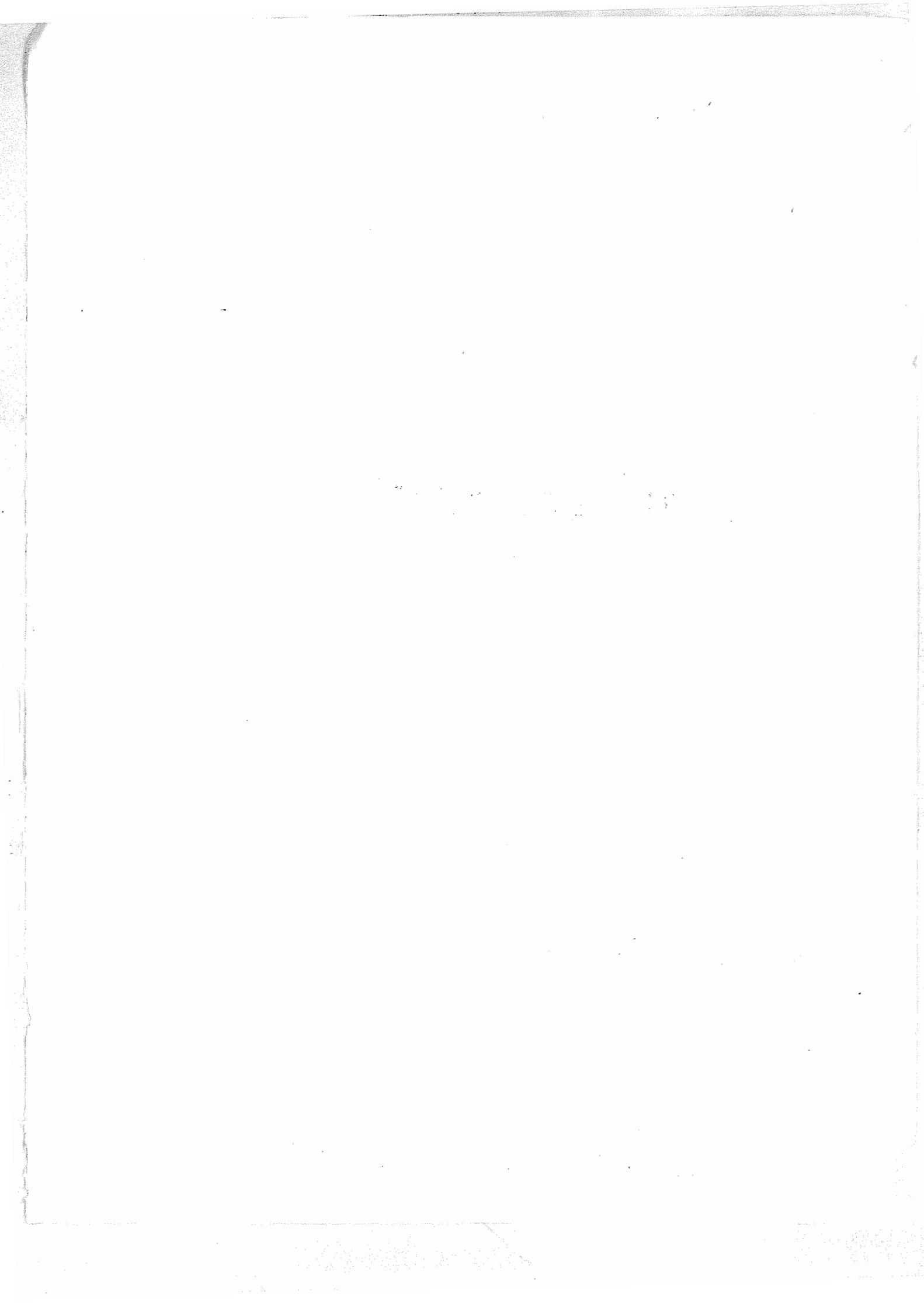


سیستم‌های ارتباط

تهریه گنده : محمد صادق ابریشمیان

از انتشارات مؤسسه عالی آموزش ارتباطات



(الف)

فهرست مطالب

صفحه ۱

مقدمه

- فصل اول - تجزیه و تحلیل سیگنالها
- ۱-۱ : شباهت بردارها و سیگنالها
- ۱-۲ : نمونه ای چند از توابع مقسماً
- ۱-۳ : نمایش یک تابع پریود یک بوسیله سریهای فوریر در تمام فواصل
- ۱-۴ : طیف کمپلکس فوریر
- ۱-۵ : نمایش یک تابع دلخواه در فاصله $(\omega_0 + \omega_1 - \omega)$: تبدیل فوریر
- ۱-۶ : ملاحظاتی درباره طیف فرکانس پیوسته
- ۱-۷ : نمایش یک سیگنال در فضای زمان و فضای فرکانس
- ۱-۸ : وجود تبدیل فوریر
- ۱-۹ : تبدیل فوریر برخی از توابع مفید
- ۱-۱۰ : توابع منفرد
- ۱-۱۱ : تبدیل فوریر تابع ضریب ای
- ۱-۱۲ : خصوصیات تبدیل فوریر
- ۱-۱۳ : برخی از روابط کانولشن
- ۱-۱۴ : تفسیر ترسیمی انتگرال پیچیده
- ۱-۱۵ : کانولشن یک تابع با تابع تک ضریب ای
- ۱-۱۶ : قضیه نمونه برداری
- ۹۷ : سائل فصل اول

(ب)

صفحه ۱۱۵

فصل دوم — ارسال سیگنال و طیف تکاشف قدرت

- ۲-۱ : ارسال سیگنال از درون یک سیستم خطی
- ۲-۲ : خصوصیات فیلتری سیستمهای خطی
- ۲-۳ : انتقال بدون اعوجاج
- ۲-۴ : فیلتر ایده‌آل
- ۲-۵ : علیت و تحقق فیزیکی —
- ۲-۶ : رابطه بین پهنهای باند و زمان صعود
- ۲-۷ : طیف تکاشف انرژی
- ۲-۸ : طیف تکاشف قدرت
- مسائل فصل دوم

۱۰۴ "

فصل سوم — سیستمهای ارتباط — مدولاسیون دامنه

- ۳-۱ : مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس و مولتی پلکسینگ تقسیم زمان
- ۳-۲ : مدولاسیون دامنه با جذف فرکانس کریر
- ۳-۳ : مدولاسیون دامنه با قدرت کریر زیار
- ۳-۴ : ارسال باندهای کناری
- ۳-۵ : اثرات خطاهای فرکانس و فاز در آشکارسازی همزمان
- ۳-۶ : تکنیک وارد تmodن سیگنال کریر بمنظور آشکارسازی سیگنال با جذف کریر
- ۳-۷ : مقایسه سیستمهای مختلف
- ۳-۸ : ارسال وستیجیال باندهای کناری
- ۳-۹ : مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس

مسائل فصل سوم

صفحه ۲۱۲

- فصل چهارم - سیستمهای ارتباط : مدولاسیون زاویه
۲۲۷ " ۴-۱ : FM با باند باریک (NR-FM)
۲۳۲ " ۴-۲ : FM با باند عریض (WB-FM)
۲۳۵ " ۴-۳ : مدولاسیون فرکانس با چند موج مدوله کنده
۲۴۳ " ۴-۴ : مدولاسیون فرکانس یک موج مربعی
۲۴۴ " ۴-۵ : مدولاسیون خطی و غیرخطی
۲۴۷ " ۴-۶ : ملاحظاتی چند در مدولاسیون فاز
۲۴۹ " ۴-۷ : قدرت در مدولاسیون زاویه
۲۵۰ " ۴-۸ : خصوصیات کاهش نویز مدولاسیون زاویه
۲۵۱ " ۴-۹ : تولید سیگنالهای
۲۵۲ " ۴-۱ : آشکارسازی سیگنالهای

مسائل فصل چهارم

- فصل پنجم - سیستمهای ارتباط : مدولاسیون پالس
۲۶۰ " ۵-۱ : مدولاسیون دامنه پالسها
۲۶۴ " ۵-۲ : صور دیگر مدولاسیون پالس
۲۶۴ " ۵-۳ : مولتی پلکسینگ تقسیم زمان
۲۷۵ " ۵-۴ : پهنای باند لازم برای ارسال سیگنالهای
۲۷۹ " ۵-۵ : مقایسه مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس و مولتی پلکسینگ تقسیم زمان
۲۸۲ " ۵-۶ : مقایسه مولتی پلکسینگ تقسیم زمان

مسائل فصل پنجم

بنام خدا

مقدمه

طی سالیان متعدد انسان میکوشد تا وسایل ارتباط را از هر جهت بهتر و کاملتر و در دسترس همگان قرار دهد . نتیجه این امر تلاش همه جانبه کشورهای متقدی میباشد . زیرا ارتباط جزو لاینفک بشر است و خداوند متعال با آن قوه بیان و حواس پنجگانه — بینائی ، شنوایی ، بویائی ، چشائی و بساوایی را عطا فرموده است . بدیهی است که در حال حاضر قوه بیان و حواس بینائی و شنوایی مد نظر است و ارسال اطلاعات یک انسان به انسان دیگر تحت کار آنها صورت میگیرد .

روزگاری انسان از طریق علام خطر — نقطه (الفبای مورس) اطلاعات خود را میفرستاد و نیازمندیهای او با همان سیستم ابتدائی انجام میشد ولی زندگی مدرن کنونی خواستار سیستمی مطمئن تر و بهتر است . امروزه اکثر کشورها از ریز موجها جهت ارسال اطلاعات خود استفاده مینمایند و شاید در دهه دیگر این سیستم نیز جای خود را به سیستمهای ارتباط نوری (اشعه لیزر) دهد .

بدون شک ارسال اطلاعات بنحو مطلوب مستلزم شناخت و مطالعه سیستمهای ارتباط بوده و نظر بینکه کتاب سیستم های ارتباط در میان کتب رانشگاهی ما خالی بود ، اقدام به ترجمه کتاب

B.P. Lathi Communication Systems:

گذشته سه فصل اول این کتاب از طرف رانشکده برق رانشگاه آریامهر چاپ و حال دو فصل دیگر ترجمه و بعنوان جلد اول در اختیار رانشجویان و رانش پژوهان قرار میگیرد . امید است اساتید محترم از ذکر اشتباهات دریغ نفرمایند .

محمد صادق ابریشمیان — شهریور ۱۳۵۳

تجزیه و تحلیل سیگنالها

راههای گوناگونی برای مخابرہ یک خبر موجود است، مثلاً دو شخص ممکن است با صحبت کردن، با ایما، واشاره یا از طریق اشکال مصور ارتباط برقرار نمایند. در گذشته ارتباطات دور با روشن کردن آتش و علائم رود در نقاط مرتفع و یا کپوتان حامل خبر و یا مداری گوس و دهل انجام میشد، ولی بتدربیج این روش‌های ابتدائی منسخ گردید و اکنون منحصراً ارتباطات از طریق علائم الکتریکی (سیگنال الکتریکی) انجام میگردد. در این مورد سرعت انتقال خیلی زیاد (تقریباً 10^5 متر بر ثانیه) میباشد و میتوان سیگنالها را تا فواصل خیلی دور فرستار. در این کتاب روش اخیر یعنی ارتباطات توسط علائم الکتریکی را در نظر خواهیم گرفت.

یک مهندس ارتباط همواره خواستار ارتباطات کافی و مناسب میباشد و در این صورت مسئله ارسال پیام هر چه سریعتر با حداقل خطا مطرح و مورد بحث قرار میگیرد. و این همان چیزی است که در سراسر کتاب مورد مذاقه و امعان نظر قرار خواهد گرفت. در حقیقت مطالب کتاب روش‌نگر عوامل کمی و محدودیت‌های سرعت و وزن ارتباطات است. در تحويل و تحول ارسال خبر، موج خبر با امواج نا خواسته دیگری که بوسیله طبیعت یا بشر ساخته میشود و به آنها نویز (Noise) اطلاق میگردد، آمیخته و آلوده میشوند. امواجی که کلید‌های خراب در هنگام قطع و وصل دستگاه‌های الکتریکی بوجود میآورند، تشعشعات شعاع‌های ماشین‌ها، جرقه‌های پیوسته لامپ فلورسنت، همه و همه نویز تصادفی (Random Noise) میباشند. نمودهای طبیعی از قبیل رعد و برق، تشعشعات خورشید و ستارگان، طوفانهای الکتریکی را میتوان بخش مهمی از منابع نویز طبیعی بشمار آورد. نویز‌های متغیر (Fluctuating) مانند نویز حرارتی در مقاومتها و نصیوز ساقمه‌ای در اجزاء و عناصر فعال (لامپ، ترانزیستور) نیز نوع دیگری از منابع با اهمیت نویز که در تمام سیستم‌های ارتباطی وجود دارند میباشند. هنگامی که سیگنال حامل خبر بر روی-

یک کانال ارسال میشود، با نویز تصادفی آلوده و تباہ شده و در نتیجه ممکن است درگیرندۀ شناخته نشود. برای اجتناب از این اشکال لازم است تا قدرت موج حامل افزایش داره شود. در اینجا نسبت قدرت سیگنال به قدرت نویز میایست معلوم باشد. این نسبت، $\frac{P}{N}$ یکی از پارامترهای مهم در شناخت یک سیستم میباشد.

اگر شکل موج یک سیگنال را از لحاظ مقیاس زمانی فشرده کنیم، میتوانیم سرعت ارسال خبر را افزایش داره و در طی زمان معین اخبار بیشتری را ارسال نماییم. هنگامیگه سیگنالی فشرده میگردد، تغییرات آن تسريع یافته و طبیعی است که فرکانس آن افزایش میاید. بنابراین متراکم و فشرده نمودن یک سیگنال ط را با مسئله ارسال فرکانسها زیار مواجه میسازد و این خبر را مستلزم داشتن پهنای باند عرضی تری برای کانال ارتباطی میباشد. پس بطور کلی برای ارتباط دقیق و سریع لازم است تا نسبت $\frac{P}{N}$ (قدرت سیگنال به قدرت نویز) و پهنای باند کانال را - افزایش دهیم.

البته چیز عجیب این است که نسبت $\frac{P}{N}$ و پهنای باند میتوانند تغییر کنند. بعد از شناس خواهیم دار که اگر سرعت و میزان (Rate) ارتباط با دقت معین ثابت بماند، میتوان با افزایش $\frac{P}{N}$ ، پهنای باند را کاهش دار و بر عکس رابطه ریاضی این مفهوم بنام قانون شانون-هارتلی معروف است:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

که در آن C ظرفیت کانال و یا سرعت ارسال پیام و B پهنای باند بر حسب هرتز میباشد. برای یک مقدار C میتوان B یا $\frac{P}{N}$ را تغییر دار.

بنظر مطالعه سیستمهای ارتباط میایست با راههای مختلف نمایش سیگنالها آشنا شویم لذا این فصل را به تجزیه و تحلیل سیگنالها اختصاص میدهیم.

۱-۱: شاہت بردارها و سیگنالها (علائم)

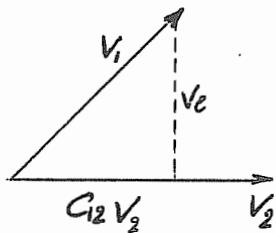
اگر بتوان مسائل را با پدیدهای آشنا مربوط و مرتبط ساخت، بهتر درک و بخاطر میاند. از اینرو ما همواره در جستجوی شباهت و قرائت برای مسائل جدید خود هستیم. در مطالعه مسائل مجرد و انتزاعی، مقایسه و شبیه بسیار سود مند بوده، خصوصاً اگر مسائل با پدیده های واقعی مقایسه شوند، میتوان نظر دقیق تری در ژرفنای آنها اندلخت و بهره بیشتری کسب کرد.

خوبخانه بین بردارها و سیگنالها شباهت کامل وجود دارد و ما را برای درک و فهم بهتر آنالیز علائم (سیگنالها) هدایت میکند. حال بطور خلاصه خواص بردارها را مورد بررسی قرار میدهیم.

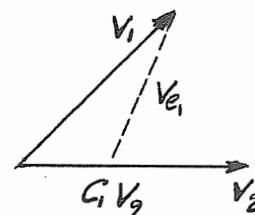
بردارها

یک بردار بوسیله جهت و مقدارش (*magnitude*) مشخص میشود. در اکثر کتب بردارها را با حروف پررنگ و مقدارشان را با حروف کم رنگ نشان میدهند. ما نیز همین رویه را بکار میبریم. هلا بردار \vec{A} و مقدارش A است. دو بردار \vec{V}_1 و \vec{V}_2 مطابق شکل (۱-۱) در نظر گیرید. فرض کنید مؤلفه بردار \vec{V}_1 در طول بردار \vec{V}_2 برابر $C_{12}\vec{V}_2$ باشد. از نقطه نظر هندسی از نوک بردار \vec{V}_2 عمودی بر بردار \vec{V}_1 (مطابق شکل (۱-۱)) فروغ میآورند.

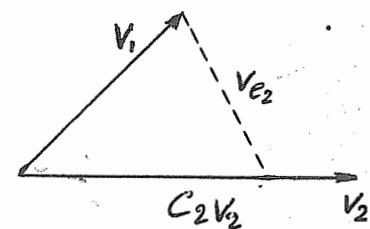
حال بردار \vec{V}_1 را میتوان بر حسب بردار \vec{V}_2 چنین نوشت:



شکل (۱-۱)



شکل (۱-۲)



البته این تنها راه بیان بردار \vec{V}_2 بر حسب \vec{V}_1 نیست. در شکل (۱-۱) دو طریقه از بینهای راه بدست آوردن بردار \vec{V}_2 را نشان میدهد

$$\vec{V}_1 = C_1 \vec{V}_2 + \vec{V}_{e_1} \quad (1-2a)$$

$$\vec{V}_1 = C_2 \vec{V}_2 + \vec{V}_{e_2} \quad (1-2b)$$

در هر یک از اشکال، \vec{V}_2 بر حسب بردار \vec{V}_1 و یک بردار دیگر که بنام بردار خطای (error) موسوم است، نشان داده میشود: اگر از طایخواهند تا بردار \vec{V}_2 را بوسیله یک بردار در جهت \vec{V}_2 بطور تقریبی بیان کنیم، آنوقت \vec{V}_2 خطای این تقریب را نشان میدهد. مثلاً در شکل (۱-۱) \vec{V}_2 تقریباً برابر $C_{12} \vec{V}_1$ است و خطای این تقریب \vec{V}_{e_2} میباشد. اگر \vec{V}_1 تقریباً برابر $C_{12} \vec{V}_2$ باشد، (شکل ۱-۲a) خطای تقریب مزبور \vec{V}_{e_1} خواهد بود. اما شکل (۱-۱) چه یگانگی را نشان میدهد؟ از شکل هندسی آنها واضح است که در شکل (۱-۱) بردار خطای کمترین مقدار است. حال میتوانیم یک تعریف جامعی از مؤلفه یک بردار بر روی دیگری ارائه دهیم: مؤلفه بردار \vec{V}_1 بر روی بردار \vec{V}_2 ، $C_{12} \vec{V}_2$ میباشد، مشروط بر آنکه C_{12} بنحوی انتخاب شود که بردار خطای مینیمم گردد.

فعلاً بیاید از نظر فیزیکی یک بردار را در طول بردار دیگر مورد بررسی قرار دهیم. بدینهی است هر قدر مؤلفه یک بردار روی دیگری بزرگتر باشد، دو بردار در جهاتشان بهم نزد یکترند و بردار خطای کوچکتر میباشد. اگر مؤلفه بردار \vec{V}_1 در طول بردار \vec{V}_2 برابر $C_{12} \vec{V}_2$ باشد، مقدار C_{12} شباهت دو بردار را میرساند. اگر C_{12} برابر صفر باشد، دو بردار بر روی یکدیگر مؤلفه‌ای نداشته باشند و بردار متقابلاً عمود بر یکدیگر هستند. اینگونه بردارها به سامان بردارهای متعامد (orthogonal vector) معروفند. بردارهای متعامد مستقل از یکدیگر هستند و اگر دو بردار متعامد باشند پارامتر C_{12} مساوی صفر است.

برای سهولت ضرب داخلی (یا ضرب اسکالر) دو بردار \vec{A} و \vec{B} را چنین تعریف میکنیم:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

که در آن θ زاویه بین دو بردار \vec{B} و \vec{A} می‌باشد.
از این تعریف رابطه اخیر نتیجه می‌شود.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

بر طبق این موضوع

$$\begin{aligned} \vec{B} &\text{ بر روی } \vec{A} \quad \text{مولفه} = A \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B} \\ \vec{A} &\text{ بر روی } \vec{B} \quad \text{مولفه} = B \cos \theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{A} \end{aligned}$$

به عنین ترتیب

$$\vec{V}_2 \text{ بر روی } \vec{V}_1 \quad \text{مولفه} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_2}$$

$$C_{12} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_2 \cdot V_2} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_2^2}$$

بنابراین
توجه کنید اگر \vec{V}_2 و \vec{V}_1 متعادل باشند

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad (1-3)$$

$$C_{12} = 0$$

سیگنال‌ها (علام)

مفهوم بردارها و معنار بودن آنها را می‌توان برای سیگنال‌ها signals نیز توسعه دار. حال بیاید دو سیگنال $f_1(t)$ ، $f_2(t)$ را در نظر گیریم. فرض کنید می‌خواهیم $f_1(t)$ را بر حسب $f_2(t)$ بطور تقریبی در فاصله $t_1 < t < t_2$ حساب کنیم.

$$f_1(t) \approx C_{12} f_2(t) \quad (t_1 < t < t_2) \quad (1-4)$$

مقدار C_{12} را چگونه انتخاب کنیم تا بهترین تقریب را بکار برد و باشیم؟ واضح است باید C_{12} را طوری پیدا کنیم که خطای بین تابع واقعی و تابع تقریبی در فاصله $t_1 < t < t_2$ کمترین مقدار را داشته باشد. پس اجازه دهید تابع خطای را چنین تعریف کنیم:

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12} f_2(t) \quad (1-5)$$

یک معیار و محک برای مینیم نمودن خطای $f_e(t)$ در فاصله t_1 و t_2 حداقل نمودن مقدار متوسط (میانگین) $\bar{f}_e(t)$ در آن حدود است یعنی :

$$\frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)] dt$$

البته این محک و معیار نا مناسب و غیر کافی است، زیرا عده زیادی خطاهای مثبت و منفی ممکن است وجود داشته باشند و اثر یکدیگر را خنثی کنند و نتیجه ای غلط بنام خطای صفر عاید شود . مثلاً اگر تابع $\sin t$ را با تابع $N(t) = 0$ در فاصله 0 و 2π تقریباً نمائیم، خطای متوسط صفر خواهد شد . پس این موضوع را میتوانیم بدین شکل تصحیح کنیم که بجای خطای متوسط، متوسط مریع خط را محاسبه نمائیم .

مقدار متوسط (میانگین) $\bar{f}_e^2(t)$ را با ع نشان میدهیم از اینرو خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} \bar{f}_e^2(t) dt = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)]^2 dt \quad (1-6)$$

برای اینکه مقدار C_{12} را طوری پیدا کنیم که U مینیم گردد، باید داشته باشیم

$$\frac{dU}{dC_{12}} = 0 \quad (1-7)$$

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)]^2 dt \right\} = 0 \quad (1-8)$$

باساده نمودن و مشتق گیری خواهیم داشت

$$\frac{1}{t_2-t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} \bar{f}_e^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \bar{f}_e(t) dt + 2C_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2(t)^2 dt \right] = 0 \quad (1-9)$$

بدیهی است که مقدار انتگرال اولی صفر است و از اینرو معادله (1-9) بدین صورت در می‌آید .

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \quad (1-10)$$

حال شباهت معادله (1-1) و (1-10) را ملاحظه کنید .

پس از این مقایسه میتوانیم بگوییم $f_1(t)$ دارای مؤلفه شکل موجی از $f_2(t)$ است و مقدار

-۸-

این مولفه C_{12} میباشد . اگر C_{12} صفر باشد ، سیگنال $f_1(t)$ شامل مولفه ای از سیگنال $f_2(t)$ نبوده و میگوئیم دوتابع در فاصله t_1 و t_2 متعامدند . پس شرط متعامد بودن دوتابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در فاصله t_1 و t_2 چنین است

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0 \quad (1-11)$$

حال تشابه معادله (1-11) که از متعامد بودن توابع و معادله (۲-۱) که از متعامد بودن بردارها نتیجه شده ملاحظه نمایند .

اکنون میتوانیم بسهولت متعامد بودن دوتابع $\sin n\omega_0 t$ و $\sin m\omega_0 t$ را در فاصله t_0 و $t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}$ برای عدهای صحیح n و m نشان دهیم . مقدار انتگرال را I فرض کنید .

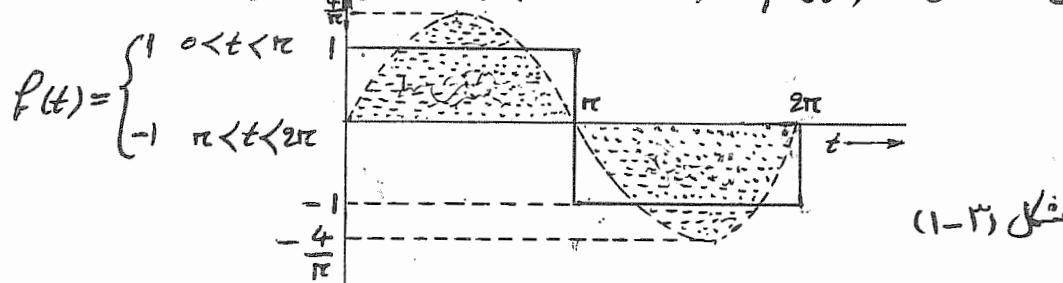
$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} \sin n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t dt = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{1}{2} [\cos(n-m)\omega_0 t - \cos(n+m)\omega_0 t] dt$$

$$= \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{n-m} \sin(n-m)\omega_0 t - \frac{1}{n+m} \sin(m+n)\omega_0 t \right]_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

چون m و n عدهای صحیح و درست هستند ، بینابراین $n-m$ و $n+m$ نیز عدهای درستی خواهند بود . در چنین حالتی مقدار انتگرال صفر است پس دوتابع متعامد هستند .

به عنین روش میتوان متعامد بودن $\sin n\omega_0 t$ و $\cos m\omega_0 t$ و $\sin m\omega_0 t$ و $\cos n\omega_0 t$ را نشان داد .

ثمرین (۱-۱) تابع مستطیلی $f(t)$ (شکل ۲-۱) چنین تعریف میشود :



این تابع را بوسیله شکل موج $\sin t$ در فاصله $(0, 2\pi)$ بقsm بطور تقریبی حساب کنید
که مقدار متوسط مربع خطأ مینیم گردد.

حل تقریب کردن تابع $f(t)$ در فاصله $(0, 2\pi)$ چنین است :

$$f(t) \approx C_{12} \sin t$$

باید C_{12} را طوری پیدا کنیم تا مقدار متوسط مربع خطأ مینیم گردد. بر طبق معادله
مینیم مقدار متوسط مربع خطأ

$$C_{12} = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin t dt \right] = \frac{4}{\pi}$$

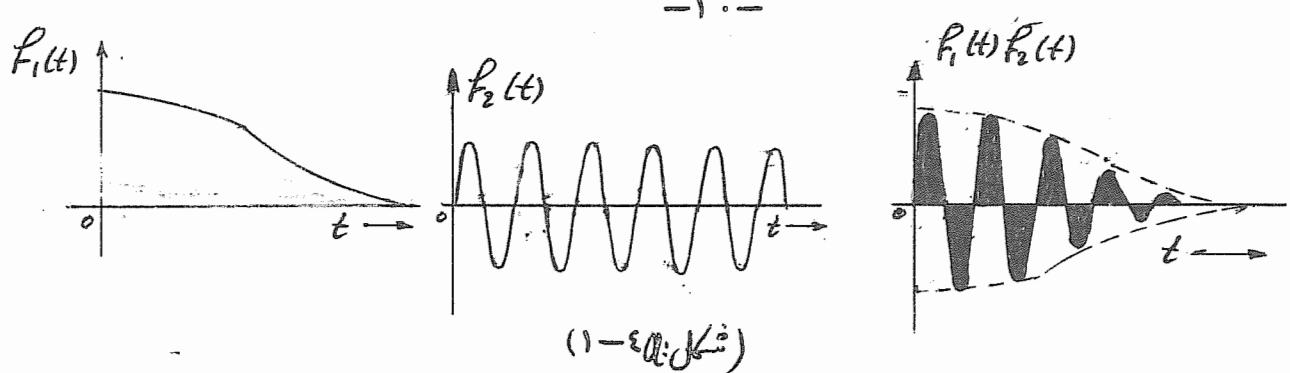
پس $f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$ نشان دهنده بهترین تقریب $\sin t$ توسط $f(t)$ با حداقل
مقدار متوسط مربع خطأ است.

با مقایسه با بردارها، میتوانیم بگوئیم تابع مستطیلی $f(t)$ که در شکل (۱-۲) صور است
دارای یک مؤلفه $\sin t$ بوده که مقدار این مؤلفه $\frac{4}{\pi}$ میباشد.

از متعامد بودن دو تابع چه چیز مشخص میشود؟ در حالت بردارها، بد و آبما میگوید که
بردارها بر روی یک یگر مؤلفه ای ندارند. بهمین نحو در توابع چنین مستفار میشود که توابع
دارای مؤلفه ای از یکدیگر نیستند. اگر کوشش کنیم تا تابع را بوسیله تابع متعامدش تقریب خ
نمائیم، مقدار خطأ آنقدر بزرگ شده که حتی از خود تابع نیز بزرگتر میشود. اینچنین تابع را
را بهتر است با تابع $= f(t)$ تقریب نمائیم. در این صورت بهترین مقدار ممکنه ($OptimUm$)
برای حالت اخیر $= C_{12}$ است

محاسبه ترسیم مؤلفه یک تابع در روی یک تابع دیگر

میتوان مؤلفه یک تابع را بر روی دیگری بطريقه ترسیم که از بکار بردن معادله (۱-۱) ناشی



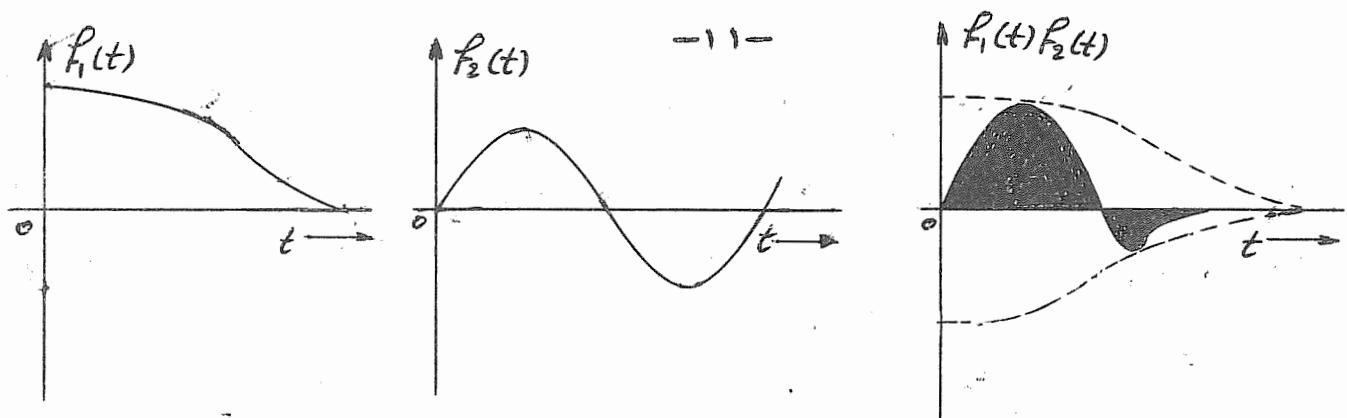
میشود محاسبه گرد . فرض کنید دو تابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ بطور ترسیم معلومند . و خواهند اند مؤلفه $f_2(t)$ را که در سیگنال $f_1(t)$ هست در فاصله $(T, 0)$ محاسبه نمائیم . میدانیم این مؤلفه بوسیله $C_{12} f_2(t)$ داده میشود . یعنی اگر $f_1(t)$ شامل مؤلفه تابع $f_2(t)$ بقدار C_{12} باشد ، از فرمول زیر بدست میآید .

$$C_{12} = \frac{\int_0^T f_1(t) f_2(t) dt}{\int_0^T f_2^2(t) dt}$$

انتگرال صورت این معادله را میتوان از ضرب دو تابع و محاسبه سطح زیر منحنی حاصل کرد . همانطور که در شکل (۴-۱) نشان داده شده ، بدست آورد . انتگرال مخزن آنرا نیز میتوان از محاسبه سطح زیر منحنی $\left[f_2(t) \right]^2$ بهمان طریق بدست آورد .

بدیهی است اگر $f_1(t)$ خیلی آهسته تراز $f_2(t)$ تغییر کند ، سطح زیر منحنی $f_1(t) f_2(t)$ خیلی کوچک خواهد بود و سطوح مشت و منفی تقریباً مساوی شده و همانطوری که در شکل (۴-۲) مصور گشته اثر یکدیگر را تقریباً از بین میبرایند بنابراین $f_1(t)$ شامل مؤلفه کوچکی از $f_2(t)$ خواهد بود . اگر تغییرات $f_1(t)$ و $f_2(t)$ تقریباً هم آهنگ و مساوی باشند ، سطح زیر منحنی حاصل ضرب $f_1(t) f_2(t)$ بسیار زیاد شده و این در شکل (۴-۳) واضح میباشد .

این نتیجه از درک مستقیم نیز آشکار میشود . چون اگر دو تابع هم آهنگ یکدیگر تغییر کنند شباخت زیادی بین آنها وجود داشته از اینرو $f_1(t)$ شامل مؤلفه بزرگتری از تابع $f_2(t)$ را در بر میگیرد .



(شکل ۱-۱)

بردارهای متعامد فضائی

شباهت بردارها و سیگنالها را میتوان بیشتر گسترش و مرتبط ساخت. بیانیه بردار
های فضایی در دستگاه قائم مطابق با شکل (۱-۰) در نظر گیریم. بردار واحد (برداریکه)
روی محور x را با \vec{a}_x و محور y را با \vec{a}_y و بالاخره z را با \vec{a}_z نشان می‌دهیم.
چون طول بردارهای \vec{a}_x و \vec{a}_y و \vec{a}_z واحد است، بنابراین برای هر برداری مانند
داریم.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \text{مولفه روی محور } x \\ \vec{A} &= \text{مولفه روی محور } y \\ \vec{A} &= \text{مولفه روی محور } z \end{aligned}$$

بردار \vec{A} که از مبدأ گذشته و به نقطه x_0, y_0, z_0 در فضای میرسد، مولفه‌های x_0, y_0, z_0 را
را بترتیب در روی محورهای x , y و z داراست. میتوانیم بردار \vec{A} را بر حسب مولفه‌ها ایش

بنویسیم

$$\vec{A} = x_0 \vec{a}_x + y_0 \vec{a}_y + z_0 \vec{a}_z$$

پس هر برداری در فضای را میتوان بر حسب سه برداریکه $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ بیان نمود. چون

سه برداریکه مزبور متقابل عمود میباشند، از اینرو نتیجه میشود:

(۱-۱۲)

$$\vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = \vec{a}_y \cdot \vec{a}_z = \vec{a}_z \cdot \vec{a}_x = 0, \quad \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y = \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1$$

خواص این سه بردار که توسط روابط (۱-۱) بیان شد، میتوان بطور مختصر چنین نوشت:

$$\vec{a}_m \cdot \vec{a}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1-13)$$

که در آن m, n میتوانند $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ باشد.

حال یک نگاه عیق لازم است، اگر دستگاه مختصات دو محور $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ داشت، دستگاه مزبور برای بردار عمومی \vec{A} کافی نبوده تا مولفه هایش را بیان کند و فقط قادر است دو مولفه از بردار را نشان دهد. بنابراین یک دستگاه کامل مورد نیاز است تا تمام مولفه هایش را — معلوم سازد. در این حالت باید یک دستگاه سه محوری وجود داشته باشد.

یک خط راست نشانده فضای یک بعدی، یک صفحه فضای دو بعدی و جهان ما بطور کلی، فضای سه بعدی را نشان میدهد. همین طور نیز میتوانیم منظور خود را گسترش داده و یک فضای m بعدی در نظر گیریم. البته اینگونه فضای فیزیکی در طبیعت وجود ندارد. معذالک مسائلی هستند که میتوان آنها را از دریچه فضای m بعدی نگاه کرد. مثلاً یک معادله خطی که دارای n متغیر مستقل است، میتوان آنرا بعنوان یک بردار برابر حسب مولفه هایش در یک دستگاه متقابلاً متعامد n بعدی در نظر گرفت.

اگر بردارهای واحد (بردارهای $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$) این دستگاه n بعدی $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ و متقابلاً متعامد باشد، هردار کل \vec{A} در این دستگاه n بعدی بترتیب دارای مولفه های C_1, C_2, \dots, C_n است. پس (۱-۱۴)

$$\vec{A} = C_1 \vec{a}_1 + C_2 \vec{a}_2 + \dots + C_n \vec{a}_n$$

تمام بردارهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ متقابلاً متعامد هستند و شرط متعامد بودن نیز میباشد

صادق باشد. یعنی حاصل ضرب داخلی \vec{a}_n و \vec{a}_m باید صفر باشد. و ضمناً حاصل ضرب

داخلی هر برداریکه در خودش نیز میباشد یک باشد .

این مطلب را میتوان بدین نحو خلاصه کرد :

$$\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1-15)$$

— C_1, C_2, \dots, C_n در معادله (۱-۱) نشاند هندسه مولفه های بردار \vec{A} بترتیب در روی محورهای x_1, x_2, \dots, x_n است .

$$C_r = \vec{A} \cdot \vec{x}_r \quad (1-16) \quad \text{بنابراین}$$

اینرا نیز میتوان از ضرب داخلی نمودن دو طرف معادله (۱-۱) در x_m نتیجه گرفت . یعنی

$$\vec{A} \cdot \vec{x}_r = C_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_r + C_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_r + \dots + C_m \vec{x}_m \cdot \vec{x}_r + \dots + C_n \vec{x}_n \cdot \vec{x}_r \quad (1-17)$$

از معادله (۱-۱۵) نتیجه میشود ، تمام جملاتی که بصورت $C_j \vec{x}_j \cdot \vec{x}_r$ ($j \neq r$) و در طرف راست معادله هستند صفر میباشند . بنابراین

$$\vec{A} \cdot \vec{x}_r = C_r \vec{x}_r \cdot \vec{x}_r = C_r \quad (1-18)$$

مجموعه بردارهای $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ را مابردارهای متعامد فضائی میگوییم .

(orthogonal vector space)

بطورگلی ، حاصل ضرب $\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n$ را میتوان بجای واحد مقدار ثابت k_m نشان داد .

وقتی k_m مساوی یک باشد ، آنرا مجموعه بردارهای نرمال شده متعامد میگویند .

(orthonormal vector space)

مینامند . برای بردارهای متعامد فضائی $\{\vec{x}_r\}$ ، ($r = 1, 2, \dots, n$)

$$\vec{x}_m \cdot \vec{x}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ k_m & m = n \end{cases} \quad (1-19)$$

ناریم

اگر این بردارهای فضائی ، کامل باشند (یا بسته باشند) هر برداری مانند \vec{F} را میتوان چنین

بيان نوع :

$$\vec{F} = C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 + \dots + C_r \vec{x}_r + \dots \quad (1-21)$$

$$C_r = \frac{\vec{F} \cdot \vec{x}_r}{\vec{x}_r \cdot \vec{x}_r} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{x}_r}{\vec{x}_r \cdot \vec{x}_r} \quad (1-22)$$

سینگالهای متعامد فضائی

مفهوم بردارهای فضائی را برای آنالیز سینگالها گسترش داده و بهمان قیاس از آنها بهره برداری میکنیم. دیدیم که هر بردار را میتوان بوسیله جمع مؤلفه هایش در یک دستگاه مختصات \mathcal{H} بعدی متعامد نشان دار. بنابراین باید انتظار داشته باشیم که هر تابع مانند $f(t)$ را نیز میتوان بوسیله مجموع مؤلفه هایش در روی یک مجموعه توابع متعابلاً متعامد مشخص ساخت و مشروط بر آنکه این تابع یک مجموعه کامل را تشکیل دهد. ما اکنون نشان میدهیم که چطور این امر ممکن خواهد بود.

محاسبه تقریبی یک تابع بوسیله مجموعه ای از توابع متعامد

فرض کنید مجموعه ای از n تابع $\mathcal{G}_1(t), \mathcal{G}_2(t), \dots, \mathcal{G}_n(t)$ در فاصله t_1, t_2 همگی بر یکدیگر متعامدند یعنی

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}_j(t) \mathcal{G}_k(t) dt = 0 \quad j \neq k \quad (1-23a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}_i(t) dt = k_i \quad (1-23b)$$

اکنون میخواهیم تابع دلخواه $f(t)$ را بوسیله مجموعه ای از n تابع متعابلاً متعامد در یک فاصله t_1, t_2 بطور تقریبی محاسبه کنیم

$$f(t) \approx C_1 \mathcal{G}_1(t) + C_2 \mathcal{G}_2(t) + \dots + C_K \mathcal{G}_K(t) + \dots + C_n \mathcal{G}_n(t) = \sum_{r=1}^n C_r \mathcal{G}_r(t)$$

برای اینکه بهترین تقریب را بگارهیم، باید مقادیر ثابت C_1, C_2, \dots, C_n را طوری پیدا

کنیم که ع مقدار متوسط مربع خطای $f(t)$ [مینیم شود .

$$f_e(t) = f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \quad \text{طبق تعریف داریم}$$

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_e(t)]^2 dt \quad (1-24)$$

بطوریکه از معادله (1-24) پیدا است ، ع تابع C_1, C_2, \dots, C_n بوده و برای اینگاه

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial C_1} = \frac{\partial \epsilon}{\partial C_2} = \dots = \frac{\partial \epsilon}{\partial C_j} = \dots = \frac{\partial \epsilon}{\partial C_n} = 0 \quad \text{ع مینیم گردد باید راشته باشیم}$$

پس بباید در نظر گیریم

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial C_j} = 0 \quad (1-25)$$

چون $(t_2 - t_1)$ مقدار ثابتی است پس معادله (1-25) بدین صورت در می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right]^2 dt \right\} = 0 \quad (1-26)$$

اگر این انتگرال را بسط دهیم ، متوجه می‌شویم همه جملاتی که از رابطه متعادل بودن پیروی می‌کنند صفر هستند . بعبارت بهتر تمام جملاتی که بصورت $\int g_j(t) g_k(t) dt$ هستند صفر می‌باشند . ضمناً مشتق نسبت به C_j از تمام جملاتی که شامل C_j نیستند صفر می‌باشند

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 dt = \frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} C_r^2 g_r^2(t) dt = \frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} C_r f(t) g_r(t) dt = 0 \quad \text{یعنی}$$

پس در معادله (1-26) ط فقط رو جمله بصورت زیر خواهیم داشت :

$$\frac{\partial}{\partial C_j} \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 C_j f(t) g_j(t) + C_j^2 g_j^2(t) \right] dt = 0$$

پس از مشتق گیری و سپس انتگرال گیری خواهیم داشت

$$2 \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_j(t) dt = 2 C_j \int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t) dt$$

$$C_j = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_j(t) dt / \int_{t_1}^{t_2} g_j^2(t) dt = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_j(t) dt \quad (1-28)$$

ممکن است این نتیجه را بصورت زیر خلاصه کرد :

مجموعه ۱) تابع $(f(t), g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ بطوریکه در فاصله (t_1, t_2) بر یگدیگ متقارن متعادل میباشند داره شده است . میتوان هر تابع را خواهی مانند $f(t)$ را در آن فاصله بوسیله مجموع خطی آن n تابع متعادل بطور تقریبی محاسبه کرد .

$$f(t) \approx C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_n g_n(t) \quad (1-29)$$

$$= \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)$$

برای اینکه بهترین تقریب را بکار بریم ، یعنی مقدار متوسط مربع خطأ در آن فاصله مینیم گردد باید ضرائب C_1, C_2, \dots, C_n را از معادله (۱-۲۸) بدست آوریم .

محاسبه مقدار متوسط مربع خطأ

حال بباید مقدار ϵ را وقتی که بهترین مقدار C_1, C_2, \dots, C_n بر طبق معادله (۱-۲۸) پیدا شده اند بدست آوریم . طبق تعریف داریم :

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{r=1}^n C_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt - 2 \sum_{r=1}^n C_r \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt \right] \quad (1-30)$$

اما از معادله (۱-۲۸a) و (۱-۲۸b) نتیجه میشود :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt = C_r \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt = C_r K_r \quad (1-31)$$

با جاگذاری معادله (۱-۳۱) در (۱-۳۰) خواهیم داشت :

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{r=1}^n C_r^2 K_r - 2 \sum_{r=1}^n C_r^2 K_r \right] = \quad (1-32)$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - (C_1^2 K_1 + C_2^2 K_2 + \dots + C_n^2 K_n) \right] \quad (1-33)$$

پس میتوانیم مقدار خطأ را از رابطه (۱-۳۳) بسهولت محاسبه کنیم

نشاندارن یک تابع بوسیله یک مجموعه کامل توابع متقابلاً متعامد

از معادله (۱-۳۳) پیداست که اگر $\|f(t)\|$ افزایش یابد، یعنی اگر تابع $f(t)$ بوسیله تعداد خیلی زیاری توابع متعامد تقریب شود، مقدار خطأ بسیار کوچک خواهد شد بر طبق تعاریف اولیه، ع. مقداریست مثبت. بنابراین در حد هنگامیکه تعداد جملات $\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 K_r$ گرایش یافته از این رونمودار ع صفر میگردد.

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 K_r \quad (1-34)$$

تحت این ضابطه تابع $f(t)$ بوسیله یک سری بی نهایت جمله‌ای مشخص میشود:

$$f(t) = C_1 \mathcal{G}_1(t) + C_2 \mathcal{G}_2(t) + \dots + C_r \mathcal{G}_r(t) + \dots$$

سری نا محدود طرف راست معادله فوق هنگامی بتابع $f(t)$ گرایش می‌یابد که مقدار متوسط مربع خطأ صفر گردد. در اینجا گفته میشود که سری در مقدار متوسط همگراست توجه کنید، اکنون نشاندارن $f(t)$ صحیح است.

مجموعه توابع $\{\mathcal{G}_1(t), \mathcal{G}_2(t), \dots, \mathcal{G}_K(t)\}$ که در فاصله t_1, t_2 متقابلاً متعامدند وقتی بدان مجموعه کامل اطلاق میشود که تابع مانند $\chi(t)$ وجود نداشته باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$\int_{t_1}^{t_2} \chi(t) \mathcal{G}_K(t) dt = 0 \quad K = 1, 2, \dots$$

اگر تابع $\chi(t)$ انتگرال فوق را صفر کند، بدین است $\chi(t)$ با هر یک از اعضاء مجموعه $\{\mathcal{G}_1(t), \mathcal{G}_2(t), \dots, \mathcal{G}_K(t)\}$ متعامد بوده و نتیجه خود آن نیز یکی از اعضاء مجموعه مزبور است.

بنابراین مجموعه بدون داشتن تابع $\chi(t)$ کامل نخواهد بود.

پس باید نتیجه این بحث را خلاصه کنیم: برای مجموعه $\{C_r(t)\}_{r=1}^{\infty}$ در فاصله t_1, t_2 متقابلاً متعامدند داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}_m(t) \mathcal{G}_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ K_m & m = n \end{cases} \quad (1-35)$$

اگر این مجموعه کامل باشد، هر تابعی مانند $f(t)$ را میتوان بصورت زیر بیان نمود.

$$f(t) = C_1 \mathcal{G}_1(t) + C_2 \mathcal{G}_2(t) + \dots + C_r \mathcal{G}_r(t) + \dots \quad (1-36)$$

$$C_r = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \mathcal{G}_r(t) dt / K_r = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \mathcal{G}_r(t) dt / \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}_r^2(t) dt \quad \text{که در آن}$$

مقایسه معادلات (1-35) و (1-36) با (1-20) و (1-22) شواهد کامل

بردارها و سیگنالها را معلوم میدارد. هر بردار را میتوان بتوسیله مجموع مؤلفه هایش در روی \mathbb{R} بردار متقابل متعامد بیان نمود، بشرط آنکه بردارهای مزبور یک مجموعه کاملی

را تشکیل دهند. همین طور هر تابعی مانند $f(t)$ را میتوان بحسب مجموع مؤلفه هایش در روی توابع متقابل متعامد نشان داد بشرط آنکه اینگونه توابع مجموعه کاملی را تشکیل دهند.

در مقام مقایسه سیگنالها و بردارها، نتیجه میشود: ضرب داخلی دو بردار شبیه انتگرال

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \sim \int_{t_1}^{t_2} f_A(t) \cdot f_B(t) dt \quad \text{ضرب دو سیگنال است یعنی}$$

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} \sim \int_{t_1}^{t_2} f_A^2(t) dt \quad \text{وازرابطه فوق بدست میآید}$$

اگر برداری بر حسب مؤلفه های متقابل متعامد ش بیان شود، مربع طول بردار برابر است با مجموع مربعات طول مؤلفه های آن بردار. شبیه همین موضوع نیز در سیگنال ها صارق است.

این مطلب دقیقاً تحت رابطه (1-34) (قضیه پارسوال Parseval) بیان شده است.

اگر مؤلفه ها ارتو نورمال نباشند (متعامد باشند ولی نرمالیزه نباشند)، طرفراست معادله

$$\text{بجای } \sum C_r^2 \text{ خواهیم داشت. برای مجموعه ارتو نورمال } K_r = 1 \text{ است.}$$

معادله (1-34) شبیه حالتی است که بردار بر حسب مؤلفه هایش در روی بردارهای متقابل

تعامدی بیان شده که مربع طولشان K_1, K_2, \dots, K_r وغیره است. معادله

(۱-۳۶) نشان میدهد که $f(t)$ شامل مؤلفه‌ای از سینکوال $\sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n(t)$ است و مقدار آن مؤلفه C_0 میباشد . نشاندارن $f(t)$ بوسیله یک مجموعه نامحدود توابع متقابلاً متعادل به سریهای عمومی فوریر موسوم است (Generalized Fourier Series)

تمرین ۱-۲ بعنوان مثال دوباره تابع مستطیلی تعریف (۱-۱) شکل (۳-۱) را در نظر میگیریم این تابع بوسیله $\sin t$ تقریب شد . اگرnon خواهیم دید وقتی تعداد توابع متعادل زیاد شود ، چگونه بتابع مستطیلی نزدیک میگردد . قبلًاً متعادل بودن توابع $\sin n\omega t$ و $\sin m\omega t$ در فاصله $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega})$ برای مقادیر صحیح انشان دارد شد . پس نتیجه میشود مجموعه توابع $\sin t$ و $\sin 3t$ و $\sin 5t$ و غیره در فاصله $0, \frac{2\pi}{\omega}$ متقابلاً متعادلند - حال میخواهیم تابع مستطیلی شکل (۳-۱) را بوسیله یک سری سینوس محدود تقریب کنیم (بطور تقریبی محاسبه کنیم)

$$f(t) \approx C_1 \sin t + C_2 \sin 3t + \dots + C_n \sin nt$$

مقدار ثابت C_r طبق رابطه (۱-۲۸) بدست میآید :

$$C_r = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin rt dt \right) / \int_0^{2\pi} \sin^2 rt dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin rt dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin rt dt \right) = \alpha$$

اگر r فرد باشد $\alpha = \frac{\pi}{4r}$

اگر r زوج باشد $\alpha = 0$

پس $f(t)$ چنین است

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \dots \right) \quad (۱-۳۸)$$

شکل (۱-۶) تابع واقعی و تابع تقریبی را وقتی تابع $f(t)$ با یک ، دو ، سه یا چهار جمله از معادله (۱-۳۸) تقریب شود نشان میدهد . برای تعداد مفروضی از $\sin nt$ بهترین

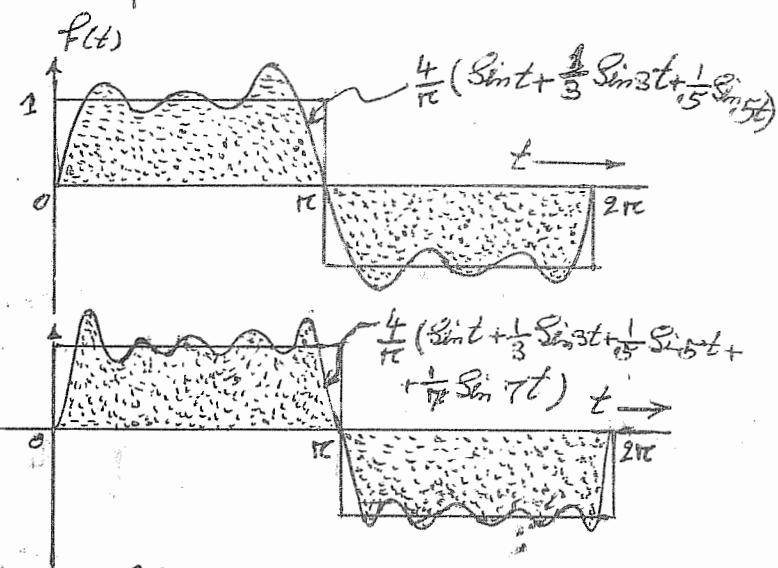
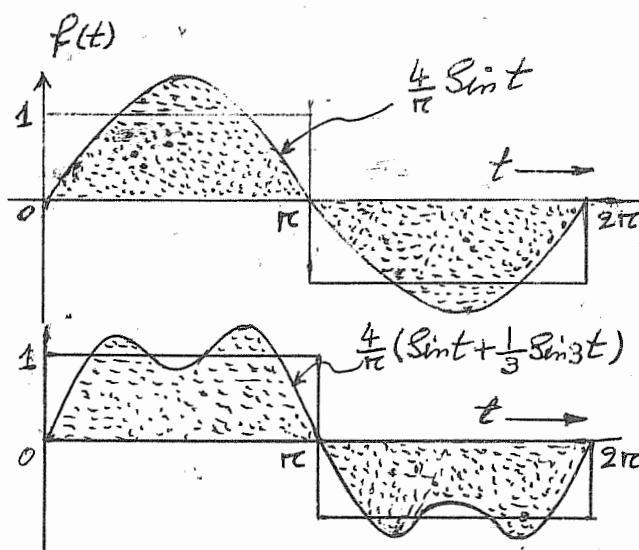
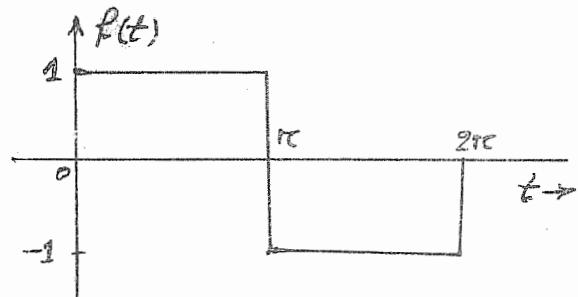
تقریب با مینیمم مقدار متوسط مریع خطأ حاصل میشود . هر قدر تعداد جملات را افزایش دهیم ، تابع حاصله به تابع واقعی نزدیکتر گشته و مقدار متوسط مریع خطأ کمتر میشود . اگر تعداد جملاتی نهایت شود مقدار متوسط مریع خطأ صفر میگردد .

حال بیانید مقدار خطأ این تقریب نمودن را محاسبه کفیم طبق رابطه (۱-۳۳) داریم:

$$\epsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) - C_1^2 K_1 - C_2^2 K_2 - \dots \right]$$

در این حالت $t_2 - t_1 = 2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ -1 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



$$\int f^2(t) dt = 2\pi$$

بنابراین

همچنین

$$C_r = \begin{cases} \frac{4}{r\pi} & \text{اگر } r \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } r \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

$$K_r = \int_0^{2\pi} \sin^2 r t dt = \pi$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi - \left(\frac{4}{2\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.19$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi - \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 \pi - \left(\frac{4}{2\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi - \left(\frac{4}{2\pi} \right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 \pi - \left(\frac{4}{2\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.675$$

و بالا خره برای چهار جمله

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2\pi} \left[2\pi - \left(\frac{4}{2\pi} \right)^2 \pi - \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 \pi - \left(\frac{4}{4\pi} \right)^2 \pi - \left(\frac{4}{5\pi} \right)^2 \pi - \left(\frac{4}{6\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.051$$

پس همانطوریکه ملاحظه میکنید، هر قدر تعداد جملات افزایش یابد، مقدار متوسط مربع خطای کم و بالا خره صفر میگردد.

متعادل بودن توابع مختلط (کمپلکس)

در بحث پیش، ما فقط توابع حقیقی با متغیرهای حقیقی را در نظر گرفتیم. اگر

تابع مختلط با متغیرهای حقیقی باشند، ما نیز میتوانیم $f_1(t), f_2(t)$ را به تبلیغ $f_1(t_1, t_2) \approx C_{12} f_2(t)$ در فاصله (t_1, t_2) تقریب کنیم

$$f_1(t) \approx C_{12} f_2(t)$$

بهترین مقدار C_{12} برای آنکه مقدار متوسط مربع خطای مینیم گردد از رابطه زیر بدست میآید.

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt} \quad (1-39)$$

که در آن $f_2(t) f_2^*(t)$ مزدوج است.

از رابطه (1-39) پیدا است، اگر بخواهیم دو تابع مختلط $f_1(t), f_2(t)$ در فاصله

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) dt = 0 \quad (1-40)$$

برای یک مجموعه توابع مختلط $\{g_m(t)\}_{m=1,2,\dots}$ متقابلاً متعادل در فاصله (t_1, t_2) .

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}_m(t) \mathcal{G}_n^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ K_m & m = n \end{cases} \quad (1-41)$$

داریم

اگر این مجموعه کامل باشد، هر تابع مانند $f(t)$ را میتوان بصورت زیر نمایش داد.

$$f(t) = C_1 \mathcal{G}_1(t) + C_2 \mathcal{G}_2(t) + \dots + C_r \mathcal{G}_r(t) + \dots \quad (1-42)$$

که در آن

$$C_r = \frac{1}{K_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \mathcal{G}_r^*(t) dt \quad (1-43)$$

که اگر مجموعه توابع $\mathcal{G}_r(t) = \mathcal{G}_r^*(t)$ حقیق باشد، است. و تمام نتایجی که برای توابع مختلط حاصل است بدل به نتایج توابع حقیقی میگردد (از معادله ۳۸-۱ تا ۴۷-۱)

۱-۲ : نمونه‌ای چند از توابع متعامد

نمایش یک تابع بوسیله توابع متعامد در فاصله معین را نمایش تابع بوسیله سری فوریه مینماید.

البته مجموعه‌های توابع متعامد بسیارند و ممکن است یک تابع را بر حسب مجموعه‌های مختلف متعامد بیان نمود. این شبیه نشاندارن یک بردار در دستگاه‌های مختلف است.

پس هر مجموعه‌ای از توابع متعامد مانند دستگاه مختصات است. نمونه‌ای چند از توابع متعامد، توابع مثلثاتی، توابع نئائی (اکسپونانسیل)، چند جمله‌ای لوژاندر (Legendre) و چند جمله‌ای ژاکوبی ($J\alpha Cobi$) را میتوان نام برد. البته توابع بسل (Bessel) نیز خاص از توابع متعامدند.

سری لوژاندر - فوریه

مجموعه چند جمله‌ای لوژاندر ($P_n(x)$ ، $(n=0, 1, 2, \dots)$)، مجموعه کاملی از توابع متعامد را در فاصله $-1 < t < 1$ تشکیل میدهد. اینچنان چند جمله‌ای را میتوان تحت

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \text{فرمول Rodrigue}$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

از این معادله نتیجه می‌شود

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = (\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2})$$

$$P_3(t) = (\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t) \quad \text{و غیره}$$

میتوانیم متعامد بودن این چند جمله‌ای را چنین مشخص سازیم:

$$\int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} & m = n \end{cases} \quad (1-44)$$

را بر حسب چند جمله‌ای لوزاندر در فاصله $-1 \leq t \leq 1$ و نیز میتوانیم تابع $f(t)$

$$f(t) = C_0 P_0(t) + C_1 P_1(t) + \dots \quad \text{بدین صورت بیان کنیم}$$

$$C_p = \int_{-1}^1 f(t) P_p(t) dt / \int_{-1}^1 P_p^2(t) dt = \frac{2^{p+1}}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_p(t) dt \quad (1-45)$$

که در آن

توجه کنید، با وجود یکه نمایش سری در فاصله $(-1, 1)$ استوار است، لیکن میتوان این حدود را تا حد دلخواهی بوسیله تغییر مناسب در متغیر گسترش دار.

تمرین (1-۳)

حال بباید تابع مستطیلی شکل $(1-2)$ را بوسیله سری لوزاندر - فوریئر نماییش

$$f(t) = C_0 P_0(t) + C_1 P_1(t) + \dots + C_p P_p(t) + \dots \quad \text{د همیم}$$

ضرایب C_0 و C_1 و C_2 و ... و C_p و ... غیره را ممکن است از رابطه $(1-45)$ به

دست آورد.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = 0$$

$$C_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t f(t) dt = -\frac{3}{2}$$

$$C_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 f(t) \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{5}{2} \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) dt + \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) dt \right] = 0$$

میتوان بطور کلی نشان داد، اگر n زوج باشد $C_n = 0$ است یعنی

$$C_0 = C_2 = C_4 = \dots = 0$$

$$C_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 f(t) \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right) dt = \frac{7}{8}$$

بهینه متوال میتوان ضرایب C_5, C_7, \dots را محاسبه نمود پس داریم

$$f(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{7}{8} \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right) + \dots$$

سری مثلثاتی فوریه

ما قبل متعامد بودن توابع $\sin \omega t, \sin 2\omega t, \sin 3\omega t$ وغیره را در فاصله $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega})$

نشان داریم. واضح است که تابع $\cos n\omega t$ و $\cos m\omega t$ در همان فاصله متعامدند

بنابراین برای آنکه مجموعه کامل بدست آید، باید تابع کسینوسی را نیز به توابع سینوسی اضافه کنیم.

میتوان بسیار سهولت نشان داد، مجموعه ای که شامل $\cos n\omega t$ و $\sin n\omega t$ ، ($n=0, 1, 2, \dots$) باشد، یک مجموعه کامل را تشکیل میدهد. توجه کنید: برای $\sin n\omega t$ ، $n=0$ صفر ولی $\cos n\omega t$ مساوی یک است. بنابراین مجموعه متعامد و کاملی که بوسیله تابع زیر نطايش دارد — میشود خواهیم داشت

$$\left\{ 1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots \right\}$$

ضمنا هر تابعی مانند $f(t)$ را میتوان بر حسب اینگونه توابع در فاصله $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0})$ نمایش داد

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + \dots$$

$$+ b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + b_n \sin n\omega_0 t + \dots$$

$$(t_0 < t < t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0})$$

برای سهولت $\frac{2\pi}{\omega_0}$ را مساوی T در نظر میگیریم. معادله قبلی را نیز میتوان بدین

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-46)$$

رابطه (1-46) نمایش $f(t)$ بوسیله سری مثلثاتی فوریه در فاصله $(t_0, t_0 + T)$ میباشد. مقادیر a_n و b_n از روابط زیر بدست میآیند

$$a_n = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt / \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_0 t dt \quad (1-47a)$$

$$b_n = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt / \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2 n\omega_0 t dt \quad (1-47b)$$

اگر $n = 0$ باشد خواهیم داشت

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (1-48a)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_0 t dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad (1-48b)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1-48c)$$

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-48d)$$

مقدار ثابت a_0 در این سری از معادله (1-48a) بدست میآید. بدینی است که a_0 مقدار متوسط (میانگین) تابع $f(t)$ در فاصله (t_0, t_0+T) است. بنابراین a_0 مؤلفه

تابع $f(t)$ در آن فاصله است.

مکن است سری مثلثاتی فوریر را بصورت ادغام شده زیر نشان دارد.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (1-49)$$

که

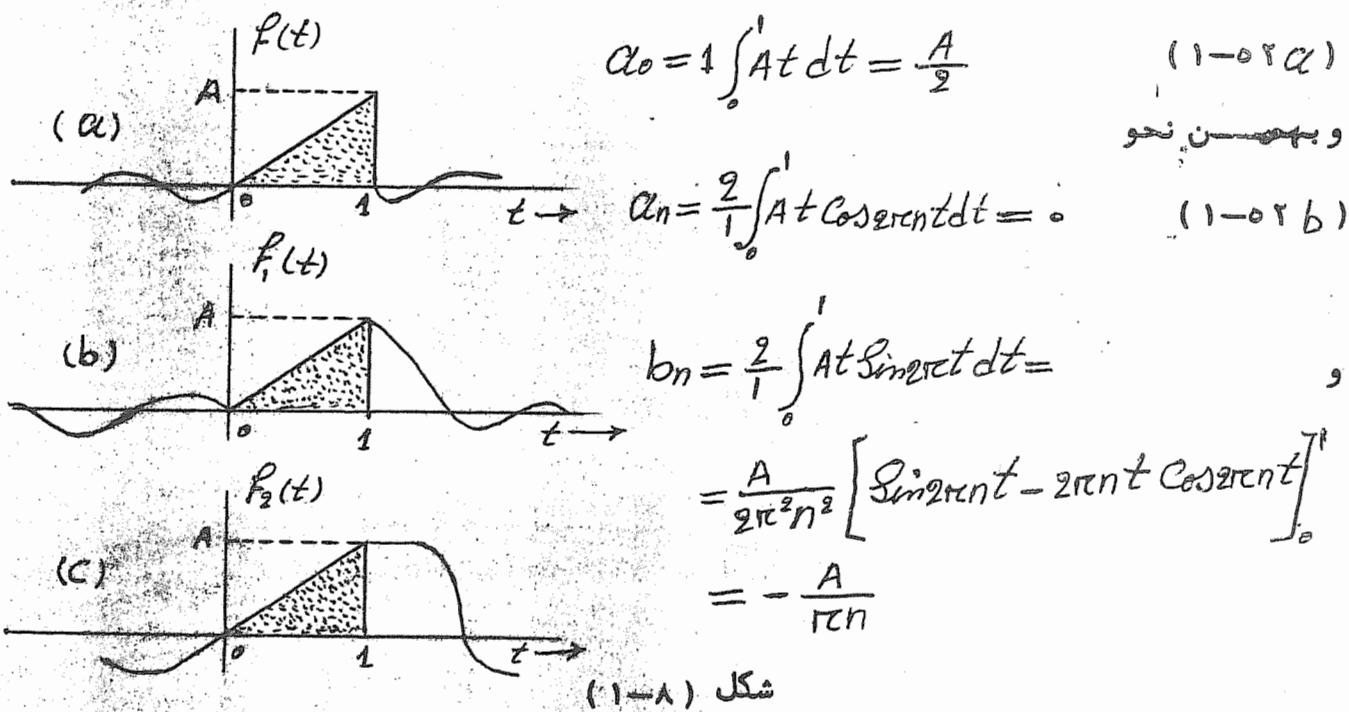
$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{و} \quad \phi_n = -\tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$$

میباشد.

تمرین (۱-۴۱) اگر $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ و $T = 1$ باشد، $f(t) = At$ در فاصله $0 < t < 1$ را بوسیله سری مثلثاتی فوریر بسط دهیم. واضح است که $a_0 = \frac{1}{2}A$ و $b_0 = 0$. بنابراین $t_0 = 0$ در نظر گیریم. پس $\omega_0 = 2\pi$ میباشد و میبایست

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + b_n \sin n\omega_0 t + \dots \quad (1-50)$$

ضرایب مختلف سری (۱-۵۰) را میتوان از معادلات (۱-۴۸C) تا (۱-۴۸C) بدست آورد.



چون $a_n = 0$ برای تمام مقادیر n است، از اینرو تمام جملات کسینوسی در سری رابطه (۱-۵۱) صفر هستند. ضرایب جملات سینوسی از رابطه (۱-۵۲) بدست می‌آید. پس

$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sin 2\omega t - \frac{A}{2\pi} \sin 4\omega t - \dots \quad (1-52)$$

$$-\frac{A}{n\pi} \sin n\omega t - \dots = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n} \quad (0 < t < 1) \quad (1-53)$$

بنابراین تابع $f(t)$ بر حسب مؤلفه هایش در فاصله $(0, 1)$ بیان نمودیم. از معادله (۱-۵۳) پیدا است که $f(t)$ دارای مؤلفه DC بقدار $\frac{A}{2}$ است. بعلاوه $f(t)$ نیز دارای مؤلفه های توابع سینوسی $\sin 2\omega t$ و $\sin 4\omega t$ وغیره بقدار بترتیب $-\frac{A}{\pi}$ و $-\frac{A}{2\pi}$ وغیره است.

