



ای نسخه‌ی نامه‌ی الهی که تویی  
ای آینه‌ی حال‌شاهی که تویی  
بیرون ز توییست آنچه در عالم هست  
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی





۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# مقدمه‌ای بر ریاضیات و فیزیک مکانیک کوانتومی

نویسنده: لوسیو پیسیریلو  
Lucio Piccirillo

ترجمه:

دکتر محمد صادق ابریشمیان  
استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

## ۱۰۰. پیشگفتار

کتاب‌های بسیار خوبی وجود دارد که پایه‌های ریاضی و فیزیکی مکانیک کوانتومی را بررسی می‌کنند. سوال این است: چرا یکی دیگر؟ نزدیک شدن به موضوعات فیزیک معمولاً به این صورت پیش می‌رود: یک فرد جوان یا یک بزرگسال کنجکاو به فیزیک علاقه‌مند است و سعی می‌کند با خواندن یک کتاب علمی رایج آن را بهتر درک کند. با خواندن آن، او خلاصه‌ای از موضوعات را دریافت می‌کند □ مثلاً سیاه‌چاله‌ها یا لیزرها □ اما بیش از اینکه توضیح دهد، این کتاب سؤالات بسیاری را برانگیخته است. رایج‌ترین سؤالات این است که “چرا؟” یا “از کجا می‌دانند؟” و غیره بنابراین لحظه‌ای وجود دارد که او دیگر تنها از توصیف کیفی طبیعت خوشحال نیست، بلکه می‌خواهد بهتر بفهمد که چگونه دانشمندان به ادعاهای اغلب بسیار جسورانه می‌رسند. در عمل، این با درک روشی که دانشمندان پیش‌بینی می‌کنند مطابقت دارد. با توجه به مقداری دانش در مورد یک سیستم فیزیکی، او می‌خواهد یاد بگیرد که چگونه چیزهای جدید را در مورد سیستم محاسبه کند. به عنوان مثال، با توجه به موقعیت و سرعت یک ذره نقطه مانند با جرم  $m$  در زمان  $t_0$ ، ذره در زمان  $t_1 > t_0$  کجا خواهد بود؟

اگر فرد مورد نظر تصمیم بگیرد که فیزیک را به طور سیستماتیک بفهمد، معمولاً در یک برنامه مطالعاتی دانشگاه شرکت می‌کند که در آن کسی سخنرانی و کتاب‌هایی را توصیه می‌کند. برخی از مهمترین مفاهیم اولیه عبارتند از: نحوه اندازه‌گیری اشیا و نحوه بیان اندازه‌گیری‌ها با اعداد با واحد. قدم بعدی این است که وقتی می‌خواهیم چیزی را تغییر دهیم، بینیم آیا الگوهای در اعداد وجود دارد یا خیر. فرض کنید جرم نقطه مانند در میدان گرانشی زمین است و آن را از ارتفاعی رها می‌کنیم و موقعیت جرم را با زمان اندازه می‌گیریم. اگر موقعیت را در مقابل زمان رسم کنیم، منحنی زیبایی را می‌بینیم که از داده‌ها بیرون می‌آید: یک سهمی. بنابراین به نظر می‌رسد که می‌توانیم از ریاضیات برای توصیف جهان فیزیکی استفاده کنیم. به نظر می‌رسد طبیعت از قوانینی پیروی می‌کند که می‌توانند به شکل ریاضی بیان شوند. در واقع، می‌توانیم داده‌های جمع‌آوری شده برای جسم در حال سقوط را با یک عبارت ساده  $s(t) = s(0) - gt^2$  برازش دهیم، که به ما امکان پیش‌بینی می‌دهد. یعنی می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که اگر جسم از ارتفاعات بالاتر و بالاتر را رها کنیم چگونه شتاب می‌گیرد یا نه؟ اما جادو به نظر می‌رسد در توان 2 در عبارت قبلی و در ثابت  $g$  باشد. چرا 2؟ آیا دقیقاً 2 است یا شاید 1.99998 یا 2.000001؟ آیا توان 2 ناشی از گرانش است؟ اگر بله، چرا و چگونه؟ نظم یا الگوهای موجود در داده‌ها نشان می‌دهد که یک رابطه ریاضی وجود دارد که به نوبه خود نشان می‌دهد که باید نوعی قانون فیزیکی وجود داشته باشد. یک قانون فیزیکی دستوری است که به هر کسی اجازه می‌دهد تا با توجه به شناختی از طبیعت، پیش‌بینی کند: با توجه به دو سیستم دقیقاً یکسان، آنها با زمان دقیقاً به روشی تکامل می‌یابند. این مکانیک کم و بیش کلاسیک با دقت بی‌نهایت در دانش کمیت‌های فیزیکی و قطعیت مطلق در تکامل زمانی یک سیستم است. مکانیک کلاسیک حس رایج زندگی روزمره انسان‌هاست، زمانی که سرعت خیلی زیاد نیست و مسافت‌ها خیلی بزرگ یا خیلی کوچک نیستند.

هنگامی که طبیعت در مقیاس‌های بسیار کوچک شروع به کاوش کرد - به عنوان مثال،

طول‌های اتمی - پدیده‌های جدیدی ظهور کردند که با ریاضیات مورد استفاده در مکانیک کلاسیک قابل توصیف نیستند. معادلات جدید و ابزارهای جدید برای انجام پیش‌بینی لازم است. با این حال، حتی عمل اندازه‌گیری‌ها نیاز به تفسیر مجدد با معرفی دامنه‌های احتمال دارد. در مسیری که دانشجویان برای درک فیزیک مدرن دنبال می‌کنند، مکانیک کوانتومی قطعاً مانع بزرگی است: دانشجویان باید طرز فکر خود را در مورد طبیعت تغییر دهند. اجسام می‌توانند همزمان در بیش از یک مکان باشند، تکرار آزمایش‌ها در شرایط اولیه دقیقاً یکسان می‌تواند نتایج متفاوتی داشته باشد، و به نظر می‌رسد که اجسام مادی دارای خواص موج مانند هستند و بالعکس.

هر کتاب مکانیک کوانتومی روش خاص خود را برای همراهی دانشجویان در گذر دشوار از مکانیک کلاسیک به فیزیک کوانتومی دارد و برای هر دانشجو متفاوت است. مفاهیمی که دانشجو به راحتی درک می‌کند ممکن است مانعی غیرقابل عبور برای دانشجو باشد. اینجاست که تنوع کتاب بسیار مفید است. با مراجعه به بیش از یک کتاب، احتمال زیادی وجود دارد که یک کتاب خاص توضیحی داشته باشد که در نهایت جرقه‌ای را در چشم دانشجو ایجاد کند که هر استاد با آن آشنایی کامل دارد. جرقه‌ای که به معنی "من متوجه شدم" باشد.

این کتاب دقیقاً با این هدف نوشته شده است: کمک به دانشجویان برای درک مفاهیم با ارائه موضوعات، در صورت امکان، به روش‌های کمی متفاوت، اغلب بیش از یک بار. اگر فقط یک دانشجو پس از خواندن این کتاب ادعا کند "من آن را گرفتم"، تمام تلاش‌های ما کاملاً برآورده شده است.

## ۲۰۰ پیشگفتار مترجم

خداوند منان را شاکرم که بمن توفیق تدوین این کتاب را با استفاده از نرم افزارهای و لیتکس LaTeX فراهم آورد. بدیهی است که برگردان این کتاب بزبان فارسی خالی از اشتباه نیست. تمام فرمولهای این کتاب را خودم تایپ کردم و ممکن است خطائی رخ داده باشد. از اساتید محترم و دانشجویان هر کجا اشتباهی را مشاهده نمودند اینجانب را از طریق ایمیل مطلع نمایند تا در برطرف گردد.

محمد صادق ابریشمیان  
اسفند ۱۴۰۳

msabrish@eetd.kntu.ac.ir

# فهرست مطالب

۱۰	پیشگفتار	۵
۲۰	پیشگفتار مترجم	۷
۱	فیزیک کلاسیک	۸
۱.۱	مکانیک کلاسیک	۹
۱.۱.۱	اصول مکانیک کلاسیک	۱۳
۲.۱.۱	مکانیک نیوتنی	۱۵
۲.۱	لاگرانژ	۲۰
۱.۲.۱	کنش ثابت و معادلات اوایلر-لاگرانژ	۲۳
۲.۲.۱	تغییر مختصات	۲۶
۳.۲.۱	قضیه نوتر	۲۸
۳.۱	مسئله دو جسم	۳۱
۴.۱	همیلتون	۳۲
۵.۱	براکت‌های پواسون	۳۵
۶.۱	فضای فاز	۳۶
۲	بحران مکانیک کلاسیک	۴۰
۱.۲	تشعشع جسم سیاه	۴۲
۲.۲	فشار تشعشع	۴۳
۳.۲	قانون استفان بولتزمن	۴۸
۴.۲	قانون جابجایی وین	۵۶
۵.۲	قضیه تساوی و قانون جین ریلی	۵۹
۶.۲	فاجعه فرابنفش	۶۰
۳	از فیزیک کلاسیک تا فیزیک کوانتومی	۶۷
۱.۳	رابطه پلانک	۶۹
۲.۳	آنتروپی و احتمالات	۷۴
۳.۳	روش دیگر بدست آوردن فرمول جسم سیاه	
۴.۳	کشف امواج الکترومغناطیسی هرتز	

۵.۳	آزمایش هالواچ و لنارد	۷۶
۶.۳	فرضیه فوتون انیشتین	۸۰
۷.۳	گرمای ویژه مواد جامد	۸۴
<b>۴</b>	<b>نظریه کوانتوم اولیه: اتم بور</b>	<b>۸۹</b>
۱.۴	دیپرولی	۹۷
۲.۴	آزمایش دیویسون و ژرمر	۹۹
۳.۴	ارتباط با ثابت پلانک	۱۰۲
<b>۵</b>	<b>معادله شرودینگر</b>	<b>۱۰۵</b>
۱.۵	همیلتون-ژاکوبی	۱۰۵
۱.۱.۵	تبدیلات متعارف	۱۰۶
۲.۱.۵	معادله همیلتون-ژاکوبی	۱۰۹
۲.۵	انتگرالهای مسیر فاینمن	۱۱۲
۱.۲.۵	آزمایش دو شکاف نور	۱۱۳
۲.۲.۵	آزمایش دو شکاف الکترون	۱۱۶
۳.۲.۵	از انتگرالهای مسیر تا معادله شرودینگر	۱۱۸
۴.۲.۵	امواج مسطح (صفحه‌ای)	۱۲۳
۳.۵	اصل عدم قطعیت هایزنبرگ	۱۲۶
۴.۵	اپراتورها و امید ریاضی	۱۲۹
۱.۴.۵	اندازه‌گیری‌ها و جابجایی‌ها	۱۳۱
۵.۵	بسته‌های موج و قضیه ارنفست	۱۳۴
۶.۵	معادله شرودینگر مستقل از زمان	۱۳۸
۷.۵	عملگر هرمیتی	۱۴۰
۸.۵	ذرات آزاد	۱۴۲
۹.۵	ذره در یک جعبه	۱۴۴
۱۰.۵	نوسان‌ساز هارمونیکی	۱۴۸
۱.۱۰.۵	راه حل جبری	۱۴۹
۲.۱۰.۵	راه حل تحلیلی	۱۵۴
<b>۶</b>	<b>ماتریس‌ها در مکانیک کوانتومی</b>	<b>۱۶۱</b>
۱.۶	نماد دیراک	۱۶۲
۲.۶	جبر خطی	۱۶۳
۱.۲.۶	ماتریس پاولی	۱۶۷
۲.۲.۶	ماتریس‌ها در مکانیک کوانتومی	۱۷۲
۳.۲.۶	فرضیه‌ها، اصول و فیزیک جبر ماتریسی	۱۸۷
۴.۲.۶	آزمایش اشترن و گرلاخ	۱۸۹
۵.۲.۶	تکانه زاویه‌ای	۱۹۳



۲۰۷	.....	هارمونیک‌های کروی	۶.۲.۶
۲۱۱	.....	اسپین (چرخش)	۷.۲.۶
۲۱۹	.....	اتم هیدروژن	۳.۶
۲۲۷	.....	اصل انحصار (طرد) پائولی	۴.۶
۲۳۰	.....	تصویر هایزنبرگ	۵.۶
۲۳۲	.....	چرا عدد موهومی ز را بکار بردیم؟	۶.۶
۲۴۰	.....	نمایه	

## بخش اول

# مروری بر مکانیک کلاسیک

# فصل ۱

## فیزیک کلاسیک

جمله معروف آلبرت انیشتین «غیرقابل درک‌ترین چیز در مورد جهان این است که درک کردنی است» به این واقعیت اشاره می‌کند که به‌نظر می‌رسد جهان توسط قوانینی که به‌صورت عبارات ریاضی بیان می‌شوند اداره می‌شود. این اصلاً بدیهی نیست: ما به‌عنوان انسان، بسیار قادریم پدیده‌های طبیعی را با استفاده از ابزارهای دیگری مانند شعر یا موسیقی یا سایر اشکال هنری توصیف کنیم. همه ما حداقل یک بار در طول زندگی خود هنگام مشاهده آسمان شب با نمایش باشکوه اشیاء نورانی غوطه‌ور در فضایی وسیع، شاید با گسترش بی‌نهایت، احساس شگفتی کرده‌ایم. پس طبیعی است که سعی کنیم بفهمیم چرا این اجرام نقطه مانند در آسمان که نور ضعیفی از خود ساطع می‌کنند، وجود دارند. اگر وقت بگذاریم، متوجه نظمی در حرکت این نورها در آسمان می‌شویم: به‌نظر می‌رسد که آنها در اطراف یک نقطه ثابت در آسمان به‌سمت شمال می‌چرخند. درک اینکه چرا آنها به این شکل حرکت می‌کنند دشوار است، اما شاید بتوانیم نحوه حرکت آنها را درک کنیم. تفاوت زیادی در پاسخ به «چرا» به جای «چگونه» وجود دارد و این کتاب بیشتر به این موضوع می‌پردازد که «چگونه» چیزها به‌جای روشی دیگر به شیوه‌ای خاص رفتار می‌کنند.

در زندگی آشفته مدرن ما، لحظه‌های وحشت در مقابل ستاره‌ها نادر است. زندگی مدرن به ما زمان نمی‌دهد که در مورد چیزهایی که فراتر از محیط اطراف ما هستند فکر کنیم. شاید این برای مردم باستان مثل فیلسوفان یونانی یکسان نبود. به‌دلیل ساختار متفاوت جامعه، تعداد زیادی افراد باهوش و مستعد بودند که فرصت داشتند در مورد طبیعت و پدیده‌های آن تأمل کنند. نظم در حرکت ستارگان (از جمله خورشید) شاید اولین چیزی بود که مورد توجه قرار گرفت، اما ما تلاش برای بررسی دقیق‌تر پدیده‌ها را به یونانیان نسبت می‌دهیم. یونانی‌ها شروع به پرسیدن «چرا» پدیده‌های خاص کردند و مدل پیچیده‌ای از واقعیت را توسعه دادند که در آن پدیده‌های طبیعی توسط تعداد معینی از اعمال خودسرانه خدایان ایجاد می‌شدند. به عنوان مثال تصور می‌شد که زلزله‌ها ناشی از خشم خدای پوزیدون است. به همین ترتیب، رعد و برق توسط خشم زئوس ایجاد می‌شود. توسل به خدا به یکی از سؤالات اصلی پاسخ داد: «چرا پدیده‌های خاصی اتفاق

می‌افتد؟ و پاسخ ساده این بود که همه چیز اتفاق می‌افتد زیرا اراده خدایان است. این رویکرد به وضوح روشی را که مردم می‌توانند در مورد پدیده‌های طبیعی پیش بینی کنند، محدود می‌کرد. اگر پدیده‌های طبیعی به این دلیل اتفاق می‌افتند که در یک مکان و در یک زمان خاص، خدای خاصی تصمیم به وقوع آن گرفته است، پیش‌بینی قابل اعتماد واقعاً غیرممکن است. تنها گزینه باقی مانده این بود که مجموعه‌ای از اقدامات را برای تلاش برای "آرامش دادن" خدایان در تلاش برای پیش‌بینی پدیده‌های آینده شرح دهیم. اگر پیش‌بینی نمی‌کنید، حداقل کمی کنترل داشته باشید.

انقلاب اصلی زمانی رخ داد که گروهی از فیلسوفان یونانی جستجوی «چرا» را رها کردند و توجه خود را به «چگونگی» پدیده‌های خاص بدون استناد به عمل خدایان معطوف کردند. این نشان دهنده یک تغییر عمده در بررسی پدیده‌های طبیعی است. این تغییر به دلیل گروهی از فیلسوفان از شهر باستانی Miletus بود که ویرانه‌های آنها در نزدیکی روستای مدرن بالات در استان آیدین ترکیه قرار دارد. تالس (حدود 624 قبل از میلاد تا حدود 568 قبل از میلاد) احتمالاً نماینده‌ترین فیلسوف یونانی بود که از استفاده از اساطیر برای توضیح پدیده‌های طبیعی جدا شد و در عوض جهان را از طریق تعدادی فرضیه معقول توضیح داد. سپس این فرضیه‌ها در معرض ارزیابی و انتقادات آشکار سایر فیلسوفان قرار می‌گیرند تا اینکه به نوعی اجماع برسند. این فرآیند با رویکرد "علمی" مدرن تفاوت چندانی ندارد. تالس بسیار مورد توجه معاصران خود بود و در واقع او را به همراه پیتاکوس، تعصب، سولون، چیلون و زوج دیگری که به وضوح مشخص نشده بودند، یکی از هفت حکیم به حساب می‌آوردند. توجه به این نکته مهم است که این رویکرد جدید سؤالات اصلی را از «چرا» به «چگونه» تغییر داده است. زمانی که یونانی‌ها اعمال خدایان را که بنا به تعریف غیرقابل پیش‌بینی بود نادیده گرفتند، شروع به تمرکز بر روی یافتن چگونگی وقوع اتفاقات کردند. آیا طبیعت مجبور به پیروی از قوانین خاصی است؟ جستجوی این قواعد یا قوانین طبیعی از آن زمان آغاز شد و هنوز هم ادامه دارد. علم مدرن هنوز در تلاش برای درک عملکرد کیهان با تلاش برای شناسایی مجموعه‌ای از "قوانین" اساسی است که معمولاً با مشاهده نتایج آزمایش‌ها یا مشاهدات باید کشف شوند. در نتیجه این مشاهدات در طول هزاران سال، امروزه در موقعیتی هستیم که می‌توانیم بیان کنیم که پدیده‌های طبیعی تابع مجموعه‌ای از قوانین هستند. این قوانین را "قوانین فیزیکی" می‌نامیم. این قوانین از مشاهدات دقیق الگوها در پدیده‌های طبیعی ناشی و به عنوان روابط "ریاضی" بیان می‌شوند. درک این نکته بسیار مهم است که قوانین بدون اثبات ارائه و تا زمانی که یک آزمایش (یا بهتر است بیش از یک آزمایش) نقض را نشان دهد معتبر تلقی می‌شوند. در این مورد، چند انتخاب داریم: سعی می‌کنیم ببینیم آیا می‌توانیم قوانین خود را تغییر دهیم تا داده‌های تجربی جدید را در محدوده اعتبار قانون قرار دهیم. قانون را به طور کامل لغو می‌کنیم و به دنبال قانون جدیدی هستیم. ما «محدوده کاربرد» قوانین را با این فرض که قوانین دیگری خارج از چنین محدوده‌ای مورد نیاز است، دوباره تعریف می‌کنیم. قوانین معمولاً توضیحی برای مکانیسم تولید چنین پدیده‌هایی ارائه نمی‌دهند.

"قانون جهانی" قانونی است که فرض می‌شود در همه جای جهان، در گذشته، حال و آینده معتبر است. این بدون شک قوی‌ترین جمله‌ای است که می‌توانیم در مورد جهان

بیان کنیم. بدیهی است که هیچ راهی برای تأیید این نوع قانون، حتی از نظر تئوریک، نداریم. بیایید به احتمال بی نهایت بودن جهان در گسترش فضایی فکر کنیم: هر آزمایشی که بخواهد مستقیماً این فرض را تأیید کند، برای همیشه اجرا می شود ...

علاوه بر قوانین و قوانین جهانی، اغلب در ادبیات علمی با اصطلاحات بدیهی، اصول موضوعه (بدیهیات)<sup>۱</sup> و اصل (فرضیه)<sup>۲</sup> و بنیاد (گزاره)<sup>۳</sup> مواجه می شویم. بدیهیات و فرضیه ها اصطلاحاتی هستند که بیشتر در ریاضیات استفاده می شوند و به گزاره ای اطلاق می شوند که برای مطالعه پیامدهای ناشی از آنها درست فرض می شود. بدیهیات و فرضیه ها، بنا به تعریف، غیر قابل اثبات هستند و بدیهی<sup>۴</sup> تلقی می شوند. یک اصل عبارتی است در مورد طبیعت، که از مشاهدات به دست می آید و تا زمانی که به طور تجربی رد نشود، درست در نظر گرفته می شود. قوانین به صورت ریاضی بیان می شوند در حالی که اصول معمولاً عبارات کلی هستند. یک مثال از اصول، بیانیه سرعت ثابت نور بدون توجه به سرعت نسبی ناظرانی است که آن را اندازه گیری می کنند. یکی از نمونه های قوانین، قانون جهانی گرانش نیوتن است.

قبل از پرداختن به ماشین های فیزیک کلاسیک و کوانتومی، اجازه دهید مشکل اساسی را بیان کنیم: می خواهیم بتوانیم با توجه به مجموعه ای از مقادیر قابل اندازه گیری و مجموعه ای از مفروضات معقول، پیش بینی کنیم که چگونه یک سیستم در زمان تکامل می یابد. برای اینکه بتوانیم تکامل یک سیستم را توصیف کنیم، ابتدا باید آن را تعریف کنیم و سپس قوانین حاکم بر تکامل زمانی آن را تعیین کنیم. مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی قوانین بسیار متفاوتی دارند و این کتاب سعی خواهد کرد تفاوت ها و (شباهت ها) را روشن کند.

اغلب یک قانون از طریق یک معادله بیان می شود. در مورد حرکت یک جسم یا یک ذره، معادله ای تنظیم می شود که تکامل زمانی یک پارامتر با چیزی شناخته شده برابر شود. به این ترتیب، با حل معادله، می توانیم «پیش بینی» کنیم که پارامتر مورد نظر ما چگونه با زمان «تکامل» می یابد. مورد خط سیر یک ذره مستلزم آن است که بتوانیم موقعیت آینده ذره را با زمان پیش بینی کنیم. در بخش 1.1 خواهیم دید که قانون دوم نیوتن نمونه ای از چنین معادله ای است که اگر نیروی  $F$  وارد بر جسمی به جرم  $m$  را در زمان  $t = 0$  را همراه با موقعیت و سرعت بدانیم. می توانیم موقعیت آینده (و گذشته) را پیش بینی کنیم.

## ۱.۱ مکانیک کلاسیک

در این قسمت به بررسی مکانیک کلاسیک می پردازیم که از مکانیک نیوتنی شروع کرده سپس به فرمول لاگرانژی و همیلتونی پیش می رویم تا با براکت های پواسون به پایان

<sup>۱</sup> Axiom

<sup>۲</sup> Postulate

<sup>۳</sup> Principle

<sup>۴</sup> به طور کلی، استفاده از بدیهیات در هنگام برخورد با اعداد واقعی مرسوم است در حالی که فرضیه ها بیشتر در هندسه استفاده می شوند، *self-evident*.

برسیم. در طول این سفر کلاسیک، بیشتر ریاضیات مورد نیاز (اما نه همه!) در مکانیک کوانتومی معرفی خواهد شد.

بحث خود را در مورد مکانیک کلاسیک با بحث در مورد معنای اصطلاح حالت کلاسیک یک سیستم آغاز می‌کنیم. اصطلاح “کلاسیک” را اضافه کردیم تا آن را از حالت کوانتومی یک سیستم متمایز کنیم که بعداً در کتاب مورد بحث قرار خواهد گرفت. به‌طور کلی، وضعیت یک سیستم مجموعه‌ای از اطلاعات است که برای دستور دادن به‌کسی برای تهیه یک کپی مشابه از آن لازم است. این سیستم می‌تواند یک ذره منفرد یا مجموعه پیچیده‌ای از ذرات از جمله جسم جامد<sup>۵</sup> باشد.

در حالت ساده یک ذره، حالت کلاسیک آن در زمان معین  $t$  زمانی کاملاً مشخص می‌شود که موقعیت و تکانه آن را به‌ترتیب  $x(t)$  و  $p(t)$  ارائه دهیم. اگر علاوه بر این، بخواهیم پیش‌بینی کنیم که سیستم با زمان چگونه تکامل می‌یابد، باید قوانین حرکت را ارائه دهیم، یعنی معادلاتی که پیش‌بینی می‌کنند چگونه ذره موقعیت  $x(t)$  و تکانه  $p(t)$  خود را تغییر می‌دهد. به‌طور خاص، با توجه به یک بازه زمانی دلخواه (کوچک)  $dt$ ، معادلات حرکت  $x(t+dt)$ ،  $p(t+dt)$  و  $x(t)$  و  $p(t)$  را می‌دهد. در زیر خواهیم دید که نیوتن معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم (ODE) را به‌ما ارائه کرده است که قادر به چنین قدرت پیش‌بینی است.

روش جالبی برای نمایش وضعیت یک ذره با معرفی فضای فاز وجود دارد، یعنی صفحه دکارتی که در آن محور  $x$  و محور  $y$   $x(t)$  و  $p(t)$  است. در این فضا حالت یک ذره یک نقطه واحد است و معادلات حرکت به‌ما می‌گوید که این نقطه چگونه با زمان حرکت می‌کند. حرکت نقطه در فضای فاز، مسیر فاز را مشخص می‌کند. نمونه‌هایی از چنین مسیرهایی را در ادامه خواهیم دید.

## ۱.۱.۱ اصول مکانیک کلاسیک

این درک عمومی در میان فیزیکدانان است که فرضیه‌های مکانیک نیوتنی توسط سه قانون نیوتن ارائه شده است که در بخش بعدی آورده شده است. می‌خواهیم به‌این نکته اشاره کنیم که بین “قوانین فیزیکی” و “فرضیات فیزیکی” تفاوت وجود دارد. فرضیه‌ها گزاره‌ها یا مفروضات ریاضی هستند که شالوده نظری قوانینی را تشکیل می‌دهند که پدیده‌های فیزیکی مورد بررسی را توصیف می‌کنند. فرضیه‌ها معمولاً به‌صورت تجربی قابل تأیید نیستند. قوانین در عوض گزاره‌های ریاضی هستند که به صورت تجربی قابل تأیید هستند و بر اساس فرضیه‌ها هستند.

ما باید مطمئن باشیم که سیستم‌هایی که می‌خواهیم توصیف کنیم در محدوده قابل اجرا بودن قوانین هستند. دو محدودیت اصلی وجود دارد که باید در نظر گرفته شود: سرعت بالا و تراکم زیاد. در ادامه، ما در نظر خواهیم گرفت که سرعت معمولی ذره ما نسبت به سرعت نور<sup>۶</sup> ناچیز است و هیچ میدان گرانشی قوی<sup>۷</sup> معمولاً با چگالی جرم

<sup>۵</sup>در ترمودینامیک حالت یک سیستم شرایط آن در یک زمان خاص است که به‌طور کامل با مقادیر مجموعه‌ای از پارامترها مشخص می‌شود.

<sup>۶</sup>سرعت نور  $c$  برابر با ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ متر بر ثانیه است. به‌طور دقیق‌تر، زمانی که سرعت‌های معمولی درگیر

بسیار بالا وجود ندارد. محدودیت بسیار مهم دیگری نیز وجود دارد که ارتباط زیادی با این کتاب دارد. علاوه بر چگالی‌های جرمی بالا و/یا جرم‌های بزرگ، باید بیان کنیم که مکانیک کلاسیک نیز زمانی که جرم‌ها بسیار کوچک هستند قابل اجرا نیست. بعداً در کتاب خواهیم دید که وقتی توده‌ها بسیار کوچک هستند (در مقایسه با تجربه روزمره ما)، مکانیک کلاسیک نیز معتبر نیست.

هنگامی که با اجسام روزمره با جرم‌های معقول در حال حرکت با سرعت معقول سروکار داریم، مکانیک کلاسیک تقریب بسیار خوبی است. برای چندین صد سال از زمان نیوتن، همه آزمایش‌ها فقط به چنین دنیای کلاسیک دسترسی داشتند، یعنی دنیایی با سرعت کم و جرم کم (اما نه خیلی کم).

جالب و آموزنده است که مرور کنیم که چگونه خود نیوتن اساس مکانیک کلاسیک را در کتاب *Principia* [۳۱] خود بنا نهاده است. کتاب اصول، که عنوان کامل آن "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" ترجمه شده به "اصول ریاضی فلسفه طبیعی" است، در سه کتاب توسط آیزاک نیوتن تنظیم شده و در سال ۱۶۸۷ منتشر شده است. دو کتاب اول عمدتاً به حرکت اجسام با و بدون مقاومت، در حالی که کتاب سوم عمدتاً به قانون گرانش جهانی و پیامدهای آن برای حرکات مشاهده شده در منظومه شمسی است. به دنبال شانکار<sup>۸</sup> [۴۰] اکنون فرضیه‌های مکانیک کلاسیک را برای یک ذره بیان می‌کنیم. به یاد داشته باشید که این اظهارات را بر اساس تجربه خود از دنیای فیزیکی می‌پذیریم، به شرطی که آماده باشیم هر فرضی را که نشان داده شود با تأیید تجربی مطابقت ندارد کنار بگذاریم.

• الف: حالت یک ذره در زمان  $t$  به‌طور کامل توسط دو متغیر  $x(t)$  و  $p(t)$  تعریف می‌شود که به ترتیب موقعیت و تکانه ذره در زمان  $t$  هستند.

• ب: هر متغیر دینامیکی  $R$  فقط تابعی از  $x(t)$  و  $p(t)$  است.

• ج: اگر ذره در حالتی باشد که توسط  $x(t)$  و  $p(t)$  داده شده است، هر اندازه‌گیری از متغیر  $R$  مقدار  $R(x, p)$  را به دست می‌دهد و حالت بدون تغییر است.

• د: متغیرهای حالت با زمان با توجه به معادلات زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \frac{dp}{dt} = F\end{aligned}\quad (1.1)$$

## ۲.۱.۱ مکانیک نیوتنی

در بخش قبلی دیدیم که مکانیک کلاسیک حرکت اجسام جرم‌ها را در محدوده تجربیات ما توصیف می‌کند، یعنی از نانو گرم تا جرم زمین/خورشید. اگر اجازه دهیم نسبیت عام به عنوان یک نظریه کلاسیک در نظر گرفته شود، می‌توانیم محدوده جرم را به جرم

نابرابری  $1 \ll (v/c)^2$  را برآورده می‌کنند، هنوز می‌توانیم از مکانیک کلاسیک استفاده کنیم. اگر  $1 \ll \phi/c^2$  باشد، همچنان می‌توانیم از گرانش نیوتن استفاده کنیم که در آن  $G = 6.674 \times 10^{-11} m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}$  ثابت گرانشی نیوتن،  $\phi = Gm/r$  پتانسیل گرانشی جسمی با جرم  $m$  و  $c$  سرعت نور است.

<sup>۸</sup> Shankar

کهکشانی‌ها و خوشه‌های کهکشان گسترش دهیم. در ادامه، مگر اینکه خلاف آن مشخص شود، با معرفی مفهوم جرم نقطه‌ای، با ایده آل سازی یک جسم محدود سروکار داریم. جرم نقطه‌ای جسمی با جرم محدود است که همگی در یک بعد ناچیز متمرکز شده است. ما این را به عنوان تعریف یک ذره کلاسیک در نظر خواهیم گرفت.

همچنین فرض می‌کنیم که ذرات با سرعتی بسیار کمتر از سرعت نور حرکت می‌کنند. ضمناً فرض می‌کنیم که یک قاب مرجع ثابت وجود دارد که توسط ستارگان دور شناسایی شده است که قرار است نسبت به فضای مطلق در حالت استراحت باشند. این چارچوب مرجع را قاب مرجع اینرسی می‌نامیم. زمان برای همه ناظران، صرف نظر از وضعیت حرکت آنها، به‌طور یکسان جریان دارد. یعنی زمان جهانی است. بنابراین، مکانیک نیوتنی مبتنی بر مفهوم فضای «مطلق» و زمان «مطلق» است. یک مفهوم مهم این است که مدتی به اندازه کافی زیر خط کشیده نشده است: در مکانیک کلاسیک می‌توانیم موقعیت و سرعت ذرات را با هر دقتی که می‌خواهیم اندازه‌گیری کنیم و عمل اندازه‌گیری بر نتایج اندازه‌گیری‌ها تأثیری ندارد. به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم یک ذره را دقیقاً تعیین کنیم، می‌توانیم تصور کنیم که نور بسیار شدیدی با طول موج کوتاه‌تر و کوتاه‌تر به آن می‌تابیم، هر چه موقعیتی که می‌خواهیم دقیق‌تر باشد. با انجام این کار، می‌توانیم مسیر و سرعت‌های مرتبط با دقت مورد نظر خود را تعیین کنیم.

مکانیک نیوتنی مبتنی بر سه قانون است که به آنها قوانین نیوتن می‌گویند. همانطور که در بالا ذکر کردیم، یک قانون فیزیکی بدون اثبات ارائه می‌شود و مبتنی بر مشاهدات پدیده‌های طبیعی است. همین امر را می‌توان در مورد قوانین نیوتن نیز بیان کرد. شایان ذکر است که در ادامه فقط حرکت ذرات بدون ساختار داخلی را بررسی می‌کنیم. اگر بخواهیم ساختار درونی یک جسم را در نظر بگیریم، باید از مجموعه قوانین کلی‌تری (قوانین حرکت اوایلر) استفاده کنیم.

بیایید با سه قانون حرکت نیوتن شروع کنیم. برای کامل بودن و اعتبار کامل نیوتن، اجازه دهید ابتدا قوانین را همانطور که (به‌زبان لاتین) در کتاب او [۳۱]

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

نوشته شده گزارش کنیم.

Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impress, and fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex III: Actioni contrariam semper and qualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse quales and in partes contrarias dirigi.

ترجمه مدرن از سه قانون فوق معمولاً در بسیاری از عبارات مختلف معادل ارائه می‌شود. در اینجا یک مثال می‌زنیم:

• **قانون اول:** در یک چارچوب مرجع اینرسی، جسم یا در حالت سکون باقی می‌ماند



یا با سرعت ثابتی به حرکت خود ادامه می‌دهد مگر اینکه نیرویی بر آن وارد شود.<sup>۹</sup>

• **قانون دوم:** مجموع بردار تمام نیروهای وارد بر یک جسم برابر است با جرم ضرب در شتاب.

• **قانون سوم:** هر عملی را عکس‌العملی است. وقتی جسمی به جسم دیگر نیرو وارد می‌کند، جسم دوم نیز نیرویی برابر بزرگی و مخالف جهت بر جسم اول وارد می‌کند.

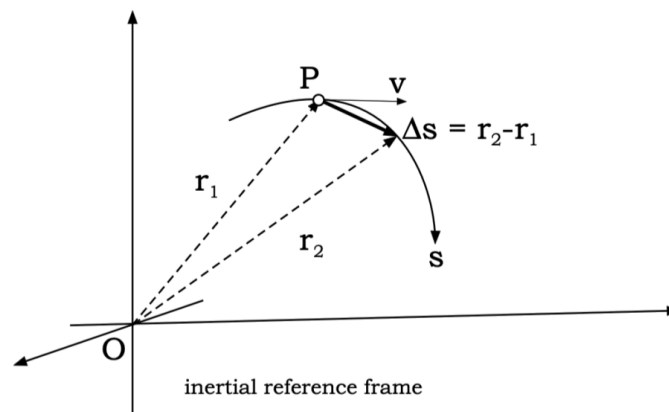
قانون دوم یک معادله دیفرانسیل معمولی است که نیروی  $F$  وارد بر جسم را به حاصل ضرب جرم  $m$  و شتاب آن  $a$  مرتبط می‌کند. قانون دوم معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F = ma \quad (2.1)$$

یک روش دقیق‌تر برای نوشتن معادله (۲.۱) این است:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (3.1)$$

که در آن  $p = mv$  حرکت جسم برابر با حاصلضرب جرم و سرعت است (به زیر مراجعه



شکل ۱.۱: نمایش هندسی برای نشان دادن مفهوم سرعت برای جسمی که در امتداد یک مسیر  $s$  حرکت می‌کند.

کنید). در شکل (۱.۱) ذره‌ای به جرم  $m$  در امتداد مسیر  $s$  حرکت می‌کند. در زمان معین  $t_1$  ذره در نقطه  $P$  است که با بردار موقعیت  $r_1$  مشخص می‌شود. تحت تأثیر نیروی  $F$ ، ذره به نقطه دیگری که با بردار موقعیت  $r_2$  مشخص می‌شود حرکت می‌کند. با  $\Delta s$  بردار جابجایی را نشان می‌دهیم به طوری که  $r_1 + \Delta s = r_2$ . توجه کنید که  $\Delta s$  تقریبی است برای مسیر منحنی که ذره دنبال می‌کند. با گرفتن  $\Delta$ های کوتاه‌تر و کوتاه‌تر، یعنی داشتن  $r_2$  نزدیک‌تر و نزدیک‌تر،  $r_1$  مسیر منحنی «واقعی» را بهتر و بهتر تقریب می‌کند. این فرآیند، همانطوریکه میدانیم، تعریف سرعت را به صورت حد ارائه می‌دهد:

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (4.1)$$

<sup>۹</sup> این قانون به عنوان اصل گالیلئ یا قانون اینرسی نیز شناخته می‌شود.

توجه کنید که  $r$ ،  $v$  و  $\Delta s$  بردار هستند. در این صورت تکانه  $p$  است:

$$p = mv \quad (۵.۱)$$

و در این صورت معادله (۳.۱) می شود:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (۶.۱)$$

در این حالت جرم ثابت  $m$ ، خواهیم داشت:

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad (۷.۱)$$

اگر جرم یک ذره و نیروی وارد بر آن را بدانیم، می توانیم حرکت آن را با حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۷.۱) بالا محاسبه کنیم. معادله (۶.۱) اولین قانون مهم پایستگی را به ما می گوید: اگر نیروی  $F$  که بر یک ذره وارد می شود صفر باشد، تکانه حفظ می شود، یعنی با زمان ثابت است.

با ضرب برداری معادله (۶.۱) در  $r$  می توانیم قانون بقاء (قانون پایستگی) مهم دیگری را بدست آوریم:

$$r \times F = r \times \frac{d}{dt}(mv) \quad (۸.۱)$$

اکنون از خاصیت مشتق ضرب برداری استفاده می کنیم:

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = a \times \frac{db}{dt} + \frac{da}{dt} \times b \quad (۹.۱)$$

با استفاده از معادله (۹.۱) در معادله (۸.۱) داریم:

$$\frac{d}{dt}(r \times mv) = \frac{dr}{dt} \times mv + r \times \frac{d}{dt}(mv) = v \times mv + r \times \frac{d}{dt}(mv) \quad (۱۰.۱)$$

می دانیم که حاصل ضرب برداری یک بردار با خودش صفر است و بنابراین با استفاده از معادله (۸.۱)، می توانیم بنویسیم:

$$r \times F = \frac{d}{dt}(r \times mv) \quad (۱۱.۱)$$

معادله (۱۱.۱) چند نکته جالب را به ما می گوید. ابتدا، اجازه دهید عبارات مختلف را در معادله (۱۱.۱) شناسایی کنیم. کمیت  $r \times F$  را **گشتاور**<sup>۱۰</sup> نیروی  $F$  در اطراف نقطه  $O$  مبدا بردار  $r$  می نامند. ممان یک نیرو را گشتاور (تورک)<sup>۱۱</sup> نیز می گویند. به طور کلی، هر کمیت فیزیکی را می توان در یک فاصله ضرب کرد تا یک ممان تولید شود.

عبارت سمت راست معادله (۱۱.۱) حاوی مشتق زمانی تکانه  $mv$  ضرب در بردار  $r$  است. این کمیت که می توان آن را تفسیر کرد **تکانه زاویه ای**<sup>۱۲</sup>  $L = r \times mv$  و گشتاور تکانه  $p = mv$  می نامند. بنابراین هر زمان که سمت چپ معادله باشد، تکانه زاویه ای حفظ می شود و (۱۱.۱) صفر است. این زمانی که نیروی  $F = 0$  یا زمانی که حاصلضرب بردار  $r \times F = 0$  باشد، اتفاق می افتد. یک مورد بسیار جالب از پایستگی تکانه زاویه ای وجود دارد که نیروی  $F$  نیرویی است که همیشه در امتداد بردار  $r$  باشد، این مورد در واقع **نیروهای مرکزی**<sup>۱۳</sup> نامیده می شود و زمانی که دو بردار  $r$  و  $F$  موازی باشند،  $r \times F$  صفر است. قانون

<sup>۱۰</sup> Moment

<sup>۱۱</sup> Torque

<sup>۱۲</sup> Angular momentum

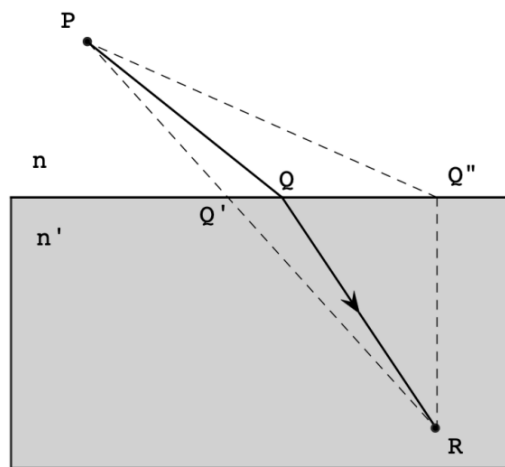
<sup>۱۳</sup> Central Forces

گرانش نیوتن نمونه‌ای از چنین نیروی شعاعی است، و بنابراین، تمام سیستم‌های مداری که توسط گرانش محدود شده‌اند، تکانه زاویه‌ای را حفظ می‌کنند.

## ۲.۱ لاکرانژ

معادلات حرکت نیوتنی بخش قبل بیشتر روابط بین بردارها هستند. به این ترتیب، معادلات تنها در صورتی معتبر هستند که خود را به فریم‌های (قالب‌ها) اینرسی محدود کنیم. اگر بتوانیم معادله حرکات را در روابطی بیان کنیم که در هر چارچوب مرجع معتبر باشد و نه فقط در قالب‌های اینرسی، بسیار مفید خواهد بود. برای مثال، کمیت‌های اسکالر، طبق تعریف، در همه فریم‌های مرجع یکسان هستند. آیا می‌توان روابطی ساخت که در آن فقط با اسکالرها (یا ترکیبی از اسکالرها) سروکار داشته باشیم؟

برای انجام این کار، باید به قهرمان اسکندریه (۱۰ سال پس از میلاد تا ۷۰ سال پس از میلاد) برگردیم [۴۳]. این فیلسوف یونانی احتمالاً اولین کسی است که جستجوی حداقل را به عنوان یک اصل اساسی برای تفسیر پدیده‌های طبیعی می‌داند. او در کتاب خود Catoptrics نشان داد که نور منعکس شده از یک آینه کوتاه‌ترین مسیر ممکن را از جسم تا ناظر طی می‌کند. خواهیم دید که این ایده از یک اصل اساسی که می‌توانیم قوانین طبیعت را از آن استخراج کنیم، اساس فیزیک مدرن است.



شکل ۲.۱: اصل فرما. پرتو نور از  $P$  (در محیطی با ضریب شکست  $n$ ) به  $R$  (در محیطی با ضریب شکست  $n'$ ) از طریق مسیر حداقل زمان  $PQR$  به جای حداقل طول  $PQ'R$  منتشر می‌شود. یکی دیگر از مسیرهای ممکن است.

فرما<sup>۱۴</sup>، ریاضیدان فرانسوی (۱۶۰۱ – ۱۶۶۵)، می‌خواست ببیند آیا می‌توان از ایده آن قهرمان در مورد یک مسیر حداقلی استفاده کرد که نه تنها بازتاب آینه، بلکه شکست، یعنی انتقال پرتوهای نور بین محیط‌هایی با ضرایب شکست متفاوت را شامل شود.

<sup>۱۴</sup>Fermat

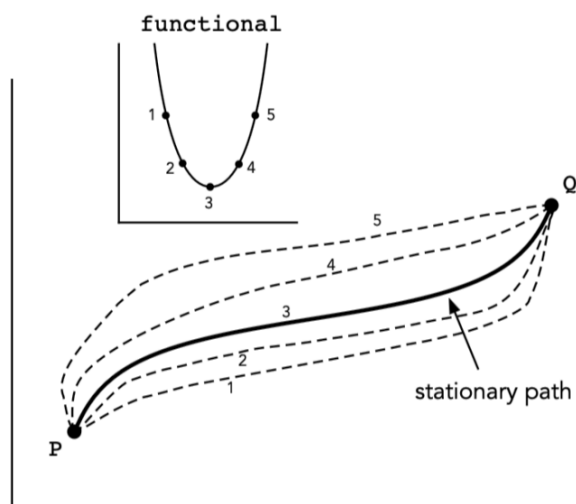
در شکل (۲.۱) یک پرتو نور از نقطه  $P$ ، در محیطی با ضریب شکست  $n$ ، به نقطه  $Q$  در سطح مشترک با محیط متفاوت با ضریب شکست  $n' > n$  حرکت می‌کند. از پرتو نور به نقطه  $R$  می‌رسد. می‌دانیم که در محیطی با ضریب شکست  $n$  نور با سرعت  $v = c/n$  حرکت می‌کند و در آن سرعت نور در خلاء است. فرما بلافاصله متوجه شد که پرتو نور مسیری با حداقل فاصله  $PQR$  را دنبال نمی‌کند. می‌توانیم ایده‌های دیگری مانند مسیر  $PQ''R$  را امتحان کنیم، جایی که نور زمان زیادی را در جایی که سریع است و زمان کمتری را در جایی که کندتر است صرف می‌کند. همچنین در این حالت، پرتو نور مسیر متفاوتی را طی می‌کند.

فرما دریافت که نور مسیر "حداقل زمان" را دنبال می‌کند: پرتو نور از  $P$  به  $R$  در طول مسیری می‌رود که زمان لازم برای رسیدن به  $R$  را به حداقل می‌رساند. می‌توان نشان داد که حداقل زمان برای رفتن یک پرتو نور از  $P$  به  $R$  برابر است با:

$$\tau = \frac{1}{c}(\overline{PQ} \cdot n + \overline{QR} \cdot n') \quad (۱۲.۱)$$

که در آن  $c$  سرعت نور در خلاء است.

این اصل معروف فرما در شکل قوی آن است، یعنی نیاز به حداقل زمان<sup>۱۵</sup>. یک بیان دقیق‌تر مستلزم انتشار پرتو نور در طول مسیری است که ثابت<sup>۱۶</sup> است، یعنی تغییرات مرتبه اول آن صفر است.



شکل ۳.۱: نمایش شماتیک مفهوم تابع: به هر مسیر ممکن از نقطه  $P$  تا نقطه  $Q$  در فضا، با یک عدد همراه است. تابع تابع بنام فراتابع مسیرهای ممکن ساخته شده است. مسیر ثابت (با برچسب ۳) مسیری است که عملکرد را به حداقل می‌رساند.

بیایید به طور خلاصه درباره این ایده از مسیر ثابت برای یک پرتو نور بحث کنیم. از بین تمام مسیرهای ممکن، نور در طول مسیر ثابت منتشر می‌شود، یعنی مسیری که

<sup>۱۵</sup> می‌توان نشان داد [۸] که موقعیت‌های خاص نادری وجود دارد که در آن پرتو نور در واقع در مسیری با حداکثر زمان منتشر می‌شود.

<sup>۱۶</sup>Stationary

تغییرات آن در مرتبه اول صفر است. اگر بخواهیم از حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کنیم، می‌دانیم که چگونه مشتق یک تابع را محاسبه کنیم: می‌دانیم که اعمال چنین مشتقی برابر صفر به این معنی است که ما به دنبال نقاطی هستیم که نقاط در مقدار حداقل، یا حداکثر قرار دارند. اما به دنبال یک نقطه خاص نیستیم: ما به دنبال یک مسیر خاص یا، به عبارت دیگر، برای یک عملکرد خاص هستیم. مشکل ما بیشتر شبیه یافتن نقطه ثابت تابعی از توابع است (۳.۱). برای انجام این کار، یک عدد به هر مسیر که بنام فراتابع<sup>۱۷</sup> خوانده می‌شود، مرتبط می‌کنیم و یک نقطه ثابت برای این تابع توابع پیدا می‌کنیم. تابع توابع و مطالعه تغییرات آن را حساب متغیرها<sup>۱۸</sup> می‌نامند.

می‌توانیم هر عملکردی را که می‌خواهیم ایجاد کنیم. یک مثال تابعی می‌تواند طول مسیرها باشد، یعنی تابع  $f = f(p)$  که اگر یک مسیر (یک تابع) را وارد کنیم، طول مسیر  $p$  (عددی) را برمی‌گرداند. تابع دیگر می‌تواند مربع طول مسیر یا لگاریتم آن باشد. در مورد اصل فرما و با استناد به شکل (۲.۱)، تابعی زیر را می‌سازیم:

$$T = \int_P^R dt = \int_P^R \frac{ds}{v} \quad (۱۳.۱)$$

تابع  $T$  به این صورت است که اگر مسیر مشخصی  $p$  را وارد کنیم، مدت زمانی که نور برای عبور از آن لازم است را برمی‌گرداند. نقاط  $P$  و  $Q$  دو نقطه ثابت در فضا هستند و  $ds$  عنصر طول در مسیر  $p$  است که با سرعت  $v$  پیموده شده است. اصل فرما را می‌توان از نظر ریاضی به صورت  $\delta T = 0$  نوشت. جایی که  $\delta$  عملیات یافتن مسیر را نشان می‌دهد به طوری که حداقل انحراف از آن زمان عبور را به مرتبه اول تغییر نمی‌دهد. در شکل کمی دقیق‌تر، زمان لازم برای عبور یک پرتو نور در مسیر همسایه با یک کمیت مرتبه دوم با مسیر ثابت متفاوت است.

## ۱.۲.۱ کُنش ثابت و معادلات اوایلر-لاگرانژ

با توجه به اینکه اصل فرما به خوبی انتشار نور را توصیف می‌کند، طبیعی است که از خود پرسیم که آیا می‌توانیم اصل مشابهی برای حرکت ذرات پیدا کنیم. به عبارت دیگر، آیا می‌توان مکانیک نیوتنی را از یک اصل ساکن به دست آورد؟ آیا می‌توانیم یک فراتابع برای حرکت ذرات ماده پیدا کنیم؟ پاسخ مثبت است: یک فرا تابع به نام عمل (کُنش) وجود دارد که برای هر مسیر ممکن که یک ذره متحرک دنبال می‌کند، عددی را برمی‌گرداند. ذره مسیری را دنبال می‌کند که عمل را ثابت (ایستا) می‌کند. تفاوت‌های مهمی با توجه به اصل فرما وجود دارد: فرض می‌کنیم که ذره حرکت خود را در موقعیت ۱ در زمان  $t_1$  آغاز کرده و حرکت خود را در موقعیت ۲ در زمان  $t_2$  پایان می‌دهد. تمام مسیرهای پتانسیل ممکن با تابع  $x(t)$  نشان داده می‌شوند. ما همچنین فرض می‌کنیم که انتگرال کنشی حاوی تابع  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$  است که لاگرانژی<sup>۱۹</sup> نامیده می‌شود.

<sup>۱۷</sup>Functional

<sup>۱۸</sup>Variational calculus

<sup>۱۹</sup>از ریاضیدان و ستاره شناس ایتالیایی جوزف-لوئیس لاگرانژ، متولد تورین با نام جوزپه لوئیجی لاگرانژیا در سال ۱۷۳۶ (Lagrangian)

این کنش (عمل) خواهد بود:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (۱۴.۱)$$

و در قیاس با اصل فرما، مسیری را جستجو می‌کنیم که برای آن  $\delta S = 0$  است. این اصل به‌عنوان اصل حداقل کنش یا اصل همیلتون<sup>۲۰</sup> با این اخطار گفته می‌شود که صحیح‌تر است به‌کنش ایستا اشاره کنیم تا کمترین کنش.

برای کامل بودن، اصل ایستای دیگری به‌نام اصل Maupertuis وجود دارد که در آن انتگرال زیر ایستا است:

$$S = \int_{q_1}^{q_2} p dq \quad (۱۵.۱)$$

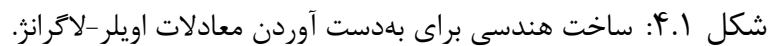
که در آن  $p$  تکانه و  $S$  عمل است. معادله (۱۵.۱) اولین بار توسط اوایلر نوشته شد. معادله (۱۵.۱) بسیار جالب است زیرا به‌مختصات تعمیم یافته<sup>۲۱</sup>  $q$  و  $p$ ، نه لزوماً موقعیت  $x$  و تکانه  $mv$  اشاره دارد. مفهوم مختصات تعمیم یافته اغلب و در زمینه‌های مختلف در ادامه کتاب استفاده می‌شود. بنابراین، بسیار مهم است که مفهوم را بهتر تعریف کنیم. به‌طور کلی، در مکانیک کلاسیک، اگر بخواهیم تکامل یک سیستم متشکل از  $N$  ذره را در یک سیستم مختصات دکارتی به‌طور کامل توصیف کنیم، باید مجموعه‌ای از پارامترهای  $6N$  را ارائه دهیم: مختصات فضایی  $x_i$   $3N$  و مختصات سرعت  $v_i$   $3N$ ، که در آن  $i = 1, 2, \dots, N$  است. در رابطه لاگرانژی، ما به مختصات دکارتی مقید نیستیم: هر مجموعه مختصات  $q_i$  که پیکربندی سیستم مورد مطالعه را منحصرأ مشخص می‌کند مجاز است.

می‌دانیم که معادله حرکت معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم است و بنابراین، باید ممان وابسته  $p_i$  را مشخص کنیم. باید این تابع لاگرانژی و شرایطی را که برای توصیف صحیح حرکت باید داشته باشد شناسایی کنیم. برای سادگی، اکنون یک مشتق هندسی از معادلات به‌نام اوایلر-لاگرانژ را برای حرکت یک ذره، یعنی معادلاتی که تابع لاگرانژی وابسته باید برآورده کند تا به درستی مسیر چنین ذره‌ای را توصیف کند، ارائه می‌دهیم. با توجه به آنچه در بالا بحث کردیم، فرض می‌کنیم که مسیر به‌گونه‌ای است که عمل در معادله (۱۴.۱) ثابت است.

با توجه به شکل (۴.۱)، اجازه دهید ذره‌ای را در نظر بگیریم که از نقطه  $P$  به نقطه  $Q$  از دو مسیر مختلف عبور می‌کند:  $PTQ$  و یک  $PRQ$  کمی آشفته و تغییر جزئی دارند. برای سادگی، فرض می‌کنیم که حرکت فقط در مختصات  $x$  اتفاق می‌افتد به‌طوری که  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x})$  است. شکل (۴.۱) حرکت یک ذره از  $P$  به  $T$  و از  $T$  به  $Q$  را با سرعت ثابت  $\dot{x}$  یا به‌طور متناوب از  $P$  به  $R$  با سرعت کمی بالاتر  $\dot{x} + \eta$  و از  $R$  به  $Q$  با سرعت کمی کندتر  $\dot{x} - \eta$  به‌تصویر می‌کشد. به‌طوری که هر دو مسیر با زمان یکسان  $t_1 + t_2 = 2\Delta t$  پیموده می‌شوند. تمام بخش‌های شکل (۴.۱) را به‌عنوان بی‌نهایت کوچک در نظر می‌گیریم.

<sup>۲۰</sup>Hamilton's Principle، سر دلیو آر. همیلتون، ریاضیدان ایرلندی (۱۸۰۵ – ۱۸۶۵) این اصل را با استفاده از لاگرانژی فرموله کرده است. پیر لوتیس ماپرتویس نیز به‌عنوان یکی از اولین کسانی که این اصل را در فرمول‌بندی‌های مختلف همراه با اوایلر و لایب نیتس پیشنهاد کرد.

<sup>۲۱</sup>Generalized coordinates



عمل در امتداد خط مستقیم  $PTQ$  بلافاصله با توجه به اینکه نقطه  $T$  قطعه  $PQ$  را دقیقاً به نصف تقسیم می‌کند محاسبه می‌شود. بدین ترتیب عمل انتگرال (۱۴.۱) به صورت زیر است:

که در آن  $\mathcal{L}(x_0, \dot{x}_0)$  مقدار میانگین لاگرانژی در  $x = x_0$  است.

$$\mathcal{L}(H') \sim \mathcal{L}(H) + \Delta x \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_1} + \Delta \dot{x} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} + \dots \quad (17.1)$$

<sup>۲۲</sup> فرض می‌کنیم که هیچ نیروی خارجی بر ذره وارد نمی‌شود.

با استفاده از معادله (۱۶.۱)، عمل  $SPR$  را می‌توان به صورت زیر تقریبی تخمین زد:

$$S_{PR} \approx \Delta t \left[ \mathcal{L}(x_1, \dot{x}_1) + \frac{1}{2} \eta \Delta t \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_1} + \eta \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} \right] \quad (۱۸.۱)$$

که در آن، شبیه معادله (۱۶.۱)، عمل تقریباً با میانگین خط  $\overline{PR}$  برای فاصله زمانی  $\Delta t$  است.

به طور مشابه، عمل  $SRQ$  با میانگین‌گیری بر روی بخش  $\overline{RQ}$  تقریبی می‌شود:

$$S_{PQ} \approx \Delta t \left[ \mathcal{L}(x_2, \dot{x}_2) + \frac{1}{2} \eta \Delta t \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_2} + \eta \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_2} \right] \quad (۱۹.۱)$$

اکنون می‌توانیم دو عمل (۱۸.۱) و (۱۹.۱) را اضافه کنیم تا عمل  $\overline{PRQ}$  مسیر آشفته (تغییر جزئی یافته) را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} S_{PR} + S_{PQ} &\approx [\mathcal{L}(x_1, \dot{x}_1) + \mathcal{L}(x_2, \dot{x}_2)] \\ &+ \frac{1}{2} \eta \Delta t^2 \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_1} + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_2} \right] \\ &+ \eta \Delta t \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_2} \right] \end{aligned} \quad (۲۰.۱)$$

مجموع دو جمله اول معادله (۲۰.۱) را می‌توان به عنوان میانگین بر اساس معادله (۱۶.۱) بیان کرد و بنابراین آنها برابر با میانگین در امتداد کل بخش  $PQ$  هستند که مجموع دو میانگین در  $H$  و  $K$  است. استدلال مشابهی برای سایر جملات معتبر است. آخرین جمله در معادله (۲۰.۱) تفاوت تابع بین دو نقطه نزدیک به زمان است که با مشتق با توجه به زمان تابع، ضربدر فاصله زمانی بینهایت کوچک  $\Delta t$  تقریب می‌شود. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} S_{PR} + S_{PQ} &\approx \Delta t \left[ 2\mathcal{L}(x_0, \dot{x}) + \eta \Delta t \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_0} - \eta \Delta t \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_0} \right] \\ &= \Delta t \left[ 2\mathcal{L}(x_0, \dot{x}) + \eta \Delta t \left( \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_0} - \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (۲۱.۱)$$

مقایسه معادله (۱۶.۱) با معادله (۲۱.۱) می‌بینیم که این دو عمل برای برابر شدن باید در معادله زیر صدق کنند:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right|_{t=t_0} - \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (۲۲.۱)$$

معادله (۲۲.۱) بنام معادله **اولر-لاگرانژ** معروف است.

به طور کلی، اولر-لاگرانژ مجموعه‌ای از معادلات است که به مختصات عمومی  $q$  و مشتقات زمانی آنها  $\dot{q}$  اشاره می‌کند. بنابراین، یک معادله کلی تر اولر-لاگرانژ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (۲۳.۱)$$



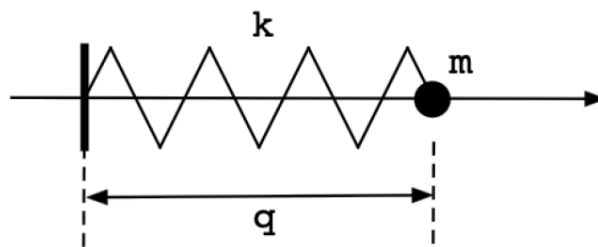
که در آن شاخص (اندیس)  $i = 1, \dots, N$  بر روی  $N$  درجه آزادی<sup>۲۳</sup> (DOF) مستقل اجرا می‌شود، یعنی تعداد پارامترهای مستقل مورد نیاز برای شناسایی منحصر به فرد حالت (یا پیکربندی) سیستم مکانیکی<sup>۲۴</sup> است. ما باید این تابع خاص  $\mathcal{L}$  را پیدا کنیم، یعنی لاگرانژ، به طوری که بتوانیم حرکت ذره(ها) را بازیابی کنیم. به نظر می‌رسد که انتخاب صحیح برای بازیابی صحیح حرکت ذرات این است:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (24.1)$$

که در آن  $T$  انرژی جنبشی و  $V$  انرژی پتانسیل است. دلیل خاصی وجود ندارد که چرا این ترکیب خاص از انرژی جنبشی و پتانسیل، لاگرانژی مناسبی را ارائه می‌دهد. آموزنده است که نشان دهیم معادلات اوایلر-لاگرانژ شکل خود را در هر سیستم مختصاتی حفظ می‌کنند. ابتدا نشان می‌دهیم که در مختصات دکارتی معادلات اوایلر-لاگرانژ برابر با  $F = ma$  نیوتن است. برای سادگی، اجازه دهید حرکت یک ذره را در یک سیستم مختصات دکارتی  $x$  در نظر بگیریم که در آن حرکت روی یک خط محدود می‌شود. در این سیستم مختصات لاگرانژی عبارت است از:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (25.1)$$

که در آن  $V(x)$  یک تابع اسکالر است که انرژی پتانسیل را تنها به مختصات  $x$  نشان



شکل ۵.۱: نوسان هارمونیکی ساده.

می‌دهد. بیایید دو عبارت معادله اوایلر-لاگرانژ را محاسبه کنیم (در این مورد فقط یک معادله است):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{dV}{dx} \quad (26.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

در نتیجه معادله (۲۳.۱) فقط برای مختصات  $x$  می‌شود:

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \quad (27.1)$$

<sup>۲۳</sup>Degrees Of Freedom (DOF)

<sup>۲۴</sup>به عنوان مثال، یک جسم صلب در فضا، بدون هیچ محدودیتی، دارای ۶ درجه آزادی است: ۳ زیرا می‌تواند در امتداد سه جهت مستقل انتقال یابد و ۳ زیرا می‌تواند حول سه محور چرخش مستقل بچرخد.

اگر نیروی  $F$  را بتوان به عنوان مشتق تابع پتانسیل اسکالر بیان کرد، معادله (۲۷.۱) دقیقاً معادله نیوتن  $F = ma$  است.

نوسانگر هارمونیک کلاسیک ساده نمونه مفید دیگری از فرمول بندی لاگرانژی است که در ادامه کتاب به آن نیاز خواهیم داشت. فرض کنید یک جرم نقطه‌ای داریم که مجبور به حرکت بر روی خط مستقیم مختصات  $q$  شده و به یک فنر ثابت الاستیک  $k$  که در محدوده خطی کار می‌کند، متصل است، یعنی نیرویی که توسط جرم نقطه‌ای، در فشرده سازی یا گسترش، تجربه می‌شود،  $F = -kq$  است، یعنی خطی بودن  $q$  (به شکل ۵.۱ مراجعه کنید). به خوبی شناخته شده است که خطی بودن یک تقریب خوب برای  $q$  کوچک است زمانی که تغییر شکل فنر کاملاً الاستیک است. برای این سیستم فیزیکی ساده، انرژی جنبشی  $T = 1/2 m \dot{q}^2$  در حالی که انرژی پتانسیل  $V = 1/2 k q^2$  است. لاگرانژی عبارت است از:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (28.1)$$

که در آن  $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{k/m}$  فرکانس زاویه‌ای نوسان‌ها جرم  $m$  است. با اعمال معادلات اوایلر-لاگرانژ به معادله (۲۸.۱)، معادله دیفرانسیل حرکت جرم  $m$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (29.1)$$

که جواب آن خواهد بود:

$$q = A \sin(\omega t + \phi) \quad (30.1)$$

به وضوح حرکت سینوسی جرم  $m$  را در اطراف موقعیت تعادل خود نشان می‌دهد. اکنون این سوال را مطرح می‌کنیم: برای توصیف یک نوسانگر هارمونیک ساده به چند درجه آزادی نیاز داریم؟ بیایید ابتدا میزان درجه آزادی (DOF) را مرور کنیم: در یک سیستم مکانیکی، درجه آزادی‌ها تعداد پارامترهای مورد نیاز برای تعریف وضعیت آن هستند. برای مثال، یک جسم صلب در یک فضای ۳ بعدی دارای ۶ درجه آزادی است: برای تعیین موقعیت مرکز جرم آن ۳ پارامتر و برای تعیین ۳ زاویه چرخش به ۳ پارامتر نیاز است. در بخش بعدی خواهیم دید که فرمول بندی لاگرانژی در انتخاب خاص مختصات محدودیتی ندارد و بنابراین، مهم نیست که چه سیستم مختصاتی را انتخاب کنیم، هنوز ۶ درجه آزادی داریم. یک نوسان‌ساز هارمونیک ساده برای توصیف کامل نیاز به دو پارامتر دارد: آنها می‌توانند موقعیت و تکانه یا انرژی جنبشی و پتانسیل آن باشند و بنابراین دارای ۲ درجه آزادی است. از این گذشته، به تازگی یاد گرفتیم که می‌توانیم با نوشتن لاگرانژ معادله حرکت را به دست آوریم که دقیقاً تفاوت بین انرژی جنبشی و پتانسیل است، بنابراین به وضوح قابلیت تعویض موقعیت/تکانه و انرژی جنبشی/پتانسیل را به عنوان چند پارامتر نشان می‌دهد.

## ۲.۲.۱ تغییر مختصات

فرمول بندی لاگرانژی دو مزیت اصلی نسبت به فرمول بندی نیوتنی اولیه  $F = ma$  دارد: از کمیت‌های اسکالر به جای بردارها استفاده می‌کند و معادلاتی دارد که شکل آنها را در هر سیستم مختصاتی حفظ می‌کند. معادله اوایلر-لاگرانژ از مزیت بزرگی برای بیان دینامیک

بدون توسل به بردارها برخوردار است که بدون شک زمانی که سیستم‌ها پیچیده هستند یک مزیت است. مزیت دیگر از مطالعه معادله اویلر-لاگرانژ در سیستم‌های مختصات دیگر به جای دکارتی است. بیایید ثابت کنیم که معادلات اویلر-لاگرانژ شکل خود را در هر سیستم مختصاتی حفظ می‌کنند.

فرض کنید که  $(x_i = x_1, x_2, \dots, x_N)$  یک سیستم مختصات است. (مثلاً دکارتی) که معادله (۲۳.۱) به صورت زیر نوشته شده است:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (۳۱.۱)$$

و فرض کنید که یک سیستم مختصات جدید داریم:

$$q_i = q_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = q_i(x_i) \quad (۳۲.۱)$$

و فرض می‌کنیم که می‌توانیم معادله (۳۲.۱) را معکوس کنیم.

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_N) = x_i(q_i) \quad (۳۳.۱)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که اگر معادله (۳۱.۱) برقرار است، پس از آن زمانی که  $\dot{x}_i$  و  $x_i$  را با  $\dot{q}_i$  و  $q_i$  جایگزین کنیم، همین معادله برقرار است. برای انجام این کار، بیایید مشتقات جزئی  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$  را مطالعه کنیم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (۳۴.۱)$$

که با استفاده از قانون زنجیره‌ای روی هر یک از اجزای  $j$  با  $j = 1, 2, \dots, N$  به دست می‌آید. با استفاده از قانون زنجیره‌ای در معادله (۳۳.۱) داریم:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \quad (۳۵.۱)$$

مشتق مستقیم معادله (۳۵.۱) نشان می‌دهد:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (۳۶.۱)$$

و معادله (۳۴.۱) سپس تبدیل می‌شود به:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (۳۷.۱)$$

مشتق زمانی معادله (۳۷.۱) می‌دهد:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \quad (۳۸.۱)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

اکنون ترتیب مشتق  $\frac{d}{dt}$  را با  $\frac{\partial}{\partial q_j}$  در جمله دوم معادله (۳۸.۱) تغییر می‌دهیم.<sup>۲۵</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (۳۹.۱)$$

با استفاده از معادله (۳۱.۱)، معادله (۳۹.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (۴۰.۱)$$

که دقیقاً معادلات اوایلر-لاگرانژ برای مختصات جدید  $q_j$  هستند. دیدیم معادله نیوتن معادلات برداری هستند به طوری که فقط در چارچوب‌های مرجع اینرسی معتبر هستند. ما آن را نشان ندادیم، اما از یک شکل محدود تبدیل مختصات در معادله (۳۲.۱) استفاده کردیم. به طور کلی، معادلات اوایلر-لاگرانژ حتی اگر وابستگی زمانی در تبدیل مختصات شکل وجود داشته باشد معتبر هستند:

$$q_i = q_i(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = q_i(x_i, t) \quad (۴۱.۱)$$

این تعمیم مفید است، برای مثال، زمانی که ما فیزیک یک سیستم مختصات دکارتی در حال چرخش  $(x', y', z')$  را در نظر می‌گیریم، که حول محور  $z$  با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  می‌چرخد، با توجه به یک سیستم مختصات دکارتی ثابت  $(x, y, z)$  بیابید یک ذره آزاد را در نظر بگیریم که لاگرانژی آن است:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (۴۲.۱)$$

جایی که  $r = x^2 + y^2 + z^2$  مختصات دکارتی است. با اعمال معادلات اوایلر-لاگرانژ به این لاگرانژ، به طور واضح  $m\ddot{r} = 0$  بدست می‌آوریم. می‌توانیم یک بار ادغام کنیم تا  $m\dot{r} = \text{const}$  را بدست آوریم، به این معنی که ذره با جرم  $m$  با سرعت ثابت حرکت می‌کند. حال بیابید سیستم مختصات را از ثابت  $(x, y, z)$  به چرخشی  $(x, y, z)$  تغییر دهیم. می‌دانیم که شکل اوایلر-لاگرانژ در مختصات جدید تغییر نخواهد کرد. با این حال، لاگرانژ تغییر خواهد کرد و بنابراین انتظار داریم که معادله متفاوتی از حرکات را پیدا کنیم. نباید تعجب کنیم زیرا حرکت یک ذره آزاد مطمئناً متفاوت به نظر می‌رسد اگر همراه با سیستم مختصات در حال چرخش باشیم. اجازه دهید ابتدا تبدیل مختصات را بنویسیم:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ y' &= x \sin \omega t + y \cos \omega t \\ z' &= z \end{aligned} \quad (۴۳.۱)$$

<sup>۲۵</sup> این به نام تقارن مشتق دوم یا گاهی اوقات قضیه کلاروت یا قضیه شوارتز خوانده می‌شود. این قضیه برای هر نقطه  $P$  که مشتقات جزئی دوم در اطراف آن پیوسته هستند صادق است.

پس از اندکی عملیات جبری، لاگرانژ (۴۲.۱) در سیستم مختصات جدید می‌شود:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m[\dot{r}' + \omega \times r']^2 \quad (44.1)$$

و معادلات اوایلر-لاگرانژ نسبت به  $\dot{r}'$  و  $r'$  می‌دهد:

$$m(\ddot{r}' + \omega \times (\omega \times r') + 2\omega \times \dot{r}') = 0 \quad (45.1)$$

که در آن جمله دوم و سوم به ترتیب نیروهای ساختگی گریز از مرکز و کوریولیس شناخته شده هستند.

### ۳.۲.۱ قضیه نوتر

در این بخش به طور خلاصه به یک قضیه مهم ناشی از نوتر<sup>۲۶</sup> می‌پردازیم. با در نظر گرفتن سه آزمایش فرضی شروع می‌کنیم که در آن سیستمی را مشاهده می‌کنیم که توسط یک لاگرانژی  $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$  توصیف شده است. توجه داشته باشید که به لاگرانژی خود اجازه می‌دهیم تا علاوه بر موقعیت  $x$  و مشتق آن  $\dot{x}$ ، یک وابستگی صریح از زمان  $t$  داشته باشد.

بیایید یک سیستم را در موقعیت  $x$  مشاهده کنیم و مستلزم این باشیم که اگر سیستم را در موقعیت دیگری  $x = x + \epsilon$  حرکت دهیم، جایی که  $\epsilon$  یک ثابت دلخواه است، لاگرانژ تغییری نکرده است. این بدان معنی است که سیستم دقیقاً معادله حرکتی مشابه معادلات اوایلر-لاگرانژ را دارد. یک شرط بسیار خاص وجود دارد که این شرط برای آن به وضوح برآورده می‌شود، یعنی زمانی که لاگرانژ به طور صریح به مختصات  $x$  وابسته نیست:  $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(\dot{x}, t)$ . در این حالت، ما می‌توانیم هر تبدیلی را روی مختصات  $x$  انجام دهیم و لاگرانژی بدون وابستگی صریح به  $x$  به وضوح ثابت می‌ماند. هنگامی که مختصاتی به طور صریح در لاگرانژ ظاهر نمی‌شود، این مختصات مختصات چرخه‌ای<sup>۲۷</sup> نامیده می‌شود.

اگر یک لاگرانژ دارای مختصات چرخه‌ای باشد، مشتق مربوطه در معادلات اوایلر-لاگرانژ صفر است و معادلات اوایلر-لاگرانژ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= \text{ثابت} \end{aligned} \quad (46.1)$$

ما قبلاً با یک لاگرانژی بدون وابستگی  $x$  مواجه شده ایم: ذره آزاد با  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . آخرین

<sup>۲۶</sup>آمالی امی نوتر (Amalie Emmy Noether (23 مارس 1882 – 14 آوریل 1935). او یکی از مهم ترین زنان تاریخ ریاضیات به دلیل کار در فیزیک ریاضی و جبر انتزاعی به شمار می‌رود.

<sup>۲۷</sup>Cyclic Coordinate

معادله در معادله (۴۶.۱) نشان می‌دهد:

$$p = m\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \text{ثابت} \quad (۴۷.۱)$$

معادله (۴۷.۱) به ما می‌گوید که اگر لاگرانژ نسبت به  $x$  چرخه‌ای باشد، تکانه  $p$  مرتبط با مختصات  $x$  ثابت است. ما به این نتیجه جالب رسیدیم که اگر لاگرانژ به یک مختصات  $x$  وابسته نباشد، تکانه همراه آن  $p$  ثابت است. بنابراین به نظر می‌رسد که منشاء بقای تکانه مکانیک نیوتنی به تقارن خاصی از لاگرانژ مربوط می‌شود. در اینجا با "تقارن" این واقعیت را مد نظر داریم که لاگرانژ نسبت به عملیاتی که در این مورد، هر تبدیل  $x \rightarrow x + \epsilon$  است که در آن ثابت  $\epsilon$  بدون تغییر است. می‌توانیم این ایده را به مختصات  $q_i$  تعمیم یافته تعمیم دهیم: اگر لاگرانژی به طور صریح به مختصات تعمیم یافته  $q_i$  وابسته نباشد، تکانه وابسته به آن  $p_i = \frac{d\mathcal{L}}{dq_i}$  مساوی ثابت است.

بیایید اکنون تقارن دیگری از لاگرانژ را مطالعه کنیم. بیایید مستلزم این باشیم که لاگرانژ ما تحت هر چرخشی از سیستم مختصات متقارن باشد، یعنی می‌خواهیم اگر سیستم مختصات با زاویه ثابت  $\theta$  بچرخد، معادلات دینامیکی ثابت بماند. بیایید خودمان را به حرکت در یک صفحه دو بعدی  $x, y$  محدود کنیم. لاگرانژ در مختصات دکارتی  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  است. اگر لاگرانژ را در مختصات قطبی  $(r, \theta)$  بیان کنیم، چرخش سیستم‌های مختصات بهتر اجرا می‌شود. تبدیل مختصات دکارتی به قطبی همراه با مشتقات آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (۴۸.۱)$$

معادله لاگرانژی در دستگاه مختصات دکارتی است:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y) \quad \text{ثابت} \quad (۴۹.۱)$$

که در آن  $V(x, y)$  یک تابع اسکالر از مختصات  $x, y$  است که انرژی پتانسیل را نشان می‌دهد. اجازه دهید به حالتی محدود کنیم که نیروها محافظه کار<sup>۲۸</sup> هستند و تابع پتانسیل  $V = V(r)$  فقط تابعی از  $r$  است.

با استفاده از تبدیل مختصات (۴۸.۱)، معادله (۴۹.۱) می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \end{aligned} \quad (۵۰.۱)$$

معادله (۵۰.۱) با توجه به مختصات  $\theta$  به وضوح چرخه‌ای است به این معنی که تکانه وابسته حفظ می‌شود. تکانه وابسته  $p_\theta$  برابر است با:

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \right] \\ &= mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{aligned} \quad (۵۱.۱)$$

<sup>۲۸</sup>Conservative

که نشان دهنده اصل بقای تکانه زاویه‌ای است. یک متقارن لاگرانژی با توجه به تبدیل‌های  $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$ ، که در آن  $\theta_0$  یک چرخش ثابت دلخواه است، دلالت بر پایستگی (بقای) تکانه زاویه‌ای دارد.

آخرین تقارن باقی مانده برای بحث، تغییرات زمانی است. می‌خواهیم بررسی کنیم که نیاز به تغییرناپذیر بودن لاگرانژی با توجه به تبدیل‌هایی مانند  $t \rightarrow t + t_0$  که در آن  $t_0$  مقدار زمان دلخواه است، چیست. این الزام به‌طور کلی به‌این معنی است که اگر سیستم امروز تحت معادلات دینامیکی خاصی باشد، همان معادلات باید دیروز یا فردا یا در هر زمانی  $t + t_0$  برقرار باشد.

عدم تغییر زمانی لاگرانژی  $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$  به‌این معنی است که مشتق زمانی آن باید صفر باشد. از طرف دیگر، می‌گوییم که لاگرانژی وابستگی صریح به  $t$  ندارد بنابراین لاگرانژی  $\mathcal{L}(x, \dot{x})$  است.

با استفاده از قانون زنجیره‌ای:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(x, \dot{x}) &= \frac{d\mathcal{L}}{dx} \dot{x} + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}} \ddot{x} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}} \right] \dot{x} + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}} \ddot{x} \end{aligned} \quad (52.1)$$

که در آن از معادله اوایلر-لاگرانژ استفاده کرده‌ایم. معادله (52.1) دلالت دارد بر :

$$\frac{d}{dt} \left[ \dot{x} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}} - \mathcal{L} \right] = 0 \quad (53.1)$$

اگر لاگرانژی مستقل از زمان باشد، کمیت داخل پرانتز حفظ می‌شود. به‌راحتی می‌توان نشان داد که این کمیت حفظ شده کل انرژی  $T + V$  است. عبارت داخل پرانتز در معادله (53.1)، با لاگرانژی  $\mathcal{L} = T - V = 1/2 m \dot{x}^2 - V(x)$

$$\begin{aligned} E &= \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} \\ &= m \dot{x}^2 - (T - V) \\ &= 2T - (T - V) \\ &= T + V \end{aligned} \quad (54.1)$$

که انرژی مکانیکی شناخته شده‌ای است که به‌صورت مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل بیان می‌شود. بنابراین، اصل بقای انرژی از تغییر ناپذیری لاگرانژی تحت انتقال زمانی ناشی می‌شود.

با بازگشت به‌مختصات تعمیم یافته، این کمیت  $E$  را به صورت انرژی متعارف تعریف می‌کنیم:

$$E(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \quad (55.1)$$

انرژی متعارف  $E$  زمانی حفظ می‌شود که لاگرانژ مربوطه به‌زمان وابسته نباشد. لازم به‌ذکر است که ممکن است انرژی متعارف حفظ شود، اما انرژی مکانیکی نیست.

سه مثال بالا سه کاربرد ساده از یک قضیه کلی توسط نوتر است که به طور ساده بیان می‌کند: "برای هر تقارن پیوسته لاگرانژی یک کمیت متناظر وجود دارد که مستقل از زمان است". نمایش کامل قضیه نوتر از حوصله این کتاب خارج است و خواننده علاقه‌مند را به بسیاری از کتاب‌های درسی عالی مانند آرنولد ارجاع می‌دهیم [۲].

### ۳.۱ مسئله دو جسم

به عنوان کاربرد فرمول بندی لاگرانژی اجازه دهید یک مسئله بسیار معروف را مورد بحث قرار دهیم: دینامیک یک جرم کوچک  $m$  که به دور جرم بزرگ  $M$  می‌چرخد که در آن  $m \ll M$  است. بیایید پتانسیل گرانشی را بنویسیم:

$$V(r) = -G \frac{mM}{r} \quad (۵۶.۱)$$

که در آن  $G = 6.674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  ثابت نیوتن است. لاگرانژ برای مسئله دو جسم، در مختصات قطبی، با استفاده از پتانسیل (۵۶.۱) در معادله (۵۰.۱) به دست می‌آید:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G \frac{mM}{r} \quad (۵۷.۱)$$

اکنون معادلات اوایلر-لاگرانژ (۲۳.۱) را برای دو مختصات قطبی  $r$  و  $\theta$  اعمال می‌کنیم:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (۵۸.۱)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 0$$

اولین معادله در (۵۸.۱) به ما می‌گوید که تکانه حفظ شده است. در واقع، لاگرانژ (۵۷.۱) با توجه به مختصات  $\theta$  چرخه‌ای است. با قضیه نوتر، تکانه زاویه‌ای مرتبط  $L$  حفظ می‌شود:

$$L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \quad (۵۹.۱)$$

معادله دوم در (۵۸.۱) می‌دهد:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -G \frac{mM}{r^2} \quad (۶۰.۱)$$

با استفاده از معادله (۵۹.۱) و با نشان دادن  $l = \frac{L}{m}$  تکانه زاویه‌ای در واحد جرم،  $\theta$  را حذف کرده تا یک معادله دیفرانسیل برای مختصات  $r$  داشته باشیم:

$$m \left( \ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} \right) = -G \frac{mM}{r^2} \quad (۶۱.۱)$$

حل این معادله دیفرانسیل در این شکل نسبتاً دشوار است. با این حال، می‌توان نشان داد که تحت یک تغییر مناسب توابع، معادله را می‌توان ساده کرد تا به صورت یک راه حل



ارائه شود:

$$r = \frac{l^2}{GM(1 + e \cos \theta)} \quad (۶۲.۱)$$

که در آن  $e$ ، گریز از مرکز مدار، میزان انحراف مدار از یک دایره را نشان می‌دهد ( $e = 0$ ) برای مدار دایره‌ای،  $0 < e < 1$  برای مدار بیضی،  $e = 1$  برای مدار سهموی و  $e > 1$  برای مدار هذلولی. جزئیات ریاضی در تمام کتاب‌های پیشرفته مکانیک کلاسیک گزارش شده است (برای مثال، مرجع [۳۵]).

مجموع انرژی مکانیکی حفظ شده جسمی با جرم  $m$  که به دور جسمی با جرم بسیار بزرگتر  $M$  می‌چرخد برابر است با:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - G\frac{mM}{r} \quad (۶۳.۱)$$

معادله (۶۳.۱) نشان می‌دهد که انرژی کل مجموع سه جزء است که به ترتیب عبارتند از: انرژی جنبشی، عبارتی حاوی تکانه زاویه‌ای و انرژی پتانسیل. انرژی پتانسیل گرانشی را می‌توان به صورت مشتق نیروی حفظ شده بیان کرد. در شباهت کامل، جمله دوم در معادله (۶۳.۱) را می‌توان به عنوان پتانسیل  $U_c$  به شکل زیر بیان کرد:

$$U_c = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} \quad (۶۴.۱)$$

که مشتق آن نیروی وابسته به شکل زیر ایجاد می‌کند:

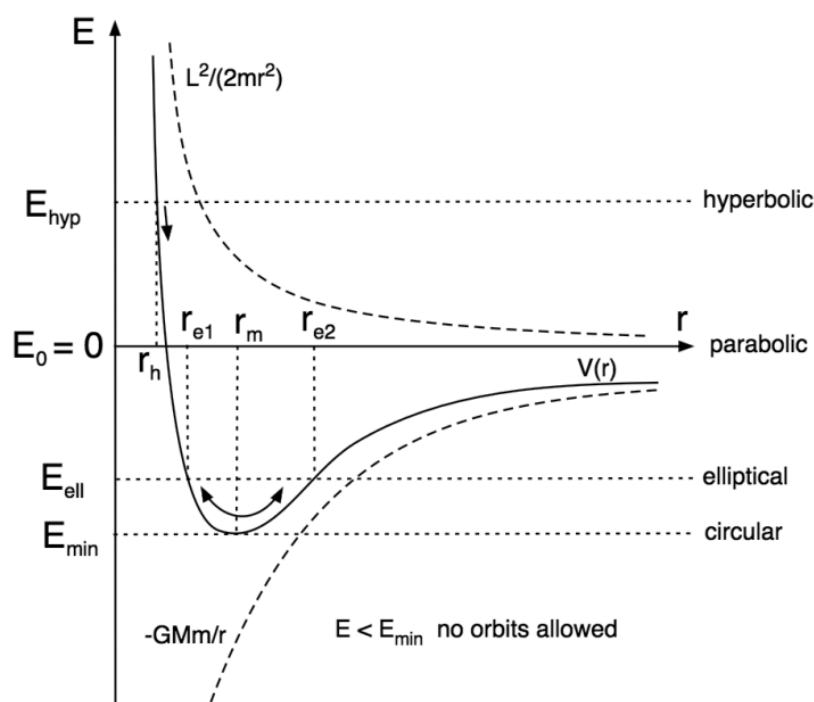
$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{L^2}{mr^3} = mr\dot{\theta}^2 \quad (۶۵.۱)$$

نیروی (۶۵.۱) را **نیروی گریز از مرکز**<sup>۲۹</sup> می‌نامند زیرا از جرم بزرگ  $M$  بسوی به جرم کوچک  $m$  دقیقاً مخالف جاذبه گرانشی روی جرم کوچک  $m$  می‌شود. ما می‌توانیم انرژی پتانسیل (۶۴.۱) را به عنوان انرژی پتانسیل گریز از مرکز در نظر بگیریم. اگر آن را با انرژی پتانسیل گرانشی (۵۶.۱) وارد کنیم، یک انرژی پتانسیل موثر به شکل زیر خواهیم داشت:

$$V(r) = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (۶۶.۱)$$

پتانسیل موثر  $V(r)$  معادله (۶۶.۱) به صورت یک خط ثابت در شکل (۶.۱) نشان داده شده است. دو مولفه آن به صورت خط چین ترسیم شده است. جسم با جرم  $m$  در صورتی که انرژی کل آن  $E < 0$  باشد، یعنی منفی باشد، به دور جسم پر جرم‌تر  $M$  می‌چرخد. مدار مربوطه با حداقل انرژی مجاز، مدار دایره‌ای با شعاع  $r_m$  است. انرژی‌های منفی بالاتر با مدارهای بیضوی عمومی‌تر بین دو شعاع  $r_{e1}$  و  $r_{e2}$  وابسته است. هر گونه انرژی  $E > E_{min}$  مجاز است. وقتی انرژی  $E \geq 0$  باشد، جسم دیگر مقید نیست و در یک مسیر سهموی ( $E = 0$ ) یا هذلولی ( $E > 0$ ) می‌چرخد.

<sup>۲۹</sup>Centrifugal force



شکل ۶.۱: رابطه بین مدارها و انرژی مکانیکی کل.

## ۴.۱ همیلتون

حال اجازه دهید شکل تعریف (۵۵.۱) را مطالعه کنیم. می‌توانیم معادله را بازنویسی کنیم. با توجه به معادله (۵۵.۱) می‌توانیم تکانه تعمیم یافته  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  را معرفی کنیم (به معادلات (۴۷.۱) و (۵۱.۱) مراجعه کنید). بیایید یک تابع جدید،  $H$  همیلتونی را معرفی کنیم که به صورت زیر تعریف شده است:

$$H(q, p) = \dot{q}p - \mathcal{L} \quad (۶۷.۱)$$

معادله (۶۷.۱) نمونه‌ای از تبدیل لژاندر است، یعنی نوع خاصی از تبدیل که امکان تبدیل تابعی از متغیرهای خاص را به تابع دیگری از متغیرهای مزدوج می‌دهد. برای سادگی، اجازه دهید به تابع‌های دو متغیر  $f = f(x, y)$  محدود کنیم و می‌خواهیم  $f$  را به یک تابع جدید  $g = g(u, v)$  تبدیل کنیم. در مورد ما، می‌خواهیم نحوه تبدیل لاگرانژی  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  به  $H(q, p)$  را پیدا کنیم که در آن  $\dot{q}, p$  متغیرهای مزدوج هستند. ذکر این نکته ضروری است که این دو تابع، اگر کمیت‌های فیزیکی را نشان دهند، واحدهای یکسانی خواهند داشت. در مورد  $\mathcal{L}$  لاگرانژی که تفاوت بین انرژی جنبشی و پتانسیل است، واحدهای آن انرژی خواهد بود. بنابراین  $H$  واحدهای انرژی خواهد داشت.

بیایید دیفرانسیل تابع  $f = f(x, y)$  را بنویسیم:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy \quad (۶۸.۱)$$

که در آن زیرنویس‌های  $x, y$  در معادله (۶۸.۱) به این معنی است که مشتقات جزئی به ترتیب با ثابت نگه داشتن  $x$  و  $y$  گرفته می‌شوند. می‌توانیم دو تابع جدید  $u, v$  تعریف کنیم:

$$u \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y, \quad v \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \quad (۶۹.۱)$$

که در آن نماد  $\equiv$  به معنای «طبق تعریف برابر است»<sup>۳۰</sup>. می‌توانیم معادله (۶۸.۱) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$df = u dx + v dy \quad (۷۰.۱)$$

معادله (۷۰.۱) نشان می‌دهد که  $(u, x)$  و  $(v, y)$  زوج متغیرهای مزدوج هستند. اکنون دیفرانسیل حاصلضرب دو تابع  $v, y$  را می‌نویسیم:

$$d(vy) = y dv + v dy \quad (۷۱.۱)$$

و دیفرانسیل زیر را که با تفریق معادله (۷۱.۱) از معادله (۷۰.۱) بدست می‌آید محاسبه کنیم:

$$dg = df - d(vy) = u dx - v dy \quad (۷۲.۱)$$

تابع  $g = f - vy$  تبدیل لژاندر تابع  $f$  است و به ما اجازه می‌دهد که متغیرهای مستقل را با ساخت یک تابع جدید مطابق معادله (۷۲.۱) تغییر دهیم.

پس از بحث در مورد تبدیل لژاندر، اجازه دهید به همیلتونین بازگردیم. کلیات همیلتونی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \quad (۷۳.۱)$$

اکنون معادلات به اصطلاح همیلتون را استخراج می‌کنیم. برای سادگی، مختصات تعمیم یافته  $(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i)$  را به صورت  $(q, \dot{q}, p, \dot{p})$  می‌نویسیم و شاخص (اندیس)  $i = 1, \dots, N$  و جمع را بر روی شاخص  $i$  حذف می‌کنیم. این به طور ضمنی فرض می‌کند که هر بار که حاصل ضرب دو مختصات وجود دارد، آنها بر روی شاخص  $i$ <sup>۳۱</sup> جمع می‌شوند. معادله (۷۳.۱) را می‌توان به صورت ساده<sup>۳۲</sup> زیر نوشت:

$$H(q, p) = \dot{q}p - \mathcal{L} \quad (۷۴.۱)$$

<sup>۳۰</sup> نمادهای دیگر عبارتند از  $\doteq$  و  $\triangleq$ .

<sup>۳۱</sup> این معادل قرارداد معروف اینشتین در مورد شاخص‌های مکرر است.

<sup>۳۲</sup> معادله (۶۷.۱) به همین صورت نوشته شده بود اما فقط به یک جفت مختصات  $(q, p)$  اشاره داشت. در معادله (۷۴.۱) ما شاخص  $i$  و جمع روی  $i$  را حذف می‌کنیم.

با لاگرانژی عمومی  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  و همیلتونی  $H(q, p, t)$  شروع و دیفرانسیل را مطالعه می‌کنیم:

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (۷۵.۱)$$

با استفاده از تعریف تکانه تعمیم یافته  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  داریم:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq - \dot{q} dp + d(p\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (۷۶.۱)$$

که در آن از اتحاد  $d(p\dot{q}) = p d\dot{q} + \dot{q} dp$  استفاده کردیم. می‌توانیم جملات را مجدداً در معادله (۷۶.۱) و استفاده از (۷۴.۱) مرتب کنیم:

$$dH = -d(\mathcal{L} - p\dot{q}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq + \dot{q} dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (۷۷.۱)$$

همچنین می‌توانیم دیفرانسیل همیلتونی  $H = H(q, p)$  را به صورت زیر بیان کنیم:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (۷۸.۱)$$

معادله (۷۷.۱) و (۷۸.۱) سازگار هستند اگر:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (۷۹.۱)$$

معادلات اوایلر-لاگرانژ  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$  را می‌توان دوباره به صورت  $\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$  مرتب کرد. با چنین جایگزینی، معادلات (۷۹.۱) تبدیل می‌شود:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (۸۰.۱)$$

معادله (۸۰.۱) به عنوان معادلات همیلتون شناخته می‌شود.

