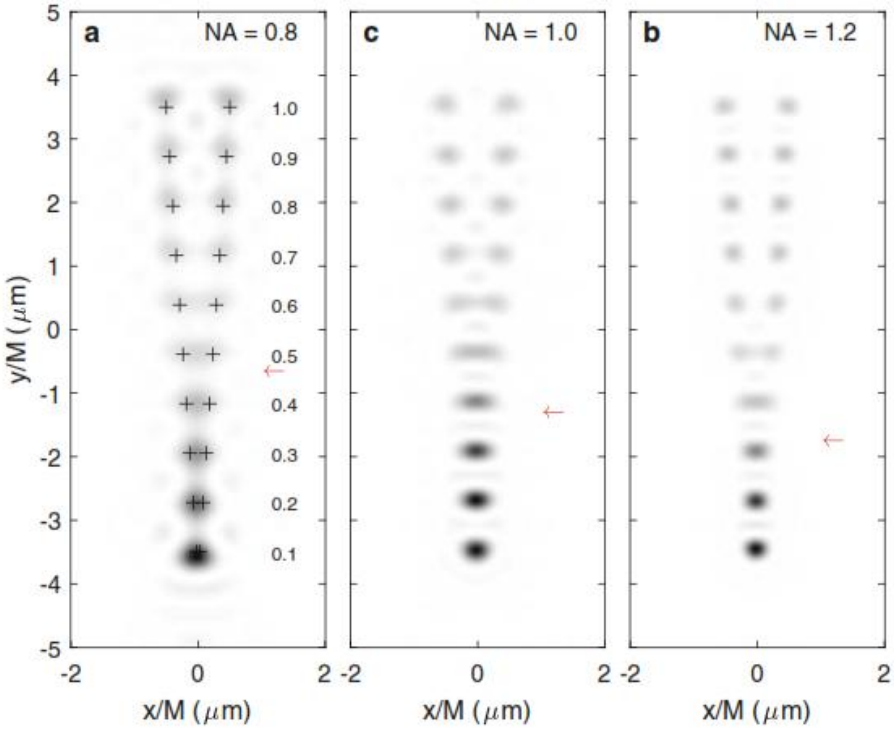
[۶] Diffraction Limit

[۷] Ernst Abbe

برای بدست آوردن رابطه اخیر، از تعریف رابطه (۱۲.۳) برای روزنه عددی استفاده کردیم. این همان عبارتی است که در یابود آبه در جنا حک شده است. گاهی اوقات از برآورد براساس شعاع ایری استفاده می‌شود.

$$d = 0.61\frac{\lambda}{NA} \tag{۱۲.۶}$$

مهم است که بدانیم در حالی نعریف فاصله قابل‌تفکیک کمینه قدری دلخواه است، خود حد پراش یک امر اساسی است و بوسیله حذف تمام امواج محوشونده از تصویر حاصل می‌شود.



شکل ۳.۶: تصویر دو دوقطبی که بفاصله چند میکرومتر از هم قرار دارند در بخش (الف) گزارش شده است. دو دوقطبی در امتداد محور xها هستند. همان پارامترهای شکل (۲.۶) را استفاده کردیم. پیکان‌ها نمایشگر فاصله جدا از هم $0.61\lambda/NA$ مربوط به‌حد پراش نور است.

شکل (۳.۶) تصویر دو دوقطبی نقطه‌ای که با فاصله‌ای در حدود طول موج از هم قرار دارند را نشان می‌دهد. در بخش (الف) مقادیر داده شده است. دوقطبی‌ها در امتداد محور xها بوده و بازاء مقادیر NA مختلف عدسی مجموعه مقایسه شده‌اند. نتایج مربوط به‌دوقطبی‌های در امتداد محور zها در شکل (۴.۶) نشان داده شده است. بدون وارد شدن بیش از حد به‌جزئیات، واضح است که حد پراش حد پائین‌تر اساسی برای وضوح است، اما حتی وقتی دوقطبی نقطه مانند امواج ساطع می‌کنند با فاصله‌ای بیش از کمترین فاصله قابل تفکیک قرار دارند، به‌سختی می‌توان تعداد و جهت دقیق این دوقطبی را از تصاویر تمیز داد. در یک گزارش جامع و کامل

از این موضوع را می‌توان در کتاب نووتنی و هخت[۸] [۶] جائی که نویسندگان همه مسائل زیر را مورد بحث قرار داده‌اند و در اینجا فقط به‌طور مختصر به‌آنها می‌پردازیم:

- **وضوح محوری** تا کنون فقط وضوح مورد بحث در باره اجسامی میسر بود که در صفحه z واقع شده بودند. متأسفانه وضوح در جهت z، که به‌وضوح محوری معروف است، بسیار بدتر است. ابتدا میدان‌های تصویر معادله (۵.۶) را برای $\rho = 0$ در نظر گیرید. وقتی $J_0(0) = 1$ و $J_{1,2}(0) = 0$ داریم، فقط انتگرال $\tilde{\mathcal{I}}_0$ با صفر متفاوت است. برای سادگی، در اینجا انتگرال را در حد موازی محور با $\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx 1$ محاسبه می‌کنیم، و خواهیم داشت

$$\tilde{\mathcal{I}}_0(1+\cos\theta) \approx \int_0^{\theta_{max}} e^{jk_3[1-\frac{\eta}{2}\theta^2]} 2\theta d\theta = \frac{-2j}{k_3 z\eta} e^{jk_3[1-\frac{\eta}{2}\theta^2]}\Big|_0^{\theta_{max}}$$

که در آن از اختصار $\eta = (f/f')^2$ استفاده کردیم. از اینجا میدان دوقطبی که در امتداد محور x یا y هستند را بدست می‌آوریم

$$|\mathbf{E}_{\hat{\mathbf{x}}}(\rho=0,z)|^2 \approx \frac{A^2}{4}\left(\frac{NA^2}{2n_1^2}\right)^2 \left[\frac{\sin\bar{z}}{\bar{z}}\right]^2, \qquad \bar{z} = \frac{k_0 NA^2}{4n_3 M^2} z \tag{۱۳.۶}$$

می‌توانیم مختصات z نرمالیزه را بشکل $\bar{z} = z/(\Delta z)$ بازنویسی کنیم، که در آن Δz به‌عنوان عمق میدان نشان داده می‌شود و می‌تواند مستقیماً از معادله (۱۳.۶) بدست آید. برای پارامترهای یک میکروسکوپ معمولی وضوح محوری با ضریب صد از ضریب شعاعی کوچکتر است. (مرجع [۶] رابطه ۱۷.۴).

- **تابع گسترش نقطه تحریک**[۹] وضوح محوری ضعیف یک مشکل مهم برای میکروسکوپ اجسام سه بعدی است. یک راه برای بهبود وضوح این است که نه کل نمونه بلکه فقط برخی نقاط انتخاب شده را روشن کرد. با روبش خط به‌خط[۱۰] این نقاط نمونه، می‌توان تصویری کامل از نمونه را البته با وضوح بهتر بدست آورد. یک روش کمی برای افزایش وضوح با توابع گسترش نقطه‌ای PSF[۱۱] که قبلاً در معادله (۸.۶) معرفی شده است و بعداز این هم بحث می‌شود، ارائه می‌شود. آشکارسازی تابع گسترش نقطه‌ای نحوه یک منبع نقطه‌ای که بوسیله سامانه تصویربرداری گسترش می‌یابد توضیح می‌دهد. به‌طور مشابه، می‌توانیم یک PSF تحریک را معرفی کرده بطوری که روشنائی نور را روی نقطه انتخاب شده‌ای متمرکز کند. سپس مجموع تابع گسترش نقطه‌ای تقریباً حاصل ضرب این PSFها است.

$$(PSF\,\text{کل}) \approx (PSF\ \text{تحریک}) \times (PSF\,\text{آشکارسازی})$$

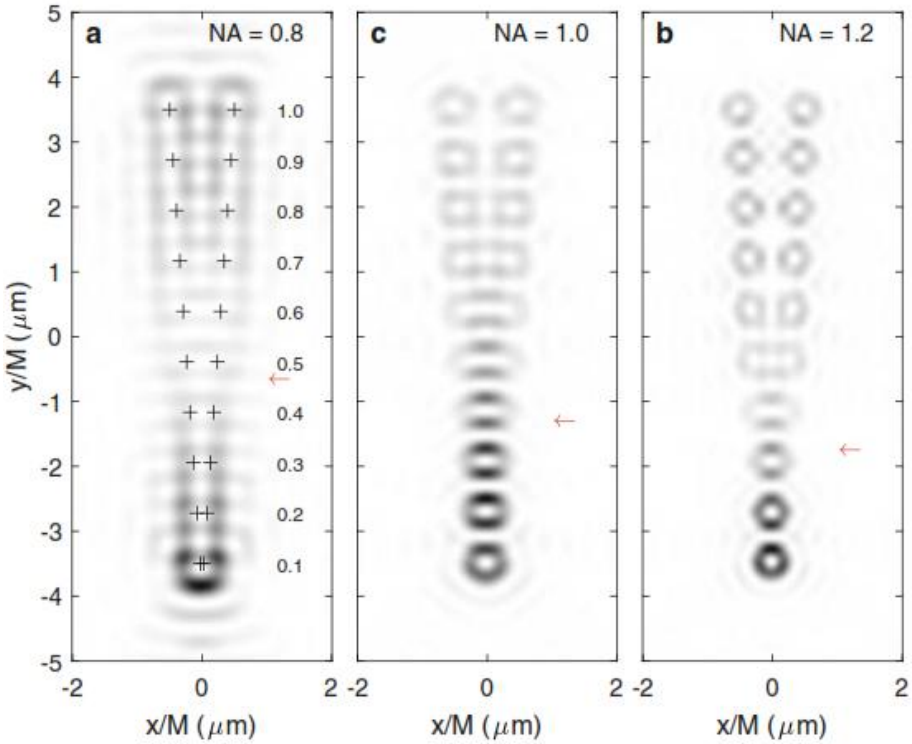
به‌طور کلی، باید چگونگی تولید نور، ایجاد روشنائی و تشخیص مشخص شود. برای مثال، از طریق فرایند پراکندگی همدوس یا ناهمدوس و افزارهای پیشرفته در این فصل

[۸] Novotny and Hecht

[۹] Excitation Point Spread Function

[۱۰] Raster-Scanning

[۱۱] Point Spread Functions (PSF)

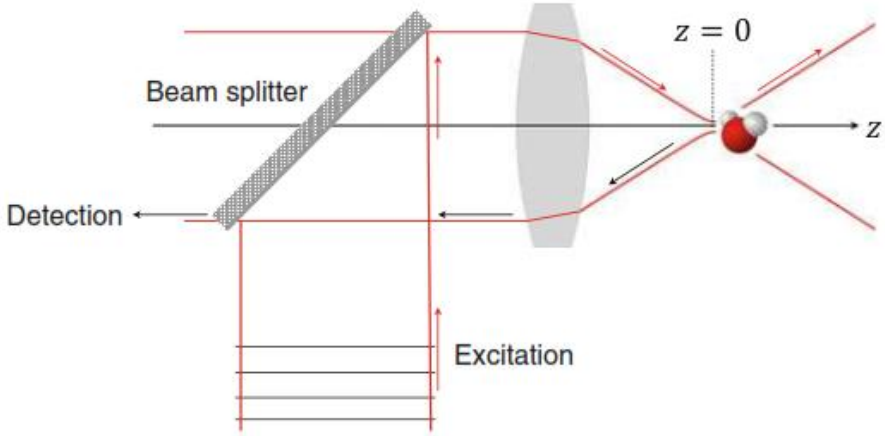


شکل ۴.۶: همان مطالب شکل (۳.۶) اما دوقطبی در امتداد محور zها است.

و همین طور در بخش‌های بعدی این کتاب بطور کلی امکان فرایند روشنائی، تشخیص را بطور ژرف و مبسوط بحث می‌کند. با این حال، در بیشتر موارد مطلوب، حاصل ضرب PSFها جواب تقریبی عالی فراهم می‌کند. برای درک اصل حاصل ضرب PSFها، فرض کنید که هر دو تابع گوسی با عرض σ_{exc} و σ_{det} هستند. سپس برای حاصل ضرب داریم $1/\sigma_{tot} = 1/\sigma_{exc} + 1/\sigma_{det}$ بنابراین عرض کل σ_{tot} کوچکتر از نمونه‌های جداگانه است.

- **میکروسکوپ هم‌کانونی (کانفوکال)** میکروسکوپ هم‌کانونی یک روش رایج برای ترکیب تحریک گزینشی با تشخیص وضوح بالا برای دستیابی به‌وضوح بیشتر ، به‌ویژه در جهت محوری است. دوم، احتمالاً از مهمترین مزیت این است که از طریق تحریک گزینشی، نورهای سرگردان به شدت حذف می‌شوند.

اصل اساسی همانند چینش شکل (۵.۶) برای تشخیص یک جسم که در کانون یک مجموعه عدسی با روزنه عددی بالا است قرار دارد. با این حال، یک آینه نیمه شفاف در ناحیه بین عدسی‌های جمع‌آوری کننده و تصویر برداری، شکل (۵.۶)، تعبیه گشته بطوری که نمونه در نقطه کانونی اولین عدسی تحریک شده است. این فرآیند تحریک را می‌توان بطور کامل شبیه به‌کانونی کردن توضیح داد. به‌بخش ۱.۶.۳ مراجعه کنید. از آنجا که آینه اضافی نیمه‌شفاف است، تحلیل فرایند تشخیص در بحث قبلی عملاً تغییر نمی‌کند، اما شدت نور توسط اینه کاهش می‌یابد. میکروسکوپ هم‌کانونی وضوح محوری



شکل ۵.۶: شمای یک میکروسکوپ هم‌کانونی. نمونه (در اینجا یک مولکول) از طریق عدسی کانونی تحریک می‌شود. نور تابشی بوسیله مقسم پرتو که بین عدسی کانونی و عدسی تصویر قرار دارد، (سمت چپ نشان داده نشده) هدایت می‌شود. از طریق همین چینش نور پراکنه از نمونه شدرست شبیه سامانه تصویربرداری که در شکل (۵.۳) نشان داده شده است، اشکار می‌شود.

را افزایش می‌دهد، اما نیاز به‌روبش خط به‌خط نقاط تحریک و تشخیص روی نمونه دارد.

- **میکروسکوپ چند فوتونی** همچنین می‌توان با استفاده از فرایندهای چند کانونی، به‌عنوان مثال، در تحریک مولکول‌هائی که باید تشخیص داده شوند، وضوح را در میکروسکوپ نوری افزایش داد. همانطور که قبلاً برای PSFهای تحریک و تشخیص گوسی بحث شد، حاصل‌ضرب چنین توابع عرض کمتری دارد. به‌طور مشابه، در جذب چندفوتونی می‌توان نقطه تحریک موثر برای فرایند چندفوتونی را کاهش داد . فرایندهای چند فوتونی مزایای بیشتری دارد که تحریک و تشخیص در طول‌موج‌های مختلف رخ می‌دهد، و به‌شما امکان می‌دهد پراکندگی پس زمینه را به‌طور چشمگیری حذف کرد.

قبل از بستن بخش حد پراش نوری، سوال‌های زیر را مطرح می‌کنیم: آیا می‌توانیم وضوح میکروسکوپ نوری را بهبود بخشیم؟ اگر جواب مثبت است، چگونه؟ همانطور که در بالا اشاره شد، تعریف وضوح قابل دستیابی قدری دلخواه است و بستگی به‌مقدار مورد نظر ما دارد. با این حال، فیزیک نهفته در حدپراش نور عمیق است و بر حذف میدان‌های محو شونده از تصویر بنا شده است. از آنجائی که این میدان‌های محوشونده از وضوح مکانی بالائی برخوردارند، چیزی که در فرایند تصویربرداری از بین میرود بازگردانیدن آن با وسائل تصویربرداری پیچیده امکان‌پذیر نخواهد بود. با این حال، در دهه‌های گذشته دو استراتژی پدیدار شده است که دستیابی به‌وضوح مکانی بهتر از حد پیش‌بینی شده توسط پراش را کمک می‌کند. هر دو آنها را در زیر به‌طور مختصر مورد بحث قرار می‌دهیم:

- **میکروسکوپ میدان نزدیک** اولین مورد میکروسکوپ میدان نزدیک یا میکروسکوپ میدان‌نزدیک نوری روبشی (SNOM)[۱۲] است. ایده اصلی این است که به‌طور مستقیم

[۱۲] Scanning Nnearfield Optical Microscopy (SNOM)

میدان‌های نزدیک نوری را اندازه‌گیری می‌کند. معمولاً این امر با استفاده از تار (فیبر) نوری مخروطی با روکش فلزی نازک حاصل می‌شود به‌طوری که نور می‌تواند از طریق نوک بداخل یا خارج تونل بزند. گاهی اوقات انتهای آنرا از نوک تار پوشش شده جدا کرد تا یک روزنه کوچکی با قطر در حدود ده‌ها نانومتر ساخته شود، اما این خیلی مورد نیاز نیست، زیرا نور می‌تواند از لایه‌های نازک فلزی عبور کند. با نزدیک کردن این تار نوری به‌نمونه، میدان‌های نزدیک کاوشگر[۱۳] به‌نوک تارنوری نزدیک شده و به‌فوتون‌های منتشر شونده تبدیل می‌شوند و می‌توانند در انتهای دیگر تار نوری آشکار شوند. با روبش خط به‌خط نوک تار روی نمونه، یک تصویر نوری از نمونه مورد بررسی بدست می‌آید. علاوه براین حالت که بنام آشکار ساز مودی معروف است، مودهای (SNOM) عملیاتی دیگری وجود دارد که در قسمت آینده بحث خواهد شد.

- **میکروسکوپ محلی سازی** رویکرد دیگر ماهیت کاملاً متفاوتی دارد و بر اساس مفهوم **پیش‌آگاهی در باره سامانه**[۱۴] بنا شده است. قبلاً، براساس این فرض که اصلاً هیچ پیش‌آگاهی نداریم، حد پراش نور را بدست آوردیم. به‌همین دلیل، دوقطبی باید با فاصله بحرانی از هم جدا شوند تا به‌عنوان موجودیت جداگانه قابل مشاهده باشند. در میکروسکوپ هم‌کانونی، پیش‌آگاهی خود را در مورد سامانه بدین معنا که نور از کدام نقطه ساطع می‌شود، (از طریق تحریک خاص) افزایش داده‌ایم. در زمینه میکروسکوپ محلی‌سازی، که بعضی وقتها به‌عنوان نانوسکوپی نیز نامیده می‌شود، یک سامانه مورد مطالعه را با مولکول‌های فلورسانس تزئین می‌کند. بطوری که در بخش ۴.۶ بحث خواهیم کرد، می‌توان موقعیت تک تک مولکول‌ها را با دقت مکانی نانومتری اندازه‌گیری کرد. به‌این ترتیب، شخص مستقیماً اجسام را اندازه‌کیری نمی‌کند، بلکه بطور غیر مستقیم از طریق مولکول‌های چسبیده به‌جسم آنرا انجام می‌دهد. نانوسکوپی مبتنی بر پیش آگاهی در مورد سامانه است، یعنی این واقعیت که مولکول‌های فلورسانس به‌آن متصل شده‌اند، بنابراین امکان دستیابی به‌وضوح مکانی نانومتری را فراهم می‌کند.

۳.۶ میکروسکوپ نوری میدان نزدیک روبشی

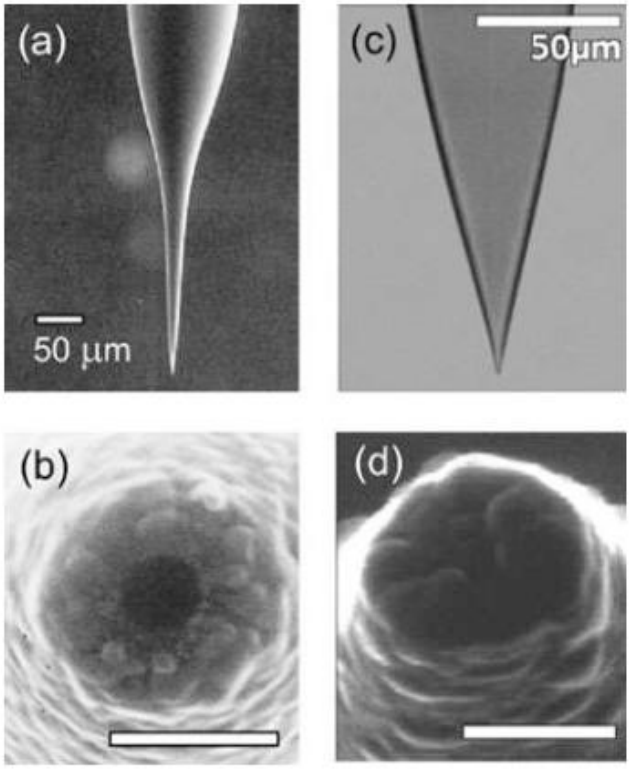
میکروسکوپ نوری میدان نزدیک روبشی (SNOM) یک فناوری براساس میکروسکوپ کاوشگر روبشی است. یک تار نوری با یک لایه فلز، شکل (۶.۶)، پوشش داده شده است. هنگامی که نوک (SNOM) به‌مجاورت کاوشگر مورد مطالعه آورده شود، میدان‌های نزدیک محوشونده[۱۵] به‌فوتوهای منتشر شونده تبدیل شده که می‌توان در انتهای تار نوری آشکار شود. گاهی اوقات با حک کردن یک روزنه کوچک در نوک، می‌توان نور را افزایش داد. علاوه بر این که مود تشخیص نامیده می‌شود، مود روشنائی نیز وجود دارد، که در آنجا نور از طریق نوک تارنوری خاموش شده و نمونه در نقطه‌ای زیر طول‌موج روشن و نور پراکنده شده کاوشگر در میدان دور آشکار می‌شود؛ در مود روشنائی-آشکارسازی هر دو نور برای روشنائی و آشکارسازی از درون تار نوری عبور می‌کنند. در ادامه بطور مختصر دو مدل ساده برای تشریح (SNOM)، مدل مدل

[۱۳] Probe

[۱۴] Preknowledge about the system

[۱۵] evanescent nearfields

بیت-بوکامپ[۱۶] و مدل ساده‌تر دوقطبی را مورد بحث قرار می‌دهیم. برای بحث بیشتر در باره کاوشگرهای نوری میدان-نزدیک، به‌مراجع [۶، ۲۴] ارجاع داده می‌شود.



شکل ۶.۶: پویشگر روزنه‌ای با پوشش آلومینوم (a, b) و شکل میکروسکوپ حکاکی (a,c):(c,d)، میکروسکوپ الکترون روبشی (SEM) و تصویر نوری. این تصاویراز مرجع [۳۰] گرفته شده است.

۱.۳.۶ مدل بیت-بووکامپ

مدل بیت-بووکامپ[۱۷] توصیف تحلیلی برای میدان‌های نزدیک موج‌صفحه‌ای که به‌سوراخ مدور کوچکی در صفحه رسانا برخورد می‌کند، ارائه می‌دهد و بدلیل سادگی برای مدل‌سازی (SNOM) بطور گسترده استفاده می‌شود. این مسئله نخست توسط بیت[۲۵] حل شد و متاسفانه شرایط مرزی در لبه‌های سوراخ را بدرستی درنظر نگرفته بود. این خطا توسط بووکامپ[۲۶] تصحیح شد و مدل اکنون به‌نام هردو آنها نامگذاری شده است. استخراج معادلات کار در دستگاه مختصات نسبتاً عجیب و غریب، یعنی مختصات کروی‌گون پخ[۱۸] انجام می‌شود و با توجه به‌این که بیت -یکی از برجسته‌ترین فیزیکدان‌های قرن بیستم و برنده جایزه نوبل- از ابتدا همه چیز را بدرستی در نظر نگرفت، در اینجا فقط نتایج نهائی را بدون تکرار محاسبات قدری خسته کننده، می‌آوریم. خوانندگان علاقمند به‌مقاله واضح و دقیق بوکامپ ارجاع داده می‌شود[۲۶].

در این مسئله یک موج صفحه‌ای با قطبش در امتداد محور $\hat{\mathbf{x}}$ها که در جهت zها منتشر می‌شود، در نظر گیرید. میدان الکتریکی بصورت $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}}e^{-jkz}$ است که در $z = 0$ به‌یک صفحه

[۱۶] Bethe–Bouwkamp Model

[۱۷] Bethe–Bouwkamp Model

[۱۸] Oblate Spheroidal Coordinates

رسانا که در آن سوراخ مدوری به‌شعاع a تعبیه شده برخورد می‌کند. برای حل این مسئله از دستگاه مختصات کروی‌کون پخ استفاده شده و می‌توان حسب مختصات (μ,ν,ϕ) یا (u,v,ϕ) را طریق روابط زیر به‌مختصات دکارتی مربوط کرد:

$$\begin{aligned} x &= a\cosh\mu\cos\nu\cos\phi = a\sqrt{(1-u^2)(1+v^2)}\cos\phi \\ y &= a\cosh\mu\cos\nu\sin\phi = a\sqrt{(1-u^2)(1+v^2)}\sin\phi \\ z &= a\sinh\mu\sin\nu = auv, \end{aligned} \tag{۱۴.۶}$$

که در آن $u=\sin\nu$ و $v=\sinh\mu$ است. تبدیل معکوس از دستگاه (μ,ν,ϕ) به‌مختصات دکارتی از طریق روابط زیر بدست می‌آید

$$\left\{\begin{array}{c}\mu\\ \nu\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\mathbf{Re}\\ \mathbf{Im}\end{array}\right\}\left[\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+jz}{a}\right)\right]$$

و $\phi=\tan^{-1}(y/x)$ است. میدان‌های آنسوی $z>0$ توسط بووکامپ با استفاده از (u,v) به‌صورت زیر بیان شده است:

$$\begin{aligned} E_x &= -jku + \frac{2jkau}{\pi}\left\{1+v\tan^{-1}v+\frac{1}{3}\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{x^2-y^2}{3a^2(u^2+v^2)(1+v^2)^2}\right\} \\ E_y &= \frac{4jkxyu}{3\pi a(u^2+v^2)(1+v^2)^2} \\ E_z &= \frac{4jkxv}{3\pi(u^2+v^2)(1+v^2)^2}, \end{aligned} \tag{۱۵.۶}$$

و عبارتی شبیه این برای میدان‌های مغناطیسی است. شکل (۷.۶) شدت میدان‌های نزدیک پشت روزنه را نشان می‌دهد. به‌طوری که مشاهده می‌شود میدان‌ها بشدت محلی شده و هنگام دور شدن از سوراخ سریع میرا می‌شوند.

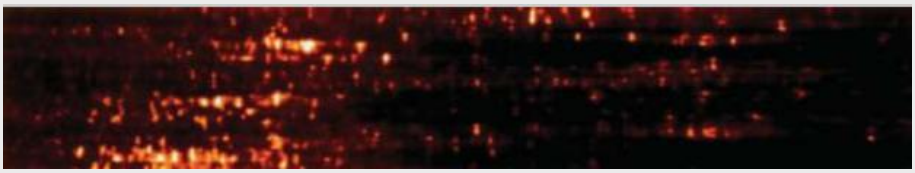
مدل ساده‌تری با توصیف دوقطبی‌های موثر برای SNOM وجود دارد که نور ساطح شده (یا جمع آوری سده) توسط نوک را سبیه سازی می‌کند. دوقطبی‌های موثر الکتریکی و مغناطیسی $\mathbf{p}_{eff}$ و $\mathbf{m}_{eff}$ بستگی به‌روزنه با شعاع a و شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}_0$ دارد[۲۰]

$$\mathbf{p}_{eff} = \mp\frac{4}{3}\epsilon a^3(\mathbf{E}_0\cdot\hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{m}_{eff} = \mp\frac{8}{3}a^3\left[\hat{\mathbf{z}}\times(\mathbf{E}_0\times\hat{\mathbf{z}})\right], \tag{۱۶.۶}$$

که در آن $\hat{\mathbf{z}}$ بردار واحد عمود بر سطح روزنه (و بسوی خارج از تار نوری) است. علامت منفی و مثبت در جلوی عبارت‌ها بترتیب برای مود آشکارسازی و روشنائی اشاره دارد. این دوقطبی‌ها امکان مدل‌سازی در عین حال دقیق SNOM را فراهم می‌کند. برای توصیف واقع‌بینانه، معمولاً به‌حل‌کننده‌های ماکسول[۱۹] که در بخش یازدهم بطور مبسوط بحث خواهیم کرد، انجام می‌شود.

[۱۹] Computational Maxwell's Solvers

مواجه اریک بتزیک با SNOM



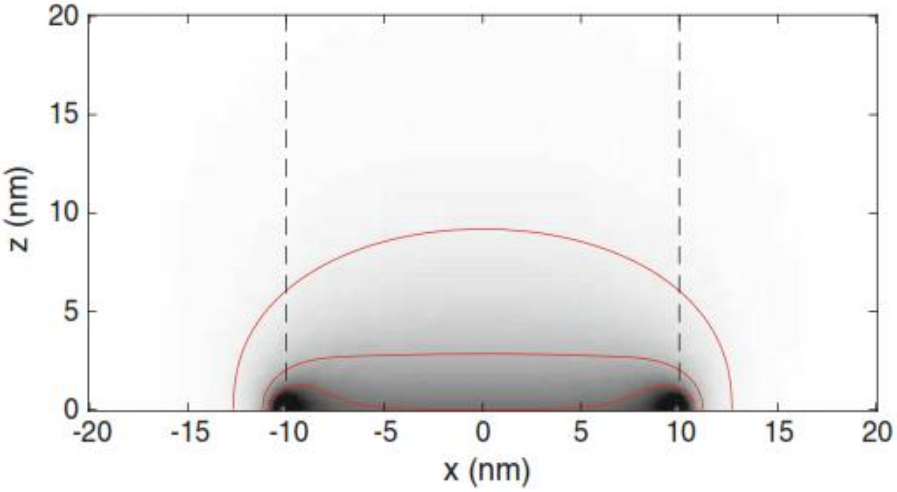
اریک بتزیک*Eric Betzig*، یکی از قهرمان‌های روزهای اولیه *SNOM* است، که تاریخ مقاله مشهور وی را در زمینه حالت‌های تحریک محلی در چاه‌های کوانتوم بیاد می‌آورد[۲۷].

> برای آخرین خوشحالی من با میدان‌نزدیک، هارالد*Harald* و من کاوشگر میدان‌نزدیک خود را روی میکروسکوپ تونل‌زنی با دمای پایین قرار دادیم تا ساختارهای چاه کوانتومی را که اساس لیزرهای نیمه هادی هستند، مانند ساختارهای نشانگر لیزری، مطالعه کنیم. با استفاده از دستگاه اُپتیک حد پراش استاندارد، طیف آنها شبیه یک گسیل تپه صاف است، اما شاهد یک سری دیوانه‌وار از خطوط بسار تیز بودیم. حجم کاوشگر آنقدر کوچک بود که نور را فقط می‌تواند در جای گسسته خاصی گسیل کند. و طول‌موج آن نور به‌ضخامت موضعی چاه کوانتوم بسیار حساس بود، بنابراین آنها در رنگ‌های مختلف می‌درخشیدند، به‌این معنی که می‌توانیم آنها را به‌صورت جداگانه مطالعه کنیم.

بتزیگ *Betzig* در سال ۲۰۱۴ جایزه نوبل شیمی را به‌دلیل موضوعی متفاوت، یعنی میکروسکوپ محلی‌سازی دریافت کرد، بنابراین بازتاب او در زمینه *SNOM* (به‌بخش پایین مراجعه کنید) ممکن است بسیار بحرانی باشد. با این حال، خواندن خاطرات یک برنده نوبل که در کتابشناسی صفحه اصلی جایزه نوبل ارائه شده، جالب است، و در نهایت به‌او اجازه داد علم را برای چند سال ترک کند.

> آن یک مقاله خیره کننده بود ، اما در آن زمان من خسته شده بودم. اگرچه میدان‌نزدیک ثابت شده است که یک ابزار ارزشمند برای مشخصه مواد و مطالعه برهمکنش نور و ماده در مقیاس نانو است، اما هدف اصلی من ساخت یک میکروسکوپ نوری بود که بتوان با وضوح میکروسکوپ الکترونی سلول‌های زنده را مشاهد کرد. اما میدان‌نزدیک فقط روی نمونه‌های مسطح کار می‌کرد و متاسفانه چیزی که می‌خواستید ببینید به‌سطح نزدیک بود. اگر ۲۰ نانومتر دورتر باشید، وضوح قابل توجهی را از دست می‌دهید. می‌دانستم که یک سلول کمی بیش از تقریباً ۲۰ نانومتر است، بنابراین این اتفاق نمی‌افتاد.
>
> در همین حال، مسئله پخش و همه‌گیر شده بود. در آن زمان صدها نفر در باره میدان نزدیک فعالیت می‌کردند، و بیشتر آنها چرند می‌گفتند. آنها خود را با تصاویری که دارای ظاهری فریبنده اما ساختگی بودند، فریب می‌دادند و کسی نمی‌خواست آنها را بشنود. من احساس کردم که هر نتیجه خوبی که برای اثبات صد مقاله ناپسند تهیه شود، اتلاف وقت مردم و پول مالیات دهندگان است [....] بنابراین انصراف دادم.

تصویر گرفته شده از اریک بتزیک، " سخنرانی نوبل: تک مولکول‌ها، سلول‌ها و اُپتیک فوق وضوح " ۲۰۱۵.



شکل ۷.۶: شدت میدان نزدیک از مدل بیت-بووکامپ، رابطه (۱۵.۶)، محاسبه شده است. موج صفحه‌ای با دامنه میدان الکتریکی واحد و با قطبش در امتداد $\hat{x}$ها در جهت zها منتشر می‌شود. در نقطه $z = 0$ بیک صفحه رسانا که در آن سوراخ مدوری بشعاع a تعبیه شده می‌تابد. در شکل شدت میدان عبوری از سوراخ را نشان می‌دهد. خط چین محل سوراخ را معلوم میدارد و خطوط پررنگ شدت میدان را بصورت کانتور مشخص می‌کند. در این محاسبات $a = 10$ نانو متر و $\lambda = 620$ نانومتر است.

۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی

میکروسکوپ محلی یا فوق وضوح جایزه نوبل شیمی ۲۰۱۴ را دریافت کرد و انقلابی در میکروسکوپ نوری در علوم زیستی ایجاد کرده است. این محصول با نام‌های مختلف مانند میکروسکوپ فعال‌سازی عکس (FPALM[۲۰] یا PALM[۲۱]) [۲۸]، میکروسکوپ بازسازی تصادفی (STORM)[۲۲] [۲۹]، یا میکروسکوپ تخلیه تحریک شده (STED) [۲۳] [۳۰] تجاری سازی شده است. در ادامه، اصول اساسی پشت این فرآیندها را به‌طور مختصر بدون آنکه وارد جزئیات شویم، بحث می‌کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر خوانندگان علاقمند به‌ادبیات غنی مراجع این زمینه، به‌بعنوان مثال [۳۱]، مراجعه کنند.

۱.۴.۶ دقت موقعیت

فرض کنید می‌دانیم که انتشار از یک ساطع کننده **تک** کوانتوم ناشی می‌شود. چقدر می‌توانیم ساطع‌کننده را محلی‌سازی کنیم؟ برای سادگی، فرض می‌کنیم، همان طور که معمولاً برای مولکول‌های محلول صادق ااست، جهت گسیل کننده دوقطبی تصادفی است، به‌گونه‌ای که الگوی انتشار دارای یک گلبرگ[۲۴] مرکزی است و می‌توان آن را با میانگین آماری روی میدان‌های داده

[۲۰] Fluorescence PhotoActivation Localization Microscopy (FPALM)

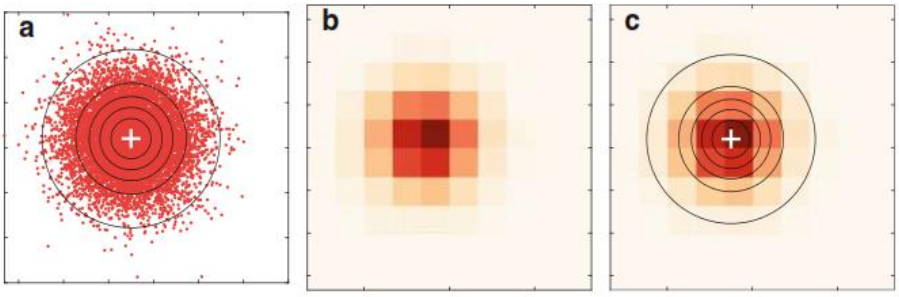
[۲۱] Photoactivated Localization Microscopy (PALM)

[۲۲] Stochastic Optical Reconstruction Microscopy (STORM)

[۲۳] STimulated Emission Depletion (STED) microscopy

[۲۴] Lobe

شده در (۵.۶) یا (۶.۶) توصیف کرد. در اصل، طرح شرح داده شده در زیر نیز می‌تواند به‌راحتی با شرایطی که جهت دوقطبی ثابت است تطبیق داده شود و برای مثال در مورد مولکول‌های بی‌حرکت در لایه پلیمر صدق می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم که عمق z دوقطبی معلوم است و در مورد نحوه انجام این کار در زیر توضیح خواهیم داد.



شکل ۸.۶: محلی‌سازی ساطع کننده یک دو قطبی (**الف**) یک قطره چکان دوقطبی که در موقعیت مشخص شده توسط علامت متقاطع قرار دارد، فوتون ساطع می‌کند. تصویر دوقطبی به‌دلیل تابع گسترش نقطه‌ای گسترده می شود. (**ب**) تصویر انتشار دوقطبی برای تشخیص از طریق دوربین CCD. (**ج**) نقطه مرکزی انتشار توسط حداقل مربع با برازش توزیع گوسی یا بصورت پالایش شده‌تر، که می‌تواند با دقت انجام شود و عمدتا به‌نسبت سیگنال به‌نویز بستگی دارد.

شکل (۸.۶)-الف الگوی انتشار یک تک دوقطبی واقع در علامت متقاطع را نشان می‌دهد. نقاط مختلف مربوط به‌نقاط آشکارسازی تک فوتون است و گسترش توزیع کلی بدلیل تابع گسترش نقطه‌ای است که قبلاً بحث شده است. در آزمایش‌های معمولی با دوربین CCD[۲۵]، وضوح تصویر بر اساس پیکسل‌های آشکارساز تنظیم می‌شود که به‌صورت شماتیک در صفحه (ب) نشان داده شده است. بنابراین چقدر می‌توان موقعیت ساطع کننده دوقطبی را از این تصویر پیکسلی تعیین کرد؟ پاسخ تا حدی شگفت آور است: در اصل با دقت دلخواه، تنها محدودیت بدلیل نسبت سیگنال به‌نویز است که به‌تعداد فوتون‌های آشکار شده بستگی دارد.

برای بدست آوردن موقعیت دوقطبی، فرض می‌کنیم که الگوی ساطع شده روی آشکارساز مربوط به‌تابع گسترش نقطه‌ای $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ است که ممکن است علاوه بر این برخی تغییرات را نیز شامل شود، برای مثال برای سیگنال پس زمینه یا اندازه پیکسل a آشکارساز تصویر باشد. فرض کنید که N فوتون کل را اندازه‌گیری کرده‌ایم و یک هیستوگرام داریم که تعداد n_i فوتون‌های اندازه‌گیری شده در موقعیت پیکسل $\mathbf{r}_i$ را محاسبه می‌کند. در این صورت می‌توانیم حداقل مربع (یا روش مشابهی) را انجام دهیم تا بهترین موقعیت دوقطبی $\mathbf{r}_0$ را بدست آوریم

$$\sum_i |n_i - f(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_0)|^2 \longrightarrow Min.$$

اگر f شامل پارامترهای اضافی مانند سیگنال پس زمینه ناشناخته باشد، می‌توان آنها را با گمترین مربع برازش داد. می‌توان نشان داد که دقت محلی‌سازی σ برای چنین برازش [۳۲]

[۲۵] Charge-Coupled Device (CCD)

برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{PSF}^2 + a^2/12}{N}\right)\left(\frac{16}{9} + \frac{8\pi\sigma_{PSF}^2 b^2}{a^2 N}\right)} \tag{۱۷.۶}$$

که در آن N تعداد فوتون‌های جمع شده، a اندازه پیکسل آشکارساز تصویر، b^2 میانگین سیگنال پس‌زمینه، و σ_{PSF} انحراف معیار تابع گسترش نقطه‌ای است. اندازه بهینه پیکسل a بستگی به‌تعداد فوتون مورد انتظار و نویز پس زمینه دارد، اما در بیشتر موارد مطلوب، اندازه پیکسل باید تقریباً برابر با انحراف معیار تابع گسرش نقطه‌ای باشد. مهمترین مشاهده در معادله (۱۷.۶) مقیاس σ با $N^{-1/2}$ است، بنابراین در صورت مقادیر بزرگ N می‌توان بطور دلخواه کوچک کرد. این اساس میکروسکوپ محلی‌سازی را تشکیل می‌دهد.

۲.۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی با عکس فعال

برای اینکه محلی سازی دوقطبی برای میکروسکوپ مفید باشد، به‌چند دستورالعمل اضافی نیاز داریم: باید بتوانیم (۱) مولکول‌های فلورسانس را به‌نمونه مورد علاقه خود متصل کنیم، (۲) چند مولکول را در صورت نیاز به‌منظور محلی‌سازی روشن کنیم، (۳) و هنگامی‌که محلی‌سازی شدند آنها را خاموش کنیم.

خوشبختانه دو کار اول در اواسط دهه ۱۹۹۰ توسط شیمی‌دانها حل شده بود. مارتین چلفی[۲۶] و دیگران پروتئین‌های فلورسنت سبز (GFPs)[۲۷] را برای میکروسکوپ نوری سلول‌ها کشف کرده بودند. او به‌همراه دو همکار خود جایزه نوبل شیمی سال ۲۰۰۸ را دریافت کردند:

> [...] کشف اولیه GFP و یک سری پیشرفت‌های مهم که منجر به‌استفاده از آن به‌عنوان یک ابزار برچسب زنی در علوم زیستی شده است. با استفاده از فناوری DNA ، محققان اکنون می‌توانند GFP را به‌سایر پروتئین‌های جالب اما غیر قابل مشاهده متصل کنند. این نشانگر درخشان به‌آنها امکان می‌دهد حرکات، موقعیت‌ها و فعل و انفعالات پروتئین‌های برچسب‌زده را تماشا کنند.

اریک بتزیگ[۲۸] در زندگینامه نوبل خود لحظه‌ای را به‌یاد می‌آورد که در سال ۲۰۰۲ از این تحولات مطلع شد.

> من دوباره شروع به‌خواندن ادبیات علمی کردم و به‌سرعت با مقاله مارتین چلفی در مورد پروتئین فلورسنت سبز روبرو شدم، که او در سال ۱۹۹۴ هنگام خروج از بِل[۲۹] منتشر کرده بود. این برای من مانند وحی مذهبی بود. بخشی از آنچه تصویربرداری با میدان نزدیک را بسیار دشوار می‌کرد این بود که برچسب‌زدن پروتئین‌ها به‌اندازه کافی متراکم بدون قرار دادن فلوروفور[۳۰] بر روی یک مشت کار بیهوده دشوار بود. در اینجا راهی برای برچسب‌زدن با ۱۰۰

[۲۶] Martin Chalfie

[۲۷] Green Fluorescent Proteins (GFPs)

[۲۸] Eric Betzig

[۲۹] Bell

[۳۰] A fluorophore (or fluorochrome, similarly to a chromophore) is a fluorescent chemical compound that can re-emit light upon light excitation.

> ویژگی وجود دارد، و شما می‌توانید آن را در یک سلول زنده انجام دهید. نمی‌توانستم باور کنم که چقدر جالب بود. من نمی‌خواستم به‌میکروسکوپ برگردم، اما هنگامی که با GFP آشنا شدم، احساس کردم که مجبورم.

در حالی که مولکول‌های فلورسانس سبز امکان اتصال به‌محل خاص را می‌دهند، هنوز باید به‌موضوع روشن و خاموش شدن این مولکول‌ها پرداخت. خوشبختانه این وظایف را می‌توان به‌شرح زیر حل کرد:

- **تحریک عکس** کنترل حالت فلورسنت مولکولها در هنگام استفاده از مولکولهای قابل عکسبرداری امکان پذیر است. در فعالسازی نوری یک مولکول پس از روشنایی در طول موج مشخص از حالت خاموش تاریک نوری به‌حالت روشن روشنایی نوری تبدیل می‌شود. سایر مولکول‌ها دارای تغییر عکس هستند، این تغییر حالت برگشت پذیر بین حالت روشن و خاموش پس از روشنایی در دو طول موج متفاوت است.
- **سفید کردن** حتی اگر مولکول ها را نتوان به‌صورت کنترل شده خاموش کرد، به‌دلیل سفید شدن عکس، پس از مدتی کوتاه از نظر نوری غیر فعال می‌شوند. هر زمان که یک مولکول از نظر نوری برانگیخته شود، احتمال کمی وجود دارد که دچار تغییر شکل شده و از نظر نوری غیرفعال شود. به‌طور معمول، مولکولها قبل از سفید شدن و غیرفعال شدن نوری تعداد معینی فوتون، مثلاً یک میلیون، از خود ساطع می‌کنند.

با این کنترل بر حالتهای اتصال و روشن/خاموش مولکولهای فلورسانس، شماتیک میکروسکوپ محلی‌سازی را می‌توان به‌شرح زیر درک کرد (شکل ۹.۶). در ابتدا، نمونه با مولکول‌های فلورسانس تزئینمی‌شوند که همه در حالت خاموش هستند. پالس فعال ضعیف، چند مولکول را به‌حالت روشن می‌برد، جایی که با استفاده از طرح محلی‌سازی که قبلاً توضیح داده شد، محلی‌سازی می‌شوند. پس از مدتی آنها سفید می‌شوند و همه مولکول‌ها دوباره در حالت خاموش قرار دارند. تسلسل فعال‌سازی، محلی‌سازی و سفید شدن بارها تکرار می‌شود، تا زمانی که تصویری از جسم مورد بررسی دریافت شود. اولین میکروسکوپ محلی‌سازی عکس فعال شده[۳۱] (PALM) پس از مشخص شدن نحوه عملکرد آن ساخته شد. اریک بتزیگ به‌یاد می‌آورد:

> من و هارالد[۳۲] اولین میکروسکوپPALM را در اتاق نشیمن او در لا ژولا[۳۳] ساختیم. هر دو بیکار بودیم، اما هارالد برخی از تجهیزات خود را از بل تهیه کرده بود. آن را از ذخیره خارج کردیم و هرکدام مبلغ ۲۵۰۰۰ دلار برای تأمین سایر موارد مورد نیاز خود قرار دادیم. سخت کار کردیم و در ماه سپتامبر همه قطعات را برای بازسازی میکروسکوپ در اتاق تاریک آزمایشگاه جنیفر[۳۴] ارسال کردیم. اولین باری که لغزشی پوشیده از مولکول‌ها را در میکروسکوپ قرار دادیم و نور فعال کننده نور را روشن کردیم ، اولین زیرمجموعه ظاهر شد و می‌دانستیم که آن را داریم.

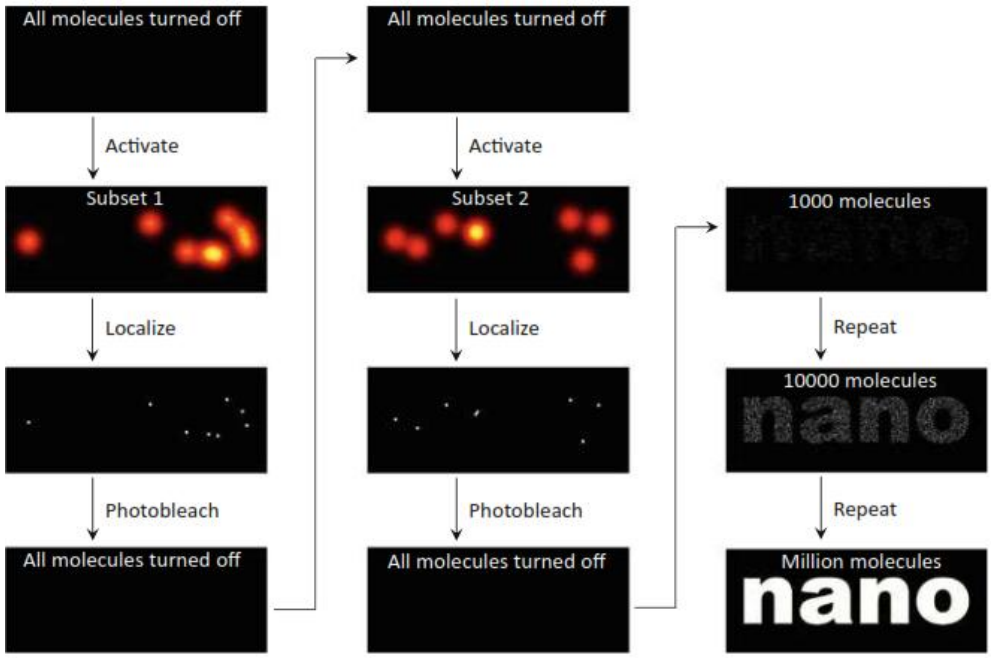
از آن زمان این زمینه رونق یافته و میکروسکوپ محلی‌سازی به‌یک بازیگر کلیدی در زمینه علوم زیستی تبدیل شده است. تصاویر سه بعدی را می‌توان با استفاده از لنزهای استوانه‌ای

[۳۱] Photo-Activated Localization Microscope (PALM)

[۳۲] Harald

[۳۳] La Jolla

[۳۴] Jennifer's lab



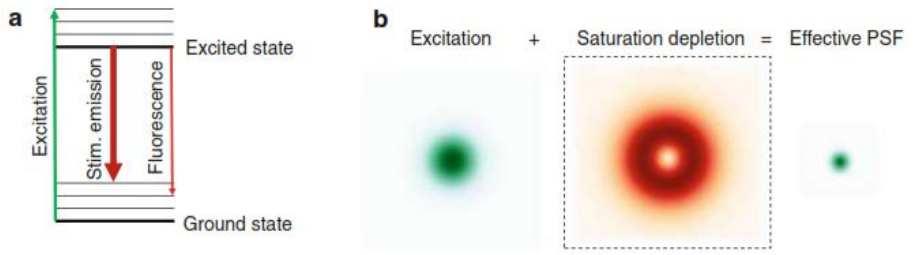
شکل ۹.۶: اصول میکروسکوپ محلی‌سازی. با خاموش کردن تمام مولکول‌های متصل به‌نمونه شروع می‌کنیم. یک پالس فعال ضعیف باعث روشن شدن چند مولکول می‌شود که قبل از سفید شدن محلی‌سازی شده‌اند. این روش بارها تکرار می‌شود تا زمانی که تصویری از نمونه مورد بررسی دریافت کنیم، در اینجا حروف "نانو" را تشکیل می‌دهند. فرض می‌کنیم که حروف متراکم با ساطع‌کننده‌های دوقطبی، شبیه به‌چینش نشان داده شده در شکل‌ها (۲.۳) و (۳.۳) هستند.

برای تولید صفحه‌های نوری و روشن کردن مولکولها در صفحه‌های خاصی از نمونه به‌دست آورد. به‌طور کلی، بین وضوح بالا و روبش سریع ، یک مبادله وجود دارد، و در حالی که امروزه مشاهده سلولهای زنده با وضوح زیر پراش بلادرنگ[۳۵] امکان پذیر است، میکروسکوپ جزئیات ریز سلول‌ها معمولاً به‌زمان مشاهده طولانی‌تر و نمونه‌های بی‌حرکت نیاز دارد.

۳.۴.۶ میکروسکوپ تخلیه تحریک شده

میکروسکوپ تخلیه تحریک شده (STED)[۳۶] یک روش میکروسکوپی محلی‌سازی متفاوت است که در اواسط ۱۹۹۰ توسط استفان هل[۳۷] و همکاران توسعه یافت. او به‌همراه اریک بتزیگ[۳۸] و ویلیام مورنر[۳۹] جایزه نوبل ۲۰۱۴ را به‌دلیل "فراتر از محدودیت‌های میکروسکوپ نوری" دریافت کردند. همانطور که در زندگینامه نوبل وی توضیح داده شده، وی در پایان‌نامه دکتری خود به‌این موضوع علاقه مند بود، اما در ابتدا اوضاع خیلی خوب پیش نمی‌رفت.

[۳۵] Real Time
[۳۶] STimulated Depletion (STED) microscopy
[۳۷] Stefan Hell
[۳۸] Eric Betzig
[۳۹] William Moerner



شکل ۱۰.۶: اصول تخلیه تحریک شده (STED). **(الف)** یک مولکول فلورسانس تا حالت برانگیخته الکترونیکی و ارتعاشی تحریک می‌شود و سپس تا زمانی که به‌سطح ارتعاشی برسد ، آرامش ارتعاشی را تجربه می‌کند. برای چند نانو ثانیه، قبل از گسیل فوتون و آرامش دوباره به‌سطح الکترونیکی و ارتعاشی باقی می‌ماند. اگر در طول این مدت انتظار، یک پالس تخلیه قوی دیگر روشن شود، مولکول تحت گسیل تحریک شده (با افزودن فوتون به‌پالس تخلیه) قرار گرفته و به‌حالت اولیه باز می‌گردد. **(ب)** با ترکیب یک پالس تحریک گوسی با یک پالس تخلیه شبیه پیراشکی، نقطه تحریک موثر را می‌توان بسیار کوچک کرد.

> شایعه این بود که تلاش‌های من مانند تمام تلاش‌های دیگر میدان دور "فوق وضوح" نوری قبل به‌پایان می‌رسد، یعنی به‌عنوان یک کنجکاوی دانشگاهی. [...] احساس کردم که به‌سادگی تغییر نحوه کانونی کردن نور یا چیدمان مجدد عدسی‌ها، مسائل را بطور اساسی تغییر نخواهد داد. تنها راه انجام این کار یا از طریق برخی از جلوه‌های کوانتوم نوری یا-آنچه بیشتر امیدوار کننده به‌نظر می‌رسید-از طریق حا لت‌های مولکول‌های قابل تصویربرداری است. مولکول‌هایی که حالت آنها به‌آسانی قابل اجرا با فلورسنت بودند که خوشبختانه در علوم زیستی نیز مورد توجه قرار گرفتند.
>
> صبح روز شنبه در پاییز ۱۹۹۳ من کتاب "نظریه کوانتومی نور" کتاب رودنی لودون [۴۰] را به‌امید یافتن چیزی مناسب مرور می‌کردم. چند هفته قبل تصور می‌کردم اگر مولکول‌های فلورسنت دوباره از حالت برانگیخته با استفاده از پرتوهای کمی جابجا شوند، چه اتفاقی می‌افتد. وقتی چشم من به‌فصلی در مورد گسیل تحریک شده توجه کرد، برایم روشن شد: چرا مولکولها را تحریک می‌کنم، چرا آنها را تحریک نکنم، یعنی آنها را بدون فلورسنت نگه دارم تا آنها را از همسایگان خود جدا شوند. این فکرمرا بوجد آورد و بلافاصله کتاب فریتز شوفر [۴۱] در مورد لیزرهای رنگی را بررسی کردم تا ببینم در مورد گسیل تحریک شده فلوروفورها مانند رودامین‌ها چه چیزی گزارش شده است. ارزیابی سریع نشان داد که وضوح تصویر حداقل ۳۵-۳۰ نانومتر را می‌توان در صفحه کانونی به‌دست آورد، یعنی ۸-۶ بار فراتر از حد پراش. شگفت انگیز بود. همچنین فوراً مشخص شد که وضوح قابل دستیابی فقط به‌شدت نمونه بستگی دارد و در اصل نامحدود است.

اصل اساسی در شکل (۱۰.۶) نشان داده شده است و شامل ایجاد یک نقطه تحریک است که بسیار کوچکتر از حد پراش نور است. تصویر (الف) نمودار معمولی جابلونسکی [۴۲] از سطوح مولکولی را گزارش می‌دهد. این مولکول به‌عنوان یک سیستم با دو حالت الکترونیکی، یک

[۴۰] Rodney Loudon's book

[۴۱] Fritz Schäfer's book

[۴۲] Jablonski diagram

حالت پایه[۴۳] و برانگیخته، همراه با یک سری تحریکات ارتعاشی مدل شده است. فرض کنید که مولکول در ابتدا در حالت اولیه خود قرار دارد. سپس یک پالس تحریک مولکول را به‌حالت برانگیخته الکترونیکی و ارتعاشی ارتقا می‌دهد و در آنجا آرامش می‌یابد تا سرانجام در حالت ویبرونیک حالت الکترونیکی برانگیخته قرار گیرد. به‌طور معمول، قبل از انتشار فوتون ، چند نانو ثانیه در آنجا می‌ماند، که می‌تواند به‌عنوان فلورسانس تشخیص داده شود. اگر در این مدت انتظار ، یک پالس تخلیه قوی و قوی دوم اعمال شود ، مولکول در یک فرایند گسیل تحریک شده به‌حالت پایه الکترونیکی آورده شده و یک فوتون به‌پالس تخلیه اضافه می‌شود. STED از تحریک مولکولی و برانگیختگی به‌شرح زیر استفاده می‌کند:

- **پالس تحریک** اولین پالس تحریک مولکول‌ها را، همانطور که در شکل (۱۰.۶)-الف نشان داده شده است، تحریک می کند. نور تحریک از طریق اپتیک های میدان دور روی نمونه کانونی می‌شود، بنابراین گسترش آن به‌ترتیب طول‌موج نور است.

- **پالس تخلیه** دومین پالس تخلیه، مولکول‌ها را به‌حالت اولیه باز می‌گرداند و حالت مولکولی برانگیخته را از بین می‌برد. پالس تخلیه دارای شکل دونات (پیراشکی) است، که می‌توان آن را با صفحه‌های فاز مشابه بحث قبلی در مورد حرکت زاویه‌ای نوری در بخش ۶.۴ بدست آورد، و معمولاً بسیار قوی تر از پالس تحریک است. بنابراین تمام مولکول‌ها را به‌استثنای ناحیه مرکز تخلیه می‌کند. این ترکیب تحریک و تخلیه امکان ایجاد نقاط تحریک (PSF های تحریک) را می‌دهد که بسیار کوچکتر از طول موج نور هستند. در نهایت، فلورسانس مولکول‌های تکمیل نشده به‌عنوان سیگنال اندازه‌گیری می‌شوند.

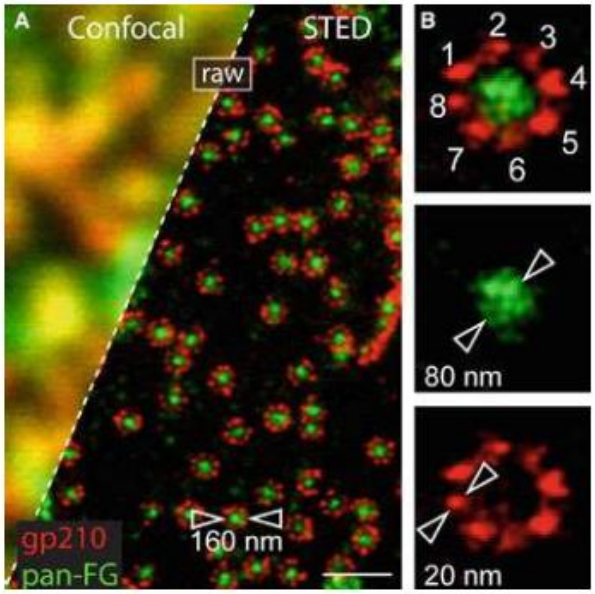
یکی از تفاوت‌های اصلی بین PALM یا STORM و STED این است که در طرح‌های قبلی مولکول‌ها به‌طور تصادفی تحریک می‌شوند، در حالی که در مورد دوم به‌صورت کنترل شده است. در STED باید نقطه تحریک روی نمونه را شبیه به‌میکروسکوپ کانفوکال (هم‌کانونی) معمولی روبش کرد. شکل (۱۱.۶) مقایسه بین نتایج به‌دست آمده با میکروسکوپ کانفوکال و STED را نشان می‌دهد.

آیا میکروسکوپ محلی‌سلزی می‌تواند حد پراش را شکست دهد؟

این فصل به‌حد پراش نور پرداخته است، بنابراین شاید منصفانه باشد که بپرسیم آیا این حد بنیادی است یا می‌توان بر آن غلبه کرد. من شخصاً تمایل دارم که ماهیت اساسی را انتخاب کنم، اما شایعات می‌گویند که متخصص‌های واجد شرایط معتقدند که میکروسکوپ محلی‌سازی حد پراش را شکست داده است. بنابراین احتمالاً باید سئوال را برای بحث باز نگه دارم.

بخشی از این بحث از آنجا ناشی می‌شود که به‌نظر می‌رسد هیچ تعریف منحصر به‌فردی از حد پراش وجود ندارد و پاسخ بستگی به‌نحوه تعریف دقیق آن دارد. بحث در مورد چیزی که به‌تعاریف بستگی دارد معمولاً بیش از حد مفید نیست. با این حال، بدون مشخص شدن بیش از حد، من درک می‌کنم که حد پراش مربوط به‌ازبین رفتن امواج محوشونده از تصویر است، و این اطلاعات از دست رفته هرگز قابل بازیابی نیست. بنابراین بدون هیچ‌گونه آگاهی در مورد سیستم تحت نظارت، بنابراین ناگزیر باید به‌حد پراش یا چیزی مشابه دست یابیم.

[۴۳] Ground State



شکل ۱۱.۶: نانوسکوپی فلورسانس مجموعه پروتئینی با میکروسکوپ STED فشرده نزدیک به‌مادون قرمز با پالس نانو ثانیه‌ای و مقایسه با میکروسکوپ هم‌کانونی. **(الف)** STED زیر واحدهای دارای برچسب ایمنی را در NPC دوزیستان نشان می‌دهد. قطر حلقه هشت ضلعی $gp210160$ نانومتر است. نوار مقیاس، ۵۰۰ نانومتر است. **(ب)** تصویر NPC هر هشت همودیمر با برچسب آنتی بادی با برچسب $gp210$ را به‌عنوان ۴۰-۲۰ نانومتر واحد و محلی سازی ۸۰ نانومتر از زیر واحدها در کانال مرکزی را نشان داده می‌شود. شکل و زیرنویس برگرفته از[۳۳] است.

برای "غلبه" بر حد پراش، به‌دانش بیشتری نیاز است، به‌عنوان مثال، نور آشکار شده از مولکول‌های فلورسانس متصل به‌نمونه است. این یک دستاورد بزرگ و حیرت‌انگیز است که می‌توان این مولکول‌ها را به‌صورت قوی و دقیق محلی‌سازی کرد. با این حال، به‌نظر من میکروسکوپ محلی‌سازی سئوال‌های متفاوتی نسبت به‌میکروسکوپ معمولی از طبیعت می‌پرسد، و بنابراین من پیشنهاد می‌کنم که میکروسکوپ معمولی و محلی‌سازی را با یکدیگر مقایسه نکنید.

تمرینات

- **تمرین ۱** میدان الکتریکی یک دوقطبی نوسانی را می‌توان بر حسب تابع گرین دیادیک همراه با (۱.۶) بصورت زیر بیان کرد
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}$$
با تابع گرین متقارن، معادله (۲۵.۵)، میدان دور دوقطبی را محاسبه کنید.
- **تمرین ۲** از جعبه ابزار NANOPT از فایل demodip05.m برای محاسبه تصویر (شدت میدان‌های تصویری) دو دوقطبی که در امتداد x قرار گرفته و به‌فاصله d از هم هستند استفاده کنید. برای مقادیر مختلف NA فاصله‌ای که دوقطبی را در تصویر می‌توان تشخیص داد، پیدا کنید و با معادله (۱۲.۶) مقایسه کنید.

- **تمرین ۳** از جعبه ابزار NANOPT از فایل demodip06.m برای محاسبه تصویر I_{12} دو دوقطبی که در امتداد x قرار گرفته و به‌فاصله d از هم هستند، استفاده کنید. تصاویر I_1 و I_2 را برای هر دوقطبی جداگانه محاسبه کرده و مجموع $I_1 + I_2$ را رسم کنید. آیا I_{12} و $I_1 + I_2$ تفاوت دارند؟ و اگر جواب مثبت است، چرا؟
- **تمرین ۴** از همان فایل تمرین قبلی برای بررسی وضعیت دوقطبی‌ها در یک صفحه $z = 0$ نیستند، استفاده کرده، اما یک دوقطبی از آن دور می‌شود. این چگونه بر تصویر تأثیر می‌گذارد؟
- **تمرین ۵** وضعیت دو دوقطبی را در نظر گیرید که جهت آنها ثابت نیست اما به‌طور تصادفی با زمان تغییر می‌کند. در مورد چگونگی طیف‌ها هنگامی که سیگنال در یک فاصله زمانی طولانی میانگین‌گیری می‌شود، بحث کنید.

فصل ۷

خواص مواد

الکترودینامیک از طریق بار آزاد ρ و توزیع جریان $\mathbf{J}$ و همچنین از طریق خاصیت گذردهی الکتریکی[۱] ϵ و نفوذپذیری مغناطیسی[۲] μ لاقل برای مواد خطی با دنیای مواد ارتباط برقرار می‌کند. با ظهور علم نانو، فناوری نانو، زمینه نانو اُپتیک تقویت شدیدی داشته، زیرا کنترل دقیق منابع و خواص مواد، امکانات بی‌نظیری را برای کاربردهای اُپتیک جدید ارائه می‌دهد.

می‌توان اذعان کرد که موفقیت نظریه الکترودینامیک در ماده به‌این دلیل است که حداقل برای مواد خطی، تمام جزئیات میکروسکوپی را می‌توان در دو مقدار ϵ و μ پنهان کرد. در اصل، مهم نیست که چگونه آنها را بدست می‌آوریم، چه از طریق مدل‌های پدیدارشناسی[۳]، چه از طریق نظریه میکروسکوپی و خواه از طریق تجربی،

$$\left.\begin{array}{r}\text{مدل پدیدارشناسی}\\ \text{نظریه میکروسکوپی}\\ \text{سنجش تجربی}\end{array}\right\}\longrightarrow \epsilon,\ \mu \longrightarrow \text{معادلات ماکسول}.$$

تنها چیزی که اهمیت دارد این است که مقادیری را در دست داریم، و هنگامی که آنها وجود دارند، می‌توانیم آنها را در معادلات ماکسول وارد و مسائل مورد علاقه خود را با استفاده از یکی از روش‌های زیادی که در طول قرن‌ها توسعه پیدا کرده و تا حدی در این کتاب آنها مورد بحث قرار گرفته است، حل کنیم. از این نظر، تفکیک دنیای مادی و الکترومغناطیس از طریق "پیوند" ϵ و μ یک راه حل بسیار زیبائی است.

هنوز، گاهی اوقات دوست داریم در مورد این کمیات بیشتر بدانیم. در این فصل چند مدل پدیدارشناسی برای ϵ و μ معرفی کرده و ویژگی‌های کلی این کمیات مهم را مورد بحث قرار داه و بطور خاص، متوجه خواهیم شد که در ترازهای مختلف پیچیدگی وجود دارد که بطور مختصر درمثال گذردهی ϵ بحث خواهیم کرد.

- **مقدار ثابت** اغلب کافی است یک مقدار ثابت برای ϵ فرض کنیم. مثلاً شیشه یا آب فقط پراکندگی متوسطی را در محدوده فرکانس نوری نشان می‌دهند و اغلب (اما نه همیشه)

[۱] Permittivities

[۲] Permeabilities

[۳] Phenomenological

با مقادیر ثابت تقریب‌زده می‌شوند. در این کتاب معمولاً در فرکانس‌های نوری از $n = 1.5$ برای شیشه و $n = 1.33$ برای آب استفاده می‌کنیم.

- **غیرمحلی بودن در زمان**[۴] در بسیاری از موارد، مواد پویائی ذاتی[۵] دارند و باید در نظر گرفته شوند. برای مثال چگونه رزونانس مواد با میدان‌های الکتریکی که روی سیستم عمل می‌کنند، تحریک می‌شوند. این را می‌توان از طریق رابطه بین جابجائی دی‌الکتریک $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ و میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ که غیرمحلی در زمان است توصیف کرد؛

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty \epsilon(\mathbf{r},\tau)\mathbf{E}(\mathbf{r},t-\tau)d\tau \tag{۱.۷}$$

توجه کنید که این عبارت علیت را حفظ می‌کند زیرا فقط میدان‌های قبلی روی پاسخ مواد در لحظه t اثر دارند. در بخش ۲.۳.۷ بحث می‌کنیم که بدین علت قسمت‌های حقیقی و موهومی ϵ بیکدیگر مربوط می‌شوند.

- **غیرمحلی بودن در مکان**[۶] در اصل، پاسخ نوری نیز می‌تواند غیرمحلی در مکان باشد؛

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty \int \epsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\tau)\mathbf{E}(\mathbf{r}',t-\tau)d^3r'd\tau. \tag{۲.۷}$$

نمونه‌هائی از آنها فلزات هستند که قطبش می‌تواند در نقطه مثل $\mathbf{r}'$ تولید شده و از طریق الکترون‌های هدایت به‌موقعیت دیگر $\mathbf{r}$ جائی که بر پاسخ موثر است، انتقال یابد. برای فلزات معمولی محدوده غیرمحلی کمتر از یک نانومتر است و بنابراین اغلب می‌تواند با یک واکنش محلی تقریب زده شود. با این وجود، سالهاست به‌چنین اثرات غیرمحلی علاقه‌مند شده‌اند.

- **ناهمسانگردی** در مواد ناهمسانگرد که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در امتداد یک جهت معینی توجیه شده است، می‌تواند باعث ایجاد قطبش در جهت متفاوت شود. در این صورت پاسخ ماده را باید برحسب تانسور $\bar{\bar{\epsilon}}$

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}, \tag{۳.۷}$$

همراه با کانولوشن اضافی در زمان یا مکان، همانطور که در بالا بحث شد، توصیف کرد. در این کتاب عموماً به‌بررسی بیشتر این گونه مواد نمی‌پردازیم، زیرا می‌خواهیم در حد امکان نماد را ساده نگه داریم. و ضمناً به‌این دلیل بسیاری از مواد را می‌توان به‌خوبی با توابع ایزوتروپیک $\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon\bar{\bar{I}}$ توصیف کرد.

به‌طور کلی، همه نتایج فوق برای نفوذپذیری $\square$ نیز صادق است. با این حال، برای فرکانس‌های نوری معمولاً می‌توان $\mu \approx \mu_0$ را برای تقریباً تمام مواد شناخته شده درنظر گرفت. اما فرامواد استثناء هستند، اینها آرایه‌هایی از نانوساختارهای ساخته دست بشر هستند که در آنها خواص

[۴] Nonlocality in Time

[۵] intrinsic dynamics

[۶] Nonlocality in Space

دی‌الکتریکی و مغناطیسی به‌طور کامل قابل تنظیم است. در ادامه به‌طور مختصر در باره چنین مواد توضیح خواهیم داد.

۱.۷ مدل درودِ-لورنتس و مدل درودِ

مدل درود-لورنتس یکی از ساده‌ترین طرح‌ها بر توصیف تابع دی‌الکتریک است. این بر اساس مدل نوسان‌کنندگی هارمونیکی که می‌تواند در قالب دو ذره با بار مختلف متصل به‌یک فنر مدل سازی کرد و سیستم توسط یک میدان الکتریکی خارجی $E(t)$ تحریک شود. بدون مشخص کردن جزئیات، فرض کنید که تغییر مکان $x(t)$ سبب به‌تولید دوقطبی $p(t) = ex(t)$ شود. با نوشتن معادلات نیوتن برای حرکت نوسانی شروع کرده و خواهیم داشت

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x} + eE(t) \tag{۴.۷}$$

در اینجا m و e بترتیب جرم و بار نوسان‌ساز، ω_0 فرکانس تشدید، و γ ثابت میرائی است. فرض کنید تغییرات زمانی میدان الکتریکی هارمونیکی بصورت زیر باشد

$$E = E_0 e^{j\omega t}$$

بعداز مرحله اول، سیستم با همان فرکانس ω نوسان می‌کند. در این صورت معادله (۴.۷) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$-\omega x = -\omega_0^2 x - j\gamma\omega x = \frac{eE_0}{m}$$

که در اینجا از طرفین جمله نمائی را جذف کرده‌ایم. تغییر مکان را می‌توان نوشت:

$$x = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}E_0 \tag{۵.۷}$$

این وابستگی تشدید معمولی برای یک نوسان‌ساز هارمونیکی است. وقتی فرکانس ω به‌فرکانس تشدید ω_0 می‌رسد، دامنه بزرگترین می‌شود. در تشدید، دامنه توسط ثابت میرایی γ و دامنه میدان تحریک تنظیم می‌شود.

از عبارت بالا می‌توانیم گشتاور دوقطبی $p = ex$ و بنوبه خود قطبش $P = nex$ را با ضرب چگالی نوسان‌کننده‌ها n محاسبه کنیم (بخاطر آورید که قطبش چگالی دوقطبی‌ها است). بنابراین خواهیم داشت

$$P = nex = \frac{ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}E_0 = \epsilon_0\chi_e E_0$$

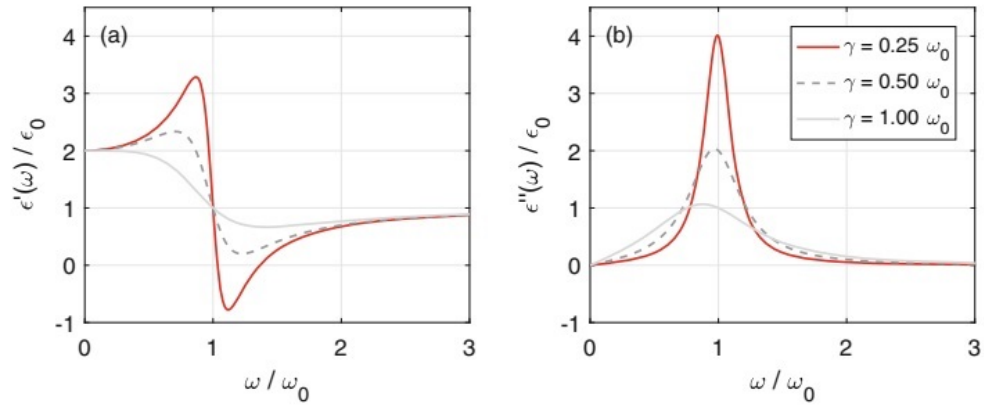
که در آن بصراحت رابطه بین P و پذیرندگی الکتریکی[۷] χ_e را می‌توان نوشت. با استفاده از $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e)$، سرانجام گذردهی را برای نوسان‌کننده هارمونیکی با چگالی n بدست می‌آوریم:

[۷] Electric Susceptibility

گذردهی مدل درودِ-لورنتس

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}\right) \tag{۶.۷}$$

شکل (۱.۷) یک مثال معمولی برای تابع دی‌الکتریک درود-لورنتش را نشان می‌دهد. قسمت موهومی مربوط به‌تلفات در اطراف فرکانس تشدید ω_0 به‌اوج می‌رسد، و آن جایی است که ارتفاع و عرض قله با ثابت میرایی γ کنترل می‌شود. قسمت حقیقی رفتار تشدید معمولی را در حدود ω_0 نشان می‌دهد و برای فرکانس‌های کوچک که نوسان‌ساز میدان تحریک را دنبال می‌کند، بیک نزدیک می‌شود و برای فرکانس‌های بزرگ که نوسان‌ساز لختی دارد که نمی‌تواند نوسان‌های سریع میدان خارجی را دنبال کند به‌صفر نزدیک می‌شود.



شکل ۱.۷: رفتار معمولی گذردهی درود-لورنتس برای ثابت میرائی‌های مختلف γ در معادله (۶.۷). **(الف)** قسمت حقیقی و **(ب)** قسمت موهومی $\epsilon(\omega)$. برای ثابت نوسان‌ساز از رابطه $ne^2/(\epsilon_0 m) = \omega_0^2$ استفاده کرده‌ایم.

با وجود سادگی، در مدل درود-لورنتش یک چیز جادویی وجود دارد. به‌طور کلی، اکثر تشدیدهای ماده را می‌توان بر اساس مدل نوسان‌ساز هارمونیکی، حداقل نزدیک به‌تشدید توصیف کرد. بدیهی است، نباید اجزای مدل را زیاد جدی گرفت، این یک مدل بسیار کلی است که می‌توان آن را بر اساس چند پارامتر موثر (که از آنالوگ مکانیکی هستند) توصیف کرد. در صورت چندین تشدید، می‌توان نتیجه معادله (۶.۷) را نیز تعمیم داد. و یک جمع بندی بر روی مشارکت مختلف نوسان‌ساز معرفی کرد.

برای فلزات می‌توانیم بدون هیچ‌گونه نیروی بازگردانی، $\omega_0 \to o$ استفاده کنیم. این ما را برای فلزات به‌رابطه زیر هدایت می‌کند.

گذردهی درودِ برای فلزات

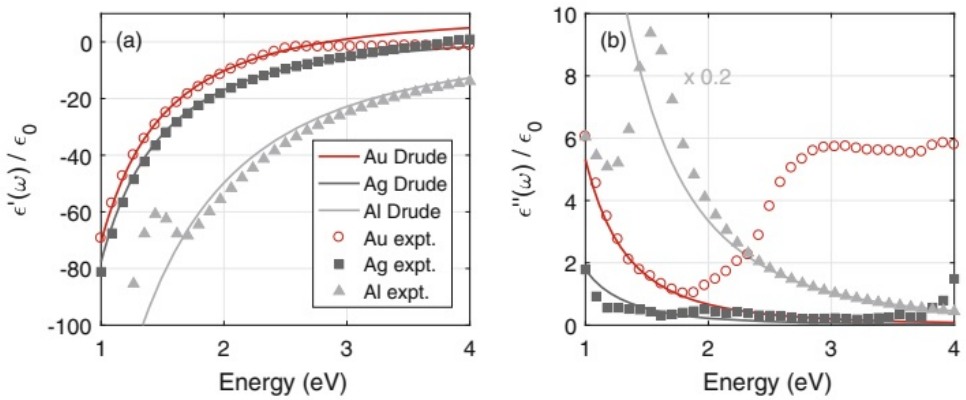
$$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = \kappa_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)} \tag{۷.۷}$$

که در آن فرکانس پلاسما ω_p را معرفی کرده‌ایم.

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} \tag{۸.۷}$$

که این مستقیماً از رابطه (۶.۷) بدست می‌آید. در فرکانس پلاسما و برای $\kappa_b = 1$ خواهیم داشت $\epsilon(\omega_p) \approx 0$ که وابسته به‌نوسان‌های پلاسما طولی الکترون‌های هدایتی است. κ_b یک سهم اضافی برای شرکت الکترون‌های مقید بحساب می‌آید.

مقادیر معمول در جدول (۱.۷) آورده شده است و از یک برای آلومینیوم تا حدود ده برای طلا متغیر است. خطوط پُررنگ در شکل (۲.۷)، **(الف)** بخش حقیقی و **(ب)** بخش موهومی تابع دی‌الکتریک که برای طلا، نقره و آلومینیوم محاسبه شده است. نمادها داده‌های تجربی را گزارش می‌دهند. در همه موارد، بین مقادیر تابع درود و داد های تجربی، با استثنای طلا بازاء انرژی در بالای $2eV$، توافق منطقی و خوبی پیدا می‌کنیم. در اینجا داده‌های تجربی میرایی بسیار بزرگتری را نشان می‌دهند.



شکل ۲.۷: **(الف)** قسمت حقیقی و **(ب)** قسمت موهومی تابع دی‌الکتریک درود برای طلا Au، نقره Ag، و آلومینیوم Al و مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی. داده‌های آزمایشگاهی برای طلا و نقره از مرجع [۳۴]، و برای آلومینیوم از مرجع [۳۵] گرفته شده است.

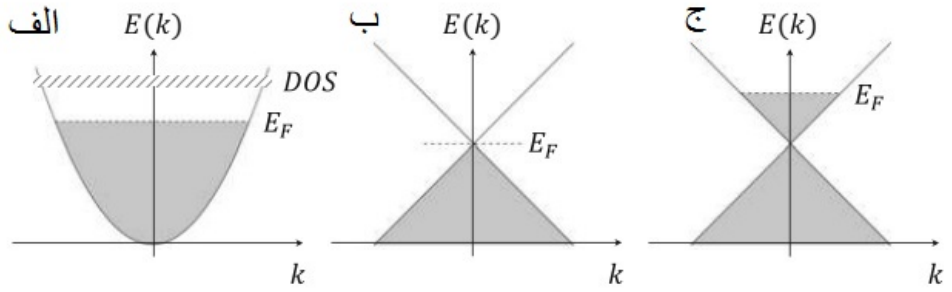
جدول ۱.۷: پارامترهای مدل درود برای چند فلز

مواد	κ_b	$\hbar\omega_p(eV)$	$\hbar/\gamma(fs)$
طلا	۱۰	۱۰	۱۰
نقره	۳.۳	۱۰	۳۰
آلومینیوم	۱	۱۵	۱

برای درک منشا چنین میرایی، در ادامه جزئیات میکروسکوپی الکترون‌های فلزی را در نظر می‌گیریم. در فیزیک حالت جامد، حالات الکترون بر حسب تابع بلاخ[۸] $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ که توسط موج

[۸] Bloch functions

$\mathbf{k}$ و ضریب باند n اداره می شود،[۳۶] توصیف می‌شود. رابطه بین $\mathbf{k}$ و انرژی الکترونی $E_n(\mathbf{k})$ که



شکل ۳.۷: نموداری از ساختار باند برای **(الف)** پاشندگی سهموی، **(ب)** بدون ناخالصی، **(ج)** گرافن با ناخالصی. نمودار خط چین نمایشگر انرژی فرمی است. سطوح هاشورخورده در شکل‌ها **(الف)** نمایشگر چگالی حالت‌ها است که مربوط به‌تعداد حالت‌های موجود در واحد انرژی و حجم است.

ساختار باند نامیده می‌شود و خواص الکترونیکی و نوری الکترون‌ها در جامدات را نشان می‌دهد. برای فلزات ساده، ساختار باند را می‌توان به‌خوبی با پاشندگی سهمی تقریب زد:

$$E(\mathbf{k} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{۹.۷}$$

که در آن m جرم الکترون است. توجه کنید که این پاشندگی با الکترون‌های آزاد یکسان است. در فلزات تمام حالت‌ها با انرژی فرمی E_F پُر شده، شکل (۳.۷)-الف، که با تعداد الکترون‌ها در فلز تعیین می‌شوند. به‌دلایلی که در یک لحظه مشخص می‌شود، همچنین چگالی حالت الکترون $g(E)$ را که مطابق با حالت‌های الکترون در واحد انرژی و حجم است، معرفی می‌کنیم.

$$g(E) = \lim_{\Omega\to\infty} \Omega^{-1} \sum_{n,\mathbf{k}} \delta\left[E - E_n(\mathbf{k})\right]$$

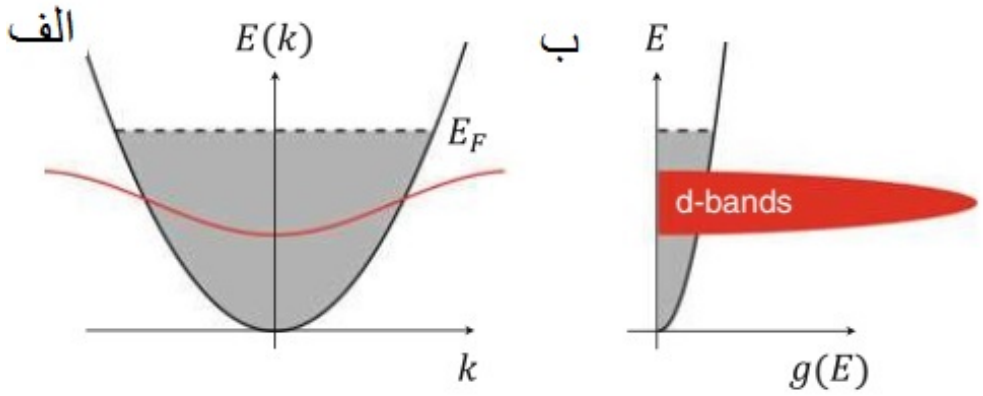
هر جا که راحت باشد، حد ترمودینامیک را با قرار دادن اندازه جامد بسمت بی‌نهایت، $\Omega \to \infty$ انجام می‌دهیم. برای پاشندگی سهمی رابطه (۹.۷) عبارت زیر را بدست می‌آوریم[۳۶]

$$g(E) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) d^3k = \left[\frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\right] \sqrt{E} \tag{۱۰.۷}$$

بنابراین، چگالی حالت‌ها با ریشه دوم[۹] انرژی مقیاس می‌شوند. شکل (۴.۷) شمائی از ساختار باند و چگالی حالت‌ها گذار فلزاتی از قبیل طلا و نقره را نشان می‌دهد. علاوه بر باند هدایت مانند الکترون آزاد، باندهای اضافی زیر انرژی فرمی وجود دارد که با الکترون‌های d قوی موضعی مرتبط است. چگالی حالت‌های این باندهای d معمولاً بسیار بیشتر از الکترون‌های آزاد است و مسئول دو اثر در تابع دی‌الکتریک است.

- **باند d غربالگری** هنگامی که انرژی فوتون $\hbar\omega$ کوچکتر از فاصله انرژی بین باندهای d و انرژی فرمی است، هیچگونه انتقال باند d نمی‌تواند القا شود. با این حال، مشابه

[۹] Square Root



شکل ۴.۷: **(الف)** نمودار ساختار باند $E(k)$ و **(ب)** چگالی حالت‌ها $g(E)$ برای فلزات انتقالی. علاوه بر باند سهموی الکترون‌های هدایت، یک باند اضافی از الکترون‌های d محلی نیز وجود دارد که در زیر انرژی فرمی واقع شده است. برای انرژی‌هائی $\hbar\omega$ که الکترون‌ها از این باندهای d به‌حالت‌های بالاتر از E_F ارتقا می‌یابند، بخش موهومی $\epsilon''(\omega)$ به‌شدت افزایش می‌یابد.

دی‌الکتریک‌ها، حالت‌های باند d را می‌توان قطبی کرد، که منجر به‌مقادیر نسبتاً بزرگ κ_b برای طلا و نقره در جدول (۱.۷) می‌شود. در مقابل، در آلومینیوم، که یک فلز انتقالی[۱۰] نیست، اتم‌ها فقط یک الکترون واحد در پوسته بیرونی دارند. به‌همین ترتیب هیچ سهم غربالگری الکترون‌های ممنوع شده وجود ندارد و بنابراین $\kappa_b = 1$ است.

- **باند d انتقال** برای انرژی‌های $\hbar\omega$ که الکترون‌ها می‌توانند از حالت‌های باند d به‌حالت‌های بالاتر از E_F ارتقاء پیدا کنند، بخش موهومی گذردهی $\epsilon''(\omega)$ (که اندازه‌گیری جذب مربوط به‌چنین انتقال‌ها است) به‌شدت افزایش می‌یابد. در طلا، انتقال باند d در انرژی فوتونی بالاتر از $2eV$ ایجاد می‌شود، همان‌طور که از داده‌های تجربی شکل (۲.۷) به‌وضوح مشاهده می‌شود، در حالی که در نقره، باندهای d از لحاظ انرژی عمیق‌تر از انرژی فرمی واقع شده‌اند و انتقال در انرژی بسیار بالاتر، مثلاً در حدود $4eV$ است. سرانجام، در آلومینیوم هیچ تغییر مربوطه را مشاهده نمی‌کنیم. با این وجود، یک قله ضعیف در حدود $1.5eV$ وجود دارد، که با نوع دیگری از انتقال بین باند مرتبط است.

به‌طور خلاصه، مدل درودِ یک طرح توصیفی مناسب برای بسیاری از فلزات ارائه می‌دهد، اما نباید برای طلا بالای انرژیِ فوتونی $2eV$ استفاده شود، جایی که داده‌های واقعی‌تر از آزمایش یا محاسبات نظری دقیق از جمله اثرات ساختار باند ضروری می‌شوند.

گرافن

گرافن و دیگر مواد دوبعدی که اصطلاحاً آنها را وان در والز[۱۱] می‌نامند اخیراً توجه زیادی را به‌خود جلب کرده اند [۳۷]. برای بحث در مورد چشم اندازهای گرافن برای پلاسمونیک و سایر

[۱۰] Transition Metal

[۱۱] Van der Waals

کاربردهای اپتیک به‌مرجع [۳۸] رجوع شود. اگرچه در اینجا فقط به‌صورت سطحی به‌موضوع پلاسمونیک‌های گرافن می‌پردازیم، اما توجه داریم که ساختار باند گرافن نزدیک به‌انرژی فرمی باندهای الکترون با پاشندگی خطی

$$E_{2D}(k) = \hbar v_F k, \tag{۱۱.۷}$$

تشکیل شده بطوری که در شکل (۳.۷) نشان داده شده است. در اینجا v_F سرعت فرمی است. مواد خالص یک شبه فلز با چگالی اضمحلال حالت‌های E_F است و برای فلز شدن سیستم باید با گیت‌های خارجی برای ناخالص استفاده کرد[۳۸] . ما انرژی فرمی گرافن ناخالص شده را با μ نشان می‌دهیم.

گرافن ناخالص شده به‌دلیل ساختار باندی آن را نمی‌توان با یک مدال ساده درود توصیف کرد. در ساده‌ترین رویکرد، گذردهی الکتریکی آن را می‌توان با استفاده از چارچوب لیندَهارد[۱۲] [۳۶] محاسبه و قطبش دو بعدی را بدست آورد[۳۹، ۴۰].

$$\begin{aligned} P_{2D}(q,\omega) &= -\frac{g\mu}{2\pi\hbar^2 v_F^2} + \frac{F(q,\omega}{\hbar^2 v_F^2} \\ &\times \{[G(x_+) + j\pi] - \theta(-x_-1)\,[G(-x_-) + j\pi] \\ &-\theta(x_- + 1)G(x_-)\} \end{aligned} \tag{۱۲.۷}$$

که در آن q عدد موج، $x_\pm = (\hbar\omega \pm 2\mu)/(\hbar v_F q)$، θ تابع پله واحد هویساید و $g = g_s g_v = 4$ حاصل ضرب چرخش (اسپین) و انحطاط دره[۱۳] است. ضمناً دو تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$F(q,\omega) = \frac{g}{16\pi}\frac{\hbar v_F^2 q^2}{\sqrt{\omega^2 - v_F^2 q^2}}, \qquad G(x) = x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

قطبش وابسته به‌فرکانس و عددموج از طریق رابطه زیر به‌توزیع بار سطحی القائی σ_{ind} مربوط می‌شود.

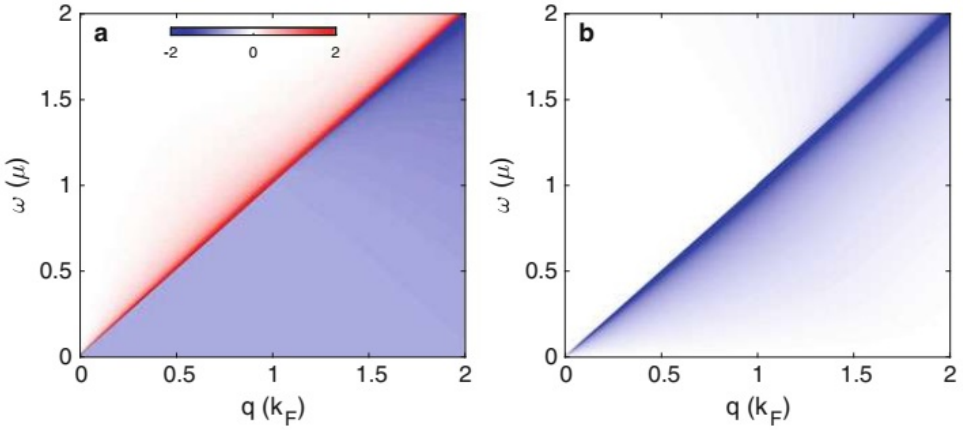
$$\sigma_{ind}(q,\omega) = P_{2D}(q,\omega)\left[\frac{e^2}{2\epsilon_0 q}\right] \tag{۱۳.۷}$$

که در آن جمله داخل براکت تبدیل فوریه پتانسیل کولمب دو بعدی است. در حد $q \to 0$، رابطه (۱۲.۷) را می‌توان بصورت زیر ساده کرد[۳۹، ۴۰]:

$$P_{2D}(q \to 0,\omega) = \frac{gq^2}{8\pi\hbar\omega}\left[\frac{2\mu}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\mu - \hbar\omega}{2\mu + \hbar\omega}\right| + j\frac{\pi}{2}\theta(\hbar\omega - 2\mu)\right] \tag{۱۴.۷}$$

جمله اول در داخل براکت به‌انتقال درون باند[۱۴] و دو عبارت دیگر با انتقال بین باند[۱۵] مرتبط است. شکل (۵.۷) قسمت حقیقی و موهومی قطبش را نشان می‌دهد که اطراف $q = \omega$ رفتار تشدید را نمایش می‌دهد. هنگام بحث در باره پلاسمون‌های گرافن، در فصل بعد به‌تابع دی‌الکتریک گرافن باز می‌گردیم.

[۱۲] Lindhard framework
[۱۳] Valley degeneracy
[۱۴] Intraband transitions
[۱۵] interband transitions



شکل ۵.۷: (**الف**) قسمت حقیقی و (**ب**) موهومی قطبش (۱۲.۷) گرافن. عدد موج بر حسب واحد $k_F = \mu/(\hbar v_F)$، انرژی بر حسب واحد انرژی فرمی μ، و قطبش بر حسب واحد $\mu/(\hbar^2 v_F^2)$ است.

۲.۷ از الکترومغناطیس میکروسکوپی تا ماکروسکوپی

الکترودینامیک در ماده متکی بر مفاهیم قطبی شوندگی و مغناطیس شوندگی است که می‌تواند با چگالی دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی مرتبط باشد. این رویکرد کار می‌کند زیرا مقیاس طول مشخصه امواج الکترومغناطیسی در مرتبه میکرومتر است، احتمالاً چند ده تا صدها نانومتر برای امواج محوشونده[۱۶] ، در حالی که مقیاس طول مربوط به‌ماده در محدوده نانومتر است. به‌همین دلیل، جزئیات ریز ماده هیچ نقش مهمی در پویایی امواج الکترومغناطیسی ایفا نمی‌کند، که فقط با نوعی حالت میانگین ماده در تعامل هستند.

هیچ تعریف واضحی از چگونگی انجام میانگین بار میکروسکوپی و توزیع جریان وجود ندارد. می‌توان استدلال کرد که این به‌این دلیل است که میانگین‌گیری آنقدر قوی است که بدون در نظر گرفتن عبارت اولیه، همیشه به‌همان نتیجه می‌رسیم. از سوی دیگر ، کل مسئله میانگین‌گیری کاملاً بی‌ثمر است، زیرا در نهایت باید به‌معادلات ماکروسکوپی ماکسول ختم شوند. بحث در مورد این موضوع درست کتاب جکسون [۲] را دنبال می‌کند و قصد دارد خواننده را با مفروضات زیربنای چنین میانگین‌گیری آشنا کند، اما همچنین برای افزایش آگاهی، ممکن است در ابعاد کوچک، جائی که توصیف میکروسکوپی صریح ممکن است نیاز باشد، آشنا کند.

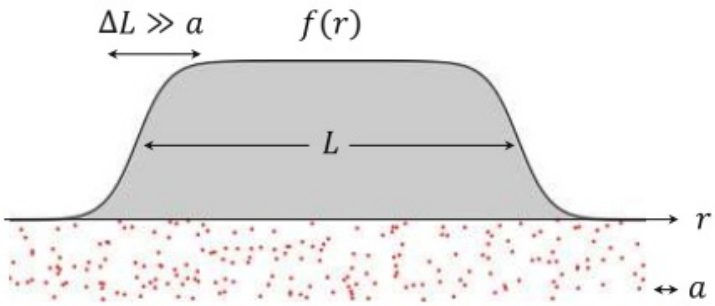
تحلیل خود را با معادلات میکروسکوپی ماکسول شروع می‌کنیم،

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \tag{۱۵.۷}$$

که در آن $\mathbf{e}, \mathbf{b}$ برای میدان‌های میکروسکوپی استفاده و $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ را برای میانگین‌گیری ذخیره می‌کنیم. ϱ و $\mathbf{j}$ بار و توزیع جریان میکروسکوپی است که در چارچوب نیمه‌کلاسیک توصیف

[۱۶] Evanescent waves

خواهیم کرد، اگرچه هیچ تفاوت اساسی برای توصیف مکانیک کوانتومی وجود نخواهد داشت.



شکل ۶.۷: تابع میانگین‌گیری $f(\mathbf{r})$. عرض L باید به‌اندازه کافی بزرگ باشد تا میانگین تعداد اتم‌ها یا مولکول‌های آنها به‌قدرکافی بالا باشد (در قسمت پایین شکل با نقاط قرمز نشان داده شده است)، میزان ΔL ناحیه‌ای که f به‌صفر می‌رسد باید به‌اندازه کافی بزرگتر از فاصله بین اتمی a باشد، به‌طوری که نوسانات اتم تأثیر قابل توجهی بر مقادیر میانگین نداشته باشد. فرض می‌شود که تابع $f(\mathbf{r})$ به‌یک نرمالیزه شده است، یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r})d^3r = 1$ است.

میانگین‌گیری مکانی با معرفی یک تابع نمونه برداری $f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ انجام می‌شود که به‌طور متوسط برای یک نقطه منبع $\mathbf{r}$ در برخی از مناطق کوچک فضایی، به‌صورت شماتیک در شکل (۶.۷) نشان داده شده است. هر مقدار فیزیکی F را می‌توان با توجه به‌روابط زیر میانگین‌گیری کرد:

$$\langle F(\mathbf{r},t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')F(\mathbf{r}',t)d^3r' = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}},t)f(\tilde{\mathbf{r}})d^3\tilde{r} \qquad (۱۶.۷)$$

که در آن از $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}-\mathbf{r}'$ در عبارت آخر بکار برده شده است. جا دارد چند کلمه‌ای در باره تابع نمونه‌برداری گفته شود. نخست، باید بر روی ناحیه L^3 که آنقدر بزرگ، مثلاً $L \approx 10\ nm$، گسترش یابد که در حالت جامدات، تعداد کافی اتم، ملکول یا سلول وجود داشته باشد. از طرف دیگر، L باید به‌اندازه‌ای کوچک باشد که مقدار متوسط F در داخل ناحیه قابل توجه تغییر نکند. باز هم برای $L \approx 10\ nm$ این باید یک تقریب خوب حتی برای امواج بشدت محوشونده باشد البته به‌استثنا فواصل زیر نانومتری یا بسیار زیاد نانومتری تیز.

میانگین‌گیری رابطه (۱۶.۷) دارای متوسطی است که مشتق‌های میانگین‌گیری برابر میانگین‌گیری مشتق تابع است:

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\langle F(\mathbf{r},t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}},t)}{\partial r_i} f(\tilde{\mathbf{r}})d^3\tilde{r} = \langle \frac{\partial F(\mathbf{r},t)}{\partial r_i}\rangle$$

شبیه همین عبارت برای مستق‌های زمانی است. به‌این دلیل، می‌توانیم فوراً روی رابطه (۱۵.۷) میانگین‌گیری انجام داده و میدان‌های میانگین $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e}\rangle$ و $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b}\rangle$ را تعریف کنیم، در این

صورت خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\langle \varrho \rangle}{\epsilon_0}, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{۱۷.۷}$$

برای میانگین‌گیری جمله‌های منبع، روی قانون گوس متمرکز شده و توزیع بار را یک سری بار نقطه‌ای مانند q_i و دوقطبی‌های $\mathbf{p}_i$ درنظر می‌گیریم؛

$$\varrho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \lim_{\eta \to 0} \sum_i \frac{p_i}{\eta} \left[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}\eta \hat{\mathbf{p}}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i + \frac{1}{2}\eta \hat{\mathbf{p}}_i) \right]$$

برای دوقطبی‌ها یک شکل کلی شامل بارهای مخالف $\pm p_i/\eta$ که بفاصله $\eta \hat{\mathbf{p}}_i$ قرار گرفته‌اند، فرض می‌کنیم و انتهای محاسبه $\eta \to 0$ میل می‌دهیم. موقعیت مرکز بارهای و دوقطبی‌ها $\mathbf{r}_i$ است. بارهای آزاد را می‌توان بلافاصله میانگین‌گیری ارائه داده و خواهیم داشت:

$$\left\langle \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle = \sum_i q_i f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \varrho_{ext}(\mathbf{r}).$$

برای دوقطبی‌ها بصورت زیر میانگین‌گیری انجام می‌دهیم:

$$\lim_{\eta \to 0} \sum_i p_i \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}\eta \hat{\mathbf{p}}_i) - f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i + \frac{1}{2}\eta \hat{\mathbf{p}}_i)}{\eta} = -\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

$$-\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = -\nabla \cdot \left\langle \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

که در آن قطبش $\mathbf{P}$ ماکروسکوپی به‌عنوان چگالی دوقطبی تعریف شده است. این قانون گاوس برای معادلات ماکسول در ماده، معادله (۲۶.۲)، را به‌ارمغان می‌آورد. روش میانگین برای توزیع جریان مشابه همین است اما درگیری و مشکلات بیشتری دارد و در اینجا ارائه نمی‌شود. به‌نظر می‌رسد حتی جکسون نیز تا حدی از این بحث ناراحت است، و نوشته است [۲]:

> برای تکمیل بحث، باید $\langle \mathbf{j} \rangle$ را در نظر بگیریم زیرا ماهیت برداری آن و وجود سرعت، مشتق را به‌مراتب پیچیده‌تر از بحث قبلی $\langle \varrho \rangle$ می‌کند، حتی اگر اصول جدیدی در آن دخیل نباشد. در اینجا فقط نتایج را ارائه می‌دهیم و جزئیات غم انگیز را برای خوانندگانی که از چنین چالش‌هایی لذت می‌برند واگذار می‌کنیم.

۳.۷ غیرمحلی بودن در زمان

در زیر پاسخ دی‌الکتریکی که غیرمحلی در زمان است را درنظر گرفته

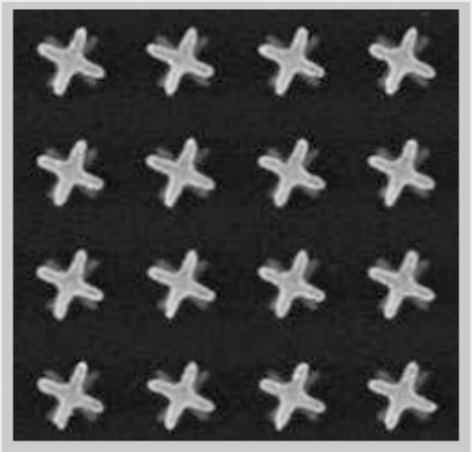
$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \epsilon(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau$$

و امکان شبیه این رابطه برای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ که نفوذپذیری μ به‌زمان وابسته است وجود دارد. در ادامه میدان‌های هارمونیک زمانی را در نظر می‌گیریم. قضیه کانولوشن تبدیل فوریه می‌گوید که تبدیل فوریه رابطه بالا را می‌توان به‌صورت ضرب در فضای فرکانس نوشت

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) = \epsilon(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \tag{۱۸.۷}$$

توجه کنید که از یک نماد برای کمیات حوزه زمان و فرکانس استفاده کردیم. به‌طور کلی، به‌طور انحصاری در هر یک از این فضاها کار خواهیم کرد، بنابراین خطر کمی از سردرگمی وجود خواهد داشت. نکته مهم در مورد این رفتار تبدیل‌ها این است که معادلات ماکسول برای میدان‌های هارمونیک زمانی، معادله (۳۴.۲)، برای گذردهی و نفوذپذیری‌های وابسته به‌فرکانس تقریباً یکسان به‌نظر می‌رسند،

فراماده



فلزات و سایر مواد مرتبط دارای پاسخ دی‌الکتریک قوی در محدوده فرکانس نوری هستند، اما هیچ ماده طبیعی با پاسخ مغناطیسی قوی قابل مقایسه وجود ندارد. بنابراین در رژیم نوری می‌توان $\mu = \mu_0$ را برای تقریباً همه مواد تنظیم کرد. دلیل این نابرابری عدم وجود بارهای مغناطیسی است. این مشاهدات چندی پیش توسط جان پندری خلاصه شد[۴۱].

در حالت ایده‌آل می‌خواهیم در مورد مغناطیس با یافتن آنالوگ یک هادی الکتریکی خوب برای مغناطیس پیش برویم: متأسفانه چنین چیزی وجود ندارد! با این وجود، می‌توانیم برخی از جایگزین‌ها را پیدا کنیم که به‌عقیده ما باعث ایجاد اثرات مغناطیسی جالب می‌شود.

چرا باید برای ساخت ریزساختار یک ماده برای تولید μ_{eff} خاص خود را به‌دردسر به‌افکنیم؟ پاسخ این است که اتم‌ها و مولکول‌ها مجموعه‌ای محدود کننده از عناصری هستند که از آنها می‌توان یک ماده مغناطیسی ساخت. این امر به‌ویژه در فرکانس‌های ردیف گیگاهرتز صادق است که در آن واکنش مغناطیسی بیشتر مواد شروع به‌دفع می‌کند. آن دسته از مواد، مانند فریت‌ها، که در حد متوسط باقی می‌مانند، اغلب سنگین هستند و ممکن است خواص مکانیکی چندان مطلوبی نداشته باشند. در مقابل، نشان خواهیم داد که مواد ریزساختار را می‌توان با فعالیت مغناطیسی قابل توجهی، اعم از دیامغناطیس و پارامغناطیس، طراحی کرد و در صورت تمایل می‌توان آنها را بسیار سبک ساخت.

ادامه فراماوا د

در دو دهه گذشته تلاش‌های زیادی برای ساخت چنین مصنوعی، به‌نام فراماوا د انجام شده است. انسان از این واقعیت استفاده می‌کند که می‌توان در رژیم مایکروویو از طریق رزوناتورهای حلقه شکافدار به‌یک پاسخ قوی دست یافت. این مفهوم را می‌توان به‌محدوده نوری نیز مربوط کرد، اما باید مراقب بود که ساختارها باید به‌طور قابل توجهی کوچکتر از طول موج نوری باشند تا، همانطور که در این فصل توضیح داده شده است، رسانه‌هائی با پارامترهای موثر به‌دست آیند. تصویر بالا تصویری از یک ماده فوق با پاسخ کایرال [۴۲] را نشان می‌دهد، یکی از بی‌شمار نمونه‌های زیبا است. فراماوا د به‌یک بازیگر مهم در زمینه نانو اپتیک و پلاسمونیک تبدیل شده‌اند و با افزایش فناوری‌های آماده سازی نمونه، آنها همچنان نقش کلیدی را در این زمینه ایفا خواهند کرد.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) &= \rho_{ext}(\mathbf{r},\omega) \\
\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) &= -j\omega\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) \\
\nabla \times \mu^{-1}(\mathbf{r},\omega)\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) &= \mathbf{J}_{ext}(\mathbf{r},\omega) + j\omega\epsilon(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)
\end{aligned} \tag{۱۹.۷}$$

به‌همین دلیل، عملاً هر آنچه در فصل‌های قبل در مورد میدان‌های هارمونیک زمانی بحث کرده‌ایم، می‌تواند مستقیماً به‌پاسخ سیستم وابسته به‌فرکانس منتقل شود. استثنا در مورد قضیه پواین‌تینگ است که در بخش بعدی به‌آن می‌پردازیم و این واقعیت که گذردهی‌ها و نفوذپذیری‌ها بخشی موهومی وابسته به‌تلفات را به‌دست می‌آورند. برای امواج منتشر شونده و محوشونده[۱۷] این امر منجر به‌میرایی و تضعیف می‌شود.

برای هادی‌ها و فلزات اغلب راحتر است که پاسخ حامل‌های هدایتی را در گذردهی قرار دهیم. در بالا قبلاً دیدیم که چگونه می‌توان این کار را برای یک تابع دی‌الکتریک درودِ انجام داد. در حالت کلی می‌توان قانون اهم را برای رسانایی وابسته به‌فرکانس تعمیم داد:

رسانائی نوری

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega) = \sigma(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \tag{۲۰.۷}$$

هدایت $\sigma(\mathbf{r},\omega)$ را اغلب هدایت نوری می‌نامند که وقتی $\omega \to 0$ آن به‌هدایت استاتیکی σ_0 منجر می‌شود. از معادله پیوستگی در حوزه فرکانس داریم:

$$-j\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \sigma\mathbf{E} \tag{۲۱.۷}$$

می‌توانیم رابطه‌ای بین ρ و میدان الکتریکی برقرار کنیم. با قرار دادن این رابطه در قانون گوس خواهیم داشت

[۱۷] Evanescent waves

$$\nabla \cdot \epsilon_b \mathbf{E} = \frac{j}{\omega} \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} \Longrightarrow \nabla \cdot \left(\epsilon_b - \frac{j\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

که در آن ϵ_b نمایشگر گذردهی بارهای مقید است. بهمین نحو، قانون آمپر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \sigma \mathbf{E} + j\omega\epsilon_b \mathbf{E} = j\omega \left(\epsilon_b - \frac{j\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

بنابراین برای هدایت نوری معادله (۲۰.۷) می‌توانیم اثر حامل‌های آزاد را به‌یک گذردهی وابسته به‌فرکانس قرار دهیم:

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_b(\mathbf{r}, \omega) - \frac{j\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\omega} \tag{۲۲.۷}$$

که در آن ϵ_b بخش وابسته به‌بارهای مقید است.

بار سطحی. اجازه دهید یک رابط را در نظر بگیریم ، برای مثال ، شکل (۶.۲) را ببینید ، جایی که مواد فوق دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_2 است ، و مواد پایینی یک فلز با گذردهی ϵ_1 است که فرم آن توسط معادله (۲۲.۷) نشان داده شده است. در مرحله بعد از شرایط مرزی معادلات ماکسول توزیع بار سطحی در سطح مشترک به‌دست می‌آید. نقطه شروع ما با $\rho_{ind} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$، با ρ_{ind} و $\mathbf{P}$ به‌ترتیب توزیع بار القایی و قطبی شدن است. با ادغام این عبارت در حجم کمی ، در قیاس کامل با بخش ۲.۳.۲ ، پیدا می کنیم

$$\sigma_{ind} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P_2} - \mathbf{P_1}) = -\left(P_2^{\perp} - P_1^{\perp} \right) = -\left(P_2^{\perp} - \left[P_{ind}^{\perp} + P_{ext}^{\perp} \right] \right)$$

در عبارت آخر $\mathbf{P}_2$ را به‌قطبش القائی یا مقید و خارجی وابسته به‌حامل‌های آزاد تجزیه کردیم. برای محاسبه قطبش‌های مختلف، می‌نویسیم

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$$

و سرانجام به‌رابطه زیر میرسیم:

$$\sigma_{ind} = \begin{cases} -(\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2^{\perp} & \cdots \quad \text{بار سطحی در بالای سطح مشترک} \\ \epsilon_1 - \epsilon_0) E_1^{\perp} & \cdots \quad \text{بار سطحی در زیر سطح مشترک} \\ \epsilon_1 - \epsilon_b) E_1^{\perp} & \cdots \quad \text{بار آزاد سطحی در زیر سطح مشترک} \end{cases} \tag{۲۳.۷}$$

بارهای قطبش کل در سطح مشترک را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\sigma_{pol} = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2^{\perp} + (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1^{\perp} = \epsilon_0 \left(E_2^{\perp} - E_1^{\perp} \right) \tag{۲۴.۷}$$

چیزی که از آن استفاده کردیم مولفه عمودی جابجائی دی‌الکتریک است که در فصل مشترک پیوسته است. در بحث پلاسمون‌های سطحی و ذره‌ای به‌این عبارت برمی‌گردیم.

۱.۳.۷ بازنگری قضیه پواین‌تینگ

در این بخش قضیه پواین‌تینگ را برای محیط خطی که قبلاً در بخش ۳.۴ بدست آوردیم، بازنگری می‌کنیم، اما اثر پاشندگی و جذب را نیز درنظر می‌گیریم. به‌طور کلی، انتظار داریم دو تغییر عمده با توجه به‌نتیجه قبلی معادله (۱۴.۴) انجام شود:

- به‌دلیل پاشندگی، سرعت انتقال انرژی تغییر می‌کند.
- به‌علت جذب، انتقال و چگالی انرژی در طی انتشار تضعیف می‌شود.

در قیاس کامل با نتیجه‌گیری قبلی قضیه پواین‌تینگ، با توان انجام شده توسط میدان‌های الکترومغناطیسی روی توزیع جریان اما اکنون $\mathbf{J}_{ext}$ مربوط به‌میدان‌های $\mathbf{D}$، و $\mathbf{H}$ شروع می‌کنیم؛

$$\frac{dW}{dt} = \int_\Omega \mathbf{J}_{ext} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_\Omega \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} d^3r.$$

با استفاده در جمله اول تبدیل

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

خواهیم داشت

$$\frac{dW}{dt} + \int_\Omega \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3r = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}. \tag{۲۵.۷}$$

این قضیه پواین‌تینگ برای معادلات ماکسول ماکروسکوپی است. جمله دوم در سمت چپ وابسته به‌انرژی ذخیره شده در میدان‌های الکترومغناطیسی است، و جمله سمت راست توصیف کننده انتقال انرژی از طریق بردار پواین‌تینگ $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ است.

قضیه پواین‌تینگ برای محیط‌های خطی اکنون این نتیجه را برای یک محیط خطی با توابع پاسخ که در زمان غیرمحلی هستند، اختصاص می‌دهیم. تجزیه فوریه میدان‌های الکترومغناطیسی را انجام می‌دهیم،

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega + c.c.,$$

که در آن $c.c.$ نماد مزدوج مختلط [۱۸] جمله پیشین است. برای رسیدن به‌عبارت دوم، از $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega)$ استفاده کرده‌ایم، که می‌توان بطور مستقیم با گرفتن مزدوج مختلط انتگرال فوریه اثبات کرد. ضرب دو تابع را می‌توان بصورت زیر بسط داد.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega') \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{j(\omega - \omega')t} d\omega d\omega' + c.c. \,. \tag{۲۶.۷}$$

در ادامه فرض می‌کنیم که $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ از نظر طیفی دارای توزیع باریکی (مربوط به‌پالس عریضی) که در اطراف ω_0 است قرار داشته باشد. بطور کلی، معادله (۲۶.۷) باید با جمله $e^{\pm j(\omega - \omega')t}$

[۱۸] Complex Conjugate

که در دوره تناوب $2\pi/\omega_0$ دارای میانگین صفر است، و برای ساده شدن از آن چشم پوشی می‌کنیم، نوسان کند. با اولین جمله داخل پرانتز رابطه (۲۵.۷) شروع می‌کنیم،

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\int_0^\infty \mathbf{E}^*(\mathbf{r},\omega')\cdot[j\omega\epsilon(\omega)]\,\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)e^{j(\omega-\omega')t}d\omega d\omega' \ . \qquad (۲۷.۷)$$

برای طیف باریک پالس، می‌توانیم جمله داخل براکت را بصورت زیر تقریب بزنیم

$$\int_0^\infty \left\{jg_0e^{j(\omega-\omega')t}\mathbf{E}^*(\omega')\cdot\mathbf{E}(\omega)+jg_0^*e^{-j(\omega-\omega')t}\mathbf{E}(\omega')\cdot\mathbf{E}^*(\omega)\right\}d\omega d\omega' \ . \qquad (۲۸.۷)$$

بطوری که بعداً نشان خواهیم داد، g_0 ناشی از تلفات جذب و g_1 تصحیح پاشندگی است. اول جمله g_0 را درنظر گیرید. انتگرال رابطه (۲۷.۷) خواهد شد:

$$\int_0^\infty \left\{jg_0e^{j(\omega-\omega')t}\mathbf{E}^*(\omega')\cdot\mathbf{E}(\omega)-jg_0^*e^{j(\omega-\omega')t}\mathbf{E}(\omega')\cdot\mathbf{E}^*(\omega)\right\}d\omega d\omega'$$

که در آن وابستگی به $\mathbf{r}$ را در میدان الکتریکی حذف کرده‌ایم. با تغییر $\omega\leftrightarrow\omega'$ خواهیم داشت:

$$2g_0''\int_0^\infty \mathbf{E}^*(\omega')\cdot\mathbf{E}(\omega)e^{j(\omega-\omega')t}d\omega d\omega'=g_0''\mathbf{E}(t)\cdot\mathbf{E}(t) \ .$$

برای جمله g_1 فقط بخش حقیقی را، که مسئول پاشندگی است، درنظر می‌گیریم. بخش موهومی g_1 تصحیح جزئی عبارت جذب رابطه بالا است. در این صورت داریم

$$jg_1'\int_0^\infty \mathbf{E}^*(\omega')\cdot\mathbf{E}(\omega)e^{j(\omega-\omega')t}\left[(\omega-\omega_0-(\omega'-\omega_0)\right]d\omega d\omega',$$

و با تغییر $\omega\leftrightarrow\omega'$ به‌جمله دوم میرسیم. این را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$g_1'\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathbf{E}^*(\omega')\cdot\mathbf{E}(\omega)e^{j(\omega-\omega')t}d\omega d\omega'=\frac{1}{2}g_1'\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(t)\cdot\mathbf{E}(t) \ .$$

شبیه همین روش را می‌توان برای میدان مغناطیسی در رابطه (۲۵.۷) انجام داد.