سری نهائی فوریه

بسارگی میتوان متعامد بودن مجموعه توابع نهائی $\left\{ e^{jn\omega_0 t} \right\}$ را در فاصله t_0 و $t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}$ برای یک مقدار t_0 نشان دلیل. لازم بذکر است که این یک مجموعه توابع کمپلکس (مختلط) است. میتوانیم متعامد بودن این مجموعه را با در نظر گرفتن انتگرال

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} (e^{jn\omega_0 t}) (e^{jm\omega_0 t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt \quad \text{زیر اثبات کنیم.}$$

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} dt = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{اگر } m = n \text{ باشد انتگرال بدین صورت در می‌آید}$$

$$I = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} \Big|_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_0} \left[e^{2j\pi(n-m)} - 1 \right] \quad \text{اگر } n \neq m \text{ باشد انتگرال } I \text{ بصورت زیر خواهد بود}$$

چون m و n عدد های صحیح میباشند ،
مساوی یک بوده ، بنابراین $e^{j(n-m)2\pi}$
 $I = 0$ انتگرال مزبور صفر است . (۱-۵۴)

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} e^{jn\omega_0 t} (e^{jm\omega_0 t})^* dt = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (1-54)$$

برای سهولت $T = \frac{2\pi}{\omega}$ در نظر میگیریم . از ضابطه (۱-۵۴) پیدا است که مجموعه توابع $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ در فاصله $(t_0, t_0 + T)$ متعامدند ضمناً میتوان کامل بودن این مجموعه را نشان داد و نیز میتوان هر تابع دلخواهی مانند $f(t)$ را بوسیله ترکیب خطی توابع نتائی فوق در فاصله $(t_0, t_0 + T)$ نمایش داد .

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + F_3 e^{j3\omega_0 t} + \dots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \dots$$

$$+ F_1 e^{-j\omega_0 t} + F_2 e^{-j2\omega_0 t} + F_3 e^{-j3\omega_0 t} + \dots + F_n e^{-jn\omega_0 t} + \dots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (t_0 < t < t_0 + T) \quad (1-55)$$

که در آن $T = \frac{2\pi}{\omega}$ و n مقادیر صحیحی از $-\infty$ تا $+\infty$ و نیز صفر را شامل و در برابر میگیرد . نمایش $f(t)$ بوسیله سری نتائی ، مانند رابطه (۱-۵۵) به سری نتائی فوریه معروف است . ضرایب مختلف این سری را میتوان از معادله (۱-۴۳) بدست آورد .

$$F_n = \int_{t_0}^{t_0 + T} f(t) (e^{jn\omega_0 t})^* dt / \int_{t_0}^{t_0 + T} (e^{jn\omega_0 t})^* dt =$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (1-56)$$

ما نیز میتوانستیم این نتیجه را مستقیماً از ضرب گردن دو طرف معادله (1-۵۵) در $e^{-j n \omega_0 t}$ و انتگرال گرفتن در فاصله (t_0, t_0+T) بدست آوریم. طبق قاعده متعامد بودن آنها، تمام جملات طرف راست معادله باستثنای یک جمله، حذف میشوند و F_n مانند معادله (1-۵۶) بدست میآمد.

اگر نون بیاید نتایج خود را خلاصه کنیم: هر تابع دلخواهی مانند $f(t)$ را میتوان بصورت مجموع یک سری توابع نهائی $\left\{ e^{jn\omega_0 t} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ در فاصله (t_0, t_0+T) بیان نمود. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (t_0 < t < t_0+T) \quad (1-57)$$

که در آن

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (1-58)$$

باید خاطر نشان ساخت که سریهای مثلثاتی و نهائی فوریر دو نوع مختلف سری نیستند بلکه دو طریقه مختلف برای بیان یک سری میباشد، ضرایب یکی از آنها را میتوان بر حسب ضرایب دیگری بدست آورد. این موضوع را میتوان از معادلات (1-۴۸) و (1-۵۸) ملاحظه نمود.

از معادلات فوق الذکر مستفاد میشود:

$$a_0 = F_0$$

$$a_n = F_n + E_n$$

$$b_n = j(F_n - E_n) \quad (1-59)$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

برای تشریح بیشتر، تابع $f(t)$ تعریف (1-۱) را در نظر گیرید. این تابع بوسیله سری مثلثاتی فوریر بسط راره شد. (معادله ۱-۵۳). ما نیز میتوانستیم با بکار بردن روابط (1-۱) و (1-۵۸) آنرا بوسیله سری نهائی فوریر نمایش دهیم. بر عکس، میتوانیم با بکار بردن

روابط (۱-۵۹) ضرایب سری نتائی را از سری مثلثاتی بدست آوریم . با جاگذاری رابطه

(۱-۵۲) در (۱-۵۹) خواهیم داشت

$$F_0 = \frac{A}{2}, \quad F_n = \frac{jA}{2\pi n} \quad (1-60a)$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \left(\frac{jA}{2\pi n} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{j2\pi nt} \quad (1-60b)$$

۳-۱: نتایش یک تابع پریود یک (تناوبی) بوسیله سریهای فوریه در تمام فواصل

در بحث های پیش ما قادر بودیم تابع $f(t)$ را در فاصله محدود $t_0 < t < t_0 + T$ داشت

بوسیله سری فوریه نتایش دهیم . خارج از آن فاصله لازم نیست تابع $f(t)$ و سری فوریه مربوطه مساوی باشند . اگر تابع $f(t)$ پریود یک (تناوبی) باشد ، میتوان نشان داد که نتایش سری در تمام فواصل $(-\infty, +\infty)$ نیز صادق خواهد بود . اینرا میتوان با در نظر گرفتن تابع $f(t)$ و سری نتائی فوریه آن در فاصله $(t_0, t_0 + T)$ بسادگی ملاحظه نمود .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1-61)$$

تساوی رابطه فوق در فاصله $t_0 < t < t_0 + T$ استوار است . دو طرف رابطه (۱-۶۱) لازم نیست خارج از این فاصله مساوی باشند . با نگاهی به طرف راست معادله (۱-۶۱) پریود یک بودن آنرا (با پریود یا زمان تناوب : $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$) درک کرد . این امر از رابطه زیر ناشی و نتیجه میگردد .

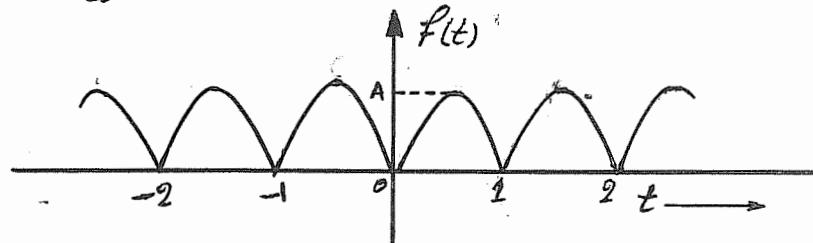
$$e^{jn\omega_0 t} = e^{jn\omega_0 (t+T)}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

واضح است که اگر $f(t)$ تابعی پریود یک با پریود T باشد ، تساوی معادله (۱-۶۱) در تمام فواصل $(-\infty, +\infty)$ برقرار و استوار خواهد بود . پس برای تابع پریود یک $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad -\infty < t < +\infty \quad \text{داریم :}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

که در آن



شکل (۱-۹) : سوچ سینوسی یکسو شده

توجه کنید که دیگر انتخاب و اختیار نداشت اهمیتی برای انتگرال ندارد.

تمرین ۱-۸

موج سینوسی یکسو شده شکل (۱-۹) را در نظر گیرید. برای این تابع داریم

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \begin{cases} \omega_0 = 2\pi \\ T = 1 \end{cases}$$

$$F_n = A \int_0^1 \sin(\pi n t) e^{-j2\pi n t} dt = \frac{-2A}{\pi(4n^2 - 1)}$$

از اینرو

$$f(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2\pi n t} \quad (1-62)$$

۴-۱ : طیف کمپلکس فوریر

بسط سری فوریر یک تابع پریود یک معادل تجزیه تابع بر حسب مؤلفه ها و فرکانس-

های مختلفشان است. یک تابع پریود یک با پریود T دارای فرکانس های زاویه ای (Angular) است.

$$\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, -\omega_0, -2\omega_0, -3\omega_0, \dots$$

با $\frac{2\pi}{T} = \omega_0$ است. بنابراین تابع پریود یک $f(t)$ دارای یک طیف فرکانسی مخصوص خود است. اگر $f(t)$ معلوم باشد، میتوانیم طیف آنرا پیدا نمائیم. بر عکس، اگر طیف فرکانسی معلوم باشد، میتوان تابع پریود یک $f(t)$ بدست آورد. بنابراین دو طریقه برای مشخص نمودن یک تابع پریود یک وجود دارد: نطايش در فضای زمان (Time domain)

که در آن $f(t)$ بصورت تابع زمانی بیان میشود. و دیگری نطايش در فضای فرکانس (Fre. domain)

که در آن طیف (بر حسب ، دامنه فرکانس‌های مختلف مؤلفه‌ها) مشخص می‌گردد . توجه کنید که طیف فقط در (- - - - و $\omega = 340$ و 240 و $\omega = \omega_0$) وجود دارد بنابراین طیف یک منحنی پیوسته‌ای نبوده بلکه در مقادیر مجزا و ناپیوسته *discrete* وجود دارد . گاهی بجای طیف ناپیوسته (*discrete spectrum*) بدان طیف خطی *Line Spectrum* نیز اطلاق می‌گردد .

ممکن است طیف را بصورت خطوط راستی در ... 340 و 240 و $\omega = \omega_0$ با دامنه‌ای متناسب با دامنه مؤلفه فرکانس مربوطه بطور ترسیمی نشان دار .

برای تعییش طیف فرکانس میتوانیم از سری مثبتاتی یا سری نمایی (اکسپونانسیل) استفاده کنیم . البته برای هدفها و آرمانهای مافرم نمایی بیشتر مفید خواهد بود . در این سری توابع پریود یک بصورت مجموعی از توابع نمایی با فرکانس‌های $\omega_0 + \pm \omega_1 + \pm \omega_2 + \dots$ بیان می‌شود . فهم فرکانس منفی چندان غامض و بغرنج نیست . دو سیگنال $e^{j\omega t}$ و $e^{-j\omega t}$ هر دو با فرکانس ω نوسان می‌کنند . آنها را میتوان بصورت دو فیزور (*Phasor*) که برخلاف یک‌یگر می‌چرخند در نظر گرفت . و هنگامیکه جمع شوند ، یک تابع حقیقی در فضای زمان بدست می‌آید :

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos \omega t$$

یک تابع پریود یک با پریود T بصورت سری نمایی زیر خواهد بود .

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\omega t} + F_2 e^{j2\omega t} + \dots + F_n e^{jn\omega t} + \dots + F_{-1} e^{-j\omega t} + \dots + F_{-n} e^{-jn\omega t} + \dots$$

معمولًا دامنه‌های F_n کمپکس بوده ، از اینرو دارای مقدار و فاز هستند . بنابراین ، بطورکلی

دو طیف خطی : طیف مقداری (*magnitude spectrum*) و طیف فازی (*phase spectrum*) برای تعییش یک تابع پریود یک در فضای فرکانس لازم است . البته در اکثر حالات ، دامنه مؤلفه‌ها حقیق یا موهومی است . از اینرو ممکن است تابع را فقط بوسیله یک طیف تشریح و تفسیر

کرد.

تابع پریود یک تعریف (۱-۵) را ملاحظه نمایید. این یک موج سینوسی یکسو شده است و -

سری نهائی فوریر آن تحت معادله (۱-۶) بدست می‌آید:

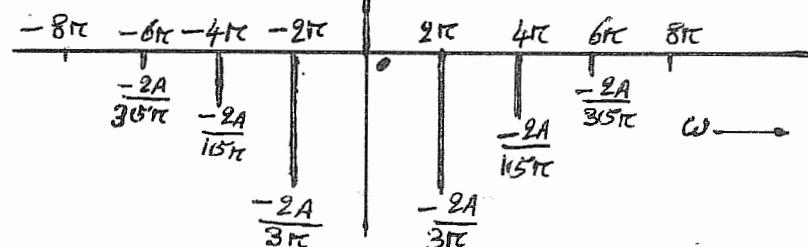
$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{3\pi} e^{-j2\pi t} - \frac{2A}{15\pi} e^{-j4\pi t} - \frac{2A}{35\pi} e^{-j6\pi t} - \dots - \frac{2A}{3\pi} e^{-j2\pi t} - \frac{2A}{15\pi} e^{-j4\pi t} - \frac{2A}{35\pi} e^{-j6\pi t} - \dots$$

طیف $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$ وجود دارد. مقدار دامنه های فرکانسی $\frac{2A}{\pi}, \frac{2A}{3\pi}, \frac{2A}{15\pi}, \frac{2A}{35\pi}, \dots$ مربوطه بترتیب عبارت است از $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$ توجه کنید که تمام دامنه ها حقیقی هستند و در نتیجه فقط ترسیم یک طیف کافی است. شکل (۱-۱) طیف فرکانسی آنرا نشان میدهد. همانطوری که از شکل پیداست، طیف نسبت به محور قائم که از مبدأ میگذرد متقارن است. ما قریباً تقارن طیف مقداری هر تابع پریودیک نسبت به محور قائم که از مبدأ میگذرد نشان خواهیم داد. اینرا میتوان بسازگی اثبات کرد.

$$F_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

میدانیم ضرایب F_n از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$F_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega t} dt$$



شکل (۱-۱): طیف خالی موج سینوسی یکسو شده

از این معادلات پیداست که ضرایب F_n و F_{-n} مزدوج یکدیگرند. یعنی $|F_{-n}| = |F_n|$

بنابراین طیف مقداری نسبت به محور قائم که از مبدأ میگذرد متقارن بوده و تابع ذوجی از ω میباشد.

اگر F_n حقیقی باشد، E_n نیز حقیقی بوده و F_n مساوی E_n است. اگر کمپلکس باشد خواهیم داشت.

$$F_n = |E_n| e^{j\theta_n} \quad (1-62a)$$

$$E_n = |F_n| e^{-j\theta_n} \quad (1-62b)$$

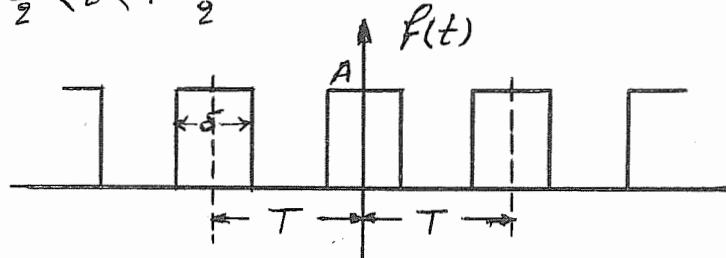
البته فاز F_n مساوی θ_n و فاز E_n مساوی $-\theta_n$ است. بدینه است که طیف فاری نسبت به محور قائم که از مبدأ میگذرد نا متقارن (تابع فرد) و طیف مقداری نسبت به آن محور متقارن (تابع ذوج) است.

تمرین (۱-۶) تابع گیت (تابع دری : Gate) و پریود یک شکل (۱-۱۱) را به وسیله همیاری فوریه ربط دهید و طیف فرکانس آنرا رسم کنید.

حل - تابع گیت (Gate) به پهنهای T و T ثانیه تگرار میشود. تابع

$$f(t) = \begin{cases} A & -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ 0 & +\frac{\delta}{2} < t < T - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

را میتوان در یک پریود بصورت زیر نمایش داد



شکل (۱-۱۱)

برای سهولت حدود انتگرال را $\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$ - قا
 $F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} A e^{-jn\omega t} dt$

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{-A}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t} \left[\frac{\sin(\frac{\omega_0 \delta}{2})}{\frac{\omega_0 \delta}{2}} - \frac{\sin(-\frac{\omega_0 \delta}{2})}{-\frac{\omega_0 \delta}{2}} \right] = \\
 &= \frac{2A}{jn\omega_0 T} \times \frac{e^{j\frac{n\omega_0 \delta}{2}} - e^{-j\frac{n\omega_0 \delta}{2}}}{2j} \\
 &= \frac{2A}{jn\omega_0 T} \sin(n\omega_0 \frac{\delta}{2}) \\
 &= \frac{A\delta}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 \frac{\delta}{2})}{n\omega_0 \frac{\delta}{2}} \right]
 \end{aligned} \tag{1-64}$$

تابعی که در داخل کروشه است بصورت $\frac{\sin x}{x}$ میباشد. این تابع در تئوری ارتباطات نقش مهمی را ایفا میکند و بنام تابع نمونه برداری (Sampling) معروف است. آنرا بدین نحو اختصار و نشان میدهد.

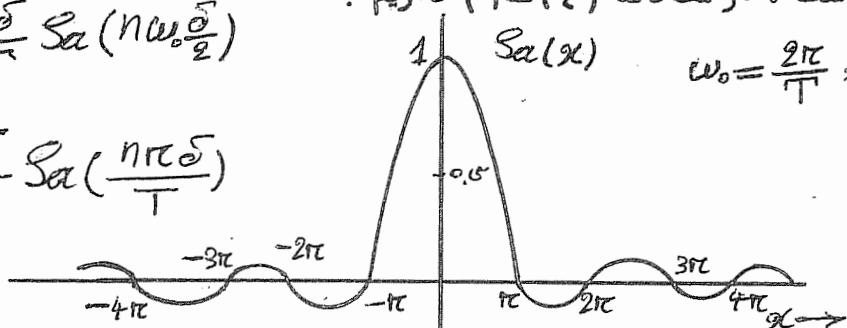
$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{1-65}$$

تابع نمونه برداری در شکل (1-12) صورگشته است. توجه کنید که تابع با پریود 2π نوسان میکند و دامنه آن بتدريج در دو طرف محور x کم میگردد. در $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$

قدار تابع مذبور صفر است. از معادله (1-1) داریم:

$$F_n = \frac{A\delta}{T} Sa\left(n\omega_0 \frac{\delta}{2}\right)$$

$$F_n = \frac{A\delta}{T} Sa\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right)$$



$$f(t) = \frac{A\delta}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) e^{jn\omega_0 t} \quad (1-66a, b)$$

شکل (1-12)

تابع نمونه برداری (Sa(x))

از معادله (۱-۶۶) پیدا است که \int_{η}^{∞} حقیقی است بنابراین فقط یک طیف برای نمایش فضای

$$F_n = E_n \quad \text{فرکانس لازم داریم. چون } S_{dR}(x) \text{ تابع ذوجی میباشد. از این‌رو}$$

فرکانس اولیه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ است و طیف فرکانس یک تابع ناپیوسته و جدا جدا است و فقط در $\dots, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$

$$\omega = \dots, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$$

$$\frac{A\delta}{T}, \frac{A\delta}{T} S_{dR}\left(\frac{n\pi}{T}\right), \frac{A\delta}{T} S_{dR}\left(\frac{2n\pi}{T}\right)$$

وجود دارد. اگنون طیف را بر مقادیر معینی از ω و T در نظر میگیریم.

اگر $\delta = \frac{1}{4}$ و $T = \frac{1}{4}$ ثانیه باشد، معادله (۱-۶۶) بصورت زیر در می‌آید.

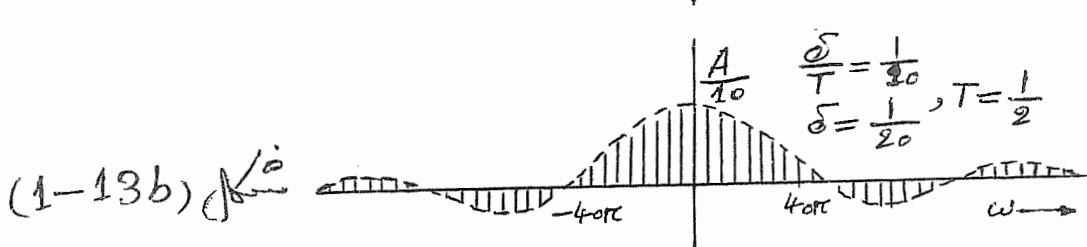
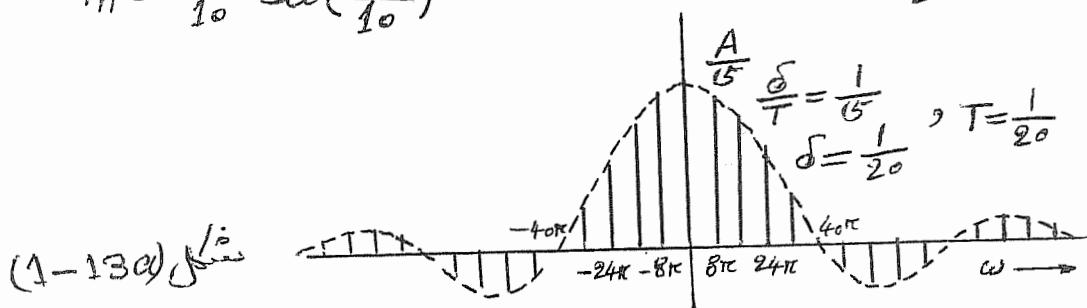
$$F_n = \frac{A}{10} S_{dR}\left(\frac{n\pi}{10}\right)$$

فرکانس اولیه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ است بنابراین طیف در

$$\omega = 0, \pm 8\pi, \pm 16\pi, \dots$$

وجود دارد. شکل (۱-۱۳a) طیف مزبور را نشان میدهد.

$$F_n = \frac{A}{10} S_{dR}\left(\frac{n\pi}{10}\right) \quad \text{اگر } \delta = \frac{1}{20} \text{ و } T = \frac{1}{20} \text{ ثانیه باشد:}$$



طیف در σ و $2\sigma \pm 4\sigma$... وغیره وجود دارد شکل (۱-۱۳)

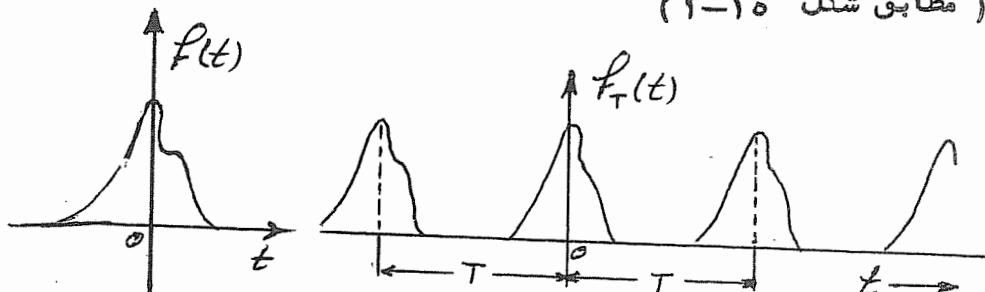
$$F_n = \frac{A}{2^{\sigma}} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2^{\sigma}}\right) \quad \text{اگر } \frac{1}{2^{\sigma}} = k \quad \text{و} \quad T = 1 \quad \text{ثانیه باشد داریم}$$

و طیف در σ و $2\sigma \pm 4\sigma$... وغیره وجود دارد (شکل). بدینه است هر قدر T بزرگتر شود، فرکانس اولیه $\frac{2\pi}{T}$ کوچکتر شده بنا براین در یک فاصله معین از محور فرکانس تعداد بیشتری مؤلفه فرکانس جای میگیرد. پس هر چه پریود زیاد باشد، طیف متراکم تر و تکائش بیشتر میگردد. ضمناً با افزایش T رامنه آنها کافش میباید. اگر T بین نهایت شود، یک پالس منفرد مستطیلی به پهنهای که خواهیم داشت که فرکانس اولیه اش صفر است. اگنون طیف پیوسته بوده و هر فرکانسی در آن وجود دارد. توجه کنید که شکل طیف فرکانس با تغییر T عوض نمیشود. بنا براین پوش طیف فقط بشكل پالس بستگی داشته که هر T ثانیه تکرار میشود. و به پریود T بستگی ندارد. در حد وقتی T بین نهایت شود، تابع $f(t)$ فقط شامل یک پالس خواهد بود و طیف نمایشگر یک تابع غیر پریود یک در تمام فواصل $(-\infty, +\infty)$ است. این مطلب در بخش بعد مفصله تشریح خواهد شد.

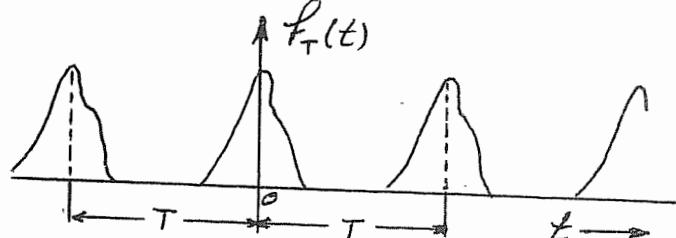
(۱-۵) : نمایش یک تابع دلخواه در فاصله $(+\infty, -\infty)$: تبدیل فوریه

تا گنون توانستیم یک تابع دلخواه را بر حسب سری نمائی یا مثلثاتی در فاصله محدودی نمایش دهیم. ضمناً برای حالت خاص تابع پریود یک، آنرا در فاصله نامحدود $(-\infty, +\infty)$ بسط داریم اگنون بحث براین است که آیا میتوان هر تابع دلخواهی خواه پریود یک یا غیر پریود یک را در فاصله نامحدودی بر حسب توابع نمائی نشان داد. فعلانه خواهیم دید این امر امکان پذیر است. و نشان داده خواهد شد که سیگنال غیر پریود یک را غالباً بصورت مجموع پیوسته ای از توابع نمائی نمایش داد. البته لازم بیار آوریست، سیگنالهای پریود یک را میتوان بوسیله مجموع ناپیوسته ای $(discrete)$ از توابع نمائی نمایش داد. (قبلانه بحث شد).

از دوراه ممکن است بحل این مسئله رسید . میتوانیم تابع $f(t)$ را بر حسب توابع نمائی (اکسپونانسیل) در فاصله محدود $\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ بسط داره سپس T را بسمت بسی - نهایت میل دهیم . بر عکس میتوان یک تابع پریود یک با پریود T بنحوی در نظر گرفت که تابع $f(t)$ یک سیکل از تابع مذکور باشد و سپس T را به بینهایت میل داد . بنابراین در حد $t < -\infty$ این تابع یک سیکل خواهد داشت که همان $f(t)$ است . پس در حقیقت اختلافی بین دو طریقه فوق وجود ندارد البته راه دومی ساده تر است و پیشاجازه - میدهد تا بدون تغییر شکل طیف فرکانس فرآیند حد نمودن آنرا ملاحظه کنیم (Limiting process) میدهد حد نمودن تابع پریود یک تعریف (۱-۱۶) شکل (۱-۱۶) را مختصری بحث کردیم . دیدیم هر قدر T بزرگتر شود که فرکانس اولیه (Fundamental Frequency) کوچکتر شده و تراکم و تکاف طیف بیشتر میشود . یعنی در یک ردیف فرکانس مفروض ، تعداد مؤلفه ها بیشتر ، لیکن دامنه ها کوچکتر میگرد . البته شکل طیف فرکانس تغییر نمیکند . اینرا میتوان از شکل (۱-۱۳) ، هنگامیکه $(T = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ ثانیه فرض شود ، ملاحظه کرد . حال بباید تابعی مانند $f(t)$ طبق شکل (۱-۱۴) در نظر گیریم . میخواهیم این تابع را بصورت جمع توابع نمائی در فاصله $t < +\infty$ - نمایش دهیم . بدین منظور تابعی مانند $f_T(t)$ با پریود T را بقسمی در نظر میگیریم که تابع $f(t) \rightarrow f_T(t)$ ثانیه در آن - تکرار شود (مطابق شکل (۱-۱۵))



شکل (۱-۱۴)



شکل (۱-۱۵)

پریود T را طوری انتخاب میکنیم که هیچگونه بهم رفتگی و رویهم افتادگی در توابع $f(t)$ تولید نشود. پس تابع $\tilde{f}_T(t)$ جدید یک تابع پریود یک بوده و میتوان آنرا با سری نطائی فوریر نشان داد. اگر T بین نهایت شود، در حد پالس‌های تابع پریود یک بعد از گذشت بینهایت ثانیه تکرار میشود از اینرو بور حد $T \rightarrow \infty$ ، تابع $\tilde{f}_T(t)$ و $f(t)$ یکسان هستند یعنی

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{f}_T(t) = f(t)$$

بنابراین وقتی $T \rightarrow \infty$ شود، سری فوریر که نطايشگر $\tilde{f}_T(t)$ در فاصله $(-\infty, \infty)$ است تابع $f(t)$ را نیز در همان فاصله $(-\infty, +\infty)$ درآن سری نشان میدهد.

سری نطائی فوریر تابع $\tilde{f}_T(t)$ را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\tilde{f}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1-62)$$

آنکه نشاند هندسه دامنه های مؤلفه های است که فرکانس آنها $n\omega_0$ است. اکنون T را به سمت مقادیر زیاد میل میدهیم. هر قدر T بزرگتر شود، ω_0 (فرکانس اولیه) کوچکتر گشته و طیف متراکم تر و متناقض تر میگردد. بطوريکه از معادله (1-62) ملاحظه میگردد، دامنه تک تک مؤلفه ها کوچکتر میشود. بازهم مذکور میشود، شکل طیف فرکانس تغییر نمیکند (آنکه در شکل 1-13 مشاهده نمودیم) هنگامیکه $T = \infty$ است، مقدار هر مؤلفه بسیار بسیار کوچک شده و تعداد مؤلفه های فرکانسی نیز بی نهایت میگردد. پس طیف در هر مقداری از ω وجود داشته لیکن بطور ناپیوسته نیووه بلکه تابع پیوسته ای است از ω . برای اینکه این نکته روشن شود، اجازه دهید مختصری تغییر در مفروضات خود بد هیم.

$$n\omega_0 = \omega_n \quad (1-68)$$

پس $\sum F_n$ تابعی از ω_n است . و $F(\omega_n)$ بکار میریم و نیز

$$T \sum F_n(\omega_n) = F(\omega_n) \quad (1-79)$$

قرار میدهیم . از اینرو

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \quad (1-80)$$

واز معادلات (1-62) و (1-69) داریم :

$$F(\omega_n) = T f_T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (1-81)$$

با جاگذاری $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ در معادله (1-80) خواهیم داشت

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \times \omega_0 \quad (1-82)$$

از معادله (1-82) مستفاد میشود که میتوان تابع $f_T(t)$ را بر حسب جمع توابع نهائی بفرکانس‌های $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots$ بیان نمود . دامنه فرکانس‌های ω_n برابر $\frac{\omega_0}{2\pi}$ است . توجه کنید دامنه ایکه از $f_T(t)$ در فرکانس ω_n بدست می‌آید ، $F(\omega_n)$ نیست بلکه متناسب با $F(\omega_n)$ است .

حال بباید معادله (1-82) را که نمایشگر مجموع مؤلفه های فرکانسی ناپیوسته است تفسیر

کنیم . در حقیقت بطور کلی $F(\omega_n) e^{j\omega_n t}$ کمپلکس بوده و نمایش آن مستلزم ترسیم دو منحنی می‌باشد (منحنی حقیقی و موهوم یا مقداری و فازی) البته فرض می‌کنیم

حقیقی باشد . شکل (1-16) نمایش اینچنین منحنی را بر حسب تابع ω نشان میدهد .

تابع مزبور فقط در مقادیر ناپیوسته ω وجود دارد یعنی $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots, \omega = \omega_0$ که در آن $\omega_n = n\omega_0$ است .

هر یک از فرکانسها بقدار ω از دیگری فاصله دارد . بنابراین سطح مستطیلی که در شکل

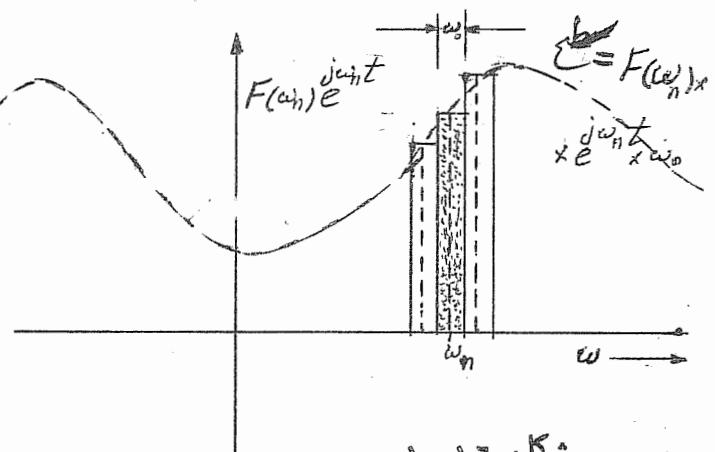
(1-16) مشخص شده $\omega \cdot e^{j\omega t} F(\omega_n)$ است . معادله (1-82) مجموع سطح این

چنین مستطیل‌هایی از $(\omega + \Delta\omega - \omega_n)^n$ می‌باشد ، پس بنابراین مجموع سطح اینچنین

مستطیل تقریباً مساوی سطح زیر منحنی نقطه چین است. هر قدر ω کوچکتر باشد، تقریب طا بهتر خواهد بود. وقتی $T \rightarrow \infty$ میل نماید، ω بی نهایت کوچک شده و ما میتوانیم آنرا $d\omega$ در حد در نظر گیریم. از اینرو جمع ناپیوسته های معادله (۱-۲۲) بصورت انتگرال یا سطح زیر منحنی در می‌آید. اگنون منحنی پیوسته بوده وتابع ω میباشد و بصورت $F(\omega)e^{j\omega t}$ خواهد بود. ضمناً اگر $T \rightarrow \infty$ میل گند تابع $f(t)$ بسته میگرد و معادله (۱-۲۲) بصورت زیر در می‌آید:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-23)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-24)$$



شکل ۱-۱۶

پس موفق شدیم تا تابع غیر پریود یک $f(t)$ را بر حسب توابع نعائی در تمام فواصل $-\infty < t < \infty$ نمایش دهیم. معادله (۱-۲۳) و $f(t)$ را بصورت مجموع پیوسته‌ای از توابع نعائی با فرکانس‌هایی که در فاصله $\omega < +\infty$ هستند، نمایش میدهد. راهنمای فرکانسی طائف ω متناسب با $F(\omega)$ میباشد. در این صورت $F(\omega)$ نشان‌هندۀ طیف فرکانس (spectral density function) $f(t)$ بوده و بنام تابع تکاف طیف (spectral density function) خوانده میشود. توجه کنید اگنون طیف فرکانس پیوسته میباشد و در تمام ω وجود دارد تابع تکاف طیف را میتوان از رابطه (۱-۲۴) بدست آورد.

عموماً معادلات (۱-۲۳) و (۱-۲۴) بنام تبدیلات فوریه (Fourier transform) موسومند.

معادله (۱-۲۴) بنام تبدیل مستقیم فوریه از $f(t)$ و (۱-۲۳) تبدیل معکوس فوریه از $F(\omega)$

معروف است : از نظر سمبولیک اینطور مینویسند

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad , \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \quad (1-120)$$

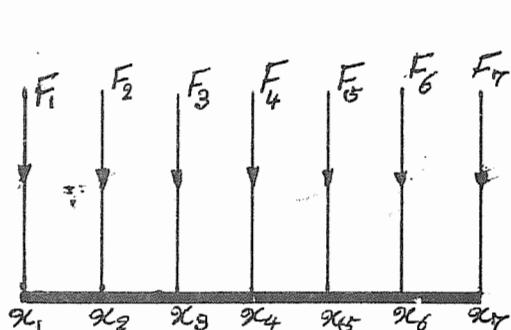
بنابراین $F(\omega)$ تبدیل مستقیم فوریر ($f(t)$) و $f(t)$ تبدیل معکوس فوریر ($F(\omega)$) است

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad , \quad \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

۱-۶ : ملاحظاتی درباره طیف فرکانس پیوسته

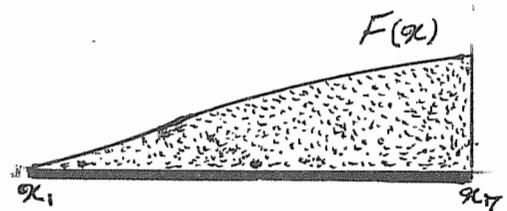
تابع غیر پریودیک ($f(t)$) را توانستیم بر حسب جمع پیوسته ای از توابع نمائی با فرکانس هائی (بین ω تا $-\infty$) بیان کنیم . دامنه هر مؤلفه ای از فرکانس ω بین نهایت کوچک بوده لیکن متناسب با ($F(\omega)$) است و ($F(\omega)$) خود نیز تابع تکاشف (رانسیته یا چگالی density) طیف است .

مفهوم طیف پیوسته گاهی پیچیده است زیرا ما عموماً طیف را در فرکانس های ناپیوسته با دامنه معین در تابع پریودیک ترسیم نمودیم . مفهوم طیف پیوسته را میتوان شبیه نمود های بار روی تیرها (در مقاومت مصالح) دانست . نمونه ای از آن توزیع بار در روی یک تیر است . فرض کنید تیری با وزنهای F_1, F_2, \dots, F_7 در نقاط x_1, x_2, \dots, x_7 بارشده است (شکل ۱-۱۲a) . بنابراین تیر در ۷ نقطه ناپیوسته و مجزا بار شده و مجموع وزنی که بر روی



(1-12a)

$$W_T = \sum_{r=1}^7 F_r \quad \text{تیر است برابر است با :}$$



(1-12b)

اگنون تیر را با بار پیوسته طبق شکل (۱-۱۷) در نظر گیرید. تکاف بار تابعی از $\%$ میباشد و ما آنرا $F(\%)$ کیلوگرم بر متر فرض میکنیم. وزن کلی بار روی تیر برابر مجموع پیوسته بارها است یعنی انتگرال $F(\%)$ در تمام طول تیر است

$$W_T = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (Kg)$$

در حالت ناپیوسته بودن بارها، نیروها فقط در نقاط مجازی قرار دارند و در نقاط دیگر باری وجود ندارد. اما در حالت دیگر بار در همه جا توزیع شده لیکن مقدارش در یک نقطه صفر است. البته مقدارش در یک فاصله کوچک Δx برابر $F(x)\Delta x$ میباشد. پس $F(x)$ نشانه هندۀ مقدار بار نسبی در نقطه x است. درست همین طور در سیگنالها و طیف فرکانسانشان چنین است.

تابع پریود یک را میتوان بصورت یک سری توابع نمائی با دامنه های معلوم نمایش داد.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j\omega_n t} \quad \omega_n = n\omega_0$$

اما برای تابع غیر پریود یک، توزیع تابع نمائی پیوسته شده یعنی تابع طیف در هر مقداری از ω وجود دارد و در هر مقداری از ω دامنه آن فرکانس صفر است، لیکن در فاصله بین نهایت کوچک $\Delta\omega$ برابر با $\frac{1}{2\pi}$ و میتوان تابع $f(t)$ را بر حسب مجموع پیوسته ای از مؤلفه های بین نهایت کوچک بیان نمود.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-26)$$

اگر تغییر متغیر در انتگرال فوق مطابق زیر داشت $\omega = 2\pi f$ ضریب $\frac{1}{2\pi}$ حذف میشود

$$\omega = 2\pi f$$

$$d\omega = 2\pi df$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(2\pi f) e^{j2\pi ft} \cdot df$$

پس معادله (۱-۲۶) بدین صورت در می آید.

۱-۲ : نمایش یک سیگنال در فضای زمان و فضای فرکانس

تبدیل فوریر وسیله و ابزاری از برای تجزیه یک سیگنال به مؤلفه های نمائی میباشد . تابع $F(\omega)$ تبدیل مستقیم فوریر تابع $f(t)$ است و دامنه های نسبی فرکانسی آنرا نشان میدهد . بنابراین $F(\omega)$ نمایش فضای فرکانس $f(t)$ است . فضای زمان نمایش تابع در لحظات مختلف زمان است . پس هر دو فضا نمایشگر و مشخص کننده یک تابع میباشند . البته $F(\omega)$ کمپلکس بوده و مستلزم ترسیم دو منحنی است .

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

پس $F(\omega)$ را میتوان بوسیله رسم منحنی مقداری $|F(\omega)|$ و رسم فازی $\theta(\omega)$ نمایش داد . در بسیاری از حالات $F(\omega)$ حقیقی و یا موهومی است . از این رو رسم یک منحنی برای نمایش آن کافی میباشد . ولی بطور کلی ، $F(\omega)$ یک تابع کمپلکس با متغیر ω است . اگرچون نشان میدهیم که برای تابع حقیقی $f(t)$ رابطه زیر صادر است .

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{چون داریم} \quad (1-22Q)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \quad \text{همین طور} \quad (1-22b)$$

بنابراین از روابط $(1-22Q)$ و $(1-22b)$ نتیجه میشود $F(\omega)$ حقیق باشد

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

پس اگر $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$ باشد ، خواهیم داشت :

$$F(-\omega) = |F(\omega)| e^{-j\theta(\omega)}$$

از معادلات فوق نتیجه میشود : طیف مقداری (ω) تابع ذوجی از s و طیف فازی $\theta(\omega)$ تابع فردی از s میباشد .

۱-۸ : وجود تبدیل فوریه

از معادله (۱-۷۴) که نمایشگر تبدیل فوریه میباشد ، واضح است اگر انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ معین باشد ، تبدیل فوریه وجود دارد . اما چون مقدار $e^{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}$ واحد است ، پس شرط لازم برای وجود تبدیل فوریه تابع $f(t)$ معین بودن انتگرال زیر است

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

البته اگر انفراد (Singularity) توابع مثلاً تابع ضربه ای (impulse) جایز باشد ، شرط مطلق بودن زیر انتگرال کافی نیست . بعدها خواهیم دید برخی توابع هستند که شرط مطلق بودن زیر انتگرال برای آنها جایز نیست اما تبدیل فوریه دارند . پس مطلق بودن در انتگرال گیری لازم است ولی برای وجود تبدیل فوریه $f(t)$ کافی نیست .

شرط فوق برای توابعی از قبیل $U(t)$ ، $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ قانع کننده نمیباشد . بعبارت بهتر ، تبدیل فوریه به آنها تعلق نمیگیرد . اما اینگونه توابع در حد دارای تبدیل فوریه هستند . میتوان وجود تابع $\sin \omega t$ را در فاصله $\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ در نظر گرفت . تحت چنین شرایطی تابع مزبور دارای تبدیل فوریه بوده ولی مشروط برآنکه T معین و معلوم باشد . در اینجا میتوانیم T را بزرگ تصور کنیم ولیکن آن میایست مقداری معلوم و معین باشد . بعدها خواهیم دید هاینگونه توابع در حد دارای تبدیل فوریه میباشند .

۱-۹ : تبدیل فوریه برخی از توابع مفید

$$f(t) = e^{-\alpha t} U(t)$$

$$1 - تابع متعایی یکطرفه (e^{-\alpha t} U(t))$$

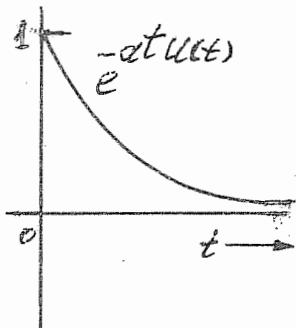
-۴۷-

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt$$

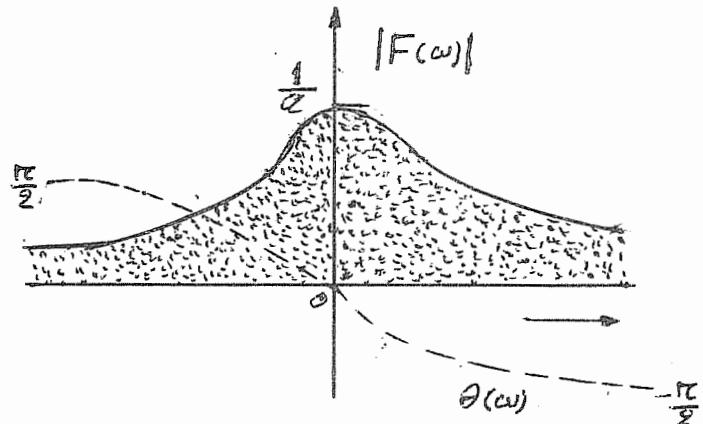
$$= \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \times e^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}$$
(1-۱۰)
(1-۱۱)

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}, \quad \theta(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$
ج

طیف مقداری $|F(\omega)|$ و طیف فازی $\theta(\omega)$ در شکل (1-۱۸b) ترسیم شده است.



(1-۱۸a)



(1-۱۸b)

توجه کنید، انتگرال رابطه (۱-۱۰) فقط برای $\alpha < 0$ معین است و برای $\alpha < 0$ تبدیل فوری وجود ندارد. در حقیقت در $\alpha < 0$ بطور مطلق قابل انتگرال گیری نیست

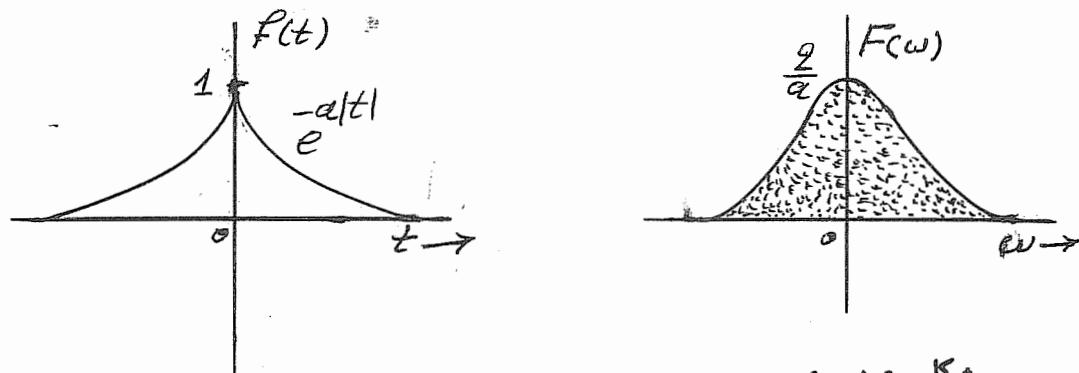
$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$

۲- تابع نهائی دو طرفه $\underline{e^{-\alpha|t|}}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

پس همانطوریکه ملاحظه میفرمایید طیف فازی $\delta(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ و طیف مقداری برابر است. (مطابق شکل ۱-۱۹)



شکل ۱-۱۹

۳- تابع گیت (Gate)

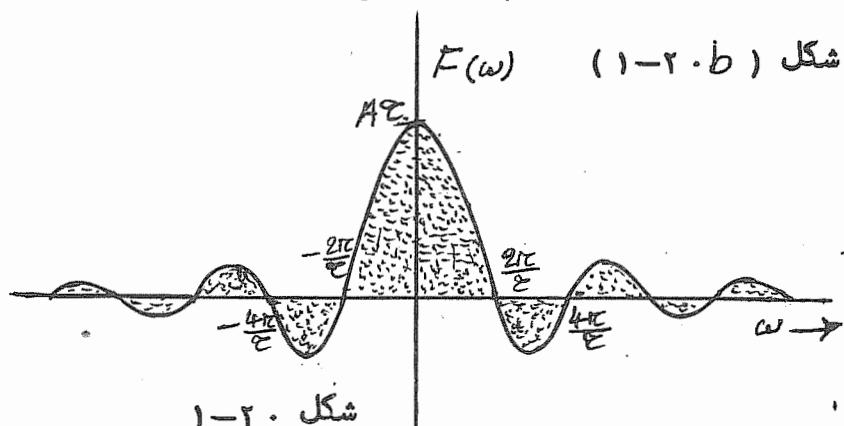
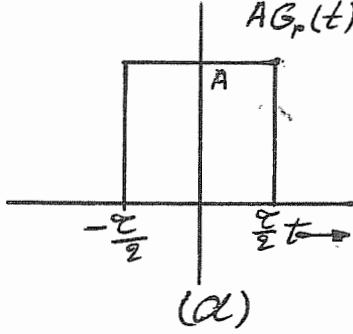
تابع گیت $G_r(t)$ یک پالس مستطیلی مطابق شکل (۱-۲۰-a) میباشد و چنین

تعریف میشود :

$$G_r(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A e^{-j\omega t} dt = A \omega \frac{\sin(\frac{\omega\pi}{2})}{(\frac{\omega\pi}{2})} \\ &= A \omega \text{Sa}(\frac{\omega\pi}{2}) \quad (1-13) \end{aligned}$$

توجه کنید تابع $F(\omega)$ یک تابع حقیقی است در نتیجه نمایش آن مستلزم رسم یک منحنی است.

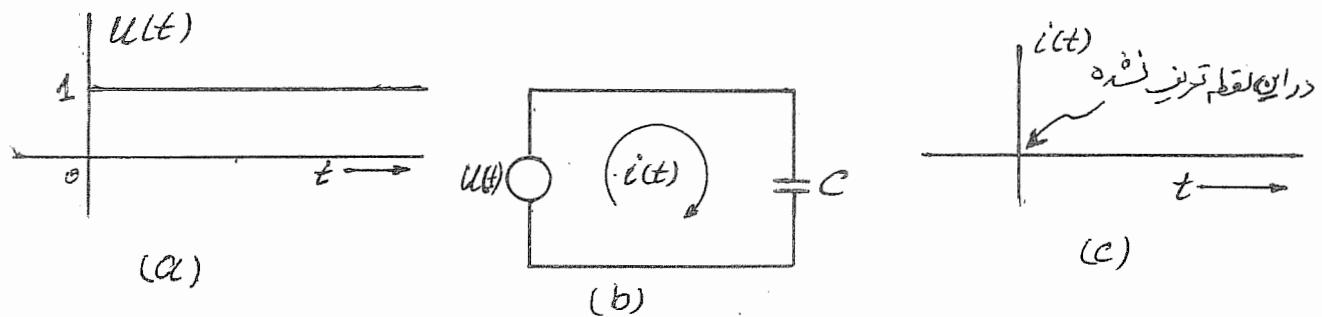


شکل ۱-۲۰

۱-۱: توابع منفرد

یک ولتاژ تک پله ای (Unit Step Voltage) که بر خازن اثر کند، طبق شکل (۱-۲۱(a))

$$i = C \frac{dU(t)}{dt} \quad \text{در نظر گیرید. جریانی که از خازن میگذرد برابر است با:}$$

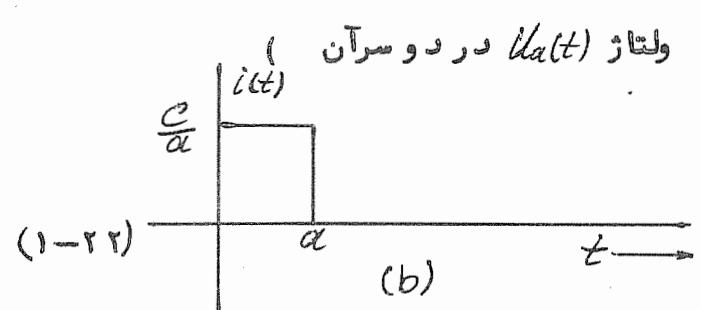
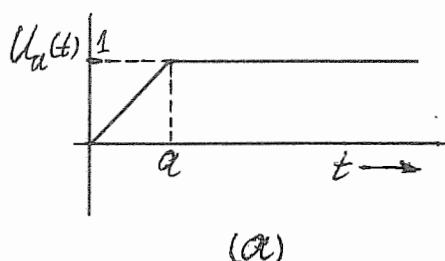


شکل: (۱-۲۱)

واضح است که $\frac{dU(t)}{dt}$ در تمام مقادیر t بجز $t=0$ صفر است. ضمناً مشتق در $t=0$ وجود ندارد زیر تابع $U(t)$ در این نقطه منفصل است. با بودن چنین منبع و نیز خازنسی ایده آل ما با مشکل بزرگی از نظر ریاضی مواجه میشویم. اگر منبع یا خازن ایده آل نبود، حل مسئله چندان دشوار نمیبود. مثلاً اگر منبع ولتاژ بجای (۱-۲۱(a))، (۱-۲۲(a)) اعمال شود، جریان بصورت پالس مطابق شکل (۱-۲۲(b)) حاصل میشود. بطريق مستقيم نتوانستیم مسئله را در حالتی که یک ولتاژ \rightarrow

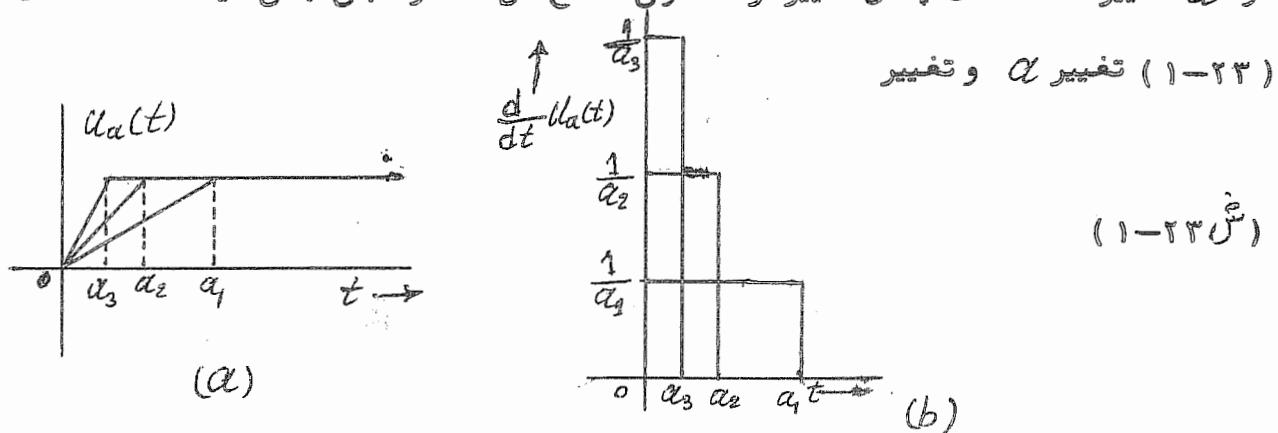
(مشخصه غیر ایده آل ولتاژ)

(پالس جریان خازن به علت



تک پله‌ای $u(t)$ اعمال شود حل کنیم، ولی فرض می‌کنیم ولتاژی مانند (۱-۲۲) اثر گند. سپس α را بسمت صفر میل داره آنوقت در حد میتوانیم مسئله را حل کنیم.

پس برای اینکه تابع ایده‌آل تک پله‌ای $u(t)$ حاصل شود، اول یک تابع مانند $u_\alpha(t)$ در نظر می‌گیریم و بعداً α را بسمت صفر میل داره و در حد تابع ایده‌آل تک پله‌ای $u(t)$ حاصل می‌شود. مشتق تابع $u_\alpha(t)$ پالس مستطیلی به بلندی $\frac{1}{\alpha}$ و به پهنای α است. اگر α تغییر کند، شکل پالس تغییر کرده، ولی سطح آن مقدار ثابتی باقی میماند. شکل



شکل پالسها را نشان میدهد. هنگامیکه α بسمت صفر میل میگند، پهنای پالس صفر شده و ارتفاعش بی نهایت میشود. اگر یک تابع جدید تعریف میکنیم: ما مشتق تابع تک پله‌ای $u(t)$ را تابع تک ضربه‌ای (unit impulse) مینامیم. چون مشتق تابع تک پله‌ای وجود ندارد، از اینرو ما تابع ضربه‌ای را حد مشتق یک تابع غیر ایده‌آل تک پله‌ای $u_\alpha(t)$ در نظر می‌گیریم و α را بسمت صفر میل میدهیم. پس تابع تک ضربه‌ای را چنین میتوان تعریف کرد ونوشت:

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{dt} [u_\alpha(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [u(t) - u(t-\alpha)]$$

در حد $\alpha \rightarrow 0$ فرض میشود تابع $\delta(t)$ پالس استبا راشه بی نهایت و پهنای صفر.

و سطح پالس همواره مقدار ثابت واحد باقی میماند. ضمناً تابع $\delta(t)$ در همجا بغير از $t=0$ صفر است. این حقایق را میتوان برای تابع مذبور چنین بیان نمود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{array} \right. \quad (1-14)$$

بطوریکه از تعریف تابع تک ضریب ای مستفار میشود، از نظر ریاضی یک تابع واقعی نیست، زیرا تابع در تمام مقادیر \neq تعریف میشود. البته تابع ضریب ای بوسیله تئوری توزیع شوارتز Schwartz مشخص شد. و سپس این تئوری بوسیله Temple تفسیر گردید. در این تعریف توابع پالسی بعنوان یک عدد از پالس‌های توابع منظم مثلثی نظری شکل (۱-۲۴c) تعریف شده‌اند و تمام عملیات روی توابع پالسی را میشود. بعنوان عملیات روی این پالسها در نظر گرفت بنابراین میتوان یک تابع پالسی را بتوسط تعدادی از پالس‌های نظری شکل (۱-۲۴c) نشان دهیم. شکل (۱-۲۵) یک تابع پالس را بعنوان حدی از چند تابع متعاقب نمونه برداری نشان میدهد. تمام این توابع متعاقب معادله (۱-۸۴) را ارضاء میکنند. تابع ضریب ای رانیز میتوان به طرق مختلف تعریف کرد.

۱- پالس‌گوس

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} e^{-\pi \frac{t^2}{\epsilon^2}}$$

۲- پالس مثلثی

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[1 - \frac{|t|}{\epsilon} \right] & |t| < \epsilon \\ 0 & |t| > \epsilon \end{cases}$$

۳- پالس ن汰ی

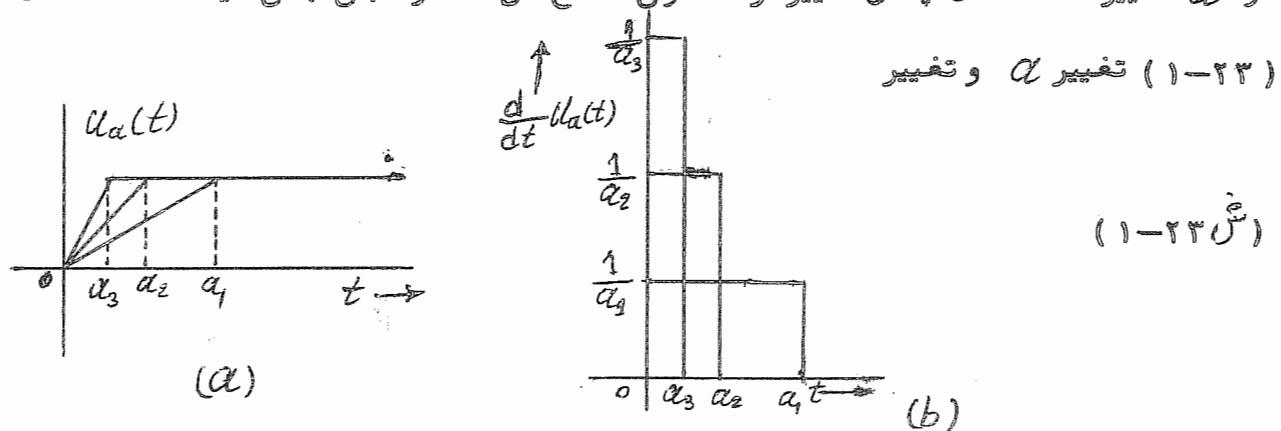
$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|t|}{\epsilon}}$$

۴- تابع نمونه برداری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K}{\pi} \text{Sa}(Kt) dt = 1 \quad (1-85)$$

تک پله ای $u(t)$ اعمال شود حل کنیم، ولی فرض میکنیم ولتاژی مانند (۱-۲۲Q) اثر کند. سپس α را بسمت صفر میل داره آنوقت در حد میتوانیم مسئله را حل کنیم.

پس برای اینکه تابع ایده آل تک پله ای $u(t)$ حاصل شود، اول یک تابع مانند $u_a(t)$ در نظر میگیریم و بعداً α را بسمت صفر میل داره و در حد تابع ایده آل تک پله ای $u(t)$ حاصل میشود. مشتق تابع $u_a(t)$ بالس مستطیلی به بلندی $\frac{1}{\alpha}$ و به پهنای α است. اگر α تغییر کند، شکل بالس تغییر کرده، ولی سطح آن مقدار ثابتی باقی میماند. شکل



(۱-۲۳) تغییر α و تغییر

(۱-۲۴)

شکل بالسها را نشان میدهد. هنگامیکه α بسمت صفر میل میکند، پهنای بالس صفر شده و ارتفاعش بی نهایت میشود. اکنون یک تابع جدید تعریف میکنیم: ما مشتق تابع تک پله ای $u(t)$ را تابع تک ضربه ای (Unit impulse) مینامیم. چون مشتق تابع تک پله ای وجود ندارد، از اینرو ما تابع ضربه ای را حد مشتق یک تابع غیر ایده آل تک پله ای $u_a(t)$ در نظر میگیریم و α را بسمت صفر میل میدهیم. پس تابع تک ضربه ای را چنین میتوان تعریف کرد ونوشت:

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{dt} [u_a(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [u(t) - u(t-\alpha)]$$

در حد $\alpha \rightarrow 0$ فرض میشود تابع $\delta(t)$ بالسی استبا رامنه بی نهایت و پهنای صفر.

و سطح بالس همواره مقدار ثابت واحد باقی میماند. خصوصاً تابع $\delta(t)$ که در همجا بغير از $t=0$ صفر است. این حقایق را میتوان برای تابع مزبور چنین بیان نمود.

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

بطوریکه از تعریف تابع تک ضریب ای مستفار میشود، از نظر ریاضی یک تابع واقعی نیست، زیرا تابع در تمام مقادیر \neq تعریف میشود. البته تابع ضریب ای بوسیله تئوری توزیع شوارتز Schwartz مشخص شد. و سپس این تئوری بوسیله Temple تفسیر گردید. در این تعریف توابع پالس بعنوان یک عدد از پالسهای توابع منظم مثلث نظری شکل (۱-۲۴c) تعریف شده اند و تمام عملیات روی توابع پالس را میشود. بعنوان عملیات روی این پالسهای در نظر گرفت بنابراین میتوان یک تابع پالس را بتوسط تعدادی از پالسهای نظری شکل (۱-۲۴c) نشان دهیم. شکل (۱-۲۵) یک تابع پالس را بعنوان حدی از چند تابع متعاقب نمونه برداری نشان میدهد. تمام این توابع متعاقب معادله (۱-۸۴) را ارضاء میکنند. تابع ضریب ای رانیز میتوان به طرق مختلف تعریف کرد.

۱- پالس گوس

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 t^2}{\epsilon^2}}$$

۲- پالس مثلث

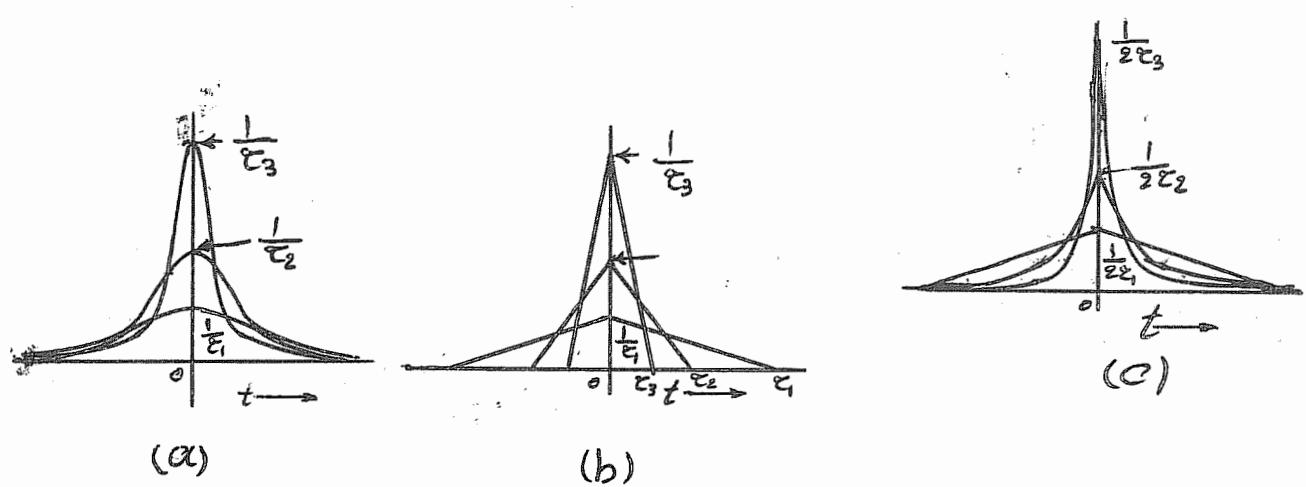
$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[1 - \frac{|t|}{\epsilon} \right] & |t| < \epsilon \\ 0 & |t| > \epsilon \end{cases}$$

۳- پالس ن汰ی

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|t|}{\epsilon}}$$

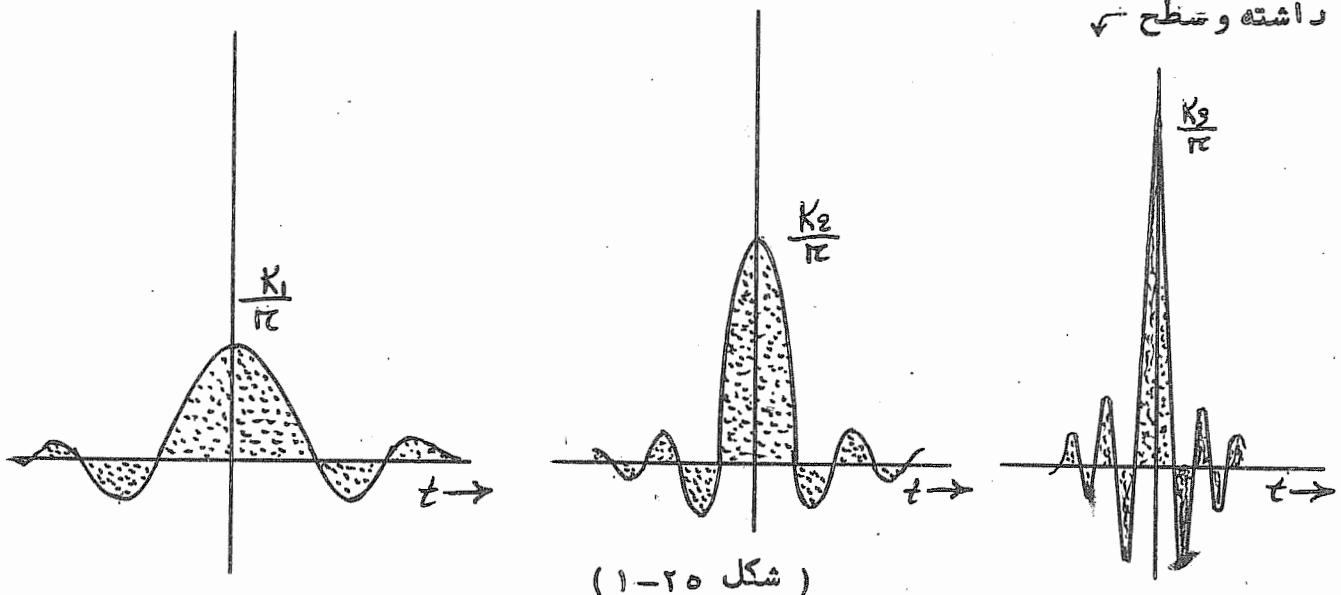
۴- تابع نمونه برداری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K}{\pi} \text{Sa}(Kt) dt = 1 \quad (1-85)$$



شکل - (۱-۲۴)

هر قدر K بزرگتر باشد، دامنه تابع $\frac{K}{\pi} \text{Sa}(Kt)$ بزرگتر شده و تابع سریع تر نوسان گردید و زود تر محو میگردد. (شکل ۱-۲۵) . اگر $K \rightarrow \infty$ میل کند تابع فقط در مبدأ وجود داشته و تسطیح شود



ازیر منحنی هنوز واحد است. پس بطوریکه از معادله (۱-۸۰) نتیجه و مشاهده میشود

$$\delta(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{\pi} \text{Sa}(Kt) \quad (1-86)$$

— سریع تابع نمونه برداری

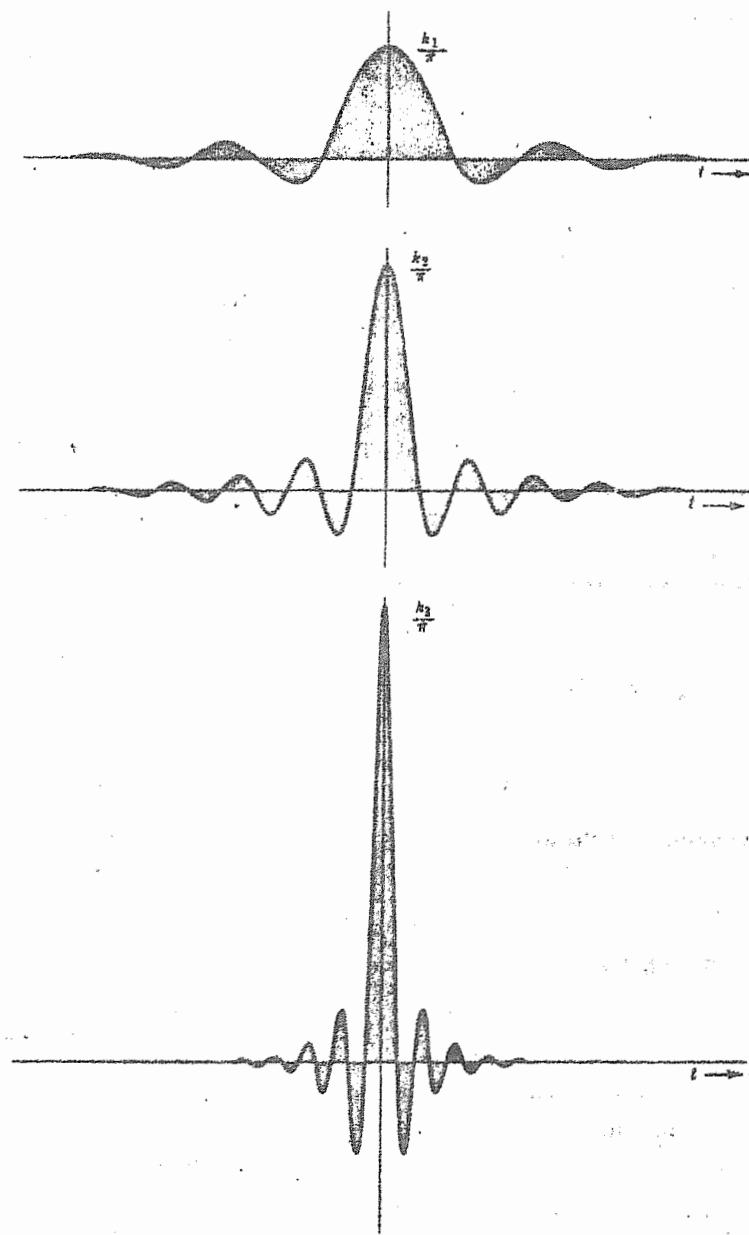


Figure 1.26 The impulse function as a limit of the sequence of a sampling function.

$$\delta(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{\pi^2} S\alpha^2(Kt) \quad (1-82)$$

اینهم مانند تابع نمونه برد اریست زیرا که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K}{\pi^2} S\alpha^2(Kx) dx = 1 \quad (1-88)$$

با جاگذاری تابع $\delta(x)$ ، سطح در نقطه $x = t$ ادغام و بهم رفته شده بنا برای من میتوان نوشت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

که 0^+ و 0^- نمایشگر مقدار کوچکی از طرف منفی و مثبت مبدأ است . چون $\delta(t)$ در همچنان

جز $x = t$ وجود ندارد بنا براین

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = f(0) \quad (1-90Q)$$

از این مطلب نتیجه میشود :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (1-90b)$$

معادلات $(1-90)$ خواص تابع ضربه ای را نشان میدهد .