معادلات همیلتون معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول  $2N$  (زوج) هستند در حالی که معادلات اوایلر-لاگرانژ  $N$  معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم هستند. به عنوان مثالی از همیلتون، اجازه دهید به نوسانگر هارمونیک ساده برگردیم. با اعمال تبدیل لژاندر لاگرانژ (۲۸.۱)، داریم:

$$H = q\dot{q} - \mathcal{L} = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \quad (۸۱.۱)$$

که در آن به وضوح می‌بینیم که همیلتون شامل دو عبارت درجه دوم در  $p$  و  $q$  مربوط به دو درجه آزادی است.

## ۵.۱ براکت‌های پواسون

بیایید آنچه را که تاکنون آموخته‌ایم خلاصه کنیم: ما از مکانیک نیوتنی و فرضیات آن بر اساس بردارهایی با وابستگی به سیستم مختصات شروع کردیم. سپس لاگرانژی که در آن کمیت‌های مهم اسکالر و مستقل از مختصات هستند. سپس همیلتون، جایی که می‌توانیم تبدیل‌های مختصات کلی‌تری را انجام دهیم که می‌توانیم  $q$  و  $p$  را با هم مخلوط کنیم. این تبدیلات کلی‌تر، **تبدیلات متعارف**<sup>۳۳</sup> نامیده می‌شوند.

معادلات همیلتون به ما می‌گوید همانطور که با بررسی معادله (۸۰.۱) مشهود است مختصات  $q$  و تکانه مزدوج  $p$  کاملاً متقارن هستند. توصیف یک سیستم در فرمول بندی همیلتونی به این معنی است که ما  $H(q, p, t)$  همیلتونی را با رعایت معادله (۸۰.۱) شناسایی می‌کنیم و در آن شاخص  $i$  به صراحت نوشته نشده است، اما به ذره  $i$ -ام که سیستم را تشکیل می‌دهد اشاره دارد.

اکنون فرمول بندی دیگری را برای توصیف تکامل زمانی سیستم‌های دینامیکی مطالعه می‌کنیم: براکت‌های پواسون. برای انجام این کار، اجازه دهید یک تابع دلخواه از مختصات تعمیم یافته  $f = f(q, p, t)$  را مطالعه کرده و مشتق زمان کل آن را بنویسیم:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (۸۲.۱)$$

با استفاده از معادلات همیلتون، معادله (۸۲.۱) میشود:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (۸۳.۱)$$

معادله (۸۳.۱) معرفی یک عملیات جدید به نام براکت پواسون را بین دو تابع  $f = f(q, p, t)$  و  $g = g(q, p, t)$  پیشنهاد می‌کند:

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (۸۴.۱)$$

با چنین تعریفی، معادله تکامل زمانی (۸۳.۱) را می‌توان به شکل فشرده‌تری نوشت:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (۸۵.۱)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که براکت‌های پواسون مختصات متعارف عبارتند از:

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (۸۶.۱)$$

براکت‌های پواسون الزامات جبر لی Lie<sup>۳۴</sup> را برآورده می‌کنند، یعنی جبری شامل یک "قانون ضرب" است که ضد جابجایی، دوخطی و اتحاد ژاکوبی را برآورده می‌کند. می‌توان

<sup>۳۳</sup> Canonical Transformations.

<sup>۳۴</sup> سوفوس لی (1842 – 1899) یک ریاضیدان نروژی بود که اولین بار مفهوم تقارن پیوسته را مطرح کرد.

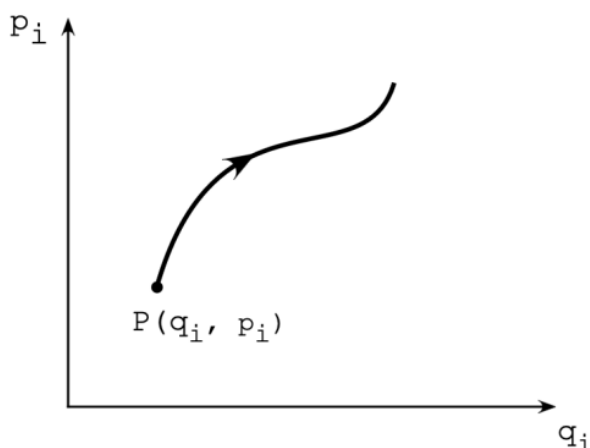
نشان داد که:

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{\{\alpha\{f_1, g\} + \beta\{f_2, g\}\} &= \alpha\{f_1, g\} + \beta\{f_2, g\} \\ \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, f\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} &= 0\end{aligned}\quad (۸۷.۱)$$

که در آن اولین معادله در (۸۷.۱) ضد جابجایی است، دومی دوخطی بودن و سومی اتحاد ژاکوبی برای هر  $f, g$  و  $h$  است. می توان آن را به راحتی نشان داد، و این را به خواننده واگذار کرد تا بررسی کند که بردارها در فضای سه بعدی همراه با ضرب برداری  $u \times v$  جبر لی هستند.

## ۶.۱ فضای فاز

ما این فصل را با بحث مختصری در مورد مفهوم فضای فاز به پایان می بریم. دیده ایم که یک سیستم دینامیکی متشکل از  $N$  ذرات در فضای ۳ بعدی وقتی مختصات  $3N$  و گشتاور  $3N$  را بدهیم، کاملاً مشخص می شود. به طور کلی، اگر تکانه تعمیم یافته  $p_i$  و مختصات تعمیم یافته  $q_i$  را بدهیم، وضعیت یک سیستم را کاملاً مشخص می کنیم.



شکل ۷.۱: فضای فاز برای سیستمی که با نقطه  $P$  مختصات  $q_i$  و  $p_i$  توصیف می شود. خط پیوسته نشان دهنده تکامل زمانی سیستم است.

اگر یک فضای انتزاعی بسازیم که محور مختصات آن  $p_i$  و  $q_i$  باشد، وضعیت یک سیستم با یک نقطه نمایش داده می شود. تکامل زمانی، در چنین فضایی، با یک منحنی یا مسیری مطابق شکل (۷.۱) نشان داده شده است.

تکامل زمانی توسط معادلات همیلتون (۸۰.۱) که در بخش ۱.۴ مورد بحث قرار گرفت اداره می شود. در واقع، با توجه به یک حالت اولیه خاص، یعنی یک نقطه اولیه در فضای فاز، معادلات همیلتون، تکامل زمانی سیستم را پیش بینی می کند. بنابراین، منحنی در فضای فاز، جواب معادلات همیلتون است که مختصات  $q_i = q_i(t)$  و  $p_i = p_i(t)$  را می دهد. یکی

از ویژگی‌های خوب فضای فاز این است که منحنی‌ها مشابه جریان سیال عمل می‌کنند و می‌توان از برخی ریاضیات مربوطه استفاده کرد. به عنوان مثال، منحنی‌های جریان در فضای فاز همیشه تراکم ناپذیر هستند (قضیه لیوویل). ویژگی دیگر این است که همیلتونی در امتداد این منحنی‌ها ثابت است و اگر سیستم توصیف شده محافظه کار (پایستار)<sup>۳۵</sup> باشد، حفظ می‌شود.

---

<sup>۳۵</sup>Conservative





## فصل ۲

# بحران مکانیک کلاسیک

مکانیک کلاسیک در توضیح تعداد زیادی از پدیده‌های مربوط به حرکت اجسام از مقیاس یک جسم کوچک با جرم کسری گرم تا مقیاس سیاراتی که به دور خورشید می‌چرخند بسیار موفق بوده است. علاوه بر این، عملاً تمام پدیده‌های الکترومغناطیسی (از این به بعد) با معادلات ماکسول که در اینجا به شکل دیفرانسیل و در واحدهای  $SI$  گزارش شده‌اند، به خوبی توصیف شده‌اند:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}\quad (1.2)$$

که در آن  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  به ترتیب، بردارهایی هستند که میدان الکتریکی (بر حسب نیوتن بر کولن) و میدان مغناطیسی (بر حسب تسلا<sup>۱</sup>) را نشان می‌دهند،  $\rho$  چگالی بار بر حسب کولن بر متر مکعب است،  $\epsilon_0 = 8.8541878176 \times 10^{-12} C/Vm$  گذردهی الکتریکی خلاء، و  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} Vs/Am$  نفوذپذیری مغناطیسی خلاء و  $\mathbf{J}$  (بردار) جریان الکتریکی بر حسب آمپر بر مترمربع است.

به منظور توصیف تمام الکترومغناطیس، علاوه بر معادله (۱.۲) به نیروی لورنتس نیاز داریم:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

قوانین نیوتن به اضافه معادله ماکسول چیزی بود که برای توضیح تقریباً تمام پدیده‌های شناخته شده در آغاز قرن بیستم مورد نیاز بود. موفقیت مکانیک کلاسیک با توافق با اکثر

---

<sup>۱</sup> تسلا یک واحد مشتق شده برای قدرت میدان مغناطیسی است. به این صورت تعریف می‌شود: ذره‌ای با بار یک کولن که با سرعت یک متر در ثانیه حرکت می‌کند، نیرویی برابر با یک نیوتن را در میدان مغناطیسی یک تسلا تجربه می‌کند.

آزمایشات انجام شده در شرایط مختلف تأیید شد. به نظر می‌رسد مکانیک کلاسیک با آزمایشات درون خطاهای تجربی موافق است. با این حال، با پیشرفت تکنولوژی، داده‌های تجربی دقیق‌تر و حساس‌تر شدند و انحرافات بین داده‌ها و نظریه‌ها ظاهر شد. علاوه بر این، مناطق آزمایشی جدید شروع به تولید داده‌هایی کردند که گنجاندن آنها در یک توصیف فیزیک کلاسیک بسیار دشوار بود. اکنون در مورد چند مسئله حاکی از فیزیک کلاسیک بحث می‌کنیم که ناکافی بودن این نظریه را نشان دهد.

## ۱.۲ تشعشع جسم سیاه

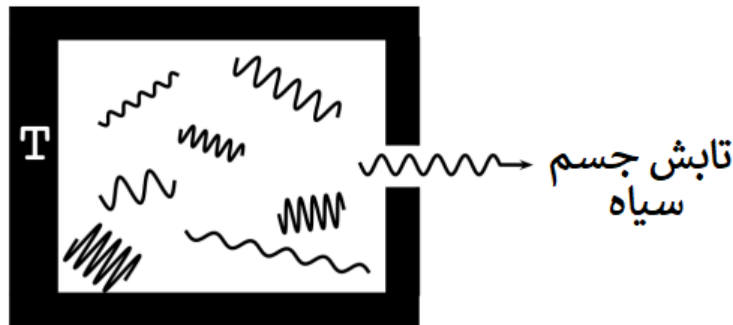
بدن های گرم شده امواج الکترومغناطیسی ساطع می‌کنند. تشعشع به طور خاص، اگر جسمی را تا دمای نسبتاً بالا، چند هزار کلوین گرم کنیم، چشمان ما در واقع امواج الکترومغناطیسی را خواهند دید. تابش به صورت نور مرئی ساطع می‌شود. یک مثال دیدنی خورشید است که دمای سطح آن حدود 6000 کلوین و درخشان و زرد به نظر می‌رسد. اما هنگامی که پوست خود را مستقیماً در معرض خورشید قرار می‌دهیم، احساس گرما را نیز تجربه می‌کنیم: این بدان معناست که خورشید نه تنها در یک فرکانس، بلکه در طیف وسیعی ساطع می‌کند.

چرا جسم گرم شده امواج الکترومغناطیسی ساطع می‌کند؟ یک تصویر ساده می‌تواند به شرح زیر باشد: گرما با حرکت تصادفی اتم‌ها یا مولکول‌هایی که از آرایش پیچیده‌ای از ذرات باردار الکتریکی ساخته شده‌اند، مرتبط است. معادلات ماکسول (۱.۲) به ما می‌گویند که اگر یک ذره باردار را تکان دهیم، ذره امواج الکترومغناطیسی ساطع می‌کند. هر چه سریع‌تر ذرات باردار را تکان دهیم، فرکانس تشعشعات ساطع شده بیشتر می‌شود. در آغاز قرن بیستم، زمانی که فیزیکدانان با استفاده از این تصویر ساده سعی کردند طیف این تابش را که به نظر می‌رسید با فیزیک امواج توسط مواد مختلف در جذب و گسیل امواج الکترومغناطیسی مرتبط و مدل کنند، شروع شد.

اگر بخواهیم فیزیک جذب/نشر (گسیل) را درک کنیم، ایده‌آل کردن فرآیند مفید است. برای این منظور، فیزیکدانان<sup>۲</sup> با معرفی مفهوم جسم سیاه، ایده‌آل سازی جذب/گسیل را ابداع کرده‌اند. یک جسم سیاه ایده‌آل ماده‌ای است که قادر به جذب تمام تشعشعات ممکن است. این بدان معنی است که هیچ تشعشعی از جسم سیاه در تمام فرکانس‌ها یا طول موج‌ها و همه زوایای تابش منعکس نمی‌شود.

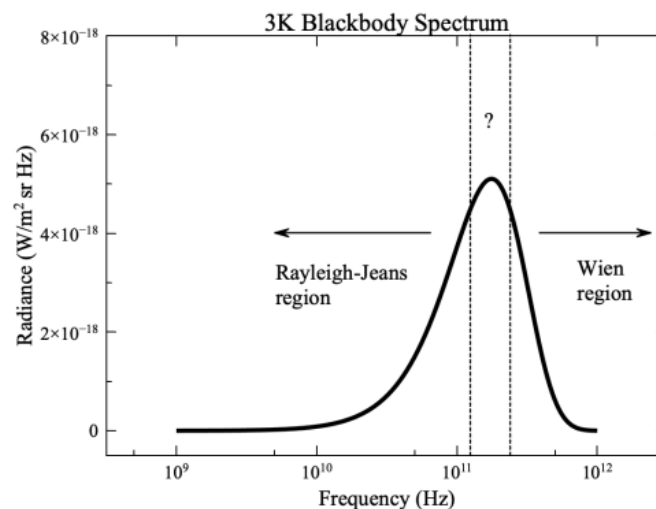
فیزیکدانان در پایان قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم شروع به دریافت داده‌های تجربی خوبی در مورد تابش جسم سیاه کردند. به‌طور خاص، داده‌ها به‌وضوح نشان می‌دادند که توان ساطع شده توسط یک جسم سیاه، در واحد فرکانس، واحد سطح و واحد زاویه فضائی<sup>۳</sup>، تنها تابعی از طول موج و دمای  $B = B(\lambda, T)$  است (نباید با میدان مغناطیسی  $B$  در معادلات ماکسول اشتباه شود). چالش پیدا کردن یک عبارت ریاضی مبتنی بر یک نظریه فیزیکی بود که بتواند طیف تابش جسم سیاه را به‌درستی توصیف کند.

<sup>۲</sup>گوستاو کیرشهوف (1824 – 1887) اولین کسی بود که مفهوم جسم سیاه را معرفی کرد.  
<sup>۳</sup>توان ساطع شده در واحد سطح، واحد زاویه فضائی و واحد فرکانس یا طول موج را تابش طیفی می‌نامند.



شکل ۱.۲: حفره (محفظه) پوشیده از مواد کاملاً جذب کننده در دمای  $T$ . تشعشعات خارج شده از سوراخ کوچک (بزرگتر از طول موجها) دارای طیف مشخصه جسم سیاه است.

در شکل (۲.۲)، اندازه‌گیری مدرن از تابش پس‌زمینه مایکروویو کیهانی را مشاهده می‌کنیم که یک طیف مشخصه با یک ناحیه فرکانس پایین، که معمولاً به عنوان ناحیه ریلی-جین  $^4(RJ)$  نامیده می‌شود، و یک منطقه با فرکانس بالا، که معمولاً به عنوان ناحیه وین  $^5$  و یک قله نامیده می‌شود، نشان می‌دهد. در ادامه خواهیم دید که فیزیک کلاسیک می‌تواند این دو ناحیه افراطی (دو طرف قله) را مدل‌سازی کند، اما قله را محاسبه نمی‌کند.



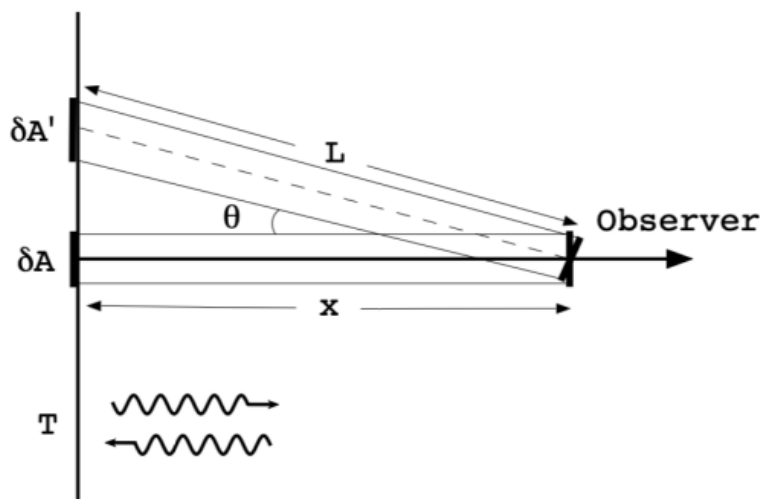
شکل ۲.۲: طیف اندازه‌گیری شده (تابش) تابش جسم سیاه پس‌زمینه مایکروویو کیهانی در  $2.7K$ .

اولین کاری که باید هنگام جستجوی یک نظریه انجام داد، حداقل اگر یک فیزیکدان کلاسیک هستید، ساخت مدل فیزیک است. بنابراین فیزیکدانان یک مدل ساده از یک جسم سیاه را ابداع کردند (شکل ۲.۲): حفره‌ای با سطوح داخلی پوشیده از مواد جاذب،

<sup>۴</sup>Rayleigh-Jeans region (RJ)

<sup>۵</sup>Wien region

یعنی ماده‌ای که تابش را در همه فرکانس‌ها کاملاً جذب می‌کند. اگر در دمای  $T$  سوراخ کوچکی در این حفره ایجاد کنیم، تشعشعی که از سوراخ خارج می‌شود، تابش «جسم سیاه» است که در مورد ویژگی‌های آن بحث خواهیم کرد.



شکل ۳.۲: شکل هندسی رابطه بین چگالی انرژی و توان ساطع شده توسط یک جسم سیاه در دمای  $T$  نشان می‌دهد.

اولین تشخیص مهم در درک موضوع این است که اگر  $M(\lambda, T)$  توان ساطع شده از سطح جسم سیاه در دمای  $T$  باشد، چگالی انرژی  $u(\lambda, T)$  در داخل حفره برابر است با:

$$u(\lambda, T) = \frac{4}{c} M(\lambda, T) \quad (۳.۲)$$

اگر توان ساطع شده در واحد سطح و واحد زاویه فضائی را بخواهیم، می‌توان نشان داد که:

$$u(\lambda, T) = \frac{4}{c} M(\lambda, T) = \frac{4\pi}{c} B(\lambda, T) \quad (۴.۲)$$

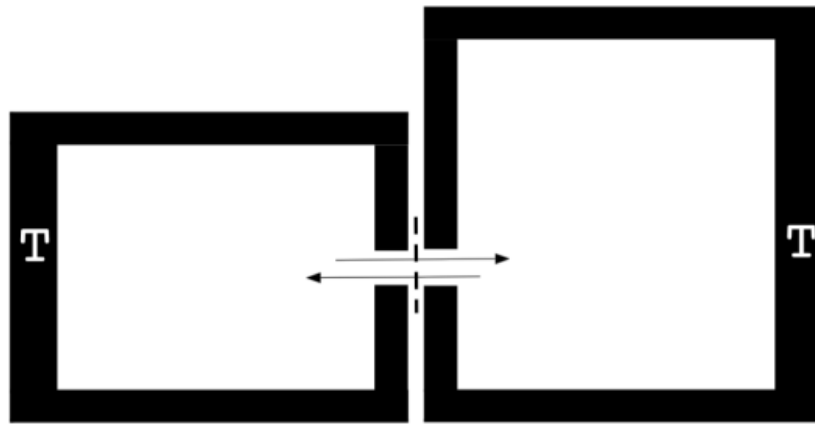
بیایید به طور خلاصه معادله (۳.۲) را توجیه کنیم. با توجه به شکل (۳.۲)، اجازه دهید تشعشع ساطع شده از یک دیوار بی‌نهایت طولانی و مشاهده شده توسط ناظری که در فاصله  $x$  از دیوار قرار دارد را در نظر بگیریم. فرض کنید که دیوار در دمای  $T$  در تعادل حرارتی است. می‌خواهیم تابش ساطع شده از یک عنصر  $\delta A$  را با چگالی انرژی در حجم  $V = \delta A \cdot x$  مقایسه کنیم، جایی که  $\delta A$  عنصر مساحت و  $x$  فاصله ناظر از دیوار با توجه به اینکه توان انرژی در واحد زمان است، کل انرژی در واحد طول موج در حجم  $V$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dE}{d\lambda} = 2 \frac{dR}{d\lambda} \cdot \tau \cdot \delta A = 2 \frac{dR}{d\lambda} \cdot \frac{x}{c} \cdot \delta A \quad (۵.۲)$$

که در آن فاکتور ۲ به این دلیل است که در تعادل حرارتی، تعادل تشعشع ساطع و جذب شده وجود دارد، بنابراین دو بار شمارش می‌شود. فرض می‌کنیم که نور با سرعت  $c$  منتشر می‌شود به طوری که  $x = c \cdot \tau$ . برای محاسبه توان کل دریافتی ناظر، باید میانگین گسیل همه عناصری را که ناظر می‌بیند برای هر زاویه  $\theta$  از  $-\pi/2$  تا  $\pi/2$  میانگین بگیریم. به دلیل شیب زاویه  $\theta$ ، سطح عنصری که در زاویه  $\theta$  تابش می‌کند، از نظر هندسی با ضریب  $1/\cos \theta$  افزایش می‌یابد. عامل دیگر  $1/\cos \theta$  از طول اضافی  $L = x/\cos \theta$  ناشی می‌شود. که توان ساطع شده به صورت تابعی از  $\theta$  برابر است با:

$$\frac{dE}{d\lambda}(\theta) = \frac{2}{c \cos^2 \theta} \frac{dR}{d\lambda} \cdot V \quad (۶.۲)$$

اگر اکنون  $B(\lambda, T) = dEd\lambda$  (تابش طیفی)،  $u(\lambda, T) = VdRd\lambda$  (چگالی انرژی طیفی) را



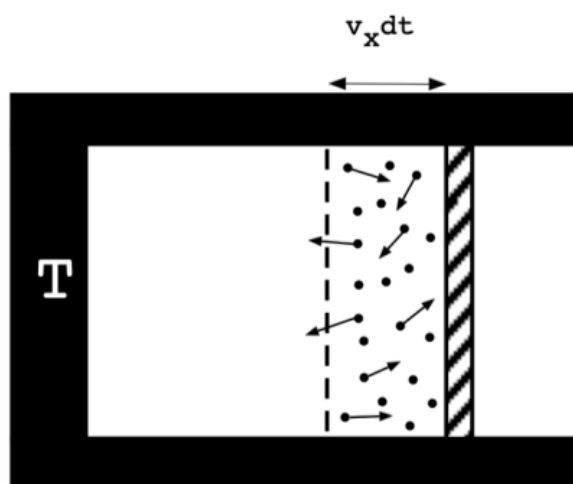
شکل ۴.۲: دو حفره جسم سیاه با اشکال مختلف، اما در دمای یکسان  $T$ ، از طریق یک فیلتر باند باریک به هم متصل شده‌اند که فقط به تابش در اطراف طول موج  $\lambda$  اجازه عبور می‌دهد. انرژی مبادله شده بین دو حفره باید یکسان باشد. در غیر این صورت، قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کنیم.

شناسایی و کسینوس  $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$  را میانگین‌گیری کنیم، دقیقاً معادله (۳.۲) را بازیابی می‌کنیم

ملاحظات ترمودینامیکی ساده اطلاعات مهمی در مورد تابع  $B(\lambda, T)$  به ما می‌دهد. اول، تابع  $B(\lambda, T)$  فقط به دمای ترمودینامیکی گسیل کننده، یعنی پوشش داخلی حفره جسم سیاه بستگی دارد. در شکل (۴.۲)، دو حفره جسم سیاه جدا شده در دمای  $T$  یکسان اما با شکل‌ها و حجم داخلی متفاوت، از طریق یک فیلتر باند باریک به هم متصل شده‌اند که اجازه می‌دهد فقط تابش را در اطراف طول موج  $\lambda$  عبور دهد. اجازه دهید با  $B_{12}$  قدرت از حفره سمت چپ از طریق فیلتر به حفره سمت راست و با  $B_{21}$  قدرت از حفره سمت راست از طریق فیلتر به حفره سمت چپ را نشان دهیم. به عنوان مثال، اگر  $B_{12} > B_{21}$  باشد، یک انتقال خالص انرژی از حفره چپ به حفره راست خواهیم داشت که منجر به خنک شدن حفره چپ و گرم شدن حفره سمت راست به دلیل جدا بودن آنها می‌شود. این فرآیند

بیانیه قانون دوم لرد کلوین را نقض می‌کند که طبق آن در یک سیستم ایزوله امکان انتقال گرما از جسمی به جسم دیگر در دمای بالاتر وجود ندارد. بنابراین  $B_{12} = B_{21}$  به این معنی است که توان ساطع شده به حجم داخلی بستگی ندارد. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که توان ساطع شده همسانگرد است.

می‌توانیم از ترمودینامیک و برخی از نظریه‌های جنبشی گاز برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر در مورد تابع  $B(\lambda, T)$  استفاده کنیم. به طور خاص، می‌خواهیم تا آنجا که می‌توانیم، با استفاده از فیزیک کلاسیک، شکل تابع  $B(\lambda, T)$  را پیدا کنیم.



شکل ۵.۲: گاز ایده‌آل در یک ظرف ایزوله با دیواره‌های در تعادل حرارتی در دمای  $T$  و پیستون بدون اصطکاک.

## ۲.۲ فشار تشعشع

برای ادامه یافتن تابعی که طیف تابش جسم سیاه را توصیف می‌کند، باید وضعیت ایده‌آل دیگری را مطالعه کنیم: تابش در داخل یک پیستون جدا شده، در قیاس کامل با مطالعه گاز ایده‌آل در ترمودینامیک کلاسیک (شکل ۵.۲). برای یک بحث کلاسیک که از معادلات ماکسول شروع می‌شود، به لانگاری<sup>۶</sup> [۲۵] مراجعه کنید. در اینجا از یک بحث جایگزین مبتنی بر تئوری جنبشی گازها استفاده خواهیم کرد: تشعشعات داخل حفره را به عنوان متشکل از ذرات غیر متقابل نور (فوتون) در نظر می‌گیریم. به پیروی از فاینمن (جلد اول ۳۹) [۱۶]، بیایید فشار اعمال شده از یک گاز تک اتمی کامل محصور در یک سیلندر با پیستون بدون اصطکاک را ارزیابی کنیم (شکل ۵.۲).

می‌خواهیم فشار  $P$  وارد شده توسط گاز را در دمای  $T$  بر روی پیستون بدون اصطکاک ارزیابی کنیم. فشار  $P = F/A$  نیروی  $F$  است که توسط ذرات وارد شده به پیستون تقسیم بر سطح  $A$  پیستون می‌شود. نیروی کل مجموع نیروی اعمال شده توسط هر ذره است

<sup>۶</sup>Longair

که به نوبه خود، تغییر تکانه  $dp$  در واحد زمان  $t$  است. از آنجایی که پیستون موظف است فقط به صورت افقی در جهت  $x$  حرکت کند، تنها جزء  $x$  از تکانه  $p_x$  به نیرو کمک می‌کند. تغییر تکانه در اثر برخورد ذره به پیستون  $2dp_x = 2mv_x$  است. اگر در حجم  $V$  درونی  $N$  ذره داشته باشیم، فقط آنهایی که در حجم  $V = Av_x dt$  هستند در طول زمان  $dt$  به پیستون برخورد خواهند کرد. تعداد کل ذراتی که به پیستون برخورد می‌کنند، حجم  $V$  ضربدر تعداد اتم‌ها در واحد حجم  $n = N/V$  خواهد بود و فشار برابر است:

$$P = \frac{2}{A} \frac{dp}{dt} = 2nmv_x^2 = nm\langle v_x^2 \rangle \quad (۷.۲)$$

که در آن آخرین برابری را در نظر می‌گیریم که همه ذرات به سمت پیستون حرکت نمی‌کنند. به طور متوسط، تنها نیمی به سمت پیستون حرکت می‌کنند و نیمی از آن دور می‌شوند.

در یک سیستم کاملاً بی‌نظم، مانند گاز ایده‌آل ما، ذرات با احتمال مساوی در همه جهت حرکت می‌کنند. این بدان معنی است که  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$  و یک حرکت کاملاً تصادفی مستلزم این است که:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \quad (۸.۲)$$

که با جایگزین کردن در رابطه (۷.۲) خواهیم داشت:

$$P = \frac{2}{3}n\langle \frac{mv^2}{2} \rangle \quad (۹.۲)$$

در یک گاز کامل ساخته شده از ذرات تک اتمی غیر متقابل، انرژی داخلی  $U$  فقط انرژی جنبشی است و بنابراین:

$$P = \frac{2}{3}u \quad (۱۰.۲)$$

که در آن  $u = U/V$  چگالی انرژی است.

اگر اکنون تابش درون حفره را به عنوان مجموعه‌ای از ذرات بدون جرم در حال حرکت با سرعت نور  $c$  در نظر بگیریم چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر استدلال بالا را تکرار کنیم، باید تکانه هر ذره تابش را با  $p = E/c$  بیان کنیم. بیایید معادله (۹.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$P_\gamma = \frac{1}{3}n\langle pv \rangle = \frac{1}{3}n\langle pc \rangle \quad (۱۱.۲)$$

که در آن  $P_\gamma$  فشار تشعشع است. از نسبیت خاص می‌دانیم که انرژی فوتون‌ها  $E = pc$  است که وقتی در (۱۱.۲) قرار می‌گیرد به دست می‌آید:

$$P_\gamma = \frac{1}{3}u \quad (۱۲.۲)$$

نتیجه (۱۲.۲) کاملاً کلاسیک است و می‌توان با استفاده از معادلات ماکسول<sup>۷</sup> همانطور که در ابتدای این بخش ذکر شد بدست آورد.

<sup>۷</sup>در واقع، به خوبی شناخته شده است که معادلات ماکسول از نظر نسبیتی ثابت هستند.

می‌توانیم معادله (۱۲.۲) با یادآوری اینکه  $u = U/V$  بنویسیم:

$$P_\gamma V = \frac{1}{3}U = (\gamma - 1)U \quad (13.2)$$

که در آن ثابت  $\gamma = 4/3$  به نام شاخص آدیاباتیک فوتون‌ها است. توجه داشته باشید که نشانگر  $\gamma$  فشار تابش  $P_\gamma$  نشان دهنده فشار تابش فوتون‌ها است که در طول تاریخ به عنوان پرتوهای گاما نیز نشان داده شده‌اند.

## ۳.۲ قانون استفان بولتزمن

با استفاده از نتایج بخش قبل، اکنون بدست آوردن توان یکپارچه ساطع شده توسط یک جسم سیاه در دمای  $T$  نسبتاً ساده است. بر اساس اندازه‌گیری‌های دو فیزیکدان <sup>۸</sup>Dulong و <sup>۹</sup>Petit، در سال ۱۸۷۹ Josef Stefan <sup>۱۰</sup> قانونی را برای توان کل منتشر شده توسط یک جسم سیاه پیشنهاد کرد. اندکی بعد، بولتزمن <sup>۱۱</sup> قانون استفان را با استفاده از ترمودینامیک کلاسیک استخراج کرد.

با اصل اول ترمودینامیک شروع می‌کنیم:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (14.2)$$

که در آن  $U$ ،  $Q$  و  $W$  به ترتیب انرژی داخلی، گرمای مبادله شده با سیستم و کار انجام شده روی سیستم هستند. نماد  $\delta$  نشان می‌دهد که  $Q$  و  $W$  هر دو تابع حالت نیستند، اگرچه مجموع آنها است. در مورد تغییرات برگشت‌پذیر، می‌توان از رابطه ترمودینامیکی بنیادی برای نوشتن قانون اول از نظر توابع حالت استفاده کرد:

$$dU = TdS - PdV \quad (15.2)$$

اگر معادله (۱۵.۲) را استخراج کنیم با توجه به حجم  $V$ ، با ثابت نگه داشتن دمای  $T$ ، داریم:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \quad (16.2)$$

از آنجایی که به دنبال رابطه‌ای بین انرژی  $U$  و دمای  $T$  هستیم، می‌خواهیم مشتق آنتروپی را از معادله (۱۶.۲) حذف کنیم. این به راحتی با استفاده از یکی از روابط ماکسول به دست می‌آید، یعنی:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad (17.2)$$

<sup>۸</sup>پیر لوئی دولونگ (۱۷۸۵ – ۱۸۳۸) فیزیکدان و شیمیدان فرانسوی بود. به همراه الکسیس پتیت ابتدا نشان دادند که ظرفیت گرمایی فلزات با جرم آنها نسبت معکوس دارد.

<sup>۹</sup>الکسیس ترز پتی (۱۷۹۱ – ۱۸۲۰) فیزیکدان فرانسوی بود که بیشتر به دلیل کارش با دولونگ در مورد ظرفیت حرارتی فلزات شناخته شده بود.

<sup>۱۰</sup>جوزف استفان (۱۸۳۵ – ۱۸۹۳) فیزیکدان اتریشی بود که برای اولین بار دمای سطح خورشید را با استفاده از قانون تجربی خود تخمین زد.

<sup>۱۱</sup>لودویگ بولتزمن (۱۸۴۴ – ۱۹۰۶) فیزیکدان اتریشی بود که پدر مکانیک آماری کلاسیک به شمار می‌رود.



چنین نتیجه می‌شود که:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \quad (18.2)$$

با استفاده از  $U = uV$  و معادله (۱۲.۲) داریم:

$$\left(\frac{\partial(uV)}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial \frac{u}{3}}{\partial T}\right)_V - \frac{u}{3} \quad (19.2)$$

که به این صورت ساده می‌شود:

$$u = T \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right) - \frac{u}{3} \quad (20.2)$$

که پس از یک انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید:

$$u = \sigma T^4 \quad (21.2)$$

که در آن  $\sigma$  ثابت استفان بولتزمن است. ترمودینامیک به‌تنهایی قادر به دادن مقدار عددی ثابت معادله (۲۱.۲) که ابتدا به‌صورت تجربی تعیین شد، نیست. ثابت استفان بولتزمن دارای مقدار عددی  $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$  است و بعداً خواهیم دید که می‌توان آن را بر حسب واحدهای بنیادی دیگر بیان کرد. توجه کنید که معادله (۲۱.۲) نشان می‌دهد که انتگرال‌گیری تابش طیفی عبارت است از:

$$\int_0^\infty B(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad (22.2)$$

## ۴.۲ قانون جابجایی وین

می‌توانیم ترمودینامیک (و الکترومغناطیس) را کمی جلوتر ببریم و مانند وین نشان دهیم که می‌توانیم برای شکل عملکرد تابش جسم سیاه محدودیت‌هایی قائل شویم. قبلاً از “ترفند” در نظر گرفتن تابش جسم سیاه در داخل یک حفره به‌عنوان یک سیستم ترمودینامیکی متشکل از “گاز” تشعشع استفاده کرده‌ایم. اما بیشتر بررسی نکردیم که واقعاً منظورمان از “گاز” تشعشع است. آیا تشعشع از ذرات غیر متقابل تشکیل شده است؟ در واقع بله و بعداً خواهیم دید که فوتون در کوانتوم تشعشع الکترومغناطیسی است. در حال حاضر، بیاید یک گاز کلاسیک از تشعشع را در نظر بگیریم بدون اینکه چیز زیادی در مورد ذرات جداگانه مشخص کنیم. بیاید دوباره یک گاز از تشعشع را در داخل یک جعبه ایزوله با دیوارهای بازتابی در نظر بگیریم و اجازه دهیم یک انبساط آدیاباتیک را اجرا کنیم. بیاید قانون اول را به‌شکل استاندارد بازنویسی کنیم:

$$dQ = dU + pdV \quad (23.2)$$

با پیروی از لانگاری<sup>۱۲</sup> [۲۵]، می‌دانیم که یک انبساط آدیاباتیک با  $dQ = 0$  تعریف می‌شود، یعنی عدم تبادل گرما بین سیستم و محیط در طول انبساط. همچنین نشان دادیم که

<sup>۱۲</sup>Longair

$U = uV$  و  $p = u/3$  بنابراین:

$$\begin{aligned} d(uV) + \frac{1}{3}u dV &= 0 \\ V du + u dV + \frac{1}{3}u dV &= 0 \\ \frac{du}{u} &= -\frac{4}{3} \frac{dV}{V} \end{aligned} \quad (24.2)$$

این معادله آخر، انتگرال گیری میدهد

$$u = \text{const} \times V^{-4/3} \quad (25.2)$$

با استفاده از معادله (۲۲.۲)، داریم

$$\begin{aligned} \sigma T^4 &= \text{const} \times V^{-4/3} \\ TV^{1/3} &= \text{const} \end{aligned} \quad (26.2)$$

اگر اکنون حجم کروی  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  را در نظر بگیریم، معادله (۲۶.۲) نشان می‌دهد که:

$$T \propto \frac{1}{R} \quad (27.2)$$

این نتیجه آخر بسیار قدرتمند و جالب است. معادله (۲۷.۲) به ما می‌گوید که اگر جعبه در حال انبساط حاوی تابش جسم سیاه در دمای  $T$  داشته باشیم، اگر جعبه را فشرده یا منبسط کنیم، دما افزایش یا کاهش می‌یابد.<sup>۱۳</sup>

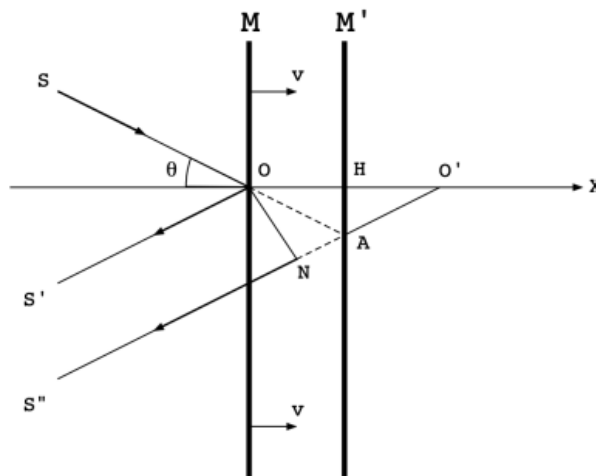
اکنون می‌خواهیم پیدا کنیم که با انبساط جعبه چه اتفاقی برای طول موج  $\lambda$  تابش جسم سیاه می‌افتد. با فرض اینکه سطح داخلی جعبه در حال انبساط کاملاً منعکس می‌شود، باید بررسی کنیم که چه اتفاقی برای طول موج تابش می‌افتد که از یک آینه به آرامی عقب‌نشینی می‌کند.

در شکل (۶.۲) یک منبع تابش تک رنگ  $S$  در حال روشن کردن یک آینه  $M$  است که با سرعت  $v$  (در امتداد محور  $x$ ) از منبع دور می‌شود. آینه با سرعت  $v$  حرکت می‌کند به طوری که پس از یک دوره  $T$  از موج به موقعیت  $M$  می‌رسد. فرض می‌کنیم که  $v \ll c$ ، که در آن  $c$  سرعت نور است تا از اثرات نسبیتی چشم‌پوشی شود. تابش یک زاویه  $\theta$  را نسبت به جهت  $x$  سرعت  $v$  ایجاد می‌کند. در قاب مرجع منبع  $S$  یا ناظران  $S'$  و  $S''$ ، طول موج تابش داپلر است که توسط آینه عقب‌نشینی جابجا می‌شود. ابتدا، بیایید هندسه‌ای را که در آن منبع روی محور  $x$  قرار دارد، یعنی زاویه  $\theta$  برابر با صفر بحث کنیم. به خوبی شناخته شده است که یک منبع عقب‌نشینی یک تغییر داپلر برابر با  $\Delta\lambda = \lambda v/c$  ایجاد می‌کند که مقدار جابجایی قرمز است که توسط ناظری که روی آینه عقب‌نشسته می‌بیند. آینه در حال عقب‌نشینی اکنون منبع تابش منعکس شده است و با مشاهده ناظر در  $S$  یک تغییر داپلر اضافی ایجاد می‌کند. تغییر داپلر کل خواهد بود:

$$\Delta\lambda = 2\lambda \frac{v}{c} \quad (28.2)$$

کشش طول موج  $\Delta\lambda$  برابر با دو برابر بخش  $\overline{OH} = \overline{HO'}$  است. همانطور که در شکل (۶.۲) نشان داده شده است، زمانی که تابش با زاویه  $\theta$  کج می‌شود، استدلال مشابهی

<sup>۱۳</sup> یک دست‌آورد مهم نتیجه می‌دهد که تابش پس زمینه کیهانی، یعنی تابش ساطع شده از کیهان اولیه در زمان آخرین پراکندگی، امروزه دمایی بسیار کمتر ( $\sim 2.73K$ ) از دمای انتشار ( $\sim 3000K$ )، یعنی ۱۳.۷ میلیارد سال پیش، چند صد هزار سال پس از انفجار بزرگ، دارد. این سرد شدن اثر مستقیم انبساط همسانگرد کیهان است.



شکل ۶.۲: شکل هندسی که تغییر تابش داپلر را از انعکاس آینه در حال عقب نشینی نشان می‌دهد.

اعمال می‌شود. اکنون کشش طول موج برابر است با مجموع دو بخش  $\overline{OA}$  و  $\overline{AN}$  که در آن قطعه  $\overline{ON}$  عمود بر خط  $\overline{O'S''}$  است. با استفاده از هندسه ساده روی مثلث‌های  $\triangle OO'A$  و  $\triangle OO'N$  داریم:

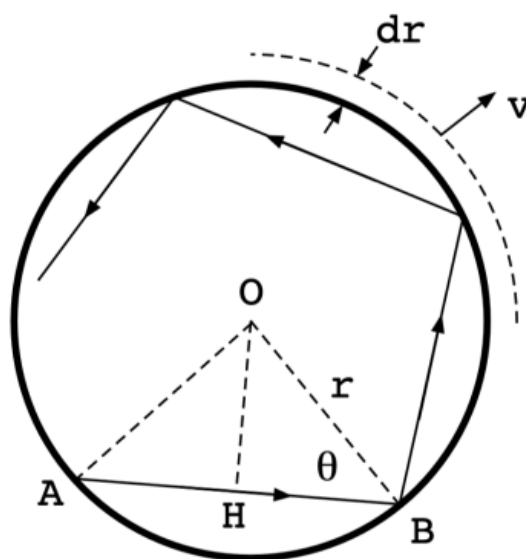
$$\Delta\lambda = \overline{OA} + \overline{AN} = \overline{O'A} + \overline{AN} = \overline{OO'} \cos \theta \quad (۲۹.۲)$$

اما می‌دانیم که  $\overline{OO'} = 2OH = 2vT$  که در آن  $T$  زمان تناوب موج است. بنابراین، تعمیم فرمول (۲۸.۲) برای زوایای دلخواه  $\theta$  به این صورت است:

$$\Delta\lambda = 2\lambda \frac{v}{c} \cos \theta \quad (۳۰.۲)$$

پس از مطالعه یک انعکاس منفرد از یک آینه در حال عقب نشینی، به دنبال لانگار [۲۵] مجدداً اجازه دهید اکنون مورد بازتاب‌های متعدد در یک حفره کروی را مطالعه کنیم (شکل ۷.۲). در طول یک انبساط (آهسته) حفره از شعاع  $r$  به شعاع  $r + dr$  تابش در معرض بازتاب‌های متعدد قرار می‌گیرد که زاویه  $\theta$  را ثابت نگه می‌دارد. زمان بین دو بازتاب متوالی  $AB/c = 2r \cos \theta / c$  خواهد بود. در زمان  $dt = dr/v$  کره شعاع خود را به اندازه  $dr$  افزایش خواهد داد. در همان بازه زمانی  $dt$  تعداد بازتاب‌ها نسبت بین  $dt$  (زمان انبساط) و زمان بین بازتاب  $\overline{AB}/c = 2r \cos \theta / c$  خواهد بود. این نسبت  $c dt / (2r \cos \theta)$  است. بلافاصله نتیجه می‌شود که تغییر در طول موج حاصل ضرب تعداد بازتاب‌ها در زمان  $dt$  ضربدر جابجایی داپلر ناشی از بازتاب در معادله (۳۰.۲) است:

$$\begin{aligned} d\lambda &= \left( 2\lambda \frac{v}{c} \cos \theta \right) \left( \frac{c dt}{2r \cos \theta} \right) \\ \frac{d\lambda}{\lambda} &= \frac{v dt}{r} = \frac{dr}{r} \end{aligned} \quad (۳۱.۲)$$



شکل ۷.۲: شکل هندسی نشان دهنده جابجایی تابش دایر از حفره کروی در حال گسترش است.

که انتگرال گیری میدهد

$$\lambda \propto r \quad (32.2)$$

در نهایت می توانیم معادله (۲۷.۲) را کنار هم قرار دهیم و معادله (۳۲.۲) برای دادن:

$$\begin{aligned} T &\propto \lambda^{-1} \\ \lambda T &= \text{const} \end{aligned} \quad (33.2)$$

این آخرین معادله اغلب به عنوان قانون جابجایی وین شناخته می شود. مقدار ثابت در معادله (۳۳.۲) که معمولاً با  $b$  نشان داده می شود، باید به صورت تجربی تعیین شود. اگر از حداکثر طول موج  $\lambda_{max}$  استفاده کنیم، معادله (۳۳.۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda_{max} T = 2.898 \cdot 10^{-3} m \cdot K \quad (34.2)$$

معادله (۳۴.۲) به طور تجربی با دقت خوبی تأیید شده است و در فصل بعدی خواهیم دید که می توان آن را به راحتی از تابع طیفی جسم سیاه پلانک استخراج کرد. جالب است که به طور خلاصه بحث کنیم که آیا قانونی مشابه معادله (۳۴.۲) را می توان برای فرکانس به جای طول موج نوشت. جایگزینی مستقیم  $c/\lambda = \nu$  فرمولی را ایجاد می کند که با آزمایش ها مطابقت ندارد. این به ما می گوید که تابعی که دنبال آن هستیم، یک تابع ساده از یک متغیر مستقل نیست. اگر فرض کنیم که تابعی که تشعشع طیفی یک جسم سیاه را توصیف می کند، تابع توزیع است، فرمول صحیح قانون جابجایی وین را به جای طول موج در فرکانس ها بیان می کنیم [۹]:

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 5.898 \cdot 10^{10} K^{-1} s^{-1} \quad (35.2)$$

معادله (۳۵.۲) را پس از به دست آوردن فرمول پلانک برای تابش طیفی توجیه خواهیم کرد.

بیایید خلاصه‌ای کوتاه از سفر خود به سمت تعیین شکل تابش طیفی  $B(\lambda, T)$  جسم سیاه در دمای  $T$  را با استفاده از فیزیک کلاسیک، قانون استفان بولتزمن و قانون جابجایی وین، بیان کنیم. ممکن است، همانطور که وین انجام داد، کمی جلوتر رفت و محدودیت‌هایی برای شکل تابش طیفی یک جسم سیاه قائل شد. به پیروی از لانگارد [۲۵]، بیایید جعبه‌ای حاوی تشعشعات جسم سیاه در حالت تعادل با محفظه کاملاً جذب کننده (و ساطع کننده) در دمای  $T_1$  در نظر بگیریم. اجازه دهید جعبه بطور آدیاباتیک به گونه‌ای منبسط شود که تابش در دمای نهایی  $T_2$  با محفظه زمان گرمایی داشته باشد. از آنجایی که می‌دانیم  $T \propto 1/\lambda$  طیف تابش در طول انبساط زمانی که  $\lambda$  کشیده می‌شود شکل جسم سیاه خود را حفظ می‌کند.

اجازه دهید اکنون فاصله طول موج بین  $\lambda_1$  و  $\lambda_1 + d\lambda_1$  را با چگالی انرژی متناظر  $u = B(\lambda_1)d\lambda_1$  در نظر بگیریم. با استفاده از معادله (۲۲.۲)، داریم:

$$\frac{B(\lambda_1)d\lambda_1}{B(\lambda_2)d\lambda_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} \quad (۳۶.۲)$$

با استفاده از قانون جابجایی وین و  $d\lambda_1 = T_2/T_1 d\lambda_2$ :

$$\frac{B(\lambda_1)}{T_1^5} = \frac{B(\lambda_2)}{T_2^5} = \text{const} \quad (۳۷.۲)$$

معادله (۳۳.۲) به ما می‌گوید که ترکیب  $\lambda T$  ثابت است و بنابراین معادله (۳۷.۲) می‌شود:

$$\begin{aligned} B(\lambda)\lambda^5 &= \text{const} = f(\lambda T) \\ B(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T)d\lambda \end{aligned} \quad (۳۸.۲)$$

که قانون جابجایی وین است که شکل طیف تابش جسم سیاه را تعیین می‌کند. اگر بخواهیم معادله (۳۸.۲) را بر حسب فرکانس بیان کنیم، ابتدا متوجه می‌شویم که باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} B(\lambda)d\lambda &= B(\nu)d\nu \\ \lambda &= \frac{c}{\nu} \\ d\lambda &= -\frac{c}{\nu^2}d\nu \end{aligned} \quad (۳۹.۲)$$

اتفاقاً متوجه می‌شویم که معادله (۳۹.۲) به ما می‌گوید که تابع  $B$  یک تابع توزیع است. اکنون استخراج قانون جابجایی وین از نظر فرکانس آسان است:

$$B(\nu)d\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu \quad (۴۰.۲)$$

معادله (۳۸.۲) و (۴۰.۲) قدرت ترمودینامیک و معادلات ماکسول را برای استخراج قیود در شکل عملکردی تابش جسم سیاه نشان می‌دهد. وین کمی جلوتر رفت [۴۵] و به‌طور

تجربی تابع خاصی را برای  $f(\lambda T)$  پیشنهاد کرد:

$$f(\lambda T) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \quad (41.2)$$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  دو مقدار ثابت هستند که باید توسط آزمایشات<sup>۱۴</sup> تعیین شوند. آزمایش‌ها نشان داد که تقریب وین (۴۱.۲) طول موج‌های کوتاه را به خوبی نشان می‌دهد، اما رژیم طول موج بلند را محاسبه نمی‌کند. این فرمول کاملاً قابل توجه است زیرا پیش‌بینی می‌کند که شکل طیف جسم سیاه با دمای  $T$  تغییر نمی‌کند، همانطور که به طور مؤثر توسط داده‌های تجربی تأیید می‌شود.

## ۵.۲ قضیه تساوی و قانون جین ریلی

می‌توانیم با وارد کردن مقداری فیزیک بیشتر، به مشکل یافتن شکل طیف تابش جسم سیاه حمله کنیم. بیا فرض کنیم که می‌خواهیم تابش الکترومغناطیسی را در تعادل حرارتی با جعبه‌ای با دیواره‌های کاملاً بازتابنده، همانطور که در ابتدا توسط دو فیزیکی‌دان ریلی و جین انجام شد، مطالعه کنیم. در داخل جعبه، مجموعه‌ای از امواج ایستاده وجود خواهد داشت و وظیفه ما این است که سعی کنیم تعداد حالت‌ها را محاسبه کنیم. زمانی که بدانیم در هر فرکانس چند حالت داریم، می‌توانیم محاسبه کنیم که چه انرژی با هر حالت مرتبط است و طیف تابش جسم سیاه هنگامی که در نهایت چگالی انرژی در واحد فرکانس (یا طول موج) را محاسبه کنیم، بدست می‌آید. بنابراین محاسبه در دو مرحله انجام می‌شود: شمارش حالت‌ها در هر بازه فرکانس و تخصیص انرژی مناسب به هر حالت.

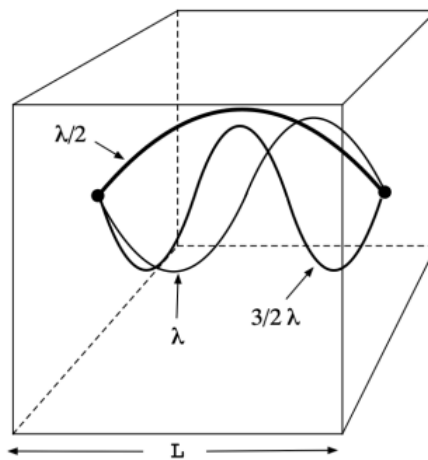
اگر فرض کنیم که حفره مکعبی از ضلع  $L$  باشد، محاسبه تعداد حالت‌های داخل یک حفره ساده می‌شود. می‌دانیم که امواج ایستاده زمانی رخ می‌دهند که برای هر طول موج  $\lambda$ ، یک عدد صحیح از تناوب‌های نیم‌موج بین دو بازتاب وجود داشته باشد. در ساده‌ترین حالت یک موج ایستاده در امتداد یکی از اضلاع مکعب، شرط موج ایستاده به صورت زیر است:

$$n = \frac{L}{\lambda/2} = \frac{2L}{\lambda} \quad (42.2)$$

که در آن  $n = 1, 2, \dots$  اعداد صحیح هستند. در شکل (۸.۲) سه مود اول موج ایستاده (موج ساکن) مربوط به  $n = 1, 2$  و ۳ نشان داده شده است.

باید در نظر بگیریم که دو قطبش مستقل موج با اندیس (شاخص)  $n$  یکسان وجود دارد: این فاکتور ۲ در محاسبه تعداد کل مودها در پایان محاسبه درج می‌شود.

<sup>۱۴</sup>خواهیم دید که پلانک مقادیر دو ثابت را برحسب ثابت بولتزمن  $k$ ، سرعت نور  $c$  و ثابت جدید خود  $h$   $C_2 = -hc/k$  و  $C_1 = 2\pi hc^2$  داده است.



شکل ۸.۲: سه مود اول موج ایستاده در داخل یک حفره مکعبی با بازتاب از دیوارهای به فاصله  $L$ .

به روشی راحت تر است با استفاده از عدد موج  $k = 2\pi/\lambda$  و رابطه بین فرکانس و طول موج  $c/\lambda =$  می توانیم معادله (۴۲.۲) بازنویسی کنیم:

$$k = \frac{\pi n}{L} \quad (۴۳.۲)$$

با بتوان رسانیدن معادله (۴۳.۲) خواهیم داشت:

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{n}{L}\right)^2 \quad (۴۴.۲)$$

اگر سه جهت مستقل در امتداد اضلاع جعبه مکعب را در نظر بگیریم، معادله (۴۴.۲) را می توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$k^2 = \pi^2 \left[ \left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L}\right)^2 \right] \quad (۴۵.۲)$$

میتوانیم معادله (۴۵.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{L^2 k^2}{\pi^2} \quad (۴۶.۲)$$

که در آن بردار  $n$  با مولفه های  $(n_x, n_y, n_z)$  است. برای این که معادله (۴۶.۲) نمایش صحیح امواج ایستاده باشد، شاخص ها  $(n_x, n_y, n_z)$  باید اعداد صحیح مثبت باشند. توجه کنید که معادله (۴۶.۲) معادله یک کره را در فضای شاخص ها نشان می دهد. برای یافتن تعداد کل امواج ایستاده، فقط باید حجم چنین کره ای را محاسبه کنیم، مشروط بر اینکه خود را به کسری از کره محدود کنیم که در آن شاخص ها  $(n_x, n_y, n_z)$  مثبت هستند. چنین کسری دقیقاً  $1/8$  است و بنابراین داریم که تعداد کل امواج ایستاده  $N$  برابر است با:

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n^3 = \frac{\pi}{3} n^3 \quad (۴۷.۲)$$

که در آن ضریب 2 در جلو دو قطبی شدن در هر موج ایستاده را همانطور که در بالا توضیح داده شد در نظر می‌گیرد. با استفاده از معادله (۴۶.۲) و تعریف عدد موج را داریم:

$$N = \frac{\pi}{3} \left( \frac{L^2 k^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{3} \left( \frac{Lk}{\pi} \right)^3 = \frac{8\pi L^3}{\lambda^3} \quad (۴۸.۲)$$

این آخرین معادله تعداد کل مودها را که در تمام طول موج‌های ممکن جمع شده‌اند، نشان می‌دهد. اگر بخواهیم تعداد مودها را در واحد طول موج پیدا کنیم، باید مشتق‌گیری کنیم:

$$\frac{dN}{d\lambda} = -\frac{8\pi L^3}{\lambda^4} \quad (۴۹.۲)$$

ما نباید از علامت منهای در معادله (۴۹.۲) تعجب کنیم زیرا تعداد مودها با افزایش طول موج کاهش می‌یابد. اگر تعداد مودها در واحد طول موج در واحد حجم را بخواهیم، فقط معادله (۴۹.۲) را بر حجم حفره  $V = L^3$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{V} \frac{dN}{d\lambda} = -\frac{8\pi}{\lambda^4} \quad (۵۰.۲)$$

برای یافتن چگالی انرژی  $u(\lambda, T)$  در داخل حفره باید انرژی مربوطه را به هر مود اختصاص دهیم. قبل از پیشرفت برای یافتن چگالی انرژی، باید دو موضوع را مورد بحث قرار دهیم: (1) یک مود موج الکترومغناطیسی در داخل یک حفره چند درجه آزادی دارد؟ (2) چه مقدار انرژی به هر مود اختصاص داده شده است؟

در فصل اول به‌طور خلاصه نوسانگر هارمونیکی را مطالعه کردیم و دیدیم که دارای دو درجه آزادی است: یکی برای انرژی جنبشی و دیگری برای انرژی پتانسیل. می‌توانیم به‌سادگی بگوییم که در دمای  $T$  بین تابش داخل حفره و دیواره‌ها تعادل گرمایی داریم. می‌توانیم فرض کنیم که هر مود تابشی در حفره با یک ذره باردار نوسانی خاص در دیواره گویل شده است. نیاز به تعادل حرارتی معادل این است که انرژی هر ذره باردار نوسانی با مود مربوطه در حفره در تعادل باشد و بنابراین هر مود الکترومغناطیسی دقیقاً دو درجه آزادی دارد. اگرچه درست است، اما این استدلال فقط کیفی است و اجرا کمی دقیق‌تر مطلوب است.

بیایید با معادلات ماکسول در خلاء شروع کنیم، یعنی  $\rho = J = 0$ . اگر به‌یاد داشته باشیم که  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$  می‌توانیم معادلات سوم و چهارم را متقارن کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (۵۱.۲)$$

می‌توان نشان<sup>۱۵</sup> داد که می‌توانیم معادله‌ها (۵۱.۲) را به‌صورت زیر ترکیب کنیم:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (۵۲.۲)$$

<sup>۱۵</sup> با استفاده از اتحاد  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$



این معادله یک جواب کلی به شکل موج رونده  $E = E(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  با آرگومان دلخواه  $\omega = 2\pi\nu$  که در آن  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  بردار عدد موج و  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  بردار مختصات است، دارد.

با تثبیت شرایط مرزی در دیواره‌های حفره، یعنی  $E(0) = E(L) = 0$ ، میدان  $E(\mathbf{x}, t)$  را می‌توان به عنوان جمع حاصل ضرب دو تابع،  $f_m(t)$ ، فقط به زمان  $t$  و دیگری  $g_m(\mathbf{x})$  که فقط به بردار مختصات  $\mathbf{x}$  بستگی دارد، نوشت:

$$E(x, t) = \sum_m f_m(t) \cdot g_m(\mathbf{x}) \quad (53.2)$$

که در آن توابع  $g_m(\mathbf{x})$  بنام **مودهای عادی**<sup>۱۶</sup> معروف و شاخص  $m$  عدد مود پیشرونده را به حساب می‌آورد. توجه داشته باشید که تعداد نامتناهی عبارت در (۵۳.۲) وجود دارد. شرایط مرزی داخل حفره مستلزم این است که:

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_m(\mathbf{x}) + k^2 g_m(\mathbf{x}) &= 0 \\ \nabla \cdot g_m(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{n} \times g_m(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (54.2)$$

مودهای عادی شرط **تعامل**<sup>۱۷</sup> را برآورده می‌کنند:

$$\int g_m(\mathbf{x}) \cdot g_n(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{mn} \quad (55.2)$$

بنابراین نام "مودهای عادی" را توجیه می‌کند. اگر اکنون عبارت (۵۳.۲) را با معادله موج (۵۲.۲) جایگزین کنیم، معادله‌ای برای توابع وابسته به زمان  $f_m(t)$  پیدا می‌کنیم:

$$\sum_m \frac{d^2 f_m}{dt^2} + c^2 k_m^2 f_m(t) = 0 \quad (56.2)$$

توابع  $f_m(t)$  به صورت خطی مستقل و بنابراین معادله (۵۶.۲) باید برای هر عنصر از جمع معتبر و صادق باشد:

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + c^2 k_m^2 f_m(t) = 0 \quad (57.2)$$

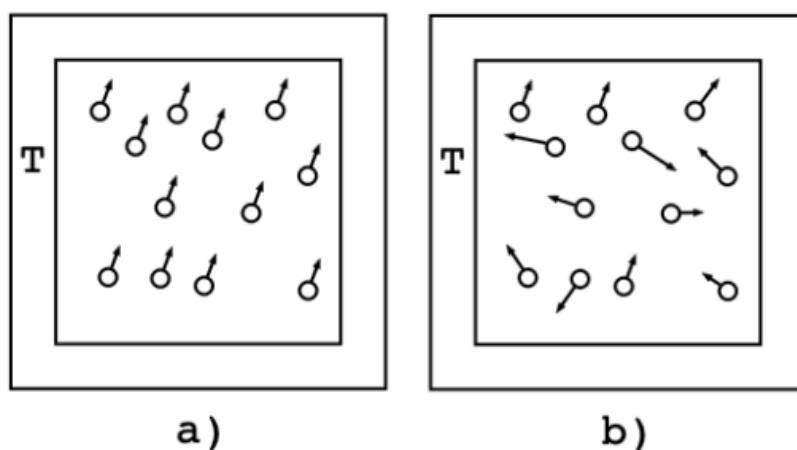
اگر معادله (۵۶.۲) را با نماد نیوتن  $\ddot{f}_m + c^2 k_m^2 f_m$  بازنویسی کنیم، شباهت قابل توجهی را با معادله (۲۹.۲)،  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ ، که نوسانگر هارمونیک ساده را توصیف می‌کند مشاهده می‌کنیم. این بدان معنی است که **مودهای میدانی الکتریکی داخل یک حفره از نظر ریاضی و فیزیکی معادل مجموعه‌ای از نوسانگرهای هارمونیک ساده مستقل با فرکانس  $\omega_m = ck_m$  است.** به طور خاص، ما دریافتیم که هر مود موج ایستاده مانند یک نوسان ساز هارمونیک ساده یک بعدی، دو درجه آزادی را به همراه دارد. مهم است که

<sup>۱۶</sup>Normal modes

<sup>۱۷</sup>Orthonormality Condition

این دو درجه آزادی را با دو قطبش مستقل هر مود شناسایی نکنید: در هر مود دو درجه آزادی در هر پلاریزاسیون وجود دارد<sup>۱۸</sup>.

قبل از تعیین نهایی فرمول ریلی جین، باید انرژی را به هر یک از درجه آزادی‌های مودها اختصاص دهیم. **قضیه تقسیم برابر**<sup>۱۹</sup> دقیقاً این کار را انجام می‌دهد: در سیستمی که در تعادل حرارتی در دمای  $T$  قرار دارد، انرژی به‌طور مساوی بین تمام درجه آزادی‌های قابل دسترسی انرژی سیستم تقسیم می‌شود. این به‌ویژه تعجب‌آور نیست زیرا این قضیه ارزیابی می‌کند که سیستم با توزیع انرژی در تمام حالت‌های ممکن در دسترس، آنتروپی خود را به حداکثر می‌رساند. قضیه تقسیم برابر بیشتر به‌ما می‌گوید: هر درجه آزادی درجه دومی، یعنی هر درجه آزادی که به‌صورت درجه دوم در بیان انرژی ظاهر می‌شود، دارای انرژی  $\frac{1}{2}k_B T$  خواهد بود که در آن  $k_B$  ثابت بولتزمن است. اثبات قضیه تقسیم برابر



شکل ۹.۲: گرمایش گاز کامل از (الف) تا (ب).

مستلزم مکانیک آماری است و خواننده را به کتاب‌های تخصصی ارجاع می‌دهیم (مثلاً ماندل [۲۶]). در اینجا یک مثال ساده از محاسبه معادله را در مورد جعبه‌ای حاوی  $N$  ذره آزاد نشان می‌دهیم، همانطور که در شکل (۹.۲) بخش (الف) مجموعه‌ای از ذرات کلاسیک را نشان می‌دهد که در موقعیت‌های مختلف درون جعبه‌ای قرار گرفته‌اند و دیواره‌های آن در دمای  $T$  هستند. همه ذرات دقیقاً بردارهای سرعت یکسانی دارند. در نتیجه برخوردهای مکرر با دیواره‌ها، ذرات پخش می‌شوند و بردارهای سرعت مختلفی با مقدار و جهت متفاوت به‌خود می‌گیرند و پس از مدتی، ذرات چیزی شبیه به شکل (۹.۲) بخش (ب) می‌شوند که در آن گسترش در موقعیت و سرعت در حال حاضر مشهود است.

<sup>۱۸</sup> تعداد درجه آزادی‌ها را با مطالعه میدان الکتریکی امواج الکترومغناطیسی تعیین کرده‌ایم. داخل حفره خواننده ممکن است تعجب کند که آیا دو درجه اضافی مرتبط با میدان مغناطیسی وجود دارد یا خیر. اینطور نیست زیرا قانون القایی ماکسول-فارادی  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  بیان می‌کند که یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان، یک میدان الکتریکی غیرمحافظه‌کار (ناپایستار) متغیر مکانی را القا می‌کند و برعکس، بنابراین به نحوی درجه آزادی‌ها را به‌اشتراک می‌گذارد.

<sup>۱۹</sup> Equipartition Theorem

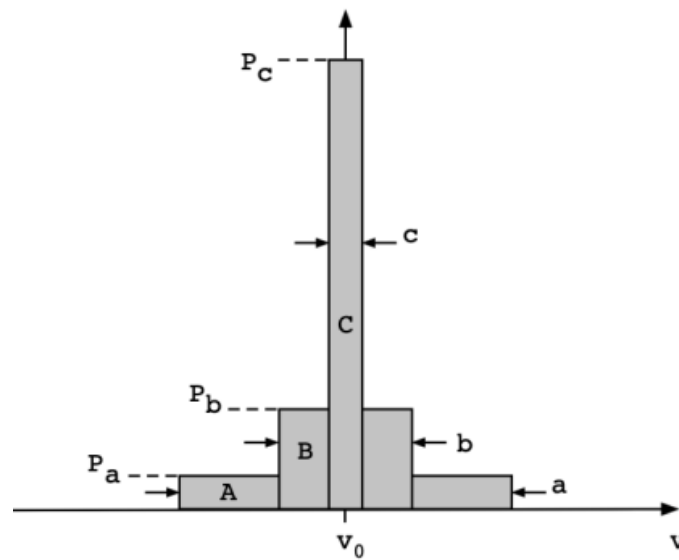
مکانیک آماری به ما می‌گوید که سرعت ذرات با جرم  $m$  که با یکدیگر برهمکنش ندارند اما در تماس حرارتی با دیواره‌های اطراف در دمای  $T$  هستند، از توزیع ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کنند:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{\left( \frac{-mv^2}{2kT} \right)} \quad (۵۸.۲)$$

این تابع به احتمال یافتن ذرات با سرعت معین مربوط می‌شود. مسئله این است که از نظر ریاضی، احتمال یافتن ذره‌ای با سرعتی دقیق صفر است. از این نظر  $f(v)$  یک تابع تعمیم یافته است و باید به روش زیر تفسیر شود:  $f(v)dv$  احتمال یافتن ذره در فاصله سرعت بین  $v$  و  $v+dv$  است. برای اطمینان از اینکه تابع  $f(v)$  یک احتمال را نشان می‌دهد، باید به گونه‌ای نرمال سازی شود که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv = 1 \quad (۵۹.۲)$$

با توجه به تابع توزیع  $f(v)$ ، می‌توانیم میانگین کمیت‌ها را محاسبه کنیم. اگر بخواهیم مثلاً میانگین انرژی جنبشی ذرات گاز را در شرایط (الف) از شکل (۹.۲) محاسبه کنیم، به سادگی می‌توانیم بگوییم که  $\frac{1}{2}mv_0^2$  است، که همه ذرات دارای جرم یکسان  $m$  و سرعت یکسان  $v_0$  هستند. در این مورد بی‌اهمیت، تابع توزیع سرعت‌ها تابع خاصی است که در همه جا ۰ است به جز زمانی که سرعت دقیقاً  $v_0$  باشد. مقدار  $f(v)$  وقتی  $v = v_0$  است؟



شکل ۱۰.۲: ساخت تابع دلتا دیراک. مساحت همه جعبه‌ها برابر با یک است.

سعی بر این است که  $f(v_0)$  را با این فرض که سرعت همه ذرات تقریباً یکسان است، حدس و برآورد کرده بطوری که در شکل (۱۰.۲) نشان داده شده است. جعبه  $A$  با عرض  $a$  با احتمال یکسان  $P_a$  را به همه ذرات دارای سرعت‌های بین  $v_0 - a/2$  و  $v_0 + a/2$  اختصاص

می‌دهد. اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم، می‌توانیم یک جعبه باریک‌تر  $B$  با عرض  $b$  بسازیم که احتمال  $P_b$  را به همه ذرات با سرعت‌های بین  $v_0 - b/2$  و  $v_0 + b/2$  اختصاص می‌دهد. به روشی مشابه، می‌توانیم یک جعبه حتی باریک‌تر  $C$  با عرض  $c$  بسازیم که با احتمال  $P_c$  را به همه ذرات با سرعت‌های بین  $v_0 - c/2$  و  $v_0 + c/2$  اختصاص می‌دهد. همه این جعبه‌ها از شرایط عادی سازی (نرمالیزه) (۵۹.۲) از احتمال یکسانی پیروی می‌کنند که در این موارد، معادل این است که همه جعبه‌ها مساحتی برابر با ۱ داشته باشند. بدیهی است که وقتی بخواهیم دقیقاً مقدار  $v_0$  را با فاصله اطراف آن به صفر اختصاص دهیم، احتمال به بی‌نهایت می‌رود، اما این کار را با حفظ مساحت برابر با ۱ انجام می‌شود، یعنی شرایط عادی سازی (نرمالیزاسیون) احتمال را برآورده می‌کند. این تابع عجیب که اکنون می‌دانیم یک تابع مناسب نیست، بلکه یک تابع تعمیم یافته است، به عنوان تابع دلتا (تابع  $\delta$ ) نشان داده شده است و اولین بار توسط فیزیکدان بریتانیایی دیراک<sup>۲۰</sup> معرفی شد. بنابراین شرایط عادی سازی برای تابع دلتا به صورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) dv = 1 \quad (۶۰.۲)$$

در یک اصطلاح ریاضی کمی تر، می‌توانیم یک گزاره کلی تر داشته باشیم و بگوییم که تابع دلتا حد یک دنباله همگرا دلتا است. این بدان معنی است که سایر توابع ریاضی، مانند مستطیل‌های ساده در نظر گرفته شده در بالا، می‌توانند برای تعریف تابع دلتا به عنوان حدی برای  $v \rightarrow 0$  یک دنباله استفاده شوند. برای مثال، می‌توانیم از تابع گاوس با سطحی برابر ۱ استفاده کنیم:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{v^2}{4\alpha}} \rightarrow \delta(v) \quad (۶۱.۲)$$

یک تعریف معادل تابع دلتا به صورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \delta(v) dv = f(0) \quad (۶۲.۲)$$

و خیلی کلی‌تر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \delta(v - v_0) dv = f(v_0) \quad (۶۳.۲)$$

توجه داشته باشید که تابع دلتا بر حسب انتگرال گیری تعریف می‌شود و وقتی روی یک تابع عمل می‌کند یک عدد اسکالر را برمی‌گرداند.

اکنون برمی‌گردیم تا میانگین انرژی جنبشی گاز را در شرایط (الف) شکل (۹.۲) با معرفی تابع توزیع ویژه  $\delta(v)$  که سرعت‌ها را توصیف می‌کند، میانگین انرژی جنبشی هر ذره برابر است با:

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m v^2 \delta(v - v_0) dv = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (۶۴.۲)$$

<sup>۲۰</sup>تابع  $\delta$  بنام تابع دلتای دیراک نیز معروف است.

جالب‌تر، مورد شرط (ب) شکل (۹.۲) است. می‌خواهیم نشان دهیم که محاسبه میانگین انرژی جنبشی با قضیه برابری همخوانی دارد. با استفاده از توزیع سرعت‌های ماکسول-بولتزمن (۵۸.۲) و تنها با در نظر گرفتن بزرگی سرعت‌ها، داریم:

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2 f(v)dv = \frac{4\pi m}{2} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (۶۵.۲)$$

انتگرال در معادله (۶۵.۲) را می‌توان با جایگزین کردن  $x = v$ ،  $a = \frac{m}{2kT}$  و با استفاده از یک نتیجه شناخته شده ارزیابی کرد:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۶۶.۲)$$

که در آن  $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$  و بهمین منوال. نتیجه میدهد:

$$\langle T \rangle = 3\pi m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2} = \frac{3}{2}kT \quad (۶۷.۲)$$

به‌تازگی ثابت کرده‌ایم که میانگین انرژی جنبشی یک ذره از گاز غیر متقابل، که فقط 3 درجه آزادی انتقالی دارد، که  $\frac{3}{2}kT$  سازگار با قضیه<sup>۲۱</sup> برابری است.

در نهایت آماده هستیم تا تقریب ریلی-جین را برای تشعشعات جسم سیاه داخل یک حفره بیان کنیم. در معادله (۶۷.۲) تعداد مودها در واحد طول موج را محاسبه کرده و دیدیم که هر مود دو درجه آزادی دارد. در نهایت می‌توانیم بنویسیم که چگالی انرژی برابر است با:

$$u(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT d\lambda \quad (۶۸.۲)$$

توجه داشته باشید که علامت منفی را رها کردیم که فقط برای نشان دادن رابطه معکوس بین تعداد مودها و طول موج در نظر گرفته شده بود. می‌توانیم چگالی انرژی را بر حسب فرکانس با اعمال  $u(\lambda, T)d\lambda = u(\nu, T)d\nu$  بیان کنیم. با جایگزینی  $\lambda = c/\nu$  و  $d\lambda = -c/\nu^2 d\nu$  در معادله (۶۸.۲)، پیدا می‌کنیم:

$$u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu \quad (۶۹.۲)$$

به‌یاد داشته باشید که معادله (۶۹.۲) چگالی انرژی تابش جسم سیاه داخل حفره را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم تشعشع ساطع شده از جسم سیاه  $B(\lambda, T)$  را بدانیم باید از معادله (۳.۲) استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} B(\lambda, T)d\lambda &= \frac{c}{4} u(\lambda, T)d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT d\lambda \\ B(\nu, T)d\nu &= \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT d\nu \end{aligned} \quad (۷۰.۲)$$

معادله (۷۰.۲) به‌عنوان تقریب ریلی-جین برای تابش ساطع شده از یک جسم سیاه شناخته می‌شود.

<sup>۲۱</sup>استنتاج کلی قضیه برابری فراتر از محدوده این کتاب است و می‌توان آن را در هر کتاب خوبی در زمینه مکانیک آماری کلاسیک یافت.

## ۶.۲ فاجعه فرابنفش

ما به پایان سفر خود رسیدیم که وظیفه آن تعیین شکل عملکردی وابستگی طیفی تابش جسم سیاه بود. در سمت طول موج‌های کوتاه (فرکانس بالا) تقریب وین را داریم که با معادله (۴۱.۲) بیان شده است که به صورت تجربی توسط وین پیشنهاد شد. در سمت طول موج بلند (فرکانس پایین) به جای تقریب ریلی-جین در معادله (۷۰.۲) داریم که با استفاده از یک مدل فیزیکی و با استفاده از تقسیم انرژی به دست آمده است. مسائل اصلی تنها مدل فیزیکی - ریلی-جین - دوگانه بود (به نوعی مرتبط): (۱) اوج را در نظر نمی‌گرفت و (۲) پیش بینی می‌کرد که چگالی انرژی در داخل یک حفره واگرا می‌شود زیرا:

$$\int_0^{\infty} B(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT d\nu \rightarrow \infty \quad (۷۱.۲)$$

که به وضوح پوچ است و آشکارا حقایق تجربی را نقض می‌کند: تابش پرتوهای گاما با انرژی بالاتر و بالاتر را مشاهده نمی‌کنیم که از کوره خارج می‌شود. این مشکل در ادبیات به عنوان فاجعه فرابنفش<sup>۲۲</sup> نامیده می‌شود و در پایان قرن نوزدهم مشکل بزرگی را برای فیزیکدانان ایجاد کرد. فیزیکدانان باید به این فکر می‌کردند که چه فرضیاتی قابل توجیه نیستند و نیاز به تغییر دارند. فیزیک اسیلاتورهای تزویجی به امواج الکترومغناطیسی به وضوح جامد بودند: معادله ماکسول هنوز معتبر است. بنابراین چیز دیگری باید اشتباه باشد: تخصیص برابر انرژی مظنون بعدی بود.

<sup>۲۲</sup> The ultraviolet catastrophe

## بخش دوم

## مکانیک کوانتومی





## فصل ۳

# از فیزیک کلاسیک تا فیزیک کوانتومی

داستانی وجود دارد که تأیید نشده<sup>۱</sup>، که لرد کلونین، کاملاً جسورانه در حدود سال ۱۸۹۰ ادعا کرده است که تمام فیزیک عملاً شناخته شده بود و آنچه باقی مانده بود، اصلاح مقادیر ثابت‌های بنیادی اندازه‌گیری شده بود. این بیانیه برای تجلیل از موفقیت آنچه ما امروز «مکانیک کلاسیک» می‌نامیم بیان شد و در هیچ‌یک از سخنرانی‌ها یا نوشته‌های کلونین<sup>۲</sup> یافت نمی‌شود.

علیرغم صحت یا نقل قول کمتر، تقریباً می‌توانیم مطمئن باشیم که این احساسات «کامل بودن» فیزیک در اواخر دهه نوزدهم در میان تمام فیزیکدانان تأثیرگذار آن زمان وجود داشت. مکانیک نیوتنی و نظریه ماکسول در مورد امواج الکترومغناطیسی پدیده‌ها قادر به توضیح بیشتر حقایق تجربی شناخته شده در آن زمان بودند. با این حال، توسعه فناوری و سیستم‌های اندازه‌گیری دقیق‌تر، داده‌های جدیدی را برای جامعه علمی آن زمان به ارمغان آورد. برخی از این اندازه‌گیری‌های جدید گیج‌کننده بودند. همانطور که قبلاً دیدیم، مسائل تجربی و همچنین نظری مربوط به تشعشعات جسم سیاه وجود داشت که به نظر می‌رسید طیف آن با تمام تلاش‌ها برای استخراج با استفاده از فیزیک کلاسیک مخالفت می‌کرد. تقریب وین در فرکانس بالا (طول موج‌های کوتاه) به خوبی کار می‌کند در حالی که تقریب ریلی-جین در فرکانس‌های پایین (طول موج‌های بلند) به خوبی کار می‌کند. هر دو تقریب نتوانستند ناحیه اوج (قله منحنی) را توصیف کنند.

در سال ۱۹۰۰، کلونین در یک سخنرانی در مؤسسه سلطنتی بریتانیای کبیر [۲۲] اشاره کرد که دو ابر وجود دارد که زیبایی و وضوح نظریه دینامیکی را که گرما و نور را

---

<sup>۱</sup> به خوبی می‌دانیم که کتاب‌های درسی علوم شرح بسیار ضعیفی از تاریخ علم نشان می‌دهند: به طور قابل توجهی کتاب‌های درسی تمایل دارند که مطالب را در یک پیشرفت منطقی سازماندهی کنند تا تاریخی. این کتاب نیز از این قاعده مستثنی نیست، اما نویسنده سعی کرده است تا حد امکان از تصورات غلط رایج اجتناب کند.

<sup>۲</sup> پیشنهاد شده است که این نقل قول را باید به فیزیکدان آمریکایی آلبرت مایکلسون نسبت داد.

**مودهای حرکتی هستند پنهان می‌کنند.**<sup>۳</sup> به قول خود او: (۱) چگونه زمین می‌تواند در یک جامد الاستیک حرکت کند، مانند اتر درخشنده؟ (۲) دکترین ماکسول - بولتزمن در مورد تقسیم انرژی.

پاسخ به این دو سوال انقلاب شگفت‌انگیزی را در درک جهان ما رقم زد: نظریه نسبیت و مکانیک کوانتومی. این دو نظریه تمام آزمون‌های تجربی را پشت سر گذاشته‌اند و تا امروز همچنان بهترین توصیف از طبیعت محسوب می‌شوند. ما فقط با ابر دوم سروکار خواهیم داشت.

### ۱.۳ رابطه پلانک

قبلاً به‌طور خلاصه با گوستاو کیرشهوف<sup>۴</sup>، فیزیکدان آلمانی، زمانی که مفهوم جسم سیاه را در فصل قبل معرفی کردیم، مواجه شدیم. کیرشهوف به‌طور گسترده فیزیک تشعشعات جسم سیاه را مطالعه کرد و **قانون تابش حرارتی کیرشهوف** خود را بیان کرد: "با توجه به جسم دلخواه که تابش گرمایی را در تعادل ترمودینامیکی ساطع و جذب می‌کند، تابش برابر با قابلیت جذب است". گسیل‌پذیری<sup>۵</sup> یک جسم  $\epsilon(\nu)$  به‌عنوان نسبت بین تابش  $I(\nu, T)$  ساطع شده از سطح جسم در دمای  $T$  و تابش  $B(\nu, T)$  ساطع شده توسط یک جسم سیاه ایده‌آل تعریف می‌شود، به‌طوری که ما می‌تواند بنویسد که  $I(\nu, T) = \epsilon(\nu)B(\nu, T)$ . توجه داشته باشید که به‌طور کلی، تابش تابعی از فرکانس  $\nu$  است. قابلیت جذب  $\alpha(\nu)$  کسری از تابش فرودی است که توسط بدن جذب می‌شود. پس قانون کیرشهوف به‌سادگی  $\epsilon(\nu) = \alpha(\nu)$  است. کیرشهوف کمی فراتر رفت و فرض کرد که تابع  $B(\nu, T)$  یک تابع جهانی است و برای تمام اجسام سیاه کامل یکسان است. وین و ریلی - جین تقریبی برای این تابع جهانی هستند که فرمول دقیق ریاضی آن باید کشف می‌شد. هنگامی که اشاره‌ای به یک تابع جهانی در برخی قوانین فیزیکی وجود دارد، فیزیکدانان نظری بلافاصله به دنبال فیزیک جدیدی می‌گردند که چنین عملکرد جهانی را توضیح دهد. به عبارت دیگر، یک تابع جهانی در فیزیک تقریباً همیشه به‌نوعی قانون مرتبط است و فیزیکدانان آن زمان به‌خوبی می‌دانستند که برای توضیح طیف تابش جسم سیاه به‌قانون جدیدی نیاز است. یکی از شاگردان کیرشهوف، ماکس پلانک<sup>۶</sup>، یکی از این فیزیکدانان نظری بود که در جستجوی این قانون جدید بود. او کهن‌الگوی فیزیکدان کلاسیک بود و در برابر ایده‌های جدید بسیار مقاوم بود: به‌عنوان مثال، او در برابر این پیشنهاد که ماده از اتم‌ها تشکیل شده است مقاوم کرد و بنابراین در برابر تمام نتایج مرتبط با مطالعات آماری مجموعه ذرات که توسط بولتزمن و ماکسول پیشگام بود مقاومت کرد. به‌زودی خواهیم دید که، علی‌رغم مقاومتش، پلانک مجبور شد از مفاهیم جدیدی خارج از قلمرو فیزیک کلاسیک استفاده کند تا پایه‌ای محکم برای توضیح خود از طیف تابش جسم سیاه بدهد.

<sup>۳</sup> برای بحث تاریخی در مورد اشاره به تصورات غلط رایج در مورد ابرها، به مرجع [۳۳] مراجعه کنید.

<sup>۴</sup> گوستاو رابرت کیرشهوف (۱۲ مارس ۱۸۲۴ تا ۱۷ اکتبر ۱۸۸۷) بیشتر به‌خاطر قوانینش در مدارهای الکتریکی و طیف‌سنجی شهرت دارد.

<sup>۵</sup> Emissivity

<sup>۶</sup> ماکس کارل ارنست لودویگ پلانک (۲۳ آوریل ۱۸۵۸ تا ۴ اکتبر ۱۹۴۷) بنیانگذار مکانیک کوانتومی و برنده جایزه نوبل در سال ۱۹۱۸ است.

همانطور که قبلاً ذکر کردیم، ما سعی خواهیم کرد تا حد امکان به تاریخچه کشف تابع توزیع برای چگالی انرژی تابش جسم سیاه (یا حفره) نزدیک باشیم. بیاپید ابتدا ببینیم پلانک در محاسباتش چه چیزی را فرض کرده است. پلانک فرض می‌کرد که جسم سیاه حفره‌ای است با دیوارهای بازتابنده امواج الکترومغناطیسی درون حفره و در تعادل حرارتی با دیواره‌ها است. تعادل حرارتی را می‌توان با استفاده از ذرات کوچک درون حجمی که تابش را گرما می‌کنند، به‌دست آورد. با این مفروضات، یک جسم سیاه با دیواره‌های جاذب معادل جسم سیاهی است که دارای دیواره‌های انعکاسی و حاوی ذراتی است که برای گرم کردن تابش استفاده می‌شود. او به یک مدل فیزیکی دقیق‌تر نیاز داشت: دیواره‌ها از نوسانگرهای باردار تشکیل شده‌اند که به امواج الکترومغناطیسی پاسخ می‌دهند. امواج داخل حفره این ساده‌ترین فرضی است که می‌توان انجام داد و با فرض تعادل حرارتی بین تابش و ماده توجیه می‌شود. نیازی به در نظر گرفتن مدل‌های پیچیده‌تر از مواد تشکیل دهنده دیواره‌ها نیست.

گام بعدی شامل مطالعه این است که چگونه یک بار نوسانی، برای مثال بار  $e$  و جرم  $m$ ، امواج الکترومغناطیسی ساطع می‌کند. تئوری امواج الکترومغناطیسی کلاسیک پیش‌بینی می‌کند که هنگام حرکت یک بار با قدرتی که با فرمول لارمور داده می‌شود تشعشع ساطع می‌کند:

$$P = \frac{e^2 \ddot{r}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (۱.۳)$$

معادله (۱.۳) در واحدهای  $SI$  است و برای سرعت‌هایی که در مقایسه با سرعت نور  $c$  کوچک هستند معتبر است. چنین فرضی را می‌توان برای نوسانگرهای دیواره‌های جسم سیاه معتبر فرض کرد.

پس از اینکه مشخص شد که بارهای شتابدار امواج الکترومغناطیسی تابش می‌کنند، استنباط می‌کنیم که به نوبه خود، امواج الکترومغناطیسی تشعشعی، بارها را هنگام تعامل با آنها شتابدار می‌کند. در این صورت طبیعی است که فرض کنیم، زمانی که یک بار شتابدار تابش ساطع می‌کند، امواج الکترومغناطیسی تابش تازه گسیل شده تا حدودی بر خود بار تأثیر می‌گذارد. بنابراین، به منظور توصیف مناسب تشعشع در تعامل با نوسانگرها باید چنین تأثیر واکنش معکوس را محاسبه کنیم. می‌توانیم این تأثیر را با نیروی تشعشعی واکنش مؤثر  $F_{rad}$  که تابش ساطع شده توسط یک ذره باردار شتابدار روی خود اعمال می‌کند مدل‌سازی کنیم (واکنش تابشی). با فرض حرکت تناوبی نوسانگر با دوره تناوب  $T$ ، از مکانیک کلاسیک می‌دانیم که چگونه نیروی مرتبط با توان  $P$  را محاسبه کنیم:

$$\int_0^T F_{rad} \cdot v dt = - \int_0^T P dt \quad (۲.۳)$$

که در آن  $v = v(t)$  سرعت بار است. با جایگزینی در رابطه (۲.۳) توان لارمور (۱.۳)

فرمول لارمور را می‌توان از نظر نسبیتی ثابت کرد تا  $P = \frac{e^2 \gamma^5}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \dot{r}^2 - \frac{(\dot{r} \times \dot{r})^2}{c^2} \right)$  را به‌دست آورد که در آن  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}$  است. می‌توان نشان داد که امواج الکترومغناطیسی تابشی بارهای شتاب دهنده نتیجه وجود محدودیت سرعت کیهانی  $c$ .

خواهیم داشت:

$$\int_0^T F_{rad} \cdot v dt = - \int_0^T \frac{e^2 \dot{r}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} dt = - \int_0^T \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} dt = \int_0^T \frac{e^2 \ddot{r}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot v dt \quad (3.3)$$

که در آن آخرین انتگرال توسط قطعات ارزیابی می‌شود. آخرین انتگرال حاوی نیروی واکنش تشعشعی است که نیروی آبراهام-لورنتز نیز نامیده می‌شود، که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$F_{rad} = \frac{e^2 \ddot{r}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \dot{a}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (4.3)$$

که در آن  $a$  شتاب است. معادله (۴.۳) نمونه نادری در فیزیک از مشتق زمان سوم موقعیت یا مشتق زمانی شتاب است. اکنون در موقعیتی هستیم که معادله حاکم بر دینامیک بار نوسانی در حضور واکنش تشعشع را بنویسیم. از آنجایی که با یک نوسان ساز روبرو هستیم که به یک موج الکترومغناطیس تابشی پاسخ می‌دهد. تابش به شکل  $F = eE_0 \cos \omega t$ ، معادله حرکت برابر است با:

$$\ddot{r} + \omega_0 r - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{r} = \frac{eE_0}{m} \cos \omega t \quad (5.3)$$

که در آن  $\omega_0$  فرکانس نوسان طبیعی و وقتی است که نیروی خارجی اعمال نمی‌شود. می‌توانیم معادله (۵.۳) را بیشتر با توجه به اینکه اگر نیروی واکنش تشعشع کم باشد، ساده کنیم: یک عامل  $c^3$  در مخرج وجود دارد. علاوه بر این، می‌توانیم رابطه جبری را با کار در واحدهای گاوس ساده کنیم که در آن بار الکتریکی  $e$  را می‌توان به صورت  $q = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$  نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{r} = \frac{2}{3} \frac{q^2 \ddot{r}}{c^3} \approx \frac{2q^2}{3c^3} \omega^2 \dot{r} = \gamma \dot{r} \quad (6.3)$$

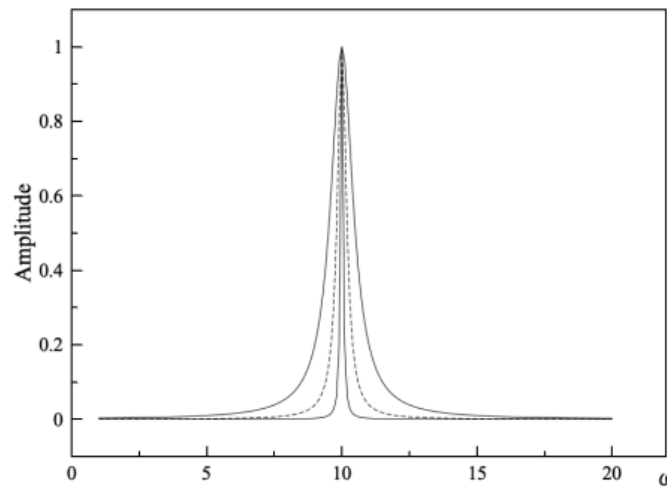
و در نهایت می‌توانیم معادله (۵.۳) به شکلی آشناتر بنویسیم:

$$\ddot{r} - \gamma \dot{r} + \omega_0 r = \frac{eE_0}{m} \cos \omega r \quad (7.3)$$

این معادله نشان دهنده یک نوسانگر است که تحت یک نیروی محرکه  $\frac{F}{m} = \frac{eE_0}{m} \cos \omega t$  در یک محیط چسبناک (ویسکوز) نیرویی متناسب با سرعت  $\dot{r}$  اعمال می‌کند. حل معادله (۷.۳) توسط یک تابع نوسانی توصیف می‌شود که دامنه آن برابر است با:

$$A(\omega) = \frac{eE_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (8.3)$$

نوسانگر دارای انرژی متوسط  $\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$  است (با دامنه میدان الکتریکی  $E_0$  اشتباه نشود). اگر عبارت  $\gamma$  کوچک باشد (شکل ۱.۳)، یعنی میرایی کوچک باشد، تابع  $A$  یک



شکل ۱.۳: دامنه  $A \propto \frac{1}{\omega^2 + a^2}$  یک نوسان ساز رمونیکی میرا شونده در برابر ضریب میرایی  $a$ . با کاهش مقدار ضریب میرایی (در شکل  $a = 0.5, 0.2, 0.05$  داریم)، دامنه ماکزیمم تندتری را در اطراف فرکانس رزونانس  $\omega_0 = 10$  نشان می‌دهد.