با کنار هم گذاشتن همه نتایج، سرانجام به‌قضیه پواین‌تینگ برای محیط‌های پاشنده و جذب می‌رسیم:

قضیه پواین‌تینگ شامل جذب و پاشندگی

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &+ \frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{1}{2}\left(\left[\frac{d\omega\epsilon'(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega_0}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\left[\frac{d\omega\mu'(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega_0}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\right)d^3r\\ = &- \oint_{\partial\Omega}\mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}-\int_\Omega\omega_0\left(\epsilon''(\omega_0)\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mu''(\omega_0)\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\right)d^3r\end{aligned} \qquad (۲۹.۷)$$

در رابطه بالا $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ و $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ رابطه وابسته به‌زمان هستند که فرض کردیم دارای طیف باریکی در اطراف فرکانس ω_0 باشند. جملات سمت چپ و راست را می‌توان چنین تفسیر کرد:

- **اولین جمله سمت چپ** توان انجام شده توسط منابع خارجی.

- **دومین جمله سمت چپ** چگالی انرژی موثر ذخیره شده در میدان‌های الکترومغناطیسی و در قطبش و مغناطیس شوندگی ماده. در رابطه بالا اثرات پاشندگی درنظر گرفته شده اما در رابطه (۱۴.۴) برای مقادیر μ, ϵ ثابت فرض شده است.
- **اولین جمله سمت راست** انتقال انرژی توسط بردار پوایِن‌تینگ.
- **دومین جمله سمت راست** تلفات ماده با بخش موهومی μ'', ϵ'' توصیف می‌شود.

۲.۳.۷ رابطه کرامرز-کرونیک

برای پاسخ غیرمحلی در زمان، جابجائی دی‌الکتریک به‌میدان الکتریکی بصورت زیر مربوط می‌شود.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \int_0^\infty \chi_e(\mathbf{r},\tau)\mathbf{E}(\mathbf{r},t-\tau)d\tau \right\} .$$

نکته مهم در مورد این عبارت این است که فقط میدان‌های در گذشته به‌پاسخ سیستم مشارکت می‌کنند و بنابراین علیت برآورده می‌شود. همانطور که در این بخش بحث خواهیم کرد، در نتیجه این امر، یک رابطه سخت بین بخش‌های حقیقی و موهومی گذردهی وجود دارد، آن را رابطه کرامرز-کرونیگ[۱۹] می‌نامند، و با دانستن قسمت حقیقی می‌توان بخش موهومی را بدست آورد، و بالعکس. استخراج رابطه کاملاً کلی است و تنها عناصر مورد نیاز علیت و خطی بودن پاسخ سیستم است.

از تبدیل فوریه رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 + \int_0^\infty e^{-j\omega\tau}\chi_e(\tau)d\tau \tag{۳۰.۷}$$

که از این پس وابستگی χ_e به $\mathbf{r}$ را حذف می‌کنیم. با گرفتن مزدوج مختلط از این، می‌توان بین فرکانس‌های مثبت و منفی رابطه برقرار کرد

$$\epsilon^*(\omega)/\epsilon_0 = \epsilon(-\omega^*)/\epsilon_0 \tag{۳۱.۷}$$

که در آن فرکانس‌های مختلط را به‌دلایلی در نظر گرفته‌ایم تا چندی دیگر روشن خواهد شد. در ادامه، به‌یک قضیه مهم از تحلیل مختلط بنام قضیه گوشی نیاز داریم، و به‌طور مختصر در پیوست (الف) بحث خواهیم کرد. آن می‌گوید که انتگرال‌گیری در صفحه مختلط در امتداد کانتور بسته C، صفر است. در ادامه قضیه کوشی را برای تابع پاسخ اعمال می‌کنیم.

$$\chi_e(z) = \int_0^\infty e^{-jz\tau}\chi_e(\tau)d\tau$$

که در آن z را فرکانس مختلط در نظر می‌گیریم. وقتی $\chi_e(\omega)$ برای فرکانس‌های حقیقی وجود دارد، چیز مهمی اتفاق نمی‌افتد وقتی فرکانس‌ها را درصفحه مختلط بالائی $z'' > 0$ بسط دهیم. برای تابع نمائی می‌توان نوشت:

[۱۹] Kramers–Kronig relation

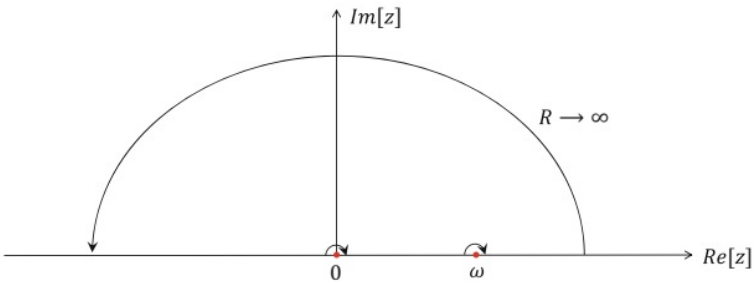
$$e^{-j(z'_jz'')\tau} = e^{-jz'\tau}e^{-z''\tau} \ .$$

همیشه به‌دلیل حدود انتگرال‌گیری $\tau > 0$ داریم (علیت پاسخ در اینجا مطرح می‌شود)، تنها چیزی که اتفاق می‌افتد این است که در صفحه مختلط بالا، مقدار تابع به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. به‌همین دلیل،$\chi_e(z)$ در نیمه صفحه مختلط بالائی تحلیلی است. بنابراین می‌توانیم قضیه کوشی را در عبارت زیر بکار ببریم:

$$\oint_C \frac{\chi_e(z)}{z-\omega}dz = 0 \qquad (۳۲.۷)$$

انتگرال‌گیری روی مسیر C در صفحه مختلط در شکل (۷.۷) نشان داده شده است. دو نقطه در طول مسیر باید به‌عنوان حالت خاص در نظر گرفت:

- برای $z = \omega$ مخرج رابطه (۳۲.۷) صفر می‌شود،
- برای $z \to 0$ گذردهی فلزات $\epsilon(z) \approx \epsilon_0 - j\sigma_0/z$ می‌تواند یک قطب داشته باشد.



شکل ۷.۷: مسیر انتگرال‌گیری مختلط برای رابطه کرامرز-کرونیک

بطوری که در شکل می‌توان مشاهده کرد، اطراف این نقاط خاص می‌توانیم حول یک نیم‌دایره کوچک در بالای نیم‌صفحه حرکت کنیم. نیم‌دایره اطراف $z = \omega$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$z = \omega + re^{j\phi}$$

که در آن ϕ از π تا صفر تغییر می‌کند و در انتهای محاسبات $r \to 0$ فرض کنید. اکنون فرض کنید که $\chi_e(z)$ در اطراف $z = \omega$ خیلی سریع تغییر نمی‌کند و ازاینرو از انتگرال بیرون کشیده می‌شود،

$$\chi_e(\omega)\lim_{r\to 0}\int_\pi^0 \frac{jre^{j\phi}d\phi}{\omega + re^{j\phi} - \omega} = j\chi_e(\omega)\lim_{r\to 0}\int_\pi^0 d\phi = -j\pi\chi_e(\omega)$$

در اینجا از $dz = re^{j\phi}d\phi$ استفاده کرده‌ایم. همین شیوه را می‌توان برای قطب $z = 0$ بکار برد. ضمناً توجه کنید که نیم‌دایره بزرگ در بالای صفحه مختلط بعلت جمله $e^{-z''\tau}$ صفر می‌شود و می‌توانیم رابطه (۳۲.۷) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_e(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega}d\tilde{\omega}-j\pi\left[\chi_e(\omega)+\frac{j\sigma_0}{\epsilon_0\omega}\right]=0$$

انتگرال سمت راست مقدار اصلی انتگرال است که (بی‌نهایت کوچک است) ناحیه‌های اطراف نقاط بحرانی $\omega'=0$ و $\omega'=\omega$ از انتگرال‌گیری خارج شده‌اند. به‌پیوست (و) مراجعه کنید. بنابراین، خواهیم داشت

$$\chi_e(\omega)=-\frac{j\sigma_0}{\epsilon_0\omega}+\frac{j}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_e(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega}d\tilde{\omega}\ . \qquad (۳۳.۷)$$

با گرفتن مقدار حقیقی از دو طرف این رابطه، می‌توانیم رابطه بین $\chi'_e(\omega)$ در طرف چپ و $\chi''_e(\omega)$ در طرف راست را بدست آوریم. با استفاده از تابع دی‌الکتریک بجای پذیرندگی، و مربوط کردن فرکانس‌های مثبت با منفی $\epsilon(\omega)$ با استفاده از رابطه (۳۱.۷) سرانجام به‌رابطه کرامرز-کرونیگ میرسیم:

رابطه کرامرز-کرونیک

$$\epsilon'(\omega)=\epsilon_0+\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty}\frac{\tilde{\omega}\epsilon''(\omega)}{\tilde{\omega}^2-\omega^2}d\tilde{\omega} \qquad (آ۳۴.۷)$$

$$\epsilon''(\omega)=\frac{\sigma_0}{\omega}-\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty}\frac{\epsilon'(\tilde{\omega})-\epsilon_0}{\tilde{\omega}^2-\omega^2}d\tilde{\omega} \qquad (ب۳۴.۷)$$

رابطه کرامرز-کرونیگ نشان میدهد که بخش حقیقی و موهومی ϵ بهم مربوط هستند. بنابراین اگر $\epsilon''(\omega)$ را در تمام محدوده فرکانسی داشته باشیم، مثلاً با اندازه‌گیری جذب، می‌توانیم بلافاصله بخش حقیقی آنرا محاسبه کنیم. برای شرایط عملی، محدوده فرکانس مربوطه اغلب به‌طرز شگفت انگیزی بزرگ است، و معمولاً هنگام استفاده از این رابطه باید مواظب بود.

معادله (۳۴.۷) نیز محدودیت‌هایی را در توابع پاسخ قرار می‌دهد. فرض کنید یک فهرست برای گذردهی $\epsilon(\omega)$ داریم که باید دارای تغییرات زیادی از $\epsilon'(\omega)$ در محدوده فرکانس معین باشد، اما تلفات کمی در آنجا وجود دارد. در اصل، رابطه کرامرز -کرونیگ فقط بیان می‌کند که پاشندگی قوی باید با تلفات همراه باشد، که احتمالاً می‌تواند در محدوده فرکانس دیگری قرار گیرد. با این حال، در بسیاری از موارد پاشندگی ناشی از تشدیدهای میکروسکوپی است، مانند مدل درودِ-لورنتس در بخش ۱.۷ توضیح داده شده است، و اغلب باید برای پاشندگی، هزینه جذب در همان محدوده فرکانس پرداخت. این نیز یک اشکال عمده در طراحی مواد فوق است که در آن تغییرات فراوانی زیاد $\epsilon(\omega)$ و $\mu(\omega)$ با تلفات قابل توجهی در برخی فرکانس‌های اطراف همراه است.

۴.۷ قضیه هم‌پاسخی در اُپتیک

در اُپتیک قضیه مهمی وجود دارد که بنام قضیه هم‌پاسخی[۲۰] معروف است و می‌توان از رابطه تقارن گرین دایادیک آنرا بدست آورد. فرض کنید که

- $\mathbf{J}_1$ توزیع جریانی است که میدان‌های $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{H}_1$ را تولید می‌کند.
- $\mathbf{J}_2$ توزیع جریانی است که میدان‌های $\mathbf{E}_2$ و $\mathbf{H}_2$ را تولید می‌کند.

در این صورت، می‌توانیم قضیه هم‌پاسخی (لورنتس) را بدست آوریم.

قضیه هم‌پاسخی نوری

$$\int \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \; d^3r = \int \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \; d^3r \; . \tag{۳۵.۷}$$

در اینجا فرض می‌کنیم که انتگرال کل فضا را در بر می‌گیرد. این قضیه میگوید که رابطه بین توزیع جریان نوسانی و میدان الکتریکی حاصل از آن این است که اگر جای جریان‌ها در آن قرار گرفته‌اند را عوض کنیم، در اندازه گیری میدان‌ها، تغییری ایجاد نمی‌شود.

برای اثبات قضیه، موادی با گذردهی $\bar{\bar{\epsilon}}$ و نفوذپذیری $\bar{\bar{\mu}}$ که ناهمسانگرد و وابسته به‌فرکانس هستند در نظر می‌گیریم. معادلات کرل ماکسول را می‌نویسیم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{H}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}$$

که در آن برای سهولت وابستگی به‌فرکانس و مکان پارامترها را مشخص نمی‌کنیم. سپس اتحادهای برداری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \; .$$

با اعمال این اتحاد برای $\mathbf{E}_1$، $\mathbf{H}_1$ و $\mathbf{E}_2$، $\mathbf{H}_2$ و استفاده از معادلات ماکسول برای جملات کرل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) &= -j\omega\mathbf{H}_2 \cdot \bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{H}_1 - j\omega\mathbf{E}_1 \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \\ \nabla \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) &= -j\omega\mathbf{H}_1 \cdot \bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{H}_2 - j\omega\mathbf{E}_2 \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 \end{aligned} \tag{۳۶.۷}$$

سپس این دو معادله را از هم کم می‌کنیم. برای جملات سمت راست بدست می‌آید

$$\mathbf{E}_1 \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_1)_i \epsilon_{ij} (\mathbf{E}_2)_j - (\mathbf{E}_2)_i \epsilon_{ij} (\mathbf{E}_1)_j$$

و شبیه این عبارت هم برای میدان مغناطیسی بدست می‌آید. بدیهی است که برای گذردهی اسکالر $\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon\bar{\bar{I}}$ دو جمله هر یک را حذف می‌کنند. در حالت کلی می‌توان نشان داد که $\bar{\bar{\epsilon}}$ و $\bar{\bar{\mu}}$، وقتی سیستم مورد بررسی تقارن معکوس زمانی نمایش می‌دهند، باید تانسورهای باید متقارن

[۲۰] Reciprocity Theorem

باشند[۴۳]. در حالتی که چنین تقارنی شکسته می‌شود، آن وقتی است که میدان مغناطیسی استاتیک اعمال می‌شود. در اینجا اینچنین موردی مطلوب ما نیست و فرض می‌کنیم که $\bar{\bar{\epsilon}}$ و $\bar{\bar{\mu}}$ تانسورهای متقارنی هستند که دو جمله عبارت بالا یکدیگر را حذف می‌کنند. در این صورت، تفاصل دو رابطه در معادله (۳۶.۷) و انتگرال‌گیری روی تمام فضا می‌دهد:

$$\int (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1)\ d^3r = \oint (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{S} \qquad (۳۷.۷)$$

برای درک اینکه چرا عبارت سمت راست از بین میرود، توجه داشته باشید که میدان‌های الکترومغناطیسی دور از منابع جریان و امواج خارج شونده هستند. بر طبق معادله (۴۰.۲)، می‌توانیم میدان‌های الکترومغناطیسی ناحیه دور را از طریق $Z\mathbf{H} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}$ بهم مربوط سازیم و می‌توان براحتی نشان داد دو جمله سمت راست رابطه (۳۷.۷) یکدیگر را حذف می‌کنند. این اثبات قضیه هم‌پاسخی رابطه (۳۵.۷) را تکمیل می‌کند.

ارتباط میدان‌های الکتریکی با منابع جریان از طریق گرین دایادیک رابطه (۲۰.۵) خواهیم داشت؛

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') = \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r})\ .$$

بنابراین، بلافاصله از قضیه هم‌پاسخی رابطه تقارن را بدست می‌آوریم:

رابطه تقارن برای تابع گرین دایادیک

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{ji}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \qquad (۳۸.۷)$$

تمرینات

- **تمرین ۱** برای گذردهی درود-لورنتس رابطه (۶.۷)، فرکانس‌هائی که $\epsilon''(\omega)$ و $|\epsilon(\omega)|^2$ بیشینه می‌شوند را محاسبه کنید. از مدل نوسان‌ساز هارمونیکی برای استدلال اینکه چرا بیشینه‌ها در فرکانس‌های مختلف هستند استفاده کنید.

- **تمرین ۲** تابع تلفات $Im[-1/\epsilon(\omega)]$ را برای تابع دی‌الکتریک درود محاسبه کرده و تابع را برای نقره و طلا با استفاده از پارامترهای جدول (۱.۷) رسم کنید. در باره موقعیت بیشینه تابع تلفات که بستگی به κ_b و فرکانس پلاسما ω_p دارند بحث کنید.

- **تمرین ۳** گذردهی درود-لورنتس رابطه (۶.۷) را با تشدید تیز $\gamma \ll \omega_0$ درنظر گیرید. کجا سرعت گروهی v_g کمینه می‌شود؟ چگونه بسته موج طیف باریک (بعلت تلفات مواد) در طی انتشار تضعیف می‌شود؟

- **تمرین ۴** چگالی حالت‌های داده شده در معادله (۱۰.۷) را محاسبه کنید. وقتی انتگرال‌گیری فضای k سه بعدی را با انتگرال‌گیری فضای دو بعدی در مورد گاز الکترونی که الکترون‌ها

می‌توانند فقط در فضای دو بعدی حرکت کنند، عوض کنیم، چه اتفاق می‌افتد بحث کنید. برای ارزیابی انتگرال‌ها، مختصات کروی را سه بعدی و مختصات استوانه‌ای را دو بعدی معرفی کنید.

- **تمرین ۵** یک تابع دی‌الکتریک درنظر گیرید که بخش موهومی آن بصورت زیر باشد:

$$\epsilon''(\omega) = \frac{\pi K}{2\omega_0}\delta(\omega - \omega_0),$$

که در آن K مقداری ثابت و ω_0 یک فرکانس پاسخ است. با استفاده از رابطه کرامرز-کرونیگ بخش حقیقی $\epsilon'(\omega)$ مربوطه را محاسبه کنید.

- **تمرین ۶** از گذردهی رابطه (۶.۷) درودِ-لورنتس شروع کرده و تبدیل فوریه انجام داده تا تابع پاسخ زمانی بدست آید. انتگرال فوریه را وقتی از انتگرال‌گیری مختلط که در پیوست الف و استخراج رابطه کرامرز-کرونیگ، بحث شده است استفاده کنید، بسیار ساده محاسبه می‌شود

- **تمرین ۷** از طریق محاسبه صریح نشان دهید که رابطه کرامرز-کرونیگ برای گذردهی درودِ رابطه (۷.۷) صادق است

- **تمرین ۸** نشان دهید که سمت راست معادله (۳۷.۷) در میدان‌های دور صفر می‌شود و در آنجا میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از طریق $Z\mathbf{H} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}$ بهم مربوط می‌شوند.

- **تمرین ۹** از طریق محاسبه صریح ثابت کنید که تابع گرین دیادیک (۱۹.۵) در رابطه تقارن معادله (۳۸.۷) صدق می‌کند.

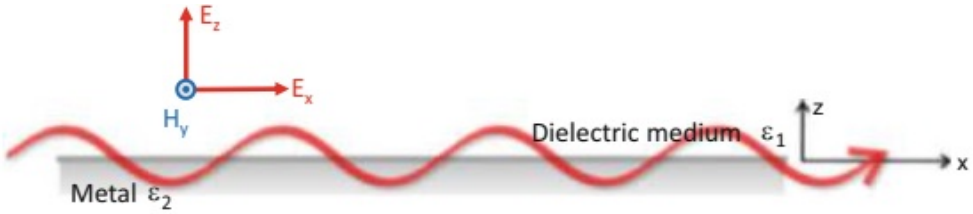
فصل ۸

محیط‌های لایه لایه

ساده‌ترین سیستم‌های (نانو) برای ترکیب معادلات ماکسول با مواد ، لایه‌های مسطح هستند که در مورد لایه‌های مختلف مواد، به‌راحتی به‌عنوان **محیط‌های لایه‌لایه**[۱] نشان داده می‌شوند. همانطور که در این فصل نشان خواهیم داد، علی رغم ساده بودن هندسی، فیزیک سیستم‌های مسطح به‌طرز شگفت‌آوری غنی است. با بحث در مورد یک رابط واحد بین فلز و دی‌الکتریک شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نوع جدیدی از تحریک‌ها، به‌نام پلاسمون‌های سطحی، رابط بین دو محیط وجود دارد. سپس به‌توسعه یک طرح توصیف کلی برای محیط‌های لایه‌لایه با استفاده از رویکرد ماتریس انتقال ادامه داده و در نهایت در محاسبه توابع گرین برای محیط‌های لایه‌لایه‌ای تعمق می‌کنیم.

۱.۸ پلاسمون‌های سطحی

سطح مشترک بین دو محیط در شکل (۱.۸) نشان داده شده است. بالای سطح دی‌الکتریک با گذردهی $\epsilon_1 > 0$، پائین سطح فلز با گذردهی منفی $\epsilon_2 < 0$ است. برای سهولت، در ادامه از بخش موهومی ϵ_2 صرفنظر کرده و مفاهیم مواد تلفاتی را در پایان بحث می‌کنیم. نفوذپذیری مغناطیسی در هر دو مواد را μ_0 قرار می‌دهیم.



شکل ۱.۸: نمودار یک موج که در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک بستری شده و در امتداد جهت xها منتشر می‌شود. برای مود مغناطیسی عرضی (TM) میدان مغناطیسی موازی سطح مشترک است.

فرض کنید که یک موج الکترومغناطیسی با بردارموج $\mathbf{k}_1 = (k_x, 0, -k_{1z})$ در جهت منفی

[۱] Stratified Media

z منتشر شده و به‌سطح مشترک برخورد می‌کند. چون میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی پیوسته هستند، مولفه موازی k_x بردارموج باید در سطح مشترک پایسته[۲] شود. مولفه z بردارموج در فلز از رابطه پاشندگی[۳] بدست می‌آید:

$$k_x^2 + k_{2z}^2 = \epsilon_2 \mu_0 \omega^2 \tag{۱.۸}$$

چون $\epsilon_2 < 0$ است، سمت راست معادله منفی است و بلافاصله داریم $k_{2z}^2 < 0$، که فقط می‌تواند برای بردارموج موهومی k_{2z} صدق کند. به‌عبارت دیگر، داخل فلز موج نمی‌تواند منتشر شود اما دارای یک مشخصه محوشوندگی[۴] با دامنه‌ای است که بطور نمائی با دور شدن از سطح مشترک میرا می‌شود. در نتیجه، موج برخورد کننده از ناحیه دی‌الکتریک روی فلز، با کمی تلفات بعلت تلفات اهمی ناشی از میرائی نمائی میدان‌های داخل فلز، بازتاب می‌شود. در بخش ۳.۳.۸ در باره این بازتاب بیشتر بحث خواهیم کرد.

از این تحلیل به‌نظر می‌رسد که سطح مشترک دی‌الکتریک-فلز یک چیز خسته کننده است. خوشبختانه این قضاوت عجولانه درست نیست. بعداً نشان خواهیم داد که نوع جدیدی از موج در سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک به‌نام **پلاسمون‌های سطحی**[۵] وجود دارد، که به‌سطح مشترک متصل شده‌اند و باید بصورت بصورت خاص نوری تحریک شوند. درحقیقت، می‌توانیم دو نوع مود هدایت شده را مشخص کنیم، یعنی:

میدان مغناطیسی عرضی (TM) :	$\mathbf{H} = H_y \hat{\mathbf{y}}$	موازی با سطح مشترک
میدان الکتریکی عرضی (TE) :	$\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}}$	موازی با سطح مشترک

ابتدا مودهای TM را مورد بحث قرار می‌دهیم و بعداً نشان خواهیم داد که هیچ مود TE در سطح مشترک‌های فلز-دی‌الکتریک وجود ندارد. برای میدان‌های مغناطیسی بالا و پایین سطح مشترک، رابطه زیر را ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} H_{1y} &= h_1 e^{-jk_x x} e^{-k_{1z} z} = h_1 e^{-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, \qquad \mathbf{k}_1 = (k_x, 0, -jk_{1z}) \\ H_{2y} &= h_2 e^{-jk_x x} e^{k_{2z} z} = h_2 e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}, \qquad \mathbf{k}_2 = (k_x, 0, -jk_{2z}) \ , \end{aligned} \tag{۲.۸}$$

ضمناً سطح مشترک در موقعیت $z = 0$ قرار دارد. در اینجا $k_{iz} = (k_x^2 - \epsilon_i \mu_0 \omega^2)^{\frac{1}{2}}$ و علامت‌های موجود در نمای $e^{\pm k_{iz} z}$ به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که میدان‌ها بطور نمائی در بالا و پائین محی میرا شوند. میدان الکتریکی را می‌توان از قانون آمپر محاسبه کرد و منجر به‌رابطه زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \tfrac{1}{\epsilon_1 \omega} H_{1y} \hat{\mathbf{y}} \times (k_x \hat{\mathbf{x}} - jk_{1z} \hat{\mathbf{z}}) = \tfrac{1}{\epsilon_1 \omega} H_{1y} (-jk_{1z} \hat{\mathbf{x}} - k_x \hat{\mathbf{z}}) \\ \mathbf{E}_2 &= \tfrac{1}{\epsilon_2 \omega} H_{2y} \hat{\mathbf{y}} \times (k_x \hat{\mathbf{x}} - jk_{2z} \hat{\mathbf{z}}) = \tfrac{1}{\epsilon_2 \omega} H_{2y} (-jk_{2z} \hat{\mathbf{x}} - k_x \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \tag{۳.۸}$$

[۲] Conserved
[۳] Dispersion Relation
[۴] Evanescent Character
[۵] Surface Plasmons

سپس شرایط مرزی پیوستگی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مماسی را اعمال می‌کنیم و از رابطه (۲.۸) و (۳.۸) بدست می‌آید:

$$H_{1y}|_{z=0} = H_{2y}|_{z=0} \Longrightarrow h_1 = h_2$$

$$E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} \Longrightarrow h_1 \tfrac{k_{1z}}{\epsilon_1} = -h_2 \tfrac{k_{2z}}{\epsilon_2}$$

از عبارت برای پیوستگی میدان‌های الکتریکی مماسی خواهیم داشت:

$$\frac{k_{1z}}{k_{2z}} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{۴.۸}$$

برای این که این عبارت برای مقادیر حقیقی و مثبت k صادق باشد، درمی‌یابیم که علامت‌های تابع دی‌الکتریک بالا و پائین سطح مشترک باید مختلف باشند. این منجر به‌شرط‌های زیر می‌شود:

اولین شرط پلاسمون سطحی

$$\epsilon_1(\omega)\epsilon_2(\omega) < 0 \tag{۵.۸}$$

برای انتخاب مواد دی‌الکتریک $(\epsilon_1 > 0)$ و فلز $(\epsilon_2 < 0)$ بالا و پائین سطح مشترک معادله (۵.۸) بطور خودکار برآورده می‌شود. سپس دو طرف رابطه (۴.۸) را مربع کرده و جمله‌های k_{1z}^2 و k_{2z}^2 را با استفاده از رابطه پاشندگی (۱.۸) بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} = \frac{k_x^2 - \epsilon_1\mu_0\omega^2}{k_x^2 - \epsilon_2\mu_0\omega^2}$$

از حل برای k_x می‌دهد؛

$$k_x = \sqrt{\frac{\epsilon_2\epsilon_2}{\epsilon_0(\epsilon_1+\epsilon_2)}}k_0 \tag{۶.۸}$$

که در آن $k_0 = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\omega$ عدد موج فضای آزاد است. برای آنکه عدد موج حقیقی k_x داشته باشیم، باید نابرابری زیر برقرار باشد:

دومین شرط پلاسمون سطحی

$$-\epsilon_2(\omega) > \epsilon_1(\omega)\ . \tag{۷.۸}$$

به‌عبارت دیگر، تابع دی‌الکتریک فلز ϵ_2 باید خیلی منفی‌تر از ماده دی‌الکتریک ϵ_1 باشد. برای فلزات معمولی با تابع دی‌الکتریک شبیه درودِ این شرایط را می‌توان به‌راحتی برآورده کرد.

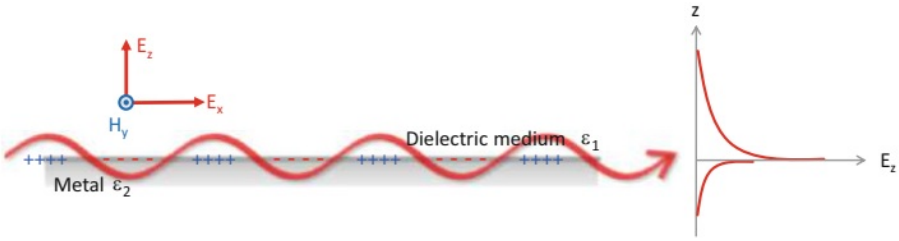
این نوع جدید تحریک معمولاً**پلاسمون‌های سطحی** نامیده می‌شوند و امواج منتشر شونده در سطح مشترک هم‌افزائی[۶] می‌شوند. ماهیت فیزیکی این امواج با تعدادی ویژگی مهم مشخص می شود.

- **بارهای سطحی** بارهای سطحی القائی در سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک را می‌توان از رابطه (۲۴.۷) محاسبه کرد،

$$\sigma = \epsilon_0(E_{1z} - E_{2z}|_{z=0} = \frac{k_x}{\omega}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) h_1 e^{-jk_x x} \qquad (۸.۸)$$

ظاهراً، موج با نوسان چگالی بار همدوس[۷] در سطح مشترک، همانطور که در شکل (۲.۸) نشان داده شده است، همراه است. مشابه پلاسمون‌های انبوه[۸] ، بارهای جدا شده منجر به‌بازگرداندن نیروهایی می‌شوند که نوسان پلاسمون سطحی را هدایت می‌کنند.

- **میدان‌های محوشونده** به‌دلیل مشخصه هم‌افزائی مودها، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی دارای مشخصه محوشوندگی $e^{-k_{iz}|z|}$ هستند و بطور نمائی دور از سطح مشترک میرا می‌شوند که در سمت راست شکل (۲.۸) نشان داده شده است.



شکل ۲.۸: پلاسمون‌های سطحی امواج الکترومغناطیسی هستند که در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک منتشر می‌شوند. آنها همراه نوسان چگالی بار همدوس در سطح مشترک هستند. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی دارای مشخصه محوشوندگی بوده و بدور از سطح مشترک بطور نمائی میرا می‌شوند.

- **قطبش** از رابطه (۳.۸) مشاهده می‌شود که امواج دارای قطبش بیضی با بردار قطبش $-jk_{iz}\hat{\mathbf{x}} - k_x\hat{\mathbf{z}}$ هستند.

- **انتقال انرژی** بردار پوایِن‌تینگ میانگین برای پلاسمون سطح در محیط دی‌الکتریک را می‌توان از روابط (۲.۸) و (۳.۸) محاسبه کرد

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2}Re(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) = \frac{h_1^2}{2\epsilon_1\omega}e^{-2k_{1z}z}Re(-jk_{1z}\hat{\mathbf{z}} + k_x\hat{\mathbf{x}}) = \frac{h_1^2 k_x}{2\epsilon_1\omega}\hat{\mathbf{x}} \qquad (۹.۸)$$

در توافق با مباحث قبلی، متوجه می‌شویم که امواج محوشونده، انرژی را در جهت z حمل نمی‌کنند.

[۶] Confined
[۷] Coherent
[۸] Bulk plasmons

- **تلفات‌ها** تلفات‌ها در فلزات را می‌توان از طریق بخش موهومی گذردهی $\epsilon_2'' > 0$ توصیف کرد. وقتی برای بدست آوردن روابط بالا برای پلاسمون‌های سطحی اقدام میکردیم، متوجه شدیم که عملاً چیزی برای مختلط $\epsilon_2 = \epsilon_2' - j\epsilon_2''$ تغییر نکرده است. تنها اختلاف این است که k_x یک قسمت موهومی بدست می‌آورد و درصورت کوچک بودن تلفات می‌توان آنرا بصورت زیر بیان کرد:

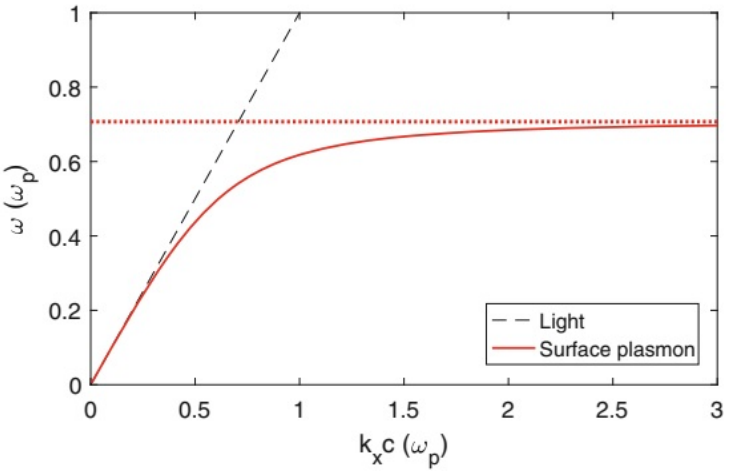
$$k_x = \sqrt{\frac{\epsilon_1\epsilon_2'}{\epsilon_0(\epsilon_1+\epsilon_2')}}k_0\left[1-\frac{j}{2}\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2'}\right)\frac{\epsilon_2''}{\epsilon_2'}+\mathcal{O}(\epsilon''^2)\right] \qquad (۱۰.۸)$$

این منجر به‌میرائی انتشار پلاسمون‌ها می‌شود

$$e^{-j(k_x'-jk_x'')x} = e^{-k''x}e^{-jk'x} = (\text{میراشونده}) \times (\text{نوسان})$$

همچنین k_{2z} یک بخش موهومی کوچک بدست می‌آورد. در نتیجه، بردار پواین‌تینک رابطه (۹.۸) یک مولفه در جهت z خواهد داشت که وابسته به‌عبور انرژی الکترومغناطیسی در فلز است که بصورت تلفات اهمی یا حرارت تبدیل می‌شود.

- **پاشندگی** برای تابع دی‌الکتریک درودِ و ϵ_1 پاشندگی پلاسمون رابطه (۶.۸) را می‌توان



شکل ۳.۸: پاشندگی برای پلاسمون‌های سطحی. بطوری که از رابطه (۶.۸) با استفاده از تابع دی‌الکتریک درود $\epsilon_2(\omega) = 1-\omega_p^2/\omega^2$ و $\epsilon_1 = 1$ محاسبه شده است. مقدار مجانب $\omega_p/\sqrt{2}$ با نقطه چین قرمز و پاشندگی نور $\omega = c\acute{k}$ با خط چین سیاه مشخص شده است.

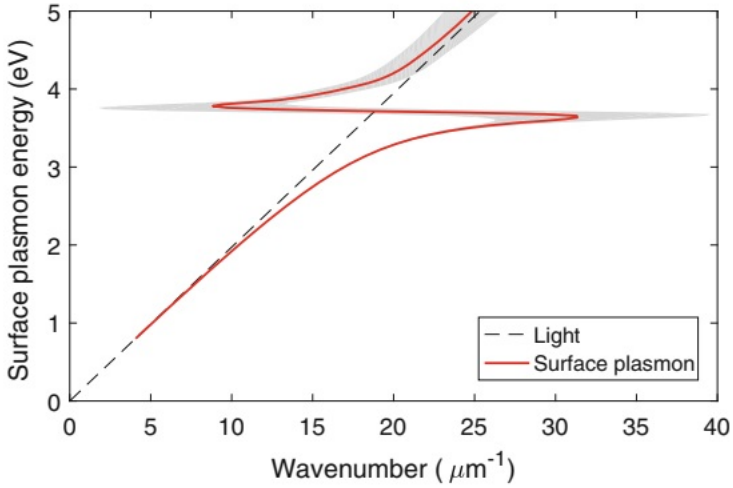
بصورت زیر معکوس کرد:

$$k_x = \sqrt{\frac{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{2-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\frac{\omega}{c} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\omega_p^2+2k_x^2c^2-\sqrt{\omega_p^4+4k_x^4c^4}}{2}} \qquad (۱۱.۸)$$

علامت ریشه‌های مربع به‌گونه‌ای انتخاب شده است که ω سرتاسر مثبت و $\omega \to 0$ برای $k_x \to 0$ است. شکل (۳.۸) پاشندگی $\omega(k_x)$ پلاسمون‌های سطحی را نشان می‌دهد. خط چین سیاه نمایشگر خط نور $\omega = ck$ و خط نقطه چین قرمز مقدار مجانب را نشان می‌دهد.

$$\omega \underset{k_x \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \tag{۱۲.۸}$$

که به‌آسانی می‌توان با جستجو در اولین عبارت معادله (۱۱.۸) برای صفرهای مخرج $2 - \omega_p^2/\omega^2$ بدست آورد.



شکل ۴.۸: همانند شکل (۳.۸) اما برای تابع دی‌الکتریک نقره که از آزمایش گرفته شده است [۳۴]. ناحیه سایه‌دار خاکستری نشان دهنده گسترش $k'_x \pm \frac{1}{2}k''_x$ مربوط به‌تلفات پلاسمون است. برای انرژی‌های بالا مثلاً $3.5\ eV$، پلاسمون‌های به‌شدت میرا شده و پاشندگی به‌عقب خم می‌شود.

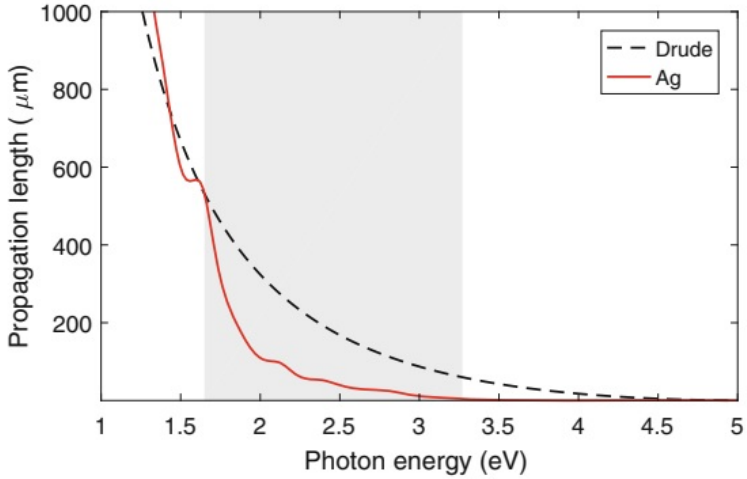
در کل، خط نور بالای پاشندگی پلاسمون سطح است و دو منحنی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. این به‌این دلیل است که سرعت پلاسمون سطحی در مقایسه با سرعت نور کُند بوده و آن بعلت ویژگی ترکیب نور-ماده پلاسمون سطحی که در آن میدان‌های محوشونده به‌فلز فرو می‌روند و نوسان‌های بار سطحی همدوس را هدایت می‌کنند است.

شکل (۴.۸) پاشندگی پلاسمون سطحی را برای تابع دی‌الکتریک نقره واقعی نشان می‌دهد. نتایج مشابه توصیف ساده‌تر درودِ است، اما فرکانس‌های پلاسمون اکنون بخشی موهومی مرتبط با تلفات اهمی را به‌دست می‌آورند. برای انرژی‌های فوتونی بزرگ این تلفات آنقدر زیاد است که پاشتدگی به‌عقب خم می‌شود.

- **افزونگی نور** با توجه به‌ویژگی ماده-نور ترکیبی، طول‌موج پلاسمون‌های سطحی می‌تواند به‌طور قابل توجهی کوتاهتر از طول‌موج فضای آزاد نور باشد. این باعث می‌شود که نور در حجم زیر طول‌موج افزون[۹] شود.

[۹] Confinement

- **طول انتشار** شکل (۵.۸) طول انتشار[۱۰] $Im(k_x)^{-1}$ که بوسیله میرائی پلاسمون سطحی حادث می‌شود را نشان می‌دهد. بطور کلی، نمونه‌ای از علاقمندان به‌پلاسمون‌های سطحی با تضعیف کم، مثلاً پلاسمون‌های سطحی برای نقره با انرژی زیر $3.5\ eV$، که می‌تواند در مسافت طولانی بدون میرائی خیلی زیاد منتشر شود.



شکل ۵.۸: طول انتشار $Im(k_x)^{-1}$ برای پلاسمون‌های سطحی در نقره با استفاده از تابع دی‌الکتریک درودِ (خط چین) و تابع دی‌الکتریک اخذ شده از آزمایش [۳۴] (خط پُررنگ). سطح خاکستری نمایشگر ناحیهٔ نور مرئی است. بطور کلی، نمونه‌ای از علاقمندان به‌پلاسمون‌های سطحی با طول انتشار بقدر کافی طویل.

در مقاله "انتظار از پلاسمونیک" [۴۴]، که در سال ۲۰۰۷ در مجله علوم امریکا[۱۱] چاپ شد و امروزه برای کل زمینه تحقیقاتی بنام **پلاسمونیک** تأثیرگذار است، هری اتواتر[۱۲] طبیعت فیزیک پلاسمون‌های سطحی را به‌زیبایی توصیف کرده و تعدادی از کاربردهای احتمالی را پیش بینی کرده است.

> در دهه ۱۹۸۰ محققان به‌طور آزمایشی تأیید کردند که هدایت امواج نوری در سطح بین فلز و دی‌الکتریک (یک ماده غیر رسانا مانند هوا یا شیشه) می‌تواند، در شرایط مناسب، یک تعامل تشدید بین امواج و الکترون‌های متحرک در سطح فلز القاء کند. (در یک فلز رسانا، الکترون‌ها به‌شدت به‌اتم‌ها یا مولکول‌های متصل نیستند.) به‌عبارت دیگر، نوسان الکترون‌ها در سطح با نوسان میدان الکترومغناطیسی خارج از فلز مطابقت دارد. نتیجه تولید پلاسمون‌های سطحی است - امواج چگالی الکترون‌هایی که در امتداد سطح مشترک منتشر می‌شوند مانند کنگره‌هائی که پس از پرتاب سنگ به‌آب در سطح برکه پخش می‌شوند.
>
> طی دهه گذشته محققان دریافته‌اند که با طراحی خلاقانه سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک می‌توانند پلاسمون‌های سطحی با فرکانس مشابه امواج الکترومغناطیسی خارج اما طول موج

[۱۰] Propagation Length

[۱۱] Scientific American

[۱۲] Harry Atwater

بسیار کوتاه‌تر تولید کنند. این پدیده می‌تواند به‌پلاسمون‌ها اجازه دهد تا در امتداد سیم‌های مقیاس نانو به‌نام اتصالات متقابل حرکت کرده و اطلاعات را از قسمتی از ریزپردازنده به‌قسمت دیگر منتقل کنند. اتصالات پلاسمونی یک مزیت بزرگ برای طراحان تراشه خواهد بود، زیرا آنها توانسته‌اند ترانزیستورهای کوچکتر و سریعتر را توسعه دهند، اما در ساختن مدارهای الکترونیکی کوچک که بتوانند داده‌ها را به‌سرعت در تراشه منتقل کنند، مشکل داشته‌اند.

یا همانطور که هری اتواتر در یک جمله بیان کرده است [۴۵]:

پلاسمونیک به‌فوتونیک این توانایی را داده است که به‌مقیاس نانو برود.

در بخش‌های بعدی این کتاب، کاربردهای بیشتری را مورد بررسی قرار خواهیم داد. تحلیل پلاسمون‌های سطحی با بحث در مورد مود TE به‌پایان می‌رسد. با همان قضیه رابطه (۲.۸)، اما برای میدان‌های الکتریکی، شروع می‌کنیم. با تکرار همان شیوه کاملاً مشابه (تمرین ۸.۳) از پیوستگی میدان‌های مماسی الکتریکی و مغناطیسی در سطح مشترک، شرط $e_1 = e_2$ و $e_1 k_{1z} = -e_2 k_{2z}$ بدست می‌آید، که می‌توانند با رابطه زیر ترکیب شوند؛

$$e_1(k_{1z} + k_{2z}) = 0 \tag{۱۳.۸}$$

ظاهراً، این عبارت برای مقادیر مثبت $_{1z}$ و $_{2z}$ صادق نیست. بنابراین، تنها راه حل ممکن $e_1 = e_2 = 0$ است، یعنی هیچ حالت TE در یک سطح مشترک فلزی-دی‌الکتریک وجود ندارد.

۱.۱.۸ ساختار کرتشمن و اتو

در بخش قبل بحث کردیم که در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک، نوع جدیدی از تحریکات وجود دارد، که بنام پلاسمون سطحی معروف است،و با تحریک بار سطحی همدوس مقید به‌میدان‌های نوری مرتبط است. با این حال، همچنین مشاهده کرده‌ایم که این پلاسمون‌های سطحی را نمی‌توان مستقیماً با وسایل نوری برانگیخت، یا همانطور که هری اتواتر با دقت بیان کرده است، فقط در شرایط مناسب می‌تواند تحریک شود. برای درک اینکه این شرایط مناسب چیست، ابتدا اصل بقاء انرژی و مومنتوم را در یک فرآیند تحریک نوری تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

نور حامل انرژی و مومنتوم است. در ادامه از یک زبان فوتونی استفاده می‌کنیم که در آن فوتون انرژی $\hbar\omega$ و مومنتوم $\hbar\mathbf{k}$ را حمل می‌کند ، اما استدلال ما برای توصیف الکترومغناطیسی کلاسیک کاملاً خوب عمل می کند. نور را با فرکانس زاویه‌ای ω نوسان کرده و در محیطی با ثابت دی‌الکتریک ϵ_1 که به‌سطح فلز واقع در $z = 0$ برخورد می‌کند، منتشر می‌شود. مومنتومی که بوسیله فوتون حمل می‌شود برابر است با:

$$\hbar\mathbf{k} = [\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}]\,\frac{\hbar k_0}{n_1} \tag{۱۴.۸}$$

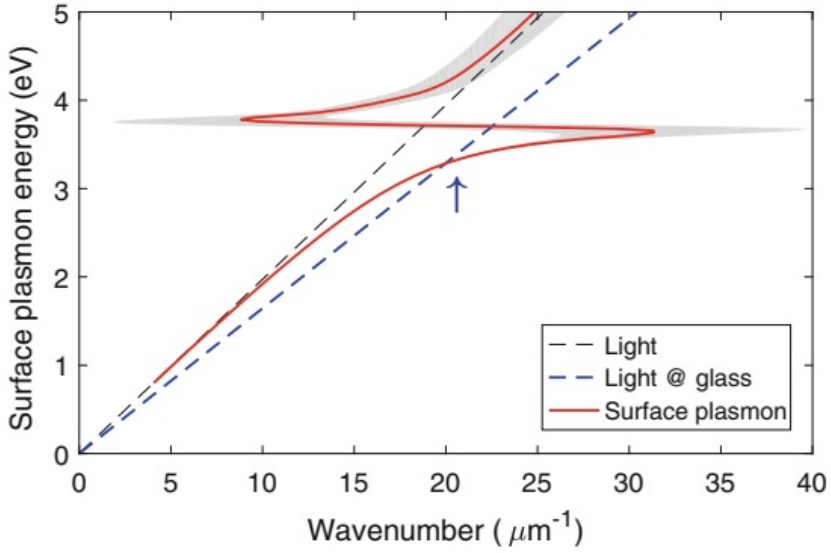
که در آن θ زاویه نور تابشی نسبت به‌محور zها، $k_0 = \frac{\omega}{c}$ و n_1 ضریب شکست محیط دی‌الکتریک است. برای تحریک پلاسمون‌های سطحی کمیات زیر باید حفظ[۱۳] شوند:

- انرژی $\hbar\omega$

[۱۳] Conserved

- مومنتوم موازی $\hbar k_x = (\hbar k_0/n_1)\sin\theta$

توجه داشته باشید که برای ساختار تیغه‌ای[۱۴] ، تقارن انتقالی در امتداد z شکسته شده و بر اساس قضیه نیتر[۱۵] مومنتوم در امتداد z حفظ نمی‌شود. در اینجا مسئله تحریک نور پلاسمون‌های



شکل ۶.۸: اصول تحریک نوری پلاسمون‌های سطحی. پاشندگی پلاسمون سطحی مانند شکل(۴.۸) است، اما خط نور برای انتشار نور از طریق مواد دی‌الکتریک مانند شیشه، مورب است. در نتیجه، پاشندگی پلاسمون سطحی و پاشندگی نور در شیشه در نقطه‌ای که با پیکان مشخص شده است، در جایی که تحریک پلاسمون سطحی از طریق نور امکان پذیر است، یکدیگر را قطع می‌کنند.

سطحی مطرح می‌شود: خط نور، که در شکل (۶.۸) با خط تیره سیاه نشان داده شده است، هرگز از پاشندگی پلاسمون سطحی عدول نمی‌کند (از خم شدن به‌عقب در فوتون با انرژی بالا را در نظر نمی‌گیریم).این بدان علت است که پلاسمون‌های سطحی نسبت به‌انتشار آزاد نور، به‌عنوان تاثیر مشخصه ترکیب ماده–نور، کُند می‌شوند. به‌همین دلیل، حتی برای زاویه تابش مایل برابر با $\sin\theta = 1$ انرژی و مومنتوم نمی‌توان همزمان حفظ شوند. برخورد نور به‌سطح دی‌الکتریک–فلز بازتاب شده اما نمی‌تواند پلاسمون‌های سطحی را تحریک کند.

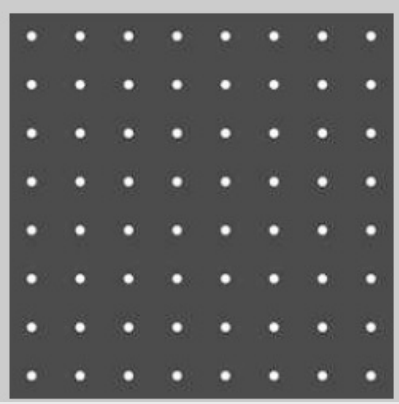
بنابراین باید یک ترفند برای تحریک نوری پلاسمون‌های سطحی انجام دهیم. اصل اساسی در شکل (۶.۸) ترسیم شده و متکی بر کُند کردن نور ورودی با استفاده از ساختار هندسی که چند لحظه دیگر بحث می‌کنیم. در نتیجه این کاهش سرعت، تابش نور مایل اکنون از پاشندگی پلاسمون سطحی عبور کرده و پلاسمون سطحی راه اندازی می‌شود که در شکل (۶.۸) با پیکان مشخص است. با تغییر فرکانس ω و زاویه θ نور ورودی می‌توان کل پاشندگی پلاسمون سطحی را ترسیم کرد. مسئله‌ای که باید در ادامه به‌آن بپردازیم این است که چگونه می‌توان نور ورودی را بدون تأثیر قابل توجهی بر پاشندگی پلاسمون سطحی کاهش داد، که بر طبق معادله (۶.۸)،

[۱۴] Slab Structure

[۱۵] Noether's theorem

بستگی به‌هر دو ϵ_1 و ϵ_2 داشته باشد. به‌همین دلیل، نمی‌توان به‌سادگی میزان ϵ_1 را افزایش داد زیرا این امر باعث کاهش سرعت ورودی و هم انتشار پلاسمون‌های سطحی به‌همان شیوه می‌شود. دو ساختار هندسی توسط اتو[۱۶] [۴۶] و کرتشمن[۱۷] [۴۷] پیشنهاد شد که اجازه حل این مسئله را می‌دهد.

انتقال غیرعادی



در سال ۱۹۹۸ توماس ابسن*Thomas Ebbesen* و همکاران مقاله‌ای تحت عنوان "انتقال نوری غیرعادی از طریق آرایه‌های حفره‌ای با زیر طول موج" [۴۸] منتشر کردند که مورد توجه زیادی قرار گرفت و اغلب به‌عنوان مقاله اصلی در زمینه پلاسمونیک‌ها در نظر گرفته می‌شود. نویسندگان یک فیلم نقره ای نازک ۲۰۰ نانومتر تهیه و آرایه‌ای تناوبی از حفره‌های زیر طول موج با قطر ۱۵۰ نانومتر در آن ایجاد کردند. هنگام روشن کردن آرایه با نور، برای مقادیر خاص طول موج و زاویه انتشار، افزایش چشمگیر شدت نور منتقل شده را مشاهده کردند. در مقاله نویسندگان [۴۸] می‌نویسند:

> به‌طور خاص، قله‌های تیز در انتقال در طول موج‌هایی به‌بزرگی ده برابر قطر استوانه‌ها مشاهده می‌شود. در این بیشینه‌ها ، بازده انتقال می‌تواند از یک فراتر رود (هنگامی که به‌سطح حفره‌ها نرمالیزه شود)، که مقادیر بزرگی بیشتر از پیش‌بینی توسط تئوری روزنه استاندارد است. آزمایش‌های ما شواهدی را ارائه می‌دهد که نشان دهنده این خواص نوری غیرعادی به‌دلیل تزویج نور با پلاسمون‌ها- تحریک الکترونیکی- در سطح فیلم فلزی با الگوی تناوبی است.

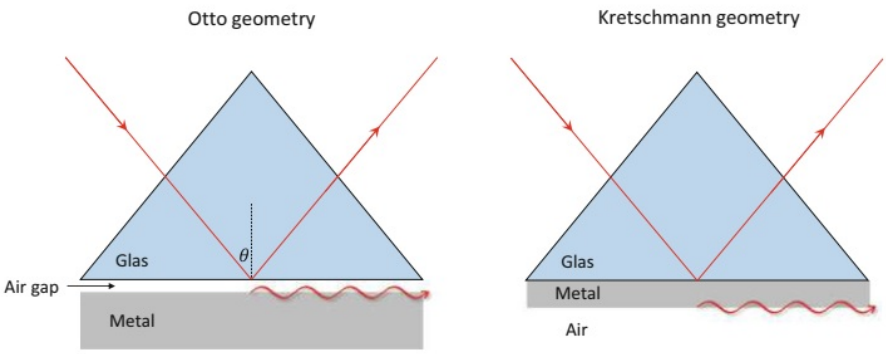
به‌طور خلاصه، علت این افزایش شدید انتقال این است که آرایه‌های تناوبی حفره‌ها تقارن انتقالی لایه نقره را می‌شکنند و یک مومنتوم $G = 2/a$ را با ثابت شبکه a از آرایه تدارک می‌نماید. بنابراین، هنگامی که نور به‌سطح مشترک هوا و نقره برخورد می‌کند، می‌تواند این مومنتوم اضافی G را افزایش داده و تحریک پلاسمون سطحی در سطح فلز راه‌اندازی کند. برای فیلم‌های بسیار نازک، پلاسمون از یک طرف فیلم نقره به‌طرف دیگر، جایی که دوباره به‌نور تبدیل می‌شود، تونل می‌زند.

اهمیت این آزمایش نشان دادن این است که خواص نوری فلزات را می‌توان به‌طور کامل در دستگاه‌های نانوساختار طراحی کرد. این امر زمینه تحقیقاتی در مورد پلاسمونیک‌ها را ایجاد کرده است، جایی که پلاسمون‌های سطحی اسب گاری بوده که توسط نانوساختار طراحی و کنترل می‌شوند.

---

[۱۶] Otto

[۱۷] Kretschmann



شکل ۷.۸: پیکربندی اتو و کرتشمن برای تحریک نوری پلاسمون‌های سطحی. در ساختار هندسی اتو، نور از طریق منشور منتشر می‌شود و با زاویه θ در سطح مشترک شیشه-هوا برخورد می‌کند و در آن بازتاب داخلی کلی وجود دارد. هنگامی که تیغه فلزی در نزدیکی این سطح مشترک قرار گیرد، میدان‌های محو شونده نور تابشی و بازتاب می‌توانند پلاسمون‌های سطحی را که در سطح بین فلز و هوا منتشر می‌شوند، تحریک کنند. در ساختار هندسی کرتشمن، یک لایه فلزی با ضخامت چند ده نانومتر در بالای منشور قرار می‌گیرد و میدان‌های محو شونده نور بازتاب شده از لایه نفوذ کرده و پلاسمون‌های سطحی را در سطح مشترک فلز و هوا تحریک می‌کند.

ساختار هندسی اتو

در ساختار هندسی اتو، نور از طریق منشور منتشر شده و با زاویه θ روی سطح مشترک شیشه-هوا برخورد می‌کند و در آنجا بازتاب داخلی کلی ایجاد می‌شود. سمت چپ شکل (۷.۸) زا مشاهده کنید. هنگامی که یک تیغه فلزی[۱۸] در نزدیکی این سطح مشترک قرار گیرد، میدان‌های محو شونده نور تابشی و بازتاب می‌توانند پلاسمون‌های سطحی را تحریک کرده ازاینرو در سطح مشترک بین فلز و هوا منتشر می‌شوند.

ساختار هندسی کرتشمن

در ساختار هندسی کرتشمن یک لایه فلزی با ضخامت چند ده نانومتر در بالای منشور قرار داده می‌شود. نور تابشی از طرف منشور به‌فلز بازتاب شده، اما از طریق میدان‌های محو شونده در پلاسمون‌های سطح فلز می‌توانند در سطح مشترک فلز و هوا تحریک شوند. این ساختار هندسی را می‌توان به‌آسانی در آزمایش درک کرد، اما باید اطمینان حاصل کرد که فیلم فلزی به‌اندازه کافی نازک است به‌طوری که میدان‌های محو شونده هنوز در بخش مجاور فیلم فلزی به‌اندازه کافی بزرگ هستند.

برای توصیف این ساختارهای هندسی در چارچوب معادلات ماکسول، در ادامه یک طرح راه حل عمومی برای محیط‌های لایه لایه‌ای، که به‌روش ماتریس انتقال موسوم است معرفی می‌کنیم. با استفاده از این رویکرد، ساختار هندسه کرتشمن را تجزیه و تحلیل کرده و اصل کار سنسورهای پلاسمونی را که از چنین ساختاری استفاده می‌کنند، را مورد بحث قرار می‌دهیم.

[۱۸] Metal Slab

۲.۸ پلاسمون‌های گرافن

در فصل قبل به‌طور مختصر به‌خواص نوری گرافن ناخالص شده[۱۹] پرداخته‌ایم. سپس تحلیل پلاسمون‌های سطحی خود را با مورد گاز الکترونی دو بعدی با پاشندگی ساختار نواری خطی، معادله (۱۱.۷) بررسی کردیم. فرض کنید که یک ورق گرافن بر روی یک بستر با گذردهی ϵ_2 قرار داده شده است، و مواد بالای ورق دارای یک گذردهی ϵ_1 است. شبیه با قسمت قبل، تحریکی با مشخصه TM را در نظر می‌گیریم و برای میدان‌های مغناطیسی همان قضیه را در معادله (۲.۸) ایجاد می‌کنیم. با این حال، باید شرایط مرزی را در $z = 0$ اصلاح کرده تا بار سطحی و توزیع جریان الکترون‌های ناخالصی در گرافن را در نظر بگیریم.

- **بار سطحی** از معادله (۱۳.۷)، که توزیع بار سطحی ناشی از σ را به‌پتانسیل خارجی مربوط می‌کند، می‌توانیم σ را بر حسب پتانسیل $V = jk_xE_x$ که مربوط به‌انتشار مود TM است، بیان کنیم:

$$\sigma(k_x, \omega) = P_{2D}(k_x, \omega)\left[\frac{-je^2E_x}{k_x}\right]. \tag{۱۵.۸}$$

- **جریان سطحی** رابطه پیوستگی (۱۱.۴) بار سطحی σ را به‌جریان سطحی $\mathbf{K}$ مربوط می‌کند؛

$$\sigma\omega = k_xK_x \Longrightarrow K_x(k_x, \omega) = \left[\frac{-j\omega e^2P_{2D}(k_x, \omega)}{k_x^2}\right]E_x = \sigma_{2D}E_x \tag{۱۶.۸}$$

که در آن هدایت نوری σ_{2D} را معرفی کرده‌ایم.

از پیوستگی میدان الکتریکی مماسی بر طبق بحث قبلی داریم:

$$E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} \Longrightarrow h_1\frac{k_{1z}}{\epsilon_1} = -h_2\frac{k_{2z}}{\epsilon_2}$$

برای تصبیق میدان‌های مغناطیسی مماسی باید توزیع جریان سطحی اضافی K_x در نظر گیریم، و خواهیم داشت:

$$[H_{1y} - H_{2y}]_{z=0} = -K_x|_{z=0} \Longrightarrow h_1 - h_2 = -\sigma_{2D}\frac{1}{2}\left(h_1\frac{-jk_{1z}}{\epsilon_1\omega} + h_2\frac{jk_{2z}}{\epsilon_2\omega}\right).$$

عبارت آخر را می‌توان بصورت زیر بازنوسی کرد؛

$$h_1\frac{k_{1z}}{\epsilon_1}\left(\frac{\epsilon_1}{k_{1z}} - \frac{j\sigma_{2D}}{2\omega}\right) = h_2\frac{k_{2z}}{\epsilon_2}\left(\frac{\epsilon_2}{k_{2z}} - \frac{j\sigma_{2D}}{2\omega}\right)$$

همراه با شرایط مرزی برای میدان الکتریکی مماسی به‌شرط پلاسمون سطحی برای پلاسمون‌های گرافن میرسیم[۴۹].

[۱۹] Doped Graphene

شرط پلاسمون سطحی برای پلاسمون‌های گرافن

$$\frac{P_{2D}(k_x,\omega)}{-j\omega} = \frac{\epsilon_1}{k_{1z}} + \frac{\epsilon_2}{k_{2z}} \tag{۱۷.۸}$$

در ساده‌ترین شکل، برای هدایت نوری حد $k_x \to 0$ را گرفته و در معادله (۱۴.۷) فقط درون‌باند در نظر می‌گیریم؛

$$\sigma_{2D}(k_x \to 0,\omega) = \frac{-j\omega e^2}{k_x^2} P_{2D}(k_x \to 0,\omega) \approx \frac{-j\omega e^2}{k_x^2}\left[\frac{g k_x^2 \mu}{4\pi(\hbar\omega)^2}\right] = -j\frac{g e^2 \mu}{4\pi\hbar^2\omega}$$

در حد بدون تاخیر[۲۰] $c \to \infty$ می‌توانیم در معادله (۱۷.۸) عوض کنیم؛

$$k_{iz} = \sqrt{k_x^2 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}} \approx k_x$$

با این عمل، پاشندگی پلاسمون را خواهیم داشت؛

$$\hbar \approx \sqrt{\frac{g e^2 \mu}{4\pi}\frac{k_x}{\epsilon_1+\epsilon_2}} \tag{۱۸.۸}$$

بر خلاف پلاسمون‌های سطحی فلزی که وابستگی خطی برای عددموج کوچک دارند، متناسب با ریشه دوم عددموج است.

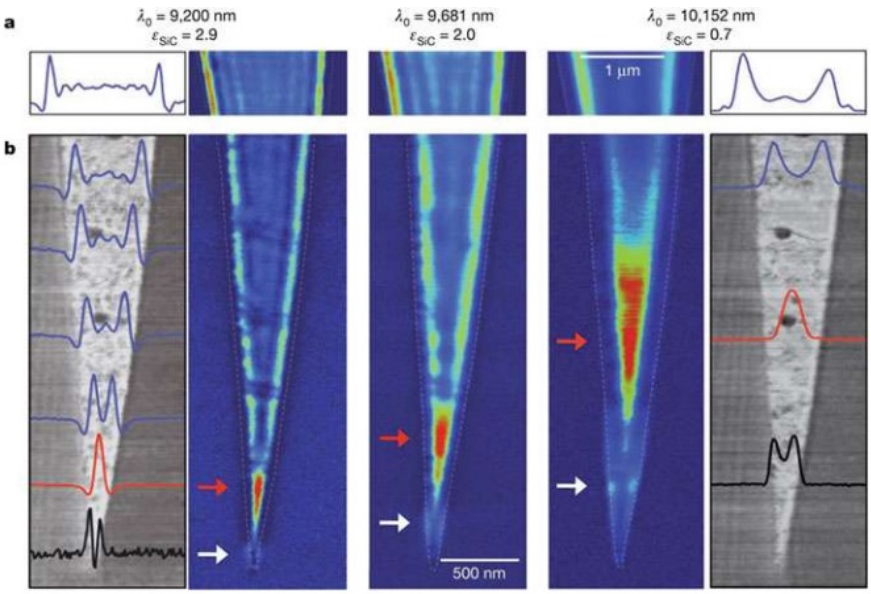
در سال ۲۰۱۲ دو مقاله پشت سر هم در مجله طبیعت[۲۱] چاپ شد[۵۰، ۵۱] که اولین مشاهده پلاسمون‌های گرافن را گزارش کرد. شکل (۸.۸) طیف‌های نوری را برای نانو نوارهای گرافن با میکروسکوپ نوری میدان‌نزدیک روبشی در حالت مادون قرمز اندازه‌گیری شده است را نشان می‌دهد. بخش‌های مختلف، طیف‌های گرفته شده در طول موج‌های مختلف را بیان می‌کنند و بیشینه شدت را در طول‌موج برای مودهای پلاسمون افزونگی نشان می‌دهند (همچنین روبش در بخش‌های بیرونی را مشاهده کنید). با شروع این مقالات مهم، پلاسمونیک گرافن به‌یک زمینه تحقیقاتی زنده و داغ تبدیل شده است.

۳.۸ روش ماتریس انتقال

روش ماتریس انتقال یک طرح کلی حل معادلات ماکسول برای محیط‌های لایه‌لایه است. ابتدا بازتاب و انتقال میدان‌های الکترومغناطیسی را در یک سطح مشترک مسطح بحث کرده و سپس حل معادلات ماکسول برای یک سیستم لایه‌ای تعمق می‌کنیم.

[۲۰] Non-retarded

[۲۱] Nature



شکل ۸.۸: تصاویر نوری میدان نزدیک با طول موجهای تصویربرداری (λ_0) از ۹۲۰۰ نانومتر (چپ)، ۹۶۸۱ نانومتر (وسط) و ۱۰۱۵۲ نانومتر (راست)، به‌ترتیب ، با ثابت‌های دی‌الکتریک SiC ۲.۹، ۲.۰ و ۰.۷ مطابقت دارد. (الف) تصاویری از نوار گرافن باعرض تقریباً یک میکرومتر، که وابستگی شدید بفاصله حاشیه دارد و در نتیجه طول‌موج پلاسمون را به‌طول موج تحریک نشان می‌دهد. (ب) تصاویری از نوار گرافن مورب؛ هر دو نوار روی بستر 6H-SiC قرار دارند. توپوگرافی (که توسط میکروسکوپ نیروی اتمی به‌دست آمده است) در مقیاس خاکستری در سمت چپ و راست ترین بخش نشان داده شده و با خطوط تیره در بخش مرکزی و رنگی مشخص شده است. تصویر و زیرنویس برگرفته از مرجع [۵۰] است.

۱.۳.۸ ضرایب فرنل

با قانون فارده برای میدان‌های هارمونیک زمانی $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ شروع می‌کنیم. با گرفتن کرل از هر دو طرف این معادله و استفاده از قانون آمپر همراه جریان جابجائی ماکسول، خواهیم داشت؛

$$\nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega(\nabla \times \mathbf{H}) = -j\omega(j\omega\epsilon)\mathbf{E} \tag{۱۹.۸}$$

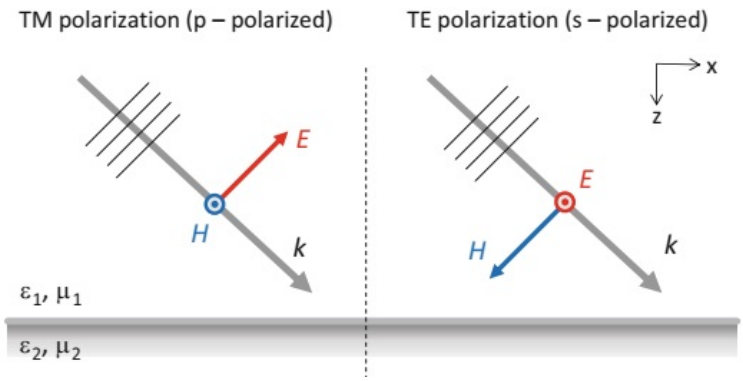
که در اینجا و در ادامه ما محیط را بدون بار یا توزیع جریان $\rho = \mathbf{J} = 0$ در نظر می‌گیریم. از رابطه (۱۹.۸) و با گرفتن کرل از قانون آمپر به‌معادلات امواج برای میدان‌های الکترومغناطیسی میرسیم؛

$$\begin{aligned} \mu\nabla \times \tfrac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E} - \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} = 0 \\ \epsilon\nabla \times \tfrac{1}{\epsilon}\nabla \times \mathbf{H} - \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H} = 0 \end{aligned} \tag{۲۰.۸}$$

این دو معادله موج یک دوگانگی را از خود نشان می‌دهند و با جایگزینی در یکی $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$ و $\epsilon \leftrightarrow \mu$ به‌دیگری میرسیم[۲۰]. این دوگانگی از نظر فیزیکی عمیق نیست و یک تقارن اساسی را

منعکس نمی‌کند، در واقع جایگزین‌های دیگری می‌توان یافت که یک معادله را به‌معادله دیگر تبدیل می‌کند. با این حال، چنین جایگزینی را در زیر مفید می‌دانیم.

چینش شکل (۹.۸) را در نظر گرفته که در آن یک موج صفحه‌ای به‌سطح مشترک دو ماده با ϵ_1، μ_1 و ϵ_2، μ_2 برخورد می‌کند. می‌توانیم دو وضعیت برای قطبش از هم تمیز دهیم.



شکل ۹.۸: تحریک TM در مقابل TE. یک موج صفحه‌ای با عددموج $\mathbf{k}$ بر سطح مشترک بین دو ماده با گذردهی $\epsilon_{1,2}$ و نفوذپذیری $\mu_{1,2}$ برخورد می‌کند. وقتی بردار میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ موازی سطح مشترک باشد، موج مغناطیسی عرضی (قطبش TM یا p) است. هنگامی که بردار میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ موازی سطح مشترک باشد، موج الکتریکی عرضی (قطبش TE یا s) است. توجه داشته باشید که نمادهای جایگزین قطبش‌های s و p، به‌طور گسترده در ادبیات امواج استفاده می‌شود، اما در این کتاب مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. در زبان آلمانی senkrecht (عمود بر) و parallel (موازی با)، مربوط به‌جهت میدان‌های الکتریکی نسبت به‌صفحه‌ای که توسط سطح مشترک و موج ورودی در شکل بالا ترسیم شده است.

- **میدان الکتریکی عرضی** TE در این حالت بردار میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ موازی سطح مشترک است، یا به‌عبارت دیگر، نسبت به‌محور تقارن (دراینجا z) عرضی است.

- **میدان مغناطیسی عرضی** TM در این حالت بردار میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ موازی سطح مشترک است. در معادله (۴۳.۲) نشان داده شده است که موج کلی را می‌توان همواره به‌دو مولفه TE و TM تجزیه کرد.

ابتدا قطبش TE را در نظر می‌گیریم، و نتایج قطبش TM بطور مستقیم از اصل دوگانگی ناشی می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که جهت انتشار موج در صفحه xz و بردار میدان الکتریکی در امتداد محور y است، به‌طوری که $\mathbf{E} = E_y\hat{\mathbf{y}}$. از قانون گوس داریم؛

$$\nabla \cdot \epsilon(z)\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial y}\epsilon(z)E_y = 0 \Longrightarrow \epsilon(z)\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0,$$

که در آن از یک محیط لایه‌لایه[۲۲] $\epsilon(z)$ که فقط به‌مختصات z بستگی دارد، استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که E_y بستگی به y ندارد. با استفاده از این و کار روی مشتق‌های ویژه روی معادله

[۲۲] Stratified Media

(۲۰.۸)، خواهیم داشت؛

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mu(z)\frac{\partial}{\partial z}\mu^{-1}(z)\frac{\partial}{\partial z}+\omega^2\mu\epsilon\right)E_y=0 \tag{۲۱.۸}$$

در معادله بالا از x و z فاکتور می‌گیریم. برای موج صفحه‌ای تابشی، می‌توانیم از قضیه $E_y = e_y(z)e^{\pm jk_x x}$ استفاده کنیم، این به‌رابطه زیر منجر خواهد شد؛

$$\left(\mu(z)\frac{\partial}{\partial z}\mu^{-1}(z)\frac{\partial}{\partial z}+\omega^2\mu\epsilon-k_x^2\right)e_y(z)=0 \tag{۲۲.۸}$$

در سطح مشترک بین دو ماده مولفه موازی میدان الکتریکی پیوسته $e_{1y}(z) = e_{2y}(z)$ است. برای شرط دوم باید میدان مغناطیسی را از قانون فاراده محاسبه کنیم؛

$$-j\omega\mu\mathbf{H}=\nabla\times\left(e^{\pm jk_x x}e_y(z)\hat{\mathbf{y}}\right)=\left(-\frac{de_y(z)}{dz}\hat{\mathbf{x}}\pm jk_x e_y(z)\hat{\mathbf{z}}\right)e^{\pm jk_x x}$$

با استفاده از مولفه مماسی میدان مغناطیسی که در سطح مشترک پیوسته است، به‌دو شرط‌های مرزی برای امواج TE بقرار زیر میرسیم؛

$$e_{1y}=e_{2y},\qquad \mu_1^{-1}\frac{de_{1y}}{dz}=\mu_2^{-1}\frac{de_{2y}}{dz} \tag{۲۳.۸}$$

برای نیل به‌ضرایب فرنل[۲۳] بقیه کارها سرراست است. مولفه‌های میدان تابشی، انتقالی و بازتاب را در نظر می‌گیریم؛

$$\begin{aligned} e_{1y}(z)&=e_0\left(e^{-jk_{1z}z}+R^{TE}e^{jk_{1z}z}\right),\qquad k_{1z}=\sqrt{\omega^2\mu_1\epsilon_1-k_x^2}\\ e_{2y}(z)&=e_0\left(e^{jk_{2z}z}+T^{TE}e^{-jk_{2z}z}\right),\qquad k_{2z}=\sqrt{\omega^2\mu_2\epsilon_2-k_x^2}\end{aligned} \tag{۲۴.۸}$$

که در آن R^{TE} و T^{TE} ضرایب بازتاب و انتقال است که نشان میدهد چقدر از دامنه امواج بازتاب و انتقال یافته است، و k_{1z}، k_{2z} مولفه‌های z عددموج در دو محیط است. توجه کنید که بعلت شرایط مرزی ماکسول مولفه موازی بردارموج k_x در سطح مشترک پیوسته است. با قرار دادن رابطه (۲۴.۸) در شرایط مرزی رابطه (۲۳.۸)، (بازاء $z=0$) خواهیم داشت؛

$$1+R^{TE}=T^{TE},\qquad \frac{k_{1z}}{\mu_1}\left(1-R^{TE}\right)=\frac{k_{2z}}{\mu_2}T^{TE} \tag{۲۵.۸}$$

که سرانجام منجر به‌ضرایب بازتاب و انتقال فرنل خواهد شد:

ضرایب فرنل

$$\begin{aligned} R^{TE}&=\frac{\mu_2k_{1z}-\mu_1k_{2z}}{\mu_2k_{1z}+\mu_1k_{2z}},\qquad & T^{TE}&=\frac{2\mu_2k_{1z}}{\mu_2k_{1z}+\mu_1k_{2z}}\\ R^{TM}&=\frac{\epsilon_2k_{1z}-\epsilon_1k_{2z}}{\epsilon_2k_{1z}+\epsilon_1k_{2z}},\qquad & T^{TM}&=\frac{2\epsilon_2k_{1z}}{\epsilon_2k_{1z}+\epsilon_1k_{2z}}\frac{Z_2}{Z_1}\end{aligned} \tag{۲۶.۸}$$

[۲۳] Fresnel coefficients

روابط برای قطبش TM را می‌توان بامحاسبه صریح از اصل دوگانگی بدست آورد. در حالت دوم باید ضرایب را برای میدان مغناطیسی بدست آورد. برای رسیدن به‌ضرایب که با میدان‌های الکتریکی در سطح مشترک بجای میدان مغناطیسی تطبیق باشد، باید T^{TM} را در نسبت امپدانس‌های رابطه (۴۱.۲) ضرب کرد، همان‌طور که ما در رابطه (۲۶.۸) انجام داده‌ایم. در شکل بالا، ضرایب فرنل دارای خواص زیر هستند:

- **شرایط مرزی** برای هر ساختاری، شرایط مرزی معادلات ماکسول در سطح مشترک صادق است.
- **بقاء انرژی** انرژی تابشی، بازتاب، و انتقالی امواج بقاء انرژی حفظ می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۷.۴) برای بردار پوایتینگ میانگین زمانی برای مولفه z داریم

$$\frac{1}{2}Z_1^{-1}\frac{k_{1z}}{k_1} - \frac{1}{2}Z_1^{-1}|R|^2\frac{k_{1z}}{k_1} = \frac{1}{2}Z_2^{-1}|T|^2\frac{k_{2z}}{k_2},$$

که در آن جملات سمت چپ مربوط به‌شار انرژی امواج بترتیب تابشی و بازتاب، و جمله سمت راست مربوط به‌موج انتقال یافته است. عبارت بالا برای هرئو قطبش TE و TM صادق است. از $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ بقاء شار انرژی را داریم؛

$$|R|^2 + |T|^2\left(\frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z}}\right) = 1 \qquad (۲۷.۸)$$

- **قطب‌ها** مخرج ضرایب فرنل TM وقتی صفر می‌شود که

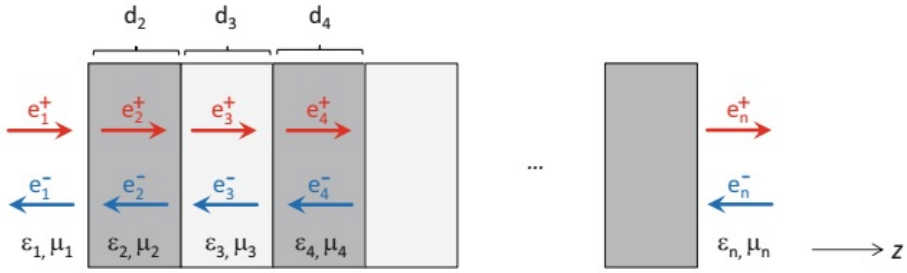
$$\frac{k_{1z}}{k_{2z}} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

و همین عبارت برای قطبش TE است. معادله بالا با رابطه (۴.۸) که برای پلاسمون‌های سطحی بدست آمد یکسان است. بنابراین، قطب‌های ضرایب بازتاب اطلاعاتی در باره مودهای‌ویژه[۲۴] افزونگی در سطح مشترک را تدارک می‌کند. استدلال برای این امر این است که امواج بازتاب و انتقالی بترتیب با e_0R و e_0T معلوم می‌شوند که در آن e_0 دامنه میدان تابشی است. وقتی $R, T \to \infty$ امواج بازتابی و انتقالی حتی برای $e_0 \to 0$ نیز وجود دارند که می‌توان برحسب نوسان‌های مودهای ویژه در غیاب تحریک خارجی تفسیر کرد.

۲.۳.۸ ماتریس‌های انتقال

اکنون به‌محیط‌های لایه‌لایه که در شکل (۱۰.۸) نشان داده شده است، بر می‌گردیم. اجازه دهید یک بردار با دو مولفه معرفی کنیم که در آن مولفه e_m^+ و e_m^- نمایشگر میدان‌های منتشر شده در محیط m بترتیب در جهت مثبت و منفی محور zها است. برای سهولت، در ادامه اندیس y را برای مولفه میدان الکتریکی و همین طور اندیس بالانویس TE را برای ضرایب فرنل حذف می‌کنیم. بیائید اولین سطح مشترک را درنظر گیریم. میدان در محیط 1 برابر $e_1^+ + e_1^-$ و میدان

[۲۴] Eigenmodes



شکل ۱۰.۸: طرحواره روش ماتریس انتقال. یک موج صفحه‌ای به‌سیستمی متشکل از لایه‌های مختلف به‌ضخامت d_m برخورد می‌کند. هر یک از لایه‌ها دارای گذردهی ϵ_m و نفوذپذیری μ_m هستند. در روش ماتریس انتقال، موج از طریق سیستم لایه‌ای منتشر می‌شود. در هرسطح مشترک، میدان‌ها را با استفاده از شرایط مرزی معادلات ماکسول تطبیق داده و از انتشار موج آزاد در لایه‌ها استفاده می‌کنیم.

در محیط 2 برابر $e_2^+ + e_2^-$ است. با قرار دادن این میدان‌ها در شرط مرزی رابطه (۲۳.۸) خواهیم داشت؛

$$e_1^+ + e_1^- = e_2^+ + e_2^-, \qquad \frac{k_{1z}}{\mu_1}(e_1^+ - e_1^-) = \frac{k_{2z}}{\mu_2}(e_2^+ - e_2^-)$$

معادله اول را در k_{1z}/μ_1 ضرب و با اضافه و کم کردن دومی به‌نتیجه زیر میرسیم؛

$$T_{12}e_1^+ = e_2^+ + R_{12}e_2^-, \qquad T_{12}e_1^- = R_{12}e_2^+ + e_2^- \tag{۲۸.۸}$$

در اینجا به‌صراحت وابستگی ضرایب فرنل به‌اندیس‌های محیط را نشان داده‌ایم. بنابراین می‌توانیم مولفه‌های میدان را در دو طرف سطح مشترک از طریق یک معادله ماتریسی به‌هم مربوط کنیم

$$\begin{pmatrix} e_1^+ \\ e_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & R_{12} \\ R_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^+ \\ e_2^- \end{pmatrix} \tag{۲۹.۸}$$

سپس ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم؛

$$\bar{\bar{M}}_{m-1,m} = \frac{1}{T_{m-1,m}} \begin{pmatrix} 1 & R_{m-1,m} \\ R_{m-1,m} & 1 \end{pmatrix} \tag{۳۰.۸}$$

که نشان می‌دهد چگونه میدانها در روی سطح مشترک از طریق شرایط مرزی معادله‌های ماکسول بهم مربوط می‌شوند. در یک سیستم چند لایه، باید فاز اضافی $e^{\pm jk_{mz}d_m}$ لازم توسط میدانها را وقتی از درون لایه mام به‌ضخامت d_m منتشر می‌شوند، در نظر گیریم. این کار را می‌توان با معرفی ماتریس انتشار $\bar{\bar{P}}_m$ انجام داد.

$$\bar{\bar{P}}_m = \begin{pmatrix} e^{jk_{mz}d_m} & 0 \\ 0 & e^{-jk_{mz}d_m} \end{pmatrix} \tag{۳۱.۸}$$

علامت توابع نمائی در ماتریس انتشار ناشی از این حقیقت است که میدان‌ها سمت راست ماتریس به‌مقادیر z بزرگ مربوط می‌شوند. سرانجام ماتریس‌های انتشار و سطح مشترک را می‌توانیم بصورت زیر ترکیب کنیم؛

$$\begin{pmatrix} e_1^+ \\ e_1^- \end{pmatrix} = \bar{\bar{M}}_{1,n} \begin{pmatrix} e_n^+ \\ e_n^- \end{pmatrix}$$

در اینجا **ماتریس انتقال** $\bar{\bar{M}}^{tot}$ که موج از درون سیستم لایه لایه منتشر می‌شود را معرفی می‌کنیم؛

ماتریس انتقال

$$\bar{\bar{M}}_{1,n}^{tot} = \bar{\bar{M}}_{1,2} \cdot \prod_{m=2}^{n-1} \bar{\bar{P}}_m \cdot \bar{\bar{M}}_{m,m+1} \ . \tag{۳۲.۸}$$

مفهوم ماتریس‌های انتقال به‌طرز شگفت انگیزی قدرتمند است، با این حال نسبتاً ساده است زیرا فقط باید ضرب ماتریس‌های 2×2 را انجام دهیم.

تشریح امواج منتشر شونده در امتداد جهت $+z$ موج $e_1^+ = e_0 e^{-jk_{1z}z}$ که در جهت مثبت zها منتشر می‌شود در نظر گیرید. هنگامی که موج به‌پائین‌ترین سطح مشترک برخورد می‌کند، بخشی از موج بازتاب شده و بخش دیگر انتقال می‌یابد،

$$e_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{R}_{1,n} \end{pmatrix} = e_0 \begin{pmatrix} \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{11} & \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{12} \\ \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{21} & \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1,n} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۳۳.۸}$$

در اینجا $\left[M_{1,n}^{tot}\right]_{ij}$ نماشگر عناصر ماتریس ماتریس انتقال کل است. ضرایب $\tilde{R}$ و $\tilde{T}$ ضرایب بازتاب و انتقال کل است که خواص بازتاب و انتقال را در کل محیط لایه‌لایه در بر می‌گیرد و بر خلاف ضرایب فرنل [بدون تیلد $(\tilde{\ })$] است که فقط برای تطبیق میدان‌ها در یک سطح مشترک است. در عبارت بالا از این نکته استفاده کردیم که برای موج تابشی که در امتداد $+z$ منتشر می‌شود، مولفه e_n^- که در امتداد $-z$ منتشر می‌شود باید صفر باشد. می‌توانیم ضرایب کلی را حل کرده و بدست آوریم؛

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1,n} &= \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{11}^{-1} \\ \tilde{R}_{1,n} &= \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{21} \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{11}^{-1} \end{aligned} \tag{۳۴.۸}$$

وقتی بصراحت امواج بازتاب و انتقالی را محاسبه می‌کنیم، باید در مورد ضریب فاز اضافی مواظب باشیم. فرض کنید z_1 و z_n نمایشگر بترتیب موقعیت اولین و آخرین سطح مشترک باشد، و یک میدان بصورت زیر در نظر گیرید؛

$$e_1^+(z) = e_0 e^{-jk_{1z}z} \Longrightarrow e_1^+(z_1) = e_0 e^{-jk_{1z}z_1}$$

با استفاده از ضرایب بازتاب و انتقال کل، مولفه‌های میدان بازتاب و انتقالی خواهد بود؛

$$\begin{aligned} z < z_1 \quad &\cdots \quad e_1^- = e_0 \tilde{R}_{1,n} \exp[jk_{1z}(z - z_1)] \\ z > z_n \quad &\cdots \quad e_n^+ = e_0 \tilde{T}_{1,n} \exp[-j(k_{nz}z + k_{1z}z_1)] \ . \end{aligned} \tag{۳۵.۸}$$

توجه کنید که شبیه این روش می‌توانیم میدان‌ها را در هر جای دیگر داخل محیط لایه‌لایه محاسبه کنیم.

تشریح امواج منتشر شونده در امتداد جهت $-z$ می‌توانیم همان ماتریس انتقال $\bar{\bar{M}}$ را برای موج $e_0 e^{jk_{nz}z}$ که در جهت $-z$ منتشر می‌شود استفاده کنیم. ضرایب بازتاب و انتقال کل را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد؛

$$e_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{T}_{n,1} \end{pmatrix} = e_0 \begin{pmatrix} \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{11} & \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{12} \\ \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{21} & \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{R}_{n,1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که در مقایسه با معادله (۳۳.۸) ما نمادهای لایه را با $\tilde{R}_{n,1}$ و $\tilde{T}_{n,1}$ عوض کرده‌ایم تا تاکید کنیم که موج تابشی در محیط n بجای محیط 1 منتشر می‌شود. از حل آن ضرایب بازتاب و انتقال کل بدست می‌آید؛

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,1} &= -\left[M_{1,n}^{tot}\right]_{11}^{-1} \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{12} \\ \tilde{T}_{n,1} &= \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{22} - \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{11}^{-1} \left[M_{1,n}^{tot}\right]_{12} \end{aligned} \tag{۳۶.۸}$$

برای میدان تابشی بصورت زیر

$$e_n^-(z) = e_0 e^{jk_{nz}z} \Longrightarrow e_n^-(z_n) = e_0 e^{jk_{nz}z_n}$$

مولفه میدان بازتابی و انتقالی خواهد بود؛

$$\begin{aligned} z > z_n \quad &\cdots \quad e_n^+ = e_0 \tilde{R}_{n,1} \exp[-jk_{nz}(z - z_n)] \\ z < z_1 \quad &\cdots \quad e_n^- = e_0 \tilde{T}_{n,1} \exp[j(k_{1z}z + k_{nz}z_n)] \ . \end{aligned} \tag{۳۷.۸}$$

ضریب بازتاب و انتقال یک تیغه

به عنوان یک مثال تشریحی، یک سیستم شامل سه محیط که محیط‌های بیرونی آن 1 و 3 و نیمه-بی‌نهایت و محیط داخلی دارای ضخامت محدود d_2 است در نظر گیرید. از ترکیب ماتریس انتقال و انتشار خواهیم داشت؛

$$\begin{pmatrix} e_1^+ \\ e_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & R_{12} \\ R_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{-j\phi_2} \end{pmatrix} \frac{1}{T_{23}} \begin{pmatrix} 1 & R_{23} \\ R_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3^+ \\ e_3^- \end{pmatrix}$$

که در آن $\phi_2 = k_{2z}d_2$ فاز وابسته به‌انتشار درون تیغه است. عناصر ماتریس انتقال را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد؛

$$\bar{\bar{M}}_{1,3}^{tot} = \frac{1}{T_{12}T_{23}} \begin{pmatrix} e^{j\phi_2} + R_{12}R_{23}e^{-j\phi_2} & e^{j\phi_2}R_{23} + R_{12}e^{-j\phi_2} \\ e^{j\phi_2}R_{12} + R_{23}e^{-j\phi_2} & e^{j\phi_2}R_{12}R_{23} + e^{-j\phi_2} \end{pmatrix}$$

از این رابطه و معادله (۳۴.۸) می‌توانیم ضرایب بازتاب و انتقال کلی را بدست آوریم؛

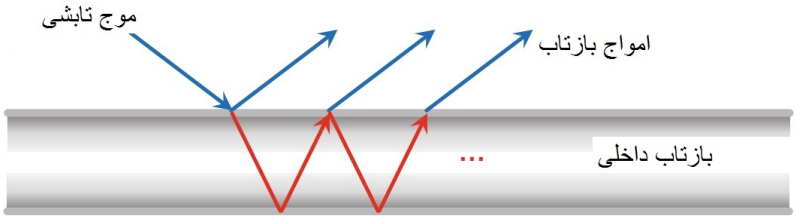
ضرایب بازتاب و انتقال کلی برای یک تیغه

$$\tilde{R}_{1,3} = R_{12} + \frac{T_{12}R_{23}T_{21}e^{-j2\phi_2}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-j2\phi_2}}, \qquad \tilde{T}_{1,3} = \frac{T_{12}T_{23}e^{-j\phi_2}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-j2\phi_2}} \tag{۳۸.۸}$$

در مخرج $R_{12} = -R_{21}$ را جایگزین کرده‌ایم که از رابطه (۲۶.۸) پیروی می‌کند. برای بدست آوردن بینش فیزیکی مخرج در $\tilde{R}_{1,3}$ را به‌یک سری هندسی بسط می‌دهیم؛

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{1,3} &= R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-j2\phi_2} \\ &\quad + T_{12}R_{23}(R_{21}R_{23})T_{21}e^{-j4\phi_2} + T_{12}R_{23}(R_{21}R_{23})^2T_{21}e^{j6\phi_2} + \dots \end{aligned}$$

این اجازه می‌دهد تا تفسیری به‌طور شفاف که به‌صورت شماتیک در شکل (۱۱.۸) داشته باشیم. جمله اول R_{12} نشان می‌دهد که موج ورودی بطور مستقیم از سطح مشترک بالا بازتاب شده است. مشارکت‌های باقی‌مانده سپس بازتاب‌های داخلی متعدد را شامل می‌شود، برای مثال، جمله دوم $T_{12}R_{23}T_{21}$ یک بازتاب در سطح مشترک پائین‌تر را نشان می‌دهد، همانطور که از فاز انتشار $e^{-j2\phi_2}$ نیز مشهود است.

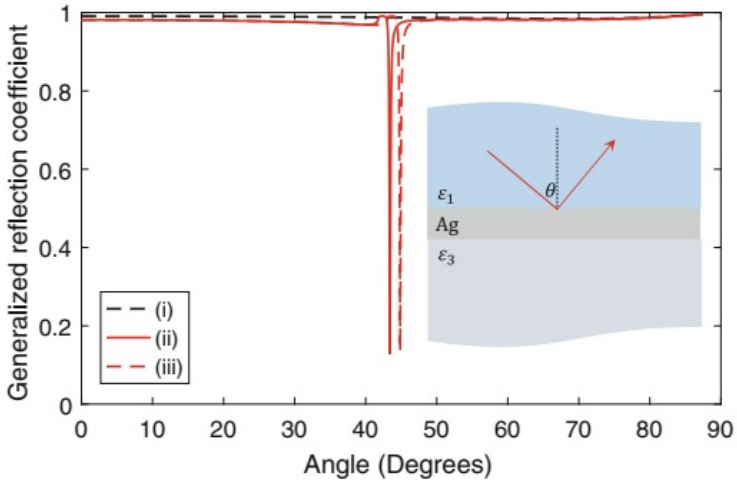


شکل ۱۱.۸: نمایش شماتیک ضرایب بازتاب کلی یک تیغه. موج ورودی بازتاب یا انتقال می‌یابد و موج انتقال یافته می‌تواند چندین بازتاب داخلی داشته باشد که در سطح بالائی احتمال انتقال آن وجود دارد. در شکل امواج انتقال یافته از سطح مشترک پایینی را نشان نداده‌ایم.

۳.۳.۸ بازنگری پلاسمون‌های سطحی

با استفاده از روش ماتریس انتقال، اکنون می‌توانیم ضرایب بازتاب و انتقال کلی را برای محیط‌های لایه لایه به‌راحتی محاسبه کنیم. خط تیره سیاه نشان داده شده با (i) در شکل (۱۲.۸)، ضریب

بازتاب سطح مشترک یک تک شیشه- طلا را نشان می‌دهد. همانطور که قبلاً در بخش ۱.۱.۸ بحث شد، روابط پاشندگی فوتون‌ها و پلاسمون‌های سطحی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و در نتیجه هیچ پلاسمونی سطحی را نمی‌توان مستقیماً توسط نور راه اندازی کرد: ضریب بازتاب R^{TM} برای همه زوایای ورودی به‌یک نزدیک است و تنها تلفات کمی به‌نفوذ میدان جزء و تلفات اهمی در فلز نسبت داده می‌شود. همه چیز برای ساختار هندسی کرتشمن به‌طور قابل توجهی تغییر



شکل ۱۲.۸: ضریب بازتاب کل $|\tilde{R}^{TM}|$ برای (الف) تیغه نیمه-بی‌نهایت و (ب، ج) ساختار لایه‌لایه. برای نمایش شماتیک به‌قسمت داخلی مراجعه کنید. در شبیه‌سازی‌هایی که از طول موج فضای آزاد $\lambda = 620\ nm$ برای نور تابشی استفاده می‌کنیم، مربوط به‌انرژی فوتونی $2\ eV$، تابع دی‌الکتریک نقره که از آزمایش‌های نوری گرفته شده است [۳۴]، ضریب شکست $n_1 = 1.5$ (شیشه) برای محیط بالای لایه که ساختار از طریق آن تحریک می‌شود و ضریب شکست $n_1 = 1$ برای محیط زیر لایه. (الف) برای یک سطح مشترک هیچ پلاسمون سطحی نمی‌تواند تحریک شود. (ب) برای ساختار تیغه‌ای (ضخامت $d = 50\ nm$)، پلاسمون‌های سطحی با زاویه خاصی تابیده می‌شوند، جایی که انرژی و مومنتوم فوتونتابشی و پلاسمون سطحی در سطح مشترک با هم منطبق هستند. (ج) شبیه‌سازی که در آن نفوذ ϵ_3 کمترین محیط ۵ افزایش می‌یابد. به‌دلیل میدان‌های محو شونده قوی محلی پلاسمون سطحی، انرژی پلاسمون نسبت به‌تغییرات محیط دی‌الکتریک محلی بسیار حساس است.

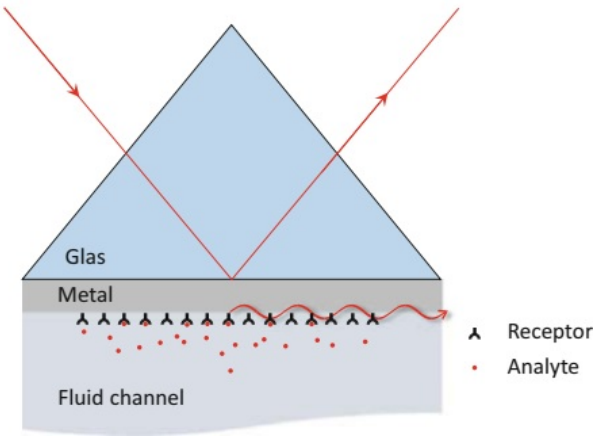
می‌کند، به‌خط قرمز جامد نشان داده شده برای (ب) در شکل (۱۲.۸) مراجعه کنید. برای زاویه 43 درجه، انرژی و مومنتوم نور تابشی (از طریق محیط شیشه‌ای بالائی) با پلاسمون سطحی در سطح مشترک نقره پایین مطابقت دارد و یک پلاسمون سطحی راه اندازی می‌شود. این را می‌توان به‌وضوح به‌عنوان یک افت شدید ضریب بازتاب کلی مشاهده کرد که در آن عملاً تمام انرژی نور تابشی به‌پلاسمون‌های سطحی منتقل می‌شود. از آنجا که میدان‌های پلاسمون‌های سطحی به‌شدت افزون هستند، پاشندگی آنها بطور حساس به‌تغییرات محیط دی‌الکتریک محلی بستگی دارد. برای یک تیغه نیمه بی‌نهایت پاشندگی پلاسمون توسط معادله (۶.۸ داده می‌شود.

$$k_x = k_1 \sin\theta = \sqrt{\frac{\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_0(\epsilon_2+\epsilon_3)}}k_0$$

که در آن ϵ_2 و ϵ_3 بترتیب گذردهی فلز و مواد دی‌الکتریک زیر فلز است و ما مومنتوم نور تابشی را در پائین‌آمدن بازتاب بصورت $k_1 \sin\theta$ بیان کرده‌ایم. هنگامی که گذردهی دی‌الکتریک بمقدار کمی $\epsilon_3 + \delta\epsilon_3$ تغییر می‌کند، زاویه پائین‌آمدن بازتاب نیز کمی $\theta + \delta\theta$ تغییر می‌کند. خطی کردن عبارت بالا می‌دهد

$$k_1 \left[\sin\theta + \cos\theta\delta\theta\right] \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_0(\epsilon_2+\epsilon_3)}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2+\epsilon_3}\frac{\delta\epsilon_3}{\epsilon_3}\right]k_0$$

بنابراین، میزان کمترین تقریب تغییر $\delta\theta$ خواهد شد؛



شکل ۱۳.۸: شماتیک حسگر پلاسمون سطحی بر اساس پیکربندی کرتشمن. سطح فلز با گیرنده‌ها فعال می‌شود. پس از اتصال، گذردهی محیط پایینی کمی تغییر می‌کند و باعث ایجاد تغییر در پاشندگی پلاسمون سطحی می‌شود که می‌تواند به‌صورت نوری آشکارسازی شود.

$$\delta\theta \approx \frac{1}{2}\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2+\epsilon_3}\frac{\delta\epsilon_3}{\epsilon_3}\tan\theta \tag{۳۹.۸}$$

خط چین قرمز (ج) در شکل (۱۲.۸) ضریب بازتاب برای چینشی که گذردهی پائین‌ترین محیط پنج درصد افزایش یافته است را نشان می‌دهد. این تغییر باعث تغییر قابل توجهی در زاویه θ می‌شود که پلاسمون سطحی در آن راه‌اندازی می‌شود و حساسیت قوی پلاسمون‌های سطحی را نسبت به‌تغییرات محیط دی‌الکتریک محلی نشان می‌دهد. این حساسیت به‌دلیل شدت محلی سازی مشخصه محوشوندگی میدان‌های پلاسمون سطحی است، که به‌طور قابل توجهی تحت تأثیر تغییرات دی‌الکتریک در مجاورت سطح فلز قرار می‌گیرد.

حسگرهای پلاسمون سطحی این حساسیت سطحی را می‌توان برای حسگرهای (زیستی) پلاسمون سطحی، که کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی پیدا کرده‌اند، به‌عنوان مثال برای آزمایش‌های بالینی بارداری، استفاده کرد[۴۴، ۵۲]. اصل اساسی در شکل (۱۳.۸) نشان داده شده است: سطح فلزی پایین با گیرنده‌هایی که می‌توانند پارامترهای خاص مواد (آنالیت) را برای تشخیص متصل کنند، فعال می‌شود. محیط پایینی به‌یک کانال مایع متصل است که مقداری مایع مانند آب را منتقل می‌کند. اگر هیچ آنالیتی در سیال وجود نداشته باشد، هیچ چیزی به‌گیرنده‌ها متصل نمی‌شود و افت بازتاب ساختار هندسی

کرتشمن بدون تغییر باقی می‌ماند. از طرف دیگر، در صورت وجود آنالیت‌ها، می‌توانند به‌گیرنده‌ها متصل شوند، و باعث تغییر کمی $\delta\epsilon$ در محیط دی‌الکتریک می‌شوند (ضریب شکست آنالیت‌ها معمولاً تا حدودی با مایع متفاوت است)، و باعث تغییر $\delta\theta$ افت ضریب بازتاب شده، که از طریق یک آشکارسازی نوری مشاهده می‌شود. حساسیت‌های معمولی سنسورها بر اساس پلاسمون‌های سطحی برای $\delta\theta$ در مرتبه میلی درجه است.

تزویج پلاسمون‌های سطحی

در ابتدای این فصل در مورد پلاسمون‌های سطحی برای سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک بحث کردیم. با روش ماتریس انتقال، در حال حاضر در موقعیتی هستیم که پاشندگی پلاسمون سطحی و همچنین برای سیستم‌های پیچیده‌تر، مانند فیلم فلزی در حالت ساختار هندسی کرتشمن را محاسبه کنیم. در ادامه کمی مفصل تر در مورد نحوه اتصال این دو رویکرد بحث خواهیم کرد. برای روشن شدن همه چیز از ابتدا: ماتریس انتقال یک راه حل دقیق برای معادله ماکسول ارائه می‌دهد، بنابراین مجبور نیستیم آن را بهبود بخشیم. با این حال، برای یافتن تفسیر عینی برای این نتایج دقیق راحتر خواهد بود.

با درنظر گرفتن سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک که در شکل (۶.۸) نشان داده شده است، یک تیغه فلزی با گذردهی ϵ_2 و ضخامت d که در یک محیط دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_1 قرار گرفته است را در نظر می‌گیریم. به‌دلیل تقارن، جواب‌ها نسبت به z توابع زوج یا فرد هستند. همانطور که در تمرین ۶.۸ توضیح داده شده است، می‌توان شرایط پلاسمون سطحی اصلاح شده برای تیغه فلزی را بدست آورد؛

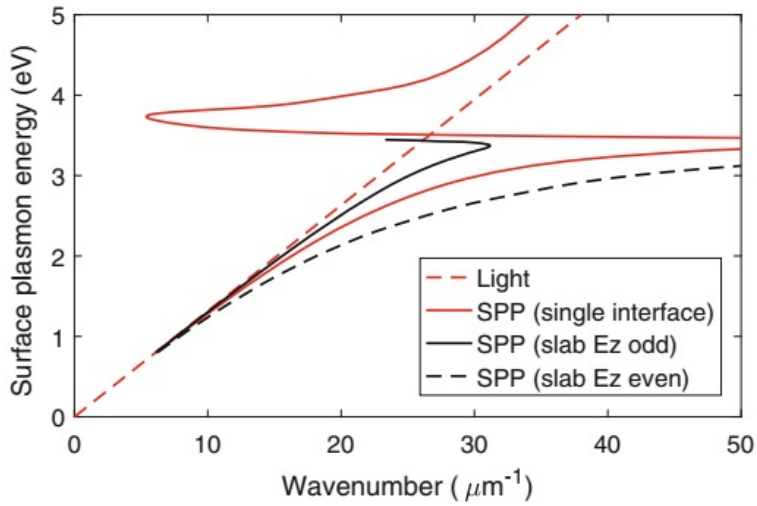
$$\tanh\left(\frac{k_{2z}d}{2}\right) = \begin{cases} -\left(\dfrac{k_{1z}\epsilon_2}{k_{2z}\epsilon_1}\right) & \text{برای } H_y \text{ زوج و } E_z \text{ فرد} \\ -\left(\dfrac{k_{2z}\epsilon_1}{k_{1z}\epsilon_2}\right) & \text{برای } H_y \text{ فرد و } E_z \text{ زوج} \end{cases} \tag{۴۰.۸}$$

و آنرا باید بطور عددی حل کرد. (۱۴.۸) پاشندگی را برای یک فیلم نقره بضخامت ۳۰ نانو متر نشان می‌دهد. بطوری که می‌توان مشاهده کرد، فرکانس‌های مودهای زوج و فرد از هم جدا شده که می‌توان بر حسب تزویج بین مودهای افزونگی سطح مشترک بالا و پائین تیغه فلزی درک کرد. هنگامی که ضخامت فیلم افزایش یابد، برای ۸۰ نانو متر به‌شکل (۱۵.۸) مراجعه کنید، تزویج کاهش یافته و مودهای جدا شده بطور قابل ملاحظه‌ای کوچک می‌شوند.

برای درک کیفی این رفتار، ساده‌ترین مدل را بر اساس دو نوسان‌ساز تزویج شده معرفی می‌کنیم که می‌تواند با پلاسمون‌های سطحی در دو طرف تیغه فلزی که با همان مومنتوم موازی $\hbar k_x$ (که یک مقدار محافظت شده برای هندسه تیغه است) منتشر شوند، وابسته باشد. با معادلات حرکت نیوتن شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_a}{dt^2} + \gamma\frac{dx_a}{dt} + \omega_a^2 x_a &= g x_b + f_0 e^{j\omega t} \\ \frac{d^2x_b}{dt^2} + \gamma\frac{dx_b}{dt} + \omega_b^2 x_b &= g x_a \end{aligned}$$

دامنه نوسان‌ها را با x_a, x_b و فرکانس‌های تشدید را با ω_a, ω_b نشان داده و γ ثابت میرائی است.



شکل ۱۴.۸: پاشندگی پلاسمون سطحی برای فیلم نقره بضخامت ۳۰ نانومتر در بستر یک دی‌الکتریک به‌گذردهی $\epsilon_1 = 2.25$. خط تیره نمایشگر خط نور، خط قرمز پاشندگی پلاسمون سطحی برای یک سطح مشترک است. خطوط سیاه نمایشگر پاشندگی‌های پلاسمون سطحی برای تیغه فلزی است که از رابطه (۴۰.۸) محاسبه شده است.

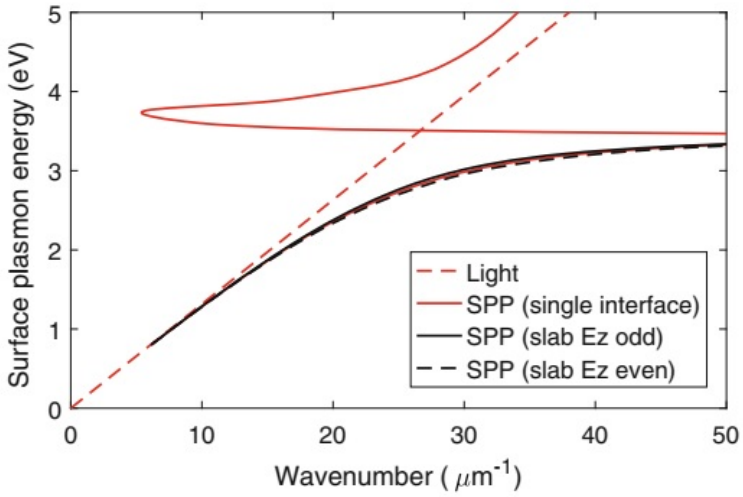
ضمناً ثابت تزویج بین دو نوسان کننده‌ها را با g و همین طور جمله راه‌انداز نوسان کننده را a، و با فرکانس ω و دامنه f_0 معرفی کرده‌ایم. با اعمال راه‌انداز خارجی، دو نوسان کننده بعداز مراحل اولیه با همان فرکانس ω بعنوان تحریک خارجی شروع به‌نوسان می‌کنند. بردار دامنه مختلط زیر را معرفی می‌کنیم؛

$$\begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{pmatrix} = e^{j\omega t} \begin{pmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{x}_b \end{pmatrix}$$

که در آن مانند معمول فرض می‌کنیم که با گرفتن قسمت حقیقی از x_a, x_b بصراحت جابجائی فیزیکی بدست می‌آید. با وارد کردن این بردار در معادلات حرکت نیوتن و حذف عوامل نمائی رایج، به‌معادله زیر میرسیم؛

$$\begin{pmatrix} \omega_a^2 - \omega^2 + j\gamma\omega & -g \\ -g & \omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{x}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (۴۱.۸)$$

برای حل این معادله، می‌توانیم مودهای ویژه سیستم را جستجو کرده یا مستقیماً معادله ماتریس را حل کنیم. در ادامه روش دوم را انتخاب می‌کنیم و پس از محاسبه‌های ساده دامنه‌های یک سیستم نوسان‌ساز تزویجی که بطور هارمونیکی راه‌اندازی شده را بدست می‌آوریم؛



شکل ۱۵.۸: همان زیر نویس شکل (۱۴.۸) اما برای فیلم نقره بضخامت ۸۰ نانو متر.

نوسانگرهای تزویجی با راه‌اندازی هارمونیکی

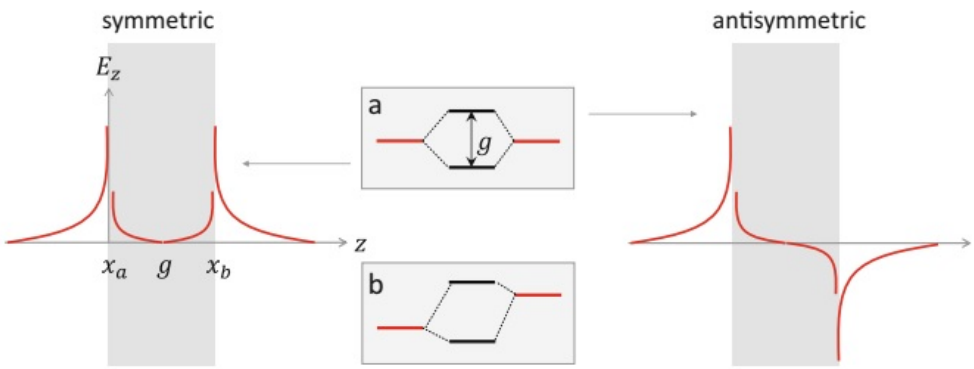
$$\bar{x}_a = \left[\frac{\omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}{(\omega_a^2 - \omega^2 + j\gamma\omega)(\omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega) - g^2}\right] f_0$$
$$\bar{x}_b = \left[\frac{g}{(\omega_a^2 - \omega^2 + j\gamma\omega)(\omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega) - g^2}\right] f_0 \qquad (۴۲.۸)$$

سپس سیستم پلاسمون تزویجی را بر حسب این مدل نوسان‌ساز ساده تحلیل می‌کنیم. شکل (۱۶.۸) نمای شماتیک سیستم را نشان می‌دهد. ابتدا وضعیتی را در نظر می‌گیریم که هر دو پلاسمون سطحی دارای فرکانس یکسانی $\omega_a = \omega_b$ هستند، و مربوط به‌حالتی است که گذردهی مواد بالا و پایین فیلم فلزی $\epsilon_1 = \epsilon_3$ یکسان است. در این حالت، مودهای ویژه ماتریس در معادله (۴۱.۸) متقارن و نامتقارن جمع مودهای پلاسمون سطحی هستند. فرکانس‌های ویژه $\omega_a = \omega_b = \omega_0$ را می‌توان برای $\omega_0 \gg \gamma$ ،$\omega_0 \gg g$ به‌صورت زیر محاسبه کرد ؛

$$\omega_\pm \approx \omega_0 + j\frac{\gamma\omega_0}{2} \pm \frac{g}{2}$$

آنها توسط ثابت تزویج g تقسیم می‌شوند و همان میرائی نوسان‌سازهای فرد را دارند. مود متقارن، که فرکانس آن کاهش می‌یابد، گاهی اوقات مود **اتصال** [۲۵] و مود نامتقارن مود **ضد اتصال** [۲۶] نامیده می‌شود. برای فیلم‌های فلزی به‌اندازه کافی ضخیم، تزویج g معمولاً بسیار کوچکتر از γ است.

[۲۵] Bonding
[۲۶] Anti-bonding



شکل ۱۶.۸: شماتیک پلاسمون‌های سطحی تزویجی. دو پلاسمون سطحی به‌سطح مشترک‌های یک تیغه فلزی افزون شده، که توسط نوسانگرهای هارمونیکی x_a و x_b که از طریق میدان‌های محو شونده پلاسمون سطحی تزویج شده، مدل سازی شده است. این کار با تزویج ثابت g توصیف می‌شود. (الف) برای انرژی‌های مساوی مودهای سیستم تزویج شده که شامل مودهای متفارن و نامتقارن است، بصورت شماتیک در سمت چپ و راست، با یک جدا سازی انرژی g نشان داده شده است. (ب) برای انرژی‌های پلاسمون نامساوی، تقسیم مود کاهش یافته، و مشخصه مودویژه تحت تأثیر خواص نوسان‌سازهای بدون تزوج x_a و x_b هستند.

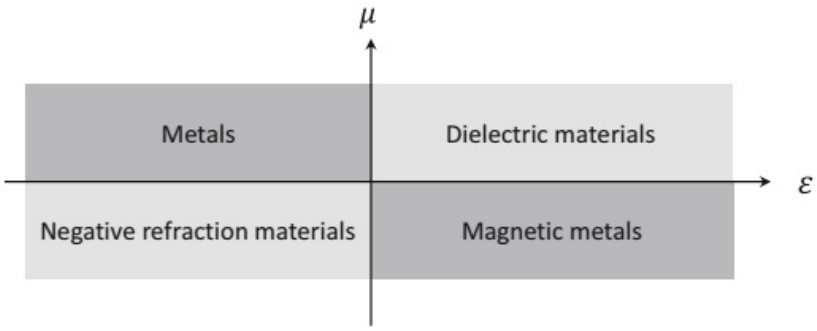
در اصل، تحلیل مشابه برای نوسان‌سازهای با فرکانس‌های مختلف نیز صادق است، برای مثال، ساختار هندسی معمولی کرتشمن با پاشندگی‌های مختلف پلاسمون سطحی در دو سطح مشترک تیغه، همانطور که در شکل(۱۶.۸)-ب نشان داده شده است. سپس نور تابشی نوسان‌ساز a را راه‌اندازی کرده و تحریک از طریق تزویج به‌نوسان‌ساز b منتقل می‌شود. این یک طرح تفسیری ساده اما مناسب برای تزویج پلاسمون سطحی در سیستم‌های لایه فلزی ارائه می‌کند.

۴.۸ شکست منفی

در این فصل مشاهده کردیم که حتی یک سیستم ساده مانند سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک، فیزیک جالبی را به‌نمایش می‌گذارد. ممکن است تعجب کنید که آیا ممکن است اثرات مشابهی برای ترکیب‌های دیگر مواد، به‌ویژه سیستم‌هایی با پاسخ مغناطیسی $\mu(\omega)$ بزرگ در محدوده نوری وجود داشته باشد. همانطور که در فصل قبل بحث کردیم، چنین موادی در طبیعت وجود ندارند بلکه می‌توانند به‌صورت مصنوعی تولید شوند. فرض کنید که می‌توانیم مواد فوق با مقادیر $\epsilon(\omega)$، $\mu(\omega)$ دلخواه، همانطور که در شکل (۱۷.۸) نشان داده شده است، تولید کنیم. چه انتظاری می‌توانیم داشته باشیم؟

- $\epsilon > 0, \mu > 0$ این وضع مربوط به‌دی‌الکتریک‌های معمولی است، گرچه نوع معمولی $\mu \approx \mu_0$ وجود دارد. از رابطه پاشندگی داریم؛

$$k^2 = \epsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2 \Longrightarrow \omega = \frac{kc}{n(\omega)}, \qquad n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}{\mu_0\epsilon_0}} \qquad (۴۳.۸)$$



شکل ۱۷.۸: طبقه‌بندی مواد با توجه به‌گذردهی ϵ و نفوذپذیری μ.

بنابراین سرعت نور با ضریب شکست $n(\omega)$ در محیط نسبت به‌فضای آزاد تغییر می‌کند، که باعث شکست امواج صفحه‌ای (یا اشعه در مورد اپتیک هندسی) در سطح مشترک بین مواد با مقادیر مختلف $n(\omega)$ می‌شود.

- $\epsilon < 0, \mu > 0$ این وضع به‌فلزات مربوط می‌شود. از رابطه پاشندگی $\omega^2\mu\epsilon = k_x^2 + k_z^2$ مشاهده می‌کنیم که فقط امواج محوشونده[۲۷] با عدد موج موهومی در فلزات وجود دارد. بدین دلیل، نور در سطح مشترک بین دی‌الکتریک و فلز بازتاب می‌شود. علاوه بر این، نوع جدیدی از تحریک در چنین سطح مشترک‌ها وجود دارد، که قبلاً در باره پلاسمون‌های سطحی بحث شد.