باز هم متذکر میشویم ، تابع ضربه ای بلحاظ ریاضی یک تابع واقعی نیست ، محدودک نتایج آن از نظر تفسیر نمود های فیزیکی بسیار سودمند است . تابع ضربه ای در علم فیزیک و مهندسی بسیار بکار میرود زیرا آنرا میتوان بعنوان : جرم ، بار یا منبع متمرکز در یک نقطه ، و نیز بمتابه نیروهای متمرکز سطح بار دار ، خط نیرو بکار برد . البته در عمل چنین توزیعی وجود ندارد ولی از تصور آن نتایج زیادی مشتق میگیرد . بعلاوه دستگاههای اندازه گیری که اکنون بکار میروند ،

نمیتوانند پاسخ $(1-88)$ یک تابع ضربه ای (ایپالس) را از یک پالس که پهنای کوچکی دارد تشیز و تشخیص دهند . تابع تک پله ای $(t)_0^{\infty}$ تابع ضربه ای $(t)_0^{\infty}$ و تمام مشتق مرتبه های آنها را توابع منفرد مینامند . تابع منفرد بتمام توابعی که منفصل هستند یا مشتق آنها منفصل است اطلاق میشود . اینگونه توابع ممکن است فقط مشتق مرتبه معلوم از آنها پیوسته باشد بیشتر

تابع $f(t) = at^2 u(t)$ ولی $f'(t) = 2at u(t)$ فقط مشتق مرتبه اول آن پیوسته است
مشتق مرتبه دوم آن منفصل است. بنابراین آن یک تابع منفرد محسوب میشود. همین طور توابع
تک پله‌ای، و تک شیبی (Ramp function) و نیز تابع ضربه‌ای تابع منفرد هستند. در حقیقت
هر تابعی که بصورت چند جمله‌ای خواهد بود، تابع منفرد است.

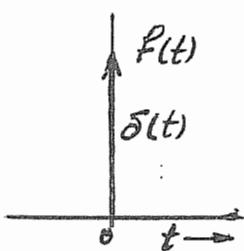
(1-11) : تبدیل فوریر تابع ضربه‌ای (impulse function)

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{تبدیل فوریر تابع ضربه‌ای } \delta(t) \text{ بدین وسیله بدست میآید:}$$
(1-91)

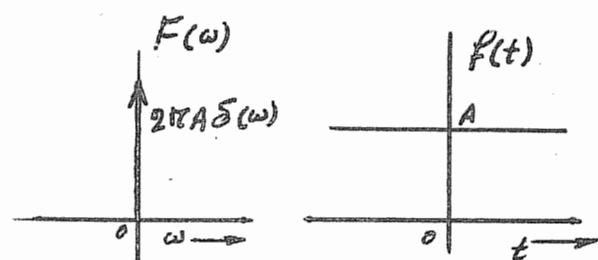
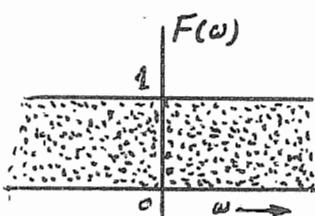
بطوریگه از خواص تابع ضربه‌ای معادله (1-90) مشاهده میشود، طرف راست رابطه

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad \text{ واحد است بنابراین} \quad (1-91)$$

پس تبدیل فوریر تابع ضربه‌ای یک است.
 واضح است که طیف فرکانس یک تابع ضربه‌ای برای همه فرکانسها یکنواخت است. بعبارت بهتر،
تابع ضربه‌ای شامل تمام فرکانسها با رامنه‌های نسبی مساوی است (شکل 1-26)



شکل ۱-۲۶



شکل ۱-۲۷

۲- تبدیل فوریر مقدار ثابت A

اگنون میخواهیم تبدیل فوریر $f(t) = A$ را پیدا کنیم. این تابع شرط مطلق بودن زیر انگرال برایش صادق نیست. معدالک در حد دارای تبدیل فوریر است. برای بدست آوردن تبدیل فوریر آن، تابع گیت (*gate*) با رامه A و پهنهای ω ثانیه مطابق شکل (۱-۲۰Q) در نظر میگیریم. وقتی $\omega \rightarrow \infty$ میل نماید، تابع گیت بسمت تابع مقدار ثابت $G_p(t)$ گرایش میباید. پس تبدیل فوریر مقدار ثابت A برابر حد تبدیل فوریر تابع گیت $G_p(t)$ است وقتی $\omega \rightarrow \infty$ میل کند. اما میدانیم تبدیل فوریر $A G_p(t)$ برابر است با

$$\mathcal{F}[A] = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A \omega \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \quad \text{بنابراین } A \cong \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$= 2A\pi \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2\pi} \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

بطوریگه از معادله (۱-۸۶) نتیجه میشود، حد تابع نمونه برداری فوق تابع ضربه ای $\delta(\omega)$ است. پس

$$\mathcal{F}[A] = 2\pi A \delta(\omega) \quad (1-93Q)$$

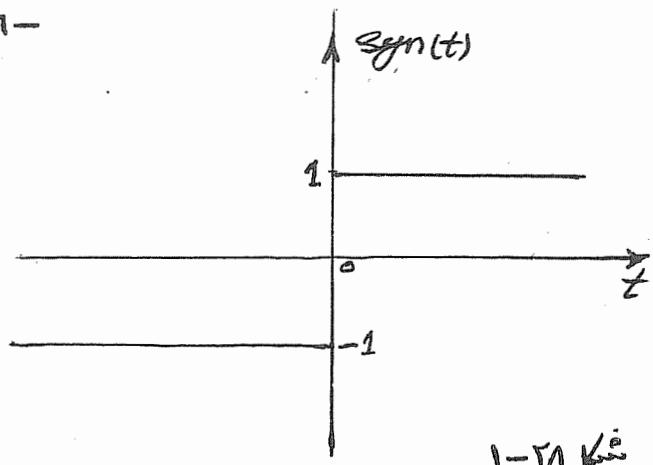
$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega) \quad (1-93b)$$

بنابراین وقتی تابع $f(t)$ مقدار ثابت باشد، فقط دارای یک مؤلفه فرکانسی است و آنهم $\omega = 0$ است. این نتیجه هم برای طبقه است زیرا فرکانس یک سینکال C_L صفر است، $(\omega = 0)$ و فرکانسی دیگری ندارد.

۳- تبدیل فوریر $\operatorname{Sgn}(t)$

تابع Signum به صورت $\operatorname{Sgn}(t)$ خلاصه شده و چنین تعریف میشود:

$$\text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



شکل ۱-۲۷

$$Sgn(t) = 2u(t) - 1 \quad (1-94b)$$

بسهولت میتوان دید :

تبدیل فوریر $Sgn(t)$ را میتوان بسادگی بدست آورد وقتی فرض شود :

$$\mathcal{F}[Sgn(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(t)]$$

بنابراین

$$\mathcal{F}[Sgn(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right] = \frac{2}{j\omega} \quad (1-95)$$

— تبدیل فوریر تابع تک پله ای $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2} [1 + Sgn(t)] \quad \text{از معادله (1-94) نتیجه میشود :}$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{F}[1] + \mathcal{F}[Sgn(t)] \right\} \quad \text{از اینرو}$$

با بکار بردن روابط (1-93) و (1-95) تبدیل فوریر مزبور خواهد بود :

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (1-96)$$

تابع تکاف طیف آن شامل یک تابع ضربه ای در $\omega = 0$ (شکل ۱-۲۹) و بعلاوه مقدار

زیادی هم مؤلفه های فرکانسی است . همانطوریکه انتظار میرود دارای یک مؤلفه بزرگ dC است.

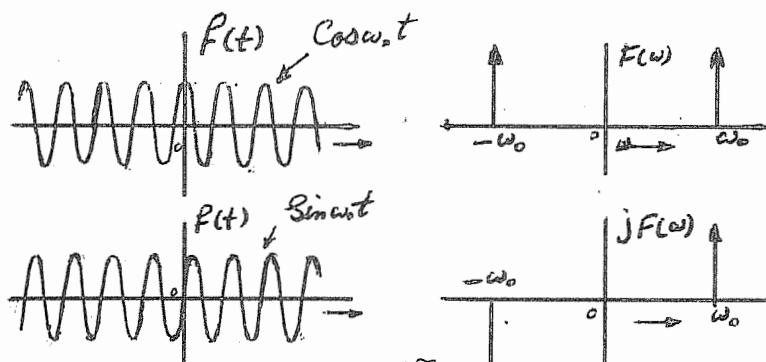
شاید فکر کنید $u(t)$ یک تابع کاملاً dC است . و فرکانسهاش بغير از $\omega = 0$ برای

شما ممکن است .

عجیب باشد . اما در نظر داشته باشید ، $f(t)$ یک تابع واقعی dc نیست . تابع مزبور در $\omega = 0$ صفر است و در $\omega \neq 0$ بلافاصله منفصل میباشد . و این خود باعث بوجود آمدن مولفه های فرکانسی میشود ! اولیک تابع واقعی C باید در تمام فواصل $(-\infty, \infty)$ مقدار ثابتی باشد . بطوریکه قبل از دیدیم [معادله ۱-۹۳] تابع $f(t) = A$ اینچنین تابعی بغير از $\omega = 0$ مولفه فرکانسی دیگری ندارد .

۵- تبدیل فوریر سینگالهای $\cos\omega_0 t$ ، $\sin\omega_0 t$

اکنون توابع $\cos\omega_0 t$ و $\sin\omega_0 t$ را در تمام فواصل $(-\infty, \infty)$ در نظر میگیریم . چون شرط مطلق بودن زیر انتگرال برای اینگونه توابع صارق نیست ، و نیز تبدیل فوریر دارند ، از این نظر تبدیل فوریر آنها را شبیه روشی که برای تابع $f(t) = A$ بکار بردهیم ، بدست میآوریم . فرض کنید تابع مزبور در فاصله ω_0 وجود داشته و خارج از این فاصله صفر باشند ، سپس ω را بسمت بی نهایت میل داره و در حد تبدیل فوریر آنها حاصل میگردد .



$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\omega_0 t e^{-j\omega t} dt =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{2} \text{Sa}\left[\frac{\pi(\omega - \omega_0)}{2}\right] + \frac{\pi}{2} \text{Sa}\left[\frac{\pi(\omega + \omega_0)}{2}\right] \right\} \quad (1-97)$$

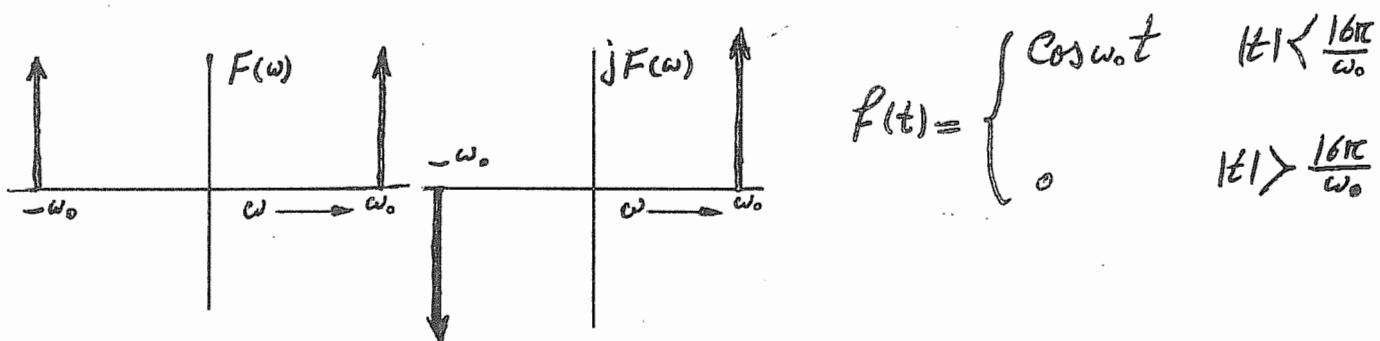
بر طبق رابطه (۱-۸۶) ، در حد توابع نمونه برد اری فوق به توابع ضربه ای گرایش میباشد .

$$\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad \text{بنابراین داریم:} \\ (1-98)$$

بهمنین منوال خواهیم داشت

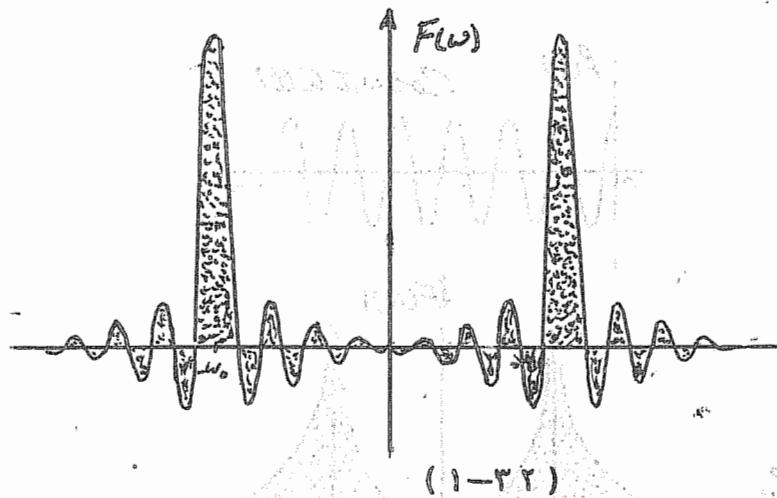
$$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (1-99)$$

بنابراین تبدیل فوریر این توابع شامل دوتابع ضربه‌ای بترتیب در ω_0 و $-\omega_0$ است. خیلی جالب است ببینیم هنگامیکه ح ω بزرگ شود و به بی نهایت میل نماید، طیف چطور است. برای مقدار معلوم و معین ح تابع تکاشف طیف رابطه (1-97) میباشد. در حالتی که $\omega = \frac{16\pi}{\omega_0}$ باشد، تابع تکاشف طیف $F(\omega)$ در شکل (1-32) ترسیم گشته است. عبارت دیگر مatab $F(\omega)$ را فقط برای 8 سیکل از سیگنال $\cos \omega_0 t$ نشان دارد ایم:



$\mathcal{F}[\cos \omega_0 t]$ $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t]$ شکل ۱-۳۱

توجه کنید قسمت اعظم انرژی در اطراف فرکانسهاي $\omega_0 \pm \omega$ متغیر شده است. هر قدر ح ω را بزرگتر انتخاب کنیم، تکاشف طیف در حوالی $\omega_0 \pm \omega$ بیشتر متغیر میشود. وقتی $\omega = 0$ باشد تابع طیف \rightarrow



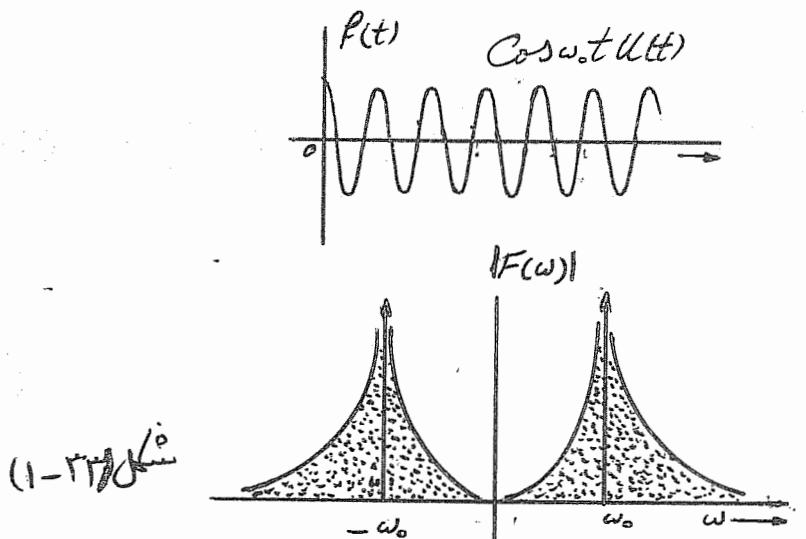
(۱-۳۲)

در همچنان بجز در $\omega_0 + \delta\omega$ صفر شده و سطح زیر منحنی در هر یک از فرکانس‌های مزبور مساوی ۲ است. برای صحیح تابع تکاشف طیف در شکل (۱-۳۱) و تابع در (۱-۳۰) ترسیم شده است. همانطوریکه ملاحظه می‌فرمایید، تابع تکاشف طیف توابع $\cos\omega_0 t$ و $\sin\omega_0 t$ فقط در $\omega = \omega_0$ وجود دارد. اینهم کاملاً منطق است زیرا اینگونه توابع فرکانس بجز ω_0 ندارد. البته توابع $\cos\omega_0 t u(t)$ و $\sin\omega_0 t u(t)$ بجز ω_0 فرکانس‌های دیگری نیز دارند. همچنان نشان دار (به رابطه ۱-۱۱۶-۱ مراجعه شود)

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t u(t)] = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1-100a)$$

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t u(t)] = \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1-100b)$$

واضح است که اینگونه توابع شامل یک مؤلفه بزرگ ω_0 و نیز فرکانس‌های بین شمار دیگر است. شاید تصور کنید توابع $\cos\omega_0 t u(t)$ و $\sin\omega_0 t u(t)$ سیگال‌ها کاملاً هستند و داشتن فرکانس‌های دیگر شما را بحیرت وادارد. باز هم یار آور می‌شویم، ما توابع را بر حسب توابع نمائی در فاصله نامحدود $(-\infty, \infty)$ بیان می‌کنیم. توابع $\cos\omega_0 t u(t)$ و $\sin\omega_0 t u(t)$ ةا بین نهایت ادامه نداشته و فقط برای مقادیر مشبّت t وجود دارند و در $t < 0$ صفر می‌باشند. بنابراین با وجود داشتن ω_0 فرکانس‌های دیگری نیز دارند. بطوریکه قبله دیدیم، در حالتی که توابع $\cos\omega_0 t$ و $\sin\omega_0 t$ نوسان هایشان از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه دارند، فقط دارای



یک فرکانس هستند.

۶- تبدیل فوریر تابع مای

اگنون میخواهیم تبدیل فوریر یک تابع $e^{j\omega_0 t}$ را پیدا کنیم - اما میدانیم :

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \mathcal{F}[\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t] \quad \text{بنابراین}$$

با جاگذاری روابط (۱-۹۸) و (۱-۹۹) در معادله فوق خواهیم داشت

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (1-11)$$

بنابراین تبدیل فوریر $e^{j\omega_0 t}$ یک تابع ضربه‌ای با قدرت ۲π در $\omega = \omega_0$ است . توجه

کنید با وجود یکه سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ یک تابع حقیقی نیست ، اما طیفی در $\omega = \omega_0$ دارد -

قبل اگنیم برای هر تابع حقیقی از زمان یک تابع $F(\omega)$ وجود دارد ، که روابط زیر برای

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

آن صادق است.

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$$

بنابراین برای هر تابع حقیقی از زمان طیف مقداری تابع زوجی از ω است. پس اگر در $\omega = \omega_0$ ضربهای (impulse) باشد، بایستی در $(\omega_0 - \omega)$ نیز وجود داشته باشد. اینرا در حالت $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ مشاهده نمودیم.

۷- تبدیل فوریر یک تابع پریودیک

ما تبدیل فوریر را از طریق سری فوریر وقتی پریودیک بی نهایت گردد بدست آوردیم. اکنون بر عکس میخواهیم نشان دهیم، سری فوریر حد حالتی از تبدیل فوریر میباشد. این نگاه و تجسس بسیار مفید است، زیرا بنا اجازه میدهد تا وحدت بحث توابع پریودیک و غیر پریودیک را درک نمائیم. در حقیقت تبدیل فوریر توابع پریودیک وجود ندارد، زیرا شرط مطلق بودن زیر انتگرال برای هر تابع پریودیک مانند $f(t)$ صادق نیست.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \infty$$

اما در حد دارای تبدیل فوریر میباشد. بطوریکه ملاحظه شد، ما در حد تبدیل فوریر توابع $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ را بدست آوردیم. در اینجا نیز همان روش را بکار برد و فرض میکنیم تابع پریودیک $f(t)$ در فاصله $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} -)$ وجود داشته باشند. سپس ح را بسمت بی نهایت میل میدهیم.

برعکس، چون میتوان تابع پریودیک را بر حسب سری فوریر بیان نمود، میتوان از تابع مزبور تبدیل فوریر گرفت. اگر تابع $f(t)$ پریودیک باشد، میتوان تابع را چنین بیان نمود.

(T پریود تابع $f(t)$ است)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1-1)$$

- ۷۲ -

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] \quad (\text{رابطه } 1-1)$$

با جاگذاری تبدیل فوریر خواهیم داشت

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (1-1)$$

این جواب قابل قبولی است. بطوریکه از رابطه (1-1) مستفاد میشود: تابع تکاشف طیف یا تبدیل فوریریک تابع پریود یک شامل ایمپالس‌هایی واقع در فرکانس‌های هارمونیک بوده و قدرت هر ایمپالس $\frac{A}{T}$ برابر ضریب سری نتائی فوریر مربوطه اش میباشد. رشته ایمپالسها بفاصله مساوی از یکدیگر واقع گشته و آنها نیز حد طیف پیوسته ای میباشند. البته این نتیجه چندان شکرف نیست. زیرا میدانیم تابع پریود یک مولفه هایی فقط در فرکانس‌های هارمونیک و مجزا از یکدیگر را دارد.

تمرین (1-2) — تبدیل فوریر تابع مذبور چنین است (معارله 1-6) یک رشته پالس مستطیلی به پهنهای ω و پریود T ثانیه را محاسبه کنید.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1-2)$$

میدانیم سری فوریر برای تابع مذبور چنین است (معارله 1-6)

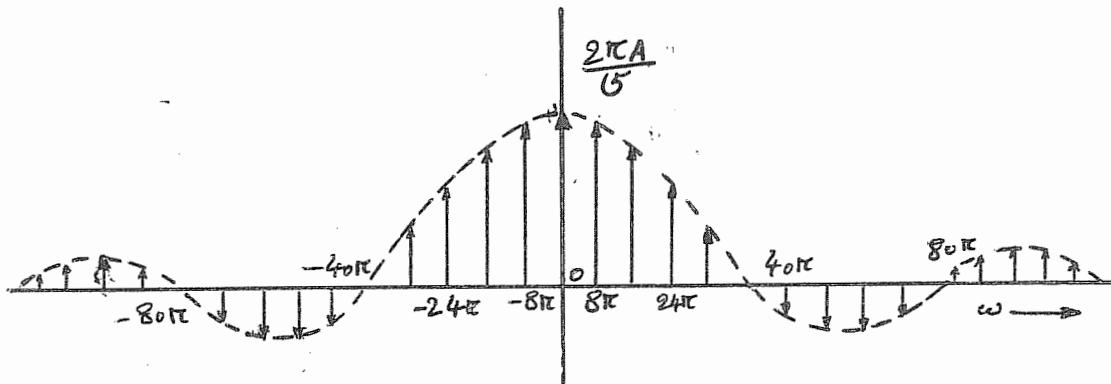
$$F_n = \frac{A\omega}{T} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\pi\omega}{T}\right) \quad \text{که در آن}$$

با بکار بردن معادله (1-1) نتیجه میشود

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{2\pi A\omega}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\pi\omega}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (1-3)$$

بنابراین تبدیل فوریر $f(t)$ شامل ایمپالس‌هایی است که در $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \dots$ واقعند و مقدار هر ایمپالس از رابطه $\frac{2\pi A\omega}{T} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\pi\omega}{T}\right)$ بدست میآید. در شکل (1-34)

طیف برای حالت $\frac{1}{20} = \omega$ و $T = \frac{1}{4}$ ثانیه ترسیم شده است.



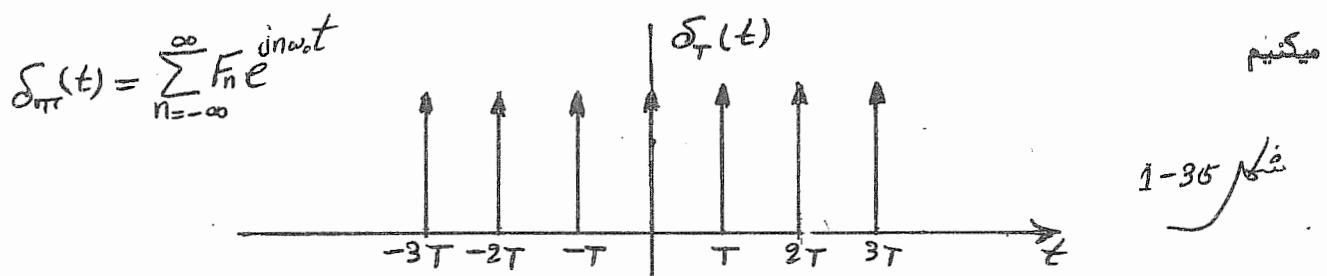
شکل (۱-۳۴) میباشد.

ثمرین (۱-۸) میخواهیم تبدیل فوریه یک رشته ایمپالس که بگواصل مساوی T ثانیه از یک دیگر قرار دارد و قدرت‌ها یاشان مساویند، را پیدا کنیم. (شکل ۱-۳۵). این تابع در تئوری نمونه برداری بسیار مهم است و ما آنرا بصورت (t) نشان میدهیم

$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots + \delta(t-nT) + \dots + \delta(t+T) + \delta(t+2T) + \dots + \delta(t+nT) + \dots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (1-1.4)$$

بدهیم است که تابع مذبور پریود یک بوده و پریود آن T است. اول سری فوریه این تابع را پیدا



$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

چون تابع $\delta_T(t)$ در فاصله $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ میشود بنابراین

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

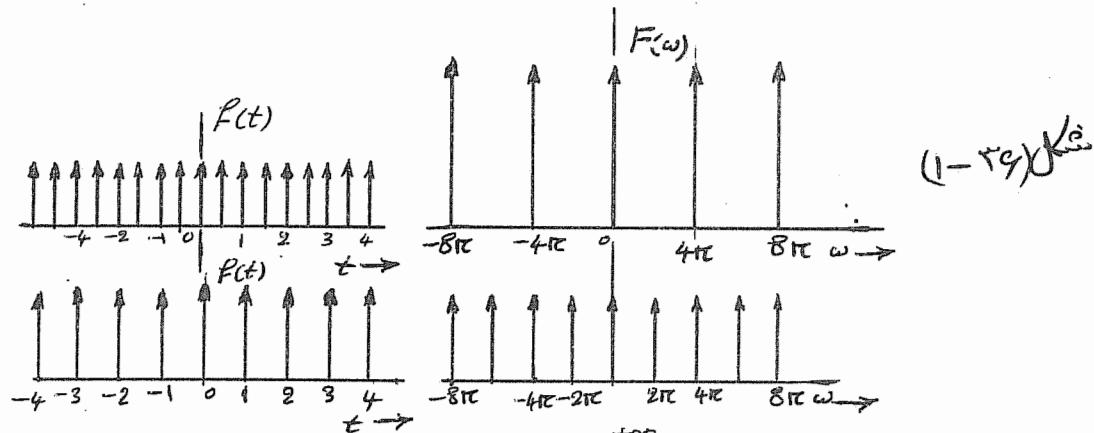
با توجه بخواص تابع ضریبی ای (رابطه ۹-۱) خواهیم داشت :

$$f_n = \frac{1}{T}$$

در نتیجه f_n مساوی مقدار ثابت $\frac{1}{T}$ است . پس

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \quad (1-105)$$

با توجه بر ابطه (۱-۱۰۲) ، از طرف معادله فوق تبدیل فوریه میگیریم .



$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\text{ac}}(\omega) \quad (1-106)$$

رابطه (۱-۱۰۶) بسیار قابل قبول است . زیرا میگوید تبدیل فوریه یک رشته ایمپالس با پریود T ، یک رشته ایمپالس با قوت $(\leq strength)$ ω_0 و بفاصله $\frac{2\pi}{T}$ از یکدیگر ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$) قرار دارد . برای $T = 1 \text{ Sec}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/sec}$ آنها در شکل (۱-۳۶) ترسیم شده است . بطوطیگه از این نمودارها مشهود است ، هر قدر پریود ایمپالسها افزایش یابد ، طیف فرکانس متراکم تر میشود .

در جدول ۱.۱A توابع زمانی مختلف و طیف فرکانس آنها نشان داده شده است . توجه کنید در این جدول ، برای اکثر سیگنالها ، $F(\omega)$ حقیقی است . بنابراین فقط رسم یک

منحنی برای نمایش آن کافی است. تبدیل برخی از توابع در جدول ۱.۱۸ خلاصه شده است.

۱-۱: خصوصیات تبدیل فوریر

تبدیل فوریر وسیله ایست برای بیان یک تابع بر حسب مولفه های نمائی فرکانسی مختلفه اش میباشد. در مباحث قبل تبدیل فوریر را بعنوان صورت دیگری از یک تابع خاطر نشان ساختیم. بنابراین برای یک تابع دو فضای وجود دارد: فضای زمان، فضای فرکانس. مطالعه اعمالی که در یک فضای برای تابعی انجام میشود، اثراتش در فضای دیگر برای ما بسیار مفید است. مثلاً ممکن است سؤال شود اگر از یک تابع در فضای زمان مشتق بگیریم، تابع طیف تابع مشتق گرفته شده با تابع طیف خود تابع اصلی چه روابطی دارد؟ یا اگر تابعی را در فضای زمان انتقال دهیم، در تابع طیف آن چه تغییری رخ میدهد؟ اگرچه میخواهیم اعمال اصلی که بر یک تابع در یک فضای انجام میشود، اثراش را در فضای دیگر بررسی و ارزیابی کنیم باید خاطر نشان کنیم روابطی که دو فضای بهم مربوط میسازند تقارن هستند زیرا

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \cdot dt \quad (1-1.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

پس باید از این تقارن خواص برای ربط دو فضای انتظار را شتّه باشیم. در اینجا برای سهولت ارتباط بین دو فضای آنها را چنین بهم مربوط و نشان میدهیم

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

یعنی $F(\omega)$ تبدیل مستقیم فوریر $f(t)$ و $f(t)$ تبدیل معکوس $F(\omega)$ است. و تحت روابط (۱-۱.۷) بهم مربوط میشوند.

۱- خاصیت تقارن

اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد خواهیم داشت

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (1-1.8)$$

اثبات - از معادله (۱-۱.۲) نتیجه میشود

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

چون در انگرال فوق ω متغیر قابل تعویض است، میتوان بجای آن متغیر دیگری مانند x

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-j\omega x} dx \quad \text{گذاشت.}$$

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-j\omega x} dx \quad \text{بنابراین}$$

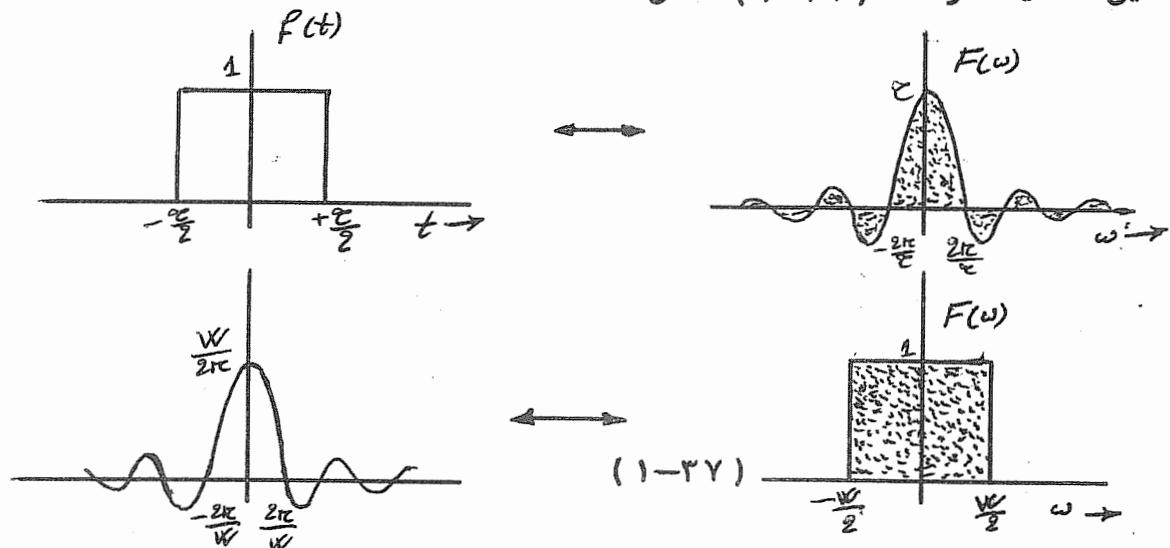
$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{اگر نیز میتوانیم بجای } x \text{، متغیر } t \text{ را بگذاریم}$$

$$= \mathcal{F}[F(t)] \quad F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (1-1.9) \quad \text{بنابراین}$$

اگر $f(-\omega) = f(\omega)$ تابع زوجی باشد، بصورت زیر نماید زیرا

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

این خاصیت در شکل (۱-۳۲) نشان داده شده است.



بطوریکه در شکل (۱-۳۲) مشاهده میشود، تبدیل فوریر تابع گیت (Gate) یک تابع نمونه برداری است و نیز تبدیل فوریر یک تابع نمونه برداری یک تابع گیت (Gate) میباشد. خاصیت تقارن برای تمام توابع زوج $f(t)$ صارق است. اگر $f(t)$ تابع زوجی نباشد، خاصیت تقارن چندان کامل نیست، معدالک بطوریکه از معادله (۱-۱۰۹) نتیجه میشود تا اندازه ای متقارن میباشد.

۲- خاصیت خطی بودن (Linearity Property)

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \quad \text{اگر}$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

باشد. رابطه زیر برقرار است (α_1 و α_2 مقادیر ثابتی هستند)

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \leftrightarrow \alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega) \quad (1-11)$$

اثبات رابطه فوق بسیار ساده است و بعده خوانندگان میگذاریم. خاصیت خطی بودن را میتوان برای سری محدود زیر گسترش داد.

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) \leftrightarrow \alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega) + \dots + \alpha_n F_n(\omega)$$

۳- خاصیت تغییر مقیاس اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد. خواهیم داشت (α ثابت و حقیق است).

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (1-111)$$

اثبات - برای مقدار ثابت و مثبت α داریم

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

بهای $x = at$ قرار میدهیم پس اگر α ثابت باشد

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{\alpha}x} dx = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

پس

TABLE I.IA
Various Functions of Time and Their Spectral-Density Functions

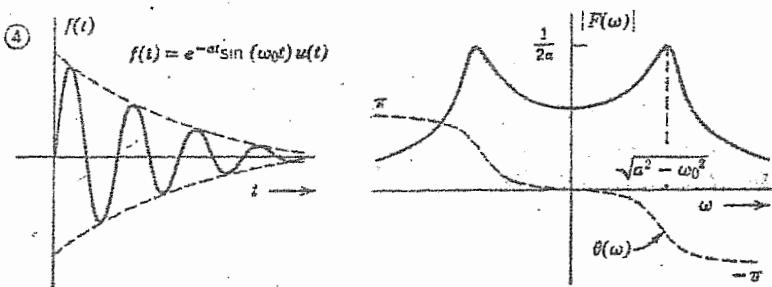
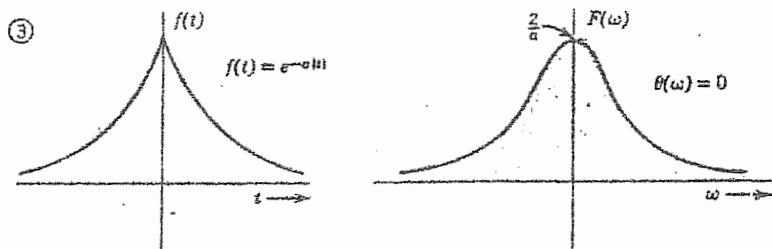
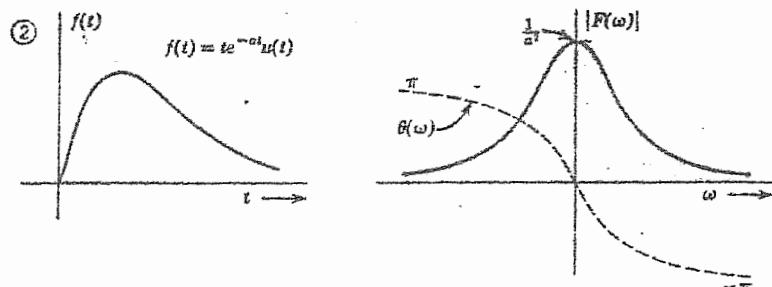
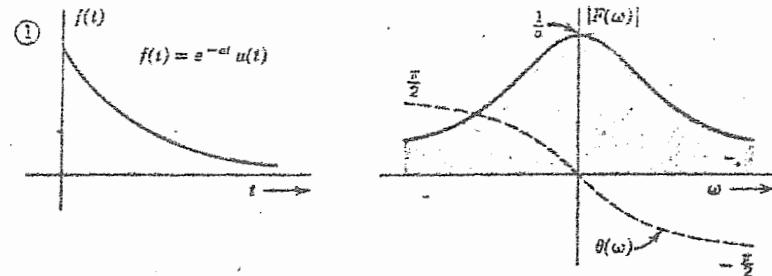


TABLE I.IA (continued)

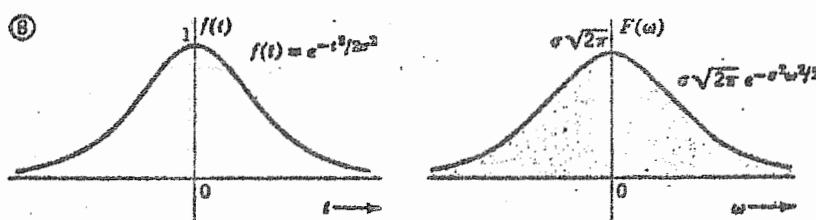
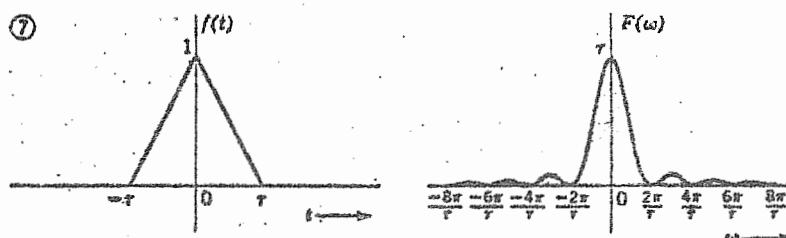
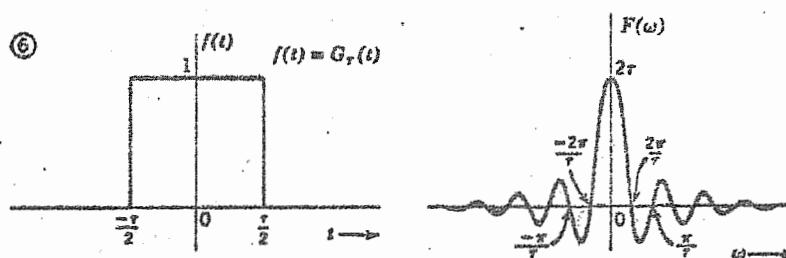
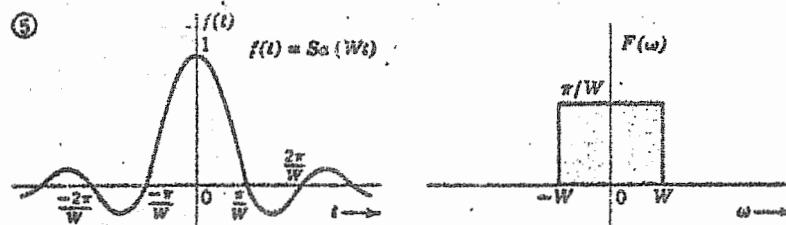
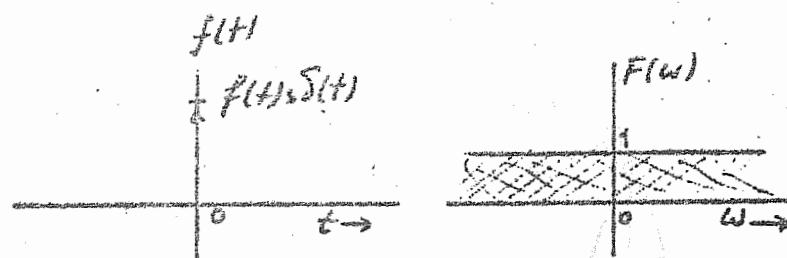
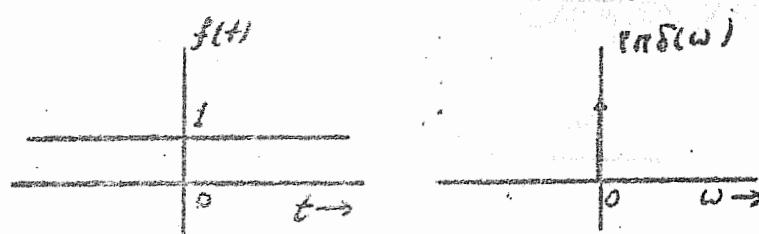


TABLE B 14-A.

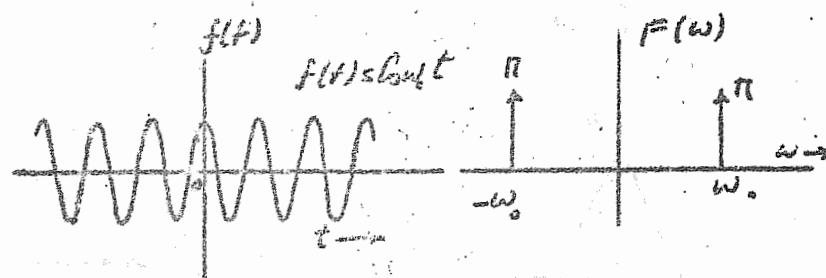
(9)



(10)



(11)



(12)

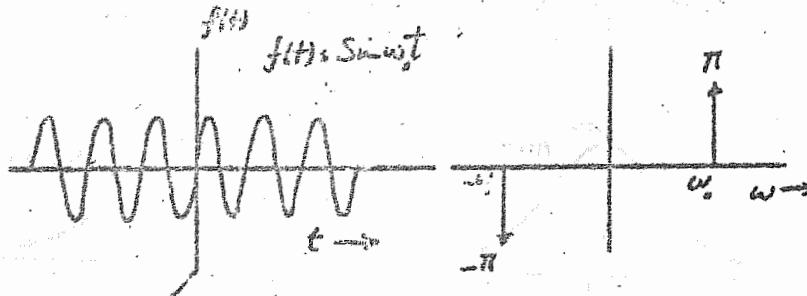


TABLE I.1.A

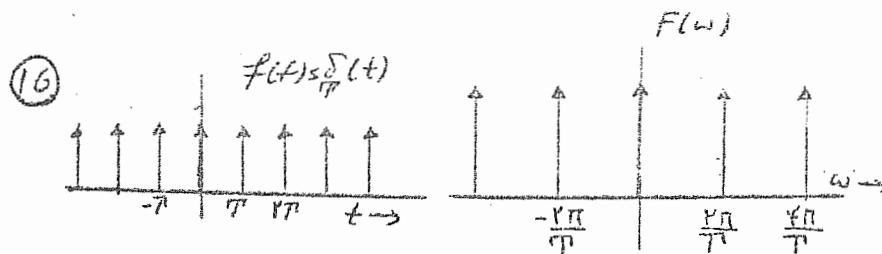
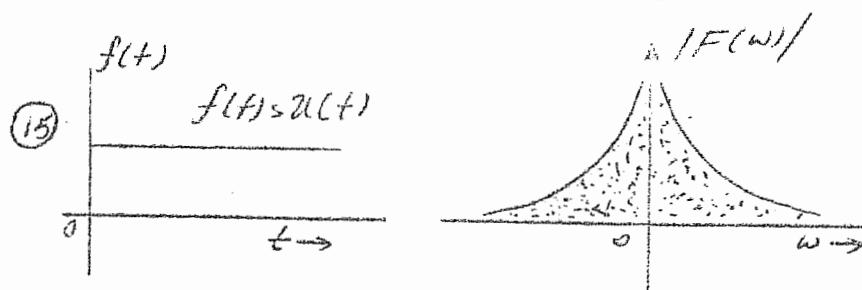
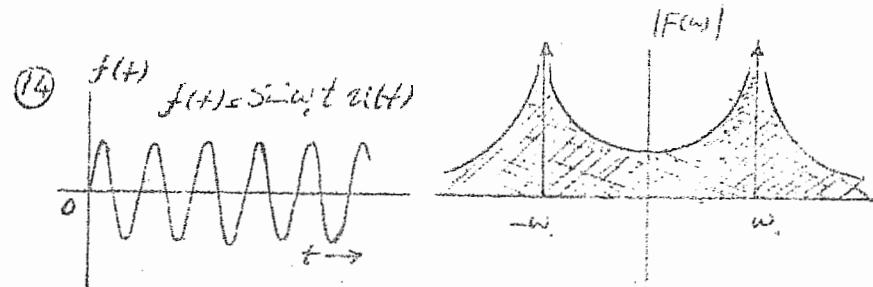
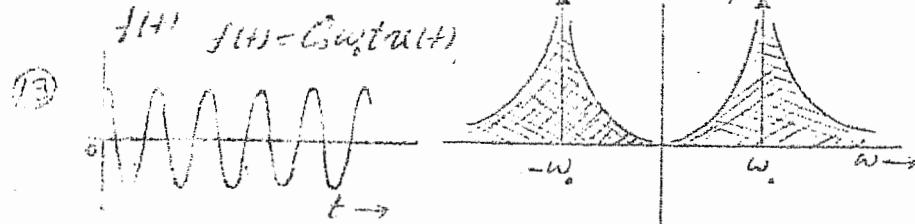


TABLE I.IB
Fourier Transforms

$f(t)$	$F(\omega)$
1. $e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
2. $t e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
3. $ t $	$\frac{-2}{\omega^2}$
4. $\delta(t)$	1
5. 1	$2\pi \delta(\omega)$
6. $u(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
7. $\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
8. $\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
9. $\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
10. $\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
11. $e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
12. $\frac{W}{2\pi} Sa\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$G_W(\omega)$
13. $G_p(t)$	$r Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
14. $\begin{cases} 1 - \frac{ t }{r} & \cdots t < r \\ 0 & \cdots t > r \end{cases}$	$\tau \left[Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]^2$
15. $e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
16. $e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma \sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2 \omega^2/2}$
17. $\delta_T(t)$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$

بهمن منوال اگر $\alpha < 0$ باشد خواهیم داشت

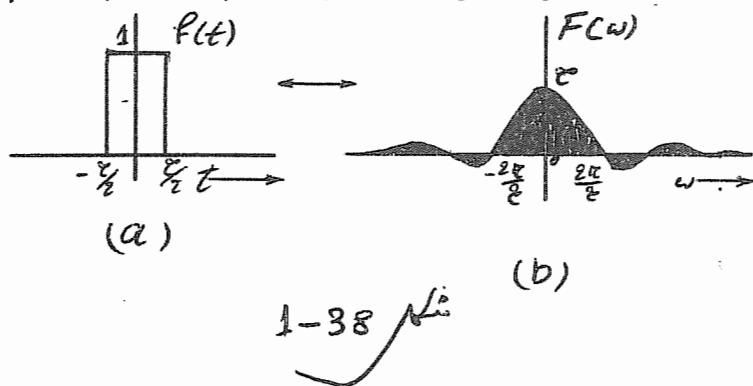
$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

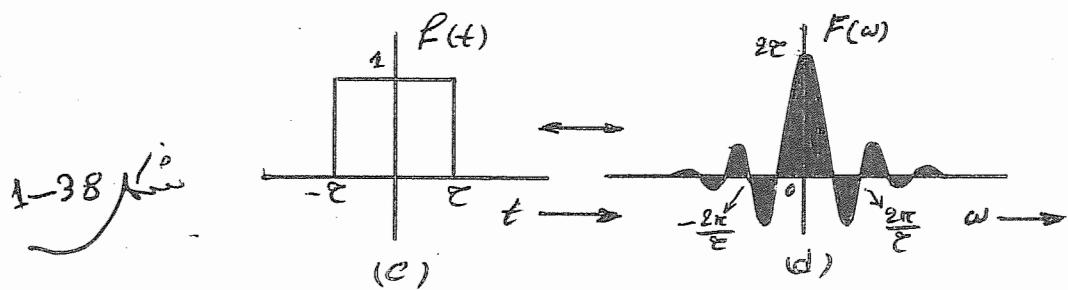
در نتیجه

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

خصوصیات خاصیت تغییر مقیاس

تابع $f(at)$ نشاند هندسه بهم رفتگی و ادغام مقیاس تابع $f(t)$ در فضای زمان باندازه α میباشد، و بهمن نحو $\frac{f(t)}{\alpha}$ بسط و گسترش مقیاس تابع $F(\omega)$ در فضای فرکانس به مقدار α است. بنابراین خاصیت تغییر مقیاس میگوید: ادغام در فضای زمان معادل بسط و گسترش در فضای فرکانس است و برعکس. این نتیجه را هم میتوان بطور مستقیم درک نمود، چون ادغام مقیاس زمانی بوسیله ضریب α مفهومش این است که تابع سریعتر تحت آن ضریب تغییر مینماید، از اینرو فرکانس‌های مؤلفه‌هایی تحت همان مقیاس افزایش می‌یابد. در این صورت انتظار داریم طیف فرکانس آن بوسیله همان ضریب گسترش یابد. برعکس اگر تابع در مقیاس زمانی گسترش یابد، یعنی کندتر تغییر نماید، طیف فرکانس بهم رفته و ادغام میگردد. برای مثال سیگنال $\cos(\omega_0 t)$ را در نظر گیرید. میدانیم سیگنال مزبور در $\omega = \pm \omega_0$ مؤلفه‌های فرکانس دارد. اما $\cos(\omega_0 t)$ بوسیله ضریب α ادغام شده، از اینرو مؤلفه‌های فرکانسی آن در $\omega = \pm \omega_0$ واقع شده‌اند. همانطوریکه از طیف فرکانس آنها آشکار است، طیف فرکانس تحت ضریب α گسترش یافته است. اثر تغییر مقیاس در شکل (۱-۳۸) ترسیم گشته است.





در حالت خاص وقتی $\alpha = -1$ باشد، رابطه زیر صادق است.

$$f(t) \leftrightarrow F(-\omega) \quad (1-112)$$

تمرین ۹-۱ با توجه بخواص تغییر مقیاس و تقارن میخواهیم تبدیل معکوس فوریه ($Sgn(\omega)$)

$$Sgn(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad \text{و } U(\omega) \text{ را پیدا کنیم از معادله (1-95) داریم}$$

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi Sgn(-\omega) \quad (1-109) \quad \text{با بکار بردن خاصیت تقارن (معادله ۱-۱۰۹)}$$

اما چون $Sgn(-\omega) = -Sgn(\omega)$ است، لذا

$$\frac{j}{2\pi t} \leftrightarrow Sgn(\omega) \quad (1-113)$$

$$U(\omega) = \frac{1}{2} [1 + Sgn(\omega)] \quad \text{همچنین}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[U(\omega)] = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{F}^{-1}[1] + \mathcal{F}^{-1}[Sgn(\omega)] \right\} = \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \quad \text{از اینرو}$$

$$\left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{2\pi jt} \right] \leftrightarrow U(\omega) \quad (1-114) \quad \text{پس}$$

خاصیت انتقال فرکانس

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \text{اگر}$$

باشد، خواهیم داشت

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (1-115)$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} \cdot dt = F(\omega - \omega_0)$$

اثبات

این قضیه میگوید اگر تابع $F(\omega)$ در فضای فرکانس بقدار ω انتقال داده شود، تابع زمانی آن در $e^{j\omega_0 t}$ ضرب میشود. واضح است که ضرب $e^{j\omega_0 t}$ در تابع $f(t)$ تمام طیف فرکانس مربوطه اش را بقدار ω انتقال میدهد. ضمناً این قضیه بنام قضیه انتقال فرکانس معروف است.

غالباً در سیستم های ارتباطی لازم است تا طیف فرکانس انتقال داده شود. برای این عمل تابع $f(t)$ را در یک تابع سینوزوئیدال (Sine Soidal) ضرب مینمایند. این فرآیند یا تحول بنام مدولاسیون (modulation) موسوم است. چون میتوان یک سینکال-سینوزوئیدال را بصورت تعائی نشان داد بنابراین از ضرب آن در تابع $f(t)$ انتقال تمام طیف فرکانس انجام خواهد شد. اینرا میتوان از رابطه زیر مستقیماً درک نمود.

$$f(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [f(t)e^{j\omega_0 t} + f(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

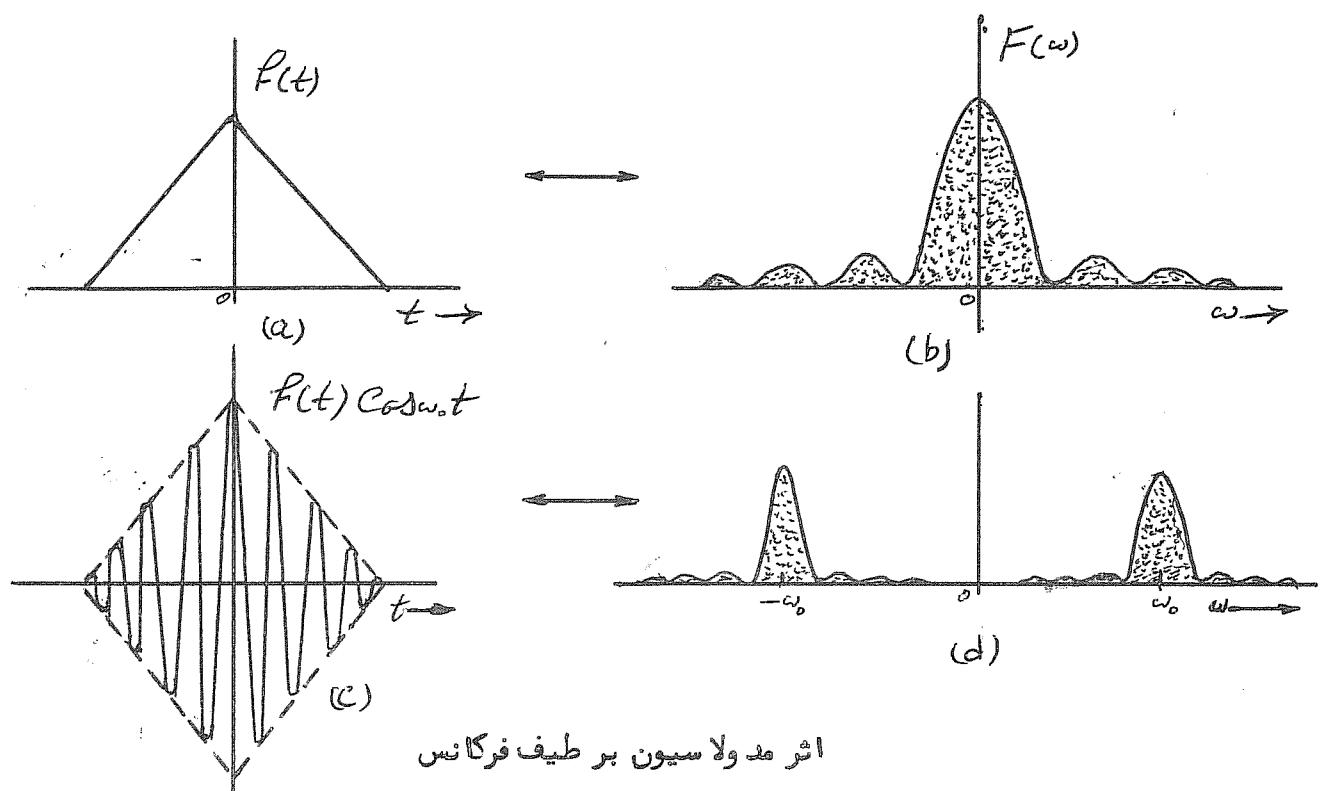
با استفاده از قضیه انتقال فرکانس نتیجه میشود

$$f(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (1-116a)$$

بهمین نحو میتوان ثابت کرد:

$$f(t) \sin \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{j}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)] \quad (1-116b)$$

پس عمل مدولاسیون تمام طیف فرکانس را بقدار $\omega \pm \omega_0$ انتقال میدهد. این نتیجه در تئوری ارتباطات بسیار مفید است. نمونه ای از انتقال فرکانس توسط مدولاسیون در شکل (1-۳۹) مصور گشته است این نتیجه را قضیه مدولاسیون نیز میگویند.



اثر مدولاسیون بر طیف فرکانس

شکل (۱-۳۹)

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

خاصیت انتقال زمان اگر

$$f(t-t_0) \longleftrightarrow F(\omega) e^{j\omega t_0}$$

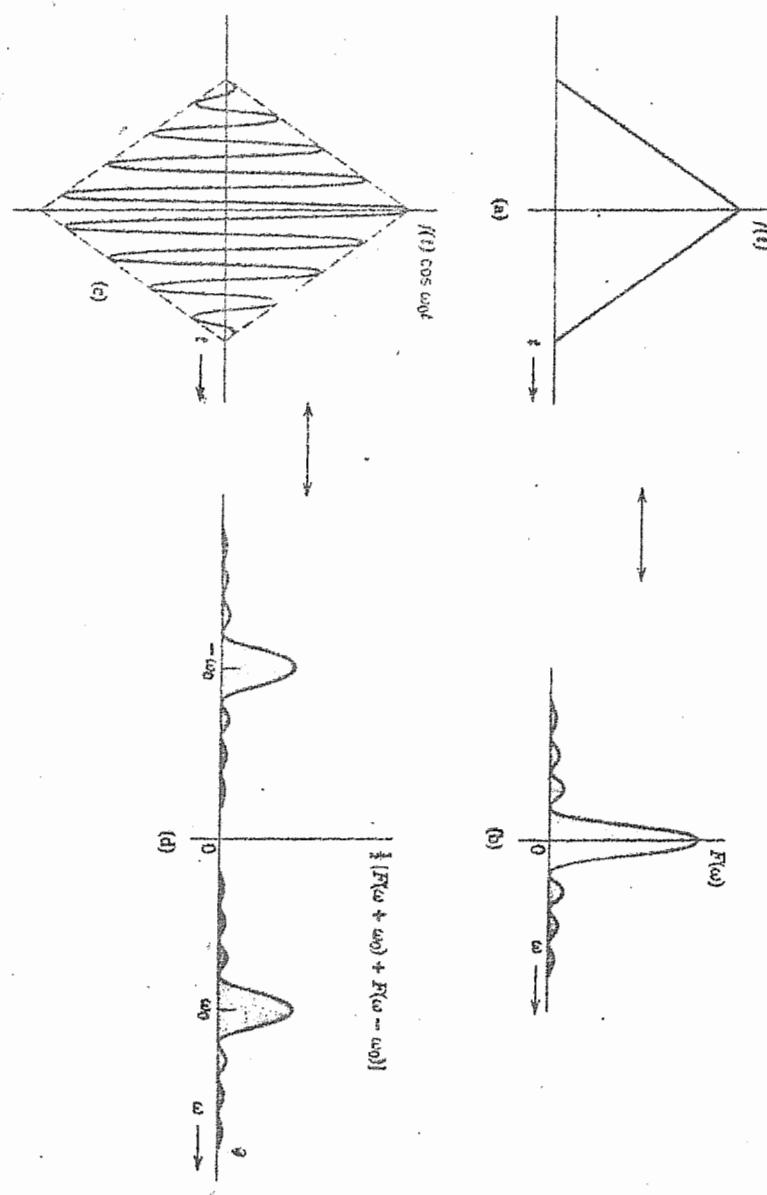
باشد خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} \cdot dx = F(\omega) e^{j\omega t_0} \end{aligned}$$

اثبات:

$t-t_0=x$ میگیریم

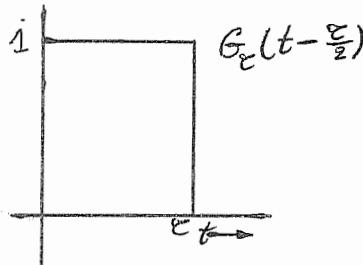
این قضیه میگوید: اگر تابعی در فضای زمان بمقدار t ثانیه انتقال را داشود، طیف مقداری $|F(\omega)|$ تغییر نمیکند، اما طیف فازی آن بمقدار t_0 تغییر مینماید. تلویحاً: این



Figures 1.39 Effect of modulation on the frequency spectrum.

نتیجه هوید است، زیرا انتقال در فضای زمان فرکانس سیگنال را عوض نمیکند، بلکه هر مؤلفه را بمقدار $\frac{1}{\omega}$ انتقال میدهد. انتقال زمانی $\frac{1}{\omega}$ برای هر مؤلفه فرکانسی س معادل انتقال فاز $\frac{-\omega t}{\omega}$ است. ضمناً میتوان گفت: انتقال در فضای زمان بمقدار $\frac{1}{\omega}$ ، برابر ضرب $e^{-j\omega t}$ در فضای فرکانس است.

تمرین (۱-۱۰) تبدیل فوریه پالس مستطیلی شکل (۱-۴۰) را بدست آورید. پالس



شکل (۱-۴۰)

تصویر (۱-۴)

تابع گیت (gate) بوده که بمقدار $\frac{1}{2}$ ثانیه انتقال یافته است پس میتوان آنرا $G_U(t - \frac{T}{2})$

در نظر گرفت با استفاده از جدول (۱-۱B) و خاصیت انتقال زمان داریم

$$G_U(t - \frac{T}{2}) \longleftrightarrow \infty Sa(\frac{\omega T}{2}) e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

حال وقت آنست که دو گونگی (duality) انتقال فرکانس و انتقال زمان را ملاحظه کنید.

در قضیه مدولاسیون نیز دو گونگی بچشم میخورد.

$$\frac{1}{2} [f(t-T) + f(t+T)] \longleftrightarrow F(\omega) \cos \omega t \quad (1-118)$$

اثبات رابطه فوق را بعنوان تمرین بعده خوانندگان میگذاریم.

مشتق و انتگرال گیری از تابعی در فضای زمان

اگر $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ باشد، خواهیم داشت

$$\frac{df}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega) \quad (1-119a)$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (1-119b)$$

شرط برآنگه $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ محدود باشد بعبارت دیگر $F(0) = \frac{F(\omega)}{\omega}$ باشد یا

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ اثبات:

$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ بنابراین

$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \cdot j\omega \cdot d\omega$ از معادله فوق نتیجه میشود
 $\frac{df}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$ یا

همین روش را میتوان برای مشتق مرتبه n ادامه داد

$\frac{d^n f}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$ (1-120)

$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ حال تابع زیرا در نظر گیرید

$\frac{d\varphi}{dt} = f(t)$ پس

$\varphi(t) \longleftrightarrow \phi(\omega)$ اگر راهته باشیم

$f(t) \longleftrightarrow j\omega \phi(\omega)$ پس

$F(\omega) = j\omega \phi(\omega)$ یعنی

$\phi(\omega) = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$ یا

$\int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega)$ بنابراین

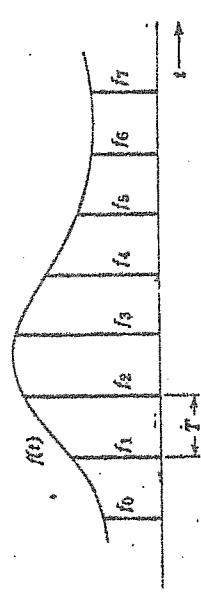


Figure 1.45

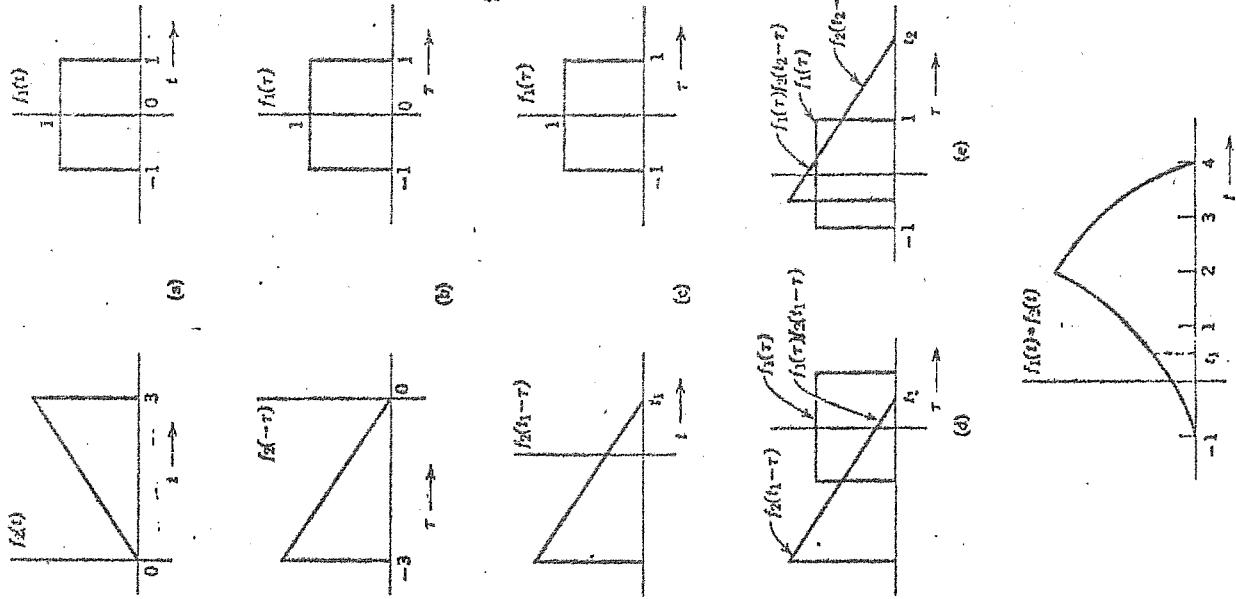


Figure 1.46

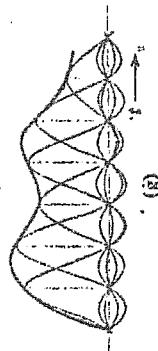
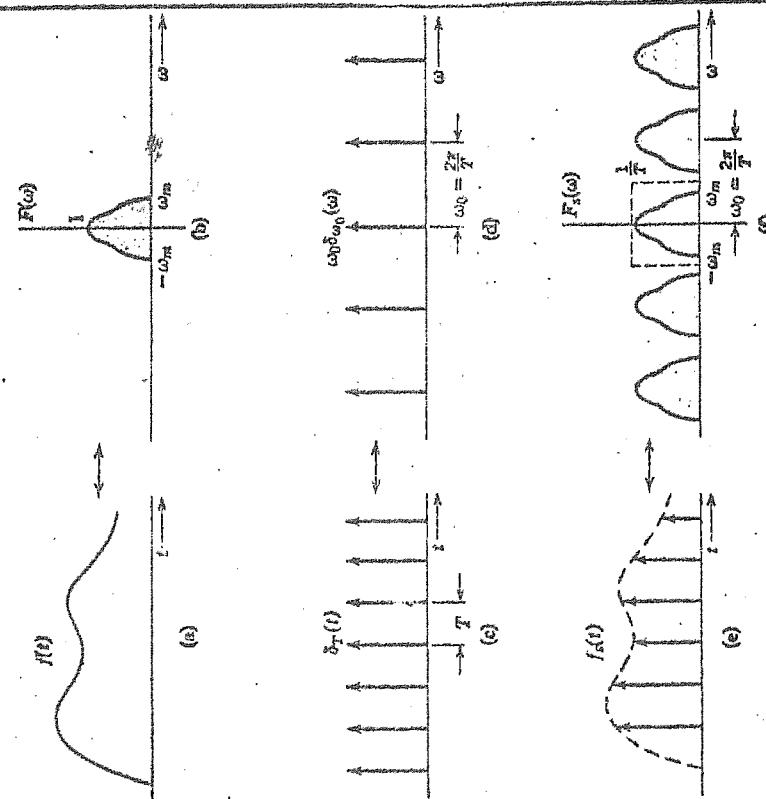


Figure 1.48

توجه کنید، این نتیجه فقط وقتی بدست می‌آید که $\Phi(\omega)$ وجود داشته باشد، یعنی اگر $\varphi(t)$ بطور مطلق قابل انتگرال گیری باشد، این فقط وقتی است که امکان پذیر است که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

یعنی

این معادل شرط $F(0) = 0$ است چون

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

قضیه مشتق و انتگرال گیری از تابع زمانی نیز تلویحاً برای ما روشن است. تبدیل فوریه در —

حقیقت تابع $f(t)$ را بر حسب مجموع توابع نمائی پیوسته $e^{j\omega t}$ بیان می‌کند. چون مشتق از تابع مساوی مشتق از مؤلفه‌های آن تابع است بنابراین مشتق از تابع نمائی $e^{j\omega t}$ برابر $j\omega e^{j\omega t}$ است. پس مشتق از تابع $f(t)$ معادل ضرب ω در هر مؤلفه نمائی آمیashaد، لذا

$$\frac{df}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

شبیه همین بحث برای انتگرال گیری وارد است.