حداکثر تیزی (قله) در اطراف فرکانس طبیعی  $\omega_0$  دارد. تحت این مفروضات، می‌توانیم رابطه انرژی را برای  $\omega \rightarrow \omega_0$  ساده کنیم:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \\
 &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{e^2 E_0^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \\
 &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{e^2 E_0^2}{m^2 [(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)]^2 + (\gamma \omega)^2} \\
 &\approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{e^2 E_0^2}{4m^2 \omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma \omega)^2} \\
 &= \frac{1}{8m} \frac{e^2 E_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{\gamma}{2m})^2}
 \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

که در آن از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که وقتی  $\omega \rightarrow \omega_0$  می‌توانیم  $(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  را تقریب بکار ببریم.

اگر اکنون بخواهیم میانگین انرژی را برای تمام مدهای موجود در حفره محاسبه کنیم، باید معادله (۹.۳) را انتگرال‌گیری کنیم. وقتی ضریب میرایی کوچک است (شکل ۱.۳)، تنها مقادیری که به انتگرال کمک می‌کنند، نزدیک به فرکانس مرکزی  $\omega_0$  هستند. با استفاده از یک انتگرال معروف:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \tag{۱۰.۳}$$

پس از کمی جبر و با در نظر گرفتن مولفه سوم میدان در حفره - که عامل سوم را در

مخرج حذف می‌کنیم - در نهایت به دست می‌آوریم:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E(\nu, T) \rangle \quad (۱۱.۳)$$

رابطه (۱۱.۳) کاملاً قابل توجه است: جرم  $m$  یا بار  $e$  دوقطبی باردار نوسانی را که با آن شروع کردیم را شامل نمی‌شود. تنها اطلاعات باقی مانده در مورد نوسانگر اصلی انرژی متوسط آن است  $\langle E(\nu, T) \rangle$ . این نتیجه قدرت فوق العاده ترمودینامیک کلاسیک است. توجه داشته باشید که یک کاربرد ساده از قضیه برابر در معادله (۱۱.۳)، یعنی  $\langle E(\nu, T) \rangle = kT$  دقیقاً معادله ریلی-جین رابطه (۶۹.۲) فصل قبل را بازتولید می‌کند. همچنین توجه کنید که پلانک می‌توانست معادله را بدست آورد. رابطه (۶۹.۲) پنج سال قبل. در واقع، ریلی-جین این نتیجه را در سال ۱۹۰۵ منتشر کرد. از آنجایی که ترمودینامیک ما را تا این حد رسانده است، می‌توانیم تلاش کنیم و کمی جلوتر برویم. آیا می‌توانیم از ترمودینامیک برای بیان انرژی متوسط استفاده کنیم؟ برای سیستمی با حجم ثابت، مانند حفره ما، داریم:

$$dU = TdS \quad (۱۲.۳)$$

رابطه فوق برای یک سیستم ترمودینامیکی معتبر است اما می‌تواند به‌طور مساوی برای یک نوسانگر هارمونیک منفرد اعمال شود زیرا آنتروپی  $S$  و انرژی داخلی  $U$  متغیرهای ترمودینامیکی گسترده‌ای<sup>۸</sup> هستند. اگر پلانک موفق به یافتن عبارتی از آنتروپی نوسانگر شود، آنگاه انرژی را می‌توان با معکوس کردن معادله (۱۲.۳) پیدا کرد:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = \frac{dS}{d\langle E \rangle} = \frac{1}{T} \quad (۱۳.۳)$$

که در آن می‌توانیم  $U$  را با انرژی متوسط  $\langle E \rangle$  نوسانگر شناسایی کنیم. پلانک می‌خواست راه ترمودینامیک کلاسیک را ادامه دهد و عبارتی برای آنتروپی نوسانگر پیشنهاد کرد:

$$S = \frac{\langle E \rangle}{\beta\nu} \ln \frac{\langle E \rangle}{a\nu e} \quad (۱۴.۳)$$

که در آن  $e$  پایه لگاریتم‌های طبیعی است (و نه بار الکترون!)،  $\nu$  فرکانس و  $a$  و  $\beta$  ثابت هستند. پلانک معادله (۱۴.۳) را در مقاله‌ای که در سال ۱۹۰۰ نوشت. او این شکل عملکردی را برای آنتروپی تنها بر اساس تلاش برای توصیف تشعشعات جسم سیاه درون یک حفره توسط وین در نظر گرفت. فرمول تجربی (۷۰.۲) وین در اینجا برای وضوح به‌صورت تابعی از فرکانس  $\nu$  آورده شده است:

$$f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} \quad (۱۵.۳)$$

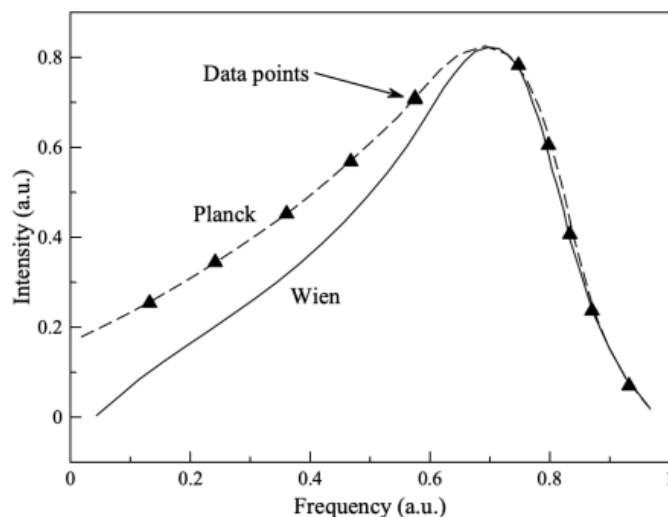
<sup>۸</sup>متغیرهای گسترده برای زیرسیستم‌ها افزودنی هستند. به‌عنوان مثال می‌توان به حجم، جرم، آنتروپی و انرژی اشاره کرد.

توجه داشته باشید که قانون ریلی-جین تنها در سال ۱۹۰۵ ظاهر شد و بنابراین پلانک مبنای نظری برای شکل فرکانس پایین طیف جسم سیاه نداشت. پلانک با معادل سازی معادله‌ها (۱۵.۳) و (۱۱.۳) به تعریف آنتروپی (۱۴.۳) رسید. آنتروپی (۱۴.۳) بعد از کمی جبر و نوشتن  $a = \frac{\alpha c^3}{8\pi}$  بدست می‌آید.

تعریف آنتروپی (۱۳.۳) نشان دهنده این واقعیت است که قانون وین (۱۵.۳) باید با قانون دوم ترمودینامیک سازگار باشد. در واقع، مشتق دوم:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{1}{\beta \nu} \frac{1}{U} = -\frac{1}{\beta \nu} \frac{1}{\langle E \rangle} \quad (۱۶.۳)$$

همیشه منفی است،  $\nu$ ،  $\beta$ ، و  $\langle E \rangle$  همیشه مثبت است. همزمان با نوشتن این عبارات برای آنتروپی یک نوسانگر در حفره‌ای در تعادل حرارتی با تابش، دو فیزیکدان تجربی، روبنس و کورلباوم<sup>۹</sup> (شکل ۲.۳) [۳۶]، اندازه‌گیری‌های دقیقی از توان ساطع شده توسط پلانک انجام دادند. جسم سیاه در ناحیه طول موج بلند طیف به‌وضوح نشان می‌دهد که قانون وین ناکافی است. به‌نظر می‌رسد که روبنس و همسرش یک روز در خانه پلانک در حال صرف شام بودند. در طول شام، روبنس در مورد اندازه‌گیری‌های اخیر خود از قدرت ساطع شده توسط یک جسم سیاه در طول موج‌های بلند نسبت به‌قله به‌پلانک گفت و در این موقعیت او این خبر را دقیقاً زمانی که او روی فرمول نظری خود کار می‌کرد به‌پلانک گزارش داد. روبنس اطلاعات بسیار مهمی به‌پلانک داد: طبق اندازه‌گیری‌های او، زمانی که  $\frac{\nu}{T} \rightarrow 0$ ، اندازه‌گیری‌ها با  $\langle E \rangle \propto T$  سازگار بود، در حالی که فرمول وین به‌وضوح نشان داد که، برای  $\frac{\nu}{T} \rightarrow \infty$ ،  $\langle E \rangle \propto \nu^3$  مستقل از دمای  $T$  است. با توجه به این اطلاعات جدید،



شکل ۲.۳: نقاط داده تجربی روبنس-کورلبام در مقابل توابع توزیع پلانک (خط چین) و وین (خط پیوسته).

<sup>۹</sup>هاینریش روبنس (۱۸۶۵ – ۱۹۲۲) و فردیناند کورلبام (۱۸۵۷ – ۱۹۲۷) دو فیزیکدان آلمانی بودند که بیشتر به‌دلیل اندازه‌گیری دقیق طیف قدرت بدن سیاه شهرت داشتند.

پلانک متوجه شد که باید فرمول آنتروپی خود را اصلاح کند تا مطمئن شود که با دو رژیم محدود کننده، زمانی که  $\nu T \rightarrow \infty$  و زمانی که  $\nu T \rightarrow 0$ ، مطابقت دارد. از معادله‌های (۱۱.۳)، (۱۳.۳) و اطلاعات روبنس که  $E \propto T$  در رژیم زمانی که  $\nu T \rightarrow 0$  باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\langle E \rangle} &\propto \frac{1}{\langle E \rangle} \\ \frac{d^2 S}{d\langle E \rangle^2} &\propto \frac{1}{\langle E \rangle^2} \end{aligned} \quad (۱۷.۳)$$

در رژیمی دیگر  $\frac{\nu}{T} \rightarrow \infty$  از رابطه (۱۶.۳) مشاهده می‌شود که

$$\frac{d^2 S}{d\langle E \rangle^2} \propto \frac{1}{\langle E \rangle} \quad (۱۸.۳)$$

به راحتی می‌توان فهمید که ساده‌ترین عبارت برای مشتق دوم  $\frac{d^2 S}{d\langle E \rangle^2}$  که دو حد (۱۷.۳) و (۱۸.۳) را برآورده کند برابر است با:

$$\frac{d^2 S}{d\langle E \rangle^2} = -\frac{a}{\langle E \rangle(b + \langle E \rangle)} \quad (۱۹.۳)$$

که در آن  $a$  و  $b$  دو ثابت هستند که باید از داده‌های تجربی تعیین شوند. در واقع، وقتی  $\langle E \rangle \gg b$ ، ثابت  $b$  را می‌توان نادیده گرفت و مشتق دوم با  $1/\langle E \rangle^2$  متناسب است. از سوی دیگر، وقتی  $\langle E \rangle \ll b$ ، عبارت  $\langle E \rangle$  را می‌توان نادیده گرفت. در پرانتز و مشتق دوم با  $1/\langle E \rangle$  متناسب است.

اکنون امکان انتگرال‌گیری معادله (۱۹.۳) وجود دارد:

$$\frac{dS}{d\langle E \rangle} = -\int \frac{ad\langle E \rangle}{\langle E \rangle(b + \langle E \rangle)} \quad (۲۰.۳)$$

بعد از انتگرال‌گیری و استفاده از معادله (۱۳.۳)، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{T} = -\frac{a}{b} \ln \left( \frac{\langle E \rangle}{b + \langle E \rangle} \right) \quad (۲۱.۳)$$

می‌توانیم  $\langle E \rangle$  را از رابطه (۲۱.۳) استخراج کنیم و خواهیم داشت:

$$\langle E \rangle = \frac{b}{e^{\frac{b}{aT}} - 1} \quad (۲۲.۳)$$

با تعیین  $\langle E \rangle$ ، اکنون می‌توانیم از معادله (۲۱.۳) برای یافتن چگالی انرژی در حفره جسم سیاه استفاده کنیم:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{b}{e^{\frac{b}{aT}} - 1} \quad (۲۳.۳)$$



این قانون پلانک است. برای سازگاری با قانون وین، دو ثابت  $a$  و  $b$  به گونه‌ای هستند که قانون وین به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_{Wien}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} b e^{\frac{a\nu}{T}} \quad (24.3)$$

توجه کنید که سازگاری بین قوانین پلانک و وین همچنین مستلزم آن است که  $b \propto \nu$  و دارای ابعاد فیزیکی انرژی باشد. پلانک توانست آنتروپی را با انتگرال گیری معادله (۲۰.۳) بدست آورد. پس از اندکی جبر توانست بنویسد:

$$S = -a \left[ \frac{E}{b} \ln \frac{E}{b} - \left( 1 + \frac{E}{b} \right) \ln \left( 1 + \frac{E}{b} \right) \right] \quad (25.3)$$

آنتروپی (۲۵.۳) با قانون پلانک مطابقت دارد که نشان داده شد مطابقت عالی با داده‌ها دارد (شکل ۲.۳). پلانک اکنون به یک توجیه نظری برای معادله (۲۵.۳) نیاز داشت. به عنوان یک فیزیکدان کلاسیک، او سعی کرد آن را با استفاده از ترمودینامیک کلاسیک توجیه کند. با این حال، همانطور که اکنون می‌دانیم، مهم نیست که او چقدر تلاش کرده است، هیچ راهی برای توضیح طیف جسم سیاه با مکانیک کلاسیک وجود ندارد. سپس پلانک با بررسی رابطه بین آنتروپی و احتمال به مسئله حمله کرد.

## ۲.۳ آنتروپی و احتمالات

مسئله اساسی شامل مطالعه چگونگی توزیع انرژی در میان مجموعه‌ای از نوسانگرهای در داخل یک حفره جسم سیاه بود. از آنجایی که تعداد نوسانگرها بسیار زیاد است، استفاده از روش‌های آماری ضروری است. از قضا، پلانک مخالف ایده‌های مکانیک آماری لودویگ بولتزمن بود که حتی به وجود اتم‌ها اعتقاد نداشت. اما در این مورد و در اقدامی ناامیدانه از ایده‌های بولتزمن استفاده کرد.

در سال ۱۸۷۷ بولتزمن<sup>۱۰</sup> رابطه معروف خود را بین آنتروپی و احتمال پیشنهاد کرد:

$$S = k \ln W \quad (26.3)$$

که در آن  $k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$  ثابت بولتزمن<sup>۱۱</sup> و  $W$  احتمال حالت متناظر، یعنی تعداد حالت‌های میکروسکوپی متمایز موجود در سیستم ترمودینامیکی، است. قبلاً دیدیم که میانگین انرژی حرارتی مرتبط با درجه آزادی میکروسکوپی داخلی یک ذره در یک سیستم ترمودینامیکی  $\frac{1}{2}kT$  است.

<sup>۱۰</sup> در واقع، این پلانک بود که ابتدا آنتروپی را به این شکل نوشت که بر روی قبر بولتزمن در Zentralfriedhof در وین قابل مشاهده است.

<sup>۱۱</sup> واحدهای فیزیکی ثابت بولتزمن ( $J/K$ ) نشان می‌دهد که انرژی و دما را با هم مرتبط می‌کند. قانون گاز کامل  $pV = nRT$  فشار و حجم  $n$  مول گاز کامل در دمای  $T$  را از طریق ثابت گاز  $R$  به هم مرتبط می‌کند. این قانون را می‌توان با استفاده از ثابت بولتزمن به صورت  $pV = NkT$  بازنویسی کرد که در آن  $N$  تعداد کل ذرات در یک مول، یعنی عدد آووگادرو  $6.022 \times 10^{23}$ ، است.

بیایید  $\mathcal{E}$  را “عنصر” انرژی مرتبط با یکی از نوسانگرهای حفره جسم سیاه بنامیم. می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه انرژی کل  $E_{tot}$  بین  $N$  نوسانگر توزیع می‌شود، جایی که انتظار داریم  $N$  عدد بزرگی باشد. فرض کنید یک عدد  $P$  از چنین عناصر انرژی  $\mathcal{E}$  داریم و می‌خواهیم نحوه توزیع آنها در بین نوسانگرهای  $N$  را مطالعه کنیم. این یک سوال آماری مستقیم است که برای پرسیدن موارد زیر است: به چند روش مختلف می‌توانیم اشیاء  $P$  (یکسان) را در  $N$  جعبه توزیع کنیم؟ همانطور که توسط Paul Ehrenfest و Heike Kamerlingh Onnes [۱۳] توضیح داده شده است، معلوم می‌شود که این عدد عبارت است از:

$$W = \frac{(P + N - 1)!}{P!(N - 1)!} \quad (۲۷.۳)$$

اگر  $P, N \gg 1$  باشند معادله (۲۷.۳) می‌شود

$$W \approx \frac{(P + N)!}{P!N!} \approx \frac{(N + P)^{(N+P)}}{P^P N^N} \quad (۲۸.۳)$$

با استفاده از رابطه (۲۶.۳)، آنتروپی برابر است با:

$$S = k \ln W = k [(N + P) \ln(N + P) - P \ln P - N \ln N] \quad (۲۹.۳)$$

اما می‌دانیم که  $P = \frac{N \langle E \rangle}{\mathcal{E}}$  و برای یک نوسانگر، آنتروپی آن برابر است:

$$\frac{S}{N} = k \left[ \left(1 + \frac{\langle E \rangle}{\mathcal{E}}\right) \ln \left(1 + \frac{\langle E \rangle}{\mathcal{E}}\right) - \frac{\langle E \rangle}{\mathcal{E}} \ln \frac{\langle E \rangle}{\mathcal{E}} \right] \quad (۳۰.۳)$$

اکنون می‌توانیم معادله (۳۰.۳) با معادله (۲۵.۳) را مقایسه کنیم. دو معادله یکسان هستند، مشروط بر اینکه  $b = \mathcal{E}$  باشد. اما همچنین می‌دانیم که  $b \propto \nu$  و بنابراین باید داشته باشیم:

$$\mathcal{E} = h\nu \quad (۳۱.۳)$$

که در آن  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J/Hz}$  ثابت پلانک است. با کمک معادله (۳۱.۳) پلانک سرانجام توانست فرمول تابش طیفی یک جسم سیاه را بنویسد که حاوی ثابت  $h$  اوست:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \left[ \frac{W}{m^2 \text{ sr Hz}} \right] \quad (۳۲.۳)$$

یا بر حسب طول موج

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \left[ \frac{W}{m^3 \text{ sr}} \right] \quad (۳۳.۳)$$

در این مرحله، ممکن است وسوسه شویم که  $\mathcal{E} \rightarrow 0$ ، یعنی  $h \rightarrow 0$  را بگذاریم و با فیزیک کلاسیک بمانیم. می‌توانیم مطمئن باشیم که پلانک می‌خواست این امکان‌پذیر باشد، زیرا خود آخرین فیزیکدان بزرگ کلاسیک بود. این متأسفانه منجر به یک آنتروپی واگرا می‌شود و بنابراین توافق تضمین می‌شود اگر و فقط اگر  $\mathcal{E} = h\nu$  محدود باشد. پلانک

این مقدار انرژی را به عنوان یک «کوانتوم» انرژی موج الکترومغناطیسی تعبیر کرد: تابش با نوسانگرها در حفره فقط به مقدار محدود مبادله می شود، بنابراین این جمله «کوانتوم» نامیده می شود. علاوه بر این، این حداقل مقدار متناسب با فرکانس امواج الکترومغناطیسی تابشی در داخل حفره است.

به عنوان یک بررسی عقلانی، اجازه دهید تأیید کنیم که فرمول های پلانک (۳۲.۳) و (۳۳.۳) با دو تقریب وین و ریلی-جین مطابقت دارند. در واقع، در رژیم فرکانس بالا،  $h\nu \gg kT$  داریم:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (34.3)$$

که فرمول وین برای فرکانس های بالا (طول موج های کوتاه) است. اگر  $h\nu \ll kT$  باشد، تابع نمایشی  $e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$  می شود:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx \frac{2\nu^2}{c^2} kT \quad (35.3)$$

که فرمول ریلی جین برای فرکانس های پایین (طول موج های بلند) است. توجه کنید که در معادلات (۳۴.۳) و (۳۵.۳)،  $\pi$  از دست رفته به این معنی است که آنها تابش طیفی<sup>۱۲</sup> هستند و نه تابش گسیلی<sup>۱۳</sup> همانطور که در معادله (۴.۲) نشان داده شده است. باید بررسی کنیم که اگر  $h \rightarrow 0$  فیزیک کلاسیک را بازیابی کنیم. در واقع، تقریب ریلی جین (۳۵.۳) حاوی  $h$  نیست، همانطور که با مفروضات فیزیک کلاسیک به دست آمد. همچنین توجه داشته باشید که تقریب وین حاوی  $h$  است زیرا به صورت تجربی به دست آمده است و بنابراین نباید آن را بر اساس فیزیک کلاسیک در نظر گرفت.

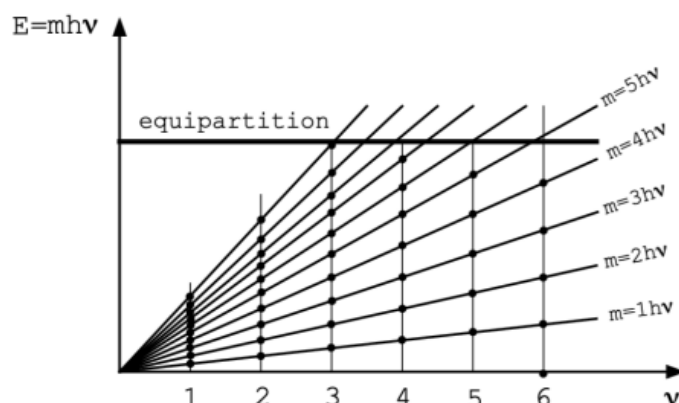
پلانک معادله (۳۱.۳) را به شرح زیر تفسیر کرد: در یک حفره جسم سیاه تابش با نوسانگرهای اولیه در تعادل حرارتی است. انرژی در «بسته های» - یا کوانتا -  $h\nu$  و نه به طور پیوسته آنطور که یک فیزیکدان کلاسیک انتظار دارد مبادله می شود. ثابت پلانک  $h$  که بسیار کوچک است اما صفر نیست، مقیاس پدیده های کوانتومی را نشان می دهد. داشتن انرژی بین امواج الکترومغناطیسی و نوسانگرها در حفره در کوانتومای گسسته انرژی  $E = mh\nu$  مبادله می شوند، که در آن  $m$  اعداد صحیح هستند، زیرا فرکانس افزایش می یابد و مودهای ارتعاش کمتری برانگیخته می شوند (نقاط سیاه در شکل ۳.۳) و فاجعه ماوراء بنفش رخ نمیدهد.

### ۳.۳ روش دیگر بدست آوردن فرمول جسم سیاه

پس از پیروی از مسیر طولانی و کلاسیک به فرمول طیف تابشی جسم سیاه پلانک، اکنون نشان می دهیم که چگونه می توان فرمول را با روش های مستقیم تر استخراج کرد. بیایید

<sup>۱۲</sup>Spectral irradiance

<sup>۱۳</sup>Spectral emittance



شکل ۳.۳: نحوه توزیع انرژی در امواج الکترومغناطیسی مودهای مختلف داخل یک حفره قضیه برابری کلاسیک یک مقدار ثابت به همه فرکانسها اختصاص می‌دهد که منجر به انرژی کل واگرا می‌شود. فرمول پلانک  $E = h\nu$  نشان می‌دهد که تعداد مودها - که با نقاط سیاه نشان داده می‌شوند - با افزایش فرکانس کاهش می‌یابد و بنابراین انرژی کل ثابت می‌ماند.

به معادله (۴۵.۲) که مقدار مجذور بردار موج را می‌دهد، برگردیم. بیایید معادله (۴۵.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$|k| = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L}\right)^2} \quad (۳۶.۳)$$

در راستای استدلالی مشابه فصل دوم، معادله (۳۶.۳) یک کره با شعاع  $\frac{|k|}{\pi}$  در فضای  $n$  است که در آن  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  اعداد صحیح مثبت هستند. بنابراین حجم قابل دسترسی یک هشتم فضا است که در آن  $(n_x, n_y, n_z) > 0$  است. بنابراین حجم حاوی این مودها:

$$V = \frac{1}{8} \frac{4\pi \left(\frac{|k|}{\pi}\right)^3}{3} = \frac{4\pi \nu^3}{3c^3} \quad (۳۷.۳)$$

که در آن از تعریف  $k = \frac{2\pi\nu}{c}$  استفاده کردیم. اکنون مفهوم چگالی حالتها<sup>۱۴</sup>، یعنی تعداد مودها در واحد حجم را معرفی می‌کنیم. به طور کلی، چگالی مودها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(\nu) = \frac{dV}{d\nu} \quad (۳۸.۳)$$

از آنجایی که ما با امواج الکترومغناطیسی سر و کار داریم، می‌دانیم که دو قطبش در هر مود وجود دارد و بنابراین چگالی مودها امواج الکترومغناطیسی برابر است با:

$$g_{em}(\nu) = 2 \frac{dV}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (۳۹.۳)$$

<sup>۱۴</sup>States

بیایید انرژی مربوط به مودها معادله (۳۶.۳) را بر حسب فرکانس بازنویسی کنیم:

$$\nu = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L}\right)^2} \quad (۴۰.۳)$$

با استفاده از فرمول پلانک  $E = h\nu$ ، انرژی مربوط به مودها خواهد بود:

$$E = \frac{mhc}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L}\right)^2} \quad (۴۱.۳)$$

معادله (۴۱.۳) به ما می‌گوید که می‌توانیم هر مود را به‌عنوان یک “ذره” (یا کوانتوم) انرژی  $\mathcal{E} = h\nu$  در نظر بگیریم و فیزیک آماری را اعمال کنیم. شاخص  $m$  به ما می‌گوید که چند کوانتا در حفره با فرکانس  $\nu$  مشخص وجود دارد. همچنین ذرات را قابل تشخیص می‌دانیم.

پس از انجام مفروضات قبلی، اکنون باید احتمال اینکه مودی با فرکانس  $\nu$  و  $m$  کوانتوم دارای انرژی مشخص  $E$  باشد، چقدر است را محاسبه کنیم. به دنبال مک داول<sup>۱۵</sup> [۲۷]، ما ساده‌ترین حالت یک سیستم بسته<sup>۱۶</sup> حاوی تعداد زیادی ذرات قابل تشخیص  $N$  را در تعادل حرارتی با محیط اطرافش در دمای  $T$  بررسی می‌کنیم. اجازه دهید همچنین فرض کنیم که تنها دو سطح انرژی متمایز ( $\mathcal{E}_0$  و  $\mathcal{E}_1$ ) وجود دارد که هر یک از آنها به ترتیب با  $n_0$  و  $n_1$  ذرات، که در آن  $N = n_0 + n_1$ ، پر شده است. اکنون می‌پرسیم: چند راه مختلف می‌توانیم این پیکربندی خاص را درک کنیم؟ بیایید با این شماره  $W$  تماس بگیریم. احتمال ساده به ما می‌گوید که:

$$W = \frac{N!}{n_0!n_1!} \quad (۴۲.۳)$$

با استفاده از فرمول آنتروپی بولتزمن، آنتروپی به‌صورت زیر است:

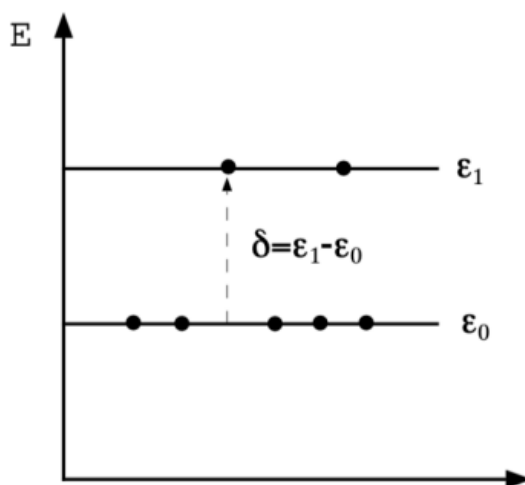
$$S = k [\ln(N!) - \ln(n_0!) - \ln(n_1!)] \quad (۴۳.۳)$$

اکنون مقدار کمی انرژی  $\delta = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0$  را به سیستم منتقل می‌کنیم به‌گونه‌ای که یک ذره از سطح پایین‌تر به سطح بالایی ارتقا می‌یابد. در این حالت، سطح پایینی تخلیه شده است  $(n_0 \rightarrow n_0 - 1)$  و سطح بالایی یک واحد افزایش می‌یابد  $(n_1 \rightarrow n_1 + 1)$  (شکل ۴.۳). آنتروپی سیستم پس از افزودن انرژی برابر است با:

$$S^* = k [\ln(N!) - \ln(n_0 - 1)! - \ln(n_1 + 1)!] \quad (۴۴.۳)$$

<sup>۱۵</sup>McDowell

<sup>۱۶</sup>در ترمودینامیک، سیستم بسته سیستمی است که در آن تبادل ذرات با محیط اطراف وجود ندارد. در مثال ما، سیستم ما دارای  $N$ ،  $V$  و  $T$  ثابت است.



شکل ۴.۳: سیستم متشکل از ۷ ذره قابل تشخیص بین دو سطح انرژی  $\varepsilon_0$  و  $\varepsilon_1$  توزیع شده است. اگر انرژی  $\delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$  جذب شود، ذره‌ای از سطح پایین را می‌توان به سطح بالایی ارتقا داد.

می‌توانیم تغییر آنتروپی چنین تبدیلی را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S^* - S \\ &= [\ln(N!) - \ln(n_0 - 1)! - \ln(n_1 + 1)! - (\ln(N!) - \ln(n_0!) - \ln(n_1!))] \\ &= k [\ln(n_0) - \ln(n_1 + 1)] \\ &= k \ln \left( \frac{n_0}{n_1 + 1} \right) \approx k \ln \left( \frac{n_0}{n_1} \right)\end{aligned}\quad (45.3)$$

که در آن جمله آخر  $n_1 \gg 1$  فرض می‌شود. در یک فرآیند ترمودینامیکی در حجم ثابت می‌دانیم که  $\Delta S = \Delta Q/T$  و تغییر انرژی  $\Delta Q$  صرفاً انرژی اضافه شده  $\delta$  است به طوری که  $\Delta S = \delta/T$ . بنابراین داریم:

$$\Delta S = k \ln \left( \frac{n_0}{n_1} \right) = \frac{\delta}{T} \quad (46.3)$$

که از این رابطه بدست می‌آید

$$\frac{n_0}{n_1} = e^{-\frac{\delta}{kT}} \quad (47.3)$$

اگر به هر دو سطح انرژی دلخواه که با انرژی  $E$  جدا شده‌اند تعمیم دهیم، قانون توزیع بولتزمن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{n_0}{n_1} = e^{-\frac{E}{kT}} \quad (48.3)$$

ارتباط تعداد ذرات  $n_1$  در سطح انرژی  $E_1$  که با انرژی  $E$  از سطح انرژی پایین‌تر  $E_0$  با ذرات  $n_0$  و با  $E = E_1 - E_0$  جدا شده است. اگر تابع بولتزمن را به گونه‌ای عادی‌سازی (نرمالیزه)

کنیم که:

$$\int_0^{\infty} A e^{-\frac{E}{kT}} = 1 \quad (۴۹.۳)$$

تابع  $f(E) = A e^{-\frac{E}{kT}}$  را می‌توان به‌عنوان احتمال اینکه یک ذره انرژی  $E$  دارد، که در آن انرژی  $E$  یک متغیر پیوسته است تفسیر کرد. تابع توزیع  $f(E)$  یک ابزار ریاضی بسیار قدرتمند است. در واقع، به‌ما اجازه می‌دهد تا میانگین‌های مقادیر فیزیکی را در سیستم ترمودینامیکی توصیف شده محاسبه کنیم. میانگین انرژی  $\langle E \rangle$ ، در حالت گسسته، برابر است با:

$$\langle E \rangle = \sum_0^{\infty} E_m \cdot f(E_m) \quad (۵۰.۳)$$

که در آن انرژی  $E_m = m h \nu$  گسسته با عدد صحیح  $m$  که از ۰ تا  $\infty$  مقدار دارد. اکنون به معادله (۴۱.۳) برمی‌گردیم و موده‌های حفره را به‌عنوان ذرات یکسان اما قابل تشخیص شناسایی می‌کنیم.<sup>۱۷</sup> برای مودی در فرکانس  $\nu$  با  $m$  انرژی کوانتوم  $m h \nu$ ، با انرژی  $E$  کوانتیزه شده، یعنی با فرض تنها مقادیر گسسته، انتگرال نرمال‌سازی (۴۹.۳) به یک جمع تبدیل می‌شود:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A e^{-\frac{E}{kT}} = A \sum_{m=0}^{\infty} \left( e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^m = 1 \quad (۵۱.۳)$$

با استفاده از فرمول معروف تصاعد هندسی، برای  $r < 1$  داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \frac{a}{1-r} \quad (۵۲.۳)$$

معادله (۵۱.۳) خواهد شد:

$$A \sum_{m=0}^{\infty} \left( e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^m = A \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \right) = 1 \quad (۵۳.۳)$$

که از آن ضریب نرمال‌سازی  $A$  برابر است با:

$$A = 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (۵۴.۳)$$

با نرمال‌سازی مناسب تابع توزیع، اکنون می‌توانیم معادله (۵۰.۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\langle E \rangle = A \sum_{m=0}^{\infty} E_m f(E_m) = A \sum_{m=0}^{\infty} m h \nu \left( e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^m = A \sum_{m=0}^{\infty} m h \nu \left( e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^{\beta} \quad (۵۵.۳)$$

که در آن  $\beta = -\frac{1}{kT}$  است.

---

<sup>۱۷</sup> این هنوز یک تعریف کلاسیک است.

توجه کنید که آخرین جمع در معادله (۵۵.۳) مشتق  $\sum_{m=0}^{\infty} (e^{mh\nu})^{\beta}$  نسبت به  $\beta$  است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\langle E \rangle = A \frac{d}{d\beta} \sum_{m=0}^{\infty} (e^{mh\nu})^{\beta} = A \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\beta h\nu}} \right) \quad (۵۶.۳)$$

با محاسبه مشتق و قرار دادن مقدار  $A$  از معادله (۵۴.۳)، داریم:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= A \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\beta h\nu}} \right) \\ &= - (1 - e^{\beta h\nu}) \left( \frac{1}{1 - e^{\beta h\nu}} \right)^2 \cdot -h\nu \cdot e^{\beta h\nu} \\ &= \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \end{aligned} \quad (۵۷.۳)$$

و فرمول پلانک را با قرار دادن معادله (۵۷.۳) در معادله (۱۱.۳) بدست می‌آوریم. این بخش را با اشاره به این نکته به پایان می‌بریم که فرمول دیگر پلانک  $E = h\nu$  برای انتقال از فیزیک کلاسیک به فیزیک کوانتومی کلیدی است. بنابراین، انرژی بین امواج الکترومغناطیسی و نوسانگرها نه به طور پیوسته، بلکه به صورت تکه‌ای به نام کوانتا رد و بدل می‌شود. خوانندگان ممکن است قبلاً متوجه شده باشند که در چند جا در تحلیل قبلی، معادلات فیزیک آماری - که معمولاً برای ذرات استفاده می‌شود - برای مود ارتعاشی امواج الکترومغناطیسی در داخل حفره استفاده شده است.

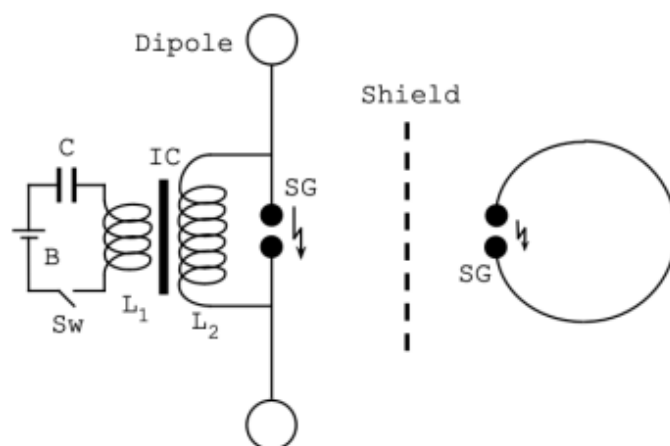
## ۴.۳ کشف امواج الکترومغناطیسی هرتز

در فصل دوم دیدیم که قوانین مغناطیس و الکتریسیته توسط معادله (۱.۲) ماکسول در حدود سال ۱۸۶۵ یکپارچه شدند. پدیده‌های شناخته شده در آن زمان با این حال، همانطور که در مورد نظریه‌های خوب است، معادلات نیز وجود امواج الکترومغناطیسی را پیش بینی کردند. امواجی که با سرعت ثابت  $c = 299792458$  متر بر ثانیه منتشر می‌شوند. این پیش‌بینی مسابقه‌ای را در بین افراد تجربی برای تولید و شناسایی چنین امواج الکترومغناطیسی آغاز شروع شد. امواج در میان بسیاری از افرادی که روی آن کار کردند، اولین فردی که موفق شد، فیزیکدان آلمانی<sup>۱۸</sup> هاینریش هرتز<sup>۱۹</sup> در سال ۱۸۸۶ بود. دستگاه مورد استفاده توسط هرتز به صورت شماتیک در شکل (۵.۳) نشان داده شده است. از دو بخش تشکیل شده است: در سمت چپ بخش تولید و انتقال وجود دارد. در سمت راست قسمت دریافت کننده در بین این دو قسمت، یک سیم ساخته شده از مواد مختلف را می‌توان برای مطالعه انتشار از طریق آن قرار داد. ایده کلی شامل ایجاد جرقه بین شکاف جرقه آنتن دوقطبی فرستنده بود. آنتن دوقطبی از دو کره برنجی (به عنوان

<sup>۱۸</sup>Heinrich Hertz

<sup>۱۹</sup>هاینریش رودولف هرتز (۱۸۵۷-۱۸۹۴) فیزیکدان آلمانی بود که برای اولین بار وجود امواج الکترومغناطیسی اثبات کرد. واحد فرکانس در سیستم SI - هرتز به اختصار Hz - به افتخار او ایجاد شد.



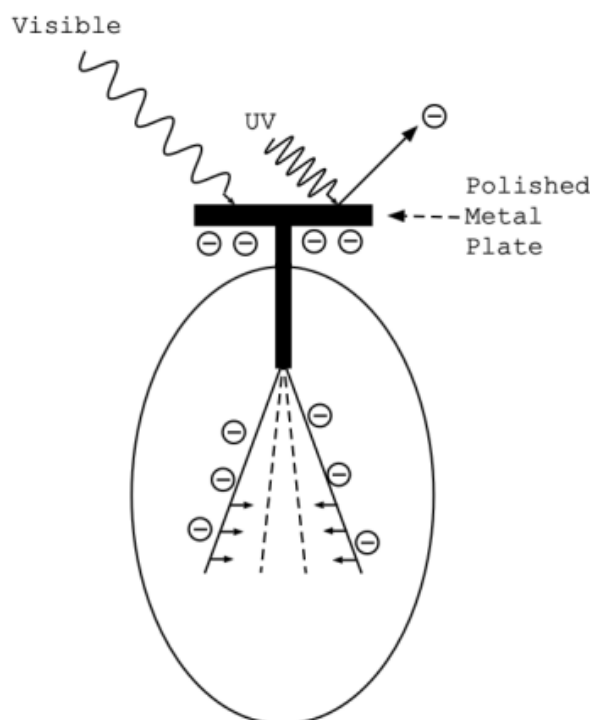


شکل ۵.۳: شماتیک ساده شده مدار الکتریکی مورد استفاده هاینریش هرتز برای تولید و تشخیص امواج الکترومغناطیسی. یک مدار تشدید متشکل از باتری  $B$ ، خازن  $C$  و سیم پیچ القایی - ساخته شده از دو سلف تزویجی  $L_1$  و  $L_2$  با هسته آهنی - به یک آنتن دوقطبی حاوی شکاف جرعه متصل است. جرعه‌های تولید شده توسط یک آنتن حلقه‌ای حاوی شکاف جرعه‌ای دیگری دریافت می‌شود.

خازن) در انتهای یک سیم رسانا ساخته شده است. سیم توسط دو کره رسانای کوچک که با یک شکاف کوچک از هم جدا شده‌اند قطع می‌شود. اگر آنتن فرستنده بخشی از یک مدار تشدید باشد، جرعه قادر خواهد بود فرکانس تشدید را تحریک کند و در نتیجه امواج الکترومغناطیسی را تولید کند. امواج در آن فرکانس خاص مدار تشدید بخش سمت چپ مدار به گونه‌ای طراحی شده است که ولتاژ تولید شده در خروجی  $L_2$  سیم پیچ القایی به اندازه‌ای زیاد باشد که از ولتاژ شکست هوا در بین شکاف جرعه <sup>۲۰</sup> ایجاد کند. هر بار که سوئیچ کار می‌کند، یک جرعه ایجاد و یک انفجار امواج الکترومغناطیسی میرا تولید می‌شود. سپس امواج به سمت حلقه دریافت کننده منتشر و در آنجا اگر به درستی تنظیم شوند، جرعه‌های کوچکتری بین شکاف‌های جرعه دریافت کننده ایجاد می‌شود. هرتز می‌توانست جرعه‌های دریافتی را ببیند، حتی اگر آنتن فرستنده چندین متر دورتر باشد. هرتز توانست خواص مختلف امواج الکترومغناطیسی، از جمله توانایی آنها در انعکاس، شکست، قطبش آنها، و غیره، را اندازه‌گیری کند. در تلاش برای دیدن بهتر جرعه‌های ریز ایجاد شده در آنتن گیرنده، هرتز آنتن گیرنده را در جعبه‌ای از مقداری ماده شفاف برای امواج الکترومغناطیسی، به عنوان مثال، مانند مقوا قرار داد. هنگامی که او این کار را انجام داد، متوجه شد که جرعه‌ها به شدت کاهش یافته است، بنابراین نشان می‌دهد که نور به نوعی به تولید جرعه‌ها "کمک می‌کند". در یک سری آزمایش و با استفاده از یک منشور برای انتخاب نوع نوری که به شکاف جرعه دریافت کننده برخورد می‌کند، هرتز تشخیص داد که نوری که به تولید جرعه کمک می‌کند در ناحیه فرابنفش است. نور فرابنفش،

<sup>۲۰</sup>ولتاژ شکست حداقل ولتاژی است که به یک عایق اعمال می‌شود، در این مورد، هوای بین دو کره کوچک شکاف جرعه، برای ایجاد کاهش زیادی از مقاومت که به نوبه خود، از یک جرعه انتقال ناگهانی الکترون‌ها را ایجاد می‌کند.

اما نه نور در طول موج‌های پایین‌تر، قادر به استخراج الکترون‌ها از سطح فلز شکاف‌های جرقه بوده و در نتیجه طول جرقه‌های دریافتی را افزایش می‌دهد. هرگز توضیحی برای این پدیده که بعدها "اثر فوتوالکتریک" نامیده شد، نداشت.



شکل ۶.۳: آزمایش Hallwachs نشان می‌دهد که ذرات با بار منفی از یک صفحه فلزی زمانی که نور فرابنفش به آن تابیده می‌شود استخراج می‌شوند.

## ۵.۳ آزمایش هالواچ و لنارد

درست پس از اینکه آزمایش‌های هرگز اثر فوتوالکتریک را نشان داد، بسیاری از محققان شروع به درک بهتر این پدیده کردند. یک آزمایش ساده توسط هالواچ<sup>۲۱</sup> از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بود که شامل یک الکتروسکوپ ورق طلا از طریق یک سیم رسانا به یک دیسک صیقلی در روی آن (شکل ۶.۳) متصل می‌شود. هنگامی که الکتروسکوپ بار منفی یا مثبت دارد، برگ‌ها در معرض دافعه الکترواستاتیک کولن قرار می‌گیرند و از هم جدا می‌شوند. اگر به زمین متصل شوند، یعنی اجازه می‌دهیم بارها خنثی شوند، برگ‌ها متوقف شده و دفع و سست شوند. گفته می‌شود که الکتروسکوپ تخلیه شده است.

هالواچ آزمایش بسیار ساده‌ای انجام داد: او الکتروسکوپ را ابتدا منفی و سپس مثبت کرد در حالی که صفحه فلزی را با نور فرابنفش که از یک لامپ قوس یا منیزیم می‌سوزاند

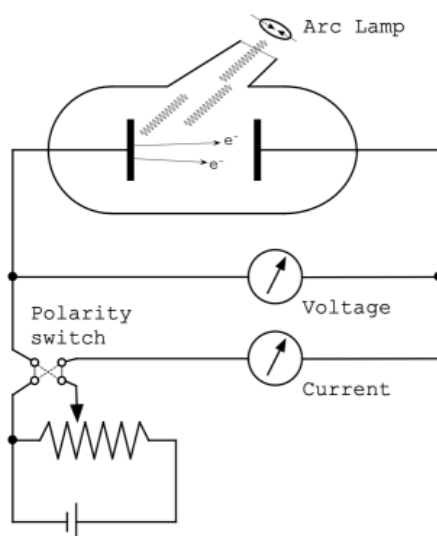
<sup>۲۱</sup> Hallwachs

روشن می‌کرد. هالواچ متوجه پدیده بسیار جالبی شد: پس از شارژ و روشن شدن، الکتروسکوپ تنها زمانی تخلیه می‌شود که بار منفی داشته باشد. هنگامی که بار مثبت داشت، الکتروسکوپ تخلیه نمی‌شد. روشن کردن الکتروسکوپ با نور مرئی، بدون توجه به شدت، الکتروسکوپ را تخلیه انجام نمی‌شود.

تفسیر کیفی بسیار مستقیم بود: نور فرابنفش قادر به استخراج بارهای منفی است و در نتیجه الکتروسکوپ را تخلیه می‌کند.

در سال ۱۸۹۹، جی جی تامسون<sup>۲۲</sup> نشان داد که ذرات باردار منفی در آزمایش‌های هرتز و هالواکس الکترون بودند. آزمایشات کمی بهتر برای درک بهتر اثر فوتوالکتریک مورد نیاز بود.

در سال ۱۹۰۲، یکی از شاگردان هرتز، فیلیپ لنارد<sup>۲۳</sup>، آزمایشی را برای اندازه‌گیری دقیق اثر فوتوالکتریک<sup>۲۴</sup> ابداع کرد.



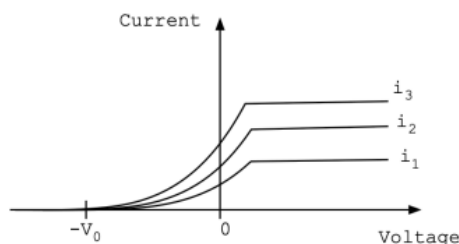
شکل ۷.۳: شماتیک ساده شده آزمایش لنارد برای توصیف اثر فوتوالکتریک. یک کلید قطبی به ولتاژ اعمال شده به دو صفحه داخل لوله خلاء اجازه می‌دهد تا قطبیت را تغییر دهد.

در شکل (۷.۳) چینش آزمایش لنارد به صورت شماتیک نشان داده شده است. یک لوله شیشه‌ای خلاء حاوی دو الکتروود فلزی جدا شده در مقابل یکدیگر است. یک پنجره کوارتز، شفاف تا فرابنفش، به نوری که از یک لامپ قوس کربنی می‌آید اجازه می‌دهد تا مستقیماً به یکی از الکتروودها بتابد که معمولاً به عنوان آند نشان داده می‌شود. از یک لامپ قوس کربنی استفاده شد زیرا می‌تواند به عنوان یک منبع شدید نور فرابنفش شناخته شده بکار برده شود.

<sup>۲۲</sup>آسِر جوزف جان تامسون (۱۸۵۶ – ۱۹۴۰) فیزیکدان بریتانیایی بود که نشان دادن پرتوهای کاتدی الکترون ذرات کوچکی هستند. آنها دارای بار منفی با نسبت بار زیاد به جرم هستند،

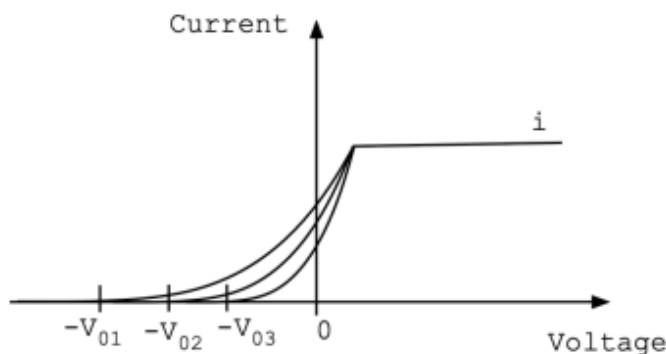
<sup>۲۳</sup>فیلیپ ادوارد آنتون فون لنارد (۱۸۶۲ – ۱۹۴۷) فیزیکدان آلمانی بود که در سال ۱۹۰۵ جایزه نوبل فیزیک را برای کار خود در مورد پرتوهای کاتدی دریافت کرد.

<sup>۲۴</sup>را برای بازگویی تاریخی مفصل از کار لنارد در مورد اثر فوتوالکتریک مرجع [۴۴] را مطالعه کنید.



شکل ۸.۳: مشخصات ولتاژ/جریان مشخصه فوتوالکتریک برای سه شدت نور مختلف  $i_1 < i_2 < i_3$  توجه داشته باشید که پتانسیل توقف  $-V_0$  با تغییر شدت نور تغییر نمی‌کند.

لنارد توانست (۱) شدت نور خارج شده از لامپ قوس، (۲) اختلاف پتانسیل  $\Delta V$  اعمال شده بین کاتد و الکترود دیگر (آند) و (۳) قطبیت این اختلاف پتانسیل را کنترل کند. هنگامی که هیچ اختلاف پتانسیلی بین الکترودها اعمال نشود ( $V = 0$  در شکل ۸.۳)، جریانی در مدار مشاهده می‌شود که با افزایش شدت نوری که از قوس می‌آید، افزایش می‌یابد. با ثابت نگه داشتن نور لامپ قوس الکتریکی، افزایش جریان (که به آن جریان فوتو<sup>۲۵</sup> نیز می‌گویند) با افزایش اختلاف پتانسیل، تا زمان اشباع مشاهده می‌شود، یعنی شرایطی که افزایش اختلاف پتانسیل باعث افزایش جریان فوتو نمی‌شود. در شکل (۸.۳) سه منحنی مربوط به سه شدت مختلف اشباع نور در جریان‌های مختلف با برچسب  $i_2, i_1$  و  $i_3$  نشان داده شده است. معکوس کردن قطبیت اختلاف پتانسیل باعث کاهش جریان فوتو به صفر شد، مهم نیست که شدت نور لامپ قوس چقدر باشد. این اختلاف پتانسیل خاص ( $-V_0$ ) پتانسیل توقف<sup>۲۶</sup> نامیده می‌شود.



شکل ۹.۳: مشخصات ولتاژ/جریان برای فوتوالکتریک برای سه فرکانس مختلف نور.

لنارد همچنین شدت نور را به حدی داشت که توانست آن را از یک منشور عبور دهد. او توانست تأیید کند که جریان نوری تنها در صورتی ایجاد می‌شود که فرکانس نور در ناحیه فرابنفش طیف باشد، همانطور که قبلاً توسط هرتز تعیین شده بود. او کمی جلوتر

<sup>۲۵</sup>Photo Current)

<sup>۲۶</sup>Stopping Potential.

رفت و دریافت که پتانسیل توقف به فرکانس نور بستگی دارد و نه به شدت، همانطور که در شکل (۹.۳) نشان داده شده است. علاوه بر این، او همچنین دریافت که جریان اشباع فقط به شدت نور بستگی دارد اما به فرکانس بستگی ندارد، یعنی با توجه به شدت نور مشخص، جریان اشباع یکسان است.

فیزیک کلاسیک قادر به توصیف همه این داده‌های تجربی نبود. به‌طور خاص، سه مشاهدات مختلف وجود دارد که قابل توضیح نیستند و آنها عبارتند از:

- (1) عدم تاخیر بین جذب امواج الکترومغناطیسی تابشی آند و گسیل فوتوالکترون؛
- (2) انرژی جنبشی فوتوالکترون ساطع شده به شدت نور بستگی ندارد و
- (3) اگر فرکانس نور کمتر از فرکانس قطع باشد، فوتوالکترون‌ها ساطع نمی‌شوند، مهم نیست که نور تابیده شده به آند چقدر شدید باشد.

می‌توانیم یک مدل کلاسیک از اثر فوتوالکتریک بسازیم. بیایید به‌طور کلاسیک فرض کنیم که الکترون‌ها در داخل فلز بسته شده‌اند و حداقل مقدار انرژی  $E_0$  برای فرار یک الکترون از آند مورد نیاز است. این حداقل انرژی تابع کار نامیده می‌شود. انرژی جنبشی یک الکترون، در اصطلاح کلاسیک، درست پس از پرتاب از سطح آند  $K$  باشد. این انرژی از موج الکترومغناطیسی تابشی به‌الکترون منتقل شده است. الکترون اکنون آزاد است و تحت یک میدان الکتریکی قرار دارد که انرژی آن را به مقدار  $eV$  افزایش می‌دهد. اگر نیروهای دیگری مانند گرانش را نادیده بگیریم، تنها نیرویی که بر الکترون وارد می‌شود، نیروی الکتریکی است. اگر اکنون قضیه کار-انرژی<sup>۲۷</sup> را اعمال کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$K - eV = 0 \quad (۵۸.۳)$$

اگر اکنون پتانسیل توقف  $V_0$  را اعمال کنیم، فوتوالکترون انرژی جنبشی اولیه خود را از دست داده و متوقف خواهد شد. تعادل انرژی خواهد بود:

$$K_i = eV_0 \quad (۵۹.۳)$$

به‌این معنی که بزرگترین انرژی جنبشی فوتوالکترون، زمانی که پتانسیل توقف وجود دارد، انرژی جنبشی اولیه آن درست پس از آزاد شدن از آند است. بنابراین، اندازه‌گیری پتانسیل توقف معادل اندازه‌گیری بزرگترین انرژی جنبشی فوتوالکترون است:

$$K_{max} = eV_0 \quad (۶۰.۳)$$

بلافاصله می‌بینیم که تفسیر کلاسیک فوق در تضاد مستقیم با داده‌های تجربی نشان داده شده در شکل (۸.۳) است. در دیدگاه کلاسیک، فوتوالکترون امواج الکترومغناطیسی را بطور پیوسته جذب می‌کند: شدت بالا امواج الکترومغناطیسی باید فوتوالکترون‌های انرژی بالا و در نتیجه پتانسیل توقف بالایی تولید کنند. به‌روشی مشابه، وقتی شدت تابش کم است، انرژی جنبشی مورد انتظار فوتوالکترون باید با پتانسیل توقف کوچک مربوطه کم باشد. داده‌ها تصویر کاملاً متفاوتی را نشان می‌دهند: پتانسیل توقف به

<sup>۲۷</sup>قضیه انرژی کار بیان می‌کند که کار انجام شده توسط مجموع تمام نیروهای وارد بر یک ذره برابر با تغییر انرژی جنبشی ذره است.

شدت نور بستگی ندارد! در واقع، شکل (۸.۳) نشان می‌دهد که پتانسیل توقف  $V_0$  برای شدت‌های مختلف نور یکسان است ( $i_3 > i_2 > i_1$ ). حتی گیج کننده‌تر این واقعیت است که پتانسیل توقف در عوض به فرکانس نور، همانطور که در شکل (۹.۳) نشان داده شده، بستگی دارد.

### ۶.۳ فرضیه فوتون انیشتین

در سال ۱۹۰۵، آلبرت انیشتین، فیزیکدان جوانی که در دفتر ثبت اختراع سوئیس در برن کار می‌کرد، مقاله‌ای انقلابی با عنوان «درباره دیدگاه اکتشافی نسبت به گسیل و تبدیل نور» در مجله *Annalen der Physik* منتشر کرد.<sup>۲۸</sup>

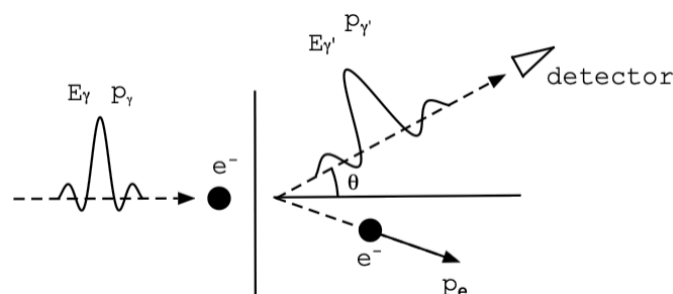
قبلاً دیده بودیم که پلانک توانست توزیع طیفی تابش جسم سیاه را با این فرض توضیح دهد که نوسانگرهای باردار اولیه امواج الکترومغناطیسی را ساطع و جذب می‌کنند. تابش در کوانتای انرژی  $E = h\nu$ . انیشتین یک گام به جلو رفت و فرض کرد که امواج الکترومغناطیسی خود تابش که در واحدهایی به نام فوتون کوانتیزه می‌شود. انیشتین در مقاله خود با استفاده از ملاحظات ترمودینامیکی و آماری این فرضیه را مطرح می‌کند که امواج الکترومغناطیسی تابش در واقع از تعدادی ذرات مجزای انرژی  $h\nu$  تشکیل شده است. این فرضیه فوتون به طور طبیعی تمام اندازه‌گیری‌هایی که در پاراگراف قبل توضیح داده شد را توضیح داد. به گفته انیشتین، امواج الکترومغناطیسی اشعه ماوراء بنفش در اثر فوتوالکتریک به لایه سطحی فلز نفوذ می‌کند و به طور کامل جذب شده و در انرژی جنبشی الکترون‌ها تبدیل می‌شود. بنابراین هر فوتون انرژی کل خود را به یک الکترون می‌رساند، یعنی یک فوتون انرژی خود را به یک الکترون می‌رساند. الکترونی که در قسمت داخلی الکتروود فلزی تعبیه شده است باید مقداری از انرژی اولیه خود را قبل از رسیدن به سطح از دست بدهد. الکترون‌های ساکن در سطح فلز با بیشترین سرعت با انرژی جنبشی گسیل می‌شوند:

$$E = h\nu - P \quad (۶۱.۳)$$

به گفته انیشتین که در آن  $P$  مقدار کاری است که الکترون باید انجام دهد تا سطح فلز را ترک کند. معادله (۶۱.۳) توضیح می‌دهد که چرا در آزمایش‌های لنارد، انرژی فوتوالکتریک‌های ساطع شده هیچ وابستگی به شدت نور نشان نمی‌دهد. در واقع، این فرض اساسی که یک فوتون یک الکترون را بیرون می‌زند به این معنی است که فرکانس فوتون‌ها و نه تعداد آنها، یعنی شدت، باید بالاتر از یک آستانه  $\nu_{min} = (E - P)/h$  باشد. معادله (۶۱.۳) پیش‌بینی می‌کند که انرژی هر الکترون پرتاب شده توسط فلز باید به صورت خطی با فرکانس فوتون با شیب برابر با ثابت پلانک افزایش یابد. در سال‌های ۱۹۱۴ و ۱۹۱۶، رابرت اندروز میلیکان<sup>۲۹</sup> اگرچه متقاعد شده بود که فرضیه فوتون انیشتین

<sup>۲۸</sup> عنوان اصلی "در یک دیدگاه اکتشافی در مورد تولید و تبدیل نور" بود. از خوانندگان علاقه‌مند غیر آلمانی زبان دعوت می‌شود تا ترجمه انگلیسی آرونز و پیپارد [۳] را مطالعه کنند.

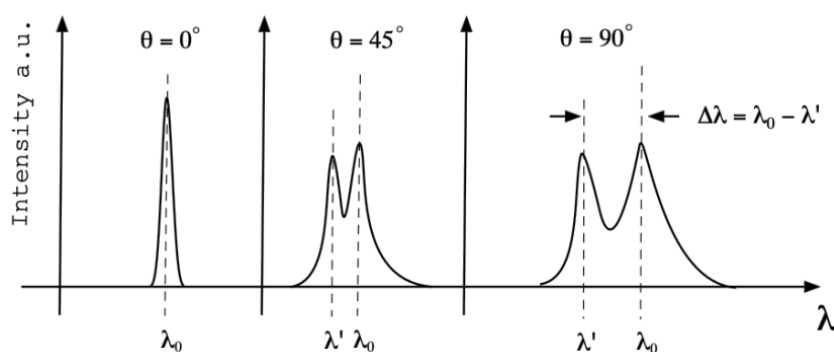
<sup>۲۹</sup> رابرت اندروز میلیکان (۱۸۶۸ - ۱۹۵۳) فیزیکدان آمریکایی بود که به دلیل اندازه‌گیری بار الکتریکی اولیه و تأیید پیش‌بینی‌های انیشتین در مورد اثر فوتوالکتریک شهرت داشت. او در سال ۱۹۲۳ جایزه نوبل را دریافت کرد.



شکل ۱۰.۳: پراکندگی کامپتون: انرژی یک موج اکترومغناطیسی  $E_\gamma$  (اشعه ایکس) و تکانه  $p_\gamma$  که روی یک الکترون در حال سکون برخورد می‌کند، در جهت متفاوتی با انرژی  $E'_\gamma$  (اشعه ایکس) و تکانه  $p'_\gamma$  پراکنده می‌شود. الکترون نیز در جهت دیگری با تکانه  $p_e$  پراکنده می‌شود.

اشتباه است زیرا نور به وضوح یک موج است، به‌جای آن دو مقاله منتشر کرد که در آن تأیید کرد که فرضیه فوتون انیشتین واقعاً درست است [۲۹][۳۰]. او همچنین مقدار اندازه‌گیری شده ثابت پلانک را ارائه کرد. آلبرت انیشتین در سال ۱۹۲۱ به‌دلیل کشف قانون اثر فوتوالکتریک جایزه نوبل فیزیک را دریافت کرد.

آیا می‌توان فوتون را ذره‌ای در نظر گرفت که انرژی آن در کوانتوم انرژی  $E = h\nu$  تعریف شده است؟ یا به این دلیل موج است که نور همه پدیده‌های موجی مانند تداخل و پراش را نشان می‌دهد؟ در سال ۱۹۲۳ در یک آزمایش مهم توسط آرتور کامپتون مشاهده شد که کسری از پرتوهای ایکس پراکنده شده از یک تکه گرافیت دارای طول موج بلندتری است که در شکل (۱۰.۳) نشان داده شده است. با توجه به انرژی پرتوهای ایکس تابشی می‌توانیم الکترون‌های گرافیت را آزاد و در حالت سکون در نظر بگیریم.



شکل ۱۱.۳: نتایج آزمایش پراکندگی کامپتون برای سه زاویه مختلف (۰، ۴۵ و ۹۰ درجه). شدت نور در واحد دلخواه است.

کامپتون شدت و طول موج فوتون‌های پراکنده را به‌صورت تابعی از زاویه پراکندگی  $\theta$ ، یعنی زاویه بین پرتو ورودی و پرتو منحرف شده مشاهده کرد. در یک دیدگاه کاملاً کلاسیک، انتظار می‌رود نور پراکنده شده توسط الکترون‌های آزاد طول موج آن را تغییر ندهد. کامپتون در عوض مشاهده کرد که نه‌تنها طول موج نور پراکنده شده با طول موج

نور تابشی متفاوت است، بلکه به زاویه پراکندگی بستگی دارد (شکل ۱۱.۳). کامپتون به رابطه بین تغییر طول موج نور پراکنده در برابر زاویه مشاهده علاقه‌مند بود. او نتیجه بسیار جالبی پیدا کرد: تغییر طول موج  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0$  با ضریب  $(1 - \cos \theta)$  متناسب بود، که در آن  $\lambda'$  طول موج تابش پراکنده و  $\lambda_0$  طول موج تابشی است. از آنجایی که فیزیک کلاسیک نمی‌توانست داده‌ها را توضیح دهد، کامپتون از پیشنهاد انیشتین مبنی بر اینکه نور به صورت کوانتومی می‌آید استفاده کرد و تصور کرد که پراکندگی پرتوهای ایکس به صورت پراکندگی غیرکشسان بین الکترون‌های آزاد و فوتون‌ها توصیف می‌شود. پرتوی از نور تک رنگ با فرکانس  $\nu$  یا معادل طول موج  $\lambda$  را می‌توان از یک موج کلاسیک یا به عنوان پرتوی از فوتون‌هایی که با سرعت نور  $c$  (در خلاء) حرکت می‌کنند، در نظر گرفت. کامپتون برای توضیح داده‌های خود مجبور شد دوباره به انیشتین تکیه کند و از معادله انرژی نسبیتی یک ذره استفاده کند:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (۶۲.۳)$$

که در آن  $p$  تکانه ذره و  $m_0$  جرم سکون آن است. در مورد فوتون، جرم سکون آن برابر با صفر است و بنابراین، همانطور که قبلاً در بخش ۲.۲ ذکر کردیم، فوتون دارای تکانه<sup>۳۰</sup> است:

$$p = \frac{E}{c} \quad (۶۳.۳)$$

با استفاده از رابطه پلانک  $E = h\nu$ ، معادله (۶۳.۳) می‌شود:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (۶۴.۳)$$

قدم بعدی این است که فرض کنیم در پراکندگی، بقای انرژی (در فرمول نسبیتی ۶۲.۳) و پایستگی تکانه خطی داریم. با توجه به شکل (۱۰.۳) بقای انرژی عبارت است از:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e \quad (۶۵.۳)$$

که در آن  $E_\gamma$  انرژی فوتون ورودی،  $E_e$  انرژی الکترون در حالت سکون،  $E'_\gamma$  انرژی فوتون پراکنده و  $E'_e$  انرژی الکترون پراکنده است. با استفاده از معادله‌ها (۶۲.۳) و (۶۴.۳) داریم:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad (۶۶.۳)$$

که در آن  $\lambda$  طول موج فوتون ورودی،  $\lambda'$  طول موج فوتون پراکنده،  $p_e$  تکانه الکترون پراکنده و  $m_e$  جرم الکترون است. پایستاری (بقاء) تکانه مستلزم این است که:

$$p_\gamma = p_e + p'_\gamma \quad (۶۷.۳)$$

<sup>۳۰</sup> این نتیجه کاملاً نسبیتی نیست، اما می‌توان از معادلات ماکسول استنباط کرد.



استخراج با حذف  $p_e$  از معادلات (۶۶.۳) و (۶۷.۳) ادامه می‌یابد. این با مجذور کردن معادلات انرژی (۶۶.۳) و تکانه (۶۷.۳) به دست می‌آید. برای انرژی داریم:

$$\begin{aligned} p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 &= \left( \frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 - \frac{hc}{\lambda'} \right)^2 \\ p_e^2 c^2 &= \left( \frac{hc}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{hc}{\lambda'} \right)^2 - 2 \left( \frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \right) + 2 m_e c^2 \left( \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \right) \end{aligned} \quad (۶۸.۳)$$

به منظور مجذور معادله تکانه (۶۷.۳)، باید در نظر بگیریم که آن یک معادله برداری است. مدول مربع یک بردار با حاصل ضرب اسکالر  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$  به طور کلی، با توجه به دو بردار  $\mathbf{v}_1$  و  $\mathbf{v}_2$ ، حاصل ضرب اسکالر آنها برابر  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 v_2 \cos \theta$  است. چنین نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} p_e &= p_\gamma - p'_\gamma \\ p_e^2 &= p_e \cdot p_e = p_\gamma^2 - p_\gamma'^2 - 2 p_\gamma p'_\gamma \cos \theta \end{aligned} \quad (۶۹.۳)$$

با وارد کردن معادله (۶۳.۳) در معادله (۶۹.۳) و ضرب در  $c^2$ ، داریم:

$$p_e^2 c^2 = \left( \frac{hc}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{hc}{\lambda'} \right)^2 - 2 \frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta \quad (۷۰.۳)$$

در نهایت با برابر قرار دادن معادله (۶۹.۳) با معادله (۷۰.۳) فرمول کامپتون را بدست می‌آوریم:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (۷۱.۳)$$

که در آن ضریب  $\frac{h}{m_e c}$  طول موج کامپتون<sup>۳۱</sup> برای الکترون است، یعنی طول موجی که یک فوتون باید داشته باشد به طوری که انرژی آن برابر با جرم-انرژی الکترون باشد. این به راحتی با معادل سازی فرمول پلانک  $E = \frac{hc}{\lambda}$  با فرمول انیشتین  $E = mc^2$  قابل مشاهده است. فرمول (۷۱.۳) داده‌ها را به خوبی بازتولید می‌کند. فرمول پراکندگی کامپتون به طور رسمی با فرمول پراکندگی غیرکشسان بین اجسام جامد مانند توپ‌های بلیارد یکسان است. در این آزمایش خاص، فوتون را می‌توان به عنوان ذره تفسیر کرد که کاملاً انقلابی است زیرا نور، از جمله اشعه ایکس، مانند یک موج رفتار می‌کند. بعداً در کتاب خواهیم دید که این موج-ذره دوگانه در مکانیک کوانتومی بسیار مهم است. پس از تشخیص تجربی که فرضیه فوتون معتبر است، می‌توانیم به معادله (۵۷.۳) برگردیم و میانگین انرژی را تفسیر کنیم:

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (۷۲.۳)$$

به عنوان میانگین تعداد فوتون‌ها در حالت خاصی از فرکانس  $\nu$  در تعادل حرارتی در دمای  $T$  است. می‌توانیم به طور رسمی معادله (۷۲.۳) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\langle E \rangle = \langle n_\nu \rangle h\nu \quad (۷۳.۳)$$

<sup>۳۱</sup> طول موج کامپتون برای یک الکترون تقریباً برابر با  $2.426 \cdot 10^{-12}$  متر است.

که در آن  $\langle n_\nu \rangle$  تعداد متوسط فوتون است که به آن عدد اشغال فوتون<sup>۳۲</sup> نیز گفته می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle n_\nu \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (۷۴.۳)$$

مشاهده می‌شود وقتی  $1 \gg \frac{h\nu}{kT}$  است، پس  $\langle n_\nu \rangle \rightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}}$  یعنی ضریب توزیع کلاسیک بولتزمن (۴۸.۳) نشان می‌دهد که فیزیک کلاسیک را در فرکانس‌های بالا و دماهای پایین بدست می‌آوریم.

### ۷.۳ گرمای ویژه مواد جامد

مشارکت انیشتین در مراحل اولیه نظریه کوانتومی در فرضیه فوتون متوقف نشد. او کمی جلوتر رفت و سعی کرد پدیده‌های دیگری را توضیح دهد که فیزیک کلاسیک قادر به توضیح آنها نبود [۱۴].

در سال ۱۸۰۹ شواهد تجربی توسط دولونگ<sup>۳۳</sup> و پتی<sup>۳۴</sup> وجود داشت که نشان می‌داد ظرفیت گرمایی ویژه برخی عناصر، وقتی در دمای محیط اندازه‌گیری می‌شود، ثابت است. ظرفیت گرمایی ویژه، که معمولاً با  $C$  نشان داده می‌شود، مقدار گرمایی است که به یک مول از ماده داده می‌شود تا دمای آن را یک درجه افزایش دهد، بنابراین با  $Joule/K$  اندازه‌گیری می‌شود. قانون دولونگ و پتی بیان می‌کند که ظرفیت گرمایی مولی برای همه جامدات ثابت است:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = 3nR \quad (۷۵.۳)$$

که در آن  $R = 8.314463 J \cdot K/mol$  ثابت گاز و  $n$  تعداد مول‌های ماده است. اگر به جای تعداد مول‌ها از تعداد کل اتم‌ها/مولکول‌ها استفاده کنیم، قانون دولونگ و پتی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C = 3Nk \quad (۷۶.۳)$$

که در آن  $N$  تعداد کل اتم‌ها/مولکول‌ها و  $k$  ثابت بولتزمن است. می‌توانیم معادلات (۷۵.۳) و (۷۶.۳) کلاسیک را توضیح دهیم. با فرض اینکه هر مولکول به عنوان یک نوسان ساز هارمونیک آزاد با سه درجه آزادی فضایی و سه تکانه

<sup>۳۲</sup> Photon Occupation Number

<sup>۳۳</sup> پیر لوئیز دولونگ (۱۷۸۵ – ۱۸۳۸) فیزیک و شیمیدان فرانسوی بود که به خاطر مطالعاتش در زمینه ترمودینامیک شهرت داشت.

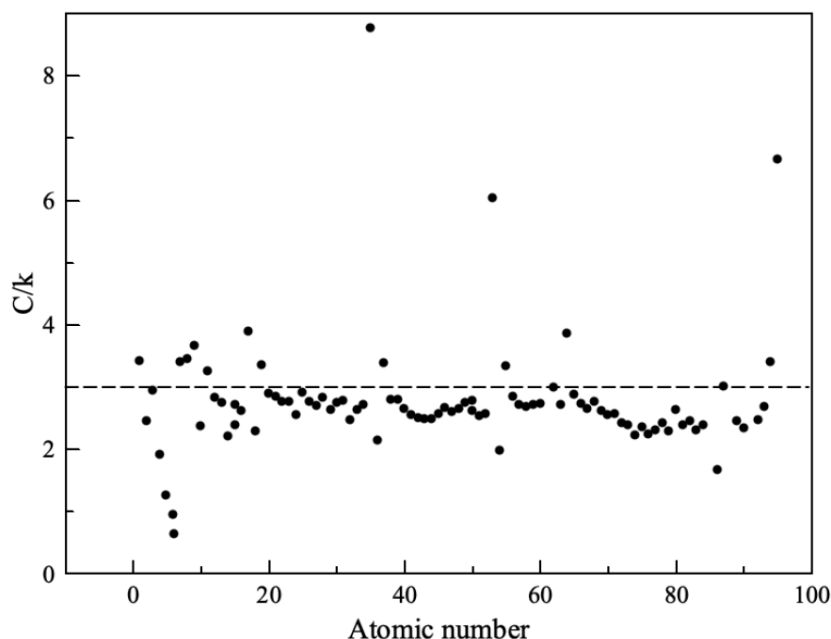
<sup>۳۴</sup> الکسیس ترز پتی (۱۷۹۱ – ۱۸۲۰) فیزیکدان فرانسوی بود که به خاطر کارش در مورد ترمودینامیک موتورهای بخار شهرت داشت.

<sup>۳۵</sup> گرمای ویژه را در حجم ثابت در نظر می‌گیریم.

ارتعاش می‌کند. قضیه برابری بیان می‌کند که هر درجه آزادی،  $\frac{1}{2}kT$  را به کل انرژی کمک می‌کند به‌طوری که:

$$E = 6 \cdot \frac{1}{2}kT = 3kT \quad (۷۷.۳)$$

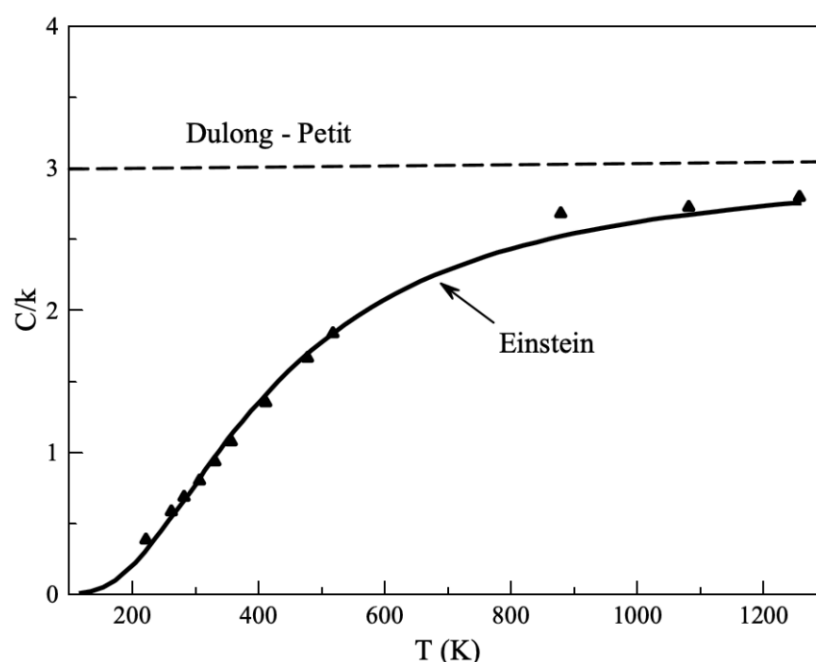
که از آن بعداز مشتق گرفتن معادله (۷۶.۳) را خواهیم داشت.



شکل ۱۲.۳: گرمای ویژه عناصر در برابر عدد اتمی در  $T = 25^\circ C$ . خط چین افقی در  $C/k = 3$  قانون دولونگ و پتی را نشان می‌دهد. داده‌ها از [۱].

قانون دولونگ و پتی (۷۵.۳) یا (۷۶.۳) با داده‌های تجربی مطابقت معقولی دارد، بخشی از برخی موارد پرت، همانطور که در شکل (۱۲.۳) نشان داده شده، مشروط بر اینکه دما بالاتر از مقدار بحرانی معمولی ماده باشد. هنگامی که دما کمتر از مقدار بحرانی است داده‌ها همانطوری که نشان می‌دهد  $C \rightarrow 0$ ، برای مثال، برای الماس در شکل (۱۳.۳) آمده است. رابطه خطی (۷۷.۳)، نتیجه قضیه برابری، نمی‌تواند شکست قانون دولونگ و پتی را توضیح دهد.

اینشتین به دنبال نظریه‌ای در مورد ماده جامد بود که قادر به توضیح ناهنجاری گرمای خاص بود. او سعی کرد ایده‌های جدید کوانتیزه شدن انرژی را که با موفقیت طیف تابش جسم سیاه را توضیح می‌دهد، ترکیب کند. به اصطلاح مدل اینشتین از یک جامد شامل  $N$  اتم/مولکول آزاد برای ارتعاش در فرکانس  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  محدود در نوعی چاه پتانسیل است. این فرضیه مستقیماً از موفقیت در توضیح تابش جسم سیاه با در نظر گرفتن کوانتیزاسیون تبادل انرژی بین نوسانگر در دیواره‌های جسم سیاه و تابش ناشی می‌شود. از آنجایی که میانگین انرژی نوسانگرها در حفره جسم سیاه برابر با  $3kT$  نیست که از



شکل ۱۳.۳: گرمای ویژه الماس به صورت تابعی از دمای  $T$ . نقاط داده اندازه‌گیری می‌شوند در حالی که خط مدل اینشتین است.

هم تقسیم‌پذیری می‌آید، انیشتین فرض کرد که برای توصیف صحیح گرمای ویژه یک جامد، هم تقسیم‌پذیری در نظر گرفته نمی‌شود. به گفته پلانک، معادله (۷۲.۳) میانگین انرژی یک نوسانگر را نشان می‌دهد. اگر حدی را در نظر بگیریم که  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$  است، یعنی فرکانس پایین و دمای بالا، داریم که:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} + \dots \quad (78.3)$$

با استفاده از تقریب (۷۸.۳)، انرژی متوسط می‌شود:

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx kT \quad (79.3)$$

در نتیجه بازیابی معادله کلاسیک و قانون دولونگ و پتی (بخشی از ضریب ۳ باید وارد شود).

اگر در عوض از عبارت پلانک برای میانگین انرژی استفاده کنیم، ظرفیت گرمایی مولی را با گرفتن مشتق بدست می‌آوریم:

$$C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = 3Nk \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2} \quad (80.3)$$

معادله (۸۰.۳) پیش‌بینی می‌کند که با صفر شدن دما، ظرفیت گرمایی به صفر می‌رسد.

مدل انیشتین به خوبی داده‌ها را توضیح می‌دهد (شکل ۱۳.۳) نشان می‌دهد که کوانتیزه کردن انرژی می‌تواند پدیده‌های فیزیکی مختلف را توضیح دهد. مدل انیشتین، اگرچه رفتار دمای پایین گرمای ویژه جامدات را به درستی پیش‌بینی می‌کند، انحرافات را از داده‌های تجربی نشان می‌دهد که عمدتاً به دلیل فرضیات بسیار ساده‌کننده است. برای مثال فرض بر این است که تمام نوسانگرها در یک فرکانس ارتعاش دارند در حالی که فرض کردن طیف پیچیده‌تری از نوسانات دقیق‌تر است. نظریه دقیق‌تری، فراتر از محدوده این کتاب، توسط دی‌بای<sup>۳۶</sup> ارائه شده است که از مجموعه‌ای دقیق‌تری از مفروضات استفاده می‌کند.

---

<sup>۳۶</sup>Debye



## فصل ۴

# نظریه کوانتوم اولیه: اتم بور

در سال 1913، یک فیزیکدان دانمارکی به نام نیلز بور<sup>۱</sup>، سعی کرد پیشنهاد پلانک را مبنی بر کوانتیزه شدن انرژی برای توصیف اتم‌ها بسط دهد. اساس تجربی و نظری مدل اتمی عمدتاً ناشی از کار جی جی تامسون، ای. رادرفورد و ان. بور در طی سال‌های 1900 تا 1913 بود. پس از کشف الکترون، در سال 1897، در یک سری آزمایش‌ها، تامسون الکترون را کشف کرد و یک سری خواص مهم از نسبت جرم به بار گرفته تا اینکه این ذره در تمام اتم‌ها و بار منفی بود.

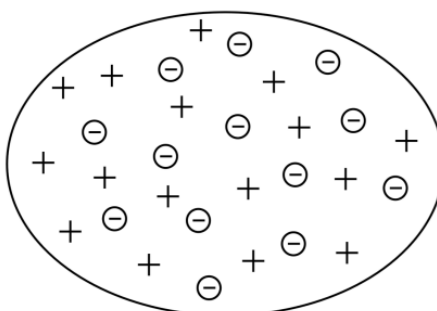
مشخص شد که می‌توان الکترون‌ها را از اتم‌ها استخراج کرد و چنین عملی جرم باقیمانده‌ای با بار مثبت بسیار بزرگ‌تر از جرم الکترون به جا می‌گذارد. بنابراین واضح بود که اتم‌ها تقسیم ناپذیر نیستند و الکترون‌ها باید به گونه‌ای در مکانیک اتم گنجانده شوند که بار الکتریکی کلی صفر باشد. ساده‌ترین مدل توسط تامسون، مدل "پودینگ آلو" نامیده می‌شود که در شکل (۱.۴) نشان داده شده است. در این مدل، ذرات با بار منفی (الکترون‌ها) در ابری با بار مثبت پراکنده می‌شوند تا اتم خنثی شود. الکترون‌ها می‌توانند در اطراف موقعیت تعادل خود ارتعاش کنند و در صورت تامین انرژی کافی می‌توان آنها را استخراج کرد. با توجه به جرم کوچک الکترون، اکثریت جرم اتم به بار مثبت نسبت داده می‌شود.

مدل تامسون قادر به توضیح آزمایش کلاسیک ای. رادرفورد در سال 1906 نبود. رادرفورد در حالی که در سال 1899 در کانادا کار می‌کرد، توانست سه نوع انتشار از مواد رادیواکتیو را شناسایی کند: تابش آلفا، بتا و گاما. او در یک سری آزمایش توانست تشخیص دهد که تابش بتا از الکترون‌ها و تابش آلفا از هسته‌های هلیوم تشکیل شده است که بسیار سنگین‌تر از الکترون‌ها و دارای بار مثبت هستند. در عوض، تابش گاما فوتون‌های بسیار پرانرژی بود.

رادرفورد سپس به این فکر افتاد که ساختار ماده را با بمباران ورقه‌های نازک فلزات با ذرات آلفا کشف کند. این کار پراکندگی ذرات آلفا از این واقعیت الهام گرفته شده است

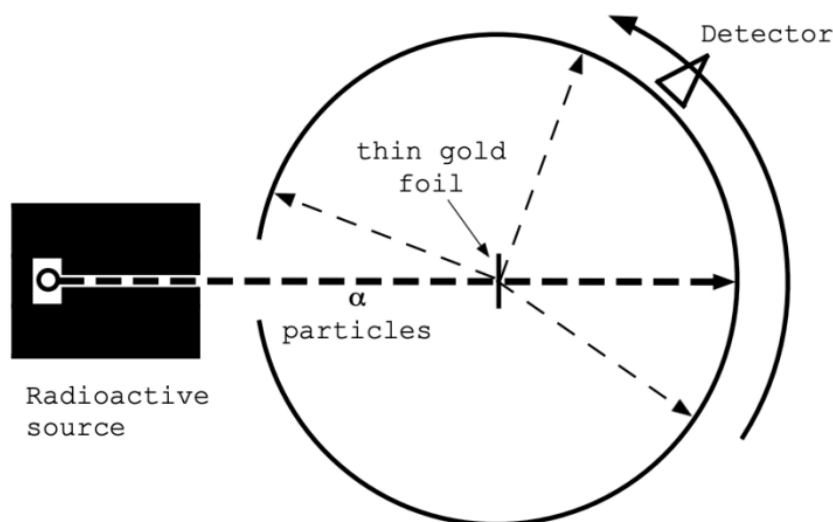
---

<sup>۱</sup> نیلز بور (1885 – 1962) فیزیکدان دانمارکی بود که یکی از بنیانگذاران مکانیک کوانتومی به‌شمار می‌رود. او در سال 1922 برنده جایزه نوبل فیزیک شد.



شکل ۱.۴: مدل پودینگ آلو تامسون از اتم. الکترون‌های با بار منفی در «دریایی» بار مثبت پراکنده می‌شوند.

که او قبلاً مشاهده کرده بود که برخی از ذرات آلفا، هنگامی که به‌هوا هدایت و پراکنده می‌شوند اما هیچ اندازه‌گیری کمی انجام نشده است. برای پیگیری این مشاهدات، او تصمیم گرفت بررسی کند که آیا پراکندگی زمانی که ذرات آلفا در حال عبور از جامدات هستند وجود دارد یا خیر. او از این واقعیت استفاده کرد که می‌توان طلا را چکش کاری کرد و به ورقه‌های بسیار نازک با ضخامت چند ده اتم تبدیل کرد. بنابراین هدف طلا به‌اندازه‌ای نازک بود که بیشتر ذرات آلفا بدون توقف قابل توجه به‌طور مؤثری از جامد عبور می‌کردند.

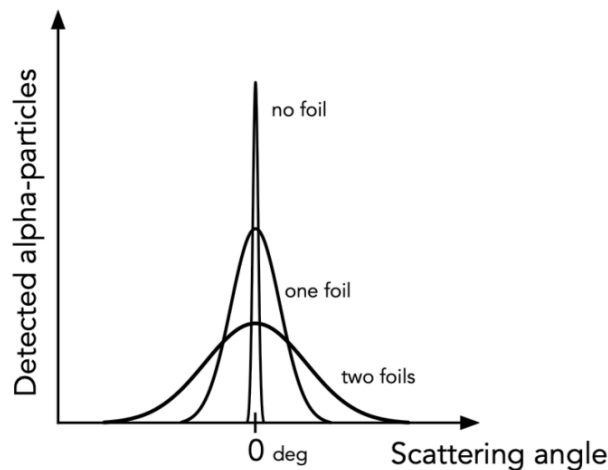


شکل ۲.۴: آزمایش رادرفورد پرتوی هماهنگ از ذرات آلفا به‌سمت ورقه طلای بسیار نازک هدایت می‌شود. اکثر ذرات آلفا از طریق پراکنده نشده عبور می‌کنند. چند ذرات آلفا در زوایای مختلف حتی در بیش از ۹۰ درجه از جهت اصلی پراکنده می‌شوند.

رادرفورد مقداری رادیوم رادیواکتیو را درون حفره‌ای از سرب محصور و در آن سوراخ نازک طولانی را تعبیه کرد (شکل ۲.۴). این به‌او اجازه داد تا پرتو نازکی از ذرات آلفا



تولید کند. او همچنین آگاه بود که ذرات آلفا سنگین (با توجه به جرم الکترون) و ذرات با بار مثبت هستند. رادرفورد مشاهده کرد که اکثر ذرات آلفا همچنان در جهت اصلی حرکت می‌کنند. با این حال، این مشاهدات گیج کننده است، برخی از ذرات حتی در زوایای بزرگ پراکنده شدند. مشاهده شد که تعدادی حتی به عقب پراکنده شده بودند.



شکل ۳.۴: نتایج آزمایش گایگر نشان می‌دهد که پراکندگی زمانی افزایش می‌یابد که یک و دو ورق طلا روی پرتو ذرات آلفا قرار گیرند.

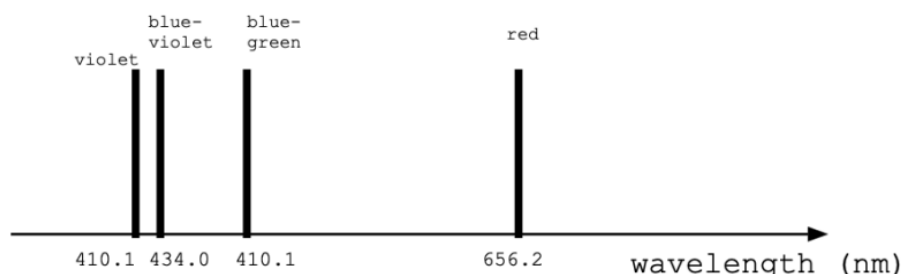
نتایج این آزمایش [۳۷] و سایر آزمایش‌های حساس‌تر که توسط همکارش گایگر انجام شد، در شکل (۳.۴) نشان داده شده‌اند. واضح است که زاویه پراکندگی زیاد برخی از ذرات آلفا و افزایش مسیر ذرات آلفا در داخل ماده باعث افزایش تعداد پراکنده‌های بزرگ می‌شود، که در مدل تامسون لحاظ نشده است. به قول خود رادرفورد [۳۷]:

«... به راحتی می‌توان محاسبه کرد که تغییر جهت دو درجه ... در این فاصله به یک میدان الکتریکی عرضی متوسط حدود ۱۰۰ میلیون ولت بر سانتی متر نیاز دارد. چنین نتیجه‌ای به وضوح این واقعیت را آشکار می‌کند که اتم‌های ماده باید محل نیروهای الکتریکی بسیار شدید باشند...»

کاملاً طبیعی است که مانند رادرفورد یک مدل سیاره‌ای از اتم پیشنهاد کنیم که در آن اکثر جرم در حجم کوچکی (هسته) متمرکز شده و الکترون‌ها به دور آن می‌چرخند. مکانیک چنین مدل اتمی با مکانیک سماوی تفاوتی نخواهد داشت، زیرا نیروهای الکتریکی دقیقاً درستی قانون مربع معکوس برای نیروی جاذبه دارند. بنابراین، طبق مدل رادرفورد، بیشتر جرم اتم در هسته‌ای متمرکز است که بار مثبت دارد، که الکترون‌های دارای بار منفی در مسیرهای دایره‌ای به دور آن می‌چرخند. اگر بار الکتریکی هسته با بار منفی الکترون‌ها متعادل شود، اتم از نظر الکتریکی خنثی است. نیروی الکتریکی با توجه به جاذبه گرانشی غالب است و بسیار قوی‌تر، اتم را نسبتاً کوچک می‌کند.

اگرچه مدل سیاره‌ای منطقی به نظر می‌رسید، اما یک مشکل اساسی در آن وجود داشت: پایداری آن. معادلات ماکسول اجازه نمی‌دهد که دو بار الکتریکی بدون انتشار امواج الکترومغناطیسی به دور یکدیگر بچرخند. امواج، از آنجایی که بارها دائماً شتاب

می گیرند. طبق فیزیک کلاسیک، الکترون باید خیلی سریع به سمت پروتون ساطع کننده امواج الکترومغناطیسی حرکت کند. امواج در این فرآیند ماده کلاسیک پایدار نیست.



شکل ۴.۴: چهار خط گسیل هیدروژن در قسمت مرئی طیف امواج الکترومغناطیسی.

علاوه بر این، اگر عناصر اتمی برانگیخته شوند، طیف انتشاری متشکل از ترکیبی از خطوط باریک امواج الکترومغناطیسی مشخصه عنصر را نشان می دهند. بخشی از طیف انتشار هیدروژن در ناحیه مرئی در شکل (۴.۴) نشان داده شده است. با توجه به اینکه هیدروژن ساده ترین عنصر است، جای تعجب نیست که طیف انتشار آن نسبتاً ساده به نظر می رسد. در واقع، برخی از محققان توانستند فرمولی تجربی پیدا کنند که قادر به پیش بینی طول موج خطوط هیدروژن با تطابق عالی با داده ها باشد. در سال ۱۸۸۰ جی. رایدبرگ<sup>۲</sup> دریافت که فرمول تجربی پیشنهادی او قادر است طیف انتشار بیشتر فلزات قلیایی را به خوبی پیش بینی کند:

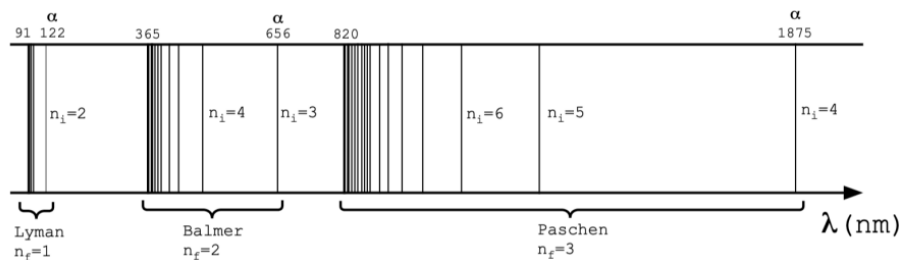
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (۱.۴)$$

که در آن  $R_H = 1.09678 \dots \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$  ثابت رایدبرگ است و  $n_1$  و  $n_2$  دو عدد صحیح هستند. فرمول (۱.۴) اصل ترکیبی ریتز-رایدبرگ است که طبق آن خطوط طیفی هر عنصر شامل مجموع یا اختلاف دو خط دیگر در همان طیف می شود.