- $\epsilon > 0, \mu < 0$ این وضعیت مربوط به‌فلزات مغناطیسی است. با توجه به‌اصل دوگانگی، خواص فیزیکی مشابه فلزات معمولی است؛ با این حال، نقش میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی عوض می‌شود. باز هم نور نمی‌تواند در داخل فلز مغناطیسی انتشار یابد، و پلاسمون‌های سطحی (اکنون با ویژگی TE) در سطح مشترک بین دی‌الکتریک و فلز مغناطیسی وجود دارد.

- $\epsilon < 0, \mu < 0$ در ابتدا به‌نظر می‌رسد این مورد خیلی جالبی نیست. با ارائه این پارامترهای ماده در رابطه پاشندگی، نتیجه مشابهی مانند معادله (۴۳.۸) با ضریب شکست زیر به‌دست می‌آوریم.

$$n = \pm\sqrt{\frac{-|\epsilon|)(-|\mu|)}{\mu_0\epsilon_0}}$$

که مانند حالت $\mu > 0, \epsilon > 0$ به‌نظر میرسد. با این حال، همانطور که قبلاً در معادله ذکر شد، باید در مورد علامت ریشه دوم دقت کنیم. معمولاً کسی در مورد علامت زحمت نمی‌کشد ، آن را مثبت انتخاب می‌کنند و در واقع این برای دی‌الکتریک‌های معمولی صحیح است. با این حال، برای $\mu < 0, \epsilon < 0$ باید علامت منفی را انتخاب کرد، همانطور که چند لحظه دیگر نشان می‌دهیم،اینگونه مواد را بنام مواد با **ضریب شکست منفی** می‌نامند.

[۲۷] Evanescent Waves

بنابراین چگونه می‌توانیم تصمیم بگیریم که کدام علامت باید برای ضریب شکست انتخاب کنیم؟ مانند همیشه در الکترودینامیک، پاسخ توسط معادلات ماکسول ارائه شده است. معادلات کرل بدون جمله منبع خارجی و برای امواج صفحه‌ای با معادله (۳۸.۲) داده شده است.

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\mu\omega\mathbf{H},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{H}=-\epsilon\omega\mathbf{E}\ .$$

از این فوراً می‌توان دریافت که

- برای مواد با $\mu>0,\epsilon>0$ بردارهای $\mathbf{k},\mathbf{E},\mathbf{H}$ یک دستگاه مختصات متعامد دست $\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{E}}=\hat{\mathbf{H}}$ راست می‌سازند، در حالی که
- برای مواد با $\mu<0,\epsilon<0$ بردارهای $\mathbf{k},\mathbf{E},\mathbf{H}$ یک دستگاه مختصات دست چپ $\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{E}}=-\hat{\mathbf{H}}$ می‌سازند.

در ادامه، وضعیتی در نظر می‌گیریم که در شکل (۹.۸) نشان داده شده است، در آنجا یک موج صفحه‌ای به‌سطح مشترک بین مواد با ضریب شکست‌های منفی و مثبت برخورد می‌کند. خیلی ویژه، فرض می‌کنیم که

- پارامترهای $\epsilon_1=\epsilon_0$ و $\mu_1=\mu_0$ برای ماده نیم-فضای $z<0$ است.
- پارامترهای $\epsilon_2=-\epsilon_0$ و $\mu_2=-\mu_0$ برای ماده نیم-فضای $z>0$ است.

حالتی تابشی یک موج صفحه‌ای با مشخصه TM را مورد بحث قرار می‌دهیم. برای موج بردار و میدان‌هایی که مواد ضریب شکست مثبت دارند، داریم

$$\mathbf{k}_1=\begin{pmatrix}k_x\\0\\k_z\end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}_1=\begin{pmatrix}0\\H_y\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{E}_1=-Z_0\hat{\mathbf{k}}_1\times\mathbf{H}_1=\frac{Z_0H_y}{k}\begin{pmatrix}k_z\\0\\-k_x\end{pmatrix}$$

که در آن Z_0 امپدانس فضای آزاد است. برای آنکه میدان‌های مواد با ضریب شکست منفی را بدست آوریم، شرایط مرزی معادلات ماکسول را با پیوستگی میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی و مولفه عمودی جابجائی دی‌الکتریک بکار می‌بریم. این می‌دهد

$$E_{1x}=E_{2x},\qquad \epsilon_0E_{1z}=-\epsilon_0E_{2z},\qquad H_{1y}=H_{2y}$$

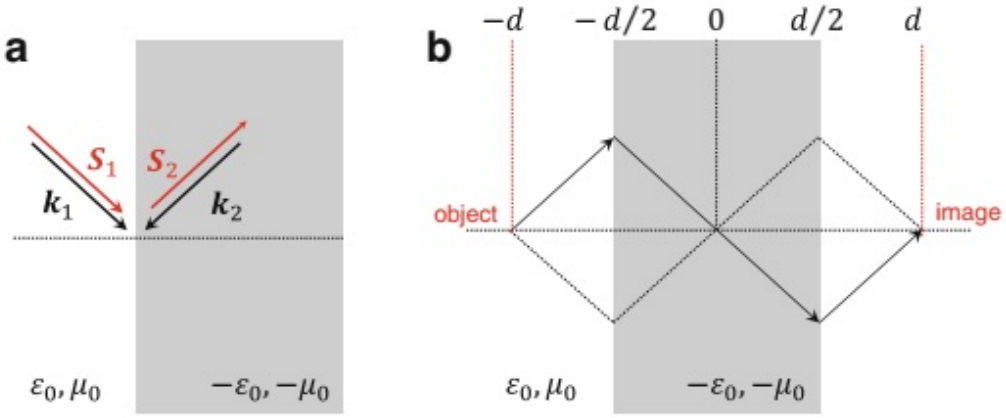
بنابراین، هنگامی از مواد با ضریب شکست مثبت به‌منفی تبدیل می‌کنیم، خواهیم داشت؛

$$\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_1,\qquad \mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}E_{1x}\\0\\-E_{1z}\end{pmatrix}=\frac{Z_0H_y}{k}\begin{pmatrix}k_z\\0\\k_x\end{pmatrix}\ . \tag{۴۴.۸}$$

اکنون می‌توانیم از این حقیقت استفاده کنیم که در مواد با ضریب شکست منفی بردارهای $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ یک دستگاه مختصات دست چپ را تشکیل می‌دهند؛

$$\mathbf{k}_2 = -k\hat{\mathbf{E}}_2 \times \hat{\mathbf{H}}_2 = \begin{pmatrix} k_z \\ 0 \\ k_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_z \end{pmatrix} . \qquad (۴۵.۸)$$

بنابراین، مولفه موازی بردارموج حفظ شده اما مولفه z در جهت مخالف خواهد بود. به‌عبارت دیگر، سرعت فاز در **هر دو** مواد بسوی سطح مشترک خواهد بود! این یک وضع بسیار نامعمول است که ما قبلاً تحت عنوان" شکست منفی" از آن یاد کردیم. به‌شکل (۱۸.۸) برای نمایش گرافیکی مراجعه کنید. همچنین می‌توانیم بردارهای پوایند‌تینگ را در هر دو ماده محاسبه کنیم



شکل ۱۸.۸:

که نشان می‌دهد انرژی به‌طور پیوسته در جهت مثبت zها جریان می‌یابد و تنها سرعت فاز است که جهت آن مخالف جهت جریان انرژی در مواد با ضریب شکست منفی است.

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 = \frac{Z_0 H_y^2}{2k} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 = \frac{Z_0 H_y^2}{2k} \begin{pmatrix} -k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix},$$

۱.۴.۸ عدسی وسلاگو

مواد با ضریب شکست منفی اولین بار توسط وسلاگو[۲۸] در سال ۱۹۶۴ مورد توجه قرار گرفت[۵۳]، و چیزی شبیه یک کنجکاوی نظری باقی ماند. وسلاگو همچنین متوجه شد که یک تیغه از مواد با ضریب شکست منفی می‌تواند به‌عنوان یک عدسی عمل کند (شکل ۱۸.۸). منبع نقطه‌ای را در موقعیت $z = -d$ در مقابل یک تیغه با ضخامت d در نظر بگیرید. با ردیابی اشعه‌های ساطع شده از جسم به‌راحتی مشاهده می‌شود که آنها در طرف دیگر تیغه در موقعیت آینه $z = d$ دوباره

[۲۸] Veselago

کانونی می‌شوند. به‌طور کلی، آن یک عدسی بیش از حد مفید نیست ولی همراه با تعدادی از ویژگی‌های بسیار دیدنی است.

- عدسی وسلاگو انحنا ندارد،
- محور نوری ندارد،
- بزرگنمائی ندارد،
- نمی‌تواند پرتوهای موازی نور را کانونی کند.

۲.۴.۸ عدسی کامل

عدسی وسلاگو در سکوت باقی ماند، گرچه گاهی مورد توجه قرار میگرفت، اما در سال ۲۰۰۰ هنگامی که جان پندری[۲۹] انتقال میدانهای محوشونده را در عدسی وسلاگو تحلیل کرد و متوجه شد که "شکست منفی یک عدسی کامل می‌سازد" [[۵۴]]. من مطالعه این نشریه را قویاً توصیه می‌کنم زیرا به‌عنوان مثال نحوه نگارش زیبای یک مقاله تحقیقاتی عالی نشان می‌دهد. در بند اول پندری می‌گوید:

> عدسی‌های نوری قرن‌ها یکی از ابزارهای اصلی دانشمندان بوده‌اند. عملکرد آنها بر اساس اپتیک کلاسیک به‌خوبی قابل درک است: سطوح منحنی به‌دلیل تغییر ضریب شکست نور را متمرکز می‌کنند. به‌همان اندازه محدودیت‌های آنها توسط اپتیک موج تعیین می‌شود: هیچ عدسی نمی‌تواند نور را روی ناحیه‌ای کوچکتر از مربع طول‌موج، λ^2، کانونی کند. چه چیز جدیدی برای گفتن وجود دارد به‌جز اینکه عدسی را کاملاً صیقل دهید و دی‌الکتریک کمی بهتر اختراع کنید؟ در این مقاله می‌خواهم محدودیت سنتی در عملکرد عدسی را به‌چالش بکشم و یک نوع از "ابر عدسیها" را عنوان کرده و یک طرح عملی برای اجرای چنین عدسی را پیشنهاد کنیم.

برای درک اینکه چرا عدسی وسلاگو یک "ابرعدسی" است، اکنون تمرکز موج را با استفاده از روش ماتریس انتقال که قبلاً مدون کرده بودیم، تجزیه و تحلیل می‌کنیم. یک تیغه به‌ضخامت d و پر از مواد با شکست منفی را که در خلا واقع شده است در نظر می‌گیریم. فرض کنید یک موج محوشونده[۳۰] با عددموج زیر

$$k_{1z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} = -j\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \equiv -jk_0$$

روی اولین سطح مشترک می‌تابد. ما از $\epsilon \to -\epsilon_0$ و فرض $\mu \to -\mu_0$ برای موج محو شونده استفاده می‌کنیم. در داخل مواد شکست منفی، داریم

$$k_{2z} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - k_x^2} = -j\sqrt{k_x^2 - \omega^2\mu\epsilon} \equiv -jk$$

[۲۹] John Pendry

[۳۰] Evanescent Wave

و در انتهای محاسبات $\epsilon \to -\epsilon_0$ و $\mu \to -\mu_0$ را قرار خواهیم داد. توجه کنید که تمام اندیس‌های مواد را حذف کرده‌ایم. از رابطه (۳۸.۸) استفاده کرده و بدست می‌آوریم؛

$$\tilde{T}_{13} = \lim_{\epsilon \to -\epsilon_0} \lim_{\mu \to -\mu_0} \frac{\left(\frac{2\mu k_0}{\mu k_0 + \mu_0 k}\right)\left(\frac{2\mu_0 k}{\mu_0 k + \mu k_0}\right) e^{-kd}}{1 + \left(\frac{\mu k_0 - \mu_0 k}{\mu k_0 + \mu_0 k}\right)\left(\frac{\mu_0 k - \mu k_0}{\mu_0 k + \mu k_0}\right) e^{-2kd}} \,. \tag{۴۶.۸}$$

توجه کنید که آرگومان تابع نمائی به‌نحوی انتخاب شده است که امواج محوشونده بطور مطلوبی در بازتابهای پی در پی میرا شوند . این را می‌توانید از بسط مخرج بصورت سری هندسی که قبلاً مشابه آن در حالت انتشار امواج شرح داده شده است، مشاهده کنید.

بعداً با توجه به‌حد $\epsilon \to -\epsilon_0$ و $\mu \to -\mu_0$ خواهیم داشت $k \to k_0$ و ضرایب انتقال و بازتاب فرنل بعلت صفر شدن $\mu k + \mu_0 k'$ در مخرج، واگرا می‌شود. به‌همین دلیل، می‌توانیم در مخرج معادله (۴۶.۸) عامل ثابت ۱ را چشم پوشی کنیم. بنابراین، برای ضریب انتقال کلی یک تیغه پُر از مواد شکست منفی خواهیم داشت؛

ضرایب انتقال کلی برای عدسی کامل

$$\tilde{T}_{13} = \lim_{\epsilon \to -\epsilon_0} \lim_{\mu \to -\mu_0} \frac{4\mu\mu_0 k_0 k}{(\mu k_0 - \mu_0 k)(\mu_0 k - \mu k_0)} e^{kd} = e^{k_0 d} \tag{۴۷.۸}$$

به‌عبارت دیگر، عدسی وسلاگو امواج محوشونده را تقویت می‌کند! حتی آنها را به‌حدی تقویت می‌کند که در موقعیت تصویر دامنه امواج محوشونده دقیقاً برابر با موقعیت جسم است. این در واقع یک نتیجه غیر منتظره و چشمگیر است. پندری در مقاله اصلی خود نتیجه می‌گیرد:

> بنابراین، اگرچه محاسبه‌های عِلّی را کاملاً دقیق انجام داده‌ایم، اما نتیجه نهایی این است که محیط امواج محوشونده را تقویت می‌کند. از این‌رو نتیجه می‌گیریم که با استفاده از این عدسی جدید، هردو امواج منتشر شونده و محوشونده در وضوح تصویر شرکت می کنند. بنابراین هیچ مانع فیزیکی برای بازسازی کامل تصویر فراتر از محدودیت‌های عملی روزنه و کامل بودن سطح عدسی وجود ندارد.

در تصویربرداری کامل توسط عدسی کامل، جادویی وجود دارد، و اگر کسی با دقت محاسبه نظری انجام دهد، منتهی به‌معادله (۴۷.۸) شده و مشخص نیست که سحر در کجا و چرا اتفاق می‌افتد. عدسی وسلاگو کاری را انجام می‌دهد که انتظارش را نداشتند، یعنی تقویت امواج محوشونده. یک مدل تفسیری شهودی برای عدسی وسلاگو وجود دارد که در مرجع [۵۵] ارائه شده است، و به‌درک بخشی از این سحر کمک می‌کند. در این مقاله نویسندگان با بحث در باره مودهای افزونگی در سطح مشترک بین ماده ضریب شکست مثبت و منفی، مشابه تحلیل پلاسمون‌های سطحی ابتدای این فصل، شروع می‌کنند. به‌نظر می‌رسد که سطح مشترک از هر دو مود TE و TM پشتیبانی می‌کند، که در صورت وجود پارامترهای مواد ایده‌آل، میرا نمی‌شوند. بنابراین می‌توانیم دوباره از مدل نوسان‌ساز تزویجی معادله (۴۲.۸) استفاده کنیم، اما اکنون باید موقعیتی را در نظر بگیریم که تزویج بر میرایی غالب است. اولین نوسان‌ساز x_a مربوط

به‌مود افزونگی در سطح مشترک $-d/2$ است که توسط میدان‌های محوشونده جسم راه‌اندازی می‌شود. در تشدید، عملاً تمام تحریک به‌نوسان‌ساز تزویج شده x_b منتقل می‌شود، تمرین ۱۰.۸ را ملاحظه کنید، که شروع به‌نوسان شدید می‌کند. جادوی پیشنهادی، اما به‌طور کامل توسط مدل توضیح داده نشده است این است که مود افزونگی در سطح مشترک $d/2$ (مربوط به x_b) به‌گونه‌ای تحریک می‌شود که میدان محوشونده آن به‌مقداری در موقعیت تصویر میرا می‌شود که دقیقاً مطابق با آن مقدار در موقعیت جسم است.

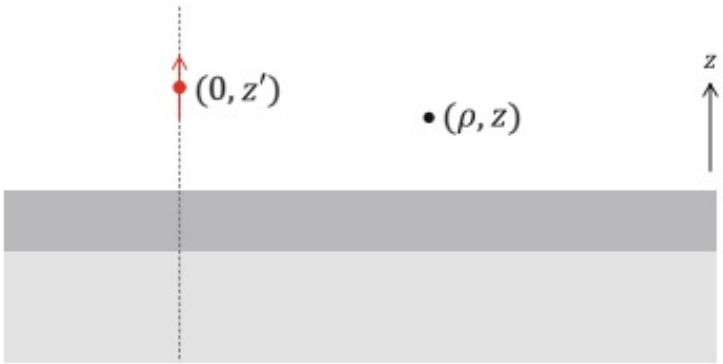
با توجه به‌روابط کرامرز -کرونیگ معادله (۳۴.۷) بدیهی است که پارامترهای مواد $-\epsilon_0$ و $-\mu_0$ در تمام محدوده فرکانسی قابل دستیابی نیست، اما باید با تلفات در فرکانس‌های دیگر همراه باشد. در حال حاضر نیز هیچ ماده یا فراموادی وجود ندارد که نشان دهنده تحقق قابل ملاحظه مواد با ضریب شکست منفی در رژیم نوری باشد. به‌همین دلایل، عدسی‌های کامل توجه بسیاری را به‌خود جلب کرده است، اما کاربردها تا کنون کمیاب مانده است. دربخش ۲.۵.۸ در مورد استراتژی‌های تقریبی برای اجرای عدسی کامل در آزمایش را بحث خواهیم کرد.

۵.۸ تابع گرین برای محیط‌های لایه لایه

ما این فصل را با بحث در باره شیوه محاسبه تابع گرین برای یک محیط لایه لایه به‌پایان می‌بریم. با انجام این کار، ابتدا متوجه می‌شویم که تابع گرین دیادیک $\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ میدان الکتریکی که در موقعیت $\mathbf{r}$ می‌دهد، توسط یک دو قطبی نوسانی که در موقعیت $\mathbf{r}'$ تولید می‌شود (شکل ۱۹.۸) است.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2\mu\ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{p}\ .$$

عبارت بالا برای یک محیط بدون مرز وقتی تابع گرین (۱۹.۵) استفاده می‌کنیم صحیح است.



شکل ۱۹.۸: دوقطبی بالای محیط لایه لایه. یک دوقطبی در موقعیت $(0, z')$ بالای یک محیط لایه لایه قرار دارد و میدان بازتابی در موقعیت (ρ, z) محاسبه می‌شود.

برای میدان الکتریکی در یک محیط لایه لایه، باید یک جمله اضافی بازتابی به‌بخش تابع گرین

معرفی کنیم.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2\mu \left[\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \bar{\bar{G}}_{redfl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right] \cdot \mathbf{p} \tag{۴۸.۸}$$

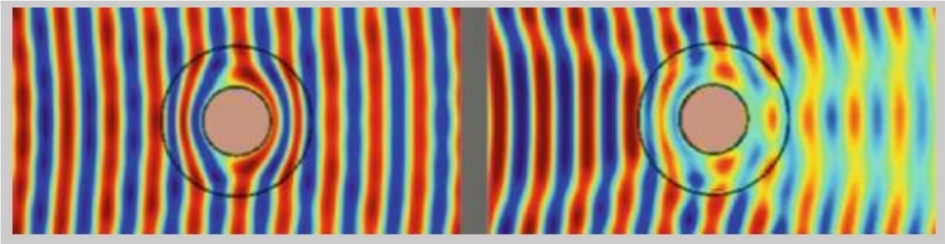
و باید بنحوی انتخاب شود که شرایط مرزی معادلات ماکسول را در سطح مشترک محیط لایه لایه ارضاء کند. در نتیجه، محاسبه تابع گرین بازتابی بسادگی شامل مراحل زیر است.

تجزیه موج صفحه‌ای تجزیه تابع گرین دیادیک $\bar{\bar{G}}$ به‌امواج صفحه‌ای برای یک محیط بدون مرز.

ضرایب فرنل در این تجزیه هر یک از موج صفحه‌ای تابشی از سطح مشترک‌های محیط لایه لایه بازتاب و انتقال یافته و از ضرایب بازتاب و انتقال کل استفاده بعمل می‌آید.

انتگرال‌گیری سرانجام روی تمام امواج بازتابی و انتقالی انتگرال‌گیری کرده تا تابع گرین بازتاب شده بدست آید.

پنهان‌سازی نوری



در سال ۲۰۰۶ دو مقاله پشت سر هم در مجله (علمی) ساینس ظاهر شد که سوال شده بود با فرامواد با گذردهی و نفوذپذیری $\bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{r},\omega)$ ، $\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{r},\omega)$ چه باید کرد تا بتوان به‌تولید دلخواه رسید[۵۶، ۵۷]. در واقع، آنها از زاویه‌ای متفاوت به‌مسئله پرداختند و پرسیدند: معادلات ماکسول در فضای خمیده چگونه به‌نظر می‌رسد؟ به‌نظر می‌رسد که آنها با فضای غیرخمیده یکسانند به‌شرطی که $\bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{r},\omega)$ ، $\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{r},\omega)$ از حالت عادی خارج شود به‌طوری که عوامل ناشی از تبدیل سیستم مختصات را شامل شود. بنابراین، با طراحی $\bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{r},\omega)$ ، $\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{r},\omega)$ می‌توان اثرات فضای منحنی را تقلید کرد. در چکیده [۵۶] نویسندگان می‌نویسند:

> با استفاده از آزادی طراحی که فرامواد ارائه می‌دهند، نشان می‌دهیم که چگونه میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان به‌دلخواه تغییر مسیر داد و یک استراتژی طراحی را پیشنهاد می‌کنیم. میدان‌های حفظ شده - میدان جابجایی الکتریکی $\mathbf{D}$، میدان القاء مغناطیسی $\mathbf{B}$ و بردار پوایتینگ $\mathbf{S}$ - همگی به‌شیوه سازگار جابجا شده‌اند. یک تصویر ساده از پنهان‌سازی حجم ناخواسته فضا برای حذف کامل میدان‌های الکترومغناطیسی ارائه شده است. کار ما طراحی عدسی‌های عجیب و غریب و پنهان‌سازی اجسام از میدان‌های الکترومغناطیسی ارتباط دارد.

پنهان‌سازی یک جسم مدت کوتاهی پس از طرح نظری در آزمایشی با استفاده از تابش مایکروویو نشان داده شد، زیرا ساختن فرامواد برای چنین طول موجی به‌طور قابل توجهی آسان‌تر است[۵۸]. شکل بالا نشان می‌دهد که چگونه یک موج صفحه‌ای در شبیه‌سازی با پارامترهای ایده‌آل مواد (شکل سمت چپ) و در آزمایش مایکروویو (شکل سمت راست) به‌اطراف یک جسم هدایت می‌شود. این نشان می‌دهد که در واقع امکان کنترل میدان‌های الکترومغناطیسی و هدایت آنها به‌اطراف اجسام وجود دارد. این موضوع در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است، اما تولید فرامواد با کیفیت بالا یکی از چالش‌های اصلی در این زمینه باقی مانده است.

تصویر از دیوید آر اسمیت گرفته شده است.

از نظر فنی، مراحل مختلف خیلی دشوار است. نقطه شروع تجزیه موج صفحه‌ای تابع گرین در پیوست (ب) آمده است.

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^3 k_m^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\left(\frac{k_m^2\delta_{ij}-k_ik_j}{k^2-k_m^2}\right)d^3k,$$

که در آن k_m عددموج محیطی است که منبع (دوقطبی) در آن قرار دارد. به‌نظر می‌رسد ساده‌تر است که یک بخش موهومی کوچک$-j\eta$ را به‌عددموج k_m اضافه کنیم و اجازه دهیم در پایان محاسبه به $\eta \to 0$ نزدیک شود. سپس انتگرال‌گیری k_z را می‌توان با استفاده از ریاضی آنالیز مختلط به‌صورت تحلیلی انجام داد و در انتگرال‌گیری باقی‌مانده بر روی مولفه موج موازی، می‌توان مختصات قطبی را معرفی کرده و به‌صورت تحلیلی در زاویه سمت انتگرال‌گیری کرد. رابطه نهایی معادله (ب۹) انتگرال فقط روی مولفه بردارموج شعاعی k_ρ انجام می‌شود، که بیان می‌کند؛

$$\begin{aligned}\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -\frac{\hat{z}_i\hat{z}_j}{k_m^2}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{j}{4\pi} \\ &\times \int_0^\infty \frac{e^{-jk_{mz}|z-z'|}}{k_{mz}} \left\{\langle\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_m^\pm)\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_m^\pm)\rangle + \langle\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_m^\pm)\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_m^\pm)\rangle\right\} k_\rho dk_\rho\end{aligned} \tag{۴۹.۸}$$

در اینجا ϵ^{TE} و ϵ^{TM} بردارهای قطبش بترتیب با مشخصه TE و TM هستند، و براکت نمایشگر میانگین روی زاویه سمت است. به (ب۸) برای شکل صریح این جمله‌ها مراجعه کنید. علامت $k_{mz}^\pm = \pm k_{mz}$ برای مثبت $z > z'$ و منفی بغیر از آن است. در رابطه بالا؛

- $\bar{\bar{G}}$ در داخل محیط با عدد موج k_m صادق است و معادله‌ای برای تابع گرین دیادیک تعریف می‌کند. به‌رابطه (۲۱.۵) مراجعه کنید.

- اما در شرایط مرزی ماکسول در سطح مشترک‌های محیط لایه لایه صدق نمی‌کند.

برای بحساب آوردن شرایط مرزی، یک تابع گرین بازتابی $\bar{\bar{G}}_{refl}$ که شامل جواب معادله همگن باشد، معرفی می‌کنیم.

۱.۵.۸ منبع واقع در بالاترین لایه

ابتدا وضعیتی را که در شکل (۱۹.۸) نشان داده شده، جایی که هم منبع و هم نقطه مشاهده z و z' در بالای سطح مشترک محیط لایه لایه قرار دارند، را بحث می‌کنیم. بالاترین محیط را با n و موقعیت سطح مشترک را با z_n مشخص می‌گنیم. عبارت نمایی در معادله (۴۹.۸) برابر است با

$$\exp(-jk_{nz}|z-z'| = \begin{cases} \exp[-jk_{nz}(z-z')] & z > z' \quad \text{برای} \\ \exp[+jk_{nz}(z-z')] & z < z' \quad \text{برای} \end{cases}$$

که مربوط به‌یک موج بالارونده برای$z > z'$ و یک موج پائین‌رونده برای $z < z'$ است. برای محاسبه مناسب شرایط مرزی در z_n، تابع گرین کل را معرفی می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
G_{ij}^{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{\hat{z}_i\hat{z}_j}{k_n^2}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
&- \frac{j}{4\pi}\int_0^\infty \frac{1}{k_{nz}}\left\{\langle\left[e^{-jk_{nz}|z-z'|}\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_n^\pm)+A_n^{TE}e^{k_{nz}z}\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_n^+)\right]\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_n^\pm)\rangle\right. \\
&\left. + \langle\left[e^{-jk_{nz}|z-z'|}\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_n^\pm)+A_n^{TM}e^{k_{nz}z}\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_n^+)\right]\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^\pm)\rangle\right\}k_\rho dk_\rho
\end{aligned}
$$

دلیل جمع کردن دو موج بالارونده با مشخصه TE و TM بقرار زیر است.

- **میدان الکتریکی** تابع گرین دیادیک میدان الکتریکی در موقعیت $\mathbf{r}$ میدهد، و میدان الکتریکی باید شرط مرزی ماکسول را در $z=z_n$ ارضاء کند. بدین دلیل میدان بازتابی را برای محور بدون پریم z و نه به‌پریم‌دار اضافه کردیم.
- **جواب همگن** جملات اضافی امواج صفحه‌ای جواب معادله موج همگن هستند. به‌همین دلیل، تابع گرین کل هنوز معادله تعریفی را با یک منبع دلتا در $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ برآورده می‌کند.
- **شرایط مرزی** ضرایب A_n^{TM}، A_n^{TE} باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط مرزی معادلات ماکسول در بالاترین سطح مشترک را ارضاء کنند.

برای تطبیق میدان‌ها در $z=z_n$ عموماً $z<z'$ داریم و عبارت نمایی $e^{-jk_{nz}(z-z')}$ مربوط به‌یک موج پایین‌رونده است. جدا از ثابت عادی سازی (نرمالیزه)، میدان الکتریکی TE در محیط n کمی بالاتر از سطح مشترک (اما زیر موقعیت منبع) می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود؛

$$
e_n(z)=e^{+jk_{nz}(z-z')}+A_n^{TE}e^{-jk_{nz}z}\ .
$$

برای محاسبع ضریب مجمول A_n^{TE} میدانیم که میدان بازتابی بالارونده می‌تواند از طریق ضریب بازتاب عمومی $\tilde{R}$ روش ماتریس انتقال، به‌میدان تابشی پائین‌رونده مربوط شود، معادله (۳۶.۸) را ملاحظه کنید،

$$
e_n^+=\tilde{R}_{n,1}^{TE}e_n^- \Longrightarrow \left[A_n^{TE}e^{-jk_{nz}z_n}\right]=\tilde{R}_{n,1}^{TE}\left[e^{+jk_{nz}(z-z')}\right]
$$

این اجازه می‌دهد که موج بازتابی را بصورت زیر بیان کنیم؛

$$
A_n^{TE}e^{-jk_{nz}z}=\tilde{R}_{n,1}^{TE}e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)} \tag{۵۰.۸}
$$

شبیه همین روش را می‌توان برای میدان‌های TM انجام داد. جمع بندی دو مشارکت، به‌بخش تابع گرین بازتابی برای محیط لایه لایه میرسیم؛

تابع گرین بازتابی برای z ، z' بالای محیط لایه لایه

$$
\begin{aligned}
G_{ij}^{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{-j}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)}}{k_{nz}} \\
&\times \left\{\tilde{R}_{n,1}^{TE}\langle\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_n^+)\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_n^\pm)\rangle+\tilde{R}_{n,1}^{TM}\langle\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_n^+)\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^\pm)\rangle\right\}k_\rho dk_\rho
\end{aligned} \tag{۵۱.۸}
$$

که در آن علامت مثبت $k_{nz}^{\pm}$ برای $z > z'$ و علامت منفی برای $z < z'$ انتخاب می‌شود. عبارت بالا ضرایب بازتابی کل روش ماتریس انتقال ضربدر (میانگین‌گیری زاویه) بردار قطبش مشخصه TE و TM که بطور صریح در پیوست (ب-۸) داده شده است، ترکیب می‌کند. بطوری که در پیوست (ب) بحث شده است، می‌توان با خیال راحت مسیر انتگرال‌گیری k_ρ را از محور افقی به‌صفحه مختلط تغییر داده از این نظر که عموماً برای محاسبه کارآمد تابع گرین بازتابی مورد نیاز است.

شکل‌بندی فوق باید کمی دستکاری کرد تا تابع گرین گرین دیادیک را برای منبع واقع در بالاترین محیط و نقطه مشاهده واقع در داخل یا زیر محیط لایه لایه محاسبه شود. در اینجا فقط مورد دوم را بحث خواهیم کرد و طرح محاسبه منابع کلی و نقاط مشاهده را در پایان این فصل ترسیم می‌کنیم. موج پائین‌رونده در پایین‌ترین محیط می‌تواند مربوط به‌میدان "تابشی" بالاترین محیط باشد؛

$$e^- = \tilde{T}_{n,1} e_n^- \Longrightarrow A_1 e^{jk_{1z}z_1} = \tilde{T}_{n,1}\left[e^{-jk_{nz}(z'-z_n)}\right]$$

بنابراین، تابع گرین دیادیک برای نقاط منبع و مشاهده z, z' بالا و پائین محیط لایه لایه را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

$$\begin{aligned} G_{ij}^{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{-j}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-jk_{1z}(z_1-z)-jk_{nz}(z'-z_n)}}{k_{nz}} \\ &\times \left\{\tilde{T}_{n,1}^{TE}\langle\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1^-)\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_n^-)\rangle + \tilde{T}_{n,1}^{TM}\langle\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1^-)\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^-)\rangle\right\} k_\rho dk_\rho \end{aligned} \tag{۵۲.۸}$$

توجه کنید که در لایه‌های دور از نقطه منبع، تابع گرین کل فقط شامل قسمت بازتابی است. برای نشان دادن اینکه این شکل در واقع صحیح است، کافی است که خود را متقاعد کنیم

- این عبارت معادله موج همگن را برای z در پایین‌ترین محیط (زیرا امواج صفحه‌ای جواب معادله موج همگن هستند) ارضاء می‌کند و
- شرایط مرزی معادلات ماکسول در پایین‌ترین سطح مشترک (توسط ساخت) ارضاء می‌شود.

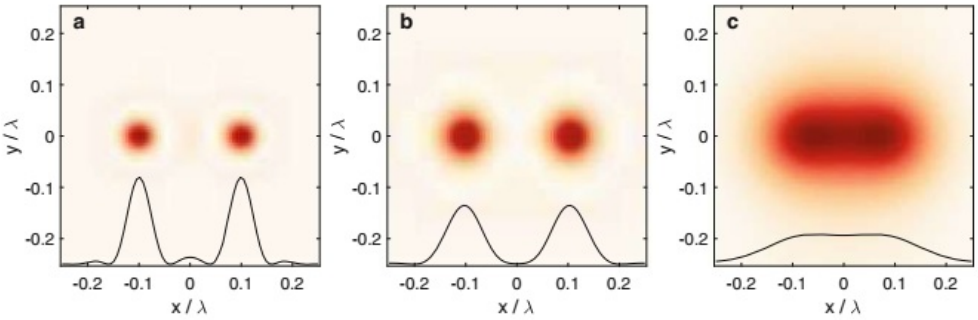
در اصل، با انتشار میدان‌ها از طریق محیط‌های لایه لایه، با استفاده از روش ماتریس انتقال که قبلاً بحث شد، می‌توان میدان‌ها را در تمام لایه‌های دیگر محاسبه کرد.

۲.۵.۸ تصویربرداری با یک عدسی ناقص وسلاگو

با توابع گرین بازتابی اکنون در موقعیتی هستیم که تصویربرداری از طریق عدسی ناقص وسلاگو را شبیه‌سازی کنیم. در واقع، قبلاً در کار اصلی پندری[۵۴] پیشنهاد شده بود که برای آزمایش اثبات عدسی کامل واقعی، یک تیغه نقره معمولی با $\mu = \mu_0$ جایگزین کرده و در فرکانسی کار کند که گذردهی به $-\epsilon_0$ برسد. اولین آزمایش توسط فنگ[۳۱] و همکارانش گزارش شد [۵۹]. شکل (۲۰.۸) تصویربرداری با چنین ابرعدسی ناقص را نشان می‌دهد، شکل (الف) یک ماده ضریب شکست منفی با تلفات کوچک، (ب) یک تیغه فلزی با تلفات قوی‌تر و نفوذپذیری μ_0،

[۳۱] Fang

و (ج) بدون تیغه. به‌وضوح مشاهده می‌کنید که حتی تیغه فلزی ناقص منجر به‌تصویربرداری نسبتاً خوبی از دو قطبی نقطه‌ای می‌شود.



شکل ۲۰.۸: تصویربرداری از دو دوقطبی نقطه‌ای که در امتداد محور zها بفاصله ۸۰ نانومتر از یکدیگر قرار گرفته و یک تیغه فلزی شامل (الف) ضریب شکست منفی با تلفات کم $\epsilon : \epsilon_0 = -1 - 0.01j$، $\mu : \mu_0 = -1$ (ب) فلز با $\epsilon : \epsilon_0 = -1 - 0.1j$، $\mu : \mu_0 = 1$ و (ج) خلاء بضخامت ۴۰ نانومتر و جسم و تصویر در ۲۰ نامتر دور از تیغه قرار دارند. ترسیمی از عدسی وسلاگو در شکل (۱۸.۸)، و طول موج نور ۴۰۰ نانومتر است.

۳.۵.۸ حد میدان-دور

فرض کنید یک دوقطبی در بالای یک محیط لایه لایه قرار دارد، شکل (۱۹.۸)، و مطلوب ما تابش میدان دور است. از معادله (۵۱.۸) و (۵۲.۸) مشاهده می‌کنیم که توابع گرین بازتابی شامل انتگرال‌های بصورت زیر است؛

$$\mathcal{T}_1 = \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)} \langle \cdots \rangle k_\rho dk_\rho$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty e^{-jk_{1z}(z_1-z)-jk_{nz}(z'-z_n)} \langle \cdots \rangle k_\rho dk_\rho$$

که در آن $\mathcal{T}_{1,2}$ برای نقطه مشاهده z واقع در بالا یا پائین محیط لایه لایه است. ابتدا میانگین‌گیری روی زاویه سمت انجام نمی‌دهیم، که به‌معادله پیوست (ب-۶) مراجعه و بعداز آن بحث، انتگرال‌ها را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم؛

$$\mathcal{T}_1 = \frac{-j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-jk_x(x-x')-jk_y(y-y')}\ e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)} [\cdots] dk_x dk_y$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{-j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-jk_x(x-x')-jk_y(y-y')}\ e^{-jk_{1z}(z_1-z)-jk_{nz}(z'-z_n)} [\cdots] dk_x dk_y$$

در حال حاضر به‌دنبال حد میدان-دور این روابط هستیم که در آن $\mathbf{r} = (x, y, z)$ در تابع نمائی بسیار بزرگ می‌شود. محاسبه این انتگرال مشابه بحث قبلی در فصل سوم، نمایش میدان-دور امواج الکترومغناطیسی، که از تقریب فاز ثابت برای بدست آوردن آن استفاده شده است؛

$$\frac{-j}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,(\cdots)\,dk_x dk_y \underset{kr\gg 1}{\longrightarrow} \frac{-j}{8\pi^2}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)[2\pi j k_z(\cdots)]_{\mathbf{k}=k\hat{\mathbf{r}}}\ .$$

در اینجا جمله داخل براکت را باید برای بردار موج $\mathbf{k}=k\hat{\mathbf{r}}$ محاسبه کرد. با این، برای انتگرال اولی خواهیم داشت؛

$$\mathcal{T}_1 \longrightarrow \left(\frac{e^{-jk_n r}}{4\pi r}\right)\left[e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-2jk_z(z'-z_n)}k_z(\cdots)\right]_{\mathbf{k}=k_n\hat{\mathbf{r}}}\ . \qquad (۵۳.۸)$$

دومین تابع نمایی برای فاز در براکت‌ها، از طریق انتشار موج از منبع نقطه‌ای z' به‌سطح مشترک بالائی z_n محیط لایه لایه و پشت آن بدست می‌آید. برای انتگرالی که نقطه مشاهده z زیر محیط لایه لایه قرار دارد، بدست می‌آوریم؛

$$\mathcal{T}_2 \longrightarrow \left(\frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r}\right)\left[e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}e^{-j\psi}k_z(\cdots)\right]_{\mathbf{k}=k_1\hat{\mathbf{r}}}\ . \qquad (۵۴.۸)$$

در اینجا $\psi = k_1 z(z'-z_1)+k_{nz}(z'-z_n)$ یک فاز معمولاً بی‌ربط است. برای بدست آوردن عبارات نهایی برای میدان‌های-دور توابع گرین بازتابی، بردارهای $\boldsymbol{\epsilon}^{TE}$ و $\boldsymbol{\epsilon}^{TM}$ را ساده می‌کنیم.

- z **بالای محیط لایه لایه** هنگامی که z در بالای محیط لایه لایه قرار دارد، می‌توانیم بردارموج $\mathbf{k}_n$ را در مختصات کروی، جایی که زاویه‌ها توسط جهت انتشار میدان‌های دور الکترومغناطیسی نشان داده می‌شوند، بیان کنیم. سپس از معادله پیوست (ب-۵) خواهیم داشت؛

$$\boldsymbol{\epsilon}^{TE}(\mathbf{k}_n^+)=\begin{pmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{\phi}},\qquad \boldsymbol{\epsilon}^{TM}(\mathbf{k}_n^+)=\begin{pmatrix}\cos\phi\cos\theta\\ \sin\phi\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردارهای واحد در جهت بترتیب زوایای سمت و قطبی است. توجه کنید که در نیم-فضا بالا $\mathbf{k}_n=\mathbf{k}_n^+$ همواره بسوی بالا است.

- z **پائین محیط لایه لایه** هنگامی که z زیر محیط لایه لایه است، می‌توانیم $\mathbf{k}_1$ را در مختصات کروی بسط داده و در می‌یابیم که دوباره می‌توانیم $\boldsymbol{\epsilon}^{TE}(\mathbf{k}_n^-)$ و $\boldsymbol{\epsilon}^{TM}(\mathbf{k}_n^-)$ را بر حسب $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بیان کنیم. توجه کنید که در نیم-فضای پائینی $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_1^-$ همواره بسوی پائین است. ضمناً نه بردارهای زیر نیاز داریم؛

$$\boldsymbol{\epsilon}^{TM}(\mathbf{k}_n^-)=k_n^{-1}\begin{pmatrix}k_1\cos\phi\sin\theta\\ k_1\sin\phi\sin\theta\\ -k_{nz}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}=k_n^{-1}\begin{pmatrix}k_{nz}\cos\phi\\ k_{nz}\sin\phi\\ -k_1\sin\theta\end{pmatrix}$$

که مختصات کروی را در محیط پائین به‌بردار موج محیط بالا، جائی که منبع قرار دارد، مربوط میدارد. k_{nz} مولفه z بردار موج است که باید از رابطه پاشندگی محاسبه کرد.

سرانجام می‌توانیم حد میدان-دور بازتابی $(z>0)$ و انتقالی $(z<0)$ تابع گرین را بصورت زیر بیان کنیم؛

$$\begin{aligned} G_{ij}^{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &\longrightarrow \left(\frac{e^{-jk_n r}}{4\pi r}\right)\left[e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}e^{-j2k_z(z'-z_n)}\left(\tilde{R}_{n,1}^{TE}\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j+\tilde{R}_{n,1}^{TM}\hat{\theta}_i\hat{\theta}_j\right)\right]_{\mathbf{k}=k_n\hat{\mathbf{r}}} \\ G_{ij}^{trans}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &\longrightarrow \left(\frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r}\right)\left[e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}e^{-j\psi}\frac{k_{1z}}{k_{nz}}\left(\tilde{T}_{n,1}^{TE}\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j+\tilde{T}_{n,1}^{TM}\hat{\theta}_i\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^-)\right)\right]_{\mathbf{k}=k_1\hat{\mathbf{r}}} \end{aligned} \tag{۵۵.۸}$$

زوایای ϕ,θ جهت انتشار میدان‌های-دور الکترومغناطیسی را میدهند و ما تابع گرین در محیط پائین را به‌عنوان انتقالی می‌نامیم.

سپس یک دوقطبی با گشتاور $\mathbf{p}$ در موقعیت $\mathbf{r}_0$ بالای محیط لایه لایه در نظر گیرید. با توجه به‌معادله (۳.۶)، میدان‌های-دور دو قطبی نوسانی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد؛

$$\mathbf{F}^{dip}(\hat{\mathbf{r}})=\frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n}\left(e^{jk_n\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0}\right)\left[p_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+p_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

که در آن $p_\phi=\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\mathbf{p}$ و $p_\theta=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{p}$ است. به‌طور مشابه، از معادله (۵۵.۸) دامنه میدان-دور را برای تابشبه نیم‌فضا بالائی بدست می‌آوریم؛

$$\mathbf{F}^{refl}(\hat{\mathbf{r}})=\frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n}\left(e^{jk_n\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0}\right)\left[e^{-2jk_{nz}(z_0-z_n)}\left(\tilde{R}_{n,1}^{TE}p_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+\tilde{R}_{n,1}^{TM}p_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]$$

اجازه دهید جمع دو مشارکت بصورت زیر را بیان کنیم؛

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})=\frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n}\left(e^{jk_n\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0}\right)\left[\mathcal{P}_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+\mathcal{P}_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

که در آن $\mathcal{P}_\phi$ و $\mathcal{P}_\theta$ را می‌توان بطور مستقیم از معادله بالا دریافت کرد. در میدان-دور توان تابشی در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ از رابطه (۱۷.۴) بدست می‌آید؛

$$r^2\langle\mathbf{S}\rangle=\frac{1}{2}Z^{-1}|\mathbf{F}|^2\hat{\mathbf{r}}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n}\right)^2\left[|\mathcal{P}_\phi|^2+|\mathcal{P}_\theta|^2\right]\hat{\mathbf{r}}$$

بنابراین، برای یک دوقطبی واقع در بالای یک محیط لایه لایه، توان تابشی در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ بدرون نیم-فضای بالا را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

توان تابشی توسط دوقطبی بالای محیط لایه لایه $(z>0)$

$$\begin{aligned} r^2\langle\mathbf{S}\rangle &= \frac{1}{2}\left(\frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n}\right)^2 \\ &\times\left(\left|1+e^{-2jk_{nx}(z_0-z_n)}\tilde{R}_{n,1}^{TE}\right|^2p_\phi^2+\left|1+e^{-2jk_{nx}(z_0-z_n)}\tilde{R}_{n,1}^{TM}\right|^2p_\theta^2\right) \end{aligned} \tag{۵۶.۸}$$

می‌توانیم به‌طور مشابه برای تابش به‌نیم-فضای پایین ادامه دهیم. دامنه میدان-دور موج ارسال شده را می‌توان بصورت زیر بیان کرد؛

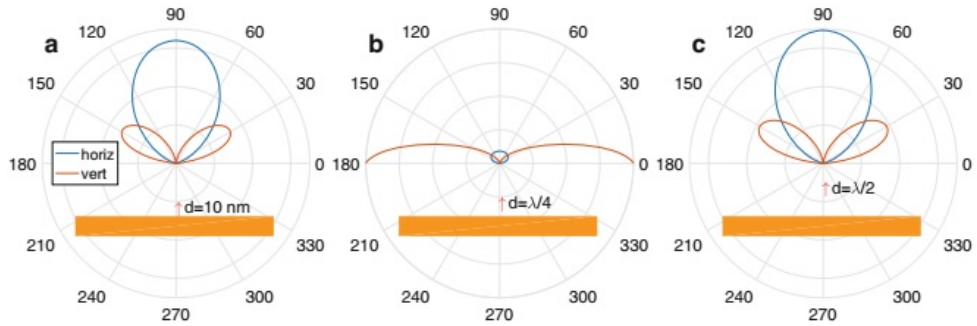
$$\mathbf{F}^{trans}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k_1^2}{4\pi\epsilon_1}\left(e^{jk_1\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0}\right)\left[e^{-j\psi}\frac{k_{1z}}{k_{nz}}\left(\tilde{T}_{n,1}^{TE}p_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \tilde{T}_{n,1}^{TM}p_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right]$$

که در آن رابطه $p^{TM} = \boldsymbol{\epsilon}^{TM}(\mathbf{k}_n^-)\cdot\mathbf{p}$ را معرفی کرده‌ایم. توجه کنید که وقتی موقعیت دوقطبی و نقطه مشاهده در لایه‌های مختلف هستند، باید فقط موج ارسالی را در نظر گرفته و شرکت مستقیم خود دوقطبی وجود ندارد. بنابراین، در نیم-فضای پائینی توان تابش شده توسط دوقطبی در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ بصورت زیر بیان می‌شود؛

توان تابشی توسط دوقطبی بالای محیط لایه لایه $(z<0)$

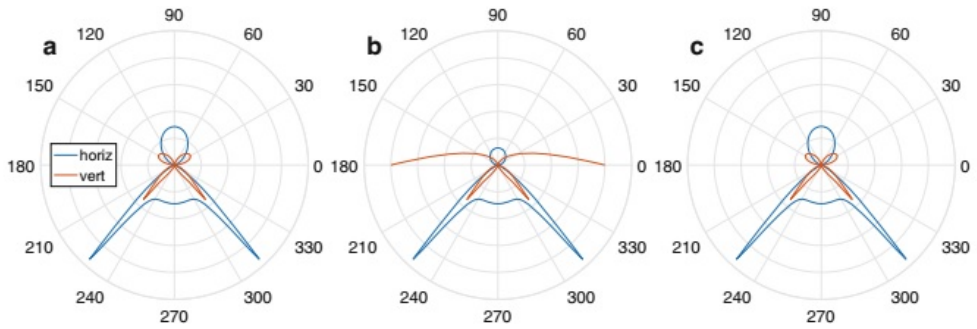
$$r^2\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_1}\right)^2\left|\frac{k_{1z}}{k_{nz}}\right|^2\left(\left|\tilde{T}_{n,1}^{TE}\ p_\phi\right|^2 + \left|\tilde{T}_{n,1}^{TM}\ p_\theta\right|^2\right) \qquad (۵۷.۸)$$

شکل (۲۱.۸) الگوی توان تابشی یک دوقطبی نوسانی را نشان میدهد. فاصله دوقطبی از سطح را (الف) ده نانومتر، (ب) $\lambda/4$، (ج) $\lambda/2$ با طول موج $\lambda = 600\ nm$ انتخاب می‌کنیم. جهت دوقطبی موازی و عمود بر سطح مشترک است. بطوری که از شکل می‌توان مشاهده کرد، الگوی تابشی بستگی شدید به z_0 دارد که می‌تواند ناشی از تداخل بین انتشار مستقیم موج و موج بازتابی در معادله (۵۶.۸) باشد. شکل (۲۲.۸) توان تابشی برای یک بستر شیشه‌ای را با استفاده از پارامترهای شبیه‌سازی مشابه شکل (۲۱.۸) نشان می‌دهد. به‌طوری که مشاهده می‌کنید،



شکل ۲۱.۸: الگوی تابشی دوقطبی واقع در بالای سطح طلا. بخش‌های مختلف شکل فاصله z_0 دوقطبی از سطح را بیان می‌کند. **(الف)** ده نانومتر، **(ب)** $\lambda/4$ و **(ج)** $\lambda/2$ با طول موج ۶۰۰ نانومتر. گذردهی محیط بالا را ϵ_0 و برای گذردهی طلا از مرجع [۳۴] گرفته شده است. الگوی‌های تابشی از معادله (۵۶.۸) استفاده شده است.

بیشتر تابش به‌زیرلایه شیشه می‌رود. زاویه‌ای که در آن انتشار در محیط زیر به‌حداکثر می‌رسد مربوط به‌زاویه بازتاب داخلی کلی برای سطح مشترک هوا-شیشه است. بحث جامع‌تر خواص انتشار دوقطبی واقع در بالای یک بستر یا انواع دیگر محیط‌های لایه لایه و اثراتی مانند "نور



شکل ۲۲.۸: مانند شکل (۲۱.۸) است با این تفاوت که زیرلایه شیشه است. بخش‌های مختلف شکل فاصله z_0 دوقطبی از سطح را بیان می‌کند. **(الف)** ده نانومتر، **(ب)** $\lambda/4$ و **(ج)** $\lambda/2$ با طول موج ۶۰۰ نانومتر. گذردهی محیط بالا را ϵ_0 و برای گذردهی شیشه ۱.۵ انتخاب شده است.

ممنوعه[۳۲]" در مرجع [۶] آمده است.

۴.۵.۸ منبع واقع در داخل لایه

سرانجام وضعیتی را در نظر می‌گیریم که نقطه منبع z' در داخل لایه و نقطه مشاهده در لایه m قرار دارد. با استفاده از استدلال مشابه برای منبع بالای محیط لایه لایه، می‌توانیم تابع گرین بازتابی را به‌صورت زیر بیان کنیم؛

$$\begin{aligned} G_{ij}^{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{-j}{4\pi}\int_0^\infty \frac{1}{k_{mz}} \\ &\times \left\{\left\langle\left[A_m^{TE}e^{-jk_{mz}z}\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_m^+)+B_m^{TE}e^{jk_{mz}z}\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_m^-)\right]\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_l^\pm)\right\rangle\right. \\ &+ \left.\left\langle\left[A_m^{TM}e^{-jk_{mz}z}\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_m^+)+B_m^{TM}e^{jk_{mz}z}\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_m^-)\right]\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_l^\pm)\right\rangle\right\} k_\rho dk_\rho \end{aligned} \tag{۵۸.۸}$$

تابع گرین کل با اضافه کردن $\bar{\bar{G}}$ محیط بدون محدوده در لایه فقط l بدست می‌آید. در این صورت، تابع گرین کل در معادله موج غیرهمگن در لایه l و معادله موج همگن در هر جای دیگر صدق می‌کند. باید برای محاسبه ضرایب A_m, B_m برای امواج بالارونده و پائین‌رونده بنحوی باشد که شرایط مرزی معادلات ماکسول در تمام سطح مشترک‌ها ارضاء کند. فرض کنید z_l^+، z_l^- بترتیب نمایشگر موقعیت سطح مشترک‌های بالا و پائین لایه l باشد. در لایه l برای امواج TE داریم؛

$$e_l(z) = e^{-jk_{lz}|z-z'|} + A_l^{TE}e^{-jk_{lz}z} + B_l^{TE}e^{jk_{lz}z}$$

برای $z < z'$ اولین جمله $e^{-jk_{lz}(z-z')}$ مربوط به‌موج پائین‌رونده است. بنابراین میدان‌های مربوط به‌سطح مشترک پائینی l در موقعیت z_l^- برابر است با؛

[۳۲] Forbidden Light

$$e_l^+ = \tilde{R}_{l,1}^{TE} e_l^- \Longrightarrow \left[A_l^{TE} e^{-jk_{lz} z_l^-}\right] = \tilde{R}_{l,1}^{TE}\left[e^{-jk_{lz}(z'-z_l^-)} + B_l^{TE} e^{jk_{lz} z_l^-}\right]$$

برای $z > z'$ اولین جمله $e^{-jk_{lz}(z-z')}$ مربوط به‌موج بالارونده است. بنابراین میدان‌های سطح مشترک بالائی محیط l در موقعیت z_l^+ برابر است با؛

$$e_l^- = \tilde{R}_{l,1}^{TE} e_l^+ \Longrightarrow \left[B_l^{TE} e^{-jk_{lz} z_l^+}\right] = \tilde{R}_{l,1}^{TE}\left[e^{-jk_{lz}(z_l^+ z')} + A_l^{TE} e^{jk_{lz} z_l^+}\right]$$

از این دو عبارت می‌توانیم A_l^{TE}, B_l^{TE} را محاسبه کنیم و به‌نوبه خود میدان‌ها را در لایه‌های مختلف محیط لایه لایه منتشر کرد. برای میدان‌های TM نیز می‌توان از روش مشابه استفاده کرد.

ساختار تیغه به‌عنوان مثال، در اینجا موقعیتی در نظر می‌گیریم که دوقطبی منبع در داخل یک تیغه قرار دارد. برای این ساختار هندسی، می‌توانیم در عبارت بالا ضرایب بازتابی کل را با ضرایب فرنل عوض کنیم. فرض کنید که سطح مشترک‌ها در موقعیت صفر و d قرار دارند، بنابراین داریم؛

$$R_{21}^{TE}\left[e^{-jk_z(z'-z)} + B_2^{TE} e^{jk_z z}\right]_{z=0} = \left[A_2^{TE} e^{-jk_z z}\right]_{z=0}$$

$$R_{23}^{TE}\left[e^{-jk_z(z-z')} + A_2^{TE} e^{-jk_z z}\right]_{z=d} = \left[B_2^{TE} e^{jk_z z}\right]_{z=d}$$

که ضرایب بازتابی فرنل R_{21}^{TE} و R_{23}^{TE} برای سطح مشترک‌های $z = 0$ و d است. عبارتی شبیه به‌این می‌توان برای مودهای TM بدست آورد. اکنون می‌توانیم جواب دامنه موج‌های مجهول را بدست آوریم؛

$$\begin{aligned} A_2^{TE} &= \frac{e^{-jk_z d} R_{21}^{TE}}{1 - e^{-2jk_z d} R_{21}^{TE} R_{23}^{TE}}\left[e^{-jk_z(z-d)} + e^{-jk_z(d-z')} R_{23}^{TE}\right] \\ B_2^{TE} &= \frac{e^{-jk_z d} R_{23}^{TE}}{1 - e^{-2jk_z d} R_{21}^{TE} R_{23}^{TE}}\left[e^{-jk_z(d-z')} + e^{-jk_z(d+z')} R_{21}^{TE}\right] \end{aligned} \tag{۵۹.۸}$$

با بسط مخرج به‌یک سری هندسی، نمایشی از امواج بر حسب بازتاب‌های متعدد در داخل تیغه، مانند شکل (۱۱.۸) بدست آوریم. سرانجام این ضرایب باید برای محاسبه تابع گرین بازتابی ناحیه داخل تیغه وارد معادله (۵۸.۸) شود.

تمرینات

- **تمرین ۱** برای مختلط پلاسمون‌های سطحی مقادیر k_{1z} و k_{2z} را در نظر گیرید. بردارهای پوایِن‌تینگ میانگین $\mathbf{S}_1$ و $\mathbf{S}_2$ را محاسبه کرده و نتیجه را تفسیر کنید. در چه جهتی انرژی انتقال می‌یابد؟
- **تمرین ۲** مقادیر مجانب $k_x \to \infty$ پاشندگی پلاسمون را از رابطه (۶.۸) با تعیین مقدار ω جائی که بخش حقیقی مخرج زیر ریشه دوم مخرج صفر می‌شود، محاسبه کنید.

- **تمرین ۳** سطح مشترک بین دو ماده با گذردهی‌های ϵ_1 و ϵ_2 و نفوذپذیری‌های μ_0 در نظر گیرید. اکنون پلاسمون‌های سطحی برای مود TE با $\mathbf{E} = E_y\hat{\mathbf{y}}$ بدست آورید. نشان دهید که اینچنین امواجی وجود ندارند.

- **تمرین ۴** تابع دی‌الکتریک درودِ را برای نقره بصورت زیر

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)} \right)$$

با پارامترهای $k_b = 3.3$، $\hbar\omega_p = 9\ eV$، $\hbar\gamma = 0.022\ eV$ داده شده است. از پاشندگی پلاسمون $k_x(\omega)$ استفاده کرده و طول‌موج $\lambda = 2\pi/k'_x$ و طول انتشار $\delta = 2\pi/k''_x$ برای چند انرژی فوتون در محدوده 0.5 تا $3\ eV$ محاسبه کنید.

- **تمرین ۵** از جعبه ابزار NONOPT فایل demostrat1.m را برای شبیه‌سازی تحریک پلاسمون سطحی در ساختار هندسی کرتشمن استفاده کنید.

  - **(الف)** گذردهی پائین‌ترین محیط را تغییر داده و زاویه پائین‌آمدن پلاسمون در طیف بازتاب را محاسبه کنید. تغییر گذردهی را برحسب تغییر زاویه رسم کنید.
  - **(ب)** همان مطالب بخش الف اما یک لایه اضافی به‌ضخامت ۲۰ نانومتر روی سطح فلز قرار دهید. گذردهی فقط این لایه را تغییر داده و گذردهی نیم-فضا بالائی را ϵ_0 قرار دهید.

- **تمرین ۶** یک تیغه فلزی به‌ضخامت d و گذردهی ϵ_1 که روی ماده زیرلایه ϵ_2 است درنظر گیرید. برای مودهای TM می‌توانیم میدان‌های مغناطیسی را بصورت زیر درنظر گیریم

$$\mathbf{H}(z) = \hat{\mathbf{y}} e^{-jk_x x} \begin{cases} h_1 e^{-k_{1z} z} & \text{برای} \quad z > +\frac{d}{2} \\ h_2 (e^{k_{2z} z} \pm e^{-k_{2z} z} & \text{برای} \quad -\frac{d}{2} < z < +\frac{d}{2} \\ \pm h_1 e^{+k_{1z} z} & \text{برای} \quad z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

جائی که استفاده کردیم، به‌دلیل تقارن جوابها باید توابع فرد یا زوج z باشند.

  - **(الف)** تحلیل پلاسمون‌های سطحی را برای فرض بالا تکرار کرده و نشان دهید که اینگونه مودها وجود دارند.
  - **(ب)** نشان دهید که برای مقادیر طول L پاشندگی این مودها با آنچه در یک سطح مشترک است مطابقت دارد. پاشندگی پلاسمون سطحی اصلاح شده اکنون از رابطه (۴۰.۸) بدست می‌آید.
  - **(ج)** مشخصه فرد و زوج را برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بحث کنید.
  - **(د)** کدامیک از مودها انرژی بیشتری دارند، زوج یا فرد؟ نتایج را با استفاده از استدلال‌های ساده ارائه دهید.

- **تمرین ۷** دو محیط با گذردهی‌های ϵ_1, ϵ_2 و نفوذپذیری μ_0 را در نظر گیرید. برای امواج با قطبش TM **زاویه بروستر** را تعیین کنید که دامنه موج بازتاب شده حذف می‌شود.

این زاویه برای n_2 چقدر است: $n_1 = 1.5$ ؟ فرض کنید که نوری با قطبش دلخواه به‌این سطح مشترک برخورد کند. موج بازتابی چه قطبشی دارد؟

- **تمرین ۸** بازتاب و انتقال را در یک سطح مشترک با $n_1 > n_2$ در نظر گیرید. زاویه‌ای را که در آن **بازتاب داخلی کلی** رخ می‌دهد، پیدا کنید، این زمانی است که عددموج k_z در محیط دوم کاملاً موهومی می‌شود.

- **تمرین ۹** برای عدسی‌های کامل ضریب بازتاب کل را محاسبه کرده و نشان دهید که $\tilde{R}_{13} = 0$ است.

- **تمرین ۱۰** به‌عنوان یک مدل ساده برای عدسی کامل، از معادله (۴۲.۸) برای دامنه دو نوسان‌ساز هارمونیکی شروع کنید. یکی از آنها توسط یک میدان خارجی تحریک می‌شود، و جابجایی‌های $\bar{x}_a$ و $\bar{x}_b$ را برای $\omega = \omega_a = \omega_b$ و $\gamma_a = \gamma_b \approx 0$ محاسبه کنید. می‌توانید از مرجع [۵۵] استفاده کنید.

- **تمرین ۱۱** جسمی به‌فاصله δ از یک عدسی وسلاگو با ضخامت d قرار دارد.
  - **الف** در چه فاصله‌ای از عدسی تصویر در طرف دیگر تشکیل می‌شود؟
  - **ب** میدان‌های محوشونده را از طریق عدسی ردیابی کرده و نشان دهید که در موقعیت جسم و تصویر برابر هستند.

- **تمرین ۱۲** از جعبه ابزار NANOPT فایل demostrat05.m را برای الگوی تابشی یک دوقطبی بالای یک زیرلایه فلزی استفاده کنید. الگوی تابشی را برای فاصله‌های مختلف از بستر بررسی کرده و نتیجه را تفسیر کنید.

- **تمرین ۱۳** از جعبه ابزار NANOPT فایل demostrat05.m را برای الگوی تابشی یک دوقطبی بالای یک زیرلایه فلزی استفاده کنید. زیرلایه فلزی را با یک فیلم نازک فلزی (از ضخامت‌های ۲۰، ۵۰، و ۱۰۰ نانومتر استفاده کنید) که بالای زیرلایه شیشه است عوض کنید. ضخامت فیلم فلزی را تغییر داده و نتایج را با لایه نیم فضای فلزی مقایسه کنید.

فصل ۹

پلاسمون‌های ذره‌ای

در فصل آخر پلاسمون‌های سطحی را بحث کردیم. این نوسان‌های همدوس بار در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک است که می‌تواند تحریک نوری شده، و در امتداد سطح مشترک منتشر شود. آنها همراه با میدان‌های الکترومغناطیسی محوشونده هستند که هنگام دور شدن از سطح مشترک بطور نمائی میرا می‌شوند. در این فصل نانوذرات فلزی تعبیه شده در دی‌الکتریک را تجزیه و تحلیل کرده و نشان می‌دهیم که تحریک مربوطه در آنجا وجود دارد، و آنها را به‌عنوان پلاسمون‌های ذره نشان می‌دهیم. بحث خود را با نانوذرات بسیار کوچکتر از طول موج نور، جایی که تقریب شبه استاتیک می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، آغاز می‌کنیم و نتایج را بعداً برای ذرات بزرگتر تعمیم می‌دهیم.

۱.۹ حد شبه‌استاتیک

معادله موج را برای پتانسیل اسکالر در نظر گیرید، رابطه (۲۲.۲)،

$$(\nabla^2 + k^2)V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

که آنرا برای میدان‌های هارمونیک زمانی با توجه به $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$ نوشته‌ایم. قبلاً این رابطه را برای شرط لورنتس بدست آورده‌ایم

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\epsilon V(\mathbf{r}) = -jk\sqrt{\mu\epsilon}V(\mathbf{r})$$

برای درک ماهیت شبه استاتیک، نکات زیر را فرض می‌کنیم:

- نانوذرات بسیار کوچکتر از طول موج نور هستند. اجازه دهید L مقیاس طول مشخصه نانوذرات باشد، که به‌طور معمول چند ده نانومتر، و λ طول موج نور، معمولاً در مرتبه میکرومتر است.
- عملگر لاپلاس ∇^2 انحناء تابعی که روی آن عمل می‌کند است. اکنون فرض می‌کنیم که میدان‌های الکترومغناطیسی و پتانسیل با مقیاس طول L بنحوی تغییر می‌کند که تخمین زیر برقرار باشد:

$$|\nabla^2 V| \backsim \frac{1}{L^2}|V| \gg |k^2 V| \backsim \frac{1}{\lambda^2}|V|$$

به‌همین دلایل، می‌توانیم در معادله موج برای $V(\mathbf{r})$ عبارت k^2 را نادیده بگیریم و به‌معادله الکترواستاتیک پوآسون برسیم. کلمه "شبه" در تقریب شبه‌استاتیک به‌این واقعیت اشاره دارد که در تطبیق میدان‌های الکتریکی در ابعاد ذرات، گذردهی وابسته به‌فرکانس $\epsilon(\mathbf{r},\omega)$ را حفظ می‌کنیم .

تقریب شبه استاتیک

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r},\omega)} \tag{۱.۹}$$

علاوه بر این، گذردهی وابسته به‌فرکانس $\epsilon(\omega)$ را در محاسبه شرایط مرزی درنظر می‌گیریم

از شرط معیار لورنتس داریم

$$L|\nabla \cdot \mathbf{A}| \backsim |\mathbf{A}| \backsim L|-j\sqrt{\mu\epsilon}kV(\mathbf{r})| \backsim \frac{L}{\lambda c}|V| \ll \frac{1}{c}|V|$$

بنابراین، پتانسیل برداری خیلی کوچک‌تر از پتانسیل اسکالر است و تقریباً می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. در مجموع، مشخص می‌شود که تقریب شبه‌استاتیک برای نانوذرات کوچک، کوچک‌تر از ۱۰۰-۵۰ نانومتر، بسیار خوب عمل می‌کند. جواب معادله پواسون به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر از معادله موج است و می‌توان بلافاصله از آن بعنوان ابزار کامل توسعه‌یافته برای الکترواستاتیک استفاده کرد. در کل پتانسیل اسکالر و میدان الکتریکی را از طریق رابطه زیر بهم مربوط می‌کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \tag{۲.۹}$$

در مورد پراکندگی[۱] نور توسط نانوذرات کوچک که تقریب شبه‌استاتیک برای آنها استفاده می‌شود، باید مراقب باشید:

- از آنجا که طول موج نور بسیار بزرگتر از اندازه نانوذرات است، این ذره توسط یک میدان الکتریکی ثابت در فضا اما متغیر زمانی تحریک می‌شود. برای میدان‌های هارمونیک زمانی، پتانسیل مربوطه برابر است با:

$$V(\mathbf{r}) = -E_0\epsilon_0 \cdot \mathbf{r}, \tag{۳.۹}$$

که در آن E_0 دامنه میدان الکتریکی و ϵ_0 قطبش نور است.

[۱] Scattering

- برای پراکندگی، جذب[۲] و انقراض[۳] نور باید به‌معادلات کامل ماکسول متوسل شویم. این کار را با محاسبه گشتاور دوقطبی القایی نانوذره و محاسبه میدان‌های دور دوقطبی نوسانی انجام می‌دهیم.

این بخش را با بیان شرایط مرزی (b.c.) پتانسیل الکترواستاتیک در سطح مشترک بین دو ماده با گذردهی $\epsilon_1(\omega)$ و $\epsilon_2(\omega)$ به‌پایان می‌بریم. پیوستگی میدان الکتریکی مماسی از طریق پیوستگی پتانسیل در مرز بدست می‌آید؛

$$V(\mathbf{r}-o^-\hat{\mathbf{n}})\big|_{\partial\Omega} = V(\mathbf{r}-o^+\hat{\mathbf{n}})\big|_{\partial\Omega} \qquad \text{اولین شرط مرزی} \qquad (۴.۹آ)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار عمود بر مرز است که از داخل به‌خارج است و 0^+ یک مقدار بی نهایت کوچک است. بنابراین، اگر مشتق را در جهت موازی با مرز قرار دهیم، برای بدست آوردن $\mathbf{E}_{\parallel}$، مقادیر یکسانی را در هر دو طرف بدست می آوریم. برای شرط مرزی دوم فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه بار سطحی آزاد در مرز وجود ندارد، و بنابراین از پیوستگی جابجایی دی‌الکتریک در جهت عمود بر مرز شرایط زیر حاصل می‌شود.

$$\epsilon_1(\omega)\frac{\partial V(\mathbf{r}-o^-\hat{\mathbf{n}})}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = \epsilon_2(\omega)\frac{\partial V(\mathbf{r}-o^-\hat{\mathbf{n}})}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} \qquad \text{دومین شرط مرزی} \qquad (۴.۹ب)$$

که در آن $\frac{\partial}{\partial n}$ مشتق در جهت عمود بر سطح بسوی خارج است.

۲.۹ کره‌ها، بیضوی‌گون‌ها در حد شبه‌استاتیک

در این بخش پراکندگی نور از کره‌های کوچک و بیضوی شکل را در نظر می‌گیریم. جواب‌های کره را "جواب‌های می[۴] در تقریب شبه استاتیک" و جواب‌های بیضوی‌گون را "جواب‌های می-گانس[۵] " می‌نامیم. هر دوی آنها از مختصات ویژه، کروی برای مورد می و بیضوی‌گون[۶] برای مورد می-گانس استفاده کرده، تا شرایط مرزی را در قالب ساده‌ای بیان شده و در نتیجه بتوان از آنها به‌صورت تحلیلی استفاده کرد. متأسفانه، چنین رویکردی را نمی‌توان به‌شکل هندسی ذرات دلخواه تعمیم داد، و در بخش‌های بعدی این فصل به‌طرح‌های مختلف محاسبه متوسل می‌شویم.

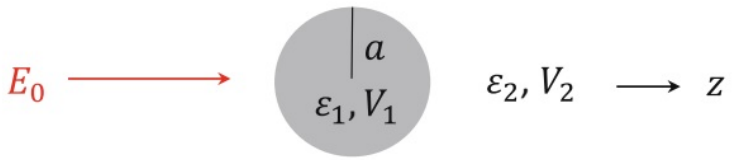
۱.۲.۹ نظریه شبه‌استاتیک می

در ادامه یک کره که توسط نوری با میدان الکتریکی معادله (۳.۹) روشن شده و قطبش آن در امتداد $\hat{\mathbf{z}}$ است در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۹)؛

$$V(\mathbf{r}) = -E_0\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{r} = -E_0 r\cos\theta$$

در ادامه مختصات کروی را معرفی و از جوابهائی که بستگی به‌زاویه سمت ϕ ندارند استفاده

[۲] Absorption
[۳] Extinction
[۴] Mie
[۵] Mie -Gans
[۶] Ellipsoidal



شکل ۱.۹: شماتیک نظریه شبه‌استاتیک می. کره دی‌الکتریک یا فلزی به‌شعاع a و گذردهی ϵ_1 در محیطی با گذردهی ϵ_2 تعبیه شده است. میدان الکتریکی خارجی به‌بزرگی E_0 در جهت z اعمال شده و یک گشتاور دوقطبی در کره القاء می‌شود. جواب‌های V_1, V_2 معادله لاپلاس با ضرایبی از تطبیق پتانسیل‌ها و مشتق‌های سطحی آنها در مرز کره تعیین می‌شوند.

می‌کنیم. معادله لاپلاس در مختصات کروی بصورت زیر است:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rV(r,\theta)\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial\theta}\right] = 0\ . \tag{۵.۹}$$

می‌توان نشان داد که جواب حاصل مشارکت دو عامل است که بترتیب بستگی به r و θ دارد و بصورت زیر است[۲].

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \tag{۶.۹}$$

که در آن A_l, B_l ضرایب مجهولی هستند که از شرایط مرزی بدست می‌ایند. P_l چند جمله‌ای لوژاندر [۷] است که بطور مفصل در پیوست (ج) بحث شده است. با استفاده از رابطه (۶.۹) اکنون به‌مسئله تحریک نانو کره‌ای بشعاع a می‌پردازیم. ابتداء جواب‌های داخل و خارج کره را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$V(r,\theta) = \begin{cases} V_1(r,\theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta) & r \le a \quad \text{برای} \\ V_2(r,\theta) = \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) - E_0 r\cos\theta & r > a \quad \text{برای} \end{cases}$$

که در آن اندیس یک و دو دال بر جواب‌های داخل و خارج کره است. از آنجا که V داخل کره باید در مرکز مختصات معین باشد، (تمام ضرایب B_l را صفر قرار دادیم) در حالی که برای میدان‌های خارج از کره لازم است برای فواصل دور داشته باشیم، $V \to -E_0 r\cos\theta$ (یعنی تمام ضرایب A_l را صفر قرار دادیم). اکنون از تعریف چند جمله‌ای لوژاندر و محاسبه شرایط مرزی، مشاهده می‌کنیم که

$$-E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

از رابطه پیوستگی پتانسل در مرز کره داریم؛

$$(V_1 - V_2)_{r=a} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} A_l a^l = \frac{B_l}{a^{l+1}} & l \neq 1 \quad \text{برای} \\ A_1 a = \frac{B_1}{a^2} - E_0 a & l = 1 \quad \text{برای} \end{cases}$$

[۷] Legendre polynomials

به‌طور مشابه، از پیوستگی جابجایی دی‌الکتریک در جهت شعاعی به‌دست می‌آورید؛

$$(\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} - \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r})_{r=a} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \epsilon_1 A_l a^{l-1} = -\epsilon_2 \frac{(l+1)B_l}{a^{l+2}} & l \neq 1 \quad \text{برای} \\ \epsilon_1 A_1 = -\epsilon_2 \left(2\frac{B_1}{a^3} + E_0\right) & l = 1 \quad \text{برای} \end{cases}$$

معادلات بازاء $l \neq 1$ می‌تواند فقط بازاء $A_l = B_l = 0$ برای جمیع مقادیر l صادق باشد. برای $l = 1$ خواهیم داشت:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} -\left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1+2\epsilon_2}\right) E_0 r\cos\theta & r \leq a \quad \text{برای} \\ \left(\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+2\epsilon_2}\right) \frac{a^3}{r^2} E_0 \cos\theta - E_0 r\cos\theta & r > a \quad \text{برای} \end{cases} \tag{۷.۹}$$

میدان‌های الکتریکی داخل کره را می‌توان با گرفتن مشتق از پتانسیل اسکالر محاسبه کرد. با توجه به $z = r\cos\theta$ داریم؛

$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) E_0 \hat{\mathbf{z}} \tag{۸.۹}$$

در مورد میدان خارج از کره، متوجه می‌شویم که قسمت القا شده به‌شکل یک پتانسیل دوقطبی است؛

$$V_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

در این‌صورت گشتاور دوقطبی کره با تحریک نور خواهد بود؛

گشتاور دوقطبی کره تحریک شده نوری

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) a^3 E_0 \hat{\mathbf{z}} \tag{۹.۹}$$

تا اینجا هیچ چیز بیش از حد هیجان انگیز نبوده است. معادله (۷.۹) معمولاً در درس الکترواستاتیک مبتدی بدست می‌آید و اگرچه بدست آوردن آن ما را مجبور می‌کند که با معادله لاپلاس در مختصات کروی تماس برقرار کنیم، اکثر خوانندگان با نتیجه نهایی آشنا خواهند بود. به‌طور مشابه، یافتن یک میدان ثابت در داخل کره و میدان دوقطبی القایی در خارج آن مشهور است. با این حال، چیز خاصی در باره معادله (۷.۹) وجود دارد. برای مشاهده این موضوع، در ادامه مطالبی جداگانه برای نانوکره‌های دی‌الکتریک و فلزی بحث می‌کنیم.

کره دی‌الکتریک

یک کره دی‌الکتریک با $\epsilon_1 > \epsilon_2$ درنظر گیرید. از رابطه (۸.۹) ملاحظه می‌شود که میدان الکتریکی داخل کره به‌دلیل میدان قطبشی ناشی از داخل کره، که میدان خارجی را غربال

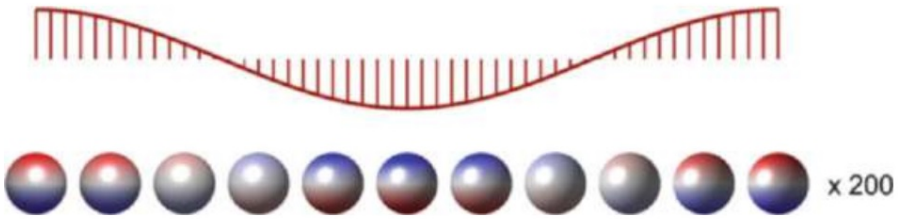
می‌کند، کوچکتر از خارج است. برای بدست آوردن بارهای قطبشی، ابتدا مولفه عمودی میدان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم؛

$$E^{\perp} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} E_1^{\perp} = \left(\frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2+\epsilon_1}\right) E_0 \cos\theta \quad r = a^- \quad \text{برای} \\ E_2^{\perp} = \left(\frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2+\epsilon_1}\right) E_0 \cos\theta \quad r = a^+ \quad \text{برای} \end{cases} \tag{۱۰.۹}$$

که در آن $a^{\mp}$ موقعیت‌های بی‌نهایت کوچک در داخل یا خارج از کره را نشان‌می‌دهد. سپس بار قطبشی σ_{pol} را با استفاده از معادله (۲۴.۷) به‌دست می‌آوریم.

$$\sigma_{pol}(\theta) = -\epsilon_0(E_2^{\perp} - E_1^{\perp}) = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) E_0 \cos\theta \tag{۱۱.۹}$$

بار σ_{pol} یک میدان الکتریکی که در خلاف جهت میدان اعمالی است تولید می‌کند. وقتی این منظره را در حوزه زمان درنظر می‌گیریم، شکل (۲.۹)، مشاهده می‌کنیم که چگالی بارهای قطبشی هم‌فاز با میدان الکتریکی اعمالی نوسان کرده، در نتیجه میدان خارجی را در هر لحظه از زمان غربال می‌کند.



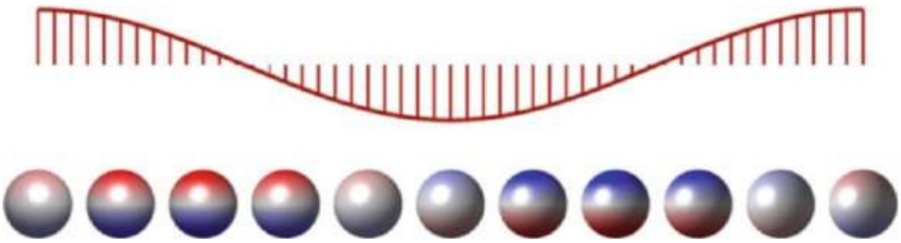
شکل ۲.۹: نوسان‌های بار قطبشی در سطح یک کره دی‌الکتریک با $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$ و $\epsilon_2 = \epsilon_0$. بار هم فاز با میدان تحریک نوسان کرده، که در بالای شکل نشان داده شده است. ضریب مقیاس ۲۰۰ نسبت به‌نوسان بار یک نانو کره فلزی است که در شکل (۳.۹) نشان داده شده است.

کره فلزی

برای کره فلزی با تابع دی‌الکتریک $\epsilon_1(\omega)$ وقتی فرکانس کوچکتر از فرکانس پلاسما ω_p منفی می‌شود. به‌بحث بخش ۱.۷ مراجعه کنید. در نتیجه، مخرج در معادله (۷.۹) می‌تواند در فرکانس خاص ω_{SP} بسیار کوچک شود و بدست می‌آید

$$\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) \gg 1 \qquad \epsilon_1(\omega_{SP}) + 2\epsilon_2 \approx 0 \quad \text{برای} \tag{۱۲.۹}$$

در نتیجه، گشتاور دوقطبی القائی رابطه (۹.۹) بسیار بزرگ می‌شود. تنها دلیل اینکه در ω_{SP} معین می‌ماند تلفات فلزی است که از طریق $\epsilon_1''(\omega_{SP})$ شرح داده شده است. مهم است بدانیم که برای تابع دی‌الکتریک درودِ $\epsilon_1'(\omega)$ کل ناحیه منفی را زیر فرکانس پلاسما دربر می‌گیرد.



شکل ۳.۹: مانند شکل (۲.۹) اما برای نانو کره فلزی با پارامترهای مواد برای نقره. بارهای سطحی با ضریب ۲۰۰ برابر برزگتر از دی‌الکتریک نشان داده شده در (۲.۹) است. و دارای اختلاف فاز 90° در تشدید است.

$$-\infty < \epsilon_1'(\omega) \leq 0 \qquad 0 < \omega \leq \omega_p \quad \text{برای}$$

بنابراین، شرایط رزونانس معادله (۱۲.۹) حتماً در فرکانسی انجام خواهد شد. برای درک بهتر ماهیت این رزونانس‌های بنام پلاسمون سطحی (SP)، در زیر برای داخل کره تابع دی‌الکتریک درودِ را در نظر می‌گیریم

$$\epsilon_1(\omega)/\epsilon_0 = k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)}$$

که در آن k_b پاسخ دی‌الکتریک الکترونهای ظرفیت در فلز است. اکنون شرایط تشدید خواهد شد؛

$$\epsilon_0 \left(k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega_{SP}^2} \right) + 2\epsilon_2 \approx 0 \tag{۱۳.۹}$$

بنابراین فرکانس پلاسمون یک کره فلزی را می‌توان از طریق گذردهی درودِ توصیف کرد.

تشدید پلاسمون سطحی کره

$$\omega_{SP} \approx \frac{\omega_p}{\sqrt{k_b + 2\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}} = \beta\omega_p \ . \tag{۱۴.۹}$$

که در اینجا β عدد بدون بعد است که فرکانس پلاسمون سطحی را نسبت به‌فرکانس پلاسما ω_p می‌دهد. برای یک گاز الکترون-آزاد با $k_b = 1$ و گذردهی پس زمینه $\epsilon_2 = \epsilon_0$ خواهیم داشت؛

$$\beta = \frac{\omega_{SP}}{\omega_p} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مدل نوسانگر اگر فرض کنیم که تلفات در فلز بقدر کافی کوچک باشد، $\gamma \ll \omega_{SP}$، می‌توانیم نزدیک به ω_{SP} تابع دی‌الکتریک درودِ را بصورت زیر تقریب بزنیم؛

$$\frac{\epsilon_1(\omega)}{\epsilon_0} \approx k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega_{SP}^2}\left[1 + \frac{\Delta\omega^2}{\omega_{SP}^2} - \frac{\gamma}{\omega_{SP}}\right]^{-1} \approx \frac{\epsilon_1(\omega_{SP})}{\epsilon_0} + \frac{\omega_p^2\Delta\omega^2}{\omega_{SP}^4} - j\frac{\omega_p^2\gamma}{\omega_{SP}^3}$$

که در آن $\Delta\omega^2 = \omega^2 - \omega_{SP}^2$ و جمله داخل براکت را بر حسب سری تیلور بسط می‌دهیم. بعداً گشتاور دوقطبی القائی (۹.۹) را محاسبه می‌کنیم. صورت کسر را می‌توان بصورت زیر تقریب زد

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) - 3\epsilon_2 \approx -3\epsilon_2$$

که جمله داخل پرانتز در فرکانس تشدید صفر می‌شود. گشتاور دوقطبی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{p} \approx \frac{4\pi\epsilon_2^2}{\epsilon_0}\left(\frac{3\beta^2\omega_{SP}^2}{\omega_{SP}^2 - \omega^2 + j\gamma\omega_{SP}}\right) a^3 E_0\hat{\mathbf{z}}\ . \qquad (۱۵.۹)$$

جمله داخل پرانتز بطور مستقیم به‌جمله تشدید نوسانگر هارمونیکی تحریک مربوط می‌شود که قبلاً در رابطه (۵.۷) برای گذردهی درودِ-لورنتس بدست آورده شد.

بارهای سطحی برخلاف کره دی‌الکتریک، بارهای سطحی ناشی از حامل‌های آزاد و مقید است. در ادامه، فرض کنید $k_b = 1$، $\epsilon_2 = \epsilon_0$ و حالت کلی تمرین ۲.۹ را درنظر گیرید. بار سطحی اکنون در کل ناشی از حامل‌های آزاد است و از رابطه (۱۱.۹) در فرکانس تشدید $\omega = \omega_{SP}$ بدست می‌آوریم؛

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) E_0\cos\theta \approx 3j\epsilon_0\frac{\omega_{SP}}{\gamma}E_0\cos\theta \qquad (۱۶.۹)$$

از این رابطه واضح است که فقط عبارت میرایی γ بارهای سطحی را معین نگه می‌دارد، اما در غیر این صورت رابطه می‌تواند بسیار بزرگ شود. پلاسمون‌های سطحی محلی می‌توانند با تشدید نانوذرات فلزی همراه باشند که در آن توزیع بار سطحی به‌طور همدوس در مرز بین فلز و دی‌الکتریک نوسان می‌کند. وضعیت مشابه پلاسمون‌های سطحی است که در فصل قبل در نظر گرفته شد. با این حال، به‌دلیل افزونگی سطح کره، فرکانس تشدید گسسته‌ای را، بجای پیوستگی مودها، به‌دست می‌آوریم.

رفتار پلاسمون‌های سطحی محلی در شکل (۳.۹) نشان داده شده است. یک میدان نوری خارجی حامل‌ها را در مرز ذرات جدا می‌کند. علاوه بر میدان نور تحریک، اکنون نیروهای بازسازی نیز به‌دلیل حامل‌های جدا شده وجود دارد. بنابراین، اگر کره با فرکانس تشدید ω_{SP} تحریک شود، یک نوسان با دامنه زیاد ایجاد می‌شود ، جایی که در حالت ساکن انرژی جذب شده توسط میدان نور برابر با انرژی تلف شده توسط اتلاف فلز است (همچنین به‌تمرین ۱.۹ مراجعه کنید). توجه داشته باشید که در معادله (۱۶.۹) بار سطحی σ کاملاً موهومی است و اختلاف فاز بین میدان تحریک و قطبش کره ۹۰ درجه، که مطابق با رفتار تشدید یک نوسانگر هارمونیکی تحریک شده است.

پلاسمون‌های ذره‌ای پلاسمون‌های سطحی محلی با نام‌های مختلف شناخته می‌شوند، گاهی اوقات با مکمل "پلاریتون" ترکیب می‌شوند تا بر ماهیت ترکیبی مواد و تحریک‌های الکترودینامیکی تأکید شود. در ادامه اصطلاح "پلاسمون‌های ذره‌ای" را برای هر نوع تحریک پلاسمون سطحی ذره‌ای با اندازه معین به‌کار می‌بریم. در ادامه فرکانس‌های تشدید و افزونگی[۸] میدان را که می‌توان از طریق شکل و اندازه نانوذرات تنظیم کرد، بیشتر بحث خواهیم کرد. این یک بستر انعطاف‌پذیر و همه کاره برای محدود کردن میدان‌های الکترومغناطیسی در مقیاس نانو ارائه می‌دهد، که می‌تواند برای کاربردهای متعدد مورد استفاده قرار گیرد.

معادلات ماکسول بین روابط مظلوم برآمده از معادلات ماکسول و فیزیک تشدید بسیار غنی حاکم بر پلاسمون‌های ذره‌ای، مغایرت وجود دارد. در نگاه اول ممکن است تا حدودی غیر منتظره به‌نظر برسد که باید برای تفسیر نتایج نظریه ماکسول کارهای بیشتری انجام داد تا فیزیک عمیق‌تر آنرا کشف کرد. با این حال، به‌این دلیل که معادلات ماکسول شامل همه اجزای لازم برای توصیف پلاسمون‌های ذره‌ای است و فقط باید نتایج جدیدی را برای کشف آنچه در داخل آنها پنهان شده، بررسی کرد.

۲.۲.۹ نظریه می-گانس

نوع دوم ساختار هندسی برای مسئله الکترواستاتیک که میوانیم بطور تحلیلی حل کنیم، بیضوی‌گون‌ها[۹] هستند. نیم‌محورها را با a_k نشان داده و فرض می‌کنیم که

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3$$

باشد. در کتاب درسی عالی بورن و هافمن[۱۰] [۶۰] نویسندگان بحث خود را چنین شروع می‌کنند:

> مختصات طبیعی، هرچند ناآشنا و بدون ویژگی‌های ناخوشایند آنها، رابطه برای گشتاور دوقطبی ذره بیضوی‌گون ناشی از یک میدان الکترواستاتیک یکنواخت، **مختصات بیضوی‌گون** است.

خوانندگان علاقه مند به‌جزئیات چنین دستگاه‌های مختصات عجیب و غریب به‌کتاب ذکر شده در بالا ارجاع داده می‌شوند، در ادامه نتایج نهایی را به‌سادگی بیان می‌کنم. به‌نظر می‌رسد که گشتاور دوقطبی را می‌توان به‌شکلی شبیه معادله (۹.۹) بیان کرد. برای نانوذرات کروی، و برای قطبش نور در امتداد یکی از محورهای اصلی $\hat{\mathbf{e}}_k$ نتیجه می‌شود که

گشتاور دوقطبی بیضوی‌گون با تحریک نوری

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{3\epsilon_2 + 3L_k(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \right) a_1 a_2 a_3 E_0 \hat{\mathbf{e}}_k \tag{۱۷.۹}$$

[۸] Enhancement

[۹] Ellipsoid

[۱۰] Bohren and Huffman

در اینجا عوامل دی‌پلاریزاسیون را معرفی کرده‌ایم

$$L_k = \frac{1}{2}a_1a_2a_3\int_0^\infty \frac{dq}{(a_k^2+q^2)\sqrt{(a_1^2+q^2)(a_2^2+q^2)(a_3^2+q^2)}},$$

که در رابطه $L_1+L_2+L_3=1$ صدق می‌کند. برای کره $L_k=\frac{1}{3}$ و رابطه (۱۷.۹) به‌همان نتیجه قبلی تقلیل می‌یابد. برای بیضوی‌گون کشیده[۱۱] با $a_1 \geq a_2 = a_3 = a_\perp$ می‌توانیم انتگرال بالا بطور تحلیلی حل کرده و عامل دی‌پلاریزاسیون در امتداد محور را بدست آوریم؛

$$L_1 = \frac{1-e^2}{e^2}\left(-1+\frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right), \qquad e^2 = 1-\frac{a_\perp^2}{a_1^2}$$

شبیه به‌کره، می‌توانیم فرکانس‌های تشدید پلاسمون سطحی ω_{SP} را با جستجوی صفرهای مخرج رابطه (۱۷.۹) محاسبه کنیم،

$$3\epsilon_2 + 3L_k[\epsilon_1'(\omega_{SP})-\epsilon_2] = 0\ . \tag{۱۸.۹}$$

کل بحث در مورد رفتار تشدید تحریک پلاسمون ذرات در کره‌ها در مورد ذرات بیضوی‌گون نیز صادق است، با این حال، به‌دلیل عوامل دپلاریزاسیون L_k، وسیله دیگری برای کنترل فرکانس تشدید با انتخاب ساختار هندسی‌های مختلف نانوذرات داریم. قبل از اینکه این نکته را با جزئیات بیشتری نشان دهیم، روابطی برای سطح مقطع نوری در حالت شبه‌استاتیک بدست می‌آوریم.

۳.۲.۹ سطح مقطع نوری

یک دوقطبی ناشی از میدان نور خارجی $\mathbf{E}_{inc}$ در نظر می‌گیریم؛

$$\mathbf{p} = \bar{\bar{\alpha}}(\omega)\cdot\mathbf{E}_{inc} = 4\pi\epsilon\bar{\bar{\alpha}}_{vol}(\omega)\cdot\mathbf{E}_{inc} \tag{۱۹.۹}$$

که در آن $\bar{\bar{\alpha}}$ تانسور **قطبی شوندگی**[۱۲] ذره است. در دستگاه آحاد SI قطبی شوندگی دارای واحد Cm^2V^{-1}، و اغلب خیلی راحتر است که ضریب $4\pi\epsilon$ که در آن ϵ گذردهی محیط بستر است، بیرون کشیده تا قطبی شوندگی α_{vol} که دیمانسیون حجم دارد را بدست آوریم. بدیهی است که قطبی شوندگی رابطه (۱۹.۹) برای کره (با $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha\mathbb{I}$)، برای بیضوی‌گون (با $\bar{\bar{\alpha}}$ که یک ماتریس قطری است)، و همین‌طور سایر ساختارهای هندسی ذرات بکار میرود. از میدان‌های دور یک دوقطبی نوسانی که در رابطه (۳.۶) داده شده است، شروع می‌کنیم؛

$$\mathbf{E}_{sca} \underset{kr\gg1}{\longrightarrow} \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\frac{k^2}{4\pi\epsilon}\mathbf{p}_\perp$$

$$\mathbf{H}_{sca} \underset{kr\gg1}{\longrightarrow} Z^{-1}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\frac{k^2}{4\pi\epsilon}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_\perp$$

که در آن میدان‌ها در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}-\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})$ منتشر می‌شوند. الکون این میدان‌های دور را در توان پراکندگی رابطه (۲۲.۴) قرار می‌دهیم؛

[۱۱] Prolate Ellipsoid

[۱۲] Polarizability

$$P_{sca} = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} Re(\mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{sca}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS$$

در ادامه برای مرز یک کره واقع در منطقه میدان-دور در نظر می‌گیریم. با وارد کردن میدان‌های دور در این رابطه خواهیم داشت؛

$$P_{sca} = \frac{1}{2} Z^{-1} \left(\frac{k^2}{4\pi\epsilon}\right)^2 \oint Re\left[\mathbf{p}_\perp \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_\perp^*)\right] \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega$$

که در آن $dS = r^2 d\Omega$ و $d\Omega$ نمایشگر یک جزء سطح کوچک روی سمت و زاویه قطبی است. با تبدیل دوری ضرب سه‌گانه به‌رابطه زیر میرسیم؛

$$Re\left[\mathbf{p}_\perp \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_\perp^*)\right] \cdot \hat{\mathbf{r}} = |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_\perp|^2 = |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}|^2$$

با قرار دادن همه این نتایج بدست می‌آید؛

$$P_{sca} = Z^{-1} \frac{k^4}{32\pi^2\epsilon^2} \int |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}|^2 d\Omega \tag{۲۰.۹}$$

این انتگرال‌گیری را می‌توان با انتخاب دستگاه مختصاتی که $\mathbf{p}$ در جهت zها است، انجام داد،

$$\int |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi p^2 \sin^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{8\pi}{3} p^2$$

برای رسیدن به‌عبارت نهائی، میدان یک نور تابشی بصورت $E_0\epsilon_0$ با شدت $I_{inc} = \frac{1}{2} Z^{-1} |E_0|^2$ در نظر می‌گیریم. هنگامی که توان پراکنده شده بر I_{inc} تقسیم کنیم، به‌رابطه نهائی برای سطح مقطع پراکندگی یک ذره قطبی‌شونده میرسیم؛

سطح مقطع پراکندگی ذره قابل قطبی‌شوندگی

$$C_{sca} = \frac{k^4}{6\pi\epsilon^2} |\bar{\bar{\alpha}}\epsilon_0|^2 = \frac{8\pi}{3} k^4 |\bar{\bar{\alpha}}\epsilon_0|^2 \tag{۲۱.۹}$$

برای سطح مقطع انقراضی[۱۳] از قضیه نوری رابطه (۲۷.۴) شروع می‌کنیم،

$$P_{ext} = \frac{2\pi}{k} Z^{-1} Im\left[E_0^* \boldsymbol{\epsilon}_0^* \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0)\right] = \frac{2\pi}{k} Z^{-1} \frac{k^2}{4\pi\epsilon} Im\left[|E_0|^2 \boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \bar{\bar{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0\right]$$

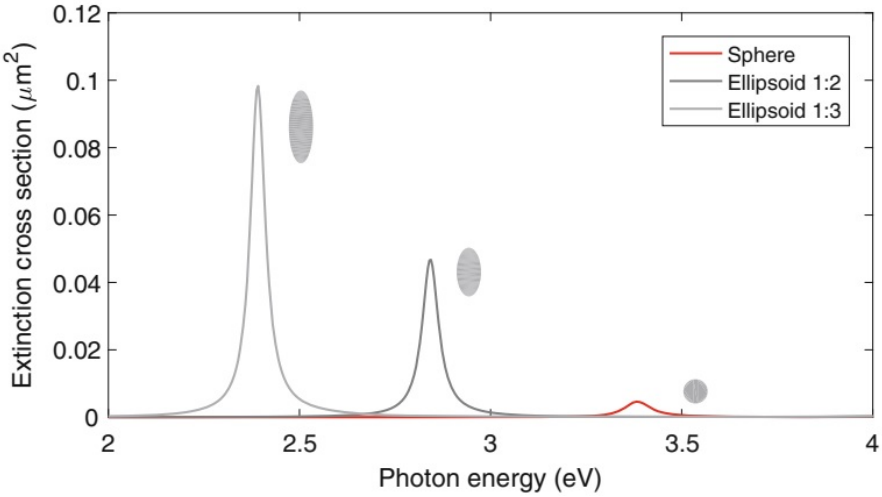
در این صورت با تقسیم بر I_{inc} سطح مقطع انقرضی بدست می‌آید

سطح مقطع انقراضی ذره قابل قطبی‌شوندگی

$$C_{ext} = \frac{k}{\epsilon}\ Im\left[\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \bar{\bar{\alpha}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0\right] = 4\pi k\ Im\left[\boldsymbol{\epsilon}_0^* \cdot \bar{\bar{\alpha}}_{vol} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0\right] \tag{۲۲.۹}$$

[۱۳] Extinction Cross Section

در ادامه از نتایج فوق برای محاسبه طیف‌های نوری برای نانوکره‌های فلزی و بیضوی‌گون استفاده می‌کنیم. شکل‌های (۴.۹) و (۵.۹) به‌ترتیب سطح مقطع انقراضی را برای نانوکره‌های نقره و طلا و نانو بیضوی‌گون‌ها نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که با افزایش نسبت محوری، مودهای پلاسمون به‌انرژی‌های پایین‌تر منتقل و تشدیدها واضح‌تر می‌شوند. در همه شکل‌ها قطبش نور در امتداد محور بلند z بیضوی‌گون، طولانی می‌شود. ضمناً تشدید پلاسمون اضافی وابسته به‌نوسان‌های بار در جهت x و y وجود دارد، اما فرکانس‌های تشدید آنها بطور قابل توجهی به‌نسبت محوری[۱۴] بستگی ندارد، همانطور که از عوامل دی‌پلاریزاسیون L_k برای بیضوی‌گون مشاهده می‌شود.

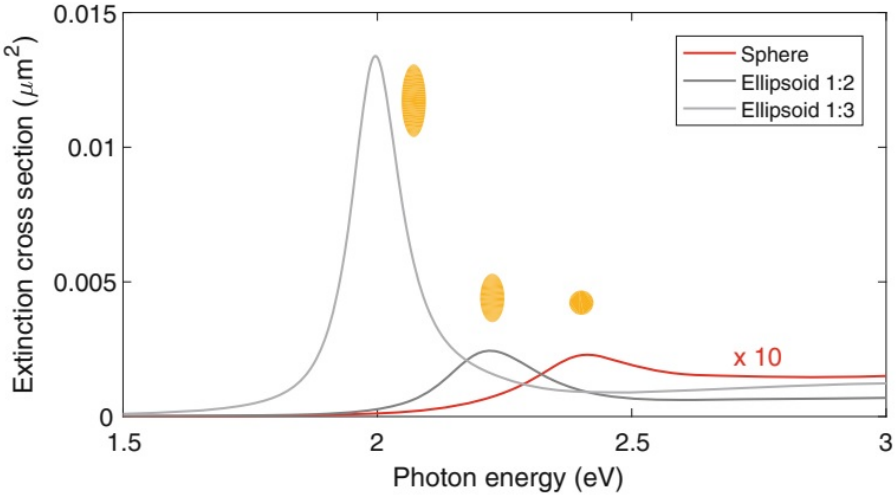


شکل ۴.۹: سطح مقطع‌های انقراضی برای کره نقره و بیضوی گون با نسبت محورهای مختلف. از $a_1 = a_2 = 20\ nm$ استفاده می‌کنیم و a_3 را تغییر می‌دهیم. مقطع انقراضی برای تحریک موج صفحه و قطبی شدن در امتداد محور بزرگ محاسبه می‌شود، تابع دی‌الکتریک نقره از مرجع [۳۴] گرفته شده است. برای ضریب شکست محیط تستر از $n_2 = 1.33$ استفاده می‌کنیم.

با مقایسه نانوذرات نقره و طلا، مشاهده می‌کنیم که فرکانس‌های پلاسمون، به‌دلیل وجود بخش موهومی بزرگ تابع دی‌الکتریک طلا، بسیار شدید میرا می‌شوند. به‌ویژه برای تشدیدهای بالاتر از $2eV$ طیف‌ها با تلفات مربوط به $\epsilon_1''(\omega)$ حاکم می‌شوند. شکل (۶.۹) موقعیت‌های اوج تشدید بیضوی‌گون‌ها با نسبت محورهای مختلف را ب همراه بیشینه مقدار C_{ext} (مربوط به‌اندازه نقاط) نشان می دهد. مشاهده می‌کنیم که برای نقره و طلا قله‌های منحنی پلاسمون با افزایش نسبت محوری به‌انرژی‌های کوچکتر انتقال می‌یابد.

در نهایت، در شکل (۷.۹) افزونگی[۱۵] میدان را برای بیضوی گون با نسبت محوری مختلف و برای قطبش نور در امتداد z نشان می دهد. با افزایش نسبت محوری، افزونگی میدان به‌طور چشمگیری زیاد می‌شود. این به‌دلیل تحدید[۱۶] میدان در تیز شدید شکل نانوساختارها و همچنین به‌دلیل میرایی کمتر برای تشدید در انرژی‌های پایین‌تر است. به‌علت اثر اخیر،

[۱۴] Axial Ratio
[۱۵] Enhancement
[۱۶] Confinement



شکل ۵.۹: همانند شکل (۴.۹) اما برای طلا. مقادیر کره برای دید بهتر ۱۰ برابر می‌شود. توجه داشته باشید که در مقایسه با نقره، سطح مقطع به‌علت میرایی بیشتر طلا که ناشی از بخش موهومی بزرگتر آن است، بسیار کوچکتر می‌شود.

پلاسمون‌ها می‌توانند، همانطور که قبلاً در رابطه (۱۵.۹) برای مدل نوسان ساز ساده بحث شد، قوی‌تر تحریک شوند. در واقع، این ترکیب تشدیدهای برجسته و افزونگی میدان‌های قوی است که نانوذرات پلاسمونی را برای کاربردهای مختلف بسیار جالب می‌کند.

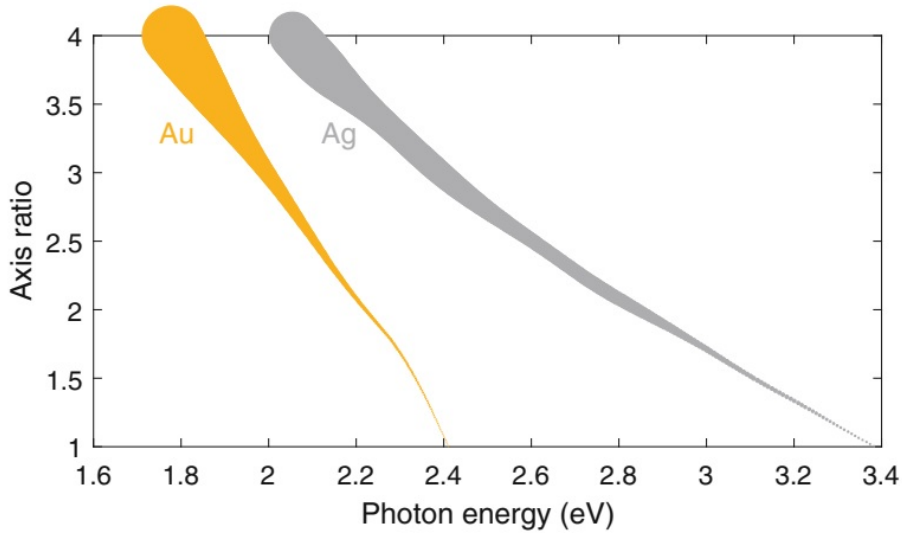
۳.۹ روش انتگرال مرزی برای حد شبه‌استاتیک

وقتی شکل نانوذرات نه کروی است و نه بیضوی‌گون، عموماً باید از روش‌های عددی استفاده کرد. در ادامه به‌رویکرد روش انتگرال مرزی، که از آن تعدادی نتیجه‌گیری مهم می‌توان گرفت، می‌پردازیم. اجرای عددی آن در فصل یازدهم بحث می‌شود.

برای جواب عمومی معادله پوآسون، از تابع گرین استفاده می‌کنیم. تابع گرین شبه‌استاتیک، معادله هلم‌هولتز را، با قرار دادن $k \to 0$ در رابطه (۷.۵) دنبال می‌کند و خواهیم داشت؛

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{۲۳.۹}$$

برای محاسبه پتانسیل القائی برای پتانسیل خارجی مفروض V_{inc}، می‌توانیم از رابطه (۱۵.۵) شروع کرده و $\mathbf{r}$ را به‌مرز نزدیک کنیم. این رویکرد برای حل معادلات کامل ماکسول (بدون تقریب شبه‌استاتیک) در ادامه بیشتر دنبال خواهد شد. با این حال، برای حالت شبه‌استاتیک می‌توانیم یک روش ساده تر را بر اساس توزیع بار سطحی σ معرفی کنیم، که ماهیت فیزیکی پلاسمون‌های ذره‌ای را در بر می‌گیرد. با نوشتن کل پتانسیل داخل و خارج ذره بصورت زیر



شکل ۶.۹: موقعیت رزونانس نانوبیضوی‌گون‌های طلا و نقره برای نسبت‌های محوری مختلف. موقعیت دایره‌های پُر شده برای هر نسبت محوری به‌انرژی فوتون که در آن C_{ext} بزرگترین است، اندازه‌ها با مقادیر C_{ext} مطابقت دارد. برای دید بهتر، مقادیر برای طلا ، ۵ برابر شده است.

شروع می‌کنیم

$$V(\mathbf{r}) = V_{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\sigma(\mathbf{s}')dS' \tag{۲۴.۹}$$

که در آن انتگرال روی مرز ذره گسترش می‌یابد. پتانسیل V_{inc} دوباره وابسته به‌منبع خارجی یا موج تابشی است. از اینجا به‌بعد موقعیت‌های واقع شده در خارج و در مرز را بترتیب با $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ نشان می‌دهیم. با اعمال عملگر لاپلاس بر دو طرف معادله فوق، خواهیم داشت؛

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \nabla^2 V_{inc}(\mathbf{r}) - \oint_{\partial\Omega} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{s}')\sigma(\mathbf{s}')dS' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \qquad \mathbf{r} \notin \partial\Omega \qquad \text{برای}$$

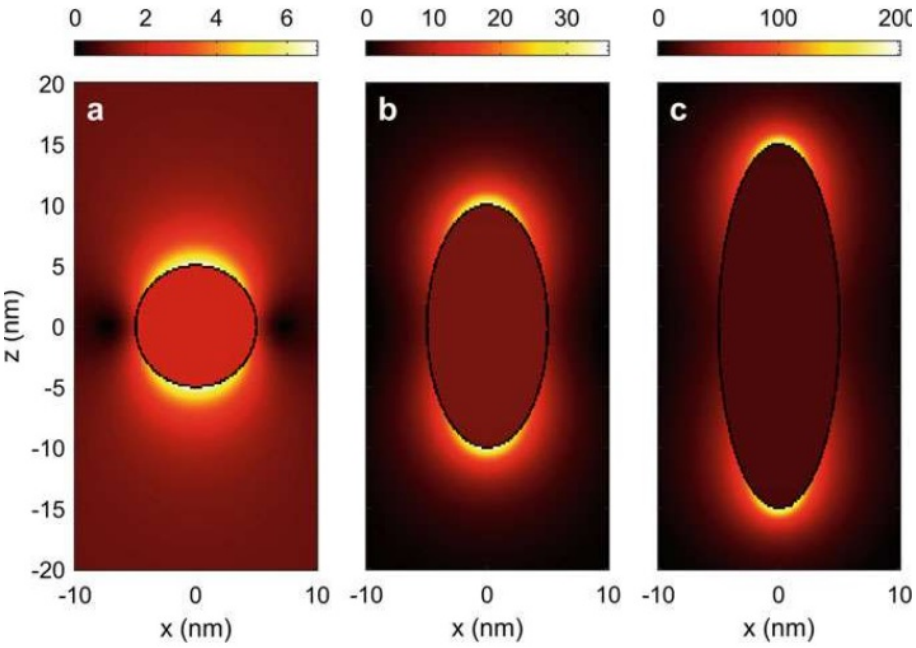
برای بدست آوردن این نتیجه، از تعریف معادله برای تابع گرین شبه‌استاتیک استفاده کردیم؛

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{۲۵.۹}$$

و فرض کرده‌ایم که $\nabla^2 V_{inc}$ توزیع بار داخل حجم مورد نظر را می‌دهد. برای میدان نور تابشی این جمله می‌تواند غایب باشد و به‌معادله پوآسون میرسیم. با ساخت و ساز، رابطه (۲۴.۹) معادله پواسون را ارضاء می‌کند و با توجه به‌تعریف تابع گرین، در شرایط مرزی مناسب میدان‌های میرا در بی‌نهایت ساخته شده است. توزیع بار $\sigma(\mathbf{s})$ بار مجهول سطحی بنحوی که شرایط مرزی معادله(۴.۹) در مرز ذرات را ارضاء کند، سپس محاسبه می‌شود.

رهیافت دیریشله[۱۷] . با محاسبه پتانسیل در مرز بطریقی که با نزدیک شدن $\mathbf{r} \to \mathbf{s}$ به‌مرز از داخل یا خارج شروع می‌کنیم؛

[۱۷] Dirichlet Trace



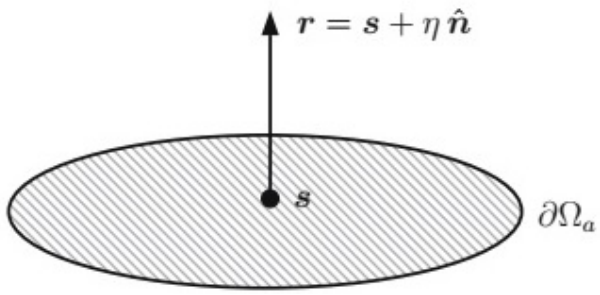
شکل ۷.۹: افزونگی شدت برای کره و بیضوی‌گون نقره. افزونگی میدان‌های-نزدیک $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$ در انرژی‌های تشدید از شکل (۶.۹) برای **(الف)** کره، **(ب)** $a_1 : a_3 = 1 : 2$ ، و **(ج)** $a_1 : a_3 = 1 : 3$، و برای قطبش نور در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ گرفته شده است. نوارهای رنگی در بازه مربوط به‌عوامل افزونگی در بالای شکل‌ها گزارش شده است.

$$V(\mathbf{s}^{\pm}) = V_{inc}(\mathbf{s}\pm) + \lim_{\eta\to 0}\oint_{\partial\Omega}\frac{\sigma(\mathbf{s}')dS'}{4\pi|\mathbf{s}\pm\eta\hat{\mathbf{n}}-\mathbf{s}'|}$$

در ادبیات ریاضی این روش محدود کننده به‌عنوان رد دیریکلت شناخته می‌شود. محدودیت را می‌توان بدون مشکل برای V_{inc} انجام داد. برای دوره دوم باید به‌دلیل وابستگی تابع گرین به $1/r$ بیشتر مراقب باشیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد ،انتگرال‌گیری در یک منطقه مرزی کوچک برای به‌دست آوردن نتایج خوب ضروری است. ما یک سیستم مختصات را انتخاب کردیم که $\mathbf{s}$ در مبدا قرار دارد و جایی که $\mathbf{r}$ در طول محور z به‌این نقطه نزدیک می‌شود، شکل (۸.۹) . برای منطقه مرزی کوچک یک دیسک با شعاع a را در نظر می‌گیریم که در صفحه xy قرار دارد. سپس ، عبارت مربوط به‌تابع گرین را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد؛

$$\lim_{\eta\to 0}\oint_{\partial\Omega_a}\frac{\sigma(\mathbf{s}')dS'}{4\pi|\mathbf{s}\pm\eta\hat{\mathbf{n}}-\mathbf{s}'|} \approx \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{s})\lim_{\eta\to 0}\int_0^a\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+\eta^2}} = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{s})a \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad .$$

ما فرض کرده‌ایم که $\sigma(\mathbf{s}')$ (ها) به‌آرامی در داخل دیسک تغییر می‌کنند ، به‌طوری که می‌توان با مقدار آن در موقعیت مرکزی s تقریب زد و از انتگرال خارج کرد. علاوه بر این ، انتگرال در مختصات قطبی ارزیابی شده است. عبارت بالا نشان می‌دهد که اثر دیریکله را می‌توان با خیال راحت انجام داد ، و فرد مستقل از اینکه از بیرون یا



شکل ۸.۹: شماتیک رهیافت دیریشله و نیومن. نقطه مشاهده در $\mathbf{s}+\eta\hat{\mathbf{n}}$ قرار دارد، و از هر طرف داخل یا خارج با انجام حد $\eta \to 0$ به‌مرز نزدیک می‌شویم. کمیت مطلوب انتگرال‌گیری روی یک مرز دیسک کوچک $\partial\Omega_a$ است.

داخل به‌مرز نزدیک شود ، همان مقدار را به‌دست می آورد.
رهیافت نیومن[۱۸] . سپس همان تحلیل را برای رابطه زیر اعمال می‌کنیم؛

$$\frac{\partial V(\mathbf{s}^{\pm})}{\partial n} = \frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s}^{\pm})}{\partial n} - \lim_{\eta\to 0}\hat{\mathbf{n}}\cdot\oint_{\partial\Omega}\frac{\mathbf{s}\pm\eta\hat{\mathbf{n}}-\mathbf{s}'}{4\pi|\mathbf{s}\pm\eta\hat{\mathbf{n}}-\mathbf{s}'|^3}\sigma(\mathbf{s}')dS'$$

این روش حدگیری بنام رهیافت نیومن معروف است. جمله دوم در سمت راست را قبلاً در مشتق قائم با توجه به $\mathbf{r}$ محاسبه کرده‌ایم. حد مشارکت تابشی را می‌توان با خیال راحت انجام داد. با معرفی مختصات قطبی برای جمله دوم خواهیم داشت؛

$$\mp\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{s})\lim_{\eta\to 0}\int_0^a\frac{\eta\rho d\rho}{(\rho^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{s})\lim_{\eta\to 0}\left[-\frac{\eta}{\sqrt{\rho^2+\eta^2}}\right]_0^a \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \mp\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{s})$$

که در آن علامت مثبت یا منفی را باید برای روش مرزی از طرف داخل یا خارج بکار برد. همچنین $(\mathbf{s}-\mathbf{s}')\cdot\hat{\mathbf{n}}=0$ که برای دیسک کوچک مسطح شکل (۸.۹) استفاده کرده‌ایم. از این بحث متوجه می‌شویم که اثر نیومن بسته به‌اینکه از بیرون یا داخل به‌مرز نزدیک می‌شویم نتایج متفاوتی می‌دهد.

در حال حاضر همه مواد لازم را برای محاسبه شرایط مرزی در $\partial\Omega$ در اختیار داریم. به‌دلیل خواص رهیافت دیریشله، پیوستگی پتانسیل به‌طور خودکار برآورده می‌شود؛

$$V(\mathbf{s}^+) = V(\mathbf{s}^-)$$

برای دومین نوع شرایط مرزی، (۴.۹)-ب، باید مشتق پتانسیل را محاسبه کنیم؛

$$\frac{\partial V(\mathbf{s}^{\pm})}{\partial n} = \frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s})}{\partial n} \mp \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega}\frac{\partial G(\mathbf{s},\mathbf{s}')}{\partial n}\sigma(\mathbf{s}')dS' \qquad (۲۶.۹)$$

از پیوستگی جابجائی دی‌الکتریک، سپس بعداز چند عملیات ریاضی ساده، بدست می‌آوریم؛

[۱۸] Neumann Trace

معادله انتگرالی مرزی شبه‌استاتیک

$$\Lambda(\omega)\sigma(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{s},\mathbf{s}')}{\partial n}\sigma(\mathbf{s}')dS' = -\frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s})}{\partial n} \ . \tag{۲۷.۹}$$

در اینجا کمیت زیر را معرفی کرده‌ایم

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_1(\omega)+\epsilon_2(\omega)}{\epsilon_1(\omega)-\epsilon_2(\omega)}$$

رابطه (۲۷.۹) یک معادله انتگرالی است که اجازه می‌دهد توزیع بار σ که از بیرون تحریک شده است را محاسبه کنیم. پس از محاسبه σ، پتانسیل را بدست می‌آوریم و به‌نوبه خود میدان‌های الکتریکی را در سایر نقاط با استفاده از معادله (۲۴.۹) محاسبه می‌کنیم. معادله (۲۷.۹) به‌دلایل متعدد عبارت بسیار جالبی است.