تمرین (۱۱-۱) تبدیل فوریه تابع ز وزنکه ای شکل (۱-۴) را محاسبه

کنید. دو مرتبه از تابع فوق مشتق می‌گیریم تا تابع ضربه ای که برای ما شناخته شده است بدست آید. چون تبدیل فوریه تابع ضربه ای برای ما معلوم است از این‌رو تبدیل فوریه تابع ز وزنکه ای —

شکل بسازی بدست می‌آید، بطوریکه از شکل (۱-۱) مستفاد می‌شود

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{A}{b-a} [\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)] \quad (۱-۱۲)$$

میدانیم تبدیل فوریه تابع تک ضربه ای یک است، بنابراین با بکار بردن قضیه انتقال زمان خواهیم

$$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

داشت:

با استفاده از این نتیجه و قضیه مشتق گیری از فضای زمان تبدیل معادله ۱-۱۲۱ را میتوان

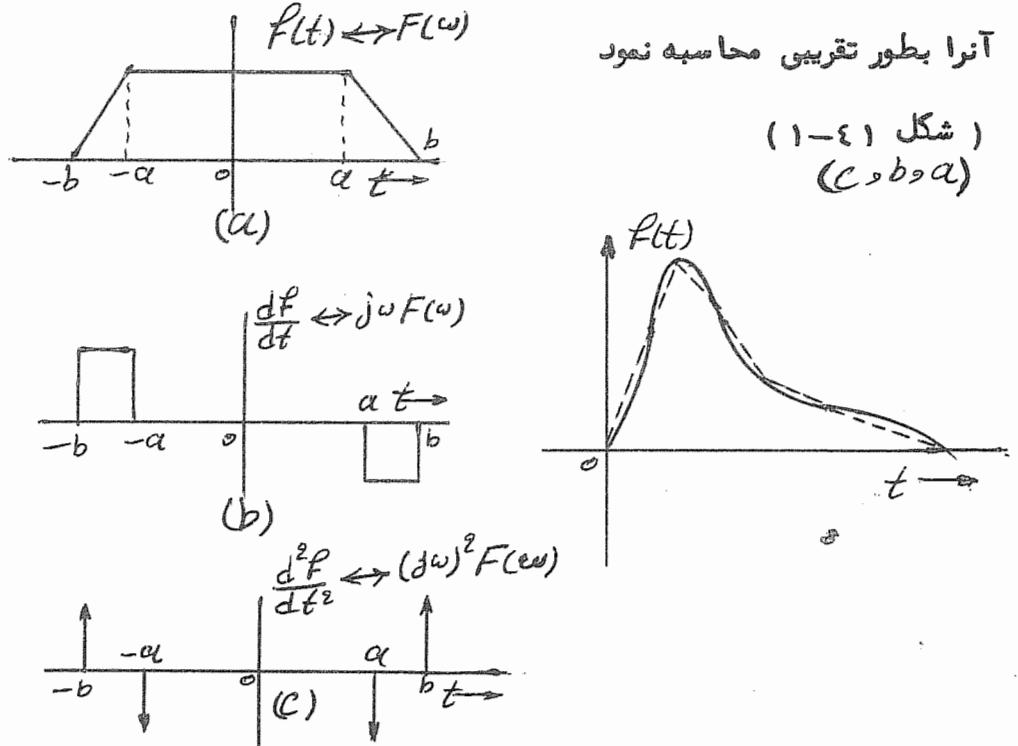
$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{b-a} [e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} + e^{-j\omega b}] \quad \text{بسهولت بصورت زیر نوشته}$$

$$F(\omega) = \frac{2A}{b-a} \left(\frac{\cos \omega a - \cos \omega b}{\omega^2} \right)$$

با ساده نمودن رابطه فوق

این مسئله روشی برای تعیین تبدیل فوریه برخی از توابع را پیشنهاد میکند . ضمناً هر تابع مانند $f(t)$ را ممکن است بطور تقریبی شامل چند خط راست در نظر گرفت و تبدیل فوریه آنرا بطور تقریبی محاسبه نمود

(شکل ۱-۴۱)
(c, b, a)



۷- مشتق گیری در فضای فرکانس اگر $F(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد خواهیم داشت

$$-jt f(t) \leftrightarrow \frac{dF}{d\omega}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \cdot dt$$

اثبات :

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

بنابراین

با داشتن عمل مشتق گیری در زیر انتگرال داریم

$$\frac{dF}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtf(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$-jtf(t) \longleftrightarrow \frac{dF}{d\omega}$$

بهمن نحو برای مشتق مرتبه ۱۷ام خواهیم داشت

$$(-jt)^n f(t) = \frac{d^n F}{d\omega^n}$$

لذا مشتق در فضای فرکانس برابر ضرب jt در فضای زمان است.

قضیه پیچیدگی (Convolution - کانولشن)

قضیه پیچیدگی یکی از ابزارهای ارزشی در آنالیز فرکانس میباشد. زیرا با اجازه -

می‌هد تا نهایج مهم را استنتاج کنیم. مطلب مزبور در این کتاب زیاد مورد استفاده می‌باشد. پس بیایید آنرا فرا گیریم. دو تابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ را در نظر گیریم از دو تابع مزبور انتگرال زیر را تشکیل می‌دهیم

$$(1-123) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

رابطه فوق انتگرال پیچیده توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ را تعریف می‌کند. انتگرال فوق را برای سهولت چنین نشان می‌هد.

$$(1-124) \quad f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

خصوصیات فیزیکی و تفسیر ترسیم انتگرال پیچیده بعداً مورد مداقه و ملاحظه قرار خواهد گرفت.

نخست میخواهیم قضیه پیچیدگی را ثابت کنیم، بطور معمول دو قضیه داریم، پیچیدگی زمان و -

(time and frequency convolution) پیچیدگی فرکانس

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$

قضیه پیچیدگی زمان اگر

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) d\tau \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

باشد میخواهیم ثابت کنیم
(۱-۱۲۵)

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (1-120b)$$

یعنی

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau \end{aligned}$$

اثبات :

با در نظر گرفتن خاصیت انتقال زمان (رابطه ۱-۱۲۰) ، واضح است که انتگرال داخل گروشه مساوی

$$e^{-j\omega \tau} F_2(\omega) \bar{e}^{j\omega t}$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) \quad , \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega) \quad \text{اگر} \quad (1-120)$$

قضیه پیچیدگی فرکانس

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega-u) du$$

باشد خواهیم داشت
(۱-۱۲۶)

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

یعنی

این قضیه را هم میتوان بهمان روش قبلی بعلت تقارن در تبدیل مستقیم و معکوس فوریر اثبات کرد . بنابراین میتوانیم بدین ترتیب خلاصه کنیم که : گانولشن دوتابع در فضای زمان معادل ضرب طیف های آنها در فضای فرکانس است . و نیز ضرب دوتابع در فضای زمان معادل گانولشن طیف های آنها در فضای فرکانس میباشد .

جدول (۱-۲) برخی از خواص مهم تبدیل فوریر را نشان میدهد . ارتباط تقارن را بین فضاهای فرکانس و زمان توجه کنید .

جدول (۱-۲)

عمل	$f(t)$	$F(\omega)$
۱) تغییر مقیاس	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
۲) انتقال زمان	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
۳) انتقال فرکانس	$f(t)e^{j\omega t}$	$F(\omega - \omega_0)$
۴) مشتق زمان	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
۵) مشتق فرکانس	$(-jt)^n f(t)$	$d^n F/d\omega^n$
۶) انتگرال زمان	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega)$
۷) کانولشن زمان	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
۸) کانولشن فرکانس	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

۱-۱۳ : برخی از روابط کانولشن

علامت و سبک گانولشن نوعی ضرب را در ذهن خوانندگان پیشنهاد میکند . و واقعاً

ممکن است قوانین گانولشن را مشابه ضرب معمولی بیان کرد .

۱- قانون جابجایی

$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ این رابطه را میتوان بصورت زیر اثبات کرد

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

با تغییر $\tau = t - \alpha$ خواهیم داشت

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\alpha) f_1(t-\alpha) d\alpha$$

$$= f_2(t) * f_1(t)$$

۲- قانون توزیعی

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (1-128)$$

اثباتش بسیار ساده است.

۳ - قانون شرکت پذیری

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) \quad (1-129)$$

این قانون از قضیه کانولشن و از واقعیت زیر نتیجه می‌شود.

$$F_1(\omega) [F_2(\omega) F_3(\omega)] = [F_1(\omega) F_2(\omega)] F_3(\omega)$$

۴ - ۱ : تفسیر ترسیمی انتگرال پیچیده (Convolution)

تفسیر ترسیمی انتگرال پیچیده در تجزیه و تحلیل سیستمهای مخصوصاً تئوری ارتباطات بسیار مفید و ارزشمند است. زیرا شخص را قادر می‌سازد تا بطور عینی نتایج مهم از روابط مجرد بروآش نماید. خصوصاً این عمل در تئوری ارتباطات صحیح و صارق است. اگر منحنی $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در سیستمهای خطی معلوم باشند، منحنی انتگرال پیچیده آنها در تجزیه و تحلیل سیستم بسیار سودمند است. فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ ، مطابق شکل (۱-۴۳)، یکی پالس مربیعی و دیگری مثلث باشد. طبق تعریف داریم

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

میخواهیم بطور ترسیمی کانولشن دو تابع را بدست آوریم. متغیر مستقل در انتگرال پیچیده ع می‌باشد. توابع $(\tau) f_1$ و $(\tau-t) f_2$ در شکل (۱-۴۳) ترسیم شده است. توجه کنید:

تابع $(\tau-t) f_2$ از تاخوردن $(\tau) f_2$ حول محور قائمی که از مبدأ میگذرد بدست می‌آید. تابع $(\tau-t) f_2$ نماینده و مشخص‌کننده تابع $(\tau-t) f_2$ است بطوریکه باندازه τ ثانیه در امتداد قسمت مثبت محور ع انتقال یافته است. شکل (۱-۴۳C) تابع $(\tau-t) f_2$ را نشان میدهد. مقدار انتگرال پیچیده در $t = t'$ از رابطه (۱-۱۳۰) محاسبه می‌گردد. بدینهی است که

آن مساوی سطح زیر منحنی حاصل ضرب $(\mathcal{H}_2 f_1)$ و $(\mathcal{H}_2 - t f_1)$ میباشد. در شکل (۴۲-۱) این سطح مشخص کردیده است، (سطح هاشور خود) بنابراین مقدار $f_1(t) * f_2(t)$ در لحظه $t = t_0$ برابر سطح هاشور خود [شکل (۴۲-۲)] میباشد.

به t مقادیر مختلف میدهیم و سطح زیر منحنی حاصل از ضرب منحنی ها را محاسبه مینماییم این سطح مقدار انتگرال پیچیده $f_1(t) * f_2(t)$ را تحت مقادیر مرتب t نشان میدهد. اگر مقادیر سطوح و زمانهای t را در دستگاه دگاری رسم کنیم، منحنی حاصل مقدار تابع $f_1(t) * f_2(t)$ را بر حسب زمانهای مختلف نشان میدهد. مکانیزم ترسیم کانولشن را میتوان چنین گفت: تابع $\mathcal{H}(-f_2)$ را بصورت یک چهار چوب مستحکم در نظر گرفته، بطوریکه در طول محور \mathcal{H} باندازه t ثانیه تغییر مکان و پیش روی کرده باشد. سپس آنرا در $(\mathcal{H} f_1)$ ضرب نموده، سطح زیر منحنی حاصل انتگرال پیچیده توابع را در لحظه $t = t_0$ مشخص میسازد. بنابراین برای پیدا کردن مقدار $f_1(t) * f_2(t)$ در هر زمانی، مثلاً $t = t_0$ چهار چوب $(\mathcal{H}_2 f_2)$ را بمقدار t ثانیه روی محور \mathcal{H} حرکت داده، سپس آنرا در $(\mathcal{H} f_1)$ ضرب مینماییم. سطح زیر منحنی حاصل ضرب توابع مقدار $f_1(t) * f_2(t)$ را در لحظه $t = t_0$ برای ما نشان میدهد. حال بیاییم گفتار خود را درباره محاسبه انتگرال پیچیده بطریق ترسیم خلاصه کنیم:

- ۱- تابع $(\mathcal{H}_2 f_2)$ را حول محور قائم که از مبدأ میگذرد تا گردد و تابع $(\mathcal{H}_2 - t f_1)$ را پیدا کنید.
- ۲- فرض کنید تابع $(\mathcal{H}_2 f_2)$ یک چهار چوب محکم است، آنرا باندازه مثلاً t انتقال دهید. چهار چوب فعلی تابع $(\mathcal{H}_2 - t_0 f_1)$ را نشان میدهد.
- ۳- دو تابع $(\mathcal{H}_2 - t_0 f_1)$ و $(\mathcal{H}_2 f_2)$ را در هم ضرب نموده تا تابع $(\mathcal{H}_2 - t_0 f_1)(\mathcal{H}_2 f_2)$ بدست آید اما بطوریکه میدانیم انتگرال زیر نمایشگر محاسبه سطح زیر منحنی تابع $(\mathcal{H}_2 - t_0 f_1)(\mathcal{H}_2 f_2)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = [f_1(t) * f_2(t)]_{t=t_0}$$

میباشد.

۴- این عمل را برای مقادیر مختلف τ تکرار کنید و مقادیر سطوح بدست آمده را -
برحسب τ رسم نمایند تا مقدار انتگرال پیچیده در هر لحظه‌ای بسازگی بدست آید.
توجه کنید اگر t مثبت باشد چهار چوب مستحکم را در قسمت مثبت محور x و اگر منفی باشد
در قسمت منفی محور x حرکت دهد.

(impulse)

گانولشن یک تابع مانند $f(t)$ با تابع تک ضربه‌ای $\delta(t)$ خود تابع $f(t)$ میشود.
اینرا میتوان بسازگی با بکار بردن خاصیت نمونه برداری تابع $\delta(t)$ که یعنی معادله (b-۹-۱) اثبات کرد

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

این نتیجه نیز از قضیه گانولشن زمان بدست میآید.

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad , \quad \delta(t) \longleftrightarrow 1$$

بنابراین

$$f(t) * \delta(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

و در نتیجه

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

اگر از نظر گاه ترسیم بدان بنگریم این استنتاج واضح است، چون تابع ضربه‌ای در یک نقطه متمرکز گشته و سطح آن واحد است. بنابراین گانولشن منجر به معادله (۱-۱۳۱) میگردد.

$$f(t) * \delta(t-T) = f(t-T) \quad (1-132a)$$

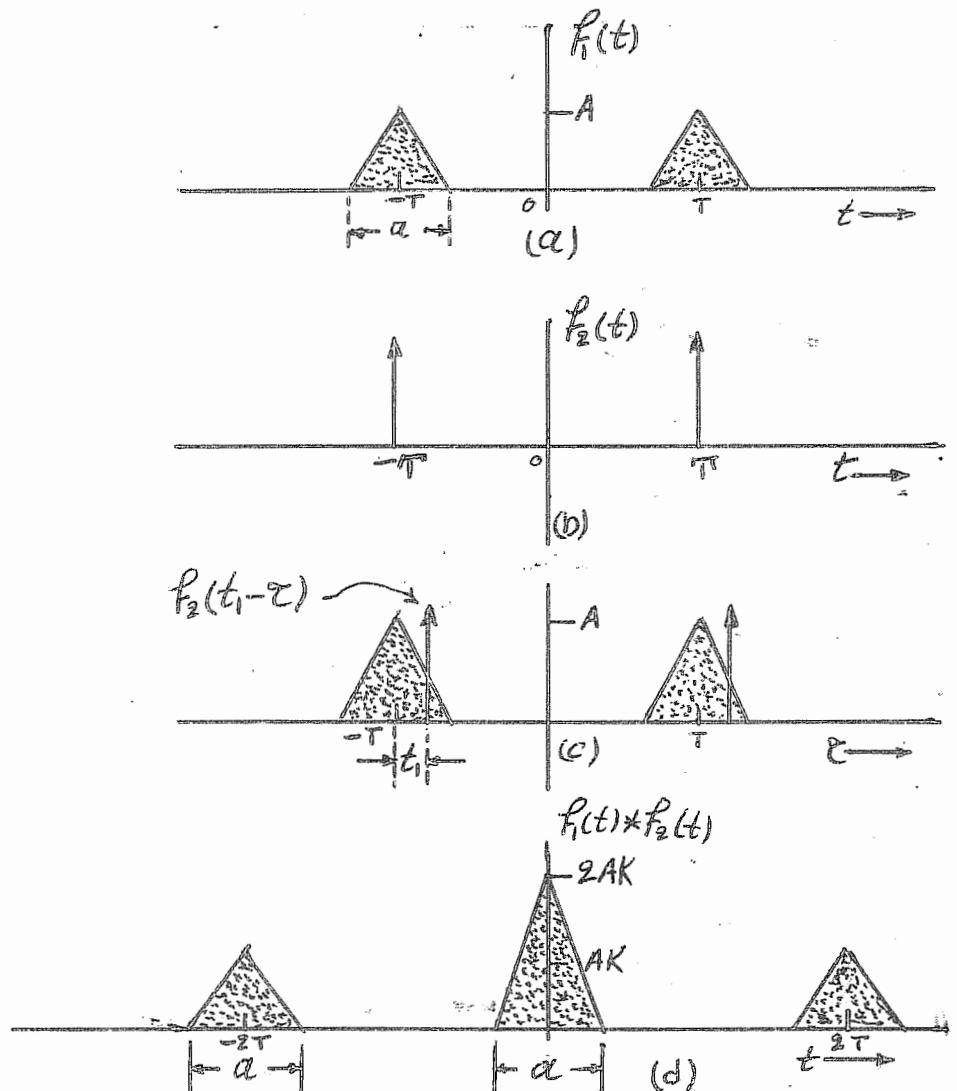
ضمناً نتایج زیر مذکور تاب است

$$f(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2) \quad (1-132b)$$

$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2) \quad (1-132c)$$

تمرین (۱-۱۲)

بطور ترسیم کانولشن تابع $f_1(t)$ (شکل ۴۴-۱) با یک جفت ایمپالس‌که پشت‌باشد یا قوت هر کدام K است (شکل ۴۴-۱) را پیدا کنید.



شکل (۱-۱۲)

طبق روش ترسیم که قبل بحث شد، (c) را حول محور قائمی که از مبدأ میگذرد تاکرده $f_2(-t)$ بدست آید. چون (c) f_2 تابع زوجی از \mathbb{C} است، از این‌رو $(c) = (c-f_2)$

میباشد . کانولشن $(\mathcal{C})_1$ با $f_1(\mathcal{C})$ منجر به کانولشن $(\mathcal{C})_2$ با $f_2(\mathcal{C})$ میشود .
 با در نظر گرفتن کانولشن یک ایمپالس (تابع یک ضریب ای) با تابع $f_1(\mathcal{C})$ بطوریکه خود
 تابع را میسازد . بسازگی میتوان دید ، هر ایمپالس یک مثلث در مبدأ $t=0$ بارتفاع AK
 درست مینماید . بنابراین ارتفاع مثلث حاصل در مبدأ $2AK$ میشود . با حرکت تابع $f_2(\mathcal{C}-t)$
 در جهت مثبت ، ایمپالسی که در T - واقع شده بود در $T=\mathcal{C}$ با پالس مثلث مواجه
 شده و پالس بارتفاع AK در $T=t$ بوجود میآورد . همین طور ایمپالسی که در ابتداء
 در \mathcal{C} واقع بود ، پالسی بارتفاع AK در $T=2T-t$ تولید مینماید . نتیجه نهائی
 کانولشن در شکل (۴-۱) نشان داده شده است .

1-۶ : قضیه نمونه برداری

قضیه نمونه برداری اثر ژرفی در تئوری ارتباطات دارد . آن بدین قرار است :

هر سیگنالی با باند محدود که فرکانس ماگزیموم f_m هرتس باشد و بیش از این فرکانس ،
 فرکانس دیگری نداشته باشد ، میتوان سیگنال مزبور را بوسیله مقادیرش که بفاصله زمانی کمتر از $\frac{1}{2f_m}$
 ثانیه جدا از یکدیگر قرار دارند ، تعیین کرد .

این قضیه بنام قضیه نمونه برداری یکنواخت بنا بر معرف است . زیرا بطور یکنواخت بفاصله $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه

نمونه برداری مینماید . این بما میگوید ، $\text{ا} \rightarrow \text{ل}$ تبدیل فوری در آنسوی فرکانس معین $f_m = 2m$

صفراشده ، اطلاعات کامل سیگنال $f(t)$ در نمونه هایش که بفاصله $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه از یکدیگر

قرار دایند میباشد . از شکل (۴-۱) این مطلب تفهیم میشود . تابع $f(t)$ در هر T

ثانیه که مساوی یا کوچکتر از $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه است $(\frac{1}{2f_m} \leq T)$ نمونه برداری شده است .

نمونه های متوالی سیگنال $f(t)$ در شکل بصورت f_0, f_1, f_2, \dots وغیره نشان داده شده اند . بطوریکه از قضیه نمونه برداری مستفاد میشود ، هر یک از این نمونه ها شامل اطلاعات

ازتابع $f(t)$ در هر لحظه از زمان t میباشد . البته سرعت با میزان (Rate) نامه برداری باید حداقل مساوی دو برابر پریود یا سیکل بزرگترین مؤلفه فرکانس سیگنال باشد . قضیه نامه برداری را میتوان بسهولت با کمک قضیه کانولشن فرکانس اثبات کرد . سیکال $f(t)$ را بقسمی در نظر گیرید که بیش از فرکانس ω_m هرتز ، فرکانس دیگری در طیف وجود نداشته باشد . این بدین معنی است که $F(\omega)$ تبدیل فوریه تابع $f(t)$ در $\omega < \omega_m$ صفر باشد . حال تابع $f(t)$ را در یک تابع پریودیک ایمپالس $\delta_T(t)$ (شکل ۷-۴-۱) ضرب مینماییم . حاصل این عمل یک رشته ایمپالس است ، بطوریکه شدت هر یک برابر مقدار $f(t)$ در آن لحظه میباشد و ایمپالس‌ها بفاصله T ثانیه از یکدیگر واقع میگردند . (به شکل ۷-۴-۱ مراجعه شود) . در حقیقت حاصل ضرب $f(t)\delta_T(t)$ نطايشگر تابع نامه برداری شده $f(t)$ در فواصل زمانی T ثانیه است . ما این تابع نامه برداری شده را با $f_3(t)$ نشان میدهیم

$$f_3(t) = f(t)\delta_T(t)$$

طیف فرکانس $f(t)$ ، $F(\omega)$ میباشد . و بطوریکه قبل اثبات نمودیم : تبدیل فوریه یک رشته ایمپالس یکواخت $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_T(t) dt = 1$ معادله ۷-۱-۰ [یک رشته ایمپالس یکواخت $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t) dt = 1$] است . (شکل ۷-۴-۱) و ایمپالس‌ها بفاصله یکواخت و مساوی $\frac{2\pi}{T}$ از یکدیگر فرار میگیرند .

* در واقع این قضیه حالت خاص قضیه نامه برداری میباشد . بمنظور مطالعه بیشتر به کتاب تئوری مدولاسیون تالیف H.S-Black مراجعه شود .

تبدیل فوریر $f(t) \mathcal{F}(t)$ را میتوان با استفاده از قضیه کانولشن بدست آورد . یعنی برای پیدا کردن تبدیل فوریر $f(t) \mathcal{F}(t)$ میبایست کانولشن $F(\omega)$ و $(\omega) \mathcal{F}$ را محاسبه کنیم

با جاگذاری $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ خواهیم داشت

$$f_s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T} [F(\omega) * \mathcal{F}_s(\omega)] \quad (1-134)$$

بطوریکه از معادله (1-134) پیداست ، طیف فرکانسی سیگنال نمونه برداری شده $f_s(t)$ از کانولشن $F(\omega)$ و یک رشته ایمپالس بدست میآید . کانولشن $F(\omega)$ و $(\omega) \mathcal{F}$ را میتوان بطور ترسیعی بطريق که در بخش (1-14) تشریح گشت [در شکل ۱-۴۶-۱ ول نشان داده شده] پیدا نمود . برای انجام این عمل ، تابع $(\omega) \mathcal{F}$ را حول محور قائم که از $\omega = 0$ میگذرد تا میکنیم . چون $(\omega) \mathcal{F}$ تابع زوجی از ω است ، بنابراین خود تابع $(\omega) \mathcal{F}$ بدست میآید . برای اینکه اعمال بعدی گانولشن را انجام دهیم ، تمام رشته ایمپالس $[(\omega) \mathcal{F}]$ را در جهت مثبت محور ω حرکت میدهیم . هر ایمپالس که از $(\omega) \mathcal{F}$ میگذرد ، خود تابع $(\omega) \mathcal{F}$ را دو باره تولید مینماید . چون ایمپالس ها بفاصله $\frac{2\pi}{T}$ از یکدیگر واقعند ، $(\omega) \mathcal{F}$ هر ω را دیگر برابر مطابق شکل (1-۴۶-۲) تکرار میشوند . بنابراین تابع تکاف طیف / تبدیل فوریر $[f(t) \mathcal{F}(t)]$ مانند $(\omega) \mathcal{F}$ بوده لیکن بطور پریودیک هر ω را دیگر برابر میشود . این تابع را با $(\omega) \mathcal{F}$ نشان میدهیم . توجه کنید تا وقتی که $\omega > 2\omega_m$ است ، تابع $(\omega) \mathcal{F}$ بدون رویهم افتادگی (overlap) بطور پریودیک تکرار میشود . در این صورت میتوان نوشت :

یعنی

$$T \leq \frac{1}{2f_m} \quad (1-135)$$

بنابراین تا موقعی که تابع $f(t)$ را بفواصل مساوی یا کوچکتر از $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه نموده برداری میکنیم، تابع $(\omega)F$ - تابع تکائیف طیف $(t)F$ ، بطور پریودیک المثلث $(\omega)F$ خواهد بود و تمام اطلاعات $f(t)$ را شامل است. میتوانیم بسهولت با عبور دادن سیگنال نمونه برداری شده از یک فیلتر پائین گذر که قادر است مؤلفه های فرکانسی پائین تراز f_m را عبور دهد و فرکانس های بالاتر را تضعیف نماید، $(\omega)F$ را از $(\omega)F$ استخراج کنیم. پس بدیهی است که سیگنال $(t)F$ شامل تمام اطلاعات $f(t)$ میباشد. و ما $(t)F$ را از یک فیلتر پائین گذر که میتواند فرکانس های پائین تراز f_m را عبور دهد و فرکانس های بالاتر از تضعیف نماید عبور داره و $f(t)$ را استخراج نمائیم. مشخصه فیلتر ایده آلتی که برای چنین عملی مناسب است، بطور نقطه چین در شکل (۱-۴۶) نشان داده شده است. توجه کنید اگر فاصله نمونه برداری T بیش از $\frac{1}{2f_m}$ باشد، باز از کانولشن $(\omega)F$ با $(\omega)F$ تابع $(\omega)F$ بطور تناوبی بدست میآید، لیکن سیکل ها متوالیاً رو بهم واقع — میشوند و نمیتوان $(\omega)F$ را از $(\omega)F$ استخراج نمود. پس بنابراین اگر T خیلی بزرگ در نظر گرفته شود، قسمتی از اطلاعات سیگنال از بین میروند و نمیتوان $(\omega)F$ را از $(\omega)F$ استخراج کرد. این نتیجه بسیار منطقی است زیرا اگر تابع گند و بطنی نمونه برداری شود، قسمتی از اطلاعات سیگنال از دست خواهد رفت. ماگریم فاصله نمونه برداری $\frac{1}{2f_m} \leq T$ است که بنام فاصله نایکویست Nyquist interval خوانده و نامیده میشود.

در مبحث قبل $(\omega)F$ را بطور ترسیمی پیدا کردیم. اگرچه میخواهیم از طریق محاسبه ریاضی همان نتایج را بدست آوریم. داریم

$$\begin{aligned}\delta_{\omega_0}(\omega) &= \delta(\omega) + \delta(\omega - \omega_0) + \dots + \delta(\omega - n\omega_0) + \dots \\ &\quad + \delta(\omega + \omega_0) + \dots + \delta(\omega + n\omega_0) + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۱-۳۴) نتیجه میشود :

$$F_S(\omega) = \frac{1}{T} [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۱-۱۳۶) خواهیم داشت

$$F_S(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \quad (1-136)$$

طرف دست راست معادله فوق نشاند هندسه تابع $F(\omega)$ است بطوریکه هر ω رادیان بر ثانیه تکرار میشود . این درست مانند همان نتیجه ای است که از طریق ترسیم بدست آورده میشود

آورده میشود

استخراج $f(t)$ از نمونه هایش

بطوریکه هم اگنون بحث شد ، میتوان با گذرانیدن تابع نمونه برداری شده از یک فیلتر پائین گذر با فرکانس قطع (*cutoff-frequency*) ω_m ، تابع اصلی را — استخراج و پیدا کرد . بدیهی است این علی است که در فضای فرکانس انجام میگردد که چون دو گونگی در فضای زمان و فرکانس وجود دارد . عمل معادلی نیز در فضای زمان وجود دارد تا $f(t)$ را از نمونه هایش استخراج گند . اگنون میخواهیم این امکان را جستجو و گاوش نمائیم .

فرض کنید سیگنال $f(t)$ در حداقل سرعت لازم $2f_m$ نمونه در ثانیه) نمونه برداری شده است . در این حالت

$$T = \frac{1}{2f_m} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4\pi f_m = 2\omega_m$$

بنابراین معادله (۱-۱۳۶) بصورت زیر در می‌آید.

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - 2n\omega_m) \quad (1-137)$$

بطوریکه قبله دیدیم، طیف $F(\omega)$ را میتوان از فیلتر نمودن $F_s(\omega)$ با عبور از فیلتر پائین گذر که فرکانس قطع آن ω_m است بدست آورد. بدینهی است که عمل فیلتر کردن معادل

ضرب $F_s(\omega)$ در تابع گیت $G_{2\omega_m}(\omega)$ است. بنابراین خواهیم داشت

$$F_s(\omega) G_{2\omega_m}(\omega) = \frac{1}{T} F(\omega)$$

بنابراین

$$F(\omega) = T F_s(\omega) G_{2\omega_m}(\omega)$$

(۱-۱۳۸)

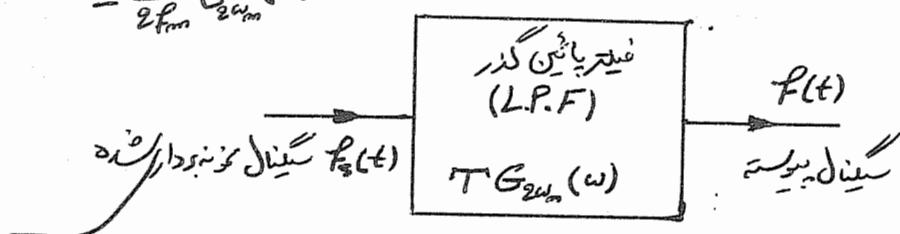
پس، ارسال سیگنال نمونه برداری شده از درون یک فیلتر پائین گذر تابع $f(t)$ را بنا می‌هد.

فیلتر مزبور دارای فرکانس قطع ω_m و بجهه $T = \frac{1}{2f_m}$ (gain) است. میتوان تابع

انتقال (transfer function) فیلتر را بصورت زیر بیان کرد.

$$H(\omega) = T G_{2\omega_m}(\omega) \quad : (1-47)$$

$$= \frac{1}{2f_m} G_{2\omega_m}(\omega)$$



شکل ۱-۴۷

با بکار بردن قضیه کانولشن زمان برای رابطه (۱-۱۳۸) خواهیم داشت:

$$f(t) = T f_s(t) * \frac{\omega_m}{\pi} Sa(\omega_m t) = f_s(t) * \frac{\omega_m}{\pi} Sa(\omega_m t) \quad (1-139)$$

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta(t - nT) \quad \text{تابع نمونه برداری شده } f(t) \text{ بصورت زیر است}$$

که در آن $f(t) = \sum_n f_n S(t - nT) * Sa(\omega_m t)$ است. لذا $f(t)$ نمونه π ام تابع (t) است.

$$= \sum_n f_n Sa[\omega_m(t - nT)] \quad (1-140a)$$

$$= \sum_n f_n Sa(\omega_m t - n\pi) \quad (1-140b)$$

بدیهی است که میتوان $f(t)$ را بر طبق معادله (1-140a) از نمونه هایش در حوزه زمان بوجود آورد. از نظر ترسیم هر نمونه را در تابع نمونه برداری ضرب و قطام شکل موجهای حاصل را جمع مینماییم تا $f(t)$ بدست آید. این در شکل (1-146) نشان داره شده است.

اکثر سیگنالها در عمل با باند تقریباً محدود هستند. لیکن در اینجا باید بطور قاطع بگوئیم که هیچ سیگنالی با باند محدود وجود ندارد. میتوان ثابت کرد اگر سیگنالی در فواصل زمانی محدود وجود داشته باشد، شامل تمام مؤلفه های فرکانسی است. البته در عمل برای تمام سیگنالها، تابع تکاشف طیف در فرکانسها زیاد کم و ناچیز است. ضمناً بیشتر انرژی ناقل سیگنال در فواصل فرکانسها معین قرار میگیرد. برای تمام کارهای ما بهتر است سیگنال را با باند محدود در نظر گیریم. البته خطای که از چشم پوشی فرکانسها زیاد حادث میگردد، قابل اغماض است.

قضیه نمونه برداری مفهوم عمیقی در بردارد. زیرا بما اجازه میدهد تا بجای یک سیگنال پیوسته و با باند محدود یک رشته نمونه هائی مجزا و ناپیوسته (discrete) از سیگنال مزبور را بدون هیچگونه اتلاف اطلاعات بکار ببریم. بنابراین اطلاعاتی که در یک سیگنال پیوسته و با باند محدود هست معادل تکه هائی مجزا و ناپیوسته اطلاعات است. چون اصل نمونه برداری - حداقل تعداد مقادیر مجزا و لازم را برای دوباره بوجود آوردن سیگنال مشخص میکند، مسئله ارسال هر سیگنال پیوسته ای، منجر به ارسال تعدادی مقادیر معین میشود. اینچنان

اطلاعات مجازی را میتوان بوسیله یک گروه پالس بقسمی که دامنه آنها بر طبق مقادیر نمونه تغییر میکند، ارسال داشت. (مدولاسیون دامنه پالس ها) (Pulse amplitude modulation) صور دیگر مدولاسیون پالس، مدولاسیون موقعیت پالس است (Pulse Position modulation) = P.P.M

(وضع مکانی پالس ها تغییر مینماید)، مدولاسیون پهنای پالس است

(Pulse Width modulation) = P.W.M

(پهنای پالس ها تغییر میکند)

(Pulse Code modulation) با لام خود مدولاسیون P.C.M است:

(پسیس - ام) که در آن نمونه ها بصورت رمز بوسیله یک گروه پالس نشان داده میشود

قضیه نمونه برد اری در فضای فرکانس

شبیه نمونه برد اری در فضای زمان، قضیه ای هم در فضای فرکانس وجود دارد که چنین بیان میشود: یک سیگنال محدود در فضای زمان، یعنی در $T < |t| < T$ صفر است، را میتوان بوسیله نمونه های طیف فرکانس در فاصله یکنواختی کمتر از $\frac{1}{2T}$ هرتز جدا از یکدیگر (یا $\frac{\pi}{T}$ رادیان در ثانیه جدا از یکدیگر) معلوم کرد.

اثبات این قضیه را بعنوان تعریف بعده خوانندگان میگذاریم

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \text{Sa}\left(\omega T - n\pi\right) \quad (1-141)$$

ثابت گنید

مسئل

۱ - نشان دهید تابع مستطیلی (شکل ۱-۳) در فاصله (ω_0, ω_2) بر توابع

$\cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots \cos nt$

برای تمام مقادیر صحیح n متعامد است. یعنی این تابع مؤلفه ای از شکل موج $\cos nt$

عد دیست صحیح) ندارد .

- ثابت کنید اگر دو تابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در فاصله (t_1, t_2) متعامد باشند ، انرژی - سیگنال $[f_1(t) + f_2(t)]$ برابر مجموع انرژیهای $f_1(t)$ و $f_2(t)$ است .

$$\text{انرژی سیگنال} [f_1(t) f_2^*(t)] \text{ در فاصله } (t_1, t_2) \text{ بر حسب تعریف چنین است} \\ \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)|^2 dt = \text{انرژی}$$

اینرا برای f_1 سیگنال متقابلاً متعامد گسترش دهید .

- تابع مستطیلی (شکل ۳-۱) بوسیله سیگنال $\frac{4}{\pi} \sin t$ بطور تقریبی محاسبه کردیده است . ثابت کنید تابع خطأ

$$f_e(t) = f(t) - \frac{4}{\pi} \sin t$$

در فاصله $(2\pi, 0)$ بر تابع $\sin t$ متعامد است . (آیا دلیلش را میدانید ؟) حال نشان دهید انرژی تابع مستطیلی $f(t)$ برابر مجموع انرژیهای $f_e(t)$ و $\frac{4}{\pi} \sin t$ میباشد .

- تابع مستطیلی (شکل ۳-۱) را بوسیله اولین دو جمله ای غیر صفر از چند جمله ای لوزان در بطور تقریبی محاسبه کنید . ضمناً مقدار متوسط مریع خطأ را در حالت که تابع مزبور فقط بوسیله الف - جمله اول .

ب - جمله دوم بطور تقریبی محاسبه شود ، پیدا کنید .

- اگر $f_1(t)$ و $f_2(t)$ تابع مختلط با متغیر حقیق t باشند ، ثابت کنید مؤلفه $f_1(t)$ روی $f_2(t)$ در فاصله t_2, t_1 از رابطه زیر بدست میآید :

$$C_{12} = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt / \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt$$

البته این مؤلفه وقتی است که مقدار متوسط مریع خطأ مینیم کردد . در این صورت نشان دهید تابع های $f_2(t) - C_{12} f_1(t)$ متقابلاً متعامدند

۶- مؤلفه $\sin_{\omega_1} t$ را در روی $\sin_{\omega_1} t$ در فاصله $(-T, T)$ برای مقادیر حقیقی ω_1 و ω_2 ($\omega_1 \neq \omega_2$) پیدا کنید. چگونه این مؤلفه با تغییر مینماید؟ نشان دهید اگر T بین نهایت شود مؤلفه کوچک و محو میگردد. ضمناً ثابت کنید این نتیجه برای هر دو ω

تابعی از توابع

$\sin_{\omega_1} t, \sin_{\omega_2} t, \cos_{\omega_1} t, \cos_{\omega_2} t$

استوار است.

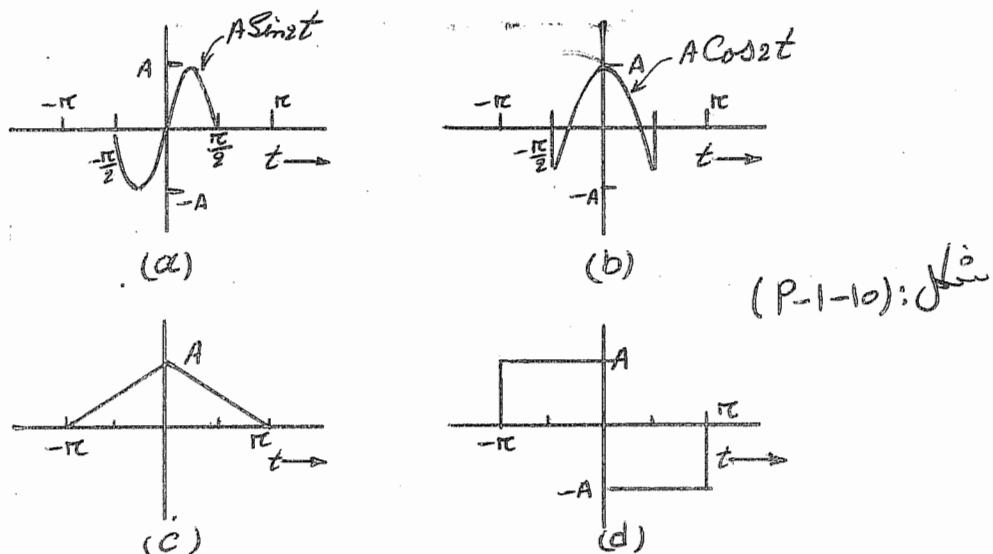
۷- دو تابع پریودیک $f_1(t)$ و $f_2(t)$ ، مؤلفه $\frac{d}{dt} C$ آنها صفر و شکل موجه‌های دلخواه به پریود T و $\sqrt{2} T$ دارند. ثابت کنید مؤلفه $f_1(t) f_2(t)$ روی $(-\infty, \infty)$ در فاصله t را صفر است. ضمناً نشان دهید، این نتیجه برای هر دو تابع دلخواهی که نسبت پریود آنها عدد اصم (یا کنگی) باشد و مؤلفه $\frac{d}{dt} C$ آنها نیز صفر باشد صحیح است.

۸- معلوم کنید کدامیک از توابع زیر پریودیک هستند. پریود توابعی که پریودیک هستند را پیدا نمایید.

- a) $a \sin t + b \sin 2t$
- b) $a \sin 5t + b \sin 8t$
- c) $a \sin 5t + b \cos 5t$
- d) $a \cos 2t + b \sin 7t + c \sin 13t$
- e) $a \cos t + b \sin \sqrt{2} t$
- f) $a \sin(\frac{3}{2}t) + b \cos(\frac{16}{15}t) + c \sin \frac{t}{29}$
- g) $(a \sin t)^3$
- h) $[a \sin 2t + b \sin 5t]^3$

۹- توابع e^{t^2} را در فاصله $[-T, T]$ بوسیله سری ملثاتی و نهائی فوریه بسط دهید .

۱- هر یک از چهار تابع ، شکل (P-1-10) را بوسیله سری ملثاتی فوریه در فاصله $(-\pi, \pi)$ نشان دهید . میخواهیم هر یک از توابع چه تعدادی از جمله محدود از سری فوریه بطور تقریبی نشان دهیم ، برای هر یک از توابع چه تعدادی از جمله را میبایست انتخاب کنیم تا مقدار متوسط مربع خطأ کمتر از یک درصد کل انرژی $f(t)$ باشد .



۱۱- اگر یک تابع پریودیک شرایط بخصوص از نظر تقارن داشته باشد ، محاسبه ضرایب فوریه قدری ساده تر خواهد بود . ثابت کنید نتایج زیر صحیح است

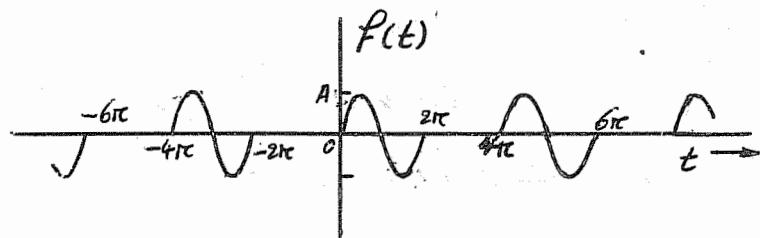
الف - اگر $f(t) = f(-t)$ باشد (تقارن زوج) ، تمام جملات سینوسی سری ملثاتی فوریه حذف میشود .

ب - اگر $f(t) = f(-t)$ باشد (تقارن فرد) : تمام جملات کسینوسی سری ملثاتی فوریه حذف میشود .

ج - اگر $f(t) = -f(t \pm \frac{\pi}{2})$ باشد (تقارن دو رانی) ، تمام هارمونیم های زوج حذف میگردد .

ضمانت نشان دهد که در هر حالت فوق ضرایب فوریر را میتوان فقط با انتگرال سینکالم پریودیک در فاصله یک نصف سیکل بدست آورد.

۱۲- یک شکل موج پریودیک مطابق شکل (P-۱۲) در نظر گیرید:



شکل (P-۱۲)

الف - سری مثلثاتی یا نمایی فوریر آنرا با محاسبه مستقیم ضرایب بدست آورد.

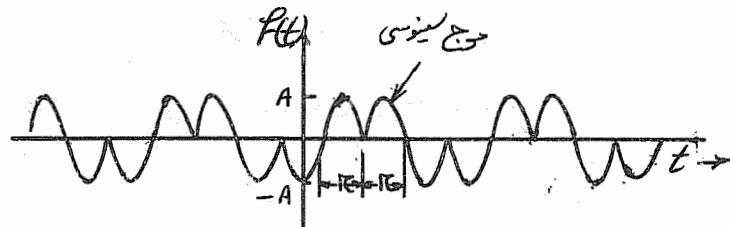
ب - اگر شکل موج $f(t)$ باندازه ۲ ثانیه بطرف چپ انتقال داده شود،

شکل موج جدید $f(t+2\pi)$ تابع فردی از زمان بوده و فقط شامل جملات سینوسی است. سری فوریر $f(t+2\pi)$ را پیدا کنید و از روی این سری، سری فوریر تابع $f(t)$ را بنویسید.

ج - اگر تابع بطرف راست انتقال داده شود، سری فوریر آنرا پیدا کرده و از روی -

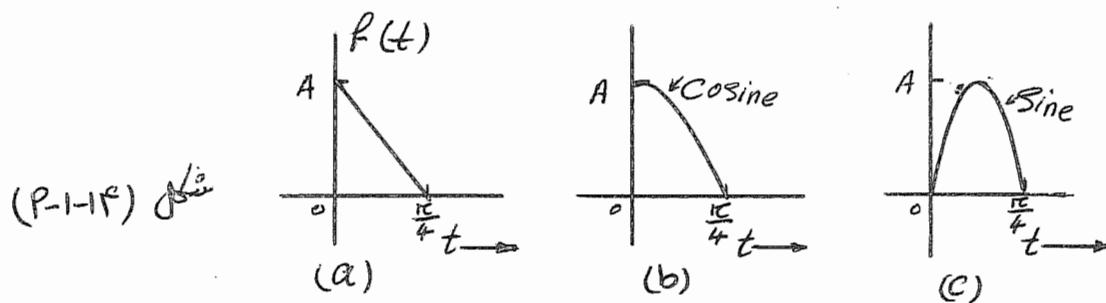
آن سری فوریر $f(t)$ را نتیجه بگیرید.

۱۳- شکل موجی پریودیک مطابق شکل (P-۱۳) در نظر گیرید:



شکل (P-۱۳)

- الف - سری فوریه آنرا با محاسبه مستقیم ضرایب پیدا کنید .
- ب - اگر تابع مذکور باندازه $\frac{\pi}{2}$ بطرف راست انتقال داره شود ، شکل موج جدید $f(t - \frac{\pi}{2})$ تابع زوجی از زمان بوده و فقط شامل جمله کسینوس است ، سری فوریه جدید $f(t - \frac{\pi}{2})$ را پیدا کرده و از روی آن سری فوریه $f(t)$ را بدست آورید .
- ج - تابع $f(t + \frac{\pi}{2})$ تابع فردی از زمان است ، سری فوریه آنرا محاسبه کرده و از روی آن سری فوریه $f(t)$ را معلوم نمایید .
- ۱۴ - توابع شکل (۱۴-۱-۱) را بر حسب سری مثلثاتی فوریه با در نظر گرفتن ملاحظات زیر بسط نمایید :



- الف - جملات سینوسی و گسینوسی فرکانس‌های ۱۶، ۱۲، ۸ و ۴ = ω و مقدار ثابت را بدست آورید .
- ب - فقط جمله سینوسی فرکانس‌های ۱۶، ۱۴، ۱۰ و ۶ = ω را پیدا کنید .
- ج - فقط جمله گسینوسی فرکانس‌های $\frac{16}{3}$ ، $\frac{8}{3}$ و $\frac{32}{3}$ = ω و مقدار ثابت را بدست آورید .
- د - فقط جمله گسینوسی فرکانس‌های ۸، ۶ و ۴ و ۲ = ω را پیدا کنید .
- ه - فقط جمله سینوسی و گسینوسی فرکانس‌های ۴، ۳ و ۲ و ۱ = ω و مقدار ثابت را بدست آورید .

و - فقط جمله سینوسی فرگانهای $\dots \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹ = \omega$ و مقدار ثابت

را بدست آوردید .

اگر بخواهیم تابع $f(t)$ را با جمله محدودی از این سری ها بطور تقریبی محا

کنیم، شما گذاهیک از مسیرهای فوق را برای اینکار انتخاب میکنید؟ دلائل کم و گیفی خود را

ارائه دهید .

۱۵ - سری فوریه توابع پریودیک شکل (۱-۱۵-۱) را بدست آورده، طیف فرگانس آنها را رسم کنید .

۱۶ - ثابت کنید هر تابع دلخواهی مانند $f(t)$ را میتوان همواره بر حسب مجموع دو تابع زوج و فرد، $f_e(t)$ و $f_o(t)$ بیان کرد .

حال با در نظر گرفتن مطلب فوق، مؤلفه های زوج و فرد تابع: $U(t)$ ، $U_e(t)$ و $U_o(t)$ را پیدا کنید .

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] \quad [\text{راهنمایی}]$$

۱۷ - ثابت کنید برای یک تابع زوج و پریودیک، ضرایب سری نتایی فوریه آن مقداریست حقیقی و برای یک تابع فرد و پریودیک، مقداریست موهومی

۱۸ - بطور یکه میدانیم یک تابع پیوسته پریودیک مانند $f(t)$ را میتوان بدین ترتیب نشان داد .

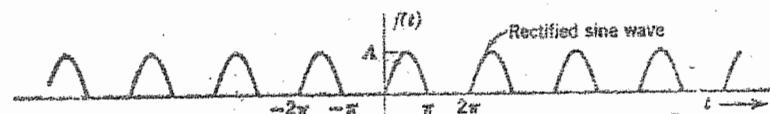
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

ثابت کنید $\frac{df}{dt}$ نیز یک تابع پریودیک با همان پریود $f(t)$ است و میتوان آنرا بصورت زیر

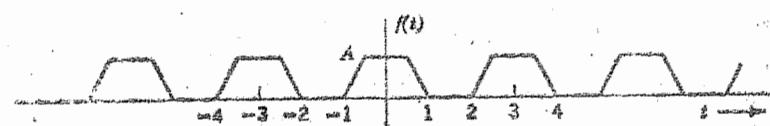
$$\frac{df}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j n \omega_0 F_n) e^{jn\omega_0 t} \quad \text{نشان دار .}$$

بعلاوه اگر مقدار متوسط تابع $f(t)$ صفر باشد] یعنی، $F_0 = 0$ ، ثابت کنید انتگرال تابع مذبور را میتوان بصورت زیر نشان دار .

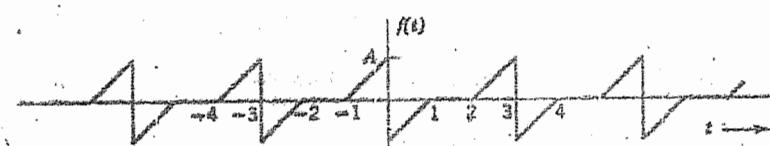
PROBLEMS



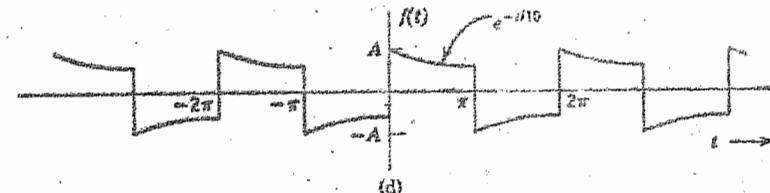
(a)



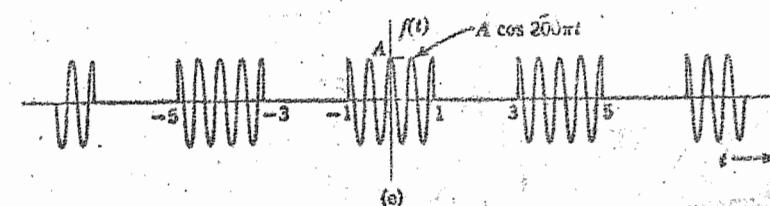
(b)



(c)



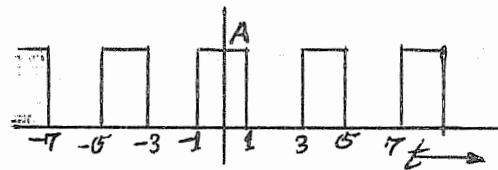
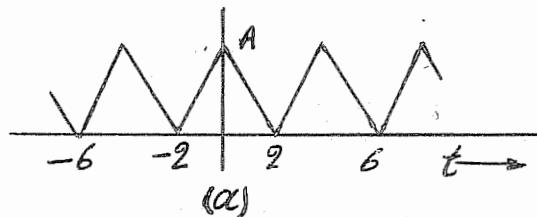
(d)



(e)

$$\int f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n}{jn\omega_0} e^{j n \omega_0 t}$$

۱۹- سری نهائی فوریر تابع پریودیک شکل (P-۱-۱۹) را پیدا کنید. چگونه ضرایب F_n با n تغییر میکنند؟ آیا میتوانید بطور گیفی نتایج را توضیح دهید؟



شکل (P-۱-۱۹)

۲۰- بتابعی پریودیک مانند $f(t)$ که مؤلفه های n هارمونیک معلوم و ضرایب فرکانس های زیاد ش صفر باشد یک سینال با باند محدود (Band Limited Signal) اطلاق میشود. ثابت کنید اینچنین سینال با باند محدود بوسیله مقادیرش در هر $1 + 2n$ لحظه از یک پریود شخص میگردد.

۲۱- نشان دهید تبدیل فوریر تابع $f(t)$ را میتوان بصورت :

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

ثوشت. و ضمناً ثابت کنید اگر $f(t)$ تابع زوجی از t باشد، خواهیم داشت :

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad * F(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

و اگر تابع فردی از t باشد :

تابع $F(\omega)$

بنابراین ثابت کنید اگر $f(t)$

حقیقی و تابع زوجی از t است.

حقیقی و تابع زوجی از t باشد

موهومی و تابع فردیست.

حقیقی و تابع فردی باشد

موهومی و تابع زوجی است.

موهومی و تابع زوجی باشد.

مختلط و تابع زوجی است.

مختلط (کمپلکس) و تابع زوجی باشد.

مختلط و تابع فردیست.

مختلط و تابع فردی باشد

۲۲- بطوریکه دیدیم تابع $f(t)$ را میتوان بصورت مجموع توابع زوج و فرد زیر نشان داد

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

(مسئله ۱۶ مراجعه شود)

الف- اگر تابع $F(\omega)$ تبدیل فوریر تابع $f(t)$ باشد، ثابت کنید $\operatorname{Re}[F(\omega)]$ تبدیل فوریر تابع زوج $f_e(t)$ و $\operatorname{Im}[F(\omega)]$ تبدیل فوریر تابع فرد $f_o(t)$ است.

ب- اگر $f(t)$ تابع کمپلکسی باشد

$$f(t) = f_r(t) + j f_i(t)$$

و $F(\omega)$ تبدیل فوریر $f(t)$ باشد ثابت کنید

$$\mathcal{F}[f_r(t)] = \frac{1}{2} [F(\omega) + F^*(-\omega)]$$

$$\mathcal{F}[f_i(t)] = \frac{1}{2} [F(\omega) - F^*(-\omega)]$$

$$f^*(t) = f_r(t) - j f_i(t)$$

راهنمایی:

$$\mathcal{F}[f^*(t)] = F(-\omega)$$

و

۲۳- تبدیل فوریر توابعی که در شکل (P-۱-۲۳) مصور گشته پیدا کنید.

۲۴- از قضیه مدولا سیون و رابطه (۹۶-۱) معادلات (۱-۱۰۰) و (۱-۱۰۰) را استنتاج

کنید.

۲۵- با بکار بردن خواص نعمتیه برداری تابع ایمپالس، انگرالهای زیر را محاسبه کنید.

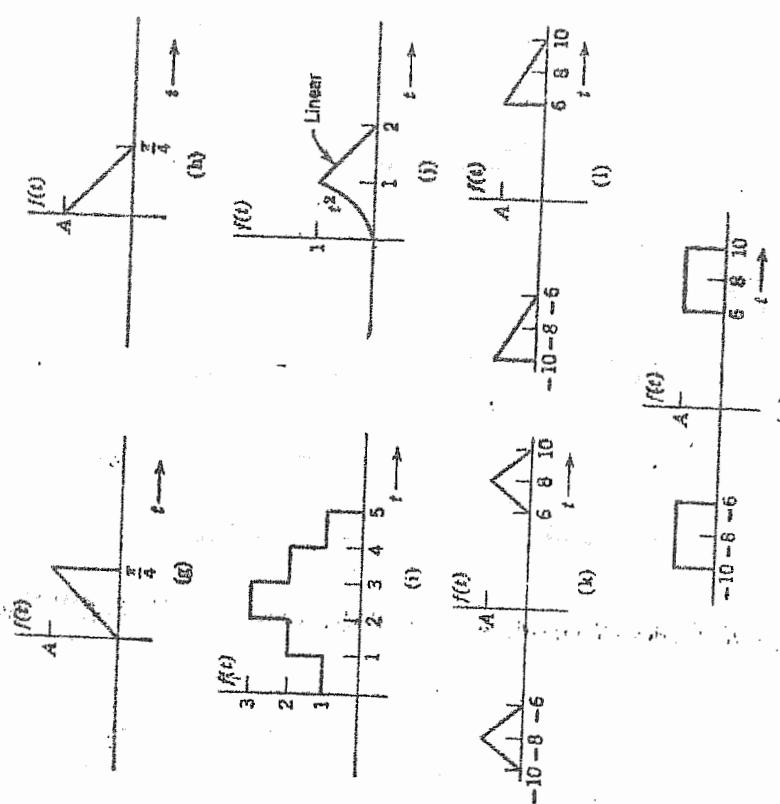


Figure P-1.23 (continued)

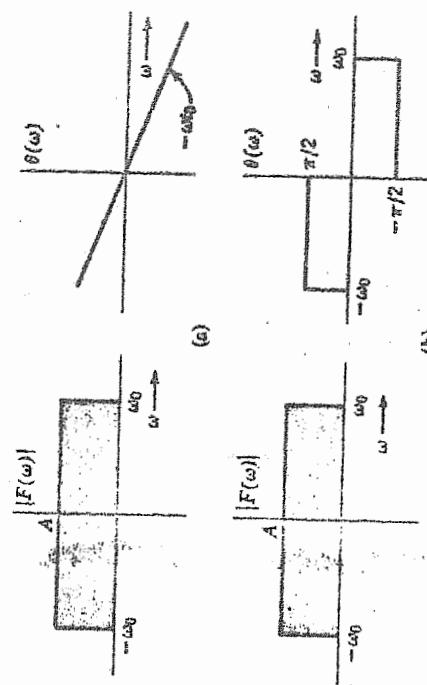


Figure P-1.26

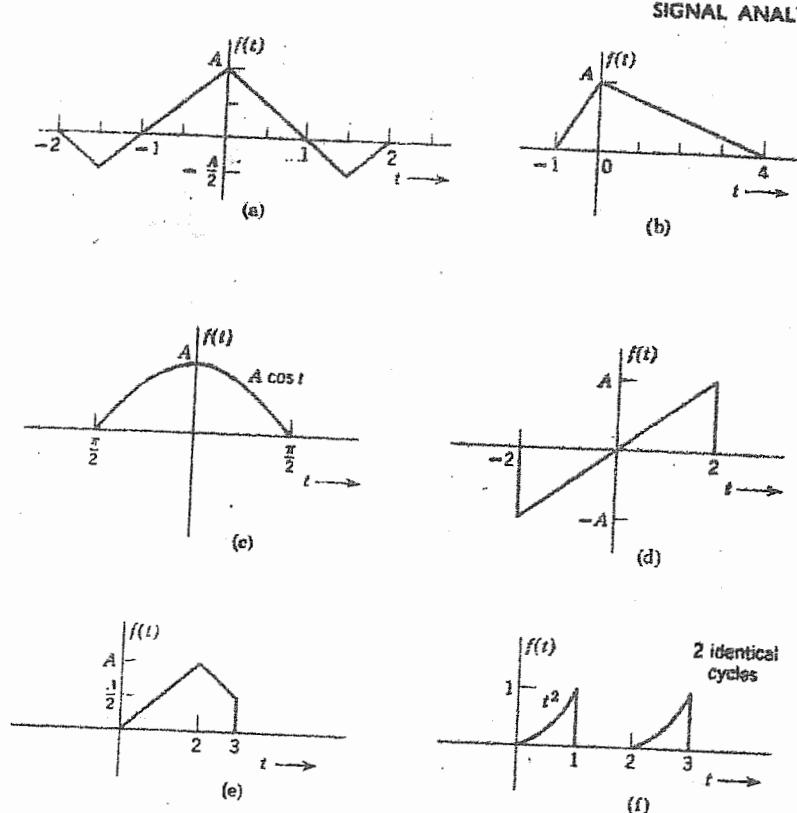


Figure P-1.23

SIGNAL ANALYSIS

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) \sin t \, dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(1-t) (t^3 + 4) \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+3) e^{-t} \, dt$$

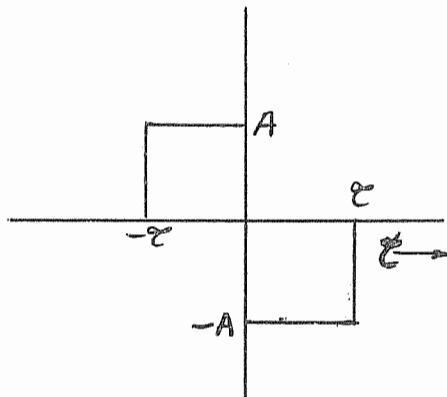
۲۶- تبدیل فوریه تابع $f(t)$ در شکل (P-۱-۲۶) نشان داده شده است. خود تابع $f(t)$ را معلوم کنید.

۲۷- تبدیل فوریه تابع $f(t)$ در شکل (P-۱-۲۷) مصور گشته، خود تابع $f(t)$ را پیدا کنید

راهنمایی : از قضیه مدولاسیون استفاده کنید

۲۸- با استفاده از قضیه مدولاسیون، تبدیل فوریه توابعی که در شکل (P-۱-۲۸) نشان داده شده است، پیدا کنید. در هر حالت طیف فرکانس را رسم نمایید.

a) $t f(2t)$ b) $(t-2) f(t)$ c) $(t-2) f(-2t)$ d) $t \frac{df}{dt}$ e) $f(1-t)$ f) $(1-t) f(1-t)$



شکل (P-۱-۳۲)

۳- با استفاده از خواص مشتق گیری فرکانس و انتقال زمان و جدول ۱-۱B، تبدیل فوریه توابع شکل (P-۱-۲۳) را بدست آورید.

۴- با استفاده از دو گونگی قضیه مدولاسیون (معادله ۱-۱۱۸)، تبدیل فوریه توابع K و L

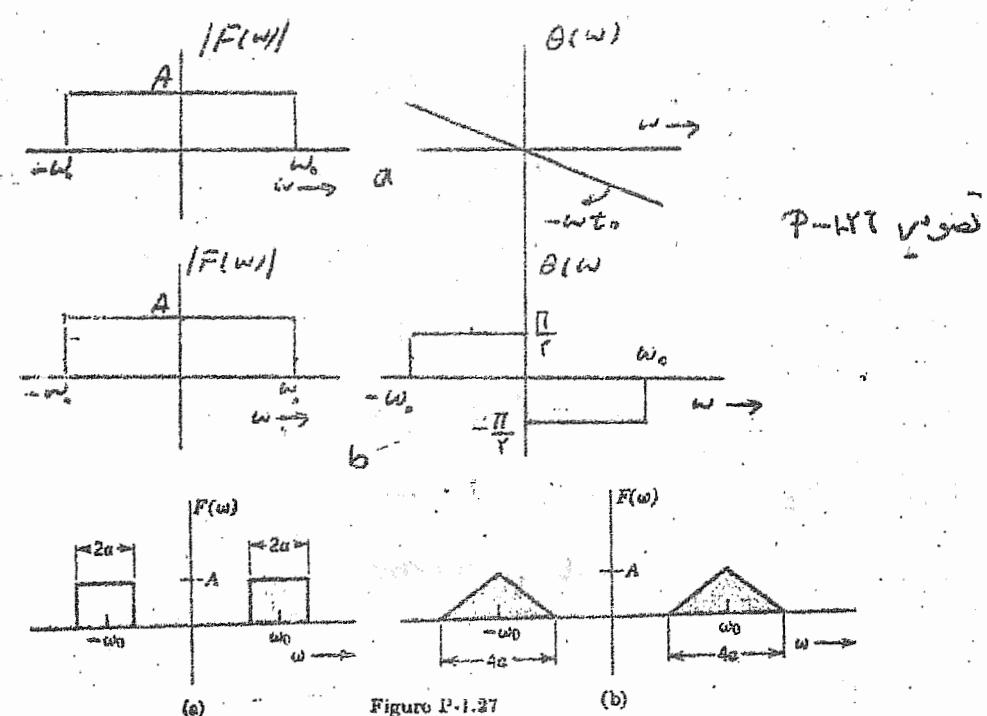


Figure P-1.27

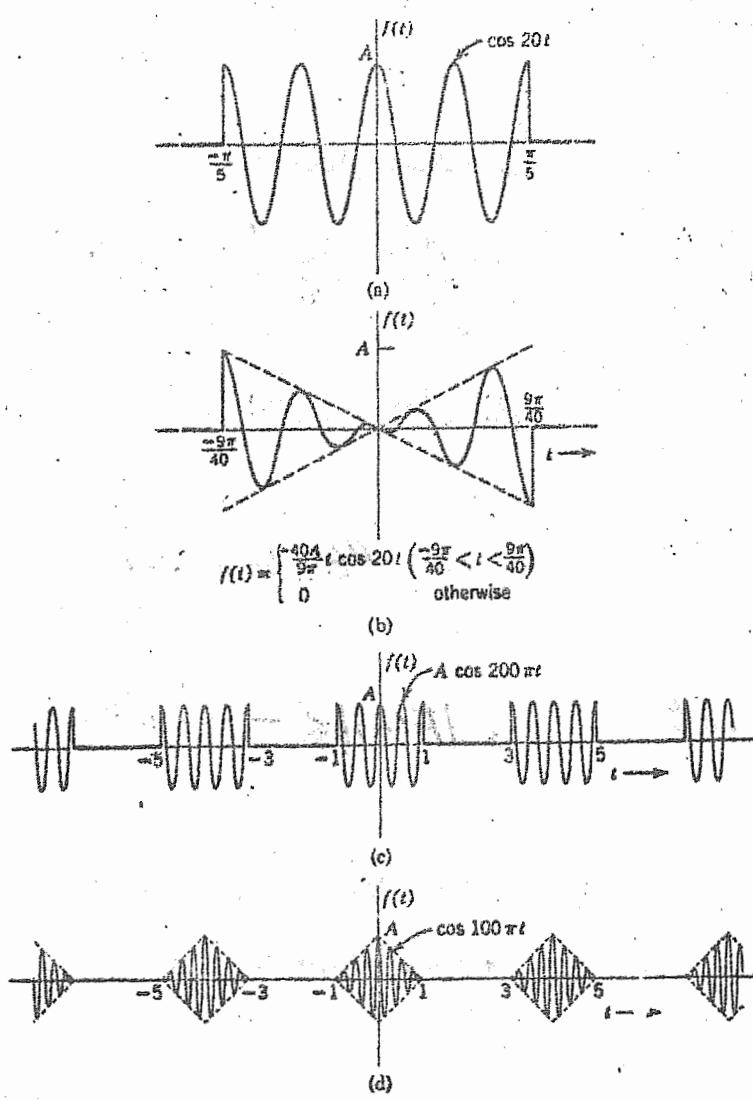


Figure P-1.28

و m شکل (P-۱-۲۳) را بدست آورید.