نیلز بور، اخیراً در مورد کوانتیزه کردن پلانک در مورد نحوه تبادل انرژی نوسانگرها با امواج الکترومغناطیسی، تلاشی برای پیشنهاد یک مدل اتمی با ترکیب ایده های جدید در مورد کوانتیزاسیون تشعشع الکترومغناطیسی او به دلایل زیادی از مدل سیاره ای اتم راضی نبود. او در سخنرانی نوبل خود [۵] به وضوح بیان کرد که مسائل جدی با مدل سیاره ای و خواص اندازه گیری شده اتم ها وجود دارد. اولین و مطمئناً مهم تفاوت در این واقعیت است که در یک سیستم محدود گرانشی حرکت اجسام به طور کامل توسط قانون گرانش تعیین نمی شود بلکه به شدت به تاریخچه سیستم بستگی دارد. بور خاطرنشان می کند که برای مثال، طول سال در منظومه زمین-خورشید توسط جرم خورشید و زمین تعیین نمی شود، بلکه تا حد زیادی به تاریخ قبلی بستگی دارد تا مراحل اولیه شکل گیری زمین. منظومه شمسی اگر جسم بزرگی از منظومه شمسی عبور کند، مدار را مختل می کند و طول سال را تغییر می دهد.

<sup>۲</sup>J. Rydberg

از سوی دیگر، در مورد اتم‌ها، خواص آنها حتی زمانی که در معرض اغتشاشات نسبتاً بزرگ قرار می‌گیرند، بدون تغییر باقی می‌مانند. در واقع، اگر مدت زمان کافی صبر کنیم، اتم آشفته به حالت اولیه خود باز خواهد گشت که تنها به جرم و بار ذرات بنیادی سازنده خود اتم بستگی دارد.



شکل ۵.۴: سری‌های لیمن، بالمر و پاشن در خطوط انتشار هیدروژن.

طیف انتشار اتم هیدروژن در شکل (۵.۴) مثال بسیار قانع کننده‌ای است. در این طیف خطوط انتشار بسیاری را در طول موج‌های بسیار خاص می‌بینیم که با دقت و ظرافت بسیار بالا اندازه‌گیری شده است. طول موج خطوط طیفی کاملاً مستقل از تاریخچه، یعنی رفتار ماده است.

یکی دیگر از ویژگی‌های قابل توجه طیف (۵.۴) شامل نظم آشکار طول موج‌هایی است که خطوط در آن قرار دارند. این کاملاً طبیعی است که الکترون‌ها در نتیجه یک حرکت نوسانی هارمونیک ساده حول یک موقعیت تعادلی امواج الکترومغناطیس تابشی ساطع می‌کنند. با این حال، فیزیک کلاسیک نمی‌تواند این طیف‌ها را توضیح دهد و ایده‌های جدیدی مورد نیاز است.

بور برای توضیح پایداری اتم و خواص تشعشعات منتشر شده، دو فرض ساده را مطرح کرد: (1) سیستم‌های اتمی در حالت‌هایی به نام **حالت ساکن**<sup>۳</sup> وجود دارند که در آن ذرات باردار از قوانین مکانیک کلاسیک پیروی می‌کنند اما همچنان پایداری مکانیکی دارند، یعنی وقتی در چنین حالت ایستایی قرار دارد امواج الکترومغناطیسی تابش نمی‌کنند، حتی اگر ظاهراً در معرض شتاب قرار گرفته باشند و بنابراین مغایر با الکترودینامیک کلاسیک است. (2) انتشار تشعشع امواج الکترومغناطیسی در صورتی صورت می‌گیرد که اتم بین دو حالت ساکن جابجا شود. توجه داشته باشید که حالت‌های ساکن با حالتی که انرژی سیستم  $E$  ثابت است نیز تعریف می‌شود. بنابراین فرآیند انتشار امواج الکترومغناطیسی تابشی بین دو حالت ساکن که با انرژی‌های  $E'$  و  $E''$  مشخص می‌شوند عبارتند از:

$$\Delta E = h\nu = E' - E'' \quad (۲.۴)$$

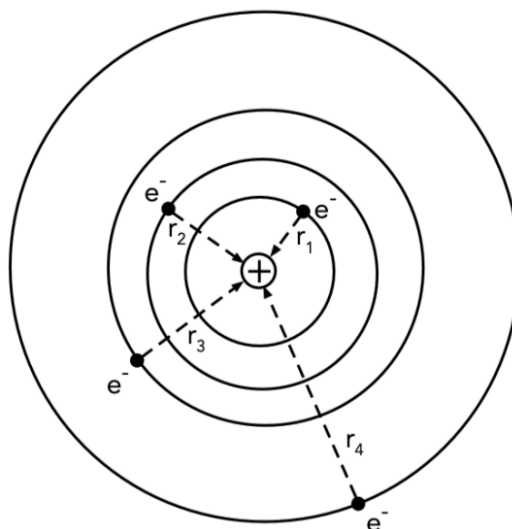
که در آن  $h$  ثابت پلانک است و  $E'$  و  $E''$  به ترتیب حالت‌های ساکن اولیه و نهایی هستند. بدیهی است که برای داشتن انتشار باید  $E' > E''$  داشته باشیم.

<sup>۳</sup> Stationary States

فرضیه‌های بور بلافاصله از طریق معادله (۲.۴) توضیحی از اصل ترکیب ریدبرگ-ریتز ارائه می‌دهند. بور توانست معادله (۱.۴) را توضیح دهد. اگر فرض کنیم که تکانه زاویه‌ای  $L$  الکترون در مدارش به دور پروتون کوانتیزه شود:

$$L = m_e v r_n = n h \quad (۳.۴)$$

که در آن  $m_e$  جرم الکترون،  $v$  سرعت مداری آن در مدار دایره‌ای  $n$ ام، با  $n$  یک عدد صحیح و  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ثابت پلانک تقلیل یافته است. اگر از مکانیک کلاسیک، همراه با فرض‌های بور استفاده کنیم، نه تنها می‌توانیم فرمول ریدبرگ (۱.۴) را استخراج کنیم، بلکه می‌توانیم مقدار ثابت ریدبرگ  $R$  را نیز استخراج کنیم. علاوه بر این، چند ویژگی دیگر اتم هیدروژن مانند سطوح انرژی، انرژی یونیزاسیون و اندازه مدارهای الکترون را می‌توان استخراج کرد.



شکل ۶.۴: مدل اتمی بور.

اندازه مدارهای بور را می‌توان با معادل سازی نیروی مرکزگرا وارد بر الکترون با جاذبه الکترواستاتیکی بدست آورد:

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \quad (۴.۴)$$

که در آن  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  گذردهی خلاء و  $e$  مقدار بار بنیادی است. با استفاده از معادله (۳.۴) می‌توانیم شعاع و سرعت الکترون  $n$ امین مدار است:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{n^2 \hbar} \\ r_n &= 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{m_e e^2} \end{aligned} \quad (۵.۴)$$

توجه کنید که در معادله (۵.۴) هم سرعت الکترون و هم شعاع مدارها فقط به عدد صحیح  $n$  بستگی دارد، زیرا تمام کمیت‌های دیگر ثابت هستند. می‌بینیم که اندازه مدار در  $n$

درجه دوم است در حالی که سرعت با  $n$  به صورت خطی کاهش می‌یابد. اگر  $n = 1$  را در معادله دوم در (۵.۴) وارد کنیم، کوچکترین مدار را در اتم هیدروژن به دست می‌آوریم. این شعاع را **شعاع بور** می‌نامند و به صورت  $a_0$  نشان داده می‌شود:

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \quad (۶.۴)$$

شعاع بور  $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$  متر است و با مقدار اندازه‌گیری شده اتم هیدروژن قابل مقایسه است. از معادله (۵.۴) می‌بینیم که سرعت الکترون در اولین مدار بور  $v_1 \sim 2 \times 10^6$  متر بر ثانیه بسیار کمتر از سرعت نور است، بنابراین استفاده از مکانیک غیرنسبیتی را توجیه می‌کند.

اگر به کاربرد مکانیک کلاسیک برای الکترون در حال گردش ادامه دهیم، می‌توانیم انرژی کل آن را به صورت مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل بیان کنیم:

$$E_n = T_n + V_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} \quad (۷.۴)$$

با وارد کردن مقادیر  $r_n$  و  $v_n$  معادله (۵.۴) پیدا می‌کنیم:

$$E_n = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{32\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (۸.۴)$$

و می‌بینیم که انرژی فقط به شاخص  $n$  بستگی دارد، همانطور که در مورد سرعت و شعاع مدارها وجود دارد. انرژی اولین مدار داخلی اتم هیدروژن برابر است با:

$$E_1 = -\frac{1}{32\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = -13.6 \text{ eV}. \quad (۹.۴)$$

توجه داشته باشید که شاخص “۱” در انرژی به  $n = 1$  اشاره دارد. با استفاده از معادله (۹.۴) می‌توانیم انرژی را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad (۱۰.۴)$$

که نشان می‌دهد تعداد بی‌نهایت حالت انرژی وجود دارد. مهمتر، معادله (۱۰.۴) نشان می‌دهد که الکترون در حال گردش فقط می‌تواند مجموعه‌ای از انرژی‌های گسسته داشته باشد، یعنی انرژی **کوانتیزه**<sup>۴</sup> شده است. تنها یک حالت انرژی با کمترین انرژی ممکن وجود دارد،  $E_1$ ، مربوط به  $n = 1$ ، که به آن **حالت پایه**<sup>۵</sup> می‌گویند.

در قیاس کامل با جسمی که از نظر گرانشی به دور جسم دیگری می‌چرخد که در فصل اول بحث شد، انرژی منفی الکترون به این معنی است که الکترون به مدار پروتون محدود می‌شود و مدار دایره‌ای کمترین انرژی را دارد.

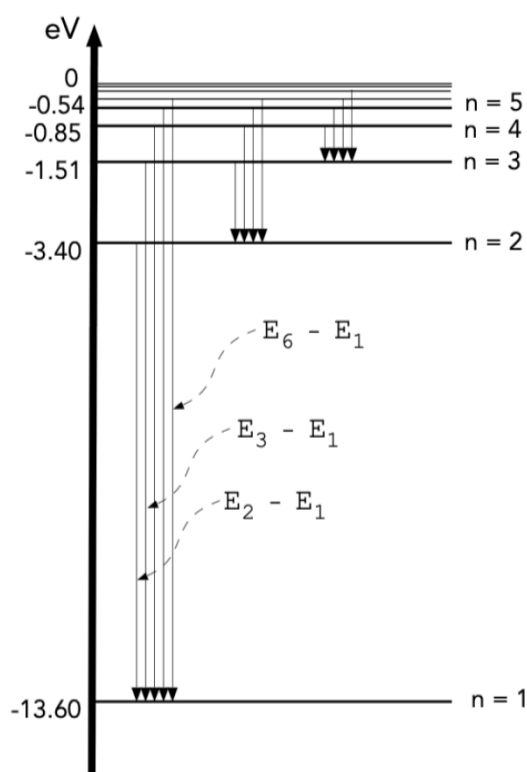
حالاتی که مقادیر بالاتری از  $n$  دارند، **حالت‌های برانگیخته**<sup>۶</sup> نامیده می‌شوند. می‌بینیم که برای  $n \rightarrow \infty$  انرژی (۱۰.۴) به صفر میل می‌کند، که مربوط به عدم اتصال الکترون

<sup>۴</sup>Quantized

<sup>۵</sup>Ground State

<sup>۶</sup>Excited States

دیگر به پروتون است. در نتیجه، می‌توانیم انرژی  $E_1$  را به‌عنوان حداقل انرژی مورد نیاز برای استخراج یک الکترون از اتم هیدروژن تفسیر کنیم که  $E_1$  پایین‌ترین سطح انرژی است. این انرژی را انرژی یونیزاسیون می‌نامند. در نتیجه، انرژی الکترون محدود شده در داخل اتم هیدروژن در بازه  $-13.6 < E < 0\text{eV}$  است.



شکل ۷.۴: سطوح انرژی اتم هیدروژن

می‌توانیم طیف انرژی اتم هیدروژن را با ترسیم یک سری خطوط افقی در مقیاس عمودی که مجموعه حالت‌های ساکن را نشان می‌دهند، بسازیم (شکل ۷.۴). خط نهایی در انرژی  $E_1 = -13.6\text{eV}$  حالت پایه است. حالت اول در  $n = 2$  دارای انرژی  $E_2 = -3.4\text{eV}$  و غیره است. اگرچه گسسته است، اما بی‌نهایت حالت‌های انرژی منفی وجود دارد که به انرژی صفر تمایل دارند، زمانی که الکترون دیگر به اتم متصل نیست. انرژی یونیزاسیون پیش‌بینی شده  $-13.6\text{eV}$  مطابقت خوبی با داده‌های تجربی دارد.

به‌گفته‌بور، مکانیسم انتشار موج الکترومغناطیسی با خطوط عمودی رو به پایین نشان داده می‌شود که حالت‌ها را در  $n$  مختلف به هم متصل می‌کنند. فوتون‌ها تنها زمانی گسیل می‌شوند که یک الکترون از یک حالت ساکن به حالت ساکن دیگر منتقل شود. سپس انرژی فوتون ساطع شده توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$E_{nm} = h\nu = E_n - E_m = \frac{E_1}{n^2} - \frac{E_1}{m^2} \quad (11.4)$$

انتشار تنها در شرایطی امکان پذیر است که  $n > m$  باشد. اکنون قدرت مدل بور را با استخراج فرمول ریدبرگ (۱.۴) نشان می‌دهیم. اگر فرکانس را بر حسب طول موج در معادله (۱.۴) بیان کنیم، داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_1}{hc} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (۱۲.۴)$$

با مقایسه معادله (۱.۴) با معادله (۱۲.۴) می‌بینیم که نظریه بور قادر است  $R_H$  ثابت تجربی ریدبرگ را بر حسب ثابت‌های اساسی بیان کند. در واقع، معلوم می‌شود که مقدار بور برای ثابت ریدبرگ خواهد بود:

$$\frac{E_1}{hc} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{hc} = 1.097 \times 10^{-2} \text{ nm}^{-1} \quad (۱۳.۴)$$

که تطابق عالی با مقادیر تجربی دارد. همچنین با معکوس کردن تمام پیکان‌های شکل (۷.۴)، جذب به راحتی توضیح داده می‌شود. در این حالت، هنگامی که سطح انرژی  $n$  کم‌تر از سطح انرژی  $m$  است، یک الکترون با جذب فوتون با انرژی دقیقاً برابر با  $E = E_m - E_n$  از مدار  $n$  به مدار  $m$  می‌پرد. در این صورت طیف جذبی به خطوط سیاه خطی در یک طیف پیوسته نگاه می‌کند.

## ۱.۴ دیپرولی

دیدیم که مدل بور، بر اساس چند فرضیه، قادر به توضیح برخی از ویژگی‌های عجیب اتم هیدروژن است. دو موفقیت اصلی عبارتند از: توضیح فرمول ریدبرگ و بیان ثابت تجربی ریدبرگ بر حسب ثابت‌های بنیادی و محاسبه اندازه اتم در توافق با اندازه‌گیری‌ها. پایداری اتم صرفاً با بیان اینکه الکترون‌ها در مدارهای ثابت وجود دارند و به دلایل نامعلومی امواج الکترومغناطیسی ساطع نمی‌کنند توضیح داده شد. امواج حتی اگر در معرض شتاب ثابت باشند. بیایید یادآوری کنیم که طبق الکترومغناطیس کلاسیک، بارهای شتاب‌دار تشعشع می‌کنند. بنابراین، الکترونی که به دور یک پروتون می‌چرخد باید امواج الکترومغناطیسی ساطع کند و انرژی خود را از دست داده و به سرعت به سمت پروتون حرکت و ماده را بسیار ناپایدار می‌کنند. طبق فیزیک کلاسیک، ماده ذاتاً ناپایدار است.

در تلاش برای درک دینامیک الکترون‌های در حال گردش، لوئیس دیپرولی<sup>۷</sup> DE BROGLIE در پایان‌نامه دکترای خود [۱۱] در سال ۱۹۲۴ فرضی را مطرح کرد: الکترون‌ها و به طور کلی ذرات بنیادی با ترکیبی از ویژگی‌های ماده و موج مشخص می‌شوند. برای هر ذره بنیادی، موجی وجود دارد که برای تعیین خواص دینامیکی آن لازم است. از این مفهوم به عنوان **دوگانگی موج و ذره** یاد می‌شود.

هنگامی که در مورد فرضیه فوتون انیشتین بحث می‌کردیم، نگاهی اجمالی به چنین دوگانگی داشتیم. در واقع، دیده‌ایم که فوتون در هنگام اندازه‌گیری پراکندگی کامپتون

<sup>۷</sup>لویی ویکتور پیر ریموند، هفتمین دوک دیپرولی (۱۸۹۲ – ۱۹۸۷) یک فیزیکدان فرانسوی بود که سهم مهمی در توسعه نظریه کوانتومی داشت که در متن توضیح داده شد. او در سال ۱۹۲۹ جایزه نوبل فیزیک را دریافت کرد.

دارای خواص ذره‌ای است در حالی که دارای خواص موجی است که توسط تداخل نور و پراش نشان داده می‌شود. دیپرولی، درک مستقیم این دوگانگی نور و ذرات ماده است. دیپرولی با رابطه جرم-انرژی نسبیت خاص اینشتین شروع کرد:

$$E = m_0 c^2 \quad (۱۴.۴)$$

که در آن  $m_0$  جرم باقیمانده یک ذره است. دیپرولی اکنون از رابطه پلانک استفاده کرد:

$$E = h\nu \quad (۱۵.۴)$$

و با مساوی قرار دادن معادله (۱۴.۴) با معادله (۱۵.۴) داریم:

$$h\nu = m_0 c^2 \quad (۱۶.۴)$$

یا بر حسب طول موج:

$$\frac{h}{\lambda} = m_0 c \quad (۱۷.۴)$$

معادله (۱۷.۴) اشاره به این دارد که بین تکانه یک ذره (سمت راست (۱۷.۴) حاصل ضرب جرم با سرعت است) با برخی ویژگی‌های موج مانند طول موج  $\lambda$ ، مرتبط با خود ذره وجود دارد. دیپرولی این امواج را **امواج پیلوت (راهنما)**<sup>۸</sup> نامید. این طول موج را نباید با طول موج تشعشع امواج الکترومغناطیسی اشتباه گرفت. بنابراین، دیپرولی این فرض جسورانه را مطرح کرد که برای هر ذره پرجرم، یک موج مرتبط با طول موج  $\lambda$  وجود دارد که توسط:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (۱۸.۴)$$

که در آن  $p$  تکانه ذره‌ای به جرم  $m$  است محاسبه می‌شود. اگر اکنون اجازه دهیم این موج با خودش تداخل داشته باشد، چیز جالبی کشف می‌کنیم: مدارهای پایدار اتم‌های هیدروژن، که با موفقیت توسط بور محاسبه شده است، مدارهایی هستند که امواج راهنما<sup>۹</sup> برای آنها ساکن هستند، یعنی امواج ایستاده هستند. در واقع از معادله (۴.۴) داریم:

$$e^2 = 4\pi\epsilon_0 m_e v^2 r_n \quad (۱۹.۴)$$

و اگر مقدار  $e^2$  را از معادله (۱۹.۴) در  $r_n$  معادله (۵.۴) قرار دهیم داریم:

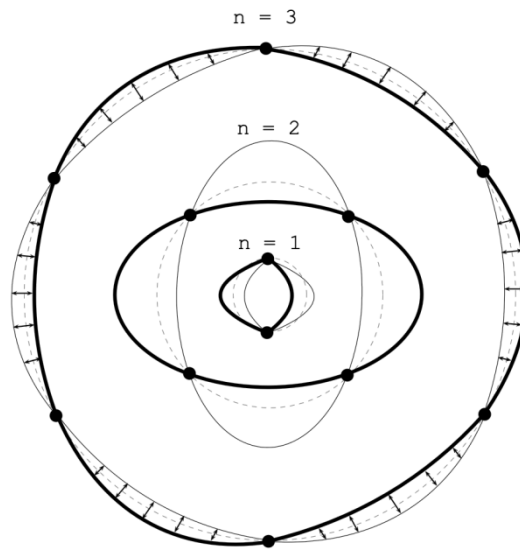
$$2\pi r_n = \frac{h}{mv} \cdot n = n\lambda \quad (۲۰.۴)$$

که به ما می‌گوید که مدارهای کوانتیزه شده بور آن مدارهایی هستند که امواج راهنما دیپرولی برای آنها ثابت و مضربی از عدد صحیح  $n$  هستند. همانطور که در شکل (۸.۴) نشان داده شده است، می‌توانیم ایده‌های دیپرولی را با پیچیدن یک موج دوبعدی ثابت در درون خود روی یک سری دایره‌های متحدالمرکز تجسم کنیم.

<sup>۸</sup>Pilot Waves

<sup>۹</sup>Pilot waves





شکل ۸.۴: مدل اتم هیدروژن دیپرولی. سه مدار دایره‌ای اول همراه با سه موج ایستاده اولیه نشان داده شده‌اند. نقاط سیاه گره‌های امواج ایستاده (ساکن) هستند.

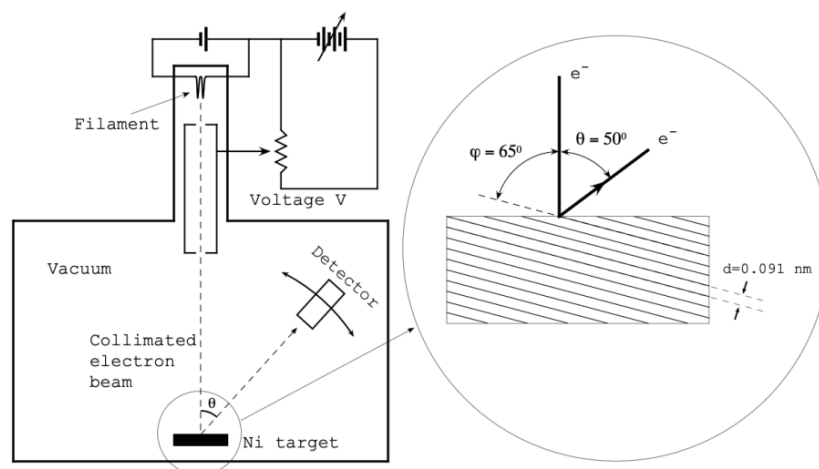
اتم هیدروژن دیپرولی، همانطور که در شکل (۸.۴) نشان داده شده است، شبیه یک آلات موسیقی است که در آن مدار کمترین انرژی، مربوط به  $n = 1$ ، آهنگ اصلی و بالاترین مدارهای انرژی، مربوط به مقادیر بالاتر  $n$ ، تون‌ها هستند. شرط در معادله (۲۰.۴) مربوط به داشتن یک طول موج کامل از موج راهنما است که  $n = 1$  با دو گره از موج ثابت است.  $n$  مدار بالاتر با امواج ثابت با  $2n$  گره مشخص می‌شود. مدل اتم هیدروژن دیپرولی از نظر ریاضی معادل مدل بور است، اما همانطور که گامو [۱۷] اشاره کرد، این ایده را اضافه می‌کند الکترونی که به دور پروتون می‌چرخد با یک موج مرتبط با طول موج  $\lambda = \frac{h}{p}$  مشخص می‌شود که قادر به تداخل با خودش است. این واقعیت که این موج مرتبط ثابت است، به این واقعیت مربوط می‌شود که الکترون ساطع کننده امواج الکترومغناطیسی به سمت پروتون مارپیچ پایین نمی‌آید و در نتیجه باعث پایداری ماده می‌شود.

## ۲.۴ آزمایش دیویسون و ژرمر

به نظر می‌رسد این واقعیت قابل توجه که فرضیه دیپرولی در مورد امواج آزمایشی، زمانی که روی اتم هیدروژن اعمال می‌شود، با نظریه بور مطابقت بسیار خوبی دارد، به نظر می‌رسد که پایه و اساس دوگانگی ماده-موج مشخصه ذرات بنیادی مانند الکترون‌ها است. مدت کوتاهی پس از پیشنهاد دیپرولی، یک راستی آزمایشی تجربی ایده‌های دیپرولی با موفقیت انجام شد.

در سال ۱۹۲۷ دو فیزیکدان آمریکایی، دیویسون<sup>۱۰</sup> و گرمر<sup>۱۱</sup> Germer، آزمایشی

<sup>۱۰</sup>کلینتون جوزف دیویسون (۱۸۸۱ – ۱۹۵۸) فیزیکدان آمریکایی بود که بیشتر به خاطر آزمایش خود بر روی پراش الکترون‌ها که در متن شرح داده شده است شناخته شده است. او در سال ۱۹۳۷ برنده جایزه نوبل فیزیک



شکل ۹.۴: آزمایش دیویسون و گرمر. یک پرتو موازی شده از الکترون‌ها روی یک هدف نیکل متمرکز شده است. الکترون‌های پراش شده در زوایای مختلف  $\theta$  ثبت می‌شوند.

را طراحی کردند که در شکل (۹.۴) ترسیم شده است [۱۰]. مشخص شد پراش زمانی ایجاد می‌شود که اشعه ایکس به یک کریستال برخورد کند. به طور خاص، زاویه حداکثر بازتاب توسط قانون براگ<sup>۱۲</sup> داده شده است:

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (۲۱.۴)$$

که در آن  $d$  فاصله صفحات کریستالی و  $\theta$  زاویه بین پرتوهای تابشی و صفحه کریستالی مسئول پراش است. در قیاس کامل با پراش پرتو ایکس براگ، اگر الکترون‌ها را با یک تکانه متناظر به انرژی جنبشی مناسب شتاب دهیم، می‌توانیم طول موج پرتو ایکس را مطابقت دهیم و انتظار داشته باشیم که الکترون‌ها با همان قانون (۲۱.۴) پراش شوند. تنها تفاوت این خواهد بود که به جای تابش امواج الکترومغناطیسی با طول موج  $\lambda$ ، اکنون الکترون‌هایی داریم که یک موج راهنما با همان طول موج  $\lambda$  مرتبط هستند.

دیویسون و گرمر باید کریستالی را انتخاب می‌کردند که فاصله آن به گونه‌ای باشد که تحت ولتاژ شتاب معقول الکترون‌ها، طول موج دیپرولی در حد فاصله شبکه باشد.

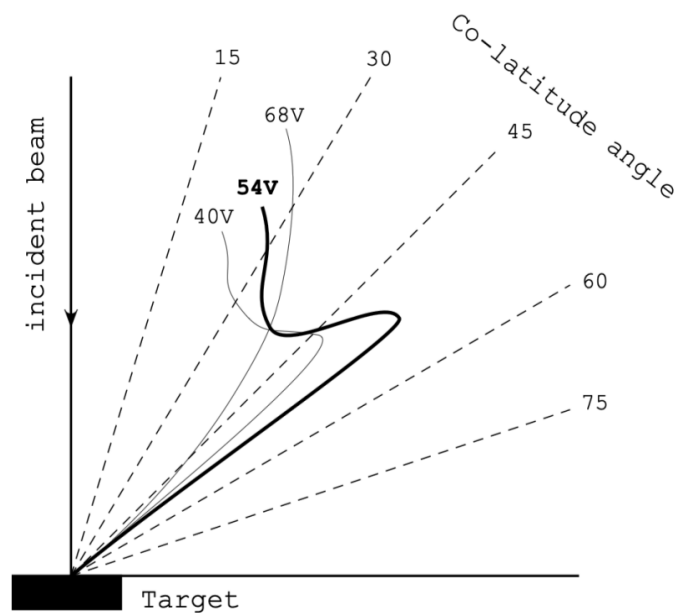
معلوم شد که نیکل کاندیدای خوبی است زیرا قبلاً با پراش پرتو ایکس معمولی مطالعه شده بود و بنابراین هندسه شبکه آن به خوبی درک شده بود. مشخص شد که کریستال نیکل بین صفحات اتمی ۰.۰۹۱ نانومتر فاصله دارد.

دیویسون و گرمر نمونه نیکل خود را به گونه‌ای آماده کردند که پرتوی عمود بر برخورد الکترون‌ها با شبکه برهمکنش داشته باشد، همانطور که در شکل (۹.۴) نشان داده شده است. هنگامی که آنها آزمایش خود را انجام دادند، مشخص شد که آشکارساز الکترون،

شد.

<sup>۱۱</sup>الستر هالبرت گرمر (۱۸۹۶ – ۱۹۷۱) فیزیکدان آمریکایی بود که با کلینتون دیویسون ثابت کردند که الکترون‌ها بر اساس فرضیه دیپرولی پراش می‌شوند.

<sup>۱۲</sup>Bragg's law



شکل ۱۰.۴: شدت الکترون‌های پراکنده در مقابل زاویه برخورد پرتو الکترونی همسو شده به هدف  $Ni$ . هنگامی که الکترون‌ها با ولتاژ  $V = 54$  ولت شتاب می‌گیرند یک پیک (قله) واضح نشان داده می‌شود.

زمانی که الکترون‌ها را تا اختلاف پتانسیل  $V = 54$  ولت شتاب داده شوند، یک پیک واضح را در الکترون‌های بازتابیده با زاویه ۵۰ درجه، همانطور که در شکل (۱۰.۴) نشان داده شده، اندازه‌گیری کردند. اگر اکنون همانطور که دیویسون و گرمر انجام دادند، طول موج دو بروگلی مرتبط با الکترون‌ها را محاسبه کنیم، متوجه می‌شویم که:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_e} \approx \frac{h}{\sqrt{2m_e T}} \quad (22.4)$$

که در آن  $\lambda_{dB}$  طول موج دیپرولی و  $p_e$  تکانه الکترون‌هایی است که با استفاده از تعریف غیرنسبیتی انرژی جنبشی  $T = \frac{1}{2}mv^2$  و از آن  $mv = \sqrt{2mT}$  حاصل می‌شوند. معادله (۲۲.۴) برای الکترون‌های غیرنسبیتی، یعنی برای سرعت‌های الکترونی بسیار کمتر از سرعت نور<sup>۳</sup>،  $v \ll c$ ، معتبر است.

الکترون‌ها، وقتی تحت یک اختلاف پتانسیل  $V_0$  ولت قرار می‌گیرند، انرژی جنبشی برابر با  $V_0 eV$  یا  $V_0 \times 1.602 \times 10^{-19} J$  به‌دست می‌آورند. معادله (۲۲.۴) می‌شود:

$$\lambda_{dB} \approx \frac{h}{\sqrt{2m_e T}} = 0.166 nm \quad (23.4)$$

اکنون، اجازه دهید با استفاده از معادله براگ (۲۱.۴)، طول موج یکسانی را که برای امواج الکترومغناطیسی به‌دست می‌آوریم بررسی کنیم. با بررسی شکل (۹.۴) نشان می‌دهد که

<sup>۳</sup>در واقع انرژی جنبشی الکترون  $54 eV$  نسبت به جرم سکون الکترون  $0.51 MeV$  (مگا الکترون ولت) ناچیز است.

زاویه تابش مورد استفاده  $\phi = 65^\circ$  است زیرا صفحه اتم‌های مسئول پراش نسبت به سطح کریستال به پرتو الکترون‌های تابشی متمایل هستند. با استفاده از زاویه  $\phi = 65^\circ$  در معادله (۲۱.۴)، داریم:

$$\lambda_{em} \approx 2 \times 0.091 \times \sin 65^\circ = 0.166 \text{ nm} \quad (24.4)$$

که توافق عالی با معادله (۲۳.۴) دارد. توجه داشته باشید که از  $n = 1$  در معادله (۲۱.۴) استفاده کردیم.

توافق بین نتایج در معادلات (۲۳.۴) و (۲۴.۴) به وضوح نشان می‌دهد که فرضیه امواج آزمایشی دیپروولی قادر به توضیح تعدادی از آزمایشات است که در آن فیزیک کلاسیک شکست می‌خورد. اگر الکترون‌ها را ذرات کوچک کلاسیک در نظر بگیریم، توضیح چنین رفتاری بسیار دشوار خواهد بود: چه چیزی تداخل دارد؟

## ۳.۴ ارتباط با ثابت پلانک

دیدیم که برای توضیح تعداد زیادی از نتایج تجربی، پلانک مجبور شد مفهوم کوانتیزه شدن انرژی را طبق معادله (۳۱.۳) معرفی کند. این واقعیت که ثابت پلانک  $h$  کوچک و در حد  $10^{-34} \text{ Js}$  است، به ما توضیح می‌دهد که چرا برخی از پدیده‌های فیزیکی به نظر می‌رسد به سیستم‌هایی که در مقایسه با اندازه انسان‌ها بسیار کوچک هستند تنزل داده شوند. همچنین توجه کنید که ثابت پلانک دارای بعد فیزیکی عمل مکانیکی است، یعنی انرژی ضربدر زمان یا تکانه ضربدر طول.

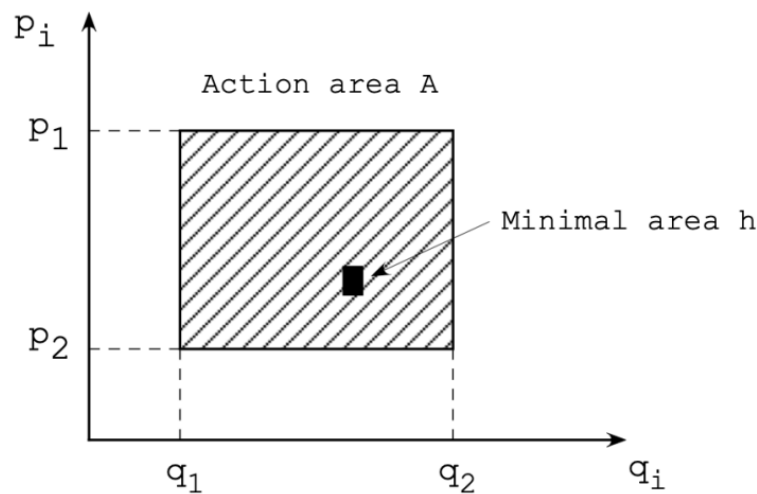
برای تعیین مقیاس مکان (و زمان) اهمیت پدیده‌های کوانتومی، باید ثابت پلانک را با جزئیات بیشتری مورد بحث قرار دهیم. اولین نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که هر بار یک ثابت بنیادی جدید، یعنی ثابتی که بر حسب سایر ثابت‌ها بیان نمی‌شود، اما نیاز به اندازه‌گیری دارد، حوزه جدیدی از فیزیک را باز می‌کند. برای مثال، ثابت گرانشی نیوتن  $G$ ، میدان گرانش را ابتدا با نیوتن و سپس با نظریه نسبیت عام اینشتین باز کرد. این واقعیت نسبتاً ساده که سرعت نور ثابت است و به وضعیت حرکت ناظر بستگی ندارد، نظریه نسبیت خاص اینشتین را ایجاد کرده است. ثابت پلانک، همانطور که در این کتاب در مورد آن بحث می‌کنیم، با مکانیک کوانتومی ارتباط نزدیکی دارد. واحدهای  $h$  برابر  $J \cdot s$  بوده و در فیزیک کلاسیک واحد عمل-کنش<sup>۱۴</sup> هستند.

قبلاً در هنگام بحث در مورد فرمول لاگرانژی مکانیک کلاسیک با مفهوم کنش مکانیکی روبرو شده‌ایم. به عنوان یک اصل بیان کردیم که معادله حرکت یک سیستم مکانیکی را می‌توان از طریق اصل عمل ساکن به دست آورد. این فرمول زیبا و قدرتمند مکانیک کلاسیک به ما می‌گوید که مفهوم کنش نقش اساسی دارد. مفهوم کنش، از طریق ثابت پلانک، زمانی برمی‌گردد که نوع جدیدی از نظریه برای توضیح پدیده‌هایی که با فیزیک کلاسیک قابل توضیح نیستند مورد نیاز باشد. اکنون یک مفهوم بزرگ و مهم جدید وجود دارد: ثابت پلانک به ما می‌گوید که عمل کوانتیزه شده است و حداقل مقدار کنش

<sup>۱۴</sup> Action

در هر سیستم مکانیکی وجود دارد. طبیعت به گونه‌ای مهندسی شده است که بدون توجه به جزئیات هر سیستم مکانیکی، میزان عمل مرتبط با آن نمی‌تواند کمتر از  $h$  باشد. طبق اصل موپرتیوز<sup>۱۵</sup>، که قبلاً به‌طور خلاصه در فصل اول مورد بحث قرار گرفت، عمل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \int_{q_1}^{q_2} p dq \quad (25.4)$$



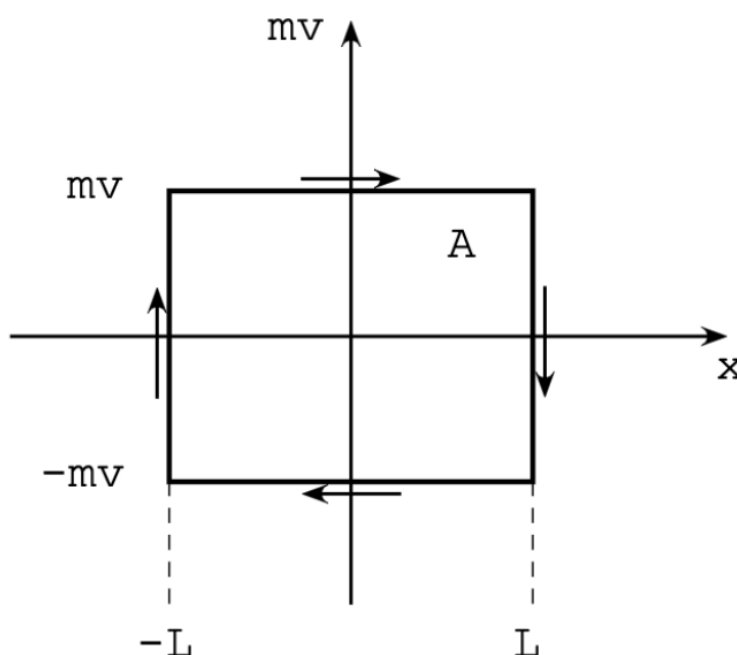
شکل ۱۱.۴: ثابت پلانک به‌صورت حداقل مساحت در فضای فاز است.

این بدان معنی است که مقدار عددی ثابت پلانک نشان دهنده ناحیه کوچکی در فضای فاز  $p, q$  است که در شکل (۱۱.۴) نشان داده شده است. مستطیل بزرگ نشان دهنده یک سیستم محدود بین دو مختصات  $q_1, q_2$  و دو لحظه  $p_1, p_2$  است. عمل  $A$  برابر با ناحیه  $A = (q_2 - q_1) \cdot (p_2 - p_1)$  است. مکانیک کوانتومی زمانی مهم است که  $A \sim h$  باشد. وقتی می‌گوییم  $h$  کوچک است، منظورمان این است که با توجه به تجربه روزمره ما کوچک است. به‌عنوان مثال، عمل مربوط به حرکت یک توپ تنیس در طول مسابقه تنیس را می‌توان با مشاهده نمودار فاز شکل (۱۲.۴) تخمین زد.

برای زمین تنیس به‌طول  $2L \approx 24$  متر، با توپی به جرم  $m \approx 58g$  که با سرعت  $v = 55m/s$  حرکت می‌کند، عمل مساحت  $A = 4mvL \approx 158.5 J \cdot s$  است. این مقدار 36 مرتبه بزرگتر از ثابت پلانک است که به‌این معنی است که می‌توانیم با خیال راحت از اثرات کوانتومی هنگام بازی تنیس غافل شویم.

اکنون اجازه دهید اتم هیدروژن را در نظر بگیریم و بررسی کنیم که عمل مرتبط با الکترون متصل به پروتون دارای عملکردی قابل مقایسه با ثابت پلانک است. معادله (۲۵.۴)، در مورد یک مدار دایره‌ای، همانطور که در مورد مدار اول بوده و  $n = 1$  در معادله

<sup>۱۵</sup>Maupertuis



شکل ۱۲.۴: نمودار فضای فاز یک توپ تنیس به جرم  $m$  که بین خطوط پایه با تکانه  $mv$  به جلو و عقب می‌پرد. طول زمین تنیس  $2L$  است.

(۸.۴) است:

$$A = \oint p dq = 2\pi r_1 p_1 \quad (۲۶.۴)$$

که در آن انتگرال در اولین مدار کامل محاسبه می‌شود و  $r_1$  و  $p_1$  به ترتیب شعاع و تکانه الکترون در مدار اول هستند. معادله (۵.۴) مقادیر عددی  $r_1$  و  $p_1$  را به ما می‌دهد که می‌توانند در معادله (۲۶.۴) برای به دست آوردن  $A \approx 10^{-34} J \cdot s$  که همان مرتبه بزرگی ثابت پلانک است وارد شوند. بنابراین، هنگام برخورد با ذرات بنیادی، مانند الکترون‌ها، متصل به سیستم‌هایی که ابعاد آن‌ها مرتبه اتم یا مولکول است، به این نتیجه می‌رسیم که باید از مکانیک کوانتومی استفاده کنیم. توجه داشته باشید که سرعت مداری الکترون، زمانی که با استفاده از معادله (۵.۴) محاسبه می‌شود، نتایج به ترتیب  $10^6$  متر بر ثانیه بسیار کمتر از سرعت نور است، بنابراین به ما اجازه می‌دهد از بیان غیرنسبیتی تکانه  $p = mv$  استفاده کنیم.

## فصل ۵

# معادله شرودینگر

در این فصل، معادله همیلتون-ژاکوبی را معرفی می‌کنیم که نشان می‌دهد مکانیک کلاسیک را می‌توان با یک معادله موج برای عمل کلاسیک توصیف کرد. سپس آزمایش دو شکاف را، ابتدا با امواج الکترومغناطیسی و سپس با ذرات بزرگ مانند، برای مثال، الکترون بحث می‌کنیم. این به ما امکان می‌دهد مفهوم دامنه‌های احتمالی و نقش آنها در پدیده‌های تداخل را معرفی کنیم. سپس نشان خواهیم داد که چگونه ذرات می‌توانند در معرض پدیده‌های تداخل و پراش قرار گیرند. سپس اصل عدم قطعیت را با استفاده از ترکیبی از ایده‌های کلاسیک و کوانتومی استنتاج خواهیم کرد. در نهایت، معادله شرودینگر با استفاده از فرمول انتگرال مسیر فاینمن<sup>۱</sup> مکانیک کوانتومی معرفی می‌نمائیم.

### ۱.۵ همیلتون-ژاکوبی

در فصل‌های قبلی دیدیم که مکانیک کلاسیک قادر به توضیح تعدادی از نتایج تجربی به‌دست‌آمده در شرایط مختلف نیست. از این آزمایش‌ها، آشکار شد که وقتی دنیای ذرات کوچک را بررسی می‌کنیم، یعنی زمانی که عمل در مرتبه ثابت پلانک است، به یک فیزیک جدید نیاز است. این فیزیک جدید باید بتواند چند واقعیت اساسی و مهم را در خود جای دهد. اولاً، کمیت‌های فیزیکی معین در کوانتومی می‌آیند، مثلاً تبادل انرژی بین ماده و تابش امواج الکترومغناطیسی در یک حفره جسم سیاه یا انرژی فوتون‌ها. دوم، وقوع برخی از پدیده‌های فیزیکی مانند، برای مثال، زمان میرائی (واپاشی) رادیواکتیو یک هسته ناپایدار، حتی به‌صورت اصولی نمی‌تواند پیش‌بینی کند. این نشان می‌دهد که سطحی از تفسیر احتمالی باید در توصیف پدیده‌های فیزیکی گنجانده شود. سوم، به نظر می‌رسد تشعشع امواج الکترومغناطیسی و همچنین ذرات ماده در عین حال ویژگی‌های موج مانند و ذره مانند دارند. شرایط آزمایشی وجود دارد که در آن ذرات، مانند الکترون‌ها، مانند امواج، و شرایط تجربی دیگری وجود دارد که امواج الکترومغناطیسی مانند ذرات رفتار می‌کنند.

<sup>۱</sup> Feynman path integral formulation

تمایز بین توصیف موج مانند و ذره مانند برخی از پدیده‌های فیزیکی تقریباً به‌طور کامل بر ایده‌آل سازی ما از جهان فیزیکی متکی است. این واقعیت که ما اجسام مادی را دقیقاً در فضا می‌بینیم، را به این تصور می‌رساند که اگر ذرات کوچکتر و کوچکتر شوند، چنین محلی سازی دقیق همچنان معتبر است. برای مثال، ظهور میکروسکوپ‌های قوی‌تر و قوی‌تر نشان داده است که ذرات ریز مادی، تا مقیاس تقریباً اتمی، هنوز می‌توانند در فضا مشاهده شوند. بنابراین، کاملاً طبیعی است که تصور کنیم، صرف نظر از اینکه ذره چقدر کوچک است، همچنان می‌توان آن را با دقت بالایی که می‌خواهیم از نظر مکانی مشاهده کرد. بنابراین تعجب آور نیست که انتزاع نیوتنی یک ذره شامل داشتن یک جرم محدود است که با گسترش فضایی صفر مشخص می‌شود و کاملاً در یک نقطه از فضا قرار دارد.<sup>۲</sup>

از سوی دیگر، دیدیم که برای توضیح پراش و تداخل ذرات کوچک، مانند الکترون‌ها، باید امواج را به هم مرتبط کنیم که منشاء و ویژگی‌های آن هنوز دقیقاً مشخص شود. به نظر می‌رسد که پایداری خود اتم، همانطور که دیدیم، مستلزم این است که موج قادر به تداخل با خودش باشد، باید با حرکت الکترون‌ها در اطراف هسته همراه باشد. هر دو فرمالیسم لاگرانژی و همیلتونی مکانیک کلاسیک، که در فصل قبل بررسی شد، ظاهراً اجازه نمی‌دهند که ویژگی‌های موج مانند و ذره مانند برای یک جرم نقطه‌ای وجود داشته باشد. با این حال، فرمالیسم سومی وجود دارد که بر اساس معادله همیلتون-ژاکوبی است که ارتباط مستقیمی بین ماده و امواج برقرار می‌کند. اکنون نشان خواهیم داد که برخلاف عقل سلیم، مکانیک کلاسیک قبلاً تا حدی حاوی ذره موج دوگانه است.

## ۱.۱.۵ تبدیلات متعارف

جالب است و احتمالاً برای ذهن کلاسیک ما تعجب آور است که مکانیک کلاسیک را می‌توان با یک معادله موج توصیف کرد. برای یافتن معادله‌ای که نشان دهد مکانیک کلاسیک قبلاً دارای رفتار موجی در ذرات ماده است، باید به فرمول بندی لاگرانژ/همیلتون برگردیم. به‌طور خاص اکنون یک کلاس ویژه از تبدیل مختصات تعمیم یافته به نام **تبدیلات متعارف**<sup>۳</sup> را معرفی می‌کنیم.

قبلاً تبدیل مختصات از مجموعه مختصات تعمیم یافته  $q$  به مجموعه جدیدی از مختصات تعمیم یافته  $q'$  را دیده‌ایم. چنین تبدیلاتی را یا برای ساده سازی مسائل فیزیکی که می‌خواهیم توصیف کنیم، یا حداقل برای شهودی کردن مسائل انجام داده‌ایم. یک مثال تبدیل از دکارتی  $(x, y)$  به قطبی  $(r, \theta)$  هنگام برخورد با نیروهای مرکزی یا چارچوب‌های مرجع چرخشی است.

اکنون می‌خواهیم کلی‌تر باشیم و تبدیلهایی را در نظر بگیریم که همزمان مختصات

<sup>۲</sup>البته این یک وضعیت بسیار ایده‌آل است. نسبیت عام انیشتین به ما می‌گوید که چنین ذره‌ای در سیاهچاله فرو می‌ریزد.

<sup>۳</sup> Canonical Transformations



و لحظه‌ای را شامل می‌شوند:

$$\begin{aligned} q' &= q'(q, p, t) \\ p' &= p'(q, p, t) \end{aligned} \quad (۱.۵)$$

بیایید فرض کنیم که مختصات بدون پریم معادلات (۸۰.۱) همیلتون را برآورده می‌کنند، و برای راحتی کار در اینجا تکرار می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad (۲.۵)$$

که در آن اندیس (شاخص)  $i$  که از ۱ تا  $N$  اجرا و برای وضوح حذف شده است. آن تبدیل‌های که بصورت (۱.۵) مختصات پریم دار جدید برای آنها معادلات (۲.۵) همیلتون را برآورده می‌کنند، تبدیل‌های متعارف نامیده می‌شوند. اکنون از فصل اول تبدیل لژاندر را که برای تعریف همیلتونی استفاده کردیم، به یاد بیاوریم:

$$H(q, p) = \sum \dot{q}p - \mathcal{L} \quad (۳.۵)$$

که از آن  $\mathcal{L} = \sum \dot{q}p - H(q, p)$  لاگرانژین را بدست می‌آوریم. اکنون می‌توانیم یک شرط عمل حداقل<sup>۴</sup>، در قیاس با معادله (۱۴.۱) بنویسیم:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum \dot{q}p - H(q, p) \right) dt = 0 \quad (۴.۵)$$

اگر تبدیل (۱.۵) یک تبدیل متعارف باشد، می‌توانیم معادله (۴.۵) همچنین برای مختصات تبدیل شده  $q', p'$  بنویسیم:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum \dot{q}'p' - H'(q', p') \right) dt = 0 \quad (۵.۵)$$

به‌منظور ارضای همزمان معادلات (۴.۵) و (۵.۵)، دو انتگرال باید برابر باشند و حداکثر می‌توانند بر اساس مشتق کل یک تابع دلخواه  $F$  متفاوت باشند به‌طوری که:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = F(t_2) - F(t_1) \quad (۶.۵)$$

شرط (۶.۵) به‌طور خودکار تضمین می‌کند که تغییرات (۴.۵) و (۵.۵) صفر هستند زیرا مقدار انتگرال (۶.۵) به مسیر انتخاب شده بستگی ندارد که فقط به‌حدهای ثابت در  $t_1$  و  $t_2$  بستگی دارد. تابع  $F$  را تابع مولد تبدیل متعارف می‌نامند. در واقع دانستن  $F$  معادلات تبدیلات (۱.۵) را تعیین می‌کند.

تابع مولد  $F$  به‌طور کلی تابعی از مختصات پرایم نشده و اولیه به اضافه زمان  $(q, p, q', p', t)$  برای مجموع  $4N$  متغیر است. با این حال، تبدیل (۱.۵) تعداد کل متغیرهای مستقل را به

<sup>۴</sup>Minimum Action

$2N+1$  کاهش می‌دهد. بنابراین  $F$  می‌تواند یکی از موارد زیر باشد:  $F_2(q, p', t)$ ,  $F_1(q, q', t)$ ،  $F_3(p, q', t)$  و  $F_4(p, p', t)$ . انتخاب تابع مولد دلخواه است و معمولاً در هنگام مطالعه یک مسئله خاص به راحتی دیکته می‌کند. اگر شکل  $F_1 = F_1(q, q', t)$  را انتخاب کنیم، شرط تبدیل متعارف به صورت زیر است:

$$\sum \dot{q}p - H(q, p) = \sum \dot{q}'p' - H'(q', p') + \frac{dF_1(q, q', t)}{dt} \quad (۷.۵)$$

می‌توانیم مشتق کلی  $F-1$  را بصورت زیر بنویسیم:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum \frac{\partial F_1}{\partial q} \dot{q} + \sum \frac{\partial F_1}{\partial q'} \dot{q}' + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (۸.۵)$$

با قرار دادن در معادله (۷.۵) خواهیم داشت:

$$\sum \dot{q}p - H(q, p) = \sum \dot{q}'p' - H'(q', p') + \sum \frac{\partial F_1}{\partial q} \dot{q} + \sum \frac{\partial F_1}{\partial q'} \dot{q}' + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (۹.۵)$$

معادله (۹.۵) فقط و فقط در صورتی که ضرایب متغیرهای مستقل  $\dot{q}$  و  $\dot{q}'$  به طور جداگانه برابر با صفر باشند، ارضاء می‌شود. این درست است اگر:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} \\ p' &= -\frac{\partial F_1}{\partial q'} \\ H' &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (۱۰.۵)$$

اگر بجای استفاده از  $F_1$ ،  $F_2 = F_2(q, p', t)$  را انتخاب کنیم، باید از متغیرهای  $(q, q')$  به متغیرهای  $(q, p')$  برویم. این با اعمال تبدیل لژاندر<sup>۵</sup> زیر به دست می‌آید:

$$F_2(q, p', t) = F_1(q, p', t) + \sum p'q' \quad (۱۱.۵)$$

برای سهولت  $S = F_2$  را می‌نامیم، بنابراین معادله (۱۱.۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \sum \dot{q}p - H(q, p) &= \sum \dot{q}'p' - H(q', p') + \frac{d}{dt} \left[ S(q, p', t) - \sum q'p' \right] \\ &= \sum \dot{q}'p' - H(q', p') + \frac{dS(q, p', t)}{dt} - \sum \dot{q}'p' - \sum q'\dot{p}' \\ &= -\sum q'\dot{p}' - H'(q', p') + \frac{dS(q, p', t)}{dt} \end{aligned} \quad (۱۲.۵)$$

با تکرار همان جایگزینی در مورد قبلی برای  $F_1$  داریم:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \\ p' &= -\frac{\partial S}{\partial q'} \\ H' &= H + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (۱۳.۵)$$

<sup>۵</sup>Legendre

## ۲.۱.۵ معادله همیلتون-ژاکوبی

اجازه دهید اکنون یک تبدیل متعارف بسیار ویژه از مختصات اصلی  $(q, p)$  به مجموعه جدیدی از مختصات  $q' = \text{const.}$  و  $p' = \text{const.}$  را جستجو کنیم. فرض کنید مقدار این ثابت‌ها را نیز در  $2N$  شرایط اولیه  $(q_0, p_0)$  تعیین کنیم. اگر بتوانیم چنین تبدیلی متعارفی را پیدا کنیم، معادلات مربوط به متغیرهای قدیمی به جدید دقیقاً راه حل مسئله است:

$$\begin{aligned} q &= q(q_0, p_0, t) \\ p &= p(p_0, p_0, t) \end{aligned} \quad (۱۴.۵)$$

به راحتی می‌توان تأیید کرد که اگر فرض کنیم که  $H'$  همیلتونی جدید برابر با صفر است، آنگاه متغیرهای جدید  $(q', p')$  ثابت هستند. در واقع، معادلات همیلتون برای مختصات تبدیل شده عبارتند از:

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= \frac{\partial H'}{\partial p'} = 0 \\ \dot{p}' &= \frac{\partial H'}{\partial q'} = 0 \end{aligned} \quad (۱۵.۵)$$

که از آن (۱۴.۵) پیروی می‌کند. معادله سوم در (۱۳.۵)، با شرط  $H = 0$  می‌شود:

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (۱۶.۵)$$

و با استفاده از معادله اول (۱۳.۵)، می‌توانیم به‌طور رسمی معادله (۱۶.۵) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (۱۷.۵)$$

که معادله همیلتون-ژاکوبی  $(H, J)$  است. معادله  $H, J$  یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول برای  $N + 1$  متغیر  $(q, t)$  است. جواب  $S$  آن تابع اصلی همیلتون نامیده می‌شود. با دانستن تابع  $S$ ، حل معادله  $H, J$  معادل حل مسئله مکانیکی است که در ادامه با یک مثال ساده خواهیم دید. دیدیم که اعمال  $H' = 0$  معادل تبدیل به یک سیستم مختصات جدید است که در آن مختصات تعمیم یافته  $q'$  و گشتاور تعمیم یافته  $p'$  ثابت هستند. این بدان معنی است که تابع  $S$  فقط به  $q$  و  $t$  بستگی دارد، یعنی  $S = S(q, t)$ . با استفاده از معادله (۸.۵)، مشتق کل تابع  $S = S(q, t)$  می‌شود:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (۱۸.۵)$$

با استفاده از معادله (۱۰.۵) داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum p \dot{q} - H = \mathcal{L} \quad (۱۹.۵)$$

که انتگرال گیری می‌دهد:

$$S = \int \mathcal{L} dt + \text{const.} \quad (۲۰.۵)$$

که عملی (کنش) بوده و به صورت معادله (۱۴.۱) به اضافه یک ثابت دلخواه تعریف شده است.

اشتقاق شهودی تری [۴۱] از معادله  $HJ$  وجود دارد که ارتباط مستقیم با عمل  $S$  را نشان می‌دهد. اجازه دهید دوباره عمل (۲۰.۵) را به صورت انتگرال لاگرانژ در بازه  $(t_0, t)$  بنویسیم:

$$S = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (۲۱.۵)$$

اجازه دهید از عبارت  $\mathcal{L}p\dot{q} - H$  که در آن  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  است، استفاده کنیم. برای یک مسیر داده شده  $q = q(t)$  می‌توانیم عمل را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} S(q, t) &= \int_{t_0}^t p \dot{q} dt - \int_{t_0}^t H(p, q, t) dt \\ &= \int_{t_0}^t p dq \int_{t_0}^t H(p, q, t) dt \end{aligned} \quad (۲۲.۵)$$

توجه کنید که معادله (۲۲.۵) یک انتگرال خطی را در طول زمان، از  $t_0$  به  $t$ ، به یک خط انتگرال روی صفحه  $q, t$  از نقطه  $(q_0, t_0)$  به نقطه  $(q, t)$  تبدیل کرده است. به طور کلی، انتگرال مسیر هر تابع  $S = S(q, t)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S(q, t) = \int_{q_0}^q \frac{\partial S}{\partial q} dq + \int_{t_0}^t \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (۲۳.۵)$$

با مقایسه معادلات (۲۲.۵) و (۲۳.۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) \end{aligned} \quad (۲۴.۵)$$

که دقیقاً معادله (۱۷.۵) همیلتون-ژاکوبی ( $HJ$ ) است. اگر همیلتونین  $H$  صراحتاً به زمان  $t$  بستگی نداشته باشد، انرژی حفظ (پایستار) می‌شود و معادله دوم (۲۴.۵) می‌شود:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (۲۵.۵)$$

که در آن مشاهده می‌کنیم که فقط آخرین جمله به صراحت به زمان بستگی دارد. بنابراین می‌توانیم برای معادله (۲۵.۵) یک راه حل به صورت زیر بنویسیم:

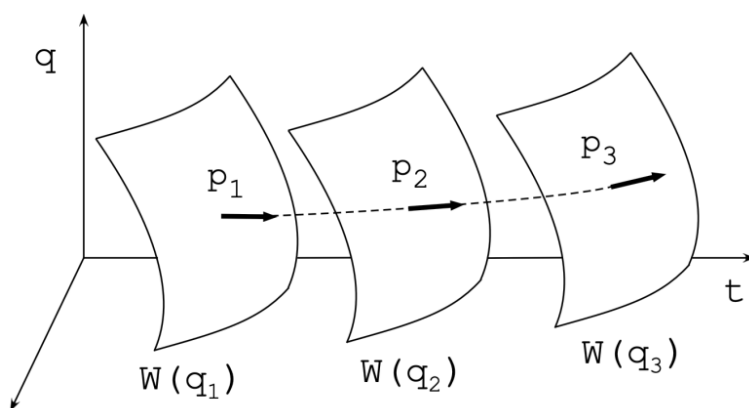
$$S(q, p', t) = W(p, q') - Et \quad (۲۶.۵)$$

که در آن  $E$  ثابت است و ما آن را به عنوان انرژی حفظ شده تشخیص می‌دهیم. با توجه به روشی که معادله همیلتون-ژاکوبی را ساختیم، یعنی با الزام ثابت بودن  $q'$  و  $p'$ ، عمل  $S$

به شکل زیر است:

$$S = S(q, \eta, t) \quad (27.5)$$

که در آن  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$  یک بردار با  $N$  ثابت انتگرال گیری مستقل است. یک انتخاب خوب برای این ثابت‌ها تکانه جدید  $p = \eta$  است.



شکل ۱.۵: حرکت سطوح  $S$  در فضای  $q$ .

تابع  $W(q, p)$  تابع مشخصه همیلتون نامیده می‌شود و به زمان بستگی ندارد. معادله (۲۶.۵) به ما می‌گوید که دینامیک با سطحی که با سرعت ثابت  $E$  در فضا  $(q, p')$  حرکت می‌کند نشان داده می‌شود. با فشار بیشتر قیاس، تابع  $S$  حرکت نقاط فاز ثابت موجی را نشان می‌دهد که با سرعت  $E$  منتشر می‌شوند. در شکل (۱.۵) حرکت سطح هم‌فاز  $W(q_1)$  را در زمان  $t_1$  می‌بینیم که به  $W(q_2)$  در زمان  $t_2$  و سپس  $W(q_3)$  در زمان  $t_3$  حرکت می‌کند. نگاهی به معادله اول در معادله (۱۳.۵)، به راحتی می‌توان تأیید کرد که تکانه  $p$  همیشه بر سطح  $W$  عمود است. بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که دینامیک یک سیستم مکانیکی کلاسیک را می‌توان با یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی - معادله  $HJ$  - برای تابع  $S$  توصیف کرد. هنگامی که تابع  $S$  را پیدا کردیم، معادله حرکت با نوشتن معادله زیر به دست می‌آید:

$$q'_n = \frac{\partial S(q_n, p'_n, t)}{\partial p'_n} \quad (28.5)$$

به صراحت برای  $N + 1$  مولفه نوشته شده است، که در آن  $n = 1, \dots, N$  درجات آزادی به اضافه زمان  $t$  است. سپس معادله حرکات با حل معادله (۲۸.۵) برای  $q_n$  به دست می‌آید:

$$p_n = q(q', p', t) \quad (29.5)$$

به همین ترتیب، جواب  $p_n$  را با نوشتن رابطه زیر بدست می‌آوریم:

$$p_n = \frac{\partial S(q_n, p'_n, t)}{\partial q_n} \quad (30.5)$$

بیایید به معادله  $HJ$  برگردیم و شکل آن را برای یک ذره غیر نسبیتی ( $v \ll c$ ) با جرم  $m$  در پتانسیل  $V(r)$  بنویسیم. دستورالعمل ساده است: همیلتونین را بنویسید:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (۳۱.۵)$$

و عبارت  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$  را برای  $p$  جایگزین می‌کنیم. در مختصات دکارتی داریم:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (۳۲.۵)$$

که شکل مفیدی از معادله  $HJ$  شامل عمل  $S$  است.

## ۲.۵ انتگرالهای مسیر فاینمن

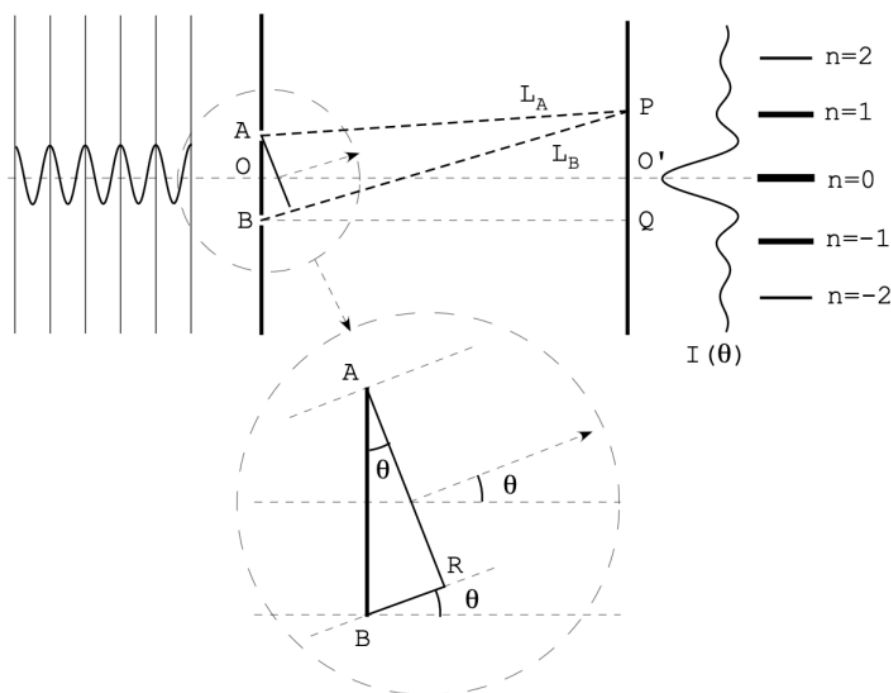
در فصل سوم دیدیم که تعداد قابل توجهی از آزمایش‌ها نتایجی را به دست می‌دادند که توسط فیزیک کلاسیک قابل توضیح نبود. احتمالاً مهمترین آنها تعیین ویژگی طیفی انتشار جسم سیاه بود. برای به دست آوردن یک توصیف ریاضی از طیف جسم سیاه، پلانک نیاز به یک فرض اساسی داشت که انرژی به صورت کوانتوم  $E = h\nu$  بین تابش و نوسانگرهای دیواره‌های جسم سیاه مبادله می‌شود. سپس انیشتین این ایده را گسترش داد و پیشنهاد کرد که نور به خودی خود کوانتیزه می‌شود و نه فقط در تبادل انرژی با نوسانگرها، که باعث ایجاد ایده فوتون‌ها به عنوان کوانتوم‌های تشعشع الکترومغناطیسی اثر فوتوالکتریک نشان داد که فوتون‌ها بسته به ویژگی‌های مجموعه آزمایشی به صورت ذرات یا امواج رفتار می‌کنند، بنابراین به امواج دوگانه ذره اشاره می‌کنند. فوتون‌ها جرم سکون صفر دارند و دیبرولی این پیشنهاد جسورانه را ارائه کرد که چنین دوگانگی برای ذرات عظیم با جرم  $m \neq 0$  نیز معتبر است. کشف فعالیت‌های رادیویی اطلاعات دیگری را به تولد فیزیک جدید اضافه کرد: پدیده‌های فیزیکی هستند که نمی‌توان آنها را با قطعیت پیش بینی کرد اما به نظر می‌رسد که از قانون احتمال تبعیت می‌کنند. فعالیت رادیویی مفهوم احتمال را در درک فیزیکی ما از طبیعت معرفی می‌کند: نمی‌توان پیش بینی کرد که یک اتم خاص چه زمانی یک ذره زیر اتمی منتشر می‌کند. تنها با مشاهده تعداد زیادی از سیستم‌های یکسان می‌توانیم احتمال فروپاشی (میرائی) یک اتم را محاسبه کنیم.

آزمایش دیویسون-گرمردون هیچ شکی نشان داده است که الکترون‌ها مانند ذرات عظیمی رفتار می‌کنند که دینامیک آنها توسط نوعی موج کنترل می‌شود. بنابراین ما به یک معادله موجی برای یک تابع ریاضی نیاز داریم که بتواند تمام حقایق تجربی معروف را توضیح دهد و اگر نظریه خوب باشد، بتواند پدیده‌های جدید را پیش بینی کند. دیده‌ایم که عمل  $S$  با تمام اصول ثابت مرتبط به نظر می‌رسد که از طریق نقشش در معادله  $HJ$ ، نقش مرکزی را در توصیف موجی فیزیک کلاسیک بازی می‌کند. سوال این است که آیا می‌توانیم معادله  $HJ$  را برای ترکیب پدیده‌های جدید اصلاح کنیم؟ معادله  $HJ$  در واقع شامل عمل  $S$  است و مکانیک کلاسیک را با توصیف موجی توصیف می‌کند که در آن عمل  $S$  نقش مرکزی را ایفا می‌کند.

مسیر رسیدن به یک آنالوگ مکانیکی کوانتومی - معادله شرودینگر - معادله  $HJ$  ابتدا ما را به تجزیه و تحلیل آزمایش‌های پراش/تداخل می‌برد. اینها به نوبه خود راه را به سمت فرمال‌سازی انتگرال مسیر فاینمن که معادله شرودینگر به طور طبیعی از آن پیروی می‌کند، هموار می‌کند.

### ۱.۲.۵ آزمایش دو شکاف نور

در یک آزمایش معمولی ینگ، منبع نوری از امواج تک رنگ با طول موج  $\lambda$ ، با بردار موج مرتبط  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ، صفحه‌ای را با دو شکاف کوچک همانطور که در شکل (۲.۵) نشان داده شده است، روشن می‌کند. می‌خواهیم توزیع شدت نور  $I(\theta)$  را در صفحه دیگری - صفحه مشاهده - که در پشت صفحه اول در فاصله  $L = \overline{OO'}$  قرار دارد، مطالعه کنیم.



شکل ۲.۵: تداخل نور. تداخل با برخورد نور تک رنگ روی صفحه‌ای با دو سوراخ کوچک در  $A$  و  $B$ . الگوی حاشیه تداخلی  $I(\theta)$  مشاهده می‌شود. مکان حداکثر زمانی بدست می‌آید که امواج در امتداد مسیرهای  $L_B$  و  $L_A$  با یک عدد صحیح  $n$  طول موج متفاوت باشند.

بر اساس اصل هویگنس<sup>۶</sup> برای اینکه تداخل سازنده در نقطه  $P$  روی صفحه داشته باشیم، دو مسیر  $L_B$  و  $L_A$  باید با یک عدد صحیح طول موج متفاوت باشند، یعنی  $L_B - L_A = n\lambda$ . هندسه ساده نشان می‌دهد که اگر زاویه  $\angle QBP = \theta$  باشد و اگر صفحه دوم در فاصله  $d = \overline{AB}$  قرار گیرد، آنگاه اختلاف مسیر  $\overline{BR} \approx \overline{AB} \sin \theta = d \sin \theta$  است که

<sup>۶</sup>اصل هویگنس بیان می‌کند که هر نقطه در جبهه موج ممکن است به عنوان منبع امواج کروی در نظر گرفته شود.

فاصله بین دو سوراخ  $A$  است.  $B$ ، در صفحه نمایش. شرط حداکثر تداخل در این صورت است:

$$d \sin \theta = n\lambda \quad (33.5)$$

برای اولین مرتبه،  $n = 1$ ، به راحتی می توان تأیید کرد که فاصله ماکزیمم ها در صفحه مشاهده برابر است با:

$$\overline{O'P} = \overline{O'O} \tan \theta \quad (34.5)$$

فرمول مشابهی را می توان برای مقادیر بالاتر  $n > 1$  به دست آورد. میدان الکتریکی  $E$  یک موج صفحه تابشی با قطبش خطی را که در جهت مشخص توسط بردار  $r$  در حال انتشار است می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$E(r, t) = E_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)} \quad (35.5)$$

ما میدان مختلط  $E(r, t)$  را در معادله (35.5) به عنوان یک روش عملی برای محاسبه تداخل بین دو موج با در نظر گرفتن این که فقط قسمت حقیقی اهمیت فیزیکی دارد معرفی کردیم. در واقع، وقتی با اندازه گیری ها مقایسه می کنیم، باید فقط بخش حقیقی میدان را در نظر بگیریم، یعنی  $Re(E) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)$ . می توانیم به صراحت عبارت فاز موج تابشی الکترومغناطیسی را بنویسیم. موج با جداسازی فاز  $e^{-j\phi_0}$  به طوری که میدان الکترومغناطیسی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E(r, t) = e^{-j\phi_0} E_0 e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = e^{-j\phi_0} E_0(r, t) \quad (36.5)$$

میدان در نقطه  $P$  در شکل (2.5) به صورت مجموع دو میدان که در نقاط اولیه  $A$  و  $B$  تولید شده نوشت.

$$E(P) = E(L_A, t) + E(L_B, t) \quad (37.5)$$

و شدت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I(P) = |E(P)|^2 = |E(L_A, t) + E(L_B, t)|^2 \quad (38.5)$$

معادله (38.5) را می توان بر حسب زاویه  $\theta$  به صورت زیر نوشت:

$$I(\theta) = |E_A + E_B|^2 = |E_A|^2 + |E_B|^2 + 2|E_A||E_B| \quad (39.5)$$

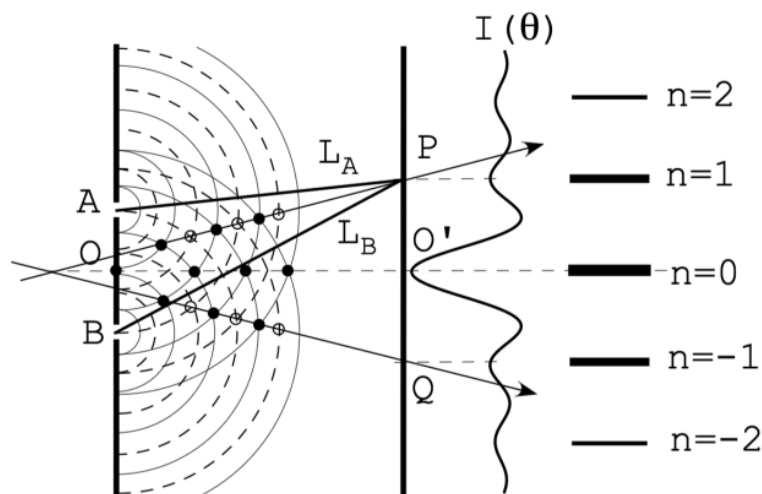
معادله (39.5) به ما می گوید که شدت نور در صفحه مشاهده مجموع شدت نوری است که از سوراخ  $A$  به اضافه شدت نور ناشی از سوراخ  $B$  به اضافه عبارت تداخل  $2|E_A||E_B|$  می آید.

بر حسب فاز امواج الکترومغناطیسی، اختلاف فاز در نقطه  $P$  برابر است با:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{L_B - L_A}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \quad (40.5)$$

شکل (3.5) روش هندسی - و شاید شهودی - را برای تصویر کردن تداخل بین دو موج



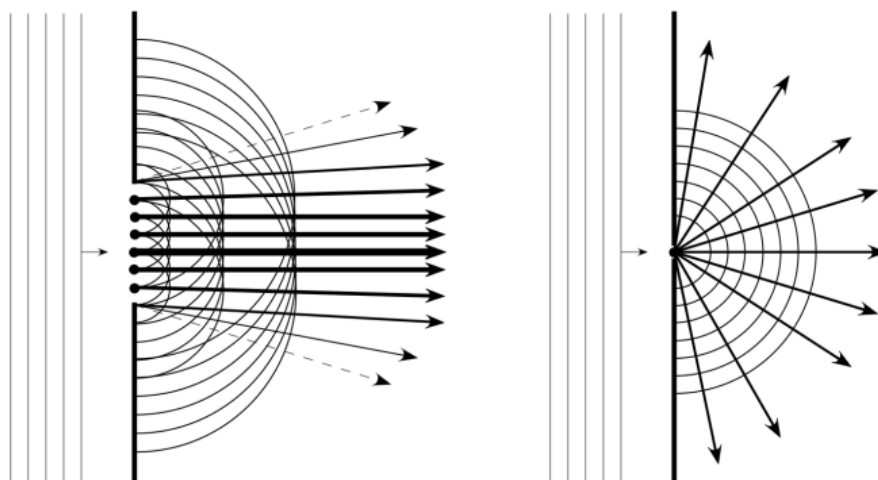


شکل ۳.۵: ساخت هندسی الگوی تداخل. نقاط دایره تو پُر مربوط به تداخل سازنده است در حالی که نقاط دایره خط چین مربوط به تداخل مخرب است.

الکترومغناطیسی نشان می‌دهد.

مهم است که تاکید شود، برای ایجاد تداخل، نور باید به‌طور موثر توسط دو سوراخ در  $A$  و  $B$  پراکنده شود. شرایطی که سوراخ‌های پین  $A$  و  $B$  شکل (۳.۵) باید کوچکتر یا در ترتیب طول موج مورد نیاز باشند تا مطمئن شویم که نور در یک زاویه بزرگ و تقریباً کروی پراکنده می‌شود. به این ترتیب، نور بزرگترین بخش از صفحه مشاهده را روشن می‌کند و در نتیجه بخشی از صفحه که توسط هر دو سوراخ پراش روشن می‌شود، به حداکثر می‌رسد. اگر سوراخ در مقایسه با طول موج بزرگ باشد، مانند شکل (۴.۵) تصویر سمت چپ، نور کمتر پراکنده خواهد شد و بیشتر در جهت جلو با برهم‌نهی (جمع اثر) کمتر دو پرتو در صفحه مشاهده متمرکز است.

این را می‌توان با استفاده از اصل هویگنس به‌طور شهودی درک کرد که طبق آن هر نقطه در جبهه موج می‌تواند به‌عنوان منبع یک موج کروی در نظر گرفته شود. تصویر سمت چپ شکل (۴.۵) نشان می‌دهد که می‌توانیم تعداد نسبتاً زیادی از منابع امواج کروی را در خود جای دهیم. از آنجایی که فاصله بین منابع در مقایسه با طول موج کم است، تداخل سازنده‌ای از منابع مجاور وجود خواهد داشت که برای تولید یک جبهه موج تقریباً مسطح ترکیب می‌شوند. هرچه سوراخ بزرگتر باشد جبهه موج در حال ظهور صاف‌تر است. در محدوده یک سوراخ بی‌نهایت بزرگ، موج صفحه بدون مزاحمت منتشر می‌شود. این به دلیل این واقعیت است که اختلاف فاز بین منابع مجاور موج کروی بسیار کم است و تداخل سازنده در جهت رو به جلو حاصل می‌شود. تصویر سمت راست شکل (۴.۵) در عوض نشان می‌دهد که وقتی منابع کمتر و کمتری از امواج کروی وجود داشته باشد، نور بیشتر و بیشتر به‌صورت کروی پخش می‌شود. از نظر کیفی می‌توانیم بگوییم که هر چه موج صفحه‌ای تابشی را از طریق یک سوراخ کوچکتر کنیم، انتشار نوری که از سوراخ بیرون می‌آید بیشتر خواهد بود.



شکل ۴.۵: پراش موج صفحه‌ای که بر روی دیافراگم بزرگتر از طول موج (سمت چپ) برخورد می‌کند در مقایسه با پراش روی دیافراگم کوچکتر یا از مرتبه طول موج. دیافراگم‌های کوچک در زاویه بزرگ پراش می‌شوند و موجی تقریباً کروی ایجاد می‌کنند.

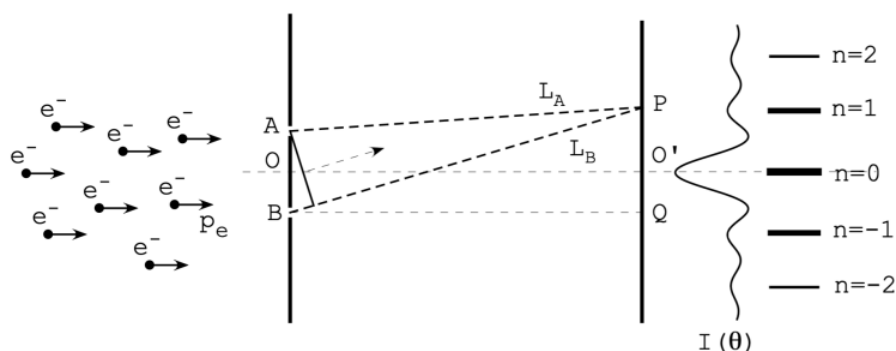
## ۲.۲.۵ آزمایش دو شکاف الکترون

اکنون مرحله منطقی این است که این فرضیه را ایجاد کنیم که در قیاس کامل با امواج الکترومغناطیسی، یک آزمایش دو شکافی که در آن ذراتی مانند الکترون استفاده می‌شود، باید اثرات تداخلی امواج دیبرولی مرتبط  $\lambda_{DB}$  با حاشیه‌های ایجاد شده توسط اختلاف مسیر از مرتبه  $\Delta\phi_{DB} = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda_{DB}}$  ایجاد کند.

در شکل (۵.۵)، پرتوی از الکترون‌های تک انرژی داریم، یعنی الکترون‌هایی که همگی با تکانه  $p_e$  یکسانی حرکت می‌کنند، روی صفحه‌ای با دو حفره با قطر مرتبه یا کمتر، که طول موج دیبرولی  $\lambda_{DB} = \frac{h}{p_e}$  است، هدایت می‌شوند. تکانه الکترون‌های برخوردی الکترون‌ها در صفحه مشاهده شناسایی می‌شوند، یعنی هر بار که یک الکترون به صفحه نمایش  $QP$  می‌رسد موقعیت آن شناسایی و شمارش می‌شود.

پس از شمارش تعداد کافی الکترون به صورت تابعی از زاویه ورود  $\theta$ ، یا به صورت تابعی از موقعیت  $(x, y)$  در صفحه مشاهده، یک نمودار تداخل معمولی  $I(\theta)$  مشاهده می‌شود (شکل ۵.۵). برای ذهن کلاسیک ما، این نتیجه تا حدودی شگفت‌انگیز است، زیرا اگر الکترون‌ها را فقط به عنوان توپ‌های بسیار کوچک در نظر بگیریم، می‌توانند از شکاف  $A$  یا شکاف  $B$  عبور کنند و تداخل مشاهده نمی‌شود. در واقع، اگر به ترتیب  $I(A)$  و  $I(B)$  را توزیع الکترون‌ها بر روی صفحه مشاهده گر زمانی که شکاف  $B$  یا  $A$  بسته است، بنامیم، بدون هیچ جمله تداخلی انتظار داریم  $I(\theta) = I(A) + I(B)$  باشد. برای داشتن تداخل، می‌دانیم که باید جملات شدت  $I(\theta)$ ،  $I(A)$  و  $I(B)$  را به عنوان مدول مربع یک دامنه تفسیر کنیم. به نظر می‌رسد که امواج دیبرولی موج کاملی برای ارتباط با حرکت الکترون‌ها هستند.

قبلاً در فصل چهارم دیده‌ایم که شواهد تجربی قوی (دیویسون-گرم) وجود دارد که الکترون‌ها را می‌توان به عنوان ذرات عظیم مرتبط با موج دیبرولی که مسئول تولید تداخل



شکل ۵.۵: تداخل الکترون‌های تک انرژی که روی صفحه‌ای با دو سوراخ کوچک در  $A$  و  $B$  برخورد می‌کنند. یک الگوی حاشیه تداخل  $I(\theta)$  مشاهده می‌شود. مکان حداکثر زمانی بدست می‌آید که امواج دیبرولی در امتداد مسیرهای  $L_A$  و  $L_B$  با یک عدد صحیح  $n$  طول موج متفاوت باشند.

است توصیف کرد. اگر بخواهیم در امتداد قیاس با آزمایش یانگ ادامه دهیم، می‌توانیم از موج دیبرولی در قیاس با دامنه میدان الکتریکی استفاده کنیم تا بتوانیم از ماشین ریاضی ایجاد تداخل امواج الکترومغناطیسی استفاده کنیم. بیایید موج دیبرولی<sup>۷</sup> را با تابع  $\Psi(r, t)$  نشان دهیم که آنالوگ میدان الکتریکی  $E(r, t)$  است. اگر اکنون به توابع  $\Psi$  اجازه تداخل بدهیم، خواهیم داشت که شدت ثبت شده برابر است با:

$$I(\theta) = |\Psi(A) + \Psi(B)|^2 = |\Psi(A)|^2 + |\Psi(B)|^2 + 2|\Psi(A)| \cdot |\Psi(B)| \quad (۴۱.۵)$$

که در آن  $\Psi(A)$  و  $\Psi(B)$  به ترتیب دامنه توابع مرتبط با مسیر  $L_A$  و  $L_B$  هستند. تداخل بسته به فازهای مرتبط با توابع  $\Psi(A)$  و  $\Psi(B)$  مشاهده می‌شود. روشن است که همانطور که در مورد تداخل امواج الکترومغناطیسی، اگر بخواهیم تداخل بین الکترون‌ها را توصیف کنیم، فاز نسبی دو تابع پارامتر مهمی است که باید بررسی شود. اکنون در موقعیتی هستیم که معنای فیزیکی بهتری را به تابع  $\Psi$  مرتبط کنیم. اگر اجازه دهیم الکترون‌ها یکی یکی از هم جدا شوند، نمی‌توان با قطعیت پیش‌بینی کرد که الکترون در کجای صفحه مشاهده فرود خواهد آمد. یک شکل تداخلی تنها زمانی ظاهر می‌شود که تعداد قابل توجهی از الکترون‌ها اجازه داده شوند به صفحه مشاهده برسند و شناسایی<sup>۸</sup> شوند.

اگر به جای آن به مسیر یک الکترون در آن زمان نگاه کنیم، به نظر می‌رسد که قادر به پیش‌بینی منحصر به فرد مسیر آن نیستیم. بهترین کاری که می‌توانیم انجام دهیم این است که صبر کنیم تا موقعیت تعداد کافی الکترون مشخص شود و توزیع آنها را در صفحه مشاهده مشاهده کنیم. مرحله مهم شامل مشاهده این است که توزیع الکترون‌های ثبت شده را می‌توان با استفاده از همان ریاضیات/فیزیکی که برای مطالعه تداخل امواج

<sup>۷</sup> این ارتباط کاملاً صحیح نیست زیرا تابع موج کوانتومی بسیار بیشتر از موج دیبرولی است. بعداً در کتاب به طور مفصل به این موضوع خواهیم پرداخت.

<sup>۸</sup> اتفاقاً، این نشان می‌دهد که الکترون‌ها با یکدیگر تداخل ندارند: تداخل مشاهده می‌شود زیرا موج مربوط به هر الکترون منفرد هنگام برخورد به صفحه اول تقسیم می‌شود تا بتواند بعداً در صفحه مشاهده تداخل کند.

الکترومغناطیسی<sup>۹</sup> استفاده کردیم، مدل سازی کنیم. در حال حاضر، به نظر می‌رسد کاملاً طبیعی است که معنای احتمالی را به توابع موج مرتبط کنیم. از این پس به توابع موج<sup>۱۰</sup>  $\Psi(r, t)$  اشاره خواهیم کرد، امواج مرتبط با الکترون‌هایی که مسئول الگوی تداخل  $I(\theta)$  شکل (۵.۵) هستند در قیاس با تداخل امواج الکترومغناطیسی، فرض کنیم که تابع توزیع الکترون مشاهده شده در نقطه  $P$ ، یعنی  $I(P)$ ، متناسب با مدول مربع تابع موج است:

$$I(P) \propto |\Psi(P)|^2 \quad (۴۲.۵)$$

که در آن  $\Psi(P)$  تابع موج محاسبه شده در نقطه  $P$  در صفحه مشاهده است. اگر تابع موج را به گونه‌ای نرمالیزه کنیم که انتگرال محاسبه شده آن در کل صفحه مشاهده برابر با یک باشد:

$$\int_S |\Psi(x, y)|^2 dx dy = 1 \quad (۴۳.۵)$$

که در آن  $S$  مساحت صفحه مشاهده که توسط دو محور  $x$  و  $y$  توصیف شده است، در این صورت  $|\Psi(x_0, y_0)|^2$  دقیقاً احتمال مشاهده یک الکترون در نقطه  $P$  مختصات  $(x_0, y_0)$  است. به طور کلی، اگر به یک صفحه محدود نباشیم، شرایط عادی سازی (نرمالیزاسیون) تابع موج به صورت زیر است:

$$\int_V |\Psi(x, y, z)|^2 dV = 1 \quad (۴۴.۵)$$

که در آن  $V$  حجمی است که تابع موج در آن تعریف شده است. این تفسیر احتمالی معروف بورن<sup>[۶]</sup> از تابع موج است که به قانون بورن<sup>۱۱</sup> نیز معروف است. توجه داشته باشید که از آنجایی که ما با مدول مربع سر و کار داریم، کلی‌ترین فرض این است که تابع موج به صورت یک تابع مختلط بیان شود.

ما باید معادله تابع موج  $\Psi$  را پیدا کنیم. قبل از یافتن معادله صحیح، تلاش‌هایی بر اساس قیاس با امواج الکترومغناطیسی انجام شد. معادله موج متأسفانه (با خوشبختانه) همه آنها هنگام مواجهه با داده‌های تجربی مشکل ایجاد کردند. یکی از راه‌های خروج، بازگشت به اصول اولیه و شروع با مجموعه‌ای جدید از اصول موضوعه است. ما ابتدا در مورد فرمول انتگرال مسیر مکانیک کوانتومی توسط فاینمن بحث می‌کنیم. هنگامی که معادله<sup>۱۲</sup> صحیح را به دست آوردیم، راه‌های مختلفی را برای "توجیه" آن مطالعه خواهیم کرد.

## ۳.۲.۵ از انتگرالهای مسیر تا معادله شرودینگر

اکنون فرمول انتگرال مسیر فاینمن از مکانیک کوانتومی را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که معادله موجی که دنبال آن هستیم، یعنی معادله شرودینگر وابسته به زمان،

<sup>۹</sup> با چند تفاوت مهم که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت.

<sup>۱۰</sup> Wavefunctions

<sup>۱۱</sup> Born

<sup>۱۲</sup> معادله شرودینگر زمانی صحیح است که اثرات نسبیتی ناچیز باشد.

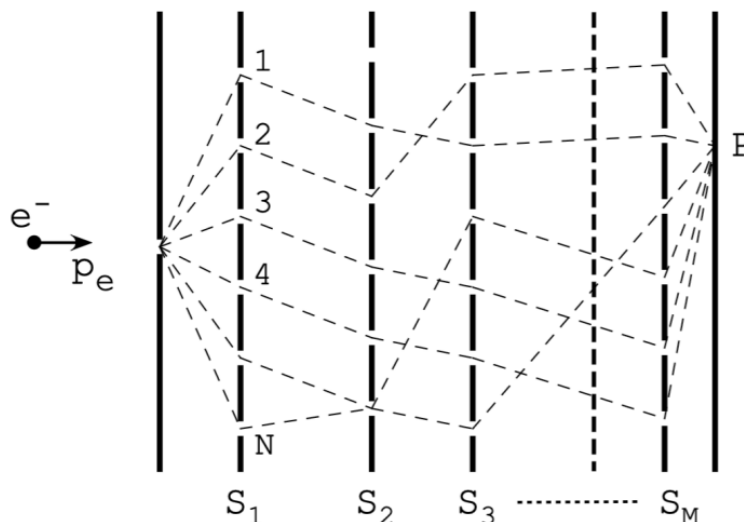
می‌تواند از معادله  $HJ$  به دست آید، مشروط بر اینکه مجموعه‌ای از اصول موضوعه<sup>۱۳</sup> را نیز ارائه دهیم.

مانند هر نظریه فیزیکی، ما نیاز به ایجاد و پذیرش مجموعه‌ای از فرضیه‌های اساسی داریم. هیچ راهی برای «اثبات» درست یا نادرستی فرضیه‌ها وجود ندارد: دانشمندان تا زمانی که نظریه‌ای که بر اساس آنها ساخته شده است، تمام حقایق تجربی معروف را توضیح می‌دهد، فرضیه‌ها را می‌پذیرند. یک نظریه خوب، مانند نظریه کوانتومی، توانایی پیش بینی پدیده‌های جدید را نیز دارد. نظریه فاینمن<sup>[۱۵]</sup> نیز از این قاعده مستثنی نیست و بر دو اصل زیر استوار است:

• I اگر یک اندازه‌گیری ایده‌آل برای تعیین اینکه آیا یک ذره مسیری در ناحیه‌ای از فضا-زمان دارد یا نه، انجام شود، احتمال مثبت بودن نتیجه، مجذور مطلق مجموع مشارک‌های مختلط، یکی از هر مسیر در منطقه است.

• II مسیرها از نظر بزرگی به یک اندازه کمک می‌کنند، اما مرحله مشارکت آنها کنش کلاسیک (به واحد  $\hbar$ ) است، یعنی انتگرال زمانی لاگرانژین که در طول مسیر طی می‌شود.

اصل I احتمالاً از آزمایش دو شکاف برای الکترون‌ها الهام گرفته شده است و بیانیه‌ای در مورد اصل برهم‌نهی (جمع اثرها)<sup>۱۴</sup> به علاوه تفسیر احتمالی بورن از توابع موج است. اصل II دستور العمل محاسبه دامنه هر مسیر ممکن را ارائه می‌دهد.



شکل ۶.۵: تداخل از مجموعه‌ای از  $M$  صفحه نمایش که هر یک حاوی  $N$  شکاف است.

مهم است که در این نقطه تاکید کنیم که تمام مسیرهای ممکن بین یک نقطه اولیه

<sup>۱۳</sup>Axioms

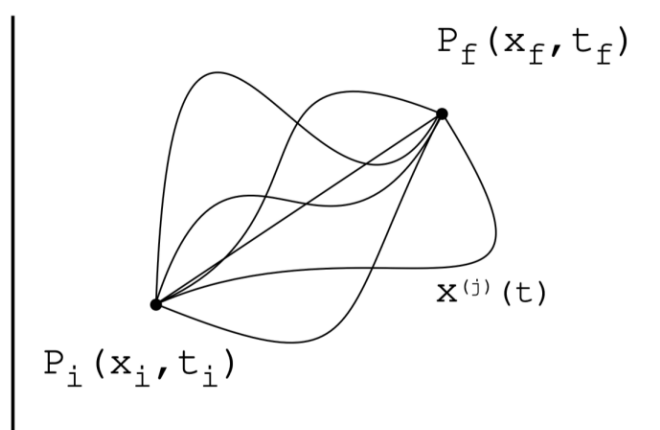
<sup>۱۴</sup>Superposition Principle

$P_i(x_i, t_i)$  و یک نقطه نهایی  $P_f(x_f, t_f)$  محاسبه شوند. این بدان معنی است که تمام مسیرها در بازه زمانی یکسان  $\Delta t = t_f - t_i$  طی می‌شوند.

بیایید توجه خود را به فرض I معطوف کنیم و نوع پیچیده‌تری از آزمایش شکاف دوگانه برای الکترون‌های تک انرژی ایجاد کنیم. برای سادگی، پراش یک شکاف را در نظر می‌گیریم و تصور می‌کنیم که بین منبع الکترون‌ها و صفحه مشاهده، یک سری از  $M$  صفحه‌های  $S_1, S_2, \dots, S_M$  قرار می‌دهیم که هر کدام حاوی  $N$ ، همانطور که در شکل (۶.۵) نشان داده شده، شکاف هستند. اگر اصل برهم‌نهی را اعمال کنیم، دامنه در نقطه  $P$  مجموع همه دامنه‌های ممکن مرتبط با همه مسیرهای ممکن خواهد بود، با توجه به:

$$\phi(P) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \Psi(x_k^i) \quad (۴۵.۵)$$

برای  $M$  در حد  $N \rightarrow \infty$ ، صفحه‌ها و شکاف‌ها به‌طور موثر ناپدید می‌شوند و ما اکنون،



شکل ۷.۵: چند مسیر برای رفتن از  $P_i$  به  $P_f$ .