- **دستیابی ساده** نخست، اشتقاق آن نسبتاً ساده است و هدف مرکزی پلاسمونیک‌ها هسته آن، یعنی در توزیع بار سطحی، قرار دارد. به‌همین دلیل نتایج را می‌توان کاملاً شهودی[۱۹] تفسیر کرد.
- **محاسبات ساده** معادله (۲۷.۹) را می‌توان به‌راحتی، همانطور که در بخش ۲.۱۱ به‌صراحت نشان خواهیم داد، برای استفاده عددی پیاده سازی کرد.
- **مودهای ویژه**[۲۰] احتمالاً جذاب‌ترین نکته این است که معادله انتگرالی مرزی را می‌توان با معرفی مودهای ویژه هندسی حل کرد که اجازه می‌دهد هندسه را از خواص مواد جدا کنیم. با معرفی

$$F(\mathbf{s},\mathbf{s}') = \frac{\partial G(\mathbf{s},\mathbf{s}')}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{s}-\mathbf{s}'|}\right)$$

برای مشتق سطحی تابع گرین شروع می‌کنیم. متأسفانه F فقط برای شکل‌های هندسی خاص مانند کره متقارن است و به‌طور کلی باید در تجزیه و تحلیل مودهای ویژه دقت کرد. برای مودهای راست و چپ $u_k(\mathbf{s})$ و $\tilde{u}_k(\mathbf{s})$ تابع F بترتیب جستجو می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شوند؛

مودهای ویژه پلاسمونیک (حد شبه‌استاتیک)

$$\oint_{\partial\Omega} F(\mathbf{s},\mathbf{s}')u_k(\mathbf{s}')dS' = \lambda_k u_k(\mathbf{s})$$

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}')F(\mathbf{s},\mathbf{s}')dS' = \lambda_k \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \tag{۲۸.۹}$$

[۱۹] Intuitively

[۲۰] Eigenmodes

آنها مقادیر ویژه[۲۱] λ_k دارند و مجموعه کاملی با رابطه متعامد زیر را تشکیل می‌دهند؛

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s})u(\mathbf{s})dS = \delta_{kk'}, \tag{۲۹.۹}$$

هانطور که در بخش ۷.۹ با جزئیات بیشتری مورد بحث قرار خواهد گرفت. در آنجا نیز نشان خواهیم داد که می‌توان از رابطه تقارن زیر

$$\oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s},\mathbf{s_1})F(\mathbf{s_1},\mathbf{s}')dS_1 = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s}',\mathbf{s_1})F(\mathbf{s_1},\mathbf{s}'')dS_1 = 0 \tag{۳۰.۹}$$

برای اثبات این که مقادیر ویژه همواره حقیقی و u_k، $\tilde{u}_k$ برطبق رابطه زیر بهم مربوط هستند استفاده کرد.

$$\tilde{u}_k(\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s},\mathbf{s}')u_k(\mathbf{s}')dS' \tag{۳۱.۹}$$

نکته مهم در باره u_k، $\tilde{u}_k$ این است که خواص آنها فقط به‌شکل هندسه نانو ذرات بستگی دارد، در حالی که تمام خواص مواد در $\Lambda(\omega)$ ثبت شده است. وقتی مودهای ویژه u_k، $\tilde{u}_k$، برای مثال از طریف محاسبات عددی، محاسبه شد، می‌توانیم بارهای سطحی را برای برخی اختلال خارجی[۲۲] V_{inc} برحسب این مودهای ویژه بسط دهیم:

$$\sigma(\mathbf{s}) = \sum_k C_k u_k(\mathbf{s})$$

با وارد کردن این عبارت در معادله انتگرالی (۲۷.۹) و استفاده از این حقیقت که u_k یک مود ویژه F است، به‌رابطه زیر می‌رسیم؛

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \sum_{k'} [\Lambda(\omega) + \lambda_{k'}] C'_k u'_k(\mathbf{s}) dS = -\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s})}{\partial n} dS$$

که در آن هر دو طرف معادله را در $\tilde{u}_k$ ضرب کرده و آنها را در مرز ذرات انتگرال‌گیری کرده‌ایم. با استفاده از متعامد بود مودهای ویژه، می‌توانیم فوراً ضرایب بسط را محاسبه کرده و به‌جواب مود ویژه معادله انتگرالی مرزی شبه‌استاتیک بصورت زیر برسیم؛

$$\sigma(\mathbf{s}) = -\sum_k (\Lambda(\omega) + \lambda_k)^{-1} \left[\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s}')}{\partial n'} dS' \right] u_k(\mathbf{s}) \tag{۳۲.۹}$$

این رابطه به‌ویژه برای بسیاری از کاربردها مفید است و اجازه می‌دهد تا معادله انتگرالی مرزی را بر حسب محاسبه انتگرال‌های ساده حل کنیم.

- **تابع گرین**[۲۳] همانطور که در بخش ۷.۹ بیشتر توضیح داده شده است، تابع گرین کل برای یک نانوذره پلاسمونی در حد شبه‌استاتیک می‌تواند به‌صورت زیر بیان کرد؛

[۲۱] Eigenvalues
[۲۲] External Perturbation
[۲۳] Green's Function

بسط مودویژه تابع گرین کلی

$$G_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \sum_k V_k(\mathbf{r}) \left[\frac{\lambda_k \pm \frac{1}{2}}{\Lambda(\omega)+\lambda_k}\right] V_k(\mathbf{r}') \qquad (۳۳.۹)$$

علامت مثبت یا منفی باید برای بسته به‌اینکه آیا $\mathbf{r},\mathbf{r}'$ در خارج یا داخل ذره قرار دارد انتخاب شود و ما پتانسیل‌های ویژه[۲۴] را معرفی کرده‌ایم؛

$$V_k(\mathbf{r}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r},\mathbf{s}')u_k(\mathbf{s}')dS' \qquad (۳۴.۹)$$

پاسخ به‌توزیع بار خارجی $\rho(\mathbf{r})$ را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

$$V(\mathbf{r}) = \epsilon_2^{-1}\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3r'$$

در آن فرض می‌شود که $\mathbf{r}$ در خارج ذره واقع شده و ازاینرو باید علامت مثبت را در معادله (۳۳.۹) درنظر گرفت.

- **نظریه اختلال**[۲۵] همانطور که در زیر برای ذرات تزویجی نشان داده شده است، تحلیل مود ویژه را می‌توان به‌آسانی شبیه به‌مکانیک کوانتومی بصورت نظریه اختلال ارائه کرد.

۱.۳.۹ مودهای‌ویژه پلاسمونیک

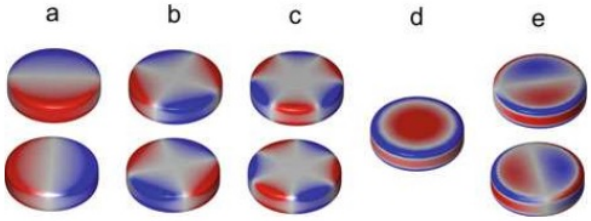
شکل (۹.۹) مودهای ویژه پلاسمونی را برای مثال یک نانودیسک نشان می‌دهد. مودهای کمترین مقدار ویژه دارای مشخصه (الف) دو قطبی، (ب) چهارقطبی و (ج) شش قطبی هستند. در اینجا بارهای سطحی در لبه‌های ذرات متمرکز می‌شوند. علاوه بر این، مودهای (د و ه) محدود به‌سطوح صاف، جایی‌که بار سطحی در جهت شعاعی نوسان می‌کند، وجود دارد. توجه داشته باشید که در آزمایش‌های نوری فقط مود دوقطبی می‌تواند تحریک شود، در حالی که همه مودهای دیگر هیچ گشتاور دوقطبی خالص ندارند و بنابراین از نظر نوری تاریک می‌مانند[۶۳].

در ادامه نحوه تعیین فرکانس تشدید ω_k برای یک مقدار ویژه λ_k را مورد بحث قرار می‌دهیم. از معادله (۳۲.۹)) مشاهده می‌کنیم که توزیع بار سطحی σ وقتی بزرگتر می‌شود که مخرج تشدید به‌صفر برسد،

$$\Lambda'(\omega_k) + \lambda_k = 0 \quad .$$

همانطور که قبلاً برای کره‌ها بحث شد، این بخش موهومی $\Lambda''(\omega)$ است که σ را در تشدید معین نگه می‌دارد. دوباره تأکید می‌کنیم که در عبارت بالا $\Lambda(\omega)$ فقط به‌خواص مواد بستگی

[۲۴] Eigenpotentials
[۲۵] Perturbation Theory



شکل ۹.۹: چند مود ویژه انتخابی برای نانودیسک‌ها. **(الف)** دوقطبی، **(ب)** چهارقطبی، و **(ج)** مود شش‌قطبی با کمترین انرژی، که همگی تبهگن دوگانه هشتند و گره‌هایی در جهت سمت دارند. مودهای تحریک شده بالاتر علاوه بر این مودهای **(د و ه)** گره‌هائی در جهت شعاعی دارند.

دارد، در حالی که λ_k فقط به‌هندسه نانوذرات بستگی دارد. شکل (۱۰.۹) نحوه تعیین فرکانس تشدیدω_k را برای بیضوی گون نقره یا طلا نشان می‌دهد. عکس **(الف)** مقادیر ویژه برای نسبت‌های محوری مختلف، (منفی) مقدار ویژه λ_1 مود دوقطبی را گزارش می‌کند. علاوه بر این، مودهای دیگر مانند مودهای چهارقطبی و شش قطبی وجود دارد که در اینجا به‌آنها نمی‌پردازیم. شکل **(ب)** برای ω و نقره و طلا و برای فرکانس‌های مختلف ω را نشان می‌دهد. در تشدید مقادیر برای $-\lambda_1$ و $\Lambda'(\omega)$، همانطور که در شکل خطوط قرمز برای نسبت محور ۱: ۳ ترسیم شده است، باید برابر یکدیگر باشند. در اینجا تشدید به‌ترتیب در حدود $2eV$ برای طلا و $2.4eV$ برای نقره است (همچنین به‌شکل‌های (۴.۹) و (۵.۹) مراجعه کنید). از این ساختار، علاوه بر این مشاهده می‌کنیم که برای تشدیدهای طلا فقط برای نسبت‌های بزرگ به‌اندازه کافی وجود دارد که در آن انرژی فوتون زیر $2eV$ باقی می‌ماند. برای انرژی‌های فوتونی بزرگتر، تلفات شدید طلا منجر به‌میرایی قابل توجه تشدید پلاسمونی می‌شود که به‌نوبه خود در طیف‌های نوری به‌شدت گسترش می‌یابد. برای مثال، قله ضعیف شکل (۵.۹) را برای کره مشاهده کنید.

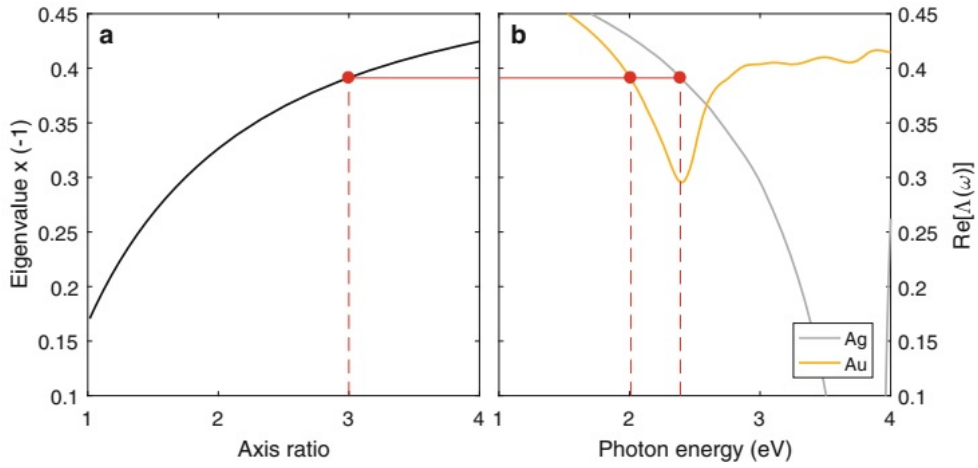
مودهای پلاسمونی بطور مفصل در مراجع [۶۲، ۶۵] مطالعه شده است و در ادامه برخی ازنتایج که در آنجا نشان داده شده است بمنظور درک شهودی مقادیر ویژه گزارش می‌شود. نقطه شروع اولین اتحاد گرین برای دو تابع دلخواه ϕ و ψ بصورت زیر است[۲]

$$\int_{\Omega} \left(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right) d^3r = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial n} dS$$

سپس با قرار دادن $\phi = V_k$ و $\psi = V_{k'}$ با پتانسیل‌های ویژه معادله (۳۴.۹) و استفاده از $\mathbf{E}_k = -\nabla V_k$ همراه $\nabla^2 V_k = 0$ (بدور از مرز) به‌رابطه زیر میرسیم

$$\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'} d^3r = \tau_{1,2} \oint_{\partial\Omega} V_k \left[\frac{\partial V_{k'}}{\partial n}\right]_{1,2} dS \qquad (۳۵.۹)$$

مشتق سطح پتانسیل در سمت راست بعنوان رهیافت نیومن تفسیر شده جائی که موقعیت از داخل یا خارج، همان‌طور که فبلاً برای رابطه بخش ۱.۲.۵ توضیح داده شد، بهم نزدیک و عامل $\tau_{1,2} = \pm 1$ باعث تغییر عمود بر سطح برای Ω_2 می‌شود. از تعریف مودهای ویژه، رابطه (۲۸.۹)، و استفاده از عبارتی شبیه به (۲۶.۹) برای محاسبه مستق سطح پتانسیل‌های ویژه، انتگرال سمت



شکل ۱۰.۹: روش تعیین فرکانس‌های تشدید برای مقدار ویژه λ_k. شکل **(الف)** مقادیر ویژه λ_1 کمترین مود پرانرژی برای بیضوی گون‌ها با نسبت محورهای مختلف را ارائه می‌کند. برای نسبت محور خاص، در اینجا سه شرط تشدید $\lambda_1 + \Lambda'(\omega) = 0$ است. شکل **(ب)** قسمت حقیقی $\Lambda'(\omega)$ برای نقره و طلا همراه با $n_2 = 1.33$ را نشان می‌دهد. نقطه تقاطع λ_1 و $\Lambda'(\omega)$ موقعیت‌های تشدید را نشان می‌دهند. برای طلا، تشدید واضح فقط برای نسبت‌های محوری بزرگتر، بدلیل میرایی بین باند قوی بالای $2\ eV$ وجود دارند.

راست را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد؛

$$\pm \oint_{\partial\Omega} V_k \left[\pm\frac{1}{2} u_{k'}(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} F(\mathbf{s},\mathbf{s}') u_{k'}(\mathbf{s}') dS' \right] dS = (\frac{1}{2} \pm \lambda_k)\delta_{kk'} \ .$$

برای رسیدن به‌عبارت آخری، از تعریف مود ویژه رابطه (۲۸.۹) همراه با رابطه تعامد استفاده کرده‌ایم؛

$$\oint_{\partial\Omega} u_k(\mathbf{s}) G(\mathbf{s},\mathbf{s}') u_{k'}(\mathbf{s}') dS \ dS' \delta_{kk'} \ ,$$

که از معادلات (۲۹.۹) و (۳۱.۹) برآمده است. بنابراین خواهیم داشت؛

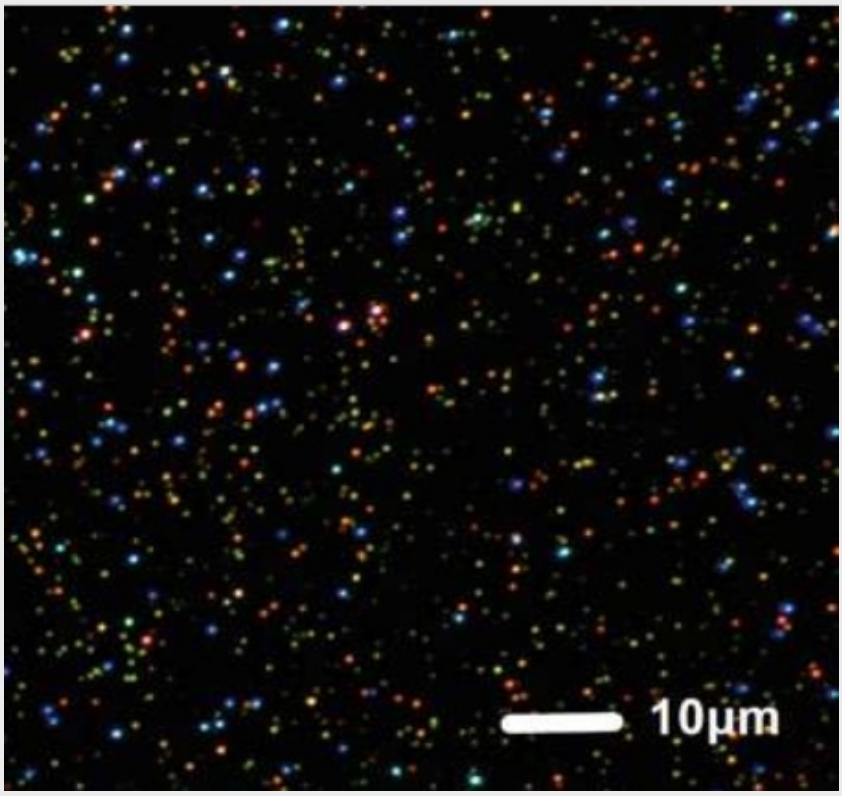
$$\oint_{\partial\Omega_{1,2}} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'} d^3r = (\frac{1}{2} \pm \lambda_k)\delta_{kk'} \ .$$

بعبارت دیگر، میدان‌های مودهای ویژه بر یکدیگر، در هردو طرف داخل و خارج $\Omega_{1,2}$ متعامد هستند. با جمع و تفریق کردن عبارتهای برای Ω_1 و Ω_2 به‌رابطه زیر میرسیم؛

رابطه بین مقادیر ویژه و انرژی‌های الکترواستاتیک

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\frac{W_k^1 - W_k^2}{W_k^1 + W_k^2}, \qquad W_k^{1,2} = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial\Omega_{1,2}} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_k d^3r \ . \tag{۳۶.۹}$$

رنگهای پلاسمونیک



بسته به‌شکل و اندازه نانوذرات فلزی،تشدید پلاسمون‌ها می‌تواند در حالت نور مرئی یا مادون قرمز باشد. تصویربالا یک تصویر میکروسکوپی میدان تاریک را نشان می‌دهد که در آن نانوذرات فلزی روی یک لایه شیشه‌ای قرار گرفته‌اند و از زیر با زاویه بازتاب داخلی کامل روشن شده است. فقط در موقعیت‌های نانوذرات نور پراکنده و رنگها به‌فرکانس‌های تشدید شکل هندسی‌های مختلف بستگی دارد. اثرهای رنگی مشابهی نیز از پنجره‌های رنگ آمیزی شده در کلیساهای قرون وسطایی، جایی که نانوذرات فلزی در یک ماتریس شیشه‌ای تعبیه شده‌اند و رنگ‌های روشن و براق را ایجاد می کنند، مشاهده می‌شوند. از آنجا که ذرات فلزی بر خلاف رنگ آمیزی با پراکندگی نور تخریب نمی‌شوند، رنگ‌ها در طول زمان تغییر نمی‌کنند.

پلاسمون‌ها از این تشدیدها که وابسته به‌نوسانهای بار الکترونی همدوس در سطح مشترک بین نانوذره فلزی و بستر دی‌الکتریک، همراه با میدان‌های قوی محوشونده استفاده می‌کنند. با هدایت تشدید پلاسمون‌های ذره، می‌توان شدت میدان بالا را در حجم‌هایی با ابعاد نانومتر ارائه داد. این اصل ساده پلاسمونیک‌ها برای تحدید نور در مقیاس نانو برای بسیاری از کاربردها مانند حسگرها، برداشت نور[آ] یا درمان سرطان نویدبخش است[۴۴، ۶۴].

تصویر با اجازه از کارستن سانیچسن[ب] گرفته شده است.

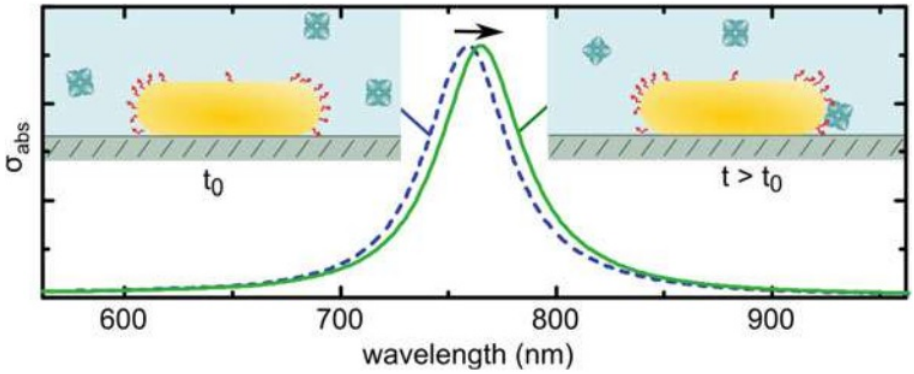
[آ] Light harvesting
[ب] Carsten Sönnichsen

در اینجا $W_k^{1,2}$ انرژی‌های الکترواستاتیک توزیع بار سطحی $u_k(\mathrm{s})$ بترتیب داخل و خارج ذره هستند. این امر امکان تفسیر ساده مقادیر ویژه بر حسب نرژی‌های الکترواستاتیک برای توزیع بار سطحی مود ویژه را فراهم می‌آورد.

- **حد الکترواستاتیک** در محدوده الکترواستاتیک، همه میدان‌ها از فلز، مربوط به$W^1 = 0$، دور می‌شوند. این مربوط به‌مقدار ویژه $\lambda_0 = -1/2$ است که به‌فرکانس تشدید $\omega \to 0$ انتقال می‌یابد. توزیع بار سطحی، مشابه یک مرز فلزی بار دار شده، دارای بار خالص است و معمولاً نمی‌توان آن را از نظر نوری تحریک کرد.

- **مودهای دی‌پُلار** برای تحریک دوقطبی در کره‌ها و بیضوی‌گون‌ها یک میدان الکتریکی ثابت در داخل ذره وجود دارد، شکل (۷.۹). با افزایش نسبت ابعاد، قسمت‌های مثبت و منفی توزیع بار به‌دو انتهای مخالف بیضوی‌گون رانده می‌شوند. در نتیجه، توزیع میدان W_2 در خارج از ذره در مقایسه با W_1 افزایش یافته و مقادیر ویژه به‌مقادیر کمتر منتقل شده و منجر به‌تغییر رنگ تشدید پلاسمون به‌سمت قرمز می‌شود (شکل۶.۹).

- **اعداد تحریک بالا** سرانجام، برای اعداد تحریک بالا، مودهای ویژه پلاسمون، مشابه پلاسمون‌های سطحی با طول موج کوتاه، تعداد زیادی گره دارند. در نتیجه، میدان‌های الکتریکی محکم به‌مرز ذرات محدود شده و به‌همان اندازه به‌ذرات داخل و خارج گسترش می‌یابد. برای$W^1 \approx W^2$، مقدار ویژه پلاسمون سپس به‌صفر می‌رسد.



شکل ۱۱.۹: اصول کار حسگر بر اساس (بیو) پلاسمون. یک نانوذره فلزی با گیرنده‌ها فعال می‌شود. پس از اتصال آنالیت‌ها در یک کانال سیال، محیط دی‌الکتریک تغییر می‌کند و تشدید پلاسمون کمی تغییر می‌کند (خطوط تیره و جامد را برای طیف‌ها مقایسه کنید). این تغییر را می‌توان به‌صورت نوری آشکار کرد، گاهی اوقات حساسیت در سطح تک مولکول است. تصویر از مرجع [۶۶] گرفته شده است.

حسگرهای پلاسمونی

شبیه به‌پلاسمون‌های سطحی، انتقال تشدید پلاسمون بر تغییرات محیط دی‌الکتریک را می‌توان برای حسگرهای پلاسمون (بیو) با حساسیت فوق العاده بالا استفاده کرد. در شکل (۱۱.۹) اصول کار ترسیم شده است و شامل یک نانوذره پلاسمونی با گیرنده‌هایی است که فقط می‌توانند

آنالیت‌های خاص را متصل کنند. هنگامی که آنالیتی که باید شناسایی شود به‌گیرنده متصل می‌شود، محیط دی‌الکتریک دچار تغییر کوچکی می‌شود که می‌تواند به‌عنوان یک تغییر کوچک (کوچک) در موقعیت تشدید پلاسمون مشاهده شود. در مقایسه با پلاسمونهای سطحی در سطوح فلزی مسطح ، پلاسمونهای ذره‌ای دارای محدوده میدان بسیار تنگتری هستند که معمولاً آشکارسازهای مبتنی بر نانوذرات را بسیار حساس می‌کند. حتی در برخی موارد تشخیص اتصال **تک** مولکول‌ها ممکن می‌شود.

بطور کلی، حساسیت S یک حسگر را می۴توان بصورت تغییر فرکانس تشدید $d\omega_{res}$ بر تغییر کوچک ضریب شکست محیط dn_2 تعریف کرد[۶۷].

$$S_\omega = \left(\frac{d\omega_{res}}{dn_2}\right) \quad \cdots \quad (\text{حساسیت})$$

برای آشکارسازی تغییر جزئی مناسب ω_{res}، قله پلاسمون باید بقدر کافی باریک باشد. فرض کنید که Γ نمایشگر عرض قله پلاسمون باشد. می‌توانیم معیار شایستگی **FOM** [۲۶] را بصورت نسبت بین S_ω و Γ تعریف کنیم:

$$\mathbf{FOM} = S_\omega : \Gamma = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\omega_{res}}{dn_2}\right) \quad \cdots \quad (\text{معیار شایستگی})$$

می‌توانیم این کمیت را از مخرج تشدید $\Lambda(\omega) + \lambda_{dip}$ در تشدید دوقطبی برآورد کنیم. با خطی کردن این عبارت نزدیک به‌تشدید می‌دهد؛

$$\Lambda(\omega) \approx \Lambda_{res} + \left[\frac{\delta\Lambda}{\delta\epsilon_1}\right]\left(\frac{\delta\epsilon_1}{\delta\omega}\right)\delta\omega + \left[\frac{\delta\Lambda}{\delta\epsilon_2}\right]\delta\epsilon_2$$

اکنون از این که جمله داخل براکت فقط علامت عوض می‌شود، بطوری که فوراً از تعریف Λ مشاهده می‌شود، برای بدست آوردن تغییر فرکانس تشدید از $Re[\Lambda + \lambda_{dip}] = 0$، استفاده می‌کنیم؛

$$\delta\omega \approx \left(\frac{\delta\epsilon_1'}{\delta\omega}\right)^{-1}\delta\epsilon_2$$

اگر فرض کنیم که عرض قله پلاسمون تقریباً به‌بخش موهومی تابع دی‌الکتریک فلز بستگی دارد، $\Gamma \propto \epsilon_1''$، خواهیم داشت

$$\mathbf{FOM} \propto \left(\epsilon_1''\frac{\delta\epsilon_1'}{\delta\omega}\right)^{-1}$$

نکته مهم این است که عبارت فقط به‌خواص مواد $\epsilon_1', \epsilon_1''$ فلز در تشدید پلاسمون ذرات بستگی دارد. این برای میرایی کوچک و در نقطه کاری که ϵ_1' بشدت به‌فرکانس بستگی دارد، بیشترین است. با تنظیم شکل هندسی ذرات، می‌توان فرکانس تشدید و به‌نوبه خود معیار شایستگی حسگرهای پلاسمونی را تنظیم کرد.

[۲۶] Figure Of Merit; (FOM)

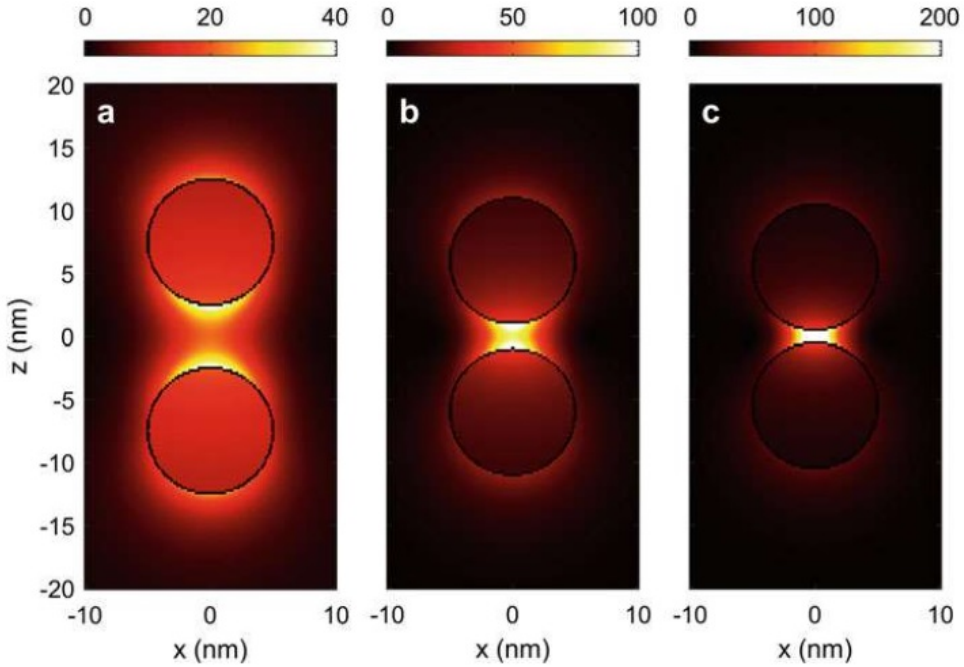
۲.۳.۹ تزویج ذرات

یک رویکرد موفق برای افزونگی میدان نانوذرات پلاسمونیک تزویج بین ذرات است. شکل (۹.۱۲) وضعیتی را نشان می‌دهد که دو نانوکره به‌یکدیگر نزدیک شده و توسط یک موج صفحه‌ای با بردار قطبش جهت محور تقارن تحریک می‌شوند. همانطور که از شکل مشخص است، شدت میدان در فرکانس تشدید پلاسمون مربوط به‌ساختار تزویج شده هنگامی که ذرات به‌یکدیگر نزدیک می‌شوند، افزایش می‌یابد. در ادامه چنین تزوج بین ذره‌ای را در چارچوب مودهای ویژه تحلیل می‌کنیم.

معادله مقدار ویژه ذرات تزوجی بقرار زیر است؛

$$\oint_{\partial\Omega} F(\mathbf{s},\mathbf{s}')U_k(\mathbf{s}')dS' = \Lambda_k U_k(\mathbf{s}) \tag{۳۷.۹}$$

جایی‌که انتگرال بر مرزهای هر دو ذره گسترش می‌یابد، در زیر به‌عنوان چپ (L) و راست (R) نشان می‌دهیم. در اینجا $U_k(\mathbf{s})$ مودهای ویژه با انرژی ویژه Λ_k هستند. در ادامه، مودهای ویژه هر ذرات را با u_n^R ، u_m^L و انرژی‌های ویژه مربوطه را با λ_n^R، λ_m^L نشان داده و از مودهای u_m^L، u_n^R که یک مجموعه کامل تشکیل می‌دهد، استفاده می‌کنیم. به‌همین دلیل، معادله مقادیر ویژه برای ذرات تزویجی می‌تواند بر حسب مودهای ویژه ذرات بدون تزویج بسط داده شود.



شکل ۱۲.۹: افزونگی شدت برای کره‌های نقره‌ای تزویجی بقطر ده نانومتر. افزونگی میدان نزدیک $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$ در انرژی تشدید برای فاصله بین **الف** پنج نانومتر، **ب** دو نانومتر، و **ج** یک نانومتر و نور در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ قطبی شده است. نوار رنگی با توجه به‌محدوده عامل افزونگی در بالای عکس‌ها گزارش شده است.

معادله مقدار ویژه برای ذرات تزویجی با بسط مودهای ویژه ذرات تزویجی از

طریق مودهای ویژه ذرات بدون تزویج شروع می‌کنیم

$$U_k(\mathbf{s}) = \begin{cases} \sum_m C^L_{m,k} u^L_m(\mathbf{s}) & \text{برای} \quad \mathbf{s} \in \partial\Omega^L \\ \sum_n C^R_{n,k} u^R_n(\mathbf{s}) & \text{برای} \quad \mathbf{s} \in \partial\Omega^R \end{cases}$$

در اینجا $C^L_{m,k}$ و $C^R_{n,k}$ ضرایب بسط هستند که باید بدست آورد. سپس این عبارت را به‌معادله (۳۷.۹) وارد می‌کنیم. معادله را از سمت چپ در مودهای ویژه الحاقی[۲۷] $\tilde{u}^L_m$ و $\tilde{u}^R_n$ ضرب کرده و خواهیم داشت؛

$$\lambda^L_m C^L_{m,k} + \sum_{n'} C^R_{n',k} \oint \tilde{u}^L_m(\mathbf{s}_L) F(\mathbf{s}_L, \mathbf{s}_R) u^R_{n'}(\mathbf{s}_R) dS_L dS_R = \Lambda_k C^L_{m,k}$$

$$\lambda^R_n C^R_{m,k} + \sum_{m'} C^R_{m',k} \oint \tilde{u}^R_n(\mathbf{s}_R) F(\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_L) u^L_{m'}(\mathbf{s}_L) dS_L dS_R = \Lambda_k C^R_{n,k} \tag{۳۸.۹}$$

از عبارات مقادیر ویژه معادله (۲۸.۹) استفاده کرده تا انتگرال‌های مرزی را با $F(\mathbf{s}_L, \mathbf{s}_L)$ ، $F(\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_R)$ به‌مقادیر ویژه λ^L λ^R مربوط سازیم. برای انتگرال‌های مرزی باقی مانده، نماد زیر را معرفی می‌کنیم؛

$$\mathcal{F}_{mn} = \oint \tilde{u}^L_m(\mathbf{s}_L) F(\mathbf{s}_L, \mathbf{s}_R) u^R_n(\mathbf{s}_R) dS_L dS_R \tag{۳۹.۹}$$

بطوری که در تمرین ۱۰.۹ بحث شده است، انتگرال یک مقدار حقیقی است و دارای خاصیت تقارن $\mathcal{F}_{mn} = \mathcal{F}_{nm}$ است. با استفاده از اولین اتحاد گرین، می‌توانیم این عبارت را در امتداد همان خط قبلی خود برای بدست آوردن معادله (۳۵.۹) به‌میدان‌های الکتریکی $\mathbf{E}^L_m = -\nabla V^L_m$ و $\mathbf{E}^R_n = -\nabla V^R_n$ مربوط کنیم. خواهیم داشت؛

$$\int_{\Omega_2} \mathbf{E}^L_m \cdot \mathbf{E}^R_n d^3r = -\sum_{j=L,R} \oint_{\partial\Omega^j} V^L_m(\mathbf{s}_j) \left[\frac{\partial V^R_n(\mathbf{s}j}{\partial n}\right] dS_j = -2\mathcal{F}_{mn}$$

که نشان می‌دهد عناصر ماتریس $\mathcal{F}_{mn}$ را می‌توان بر حسب انرژی برهم کنش الکترواستاتیک بین توزیع بار سطحی وابسته به‌مودهای ویژه هر ذره مربوط کنیم. ماتریس $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ را برای تشکیل عناصر این ماتریس و همچنین ماتریس‌های $\bar{\bar{\lambda}}^R$ و $\bar{\bar{\lambda}}^L$ با مقادیر ویژه تک ذره در قطر ماتریس معرفی می‌کنیم. برای بسط ضرایب، همراه با ماتریس‌های $\bar{\bar{C}}^R$ ، $\bar{\bar{C}}^L$ معادله (۳۹.۹) را به‌شکل فشرده بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{\lambda}}^L & \bar{\bar{\mathcal{F}}} \\ \bar{\bar{\mathcal{F}}} & \bar{\bar{\lambda}}^R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\bar{C}}^L \\ \bar{\bar{C}}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{C}}^L & \bar{\bar{C}}^R \end{pmatrix} \cdot \bar{\bar{\Lambda}} \tag{۴۰.۹}$$

بنابراین، با قطری نمودن اولین ماتریس سمت چپ، می‌توانیم با استفاده از مودهای هر ذره به‌عنوان توابع پایه، انرژی ویژه Λ و تابع ویژه ذرات تزویجی را محاسبه کنیم.

[۲۷] Adjoint Eigenmodes

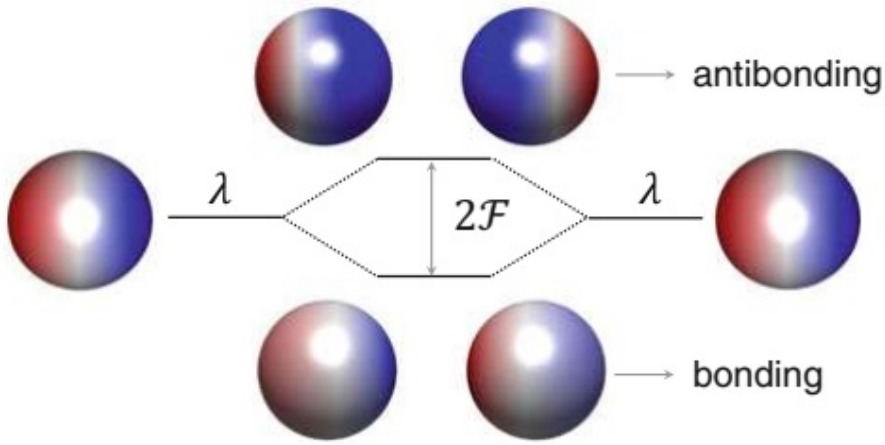
به‌عنوان یک مثال ساده، دو ذره یکسان مانند کره را که در شکل (۱۲.۹) نشان داده شده است، انتخاب کرده و برای هر ذره یک مود $u_{L,R}$ با انرژی ویژه λ در نظر می‌گیریم. معادله ماتریسی (۴۰.۹) بصورت زیر تقلیل می‌یابد؛

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} = (C_L \;\; C_R) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} ,$$

که در آن $\mathcal{F}$ برای برهم‌کنش بین دو ذره بحساب می‌آید. بنابراین، مودهای ویژه ذره تزویجی را می‌توان به‌مودهای مقید و نامقید[۲۸]، $C_L = \pm C_R$، وابسته کرده و مقادیر ویژه مربوطه خواهد بود؛

مقادیر ویژه ذرات تزویجی

$$\Lambda_{1,2} = \lambda \pm \mathcal{F} \tag{۴۱.۹}$$



شکل ۱۳.۹: طرح کلی تزویج بین دو نانوذره پلاسمونی. تشدید دوقطبی هر ذره (مقدار ویژه λ) از طریق $\mathcal{F}$ به‌هم تزویج و به‌یک مقید (گشتاور دوقطبی موازی) و نامقید (گشتاور دوقطبی غیرموازی) تقسیم می‌شوند.

طرح کلی این مورد در شکل (۱۳.۹) نشان داده شده است. دو مود دوقطبی کره‌های مجزا تزویج شده و مقید (جهت‌گیری موازی $\longrightarrow\longrightarrow$ گشتاور دوقطبی) و نامقید (جهت‌گیری $\longrightarrow\longleftarrow$ گشتاور دوقطبی غیرموازی[۲۹]) را تشکیل می‌دهند. فقط پیکربندی مقید دارای گشتاور دوقطبی خالص است و میتوانند از نظر نوری تحریک شوند. برای این پیکربندی، بارهای در ناحیه فاصله

[۲۸] Bonding and Anti-bonding modes

[۲۹] Anti-parallel

دو کره علامت‌های متفاوتی دارند، بنابراین میدان بسیار قوی در این فاصله، همانطور که قبلاً در شکل (۱۲.۹) نشان داده شد، بوجود می‌آید.

شکل (۱۴.۹) مقادیر ویژه کمترین نانوکره‌های تزویجی را بر حسب تابعی از فاصله بین دو کره نشان می‌دهد. بطوری که از جواب دقیق می‌توان مشاهده کرد (خطوط قرمز)، مقادیر ویژه کمترین برای مود مقید $\longrightarrow\longrightarrow$، وقتی کره‌ها به‌یکدیگر نزدیک می‌شوند، کوچکتر شده و ازاینرو تشدید پلاسمون بسمت قرمز انتقال می‌یابد. علاوه براین، مودهای دیگری وابسته به‌گشتاور دوقطبی که در جهت عمود بر محور تقارن $\uparrow\downarrow$، و پیکربندی نامقید $\uparrow\uparrow$، $\longrightarrow\longleftarrow$ اینگونه مودها را می‌نوان مشاهده کرد. مقدار ویژه تقریبی محاسبه شده از معادله (۴۱.۹) به‌خوبی با نتایج دقیق، حداقل برای فاصله‌های به‌اندازه کافی بزرگ، سازگار است. برای فواصل کوچک بین ذرات، دیگر تنها درنظرگرفتن مودهای دوقطبی کافی نیست. هنگامی که علاوه بر مودهای دوقطبی با مقدار ویژه λ_1 و مودهای چهارقطبی با λ_2 (همه آنها موازی با محور تقارن)، ماتریس برهم‌کنش معادله (۴۰.۹) را شامل می‌شود.

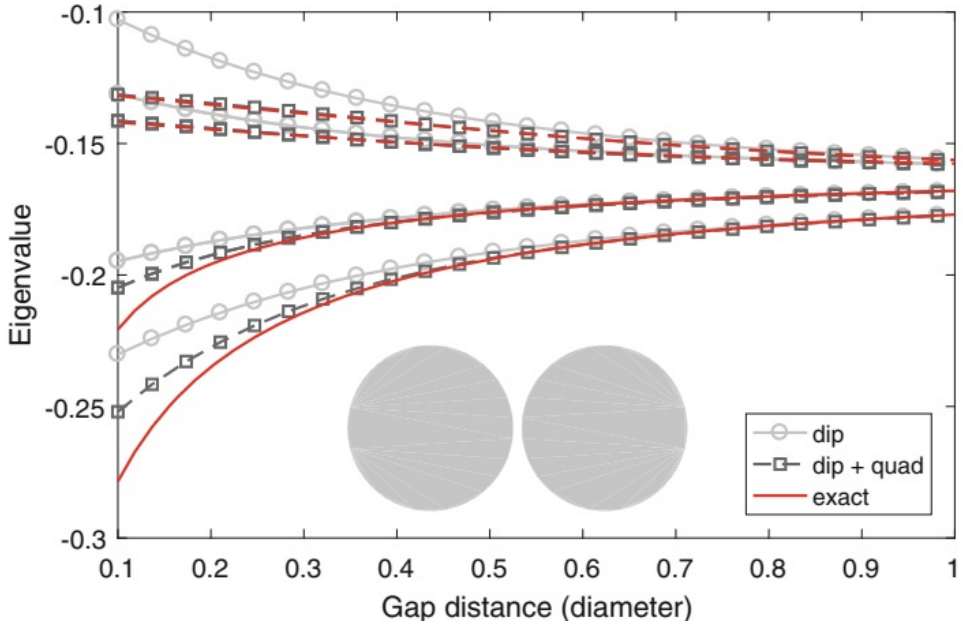
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ 0 & \lambda_2 & \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{22} \\ \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} & \lambda_1 & 0 \\ \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{22} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathcal{F}_{11}$، $\mathcal{F}_{12}$ برهم کنش بین مودهای دوقطبی و چهارقطبی اصلی و $\mathcal{F}_{12}$ تزویج متقابل دوقطبی-چهارقطبی هستند. ماتریس فوق را می‌توان قطری کرد و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,2} &= \tfrac{1}{2}\left[(\lambda_1^- + \lambda_2^-) \pm \sqrt{(\lambda_1^- + \lambda_2^-)^2 + 4\mathcal{F}_{12}^2}\right] \\ \Lambda_{3,4} &= \tfrac{1}{2}\left[(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) \pm \sqrt{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)^2 + 4\mathcal{F}_{12}^2}\right] \end{aligned} \tag{۴۲.۹}$$

که در آن $\lambda_1^\pm = \lambda_1 + \mathcal{F}_{11}$ و $\lambda_2^\pm = \lambda_2 + \mathcal{F}_{22}$ است.

با بیان کلمات، مودهای مقید و نامقید به‌صورت تأثیر $\mathcal{F}_{12}$ از یکدیگر دورتر می‌شوند. مربع‌های شکل (۱۴.۹) نتایج مربوطه را نشان می‌دهند. در واقع، سازگاری با نتایج دقیق بسیار بهتر از مورد دوقطبی معادله (۴۱.۹) است. مخلوط کردن مودهای دوقطبی و چهارقطبی را می‌توان در توزیع بار نشان داده شده در شکل (۱۳.۹) برای مودهای مقید و نامقید، که در آن توزیع با توجه به‌کره‌های جدا نشده تغییر می‌کند، مشاهده کرد: در پیکربندی مقید، بار بیشتری در منطقه شکاف، که منجر به‌افزایش میدان‌های شکاف و تغییر رنگ تشدید پلاسمون مربوطه می‌شود، در حالی که در پیکربندی نامقید بار از منطقه شکاف بیرون رانده می‌شود. هنگامی که فاصله بین کره‌ها در شکل (۱۴.۹) بیشتر کاهش می‌یابد، مقادیر ویژه دقیق و تقریبی دوباره شروع به‌انحراف کرده، که نشان دهنده سهم قابل توجهی از مودهای چندقطبی بیشتر است. مدلهای هیبریداسیون نانوذرات پلاسمونی پیچیده‌تر در مقالات مطالعه شده است، به‌عنوان مثال[۶۸].



شکل ۱۴.۹: مقادیر ویژه (خط قرمز) و تقریبی (نمادها) برای کره‌های تزویجی و فاصله‌های مختلف دو کره. نتایج دایره‌ها براساس نظریه اختلال که فقط شامل مودهای دوقطبی تک کره است. نتایج مربع‌ها شامل مودهای دوقطبی و چهارقطبی است.

۴.۹ نگاشت همدیس

اُپتیک تبدیلی[۳۰] و نگاشت همدیس[۳۱] موضوعات سرگرم کننده‌ای هستند که به‌دست آوردن راه حل‌های تحلیلی برای هندسه نانوذرات در جایی که انتظار نمی‌رود چنین راه حل‌هایی وجود داشته باشد ، امکان پذیر کرده است. نگاشت همدیس که سابقه‌ای در الکترواستاتیک و مکانیک سیالات دارد، توسط جان پندری و همکاران[۶۹] به‌زمینه پلاسمونیک آورده شد. برای کارهای مرتبط قبلی نیز به[۷۰] مراجعه کنید. در اینجا ساده‌ترین شکل آنرا که فرض برآورد تقریبی شبه‌استاتیک همراه با نانوساختارهایی است که بی‌نهایت در امتداد z (هندسه نانوسیم) گسترش یافته‌اند ، فرض می‌کنیم ، به‌طوری که پتانسیل مقیاس $V(x,y)$ را می‌توان از معادله دوبعدی لاپلاس بدست آورد.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

برای حفظ مشخصه دو بعدی مسئله، V_{inc} پتانسیل ورودی نباید به z بستگی داشته باشد. به‌همین نحو، در صورت توزیع بار، معادله لاپلاس باید با معادله پواسون جایگزین شود، بنابراین فرض می‌کنیم که توزیع شامل بارهای خطی است که در طول z مستقر شده‌اند.

در اینجا ترفند جادویی اُپتیک تبدیلی و نگاشت همدیس آورده شده است: در اینگونه مسائل

[۳۰] Transformation optics

[۳۱] Conformal Mapping

دو بعد می‌توانیم با تحلیل مختلط [۳۲] که به‌طور خلاصه در پیوست الف آورده شده، بعنوان ابزاری قدرتمند استفاده کنیم. اجازه دهیدمتغیر مختلط $z = x + jy$ را معرفی کنیم. هر تابعی مانند $f(z)$ را می‌توان به‌دو بخش حقیقی و موهومی مطابق زیر تجزیه کرد.

$$f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

در ادامه مطلوب ما در توابع **تحلیلی** است که در آن توابع را می‌توان بر حسب سری تیلور در اطراف نقطه z_0 بسط داده و در حد $\lim_{z\to z_0} f(z)$ تابع $f(z_0)$، صرفنظر از آنکه چگونه به z_0 نزدیک می‌شویم، بما می‌دهد. توابع تحلیلی [۳۳] صاف و بطور معین قابل مشتق‌گیری است. ضمناً توابع را با یک قطب مانند $1/z$ در نظر می‌گیریم که $f(z)$ در همه جا بجز $z = 0$ تحلیلی است. بطوری که در پیوست الف نشان داده شده است، هر تابع تحلیلی را می‌توان از معادله‌های کوشی-ریمان (الف-۲) بدست آورد که بخشهای حقیقی و موهومی از طریق روابط زیر بهم مربوط هستند؛

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \ . \tag{۴۳.۹}$$

به‌عنوان پیامد مستقیم این تحلیل، u, v توابع هارمونیکی هستند. این توابع در معادله لاپلاس دو بعدی صدق می‌کنند. در واقع داریم؛

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

با همین روش می‌توان نشان داد که v یک تابع هارمونیکی است. در ادامه چند ویژگی قابل توجه از توابع تحلیلی، که بعداً در این بخش ثابت خواهیم کرد، را بیان می‌کنیم. اگر تبدیل مختصات $z' = g(z)$ را انجام دهیم، در این صورت تابع زیر

$$u'(x', y') = u\Big(x'(x, y), y'(x, y)\Big) \tag{۴۴.۹}$$

نیز یک تابع هارمونیکی است. یک ویژگی هندسی مهم تغییر مختصات با توابع تحلیلی $g(z)$ این است که آنها زاویه‌ها را حفظ می‌کنند و بنابراین یک نگاشت همدیس را تعریف می‌کنند. این نتایج مهم زیر را دارد. فرض کنید که

- تابع $V(x, y)$ جواب معادله لاپلاس یا پوآسون است،
- برای مقدار مفروض V در مرز ∂D ناحیه D دو بعدی
- و (یا) مشتق قائم مفروض $\frac{\partial V}{\partial n}$ در مرز∂D

در این صورت پتانسیل تبدیل شده نیز

$$V'(x', y') = V\Big(x'(x, y), y'(x, y)\Big)$$

جواب معادله لاپلاس یا پوآسون است. با توجه به‌حفظ زوایا (به‌طور خاص ، به‌دلیل اینکه سطوح خارجی $\hat{\mathbf{n}}$، عمود بر مرز باقی می‌مانند) ، راه حل جدید شرایط مرزی یکسانی را برای مرز تغییر

[۳۲] Complex Analysis
[۳۳] Analytic functions

یافته $\partial D'$ برآورده می‌کند. در زمینه پلاسمونیک از این ارتباط نزدیک بین جواب‌ها می‌توان به‌شرح زیر استفاده کرد.

- **ساختار مرجع** اجازه دهید D یک حوزه دو بعدی از یک ساختار سیم مانند با پسوند بی‌نهایت در طول z باشد که با موادی پر شده است که مقداری مجاز ϵ دارد. ما با $V(x,y)$حل معادله لاپلاس یا پواسون را که دارای شرایط مرزی مناسب معادله (۴.۹) است ، نشان می دهیم. در مرز ∂D

- **ساختار تبدیلی** اجازه دهید $x' = x'(x,y)$، $y' = y'(x,y)$ تبدیل مختصاتی است که زوایا را حفظ می‌کند. در این صورت $V'(x',y')$ نیز جواب معادله لاپلاس یا پوآسون است که با ساخت ، شرایط مرزی مناسب معادله (۴.۹) را برآورده می کند. در مرز تبدیل شده $\partial D'$.

در واقع، این یافته کاملاً قابل توجه است. کافی است معادله لاپلاس یا پواسون را یکبار برای یک ساختار واحد با مرز ∂D حل کنید، تعداد بیشماری راه حل برای مرزهای تبدیل شده $\partial D'$ سپس بلافاصله از طریق تغییرات مختصات ساده دنبال می شود.

۱.۴.۹ چند نمونه منتخب

قبل از اینکه به‌جزئیات ریاضی نگاشت همدیس و مفاهیم آن در حل معادله لاپلاس بازگردیم، ارائه چند مثال منتخب احتمالاً آموزنده است تا ایده‌ای از آنچه این رویکرد می‌تواند انجام دهد ارائه دهیم. در ادامه نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$z' = g(z) = \frac{1}{z^*} \tag{۴۵.۹}$$

که آن وارونگی صفحه مختلط را تعریف می‌کند. و در بخش‌های حقیقی و موهومی بیان می‌شود، ازاینرو داریم؛ (توجه داشته باشید که بدون مزدوج مختلط در مخرج، مختصات y به‌سادگی علامت منفی می‌گیرد)

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y' = \frac{y}{x^2+y^2}$$

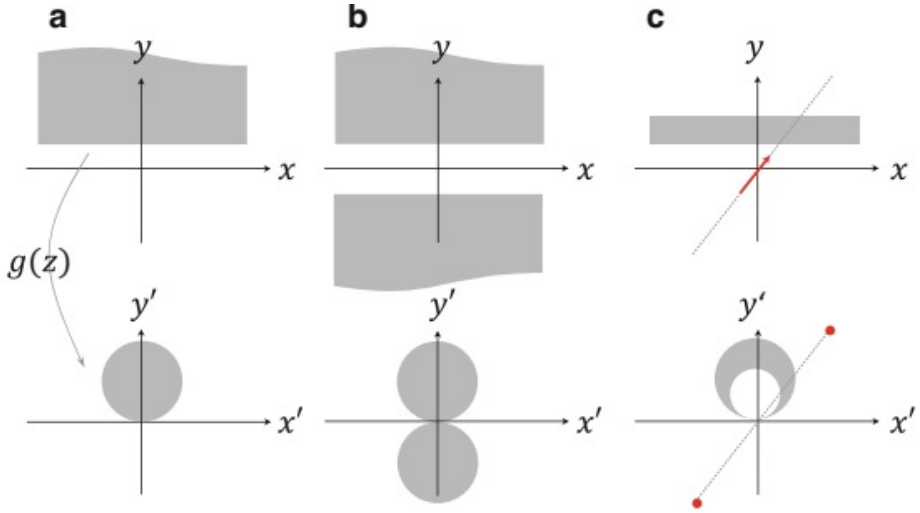
صفحه مختلط یک خط مستقیم بموازات محور حقیقی در نظر گیرید؛

$$z(t) = y_0\Big(\tan t + j\Big) \tag{آ۴۶.۹}$$

که در آن $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ پارامتر مقدار حقیقی بنحوی است که $x(t)$ تمام مقادیر را پوشش می‌دهد. با این فوراً خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} x'(t) &= y_0^{-1}\frac{\tan t}{\tan^2 t+1} = \frac{\sin t\cos t}{y_0} = \frac{\sin 2t}{2y_0} \\ y'(t) &= y_0^{-1}\frac{1}{\tan^2 t+1} = \frac{\cos^2 t}{y_0} = \frac{1+\cos 2t}{2y_0} \end{aligned} \tag{ب۴۶.۹}$$

بعبارت دیگر، یک خط مستقیم با پارامتر jy_0 به‌یک دایره بشعاع $1/(2y_0)$ به‌مرکز $j/(2y_0)$ تبدیل می‌شود. شکل (۱۵.۹) نمونه‌هائی از اینگونه نگاشت را نشان می‌دهد. شکل (الف) نشان می‌دهد که چگونه یک تیغه نیمه نامتناهی پُر از مواد دی‌الکتریک به‌یک استوانه نگاشت می‌شود. به‌همین ترتیب، دو تیغه (ب) به‌دو استوانه مماسی نگاشت می‌شوند. این ساختار بسیار قابل توجه است زیرا حاوی یک نقطه منحصر به‌فرد است، زیرا نقطه تماس دو استوانه، مطالعه آن با مدلهای غیرتحلیلی بسیار دشوار است. در نهایت، شکل (ج) نگاشت یک تیغه به‌یک استوانه هلالی شکل را نشان می‌دهد. مرجع [۶۹] یک دستگاه برداشت نور پلاسمونیک[۳۴] را پیشنهاد می‌کند.



شکل ۱۵.۹: نگاشت همدیس وارونگی صفحه مختلط. **(الف)** نیم-فضائی نیمه نامتناهی بر روی یک استوانه نگاشته شده است. **(ب)** دو نیم-فضائی که با یک شکاف بر روی دو استوانه "مماسی" نگاشته شده است. **(ج)** یک تیغه بر روی یک استوانه هلالی شکل نگاشته شده است. در این شکل‌ها همچنین تبدیل منبع خارجی، که در اینجا یک دوقطبی، به‌دو بار واقع در بی‌نهایت نگاشته شده، را نشان می‌دهیم. میدان الکتریکی مربوطه یک میدان ثابت است که در امتداد جهت دوقطبی قرار دارد.

ما همچنین نگاشت تحریک، جایی که یک دوقطبی در مبدا (چارچوب اصلی) به‌دو بار در بی‌نهایت (چارچوب تبدیل‌شده) نگاشت می‌شود، را نشان میدهیم. میدان مربوطه ثابت بوده، شبیه تحریک یک موج صفحه‌ای در حد شبه‌استاتیک، با یک میدان الکتریکی ثابت در امتداد جهت دوقطبی است. به‌روشی معکوس، می‌توانیم از دو بار در بی‌نهایت درچارچوب اصلی برای شبیه سازی تحریک یک دوقطبی نوسانی در چارچوب تبدیل‌شده، استفاده کنیم.

۲.۴.۹ جزئیات نگاشت همدیس

قبل از ارائه نتایج برای ساختارهای نشان‌داده‌شده، در شکل (۱۵.۹)، اثبات‌هایی که معادله لاپلاس تحت نگاشت همدیس معتبر باقی می‌ماند و این نگاشت زاویه‌ها را حفظ می‌کند، را ترسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $g(z)$ نگاشت یک به‌یک است، به‌این معنی که یک تبدیل

[۳۴] Plasmonic Light-Harvesting Device

معکوس وجود دارد. این حتماً برای مثال وارونگی صفحه مختلط که در معادله (۴۵.۹) داده شده، صادق است. از معادله (۴۴.۹) مربوط به‌توابع u, v، با مختصات اولیه و بدون پریم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}$$

با ادامه در امتداد همان خطوط خواهیم داشت؛

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial x}{\partial x'}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big(\frac{\partial x}{\partial x'}\Big)\Big(\frac{\partial y}{\partial x'}\Big) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial y}{\partial x'}\Big)^2$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial x}{\partial y'}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big(\frac{\partial x}{\partial y'}\Big)\Big(\frac{\partial y}{\partial x'}\Big) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial y}{\partial y'}\Big)^2$$

با استفاده از معادلات کوشی-ریمان[۳۵]

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x'} = -\frac{\partial x}{\partial y'}$$

برای تابع مختلط $z = x + jy$، در این صورت میدهد:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \left[\Big(\frac{\partial x}{\partial x'}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial y'}\Big)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{۴۷.۹}$$

بنابراین، هر جا u جواب معادله لاپلاس باشد، u' نیز هست. برای اینکه نشان دهیم در نگاشت همدیس زوایا حفظ می‌شوند، بصورت زیر عمل می‌کنیم؛

- **فاز و زاویه گرادیان** با معرفی فاز یا آرگومان عدد مختلط شروع می‌کنیم؛

$$\ln\left(re^{j\theta}\right) = \ln r + j\theta \Longrightarrow \theta = \arg z = Im(\ln z)\ .$$

منحنی $z(t)$ که به‌پارامتر t بستگی دارد را در نظر گیرید. مشتق نسبت به‌پارامتر t را با $\dot{z}(t)$ نشان می‌دهیم و آن مماس بر محنی را میدهد. زاویه گرادیان این مماس در این صورت می‌دهد؛

$$\theta = \arg\left[\dot{z}(t)\right]$$

- **تقاطع منحنی‌ها** سپس دو منحنی $z_1(t)$ و $z_2(t)$ که فرض می‌شود در نقطه $z = z_1(t_1) = z_2(t_2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند، معرفی می‌کنیم. برای هر مقدار t می‌توانیم یک مماس بر منحنی تعریف کنیم. زاویه بین دو منحنی در نقطه تقاطع را می‌توان بصورت زیر بیان کرد؛

[۳۵] Cauchy–Riemann equations

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arg[\dot{z}_2(t_2)] = -\arg[\dot{z}_1(t_1)]$$

- **نگاشت همدیس** پس از نگاشت همدیس، منحنی $z(t)$ به $z' = g[z(t)]$ تبدیل می‌شود. با استفاده از قانون زنجیره‌ای، در این صورت خواهیم داشت؛

$$\dot{z}(t) = \frac{dz'}{dt} = \frac{dg}{dz}\frac{dz}{dt} = g'\left(z(t)\right)\dot{z}(t)$$

برای زاویه بین منحنی‌های تبدیل شده، بدست می‌آید؛

$$\theta' = Im\Big\{\ln\left[g'\left(z\right)\dot{z}_2(t_2)\right]\Big\} - Im\Big\{\ln\left[g'\left(z\right)\dot{z}_1(t_1)\right]\Big\} = \arg\dot{z}_2 - \arg\dot{z}_1$$

بنابراین، اگرچه زاویه‌های بردار مماسی $\dot{z}_{1,2}(t)$ در هنگام نگاشت تغییر می‌کنند، اما زاویه نسبی بین منحنی‌ها یکسان باقی می‌ماند. این همان چیزی است که قبلاً آن را حفظ زوایا نامیده‌ایم.

مهمتر از همه برای زمینه پلاسمونیک، جهت $\hat{\mathbf{n}}$ عمود بر مرز مفروض ذرات ∂D به‌جهت جدیدی $\mathbf{n}'$ نگاشته می‌شود که دوباره عمود بر مرز تبدیل شده $\partial D'$ است. این نتیجه مهمی دارد که پتانسیل $V(x,y)$ در مرز ∂D شرایط مرزی دیریشله و نیومن معادله (۴.۹) را برآورده می‌کند که پتانسیل $V'(x',y')$ نگاشته شده شرایط مرزی را در $\partial D'$ نیز برآورده می‌کند.

۳.۴.۹ استوانه‌های مماسی

در اینجا سرگرمی به‌پایان می‌رسد و کار واقعی شروع می‌شود. در زیر استوانه‌های مماسی[۳۶] را که با یک میدان الکتریکی ثابت در امتداد جهت y اعمال شده است، شکل (۱۵.۹)-ب، در نظر می‌گیریم. مطلوب خاص ما پتانسیل در نقطه تماس خواهد بود.

- **تحریک دوقطبی** رابطه ابتدائی ما پتانسیلی تولید شده توسط یک دوقطبی واقع در مبداء مختصات و در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ است؛

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_b}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}dz = \frac{1}{2\pi\epsilon_b}\frac{y}{r^2}$$

که انتگرال‌گیری بر روی تمام محور z است. در اینجا ϵ_b گذردهی محیط بستر دوقطبی است. از آنجا که این دوقطبی در شکاف ناحیه دو تیغه فلزی است، شکل (۱۵.۹)-ب، می‌توانیم معادله پوآسون را از طریق تبدیل فوریه در امتداد xها حل کنیم. تبدیل فوریه پتانسیل نسبت به x خواهد بود؛

$$\tilde{V}_{dip}(x,y) = \frac{1}{2\pi\epsilon_b}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jkx}\frac{y}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2\epsilon_b}\mathbf{sgn}(y)e^{-|ky|} \qquad (۴۸.۹)$$

[۳۶] Kissing Cylinders

• **معادله پوآسون برای نیم-فضای بی‌نهایت** پتانسیل القائی جواب معادله لاپلاس بصورت زیر است؛

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)e^{-jkx}e^{\pm y}=0$$

چون V_{dip} در معادله (۴۸.۹) تابع فردی نسبت به y است، پتانسیل القائی باید تابع فردی باشد. با این اطلاعات، می‌توانیم رابطه پتانسیل القائی برای $(y>0)$ بصورت زیر بنویسیم؛

$$\tilde{V}_{ind}(k,y)=\begin{cases} a(k)e^{-jkx}\sinh(|k|y) & \text{برای} \quad y<\delta/2 \\ b(k)e^{-jkx}e^{|k|(y-\delta/2)} & \text{برای} \quad y>\delta/2 \end{cases}$$

که در آن $-\delta/2<y<\delta/2$ مربوط به‌ناحیه شکاف بین دو نیم فضای نیمه بی‌نهایت است که با موادی گذردهی ϵ، شکل (۱۵.۹)-ب، پُر شده است. برای $y>\delta/2$ تابع پتانسیلی انتخاب کرده‌ایم که بطور نمائی با دور شدن از سطح مشترک کاهش می‌یابد. ضرایب $a(k),b(k)$ را باید از شرایط مرزی سطح مشترک لایه $y=\delta/2$ بدست آورد. از پیوستگی پتانسیل و مشتق قائم جابجائی دی‌الکتریک، معادله (۴.۹)، خواهیم داشت؛

$$\frac{1}{2}\epsilon_b^{-1}e^{-\frac{1}{2}|k|\delta}+a(k)\sinh(\frac{1}{2}|k|\delta)=b(k)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}|k|\delta}+\epsilon_b a(k)\cosh(\frac{1}{2}|k|\delta)=-\epsilon b(k)$$

در این صورت از حل آن برای $a(k)$ می‌دهد؛

$$a(k)=-\frac{1}{\epsilon_b}\frac{e^{\alpha}}{e^{|k|\delta}-e^{\alpha}}, \qquad e^{\alpha}=\frac{\epsilon-\epsilon_b}{\epsilon+\epsilon_b}$$

پتانسیل القائی را می‌توان از عکس تبدیل فوریه بدست آورد و در مرجع (معادله پنجم [۷۱]) آمده است؛

$$V_{ind}(x,y)=-\frac{1}{\epsilon_b}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{\alpha}}{e^{|k|\delta}-e^{\alpha}}\right]e^{-jkx}\sinh(|k|y)\frac{dk}{2\pi} \qquad (۴۹.۹)$$

• **راه‌حل تقریبی انتگرال** در مراجع [۷۱، ۷۲] برخی از اطلاعات در مورد نحوه حل تقریبی این انتگرال با استفاده ازانتگرال‌گیری مختلط ارائه شده است. برای $\epsilon'<-\epsilon_b$ انتگرال تحت تاثیر قطب در $|k|\delta=\alpha$ نزدیک به‌محور حقیقی است، اگرچه در اصل قطب‌ها و شاخه‌های[۳۷] دیگری نیز وجود دارند که منجر به‌اصلاحاتی مانند امواج خزنده[۳۸] می‌شود[۷۱]. برای $x>0$ می‌توانیم مسیر انتگرال‌گیری در معادله (۴۹.۹) را اضافه کنیم. یک نیم دایره با شعاع R در صفحه مختلط بالائی، شکل (ب-۱)، جایی که R در پایان

[۳۷] Poles and Branch

[۳۸] Creeping Waves

محاسبه به‌بی‌نهایت می‌رود. سپس، یا e^{-jkx} نمایی یا شکل مجانبی $e^{-|k|\delta}$ اصطلاح در پرانتز منجر به‌میرایی نمایی انتگرال می‌شود (توجه داشته باشید که y به‌مقادیر کوچکتر از $\delta/2$ محدود می‌شود ، بنابراین سهم sinh همیشه کوچکتر است) بنابراین، با استفاده از قضیه باقی مانده‌ها، از معادله (۴۹.۹) پیدا می‌کنیم.

$$V_{ind}(x,y) = \int_C f(x,y;k)dk \approx -j2\pi \lim_{k\to k_0}(k-k_0)f(x,y;k)$$

با قطب در $k_0 = \alpha/\delta$. این می‌دهد؛

$$V_{ind}(x,y) \approx \frac{j}{\delta\epsilon_b} e^{-jk_0x}\sinh(k_0y)\ . \qquad (۵۰.۹)$$

- **نگاشت همدیس** اکنون این عبارت را به‌نگاشت همدیس ارائه می‌کنیم. از رابطه (۴۶.۹) در می‌یابیم که $\delta = a^{-1}$ معکوس شعاع استوانه a و موقعیت $(x',y') = a(\sin\theta, 1+\cos\theta)$ در محیط استوانه اصلی از $(x,y) = \frac{1}{2}a^{-1}(\tan\frac{\theta}{2}, 1)$ تبدیل شده است.

با جمع آوری نتایج، پتانسیل القائی استوانه‌های مماسی برای یک میدان الکتریکی ثابت در طول محور تقارن می‌رسیم؛

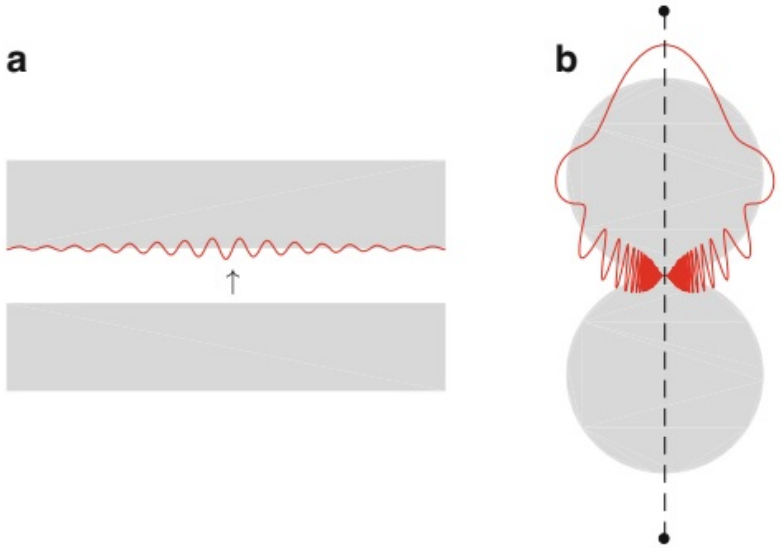
پتانسیل استوانه‌های مماسی (تحریک موج صفحه‌ای)

$$V_{ind}(a,\theta) \approx \frac{ja}{\epsilon_b}\exp\left[-j\alpha\tan\frac{\theta}{2}\right]\sinh\alpha \qquad (۵۱.۹)$$

شکل (۱۶.۹) پتانسیل را برای (الف) تحریک دوقطبی ساختار تیغه، معادله (۵۰.۹)، نشان می‌دهد، و (ب) ساختار استوانه مماسی نگاشته شده، معادله (۵۱.۹)، جائی که دوقطبی نوسانی روی تحریک موج صفحه‌ای با میدان الکتریکی ثابت در امتداد y نگاشته شده است. در (الف) پلاسمون سطحی شاخه‌های دوقطبی نوسانی که در امتداد سطح مشترک فلز منتشر شده و انرژی بعلت تلفات فلز از بین میرود.

در ساختار نگاشته شده، میدان الکتریکی ثابت پلاسمون‌های ذره‌ای را به‌سمت انتشار نقطه تماس، جائی که سرعت آنها کاهش می‌یابد، میراند. میرائی نمایی دامنه نزدیک به‌نقطه تماس توسط قسمت کوچک موهومی α ناشی می‌شود. در مرجع.[۷۲] نویسندگان خواص نوری استوانه‌های مماسی را بحث کرده و برای سطح مقطع انقراضی نتیجه شگفت آور ساده $C_{ext} \propto Re(\ln\alpha)$ را بدست آوردند. طول موج نوسان پلاسمون هنگام نزدیک شدن به‌نقطه تماس، بطور فزاینده‌ای کوتاه می‌شود. استوانه‌ها به‌علت کُند شدن آدیاباتیک، نمی‌توانند به‌عنوان یک تشدید کننده عمل کنند. در نتیجه، C_{ext} هیچ ویژگی تشدید از خود نشان نمی‌دهد.

تبدیلات نوری و نگاشت همدیس، برای تحلیل نقاط منحصر به‌فرد که در آن قدرت پیش بینی روش‌های عددی زیر سوال می‌رود، فناوری‌های قدرتمندی هستند. از سوی دیگر، در مجاورت چنین نقاط منحصر به‌فرد طول موج پلاسمون به‌طور فزاینده‌ای کوتاه می‌شود و قدرت میدان بسیار بالا می‌رود، ازاینرو صحت سنجی الکترودینامیک کلاسیک و گذردهی‌های محلی زیر



شکل ۱۶.۹: رسم پتانسیل (قسمت حقیقی) برای استوانه‌های مماسی. **(الف)** دوقطبی در حال نوسان، پلاسمون‌های سطحی را که در امتداد سطح مشترک ساختار تیغه انتشار می‌یابد، به‌دلیل تلفات اهمی فلز در قسمت موهومی گذردهی ϵ''، میرا شده و رانده می‌شوند. **(ب)** پس از نگاشت همدیس از طریق وارونگی صفحه مختلط، ساختار تیغه به‌دو استوانه مماسی نگاشته می‌شود. امواج در بی‌نهایت به‌مبدا، جایی که میرایی نمایی به‌دلیل ϵ'' است، نگاشته می شوند. برای درک بهتر، فقط نوسان پلاسمون‌های ذرات بالائی نشان می‌دهیم.

سوال می‌رود. به‌همین دلیل، در نظر گرفتن، مجاور نقاط منحصر به‌فرد، مانند توابع دی‌الکتریک غیرمحلی یا تونل زنی کوانتومی[۷۳]، ممکن است مهم باشد. این موارد در بخش‌های بعدی کتاب بحث می‌شود.

۵.۹ نظریه می

معادلات ماکسول (بدون تقریب شبه‌استاتیک) را فقط برای چند ساختار هندسی محدود می‌تواند به‌صورت تحلیلی حل کرد. مهمترین مثال احتمالاً نظریه می[۳۹] است[۷۴]، که راه حل‌هایی برای پراکندگی نور بصورت ذرات کروی به‌اندازه دلخواه ارائه می‌دهد. نظریه می ضیافتی از توابع خاص، از جمله هارمونیک‌های کروی و توابع بِسل و هنکل[۴۰] کروی ، و خوانندگانی که با چنین توابع آشنا نیستند، ممکن است این روش را غیر قابل بررسی و گیج کننده بدانند. با این حال، نتایج نهایی به‌طرز شگفت آوری ساده و کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. در ادامه اجزای اساسی نظریه می را ترسیم می‌کنیم و نتایج اصلی آن را ارائه می‌دهیم، جزئیات استخراج روابط برای خواننده علاقه‌مند در پیوست(ه) خلاصه می‌شود.

موقعیتی که در نظر داریم در شکل (۱۷.۹) نشان داده شده است و شامل یک نانوذره کروی

[۳۹] Mie Theory

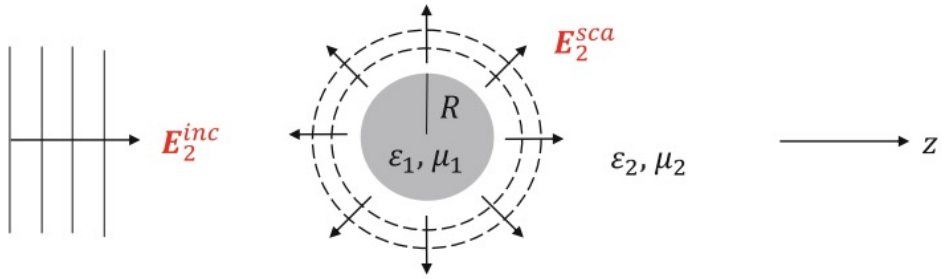
[۴۰] Bessel and Hankel functions

به‌شعاعR گذردهی ϵ_1 و نفوذپذیری μ_1 که در محیطی با خواص مواد ϵ_2, μ_2 تعبیه شده است. کره توسط یک موج صفحه تابشی با میدان الکتریکی $\mathbf{E}_2^{inc}$ تحریک و واکنش نانوذره توسط میدان‌های پراکنده $\mathbf{E}_1^{sca}, \mathbf{E}_2^{sca}$ در داخل و خارج از کره توصیف می‌شود. در این صورت راه حل می با بسط میدان‌های الکترومغناطیسی داخل و خارج کره بصورت امواج کروی بوده، که حل معادله موج هستند، که با استفاده از شرایط مرزی معادلات ماکسول و تطبیق میدانها در مرز کره، به‌دست می‌آیند. میدان‌های الکتریکی عرضی با استفاده از معادله از معادله (ه-۴) بسط داده می‌شود؛

$$\mathbf{E}_1^{sca}(\mathbf{r}) = Z_1 \sum_{l,m} \left[d_{lm} j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) - \frac{j}{k_1} c_{lm} \nabla \times j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

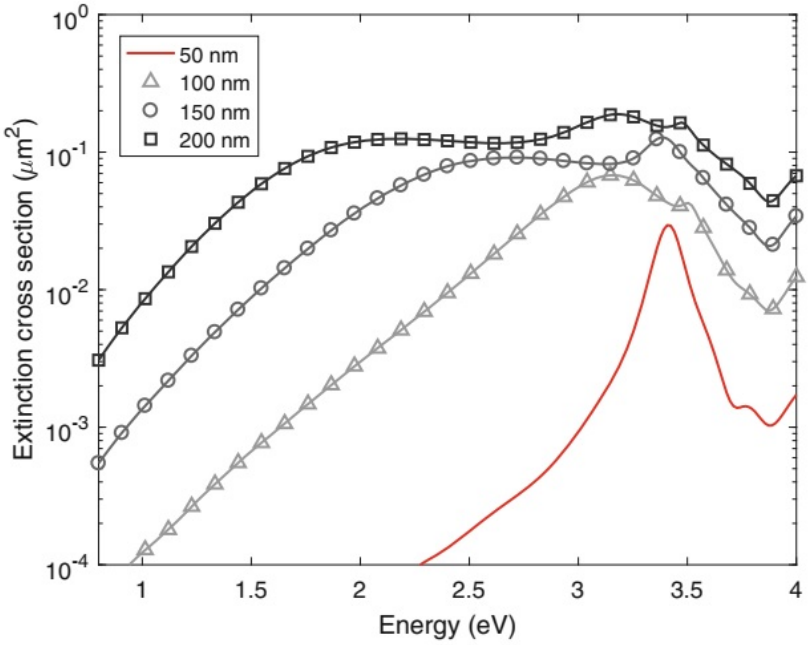
$$\mathbf{E}_2^{sca}(\mathbf{r}) = Z_2 \sum_{l,m} \left[b_{lm} h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) - \frac{j}{k_2} a_{lm} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

که در آن k و Z بترتیب عدد موج و امپدانس هستند. جملاتی که در این معادله بکار برده شده بقرار زیر هستند؛



شکل ۱۷.۹: شماتیک مسئله می یک ذره کروی به‌شعاع R و خواص مواد μ_1, ϵ_1 که در محیطی با μ_2, ϵ_2 واقع شده است. ذره توسط موج صفحه‌ای با میدان الکتریکی $\mathbf{E}_2^{inc}$ تحریک و واکنش کره با میدان‌های پراکنده $\mathbf{E}_1^{sca}$ و $\mathbf{E}_2^{sca}$ به‌ترتیب در داخل و خارج ذره کروی توصیف می‌شوند.

- $\mathbf{c_{lm}, d_{lm}}$ ضرایب برای میدان‌های الکترومغناطیسی داخل کره هستند.
- $\mathbf{a_{lm}, b_{lm}}$ ضرایب برای میدان‌های الکترومغناطیسی خارج کره هستند. این ضرایب باید از شرایط مرزی معادلات ماکسول تعیین شوند.
- $\mathbf{j_l(k_1 r)}$ توابع بِسل کروی مرتبه l که از حل معادله موج کروی، معادله (ج-۲۵)، بدست می‌آیند. این تَوابع در مبداء مختصات معین هستند و ازاینرو در داخل کره استفاده می‌شوند.
- $\mathbf{h_l^{(2)}(k_2 r)}$ توابع هنکل نوع دوم مرتبه l این اموج کروی دور شونده از کره هستند و از اینرو در خارج از کره از آنها استفاده می‌شوند.
- $\mathbf{X_{lm}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$ هارمونیک‌های کروی بردای معادله (د-۸) هستند که همراه با $\nabla \times \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)$ پایه کاملی برای بخش زاویه‌ای توابع برداری عرضی تدارک می‌کنند.



شکل ۱۸.۹: سطح مقطع انقراضی برای نانوسفرهای نقره و برای قطرهای مختلف کره، که توسط نظریه می از معادله (۵۳.۹) محاسبه شده است. تابع دی‌الکتریک نقره از [۳۴] گرفته شده و گذردهی محیط بستر ϵ_0 است.

در ادامه جزئیات محاسبه واقعی و تا حدودی فنی را حذف می‌کنیم، برای جزئیات به‌پیوست(ه) مراجعه کنید و در آنجا نتایج نهایی را به‌سادگی بیان می‌کند. به‌نظر می رسد راحتر باشد که توابع بسل-ریکاتی[۴۱] را معرفی کنیم (معادله ه-۱۱)؛

$$\psi_l(x) = xj_l(x), \qquad \xi_l(x)xh_l(x)$$

که مشتق آنها $\psi_l'(x) = xj_l(x)$ $\xi_l'(x)xh_l(x)$ هستند. ضرایب می که مشخص کننده میدان‌های الکترومغناطیسی خارج از کره هستند را می‌توان بصورت زیر بیان کرد (معادله ه-۲۲)؛

ضرایب می

$$a_l = \frac{Z_2\psi_l(x_1)\psi_l'(x_2) - Z_1\psi_l'(x_1)]\psi_l(x_2)}{Z_2\psi_l(x_1)\xi_l'(x_2) - Z_1\psi_l'(x_1)]\xi_l(x_2)}$$

$$b_l = \frac{Z_2\psi_l'(x_1)\psi_l(x_2) - Z_1\psi_l(x_1)]\psi_l'(x_2)}{Z_2\psi_l'(x_1)\xi_l(x_2) - Z_1\psi_l(x_1)]\xi_l'(x_2)} \tag{۵۲.۹}$$

با عبارات مشابه برای ضرایب c_l, d_l می‌توان میدان‌های داخل کره را مشخص کرد. در اینجا $x_{1,2} = k_{1,2}R$ را معرفی کرده‌ایم. با استفاده از این ضرایب می‌توان سطح مقطع پراکندگی و

[۴۱] Riccati-Bessel

انقراضی را برای تحریک موج صفحه‌ای به‌صورت معادله زیر بیان کرد. (معادلات ه-۲۶ و ۳۰)؛

سطح مقطع پراکندگی و انقراضی برای کره

$$\begin{aligned} C_{sca} &= \frac{2\pi}{k_2^2}\sum_l (2l+1)\Big(|a_l|^2+|b_l|^2\Big) \\ C_{ext} &= \frac{2\pi}{k_2^2}\sum_l (2l+1)Re\Big[a_l+b_l\Big] \end{aligned} \tag{۵۳.۹}$$

نکته مهم در مورد (۵۳.۹) این است که یک عبارت نسبتاً ساده است که امکان محاسبه سطح مقطع نوری را به‌شیوه‌ای بسیار کارآمد می‌دهد.

شکل (۱۸.۹) طیف انقراض نوری را برای نانوکره‌های نقره با قطرهای مختلف نشان می‌دهد. برای کوچکترین کره با قطر ۵۰ نانومتر (خط قرمز) طیف‌ها بسیار شبیه به‌حالت شبه استاتیکی هستند، (شکل ۴.۹). تعدادی از ویژگی‌ها را می‌توان در شکل مشاهده کرد:

- **انتقال به‌قرمز** با افزایش اندازه نانوذره، قله دوقطبی به‌سمت قرمز انتقال می‌یابد. در یک تصویر کیفی، نیروی الکتریکی وارد بر توزیع بار سطحی پلاسمون‌های ذرات به‌عنوان اثر سرعت محدود نور، کُند می‌شود. اگر ساده لوحانه پلاسمون ذره را بصورت یک نوسان‌ساز مکانیکی به‌تصویر بکشیم، تاخیر می‌تواند با کاهش یافتن ثابت فنر همراه باشد که در نتیجه منجر به‌انتقال فرکانس تشدید بسوی قرمز می‌شود.

- **میرائی تابشی** با افزایش اندازه، قله‌ها در نتیجه میرایی تابشی، گسترش می‌یابند. این بدان علت است که دوقطبی بزرگ نور را بسیار کارآمدتر ساطع می‌کند. برای بزرگترین کره، تشدید دوقطبی آنقدر وسیع می‌شود که حتی تشخیص آن نیز دشوار است.

- **نقض قوانین انتخاب** در نهایت، با افزایش اندازه، قوانین انتخاب نوری معمول (که در حد شبه‌استاتیک به‌دست می‌آیند) کاهش یافته و قله‌های جدیدی در طیف ظاهر می‌شوند. آنها را می‌توان به‌چهار قطبی و سایر مودهای چند قطبی مربوط کرد.

ویژگیهای بالا دارای ماهیت عمومی هستند و برای سایر ساختارهای هندسی نانوذرات نیز قابل مشاهده است. به‌طور کلی، برای سیستم‌های حجیم، مانند کره یا مکعب، تقریب شبه‌استاتیکی برای ابعاد نانوذرات کوچکتر از مثلاً ۵۰ نانومتر به‌خوبی کار می‌کند. برای ساختارهای مسطح یا طویل، تقریب شبه‌استاتیکی تا ابعاد حدود ۱۰۰ نانومتر معتبر باقی می‌ماند. برای ساختارهای بزرگتر با شکل‌های متفاوت از کره، هیچ راه‌حل تحلیلی در دسترس نیست، و معمولاً باید به‌روش‌های شبیه‌سازی عددی متوسل شد. به‌عنوان اولین قدم برای این منظور، در ادامه روش انتگرال مرزی را برای معادلات ماکسول معرفی می‌کنیم. شرح مبسوط روش‌های عددی در نانو اپتیک، در فصل یازدهم ارائه خواهد شد.

۶.۹ روش انتگرال مرزی برای معادله موج

برای معادلات کامل ماکسول نیز می‌توان یک روش انتگرال مرزی به‌منظور محاسبه میدان‌های الکترومغناطیسی ذرات با اندازه و شکل دلخواه بدست آورد. با این حال، خیلی پیچیده‌تر از شبه‌استاتیک است.

نقطه شروع معادله (۲۶.۵) است که میدان‌های الکترومغناطیسی $\mathbf{E}(\mathbf{r}),\ \mathbf{H}(\mathbf{r})$ در کل حجم را به‌میدان‌های (مماسی) $\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}$ و $\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}$ در مرز مربوط می‌کند. در ادامه ، یک روش محدود کننده $\mathbf{r}\to\mathbf{s}$ انجام داده و از شرایط مرزی معادلات ماکسول استفاده می‌کنیم تا عبارتی را بدست آوریم که بتوان میدان‌های الکترومغناطیسی در مرز را برای میدان‌های ورودی $\mathbf{E}_{inc},\mathbf{H}_{inc}$ محاسبه کرد. از آنجا که فقط به‌میدان‌های مماسی علاقه داریم، هر دو طرف معادله (۲۶.۵) را در عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}$ ضرب خارجی انجام می‌دهیم، و

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}}\times\Big\{-j\omega\mu\Big[\mathbb{S}\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{r}) - \Big[\mathbb{D}\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{r})\Big\}\\ \mathbf{u}_H(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}}\times\Big\{+j\omega\epsilon\Big[\mathbb{S}\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{r}) - \Big[\mathbb{D}\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{r})\Big\}\end{aligned} \tag{۵۴.۹}$$

به‌میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی $\mathbf{u}_E=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}$ و $\mathbf{u}_H=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}$ میرسیم.

- **تک لایه** با پتانسیل تک لایه معادله (۳۴.۵) شروع می‌کنیم؛

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}}\times\big[\mathbb{S}\mathbf{u}\big](\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}}\times\oint_{\partial\Omega}\Big[G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}') + \frac{1}{k^2}\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\cdot\nabla'\cdot\mathbf{u}(\mathbf{s}')\Big]dS'$$

که در آن جمله اول را می‌توان مشابه روش دیریشله در رویکرد شبه‌استاتیک تحلیل کرد و جمله دوم فقط مشتق‌های مماسی را شامل می‌شود که بدون توجه به‌نزدیک شدن به‌مرز از خارج، یا داخل مقدار یکسانی می‌دهد. بنابراین، مقدار پتانسیل تک لایه به‌جهت روش محدود کننده بستگی ندارد.

- **دو لایه** برای پتانسیل دو لایه خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}}\times\Big[\mathbb{D}\mathbf{u}\Big](\mathbf{r}) &= -\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}}\times\oint_{\partial\Omega}\nabla\times G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{u}(\mathbf{r}')dS'\\ &= -\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}}\oint_{\partial\Omega}\Big\{\nabla\Big[\hat{\mathbf{n}}\cdot G(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}')\Big] - \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{s}')}{\partial n}\mathbf{u}(\mathbf{s}')\Big\}dS'\end{aligned}$$

که در آن که ضرب خارجی را ساده کرده‌ایم. جمله اول در داخل براکت برای $\mathbf{r}\to\mathbf{s}$ صفر می‌شود زیرا برای میدان بردار مماسی $\mathbf{u}$ داریم $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u}=0$. محاسبه جمله دوم نیز مانند بحث قبلی برای حالت شبه‌استاتیک است، از اینرو داریم

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}}\times\Big[\mathbb{D}\mathbf{u}\Big](\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\tau_j\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{s}) + \hat{\mathbf{n}}\times\Big[\mathbb{D}\mathbf{u}\Big](\mathbf{s})$$

که در آن علامت مثب یا منفی در $\tau_{1,2}=\pm1$ برای وقتی از داخل یا خارج به‌مرز نزدیک می‌شویم است.

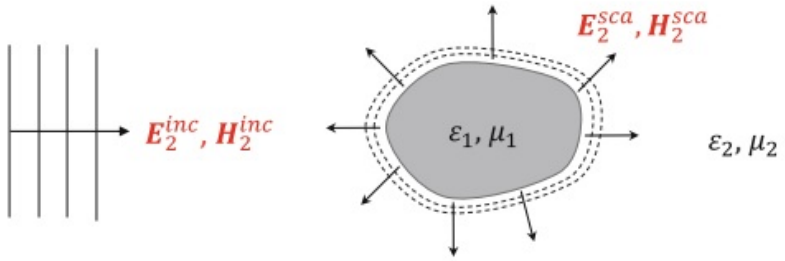
با کنار هم قرار دادن همه نتایج، از معادله (۵۴.۹) مجموعه معادلات زیر را بدست می‌آوریم؛

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \hat{\mathbf{n}} \times \Big\{ -j\omega\mu \Big[\mathbb{S}\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{s}) - \Big[\mathbb{D}\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{s}) \Big\}$$
$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_H(\mathbf{s}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \hat{\mathbf{n}} \times \Big\{ +j\omega\epsilon \Big[\mathbb{S}\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{s}) - \Big[\mathbb{D}\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{s}) \Big\} \tag{۵۵.۹}$$

اکنون همه مواد لازم برای بسته‌بندی کردن یک روش انتگرال مرزی برای حل معادله ماکسول را در اختیار داریم. موقعیتی که در ذهن داریم در شکل(۱۹.۹) نشان داده شده است و شامل یک یا چند نانوذره است که در معرض برخی تحریک‌های تابشی، به‌عنوان مثال، یک موج صفحه‌ای هستند. کمیت‌های اساسی روش انتگرال مرزی، میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی

$$\mathbf{u}_E = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}, \qquad \mathbf{u}_H = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$$

که در مرز ذره پیوسته هستند. همچنین فرض می‌کنیم که تحریک ذره فقط از طریق ناحیه بیرونی است، به‌طوری که $\mathbf{E}_1^{inc}$ و $\mathbf{H}_1^{inc}$ هر دو صفر هستند. با این، از معادله (۵۵.۹)، معادلات



شکل ۱۹.۹: شماتیک روش انتگرال مرزی. یک یا چند نانوذره توسط برخی میدان‌های تابشی تحریک می‌شوند، به‌عنوان مثال، میدان‌های تحریک ممکن است موج صفحه‌ای باشند. پاسخ سیستم توسط میدان‌های الکترومغناطیسی پراکنده $\mathbf{E}_{1,2}^{sca}$ و $\mathbf{H}_{1,2}^{sca}$ در داخل و خارج نانوذره توصیف می‌شوند. در روش انتگرال مرزی، میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}, \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$ در مرز ذرات $\partial\Omega$، جایی که $\hat{\mathbf{n}}$ سطح بیرونی است، را تطبیق می‌دهند. هنگامی که میدان‌های مماسی در $\partial\Omega$ شناخته شدند، می‌توان میدان‌ها را در هر جای دیگر با استفاده از روابط مربوطه محاسبه کرد. در شکل ϵ_1, μ_1 پارامترهای مواد نانوذره و ϵ_2, μ_2 پارامترهای مواد محیط بستر را نشان می‌دهند.

داخل ذره را بدست می‌آوریم؛

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) = j\omega\mu_1 \hat{\mathbf{n}} \times \Big[\mathbb{S}_1\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{s}) + \hat{\mathbf{n}} \times \Big[\mathbb{D}_1\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{s})$$
$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_H(\mathbf{s}) = -j\omega\epsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \times \Big[\mathbb{S}_1\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{s}) + \hat{\mathbf{n}} \times \Big[\mathbb{D}_1\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{s}) \tag{۵۶.۹}$$

که در آن $\mathbb{S}_{1,2}$ و $\mathbb{D}_{1,2}$ عملگرهای انتگرالی تابع گرین برای عددهای موج $k_{1,2}$ هستند. بهمین

نحو، معادلات خارج ذره را بدست می‌آوریم؛

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{s}) - j\omega\mu_2\hat{\mathbf{n}}\times\Big[\mathbb{S}_2\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{s}) - \hat{\mathbf{n}}\times\Big[\mathbb{D}_2\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{s})\\ \frac{1}{2}\mathbf{u}_H(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{s}) + j\omega\epsilon_2\hat{\mathbf{n}}\times\Big[\mathbb{S}_2\mathbf{u}_E\Big](\mathbf{s}) - \hat{\mathbf{n}}\times\Big[\mathbb{D}_2\mathbf{u}_H\Big](\mathbf{s})\end{aligned} \tag{۵۷.۹}$$

از این دو مجموعه معادلات (۵۶.۹) و (۵۷.۹) باید دو معادله برای محاسبه مجهولات $\mathbf{u}_{E,H}$ بازاء میدان‌های تابشی $\mathbf{E}^{inc}$ و $\mathbf{H}^{inc}$ استخراج کنیم. در مقالات و کتب این زمینه، تعداد بی‌شماری از ترکیب‌های مختلف این معادلات، یا روابطی که با کمی اصلاحات از معادلات موج ماکسول به‌دست آمده‌اند، وجود دارد. رویکردها اغلب بر اساس معادلات انتخاب شده، مانند معادلات انتگرالی میدان الکتریکی (EFIE)[۴۲]، معادلات انتگرالی میدان مغناطیسی (MFIE)،[۴۳] یا معادلات انتگرالی میدان ترکیبی (CFIE)[۴۴] نامگذاری می‌شوند و علاقه‌مندان را به مطالب تخصصی ارجاع می‌دهیم. . در اینجا یک نوع را معرفی می‌کنیم که از تفریق دو مجموعه معادله حاصل می‌شود. این معادلات انتگرالی مرزی برای معادلات ماکسول است.

معادله انتگرال مرزی برای معادلات ماکسول

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}\times\Big(\mathbb{D}_1\mathbf{u}_E + \mathbb{D}_2\mathbf{u}_E\Big) + \hat{\mathbf{n}}\times\Big(j\omega\mu_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_H] + j\omega\mu_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_H]\Big) &= \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{s})\\ \hat{\mathbf{n}}\times\Big(\mathbb{D}_1\mathbf{u}_H + \mathbb{D}_2\mathbf{u}_H\Big) - \hat{\mathbf{n}}\times\Big(j\omega\epsilon_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_H] + j\omega\epsilon_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_E]\Big) &= \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{s})\end{aligned} \tag{۵۸.۹}$$

که به‌عنوان روابط پاجیو-میلر-چنگ-هارینگتون-وو-تسای[۴۵] شناخته می‌شوند [۷۵، ۷۷]. معادله (۵۸.۹) دو معادله انتگرالی برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مماسی مجهول تعریف می‌شوند. هنگامی که این میدان‌ها محاسبه شدند، می‌توانیم فوراً میدان‌ها را در هر جای دیگری با استفاده از روابط مربوطه محاسبه کنیم. در فصلیازدهم نحوه حل معادله عملگر بالا را با استفاده از روش عددی گالرکین[۴۶] نشان خواهیم داد.

۱.۶.۹ مودهای ویژه برای معادلات ماکسول کامل

در اصل، می‌توانیم مودهای ویژه را برای حل معادلات کامل ماکسول محاسبه کنیم، اما به‌نظر می‌رسد که اوضاع بسیار پیچیده است. اجازه دهید معادله (۵۸.۹) را به‌صورت فشرده زیر بازنویسی کنیم.

$$\mathbb{A}(\omega)[\mathbf{u}] = f^{inc}$$

[۴۲] Electric Field Integral Equations (EFIE)
[۴۳] Magnetic Field Integral Equations (MFIE)
[۴۴] Combined Field Integral Equations (CFIE)
[۴۵] Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai
[۴۶] Galerkin

که در آن $\mathbb{A}(\omega)$ عملگر انتگرال برای مسئله انتقال است، $\mathbf{u}$ بردار جواب متشکل از میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی است، و f^{inc} ناهمگنی مربوط به‌میدان‌های تابشی است. در مقابل معادله (۲۷.۹) برای روش انتگرال مرزی شبه‌استاتیکی، و نمی‌توان $\mathbb{A}(\omega)$ را بهساختار هندسی و بخش مواد جدا کرد. علاوه بر این، $\mathbb{A}(\omega)$ نه متقارن است و نه هرمیتی[۴۷] . بنابراین، در تحلیل مود ویژه معادلات ماکسول، به‌دنبال مودهای ویژه برای فرکانس تشدید مفروض ω

$$\mathbb{A}(\omega)[\mathbf{u}_k] = \lambda_k \mathbf{u}_k$$

و مودهای الحاقی[۴۸] $\tilde{\mathbf{u}}_k$ می‌گردیم. با این حال، این رویکرد دارای این عیب است که تجزیه مود ویژه باید برای هر فرکانس ω به‌طور جداگانه انجام شود. از طرف دیگر، می‌توان مودهای به‌اصطلاح شبه‌طبیعی [۷۸، ۷۹] مربوط به‌فرکانس‌های ویژه ω_k را محاسبه کرد؛

$$\mathbb{A}(\omega_k)[\mathbf{u}_k] = 0$$

قسمت حقیقی فرکانس تشدید را می‌دهد و قسمت موهومی مربوط به‌طول عمر مود است. این مودها چندین ویژگی جالب مودهای ویژه روش شبه‌استاتیک را دارند، اما اغلب کاربرد آنها محدوداست. در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم و علاقه مندان را برای جزئیات بیشتر به‌مطالب مربوطه ارجاع می‌دهیم [۷۸، ۷۹].

۷.۹ جزئیات تجزیه مود شبه‌استاتیک

در این بخش جزئیات بیشتری را برای رویکرد مود ویژه در حد شبه‌استاتیک ارائه داده و تجزیه مود ویژه معادله (۳۳.۹) را برای تابع گرین شبه‌استاتیک نشان می‌دهیم.

۱.۷.۹ تحلیل مود اویانگ و ایزاکسون

از کار اصلی اویانگ و ایزاکسون[۴۹] [۸۰] شروع کرده و خواص اساسی تجزیه مود ویژه (۲۸.۹) را اثبات می‌کنیم. ابتداء عملگر انتگرالی $\mathbb{G}$ را با خواص زیر

$$[\mathbb{G}f](\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s},\mathbf{s}')f(\mathbf{s}')dS'$$

$$[f\mathbb{G}](\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} f(\mathbf{s}')G(\mathbf{s}',\mathbf{s})dS'$$

و عملگر مربوط به $\mathbb{F}$ را برای مشتق سطح تابع گرین معرفی می‌کنیم. نکته مهم، عملگر ترکیبی زیر

$$[\mathbb{G}\mathbb{F}](\mathbf{s},\mathbf{s}') = [\mathbb{G}\mathbb{F}](\mathbf{s}',\mathbf{s}) \tag{۵۹.۹}$$

[۴۷] Hermitian
[۴۸] Adjoint Modes
[۴۹] Ouyang and Isaacson

نسبت به $\mathbf{s},\mathbf{s}'$ متقارن است. این را می‌توان با محاسبه اتحاد گرین زیر

$$\int_{\Omega}\Big(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\Big)d^3r=\oint_{\partial\Omega}\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS$$

برای $\phi(\mathbf{r})=G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$ و $\psi(\mathbf{r})=G(\mathbf{r},\mathbf{r}'')$ اثبات کرد. با استفاده از تعریف تابع گرین، (۲۵.۹)، و با فرض این که هر دو $\mathbf{r}',\mathbf{r}''$ در خارج (یا داخل) ذره هستند، می‌توانیم سمت چپ را برابر صفر قرار دهیم. در این صورت داریم؛

$$\oint_{\partial\Omega}\left[G(\mathbf{r}',\mathbf{s})\frac{\partial G(\mathbf{s},\mathbf{r}'')}{\partial n}-G(\mathbf{r}'',\mathbf{s})\frac{\partial G(\mathbf{s},\mathbf{r}')}{\partial n}\right]dS=0 \qquad (۶۰.۹)$$

در ادامه اجازه می‌دهیم به‌سطح $\mathbf{r}',\mathbf{r}''$ از بیرون یا از داخل، درست شبیه با بحث قبلی روش نیومن، نزدیک شویم. هر دو روش حد $\pm\frac{1}{2}$ را می‌دهند که یکدیگر را در جمله تفاضل حذف می‌کنند بنابراین به‌رابطه زیر می‌رسیم؛

$$\oint_{\partial\Omega}\Big[G(\mathbf{s}',\mathbf{s})F(\mathbf{s},\mathbf{s}'')-G(\mathbf{s}'',\mathbf{s})F(\mathbf{s},\mathbf{s}')\Big]dS=0 \qquad (۶۱.۹)$$

این ثابت می‌کند که$\mathbb{GF}$ یک عملگر متقارن است. همچنین عملگر $\mathbb{G}$ متقارن است و می‌توان آن را بصورت قطری زیر نوشت

$$\mathbb{G}=\mathbb{Q}^T\Lambda\mathbb{Q}=(\Lambda^{1/2}\mathbb{Q})^T(\Lambda^{1/2}\mathbb{Q})=\mathbb{U}^T\mathbb{U} \qquad (۶۲.۹)$$

که در آن $\mathbb{Q}$ عملگر حقیقی و Λ قطری است. در تساوی آخری از این استفاده کردیم که $\mathbb{G}$ قطعی مثبت[۵۰] است و بنابراین مقادیر ویژه بزرگتر از صفر هستند. اکنون می‌توانیم عملگر متقارن دیگری بسازیم؛

$$\mathbb{D}=\Big(\mathbb{U}^{-1}\Big)^T\mathbb{GFU}^{-1}=\Big(\mathbb{U}^{-1}\Big)^T\mathbb{U}^T\mathbb{UFU}^{-1}=\mathbb{UFU}^{-1}$$

که دارای مقادیر ویژه حقیقی است و توابع ویژه یک مجموعه عملگر کامل را تشکیل می‌دهند. بنابراین؛

$$\Big[\mathbb{D}x_k\Big](\mathbf{s})=\lambda_k x_k(\mathbf{s})\Longrightarrow\Big[\mathbb{FU}^{-1}x_k\Big](\mathbf{s})=\lambda_k\Big[\mathbb{U}^{-1}x_k\Big](\mathbf{s})$$
$$\Big[x_k\mathbb{D}\Big](\mathbf{s})=\lambda_k x_k(\mathbf{s})\Longrightarrow\Big[x_k\mathbb{UF}\Big](\mathbf{s})=\lambda_k\Big[x_k\mathbb{U}\Big](\mathbf{s})$$

و مودهای ویژه $u_k,\tilde{u}_k$ از معادله (۲۸.۹) با x_k از طریق روابط زیر مربوط هستند؛

$$\begin{aligned}u_k(\mathbf{s})&=\Big[\mathbb{U}^{-1}x_k\Big](\mathbf{s})\\ \tilde{u}_k(\mathbf{s})&=\Big[x_k\mathbb{U}\Big](\mathbf{s})\end{aligned} \qquad (۶۳.۹)$$

[۵۰] Positive Definite

از این عبارت می‌توان براحتی نشان داد که $u_k, \tilde{u}_k$ متعامدند که اثبات ما را برای خواص مودهای ویژه که قبلاً بیان کردیم تکمیل می‌کند. با استفاده از معادله (۶۳.۹) می‌توانیم رابطه تعامد زیر را ثابت کنیم (تمرین۹-۹)؛

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{u_k(\mathbf{s})u_{k'}(\mathbf{s}')}{4\pi|\mathbf{s}-\mathbf{s}'|} = \delta_{kk'} \tag{۶۴.۹}$$

مقایسه با رابطه تعامد معادله (۲۹.۹) در این صورت اجازه می‌دهد که $\tilde{u}_k(\mathbf{s})$ به $u_k(\mathbf{s})$ از طریق رابطه زیر بهم مربوط سازیم؛

$$\tilde{u}_k(\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s},\mathbf{s}')u_k(\mathbf{s}')dS' \tag{۶۵.۹}$$

۲.۷.۹ تجزیه مود ویژه تابع گرین

معادله نماینده (۲۴.۹) را در نظر گیرید؛

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) = V_{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r},\mathbf{s}') \\ \left\{ -\sum_k u_k(\mathbf{s}')\big(\Lambda(\omega+\lambda_k)\big)^{-1}\left[\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}'')\frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s}'')}{\partial n''}dS''\right]\right\}dS' \end{aligned} \tag{۶۶.۹}$$

که در آن جواب مود ویژه معادله (۳۲.۹) را قرار دادیم. فرض می‌کنیم که پتانسیل خارجی توسط توزیع بار $\rho(\mathbf{r})$ تولید شده است؛

$$V_{inc}(\mathbf{r}) = \epsilon_2^{-1}\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3r'$$

همانطور که در فصل پنجم بحث شد، برای توابع گرین، در مورد بالا G فقط شرایط مرزی را در بی‌نهایت به‌حساب می‌آورد، و بنابراین باید به‌جای تابع گرین یک راه‌حل اساسی نامیده شود (اگرچه در اینجا به‌اصطلاحات معمول تابع گرین که در فیزیک استفاده می‌شود پایبند می‌مانیم). با این حال، معادله (۶۶.۹) پیشنهاد می‌کند که تابع گرین کل برای معادلات ماکسول در حد شبه‌استاتیک معرفی شود؛

نمایش مود ویژه تابع گرین کلی

$$\begin{aligned} G_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r_0}) &= G(\mathbf{r},\mathbf{r_0}) - \sum_k \left[\oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r},\mathbf{s}')u_k(\mathbf{s}')dS'\right]\Big(\Lambda(\omega)+\lambda_k\Big)^{-1} \\ &\quad \times\left[\tilde{u}_k(\mathbf{s}'')\frac{\partial G(\mathbf{s}'',\mathbf{r_0})}{\partial n''}dS''\right] \end{aligned} \tag{۶۷.۹}$$

این اجازه می‌دهد تا جواب توزیع بار خارجی را به‌شکل معمول بنویسیم؛

$$V(\mathbf{r}) = \epsilon_2^{-1} \int G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3r'$$

می‌توانیم این عبارت را به‌شکل متقارن‌تری بازنویسی کنیم. آخرین جمله داخل براکت معادله (۶۷.۹) را می‌توان بین $\tilde{u}_k(\mathbf{s})$ و $u_k(\mathbf{s})$ همراه با معادله (۶۵.۹) بصورت زیر بیان کرد.

$$\oint_{\partial\Omega} \left[u_k(\mathbf{s}_1) G(\mathbf{s_1}, \mathbf{s}'') \right] \frac{\partial G(\mathbf{s}'', \mathbf{r_0})}{\partial n''} dS'' dS_1$$

از رابطه تقارن روش اویانگ-ایزاکسون[۵۱] معادله (۶۰.۹)، بدست می‌آوریم؛

$$\oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r_1}, \mathbf{s}'') \frac{\partial G(\mathbf{s}'', \mathbf{r_0})}{\partial n} dS'' = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{r_1}, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r_0}) dS''$$

که در آن علاوه بر این باید حد $\mathbf{r_1} \to \mathbf{s_1}$ را در دو طرف معادله انجام دهیم. در حالی که این کار را می‌توان با خیال راحت در سمت چپ انجام داد، محدودیت در سمت راست باید مشابه روش نیومن انجام شود، و برابطه زیر میرسیم؛

$$\lim_{r_1 \to s_1} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{r_1}, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r_0}) dS'' = \pm \frac{1}{2} G(\mathbf{s_1}, \mathbf{r_0})$$

$$+ \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{s_1}, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r_0}) dS''$$

علامت بستگی به‌این دارد که $\mathbf{r_1}$ از بیرون یا از داخل به‌مرز نزدیک شود. با استفاده از این واقعیت که $u_k(\mathbf{s})$ یک تابع ویژه از مشتق سطحی تابع گرین است، خواهیم داشت؛

$$\oint_{\partial\Omega} u_k(\mathbf{s_1}) \frac{\partial G(\mathbf{s_1}, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r_0}) dS'' dS_1 = \lambda_k \oint_{\partial\Omega} u_k(\mathbf{s}'') G(\mathbf{s}'', \mathbf{r_0}) dS''$$

با کنار هم گذاشتن همه نتایج به‌عبارت نهایی برای تابع گرین شبه‌استاتیکی می‌رسیم که برحسب توابع ویژه رابطه (۳۳.۹) گسترش یافته است. برای بحث دقیق‌تر مودهای ویژه و بسط تابع گرین بر حسب این مودها به‌مرجع [۶۲] رجوع کنید.

تمرینات

- **تمرین ۱** یک ذره پلاسمون را بصورت یک نوسانگر با فرکانس ω_0 و میرائی γ مدل کنید؛
  - **الف**: جواب را برای تحریک نوسان هارمونیکی محاسبه کنید.
  - **ب**: جواب را برای نوسان آزاد محاسبه کنید.
  - **ج**: فرض کنید که در لحظه صفر میدان خارجی $E_0 e^{j\omega t}$ اعمال می‌شود. جواب را بصورت مجموع جواب‌های همگن (نوسان آزاد) و خاص (نوسان تحریک) بنویسید. در مورد چگونگی نزدیک شدن به‌نوسان حالت ماندگار[۵۲] بحث کنید.

[۵۱] Ouyang–Isaacson

[۵۲] Steady State

- **د**: نشان دهید که در حالت ماندگار، کار انجام شده بوسیله میدان خارجی برابر با توان تلف شده است.
- **ه**: فرکانس‌های تحریکی را که در آن (۱) دامنه و (۲) توان جذب شده بیشترین است را بدست آورید.

- **تمرین ۲** در قیاس با معادله (۱۶.۹) توزیع بار سطحی $\sigma(\theta)$ را برای یک نانو کره فلزی با تابع دی‌الکتریک درود، معادله (۷.۷)، و با جدا کردن $\sigma(\theta)$ به‌توزیع بار آزاد و مقید، با استفاده از رابطه (۲۳.۷)، محاسبه کنید.

- **تمرین ۳** برای پتانسیل شبه‌استاتیکی در داخل و خارج کره از معادله (۶.۹) شروع کنید. در امتداد خطوطی که برای نظریه می شبه‌استاتیک بحث شد، فقط ضرایب $A_l(B_l)$ را در داخل (خارج) کره در نظر گیرید.

  - **الف**: مودهای تشدید مربوط به‌جواب‌ها را در غیاب تحریک خارجی با توجه به‌شرایط مرزی جستجو کنید. از تابع دی‌الکتریک درود معادله (۷.۷) استفاده کرده و نشان دهید که این مودها فقط برای فرکانس‌های مختلط ω_l وجود دارند. در مورد معنای فیزیکی مودهای مختلف بحث کنید.
  - **ب**: فرکانس ω_l را بر حسب سری تیلور برای مقادیر کوچک جمله میرایی درود γ بسط داده و فرکانس مود حاصل را با فرکانس تشدید پلاسمون سطحی رابطه(۱۴.۹) مقایسه کنید.
  - **ج**: مدهای تشدید را نیز برای گذردهی درود-لورنتز معادله (۶.۷) محاسبه کنید.

- **تمرین ۴** معادلات ماکسول را در حد شبه‌استاتیک برای یک کره پوشش داده شده با هسته (شعاع a، گذردهی ϵ_1) و یک لایه پوششی (ضخامت δ، گذردهیϵ_2)، که در یک محیط زمینه با گذردهی ϵ_3 تعبیه شده است، حل کنید. فرض کنید یک میدان الکتریکی در امتداد جهت z اعمال می‌شود. در امتداد همان خطوطی که برای حوزه مورد بحث در بخش. ۹.۲.۱، یک راه حل برای جواب در سه ناحیه بنویسید و ضرایب مجهول را از شرایط مرزی معادلات ماکسول تعیین کنید.

- **تمرین ۵** سطح مقطع پراکندگی و انقراضی را برای یک کره کوچک در حد شبه‌استاتیک محاسبه کنید. برای تابع دی‌الکتریک درود فرکانس‌هائی که سطح مقطع بیشینه است محاسبه کنید. نتیجه را با استفاده از نتیجه تمرین ۱-(ه) تفسیر کنید.

- **تمرین ۶** ضریب دی‌پلاریزاسیون L_k از نظریه می-گانس را به‌مقدار ویژه λ_k روش انتگرال مرزی مرتبط کنید.

- **تمرین ۷** از جعبه ابزار NANOPT فایل demobem03.m و demobem04.m را برای محاسبه و رسم مقادیر ویژه λ_k و مودهای ویژه $u_k(\mathrm{s})$ بیضوی‌گون که از روش اجزاء محدود مرزی که در فصل یازدهم شرح داده می‌شود استفاده کنید.

  - **الف**: مقادیر ویژه عددی را با عبارت تحلیلی نظریه می-گانس مقایسه کنید.

- **ب**: مودهای ویژه را رسم کرده و بر حسب مودهای دوقطبی و چندقطبی تفسیر کنید.
- **ج**: بیضوی گون کشیده و پخ را بررسی کنید. چه تفاوت‌هایی دارند؟ چه شباهت‌هایی دارند؟
- **د**: نتایج مودهای ویژه بیضوی‌گون پخ با دیسک که در شکل (۹.۹) نشان داده شده را مقایسه کنید. آیا می‌توانید همه مودها را شناسایی کنید؟

- **تمرین ۸** میدان الکتریکی در جهت عمود بر مرز ذره را می‌توان از $E_\perp = \partial_n V$، با $\partial_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla$ بدست آورد. با شروع از معادله انتگرال مرزی رابطه (۲۷.۹)، چگونه میدان القائی $E_\perp$ را بر حسب توزیع بار سطحی σ می‌توان بیان کرد.

- **تمرین ۹** از مودهای ویژه اویانگ و ایزاکسون معادله (۶۲.۹) استفاده کرده و تعامد رابطه (۶۴.۹) را اثبات کنید.
راهنمائی: از رابطه تعامد برای x_k شروع کرده و x_k را به u_k مربوط کنید.

- **تمرین ۱۰** ثابت کنید برای $\mathcal{F}_{mn}$ که در معادله (۳۹.۹) تعریف شد، رابطه تقارن $\mathcal{F}_{mn} = \mathcal{F}_{nm}$ برقرار است. از تعریف رابطه (۶۵.۹) برای توابع ویژه الحاقی شروع کرده و از خواص تقارن رابطه (۶۱.۹) استفاده کنید.

- **تمرین ۱۱** از جعبه ابزار NANOPT فایل‌های demobem05.m و demobem06.m که مقادیر ویژه λ_k و مودهای ویژه $u_k(\mathbf{s})$ کره‌های تزویجی یا بیضوی‌گون محاسبه و رسم می‌کند، استفاده کنید.
  - **الف**: از حالت کره‌های تزویجی شروع کرده و مودهای‌ویژه را رسم کنید. مودها را از کمترین مقدار ویژه λ_k بر حسب مودهای مقید و نامقید با استفاده از توابع پایه مودهای تک کره تفسیر کنید.
  - **ب**: آیا اثر تزویج برای کره‌ها بیشتر است یا بیضوی‌کون‌ها؟ وابستگی به‌فاصله را تفسیر کرده و یک تفسیر ارائه دهید.

- **تمرین ۱۲** از رابطه (۲۴.۷) برای محاسبه توزیع بار سطحی در استوانه‌های مماسی، رابطه (۵۱.۹)، استفاده کنید.

- **تمرین ۱۳** ار سطح مقطع پراکندگی و انقراضی نظریه می، رابطه (۵۳.۹)، شروع کرده و حد $kR \ll 1$ را با استفاده از معادله (ج-۲۸) انجام دهید.
  - **الف**: ثابت کنید که در کمترین مرتبه تقریب می‌توان نظریه می شبه‌استاتیک را بدست آورد.
  - **ب**: اصلاحات مرتبه پیشرو[۵۳] را برای سطح مقطع پراکندگی بدست آورید.