۳۲- تبدیل فوریر تابعی که در شکل (P-۱-۳۲) نشان داده شده است را بوسیله:

الف - فقط با استفاده از خواص انتگرال گیری زمان و جدول تبدیل فوریر (۱-۱B)

ب - از طریق مستقیم انتگرال گیری

ج - فقط با استفاده از خواص مشتق گیری و انتقال زمان و جدول (۱-۱B)

د - فقط با استفاده از خاصیت انتقال زمان و جدول (۱-۱B) پیدا کنید.

۳۳- معان (گشتاور) m_n ، (m_n) تابعی مانند $f(t)$ چنین تعریف میشود

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$$

با استفاده از قضیه مشتق گیری فرکانس نشان دهید:

$$m_n = j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

با استفاده از این نتیجه ثابت کنید میتوان بسط سری تایلور (ω) $F(\omega)$ را بدین صورت نوشت:

$$F(\omega) = m_0 - jm_1 \omega - \frac{m_2 \omega^2}{2!} + \frac{jm_3 \omega^3}{3!} + \frac{m_4 \omega^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}$$

معان های مختلف تابع گیت (Gate) را معلوم کرده و با استفاده از رابطه فوق تبدیل فوریر

آنرا پیدا کنید

۳۴- نشان دهید اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد، خواهیم داشت

$$|F(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

$$|F(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{df}{dt} \right| dt , \quad |F(\omega)| \leq \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^2 f}{dt^2} \right| dt$$

این نامساویها، باند های بالائی $|F(\omega)|$ را معلوم مینماید.

۳۵- انتگرال کانولشن های (انتگرال های پیچیده) زیر را محاسبه کنید

- a) $u(t) * u(t)$
- b) $u(t) * \bar{e}^t u(t)$
- c) $\bar{e}^t u(t) * \bar{e}^{-2t} u(t)$
- d) $u(t) * t u(t)$
- e) $\bar{e}^t u(t) * t u(t)$
- f) $\bar{e}^{-2t} u(t) * \bar{e}^{-t}$

نتایج خود را از قسمت b تا f بوسیله تبدیل فوریر امتحان کنید.

-۳۶- اگر $f(t)$ یک سینگال پیوسته با باند محدود W_m رادیان بر ثانیه را داشته باشد،

$$\frac{K}{\pi} [f(t) * Sa(Kt)] = f(t) \quad K > W_m \quad \text{ثابت کنید:}$$

و بدین ترتیب نشان دهید

$$\frac{w_m}{\pi} [Sa(\omega_m t) * Sa(\omega_n t)] = Sa(\omega_m t) \quad \omega_n > \omega_m$$

-۳۷- تبدیل معکوس فوریر $Sa^2(kt)$ را با نگرش به تئوری کانولشن محاسبه کنید. بطور-

ترسیعی انتگرال کانولشن را محاسبه نمایید.

-۳۸- برای سینگال‌های زیر مینیمم میزان نمونه برداری را در فاصله نایکویست را بدست آوردید

- a) $Sa(100t)$
- b) $Sa^2(100t)$
- c) $Sa(100t) + Sa(50t)$
- d) $Sa(100t) + Sa^2(60t)$

-۳۹- برای توابعی که در شکل (P-۱-۳۹) معرف شده $f_1 * f_2$ و $f_1 * f_2^2$ را محاسبه کنید.

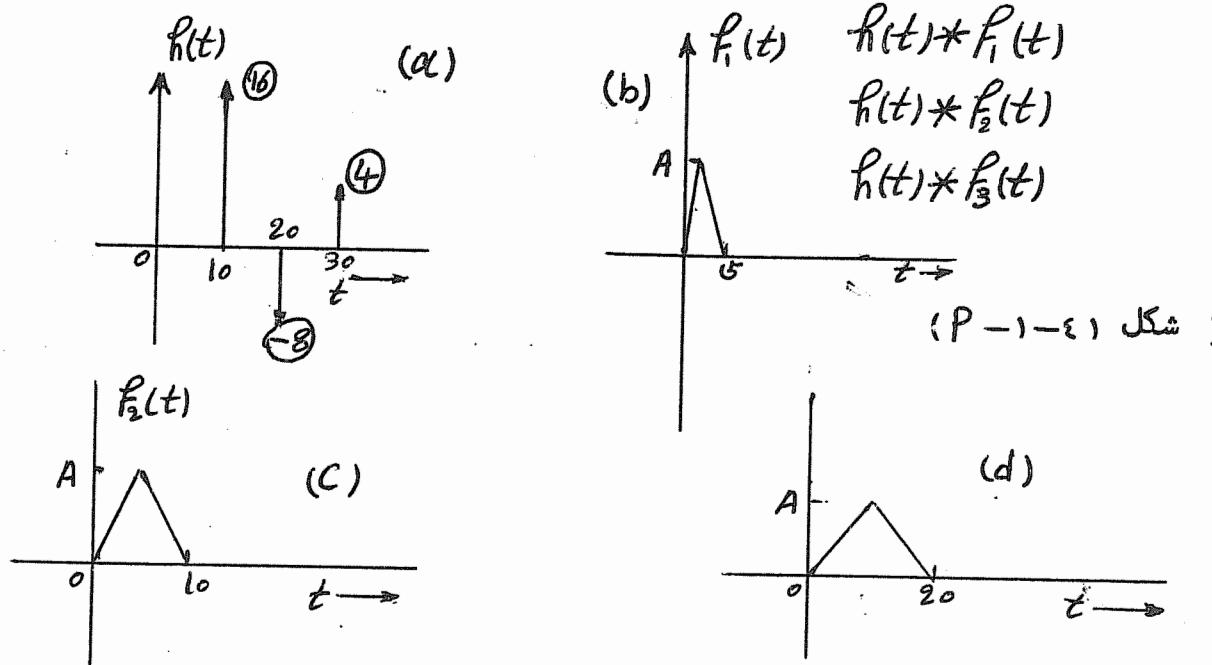
۴- ثابت کنید تابع سبی (Cause function) $f(t)$ تابع که در $t < 0$ صفر است را

میتوان بر حسب مجموع پیوسته ای از تابع تک شیبی بصورت زیر بیان نمود

$$f(t) = \int_0^t \frac{d^2 f}{dt^2} (t-\tau) d\tau$$

(راهنمایی - از قضیه گانولشن استفاده شود)

۵- با در نظر گرفتن توابع شکل (P-۱-۴۱) کانولشن های زیر را محاسبه کنید



(شکل P-۱-۴۱)

۶- قضیه انتگرال زمان (رابطه ۱-۱۱۹) وقتی صارق است که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$$

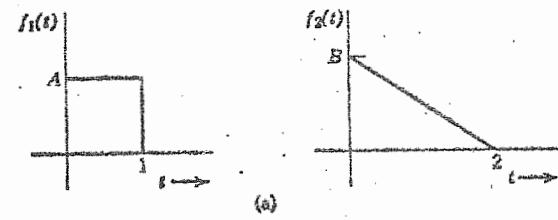
باشد . اگر شرط فوق برقرار نباشد ثابت کنید

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow j\omega F(\omega) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

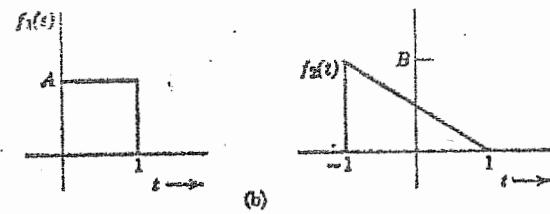
راهنمایی را بصورت کانولشن $\mathcal{U}(t)$, $F(t)$, $f(t)$ بیان کنید

۷- فرض کنید تابع $f(t)$ که در شکل (۱-۱۴) ترسیم گشته داردی تبدیل فوریه

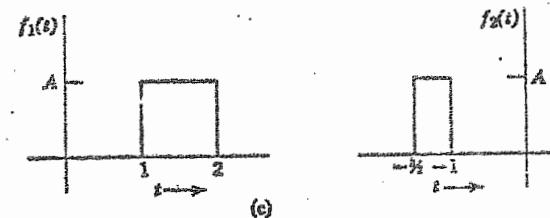
باشد .



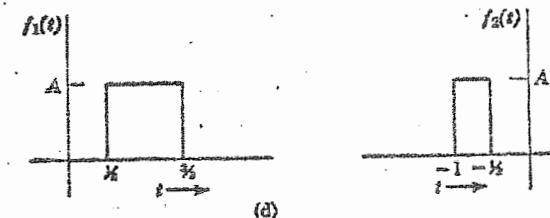
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure P-1.39



۴۳ - الف - ثابت کنید تبدیل فوریر $f_T(t)$ که در آن $f_T(t) = f(t)$ هر T ثانیه تکرار شود

(مطابق شکل ۱-۱۵) بصورت زیر است

$$f_T(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} F(\omega) \delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

راهنمایی : تابع $f_T(t)$ را بوسیله سری فوریر بسط داده و توجه شود که ضریب جمله n ام F_n این سری برابر $\frac{1}{T} F(\omega)$ است . یا $f_T(t)$ را میتوانید بر حسب کانولوشن $f(t) \delta_{\omega_0}(t)$ در نظر گیرید .

ب - تبدیل فوریر تابع گیت $G(t)$ را برای $\frac{1}{2} = T$ ثانیه ترسیم نمایند . و با -

استفاده از نتایج قسمت (الف) ، تبدیل فوریر تابع پریودیک گیت را که در $\frac{1}{4}$ ثانیه تکرار شود رسم کنید . نتایج حاصله را با نتایجی که از تمرین (۱-۲) بدست آمد مقایسه کنید .

۴۴ - فرض کنید تابع $f(t)$ که در شکل (۱-۱۴) ترسیم گشته دارای تبدیل فوریر $F(\omega)$ باشد . تابع جدیدی مانند شکل (۱-۱۵) در نظر میگیریم بطوریکه T پالس در T ثانیه قرار گیرد . بنابراین تابع جدید $f_n(t)$ فقط در فاصله $\frac{T}{2} < t < \frac{3T}{2}$ وجود دارد . و خارج از این فاصله صفر میباشد .

$$f_n(t) \leftrightarrow F(\omega) \frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

نشان دهید :

تابع $\frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$ را برای $n=1$ رسم کنید . ثابت کنید اگر $n \rightarrow \infty$ میل نماید ، این تابع بسوی یک رشته ایمپالس گرایش میابد . یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$\text{که در آن } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sum_{k=-n}^m e^{jk\omega_0 T} = \frac{\sin\left(\frac{(m+1)\omega_0 T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)} \quad n=2m+1$$

راهنمایی : از رابطه زیر استفاده کنید

۴۵- تابع $h(t)$ بقsmی است که در $t < 0$ صفر می‌باشد [اینچنین تابع بنام تابع سبی خوانده می‌شود]. تبدیل فوریه $H(\omega)$ است. اگر $(\chi(\omega))$ و $R(\omega)$ بترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی $H(\omega)$ در مبدأ شامل تابع ایمپالس نباشد، ثابت کنید.

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\zeta)}{\omega - \zeta} d\zeta$$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\zeta)}{\omega - \zeta} d\zeta$$

این دو معادله تبدیل هیلبرت را تعریف می‌کند. اگر $h(t)$ تابع منفی باشد یعنی برای $t < 0$ صفر باشد، نتایجش را مشخص کنید. [راهنمایی : $h(t)$ را بر حسب مؤلفه‌های زوج و فرد [$h_o(t)$ و $h_e(t)$] بیان کنید. بمسئله ۱۶ مراجعه شود]

از نتایج مسئله ۲۲Q مستفاد می‌شود

$$h_e(t) \leftrightarrow R(\omega) \quad , \quad h_o(t) \leftrightarrow j\chi(\omega)$$

و نیز توجه کنید برای تابع سبی $h(t)$

$$h_o(t) = h_e(t) Sgn(t) \quad , \quad h_e(t) = h_o(t) Sgn(t)$$

حال از رابطه ۹۶-۱ و قضیه کانولشن استفاده کنید

$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n$$

۴۶- ثابت کنید.

$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

* * * * *

*

*

فصل دوم

ارسال سیگنال و طیف تکاشهای ف

قدرت

۱-۲ : ارسال سیگنال از درون یک سیستم خطی

سیستمهای خطی بوسیله اصل جمع پذیری (Superposition) و مخصوصاً میشوند . یعنی میگوید : اگر $r_1(t)$ پاسخ (Response) تابع ورودی $f_1(t)$ و $r_2(t)$ پاسخ ورودی $f_2(t)$ باشد ، پاسخ ورودی $f_1(t) + f_2(t)$ همبار $r_1(t) + r_2(t)$ خواهد بود . این بیان اصل جمع پذیری (سوپرپوزیشن) است . یا بطور کلی اگر $f_1(t) + \beta f_2(t)$ ورودی یک سیستم خطی باشد ، پاسخ آن $r_1(t) + \beta r_2(t)$ میباشد . α و β مقادیر ثابت و دلخواهی هستند .

برای پیدا کردن پاسخ یک سیستم خطی با ورودی مفروضی ، میتوان از نتایج اصل جمع پذیری استفاده کرد . بنابراین ممکن است تابع ورودی را بصورت مجموع توابع مشابهی که پاسخ آنها را بسیاری میتوان معلوم کرد در نظر گرفت . بطوریکه در فضل اول دیدیم ، هر تابعی مانند $f(t)$ را ممکن است بوسیله تبدیل فوریه بصورت مجموع پیوسته ای از توابع نمائی بیان کرد . حال میتوانیم از این حقیقت برای پیدا کردن پاسخ یک سیستم بوسیله روش فوریه (یا لاپلاس) استفاده کنیم . البته اینجا تابع ایمپالس را در نظر میگیریم . نخست $f(t)$ را بصورت مجموع پیوسته ای از توابع ایمپالس بیان مینماییم . با توجه بخاصیت نمونه برداری تابع ایمپالس داریم (معادله ۱-۱) :

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (۱-۱)$$

میتوان این معادله را از دیدگاه و درجه دیگری نگریست ، بطوریکه $f(t)$ بر حسب مؤلفه های

ایمپالس هستند . طرف راست معادله (۲-۱) نمایشگر (انتگرال) مجموع پیوسته‌ای از توابع ایمپالس است برای اینکه این مطلب را درست درک کنیم ، انتگرال را بصورت حد مجموع توابع ناپیوسته و مجزائی بیان میکنیم . پس معادله (۲-۱) را میتوان چنین نوشت :

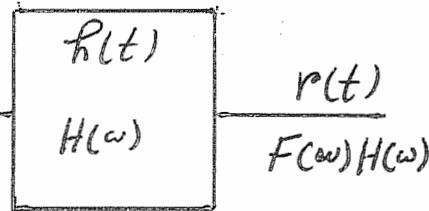
$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} [f(\tau) \Delta \tau] \delta(t-\tau) \quad (2-2)$$

$f(t)$ در اینجا بصورت مجموع ایمپالس‌هایی بیان شده است . ایمپالسی که در $\tau = t$ قرار دارد قوتش $f(t) \Delta \tau$ میباشد .

اگر $h(t)$ پاسخ تک ضریب‌ای (ایمپالس) $\delta(t)$ سیستم باشد . بنابراین پاسخ سیستم با ورودی $f(t) \Delta \tau h(t-\tau)$ برابر $f(t) \Delta \tau \delta(t-\tau)$ خواهد بود . و پاسخ کلی $r(t)$ ناشی از ورودی $f(t)$ ، با بکاربردن اصل جمع پذیری برای معادله (۲-۲)

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} [f(\tau) \Delta \tau] h(t-\tau) \quad \text{خواهیم داشت :}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (2-3) \quad \frac{f(t)}{F(\omega)} \\ &= f(t) * h(t) \quad (2-4) \end{aligned}$$



شکل : ۲-۱

۱ - در اینجا فرض میکنیم سیستم خطی و مستقل از زمان باشد . برای چنین سیستمی ، پارامترها با زمان تغییر نمیکنند بنابراین اگر پاسخ (response) تابع $h(t)$ ، تابع $\delta(t)$ باشد پاسخ $\delta(t-\tau)$ باید $h(t-\tau)$ باشد . نوع دیگر سیستمها ، سیستم‌های خطی و غیر مستقل از زمان است که در آنها یکی یا چند پارامتر با زمان تغییر میکنند . و پاسخ ورودی $\delta(t-\tau)$ تابع $h(t-\tau)$ برای تمام مقادیر τ باشد ، میتوان استنباط کرد که سیستم مستقیماً از زمان است . (time-invariant)

با بکار بردن قضیه کانولشن زمان خواهیم داشت :

$$R(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad (2-5a)$$

که در آن

$$r(t) \leftrightarrow R(\omega) \quad , \quad f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad , \quad h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

$H(\omega)$ بنام تابع انتقال (transfer function) سیستم خوانده میشود . اگر سیگنال

$f(t)$ از $t=0$ شروع شود و در $t=0$ صفر باشد ، حد پائینی انتگرال (۲-۳) را میتوان صفر گذاشت . بعلاوه اگر در $t=0$ ، $f(t)=0$ باشد ، (این برای تمام سیستمهای فیزیکی صحیح است) در این صورت برای $t > 0$ ، $f(t) = f(t-0)$ است . بنابراین حد بالائی انتگرال رابطه (۲-۳) را ممکن است t قرار داد . پس برای سیستمهای فیزیکی یعنی در $t > 0$ ، $f(t) = 0$ میتوان نوشت

$$r(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2-5b)$$

توجه کنید رابطه (۲-۳) فرم کلی است و معادله (۲-۵) حالت خاصی را با در نظر گرفتن و منظور داشتن $f(t)$ و $h(t)$ در $t > 0$ برابر صفر بدست میآید .

۲-۲ : خصوصیات فیلتری سیستمهای خطی

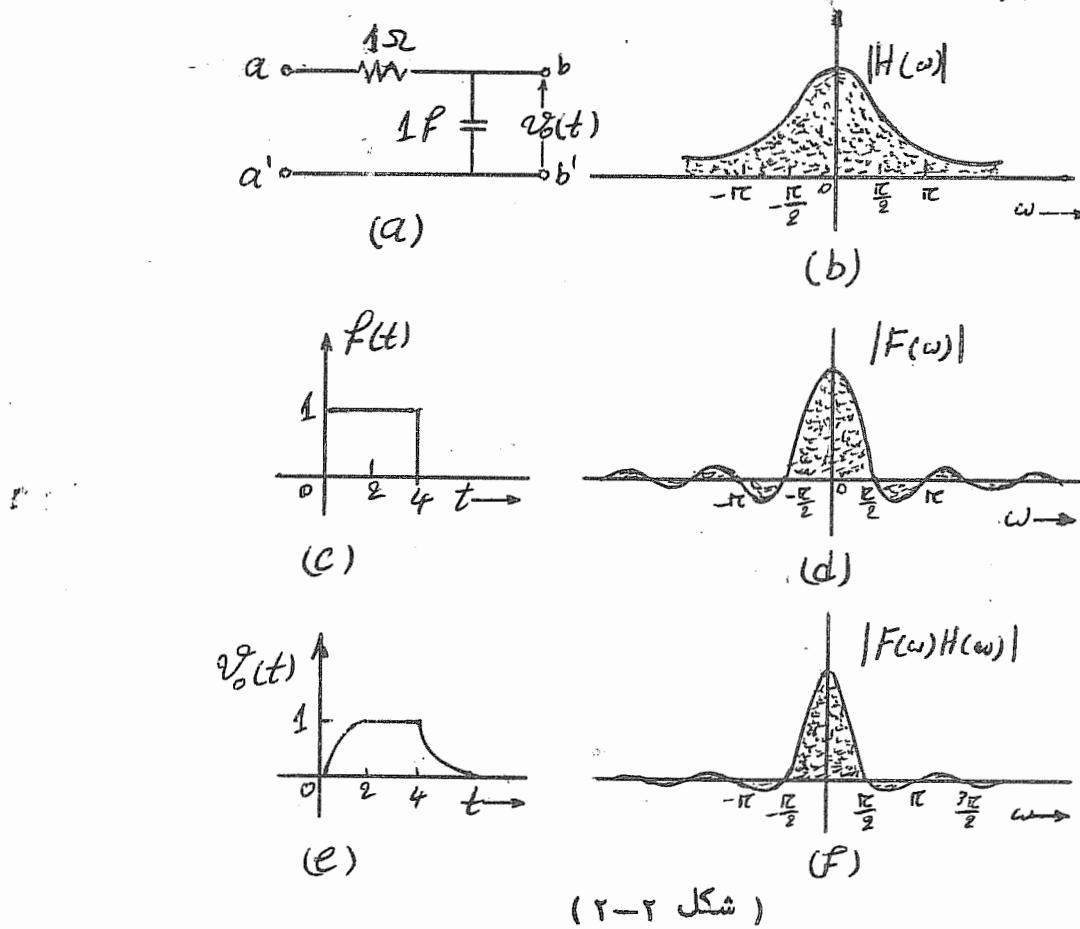
اگر بر یک سیستم سیگنال $f(t)$ در ورودی اثر کند ، پاسخ $\frac{1}{f(t)}$ ناشی میگردد . پس سیستم مذبور تحت مشخصات تحولی در سیگنال $F(\omega)$ پدید میآورد . تابع تکاف طیف - سیگنال ورودی $F(\omega)$ بوده ، در حالیکه تابع تکاف طیف پاسخ $H(\omega)$ میباشد .

بنابراین سیستم در سیگنال ورودی دخل تصرف و تغییری ایجاد مینماید . بدینهن است گردد

۱- میتوان نشان داد ، اگر تابع ورودی سیستم $\int_{-\infty}^t e^{j\omega t} f(t)dt$ باشد ، پاسخ سیستم $H(\omega)$ است .

سیستم بمانند فیلتری در مقابل فرکانس‌های مختلف تأثیر می‌کند. برخی از مؤلفه‌های فرکانس ممکن است تقویت یا تضعیف شوند و یا ممکن است تغییری در آنها بوجود نیاید. همین طور در تحول ارسال یک سیگنال تغییر فازی در مؤلفه‌های فرکانس پیدا خواهد شد. پس هر سیستم بر حسب مشخصات فیلتری خود تغییراتی درتابع تکائض طیف ورودی ایجاد می‌کند. این تغییر و تحول بر طبق تابع انتقال $H(\omega)$ سیستم بوده و نطاویشگر پاسخ سیستم در مقابل هر فرکانس می‌باشد. بنابراین $H(\omega)$ بمعنای تابع توزین (Weighting function) (در برابر فرکانس‌های مختلف است). پاسخ کلی دارای تابع تکائض $F(\omega) H(\omega)$ است (شکل ۲-۲)، که در آن $F(\omega)$ تابع تکائض طیف ورودی $f(t)$ و $H(\omega)$ تابع انتقال سیستم است.

حال مدار RC شکل (۲-۲a) را در نظر گیرید. پالسی در دو سر ورودی $\alpha\alpha'$ مدار



مطابق شکل (۲-۲۲) اثر میدهیم. پاسخ سیستم ولتاژ خروجی (t)^{۷۰} است که در دو سر خروجی مدار ظاهر میشود. تابع تکاشف طیف سیگنال ورودی (پالس مستطیلی) در شکل (۲-۲۴) ترسیم شده است. تابع انتقال مدار نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی میباشد.

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} \quad \text{است یعنی} \quad \text{که مقدارش}$$

طیف مقداری $H(\omega)$ در شکل (۲-۲۶) ترسیم شده است. در حال حاضر از مشخصه فاز صرفنظر میکنیم. بطوریکه از تابع انتقال مدار پیدا است، مدار فرکانسهای زیاد را تضعیف و بفرکانسهای کم اجازه میدهد تا با تضعیف نسبتاً کم عبور طایند. این مدار ساده‌ترین فرم فیلتر پائین گذراست. بعلاوه تابع تکاشف طیف پاسخ سیستم حاصل ضرب (ω) ^{۷۰} و $H(\omega)$ میباشد. در شکل (۲-۲۷) طیف مقداری پاسخ سیستم $F(\omega) = H(\omega) \cdot (\omega)$ مصور گشته است. مقایسه شکل‌های (۲-۲۶) و (۲-۲۷) تضعیف فرکانسهای زیاد که ناشی از فرکانسهای زیاد است، بخوبی مشاهده میشود. پاسخ سیستم (t) ^{۷۰} (شکل ۲-۲۸) نسبت به شکل ورودی تغییر شکل یافته و قدری کمی پیدا کرده است. این بعلت تضعیف فرکانسهای زیاد سیگنال ورودی میباشد. در عمل فرکانسهای زیاد از بین میروند. سیگنال ورودی در $t = 0$ میباشد. از این‌رو این عطل بدین معنی است که فرکانسهای زیاد تولید میگند. چون مدار مزبور اجازه عبور بفرکانسهای زیاد نمیدهد. ولتاژ خروجی بتندی نمیتواند تغییر کند. بنابراین نسبت به سیگنال ورودی بگندی بالا میروند و پائین میآید.

۲-۳: انتقال بدون اعوجاج

بحث قبل ارسال بدون اعوجاج سیگنال‌ها را پیشنهاد میکند. در حقیقت سیستم باید فرکانسها را بطور مساوی تضعیف کند. یعنی $(n)H$ برای تمام فرکانسها مقدار ثابتی باشد. البته این‌هم برای ارسال بدون اعوجاج سیگنال‌ها کافی نیست و باید هر مؤلفه انتقال فاز (Phase shift) را بطور مساوی تضعیف کند.

معینی را قبول نماید . تا اینجا ما از انتقال فاز چشم پوشیدیم . واضح است که حتی اگر تمام مؤلفه های فرکانس یک سیگنال بطور مساوی قضیف شوند ، اگر از طرف سیستم بدانها انتقال فازی داره شود ، ممکن است جمع شده و یک سیگنال متفاوتی حاصل گردد . اگرچنان میخواهیم انتقال فاز نسبی مورد نیاز مؤلفه های مختلف را برای ارسال بدون اعوجاج یک سیگنال بررسی و تحقیق نماییم . برای ارسال بدون اعوجاج یک سیگنال ، پاسخ سیستم باید المثلث و درست شبیه سیگنال ورودی باشد . بطور کلی ، ممکن است قدری تاخیر زمانی به این المثلث وابسته نمود . یعنی میتوان گفت وقت وقتی سیگنال $f(t)$ بدون اعوجاج ارسال شده است که پاسخ سیستم بصورت $Kf(t-t_0)$ باشد . بدیهی است که سیگنال خروجی (پاسخ) K برابر سیگنال ورودی با انتقال زمانی t_0 ثانیه میباشد .

بنابراین اگر $f(t)$ سیگنال ورودی باشد ، برای عبور بدون اعوجاج پاسخ باید چنین داشته

باشیم

$$r(t) = Kf(t-t_0)$$

با استفاده از خواص انتقال فاز ، رابطه (۱-۱۱۷) داریم

$$R(\omega) = KF(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

از رابطه ۲-۵۹ داریم

$$R(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega) = KF(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

پس برای یک سیستم بدون اعوجاج (distortionless system) تابع انتقال باید :

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t} \quad (2-6)$$

باشد . بنابراین برای ارسال بدون اعوجاج ، تابع انتقال سیستم باید بصورت رابطه ۲-۶ باشد . شکل (۲-۳۹) بحید است که $|H(\omega)|$ ممایست برابر مقدار ثابت K برای تمام فرکانسها باشد . $\theta(\omega) = -\omega t_0$ و بعلاوه انتقال فاز مربوطه آنها متناسب با فرکانس آنها تغییر خواهد کرد . (۲-۷)

مثلاً اگر سیگنال $\cos \omega t$ باند ازه $\frac{1}{2}$ ثانیه انتقال داره شود سیگنال حاصله $\cos \omega(t-t_0)$

برابر است با

$$\cos \omega(t-t_0) = \cos(\omega t - \omega t_0)$$

بدینه است که انتقال فاز سیگنال $\frac{1}{2}\pi$ است، لذا متناسب با ω میباشد.

صریحاً میتوان گفت، معارله (۲-۷) باید بصورت زیر باشد

$$f = n\pi - \omega t \quad (2-8) \quad n \text{ عدد بست صفحی مثبت یا منفی}$$

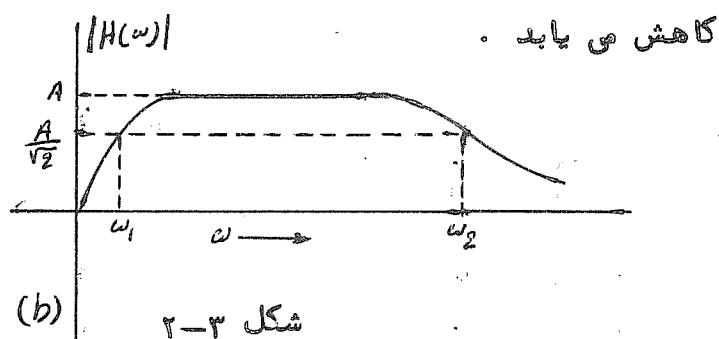
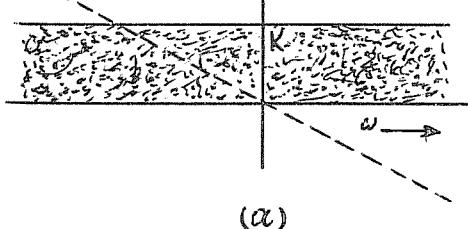
چون فاز اضافی $\frac{1}{2}\pi$ ممکن است علامت سیگنال را عوض کند، از اینرو تابع فاز برای سیستم های بدون اعوجاج باید بصورت رابطه (۲-۸) [شکل ۲-۳(a)] باشد.

پهنای باند سیستم

معمولًاً مقدار ثابت $|H(\omega)|$ در یک سیستم پهنای باند شر را مشخص میکند. پهنای باند یک سیستم بطور دلخواه چنین تعریف میشود. فاصله فرکانسها را معلوم میگند که در $\frac{1}{\sqrt{2}}$ یا (3dB) برابر از مقدار حد اکثر واقع باشند. پهنای باند سیستم که تابع انتقالش در شکل (۲-۳) ترسیم گشته $(\omega_1 - \omega_2)$ است.

برای ارسال بدون اعوجاج، سیستم احتیاج داریم که تمام فرکانسها را عبور دهد. اما بعلت محدودیت های فیزیکی ساختن چنین سیستمی امکان ندارد. عملًاً ما سیستمی لازم داریم که پهنای باند تقریباً زیادی داشته باشد. برای هر سیگنال فیزیکی، انرژی آن با افزایش فرکانس

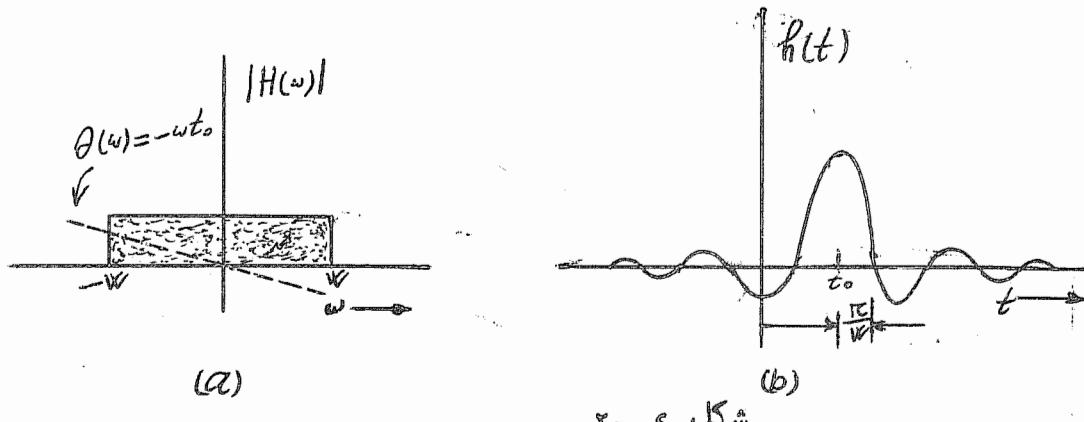
$$\theta(\omega) = -\omega t_0 \cdot |H(\omega)|$$



بنابراین فقط لازم است سیستمی بنا نهار که بیشتر انرژی سیگنال را عبور دهد. چون فرکانس‌های زیاد انرژی کم خواهند داشت اینها اعوجاج کمی ایجاد می‌کند.

۲-۴ : فیلتر ایده‌آل

یک فیلتر ایده‌آل پائین گذر فیلتری است که بدون هر گونه اعوجاج تمام فرکانس‌های پائین تراز حد معین ω_0 را بیان در ثانیه از سیگنال اعمال بر آنرا عبور دهد. و فرکانس‌های بالاتر از ω_0 را بکلی تضعیف و محو نماید (شکل ۲-۴(a)) پاسخ فرکانس (یا مشخصه مقداری) یک فیلتر پائین گذر تابع گیت (ω) $G_{\omega_0}(\omega)$ می‌باشد.



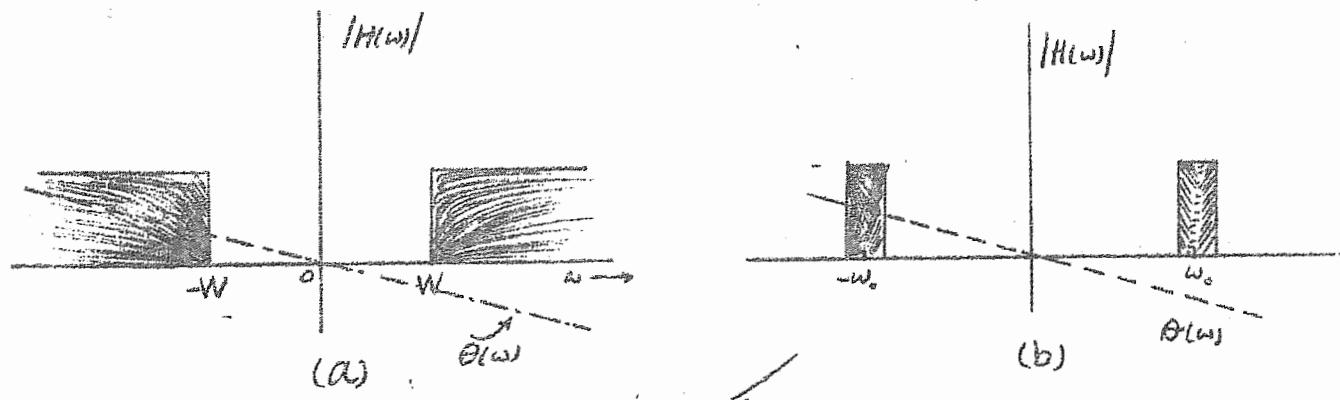
پائین گذر تابع گیت (ω) G_{ω_0} می‌باشد. اما گفته شده تابع فازی برای عبور بدون اعوجاج سیگنال‌ها باید بصورت $e^{-j\omega t_0}$ باشد. و برای فیلتر ایده‌آل داریم

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} = G_{\omega_0}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

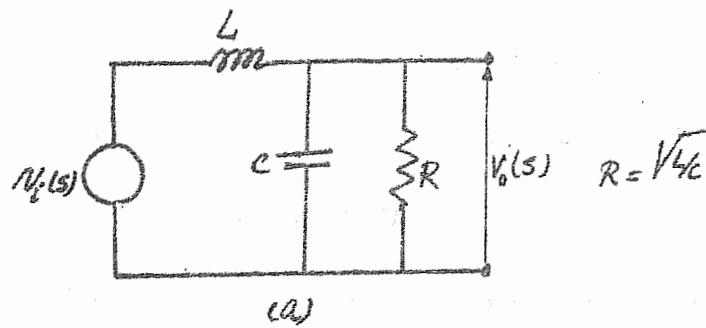
پاسخ تابع تک ضربه‌ای (ایمپالس) $f(t)$ این فیلتر را می‌توان با تبدیل معکوس فوریه

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = H(\omega) \text{ بدست آورد.}$$

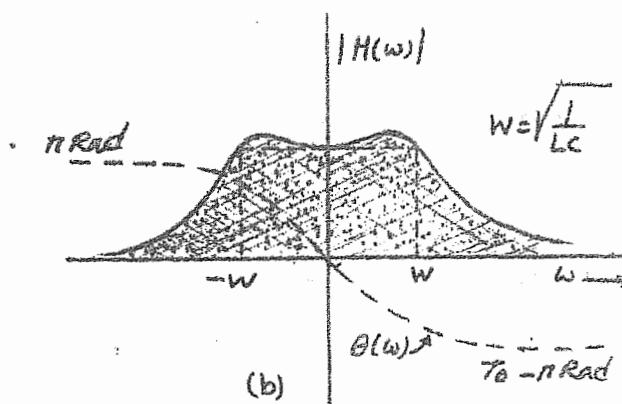
$$= \mathcal{F}^{-1}[G_{\omega_0}(\omega) e^{-j\omega t_0}]$$



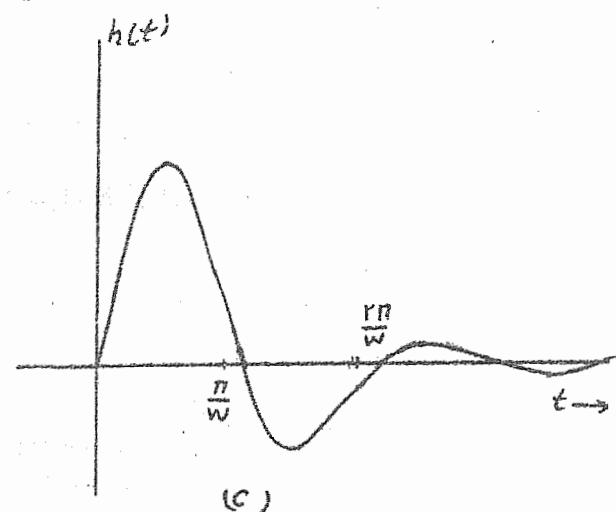
مشهوداً مي فتر بـ



(a)



(b)



(c)

که فرود ریز نیز داشته باشد (a, b)

دیگر ریز نیز ندارد (c)

با استفاده از جدول ۱۸-۱ و خواص انتقال زمان خواهیم داشت :

$$h(t) = \frac{W}{\pi} \operatorname{Sa} [W(t - t_0)]$$

با نظری بشکل (۶-۴) نتیجه میشود، پاسخ ضربه‌ای برای مقادیر منفی t نیز وجود دارد. این حقیقت از آنجا ناشی میشود که تابع ورودی در $t=0$ بر سیستم وارد آمده است. و عجب آنکه پاسخ سیستم حتی قبل از آنکه تابع ورودی اثرگند ظاهر میشود. سیستم چنین بنظر می‌آید که گوئی سیستم میتواند تابع ورودی را پیش‌بینی کند. متأسفانه ساختن سیستم در عمل امکان ندارد تا پاسخ را پیش‌بینی کند. معذالت باید یار آور شویم، فیلتر ایده‌آل مطلوب و آرزوی ما میباشد. ولی از نظر فیزیکی قابل درک نیست. در ضمن میتوان گلایت نمود فیلترهای ایده‌آل دیگر (مانند فیلتر بالا گذر، میان گذر) شکل (۶-۵) نیز از نظر فیزیکی عملی و واقعی نمیباشند.

در عمل ما بدنبال فیلترهای میگردیم که مشخصات آنها نزدیک به فیلتر ایده‌آل باشد. شکل (۶-۶) فیلتر ساده پائین گذر را نشان میدهد. تابع انتقال این فیلتر :

$$H(\omega) = \frac{1/\frac{1}{R} + j\omega C}{j\omega L + 1/\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{1}{1 - \omega^2 CL + j\omega \frac{1}{R}}$$

اگر $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ و $W = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$H(\omega) = \frac{2W}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} W}{(\frac{W}{2} + j\omega)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} W)^2}$$

(با استفاده از جدول ۱۱B) پاسخ تابع ضربه $h(t)$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{2W}{3} e^{-\frac{Wt}{2}}$$

در شکل (۶-۶) پاسخ فرکانسی [مقداری و فازی]، $H(\omega)$ ترسیم شده است.

پاسخ ضربه‌ای $h(t)$ در شکل (۶-۶) نشان داده شده است. مشخصه فازی و مقداری این فیلتر را با مشخصه فیلتر ایده‌آل مقایسه کنید. پاسخ ضربه‌ای خیلی شبیه به پاسخ ضربه‌ای فیلتر ایده‌آل است (البته از $t=0$ به بعد) ما بدنبال آزمونی هستیم که بتوان مشخصات

درک فیزیکی را از عدم درک فیزیکی تمیز دهد . اینچنان آزمون بنام معیار Paley-Wiener معرف است و اگنون آنرا مورد مطالعه قرار خواهیم داد .

۵-۲ : علیت و تحقق فیزیکی : محک پالی - وینر

تحقیق فیزیکی در نوشته ها بطور مختلف تعریف شده است . در اینجا ما آخرین تعریف قاطع برای تشخیص امکان سیستم های فیزیکی و عدم امکان سیستم های فیزیکی را بکار میبریم . بدینه است که یک سیستم فیزیکی نمیتواند قبل از آنکه تابع ورودی برآن اثر گند ، پاسخ را شرط داشته باشد . این بنام شرط علیت (causality condition) موسوم است . این شرط را میتوان بنحو دیگری بیان داشت . پاسخ تک ضریبی $H(t)$ یک سیستم از نظر قابلیت درک فیزیکی باید سببی (Causal) باشد . سیگنالی را سببی (Cause) گویند که برای $t > 0$ صفر باشد . بنابراین پاسخ تک ضریبی $H(t)$ یک سیستم از نظر قابلیت درک فیزیکی باید در $t < 0$ صفر باشد . این محک و معیار (Criterion) از نظر قابلیت درک فیزیکی در فضای زمان بود . اما این محک در فضای فرکانس چنین بیان میشود : شرط لازم و کافی برای آنکه تابع مقداری $H(\omega)$ از نظر فیزیکی قابل درک باشد آنست که :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|H(\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty \quad (2-9)$$

البته تابع مقداری $|H(\omega)|$ قبل از معیار پلی - وینر باید مریع انترگالش کوچکتر از بی نهایت گردد . یعنی سیستمی که از کحد پلی - وینر (معارله ۲-۹) تخلف گرد ، پاسخ ضریبی آن غیر سببی بوده یعنی پاسخ قبل از آنکه ورودی اثر گند وجود خواهد داشت .

میتوان از محک پلی - وینر نتایج مهم استنتاج کرد . طیف مقداری $|H(\omega)|$ ممکن است در برخی فرکانسها مجزا (discrete) صفر شود ، لیکن در قسمت بعدی باند معین باشد

و این باعث شود مقدار انتگرال رابطه (۲-۹) بی نهایت گردد . پس بطوریکه از این نتایج مستفاد میشود ، فیلترهای ایده‌آل که در شکل (۲-۴) و (۲-۵) دیدیم از نظر فیزیکی قابل درک نیستند . میتوان از معادله (۲-۹) نتیجه گرفت که رامنه تابع نمیتواند سریع تر از تابع اکسیونانسیل بست صفر میل گدد .

$$|H(\omega)| = K e^{-\alpha|\omega|}$$

پس

جایز است . اما تابع گوس قابل درک نیست زیرا از رابطه (۲-۹) پیروی نمیکند .

$$|H(\omega)| = K e^{-\alpha\omega^2} \quad \text{"تابع گوس"}$$

بطور خلاصه ، قابلیت درک مشخصه مقداری نمیتواند تضعیف خیلی زیاد داشته باشد .

با وجود یکه مشخصه فیلترهای ایده‌آل شکل (۲-۴) و (۲-۵) قابل درک نیست ، اما ممکن است اینگونه مشخصه ها را بحد مطلوبی نزدیک کرد . بنابراین مشخصه فیلتر پائین گذر شکل (۲-۷) برای مقادیر کوچک ω نیاز از نظر فیزیکی قابل درک میباشد . همانطوریکه از این مشخصه پیدا است . این مشخصه از فحک پلی - ونیر تخلف نمیکند .

۲-۲ : رابطه بین پهنهای باند و زمان صعود تغییرات ناگهانی رامنه سیگنال تلویحاً تغییرات تند سیگنال نسبت به زمان را ازعان میدارد . این باعث بوجود آمدن مؤلفه های فرکانس زیاد میگردد . سیگنالهای نسبتاً صاف ، فرکانسها کم در خود نهفته دارند . دیدیم (شکل ۲-۲) اگر سیگنال منفصلی را بر یک فیلتر پائین گذر اثر دهیم ، آن قسم انفصال بصورت سراشیبی و - خمیده ای در میآید . البته تغییرات تدریجی است . اگر یک تابع ثک پلیه ای (t^n) بر فیلتر ایده‌آل پائین گذری اعمال شود ، پاسخ سیستم بجای آنکه بطور ناگهانی صعود و بالا رود ، به تدریج صعود میکند و بالا میرود . زمان صعود ($t_{\text{setim}} = 1/2^n$) سیگنال خروجی بستگی به فرکانس قطع فیلتر دارد . اگنون ثابت میکنیم که زمان صعود بطور معکوس متناسب با فرکانس قطع

میباشد . هر قدر فرکانس قطع کوچکتر باشد ، سیگنال خروجی بیشتر بتانی صعود مینماید
 اینرا میتوان با اعمال تابع تک پله ای $U(t)$ بر فیلتر پائین گذر ملاحظه نمود . اگر
 تابع انتقال فیلتر پائین گذر باشد ، خواهیم داشت (شکل ۲-۴-a)

$$H(\omega) = G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$U(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

و نیز

اگر $\alpha(t)$ پاسخ فیلتر پائین گذر با ، ورودی $U(t)$ باشد ، بنابراین

$$R(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

توجه کنید $H(0) = 1$ است .

$$H(\omega)\delta(\omega) = H(0)\delta(\omega)$$

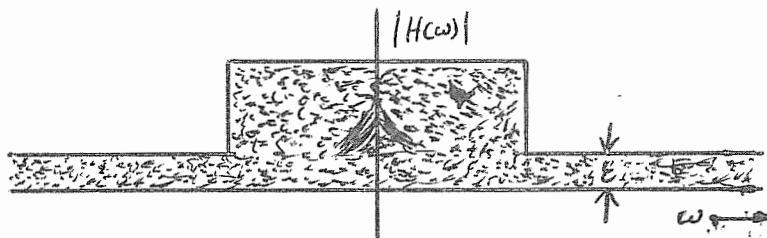
$$R(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

و

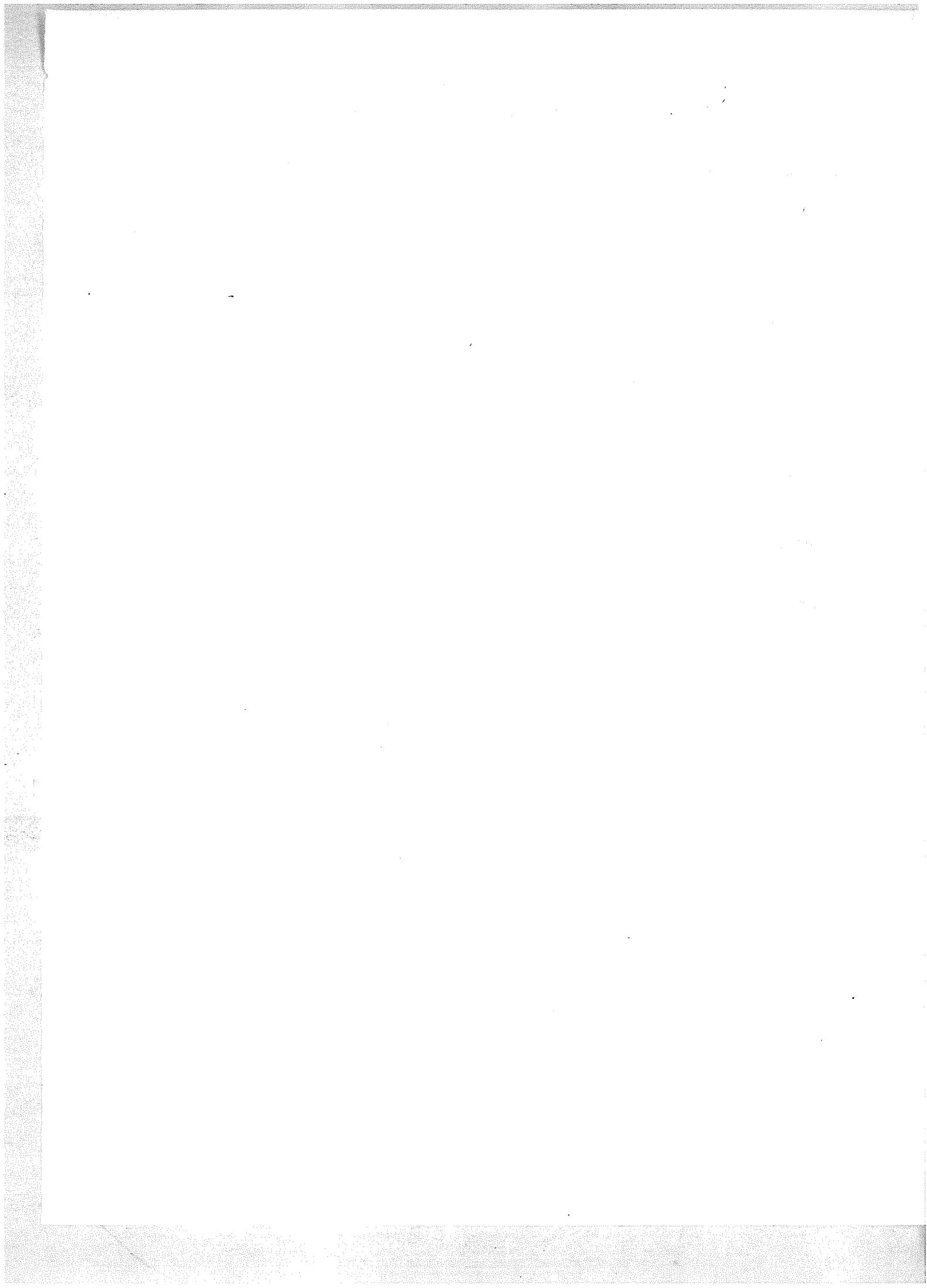
$$r(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0} \right] = \frac{1}{2} + \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{j\omega} G_{2W}(\omega) e^{-j\omega t_0} \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_{2W}(\omega)}{j\omega} e^{j\omega(t-t_0)} \cdot d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega(t-t_0)} \cdot d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} \frac{\cos\omega(t-t_0)}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} \frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega} d\omega$$



شکل (۲-۴)



لازم بذکر است که انتگرال اولی صفر میباشد زیرا مقدار $\frac{\cos \omega(t-t_0)}{\omega}$ تابع فردی از t است . چون انتگرال دومی تابع زوجی از t است از اینرو خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(t-t_0)}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{w(t-t_0)} \text{Si}(x) dx \end{aligned}$$

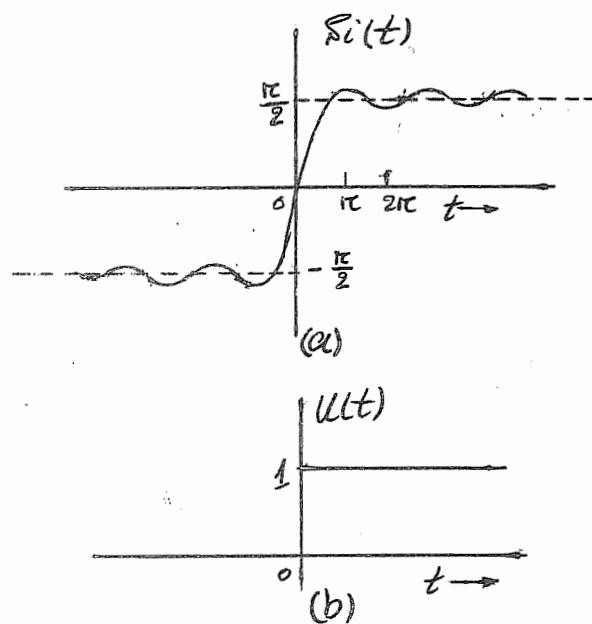
انتگرال دست راست را نیوتون بفرم معمولی پیدا کرد و میایست آنرا نخست بسط دارد و بعد انتگرال آنرا محاسبه کرد . این انتگرال بصورت جدا اولی استاندارد تهیه گشته و بنام سینوس

انتگرال (Sine integral)

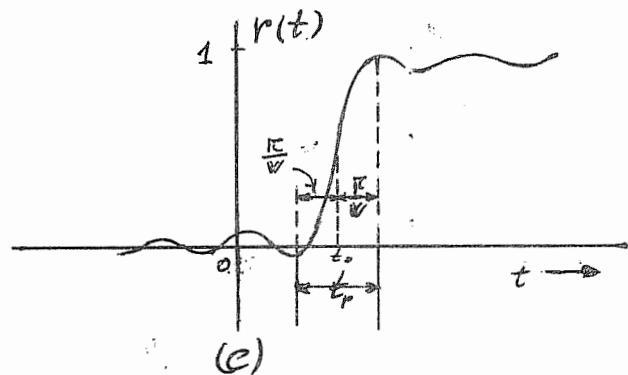
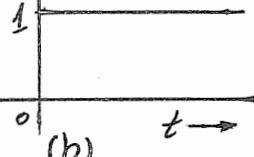
خوانده میشود . سینوسی انتگرال را با اختصار $\text{Si}(x)$ نشان میدهد .

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \text{Si}(x) dx \quad (2-1-a)$$

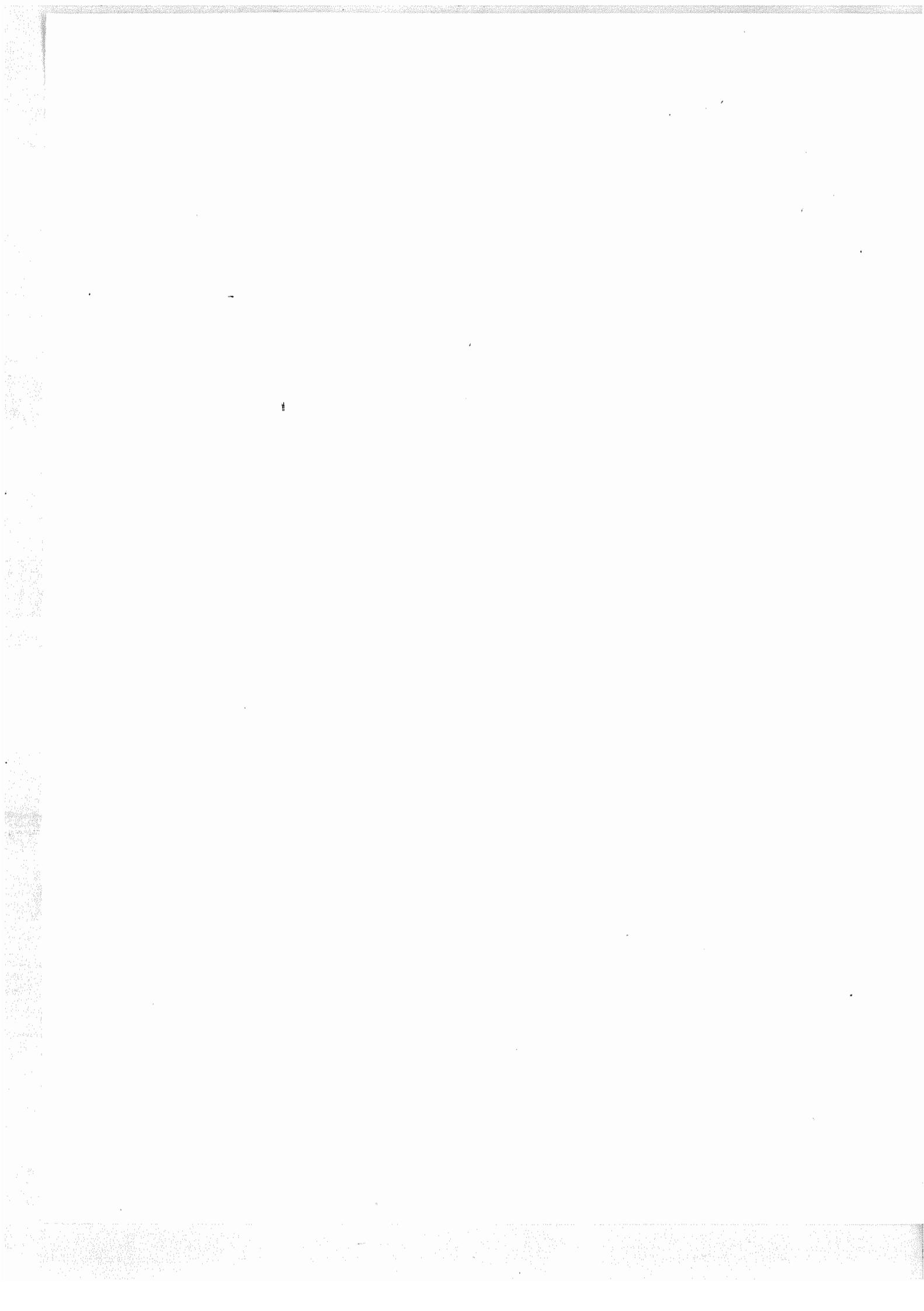
در شکل (۲-۱-a) تابع $\text{Si}(x)$ ترسیم شده است . پاسخ $r(t)$ را میتوان چنین بیان کرد ،



$U(t)$



(شکل ۲-۱)



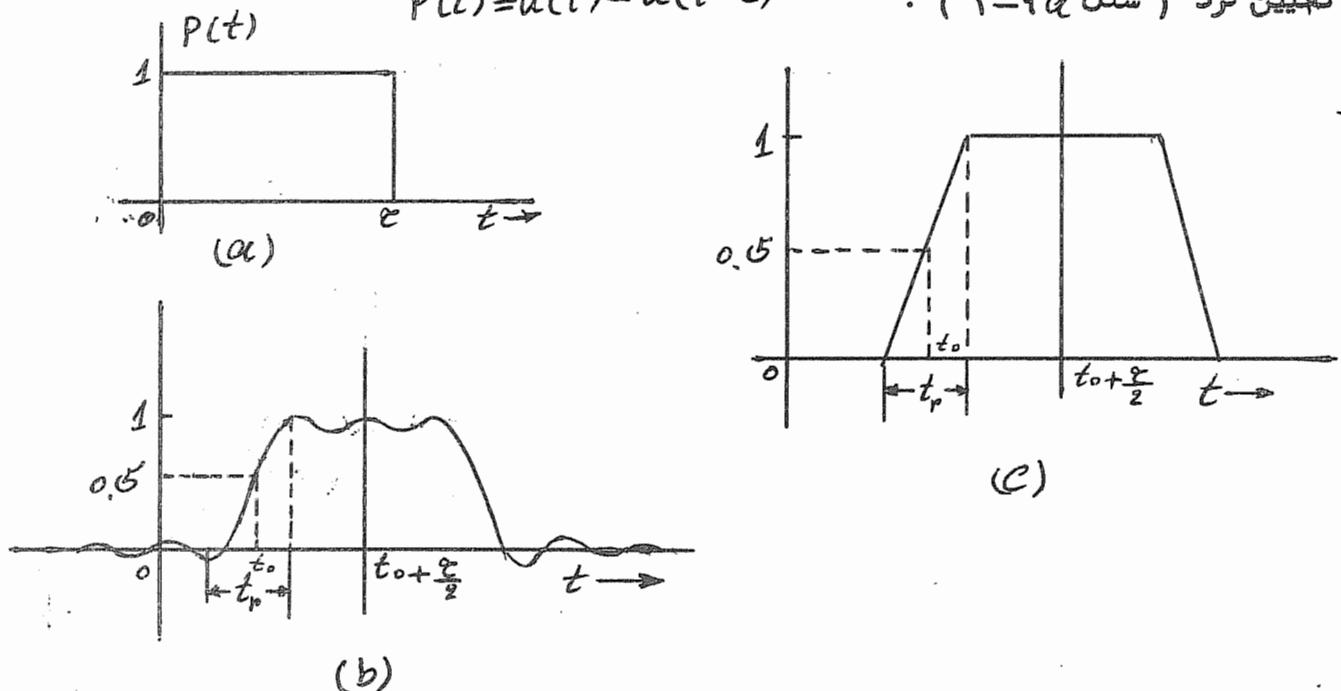
تابع $u(t)$ و پاسخ $\mathcal{U}(t)$ بترتیب در شکل (C و شکل ۲-۸) مصور گشته است. فرکانس قطع فیلتر پائین گذر ω_0 میباشد (شکل ۲-۴).

بطوریکه از شکل (۲-۸ C) پیدا است، هر چه فرکانس قطع ω_0 کوچکتر باشد، خروجی $\mathcal{U}(t)$ خیلی آهسته تر بالا میرود. اگر زمان صعود t_{rise} را زمان لازم برای آنکه خروجی از مینیمم به ماکزیمم برسد تعریف کنیم، از شکل (C ۲-۸) واضح است که

$$t_{rise} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{B} \quad (2-11)$$

میباشد. B پهنای باند بر حسب هرتز است. بنابراین زمان صعود مناسب با عکس فرکانس قطع (بر حسب هرتز) خواهد بود.

از این نتیجه میتوان پاسخ یک فیلتر پائین گذر با ورودی پالس مستطیلی $f(t)$ را بسهولت تهیین کرد (شکل ۲-۹).



شکل ۲-۹

پاسخ (t) فیلتر را میتوان یا استفاده از معادله (۶-۱۰) بوسیله اصل جمع پذیری (سوپرپوزیشن) بدست آورد.

$$y_p(t) = \frac{1}{2} \left\{ S_i [w(t-t_0)] - S_i [w(t-t_0-\tau)] \right\}$$

این پاسخ در شکل (۶-۹) نشان داده شده و پاسخ تقریبی این پالس بشکل نویزفیلتر در شکل (۶-۹c) ترسیم شده است. بسادگی میتوان دید که ارسال یک پالس از یک فیلتر پائین گذر باعث گسترش و پخش پالس میگردد.

۲-۲ : طیف تکاف انرژی یک از پارامترهای مفید یک سیگنال مانند $f(t)$ ، انرژی نرمالیزه شده (normalized) آنست. انرژی مالیزه (یا بطور اختصار انرژی) E سیگنال

انرژیست که در اثر عبور جریان $f(t)$ در مقاومت یک اهمی تلف شود. (یا مقدار انرژیست که در اثر عبور جریان $f(t)$ در مقاومت یک اهمی تلف شود) : بنابراین

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \quad (2-12)$$

مفهوم انرژی یک سیگنال وقتی معنی دارد که انتگرال (۶-۱۲) معین و محدود باشد. سیگنال هایی که انرژی E آنها معین و محدود باشد، بنام سیگنالهای انرژی (Energy signals) معروفند. البته برای برخی از سیگنالها، مثلاً سیگنالهای پریودیک، انتگرال (۶-۱۲) نامعین و نامحدود بوده و مفهوم انرژی بی معنی است. در چنین حالتی ما مقدار متوسط زمان انرژی را در نظر میگیریم و بدینه است که آن قدرت متوسط سیگنال خواهد بود، اینچنان سیگنالها را سیگنال-

های قدرت (Power signals) مینامند و بعداً مفصلأً بحث خواهد شد.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad f(t) \text{ باشد}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \quad \text{و انرژی } E \text{ سیگنال } f(t) \text{ خواهد بود:}$$

با تغییراتی در انتگرال فوق خواهیم داشت :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

بدینه است که انتگرال داخلی طرف راست برابر $F(-\omega)$ است، لذا

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega$$

قبلابراز تابع حقیقی $f(t)$ ثابت گردید [به رابطه (۲-۲۸) مراجعه شود] .

$$F(\omega) F(-\omega) = |F(\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} ۲-۱۵a \\ ۲-۱۵b \end{array}$$

این معادله میگوید : انرژی یک سیگنال بوسیله محاسبه سطح زیر منحنی $|F(\omega)|^2$ بدست میآید

(انتگرال نسبت به متغیر فرکانس محاسبه شود)

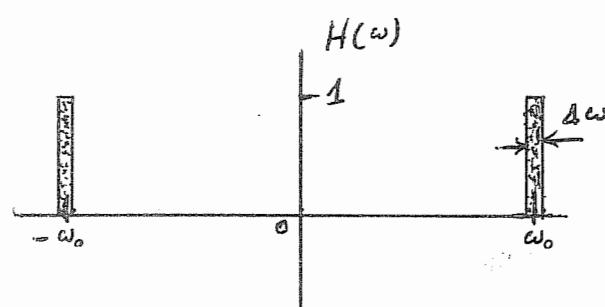
تفسیر تکاشف انرژی

تکاشف انرژی یک سیگنال تفسیر فیزیکی بسیار جالبی دارد ،

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

فرض کنید سیگنال $f(t)$ بر ورودی یک فیلتر میان گذر (Band Pass Filter) که تابع انتقال آن $H(\omega)$ است اثر کند ، (تابع انتقال $H(\omega)$ در شکل ۲-۲ ترسیم شده است) .

این فیلتر تمام فرکانسها را بجز باند باریک $\Delta\omega$ ($\Delta\omega \rightarrow 0$) که در فرکانس ω_0 متمرکز است ، حذف



شکل (۲-۱۰)

مینماید . اگر $R(\omega)$ تبدیل فوریر پاسخ (t) م این فیلتر باشد ، لذا

$$R(\omega) = F(\omega) H(\omega)$$

انرژی E خروجی سیگنال (t) بر طبق معادله (۲-۱۳) خواهد بود

$$E_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) H(\omega)|^2 d\omega$$

چون $H(\omega)$ در تمام طیف بجز باند باریک $\Delta\omega$ که مقدارش (وقتی $\Delta\omega \rightarrow 0$) یک است ، صفر میباشد . از اینرو داریم ،

$$E_0 = 2 \times \frac{1}{2\pi} |F(\omega_0)|^2 \Delta\omega$$

پس انرژی سیگنال خروجی $|F(\omega_0)|^2 \Delta\omega$ است . بطوريکه از شکل (۰۰-۲-۱۰) میتوان دید ، فقط مؤلفه های فرکانسی $f(t)$ که در باند باریک $\Delta\omega$ قرار دارند از فیلتر عبور مینمایند فرکانسهاي باقيمانده تماماً حذف ميشوند . عبارت $|F(\omega)|^2 \Delta\omega$ نطايشگر انرژی فرکانسهاي باند باریک $\Delta\omega$ از سیگنال $f(t)$ هستند و در حوالى فرکانس ω_0 متمرکز میباشند . بنابراین $|F(\omega)|^2 \Delta\omega$ انرژی بر واحد پهناي باندی (بر حسب هرتز) بوده که در حوالى ω_0 متمرکز و شرکت يافته اند .

توجه گنید واحد تکاشف انرژی زول بر هرتزا است .

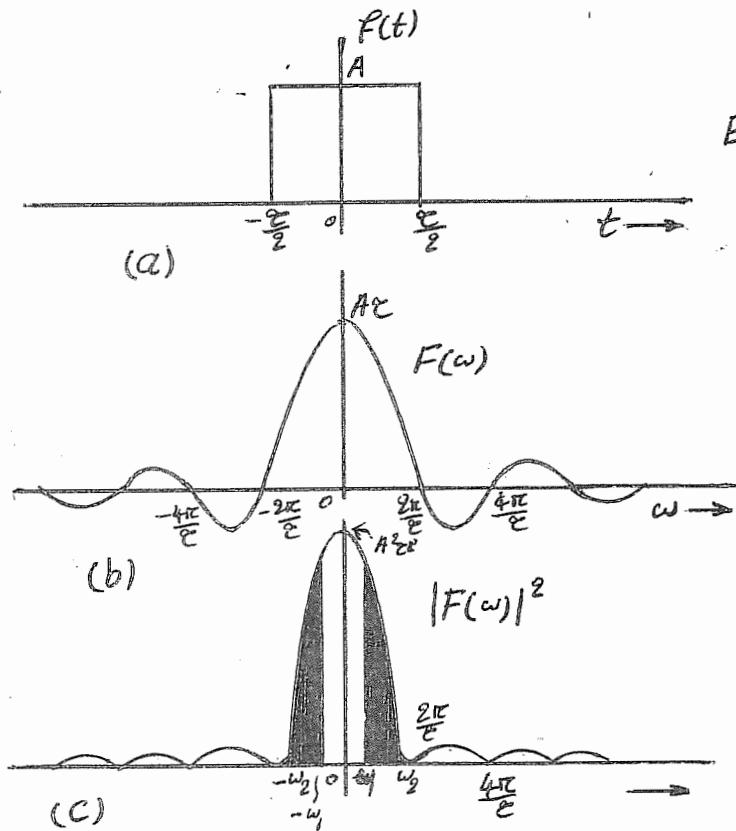
لازم بذکر است ما انرژی فرکانسهاي منفی بمانند فرکانسهاي مثبت داریم . بعبارت بهتر

شرکت فرکانسهاي منفی و مثبت يكسان هستند زيرا $|F(\omega)|^2 = |F(-\omega)|^2$

بنابراین انرژی $|F(\omega)|^2 / |F(-\omega)|^2$ [نصف انرژی] بوسيله مؤلفه های فرکانس منفی و $|F(\omega)|^2 / |F(-\omega)|^2$ بوسيله مؤلفه های فرکانس مثبت شرکت يافته است . باين دليل $|F(\omega)|^2$ بنام طیف تکاشف انرژی خوانده ميشود . اين نشاند هنده انرژی واحد پهناي باند (خواه مثبت یا منفی) است

طیف تکاشف انرژی $\eta_F(\omega) = |F(\omega)|^2$ بدین ترتیب تعریف ميشود : (2-14)

طیف تکاشف انرژی ما را در شرکت و همکاری انرژی مولفه های فرکانسی مختلف پاری میکند . شکل (۲-۱۱) نیز طیف تکاشف انرژی $|F(\omega)|^2 / F(\omega)$ را نشان میدهد



$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad 2-10$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad 2-11$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \delta(\omega) d\omega \quad 2-12$$

از این حقیقت در میابیم ،

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad 2-13$$

$$= 2 \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad 2-14$$

تکاشف انرژی سیگنال ورودی و خروجی اگر $f(t)$ و $R(t)$ تابع ورودی و خروجی یک سیستم

خطی با تابع انتقال $H(\omega)$ باشند ، بنابراین

طیف تکاشف انرژی تابع ورودی $|F(\omega)|^2 / R(\omega)$ خواهد بود . بدینه است که ،

$$|R(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \cdot |F(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \cdot \eta_F(\omega) \quad 2-2$$

بنابراین طیف تکاشف انرژی پاسخ برابر حاصل ضرب طیف تکاشف انرژی ورودی در $|H(\omega)|^2$ است .