همانطور که در شکل (۷.۵) نشان داده شده، در فضای خالی انتشار داریم. اکنون در موقعیتی هستیم که دامنه احتمال یک ذره را که از موقعیت اولیه  $(x_i, t_i)$  حرکت می‌کند، یعنی ذره‌ای که در زمان  $t_i$  در  $x_i$  قرار دارد، به موقعیت نهایی  $(x_f, t_f)$  که در آن ذره در مکان  $x_f$  در زمان  $t_f$  قرار دارد.

اصل II به ما می‌گوید که هر مسیر دامنه‌ای از صورت‌های زیر را ایجاد می‌کند

$$\phi^j = F_{f_i}^j e^{\frac{-i}{\hbar} S_{f_i}(x^j)} \quad (۴۶.۵)$$

که در آن  $F_{f_i}^j$  تابعی است حقیقی، و  $x^j$  مسیر  $j$  امین و

$$S_{f_i} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(x^j(t), \dot{x}^j(t), t) dt \quad (۴۷.۵)$$

انتگرال زمانی لاگرانژین کلاسیک سیستم است که در طول مسیر  $x^j(t)$  بین زمان‌های ثابت  $t_i$  و  $t_f$  محاسبه می‌شود. توجه کنید که عمل به‌صورت نمائی در معادله (۴۶.۵) بر

حسب  $\hbar$  ظاهر می شود.

ما بلافاصله از معادله (۲۱.۵) می بینیم، که  $S_{f_i}$  عمل یا به طور معادل، عملکرد اصل همیلتون سیستم مکانیکی است.

معادله (۴۷.۵) دستور العملی برای محاسبه عمل مربوط به هر مسیر است: به عبارت دیگر، یک مسیر  $x^j$ ، معادله (۴۷.۵) یک عدد (حقیقی) را که به آن مرتبط می کند، می دهد. بنابراین کنش (۴۷.۵) کاربردی است. اکنون می توانیم دامنه یک سیستم را که از نقطه  $(x_i, t_i)$  شروع می شود تا در نقطه  $(x_f, t_f)$  خاتمه می دهد را بیان کنیم:

$$K(x_i, t_i, x_f, t_f) = \sum_j F_{f_i}^j e^{\frac{i}{\hbar} S_{f_i}} \quad (۴۸.۵)$$

تابع  $K(x_i, t_i, x_f, t_f)$  منتشر کننده فضا-زمان نامیده می شود زیرا "انتشار" سیستم را از مکان اولیه فضا-زمان تا مکان نهایی فضا-زمان توصیف می کند.<sup>۱۵</sup>

در شکل (۷.۵) فقط چند مسیر ممکن نشان داده شده است. در تئوری، هر مسیری به محاسبه دامنه احتمال و در نتیجه به مسیر واقعی ذره کمک خواهد کرد. این تئوری نشان می دهد که مسیرهایی که انتشار در آنها با سرعتی بیشتر از سرعت نور اتفاق می افتد، با انتشار دهنده غیر صفر مرتبط هستند، بنابراین حرکت ابرشورایی یا انتقال اطلاعات ابرشورایی به وضوح نسبیت خاص را نقض می کند. در عمل به ذرات مرتبط با هر مسیر ذرات مجازی می گویند و می توان نشان داد که نسبیت خاص نقض نمی شود زیرا ذرات مجازی حامل اطلاعات نیستند.

اجازه دهید اکنون به جستجوی خود برای معادله حاکم بر توابع موج برگردیم و تابع موج را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Psi(x, t) \equiv \frac{K}{F} = e^{-\frac{i}{\hbar} S(x, t)} \quad (۴۹.۵)$$

اکنون نشان می دهیم که این تابع موج به ما اجازه می دهد تا ارتباط مستقیمی بین معادله  $HJ$  و معادله موج جدیدی که دنبال آن هستیم برقرار کنیم. بیایید در اینجا، برای راحتی، معادله (۳۲.۵)  $HJ$  را که قبلاً برای مختصات  $x$  مورد بحث قرار گرفت، گزارش کنیم:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (۵۰.۵)$$

متوجه می شویم که معادله (۴۹.۵) یک رابطه بین عمل  $S$  و تابع موج  $\Psi$  را بیان می کند. با گرفتن لگاریتم از دو طرف معادله (۴۹.۵) شروع می کنیم:

$$S = j\hbar \ln \Psi \quad (۵۱.۵)$$

بیایید برای سادگی خود را به یک مختصات فضایی  $x$  محدود کنیم و مشتق جزئی را با

<sup>۱۵</sup> در مکانیک کوانتومی پیشرفته تر، که در اینجا مورد بحث قرار نمی گیرد، انتشار دهنده در به اصطلاح نمودارهای فاینمن در نظریه میدان کوانتومی استفاده می شود.

توجه به  $x$  و  $t$  معادله (۵۱.۵) در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x} &= j\hbar \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= j\hbar \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\end{aligned}\quad (۵۲.۵)$$

اجازه دهید معادله (۵۲.۵) اول را جابجا کرده و بار دوم را نسبت به  $x$  مشتق بگیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{-j}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial x} \Psi \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -\frac{j}{\hbar} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \Psi\end{aligned}\quad (۵۳.۵)$$

جمله  $\frac{-j}{\hbar} \Psi \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$  برابر صفر است زیرا

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial p_x}{\partial x} = m \frac{\partial}{\partial x} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = m \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial x} \right) = 0$$

اکنون معادله (۵۳.۵) دوم و معادله (۵۲.۵) دوم را در معادله (۲۹.۵) وارد  $HJ$  می‌کنیم تا داشته باشیم:

$$-j \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (۵۴.۵)$$

که معادله شرودینگر<sup>۱۶</sup> برای تابع موج  $\Psi$  است که دامنه مربوط به مسیر فاینمن را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم سه بعد فضایی را در نظر بگیریم، معادله شرودینگر است:

$$-j \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi \quad (۵۵.۵)$$

که در آن

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۵۶.۵)$$

معادله شرودینگر (۵۵.۵) یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی برای تابع موج  $\Psi(x, y, z, t)$  است.

در مکانیک کلاسیک، دینامیک یک سیستم ساخته شده از  $N$  ذره با جرم  $m_i$ ، با  $i = 1, \dots, N$ ، توسط قوانین نیوتن کنترل می‌شود و وضعیت یک سیستم با دانش تمام موقعیت‌ها و تکانه‌ها  $(r_i, p_i)$  تعریف می‌شود. در مکانیک کوانتومی، وضعیت یک سیستم زمانی مشخص می‌شود که تابع موج سیستم داده شود. تکامل زمانی تابع موج با معادله شرودینگر توصیف می‌شود. تابع موج یک دامنه احتمال است و به طور کلی یک تابع مختلط است. مربع مدول تابع موج  $|\Psi(r, t)|^2$  چگالی احتمال است. این به این معنی است که  $|\Psi(r, t)|^2 dr$  احتمال یافتن سیستم بین موقعیت‌های  $r$  و  $r + dr$  در زمان  $t$  است. برای اینکه بتوانیم یک احتمال را به درستی نشان دهیم، باید شرط نرمال سازی را داشته باشیم:

$$\int |\Psi(r, t)|^2 dr = 1 \quad (۵۷.۵)$$

<sup>۱۶</sup>Schrodinger equation



از آنجایی که قبلاً اشاره کردیم که تابع موج به طور کلی باید مختلط باشد، پس معادله (۵۷.۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int \Psi^*(r, t) \Psi(r, t) dr = 1 \quad (58.5)$$

که در آن  $\Psi^*(r, t)$  مزدوج مختلط<sup>۱۷</sup>  $\Psi(r, t)$  است. خطی بودن معادله شرودینگر نشان می دهد که اگر  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  دو جواب باشند، مجموع  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$  نیز یک جواب است. این ویژگی پیامدهای مهم بسیاری دارد که بعداً بررسی خواهد شد.

## ۴.۲.۵ امواج مسطح (صفحه ای)

در این بخش نشان می دهیم که چگونه معادله شرودینگر با انرژی کلاسیک و نقش مهم راه حل های موج مسطح مرتبط است. دیدیم که برای یک ذره غیر نسبیتی با جرم  $m$  انرژی کل آن در یک بعد  $x$  مجموع انرژی جنبشی  $T$  و انرژی پتانسیل  $V$  است:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V \quad (59.5)$$

اگر اکنون این را در معادله (۵۹.۵) رابطه دیبرولی  $p = \hbar k$  را وارد کنیم، داریم:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad (60.5)$$

و با استفاده از رابطه پلانک، معادله (۶۰.۵) خواهد شد:

$$E = h\nu = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad (61.5)$$

بیایید یک موج مسطح به شکل زیر فرض کنیم:

$$\Psi(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)} \quad (62.5)$$

که در آن دامنه  $A$  باید نرمالیزه شود تا مطمئن شویم که مدول مربع یک احتمال را نشان می دهد. بیایید مشتق زمانی موج صفحه ای را مطالعه کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [Ae^{j(\omega t - kx)}] = j\omega \Psi(x, t) \quad (63.5)$$

معادله (۶۳.۵) را میتوان برعکس کرده تا فرکانس زاویه ای دیبرولی را بیان کند:

$$\omega = \frac{-j}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (64.5)$$

که در آن، برای سادگی، وابستگی  $\Psi$  را به  $(x, t)$  به صراحت نمی نویسیم.

<sup>۱۷</sup> در پایان کتاب به طور خلاصه بحث خواهیم کرد که چرا تابع موج باید یک تابع مختلط باشد

مشتق‌های فضایی عبارتند از:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -jk\Psi \quad (۶۵.۵)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2\Psi$$

که از آن  $k^2$  را استخراج می‌کنیم:

$$k^2 = -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (۶۶.۵)$$

با جایگزینی معادله (۶۴.۵) و معادله (۶۶.۵) در معادله (۶۱.۵) داریم:

$$\frac{-j\hbar}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] + V\Psi \quad (۶۷.۵)$$

و پس از حذف  $\Psi$  مشترک از دو طرف معادله (۶۷.۵) داریم:

$$-j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] + V\Psi \quad (۶۸.۵)$$

که دقیقاً برابر است با معادله (۵۴.۵) شرودینگر.

به‌عنوان مثال، بیایید ببینیم تابع موج یک ذره آزاد با جرم  $m$  و تکانه  $p$  چیست. اکنون باید واضح باشد که آزمایش‌ها نشان می‌دهند که نوعی موج، با طول‌موج دیبرولی، با هر ذره عظیم مرتبط است. با فرض اینکه ذره آزاد ما در امتداد جهت  $-x$  حرکت می‌کند، با تکانه  $p = \hbar k$  که در آن  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ، ساده‌ترین تابع موج یک موج مسطح (صفحه‌ای) به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\Psi(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)} \quad (۶۹.۵)$$

توجه داشته باشید که این تابع موج پیچیده است. در واقع با استفاده از فرمول اوایلر<sup>۱۸</sup> معادله (۶۹.۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Psi(x, t) = A [\cos(\omega t - kx) + j \sin(\omega t - kx)] \quad (۷۰.۵)$$

همچنین توجه داشته باشید که تابع موجی به‌شکل (۶۹.۵) تضمین می‌کند که احتمال ثابت  $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = |A|^2$  که در آن  $\Psi^*$  مزدوج مختلط<sup>۱۹</sup>  $\Psi$  مقدار ثابتی است که یک مقدار ثابت مربوط به این واقعیت است که ذره باید جایی بین  $-\infty$  و  $+\infty$  با احتمال مساوی باشد. برای لحظه‌ای جلوتر می‌رویم و متوجه می‌شویم که اگر موج صفحه (۶۹.۵) نشان دهنده ذره‌ای با عدد موج  $k$  دقیقاً تعریف شده باشد، نمی‌توانیم بگوییم که ذره در کجای فضا قرار دارد.

<sup>۱۸</sup> فرمول اوایلر از این قرار است:  $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$   
<sup>۱۹</sup> مزدوج مختلط عدد مختلط  $h = a + jb$  برابر  $h^* = a - jb$  است.

استدلال قانع کننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد تابع موجی به شکل (۶۹.۵) (موج صفحه) برای نمایش یک ذره آزاد که در جهت  $x$  مثبت منتشر می‌شود، مورد نیاز است. در واقع، اجازه دهید تابع موج ساده‌تری به صورت زیر را مطالعه کنیم:

$$\Psi(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx + \delta_1) \quad (71.5)$$

که در آن  $\delta_1$  فاز است. اگر بخواهیم انتشار در جهت  $x$  منفی را مطالعه کنیم تابع موج به صورت زیر خواهد بود:

$$\Psi(x, t) = A_2 \cos(\omega t + kx + \delta_2) \quad (72.5)$$

ما اکنون یک فرض اساسی در مورد تابع موج بیان می‌کنیم: دانش تابع موج در زمان  $t = 0$  نشان دهنده دانش کامل سیستم ما، از جمله تکامل زمانی آن است. به عبارت دیگر دانستن  $\Psi(x, 0)$  برای پیش بینی  $\Psi(x, t)$  کافی است. اگر این فرض معتبر باشد، نمی‌توانیم امواج صفحه را با عبارات واقعی به شکل (۷۱.۵) یا (۷۲.۵) نمایش دهیم. مسئله اصلی<sup>۲۰</sup> شامل تشخیص این است که (۷۱.۵) نشان دهنده ذره‌ای است که در جهت  $x$  مثبت حرکت می‌کند در حالی که (۷۲.۵) نشان دهنده ذره‌ای است که در جهت مخالف حرکت می‌کند. اکنون، همانطور که منطقی به نظر می‌رسد، نیاز داریم که این دو تابع به صورت خطی برای هر  $t$  مستقل باشند، یعنی نشان دهنده ذرات متمایز در حرکت در جهت مخالف باشند. نتیجه این است که شرط استقلال خطی در زمان خاص  $t = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\omega}$  نقض می‌شود، زمانی که دو تابع متناسب هستند و بنابراین به طور خطی وابسته هستند. ساده‌ترین انتخاب برای جلوگیری از این مسئله اضافه کردن یک عبارت سینوسی با همان آرگومان  $(\omega t - kx)$ ، یعنی همان طول موج دیبرولی که با سرعت یکسان حرکت می‌کند، به هر دو عبارت است:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= A_1 [\cos(\omega t - kx) + \delta_1 \sin(\omega t - kx)] \\ \Psi_2(x, t) &= A_2 [\cos(\omega t - kx) + \delta_2 \sin(\omega t - kx)] \end{aligned} \quad (73.5)$$

و اکنون نیاز داریم که این دو عبارت در معادلات (۷۳.۵) همیشه به صورت خطی مستقل باشند. این به معنای یافتن دو ثابت  $\delta_1$  و  $\delta_2$  است به طوری که یک موج صفحه  $\Psi_1(x, t)$  نشان دهنده ذره‌ای است که در امتداد جهت  $x$  مثبت منتشر بدون هیچ گونه مخلوطی از  $\Psi_2(x, t)$  که در جهت مخالف منتشر می‌شود. این بدان معنی است که موج صفحه‌ای که ذره را در زمان  $t$ ،  $\Psi(x)$  نشان می‌دهد، فقط ضربی از موج صفحه‌ای در  $t = 0$  است، یعنی  $\Psi(x, t) = a(x, 0)$ . به طور کلی، اگر با  $\epsilon = -\omega t$  عبارت وابستگی زمانی را نشان دهیم، برای همه  $x$  و  $\epsilon$  باید داشته باشیم:

$$\cos(kx + \epsilon) + \delta_1 \sin(kx + \epsilon) = a_1(\epsilon)(\cos kx + \delta_1 \sin kx) \quad (74.5)$$

با استفاده از  $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$  و  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ ، معادله (۷۴.۵) می‌شود:

$$(\cos \epsilon + \delta_1 \sin \epsilon) \cos kx + \sin \epsilon (-\sin kx + \delta \cos \epsilon) = a_1(\epsilon) \cos kx + a_1(\epsilon) \delta_1 \sin kx \quad (75.5)$$

<sup>۲۰</sup> برای بررسی گسترده این استدلال به کتاب عالی مرزباخر [۲۸] مراجعه کنید.

برای معتبر بودن برای همه مقادیر  $x$  و  $\epsilon$ ، ضرایب  $\sin kx$  و  $\cos kx$  باید برابر باشند با:

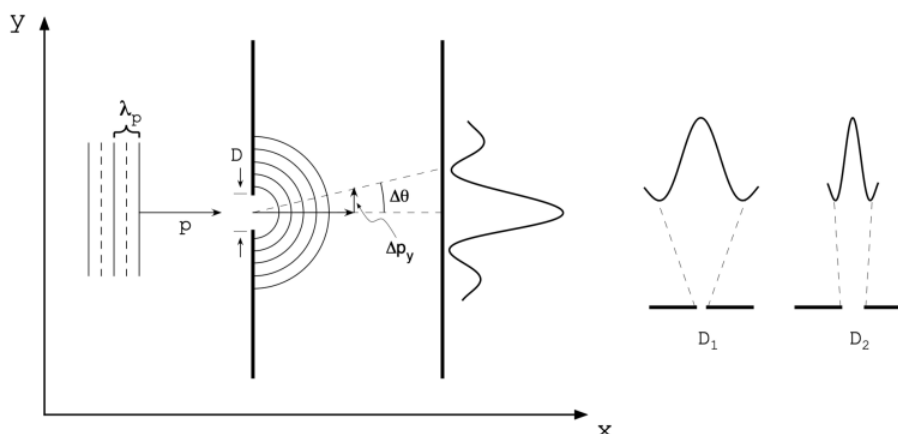
$$\begin{aligned}\cos \epsilon + \delta_1 \sin \epsilon &= a_1(\epsilon) \\ \delta_1 \cos \epsilon - \sin \epsilon &= a_1(\epsilon) \delta_1\end{aligned}\quad (76.5)$$

و به راحتی می توان تأیید کرد که شرط (76.5) فقط در صورتی که  $\delta_1 = \pm j$  برآورده می شود. نتیجه آنالوگ به دست می آید اگر شرایط مشابهی را برای  $\Psi_2(x, t)$  اعمال کنیم. با انتخاب  $\delta_1 = -j$  و  $\delta_2 = +j$ ، به ترتیب، برای امواج صفحه ای که به سمت  $x$  مثبت و منفی منتشر می شوند، انتخاب امواج صفحه را توجیه می کنیم:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, t) &= A_1 e^{j(\omega t - kx)} \\ \Psi_2(x, t) &= A_2 e^{-j(\omega t - kx)}\end{aligned}\quad (77.5)$$

### ۳.۵ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

در فصل های قبلی دیدیم که شواهد تجربی زیادی وجود دارد که ذرات با امواج مرتبط هستند تا آزمایش های مختلفی را توضیح دهیم که در آن ذرات کوچک، مانند الکترون ها، پدیده های تداخلی را تجربه می کنند. پراکندگی الکترون ها از شبکه های کریستالی یا تداخل شکاف دوگانه دو نمونه از نمونه های بسیار هستند. در قیاس پراش الکترومغناطیسی از یک روزنه کوچک (شکل ۴.۵)، پراش ذرات از یک شکاف منفرد (یا یک سوراخ کوچک) نیز یک واقعیت تجربی است. در شکل (۸.۵) ما ذره ای با تکانه افقی معروف  $p$  داریم که از صفحه ای عبور می کند که در آن روزنه ای به ابعاد  $D \sim \lambda_p$ ، که در آن  $\lambda_p$  طول موج دیبرولی است، وجود دارد. قبل از عبور از دیافراگم، بردار تکانه  $p = (p_x, 0)$  است، یعنی تکانه فقط دارای مولفه افقی در امتداد محور انتشار  $x$  است.



شکل ۸.۵: پراش ذرات با تکانه  $p$  از یک روزنه کوچک  $D \sim \lambda$ . پانل سمت راست رابطه معکوس بین دیافراگم و زاویه پخش را در هنگام  $D_1 < D_2$  نشان می دهد.

همانطور که قبلاً تأکید کردیم، وقتی ذره از دیافراگم  $D$  عبور کرد، هیچ راهی برای

پیش‌بینی دقیق جایی که ذره روی صفحه مشاهده فرود خواهد آمد، وجود ندارد. بهترین کاری که می‌توانیم انجام دهیم این است که ذرات زیادی را با تکانه یکسان بفرستیم و موقعیت مکانی که ذره در آن فرود می‌آید را روی صفحه مشاهده ثبت کنیم. هنگامی که ذرات به اندازه کافی ثبت شدند، یک الگوی پراش معمولی ظاهر می‌شود، که در آن حداکثر تعداد ذرات در  $y = 0$  ثبت می‌شود، همانطور که به طور کلاسیک انتظار می‌رود، یعنی ذره بدون انحراف از دیافراگم عبور کرده است. با این حال، و برخلاف انتظارات کلاسیک، ذراتی وجود خواهند داشت که حتی در زوایای بزرگ پراکنده می‌شوند. در قیاس با پراش امواج الکترومغناطیسی، اولین صفر در الگوی پراش زمانی اتفاق می‌افتد که زاویه انتشار  $\Delta\theta$  از مرتبه  $\lambda/D$  باشد.

با پیروی از فاینمن [۱۶]، اجازه دهید اکنون این آزمایش پراش ذره را مطالعه کنیم و مرتبه‌ای از بیان را برای دانش خود از سیستم به دست آوریم تا بتوانیم پیش‌بینی‌های آتی دینامیک ذره را انجام دهیم. قبلاً با نگاه کردن به پانل سمت راست شکل (۸.۵) حدس زده‌ایم، که هر چه بیشتر سعی کنیم ذره را در حین عبور از دیافراگم بومی سازی کنیم، یعنی هر چه  $D$  را کوچکتر کنیم، گسترش تکانه به دلیل پراش موج مرتبط با ذره بیشتر خواهد شد. طبیعی است که این فرضیه را ایجاد کنیم که حاصلضرب شناخت موقعیت ضربدر دانش تکانه ثابت است تا تناسب معکوس وجود داشته باشد. این واقعیت قابل توجه که ثابت پلانک ثابت است و نباید تا به حال ما را شگفت زده کرده باشد.

وقتی ذره به دیافراگم نزدیک می‌شود، تکانه  $p$  آن را می‌دانیم که کاملاً در جهت  $x$  است. در زمان عبور از دیافراگم، دانش ما از موقعیت ذره  $\Delta y \approx D$  است. پس از عبور ذره از روزنه، می‌دانیم که تکانه دیگر فقط در امتداد جهت  $x$  نیست، بلکه تابع آن است. گسترشی که تقریباً می‌توانیم آن را برابر  $p_y = p\Delta\theta = p\frac{\lambda}{D}$  در جهت  $y$  تخمین بزنیم. اما از دیبرولی می‌دانیم که حاصلضرب  $p\lambda = h$  و بنابراین نتیجه جالبی داریم که حاصل ضرب عدم قطعیت‌ها در موقعیت و تکانه است:

$$\Delta y \Delta p_y \approx h \quad (78.5)$$

این به اصطلاح اصل عدم قطعیت هایزنبرگ (HUP)<sup>۲۱</sup> است و اولین بار توسط هایزنبرگ<sup>۲۲</sup> در سال ۱۹۲۷ ارائه شد [۲۰]. به منظور سازگاری با آزمایشات، رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ دقیق یک نابرابری است:

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (79.5)$$

به طور کلی، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به ما می‌گوید که با توجه به شرایط اولیه، یک محدودیت اساسی برای دانستن مقدار یک جفت دو کمیت فیزیکی قابل اندازه‌گیری وجود دارد. توجه داشته باشید که در مورد موقعیت و تکانه، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

<sup>۲۱</sup> Heisenberg Uncertainty Principle (HUP)

<sup>۲۲</sup> ورنر ک. هایزنبرگ (۱۹۰۱ – ۱۹۷۶) فیزیکدان نظری آلمانی و یکی از پدران مکانیک کوانتومی بود. علاوه بر اصل عدم قطعیت، هایزنبرگ نظریه‌ای درباره مکانیک کوانتومی بر اساس جبر ماتریسی فرموله کرد که بعداً در این کتاب مورد بحث قرار خواهد گرفت.

به ما می گوید که نابرابری (۷۹.۵) برای طرح ریزی تکرانه در امتداد جهت متغیر موقعیت اعمال می شود. اگر بخواهیم مختصات  $x$  را در نظر بگیریم، برای مثال، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$  و عبارت مشابهی برای مختصات  $z$  نوشته می شود. به بیان دقیق تر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ باید شامل تعریف بهتری از نماد عدم قطعیت  $\Delta$  باشد. از لحاظ آماری، اگر انحراف معیار را که پس از اندازه گیری های آزمایشی فراوان مثلاً موقعیت ذره به دست می آید، معرفی کنیم، خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (۸۰.۵)$$

که آن در مورد یک مجموعه گسسته و  $\bar{x}$  مقدار متوسط  $x$  است. اگر یک متغیر پیوسته داشته باشیم، انحراف معیار به صورت زیر است:

$$\sigma_x = \sqrt{\int (x_i - \bar{x})^2 g(x) dx} \quad (۸۱.۵)$$

که در آن  $g(x)$  تابع چگالی احتمال است، یعنی  $g(x)dx$  احتمال یافتن ذره بین  $x$  و  $x+dx$  و  $\bar{x} = \int x g(x) dx$  است. با استفاده از تعریف (۸۰.۵) یا (۸۱.۵) می بینیم که تعریف بهتری از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ<sup>۲۳</sup> این است:

$$\sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۸۲.۵)$$

می توانیم به طور کلی تر معادله (۷۹.۵) برای زوج متغیر  $(q, p)$  فرمول سازی همیلتون بنویسیم:

$$\sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۸۳.۵)$$

متغیرهای  $(q, p)$  متغیرهای مزدوج هستند به این معنا که با یک تبدیل به هم متصل می شوند. در واقع معادله اول (۲۴.۵) به ما می گوید که تکرانه مشتق جزئی عمل  $S$  با توجه به مختصات تعمیم یافته  $q$  است و به طرز جالبی عمل  $S$  را دوباره معرفی می کند. آیا زوج های دیگری از متغیرهای مزدوج وجود دارند که می توان برای آنها یک اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نوشت؟ پاسخ مثبت است و معادله دوم در (۲۴.۵) به ما می دهد:

$$\sigma_E \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۸۴.۵)$$

این اصل عدم قطعیت هایزنبرگ آخر را می توان به روش های مختلفی تفسیر کرد. به عنوان مثال، به این معنی است که تعیین انرژی  $E$  با دقت  $\sigma_E$  حداقل به زمان  $\sim \frac{\hbar}{\sigma_E}$  نیاز دارد. یک تفسیر ظریف تر عبارت است از الزام به نقض بقای انرژی مشروط بر اینکه نقض کوتاهتر از زمان  $\frac{\hbar}{\sigma_E}$  و غیره باشد. بدیهی است که همه این اثرات تنها در مقیاس اتمی با توجه به مقدار کوچک  $\hbar$  مهم هستند.

<sup>۲۳</sup> این نابرابری کنارد Kennard نیز شناخته می شود.

اجازه دهید به یک زوج مزدوج دیگر که از طریق عمل  $S$  متصل شده است اشاره کنیم. در رابطه اول (۱۳.۵)، یک رابطه بین تکانه تعمیم یافته  $p$  و مشتق عمل با توجه به مختصات تعمیم یافته  $q$  را مشاهده کردیم. یک زوج جدید از متغیرهای مزدوج متعارف  $(L, \theta)$  را معرفی می‌کنیم که از طریق تبدیل متعارف  $(p, q) \rightarrow (L, \theta)$ ، که در آن  $L$  تکانه زاویه‌ای و  $\theta$  زاویه است. می‌توان نشان داد که  $L = \frac{\partial S}{\partial \theta}$  و بنابراین، در قیاس با تکانه/موقعیت و انرژی/زمان، یک صل عدم قطعیت هایزنبرگ اضافی داریم:

$$\sigma_L \sigma_\theta \geq \frac{\hbar}{2} \quad (۸۵.۵)$$

معادله (۸۵.۵) به ما می‌گوید که تعیین دقیق تکانه زاویه‌ای یک ذره در مدار مستلزم از دست دادن اطلاعات مربوط به موقعیت زاویه‌ای آن است.

در نهایت، متوجه می‌شویم که متغیرهای مزدوج که توضیح دادیم، به‌عنوان مثال  $(x, p_x)$ ،  $(E, t)$  و  $(L, \theta)$  از طریق قضیه نوتر<sup>۲۴</sup> که در فصل اول بحث شد به هم مربوط شده‌اند. این یک بار دیگر این موضوع نقش اساسی عمل  $S$  به‌عنوان پلی بین مکانیک کلاسیک و کوانتومی از طریق متغیرهای مزدوج، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و تقارن‌های قضیه نوتر را تقویت می‌کند.

## ۴.۵ اپراتورها و امید ریاضی

بیایید معادله (۶۸.۵) شرودینگر را به روشی کمی متفاوت بازنویسی کنیم:

$$-j\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right] \Psi \quad (۸۶.۵)$$

و با معادله (۶۰.۵) مقایسه کنیم. در گذر از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی، ایجاد ارتباط زیر طبیعی به نظر می‌رسد:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow -j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \\ T + V &\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right] \Psi \end{aligned} \quad (۸۷.۵)$$

به‌طور خاص‌تر، به نظر می‌رسد انرژی با مشتق جزئی با توجه به زمان تابع موج  $\Psi$  مرتبط باشد در حالی که تابع اسکالر کلاسیک  $V$ ، در مکانیک کوانتومی،  $-\frac{\hbar^2}{2m} V \Psi$  و انرژی جنبشی کلاسیک  $\frac{p^2}{2m}$  برابر  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi$  می‌شود. به نظر می‌رسد این کمیت آخر تکانه را با مشتق جزئی با توجه به مختصات  $x$ ، یعنی  $j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}$  مرتبط می‌کند.

به‌طور کلی، در حالت سه بعدی، مرسوم است که ارتباط زیر ایجاد شود:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow -j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \hat{p} &\rightarrow j\hbar \frac{\partial}{\partial r} = j\hbar \nabla \\ \hat{r} &\rightarrow r \end{aligned} \quad (۸۸.۵)$$

که در آن ما با یک کلاه در بالای نماد این واقعیت را نشان دادیم که آنها اجسام مکانیک کوانتومی هستند که قرار است در سمت راست آنها به تابع موج  $\Psi$  اعمال شوند. بنابراین

<sup>۲۴</sup>Noether theorem

مفهوم عملگرها (اپراتورها)<sup>۲۵</sup> را معرفی کرده‌ایم، یعنی اشیاء ریاضی که وقتی روی یک تابع اعمال می‌شوند، تابع دیگری تولید می‌کنند. آنها بسط مفهوم آشناتر تابع  $y = f(x)$  هستند که در آن نماد  $f(x)$  به این معنی است که طبق دستور  $f(x)$  عدد  $y$  را به عدد  $x$  مرتبط می‌کنیم. در مورد عملگرها، ما یک تابع  $\phi(x, t) = \hat{A}\Psi(x, t)$  را مرتبط می‌کنیم، به این معنی که عملگر  $\hat{A}$  تابع  $\Psi(x, t)$  را به یک تابع جدید  $\phi(x, t)$  تبدیل می‌کند. مهم است که بگوییم که عملگرها بر روی تابعی که در سمت راست آنها نوشته شده است عمل می‌کنند. کمیت‌های قابل اندازه‌گیری کلاسیک (مشاهده پذیر) مانند انرژی کل، تکانه، موقعیت و غیره در مکانیک کوانتومی عملگر می‌شوند. به طور کلی، عملگرها کمیت‌های ریاضی هستند که روی تابع موج عمل و تابع موج دیگری تولید می‌کنند. توجه کنید که عملگر موقعیت  $\hat{r}$  فقط ضرب  $r$  در تابع موج است، یعنی  $\hat{r}\Psi = r \cdot \Psi$ . با محاسبه مقادیر به اصطلاح امید ریاضی که به عنوان تعمیم میانگین وزنی تعریف می‌شود، می‌توانیم تفسیر احتمالی تابع موج را کمی جلوتر ببریم. برای یک متغیر پیوسته، مانند موقعیت  $x$ ، امید ریاضی معمولاً با  $\langle x \rangle$  نشان داده می‌شود و برابر است با:

$$\langle x \rangle = \int \hat{x} |\Psi(r, t)|^2 dx = \int \Psi^*(x, t) \hat{x} \Psi(x, t) dx \quad (۸۹.۵)$$

که به معنای احتمال نتیجه یک آزمایش منفرد یا میانگین بسیاری از آزمایش‌های انجام شده بر روی بسیاری از سیستم‌های یکسان مستقل است. از اینرو امید ریاضی انرژی و تکانه را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -j\hbar \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} dr \\ \langle p \rangle &= j\hbar \int \Psi^* \nabla \Psi dr \end{aligned} \quad (۹۰.۵)$$

معادله شرودینگر معادل بیان کلاسیک انرژی کل،  $E = T + V$  است که با جایگزینی در معادله (۸۸.۵) نشان داده شده است.

اکنون دو عملگر را معرفی می‌کنیم: انرژی جنبشی  $\hat{T}$  و انرژی پتانسیل  $\hat{V}$ . اگر انرژی پتانسیل  $V = V(r)$  تابعی از موقعیت باشد، عملگر مکانیک کوانتومی آن فقط یک ضرب است و بنابراین:

$$\hat{V} = V(r) \quad (۹۱.۵)$$

عملگر انرژی جنبشی را می‌توان با استفاده از عملگر تکانه ساخت. با شروع  $T = \frac{p^2}{2m}$ ، مربع عملگر  $\hat{p}$  را به عنوان کاربرد آن دو بار به ترتیب در نظر می‌گیریم، یعنی  $\hat{p}^2 \Psi = \hat{p}(\hat{p}\Psi)$ . بنابراین عملگر انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = j\hbar \nabla \cdot (j\hbar \nabla) \frac{1}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (۹۲.۵)$$

در نهایت می‌توانیم یک عملگر بسیار مهم،  $\hat{H}$  همیلتونی را به صورت زیر بیان کنیم:

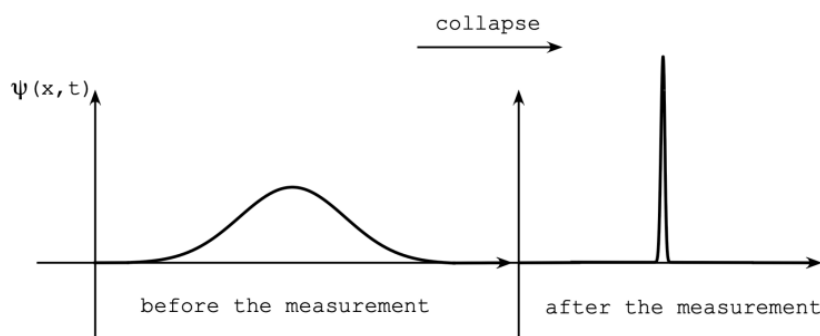
$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \quad (۹۳.۵)$$

<sup>۲۵</sup> Operators,



این به ما امکان می‌دهد معادله شرودینگر را به شکل بسیار فشرده زیر بیان کنیم:

$$-j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (۹۴.۵)$$



شکل ۹.۵: فروپاشی تابع موج به دلیل عمل اندازه‌گیری.

## ۱.۴.۵ اندازه‌گیری‌ها و جابجایی‌ها

اگر فرض کنیم که تابع موج  $\Psi(r, t)$  وضعیت یک سیستم فیزیکی را در زمان  $t$  نشان دهد، می‌بینیم عملگری که کمیت فیزیکی قابل اندازه‌گیری را نشان می‌دهد در سمت راست خود روی تابع موج عمل می‌کند. یکی از اصول اولیه مکانیک کوانتومی این است که فرض کنیم عملگری که بر روی تابع موج عمل می‌کند معادل اندازه‌گیری کمیت فیزیکی مربوط به عملگر در زمان  $t$  است. برای مثال، اندازه‌گیری موقعیت با اعمال عملگر  $\hat{r}$  به تابع موج به دست می‌آید:  $\hat{r}\Psi(r, t)$ . به عنوان مثالی دیگر، اندازه‌گیری تکانه یک ذره به صورت  $\hat{p}\Psi(r, t) = j\hbar \nabla \Psi(r, t)$  نشان داده می‌شود.

ممکن است تعجب کنید که وقتی اندازه‌گیری‌های خود را به پایان رساندیم چه اتفاقی برای تابع موج می‌افتد. ما موضوع جالب و گسترده تفاسیر مختلف مکانیک کوانتومی را بررسی نمی‌کنیم، اما خود را به تفسیر بسیار محبوب **کپنهاگ** محدود می‌کنیم که بیان می‌کند در حالی که تابع موج قبل از اندازه‌گیری‌ها دامنه احتمال یافتن سیستم را در یک حالت خاص نشان می‌دهد، پس از اندازه‌گیری تابع موج به طور چشمگیری تغییر کرده است (شکل ۹.۵). قبل از اندازه‌گیری، سیستم در حالتی است که فقط می‌توانیم احتمال دستیابی به مقدار معینی را برای کمیت اندازه‌گیری شده بدانیم. پس از اندازه‌گیری‌ها، اکنون می‌دانیم که سیستم در واقع در یک حالت خاص است و بنابراین تابع موج باید تغییر کند تا حالت جدید را نشان دهد. در مورد شکل (۹.۵) اگر تابع موج در سمت چپ، به عنوان مثال، موقعیت یک ذره را نشان دهد، پس از اندازه‌گیری می‌دانیم که ذره در یک موقعیت خاص قرار دارد و این با یک تابع موج با اوج بالا در اطراف موقعیت اندازه‌گیری شده نشان داده می‌شود.

کار با اپراتورها یک نتیجه جالب دارد: اگر دو اندازه‌گیری مختلف را روی یک سیستم انجام دهیم، نتیجه نهایی به ترتیب اندازه‌گیری‌ها بستگی دارد. به عنوان مثال، اگر ابتدا تکانه و سپس موقعیت یک ذره را اندازه‌گیری کنیم، اگر ابتدا موقعیت و سپس تکانه را اندازه‌گیری کنیم، نتیجه متفاوت خواهد بود. این به صورت ریاضی زیر بیان می‌شود:

$$\hat{x}\hat{p}\Psi \neq \hat{p}\hat{x}\Psi \quad (۹۵.۵)$$

که به این صورت خوانده می‌شود: ابتدا تکانه  $\hat{p}\Psi$  و سپس موقعیت  $\hat{x}(\hat{p}\Psi)$  را اندازه می‌گیریم. اگر ابتدا موقعیت  $\hat{x}\Psi$  را اندازه‌گیری کنیم و سپس تکانه  $\hat{p}(\hat{x}\Psi)$  را اندازه‌گیری کنیم، نتیجه متفاوت است. بنابراین ترتیب اعمال عملگرها بر روی تابع موج بسیار مهم است. کموتاتور (جابجائی) دو عملگر به ما می‌گوید که این تفاوت چیست و با نماد  $[\hat{x}, \hat{p}]$  نشان داده می‌شود:

$$[\hat{x}, \hat{p}]\Psi = \hat{x}\hat{p}\Psi - \hat{p}\hat{x}\Psi \quad (۹۶.۵)$$

بعداً در کتاب خواهیم دید که کموتاتور بین عملگرها نقش اساسی در مکانیک کوانتومی دارد. به همین دلیل، در اینجا فهرستی از خواص را ارائه می‌دهیم. با توجه به سه عملگر  $A, B, C$  و ثابت  $c$  داریم:

$$\begin{aligned} [A, c] &= 0 \\ [A, A] &= 0 \\ [A, B] &= -[B, A] \\ [cA, B] &= [A, cB] = c[A, B] \\ [AB, \pm C] &= [A, B] \pm [A, C] \\ [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B \\ [A, BC] &= B[A, C] + [A, B]C \end{aligned} \quad (۹۷.۵)$$

یک رابطه بین کموتاتورها و اصل عدم قطعیت هایزنبرگ وجود دارد. برای نشان دادن این، بیایید نماد خود را ساده کنیم و امید ریاضی برای یک عملگر  $\hat{A} = \Psi^* \hat{A} \Psi$  را به صورت  $\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi^* \hat{A} \Psi$  بنویسیم که در آن علامت انتگرال را به صراحت نمی‌نویسیم. حال بیایید واریانس (یعنی مربع انحراف معیار) عملگر  $\hat{x}$  و عملگر  $\hat{p}_x$  را از معادله (۸۹.۵) بنویسیم:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \Psi^* (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \Psi \\ \sigma_{p_x}^2 &= \Psi^* (\hat{p}_x - \langle \hat{p}_x \rangle)^2 \Psi \end{aligned} \quad (۹۸.۵)$$

اجازه دهید دو عملگر  $\hat{H}$  و  $\hat{K}$  را معرفی کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{x} - \Psi^* \hat{x} \Psi \\ \hat{K} &= \hat{p}_x - \Psi^* \hat{p}_x \Psi \end{aligned} \quad (۹۹.۵)$$

نشان دادن این که معادله (۹۸.۵) به صورت زیر می‌شود آسان است:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \Psi^* (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \Psi = \Psi^* \hat{H}^2 \Psi \\ \sigma_{p_x}^2 &= \Psi^* (\hat{p}_x - \langle \hat{p}_x \rangle)^2 \Psi = \Psi^* \hat{K}^2 \Psi \end{aligned} \quad (۱۰۰.۵)$$

اجازه دهید یک عملگر دیگر  $\hat{Q} = \hat{H} - j\alpha \hat{K}$  بسازیم و مدول مربع آن را مطالعه کنیم که باید مثبت باشد، یعنی  $\Psi^* \hat{Q}^* \cdot \hat{Q} \Psi \geq 0$ . توجه کنید که عملگر مزدوج مختلط  $\hat{Q}^*$  را در

سمت راست تابع موج نوشته‌ایم (همچنین مختلط مزدوج)  $\Psi^*$  با این قرارداد که عملگرهای مختلط مزدوج روی توابع موج مختلط مزدوج در سمت چپ آنها عمل می‌کنند. داریم:

$$\begin{aligned}\Psi^* Q^* \cdot Q \Psi &= \Psi^* (\hat{H} + j\alpha \hat{K}) (\hat{H} - j\alpha \hat{K}) \Psi \\ &= \Psi^* \hat{H}^2 \Psi + \alpha^2 \Psi^* \hat{K}^2 \Psi + j\alpha \Psi^* \hat{K} \hat{H} \Psi - j\alpha \Psi^* \hat{H} \hat{K} \Psi \quad (10.1.5) \\ &= \sigma_x^2 + \alpha^2 \sigma_{p_x}^2 - j\alpha \Psi^* [H, K] \Psi \geq 0\end{aligned}$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که  $[H, K] = [\sigma_x, \sigma_{p_x}]$  و بنابراین معادله (10.1.5) می‌شود:

$$\Psi^* Q^* \cdot Q \Psi = \sigma_x^2 + \alpha^2 \sigma_{p_x}^2 - j\alpha \Psi^* [H, K] \Psi \geq 0 \quad (10.2.5)$$

اکنون می‌پرسیم مقدار  $\alpha$  که نامساوی (10.2.5) را به حداقل (مینیموم) می‌رساند چیست؟ این با صفر کردن مشتق با توجه به  $\alpha$  عبارت در معادله (10.2.5) محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\Psi^* Q^* \cdot Q \Psi) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_x^2 + \alpha^2 \sigma_{p_x}^2 - j\alpha \Psi^* [H, K] \Psi) = 0 \quad (10.3.5)$$

با گرفتن مشتق خواهیم داشت:

$$2\alpha \sigma_{p_x}^2 - j\Psi^* [H, K] \Psi = 0 \quad (10.4.5)$$

که از آن  $\alpha = j2\sigma_{p_x}^2 \Psi^* [H, K] \Psi$  را بدست آورده و سپس دوباره در معادله (10.2.5) قرار می‌دهیم. بعد از کمی عملیات جبری، یک رابطه بسیار مهم به دست می‌آوریم:

$$\sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{-j}{2} [\hat{x}, \hat{p}_x] \quad (10.5.5)$$

معادله (10.5.5) برای دو عملگر کوانتومی  $\hat{X}$  و  $\hat{p}_x$  نوشته شده است اما نتیجه کلی تری است. با توجه به دو عملگر جابجائی  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$ ، یعنی برای آنها  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ، آنگاه جابجائی عبارت است از:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{-j}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (10.6.5)$$

در صورتی که جابجایی از موارد زیر پیروی کند اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بازیابی می‌شود:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = -j\hbar \quad (10.7.5)$$

زیرا می‌توان بلافاصله با جایگزینی آن را تأیید کرد. بیاید چند ویژگی کموتاتور را فهرست کنیم که بعداً مفید خواهند بود. از اینرو داریم:

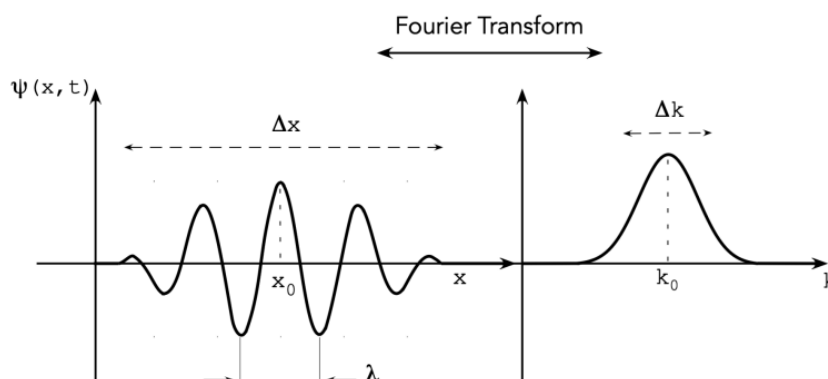
• I هر عملگر  $\hat{A}$  با یک اسکالر جابجا می‌کند،  $[\hat{A}, c] = 0$

• II با توجه به سه عملگر  $\hat{A}$ ،  $\hat{B}$ ،  $\hat{C}$ ،  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

• III هر اپراتور  $\hat{A}$  با خودش جابجائی دارد،  $[\hat{A}, \hat{A}] = 0$ .

## ۵.۵ بسته‌های موج و قضیه ارنفست

تا اینجا تابع موج را به عنوان یک دامنه مختلط معرفی کردیم که مدول مربع آن، اگر به درستی نرمالیزه شود، احتمال یافتن ذره را در یک مکان خاص می‌دهد. از سوی دیگر، این احتمال، این مفهوم را زیر سوال می‌برد که ما با آزمایش‌هایی سر و کار داریم که چندین بار در شرایط اولیه دقیقاً یکسان تکرار شده‌اند. بنابراین ممکن است تعجب کنیم که معنای تابع موج یک ذره منفرد چیست؟ یک ایده می‌تواند شناسایی یک ذره با نوعی دسته از امواج موضعی باشد، همانطور که در شکل (۱۰.۵) نشان داده شده است. در این نمایش، ذره با یک بسته موجی از پخش فضایی  $\Delta x$  با طول موج دیبرولی  $\lambda$  شناسایی می‌شود. تبدیل فوریه آن محتوای هارمونیک مورد نیاز را نشان می‌دهد، یعنی چه تعداد موج سینوسی و کسینوسی با فازهای مناسب باید با هم جمع شوند تا بسته موج بازتولید شود. ایده اصلی این است که در خارج از ناحیه  $\Delta x$ ، برهم نهی (جمع اثرهای) امواج مختلف یک تداخل مخرب ایجاد می‌کند در حالی که در منطقه  $\Delta x$  تداخل سازنده است.



شکل ۱۰.۵: سمت چپ: تابع موج (بسته موج) که نشان دهنده ذره‌ای است که در ناحیه  $\Delta x$  با طول موج دیبرولی  $\lambda$  وابسته شده است. سمت راست: تبدیل فوریه بسته موج.

گسترش در موقعیت  $\Delta x$  نسبت معکوس با گسترش در تکانه  $\Delta p = \hbar \Delta k$  است: در واقع، هر چه بیشتر سعی کنیم ذره را با کوچک‌تر کردن گستره (پخش)  $\Delta x$  بومی‌سازی<sup>۲۶</sup> کنیم، گسترش در تکانه بزرگ‌تر خواهد بود. ما به امواج بیشتر و بیشتری برای تداخل مخرب در خارج از  $\Delta x$  نیاز داریم و بالعکس. مورد محدود کننده یک تابع دلتا برای بومی‌سازی دقیق ذره به قیمت از دست دادن کامل دانش حرکت آن خواهد بود و بالعکس. ما نباید از این نتیجه تعجب کنیم زیرا مربوط به یک ویژگی کلی تبدیل فوریه است، یعنی **قضیه پهنای باند**<sup>۲۷</sup> نامیده می‌شود و می‌گوید که حاصل ضرب عرض  $\sigma_x$  یک تابع ضربدر عرض  $\sigma_p$  تبدیل فوریه آن از نابرابری  $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{2}$  تبعیت می‌کند. تبدیل فوریه (FT)

<sup>۲۶</sup>Localize

<sup>۲۷</sup>Bandwidth Theorem

تابع  $f(x)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j2\pi px} dx \quad (۱۰.۸.۵)$$

و معکوس آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(p) e^{-j2\pi px} dp \quad (۱۰.۹.۵)$$

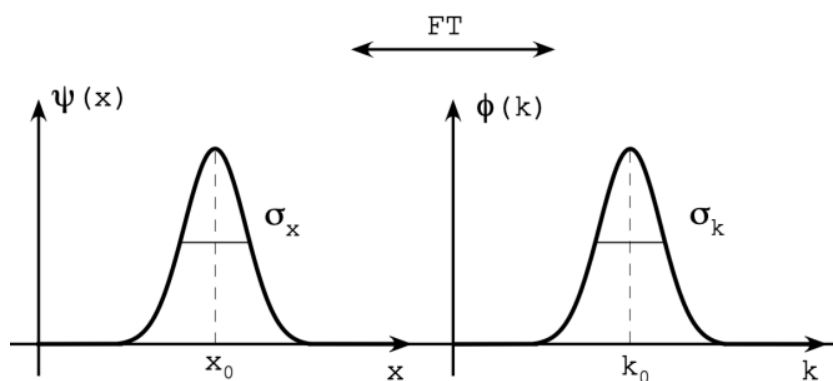
و عرض ها با معادله (۸۱.۵) داده می شوند که در آن  $g(x) = |f(x)|^2$  است. از نظر عدد موج  $k$  و اگر بخواهیم توابع و FT آنها نرمال سازی یکسانی داشته باشند (شکل متقارن) داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-jkx} dk \\ F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{jkx} dx \end{aligned} \quad (۱۱.۵)$$

با تعریف (۱۱.۵) نرمال سازی به این صورت است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(k) F(k) dk \quad (۱۱.۱.۵)$$

یک بسته موج عمومی با تابع  $f(x)$  توصیف می شود که محتوای هارمونیک آن با تابع  $F(k)$  تعریف می شود. تقارن بین دو تابع  $f(x)$  و  $F(k)$  به گونه ای است که اگر احتمال یافتن ذره بین  $x$  و  $x + dx$  برابر  $|f(x)|^2 dx$  از اینرو احتمال اینکه ذره دارای عدد موج بین  $k$  و  $k + dk$  باشد  $|F(k)|^2 dk = F^*(k) F(k) dk$  خواهد بود.



شکل ۱۱.۵: بسته موج گاوسی و تبدیل فوریه آن.

بیاید نشان دهیم که برای یک بسته موج گاوسی  $\Psi(x)$  و تبدیل فوریه  $\phi(k)$  آن همانطور که در شکل (۱۱.۵) نشان داده شده است، ما  $\sigma_x \sigma_k = \frac{1}{2}$  مربوط به حداقل حاصل ضرب عدم قطعیت داریم. فرض می کنیم که گسترش در مختصات  $x$  انحراف استاندارد  $\sigma_x$  است در حالی که گسترش در مختصات  $k$  انحراف استاندارد  $\sigma_k$  است.

یک بسته موج گاوسی در فضای  $k$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi(k) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-a(k-k_0)^2} \quad (112.5)$$

که در آن  $a$  عدد ثابتی است. بسته موج مربوطه در فضای  $x$  توسط تبدیل فوریه تابع (112.5) به دست می‌آید:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(k-k_0)^2} e^{-jkx} dk \quad (113.5)$$

احتمال مربوط به بسته موج (112.5) به صورت زیر است:

$$|\phi(x)|^2 = \phi^*(x)\phi(x) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} e^{-2a(k-k_0)^2} \quad (114.5)$$

برای مقایسه با توزیع گاوسی نرمال شده در مختصات  $k$ :

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} \quad (115.5)$$

انحراف معیار  $\sigma_k$  را می‌توان با مقایسه معادله (115.5) با معادله (114.5) استنباط کرد. بلافاصله داریم  $\sigma_k = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ .

کار کردن  $\sigma_x$  به دلیل تعریف  $\Psi(x)$  در معادله (113.5) که شامل یک انتگرال و یک  $e^{-jkx}$  نمایی مختلط است آنقدر فوری نیست. بیا بید انتگرال معروف توزیع گاوسی را در مختصات  $k$  بنویسیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2} dk = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (116.5)$$

وظیفه ما تغییر متغیرها در معادله (113.5) است به گونه‌ای که انتگرال را می‌توان با استفاده از معادله (116.5) محاسبه کرد. بیا بید تغییر متغیر زیر را انجام دهیم:

$$k' = k - k_0 + \frac{jx}{2a} \quad (117.5)$$

با  $dk = dk'$  توان انتگرال در معادله (113.5) می‌شود:

$$\begin{aligned} -a(k - k_0) - jkx &= -a\left(k' - \frac{jx}{2a}\right)^2 - jkx \\ &= -a\left(k'^2 - \frac{jx}{a}k' - \frac{x^2}{4a^2}\right) - jkx \\ &= -ak'^2 + jk'x + \frac{x^2}{4a^2} - jkx \\ &= -ak'^2 - jx(k - k') + \frac{x^2}{4a^2} \\ &= -ak'^2 - jx\left(k_0 - \frac{jx}{2a}\right) + \frac{x^2}{4a^2} \\ &= -ak'^2 - jk_0x - \frac{x^2}{2a} \end{aligned} \quad (118.5)$$

و می‌توانیم معادله (۱۱۳.۵) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\Psi(x) = \left(\frac{a}{2\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-jk_0x} e^{-\frac{x^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2} dk \quad (119.5)$$

با استفاده از معادله (۱۱۶.۵)، معادله (۱۱۹.۵) خواهد شد:

$$\Psi(x) = \left(\frac{a}{2\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-jk_0x} e^{-\frac{x^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \left(\frac{a}{2\pi a}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-jk_0x} e^{-\frac{x^2}{4a}} \quad (120.5)$$

احتمال مرتبط با تابع موج (۱۲۰.۵) برابر است با:

$$\Psi^*(x)\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}} \quad (121.5)$$

که مقایسه با تابع گاوس:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (122.5)$$

میده  $\sigma_x = \sqrt{a}$  ضمناً نتیجه میدهد:

$$\sigma_x \sigma_k = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \quad (123.5)$$

می‌توان نشان داد که با استفاده از رابطه دیبرولی  $p = \hbar k$  ما  $\sigma_p = \hbar \sigma_k$  و معادله (۱۲۳.۵) برای بسته موج اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، یعنی  $\sigma_x \sigma_k = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \frac{\hbar}{2}$  تبدیل می‌شود. به نظر می‌رسد که یک بسته موج ممکن است بتواند رفتار کوانتومی یک ذره را نشان دهد. همچنین دیده‌ایم که مقادیر قابل اندازه‌گیری با عملگرها، به‌ویژه با امید ریاضی آنها مرتبط است. اجازه دهید وابستگی زمانی امید ریاضی عملگرها را مطالعه کنیم. به‌طور کلی، می‌توانیم برای عملگر  $\hat{A}$  که بر روی تابع موج  $\Psi$  عمل می‌کند، بنویسیم:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{d}{dt} \int \Psi^* \hat{A} \Psi dx \quad (124.5)$$

اگر مشتق را داخل علامت انتگرال بیاوریم، داریم:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{A} \Psi + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \Psi + \int \Psi^* \hat{A} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (125.5)$$

که در آن، برای سادگی، ما به‌صراحت “ $dx$ ” را در انتگرال نمی‌نویسیم. معادله (۹۴.۵) شرودینگر به‌ما می‌گوید که عملگر همیلتونین  $\hat{H}$  به‌طور رسمی با عملگر  $-j\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  مشخص می‌شود. معادله (۱۲۵.۵) می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle &= \frac{j}{\hbar} \int \Psi^* \hat{A} \hat{H} \Psi - \frac{j}{\hbar} \int \Psi^* \hat{H} \hat{A} \Psi + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \Psi \\ &= -\frac{j}{\hbar} \int \Psi^* [\hat{H}, \hat{A}] \Psi + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \Psi \end{aligned} \quad (126.5)$$

اگر عملگر  $\hat{A}$  به صراحت به زمان وابسته نباشد، معادله فوق ساده تر می شود. در این مورد معادله (۱۲۶.۵) می شود:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = -\frac{j}{\hbar} \int \Psi^* [\hat{H}, \hat{A}] \Psi \quad (127.5)$$

معادله (۱۲۷.۵) یک نتیجه بسیار مهم را بیان می کند: امید ریاضی عملگرهایی که با همیلتونین جابجا می شوند حرکت ثابت دارند. این را می توان به راحتی با قرار دادن  $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$  در معادله (۱۲۷.۵) مشاهده کرد.

بیایید این بخش را با تأیید اینکه مکانیک کلاسیک در فیزیک کوانتومی گنجانده شده است، اگر امید ریاضی عملگرها را با قابل مشاهده های کلاسیک مرتبط کنیم، به پایان برسانیم. در مورد عملگر  $\hat{x}$  که نماینده یک ذره آزاد با جرم  $m$  است، برای کموتاتور (جابجائی) داریم:

$$[\hat{H}, x] = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, x\right] = \frac{1}{2m} [\hat{p}\hat{p}, x] = \frac{1}{2m} (\hat{p}[\hat{p}, x] + [\hat{p}, x]\hat{p}) = j\hbar\hat{p} \quad (128.5)$$

و معادله (۱۲۷.۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = -\frac{j}{\hbar} \int \Psi^* [\hat{H}, \hat{x}] \Psi = \frac{1}{m} \int \Psi^* \langle\hat{p}\rangle \Psi \quad (129.5)$$

که معادل رابطه مکانیک کلاسیک  $x = \frac{p}{m}$  است. معادله (۱۲۹.۵) به عنوان قضیه ایرنفست<sup>۲۸</sup> شناخته می شود. برای حرکت  $\langle\hat{p}\rangle$  به راحتی می توان اثبات کرد که:

$$\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} = - \int \Psi^* \left\langle \left( \frac{dV}{dx} \right) \right\rangle \Psi \quad (130.5)$$

که معادل قانون نیوتن  $F = \frac{dp}{dt} = -\frac{dV}{dx}$  است.

## ۶.۵ معادله شرودینگر مستقل از زمان

اگر انرژی پتانسیل  $V(r)$  به زمان  $t$  وابسته نباشد، معادله شرودینگر را می توان ساده کرد. می توانیم یک راه حل به صورت زیر را امتحان کنیم:

$$\Psi(r, t) = u(r)T(t) \quad (131.5)$$

که در آن  $u(r)$  فقط به مختصات مکانی  $r$  و  $T(t)$  فقط به زمان  $t$  بستگی دارد. با وارد کردن راه حل آزمایشی (۱۳۱.۵) در معادله شرودینگر (۵۴.۵) داریم:

$$-\frac{j\hbar}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Psi} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi \quad (132.5)$$

متوجه می شویم که سمت چپ معادله (۱۳۲.۵) فقط به  $t$  بستگی دارد در حالی که سمت راست فقط به  $r$  بستگی دارد. این بدان معنی است که می توانیم هر یک از اضلاع معادله

<sup>۲۸</sup>Ehrenfest's theorem



(۱۳۲.۵) را با ثابت  $E$ ، انرژی کل، برای به دست آوردن دو معادله مستقل، مساوی قرار دهیم. معادله اول برابر است با:

$$-j\hbar \frac{dT}{dt} = ET \quad (133.5)$$

که بسادگی از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$T(t) = Ce^{j\frac{Et}{\hbar}} \quad (134.5)$$

معادله دوم برابر است با:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 R + VR\right)u(r) = Eu(r) \quad (135.5)$$

یا به طور معادل بر حسب عملگر همیلتونین که روی تابع موج  $u(r)$  عمل می کند:

$$\hat{H}u(r) = Eu(r) \quad (136.5)$$

که در آن با توجه به این نکته مهم که  $\hat{H}$  عملگر همیلتونین و  $E$  یک مقدار ثابت، در این مورد انرژی است. معادله (۱۳۶.۵) به عنوان معادله شرودینگر مستقل از زمان<sup>۲۹</sup> (TISE) نامیده می شود و برای توصیف سیستم های فیزیکی ثابت (نسبت به زمان)، یعنی سیستم هایی که انرژی برای آنها (پایستاری انرژی) حفظ می شود، استفاده می شود. کلاس معادلات به شکل (۱۳۶.۵) معادلات مقدار ویژه<sup>۳۰</sup> نامیده می شوند که در آن ثابت  $E$  مقدار ویژه است در حالی که تابع  $u(r)$  تابع ویژه است. بنابراین، حل معادله شرودینگر مستقل از زمان معادل یافتن مقادیر ویژه و توابع ویژه عملگر همیلتونین  $\hat{H}$  است.

کلاس ویژه راه حل توابع موج معادله شرودینگر مستقل از زمان دارای ویژگی خاصی است: امید ریاضی و چگالی احتمال مستقل از زمان هستند. در واقع انتگرال های حاوی  $\Psi^*\Psi$  به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} |\Psi(r, t)|^2 &= \Psi^*(r, t)\Psi(r, t) \\ &= u(x)T(t)^*[u(x)T(t)] \\ &\propto u(r)e^{-j\frac{Et}{\hbar}}u(r)\Psi(r)e^{j\frac{Et}{\hbar}} \\ &= u^*(r)u(r) \end{aligned} \quad (137.5)$$

بیشتر به طور کلی، معادله (۱۳۶.۵) برای مجموعه ای از مقادیر مقادیر ویژه  $E_i$  با بردارهای ویژه متناظر  $u_i(r)$  معتبر است. اگر مقادیر ویژه یک مجموعه گسسته را تشکیل دهند  $i = 1, \dots, N$  آنگاه سیستم کوانتومی در حالت مقید Bound State<sup>۳۱</sup>، مانند اتم هیدروژن با سطوح انرژی گسسته آن، قرار دارد. اگر سیستم محدود نباشد، مقادیر ویژه با طیف

<sup>۲۹</sup>Time Independent Schrodinger Equation (TISE)

<sup>۳۰</sup>پیشوند eigen از آلمانی می آید و به معنای "خود"، "ویژگی"، "ویژه" و سایر مفاهیم مشابه است.  
<sup>۳۱</sup>حالت مقید را می توان با ذره ای نشان داد که مجبور است در یک یا چند ناحیه از فضا موضعی باقی بماند. این را می توان به عنوان مثال با پتانسیل ناشی از حضور ذره دیگر به دست آورد. در این مورد خاص، انرژی برهمکنش بیشتر از انرژی لازم برای جداسازی دو ذره است.

پیوسته‌ای از انرژی‌ها، مانند یک ذره آزاد، توصیف می‌شوند. در مورد حالت مقید، معادله (۱۳۶.۵) می‌شود:

$$\hat{H}u_i(r) = E_i u_i(r) \quad (138.5)$$

اگرچه، مقادیر ویژه و توابع ویژه در (۱۳۸.۵) گسسته هستند می‌توانند بی‌نهایت باشند. اکنون می‌پرسیم که آیا معادله (۱۳۸.۵) به‌درستی طیف انرژی یک سیستم مقید را توصیف می‌کند. برای انجام این کار، باید چند فرض را انجام دهیم. اگر عملگر  $\hat{H}$  قرار است انرژی را نشان دهد، پس مقادیر ویژه آن باید همه اعداد حقیقی باشند زیرا نتیجه اندازه‌گیری انرژی را نشان می‌دهند. همچنین باید فرض کنیم که طیف مقادیر ویژه کامل است، یعنی مجموعه  $E_i$  شامل تمام نتایج ممکن اندازه‌گیری‌ها است. بدیهی است که مجموعه  $E_i$  نمی‌تواند حاوی مقادیر اضافی باشد که با اندازه‌گیری به‌دست نمی‌آیند. می‌بینیم که برای هر مقدار ویژه انرژی  $E_i$  تابع موج خاصی به‌نام تابع ویژه  $u_i(r)$  مطابقت دارد که اکنون با  $\Psi_i(r)$  نشان می‌دهیم. دیده‌ایم که طبق تفسیر کپنهاگ، سیستم قبل از اندازه‌گیری انرژی می‌تواند در هر یک از حالات  $E_i$  با تابع ویژه  $\Psi_i(r)$  باشد. با این حال، همانطور که در شکل (۹.۵) نشان داده شده، پس از تکمیل فرآیند اندازه‌گیری، می‌دانیم که سیستم در حالتی است که مربوط به یک مقدار ویژه انرژی، فرض کنید  $E_k$  است، در نتیجه عمل اندازه‌گیری باعث شده است که ما اکنون تابع موج سیستم را تابع ویژه متناظر بدانیم. می‌گوییم که تابع موج سیستم به‌تابع ویژه  $\Psi_k(r)$  سقوط کرده است.

بعداً خواهیم دید که با توجه به‌خطی بودن معادله شرودینگر مستقل از زمان و کامل بودن توابع ویژه، تابع موج سیستم، قبل از انجام اندازه‌گیری، با مجموع همه توابع ویژه توصیف می‌شود:

$$\Psi(x) = \sum_i e_i \Psi_i(x) \quad (139.5)$$

که در آن  $e_i$  معمولاً ضرایب مختلط هستند. همانطور که قبلاً اشاره کردیم، پس از اندازه‌گیری، تابع موج به تابع ویژه مربوط به مقدار ویژه اندازه‌گیری شده فروپاشی می‌کند.

## ۷.۵ عملگر هرمیتی

اجازه دهید اکنون به بررسی ویژگی‌های جالب‌تر عملگرها ادامه دهیم. اکنون اپراتورهای هرمیتی را معرفی می‌کنیم. قبلاً خطی بودن معادله شرودینگر را ذکر کردیم اما جزئیات را مشخص نکردیم. عملگر  $\hat{A}$  خطی است اگر دو شرط زیر را داشته باشد:

$$\begin{aligned} 1: & \quad \hat{A}(u(x) + v(x)) = \hat{A}u(x) + \hat{A}v(x) \\ 2: & \quad \hat{A}(c \cdot u(x)) = c\hat{A}u(x) \end{aligned} \quad (140.5)$$

تا اینجا فرض کردیم که عملگرها همیشه بر روی جسمی که در سمت راست آنها قرار دارد، همانطور که بیان شد، عمل می‌کنند، برای مثال، در معادله شرودینگر که در آن تابع موج  $\Psi(x, t)$  در سمت راست عملگر انرژی  $j\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  یا عملگر همیلتونین  $\hat{H}$  است. دیدیم که امید ریاضی یک عملگر معمولاً به‌صورت یک ساختار «ساندویچی»  $\Psi^* \hat{A} \Psi$  بین مزدوج

مختلط تابع موج  $\Psi^*$  و تابع موج  $\Psi$  در داخل انتگرال بیان می‌شود، برای مثال، در معادله (۸۹.۵) ترتیبی که انتگرال را محاسبه می‌کنیم به این صورت است: ابتدا تابع جدید  $(\hat{A}\Psi)$  را محاسبه کرده و سپس در مزدوج مختلط  $\Psi$  ضرب می‌کنیم تا  $\Psi^* \hat{A}\Psi$  را بدست آوریم. اکنون می‌پرسیم که آیا می‌توانیم عمل ساندویچ  $\Psi^* \hat{A}\Psi$  را با فرض اینکه عملگر  $\hat{A}$  اکنون در سمت چپ خود روی تابع مزدوج مختلط  $\Psi^*$  عمل می‌کند، به روشی متفاوت تفسیر کنیم. برای اینکه نشان دهیم اپراتور اکنون در سمت چپ خود عمل می‌کند، آن را به صورت  $\hat{A}^\dagger$  می‌نویسیم تا اکنون ساختار ساندویچی را بتوان به صورت  $(\Psi^* \hat{A}^\dagger)^* \Psi$  محاسبه کرد. عملگر  $\hat{A}^\dagger$  الحاق<sup>۳۲</sup> عملگر  $\hat{A}$  نامیده می‌شود و می‌تواند با عملگر اصلی  $\hat{A}$  متفاوت باشد. الحاق عملگر  $\hat{A}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int \Psi^* \hat{A}\Psi d\tau = \int (\Psi^* \hat{A}^\dagger)^* \Psi d\tau \quad (۱۴۱.۵)$$

در مکانیک کوانتومی، عملگرهایی که می‌خواهیم کمیت‌های فیزیکی را نشان دهیم، باید مقادیر ویژه حقیقی داشته باشند. به این ترتیب تضمین می‌کنیم که هر بار که روی سیستم اندازه‌گیری می‌کنیم یک مقدار حقیقی بدست می‌آوریم. اگر  $\hat{A}$  یکی از این عملگرها باشد، به این معنی است که می‌خواهیم امید ریاضی آن یک عدد حقیقی باشد. این شرط مستلزم این است که  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \hat{A} \rangle^*$  باشد. بنابراین:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi^* \hat{A}\Psi d\tau = \left( \int \Psi^* \hat{A}\Psi d\tau \right)^* \quad (۱۴۲.۵)$$

اکنون فرض می‌کنیم که عملیات مزدوج مختلط هنگام اعمال به عملگری که بر روی یک تابع عمل می‌کند  $(\hat{A}\Psi)^* = \Psi^* \hat{A}^\dagger$  است، یعنی مزدوج مختلط عملگر را تغییر می‌دهد تا در سمت چپ خود و روی مزدوج مختلط تابع اصلی عمل کند. با این فرض، معادله (۱۴۲.۵) تبدیل می‌شود:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi^* \hat{A}\Psi d\tau = \int \Psi^* \hat{A}^\dagger \Psi d\tau \quad (۱۴۳.۵)$$

و شرط مقادیر ویژه حقیقی برآورده می‌شود اگر عملگر به گونه‌ای باشد که:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad (۱۴۴.۵)$$

اپراتوری که شرط (۱۴۴.۵) را برآورده کند **هرمیتی**<sup>۳۳</sup> یا **خود الحاقی**<sup>۳۴</sup> نامیده می‌شود. بنابراین واضح است که یک اپراتور هرمیتی نشان می‌دهد که می‌تواند به طور بی تفاوت روی تابع هم در سمت راست و هم در سمت چپ آن عمل کند. به راحتی می‌توان دید که تعریف عملگر هرمیتی<sup>۳۵</sup> به ما قاعده‌ای برای محاسبه مزدوج‌های

<sup>۳۲</sup> Adjoint

<sup>۳۳</sup> Hermitian

<sup>۳۴</sup> Self-adjoint

<sup>۳۵</sup> استفاده یکسان و بی تفاوت از «هرمیتی» و «خود الحاقی» یک قرارداد در میان فیزیکدانان کوانتومی است. ریاضیدانان ممکن است (و می‌خواهند) مخالف باشند

مختلط ساندویچ  $\Psi^* \hat{A} \Psi$  را می‌دهد:

$$\left( \int \Psi^* \hat{A} \Psi d\tau \right)^* = \int (\Psi^* \hat{A} \Psi d\tau)^* = \int (\hat{A} \Psi)^* \Psi d\tau \quad (145.5)$$

بیاپید ثابت کنیم که عملگرهای موقعیت  $\hat{x}$  هرمیتی است. باید ثابت کنیم که  $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{x} \rangle^*$ . با استفاده از معادله (۱۴۵.۵)، داریم:

$$\langle \hat{x} \rangle^* = \int (\hat{x} \Psi)^* \Psi dx = \int (x \Psi)^* \Psi dx = \int \Psi^* x \Psi dx = \int \Psi^* \hat{x} \Psi dx = \langle \hat{x} \rangle \quad (146.5)$$

در جایی که ما (دو بار) از این واقعیت استفاده کردیم که عملگر موقعیتی که روی یک تابع موج عمل می‌کند برابر است با ضرب تابع موج در مختصات  $x$ ، یعنی  $\hat{x} \Psi = x \Psi$ . همچنین از این واقعیت استفاده می‌کنیم که مختصات  $x$  حقیقی و بنابراین  $x^* = x$  هستند. بیاپید اثبات کنیم که عملگر تکانه  $\hat{p} = j\hbar \frac{d}{dx}$  نیز هرمیتی است. مجدداً باید تأیید کنیم که  $\langle \hat{p} \rangle = \langle \hat{p} \rangle^*$ . داریم:

$$\langle \hat{p} \rangle^* = \int (\hat{p} \Psi)^* \Psi dx = \int \left( j\hbar \frac{d\Psi}{dx} \right)^* \Psi dx = -j\hbar \int \frac{d\Psi^*}{dx} \Psi dx \quad (147.5)$$

اکنون آخرین انتگرال معادله (۱۴۷.۵) را با روش انتگرال‌گیری جزء به جزء انجام دهیم. بیاپید انتگرال‌گیری را بر اساس قانون جزء به جزء شروع کنیم: با توجه به دو تابع  $u$  و  $v$ ، داریم:

$$\int_a^b \frac{du}{dx} v dx = uv|_a^b - \int_a^b u \frac{dv}{dx} dx \quad (148.5)$$

اکنون از روش (۱۴۸.۵) در معادله (۱۴۷.۵) استفاده می‌کنیم:

$$\langle \hat{p} \rangle^* = -j\hbar \int \frac{d\Psi^*}{dx} \Psi dx = j\hbar \int \Psi^* \frac{d\Psi}{dx} dx = \langle \hat{p} \rangle \quad (149.5)$$

توجه داشته باشید که اثبات بالا مستلزم آن است که تابع موج در انتهای بازه تعریف متغیر  $x$  به‌صفر برود تا عبارت محاسبه  $uv|_a^b = 0$  باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که عملگر همیلتونی یک عملگر هرمیتی است و به‌طور کلی، همه عملگرهایی که کمیت‌های فیزیکی مانند انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل، تکانه زاویه‌ای و غیره را نشان می‌دهند، هرمیتی هستند. اجازه دهید اکنون به‌طور خلاصه چند نمونه از استفاده از معادله شرودینگر مستقل از زمان برای برخی از سیستم‌های کوانتومی ساده را مطالعه کنیم.

## ۸.۵ ذرات آزاد

یک ذره آزاد ظاهراً از نظر مفهومی ساده‌ترین سیستم برای مطالعه است زیرا معادله شرودینگر مستقل از زمان به‌ساده‌ترین شکل خود کاهش می‌یابد. با این حال، همانطور

که در ادامه خواهیم دید، عملیات مکانیک کوانتومی نشان می‌دهد که جواب‌ها دارای ویژگی‌های جالب و مهمی هستند.

یک ذره آزاد در یک بعد  $x$ ، یعنی ذره‌ای که همیلتونین آن دارای پتانسیل  $V(x) = 0$  است، با معادله شرودینگر (TISE) زیر نمایش داده می‌شود:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \Psi(x) \quad (150.5)$$

که در آن می‌توانیم از مشتق کل استفاده کنیم زیرا  $\Psi = \Psi(x)$  به زمان یا سایر مختصات فضایی  $y, z$  بستگی ندارد. اگر  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  در معادله (150.5) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + k^2 \Psi(x) = 0 \quad (151.5)$$

و جوابی به شکل نمایی برای معادله (151.5) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Psi(x) = A_1 e^{-jkx} + A_2 e^{jkx} \quad (152.5)$$

و با استفاده از معادله (134.5)، جواب تابع موج وابسته به زمان خواهد بود:

$$\Psi(x) = A_1 e^{-jk(x - \frac{\hbar k}{2m}t)} + A_2 e^{jk(x - \frac{\hbar k}{2m}t)} \quad (153.5)$$

که در آن از  $e^{j\frac{Et}{\hbar}} = e^{-j\frac{\hbar k^2}{2m}t}$  استفاده کرده‌ایم  
جالب است که به‌آرگومان نمایی در رابطه (154.5) توجه کنید:

$$x \mp \frac{\hbar k}{2m}t = x \mp v_p t \quad (154.5)$$

نشان می‌دهد که تابع موج (154.5) حالت ساکن است که از برهم‌نهی دو موج با شکل ثابت به دست می‌آید و به ترتیب به سمت راست با سرعت  $+v_p = +\frac{1}{2}\frac{\hbar k}{m}$  و به سمت چپ با سرعت  $-v_p = -\frac{1}{2}\frac{\hbar k}{m}$  حرکت می‌کنند. اجازه دهید سرعت  $v_p$  را با سرعت کلاسیک به دست آمده توسط  $v_c = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m} = 2v_p$  مقایسه کنیم. سرعت شکل تابع موج، یعنی سرعت فاز  $v_p = \frac{\omega}{k}$  نصف سرعت ذره کلاسیک است! از سوی دیگر، سرعت گروه، همان طور که انتظار می‌رود،  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_c$  برابر با سرعت ذره است.  
می‌توانیم تابع موج (154.5) را به صورت فشرده بنویسیم زمانی که دو ضریب برابر باشند، یعنی  $A_1 = A_2$ :

$$\Psi(x, t) = A e^{-j(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} \quad (155.5)$$

بیایید عادی‌سازی (نرمالیزاسیون) تابع موج (155.5) را بررسی کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = |\hat{A}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \rightarrow \infty \quad (156.5)$$

ما نتیجه قابل توجهی داریم که تابع موج یک ذره آزاد را نمی‌توان نرمالیزه کرد، و بنابراین، حالت‌های فیزیکی را نشان نمی‌دهد. از آنجایی که می‌دانیم که ذرات آزاد با خوشحالی

وجود دارند، هنوز هم می‌توانیم با قرار دادن بسیاری از حالت‌های ساکن، یک راه حل کلی بسازیم، این همان کاری است که وقتی در مورد بسته‌های موج در بخش 5.5 بحث کردیم، انجام دادیم.

از آنجایی که هیچ شرطی برای مقادیر بردار موج  $k$  وجود ندارد، پس می‌توانیم با خیال راحت فرض کنیم که یک متغیر پیوسته است و بنابراین می‌توانیم با انتگرال‌گیری در یک طیف پیوسته از حالت‌های ثابت، یک بسته موج بسازیم:

$$\Psi(x, t) = A \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{-j(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk \quad (157.5)$$

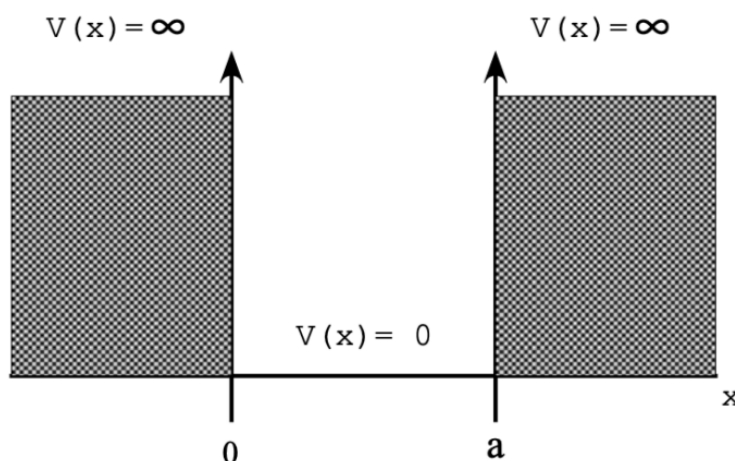
که در آن تابع  $\phi(k)$  وزن نسبی مربوط به هر جمله‌نمایی را در قیاس<sup>۳۶</sup> با معادله (۱۱۳.۵) از بخش 5.5 نشان می‌دهد.

## ۹.۵ ذره در یک جعبه

ذره در یک جعبه، یا به‌طور دقیق‌تر روی یک ناحیه، زیرا ما فقط وابستگی  $x$  را مطالعه می‌کنیم، ایده‌آلی‌سازی ذره‌ای است که بین کرانه‌هایی غیرقابل نفوذ یا بی‌نهایت صلب هستند. فرض می‌کنیم که ذره‌ای به جرم  $m$  به دلیل وقتی که  $0 \leq x \leq a$  است، پتانسیل  $V(x)$  صفر و خارج از ناحیه  $(0, a)$  نامتناهی و مجبور است روی ناحیه زندگی کند. بنابراین پتانسیل به‌گونه‌ای است که:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & x < 0 \text{ و } x > a \end{cases} \quad (158.5)$$

ذره فقط می‌تواند در یک بعد  $x$  حرکت کند و معادله شرودینگر مستقل از زمان (TISE)



شکل ۱۲.۵: پتانسیل  $V(x)$  یک ذره محدود به قطعه  $(0, a)$ .

<sup>۳۶</sup> در معادله (۱۵۷.۵)، عبارت وابسته به زمان را در معادله (۱۱۳.۵) از بخش 5.5 گنجانده نشده است.

که این سیستم را توصیف می کند برابر است با:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x) = E(x) \quad (۱۵۹.۵)$$

پتانسیل  $V(x)$  که در شکل (۱۲.۵) نشان داده شده برخی شرایط را بر تابع موج  $\Psi(x)$  تحمیل می کند. اول، تابع موج باید در ناحیه ای که پتانسیل بی نهایت است، صفر باشد، یعنی برای  $0 \leq x \leq a$  تابع  $\Psi(x) = 0$  باشد و این واقعیت را منعکس می کند که یافتن ذره در ناحیه ممنوعه غیرممکن است. در واقع، یک ذره نمی تواند در این منطقه ممنوعه باشد زیرا باید انرژی بی نهایت داشته باشد. گفته می شود این ذره در یک چاه پتانسیل قرار دارد. شرط دوم مستلزم این است که برای  $x = 0$  و  $x = a$  تابع  $\Psi(x) = 0$  باشد. اگر بخواهیم تابع موج در کل محور  $x$  برای  $-\infty < x < \infty$  پیوسته باشد، این شرط لازم است. با این شرایط مرزی، معادله شرودینگر مستقل از زمان (۱۵۹.۵) به صورت زیر ساده می شود:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E(x) \quad (۱۶۰.۵)$$

که دقیقاً مشابه معادله (۱۵۱.۵) است. اگر از همان جایگزینی استفاده کنیم:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (۱۶۱.۵)$$

کلی ترین جواب برابر است با:

$$\Psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (۱۶۲.۵)$$

با اعمال اولین شرط مرزی  $\Psi(0) = 0$  خواهیم داشت:

$$\Psi(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \rightarrow B = 0 \quad (۱۶۳.۵)$$

که در آن فرض کردیم، از آنجایی که  $B = 0$ ، پس  $A \neq 0$  است. دومین شرط مرزی  $\Psi(a) = 0$  می دهد:

$$\Psi(a) = A \sin ka = 0 \rightarrow ka = n\pi \quad (۱۶۴.۵)$$

که در آن  $n$  یک عدد صحیح است. بنابراین، مجموعه ای از  $n$  تابع موج داریم که همه جواب معادله (۱۶۰.۵) هستند:

$$\Psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (۱۶۵.۵)$$

اگر اکنون  $k = \frac{n\pi}{a}$  را در معادله (۱۶۱.۵) وارد کنیم. برای انرژی داریم:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۱۶۶.۵)$$

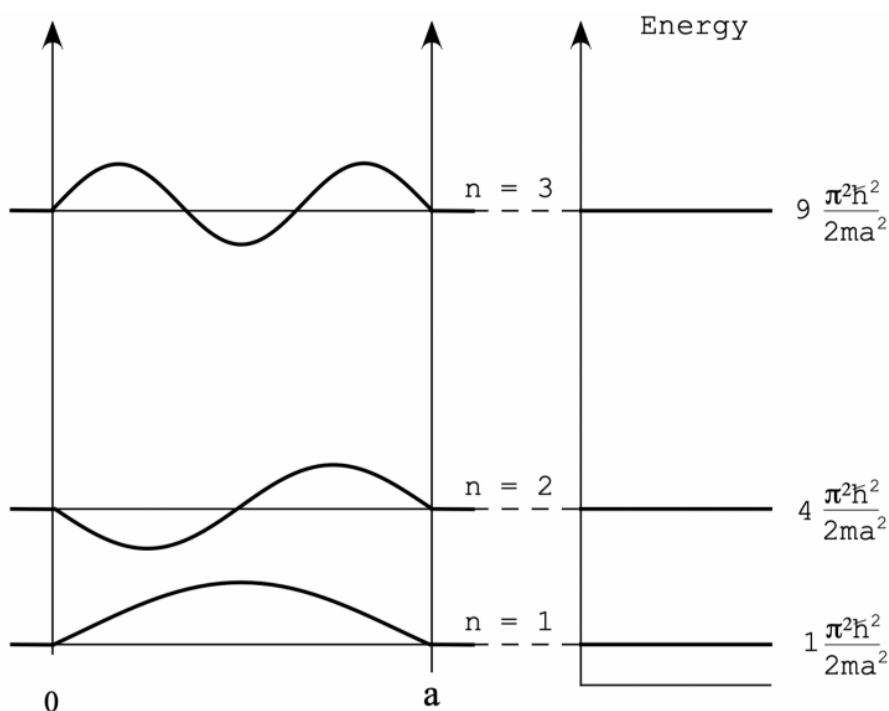
که در آن انرژی  $E_n$  را با زیرنویس  $n$  نشان دادیم تا بدانیم انرژی کوانتیزه شده است. ذره فقط می تواند مجموعه ای گسسته از انرژی های مجاز در مقایسه با مورد یک ذره کلاسیک با پتانسیل یکسان را مطابق معادله (۱۶۶.۵) داشته باشد.

در حالی که یک ذره کلاسیک با به‌خوبی می‌تواند ثابت بماند یا با هر انرژی ممکن در داخل قطعه  $(0, a)$  با یک طیف پیوسته حرکت کند، یک ذره کوانتومی در معرض محدودیت در مقدار ممکن انرژی‌های  $E_n$  است که با معادله (۱۶۶.۵) داده شده است. شاید قابل توجه‌ترین ویژگی در این واقعیت باشد که ذره مجاز به داشتن انرژی صفر نیست. در واقع، ذره باید دارای حداقل انرژی  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$  باشد که متناظر با  $n = 1$  است<sup>۳۷</sup> در این مورد گفته می‌شود که ذره در حالت پایه یا، به‌طور متناوب است، می‌گوییم که ذره انرژی نقطه صفر دارد.

یک ذره کلاسیک در حالت ایستاده (ساکن) دارای  $E = 0$  خواهد بود که با دانستن اینکه ذره دقیقاً در کجای قطعه قرار دارد، مطابقت دارد، بنابراین دارای  $\Delta x = 0$  است. اما می‌دانیم که طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ حداکثر عدم قطعیت در تکانه  $\Delta p$  وجود خواهد داشت. بنابراین انرژی نقطه صفر با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ  $\Delta x \Delta p \sim h$  مطابقت دارد. می‌توانیم این را با در نظر گرفتن اینکه حداقل مقدار انرژی جنبشی برای ذره کوانتومی وجود دارد که مربوط به مقدار زیر است:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{p^2}{2m} \quad (۱۶۷.۵)$$

که یک  $p_{min} = \pm \frac{\pi \hbar}{a}$  را می‌دهد و می‌تواند به‌عنوان یک عدم قطعیت در حرکت مرتبه



شکل ۱۳.۵: توابع موج و سطوح انرژی یک ذره در یک جعبه.

<sup>۳۷</sup> حالت  $n = 0$  به تابع موج  $(= \Psi(x))$  ثابت مربوط می‌شود که نمی‌تواند برای نمایش یک سیستم فیزیکی نرمالیزه شود.



$\Delta p \sim \frac{2\pi\hbar}{a}$  تفسیر شود. اگر اکنون فرض کنیم که عدم قطعیت در موقعیت ذره روی قطعه از مرتبه اندازه قطعه،  $\Delta x \sim a$  باشد، خواهیم داشت:

$$\Delta x \Delta p = a \cdot \frac{2\pi\hbar}{a} = 2\pi\hbar \sim h \quad (۱۶۸.۵)$$

که سازگاری با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را نشان میدهد. اجازه دهید به توابع ویژه (۱۶۵.۵) برگردیم و آنها را نرمالیزه کنیم، یعنی مقدار ضریب  $A$  را به صورت زیر پیدا کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x)|^2 dx = \int_0^a |\Psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (۱۶۹.۵)$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^a |\Psi_n(x)|^2 dx = A^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1 \quad (۱۷۰.۵)$$

حال بیاپید جایگزینی  $\alpha = \frac{n\pi x}{a}$  را با  $dx = \frac{a}{n\pi} d\alpha$  تغییر متغیر دهیم و در این صورت  $d\alpha$  بین  $0$  و  $n\pi$  در معادله (۱۷۰.۵) اجرا می‌شود:

$$A^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{aA^2}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\alpha A^2}{n\pi} \cdot \frac{n\pi}{2} = \frac{aA^2}{2} = 1 \quad (۱۷۱.۵)$$

که از آن شکل نرمالیزه شده توابع ویژه را بدست می‌آوریم:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (۱۷۲.۵)$$

که در آن  $n = 1, 2, 3, \dots$

یکی دیگر از ویژگی‌های قابل توجه توابع ویژه ذره در یک جعبه عبارت است از متعامد نرمالیزه بودن آنها که از طریق مطالعه انتگرال حاصلضرب دو تابع ویژه متفاوت بیان می‌شود.

بیاپید نشان دهیم که انتگرال زیر همیشه برای  $m \neq n$  صفر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = 0 \quad \text{برای} \quad m \neq n \quad (۱۷۳.۵)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (۱۷۴.۵)$$

معادله (۱۷۴.۵) خواهد شد:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left[ \cos \left[ (m-n) \frac{\pi x}{a} \right] - \cos \left[ (m+n) \frac{\pi x}{a} \right] \right] dx \\ &= -\frac{1}{a} \left[ \sin \left( (m-n) \frac{\pi x}{a} \right) \right]_0^a + \frac{1}{a} \left[ \sin \left( (m+n) \frac{\pi x}{a} \right) \right]_0^a \\ &= 0 \end{aligned} \quad (۱۷۵.۵)$$

و آخرین برابری همیشه معتبر است زیرا هر دو  $(m - n)$  و  $(m + n)$ ، برای  $m$  و  $n$  اعداد صحیح، وقتی سینوس بین 0 و  $a$  محاسبه می‌شود، همیشه اعداد صحیح باعث می‌شوند صفر شود.

می‌توانیم شرط عادی‌سازی (نرمالیزاسیون) توابع ویژه را برای بازنویسی معادله (۱۷۶.۵) به صورت زیر اضافه کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = \int_0^a \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{nm} \quad (176.5)$$

که در آن نماد  $\delta_{nm}$  یا دلتای کرونکر<sup>۳۸</sup> تابعی از دو اندیس عدد صحیح  $mn$  است به طوری که:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (177.5)$$

## ۱۰.۵ نوسان‌ساز هارمونیکی

نوسان‌ساز هارمونیکی ساده (خطی) در مکانیک کلاسیک و همچنین مکانیک کوانتومی از اهمیت بالایی برخوردار است. برای مثال، دیدیم که پیدایش مکانیک کوانتومی مستلزم استفاده از نوسانگرهای هارمونیکی در یک حفره برای توصیف طیف تابشی امواج اکترومغناطیسی است که منجر به فرضیه پلانک شد.

برای سادگی فرض کنید که سیستم از جرم  $m$  تشکیل شده است که توسط فنری ثابت الاستیک  $\eta$  به دیوار متصل شده است. اگر جرم فقط در امتداد محور  $x$  حرکت کند، قانون هوک بیان می‌کند که نیروی وارد بر جرم  $mF = -\eta x$  است. توجه داشته باشید که معمولاً ثابت الاستیک با  $k$  نشان داده می‌شود. با این حال، برای جلوگیری از سردرگمی با بردار موج  $k$ ، ترجیح می‌دهیم ثابت الاستیک در قانون هوک را با نماد  $\eta$  نشان دهیم. قانون نیوتن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-\eta x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (178.5)$$

که دارای جواب:

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (179.5)$$

که در آن  $\omega = \sqrt{\frac{\eta}{m}}$  فرکانس کلاسیک نوسان‌ساز است. انرژی پتانسیل برابر است با:

$$V(x) = \frac{1}{2} \eta x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (180.5)$$

که نتیجه معروف کلاسیک است.

<sup>۳۸</sup>Kronecker delta

## ۱.۱۰.۵ راه حل جبری

حال بیایید نوع کوانتومی نوسانگر هارمونیک را مطالعه کنیم. این با نوشتن معادله شرودینگر (TISE) با پتانسیل کلاسیک (۱.۸۰.۵) به دست می‌آید:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E\Psi \quad (1.81.5)$$

بیایید همیلتونین نوسانگر هارمونیک را با برجسته کردن عملگرهای کوانتومی  $\hat{x}$  و  $\hat{p}$  بنویسیم:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2) \quad (1.82.5)$$

اکنون نشان می‌دهیم که می‌توانیم بدون حل صریح معادله شرودینگر، با معرفی دو عملگر جدید<sup>۳۹</sup>  $a_+$ ،  $a_-$ ، چیزهای زیادی در مورد نوسانگر هارمونیک کوانتومی بیاموزیم. با الهام از این واقعیت که می‌توانیم مجموع مربع‌های دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  را به صورت  $a^2 + b^2 = (a + jb)(a - jb)$  فاکتورسازی کنیم، ممکن است با معرفی دو اپراتور جدید، همیلتونین (۱.۸۲.۵) را فاکتورگیری کنیم:

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(j\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\ a_- &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-j\hat{p} + m\omega\hat{x}) \end{aligned} \quad (1.83.5)$$

همانطور که بعداً خواهیم دید، ثابت نرمال سازی  $\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$  برای راحتی انتخاب شده است. دو عملگر (۱.۸۳.۵) به ترتیب برای  $a_+$  و  $a_-$  است<sup>۴۰</sup>. عملگرهای نردبانی یا عملگرهای افزایشی و کاهش‌ی نامیده می‌شوند. توجه داشته باشید که این دو عملگر مزدوج هرمیتی هستند اما هرمیتی نیستند، یعنی  $a_- = (a_+)^\dagger \neq (a_-)^\dagger$ . بیایید حاصل ضرب دو عملگر  $a_-a_+$  را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} a_-a_+ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(-j\hat{p} + m\omega\hat{x})(j\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + j\omega[\hat{x}, \hat{p}]) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + \hbar m\omega) \end{aligned} \quad (1.84.5)$$

که می‌توان آن را بر حسب همیلتونین نوسانگر هارمونیک به صورت زیر نوشت:

$$a_-a_+ = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \quad (1.85.5)$$

<sup>۳۹</sup> این روش اولین بار توسط دیراک بکار برده شد.  
<sup>۴۰</sup> اغلب از جملات ایجاد و نابودی عملگرهای نیز استفاده می‌شود.