- **تمرین ۱۴** از جعبه ابزار NANOPT فایل demobem01.m را استفاده کنید.

[۵۳] Leading-Order Corrections

- **الف**: طیف پراکندگی و انقراضی را برای قطر کره در محدوده ۵۰ نانومتر تا یک میکرو متر با استفاده از کره‌های طلا و نقره بررسی کنید.
- **ب**: کمینه مقدار قطع l_{max} مرتبه‌های زاویه‌ای برای کوچکترین و بزرگترین کره که برای بدست آوردن نتایج همگرا مورد نیاز است، بررسی کنید.
- **ج**: با استفاده از فایل demobem03.m الگوی انتشار را برای شعاعها و فرکانس‌های انتخابی بررسی و نتایج را تفسیر کنید.
- **د**: طیف پراکندگی و الگوهای انتشار را برای یک کره دی‌الکتریک با $n_1 = 1.5$ بررسی کنید.

• **تمرین ۱۵** از جعبه ابزار NANOPT فایل demobem01.m را برای تحریک نوری یک نانوکره فلزی استفاده کنید. جهت انتشار نور تحریک در جهت zها، و نور پراکنده در جهت xها با استفاده از تصویربرداری عدسی‌ها، فصل سوم، مشاهده می‌شود. اثر قطبش خطی و دایره‌ای نور تحریک را روی تصویر تحقیق کرده و نتیجه را تفسیر کنید. اگر مایل باشید، می‌توانید از مرجع [۸۱] استفاده کنید.

فصل ۱۰

چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها

در این فصل تزویج تابشگرهای کوانتومی و سایر کاوشگرهای محلی به‌نانوذرات پلاسمونی را بررسی می‌کنیم. راحتر خواهد بود که مفهوم **چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها** (LDOS)[۱] که معیاری از برای سنجش کارآمدی یک نوسانگر بنحوی که انرژی را به‌محیط خود منتقل می‌کند، معرفی کنیم. در بخش‌های بعدی فصل، طیف‌سنجی رامان تقویت‌شده سطحی(SERS)[۲] و طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون (EELS)[۳]، که نقش مهمی در زمینه‌های نانو اپتیک و پلاسمونیک دارند، بحث خواهیم کرد. این فصل بسیاری از مفاهیم معرفی شده در فصل‌های قبلی، از جمله توابع گرین، محیط‌های طبقه بندی شده و پلاسمون‌های ذرات را ترکیب می‌کند. تحلیل بر اساس چارچوب الکترودینامیک کلاسیک خواهد بود، اما در بخش‌های بعدی این کتاب نشان خواهیم داد که نتایج فقط باید برای اثرات کوانتومی مختصری تطبیق داده شوند.

۱.۱۰ نرخ فروپاشی تابشگر کوانتومی

با در نظر گرفتن توان تلف شده توسط یک دوقطبی نوسانی، که احتمالاً نزدیک به‌یک نانوذره پلاسمونیک یا در برخی از محیط‌های فوتونیک غیر ضروری قرار دارد، شروع می‌کنیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، کار کاملاً کلی است و تنها فرضی که در مورد محیط فوتونیک داریم این است که پاسخ آن خطی است. توان انجام شده توسط یک توزیع جریان $\mathbf{J}$ در مقابل میدان‌های الکترومغناطیسی قبلاً در معادله (۱۳.۴) بدست آمده است. می‌توان نوشت؛

$$\frac{dW}{dt} = -\int \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)d^3r$$

که در آن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی است. علامت منفی نسبت به‌رابطه (۱۳.۴) به‌این دلیل است که بدنبال توانی هستیم که توسط توزیع جریان در مقابل میدان الکتریکی (و نه توسط میدان الکتریکی روی توزیع جریان) انجام می‌شود. فرض می‌کنیم که دوقطبی با فرکانس زاویه‌ای ω نوسان کرده و برای توان تلف شده به‌طور میانگین در یک دوره نوسان به‌دست می‌آید.

[۱] Photonic Local Density of States (LDOS)

[۲] Surface-Enhanced Raman Spectroscopy (SERS)

[۳] electron energy loss spectroscopy (EELS)

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{2}\int Re\left\{\mathbf{J}^*(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}^*(\mathbf{r})\right\} d^3r = \frac{1}{2}Re\left\{\left(j\omega\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\right\}\right.$$

در آخرین عبارت از معادله (۱.۶ برای ربط دادن توزیع جریان به‌گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ تابشگر کوانتومی، استفاده کرده‌ایم. آنچه در ادامه می‌آید ترفندی است که تقریباً بیش از آن زیباست که واقعیت داشته باشد. می‌توانیم از تابع گرین دایادیک برای ارتباط میدان الکتریکی به‌منبع میدان، یعنی خود تابشگر کوانتومی، استفاده کنیم. از معادله (۲۰.۵ داریم؛

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\int \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r' = \omega^2\mu\bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r_0})\cdot\mathbf{p}$$

در اینجا $\bar{\bar{G}}_{tot}$ تابع گرین است که شامل بخش فضای آزاد و همین طور حالت بخش بازتاب شده محیط فوتونیک غیرضروری[۴] است.

$$\bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{۱.۱۰}$$

با کنار هم گذاشتن همه نتایج، به‌توان میانگین-زمانی تلف شده توسط یک دوقطبی می‌رسیم.

توان میانگین تلف شده توسط تابش دوقطبی

$$P = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^3}{2c^2\epsilon}Im\left\{\mathbf{p}^*\cdot\bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r_0},\mathbf{r_0},\omega)\cdot\mathbf{p}\right\} \tag{۲.۱۰}$$

این یک نتیجه کاملاً قابل توجه است که نشان می‌دهد توان تلف شده را می‌توان از تابع گرین دایادیک و گشتاور دوقطبی به‌تنهایی محاسبه کرد. بخش موهومی $\mathbf{p}^*\mathbf{E}$ مولفه خارج از فاز[۵] بین دوقطبی نوسانی و میدان ایجاد شده توسط دوقطبی را محاسبه می‌کند. همانطور که در ادامه بحث خواهیم کرد، به‌طور کلی فقط بخشی از توان اتلاف شده توسط دوقطبی تابش می‌شود، بخش دیگر معمولاً به‌محیط فوتونیک، جایی که به‌عنوان مثال از طریق تلفات اهمی به‌گرما تبدیل می‌شود، منتقل می‌شود. می‌توانیم از معادله (۲.۱۰) تعدادی عبارات مفید را بدست آوریم.

- **فضای آزاد** برای محاسبه توان تابشی توسط دوقطبی نوسانی در فضای آزاد، فرض می‌کنیم که دوقطبی در جهت $\hat{z}$ها است. سپس از رابطه صریح برای تابع گرین دیادیک

[۴] Non-trivial
[۵] Out-of-phase

که در تمرین ۷.۵ داده شده، جواب را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} Im\left\{G_{zz}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right\} &= Im\left\{\left[1-\hat{R}_z^2 - j\left(\frac{1-\hat{R}_z^2}{kR}\right) - \left(\frac{1-3\hat{R}_z^2}{k^2R^2}\right)\right]\right. \\ &\quad \left.\times\frac{1}{4\pi R}\left(1-jkR-\frac{1}{2}k^2R^2+\frac{j}{6}k^3R^3+\cdots\right)\right\} \qquad (۳.۱۰) \\ &= \frac{k}{6\pi}+\mathcal{O}(kR)\ . \end{aligned}$$

در اینجا $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ و تابع نمائی e^{-jkR} را بر حسب سری تیلور بسط داده‌ایم. اکنون می‌توانیم حد $R\to 0$ را انجام داده و خواهیم داشت

$$P_0=\frac{\omega^3p^2}{2c^2\epsilon}\left(\frac{k}{6\pi}\right)=\frac{\mu\omega^4p^2}{12\pi c} \qquad (۴.۱۰)$$

مقایسه با رابطه (۲۰.۹) برای توان پراکندگی دوقطبی نوسانی

$$P_{sca}=Z^{-1}\frac{k^4}{32\pi^2\epsilon^2}\left(\frac{8\pi}{3}p^2\right)=\frac{\mu\omega^4p^2}{12\pi c}$$

نشان می‌دهد که جواب‌ها یکسان هستند.

- **افزونگی فوتونیک** از تجزیه معادله (۱.۱۰) برای تابع گرین می‌توان افزونگی توان تلف شده را به‌صورت زیر بیان کرد؛

$$\frac{P}{P_0}=1+\frac{6\pi}{k}Im\left\{\hat{\mathbf{p}}^*\cdot\bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r_0},\mathbf{r_0},\omega)\cdot\hat{\mathbf{p}}\right\}\ . \qquad (۵.۱۰)$$

که در آن $\hat{\mathbf{p}}$ بردار واحد گشتاور دوقطبی است. بطوریکه در زیر نشان خواهیم داد، در همین حالت این عامل افزونگی می‌تواند نیز کوچکتر از یک مربوط به‌جلوگیری از توان تلف شده باشد.

- **توان تابشی** به‌طور کلی، تنها بخشی از توان تلف شده به‌تابش تبدیل، در حالی که بقیه در محیط فوتونیک جذب و مانند تلفات اهمی نانوذرات پلاسمونیک، در نهایت به‌گرما تبدیل می‌شود. برای محاسبه توان پراکنده می‌توانیم از معادله (۲۲.۴) استفاده کنیم که P_{sca} حاصل از قضیه پواین‌تینگ را با استفاده از میدان‌های الکترومغناطیسی در مرز $\partial\Omega$ که دوقطبی و همچنین تمام ذرات مربوطه محیط فوتونی را در بر می‌گیرد، محاسبه کرد. در صورت لزوم، می‌توان $\partial\Omega$ را نیز به‌سمت بی‌نهایت انتقال داد.

- **نرخ فروپاشی** یک تابشگر کوانتومی را در نظر گیرید که فوتون‌هایی با انرژی $\hbar\omega$ ساطع می‌کند. اگرچه بدست آوردن روابط بالا کاملاً مبتنی بر استدلال‌های کلاسیک بوده است، می‌توانیم نرخ فروپاشی Γ را از طریق رابطه زیر محاسبه کنیم.

$$\Gamma=\frac{P}{\hbar\omega} \qquad (۶.۱۰)$$

منطق پشت این عبارت به‌شرح زیر است: P انرژی تلف شده در واحد زمان را نشان می‌دهد. با توجه به‌مکانیک کوانتوم، این سیستم فقط می‌تواند فوتون‌هایی با کوانتوم انرژی $\hbar\omega$ منتشر کند. به‌همین دلیل، انتظار می‌رود که عبارت بالا، احتمال فروپاشی در واحد زمان، به‌اصطلاح نرخ فروپاشی را بدهد، و در واقع در بخش‌های بعدی این کتاب نشان خواهیم داد که یک رویکرد کوانتومی کامل همان نتیجه را می‌دهد.

به‌عنوان مثال خاص، در اینجا از معادله (۴.۱۰) برای محاسبه نرخ پراکندگی تابش کوانتومی در فضای آزاد را استفاده می‌کنیم.

$$\Gamma_0 = \left(\frac{\mu\omega^4 p^2}{12\pi c}\right)\frac{1}{\hbar\omega} = \frac{\mu\omega^3}{3\pi\hbar c}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad (۷.۱۰)$$

همین نتیجه را می‌توان از عملیات مکانیک کوانتومی کامل به‌دست آورد و معمولاً به‌آن نرخ فروپاشی ویگنر-وایسکوپف[۶] می‌گویند. یک نکته ظریف در مورد گشتاور دوقطبی وجود دارد که البته فقط ماهیت فنی دارد. در الکترودینامیک کلاسیک گشتاور دوقطبی وابسته به‌زمان معمولاً از رابطه زیر به‌دست می‌آید؛

$$\mathbf{p}(t) = Re\left\{e^{j\omega t}\mathbf{p}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}\mathbf{p} + c.c.\right)$$

در حالی که در مکانیک کوانتوم $\mathbf{p}$ معمولاً به‌لحظه گذار دوقطبی از حالت پایه به‌حالت تحریک اشاره دارد. برای توصیف کوانتومی کامل به‌بخش ۱۵.۴ مراجعه کنید. در این ضورت، همانطور که در عبارت سمت راست معادله (۷.۱۰) نشان دادیم، امید ریاضی[۷] عملگر دوقطبی با ضریب $1/2$ با نتیجه کلاسیک متفاوت است. در هر صورت، می‌توانیم با خیال راحت از

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{P}{P_0}$$

برای محاسبه تابش کوانتومی افزونگی نرخ فروپاشی در یک محیط مفروض فوتونیک نسبت به‌نرخ فروپاشی فضای آزاد، استفاده کنیم. در زیر همچنین از طول عمر $\tau_0 = 1/\Gamma_0$ برای دوقطبی نوسانی در فضای آزاد و $\tau = 1/\Gamma$ برای دوقطبی واقع در یک محیط متفاوت فوتونیک استفاده خواهیم کرد.

- **ضریب پُرسل** در زمینه الکترودینامیک کوانتومی، بیان افزونگی نرخ فروپاشی تابشی بر حسب فاکتور پُرسل[۸] بسیار راحت است[۸۲]. افزونگی معمولاً به‌فروپاشی یک تابشگر کوانتومی در یک کاواک[۹]، جایی که نور به‌عنوان مثال با استفاده از دو آینه به‌حجم Ω_{cav} تحدید[۱۰] می‌شود، مربوط است. نور بین آینه‌ها به‌جلو و عقب منتشر شده تا از طریق تلفات از کاواک خارج شود. معمولاً عامل کیفیت $Q = \delta\omega/\omega$ که زمان صرف شده توسط

[۶] Wigner–Weisskopf
[۷] Expectation Value
[۸] Purcell Factor
[۹] Cavity
[۱۰] confined

نور در کاواک بحساب می‌آید، را تعریف می‌کنند. با پارامترهای کاواک Ω_{cav} و Q ضریب پورسل بصورت زیر بیان می‌شود [۸۲]؛

$$F = \frac{3}{4\pi^2}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^3\Big(\frac{Q}{\Omega_{cav}}\Big) \qquad (۸.۱۰)$$

که در آن λ/n طول‌موج موثر نور در کاواک است. از این نتیجه می‌گیریم که برهمکنش نور-ماده را می‌توان با کوچکتر کردن حجم یا با افزایش زمان صرف شده توسط نور در کاواک افزایش داد. گرچه تعریف Ω_{cav} برای نانوذرات پلاسمونی دشوار است، اما مشخص می‌شود که ضریب کیفیت معمولاً پایین است (به‌دلیل تلفات اهمی زیاد فلزات)، از طرف دیگر حجم مود مؤثر می‌تواند بسیار کم باشد. به‌این دلایل، فاکتورهای افزونگی پُرسل بسیار زیادی را می‌توان برای نانوذرات پلاسمونیک به‌دست آورد.

- **قطبش پذیری موثر** این ممکن است مکان مناسبی برای پرداختن به‌یک نکته ظریف در مورد انتخاب مناسب قطبش‌پذیری موثر باشد. در فصل قبل معادله (۱۹.۹) را برای بیان گشتاور دوقطبی القایی یک ذره کوچک قطبش پذیر بدست آوردیم.

$$\mathbf{p} = \bar{\bar{\alpha}}(\omega)\cdot\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0)\ .$$

در اینجا $\bar{\bar{\alpha}}$ تانسور قطبش پذیری و $\mathbf{E}_{inc}$ میدان الکتریکی تابشی برای قطبی کردن ذره است. همانطور که در مرجع [۸۳] اشاره شده است، دوقطبی القایی دچار میرایی تابشی می‌شود که باید آنرا بحساب آورد. به‌راحتی می‌توانیم این کار را با استفاده از سهم مرتبه اصلی $-jIm\{G_{zz}(\mathbf{r_0},\mathbf{r_0})\}$ که قبلاً برای نرخ فروپاشی فضای آزاد بدست آورده بودیم، بصورت زیر ارائه دهیم؛

$$\mathbf{p} = \bar{\bar{\alpha}}(\omega)\cdot\Big[\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0) + \omega^2\mu\Big(\frac{-jk}{6\pi}\Big)\bar{\bar{\alpha}}\cdot\mathbf{p}\Big]\ .$$

جمله اول داخل براکت، میدان خارجی است، جمله دوم میدان تولید شده توسط خود ذره قطبش پذیر است. معادله بالا را می‌توان برای $\mathbf{p}$ حل کرد و خواهیم داشت؛

$$\mathbf{p} = \Big(\mathbb{I} - \frac{-jk^3}{6\pi\epsilon}\bar{\bar{\alpha}}\Big)^{-1}\cdot\bar{\bar{\alpha}}\cdot\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0) = \bar{\bar{\alpha}}_{eff}\cdot\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0)\ . \qquad (۹.۱۰)$$

وقتی ذره قطبش پذیر در یک محیط فوتونیک غیر ضروری قرار گیرد، می‌توانیم تلفات اضافی که با ضریب افزونگی پُرسل $P : P_0$ در قطبش پذیری موثر تعریف شده است، در نظر گیریم.

$$\bar{\bar{\alpha}}_{eff} = \Big(\mathbb{I} - \frac{-jk^3}{6\pi\epsilon}\Big[\frac{P}{P_0}\Big]\bar{\bar{\alpha}}\Big)^{-1}\cdot\bar{\bar{\alpha}}$$

در اصل، تانسور قطبش پذیری موثر $\bar{\bar{\alpha}}_{eff}$ باید برای تمام سطح مقطع‌های نوری که در فصل قبل بدست آمده، استفاده شود. برای ذرات کوچک جمله تصحیح معمولاً کوچک است و می‌توان با خیال راحت از آن صرف نظر کرد. با این حال، برای ذرات بزرگتر

جمله میرایی اضافی می‌تواند منجر به‌بهبود قابل توجهی در مقایسه با جواب‌های معادلات ماکسول شود.

۱.۱.۱۰ چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها

عنوان این فصل «چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها» است، بنابراین باید معنای آن را روشن کنیم. چگالی حالت‌ها (DOS)[۱۱] یک مفهوم مفید است که معمولاً در فیزیک حالت جامد، جایی که معمولاً به‌تعداد حالت‌های الکترونیکی در هر انرژی و در واحد حجم اشاره دارد، معرفی می‌شود. اجازه دهید E_i سطوح انرژی الکترونیکی برخی از سیستم‌های حالت جامد، مانند الکترون‌های آزاد در یک فلز را نشان دهد. سپس، چگالی حالت‌های $D(E)$ به‌صورت [۳۶] زیر تعریف می‌شود.

$$D(E) = \frac{1}{\Omega}\sum_i \delta(E - E_i) \ ,$$

که در آن Ω حجم سیستم است و i وضعیت‌های مختلف را برچسب گذاری می‌کند. برای یک سیستم معین، $D(E)$ معمولاً از یک سری قله‌های تیز دلتا مانند تشکیل شده است، در حالی که در حد ترمودینامیکی $\Omega \to \infty$ چگالی حالت‌ها به‌یک تابع پیوسته تبدیل می‌شود.

می‌توانیم سعی کنیم مفهومی مشابه با سیستم‌های فوتونیک اتخاذ کنیم. یک تعریف مفید از چگالی فوتونی حالت‌ها چنین است:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\Omega}\sum_{\mathbf{k}s} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}s}) \ , \qquad (۱۰.۱۰)$$

که در $\mathbf{k}$ عدد موج حالت‌های فوتون و $\mathbf{k}$ قطبش‌های مختلف است. در رابطه بالا فرض می‌کنیم که میدان‌های الکترومغناطیسی در حجم Ω، مثلاً در یک محفظه‌ای از آینه‌ها، محدود شده‌اند. در حد $\Omega \to \infty$ می‌توانیم جمع $\mathbf{k}$ را با انتگرال عوض کنیم؛

$$\rho(\omega) \underset{\Omega\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\Omega}\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int \delta(\omega - ck)d^3k = \frac{1}{4\pi^3}\int_0^\infty \delta(\omega - ck)4\pi k^2 dk \qquad (۱۱.۱۰)$$

که در آن ضریب دو را برای درجه آزادی قطبش (پلاریزاسیون) اضافه کرده‌ایم و ضریب اضافی $۳\Omega/(2\pi)^3$ به‌دلیل جایگزینی جمع با انتگرال است [۳۶]. با انجام انتگرال‌گیری، در نهایت چگالی فوتونیک فضای آزاد حالت‌ها را به‌دست می‌آوریم؛

چگالی فوتونیک فضای آزاد حالت‌ها

$$\rho^0(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \qquad (۱۲.۱۰)$$

یک بالا نویس صفر اضافه کرده‌ایم تا نشان دهیم که نتیجه به‌یک محیط فوتونیک فضای آزاد اشاره دارد. برای محیط‌های فوتونیکی مختلف، به‌عنوان مثال، در حضور نانوذرات یا محیط‌های

[۱۱] Density of States (DOS)

لایه لایه، معرفی یک چگالی محلی از حالت‌ها که می‌تواند به‌تابع دیادیک گرین مربوط باشد، راحت است. متأسفانه تعریف این تحت نام چگالی محلی حالت‌ها منحصر به‌فرد نیست و در ادبیات تعاریف مختلفی وجود دارد. طبق مرجع [۸۴]، چگالی محلی حالت‌های تصویر شده در جهت $\hat{\mathbf{p}}$ را معرفی می‌کنیم؛

چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها تصویر شده در امتداد $\hat{\mathbf{p}}$

$$\rho_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r},\omega) = \frac{6\omega}{\pi c^2} Im\left\{\hat{\mathbf{p}}^* \cdot \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r},\omega)\cdot\hat{\mathbf{p}}\right\} \tag{۱۳.۱۰}$$

همراه با رابطه (۱۳.۱۰) بدست می‌آید؛

$$\rho^0_{\hat{\mathbf{z}}}(\mathbf{r},\omega) = \frac{6\omega}{\pi c^2} Im\left\{G_{zz}(\mathbf{r},\mathbf{r},\omega)\right\} = \frac{6\omega}{\pi c^2}\frac{\omega}{6\pi c} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\ ,$$

که با چگالی حالت‌های $\rho^0(\omega)$ رابطه (۱۲.۱۰) در فضای آزاد سازگاری و مطابقت دارد. اگر میانگین‌گیری روی تمام زوایا (برای جزئیان به‌تمرین ۱.۱۰ مراجعه کنید)، میانگین چگالی محلی حالت‌ها را خواهیم داشت؛

$$\rho(\mathbf{r},\omega) = \left\langle \rho_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r},\omega)\right\rangle_{\hat{\mathbf{p}}} = \frac{2\omega}{\pi c^2} Im\left\{tr\left[\bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r},\mathbf{r},\omega)\right]\right\} \tag{۱۴.۱۰}$$

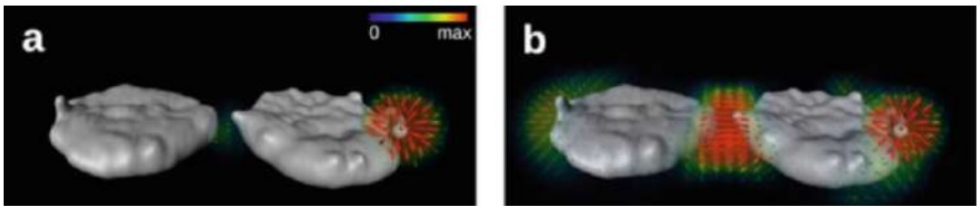
که در آن tr ردگیری روی دایادیک گرین است یعنی این جمع عناصر قطری است. نرخ فروپاشی تابشگر کوانتومی را می‌توان به‌چگالی فوتونیک حالت‌ها از طریق رابطه زیر مربوط کرد؛

$$\Gamma_{tot} = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{\omega}{3\hbar\epsilon}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \rho_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r},\omega) \tag{۱۵.۱۰}$$

بر طبق بحث نرخ فروپاشی ویگنر-وایسکوپف معادله(۷.۱۰)، عبارت داخل پرانتز با امید ریاضی مکانیک کوانتومی عملگر دوقطبی مطابقت دارد. به‌طور مشابه، اگر برای دوقطبی نوسانی میانگین‌گیری کنیم، نرخ فروپاشی میانگین زاویه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\left\langle \Gamma_{tot}\right\rangle_{\hat{\mathbf{p}}} = \frac{\omega}{\hbar\epsilon}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \rho(\mathbf{r},\omega) \tag{۱۶.۱۰}$$

شکل (۱.۱۰) LDOS فوتونیک یک دایمر از دو نانوذره نقره را نشان می‌دهد که از آزمایش‌های طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون استخراج شده است. در اینجا مطلوب ما نحوه به‌دست آوردن داده‌ها نیست، بلکه از نتایج فقط برای بحث در مورد اینکه چرا مفهوم LDOS فوتونیک اغلب بسیار مفید است استفاده می‌کنیم. در شکل، رنگ شابلون‌ها با افزونگی LDOS فوتونیک و جهت دوقطبی‌های نوسانی با بزرگترین مقادیر $\rho_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r},\omega)$ مطابقت دارد. شکل **(الف)** یک مود پلاسمون را نشان می‌دهد که در یک برآمدگی روی ذره سمت راست محدود شده است. افزونگی میدان نزدیک قوی این ویژگی تیز، منجر به‌افزونگی قوی LDOS می‌شود. به‌عبارت دیگر، یک دوقطبی نوسانی که در نزدیکی این ویژگی قرار دارد، بسیار سریعتر از فضای آزاد فروپاشی می‌کند.



شکل ۱.۱۰: LDOS فوتونیک که از میکروسکوپ الکترونی برای دو نانوذره پلاسمونیک تزویجی و دو مود پلاسمونی مختلف به‌دست آمده است[۸۵]. شکل (**الف**) مودی را نشان می‌دهد که در یک برآمدگی روی ذره سمت راست محدود شده است، شکل (**ب**) مود دوقطبی پیوند را نشان می‌دهد که در آن گشتاورهای دوقطبی روی ذرات جداگانه به‌موازات یکدیگر جهت‌گیری می‌کنند. رنگ شابلون‌ها با افزونگی LDOS فوتونیک و جهت دوقطبی‌های نوسانی با بزرگترین مقادیر $\rho_{\hat{\mathbf{p}}}(\mathbf{r},\omega)$ مطابقت دارد. شکل از مرجع [۸۵] گرفته شده است.

جهت‌گیری شابلون‌ها نزدیک به‌نانوذره تقریباً با جهت‌های میدان الکتریکی مطابقت دارد. به‌طور مشابه، در شکل (**ب**) یک مود دوقطبی پیوند را نشان می‌دهیم که در آن گشتاورهای دوقطبی تک تک نانوذرات به‌موازات یکدیگر جهت‌گیری می‌کنند. با این پیکربندی، یک افزونگی قوی LDOS را در ناحیه شکاف بین دو ذره مشاهده می‌کنیم، که مشابه بحث در مورد ذرات تزویجی در فصل نهم است. به‌عنوان آخرین نکته، توجه کنید که به‌طور کلی یک سهم مغناطیسی نیز در LDOS وجود دارد، همانطور که با جزئیات بیشتر در مرجع [۸۶] آمده است.

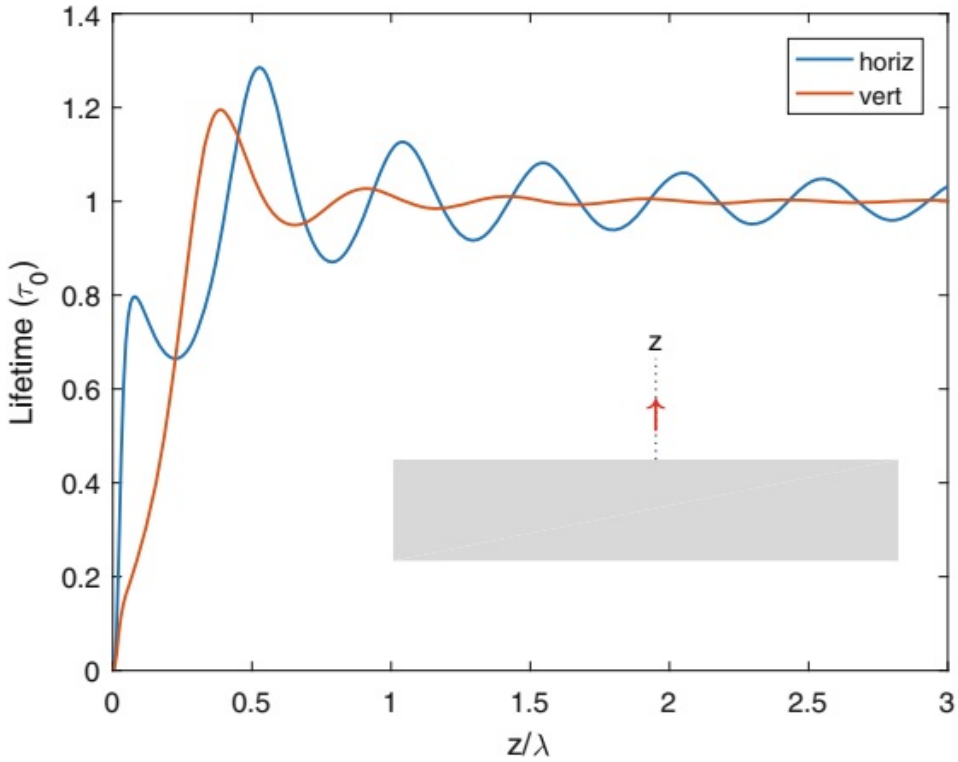
۲.۱۰ تابشگر کوانتومی در محیط فوتونیک

با ابزارهای که در فصل‌های آخر مدون شد، می‌توانیم LDOS فوتونیک را برای تعدادی چینش مختلف محاسبه کنیم. در ادامه با محیط‌های لایه لایه شروع کرده و سپس نانوذرات پلاسمونیک را برای چند ساختار هندسی مورد نظر بررسی می‌کنیم.

۱.۲.۱۰ تابشگر کوانتومی بالای تیغه فلزی

ابتدا وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن یک دوقطبی در بالای یک لایه فلزی، همانطور که به‌صورت شماتیک در قسمت داخلی شکل (۲.۱۰) نشان داده شده، قرار دارد. معادله (۵.۱۰) برای افزونگی توان تلف شده توسط دوقطبی را می‌توان فوراً با تابع گرین بازتابی معادله (۵۱.۸) برای یک محیط لایه لایه، ترکیب کرد. شکل (۲.۱۰) افزونگی یا کاهش طول عمر حاصل $\tau : \tau_0$ را برای دوقطبی واقع در بالای یک لایه نقره نشان می‌دهد. نزدیک به‌سطح مشترک τ به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد.

در اینجا دوقطبی با پلاسمون‌های سطحی تیغه نقره، جایی‌که انرژی از طریق تلفات اهمی به‌گرما تبدیل می‌شود، تزویج صورت می‌گیرد. هر قدر فاصله دوقطبی-فلز بزرگتر باشد، به‌دلیل کاهش تزویج میدان نزدیک به‌پلاسمون‌ها، طول عمر افزایش می‌یابد، و قدرت تلف شده عمدتاً به‌دلیل تشعشعات ساطع شده است. برای فواصل قابل مقایسه با طول موج تشعشعات ساطع شده، نوسان‌های τ را مشاهده می‌کنیم که با واکنش سازنده و مخرب میدان‌های بازتابی در



شکل ۲.۱۰: کاهش و افزونگی طول عمر برای دوقطبی واقع در بالای یک تیغه نقره، با فاصله دوقطبی-تیغه z. هنگامی که به‌سطح نقره نزدیک می‌شوید، نوسان‌های طول عمر را مشاهده می‌کنید که به‌واکنش سازنده و مخرب میدان‌های بازتابی روی دوقطبی نوسانی نسبت داده می‌شود. نزدیک به‌سطح فلز طول عمر به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد زیرا دوقطبی پلاسمون‌های سطحی را پرتاب می‌کند و انرژی خود را از دست می‌دهد. در محاسبه از $\lambda = 400$ نانومتر و تابع دی‌الکتریک نقره که در [۳۴] آمده، استفاده شده است.

دوقطبی نوسانی مربوط است. این اثرات اولین بار توسط درسهیگ[۱۲] [۸۷] نشان داده شد و به‌تفصیل در مرجع [۸۸] بحث شده است.

۲.۲.۱۰ تقریب شبه استاتیک

به‌عنوان مثال دوم، یک تابشگر کوانتومی را در تعامل با نانوذرات پلاسمونی، که در تقریب شبه‌استاتیکی توضیح داده شده‌اند، در نظر می‌گیریم. ابتدا عبارت قدرت تلف شده یک دوقطبی نوسانی را در تقریب شبه‌استاتیکی بدست می‌آوریم. در قیاس کامل با بحث قبلی، از کار انجام شده توسط دوقطبی در مقابل میدان الکتریکی شروع می‌کنیم

$$P = P_0 - \frac{1}{2} Re\Big\{\Big(-j\omega \mathbf{p}^*\Big) \cdot \Big[-\nabla V_{refl}(\mathbf{r_0})\Big]\Big\} .$$

[۱۲] Drexhage

که در آن P_0 توان تابشی توسط دوقطبی در فضای آزاد است و که قبلاً در (۴.۱۰) محاسبه شد، و $V_{refl}(\mathbf{r_0})$ پتانسیل بازتابی نانو ذرات در موقعیت $\mathbf{r_0}$ دوقطبی است. سپس از تابع گرین معادله (۲۳.۹) برای بیان V_{refl} برحسب توزیع باز دوقطبی استفاده می‌کنیم؛

$$V_{refl}(\mathbf{r}) = \epsilon^{-1}\int_{\Omega} G_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3r' = \int_{\Omega} G_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left[\frac{\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{-j\omega\epsilon}\right]d^3r'$$

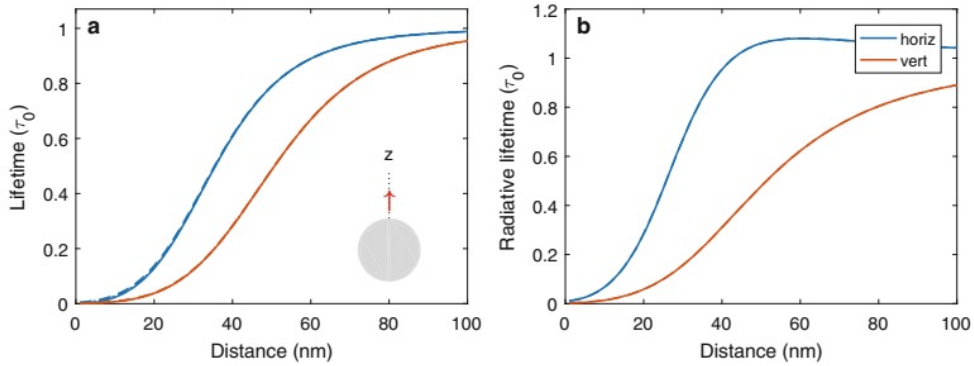
در اینجا Ω حجمی است که دوقطبی را در بر می‌گیرد و در آخرین عبارت از معادله پیوستگی برای ارتباط توزیع بار و جریان استفاده کرده‌ایم. در مرحله بعد انتگرال‌گیری را با قسمت بندی کردن انجام می‌دهیم تا مشتق را از $\mathbf{J}$ به‌تابع گرین بیاوریم. با استفاده از $\nabla'\cdot(G\mathbf{J}) = (\nabla' G)\cdot\mathbf{J} + G(\nabla\cdot\mathbf{J})$ خواهیم داشت؛

$$V_{refl}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\omega\epsilon}\oint_{\partial\Omega} G_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{J}(\mathbf{s}')\cdot dS' - \frac{j}{\omega\epsilon}\int_{\Omega}\mathbf{J}(\mathbf{r}')\cdot\nabla' G_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\ d^3r'$$

جمله اول با استفاده از قضیه گرین رابطه (۱۲.۲) به‌انتگرال مرزی تبدیل کرده‌ایم. چگالی جریان $\mathbf{J}$ برای مرز واقع در خارج توزیع بار دوقطبی صفر است، و جمله اول بدین طریق حذف می‌شود. با مربوط کردن $\mathbf{J}$ به‌گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ با رابطه (۱.۶) به‌رابطه زیر میرسیم؛

$$P = P_0 - \frac{\omega}{2\epsilon} Im\left\{\left(\mathbf{p}^*\cdot\nabla\right)\left(\mathbf{p}\cdot\nabla'\right)G_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right\}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'=\mathbf{r_0}}$$

با معرفی مود ویژه تجزیه معادله (۳۳.۹) را برای تابع گرین بازتابی ادامه می‌دهیم؛



شکل ۳.۱۰: کاهش طول عمر برای یک دوقطبی نوسانی که نزدیک به‌یک نانوکره نقره قرار دارد، همانطور که در تقریب شبه‌استاتیکی در طول موج تشدید دوقطبی ۳۵۵ نانومتر محاسبه می‌شود. شکل **(الف)** طول عمر کل برای دوقطبی افقی در امتداد x و دوقطبی عمودی در امتداد z. خطوط توپر نتایج شبیه‌سازی را در جایی که همه حالت‌های ویژه در نظر گرفته می‌شوند نشان می‌دهد، خطوط چین‌دار (نقطه‌دار) نتایج شبیه‌سازی را نشان می‌دهند که در آن فقط مودهای دوقطبی (دو قطبی و چهار قطبی) در نظر گرفته می‌شوند. شکل **(ب)** همانند **(الف)** اما برای طول عمر تابش. در هر دو شکل، فاصله از نانوکره اندازه‌گیری می‌شود. از تابع دی‌الکتریک نقره[۳۴]، ثابت دی‌الکتریک یک برای محیط بستر، و شعاع کره ۵۰ نانومتر، استفاده می‌کنیم.

$$G_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\sum_k V_k(\mathbf{r})\frac{\lambda_k+\frac{1}{2}}{\Lambda(\omega)+\lambda_k}V_k(\mathbf{r}')\ ,$$

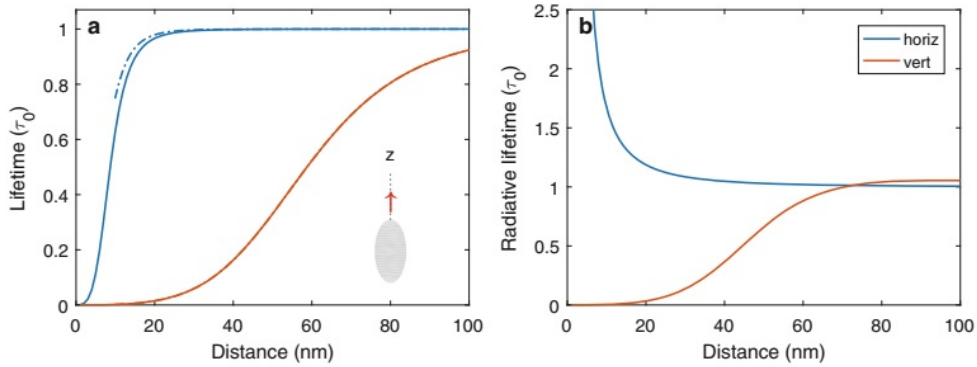
که در آن $V_k(\mathbf{r})$ پتانسیل مربوط به‌مود ویژه kام است که دارای مقدار ویژه λ_k است، و $\Lambda(\omega)$ تابعی است که دارای گذردهی وابسته به‌فرکانس نانوذره و محیط جاسازی است. با این تجزیه، به‌توان متوسط تلف شده توسط یک تابشگر دوقطبی در تقریب شبه‌استاتیکی می‌رسیم؛

توان میانگین تلف شده توسط تابشگر دوقطبی (شبه‌استاتیک)

$$P = P_0 + \frac{\omega}{2\epsilon}\sum_k Im\left\{\frac{\lambda_k+\frac{1}{2}}{\Lambda(\omega)+\lambda_k}\right\}\left|\mathbf{p}\cdot\nabla V_k(\mathbf{r})\right|^2_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}} \qquad (۱۷.۱۰)$$

شکل (۳.۱۰)-الف کاهش طول عمر τ را برای یک دوقطبی واقع در بالای نانوکره نقره، همانطور که از معادله (۱۷.۱۰) محاسبه شده، نشان می‌دهد. خیلی دور از کره، τ به‌طول عمر فضای آزاد τ_0 نزدیک می‌شود. با کاهش فاصله دوقطبی به‌مودهای بیشتری تزویج شده که منجر به‌افت τ می‌شود. خطوط خط چین (نقطه چین) نتایج را برای شبیه‌سازی نشان می‌دهند که در آن فقط مودهای دوقطبی (دوقطبی و چهارقطبی) در نظر گرفته می‌شود. توافق با نتایج شبیه‌سازی کامل (خطوط جامد) شامل همه مودها در فاصله زیاد دوقطبی-کره بسیار خوب است، اما برای فواصل کوچک‌تر که در آن دوقطبی شروع به‌تزویج مودهای چند قطبی بالاتر می‌کند بدتر می‌شود. شکل (**ب**) افزونگی طول عمر تابشی $\tau : \tau_0$ را نشان می‌دهد که از گشتاور دوقطبی کل (دوقطبی به‌اضافه نانوذرات پلاسمونیک) همراه با معادله (۲۰.۹) برای توان پراکنده یک دوقطبی نوسانی، محاسبه می‌شود. در اینجا کاهش (یا افزایش) طول عمر بستگی به‌جهت دوقطبی دارد. در تشدید، دوقطبی با جهت‌گیری در امتداد z قوی‌ترین مود دوقطبی پلاسمون را در امتداد z تزویج کرده، و گشتاور دوقطبی آن با دوقطبی محرک خارج از فاز است. بنابراین سهم دو گشتاور دوقطبی در فرآیند انتشار جمع شده و سیستم تزویجی نور را به‌طور موثرتری ساطع می‌کند. در مقابل، دوقطبی افقی در امتداد x باعث ایجاد دوقطبی آینه‌ای شده که در جهت مخالف نسبت به‌دوقطبی محرک است. در نتیجه، تابش ساطع شده به‌دلیل کاهش گشتاور دوقطبی کل کوچکتر می‌شود و τ حتی اندکی از مقدار فضای آزاد τ_0 فراتر می‌رود.

رفتار مشابهی در شکل (۴.۱۰) برای یک بیضی نقره‌ای با نسبت محوری ۱:۲ مشاهده شده است، که در آن بیشتر نتایج را می‌توان در امتداد خطوط مشابه برای نانوکره تفسیر کرد. واضح ترین تفاوت افزایش شدید طول عمر تابشی برای فواصل کوچک است که به‌دلیل فرکانس‌های تشدید متفاوت مودهای دوقطبی پلاسمونیک جهت‌گیری در امتداد z و x، y است. به‌دلیل تقارن، دوقطبی افقی فقط می‌تواند مودهای پلاسمون xy را تحریک کند، که در مقایسه با حالت z انرژی بالاتری دارند، و بنابراین دوقطبی نسبت به‌مودهای پلاسمونی که با آنها تزویج می‌شود، تشدید ندارد. در نتیجه، توزیع بار سطحی القایی را می‌توان به‌طور موثر بر حسب یک دوقطبی آینه‌ای توصیف کرد که گشتاور دوقطبی کل را کاهش می‌دهد و منجر به‌کاهش پراکندگی و طول عمر تابشی بیشتر می‌شود.



شکل ۴.۱۰: مانند شکل (۳.۱۰) اما برای یک بیضی با نسبت محور ۱:۲، محور بزرگ ۵۰ نانومتر و طول موج تشدید دوقطبی ۴۰۰ نانومتر است.

۳.۲.۱۰ نظریه می

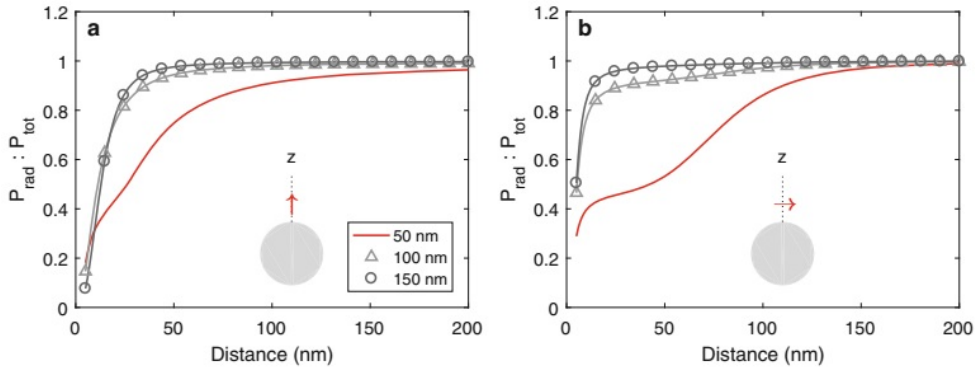
توان‌های تابشی P_{rad} و کل تلف شده P_{tot} را می‌توان به‌صورت تحلیلی در نظریه می محاسبه کرد. در اینجا بدست آوردن نتایج را حذف می‌کنیم، در پیوست **ه** شرح مفصلی ارائه می‌کنیم. معادلات (ه-۳۷) و (ه-۳۸) توان تابش شده توسط یک دوقطبی نوسانی واقع در مجاورت یک کره فلزی (یا دی‌الکتریک) را نشان می‌دهند. و معادلات (ه-۴۱) و (ه-۴۲) کل توان تلف شده را می‌دهند. به‌طور کلی، این دو عبارت متفاوت هستند، زیرا دوقطبی نوسانی با مودهای پلاسمونیک تزویج می‌شود که قدرت را از طریق تشعشع یا از طریق تلفات اهمی تلف می‌کنند.

شکل (۵.۱۰) نسبت توان تابشی و کل تلف شده $P_{rad} : P_{tot}$ که **بازده کوانتومی** نامیده می‌شود، برای یک دوقطبی واقع در بالای یک نانوکره نقره، همانطور که در داخل شکل نشان داده شده است، را نشان می‌دهد. از همان پارامترهایی که برای طیف‌های انقراضی و قبلاً در شکل (۱۸.۹) نشان داده شده بود، استفاده می‌کنیم و قطر کره‌ها و فاصله دو قطبی-کره مختلف را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌شود که دور از کره عملاً تمام توان، تشعشع شده و فقط نزدیک به‌کره تلفات غیرتابشی شروع به‌غالب شدن می‌کنند.

آزمایش زیبایی توسط گروه نووتنی[۱۳] [۸۴] وجود دارد که سیستم مولکول-نانوکره تزویجی را به‌شیوه‌ای شبیه به‌کتاب درسی بررسی می‌کند. در این آزمایش، یک نانوکره طلا به‌یک فیبر (تار نوری) متصل می‌شود و فیبر به‌صورت شطرنجی روی یک لایه نازک که مولکول‌های رنگ در آن تعبیه شده است، روبش می‌شود. به‌این ترتیب، بررسی تجربی سیستمی که قبلاً در نظریه می تحلیل کردیم امکان پذیر می‌شود. قبل از تعمق در مورد نتایج نشان داده شده در شکل (۶.۱۰)، ابتدا وضعیت یک دوقطبی نوسانی در فضای آزاد را مورد بحث قرار می‌دهیم. به‌جای توان‌های تابشی و تلف‌شده کل، استفاده از مفاهیم نرخ‌های تابشی و فروپاشی کل را ، جایی که معادله (۶.۱۰) ارتباط بین این مقادیر را فراهم می‌کند، ساده‌تر میدانیم.

- **نرخ فروپاشی تابشی** یک مولکول تحریک شده در فضای آزاد با گسیل یک فوتون میرا می‌شود. نرخ فروپاشی مربوطه، که این تعداد فروپاشی در واحد زمان را با Γ^0_{rad} نشان

[۱۳] Novotny group



شکل ۵.۱۰: بازده کوانتومی برای دوقطبی واقع در بالای کره نقره، همانطور که از نظریه می محاسبه شده است. از پارامترهای مشابه در شکل (۱۸.۹) استفاده می‌کنیم و توان تابشی و پراکنده کل پراد و پتوت را در تشدیدهای دوقطبی $3.4eV$ (۵۰ نانومتر)، $3.15eV$ (۱۰۰ نانومتر) و $2.6eV$ (۱۵۰ نانومتر) محاسبه می‌کنیم. شکل‌های **(الف)** و **(ب)** نتایج را به‌ترتیب برای جهت‌گیری دوقطبی عمودی و افقی نشان میدهد.

می‌دهیم . بالانویس صفر برای یادآوری فروپاشی فضای آزاد است.

- **نرخ فروپاشی مولکولی** علاوه بر فروپاشی تابشی، معمولاً تعدادی کانال فروپاشی داخلی و مولکولی وجود دارد که از طریق آنها مولکول با نرخ Γ_{mol} بدون گسیل فوتون تجزیه می‌شود. به‌طور معمول، انرژی تحریک به‌ارتعاشات مولکولی و در نهایت گرما منتقل می‌شود.

- **بازده کوانتومی** نسبت بین فروپاشی فضای آزاد و نرخ فروپاشی کل را بازده کوانتومی می‌گویند.

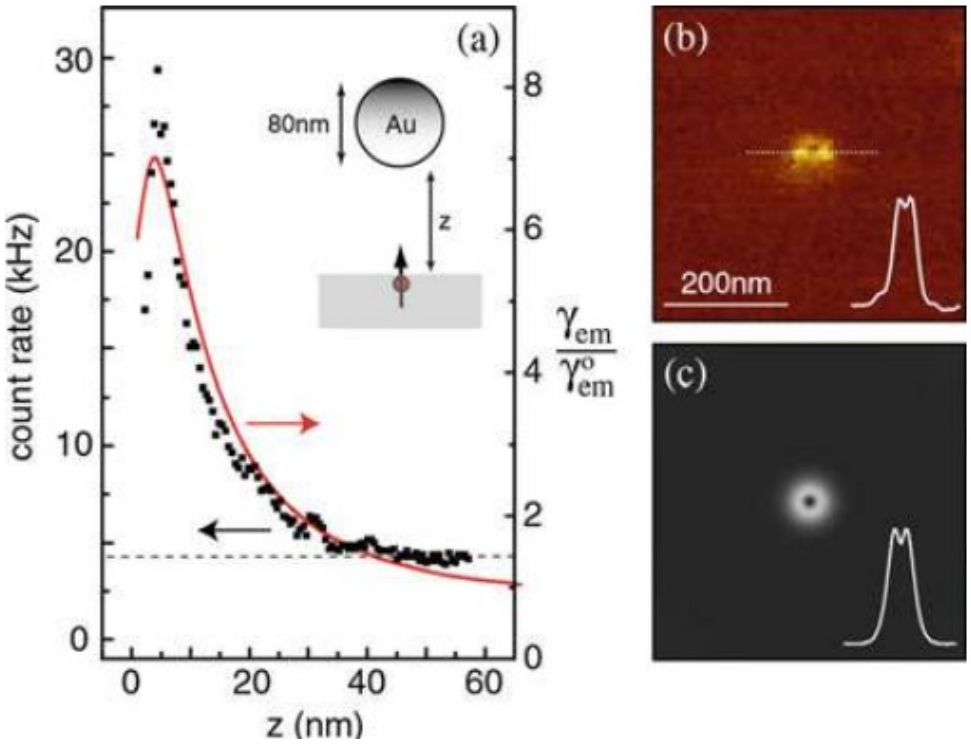
$$QY^0 = \frac{\Gamma^0_{rad}}{\Gamma_{mol} + \Gamma^0_{rad}} \qquad (۱۸.۱۰)$$

بازده کوانتومی این احتمال را که مولکول تحریک شده با گسیل یک فوتون و نه از طریق فروپاشی داخلی تجزیه می‌شود، نشان می‌دهد. برای مولکول‌های معمولی، این بازده کوانتومی می‌تواند نسبتاً کوچک باشد، مثلاً حدود ۱۰ درصد یا گاهی حتی کمتر.

- **سفید کنندگی** مولکول‌های معمولی با احتمال مشخصی **سفید**[۱۴] می‌شوند. به‌طور کلی منطقی است که فرض کنیم یک مولکول به‌طور متوسط یک میلیون فوتون، قبل از اینکه دچار تغییر ساختاری شود و از نظر نوری غیرفعال شود، ساطع می‌کند. به‌همین دلیل، آزمایش‌های نوری با مولکول‌ها اغلب فقط برای مدت معینی، معمولاً از ثانیه تا دقیقه انجام می‌شود. سفید شدن را می‌توان با قرار دادن مولکول‌ها در ماتریس و کار در دماهای پایین به‌شدت حذف کرد. تابشگرهای کوانتومی دیگری مانند نقاط کوانتومی وجود دارند که بازده کوانتومی بسیار بالاتری دارند و در تناوب زمانی بسیار طولانی‌تری پایدار می‌مانند.

حالت بعدی را در نظر گیرید که یک مولکول در نزدیکی یک نانوذره پلاسمونیک قرار می‌گیرد.

[۱۴] Bleach



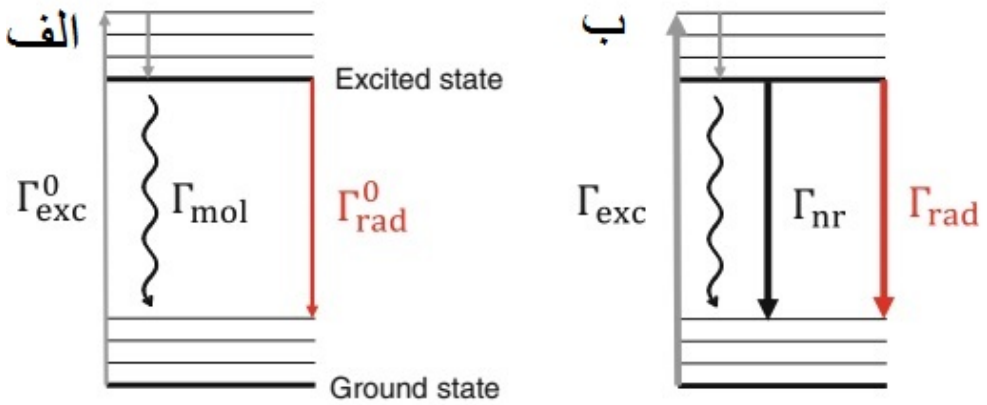
شکل ۶.۱۰: فلورسانس اندازه‌گیری شده یک سیستم همدوس متشکل از یک دوقطبی (مولکول رنگ) و نانوذره طلا [۸۴]. **(الف)** با کاهش فاصله دوقطبی-کره، انتشار ابتدا افزایش می‌یابد، زیرا به‌دلیل تزویج مولکول-نانوذره بزرگ‌تر، و در فواصل کوچک، به‌دلیل افزونگی فروپاشی غیرتابشی و تلفات اهمی، خاموش می‌شود. **(ب)** الگوی انتشار تجربی و **(ج)** شبیه سازی شده برای روبش نانوذره طلا روی مولکول. شکل از مرجع [۸۴] گرفته شده است.

با تغییر محیط فوتونیک، کانال فروپاشی مولکولی داخلی معمولاً بی‌تأثیر می‌ماند، اما ویژگی‌های زیر تغییر می‌کنند (شکل ۷.۱۰):

- **فروپاشی تابشی** مولکول-نانوذره تزویجی معمولاً دارای نرخ فروپاشی تابشی افزایش یافته Γ_{rad} است، شکل (۳.۱۰) و (۴.۱۰) مراجعه کنید، اگرچه در برخی موارد کاهش Γ_{rad} نیز مشاهده می‌شود.

- **فروپاشی غیرتابشی** علاوه بر فروپاشی تابشی، نانوذره پلاسمونیک نیز می‌تواند از طریق تلفات اهمی تجزیه شود. فروپاشی غیر تابشی حاصل از طریق نرخ $\Gamma_{nr} = \Gamma_{tot} - \Gamma_{rad}$ توصیف می‌شود، که در آن Γ_{tot} نرخ کل فروپاشی است که از کل توان تلف شده معادله (۲.۱۰) محاسبه می‌شود.

- **بازده کوانتومی** با این اصلاحات نرخ، بازده کوانتومی سیستم دوقطبی-نانوذره تزویجی



شکل ۷.۱۰: نمودار جابلونسکی مولکول تحریک نوری. **(الف)** مولکول در فضای آزاد. Γ^0_{exc} نرخ تحریک مولکول است که معمولاً به‌سطح ویبرونیک تحریک شده حالت تحریک می‌رسد. پس از آرامش سریع ارتعاشی، در حالت پایه ارتعاشی حالت مولکولی تحریک، از طریق آرامش داخلی (Γ_{mol}) یا با گسیل یک فوتون (Γ^0_{rad}) تجزیه می‌شود. **(ب)** برای یک مولکول تزویجی به‌یک نانوذره پلاسمونیک، سرعت فروپاشی تحریک و تشعشع تغییر می‌کند. علاوه بر این، یک کانال فروپاشی غیر تابشی باز می‌شود که در آن مولکول با انتقال انرژی خود به‌نانوذره پلاسمونیک تجزیه می‌شود، جایی که از طریق تلفات اهمی به‌گرما تبدیل می‌شود.

خواهد بو؛

$$QY = \frac{\Gamma_{rad}}{(\Gamma_{mol} + \Gamma_{nr}) + \Gamma_{rad}} \qquad (۱۹.۱۰)$$

اصلاح نسبت به‌مقدار فضای آزاد QY^0 واضح نیست و به‌جزئیات تغییر نرخ بستگی دارد. در غیاب آرامش داخلی، بازده کوانتومی همیشه کاهش می‌یابد، زیرا از طریق تزویج به‌نانوذره پلاسمونیک یک کانال فروپاشی غیر تابشی (Γ_{nr}) باز می‌شود. برای مولکول‌هایی با مقدار QY^0 کوچک، بازده کوانتومی معمولاً در حضور یک نانوذره پلاسمونی افزایش می‌یابد، حداقل برای مولکول‌هایی که به‌اندازه کافی دور از ذره هستند که در آن فروپاشی تابشی بر ذره غیر تابشی غالب است.

- **نرخ فلورسانس** علاوه بر این، همچنین نرخ تحریک Γ_{exc} در حضور یک نانوذره پلاسمونی تغییر می‌کند، شکل (۷.۱۰). نرخ فلورسانس یا معادل آن تعداد فوتون‌های تابشی شده در واحد زمان، سپس بر اساس $\Gamma_{exc} \times QY$ تغییر می‌کند یا با بیان کلمات:

(نرخ کوانتومی) × (نرخ انقراضی) = (نرخ فلورسانس)

تغییر خالص شدت فلورسانس به‌جزئیات نرخ‌های مختلف بستگی دارد. بطوری که در شکل (۶.۱۰) مشاهده می‌شود، با کاهش فاصله مولکول-نانوکره، ابتدا شدت فلورسانس افزایش می‌یابد، زیرا فروپاشی تابشی اغلب رخ میدهد و بر فروپاشی مولکولی داخلی برتری دارد، و تنها برای کوچک‌ترین فواصل، فلورسانس به‌دلیل افزایش Γ_{nr} خاموش می‌شود. در

اینجا مولکول عمدتاً مودهای پلاسمون چند قطبی را تحریک می‌کند، که از طریق تلفات اهمی، همانطور که قبلا در شکل (۵.۱۰) نشان داده شده، تجزیه می‌شوند،

۳.۱۰ افزونگی سطحی پراکندگی رامان

پراکندگی رامان[۱۵] و افزونگی سطحی پراکندگی رامان(SERS)[۱۶] فرآیندهای کوانتومی واقعی هستند. با این حال، همانطور که در این بخش انجام خواهیم داد، می‌توان با استفاده از یک رویکرد کلاسیک چیزهای زیادی در مورد این فرآیندها آموخت. توصیف کوانتومی معمولاً دشوارتر است، به‌عنوان مثال، مرجع [۸۹]، اما به‌استثنای عوامل جمعیت حرارتی از دست رفته در یک رویکرد کلاسیک، منجر به‌نتایج مشابهی می‌شود. یک نوسان‌کننده را در نظر گیرید که توسط یک میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_L$ تحریک می‌شود؛

$$\mathbf{p}(t) = \left[\bar{\bar{\alpha}}_0 + \bar{\bar{\alpha}}_1 \cos(\Omega_{vib} t)\right] \cdot \left(\mathbf{E}_L \cos(\omega_L t)\right) \tag{۲۰.۱۰}$$

که در آن $\mathbf{p}(t)$ گشتاور دوقطبی وابسته به‌زمان نوسان‌کننده است.ما قطبش را به‌یک جمله مستقل از زمان $\bar{\bar{\alpha}}_0$ و یک جمله نوسانی $\bar{\bar{\alpha}}_1 \cos(\Omega_{vib} t)$ با فرکانس لرزش $\Omega_{vib} \ll \omega_L$ که خیلی کوچکتر از ω_L میدان خارجی است تجزیه کردیم. برای مثال، این مدل مربوط به‌مولکولی است که قطبش آن با لرزش مولکولی مدوله شده است. اگر اکنون فقط جمله متناسب با $\bar{\bar{\alpha}}_1$ را در نظر گیریم، خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= \bar{\bar{\alpha}}_1 \cdot \mathbf{E}_L \cos(\omega_L t) \cos(\Omega_{vib} t) \\ &= \bar{\bar{\alpha}}_1 \cdot \mathbf{E}_L \tfrac{1}{2} \Big\{ \cos[(\omega_L + \Omega_{vib})t] + \cos[(\omega_L - \Omega_{vib})t] \Big\} \end{aligned}$$

بنابراین، نوسان کننده نه فقط با فرکانس تحریک نوسان ω_L می‌کند (بوسیله جمله متناسب با $\bar{\bar{\alpha}}_0$ که ما اینجا درنظر نگرفتیم، توصیف می‌شود) بلکه در فرکانس‌های مدولاسیونی که بنام فرکانس‌های رامان خوانده می‌شوند، نیز نوسان می‌کنند.

فرکانس‌های رامان

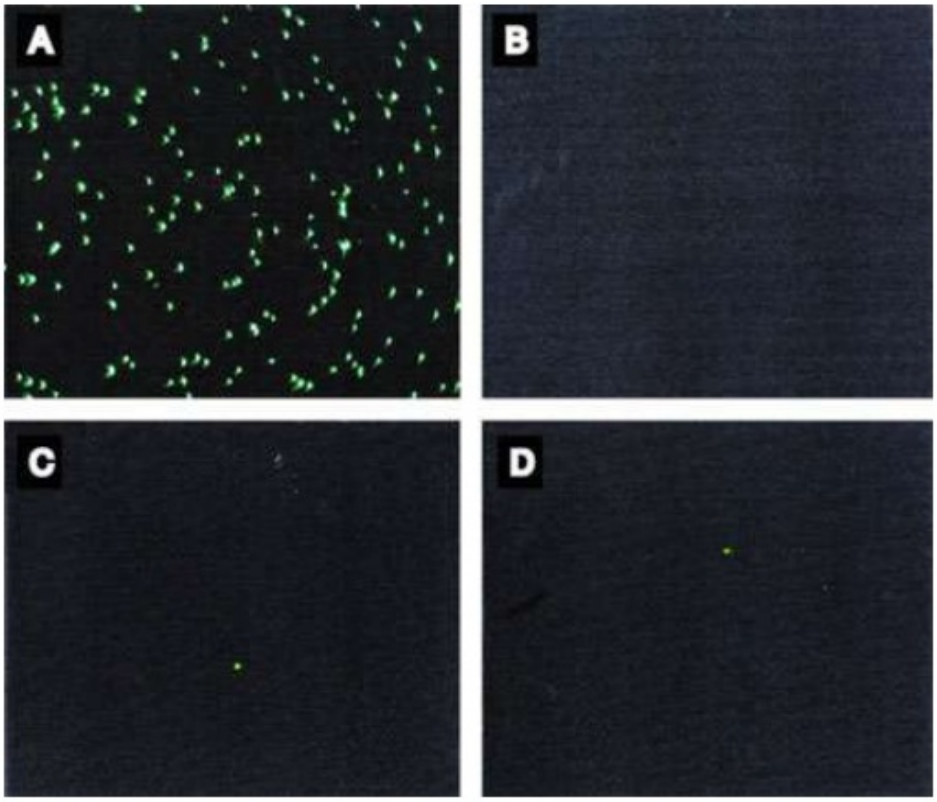
$$\omega_R^{\pm} = \omega_L \pm \Omega_{vib} \tag{۲۱.۱۰}$$

در فصل آخر سطح مقطع پراکندگی را برای یک ذره قطبش پذیر، رابطه (۲۱.۹) بدست آوردیم. ازاینرو می‌توانیم این نتیجه را مستقیماً برای بیان بخش سطح مقطع رامان (کلاسیک) بصورت زیر استفاده کنیم؛

$$C_R = \frac{k^4}{6\pi\epsilon^2} \left| \frac{1}{2} \bar{\bar{\alpha}}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_L \right|^2 , \tag{۲۲.۱۰}$$

[۱۵] Raman Scattering

[۱۶] Surface-Enhanced Raman Scattering (SERS)



شکل ۸.۱۰: نانوذرات منفرد نقره با تحریک موج محو شونده تصویربرداری شده‌اند. بازتاب داخلی کلی پرتو لیزر در رابط شیشه-مایع برای کاهش پس‌زمینه پراکندگی لیزر استفاده شده است. **(الف)** عکس فیلتر نشده که نور لیزر پراکنده را از تمام ذرات تثبیت شده روی سطح پوشش داده شده با پلی‌لیزین نشان می‌دهد. **(ب)** عکس‌های فیلتر شده گرفته شده از یک نمونه کلوئیدی نقره خالی. **(ج)** و **(د)** عکس‌های فیلتر شده گرفته شده از نمونه کلوئیدی نقره که با چند مولکول ناخالص شده است، حداقل یک ذره پراکنده رامان را نشان می‌دهد. شکل از مرجع [۹۰] گرفته شده است.

که در آن k عدد موج نور تابشی (فرض می‌کنیم $\omega_R\pm \approx \omega_L$ بنحوی که k عدد موج میدان تحریک باشد)، ϵ گذردهی محیط بستر و ϵ_L قطبش موج میدان تحریک است. در حقیقت، توصیف مکانیک کوانتومی خیلی شبیه همین نتیجه را میدهد، در هر حال، شدت نور پراکنده برای فرکانس استوکس[۱۷] ω_R^- و فرکانس ضد استوکس ω_R^+ بطور کلی متفاوت است.

اثر رامان به‌صورت تئوری توسط آدولف اسمکال[۱۸] در سال ۱۹۲۳ پیش‌بینی شد و ۵ سال بعد توسط فیزیکدان هندی چاندراساخارا ونکاتا رامان[۱۹] به‌صورت تجربی مشاهده شد. از آن زمان استفاده گسترده ای پیدا کرده است زیرا امکان تشخیص فرکانس‌های ارتعاشی را می‌دهد، که به‌عنوان اثر انگشت برای مولکول‌های خاص عمل می‌کنند، اما نه در محدوده فرکانس مادون

[۱۷] Stokes frequency

[۱۸] Adolf Smekal

[۱۹] Chandrasekhara Venkata Raman

قرمز بلکه در رژیم فرکانس نوری. در سال ۱۹۷۴ گروه فلیشمن[۲۰] مشاهده سیگنال‌های قوی رامان را از یک لایه مولکول که بر روی الکترودهای فلزی زبر شده الکتروشیمیایی رسوب کرده بود گزارش کردند[۹۱]. این مقاله به‌عنوان اولین مشاهده SERS در نظر گرفته می‌شود. گام مهم دیگر، کار نی و ایموری[۲۱][۹۰] است که سیگنال‌های SERS را از مولکول‌های منفرد، همانطور که در شکل (۸.۱۰) نشان داده شده است، مشاهده کردند. نویسندگان در چکیده مقاله خود می‌نویسند:

> آشکارسازی نوری و طیف‌سنجی تک مولکول‌ها و نانوذرات منفرد در دمای اتاق با استفاده از افزونگی سطحی پراکندگی رامان به‌دست آمده است. تک تک نانوذرات کلوئیدی نقره از یک جمعیت ناهمگن بزرگ برای خواص ویژه وابسته به‌اندازه غربالگری شدند و سپس برای تقویت علائم طیف‌سنجی مولکول‌های جذب‌شده استفاده شدند. برای تک مولکول‌های رودامین $6G$ جذب شده روی نانوذرات انتخابی، فاکتورهای تقویت ذاتی رامان در حد 10^{14} تا 10^{15} بود، که بسیار بزرگ‌تر از مقادیر میانگین مجموعه مشتق‌شده از اندازه‌گیری‌های معمولی بود. این پیشرفت عظیم منجر به‌سیگنال‌های رامان ارتعاشی می‌شود که شدیدتر و پایدارتر از فلورسانس تک مولکولی هستند.

گرچه افزونگی SERS تا ۱۵ مرتبه تا حدودی مشکوک باقی مانده است، اما کارهای بعدی متعدد فاکتورهای افزایش بسیار بزرگی را تایید کرده است. در ادامه، پراکندگی رامان را در حضور یک محیط فوتونی اصلاح‌شده تحلیل می‌کنیم. همانطور که نشان خواهیم داد، اصلاح بر روی (۱) فرآیند تحریک نوسانگر و همچنین (۲) خواص انتشار نوسانگر تأثیر می‌گذارد. ترکیب این دو اثر منجر به‌پیشرفت‌های عظیم سیگنال‌های SERS مطابق با مشاهدات تجربی می‌شود.

- **افزونگی گسیل** با اصلاح فرآیند گسیل شروع می‌کنیم. از معادله (۱.۱۰) مشاهده می‌کنیم که میدان الکتریکی یک دوقطبی نوسانی در حضور یک محیط فوتونی اصلاح شده را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد؛

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu\omega^2\left[\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_{dip}) + \bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r},\mathbf{r}_{dip})\right]\cdot\mathbf{p}$$

که در آن $\bar{\bar{G}}$ برای انتشار نوسانگر در فضای آزاد و $\bar{\bar{G}}_{refl}$ برای اصلاحات مربوطه، مثلاً یک نانوذره پلاسمونیک نزدیک آن است. $\mathbf{r}_{dip}$ محل دوقطبی تحریک است. دور از دوقطبی و نانوذرات پلاسمونیک، میدان‌های الکترومغناطیسی امواج خارج شونده به‌صورت زیر هستند.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \underset{r\gg r_{dip}}{\longrightarrow} \mu\omega^2\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)\left[\bar{\bar{f}}(\hat{\mathbf{r}},\mathbf{r}_{dip}) + \bar{\bar{f}}_{refl}(\hat{\mathbf{r}},\mathbf{r}_{dip})\right]\cdot\mathbf{p}$$

در اینجا $\bar{\bar{f}}$ و $\bar{\bar{f}}_{refl}$ به‌ترتیب صورت مجانبی فضای آزاد تابع گرین بازتابی هستند. بخش فضای آزاد را می‌توان از معادله (۲۵.۵) بصورت زیر نوشت؛

$$f_{ij}(\hat{\mathbf{r}},\mathbf{r}_{dip}) = \frac{e^{jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_{dip}}}{2\pi}\left(\delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_j\right) \qquad (۲۳.۱۰)$$

[۲۰] Fleischmann

[۲۱] Nie and Emory

و آن در حدود یک است. در مقابل، افزونگ $\bar{\bar{f}}_{refl}$، که می‌تواند از تابع گرین بازتابی در محدوده میدان دور بدست آید، می‌تواند در حضور نانوذرات پلاسمونیک، با ضریب افزونگی در حدود صدها مرتبه بزرگ شود. دامنه میدان دور نور ساطع شده از دوقطبی نوسانی در فرکانس‌های رامان را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \mu\omega^2 \left[\bar{\bar{f}}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}; , \omega_R^{\pm}) + \bar{\bar{f}}_{refl}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}; , \omega_R^{\pm}) \right] \cdot \mathbf{p}_1 \ , \qquad (۲۴.۱۰)$$

که برای روشن شدن مطلب فرکانس‌های رامان را که نور ساطع می‌کند با $\omega_R^{\pm}$ نشان دادیم.

- **افزونگی تحریک** علاوه بر افزونگی فرآیند گسیل، میدان تحریک نوسانگر نیز اصلاح می‌شود. بجای (۲۰.۱۰) خواهیم داشت؛

$$\mathbf{p}(t) = \left[\bar{\bar{\alpha}}_0 + \bar{\bar{\alpha}}_1 \cos(\Omega_{vib} t) \right] \cdot \Big(\mathbf{E}_L(\mathbf{r}_{dip}, t) + \mathbf{E}_{refl}(\mathbf{r}_{dip}, t) \Big) \ ,$$

که در آن $\mathbf{E}_{refl}(\mathbf{r}_{dip}, t)$ بخش بازتابی میدان تحریک در موقعیت دوقطبی است. در مرحله بعد می‌توانیم از $\bar{\bar{f}}_{refl}$ دامنه میدان دور تابع گرین بازتابی را برای بیان این افزونگی فرآیند تحریک استفاده کنیم. به‌عنوان مرحله مقدماتی، فرض می‌کنیم که میدان ورودی $\mathbf{E}_L$ توسط یک دوقطبی نوسانی دیگر با گشتاور $\mathbf{p}_L$ که در موقعیت $\mathbf{r}$ دورتر از دوقطبی و نانوذره پلاسمونیک قرار دارد، تولید می‌شود. سپس میدان الکتریکی در $\mathbf{r}_{dip}$ را می‌توان به‌صورت معمول بیان کرد؛

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_{dip}) = \mu\omega^2 \left[\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r}) + \bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{p}_L$$

از رابطه تقارن معادله (۳۸.۷) برای دایادیک گرین که با استفاده از قضیه هم‌پاسخی اپتیک به‌دست آورده‌ایم، می‌توانیم توابع گرین را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r}) = \bar{\bar{G}}^T(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{dip}) \underset{r \gg r_{dip}}{\longrightarrow} \mu\omega^2 \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \bar{\bar{f}}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r})$$

که در آن T بالا نویس نشان دهنده ترانهاده[۲۲] ماتریس است. یک رابطه را نیز می‌توان برای $\bar{\bar{G}}_{refl}$ به‌دست آورد. سپس یک موج صفحه تابشی با دامنه $\mathbf{E}_L$ را در نظر می‌گیریم که در امتداد جهت $\hat{\mathbf{k}}_L$ منتشر می‌شود. با استفاده از شکل مجانبی معادله (۲۳.۱۰) برای تابع گرین فضای آزاد، می‌توانیم به‌راحتی نشان دهیم که میدان تابشی را می‌توان به‌صورت بیان کرد؛

$$\mathbf{E}_L e^{-j\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}_{dip}} = \bar{\bar{f}}^T(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}) \cdot 4\pi \mathbf{E}_L$$

[۲۲] Transpose

بنابراین، کل میدان تحریک در موقعیت دوقطبی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت؛

$$\mathbf{E}_{tot}(\mathbf{r}_{dip}) = \left[\bar{\bar{f}}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}; \omega_L) + \bar{\bar{f}}_{refl}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}; \omega_L)\right]^T \cdot 4\pi \mathbf{E}_L \qquad (۲۵.۱۰)$$

با کنار هم قرار دادن معادلات (۲۴.۱۰) و (۲۵.۱۰) برای افزونگی فرآیندهای پراکندگی و تحریک، دامنه میدان دور فرآیند رامان پراکنده‌شده را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) &= \mu\omega^2\left[\bar{\bar{f}}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip};, \omega_R^{\pm}) + \bar{\bar{f}}_{refl}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip};, \omega_R^{\pm})\right] \cdot \bar{\bar{\alpha}}_1 \\ &\cdot\left[\bar{\bar{f}}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip};, \omega_L) + \bar{\bar{f}}_{refl}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip};, \omega_L)\right]^T \cdot 4\pi \mathbf{E}_L\end{aligned}$$

ما در نهایت از معادله (۱۷.۴)، که $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$ را به‌بردار پواین‌تینگ در ناحیه میدان دور مربوط می‌کند استفاده و بر شدت $I_{inc} = \frac{1}{2}Z^{-1}|\mathbf{E}_L|^2$ میدان تحریک تقسیم و در تمام زوایا انتگرال‌گیری می‌کنیم تا سطح مقطع برای افزونگی سطحی پراکندگی رامان بدست آید؛

سطح مقطع برای افزونگی سطحی پراکندگی رامان (SERS)

$$\begin{aligned}C_{SERS} &= \oint \Bigg| 2\pi\mu\omega^2\left[\bar{\bar{f}}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}) + \bar{\bar{f}}_{refl}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip})\right] \cdot \bar{\bar{\alpha}}_1 \\ &\cdot\left[\bar{\bar{f}}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}) + \bar{\bar{f}}_{refl}(\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip})\right]^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}_L \Bigg|^2 d\Omega\ .\end{aligned} \qquad (۲۶.۱۰)$$

برای $\Omega_{vib} \ll \omega_L$، وابستگی فرکانسی دامنه‌های میدان دور را حذف کرده‌ایم، تا بتوانیم همه را در فرکانس تحریک ω_L ارزیابی کنیم. در جمله اول عبارت در براکت‌ها برای افزونگی فرآیند پراکندگی به‌حساب می‌آید، در حالی که در جمله دوم عبارت در براکت‌ها برای افزونگی فرآیند تحریک به‌حساب می‌آید. در مجموع مقیاس سطح مقطع رامان با توان چهارم ضریب افزونگی است؛

$$C_{SERS} \propto |f_{refl}|^4 \qquad (۲۷.۱۰)$$

بنابراین، برای ضریب‌های افزونگی میدان $|f_{refl}|$ از مرتبه صدها، برای افزونگی SERS می‌تواند در حد میلیاردها باشد. ممکن است تعجب کنید که آیا می‌توان ضرایب افزونگی مشابهی را برای یک نوسانگر تشدید که در فرکانس تحریک ω_L منتشر می‌کند نیز بدست آورد. با تکرار همان تحلیلی که ارائه شد، در واقع یک افزونگی مشابه را بازیابی می‌کنیم. با این حال، در این مورد، ما علاوه بر این باید نوری را که مستقیماً از نانوذره پلاسمونی ساطع می‌شود، که در همان فرکانس پراکنده می‌شود و شدت بسیار بالاتری دارد،در نظر گیریم. ازاینرو انتشار دوقطبی تشدید را کاملاً می‌پوشاند. بنابراین، جادوی SERS این است که نوسانگر تحریک شده به‌عنوان یک مدولاتور فرکانس عمل می‌کند و نور رامان پراکنده را بطور طیفی از میدان‌های تحریک جدا می‌کند.

سطح مقطع برای افزونگی سطحی پراکندگی رامان SERS پلاسمونیک‌ها را با حساسیت شیمیایی ترکیب کرده که امکان شناسایی مولکول‌ها را از طریق طیف‌های رامان خاص آنها فراهم می‌کند. این یک زمینه تحقیقاتی غنی و بین‌رشته‌ای را با بسیاری از پیشرفت‌های هیجان‌انگیز، مانند پراکندگی رامان پیشرفته (TERS) باز کرده است. در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم، بلکه خوانندگان علاقه‌مند را به‌مطالب مربوطه، مثلاً [۸۹، ۹۲]، ارجاع می‌دهیم.

۴.۱۰ انتقال انرژی تشدید فورستر

انتقال انرژی تشدید فورستر(FRET)[۲۳] فرآیندی است که در آن یک مولکول اهدا کننده[۲۴] واقع در موقعیت $\mathbf{r}_D$ انرژی را از طریق تزویج دوقطبی غیر تابشی به‌یک مولکول گیرنده[۲۵] مجاور واقع در موقعیت $\mathbf{r}_A$منتقل می‌کند. چنین فرآیندهایی نقش مهمی در فتوسنتز دارند و اولین بار توسط فورستر [۹۳] مورد مطالعه قرار گرفتند. در اینجا (FRET) را در یک چارچوب کلاسیک مورد بحث قرار می‌دهیم. کار انجام شده توسط مولکول اهدا کننده بر روی گیرنده را می‌توان از طریق رابطه زیر بیان کرد (به‌بحث ابتدای این فصل نیز مراجعه کنید)؛

$$P_{D\to A} = \frac{1}{2}\int Re\Big\{\mathbf{J}_A^*(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_D(\mathbf{r})\Big\}d^3r = -\frac{\omega}{2}Im\Big\{\mathbf{p}_A^*(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A)\Big\}\ .$$

در اینجا $\mathbf{p}_A$ گشتاور دوقطبی مولکول گیرنده است. به‌طور کلی، هنگامی که انرژی از اهدا کننده به‌گیرنده منتقل می‌شود، فرآیند معکوس به‌دلیل قضیه متقابل اپتیک آغاز می‌شود. با این حال، در مختلط‌های (FRET)، تحریک در مولکول گیرنده معمولاً از آرامش درون مولکولی سریع رنج می‌برد و بدین وسیله آن را به‌طور موثر از کانال (FRET) بین مولکولی حذف می‌کند. در اینجا چنین آرامشی را به‌صراحت در نظر نمی‌گیریم، بلکه به‌جای آن، هر گونه واکنشی را که از سوی گیرنده بر روی اهدا کننده انجام می‌شود، کنار می‌گذاریم. فرض کنید که گشتاور دوقطبی گیرنده $\mathbf{p}_A$ توسط گیرنده توسط یک قطبش پذیری $\bar{\bar{\alpha}}_A$ از طریق رابطه زیر القا شود.

$$\mathbf{p}_A = \bar{\bar{\alpha}}_A\cdot\mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A) = \left[\sum_a \mathbf{n}\alpha_a\mathbf{n}_a^T\right]\cdot t\mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A)$$

در آخرین عبارت، یک تبدیل محور اصلی برای قطبش پذیری انجام داده‌ایم، و فرض می‌کنیم که بردارهای ویژه $\mathbf{n}_a$ را می‌توان حقیقی انتخاب کرد. بنابراین، قدرت از اهدا کننده به‌گیرنده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت؛

$$P_{D\to A} = \frac{\omega}{2}\sum_a \alpha_a''\Big|\mathbf{n}_a\cdot\mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A)\Big|^2\ .$$

در نهایت از تابع گرین دایادیک استفاده می‌کنیم تا میدان الکتریکی اهدا کننده را به‌منبع میدان، یعنی دوقطبی اهداکننده، مربوط کنیم. با این کار، برای قدرتی که اهداکننده بر روی گیرنده انجام می‌دهد، عبارت زیر را بدست می‌آوریم؛

[۲۳] Förster Resonance Energy Transfer (FRET)

[۲۴] Donor

[۲۵] Acceptor Molecule

توان انجام شده توسط اهداکننده بر روی گیرنده

$$P_{D\to A} = \frac{\mu^2 P_D^2 \omega^5}{2} \sum_a \alpha_a'' \left| \mathbf{n}_a \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_D) \cdot \mathbf{n}_D \right|^2 . \qquad (۲۸.۱۰)$$

ساده کردن بیشتر این عبارت راحت است. ابتدا فرض می‌کنیم که جهت‌گیری مولکول گیرنده تصادفی هستند و میانگین‌گیری نسبت به‌جهت‌گیری مولکول برابر است با:

$$\frac{1}{4\pi} \oint \left| \hat{\mathbf{r}} \cdot E\hat{\mathbf{z}} \right|^2 d\Omega = \frac{1}{2}|E|^2 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{3}|E|^2$$

در اینجا بدون از دست دادن کلیت فرض کردیم که میدان الکتریکی اهداکننده در جهت z است. با چنین فرضی مشابه می‌توانیم میانگین گشتاور دوقطبی اهداکننده را به‌دست آوریم؛

$$P_{D\to A} = \frac{\mu^2 P_D^2 \bar{\alpha''}_a \omega^5}{6} \; tr\left\{ \left| \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_D) \right|^2 \right\} , \qquad (۲۹.۱۰)$$

که در آن $\bar{\alpha}'' = \frac{1}{3} tr(\bar{\bar{\alpha}}'')$ قسمت موهومی تانسور قطبش پذیری متوسط است. بعداً این عبارت را به‌خواص گسیل اهدا کننده، به‌ویژه قدرت پراکنده شده آن، و خواص جذب گیرنده، به‌ویژه قدرت انقراضی آن، مربوط کنیم. از معادله (۴.۱۰) قدرت ساطع شده توسط اهدا کننده را پیدا می‌کنیم

$$P_D = \frac{\mu \omega^4 p_D^2}{12\pi c}$$

از معادله (۲۲.۹) توان جذب گیرنده با جهت‌گرائی تصادفی به‌دست می‌آوریم

$$C_{abs} = \mu \omega c \bar{\alpha}_A'' .$$

حداقل زمانی که قطبش پذیری موثر معادله (۹.۱۰) را معرفی نمی‌کنیم، از برابری سطح مقطع انقراضی با سطح مقطع جذب در حد شبه استاتیک، استفاده کردیم. در کنار هم قرار دادن نتایج آنها به‌رابطه زیر می‌رسیم

$$\frac{P_{D\to A}}{P_D} = 2\pi C_{abs}(\omega) \; tr\left\{ \left| \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_D) \right|^2 \right\} . \qquad (۳۰.۱۰)$$

اگر فرض کنیم که اهدا کننده نه تنها در یک فرکانس منفرد منتشر می‌کند، بلکه دارای شکل خطی غیرمعمول $f_D(\omega)$ است که احتمالاً به‌دلیل برخی باندهای کناری لرزشی یا ساختار سطح مولکولی پیچیده‌تر، می‌توان این عبارت را بازنویسی کرد. به‌طور مشابه، جذب گیرنده نیز می‌تواند پهن باند باشد، بنابراین مجبوریم یک انتگرال روی فرکانس معرفی کنیم. سپس نرخ FRET به‌همپوشانی بین گسیل اهدا کننده و جذب گیرنده نیز بستگی دارد. برای بحث مفصل‌تر، به‌عنوان مثال، به‌مرجع [۶] مراجعه کنید.

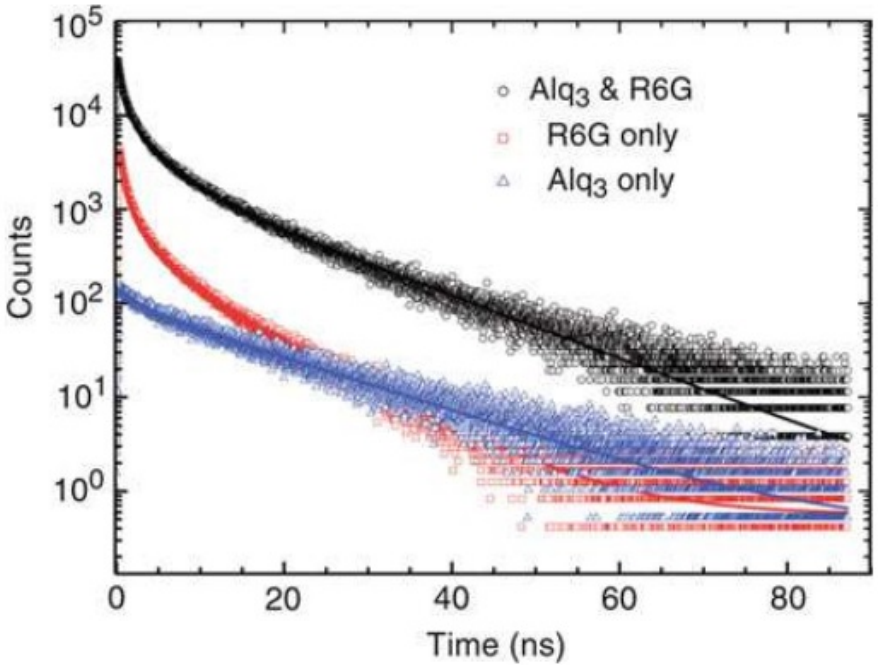
برای دوقطبی‌هایی که در فضای آزاد و نزدیک به‌یکدیگر قرار دارند، می‌توانیم از تابع فضای آزاد استفاده کنیم که در تمرین ۷.۵ کار شده است، جایی که عبارت اصلی برای جداسازی‌های کوچک $\mathbf{R} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_D$ می‌شود.

$$G_{ij}(\mathbf{r}_D, \mathbf{r}_A) \approx \frac{3\hat{R}_i\hat{R}_j - \delta_{ij}}{4\pi k^2 R^3} \ .$$

با این کار به‌نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\frac{P_{D\to A}}{P_D} \approx \left[\frac{R_0}{R}\right]^6 \qquad (۳۱.۱۰)$$

که در آن R فاصله اهدا کننده-گیرنده و R_0 شعاع فورستر است که معمولاً در حد چند نانومتر



شکل ۹.۱۰: انتقال انرژی تشدید فورستر در یک فیلم نقره با ضخامت ۱۲۰ نانومتر [۹۴]. مولکول‌های رنگ دهنده Alq3 در یک طرف فیلم، مولکول‌های رنگ گیرنده رودامین 6G (R6G) در طرف مقابل قرار می‌گیرند. نمونه متشکل از مولکول‌های اهداکننده قرار گرفته در بالای لایه نقره، یک فروپاشی فلورسانس تقریباً تک نمایی را نشان می‌دهد. نمونه متشکل از مولکول‌های گیرنده در بالای فیلم نقره، ویژگی فروپاشی متفاوت با منحنی فروپاشی چند نمایی را نشان می‌دهد. هنگامی که هر دو مولکول در طرف مقابل فیلم قرار می‌گیرند، فروپاشی فلورسانس تنها یادآور فروپاشی گیرنده است، بنابراین انتقال تحریک کارآمد از اهدا کننده به‌گیرنده را نشان می‌دهد. شکل از مرجع [۹۴] گرفته شده است.

است. به‌دلیل این وابستگی شدید به‌فاصله، احتمال FRET معمولاً برای فواصل کوچکتر از R_0 بسیار زیاد است و سپس به‌شدت کاهش می‌یابد.

هنگام قرار دادن مجتمع اهدا کننده-گیرنده در محیطی متفاوت، رقابت با انتقال بسیار کارآمد FRET در فواصل کوچکتر از R_0 شعاع فورستر دشوار است. با این حال، در حضور

نانوذرات پلاسمونیک، زمانی که اهدا کننده و گیرنده هر دو به‌میدان‌های نزدیک پلاسمونیک تزویج می‌شوند، انتقال می‌تواند در فواصل زیاد اتفاق بیفتد [۹۵]. شکل (۹.۱۰) آزمایشی از گروه بارنز[۲۶]، انتقال انرژی را روی یک لایه نقره ۱۲۰ نانومتری نشان می‌دهد [۹۴]. هنگامی که فقط مولکول‌های اهدا کننده در بالای لایه نقره قرار می‌گیرند، فلورسانس فروپاشی تقریباً تک نمایی را نشان می‌دهد. برعکس، نمونه با مولکول‌های گیرنده یک مشخصه فروپاشی متفاوت با منحنی فروپاشی چند نمایی را نشان می‌دهد. هنگامی که مولکول‌های اهدا کننده و گیرنده هر دو در دو طرف فیلم قرار می‌گیرند، فروپاشی فلورسانس فقط یادآور فروپاشی گیرنده است، بنابراین انتقال تحریک کارآمد از اهدا کننده به‌گیرنده را نشان می‌دهد.

۵.۱۰ طیف سنجی تلفات انرژی الکترون

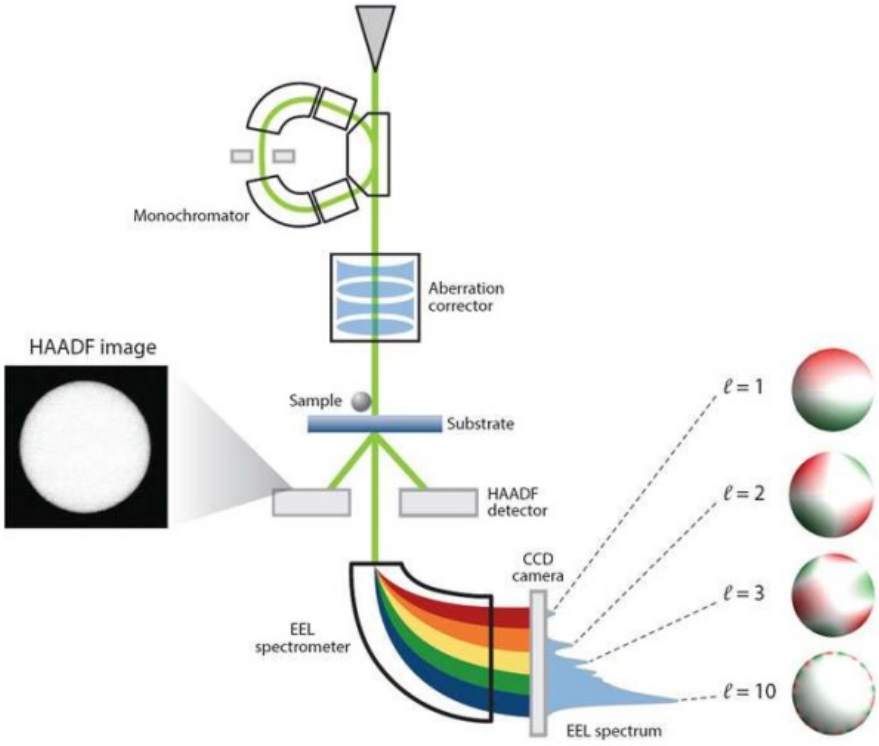
طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون (EELS)[۲۷] یک فناوری مبتنی بر میکروسکوپ الکترونی است که امکان اندازه‌گیری میدان‌های نانوذرات پلاسمونیک با وضوح مکانی نانومتری و انرژی $5-600meV$ را می‌دهد. اصل اساسی در شکل (۱۰.۱۰) نشان داده شده است. یک الکترون سریع با انرژی جنبشی در محدوده $50-300keV$ که مربوط به‌سرعت الکترونی بین ۰.۴ تا ۰.۷ برابر سرعت نور است، از کنار نانوذره فلزی یا از درون آن عبور می‌کند. با احتمال معینی یک پلاسمون ذره‌ای را تحریک کرده و در نتیجه بخش کوچکی از انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. با تجزیه و تحلیل طیفی تلفات انرژی می‌توان طیف پلاسمونیک را ترسیم کرد، و آن جایی است که قوانین انتخاب نوری معمول برای کاوشگر الکترونی اعمال نمی‌شود و بنابراین می‌توان به‌کل طیف دسترسی داشت. علاوه بر این، با روبش شطرنجی پرتو بر روی نمونه، اطلاعات مکانی دقیقی در مورد میدان‌های پلاسمونیک به‌دست می‌آید.

طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون(EELS) یک سنت طولانی در زمینه پلاسمونیک دارد. در واقع، اولین مشاهده پلاسمون‌های سطحی با استفاده از (EELS) [۹۷] انجام شد. اگرچه از آن زمان تاکنون این میدان کم و بیش فعال باقی مانده است، اما پیشرفت بعدی در سال ۲۰۰۷ حاصل شد، زمانی که دو گروه به‌طور مستقل نشان دادند که با پیشرفت‌های بیشتر امکان نقشه‌برداری از میدان‌های نانوذرات پلاسمونیک با وضوح نانومتری وجود دارد [۹۸، ۹۹]. این مقالات آغاز عصر جدیدی را نشان می‌دهد که در آن (EELS) به‌یک فناوری اندازه‌گیری بسیار دقیق و همه کاره برای میدان‌های نزدیک پلاسمونیک تبدیل شده است. شرح مفصلی برای تحولات اخیر را می‌توان در چندین مقاله مروری یافت [۱۰۰، ۱۰۱].

توصیف نظری مناسب (EELS) نیازمند یک چارچوب مکانیکی کوانتومی کامل است. با این حال، با ترکیب نظریه الکترومغناطیسی کلاسیک با یکی از جنبه‌های فیزیک کوانتومی، یعنی ماهیت ذره‌ای آن که حکم می‌کند الکترون می‌تواند انرژی را تنها در کسری از $\hbar\omega$ از دست بدهد، امکان می‌دهد یک رابطه نیمه کلاسیک را بدست آوریم که اساس یک نظریه (EELS) قابل دوام را نشان می‌دهد. در ادامه فرض می‌کنیم که الکترون سریع در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ با سرعت v

[۲۶] Barnes group

[۲۷] Electron Energy Loss Spectroscopy (EELS)



شکل ۱۰.۱۰: چینش طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون (EELS)، تکنیکی مبتنی بر میکروسکوپ الکترونی[۹۶]. یک الکترون سریع با سرعتی در حدود نیمی از سرعت نور از یک کنار نانوذره فلزی گذشته یا از درون آن عبور و با احتمال معینی یک پلاسمون ذره را تحریک می‌کند. با تحلیل طیفی اتلاف انرژی الکترون و روبش شطرنجی پرتو الکترونی بر روی نمونه، اطلاعاتی در باره خواص طیفی و مکانی مودهای پلاسمون به‌دست می‌آید. (EELS) وضوح فضایی زیر نانومتری و وضوح طیفی $10100meV$ میکروسکوپ الکترونی را ترکیب می‌کند. (شکل با اجازه از دیوید جی. ماسیلو)

منتشر می‌شود. مسیر حرکت را می‌توان از طریق رابطه زیر

$$\mathbf{r}_e(t) = \mathbf{R}_0 + \hat{\mathbf{z}}vt \ , \qquad (۳۲.۱۰)$$

با پارامتر اثر $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$، عنوان کرد. در اینجا و در ادامه فرض می‌کنیم که اتلاف انرژی الکترون ریز مسیر الکترون را به‌طور قابل توجهی تغییر نمی‌دهد. در زیر میدان‌های الکترومغناطیسی تولید شده توسط توزیع جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ الکترون سریع را محاسبه خواهیم کرد، اما فعلاً فرض می‌کنیم که پاسخ الکترومغناطیسی $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ پلاسمونیک نانوذره، (به‌عنوان مثال، با استفاده از روش انتگرال مرزی بخش ۹.۶)، در دسترس است. سپس کار انجام شده توسط الکترون در برابر میدان الکتریکی توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$dW = -q\Big(\mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t), t] + \mathbf{v} \times \mathbf{B}[\mathbf{r}_e(t), t]\Big) \cdot \mathbf{v}dt = -q\mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t), t] \cdot \mathbf{v}dt \ ,$$

که در آن $q = -e$ بار و $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ سرعت الکترون است. از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که

میدان‌های مغناطیسی نمی‌توانند مستقیماً کار را انجام دهند زیرا $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}=0$ کل کار انجام شده توسط الکترون در مقابل میدان‌های الکترومغناطیسی مربوط به‌اتلاف انرژی ΔE الکترون سریع است و از طریق انتگرال‌گیری تمام مسیر الکترون به‌دست می‌آید.

$$\Delta E = e\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t),t]dt\ .$$

اتلاف انرژی را می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه میدان الکتریکی به‌اجزای فرکانس‌های مختلف تجزیه کرد. ازاینرو خواهیم داشت؛

$$\Delta E = \frac{e}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re\left\{\int_0^{\infty} e^{j\omega t}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t),\omega]d\omega\right\}dt\ , \qquad (۳۳.۱۰)$$

که در آن از $\mathbf{E}^*(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{E}(\mathbf{r},-\omega)$ استفاده کرده‌ایم که برای هر تابع با ارزش واقعی $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ صادق است. در این مرحله باید از رویکرد کاملا کلاسیک منحرف شویم و برخی از جنبه‌های کوانتومی را معرفی کنیم.

- **رویکرد کلاسیک** در یک رویکرد کاملا کلاسیک، اتلاف انرژی ΔE یک عدد صرف است که با جمع کردن تلفات انرژی تک تک مودهای مختلف پلاسمون به‌دست می‌آید. با این حال، ΔE حاوی هیچ اطلاعات طیف سنجی نیست.
- **رویکرد کوانتومی** در رویکرد کوانتومی، یک الکترون فقط می‌تواند انرژی خود را در کسری از $\hbar\omega$ از دست بدهد. بنابراین، با تجزیه و تحلیل طیفی اتلاف انرژی یک الکترون، **احتمال** این که الکترون مقدار معینی انرژی را از دست داده یا هیچ انرژی از دست نداده است را بدست می‌آوریم.
- **رویکرد نیمه کلاسیک** مشابه بحث قبلی در باره رابطه بین توان تلف شده یک دوقطبی نوسانی و نرخ فروپاشی مربوطه، معادله (۶.۱۰)، می‌توانیم از یک توصیف نیمه کلاسیک استفاده کرده و اتلاف انرژی ΔE به‌احتمال اتلاف $\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0,\omega)$ را از طریق رابطه زیر مرتبط کنیم.

$$\Delta E = \int_0^{\infty}\hbar\omega\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0,\omega)d\omega \qquad (۳۴.۱۰)$$

دلیل پشت این عبارت ماهیت ذره‌ای فوق‌الذکر مکانیک کوانتومی است که حکم می‌کند الکترون می‌تواند انرژی را فقط در کسری از $\hbar\omega$ از دست دهد.

با ترکیب معادلات (۳۳.۱۰) و (۳۴.۱۰) سپس احتمال اتلاف انرژی الکترون را بدست می‌آوریم

احتمال اتلاف انرژی الکترون

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0,\omega) = \frac{e}{\pi\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty} Re\left\{e^{j\omega t}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t),\omega]\right\}dt\ . \qquad (۳۵.۱۰)$$

این عبارت نقطه شروعی را برای استخراج معادله کاری احتمال از دست دادن انرژی الکترون تشکیل می‌دهد. در ادامه، ابتدا میدان‌های الکترومغناطیسی یک الکترون سریع را محاسبه می‌کنیم و سپس از تابع گرین بازتاب‌شده برای ارتباط میدان الکتریکی با منبع جریان الکترون سریع استفاده می‌کنیم.

۱.۵.۱۰ میدان حاصل از الکترون‌های سریع

توزیع بار یک الکترون سریع که در طول مسیر معادله (۳۲.۱۰) منتشر می‌شود، توسط رابطه زیر است؛

$$\rho(\mathbf{r},t) = -e\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)\delta(z-vt)\ , \qquad (۳۶.۱۰)$$

که در آن $\mathbf{R}=(x,y)$ مختصات درون صفحه الکترون هستند. توزیع جریان مربوطه $\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{r},t)$ است. برای محاسبه میدان‌های الکتریکی مربوط به‌این توزیع در یک محیط نامحدود (بعداً حضور نانوذرات پلاسمونیک را توضیح خواهیم داد)، معادله ماکسول را به‌فضای فرکانس و عددموج تبدیل می‌کنیم. ابتدا تبدیل فوریه را در حوزه زمان محاسبه می‌کنیم ؛

$$\rho(\mathbf{r},\omega) = \int e^{-j\omega t}\rho(\mathbf{r},t)dt = -\frac{e}{v}\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)e^{-jqz} \qquad (۳۷.۱۰)$$

که در آن عددموج $q=\omega/v$ را معرفی کرده‌ایم. در این صورت همچنان به‌محاسبه تبدیل فوریه مکانی ادامه می‌دهیم ؛

$$\rho(\mathbf{r},\omega) = -\frac{e}{v}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)e^{-jqz}d^3r = -\frac{2\pi e}{v}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_0}\delta(k_z-q)\ .$$

رای بدست آوردن میدان الکتریکی، این نتیجه را با تابع گرین دایادیک در فضای هم‌پاسخ[۲۸] ترکیب می‌کنیم (به‌جمله داخل پرانتز زیر مراجعه کنید)، همانطور که در بخش پیوست ب-۲ به‌دست آمده است، خواهیم داشت؛

$$E_i(\mathbf{k},\omega) = -j\omega\mu\left(-\frac{1}{k_1^2}\frac{k_ik_j-k_1^2\delta_{ij}}{k^2-k_1^2}\right)\Big[-\frac{2\pi e}{v}e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_0}\delta(k_z-q)\Big]v\delta jz$$

که در آن k_1 عددموج درون محیطی است که الکترون در آن در حال انتشار است. سپس E_z, E_x موازی و عمود بر جهت انتشار الکترون را در فضای واقعی محاسبه می‌کنیم.

- **مولفه‌های موازی** از طریق تبدیل فوریه معکوس میدان الکتریکی را در فضای واقعی بدست می‌آوریم

$$E_z(\mathbf{r},\omega) = \left(\frac{-j\omega\mu e}{4\pi^2k_1^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)}\left(\frac{k_z^2-k_1^2}{k^2-k_1^2}\right)\delta(k_z-q)d^3k\ . \qquad (۳۸.۱۰)$$

برای ساده‌سازی این عبارت ابتدا معرفی می‌کنیم

$$q^2-k_1^2 = \frac{\omega^2}{v^2}\left(1-v^2\mu\epsilon\right) = q^2\gamma_\epsilon^{-2}, \qquad \gamma_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1-v^2\epsilon\mu_0}} \qquad (۳۹.۱۰)$$

[۲۸] Reciprocal Space

در اینجا و در ادامه، نفوذپذیری را روی μ_0 قرار می‌دهیم. با معرفی مختصات قطبی انتگرال بالا به‌رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-j(qz+k_\rho \rho \cos\phi)} \frac{\gamma_\epsilon^{-2} q^2}{k_\rho^2 + \gamma_\epsilon^{-2} q^2} d\phi k_\rho dk_\rho$$

$$= 2\pi \gamma_\epsilon^{-2} q^2 e^{-jqz} \int_0^\infty \frac{J_0(k_\rho \rho)}{k_\rho^2 + \gamma_\epsilon^{-2} q^2} k_\rho dk_\rho = 2\pi \gamma_\epsilon^{-2} q^2 \left[e^{-jqz} K_0\left(\frac{q\rho}{\gamma_\epsilon}\right)\right]$$

که در آن K_0 توابع بِسل اصلاح شده مرتبه صفر است

- **مولفه‌های عمودی** به‌طور مشابه، برای مولفه عمودی E_x خواهیم داشت؛

$$E_x(\mathbf{r},\omega) = \left(\frac{-j\omega\mu e}{4\pi^2 k_1^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)} \left(\frac{k_x K_z}{k^2 - k_1^2}\right) \delta(k_z - q) d^3k \ .$$

انتگرال روی دست راست را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد؛

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-j(qz+k_\rho \rho \cos\phi)} \frac{q k_\rho \cos\phi}{k_\rho^2 + \gamma_\epsilon^2 q^2} d\phi k_\rho dk_\rho$$

$$= -2\pi j q e^{-jqz} \int_0^\infty \frac{J_1(k_\rho \rho)}{k_\rho^2 + \gamma_\epsilon^{-2} q^2} k_\rho dk_\rho = -2\pi j \gamma_\epsilon^{-1} q^2 \left[e^{-jqz} K_1\left(\frac{q\rho}{\gamma_\epsilon}\right)\right]$$

که در آن K_1 تابع بِسل اصلاح شده مرتبه صفر است.

با ترکیب نتایج فوق، برای میدان الکتریکی مرتبط با الکترون سریع رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

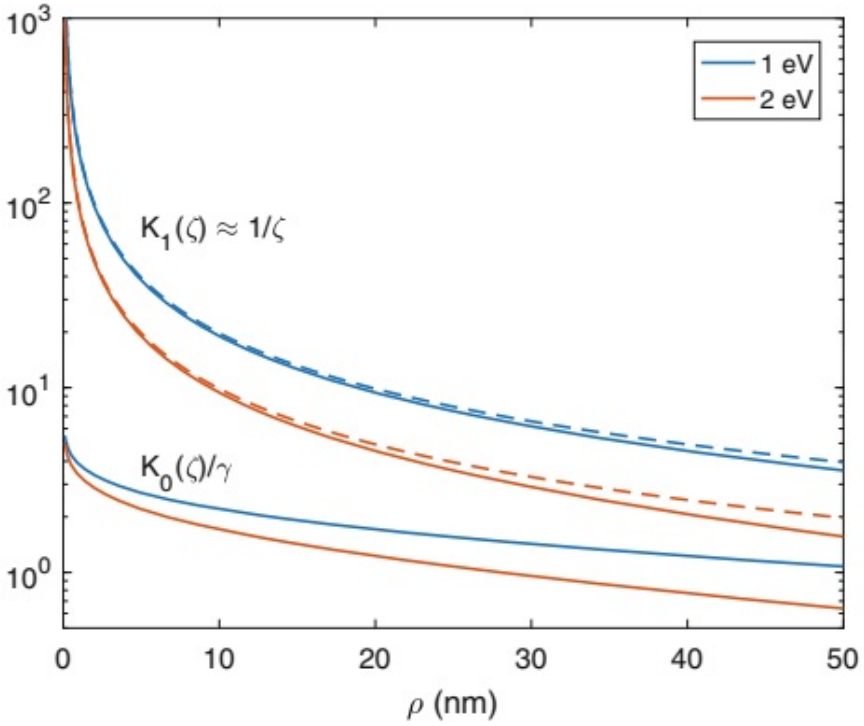
میدان الکتریکی الکترون سریع

$$\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r},\omega) = \left(\frac{e\omega}{2\pi v^2 \gamma_\epsilon}\right) e^{-jqz} \left[\frac{-j}{\gamma_\epsilon} K_0\left(\frac{q\rho}{\gamma_\epsilon}\right)\hat{\mathbf{z}} - K_1\left(\frac{q\rho}{\gamma_\epsilon}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}\right] \qquad (۴۰.۱۰)$$

جایی که $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ را معرفی کرده ایم. شکل (۱۱.۱۰) مولفه‌های z و شعاعی میدان الکتریکی را نشان می‌دهد که با معادله (۴۰.۱۰) داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مولفه شعاعی بسیار بزرگتر از مولفه z است. برای فواصل شعاعی به‌اندازه کافی کوچک ρ، جزء شعاعی وابستگی $1/\rho$ را نشان می‌دهد که یادآور میدان الکتریکی تولید شده توسط یک سیم باردار است. در فواصل زیاد میدان الکتریکی به‌صورت نمائی میرا می‌شود.

۲.۵.۱۰ تجزیه به‌تلفات حجیم و سطحی

اکنون شروع به‌تجزیه و تحلیل مشارکت تلفات الکترون سریع می‌کنیم. به‌طور کلی، باید مراقب بود که الکترونی که در محیطی با اتلاف با $\epsilon'' > 0$ منتشر می‌شود، حتی بدون پلاسمون ذره‌ای تحریک شونده نیز دچار تلفات شود. این تلفات را می‌توان با محاسبه معادله (۳۵.۱۰) برای



شکل ۱۱.۱۰: اجزای میدان الکتریکی معادله (۴۰.۱۰) در جهت $z(\mathbf{K}_0)$ و شعاعی $(\mathbf{K}_1)$ و برای دو انرژی از دست دادن انتخاب شده. از مخفف $\xi = q\rho/\gamma_\epsilon$ استفاده می‌کنیم. خطوط چین وابستگی $1/\rho$ را برای میدان الکتریکی شعاعی یک سیم باردار نشان میدهد، که به‌خوبی با K_1 در فواصل بسیار کوچک مطابقت دارد.

احتمال تلفات انرژی الکترون از طریق استفاده از میدان الکتریکی معادله (۳۸.۱۰) برای الکترون سریع، همراه با $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$ برای بدست آوردن میدان الکتریکی در موقعیت الکترون، ارزیابی کرد.

$$\mathcal{P}_{bulk}(\omega) = \frac{e}{\pi\hbar\omega}\int_0^L Re\left\{\left(\frac{-j\omega\mu e}{2\pi k_1^2}\right)\int_0^{q_{max}}\left(\frac{q^2\gamma_\epsilon^{-2}}{k_\rho^2 + q^2\gamma_\epsilon^{-2}}\right)k_\rho dK_\rho\right\}dz$$

در عبارت بالا، انتگرال‌گیری روی t را با یک اانتگرال روی $z = vt$ جایگزین کرده‌ایم، و فقط در فاصله انتشار محدود L را در نظر می‌گیریم. این وضعیت مطابق با آزمایش‌های معمولی EELS است که در آن الکترون از یک نانوذره فلزی با اندازه محدود عبور می‌کند. علاوه بر این، حد بالایی انتگرال‌گیری روی k_ρ را با یک پارامتر قطع q_{max} که به‌زاویه جمع نیم-روزنه ϕ_{out} در خارج از طیف سنج میکروسکوپ مرتبط است، شبیه به‌روزنه عددی معادله (۱۲.۳) در اپتیک، جایگزین کرده‌ایم. مقادیر معمولی ϕ_{out} در حدود چندین ده‌ها میلی رادیان هستند [۱۰۰]. انجام انتگرال‌گیری بالا در نهایت ما را به‌رابطه تلفات حجیم[۲۹] می‌رساند

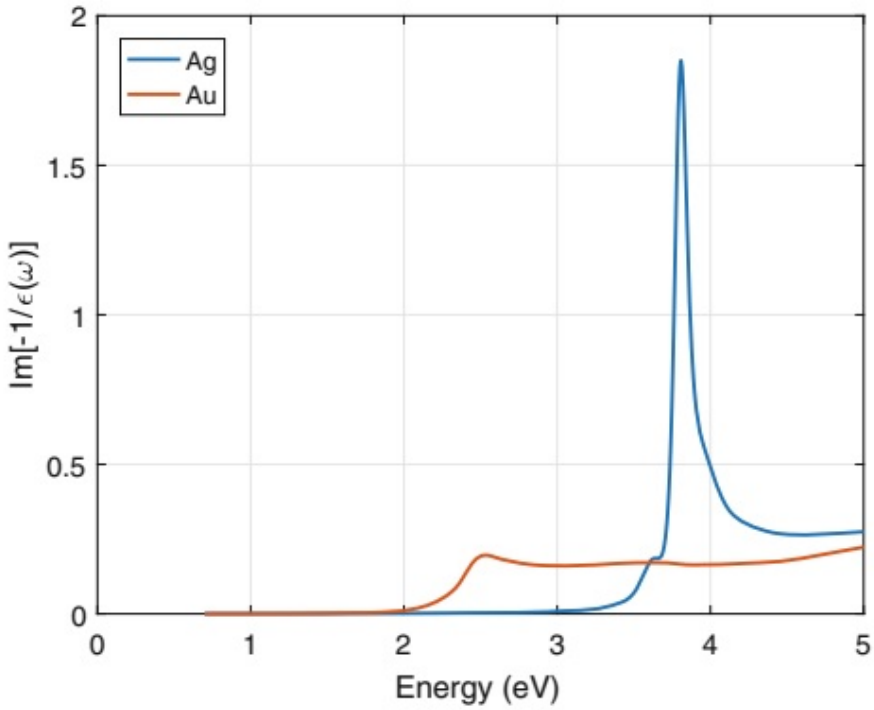
[۲۹] Bulk Losses

تلفات حجیم

$$\mathcal{P}_{bulk}(\omega) = \frac{e^2 L}{4\pi^2 \hbar v^2} Im \left\{ \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \ln \left[\frac{q_{max}^2 \gamma_\epsilon^2}{q^2} + 1 \right] \right\} . \qquad (۴۱.۱۰)$$

در حد غیرتاخیر یافته[۳۰] $c \to \infty$ این عبارت به‌رابطه زیر تقلیل می‌یابد؛

$$\mathcal{P}_{bulk}^{NR}(\omega) = \frac{e^2 L}{4\pi^2 \hbar v^2} Im \left\{ -\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)} \right\} \ln \left[\frac{q_{max}^2}{q^2} + 1 \right] . \qquad (۴۲.۱۰)$$



شکل ۱۲.۱۰: تابع اتلاف $Im[-1/\epsilon(\omega)]$ به‌ترتیب برای نقره (Ag) و طلا (Au) است. برای تابع دی‌الکتریک در مرجع [۳۴] جدول‌بندی شده است. برای نقره، تابع از دست دادن تحت سلطه یک تک قله مربوط به‌تحریک پلاسمون حجیم است، برای طلا، یک توزیع گسترده بالای $2eV$ مربوط به‌جذب باند d مشاهده می‌شود.

در مورد تابع دی‌الکتریک نوع درود $\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 - \omega_p^2/[\omega(\omega - j\gamma)]$ که در آن ω_p و γ فرکانس‌های پلاسما و برخورد گاز الکترون آزاد هستند را استفاده می‌کنیم. تابع تلفات را می‌توان به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد و ازاینرو رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم؛

[۳۰] Nonretarded limit

$$Im\left\{-\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)}\right\}=\frac{2\omega\gamma\omega_p^2}{(\omega_p^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma^2}$$

ین عبارت مربوط به‌یک قله لورنتسی در فرکانس پلاسما $\omega\approx\omega_p$ است که با فرکانس برخورد γ گسترش می‌یابد. برای توابع دی‌الکتریک واقعی‌تر، مانند آنهایی که از آزمایش‌های نوری استخراج شده‌اند [۳۴]، ما اشکال مشابهی را می‌یابیم که عملاً هیچ تلفات حجیمی در رژیم کم انرژی مربوط به‌پلاسمون‌های ذرات ندارند، و یک قله مشخص در انرژی پلاسمون حجیم، به شکل (۱۲.۱۰). همانطور که قبلا در فصل هفتم بحث شد، در مورد طلا، یک توزیع گسترده بالای $2\ eV$ مرتبط با جذب باند d مشاهده می‌شود.