۲-۸ : طیف تکاشف قدرت

اخيراً متذکر شدیم ، برخی سیگنالها (مثلاً سیگنالهای پریودیک) دارای انرژی نامعین هستند .

اینگونه سیگالها به سیگالهای قدرت موسومند . پارامتر با معنی برای یک سیگال قدرت مانند $f(t)$ قدرت متوسط P است . قدرت متوسط (یا بطور اختصار قدرت) سیگال $f(t)$ چنین تعریف میشود : مقدار قدرت متوسطی که در اثر اعمال ولتاژ $f(t)$ بر مقاومت یک اهمی تلف شود ، (یا مقدار قدرتی که در اثر عبور جریان $f(t)$ از مقاومت یک اهمی تلف شود) آنرا قدرت متوسط مینامند . پس قدرت متوسط P یک سیگال مانند $f(t)$ خواهد بود :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \quad (2-214)$$

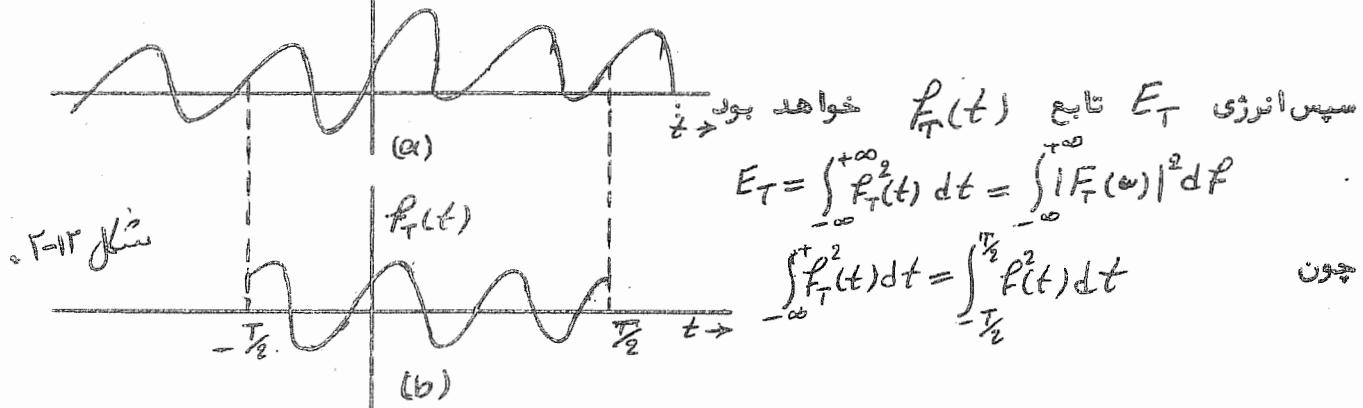
توجه کنید ، قدرت متوسطی که تعریف شد (رابطه ۲-۲۱۴) همان مقدار متوسط مربع $f(t)$ میباشد ($m.s.v$) اگر مقدار متوسط قدرت $f(t)$ را با $\bar{f}(t)^2$ نشان دهیم

$$P = \bar{f}^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \quad (2-215)$$

اکنون میتوانیم همان روشی را که برای محاسبه تکاف انرژی بکار بردیم اداهه دهیم ، حال ببینید تابع جدید $f_T(t)$ را بوسیله محدود نمودن ($f(t)$ خارج از فاصله $\frac{T}{2}$) شکل دهیم . تابع محدود شده (شکل ۲-۲۶) را میتوان بدین گونه بیان نمود .

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{هر جای دیگر} \end{cases}$$

تا زمانی که T معین باشد ، $f_T(t)$ دارای انرژی معین و محدودی میباشد . پس



$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \int \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

هر قدر T افزایش یابد، انرژی $|f_T(t)|^2$ نیز بیشتر می‌شود. پس $|F_T(\omega)|^2$ با T افزایش می‌یابد. وقتی $T \rightarrow \infty$ میل کند، در حد $\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$ بسته مقدار محدودی میل مینماید.

فرض اینکه چنین حدی وجود داشته باشد، $S_f(\omega)$ طیف تکاشف قدرت $f(t)$ را چنین

تعریف می‌کنیم،

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (2-22)$$

($S_f(\omega)$) بنام طیف تکاشف قدرت متوسط یا برای سهولت و اختصار کلام طیف تکاشف قدرت موسوم است. بنابراین $f(t)$ تابع (Power density spectrum)

$$P = \bar{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega \quad (2-23a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega \quad (2-23b)$$

توجه گنید:

$$|F_T(\omega)|^2 = F_T(\omega) \cdot F_T(-\omega)$$

از این معادله و رابطه (2-22) واضح است که تکاشف قدرت، تابع زوجی از ω است. لذا

معادله (2-23a و b) را ممکن است بدین صورت نوشت

$$\bar{f^2(t)} = 2 \int_0^{\infty} S_f(\omega) d\omega = \text{حدت دوره} \quad (2-23c)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega \quad (2-23d)$$

بطوریکه از معادله (2-22) پیداست، طیف تکاشف قدرت یک سیگنال فقط اطلاعاتی درباره طیف مقداری $F(\omega)$ دارد. و اطلاعات فازی از بین میروند. پس نتیجه می‌شود، تمام سیگنالهایی که طیف مقداری آنها یکسان ولی طیف فازی آنها متفاوت است، دارای طیف تکاشف قدرت متساوی

و یکسانی هستند . بنابراین برای سیگنال مفروضی طیف تکاشف واحدی وجود دارد . اما عکس این قضیه صحیح نیست ، یعنی ممکن است تعداد بیشماری سیگنال باشند که دارای طیف تکاشف قدرت یکسانی را شده باشند . گفتم اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد ، داریم

$$f(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

$$f(t) \sin \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{j}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

میتوان این نتایج را برای سیگنالهای قدرت توسعه داد .

سیگنال قدرت $f(t)$ با تکاشف قدرت $\Phi_f(\omega)$ را در نظر گیرید .

$$\Phi_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

حال سیگنال $\varphi(t)$ را بدین گونه تصور نماید :

$$\varphi(t) = f(t) \cos \omega_0 t$$

اگر $\Phi_f(\omega)$ ، طیف تکاشف قدرت $\varphi(t)$ باشد ، طبق تعریف خواهیم داشت ،

$$\Phi_\varphi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\Phi_T(\omega)|^2}{T}$$

$$f_T(t) \cos \omega_0 t = \varphi_T(t) \longleftrightarrow \Phi_T(\omega)$$

که در آن

با استفاده از قضیه مدولا سیون (معادله ۱۱۶) نتیجه میگردد

$$\Phi_T(\omega) = \frac{1}{2} [F_T(\omega + \omega_0) + F_T(\omega - \omega_0)]$$

$$\Phi_\varphi(\omega) = \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega + \omega_0) + F_T(\omega - \omega_0)|^2}{T} = \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega + \omega_0)|^2 + |F_T(\omega - \omega_0)|^2}{T} \quad (۲-۲۴ \alpha)$$

توجه کنید ، حاصل ضرب $F_T(\omega + \omega_0)F_T(\omega - \omega_0)$ بروآنکه طیف آنها روی هم قرار نگرفته باشد . (به شکل ۲-۲ مراجعه شود)

$$\Phi_\varphi(\omega) = \frac{1}{4} [\Phi_f(\omega + \omega_0) + \Phi_f(\omega - \omega_0)] \quad \text{حال معادله (۲-۲) بدین صورت در میابد}$$

$$\varphi(t) = f(t) \sin \omega_0 t$$

$$S_\varphi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [F_T(\omega + \omega_0) - F_T(\omega - \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega + \omega_0)|^2 + |F_T(\omega - \omega_0)|^2}{T}$$

$$= \frac{1}{4} [\delta_F(\omega + \omega_0) + \delta_F(\omega - \omega_0)]$$

۲-۲۴c

بطوریکه مشاهده میکنید $f(t) \sin \omega_0 t$ و $f(t) \cos \omega_0 t$ دارای طیف قدرت یکسانی هستند. در شکل (۲-۱۳) طیف تکاشف قدرت $\varphi(t)$ و $f(t)$ نشان داره شده است. معادلات (۲-۲۴b) و (۲-۲۴c) نطايشگر بسط و گسترش قضيه مد ولا سيون (رابطه ۱۶-۱) برای سیگالهای قدرت میباشد.

تمرین (۲-۱)

قدرت مد ولا سيون را از یک سیگال

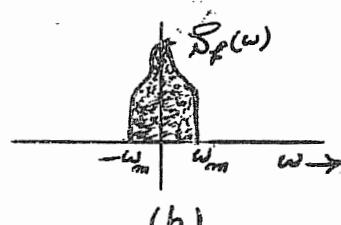
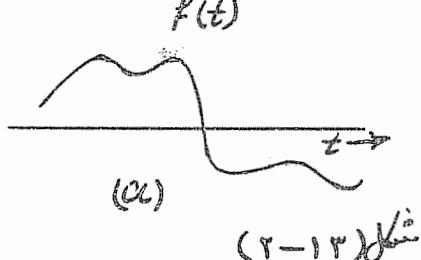
قدرت (مقدار متوسط مربع) سیگال مودوله شده $\varphi(t) = f(t) \cos \omega_0 t$ را پیدا کنید. یک سیگال قدرت با مقدار متوسط مربع $\overline{f^2(t)}$ است.

(mean Square Value)

حل: قدرت سیگال $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega) d\omega$ برابر سطح زیر منحنی تکاشف قدرتش میباشد. یعنی:

$$\overline{\varphi^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega) d\omega$$

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_F(\omega) d\omega$$



(۲-۱۳) شکل

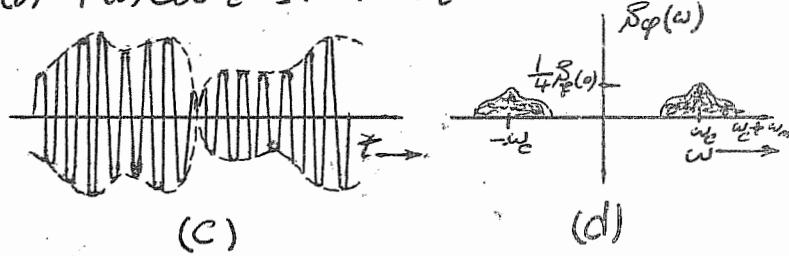
سطح زیر منحنی $\delta\varphi(\omega)$ برابر $2\pi \overline{f^2(t)}$ میباشد (شکل ۲-۱۳). اما بطوریکه از -

معادله (۲-۲۴۶) مستفاد میشود، سطح زیر منحنی $\delta\varphi(\omega)$ نصف سطح زیر منحنی $\delta\varphi(\omega)$ است.

اینرا نیز میتوان از شکل (۲-۱۳) درک نمود. بنابراین:

$$\overline{\varphi^2(t)} = \frac{1}{2} \overline{f^2(t)} \quad (2-25a)$$

$$\varphi(t) = f(t) \cos \omega t \pm f(t) \sin \omega t$$



شکل (۲-۱۳)

لذا مقدار متوسط مربع سینگال مدوله شده $f(t) \cos \omega t$ نصف مقدار متوسط مربع سینگال مدوله شیونده $f(t)$ است:

$$\left[\overline{f(t) \cos \omega t} \right]^2 = \frac{1}{2} \overline{f^2(t)} \quad (2-25b)$$

همین طور خوانندگان میتوانند بسازگی ثابت کنند؟

$$\left[\overline{f(t) \sin \omega t} \right]^2 = \frac{1}{2} \overline{f^2(t)}$$

برای بدست آوردن این نتایج، فرض میکنیم $\omega_m < \omega < \omega_M$ باشد. اگر $\omega_m < \omega < \omega_M$ باشد،

(۲-۱۳c) قسمت از آنها رویهم قرار میگیرد. و معادله (۲-۲۵c) پسچیده و بفرنج همگردد. بنابراین معادله (۲-۲۵) وقوع حاصل میشود که $\omega_m < \omega < \omega_M$ باشد. ω_m حد اکثر فرکانس $f(t)$ است.

مقدار متوسط مربع یک سینگال با باند محدود بر حسب مقدار پر نمونه هایش

تغییر ۲-۲

قدرت (مقدار متوسط مربع) یک سینگال با باند محدود را بر حسب نمونه هایش تعیین کنید.

سینگال $f(t)$ که به ω_m را دیان رثایه محدود میباشد، میتوان آنرا بر حسب نمونه -

هایشن شان را در . (معادله ۱-۱۴)

$$f(t) = \sum_k f_k \operatorname{Sa}[\omega_m(t - kT)] \quad (2-26)$$

که در آن f_k نمونه کام است، T فاصله نمونه برداری میباشد.

$$T = \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m} \quad (2-27)$$

مقدار متوسط مربع $f(t)$ خواهد بود :

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} f^2(t) dt$$

با جاگذاری (۲-۲۶) در معادله فوق بدست میآید :

$$\overline{f^2(t)} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} \left\{ \sum_k f_k \operatorname{Sa}[\omega_m(t - kT)] \right\}^2 dt \quad (2-28)$$

میتوان متعامد بودن توابع نمونه برداری را ثابت نمود ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}[\omega_m(t - nT)] \operatorname{Sa}[\omega_m(t - mT)] dt = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_m} & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (2-29)$$

بنابراین معادله (۲-۲۸) بدین صورت در میآید

$$\overline{f^2(t)} = \sum_k \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} f_k^2 \operatorname{Sa}^2[\omega_m(t - kT)] dt$$

$$= \sum_k \frac{f_k^2}{\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} \operatorname{Sa}^2[\omega_m(t - kT)] dt$$

با بکار بردن نتیجه معادله (۲-۲۹) در معادله فوق خواهیم داشت

$$\overline{f^2(t)} = \sum_k \frac{\pi}{\omega_m \epsilon} f_k^2 = \frac{1}{2f_m \epsilon} \sum_k f_k^2 \quad (2-30)$$

توجه کنید ، هر فاصله ایست که عمل میانگین نمونه انجام میشود . چون سرعت نمونه برداری

$2f_m$ نمونه در ثانیه است ، $2f_m \epsilon$ تعداد کلی نمونه ها در فاصله زمانی ϵ میباشد.

طرف دست راست معادله (۲-۳۰) مقدار متوسط مربع نمونه ها (مقدار متوسط مربع دامنه

نمونه ها) است . با نگاهی به معادله (۲-۳۰) پیدا است که مقدار متوسط مربع یک سیگنال با

باند محدود هر برابر مقدار متوسط مربع نمونه هایشن میباشد . این نتیجه را میتوان بدین فرم بیان کرد :

$$\overline{f^2(t)} = \overline{f_R^2} \quad (2-31)$$

طیف تکاشف قدرت یک سیگنال پریودیک

سیگنال پریودیک $f(t)$ را همراه با سری فوریه میبینیم اش در نظر گیرید

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

تبدیل فوریه $F(\omega)$ بر طبق معادله (۱-۱) خواهد بود :

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

تابع مختصر و محدود شده $f_T(t)$ را میتوان از ضرب $f(t)$ در تابع گیت (gate)

بدست آورد .

$$f_T(t) = G_T(t) f(t)$$

با استفاده از قضیه کانولشن

$$F_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} T \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) * F(\omega)$$

$$= T \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) * \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \text{Sa}\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right]$$

بنابرین

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right] \quad (2-22)$$

وقت $\omega \rightarrow \infty$ میل کند، تابع $\text{Sa}\left\{\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right\}$ شناخته شود. $\omega = n\omega_0$ میشود .

معادله (۲-۱۶) مراجعت شود . با بکار بردن رابطه (۱-۱۶) در معادله (۲-۲۲) خواهیم

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \quad (2-23)$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a \cos(\omega_0 t + \theta) \\
 &= \frac{a}{2} \left[e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right] \\
 &= \left(\frac{a}{2} e^{j\theta} \right) e^{j\omega_0 t} + \left(\frac{a}{2} e^{-j\theta} \right) e^{-j\omega_0 t}
 \end{aligned}
 \quad \text{اگر } f(t) \text{ برابر}$$

$$\begin{aligned}
 S_f(\omega) &= 2\pi \left[\frac{a^2}{4} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{a^2}{4} \delta(\omega + \omega_0) \right] \quad (2-23) \\
 &= \frac{\pi a^2}{2} \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right]
 \end{aligned}
 \quad 2-34$$

بنابراین طیف شکاف قدرت یک سینکال سینوزوئید ال مانند $a \cos(\omega_0 t + \theta)$ با دو ایمپالس هر یک بیوت $\frac{\pi a^2}{2}$ واقع در $\omega_0 \pm$ بدست می‌آید. همانطوریکه ملاحظه می‌نمایید، طیف تکاف قدرت بستگی به θ ندارد و مستقل از آنست.

چون قدرت یک سینکال همان مقدار متوسط مربع آنست، لذا قدرت P این سینکال خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a \cos(\omega_0 t + \theta) \\
 P = \overline{f^2(t)} &= \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}
 \quad (2-35)$$

پس نتیجه می‌شود، مقدار متوسط مربع هر سینکال سینوزوئید ال با رامه a برابر $\frac{a^2}{2}$ می‌باشد.

تعريف (2-3) قدرت سینکال $A + f(t)$ را پیدا کنید. A مقدار یک ثابت و $f(t)$ یک

سينکال قدرت با مقدار متوسط صفر می‌باشد.

طبق تعریف قدرت P سینکال $A + f(t)$ خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [A + f(t)] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2Af(t) dt \right] \\
 &= A^2 + \bar{f}^2(t) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2A}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt
 \end{aligned}$$

چون مقدار متوسط سیگنال $\bar{f}(t)$ صفر میباشد، لذا انتگرال سوم دست راست صفر است.

پس

$$P = \overline{[A + f(t)]^2} = A^2 + \bar{f}^2(t) \quad (2-36)$$

تکاف قدرت سیگنال ورودی و خروجی یک سیستم

فرض کنید سیگنال قدرت $f(t)$ بر ورودی یک سیستم خطی با تابع انتقال $H(\omega)$

اثر کند، و $r(t)$ پاسخ سیستم باشد. ما این عمل را برای اختصار بدین صورت نشان می‌کنیم:

مید هیم :

$$f(t) \longrightarrow r(t)$$

سیگنالهای $f_T(t)$ و $r_T(t)$ بترتیب نمایشگر مختصر و کوتاه شده سیگنالهای $f(t)$ و $r(t)$ در $\frac{1}{2}|t|$ میباشد.

حال بیانید سیگنال $f_T(t)$ را بر ورودی سیستم اثر دهیم. این بدین معنی است که فقط آن قسمت از سیگنال $f(t)$ که در فاصله $\frac{1}{2}|t|$ است بر سیستم اثر مینماید، و خارج از این محدوده صفر میباشد. بطور کلی پاسخ سیستم $r_T(t)$ خواهد بود و البته چون

ورودی در $\frac{1}{2} < t$ صفر است، پاسخ در $\frac{1}{2} < t$ میباشد نسبت به زمان محو و میرا شود. وقتی $\omega \rightarrow \infty$ میل مینماید، پاسخ $f_T(t)$ را میتوان بدون هیچگونه خطایی در نظر گرفت پس:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) \rightarrow f^*(t)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\omega) = H(\omega) F_T(\omega)$$

طبق تعریف، $R_p(\omega)$ طیف تکاشف قدرت سیگنال $r^*(t)$ خواهد شد:

$$\begin{aligned} R_p(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |R_T(\omega)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |H(\omega) F_T(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \end{aligned}$$

$$= |H(\omega)|^2 S_p(\omega) \quad (2-37)$$

بدیهی است که تکاشف قدرت سیگنال خروجی حاصل ضرب $|H(\omega)|^2$ در تکاشف قدرت سیگنال ورودی است.

مقدار متوسط مربع سیگنال $\frac{1}{2\pi}$ برابر سطح زیر منحنی طیف تکاشف قدرت سیگنال است. لذا مقدار متوسط مربع پاسخ $r^*(t)$ خواهد شد:

$$\overline{r^*(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_p(\omega) d\omega$$

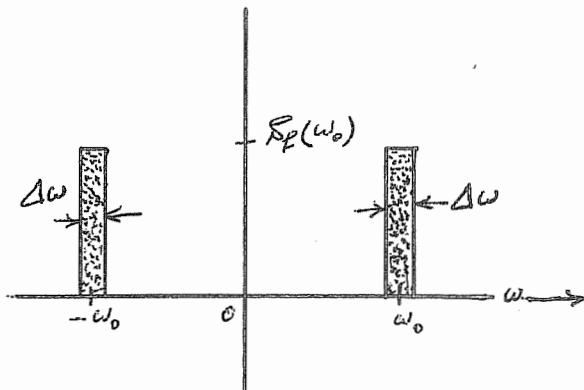
شوجه باشید که $\overline{r^*(t)^2}$ مقدار متوسط مربع $r^*(t)$ طبق تعریف مربع مقدار متوسط قدرت سیگنال $(\overline{r^*(t)})^2$ است.

تفسیر طیف تکاشف قدرت

تفسیر فیزیکی طیف تکاشف قدرت شبیه به تکاشف انرژی است. فرض کنید سیگنال قدرت -

بر ورودی یک فیلتر میان گذر بتابع انتقال $(\omega) H$ طبق شکل (۲-۱۰) اثر کند. این فیلتر تمام فرکانسها بجز باند باریک $\Delta\omega$ ($\omega \rightarrow 0$) متمرکز در ω_0 را حذف مینماید. طیف تکاف قدرت سیگنال خروجی در باند باریک $\Delta\omega$ برابر $\delta_P(\omega_0)$ میباشد.

(شکل ۲-۱۴)



شکل ۲-۱۴

بر طبق معادله (۲-۲۳)، قدرت سیگنال خروجی برابر است با

$$P_o = 2\delta_P(\omega_0)\Delta f \quad (2-38)$$

حال میتوان شرکت قدرت مولفه های فرکانسی ثابع $f(t)$ که در باند Δf در حوالی ω_0 قرار دارند بخوبی دید. بطور معمول، ما فرکانسهای ثابت و منفی داریم. بنابراین هم برای فرکانسهای ثابت است و هم برای فرکانسهای منفی. لذا $(\omega) \delta_P$ قدرت بر واحد پهنهای باند (بر حسب هرتز) میباشد. واحد طیف تکاف قدرت وات بر هرتز است.

تعریف (۲-۴)

سیگنال قدرت $f(t)$ دارای قدرت $(\omega) \delta_P$ میباشد. طیف تکاف قدرت سیگنال $\frac{df}{dt}$ را پیدا کنید. اگر سیگنال $f(t)$ از یک مشتق گیر (Differentiator) ایده آل عبوردارد شود، سیگنال خروجی $\frac{df}{dt}$ خواهد بود. تابع انتقال مشتق گیر $S(j\omega)$ است. این از خاصیت مشتق گیری زمان (رابطه ۱-۱۹) نتیجه میشود که میگوید اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

باشد داریم

$$\frac{df}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

پس برای یک مشتق گیر ایده آل داریم :

$$|H(\omega)|^2 = |j\omega|^2 = \omega^2$$

و $\delta_f(\omega)$ طیف تکاشف قدرت $\frac{df}{dt}$ خواهد بود

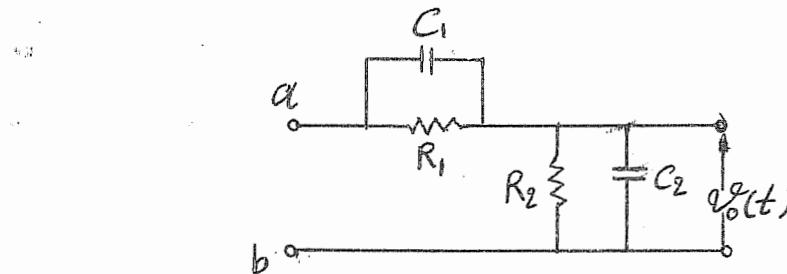
$$F_f(\omega) = \omega^2 \delta_f(\omega)$$

(۲-۳۹)

مسائل

(۱) فیلتری پائین گذر را ایده آل مانند شکل (۲-۴۲) در نظر گیرید . ثابت کنید پاسخ این فیلتر برای سیگنالهای $S(t) \frac{\pi}{W}$ و $Sa(\omega t) \frac{\pi}{W}$ یکی است . درباره این نتیجه نظر خود را ارائه دهید .

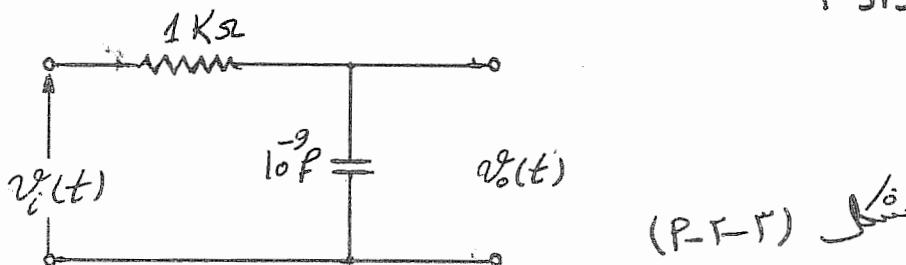
(۲) در مداری برای تضعیف سیگنالها ، مقاومت های R_1 و R_2 (مطابق شکل ۲



شکل (۲-۲)

بکار رفته است . مقاومت های R_1 و R_2 بترتیب ظرفیت های C_1 و C_2 درد و سر خود وانه سرور میسازند . چه رابطه ای بین R ها و C ها برقرار باشد تا تضعیف بدون اعوجاج راشته باشیم ؟

۲) تابع انتقال (نسبت ولتاژ به ولتاژ ورودی) مدار RC شکل (پ-۲-۳) را پیدا کنید ، مشخصه فازی و مقداری تابع انتقال مذکور را رسم نمایید . چه نوع سیگنالی با کیفیت نسبتاً خوب میتوان از این فیلتر عبور را داشت ؟



شکل موج خروجی چه مقدار تأخیر (delay) خواهد داشت ؟

۳) بهره تقویت گننده ای [تابع انتقال : $H(\omega)$] برابر

$$H(\omega) = \frac{K}{j\omega + \omega_0}$$

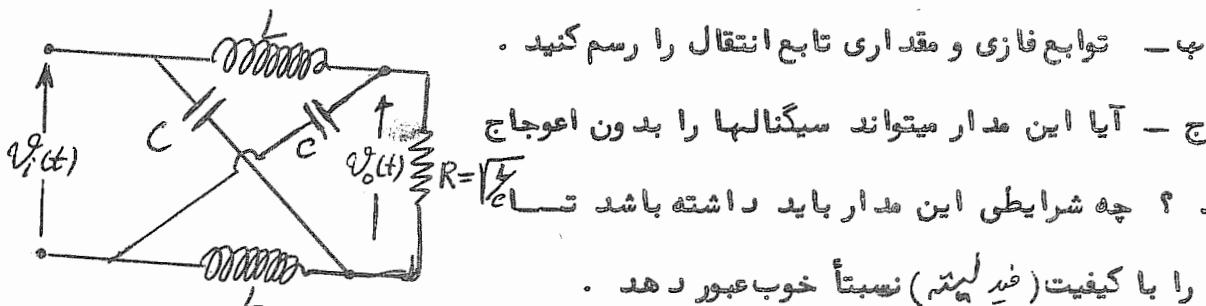
میباشد .

الف الف - مشخصه فازی و مقداری تقویت گننده را رسم نمایید .

ب - چه نوع سیگنالی با وفاداری $Fidelity$ نسبتاً خوب میتوان با این تقویت گننده — تقویت کرد ؟ بچه دلیل ؟ زمان تأخیر اینچنین سیگنالی چقدر است ؟

۴) تابع انتقال ڈاری که در شکل (پ-۲-۵) نشان داده شده است ، پیدا کنید .

الف - نسبت $v_o(t)$ بر $v_i(t)$ این مدار را بدست آورید .



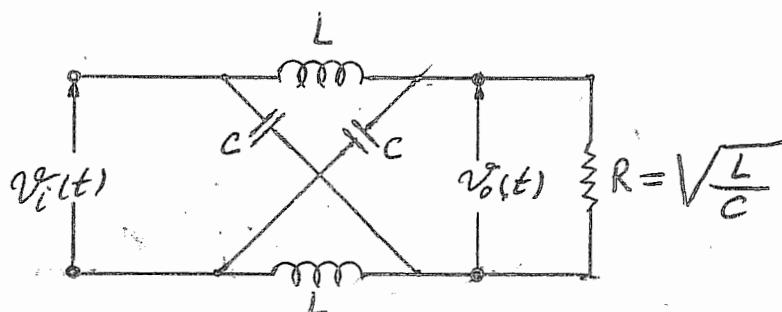
د - امپدانس ورودی این مدار را پیدا کنید .

ه - اگر تعدادی از این مدارها را بطور آبشاری (پشت سر هم) بیک یگر وصل

کنیم ، آیا میتوان آنرا بعنوان یک خط تأخیر $\frac{delay}{line}$ دهنده بکار برد . اینچنین مداری چه

شرایطی باید داشته باشد تا سیگنالها را با تأخیر نسبتاً خوبی عبور دهد . اگر n عدد از

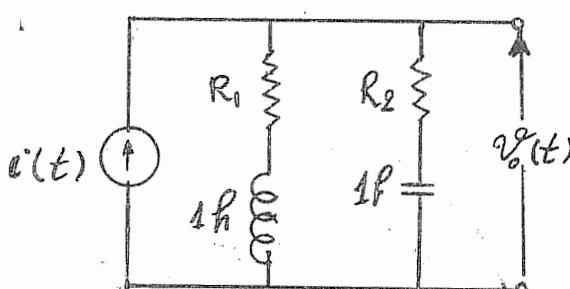
این مدارها را بصورت آبشاری وصل کنیم ، چه تأخیری حاصل میگردد .



شکل (P-2-5)

۶) تابع انتقال [نسبت $\frac{V_o(t)}{i(t)}$] مدار شکل (P-2-6) را پیدا

کنید . اگر بخواهیم این مدار سیگنالها را بدون اعوجاج عبور دهد ، مقدار اجزاء مدار را محاسبه کنید . آیا تأخیری در ارسال سیگنالها بوجود میآید ؟



شکل (P-2-6)

۷- تابع انتقال یک فیلتر میان گذر ایده آل چنین است :

$$H(\omega) = K \left[G_{\text{v}}(\omega - \omega_0) + G_{\text{v}}(\omega + \omega_0) \right] e^{-j\omega t}$$

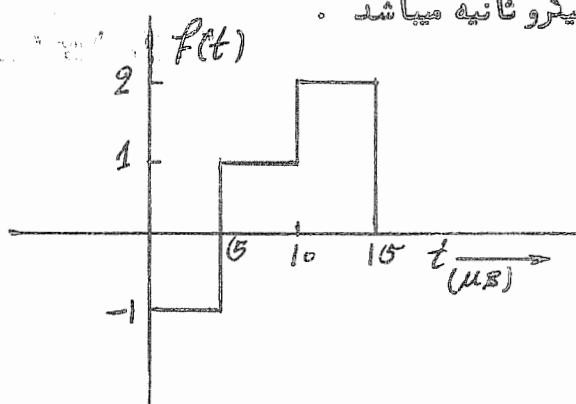
الف - تابع مقداری و فازی تابع انتقال فوق را رسم کنید .

ب - پاسخ ضریب ای آنرا محاسبه کنید .

ج - این پاسخ را رسم کرده و بگوئید آیا سیستم از نظر فیزیکی قابل درک است .

۸- پاسخ مسئله ۷ را وقتی ورودی سیگنال $C_0 j\omega_0 t H(t)$ باشد پیدا کنید . (بفرض اینکه با باند باریک و $\frac{1}{2j\omega_0} \ll \frac{1}{\omega - \omega_0}$ و $\frac{1}{2j\omega_0} \ll \frac{1}{\omega + \omega_0}$) باشد .

۹- پاسخ یک فیلتر ایده آل پائین گذر (شکل ۲-۴-۲) را برای سیگنال $f(t)$ که در شکل (P-۲-۹) نشان داده شده است پیدا کنید . فرکانس قطع فیلتر 10 KHZ و زمان تأخیر t_0 یک میکرو ثانیه میباشد .



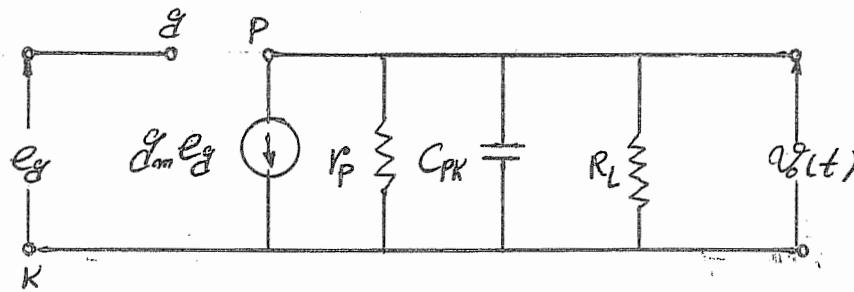
شکل: (P-۲-۹)

۱- پاسخ تک ضریب ای و تک پله ای یک فیلتر بالا گذر با تابع انتقال :

$$H(\omega) = [1 + G_{\text{v}}(\omega)] e^{-j\omega t_0}$$

را پیدا کنید .

۱۱- مدار معادل یک لامپ تقویت کننده رادیوئی در شکل (P-۲-۱۱) نشان داده شده است .



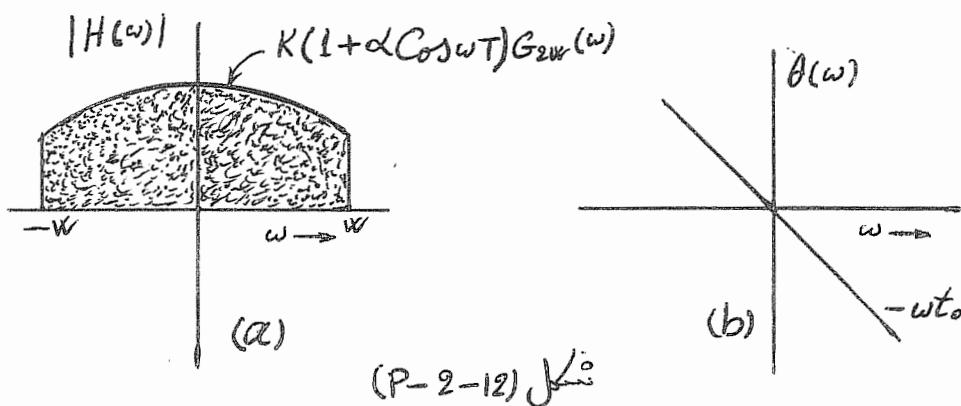
شکل (پ - ۲ - ۱۱)

- الف - تابع انتقال $H(\omega)$ ، یعنی نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی را پیدا کرده، و پهنهای باند و ببره آنرا تعیین کنید.
- ب - اگر در دو سر $\frac{g}{K}$ ولتاژ واحدی اعمال شود، ولتاژ خروجی $V_o(t)$ را پیدا کرده و آنرا رسم کنید.
- ج - اگر زمان صعود، زمانی تعریف شود که پاسخ از ۰ درصد به ۹۰ درصد مقدارش برسد. نشان دهید که حاصل ضرب پهنهای باند (بر حسب رادیان بر ثانیه) زمان صعود مقدار ثابت $2/2$ بوده و مستقل از پارامترهای لامپ میباشد.
- د - ثابت کنید حاصل ضرب ببره $[H(\omega)]_{dc}$ و پهنهای باند (قسمت الف) برابر $\frac{g_m}{C_{PK}}$ است.
- ۱۲ - فرض کنید سیگنال $f(t)$ دارای باند محدودی است. یعنی تابع تکائیف طیف $F(\omega)$ آن بیش از فرکانس ω فرکانس دیگری ندارد. عبارت بهتر، برای $F(\omega) = 0, |\omega| > \omega_0$ است. اینچنین سیگنال را میتوان بدون اعوجاج با یک تقویت کننده که تابع انتقال $H(\omega)$ آن-درازی مشخصه فیلتر پائین گذر است تقویت کرد.

$$H(\omega) = K G_{2\pi}(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

انحراف مشخصه مقداری یا فازی در معادله فوق باعث اعوجاج میگردد. بفرض آنکه مشخصه فازی این

تقویت گنده ایده‌آل یعنی $\theta(\omega) = -\omega t_0$ باشد، اما مشخصه مقداری در فرکانسی ای زیاد افث کند (مانند شکل P-۲-۱۲) آنرا ممکن است بدین ترتیب بیان کرد:



$$H(\omega) = K(1 + \alpha \cos \omega T) G_{2w}(\omega)$$

اگر بر ورودی سیگنال $f(t)$ با باند محدود w رادیان بر ثانیه اثر گند، خروجی تقویت گنده را پیدا کنید. (راهنمائی - از معادله ۱۸ استفاده شود)

۱۳ - در تقویت گنده مسئله قبل، فرض کنید مشخصه مقداری تقویت گنده ایده‌آل یعنی

$$(P-2-13) H(\omega) = K G_{2w}(\omega)$$

$$\theta(\omega) = -\omega t_0 + \alpha \sin \omega T$$

اگر همان سیگنال $f(t)$ بر ورودی تقویت گنده اثر گند، خروجی آنرا پیدا کنید.

راهنمائی - فرض کنید α , T خیلی کوچک هستند و از بسط تایلور $e^{j\alpha \sin \omega T} \approx 1 + j\alpha \sin \omega T$ بدست می‌آید.

$$e^{j\alpha \sin \omega T} \approx 1 + j\alpha \sin \omega T$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{2} (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})$$

۱۴ - سیگنال $f(t) = 2e^{-t} u(t)$ را از یک فیلتر پائین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع یک رادیان بر ثانیه عبور می‌هیم. طیف تکائف انرژی خروجی فیلتر را پیدا کنید. انرژی سیگنالهای خروجی و ورودی را معلوم نمایید.

۱۵ - ثابت کنید برای انرژی سیگنال $f(t)$ تابع تکاشف انرژی $\varphi_f(\omega)$ تبدیل فوریه تابع

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t-\omega) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\omega) dt\end{aligned}$$

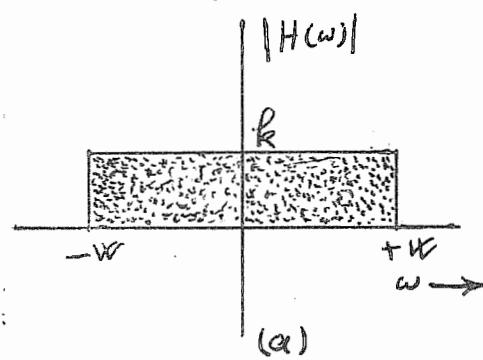
۱۶ - از قضیه کانولشن زمان، قضیه پارسواو (Parseval's theorem)، معادله (۲-۱۲ b) را

بدست آوردید. راهنمائی: اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد،

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

$$f(t) * f(-t) \leftrightarrow |F(\omega)|^2$$

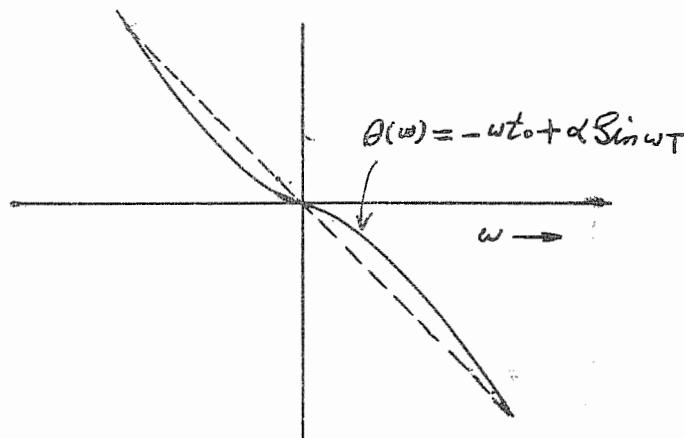
۱۷ - ثابت کنید برای سیگنال قدرت $S_f(\omega)$ ، تکاشف قدرت $f(t)$ تبدیل فوریه



است، گه آن $R_f(\omega)$

$$R_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t-\omega) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t+\omega) dt$$



تابع $f(t)$ time auto correlation معرف است. بنابراین $R_f(\omega)$ تابع

۱۸ - در سیگنالهای قدرت، قدرت (ω) بصورت قدرتی که در یک مقاومت پل اهم تلف شود، تعریف میگردد. معادله (۲-۲۱) قدرت را برای یک سیگنال قدرت حقیق تعریف نمایید. این معادله را برای سیگنال قدرت کمپلکس $f(t)$ مشخص کنید.

۱۹ - برای سیگنالهای زیر مقدار متوسط مربع (قدرت) را پیدا کرده طیف تکاشف قدرت آنها را رسم کنید.

a) $A \cos(2000\pi t) + B \sin(2000\pi t)$

b) $[A + \sin 2000\pi t] \cos 2000\pi t$

c) $A \cos 2000\pi t \cos 2000\pi t$

d) $A \sin 2000\pi t \cos 2000\pi t$

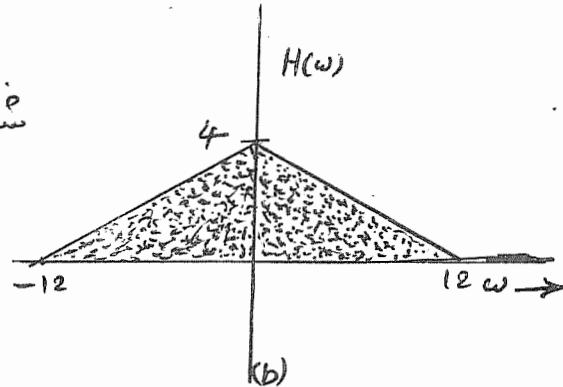
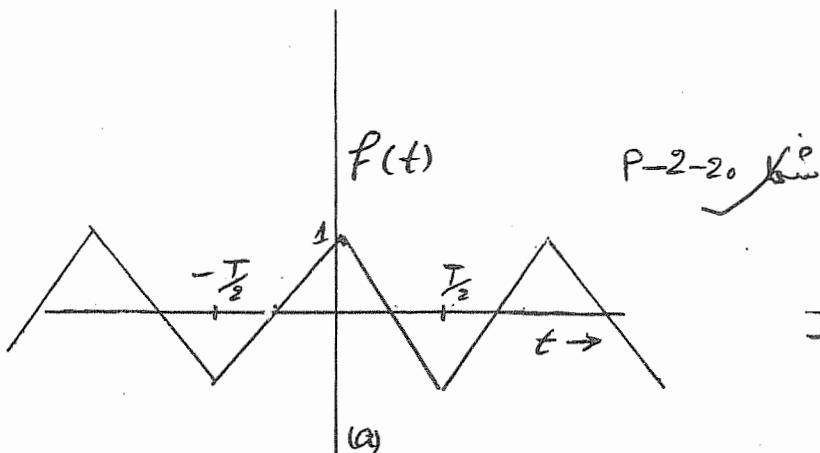
e) $A \sin 2000\pi t \cos 2000\pi t$

f) $A \sin^2 2000\pi t \cos 2000\pi t$

۲۰ - سیگنال پریودیک $f(t)$ با تابع انتقال عبور داده میشود، برای مقادیر مختلف ω ($T = \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$) مطابق شکل (۲-۲-۲۰) از سیستم با

$$(T = \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) \quad H(\omega)$$

طیف تکاشف قدرت و قدرت (مقدار متوسط مربع) سیگنال خروجی را بدست آورید. قدرت سیگنال ورودی را نیز پیدا کنید.



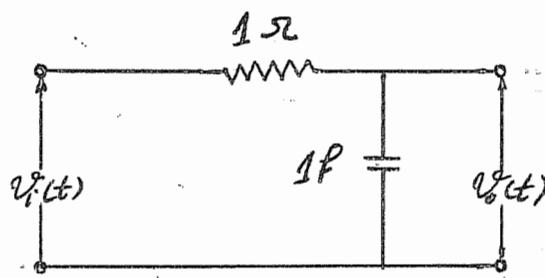
۲) مقدار متوسط مربع ولتاژ $V_o^2(t)$ در شکل (P-۲-۲۱) را پیدا کنید.
اگر ولتاژ دارای طیف تکاف قدرت $S_i(\omega)$ باشد

a) $S_i(\omega) = K$

b) $S_i(\omega) = G_2(\omega)$ ($\omega = 1$) تابع گیت با فرکانس قطع

c) $S_i(\omega) = \pi [\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)]$

در هر حالت، قدرت (مقدار متوسط مربع) سیگنال ورودی را محاسبه کنید.



سیستم‌های ارتباط : مدولا سیون رامن

مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس (F.D.M)

مولتی پلکسینگ تقسیم زمان (T.D.M)

در مهندسی ارتباط انسان علاوه‌نمد است از نقطه‌ای به نقطه دیگر سیگنال‌های مختلف ارسال نماید . ما در پخش رادیو ، تلویزیون ، مخابرات دور تلفنی ، ارتباط از طریق ماهوارها ، سیستم‌های کنترل از دور (Remote control System) ، تله متري (سنجش از دور) وغیره با این مسئله مواجه می‌شویم . در این فصل برخی از سیستم‌های ارتباط را مطالعه و بررسی خواهیم کرد .

سیگنال‌ها از نقطه‌ای به نقطه دیگر از طریق کانال که ممکن است بصورت خط ارتباط (مانند کانال تلفنی) یا فضای آزاد (مانند پخش رادیو ، تلویزیون ، ماهوارهای مخابراتی وغیره) که سیگنال‌ها بدورون آن تشعشع شده اطلاعات ما را حمل مینهایند . اینگونه سیگنال‌ها عموماً در پهنه‌ای باند معین متناسب با پهنه‌ای باند کانال خودش ارسال می‌شوند . البته ارسال یک سیگنال از کانالی مقرر بصره نبوده و افراط آمیز است . زیرا کانال‌ها خیلی کمتر از ظرفیت خود برای ارسال اطلاعات بکار می‌روند . البته نمیتوان بروش مستقیم بیش از یک سیگنال در آن واحد ارسال داشت : چون باعث تداخل سیگنال‌ها گشته و ممکن نیست هر یک از سیگنال‌ها را در گیرنده کشف و آشکار نمود . این بدین معنی است که بروش مستقیم نمیتوان بیش از یک مکالمه روی خط تلفن یا بیش از یک ایستگاه رادیوئی یا تلویزیونی در آن واحد پخش نمود . اگرچه خواهیم دید با بکار بردن تکنیک مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس (Frequency division multiplexing)

و مولتی پلکسینگ تقسیم زمان (time division multiplexing) ممکن است چندین سیگنال را از یک کانال در آن واحد (همزمان) عبور دارد .

۱-۳: مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس و مولتی پلکسینگ تقسیم زمان

بطوریکه قبل از ذکر شدیم ، ارسال یک سیگنال از یک کانال افراد آمیز و وضع پردازی را بوجود می‌آورد . معاذالک اگر طیف فرکانس سیگنالهای مختلف را انتقال (shift) دهیم ، بطوریکه ردیف (range) فرکانس‌های مختلف را بدون هیچگونه رویهم افتادگی اشغال نمایند ، میتوانیم براین اشکال فائق شویم . قبل از نصف اول دیدیم ، ممکن است طیف فرکانس یک سیگنال را بوسیله مدوله نمودن (یعنی ضرب سیگنال در یک سیگنال سینوزوئیدال - انتقال فرکانس) انتقال دارد . بنابراین میتوان چندین سیگنال را در یک زمان بوسیله تکنیک مدولاسیون از یک کانال عبور دارد .

برای ارسال چندین سیگنال ، طیف هر یک را بقسم انتقال (shift) میدهیم که طیف‌شان رویهم قرار نگیرد و در گیرنده بوسیله فیلترهای مخصوص هر یک از سیگنالها را جدا مینماییم . در این صورت طیف‌هایی که بین نحو از یکدیگر جدا نمی‌شوند ، همان سیگنال اولی نبوده بلکه از موقعیت اولیه خود انتقال یافته است . لذا برای بدست آوردن سیگنال نخستین ، باید هر یک از سیگنالها را بجای اولشان عود تدارد .

مدولاسیون خواص دیگری برای سیستمهای درباره دار که میتوان سیگنالها را بدرون فنا تشعشع و ارسال نمود . در شکری امواج الکترومغناطیس (کاهنربائی) ثابت شده است ، وقتی یک سیگنال را میتوان بنحو مطلوبی بدرون فضا کسیل و مشعشع کرد که طول آنتن حداقل یک رهیم طول موج سیگنال باشد . ماکزیمم فرکانس صدای انسان تقریباً $... / ۰.۰$ هرتز و مطابق با مینیمم طول موج تقریباً $... / ۰.۰$ متر میباشد . بنابراین برای صدای انسان ، آنتنی لازم است که

طول آن چندین مایل باشد و این علی نیست . برای تشعشع امواج ، از فرآیند مدولا سیون استفاده کرد و طیف فرکانس سیگنالها را بهر فرکانس بالاتری انتقال میدهیم . در این صورت بسهولت میتوان با امواج الکترومغناطیس آنها را بدرون فضا منتشر ساخت . در عمل ، تمام سیگنالهای تلویزیونی ، رادیوئی مدله شده و طیف فرکانس آنها به رد پیف خیلی بالاتری برد و میشود . پس مدولا سیون نه فقط بما اجازه میدهد تا سیگنالها را بدون تداخل یکدیگر و همزمان ارسال داریم بلکه تشعشع را بنحو موثری امکان پذیر میدارد .

روش انتقال فرکانس که هم اکنون بحث شد ، تنها راه ارسال چندین سیگنال در آن - واحد در یک کانال نمیباشد . قبل از اینکه اول گفتیم ، هر سیگنال با باند محدود (سیگنالی که دارای حد اکثر فرکانس معلوم MHz هرتز است و بیش از این فرکانس ، فرکانس دیگری ندارد) را میتوان بوسیله مقادیرش در فواصل زمانی $\frac{1}{27\text{ms}}$ ثانیه مشخص نمود ، (قضیه نمونه برد اری یکنواخت) . و ثابت شد هر سیگنال را میتوان از اطلاعاتش که در این فاصله نمونه — برد اری شده اند دوباره ساخت : پس برای ارسال هر سیگنال نمونه هایی از سیگنال که در فاصله معین هستند احتیاج است . از اینرو هر کانال در این فواصل زمانی اشغال میگردد و در لحظات بقیه چیزی ارسال نمیشود . ما از این لحظات بیکار نیز استفاده کرد و سیگنال دیگری را ارسال میداریم . بنابراین میتوان نمونه های چندین سیگنال را در یک کانال بسته بندی و پیش هم قرار داد و در گیرنده اینگونه نمونه ها را بوسیله آشکار ساز (دکتور) همزمانی از یکدیگر جدا کرد .

با این حساب میتوانیم چندین سیگنال را همزمان در گانال ارسال داریم . و در گیرنده آنها را منفک از یکدیگر کنیم . همانطوری که ذکر شد ، هر سیگنال را میتوان در فضای زمان یا فرکانس مشخص سازیم و در گیرنده ممکن است هر سیگنالی را خواه در فضای زمان یا فرکانس بالاتر آشکار کنیم . در طریقه انتقال فرکانس ، تمام سیگنالها در فضای زمان مخلوط میشوند لیکن هر

طیف را بینحوی از یک دیگر جدا نمایم که هر سیگنال باند فرکانس مختلفی را اشغال نماید . در گیرنده بوسیله فیلترهای مناسب هر سیگنال از یک دیگر جدا میگردد و سپس طیفشنان به جای اولیه برگشت را دارد میشود . این تکنیک که هر سیگنال در باند فرکانس مخصوص قرار میگیرند ، بنام مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس موسوم است .

در طریقه دیگر ، نمونه های سیگنالهای مختلف بهم بافته و پهلوی هم قرار میگیرند . در - گیرنده بوسیله آشکار ساز همزمان ناسین نمونه های هر سیگنال را میتوان از یک دیگر جدا کرد . در حقیقت با این روش سیگنالهای مختلف را در فضای زمان آشکار میسازیم . لیکن طیف فرکانس تمام سیگنالهای نمونه برداری شده مخلوط و یک ردیف فرکانس را اشغال مینمایند . این روش که هر سیگنال در فواصل زمانی مختلفی جا میگیرند جا میگیرند بنام مولتی پلکس تقسیم زمان موسوم است . در - فصول آینده (۵ و ۶) انواع سیستمهای مختلف ارتباط را با استفاده از تکنیک مولتی پلکسینگ (که هم اکنون ذکر شد) مطالعه خواهیم کرد .

۲-۳ : مدولاسیون دامنه با حذف فرکانس کریر (AM-SC)

این تکنیک اصولاً طیف فرکانس سیگنال را از طریق ضرب یک سیگنال سینوزیوئید ال بند فرکانس مورب نظر انتقال میدهد . بطوريکه از قضیه مدولاسیون میدانیم (معادله ۱-۱۶) ، طیف سیگنال $f(t) \cos \omega_c t$ همان طیف $f(t)$ میباشد که باندازه $\pm \omega_c$ را داریان بر ثانیه انتقال یافته است (شکل ۲-۱۶) ، یعنی اگر $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ پس $f(t) \cos \omega_c t \longleftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)]$ (۳-۱) سیگنال $\cos \omega_c t$ بنا کریر (بمعنی حامل - Carrier) موسوم است . در حقیقت ضرب $f(t)$ در $\cos \omega_c t$ معادل این است که دامنه سیگنال کریر متناسب با $f(t)$ تغییر مینماید . در این حال گفته میشود سیگنال $\cos \omega_c t$ بوسیله سیگنال $f(t)$ مدوله

شده است . $f(t)$ را سیگنال مدوله گننده و سیگنال $\cos \omega_0 t$ را سیگنال مدوله شوند همگویند . این طریقه ارتباط بنام مدولاسیون دارم بآذف کریر (AM-SC) موسوم است . بدان علت بآن حذف کریر نسبت میدهند ، چون سیگنال $\cos \omega_0 t$ سیگنال کریر اضافی با خود ندارد . بنابراین فرکانس کریر آزاد حذف شده است . در دروس آینده مدولاسیون دارم کریر آزاد را مورد مطالعه قرار خواهیم داد . در آن صورت سیگنال مدوله شده بفرم $A \cos \omega_0 t + f(t) \cos \omega_0 t$ است . در اینجا یک سیگنال کریر اضافی نیز به علت نتایجی که بعداً بحث خواهد شد ، ارسال میگردد . چنین سیستمی فقط مدولاسیون را مهندس AM اطلاق میگردد .

مدولاسیون دارم بآذف کریر ، (AM-SC) بطوریکه از معادله (۳-۱) مشاهده میشود ، طیف فرکانس $f(t) \cos \omega_0 t$ را باندازه ω_0 را دیگر بر ثانیه انتقال نمیدهد . برای بدست آوردن سیگنال اولیه $f(t)$ از سیگنال مدوله شده ، لازم است طیف را بجای اولیه اش انتقال نمیدهیم . تحول انتقال طیف بجای اولیه اش را آشکار سازی (ب مدولاسیون یا دیتکسیون) مینامند . طیف شکل موج مدوله شده (شکل ۳-۱) را میتوان بوسیله ضرب سیگنال مدوله شده در سیگنال $\cos \omega_0 t$ بسازگی بجای اش انتقال نمود . چون ضرب دو سیگنال در فضای زمان معادل کانولشن طیف های آنها در فضای فرکانس میباشد بنابراین طیف سیگنال منتجه $f(t) \cos^2 \omega_0 t$ را میتوان از کانولشن شکل (۳-۲) و طیف $\cos \omega_0 t$ [دو ایپالس در $\omega_0 \pm \omega_0$] بدست آورد . پس از انجام کانولشن طیف حاصل مطابق شکل (۳-۴) [برای درک این مطلب به تمرین (۱-۱۲) شکل (۴-۱) رجوع شود] خواهد بود . این نتیجه را میتوان مستقیماً از روی فرمول مشاهده نمود .

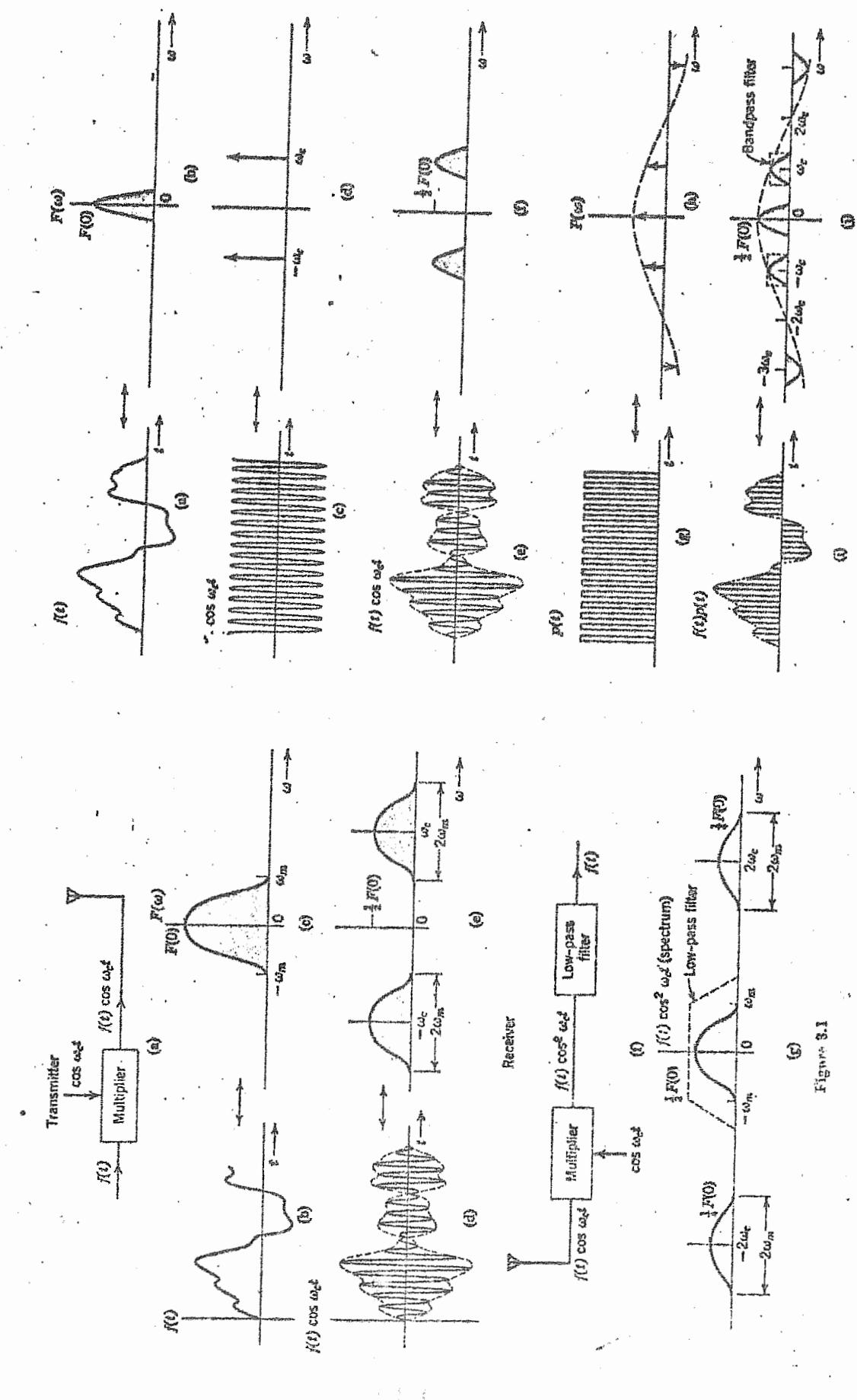
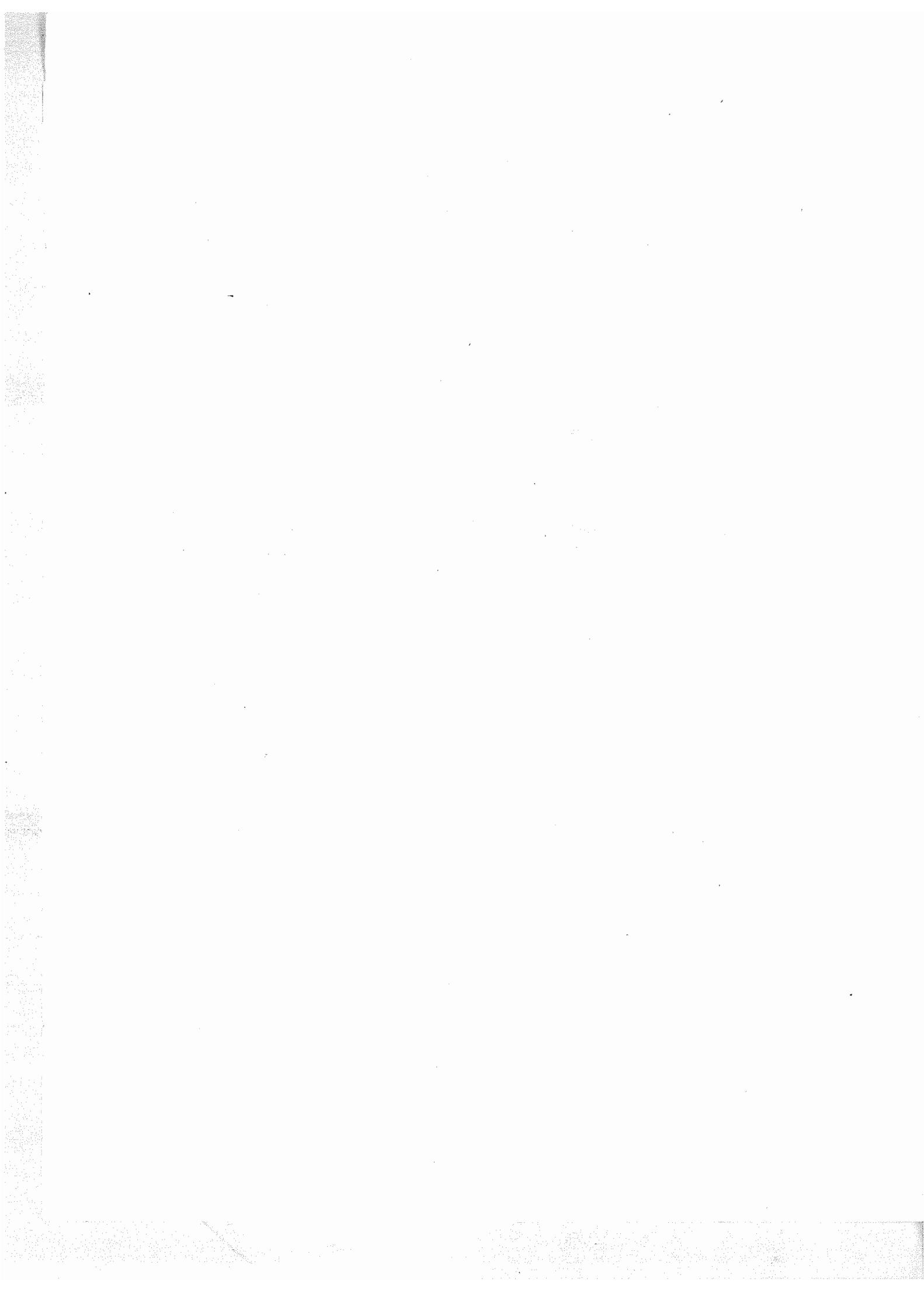


Figure 3.1



①

Figure 3.2



$$f(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} f(t) [1 + \cos 2\omega_c t] = \frac{1}{2} [f(t) + f(t) \cos 2\omega_c t] \quad (2-2)$$

اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد، لذا:

$$f(t) \cos^2 \omega_c t \leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} [F(\omega+2\omega_c) + F(\omega-2\omega_c)] \quad (3-3)$$

از شکل (2-1-2) واضح است که سیگنال $f(t)$ را میتوان با قرار دادن یک فیلتر پائین گذر که فقط $F(\omega)$ را شامل شود و فرکانس‌های دیگر را عبور ندهد، بدست آورد.

فرم مشخصه فیلتر در شکل (2-1-2) بطور نقطه چین نشان داده شده است. سیستمی

که در گیرنده مورد نیاز است تا سیگنال $f(t)$ را از سیگنال مدوله شده $f(t) \cos \omega_c t$ کشف و آشکار کند در شکل (2-1-2) نشان داده شده است. چیز جالب آنست که ضرب

در گیرنده مدوله شده $\pm \omega_c$ میبرد و ضمناً اگر دوباره در گیرنده

آنرا در $\cos \omega_c t$ ضرب کنیم بجای اولش برمیگردد. البته در این تحول طیفهای دیگری نیز در $\pm 2\omega_c$ بدهست می‌آید و چون مطلوب ما نیستند بوسیله فیلتر کنار گذاشته می‌شوند. پس

تحولی که در گیرنده لازم است، درست شبیه تحول فرستنده می‌باشد. لذا این روش آشکار سازی سیگنال اولیه از سیگنال مدوله شده را آشکار سازی همزمان (Synchronous detection) یا آشکار سازی همدوس (Coherent Detection) می‌گویند.

از این بحث نتیجه می‌شود، این سیستم در گیرنده مستلزم ایجاد یک سیگنال کریم محلی است.

فرکانس و فاز کریم محلی بی نهایت بحرانی است. برای مثال فرض کنید فرکانس سیگنال کریم محلی

$f(t) \cos \omega_c t$ با نزدیکی $\Delta\omega$ خطای داشته باشد. یعنی سیگنال دریافت شده در گیرنده و کریم محلی $\cos(\omega_c + \Delta\omega)t$ باشد. حاصل ضرب آنها چنین خواهد شد.

$$f(t) \cos \omega_c t \cdot \cos(\omega_c + \Delta\omega)t = \frac{1}{2} f(t) [\cos(\Delta\omega)t + \cos(2\omega_c + \Delta\omega)t] \quad (3-4)$$

جمله $\cos(\Delta\omega)t$ نمایشگر طیف $f(t) \cos(2\omega_c + \Delta\omega)t$ است که در $(2\omega_c + \Delta\omega)t$ واقع و بوسیله فیلتر پائین گذر حد فیلتر را از فیلتر پائین گذر برای ما باقی می‌ماند. جمله

$f(t) \cos(\omega t)$ است. یعنی بجای اینکه $f(t)$ را شته باشیم، سیگنال $\cos(\omega t)$ عاید می‌شود. بطور کلی اگر $\omega \rightarrow 0$ میل کند، جمله $f(t)$ است که در یک بهره نسبتاً تغیر کوچکی ضرب شده است. این خطای یکنوع لغوح اج ناخواسته بوجود می‌آورد. لذا ما بسیار مشتاق راشتن یک فرکانس گیر مشخص در فرستنده و گیرنده هستیم. فاز نویسان ساز محلی نیز بحران و مشکل دیگری برای ما تولید می‌کند. در بخش (۳-۵) آنرا مفصلأً بحث خواهیم کرد.

برای نیل و اتخاذ کنترول فرکانس و فاز نویسان ساز محلی، ما مستلزم نصب مدارهای گران و پر ارجی در گیرنده هستیم. در اکثر اینگونه سیستمها، همراه با موج مدله شده، مقدار بسیار کم و ناچیزی گیر آزاد (پیلوت کریر) [یعنی حامل پیک] نیز ارسال می‌گردد — در گیرنده پیلوت بوسیله فیلتر مخصوص جدا شده و تقویت می‌گردد. این فرکانس گیر آزاد وضعیف برای تعادل فاز نویسان ساز محلی گه فرکانس بسیار قوی مانند فرکانس گیر فرستنده می‌سازد بکار می‌برد.