محاسبه مشابهی برای  $a_+a_-$  دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} a_+a_- &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (j\hat{p} + m\omega\hat{x})(-j\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + j\omega[\hat{p}, \hat{x}]) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} (\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 - \hbar m\omega) \end{aligned} \quad (۱۸۶.۵)$$

که می‌توان آن را بر حسب همیلتونین به صورت زیر نوشت:

$$a_+a_- = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad (۱۸۷.۵)$$

معادلات (۱۸۵.۵) و (۱۸۷.۵) به ما این امکان را می‌دهد که بلافاصله کموتاتور (جابجائی) را محاسبه کنیم:

$$[a_+, a_-] = 1 \quad (۱۸۸.۵)$$

و همیلتونین را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(a_-a_+ + a_+a_-) \quad (۱۸۹.۵)$$

بسته به اینکه از کدام ضرب عملگرهای نردبانی استفاده می‌کنیم، معادله شرودینگر مستقل از زمان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)\Psi &= E\Psi \\ \hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right)\Psi &= E\Psi \end{aligned} \quad (۱۹۰.۵)$$

بیاپید کنش عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده بر روی تابع موج  $\Psi$  را که معادله شرودینگر مستقل از زمان را برای نوسانگرهای هارمونیک برآورده می‌کند، مطالعه کنیم. برای عملگر بالا برنده  $a_+\Psi$  داریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}(a_+\Psi) &= \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)(a_+\Psi) \\ &= \hbar\omega\left(a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+\right)\Psi \\ &= \hbar\omega a_+\left(a_-a_+ + \frac{1}{2}\right)\Psi \end{aligned} \quad (۱۹۱.۵)$$

با جایگزینی  $a_-a_+$  از معادله (۱۸۵.۵)، داریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}(a_+\Psi) &= \hbar\omega a_+\left(a_-a_+ + \frac{1}{2}\right)\Psi \\ &= \hbar\omega a_+\left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + 1\right)\Psi \\ &= a_+(\hat{H} + \hbar\omega)\Psi \\ &= (E + \hbar\omega)a_+\Psi \end{aligned} \quad (۱۹۲.۵)$$

معادله (۱۹۲.۵) به ما می گوید که اگر  $\Psi$  حل معادله شرودینگر (TISE) مربوط به مقدار ویژه  $E$  باشد، تابع موج جدید  $a_+\Psi$  نیز جواب معادله شرودینگر (TISE) مربوط به مقدار ویژه  $(E + \hbar\omega)$  است، بنابراین نام عملگر "بالا برنده"<sup>۴۱</sup> را توجیه می کند زیرا انرژی را توسط یک واحد  $\hbar\omega$  افزایش می دهد. به همین ترتیب می توان نشان داد که:

$$\hat{H}(a_-\Psi) = (E - \hbar\omega)a_-\Psi \quad (193.5)$$

نام عملگر "کاهشی"<sup>۴۲</sup> را توجیه می کند زیرا انرژی را با یک واحد  $\hbar\omega$  کاهش می دهد. بیایید امید ریاضی زیر را مطالعه کنیم:

$$\langle a_+a_- \rangle = \int \Psi^*(a_+a_-)\Psi d\tau \quad (194.5)$$

و فرض کنید  $\Psi' = a_-\Psi$  باشد. از آنجایی که  $a_+$  مزدوج هرمیتی  $a_-$  است، نتیجه می شود که  $\Psi'^* = \Psi^*a_+$  میباشد. بنابراین داریم:

$$\langle a_+a_- \rangle = \int \Psi^*(a_+a_-)\Psi d\tau = \int \Psi'^*\Psi' d\tau \geq 0 \quad (195.5)$$

با استفاده از معادله (۱۸۷.۵) داریم:

$$\langle a_+a_- \rangle = \int \Psi^*(a_+a_-)\Psi d\tau = \int \Psi'^* \left( \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) \Psi d\tau = \left( \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) \int \Psi^*\Psi d\tau \quad (196.5)$$

و به موجب معادله (۱۹۵.۵) باید داشته باشیم:

$$\left( \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (197.5)$$

معادله (۱۹۷.۵) به ما می گوید که حداقل انرژی مجاز برای نوسانگر کوانتومی صفر نیست بلکه  $E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$  است. بنابراین، در قیاس ذره محدود شده بر یک قطعه، می بینیم که نوسان ساز کوانتومی نیز دارای حداقل انرژی غیر صفر است، یعنی انرژی نقطه صفر برابر با  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . حالت های با انرژی کمتر مجاز نیستند. این بدان معنی است که فقط می توانیم انرژی هایی بزرگتر از حداقل انرژی  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  داشته باشیم.

سوال این است که آیا طیف نوسانگر هارمونیک پیوسته است یا گسسته؟ قبلاً پاسخی را می دانیم که توسط پلانک ارائه شده است. کل مکانیک کوانتومی مبتنی بر فرضیه کوانتوم  $E = \hbar\omega$  است و بنابراین تنها سطوح انرژی گسسته می توانند با انرژی  $\Delta E = \hbar\omega$  از هم جدا شوند.

برای ساختن طیف انرژی نوسانگر هارمونیک کوانتومی، فقط از پایین ترین سطح انرژی شروع می کنیم و به تابع ویژه  $\Psi_0$  مقدار ویژه مربوطه  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$  را نسبت می دهیم تا شرودینگر TISE  $\hat{H}\Psi_0 = E_0\Psi_0$  باشد.

<sup>۴۱</sup>Raising Operator

<sup>۴۲</sup>Lowering Operator

اکنون عملگر  $a_+$  را به تابع ویژه  $\Psi_0$  اعمال می‌کنیم. با استفاده از معادله (۱۹۲.۵) داریم:

$$\hat{H}(a_+\Psi_0) = (E_0 + \hbar\omega)(a_+\Psi_0) = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\right)(a_+\Psi_0) \quad (۱۹۸.۵)$$

معادله (۱۹۸.۵) به ما می‌گوید که تابع موج جدید  $\Psi_1 = a_+\Psi_0$  یک تابع ویژه با مقدار ویژه  $(\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega)$  است. اگر به انجام این عمل ادامه دهیم، متوجه می‌شویم که می‌توانیم شرودینگر TISE را برای تابع ویژه  $n$  به صورت زیر بنویسیم:

$$\hat{H}\Psi_n = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega\right)\Psi_n \quad (۱۹۹.۵)$$

که بیانی برای طیف نوسانگر هارمونیک کوانتومی می‌دهد:

$$E = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega + n\hbar\omega\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (۲۰۰.۵)$$

توجه داشته باشید که استفاده از عملگرهای نردبانی به ما این امکان را می‌دهد که طیف گسسته انرژی نوسانگر هارمونیک کوانتومی را بدون حل واقعی معادله شرودینگر (۱۸۱.۵) پیدا کنیم.

با مشاهده اینکه عملگرهای نردبان به طور موثر افزایش/کاهش یک کوانتومی  $\hbar\omega$  در انرژی نوسانگر را توصیف می‌کنند، طبیعی است که موارد زیر را فرض کنیم:

$$\begin{aligned} a_-\Psi_n &= \beta_n\Psi_{n-1} \\ \Psi_n^*a_+ &= \Psi_{n-1}^*\beta_n^* \end{aligned} \quad (۲۰۱.۵)$$

بیان کنش “کاهشی”  $a_-$  با مزدوج هرمیتی  $a_+$  و در آن  $\beta_n$  و  $\beta_n^*$  اعداد مزدوج مختلط هستند. با این مفروضات، اکنون می‌توانیم امید ریاضی عملگر  $a_+a_-$  را بنویسیم:

$$\langle a_+a_- \rangle = |\beta_n|^2 \int \Psi_{n-1}^* \Psi_{n-1} d\tau = |\beta_n|^2 \quad (۲۰۲.۵)$$

آخرین تساوی در معادله (۲۰۲.۵) پابرجاست زیرا توابع ویژه متعامد نرمالیزه هستند. با استفاده از معادله (۱۸۷.۵) همچنین می‌توانیم بنویسیم<sup>۴۳</sup>:

$$\langle a_+a_- \rangle = \int \Psi_n^* \left( \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) \Psi_n d\tau = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = n \quad (۲۰۳.۵)$$

که از آن نتیجه می‌شود که  $|\beta_n|^2 = n$  یا  $\beta_n = \sqrt{n}$  و می‌توانیم بنویسیم:

$$a_-\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1} \quad (۲۰۴.۵)$$

و معادله (۲۰۴.۵) نشان می‌دهد که  $a_-\Psi_0 = 0$ ، یعنی عملگر  $a_-$  حالت کوانتومی  $\Psi_0$  را نابود<sup>۴۴</sup> می‌کند.

<sup>۴۳</sup> این واقعیت که امید ریاضی عملگر  $a_+a_-$  عدد  $n$  است دلیل نامیدن این عملگر بنام عملگر عددی است.

<sup>۴۴</sup> Annihilate

طبق همین رویه، فرض می‌کنیم که:

$$\begin{aligned} a_+ \Psi_n &= \gamma_n \Psi_{n+1} \\ \Psi_n^* a_- &= \Psi_{n+1}^* \gamma_n^* \end{aligned} \quad (20.5.5)$$

که در آن  $\gamma_n$  و  $\gamma_n^*$  دوباره اعداد مزدوج مختلط هستند. امید ریاضی عملگر  $a_- a_+$  برابر است با:

$$\langle a_- a_+ \rangle = |\gamma_n|^2 \int \Psi_{n+1}^* \Psi_{n+1} d\tau = |\gamma_n|^2 \quad (20.6.5)$$

و با استفاده از معادله (۱۸۵.۵)، پس از کمی عملیات جبری، به دست می‌آوریم  $\gamma_n = \sqrt{n+1}$  و بنابراین:

$$a_+ \Psi_n = \sqrt{n+1} \Psi_{n+1} \quad (20.7.5)$$

که نام عملگر ایجاد (تولید کردن)<sup>۴۵</sup> را توجیه می‌کند. پس از یافتن مقادیر ویژه، بیاید شکل توابع ویژه را دریابیم. باز هم، اپراتورهای نردبانی می‌توانند، تا زمانی که حداقل یکی از آنها را بشناسیم، به ما کمک کنند و همه توابع ویژه را پیدا کنیم. بیاید از  $a_- \Psi_0 = 0$  شروع کنیم که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(-jp + m\omega x)\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\Psi_0 = 0 \quad (20.8.5)$$

معادله (۲۰۸.۵) را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\frac{d}{dx}\Psi_0 = -\frac{1}{\hbar}m\omega x\Psi_0 \quad (20.9.5)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\Psi_0}{\Psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x dx \quad (21.0.5)$$

که پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\Psi_0 = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (21.1.5)$$

بیاید ثابت عادی‌سازی (نرمالیزاسیون)  $A$  را پیدا کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} |\Psi_0|^2 &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\right)^2 dx \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx \\ &= |A|^2 \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} = 1 \end{aligned} \quad (21.2.5)$$

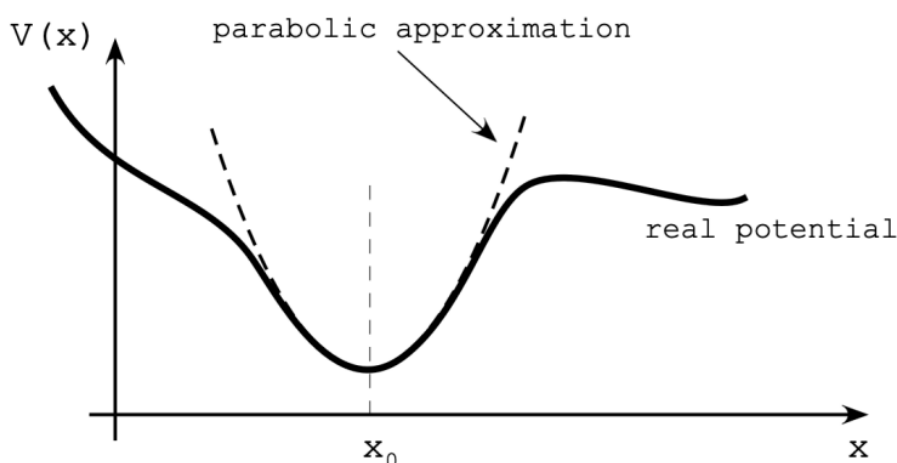
<sup>۴۵</sup>Creation

که در نهایت از آن به دست می آوریم:

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (213.5)$$

استفاده مکرر از اپراتور  $a_+$  سایر توابع ویژه را می دهد:

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n \Psi_0 \quad (214.5)$$



شکل ۱۴.۵: تقریب درجه دوم (پارابولیک) حول یک حداقل محلی.

## ۲.۱۰.۵ راه حل تحلیلی

با حل تحلیلی معادله شرودینگر می توان راه حل مناسبی برای مسئله نوسان ساز هارمونیک پیدا کرد. قبل از پرداختن به جزئیات محاسبه، اجازه دهید پتانسیل نوسانگر هارمونیک را مورد بحث قرار دهیم. نیروی هوک  $F \propto -\eta x$ ، و پتانسیل هوک نسبی  $V = \frac{1}{2}\eta x^2$ ، معمولاً ایده آل سازی دستگاه های واقعی هستند. برای مثال، پتانسیل هوک برای  $x \rightarrow \pm\infty$  به بی نهایت می رود که به وضوح فیزیکی نیست زیرا ساختن فنری که به طور نامحدود با نیروی خطی فشرده یا گسترش یابد غیرممکن است. با این حال، اگر خود را به نوسانات کوچک محدود کنیم که در آن خطی بودن نیروی هوک تقریب خوبی است، فیزیک ما قوی است. توجه به این نکته مهم است که، اگر منطقه ای وجود داشته باشد که پتانسیل در آن حداقل محلی داشته باشد، مهم نیست که چقدر پتانسیل پیچیده باشد، یعنی همان جایی که  $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$  باشد، (شکل ۱۴.۵). در حدود حداقل همیشه می توانیم پتانسیل را به صورت یک سری تیلور بسط دهیم:

$$V(x) = V_0 + V_1(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i!} V_i(x - x_0)^i \quad (215.5)$$



که در آن  $V_i$  مشتقات مختلف محاسبه شده در  $x = x_0$  و  $x_0$  مختصات  $x$  حداقل است. در تقریب درجه دوم خود، ما فقط سه عبارت اول را حفظ می‌کنیم:  $V(x) = V_0 + V_1(x - x_0) + \frac{1}{2}V_2(x - x_0)^2$  شرطی که در  $x = x_0$  پتانسیل حداقل داشته باشد مستلزم آن است که اولین مشتق در  $x_0$  صفر باشد و بنابراین  $V_1 = 0$ . علاوه بر این، می‌توانیم پتانسیل صفر را در  $x = x_0$  تعریف کنیم تا  $V_0 = 0$  بنابراین پتانسیلی را توجیه کنیم. شکل  $V(x) = \frac{1}{2}\eta x^2$  که در آن  $\eta = V_2$  است.

معادله شرودینگر با پتانسیل نوسان‌ساز هارمونیکی به صورت زیر است:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\eta x^2\Psi = E\Psi \quad (216.5)$$

قبلاً می‌دانیم که  $\omega = \sqrt{\frac{\eta}{m}}$  و معادله (216.5) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m\omega^2}{\hbar^2} x^2 \right) \Psi = E\Psi \quad (217.5)$$

برای سهولت،  $a^2 = \frac{m\omega^2}{\hbar^2}$  و  $b = \frac{2mE}{\hbar^2}$  را قرار می‌دهیم. معادله (217.5) می‌شود:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (b - a^2 x^2) \Psi = E\Psi \quad (218.5)$$

کار با معادلات بدون بعد تمرین خوبی است. معادله (217.5) شامل ضرایب  $a$  و  $b$  است که دارای ابعاد معکوس مربع یک طول هستند. یک انتخاب خوب برای تغییر متغیر  $y = \sqrt{a}x$  خواهد بود به طوری که متغیر جدید  $y$  اکنون بدون بعد است. بیایید مشتقات را در متغیر جدید محاسبه کنیم. با اعمال قانون زنجیره‌ای که داریم، برای مشتق اول:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d\Psi}{dy} \frac{d}{dx}(\sqrt{a}x) = \sqrt{a} \frac{d\Psi}{dy} \quad (219.5)$$

می‌توانیم به معادله (219.5) نگاه کنیم. یک عملگر به صورت  $\frac{d}{dx} = \sqrt{a} \frac{d}{dy}$  تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب مشتق دوم عبارت است از:

$$\frac{d}{dx^2} = \left( \sqrt{a} \frac{d}{dy} \right) \left( \sqrt{a} \frac{d}{dy} \right) = a \frac{d^2}{dy^2} \quad (220.5)$$

و معادله (218.5) می‌شود:

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = \left( \frac{b}{a} - y^2 \right) \Psi = 0 \quad (221.5)$$

می‌توانیم معادله (221.5) را اثبات کنیم. با وارد کردن  $\frac{b}{a} = \frac{2E}{\hbar\omega}$ ، که بدیهی است بدون بعد است، در معادله (221.5) نیز بی بعد است:

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = \left( \frac{2E}{\hbar\omega} - y^2 \right) \Psi = 0 \quad (222.5)$$

بیایید مطالعه کنیم که کدام تابع موج معادله (221.5) (یا معادله 222.5) را در حد  $y \rightarrow \pm\infty$  برآورده می‌کند.

وقتی (۲۲۲.۵)  $E^2 \gg E$  باشد، معادله (۲۲۲.۵) به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{d\Psi^2}{dy^2} - y^2\Psi = 0 \quad (223.5)$$

اکنون تابع موج  $\Psi(y)$  را وقتی بازاء  $|y| \rightarrow \infty$  به خوبی رفتار می کند اعمال می کنیم، یعنی همراه با اولین مشتق آن  $\Psi(y) \rightarrow 0$  و  $\frac{d\Psi}{dy} \rightarrow 0$  وقتی  $|y| \rightarrow \infty$  به صفر می رود. این اطمینان حاصل می شود که تابع موج دامنه احتمال یک حالت فیزیکی را نشان می دهد. یک انتخاب خوب برای جواب مجانبی برابر است با:

$$\Psi_a(y) = Ae^{-\frac{y^2}{2}} \quad (224.5)$$

که در آن زیرنویس  $a$  به ما یادآوری می کند که این راه حل مجانبی است. گام بعدی تلاش برای نوشتن جواب کلی به صورت حاصلضرب جواب مجانبی  $\Psi_a(y)$  در تابع  $H(y)$  است که معادله (۲۲۳.۵) را حل خواهد کرد:

$$\Psi(y) = \Psi_a(y)H(y) = Ae^{-\frac{y^2}{2}}H(y) \quad (225.5)$$

برای داشتن جواب معتبر رابطه (۲۲۵.۵) باید مطمئن باشیم که  $\Psi_a(y)$  برای بزرگ  $|y|$  در حالی که  $H(y)$  برای  $|y|$  کوچک غالب است. با وارد کردن راه حل آزمایشی (۲۲۵.۵) در (۲۲۱.۵)، و پس از مشتق گیری های زیاد، یک معادله دیفرانسیل برای تابع مجهول  $H(y)$  به دست می آوریم:

$$\frac{d^2H}{dy^2} - 2y\frac{dH}{dy} + \left(\frac{b}{a} - 1\right)H = 0 \quad (226.5)$$

معادله (۲۲۶.۵) در فیزیک ریاضی به خوبی شناخته شده است و برابر معادله دیفرانسیل هرمیت است که اولین بار توسط ریاضیدان چارلز هرمیت<sup>۴۶</sup> مورد مطالعه قرار گرفته است. روش استاندارد برای حل معادلات دیفرانسیل مانند (۲۲۶.۵) شامل این فرض است که جواب را می توان به صورت یک سری توانی نوشت، به عنوان مثال:

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \dots \quad (227.5)$$

اکنون عبارت (۲۲۷.۵) را در معادله (۲۲۶.۵) وارد می کنیم و هر یک از جملات آن را جداگانه محاسبه کنید. هنگام محاسبه مشتق دوم در مجموع (۲۲۷.۵)، فقط عبارت های  $n \geq 2$  غیر صفر خواهند بود. بنابراین:

$$\frac{d^2H}{dy^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}y^n \quad (228.5)$$

<sup>۴۶</sup> چارلز هرمیت (1822 – 1901) یک ریاضیدان فرانسوی بود که در بسیاری از زمینه های ریاضیات مورد استفاده در فیزیک مانند عملگرهای هرمیتی و چند جمله ای هرمیت مشارکت های مهمی داشت.

به‌طور مشابه، برای اولین عبارت مشتق در معادله (۲۲۶.۵):

$$-2y \frac{dH}{dy} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n y^n \quad (229.5)$$

آخرین جمله به‌سادگی:

$$\left(\frac{b}{a} - 1\right) H = \left(\frac{b}{a} - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n \quad (230.5)$$

قرار دادن معادله‌ها (۲۲۸.۵)، (۲۲۹.۵) و (۲۳۰.۵) با هم داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \left(\frac{b}{a} - 1\right)c_n \right] y^n = 0 \quad (231.5)$$

که باید برای تمام مقادیر  $y_n$  برقرار باشد. بنابراین هر یک از ضرایب  $y_n$  در معادله. ۵.۲۳۱ باید صفر باشد:

$$\left[ (n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \left(\frac{b}{a} - 1\right)c_n \right] = 0 \quad (232.5)$$

با تنظیم مجدد جملات، معادله (۲۳۲.۵) یک رابطه بازگشتی به‌ما امکان می‌دهد تمام ضرایب  $c_n$  را برای  $n \geq 2$  از سری توانی (۲۲۷.۵) محاسبه کنیم. ضرایب  $c_0$  و  $c_1$  باید از شرایط اولیه تعیین شوند. رابطه بازگشتی برابر است با:

$$c_{n+2} = \frac{(2n+1 - \frac{b}{a})}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (233.5)$$

با توجه به ساختار معادله (۲۳۳.۵) می‌بینیم که با شروع با  $c_0$  همه جملات زوج در حالی که با شروع با  $c_1$  همه جمله‌های فرد را به‌دست می‌آوریم. این بدان معنی است که می‌توانیم تابع  $H(y)$  را به‌صورت مجموع جمله‌های زوج و جمله‌های فرد بنویسیم:

$$H(y) = H_{\text{even}}(y) + H_{\text{odd}}(y) \quad (234.5)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} H_{\text{even}}(y) &\equiv c_0 + c_2 y^2 + c_4 y^4 + \dots \\ H_{\text{odd}}(y) &\equiv c_1 + c_3 y^3 + c_5 y^5 + \dots \end{aligned} \quad (235.5)$$

بیایید به‌راه حل پیشنهادی (۲۲۵.۵) برای نوسانگر هارمونیک کوانتومی برگردیم و بررسی کنیم که آیا می‌توان آن را نرمالیزه کرد یا خیر. متأسفانه معلوم می‌شود که چنین راه حلی، با تعداد نامتناهی جملاتش، قابل عادی‌سازی (نرمالیزه کردن) نیست. تنها شانس آنی که باید به اجبار عادی‌سازی کنیم، یافتن شرایطی است که می‌توان سری را کوتاه کرد یا به‌عبارت دیگر، باید حداکثر مقدار  $n$  را پیدا کنیم، آن را  $N$  می‌نامیم، به‌طوری که فرمول بازگشتی  $c_{n+2} = 0$  را به‌ما می‌دهد. این شرط یا قسمت زوج یا فرد عبارت (۲۳۵.۵) را کوتاه می‌کند.

با نگاهی به رابطه بازگشتی (۲۳۳.۵)، می‌بینیم که اگر اعمال کنیم، این سری می‌تواند کوتاه شود:

$$\left(\frac{b}{a}\right) = 2n + 1 \quad (236.5)$$

و با یادآوری اینکه  $\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2E}{\hbar\omega}$ ، شرط نرمال سازی (۲۳۶.۵) کوانتیزه شدن سطوح انرژی نوسانگر هارمونیک کوانتومی را که قبلاً به صورت جبری به دست آوردیم به ما می‌دهد:

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (237.5)$$

برای اینکه همه اینها معتبر باشند، باید این فرض اضافی را بسازیم که اگر یک مقدار حداکثر  $n = N$  که سری زوج عبارت (۲۳۵.۵) را کوتاه می‌کند، یافت شود، باید فرض کنیم که سری فرد از ابتدا و برعکس آن صفر است.

بنابراین، در مکانیک کوانتومی، به عنوان یک قاعده کلی، متوجه می‌شویم که اگر سیستم محدود باشد، زمانی که تابع موج به درستی نرمال شود، سطوح انرژی آن گسسته خواهد بود. در مثال نوسان ساز هارمونیک کوانتومی، روابط گسسته سازی (۲۳۶.۵) و (۲۳۷.۵) تنها در صورتی ایجاد می‌شوند که شرط عادی سازی را بر تابع موج اعمال کنیم. در نهایت همه مواد لازم برای محاسبه توابع ویژه نوسانگر هارمونیک کوانتومی را داریم. برای انجام این کار، فرمول بازگشتی (۲۳۳.۵) را با وارد کردن در رابطه (۲۳۶.۵) بازنویسی می‌کنیم تا به دست آوریم:

$$c_{n+2} = \frac{-2(N-n)}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (238.5)$$

اولین تابع ویژه با  $N=0$  با  $n=0$  مطابقت دارد زیرا عدد صحیح  $n$  نمی‌تواند بزرگتر از  $N$  باشد. می‌دانیم که باید  $c_1=0$  را اعمال کنیم تا مطمئن شویم که سری فرد در معادله (۲۳۵.۵) صفر است. این انتخاب فقط یک جمله در سری ایجاد می‌کند:

$$\begin{aligned} H_0(y) &= c_0 \\ \Psi_0(y) &= Ac_0 e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned} \quad (239.5)$$

حال با بازگشت به مختصات  $x$  از  $y = \sqrt{a}x = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  استفاده کرده و معادله (۲۳۹.۵) اولین تابع ویژه را می‌دهد:

$$\Psi_0(y) = Ac_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}y^2} = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}y^2} \quad (240.5)$$

اگر  $N=1$  باشد می‌دانیم که اکنون باید  $c_1=0$  را اعمال کنیم و تنها انتخاب  $n=0$  است. معادله (۲۳۸.۵) می‌دهد:

$$\begin{aligned} H_1(y) &= c_1 y \\ \Psi_1(y) &= Ac_1 e^{-\frac{y^2}{2}} \\ \Psi_1(y) &= Ac_1 x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = Ax \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \end{aligned} \quad (241.5)$$

برای  $N = 2$ ، با پیروی از روش مشابه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H_2(y) &= c_0 (1 - 2y^2) \\ \Psi_2(y) &= Ac_0 (1 - 2y^2) e^{-\frac{y^2}{2}} \\ \Psi_2(y) &= Ac_0 \left(1 - 2\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = A_2 \left(1 - 2\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \end{aligned} \quad (242.5)$$

برای  $N = 3$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H_3(y) &= c_1 \left(y - \frac{2}{3}y^3\right) \\ \Psi_3(y) &= Ac_1 \left(y - \frac{2}{3}y^3\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \\ \Psi_3(y) &= Ac_1 \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(1 - \frac{2}{3}x^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = A_3 x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(1 - \frac{2}{3}x^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \end{aligned} \quad (243.5)$$

که در آن ثابت  $A$  از معادله (۲۲۵.۵) در ثابت‌های جدید  $A_i$  گنجانده شده است. می‌توانیم ادامه دهیم و تمام توابع ویژه  $\Psi_i(x)$  را تولید کنیم. اگر همه توابع ویژه را عادی‌سازی کنیم، متوجه می‌شویم که به‌صورت فشرده نوشته شده‌اند، فرمول کلی این است:

$$\Psi_i(y) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^i i!}} H_i(\sqrt{a}x) e^{-\frac{ax^2}{2}} \quad (244.5)$$



## فصل ۶

# ماتریس‌ها در مکانیک کوانتومی

در فصل‌های قبل دیدیم که مکانیک کلاسیک قادر به توضیح طیفی از پدیده‌ها نبود. نقطه شروع ناتوانی در مدل‌سازی ریاضی رفتار طیف تابشی جسم سیاه بود. پلانک انقلاب کوانتومی را با کمی کردن انرژی مبادله شده بین میدان‌های الکترومغناطیسی و دیوارهای جسم سیاه آغاز کرد. سپس انیشتن با توضیح اثر فوتوالکتریک، کوانتیزاسیون را به خود نور با فرضیه فوتون گسترش داد. همراه با آزمایشات روی پراکندگی کامپتون، مشخص شد که فوتون‌ها بسته به آزمایش خاص، هم رفتار موجی و هم رفتار ذره‌ای دارند. بور از ایده‌های پلانک برای توضیح گسیل خطی اتم‌های هیدروژن استفاده کرد که نشان می‌داد مکانیک کوانتومی تازه متولد شده توصیف بهتری از آزمایش‌ها ارائه می‌دهد. دیبرولی، در تلاش برای درک بهتر دینامیک اتم، این فرض را مطرح کرد که نه تنها فوتون‌ها، بلکه ماده به‌طور کلی رفتار دوگانه دارند: امواج آزمایشی باید به ذرات عظیم مرتبط شوند تا طیف وسیعی از آزمایش‌ها را که تداخل و پراش را نشان می‌دهند، توضیح دهند. ویژگی اصلی مورد نیاز برای این امواج خلبان، توانایی تداخل با خود بودند. سپس شرودینگر معادله خود را برای این امواج نوشت که اکنون تابع موج نامیده می‌شود، که نشان دهنده تلاشی موفقیت آمیز برای توصیف ریاضی همه پدیده‌هایی است که توسط مکانیک کلاسیک توصیف نشده اند. دسته جدیدی از اشیاء، رویه‌ها و مفاهیم ریاضی مانند، برای مثال، توابع موج، عملگرها، امیدهای ریاضی، جابجایی، اصل عدم قطعیت، و غیره معرفی شدند. در تصویر شرودینگر عملگرها ثابت هستند و توابع موج وابستگی زمانی دارند.

اندکی قبل از شرودینگر، ورنر هایزنبرگ<sup>۱</sup> با فرمول ریاضی کاملاً متفاوتی از مکانیک کوانتومی بر اساس عملگرهایی که به‌عنوان ماتریس‌های هرمیتی بیان می‌شوند، ارائه کرد. چند سال بعد نشان داده شد که این دو فرمول معادل هستند و این یک موضوع سلیقه‌ای - یا راحتی بهتر - است که از ریاضیات استفاده می‌شود. در واقع، مسائل خاص در یک فرمول به‌جای دیگری آسانتر حل می‌شوند. در تصویر هایزنبرگ، توابع موج ثابت هستند و عملگرها وابستگی زمانی را حمل می‌کنند.

<sup>۱</sup> Werner Heisenberg

دیراک نوعی ترکیب فرمولاسیون شرودینگر و هایزنبرگ به نام تصویر برهمکنش را پیشنهاد کرد که به ویژه زمانی مفید است که مسائل فیزیکی شامل برهمکنش‌هایی باشد که با زمان، هم تابع موج و هم عملگرها تغییر می‌کنند. ریچارد فاینمن فرمول ریاضی دیگری از مکانیک کوانتومی ارائه کرد: انتگرال‌های مسیر که در فصل قبل به‌طور خلاصه معرفی کردیم. در این فرمول، اصل عمل کلاسیک به مکانیک کوانتومی تعمیم داده شده است. بعداً نشان داده شد که رویکرد فاینمن نیز معادل فرمول‌بندی‌های دیگر است.

در این فصل، شرح ریاضی دقیقی را دنبال نمی‌کنیم. ما ترجیح می‌دهیم از رویکرد "فیزیکدانان" استفاده کنیم که در آن مفروضات ریاضی توسط شهود فیزیکی هدایت می‌شوند و اثبات‌های ریاضی همیشه دقیق نیستند. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به کتاب‌های زیادی مراجعه کنند که در آنها مبانی ریاضی مکانیک کوانتومی با دقت لازم بررسی شده است.

## ۱.۶ نماد دیراک

اجازه دهید یک نماد بسیار کاربردی را که برای اولین بار توسط پی.ای.ام. دیراک [۱۲] ارائه شد، معرفی کنیم. قبلاً اشاره کردیم که اگر تابع موج  $\Psi(x, t)$  را بدانیم، وضعیت یک سیستم کوانتومی، یعنی سیستمی که توسط مکانیک کوانتومی اداره می‌شود، کاملاً مشخص می‌شود. در نماد دیراک، این حالت بردار حالت نامیده می‌شود و با نماد  $|\Psi\rangle$  نشان داده می‌شود که به آن **کت** ket نیز می‌گویند. با این نماد جدید، معادله شرودینگر به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$-j\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle \quad (۱.۶)$$

کت‌ها تابع همان جبر بردارهای آشنا تر هستند با این تفاوت که می‌توانند مختلط باشند. در واقع، با توجه به دو عدد مختلط  $c_1$  و  $c_2$ ، با شروع از هر دو کت  $|A\rangle$  و  $|B\rangle$  همیشه می‌توانیم یک کت جدید بسازیم:

$$|C\rangle = c_1 |A\rangle + c_2 |B\rangle \quad (۲.۶)$$

معادله (۲.۶)، اگرچه ظاهراً موارد بدیهی را بیان می‌کند، اما در واقع بیان بسیار قدرتمندی است. این معادله به ما می‌گوید که اگر دو حالت  $|A\rangle$  و  $|B\rangle$  راه حل‌های همان معادله شرودینگر هستند، سپس نیز  $|C\rangle$  یک راه حل است. سیستمی که توسط ket گفته می‌شود که  $|C\rangle$  در حالت برهم‌نهی بین حالات  $|A\rangle$  و  $|B\rangle$  است.

حال فرض کنید حالت زیر  $c_1 |A\rangle + c_2 |A\rangle$  را می‌سازیم، یعنی حالتی که از برهم‌نهی (جمع اثرها) آن با خود از طریق دو ضریب غیر صفر  $c_1$  و  $c_2$  تشکیل می‌شود. داریم:

$$c_1 |A\rangle + c_2 |A\rangle = (c_1 + c_2) |A\rangle \quad (۳.۶)$$



به‌غیر از حالت  $(c_1 + c_2) = 0$  که نتیجه برهم نهی برای آن حالت صفر برمی‌گرداند، فرض می‌کنیم که حالت جدید  $(c_1 + c_2)|A\rangle$  دقیقاً حالت اصلی  $|A\rangle$  را نشان می‌دهد. این به‌این معنی است که همه کت‌ها  $a|A\rangle$ ، یعنی کت‌ها در هر عدد مختلط  $a \neq 0$  ضرب شده‌اند، دقیقاً همان حالت را نشان می‌دهند. از نظر برداری به این معناست که آنچه مهم است جهت بردار است نه بزرگی آن.

با توجه به آزادی ضرب هر کت بدون تغییر حالت، نتیجه می‌شود که در کت  $|C\rangle$  معادله (۲.۶) فقط نسبت دو ضریب  $c_1$  و  $c_2$  مورد نیاز است. در نتیجه، هر حالتی با یک عدد مختلط یا به‌طور معادل دو عدد حقیقی تعیین می‌شود.

پس از تعریف کت ket،  $|\Psi\rangle$ ، اکنون یک بردار دوگانه به‌نام بردار برا bra را معرفی می‌کنیم که با نماد  $\langle\Phi|$  به‌طوری که ضرب داخلی با علامت  $\langle B|A\rangle$  نشان داده می‌شود، یعنی:

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(x)\Psi(x)dx \quad (۴.۶)$$

که در آن  $\Phi^*(x)$  مزدوج مختلط  $\Phi(x)$  است. نتیجه این است که اگر بخواهیم ضرب داخلی دو بردار کت را محاسبه کنیم  $|A\rangle$  و  $|B\rangle$  باید مزدوج مختلط یکی از این دو را بگیریم، برای مثال  $\langle B|A\rangle$  :  $|B\rangle$  می‌توان نشان داد که:

$$\langle B|A\rangle = \langle A|B\rangle^* \quad (۵.۶)$$

که از آن نتیجه می‌شود که  $\langle A|A\rangle \geq 0$  و واقعی است. شرط نرمال‌سازی (۵.۵) برای  $\langle\Psi|\Psi\rangle$  به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \quad (۶.۶)$$

به‌طور ضمنی کت دیراک را به‌عنوان تعمیم مفهوم بردار معرفی کرده‌ایم. در مکانیک کلاسیک در مورد یک بردار  $\vec{v}$  به‌عنوان یک کمیت فیزیکی تعریف شده در یک فضا فکر می‌کنیم - معمولاً فضای سه بعدی  $(x, y, z)$  - و بر حسب بردارهای پایه نشان داده می‌شود  $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$ ، که در آن  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  بردار واحد و  $v_x, v_y, v_z$  مولفه‌های بردار  $\vec{v}$  در چارچوب مرجع هستند. در قیاس کامل، می‌توانیم هر تابع موجی را به‌عنوان بردار در فضایی تصور کنیم که توسط مجموعه‌ای متعامد از تابع‌های موج به‌نام بردارهای حالت پایه  $|\Psi_i\rangle$  تشکیل شده است:

$$|\Psi\rangle = a_1|\Psi_1\rangle + a_2|\Psi_2\rangle + \dots = \sum_i a_i|\Psi_i\rangle \quad (۷.۶)$$

این ویژگی خاص نتیجه مستقیم یکی از فرضیه‌های مکانیک کوانتومی است.

## ۲.۶ جبر خطی

در قسمت‌های قبلی این کتاب، توابع موج را به‌صورت اشیایی معرفی کردیم که پس از مشخص شدن کامل، وضعیت یک سیستم کوانتومی را به‌منظور مشخص کردن تکامل

زمانی آن تعیین کرده، سپس معادله شرودینگر را معرفی کردیم که هنگام برخورد با سیستم‌های محافظه‌کار (پایستار)، یعنی سیستم‌هایی که در آن انرژی حفظ می‌شود، به معادله شرودینگر مستقل از زمان TISE کاهش می‌یابد.

در آماده سازی برای مطالعه فرمول جایگزین مکانیک کوانتومی به دلیل ورنر هایزنبرگ<sup>۲</sup>، در این بخش مفهوم فضای برداری خطی را معرفی می‌کنیم.

در ریاضیات، فضا مجموعه‌ای از اشیاء (که «عناصر» نیز نامیده می‌شود) است که به برخی از روابط بین آنها بستگی دارد. پس از معرفی نماد دیراک در بخش 1.6، اجازه دهید عناصر را به عنوان بردارهایی با شاخص (اندیس)  $j$  که فضا را با  $|1\rangle$ ،  $|2\rangle$ ، ...،  $|j\rangle$ ، ... اشیاء شناسایی کنیم. ما خود را به مطالعه مقدماتی (کوتاه) فضاهای برداری خطی، که در آن عناصر بردار نامیده و در آنجا سه عملیات را تعریف می‌کنیم، محدود می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} 1 & a|1\rangle \quad \text{ضرب بین بردارها و اسکالرها} \\ 2 & |1\rangle + |2\rangle \quad \text{جمع بین بردارها} \\ 3 & \langle 2|1\rangle \quad \text{ضرب بین بردارها} \end{array} \quad (۸.۶)$$

که در آن  $a$  یک اسکالر است. توجه داشته باشید که اسکالرها می‌توانند اعداد مختلط باشند: در این مورد فضا فضای برداری مختلط<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. قانون 1 دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\begin{array}{ll} \text{الف-۱} & (a+b)|1\rangle = a|1\rangle + b|1\rangle \quad \text{توزیعی در اسکالرها، یعنی} \\ \text{ب-۱} & a(|1\rangle + |2\rangle) = a|1\rangle + a|2\rangle \quad \text{توزیعی در بردارها، یعنی} \\ \text{ج-۱} & a(b|1\rangle) = (ab)|1\rangle \quad \text{شرکت پذیری، یعنی} \end{array} \quad (۹.۶)$$

قانون 2 دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\begin{array}{ll} \text{الف-۲} & |1\rangle + |2\rangle = |2\rangle + |1\rangle \quad \text{جابجائی، یعنی} \\ \text{ب-۲} & |1\rangle + (|2\rangle + |3\rangle) = (|1\rangle + |2\rangle) + |3\rangle \quad \text{شرکت، پذیری یعنی} \end{array} \quad (۱۰.۶)$$

اجازه دهید چند ویژگی دیگر اضافه کنیم:

$$\begin{array}{ll} \text{الف-۳} & |0\rangle \text{ منحصر به فرد وجود دارد به طوری که } |1\rangle + |0\rangle = |1\rangle \\ \text{ب-۳} & |1\rangle + |-1\rangle = |0\rangle \text{ یکتا وجود دارد به طوری که} \end{array} \quad (۱۱.۶)$$

تأکید بر این واقعیت بسیار مهم است که ما عناصر فضای خطی را بدون هیچ ارتباطی با مفهوم برداری در مکانیک کلاسیک "بردار" می‌نامیم. بردارهای فضای خطی می‌توانند اشیایی باشند که حتی از راه دور به بردارهای کلاسیک متصل نیستند. مجموعه همه

<sup>۲</sup> ورنر کارل هایزنبرگ (1901 – 1976) فیزیکدان آلمانی بود که یکی از پدران مکانیک کوانتومی به شمار می‌رود. در سال 1925، با یک سری مقالات پیشگامانه، همراه با مکس بورن و پاسکوال جردن، فرمول ماتریسی مکانیک کوانتومی را معرفی و توسعه داد. او همچنین اولین کسی بود که اصل عدم قطعیت را که تحت نام خود، تدوین کرد.

<sup>۳</sup> اگر بخواهیم کمی دقیق‌تر باشیم: مجموعه اسکالرها  $a$  به میدانی گفته می‌شود که فضای برداری بر روی آن تعریف شده است. اگر اسکالرها اعداد حقیقی باشند، فضای برداری یک فضای برداری حقیقی است، در حالی که اگر اسکالرها اعداد مختلط باشند، فضای برداری را فضای برداری مختلط می‌نامند.

ماتریس‌های  $2 \times 2$   $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$  که در آن اعداد مختلط هستند، یک مثال معمولی از فضای برداری خطی است که در آن عناصر به روش کلاسیک بردار نیستند. می‌توان نشان داد که آنها تمام ویژگی‌های ذکر شده در بالا را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \\ \alpha \cdot \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ \alpha \left( \beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= (\alpha\beta) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right] &= \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۱۲.۶)$$

که در آن  $\alpha, \beta, a, b, \dots, l$  تمام اعداد اسکالر هستند. بیاپید مجموعه‌ای از بردارها را در نظر بگیریم  $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle$ . اگر عبارت زیر باشد می‌گوییم که بردارها مستقل خطی هستند:

$$\sum_{i=1}^N c_i |i\rangle = |0\rangle \quad (۱۳.۶)$$

فقط و فقط زمانی معتبر است که تمام  $c_i = 0$  باشد. از طرف دیگر، اگر بتوان مجموعه‌ای از ضرایب  $c_i \neq 0$  را پیدا کرد که معادله (۱۳.۶) معتبر باشد، در آن صورت مجموعه بردارها وابسته خطی نامیده می‌شود.

نتیجه مهم معادله (۱۳.۶) شامل عدم امکان نوشتن هر بردار از مجموعه مستقل خطی به صورت ترکیبی خطی از بقیه بردارها است. این را می‌توان به راحتی مشاهده کرد اگر حالت بسیار ساده  $N = 3$  را در نظر بگیریم در آن شرط (۱۳.۶) برابر است با:

$$c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle = 0 \quad (۱۴.۶)$$

حال، فرض کنید که می‌توانیم کت  $|1\rangle$  را به صورت ترکیب خطی دو کت دیگر  $|2\rangle$  و  $|3\rangle$  بنویسیم:

$$|1\rangle = a|2\rangle + b|3\rangle \quad (۱۵.۶)$$

که می‌تواند به صورت زیر تنظیم شود:

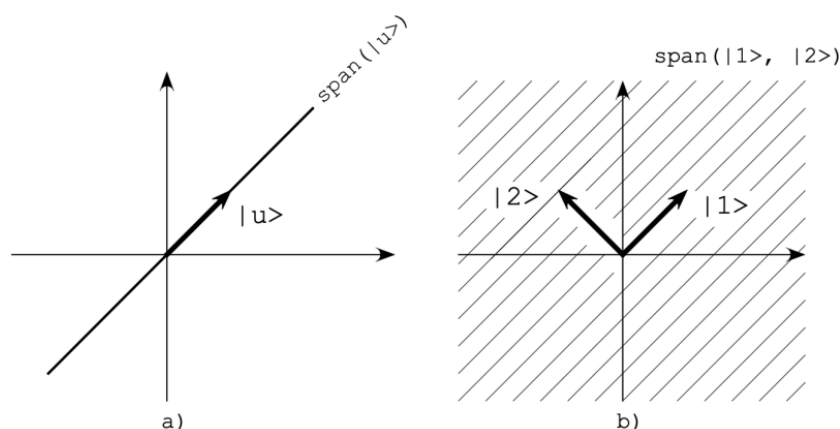
$$a|2\rangle + b|3\rangle - |1\rangle = 0 \quad (۱۶.۶)$$

مقایسه معادله (۱۶.۶) با معادله (۱۳.۶) به ما می‌گوید که امکان داشتن ضرایب کت  $1 \neq 0$  در معادله (۱۶.۶) وجود ندارد زیرا شرط مستقل بودن خطی مستلزم آن است که تمام ضرایب در معادله (۱۶.۶) باید صفر باشد. بنابراین رابطه (۱۵.۶) مجاز نیست.

شرط مستقل بودن خطی چند پیامد مهم دارد. مجموعه‌ای از بردارها در صورتی پایه نامیده می‌شوند اگر عناصر آن به صورت خطی مستقل باشند و اگر هر عنصری از فضای برداری را بتوان به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه بیان کرد. بیایید فرض کنیم که  $|u\rangle$  یکی از عناصر فضای برداری خطی است و آن  $|i\rangle, i = 1, \dots, N$  پایه است. در این صورت همیشه می‌توانیم برای هر بردار متعلق به فضای برداری، موارد زیر را بنویسیم:

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |i\rangle \quad (۱۷.۶)$$

که در آن ضرایب  $c_i$  مولفه‌ها یا مختصات نامیده می‌شوند. یک فضای برداری می‌تواند پایه‌های مختلفی داشته باشد. با این حال، همه پایه‌ها دارای تعداد یکسانی از عناصر به نام بعد فضای برداری هستند. **گستره**<sup>۴</sup> فضای برداری یکی دیگر از مفاهیم مفید است. گستره مجموعه‌ای از بردارها فضای خطی است که توسط مجموعه همه بردارها تشکیل می‌شود و می‌توان آنها را به صورت ترکیب خطی بردارهای متعلق به مجموعه مفروض نوشت. به عنوان مثال، اگر فضای برداری فقط یک عنصر داشته باشد، آنگاه گستره مجموعه‌ای از تمام بردارها ضرب در یک اسکالر است و بردار نیز یک پایه است. در این مورد می‌گوییم که بردار پایه فضای را در بر می‌گیرد.



شکل ۱.۶: (الف) گستره بردار  $|u\rangle$  خط مستقیمی است که شامل تمام بردارهای  $a|u\rangle$  است و در آن  $a$  یک عدد ثابت است. (ب) گستره دو بردار  $|1\rangle, |2\rangle$  ناحیه سایه دار است، یعنی صفحه‌ای که از بین دو بردار می‌گذرد.

در نظر گرفتن بردارهای هندسی کلاسیک برای مثال بعدی آموزنده است. فرض کنید فضای برداری خطی ما فقط از یک بردار 2 بعدی تشکیل شده است  $|u\rangle$  (شکل ۱.۶ پانل سمت چپ). گستره  $(|u\rangle)$  مجموعه‌ای از تمام ترکیبات خطی  $|u\rangle$  است و خط مستقیمی است که دقیقاً از بردار  $|u\rangle$  می‌گذرد.

<sup>۴</sup>Span

اگر اکنون دو بردار هندسی مستقل خطی  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $|2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  داشته باشیم گستره صفحه‌ای است که از دو بردار می‌گذرد  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  (ناحیه سایه‌دار در شکل ۱.۶ پانل سمت راست). واضح است که اگر دو بردار در یک راستا باشند، گستره به یک خط منجر میشود، اما این بدان معناست که دو بردار مستقل خطی نیستند زیرا یکی مضرب دیگری است.

## ۱.۲.۶ ماتریس پاولی

بیایید به فضای برداری خطی خود از ماتریس‌های  $2 \times 2$  برگردیم و ۴ ماتریس زیر را تعریف کنیم<sup>۵</sup>:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (۱۸.۶)$$

و ثابت می‌کنیم که آنها مبنایی (پایه‌ای) هستند. این با توجه به اینکه هر ماتریس  $2 \times 2$  را می‌توان به صورت ترکیب خطی ماتریس‌های پائولی بیان کرد، به دست می‌آید. اگر  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  یک ماتریس عمومی  $2 \times 2$  باشد، داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱۹.۶)$$

که در آن ماتریس‌های پاولی معادله (۱۸.۶) را در معادله (۱۹.۶) جایگزین کرده‌ایم. داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 + c_4 & c_1 + jc_2 \\ c_1 - jc_2 & -c_3 + c_4 \end{pmatrix} \quad (۲۰.۶)$$

به یاد داشته باشید که دو ماتریس برابر هستند اگر و فقط اگر عناصر برابر باشند، ضرایب بسط (۱۹.۶) با حل چهار معادله چهار مجهولی پیدا می‌شود:

$$\begin{cases} a = c_3 + c_4 \\ b = c_1 + jc_2 \\ c = c_1 - jc_2 \\ d = -c_3 + c_4 \end{cases} \quad (۲۱.۶)$$

<sup>۵</sup>سه ماتریس اول ماتریس‌های پاولی نامیده و در معادله پائولی برای توصیف ذرات اسپین  $\frac{1}{2}$  استفاده می‌شوند.

که ثابت می‌کند ما همیشه می‌توانیم هر ماتریس  $2 \times 2$  را بر حسب ماتریس‌های پائولی بیان کنیم. بنابراین ماتریس‌های پائولی مبنایی برای فضای برداری خطی ماتریس‌های  $2 \times 2$  هستند. همچنین به‌پیامد مهم معادله (۲۱.۶) توجه کنید: دقیقاً چهار معادله چهار مجهولی داریم به‌این معنی که تعداد پایه مورد نیاز برای گسترش فضای  $2 \times 2$  ماتریس دقیقاً چهار است.

می‌توانیم نتیجه قبلی را با بیان اینکه هر بردار  $|v\rangle$  در فضای  $N$  بعدی را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از  $N$  بردار مستقل خطی<sup>۶</sup> نوشت. انتخاب بردار پایه به‌وضوح دلخواه است و بردارهای پایه بی‌نهایت وجود دارد که می‌توانیم انتخاب کنیم.

باید در مورد تعریف طول یک بردار بحث کنیم. در حالی که مفهوم "طول" یک بردار در مورد بردارهای هندسی کاملاً واضح است، در تصاویر تعمیم یافته ما عناصر فضا، اجسامی وجود دارند که تعریف فوری از طول را ندارند. مورد ماتریس‌های  $2 \times 2$  که قبلاً در مورد آن بحث کردیم تنها یک مثال است. "طول" یک ماتریس چقدر است؟

می‌توانیم با تعریف یک ضرب نقطه‌ای، طولی را به‌عناصر فضای برداری اختصاص دهیم. در قیاس کامل با بردارهای هندسی که برای آنها دو بردار  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  و  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  ضرب داخلی آنها به‌سادگی  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_N v_N$  خط تولید دو عنصر فضایی را تعریف می‌کنیم.  $|u\rangle$  و  $|v\rangle$  آن را ضرب داخلی می‌نامیم و آن را با علامت  $\langle u|v\rangle$  نشان می‌دهیم.

ما همچنین تحمیل می‌کنیم که ضرب داخلی جدید ما از اصول زیر تبعیت کند:

$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle &= \langle v|u\rangle^* \\ \langle u|u\rangle &\geq 0 \\ \langle u|(a|v\rangle + b|w\rangle) &= a\langle u|v\rangle + b\langle u|w\rangle\end{aligned}\quad (22.6)$$

که در آن علامت ستاره به معنای مزدوج مختلط است و از نماد ساده  $|u\rangle + |v\rangle$  و  $|au\rangle = a|u\rangle$  استفاده می‌کنیم که در آن  $a$  یک عدد ثابت است. هنگامی که یک ضرب داخلی را تعریف کردیم، فضای برداری خطی بر روی میدان اعداد مختلط، فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

بیایید یک تعریف مهم دیگر ارائه دهیم: دو بردار متعامد نرمالیزه نامیده می‌شوند که ضرب داخلی آنها برابر با صفر باشد. بنابراین، اگر بردارهای پایه آن متعامد نرمالیزه با یکدیگر باشند، پایه‌ها متعامد نامیده می‌شود. علاوه بر این، اگر ضرب داخلی هر بردار پایه با خودش واحد باشد، آنگاه مبنای را متعامد نرمالیزه می‌گویند. اگر یک مبنای متعامد را با علامت  $|e_i\rangle$  با  $i = 1, 2, \dots, N$  نشان دهیم، در این صورت پایه‌ها رابطه زیر را برآورده می‌کنند:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} \quad (23.6)$$

<sup>۶</sup>این جمله را می‌توان به‌راحتی با فرض وجود یک بردار  $|u\rangle$  که نمی‌توان آن را به‌صورت ترکیب خطی بردارهای پایه بیان کرد، اثبات کرد. اما در این صورت می‌توانیم این بردار را به‌مجموعه بردارهای پایه اضافه کنیم که یک واحد تعداد بردارهای پایه را افزایش می‌دهند. این بدان معناست که اکنون بردارهای پایه  $N + 1$  در فضای  $N$  بعدی داریم که دیدیم امکان پذیر نیست.

که در آن  $\delta_{ij}$  نیز نماد دلتای کرونکر است که در معادله (۱۵۸.۵) تعریف شد. می‌توانیم یک مبنای متعامد را به‌عنوان پایه‌ای از بردارهای واحد در نظر بگیریم که واحد اندازه‌گیری را به‌همه بردارهای گسترده می‌دهد. در واقع یک ویژگی بسیار مهم پایه‌های متعامد این است که برای هر بردار  $|u\rangle$  متعلق به فضای برداری، ضرایب  $c_i$  بسط:

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |e_i\rangle \quad (24.6)$$

توسط ضرب داخلی بردار  $|u\rangle$  با بردارهای پایه برطبق:

$$c_i = \langle e_i | u \rangle \quad (25.6)$$

که معادل طرح یک بردار هندسی در محور واحد متعامد آن است. اکنون به ماتریس‌های پائولی باز می‌گردیم و تأیید می‌کنیم که آنها نه تنها یک مبنا هستند، بلکه با توجه به یک ضرب داخلی تعریف شده توسط آنها متعامد هستند:

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(u^\dagger v) \quad (26.6)$$

که در آن  $u$  و  $v$  دو ماتریس  $2 \times 2$  هستند و عملیات  $\text{Tr}(u)$  که **ردیابی**<sup>۷</sup> نامیده می‌شود، مجموع عناصر قطری ماتریس است:

$$\text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^N u_{ii} \quad (27.6)$$

ضرب داخلی (۲۶.۶) ضرب داخلی هیلبرت - اشمیت<sup>۸</sup> نامیده می‌شود. قبل از اینکه تأیید کنیم که ضرب داخلی (۲۶.۶) یک ضرب داخلی معتبر است، یعنی اصول (۲۲.۶) را برآورده می‌کند، اجازه دهید ترکیب جابه‌جایی یک ماتریس  $u$  را که در مورد عملگرهای فصل‌های قبلی با نماد  $u^\dagger$  نوشته شده است، تعریف کنیم. مزدوج ترانسپوز (ترانزپوز)<sup>۹</sup> ماتریس  $u$  ماتریسی است که با جابجایی آن و سپس گرفتن مزدوج مختلط عناصر آن به‌دست می‌آید. اگر  $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  مزدوج ترانزپوز آن خواهد بود:

$$u^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad (28.6)$$

یا بر حسب مولفه‌های آن:

$$u_{ij}^\dagger = u_{ji}^* \quad (29.6)$$

<sup>۷</sup>Trace

<sup>۸</sup>Hilbert-Schmidt

<sup>۹</sup>Conjugate Transpose

توجه داشته باشید که، در قیاس با عملگرهای دیفرانسیلی که در فصل قبل مورد بحث قرار گرفت، یک ماتریس هرمیتی (هرمیشن)<sup>۱۰</sup> نامیده می‌شود اگر برابر با ترانسپوز خود باشد، یعنی  $u = u^\dagger$ .  
با بازگشت به ضرب داخلی، نتیجه می‌شود که برای هر ماتریس  $u$  داریم:

$$Tr(u^\dagger) = (Tr(u))^* \quad (۳۰.۶)$$

نتیجه می‌شود:

$$\langle u|v \rangle = \frac{1}{2} Tr(u^\dagger v) = \frac{1}{2} (Tr(v^\dagger u))^* = (\langle v|u \rangle)^* \quad (۳۱.۶)$$

که در آن از قانون زیر استفاده کردیم:

$$(uv)^\dagger = v^\dagger u^\dagger \quad (۳۲.۶)$$

که با نوشتن قانون ضرب دو ماتریس  $u$  و  $v$  که مولفه‌های آن عبارتند از:

$$(uv)_{ij} = \sum_{k=1}^N u_{ik} v_{kj} \quad (۳۳.۶)$$

و نوشتن مولفه‌های ترانسپوز ضرب که با علامت  $T$  نشان داده شده است:

$$(uv)_{ij}^T = (uv)_{ji} = \sum_{k=1}^N u_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^N (v^T)_{jk} (u^T)_{ki} \quad (۳۴.۶)$$

مزدوج مختلط معادله (۳۴.۶) معادله (۳۲.۶) را ثابت می‌کند و در نتیجه معادله (۳۱.۶)، بنابراین اصل ۱ را اثبات می‌کند.  
اکنون به اصل ۲ در (۲۲.۶) می‌رویم. بیاید ضرب داخلی  $|u\rangle$  با خودش را محاسبه کنیم. با استفاده از نتایج قبلی، داریم:

$$\langle u|u \rangle = \frac{1}{2} Tr(u^\dagger u) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u^\dagger)_{ij} u_{ji} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u^*)_{ji} u_{ji} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |u_{ji}|^2 \geq 0 \quad (۳۵.۶)$$

که اصل دوم را ثابت می‌کند. در نهایت، برای اثبات اصل سوم، اثبات را به دو بخش جداگانه تقسیم می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که  $\langle u|av \rangle = a \langle u|v \rangle$  و سپس ثابت می‌کنیم که  $\langle u|v+w \rangle = \langle u|v \rangle + \langle u|w \rangle$ . بیاید با توجه به اینکه عملیات ردیابی خطی است شروع کنیم، به عنوان مثال:

$$Tr(au + bv) = aTr(u) + bTr(v) \quad (۳۶.۶)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\langle u|av \rangle = \frac{1}{2} Tr(au^\dagger v) = \frac{1}{2} a Tr(u^\dagger v) = a \langle u|v \rangle \quad (۳۷.۶)$$

<sup>۱۰</sup> Hermitian



در نهایت

$$\langle u|v+w\rangle = \frac{1}{2}\text{Tr}(u^\dagger(v+w)) = \frac{1}{2}\text{Tr}(u^\dagger v) + \frac{1}{2}\text{Tr}(u^\dagger w) = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle \quad (38.6)$$

که اثبات می‌کند که ضرب داخلی پیشنهادی سه اصل (۲۲.۶) را برآورده می‌کند. ماتریس‌های پائولی علاوه بر هر میتی بودن، خودوارون<sup>۱۱</sup> و واحد<sup>۱۲</sup> نیز هستند. ماتریس  $u$  که معکوس خودش نیز باشد، خودوارون نامیده می‌شود. به طور کلی، معکوس یک ماتریس  $u$  با نماد  $u^{-1}$  نشان داده می‌شود و به گونه‌ای است که  $uu^{-1} = I$  که در آن ماتریس  $I$  همان ماتریس واحد یا همانی است که به صورت  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  تعریف شده است. نتیجه می‌شود که همه ماتریس‌های خودوارون  $uu^{-1} = uu = u^2 = I$  را برآورده می‌کنند، یعنی مربع یک ماتریس خودوارون همانی است. در نتیجه، یک ماتریس خودوارون جذر ماتریس همانی است. بر اساس این تعریف، ماتریس همانی نیز خودوارون است. به راحتی می‌توان نشان داد که ماتریس‌های پائولی خودوارون هستند:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 \cdot \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \cdot \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (39.6)$$

نتیجه می‌شود که ضرب داخلی ماتریس‌های پائولی با خودش برابر با 1 است:

$$\langle \sigma_i | \sigma_i \rangle = \frac{1}{2}(\sigma_i \cdot \sigma_i) = \frac{1}{2}\text{Tr}(I) = I \quad (40.6)$$

که نشان می‌دهد که همه ماتریس‌های پائولی به 1 در زیر ضرب داخلی (۲۶.۶) نرمال شده‌اند. همچنین می‌بینیم که چرا ضرب داخلی دارای فاکتور  $\frac{1}{2}$  است. در نهایت نشان می‌دهیم که ماتریس‌های پائولی متعامد هستند و از آنجایی که نرمال هستند، متعامد هستند.

برای انجام این کار، بیایید حاصل ضرب دو ماتریس پائولی را مطالعه کنیم. قبلاً دیدیم که حاصل ضرب یک ماتریس پائولی با خودش برابر با ماتریس همانی است. با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که حاصل ضرب هر دو ماتریس پائولی با ماتریس پائولی دیگر برابر است. یک محاسبه جامع نشان می‌دهد که می‌توانیم حاصل ضرب دو ماتریس پائولی را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\sigma_i \sigma_j = I\delta_{ij} - j\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (41.6)$$

<sup>۱۱</sup>Involutory<sup>۱۲</sup>Unitary

که در آن  $\epsilon_{ijk}$  نماد Levi-Civita است که توسط:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{برای } i = j, j = k, k = i \\ +1 & \text{برای } (i, j, k) \text{ هر ترکیبی از } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ +1 & \text{برای } (i, j, k) \text{ هر ترکیبی از } (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \end{cases} \quad (42.6)$$

بیایید ضرب داخلی دو ماتریس پائولی متفاوت را بنویسیم. از معادله (۴۱.۶)، داریم  $\sigma_i \sigma_j = -j \epsilon_{ijk} \sigma_k$  برای  $i \neq k$ . بنابراین:

$$\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i \cdot \sigma_j) = \frac{-j}{2} \epsilon_{ijk} \text{Tr}(\sigma_k) = 0 \quad (43.6)$$

تساوی آخری با توجه به اینکه ماتریس‌های پائولی همگی دارای ردیابی صفر هستند توجیه می‌شود.

## ۲.۲.۶ ماتریس‌ها در مکانیک کوانتومی

در بخش قبل، مفهوم انتزاعی فضای برداری خطی را به عنوان مجموعه‌ای از عناصر به نام بردار معرفی کردیم که تابع مجموعه‌ای از روابط مانند (۸.۶) هستند. به منظور اشاره به اینکه مفهوم بردار انتزاعی است و اصولاً با مفهوم بردار هندسی مرتبط نیست، نشان دادیم که می‌توان یک فضای برداری خطی قانونی ساخت که عناصر آن مجموعه‌ای از ماتریس‌های  $2 \times 2$  هستند. دیده‌ایم که مجموعه ماتریس‌های پائولی به اضافه ماتریس همانی پایه‌های متعامد را با توجه به ضرب داخلی هیلبرت-اشمیت تشکیل می‌دهند.

اکنون این فضا را ترک می‌کنیم، اگرچه بعداً از ماتریس‌های پائولی استفاده خواهیم کرد. در این بخش با فیزیک ارتباط برقرار کرده و نشان می‌دهیم که بردارها در فضای هیلبرت حالت‌های کوانتومی سیستم را نشان می‌دهند. در این حالت، بردارها به گونه‌ای ساخته می‌شوند که نورم آنها  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  باشد تا به درستی احتمال را نشان دهند. تابع موج عمومی ضرب داخلی  $\langle x | \Psi \rangle$  با کت  $|x\rangle$  نشان دهنده مختصات فضایی  $x$  است.

یکی از ساده‌ترین (شاید!) حالت‌های کوانتومی که می‌توانیم در فضای دو بعدی هیلبرت تصور کنیم، جایی که سیستم می‌تواند تنها دو مقدار ممکن را در نظر بگیرد. به عبارت دیگر، اگر روی چنین سیستمی اندازه گیری کنیم، یکی از دو مقدار ویژه با دو تابع ویژه مرتبط به دست می‌آوریم که برای سادگی، به صورت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  می‌نویسیم. بیایید فضای هیلبرت متفاوتی را معرفی کنیم که در آن بردارها بردارهای ستونی دو بعدی هستند. نمونه‌ای از بردارهای کت می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44.6)$$

در حالی که نمونه‌ای از بردارهای برا (*bra*) می‌تواند این باشد:

$$\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45.6)$$

یک فضای هیلبرت خاص که در آن بردارهای بالا زندگی می‌کنند، توسط تمام بردارهای ستونی 2 عنصری تشکیل می‌شود که ضرب داخلی آن به‌عنوان ضرب برداری استاندارد تعریف شده است. اگر  $|a\rangle = (a_1 \ a_2)$  و  $|b\rangle = (b_1 \ b_2)$  سپس  $\langle a|b\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$  ضرب نقطه استاندارد است<sup>۱۳</sup>

در قیاس کامل با عملگرهای دیفرانسیلی که بر روی توابع موج عمل می‌کنند و تابع موج دیگری را تولید می‌کنند، در فضای دو بعدی هیلبرت ماتریس‌های  $2 \times 2$  عملگرهایی را نشان می‌دهند که بر روی یک بردار عمل و بردار دیگری تولید می‌کنند. از این به بعد ماتریس‌ها، یعنی عملگرها را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. بنابراین ماتریس  $A$  که بر روی بردار  $|a\rangle$  برای تولید بردار  $|b\rangle$  با  $|a\rangle = A|a\rangle$  نشان داده شده است. به راحتی می‌توان ثابت کرد که دو بردار  $(44.6)$  یک مبنای متعامد را تشکیل می‌دهند که ما به صورت  $|e_j\rangle$  با  $|e_0\rangle = |0\rangle$  و  $|e_1\rangle = |1\rangle$  مشخص می‌کنیم. در این مورد، عناصر ماتریس  $A$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A_{ij} = \langle e_i | A | e_j \rangle \quad (46.6)$$

که به ما می‌گوید که عناصر ماتریس به صورت تصویر روی محور متعامد تفسیر می‌شوند. دیدیم که مکانیک کوانتومی باید با استفاده از اعداد مختلط بیان شوند. مزدوج مختلط یک عمل مهم برای اعداد مختلط است و می‌دانیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند: با یک عدد مختلط  $a = a - jb$  که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی هستند، مزدوج مختلط آن با  $a^* = a + jb$  نشان داده می‌شود. آیا عملیات معادلی برای بردارها و ماتریس‌ها وجود دارد؟ پاسخ مثبت است: معادل مزدوج مختلط یک بردار کت بردار برا است و معادل مزدوج مختلط یک ماتریس مزدوج الحاقی<sup>۱۴</sup> یا هرمیتی نامیده می‌شود. در اینجا قیاس دیگری را با عملگرهای دیفرانسیلی می‌بینیم. با توجه به بردارهای  $|\phi\rangle$  و  $|\Psi\rangle$  مزدوج هرمیتی ماتریس  $A$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\langle \phi | A | \Psi \rangle)^* = \langle \Psi | A^\dagger | \phi \rangle \quad (47.6)$$

با بیان به صورت متعامد  $|e_i\rangle$  با استفاده از  $(46.6)$  و  $(47.6)$ ، دستوری برای محاسبه مزدوج هرمیتی یک ماتریس داریم:

$$(\langle e_i | A | e_j \rangle)^* = A_{ij}^* \langle e_j | A^\dagger | e_i \rangle = A_{ji}^* \quad (48.6)$$

به این معنی که مزدوج هرمیتی یک ماتریس  $A$  با ترانسپوز ماتریس و سپس گرفتن مزدوج مختلط مولفه‌های آن محاسبه می‌شود. عملیات الحاقی دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\begin{aligned} (cA)^\dagger &= a^* A^\dagger \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \\ |\Psi\rangle^\dagger &= \langle \Psi| \end{aligned} \quad (49.6)$$

<sup>۱۳</sup> می‌توان نشان داد که محصول نقطه‌ای اصول  $(22.6)$  را برآورده می‌کند و بنابراین فضای مورد نظر ما یک فضای هیلبرت است.

<sup>۱۴</sup> Adjoint

برای هر ماتریس  $A$  می‌توان مقادیر ویژه<sup>۱۵</sup>  $\lambda_i$  و بردارهای ویژه<sup>۱۶</sup>  $|u_i\rangle$  تعریف می‌شود از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$A|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \quad (۵۰.۶)$$

محاسبه ماتریس  $A$  زمانی که بر اساس بردارهای ویژه خود بیان می‌شود، جالب است. اول، معادله (۵۰.۶) در واقع مجموعه‌ای از  $N$  معادله است که  $N$  بعد فضای برداری است. در این صورت:

$$\begin{aligned} A|u_1\rangle &= \lambda_1|u_1\rangle \\ A|u_2\rangle &= \lambda_2|u_2\rangle \\ &\vdots \\ A|u_N\rangle &= \lambda_N|u_N\rangle \end{aligned} \quad (۵۱.۶)$$

و معادله (۵۱.۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad (۵۲.۶)$$

معادله (۵۲.۶) نشان می‌دهد که یک ماتریس  $A$ ، هنگامی که بر اساس بردارهای ویژه خود بیان، مورب و عناصر روی قطر، مقادیر ویژه آن هستند. ماتریس  $D$  در همه جا صفر است مگر در مورب. ماتریس‌های  $A$  و  $D$  خصوصیات اساسی یکسانی دارند زیرا از طریق تغییر مبنا به هم مرتبط هستند و گفته می‌شود مشابه هستند. به عبارت دیگر، اگر دو ماتریس (مربع) شبیه به هم باشند، اگر عملگر خطی یکسانی را نشان دهند که در پایه‌های مختلف بیان شده است. نتیجه این است که دو ماتریس مشابه دارای ردیابی، رتبه<sup>۱۷</sup>، تعیین کننده و مقادیر ویژه یکسان هستند. نتیجه این است که اثر یک ماتریس  $A$  مجموع مقادیر ویژه آن است در حالی که تعیین کننده ضرب مقادیر ویژه آن است. بنابراین، با توجه به ماتریس مربع  $A$ ، داریم:

$$\begin{aligned} Tr\{A\} &= \sum_i \lambda_i \\ \det(A) &= \prod_i \lambda_i \end{aligned} \quad (۵۳.۶)$$

یک تعریف جایگزین، اگرچه معادل، تشابه وجود دارد: دو ماتریس  $A$  و  $B$  در  $N \times N$  مشابه هستند اگر یک ماتریس معکوس  $P$  وجود داشته باشد به طوری که:

$$B = P^{-1}AP \quad (۵۴.۶)$$

<sup>۱۵</sup>Eigenvalues

<sup>۱۶</sup>Eigenvectors

<sup>۱۷</sup>رتبه یک ماتریس بعد فضای برداری ایجاد شده توسط ستون‌های آن است. یک تعریف معادل: رتبه یک ماتریس تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی است.

ماتریس  $P$  ماتریس تغییر پایه نامیده می‌شود و باید یک دترمینان غیر صفر داشته باشد. دترمینان ماتریس مربع  $A$  که با نماد  $\det\{A\}$  نشان داده شده است، عددی است که از عناصر ماتریس محاسبه می‌شود. دترمینان غیر صفر است اگر و فقط اگر ماتریس معکوس داشته باشد، یعنی با توجه به ماتریس  $A$  با دترمینان غیر صفر، وجود دارد، و منحصر به فرد است، ماتریس  $A^{-1}$  به طوری که  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ، که در آن  $I$  ماتریس واحد (همانی) است.

معکوس یک ماتریس مربع یک محاسبه طولانی و خسته کننده است. با توجه به ماتریس  $A$ ، فرمول کلی این است:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\{A\}} A^C \quad (55.6)$$

که در آن  $A^C$  ماتریس کوفاکتورها است. هر عنصر  $A_{ij}$  ماتریس دارای یک کوفاکتور است که با ضرب  $(-1)^{i+j}$  در تعیین کننده زیرماتریس بدست آمده با حذف ردیف  $i$  و ستون  $j$  محاسبه می‌شود.

در حالت ماتریس  $2 \times 2$  نسبتاً ساده است. با توجه به ماتریس  $2 \times 2$ ،  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  معکوس آن برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\{A\}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (56.6)$$

دترمینان  $A$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det\{A\} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (57.6)$$

دترمینان ماتریس  $A$ ،  $3 \times 3$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det\{A\} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a(ek - fh) - b(dk - fg) + c(dh - eg) \quad (58.6)$$

این یکی از فرضیه‌های اساسی مکانیک کوانتومی است که به هر مشاهده‌پذیر ماتریسی مرتبط می‌کند به طوری که مقادیر ویژه آن نتایج همه اندازه‌گیری‌های ممکن است. از آنجایی که مقادیر ویژه نتایج اندازه‌گیری‌ها هستند، باید اعداد حقیقی باشند. این فرض را می‌توان به صورت ریاضی با الزام اینکه ماتریس هرمیتی است، یعنی برابر با ماتریس الحاقی<sup>۱۸</sup> آن بیان کرد. با نگاهی به معادله (۴۷.۶) ماتریس هرمیتی  $A$  ماتریسی است که برای آن:

$$A = A^\dagger \quad (59.6)$$

که بر حسب مولفه‌ها:

$$A_{ij} = A_{ji}^* \quad (60.6)$$

<sup>۱۸</sup>گاهی اوقات ماتریس‌های هرمیتی را خود الحاقی می‌نامند

بیایید ثابت کنیم که مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی حقیقی هستند. فرض کنید  $A$  یک ماتریس هرمیتی باشد که بردارهای ویژه آن با  $|u\rangle$  و مقادیر ویژه  $\lambda$  نشان داده شوند. لذا داریم:

$$\begin{aligned} A|u\rangle &= \lambda|u\rangle \\ \langle u|A|u\rangle &= \lambda\langle u|u\rangle = \lambda \\ (\langle u|A|u\rangle)^\dagger &= \lambda^* \\ \langle u|A|u\rangle &= \lambda^* \\ \lambda &= \lambda^* \end{aligned} \quad (۶۱.۶)$$

حال بیایید ثابت کنیم که بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه متمایز یک ماتریس هرمیتی یک مبنای متعامد تشکیل می‌دهند. بیایید ماتریس  $A$  را هرمیتی فرض کنیم و حالت ساده دو مقدار ویژه را مطالعه کنیم. بیایید  $|u\rangle$  بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه  $\lambda_1$  و  $|v\rangle$  بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه  $\lambda_2$  بنامیم. بنابراین دو معادله مقدار ویژه داریم:

$$\begin{aligned} A|u\rangle &= \lambda_1|u\rangle \\ A|v\rangle &= \lambda_2|v\rangle \end{aligned} \quad (۶۲.۶)$$

اگر مقادیر ویژه متمایز باشند، باید  $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$  داشته باشیم. بیایید معادله (۶۲.۶) اول را در  $\langle v|$  ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} \langle v|A|u\rangle &= \langle u|A^\dagger|v\rangle \\ &= \langle u|A|v\rangle \\ &= \lambda_1\langle v|u\rangle \end{aligned} \quad (۶۳.۶)$$

اکنون معادله (۶۲.۶) دوم را در  $\langle u|$  ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \langle u|A|v\rangle &= \lambda_2\langle u|v\rangle \\ &= \lambda_2^*\langle v|u\rangle \\ &= \lambda_2\langle v|u\rangle \end{aligned} \quad (۶۴.۶)$$

معادلات (۶۳.۶) و (۶۴.۶) به وضوح نشان می‌دهد که  $\lambda_1\langle v|u\rangle = \lambda_2\langle v|u\rangle$  که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \lambda_1\langle v|u\rangle &= \lambda_2\langle v|u\rangle \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\langle v|u\rangle &= 0 \\ \implies \langle v|u\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (۶۵.۶)$$

که در آن آخرین تساوی برقرار است زیرا  $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ . اگرچه یک ماتریس  $N \times N$  دارای  $N$  مقدار ویژه است، ممکن است اتفاق بیفتد که همه متمایز نیستند. این بدان معناست که به مقدار ویژه‌ای بیش از یک بردار ویژه مربوط می‌شود. در این مورد گفته می‌شود که مقدار ویژه **منحط**<sup>۱۹</sup> است. ما بعداً در این بخش هنگامی که در مورد روش قطری کردن بحث می‌کنیم به این موضوع باز خواهیم گشت.

<sup>۱۹</sup>Degenerate

با بازگشت به تبدیل تشابهی<sup>۲۰</sup> (۵۴.۶)، برای اطمینان از اینکه تغییر مبنا، عملگر را در همان فضای هیلبرت برمی‌گرداند، باید نیاز داشته باشیم که ضرب داخلی ثابت باشد، یعنی زمانی که تغییر پایه را انجام می‌دهیم، تغییر نمی‌کند. بنابراین یک ماتریس واحد، بزرگی همه بردارها را حفظ می‌کند. این درست است فقط و فقط :

$$A^\dagger A = AA^\dagger = I \quad (۶۶.۶)$$

یا به صورت دیگر،  $A^\dagger = A^{-1}$ . برای اثبات اینکه ماتریس‌های واحدی ضرب داخلی را حفظ می‌کنند، با توجه به اینکه، به دلیل (۴۹.۶)، با توجه به مبنای متعامد  $|e_i\rangle$  شروع می‌کنیم و داریم :

$$(A|e_i\rangle)^\dagger = \langle e_i|A^\dagger \quad (۶۷.۶)$$

که قاعده‌ای را به ما می‌دهد تا هرمیشن یک بردار را زمانی که عملگر  $A$  روی یک بردار معین عمل می‌کند به دست می‌آید. معادله (۶۷.۶) را می‌توان به صورت زیر تفسیر کرد: اگر یک عملگر  $A$  بر روی یک کت عمل می‌کند، در سمت چپ آن مانند، برای مثال،  $A|e_i\rangle$ ؛ همان اپراتور هنگام عمل بر روی برا، در سمت راست آن نوشته شده و فرض می‌شود که به سمت چپ آن عمل می‌کند، یعنی  $\langle e_i|A^\dagger$ . هرمیشن یک بردار کت که به عنوان بردار ستونی مانند معادله (۴۴.۶) تفسیر می‌شود، یک برا برداری است که به عنوان یک بردار ردیفی با مزدوج مختلط مولفه‌های آن تفسیر می‌شود. به عنوان مثال، اگر  $|u\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  در این صورت مزدوج هرمیتی آن است:

$$(|u\rangle)^\dagger = \langle u| = (a^* \ b^*) \quad (۶۸.۶)$$

با این تعریف، ضرب داخلی را می‌توان به صورت  $\langle u|u\rangle = a^*a + b^*b$  نوشت. بیایید بررسی کنیم که ضرب داخلی توسط ماتریس‌های واحد حفظ می‌شود. با توجه به ماتریس  $A$  که بر پایه متعامد نرمالیزه  $|u\rangle = A|e_i\rangle$ ، با یک  $\langle v| = \langle e_j|A^\dagger$  است، ضرب داخلی را حفظ می‌کنیم اگر  $\langle u|v\rangle = \langle e_j|e_i\rangle$  داریم.

$$\langle u|v\rangle = \langle e_j|A^\dagger A|e_i\rangle = \langle e_j|e_i\rangle \quad \text{فقط و فقط اگر} \quad A^\dagger A = I \quad (۶۹.۶)$$

ماتریس‌های واحد این ویژگی را دارند که سطرها و ستون‌های آنها مجموعه‌های متعامد نرمالیزه را تشکیل می‌دهند. بیایید یک اپراتور جدید به نام **عملگر تصویر**<sup>۲۱</sup> به صورت زیر معرفی کنیم :

$$P_i = |e_i\rangle\langle e_i| \quad (۷۰.۶)$$

<sup>۲۰</sup> Similarity Transformation

<sup>۲۱</sup> Projection Operator

که در آن  $|e_i\rangle$  پایه متعامد نرمالیزه است. عملگر  $P$  دارای ویژگی جالب  $P^2 = P$  است و هر بردار را در امتداد محور  $|e_i\rangle$  تصویر می‌کند.<sup>۲۲</sup> در واقع اگر  $|\Psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$  یک بردار متعلق به فضای باشد که بوسیله پایه  $|e_i\rangle$  گسترده شده باشد، داریم:

$$\begin{aligned} P_n |\Psi\rangle &= P_n \cdot \sum_i c_i |e_i\rangle \\ &= |e_n\rangle \langle e_n| \cdot \sum_i c_i |e_i\rangle \\ &= \sum_i c_i \langle e_n | e_i \rangle |e_n\rangle \\ &= \sum_i c_i \delta_{ni} |e_n\rangle \\ &= c_n |e_n\rangle \end{aligned} \quad (۷۱.۶)$$

که در آن از شرط متعامد نرمالیزه  $\langle e_n | e_i \rangle = \delta_{ni}$  استفاده کرده‌ایم. به‌طور شهودی انتظار داریم که اگر تمام تصاویر یک بردار را در امتداد یک مبنای متعامد نرمال جمع کنیم، همان بردار اصلی را به‌دست می‌آوریم. در واقع داریم:

$$\begin{aligned} \sum_i P_i |\Psi\rangle &= \sum_i |e_i\rangle \langle e_i| \left( \sum_i c_i |e_i\rangle \right) \\ &= \sum_{ij} c_j |e_i\rangle \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sum_i c_i |e_i\rangle \\ &= |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (۷۲.۶)$$

که از آن رابطه کامل<sup>۲۳</sup> را می‌نویسیم:

$$\sum_i |e_i\rangle \langle e_i| = I \quad (۷۳.۶)$$

عملگر تصویر به‌ما اجازه می‌دهد که ماتریس قطری  $D$  را به‌شکل ساده زیر بنویسیم:

$$D = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i| \quad (۷۴.۶)$$

پایه‌های  $|e_i\rangle$  تنها پایه‌های متعامد نیستند که در آن بتوانیم ماتریس  $D$  را بیان کنیم. فرض کنید پایه‌های متعامد  $|h_i\rangle$  دیگری داریم و فرض می‌کنیم که ماتریس واحد  $U$  پایه را از  $|e_i\rangle$  به  $|h_i\rangle$  تغییر می‌دهد. در این صورت می‌توانیم بنویسیم که  $\langle e_i | U^\dagger = \langle h_i |$ . اکنون می‌پرسیم، اگر مبنای را به‌عملگر  $D$  معادله (۷۴.۶) تغییر دهیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ برای ارزیابی تغییر مبنا از یک همانی ساده  $D = IDI$  که در آن از فرم (۷۳.۶)

<sup>۲۲</sup> عملگر  $P$  یک بردار را بر پایه تصویر می‌کند. پس از تصویر کردن، تصاویر مکرر همان بردار را برمی‌گرداند و بدین ترتیب همانی (واحد) را از نظر کیفی توضیح می‌دهد.

<sup>۲۳</sup> Completeness Relation



برای عملگر همانی  $I$  استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} D = IDI &= \sum_{ijk} |h_i\rangle \langle h_i| e_k \rangle \lambda_k \langle e_k| h_i \rangle \langle h_i| \\ &= \sum_{ijk} |h_i\rangle \langle e_i| U^\dagger |e_k\rangle \lambda_k \langle e_k| U |e_j\rangle \langle h_i| \\ &= \sum_{ij} |h_i\rangle \left( \sum_k U_{ik}^\dagger \lambda_k U_{kj} \right) \langle h_j| \\ &= \sum_{ij} |h_i\rangle B_{ij} \langle h_j| \end{aligned} \quad (۷۵.۶)$$

که در آن تعریف کردیم:

$$B = \sum_k U_{ik}^\dagger \lambda_k U_{kj} \quad (۷۶.۶)$$

معادله (۷۶.۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$B = U^\dagger D U \quad (۷۷.۶)$$

اپراتورهای  $k$  معادله (۷۷.۶) را ارضا می‌کنند نرمال نامیده می‌شود. عناصر قطر  $D$  مقادیر ویژه  $\lambda_k$  هستند که به آنها طیف  $B$  نیز گفته می‌شود. بردارهای ستون  $U$  به گونه‌ای هستند که  $|b_j\rangle = \sum_i U_{ij} |e_j\rangle$ . بردارهای ستونی  $U$  بردارهای ویژه نرمال شده  $B$  هستند، یعنی  $B|b_j\rangle = \lambda_j |b_j\rangle$ .

اگرچه ماتریس  $D$  قطری است، ماتریس  $B$  به طور کلی غیر قطری است. با این حال، معادله (۷۷.۶) نشان می‌دهد که اگر ماتریس  $U$  واحد باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} B &= U^\dagger D U \\ UB &= U U^\dagger D U \\ UBU^\dagger &= D U U^\dagger \\ D &= UBU^\dagger \end{aligned} \quad (۷۸.۶)$$

که در آن از  $UU^\dagger = I$  استفاده کرده‌ایم. معادله (۷۸.۶) نشان می‌دهد که می‌توانیم ماتریس مربع  $B$  را با یافتن یک ماتریس واحد  $U$  به شکلی که  $D = UBU^\dagger$  که در آن  $D$  قطری است، قطری کنیم.

هر عملگر نرمال  $B$  تجزیه طیفی ارائه شده در زیر را قبول می‌کند:

$$B = \sum_i \lambda_i |b_i\rangle \langle b_i| \quad (۷۹.۶)$$

که در آن  $|b_i\rangle$  یک مبنای متعامد نرمال شده (نرمالیزه) است. به طور کلی می‌توان نشان<sup>۲۴</sup> داد که بردارهای ویژه یک ماتریس هرمیتی  $A$  در فضای برداری که در آن ماتریس تعریف

<sup>۲۴</sup> برای اثبات، به عنوان مثال، بایرون و فولر [۷] را مشاهده کنید.

شده است، گسترش می‌یابد. در نتیجه، هر بردار درون فضا را می‌توان بر حسب این بردارهای ویژه به صورت زیر نوشت:

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle \quad (۸۰.۶)$$

که در آن  $c_i$  ضرایب حقیقی و  $|u_i\rangle$  بردارهای ویژه ماتریس هرمیتی  $A$  هستند. با درک اهمیت آن، اکنون فرآیند یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس را شرح می‌دهیم. خود را به ماتریس‌های هرمیتی محدود می‌کنیم، زیرا ارتباط آن‌ها با مشاهده‌پذیرهای فیزیکی است. با در نظر گرفتن یک ماتریس هرمیتی  $A$ ، معادله مقدار ویژه به صورت زیر است:

$$A|a_i\rangle = \lambda_i |a_i\rangle \quad (۸۱.۶)$$

که در آن  $|a_i\rangle$  بردارهای ویژه ماتریس  $A$  با مقادیر ویژه  $\lambda_i$  هستند. معادله (۸۱.۶) مربوط به جستجوی آن اعداد (مقادیر ویژه) است که عمل عملگر  $A$  بر روی کت‌ها  $|a_i\rangle$  یک ضرب ساده در یک عدد (متفاوت) حاصل می‌شود. قبلاً دیدیم که اگر ماتریس هرمیتی باشد، مقادیر ویژه اعداد حقیقی هستند. این واقعیت نباید ما را شگفت‌زده کند زیرا می‌خواهیم مطمئن شویم که طیف مقادیر ویژه با نتیجه همه اندازه‌گیری‌های ممکن که آشکارا اعداد حقیقی هستند مطابقت دارد. برای سادگی در اینجا در نظر می‌گیریم که برای هر مقدار ویژه فقط یک بردار ویژه مستقل وجود دارد. مورد بیش از یک بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه یکسان بعداً در نظر گرفته می‌شود. اکنون روش یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مربوط به ماتریس  $A$  را شرح می‌دهیم. با بازنویسی معادله (۸۱.۶) را به صورت زیر شروع می‌کنیم:

$$(A - \lambda I)|a\rangle = 0 \quad (۸۲.۶)$$

که در "۰" در سمت راست معادله (۸۲.۶) یک بردار است که همه صفرها را به عنوان مولفه‌های تشکیل می‌دهد. به شکل صریح‌تر، معادله (۸۲.۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} A_{11} - \lambda_1 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda_2 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N1} & \cdots & A_{NN} - \lambda_N \end{pmatrix} |a\rangle = 0 \quad (۸۳.۶)$$

معادله (۸۳.۶) معادل مجموعه‌ای از  $N$  معادلات همگن خطی است که یک راه حل غیر

ساده دارد، یعنی  $\langle a| = 0$ ، اگر دترمینان ماتریس در معادله (۸۳.۶) برابر با صفر باشد:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda_1 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda_2 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N1} & \cdots & A_{NN} - \lambda_N \end{vmatrix} = 0 \quad (84.6)$$

که وقتی محاسبه می‌شود، معادله مشخصه نامیده می‌شود که از یک چند جمله‌ای درجه  $N$ -امین  $p(\lambda)$  در مجهول  $\lambda$  برابر با صفر است، یعنی:

$$p(\lambda) = 0 \quad (85.6)$$

چواب‌های معادله (۸۵.۶) مقادیر ویژه‌ای هستند که وقتی دوباره در معادله (۸۱.۶) گذاشته شوند، بردارهای ویژه را بما میدهد. از تئوری سیستم‌های معادلات خطی، معادله (۸۵.۶) دارای  $N$  جواب متمایز مربوط با  $N$  بردار ویژه مستقل خطی است. در مورد مقادیر ویژه منحنی بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت. یک مثال ممکن است روند را روشن کند. بیایید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های پائولی را پیدا کنیم. برای  $\sigma_1$  داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (86.6)$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

که معادله مشخصه زیر را ایجاد می‌کند:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (87.6)$$

با مقادیر ویژه  $\lambda_1 = 1$  و  $\lambda_2 = -1$ . با وارد کردن  $\lambda_1 = 1$  در معادله اول (۸۶.۶)، داریم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (88.6)$$

که شرط  $u_1 = u_2$  را می‌دهد. بنابراین بردار ویژه  $|u\rangle$  مربوط به اولین مقدار ویژه  $\lambda_1 = 1$  است:

$$|u\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (89.6)$$

که در آن  $\alpha$  یک عدد حقیقی است. اگر بخواهیم این بردار ویژه را به ۱ نرمال کنیم، باید آن را به صورت  $\langle u|u\rangle = 1$  اعمال کنیم، یعنی  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  و اولین بردار ویژه نرمال شده برابر است با:

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (90.6)$$

بردار ویژه دوم  $|v\rangle$  به روشی مشابه با قرار دادن  $\lambda_2 = -1$  در اولین معادله (۸۶.۶) محاسبه می‌شود. دومین بردار ویژه نرمال شده عبارت است از:

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (91.6)$$

بیاپید در مورد مقادیر ویژه منحنی<sup>۲۵</sup> بحث کنیم، یعنی آن دسته از مقادیر ویژه که بیش از یک بردار ویژه مستقل خطی را مرتبط کرده‌اند. طبق معمول، ما خود را به ماتریس‌های هرمیتی محدود می‌کنیم، زیرا آن‌ها در مکانیک کوانتومی مهم‌ترین هستند.

با توجه به یک ماتریس هرمیتی  $A$  با  $N \times N$  که فضای برداری خطی  $N$  بعدی را در بر می‌گیرد، فرض کنیم که دو بردار ویژه  $|a_1\rangle$  و  $|a_2\rangle$  مربوط به یک مقدار ویژه  $\lambda$  هستند. این بدان معناست که ما دو رابطه مستقل داریم:

$$\begin{aligned} A|a_1\rangle &= \lambda|a_1\rangle \\ A|a_2\rangle &= \lambda|a_2\rangle \end{aligned} \quad (92.6)$$

چون  $c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$  همچنین یک بردار ویژه  $A$  است، سپس دو بردار ویژه مرتبط با  $\lambda$  یک فضای فرعی ۲ بعدی از فضای  $N$ -بعدی همه بردارهای ویژه را در بر می‌گیرند. به‌طور کلی، اگر  $M$  بردار ویژه مستقل مرتبط با یک مقدار ویژه داشته باشیم، بردارهای ویژه یک فضای فرعی  $N$  بعدی را در بر می‌گیرند، که در آن  $N < M$  است.