برای الکترونی که در یک محیط فوتونیک پیچیده‌تر منتشر می‌شود، از جمله یک یا چند نانوذره پلاسمونی، اتلاف انرژی را می‌توان به‌مشارکت‌های زیر تقسیم کرد:

- **تلفات حجیم** برای هر ماده با اتلاف که الکترون از طریق آن منتشر می‌شود، یک سهم عمده $\mathcal{P}_{bulk}$ دارد که به‌طول انتشار L و خواص ماده کدگذاری شده در $\epsilon(\omega)$ بستگی دارد.
- **اثر بگرنزونگ** تلفات عمده برای یک محیط نامحدود محاسبه شده است. به‌طور کلی، هنگامی که الکترون در یک حجم محدود منتشر می‌شود، انتظار داریم که اصلاحات نزدیک به‌مرزهای حجم ظاهر شوند، به‌عنوان مثال، با غربالگری کمتر موثر نزدیک به‌سطح مشترک است . این تغییرات منجر به‌اثربگرنزونگ [۳۱] (به‌آلمانی؛ محدودیت می‌گویند) می‌شود.
- **تلفات سطحی** علاوه بر این، برای نانوذرات پلاسمونیک یا دی‌الکتریک، کانال‌های تلفات دیگری وجود دارد که الکترون سریع پلاسمون سطحی یا نوع دیگری از تحریک‌های سطحی را تحریک می‌کند. در بسیاری از موارد، شخص بیشتر به‌این سهم از دست دادن علاقه مند است، زیرا آنها به‌طور خاص به‌هندسه نانوذرات بستگی دارند.

۳.۵.۱۰ رابطه $EELS$ از طریق دایادیک گرین

در ادامه، روابطی را ارائه می‌دهیم که مشارکت‌های اولیه و سطحی را در یک پایه به‌حساب می‌آورد. از معادله (۳۵.۱۰) شروع می‌کنیم و میدان الکتریکی را با توزیع جریان الکترون سریع با استفاده از تابع گرین دایادیک مرتبط کنید.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{bulk}(\mathbf{R}_0,\omega) &= \frac{e}{\pi\hbar\omega}\\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}Re\left\{e^{jq(z-z')}\hat{\mathbf{z}}\cdot\left[-j\omega\mu_0\bar{\bar{G}}(\mathbf{R}_0,z,\mathbf{R}_0,z')\cdot\Big(-e\hat{\mathbf{z}}\Big)\right]\right\}dzdz'\end{aligned}$$

در تابع گرین به‌صراحت وابستگی به‌مولفه‌های موازی و عمود بر (با توجه به‌جهت انتشار الکترون) z و $\mathbf{R}_0$ را نشان داده‌ایم. پیش فاکتور را می‌توان با توجه به‌رابطه زیر ساده کرد؛

$$\frac{e^2\mu_0\epsilon_0}{\pi\hbar\epsilon_0}=\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{4}{c}=\frac{4\alpha}{c}$$

[۳۱] Begrenzung Effect

که در آن عبارت داخل پرانتز ثابت ساختار ظریف$\alpha \approx 1/137$ است. ما در نهایت تابع گرین را به‌یک فضای آزاد قسمت $\bar{\bar{G}}$ و یک قسمت بازتابیده $\bar{\bar{G}}_{refl}$ تجزیه می‌کنیم که اثرات بگرنزونگ و سطح را به‌حساب می‌آورد. سپس، با کنار هم قرار دادن همه نتایج، به‌احتمال اتلاف انرژی کل می‌رسیم که بر حسب تابع گرین بازتابی بیان می‌شود.

احتمال تلفات انرژی الکترون (رابطه تابع گرین)

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0,\omega) = \frac{4\alpha}{c}\int_{-\infty}^{\infty} Im\left\{e^{jq(z-z')}\hat{\mathbf{z}}\cdot\bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{R}_0,z,\mathbf{R}_0,z')\cdot\hat{\mathbf{z}}\right\}dzdz' + \mathcal{P}_{bulk}(\omega)\ . \tag{۴۳.۱۰}$$

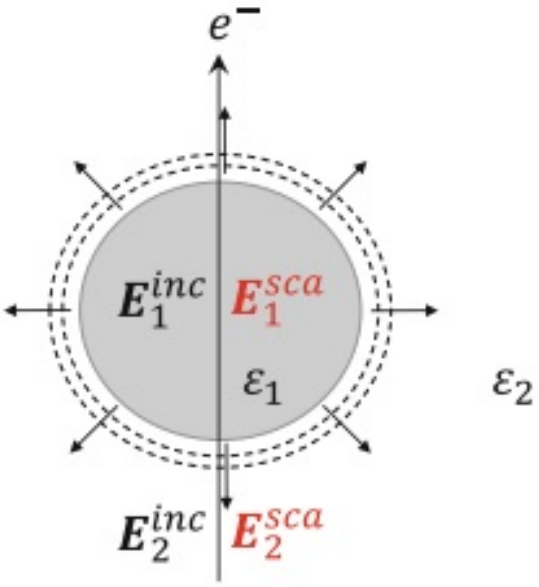
اجازه دهید لحظه‌ای در اینجا توقف کنیم و آنچه را که تاکنون انجام شده است به‌یاد بیاوریم. مشکلی که در نظر می‌گیریم شامل یک الکترون سریع است که از کنار یک نانوذره فلزی یا دی‌الکتریک (هندسه دور) می‌گذرد یا از درون آن نفوذ می‌کند، همانطور که به‌صورت شماتیک در شکل (۱۳.۱۰) نشان داده شده است، و بخش کوچکی از انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. برای محاسبه احتمال اتلاف انرژی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

- **رابطه تلفات نیمه‌کلاسیک** عبارت شروع ما عبارت نیمه کلاسیک معادله(۳۵.۱۰) است، که تجزیه فرکانس توان انجام شده توسط الکترون را در برابر میدان‌های الکتریکی فعال بر روی الکترون نشان می‌دهد. این میدان‌ها توسط خود الکترون القا می‌شوند. جنبه کوانتومی رابطه نیمه کلاسیک این است که الکترون می‌تواند انرژی خود را فقط در کسری از $\hbar\omega$ از دست بدهد. تمام اجزای دیگر این نظریه کاملاً کلاسیک هستند.

- **میدان‌های تابشی** بسته به‌اینکه الکترون در داخل یا خارج از نانوذره مورد بررسی منتشر شود، میدان‌های "ورودی" الکترون برای یک محیط نامحدود پر از گذردهی ϵ_1,ϵ_2 محاسبه می‌شوند. این میدان‌ها معادلات ماکسول را در داخل دو رسانه، شامل بار و منابع جریان الکترون سریع، اما نه شرایط مرزی در مرز ذره $\partial\Omega$ را برآورده می‌کنند.

- **میدان‌های پراکنده** برای توضیح شرایط مرزی در $\partial\Omega$، فیلدهای «پراکنده» $\mathbf{E}^{sca}_{1,2},\mathbf{H}^{sca}_{1,2}$ را نیز معرفی می‌کنیم، برای مثال، با استفاده از رویکرد روش انتگرال مرزی معرفی‌شده در بخش. ۹.۶. این میدان‌ها جواب معادلات ماکسول بدون عبارت منبع هستند. بنابراین، با ترکیب میدان‌های تابشی و پراکنده، معادلات ماکسول در داخل محیط برآورده می‌شود و همچنین شرایط مرزی در $\partial\Omega$ به‌درستی محاسبه می‌شود. به‌همین دلیل $\mathbf{E}_{inc}+\mathbf{E}_{sca}$ و $\mathbf{H}_{inc}+\mathbf{H}_{sca}$ راه‌حل‌های مناسب مشکل مورد مطالعه هستند.

- **تلفات مرزی و حجیم** اگرچه جداسازی به‌میدان‌های ورودی و پراکنده تا حدودی مصنوعی است، اما به‌نظر می‌رسد که تقسیم تلفات در معادله (۳۵.۱۰) راحت باشد به‌تلفات حجیم ناشی از $\mathbf{E}_{inc}$ و تلفات مرزی ناشی از $\mathbf{E}_{sca}$. موارد اخیر را می‌توان بیشتر به‌تلفات



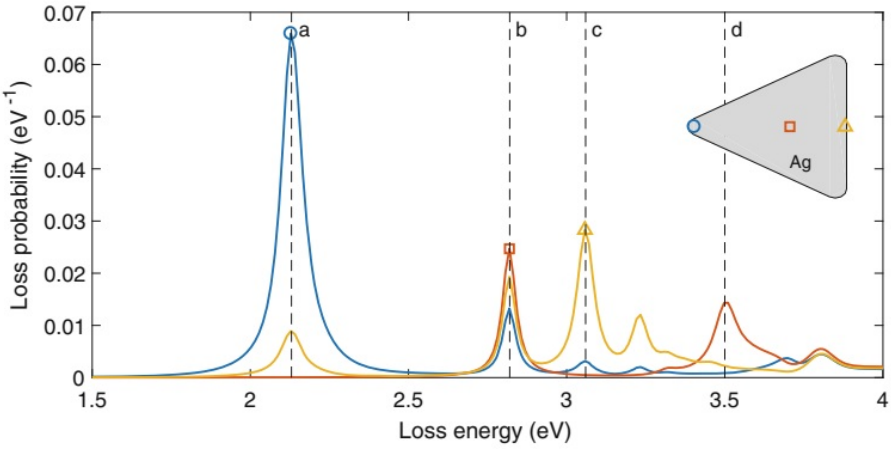
شکل ۱۳.۱۰: شماتیک‌های محاسبه احتمالEELS. یک الکترون سریع از نانوکره پلاسمونیک عبور می کند. میدان‌های "تابشی" الکترون $\mathbf{E}_{1,2}^{inc}$ در داخل و خارج کره هستند، معادله (۴۰.۱۰). میدانهای "پراکنده" $\mathbf{E}_{1,2}^{sca}$ هستند و اثرات بگرنزونگ و سطحی را به‌خود اختصاص می‌دهند. اتلاف انرژی الکترون با ارزیابی کار انجام شده توسط الکترون در برابر میدان‌های الکتریکی در طول کل مسیر الکترون به‌دست می‌آید، معادله (۳۵.۱۰). میدان‌های دور الکترومغناطیسی پراکنده را می‌توان به‌عنوان یک نورتابی اندازه‌گیری کرد

بگرنزونگ و سطحی تفکیک کرد، اما این جدایی در رویکردی که در پیش گرفته‌ایم تا حدودی نامشخص است.

- **غیرمحلی بودن** همانطور که به‌وضوح در معادله (۴۴.۱۰) مشاهده می‌شود، از دست دادن انرژی الکترونیک فرآیند غیرمحلی است که در آن الکترون ابتدا در موقعیت z یک پلاسمون ذره‌ای یا نوع دیگری از تحریک سطحی را القا می‌کند و میدان‌های القایی در موقعیت z بر روی الکترون عمل می‌کنند. این غیرمحلی واقعی تفسیر EELS را بر حسب یک LDOS فوتونی یا برخی کمیت‌های مرتبط پیچیده می‌کند.

- **روشنائی کاتدی** در نهایت، با ارزیابی میدان‌های پراکنده دور از ذره، یا به‌طور معادل انرژی الکترومغناطیسی که توسط بردار پوایِن‌تینگ از طریق مرزی که همه ذرات را احاطه کرده است، منتقل می‌شود، می‌توانیم به‌نام احتمال کاتدلومینسانس را محاسبه کنیم[۱۰۰، ۱۰۱]. چنین لومینسانسی اطلاعات تکمیلی در مورد خواص نوری نانوذرات پلاسمونیک یا دی‌الکتریک ارائه می‌دهد.

شکل (۱۴.۱۰) طیف‌های EELS شبیه سازی شده را برای یک نانومثلث نقره با طول پایه تقریبا ۸۰ نانومتر و ارتفاع ۱۰ نانومتر نشان می‌دهد. حداقل چهار قله برجسته را مشاهده می‌کنیم که با (a-d) برچسب گذاری شده‌اند، علاوه بر اوج پلاسمون حجیم در اطراف $3.8eV$



شکل ۱۴.۱۰: طیف EELS برای یک نانومثلث نقره با طول پایه تقریباً ۸۰ نانومتر و ارتفاع ۱۰ نانومتر، و برای سه موقعیت مختلف پرتو الکترونی، در قسمت داخلی نشان داده شده است. در شبیه‌سازی‌های خود از توابع دی‌الکتریک استخراج شده از آزمایش‌های نوری استفاده می‌کنیم [۳۴]. خطوط نقطه چین موقعیت‌های پر انرژی تشدید پلاسمون را گزارش می‌دهند که در آن نقشه‌های EELS فضایی شکل (۱۰ .۱۵) محاسبه شده است.

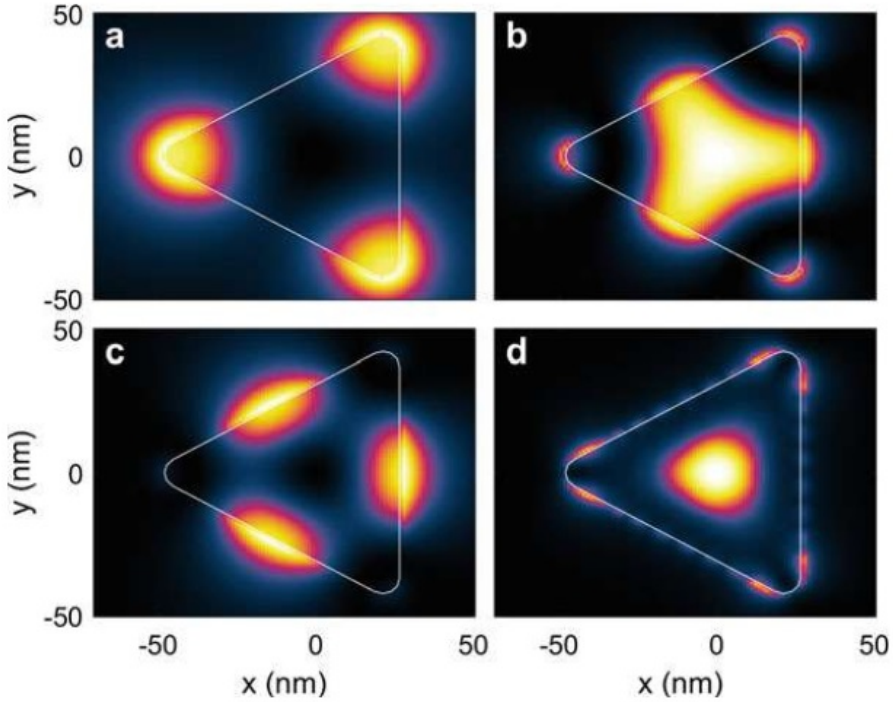
(همچنین به‌شکل (۱۲.۱۰) مراجعه کنید). در شکل (۱۵.۱۰) نقشه‌های EELS را در انرژی‌های تشدید نشان می‌دهیم. آنها با روبش شطرنجی پرتو الکترونی روی نمونه بدست می‌آیند و به‌خوبی با نقشه‌های تجربی گزارش‌شده در مقاله اولیه مطابقت دارند[۹۹]. مودهای مشاهده شده را می‌توان به **(الف)** دو قطبی و **(ب، ج)** چند قطبی نسبت داد حالت‌های پلاسمون محدود به‌لبه‌های نانوذرات، و همچنین **(د)** مودهای صورت محدود به‌سطوح مثلث بالا و پایین. بدون پرداختن به‌جزئیات، مثال بالا به‌خوبی توانایی EELS را برای ترسیم مودهای پلاسمون ذرات با وضوح فضایی در محدوده نانومتر و وضوح طیفی معمولاً در محدوده $100meV$ نشان می‌دهد.

۴.۵.۱۰ حد شبه استاتیک

ما این بخش را با بحث در مورد EELS در تقریب شبه استاتیک به‌پایان می‌بریم. این امر به‌ویژه به‌ما امکان می‌دهد تا با مودهای ویژه پلاسمونیک که در فصل قبل با جزئیات مورد بحث قرار گرفت، تماس برقرار کنیم. نقطه شروع معادله (۳۵.۱۰) است. برای احتمال اتلاف انرژی

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0,\omega) = -\frac{1}{\pi\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty} Re\left\{\mathbf{J}^*(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)\right\}d^3r + \mathcal{P}_{bulk}\ ,$$

که در آن از $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{r},\omega)$ با توزیع بار معادله (۳۷.۱۰) استفاده کرده‌ایم. همچنین میدان الکتریکی را به‌یک بخش القایی یا "پراکنده"و یک بخش "ورودی" که در جذب حجیم سهیم شده است، جدا کرده‌ایم. در تقریب شبه استاتیکی، $\mathcal{P}_{bulk}$ باید با معادله (۴۲.۱۰) جایگزین شود، و علاوه بر این، میدان الکتریکی القایی را به‌یک پتانسیل از طریق $\mathbf{E}_{ind} = -\nabla V_{ind}$ مرتبط می‌کنیم. در مرحله بعد از اتحاد برداری زیر استفاده می‌کنیم ؛



شکل ۱۵.۱۰: نقشه‌های EELS مکانی برای همان نانومثلث همانطور که در شکل (۱۴.۱۰) در تشدید پلاسمون نشان داده شده با خطوط چین نشان داده شده است. مودها را می‌توان به **(الف)** دوقطبی، **(ب، ج)** شش قطبی، و **(د)** مودهای تنفسی، همانطور که در متن توضیح داده شد، اختصاص داد.

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}^* V_{ind}) = (\nabla \cdot (\mathbf{J}^*) V_{ind} + \mathbf{J}^* \cdot \nabla V_{ind} \ ,$$

که در آن، با انتگرال‌گیری در کل فضا و استفاده از قضیه دیورژانس، عبارت سمت چپ حذف می‌شود زیرا V_{ind} در بی‌نهایت به‌صفر نزدیک می‌شود. همراه با معادله پیوستگی $-j\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{J}$ رابطه زیر را پیدا می‌کنیم؛

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega) = -\frac{1}{\pi\hbar} \int Im \left\{ \rho^*(\mathbf{r}, \omega) V_{ind}(\mathbf{r}, \omega) \right\} d^3r + \mathcal{P}_{bulk} \ . \qquad (۴۴.۱۰)$$

احتمال تلفات انرژی الکترون (حد شبه استاتیک)

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega) = \frac{e^2}{\pi\hbar v^2 \epsilon_0} \sum_k Im \left\{ \frac{\lambda_k + \frac{1}{2}}{\Lambda(\omega) + \lambda_k} \right\} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jqz} V_k(\mathbf{R}_0, z) dz \right|^2 . \qquad (۴۵.۱۰)$$

این عبارت یک تجزیه کاملاً شفاف از تابع تلفات به‌توابع شکل خط و توانائی نوسانگر را ارائه می‌دهد. این عبارت در براکت‌های شکل پیچشی خطوط لورنتسی را در فرکانس‌های تشدید

$Re[\Lambda(\omega)+\lambda_k]\approx 0$ می‌دهد، و انتگرال ضریبی را می‌دهد که چگونگی یک مود ویژه مفروض می‌تواند توسط پرتو الکترونی تحریک شود را توصیف می‌کند.

تمرینات

- **تمرین ۱** برای یک گشتاور دوقطبی مقدار حقیقی $\mathbf{p}$ از معادله (۱۳.۱۰) شروع کرده و ثابت کنید که میانگین تمام جهت‌گیری‌های دوقطبی با جایگزینی تابع گرین دایادیک با $\frac{1}{3}tr\bar{\bar{G}}$ مطابقت دارد.

- **تمرین ۲** از جعبه ابزار NANOPT فایل demostrat03.m استفاده کرده و طول عمر یک دوقطبی که بالای یک زیرلایه طلا واقع شده است را محاسبه کنید.

  - **الف** اگر بستر فلزی با یک لایه فلزی نازک (ضخامت‌های بین ۱۰ تا ۱۰۰ نانومتر) در بالای یک بستر شیشه‌ای جایگزین شود، چه اتفاقی می‌افتد.
  - **ب** برنامه را طوری تغییر دهید که طول عمر برای یک فاصله دوقطبی ثابت اما برای فرکانس‌های انتقال متفاوت محاسبه شود. هنگام تغییر ضخامت لایه فلزی چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا می‌توانید مودهای پلاسمون سطحی تزویجی را برای یک تیغه که در شکل‌ها (۱۴.۸) و (۱۵.۸) نشان داده شده است شناسایی کنید.

- **تمرین ۳** از جعبه ابزار NANOPT فایل demodipmie02.m استفاده کرده و نرخ فروپاشی یک دوقطبی واقع در بالای یک کره طلا در نظریه می را محاسبه کنید. بررسی کنید که اگر قطر کره را در محدوده ۵۰ تا ۵۰۰ نانومتر تغییر دهند، چه اتفاقی می‌افتد و حداکثر مقدار قطع کمینه l_{max} را برای مرتبه‌های زاویه‌ای مورد نیاز برای به‌دست آوردن نتایج همگرائی تعیین کنید.

- **تمرین ۴** نشان دهید که معادله (۱۷.۱۰) برای توان تلف شده توسط ساطع کننده دوقطبی در حد شبه استاتیک را می‌توان به‌شکل زیر نوشت؛

$$\frac{P}{P_0}=1+\frac{6\pi}{k^3}\sum_k Im\left\{\frac{\lambda_k+\frac{1}{2}}{\Lambda(\omega)+\lambda_k}\right\}\left|\hat{\mathbf{p}}\cdot\nabla V_k(\mathbf{r})\right|^2_{\mathbf{r}-\mathbf{r_0}}.$$

از معادله (۶۴.۹) برای به‌دست آوردن بعد فیزیکی مودهای ویژه $u(\mathrm{s})$ و اثبات اینکه عبارت دوم در سمت راست بدون بعد است، استفاده کنید.

- **تمرین ۵** از جعبه ابزار NANOPT از فایل demobem07.m که نرخ فروپاشی یک دوقطبی نوسانی بالای نانوکره را برای فرکانس ثابت و فواصل دوقطبی-کره متفاوت محاسبه می‌کند،(شکل ۳.۱۰) و demobem08.m که نرخ فروپاشی را برای فواصل دوقطبی-کره ثابت و فرکانس‌های نوسانی متفاوت محاسبه می‌کند، استفاده کنید.

  - **الف** برنامه را به‌منظور محاسبه نرخ فروپاشی نشان داده شده در شکل (۳.۱۰) برای یک بیضوی تغییر دهید.

- **ب** توزیع بار سطحی برای یک دوقطبی افقی و عمودی را برای فاصله ۱۰ نانومتری بین نقطه-کره، ترسیم کنید و نتایج را با هم مقایسه کنید.
- **ج** برای یک دوقطبی افقی، نرخ پراکندگی کل را به‌عنوان تابعی از فرکانس انتقال رسم کنید، و فرکانس تشدید را در جایی که نرخ فروپاشی بیشترین است، پیدا کنید. توزیع بار سطحی مربوطه را رسم کنید

- **تمرین ۶** از همان فایل‌های تمرین ۵.۱۰ شروع کنید و آنها را برای کره‌های تزویجی بازنویسی کنید. می‌توانید از فایل demobem02.m به‌عنوان الگو استفاده کنید. برای قطرهای کره ۵۰ نانومتر و فواصل شکافی ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰ نانومتر، فرکانس تشدید دوقطبی را که به‌صورت عمودی و افقی نسبت به‌محور تقارن قرار دارند، پیدا کنید و افزایش نرخ فروپاشی کل و تابشی در تشدید را محاسبه کنید.

- **تمرین ۷** عبارت $\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \hbar\omega)$ را که در معادله (۳۴.۱۰) تعریف شده است و احتمال این است که یک الکترون سریع با پارامتر اثر $\mathbf{R}_0$ انرژی $\hbar\omega$ را از دست بدهد، در نظر گیرید. از میدان‌های القایی یا "پراکنده" $\mathbf{E}_{sca}, \mathbf{H}_{sca}$ برای تعریف احتمال روشنائی کاتدیک $\mathcal{P}_{CL}(\mathbf{R}_0, \hbar)$ استفاده کنید، این احتمال است که یک فوتون با انرژی □□ توسط یک الکترون سریع با پارامتر ضربه $\mathbf{R}_0$ تولید شود. نتیجه نهایی را بر حسب دامنه میدان دور $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$ معادله (۵.۳) بیان کنید.
راهنمائی: از توان پراکنده شده معادله (۲۲.۴) شروع کنید.

- **تمرین ۸** احتمال تلفات حجیم EELS معادله (۴۱.۱۰) را در نظر گیرید. تحت چه شرایطی تلفات برای $\epsilon(\omega)$ کاملا حقیقی است؟ برای بحث دقیق‌تر مسئول تشعشعات چرنکوف برای این تلفات، می‌توانید از مراجع [۲، ۱۰۰] استفاده کنید.

- **تمرین ۹** از معادله (۳۴.۹) برای بازنویسی آخرین جمله سمت راست معادله (۴۵.۱۰) بصورت زیر استفاده کنید؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jqz} V_k(\mathbf{r}) dz = \oint_{\partial\Omega} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jqz} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') dz \right] u_k(\mathbf{s}' dS'$$

برای انجام تحلیلی انتگرال در براکت‌ها از

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jqz}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = 2K_0(q\rho)$$

استفاده کنید. با این یک عبارتی به‌دست می‌آید که در آن انتگرال‌گیری فقط بر روی مرز ذره، نه در کل محور zها، گسترش می‌یابد

فصل ۱۱

روش‌های محاسباتی در نانواُپتیک

در این کتاب عمدتاً با مفاهیم نانو اپتیک و پلاسمونیک با استفاده از طرح‌های حل تحلیلی برای مسائل انتخاب شده سروکار داریم. با این حال، در دهه‌های اخیر روش‌های شبیه‌سازی عددی به‌روش انتخابی برای مسائل مختلف نانو اپتیک تبدیل شده‌اند. مزایای روش‌های عددی این است که همه کاره هستند و امکان مقایسه بسیار نزدیک با آزمایش را فراهم می‌کنند. در این فصل، بدون پرداختن زیاد به‌جزئیات فنی، به‌طور خلاصه با مشهورترین روش‌های شبیه‌سازی آشنا می‌شویم.

۱.۱۱ شبیه‌سازی تفاضل محدود در حوزه زمان

با رویکردی شروع می‌کنیم که احتمالاً می‌تواند به‌عنوان مادر محاسبات عددی ماکسول، به‌نام شبیه‌سازی تفاضل محدود در حوزه زمان (FDTD)[۱] در نظر گرفته شود. خوانندگان علاقه‌مند به‌شرح مفصل‌تر، به‌کتاب‌های درسی دیگری مانند [۱۰۲، ۱۰۳] ارجاع داده می‌شوند. رویکرد (FDTD) یک طرح شبیه‌سازی عمومی است که برای حل معادلات ماکسول بدون محدودیت خاصی در سیستم مناسب است. اولین بار توسط **یی**[۲] [۱۰۴] در سال ۱۹۶۶ معرفی شد و تقریباً ۱۰ سال بعد توسط تافلاو و برودین[۳] با موفقیت اجرا شد[۱۰۵، ۱۰۶].

بحث خود را در مورد طرح (FDTD) با بیان معادلات کِرل بر حسب معادلات دیفرانسیل وابسته به‌زمان آغاز می‌کنیم.

$$\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}, \quad \mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \tag{۱.۱۱}$$

که باید همراه با محدودیت‌های زیر حل شوند؛

$$\nabla \cdot \epsilon\mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mu\mathbf{H} = 0 \ .$$

[۱] Finite Difference Time Domain (FDTD)

[۲] Yee

[۳] Taflove and Browdin

سالهای اولیه (FDTD)

در مصاحبه‌ای در مجله *Nature Photonics* در سال ۲۰۱۵، آلن تافلاو، یکی از مخترعان روش *(FDTD)*، به‌یاد می‌آورند که در دهه ۱۹۷۰، زمانی که او پایان نامه دکتری خود را نوشت، تکنیک‌های شبیه‌سازی عددی توجه زیادی را به‌خود جلب نکرد.

> [استاد من] برودوین موافقت کرد که این موضوع را برای پایان نامه دکتری خود، گرچه این موضوع در جریان اصلی تحقیقات او نبود، دنبال کنم. در سال ۱۹۷۵، توسعه الگوریتم، کدگذاری و اعتبارسنجی من به‌جایی رسید که یک مدل کاملاً سه بعدی تابش امواج مایکروویو بر چشم انسان می‌توانست پیاده سازی شود. در آن سال نتایج خود را در دو مقاله در مجله
>
> *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*
>
> منتشر کردم و دکترای خود را گرفتم. اما، مانند مقاله یی*Yee*، کار من بدون استناد باقی ماند.

با این حال، حتی ده سال بعد، شبیه‌سازی‌های *(FDTD)* هنوز باید روی ابررایانه‌هایی مانند *Cray* معروف در آن زمان انجام می‌شد، اما اغلب توسط جامعه به‌رسمیت شناخته نمی‌شد. تافلاو در مصاحبه چنین قسمتی را به‌یاد می‌آورد:

> روش *(FDTD)* نادیده گرفته شد و حتی گاهی مورد تمسخر قرار گرفت. یکی از این خاطرات که در حافظه من سوخته است، به‌سال ۱۹۸۶ برمیگردد. یک استاد مشهور بین‌المللی در یک جلسه آزاد که برای بررسی آینده الکترومغناطیسی محاسباتی دعوت شده بود، به‌دلیل استفاده من از ابر رایانه‌ها، واقعاً به‌من خندید. مستقیماً به‌من اشاره کرد و به‌شوخی گفت: «آنجا به تافلاو نگاه کن. صبح که از خواب بیدار می‌شود، زانو می‌زند، سرش را خم می‌کند و می‌گوید: «و حالا بگذار گریه *Cray* کنیم». لال و وحشت زده بودم.

می‌توان نشان داد که اگر شرایط اولیه این محدودیت‌ها را برآورده کند و میدان‌ها مطابق معادلات (۱.۱۱) بهم مربوط باشند، جواب‌ها معادلات دیورژانس را در همه زمان‌ها ارضاء می‌کنند. برای اثبات این موضوع، از دو طرف معادله (۱.۱۱) دیورژانس می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla\cdot\epsilon\mathbf{E}\Big)=-\nabla\cdot\mathbf{J}=\frac{\partial\rho}{\partial t},\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla\cdot\mu\mathbf{H}\Big)=0$$

که در آن از مشتقات زمان و مکان می‌توانند تغییر کنند استفاده کرده‌ایم، و ضمناً دیورژانس کرل به‌طور خودکار صفر است. همچنین از معادله پیوستگی برای ارتباط $\nabla\cdot\mathbf{J}$ به‌مشتق زمانی ρ استفاده کرده‌ایم. بازنویسی معادله اول بصورت زیر است؛

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla\cdot\epsilon\mathbf{E}-\rho\Big)=0$$

مشاهده می‌کنیم که اگر $\nabla\cdot\epsilon\mathbf{E}=\rho$ در زمان اولیه برقرار باشد، در زمان‌های بعدی نیز برقرار است زیرا معادلات کرل به‌درستی محدودیت دیورژانس را منتشر می‌کنند. نتیجه‌گیری مشابهی را می‌توان برای میدان مغناطیسی گرفت. بنابراین، کافی است در تکامل زمانی $\mathbf{E},\mathbf{H}$ فقط

معادلات کرل را در نظر بگیریم. در ادامه به‌بررسی معادلات ماکسول در فضای سه، دو و یک بُعدی می‌پردازیم.

- **فضای سه بُعدی** در فضای سه بُعد معادلات ماکسول را می‌توان به‌صورت مولفه بیان کرد:

$$\begin{aligned}
\epsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_x, \qquad \mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\
\epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y, \qquad \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\
\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z, \qquad \mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}
\end{aligned} \tag{۲.۱۱}$$

- **فضای دو بُعدی** در فضای دو بُعد فرض می‌کنیم که μ, ϵ فقط به x, y بستگی دارد. در این صورت مجموعه معادلات (۲.۱۱) به‌دو مجموعه معادله تقسیم می‌شود که آنها را به‌صورت الکتریکی عرضی (TE) و مغناطیسی عرضی (TM) نشان خواهیم داد:

$$\begin{aligned}
&(TE) \quad \epsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - J_x && (TM) \quad \mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \\
&(TE) \quad \epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y && (TM) \quad \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\
&(TM) \quad \epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z && (TE) \quad \mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}
\end{aligned} \tag{۳.۱۱}$$

معادلات TE فقط شامل مولفه‌های E_x, E_y و H_z و معادلات TM شامل مولفه‌های H_x, H_y و E_z است.

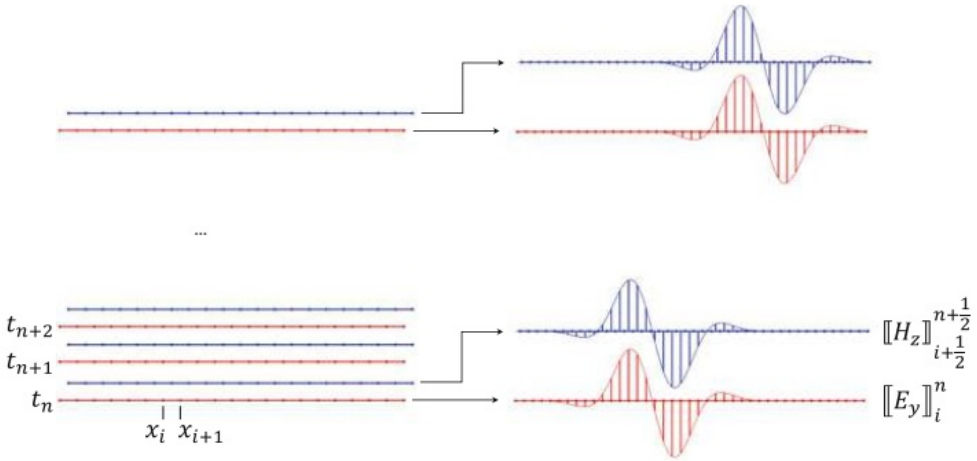
- **فضای یک بُعدی** در فضای یک بُعد فرض می‌کنیم که ϵ, μ فقط به x بستگی دارند. در این صورت مجموعه معادلات (۳.۱۱) ساده‌تر می‌شوند؛

$$\begin{aligned}
&\epsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} = -J_x && \mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\
&(TE) \quad \epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y && (TM) \quad \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\
&(TM) \quad \epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - J_z && (TE) \quad \mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}
\end{aligned} \tag{۴.۱۱}$$

دو معادله اول از بقیه جدا می‌شوند، معادلات TE فقط شامل مولفه‌های E_y, H_z و معادلات TM شامل مولفه‌های H_y, E_z می‌شود.

۱.۱.۱۱ جادوگری روش $(FDTD)$

در روش تفاضل محدود در حوزه زمان، دقیقاً با معادلات ماکسول سر و کار داریم، اما مشتقات زمانی و مکانی را از طریقتفاضلات محدود تقریب می‌کنیم. جادوگری روش FDTD به‌دلیل بینش یی [۱۰۴] است که متوجه شد مجموعه معادلات تزویجی برای میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان به‌طور موثر توسط دو شبکه گام به‌گام حل کرد. بحث خود را با معادلات TE در حالت یک بعدی (۴.۱۱) شروع می‌کنیم. ابتدا، دو شبکه مکانی پلکانی را معرفی می‌کنیم (شکل ۱۱ .۱).



شکل ۱.۱۱: شماتیک FDTD یک بُعدی. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در موقعیت‌های گسسته دو شبکه پلکانی داده می‌شوند. با به‌روز رسانی مکرر میدان‌های الکترومغناطیسی مطابق با الگوریتم FDTD معادله (۹.۱۱)، میدان‌ها در زمان به‌جلو منتشر می‌شوند.

شبکه مکانی درهم تنیده (فضای یک بعدی)

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= (i+\tfrac{1}{2})\Delta x, \qquad i = 1, 2, \cdots, N_x \ , \end{aligned} \tag{۵.۱۱}$$

که نسبت به‌یکدیگر با نصف شبکه ثابت Δx جابه جا می‌شوند. به‌طور مشابه، دو شبکه زمان پلکانی را معرفی می‌کنیم؛

شبکه زمانی درهم تنیده

$$t_n = n\Delta t$$
$$t_{n+\frac{1}{2}} = (n+\tfrac{1}{2})\Delta t, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots , \tag{۶.۱۱}$$

که نسبت به‌یکدیگر نیم گام زمانی Δt جابجا می‌شوند. در ادامه، میدان الکتریکی را در موقعیت‌های شبکه عدد صحیح تقریب می‌کنیم؛

$$\|E_y\|_i^n = E_y(i\Delta x, n\Delta t), \quad \text{(میدان الکتریکی)} \tag{۷.۱۱}$$

از نماد $\|\cdots\|$ برای گسسته‌سازی میدان الکترومغناطیسی در روش FDTD استفاده کرده‌ایم. شبیه همین را نیز برای میدان مغناطیسی در موقعیت نیم عدد صحیح شبکه تقریب می‌کنیم؛

$$\|H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_z([i+\frac{1}{2}]\Delta x, [n+\frac{1}{2}]\Delta t) \ . \tag{۸.۱۱}$$

با این شبکه‌های پلکانی و مشتقات در رابطه (۴.۱۱) می‌توانیم تقریب را بصورت زیر انجام دهیم؛

معادلات FDTD در فضای یک بعدی (TE)

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{\|H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{\|E_y\|_{i+1}^n - \|E_y\|_i^n}{\Delta x} \tag{آ۹.۱۱}$$

$$\epsilon_i \frac{\|E_y\|_i^{n+1} - \|E_y\|_i^n}{\Delta t} = -\frac{\|H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_z\|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \|J_y\|_i^{n+\frac{1}{2}} \tag{ب۹.۱۱}$$

اگر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی معلوم باشد، این روابط را می‌توان بطور مکرر برای محاسبه میدان‌ها در زمان‌های بعدی استفاده کرد. آلگوریتم حل معادلات ماکسول در حوزه زمان را می‌توان بصورت زیر رتبه‌بندی کرد؛

- میدان مغناطیسی $\|H_z\|^{1/2}$ در زمان اولیه $t_{1/2}$ مشخص شود،
- میدان الکتریکی $\|E_y\|^1$ در زمان اولیه t_1 مشخص شود،
- از معادله (آ۹.۱۱) برای محاسبه میدان مغناطیسی در زمان $t_{n+\frac{1}{2}}$ استفاده شود،
- از معادله (ب۹.۱۱) برای محاسبه میدان الکتریکی در زمان t_{n+1} استفاده شود،

با تکرار ممتد دو گام آخری، می‌توان میدان‌ها را در زمان منتشر کرد. چیز جالب در مورد FDTD این است که از نظر عملی شفاف، اجرای ساده و از نظر محاسباتی خیلی کارآمد است. اجازه دهید چند نکته هم در باره این طرح محاسبتی اضافه کنیم؛

- **دقت:** تقریب مشتقات از طریق تفاضل محدود دقیق نیست ولی با خطائی با مرتبه Δx^3 و Δt^3 است. به‌این دلیل، آلگوریتم با دقت مرتبه دوم است.

- **پایداری:** طرح بروز کردن برای میدان‌های الکترومغناطیسی، که اغلب آنرا طرح **پرش قورباغه‌ای**[۴] می‌نامند، برخی نکات جادوئی پنهان دارد. بطوری که در بخش ۲.۱.۱۱ بحث خواهیم کرد، انتشار زمانی برای مقادیر بقدر کافی کوچک $\Delta x, \Delta t$ با وجود طرح‌های مختلف تفاضل محدود که اینگونه پایداری را تضمین نمی‌کند، بدون شرط پایدار است [۱۰۲].

- **رفتار دیورژانس:** معادله (۹.۱۱)محدویت دیورژانس جواب را حفظ می‌کند. بنابراین، اگر میدان‌های اولیه خواص دیورژانس صحیحی داشته باشند، جواب‌های FDTD در زمان‌های بعدی آنها را دارند [۱۰۲].

- **ابعاد بالاتر:** بطوری که در زیر بیشتر بحث خواهد شد، طرح FDTD را می‌توان براحتی برای مسائل دو بعدی و سه بعدی تعمیم داد.

- **اثرات پلکانی:** در روش FDTD، یک نانوذره فلزی یا دی‌الکتریک بر حسب خواص مکانی $\epsilon_i, \mu_{i+1/2}$ مدل سازی می‌شوند. چون شبکه بندی دکارتی (چهارگوش) در رویکرد FDTD انجام می‌شود، نانوذره‌های با حجمی با مرزهای پلکانی تقریب زده می‌شوند این تقریب نیز خطاهائی اضافی بوجود می‌آورد که که گاهی به‌آنها "خطای پلکانی" اطلاق می‌شود.

شکل (۲.۱۱) نمونه‌ای از انتشار میدان در روش FDTD را نشان می‌دهد. یک پالس میدان الکترومغناطیسی بر یک تیغه که با موادی که گذردهی بالائی دارد برخورد می‌کند. شبیه بحث قبلی ما در فصل هشتم روی محیط‌های لایه لایه، بخشی از میدان در سطح مشترک بازتاب و برخی دیگر منتقل می‌شود. می‌توان اختلاف سرعت داخل و خارج لایه بوضوح مشاهده کرد.

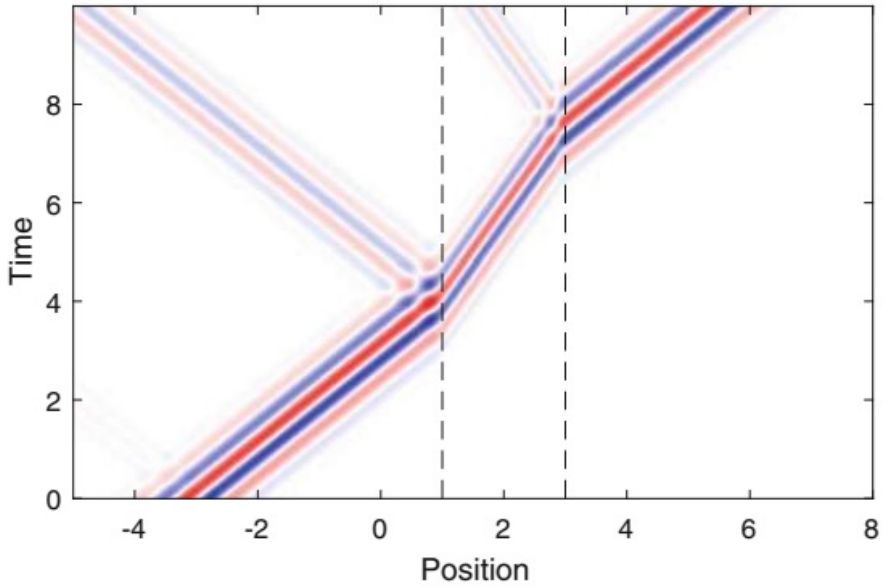
۲.۱.۱۱ حالت دو بُعدی

رابطه‌بندی FDTD را می‌توان به‌راحتی به‌دو و سه بُعد مکانی گسترش داد. در اینجا فقط در مورد دو بُعدی با قطبش TE بحث می‌کنیم. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در موقعیت‌های شبکه بصورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\|E_x\|^n_{i+\frac{1}{2},j}, \qquad \|E_y\|^n_{i,j+\frac{1}{2}}, \qquad \|H_z\|^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

که در آن j مختصات y شبکه دو بُعدی را برچسب گذاری می‌کند. برای نمایش گرافیکی شکل (۳.۱۱) را مشاهده کنید. از معادله (۳.۱۱) برای مود TE روابط زیر می‌نویسیم؛

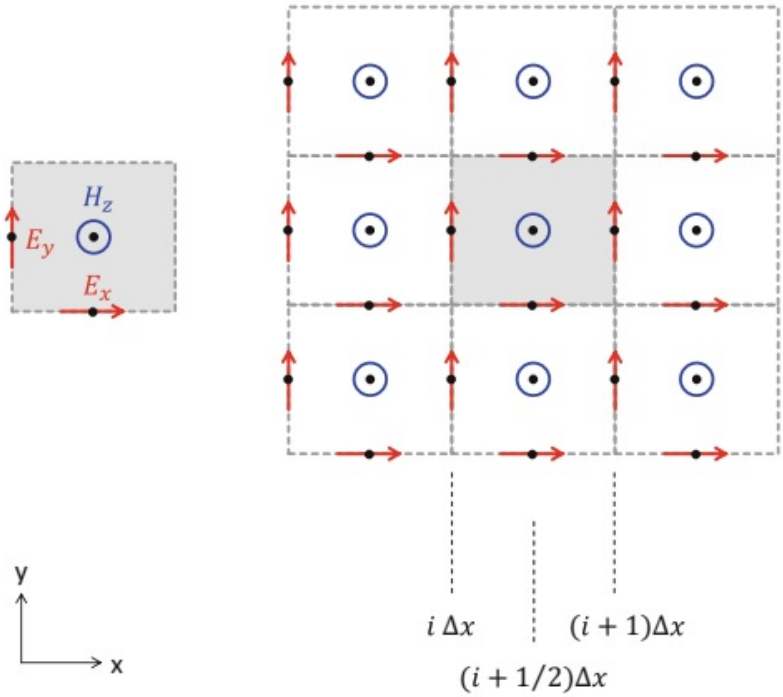
[۴] Leapfrog



شکل ۲.۱۱: مثال برای شبیه سازی یک بعدی FDTD. یک پالس الکترومغناطیسی به‌تیغه‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 3$ برخورد می‌کند. بخشی از میدان در سطح مشترک لایه بازتاب شده و بخشی دیگر منتقل می‌شود. موقعیت‌ها و زمان‌ها در واحدهای بدون بُعد آورده شده است.

$$
\begin{aligned}
\mu_{i+1/2,j+1/2}\frac{\|H_z\|^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2}-\|H_z\|^{n-1/2}_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta t} &= \frac{\|E_y\|^{n}_{i,j+1/2}-\|E_y\|^{n}_{i,j-1/2}}{\Delta y}-\frac{\|E_x\|^{n}_{i+1/2,j}-\|E_x\|^{n}_{i-1/2,j}}{\Delta x}\\
\epsilon_{i+1/2,j}\frac{\|E_x\|^{n+1}_{i+1/2,j}-\|E_x\|^{n}_{i+1/2,j}}{\Delta t} &= \frac{\|H_z\|^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2}-\|H_z\|^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y}-\|J_x\|^{n+1/2}_{i+1/2,j}\\
\epsilon_{i,j+1/2}\frac{\|E_y\|^{n+1}_{i,j+1/2}-\|E_y\|^{n}_{i,j+1/2}}{\Delta t} &= \frac{\|H_z\|^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2}-\|H_z\|^{n+1/2}_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta x}-\|J_y\|^{n+1/2}_{i,j+1/2}
\end{aligned}
\tag{۱۰.۱۱}
$$

با عبارتی مشابه برای میدان‌های TM نیز می‌توان بدست آورد. بررسی دقیق‌تر معادلات نشان می‌دهد که همه مشتق‌ها را می‌توان با تفاضل‌های محدود مرکزی تقریب زد، جایی که همه میدان‌های مورد نیاز در موقعیت‌های شبکه همسایه به‌طور طبیعی در طرح سلول Yee میدان‌های الکترومغناطیسی گسسته‌شده ظاهر می‌شوند. در ادامه نتایج را برای مسائل دو بُعدی نشان خواهیم داد. سلول های Yee را می‌توان برای حالت سه بُعدی، همانطور که به‌طور کامل به‌عنوان مثال در مراجع [۱۰۲، ۱۰۳] مورد بحث قرار گرفته است، نیز تعریف کرد.



شکل ۳.۱۱: شبکه برای FDTD در فضای دو بُعدی برای قطبش TE. مجدداً دو شبکه فضایی پلکانی را برای مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی معرفی می‌کنیم. در سمت چپ شکل یک "سلول واحد" از شبکه دو بعدی Yee را نشان می‌دهیم که به‌نام سلول Yee نامیده می‌شود. با کار کردن تفاضل محدود معادله (۱۰.۱۱)، متوجه می‌شویم که تمام عبارات منجر به‌تفاضل‌های مرکزی مرتبه دوم می‌شوند

۳.۱.۱۱ پایداری و پاشندگی

در ادامه وضعیت انتشار موج در یک محیط همگن فضای یک بُعدی با مقادیر ϵ, μ ثابت را در نظر می‌گیریم. برای ساده‌سازی بیشتر شرایط مرزی تناوبی را فرض می‌کنیم. بنابراین می‌توانیم جواب‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در یک سری فوریه بسط دهیم؛

$$\|H_z\|_{i+1/2}^{n-1/2} = \sum_k e^{-jkx_{i+1/2}} \|\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2}, \qquad \|E_y\|_i^n = \sum_k e^{-jkx_i} \|\mathcal{E}_y\|_k^n$$

که در آن ضرایب فوریه $\|\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2}$ و $\|\mathcal{E}_y\|_k^n$ هستند. عبارات به‌روز رسانی معادله (۹.۱۱) برای میدان‌های الکترومغناطیسی بصورت زیر می‌توان نوشت؛

$$\begin{aligned} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2} &= \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2} - S\left(e^{-j\phi/2} - e^{j\phi/2}\right)\|\mathcal{E}_y\|_k^n \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^{n+1} &= \|\mathcal{E}_y\|_k^n - S\left(e^{-j\phi/2} - e^{j\phi/2}\right)\|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2} \end{aligned}$$

که در آن امپدانس Z، فاز $\phi = k\Delta x$ و ضریب پایداری $S = c\Delta t/\Delta x$ را معرفی کرده‌ایم که c سرعت نور در محیط است. مجموعه معادلات فوق را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر بازنویسی

کرد؛

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -jS\sin\frac{\phi}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & jS\sin\frac{\phi}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^{n} \end{pmatrix}$$

که می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت؛

$$\begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j2S\sin\frac{\phi}{2} \\ j2S\sin\frac{\phi}{2} & 1-4S^2\sin^2\frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^{n} \end{pmatrix} \qquad (۱۱.۱۱)$$

ماتریس سمت راست به‌نام **ماتریس تقویت**[۵] می‌نامند و در هر مرحله زمانی روی بردار میدان الکترومغناطیسی اعمال می‌شود تا میدان‌ها را نسبت به‌زمان منتشر کنند. با توجه به‌شرط فون نیومن، مقادیر ویژه این ماتریس باید کوچکتر یا مساوی یک باشند تا یک الگوریتم عددی پایدار حاصل می‌شود. با جبر ساده‌ای مقادیر ویژه ماتریس تقویت به‌دست می‌آید:

$$\lambda_\pm = 1 - 2\Big(S\sin\frac{\phi}{2}\Big)^2 \pm 2\sqrt{\Big(S\sin\frac{\phi}{2}\Big)^4 - \Big(S\sin\frac{\phi}{2}\Big)^2} \qquad (۱۲.۱۱)$$

مقدار مطلق آن برای $S \leq 1$ برابر یک است. بنابراین، طرح به‌روز رسانی پرش قورباغه‌ای روش FDTD بدون قید و شرط برای $S \leq 1$ پایدار است. نتیجه‌گیری مشابهی برای طرح‌های به‌روز رسانی با ابعاد بالاتر می‌توان بدست آورد[۱۰۲، ۱۰۳].

با این حال، باید برای طرح ساده انتشار FDTD هزینه‌ای بپردازیم. برای یک موج صفحه، میدان‌های الکترومغناطیسی باید فاز زیر را برای انتشار در بازه زمانی Δt داشته باشند؛

$$e^{j\omega\Delta t} = e^{jkc\Delta t} = 1 + jkc\Delta t - \frac{1}{2}(kc\Delta t)^2 - \frac{j}{6}(kc\Delta t)^3 + \mathcal{O}\Big(\Delta t^4\Big)$$

در آخرین برابری، تابع نمائی را برای آرگومان‌های کوچک بسط داده‌ایم. اگر مقادیر ویژه $\lambda_\pm$ را برای آرگومان‌های کوچک از $k\Delta x$ بسط دهیم؛

$$\lambda_\pm = 1 \pm jkc\Delta t - \frac{1}{2}(kc\Delta t)^2 \mp \frac{j}{24}\left(\frac{1}{S^2}+3\right)(kc\Delta t)^3 + \mathcal{O}\Big(\Delta t^4\Big)$$

مشاهده می‌کنیم که فقط پایین‌ترین جملات سری با موارد نمایی منطبق است. بنابراین، رابطه پاشندگی $\omega(k)$ طرح به‌روز رسانی گسسته FDTD با پاشندگی $\omega = kc$ حل دقیق موج متفاوت است. در نتیجه، هنگام شبیه‌سازی انتشار بسته‌های موج در یک محیط همگن، جواب‌های FDTD به‌دلیل پاشندگی مصنوعی ناشی از گسسته‌سازی تفاضل محدود معادلات ماکسول منجر به‌گسترش و تعریض بسته‌های موج می‌شوند. وضعیت در ابعاد بالاتر که در آن درجه پاشندگی به‌جهت انتشار موج بستگی دارد، حتی نامطلوب‌تر است[۱۰۲، ۱۰۳].

در نهایت توجه کنید که برای $S = 1$ یک ترکیب جادویی از مقادیر $\Delta x, \Delta t$ وجود دارد که در آن پاشندگی کاملاً حذف می‌شود. با این حال، از آنجایی که در شبیه‌سازی‌های FDTD واقعی، ما معمولاً مناطقی با پارامترهای مواد مختلف دارا هستیم که با مقادیر مختلف c و S مرتبط است، وجود چنین مرحله زمانی جادویی معمولاً کاربرد عملی کمی دارد.

[۵] Amplification Matrix

۴.۱.۱۱ لایه‌های تطبیق کامل

حوزه محاسباتی شبیه‌سازی‌های FDTD باید از نظر اندازه محدود انتخاب شود. به‌همین دلیل، باید مراقب رفتار میدان‌های الکترومغناطیسی در مرزهای حوزه بود. بدترین حالت وقتی است که دامنه محدوده به‌اندازه کافی بزرگ باشد، میدان‌های الکترومغناطیسی که یا از طریق شرایط اولیه بر روی سیستم نقش می‌بندند یا توسط منابع جریان ایجاد می‌شوند، در داخل حوزه باقی می‌مانند. با این حال، با گذشت زمان، میدانها همیشه به‌مرزها خواهند رسید. از آنجایی که نقاط شبکه در مرزهای حوزه به‌نقاط شبکه خارجی متصل نیستند، یک راه حل ساده از معادلات FDTD منجر به‌بازتاب‌های کاذب در مرزهای حوزه می‌شود و در نتیجه نتایج شبیه‌سازی را خراب می‌کند. در زمینه FDTD چندین روش برای حذف بازتاب‌های کاذب وجود دارد که مهم‌ترین آنها شرایط مرز جذبی (ABCs)[۶] و لایه‌های تطبیق کامل (PMLs)[۷] است. به‌ویژه موارد اخیر، که در ابتدا توسط برنگر[۸] [۱۰۷] معرفی شدند، یک پیشرفت واقعاً پیشگامانه برای FDTD هستند.

همانطور که در زمینه روش ماتریس انتقال بحث شد، موجی را در نظر گیرید که به‌یک تیغه دی‌الکتریک برخورد می‌کند. برای قطبش TM و تابش عمودی ضریب بازتاب فرنل از معادله (۸.۲۶) می‌شود:

$$R^{TM} = \frac{\epsilon_2 k_1 - \epsilon_1 k_2}{\epsilon_2 k_1 + \epsilon_1 k_2} = \frac{\epsilon_2\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega - \epsilon_1\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\omega}{\epsilon_2\sqrt{\mu_1\epsilon_1}\omega + \epsilon_1\sqrt{\mu_2\epsilon_2}\omega} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

که در آن $k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$ و در مخرج و صورت $\epsilon_1\epsilon_2\omega$ را حذف کرده و نهایت ضرایب بازتاب بر حسب امپدانس‌ها خواهد شد؛

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}, \qquad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \tag{۱۳.۱۱}$$

ایده بزرگ زیربنایی PMLها این است که ما حوزه شبیه سازی مورد نظر را توسط یک محیط مصنوعی محصور می‌کنیم، (شکل ۴.۱۱)، که گذردهی و نفوذپذیری آن طوری انتخاب شده است که (۱) امپدانس Z_1 محیط داخلی با Z_2 ماده بیرونی مصنوعی، به‌منظور حذف بازتاب های عقبی، تطبیق داشته باشد، و (۲) مواد تلفاتی به‌منظور حذف امواج بخارج رونده باشد. مجموعه عظیمی از ادبیات به‌PMLها و تعمیم‌ها و بهبودهای احتمالی اختصاص داده شده است. در ادامه فقط ایده‌های اصلی را بدون پرداختن به‌جزئیات ترسیم می‌کنیم. خواننده علاقه‌مند به‌مراجع [۱۰۲، ۱۰۳] مراجعه کنند.

گذردهی و نفوذپذیری زیر را برای ماده PML در نظر می‌گیریم:

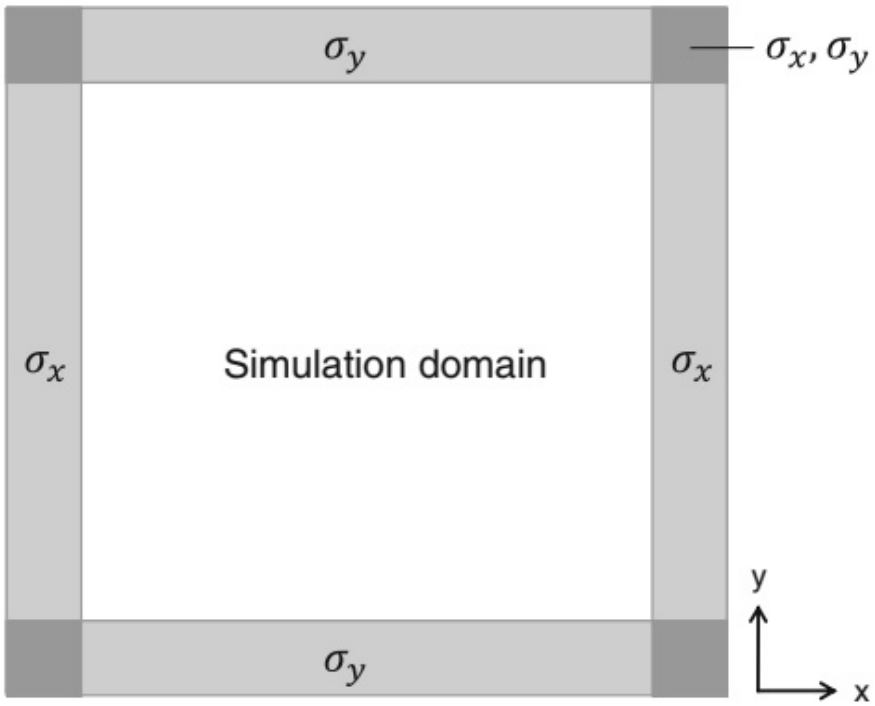
$$\epsilon_2 = \epsilon_1\Big(1 - j\frac{\sigma}{\omega}\Big), \qquad \mu_2 = \mu_1\Big(1 - j\frac{\sigma}{\omega}\Big) \tag{۱۴.۱۱}$$

بلافاصله مشاهده می‌شود که با این انتخاب، $Z_1 = Z_2$ حاصل می‌شود و ماده PML تلف کننده است. هنوز یک مشکل باقی مانده است. در بحث بالا، ما برخورد عمودی موج را بر سطح مشترک فرض کردیم، اما برای حالت کلی برخورد مایل، وضعیت پیچیده‌تر است. در ادامه، در

[۶] Absorbing Boundary Conditions (ABCs)

[۷] Perfectly Matched Layers (PMLs)

[۸] Berenger



شکل ۴.۱۱: شماتیک برای شبیه‌سازی FDTD در دو بعد فضایی با استفاده از لایه‌های تطبیق کامل. حوزه شبیه‌سازی مورد علاقه توسط لایه‌های تطبیق کامل (PML) با رسانایی σ_x, σ_y احاطه شده است و به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که میدان‌های وارد شده از حوزه شبیه سازی (۱) بازتاب نمی‌شوند (تطبیق امپدانس)، و (۲) درمواد (PML) جذب می‌شوند.

مورد موجTM در فضای دو بعدی با E_z, H_x و H_y به‌عنوان متغیرهای پویا بحث می‌کنیم و برای فضای سه بعدی به‌ادبیات اصلی [۱۰۷] مراجعه کنید. شبیه به‌معادله (۱۳.۱۱)، معادلات کرل معادلات ماکسول را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \epsilon\frac{\partial E_{zx}}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{2}J_x, \quad \mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial E_{zy}}{\partial y}\right) \\ \epsilon\frac{\partial E_{zy}}{\partial t} &= -\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{2}J_x, \quad \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = \left(\frac{\partial E_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial E_{zy}}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{۱۵.۱۱}$$

که در آن میدان E_z را با تقسیم مصنوعی به E_{zx} و E_{zy} معرفی کرده‌ایم. از ز آنجائی که مولفه‌های میدان مغناطیسی H_x و H_y به‌مجموع $E_{zx} + E_{zy}$ تزویج شده‌اند، این تقسیم در این نقطه کاملاً منطقی است. در هر حال، سعی می‌کنیم جملاتی تلفاتی به‌رابطه (۱۵.۱۱) بصورت

زیر اضافه کنیم؛

$$\epsilon\frac{\partial E_{zx}}{\partial t}+\sigma_x E_{zx}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{1}{2}J_x,\quad \mu\frac{\partial H_x}{\partial t}+\sigma_y H_x=-\left(\frac{\partial E_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial E_{zy}}{\partial y}\right)$$
$$\epsilon\frac{\partial E_{zy}}{\partial t}+\sigma_y E_{zy}=-\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{1}{2}J_x,\quad \mu\frac{\partial H_y}{\partial t}+\sigma_x H_y=\left(\frac{\partial E_{zx}}{\partial x}-\frac{\partial E_{zy}}{\partial x}\right) \tag{۱۶.۱۱}$$

که در آن σ_x و σ_y هدایت هستند. در مرحله بعد وضعیت مصور در شکل (۴.۱۱) را بررسی می‌کنیم که در آن حوزه شبیه سازی دو بعدی مطلوب ما با یک لایه نازک پر از مواد PML احاطه شده است و به‌صورت زیر انتخاب می‌شوند:

پی ام ال چپ و راست با $\sigma_x>0,\ \sigma_y=0$ $\Longleftarrow$ میرائی E_{xz}

پی ام ال بالا و پائین با $\sigma_x=0,\ \sigma_y>0$ $\Longleftarrow$ میرائی E_{yz}

ظاهراً با این انتخاب معادلات ماکسول در داخل PML برآورده نمی‌شود. با این حال، این مشکلی نیست زیرا هدف PMLها تنها (۱) حذف بازتاب از مواد PML بسوی حوزه شبیه‌سازی محاسباتی و (۲) میرا کردن میدانها در ماده PML است که از طریق هدایت‌های σ_x و σ_y به‌دست می‌آید. در گوشه‌ها $\sigma_x=\sigma_y$ را قرار میدهیم تا تمام امواج خروجی از شبیه‌سازی حذف شوند. با افزودن این لایه‌های PML، می‌توانیم شبیه‌سازی‌ها را بسیار کارآمد و بدون هیچ گونه عارضه‌ای در مقایسه با شبیه‌سازی‌های FDTD بدون لایه‌های PML انجام دهیم. تنها استثناء سربار جزئی ناشی از تقسیم E_{zx} به E_{zx} و E_{zy} است. توجه داشته باشید که حوزه شبیه‌سازی کل هم از حوزه مورد نظر (که دینامیک آن توسط معادلات ماکسول کنترل می‌شود) و هم از ماده مصنوعی PML (که دینامیک آن توسط هدایت غیرفیزیکی کنترل می‌شود) تشکیل شده است. همچنین اشاره می‌کنیم که یک رویکرد جایگزین برای حذف بازتاب‌ها در مرزهای حوزه شبیه‌سازی وجود دارد که مبتنی بر پارامترهای مواد $\bar{\bar{\epsilon}},\bar{\bar{\mu}}$ وابسته به‌فرکانس و ناهمسانگرد است [۱۰۲، ۱۰۳]. همچنین باید مراقب بود زیرا در اکثر پیاده‌سازی‌های PML، لایه‌ها امواج محوشونده[۹] را جذب نمی‌کنند، بنابراین باید حوزه شبیه‌سازی را به‌اندازه‌ای بزرگ کرد که امواج محوشونده قبل از رسیدن به‌مرز میرا شوند.

هنگام استفاده از لایه‌های PML در شبیه‌سازی‌های FDTD، یک عارضه اضافی به‌دلیل نوع گسسته‌سازی معادله (۱۶.۱۱) ایجاد می‌شود. در اینجا یک لایه PML با عرض محدود همچنان می‌تواند به‌بازتابی قابل توجه در مرزهای شبیه‌سازی منجر شود. برای حذف این بازتاب‌ها، اغلب از لایه تابع مکان $\sigma_x(x)$ و $\sigma_y(y)$ برای امواج خارج شونده استفاده می‌شود که با مقدار σ کوچک شروع شده و سپس به‌تدریج افزایش می‌یابد. یک انتخاب معمول بصورت $\sigma(d)=\sigma_0 d^m$ که در آن فاصله از مرز PML تا حوزه شبیه‌سازی است. σ_0 مقداری ثابت که باید به‌درستی انتخاب شود و m مقداری بین سه و چهار است. با این رویکرد، بازتاب‌ها در مرزهای شبیه‌سازی FDTD می‌توانند به‌شدت حذف شوند. شکل (۵.۱۱) مثالی از یک موج خروجی را برای شبیه‌سازی $(a-c)$ بدون و $(d-e)$ با لایه‌های PML نشان می‌دهد.

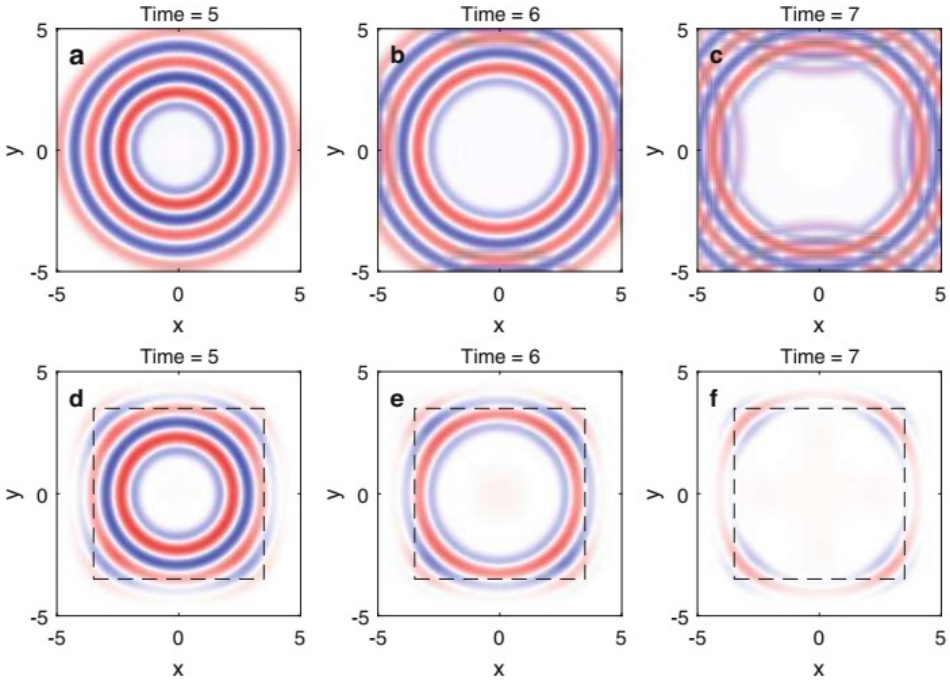
[۹] Evanescent Waves

۵.۱.۱۱ خواص مواد

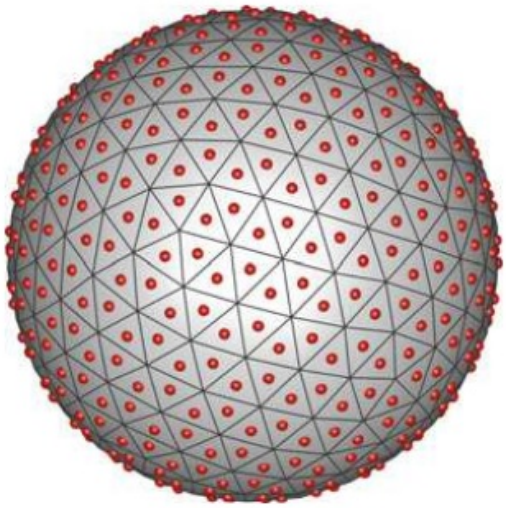
به عنوان یک راه حل اجرائی در حوزه زمان، بکاربردن مواد وابسته به‌فرکانس در FDTD ساده نیست. برای گذردهی نوع درودِ یا درودِ-لورنتس، که معمولاً برای توصیف مناسب فلزات کافی است، می‌توانیم به‌مدل‌های توصیف میکروسکوپی معرفی‌شده در بخش۱.۷ تکیه کنیم. به‌عنوان مثال، در مدل درودِ-لورنتس از معادله (۴.۷) با تحریک نوسانگر هارمونیکی استفاده می‌کنیم.

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x} + eE(t)$$

که در آن m و e بترتیب جرم و بار نوسانگر، ω_0 فرکانس تشدید، و γ ثابت میرائی هستند. جابجایی نوسانگر به‌قطبش مواد از طریق $P = nex$ مربوط می‌شود، که در آن n چگالی نوسانگرها است. مدل فوق را می‌توان به‌راحتی با ارائه یک گسسته‌سازی مناسب از معادله حرکت نوسانگر در روابط FDTD قرار داد. برای بحث دقیق‌تر در مورد چنین پیاده‌سازی‌ها، و همچنین روش‌های پیشرفته‌تر برای اجرای سایر گذردهی و نفوذپذیری‌های وابسته به‌فرکانس، خوانندگان را به‌ادبیات [۱۰۲، ۱۰۳] ارجاع می‌دهیم .



شکل ۵.۱۱: عکس‌های لحظه‌ای میدان الکتریکی $E_z(x,y)$ برای شبیه‌سازی دو بعدی FDTD (پلاریزاسیون TM) یک موج خروجی $(a-c)$ بدون و $(d-e)$ با لایه‌های تطبیق کامل. بدون لایه‌های PML، موج در مرز شبیه‌سازی بازتاب شده و باعث ایجاد اثرات ناپایداری و ناخواسته در شبیه‌سازی می‌شود. با لایه‌های PML، موج خروجی در مواد PML جذب شده و به‌دلیل تطبیق امپدانس، بازتاب‌های برگشتی به‌شدت حذف می‌شوند. x, y و t در واحدهای بدون بُعد هستند.



شکل ۶.۱۱: گسسته‌سازی مرز برای (BEM) شبه استاتیکی. مرز یک کره با تعدادی از عناصر مرزی، در اینجا مثلث، تقریب می‌شود. در ساده‌ترین شکل آن، توزیع بار سطحی را با بارهای سطحی واقع در مرکز عناصر مرزی تقریب می‌کنیم (نقاط قرمز)، و پتانسیل و مشتق سطح آن را در مرکز اجزاء شکل (روش هم‌مکانی) تطبیق می‌دهیم.

۲.۱۱ روش اجزای مرزی

در فصل‌های قبل روش انتگرال مرزی را بتفصیل معرفی کردیم. هنگام بحث درباره نوع گسسته‌سازی آن، بنام **روش اجزای مرزی**(BEM)[۱۰] اشاره شد و بر روی بسیاری از نتایج حاصل قبلی این را بنا خواهیم کرد. سیستم‌هایی که در ذهن داریم در شکل (۶.۱۱) نشان داده شده‌اند و شامل یک ذره فلزی یا دی‌الکتریک با گذردهی ϵ_1 است که در یک محیط پس زمینه با گذردهی ϵ_2 تعبیه شده است. تعریف نشان دادن ذره در داخل و یا خارج با زیرمجموعه‌های ۱ و ۲ در تمام موارد پذیرفته خواهد شد. در تقریب شبه‌استاتیکی می‌توانیم از معادله (۲۷.۹) برای محاسبه بارهای سطحی $\sigma(\mathbf{s})$ در مرز ذره $\partial\Omega$ از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$\Lambda(\omega)\sigma(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{s},\mathbf{s}')}{\partial n}\sigma(\mathbf{s}')dS' = -\frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s})}{\partial n}$$

در اینجا،$\Lambda(\omega) = \frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)/(\epsilon_1-\epsilon_2)$ ، $G(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ تابع گرین است که موقعیت های $\mathbf{s}$ و $\mathbf{s}'$ را در مرز ذره به‌هم متصل می‌کند، و V_{inc} پتانسیل اسکالر ورودی است. تحریک، به‌عنوان مثال یک موج مسطح یا یک دوقطبی نوسانی. هنگامی که $\sigma(\mathbf{s}$ شناخته شد، می‌توانیم پتانسیل را در هر جای دیگری با استفاده از معادله (۲۴.۹) محاسبه کنیم. برای اینکه این عبارت برای ارزیابی عددی مناسب باشد، ما مرز ذره را بر حسب عناصر مرزی به‌اندازه کافی کوچک $\mathcal{T}_i$ گسسته می‌کنیم، همانطور که به‌صورت شماتیک در شکل (۶.۱۱) نشان داده شده است. این عناصر باید به‌اندازه‌ای کوچک باشند که تقریب معنی‌داری از مرز ذره واقعی ارائه کنند، با عناصر کوچک‌تر

[۱۰] Boundary Element Method (BEM)

در لبه‌ها یا گوشه‌های تیز و عناصر بزرگ‌تر در مناطق صاف‌تر ذره. دقت شبکه انتخابی معمولاً با اجرای شبیه‌سازی با تعداد متفاوت عناصر مرزی n و مقایسه نتایج شبیه‌سازی مربوطه بررسی می‌شود. اگر شبیه‌سازی‌ها نتایج مشابهی داشته باشند، می‌گوییم که همگرا هستند و نتایج را حفظ می‌کنند، در غیر این صورت تعداد عناصر مرزی را بیشتر افزایش می‌دهیم و شبیه‌سازی‌ها را دوباره اجرا می‌کنیم. هر عنصر مرزی $\mathcal{T}_i$ دارای پارامترهای زیر است:

- مرکز شکل $\mathbf{s_i}$
- بردار عمود بر سطح $\mathbf{n_i}$
- سطح عنصر $\mathcal{A}_i$
- توزیع بار روی سطح σ_i

در مرحله بعد فرض می‌کنیم که بار سطحی $q_i = \sigma_i \mathcal{A}_i$ در یک عنصر مرزی معین در موقعیت مرکزی $\mathbf{s_i}$ قرار دارد. طرح های تقریب دقیق تر در زیر مورد بحث قرار خواهند گرفت. سپس برای مشتق سطح تابع گرین دریافت می‌کنیم

$$\left\|F_{start}\right\|_{ii'} = \left\|\frac{\partial G_{start}}{\partial n}\right\|_{ii'} = -\mathbf{n}_i \cdot \frac{\mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_i}{4\pi|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_i|^3} \tag{۱۷.۱۱}$$

که در آن تقریب شبه استاتیکی F_{start} را نشان دادیم. در اینجا و در ادامه از علامت گذاری $\left\|\cdots\right\|$ برای بردارها یا ماتریس‌های حاصل از گسسته‌سازی مقادیر در رویکرد BEM استفاده می‌کنیم. سپس معادله انتگرال مرزی را می‌توان بر حسب معادله ماتریسی زیر بیان کرد؛

$$\sum_{i'}\left(\Lambda(\omega)\delta_{ii'} + F^{stat}_{ii'}\mathcal{A}_{i'}\right)\sigma'_i = -\left(\frac{\partial V_{inc}}{\partial n}\right)_i ,$$

که جواب آن بارهای سطحی مجهول را در اختیار ما قرار می‌دهد. در تقریب شبه‌استاتیکی، توزیع بار سطحی از حل معادله زیر ماتریس محاسبه می‌شود.

روش اجزای مرزی (شبه‌استاتیک)

$$\left\|\sigma\right\| = -\left\|\Lambda(\omega)\ \mathbb{I} + \mathcal{F}_{stat}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial V_{inc}}{\partial n}\right\| , \tag{۱۸.۱۱}$$

که در آن ماتریس $\mathcal{F}^{stat}_{ii'} = F^{stat}_{ii'}\mathcal{A}_{i'}$ را معرفی کرده‌ایم. به‌طور خلاصه، محاسبه توزیع بار سطحی در رویکرد روش اجزای مرزی شامل مراحل زیر است:

- گسسته کردن مرز ذرات با استفاده از عناصر مرزی با اندازه معین،
- محاسبه مشتق تابع گرین با استفاده از رابطه (۱۷.۱۱)،
- حل معادله ماتریس رابطه (۱۸.۱۱).

این رویکرد به‌راحتی قابل پیاده‌سازی است. با این حال، با وجود سادگی، نتایج شگفت‌آوری دقیقی، همانطور که در چند لحظه دیگر نشان خواهیم داد به‌دست می‌دهد. یک نکته اضافی وجود دارد که باید با دقت بیشتری مورد توجه قرار گیرد، که اولین بار توسط فوکس و لیو[۱۱][۱۰۸] مورد توجه قرار گرفت و به‌عناصر قطری F_{ii}^{stat} مربوط می‌شود. فرض کنید $\mathbf{s}'$ نقطه‌ای در مرز ذره $\partial\Omega$ است و $\mathbf{r}$ نقطه‌ای از مرز S است که $\partial\Omega$ را در بر می‌گیرد. با توجه به‌قضیه گوس، که میگوید شار میدان الکتریکی که توسط سطح بسته S خارج می‌شود، برابر است با بار کل Q محصور در آن حجم توسط مرز است، و خواهیم داشت؛

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow -\oint_S \frac{\partial G_{stat}(\mathbf{r},\mathbf{s}')}{\partial n} dS = 1.$$

اگر از خارج به‌مرزهای $S \longrightarrow \partial\Omega$ نزدیک شویم، باید مراقب حد $\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{s}$ باشیم که قبلاً برای شرط نیومن در صفحه های قبل بحث کردیم و ضریب اضافی $-\frac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{s}')$ را میدهد. در این صورت به‌دست می‌آوریم:

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{stat}(\mathbf{s},\mathbf{s}')}{\partial n} dS = -\frac{1}{2}\ .$$

بنابراین، با گسسته‌سازی انتگرال مرزی بر حسب عناصر مرزی، به‌قانون جمع زیر می‌رسیم.

$$\sum_i F_{ii'}^{stat}\mathcal{A}_i = -\frac{1}{2}, \tag{۱۹.۱۱}$$

که این امکان را می‌دهد عناصر قطر $F_{ii'}^{stat}$ را محاسبه کنیم در حالی که عناصر خارج از قطر را از معادله (۱۷.۱۱) محاسبه کنیم. این قانون جمع برای به‌دست آوردن نتایج دقیق حتی برای تعداد نسبتاً کمی از عناصر مرزی از اهمیت بالایی برخوردار است. در ادامه به‌چند نمونه معرف می‌پردازیم و نمونه‌های بیشتر را به‌عنوان تمرین به‌خواننده علاقه‌مند واگذار می‌کنیم.

گشتاور دوقطبی هنگامی که توزیع بار سطحی در دسترس است، می‌توانیم گشتاور دوقطبی نانوذره از رابطه زیر محاسبه کنیم؛

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{s}_i\Big(\sigma_i\mathcal{A}_i\Big) \tag{۲۰.۱۱}$$

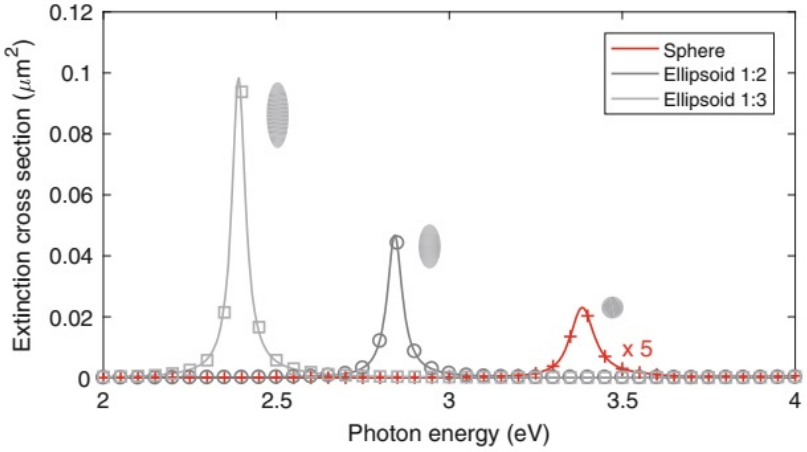
که به‌نوبه خود اجازه می‌دهد تا طیف پراکندگی و انقراضی نوری را از روابط (۲۱.۹) و (۲۲.۹) محاسبه کنیم.

همگرائی به‌عنوان نمونه‌ای، طیف‌های نوری را برای نانوذرات کروی و بیضوی‌گون که نتایج تحلیلی را می‌توان از نظریه می-گانز به‌دست آورد، محاسبه می‌کنیم. شکل (۷.۱۱) مقایسه بین نتایج عددی (نمادها) و عبارات تحلیلی نظریه می-گانز (خطوط پُر) را نشان می‌دهد. علیرغم تعداد نسبتاً کمی از چند صد عنصر مرزی، توافق در کل بسیار عالی است.

مودهای ویژه مقادیر ویژه و مودهای ویژه رویکرد شبه‌استاتیکی بر اساس معادله (۲۸.۹) را می‌توان به‌راحتی در رویکرد BEM از طریق رابطه زیر محاسبه کرد؛

$$\Big\|\mathcal{F}_{stat}\Big\|\cdot\Big\|u_k\Big\| = \lambda\Big\|u_k\Big\| \tag{۲۱.۱۱}$$

[۱۱] Fuchs and Liu



شکل ۷.۱۱: سطح مقطع انقراضی برای نانوکره‌ها و نانوبیضوی‌ها نقره که از معادله (۲۲.۹) محاسبه و مقایسه نتایج BEM (نمادها) با نتایج تحلیلی نظریه شبه‌استاتیک می و گانز-می انجام شده است. از پارامترها و هندسه‌های مواد مشابه در شکل (۴.۹) استفاده می‌کنیم. با وجود تعداد نسبتاً کمی از حدود ۵۰۰ عنصر مرزی، توافق عالی بین نتایج تحلیلی و عددی مشاهده می‌کنیم.

حل معادله فوق را می‌توان به‌راحتی با استفاده از روش‌های عددی استاندارد برای مسائل مقادیر ویژه، همانطور که توسط اکثر بسته‌های نرم افزاری جبر خطی ارائه شده است، بدست آورد.

معادلات ماکسول کامل

نوع دیگری از رویکرد BEM که در بالا مورد بحث قرار گرفت وجود دارد، که امکان حل کامل معادلات ماکسول را فراهم می‌کند. این رویکرد توسط گارسیا دو آباجو [۱۲] و همکاران [۱۰۹] توسعه یافته در جامعه پلاسمونیک‌ها کاربرد گسترده‌ای دارد. با رویکرد میدانی معمول بر اساس معادله (۵۸.۹) که در ادامه بیشتر به‌آن خواهیم پرداخت متفاوت است و از پتانسیل‌های اسکالر و برداری $V, \mathbf{A}$ به‌جای میدان‌های الکترومغناطیسی $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ به‌عنوان کمیت‌های اساسی استفاده می‌کند. یک جعبه ابزار منبع باز[۱۳] برای اجرای این طرح توسط نویسنده این کتاب تدوین شده است [۱۱۰].

نقطه شروع معادلات هلم‌هولتز معادله (۲۲.۲) است، که برای میدان‌های هارمونیک زمانی بصورت زیر است؛

$$\left(\nabla^2 + k_i^2\right) V_i(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_i}$$

$$\left(\nabla^2 + k_i^2\right) \mathbf{A}_i(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

در اینجا $k_i^2 = \mu_0 \epsilon_i \omega^2$، و $i = 1, 2$ به‌ترتیب مناطق داخل و خارج نانوذره را نشان می‌دهد که با مرز$\partial\Omega$ از هم جدا می‌شوند. در اینجا همه نفوذپذیری‌ها را برابر μ_0 قرار می‌دهیم. معادلات بالا

[۱۲] Garcia de Abajo

[۱۳] Open Source

با استفاده از شرط لورنتس معادله (۲۱.۲) به‌دست آمده است.

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}_i = -jk_0\kappa_i V_i, \tag{۲۲.۱۱}$$

در اینجا $\epsilon_i = \epsilon_0\kappa_i$ و k_0 عددموج نور در خلاء است. کار با پتانسیل برداری $\tilde{\mathbf{A}}_i = c\mathbf{A}_i$ را راحت خواهیم یافت که ابعادی مشابه پتانسیل اسکالر دارد. در اینجا c سرعت نور در خلاء است. میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان از طریق پتانسیل زیر به‌دست آورد؛

$$\mathbf{E}_i = -jk_0\tilde{\mathbf{A}}_i - \nabla V_i, \qquad c\mathbf{B}_i = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}_i$$

در قیاس با معادله (۲۴.۹) برای پتانسیل اسکالر در رویکرد شبه‌استاتیک، برای پتانسیل‌های الکترومغناطیسی رابطه‌ای بصورت زیر می‌نویسیم؛

$$\begin{aligned} V_i(\mathbf{r}) &= V_i^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_i(\mathbf{r},\mathbf{s}')\sigma_i(\mathbf{s}')dS' \\ \tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{r}) &= \tilde{\mathbf{A}}_i^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_i(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{h}_i(\mathbf{s}')dS' \end{aligned} \tag{۲۳.۱۱}$$

که در آن $V_i^{inc}, \tilde{\mathbf{A}}_i^{inc}$ پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تحریک تابشی هستند و تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز از طریق معادله (۵.۵) تعریف می‌شود.

$$\left(\nabla^2 + k_i^2\right)G_i(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

معادله (۲۳.۱۱) به‌گونه‌ای است که معادلات هلم‌هولتز در داخل و خارج ذره به‌طور خودکار برآورده می‌شوند. توزیع‌های بار سطحی σ_1, σ_2 و جریان $\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2}$ را معرفی کرده‌ایم. در مقایسه با رویکرد شبه‌استاتیکی، توزیع‌های جریان سطحی اخیر باید معرفی شوند و دیگر نمی‌توانیم σ_1, σ_2 را در داخل و خارج ذرات برابر قرار دهیم. بار سطحی مجهول و توزیع جریان باید به‌گونه‌ای تعیین شود که شرایط مرزی معادلات ماکسول در مرز ذره $\partial\Omega$ برآورده شود.

در رویکرد BEM، مجدداً مرز را با عناصر $\mathcal{T}_i$ با اندازه محدود تقریب می‌زنیم و بارهای سطحی $\|\sigma_j\|$ و جریان‌های $\|\mathbf{h}_j\|$ را در مرکز عناصر مرزی در نظر می‌گیریم. همانطور که در بخش ۱۱.۶ با جزئیات بیشتر بحث شد، این توزیع‌های بار سطحی و جریان را می‌توان از معادلات کاربردی معادله (۶۶.۱۱)

$$\|\sigma_2\| = \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Sigma\|^{-1} \cdot \left(\|\tilde{D}^e\| - jk_0\|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot \left(\kappa_1 - \kappa_2\right)\|\Delta\|^{-1} \cdot \|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|\right)$$

$$\|\mathbf{h}_2\| = \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Delta\|^{-1} \cdot \left(\|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\| - jk_0\|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot \left(\kappa_1 - \kappa_2\right)\|\mathcal{G}_2\| \cdot \|\sigma_2\|\right)$$

همراه با معادله (۵۸.۱۱) برای محاسبه بار سطحی و توزیع جریان $\|\sigma_1\|$ ، $\|\mathbf{h}_1\|$ در داخل ذرات به‌دست آورد. برای تعریف ماتریس‌های مختلف به‌بخش ۶.۱۱ مراجعه کنید. در مجموع، طرح راه‌حل به‌طور قابل‌توجهی پیچیده‌تر از حالت شبه‌استاتیکی است، اما همچنان برای گسسته‌سازی مرزها با مثلاً چند هزار عنصر مرزی، از نظر عددی قابل پردازش و کارآمد است.

۳.۱۱ روش گالرکین

در بخش قبل یک رویکرد BEM را معرفی کردیم که در آن توزیع بار سطحی σs را با تعداد محدودی از مقادیر $\|\sigma_i\|$ واقع در مرکز s_i از عناصر مرزی تقریب زدیم. این رویکرد اشکالی ندارد و در واقع توسط بسیاری از محققان در زمینه پلاسمونیک استفاده شده است (و هنوز هم استفاده می‌شود). با این حال، موقعیت‌هایی وجود دارد که فرد دوست دارد بهتر عمل کند، جایی که «بهتر» باید به‌دو روش متفاوت درک شود.

- **درونیابی** اول، ممکن است انتظار داشته باشیم که یک طرح تقریب بهبود یافته بر اساس درون‌یابی، در ساده ترین شکل درونیابی خطی σs در یک عنصر مرزی، نتایج شبیه‌سازی دقیق‌تری را ارائه دهد. یک رویکرد سیستماتیک برای این، طرح گالرکین است که در چند لحظه دیگر مورد بحث قرار می‌گیرد.

- **همگرائی** طرح گالرکین این مزیت اضافی را دارد که می‌توان آن را با دقت بیشتری در زمینه ریاضیات عددی بررسی کرد. اگرچه در اینجا این موضوعات را مورد بحث قرار نخواهیم داد، اما به‌طور کلی می‌توان ثابت کرد که انواع خاصی از رویکردهای عناصر مرزی که هنگام پالایش گسسته‌سازی مرز همگرا شوند، برخلاف رویکردهای مبتنی بر مرکز که در آن اغلب هیچ نتیجه‌گیری دقیقی نمی‌توان گرفت، تضمین شده است. به‌همین دلیل، رویکرد روش اجزای مرزی مبتنی بر میدان، که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد، رویکرد «استاندارد» است که معمولاً در الکترودینامیک محاسباتی استفاده می‌شود.

در ادامه، ابتدا طرح گالرکین را به‌صورت کلی معرفی کرده و سپس در مورد پیاده سازی آن در چارچوب روش اجزای مرزی تامل می‌کنیم. همان طرح گالرکین را می‌توان برای سایر طرح‌های حل کننده ماکسول بر اساس روش اجزای محدود (FEM)[۱۴] نیز استفاده کرد، همانطور که بعداً در این فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱.۳.۱۱ ایده بزرگ روش گالرکین

ابتدا معادله زیر را درنظر گیرید؛

$$\int_{\mathcal{D}} K(\mathbf{r},\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')dV' = b(\mathbf{r}) \qquad (۲۴.۱۱)$$

که در آن K هسته (کرنر)، u جوابی است که بدنبالش هستیم، و b یک ناهمگنی است. $\mathbf{r}$ به‌یک حوزه معین $\mathcal{D}$ محدود می‌شود که برای رویکرد BEM دو بعدی و برای رویکرد (FEM) سه بعدی است. انتگرال‌گیری روی حوزه $\mathcal{D}$ با نماد dV مشخص می‌شود. طرح گالرکین وسیله‌ای برای تبدیل یک معادله عملگر، مانند معادله(۲۴.۱۱)، به‌یک ماتریس که می‌تواند از طریق ماتریس معکوس حل شود، فراهم می‌کند. ابتدا راه حل $u(\mathbf{r})$ را با استفاده از توابع پایه $\phi_\nu(\mathbf{r})$ محدود شده n بُعدی بسط می‌دهیم،

[۱۴] Finite Element Method (FEM)

جواب تقریبی

$$u(\mathbf{r}) \approx u^e(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu(\mathbf{r}) u_\nu^e \tag{۲۵.۱۱}$$

که در آن $u^e(\mathbf{r})$ راه حل تقریبی با ضرایب بسط u_ν^e است. بالانویس e یادآور عناصر محدودی است که در زیر معرفی می‌شوند، که از این توابع پایه پشتیبانی می‌کنند. به‌دلیل تعداد پایه محدود شده، معادله (۲۴.۱۱) دیگر ارضاء نمی‌شود،

$$\int_{\mathcal{D}} K(\mathbf{r},\mathbf{r}') \left[\sum_{\nu'=1}^{n} \phi_{\nu'}(\mathbf{r}') u_{\nu'}^e \right] dV' - b(\mathbf{r}) = Res, \tag{۲۶.۱۱}$$

اما یک باقیمانده محدود می‌دهد. اکنون به‌دنبال بهترین بردار جواب ممکن u_ν^e در فضای تابع محدود شده هستیم. برای این منظور معادله (۲۶.۱۱) را در تابع آزمایشی[۱۵] زیر ضرب می‌کنیم؛

$$\mathcal{W}^e(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) \mathcal{W}_\nu^e \tag{۲۷.۱۱}$$

در طرح گالرکین برای $\mathcal{W}^e(\mathbf{r})$ از همان توابع $\tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) = \phi_\nu(\mathbf{r})$ برای بسط بردار حل تقریبی استفاده می‌کنیم، اما برای عمومیت در اینجا حالت کلی‌تری را بیان می‌کنیم که توابع بسط و آزمایش هستند. ممکن است متفاوت باشد برای ارائه یک رویکرد محاسباتی مناسب، تعداد توابع بسط و آزمایش باید یکسان باشد. بعد معادله (۲۶.۱۱) را با تابع آزمایشی ضرب و در کل حوزه $\mathcal{D}$ انتگرال‌گیری می‌کنیم. بدست می‌آید؛

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}^e \left[\sum_{\nu'=1}^{n} K_{\nu\nu'} u_{\nu'}^e - b_\nu \right] = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}^e \int_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) Res \; dV \;,$$

که در آن نماد اختصاری زیر را معرفی کرده‌ایم؛

$$\begin{aligned} K_{\nu\nu'} &= \iint_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) K(\mathbf{r},\mathbf{r}') \phi_\nu(\mathbf{r}') dV \; dV' \\ b_\nu &= \int_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) b(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \tag{۲۸.۱۱}$$

در جواب بهینه مقدار عبارت بالا نباید برای تغییرات کوچک $\delta\mathcal{W}_\nu^e$ تابع آزمایش تغییر کند. ظاهراً زمانی که عبارت در پرانتز صفر می‌شود، عبارت باقی‌مانده به‌حداقل می‌رسد، که می‌توان آن را در نماد برداری صریح و ماتریسی به‌صورت زیر نوشت:

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{u^e} = \mathbf{b} \tag{۲۹.۱۱}$$

[۱۵] Test Function

این معادله را می‌توان از طریق ماتریس معکوس به‌سادگی حل کرد. روش حل یک معادله عملگر با معکوس کردن یک نوع مختصر شده ماتریس به‌عنوان روش پتروف-گالرکین، روش باقیمانده‌های وزن شده، یا روش ممان شناخته می‌شود. در ادبیات تخصصی اغلب معادله (۱۱.۲۴) را رابطه بندی قوی[۱۶] می‌نامند، در حالی که بسط بر حسب توابع آزمایشی را، رابطه بندی ضعیف[۱۷] گالرکین اطلاق می‌کنند.

رابطه‌بندی وردشی

طرح گالرکین را نیز می‌توان به‌عنوان یک مسئله وردشی (تغییراتی) رابطه‌بندی کرد. دوباره از معادله (۱۱.۲۴)، همراه با بسط جواب بر حسب برخی از توابع پایه $\phi_\nu(\mathbf{s})$، معادله(۱۱.۲۵)، شروع می‌کنیم. با معرفی تابع زیر

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{W}^e(\mathbf{r}) \left[\int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u^e(\mathbf{r}) dV' - b(\mathbf{r}) \right] dV \qquad (۱۱.۳۰)$$

راه حل تقریبی را می‌توان با کمینه کردن این تابع با توجه به‌ضرایب $\mathcal{W}_i^e$ تابع آزمایشی را به‌دست آورد. این ما را به‌معادلات زیر هدایت می‌کند؛

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{W}_\nu^e} = \sum_{\nu'=1}^{n} K_{\nu\nu'} u_{\nu'}^e - b_\nu = 0 \qquad (۱۱.۳۱)$$

جایی که ν بر تمام درجه‌های آزادی مسئله اعمال می‌شود. در تمرین ۱۱.۸ نشان می‌دهیم که رویکرد ترکیبی رویکرد BEM را می‌توان با استفاده از چنین رویکرد وردشی فرمول‌بندی کرد.

۱۱.۳.۲ شبکه بدون ساختار

طرح گالرکین معمولاً با تجزیه ناحیه محاسباتی $\mathcal{D}$ به‌عناصر $\mathcal{T}_i$ با اندازه محدود همراه می‌شود،

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i \qquad (۱۱.۳۲)$$

در روش اجزای مرزی، $\mathcal{T}_i$ معمولاً مثلث و در روش اجزای محدود به‌چهار وجهی نزدیک می‌شود. فرض می‌کنیم که عناصر همسایه یک راس، لبه یا وجه مشترک دارند، اما در غیر این صورت هیچ فرض اضافی در مورد شبکه وجود ندارد. این شبکه به‌عنوان یک شبکه بدون ساختار نشان داده می‌شود، برخلاف شبکه ساختار یافته رویکرد FDTD که در آن هر نقطه شبکه با همسایگان در امتداد تمام جهت های دکارتی، دارای یک مکان کاملاً تعریف شده است. برای این شبکه بدون ساختار مقادیر زیر را معرفی می‌کنیم:

- **درجه‌های آزادی محلی** در هر عنصر $\mathcal{T}_i$، درجه‌های آزادی محلی u_{ia}^e را معرفی می‌کنیم که جواب را مشخص می‌کند. به‌عنوان مثال، در یک مثلث u_{ia}^e ممکن است با مقادیر تابع در گوشه‌های مثلث، با $a = 1, 2, 3$ مرتبط باشد.

[۱۶] Strong Formulation

[۱۷] Weak Formulation

- **توابع شکل محلی** توابع شکل محلی $N_{ia}(\mathbf{r})$ را معرفی می‌کنیم که جواب را در داخل $\mathcal{T}_i$ از طریق روابط زیر تقریب می‌کنند؛

$$u^e(\mathbf{r}) = \sum_a N^e_{ia}(\mathbf{r}) u^e_{ia}, \quad \text{برای} \quad \mathbf{r} \in \mathcal{T}_i$$

در خارج از عنصر $\mathcal{T}_i$، توابع شکل $N_{ia}(\mathbf{r})$ صفر در نظر گرفته می‌شوند. این ویژگی گاهی اوقات به‌عنوان "حمایت محلی" نامیده می‌شود. در یک مثلث، توابع شکل ممکن است یک درون‌یابی خطی از گوشه‌های مثلث به‌داخل مثلث انجام دهند.

- **درجه‌های آزادی جهانی** به‌طور کلی، محدودیت‌های خاصی را بر جواب تحمیل می‌کنیم، مانند اینکه $u^e(\mathbf{r})$ هنگام رفتن از یک عنصر $\mathcal{T}_i$ به‌یک عنصر همسایه پیوسته است. این را می‌توان با به‌اشتراک گذاشتن اطلاعات بین عناصر همسایه شبکه، به‌عنوان مثال با اختصاص مقادیر یکسان u^e به‌رئوس مثلث‌های همسایه، به‌دست آورد. بنابراین، تعداد کل درجه‌های آزادی توسط تعداد $\mathcal{N}$ عناصر شبکه (مثلث یا چهار ضلعی) تنظیم نمی‌شود، بلکه در این مثال، تعداد رئوس شبکه تعیین می‌شود. برای توضیح این موضوع، درجه‌های جهانی آزادی $\|u^e\|_\nu$ را که ν از یک تا تعداد کل n درجه‌های آزادی جهانی را شامل می‌شود، معرفی می‌کنیم.

- **ماتریس انتقال** ما در نهایت به‌دستور العملی نیاز داریم که چگونه درجه‌های آزادی جهانی $\|u^e\|_\nu$ را به‌درجه‌های محلی انتقال دهیم. برای این منظور ماتریس انتقال $T_{ia,\nu}$ را با خاصیت انتقال زیر معرفی می‌کنیم؛

$$u^e_{ia} = \sum_r T_{ia,\nu} \|u^e\|_\nu$$

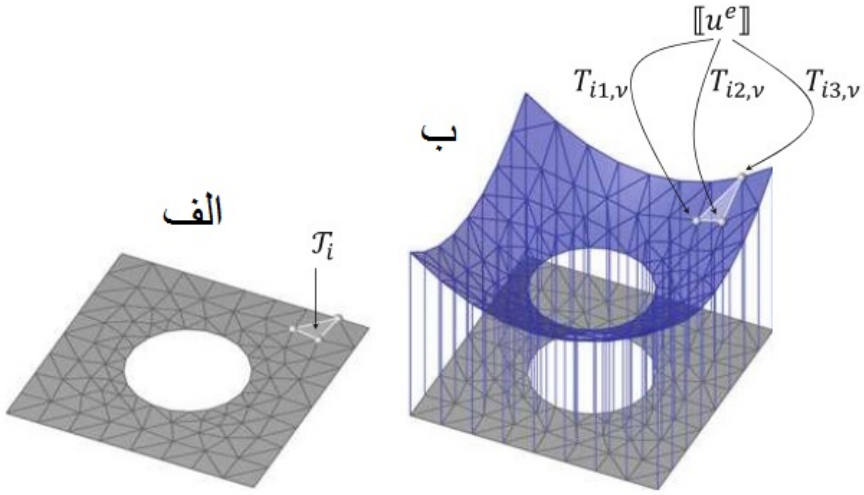
با توضیح شفاهی، T عناصر درجه‌های جهانی آزادی $\|u^e\|_\nu$ را می‌گیرد و آنها را به‌درجه‌های محلی u^e_{ia} در یک عنصر معین $\mathcal{T}_i$ اختصاص می‌دهد، (شکل ۸.۱۱). به‌طور معمول، ماتریس T فقط دارای چند عنصر ماتریس است که با صفر متفاوت است و بنابراین ماتریس تُنک[۱۸] است.

اکنون همه مواد لازم برای رابطه‌بندی کردن رویکرد گالرکین برای یک شبکه بدون ساختار و برای توابع شکل با پشتیبانی محلی را در دسترس داریم. جواب را مطابق معادله (۲۵.۱۱) به‌صورت زیر بسط می‌دهیم.

$$u^2(\mathbf{r}) = \sum_{ia} \sum_\nu N^e_{ia}(\mathbf{r}) \Big(T_{ia,\nu} \|u^e\|_\nu \Big) \,, \tag{۳۳.۱۱}$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر تفسیر کرد: جمله داخل پرانتز درجه‌های آزادی جهانی $\|u^e\|$ را به‌درجه‌های محلی u^e_{ia} انتقال می‌دهد و توابع شکل $N_{ia}(\mathbf{r})$ درون‌یابی را در عنصر $\mathcal{T}_i$ انجام می‌دهند. یک رویکرد کاملاً مشابه را می‌توان برای توابع آزمایشی، با توابع شکلی احتمالاً متفاوت $\tilde{N}^e_{ia}(\mathbf{r})$ دنبال کرد. درج این توابع در عناصر ماتریس معادله (۲۸.۱۱) برای طرح گالرکین، به‌صورت زیر خواهد بود؛

[۱۸] Sparse Matrix



شکل ۸.۱۱: شماتیک های طرح گالرکین.**(الف)** ناحیه محاسباتی $\mathcal{D}$ توسط یک شبکه بدون ساختار متشکل از عناصر $\mathcal{T}_i$ با اندازه محدود تقریب زده می‌شود. **(ب)** جواب $u^e(\mathbf{r})$ با مقادیر تابع u^e_{ia} در رئوس عناصر و با انجام درون‌یابی (خطی) درون عناصر تقریب زده می‌شود. برای بدست آوردن یک تابع صاف و هموار، همان مقادیر u^e را به‌رئوس مشترک عناصر همسایه اختصاص می‌دهیم. این از طریق ماتریس انتقال $\mathbf{T}_{ia,\nu}$ که عناصر بردار جواب جهانی $\|u^e\|$ را به‌رئوس عناصر محلی اختصاص می‌دهد، به‌دست می‌آید.

عناصر ماتریس برای طرح گالرکین

$$\begin{aligned}\|K\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia}\sum_{i'a'} T_{ia,\nu}\left[\int_{\mathcal{T}_i}\int_{\mathcal{T}_{i'}} \tilde{N}^e_{ia}(\mathbf{r})K(\mathbf{r},\mathbf{r}')N^e_{i'a'}(\mathbf{r}')dV\,dV'\right]T_{i'a',\nu'} \\ \|b\|_{\nu} &= \sum_{ia} T_{ia,\nu}\left[\int_{\mathcal{T}_i}\tilde{N}^e_{ia}(\mathbf{r})b(\mathbf{r})dV\right].\end{aligned} \tag{۳۴.۱۱}$$

توجه داشته باشید که این عناصر ماتریس را می‌توان به‌راحتی محاسبه کرد زیرا انتگرال‌ها فقط روی عناصر $\mathcal{T}_i$، $\mathcal{T}_{i'}$ گسترش می‌یابند که در نتیجه پشتیبانی محلی از توابع شکل است. در قیاس کامل با بحث قبلی، یک معادله ماتریسی $\|K\|\cdot\|u^e\| = \|b\|$ بدست می‌آوریم که دوباره می‌توان آن را از طریق ماتریس معکوس حل کرد.

راه حل برداری

در الکترودینامیک محاسباتی، مانند میدان‌های الکتریکی مماسی و مغناطیسی در مورد رویکرد BEM، معمولاً باید معادلات توابع برداری را حل کنیم. به‌طور کلی، این را می‌توان در امتداد خطوط مورد بحث در این بخش انجام داد، اگرچه باید اجزای مختلف جواب برداری را در نظر بگیریم. همانطور که در ادامه با جزئیات بیشتر بحث خواهیم کرد، به‌نظر می‌رسد که راحت

است که در امتداد خطوط کمی متفاوت پیش برویم و از ابتدا توابع شکل برداری $\mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r})$ را معرفی کنیم. این مزیت را دارد که می‌توانیم به‌راحتی محدودیت‌های فیزیکی را بر روی توابع، مانند پیوستگی جریان برداری از یک عنصر به‌عنصر دیگر در مورد رویکرد BEM، اعمال کنیم. اگرچه این محدودیت‌ها همیشه برای جواب‌های دقیق برآورده می‌شوند، اما در مورد راه‌حل‌های تقریبی که از رابطه‌بندی ضعیف مسئله نشأت می‌گیرند، ممکن است همه چیز اشتباه پیش برود. به‌نظر می‌رسد که این برای حذف جواب‌های جعلی[۱۹] ، که در ادبیات برای اجرای ساده‌تر طرح گالرکین گزارش شده است، حیاتی است.

۴.۱۱ روش اجزای مرزی با رویکرد گالرکین

در این بخش، طرح گالرکین را به‌روش انتگرال مرزی برای حل معادلات کامل ماکسول اعمال می‌کنیم. به‌طور کلی، این رویکرد کاملاً پیچیده است و حاوی نکات فنی زیادی است. با این حال، با مطالب توسعه یافته در فصل ۵، ۹ و ۱۱ در موقعیتی هستیم که معادلات کاری را بدون کار اضافی زیاد بدست آوریم. در ادامه، ابتدا در مورد عناصر شکل برداری، به‌نام توابع پایه راویارت-توماس[۲۰] یا رائو-ویلتون-گلیسون[۲۱] فکر و سپس اجرای معادلات روش انتگرال مرزی معرفی شده در بخش ۶.۹ را ترسیم می‌کنیم.

۱.۴.۱۱ توابع پایه راویارت-توماس

فرض کنید که $\mathbf{u}(\mathbf{s})$ یک میدان برداری است که در آن همه بردارها مماس بر مرز ذره هستند. این مورد با رویکرد BEM مبتنی بر میدان معادله (۵۸.۹) مطابقت دارد. همانطور که در بخش ۶.۹ بحث شد. میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی مماسی را می‌توان به‌ترتیب به‌عنوان جریان‌های سطحی و مغناطیس شوندگی‌ها[۲۲] نیز تفسیر کرد.

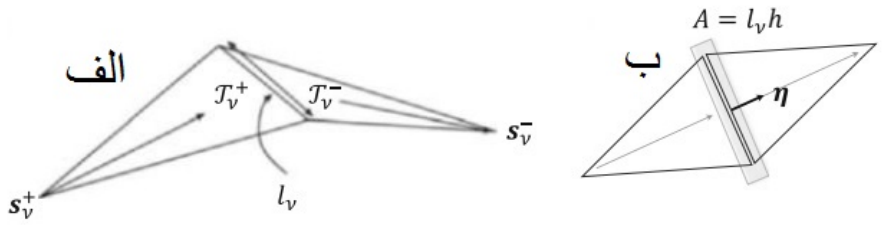
برای یک مرز ذره گسسته، باید مطمئن شویم که جواب تقریبی $\mathbf{u}^e(\mathbf{s})$ شرایط مرزی خاصی را در لبه‌های بین دو مثلث همسایه برآورده می‌کند. فرض کنید $A = lh$ یک حوزه دو بعدی است که یک یال معین را با طول l محصور می‌کند، (شکل ۹.۱۱)، و h ارتفاع ناحیه‌ای است که اجازه می‌دهیم در انتها به‌صفر نزدیک شود. از نوع دو بُعدی قضیه گوس به‌دست می‌آوریم:

$$\int_A \nabla \cdot \mathbf{u}\, dS = \oint_{\partial A} \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\eta} = 0 \Longrightarrow \left[\mathbf{u}(\mathbf{s}^+) - \mathbf{u}(\mathbf{s}^-)\right] \cdot \boldsymbol{\eta} = 0 \qquad (۳۵.۱۱)$$

که در آن $\boldsymbol{\eta}$ بردار عمود بر لبه است. $\mathbf{u}(\mathbf{s}^\pm)$ مقادیر میدان برداری در دو طرف مجاور لبه هستند. معادله(۳۵.۱۱) بیان می‌کند که شار (در جهت $\boldsymbol{\eta}$) میدان مماسی $\mathbf{u}$ خروج از یک مثلث باید با شار ورودی به‌مثلث همسایه برابر باشد. برای توزیع جریان سطحی معادله (۵۹.۹) این بدان معنی است که هیچ توزیع بار خطی منفرد در لبه‌ها ایجاد نمی‌شود.

سپس جدول $\mathcal{E}_\nu$ از لبه‌های مثلث منحصر به‌فرد (بدون در نظر گرفتن جهت) با $\nu = 1, 2, \cdots, n$ را معرفی می‌کنیم، که در آن n تعداد کل یال‌ها است. به‌علاوه، مثلث‌های واقع

[۱۹] Spurious
[۲۰] Raviart-Thomas
[۲۱] Rao-Wilton-Glisson
[۲۲] Magnetizations



شکل ۹.۱۱: عناصر پایه راویارت-توماس. **(الف)** هر یال دارای دو مثلث همسایه $\mathcal{T}^+$ و $\mathcal{T}^-$ است که در سمت چپ و راست لبه (جهت‌دار) قرار دارند. در $\mathcal{T}^+$ توابع شکل از راس $\mathbf{s}_\nu^+$ نشأت می‌گیرند که در مقابل لبه قرار دارد و به‌سمت لبه جریان می‌یابد. در $\mathcal{T}^-$ آنها در جهت مخالف جریان دارند. توابع برداری به‌گونه‌ای تعریف می‌شوند که جریان خروجی از مثلث $\mathcal{T}^+$ برابر جریان ورودی مثلث $\mathcal{T}^-$ باشد. **(ب)** شماتیک برای کاربرد قضیه دو بعدی گوس. A بازه‌ای است که لبه را با ارتفاع $h \to 0$ در بر می‌گیرد و $\boldsymbol{\eta}$ بردار عمود بر لبه است. برای جزئیات بیشتر به‌متن مراجعه کنید.

در دو طرف لبه‌ها را با $\mathcal{T}_\nu^\pm$ و راس‌هایی را که در مقابل لبه‌ها قرار گرفته‌اند، با $\mathbf{s}^\pm$، همانطور که به‌صورت شماتیک در شکل (۹.۱۱) نشان داده شده است، نشان می دهیم. با این کار می‌توانیم توابع شکل برداری زیر را تعریف کنیم:

توابع پایه رویکرد BEM (گالرکین)

$$\phi(\mathbf{s}) = \begin{cases} \mathbf{N}_{\nu+}^e(\mathbf{s}) = \frac{l_\nu}{2A_\nu^+}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_\nu^+) & \text{برای} \quad \mathbf{s} \in \mathcal{T}_\nu^+ \\ \mathbf{N}_{\nu-}^e(\mathbf{s}) = \frac{l_\nu}{2A_\nu^-}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_\nu^-) & \text{برای} \quad \mathbf{s} \in \mathcal{T}_\nu^- \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۳۶.۱۱}$$

درون‌یابی از لبه‌های ν شبکه به‌داخل مثلث $\mathcal{T}_\nu^\pm$ واقع در هر دو طرف لبه با استفاده از توابع شکل راویارت-توماس $\mathbf{N}_{\nu\pm}^e(\mathbf{s})$.

در اینجا l_ν طول یال و $A_\nu^\pm$ مناطق مثلث هستند. توجه داشته باشید که انتخاب اینکه کدام تابع شکل دارای علامت مثبت یا منفی است دلخواه است، تنها چیزی که اهمیت دارد این است که این دو تابع دارای علائم متفاوت هستند. پیش فاکتورهای توابع شکل به‌گونه ای انتخاب شده‌اند که شار از لبه واحد باشد، همانطور که در تمرین ۹.۱۱ با جزئیات بیشتر بحث شده است، که حفظ شار در لبه‌ها را تضمین می‌کند. اغلب به $\mathbf{N}_{\nu\pm}^e$ به‌عنوان عناصر پایه راویارت-توماس یا رائو-ویلتون-گلیسون اشاره می‌شود.

در ادامه توابع پایه راویارت-توماس را در یک مثلث $\mathcal{T}_i$ با $\mathbf{N}_{ia}^e$ نشان می‌دهیم، جایی که a سه یال مثلث را برچسب‌گذاری می‌کند. فرض می‌کنیم که این توابع دارای جهت شار مطابق

معادله (۳۶.۱۱) هستند. اکنون می‌توانیم میدان برداری را به‌شکل زیر بسط دهیم؛

$$\mathbf{u}^e(bfs) = \sum_{\nu}\sum_{ia}\mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s})\Big(T_{ia,\nu}\|u^e\|_\nu\Big)\ , \tag{۳۷.۱۱}$$

که در آن ضرایب $\|u^e\|_\nu$ جواب $\mathbf{u}^e(\mathbf{s})$ را مشخص می‌کند و $T_{ia,\nu}$ ماتریس انتقال تعریف شده قبلی از لبه‌های منحصر به‌فرد به‌لبه‌های عنصر محلی است. جمله داخل پرانتز که به‌صورت شفاهی بیان می‌شود، از لبه‌های سراسری به‌لبه‌های مثلث محلی انتقال داده می‌شود. توابع شکل $\mathbf{N}^e_{ia}$ سپس میدان‌های مماسی را از لبه‌ها به‌داخل مثلث درون‌یابی می‌کند. عناصر ماتریس و ناهمگنی معادله (۲۸.۱۱) برای هسته (کرنر) گسسته شده را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\|K\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia}\sum_{i'a'}T_{ia,\nu}T_{i'a',\nu'}\int_{\mathcal{T}_i}\int_{\mathcal{T}'_i}\mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s})\cdot K(\mathbf{s},\mathbf{s}')\mathbf{N}^e_{i'a'}(\mathbf{s}')dSdS' \\ \|b\|_\nu &= \sum_{ia}T_{ia,\nu}\int_{\mathcal{T}_i}\mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s})\cdot\mathbf{b}(\mathbf{s})dS\end{aligned} \tag{۳۸.۱۱}$$

توجه داشته باشید که در روح طرح گالرکین از همان توابع آزمایشی و بسط $\mathbf{N}^e_{ia}$ استفاده کرده‌ایم.