تکنیک انتقال فرکانس از قضیه مدولا سیون پیدا است که طیف هر سیگنال را میتوان در فضای ω فرکانس بقدر $\frac{1}{T}$ را در یک بر ثانیه بوسیله ضرب سیگنال در یک سیگنال سینوزوئیدال بفرکانس ω انتقال دارد. این البته تنها راه نیل بمقصود نیست، اگرچه خواهیم دید، طیف هر سیگنال را میتوان بعدها $\frac{1}{T}$ را بوسیله ضرب سیگنال در هر سیگنال پریودیک بفرکانس ω شامل مولفه های فرکانس $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ وغیره است، لذا ضرب سیگنال $f(t)$ در هر سیگنال پریودیک و لخواه بفرکانس ω طیف $f(t)$ را باندازه $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ انتقال میدهد. چون منظور و مطلوب ما آن قسمت از طیف حاصل است که در حوالی ω واقع می‌گردد، از اینرو این قسمت از طیف حاصل را میتوان توسط یک فیلتر میان گذرن که فقط طیف

$f(t)$ متمرکز در حوالی $\omega_0 \pm \omega$ را عبور میدهد، از سایر قسمت‌های طیف حاصل جدا کرد.

بعنوان مثال سینکال $f(t)$ (شکل ۳-۲ α) را با طیف $F(\omega)$ (شکل ۳-۲ b) در نظر گیرید.

ضرب سینکال $f(t)$ در سینکال $\cos \omega_0 t$ ، طیفس را باندازه $\omega_0 \pm \omega$ در نظر گیرید.

انتقال میدهد. (شکل ۳-۲ f). حال سینکال $f(t)$ را بجای ضرب در یک سینوزوئیدا

در یک موج مربعی بفرکانس ω_0 ضرب خواهیم کرد (شکل ۳-۲ g)، طیف سینکال

پریود یک موج مربعی $P(t)$ در شکل (۳-۲ h) نشان داده شده است. این طیف $P(\omega)$

یک رشته ایمپالس واقع در $\omega = 0, \pm \omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$

می‌باشد [بشکل (۱-۴) مراجعه کنید] بدینه است که طیف $f(t)P(t)$ برابر $\frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$ است.

است. نتیجه این کانولشن در شکل (۳-۲ j) بطور ترسیمی مصور گشته است.

بسارگی می‌توان از این شکل ضرب $f(t)$ در $P(t)$ که طیف $f(t)P(t)$ بمقابل $\omega = 0, \pm \omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$

منتقل می‌سازد مشاهده نمود. این نتیجه برای هر تابع پریود یک بفرکانس ω_0 بدون در نظر

گرفتن شکل موج آنها درست است. در حالت خاص موج مربعی، هارمونیک‌های روج یعنی

$\omega_0, \omega_0 \pm 2\omega_0, \omega_0 \pm 4\omega_0, \dots$ صفر بوده، ولی برای یک سینکال پریود یک کلی، این حالت

خاص مطرح نیست. پس نتیجه می‌گیریم، ضرب هر سینکال در یک سینکال پریود یک بفرکانس

و بدون در نظر گرفتن شکل موج آن، طیف سینکال $f(t)$ را در $\omega = 0, \pm \omega_0, \pm 2\omega_0, \dots$ و بدو

متمرکز و منتقل می‌سازد. ضمناً این نتایج را می‌توان از نظر ریاضی بسهولت بدست آورد. فرض

کنید $\varphi(t)$ یک سینکال پریود یک بفرکانس ω_0 هرتز ($\omega_0 = 2\pi f_0$) باشد. تبدیل

فوریه یک سینکال پریود یک کلی در فصل اول معادله (۱-۱۰۲) تعیین شد. بطور کلی داریم:

$$\varphi(t) \longleftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3-5)$$

که در آن Φ_n نمایشگر ضرایب هارمونیک n ام سری فوریه $\varphi(t)$ است. بطوریکه از قضیه

کانولشن استنباط می‌گردد:

$$f(t)\varphi(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n S(\omega - n\omega_c) \quad (3-7)$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_c)$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n F(\omega - n\omega_c) \quad (3-8)$$

از معادله (3-8) پیداست که طیف $f(t)\varphi(t)$ شامل طیف خود $F(\omega)$ بوده ولئن انتقال یافته است. توجه کنید:

به نقاط $\pm \omega_c, \pm 2\omega_c, \pm \dots$ دامنه سیکل های پی در پی $F(\omega)$ در مقادیر $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ وغیره ضرب میشود.

هنگامیکه $\varphi(t)$ موج مربعی باشد، ϕ_n را میتوان از معادله (1-66Q) پیدا کرد.

$$\phi_n = \frac{1}{2} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ است. پس } A = 1 \text{ و } T = 25 \text{ میانیم}$$

$$\operatorname{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{2}{n\pi}\right) & n \neq 0 \\ 1 & n=0 \\ 0 & \text{جین} \end{cases}$$

لذا از معادله (3-5) داریم:

$$T(t) \leftrightarrow 12\delta(\omega) + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \delta(\omega - n\omega_c) \quad (3-8)$$

(1, 3, 5, ..., 25 فرد -)

$$f(t)P(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{12} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} F(\omega - n\omega_c) \quad (3-9)$$

و شکل (3-2) دقتاً معادله (3-9) را نشان میدهد.

در مدل اسیون دامنه، ما دوست داریم فقط طیف فرکانسی که در حوالی $\omega_c \pm \omega_c$ مشوکز است را شویم. از اینرواز یک فیلتر میان گذر که فرکانسی اطراف $\omega_c \pm \omega_c$ را عبور مدهد استفاده کرده بقیه طیف های ناخواسته را حذف مینماییم. یک مدار رزونانس RLC که در

فرکانس $\omega = \omega_0$ بطبیق و هماهنگ (tuned) شده باشد، فرکانس‌های متغیر در حوالی $\omega_0 \pm$ را عبور دارد و بقیه مؤلفه‌های فرکانس را تضعیف و محو مینماید.

بنابراین اگر سیگنال $P(t) f$ را از اینچنین فیلتری عبور دهیم، شکل (نر ۳-۲)، سیگنال خروجی $f(t) \cos \omega t$ خواهد بود شکل (نر ۳-۳). به تحول انتقال فرکانس، تبدیل فرکانس (Frequency conversion) یا اختلاط فرکانس (Frequency mixing) یا نیز اطلاق میگوید. دستگاهی که این وظیفه را انجام میدهد، مبدل فرکانس (Converter) یا مخلوط‌کننده فرکانس (Frequency mixer) مینامند. چون مدولاتور و برمدولاتورها عمل انتقال فرکانس را انجام میدهند، بدان سبب آنها مبدل فرکانس یا مخلوط‌کننده فرکانس نیز میگویند.

در بحث خود درباره تکنیک انتقال فرکانس، اغلب به فیلترهای پائین گذر، بالا گذر و میان گذر مواجه میشویم. میتوان فیلترهایی با مشخصه مقداری و فازی تقریباً نزدیک به فیلترهای ایده‌آل با استفاده از اجزاء زیاری درست کرد. لیکن در اکثر مواقع فرکانس‌های مطلوب ما بقدر کافی از فرکانس‌های ناخواسته فاصله دارند و با فیلترهای ساده میتوان آنها را جدا کرد.

دستگاههای مدولاتور (مخلوط‌کننده یا مبدل فرکانس)

اگرnon برخی مدارهای ساده را برای بوجود آوردن مدولاسیون ملاحظه خواهیم کرد. تحول مدولاسیون طیف فرکانس سیگنال‌ها را انتقال میدهد. لذا پاسخ مدولاتورها شامل فرکانس‌هایی متفاوت با فرکانس سیگنال ورودی است. البته تولید مدولاسیون توسط یک سیستم خطی مستقل از زمان امکان ندارد، زیرا پاسخ اینچنین سیستمهایی نمیتواند شامل فرکانس‌هایی که سیگنال ورودی دارد باشد. بنابراین مدولاسیون را میتوان با استفاده از سیستمهای متغیر با زمان مثل یک کلید الکترونیکی یا مدار چاپی [Chopper] ساطور [Saturation] یا عناصر غیر خطی انجام داد. عناصر امکانیزم واقعی را برای عمل مدولاسیون فراهم می‌آورند. لیکن اغلب دستگاههای مول-

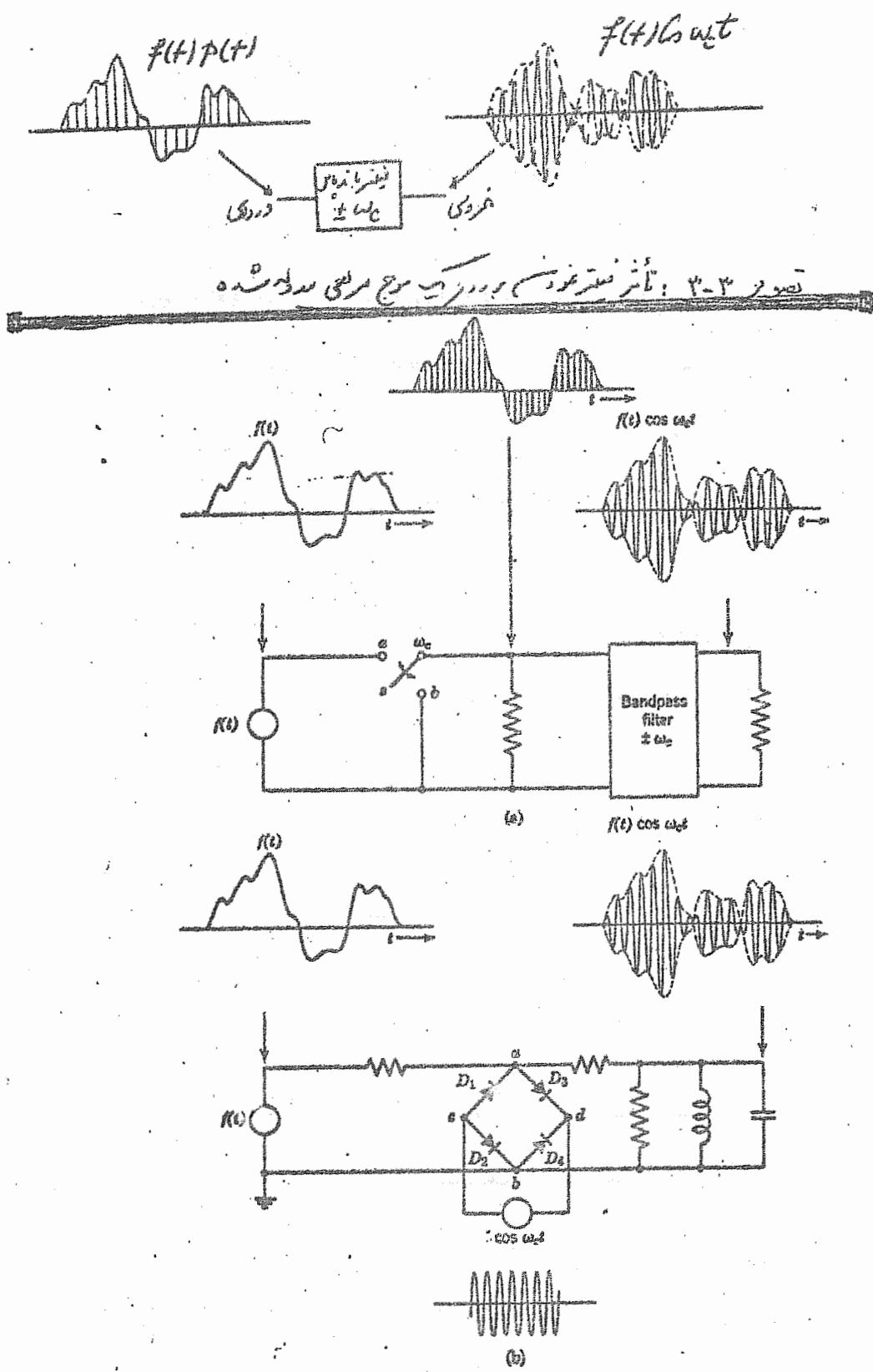


Figure 8.4 (a) Schematic diagram of a chopper-type modulator. (b) A chopper-type balanced modulator (ring modulator), using diodes as switches.

مدولا سیون را میتوان بصورت دستگاههای متغیر با زمان نشان داد.

شیمای دیاگرام مدولا تور چاپر (بعنوان تقطیع کننده) در شکل (۳-۴Q) نشان داده شده است. گلید گر متناظراً با فرکانس ω به سرهای a و b قطع و وصل میشود. برای نیم پریود گلید سر C را به سیگنال $f(t)$ وصل و در نیم پریود دیگر گلید سر C را بزمیمن متصل میسازد. بنابراین شکل موج خروجی ترمینال (سر) C با فرکانس ω خود و قطعه شده است. عمل تقطیع را میتوان بعنوان ضرب سیگنال $f(t)$ در موج مربعی $P(t)$ در نظر گرفت. پطوريکه قبل از بحث شد، اینچنین شکل موج تقطیع شده ای شامل طیف $f(t)$ است که باندازه $-\infty \pm \omega_C \pm \omega = 0$ انتقال یافته و سیگنال مطلوب و مدوله شده بdst آورد. شکل (۳-۳). برای انجام عملی این هدف، مدار شکل (۳-۴) ارائه گردیده است. دیودهای این مدار کار همان گلید لازم را انجام میدهند. هنگامیکه سیگنال $\cos \omega_C t$ ترمینال C را نسبت به ترمینال L مشتبه مینماید، تمام دیودها بفرض آنکه $\cos \omega_C t$ خیلی بزرگتر از $f(t)$ باشد، هدایت میکنند. تحت این شرایط ولتاژ دیود D_2 مساوی دو سر D_2 است. از اینرو پتانسیل نقاط a و b یکسان میباشد. پس نتیجه میگردد: a به زمین متصل گردیده و a و b بهم متصل هستند. اما هنگامیکه $\cos \omega_C t$ ترمینال L را نسبت به ترمینال C مشتبه مینماید، دیودها هدایت نکرده بنابراین دو سر a و b از هم باز هستند. در چنین شرایطی ترمینال a از طریق مقاومت R به سیگنال $f(t)$ وصل میشود. پس بدیهی است که دیودها متناظراً مانند گلیدی بفرکانس ω سیگنال $f(t)$ را تقطیع میکنند. در قسمت خروجی \square یک مدار رزوئنس بفرکانس رزونانس ω تعبیه گشته و آن بعنوان یک فیلتر میان گذر عمل مینماید.

سیگنال خروجی این مدار همان سیگنال مورد نظر ما یعنی $f(t) \cos \omega_C t$ است. توجه گنید

مدولاتوری که اینجا بحث شد خطی است . زیرا ضرب $f(t)$ در مقدار ثابت G خروجی را نیز بهمان اندازه افزایش میدهد . البته این مدار متغیر با زمان است که زیرا پارامترهایش بطور تناوبی تغییر میکند . مدولاتور اخیر که هم اکنون تشریح شد بنام مدولاتور حلقه‌ای (Ring modulator) معروف است .

یک مدولاتور خطی را ممکن است بطور کلی بصورت سیستمی که بهره اش (G_{out}) یا تابع انتقالی G میتواند بر اثر اعمال یک سیگنال زمانی در نقطه بخصوص با زمان تغییر نماید در نظر گرفت . بهره G ممکن است متناسب با سیگنال $f(t)$ تغییر کند یعنی :

$$G = Kf(t)$$

در این حالت ، گریر $\cos \omega t$ بر ورودی اثر دارد میشود شکل (۳-۵ a) . بدینهی است که خروجی سیگنال مدوله شده $Kf(t)\cos \omega t$ خواهد بود . بر عکس میتوان سیگنال گریر $\cos \omega t$ را بعنوان تغییر دهنده بهره دستگاه بکار گمارد . شکل (۳-۵ b) و سیگنال ورودی را $f(t)$ انتخاب کرد . مدولاتور حلقه‌ای تقریباً چنین است . مدولاتور حلقه‌ای را میتوان بعنوان سیستمی در نظر گرفت که بهره آن بین صفر و یک تحت فرکانس گریر تغییر مینماید . تغییرات بهره با زمان در این حالت موج سینوزوئیدال نیست و بجای آن موج مستطیلی اعمال میگردد . البته این باعث ایجاد طیف‌های ناخواسته‌ای در هارمونیک‌های آن میشود و باید آنها را توسط فیلتر محو و ذایل ساخت .

در عمل پارامترهای بهره دستگاه‌های فعال مانند لامپ‌های رادیوئی (Lamp) و ترانزیستور بستگی به مقدار ولتاژ و جریان بایس (Bias) دارند . بنابراین اینگونه دستگاه‌ها را میتوان با تغییر سیگنال بایس ، بهره آنها را تغییر داد . برای تشریح و توضیح بیشتر مدولاتورها و آشکار سازها که از لامپ یا ترانزیستور استفاده شده ، به کتاب درسی مدارهای الکترونیک مراجعه کنید . بطوریکه قابل‌گفته شد ، میتوان مدولاتور را با استفاده از دستگاه‌های غیر خطی انجام داد .

نمونه‌ای از مشخصه یک دستگاه غیر خطی در شکل ۳-۶^۲ نشان دارد و شده است. دیووهای
نیمه‌هاری، نمونه خوبی از اینجور دستگاهها میباشد.

مشخصه غیر خطی اینگونه دیوهای را میتوان بدین ترتیب تقریب کرد:

$$i = ae + be^2$$

ترانزیستور و لامپ‌های خلا^۳ نیز بین ورودی و خروجی خود تحت تأثیر سیگنالهای قوی (Large) چنین روابطی دارند. شکل (۳-۶C) مدار مدولاتوری که با استفاده از عناصر غیر خطی کار میکند نشان میدهد. برای تجزیه و تحلیل ریاضی این مدار، فرض میکنیم عناصر غیر خطی با مقاومت‌های R سری باشند. ضمناً جریان ولتاژ عنصر غیر خطی از رابطه زیر پیروی

کند

$$i = ae + be^2$$

ولتاژهای e_1 و e_2 (شکل ۳-۶b) خواهد بود:

$$e_2 = \cos \omega_c t - f(t)$$

و جریانهای و بدین ترتیب بدست می‌آیند:

$$i_1 = ae_1 + be_1^2$$

$$= a[\cos \omega_c t + f(t)] + b[\cos \omega_c t + f(t)]^2 \quad (3-10)$$

$$i_2 = a[\cos \omega_c t - f(t)] + b[\cos \omega_c t - f(t)]^2$$

ولتاژ خروجی v_o خواهد شد

$$v_o(t) = i_1 R + i_2 R$$

با جاگذاری رابطه (3-10) در معادله فوق خواهیم داشت

$$v_o(t) = 2R[2bf(t)\cos \omega_c t + af(t)]$$

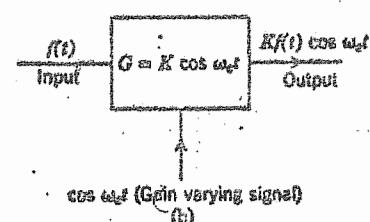
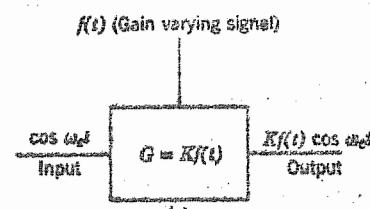


Figure 3.5 Linear modulating systems

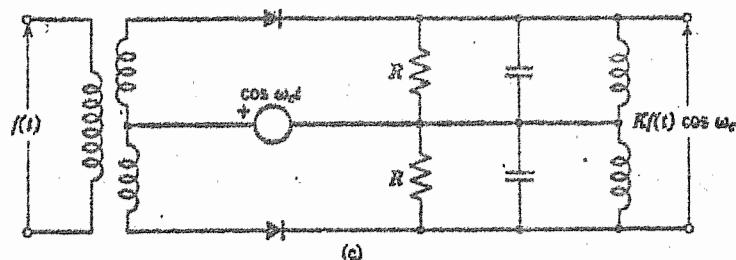
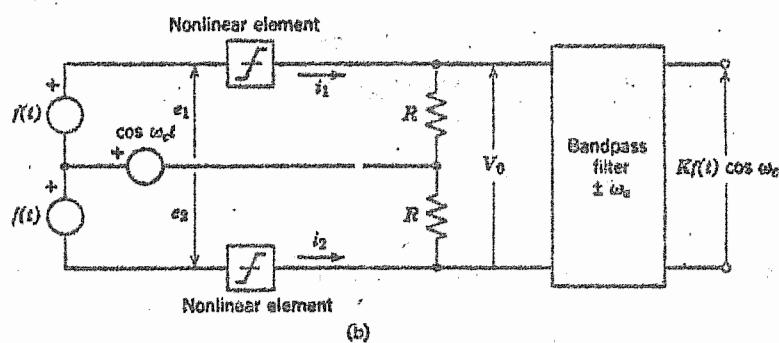
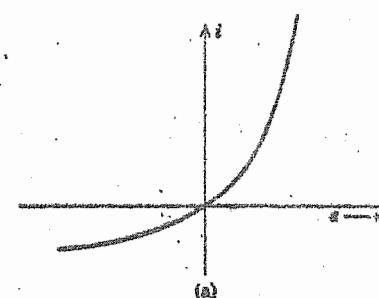


Figure 3.6

سیگنال $\alpha f(t)$ را بوسیله فیلتر میان گذر که در فرکانس ω_0 تطبیق شده باشد، میتوان بیرون آنداخت. در این مدار از دیود های نیمه هادی بعنوان عناصر غیر خطی استفاده میگردد. نوع عملی اینگونه مدولاتور در شکل ۳-۶ نشان داده شده است. تمام مدولاتورهای که در فوق بحث شد، مدولاسیون را منه با حذف گریرتولید میکنند و بنام بالاترین مدولاتور:

Balanced modulator

آشکار سازی - مدولاسیون را منه با حذف گریر

در گیرنده برای آشکار سازی سیگنال اولیه $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ ، لازم است آنرا از سیگنال $\cos(\omega_0 t + \phi)$ استخراج کنیم. بطوری که قبل از دیدیم، تحول آشکار سازی معادل انتقال طیف و میتوان از ضرب سیگنال مدوله شده $f(t) \cos(\omega_0 t)$ در سیگنال $\cos(\omega_0 t)$ بدان ناییل و بمقصود رسید (آشکار سازی همزمان). بنابراین نظیر همان مدارهای که برای مدولاسیون بکار رفت، میتوان برای آشکار سازی استفاده نمود. البته یک فرق بین مدار مدولاتور و آشکار ساز وجود دارد طیف خروجی مدولاتور در اطراف فرکانس های $\omega_0 \pm \Delta$ متغیر میشوند و از اینرو لازم است از یک فیلتر میان گذر بفرکانس روزونانس ω_0 برای جدا نمودن آن از سایر طیفهای حاصله تعییه و طرح نمود. اما در مدار آشکار ساز طیف $(\omega_0 \pm \Delta)$ مد نظر است و اطراف فرکانس ω_0 متغیر هستند. لذا لازم است از یک فیلتر پائین گذر برای اخذ آن و حذف مؤلفه های فرکانسی که در $\omega_0 \pm 2\Delta$ و $\omega_0 \pm 3\Delta$ هستند بکار گردد. مدار آشکار ساز خواه از نوع تقطیع گنده (مدار چاپر) خواهد عناصر غیر خطی در شکل های (۳-۲-a) و (۳-۲-b) مصور گشته اند. توجه کنید: فیلتر پائین گذر در دو سر خروجی هر دو مدار RC است.

آشکار سازی از طریق ضرب یک سیگنال پریود یک بفرکانس ω_0 در سیگنال مدوله شده $f(t) \cos(\omega_0 t)$

انجام میگردد . اگر $\varphi(t)$ یک سینال پریودیک بفرکانس ω_c باشد ، تبدیل فوریه $\Phi(\omega)$ آنرا میتوان چنین نوشت :

$$\varphi(t) \longleftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n \delta(\omega - n\omega_c) \quad (3-5)$$

بدین است که اگر سینال مدوله شده $f(t) \cos \omega_0 t$ در $\varphi(t) \cos \omega_0 t$ ضرب شود طیف

$$f(t) \cos \omega_0 t \times \varphi(t) \longleftrightarrow 2\pi \left[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0) \right] * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n \delta(\omega - n\omega_c) \quad (3-11)$$

واضح است که این طیف شامل جمله $F(\omega)$ است و میتوان با استفاده از فیلتر پائین گذر آنرا بدست آورد .

تقویت گندم چاپ سر

اصول انتقالی فرکانس کاربرد مفیدی در تقویت گندمهای فرکانس کم و DC دارد .

بعلت ملاحظات عطی اندازه و حجم خازنهای کویلاز از نظر ساختن تقویت گندمهای DC و فرکانس کم را مشکل میکند . چون در فرکانسها کم آن بصورت یک مدار باز open circuit عمل مینماید ، لذا حجم خازن لازم برای تقویت گندمهای چند طبقه ای بی نهایت بزرگ میگردد . بنابراین برای تقویت سینالهای DC و فرکانسها خیلی کم از کویلاز مستقیم استفاده میشود . البته کویلاز مستقیم نیز بتویه خود یک سری اشکال در نقطه کار تقویت گندمهای ها بوجود میآورد . با استفاده از تقویت گندم چاپ که طیف سینال را به قسمت بالاتری از طیف فرکانس انتقال میدهد

مهندسين الکترونیک براین اشکال و مسائل فائق و پیروز شده اند . پس اگر طیف سینال DC را توسط مدار چاپ به فرکانس بالاتری که میتوانیم در آن فرکانس بسادگی سینال را تقویت نمیشود انتقال دهیم ، در آن صورت پس از تقویت طیف مذبور میتوان دوباره آنرا آشکار ساخت . هر یک از

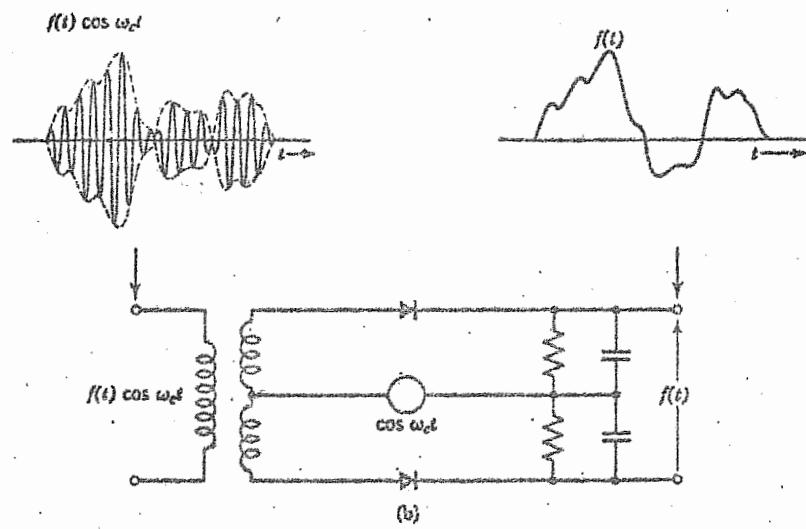
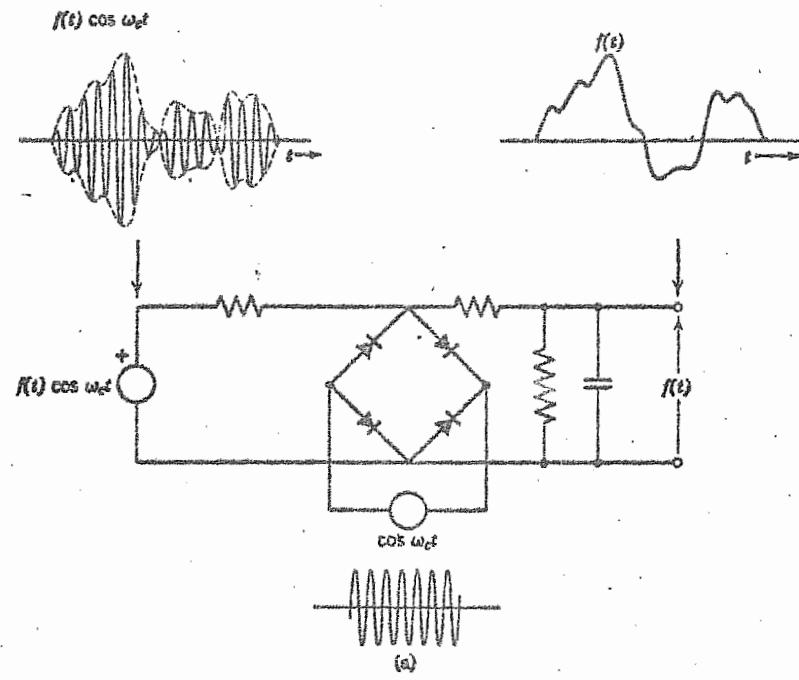


Figure 3.7 (a) A ring demodulator. (b) A demodulator that uses nonlinear elements.

مدارهایی که اگنون بحث شد ممکن است بدین منظور بکار برد، لیکن معمولاً برای مدولا سیوں و آشکار سازی از تقطیع مکانیکی (چاپر مکانیکی) استفاده میگردد. تقطیع مکانیکی کلیدی دارد که بطور متناوب دو ترکیبی را زمین میکند. چون برای تحول مدولا سیوں و آشکار سازی یک فرکانس کریز لازم است، لذا برای مدولا سیوں و آشکار سازی یک مدار چاپر الزامی است. برای درک بهتر به شکل (۳-۸) مراجعه کنید.

سیگنال کم فرکانس $f(t)$ با طیف $F(\omega)$ در شکل (۳-۸b) و (۳-۸a) بترتیب نشان داده شده است. سیگنال $f(t)$ بر ورودی تقویت گشته چاپر مطابق با شکل (۳-۸c) اثر میکند. بنابراین همانطوریکه انتظار دارید سیگنال تقطیع شده در دوسر' بطوریکه در شکل (d) ملاحظه میکنید، ظاهر میشود. این شکل موج معامل ضرب سیگنال موج مربعی $P(t)$ در سیگنال $f(t)$ است. طیف سیگنال تقطیع شده در دوسر' میباشد. برای دوسر' $F_{aa'}(\omega)$ است (شکل ۳-۸). برای درک بهتر بشکل (۳-۸) نیز مراجعه کنید. خازن ورودی طیف فرکانس را در اطراف فرکانس ω بلوکه و حذف میکند. بنابراین $(\omega) F_{bb'}(\omega)$ طیف سیگنالی که در دوسر' ظاهر میشود، همان طیف $(\omega) F_{aa'}(\omega)$ است ولی مؤلفه های فرکانس که اطراف ω میباشد، حذف شده است. طیف $(\omega) F_{bb'}(\omega)$ در شکل (۳-۸g) نشان دارد. شده است سیگنال دوسر' b'_b است و همانطوریکه میدانید عکس تبدیل فوریه $(\omega) F_{bb'}(\omega)$ میباشد. پس

$$F_{bb'}(\omega) = F_{aa'}(\omega) - \frac{1}{2} F(\omega) \quad , \quad f_{bb'}(t) = f_{aa'}(t) - \frac{1}{2} f(t)$$

بنابراین سیگنال $f_{bb'}(t)$ را میتوان از کم کردن نصف سیگنال $f(t)$ از سیگنال تقطیع شده $f_{aa'}(t)$ بدست آورد. شکل موج $f_{bb'}(t)$ در شکل (۳-۸f) نمایش دارد. شده است.

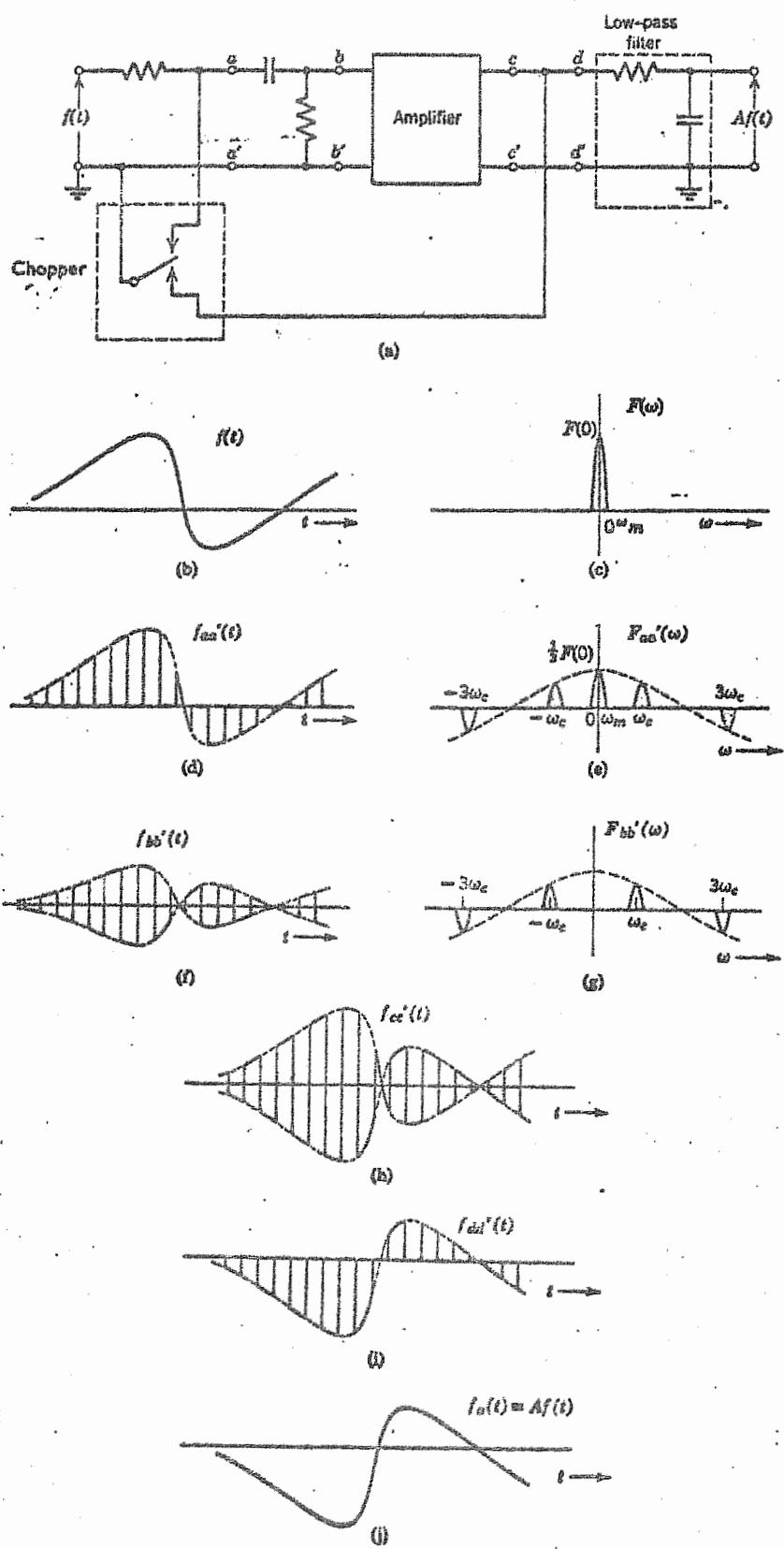


Figure 3.8 (concluded)

شکل‌های $f(3-8)$ و (f_3-8) را با یکدیگر مقایسه کنید. اگر شکل (f_3-8) را تا نزدیم شکل (f_3-8) حاصل می‌گردد. اینهم برای ما واضح است زیرا خازن کوپلаз فرکانس‌های $F(\omega)$ را حذف مینماید. این عبارت قدری ثئوری است لیکن چون سیگنال $f(t)$ باند باریک و فرکانس‌های کم را داردست ما فرض می‌کنیم تمام فرکانس‌های $(\omega)F$ را خازن کوپلaz حذف کند. سیگنال $(f_{dd}(t))$ اکنون ورودی تقویت کننده است. توجه کنید $(f_{dd}(t))$ حالا شامل فرکانس‌های خیلی کم نبوده بلکه انتقال یافته طیف $(\omega)F$ است از اینرو بسادگی میتوان آنرا تقویت کرد. خروجی تقویت کننده در شکل (f_3-8) مصور گشته است. این سیگنال اکنون بوسیله همان چاپر قبلی آشکار می‌گردد.

سیگنال آشکار شده و ظاهر دوسر dd و $(f_{dd}(t))$ در شکل (f_3-8) نشان - داردشده است. این سیگنال در حقیقت تقویت شده سیگنال تعطیع شده $f(t)$ می‌باشد. بنابراین سیگنال $f(t)$ را میتوان توسط یک فیلتر پائین گذر (مدار RC شکل (f_3-8)) آشکار ساخت سیگنال خروجی ما از دستگاه ۱۸ درجه (بعثت عمل تقویت در تقویت کننده‌ها) اختلاف فاز پیدا خواهد گرد. در برخی از تقویت کننده‌ها مدارهای اختلاف فاز دهنده با این منظور تعبیه می‌گردد. در غیر این صورت همان‌طوریکه از شکل (f_3-8) پیداست ۱۸ درجه اختلاف فاز خواهد داشت.

۳-۳ : مدولا سیون دامنه با قدرت گریر زیاد (AM)

در دستگاه‌های مدولا سیون با حذف گریر دیدیم در گیرنده ما محتاج مدارهای گوناگو و پیچیده‌ای برای تولید فرکانس کریر در بخش آشکار ساز همزمان هستیم. اما این سیستم از نقطه نظر قدرت مورد نیاز فرستنده بسیار مفید و جالب است - در ارتباط نقطه به نقطه، که در آن یک فرستنده برای یک گیرنده است، از نظر اقتصادی صرفه برآورده است که گیرنده را با مدارهای پیچیده و گران قیمت تجهیز کرد. اما نتیجه این عمل قدرت فرستنده را بطور معنابهین پائین

می‌آورد . و بدین وسیله از مخازن قدرت زیاد صرفه جویی می‌شود . بعبارت دیگر برای یک دستگاه پخش صدا (Broadcast) که در آن عده کثیری گیرنده از یک فرستنده استفاده مینمایند ، راشتن گیرنده‌های ارزان از نظر اقتصادی با صرفه تراست . برای چنین کارهای یک سیگنال کمتر قوی همراه با سیگنال مدوله شده $f(t) \cos \omega t$ (مدولاسیون دامنه با حذف کردن) ارسال می‌گردد ، و بدین ترتیب از مخازن سنگین تولید فرکانس کمتر در گیرنده صرفه جویی و از پیچیدگی دستگاه جلوگیری مینمایند . بنابراین سیگنال $\varphi_{AM}(t)$ که از فرستنده پخش می‌شود چنین است :

$$\varphi_{AM}(t) = f(t) \cos \omega t + A \cos \omega t \quad (3-12a)$$

بدین است که طیف $\varphi_{AM}(t)$ همان طیف $f(t) \cos \omega t$ بوده ولی در اینجا دو - ایمپالس در $\omega \pm \omega_c$ بدان اضافه می‌گردد . (شکل ۳-۹)

$$\varphi_{AM}(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)] + iCA [\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] \quad (3-12b)$$

سیگنال مدوله شده $\varphi_{AM}(t)$ در شکل (۳-۹) نشان داده شده است . این سیگنال (معادله ۳-۱۲a) را ممکن است باین صورت نوشت :

$$\varphi_{AM}(t) = [A + f(t)] \cos \omega t$$

پس میتوان گفت $A + f(t)$ دامنه سیگنال $\cos \omega t$ است . پوش (envelope) سیگنال مدوله شده در اینجا شکل موج $f(t)$ بوده و باندازه مقدار ثابت A انتقال یافته است . بنابراین برای آشکارسازی $f(t)$ در این حالت از آشکارساز پوشی استفاده می‌گردد .

توجه کنید برای آنکه شکل موج پوش درست همان سیگنال $f(t)$ باشد و شکل (۳-۹) حفظ شود ، مقدار ثابت A ممکن است بقدر کافی بزرگ انتخاب گردد . اگر A باندازه کافی بزرگ نباشد (شکل ۳-۹c) شکل موج پوش بهمان صورت $f(t)$ نخواهد بود . تحت چنین شرایطی بسیار کمتر از $f(t)$ را از طریق آشکارساز پوش (Envelope Detection) کشف و آشکار

نمود . اما از طریق آشکار ساز همزمان (ضرب در $\cos \omega t$) امکان پذیر است .
بنابراین A میبایست بقدر کافی بزرگ باشد تا $A + f(t)$ همواره مثبت گردد . پس

$$A > |f(t)|_{\max} \quad (3-14)$$

در بخش‌های آینده تکنیک آشکار ساز پوشی (دیتکسیون پوشی) تشریح خواهد شد .

سیگنال مدوله شده ایکه شامل مقدارزیاری (از نظر قدرت) سیگنال کریر است و شرایط رابطه (۳-۱۴) در آن صدق میکند با اختصار سیگنال مدوله شده رامنه (AM) میگویند . بنابراین سیگنال $f(t) \cos \omega t$ (شکل (۳-۹)) سیگنال AM و سیگنال (شکل (۳-۱)) سیگنال (AM-SC) تلقی میگردد .

اگنون خواهیم دید مدولاسیون و آشکار سازی سیگنال AM چقدر از سیگنال AM-SC
ساده‌تر خواهد بود . برخی از روش‌هایی که برای مدولاسیون و آشکار سازی سیگنال‌های AM
بکار میروند در زیر بحث و تشریح میگردد .

تولید سیگنال‌های AM

برای تولید سیگنال‌های AM میتوان مانند سیگنال‌های AM-SC از مدولاتورهای تقطیع‌کننده (چاپر) و مدولاتورهای غیر خطی استفاده کرد . در این مدولاتورهای چاپر (۳-۱۰) سیگنال مدوله کننده $f(t)$ همراه با سیگنال کریر سری شده و بعد از چاپر که در فرانس $P(t)$ نوسان میکند متصل میگردد . عمل چاپر معادل ضرب سیگنال ورودی در روح مربعی $P(t)^2$ است . طیف سیگنال حاصل $P(t)^2$ را میتوان بوسیله گانولشن طیف $P(t) + K \cos \omega t$ با طیف $P(t)$ بطوریکه در شکل (۳-۱۱) نشان دارد
شده است بدست آورد . پس از انجام گانولشن طیف مطلوب ما در $P(t) + K \cos \omega t$ حاصل شده ولی مولفه‌های فرکانسی ناخواسته‌ای در $\omega_0 = 5 \pm 3 \omega_0 = 5 \pm 0$ تولید میشود . طیف‌های ناخواسته را میتوان توسط فیلتر میان گذریکه در فرکانس ω_0 تطبیق و هماهنگ tuned شده است

AMPLITUDE MODULATION WITH LARGE CARRIER POWER (AM)

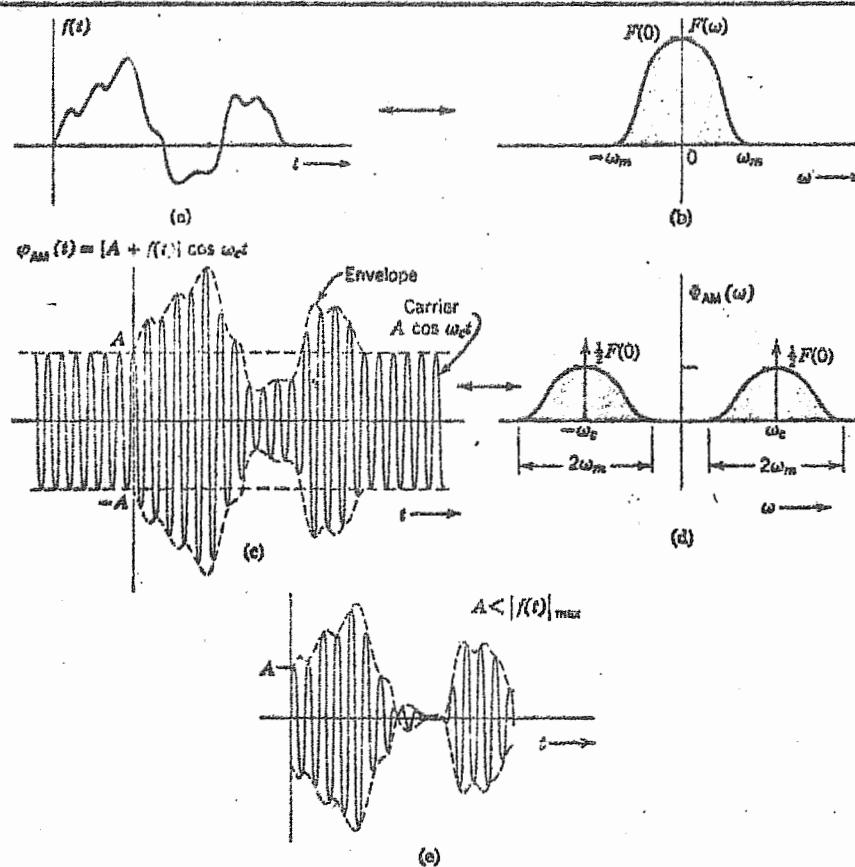
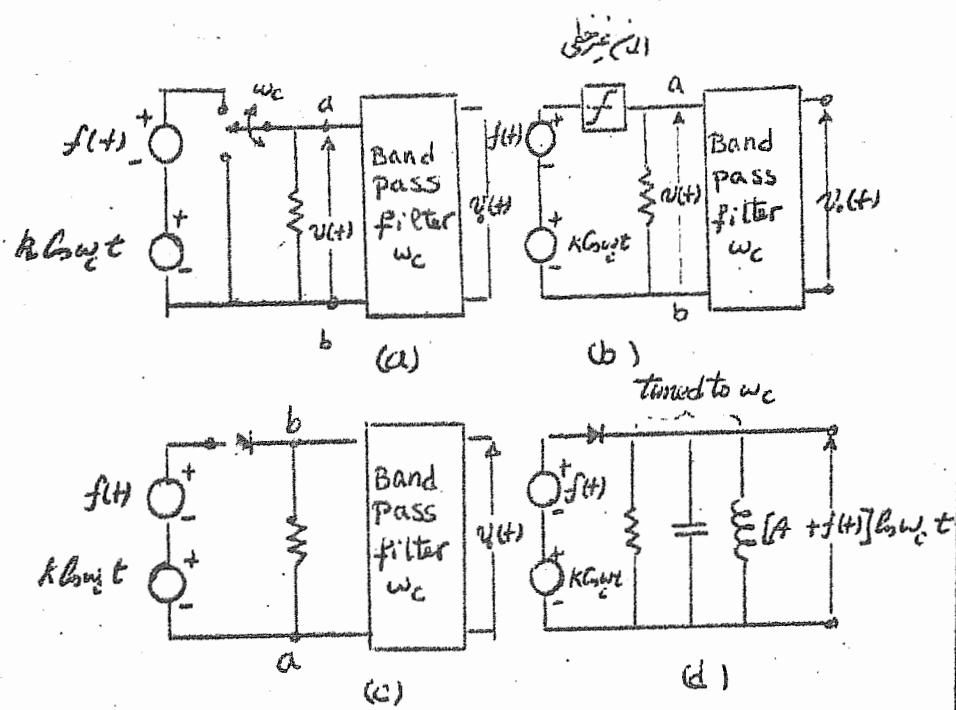


Figure 3.9



AM تولید بسیاری

حذف و صفر نمود . نتیجه مسئله را از نظر ریاضی بعنوان تمرین بعده خوانندگان گذاشتند
میشود . مدار چاپر را ممکن است با استفاده از یک دیور ، مطابق شکل (۳-۱۰) ، ساخت
اگر فرض کنیم دیور ایده‌آل (در جهت عبور مقاومتش صفر و در جهت عکس مقاومتش بی نهایت)
و دامنه کریر خیلی بیشتر از حد اکثر مقدار $f(t)$ باشد . آنوقت دیور مانند کلیدی عمل
خواهد کرد (یعنی هنگامیکه سیگنال کریر ثابت است دیور اتصال کوتاه و وقتی منفی است
دیور هدایت نمی نماید)

بنابراین دیور سیگنال را بفرکانس ω تقطیع خواهد کرد . طیف سیگنال (۳-۱۱) در شکل
(۳-۱۱C) مصور گشته است . هنگامیکه این سیگنال از یک فیلتر میان گذر بفرکانس ω طبیق ω
عبور دارد شود سیگنال مطلوب ما بدست می‌آید . توجه کنید در اینجا دیور قسمت منفی سیگنال
 $[f(t) + K \cos \omega t]$ را حذف مینماید . در حقیقت سیگنال حاصل ، یکسو شده سیگنال ورودی -
است و از اینرو این نوع مدولا تور نیز بنام مدولا تور یکسو ساز خوانده میشود .

در مدولا تور های غیر خطی عمل مدولا سیون بوسیله اجزا غیر خطی صورت میگیرد ، شکل (۳-۱۰)
اگر فرض کنیم دستگاه غیر خطی ما که از عنصر غیر خطی و مقاومت R تشکیل شده و بین جریان

$$i = ae + be^2 \quad (۳-۱۵)$$

آنوقت میتوان بسهولت نشان داد سیگنال (۳-۱۶) شامل سیگنال مدولا شده و جمله ناخواسته
است و بوسیله فیلتر میان گذر بفرکانس ω میتوان طیف های ناخواسته را حذف و طیف
مطلوب را بدست آورد . دیور های نیمه هادی خیلی بیشتر شبیه عناصر غیر خطی هستند تا دیور
ایده‌آل . و معادله (۳-۱۵) بیشتر برای آنها صادر است .

آشکار سازی سیگنالهای AM

سیگنالهای AM را میتوان با استفاده از تکنیک آشکار سازی همزمان همانطوریکه برای

سیگنالهای $AM-SC$ بحث شد آشکار گرد . البته آشکار گردن سیگنالهای AM با تکنیک خیلی ساده تری امکان پذیر است . آشکار سازهای AM را میتوان بد و دسته : دتکتور یکسو و ساز و دتکتور پوشی envelope Detector و rectifier Detector تقسیم کرد . دو آشکار ساز اخیر از یک دید سطحی معادل بنظر میآیند ، لیکن اصول کار آنها کاملاً متفاوت است . در حقیقت آشکار ساز یکسو ساز بر اساس آشکار سازی همزمان کار میکند در حالیکه دتکتور پوشی بر اساس مدارهای غیر خطی انجام وظیفه مینماید . در اینجا هر یک را مستقلانه بحث و تشریح مینماییم .

د تکتور یکسو ساز

این مدار (شکل ۳-۱۲) اساساً شبیه مدولاتورهای یکسو ساز است ولی سیگنال کریز لازم ندارد . مدار آشکار ساز صرفاً سیگنال مدوله شده را یکسو مینماید . سیگنال یکسو شده درست شبیه سیگنال اولی است ولیکن سیکل های منفی آن بریده شده است . این در واقع معادل ضرب سیگنال در یک تابع که مقدار ثابت آن واحد و مقدار منفی آن صفر است ، میباشد . در حقیقت میتوان گفت یکسو سازی معادل ضرب سیگنال مدوله شده در یک موج مربعی مانند $P(t)$ بفرکанс f میباشد . بنابراین طیف سیگنال یکسو شده از طریق کانولشن طیف سیگنال مدوله شده و طیف $P(t)$ بدست میآید . نتیجه کانولشن دو طیف در شکل (۳-۱۲) مصور گشته است . بطوريکه از شکل دیده میشود ، بسادگی میتوان با استفاده از یک فیلتر پائین لیس گذر سیگنال $f(t)$ را آشکار ساخت . البته خروجی فیلتر شامل یک جمله DC (یک ایما در مبدأ) نیز هست . با تعبیه نمودن خازن C میتوان این اشکال را بر طرف نمود (شکل ۳-۱۲) . اگنون میخواهیم از دیدگاه ریاضی کانولشن طیف $\varphi_{AM}(t)$ (معادله ۳-۱۶) و $P(t)$ (معادله ۳-۸) را بدست آوریم . خمنا ممکن است مستقیماً از نتیجه معادله (۳-۹) استفاده کنیم :

$$\varphi_{AM}(t)P(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \Phi_{AM}(\omega) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \Phi_{AM}(\omega - n\omega_c) \quad (3-16)$$

از معادله (۳-۱۲) داریم

$$\Phi_{AM}(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)] + iCA [\mathcal{K}(\omega + \omega_c) + \mathcal{D}(\omega - \omega_c)] \quad (3-17)$$

حال رابطه (۳-۱۷) را در معادله (۳-۱۶) قرار میدهیم . نتیجه این عمل همان طیف شکل (۳-۱۲f) را بنا خواهد دارد . ما دوست داریم فقط مؤلفه های فرکانسی کم (طیفی که در اطراف $\omega = \omega_c$ متمرکز است) را داشته باشیم . اگر $A = \pm n$ باشد ، از معادله ۳-۱۶

خواهیم داشت $[C_0(t) \text{ سیگنال خروجی است}] :$

$$C_0(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\pi} F(\omega) + 2A\delta(\omega)$$

$$C_0(t) = \frac{1}{\pi} [A + f(t)] \quad (3-18)$$

خروجی $C_0(t)$ (معادله ۳-۱۸) را میتوان با بکار بردن یک یکسو ساز موج کامل به جای یکسو ساز نیم موج ، شکل (۳-۱۲) را دو طرفه کرد .

توجه کنید دستکثور یکسو ساز اصولاً یک آشکار ساز همزمان است زیرا کار یکسو ساز معادل ضرب سیگنال مدوله شده در یک سیگنال پریودیک (موج مربعی) بفرکانس پس است . اما لازم بتدکر است که عمل ضرب ، بدون سیگنال کریز انجام میشود . این نتیجه ناشی از قدرت زیاد کریز سیگنال مدوله شده میباشد . اگر سیگنال کریز وجود نداشت ، (مانند حالت مدولاسیون دامنه با حذف کریز) عمل یکسو ساز معادل ضرب سیگنال ورودی در $P(t)$ خواهد بود . بطور گلی برای یک سیگنال AM ، اگر شرط رابطه (۴-۳) « یعنی

$$[A + f(t)] > 0 \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

بر قرار نهاد از دستکثورهای یکسو ساز نمیتوان استفاده کرد . پس اگر این شرط برقرار باشد ، تحول یکسو سازی معادل ضرب سیگنال در $P(t)$ خواهد بود . البته اگر شرط $A + f(t) > 0$ برای تمام مقادیر t (مخالف بزرگتر از صفر) باشد ، دامنه $A + f(t)$ علامت هارا از منفی

به مثبت و بر عکس تغییر میدهد . اگر چنین حالت برقرار باشد ، بسادگی میتوان نشان داد عمل یکسو سازی معادل ضرب سیگنال در $P(t)$ نیست و بوسیله روش یکسو سازی نهیت - وان اینگونه سیگنالها را آشکار ساخت . اگر شرط مذکور برای سیگنال مدوله شده ای برقرار نباشد ، میتوان سیگنال $f(t)$ را توسط آشکار ساز همراه که در آن سیگنال کریز اضافی تولید میگردد آشکار کرد .

بحث قوچ امکان بر تکسیون دیگری را برای سیگنالهای مدوله شده با حذف کریز (بطرور کلو) سیگنالهایی که از رابطه $4-3$ پیروی نمیکنند) پیشنهاد میکند . میتوان با این گونه سیگنالها بقدر کافی سیگنال کریز اضافه نمود تا شرط :

$$[A + f(t)] > 0 \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

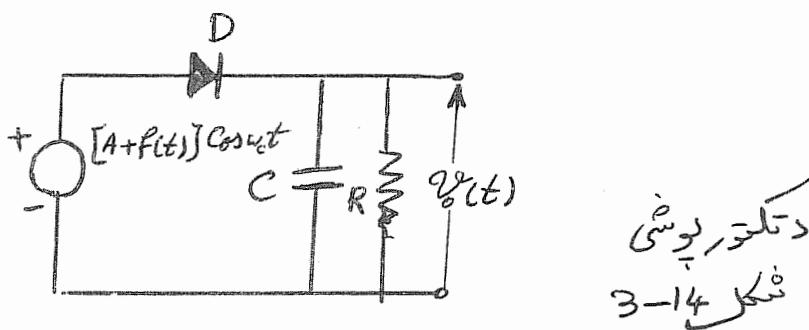
برقرار و سپس آنرا یکسو فیلتر نمود تا بدین ترتیب $f(t)$ ظاهر و کشف گردد . بنابراین بجای آنکه سیگنال کریز را در سیگنال $f(t) \cos \omega_0 t$ ضرب نمائیم ، بقدر کافی سیگنال کریز به سیگنال مدوله شده اضافه نموده تا بر تکسیون از طریق تکنیک یکسو سازی امکان پذیر باشد . این مطلب مفصل در بخش $(3-6)$ بحث خواهد شد .

د تکتور پوشی (Envelope Detector)

در یک د تکتور پوشی ، خروجی د تکتور ، پوش سیگنال مدوله شده را دنبال مینماید .

اصولاً د تکتور پوشی از یک یکسو ساز رخازنی در دو سر خروجی (مطابق شکل $3-14$) تشکیل

شده است .



د تکتور پوشی
شکل ۳-۱۴

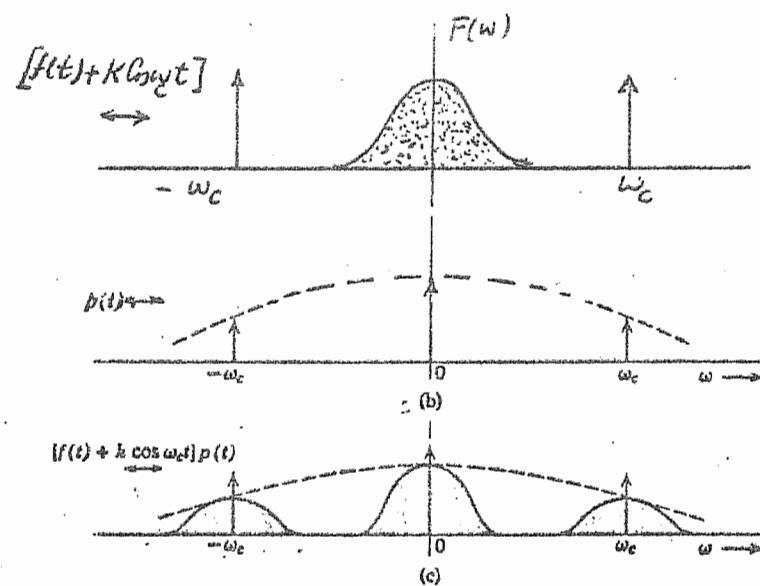


Figure 3.11

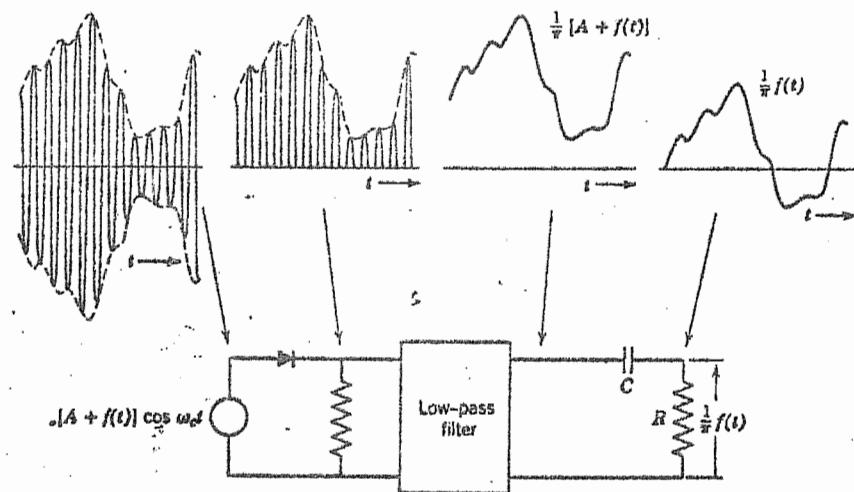
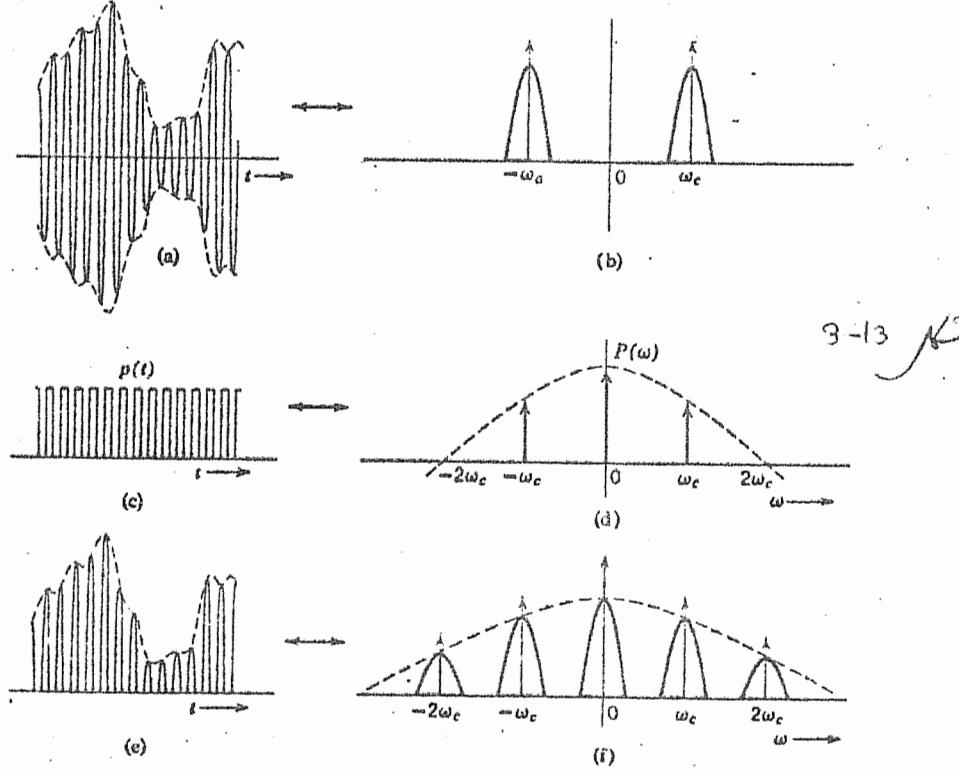
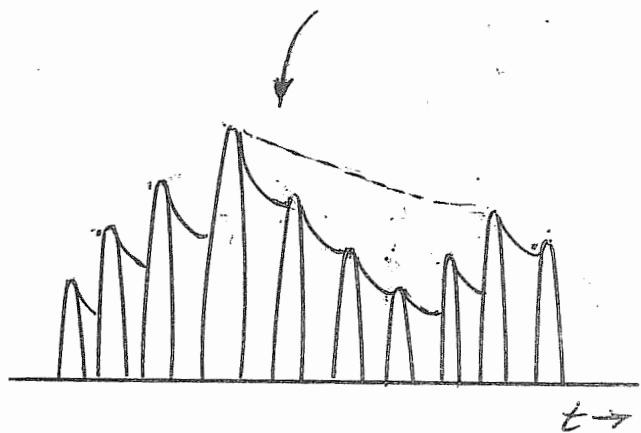
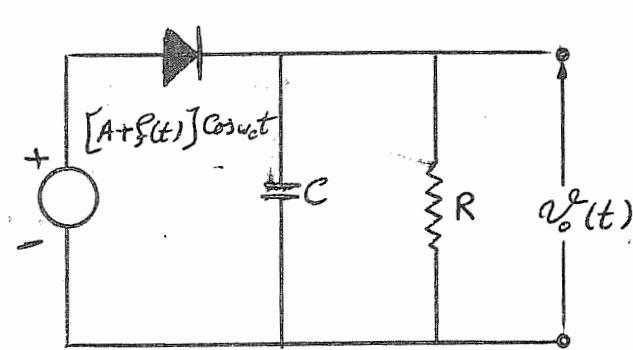


Figure 3.12 A rectifier detector.



ثابت زمانی RC بسیار بزرگ



تصویر ۴-۱

شما د تکتور پوش

هذا میکه سیکل سیگنال ورودی ثابت است، خازن (باندازه حد اکثر ولتاژ سیگنال ورودی) میشود. بمحض اینکه سیگنال ورودی از مقدار حد اکثر کمتر میگردد، چون ولتاژ خازن (که نزدیک به ولتاژ حد اکثر است) بیشتر از ولتاژ ورودی است، دیور بحالت قطع میرود. در این حال خازن بدرون مقاومت R بتانی و گند تخلیه میشود. هذا میکه سیکل - ثابت بعدی فرا میرسد، چون ولتاژ حد اکثر ورودی بیشتر از ولتاژ خازن است، دیور هدایت مینماید. حال خازن دوباره باندازه حد اکثر مقدار سیکل مزبور پز میشود. سپس خازن نیز دوباره بطور گند وبطی به درون مقاومت تخلیه (دریشارژ) میشود. در مدتی که سیکل ثابت است، خازن باندازه ولتاژ حد اکثر سیگنال ورودی شارژ میگردد و تا وقتی که سیکل ثابت بعدی بررسد بعمل تخلیه خود ادامه میدهد. ثابت زمان RC طوری تنظیم میگردد که فرم نهائی ولتاژ تخلیه خازن تقریباً شبیه به پوش باشد. (مسئله ۹ مراجعه کنید). اگر عنوان ولتاژ دوسر خازن تضاریس ناخواسته ای بفرگانس چه دارد و میایست بوسیله یک فیلتر پائین گذر دیگر حذف گردد. ممکن است چنین پنداشت که د تکتور پوش سیگنال را در این مورد همان د تکتور یکسو ساز است. و مدار RC عمل فیلتر پائین گذر را انجام میدهد. این صحیح نیست، زیرا د تکتور یکسو ساز

یک سیستم با متغیر زمانی است در حالیکه دتکتور پوشی یک سیستم غیر خطی است . با وجود یکه خروجی این دو سیستم یکسان نمیباشد ولی کاملاً بر اساس و اصول مختلفی کار میکند .

در بحث فوق واضح است که خروجی دتکتور پوشی ۲۷ برابر دتکتور یکسوساز است (معادله ۳-۱۸) بنابراین دتکتور پوشی نه فقط ساده تراز دتکتور یکسوساز نبود بلکه خیلی نیز با صرفه و مناسب نمیباشد . در این صورت دتکتور پوشی بطور معتبرابهی بمنظور آشکار سازی سیگنال های AM بکار میروند . تمام گیرندهای AM تجاری مجهز به دتکتورهای پوشی هستند .

قدرت موجود در باند های کناری و گیر در سیستم AM

در سیستم AM ، گیر خودش حامل هیچگونه اطلاعاتی نمیباشد و از اینرو قدرت سیگنال گیر انتشار یافته اتلاف انرژی نشان میدهد . برای ما جالب است تا قدرت نسبی موجسوند در گیر و باند های کناری (Side band) که حامل اطلاعات مؤثری هستند پیدا کنیم . سیگنال مدوله شده چنین است

$$q_{AM}(t) = A \cos \omega t + f(t) \cos \omega_s t$$

باند های کناری + گیر

قدرت گیر مقدار متوسط مربع $A^2/2$ بوده و برابر است با

$$P_c = \frac{A^2}{2}$$

قدرت باند های کناری مقدار متوسط مربع $f(t)^2$ میباشد . برای پیدا کردن آن به تعریف (۱-۲۵) معادله (۲-۲۵) مراجعه کنید

$$P_s = \frac{1}{2} \overline{f(t)^2}$$

$$P_t = P_c + P_s = \frac{1}{2} [A^2 + \overline{f(t)^2}]$$

قدرت گی P_t برابر است با

در صد قدرت کلی حمل شده باند های کناری را با η نشان میدهیم و برابر است با

$$\eta = \frac{P_e}{P_t} \times 100\% = \frac{\bar{P}(t)}{A^2 + \bar{P}(t)^2} \times 100\% \quad (3-19)$$

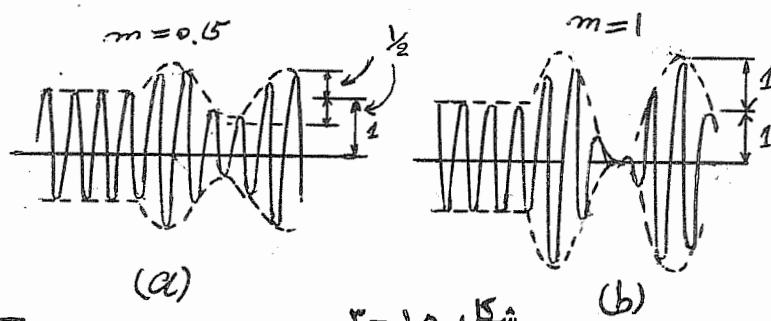
توجه کنید: برای سینگالهای AM داریم

$$|f(t)|_{max} \leq A$$

اگر $f(t)$ یک سینگال سینوزوئیدال (حالت خاص) باشد یعنی:

$$f(t) = mA \cos \omega t$$

را ضریب مدولاسیون (modulation index) یا عق مدولاسیون و میابایست کمتر یا حداقل مساوی یک باشد ($m \leq 1$) در شکل (3-15) دو سینگال با ضرایب $m = \frac{1}{2}$ و $m = 1$ در حالت خاص نشود داریم



شکل ۳-۱۵

$$\bar{P}(t)^2 = \frac{(mA)^2}{2}$$

$$\eta = \frac{m^2}{2+m^2} \times 100\%$$

بنابراین (3-20)

اگر m حد اکثر و مساوی یک باشد، ($m \leq 1$) بسادگی میتوان بدید

$$\eta_{max} = \frac{1}{3} \times 100 = 33.3\%$$

بنابراین برای حد اکثر ضریب مدولاسیون (randman) ($m=1$) راندمان (efficiency) ارتباط مابین 33% میشود. تحت این شرایط، 62.0% قدرت انتشار یافته توسط کریر ضایع و تباہ گردیده است برای حالت که m کوچکتر از یک باشد. راندمان از 33.0% هم کمتر خواهد شد.