به‌طور کلی، بردارهای ویژه  $M$  مرتبط با مقدار ویژه منحنی، متعامد نرمالیزه نیستند. در این مورد ما همیشه می‌توانیم با استفاده از روش متعامدسازی گرام اشمیت<sup>۲۶</sup>، یک مجموعه متعامد بسازیم که با بردار ویژه منحنی شروع می‌شود. این روش بردارهای ویژه منحنی  $|a_i\rangle$  که در آن  $i = 1, 2, \dots, M$  به یک مجموعه متعامد نرمال شده  $|u_i\rangle$  که در آن  $i = 1, 2, \dots, M$  نیز هست. بیاپید با مجموعه  $|a_i\rangle$  از بردار ویژه منحنی و می‌خواهیم روشی برای تبدیل این مجموعه به مجموعه متعامد نرمالیزه پیدا کنیم  $|u_i\rangle$ ، یعنی مجموعه‌ای به‌گونه‌ای که:

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (93.6)$$

ابتدا یک مجموعه متعامد  $|n_i\rangle$  و سپس مجموعه نهایی متعامد نرمالیزه  $|u_i\rangle$  را تولید می‌کنیم. الگوریتم مجموعه متعامد به این صورت است:

$$\begin{aligned} |n_1\rangle &= |a_1\rangle \\ |n_2\rangle &= |a_2\rangle - \frac{\langle n_1 | a_2 \rangle}{\langle n_1 | n_1 \rangle} |n_1\rangle \\ |n_3\rangle &= |a_3\rangle - \frac{\langle n_1 | a_3 \rangle}{\langle n_1 | n_1 \rangle} |n_1\rangle - \frac{\langle n_2 | a_3 \rangle}{\langle n_2 | n_2 \rangle} |n_2\rangle \end{aligned} \quad (94.6)$$

<sup>۲۵</sup>Degenerate Eigenvalues

<sup>۲۶</sup>Gram-Schmidt

و غیره به‌طور کلی داریم:

$$|n_i\rangle = \left[ I - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|n_j\rangle\langle n_j|}{\langle n_j|n_j\rangle} \right] |a_i\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (95.6)$$

یک نرمال سازی استاندارد با تقسیم هر بردار  $|n\rangle$  بر نورم (هنجار)<sup>۲۷</sup> آن  $\sqrt{\langle n|n\rangle}$  پایه متعامد را به‌مبنای متعامد نرمال شده  $|O\rangle$  تبدیل می‌کند.

اکنون همه ابزارها را برای قطری کردن یک ماتریس هرمیتی  $B$ <sup>۲۸</sup> در اختیار داریم.

باید شرایطی را بیان کنیم که یک ماتریس  $A$  قابل قطری کردن باشد.

ابتدا، ماتریس باید مربع باشد، یعنی تعداد ستون و ردیف یکسان. دوم، ماتریس باید شبیه به یک ماتریس قطری باشد. معادله (۷۷.۶) تعریف نرمال را برای یک ماتریس هرمیتی ارائه می‌دهد. به‌طور کلی، یک ماتریس  $A$  شبیه به یک ماتریس قطری  $D$  است اگر ماتریس معکوس  $S$  وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$D = S^{-1}AS \quad (96.6)$$

اول، یک ماتریس  $N \times N$  قابل قطری کردن است فقط و فقط اگر بعد فضای ویژه آن، یعنی تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی<sup>۲۹</sup> برابر با  $N$  باشد.

هنگامی که تأیید کردیم که  $A$  می‌تواند قطری شود، به‌روشی برای ساخت ماتریس  $S$  و معکوس آن  $S^{-1}$  نیاز داریم. معادله (۹۶.۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (97.6)$$

بیایید معادله (۹۷.۶) را از سمت چپ در  $S$  ضرب کنیم. داریم:

$$AS = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (98.6)$$

بیایید ماتریس  $S$  را به عنوان یک ماتریس بلوکی بنویسیم، یعنی ماتریسی که در آن

<sup>۲۷</sup>Norm

<sup>۲۸</sup>در اینجا ماتریس‌های هرمیتی را عمدتاً به‌دلیل نقش غالب آنها در مکانیک کوانتومی در نظر می‌گیریم. به‌طور کلی، یک ماتریس مربع  $A$  در صورتی که شبیه به یک ماتریس قطری، قابل قطری کردن باشد، یعنی اگر امکان ساخت یک ماتریس معکوس  $P$  وجود داشته باشد، به‌طوری که  $P^{-1}AP$  یک ماتریس قطری شود.  
<sup>۲۹</sup>اگر برخی از مقادیر ویژه منحط باشند، هنوز باید تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی مربوط به همان مقدار ویژه را بشماریم.

ستون‌ها بردار هستند:

$$S = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |u_1\rangle & |u_2\rangle & \cdots & |u_N\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (|u_1\rangle |u_2\rangle \cdots |u_N\rangle) \quad (99.6)$$

که در آن کت‌ها را به صورت بردارهای ستونی تعریف کرده‌ایم:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ \vdots \\ u_1^N \end{pmatrix}, |u_2\rangle = \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_2^N \end{pmatrix}, \cdots, |u_N\rangle = \begin{pmatrix} u_N^1 \\ u_N^2 \\ \vdots \\ u_N^N \end{pmatrix} \quad (100.6)$$

بنابراین می‌توانیم معادله (۹۸.۶) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$A|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \quad (101.6)$$

که دستور ساخت ماتریس  $S$  را می‌دهد، یعنی ماتریسی که با ترتیب بردارهای ویژه ماتریس  $A$  مطابق با مقادیر ویژه آنها ساخته شده است. مستقل بودن خطی بردارهای ویژه نشان می‌دهد که ماتریس  $S$  قابل معکوس کردن است. اگر ماتریس  $A$  هرمیتی باشد، می‌توان بردارهای ویژه آن را متعامد نرمالیزه انتخاب کرد و ماتریس  $S$  یک ماتریس واحد است که معمولاً با  $U$  نشان داده می‌شود که برای آن  $U^\dagger = U^{-1}$  است.

بیایید نمونه‌ای از قطری کردن ماتریس  $2 \times 2$ ،  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  را نشان دهیم. معادله

مشخصه با قرار دادن زیر بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (102.6)$$

مه به معادله زیر منجر می‌شود:

$$-\lambda(1-\lambda) = 0 \quad (103.6)$$

که دو مقدار ویژه  $\lambda_1 = 0$  و  $\lambda_2 = 1$  را می‌دهد. بردارهای ویژه با حل معادلات مقدار ویژه به‌طور جداگانه برای دو مقدار ویژه یافت می‌شوند. برای  $\lambda_1 = 0$  داریم:

$$\begin{aligned} A|u\rangle &= \lambda_1|u\rangle \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ u_1 + u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (104.6)$$

بنابراین، اولین بردار ویژه  $|u\rangle$  برابر است با:

$$|u\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (105.6)$$

که در آن  $\alpha$  ضریب ثابت است و آنرا برابر یک قرار می‌دهیم. بخاطر داشته باشید که فقط “جهت” شکل موج مهم است.  
بازاء  $\lambda_2 = 1$  داریم:

$$\begin{aligned} A|v\rangle &= \lambda_1|v\rangle \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ v_1 + v_2 &= v_1 \end{aligned} \quad (۱۰۶.۶)$$

دومین بردار ویژه  $|v\rangle$  برابر است با:

$$|v\rangle = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۱۰۷.۶)$$

که در آن  $\beta$  یک ضریب ثابت است که می‌توانیم آن را برای مقدار ویژه دیگر برابر با ۱ قرار دهیم.  
پس از یافتن بردار ویژه، اکنون می‌توانیم ماتریس  $S$  را طبق دستور (۹۹.۶) بسازیم:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۰۸.۶)$$

معکوس  $S$  مطابق با رابطه (۵۶.۶) محاسبه و به‌دست می‌آید:

$$S^{-1} = \frac{1}{\det\{S\}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱۰۹.۶)$$

قطری کردن با ضرب ماتریس به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱۱۰.۶)$$

توجه کنید که ماتریس  $D$  دارای دو مقدار ویژه  $\lambda_1 = 0$  و  $\lambda_2 = 1$  در قطری و صفر در هر جای دیگر است.

حال فرض کنید یک ماتریس  $B$  داریم که بر روی یک بردار خاص  $|u\rangle$  برای به‌دست آوردن یک بردار دیگر  $|v\rangle$  کار می‌کند. فرض کنید ماتریس  $A$  دیگری را روی بردار  $|v\rangle$  اعمال کردیم. انجام عملیات به‌صورت  $A|v\rangle = A(B|u\rangle) = AB|u\rangle$  نوشته می‌شود که در آن آخرین همانی (واحد) به این معنی است که ابتدا ماتریس  $B$  بر روی بردار  $|u\rangle$  عمل می‌کند و سپس ماتریس  $A$  بر روی بردار حاصل عمل می‌کند. حاصل ضرب دو عملگر در حالت عادی عملگر دیگری است و آن را  $C|u\rangle = AB|u\rangle$  می‌نویسیم. به‌طور کلی، عملگر با معکوس کردن ترتیب ماتریس‌های  $D|u\rangle = BA|u\rangle$  صورت دیگر  $C$  است. تفاوت بین این دو عملگر جابجائی (کموتاتور) نامیده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A, B] = AB - BA \quad (۱۱۱.۶)$$

قبلاً کموتاتور بین دو عملگر را در معادله (۹۵.۶) و (۹۶.۶) معرفی کرده‌ایم. دیده‌ایم که اگر دو عملگر جابه‌جایی نداشته باشند، یعنی جابجایی‌کننده آنها برابر با صفر نباشد، آنگاه دو کمیت فیزیکی که آنها نشان می‌دهند را نمی‌توان با دقت بی‌نهایت اندازه‌گیری کرد، و تحت تاثیر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ هستند. همین امر در فرمول ماتریسی مکانیک کوانتومی که در اینجا بحث می‌کنیم نیز صادق است.

از طرف دیگر، اگر دو عملگر جابجا شوند، در این صورت دو کمیت فیزیکی که آنها نشان می‌دهند می‌توانند به‌طور همزمان اندازه‌گیری شوند و مشمول اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نیستند. بیاید این آخرین جمله را ابتدا ثابت کنیم: با توجه به دو ماتریس هرمیتی  $A$  و  $B$  با پایه مشترک متعامد نرمالیزه توابع ویژه، در این صورت کموتاتور  $[A, B] = 0$  است. اگر  $A$  و  $B$  مبنای متعامد نرمال مشترکی از توابع ویژه داشته باشند، داریم:

$$\begin{aligned} A|u\rangle &= \lambda|u\rangle \\ B|u\rangle &= \mu|u\rangle \end{aligned} \quad (112.6)$$

که در آن  $|u\rangle$  پایه‌های مشترک بردارهای ویژه هستند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} AB|u\rangle &= A\mu|u\rangle = \lambda\mu|u\rangle \\ BA|u\rangle &= B\lambda|u\rangle = \mu\lambda|u\rangle \\ (AB - BA)|u\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (113.6)$$

آخرین معادله در (۱۱۳.۶) برای یک بردار ویژه خاص  $|u\rangle$  معتبر است. با این حال، با توجه به قضیه طیفی (۸۰.۶)، می‌توانیم هر بردار  $|\Psi\rangle$  را به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای ویژه بیان کنیم. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم که  $[A, B]|\Psi\rangle = (AB - BA)|\Psi\rangle = 0$ ، که معمولاً بدون کت به‌صورت  $[A, B] = 0$  نوشته می‌شود.

معکوس را نیز می‌توان ثابت کرد، یعنی دو ماتریس  $A$  و  $B$  را در نظر بگیریم، اگر جابجایی آنها صفر  $[A, B] = 0$  باشد، آنگاه دو ماتریس یک مبنای مشترک از بردارهای ویژه دارند. بیاید ابتدا فرض کنیم که مقادیر ویژه منحط وجود ندارد. می‌توانیم بنویسیم:

$$AB|u\rangle = BA|u\rangle = B\lambda|u\rangle = \lambda B|u\rangle \quad (114.6)$$

بیاید اولین و آخرین جمله معادله (۱۱۴.۶) را بنویسیم:

$$AB|u\rangle = \lambda(B|u\rangle) \quad (115.6)$$

یعنی  $B|u\rangle$  خود تابع ویژه  $A$  است. اگر توابع ویژه با مقادیر ویژه منحط مطابقت نداشته باشند، هر تابع ویژه با یک مقدار ویژه مشخص مطابقت دارد و می‌توانیم بنویسیم:

$$B|u\rangle = \mu|u\rangle \quad (116.6)$$

بنابراین ثابت می‌شود که  $A$  و  $B$  دارای یک مجموعه مشترک از بردارهای ویژه  $|u\rangle$  اگر در هر یک از ماتریس‌ها انحطاط وجود داشته باشد، می‌دانیم که با استفاده از روش متعامدسازی گرام اشمیت، می‌توانیم مجموعه‌ای متعامد نرمالیزه از توابع ویژه بسازیم که توسط دو ماتریس با یک خط استدلال مشابه با مقادیر ویژه متمایز به‌اشتراک گذاشته می‌شوند.



### ۳.۲.۶ فرضیه‌ها، اصول و فیزیک جبر ماتریسی

ماشین‌های ریاضی که در بخش‌های قبلی معرفی کرده‌ایم از طریق یک سری فرضیات که برای اولین بار توسط دیراک [۱۲] و فون نویمان در سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۲ معرفی شدند، به‌دنیای فیزیکی متصل است. نسخه‌های معادل بسیاری از فرضیه‌های مکانیک کوانتومی وجود دارد و کتاب‌های مختلف فرضیه‌های متفاوتی را فهرست می‌کنند. در اینجا یک فهرست معمولی از فرضیه‌ها را ارائه می‌دهیم، اما از خواننده دعوت می‌شود تا منابع دیگری به‌عنوان مثال، مانند کتاب عالی گریفیث را بررسی کنند [۱۹].

فرضیه‌ها در کلاس‌هایی قرار می‌گیرند: شرح حالات، شرح کمیت‌های فیزیکی، شرح عمل اندازه‌گیری، تأثیر اندازه‌گیری‌ها بر وضعیت و تکامل زمانی یک سیستم کوانتومی. فرض می‌کنیم که سیستم فیزیکی غیرنسبیتی است و ایزوله (منزوی) است. اصل I به‌شرح زیر است:

• **اصل I:** حالت یک سیستم در زمان معین  $t$  با بردار حالت مختلط  $|\Psi\rangle$ ، یا معادل آن توسط یک تابع موج مختلط  $\Psi$ ، متعلق به فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  نشان داده می‌شود. بردار حالت یا تابع موج تمام اطلاعات مربوط به سیستم کوانتومی را به‌صورت احتمال در بر می‌گیرد. برای مثال، اگر تابع موج یک ذره تابعی از مختصات فضای پیوسته  $x$  و زمان  $t$  باشد، یعنی  $\Psi = \Psi(x, t)$  با توجه به بورن، مقدار:

$$|\Psi(x, t)|^2 dx \quad (۱۱۷.۶)$$

نشان دهنده احتمال یافتن ذره بین  $x$  و  $x + dx$  است. برای نمایش صحیح یک احتمال، تابع موج باید نرمال شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (۱۱۸.۶)$$

در نماد دیراک، حالات کوانتومی با یک کت  $|\Psi\rangle$  متعلق به فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  شناسایی می‌شوند. به‌طور کلی، دو بردار  $|\Psi\rangle$  و  $|\alpha\rangle$  که  $\alpha$  یک عدد مختلط است، نشان دهنده یک حالت هستند. با این حال، در مکانیک کوانتومی ترجیح داده می‌شود که با بردارهای نرمال شده (یا تابع موج) کار کنیم به‌طوری که  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ . نرمال سازی بردار هنوز به‌طور منحصر به فرد حالتی را تعیین نمی‌کند زیرا می‌توانیم  $|\alpha| = 1$  داشته باشیم. این بدان معنی است که دو بردار که با یک ضریب فاز مختلط با نورم واحد  $e^{-j\theta}|\Psi\rangle$  متفاوت هستند، یعنی  $e^{-j\theta}|\Psi\rangle$  و  $|\Psi\rangle$ ، همچنان حالت کوانتومی یکسانی را نشان می‌دهند.

**اصل برهم نهی (جمع اثرها):** ترکیب خطی از حالت‌ها یک حالت است. این اغلب به‌عنوان برهم نهی کوانتومی شناخته می‌شود و یکی از اصول اساسی<sup>۳۰</sup> مکانیک

<sup>۳۰</sup>در اینجا اصل برهم نهی را به‌عنوان یک فرض فهرست می‌کنیم که صحیح نیست. در ادبیات فیزیک بین اصطلاحات بدیهی axiom، اصل postulate و فرضیه principle سردرگمی زیادی وجود دارد. در متن این کتاب، بدیهیات و فرضیات را به‌عنوان مفروضات اساسی در نظر می‌گیریم که قابل استنتاج نیستند و مبنایی هستند که چارچوب نظری مکانیک کوانتومی بر اساس آن ساخته می‌شود. اصول گزاره‌های اساسی هستند که می‌توان آنها را استخراج کرد.

کوانتومی است. منشأ این اصل را می‌توان در خطی بودن معادله شرودینگر جستجو کرد. اگر  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$  جواب‌های معادله شرودینگر هستند، در این صورت  $c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle + \dots + c_N|\phi_N\rangle$  نیز جواب معتبری است.

• **اصل II** با توجه به یک سیستم، به هر ویژگی قابل مشاهده یک عملگر هرمیتی مرتبط است. نمونه‌ای از مشاهده‌پذیرها عبارتند از: موقعیت، تکانه، تکانه زاویه‌ای، انرژی و غیره. اگر کموتاتور بین دو مشاهده‌پذیر  $A$  و  $B$  صفر باشد،  $[A, B] = 0$ ، آنگاه می‌توان دو مشاهده‌پذیر را به‌طور همزمان با دقت بی‌نهایت اندازه‌گیری کرد و می‌گویند مشاهده‌پذیرها جابه‌جا می‌شوند. اگر دو مشاهده‌پذیر دارای یک کموتاتور غیر صفر،  $[A, B] \neq 0$  باشند، آنگاه نمی‌توان دو مشاهده‌پذیر را با دقت بی‌نهایت اندازه‌گیری کرد، اما تابع اصل عدم قطعیت هایزنبرگ هستند. به‌عنوان مثال، موقعیت  $\hat{a}$  و تکانه  $\hat{p}$  را  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = -j\hbar$  برآورده می‌کند.

• **اصل III**: با توجه به عملگر هرمیتی  $A$  که یک مشاهده‌پذیری را نشان می‌دهد، عمل اندازه‌گیری در زمان  $t_0$  منجر به یکی از مقادیر ویژه  $a_i$  از  $A$  می‌شود. در زمان‌های  $t > t_0$  تابع موج توصیف‌کننده سیستم به‌بردار ویژه  $|a_i\rangle$  فرو می‌ریزد که مربوط به مقدار ویژه اندازه‌گیری شده است. قبل از انجام اندازه‌گیری، سیستم در حالت برهم نهی بین تمام حالت‌های ممکن است و نمی‌توان نتیجه یک اندازه‌گیری را با قطعیت پیش‌بینی کرد. پس از انجام اندازه‌گیری‌ها، اکنون اطلاعاتی درباره سیستم داریم، برای مثال یک ذره خاص دارای تکانه  $p_0$  معینی است، و هر اندازه‌گیری بعدی تکانه باید همان مقدار  $p_0$  را برگرداند تا از تکرارپذیری فرآیند اندازه‌گیری اطمینان حاصل شود. اگر سیستم در حالتی باشد که نمی‌توان آن را به‌صورت برهم نهی از حالات دیگر بیان کرد، می‌گوییم که سیستم در حالت خالص است. حالت‌های خالص را تابع موج نیز می‌نامند.

• **اصل IV**: احتمال  $P$  برای بدست آوردن یک مقدار ویژه  $a_i$  پس از اندازه‌گیری در یک سیستم در حالت  $|\Psi_0\rangle$  برابر است با:

$$P = |\langle \Psi_0 | \rangle|^2 \quad (۱۱۹.۶)$$

که در آن  $|\Psi_0\rangle$  بردار حالتی است که سیستم را در زمان  $t = t_0$  توصیف می‌کند.

مهم است که بین (الف) اندازه‌گیری یک قابل مشاهده که در اصل در حالت برهم نهی قرار دارد و در نتیجه عمل اندازه‌گیری به یک حالت ویژه فرو می‌ریزد، تمایز قائل شویم. و (ب) اندازه‌گیری یک قابل مشاهده که در حالت برهم نهی است و اگر سیستم هنوز در حالت برهم نهی است، اندازه‌گیری‌ها را تکرار کنید. مورد اول (الف)

در اصل III پوشش داده شده است و قبلاً دیدیم که هر اندازه‌گیری بعدی همان مقدار ویژه  $a_i$  مربوط به بردار ویژه حاصل از فروپاشی حالت به یک حالت ویژه را به دست می‌دهد. به عبارت دیگر، اگر یک سیستم توسط یک بردار حالتی توصیف شود که بردار ویژه است، در نتیجه در مورد نتیجه اندازه‌گیری‌ها اطمینان وجود دارد. اولین باری که اندازه‌گیری انجام می‌شود، فقط می‌توانیم احتمال به‌دست آوردن یک

نتیجه معین را طبق (۱۱۹.۶) محاسبه کنیم. با این حال، هر اندازه‌گیری متوالی احتمال ۱ برای به‌دست آوردن همان نتیجه را خواهد داشت.

حالت دوم (ب) به شرایط آزمایشی کاملاً متفاوت مربوط می‌شود، برای مثال، مجموعه‌ای از  $N$  سیستم یکسان که همگی با بردار حالت یکسانی توصیف شده‌اند که بردار ویژه نیست. در این حالت فقط می‌توانیم پیش بینی آماری انجام دهیم و امید ریاضی قابل مشاهده‌ها را محاسبه کنیم. همانطور که قبلاً در معادله (۸۹.۶) نشان دادیم، امید ریاضی یک عملگر  $A$  است:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi^* \hat{A} \Psi dx \quad (۱۲۰.۶)$$

یا در نماد دیراک:

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \quad (۱۲۱.۶)$$

• اصل ۷: حالت یک سیستم مطابق با معادله شرودینگر  $-j\hbar \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial t} = H | \Psi \rangle$  تکامل می‌یابد، که در آن  $H$  عملگر همیلتونی است.

یک بیان معادل از این فرض وجود دارد: تکامل زمانی یک سیستم با یک تبدیل واحد  $U(t, t_0)$  توصیف می‌شود که حالت  $|\Psi(t)\rangle$  سیستم را در زمان  $t$  می‌دهد که حالت سیستم  $|\Psi(t_0)\rangle$  در زمان  $t_0 < t$  داده می‌شود:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (۱۲۲.۶)$$

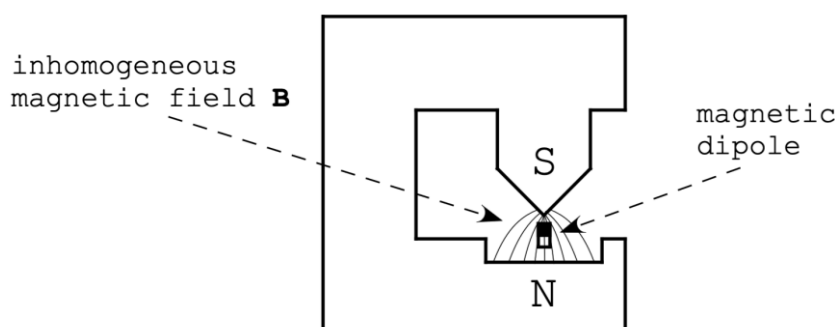
## ۴.۲.۶ آزمایش اشترن و گِرلاخ

موقعیت‌های فیزیکی زیادی وجود دارد که می‌توان آنها را با یک سیستم دو حالتی ساده توصیف کرد. حالت‌های قطبش یک فوتون، یا قطبش دایره‌ای چپگرد و راستگرد یا قطبش عمودی و افقی یک مثال شناخته شده است. توصیف دو سطحی لیزر یا چرخش نیم عدد صحیح دسته‌ای از ذرات به نام فرمیون نمونه‌های دیگری هستند. ما روی این مثال آخر با توصیف یک آزمایش کلاسیک توسط اشترن و گِرلاخ<sup>۳۱</sup> تمرکز خواهیم کرد.

آزمایش اشترن و گِرلاخ<sup>[۱۸]</sup> که در این بخش توضیح داده شد، نمونه‌ای از یک آزمایش خوب است که به دلایل اشتباه ساخته شده است. در فصل قبل دیده‌ایم که نیلز بور مدلی از اتم ارائه کرد که در آن الکترون‌ها فقط در مجموعه‌ای از مدارهای مجاز به دور هسته می‌چرخند. بور برای اینکه مدل خود را با داده‌های تجربی در دسترس خود قرار دهد، سه فرض را مطرح کرد: الکترون‌ها فقط در مدارهای مجاز حرکت می‌کنند که نمی‌توانند امواج الکترومغناطیسی را ساطع کنند. تشعشع؛ الکترون‌ها می‌توانند از طریق گسیل/جذب فوتون‌هایی با فرکانس مناسب از یک مدار به مدار دیگر بپرند. تکانه زاویه‌ای

<sup>۳۱</sup> اشترن این آزمایش را در سال ۱۹۲۱ پیشنهاد کرد. والتر گِرلاخ با موفقیت تجهیزات مورد نیاز را ساخت و اندازه‌گیری‌ها را در سال ۱۹۲۲ انجام داد.

الکترون به دلیل گردش آن به دور هسته مضرب صحیح ثابت پلانک  $\hbar$  است. بور ساده‌ترین فرض را در مورد شکل مدارهای الکترون مطرح کرد: همه آنها دایره‌ای هستند. در سال ۱۹۱۶، آرنولد سامرفلد<sup>۳۲</sup> با اجازه دادن به مدارهای بیضی شکل، نظریه بور را اصلاح کرد. این منجر به معرفی ۳ عدد کوانتومی  $n$ ،  $k$  و  $m$  شد که به ترتیب با عدد کوانتومی اصلی بور  $n$ ،  $k = 1, \dots, n$  و  $m = -k, -k+1, \dots, k$  (برای مدار دایره‌ای) و جهت فضایی مدار مطابقت داشتند. جهت‌گیری فضایی<sup>۳۳</sup> مربوط به تصویر تکانه زاویه‌ای برداری در امتداد یک محور تعیین شده (به‌عنوان مثال محور یک میدان مغناطیسی خارجی) است.



شکل ۲.۶: یک میدان مغناطیسی ناهمگن بین یک قطب نوک تیز و مسطح یک آهنربای الکتریکی ایجاد می‌شود. خطوط مغناطیسی نیرو در نزدیکی قطب نوک تیز متمرکزتر هستند، بنابراین یک گرادین فضایی از میدان مغناطیسی  $B$  ایجاد می‌شود. یک دوقطبی مغناطیسی کوچک با قطب  $N$  آن به سمت بالا نیروی خالصی را به سمت قطب نوک تیز  $S$  تأثیر می‌کند، زیرا نیروی کمی قوی‌تر را تجربه می‌کند. اگر در عوض با قطب  $S$  خود به سمت بالا معکوس شود، نیروی خالص به سمت پایین به سمت قطب  $N$  را تأثیر خواهد کرد.

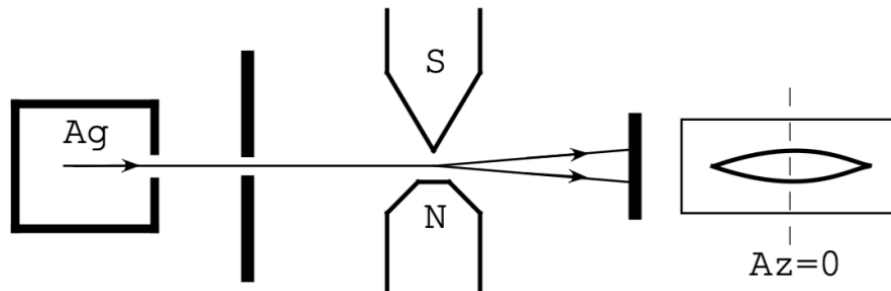
اشترن و گِرلاخ می‌خواستند وجود مدارهای فضایی کوانتیزه شده را تأیید کنند، یعنی آن مدارهای الکترونی که فقط محدوده محدودی (کوانتیزه) جهت‌گیری‌های فضایی مجاز بودند. اشترن و گِرلاخ قطب‌های یک آهنربای الکتریکی را به گونه‌ای تغییر دادند که میدان مغناطیسی ناهمگن تولید شود (شکل ۲.۶). اگر یک دوقطبی در امتداد گرادین میدان مغناطیسی مطابق شکل (۲.۶) باشد، قطب  $N$  دوقطبی مغناطیسی به دلیل گرادین، نیروی جاذبه قوی‌تری را به قطب  $S$  آهنربای الکتریکی احساس می‌کند. بنابراین، اگر پرتوی از اتم‌ها مجبور به عبور از میدان مغناطیسی ناهمگن شود، و اگر مدارها از نظر فضایی کوانتیزه شوند، آنگاه شکافتن پرتو می‌تواند همانطور که در شکل (۳.۶) نشان داده شده است رخ دهد. یک دوقطبی مغناطیسی، غوطه‌ور در میدان مغناطیسی دارای انرژی پتانسیل  $V = -\mu \cdot \vec{B}$  است. اگر میدان مغناطیسی ثابت نباشد، نیرویی در امتداد جهت

<sup>۳۲</sup>آرنولد یوهانس ویلهلم سامرفلد (۱۸۵۱ – ۱۹۵۱) فیزیکدان آلمانی بود که سهم مهمی در فیزیک کوانتومی و اتمی داشت.

<sup>۳۳</sup>Space Orientation

$N - S$  مغناطیس الکتریکی برابر با:

$$F_z = -\nabla(-\mu \cdot B) = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \quad (۱۲۳.۶)$$



شکل ۳.۶: یک پرتو اتمی از اتم‌های نقره بر روی یک میدان مغناطیسی ناهمگن ایجاد شده توسط یک آهنربای الکترومغناطیسی همسو می‌شود. تقسیم پرتو به دو جزء به دلیل گشتاور مغناطیسی ذاتی یا اسپین الکترون ظرفیت خارجی مشاهده می‌شود.

یک دوقطبی مغناطیسی در اتم‌ها ایجاد می‌شود زیرا الکترون‌های در حال گردش از قانون آمپر پیروی می‌کنند، یعنی الکترون در حال گردش به صورت جریان  $I$  در حلقه‌ای با مساحت  $A$  برابر با مساحت مدار دیده می‌شود. قانون آمپر یک گشتاور مغناطیسی  $\mu = IA$  ایجاد می‌کند. جریان تولید شده توسط یک الکترون که در مدار می‌چرخد را می‌توان با محاسبه مقدار بار  $e$ ، بار الکترون، در واحد ثانیه به دور مدار تخمین زد. الکترون با سرعت  $v$  حرکت می‌کند و در هر ثانیه بارها به دور مدار  $v/2\pi r$  می‌چرخد که  $r$  شعاع مدار<sup>۳۴</sup> است. بنابراین جریان  $I = ev/2\pi r$  است. گشتاور مغناطیسی خواهد بود:

$$\mu = IA = \pi r^2 \cdot \frac{ev}{2\pi r} = \frac{1}{2}erv = \left(\frac{e}{2m_e}\right)L \quad (۱۲۴.۶)$$

که در آن  $L = mrv$  حرکت زاویه‌ای الکترون با بار  $e$  و جرم  $m_e$  است. تئوری بور و سامرفلد مستلزم این است که تکانه زاویه‌ای  $L = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$  کوانتیزه شود و هنگامی که در امتداد جهت  $z$  میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شود،  $L_z = m\hbar$  خواهد بود. کوچکترین دوقطبی مغناطیسی به نام **مگنتون بور**  $\mu_B$  است که با وارد کردن  $L = \hbar$  در معادله (۱۲۴.۶) به دست می‌آید:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (۱۲۵.۶)$$

اصلاحات سامرفلد در نظریه بور به خوبی دیده شد زیرا برای چند اثر غیرعادی مانند اثر زیمن و اثرات استارک<sup>۳۵</sup> جوابی ارائه کرد. تئوری جدید پیش‌بینی کرد که تعداد خطوط

<sup>۳۴</sup>توجه داشته باشید که این شکل استدلال کاملاً کلاسیک است زیرا اصل عدم قطعیت هایزنبرگ اجازه نمی‌دهد که شعاع مدار الکترون و سرعت آن به‌طور همزمان شناخته شود.  
<sup>۳۵</sup>اثر زیمن Zeeman effect تقسیم یک خطوط طیفی به دو یا چند خط در حضور یک میدان مغناطیسی ساکن خارجی است. اثر استارک Stark effect شکافتن خطوط طیفی مشابه اثر زیمن است اما به دلیل میدان الکتریکی خارجی به جای میدان مغناطیسی.

قابل مشاهده پس از شکافتن به دلیل میدان مغناطیسی برابر با  $2m+1$  است که در آن  $m$ ، که در بالا تعریف شد، مقدار صحیح برای تکانه زاویه‌ای مداری است. این فرمول نشان می‌دهد که خطوط طیفی همیشه به تعداد فرد خطوط تقسیم می‌شوند. اثر غیرعادی زیمن در عوض تعداد خطوط فرد و زوج را ایجاد کرد. این اولین اشاره‌ای بود که تکانه زاویه‌ای می‌تواند مقادیر نیم عددی صحیح را در نظر بگیرد.

اشترن و گرلاخ این آزمایش را برای آزمایش پیش‌بینی سامرفلد در مورد کوانتیزه شدن تکانه زاویه‌ای تنظیم کردند. آزمایش به طور خلاصه در شکل (۳.۶) نشان داده شده است: اجاق سمت چپ، فلز نقره را تا زمانی که ذوب و تبخیر شود، گرم می‌کند. اتم‌ها از نظر حرارتی مقداری انرژی می‌گیرند و از طریق یک روزنه کوچک اجاق را ترک می‌کنند و سپس توسط یک کولیماتور بیشتر همسو می‌شوند. پرتو نازک اتم‌های نقره در خلاء زیاد حرکت و سپس تحت میدان مغناطیسی ناهمگن قرار می‌گیرد که در آن نیروی (۱۲۳.۶) پرتو را بر طبق جهت‌گیری گشتاور مغناطیسی هر اتم می‌شکافد. سپس پرتوهای حاصل روی یک امولسیون عکاسی رسوب می‌کنند که در آن رسوب اتم‌های نقره مشاهده می‌شود.

اشترن و گرلاخ از اتم‌های نقره استفاده کردند زیرا می‌توان آن‌ها را با استفاده از امولسیون عکاسی به آسانی تشخیص داد و همچنین به این دلیل که یک الکترون ظرفیت واحد در بیرونی‌ترین مدار دارند. در این مدار، الکترون در پتانسیل کولن حرکت می‌کند که توسط ۴۷ پروتون هسته محافظت شده توسط ۴۶ الکترون داخلی ایجاد می‌شود. آنها معتقد بودند که تمام الکترون‌های مدارهای داخلی دارای گشتاور مغناطیسی کل برابر با صفر هستند.

بر اساس دانش در زمان آزمایش، اگر برهمکنش بین دوقطبی‌های مغناطیسی اتمی و میدان مغناطیسی خارجی توسط فیزیک کلاسیک کنترل می‌شد، در این صورت آنها یک لکه فازی را مشاهده می‌کردند که مطابق با تمام جهت‌گیری‌های ممکن دوقطبی‌ها است، اما شکافی نداشت. به طور کلاسیک، دوقطبی‌ها علاوه بر نیروی ناشی از میدان مغناطیسی ناهمگن خارجی، در معرض چرخشگری (تقدیمی) لارمور<sup>۳۶</sup> قرار می‌گیرند. از آنجایی که منشأ حرارتی است، انتظار داریم که تمام جهت‌گیری‌های ممکن در پرتو نقره وجود داشته باشد.

از سوی دیگر، اگر بور و سامرفلد درست می‌گفتند، آنگاه آن‌ها شاهد تقسیم پرتو به سه لکه مربوط به حالت‌های  $2m+1$  طرح‌ریزی تکانه زاویه‌ای در امتداد محور  $z$  بودند. برای تکانه زاویه‌ای برابر با صفر ( $L=0$ )، آنها یک نقطه ( $m=0$ ) را مشاهده می‌کنند در حالی که برای تکانه زاویه‌ای برابر با ۱ ( $m=-1, 0, +1$ ) سه نقطه را مشاهده می‌کنند. در واقع، به جای لکه‌ها، خطوطی را مشاهده می‌کردند که مربوط به تغییرات پیوسته گسترش زاویه‌ای (سمت) ازیموتال است.

سمت راست شکل (۳.۶) نشان می‌دهد که اشترن و گرلاخ مشاهده کردند: به جای یک یا سه نقطه در امتداد خط  $Az=0$ ، آنها یک تقسیم به دو قسمت مربوط به یک مقدار نصف عدد صحیح برای  $m$  را مشاهده کردند. آنها همچنین مقداری برای گشتاور مغناطیسی برابر با  $\pm\hbar/2$  دادند.

<sup>۳۶</sup>Larmor precession

توضیح مناسب در سال ۱۹۲۵ توسط ساموئل گودسمیت<sup>۳۷</sup> و جورج اوهلنباک<sup>۳۸</sup> [۴۲] ارائه شد که فرض کردند مدار بیرونی اتم نقره دارای  $L = 0$  است و الکترون دارای یک گشتاور مغناطیسی ذاتی است که بعدها اسپین نامیده شد. هنگام اندازه‌گیری، اتم‌ها همیشه به دو پرتو تقسیم می‌شوند: یکی مربوط به یک گشتاور مغناطیسی ذاتی برابر با  $\hbar/2$  است که پرتو را در امتداد گرادیان میدان مغناطیسی ساکن منحرف می‌کند و دیگری مربوط به یک گشتاور مغناطیسی ذاتی برابر با  $-\hbar/2$  است که پرتو را در جهت مخالف میدان مغناطیسی منحرف می‌کند. بنابراین، اشترن و گراخ آزمایش را برای جستجوی اثر اشتباه انجام دادند و در عوض اسپین الکترون را کشف کردند. توجه داشته باشید که آنها در زمان طراحی و ساخت آزمایش خود از چرخش آگاه نبودند.

تأیید قانع‌کننده بعداً [۳۴] در سال ۱۹۲۷ هنگامی که اتم‌های هیدروژن استفاده شدند که تضمین می‌کرد اتم‌ها به‌طور مؤثر در حالت پایه  $L = 0$  قرار دارند، آمد. به‌طور خلاصه، آزمایش اشترن و گراخ اولین شواهد تجربی مستقیمی را ارائه کرد که تکانه زاویه‌ای کوانتیزه شده است و نشان داد که الکترون دارای یک گشتاور مغناطیسی ذاتی است که همیشه در جهت گرادیان یک میدان مغناطیسی ساکن همسو می‌شود. این به وضوح برخلاف تفسیر کلاسیک اسپین است: اتم‌های نقره به‌صورت حرارتی تولید می‌شوند و منطقی است که فرض کنیم همه اسپین‌ها به‌صورت تصادفی جهت‌گیری می‌کنند. در عوض، به‌نظر می‌رسد که هر بار که اندازه‌گیری می‌شود، بدون توجه به جهتی که میدان مغناطیسی دارد، اسپین «بالا» یا «پایین» است.

## ۵.۲.۶ تکانه زاویه‌ای

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه مکانیک کوانتومی می‌تواند آزمایش اشترن و گراخ را به‌درستی توصیف کند و معرفی سه عدد کوانتومی  $n$ ،  $k$  و  $m$  را که به ترتیب با عدد کوانتومی اصلی  $n$  بور، شکل مدار  $k = 0, 1, \dots, n$  و جهت فضایی  $-k, -k+1, \dots, k$  مطابقت دارند، توجیه می‌کند.

بیایید با بررسی مختصر تکانه زاویه‌ای کلاسیک با بحث در مورد حرکت یک ذره که با بردار موقعیت  $r$  در مختصات دکارتی  $r = (x, y, z)$  و تکانه مزدوج  $p = (p_x, p_y, p_z)$  توصیف شده است شروع کنیم. اگر ذره حول مبدا  $r_0 = (0, 0, 0)$  بچرخد، به‌طور کلاسیک یک تکانه زاویه‌ای مداری با رابطه برداری زیر داده می‌شود:

$$J = r \times p \quad (۱۲۶.۶)$$

که بردار  $J = (J_x, J_y, J_z)$  تکانه زاویه‌ای را تعریف می‌کند. بنابراین سه مولفه دکارتی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} J_x &= yp_z - zp_y \\ J_y &= zp_x - xp_z \\ J_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \quad (۱۲۷.۶)$$

<sup>۳۷</sup>Samuel Goudsmit

<sup>۳۸</sup>George Uhlenbeck

انتقال به مکانیک کوانتومی با استفاده از معادلات (۱۲۶.۶) و (۱۲۷.۶) منطقی است. جایگزینی عملگرهای مکانیکی کوانتومی برای موقعیت و تکانه  $J_x, J_y, J_z$  و عملگرهای هرمیتی هستند و مقادیر ویژه آنها مقادیر قابل اندازه‌گیری تکانه زاویه‌ای در امتداد سه جهت  $x, y$  و  $z$  هستند.

عملگر مکانیک کوانتومی متناظر تکانه زاویه‌ای کلاسیک عبارت است از:

$$\hat{J} = j\hbar(r \times \nabla) \quad (128.6)$$

در مختصات دکارتی:

$$\begin{aligned} J_x &= j\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ J_y &= j\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ J_z &= j\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (129.6)$$

اجازه دهید روابط کموتاسیون عملگرهای  $J_i$  را مطالعه کنیم، که در آن  $i = x, y, z$  است. برای  $x$  و  $y$  داریم:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_x, \hat{J}_y] &= [(yp_z - zp_y), (zp_x - xp_z)] \\ &= (yp_z - zp_y)(zp_x - xp_z) - (zp_x - xp_z)(yp_z - zp_y) \\ &= yp_z(zp_x) - xp_z(zp_y) \\ &= j\hbar \left[ y \frac{\partial}{\partial z}(zp_x) - x \frac{\partial}{\partial z}(zp_y) \right] \\ &= -j\hbar(xp_y - yp_x) \\ &= -j\hbar \hat{J}_z \end{aligned} \quad (130.6)$$

سایر کموتاتورها با محاسبه مشابه به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_x, \hat{J}_y] &= -j\hbar \hat{J}_z \\ [\hat{J}_y, \hat{J}_z] &= -j\hbar \hat{J}_x \\ [\hat{J}_z, \hat{J}_x] &= -j\hbar \hat{J}_y \end{aligned} \quad (131.6)$$

که اگر به جای  $(x, y, z)$  از  $(1, 2, 3)$  استفاده کنیم، می‌توان آن را به صورت فشرده زیر نوشت:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = -j\hbar \epsilon_{ijk} \hat{J}_k, i = 1, 2, 3 \quad (132.6)$$

که در آن  $\epsilon_{ijk}$  نماد لوی-سیویتا Levi-Civita است که اغلب به صورت تانسور کاملاً ضد متقارن نامیده می‌شود در معادله (۴۲.۶) تعریف شده و ما قرارداد انیشتین را برای جمع کردن شاخص‌های مکرر (در این مورد  $k$ ) پذیرفتیم. تانسور لوی-سیویتا نیز در تعریف ضرب برداری استفاده می‌شود. به عنوان مثال، اگر  $L = r \times p$ ، می‌توانیم برای مولفه‌ها بنویسیم:

$$J_i = r_j P_k \epsilon_{ijk} \quad (133.6)$$



که در آن شاخص‌های مکرر طبق قرارداد انیشتین جمع می‌شوند. با استفاده از معادله (۱۳۳.۶)، می‌توانیم سه معادله را در (۱۳۱.۶) به صورت زیر بنویسیم:

$$J \times J = -j\hbar J \quad (۱۳۴.۶)$$

روابط کموتاسیون (۱۳۱.۶) بر اساس نظریه کوانتومی تکانه زاویه‌ای است. زمانی که ماتریس‌های پاولی را در معادله (۱۸.۶) معرفی کردیم، قبلاً با سه عملگر با روابط کموتاسیون مشابه مواجه شدیم و اشاره می‌کند که آنها به تکانه زاویه‌ای (ذاتی) الکترون متصل هستند.

کت  $|J\rangle$  تعریف تکانه زاویه‌ای با استفاده از معادله (۱۲۹.۶) نوشته می‌شود:

$$|J\rangle = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \quad (۱۳۵.۶)$$

شکل ماتریس صریح برای عملگرهای تکانه زاویه‌ای (۱۲۹.۶) می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \hbar & 0 \\ \hbar & 0 & \hbar \\ 0 & \hbar & 0 \end{pmatrix} \\ J_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & j\hbar & 0 \\ \hbar & 0 & j\hbar \\ 0 & \hbar & 0 \end{pmatrix} \\ J_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۱۳۶.۶)$$

که رابطه کموتاسیون (۱۳۱.۶) را برآورده می‌کند. کت  $|J\rangle$  تعریف شده در (۱۳۵.۶) دارای سه ماتریس تعریف شده در (۱۳۶.۶) است و بنابراین در فضای نسبتاً پیچیده هیلبرت تعریف شده است. اگر بخواهیم با یک عملگر تکانه زاویه‌ای کار کنیم که خود یک ماتریس  $3 \times 3$  است و در همان فضای هیلبرت به صورت عملگرهای  $J$  در (۱۳۶.۶) تعریف شده است، می‌توانیم استفاده کنیم:

$$J^2 = \langle J|J\rangle = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱۳۷.۶)$$

که بعد از ضرب‌های ماتریسی زیاد می‌توان صحت آن را نشان داد. می‌توان نشان داد که  $[J^2, J_z] = 0$  در واقع:

$$\begin{aligned} [J^2, J_z] &= [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_z] \\ &= [J_x^2, J_z] + [J_y^2, J_z] + [J_z^2, J_z] \\ &= [J_x^2, J_z] + [J_y^2, J_z] \end{aligned} \quad (۱۳۸.۶)$$

که در آن از یکی از ویژگی‌های کموتاتور  $[A, A] = 0$  استفاده کردیم (به ۹۷.۵ مراجعه کنید). با استفاده از یکی دیگر از ویژگی‌های تبدیل کننده  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$  اجازه دهید دو عبارت را در (۱۳۸.۶) محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} [J_x^2, J_z] &= [J_x \cdot J_x, J_z] \\ &= J_x [J_x, J_z] + [J_x, J_z] J_x \\ &= j\hbar (J_x J_y + J_y J_x) \end{aligned} \quad (139.6)$$

$$\begin{aligned} [J_y^2, J_z] &= J_y [J_y, J_z] + [J_y, J_z] J_y \\ &= j\hbar (J_y J_x + J_x J_y) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود که:

$$[J^2, J_z] = [J_x^2, J_z] + [J_y^2, J_z] = 0 \quad (140.6)$$

به‌طور کلی، می‌توان نشان داد که  $J^2$  نیز با  $J_x$  و  $J_y$  جابجائی می‌کند، یعنی  $[J^2, J_{x,y,z}] = 0$ . از آنجایی که  $J^2$  با  $J_z$  جابجائی می‌کند، آنها یک مجموعه مشترک از پایه ویژه دارند و بنابراین می‌توان به‌طور همزمان با هر دقتی اندازه‌گیری کرد.

به‌طور کلی،  $J^2$  و  $J_z$  زمانی که در پایه ویژه مشترک بیان شوند، مقادیر ویژه متفاوتی تولید می‌کنند. این بدان معنی است که پایه ویژه مشترک باید با دو پارامتر بدون بعد  $j$  و  $m$  مشخص شود و می‌توانیم پایه ویژه با کت‌ها  $|j, m\rangle$  را با نورم واحد فرض شوند، فهرست کنیم یعنی  $\langle j, m | j, m \rangle = 1$ . پارامتر  $m$  با معادله مقدار ویژه زیر تعریف می‌شود:

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \quad (141.6)$$

که در آن  $m$  یک عدد حقیقی بدون بعد است زیرا  $J_z$  هرمیتی است و  $\hbar$  برای متعادل کردن ابعاد فیزیکی معادله (۱۴۱.۶) مورد نیاز است. کلی‌ترین معادله مقدار ویژه برای عملگر  $J^2$  برابر است با:

$$J^2 |j, m\rangle = f(j, m)\hbar^2 |j, m\rangle \quad (142.6)$$

که در آن  $f(j, m)$  یک تابع واقعی از دو پارامتر  $(j, m)$  است و  $\hbar^2$  برای متعادل کردن ابعاد فیزیکی معادله (۱۴۲.۶) مورد نیاز است.

از تعریف  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  داریم که  $J^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2$ . از آنجایی که هر دو عملگر  $J^2$  و  $J_z$  هرمیتی هستند، پس اختلاف امید ریاضی آنها  $\geq 0$  است. در واقع، با توجه به عملگر هرمیتی  $A = A^\dagger$  داریم که:

$$\langle \Psi | A^2 | \Psi \rangle = \langle \Psi | A A^\dagger | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle \geq 0 \quad (143.6)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \langle j, m | (J_x^2 + J_y^2) | j, m \rangle &= \langle j, m | (J^2 - J_z^2) | j, m \rangle \\ &= \langle j, m | (f(j, m)\hbar^2 - m^2\hbar^2) | j, m \rangle \\ &= (f(j, m)\hbar^2 - m^2\hbar^2) \langle j, m | j, m \rangle \\ &= f(j, m)\hbar^2 - m^2\hbar^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (144.6)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$m^2 \leq f(j, m) \quad (۱۴۵.۶)$$

بیایید عملگر  $J^2 - J_z = J_x^2 + J_y^2$  را در نظر بگیریم. در قیاس با استدلالی که باعث شد عملگر افزایش و کاهش را در مطالعه نوسانگر هارمونیک کوانتومی معرفی کنیم (معادله ۱۸۳.۵)، بیایید دو عملگر ایجاد کنیم که مجموع  $J_x^2 + J_y^2$  را فاکتورگیری کنند:

$$J_{\pm} = J_x \mp jJ_y \quad (۱۴۶.۶)$$

همانطور که در مورد نوسان ساز هارمونیک کوانتومی بود، آنها را عملگرهای نردبانی و به‌طور خاص عملگر بالا برنده و عملگر  $J_-$  را پایین آورنده می‌نامند. آنها از روابط کموتاسیون زیر پیروی می‌کنند:

$$\begin{aligned} [J^2, J_{\pm}] &= 0 \\ [J_z, J_{\pm}] &= \pm \hbar J_{\pm} \end{aligned} \quad (۱۴۷.۶)$$

در حقیقت، داریم:

$$\begin{aligned} J^2 J_{\pm} |j, m\rangle &= J^2 (J_x \mp jJ_y) |j, m\rangle \\ &= J^2 J_x |j, m\rangle \mp j J^2 J_y |j, m\rangle \\ &= J_x J^2 |j, m\rangle \pm J_y J^2 |j, m\rangle \\ &= \hbar^2 f(j, m) J_{\pm} |j, m\rangle \end{aligned} \quad (۱۴۸.۶)$$

که در آن آخرین برابری برقرار است زیرا قبلاً نشان دادیم که  $J^2$  با  $J_x$  و  $J_y$  جابجا می‌شوند. توجه داشته باشید که عملگرهای  $J_{\pm}$  هرمیتی نیستند و بنابراین قابل مشاهده را نشان نمی‌دهند. در عوض، آنها مزدوج‌های، یعنی  $J_+ = J_-^\dagger$  و  $J_- = J_+^\dagger$ ، هرمیتی هستند. معادله (۱۴۸.۶) به ما می‌گوید که نه تنها  $J_{\pm} |j, m\rangle$  یک حالت ویژه از  $J^2$  است، بلکه مقدار ویژه  $J^2$  تحت تأثیر عملگرهای افزایش یا کاهش قرار نمی‌گیرد. نتیجه این است که عملگرهای نردبانی بزرگی تکانه زاویه‌ای را تغییر نمی‌دهند. همین را نمی‌توان برای اپراتور  $J_z$  گفت. در واقع داریم:

$$\begin{aligned} J_z J_+ |j, m\rangle &= J_+ J_z |j, m\rangle + \hbar J_+ |j, m\rangle \\ &= (m+1)\hbar |j, m\rangle \end{aligned} \quad (۱۴۹.۶)$$

که در آن از معادله (۱۴۱.۶) مقدار ویژه استفاده کردیم و روابط کموتاسیون (۱۴۷.۶) محاسبه مشابه نشان می‌دهد که:

$$J_z J_- |j, m\rangle = (m-1)\hbar |j, m\rangle \quad (۱۵۰.۶)$$

به‌طور کامل نام اپراتورهای بالا و پایین را توجیه می‌کند. تأثیر  $J_{\pm}$  عمل بر  $|j, m\rangle$  عبارت است از "بالا بردن" ( $J_+$ ) یا "کمتر کردن" ( $J_-$ ) مقدار ویژه حالت ویژه  $|j, m\rangle$  وقتی عملگر  $J_z$  اعمال می‌شود. به عبارت دیگر  $J_{\pm} |j, m\rangle$  بردار ویژه  $J_z$  با مقدار ویژه  $(m \pm 1)\hbar$  است.

می‌توانیم یک قدم فراتر برداریم و بیان کنیم که به دلیل معادلات (۱۴۹.۶) و (۱۵۰.۶)

بنویسیم:

$$J_z J_{\pm} |j, m\rangle = N_{\pm} |j, m \pm 1\rangle \quad (151.6)$$

که در آن  $N_{\pm}$  یک ثابت نرمالیزاسیون است که با محاسبه امید ریاضی  $J_- J_+$  محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle j, m | J_+ J_- |j, m\rangle &= \langle j, m | (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m\rangle \\ &= \hbar^2 (f - m^2 - m) \langle j, m |j, m\rangle \end{aligned} \quad (152.6)$$

که در آن از معادله (۱۵۵.۶) زیر استفاده کردیم. با یک محاسبه مشابه می‌توانیم بنویسیم:

$$\langle j, m | J_+ J_- |j, m\rangle = \hbar^2 (f - m^2 - m) \langle j, m |j, m\rangle \quad (153.6)$$

با تساوی قرار دادن معادلات (۱۵۲.۶) و (۱۵۳.۶) به نورم معادله (۱۵۱.۶) ضرایب نرمال سازی را بدست می‌آوریم:

$$N_{\pm} = \hbar \sqrt{f - m^2 \pm m} \quad (154.6)$$

بیاید به معادله (۱۴۵.۶) برگردیم. این معادله به ما می‌گوید که با توجه به مقدار  $f(j, m)$ ، به طور خلاصه  $f$  از این پس مقدار  $m$  محدود می‌شود. این به این معنی است که یک حالت وجود دارد  $|j, m_{max}\rangle$  طوری که  $J_+ |j, m_{max}\rangle = 0$ . اگر عملگر  $J_-$  را به حالت تهی اعمال کنیم  $J_+ |j, m_{max}\rangle$  ما هنوز حالت تهی<sup>۳۹</sup> را داریم. بیاید شکل عملگر  $J_- J_+$  را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} J_- J_+ &= (J_x + j J_y)(J_x - j J_y) \\ &= J_x^2 + J_y^2 - j J_x J_y + j J_y J_x \\ &= J_x^2 + J_y^2 - j [J_x, J_y] \\ &= J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \end{aligned} \quad (155.6)$$

بیاید عملگر (۱۵۵.۶) را در حالت ویژه  $|j, m_{max}\rangle$  اعمال کنیم:

$$\begin{aligned} J_- J_+ |j, m_{max}\rangle &= (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |j, m_{max}\rangle \\ &= (f \hbar^2 - m_{max}^2 \hbar^2 - \hbar^2 m_{max}) |j, m_{max}\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (156.6)$$

که به این معنی است که:

$$f - m_{max}^2 - m_{max} = 0 \quad (157.6)$$

اکنون همان خط استدلال را برای عملگر کاهنده  $J_-$  تکرار می‌کنیم. باید مقدار  $m_{min}$  وجود داشته باشد که برای آن اعمال عملگر پایین آورنده حالت صفر را ایجاد کند. مشابه

<sup>۳۹</sup>Null state.

آنچه قبلاً برای عملگر افزایش انجام دادیم، اجازه دهید ابتدا عملگر  $J_+J_-$  را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} J_+J_- &= (J_x - jJ_y)(J_x + jJ_y) \\ &= J_x^2 + J_y^2 + j[J_x, J_y] \\ &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \end{aligned} \quad (۱۵۸.۶)$$

و بیاید آن را در حالت ویژه اعمال کنیم  $|j, m_{\max}\rangle$ . پس از کمی عملیات جبری به دست می‌آوریم:

$$f - m_{\min}^2 + m_{\min} = 0 \quad (۱۵۹.۶)$$

با تساوی قرار دادن معادلات (۱۵۷.۶) و (۱۵۹.۶) داریم:

$$m_{\max}^2 + m_{\max} - m_{\min}^2 + m_{\min} = 0 \quad (۱۶۰.۶)$$

معادله (۱۶۰.۶) یک معادله جبری مرتبه دوم ساده است که می‌توان آن را با توجه به  $m_{\max}$  حل کرد تا دو جواب بدست آورد:  $m_{\max} = -m_{\min}$  و  $m_{\max} = m_{\min} - 1$ . راه حل دوم فیزیکی نیست زیرا قبلاً نشان داده‌ایم که  $m_{\min}$  حداقل مقدار است و  $m_{\max}$  نمی‌تواند کمتر از  $m_{\min}$  باشد.

اولین راه حل  $m_{\max} = -m_{\min}$  به ما می‌گوید که طیف مقادیر ویژه  $m$  به گونه‌ای است که برای رفتن از مقدار حداقل  $m_{\min}$  به مقدار حداکثر  $m_{\max}$  باید عملگر افزایش  $n$  را اعمال کنیم و هر بار مقدار ویژه را  $\hbar$  افزایش دهیم. توجه داشته باشید که  $n$  یک شاخص عدد صحیح است. داریم:

$$2m_{\max} = n \quad (۱۶۱.۶)$$

یا

$$m_{\max} = \frac{n}{2} \quad (۱۶۲.۶)$$

در نهایت می‌توانیم تابع  $f(j, m)$  را با قرار دادن (۱۶۲.۶) در (۱۵۷.۶) بدست آوریم:

$$f = \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \quad (۱۶۳.۶)$$

اگر اکنون با جایگزینی  $j = \frac{n}{2}$  را انجام دهیم که در آن  $n = 0, 1, \dots$  یک عدد صحیح است، دو معادله مقدار ویژه (۱۴۱.۶) و (۱۴۲.۶) می‌شوند:

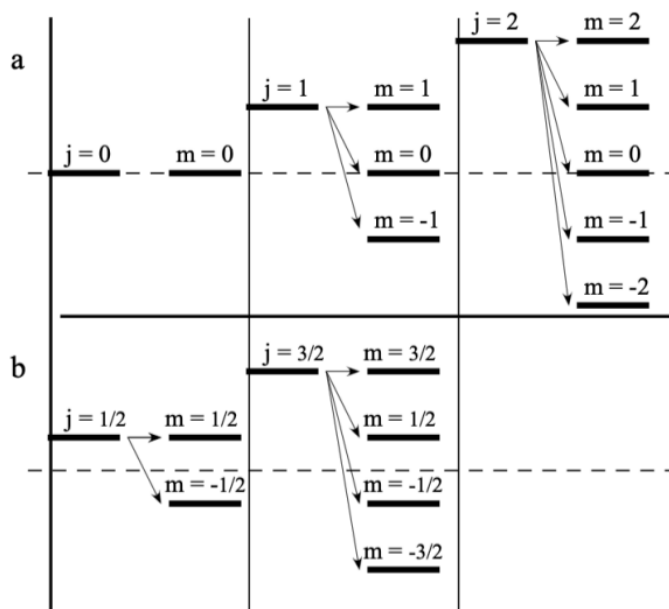
$$\begin{aligned} J^2|j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle \\ J_z|j, m\rangle &= m\hbar|j, m\rangle \end{aligned} \quad (۱۶۴.۶)$$

و معادله (۱۵۱.۶) می‌شود:

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle \quad (۱۶۵.۶)$$

به طور خلاصه، به دلیل شاخص (اندیس) عدد صحیح  $n = 0, 1, \dots$ ؛ شاخص  $j$  به طور متناوب مقادیر صحیح و نیمه صحیح  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  را در نظر می‌گیرد. شاخص  $m$  مقدار  $2j + 1$  را در بازه  $(-j, j)$  با توجه به  $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$  محدود می‌شود، در نظر می‌گیرد. به طور خلاصه، دیدیم که یک نظریه کوانتومی تکانه زاویه‌ای مستلزم معرفی دو عدد کوانتومی  $j$  و  $m$  است. در این صورت این نظریه پیش‌بینی می‌کند که تکانه زاویه‌ای کوانتیزه می‌شود و مقادیر ویژه  $J^2$ ، مربوط به مقدار مربع تکانه زاویه‌ای، و  $J_z$ ، مربوط به مولفه  $z$  از  $J$ ، نیز کوانتیزه می‌شوند. اگرچه مقادیر ویژه تکانه زاویه‌ای  $J^2$  کوانتیزه می‌شوند، اما محدود نیستند در حالی که مقادیر ویژه جزء  $z$  آن  $J_z$  بین  $-j$  و  $j$  محدود شده‌اند.

اگر بخواهیم تصویری کلاسیک از تکانه زاویه‌ای بسازیم، می‌توانیم مقادیر ویژه عدد کوانتومی  $j$  را با تکانه زاویه‌ای مداری که معمولاً با  $L$  نشان داده می‌شود مرتبط کنیم. همانطور که در فصل چهارم بحث کردیم، برای توضیح طیف انتشار اتم‌های هیدروژن، بور فرض کرد که تکانه زاویه‌ای بر اساس معادله (۳.۴) در واحدهای  $\hbar$  عدد صحیح کوانتیزه می‌شود. اگر ساده لوحانه فرض کنیم که الکترون یک بار منفی است که به دور یک پروتون با بار مثبت می‌چرخد، حرکت مداری یک دوقطبی مغناطیسی  $\mu$  را ایجاد می‌کند که با معادله (۱۶۴.۶) بدست می‌آید. کوچکترین دوقطبی مغناطیسی تولید شده توسط یک الکترون، مگنتون بور است که با فرض اینکه کوچکترین تکانه زاویه‌ای برابر با  $\hbar$  است، به دست می‌آید.



شکل ۴.۶: تقسیم مقادیر صحیح تکانه زاویه‌ای  $J$  برای (الف) سه حالت  $j = 0, 1, 2$  و ب) دو حالت نیمه صحیح  $j = \frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{2}$ .

همانطور که در بخش 6.2.4 دیدیم، اشترن و گرایخ آزمایشی را با هدف مشاهده تقسیم

یک پرتو اتمی به سه باند با فرض  $j = 1$  انجام دادند. به منظور توضیح این مورد، فرض شد که الکترون دارای یک تکانه زاویه‌ای کل برابر با:

$$J = L + S \quad (۱۶۶.۶)$$

حاصل از مجموع تکانه زاویه‌ای مداری  $L$ ، به دلیل حرکت الکترون، و یک گشتاور زاویه‌ای اسپین ذاتی  $S$  است. در قیاس کامل با **تکانه زاویه‌ای کل**  $J$ ، هر دو  $L$  و  $S$  عملگرهای هرمیتی هستند که از روابط کموتاسیون مشابه معادله (۱۳۱.۶) و (۱۳۲.۶) تبعیت می‌کنند:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= -j\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \\ [\hat{S}_i, \hat{S}_j] &= -j\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \end{aligned} \quad (۱۶۷.۶)$$

که در آن  $i = 1, 2, 3$  و قرارداد انیشتین به این منظور پذیرفته شده است که جمع بندی بر روی شاخص‌های مکرر به طور صریح نوشته نشده باشد. در ادامه قیاس، اگر عملگر  $L^2$  و  $L_z$  را بسازیم، می‌بینیم که آنها جابجائی می‌کنند:

$$[L^2, L_z] = 0 \quad (۱۶۸.۶)$$

بنابراین مجموعه‌ای از بردارهای ویژه مشترک  $|\ell, m\rangle$  با معادلات مقدار ویژه زیر هستند:

$$\begin{aligned} L^2|\ell, m\rangle &= \ell(\ell+1)\hbar^2|\ell, m\rangle \\ L_z|\ell, m\rangle &= m\hbar L^2|\ell, m\rangle \end{aligned} \quad (۱۶۹.۶)$$

که در آن  $\ell$  یک عدد صحیح است و  $m$  در مقادیر  $(2\ell+1)$  به  $-\ell, -\ell+1, \dots, \ell$  محدود می‌شود.

قبل از مطالعه ویژگی‌های اسپین، می‌خواهیم با جزئیات بیشتری درباره منشأ ماهیت گسسته مقادیر ویژه تکانه زاویه‌ای، به ویژه مؤلفه‌های  $L_z$  بحث کنیم. ابتدا امشتق استاندارد طیف گسسته را مورد بحث قرار می‌دهیم و سپس بر اساس فرضیات کمتری مشتق متفاوتی ارائه می‌دهیم که به نظر، قانع کننده‌تر است.

بیاید معادله (۱۲۶.۶) را بازنویسی کنیم. برای تکانه زاویه‌ای مداری:

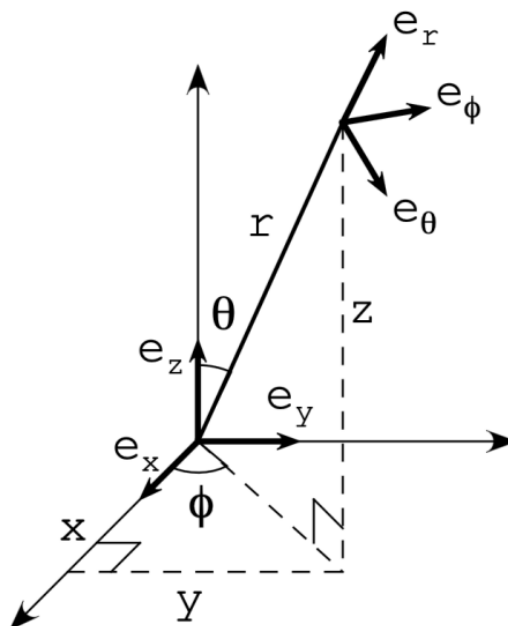
$$L = r \times p \quad (۱۷۰.۶)$$

ما نمایش را با بیان عملگر  $L_z = j\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$  در مختصات کروی آغاز می‌کنیم. تبدیل از دکارتی به مختصات کروی با روابط زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad (۱۷۱.۶)$$

در حالی که تبدیل‌های معکوس<sup>۴۰</sup> با روابط زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (۱۷۲.۶)$$



شکل ۵.۶: هندسه تبدیل بین مختصات دکارتی و کروی.

که در آن هندسه تبدیل‌ها در شکل ۵.۶ نشان داده شده است. بیایید نشان دهیم که عملگر گرادیان که به صورت دکارتی نوشته شده است به صورت زیر است:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z \quad (۱۷۳.۶)$$

در مختصات کروی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} e_\phi \quad (۱۷۴.۶)$$

که در آن سه بردار واحد  $e_r, e_\theta, e_\phi$  یک پایه متعامد برای مختصات کروی  $r, \theta, \phi$  تعریف شده در معادله (۱۷۲.۶) تشکیل می‌دهند. در قیاس با بردارهای سه واحد  $e_x, e_y, e_z$  که سیستم مختصات دکارتی  $x, y, z$  را تعریف می‌کند (شکل ۵.۶).

<sup>۴۰</sup> این تبدیل مختصات معمولی است که در کتاب‌های فیزیک نوشته شده است. ریاضیدانان تمایل دارند  $\theta$  را با  $\phi$  عوض کنند.



مرحله بعدی عبارت است از بیان مبنای متعامد  $e_r, e_\theta, e_\phi$  بر حسب بردارهای متعامد  $e_x, e_y, e_z$ . بررسی از شکل (۵.۶) نشان می‌دهد که  $e_r$  هم جهت بردار  $r$  است. بنابراین بردار واحد  $e_r$  با:

$$e_r = \frac{r}{||r||} = \frac{xe_x + ye_y + ze_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (۱۷۵.۶)$$

که در آن  $||r|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  نشان دهنده نورم بردار  $r$  است. با قرار دادن معادله (۱۷۱.۶) در معادله (۱۷۵.۶) خواهیم داشت:

$$e_r = \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z \quad (۱۷۶.۶)$$

از آنجایی که زاویه  $\phi$  در صفحه  $xy$  تعریف شده است، بردار واحد  $e_\phi$  باید موازی با صفحه  $xy$  باشد. این بدان معناست که بردار واحد  $e_\phi$  دارای مولفه  $z$  نیست و باید به شکل  $ae_x + be_y$  باشد. اگر اجازه دهیم زاویه  $\theta$  مقدار ویژه  $\pi/2$  را در نظر بگیرد، بردار  $e_r$  مجبور می‌شود در صفحه  $xy$  قرار بگیرد و شکل  $e_r = \cos \phi e_x + \sin \phi e_y$  را به خود می‌گیرد. بلافاصله نتیجه می‌شود که بردار واحد  $e_\phi$  عمود بر  $e_r$  در جهت مثبت  $\Psi$  است:

$$e_\phi = \sin \phi e_x + \cos \phi e_y \quad (۱۷۷.۶)$$

بردار واحد سوم و نهایی را می‌توان با استفاده از شرط  $e_r$  محاسبه کرد و به دست می‌آوریم:

$$e_\theta = \cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y - \sin \theta e_z \quad (۱۷۸.۶)$$

پس از چند عملیات جبری طولانی، معادله (۱۷۶.۶)، (۱۷۷.۶) و (۱۷۸.۶) را می‌توان معکوس کرد تا به دست آید:

$$\begin{aligned} e_x &= \sin \theta \cos \phi e_r - \sin \phi e_\phi + \cos \theta \cos \phi e_\theta \\ e_y &= \sin \theta \sin \phi e_r + \cos \phi e_\phi + \cos \theta \sin \phi e_\theta \\ e_z &= \cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta \end{aligned} \quad (۱۷۹.۶)$$

بیاپید قانون زنجیره‌ای را برای دیفرانسیل‌های جزئی مربوطه بنویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (۱۸۰.۶)$$

که با استفاده از معادلات (۱۷۱.۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (۱۸۱.۶)$$

معادله (۱۸۱.۶) را می‌توان معکوس کرد تا به دست آید:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (182.6)$$

اکنون همه مواد لازم برای نوشتن گرادیان مختصات کروی را داریم. در بیان گرادیان در مختصات دکارتی (۱۷۳.۶)، مقادیر معادله‌ها (۱۸۲.۶) و (۱۷۹.۶) را جایگزین می‌کنیم تا در نهایت به دست آید:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} e_\phi \quad (183.6)$$

پس از محاسبات<sup>۴۱</sup> طولانی، لاپلاسین  $\nabla^2$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (184.6)$$

اکنون در بیان حرکت زاویه‌ای کلاسیک (۱۷۰.۶) بر حسب عملگرهای کوانتومی ادامه می‌دهیم. بر حسب مولفه‌ها داریم:

$$L = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (yp_z - zp_y)e_x + (zp_x - xp_z)e_y + (xp_y - yp_x)e_z \quad (185.6)$$

که سه مولفه تکانه زاویه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}L_x &= (yp_z - zp_y) \\ L_y &= (zp_x - xp_z) \\ L_z &= (xp_y - yp_x)\end{aligned}\quad (186.6)$$

عملگرهای مکانیک کوانتومی، در مختصات دکارتی، با جایگزین کردن  $p = j\hbar \nabla$  در (۱۸۶.۶) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}L_x &= j\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_y &= j\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ L_z &= j\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (187.6)$$

با استفاده از معادله‌ها (۱۸۲.۶)، و بعد از مقداری عملیات جبری، می‌توانیم مولفه‌های

<sup>۴۱</sup> خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند جزییات را در هر کتاب درسی خوب روش‌های ریاضی فیزیک مانند رایلی، هابسون و بنچ [۲۳] بیابند.

تکانه زاویه‌ای را در مختصات کروی بیان کنیم:

$$\begin{aligned} L_x &= -j\hbar \left( \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ L_y &= -j\hbar \left( -\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ L_z &= j\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned} \quad (۱۸۸.۶)$$

بدست آوردن عبارات زیر در مختصات کروی برای  $L$  یک عملیات جبری است:

$$L = j\hbar \times \nabla = j\hbar \left( e_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - e_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \quad (۱۸۹.۶)$$

برای  $L^2$  و  $L_\pm$  داریم:

$$\begin{aligned} L^2 = L \cdot L &= -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \\ L_\pm &= \pm\hbar e^{\mp j\phi} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \mp j \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \end{aligned} \quad (۱۹۰.۶)$$

اجازه دهید معادله مقدار ویژه را برای عملگر  $L_z$  مطالعه کنیم که در مختصات کروی بیان شود. داریم:

$$L_z \Psi = \lambda \Psi \quad (۱۹۱.۶)$$

که در آن  $\Psi$ ، توابع ویژه  $L_z$  با مقادیر ویژه  $\lambda$  هستند. استفاده از  $L_z$  از معادله (۱۸۷.۶) داریم:

$$j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = \lambda \Psi \quad (۱۹۲.۶)$$

که منجر به جواب:

$$\Psi = ce^{\frac{-j\lambda\phi}{\hbar}} \quad (۱۹۳.۶)$$

که در آن  $c$  یک ثابت عادی‌سازی (نرمالیزاسیون) است. از آنجا که  $\phi$  زاویه‌ای است که بین  $0$  و  $2\pi$  تعریف شده است، افزودن  $2\pi$  به زاویه  $\phi$  باید به همان مقدار تابع ویژه  $\Psi$  منجر شود، یعنی  $\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi)$ . بنابراین باید داشته باشیم:

$$ce^{\frac{-j\lambda(\phi+2\pi)}{\hbar}} = ce^{\frac{-j\lambda\phi}{\hbar}} \quad (۱۹۴.۶)$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$e^{\frac{-j\lambda 2\pi}{\hbar}} = 1 \quad (۱۹۵.۶)$$

نمای معادله (۱۹۵.۶) فقط وقتی برابر ۱ است که:

$$\lambda = m\hbar \quad (۱۹۶.۶)$$

که در آن  $m$  باید یک عدد صحیح باشد.

از آنجایی که می‌دانیم که  $m$  با  $\ell, \ell-1, \dots, -\ell$  محدود شده است، نتیجه می‌گیریم که  $\ell$  نیز باید یک عدد صحیح باشد. بنابراین، مقادیر ویژه تکانه زاویه‌ای مداری به اعداد صحیح و نه نیمه صحیح مانند تکانه زاویه‌ای کل  $J$  یا اسپین  $S$  محدود می‌شوند.

دستیابی فوق دارای یک فرض مهم است: شرط (۱۹۴.۶) فرض می‌کند که توابع ویژه  $\Psi$  تحت یک چرخش زاویه  $2\pi$  برای  $\phi$  تک مقداری هستند. این فرض زمانی کاملاً منطقی است که با موارد مشاهده‌ای مانند، برای مثال، زمینه‌های موجود در نظریه الکترومغناطیسی در مورد مکانیک کوانتومی، توابع موج، و در نتیجه توابع ویژه، قابل مشاهده نیستند: مشاهده پذیرها یا به شکل یک نورم یا یک امید ریاضی هستند. در هر دو مورد، شرایط تک مقداری به اندازه مکانیک کلاسیک قوی نیست. این بخش را با یک اثبات<sup>۴۲</sup> جایگزین نتیجه می‌گیریم که مقادیر ویژه مولفه  $z$  تکانه زاویه‌ای مداری مضرب صحیح  $\hbar$  هستند. بخشی از ضرایب عددی، عملگر تکانه زاویه‌ای مداری را می‌توان به صورت ترکیبی از عملگرهای هرمیتی نوشت:

$$L_z = j\hbar(Q_x P_y - Q_y P_x) \quad (۱۹۷.۶)$$

با رعایت روابط کموتاسیون زیر:

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = -j\hbar\delta_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, z \quad (۱۹۸.۶)$$

برای بقیه این اثبات، از واحدهایی استفاده خواهیم کرد که در آنها عملگرهای موقعیت و تکانه، همراه با تعریف مجدد  $\hbar = 1$ ، بدون بعد هستند. می‌توانیم عملگرهای زیر را معرفی کنیم:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_x + P_y) \\ q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_x - P_y) \\ p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(P_x + Q_y) \\ p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(P_x - Q_y) \end{aligned} \quad (۱۹۹.۶)$$

این عملگرهای جدید از همان روابط کموتاسیونی پیروی می‌کنند که مولفه‌های عملگر  $L$  از آنها پیروی می‌کنند:

$$[q_i, q_j] = -j\delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2 \quad (۲۰۰.۶)$$

با وارد کردن (۱۹۹.۶) در (۱۹۷.۶) به دست می‌آوریم:

$$L_z = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) \quad (۲۰۱.۶)$$

معادله فوق تفاوت بین دو نوسان ساز هارمونیک غیر تزویجی با واحد جرم و واحد فرکانس زاویه‌ای را نشان می‌دهد. در بخش ۵-۱۰ دیدیم که یک نوسان ساز هارمونیک دارای طیف مجزای از مقادیر ویژه انرژی مطابق معادله (۲۰۰.۵) است. به دلیل روابط کموتاسیون (۲۰۰.۶)، مقادیر ویژه تفاوت دو عملگر، تفاوت مقادیر ویژه هستند. بنابراین می‌توانیم بگوییم که مقادیر ویژه  $L_z$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar - \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar = (n_1 - n_2)\hbar \quad (۲۰۲.۶)$$

<sup>۴۲</sup> این استدلال از کتاب بالانتین<sup>[۴]</sup> گرفته شده است.

معادله (۲۰۲.۶) به ما می‌گوید که مقادیر ویژه  $L_z$  اختلاف دو عدد صحیح غیر منفی ضربدر  $\hbar$  است، بنابراین دلیل دیگری ارائه می‌دهد که مقادیر ویژه تکانه زاویه‌ای مداری مضرب صحیحی از  $\hbar$  هستند و در نهایت فرض اصلی از بور معادله (۳.۴) را توجیه می‌کند به‌طوری که در توضیح اتم هیدروژن بسیار موفق بوده است.

## ۶.۲.۶ هارمونیک‌های کروی

در این بخش، یک شکل صریح برای حالت‌های ویژه اپراتورهای جابجائی  $L^2$  و  $L_z$  پیدا می‌کنیم که معمولاً **هارمونیک‌های کروی** نامیده می‌شوند. یافتن حالت‌های ویژه حرکت زاویه‌ای کار طولانی و خسته کننده‌ای است و ما در اینجا راه کوتاهی را با استفاده از روش جبری که قبلاً برای نوسانگر هارمونیک استفاده کرده‌ایم ارائه می‌دهیم.

حالت‌های ویژه  $|\ell, m\rangle$  از تکانه زاویه‌ای عموماً هارمونیک کروی نامیده می‌شود و با نماد  $Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$  نشان داده می‌شود. طبق تعریف، معادله (۱۶۹.۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} L^2 Y_{\ell, m}(\theta, \phi) &= \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \\ L_z Y_{\ell, m}(\theta, \phi) &= m\hbar Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (۲۰۳.۶)$$

بیایید فعلاً خود را به‌زیر مجموعه ویژه هارمونیک‌های کروی که  $\ell = m$  برای آن‌ها محدود می‌کنیم و عملکرد افزایش معادله (۱۹۰.۶) را اعمال می‌کنیم:

$$L_+ Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = \hbar e^{-j\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - j \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = 0 \quad (۲۰۴.۶)$$

معادله (۲۰۴.۶) نتیجه محدودیت‌های مقدار  $m$  است که از مقدار  $\ell$  تجاوز نمی‌کند و به  $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$  محدود می‌شود. معادله (۲۰۴.۶) را می‌توان با این فرض حل کرد که حالت ویژه را می‌توان به‌حاصل ضرب دو تابع که هر کدام فقط به‌ترتیب به‌مختصات زاویه‌ای  $\theta$  و  $\phi$  بستگی دارد، حل کرد:

$$Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = \Theta_{\ell, \ell}(\theta) \Phi_{\ell}(\phi) \quad (۲۰۵.۶)$$

با وارد کردن عبارت (۲۰۵.۶) در (۲۰۴.۶) و پس از کمی عملیات جبری به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\cot \theta} \frac{1}{\Theta_{\ell, \ell}(\theta)} \frac{d\Theta_{\ell, \ell}}{d\theta} = \frac{j}{\Phi_{\ell}(\phi)} \frac{d\Phi}{d\phi} = a = \text{ثابت} \quad (۲۰۶.۶)$$

که در آن  $a$  یک عدد ثابت است. در این صورت معادله (۲۰۶.۶) به‌دو معادله تقسیم می‌شود که هر کدام فقط به یک متغیر بستگی دارد. معادله اول:

$$\frac{d\Phi_{\ell}}{\Phi_{\ell}} = -jad\phi \quad (۲۰۷.۶)$$

که جواب آن خواهد بود:

$$\Phi_{\ell} = Ae^{-ja\phi} \quad (۲۰۸.۶)$$

تابع  $\Phi_\ell$  نیز یک حالت ویژه از  $L_z$  است که برای آن:

$$L_z \Phi_\ell = m \hbar \Phi_\ell \quad (209.6)$$

با استفاده از معادله سوم (۱۸۸.۶)، داریم:

$$L_z \Phi_\ell = m \hbar \Phi_\ell = j \hbar \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial \phi} = a \hbar \Phi_\ell \quad (210.6)$$

که از آن نتیجه می‌شود که  $a = m$  و حالت ویژه (۲۰۸.۶)، برای حالت خاص  $m = \ell$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Phi_\ell = A e^{-j\ell\phi} \quad (211.6)$$

می‌خواهیم (۲۱۱.۶) را نرمالیزه کنیم، یعنی مدول مربع آن برابر با ۱ باشد:

$$|\Phi_\ell|^2 = A^2 \int_0^{2\pi} \Phi_\ell^* \Phi_\ell d\phi = A^2 \int_0^{2\pi} e^{-j\ell\phi} e^{j\ell\phi} d\phi = A^2 2\pi = 1 \quad (212.6)$$

که از آن:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (213.6)$$

از شکل (۵.۶) می‌بینیم که زاویه  $\phi$  بین ۰ و  $2\pi$  تعریف شده است به این معنی که یک چرخش کامل  $2\pi$  حالت ویژه را به خودش برمی‌گرداند، یعنی  $\Phi_\ell(\phi) = \Phi_\ell(\phi + 2\pi)$ . چنین نتیجه می‌شود که:

$$e^{-j2\pi} = 1 \quad (214.6)$$

به این معنی که  $\ell$  باید یک عدد صحیح باشد. این در مورد تکانه زاویه‌ای مداری است و نه چرخش که در بخش بعدی بررسی خواهد شد. برای مختصات  $\theta$ ، از معادله (۲۰۶.۶) داریم:

$$\frac{1}{\cot \theta} \frac{1}{\Theta_{\ell,\ell}(\theta)} \frac{d\Theta_{\ell,\ell}}{d\theta} = \ell \quad (215.6)$$

که از آن داریم:

$$\frac{d\Theta_{\ell,\ell}(\theta)}{\Theta_{\ell,\ell}} = \ell \cot \theta d\theta \quad (216.6)$$

پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\Theta_{\ell,\ell} = C \sin^\ell \theta \quad (217.6)$$

که در آن  $C$  مقدار ثابتی است که از نرمال‌سازی حالت ویژه تعیین می‌شود. بعد از مقداری عملیات جبری و ترکیب حالت ویژه  $\phi$  داریم:

$$Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi) = \left[ \frac{(2\ell+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^\ell \theta}{2^\ell \ell!} e^{-j\ell\theta} \quad (218.6)$$

مرحله بعدی بدست آوردن عبارات هارمونیک کروی با  $m \neq \ell$  است. این را می‌توان با اعمال مکرر عملگر کاهش دهنده  $L_-$  به حالت‌های ویژه  $Y_{\ell,\ell}(\theta, \phi)$  معادله (۲۱۸.۶) بدست آورد یا با اعمال مکرر عملگر افزایشی  $L_+$  به پایین‌ترین حالت  $Y_{\ell,-\ell}(\theta, \phi)$  نائل شد. بیاید کاربرد عملگر  $L^2$  را برای حالت‌های ویژه حاصل از اعمال  $L_{\pm}$  به هارمونیک کروی  $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$  مطالعه کنیم. از آنجایی که  $L^2$  با  $L_{\pm}$  و با استفاده از (۲۰۳.۶) را جابجا<sup>۴۳</sup> می‌کند، داریم:

$$L^2(L_{\pm}Y_{\ell,m}) = L_{\pm}L^2Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)\hbar^2(L_{\pm}Y_{\ell,m}) \quad (219.6)$$

چون  $L^2$  با  $L_z$  جابجا می‌شود، همچنین درست است که:

$$L^2(L_zY_{\ell,m}) = L_zL^2Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)\hbar^2(L_zY_{\ell,m}) \quad (220.6)$$

این بدان معنی است که اعمال عملگرهای  $L_{\pm}$  و  $L_z$  به  $Y_{\ell,m}$  مقدار  $\ell$  را تغییر نمی‌دهد و حالت ویژه جدید دارای مقدار ویژه  $\ell(\ell+1)\hbar^2$  است. از طرف دیگر، مقدار ویژه  $L_z$  هنگام کار با  $L_{\pm}$  تغییر می‌کند. در واقع:

$$\begin{aligned} L_z(L_{\pm}Y_{\ell,m}) &= L_{\pm}L_zY_{\ell,m} + [L_z, L_{\pm}]Y_{\ell,m} \\ &= m\hbar(L_{\pm}Y_{\ell,m}) \pm \hbar L_{\pm}Y_{\ell,m} \\ &= (m \pm 1)\hbar(L_{\pm}Y_{\ell,m}) \end{aligned} \quad (221.6)$$

که در آن استفاده کردیم:

$$[L_{\pm}, L_z] = [L_x, L_z] \mp j[L_y, L_z] = -j\hbar(L_y \mp jL_x) = \mp \hbar L_{\pm} \quad (222.6)$$

معادله (۲۲۱.۶) نشان می‌دهد که  $(L_{\pm}Y_{\ell,m})$  یک حالت ویژه از  $L_z$  است بنابراین می‌توانیم به‌طور کلی بنویسیم که:

$$L_{\pm}Y_{\ell,m} = c_{\pm}(\ell, m)Y_{\ell,m \pm 1} \quad (223.6)$$

که نشان می‌دهد  $L_{\pm}$  مقادیر ویژه  $L_z$  را  $\hbar$  افزایش/کاهش می‌دهد در حالی که مقادیر ویژه  $L^2$ ، یعنی  $\ell(\ell+1)\hbar^2$ ، بدون تغییر باقی می‌ماند. کاربردهای مکرر عملگر پایین آورنده  $L_-$  به  $Y_{\ell,m}$  باید زمانی که به حد پایینی  $m = -\ell$  برسیم متوقف شود، یعنی:

$$L_-Y_{\ell,-\ell} = 0 \quad (224.6)$$

به‌طور مشابه، کاربردهای مکرر عملگر افزایش باید با رسیدن به حد بالای  $m = \ell$  متوقف شود، یعنی:

$$L_+Y_{\ell,\ell} = 0 \quad (225.6)$$

---

<sup>۴۳</sup>  $L^2$  با  $L_x$  و  $L_y$  و بنابراین با هر ترکیب خطی  $L_x$  و  $L_y$  جابجا می‌کند.

سپس، ضرایب  $c_{\pm}(\ell, m)$  معادله (۲۲۳.۶) را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از معادله (۲۲۳.۶)، ابتدا نورم را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle L_{\pm} Y_{\ell, m} | L_{\pm} Y_{\ell, m} \rangle = |c_{\pm}(\ell, m)|^2 \langle Y_{\ell, m \pm 1} | Y_{\ell, m \pm 1} \rangle = |c_{\pm}(\ell, m)|^2 \quad (226.6)$$

همین نورم را می‌توان با موارد زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \langle L_{\pm} Y_{\ell, m} | L_{\pm} Y_{\ell, m} \rangle &= \langle Y_{\ell, m} | L_{\mp} L_{\pm} Y_{\ell, m} \rangle \\ &= \langle Y_{\ell, m} | (L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z) Y_{\ell, m} \rangle \\ &= \langle Y_{\ell, m} | L^2 Y_{\ell, m} \rangle - \langle Y_{\ell, m} | L_z^2 Y_{\ell, m} \rangle \mp \hbar \langle Y_{\ell, m} | L_z Y_{\ell, m} \rangle \\ &= (\ell(\ell+1) - m^2 \mp m) \hbar^2 \end{aligned} \quad (227.6)$$

با مساوی قرار دادن معادله‌ها (۲۲۶.۶) و (۲۲۷.۶)، عبارتی برای ضرایب  $c_{\pm}$  پیدا می‌کنیم:

$$c_{\pm}(\ell, m) = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} \quad (228.6)$$

بنابراین عملگرهای افزایش/کاهش دهنده که بر روی هارمونیک‌های کروی عمل و از معادله مقدار ویژه زیر پیروی می‌کنند را داریم:

$$L_{\pm} Y_{\ell, m} = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell, m \pm 1} \quad (229.6)$$

معادله (۲۲۹.۶) را می‌توان معکوس کرد تا به دست آید:

$$Y_{\ell, m \pm 1} = \frac{1}{\hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}} L_{\pm} Y_{\ell, m} \quad (230.6)$$

معادله (۲۳۰.۶) تابع  $Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$  را به صورت بازگشتی تعریف می‌کند. هارمونیک‌های کروی معمولاً بر حسب توابع لژاندر وابسته<sup>۴۴</sup>  $P_{\ell, m}(\cos \theta)$  نوشته می‌شوند که به نوبه خود توسط چند جمله‌ای‌های لژاندر به دست می‌آیند:

$$P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{\ell} (x^2 - 1)^{\ell} \quad (231.6)$$

در این صورت توابع لژاندر وابسته به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$P_{\ell, m}(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} (P_{\ell}(x)) \quad (232.6)$$

در نهایت می‌توانیم برای هارمونیک‌های کروی بیان کنیم:

$$Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{-jm\phi} P_{\ell, m}(x) \quad (233.6)$$

<sup>۴۴</sup> Associated Legendre Functions

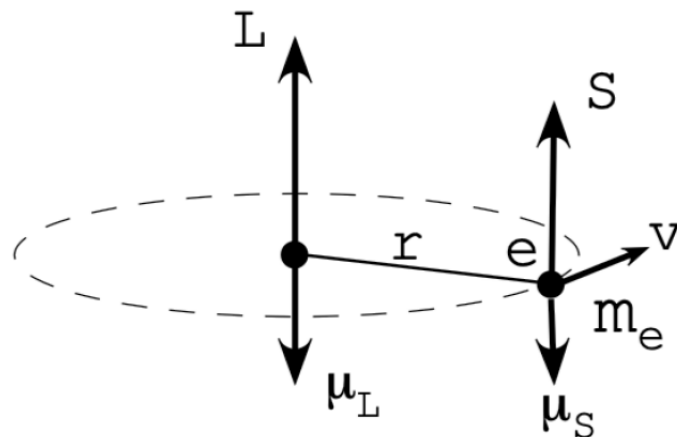


### ۷.۲.۶ اسپین (چرخش)

استدلال‌های طولانی بخش قبل نشان داده است که تکانه زاویه‌ای کل  $J = L + S$  را به دو مولفه جداگانه  $L$  و  $S$  تقسیم کنیم، که در آن  $L$  تکانه زاویه‌ای مداری است و می‌تواند فقط مضرب‌های صحیح  $\hbar$  را فرض کند در حالی که  $S$  تکانه زاویه‌ای ذاتی است و می‌تواند اعداد صحیح و نیم صحیح را داشته باشد.

اکنون به آزمایش اشترن و گزلاخ که در بخش 6.2.4 توضیح داده شد، برمی‌گردیم. دیدیم که چنین آزمایشی نتیجه غیرمنتظره‌ای داشت که نشان داد دورترین الکترون در یک اتم نقره مسئول تقسیم پرتو به دو مولفه است. با فرض صفر بودن گشتاور زاویه‌ای مداری (ما بعداً با این فرض باز خواهیم گشت)، شکاف به دلیل گشتاور مغناطیسی ذاتی الکترون بود. یک فرضیه شامل تلقی الکترون به عنوان بار چرخشی است که یک گشتاور مغناطیسی تولید می‌کند. داشتن تنها دو جهت برای چرخش حول محور خود، که ممکن است دو مقدار برای گشتاور مغناطیسی ذاتی  $\pm \frac{\hbar}{2}$  را توجیه کند. بنابراین آن **چرخش** (اسپین) نام دارد.

وقتی یک جرم در حال چرخش داریم، از فیزیک کلاسیک می‌دانیم که یک تکانه زاویه‌ای وابسته وجود دارد. اگر جرم بار الکتریکی داشته باشد، یک گشتاور مغناطیسی وابسته نیز داریم.



شکل ۶.۶: گشتاورهای زاویه‌ای و مغناطیسی یک الکترون در حال گردش.

اجازه دهید برای لحظه‌ای، الکترون در حال گردش در یک اتم را به عنوان ذره‌ای به جرم  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  کیلوگرم و بار  $e = -1.6 \times 10^{-19} C$  <sup>۴۵</sup> را همانطور که در شکل (۶.۶) نشان داده شده است، توصیف کنیم. همانطور که در بخش 6.2.4 توضیح داده شده است. واضح است که این تصویر کلاسیکی است که می‌دانیم دقیق نیست: در مکانیک کوانتومی، الکترون به دور هسته نمی‌چرخد، اما با تابع موج مختلف  $\Psi$  توصیف می‌شود که در کل فضا پخش می‌شود. ما فقط می‌توانیم احتمال قرار گرفتن یک الکترون در مکان معینی

<sup>۴۵</sup> بار 1 کولن (C) مقدار باری است که توسط یک جریان DC یک آمپر (A) در یک ثانیه جاری می‌شود و تقریباً معادل  $6.2 \times 10^{18} e$  است.