۲.۴.۱۱ طرح گالرکین برای معادلات ماکسول کامل

در بخش ۶.۹ یک روش روش انتگرال مرزی مبتنی بر میدان را برای حل معادلات کامل ماکسول استخراج کردیم. بیان اصلی معادله (۵۸.۹) بصورت زیر است؛

$$\hat{\mathbf{n}}\times\Big(\mathbb{D}_1[\mathbf{u}_E]+\mathbb{D}_2[\mathbf{u}_E]\Big)+\hat{\mathbf{n}}\times\Big(j\omega\mu_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_H]+j\omega\mu_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_H]\Big)=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^{inc}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\times\Big(\mathbb{D}_1[\mathbf{u}_H]+\mathbb{D}_2[\mathbf{u}_H]\Big)-\hat{\mathbf{n}}\times\Big(j\omega\epsilon_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_E]+j\omega\epsilon_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_E]\Big)=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}^{inc}$$

که در آن $\mathbf{u}_E=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}$ و $\mathbf{u}_H=\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H}$ میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی را نشان می‌دهد، و عملگرهای انتگرال تک لایه و دو لایه $\mathbb{S}_i$ و $\mathbb{D}_i$ از طریق رابطه زیر تعریف می شوند؛

$$\begin{aligned}\Big[\mathbb{S}_i\ \mathbf{u}\Big](\mathbf{s}) &= \oint_{\partial\Omega}\Big[G_i(\mathbf{s},\mathbf{s}')\mathbf{u}(\mathbf{s}')+\frac{1}{k_i^2}\nabla G_i(\mathbf{s},\mathbf{s}')\nabla'\cdot\mathbf{u}(\mathbf{s}')\Big]dS' \\ \Big[\mathbb{D}_i\ \mathbf{u}\Big](\mathbf{s}) &= \oint_{\partial\Omega}\Big[\nabla'\times G_i(\mathbf{s},\mathbf{s}')\Big]\mathbf{u}(\mathbf{s}')dS'\end{aligned} \tag{۳۹.۱۱}$$

بخش ۵.۵ را برای بدست آوردن این روابط ملاحظه کنید. برای به‌دست آوردن یک رابطه ضعیف در طرح گالرکین، معادلات انتگرال مرزی را با توابع آزمایشی $\mathcal{W}^e_{E,H}(\mathbf{s})$ ضرب و بر روی مرز انتگرال‌گیری می‌کنیم. علاوه بر این از رابطه زیر نیز استفاده می‌کنیم؛

$$\oint_{\partial\Omega}\mathcal{W}^e_{E,H}(\mathbf{s})\cdot\hat{\mathbf{n}}\times\Big[\cdots\Big]dS=-\oint_{\partial\Omega}\hat{\mathbf{n}}\times\mathcal{W}^e_{E,H}(\mathbf{s})\cdot\Big[\cdots\Big]dS$$

که برای مخلوط کردن حاصل ضرب خارجی با سطح بیرونی نرمال به‌تابع آزمایشی است. در مرحله بعد، هم میدان های الکترومغناطیسی مماسی $\mathbf{u}_{E,H}$ و هم توابع آزمایشی $\hat{\mathbf{n}} \times \mathcal{W}^e_{E,H}$ را بر اساس عناصر توماس-راویارت بسط می‌دهیم. این می‌دهد:

$$\mathbf{u}^e_{E,H}(\mathbf{s}) = \sum_{\nu} \sum_{ia} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s}) \Big(T_{ia,\nu} \| u^e_{E,H} \|_{\nu} \Big) \ ,$$

و یک عبارت مربوط به $\mathcal{W}^e_{E,H}$ است. پس از گسسته‌سازی در طرح گالرکین، ماتریس‌های تک لایه و دو لایه را خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{S}_j\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia} \sum_{i'a'} T_{ia,\nu} T_{i'a',\nu'} \oint_{\mathcal{T}_i} \oint_{\mathcal{T}_{i'}} \\
&\times \left\{ \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{N}^e_{i'a'}(\mathbf{s}') - \frac{\Big[\nabla \cdot \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s})\Big] \Big[\nabla' \cdot \mathbf{N}^e_{i'a'}(\mathbf{s}')\Big]}{k_j^2} \right\} G_j(\mathbf{s},\mathbf{s}') dS dS' \\
\|\mathbb{D}_j\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia} \sum_{i'a'} T_{ia,\nu} T_{i'a',\nu'} \oint_{\mathcal{T}_i} \oint_{\mathcal{T}_{i'}} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s}) \cdot \Big[\nabla' G_j(\mathbf{s},\mathbf{s}')\Big] \times \mathbf{N}^e_{i'a'}(\mathbf{s}') dS dS'
\end{aligned} \tag{۴۰.۱۱}$$

که در آن برای $\mathbb{S}_j$ یک انتگرال‌گیری جزء به‌جزء انجام داده‌ایم تا مشتق از تابع گرین را به‌عنصر پایه راویارت-توماس، با ناهمگونی‌های زیر بیاوریم.

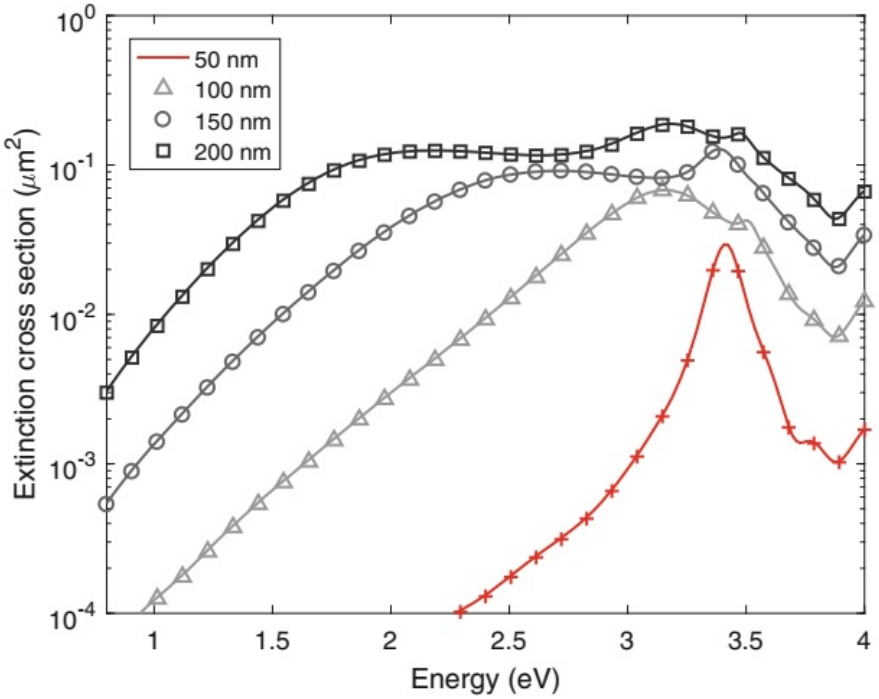
$$\|q^{inc}_{E,H}\|_{\nu} = \sum_{ia} T_{ia,\nu} \oint_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{s}) \end{array} \right\} dS$$

سپس به‌معادلات کاری برای رویکرد BEM مبتنی بر میدان می‌رسیم[۱۱۱].

معادله کار برای میدان پایه BEM (گالرکین)

$$\begin{pmatrix} \|\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2\| & j\omega \|\mu_1 \mathbb{S}_1 + \mu_2 \mathbb{S}_2\| \\ -j\omega \|\epsilon_1 \mathbb{S}_1 + \epsilon_2 \mathbb{S}_2\| & \|\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2\| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|u^e_E\| \\ \|u^e_H\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|q^{inc}_E\| \\ \|q^{inc}_H\| \end{pmatrix} \tag{۴۱.۱۱}$$

پس از عکس کردن معادله ماتریس، بردارهای $\|u^e_{E,H}\|$ را به‌دست می‌آوریم که جواب را مشخص می‌کنند. در ارزیابی انتگرال‌ها باید مراقب رفتار واگرائی تابع گرین و مشتق سطحی آن برای $\mathbf{s} \to \mathbf{s}'$ باشیم. اگرچه همه انتگرال‌ها به‌خوبی رفتار می‌کنند، اما باید برای انتگرال‌گیری‌های روی یک مثلث واحد، و همچنین برای انتگرال‌گیری‌های روی مثلث‌هایی که یک یال یا راس مشترک دارند، با دقت پیش رفت. این انتگرال‌ها به‌راحتی با انتگرال‌گیری تحلیلی [۱۱۲] یا با استفاده از یک ربع عددی کامل، جایی که تبدیل مختصات مناسب اجازه می‌دهد تا مشارکت‌های منفرد را برای انتگرال‌گیری عددی امکان پذیر کند، حل شوند[۱۱۳، ۱۱۴]. برای جزئیات بیشتر خواننده علاقه‌مند به‌ادبیات مربوطه مراجعه کنند. نمادهای شکل (۱۰.۱۱) نتایج شبیه سازی سطح مقطع انقراضی را برای نانوکره‌های نقره با اندازه‌های مختلف نشان می‌دهند. میدان‌های



شکل ۱۰.۱۱: شبیه سازیBEM گالرکین برای نانوکره‌های نقره با اندازه‌های مختلف. نتایج عددی (نمادها) را با نتایج تحلیلی نظری می (خطوط جامد) مقایسه، (شکل ۱۰.۱۱)، و تطابق کامل را در سراسر آن پیدا می‌کنیم. گسسته‌سازی مرزی کره مورد استفاده در شبیه‌سازی در شکل (۶.۱۱) نشان داده شده است.

مماسی بر اساس معادله (۴۱.۱۱) محاسبه می‌شوند. برای سطح مقطع انقراضی بردار پواین‌تینگ را مستقیماً در مرز ذره محاسبه می‌کنیم. همچنین با نتایج تحلیلی تئوری می (خطوط جامد) مقایسه و تطابق کامل را در سرتاسر منحنی‌ها پیدا می‌کنیم.

۵.۱۱ روش اجزای محدود

روش اجزای محدود (FEM) یک طرح حل کلی برای معادلات ماکسول است و می‌تواند با منابع دلخواه و محیط‌های دی‌الکتریک و مغناطیسی ناهمگن را شامل شود. مشابه روش FDTD، با معادلات کرل شروع می شود، معادله(۱.۱۱)، و آنها را در حوزه زمان یا فرکانس حل می‌کند. بسیاری از ویژگی‌های رویکرد FEM در امتداد خطوط مشابه برای FDTD هستند، به‌عنوان مثال شرایط مرزی لایه‌های تطبیق کامل است. با این حال، طرح FEM از ابتدا با یک شبکه بدون ساختار شروع می‌شود که معمولاً از گسسته‌سازی حوزه محاسباتی سه بعدی $\Omega = \bigcup_i \mathcal{T}_i$ به‌چهار وجهی $\mathcal{T}_i$، و بنابراین اجازه می‌دهد تا از خطاهای تقریب پلکانی ذاتی FDTD اجتناب شود. علاوه بر این، در FEM می‌توان از توابع پایه با درجه چند جمله‌ای دلخواه استفاده کرد که امکان شبیه‌سازی بسیار دقیق را فراهم می‌کند. ممکن است استدلال شود که FEM همه کاره‌ترین و

دقیق‌ترین رویکرد شبیه‌سازی است که در اینجا در نظر گرفته شده است، اگرچه اجرای آن تا حدودی خواستاری است و نکات فنی زیادی وجود دارد که در بحث مختصر ما به‌آنها پرداخته نخواهد شد.

در ادامه با بحث FEM در حوزه فرکانس شروع می‌کنیم و سپس در مورد انتخاب مناسب عناصر پایه، به‌نام عناصر ندلکNedelec[۲۳] ، فکر می‌کنیم. در نهایت به‌حل معادلات ماکسول در حوزه زمان در طرح گالرکَینَ ناپیوسته می‌پردازیم.

۱.۵.۱۱ روش اجزای محدود در حوزه فرکانس

به‌طور خلاصه، رویکرد FEM اجرای مستقیم طرح گالرکین برای معادلات کامل ماکسول است. با معادلات کرل شروع می‌کنیم و پارامترهای ناهمسانگرد ماده $\bar{\bar{\epsilon}}, \bar{\bar{\mu}}$ را برای حالت کلی در نظر می‌گیریم. برای ارسال این معادلات به‌طرح گالرکین، باید عناصر پایه را مشخص کنیم. ساده لوحانه، می‌توانستیم میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به‌رئوس چهار وجهی‌ها اختصاص دهیم و درون‌یابی خطی را درون عناصر انجام دهیم. متأسفانه معلوم می‌شود که این پیاده‌سازی گاهی منجر به‌همگرایی به‌جواب‌های اشتباه یا مودهای جعلی[۲۴] می‌شود [۱۱۵، ۱۱۶]. این شکست به‌عدم اعمال محدودیت میدان‌های بدون واگرایی نسبت داده می‌شود. در مقاله مروری جامع هستیون[۲۵] بحث شده است که استفاده از توابع پایه برداری به‌جای آن سودمند است [۱۱۶].

> انگیزه اصلی برای جستجوی توابع پایه برداری، مشاهده این است که شرایط مرزی معادلات ماکسول بردار هستند، یعنی باید به‌دنبال شکل پذیری و مطابقت گسسته‌سازی استفاده از توابع پایه برداری طبیعی باشیم. چنین توابع پایه، که اغلب به‌عنوان عناصر نگاشت با کرل شناخته می‌شوند، باید ویژگی‌های اساسی جواب‌های معادلات ماکسول را برآورده کنند، به‌عنوان مثال، پیوستگی مماسی جواب را پشتیبانی کند. این امکان تحمیل پیوستگی مماسی بین عناصر با مواد مختلف و همچنین تحمیل شرایط مرزی به‌روش طبیعی را فراهم می‌کند. علاوه بر این، استفاده از چنین عناصری عدم وجود مودهای جعلی را در طرح‌های اجزای محدود حوزه فرکانس تضمین می‌کند.

یک انتخاب معمول برای توابع پایه برداری، عناصر ندلک $\mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r})$ هستند که در زیر با جزئیات بیشتر مورد بحث قرار خواهند گرفت. برای بحثِ بَعدی، دانستن ویژگی‌های زیر که برای ساده‌ترین نوع عناصر نِدلِک اعمال می‌شود، کافی است (عناصر لیه خطی):

- راه حل تقریبی با اتصال مقادیر میدان به‌لبه‌های چهار وجهی که شبکه بدون ساختار را تشکیل می‌دهند به‌دست می‌آید.
- عناصر شکل نِدلِک $\mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r})$ جواب را از لبه‌ها به‌داخل چهار وجهی درون‌یابی می‌کنند.
- هنگامی که دو چهار وجهی یک وجه مشترک دارند و مقادیر میدان یکسانی به‌لبه‌های مشترک دو چهار وجهی متصل می‌شوند، تضمین می‌شود که اجزای میدان مماسی در وجه مشترک پیوسته هستند.

[۲۳] Florent Nédélec
[۲۴] Spurious Modes
[۲۵] Hesthaven

از طریق آخرین ویژگی، شرایط مرزی میدان‌های مماسی پیوسته در سطح مشترک بین دو منطقه به‌طور خودکار برآورده می‌شود. در رویکرد FEM درجه‌های آزادی جهانی با ضرایب میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته به‌زمان $u^e_{E,H}(t)$ در لبه‌های چهار وجهی وابسته است. اکنون توابع پایه را معرفی می‌کنیم؛

معادله پایه برای رویگرد FEM (گالرکین)

$$\phi_\nu(\mathbf{r}) = \sum_{ia} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) T_{ia,\nu} \ , \tag{۴۲.۱۱}$$

از لبه‌های منحصر به‌فرد ν شبکه به‌لبه‌های محلی یک چهار وجهی $\mathcal{T}_i$ که حاوی لبه ν هستند، انتقال دهید و با استفاده از توابع شکل $\mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r})$ *Nedelec* درون‌یابی را انجام دهید.

جواب تقریبی $\mathbf{E}^e$ بقرار زیر است؛

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r},t) = \sum_{ia}\sum_{\nu} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \Big(T_{ia} \| u^e_E(t) \| \Big) \ , \tag{۴۳.۱۱}$$

با یک عبارت مربوط به‌میدان مغناطیسی. در اینجا $\mathbf{N}^e_{ia}$ عناصر ندلک هستند که فرض می‌شود دارای پشتیبانی محلی هستند، به‌این معنی که آنها در خارج از چهار وجهی $\mathcal{T}_i$ قرار دارند. با توضیح شفاهی، جمله داخل پرانتز درجه‌های آزادی جهانی $\|u^e_{E,H}(t)\|$ (تعریف شده در لبه‌های منحصربه‌فرد شبکه) را به‌لبه‌های عنصر محلی $\mathcal{T}_i$ می‌آورد، جایی که $T_{ia,\nu}$ ماتریس انتقال است. عناصر پایه $\mathbf{N}^e_{ia}$ درون هر چهار وجهی درون‌یابی انجام می‌دهند. قرار دادن این در قانون فارادی سپس می‌دهد؛

$$\bar{\bar{\mu}} \cdot \sum_{a'\nu} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \Big(T_{ia',\nu} \| \partial_t u^e_H(t) \|_\nu \Big) = - \sum_{a'\nu} \nabla \times \mathbf{N}^e_{ia'}(\mathbf{r}) \Big(T_{ia',\nu} \| u^e_E(t) \|_\nu \Big) \ ,$$

که در آن فرض می‌کنیم که $\mathbf{r}$ در داخل $\mathcal{T}_i$ قرار دارد. عبارتی مشابه را می‌توان برای قانون آمپر به‌دست آورد. این عبارات را با توابع آزمایش ضرب کرده

$$\boldsymbol{W}^e_{E,H}(\mathbf{r},t) = \sum_{ia}\sum_{\nu} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \Big(T_{ia,\nu} \| \mathcal{W}^e_{E,H}(t) \|_\nu \Big) \ ,$$

و سپس بر روی حجم چهار وجهی‌ها انتگرال‌گیری می‌کنیم. به‌دلیل پشتیبانی محلی از توابع پایه، فقط باید انتگرال‌هایی را در نظر بگیریم که هر دو تابع شکل در داخل یک چهار وجهی قرار دارند. برای ساده کردن بیان نهایی، ماتریس‌های جرمی[۲۶] را معرفی کرده

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M}^\epsilon_{ia,i'a'} \\ \mathbf{M}^\mu_{ia,i'a'} \end{array} \right\} = \int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \bar{\bar{\epsilon}} \\ \bar{\bar{\mu}} \end{array} \right\} \cdot \mathbf{N}^e_{ia'}(\mathbf{r}) \ d^3r \tag{۴۴.۱۱}$$

[۲۶] Mass Matrices

و همراه با ماتریس سختی S و ناهمگنی J، از طریق رابطه زیر تعریف می‌کنیم ؛

$$\begin{aligned} S_{ia,i'a'} &= \int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{N}^e_{ia'}(\mathbf{r})\ d^3r \\ J_{ia}(t) &= \int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r},t)\ d^3r\ . \end{aligned} \tag{۴۵.۱۱}$$

با این، معادلات کرل ماکسول خواهد شد؛

$$\sum_{i,aa'} \sum_{\nu'} T_{ia,\nu} T_{ia',\nu'} \left(\mathbf{M}^{\mu}_{ia,ia'} \|\partial_t u^e_H(t)\|_{\nu'} + \mathbf{S}_{ia,ia'} \|u^e_E(t)\|_{\nu'} \right) = 0$$

$$\sum_{i,aa'} \sum_{\nu'} T_{ia,\nu} T_{ia',\nu'} \left(\mathbf{M}^{\epsilon}_{ia,ia'} \|\partial_t u^e_E(t)\|_{\nu'} - \mathbf{S}_{ia,ia'} \|u^e_H(t)\|_{\nu'} \right) = -\sum_{ia} T_{ia,\nu} J_{ia}(t)$$

توابع کار رویکر FEM بطور مستقیم از رابطه زیر بدست می‌آید؛

معادله کار رویکرد FEM

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}^{\mu}\| \cdot \|\partial_t u^e_H(t)\| + \|\mathbf{S}\| \cdot \|u^e_E(t)\| &= 0 \\ \|\mathbf{M}^{\epsilon}\| \cdot \|\partial_t u^e_E(t)\| - \|\mathbf{S}\| \cdot \|u^e_H(t)\| &= -\|\mathbf{J}(t)\|\ , \end{aligned} \tag{۴۶.۱۱}$$

که در آن رابطه زیر را

$$\|A\|_{\nu\nu'} = \sum_{i,aa'} T_{ia,\nu} T_{ia',\nu'} A_{ia,ia'}$$

برای ماتریس‌های جرم و سختی، همراه با $\|J\|_{\nu} = \sum_{ia} T_{ia,\nu} J_{ia}$ معرفی می‌کنیم. در حوزه فرکانس عملگر مشتق زمانی باید با $j\omega$ جایگزین شود و ضرایب میدان الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان از طریق عکس ماتریس به‌دست آورد. به‌دلیل پشتیبانی محلی از توابع پایه، ماتریس‌های درون رویکرد FEM تُنک[۲۷] هستند، که می‌توانند برای حل سریع و کارآمد معادلات کاری مورد استفاده قرار گیرند.

۲.۵.۱۱ عناصر نِدلِک *Nedelec*

عناصر پایه طرح FEM معمولاً به‌عنوان عناصر لبه، عناصرندلک، شکل‌های ویتنی[۲۸] یا عناصر بردار نگاشت با کرل شناخته می‌شوند [۱۱۵]-[۱۱۸]]. در ادامه به‌طور خلاصه ساده‌ترین شکل آن را مورد بحث قرار می‌دهیم، که اجازه می‌دهد یک میدان برداری $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$ را در یک

[۲۷] Sparse
[۲۸] Whitney

چهار وجهی معین نشان دهیم، و برای یک بحث کامل و همچنین برای استخراج عناصر پایه با مراتب بالاتر چند جمله‌ای به‌ادبیات تخصصی مراجعه شود. در یک چهار وجهی $\mathcal{T}$ مفروض، تابع برداری بصورت زیر داده می‌شود ؛

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{6} \mathbf{N}_a^e(\mathbf{r}) u_a^e \ ,$$

که در آن $\mathbf{N}_a^e$ عناصر نِدلِک و u_a^e ضرایب میدان برداری تقریبی داده شده در شش یال a چهار وجهی هستند. دستور تَهیه عناصر شکل به‌صورت زیر اقدام خواهد شد:

- فرض کنید $\mathbf{r}_k$ بیانگر چهار راس چهار وجهی باشد.
- ما چهار تابع پایه خطی $\lambda_k(\mathbf{r}) = a_k + b_k x + c_k y + d_k z$ را معرفی می‌کنیم، که در آن ضرایب به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در یک راس معین یک و در غیر این صورت صفر، مربوط به $\lambda_k(\mathbf{r}_{k'}) = \delta_{kk'}$ هستند.
- هر یال $\mathcal{E}_a$ از راس $\mathbf{r}_{a1}$ به‌راس $\mathbf{r}_{a2}$ در جهتی هدایت می‌شود که باید یک بار در ابتدا مشخص شود.

با این کار، عناصر نِدلِک با کمترین مرتبه تعریف می‌شوند؛

نگاشت کرل عناصر نِدلِک

$$\mathbf{N}_a^e(\mathbf{r}) = \Big[\nabla\lambda_{a1}(\mathbf{r})\Big]\lambda_{a2}(\mathbf{r}) - \lambda_{a1}(\mathbf{r})\Big[\nabla\lambda_{a2}(\mathbf{r})\Big] \qquad (۴۷.۱۱)$$

برای یک میدان برداری معین $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ضرایب میدان u_a^e در لبه‌ها را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد؛

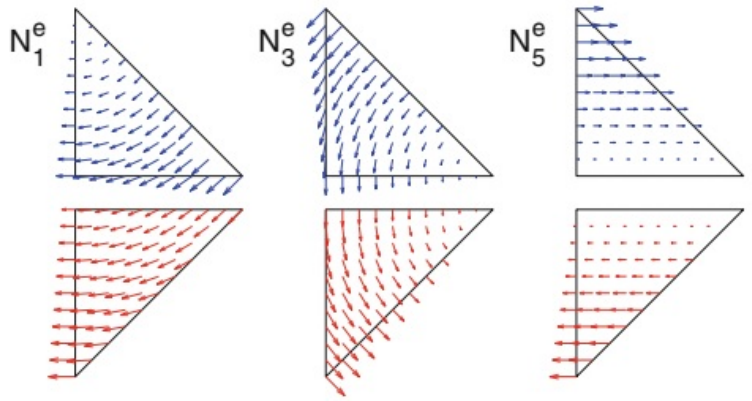
$$u_a^e = \int_{\mathcal{E}_a} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_a ds \ ,$$

که در آن τ_a بردار واحد لبه $\mathcal{E}_a$ و ds انتگرال را در امتداد لبه می‌گیرد.

واحد چهاروجهی به‌عنوان نمونه نمایشی، چهار وجهی واحد را با رئوس= $\mathbf{r}_1 = (0,0,0), \mathbf{r}_2 = (1,0,0), \mathbf{r}_3 = (0,1,0)$ و $\mathbf{r}_4 = (0,0,\pm 1)$ در نظر می‌گیریم. ضرایب توابع پایه خطی را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد؛

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

این ما را به‌توابع پایه خطی هدایت می‌کند



شکل ۱۱.۱۱: عناصر پایه نِدلِک در صفحه xz برای چهار وجهی واحد که در متن مورد بحث قرار گرفت. عناصر پایه پیوستگی مماسیِ میدان‌های برداری را تضمین می‌کنند. فقط عناصری را نشان می‌دهیم که در صفحه داده شده صفر نیستند.

$$\lambda_1(\mathbf{r}) = 1 - x - y - z, \quad \lambda_2(\mathbf{r}) = x, \quad \lambda_3(\mathbf{r}) = y, \quad \lambda_4(\mathbf{r}) = \pm z$$

و مشتق آنها خواهد شد؛

$$\nabla\lambda_1(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}, \quad \nabla\lambda_2(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}}, \quad \nabla\lambda_3(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}}, \quad \nabla\lambda_4(\mathbf{r}) = \pm\hat{\mathbf{z}},$$

بنابراین، توابع شکل نِدلِک خواهد شد؛

$$\mathbf{N}_1^e(\mathbf{r}) = -(1-y-z)\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{z}}, \qquad \cdots \qquad \text{یال } \mathcal{E}_1 \text{ از } \mathbf{r}_1 \text{ تا } \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{N}_2^e(\mathbf{r}) = -y\hat{\mathbf{x}} - (1-x-z)\hat{\mathbf{y}} - y\hat{\mathbf{z}}, \qquad \cdots \qquad \text{یال } \mathcal{E}_2 \text{ از } \mathbf{r}_1 \text{ تا } \mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{N}_3^e(\mathbf{r}) = \mp z\hat{\mathbf{x}} \mp z\hat{\mathbf{y}} \mp (1-x-y)\hat{\mathbf{z}}, \qquad \cdots \qquad \text{یال } \mathcal{E}_3 \text{ از } \mathbf{r}_1 \text{ تا } \mathbf{r}_4$$

$$\mathbf{N}_4^e(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}} \qquad \cdots \qquad \text{یال } \mathcal{E}_4 \text{ از } \mathbf{r}_2 \text{ تا } \mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{N}_5^e(\mathbf{r}) = \pm z\hat{\mathbf{x}} \mp x\hat{\mathbf{z}} \qquad \cdots \qquad \text{یال } \mathcal{E}_5 \text{ از } \mathbf{r}_2 \text{ تا } \mathbf{r}_4$$

$$\mathbf{N}_6^e(\mathbf{r}) = \pm z\hat{\mathbf{y}} \mp y\hat{\mathbf{z}} \qquad \cdots \qquad \text{یال } \mathcal{E}_6 \text{ از } \mathbf{r}_3 \text{ تا } \mathbf{r}_4$$

(۴۸.۱۱)

برای نمایش گرافیکی به‌شکل (۱۱.۱۱) مراجعه کنید. در ادامه دو چهار وجهی را در نظر می‌گیریم که $\mathbf{r}_4$ در بالا یا پایین صفحه xy قرار دارد. آنها یک وجه مشترک دارند که توسط رئوس $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}$ تشکیل شده است. همانطور که می‌توان به‌راحتی از عناصر ندلِک ارائه شده در معادله (۴۸.۱۱) استنباط کرد، مولفه‌های بردار مماسی $\mathbf{N}_a^e$ در صفحه $z = 0$ برای دو چهار وجهی یکسان هستند، و با فرض در مورد این عناصر پایه نگاشت با کرل موافقت دارد. در اینجا این اثبات را که این برای چهار

وجهی‌های دلخواه نیز صادق است را حذف می‌کنیم

محاسبه $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_a^e$ برای چهار وجهی زیر صفحه xy و برای وجهی که در صفحه xy قرار دارد ،را ادامه می‌دهیم. بدیهی است که بردار وجه عمودی که به‌سمت بیرون چهار وجهی قرار دارد $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ است. ، و از عملیات جبری ساده حاصل می‌شود؛

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N}_1^e = x\hat{\mathbf{x}} - (1-y)\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N}_2^e = (1-x)\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N}_4^e = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} \ ,$$

که در آن همه ترکیب‌های دیگر در$z = 0$ صفر می‌دهند.

جالب است که این نتیجه را با عناصر پایه راویارت-توماس از معادله (۳۶.۱۱) مقایسه کنیم. برای رویکرد BEM با استفاده از مثلث واحد در صفحه xy. جدا از برخی از ثابت‌های نرمالیزه که در اینجا به‌آنها علاقه‌ای نخواهیم داشت، معلوم می‌شود که $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_a^e$ دقیقا منطبق بر عناصر راویارت-توماس است که روی صورت با سطح بیرونی نرمال $\hat{\mathbf{n}}$ داده شده است.

این فقط یک تصادف خوش شانس نیست، و در واقع می‌توان یک قانون ساخت برای عناصر راویارت-توماس ابداع کرد که شباهت زیادی به‌عناصر نِدلِک دارد. در نتیجه این رابطه نزدیک بین عناصر پایه نِدلِک و راویارت-توماس، تزویج موثر شَبیه‌سازی‌های BEM و FEM امکان‌پذیر می‌شود. این را می‌توان به‌آسانی در رابطه‌بندی متغیر رویکرد گالرکین انجام داد، که امکان تعامل هر دو رویکرد را در یک سطح فراهم می‌کند. در اینجا بیشتر در مورد این موضوع تحقیق نمی‌کنیم.

۳.۵.۱۱ ناپیوستگی طرح گالرکین

در اصل، معادلات کاری(۴۶.۱۱) رویکرد FEM را می‌توان در حوزه زمان نیز حل کرد. برخلاف رویکرد FDTD، به‌تفاضل‌های محدود برای گام‌های زمانی ملزم نیستیم، اما می‌توانیم به‌طرح‌های اصلاح‌شده‌تری مانند رانگ-کوتا[۲۹] متوسل شویم. با این حال، هنگام حل معادلات (۴۶.۱۱) در حوزه زمان، از ماتریس‌های جرمی بزرگ، هرچند تُنک $\|M\|$ رنج می‌بریم که باید در هر مرحله زمانی معکوس شوند. این می‌تواند شبیه‌سازی را بسیار کند کند.

طرح گالرکین ناپیوسته رویکردی است که از عکس چنین ماتریس‌های جرمی جلوگیری می‌کند و امکان شبیه‌سازی FEM در حوزه زمان را سریع و امکان پذیر می‌کند. به‌عنوان اولین قدم، تعداد درجه‌های آزادی جهانی را بزرگ می‌کنیم و توابع پایه جداگانه $\phi_{ia}(\mathbf{r})$ را برای هر چهار وجهی $\mathcal{T}_i$ معرفی می‌کنیم.

توابع پایه رویکر FEM (ناپیوستگی گالرکین)

$$\phi_{ia}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \mathcal{T}_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۴۹.۱۱}$$

توابع شکل نِدلِک $\mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r})$ برای یال‌های چهار وجهی $\mathcal{T}_i$.

[۲۹] Runge–Kutta

سپس جواب تقریبی $\mathbf{E}^e$ خواهد بود؛

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r},t) = \sum_{ia} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \| u^e_E(t) \|_{ia} \ , \tag{۵۰.۱۱}$$

که با یک عبارت مربوط به‌میدان مغناطیسی است. در نگاه اول این ایده خیلی خوبی به‌نظر نمی‌رسد. اولاً، فضای درجه‌های آزادی جهانی را به‌میزان قابل توجهی افزایش داده‌ایم. ثانیاً، توابع پایه فقط به‌صورت محلی تعریف می‌شوند و توابع در عناصر همسایه به‌طور کلی با یکدیگر ارتباط برقرار نمی‌کنند. بنابراین، دیگر تضمین نمی‌شود که میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی در هنگام عبور از یک چهار وجهی به‌چهار وجهی همسایه پیوسته باشند. این ناپیوستگی احتمالی نام این رویکرد را به‌نام طرح گالرکین ناپیوسته داده است. با این حال، با کمی کار اضافی می‌توانیم دوباره پیوستگی را اعمال کنیم. برای نشان دادن این موضوع، معادله (۵۰.۱۱) را وارد قانون فارادی کرده، با توابع آزمایشی $\mathcal{W}^e_{E,H}$ ضرب و سپس روی حجم $\mathcal{T}_i$ انتگرال‌گیری می‌کنیم تا در نهایت به‌رابطه زیر آن میرسیم؛

$$\int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \cdot \sum_{a'} \left[\bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{N}^e_{ia'}(\mathbf{r}) \| \partial_t u^e_H(t) \|_{ia'} + \nabla \times \mathbf{N}^e_{ia'}(\mathbf{r}) \| \partial_t u^e_E(t) \|_{ia'} \right] d^3r = 0$$

این عبارت شبیه معادلات کاری رویکرد FEM، معادله (۴۶.۱۱) است. بدیهی است که دومین عبارت در براکت‌ها، عبارت کرل است که از طریق مشتق‌های فضایی به‌عناصر همسایه تزویج می‌شود. در طرح FEM شرح داده شده در بخش ۱.۵.۱۱ این تزویج و پیوستگی میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی حاصل از آن (که از معادلات ماکسول به‌دست می‌آید) را از طریق توابع پایه معادله (۴۲.۱۱) که در چنین پیوستگی از ابتدا ساخته‌ایم، محاسبه کردیم. برای توابع پایه محلی معادله (۴۹.۱۱) ما باید متفاوت پیش برویم. ابتدا انتگرال‌گیری را با قسمت‌هایی از عبارت دوم در پرانتز انجام می‌دهیم،

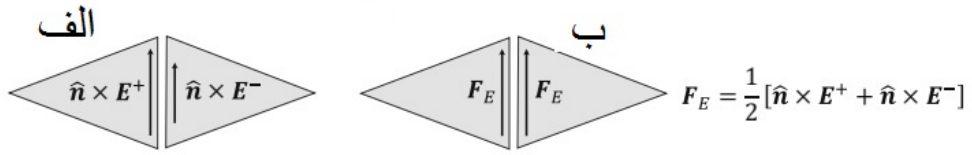
$$\int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia} \cdot \nabla \times \mathbf{N}^e_{ia'} d^3r = \oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia} \times \mathbf{N}^e_{ia'} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{\mathcal{T}_i} \nabla \times \mathbf{N}^e_{ia} \cdot \mathbf{N}^e_{ia'} d^3r \ .$$

در اینجا ما عبارت را با $\nabla \cdot \mathbf{N}^e_{ia} \times \mathbf{N}^e_{ia'}$ با استفاده از قضیه گوس به‌یک انتگرال مرزی تبدیل کرده‌ایم که $\hat{\mathbf{n}}$ نرمال بر سطح بیرونی چهار وجهی $\mathcal{T}_i$ است. با انجام جایگشت دوری[۳۰] در حاصلضرب سه‌گانه، برای جمله مرزی بدست می‌آوریم ؛

$$-\oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s}) \cdot \sum_{a'} \left(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}^e_{ia'}(\mathbf{s}) \| u^e_E(t) \|_{ia'} \right) dS \ , \tag{۵۱.۱۱}$$

که در آن برای وضوح دوباره ضرایب میدان $\| u^e_E(t) \|$ را معرفی کرده و بر روی a' جمع کرده ایم. بنابراین اصطلاح داخل پرانتز را می‌توان به‌صورت $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e(\mathbf{s},t)$ تفسیر کرد. در اینجا ترفند جادویی طرح گالرکین ناپیوسته می‌آید: به‌دلیل پیوستگی مماسی میدان های الکترومغناطیسی، می‌توانیم سهم میدان مماسی عناصر همسایه را در اصطلاح مرزی با هم ترکیب، در نتیجه این عناصر را تزویج کرده و پیوستگی مولفه‌های میدان مماسی، شکل (۱۲.۱۱)، را مجدداً اعمال کنیم .

[۳۰] Cyclic Permutation



شکل ۱۲.۱۱: شماتیک‌های طرح گالرکین ناپیوسته. **(الف)** ما با درجه‌های آزادی محلی که برای هر عنصر حجمی به‌طور جداگانه تعریف شده است شروع می‌کنیم. به‌همین دلیل، شار مماسی در فصل مشترک بین عناصر همسایه می‌تواند ناپیوسته باشد. **(ب)** برای اطمینان از پیوستگی مماسی، شارهای محلی را با استفاده از طرح‌های شار مرکزی یا خلاف جهت مخلوط می‌کنیم، در نتیجه عناصر را در ماتریس سختی $\|S\|$ تزویج کرده اما بلوک ماتریس‌های جرمی $\|M^\epsilon\|, \|M^\mu\|$ (که باید قطری شوند) را ترک می‌کنیم.

اجازه دهید برای لحظه‌ای این سؤال را به‌تعویق بیندازیم که چگونه عبارت تزویجی را واقعاً انتخاب و برای عبارت داخل پرانتز معادله (۵۱.۱۱) یک جمله شار $\mathbf{F}(\mathbf{s},t)$ که فقط به‌مولفه میدان مماسی بستگی دارد، معرفی کنیم. برای حل دقیق این عبارت باید با شار عنصر همسایه برابر باشد، بنابراین درجه‌هائی از آزادی در انتخاب آن وجود دارد. سپس برای قانون فارادی خواهیم داشت؛

$$\int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{r}) \cdot \Big[\partial_t \mathbf{H}^e(\mathbf{r},t) + \nabla \times \mathbf{E}^e(\mathbf{r},t)\Big] d^3r = \oint_{\partial\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{F}_E(\mathbf{s},t) dS \ .$$

در قیاس با طرح گالرکین که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، ماتریس‌های جرم و سختی معادله‌ها (۴۴.۱۱) و (۴۵.۱۱) را معرفی کرده و برای معادلات کرل بدست می‌آوریم؛

$$\sum_{a'} \Big(M^\mu_{ia,ia'} \|\partial_t u^e_H(t)\|_{ia'} + S_{ia,ia'} \|\partial_t u^e_E(t)\|_{ia'} \Big) = \oint_{\partial\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia} \cdot \mathbf{F}_E dS$$

$$\sum_{a'} \Big(M^\epsilon_{ia,ia'} \|\partial_t u^e_E(t)\|_{ia'} - S_{ia,ia'} \|\partial_t u^e_H(t)\|_{ia'} \Big) = \oint_{\partial\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia} \cdot \mathbf{F}_H dS - \mathbf{J}_{ia}(t) \ .$$

جمله‌های شار الکتریکی و مغناطیسی در سمت راست معادلات را می‌توان بر اساس همان مبنایی که برای میدان‌های الکترومغناطیسی استفاده می‌شود، بسط داد. این می‌دهد؛

$$\oint_{\partial\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia} \cdot \mathbf{F}_{E,H} dS = \oint_{\partial\mathcal{T}_i} \mathbf{N}^e_{ia} \cdot \sum_{a'} \mathbf{N}^e_{ia} \|F^e_{E,H}\|_{ia'} dS = \sum_{a'} \mathcal{F}_{ia,ia'} \|F^e_{E,H}\|_{ia'}$$

که در آن $\mathcal{F}$ یک نماد مختصر برای انتگرال مرزی بر روی توابع پایه ندلک است. در ادامه از $\|A\|_{ia,ia'} = A_{ia,ia'}$ برای ماتریس‌های طرح گالرکین ناپیوسته استفاده می‌کنیم. سپس معادلات کاری برای رویکرد FEM وابسته به‌زمان خواهد بود؛

معادله کار رویکرد FEM (ناپیوستگی گالرکین)

$$\|M^{\mu}\| \cdot \|\partial_t u_H^e(t)\| + \|S\| \cdot \|u_E^e(t)\| = \|\mathcal{F}\| \cdot \|F_E^e(t)\|$$
$$\|M^{\epsilon}\| \cdot \|\partial_t u_E^e(t)\| - \|S\| \cdot \|u_H^e(t)\| = \|\mathcal{F}\| \cdot \|F_H^e(t)\| - \|J(t)\| \tag{۵۲.۱۱}$$

هنوز نیاز داریم که ماتریس‌های جرمی را معکوس کنیم، که با این حال، اکنون به‌شکل توده قطری[۳۱] هستند و به‌ماتریس‌های فرعی به‌ترتیب تعداد عناصر پایه ندلک در هر چهار وجهی تقسیم می‌شوند. قطری کردن این زیر ماتریس‌ها سریع است و دیگَر یک گلوگاه بزرگ برای حل معادلات FEM وابسته به‌زمان ایجاد نمی‌کند.

در نهایت به‌طور خلاصه در مورد انتخاب مناسب جمله‌های شار $\mathbf{F}_{E,H}$ توضیح می‌دهیم. فرض کنید $\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-$ میدان‌های الکترومغناطیسی در چهار وجهی $\mathcal{T}_i$ و $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$ میدان‌های عناصر همسایه را نشان می‌دهد. سپس در رویکرد شار متمرکز تنظیم کردیم ؛

$$\mathbf{F}_E(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}} \times \Big[\mathbf{E}^+(\mathbf{s}) + \mathbf{E}^-(\mathbf{s})\Big], \quad \mathbf{F}_H(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}} \times \Big[\mathbf{H}^+(\mathbf{s}) + \mathbf{H}^-(\mathbf{s})\Big]$$

گزینه‌های دیگری مانند طرح موافق جهت شار وجود دارد که برای آن خوانندگان علاقه‌مند را به‌ادبیات تخصصی‌تر ارجاع می‌دهیم [۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۸]. به‌طور کلی، پایداری و همگرایی رویکرد به‌طور قابل توجهی به‌طرح شار انتخاب شده بستگی دارد.

۴.۵.۱۱ جزئیات روش اجرای مرزی پتانسیل

در این بخش جزئیاتی را برای به‌دست آوردن معادلات کاری روش اجزای مرزی مبتنی بر پتانسیل ارائه می‌دهیم. از عبارات معادله (۲۳.۱۱) شروع می‌کنیم. برای پتانسیل‌های اسکالر و برداری داریم؛

$$V_j(\mathbf{r}) = V_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}')\sigma_j(\mathbf{s}')dS'$$
$$\tilde{\mathbf{A}}_j(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}')\mathbf{h}_j(\mathbf{s}')dS' \tag{۵۳.۱۱}$$

اگر در دو طرف معادلات مشتق‌های $\partial_n = \mathbf{n}\nabla$ را بگیریم، به‌دست می‌آید؛

$$\partial_n V_j(\mathbf{r}) = \partial_n V_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}')\sigma_j(\mathbf{s}')dS'$$
$$\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j(\mathbf{r}) = \partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}')\mathbf{h}_j(\mathbf{s}')dS' \tag{۵۴.۱۱}$$

سپس حد $\mathbf{r} \to \mathbf{s}$ را در نظر می‌گیریم. این حد را می‌توان با خیال راحت در معادله (۵۳.۱۱) انجام داد که در آن به‌سادگی باید $\mathbf{r}$ را با $\mathbf{s}$ جایگزین کنیم. در معادله (۵۴.۱۱) روش محدود

[۳۱] Block-Diagonal

کردن باید با دقت بیشتری انجام شود، همانطور که قبلا برای شرط نیومن در صفحه‌های قبل بحث شد، به‌روابط زیر میرسیم؛

$$\partial_n V_j(\mathbf{s}) = \partial_n V_j^{inc}(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n F_j(\mathbf{s},\mathbf{s}')\sigma_j(\mathbf{s}')dS' \pm \frac{1}{2}\sigma_j(\mathbf{s})$$
$$\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j(\mathbf{s}) = \partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n F_j(\mathbf{r},\mathbf{s}')\mathbf{h}_j(\mathbf{s}')dS' \pm \frac{1}{2}\mathbf{h}_j(\mathbf{s}) \tag{۵۵.۱۱}$$

در اینجا علامت بالا یا پایین باید به‌ترتیب برای پتانسیل‌های ذره در داخل یا خارج انتخاب شود و $F_j = \partial_n G_j$ مشتق سطحی تابع گرین است. در رویکرد روش اجزای مرزی، مرز را با عناصری با اندازه محدود تقریب می‌زنیم و پتانسیل‌های مرکز را در نظر می‌گیریم. از این عناصر مرزی با این کار پتانسیل معادله (۵۳.۱۱) را بدست می‌آوریم.

$$\|V_j\| = \|V_j^{inc}\| + \|\mathcal{G}_j\| \cdot \|\sigma_j\|$$
$$\|\tilde{\mathbf{A}}_j\| = \|\tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}\| + \|\mathcal{G}_j\| \cdot \|\mathbf{h}_j\| \tag{۵۶.۱۱}$$

که در آن $\|\mathcal{G}_j\|_{ii'} = \|G_j\|_{ii'}\mathcal{A}_{i'}$ عناصر ماتریسی تابع گرین گسسته است (برای جزئیات به‌تمرین ۵.۱۱ مراجعه کنید). به‌طور مشابه، برای مشتقات سطحی معادله (۵۵.۱۱) بدست می‌آوریم؛

$$\|\partial_n V_j\| = \|\partial_n V_j^{inc}\| + \|\mathcal{H}_j\| \cdot \|\sigma_j\|$$
$$\|\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j\| = \|\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}\| + \|\mathcal{H}_j\| \cdot \|\mathbf{h}_j\| \tag{۵۷.۱۱}$$

در اینجا $\|\mathcal{H}_{1,2} = \|\mathcal{F}_{1,2} \pm \frac{1}{2}\mathbb{I}\|$ و $\|\mathcal{F}_j\|_{ii'} = \|F_j\|_{ii'}\mathcal{A}_{i'}$ عناصر ماتریس برای مشتقات سطحی توابع گرین هستند. سپس از شرایط مرزی معادلات ماکسول برای محاسبه بار سطحی مجهول و توزیع جریان استفاده می‌کنیم. در استخراج معادلات کاری، نماد صریح $\|\cdots\|$ را برای ماتریس‌های گسسته در رویکرد BEM حذف می‌کنیم.

- **پیوستگی پتانسیل‌ها** ابتدا فرض می‌کنیم که پتانسیل‌های اسکالر و برداری در مرز ذره پیوسته هستند. با این کار تضمین می‌شود که مولفه‌های مماسی $\mathbf{E}$ و جزء عمودی $\mathbf{B}$ نیز پیوسته باشند. از معادله (۵۶.۱۱) دریافت می‌کنیم؛

$$\mathcal{G}_1 \cdot \sigma_1 = \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 + \delta V^{inc}, \quad \delta V^{inc} = V_2^{inc} - V_1^{inc}$$
$$\mathcal{G}_1 \cdot \mathbf{h}_1 = \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc}, \quad \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc} = \tilde{\mathbf{A}}_2^{inc} - \tilde{\mathbf{A}}_1^{inc} \tag{۵۸.۱۱}$$

- **پیوستگی جابجائی دی‌الکتریک** علاوه بر این، مولفه عمودی جابجایی دی‌الکتریک در مرز ذرات پیوسته است؛

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_i = \epsilon_i \Big(- jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_i - \partial_n V_i \Big)$$

در این نوع گسسته‌سازی، این پیوستگی به‌معنای (ضریب ϵ_0 در هر دو طرف معادله را حذف می‌کنیم) بصورت زیر ترجمه می‌شود.

$$\kappa_1\Big\{-jk_0\hat{\mathbf{n}}\cdot\Big(\tilde{\mathbf{A}}_1^{inc}+\mathcal{G}_1\cdot\mathbf{h}_1\Big)-\Big(\partial_n V_1^{inc}+\mathcal{H}_1\cdot\sigma_1\Big)\Big\}= \kappa_2\Big\{-jk_0\hat{\mathbf{n}}\cdot\Big(\tilde{\mathbf{A}}_2^{inc}+\mathcal{G}_2\cdot\mathbf{h}_2\Big)-\Big(\partial_n V_2^{inc}+\mathcal{H}_2\cdot\sigma_2\Big)\Big\} \tag{۵۹.۱۱}$$

- **پیوستگی شرط معیار لورنتس** در نهایت از پیوستگی رابطه زیر را بهره برداری می‌کنیم؛

$$\partial_n\tilde{\mathbf{A}}_i+jk_0\kappa_i V_i\ , \tag{۶۰.۱۱}$$

که می‌توان از شرط معیار لورنتس معادله (۲۲.۱۱) را، همانطور که در تمرین ۶.۱۱ نشان داده شده است، بدست آورد. در شکل گسسته‌سازی شده، خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned}&\partial_n\tilde{\mathbf{A}}_1^{inc}+\mathcal{H}_1\cdot\mathbf{h}_1+jk_0\kappa_1\Big(V_1^{inc}+\mathcal{G}_1\cdot\sigma_1\Big)\\&=\partial_n\tilde{\mathbf{A}}_2^{inc}+\mathcal{H}_2\cdot\mathbf{h}_2+jk_0\kappa_2\Big(V_2^{inc}+\mathcal{G}_2\cdot\sigma_2\Big)\end{aligned} \tag{۶۱.۱۱}$$

معادلات (۵۸.۱۱)-(۶۱.۱۱) هشت معادله برای مجهولات $\sigma_j,\mathbf{h}_j$ هستند که می‌توانند به‌شکل بازنویسی شوند.

$$\mathcal{G}_1\cdot\sigma_1-\mathcal{G}_2\cdot\sigma_2=\delta V^{inc} \tag{۶۲.۱۱آ}$$

$$\mathcal{G}_1\cdot\mathbf{h}_1-\mathcal{G}_2\cdot\mathbf{h}_2=\delta\tilde{\mathbf{A}}^{inc} \tag{۶۲.۱۱ب}$$

$$\kappa_1\mathcal{H}_1\cdot\sigma_1-\kappa_2\mathcal{H}_2\cdot\sigma_2+jk_0\hat{\mathbf{n}}\cdot\Big\{\kappa_1\mathcal{G}_1\cdot\mathbf{h}_1-\kappa_2\mathcal{G}_2\cdot\mathbf{h}_2\Big\}=D^e \tag{۶۲.۱۱ج}$$

$$\mathcal{H}_1\cdot\mathbf{h}_1-\mathcal{H}_2\cdot\mathbf{h}_2+jk_0\hat{\mathbf{n}}\cdot\Big\{\kappa_1\mathcal{G}_1\cdot\sigma_1-\kappa_2\mathcal{G}_2\cdot\sigma_2\Big\}=\boldsymbol{\alpha}\ , \tag{۶۲.۱۱د}$$

با خلاصه سازی؛

$$\begin{aligned}D^e&=\Big(\kappa_2\partial_n V_2^{inc}-\kappa_1\partial_n V_1^{inc}\Big)+jk_0\hat{\mathbf{n}}\cdot\Big(\kappa_2\tilde{\mathbf{A}}_2^{inc}-\tilde{\mathbf{A}}_1^{inc}\Big)\\\boldsymbol{\alpha}&=-jk_0\hat{\mathbf{n}}\cdot\Big(\kappa_2 V_2^{inc}-\kappa_1 V_1^{inc}\Big)+\Big(\partial_n\tilde{\mathbf{A}}_2^{inc}-\partial_n\tilde{\mathbf{A}}_1^{inc}\Big)\end{aligned}$$

در ادامه به‌طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه این مجموعه‌ای از معادلات را می‌توان به‌شیوه‌ای کارآمد حل کرد. ابتدا $\sigma_1,\mathbf{h}_1$ را با استفاده از دو معادله اول حذف کرده و به‌عبارت زیر کار می‌بریم؛

$$\mathcal{H}_j\cdot\cdots=\Big(\mathcal{H}_j\cdot\mathcal{G}_j^{-1}\Big)\cdot\mathcal{G}_j\cdot\cdots=\Sigma_j\cdot\mathcal{G}_j\cdot\cdots$$

با ماتریس $\Sigma_j=\mathcal{H}_j\cdot\mathcal{G}_j^{-1}$. از دو معادله آخر در معادله (۶۲.۱۱) سپس بدست می‌آید؛

$$\kappa_1 \Sigma_1 \cdot \Big(\mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 + \delta V^{inc}\Big) - \kappa_2 \Sigma_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2$$
$$+jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \Big\{\kappa_1 \Big(\mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc}\Big) - \kappa_2 \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2\Big\} = \mathbf{D}^e \qquad (\text{آ}۶۳.۱۱)$$
$$\Sigma_1 \cdot \Big(\mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc}\Big) - \Sigma_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2$$
$$+jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \Big\{\kappa_1 \Big(\mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 + \delta V^{inc}\Big) - \kappa_2 \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2\Big\} = \boldsymbol{\alpha} \qquad (\text{ب}۶۳.۱۱)$$

در ادامه ماتریس کمکی را معرفی می‌کنیم

$$\Delta = \Sigma_1 - \Sigma_2 \qquad (۶۴.۱۱)$$

معادله (۶۳.۱۱ ب) بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم؛

$$\Delta \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \mathcal{G}_2 \sigma_2$$

$$= \boldsymbol{\alpha} - \Sigma_1 \cdot \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc} - jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \tilde{V}^{inc} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \ .$$

این عبارت برای $\mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2$ قابل حل است. پس از قرار دادن در معادله (۶۳.۱۱ آ) در آن صورت خواهیم داشت؛

$$\Sigma \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 = \tilde{D}^e - jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\kappa - 1 - \kappa_2) \Delta^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \ ,$$

که در آن مقادیر کمکی زیر را معرفی کرده‌ایم

$$\Sigma = \kappa_1 \Sigma_1 - \kappa_2 \Sigma_2 + k_0^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \hat{\mathbf{n}} \| \cdot \Delta^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$
$$\tilde{D}^e = D^e - \kappa_1 \Sigma_1 \cdot \delta V^{inc} - jk_0 \kappa_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc} \qquad (۶۵.۱۱)$$

معادلات کاری روش اجزای مرزی مبتنی بر پتانسیل را می‌توان در نهایت به‌این صورت

معادلات کار برای رویکرد BEM براساس پتانسیل

$$\|\sigma_2\| = \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Sigma\|^{-1} \cdot \left(\|\tilde{\mathbf{D}}^e\| - jk_0 \|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \|\Delta\|^{-1} \cdot \|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\|\right)$$
$$\|\mathbf{h}_2\| = \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Delta\|^{-1} \cdot \left(\|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\| - jk_0 \|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \|\mathcal{G}_2\| \cdot \|\sigma_2\|\right) \ , \qquad (۶۶.۱۱)$$

همراه با معادله (۵۸.۱۱)، برای محاسبه بار سطحی و توزیع جریان $\|\sigma_1\|, \|\mathbf{h}_1\|$ در داخل مرز خلاصه کرد. حل معادلات کار مستلزم چهار عکس ماتریس و دو ضرب ماتریس، همراه با جمع کم‌هزینه محاسباتی ماتریس‌ها و ضرب ماتریس‌ها در بردارها است.

تمرینات

- **تمرین ۱** مقادیر ویژه معادله (۱۲.۱۱) را برای ماتریس پایداری رویکرد FDTD با استفاده از مرحله زمانی "جادویی" $\Delta t = \Delta x/c$ محاسبه کنید. نشان دهید که برای این انتخاب، پاشندگی عددی در FDTD کاملاً حذف شده است.

- **تمرین ۲** یک موج TM را در نظر بگیرید که توسط مولفه z میدان الکتریکی E_z توصیف شده و به‌سمت چپ حرکت می‌کند به‌طوری که

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z = 0$$

که در آن v سرعت نور در محیط مربوطه است. در چارچوب FDTD، حل این معادله با تفاضل مرکزی برای مختصات مکانی و زمانی تقریب می‌شود، که منجر به‌رابطه زیر می‌شود؛

$$\frac{\|E_z\|_{3/2}^{n+1} - \|E_z\|_{3/2}^{n}}{\Delta t} = v\frac{\|E_z\|_{2}^{n+1/2} - \|E_z\|_{1}^{n+1/2}}{\Delta x} \qquad (۶۷.۱۱)$$

معادله موج را در نقطه مش $i = 3/2$ درست در داخل مرز ارزیابی کرده‌ایم، جایی که $i = 1$ مرز دامنه سمت چپ در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که میدان‌های الکتریکی E_z فقط برای شاخص‌های زمان و مکان اعداد صحیح تعریف می‌شوند، ما عبارت‌های نیمه صحیح E_z را از طریق $\|E_z\|_{3/2} = \frac{1}{2}(\|E_z\|_1 + \|E_z\|_2)$ تقریب می‌زنیم.

  - **الف** نتیجه گسسته‌سازی شده معادله موج (۶۷.۱۱) را محاسبه کنید.
  - **ب** معادله را برای مجهول $\|E_z\|_1^{n+1}$ حل کنید.

اگر میدان الکتریکی مطابق با معادله **ب** به‌روزرسانی شود، موجی که به‌مرز چپ برخورد می‌کند بدون هیچ بازتابی از حوزه شبیه‌سازی خارج می‌شود. این اساس **شرایط مرز جذبی**[۳۲] است[۱۰۲].

- **تمرین ۳** در داخل FDTD، لایه‌های تطبیق کامل را می‌توان با استفاده از گذردهی ناهمسانگرد $\bar{\bar{\epsilon}}$ و نفوذپذیری $\bar{\bar{\mu}}$ پیاده‌سازی کرد.

  - **الف** برای بدست آوردن ضرایب فرنل ارائه شده در فصل هشتم را برای رابط بین یک ماده با پارامترهای ماده محلی ϵ_1, μ_1 و یک ماده غیر محلی با

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_2^{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^{\perp} \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_2^{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^{\perp} \end{pmatrix}$$

ادامه دهید.

[۳۲] Absorbing Boundary Conditions (ABC)

- **ب** در امتداد همان خطوطی که در بخش ۳.۱.۱۱ بحث شد، مقادیر $\epsilon_2^{\perp}, \epsilon_2^{z}$ و $\mu_2^{\perp}, \mu_2^{z}$ را به‌طوری که ضریب بازتاب فرنل برای موج ورودی صفر باشد (تطبیق امپدانس) و موج در محیط ۲ میرا شود، تعیین کنید.

- **تمرین ۴** از معادلات (۱.۱۱) کرل معادله شروع و میدان‌ها را به‌دو میدان‌های تابشی و پراکنده $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}$ $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{sca}$ قسمت تقسیم کنید.
  - **الف** فرض کنید که میدان تابشی $\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc}$ جواب معادله موج همگن برای محیط زیرلایه ϵ_b, μ_b باشد.
  - **ب** معادلات متحرک را برای میدان‌های پراکنده و مواد ناهمگن $\epsilon(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r})$ بدست آورده و ثابت کنید که میدان‌های تابشی را می‌توان بعنوان توزیع جریان‌های الکتریکی و مغناطیسی در نظر گرفت.

- **تمرین ۵** برای عناصر قطری پتانسیل پایه رویکرد BEM مبتنی بر پتانسیل، باید مراقب رفتار تکین[۳۳] تابع گرین معادله(۷.۵) برای $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ بود. فرض کنید $\mathbf{s}_i$ مرکز شکل یک عنصر مرزی مثلثی $\mathcal{T}_i$ باشد و با توجه به

$$\|\mathcal{G}_{stat}\|_{ii} = \int_{\mathcal{T}_i} \frac{1}{4\pi|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}'|} dS'$$

و با معرفی مختصات قطبی با مبدا در $\mathbf{s}_i$، نشان دهید که انتگرال را می‌توان براحتی انجام داد. انتگرال شعاعی را به‌صورت تحلیلی انجام داده و انتگرال یک بعدی را بر روی زاویه قطبی که باید به‌صورت عددی حل شود بدست آورید.

- **تمرین ۶** از پیوستگی مولفه مماسی $\mathbf{B}$ در یک مرز استفاده کرده و ثابت کنید که

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{A}) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\delta\mathbf{A} = 0$$

که در آن $\delta\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ است. چون مشتق مماسی $\delta\mathbf{A}$ صفر است، اولین جمله سمت راست را می‌توان بصورت $\nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{n}}(\nabla \cdot \delta\mathbf{A})$ نوشت. با استفاده شرط معیار لورنتس رابطه (۲۲.۱۱) پیوستگی عبارت داده شده در رابطه (۶۰.۱۱) را بدست آورید.

- **تمرین ۷** عناصر ماتریس و ناهمگنی معادله (۳۴.۱۱) را برای طرح گالرکین بدست آورید. برای ماتریس انتقال $T_{[ia],\nu}$ از یک شاخص ترکیبی $[ia]$ برای بازنویسی عبارات بر حسب ضرب ماتریس استفاده کنید.

- **تمرین ۸** رابطه‌بندی وردشی رویکرد گالرکین را می‌توان برای رابطه‌بندی ترکیبی رویکرد روش اجزای مرزی اعمال کرد. عملکردی برای رویکرد شبه استاتیکی بر اساس معادله (۹ ۲۷.) بصورت زیر است؛

$$\mathcal{S} = \oint_{\partial\Omega} \mathcal{W}^e(\mathbf{s}) \left\{ \oint_{\partial\Omega} \left[\Lambda(\omega)\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') + F^{stat}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \right] u^e(\mathbf{s}')\, dS' + \frac{\partial V^{inc}(\mathbf{s})}{\partial n} \right\} dS'$$

[۳۳] Singular

برای توابع $u^e(\mathbf{s})$ جوابی که در یک عنصر مرزی مشخص ثابت و در غیر این صورت صفر هستند و برای توابع آزمایشی توابع دلتای دیراک واقع در مرکز شکل‌ها را انتخاب کنید.

$$\tilde{\varphi}_i(\mathbf{s}) = \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_i), \qquad \varphi_i(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1 & \text{برای} \quad \mathbf{s} \in \mathcal{T}_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که $\delta\mathcal{S}/\delta\mathcal{W}_i^2$ به‌معادله (۱۸.۱۱) منتهی می‌شود، با این حال، عناصر ماتریس

$$\|\mathcal{F}^{stat}\|_{ii'} = \int_{\mathcal{T}_i'} F^{stat}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}')dS'$$

بر روی مثلث میانگین گرفته می‌شوند. اینگونه طرح انتگرال‌گیری برای توابع گرین نیز در مراجع [۱۰۹، ۱۱۰] استفاده شده است.

- **تمرین ۹** عناصر پایه راویارت-توماس[۳۴] معادله (۳۶.۱۱) را برای رویکرد BEM در نظر گیرید. از طریق محاسبه صریح نشان دهید که شار $\varphi_\nu \cdot \boldsymbol{\eta}$ در لبه بین دو مثلث مجاور حفظ شده است.

- **تمرین ۱۰** عناصر ندلک معادله (۴۸.۱۱) را برای یک چهار وجهی دلخواه به‌جای یک واحد، بدست آورید. قوانینَ تبدیلی را ابداع کنید که اجازه دهد توابع پایه یک چهار وجهی واحد را به‌یک چهار وجهی دلخواه تبدیل کند.

[۳۴] Raviart-Thomas

پیوست آ

آنالیز مختلط

آ.۵.۰ قضیه کوشی

تابع مختلط $f(z)$ را در نظر بگیرید که در منطقه مفروضی از فضای مختلط تحلیلی است، به‌این معنی که تابع را می‌توان بر حسب سری تیلور حول هر نقطه z_0 بسط داد، و در همسایگی معینی از z_0، بنحوی به‌نقطه نزدیک می‌شود که مقدار تابع به‌آن بستگی ندارد،

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

توابع تحلیلی صاف هستند، یعنی کاملاً قابل مشتق‌گیری هستند. آنها این ویژگی قابل توجه را دارند که هر انتگرال‌گیری در صفحه مختلط در امتداد یک مسیر بسته صفر است،

قضیه کوشی

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{آ.۱}$$

برای اثبات این رابطه ابتدا از $z = x + jy$ استفاده کرده و تابع را به‌قسمت‌های حقیقی و موهومی تجزیه می‌کنیم.

$$f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

سپس مشتق تابع را می‌توان از آن محاسبه کرد؛

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\eta\to 0} \frac{f(z+\eta) - f(z)}{\eta} \\ &= \lim_{\eta\to 0} \frac{u(x+\eta, y) + jv(x+\eta, y) - u(x, y) - jv(x, y)}{\eta} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

با این حال، برای تابع تحلیلی، می‌توانیم مشتق را در جهت دیگری، مثلاً در امتداد محور موهومی، بگیریم.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\eta\to 0}\frac{f(z+j\eta)-f(z)}{j\eta} \\ &= -j\lim_{\eta\to 0}\frac{u(x,y+\eta)+jv(x,y+\eta)-u(x,y)-jv(x,y)}{\eta} = -j\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

از آنجایی که تابع تحلیلی فرض می‌شود، هر دو عبارت باید یکسان باشند. با مقایسه این دو منجر به‌معادلات موسوم به‌کوشی-ریمان [۱] برای توابع تحلیلی می‌شویم؛

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\ . \tag{آ.۲}$$

اکنون به‌معادله (آ.۱) برمی‌گردیم و زیر انتگرال $f=u+jv$ و همچنین دیفرانسیل $dz=x+jdy$ را به‌قسمت‌های حقیقی و موهومی آنها تقسیم می‌کنیم؛

$$\oint_C (u+jv)(dx+jdy)=\oint_C (udx-vdy)+j\oint_C (vdx+udy)\ .$$

این عبارات را می‌توان با استفاده از قضیه گرین [۲] بازنویسی کرد.

$$\oint_C (udx+vdy)=\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\ . \tag{آ.۳}$$

و برای بخش‌های حقیقی و موهومی بدست می‌آوریم؛

$$\oint_C (udx-vdy)=\int\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=0$$

$$\oint_C (vdx+udy)=\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}\right)dxdy=0\ .$$

از معادلات کوشی-ریمان معادله (آ.۲) برای ارزیابی انتگرال‌ها به‌صفر استفاده کرده‌ایم. این اثبات قضیه کوشی را کامل می‌کند.

آ.۶.۰ قضیه باقیمانده

یک انتگرال مختلط به‌صورت زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$\oint_C \left[\frac{f(z)}{z-z_0}\right]dz=\oint_C g(z)dz\ . \tag{آ.۴}$$

در اینجا $f(z)$ یک تابع تحلیلی است و C یک کانتور است که نقطه بحرانی z_0 را در بر می‌گیرد، همانطور که به‌صورت شماتیک در شکل (آ.۱)نشان داده شده است. در تحلیل مختلط نقطه

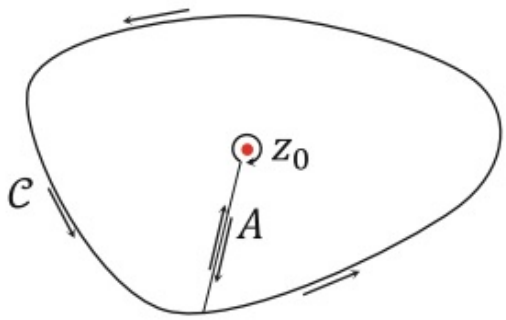
[۱] Cauchy–Riemann equations

[۲] قضیه گرین را می‌توان از قضیه استوکس معادله (۱۳.۲) با استفاده از

$$\mathbf{F}=u(x,y)\hat{x}+v(x,y)\hat{y}, \qquad d\mathbf{l}=\hat{x}dx+\hat{y}dy$$

بدست آورد.

بحرانی z_0 قطب نامیده می‌شود و تابع $g(z)$ در همه جا به‌جز در z_0 تحلیلی است. اکنون مسیر انتگرال‌گیری را طوری تغییر شکل می‌دهیم که در امتداد A به‌نقطه بحرانی z_0 نزدیک می‌شود، در امتداد دایره‌ای با شعاع $r \to 0$ به‌دور z_0 حرکت می‌کند و در نهایت در امتداد A به‌کانتور C برمی‌گردد. مشارکت در دو مسیر انتگرال‌گیری A، یکدیگر را به‌دلیل جهت‌های انتگرال‌گیری مخالف حذف می‌کنند. در مورد دایره، مختصات قطبی را معرفی می‌کنیم؛



شکل آ.۱: شماتیک برای قضیه باقیمانده. یک تابع مختلط $g(z)$ با یک قطب در z_0 در امتداد یک کانتور C که نقطه بحرانی z_0 را در بر می‌گیرد انتگرال‌گیری می‌شود.

$$z = z_0 + re^{j\phi}, \qquad dz = jre^{j\phi}d\phi \ .$$

بنابراین، برای انتگرال‌گیری روی مسیر دایره خواهیم داشت؛

$$-\int_0^{2\pi}\left[\frac{f(z_0+re^{j\phi})}{(z_0+re^{j\phi})-z_0}\right]\left(jre^{j\phi}d\phi\right) = -f(z_0)\int_0^{2\pi}\frac{jre^{j\phi})}{jre^{j\phi})}d\phi \xrightarrow[r\to 0]{} -2\pi j f(z_0) \ .$$

تابع $f(z)$ را از انتگرال خارج کرده‌ایم زیرا فرض می‌شود که در نزدیکی z_0 به‌آرامی تغییر می‌کند. علامت منفی انتگرال به‌این دلیل است که در جهت عقربه‌های ساعت در اطراف z_0 حرکت می‌کنیم. سپس مسیر انتگرال‌گیری در امتداد C و دایره کوچک اطراف z_0 را بدست می‌آوریم.

$$\oint_C \left[\frac{f(z)}{z-z_0}\right]dz = -2\pi j f(z_0) = 0 \ .$$

عبارت فوق به‌دلیل معادله (آ.۱) صفر است و این واقعیت که مسیر انتگرال‌گیری ترکیبی اکنون قطب را حذف می‌کند، و بنابراین انتگرال در کل بازه انتگرال‌گیری تحلیلی است. با این، ساده ترین شکل قضیه باقیمانده را پیدا می‌کنیم ؛

قضیه باقیمانده

$$\oint_C \left[\frac{f(z)}{z-z_0}\right]dz = 2\pi j f(z_0) \tag{آ.۵}$$

نتیجه بالا را می‌توان به‌راحتی برای تعداد بیشتری از قطب‌ها تعمیم داد.

پیوست ب

تابع گرین طیفی

در این پیوست نحوه تجزیه توابع گرین را به‌امواج صفحه‌ای نشان می‌دهیم. به‌نظر می‌رسد که در نظر گرفتن تجزیه با استفاده از عددموج مختلط راحت است، به‌طوری که تابع گرین به‌یک تابع با آرگومان‌های مختلط تبدیل می‌شود. برای چنین توابعی یک قضیه مهم تحلیل مختلط، به‌نام قضیه کوشی، وجود دارد که بیان می‌کند که انتگرال کانتور یک تابع تحلیلی صفر است. این قضیه در پیوست الف ترسیم شده و نقش مهمی در بحث زیر ایفا می‌کند.

ب.۱ تجزیه طیفی تابع گرین اسکالر

با تجزیه تابع گرین معادله هلم‌هولتز، معادله (۵.۵)، به‌امواج صفحه‌ای شروع می‌کنیم. معادله مورد نظر خواهد بود؛

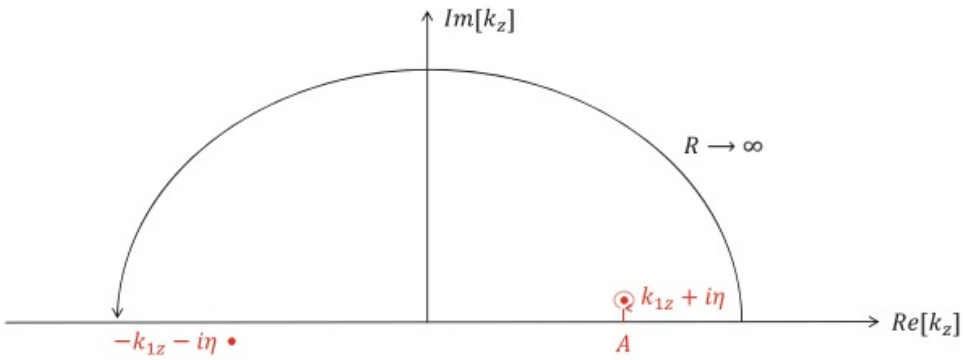
$$(\nabla^2 + k_1^2)g(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \ ,$$

که در آن k_1 یک عددموج است. از زیرنویس روی k_1 برای تشخیص آن از بردار موج $\mathbf{k}$ تبدیل فوریه برای تابع گرین و تابع دلتای دیراک استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\tilde{g}(\mathbf{k})d^3k \\ \delta(\mathbf{r}) &= (2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3k \end{aligned}$$

با وارد کردن این روابط به‌معادله تابع گرین خواهیم داشت؛

$$(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Big[(k_1^2 - k^2)\tilde{g}(\mathbf{k}) + 1\Big]d^3k = 0$$



شکل ب.۱: مسیر انتگرال‌گیری برای تابع گرین در مواد با اتلاف. قطب‌های انتگرال در $\pm(k_{1z} + j\eta)$ قرار دارند.

از آنجایی که معادله باید برای همه مقادیر $\mathbf{r}$ برآورده شود، به $\tilde{g}(\mathbf{k}) = 1/(k^2 - k_1^2)$ هدایت می‌شویم و به‌نوبه خود،

$$g(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 - k_1^2} d^3k \ . \qquad \text{(ب.۱)}$$

برای مواد تلفاتی با $\epsilon'' > 0$ داریم؛

$$k_1^2 = \epsilon_1 \mu_1 \omega^2 \ \longrightarrow \ Im\{k_1\} > 0$$

و انتگرال معادله (ب.۱) برای همه مقادیر k به‌خوبی تعریف شده است. برای در نظر گرفتن مواد بدون تلفات، (۱) یک جمله تلفاتی کوچک $j\eta$ را به‌عددموج اضافه می‌کنیم، و (۲) اجازه می‌دهیم $\eta \to 0$ در پایان محاسبه به‌صفر نزدیک شود. با این روش اطمینان حاصل می‌کنیم که تبدیل فوریه فقط شامل امواج خارج شونده، مشابه بحث در باره شرایط مرزی توابع گرین فصل پنجم، است. سپس تجزیه تابع گرین را در مختصات دکارتی بازنویسی می‌کنیم [۱]

$$g(x, y, z) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k_z^2 - (k_{1z} + j\eta)^2} dk_x dk_y dk_z \ ,$$

با $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2}$. برای ارزیابی قسمت k_z از انتگرال، از قضیه کوشی معادله (آ.۱) استفاده می‌کنیم. اجازه دهید ابتدا مورد $z > 0$ را در نظر بگیریم. برای یک عدد موج مختلط $k_z = k_z' + jk_z''$ داریم.

$$e^{j(k_z' + jk_z'')z} = e^{jk_z' z} e^{jk_z'' z} \underset{z \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

بنابراین، همانطور که در شکل (ب.۱) نشان داده شده است، می‌توانیم یک نیم دایره در صفحه kz مختلط بالایی را به‌کانتور انتگرال‌گیری اضافه کنیم که سهم آن در حد $R \to \infty$ صفر می‌شود.

[۱] توجه داشته باشید که اگر k_1 یک قسمت موهومی کوچک و مثبت داشته باشد، در این صورت $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2}$ نیز یک قسمت موهومی کوچک و مثبت دارد.

اگر انتگرال یک تابع تحلیلی باشد، انتگرال کانتور در امتداد محور حقیقی kz و پشت در امتداد نیم دایره صفر خواهد بود. با این حال، قطب در $k_{1z}+j\eta$ باید با احتیاط رفتار شود و مسیر انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر تغییر شکل می‌دهیم:

- در امتداد خط مشخص شده با A از محور حقیقی به‌سمت قطب حرکت می‌کنیم.
- در امتداد یک دایره $k_z = k_{1z}+j\eta+re^{j\phi}$ در اطراف قطب حرکت می‌کنیم و $r\to 0$ را قرار می‌دهیم.
- در نهایت دوباره در امتداد خط A به‌محور حقیقی حرکت می‌کنیم.

دو مشارکت در امتداد A به‌دلیل جهت‌های انتگرال‌گیری مخالف یکدیگر را حذف می‌کنند. برای دایره کوچک اطراف قطب (به‌نام باقیمانده) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \oint \frac{(e^{jk_z z})dk_z}{(k_z-k_{1z}-j\eta)(k_z+k_{1z}+j\eta)}\\ &= \left(e^{j(k_{1z}+j\eta)z}\right)\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{-\pi}\frac{jre^{j\phi}d\phi}{(re^{j\phi})(2k_{1z}+2j\eta+re^{j\phi})} = -2\pi j\frac{e^{j(k_{1z}+j\eta)z}}{2(k_{1z}+j\eta)}\ .\end{aligned}$$

که در آن $\eta\to 0$ قرار می‌دهیم تا به‌رابطه نهائی برسیم. تابع گرین خواهد شد:

$$g(x,y,z)=\frac{j}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j(k_x x+k_y y+k_{1z}|z|)}}{k_{1z}}dk_x dk_y$$

توجه داشته باشید که عبارت فوق را می‌توان برای مقادیر z منفی نیز استفاده کرد. در این حالت باید مسیر انتگرال‌گیری را در نیمه پایینی صفحه مختلط ببندیم. با این کار، در نهایت به‌اتحاد ویل[۲] برای بسط یک موج کروی بر حسب امواج صفحه‌ای هدایت می‌شویم.

اتحاد ویل

$$\frac{e^{-jkr}}{r}=\frac{-j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j(k_x x+k_y y+k_z|z|)}}{k_z}dk_x dk_y \qquad \text{(ب.۲)}$$

مؤلفه k_z بردار موج باید از رابطه پاشندگی $k_1^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$ محاسبه شود، و برای محیط‌های بدون تلفات به‌طور ضمنی فرض می‌کنیم که یک عبارت تلفات کوچک در$k_z+j\eta$ وجود دارد. از اتحاد انتگرال برای تابع بِسل

$$\int_0^{2\pi}e^{jx\cos\phi}d\phi=2\pi J_0(x)$$

[۲] Weyl identity

می‌توانیم اتحاد ویل را با معرفی مختصات قطبی (ϕ, k_ρ) برای مختصات (k_x, k_y) بازنویسی کرده و به‌اتحاد سامرفلد[۳] برسیم

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{-j}{2\pi}\int_0^\infty \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_z|z|} dk_\rho \ . \tag{ب.۳}$$

ب.۲ نمایش طیفی تابع گرین دیادیک

در ادامه نحوه تجزیه دادیادیک گرین را به‌امواج صفحه‌ای نشان می‌دهیم. با استفاده از تعریف دیادیک گرین از معادله (۱۹.۵)، همراه با تجزیه موج صفحه‌ای برای تابع گرین اسکالر معادله (ب.۱)، ما را به‌رابطه زیر هدایت می‌کند؛

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{k_1^2}\right)\frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} = \frac{1}{8\pi^3 k_1^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left(\frac{k_1^2\delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 - k_1^2}\right) d^3k \ .$$

قبل از انجام تحلیلی انتگرال‌کیری k_z با استفاده از روش انتگرال‌گیری مختلط که در بالا بحث شد، توجه می‌کنیم که در حد $k_z \to \infty$ جمله داخل پرانتز در سمت راست به $-\hat{z}_i\hat{z}_j$ تبدیل می‌شود و انتگرال برای g_{zz} به‌خوبی رفتار نمی‌کند. بنابراین جمله را جمع و کم می‌کنیم؛

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3 k_1^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left(\frac{k_1^2\delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 - k_1^2} + \hat{z}_i\hat{z}_j\right) d^3k - \frac{\hat{z}_i\hat{z}_j}{8\pi^3 k_1^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \tag{ب.۴}$$

انتگرال دوم $-\hat{z}_i\hat{z}_j k_1^{-2}\delta(\mathbf{r})$ را می‌دهد، و انتگرال اول اکنون در حد $k_z \to \infty$ به‌خوبی رفتار می‌کند و می‌تواند با استفاده از انتگرال مختلط همانطور که قبلا در مطالب اتحاد ویل، معادله (ب.۲) مورد بحث قرار گرفت، ارزیابی شود. باید حالت‌های زیر را تشخیص دهیم:

- برای $z > 0$ نیم‌دایره در بخش بالا نیم صفحه مختلط را میبندیم و باقیمانده را در $k_{1z}^- = k_{1z} + j\eta$ محاسبه می‌کنیم.
- برای $z < 0$ نیم‌دایره قسمت پائین صفحه مختلط را می‌بندیم و باقیمانده را در $k_{1z}^- = -k_{1z} - j\eta$ محاسبه می‌کنیم.

در قطب‌های $k_{1z}^\pm$ جمله داخل پرانتز معادله (ب.۴) خواهد شد؛

$$k_1^2\delta_{ij} - k_i k_j + \hat{z}_i\hat{z}_j\left(k^2 - k_1^2\right) \longrightarrow k_1^2\delta_{ij} - k_{1i}^\pm k_{1j}^\pm \ ,$$

که در آن عد موج زیر را معرفی کرده‌ایم؛

$$\mathbf{k}_1^\pm = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} \pm k_z\hat{\mathbf{z}}, \qquad k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2} + j\eta$$

با هم قرار دادن نتایج به‌رابطه زیر منجر می‌شود؛

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{j}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}_1^\pm\cdot\mathbf{r}}\left(\frac{\delta_{ij} - \hat{k}_{1i}^\pm\hat{k}_{1j}^\pm}{k_{1z}}\right) dk_x dk_y - \frac{\hat{z}_i\hat{z}_j}{k_1^2}\delta(\mathbf{r}) \ .$$

[۳] Sommerfeld identity

هنگامی که بر روی یک بردار عمل می‌کند، ماتریس $\delta_{ij} - \hat{k}_{1i}^{\pm}\hat{k}_{1j}^{\pm}$ روی جهات عمود بر $\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm}$، همانطور که برای مثال در بخش ۵.۲ بحث شد تصویر می‌شود.

- **تجزیه بصورت مودهای TE و TM** به‌نظر می‌رسد معرفی یک دستگاه سه‌گانه متشکل از $\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm}$ و بردارهای زیر راحت است؛

$$\boldsymbol{\epsilon}^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm} \times \hat{\mathbf{z}}|} = \frac{1}{k_\rho}\Big(k_y\hat{\mathbf{x}} - k_x\hat{\mathbf{y}}\Big) \qquad \text{(ب.۵آ)}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{TM}(\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm}) = \hat{\mathbf{k}}_1^{\pm} \times \boldsymbol{\epsilon}^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm}) = \pm\frac{k_{1z}}{k_1 k_\rho}\Big(k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}\Big) - \frac{k_\rho}{k_1}\hat{\mathbf{z}}\ , \qquad \text{(ب.۵ب)}$$

با $k_\rho = (k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}$. هنگام در نظرگرفتن بازتاب‌ها و انتقال‌ها در سطح مشترک محیط‌های لایه لایه، همانطور که در فصل هشتم انجام شد، این تجزیه بسیار مفید است زیرا دو بردار پایه را می‌توان با میدان‌های TE و TM مربوط کرد. بنابراین خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} g_{ij}(\mathbf{r}) &= -\frac{\hat{z}_i\hat{z}_j}{k_1^2}\delta(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{j}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\mathbf{k}_1^{\pm}\cdot\mathbf{r}}}{k_{1z}}\left\{\epsilon_i^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm})\epsilon_j^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm}) + \epsilon_i^{TM}(\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm})\epsilon_j^{TM}(\hat{\mathbf{k}}_1^{\pm})\right\}dk_x dk_y \end{aligned} \qquad \text{(ب.۶)}$$

آنچه در ادامه می‌آید، در نظر گرفتن حالت کلی‌تر $\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1)\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_2)$ و یک عبارت مشابه برای میدان‌های TM راحت است، که در آن $\mathbf{k}_1$ و $\mathbf{k}_2$ بردارهای موج موازی یکسانی دارند اما می‌توانند از نظر مولفه‌های z متفاوت باشند. چنین ترکیباتی برای توصیف امواج بازتابی و ارسالی در محیط‌های لایه لایه مورد نیاز است. سپس خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} \left[\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1)\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_2)\right] &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\cos 2\phi & -\sin 2\phi & 0 \\ -\sin 2\phi & 1+\cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \\ \left[\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1)\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_2)\right] &= \frac{1}{k_1 k_2} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} k_{1z}k_{2z}(1+\cos 2\phi) & k_{1z}k_{2z}\sin 2\phi & -2k_{1z}k_\rho\cos\phi \\ k_{1z}k_{2z}\sin 2\phi & k_{1z}k_{2z}(1-\cos 2\phi) & -k_{1z}k_\rho\sin\phi \\ -2k_\rho k_{2z}\cos\phi & -2k_\rho k_{2z}\sin\phi & 2k_\rho^2 \end{bmatrix}_{ij} \end{aligned} \qquad \text{(ب.۷)}$$

که در آن مختصات قطبی (ϕ, k_ρ) را برای مولفه‌های موازی بردار موج (k_x, k_y) معرفی کرده‌ایم. تبدیل به‌مختصات استوانه‌ای $(\phi\rho z)$ برای موقعیت r، انتگرال‌گیری بر روی زاویه سمت را

$$\langle\cdots\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jk_\rho\rho\cos(\phi-\varphi)}[\cdots]d\phi$$

میتوان با استفاده از رابطه (۲۱.۳) بطور تحلیلی انجام داد. باین به‌رابطه زیر میرسیم

$$\langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1)\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_2)\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} J_0 + J_2\cos 2\varphi & J_2 \sin 2\varphi & 0 \\ J_2 \sin 2\varphi & J_0 - J_2 \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij}$$
$$\langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1)\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_2)\rangle = \frac{1}{k_1 k_2}$$
$$\times \begin{bmatrix} k_{1z}k_{2z}(J_0 - J_2\cos 2\varphi) & -k_{1z}k_{2z}J_2 \sin 2\varphi & -2jk_{1z}k_\rho J_1 \cos\varphi \\ -k_{1z}k_{2z}\sin 2\varphi & k_{1z}k_{2z}(J_0 + J_2\cos 2\varphi) & -2jk_{1z}k_\rho J_1 \sin\varphi \\ -2jk_\rho k_{2z}J_1\cos\varphi & -2jk_\rho k_{2z}J_1 \sin\varphi & 2k_\rho^2 J_0 \end{bmatrix}_{ij} \tag{ب.۸}$$

که در آن برای سادگی نماد، آرگومان‌های توابع بسل $J_n(k_\rho\rho)$ را حذف کرده‌ایم.

با کنار هم گذاشتن همه نتایج، به‌تجزیه ویل تابع گرین دایادیک می‌رسیم.

تجزیه ویل تابع گرین دایادیک

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{\hat{z}_i\hat{z}_j}{k_1^2}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$
$$+\frac{j}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{jk_{1z}|z-z'|}}{k_{1z}}\left\{\left\langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1^\pm)\epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_1^\pm)\right\rangle + \left\langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1^\pm)\epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_1^\pm)\right\rangle\right\}k_\rho dk_\rho \tag{ب.۹}$$

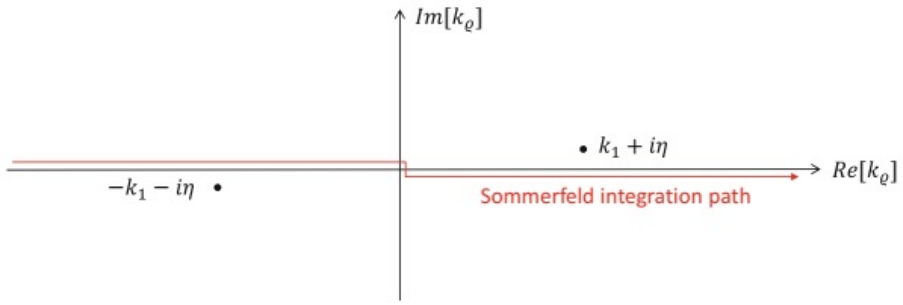
ب.۳ مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد

انتگرال معادله (ب.۹) باید تحت این دستورالعمل ارزیابی شود که $k_{1z} + j\eta$ دارای یک بخش موهومی کوچک است. با این حال، برای محاسبه عددی، که برای محیط‌های لایه لایه نیاز داریم، جایی که k_{1z} در مخرج بسیار کوچک می‌شود، و همچنین برای آرگومان‌های k_ρ بزرگ که در آن انتگرال بسیار آهسته برای مقادیر کوچک $|z-z'|$ میرا می‌شود، باید مراقب $k_\rho = k_1$ بود. همانطور که در ادامه بحث خواهیم کرد، برای جلوگیری از هرگونه مشکل با این محدودیت‌ها می‌توانیم:

- مقدار k_ρ معادله (ب.۹) به‌عنوان انتگرال‌گیری کانتور مختلط بیان کنیم،
- و کانتور را تغییر شکل داده تا مسیر انتگرال‌گیری به‌اندازه کافی از تمام نقاط یا مناطق بحرانی دور بماند.

ابتدا از معادله (ب.۹) و از ماتریس‌های معادله (ب.۸) مشاهده می‌کنیم که زیر انتگرال‌ها به‌شکل $k_\rho J_0(k_\rho\rho), k_\rho^2 J_1(k_\rho\rho)$ و $k_\rho J_2(k_\rho\rho)$ با توابعی که فقط به k_{1z} وابسته هستند ضرب می‌شود. با استفاده از رابطه

$$J_n(x) = \frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)\right] \tag{ب.۱۰}$$



شکل ب.۲: مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد برای محاسبه انتگرال رابطه (ب.۱۱) تابع گرین دیادیک.

بین توابع بِسل و هنکل، همراه با رابطه زیر

$$H_n^{(1)}(-z) = -e^{-j\pi n} H_n^{(2)}(z)$$

می‌توان بسادگی تشان داد که معادله (ب.۹) را می‌توان بصورت زیر بیان کرد؛

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{\hat{z}_i\hat{z}_j}{k_1^2}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \frac{j}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jk_{1z}|z-z'|}}{k_{1z}}\left\{J_n \longrightarrow H_n^{(1)}\right\}k_\rho dk_\rho \qquad (ب.۱۱)$$

که در آن عبارت در پرانتزهای کرل با عبارت موجود در معادله (ب.۹) یکسان است تنها با این تفاوت که همه توابع بِسل با توابع هنکل جایگزین می‌شوند. از شکل مجانبی توابع هنکل

$$H_n^{(1)}(k_\rho\rho) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi(k_\rho\rho}}e^{j[(k_\rho\rho-\frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2})]} \qquad (ب.۱۲)$$

سپس بلافاصله مشاهده می‌کنیم که می‌توانیم یک نیم‌دایره در صفحه k_ρ بالائی، مشابه مسیر انتگرال‌گیری شکل (ب.۱)، که سهم آن در حد $R \to \infty$ صفر می‌شود، اضافه کنیم. برای محاسبه معادله (ب.۱۱) به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

- مسیر انتگرال‌گیری در معادله (ب.۱۱) با یک کانتور در امتداد محور حقیقی و پشت بر روی یک نیم‌دایره در نیمه بالایی صفحه مختلط جایگزین می‌شود.
- به‌دلیل قضیه کوشی، می‌توانیم به‌تغییر شکل بیشتر مسیر ادامه دهیم، مشروط بر اینکه تمام قطب‌ها را در داخل انتگرال کانتور نگه داریم. همانطور که در ادامه بحث خواهیم کرد، علاوه بر این باید مراقب نقاط انشعاب و برش‌های صفحه مختلط که از توابع چند مقداری مانند جذر سرچشمه می‌گیرند، باشیم.

یک مسیر قابل اجرا، مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد است که در شکل (ب.۲) نشان داده شده است و برای مقادیر منفی k_ρ کمی بالاتر از محور k_ρ حقیقی و برای مقادیر k_ρ مثبت کمی پایین‌تر از محور k_ρ حقیقی، در نظر می‌گیریم . در ادامه به‌دلایل این انتخاب می‌پردازیم.

صفحه ریمان و انشعاب و برش‌ها

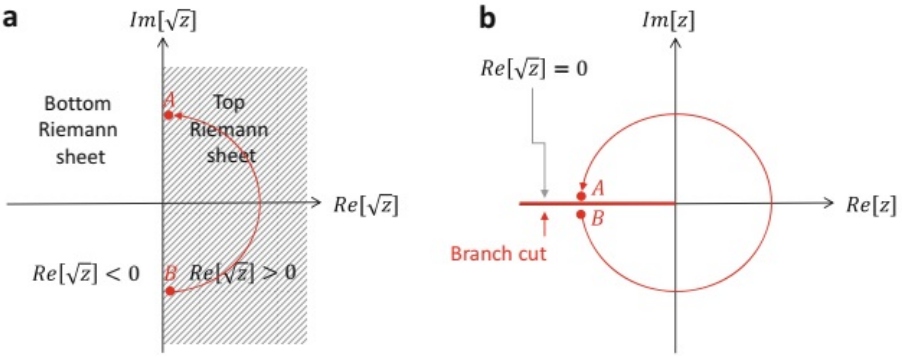
تابع جذر $f(z) = \sqrt{z}$ را در نظر بگیرید که به‌دلیل ابهام علامت جذر، یک تابع دو مقدار است. در صفحه مختلط یک عدد مختلط را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$z = re^{j\phi}$$

که در آن r مدول و ϕ فاز تابع z است. بنابراین، جذر به‌صورت زیر خواهد بود

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{j\frac{\phi}{2}}$$

و $\sqrt{z}$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 4π است. فرض کنید که ϕ را در بازه $(-\pi, \pi)$ تغییر دهیم. در صفحه z (شکل ب.۳)-ب، از موقعیت B شروع و سپس در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول یک دایره حرکت می‌کنیم تا در موقعیت A قرار بگیریم. در (شکل ب.۳)-الف، فضای مختلط $\sqrt{z}$، مسیر مربوطه یک نیم دایره از B تا A است که در بخش مقادیر مثبت $Re\sqrt{z}$ قرار دارد. با افزایش بیشتر، در صفحه z همان دنباله اعداد مختلط را دریافت می‌کنیم، اما در صفحه $\sqrt{z}$ اکنون در بخش با مقادیر $Re\sqrt{z}$ منفی حرکت می‌کنیم. تخصیص دو بخش با **صفحه‌های ریمان**[۴] بالا و پایین راحت است. برش بین دو صفحه با $Re\sqrt{z} = 0$ داده می‌شود و به‌آن **برش انشعاب**[۵] می‌گویند. از نقطه انشعاب$z = 0$ شروع و به $z \to \infty$ ختممی‌شود. هنگام اصلاح یک کانتور انتگرال‌گیری در صفحه مختلط، باید مراقب چنین برش‌های انشعاب باشیم. به‌طور کلی سعی می‌شود از بریدگی انشعاب اجتناب شود.



شکل ب.۳: صفحه مختلط برای **(الف)** تابع ریشه مربع $\sqrt{z}$ و **(ب)** مقادیر z مربوطه. نیمه صفحه $Re\sqrt{z} > 0$ بر روی صفحه ریمان بالایی و نیم صفحه $Re\sqrt{z} < 0$ بر روی صفحه ریمان پایین نگاشت شده است.

برش‌های انشعاب برای محیط لایه لایه

اکنون به‌انتگرال معادله (ب.۱۱) بر می‌گردیم. برنامه ما تغییر شکل مسیر انتگرال‌گیری با شرایطی است که همه قطب‌ها در داخل مسیرهای اصلی و تغییر شکل قرار گرفته‌اند و عبور

[۴] Riemann sheets

[۵] branch cut

از بریدگی انشعاب خودداری می‌کنیم. برای مسیر تغییر شکل یافته مهم است که در سراسر $Im(kz) > 0$ باشد. ابتدا هر دو k_1 و k_ρ را به‌بخش‌های حقیقی و موهومی تجزیه می‌کنیم.

$$k_z = \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} = \left[{k'}_1^2 - {k''}_1^2 + 2j{k'}_1{k''}_1 - {k'}_\rho^2 + {k''}_\rho^2 - 2j{k'}_\rho{k''}_\rho\right]^{1/2} . \qquad (ب.۱۳)$$

برای اینکه k_z حقیقی یا $Im(k_z) = 0$ باشد، لازم است که

$$ {k'}_\rho{k''}_\rho = {k'}_1{k''}_1 \qquad (ب.۱۴آ)$$

$$ {k'}_\rho^2 - {k''}_\rho^2 \leq {k'}_1^2 - {k''}_1^2 . \qquad (ب.۱۴ب)$$

شکل (ب.۴) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان آن مقادیر k_ρ را در جایی که k_z حقیقی است، قرار داد. معادله (ب.۱۴آ) هذلولی‌ها را به‌ترتیب در ربع اول و سوم تعریف می‌کند که به‌طور مجانبی به‌محور x و y نزدیک می‌شوند، در حالی که معادله (ب.۱۴ب) مقادیر k_ρ محدود شده توسط هذلولی‌ها را تعریف می‌کند که به‌طور مجانبی به‌خطوط $y = x$ نزدیک می‌شوند. بنابراین، مقادیر واقعی k_z بر روی شاخه‌های هذلولی که با خط‌چین نشان داده شده‌اند قرار می‌گیرند. شاخه انتگرال‌گیری سامرفلد در اطراف تمام نقاط بحرانی حرکت می‌کند و از

$$k_z = \sqrt{k_1^2 - (|k_\rho| - j\eta)^2}$$

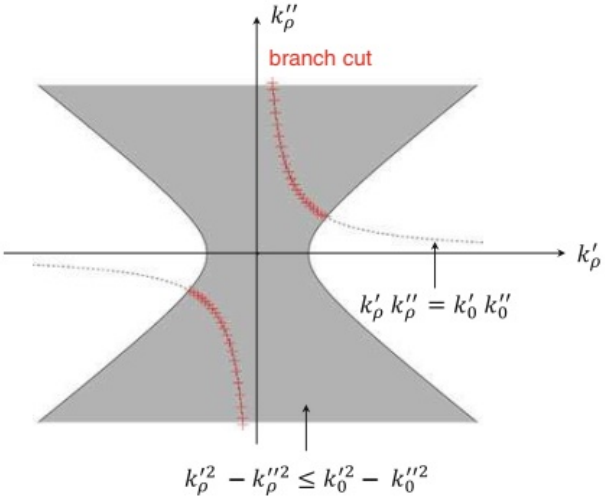
بلافاصله مشاهده می‌کنیم که k_z یک بخش موهومی مثبت کوچک در سرتاسر آن دارد. برای محیط‌های لایه لایه و محاسبه تابع گرین بازتابی، معادلات (۵۱.۸) و (۵۲.۸)، علاوه بر این باید قطب‌های بازتاب تعمیم یافته و ضرایب انتقال را در نظر بگیریم. این قطب‌ها با مودهای هدایت‌شونده، یا در یکی از لایه‌های محیط لایه لایه یا متصل به‌سطح مشترک، همانطور که در بخش ۱.۸ بحث شد، برای پلاسمون‌های سطحی، مربوط هستند. همه قطب‌ها دارای یک قسمت موهومی که بزرگتر یا مساوی صفر است، به‌طوری که امواج شعاعی در معادله (ب.۱۲) به‌طور مجانبی میرا می‌شوند، هستند. در مورد بخش‌های حقیقی مودها، همه آنها در بازه $[0k'_{max}]$ قرار دارند، که k'_{max} حداکثر تعداد موج مواد تشکیل‌دهنده ساختار لایه است. بحث مفصل تر در مورد قطب‌ها و برش شاخه‌ها را می‌توان در مرجع [۲۰] پیدا کرد.

انتگرال‌گیری عددی

هنگام محاسبه انتگرال‌های شکل معادله (ب.۱۱) از نظر عددی می‌توانیم مسیر انتگرال‌گیری را در صفحه مختلط تغییر شکل دهیم، مشروط بر اینکه مسیر تغییر شکل یافته از هیچ شاخه‌ای عبور نکند و هیچ قطبی را حذف نکند. حجم وسیعی از ادبیات در مورد این موضوع در دسترس است، و اگر توابع گرین را برای محیط‌های لایه لایه به‌صورت روزانه محاسبه کنیم، منطقی است که عمیق‌تر در موضوع کاوش می‌کنیم. برخی از فناوری‌ها به‌عنوان مثال توسط چو[۶] [۲۰] مورد بحث قرار گرفته شده است، مانند روش شیب دارترین فرود[۷] ، اگرچه بحث ارائه شده در آنجا به‌هیچ وجه جامع نیست.

[۶] Chew

[۷] Method of the Steepest Descent



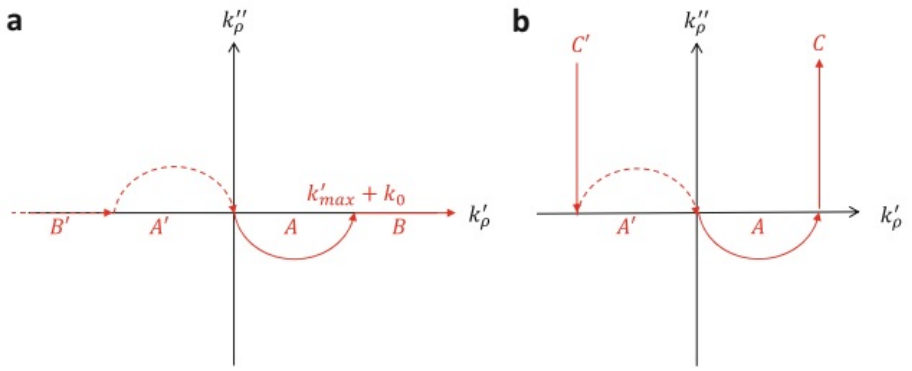
شکل ب.۴: محل قطع شاخه‌ها برای مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد. خط چین آن مقادیر k_ρ را نشان می‌دهد که در آن قسمت واقعی k_z صفر است، به‌معادله مراجعه کنید. (ب.۱۴آ)، ناحیه سایه‌دار خاکستری آن مقادیر k_ρ را نشان می‌دهد که در آن نابرابری معادله (ب.۱۴ب) برقرار است. بنابراین خطوط قرمز ضخیم با برش شاخه ها مطابقت دارد که در آن هر دو معادله (ب.۱۴) است. برآورده می‌شوند. مسیر انتگرال‌گیری مختلط را می‌توان تغییر شکل داد به‌شرطی که از برش شاخه‌ها عبور نکند

در زمینه پلاسمونیک و نانوفوتونیک، پائولوس[۸] و همکارانش [۱۱۹] یک دستورالعمل واضح و ساده از نحوه انتخاب مسیر در صفحه مختلط پیشنهاد کرده‌اند که در جامعه کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است. مسیرانتگرال‌گیری پیشنهادی در شکل (ب.۵) نشان داده شده است و جهت **(الف)** به‌اندازه کافی بزرگ $|z-z'|$ مقادیر، و جهت **(ب)** اگر $|z-z'|$ بطور قابل ملاحظه ای کوچکتر از ρ است. در شکل k'_{max} حداکثر بخش حقیقی عددموج در مواد مختلف محیط لایه لایه است.

- A, A' ابتدا در امتداد یک نیمه بیضی از مبدأ به $k_{max}+k_0$ انتگرال‌گیری می‌کنیم، جایی که k_0 به‌عنوان حاشیه ایمنی اضافه شده است. در طول این مسیر به‌اندازه کافی از محور k_ρ حقیقی که در آن قطب‌های مواد بدون تلفات قرار دارند دور می‌مانیم. پائولوس و همکاران نسبت محوری $1:1/1000$ را برای نیمه بیضی پیشنهاد می‌کنند، اگرچه در بسیاری از موارد نسبت‌های متوسط‌تر مانند $1:1/10$ نیز این کار را انجام می‌دهند.

- B, B' وقتی $|z-z'|$ به‌اندازه کافی بزرگ است، انتگرال برای مقادیر بزرگ k_ρ، بدلیل مقادیر k_z بزرگ و موهومی مربوطه، معادله (ب.۱۳)، به‌صورت نمائی میرا می‌شود. به‌همین دلیل در امتداد محور حقیقی از $k_{max}+k_0$ تا بی نهایت انتگرال‌گیری می‌کنیم. توجه داشته باشید که می‌توانیم برای مسیرهای A, A' و B, B'، توابع هنکل را برای آرگومان های مثبت و منفی با استفاده از معادله (ب.۱۰) ترکیب کنیم.برای به‌دست آوردن تابع بسل، که سپس تنها در مسیرهای A و B انتگرال‌گیری می‌شود

[۸] Paulus



شکل ب.۵: مسیر انتگرال‌گیری پائولوس و همکاران(ب.۵). ابتدا در صفحه مختلط در امتداد نیم بیضی‌های AA' از مبدأ تا نقاط $(kmax+k0)$ روی محور حقیقی انتگرال‌گیری می‌کنیم، جایی که k_{max} حداکثر بخش‌های حقیقی عدد موج در مواد مختلف یک محیط لایه لایه است، و ما عددموج فضای آزاد را به‌عنوان حاشیه ایمنی اضافه کرده‌ایم. **(الف)** برای مقادیر $|z-z'|$ به‌اندازه کافی بزرگ ضریب نمایی را در معادله (ب.۱۱)، منجر به‌میرایی نمایی برای مقادیر بزرگ k_ρ وحقیقی (و مقادیر k_z موهومی بزرگ) می‌شود، و بنابراین در امتداد محور حقیقی انتگرال‌گیری می‌کنیم، B, B' را ببینید. **(ب)** برای مقادیر کوچک $|z-z'|$ مسیر انتگرال‌گیری را به‌صفحه مختلط تغییر شکل می‌دهیم، خطوط C, C' را ببینید که در آن تابع هنکل $H_n^{(1)}$ برای مقادیر موهومی بزرگ، کاهش سریع انتگرال را تضمین می‌کند. توجه داشته باشید که مسیرهای انتگرال‌گیری A, A' و B, B' را می‌توان با استفاده از معادله (ب.۱۰) ترکیب کرد، به‌طوری که مجموع توابع هنکل یک تابع بسل می‌دهد.

- C, C' وقتی $|z-z'|$ به‌طور قابل توجهی کوچکتر از ρ است، مثلاً با ضریب ده، از شکل مجانبی معادله (ب.۱۲) تابع هنکل برای دستیابی همگرایی سریعتر در طول مسیرهای انتگرال‌گیری C, C' استفاده می‌کنیم. می‌توانیم با خیال راحت مسیر انتگرال‌گیری را به‌این روش تغییر شکل دهیم زیرا تمام قطب‌ها در داخل کانتور انتگرال‌گیری باقی می‌مانند و هیچ شاخه‌ای قطع نمی‌شود.

پیوست پ

معادله موج کروی

در این پیوست نشان میدهیم که چگونه معادله موج زیر را در مختصات کروی حل کنیم.

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\mathbf{r})$$

در اینجا k عدد موج است. برای انجام این کار، تعدادی توابع خاص را معرفی می‌کنیم، یعنی چند جمله‌ای های لژاندر، هارمونیک‌های کروی و توابع بسل و هنکل کروی. هر آنچه در اینجا ارائه شده است را می‌توان با جزئیات بسیار بیشتر در کتاب‌های درسی دیگر پیدا کرد و ما نتایج اصلی را فقط برای کامل بودن ارائه می‌دهیم. بحث ما دقیقاً از کتاب جکسون[۲] پیروی می‌کند و هر زمان که امکان داشته باشد برای تسهیل مقایسه مستقیم به‌معادلات مربوطه مراجعه خواهیم کرد. در مختصات کروی معادله موج بصورت زیر است؛

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + k^2\psi = 0 \qquad \text{(پ.۱)}$$

بدلیل تقارن کروی می‌توانیم برای حل از روش جداسازی متغیرها استفاده کنیم؛

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi)$$

با وارد کرد رابطه بالا در معادله (پ.۱) و تقسیم بر ψ و ضرب در $r^2\sin^2\theta$ خواهیم داشت؛

$$\left[\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + k^2r^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0 \qquad \text{(پ.۲)}$$

این معادله باید برای مقادیر دلخواه r,θ,ϕ برآورده شود، و فقط در صورتی می‌توان به‌دست آورده شود که دو عبارت سمت چپ ثابت باشند. در نتیجه

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = -m^2 \qquad \text{(پ.۳)}$$

که m عدد ثابت است. این دارای جواب

$$Q(\phi) = e^{\pm jm\phi} \qquad \text{(پ.۴)}$$

چون تابع $\psi(r,\theta,\phi)$ باید نسبت به ϕ تناوبی باشد، مشاهده می‌کنیم که m باید عدد صحیح باشد. سپس معادله (پ.۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم؛

$$\left[\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2\right]+\left[\frac{1}{\sin\theta P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]=0$$

برای انجام این معادله برای مقادیر دلخواه r,θ دو عبارت داخل پرانتز باید دوباره ثابت باشند. این ما را به‌معادلات زیر هدایت می‌کند؛

- **چند جمله‌ای لوژاندر وابسته** برای بخش زاویه قطبی داریم؛

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta)=0 \qquad \text{(پ.۵)}$$

جایی که ثابت به‌صورت $l(l+1)$ نوشته شده است. همانطور که در زیر بحث خواهد شد، جواب این معادله توسط چندجمله‌ای‌های لوژاندر $P_{l,m}(\theta)$ ارائه می‌شوند.

- **توابع بسل کروی** بخش شعاعی بصورت زیر است؛

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0 \qquad \text{(پ.۶)}$$

جواب‌های $R(r)=f_l(kr)$ این معادله ترکیب خطی توابع بسل و هنکل کروی هستند.

ترکیب توابع $Q(\phi)$ و $P(\theta)$ بنام هارمونیک‌های کروی $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ خوانده می‌شود، مجموعه کاملی از توابع را برای درجه‌های زاویه‌ای فراهم می‌کند. با این کار، حل معادله موج را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی این جواب‌های اساسی دانست و به‌شکل معادله $\left\{ [۲] ، (۸۰.۹)\right\}$. نوشت.

جواب معادله موج کروی

$$\psi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}f_l(kr)y_{lm}(\theta,\phi)\ , \qquad \text{(پ.۷)}$$

که در آن l و m بترتیب درجه و مرتبه کروی هستند.

پ.۱ چند جمله‌ای لوژاندر

با معادله (پ.۵) برای چندجمله‌ای‌های لوژاندر که برای $m=0$ جواب بقرار زیر است، شروع می‌کنیم.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l(x)}{dx}\right]+l(l+1)P_l(x)=0 \qquad \text{(پ.۸)}$$

که در آن $x = \cos\theta$ را معرفی کرده‌ایم. در سراسر این قسمت فرض میکنیم که $\theta \in [0, \pi]$ و $x \in [-1, 1]$ است، بطوری که می‌توانیم همواره علامت مثبت را برای $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$ در نظر گیریم. جواب را می‌توان بوسیله سری توانی بصورت زیر نمایش داد {[۲] ، (۱۱.۳)}.

$$P_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

برای اینکه برای همه مقادیر x معین بماند، سری باید برای مقداری از j کوتاه و محدود شود که فقط در صورتی می‌توان به‌آن رسید که l یک عدد صحیح باشد. با استفاده از این شرط می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای های لوژاندر $P_l(x)$ را می‌توان بر حسب رابطه‌ای به‌نام رودریگز[۱] بیان کرد {[۲] ، (۱۶.۳)}.

رابطه رودریگز برای چند جمله‌ای لوژاندر

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right) \qquad \text{(پ.۹)}$$

چند جمله‌ای‌های لوژاندر به‌گونه‌ای نرمالیزه شده‌اند که $P_l(1) = 1$ شود. آنها توابع زوج برای مقادیر زوج l و توابع فرد برای مقادیر l فرد هستند. به‌طور واضح‌تر، چند جمله‌ای اول لوژاندر بقرار زیر است{[۲] ، (۱۵.۳)}.

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x)(3x^2-1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2-3x)\ . \qquad \text{(پ.۱۰)}$$

چند جمله‌ای‌های لوژاندر بر یکدیگر متعامد هستند{[۲] ، (۲۱.۳)}؛

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l'l}\ , \qquad \text{(پ.۱۱)}$$

و یک مجموعه کامل را تشکیل میدهند، به‌طوری که هر تابع در بازه $x \in [-1, 1]$ را می‌توان بر حسب این چند جمله‌ای‌ها بسط داد.روابط بازگشتی مختلفی، مانند {[۲] ، (۲۹.۳)} وجود دارد؛

$$\begin{aligned} &(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)P_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \\ &\frac{dP_l(x)}{dx} - x\frac{dP_l(x)}{dx} - (l+1)P_l(x) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(پ.۱۲)}$$

که می‌توان از آن برای محاسبه عددی چند جمله‌ای‌های لوژاندر و مشتق‌های آنها با معلوم بودن دو مقدار شروع، استفاده کرد.

[۱] Rodrigues' formula

چند جمله‌ای‌های لوژاندر وابسته

تعریف معادله برای چند جمله‌ای‌های لوژاندر وابسته $P_{lm}(x)$ بازاء مقادیر دلخواه m رابطه(پ.۵) میدهد؛

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l^m(x)}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x)=0 \qquad (\text{پ.۱۳})$$

برای مقادیر مثبت چند جمله‌ای‌های لوژاندر وابسته را می‌توان از رابطه $\{$ [۲] ، (۴۹.۳) $\}$ محاسبه کرد؛

چند جمله‌ای لوژاندر وابسته برای $m>0$

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \qquad (\text{پ.۱۴})$$

در حالی که چند جمله‌ای‌های لوژاندر برای مقادیرm منفی از رابطه $\{$ [۲] ، (۵۱.۳) $\}$ بدست می‌آید؛

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \qquad (\text{پ.۱۵})$$

برای مقادیر ثابت m چند جمله‌ای‌های لوژاندر یک مجموعه کامل توابع متعامد را تشکیل میدهند $\{$ [۲] ، (۵۲.۳) $\}$؛

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}\ . \qquad (\text{پ.۱۶})$$

پ.۲ هارمونیک‌های کروی

معلوم میشود که ترکیب جواب‌های $Q(\phi)$ و $P(\theta)$ که بنام هارمونیک‌های کروی موسوم است راحت باشد $\{$ [۲] ، (۵۳.۳) $\}$؛

هارمونیک‌های کروی

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\ P_l^m(\cos\theta)e^{jm\phi}\ . \qquad (\text{پ.۱۷})$$

گاهی اوقات از نماد دیگری استفاده می‌کنیم؛

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}),\qquad \hat{\mathbf{r}}=\sin\theta\cos\phi\ \hat{\mathbf{x}}+\sin\theta\sin\phi\ \hat{\mathbf{y}}+\cos\theta\ \hat{\mathbf{z}}\ , \qquad (\text{پ.۱۸})$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ بردار واحد است که بوسیله بترتیب زاویه قطبی θ و سمت ϕ تعریف می‌شوند. از رابطه (پ.۱۵) می‌توانیم نشان دهیم که $\left\{ [۲] ، (۵۴.۳) \right\}$

$$Y^*_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\phi) \qquad (پ.۱۹)$$

هارمونیک کروی یک مجموعه توابع متعامد را برای زاویا تشکیل میدهند $\left\{ [۲] ، (۵۵.۳) \right\}$؛

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \; . \qquad (پ.۲۰)$$

و رابطه تکمیلی برابر است با $\left\{ [۲] ، (۵۶.۳) \right\}$؛

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi') Y^*_{lm}(\theta,\phi) = \delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta') \; . \qquad (پ.۲۱)$$

چند هارمونیک‌های کروی در زیر آورده می‌شود:

$$l = 0 \qquad Y_{00} = \tfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l = 1 \qquad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{j\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \end{cases}$$

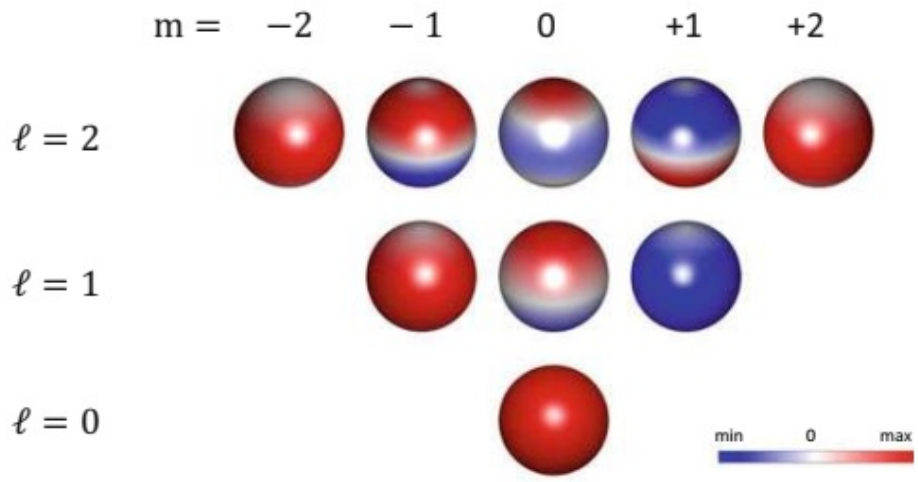
$$l = 2 \qquad \begin{cases} Y_{22} = \sqrt{\frac{5}{32\pi}} \sin^2\theta e^{j2\phi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{j\phi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

برای $\theta = 0$ داریم؛

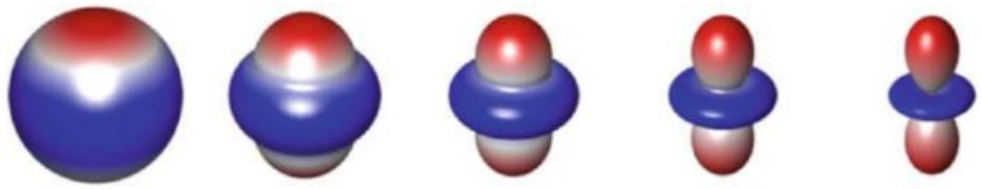
$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \qquad (پ.۲۲)$$

شکل (پ.۱) چند هارمونیک کروی را روی کره واحد نشان می‌دهد. تابع با $l = 0$ ثابت است و توابع با$l = 1, 2$ دارای یک یا دو گره در جهت قطبی یا سمت هستند. گاهی اوقات از تجسم دیگر $Y_{lm}(\theta,\phi)$ با تغییر شعاع بر اساس مقدار مطلق هارمونیک‌های کروی، همانطور که در شکل (پ.۲) در مثال Y_{20} و در شکل (پ.۳)-الف هارمونیک‌های کروی با کمترین درجه نشان داده شده است، استفاده می‌شود. با گرفتن ترکیبات خطی داریم:

$$\begin{cases} \frac{j}{\sqrt{2}}(Y_{lm} - (-1)^m Y_{l,-m}) & m < 0 \quad \text{برای} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{lm} + (-1)^m Y_{l,-m}) & m > 0 \quad \text{برای} \end{cases} \qquad (پ.۲۳)$$



شکل پ.۱: تجسم هارمونیک‌های کروی برداری $Y_{lm}(\theta,\phi)$ به‌ترتیب برای درجه‌ها و مرتبه‌های زاویه‌ای برای m مختلف است. ما $e^{jm\phi}Y_{lm}(\theta,\phi)$ را روی واحد کره با استفاده از نواررنگی که در پایین شکل نشان داده می‌شود، رسم می‌کنیم.



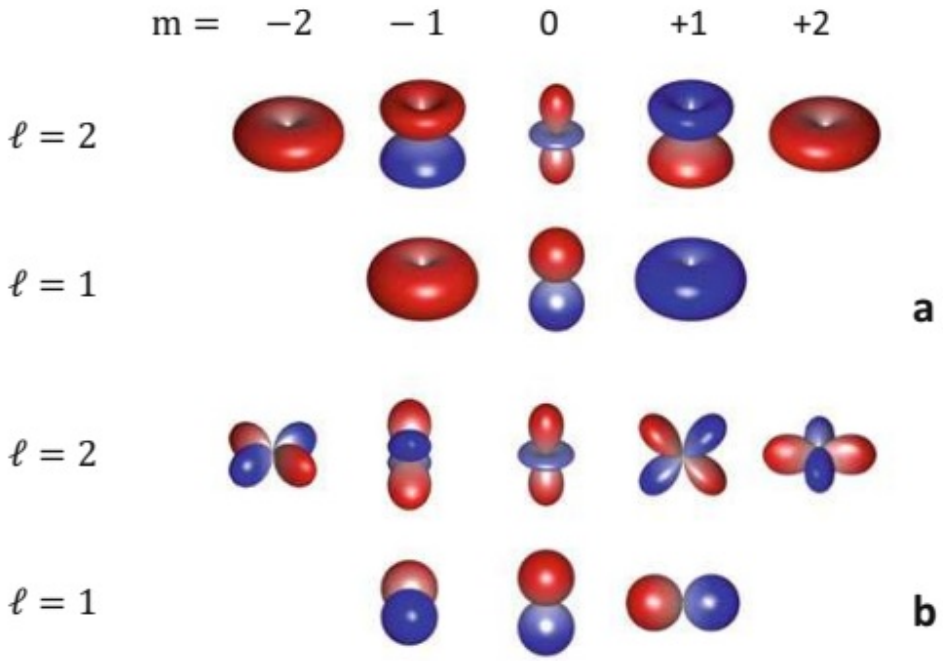
شکل پ.۲: تجسم جایگزین هارمونیک‌های کروی برداری برای هر مقدار θ,ϕ، شعاع را از یک به‌مقدار مطلق $Y_{lm}(\theta,\phi)$ مقیاس می‌کنیم و در نهایت به‌نمودار سمت راست می‌رسیم.

پ.۳ توابع بسل و هنکل کروی

در اینجا به‌قسمت شعاعی معادله موج کروی، (پ.۶)، می‌پردازیم،

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_l(r)}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]f_l(r)=0\ . \qquad (\text{پ.۲۴})$$

جواب‌ها به‌ترتیب با ترکیب خطی توابع بسل و هنکل کروی j_l و $h_l^{(1)}$ به‌دست می‌آیند $\{$ [۲] ، (۸۴.۹)$\}$؛



شکل پ.۳: تجسم (**الف**) $e^{jm\phi}Y_{lm}$ و (**ب**) نمایش با مقدار حقیقی معادله (پ.۲۳) برای کمترین درجه‌های زاویه‌ای با استفاده از روش تغییر شکل که در شکل (پ.۲) نشان داده شده است.

جواب بخش شعاعی معادله موج اسکالر

$$f_l(kr) = A_{lm}j_l(kr) + B_{lm}h_l^{(1)}(kr) \qquad \text{(پ.۲۵)}$$

که در آن A_{lm} و B_{lm} ثابت‌های دلخواهی هستند. مرسوم است که توابع بسل و هنکل کروی را بصورت $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1,2)}(x)$ تعریف کنند که با توابع بسل $J_l(x), N_l(x)$ طبق روابط زیر بهم مربوط می‌شوند $\left\{ [۲] \text{ ، } (۸۵.۹) \right\}$؛

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ n_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ h_l^{(1,2)}(x) &= j_l(x) \pm jn_l(x) \end{aligned} \qquad \text{(پ.۲۶)}$$

توابع بسل کروی را می‌توان از رابطه $\left\{ [۲] \text{ ، } (۸۶.۹) \right\}$ بدست آورد؛

$$\begin{aligned} j_l(x) &= (-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ n_l(x) &= -(-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\cos x}{x}\right) \end{aligned} \tag{پ.۲۷}$$

جند نمونه از توابع بسل و هنکل در اینجا آورده می‌شود؛

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3\cos x}{x},$$

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{jx}}{x}, \quad h_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{jx}}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad h_2^{(1)}(x) = \frac{e^{jx}}{x}\left(1 + \frac{j3}{x} - \frac{3}{x^2}\right).$$

برای مقادیر کوچک x می‌توانیم از بسط سری استفاده کنیم $\left\{ [۲] \text{ ، } (۸۸.۹) \right\}$؛

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \frac{x^l}{(2l+1)!!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \cdots\right] \\ n_l(x) &= -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}\left[1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \cdots\right] \end{aligned} \tag{پ.۲۸}$$

برای آرکومان‌های بزرگ می‌توانیم از بسط مجانبی استفاده کنیم، $\left\{ [۲] \text{ ، } (۸۹.۹) \right\}$؛

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(x) &= -\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \\ h_l^{(1)}(x) &= (-j)^{l+1}\frac{e^{jx}}{x} \end{aligned} \tag{پ.۲۹}$$

از این بسط‌ها می‌توانیم نتایج کلی زیر را در مورد ضرایب A_{lm}, B_{lm} برای معادله موج کروی در معادله (پ.۲۵) بدست آوریم.

- **توابع بِسل** هنگام استفاده از جواب موج کروی در بازه $r \in [0, r_{max}]$ باید اطمینان حاصل کنیم کَه $f_l(kr)$ در مبدا معین است. به‌همین دلیل قرار دادیم:

$$f_l(kr) = A_{lm} j_l(kr) \quad \text{برای} \quad r \in [0, r_{max}]$$

- **توابع هنکل** هنگام استفاده از جواب موج کروی در بازه $r \in [r_{min}, \infty)$ باید اطمینان حاصل کنیم که برای مقادیر kr بزرگ $f_l(kr)$ به‌یک موج خارج شونده تبدیل می‌شود. به‌همین دلیل قرار دادیم[۲]:

[۲] خوانندگان محترم توجه کنید که اگر تغییرات زمانی را بصورت $e^{-i\omega t}$ فرض کنیم که نوسینده این کتاب آنرا بکار برده میبایست موج خارج شونده را هنکل نوع اول انتخاب کنیم. اما نظر باینکه ما تغییرات زمانی را برای دانشجویان مهندسی با $e^{j\omega t}$ تغییر دادیم، ازاینرو موج خارج شونده کروی را هنکل نوع دوم قرار دادیم.

$$f_l(kr) = B_{lm} h_l^{(2)}(kr) \quad \text{برای} \quad r \in [r_{min}, \infty)$$

توابع بسل کروی روابط بازگشتی زیر را برآورده می‌کنند {[۲] ، (۹۰.۹)}؛

$$\begin{aligned} \frac{2l+1}{x} z_l(x) &= z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x) \\ z_l'(x) &= \frac{1}{2l+1}\Big[l z_{l-1} - (l+1) z_{l+1}(x)\Big] \\ \frac{d}{dx}\Big[x z_l(x)\Big] &= x z_{l-1}(x) - l z_l(x) \end{aligned} \tag{پ.۳۰}$$

که در آن $z_l(x)$ هر یک از توابع $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1,2)}(x)$ است. از نظر عددی باید برای توابع بسل از $j_0(x), j_1(x)$ شروع کرد تا توابع بسل مرتبه بالاتر را با استفاده از یک طرح رو به‌بالا محاسبه کرد، و از $h_l^{(1)}(x), h_{l-1}^{(1)}(x)$ برای محاسبه توابع هنکل مرتبه پایین در یک طرح رو به‌پایین شروع کرد. در غیر این صورت یک راه حل تکراری ممکن است برای درجه‌های کروی بزرگ از نظر عددی ناپایدار شود.

در نهایت رابطه‌ای برای تجزیه تابع گرین معادله (۷.۵) بر حسب توابع کروی ارائه میدهیم {[۲]، (۹۸.۹)}؛

بسط تابع گرین کروی

$$\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -jk \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} j_l(kr_<) h_l^{(2)}(kr_>) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{پ.۳۱}$$

در اینجا $r_<$ برای مقدار کوچکتر r از r' و $r_>$ برای r بزرگتر از r' استفاده شده است.

پیوست ت

هارمونیک‌های کروی برداری

در این پیوست حل معادله موج برداری زیر را

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (ت.۱)$$

بر حسب توابع پایه طولی و عرضی بحث می‌کنیم . برای مختصات کروی این ما را به‌نام هارمونیک‌های کروی برداری هدایت می‌کند که در زیر بیشتر معرفی خواهد شد. بحث خود را با یک انحراف شروع کرده و به‌حل معادله موج در مختصات دکارتی می‌اندیشیم.

معادله موج در مختصات دکارتی

در بخش ۵.۲ نشان دادیم که هر میدان برداری را می‌توان به‌قسمت‌های طولی و عرضی آن تجزیه کرد. برای یک موج مسطح با عدد موج $\mathbf{k}$، قسمت‌های طولی و عرضی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^{L} = \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{k}}\right)\hat{\mathbf{k}}, \qquad \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^{\perp} = \mathbf{F}_{\mathbf{k}} - \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^{L}$$

برای هندسه‌های خاص مانند محیط‌های لایه لایه می‌توان از معادله (۴۳.۲) برای تجزیه میدان‌های عرضی به‌مودهای TE و TM استفاده کرد. بنابراین میدان $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$ را می‌توان توسط بردارهای زیر (غیر نرمالیزه) پوشش داد:

$$\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}\right) .$$

تصویر روی $\mathbf{k}$ مولفه طولی $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^{L}$ را می‌دهد، در حالی که تصویر روی دو بردار دیگر، اگر $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$ نشان دهنده یک میدان الکتریکی و مشخصه TE و TM برای یک میدان مغناطیسی باشد، به‌ترتیب مولفه‌های عرضی را با مشخصه TE و TM می‌دهد.

معادله موج برداری

می‌توانیم این روند تجزیه را از منظری کمی متفاوت بررسی کنیم. یک پتانسیل اسکالر $\psi(\mathbf{r})$ را در نظر گیرید که در معادله هلم‌هولتز صدق می‌کند؛

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

از این چنین پتانسیلی می‌توانیم مجموعه‌ای از توابع برداری زیر را بدست آوریم:

$$\mathbf{L}_\psi = \nabla\psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{M}_\psi(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{N}_\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k}\nabla \times \mathbf{M}_\psi(\mathbf{r}) \ , \qquad \text{(ت.۲)}$$

که در آن $\mathbf{c}$ یک بردار راهنما که در بزودی مشخص می‌شود. بر اساس ساخت، $\mathbf{L}_\psi$ یک تابع برداری طولی است، در حالی که هر دو $\mathbf{M}_\psi$ و $\mathbf{N}_\psi$ توابع بردار عرضی هستند، که گاهی اوقات به‌عنوان توابع بردار سلونوئیدی نامیده می‌شوند، و هر دو در معادله موج صدق می‌کنند. برای اثبات این موضوع، $\mathbf{M}_\psi$ را در معادله موج وارد کرده و به‌دست می‌آوریم :

$$\nabla\Big(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})\Big) - \nabla^2\Big(\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})\Big) + k^2\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r}) = 0 \ .$$

جمله اول حذف می‌شود، زیرا دیورژانس کرل یک بردار همیشه صفر است، و بنابراین $\mathbf{M}_\psi$ در معادله (ت.۱) صدق می‌کند. به‌همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم که $\mathbf{N}_\psi$ نیز در معادله موج صدق می‌کند. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که $\mathbf{M}_\psi$ و $\mathbf{N}_\psi$ از طریق روابط زیر با یکدیگر مرتبط هستند:

$$k\mathbf{N}_\psi = \nabla \times \mathbf{M}_\psi, \quad k\mathbf{M}_\psi = \nabla \times \mathbf{N}_\psi$$

بنابراین، اگر $\mathbf{M}_\psi$ نشان دهنده میدان الکتریکی باشد، $\mathbf{N}_\psi$ یک میدان مغناطیسی است و بالعکس. از بحث فوق چنین بر می‌آید که هر تابع برداری را می‌توان بر حسب سه تابع اسکالر $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r}), w(\mathbf{r})$ به‌صورت زیر بیان کرد.

تجزیه به‌توابع پایه طولی و عرضی

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{L}_w(\mathbf{r}) + \mathbf{M}_u(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_v(\mathbf{r}) \qquad \text{(ت.۳)}$$

به طور مشابه، هر تابع بردار عرضی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) = \mathbf{M}_u(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_v(\mathbf{r}) \qquad \text{(ت.۴)}$$

اگر پتانسیل‌های مولد $\psi(\mathbf{r}) = e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ را برای امواج صفحه و بردار راهنما را $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{z}}$ در نظر گیریم، مشاهده می‌کنیم که توابع برداری بصورت زیر می‌شوند.

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}) = j\mathbf{k}e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}) = j\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{N}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k^2}\mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}e^{j\mathbf{k}}\right) \ .$$

این به‌توابع پایه‌ای که در بالا درنظرگرفتیم مربوط می‌شود.

معادله موج کروی

روشی که اکنون بیان شد را می‌توان برای معادله موج در مختصات کروی (پ.۷) نیز اعمال کرد.

$$\psi(r,\theta,\phi)=\sum_{lm}\Big[A_{lm}j_l(kr)+B_{lm}h_l^{(1)}(kr)\Big]Y_{lm}(\theta,\phi)$$

که در آن l و m به‌ترتیب درجه و مرتبه کروی هستند، A_{lm},B_{lm} ضرایبی هستند که باید برای مسئله مورد بررسی تعیین شوند، $j_l,h_l^{(1)}$ به‌ترتیب تابع بسل و هنکل کروی مرتبه اول و Y_{lm} هارمونیک‌های کروی هستند. برای بحث مفصل در مورد راه حل و توابع ویژه به‌پیوست پ مراجعه کنید. اکنون بردار راهنما را روی $\mathbf{c}=\mathbf{r}$ قرار می‌دهیم به‌طوری که

$$\mathbf{M}_\psi(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{r}f_l(\mathbf{r})Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (ت.۵)$$

که در آن f_l ترکیب خطی توابع بسل و هنکل هستند. در رابطه بالا از $\nabla\times\mathbf{r}=-\mathbf{r}\times\nabla$ برای بدست آوردن رابطه زیر استفاده شده است.

$$\mathbf{M}_\psi(\mathbf{r})=-j\Big(\frac{1}{j}\mathbf{r}\times\nabla\Big)f_l(r)Y_{lm}(\theta,\phi)=-j\hat{\mathbf{L}}f_l(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (ت.۶)$$

در اینجا عملگر مومنتوم زاویه زیر را

$$\hat{\mathbf{L}}=-j\mathbf{r}\times\nabla \qquad (ت.۷)$$

که در مکانیک کوانتوم معروف است (بدون $\hbar$) معرفی کرده‌ایم. این عملگر کاملاً رسمی معرفی شده است و ربطی به‌اثرات کوانتومی ندارد. با این حال، $\hat{\mathbf{L}}$ به‌ما امکان می‌دهد چندین نتیجه را که از مکانیک کوانتومی به‌خوبی شناخته شده‌اند، اتخاذ کنیم.

ت.۱ هارمونیک‌های کروی برداری

به‌این نتیجه میرسیم که معرفی هارمونیک‌های کروی برداری برای تجزیه میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی در مختصات کروی راحت باشد $\{$ [۲] ، (۱۱۹.۹)$\}$.

هارمونیک‌های کروی برداری

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\hat{\mathbf{L}}Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (ت.۸)$$

توجه داشته باشید که در ادبیات چندین تعاریف کمی متفاوت از هارمونیک‌های کروی برداری وجود دارد و در اینجا کتاب جکسون[۲] را دنبال می‌کنیم. از مرجع [۱۲۰]

$$\hat{\mathbf{L}}=j\Big(\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) \qquad (ت.۹)$$

سپس می‌توان هارمونیک‌های کروی برداری را بدست آورد، که در آن $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ به‌ترتیب بردارهای واحد در جهت قطب و سمت هستند. با این خواهیم داشت؛

$$l=0 \qquad \mathbf{X}_{00}=0$$

$$l=1 \qquad \begin{cases} \mathbf{X}_{11}=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}e^{j\phi}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}+j\cos\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \\ \mathbf{X}_{10}=j\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases}$$

$$l=2 \qquad \begin{cases} \mathbf{X}_{22}=-\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta e^{j2\phi}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}+j\cos\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \\ \mathbf{X}_{21}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}e^{j\phi}\left(\cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+j\cos 2\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \\ \mathbf{X}_{20}=j\sqrt{\frac{5}{32\pi}}\sin 2\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases}$$

از رابطه (پ.۱۹) داریم؛

$$\mathbf{X}^*_{lm}(\theta,\phi)=(-1)^{m+1}\mathbf{X}_{l,-m}(\theta,\phi) \tag{ت.۱۰}$$

با استفاده از ترکیبات خطی معادله (پ.۲۳) نمایشی با مقدار حقیقی برای هارمونیک‌های کروی برداری به‌دست می‌آوریم که برای چند درجه و مرتبه زاویه‌ای در شکل (ت.۱) نشان داده شده است. $\mathbf{X}_{lm}$ توابع برداری هستند که مماس بر کره واحد بوده و دارای گره‌هایی در جهت قطب و سمت هستند. از معادله (پ.۲۲) می‌توان نشان داد که

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{z}})=\sqrt{\frac{2l+1}{16\pi}}\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}\delta_{m,\pm 1}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}=\hat{\mathbf{x}}\pm\hat{\mathbf{y}}\ . \tag{ت.۱۱}$$

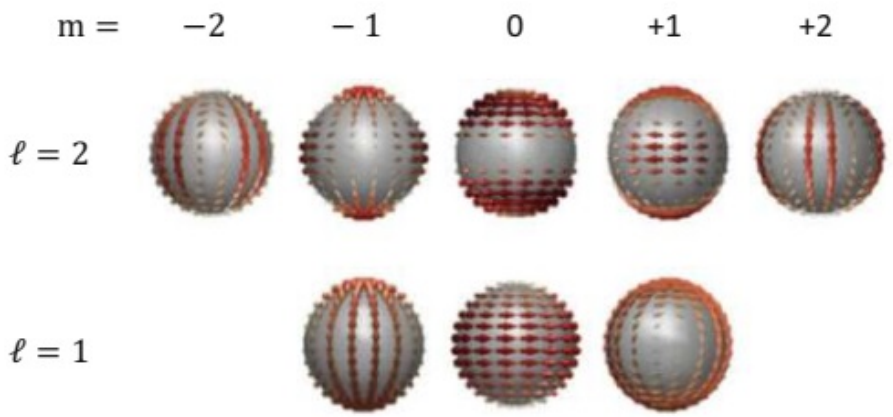
ت.۲ روابط متعامد

هارمونیک‌های کروی برداری را می‌توان برای ساخت یک سری توابع پایه کامل برای حل معادله موج در مختصات کروی استفاده کرد. این توابع پایه از سه تابع برداری تشکیل شده است:

توابع پایه برای معادله موج کروی

$$\hat{\mathbf{r}}h_l(kr)Y_{lm}, \qquad g_l(kr)\mathbf{X}_{lm}, \qquad \nabla\times f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}\ , \tag{ت.۱۲}$$

که در آن f_l, g_l و h_l توابع کروی بسل یا هنکل (یا ترکیب خطی آنها) هستند. اولین تابع برداری، یک میدان برداری طولی را توصیف می‌کند که در تحلیل بعدی نیازی به‌آن نخواهد بود، در



شکل ت.۱: هارمونیک‌های کروی برداری برای درجه‌های زاویه‌ای مختلف. ترکیبات خطی را تشکیل می‌دهیم و برای $m \leq 0$ قسمت موهومی X_{lm} و برای$m > 0$ قسمت حقیقی را رسم می‌کنیم. اندازه بردارها برابر نورم X_{lm} است.

حالی که دو تابع دیگر عرضی بوده و همانطور که چندی بعد نشان داده خواهد شد، بر یکدیگر متعامدند. قبل از انجام این کار، جبر تکانه زاویه‌ای (مومنتوم زاویه‌ای) را که معمولاً در مکانیک کوانتوم استفاده می‌شود، خلاصه می‌کنیم[۱۲۰]، که به‌ما اجازه می‌دهد تعدادی از روابط مفید را بسیار ساده بدست آوریم.

جبر مومنتوم زاویه‌ای

در ادامه عملگر مومنتوم $\hat{\boldsymbol{\pi}} = -j\nabla$ (بدون $\hbar$) را با مقایسه مکانیک کوانتوم معرفی می‌کنیم و عملگر تکانه زاویه‌ای را به‌شکل $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{\pi}}$ می‌نویسیم. با فرض

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$$

هارمونیک‌های کروی را با استفاده از نماد برا-کتbra-ket مکانیک کوانتوم نشان میدهیم. هارمونیک‌های کروی تابع‌های ویژه $\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2$ هستند،

$$\hat{L}_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle, \quad \hat{L}^2|l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle \tag{ت.۱۳}$$

معمولاً معرفی عملگرها مفید هستند $\{$ [۲]، (۱۰۲.۹)$\}$.

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm j\hat{L}_y \tag{ت.۱۴}$$

که با اعمال بر روی حالت‌های ویژه تکانه زاویه‌ای،$\{$ [۲]، (۱۰۴.۹)$\}$؛

$$\hat{L}_\pm|l, m\rangle = \sqrt{(l \mp 1)(l \pm m + 1)}|l, m \pm 1\rangle \tag{ت.۱۵}$$

با استفاده از

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\hat{L}_x+j\hat{L}_y\right)(\hat{x}-j\hat{y})+\left(\hat{L}_x-j\hat{L}_y\right)(\hat{x}+j\hat{y})\right\}=\hat{L}_x\hat{x}+\hat{L}_y\hat{y}$$

می‌توانیم عملگر تکانه زاویه‌ای را به‌شکل زیر تجزیه کنیم؛

$$\hat{\mathbf{L}}=\frac{1}{2}\left\{\hat{L}_+\boldsymbol{\epsilon}_+^*+\hat{L}_-\boldsymbol{\epsilon}_-^*\right\}+\hat{L}_z\hat{\mathbf{z}} \qquad (\text{ت.۱۶})$$

که در آن $\boldsymbol{\epsilon}_\pm=\hat{\mathbf{x}}\pm j\hat{\mathbf{y}}$ است. با این می‌توانیم هارمونیک‌های کروی برداری را بصورت زیر محاسبه کنیم؛

$$\sqrt{l(l+1)}\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)=\frac{1}{2}\left\{\hat{L}_+\boldsymbol{\epsilon}_+^*+\hat{L}_-\boldsymbol{\epsilon}_-^*\right\}Y_{lm}(\theta,\phi)+mY_{lm}(\theta,\phi)\hat{\mathbf{z}}\ , \qquad (\text{ت.۱۷})$$

که در آن جمله اول در سمت راست باید با استفاده از معادله (ت.۱۵) محاسبه شود. از رابطه تبدیل ابتدائی $[r_m,\hat{\pi}_n]=j\delta_{mn}$ می‌توان تعدادی از روابط مفید را بدست آورد{ [۲]، (۱۰۵.۹)}؛

$$\hat{\mathbf{L}}\nabla^2=\nabla^2\hat{\mathbf{L}},\quad \hat{\mathbf{L}}\times\hat{\mathbf{L}}=j\hat{\mathbf{L}},\quad \nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\hat{L}^2}{r^2} \qquad (\text{ت.۱۸})$$

بدست آوردن روابط متعامد

در ادامه نشان می‌دهیم که این سه تابع

$$\langle\theta,\phi|\mathbf{r}\Big|l,m\rangle,\quad \langle\theta,\phi|\hat{\mathbf{L}}\Big|l,m\rangle,\quad \langle\theta,\phi|\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}\Big|l,m\rangle \qquad (\text{ت.۱۹})$$

یک مبنای (غیر نرمالیزه) را پوشش می‌دهند. در انجام این کار، از رابطه متعامد معادله (پ.۲۰) برای هارمونیک‌های کروی بهره برداری می‌کنیم؛

$$\begin{aligned}\langle l',m'|l,m\rangle &= \langle l',m'|\Big[\oint|\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|d\Omega\Big]|l,m\rangle\\ &= \oint Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)Y_{l,m}(\theta,\phi)d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{m'm}\end{aligned}$$

جایی که در خط اول عملگر واحد را برای بیان هارمونیک‌های کروی در مختصات کروی قرار داده‌ایم و از $d\Omega$ برای انتگرال‌گیری روی کره واحد استفاده کرده‌ایم. با استفاده از اتحادهای زیر

$$\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{L}}=\mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}\right)=\hat{\mathbf{L}}\cdot\left(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}\right)=0$$

به‌راحتی می‌توان با استفاده از خواص عملگرها می‌توان نشان داد که توابع تعریف شده در معادله (ت.۱۹) متعامد با یکدیگر هستند؛

$$\begin{aligned}\langle l',m'|\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{L}}|l,m\rangle &= 0\\ \langle l',m'|\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}|l,m\rangle &= 0\\ \langle l',m'|\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}|l,m\rangle &= 0\end{aligned} \qquad (\text{ت.۲۰})$$

بهمین نحو داریم؛

$$\begin{aligned}\langle l',m'|\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}|l,m\rangle &= r^2\delta_{ll'}\delta_{m'm}\\ \langle l',m'|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}|l,m\rangle &= l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{m'm}\\ \langle l',m'|\Big(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}\Big)\cdot\Big(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}}\Big)|l,m\rangle &= r^2 l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{m'm}\end{aligned} \tag{ت.۲۱}$$

با استفاده از این روابط رابطه تعامد را بدست می‌آوریم:

روابط متعامد برای هارمونیک‌های کروی برداری I

$$\oint \mathbf{X}^*_{l'm'}(\theta,\phi)\cdot\Big[g_l(r)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\Big]d\Omega = g_l(r)\delta_{ll'}\delta_{m'm} \tag{ت.۲۲آ}$$

$$\oint \mathbf{X}^*_{l'm'}(\theta,\phi)\cdot\Big[\nabla\times f_l(r)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\Big]d\Omega = 0 \tag{ت.۲۲ب}$$

معادله(ت.۲۲آ) را می‌توان به‌راحتی از برابری دوم معادله (ت.۲۱) ثابت کرد. برای اثبات رابطه دوم، از تجزیه عملگر مومنتوم در تمرین سوم استفاده می‌کنیم تا به‌رابطه زیر دست یابیم {[۲]، (۶۰.۱۰)}؛

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}\times f_l(r)\hat{\mathbf{L}} = -\frac{j}{r^2}\frac{d}{r}\Big[rf_l(r)\Big]\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}} + \frac{f_l(r)}{r^2}\mathbf{r}\hat{L}^2\ . \tag{ت.۲۳}$$

با استفاده از روابط متعامد (ت.۲۰) خواهیم داشت؛

$$\Big\langle l',m'\Big|\hat{\mathbf{L}}\cdot\Big\{-\frac{j}{r^2}\frac{d}{dr}\Big[rf_l(r)\Big]\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{L}} + \frac{f_l(r)}{r^2}\mathbf{r}\hat{L}^2\Big\}\Big|l,m\Big\rangle = 0$$

که معادله (ت.۲۲ب) را ثابت می‌کند. در همین راستا می‌توانیم از روابط متعامد بین حالت‌های پایه معادله (ت.۱۹) استفاده کنیم. برای به‌دست آوردن مجموعه دوم از روابط متعامد

روابط متعامد برای هارمونیک‌های کروی برداری II

$$\oint \mathbf{r}\times\mathbf{X}^*_{l'm'}(\theta,\phi)\cdot\Big[g_l(r)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\Big]d\Omega = 0 \tag{ت.۲۴آ}$$

$$\oint \mathbf{r}\times\mathbf{X}^*_{l'm'}(\theta,\phi)\cdot\Big[\nabla\times f_l(r)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\Big]d\Omega = -j\Big[\frac{d}{dr}rf_l(r)\Big]\delta_{ll'}\delta_{m'm} \tag{ت.۲۴ب}$$

که در زیر در زمینه نظریه **می**[۱] استفاده خواهد شد. در اصل، می‌توانیم روابط متعامد را برای تابع بردار طولی $\hat{\mathbf{r}}h_l(kr)Y_{lm}$ در امتداد همان خطوط بدست آوریم. با این حال، اغلب کافی است که فقط توابع بردار عرضی را در نظر بگیریم، و بنابراین روابط متعامد را برای تابع طولی به‌عنوان تمرین به‌خواننده علاقه‌مند واگذار می‌کنیم.

تمرینات

- **تمرین ۱** ثابت کنید که $\mathbf{N}_\psi(\mathbf{r})$ تعریف شده در معادله موج (ت.۱)، در رابطه (ت.۲) صدق می‌کند.
- **تمرین ۲** ثابت کنید که $\mathbf{N}_\psi$ و $\mathbf{M}_\psi$ تعریف شده در رابطه (ت.۲) از طریق رابطه $k\mathbf{M}_\psi = \nabla \times \mathbf{N}_\psi$ بهم مربوط هستند. از تعریف $k\mathbf{N}_\psi = \nabla \times \mathbf{M}_\psi$ شروع کرده و ثابت کنید که $\nabla \cdot \mathbf{M}_\psi = 0$ است.
- **تمرین ۳** عملگر مومنتوم $\hat{\boldsymbol{\pi}} = -j\nabla$ را درنظر گیرید. از رابطه تبدیل $[r_m, \hat{\pi}_n] = j\delta_{mn}$ استفاده کرده و ثابت کنید که

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = -\frac{j\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}}$$

- **تمرین ۴** از طریق محاسبه دقیق روابط متعامد معادله (ت.۲۴) را بدست آورید.
- **تمرین ۵** بازاء $l = 1$ توابع پایه $\nabla \times f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}$ را باستفاده از رابطه (ت.۲۳) محاسبه کنید.
- **تمرین ۶** روابط متعامد معادله (ت.۲۴) را اثبات کنید.

[۱] Mie

پیوست ث

نظریه می

در این پیوست نحوه حل معادلات ماکسول را برای یک ذره کروی نشان می‌دهیم. این رویکرد معمولاً به‌افتخار کار اصلی گوستاو می در مورد این موضوع به‌عنوان "نظریه می" نامیده می‌شود[۷۴]. تئوری می جشنی از توابع ویژه است، یعنی هارمونیک‌های کروی، هارمونیک‌های کروی برداری، و همچنین توابع کروی بسل و هنکل، و اشتقاق آن تا حدودی پیچیده است. با این حال، این یکی از معدود مسائل در الکترودینامیک است که می‌توان آن را به‌صورت تحلیلی حل کرد و جواب‌های می کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی پیدا کرده‌اند، بنابراین ممکن است ارزش آن را داشته باشد که این مسئله را کمی با جزئیات بیشتر بررسی کنیم.

ث.۱ بسط چندقطبی میدان‌های الکترومغناطیسی

در پیوست قبل نشان دادیم که هر تابع برداری عرضی را می‌توان بر حسب توابع پایه بسط داد؛

$$\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{r} f_l(kr) Y_{lm}, \quad \mathbf{N}_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times \mathbf{r} g_l(kr) Y_{lm} \ ,$$

که در آن f_l و g_l توابع بسل یا هنکل هستند. این دو تابع برداری از طریق روابط زیر بهم مربوط هستند:

$$k\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{N}_f(\mathbf{r}), \quad k\mathbf{N}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}_f(\mathbf{r}) \ . \tag{ث.۱}$$

در ادامه این تجزیه را برای میدان‌های الکترومغناطیسی اعمال می‌کنیم. جدا از یک پیش فاکتور بی‌اهمیت، تابع برداری $\mathbf{M}_g$ برای میدان الکتریکی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{M}_g(\mathbf{r}) = g_l(r)\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{(میدان الکتریکی)} \tag{ث.۲}$$

که در آن $\mathbf{X}_{lm}$ هارمونیک کروی برداری است که در معادله (ت.۸) تعریف شده است. از طریق قانون فارادی، $\mathbf{M}_g$ به‌میدان مغناطیسی بصورت زیر مربوط می‌شود:

$$-jkZ\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}_g(\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_g(\mathbf{r})$$

که در آن Z امپدانس است. به‌طور مشابه، می‌توانیم تابع برداری $\mathbf{M}_f$ را برای میدان مغناطیسی به‌شکل زیر بیان کنیم:

$$Z^{-1}\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = f_l(r)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \quad \text{(میدان مغناطیسی)} \tag{ث.۳}$$

که به‌میدان الکتریکی بصورت زیر مربوط می‌شود؛

$$jkZ^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Z^{-1}\nabla\times\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = Z^{-1}k\mathbf{N}_f(\mathbf{r})$$

با کنار هم قرار دادن مولفه‌های میدان الکتریکی $\mathbf{M}_g(\mathbf{r})+\mathbf{N}_f(\mathbf{r})$ و مولفه‌های میدان مغناطیسی $\mathbf{M}_f(\mathbf{r})+\mathbf{N}_g(\mathbf{r})$ به‌تجزیه میدان‌های الکترومغناطیسی بر حسب هارمونیک‌های کروی برداری می‌رسیم.

بسط چندقطبی میدان‌های الکترومغناطیسی

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= Z\sum_{l,m}\left[b_{lm}g_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) - \frac{j}{k}a_{lm}\nabla\times f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\right]\\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m}\left[a_{lm}f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) + \frac{j}{k}b_{lm}\nabla\times g_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\right]\end{aligned} \tag{ث.۴}$$

این عبارت تجزیه کلی برای میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی را فراهم می‌کند که در آن ضرایب a_{lm} و b_{lm} و توابع شعاعی f_l و g_l باید برای مسئله مورد مطالعه تعیین شوند.

ضرایب چندقطبی

فرض کنید میدان های الکترومغناطیسی (عرضی) $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ را معلوم و می‌خواهیم ضرایب بسط a_{lm} و b_{lm} مربوطه را محاسبه کنیم. نقطه شروع بسط چند قطبی برای میدان الکتریکی معادله (ث.۴) است.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Z\sum_{l,m}\left[b_{lm}g_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) - \frac{j}{k}a_{lm}\nabla\times f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)\right]$$

هر دو طرف را از سمت چپ در $\mathbf{r}$ ضرب و توجه می‌کنیم که $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{L}}=0$ به‌طوری که اولین جمله داخل پرانتز صفر شود. عبارت دوم را می‌توان با استفاده از یک جایگشت دوری[۱] در ضرب سه گانه از طریق رابطه زیر ساده کرد؛

$$j\mathbf{r}\cdot\nabla\times f_l(kr)\mathbf{X}_{lm} = \Big(j\mathbf{r}\times\nabla\Big)\cdot f_l(kr)\mathbf{X}_{lm} = -\hat{\mathbf{L}}\cdot f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}$$

بنابراین خواهیم داشت؛

[۱] Cyclic Permutation

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} = -Z\sum_{l,m}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k}a_{lm}f_l(kr)Y_{l,m}(\theta,\phi)\ ,$$

که در آن از تعریف معادله (ت.۸) برای هارمونیک‌های کروی برداری استفاده کرده‌ایم. اگر معادله بالا را با یک هارمونیک کروی با درجه و مرتبه معین ضرب کنیم، می‌توانیم ضرایب چند قطبی بیان شده بر حسب میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی را در تمام زوایا از طریق انتگرال‌گیری بدست آوریم؛

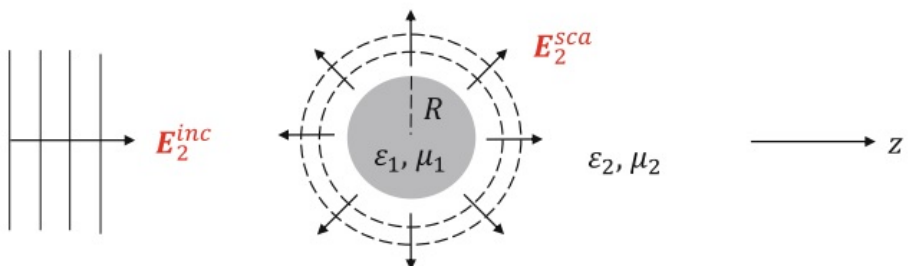
ضرایب بسط چندقطبی

$$\begin{aligned} a_{lm}f_l(kr) &= -\frac{Z^{-1}k}{\sqrt{l(l+1)}}\oint Y^*_{lm}(\theta,\phi)\Big[\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big]d\Omega \\ b_{lm}g_l(kr) &= \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\oint Y^*_{lm}(\theta,\phi)\Big[\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r})\Big]d\Omega \end{aligned} \tag{ت.۵}$$

عبارت دوم برای b_{lm} را می‌توان با همان روش از بسط چندقطبی میدان مغناطیسی معادله (ت.۴) بدست آورد.

ت.۲ ضرایب می

در مرحله بعد مسئله یک نانوذره کروی با شعاع R و با خواص مواد همگن μ_1,ϵ_1 در داخل کره و μ_2,ϵ_2 در خارج از کره را در نظر می‌گیریم، شکل (ت.۱). میدان‌های الکتریکی $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ و $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ را در داخل و خارج از کره بصورت زیر تجزیه می‌کنیم؛



شکل ت.۱: شماتیک مسئله می. یک ذره کروی با شعاع R و خواص مواد μ_1,ϵ_1 در محیطی با μ_2,ϵ_2 قرار دارد. در اینجا ذره توسط یک موج صفحه با میدان تابشی E_2^{inc} تحریک شده، و پاسخ کره با میدان‌های پراکنده E_2^{sca} و E^sca_1 به‌ترتیب در خارج و داخل ذره کروی توصیف می‌شود. در نظریه می، این میدان‌های پراکنده بر حسب ضرایب می توصیف می‌شوند.

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1^{sca}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2^{sca}(\mathbf{r})$$

با یک عبارت مربوط به‌میدان‌های مغناطیسی. در اینجا $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})$ میدان تابشی است، به‌عنوان مثال تحریک با یک موج صفحه یا یک دوقطبی نوسانی صورت می‌گیرد، و $\mathbf{E}^{sca}_{1,2}(\mathbf{r})$ میدان‌های پراکنده‌ای هستند که پاسخ نانوذرات کروی را توصیف می‌کنند. میدان‌های الکترومغناطیسی تابشی را می‌توان بر حسب بسط چندقطبی معادله (ث.۴) بصورت زیر بیان کرد.

$$\mathbf{E}_2^{inc} = Z_2 \sum_{l,m} \left[b_{lm}^{inc} g_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) - \frac{j}{k_2} a_{lm}^{inc} \nabla \times f_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

(ث.۶)

$$\mathbf{H}_2^{inc} = \sum_{l,m} \left[a_{lm}^{inc} f_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) + \frac{j}{k_2} b_{lm}^{inc} \nabla \times g_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

که در آن ضرایب $a_{lm}^{inc}, b_{lm}^{inc}$ و همچنین ترکیب توابع بسل و هنکل کروی $f_l(k_2 r), g_l(k_2 r)$ باید برای هر نوع تحریک به‌طور جداگانه، همانطور که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت، تعیین شود. k_2 و Z_2 به‌ترتیب عددموج و امپدانس محیط بستر هستند. **میدان‌های پراکنده خارج از کره** خواهد بود[۲]؛

$$\mathbf{E}_2^{sca} = -Z_2 \sum_{l,m} \left[b_{lm} h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) - \frac{j}{k_2} a_{lm} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

(ث.۷)

$$\mathbf{H}_2^{sca} = -\sum_{l,m} \left[a_{lm} h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) + \frac{j}{k_2} b_{lm} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

در اینجا ما f_l, g_l را با تابع هنکل کروی $h_l^{(2)}$ نوع دوم جایگزین کرده ایم، زیرا آنها برای آرگومان‌های بزرگ شرایط مرزی مناسب امواج خروجی را دارند، معادله (پ.۲۹). به‌طور مشابه، در داخل ذره، تابع بسل کروی j_l را جایگزین f_l, g_l می‌کنیم که در مبدأ محدود می‌ماند. این ما را به‌سمت **میدان‌های پراکنده به‌داخل کره** هدایت می‌کند؛

$$\mathbf{E}_1^{sca} = Z_1 \sum_{l,m} \left[d_{lm} j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) - \frac{j}{k_1} c_{lm} \nabla \times j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

(ث.۸)

$$\mathbf{H}_1^{sca} = \sum_{l,m} \left[c_{lm} j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) + \frac{j}{k_1} d_{lm} \nabla \times j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi) \right]$$

برای محاسبه ضرایب مجهول a_{lm}, b_{lm} در خارج از ذره و c_{lm}, d_{lm} در داخل ذره است که باید میدان‌های الکترومغناطیسی را در مرز ذره برابر قرار دهیم. این روش تطبیق با این واقعیت تسهیل می‌شود که در بسط چند قطبی معادلات (ث.۶ - ث.۸) میدان‌های الکترومغناطیسی در حال حاضر کاملا مماسی هستند. بنابراین، شرایط مرزی زیر را بدست می‌آوریم

$$\mathbf{E}_1^{sca}\Big|_{r=R} = \left[\mathbf{E}_2^{inc} + \mathbf{E}_2^{sca}\right]_{r=R}, \quad \mathbf{H}_1^{sca}\Big|_{r=R} = \left[\mathbf{H}_2^{inc} + \mathbf{H}_2^{sca}\right]_{r=R}$$

[۲] علامت منفی در جلوی جمع برای میدان‌های پراکنده برای راحتی انتخاب می‌شود تا ضرایب می مشابه ضرایب بورن و هافمن[۶۰] بدست آید.

ابتدا معادلات فوق را در $\mathbf{X}^*_{lm}$ ضرب و سپس در تمام زوایا انتگرال‌گیری کرده و از روابط متعامد معادل (ت.۲۲) استفاده می‌کنیم. این میدهد؛

$$\frac{Z_1}{Z_2} d_{lm} j_l(k_1 R) = b^{inc}_{lm} g_l(k_2 R) - b_{lm} h^{(2)}_l(k_2 R)$$

(ت.۹)

$$c_{lm} j_l(k_1 R) = a_{lm} f_l(k_2 R) - a_{lm} h^{(2)}_l(k_2 R)$$

به طور مشابه، شرایط مرزی را در $\mathbf{r} \times \mathbf{X}^*_{lm}$ ضرب و سپس در تمام زوایا انتگرال‌گیری کرده و از روابط متعامد معادله (ت.۲۲) استفاده می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت؛

$$\frac{Z_1}{Z_2}\frac{c_{lm}}{k_1}\left[\frac{d}{dr} r j_l(k_1 r)\right]_{r=R} = \frac{a^{inc}_{lm}}{k_2}\left[\frac{d}{dr} r f_l(k_2 r)\right]_{r=R} - \frac{a_{lm}}{k_2}\left[\frac{d}{dr} r h^{(2)}_l(k_2 r)\right]_{r=R}$$

(ت.۱۰)

$$\frac{d_{lm}}{k_1}\left[\frac{d}{dr} r j_l(k_1 r)\right]_{r=R} = \frac{b_{lm}}{k_2}\left[\frac{d}{dr} r g_l(k_2 r)\right]_{r=R} - \frac{b_{lm}}{k_2}\left[\frac{d}{dr} r h^{(2)}_l(k_2 r)\right]_{r=R}$$

در ادامه اختصارات $x_1 = k_1 R$ و $x_2 = k_2 R$ و توابع بسل ریکاتی[۳] و مشتق‌های آنها را معرفی می‌کنیم.

توابع بسل-ریکاتی و مشتق‌های آنها

$$\psi_l(x) = x j_l(x), \qquad \psi'_l(x) = \frac{d}{dx}\left[x j_l(x)\right]$$

(ت.۱۱)

$$\zeta_l(x) = x h^{(2)}_l(x), \qquad \zeta'_l(x) = \frac{d}{dx}\left[x h^{(2)}_l(x)\right]$$

به‌علاوه توابع $F_l(x) = x f_l(x), G_l(x) = x g_l(x)$ و مشتق‌های آنها را معرفی می‌کنیم. سپس ضرایب می برای میدان‌های کره بیرونی را می‌توان به‌شکل زیر بیان کرد.

$$a_{lm} = \left[\frac{Z_2 \psi_l(x_1) F'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) F_l(x_2)}{Z_2 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2)}\right] a^{inc}_{lm}$$

(ت.۱۲)

$$b_{lm} = \left[\frac{Z_2 \psi'_l(x_1) G_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) G'_l(x_2)}{Z_2 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2)}\right] b^{inc}_{lm}$$

بهمین منوال، ضرایب میدان داخل کره خواهد بود؛

$$c_{lm} = \frac{k_1}{k_2}\left[\frac{Z_1 \zeta'_l(x_2) F_l(x_2) - Z_1 \zeta_l(x_2) F'_l(x_2)}{Z_2 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2)}\right] a^{inc}_{lm}$$

(ت.۱۳)

$$d_{lm} = \frac{k_1}{k_2}\left[\frac{Z_1 \psi_l(x_2) G'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_2) G_l(x_2)}{Z_2 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2)}\right] b^{inc}_{lm}$$

بنابراین، حل معادلات ماکسول را می‌توان با چهار ضریب دریافت کرد که به‌راحتی به‌عنوان ضرایب می شناخته می‌شوند.

[۳] Ricatti–Bessel

ث.۳ تحریک با موج صفحه‌ای

فرض کنید که کره توسط یک موج صفحه تابشی، همانطور که در شکل (ث.۱) نشان داده شده، تحریک شده است. از آنجایی که میدان‌های تابشی کاملاً عرضی هستند، $\nabla\cdot\mathbf{E}^{inc}=\nabla\cdot\mathbf{H}^{inc}=0$، همچنین پراکنده باید $\nabla\cdot\mathbf{E}^{sca}=\nabla\cdot\mathbf{H}^{sca}=0$، برآورده شود. این تنها زمانی حاصل می‌شود که قسمت‌های طولی میدان‌های پراکنده صفر باشند. ، و بنابراین باید فقط توابع بردار عرضی را در نظر بگیریم.

ضریب بسط برای تحریک موج صفحه‌ای

ابتدا نحوه محاسبه ضرایب $a_{lm}^{inc}, b_{lm}^{inc}$ را برای تحریک موج مسطح نشان می‌دهیم. نقطه شروع معادله (پ.۳۱) است. برای تجزیه یک موج کروی بر حسب هارمونیک کروی داریم؛

$$\frac{e^{jkR}}{4\pi R}=jk\sum_{lm}j_l(kr_<)h_l^{(2)}(kr_>)Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \qquad (\text{ث.۱۴})$$

که در آن $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ و $r_<$ کوچکتر از r' و $r_>$ بزرگتر از r' است. برای مقادیر بزرگ r' و $r'\gg r$ می‌توانیم عبارت سمت چپ رابطه را بصورت زیر بنویسیم؛

$$\frac{e^{jkR}}{4\pi R}\underset{r'\to\infty}{\longrightarrow}\left[\frac{e^{jkr'}}{4\pi r'}\right]e^{-jk\hat{\mathbf{r}}'\cdot\mathbf{r}}$$

همانطور که با جزئیات بیشتر در بخش ۱.۳.۵ بحث شده است. (برای مقایسه نتایج باید $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ را جایگزین کرد). با استفاده از شکل مجانبی معادله(پ.۲۹) برای تابع هنکل کروی، با وارد کردن آرگومان‌های بزرگ در معادله (ث.۱۴) بسط، و با گرفتن مزدوج مختلط در دو طرف معادله به‌رابطه زیر میرسیم؛

$$e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}=4\pi\sum_{l,m}j^l j_l(kr)Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \qquad (\text{ث.۱۵})$$

با $\mathbf{k}=k\hat{\mathbf{r}'}$. در ادامه فرض می‌کنیم که موج تابشی در امتداد جهت z منتشر می‌شود، $\theta'=0$، و از قضیه جمع برای هارمونیک‌های کروی استفاده می‌کنیم$\{$[۲]، (۶۲.۳)$\}$؛

$$P_l(\cos\theta)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}})$$

با این کار به‌بسط یک موج مسطح بر حسب امواج کروی هدایت می‌شویم ؛

بسط موج کروی یک موج مسطح I

$$e^{jkz}=\sum_l j^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(kr)Y_{l,0}(\theta,\phi) \qquad (\text{ث.۱۶})$$

در ادامه یک موج صفحه‌ای با قطبش دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که در امتداد z منتشر می‌شود. بردارهای پلاریزاسیون $\boldsymbol{\epsilon}_\pm = \hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}$ را برای چرخش $\pm$ معرفی می‌کنیم. سپس میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد؛

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon}_\pm E_0 e^{jkz}, \qquad Z\mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = \mp j\boldsymbol{\epsilon}_\pm E_0 e^{jkz} \ , \tag{ث.۱۷}$$

که در آن E_0 دامنه میدان الکتریکی موج تابشی است. یک موج با قطبش خطی را می‌توان به‌صورت ترکیبی از دو حالت چرخشی بیان کرد. سپس بسط چند قطبی میدان‌های الکترومغناطیسی را که با معادله (ث.۴) داده شده از هر دو طرف در $\mathbf{X}^*_{lm}$ ضرب و در تمام زوایا انتگرال‌گیری کرده از روابط تعامد هارمونیک‌های کروی برداری استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{X}^*_{lm} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\Omega &= Z b^\pm_{lm} g_l(kr) = \oint \mathbf{X}^*_{lm} \cdot \left[\boldsymbol{\epsilon}_\pm E_0 e^{jkz}\right] d\Omega \\ Z \oint \mathbf{X}^*_{lm} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) d\Omega &= Z a^\pm_{lm} f_l(kr) = \oint \mathbf{X}^*_{lm} \cdot \left[\mp j\boldsymbol{\epsilon}_\pm E_0 e^{jkz}\right] d\Omega \ . \end{aligned} \tag{ث.۱۸}$$

برای محاسبه انتگرال‌ها در سمت راست داریم؛

$$\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{\epsilon}^*_\pm \cdot \mathbf{X}_{lm} = \hat{\mathbf{L}}_\mp Y_{lm} \ , \tag{ث.۱۹}$$

عملگر $\hat{\mathbf{L}}_\pm = \hat{L}_x \pm j\hat{L}_y$ با معادله (ت.۱۴) معرفی شد. برای محاسبه $\hat{\mathbf{L}}_\mp Y_{lm}$ از رابطه (ت.۱۵) استفاده کرده و خواهیم داشت؛

$$\oint \left[\boldsymbol{\epsilon}^*_\pm \cdot \mathbf{X}_{lm}\right]^* Y_{l0} \ d\Omega = \sqrt{\frac{(l \pm m)(l \mp m + 1)}{l(l+1)}} \delta_{m\mp 1,0} = \delta_{m,\pm 1} \ .$$

بنابراین، اگر بسط موج کروی رابطه (ث.۱۶) را در معادله (ث.۱۸) قرار دهیم، بدست می‌آید؛

$$Z b^\pm_{lm} g_l(kr) = j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \delta_{m,\pm 1} j_l(kr) \ , \tag{ث.۲۰}$$

و همچنین $a^\pm_{lm} = \mp j b^\pm_{lm}$. با کنار هم گذاشتن همه نتایج، به بسط موج صفحه تابچی با چرخش$\pm$ هدایت می‌شویم که بر حسب هارمونیک‌های کروی برداری در امتداد جهت z منتشر می‌شود{[۲]، (۵۵.۱۰)}؛

بسط موج کروی یک موج مسطح II

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \sum_l j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[j_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times j_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \\ Z\mathbf{H} &= E_0 \sum_l j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\mp j j_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm 1} - \frac{j}{k} \nabla \times j_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \ . \end{aligned} \tag{ث.۲۱}$$

تحریک موج مسطح یک ذره کروی

در مرحله بعد از معادله (ث.۷) استفاده می‌کنیم. برای بیان میدان های الکترومغناطیسی پراکنده خارج از نانوذرات فلزی بر حسب ضرایب می، با ضرایب تابشی $a_{lm}^{inc}, b_{lm}^{inc}$ که از طریق معادله (ث.۲۱) داده شده است. محاسبه میدان‌های داخل کره به‌عنوان تمرین به‌خواننده علاقه‌مند سپرده می‌شود. ابتدا عبارات داخل پرانتز معادله (ث.۱۲) را برای $F_l(x) = G_l(x) = \psi_l(x)$ بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

ضرایب می برای تحریک موج مسطح

$$a_l = \frac{Z_2\psi_l(x_1)\psi_l'(x_2) - Z_1\psi_l'(x_1)\psi_l(x_2)}{Z_2\psi_l(x_1)\zeta_l'(x_2) - Z_1\psi_l'(x_1)\zeta_l(x_2)}$$

$$b_l = \frac{Z_2\psi_l'(x_1)\psi_l(x_2) - Z_1\psi_l(x_1)\psi_l'(x_2)}{Z_2\psi_l'(x_1)\zeta_l(x_2) - Z_1\psi_l(x_1)\zeta_l'(x_2)} \qquad \text{(ث.۲۲)}$$

که در آن ψ_l, ζ_l توابع بسل-ریکاتی داده شده در رابطه (ث.۱۱) و k_1, k_2 عددهای موج داخل و خارج کره و Z_1, Z_2 امپدانس‌های مربوطه هستند. علاوه بر این از اختصارات $x_1 = k_1R, x_2 = k_2R$ که در آن R شعاع کره استفاده شده است. با این ضرایب می میدان‌های الکترومغناطیسی خارج کره از رابطه (ث.۷) محاسبه می‌شود و آنها بصورت زیر هستند؛

$$\mathbf{E}_2^{sca} = -E_0\sum_l j^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[b_l h_l^{(2)}(k_2r)\mathbf{X}_{l,\pm1} \pm \frac{a_l}{k_2}\nabla\times h_l^{(2)}(k_2r)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right]$$

$$Z_2\mathbf{H}_2^{sca} = -E_0\sum_l j^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[\mp j a_l h_l^{(2)}(k_2r)\mathbf{X}_{l,\pm1} - \frac{jb_l}{k_2}\nabla\times h_l^{(2)}(k_2r)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right] \qquad \text{(ث.۲۳)}$$

سطح مقطع انقراضی

برای محاسبه سطح مقطع انقراضی، از قضیه نوری معادله (۲۷.۴) برای بیان توان انقراضی شروع می‌کنیم؛

$$P_{ext} = \frac{2\pi}{k_2}Z_2^{-1}Im\left[E_0^*\boldsymbol{\epsilon}_\pm^*\cdot\mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}})\right] .$$

در اینجا $\mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}})$ دامنه میدان‌های دور میدان الکتریکی پراکنده شده در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ است. با استفاده از تقارن از رابطه (پ.۲۹) برای توابع هنکل کروی، از رابطه (ث.۲۳) دامنه میدان دور را بدست می‌آوریم؛

$$\mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}}) = \frac{jE_0}{k_2}\sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[b_l\mathbf{X}_{l,\pm1} \pm \frac{a_l}{k_2}(jk_2\hat{\mathbf{z}})\times\mathbf{X}_{l,\pm1}\right]$$

دو طرف رابطه بالا را در $\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}$ ضرب کرده و خواهیم داشت؛

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}\cdot\mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}})=\frac{jE_0}{k_2}\sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}\Big[b_l\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}\cdot\mathbf{X}_{l,\pm1}\pm ja_l\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}\cdot\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{X}_{l,\pm1}\Big]$$

جمله دوم داخل براکت را با استفاده از جایگشت دوری ضرب سه‌گانه بازنویسی می‌کنیم؛

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}\cdot\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{X}_{l,\pm1}=\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}\times\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{X}_{l,\pm1}=\mp j\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}\cdot\mathbf{X}_{l,\pm1} \qquad (\text{ث.۲۴})$$

با استفاده از معادله (ث.۱۹) بدست می‌آید؛

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^{*}\cdot\mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}})=\frac{jE_0}{k_2}\sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}(a_l+b_l)\left[\hat{L}_{\pm}\frac{Y_{l\pm1}}{\sqrt{l(l+1)}}\right],$$

که در آن عبارت داخل پرانتز Y_{l0} می‌شود و باید برای زوایای مربوط به‌جهت انتشار موج مسطح تابشی محاسبه شود، در این حالت $\theta=0$ است. بنابراین می‌توانیم از $Y_{l,0}(\hat{\mathbf{z}})=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ برای بیان توان انقراضی به‌شکل زیر استفاده کنیم؛

$$P_{ext}=\frac{2\pi}{k_2^2}Z_2^{-1}|E_0|^2\sum_l(2l+1)Re\Big[a_l+b_l\Big] \qquad (\text{ث.۲۵})$$

شدت موج مسطح تابشی برابر $I_{inc}=\frac{1}{2}Z_2^{-1}\left|\sqrt{2}E_0\right|^2$ است، که در آن عامل $\sqrt{2}$ به‌دلیل بردارهای قطبش $\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}=\hat{\mathbf{x}}\pm\hat{\mathbf{y}}$ که نرمالیزه نشده است. نسبت $P_{ext}:I_{inc}$ سطح مقطع انقراضی را برای ذره کروی تحریک با موج مسطح می‌دهد.

سطح مقطع انقراضی (نظریه می)

$$C_{ext}=\frac{2\pi}{k_2^2}\sum_l(2l+1)Re\Big[a_l+b_l\Big] \qquad (\text{ث.۲۶})$$

سطح مقطع پراکندگی

میدان۴های پراکنده در بیرون ذره معادله (ث.۷) را در نظر بگیرید. خیلی دور از ذره می‌توانیم از شکل مجانبی معادله (پ.۲۹) برای بیان میدان‌های الکترومغناطیسی از توابع هنکل به‌صورت زیر استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2^{sca}&\to\frac{e^{jk_2r}}{k_2r}\sum_{l,m}(-j)^{l+1}\Big[a_{l,m}\mathbf{X}_{l,m}+b_{l,m}\hat{\mathbf{k}}_2\times\mathbf{X}_{l,m}\Big]\\ \mathbf{E}_2^{sca}&\to Z_2\mathbf{H}_2^{sca}\times\hat{\mathbf{k}}_2\end{aligned} \qquad (\text{ث.۲۷})$$

توان متوسط زمانی تابش شده در واحد زاویه فضائی توسط پراکنده‌کننده را می‌توان از بردار پوایِن‌تینگ $\frac{1}{2}Re(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\hat{\mathbf{k}}_2$ تصویر در جهت انتشار به‌دست آورد،

$$\frac{dP_{sca}}{d\Omega}=\frac{1}{2}Re\left[r^2\hat{\mathbf{k}}_2\cdot\mathbf{E}_2^{sca}\times\mathbf{H}_2^{sca*}\right]$$
$$\frac{Z_2}{2k_2^2}\left|\sum_{l,m}(-j)^{l+1}\left[a_{l,m}\mathbf{X}_{l,m}\times\hat{\mathbf{k}}_2+b_{l,m}\mathbf{X}_{l,m}\ Big\right]\right|^2. \tag{ث.۲۸}$$

کل توان تابشی را می‌توان با انتگرال‌گیری این عبارت در تمام زوایا به‌دست آورد. در انجام این کار، به‌آسانی مشاهده می‌شود که جمله‌های تداخل به‌دلیل متعامد بودن هارمونیک‌های کروی برداری شرکت نمی‌کنند، و کل توان تشعشعی فقط یک مجموع ناهمدوس از مشارکت‌های چند قطبی مختلف است.

$$P_{sca}=\frac{Z_2}{2k_2^2}\sum_{l,m}\left(|a_{l,m}|^2+|b_{l,m}|^2\right) \tag{ث.۲۹}$$

عبارت بالا کلی است و برای هر نوع میدان پراکنده‌ای که به‌شکل معادله (ث.۷) نوشته می‌شود قابل استفاده است. برای تحریک موج مسطح ضرایب $a_{l,m}^{inc},b_{l,m}^{inc}$ با معادله (ث.۲۰) داده می‌شود.

$$P_{sca}=\frac{2\pi}{k_2^2}Z_2^{-1}\sum_{l,m}(2l+1)\left(|a_{l,m}|^2+|b_{l,m}|^2\right)$$

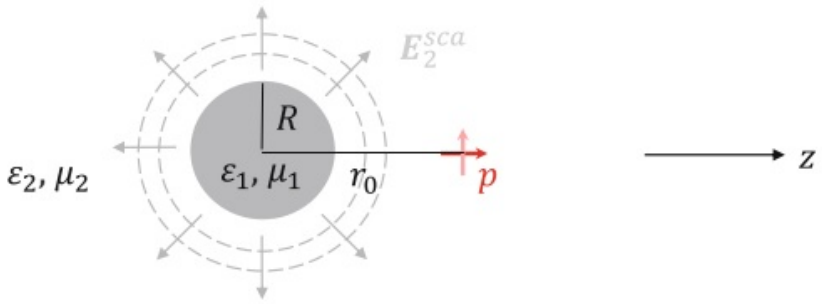
که با ضرایب می معادله (ث.۲۲) است. پس از تقسیم بر شدت موج صفحه تابشی، I_{inc}، سطح مقطع پراکندگی یک نانوذره کروی را که توسط یک موج صفحه تابشی تحریک می‌شود، به‌دست می‌آید؛

سطح مقطع پراکندگی (نظریه می)

$$C_{sca}=\frac{2\pi}{k_2^2}\sum_{l}(2l+1)Re\left(|a_l|^2+|b_l|^2\right) \tag{ث.۳۰}$$

ث.۴ تحریک توسط دوقطبی

در ادامه وضعیت نشان داده شده در شکل (ث.۲) از یک دوقطبی نوسانی با با گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ در موقعیت $\mathbf{r}_0$ خارج از یک کره را در نظر می‌گیریم [۱۲۱، ۱۲۲]. میدان الکتریکی "تابشی" $\mathbf{E}_2^{inc}$ دارای مولفه عرضی و طولی است که دومی از $\epsilon_2\nabla\cdot\mathbf{E}_2^{inc}=\rho$ تعیین می‌شود، ؛ که در آن ρ توزیع بار دوقطبی است. برای میدان‌های پراکنده، از $\epsilon\nabla\cdot(\mathbf{E}_2^{inc}+\mathbf{E}_2^{sca})=\rho$ متوجه می‌شویم که عرضی هستند زیرا $\nabla\cdot\mathbf{E}_2^{sca}=0$ باید در کل فضا برآورده شود. بنابراین کافی است در ادامه مولفه‌های عرضی میدان‌های الکترومغناطیسی را در نظر بگیریم.



شکل ث.۲: شماتیک تحریک توسط یک دوقطبی نانوذرات کروی. یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ (جهت آن در امتداد $\epsilon_\pm$ یا $\hat{\mathbf{z}}$) در موقعیت $r_0\hat{\mathbf{z}}$ قرار دارد و با فرکانس ω نوسان می‌کند. میدان‌های پراکنده بر روی دوقطبی برگشته و خواص تابشی و غیر تابشی آن‌را تغییر می‌دهند.

ضرایب بسط چندقطبی برای منبع جریان

از معادله (ث.۵) برای محاسبه ضرایب بسط چند قطبی بر حسب میدان‌های عرضی $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ شروع می‌کنیم. میدان الکتریکی عرضی را معرفی می‌کنیم

$$\mathbf{E}^\perp = \mathbf{E} - \frac{j}{\omega\epsilon}\mathbf{J} \tag{ث.۳۱}$$

همراه با معادله پیوستگی $-j\omega\rho = \nabla\cdot\mathbf{J}$ به‌راحتی می‌توان نشان داد که با این در واقع $\nabla\cdot\mathbf{E}^\perp = 0$ را به‌دست می‌آوریم. سپس روابط کرل معادلات ماکسول را می‌توان به‌شکل زیر نوشت.

$$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - j\frac{1}{\omega\epsilon}\nabla\times\mathbf{J}, \qquad \nabla\times\mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}^\perp$$

با اعمال کرل در هر دو طرف معادله و استفاده از $\nabla\cdot\mathbf{E}^\perp = \nabla\cdot\mathbf{H} = 0$ معادلات موج زیر را بدست می‌آوریم؛

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{E}^\perp = \frac{j}{\omega\epsilon}\nabla\times\nabla\times\mathbf{J}$$

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{H} = -\nabla\times\mathbf{J}$$

سپس هر دو طرف معادلات را از سمت چپ با $\mathbf{r}$ ضرب می‌کنیم و از اتحاد برداری کلی $\nabla^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\nabla^2\mathbf{A}) + 2\nabla\cdot\mathbf{A}$ استفاده می‌کنیم.

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}^\perp = \frac{1}{\omega\epsilon}\hat{\mathbf{L}}\cdot\nabla\times\mathbf{J}$$

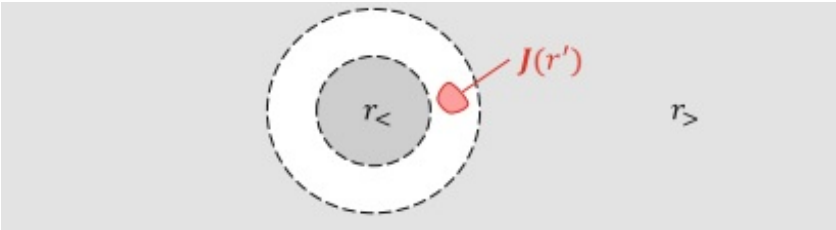
$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{r}\cdot\mathbf{H} = j\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{J}$$

معادلات موج بالا را می‌توان بوسیله تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز حل کرد، (معادله ۷.۵)، و خواهیم داشت؛

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}^{\perp}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\omega\epsilon}\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{\mathbf{L}}'\cdot\nabla'\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r'$$

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{\mathbf{L}}'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')d^3r'$$

سپس تابع گرین را بر حسب هارمونیک‌های کروی با استفاده از معادله (پ.۳۱) بازنویسی



شکل ث.۳: بسط چند قطبی برای توزیع جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$. فرض می‌کنیم که نقطه $\mathbf{r}$ که در آن میدان‌ها محاسبه می‌شوند یا در داخل کره‌ای با شعاع کوچکتر از همه مقادیر r' منبع قرار دارد، در شکل ناحیه‌ای را که با $r_<$ نشان داده شده، یا در خارج از کره‌ای با شعاع بزرگتر از همه مقادیر r' قرار دارد که در شکل با $r_>$ نشان داده شده است.

می‌کنیم. در انجام این کار، فرض بر این است که توزیع جریان در یک منطقه Ω' قرار دارد و برای $\mathbf{r}$ مقداری را انتخاب می‌کنیم که در داخل یا خارج پوسته کره شامل کل منبع قرار دارد، مناطق $r_<, r_>$ در شکل (ث.۳) نشان داده شده است. همراه با $\left\{[۲]، (۱۶۴.۹)\right\}$ داریم؛

$$\oint Y_{lm}(\theta,\phi)G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\Omega = -jk\left\{\begin{array}{c} h_l^{(2)}(kr_>)j_l(kr') \\ j_l(kr_<)h_l^{(2)}(kr') \end{array}\right\}Y_{lm}^*(\theta',\phi')$$

که مستقیماً از معادله (پ.۳۱) پیروی می‌کند، سپس می‌توانیم ضرایب بسط چند قطبی را برای یک منبع جریان دلخواه به‌صورت زیر $\left\{[۲]، (۱۶۵.۹)\right\}$ بنویسیم؛

$$a_{lm}^{inc} = \frac{-jk}{\sqrt{l(l+1)}}\int f_l(kr)Y_{lm}^*(\theta,\phi)\hat{\mathbf{L}}\cdot\nabla\times\mathbf{J}(\mathbf{r})d^3r$$

(ث.۳۲)

$$b_{lm}^{inc} = -\frac{k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\int f_l(kr)Y_{lm}^*(\theta,\phi)\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r})d^3r$$

توجه داشته باشید که در عبارات بالا، متغیر انتگرال‌گیری را از $\mathbf{r}'$ به $\mathbf{r}$ تغییر داده‌ایم. در ارزیابی ضرایب چند قطبی باید دو مورد زیر را تشخیص دهیم.

- **حالت** $\mathbf{r}_>$ هنگامی که نقطه مشاهده خارج از پوسته کره از جمله منبع، مربوط به‌منطقه $r_>$ است، باید از $f_l(kr) = j_l(kr)$ استفاده کنیم.
- **حالت** $\mathbf{r}_<$ هنگامی که نقطه مشاهده در داخل پوسته کره شامل منبع، مربوط به‌ناحیه $r_<$ است، باید از $f_l(kr) = h_l^{(2)}(kr)$ استفاده کنیم.

ضرایب بسط چندقطبی برای یک دقطبی نقطه‌ای

سپس برای توزیع فعلی معادله (۱.۶) را در نظر می‌گیریم. برای یک دوقطبی نقطه‌ای، داریم

$$\mathbf{J} = j\omega\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})$$

با وارد کردن این توزیع در معادله (ث.۳۲) مشتقاتی از تابع دلتای دیراک را ارائه می‌دهد که مطابق (ج.۳) معادله محاسبه می‌شوند. با این به‌نتایج زیر می‌رسیم؛

$$\int f(\mathbf{r})\Big[\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\Big]d^3r = -\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\Big[\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{p}f(\mathbf{r})\Big]d^3r$$

$$\int f(\mathbf{r})\Big[\hat{\mathbf{L}}\cdot\nabla\times\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\Big]d^3r = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\Big[\hat{\mathbf{L}}\cdot\nabla\times\mathbf{p}f(\mathbf{r})\Big]d^3r$$

از این نتایج پس از چند دستکاری ساده به‌دست می‌آوریم

$$a_{lm}^{inc} = \frac{\omega k}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[\hat{\mathbf{L}}\cdot\nabla\times\mathbf{p}f_l(kr)Y_{lm}^*\Big]_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}}$$

$$b_{lm}^{inc} = \frac{-j\omega k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{p}f_l(kr)Y_{lm}^*\Big]_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}}$$

بنابراین، می‌توانیم ضرایب بسط چند قطبی را برای یک دوقطبی نقطه‌ای با گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ واقع در موقعیت $\mathbf{r_0}$ به‌صورت زیر بیان کنیم {[۱۲۲]، (۱۶)}.

ضرایب بسط چندقطبی برای دوقطبی نقطه‌ای

$$a_{lm}^{inc} = \frac{j\omega k}{r^2}\left[\sqrt{l(l+1)}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}f_l(kr)Y_{lm}^* - j\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\times[xf_l(x)]'_{x=kr}\mathbf{X}_{l,m}^*\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}}$$

$$b_{lm}^{inc} = -j\omega k^2\left[\mathbf{p}\cdot f_l(kr)\mathbf{X}_{l,m}^*\right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}} \qquad \text{(ث.۳۳)}$$

در اینجا $[xf_l(x)]'$ نماد پریم نشان دهنده مشتق نسبت به x است. در ادامه وضعیتی را در نظر می‌گیریم که دوقطبی در خارج از کره و روی محور z قرار دارد، به‌طوری که $\mathbf{r}_0 = r_0\hat{\mathbf{z}}$ است و از معادله (پ.۲۲) و (ت.۱۱) استفاده می‌کنیم.

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0}, \qquad \mathbf{X}_{l,m}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{16\pi}}\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}\delta_{m\pm1}\ . \qquad \text{(ث.۳۴)}$$

به‌طور جداگانه موارد دو قطبی موازی و عمود بر محور z را بررسی می‌کنیم. برای جهت دوقطبی $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$ از معادله (ث.۳۳) بدست می‌آوریم.

$$a_{lm}^{inc} = jp\omega k^2\sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}}\frac{f_l(kr_0)}{kr_0}\delta_{m,0}, \qquad b_{lm}^{inc} = 0 \qquad \text{(ث.۳۵)}$$

مشابه این برای دوقطبی $\mathbf{p} = p\boldsymbol{\epsilon}_\pm$ داریم؛

$$a_{lm}^{inc} = \mp jp\omega k^2 \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}} \frac{[xf_l(x)]'_{x=kr_0}}{kr_0} \delta_{m\pm1}$$
$$b_{lm}^{inc} = -jp\omega k^2 \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}} f_l(kr_0)\delta_{m\pm1} \qquad (۳۶.ث)$$

که در آن از $\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_\pm = \pm j\boldsymbol{\epsilon}_\pm$ استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشید که بردار $\boldsymbol{\epsilon}_\pm$ نرمالیزه نشده است و باید آن را درمحاسبه توان‌های تابشی و تلف شده در نظر بگیریم.

توان تابشی دوقطبی نوسانی

با صحت سنجی شروع کرده و توان تابشی P_0 دوقطبی نوسانی را به‌تنهایی محاسبه می‌کنیم. این مسئله را در فصل دهم بررسی شد و معادله (۴.۱۰) برای آن به‌دست آمد؛

$$p_0 = \frac{\mu\omega^4 p^2}{12\pi c}$$

اکنون از ضریب بسط چند قطبی معادله (۳۵.ث) استفاده کرده تا نشان دهیم که در نظریه می همان نتیجه را می‌دهد. برای بدست آوردن توان پراکنده یک دوقطبی در جهت zها از معادله (۲۹.ث) استفاده می‌کنیم.

$$p_{sca} = \frac{Z}{2k^2}\sum_l |a_l|^2 = \frac{Zp^2\omega^2k^4}{8\pi k^2}\sum_l l(l+1)(2l+1)\left|\frac{j_l(kr_0)}{kr_0}\right|^2$$

توجه داشته باشید که در اینجا و در ادامه زیرنویس ۲ را برای محیط بیرونی حذف می‌کنیم. همانطور که در عبارت بالا، میدان‌های دور از کره را که مربوط به‌ناحیه $r_>$ بکار می‌بریم، باید از تابع بسل کروی j_l در ضریب بسط استفاده کنیم. با تقسیم توان پراکنده بر P_0 و بسط j_l در یک سری توان برای آرگومان‌های کوچک $x = kr_0$، (پ.۲۹) ، داریم

$$\frac{P_{sca}}{P_0} = \frac{3}{2}\sum_l l(l+1)(2l+1)\left|\frac{x^l}{x(2l+1)!!} + \mathcal{O}(x^{l+1})\right|^2 \to 1$$

که در آن آخرین حد مربوط به $x \to 0$ است. بنابراین، برای یک دوقطبی که در امتداد z و در مبدا قرار دارد، واقعاً نتیجه مناسب را دریافت می‌کنیم. تحلیل مشابهی را می‌توان برای دوقطبی در جهت‌های $\boldsymbol{\epsilon}_\pm$ نیز اعمال کرد.

افزونگی توان تابشی

با کنار هم قرار دادن نتایج برای یک دوقطبی نوسانی که در امتداد $\hat{\mathbf{z}}$ قرار دارد، نتیجه افزونگی[۴] توان تابشی را بدست می‌آوریم{[۱۲۱]، (۱۸)}.

[۴] Enhancement

افزونگی توان تابشی برای دوقطبی در جهت $\hat{\mathbf{z}}$

$$\frac{P_{sca}^{z}}{P_0} = \frac{3}{2}\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)(2l+1)\left|\frac{j_l(x)+a_l h_l^{(2)}(x)}{x}\right|^2_{x=kr_0} \qquad (\text{ث.۳۷})$$

عبارت $a_l h_l^{(2)}$ مربوط به‌میدان‌های دور پراکنده، معادله (ث.۷)، که در آن a_l ضریب می معادله (ث.۲۲) است. وقتی دوقطبی در خارج از کره قرار گرفته، برای محاسبه ضریب بسط از معادله (ث.۳۵) برای جواب $f_l = h_l^{(2)}$ در ناحیه $r_<$ استفاده کرده‌ایم. به‌طور مشابه، برای یک دوقطبی نوسانی که در امتداد $\epsilon_\pm = \hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}$ است، برای افزونگی توان تابشی نتیجه می‌گیریم {[۱۲۱]، (۲۰)}.

افزونگی توان تابشی برای دوقطبی در جهت $\epsilon_\pm$

$$\frac{P_{sca}^{\pm}}{P_0} = \frac{3}{4}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left\{\left|j_l(x)+a_l h_l^{(2)}(x)\right|^2 + \left|\frac{\psi_l'(x)+b_l\zeta_l'(x)}{x}\right|^2\right\}_{x=kr_0} \qquad (\text{ث.۳۸})$$

که در آن $\psi(x), \zeta(x)$ توابع بسل ریکاتی معادله (ث.۱۱) هستند. توجه کنید که در جلو جمع ضریب $1/2$ قرار داردیم زیرا بردار دوقطبی $\epsilon_\pm$ نرمالیزه نشده است و همین طور توان P_0 نیز باید در دو ضرب شود.

افزونگی توان تلف شده

افزونگی برای کل توان تلف شده را می‌توان از رابطه (۵.۱۰) محاسبه کرد؛

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{6\pi}{k}\frac{1}{\mu\omega^2 p^2} Im\left\{\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r_0}\right\}, \qquad (\text{ث.۳۹})$$

که در آن تابع گرین بازتابی را به‌میدان الکتریکی پراکنده (القایی) مرتبط کردیم. نقطه شروع معادله (ث.۷) است. برای این میدان پراکنده برابر است با:

$$\mathbf{E}^{sca} = -Z\sum_{l,m}\left[b_{lm}h_l^{(2)}(kr)\mathbf{X}_{lm} - \frac{j}{k}a_{lm}\nabla\times h_l^{(2)}(kr)\mathbf{X}_{lm}\right]. \qquad (\text{ث.۴۰})$$

ابتدا جهت دوقطبی را در امتداد $\hat{\mathbf{z}}$ درنظر گرفته و از رابطه (ث.۲۳) برای جمله داخل براکت استفاده می‌کنیم؛

$$\left[b_{lm}h_l^{(2)}(kr)\mathbf{X}_{lm} - \frac{a_{lm}}{kr^2}\left(j\zeta_l'(kr)\mathbf{r}\times\mathbf{X}_{lm} + \sqrt{l(l+1)}h_l^{(2)}(kr)\mathbf{r}Y_{lm}\right)\right].$$

بنابراین، بدست می‌آوریم؛

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{E}^{sca}(r_0\hat{\mathbf{z}}) = Z\sum_{l,m}\sqrt{l(l+1)}a_{lm}\Big[\frac{h_l^{(2)}(kr_0)}{kr_0}\Big]Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}})$$
$$= jZp\omega k^2\sum_{l}\sqrt{l(l+1)}\sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}}a_l\Big[\frac{h_l^{(2)}(kr_0)}{kr_0}\Big]^2\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

که در آن به‌صراحت در خط دوم رابطه‌های ضریب می و هارمونیک‌های کروی معادله (ث.۳۴) را نوشته‌ایم. با وارد کردن میدان الکتریکی در معادله (ث.۳۹) افزونگی توان تلف شده کل را برای یک دوقطبی در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ بدست می‌آوریم{[۱۲۱]، (۱۷)}.

افزونگی توان تلف شده برای دوقطبی در جهت $\hat{\mathbf{z}}$

$$\frac{P_{tot}^{z}}{P_0} = 1-\frac{3}{2}Re\Big\{\sum_{l=0}^{\infty}l(l+1)(2l+1)a_l\Big[\frac{h_l^{(2)}(x)}{x}\Big]^2_{x=kr_0}\Big\} \qquad \text{(ث.۴۱)}$$

بهمین منوال، برای یک دوقطبی که در جهت $\epsilon_\pm$ است، میدان پراکنده بصورت زیر است؛

$$\boldsymbol{\epsilon}_\pm^*\cdot\mathbf{E}^{sca} = -Z\sum_{l,m}\Big[\Big(b_{lm}h_l^{(2)}(kr)\Big)\boldsymbol{\epsilon}_\pm^*\cdot\mathbf{X}_{lm} + \Big(\frac{a_{lm}}{kr^2}\zeta_l'(kr)\Big)\boldsymbol{\epsilon}_\pm^*\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{X}_{lm}\Big]$$

و وقتی دوقطبی در موقعیت $r_0\hat{\mathbf{z}}$ است، اولین جمله داخل براکت را داریم؛

$$\Big(-jp\omega k^2\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}h_l^{(2)}(kr_0)b_lh_l^{(2)}(kr_0)\Big)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,\pm1}$$

که در آن از معادله (ث.۳۶) برای ضرایب بسط b_{lm} استفاده کرده‌ایم. برای جمله دوم از معادله (ث.۲۴) برای ساده سازی ضرب سه گانه استفاده می‌کنیم، و پس از چند دستکاری ساده به‌دست می‌آید؛

$$\Big(\mp jp\omega k^2\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\frac{\zeta_l'(kr_0)}{kr_0}(-j)a_l\frac{\zeta_l'(kr_0)}{kr_0}\Big)\Big(\pm j\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\Big)\delta_{m,\pm1}$$

که در آن $\zeta(x)$ بسل ریکاتی معادله (ث.۱۱) است. با قرار دادن تمام نتایج سرانجام افزونگی توان تلفاتی کل را برای یک دوقطبی که در جهت $\epsilon_\pm$ است را بدست می‌آوریم؛

افزونگی توان تلف شده برای دوقطبی در جهت $\epsilon_\pm$

$$\frac{P_{tot}^{\pm}}{P_0} = 1-\frac{3}{4}Re\Big\{\sum_{l=0}^{\infty}l(l+1)\Big(a_l\Big[\frac{\zeta_l'(x)}{x}\Big]^2_{x=kr_0}+b_l\Big[\frac{h_l^{(2)}(x)}{x}\Big]^2_{x=kr_0}\Big)\Big\} \qquad \text{(ث.۴۲)}$$

در اینجا نیز جمله دوم بعلت نرمالیزه نبودن گشتاور دوقطبی $\epsilon_\pm$ در ضریب $1/2$ ضرب شده است.

پیوست ج

تابع دلتای دیراک

تابع دلتای دیراک[1] بصورت زیر تعریف می‌شود

تابع دلتای دیراک

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta(x-a) f(x) dx = \begin{cases} f(a) & \text{اگر} \quad a \in (x_0, x_1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{ج.۱}$$

انتگرال با تابع دلتای دیراک بصورت تعریف چنین بیان می‌شود، که مقدار تابع $f(a)$ را می‌دهد اگر a در محدودهانتگرال‌گیری قرار گیرد و در غیر این صورت صفر است. در واقع، چنین رفتاری را نمی‌توان با یک تابع عادی به‌دست آورد، بلکه با توابع توزیعی که از طریق برخی روش‌های محدود کننده، مانند توابع زیر تعریف شده است:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \to 0} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\eta \to 0} \eta^{-\frac{1}{2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\eta}\Big) \tag{ج.۲}$$

ضمناً فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$ در معادله (ج.۱) بقدر کافی خوب تعریف شده است. در این حالت مشتق توابع دلتای دیراک را روی یک تابع از طریق راابطه زیر بیان می‌کنیم؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{d^n}{dx^n} \delta(x-a)\right] dx = (-1)^n \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=a} \tag{ج.۳}$$

یکی دیگر از روابط مفید که از رابطه (ج.۲) بدست می‌اید برابر است با:

$$\delta\Big(g(x)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - xi)}{|g'(x_i)|} \tag{ج.۴}$$

[1] Dirac's Delta Function

که در آن $g(x)$ فرض می‌شود که دارای نقاط صفر x_i است بطوری که $g(x_i)=0$ و $g'(x)$ مشتق تابع g نسبت به x است. از این رابطه بلافاصله بدست می‌اید؛

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{ج.۵}$$

از تعریف تابع دلتای دیراک نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\frac{1}{x\pm j\eta}\right]=\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big)\mp j\pi\delta(x) \tag{ج.۶}$$

که در آن $\mathcal{P}$ نمایشگر مقدار اصلی گوشی[۲] است.

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big)=\lim_{\eta\to 0}\frac{x}{x^2+\eta^2} \tag{ج.۷}$$

وقتی از معادله (ج.۶) در زیر انتگرال استفاده می‌کنیم، بیک رابطه مهم میرسیم؛

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a\pm j\eta}dx=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx\mp j\pi f(a) \tag{ج.۸}$$

که در آن مقدار اصلی انتگرال را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx=\lim_{\eta\to 0}\Big[\int_{-\infty}^{a-\eta}\frac{f(x)}{x-a}dx+\int_{a+\eta}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}dx\Big] \tag{ج.۹}$$

تبدیل فوریه تابع دلتای دیراک می‌توان بصورت زیر بیان کرد

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jkx}dx \tag{ج.۱۰}$$

تابع دلتای دیراک را می‌توان برای بردارهای تعریف کرد؛

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{a})=\delta(x-a_x)\delta(y-a_y)\delta(z-a_z) \tag{ج.۱۱}$$

در سراسر این کتاب ما از نماد $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ بجای نماد $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ که بیشتر صحیح است استفاده می‌کنیم.

ج.۱ تابع دلتای طولی و عرضی

در زمینه توابع برداری، معرفی تابع دلتای عرضی راحت است.

تابع دلتای عرضی

$$\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\Big(\delta_{ij}-\hat{k_i}\hat{k_j}\Big)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{ج.۱۲}$$

[۲] Cauchy's principal value

که در آن $\hat{\mathbf{k}}$ بردار واحد $\mathbf{k}$ است. با اعمال $\delta^{\perp}$ بر روی یک تابع برداری دلخواه مانند $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ خواهیم داشت؛

$$F_i^{\perp}(\mathbf{r}) = \int \delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')F_j(\mathbf{r}')d^3r' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\left(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j\right)F_j(\mathbf{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

هنگام رفتن از عبارت اول به‌دوم از تبدیل کانولوشن در فضای حقیقی به‌ضرب در فضای عددموج استفاده می‌کنیم. بنابراین، تابع دلتا عرضی بر روی جهت‌های عرضی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ تصویر می‌شود. می‌توانیم معادله (ج.۱۲) را به‌شکل کمی متفاوت بازنویسی کنیم. با کار روی دو عبارت داخل پرانتز شروع می‌کنیم،

$$\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \partial_i\partial_j\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\frac{1}{k^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right)$$

انتگرال روی سمت راست تبدیل فوریه پتانسیل کولمب $1/(4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ است. بنابراین، می‌توانیم تابع دلتا عرضی در فضای حقیقی را بصورت زیر بازنویسی کنیم؛

$$\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{ج.۱۳}$$

این رابطه معرفی تابع دلتای طولی را پیشنهاد می‌کند؛

تابع دلتای طولی

$$\delta_{ij}^{L}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{ج.۱۴}$$

هنگامی که تابع دلتای طولی بر روی یک تابع برداری اثر می‌کند، خواهیم داشت؛

$$F_i^{L}(\mathbf{r}) = \partial_i\int\left[\delta_j'\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]F_j(\mathbf{r}')d^3r' = \partial_i\int\frac{\partial_j' F_j^{L}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'$$

که در آن انتگرال‌گیری جزء به‌جز از $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ به‌جمله $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ انجام دادیم. ضمناً عبارت مرزی اضافی را که از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء ناشی می‌شود، نادیده گرفته‌ایم، که فقط برای یک تابع برداری محلی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ که برای مقادیر بزرگ $\mathbf{r}$ صفر می‌شود، کار می‌کند. بنابراین پیدا می‌کنیم؛

$$\mathbf{F}^{L}(\mathbf{r}) = -\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r' \ . \tag{ج.۱۵}$$

با توابع دلتای طولی و عرضی بلافاصله داریم؛

$$\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \delta_{ij}^{L}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

بنابراین، با اعمال $\delta^{\perp}$ و δ^{L} روی یک تابع برداری مانند $\mathbf{F}$، می‌توان آنرا به‌بخش‌های طولی و عرضی تجزیه کرد. توجه کنید که اینگونه عملیات در فضا محلی نیست.

تابع گرین که بر تابع برداری عرضی عمل می‌کند. این ضمیمه را با بدست آوردن یک رابطه مفید برای تابع گرین که بر روی یک تابع بردار عرضی عمل می‌کند، نتیجه می‌گیریم. ابتدا عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{F}^{\perp}(\mathbf{r}')d^3r' = \int \left[\frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\mathbf{F}^{\perp}(\mathbf{r}')d^3r'$$

که در آن $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ تابع گرین معادله (۷.۵) است، که با عبارت داخل پرانتز در سمت راست آمده است، و k عددموج است. همراه با معادله (ج.۱۳) به‌رابطه زیر میرسیم؛

$$\int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{F}(\mathbf{r}')d^3r' + \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\partial'_i\partial'_j\left[\frac{F_j(\mathbf{r}'')}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\right]d^3r''d^3r' = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2\ ,$$

با $\mathcal{T}_{1,2}$ که به‌ترتیب جمله اول و دوم را در سمت چپ نشان می‌دهد. عبارت دوم را می‌توان با همان روش بدست آوردن معادله (ج.۱۵) بازنویسی کرد. و خواهیم داشت؛

$$\mathcal{T}_2 = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\nabla'\left(\frac{\nabla''\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}'')}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\right)d^3r''d^3r'$$

سپس از تعریف معادله برای تابع گرین اسکالر استفاده کرده تا به‌رابطه زیر میرسیم؛

$$(\nabla'^2+k^2)G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Longrightarrow G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2}\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \nabla'^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right]\ ,$$

که سپس به‌رابطه زیر میرسیم؛

$$\mathcal{T}_2 = -\frac{1}{k^2}\left[\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}d^3r' + \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\nabla'^2\left(\frac{\nabla''\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}'')}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\right)d^3r''d^3r'\right]$$

در ترم دوم، انتگرال‌گیری جزء به‌جزء را انجام داده‌ایم تا لاپلاسین ∇'^2 را از تابع گرین به‌جمله دوم تغییر دهیم، و دوباره از تمام عبارات مرزی چشم پوشی کرده‌ایم. همچنین از مشتقات لاپلاسین و عملگر نابلا استفاده کرده‌ایم. با

$$\nabla'^2\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\right) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\ .$$

می‌توانیم $\mathcal{T}_2$ را بصورت زیر بنویسیم؛

$$\mathcal{T}_2 = -\frac{1}{k^2}\left[\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r - \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\Big(\nabla'\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')\Big)d^3r'\right]$$

در نهایت انتگرال‌گیری جزء به‌جزء در جمله دوم انجام داده تا تابع برداری $\mathbf{F}$ به‌تابع گرین اسکالر تغییر دهیم و دوباره همه عبارت‌های مرزی را نادیده می‌گیریم.

با کنار هم قرار دادن همه نتایج، می‌توانیم حاصلضرب تابع گرین اسکالر را با یک تابع بردار عرضی به‌شکل زیر بازنویسی کنیم.

انتگرال تابع گرین و تابع برداری عرضی

$$\begin{aligned} &G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{F}^{\perp}(\mathbf{r}')d^3r' \\ &= \int \left(1+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{F}^{\perp}(\mathbf{r}')d^3r' - \frac{1}{k^2}\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r' \end{aligned} \tag{ج.۱۶}$$

ضرب عملگرهای نابلا (∇) در عبارت اول در سمت راست باید به‌عنوان یک ضرب دایادیک، به‌همان روشی که قبلاً برای تابع گرین دایادیک (معادله۱۹.۵) استفاده می‌شد درک شود. توجه داشته باشید که جمله دوم در سمت راست با مولفه طولی تابع برداری،$\mathbf{F}^{L}(\mathbf{r})$ متناسب است. معادله (ج.۱۶) به‌ویژه هنگام کار در معیار کولمب[۳] ، که در آن پتانسیل کولمب لحظه‌ای و پتانسیل برداری عرضی است، مفید است.

[۳] Coulomb gauge

کتاب‌نامه

[1] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, (Pearson, San Francisco, 2008)

[2] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999)

[3] B. Mahon, How Maxwell's equations came to light. Nat. Photonics 9, 2–4 (2015)

[4] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press,Cambridge, 1995)

[5] B. Richards, E. Wolf, Electromagnetic simulation in optical systems II. Structure of the image field in an aplanatic system. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 253, 358 (1959)

[6] L. Novotny, B. Hecht, *Principles of Nano-Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012)

[7] J. Dongarra, F. Sullivan, Guest editors introduction to the top 10 algorithms. Comput. Sci. Eng. 2, 22 (2000)

[8] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipes in C++:*The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2002)

[9] P.H. Jones, O.M. Marago, G. Volpe, Optical Tweezers (Cambridge University Press, Cambridge, 2015)

[10] A. Gennerich (ed.), *Optical Tweezers* (Springer, Berlin, 2017)

[11] O.M. Marago, P.H. Jones, P.G. Gucciardi, G. Volpe, A.C. Ferrari, Optical trapping and manipulation of nanostructures. Nat. Nanotechnol. 8, 807 (2013)

[12] S. Chu, Nobel lecture: the manipulation of neutral particles. Rev. Mod. Phys. 70, 685–706 (1998)

[13] F.M. Fazal, S.M. Block, Optical tweezers study life under tension. Nat. Photonics 5, 318 (2011)

[14] R.N.C. Pfeifer, T.A. Nieminen, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, Colloquium: momentum of an electromagnetic wave in dielectric media. Rev. Mod. Phys. 79, 1197–1216 (2007)

[15] S.M. Barnett, Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma. Phys. Rev. Lett. 104, 070401 (2010)

[16] A.M. Yao, M.J. Padgett, Orbital angular momentum: origins, behavior, and applications. Adv.Optics Photonics 3, 161–204 (2011)

[17] M.J. Padgett, Orbital angular momentum 25 years on. Opt. Express 25, 11265 (2017)

[18] K.T. Gahagan, G.A. Swartzlander, Simultaneous trapping of low-index and high-index nanoparticles observed with an optical-vortex trap. J. Opt. Soc. Am. B 16, 533 (1999)

[19] L. Challis, F. Sheard, The Green of the Green functions. Phy. Today 41 (2003)

[20] W.C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* (IEEE Press, Picsatoway, 1995)

[21] J.A. Stratton, L.J. Chu, Diffraction theory of electromagnetic waves. Phys. Rev.56, 99–107 (1939)

[22] E. Abbe, Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung. Archiv Mikroskop Anat.9, 413 (1873)

[23] B. Hecht, B. Sick, U.P. Wild, V. Deckert, R. Zenobi, O.J.F. Martin, D.W. Pohl, Scanning nearfield optical microscopy with aperture probes: fundamentals and applications. J. Chem. Phys. 112, 7761 (2000)

[24] M.A. Paesler, P.J. Moyer, *Near-Field Optics: Theory, Instrumentation, and Applications* (Wiley, New York, 1996)

[25] H.A. Bethe, Theory of diffraction by small holes. Phys. Rev.66, 163 (1944)

[26] C.J. Bouwkamp, On Bethe's theory of diffraction by small holes. Philips Res. Rep.5, 321 (1950)

[27] H.F. Hess, E. Betzig, T.D. Harris, L.N. Pfeiffer, K.W. West, Near-field spectroscopy of the quantum constituents of a luminescent system. Science264, 1740 (1994)

[28] E. Betzig, G.H. Patterson, R. Sougrat, O.W. Lindwasser, S. Olenych, J.S. Bonifacino, M.W. Davidson, J. Lippincott-Schwartz, H.F. Hess, Imaging intracellular fluorescent proteins at nanometer resolution. Science313, 1642–1645 (2006)

[29] M.J. Rust, M. Bates, X. Zhuang, Sub diffraction-limit imaging by stochastic optical reconstruction microscopy (STORM). Nat. Methods3, 793–796 (2006)

[30] S.W. Hell, J. Wichmann, Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission: stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy. Op. Lett.19, 780–782 (1994)

[31] P. Tinnefeld, C. Eggeling, S.W. Hell (eds.), *Far-Field Optical Nanoscopy* (Springer, Berlin, 2015)

[32] R.E. Thompson, D.R. Larson, W.W. Webb, Precise nanometer localization analysis for individual fluorescent probes. Biophys. J.82, 2775–2783 (2002)

[33] F. Göttfert, C.A. Wurm, V. Mueller, S. Berning, V.C. Cordes, A. Honigmann, S.W. Hell, Coaligned dual-channel STED nanoscopy and molecular diffusion analysis at 20 nm resolution. Biophys. J.105, L01–L03 (2013)

[34] P.B. Johnson, R.W. Christy, Optical constants of the noble metals. Phys. Rev. B6, 4370 (1972)

[35] E.D. Palik, *Handbook of Optical Constants of Solids*(Academic, San Diego, 1985)

[36] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin,Solid State Physics(Saunders, Fort Worth, 1976)

[37] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim, The electronic properties of graphene. Rev. Mod. Phys.81, 109 (2009)

[38] F.J. Garcia de Abajo, Graphene plasmonics: challenges and opportunities. ACS Photonics1, 135 (2014)

[39] B. Wunsch, T. Stauber, F. Sols, F. Guinea, Dynamical polarization of graphene at finite doping. New J. Phys.8, 318 (2006)

[40] E.H. Hwang, S. Das Sarma, Dielectric function, screening, and plasmons in 2d graphene. Phys.Rev.B75, 205418 (2007)

[41] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart, Magnetism from conductors, and enhanced non-linear phenomena. IEEE Trans. Microwave Theory Tech.47, 2075 (1999)

[42] C.M. Soukoulis, M. Wegener, Past achievements and future challenges in the development of three-dimensional photonic metamaterials. Nat. Photonics5, 523 (2011)

[43] R.J. Potton, Reciprocity in optics. Rep. Prog. Phys.67, 717 (2004)

[44] H. Atwater, The promise of plasmonics. Sci. Am.296(4), 56 (2007)

[45] J. Heber, News feature: surfing the wave. Nature461, 720 (2009)

[46] A. Otto, Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection. Z. Phys.216(4), 398–410 (1968)

[47] E. Kretschmann, Die Bestimmung optischer Konstanten von Metallen durch Anregung von Oberflächenplasmaschwingungen. Z. Phys.241, 313 (1971)

[48] T.W. Ebbesen, H.J. Lezec, H.F. Ghaemi, T. Thio, P.A. Wolff, Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. Nature391, 667–669 (1998)

[49] S. Xiao, X. Zhu, B.-H. Li, N.A. Mortensen, Graphene-plasmon polaritons: from fundamental properties to potential applications. Front. Phys.11, 117801 (2016).

[50] J. Chen, M. Badioli, P. Alonso-Gonzalez, S. Thongrattanasiri, F. Huth, J. Osmond, M. Spasenovic, A. Centeno, A. Pesquera, P. Godignon, A. Z. Elorza, N. Camara, F.J. Garcia de Abajo, R. Hillenbrand, F. Koppens, Optical nano-imaging of gate-tunable graphene plasmons. Nature 487, 77 (2012)

[51] Z. Fei, A.S. Rodin, G.O. Andreev, W. Bao, A.S. McLeod, M. Wagner, L.M. Zhang, Z. Zhao, G. Dominguez M. Thiemens, M.M. Fogler, A.H. Castro Neto, C.N. Lau, F. Keilmann, D.N. Basov, Gate-tuning of graphene plasmons revealed by infrared nano-imaging. Nature 487, 82 (2012)

[52] M.A. Cooper, Optical biosensors in drug discovery. Nat. Rev. Drug Discov. 1, 515 (2002)

[53] V.G. Veselago, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of and . Sov. Phys. Uspekhi 56, 509 (1964)

[54] J.B. Pendry, Negative refraction makes a perfect lens. Phys. Rev. Lett. 85, 3966 (2000)

[55] K.Y. Bliokh, Y.P. Bliokh, V. Freilikher, S. Savel'ev, F. Nori, Colloquium: unusual resonators: plasmonics, metamaterials, and random media. Rev. Mod. Phys. 80, 1201–1213 (2008)

[56] J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith, Controlling electromagnetic fields. Science 312, 1780 (2006)

[57] U. Leonhardt, Optical conformal mapping. Science 312, 1777 (2006)

[58] D. Schurig, J.J. Mock, B.J. Justice, S.A. Cummer, J.B. Pendry, A.F. Starr, D.R. Smith, Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. Science 314, 977 (2006)

[59] N. Fang, H. Lee, C. Sun, X. Zhang, Subdiffraction-limited optical imaging with a silver superlens. Science 308, 534 (2005)

[60] C.F. Bohren, D.R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light* (Wiley, New York, 1983)

[61] F.J. García de Abajo, J. Aizpurua, Numerical simulation of electron energy loss near inhomogeneous dielectrics. Phys. Rev. B 56, 15873 (1997)

[62] G. Boudarham, M. Kociak, Modal decompositions of the local electromagnetic density of states and spatially resolved electron energy loss probability in terms of geometric modes. Phys. Rev. B 85, 245447 (2012)

[63] F.-P. Schmidt, H. Ditlbacher, U. Hohenester, A. Hohenau, F. Hofer, J.R. Krenn, Dark plasmonic breathing modes in silver nanodisks. Nano Lett. 12, 5780 (2012)

[64] M.I. Stockman, Nanoplasmonics: past, present, and glimpse into future. Opt. Express 19, 22029 (2011)

[65] I.D. Mayergoyz, D.R. Fredkin, Z. Zhang, Electrostatic (plasmon) resonances in nanoparticles. Phys. Rev. B 72, 155412 (2005)

[66] P. Zijlstra, P.M. Paulo, M. Orrit, Optical detection of single non-absorbing molecules using the surface plasmon resonance of a gold nanorod. Nat. Nanotechnol. 7, 379 (2012)

[67] J. Becker, A. Trügler, A. Jakab, U. Hohenester, C. Sönnichsen, The optimal aspect ratio of gold nanorods for plasmonic bio-sensing. Plasmonics 5, 161 (2010)

[68] E. Prodan, C. Radloff, N.J. Halas, P. Nordlander, Hybridization model for the plasmon response of complex nanostructures. Science 302, 419 (2003)

[69] A. Aubry, D. Yuan Lei, A.I. Fernandez-Dominguez, Y. Sonnefraud, S.A. Maier, J.B. Pendry, Plasmonic light-harvesting devices over the whole visible spectrum. Nano Lett. 10, 2574 (2010)

[70] R.C. McPhedran, W.T. Perrins, Electrostatic and optical resonances of cylinder pairs. Appl. Phys. 24, 311 (1981)

[71] A. Aubry, D. Yuan Lei, S.A. Maier, J.B. Pendry, Conformal transformation applied to plasmonics beyond the quasistatic limit. Phys. Rev. B 82, 205109 (2010)

[72] D.Y. Lei, A. Aubry, S.A. Maier, J.B. Pendry, Broadband nano-focusing of light using kissing nanowires. New. J. Phys. 12, 093030 (2010)

[73] W. Zhu, R. Esteban, A.G. Borisov, J.J. Baumberg, P. Nordlander, H.J. Lezec, J. Aizpurua, K.B. Crozier, Quantum mechanical effects in plasmonic structures with subnanometre gaps. Nat. Commun. 7, 11495 (2016)

[74] G. Mie, Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. Ann. Phys. 330, 377 (1908)654 References

[75] Y. Chang, R. Harrington, A surface formulation for characteristic modes of material bodies. IEEE Trans. Antennas Propag. 25(6), 789–795 (1977)

[76] A.J. Poggio, E.K. Miller, Chapter 4: integral equation solutions of three-dimensional scattering problems, in *Computer Techniques for Electromagnetics*, ed. by R. Mittra. International Series of Monographs in Electrical Engineering (Pergamon, 1973), pp. 159–264

[77] T.K. Wu, L.L. Tsai, Scattering from arbitrarily-shaped lossy dielectric bodies of revolution. Radio Sci. 12(5), 709–718 (1977)

[78] P.T. Leung, S.Y. Liu, K. Young, Completeness and orthogonality of quasinormal modes in leaky optical cavities. Phys. Rev. A 49, 3057 (1994)

[79] C. Sauvan, J.P. Hugonin, I.S. Maksymov, P. Lalanne, Theory of the spontaneous optical emission of nanosize photonic and plasmon resonators. Phys. Rev. Lett. 110, 237401 (2013)

[80] F. Ouyang, M. Isaacson, Surface plasmon excitation of objects with arbitrary shape and dielectric constant. Philos. Mag. B 60, 481 (1989)

[81] J. Petersen, J. Volz, A. Rauschenbeutel, Chiral nanophotonic waveguide interface based on spin-orbit interaction of light. Science 346, 67 (2014)

[82] E.M. Purcell, H.C. Torry, R.V. Pound, Resonance absorption by nuclear magnetic moments in a solid. Phys. Rev. 69, 37 (1946)

[83] R. Carminati, J.J. Greffet, C. Henkel, J.M. Vigoureux, Radiative and non-radiative decay of a single molecule close to a metallic nanoparticle. Opt. Commun. 216, 368 (2006)

[84] P. Anger, P. Bharadwaj, L. Novotny, Enhancement and quenching of single-molecule fluorescence. Phys. Rev. Lett. 96, 113002 (2006)

[85] A. Hörl, G. Haberfehlner, A. Trügler, F. Schmidt, U. Hohenester, G. Kothleitner, Tomographic reconstruction of the photonic environment of plasmonic nanoparticles. Nat. Commun. 8, 37 (2017)

[86] K. Joulain, R. Carminati, J.-P. Mulet, J.-J. Greffet, Definition and measurement of the local density of electromagnetic states close to an interface. Phys. Rev. B 68, 245405 (2003)

[87] K.H. Drexhage, Influence of a dielectric interface on fluorescence decay time. J. Lumin. 12, 693 (1970)

[88] R.R. Chance, A. Prock, R. Silbey, *Molecular Fluorescence and Energy Transfer Near Interface*, vol. 37 (Wiley, New York, 1978).

[89] E.C. Le Ru, P.G. Etchegoin, *Principles of Surface Enhanced Raman Spectroscopy* (Elsevier, Amsterdam, 2009)

[90] S. Nie, S.R. Emory, Probing single molecules and single nanoparticles by surface enhanced raman scattering. Science 275, 1102 (1997)

[91] M. Fleischmann, P.J. Hendra, A.J. McQuillan, Raman spectra of pyridine adsorbed at a silver electrode. Chem. Phys. Lett. 26, 163 (1974)

[92] K. Kneipp, M. Moskovits, M. Kneipp (eds.), *Surface Enhanced Raman Scattering* (Springer, Berlin, 2008)

[93] T. Förster, Energiewanderung und Fluoreszenz. Naturwissenschaften 33, 166 (1946)

[94] P. Andrew, W.L. Barnes, Energy transfer across a metal film mediated by surface plasmon polaritons. Science 306, 1002 (2004)

[95] J.I. Gersten, A. Nitzan, Accelerated energy transfer between molecules near a solid particle. Chem. Phys. Lett. 104, 31 (1984)

[96] C. Cherqui, N. Thakkar, G. Li, J.P. Camden, D.J. Masiello, Characterizing localized surface plasmons using electron energy-loss spectroscopy. Annu. Rev. Phys. Chem. 67, 331 (2015)

[97] C.J. Powell, J.B. Swan, Origin of the characteristic electron energy losses in aluminum. Phys. Rev. 115, 869 (1959)

[98] M. Bosman, V.J. Keast, M. Watanabe, A.I. Maaroof, M.B. Cortie, Mapping surface plasmons at the nanometre scale with an electron beam. Nanotechnology 18, 165505 (2007)

[99] J. Nelayah, M. Kociak, O. Stephan, F.J. García de Abajo, M. Tence, L. Henrard, D. Taverna, I. Pastoriza-Santos, L. M. Liz-Martin, C. Colliex, Mapping surface plasmons on a single metallic nanoparticle. Nat. Phys. 3, 348 (2007)

[100] F.J. García de Abajo, Optical excitations in electron microscopy. Rev. Mod. Phys. 82, 209 (2010)References 655

[101] C. Colliex, M. Kociak, O. Stephan, Electron energy loss spectroscopy imaging of surface plasmons at the nanoscale. Ultramicroscopy 162, A1 (2016)

[102] U.S. Inan, R.A. Marshall, *Numerical Electromagnetics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011)

[103] A. Taflove, S.C. Hagness,*Computational electrodynamics* (Artech House, Boston, 2005)

[104] K.S. Yee, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas Propag. 14, 302 (1966)

[105] A. Taflove, M.E. Browdin, Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 23, 623 (1975)

[106] A. Taflove, M.E. Browdin, Computation of the electromagnetic fields and induced temperatures within a model of the microwave-irradiated human eye. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 23, 888 (1975)

[107] J. Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. J. Comput. Phys. 114, 185 (1994)

[108] R. Fuchs, S.H. Liu, Sum rule for the polarizability of small particles. Phys. Rev. B 14, 5521 (1976)

[109] F.J. García de Abajo, A. Howie, Retarded field calculation of electron energy loss in inhomogeneous dielectrics. Phys. Rev. B 65, 115418 (2002)

[110] U. Hohenester, A. Trügler, MNPBEM—a Matlab Toolbox for the simulation of plasmonic nanoparticles. Comp. Phys. Commun. 183, 370 (2012)

[111] A.M. Kern, O.J.F. Martin, Surface integral formulation for 3D simulations of plasmonic and high permittivity nanostructures. J. Opt. Soc. Am. A 26, 732 (2009)

[112] P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, On the evaluation of the double surface integrals arising in the application of the boundary integral method to 3d problems. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 45, 436 (1997)

[113] D.J. Taylor, Accurate and efficient numerical integration of weakly singulars integrals in Galerkin EFIE solutions. IEEE Trans. Antennas Propag. 51, 2543 (2003)

[114] S. Sarraf, E. Lopez, G. Rios Rodriguez, J. D'Elia, Validation of a Galerkin technique on a boundary integral equation for creeping flow around a torus. Comp. Appl. Math. 33, 63 (2014)

[115] J.S. Hesthaven, T. Warburton, High-order/spectral methods on unstructured grids I. timedomain solution of Maxwell's equations. J. Comput. Phys. 181, 186 (2002)

[116] J.S. Hesthaven, High-order accurate methods in time-domain computational electromagnetics: a review. Adv. Imaging Electron Phys. 127, 59–123 (2003)

[117] J.C. Nedelec, Mixed finite elements in R3. Numer. Math. 35, 315 (1980)

[118] K. Busch, M. König, J. Niegemann, Discontinuous Galerkin method in nanophotonics. Laser Photonics Rev. 5, 773–809 (2011)

[119] M. Paulus, P. Gay-Balmaz, O.J.F. Martin, Accurate and efficient computation of the Green's tensor for stratified media. Phys. Rev. E62, 5797 (2000)

[120] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison, Reading, 1994)

[121] Y.S. Kim, P.T. Leung, T.F. George, Classical decay rates for molecules in the presence of a spherical surface: A complete treatment. Surf. Sci. 195, 1 (1988)

[122] J. Gersten, A. Nitzan, Radiative properties of solvated molecules in dielectric clusters and small particles. J. Chem. Phys. 95, 686 (1991)

نمایه

آپلاناتیک، ۵۷
ابراهام–مینکوفسکی، ۹۳
اتحاد سامرفلد، ۳۴۸
اتصال، ۱۸۸
اتو، ۱۷۲
اثر بگرنزونگ، ۲۸۹
اختلال خارجی، ۲۲۶
ارنست آبه، ۱۲۳
اریک بتزیگ، ۱۳۴
افزونگی، ۱۶۸، ۲۱۷، ۲۲۰، ۳۸۸
امواج خزنده، ۲۴۳
امواج محوشونده، ۱۵، ۱۴۹، ۱۹۰، ۳۰۸
امی نوتر، ۷۷
امید ریاضی، ۲۶۲
انتقال بین باند، ۱۴۸
انتقال درون باند، ۱۴۸
انتگرال فرنل، ۵۵
انقراض، ۲۱۱
اهدا کننده، ۲۷۹
اویانگ و ایزاکسون، ۲۵۲
اُپتیک تبدیلی، ۲۳۷
استفان هل، ۱۳۶
بَارنت، ۹۴
برش انشعاب، ۳۵۲
برنگر، ۳۰۶
بسل ریکاتی، ۳۷۹
بسل–ریکاتی، ۲۴۷
بل، ۱۳۴
بورن و هافمن، ۲۱۷
بِسل، ۲۴۵
بَیضوی گون، ۲۱۱، ۲۱۷
بیضوی گون کشیده، ۲۱۸
تابع آزمایشی، ۳۱۶
تابع بلاخ، ۱۴۵
تابع دلتای دیراک، ۳۹۱
تابع گرین، ۲۲۶
تافلاو و برودین، ۲۹۷
تانسور تنش، ۷۸
تبدیل دوری، ۴۵
تبدیل فوریه سریع، ۷۳
تبدیلات معیاری، ۴۸
تحدید، ۲۲۰
تحلیل مختلط، ۲۳۸
ترانهاده، ۶۸، ۲۷۷
تفاضل محدود در حوزه زمان، ۲۹۷
تقریب فاز ثابت، ۵۵
تقریب موازی محور، ۶۰
تلفات حجیم، ۲۸۷
تله نوری، ۶۶، ۷۸
توابع تحلیلی، ۲۳۸
توابع لاگرانژ، ۷۷
توابع گسترش نقطه‌ای، ۱۲۵
تُنک، ۳۲۷
تکین، ۳۳۸
تیغه فلزی، ۱۷۳
جان پندری، ۱۹۳
جایکشت، ۳۷۶
جایگشت دوری، ۳۳۱
جذب، ۲۱۱
جعلی، ۳۲۰
جواب تاخیری، ۱۰۱
حالت ماندگار، ۲۵۵

حد پراش، ۱۲۳
درود، ۲۲
درود-لورنتس، ۲۲
دیسک ایری، ۱۲۲
رائو-ویلتون-گلیسون، ۳۲۰
رابطه پاشندگی، ۹، ۱۶۴
رانگ-کوتا، ۳۳۰
راویارت-توماس ، ۳۲۰، ۳۳۹
رهیافت دیریشله، ۲۲۲
رهیافت نیومن، ۲۲۴
روبش خط به
خط، ۱۲۵
رودریگز، ۳۵۹
روزنه عددی، ۵۹
روش اجزای محدود، ۳۱۵
روش اجزای مرزی، ۳۱۰
ریز لوله، ۸۵
ریزموج، ۳۵
ساختار تیغه‌ای، ۱۷۱
سطح مقطع انقراضی، ۲۱۹
شرایط مرز جذبی، ۳۰۶، ۳۳۷
شرط لورنس، ۳۶
شهودی، ۲۲۵
شکل‌های ویتنی، ۳۲۷
شیب دارترین فرود، ۳۵۳
صفحه های ریمان، ۳۵۲
ضداتصال، ۱۸۸
ضرایب فرنل، ۱۷۸
ضریب پُرسل، ۲۶۲
طول انتشار، ۱۶۹

فرکانس استوکس، ۲۷۵
فلورنت ندلک، ۳۲۵
فنگ، ۰َ۰َ
فورستر، ۲۷۹
قضیه نیتر، ۷۷
قضیه هم پاسخی، ۱۶۰
قطبی شدگی، ۳۷، ۹۷
قطبی شوندگی، ۲۱۸
لایه‌های تطبیق کامل، ۳۰۶
لوژاندر، ۲۱۲
لوی-سیویتا، ۴۸
ماتریس تقویت، ۳۰۵
ماتریس تُنک، ۳۱۸
متلب، ۷۴
محوشونده، ۷، ۱۵۳
محوشوندگی، ۱۶۴
محیط لایه‌لایه، ۱۷۷
محیط پاشنده، ۷
محیط‌های لایه‌لایه، ۱۶۳
مختصات کروی‌گون، ۱۲۹
مدل بیت-بوکامپ، ۱۲۹
مزدوج مختلط، ۱۵۵
معادلات انتگرالی میدان الکتریکی، ۲۵۱
معادلات انتگرالی میدان ترکیبی، ۲۵۱
معادلات انتگرالی میدان مغناطیسی، ۲۵۱
معیار شایستگی، ۲۳۲
معیار کولمب، ۳۹۵
مغناطیس شوندگی، ۳۷، ۳۲۰
مقادیر ویژه، ۲۲۶
مقدار اصلی گوشی، ۳۹۲
موازی محور، ۱۲۰
موتور کینسین، ۸۵
موج محوشونده، ۵۰، ۱۹۳
مودهای الحاقی، ۲۵۲
مودهای جعلی، ۳۲۵
مودهای ویژه، ۱۷۹، ۲۲۵
مودهای ویژه الحاقی، ۲۳۴
مولکول گیرنده، ۲۷۹
مومنتوم زاویه‌ای مداری، ۲۱، ۹۵
موچین نوری، ۲۱، ۷۸
می، ۲۱۱، ۳۷۴
می-گانس، ۲۱۱
میدانهای محوشونده، ۱۲۸
میکروسکوپ محلی‌سازی، ۲۰
میکروسکوپ محلی‌سازی نوری، ۱۱۷

میکروسکوپSNOM ، ۱۱۷
نسبت محوری، ۲۲۰
نظریه اختلال، ۲۲۷
نظریه می، ۲۴۵
نفوذپذیری مغناطیسی، ۱۴۱
نور ممنوعه، ۲۰۵
نووتنی، ۲۷۰
نگاشت همدیس، ۲۳۷
هرمیتی، ۲۵۲
هستیون، ۳۲۵
هم پاسخی، ۲۸۵
همدوس، ۱۶۶
هنکل، ۲۴۵
وان در والز، ۱۴۷
وسلاگو، ۱۹۲
ویگنر-وایسکوپف، ۲۶۲
پاشندگی، ۴۵، ۵۲
پایسته، ۱۶۴
پتانسیل‌های ویژه، ۲۲۷
پدیدارشناسی، ۱۴۱
پذیرندگی الکتریکی، ۱۴۳
پراش، ۷۷
پراکنده، ۷۷
پراکندگی، ۲۱۰
پراکندگی رامان، ۲۷۴
پرش قورباغه ای، ۳۰۲
پلاسمون‌های انبوه، ۱۶۶
پلاسمون‌های سطحی، ۱۶۴
پواین‌تینگ، ۴۳
پویائی ذاتی، ۱۴۲
پویش مورب، ۲۰

چو، ۳۵۳
چگالی حالت‌ها، ۲۶۴
کاواک، ۲۶۲
کرامرز-کرونیگ، ۱۵۷
کرتشمن، ۱۷۲
کوشی-ریمان، ۲۴۱، ۳۴۲
کُد، ۷۴
گالرکین، ۲۵۱
گذردهی الکتریکی، ۱۴۱
گره، ۶۳
گلبرگ، ۱۳۲
گوس-هانچن، ۱۷

یی، ۲۹۷