در فضا را در زمان معین با محاسبه مدول مربع  $\Psi$  محاسبه کنیم. با این حال، اجازه دهید این تصویر را برای یک لحظه نگه داریم تا بتوانیم گشتاور زاویه‌ای و مغناطیسی کلاسیک را تخمین بزنیم و نشان دهیم که آنها با یکدیگر متناسب هستند و ضریب تناسب یک ثابت جهانی<sup>۴۶</sup> است.

از معادله (۲۴۶) می‌بینیم که نسبتی که به آن نسبت ژیرو مغناطیسی<sup>۴۷</sup> گفته می‌شود برابر است با:

$$\gamma = \frac{\mu_L}{L} = \frac{e}{2m_e} \quad (234.6)$$

که به شعاع مدار یا به سرعت الکترون در حال گردش بستگی ندارد. بنابراین طبیعی است که شکاف غیرعادی مشاهده شده توسط اشتراک و گریخ را به دلیل تولید گشتاور مغناطیسی ذاتی با فرض اینکه الکترون یک بار صلب کوچک است که حول محوری با تکانه زاویه‌ای  $S$  مشابه  $L$  می‌چرخد، شناسایی کنیم. ساده‌ترین فرض این است که فرض کنیم الکترون دارای یک گشتاور مغناطیسی ذاتی  $\mu_S$  است که نسبت آن با مقدار معادله (۲۴۶) متناسب است اما با تکانه زاویه‌ای ذاتی  $S$  به جای  $L$  است:

$$\gamma_e = \frac{\mu_S}{S} = g \frac{e}{2m_e} \quad (235.6)$$

که در آن  $g$  یک ضریب تناسب به نام ضریب لنده<sup>۴۸</sup> یا ضریب  $g$ <sup>۴۹</sup> است. آزمایش‌ها و بعداً یک نظریه نسبیتی الکترودینامیک، نشان داده‌اند که ضریب  $g$  برابر  $g = 2$  است. می‌توانیم معادله (۲۳۵.۶) را به صورت برداری به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\vec{\mu}_S = -g\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad (236.6)$$

که در آن  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  مگنتون بور است. علامت منفی در معادله (۲۳۶.۶) به دلیل قراردادی است که الکترون دارای بار منفی است بنابراین توضیح می‌دهد که چرا  $\mu_L, \mu_S$  در شکل (۶.۶) مخالف  $L, S$  است.

همانطور که ولفگانگ پائولی انجام داد، باید فوراً اشاره کنیم که مدل بار چرخشی برای اسپین الکترون، حداقل در نسخه<sup>۵۰</sup> ساده آن صحیح نیست. در واقع، اگر فرض کنیم که الکترون یک کره با شعاع برابر با شعاع الکترون کلاسیک  $r_e \approx 10^{-15}m$  است، جرم  $m_e$  را با بار توزیع شده  $e$  می‌دهیم، چرخش در استوای آن  $v = \omega r$  خواهد بود، که در آن  $\omega$  سرعت زاویه‌ای است. با فرض یک ممان اینرسی  $I = \frac{2}{5}m_e r_e^2$ ، تکانه زاویه‌ای  $\omega = \frac{v}{r} = \frac{S}{I} = \frac{\hbar}{2} \frac{5\hbar}{4m_e r_e^2}$  است که از آن  $v = \frac{\hbar}{2} \frac{5\hbar}{4m_e r_e} \gg c$  به دست می‌آوریم، جایی که  $c$  سرعت نور است. بنابراین،

<sup>۴۶</sup> یک ثابت جهانی یک ثابت فیزیکی است که فرض می‌شود در همه جای جهان یک مقدار است و با زمان تغییر نمی‌کند.

<sup>۴۷</sup> Gyromagnetic Ratio

<sup>۴۸</sup> Lande' factor

<sup>۴۹</sup> g-factor

<sup>۵۰</sup> برای برخی از تلاش‌ها برای احیای مدل الکترون چرخشی، به عنوان مثال مراجع [۳۲] Ohanian یا

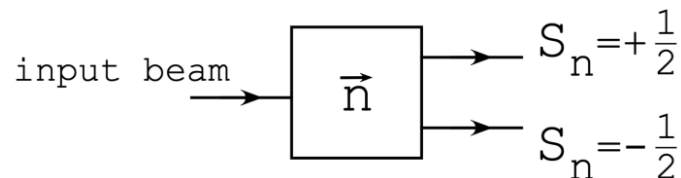
[۳۹] Sebens

چنین مدل ساده‌ای از اسپین مستلزم چرخش استوای الکترون با سرعتی برابر با 200 برابر سرعت نور است!

بیا یک توصیف مکانیکی کوانتومی از اسپین ایجاد کنیم. آزمایش اشترن و گِرلاخ مقداری برای تکانه زاویه‌ای ذاتی الکترون ارائه کرده است که وقتی در امتداد محور  $z$  اندازه‌گیری می‌شود برابر است با:

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (237.6)$$

هنگامی که هندسه آزمایش اشترن و گِرلاخ همراه با قدرت میدان مغناطیسی خارجی در نظر گرفته شود، این مقدار با نتایج تجربی مطابقت دارد. ذره‌ای که اندازه‌گیری تکانه زاویه‌ای ذاتی آنها برابر  $\pm \frac{\hbar}{2}$  باشد، یک دوم ذره اسپین نامیده می‌شود. گشتاور مغناطیسی ذاتی مرتبط یک مگنتون بوه است که در معادله (236.6) نشان داده شده است.



شکل ۷.۶: نمایش شماتیک آزمایش اشترن و گِرلاخ. پرتو ورودی از یک دوم ذرات اسپین در ورودی به دو پرتو در امتداد جهت بردار  $\vec{n}$  تقسیم می‌شود: پرتو بالایی فقط دارای ذرات اسپین  $+\frac{1}{2}$  است در حالی که پرتو پایینی حاوی فقط ذرات اسپین  $-\frac{1}{2}$  است.

دستگاه اشترن و گِرلاخ (SG) از این پس) را می‌توان به عنوان دستگاهی در نظر گرفت که پرتوی از ذرات را به صورت ورودی می‌گیرد و آن را به دو پرتو (برای چرخش یک نیمه) موازی و ضد موازی با جهت  $\vec{n} = (x, y, z)$  گرادیان میدان مغناطیسی خارجی جدا می‌کند (شکل ۷.۶). از آنجایی که هیچ جهت ترجیحی وجود ندارد، قرارداد معمولی تراز کردن گرادیان میدان مغناطیسی خارجی در امتداد جهت  $z$  است. بنابراین یک الکترون (یا یک اتم  $Ag$ ) باید با تابع موجی توصیف شود که به موقعیت  $r$ ، زمان  $t$  و اسپین  $S_z$  بستگی دارد:

$$\Psi = \Psi(r, t, S_z) \quad (238.6)$$

که در آن نورم  $|\Psi(r, t, S_z)|^2 d^3r$  نشان دهنده احتمال یافتن الکترون در حجم  $d^3r$  حول  $r$  در زمان  $t$  و با اسپین  $S_z$  است. با این حال، در حالی که مختصات  $r$  و  $t$  پیوسته هستند، مختصات اسپین گسسته است و در مورد اسپین یک دوم، به دو مقدار ممکن  $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$  محدود می‌شود. بنابراین نوشتن تابع موج (238.6) به صورت ترکیبی از دو تابع موجی طبیعی و راحت است:

$$\begin{aligned} \Psi_+(r, t) &= \Psi_+(r, t, +\frac{\hbar}{2}) \\ \Psi_-(r, t) &= \Psi_-(r, t, -\frac{\hbar}{2}) \end{aligned} \quad (239.6)$$

می‌توانیم یک فرض دیگر بکنیم و دو تابع موجی معادله (۲۳۹.۶) را در نظر بگیریم. به‌عنوان دو مولفه یک بردار که فقط به  $r$  و  $t$  وابسته است و وابستگی اسپین به‌سادگی با هر مولفه بردار زیر در نظر گرفته و نشان داده می‌شود:

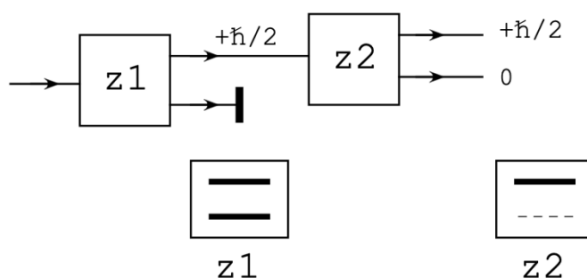
$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} \quad (240.6)$$

که در آن وابستگی  $(r, t)$  را برای سادگی کنار گذاشته‌ایم. بردار دو بعدی ویژه در معادله (۶) (۲۴۰.۶) را اسپینور<sup>۵۱</sup> می‌نامند. بنابراین، مدل ریاضی ما از چرخش یک دوم شامل فضای سه بعدی است که در آن، در هر مختصات  $(r, t)$  یک اسپینور دو مولفه‌ای مرتبط وجود دارد. اگر فقط علاقه‌مند به مطالعه چرخش باشیم، می‌توانیم دو کت را تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} |z, 0\rangle &= \Psi_+ \\ |z, 1\rangle &= \Psi_- \end{aligned} \quad (241.6)$$

که در آن  $|z, 0\rangle$  نشان دهنده اسپین «بالا» با توجه به جهت  $z$  است در حالی که کت  $|z, 1\rangle$  نشان دهنده اسپین «پایین» با توجه به جهت  $z$  است. اگر بخواهیم گرادیان میدان مغناطیسی خارجی را در آزمایش  $SG$  در امتداد جهت‌های  $x$  یا  $y$  برقرار کنیم، کت‌های مربوطه به ترتیب،  $|x, 0\rangle$  و  $|y, 0\rangle$  برای اسپین «بالا» و  $|x, 1\rangle$  و  $|y, 1\rangle$  برای چرخش «پایین» است.

بیاید اکنون یک سری آزمایش یا، همانطور که فیزیکدانان دوست دارند آن را آزمایش‌های فکری<sup>۵۲</sup> بنامند، تصور کنیم، که در آن تعداد معینی از دستگاه‌های اشترن و گرلاخ را به‌صورت سری قرار دهیم. این آزمایش فکری به ما امکان می‌دهد تا شکل عملگرهایی را که قادر به عمل بر روی اسپینورها هستند، تعیین کنیم.



شکل ۸.۶: دو دستگاه اشترن و گرلاخ ( $SG$ ) به‌صورت سری. یک پرتو از ذرات یک دوم اسپین (به بالا) توسط اولین  $SG$  فیلتر می‌شود. سپس پرتو فیلتر شده وارد دستگاه دوم  $SG$  می‌شود که نشان می‌دهد ذرات  $Sz = +\frac{\hbar}{2}$  هیچ مولفه  $Sz = -\frac{\hbar}{2}$  ندارند.

شکل (۸.۶) دو دستگاه  $SG$  را نشان می‌دهد که هر دو دارای گرادیان میدان مغناطیسی خارجی هستند که در امتداد جهت  $\square$  که ما با  $SGz$  نشان می‌دهیم. "جهت گرادیان

<sup>۵۱</sup>Spinor

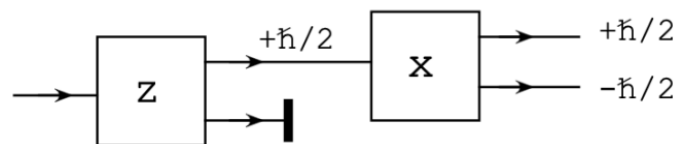
<sup>۵۲</sup>یک آزمایش فکری در فیزیک، که گاهی اوقات در آلمانی edankeexperiment نامیده می‌شود، یک آزمایش بالقوه قابل انجام است که برای اثبات یک نظریه یا یک اصل بدون اجرای واقعی آن در عمل استفاده می‌شود.

میدان مغناطیسی را به ما یادآوری می‌کند. پرتوی از ذرات اسپین یک دوم وارد اولین  $SGz$  می‌شود که پرتو را به یک پرتو بالایی اسپین «بالا» ( $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ ) و یک پرتو پایینی اسپین «پایین» ( $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ ) همانطور که در صفحه  $z1$  نشان داده شده است، جدا می‌کند. پرتو چرخشی مسدود شده و بیشتر منتشر نمی‌شود. پرتو چرخشی در حال ظهور سپس وارد یک  $SGz$  دوم می‌شود که در حال حاضر بر روی یک پرتو چرخشی خروجی فقط ذرات را همانطور که در صفحه نمایش  $z2$  نشان داده شده است به بالا می‌چرخاند. این آزمایش فکری اول به سادگی به ما می‌گوید که دو حالت (۲۴۲.۶) باید به عنوان حالت‌های ویژه در نظر گرفته شوند: در واقع، فیلتر دوم  $SGz$  نشان می‌دهد که حالت‌های  $S_z = +\frac{\hbar}{2}$  شامل حالات  $S_z = -\frac{\hbar}{2}$  نیستند به این معنی که آنها متعامد هستند. علاوه بر این، تمام حالت‌ها با ورود به اولین دستگاه  $SGz$  به طور کامل در خروجی دستگاه  $SGz$  دوم ظاهر می‌شوند که نشان می‌دهد دو حالت موازی هستند. بنابراین باید داشته باشیم که:

$$\begin{aligned}\langle z, 0 | z, 1 \rangle &= 0 \\ \langle z, 1 | z, 0 \rangle &= 0 \\ \langle z, 0 | z, 0 \rangle &= 1 \\ \langle z, 1 | z, 1 \rangle &= 1\end{aligned}\quad (242.6)$$

بنابراین می‌توانیم معادلات مقدار ویژه را بنویسیم:

$$\begin{aligned}S_z |z, 0\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |z, 0\rangle \\ S_z |z, 1\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |z, 1\rangle\end{aligned}\quad (243.6)$$



شکل ۹.۶: دو دستگاه اشترن و گرایخ ( $SG$ ) به صورت سری. پرتوی از ذرات یک دوم اسپین (چرخش به بالا) توسط اولین  $SG$  که در امتداد جهت  $z$  قرار دارد فیلتر می‌شود. پرتو فیلتر شده سپس وارد دستگاه دوم  $SG$  شده و در امتداد جهت  $x$  قرار دارد و نشان می‌دهد که پرتو به دو پرتو مربوط به چرخش به بالا (در امتداد  $x$ ) و چرخش به پایین (در امتداد  $x$ ) از هم جدا شده است. به طور کلاسیک نباید هیچ پرتو تقسیم شده از  $SG$  دوم وجود داشته باشد.

بردارهای دو مولفه‌ای زیر یک نمایش کاملاً معتبر از دو پایه ویژه  $|z, 0\rangle$ ،  $|z, 1\rangle$  هستند:

$$\begin{aligned}|z, 0\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |z, 1\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (244.6)$$

در واقع، آنها روابط (۲۴۴.۶) را برآورده می‌کنند و بنابراین یک مبنای متعامد نرمال را تشکیل می‌دهند. طبق تعاریف ما، هر حالت اسپینی را می‌توان به صورت ترکیبی خطی

از دو پایه (۲۴۴.۶) نشان داد:

$$|\Psi\rangle = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad (245.6)$$

که در آن  $c_0$  و  $c_1$  دو عدد مختلط هستند. عملگر  $S_z$  که بر روی بردارهای دو مولفه مانند (۲۴۵.۶) عمل می‌کند، باید یک ماتریس هرمیتی  $2 \times 2$  باشد. در واقع، به راحتی می‌توان تأیید کرد که عملگر  $S_z$  را می‌توان به عنوان یک ماتریس  $2 \times 2$  به شکل زیر نوشت:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (246.6)$$

که در آن  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  یک ماتریس هرمیتی  $2 \times 2$  است. توجه کنید که  $S_z$  مقادیر ویژه معادلات (۲۴۳.۶) را تغییر می‌دهد.

حال بیایید سری دستگاه‌های اشتراک و گزینش نشان داده شده در شکل (۹.۶) را مورد بحث قرار دهیم. اولین  $SGz$  پرتوهای چرخشی  $+\frac{\hbar}{2}$  را فیلتر می‌کند. توجه داشته باشید که با توجه به جهت  $z$  یک چرخش به بالا داریم. این پرتو فیلتر شده به سمت ورودی یک  $SGx$  دوم هدایت می‌شود، یعنی دستگاه اشتراک و گزینش با گرادیان میدان مغناطیسی که اکنون در امتداد جهت  $x$ ، متعامد به جهت  $z$  است. به طور کلاسیک، انتظار نداریم که از  $SG$  دوم جدا شود، زیرا قبلاً یک پرتو از اسپین‌ها را انتخاب کرده‌ایم که همگی عمود بر  $x$  هستند. در عوض، طبیعت به ما نشان می‌دهد که از دستگاه  $SGx$ ، پرتو را به دو پرتو  $+\frac{\hbar}{2}$  و  $-\frac{\hbar}{2}$  با شدت مساوی تقسیم می‌کنیم، یعنی با احتمال 50 چرخش به سمت بالا و پایین در امتداد  $x$ . این بدان معنی است که، در مکانیک کوانتومی، حالتی با  $S_z = \frac{\hbar}{2}$  دارای مولفه‌هایی در امتداد جهت متعامد  $x$  برابر با  $\pm\frac{\hbar}{2}$  است. از نظر ریاضی می‌توانیم این را با نوشتن اینکه حالت  $|z, 0\rangle$  اسپین بالا در جهت  $z$  را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از حالات نوشت  $|x, 0\rangle$  و  $|x, 1\rangle$  با ضرایب مساوی:

$$|z, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x, 1\rangle \quad (247.6)$$

به راحتی می‌توان تأیید کرد که حالت متعامد  $|z, 1\rangle$  باید شکل زیر را داشته باشد:

$$|z, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|x, 1\rangle \quad (248.6)$$

اکنون به دنبال نمایش ماتریس برای عملگر  $S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x$  هستیم، که  $\sigma_x$  یک ماتریس  $2 \times 2$  مانند  $\sigma_z$  است. عملگر  $\sigma_x$  دو مقدار ویژه دارد  $\lambda_0 = +1$ ،  $\lambda_1 = -1$  و به دلیل معادلات (۲۴۷.۶)

و (۲۴۸.۶)، دارای بردارهای ویژه نرمال شده زیر است:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (249.6)$$

می‌توانیم ماتریس  $\sigma_x$  را با توجه به بردارهای ویژه و مقدار ویژه آن به روش زیر تعیین کنیم: ابتدا یک ماتریس مورب  $D$  می‌سازیم که در آن، مقادیر ویژه را روی قطر آن قرار می‌دهیم:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (250.6)$$

سپس ماتریس  $M$  را می‌سازیم که بردارهای ویژه مربوطه را به صورت ستون وارد می‌کنیم:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (251.6)$$

داریم:

$$\sigma_x = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (252.6)$$

در نهایت، با این فرض که ماتریس‌های  $S$  یا  $\sigma$  نشان‌دهنده تکانه زاویه‌ای ذاتی هستند، آنها باید از همان روابط کموتاسیونی پیروی کنند که توسط تکانه زاویه‌ای مداری  $L$  رعایت می‌شود. بنابراین،  $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$  را پیدا می‌کنیم:

$$-j\hbar S_y = [S_z, S_x] \quad (253.6)$$

که از آن بدست می‌آید:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \quad (254.6)$$

بطور خلاصه، داریم:

$$S_x = \sigma_x, S_y = \sigma_y, S_z = \sigma_z \quad (255.6)$$

که در آن:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (256.6)$$

سه ماتریس بالا، به نام ماتریس‌های پائولی که قبلاً در معادله (۱۸.۶) مورد بحث قرار گرفتند همراه با ماتریس هویت  $2 \times 2$  یک مبنای متعامد نرمال برای همه ماتریس‌های

$2 \times 2$  را تشکیل می‌دهد. همه آنها دارای مقادیر ویژه برابر با  $\pm 1$  هستند و از روابط کموتاسیون زیر تبعیت می‌کنند:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = -2j\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (257.6)$$

که در آن ماتریس‌های پائولی را بر اساس  $\sigma_x = \sigma_1$ ,  $\sigma_y = \sigma_2$  و  $\sigma_z = \sigma_3$  شماره گذاری کردیم. در قیاس کامل با تکانه زاویه‌ای مداری  $L$ ، می‌توانیم عملگرهای زیر را که در فضای سه بعدی تعریف شده‌اند بسازیم:

$$\begin{aligned} S &= S_x e_x + S_y e_y + S_z e_z \\ S^2 &= S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \end{aligned} \quad (258.6)$$

عملگرهای اسپین روابط کموتاسیون زیر را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} [S_x, S_y] &= -j\hbar S_z \\ [S_y, S_z] &= -j\hbar S_x \\ [S_z, S_x] &= -j\hbar S_y \\ [S^2, S_i] &= 0 \quad \text{برای } i = x, y, z \end{aligned} \quad (259.6)$$

با قیاس ادامه می‌دهیم، در حالی که حالت ویژه  $L$  با کت  $|\ell, m\rangle$  نشان داده می‌شود، حالت‌های ویژه اسپین  $S$  با  $|s, m\rangle$  نشان داده می‌شوند که در آن  $s$  نیم عدد صحیح است و  $m$  دارای مقادیر  $(2s+1)$  است. معادله مقادیر ویژه اسپین معادل معادلات (۱۶۹.۶) عبارتند از:

$$\begin{aligned} S^2 |s, m\rangle &= s(s+1)\hbar^2 |s, m\rangle \\ S_z |s, m\rangle &= m\hbar |s, m\rangle \end{aligned} \quad (260.6)$$

که در آن  $s$  نیم عدد صحیح است و  $m$  برای مقادیر  $s, s-1, \dots, -s$  به  $(2s+1)$  محدود می‌شود. برای حالت اسپین  $s = \frac{1}{2}$ ،  $m = \pm \frac{1}{2}$  است.

اسپین یک ویژگی ذاتی ذرات بنیادی مانند الکترون است و قابل تغییر نیست. ذرات با اسپین نیم عدد صحیح **فرمیون**<sup>۵۳</sup> و ذرات با اسپین عدد صحیح **بوزون**<sup>۵۴</sup> نامیده می‌شوند. ما قبلاً شکل ماتریس عملگر  $S_z$  را برای یک ذره اسپین  $\frac{1}{2}$  محاسبه کرده‌ایم:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (261.6)$$

شکل ماتریس عملگر  $S^2$  را می‌توان با استفاده از فرمول عناصر ماتریس (۴۶.۶) محاسبه کرد. با توجه به دو بردار پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  می‌دانیم که عملگر  $S^2$  یک ماتریس  $2 \times 2$  به شکل زیر است:

$$S^2 = \begin{pmatrix} S_{11}^2 & S_{12}^2 \\ S_{21}^2 & S_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (262.6)$$

<sup>۵۳</sup> Fermions

<sup>۵۴</sup> Bosons



با استفاده از معادله (۴۶.۶)، داریم:

$$\begin{aligned} S_{11}^2 &= \langle 0|S^2|0\rangle = \langle 0|s(s+1)\hbar^2|0\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\langle 0|0\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \\ S_{12}^2 &= \langle 0|S^2|1\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\langle 0|1\rangle = 0 \\ S_{21}^2 &= \langle 1|S^2|0\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\langle 1|0\rangle = 0 \\ S_{22}^2 &= \langle 1|S^2|1\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\langle 1|1\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \end{aligned} \quad (۲۶۳.۶)$$

و ماتریس  $S^2$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۲۶۴.۶)$$

به تشابه  $S^2$  و  $S_z$  به ترتیب با عبارات  $J^2$  و  $J_z$  در معادله‌های (۱۳۶.۶) و (۱۳۷.۶) توجه کنید. از آنجایی که کت  $|J\rangle$  دارای سه مولفه است، در این صورت عملگرهای تکانه زاویه‌ای با ماتریس  $3 \times 3$  در مقابل اسپینورهای دو مولفه با ماتریس  $2 \times 2$  مربوطه نشان داده می‌شوند.

### ۳.۶ اتم هیدروژن

در بخش‌های قبلی مطالعه کردیم که عملگر تکانه زاویه‌ای  $J$  را می‌توان به عنوان ترکیب دو تکانه زاویه‌ای با توجه به  $J = L + S$  توصیف کرد که در آن  $L$  تکانه زاویه‌ای مداری و  $S$  تکانه زاویه‌ای ذاتی یا اسپین است. دیدیم که مطالعه مربع تکانه زاویه‌ای مداری،  $L^2$ ، و تصویر  $L_z$  در امتداد یک محور (اختیاری)  $z$  راحت‌تر است. این دو عملگرجابجائی می‌کنند و بنابراین آنها یک مجموعه مشترک از حالت‌های ویژه را می‌پذیرند که با دو عدد کوانتومی  $\ell$  و  $m$  مشخص می‌شود. عدد کوانتومی  $\ell$  بزرگی تکانه زاویه‌ای را تعیین کرده در حالی که عدد کوانتومی  $m$  تصویر تکانه زاویه‌ای را در امتداد محور  $z$  تعیین می‌کند. در مورد تکانه زاویه‌ای مداری،  $\ell$  فقط می‌تواند مقادیر صحیح را در داشته باشد و  $m$  به محدوده  $m = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$  محدود می‌شود. تکانه زاویه‌ای ذاتی یا اسپین می‌تواند عدد صحیحی از مقادیر نیم عدد صحیح را در داشته باشد.

در ارتباط با اسپین، و در قیاس با تکانه زاویه‌ای مداری، یک عدد کوانتومی اضافی داریم، مشابه  $m$ ، که آن را به صورت  $m_s$  نشان می‌دهیم که مشمول همان محدودیت  $m$  است، یعنی  $m_s = -\ell, -\ell+1, \dots, +\ell$  که نشان‌دهنده تصویر چرخش  $z$ -است. در مورد خاص اسپین یک و نیم، عدد کوانتومی  $m_s$  می‌تواند تنها دو مقدار  $m_s = +\frac{1}{2}$  و  $m_s = -\frac{1}{2}$  را داشته باشد که مربوط به تعریف دلخواه "چرخش به بالا" و "چرخش به پایین" است و مسئول تقسیم پرتو اتم‌های نقره در یک میدان مغناطیسی ناهمگن در آزمایش اشترن و گزلاخ است.

مرحله منطقی بعدی شامل مطالعه اتم هیدروژن است که توسط یک پروتون با بار مثبت (بار  $+e$ ) و یک الکترون با بار منفی (بار  $-e$ ) تشکیل شده است. پتانسیل حاصل، پتانسیل

کولمب<sup>۵۵</sup> نامیده می‌شود که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۲۶۵.۶)$$

که در آن  $r$  فاصله بین پروتون و الکترون است. به‌طور کلاسیک، پروتون و الکترون به‌دور مرکز جرم سیستم دو جسمی می‌چرخند. با این حال، با توجه به‌اینکه جرم الکترون بسیار کوچکتر از جرم پروتون<sup>۵۶</sup> است، می‌توانیم فرض کنیم که پروتون در مرکز سیستم مختصات قرار دارد و الکترون به‌دور پروتون می‌چرخد.

در بحث ما، فرضیات ساده‌سازی را انجام می‌دهیم که الکترون و پروتون اسپین ندارند و ذرات به‌صورت غیر نسبیتی حرکت می‌کنند، یعنی سرعت‌های معمول شامل  $v \ll c$  است، که در آن  $c$  سرعت نور است.

همیلتونین اتم هیدروژن در مختصات کروی عبارت است از:

$$H(r, \theta, \phi) = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۲۶۶.۶)$$

که در آن  $m$  جرم الکترون است. همیلتونین (۲۶۶.۶) به‌ما اجازه می‌دهد تا معادله شرودینگر مستقل از زمان را برای اتم هیدروژن بنویسیم:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} \Psi = E\Psi \quad (۲۶۷.۶)$$

که در آن تابع موج  $\Psi = \Psi(r, \theta, \phi)$  به‌مختصات شعاعی  $r$  و زوایای کروی  $\theta$  و  $\phi$  بستگی دارد.

استفاده از عبارت در مختصات کروی عملگر  $L^2$  از معادله (۱۸۹.۶)، می‌توانیم معادله (۲۶۷.۶) را به‌شکل فشرده‌تر زیر بنویسیم:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \Psi = E\Psi \quad (۲۶۸.۶)$$

پس از اندکی عملیات جبری، متوجه می‌شویم که معادله (۲۶۸.۶) می‌شود:

$$\hbar^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Psi \right) + 2mr^2(E - V)\Psi = L^2\Psi \quad (۲۶۹.۶)$$

دیدیم که عملگر تکانه زاویه‌ای، با توابع ویژه هارمونیک‌های کروی  $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ ، به‌مختصات شعاعی  $r$  بستگی ندارد. این بدان معنی است که وابستگی شعاعی به‌سمت چپ معادله (۲۶۹.۶) محدود می‌شود. این به‌ما اجازه می‌دهد تا متغیرها را با این فرض جدا کنیم:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (۲۷۰.۶)$$

<sup>۵۵</sup>Coulomb potential

<sup>۵۶</sup>جرم پروتون حدود ۱۸۳۶ برابر جرم الکترون است.

اگر هر بخش از معادله (۲۶۹.۶) را به صورت  $\Psi(r, \theta, \phi)$  در معادله (۲۷۰.۶) تقسیم کنیم بدست می‌آوریم:

$$\frac{\hbar^2}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) + \frac{2mr^2}{R(r)} [(E - V)R(r)] = \frac{1}{Y_{\ell,m}(\theta, \phi)} L^2 Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (271.6)$$

سمت چپ معادله (۲۷۱.۶) فقط به مختصات شعاعی  $r$  بستگی دارد در حالی که سمت راست فقط به مختصات زاویه‌ای  $\theta, \phi$  بستگی دارد. بنابراین می‌توانیم معادله (۲۷۱.۶) را به دو معادله جدا کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) + \frac{2mr^2}{R(r)} [(E - V)R(r)] &= \lambda \\ \frac{1}{Y_{\ell,m}(\theta, \phi)} L^2 Y_{\ell,m}(\theta, \phi) &= \lambda \end{aligned} \quad (272.6)$$

جایی که  $\lambda$  به  $(r, \theta, \phi)$  بستگی ندارد. معادله دوم در معادله (۲۷۲.۶) مقدار ویژه برای اپراتور تکانه زاویه‌ای  $L^2$  است که قبلاً مطالعه کرده‌ایم (برای مثال به معادله اول در (۲۰۳.۶) مراجعه کنید). بنابراین می‌دانیم که ثابت است:

$$\lambda = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \quad (273.6)$$

با وارد کردن معادله (۲۷۳.۶) به معادله اول (۲۷۱.۶)، و پس از مقداری عملیات جبر، معادله شعاعی شرودینگر را برای اتم هیدروژن به دست می‌آوریم:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right] R(r) = ER(r) \quad (274.6)$$

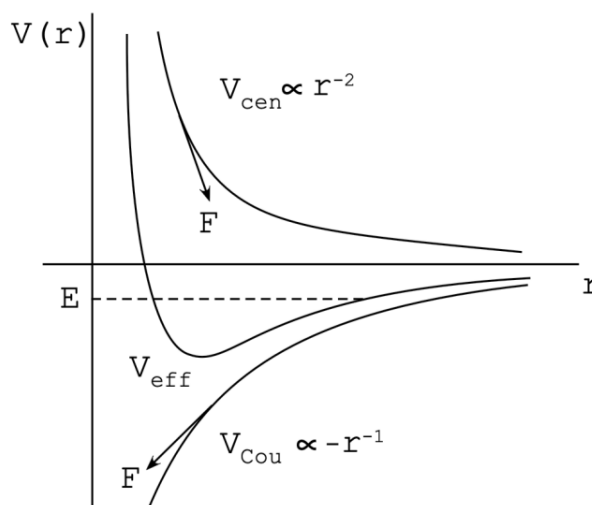
جداسازی متغیرهای (۲۷۰.۶) به ما این امکان را می‌دهد که معادله شرودینگر شعاعی را به شکل (۲۷۴.۶) بنویسیم که در آن به انرژی پتانسیل کولمب یک عبارت اضافه می‌شود که منجر به انرژی پتانسیل مؤثر<sup>۵۷</sup> زیر شکل می‌گیرد:

$$V_{eff} = V_{cen} + V_{cou} = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (275.6)$$

انرژی پتانسیل مؤثر (۲۷۵.۶) علاوه بر پتانسیل کولمب جذب استاندارد  $V_{Cou}$  متناسب با  $1/r$ ، یک عبارت دافعه گریز از مرکز  $V_{cen}$  با علامت مخالف متناسب با  $1/r^2$  است. پتانسیل کولن مسئول یک نیروی جاذبه  $F = -\frac{dV_{Cou}}{dr} < 0$  است که از الکترون به پروتون هدایت می‌شود، زیرا مشتق پتانسیل همیشه مثبت است. از طرف دیگر، نیروی گریز از مرکز  $F = -\frac{dV_{Cou}}{dr} > 0$ ، همیشه مثبت است و مشتق انرژی پتانسیل است که همیشه منفی است. در شکل (۱۰.۶) نمونه‌ای از یک پتانسیل مؤثر مربوط به مقدار خاصی از عدد کوانتومی  $\ell$  نشان داده شده است. توجه داشته باشید که در حالت خاص  $\ell = 0$ ، نیروی گریز از مرکز صفر است و الکترون فقط تحت پتانسیل کولمب استاندارد قرار دارد.

به طور کلی، شکل  $V_{eff}$  به  $\ell$  بستگی دارد که قدرت نیروی گریز از مرکز را تعیین می‌کند: مقادیر بالاتر از  $\ell$  مربوط به نیروهای گریز از مرکز قوی‌تر است و موقعیت حداقل

<sup>۵۷</sup>Effective potential



شکل ۱۰.۶: انرژی پتانسیل اتم هیدروژن که عبارت گریز از مرکز دافعه متناسب با  $r^{-2}$  را نشان می‌دهد و با عبارت کولمب متناسب با  $-r^{-1}$  ترکیب می‌شود تا پتانسیل موثر را به‌ما بدهد.

پتانسیل  $V_{eff}$  به مقادیر بالاتر شعاع  $r$  منتقل می‌شود. همانطور که در مورد کلاسیک مسئله دو جسم، مقادیر مثبت انرژی کل  $E$  مربوط به ذرات آزاد است در حالی که مقادیر منفی  $E$  مربوط به حالت‌های محدود است. بیایید یک متغیر جدید معرفی کنیم:

$$u(r) = rR(r) \quad (276.6)$$

معادله (274.6) فقط به مختصات شعاعی  $r$  بستگی دارد و بنابراین، پس از تغییر متغیر جدید  $u$  تعریف شده در (276.6)، می‌توان آن را بر حسب مشتقات کل به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0 \quad (277.6)$$

معادله (277.6) را می‌توان با استفاده از تکنیک‌های مختلفی مانند روش فروبنیوس<sup>۵۸</sup> حل کرد. در اینجا روش دیگری را برای یافتن راه حل مورد بحث قرار خواهیم داد. با مطالعه راه حل در دو حالت محدود کننده زمانی که  $r \rightarrow \infty$  و زمانی که  $r \rightarrow 0$  شروع می‌کنیم. وقتی  $r$  بسیار بزرگ است، معادله (277.6) به‌موارد زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} Eu = 0 \quad (278.6)$$

که دارای جواب قابل قبول:

$$u = A_1 e^{-\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} r} + A_2 e^{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} r} \quad (279.6)$$

<sup>۵۸</sup> فردیناند گئورگ فروبنیوس (1849 – 1917) ریاضیدان آلمانی بود که به‌دلیل مشارکت در نظریه معادلات دیفرانسیل شهرت دارد. او کمک‌های مهمی به نظریه گروه و نظریه اعداد کرده است.

به‌عنوان یک شرط مرزی، تابع موج باید در بی‌نهایت به سمت صفر تمایل داشته باشد و بنابراین باید  $A_2 = 0$  داشته باشیم.

در مورد محدود کننده  $r$  کوچک، معادله (۲۷۷.۶) به‌موارد زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u = 0 \quad (280.6)$$

که دارای جواب قابل قبول:

$$\begin{aligned} u_1 &= B_1 r^{\ell+1} \\ u_2 &= B_2 \frac{1}{r^\ell} \end{aligned} \quad (281.6)$$

مجدداً، به‌عنوان یک شرط مرزی به  $B_2 = 0$  نیاز داریم تا تابع موج را زمانی که  $r \rightarrow 0$  محدود نگه داریم. جواب کلی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u = C e^{-\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} r} f(r) r^{\ell+1} \quad (282.6)$$

که در آن  $f(r)$  هنوز باید تعیین شود. فرض کنید تابع  $f(r)$  با بسط سری شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \quad (283.6)$$

اگر تابع حدس (۲۸۳.۶) را در معادله (۲۷۷.۶) وارد کنیم، یک رابطه بازگشتی برای ضرایب  $a_k$  به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$a_k = -a_{k-1} \frac{\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} - (\ell+k)\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}}{(\ell+k)(\ell+k+1) - \ell(\ell+1)} \quad (284.6)$$

سری (۲۸۳.۶) با ضرایب (۲۸۴.۶) زمانی که  $r \rightarrow \infty$  واگرا می‌شود، مگر اینکه مقداری از  $k$  وجود داشته باشد که برای آن عدد سمت راست (۲۸۴.۶) صفر باشد. این تساوی مستلزم این است که تابع  $f(r)$  یک چند جمله‌ای با تعداد متناهی جمله باشد. بنابراین، برای داشتن یک تابع موج خوب در بازه  $0 \leq r \leq \infty$  باید داشته باشیم:

$$\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} = (\ell+k)\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} = n\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (285.6)$$

که در آن  $n = (\ell+k)$  یک عدد صحیح است. استخراج انرژی  $E$  از معادله (۲۸۵.۶) بدست می‌آوریم:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2 n^2 \hbar^2} \quad (286.6)$$

که دقیقاً فرمول بور (۸.۴) است که با استدلال‌های نیمه کلاسیک به دست آمده است.

دیدیم که شرط  $n = \ell + k$  را اعمال کردیم و در آن  $n$  عدد کوانتومی اصلی<sup>۵۹</sup> نامیده می‌شود. با این حال، می‌توان نشان داد که معادله دیفرانسیل شرودینگر برای اتم هیدروژن محدوده  $n$  را مجبور می‌کند تا  $n = \ell + 1$  یا به طور معادل:

$$\ell = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (287.6)$$

با چند جمله‌ای‌های متناظر (۲۸۳.۶) در  $r$  که به ترتیب  $n - \ell + 1$  کوتاه شده‌اند. حال بیایید شکل صریح چندجمله‌ای  $f(r)$  را در معادله (۲۸۲.۶) پیدا کنیم. برای اینکه عملیات جبری را مرتب نگه داریم، متغیر  $\rho$  را معرفی می‌کنیم:

$$\rho = \frac{r}{a_0} \quad (288.6)$$

که در آن  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$  شعاع بور است و ضریب مقیاس  $\rho$  را بدون بعد می‌کند. بیایید دو ثابت را معرفی کنیم:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \\ \eta &= \alpha a_0 \end{aligned} \quad (289.6)$$

معادله شعاعی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \eta^2 \right] u(\rho) = 0 \quad (290.6)$$

قبلاً می‌دانیم که تابع موج  $u$  باید در موارد محدود کننده  $\rho$  کوچک و بزرگ محدود بماند تا جوابی به شکل زیر را پیشنهاد کند:

$$u(\rho) = e^{-\eta\rho} \rho^{\ell+1} f(\rho) \quad (291.6)$$

که در آن  $f(\rho)$  تابعی است که دنبال آن هستیم. با وارد کردن جواب آزمایشی (۲۹۱.۶) در (۲۹۰.۶)، و پس از چند مرتبه تنظیم، معادله زیر را برای  $f(\rho)$  بدست می‌آوریم:

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + 2 \left( \frac{\ell+1}{\rho} - \eta \right) \frac{df(\rho)}{d\rho} + \frac{2}{\rho} [1 - \eta(\ell+1)] f(\rho) = 0 \quad (292.6)$$

اکنون جایگزینی  $x = 2\eta\rho$  را انجام می‌دهیم تا بدست آوریم:

$$4\eta^2 \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + 4\eta \left( \frac{2\eta(\ell+1)}{\rho} - \eta \right) \frac{df(\rho)}{d\rho} + \frac{4\eta}{x} [1 - \eta(\ell+1)] f(\rho) = 0 \quad (293.6)$$

با ضرب کردن معادله (۲۹۳.۶) در  $x/4\eta$  به دست می‌آید:

$$x \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (2\ell + 2 - x) \frac{df(x)}{dx} + \left( \frac{1}{\eta} - \ell - 1 \right) f(x) = 0 \quad (294.6)$$

<sup>۵۹</sup>Principal Quantum Number

معادله (۲۹۴.۶) اگر جایگزین‌های زیر را انجام دهیم، معادل معادله عمومی لاگر<sup>۶۰</sup> است:

$$\begin{aligned} j &= 2\ell + 1 \\ n &= \frac{1}{\eta} \end{aligned} \quad (295.6)$$

که در آن  $n \geq \ell + 1$  است. در واقع معادله کلی لاگر به صورت زیر است:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (j + 1 - x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad (296.6)$$

معادله (۲۹۶.۶) تنها در صورتی جواب غیر مفرد را می‌پذیرد که  $n$  یک عدد صحیح غیرمنفی باشد. با جایگزینی معادله (۲۹۵.۶)، معادله (۲۹۴.۶) می‌شود:

$$x \frac{d^2 L_{n_r}^j(x)}{dx^2} + (j + 1 - x) \frac{dL_{n_r}^j(x)}{dx} + n_r L_{n_r}^j(x) = 0 \quad (297.6)$$

که  $n_r = n - \ell - 1$  است. دو عدد کوانتومی داریم:  $n$  به نام عدد کوانتومی اصلی و  $n_r$  به نام عدد کوانتومی شعاعی. بنابراین، کوانتیزاسیون در معادله شرودینگر شعاعی با درخواست اینکه جواب‌های آن باید غیرمفرد باشند، تحمیل می‌شود. حل معادله لاگر تعمیم یافته با چندجمله‌ای‌های لاگر تعمیم یافته به دست می‌آید:

$$L_{n_r}^j(x) = \frac{e^x x^{-j}}{n_r!} \frac{d^{n_r}}{dx^{n_r}} (e^{-x} x^{n_r+j}) \quad (298.6)$$

پس از کمی عملیات جبری، در نهایت می‌توانیم تابع موج شعاعی نرمال شده را به صورت زیر بنویسیم:

$$R_{n\ell}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}} e^{-\frac{r}{na_0}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2r/na_0) \quad (299.6)$$

و تابع موج کامل اتم هیدروژن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (300.6)$$

بیابید شرایط سه عدد کوانتومی  $n\ell$  و  $m$  را خلاصه کنیم:

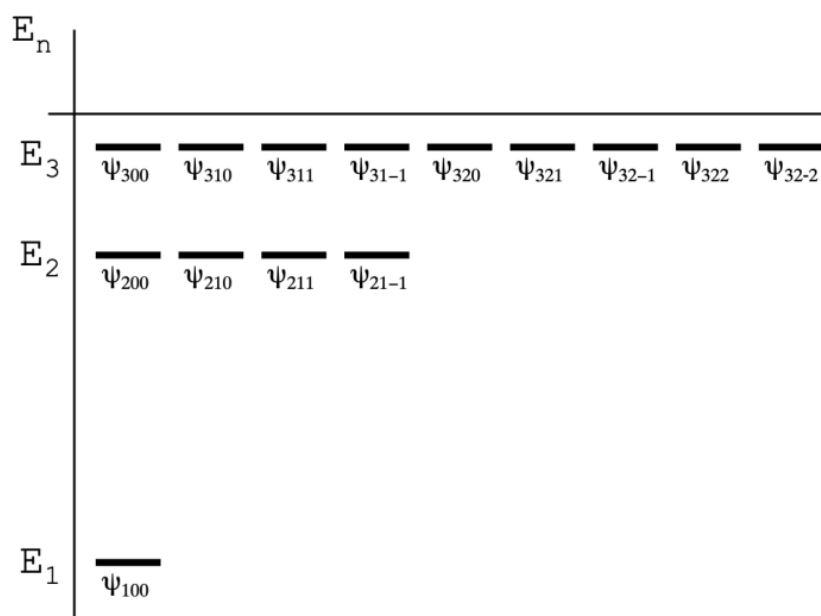
$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell \end{aligned} \quad (301.6)$$

فیزیکدانان  $n$  عدد کوانتومی اصلی، عدد کوانتومی مداری  $\ell$  و عدد کوانتومی مغناطیسی  $m$  می‌نامند. علاوه بر این، دیدیم که الکترون‌ها دارای یک عدد کوانتومی اضافی  $m_s$  هستند که عدد کوانتومی اسپین نامیده می‌شود.

اگرچه توابع موج اتم هیدروژن (۳۰۰.۶) به سه عدد کوانتومی (۳۰۱.۶) بستگی دارد. معادله (۲۸۶.۶) به ما می‌گوید که سطوح انرژی نسبت به  $\ell$  و  $m$  منحل degenerate هستند،

<sup>۶۰</sup> General Laguerre Equation

به این معنی که سطوح انرژی دارای عدد کوانتومی اصلی  $n$  یکسان، اما اعداد کوانتومی متفاوت  $\ell$  و  $m$ ، انرژی مشابهی دارند که در شکل (۱۱.۶) نشان داده شده است.



شکل ۱۱.۶: سه سطح اول انرژی در اتم هیدروژن انحطاطی degenerate می‌شود. توابع موج به صورت  $\Psi_{n\ell m}$  برچسب گذاری می‌شوند.

اکنون در موقعیتی هستیم که توابع موج کامل  $\Psi_{n,\ell,m}$  را برای اتم هیدروژن بنویسیم. فقط سه سطح انرژی اول  $n = 1, 2, 3$  را یادداشت می‌کنیم. اولین سطح بنیادی مربوط به  $n = 1$ ،  $\ell = 0$  و  $m = 0$  تابع موج دارد:

$$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}} \quad (30.2.6)$$

سطح دوم  $n = 2$  دارای چهار تابع موج منحنی است: یک تابع موج منفرد زمانی که  $\ell = 0$ ،  $m = 0$  و سه تابع موج مربوط به  $\ell = 1$  و  $m = -1, 0, 1$

$$\begin{aligned} \Psi_{200} &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{r}{a_0} \right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \\ \Psi_{210} &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{5/2} r e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos \theta \\ \Psi_{21\pm 1} &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{5/2} r e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin \theta e^{\mp j\phi} \end{aligned} \quad (30.3.6)$$

سطح سوم  $n = 3$  دارای ۹ تابع موج منحنی است: یک تابع موج منفرد زمانی که  $\ell = 0$ ،  $m = 0$  سه تابع موج مربوط به  $\ell = 1$  و  $m = -1, 0, 1$  و پنج تابع موج مربوط به  $\ell = 2$  و



$$m = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$\begin{aligned}\Psi_{300} &= \frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \sqrt{\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}} \left[ 27 - \frac{18r}{a_0} + 2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \right] e^{-\frac{r}{3a_0}} \\ \Psi_{310} &= \frac{1}{81} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left[ \frac{6r}{a_0} - \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \right] e^{-\frac{r}{3a_0}} \cos \theta \\ \Psi_{31\pm 1} &= \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left[ \frac{6r}{a_0} - \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \right] e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin \theta e^{\mp j\phi} \quad (3.4.6) \\ \Psi_{320} &= \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{7/2} r^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ \Psi_{32\pm 1} &= \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{7/2} r^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin \theta \cos \theta e^{\mp j\phi} \\ \Psi_{32\pm 2} &= \frac{1}{162\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{7/2} r^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \sin^2 \theta e^{\mp 2j\phi}\end{aligned}$$

تعداد سطح انرژی منحنی را می‌توان با توجه به اینکه برای هر  $n$  حالت  $(\ell - 1)$  وجود دارد محاسبه کرد. علاوه بر این، برای هر  $\ell$  حالت  $(2\ell + 1)m$  حالت وجود دارد. بنابراین انحطاط عبارت است از:

$$\sum_{\ell}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2 \quad (3.5.6)$$

به این معنی که  $n^2$  سطح منحنی با همان  $n$  وجود دارد. در شیمی، توابع موجی که یک الکترون منفرد را توصیف می‌کنند، اوربیتال<sup>۶۱</sup> نامیده می‌شوند و از آنجایی که آنها توابع مختلط سه‌بعدی فضا هستند، ساختن یک نمایش بصری بسیار دشوار است. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند چندین نمایش از اوربیتال‌ها را در ادبیات علمی بیابند. شایان ذکر است که یافتن اوربیتال‌هایی که بر اساس عدد کوانتومی  $\ell$  برچسب گذاری شده‌اند، رایج است. این نامگذاری طیف‌سنجی حالت‌های کوانتومی منشأ تاریخی دارد و به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ell & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ & & s & p & d & f & g & h & \end{array} \quad (3.6.6)$$

## ۴.۶ اصل انحصار (طرد) پائولی

در بخش قبل دیدیم که حل معادله شرودینگر برای اتم هیدروژن نشان داد که تابع موج توصیف کننده الکترون در حال چرخش به سه عدد کوانتومی تحت شرایط (3.1.6)

<sup>۶۱</sup>Orbital

بستگی دارد. این بدان معناست که یک الکترون هنگام مواجهه با پروتون، می‌تواند خود را روی یک مدار خاص قرار دهد که از کمترین انرژی شروع می‌شود. با توجه به معادله (۲۸۶.۶)، مداری که کمترین انرژی را دارد مداری است که با  $n = 1$  مطابقت دارد. اگر بخواهیم فناوری دستکاری ذرات منفرد را داشته باشیم و بخواهیم اتم‌های پیچیده‌تری را با شروع از یک اتم هیدروژن سنتز کنیم، می‌توانیم با افزودن یک پروتون (و دو نوترون) به هسته، اتم بعدی، اتم هلیم را بسازیم. برای اینکه یک اتم خنثی داشته باشیم، باید یک الکترون اضافی اضافه کنیم. سوال این است: کجا می‌توان چنین الکترونی را در خود جای داد؟

اگر هیچ محدودیتی وجود نداشت، ساده‌ترین پاسخ این بود که تا حد امکان الکترون‌ها را در کمترین حالت انرژی که مربوط به  $n = 1$ ،  $\ell = 0$  و  $m = 0$  است، بسته بندی کنیم. یا به عبارت دیگر، تمام الکترون‌های روی مدار  $1s$  که ۱ نشان‌دهنده عدد کوانتومی اصلی است. متأسفانه، این پیشنهاد با شواهد تجربی، از جمله تناوب جدول عناصر مندلیف، تأیید نشده است.<sup>۶۲</sup>

دیدیم که الکترون‌ها دارای اسپین نیمه صحیح هستند که یک عدد کوانتومی اضافی را تشکیل می‌دهد. در مونتاژ ایده‌آل اتم هلیوم، در حالت پایه آن، باید اسپین الکترون‌ها را نیز لحاظ کنیم. این بدان معنی است که الکترون‌های موجود در اتم‌ها با چهار عدد کوانتومی مشخص می‌شوند:  $n$ ،  $\ell$ ،  $m$  و  $m_s$ . پیامدهای عدد کوانتومی اسپین، هنگام در نظر گرفتن ساختار الکترونیکی اتم‌ها، یعنی در نهایت کل حوزه شیمی، از اهمیت بالایی برخوردار است. بیایید تفاوت‌های رفتاری بین پرتوی از اتم‌های هیدروژن و پرتوی از اتم‌های هلیوم را هنگام عبور از یک میدان مغناطیسی ناهمگن مطالعه کنیم. قبلاً آزمایش اشترن و گرلاخ را مطالعه کرده‌ایم که در آن پرتوی از اتم‌های نقره، یعنی اتم‌هایی با فقط یک الکترون در مدار  $s$ ، به دو پرتو تقسیم می‌شوند که گشتاور مغناطیسی ذاتی یا اسپین الکترون را آشکار می‌کنند. پرتویی از اتم‌های هیدروژن دقیقاً به همان شیوه رفتار می‌کند که نشان می‌دهد هیدروژن نیز مانند نقره به دو پرتو تقسیم می‌شود که مربوط به دو حالت کوانتیزه چرخش به بالا و پایین با توجه به جهت میدان مغناطیسی ناهمگن است. پرتوی از اتم‌های هلیوم، در حالت پایه، وقتی از یک مغناطیسی ناهمگن عبور می‌کند به دو پرتو تقسیم نمی‌شود که نشان می‌دهد افزودن یک الکترون دیگر به اوربیتال  $s$  توانسته است هر خاصیت مغناطیسی را از بین ببرد. می‌توانیم این فقدان مغناطیس را با این فرض توضیح دهیم که دو الکترون در مدار  $1s$  با اسپین‌های ضد موازی تزویج می‌شوند، یعنی یک الکترون به سمت بالا و دیگری به سمت پایین می‌چرخد، بنابراین به‌طور موثر اسپین کل را خنثی می‌کند که منجر به گشتاور مغناطیسی صفر می‌شود. این یک واقعیت تجربی است که حالت‌های هلیوم که در آن دو الکترون در مدار  $1s$  هر دو بالا یا هر دو پایین هستند مشاهده نمی‌شود. با این حال، اگر اتم‌های هلیوم برانگیخته شوند، شکافتن مشاهده می‌شود که به این واقعیت اشاره دارد که الکترون در اوربیتال‌های مختلف اکنون می‌تواند اسپین موازی داشته باشد.

این حقایق تجربی به‌اصولی به نام اصل طرد یا انحصار پائولی اشاره می‌کنند که بیان می‌کند در یک مدار معین، دو الکترون با اعداد کوانتومی یکسان مجاز نیستند. با مسلح

<sup>۶۲</sup> بحث در مورد داستان زیبای جدول تناوبی و ارتباط آن با فیزیک کوانتوم از حوصله این کتاب خارج است.

شدن به اصل انحصار پائولی<sup>۶۳</sup>، جدول تناوبی عناصر را می‌توان ساخت. از آنجایی که اصل انحصار پاولی شامل دو ذره از یک نوع، مانند دو الکترون است، ما باید سیستم‌های کوانتومی بسیاری از ذرات را مطالعه کنیم. به‌طور کلاسیک، می‌توانیم بسیاری از سیستم‌های ذره‌ای را با برچسب‌گذاری هر ذره با یک شاخص بحث کنیم، به این معنی که همیشه می‌توانیم کاری را که ذره  $i$  انجام می‌دهد دنبال کنیم. در مکانیک کوانتومی، می‌دانیم که دینامیک ذرات با ارائه تابع موج آنها کاملاً مشخص می‌شود. همچنین دیده‌ایم که توابع موج اغلب در کل فضا زمان تعریف می‌شوند. بنابراین، برای مثال، هنگامی که با یک سیستم متشکل از دو الکترون سروکار داریم، ممکن است توابع موج آنها همپوشانی داشته باشند. وقتی یکی از دو الکترون را تشخیص می‌دهیم این سوال پیش می‌آید: کدام الکترون را شناسایی کرده‌ایم؟ مکانیک کوانتومی به ما می‌گوید که نمی‌توانیم بدانیم کدام یک از دو الکترون را عمده‌شناسایی کرده‌ایم، زیرا مکانیک کوانتومی احتمال یافتن الکترون را در یک منطقه خاص از فضا در زمان معینی به ما می‌گوید. مکانیک کوانتومی تحمیل می‌کند که دو الکترون باید توسط یک تابع موج چند الکترونی منفرد توصیف شوند و هیچ راهی برای تمایز بین دو الکترون وجود ندارد. در مکانیک کوانتومی، الکترون‌ها قابل تشخیص نیستند.

این واقعیت که الکترون‌ها قابل تشخیص نیستند پیامدهای فوری دارد. بیایید با  $\Psi(r_1, r_2)$  تابع موجی را که دو الکترون واقع در موقعیت‌های  $r_1$  و  $r_2$  را توصیف می‌کند، نشان دهیم. اگر موقعیت دو الکترون را مبادله کنیم تابع موج متفاوت  $\Psi(r_2, r_1)$  بدست می‌آوریم. از آنجایی که الکترون‌ها قابل تشخیص نیستند، باید احتمال پیدا کردن یک الکترون در  $r_1$  و یک الکترون در  $r_2$  به تعویض الکترون‌ها بستگی نداشته باشد. به عبارت دیگر:

$$|\Psi(r_1, r_2)|^2 = \Psi^*(r_1, r_2)\Psi(r_1, r_2) = \Psi^*(r_2, r_1)\Psi(r_2, r_1) \quad (۳۰۷.۶)$$

معادله (۳۰۷.۶) نشان می‌دهد که توابع موج تعویضی رابطه زیر را ارضاء می‌کند:

$$\Psi(r_2, r_1) = e^{-j\phi}\Psi(r_1, r_2) \quad (۳۰۸.۶)$$

اگر دو بار الکترون را مبادله کنیم، باید تابع موج اصلی را به دست آوریم. این بدان معناست که تابع موج اصلی دارای ضریب  $e^{-j\phi}$  دو بار است. برای به دست آوردن مجدد تابع موج اصلی باید داشته باشیم:

$$e^{-j\phi}e^{+j\phi} = e^{-j2\phi} = 1 \quad (۳۰۹.۶)$$

این بدان معناست که  $\phi = 0$  یا  $\phi = n\pi$  و بنابراین ضریب فاز در جلو تابع موج فقط می‌تواند مقادیر  $\pm 1$  را در نظر بگیرد. دو راه حل برای  $\phi$  بیانگر این است که تابع موج، تحت تبادل

<sup>۶۳</sup>ولفگانگ پاولی (۱۹۰۰ – ۱۹۵۸) فیزیکدان اتریشی بود که در توسعه مکانیک کوانتومی مشارکت داشته است. او علاوه بر پیشنهاد اصل انحصار، که به خاطر آن در سال ۱۹۴۵ جایزه نوبل را دریافت کرد، وجود نوترینو را نیز فرضیه کرده است.

ذرات باید پیرو رابطه زیر باشد:

$$\Psi(r_1, r_2) = \pm \Psi(r_2, r_1) \quad (۳۱۰.۶)$$

اجازه دهید عملگر مبادله  $\hat{P}$ <sup>۶۴</sup> را معرفی کنیم که هنگام عمل بر روی  $\Psi(r_1, r_2)$ ، دو ذره<sup>۶۵</sup> را مبادله می‌کند.

عملگر  $\hat{P}$  باید دامنه احتمال (۳۰۷.۶) را بدون تغییر بگذارد. چنین عملگر، هنگامی که به یک تابع موج اعمال می‌شود،  $\pm$  تابع موج اصلی را برمی‌گرداند:

$$\hat{P}\Psi(r_1, r_2) = \pm \Psi(r_2, r_1) \quad (۳۱۱.۶)$$

مقادیر ویژه  $\hat{P}$  برابر  $\pm 1$  است که توابع موج را به دو کلاس تقسیم می‌کند، یعنی دو نوع مختلف ذره را توصیف می‌کند. داریم که ذرات توصیف شده توسط یک تابع موج متقارن تحت  $\hat{P}$ ، یعنی توابع موج بدون تغییر تحت تبادل ذرات، بوزون نامیده می‌شوند و دارای اسپین عدد صحیح هستند. ذرات ضد متقارن از نظر مبادله، یعنی با توابع موجی که علامت خود را در اثر تبادل ذرات معکوس می‌کنند، فرمیون نامیده می‌شوند و دارای اسپین نیمه صحیح هستند.

واضح است که فرمیون‌ها که با تابع موج ضد متقارن مشخص می‌شوند، نمی‌توانند همزمان در یک مکان همزیستی داشته باشند. در واقع، اگر دو فرمیون در یک مکان باشند، تابع موج آنها  $\Psi(r, r)$  خواهد بود که در صورت مبادله  $\Psi(r, r) - \Psi(r, r)$  تابع موج را مجبور به صفر می‌کند. تنها راه فرار این است که آنها یک عدد کوانتومی اضافی، اسپین داشته باشند، که مستلزم آن است که دو الکترون با تابع موج متفاوتی توصیف شوند. از آنجایی که الکترون‌ها دارای اسپین  $1/2$  هستند، یک اوربیتال معین می‌تواند تنها دو الکترون را در خود جای دهد، مشروط بر اینکه اسپین ضد موازی داشته باشند.

ذرات اسپین اعداد صحیح، یعنی بوزون‌ها می‌توانند در هر عددی با اعداد کوانتومی یکسان مانند، به اصطلاح چگالش‌های بوز-اینشتین<sup>۶۶</sup> یا فوتون‌های موجود در حفره لیزری، همزیستی داشته باشند.

## ۵.۶ تصویر هایزنبرگ

در سراسر این کتاب، سیستم‌های کوانتومی را به‌عنوان تابع موجی که حل معادله شرودینگر هستند، نشان دادیم. در این نمایش مکانیک کوانتومی، قابل مشاهده‌ها توسط عملگرهای

<sup>۶۴</sup>Exchange

<sup>۶۵</sup> با توجه به اینکه طبق مکانیک کوانتومی نمی‌توانیم ذرات را تشخیص دهیم، باید به‌درستی بیان کنیم که عملگر  $\hat{P}$  در تابع موج  $\Psi(r_1, r_2)$  برچسب‌های غیرفیزیکی، یعنی برچسب‌های ۱ و ۲ را مبادله می‌کند. <sup>۶۶</sup> نمونه‌ای از میعان‌ات بوز-اینشتین، مایع  $^4\text{He}$  است که در دمای بحرانی حدود ۲.۱۷ کلوین قرار دارد. اتم‌های  $^4\text{He}$  دارای تعداد زوج پروتون و نوترون هستند که در زیر ۲.۱۷K یک اسپین عدد صحیح می‌دهند و ابرشاره می‌شوند. ابرشاره با چگالش جزئی بوز-اینشتین توضیح داده می‌شود.  $^3\text{He}$  اتم‌های هلیوم، یعنی اتم‌های هلیوم که در آن هسته دارای ۲ پروتون و یک نوترون است، فرمیون هستند و ابرشاره از خود نشان نمی‌دهند مگر اینکه در دمای بسیار پایین (۲.۵mK) سرد شوند، جایی که دو اتم می‌توانند ضعیف به هم متصل شوند و مانند یک بوزون رفتار کنند.

هرمیتی که تابع‌های موج را عمل می‌کنند، نشان داده می‌شوند. عملگرها در زمان ثابت هستند و مبنایی که عملگرها تعریف می‌شوند با زمان تغییر می‌کنند. اگر به‌نمایش هندسی خود از یک کمیت برداری فکر کنیم، نمایش عجیبی است. در ذهن نیوتنی ما در واقع، بردارها با زمان تغییر می‌کنند، طبق قانون نیوتن و مختصاتی که برای نشان دادن بردارها استفاده می‌کنیم با زمان ثابت می‌شوند. اگر با  $|\Psi_S(t)\rangle$  تابع موج وابسته به‌زمان را در نمایش شرودینگر نشان دهیم، عملگرهای عمومی در زمان ثابت هستند. تابع موج براساس معادله شرودینگر مبنای تغییر با زمان را تشکیل می‌دهد:

$$\frac{d}{dt}|\Psi_S(t)\rangle = \frac{j}{\hbar}\hat{H}|\Psi_S(t)\rangle \quad (۳۱۲.۶)$$

که می‌تواند به طور رسمی معکوس شود تا تابع موج در زمان  $t$  با دانستن تابع موج در زمان  $t = 0$  باشد:

$$|\Psi_S(t)\rangle = e^{j\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\Psi_S(0)\rangle \quad (۳۱۳.۶)$$

که در آن عملگر کوانتومی همیلتونی  $\hat{H}$  در توان معادله (۳۱۳.۶) بر حسب بسط سری توان محاسبه می‌شود:

$$e^{j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( j\frac{\hat{H}}{\hbar}t \right)^n \quad (۳۱۴.۶)$$

معادله (۳۱۳.۶) را می‌توان به‌صورت  $|\Psi_S\rangle = \hat{U}(t)|\Psi_S(0)\rangle$ ، که در آن عملگر تکامل زمان واحد است.

ممکن است بپرسیم: «آیا می‌توان نمایش متفاوتی از مکانیک کوانتومی داشت، که در آن، در قیاس با فیزیک کلاسیک، عملگرها با زمان تغییر می‌کنند و مبنای بیان عملگرها ثابت است؟». پاسخ مثبت است و این نمایش خاص، تصویر هایزنبرگ از مکانیک کوانتومی نام دارد.

بازنمایی هایزنبرگ از مکانیک کوانتومی که مکانیک ماتریسی نیز نامیده می‌شود، در واقع قبل از مکانیک شرودینگر منتشر شده بود، اما از نظر ریاضی چالش‌برانگیزتر بود و زمان بیشتری طول کشید تا توسط جامعه علمی پذیرفته شود.

با توجه به نمایش هایزنبرگ از مکانیک کوانتومی، مبنای  $|\Psi_H\rangle$  با زمان تغییر نمی‌کند. وابستگی زمانی با ضرب رسمی معادله (۳۱۳.۶) توسط ضریب  $e^{-j\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$  حذف می‌شود:

$$|\Psi_H\rangle = e^{-j\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\Psi_S\rangle = e^{-j\frac{\hat{H}}{\hbar}t}e^{j\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\Psi_S(0)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle \quad (۳۱۵.۶)$$

که در آن  $|\Psi_H\rangle$  مبنای مستقل از زمان در نمایش هایزنبرگ است. در حالی که اکنون مبنای در زمان ثابت است، وابستگی زمانی به عملگرهای  $\hat{A}_H = \hat{A}_H(t)$  منتقل می‌شود. اگر  $\hat{A}_S$  یک عملگر ثابت در نمایش شرودینگر باشد، با استفاده از معادله (۳۱۵.۶) می‌توانیم

همان عملگر را در نمایش هایزنبرگ با محاسبه امید ریاضی بیان کنیم:

$$\begin{aligned}\langle \hat{A}_S \rangle &= \langle \Psi_S(t) | \hat{A}_S | \Psi_S(t) \rangle \\ &= \langle \Psi_S(0) | e^{-j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \hat{A}_S e^{j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} | \Psi_S(0) \rangle \\ &= \langle | \Psi_H | \hat{A}_H | \Psi_H \rangle\end{aligned}\quad (316.6)$$

که در آن عملگر  $\hat{A}$  در نمایش هایزنبرگ با نمایش شرودینگر آن با رابطه زیر مربوط می شود:

$$\hat{A}_H(t) = e^{-j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \hat{A}_S e^{j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \quad (317.6)$$

با محاسبه مشتق زمانی می توانیم تکامل زمانی عملگر هایزنبرگ را به صراحت محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}}{dt} &= \frac{-j}{\hbar} \hat{H} e^{-j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \hat{A} e^{j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} + e^{-j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} e^{j\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \\ &= \frac{-j}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (318.6)$$

معادله (318.6) معادله هایزنبرگ نامیده می شود و بر وابستگی زمانی عملگرها در نمایش هایزنبرگ حاکم است. معادله (318.6) هایزنبرگ معادل با براکت پواسون معادله (85.1) مکانیک کلاسیک است.

پی. ای. ام. دیراک<sup>۶۷</sup> می گوید که می توان با تفسیر مجدد همه متغیرهای کلاسیک به عنوان عملگر با اضافه کردن مهم تحمیل یک رابطه کموتاسیون بر عملگرهای اساسی، از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی گذر کرد. براکت های پواسون  $\{q, p\} = 1$  مکانیک کلاسیک سپس تبدیل به جایجایی  $[q, p] = -j\hbar$  مکانیک کوانتومی می شوند. دیراک همچنین به اصطلاح **تصویر تعاملی**<sup>۶۸</sup> را معرفی کرده است که در آن عملگرها و اساس هر دو به زمان بستگی دارند. تصویر برهمکنش زمانی مفید است که همیلتونین بسیاری از ذرات را می توان به صورت مجموع دو جمله  $H = H_0 + H_{int}$  نوشت که در آن  $H_0$  همیلتونین برای ذرات آزاد به اضافه یک عبارت برهمکنش اشاره دارد.

## ۶.۶ چرا عدد موهومی ز را بکار بردیم؟

ریاضیات مکانیک کوانتومی که در این کتاب توضیح داده ایم، استفاده زیادی از اعداد مختلط می کند. از سوی دیگر، تمام کمیت های قابل مشاهده مانند موقعیت، تکانه، انرژی و غیره با اعداد حقیقی توصیف می شوند. دیدیم که هر دو معادله شرودینگر و هایزنبرگ که تکامل زمانی یک سیستم کوانتومی را توصیف می کنند دارای عدد موهومی<sup>۶۹</sup> "j" که

<sup>۶۷</sup> پل آدرین موریس دیراک (1902 – 1984) یک فیزیکدان انگلیسی بود که کمک های اساسی به مکانیک کوانتومی اولیه و بعداً در الکترودینامیک کوانتومی کرد. او از طریق معادله دیراک خود فرمیون ها را به درستی توصیف کرد و وجود پادذرات را پیش بینی کرد. او در سال 1933 جایزه نوبل فیزیک را دریافت کرد.

<sup>۶۸</sup> Interaction Picture

<sup>۶۹</sup> در سراسر این کتاب ما از عدد مختلط  $j$  بجای  $i$  استفاده کرده ایم. اگر با این روش که مهندسين برق استفاده می کنند مورد علاقه شما نمی باشد می توانید آنرا تعویض نمایید تا فرمول های کتاب بدست آید.

هستند. در واقع، عملگرهایی که نمایش‌پذیرها را نشان می‌دهند، باید هرمیشن باشند، که دارای ویژگی داشتن مقادیر ویژه واقعی هستند که دامنه نتایج احتمالی یک اندازه‌گیری را نشان می‌دهند.

تلاش برای بررسی دلایل پیدایش اعداد مختلط در مکانیک کوانتومی جالب است. اگر خواننده از تعداد قابل توجهی از فیزیکدانان نظرسنجی کند که چرا مکانیک کوانتومی به اعداد مختلط نیاز دارد، اکثریت احتمالاً پاسخ خواهند داد "زیرا کار می‌کند". این پاسخ بدون شک قابل قبول است زیرا از امروز مکانیک کوانتومی بهترین چارچوب نظری برای تفسیر طیف وسیعی از داده‌های تجربی به‌نظر می‌رسد. به عبارت دیگر، تاکنون یک مدرک تجربی بر علیه مکانیک کوانتومی نمی‌دانیم.<sup>۷۰</sup>

بیایید با اشاره به این نکته که در نمایش هایزنبرگ، فیزیک توسط جابجایی‌کننده‌های بین عملگرهای هرمیتی توصیف می‌شود، شروع کنیم. بیایید عملگر  $C$  را به عنوان جابجایی دو عملگر هرمیشن  $A$  و  $B$ ، یعنی  $C = [A, B]$  صدا کنیم. از آنجایی که  $A$  و  $B$  هرمیشن هستند، اگر بخواهد یک قابل مشاهده را نمایش دهد، عملگر  $C$  نیز باید هرمیشن باشد. با استفاده از خاصیت  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ، داریم:

$$C^\dagger = [A, B]^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger] = [B, A] = -[A, B] = -C \quad (۳۱۹.۶)$$

یعنی اپراتور  $C$  ضد هرمیت است. تنها راهی که می‌توان آن را هرمیشن کرد ضرب آن در  $i$  است. در واقع، اگر  $C = -j[A, B]$  را تعریف کنیم، بلافاصله نتیجه می‌شود که  $C$  هرمیشن است. سپس ضرب در  $\hbar$  برای اطمینان از ابعاد فیزیکی صحیح مانند کموتاتور موقعیت-ممنتوم هایزنبرگ  $[q, p] = qp - pq = -j\hbar$  لازم است.

پس از اینکه عملگرها می‌توانند مختلط باشند، اکنون توجه خود را به تابع موج معطوف می‌کنیم. آیا می‌توانیم مکانیک کوانتومی با توابع موج حقیقی عملگرهای مختلط داشته باشیم؟ از این گذشته، الکتروپدینامیک کلاسیک به امواج الکترومغناطیسی اجازه می‌دهد که به صورت زیر نوشته شوند:

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (۳۲۰.۶)$$

توصیف موج صفحه‌ای که در جهت  $x$  منتشر می‌شود. می‌دانیم که موج کلاسیک (۳۲۰.۶) را می‌توان به دو مولفه که با فرکانس مثبت و منفی مشخص می‌شود تجزیه کرد. در واقع با استفاده از اتحاد اویلر در معادله (۳۲۰.۶) داریم که:

$$E_x = \frac{E_0}{2} \left( e^{-j(kz - \omega t)} + e^{j(kz - \omega t)} \right) \quad (۳۲۱.۶)$$

<sup>۷۰</sup> می‌دانیم که مکانیک کوانتومی و نسبیت عام نمی‌توانند در مقیاس‌های کوچک در حضور میدان‌های گرانشی قوی، یعنی مقیاس‌های انرژی بالا، معتبر باشند. به عنوان نمونه‌ای از چنین ناسازگاری، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را در نظر بگیرید که می‌گوید نمی‌توانیم حرکت و موقعیت را به‌طور همزمان اندازه‌گیری کنیم. نسبیت عام به ما می‌گوید که تکانه فضا-زمان مسطح را تغییر می‌دهد که به‌نوبه خود نحوه اندازه‌گیری موقعیت را تعیین می‌کند. این نوع بازخورد هنوز توسط مکانیک کوانتومی و نسبیت عام توصیف نشده است.

معادله (۳۲۱.۶) به ما می گوید که هر سیگنال سینوسی حقیقی را می توان به مجموع یک جزء فرکانس مثبت و منفی تجزیه کرد. این نتیجه را می توان به هر نوسان حقیقی قابل مشاهده تعمیم داد. در واقع، با توجه به یک سیگنال سینوسی حقیقی  $f(t)$ ، تبدیل فوریه آن به صورت زیر است:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j2\pi\omega t} dt \quad (322.6)$$

که در آن همیشه خواهیم داشت:

$$|\mathcal{F}(\omega)| = |\mathcal{F}(-\omega)| \quad (323.6)$$

معادله (۳۲۱.۶) را می توان به صورت زیر تفسیر کرد: هر سیگنال سینوسی حقیقی را می توان به مجموع دو سینوسی مختلط تجزیه کرد که هر کدام به ترتیب مولفه های فرکانس منفی  $(-j\omega t)$  و مثبت  $(j\omega t)$  را نشان می دهند. ترکیب خاص دو سینوسی مختلط در نتیجه یک سینوسی حقیقی می دهد. سینوسی های مختلط به طور مداوم در فیزیک و مهندسی به جای سینوس یا کسینوس حقیقی استفاده می شوند به شرطی که در پایان فقط قسمت حقیقی را در نظر بگیریم و قسمت موهومی را دور بریزیم. ترکیب (۳۲۱.۶) تضمین می کند که بخش موهومی دقیقاً از بین می روند. سینوس های مختلط همچنین دارای ویژگی های مناسب داشتن یک مدول ثابت هستند که همانطور که در ادامه خواهیم دید، در مکانیک کوانتومی بسیار مهم است.

قبلاً در این کتاب دیده ایم که شواهد تجربی فراوانی وجود دارد مبنی بر اینکه ذرات عظیمی مانند الکترون ها برای توضیح پدیده های تداخلی باید با موجی با طول موج  $\lambda = \frac{h}{p}$  مرتبط شوند. سوال این است: آیا می توانیم از یک موج حقیقی مانند (۳۲۰.۶) برای توصیف موج مرتبط با یک ذره عظیم استفاده کنیم؟ اگر ذره دارای انرژی غیر نسبیتی برابر  $\frac{p^2}{2m}$  باشد، در صورتی که جرم آن مثبت است، باید انرژی مثبت داشته باشد. علاوه بر این، اگر انرژی مثبت باشد، با توجه به فرمول پلانک  $E = h\nu$ ، تابع موج باید فقط دارای بخش انرژی مثبت معادله (۳۲۱.۶) باشد. این بدان معنی است که تابع موج باید به شکل زیر باشد:

$$\Psi \propto e^{-j(kx - \omega t)} \quad (324.6)$$

به این معنی که تابع موج باید مختلط باشد.

اگر [۴۰] [۲۱] تفسیر بورن از تابع موج را همراه با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در نظر بگیریم، این استدلال تقویت می شود. به گفته هایزنبرگ، دیده ایم که اگر ذره ای را با تکانه  $p_x$  مشخص در امتداد محور  $x$  در نظر بگیریم، نمی توانیم هیچ پیش بینی در مورد موقعیت  $x$  آن داشته باشیم. با پیروی از دو برولی، و با نادیده گرفتن وابستگی زمانی، بیایید سعی کنیم تابع موج مرتبط را بر حسب طول موج به عنوان تابعی حقیقی از شکل زیر بیان کنیم:

$$\Psi(x) = A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = A \cos \frac{p_x x}{\hbar} \quad (325.6)$$



که در آن از رابطه دو بروگلی در آخرین برابری استفاده کرده‌ایم. اکنون فرض می‌کنیم که دقیقاً مقدار  $p_x$  را می‌دانیم. در این حالت باید عدم قطعیت کامل در موقعیت ذره داشته باشیم. اگر بخواهیم از تفسیر بورن از تابع موج (۳۲۵.۶) استفاده کنیم، مدول مربع آن باید منعکس کننده این واقعیت باشد که ما هیچ اطلاعاتی در مورد موقعیت آن نداریم، یعنی مدول مربع آن باید ثابت باشد. در واقع، یک مدول مربع ثابت به ما می‌گوید که ذره دارای احتمال برابری است که در هر نقطه‌ای در امتداد محور  $x$  قرار گیرد، بنابراین اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را برآورده می‌کند. با این حال، مدول مربع (۳۲۵.۶) برابر است با:

$$|\Psi(x)|^2 = |A|^2 \cos^2 \frac{p_x x}{\hbar} \quad (۳۲۶.۶)$$

که یک تابع نوسانی با ماکزیمم و مینیمم تناوبی است. این بدان معناست که می‌دانیم که ذره می‌تواند با احتمال بالاتر در مکان‌های حداکثر  $۶.۳۲۶$  (۳۲۶.۶) یا احتمال کمتر در مکان‌های حداقل باشد. این اصل عدم قطعیت را نقض می‌کند. از طرف دیگر، می‌توانیم یک تابع موج نوسانی برای ذره‌ای با تکانه دقیق  $p_x$  بسازیم با این فرض:

$$\Psi_c(x) = A e^{-\frac{j p_x x}{\hbar}} \quad (۳۲۷.۶)$$

این تابع موج دارای یک رفتار نوسانی است که می‌تواند تداخل را در نظر بگیرد و در عین حال دارای مدول ثابتی است که توسط:

$$|\Psi_c(x)|^2 = \Psi^*(x) \Psi(x) = A^* A e^{-\frac{j p_x x}{\hbar}} e^{\frac{j p_x x}{\hbar}} = |A|^2 \quad (۳۲۸.۶)$$

که نشان می‌دهد که می‌توانیم یک تابع موج نوسانی با مدول ثابت داشته باشیم به شرطی که اجازه استفاده از توابع مختلط را بدهیم. ممکن است تلاش دیگری برای فرمول بندی مکانیک کوانتومی با استفاده از احتمالات کلاسیک که اعداد حقیقی هستند امتحان کنیم. در این فرمول خاص، می‌توانیم سعی کنیم بردار احتمال و عملگرها را به عنوان ماتریس‌های تصادفی بنویسیم، یعنی ماتریس‌های مربعی که عناصر آن اعداد حقیقی هستند که احتمالات بین ۰ و ۱ را بیان می‌کنند. در ادامه [۲۱]، بیایید یک سیستم دو حالتی ساده را که توسط بردار ستونی توصیف شده است، در نظر بگیریم:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} \quad (۳۲۹.۶)$$

به عنوان مثال، بردار حالت (۳۲۹.۶) می‌تواند یک سیستم چرخشی یک دوم را توصیف کند، سپس می‌توانیم آن را به عنوان توصیف سیستمی تفسیر کنیم که ۳۰٪ احتمال دارد در حالت چرخش و ۷۰٪ احتمال قرار گرفتن در حالت چرخش به پایین است. نمونه‌ای از انتقال از حالت  $p_0$  به حالت جدید  $p_1$  را می‌توان با ماتریس تصادفی  $T$  زیر نشان داد:

$$T = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \quad (۳۳۰.۶)$$

اعمال ماتریس  $T$  به حالت  $p$  یک حالت جدید  $p_1$  ایجاد می‌کند:

$$p_1 = Tp_0 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.66 \end{pmatrix} \quad (۳۳۱.۶)$$

توجه داشته باشید که  $T$  به خوبی نرمال شده است تا یک ماتریس تصادفی را نشان دهد که تمام جمع ستون‌های آن 1 است.

انتقال (۳۳۱.۶) از بردار  $p_0$  شروع و به بردار  $p_1$  ختم می‌شود که یک حالت اسپین جدید با احتمال چرخش به بالا برابر با 34% و احتمال اسپین به پایین برابر با 66% است. یک بررسی صحت در حالت‌های نهایی تأیید می‌کند که احتمالات هنوز به 1 می‌رسد.

اگر اکنون نیاز داریم که ماتریس  $T$  در زمان  $t_0$  حالت  $p_0$  را بگیرد و در زمان  $t_1 > t_0$  حالت  $p_1$  را تولید کند، در حال توصیف یک تکامل زمانی سیستم هستیم. در این مورد باید تحمیل کنیم که انتقال‌های تکامل زمانی پیوسته هستند یا به عبارت دیگر، همیشه می‌توانیم انتقال  $T(t_0, t_1)$  را به دو انتقال متوالی  $T(t_0, t_1)$  و  $T(t_i, t_1)$  تجزیه کنیم به طوری که  $T(t_0, t_1) = T(t_0, t_i)T(t_i, t_1)$  جایی که  $t_i$  یک زمان میانی است. به طور کلی، وقتی تکامل زمان را در مکانیک کوانتومی در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم که فرآیندها را می‌توان به مراحل زمانی کوچکتر و کوچکتر تقسیم کرد. اگر هر مرحله توسط یک عملگر تکامل زمانی توصیف شود و با فرض  $n+1$  گام‌های زمانی مساوی  $\delta t$  باید داشته باشیم که:

$$T(t_0, t_1) = T(t_0, t_0 + \delta t)T(t_0 + \delta t, t_0 + 2\delta t) \cdots T(t_0 + n\delta t, t_1) \quad (۳۳۲.۶)$$

در مورد ساده تقسیم فاصله زمانی به دو مرحله، داریم که:

$$T(t_0, t_1) = T(t_0, t_0 + \delta t)T(t_0 + \delta t, t_1) = T(t)T(t) = T^2(t) \quad (۳۳۳.۶)$$

که در آن  $T(t)$  را عملگر تکامل زمانی نامیدیم که سیستم را با بازه زمانی  $\delta t$  تکامل می‌دهد. بنابراین پیوستگی به وجود جذر عملگر تکامل زمانی یا به طور کلی ریشه  $n$  دلالت دارد. بیایید به مثال عددی خود از معادله‌ها (۳۲۹.۶)، (۳۳۰.۶) و (۳۳۱.۶) برگردیم. و اجازه دهید ماتریس تکامل زمانی (۳۳۰.۶) را به دو ماتریس متوالی تقسیم کنیم. این با گرفتن ریشه مربع آن که می‌تواند طولانی باشد به دست می‌آید. کرم<sup>۷۱</sup> [۲۱] برای جذر (۳۳۰.۶) عبارت زیر را به دست می‌دهد:

$$\sqrt{T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - j\frac{2}{\sqrt{5}} & 1 + j\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 + j\frac{2}{\sqrt{5}} & 2 - j\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad (۳۳۴.۶)$$

نشان می‌دهد که یک ماتریس با عناصر خیالی به دست می‌آوریم.  $\sqrt{T}$  نمی‌تواند یک ماتریس تصادفی را نشان دهد که با مفروضات اولیه ما در تضاد است. بنابراین اگر نیاز به تداوم داشته باشیم مجبوریم از اعداد مختلط استفاده کنیم.

<sup>۷۱</sup>Karam

# کتاب نامه

- [1] CRC Handbook of Chemistry and Physics, Edited by John Rumble, CRC Press, 2022.
- [2] V. I. Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, 1989.
- [3] A. B. Arons and M. B. Peppard. Einstein's Proposal of the Photon Concept. American Journal of Physics, 33(5), 1965.
- [4] L. E. Ballantine. Quantum mechanics: a modern development. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.
- [5] N. Bohr. The structure of the atom. Nobel lecture, 1922.
- [6] M. Born. Zur quantenmechanik der stossvorgange. Zeitschrift für Physik, 37, 1926.
- [7] F. W. Byron and R. W. Fuller. Mathematics of classical and quantum physics. Dover Publications, Inc., 1992.
- [8] R. Resnick and D. Halliday. Physics. 1980.
- [9] R. Das. Wavelength and frequency-dependent formulations of wien's displacement law. Journal of Chemical Education, 92, 2015.
- [10] C. Davisson and L. H. Germer. The scattering of electrons by a single crystal of nickel. Nature, 119(2998), 1927.
- [11] L. de Broglie. Recherches sur la theorie des quanta (researches on the quantum theory). Annales de Physique, 3, 1925.
- [12] P. A. M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, 1958.

- [13] P. Ehrenfest and H. Kamerlingh Onnes. Simplified deduction of the formula from the theory of combinations which planck uses as the basis of his radiation theory. Philosophical Magazine, 29(170), 1914.
- [14] A. Einstein. Planck's theory of radiation and the theory of specific heat. Annalen der Physik, 22, 1907.
- [15] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. Reviews of Modern Physics, 20(2), 1948.
- [16] R. P. Feynman. The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley, 1977.
- [17] G. Gamow. Thirty years that shook physics. Doubleday and Co. Inc., 1966.
- [18] W. Gerlach and O. Stern. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. Zeitschrift für Physics, 9, 1922.
- [19] D. J. Griffiths. Introduction to quantum mechanics. Prentice Hall, Inc., 1995.
- [20] W. Heisenberg. "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinetik und Mechanik. Zeitschrift für Physik, 43, 1927.
- [21] R. Karam. Why are complex numbers needed in quantum mechanics? Some answers for the introductory level. American Journal of Physics, 88(1):39–45, 2020.
- [22] L. Kelvin. Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. Philosophical Magazine and Journal of Science, 2(7), 1901.
- [23] M.P. Hobson K.F. Riley and S.J Bence. Mathematical methods for physics and engineering. Cambridge University Press, 2002.
- [24] B. W. Levinger. The square root of a  $2 \times 2$  matrix. Mathematics Magazine, 53(4):222–224, 1980.
- [25] M. S. Longair. Theoretical concepts in physics. Cambridge University Press, 1994.
- [26] F. Mandl. Statistical physics. John Wiley and Sons, 1988.
- [27] S. A. C. McDowell. A simple derivation of the boltzmann distribution. Journal of Chemical Education, 76(10), 1999.
- [28] E. Merzbacher. Quantum Mechanics. John Wiley and Sons Inc., 1961.
- [29] R. A. Millikan. A direct determination of planck's  $h$ . Physical Review, 4, 1914.
- [30] R. A. Millikan. A direct photoelectric determination of planck's  $h$ . Physical Review, 7, 1916.

- [31] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Edited by Edmond Halley, 1687.
- [32] H.C. Ohanian. What is spin? *American Journal of Physics*, 54, 1986.
- [33] O. Passon. Kelvin's clouds. *American Journal of Physics*, 89(11), 2021.
- [34] T. E. Phipps and J. B. Taylor. The Magnetic Moment of the Hydrogen Atom. *Physical Review*, 29, 1927.
- [35] L. Piccirillo. *Introduction to the maths and physics of the solar system*. CRC Press, 2020.
- [36] H. Rubens and F. Kurlbaum. On the heat radiation of long wave-length emitted by black bodies at different temperatures. *Astrophysical Journal*, 14, 1901.
- [37] E. Rutherford. Retardation of the  $\alpha$  particle from radium in passing through matter. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 12, 1906.
- [38] L. I. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1955.
- [39] C. T. Sebens. How electrons spin. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 68, 2019.
- [40] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics - Second edition*. Springer, 1994.
- [41] A. Small and K. S. Lam. Simple derivations of the hamilton–jacobi equation and the eikonal equation without the use of canonical transformations. *American Journal of Physics*, 79, 2011.
- [42] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit. Ersetzung der hypothese vom unmechanischen zwang durch eine forderung bezüglic des inneren verhaltens jedes einzelnen elektrons. *Die Naturwissenschaften*, 13, 1925.
- [43] S. Mandelstam and W. Yourgrau. *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*. Pitman Publishing Corporation, 1960.
- [44] B. R. Wheaton. Lenard and the photoelectric effect. *Historical Studies in the Physical Sciences*, 9, 1978.
- [45] W. Wien. On the division of energy in the emission-spectrum of a black body. *Philosophical Magazine*, 43, 1897.

# نمایه

- آرنولد سامرفلد، ۱۹۰  
 آزمایش هالواچ، ۷۶  
 اسپینور، ۲۱۴  
 اشترن و گراخ، ۱۸۹  
 اصل، ۱۸۷  
 اصل برهم‌نهی (جمع اثرها)، ۱۱۹  
 اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، ۱۲۷  
 اصل موپرتیوز، ۱۰۳  
 اصل همیلتون، ۱۶  
 اصل، فرضیه، ۷  
 اصول موضوعه، ۱۱۹  
 الحاق، ۱۴۱  
 الحاقی، ۱۷۳  
 امواج راهنما، ۹۸  
 امواج پیلوت (راهنما)، ۹۸  
 اوربیتال، ۲۲۷  
 بدیهی، ۱۸۷  
 بردارهای ویژه، ۱۷۴  
 بنیاد، ۷  
 بورن، ۱۱۸  
 بوزون، ۲۱۸  
 بومی‌سازی، ۱۳۴  
 تابش طیفی، ۶۹  
 تابش گسیلی، ۶۹  
 تبدیل تشابهی، ۱۷۷  
 تبدیل لژاندر، ۱۰۸  
 تبدیلات متعارف، ۳۱، ۱۰۶  
 ترانسپوز (ترانهش)، ۱۶۹  
 تصویر تعاملی، ۲۳۲  
 توابع لژاندر وابسته، ۲۱۰  
 توابع موج، ۱۱۸  
 تکانه زاویه‌ای، ۱۲  
 جریان فوتو، ۷۸  
 جورج اوهلنیک، ۱۹۳  
 حالت تهی، ۱۹۸  
 حالت ساکن، ۹۳  
 حالت مقید، ۱۳۹  
 حالت پایه، ۹۵  
 حالت‌ها، ۷۰  
 حالت‌های برانگیخته، ۹۵  
 حساب متغیرها، ۱۵  
 خود الحاقی، ۱۴۱  
 خودوارون، ۱۷۱  
 درجه آزادی، ۱۹  
 دلتای کرونکر، ۱۴۸  
 دی‌بای، ۸۷  
 رابطه کامل، ۱۷۸  
 رایدبرگ، ۹۲  
 ردیابی، ۱۶۹  
 ساموئل گودسمیت، ۱۹۳  
 شانکار، ۹  
 شرط تعامد، ۵۱  
 صول موضوعه، ۷  
 ضریب  $g$ ، ۲۱۲  
 ضریب لنده، ۲۱۲  
 عدد اشغال فوتون، ۸۴  
 عدد کوانتومی اصلی، ۲۲۴  
 عمل-کنش، ۱۰۲  
 عملگر افزایشی، ۱۵۱  
 عملگر ایجاد (تولید کردن)، ۱۵۳

- عملگر تصویر، ۱۷۷  
 عملگر کاهشی، ۱۵۱  
 عملگرها (اپراتورها)، ۱۳۰  
 فاجعه فرابنفش، ۵۶  
 فراتباع، ۱۵  
 فرضیه، ۱۸۷  
 فرما، ۱۳  
 فرمیون، ۲۱۸  
 قانون براگ، ۱۰۰  
 قضیه ایرنفست، ۱۳۸  
 قضیه تقسیم برابر، ۵۲  
 قضیه نوتر، ۱۲۹  
 قضیه پهنای باند، ۱۳۴  
 قضیه کار-انرژی، ۷۹  
 لانگار، ۴۰، ۴۳  
 لاگرانژی، ۱۵  
 ماتریس واحد، ۱۷۱  
 مبادله، ۲۳۰  
 محافظه کار، ۲۴  
 محافظه کار (پایستار)، ۳۳  
 مختصات تعمیم یافته، ۱۶  
 مختصات چرخه‌ای، ۲۳  
 مسیر فاینمن، ۱۰۵  
 معادله شرودینگر، ۱۲۲  
 معادله شرودینگر مستقل از زمان، ۱۳۹  
 معادله عمومی لاگر، ۲۲۵  
 مقادیر ویژه، ۱۷۴  
 مقادیر ویژه منحنی، ۱۸۲  
 مقدار ویژه، ۱۳۹  
 منحنی، ۱۷۶  
 مودهای عادی، ۵۱  
 مک داول، ۷۱  
 ناحیه ریلی-جین، ۳۷  
 ناحیه وین، ۳۷  
 نورم (هنجار)، ۱۸۳  
 نیروهای مرکزی، ۱۲  
 نیروی گریز از مرکز، ۲۷  
 هاینریش هرتز، ۷۴  
 هرمیتی، ۱۴۱  
 هرمیتی (هرمیشن)، ۱۷۰  
 هیلبرت-اشمیت، ۱۶۹  
 ورنر هایزنبرگ، ۱۶۱  
 پتانسیل توقف، ۷۸  
 پتانسیل موثر، ۲۲۱  
 پتانسیل کولمب، ۲۲۰  
 پل آدرین موریس دیراک، ۲۳۲  
 چارلز هرمیت، ۱۵۶  
 چرخشگری لارمور، ۱۹۲  
 ژيرو مغناطیسی، ۲۱۲  
 کرم، ۲۳۶  
 کنش (عمل) حداقل، ۱۰۷  
 کوانتیزه، ۹۵  
 گرام اشمیت، ۱۸۲  
 گستره، ۱۶۶  
 گسیل پذیری، ۶۰  
 گشتاور، ۱۲  
 گشتاور (تورک)، ۱۲