توجه کنید برای $AM-SC$ چون کریز وجود ندارد راندمان 100% است.

(Single Sideband transmission) SSB : ارسال باندهای کناری

در تحول مدولاسیون دامنه دیدیم، طیف $F(\omega)$ پس از مدولاسیون باندازه ω_0 را بیان بر ثانیه انتقال می‌باید، شکل (۱۶-۳) . ضمناً نیز مشاهده نمودیم سیگنال مدوله شده دارای پهنای باند ω_m است ولی پس از مدولاسیون پهنای باند $2\omega_m$ میگردد. در واقع مدولاسیون نه فقط طیف را انتقال میدهد، بلکه پهنای باند را نیز دو برابر مینماید. این برای ما لازم نیست. با نگاهی به شکل (۱۶-۳) متوجه میشویم: در ارسال طیف کامل این شکل، ما اطلاعات تکراری و زائدی ارسال میداریم. طیف $F(\omega)$ پس از مدولاسیون باندازه $\omega_0 + \omega_m$ و $\omega_0 - \omega_m$ - انتقال یافته است. این طیفهای حاصله یکسان و همانند هستند و هر یک شامل اطلاعات کاملی از $F(\omega)$ میباشد. اما چرا هر دو طیف را ارسال داریم؟ و نیز چرا یکی از آنها را انتشار ندهیم؟ البته این عمل امکان پذیر نیست زیرا بطوریکه در فصل اول دیدیم، طیف هر سیگنال فیزیکی تابع زوجی از ω است. پس اگر طیفی نسبت به محور قائمی که از مبدأ میگردد متقارن نباشد، آن نمایشگر یک سیگنال حقیق و واقعی نخواهد بود. لذا آنرا نمیتوان ارسال راشت. اما آیا راهی وجود دارد؟

به شکل (۱۶-۳) نگاه کنید، طیفی که در اطراف ω_0 مرکزگشته شامل دو قسمت میباشد: قسمتی که بالای فرکانس ω_0 واقع شده بدان باند کناری فوقانی (UPPER Side Band) و قسمتی که در پائین فرکانس ω_0 قرار گرفته بدان باند کناری تحتانی (LOWER Side band) میگویند. ضمناً طیفی که در اطراف ω_0 مرکزگشته نیز دارای باند کناری فوقانی و تحتانی میباشد (شکل ۱۶-۳). پس نتیجه میشود: دو باند کناری فوقانی (یا دو باند کناری تحتانی) شامل اطلاعات کاملی از $F(\omega)$ میباشد. بنابراین بجای آنکه طیف کامل را ارسال داریم،

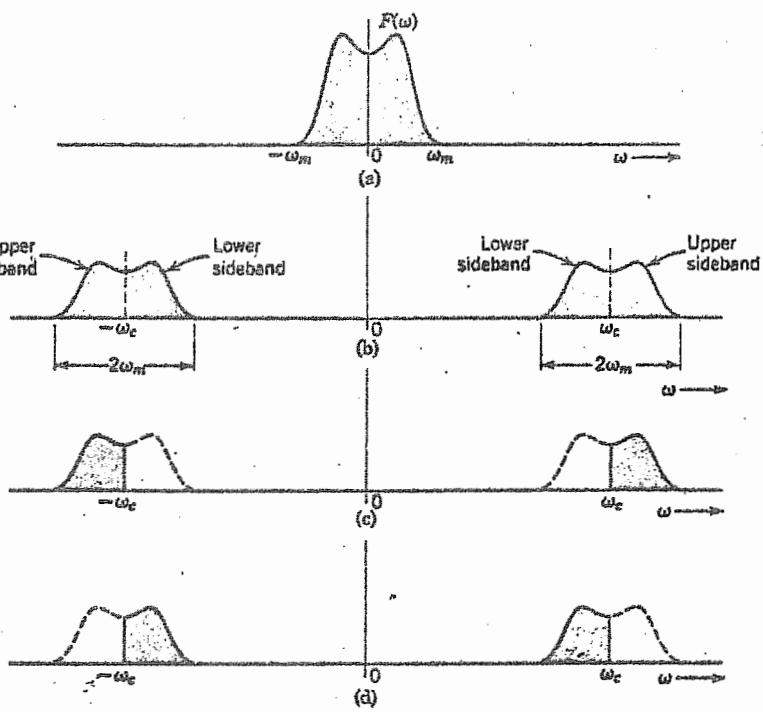


Figure 3.16

فقط کافی است یا دو باند کناری فوقانی یا دو باند کناری تحتانی را ارسال و انتشار دهیم (شکل ۳-۱۶۰ و ۳-۱۶۵) توجه کنید دو باند کناری فوقانی (یا تحتانی) هر یک تابع زوجی از ω هستند، لذا نمایشگر یک سینکال حقیقی میباشد. سینکال اولیه $f(t)$ را میتوان با استفاده از انتقال فرکانس مناسبی از باندهای کناری فوقانی یا تحتانی کشف و آشکار نمود. اکنون برای ارسال باندهای کناری فقط طیفی به پهنای ω_m لازم است. این باندهای کناری را SSB (Single Side Band) میگویند. اگر دو باند کناری فوقانی و تحتانی را ارسال داریم، (DSB) یا $[$ مدولا سیون دائمی با حذف کریر $]$ بدست میآید که قبل امفصلابحث شد.

تولید سینکالهای SSB (سنگل سایه باند)

برای بوجود آوردن سینکال SSB ، تنها چیزی که لازم است، حذفیگری از باندهای کناری از سینکال مدوله شده است، (سينکالهایی که از مدولا تورهای متعادل حاصل میشوند). اگر یک سینکال مدوله شده با حذف کریر را که از یک مدولا تور متعادل بدست میآید، از فیلتر میان گذر مناسبی عبور داده شود، باند کناری دلخواه بدست میآید. فیلتری که برای انجام این منظور بکار میروند بایستی مشخصه آن خیلی نزدیک بیک فیلتر ایده‌آل در فرکانس ω_c باشد. بعبارت بهتر، فیلتر بایستی در فرکانس ω_c ، فرکانس قطع بسیار تیز و پُرندۀ ای راشته باشد تا بطور دقیق فرکانسهای یک طرف ω_c را عبور داده و فرکانسهای طرف دیگر را کاملاً حذف و زایل نماید. از نقطه نظر عملی، ساختن یک فیلتر با مشخصه فرکانس بسیار تیز در فرکانسهای کم امکان پذیر است. با این دلیل اول طیف (ω_c) را باندازه $\omega_c \pm$ جائی که یکی از باندهای کناری را میتوان کاملاً حذف کرد، انتقال داده مپس طیف حاصل را از فرکانس ω_c به فرکانس ω_c برد. در حقیقت تحول انتقال را معکوس

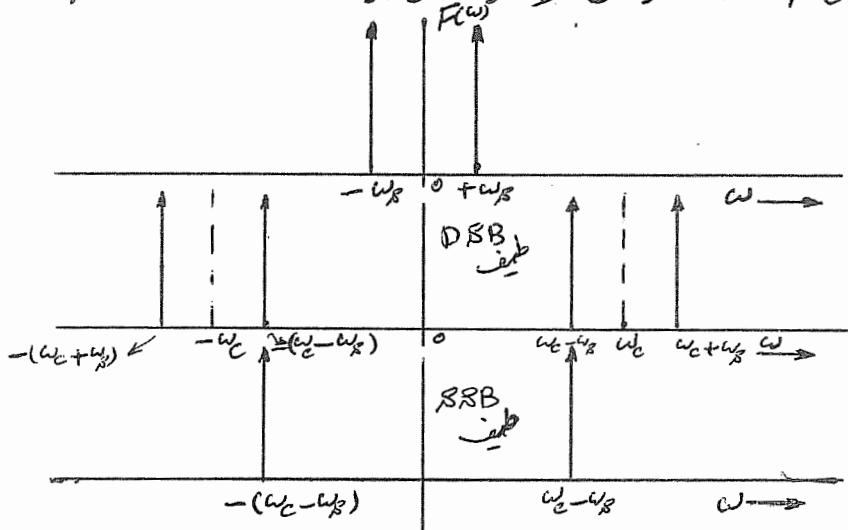
است در چند مرحله انجام دارد . یعنی اول طیف $F(\omega)$ را تا فرکانس ω_c انتقال داره و در آنجا یک باند کناری را حذف کرد . لازم بذکر است که در آنجا طیف های ناخواسته ای بوجود می آید و میبایست از بین برده شود . در مرحله بعدی طیف باند کناری را به فرکانس ω_c انتقال داره و در آنجا نیز فرکانس های ناخواسته را حذف کرد . مسئله فیلتری کردن نسبتاً ساده است مشروط بر آنکه سیگنال شامل فرکانس های کم نباشد . در این صورت فیلتر های B لازم نیست فرکانس قطع بسیار تیزی داشته باشند . چون قدرت قابل ملاحظه ای در ناحیه فرکانس های کم هست . سیگنال صحبت و گفتار انسان ثابت نباشد از این نوع است . زیرا فرکانس های کم دارای قدرت نسبتاً کمی هستند . اما در سیگنال تصویر تلویزیون این حالت وجود ندارد .

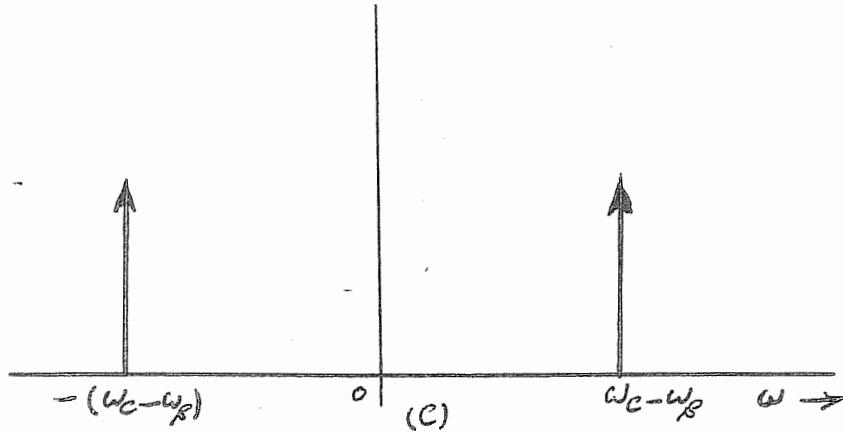
تولید (B) از طریق انتقال فاز

با استفاده از متد مستقیم انتقال فاز ممکن است سیگنال های SSB را تولید نمود . برای آنکه این موضوع را درک کنیم ، فرض میکنیم $f(t) = \cos\omega_0 t$ باشد . در اینجا $(F(\omega))$ دو ایمپالس در $\omega \pm \omega_c$ دارد (شکل ۳-۱۷) . سیگنال مدوله شده با گیره $\cos\omega_0 t$. $\cos\omega_0 t$ خواهد بود :

لذا طیف $F(\omega)$ باندازه ω_c را بیان بر ثانیه انتقال میباید (شکل ۳-۱۷) .

شکل ۳-۱۷





طیف δSSB (باندگناری تحتانی) دو ایمپالس در $(\omega_c - \omega_p)$ ± مطابق شکل (۳-۱۷c) خواهد داشت. پس بدینه است که سیگنال مربوط به طیف δSSB شکل (۳-۱۷c) است. بنابراین تولید یک سیگنال δSSB برای حالت خاص که $\cos(\omega_c - \omega_p)t$ باشد، معادل تولید سیگنال $\cos(\omega_c - \omega_p)t f(t) \cos \omega_c t$ است. اما بطوریکه از روابط مثلثاتی استنتاج میگردد:

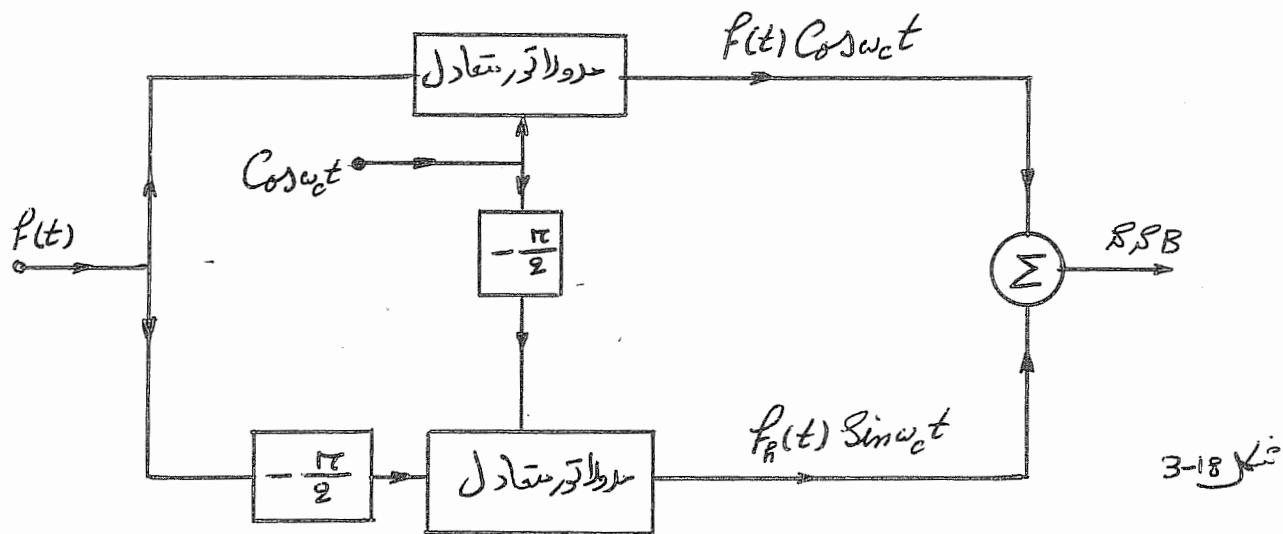
$$\cos(\omega_c - \omega_p)t = \cos \omega_p t \cos \omega_c t + \sin \omega_p t \sin \omega_c t$$

از اینرو سیگنال δSSB را میتوان از جمع دو سیگنال $\cos \omega_p t \cos \omega_c t$ و $\sin \omega_p t \sin \omega_c t$ بدست آورد. سیگنال $\cos \omega_p t \cos \omega_c t$ را میتوان بسهولت توسط مدولاتور معادل کرد قبل اینکه $\sin \omega_p t \sin \omega_c t$ را میتوان بدین صورت -

نوشت:

$$\sin \omega_p t \sin \omega_c t = \cos(\omega_p t - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega_c t - \frac{\pi}{2})$$

پس این سیگنال را نیز میتوان بوسیله مدولاتور بوجود آورد، البته مشروط بر آنکه سیگنال $\cos \omega_p t$ و کوتاه $\cos(\omega_c t - \frac{\pi}{2})$ - تغییر فاز یابند (شکل ۳-۱۸).



شکل ۳-۱۸

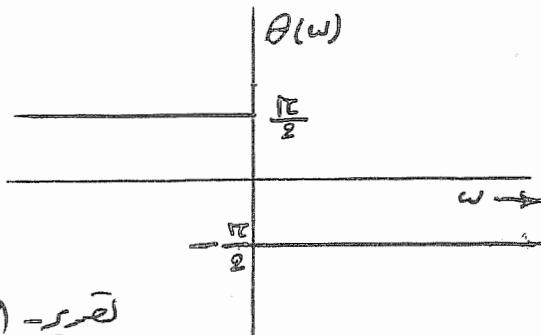
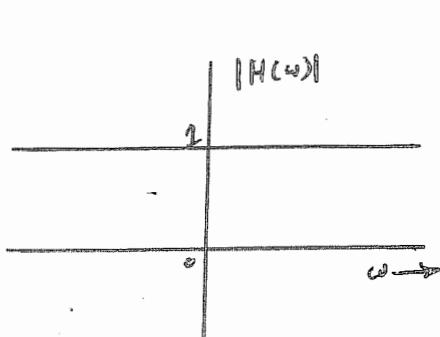
ما این نتیجه را در حالت خاص وقتی $\omega_c t$ بدست آوردیم . اما برای هر شکل موج (هر سیگنال) صادق است . زیرا هر سیگنال را میتوان بر حسب مجموع پیوسته ای سیگنال سینوزوئیدال (یا اکسپونانسیل) بسط و بیان نمود . بنابراین سیگنال SSB-RC مربوط به $f(t)$ ، مطابق شکل (۳-۱۸) تولید میگردد . پس بطور کلی

$$\Psi_{SSB}(t) = f(t) \cos \omega_c t + f_p(t) \sin \omega_c t$$

$f_p(t)$ در اینجا همان $f(t)$ میباشد ولی مؤلفه های فرکانسی آن باند ازه $\frac{\pi}{2}$ -

انتقال فاز نداشتند .

اکنون این نتیجه را برای هر سیگنال مانند $f(t)$ بطور دقیق اثبات میکنیم . یک سیستم انتقال فاز برای انتقال فاز مؤلفه های فرکانسی بقدر $\frac{\pi}{2}$ - باید دارای تابع مقداری واحد باشد . بنابراین مقدار مؤلفه های فرکانس ثابت میمانند لیکن فاز مؤلفه های فرکانس ثابت باند ازه $\frac{\pi}{2}$ - انتقال فاز میباشد . چون طیف فازی تابع فردی از ω است ، لذا فاز مؤلفه های فرکانس منفی باند ازه $\frac{\pi}{2}$ + انتقال فاز میباشد . طیف مقداری و فازی سیستم انتقال فاز دهنده در شکل ۳-۱۹ نمایش داده شده است $|H(\omega)| = 1$ ، $\theta(\omega) = H(\omega) = \frac{\pi}{2} - \pi K(\omega)$



لصیرت - ۳-۱۹

بنابراین تابع انتقال $H(\omega)$ این سیستم انتقال فاز دهنده خواهد بود :

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \\ = e^{j[\frac{\pi}{2} - \pi U(\omega)]} = e^{-j\pi U(\omega)} \quad (3-22)$$

و اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ باشد پس

$$f_c(t) \leftrightarrow jF(\omega)e^{j\pi U(\omega)} \quad (3-23)$$

از قضیه مدولا سیون داریم

$$f(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)] \quad (3-24a)$$

واز رابطه (3-23) و (3-24a) استنتاج میگردد :

$$f_c(t) \sin \omega_c t \leftrightarrow -\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) e^{-j\pi U(\omega + \omega_c)} - F(\omega - \omega_c) e^{-j\pi U(\omega - \omega_c)}]$$

$$[f(t) \cos \omega_c t + f_c(t) \sin \omega_c t] \leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega + \omega_c) \left[1 + e^{-j\pi U(\omega + \omega_c)} \right] \quad (3-24b)$$

$$U(\omega - \omega_c) = \begin{cases} 0 & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad + F(\omega + \omega_c) \left[1 - e^{-j\pi U(\omega + \omega_c)} \right] \quad (3-25)$$

توجه شود

لذا

$$1 + e^{-j\pi U(\omega - \omega_c)} = \begin{cases} 2 & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

اما بطوریکه از تعریف $2U(\omega - \omega_c)$ میدانیم

$$1 + e^{-j\pi U(\omega - \omega_c)} = 2U(\omega_c - \omega)$$

$$1 - e^{-j\pi U(\omega - \omega_c)} = 2U(\omega_c + \omega)$$

و بهمین نحو

با جاگذاری رابطه (۳-۲۶) در رابطه (۳-۲۵) خواهیم داشت:

$$[f(t) \cos \omega_c t + f_h(t) \sin \omega_c t] \leftrightarrow [F(\omega - \omega_c) U(\omega_c - \omega) + F(\omega + \omega_c) U(\omega + \omega_c)] \quad (3-22)$$

طیف دست راست معادله (۳-۲۷) دقیقاً باند کناری تحتانی $[F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)]$ را بیان

می‌نماید. جمله $F(\omega - \omega_c) U(\omega_c - \omega)$ نمایشگر باند کناری تحتانی است زیرا

برای $\omega < \omega_c$ مساوی صفر می‌باشد بنابراین باند کناری فوقانی $F(\omega - \omega_c)$ را حذف می‌کند.

همین طور $F(\omega + \omega_c) U(\omega + \omega_c)$ نمایشگر باند کناری تحتانی $F(\omega + \omega_c)$ است زیرا

$F(\omega + \omega_c) U(\omega + \omega_c)$ برای $\omega < -\omega_c$ صفر است، لذا باعث حذف باند کناری فوقانی $F(\omega + \omega_c)$

می‌گردد. در این صورت سیگنال رابطه (۳-۲۵) یک سیگنال SSB با باند کناری تحتانی

را نشان میدهد: اگر بجای اضافه نمودن، ما دو سیگنال $f(t) \cos \omega_c t$ و $f_h(t) \sin \omega_c t$ را از

کم نمائیم، بسهولت میتوان نشان داد یک سیگنال SSB با باند کناری فوقانی بدست می‌آید.

بنابراین یک سیگنال SSB-SC را میتوان چنین بیان نمود:

$$\varphi_{SSB}(t) = f(t) \cos \omega_c t + f_h(t) \sin \omega_c t$$

که در آن علامت مثبت را از باند کناری تحتانی و منفی باند کناری فوقانی دارد. سیگنال

$f_h(t)$ پاسخ سیگنال $f(t)$ (شکل ۳-۱۹) از سیستم انتقال فاز می‌باشد. با

استفاده از رابطه (۳-۲۳) میتوان $f(t)$ را بر حسب $f_h(t)$ بیان کرد: $f(t) \leftrightarrow jF(\omega) e^{j\pi U(\omega)}$

$$e^{-j\pi \text{sgn}(\omega)} = \begin{cases} -1 & \omega > 0 \\ 1 & \omega < 0 \end{cases} = -\text{sgn}(\omega)$$

که در آن

$$f_h(t) \longleftrightarrow -jF(\omega) \text{sgn}(\omega)$$

پس (۳-۲۹)

$$\frac{j}{\pi t} \longleftrightarrow \text{sgn}(\omega)$$

اما از رابطه (۱۱۳-۱) داریم

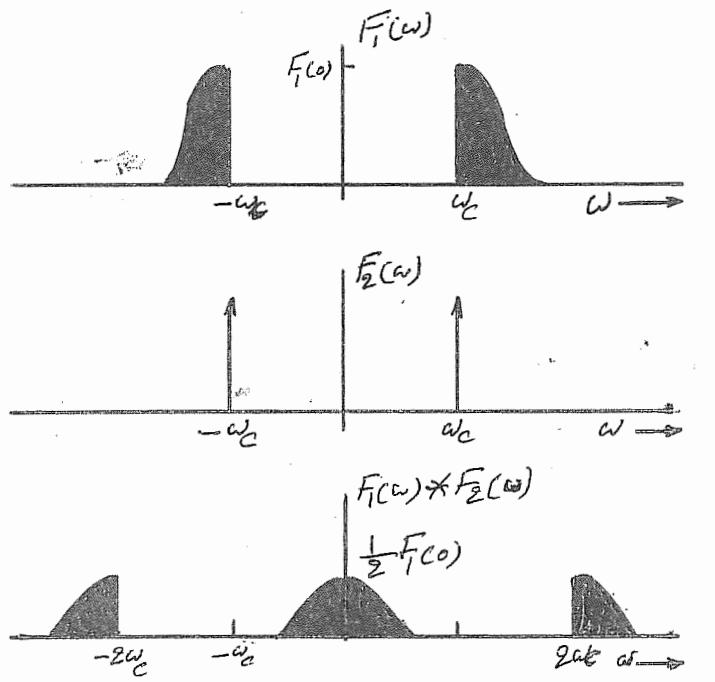
حال با پکار بردن قضیه کانولشن برای رابطه (۳-۲۹) خواهیم داشت:

$$f_h(t) = \frac{1}{\pi} f(t) * \frac{1}{t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

(۳-۳۰)

آشکار سازی سیگنال $\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{B}$ - $\mathcal{F}\mathcal{C}$

برای آشکار سازی $f(t)$ از سیگنال $\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{B}$ ، میایست طیف شکل $\mathcal{F}(\omega)$ و $\mathcal{F}\mathcal{C}$ را به موقعیت اولیه اش ($\omega = 0$) انتقال دهیم. این عمل بسادگی توسط آشکار سازی همزمان امکان پذیر است. ضرب سیگنال $\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{B}$ در $\cos \omega t$ (آشکار سازی همزمان) معادل کانولشن طیف $\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{B}$ با طیف $\cos \omega t$ (دواوپالس درجه $\pm \omega$) میباشد. در شکل (۳-۲۰) این عمل برای باند کناری فوقانی نشان داده شده است. واضح است که عمل کانولشن یک طیف $F(\omega)$ و یک سیگنال $\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{B}$ اضافی که دارای فرکانس کریر ω است بنا میدهد. بوسیله فیلتر پائین گذر میتوان جمهه اخیر و نامطلوب را حذف کرد. بنابراین آشکار سازی یک سیگنال $\mathcal{F}\mathcal{B}\mathcal{B}$ را میتوان بوسیله آشکار ساز همزمان انجام دار.



شکل ۳-۲۰

این نتیجه از نقطه نظر ریاضی چنین است :

میدانیم خروجی $e_d(t)$ آشکار ساز همزن بدهی ترتیب بدست می‌آید (با استفاده از رابطه

$$e_d(t) = \varphi_{SSB}(t) \cos \omega t = f(t) \cos^2 \omega t + f_g(t) \sin \omega t \cos \omega t \quad : (3-21)$$

$$= \frac{1}{2} f(t) + [f(t) \cos 2\omega t + f_g(t) \sin 2\omega t] \quad ۳-۲۱$$

+ پیام $(2\omega_c)$ با کسر SSB

حالات داخل گروشه رابطه (۳-۲۱) نمایشگر یک سیگنال SSB است که فرکانس کمتر آن $2\omega_c$

می‌شد . لذا از آشکار ساز همزن یک سیگنال اولیه $f(t)$ و یک سیگنال SSB با کریز

ω_c بدست می‌آید . این مؤلفه SSB را میتوان بوسیله فیلتر حذف و $f(t)$ را

آشکار ساخت . یکی از مدارهای شکل (۳-۲۷) را میتوان بعنوان آشکار ساز همزن پکاربرد .

برای آشکار سازی همزن ما نیازمند یک کریز محلی بفرکانس ω_c و درست با فاز معین —

هستیم . هر خطای خواه از ناحیه فرکانس یا فاز سیگنال کریر رخ دهد ، سبب اعوجاج خواهد شد . موجود بیت این نوع اعوجاج در بخش (۳-۵) مفصلأً بحث شده است .

آشکار سازی سیگنال RSB-LC

اگرnon یک سیگنال RSB با کریر قوی (RSB-Large Carrier) در نظر بگیریم این گونه سیگنالها را RSB-SC (در مقابل RSB-LC) تخلیص نموده و چنین بیان مینماییم .

$$e(t) = A \cos \omega t + [f(t) \cos \omega t + f_h(t) \sin \omega t]$$

حال بسادگی میتوان $f(t)$ را از $\varphi(t)$ بوسیله آشکار ساز همزمان [ضرب $\varphi(t)$ در استخراج کرد . البته اگر A (رامنه سیگنال کریر) ، بقدر کافی بزرگ باشد ، $f(t)$ را میتوان از $\varphi(t)$ بوسیله آشکار ساز پوش یا دیکتور یکسوساز استخراج و کشف نمود . اینرا میتوان با نوشتن $\varphi(t)$ بصورت زیر نشان داد :

$$\varphi(t) = [A + f(t)] \cos \omega t + f_h(t) \sin \omega t$$

$$= e(t) \cos(\omega t + \theta)$$

$$e(t) = \sqrt{[A + f(t)]^2 + f_h(t)^2}$$

که در آن

$$\theta(t) = -\tan^{-1} \left[\frac{f_h(t)}{A + f(t)} \right]$$

و

بدیهی است که $e(t)$ پوش سیگنال $\varphi(t)$ است . اگر $\varphi(t)$ برورودی یک

آشکارساز پوشی اثر دارد شود ، خروجی $e(t)$ خواهد بود :

$$e(t) = \sqrt{[A + f(t)]^2 + f_h(t)^2}$$

$$= A \left[1 + \frac{2f(t)}{A} + \frac{f(t)^2}{A^2} + \frac{f_h(t)^2}{A^2} \right]^{1/2}$$

اگر $|A| \gg |f(t)|$ باشد، در این صورت $A \gg |f_p(t)|$ خواهد بود و لذا جملات

$\frac{f_p(t)}{A^2}$ و $\frac{f_p^2(t)}{A^2}$ را میتوان صرفنظر کرد. پس

$$e(t) \approx A \left[1 + 2f(t)/A \right]^{1/2}$$

($f(t)/A \ll A$ حال با استفاده از بسط بینوم و حذف جملات توانهای بالا (چون

خواهیم داشت:

$$e(t) \approx A \left[1 + \frac{f(t)}{A} \right] = A + f(t)$$

پس در موقعی که کریر زیاد و قوی همراه δB است، $\varphi(t)$ دارای فرم $f(t) \approx B$ بود و سیگنال مزبور را میتوان توسط یک دتکتور پوشی آشکار و کشف نمود.

در پخش تصاویر تلویزیونی، سیگنال تصویر بصورت $C-\delta B-\delta C$ (همراه با کریر قوی) منتشر و پخش میگردد.

۳-۵ : اثرات خطاهای فرکانس و فاز در آشکار سازی همزمان

سیگنالهای AM را میتوانیم بدون تولید کریر محلی با دتکتور پوشی یا یکسوساز آشکار کنیم، زیرا بعلت وجود کریر زیاد و بزرگی که در سیگنال AM دریافت شده است، این احتیاج موقوع میگردد. اما در سیستمهای $AM-\delta C$ یعنی سیگنال مدوله شده دامنه با حذف کریر ($D\delta B-\delta C$ و $\delta S B-\delta C$)، انسان باید یک کریر محلی برای آشکار ساز همزمان در گیرنده تولید کند. در حقیقت فرکانس سیگنال کریر باید درست مانند فرکانس سیگنال فرستنده باشد. و همین فاز سیگنال کریر محلی میباشد برابر فاز سیگنال کریر مرجعی باشد که در گیرنده ظاهر میگشت. هر گونه اختلاف فاز یا خطای فرکانس سیگنال کریر محلی باعث بوجود آمدن اعوجاج در خروجی دتکتور خواهد شد. اگنون اثر خطای فرکانس سیگنال کریر محلی را خواهیم دید و مفصلابرای سیگنالهای $D\delta B$ و $\delta S B$ مورد بررسی و مطالعه قرار میدهیم.

DSB-SC -۱

۱- فرض کنید سیگنال دریافتی ما $f(t) \cos \omega_c t$ و کریر محلی $\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi]$ باشد . خطای فرکانس و فاز کریر محلی در این حالت بترتیب $\Delta\omega$ و φ هستند . در آشکارساز همزمان سیگنال دریافت شده در سیگنال کریر محلی ضرب و سپس بطوریکه در شکل (۳-۱) $e_d(t)$ خواهد شد و بدین فرم است :

$$e_d(t) = f(t) \cos \omega_c t \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi] \\ = \frac{1}{2} f(t) \{ \cos[(\Delta\omega)t + \varphi] + \cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi] \} \quad (3-32)$$

جهه دوم دست راست رابطه فوق نمایشگر طیفی است که در فرکانس $2\omega_c + \Delta\omega$ متغیرگشته و توسط فیلتر پائین گذری که فرکانس قطع آن ω_m است حذف و زایل میگردد . (شکل ۳-۱) خروجی فیلتر چنین است :

$$e_o(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos[(\Delta\omega)t + \varphi] \quad (3-33)$$

بطوریکه از رابطه فوق استنتاج میگردد ، خروجی دستگاه $f(t)$ نبوده بلکه در یک تابع زمانی دیگری ضرب شده است . بنابراین سیگنال خروجی اعوجاج دارد . توجه کنید : اگر $\Delta\omega = 0$ و $\varphi = 0$ صفر باشند (هیچ گونه خطای فرکانس و فازی نداشته باشیم) بطوریکه انتظار داریم :

$$e_o(t) = \frac{1}{2} f(t) \quad \text{خواهد شد .}$$

حال بباید دو حالت خاص در نظر گیریم :

۱- فقط خطای فاز داشته باشیم

$$\Delta\omega = 0 \quad \varphi \neq 0$$

۲- فقط خطای فرکانس داشته باشیم

$$\Delta\omega \neq 0 \quad \varphi = 0$$

اگر $\Delta\omega = 0$ باشد رابطه (۳-۳۳) بصورت زیر در میآید :

$$e_o(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos \varphi$$

اگر φ ثابت باشد، بدینه است که سیگنال خروجی متناسب با $f(t)$ است. وقتی $\varphi = 0$ است، سیگنال خروجی مانگزیم و هنگامی که $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ است مینیمم میشود.

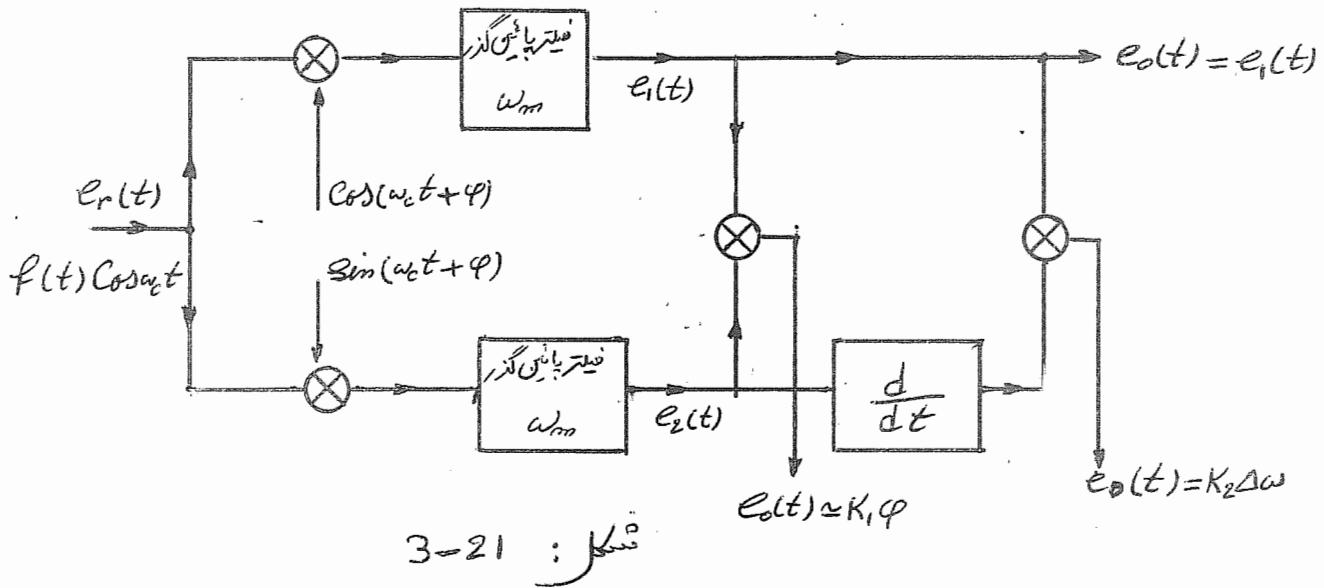
بنابراین خطای فاز در سیگنال کریر محلی سبب تضعیف سیگنال خروجی و مقدار آن متناسب با کسینوس خطای فاز است. البته تا وقتی که φ مقدار ثابتی است هیچگونه اعوجاجی در شکل موج سیگنال بوجود نمیآید. اما بدینخانه خطای فاز عموماً با زمان تغییر میکند. زیرا در نتیجه تغییر مینماید. لذا در اثر این عامل، فاز سیگنال وارد و سیگنال کریر محلی اختلاف فازی به طور تصادفی با زمان بوقوع میپیوند. پس بدین ترتیب ضریب بهره ($\cos \varphi$ ، Gain-factor) در گیرنده بطور تصادفی تغییر کرده و این برای ما ناخواسته است.

اگرچه حالی را در نظر میگیریم که $\varphi \neq 0$ است در این حالت معادله (۳-۳۳) بصورت زیر در میآید:

$$e_o(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t)$$

در اینجا خروجی دستگاه صرفاً تضعیف سیگنال اولیه نبوده بلکه اعوجاج پیدا میکند. چون $\Delta\omega$ معمولاً کوچک است، خروجی سیگنال $f(t)$ ایست که در یک سیگنال سینوزوئیدال با فرکانس کم ضرب شده است. این نسبتاً یک نوع اعوجاج نا مطلوب و بدی را ایجاد مینماید. بنابراین لازم است نوسان ساز محلی متناسب با آن تغییر کند و سنکرونیزه (همزمان) گردد. این عمل از طریق مدارهای فیدبک (تفذیه برگشتی) مختلفی انجام میشود. خطاهای فاز و فرکانس لازم برای تحریک مدار فیدبک را میتوان از یک سیستمی که در شکل (۳-۶۱) مصور گشته بددست آورد.

* تغییر تصادفی یونسکو رسیر انتشار!



شکل: 3-21

در اینجا خروجی نوسان ساز محلی بد و مؤلفه (سینوس و کسینوس) تقسیم و تفکیک میشود.

خروجی $e_1(t)$ حاصل ضرب سیگنال وارد $f(t) \cos \omega t$ و کویر $\cos(\omega t + \varphi)$ است که از درون یک فیلتر پائین گذر که قادر است فرکانس های بیش از ω_m رادیان بر ثانیه را حذف نماید میباشد.

$$f(t) \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} f(t) \cos \varphi + \frac{1}{2} f(t) \cos(2\omega t + \varphi)$$

(بوسیله فیلتر پائین گذر حذف میشود)

$$e_1(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos \varphi$$

بنابراین

بهمنی منوال میتوان نوشت:

$$e_1(t) e_2(t) = \frac{1}{4} f(t)^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

خواهد شد :

$$= \frac{1}{8} f(t)^2 \sin$$

$$\simeq \frac{1}{4} f(t)^2 \varphi$$

برای $\varphi \ll 1$

بنابراین خروجی متناسب با خطای فاز φ است. پلاریته سیگنال خروجی بستگی به مشت یا

منفی بودن خطای فاز دارد . این سیگنال را میتوان بعنوان کنترول ولتاژ بمنظور تنظیم نمودن فاز نوسان ساز محلی بکار برد . این طریقه کنترول نه فقط فاز نوسان ساز را کنترول مینماید بلکه فرکانس نوسان ساز را در یک میزان و درجه کمی تنظیم میکند .

اگر سیگنال $e_2(t)$ از یک مشتق گیر عبور و سپس در $e_1(t)$ ضرب شود ، میتوان نشان داد که خروجی $e_2'(t) e_1(t)$ متناسب با خطای فرکانس است . میتوان از این حقیقت دریافت که تغییرات لحظه ای فرکانس سیگنال برابر است ، با مشتق فاز . بنابراین خطای لحظه ای فرکانس سیگنال $\cos(\omega_c t + \varphi)$ برابر است با $\frac{d\varphi}{dt}$ لذا $\Delta\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ و داریم :

$$e_2'(t) = \frac{de_2}{dt} = \frac{1}{2} [f(t) \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + f'(t) \sin \varphi]$$

اگر φ کوچک باشد ، $\cos \varphi \approx 1$ و $\sin \varphi \approx 0$

$$e_2'(t) \approx \frac{1}{2} f(t) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} (\Delta\omega) f(t)$$

$$e_1(t) e_2'(t) = \frac{1}{4} f^2(t) \cos \varphi (\Delta\omega) \approx \frac{1}{4} f^2(t) \Delta\omega$$

بنابراین حاصل ضرب $e_1(t) e_2'(t)$ متناسب با خطای فرکانس $\Delta\omega$ است .

بمحض اینکه مدار ، خطای فاز و فرکانس را تنظیم نمود ، ملا سنگرونیزه مناسب بدست میآید . و

خروجی مطلوب ما حاصل میگردد .

$$e_1(t) = \frac{1}{2} f(t)$$

و خروجی $e_2(t) = \frac{1}{2} f'(t)$ میشود

$$\underline{\underline{BB - BC}} \quad -2$$

سیگنال وارد BB به گیرنده ما طبق رابطه (۳-۲۸) میباشد . ما در اینجا باند کناری تحتانی را در نظر میگیریم . البته برای باند کناری فوقانی همین روش نیز مترتب است .

$$q_{BB}(t) = f(t) \cos \omega_c t + f_p(t) \sin \omega_c t$$

فرض کنید سیگنال کریر محلی ما $\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi]$ باشد، حاصل ضرب سیگنال وارد و

$$e_d(t) = \psi_{SS_B}(t) \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi] \quad \text{کریر محلی } e_d(t) \text{ خواهد شد:}$$

$$= [f(t) \cos \omega_c t + f_p(t) \sin \omega_c t] \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi]$$

$$= \frac{1}{2} f(t) \left\{ \cos[(\Delta\omega)t + \varphi] + \cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi] \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} f_p(t) \left\{ \sin[(\Delta\omega)t + \varphi] \cancel{\cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \varphi]} \right\}$$

میتوان جملاتی را که شامل فرکانس $\omega_c + \Delta\omega$ هستند بوسیله فیلتر پائین گذر محو زایل

نمود. (شکل ۳-۲۰) خروجی فیلتر $e_o(t)$ خواهد بود:

$$e_o(t) = \frac{1}{2} f(t) \cos[(\Delta\omega)t + \varphi] - f_p(t) \sin[(\Delta\omega)t + \varphi] \quad (3-36)$$

بطوریکه مشاهده مینمایید خروجی شامل سیگنال $f_p(t)$ است و نمیتوان آنرا فیلتر کرد و حذف

نمود. اگون نشان میدهیم که این نوع اعوجاج یک اعوجاج ناشی از فاز است. اگر تمام فرکانس‌های $f(t)$ را از نظر فاز باندازه φ رادیان انتقال دهیم، نتیجه دقیقاً در رابطه ۳-۳۷ خواهد بود. این را میتوان بهبودت با تبدیل فوریه رابطه (۳-۳۷) نشان داد.

$$E_o(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega) \cos \varphi - F_p(\omega) \sin \varphi]$$

$$E_o(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega) \left[\cos \varphi - j e^{-j\varphi \omega} \sin \varphi \right] \quad \text{اما از رابطه (3-23) داریم} \\ F_p(\omega) = j e^{-j\varphi \omega} \sin \varphi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} F(\omega) e^{j\varphi} & \omega > 0 \\ \frac{1}{2} F(\omega) e^{-j\varphi} & \omega < 0 \end{cases} \quad (3-38)$$

از رابطه (۳-۳۸) پیداست که $e_o(t)$ را میتوان از $f(t)$ با انتقال فاز تمام مؤلفه‌های فرکانسی ثابت باندازه φ و برای مؤلفه‌های فرکانس منفی بقدر $-\varphi$ بدست آورد. بنابراین خطای فاز در کریر محلی سبب اعوجاج فازی در خروجی ریکتور خواهد شد. سیگنال

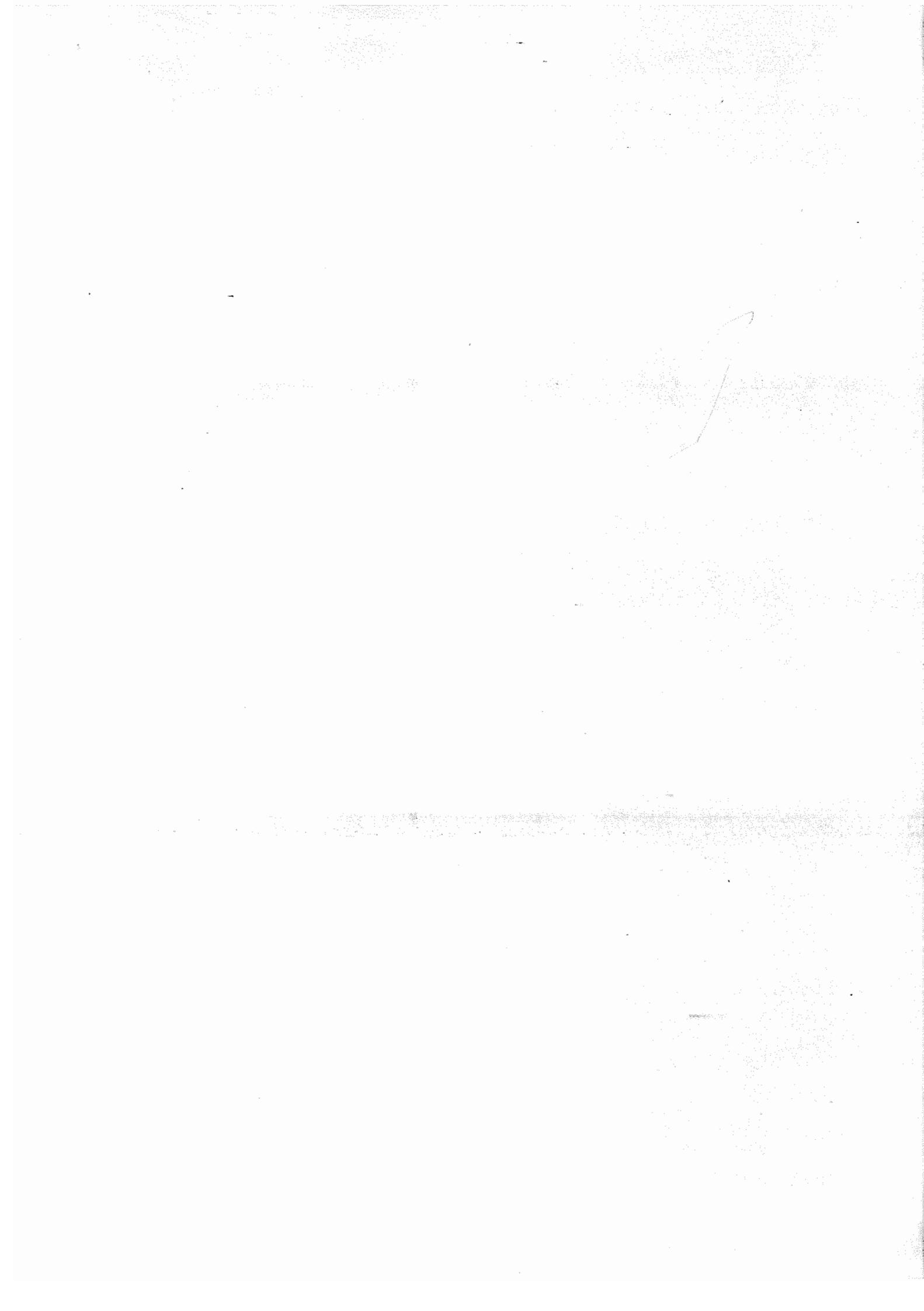
خروجی اعوجاج یافته سیگنال $f(t)$ است که هر مؤلفه فرکانس آن به مقدار معینی انتقال فاز یافته است. میبایست در اینجا خاطر نشان کنیم که اعوجاج ناشی از انتقال فاز معمولاً در ارتباط مکالمات چندان مهم نبوده زیرا بگوش انسان نسبت به اعوجاج فازی خیلی حساس نیست این اعوجاج ممکن است کیفیت مکالمات را تغییر دهد، لیکن صدا هنوز وضع خود را دارد. البته در ارسال و انتشار سیگنال‌های موزیک و تصویر تلویزیونی اثر اعوجاج فاز مشهود و غیر قابل اغماض است.

بسهولت میتوان نشان داد که اگر $\phi = \phi_0$ باشد، اثر خطای فرکانس در سیستم SSB درست شبیه DSB است (مشروط بر آنکه ω_0 کوچک باشد).

۶-۳: تکنیک وارد نمودن سیگنال کریر بمنظور آشکار سازی سیگنال با حذف کریر

امکان آشکار ساختن یک سیگنال با حذف کریر توسط دوباره وارد نمودن سیگنال کریر در گیرنده را چندی پیش مذکور شدیم. این تکنیک غالباً برای $DSB-SC$ و $SSB-SC$ بخوبی عرضی است. بعد از آنکه بقدار کافی سیگنال کریر دوباره در سیگنال دریافت شده وارد گردید، انسان میتواند از آشکار ساز یکسو ساز یا آشکار ساز پوشش استفاده کند. برای جلوگیری از اعوجاج میبایست فاز و فرکانس سیگنال کریر میبایست بنحوه مناسبی با سیگنال کریر فرستنده همزمان باشد. اگرچه میخواهیم سیگنال‌های $SSB-SC$ و $DSB-SC$ را جداگانه مورد مطالعه قرار دهیم.

1- $DSB-SC$: در اینجا سیگنال دریافت شده بصورت $f(t) \cos \omega_c t$ میباشد. حال فرض کنید سیگنال کریر بفرم $A \cos(\omega_c t + \varphi)$ باشد. بنابراین سیگنال منتجه $r(t) = f(t) \cos \omega_c t + A \cos(\omega_c t + \varphi)$ چنین خواهد شد:



خروجی، اعوجاج یافته سیگنال $f(t)$ است که هر مولفه فرکانس آن بمقدار معینی انتقال فاز یافته است. میبایست در اینجا خاطر نشان کنیم که اعوجاج ناشی از انتقال فاز معمولاً در ارتباط مکالمات چندان مهم نبوده زیرا بگوش انسان نسبت به اعوجاج فازی خیلی حساس نیست این اعوجاج ممکن است کیفیت مکالمات را تغییر دهد، لیکن صدا هنوز واضح خود را دارد. البته در ارسال و انتشار سیگنالهای موزیک و تصویر تلویزیونی اثر اعوجاج فاز مشهود و غیر قابل اغماض است.

بسهولت میتوان نشان داد که اگر $\phi = 0$ باشد، اثر خطای فرکانس در معیقتمن $S S B$ درست شبیه $D S B$ است (مشروط بر آنکه ω کوچک باشد).

۳-۶ : تکنیک وارد نمودن سیگنال کریز بمنظور آشکار سازی سیگنال با حذف کریز

امکان آشکار ساختن یک سیگنال با حذف کریز توسط دوباره وارد نمودن سیگنال کریز در گیرنده را چندی پیش مذکور شدیم. این تکنیک غالباً برای $D S B-S C$ و $S S B-S C$ بخوبی عملی است. بعد از آنکه بقدار کافی سیگنال کریز دوباره در سیگنال دریافت شده وارد گردید، انسان میتواند از آشکار ساز یکسو ساز یا آشکار ساز پوشی استفاده کند. برای جلوگیری از اعوجاج میبایست فاز و فرکانس سیگنال کریز میبایست بنحوه مناسبی با سیگنال کریز فرستنده همزمان باشد. اکنون میخواهیم سیگنالهای $D S B-S C$ و $S S B-S C$ را جداگانه مورد مطالعه قرار دهیم.

- ۱ $D S B-S C$: در اینجا سیگنال دریافت شده بصورت $f(t) \cos \omega_c t$ میباشد. حال فرض کنید سیگنال کریز بفرم $A \cos(\omega_c t + \varphi)$ باشد. بنابراین سیگنال منتجه $r(t) = f(t) \cos \omega_c t + A \cos(\omega_c t + \varphi)$ چنین خواهد شد:

-۲-۴-

$$\frac{\cos \varphi \cos \omega t - [A \sin \varphi] \sin \omega t}{(4-41)}$$

$$\frac{[A]^2 - 2Af(t)[1 - \cos \varphi]}{[A]^2 - 2Af(t)[1 - \cos \varphi]} \cos(\omega t + \theta) \quad (4-42)$$

$$r(\omega t + \theta) \quad (4-43)$$

که در این

$$\left\{ [A + f(t)]^2 - 2Af(t)[1 - \cos \varphi] \right\}^{1/2} \quad (4-44)$$

$$= \sqrt{\frac{A \sin \varphi}{f(t) + A \cos \varphi}} \quad ,$$

از رابطه (4-44) در میبایم که $r(t)$ مدارله (4-42) بوش (

باشد $r(t)$ چنین خواهد شد

$$A + f(t)$$

لذا $f(t)$ را میتوان از $r(t)$ بوسیله آشکار ساز بوش یا پکسوسازی دو توجه کنید که در این حالت $r(t) = [A + f(t)] \cos \omega t$ باشد . البته $f(t) > 0$ است و میتوان آنرا بشرط آنکه برای تمام مقادیر t ، باشد توسط آشکار ساز بوش یا پکسوسازی کشف کرد .

البته اگر خطای فاز φ صفر نباشد ، افوجاج بدهید میاید . مدارله (4-42)

$$1 + \frac{2f(t)}{A} \cos \varphi + \left[\frac{f(t)}{A} \right]^2 \quad \text{باشد صورت نوشته :}$$

اگر $A \gg |f(t)|$ باشد خواهیم داشت :

$$A + f(t) \cos \varphi \quad (4-45)$$

و سینگال ما در خروجی $f(t) \cos \varphi$ خواهد بود . اگر φ ثابت باشد سیستم بدون افوجاج باقی میماند لیکن تحت ضرب $\cos \varphi$ تضعیف میگردد . نتیجه ایست که برای آشکار ساز همزمان بدست آورده ایم .

در حالت بعدی ما ω و خطای فرکانس یعنی ω را مخالف صفر ($\omega \neq 0$) در نظر میگیریم. بنابراین

$$r(t) = f(t) \cos \omega t + A \cos [\omega t + (\phi(t))]$$

توجه کنید که این معادله شبیه معادله (۲-۲۹) است و فقط تفاوتی که دارد φ جای خود را در معادله (۲-۲۹) با $\phi(t)$ دارد است. بنابراین خواهیم داشت

$$e(t) \approx A + f(t) \cos(\omega t)$$

این اوجاچ نز شبیه اوجاچ است که در آشکار ساز همزمان هنگامیکه خطای فرکانس در فرکانس کمتر محلی وجود داشت میباشد.

: در اینجا ابتدا کمتر محلی را فقط با خطای فاز در نظر میگیریم: SSB-RC

$$r(t) = \varphi_{SSB}(t) + A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= [f(t) \cos \omega t + f_\phi(t) \sin \omega t] + A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= [A \cos \varphi + f(t)] \cos \omega t + [f_\phi(t) - A \sin \varphi] \sin \omega t$$

$$= e(t) \cos(\omega t + \theta)$$

که در آن

$$e(t) = [A^2 + 2Af(t) \cos \varphi - 2Af_\phi(t) \sin \varphi + f^2(t) + f_\phi^2(t)]^{1/2} \quad (2-44)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{A \sin \varphi - f_\phi(t)}{A \cos \varphi + f(t)} \right]$$

اگر $|f_\phi(t)| \gg |f(t)|$ ، $A \gg |f(t)|$ باشد . خواهیم داشت:

$$e(t) \approx A + f(t) \cos \varphi - f_\phi(t) \sin \varphi$$

میتوان توسط آشکار ساز بوش یا آشکار ساز یکشونه ساز $e(t)$ را استخراج نمود . ثابت A

را میتوان با یک خازن حذف کرد و نتیجه خروجی خازن خواهد شد :

$$e_o(t) = f(t) + C \cos \varphi - f_b(t) \sin \varphi \quad (3-45)$$

این خروجی شبیه معادله (3-37) است . قبل از در بخش (3-5) نشان دادیم که در رابطه (3-45) نتایشگر سیگنال اولیه $f(t)$ با اعوجاج فازی میباشد : لذا خطای آشکار ساز همزمان است و قبل مشاهده شد . خوانندگان میتوانند نشان دهند که خطای فرکانس در کمتر محلی در تکنیک دوباره وارد نمودن کمتر اعوجاجی بوجود میآورد که مانند اعوجاج در آشکار ساز همزمان ملاحظه شده شد . خوانندگان میتوانند آنست که در تکنیک آشکار ساز همزمان ملاحظه گردید . توجه کنید هنگامیکه در رابطه (3-45) $\varphi = 0$ است رابطه بدین فرم در می‌آید :

$$e_o(t) = A + f(t)$$

بنابراین اگر سیگنال کمتر قوی در سیگنال $S S B - S C$ وارد گردد عمل آشکار سازی را — میتوان توسط دیکتور پوش یا دیکتور یکسو ساز انجام داد . ممکن است بجای آنکه سیگنال کمتر را در گیرنده وارد نمائیم ، مقداری سیگنال کمتر قوی توسط فرستنده ارسال داریم . در این صورت سیگنال دریافت شده ، $S S B$ با مقدار زیادی کمتر است که میتوان با آشکار ساز پوش (یا دیکتور یکسو ساز) شبیه سیگنالهای AM آنرا آشکار ساخت . سیگنال $S S B$ همراه با یک کمتر قوی را میتوان از سیگنال AM با حذف یکی از باندهای گناری (سایدهای باند) بدست آورد .

این طریقه ارسال یعنی $S S B$ همراه با کمتر قوی] [*S S B with Large Carrier*]

هر دو نتایج سیستم های $A M$ و $S S B$ را دارا میباشد . در این سیستم فقط نصف باند AM لازم است و ضمناً نیز سارگی مزایای آشکار ساز پوشی را مانند سیگنال AM را در بردارد . این روش ارسال با مختصی تفاوت در سیگنالهای تصویر تلویزیون بکار میروند . (به بخش ۳-۸) مراجعه شود .

از این بحث نتیجه میگیریم که سیگنال های با حذف گریر را میتوان بوسیله وارد نمودن یک سیگنال گریر بمقدار کافی قوی در گیرنده آشکار کرد . این نتیجه برای سیگنالهای $D\delta B$ استثنائی است زیرا اضافه نمودن سیگنال گریر قوی و بمقدار کافی به سیگنالهای $D\delta B-SC$ آرا به سیگنال AM تبدیل میکند . البته این نتیجه برای $SC-\delta B-\delta C$ واضح و روشن نیست آنرا میتوان بدین شرح از نظر کیفیت تشریح کرد : هنگامیکه یک سیگنال قوی گریر به سیگنال $SC-\delta B$ اضافه شود ، سیگنال گریر بر سیگنال حاصله مسلط شده و سیگنال اولیه $\delta C-\delta B$ بر روی این گریر سوار میشود . بنابراین سیگنال حاصل دارای گذشت از صفرهای شبیه به آن گریر خواهد بود . از اینرو استفاده گردن از آشکار ساز در این حالت معادل ضرب سیگنال در موج مربعی $P(t)$ خواهد بود . بدینه است که این عمل معادل عمل آشکار ساز همزمان میباشد . وضعاً ما نیز نشان داریم که خطای فاز و فرکانس در تکنیک دو باره وارد نمودن سیگنال گریر اعوجاج را زیاد میکند همانطوریکه در تکنیک های ریکسیون سنکرون ملاحظه گردید .

۳-۱ : مقایسه سیستمهای مختلف AM

حالات مختلف سیستمهای AM ($SC-\delta B$ ، $D\delta B$ ، $AM-SC$) را مطالعه کرده ایم و حال جالب خواهد بود که این سیستمهای را از نقطه نظرهای مختلف با یک یگر مقایسه نمائیم .

در گیرنده برتریهای و مزایایی بر $AM-SC$ دارد . آشکار گننده های مورد نیاز AM نسبتاً ساده تر (آشکار گننده های یکسو ساز و پوششی) از آشکار گننده های لازم برای سیستم حذف گریر میباشند . به همین دلیل در همه سیستمهای ارتباط عمومی (کمونیکاسیون عمومی) AM را بکار میبرند . علاوه بر آن ، سیگنالهای AM نسبت به سیگنالهای حذف گریر در سطوح پرقدرت ($High Power$) ساده تر تولید میشوند . مدولا تورهای متعارفی که در سیگنالهای حذف گریر مورد لزوم است ، از بعضی جهات مشکلتر ساخته میشوند .

سیستم حذف کریکر بر AM از نظر احتیاج به قدرت کمتری برای انتقال اطلاعات مزینت دارد . این بجزی ، انتقال با سیستم حذف کریکر را ارزانتر از AM می‌سازد . با اینهمه گیرنده‌ها در این سیستم پیچیده ترند ، زیرا بایستی قادر به ایجاد یک کریکر محلی با فزار و فرکانس صحیح باشند ، برای سیستمهای ارتباط نقطه به نقطه (Point-to-Point) که در آنها هر فرستنده گیرنده‌های مددودی دارد ، این پیچیدگی در گیرنده میتواند معقول باشد .

اثر Selective fading (کم شدن قدرت انتخاب مناسب) (نسبت به انتقال چند خطی) در AM بسیار بیشتر از AM-SC ایجاد مزاحمت مینماید . کم شدن قدرت فریزینگ به علت رسیدن سیگنال به گیرنده روی بیش از یک مسیر انتشار ، با فواصل مختلف می‌باشد ، و این باعث تغییر کردن فاز سیگنال‌هایی که روی مسیرهای مختلف واصل می‌شوند می‌گردد . سیگنال منتهی مجموع سیگنال‌ها نیست که از مسیرهای مختلف واصل می‌شوند . امواج سیگنال (Signal Wave) در طول مسیرشان تحت اثر یونسفر و زمین قرار می‌گیرند .

ولذا علاوه بر این باعث تغییر طول مسیر می‌شوند . فاز سیگنال‌هایی که از راههای مختلف به گیرنده رسیدند نیز پر واضح است که در عمل تغییر خواهند کرد ، ولذا طول سیگنال منتهی هم علاوه تغییر مینماید . این پدیده را fading (کم شدن قدرت) مینامند . کاهش قوه fading (اثر کاهش قوه fading) این پدیده را می‌نماید . به این ترتیب کریکر و هر یک از باندهای کناری تحت اثر کاهش قوه ای مختلفی قرار می‌گیرند ، این اثر Selective fading ناهمیده می‌شود .

اثر Selective fading باندهای کناری را به مقادیر مختلف تغییر دارد و باعث تغییر شکل و عدم صحت آنها می‌گردد . این پدیده رابطه بین مقادیر کریکر و باندهای کناری را هم تغییر میدهد و این ممکن است باعث آنچنان کاهش در قدرت کریکر نسبت به باندهای کناری گردد که در

نقطه‌ای که در آنجا شرایط (۴-۳) برقرار بود، دیگر برقرار نباشد. اینچنین موجی — زمانیکه با یک آشکار ساز پوش (یا یکسوساز) آشکار می‌شود، به اندازه زیادی تغییر نموده است.

اثر Selective fading در فرکانس‌های زیاد شدید تراست، لذا بدینه است که در فرکانس‌های بالا، سیستم حذف کریم ارجع خواهد بود.

و حالا DSB-SC را با SSB مقایسه می‌نماییم. در اینجا ملاحظه می‌شود که SSB تقریباً همیشه بهتر است، در زیر برتری‌های SSB را بر DSB ملاحظه میفرمایید.

۱- پهنای باند لازم در سیگنال‌های SSB نصف مشابه خود در سیگنال‌های DSB می‌باشد.

۲- اثر Selective fading که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، فاز و روابط باند‌های

کناری را در DSB تغییر میدهد و این باعث افزایش بی نظمی در خروجی آشکار ساز می‌شود. در SSB چون تنها یک باند فرعی داریم، این امکان وجود ندارد. در انتشار مسیرهای طویل و دور، آثار Selective fading DSB برای DSB مضرتر از SSB می‌باشند. به این دلیل DSB-SC بر SSB-SC ترجیح دارد می‌شود.

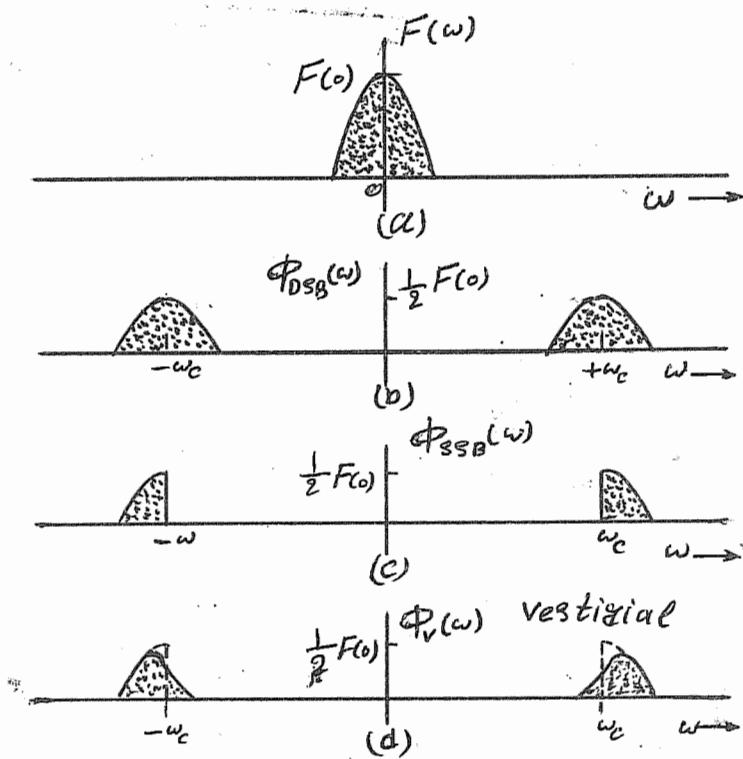
در ارتباطات دور که از فرکانس‌های زیاد استفاده می‌گردد، و بخصوص در فرکانس‌های صوتی برای آنها آشفتگی‌های فاز نسبتاً بی اهمیت هستند و نیز در رادیو فرستنده گیرنده آماتوری از سیگنال‌های SSB استفاده می‌شود.

با اینهمه SSB از یک نظر بر DSB عدم رجحان ندارد، ثولید سیگنال‌های سطح بالای SSB بسیار مشکلتر از تولید سیگنال‌های DSB می‌باشد (بخش ۴-۳ را ببینید). این کمپوند و عیب با چیزیکه vestigial sideband transmission (ارسال

باند های کناری و ستیجیال) نامیده میشود اصلاح میگردد . این روش ارسال در حقیقت ترکیبی است از DSB و SSB به این ترتیب که برتریهای دو سیستم را جمع نموده و - کهورهایشان را حذف میکند . این روش را در زیر توضیح میدهیم .

۳-۸: ارسال و ستیجیال باند های کناری

در بخش (۳-۳) گفتیم که تولید سیگالهای SSB نسبتاً مشکل میباشد ، چنانچه بخواهیم روش گذراندن از فیلتر (filtering) را برای تولید SSB بکار ببریم ، یعنی از گذراندن یک سیگنال DSB از فیلتر استفاده نمائیم ، فیلتر مورد نیاز بایستی یک خاصیت گذراندن بسیار دقیق (تیز) داشته باشد و این امر تولید اشکال میکند . برای حل این مسئله ، ترکیبی از DSB و SSB بکار گرفته میشود که بنام ارسال و ستیجیال باند های کناری نامیده میشود . در این روش بجای حذف کامل یک باند کناری (مانند SSB) از بریدن تدریجی آن باند کاری استفاده میشود ، همچنانکه در شکل (۳-۲۲) نشان داره شده است .



3-22

مشخصه های باند کناری بریده شده بنویسیت که حذف جزئی باند کناری متنقل شده (باند کناری بالائی در شکل ۲۲-۳) در همیایگی کریز کاملاً بوسیله انتقال جزئی قسمت مریسو ط به باند کناری حذف شده انجام میگیرد (پائین ترین باند کناری در شکل ۲۲-۴) بدین دلیل میتوان سیگنال حاصل را کاملاً بوسیله یک آشکار ساز مناسب رو باره آشکار نمود . اگر یک کریز بزرگ آزاد با باند های کناری وستیجیال انتقال داده باشد ، سیگنال را میتوان رو باره در گیرنده با یک آشکار کننده پوشی (یا یکسو ساز) آشکار شود . در حالت باند کناری وستیجیال سیشم حذف کریز ، سیگنال را میتوان رو باره با آشکار کننده همزمان (یا با وارد - نمودن کریز و آشکار سازی پوشی) آنرا آشکار ساخت .

و حالا فیلتر مفاسی را که مشخصه های مورد نیاز برای تولید علام وستیجیال باند های کناری از علام DSB را دارا باشد ، پیدا مینماییم .

فرض کنید $H(\omega)$ تابع انتقال فیلتر مورد نیاز باشد (شکل ۲۲-۳) ، اگر سیگنال پیام و $F(\omega)$ تبدیل فوری آن باشد ، در این صورت $\Phi_v(\omega)$ طیف سیگنال وستیجیال بصورت زیر دارد میشود

$$\Phi_v(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)] H(\omega) \quad (22-46)$$

که در آن $\Phi_v(t)$ سیگنال باند کناری وستیجیال و $\Phi_d(t)$ تبدیل فوری آنست (شکل ۲۲-۳) . سیگنال اصلی $f(t)$ را میتوان از $\Phi_v(t)$ با آشکار سازی همزمان حاصل نمود .

بصورت زیر خواهد بود .

$$e_d(t) = \Phi_v(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{1}{2} [\Phi_v(\omega + \omega_c) + \Phi_v(\omega - \omega_c)]$$

و با جانشین کردن معادله (۲۲-۴۶) در این معادله خواهیم داشت :

$$e_d(t) \leftrightarrow \frac{1}{4} \left\{ [F(\omega + 2\omega_c) + F(\omega)] H(\omega + \omega_c) + [F(\omega) + F(\omega - \omega_c)] H(\omega - \omega_c) \right\}$$

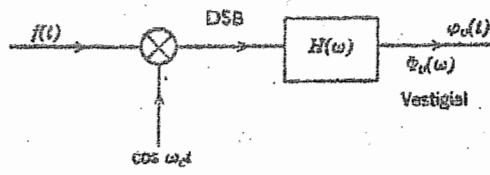


Figure 3.23

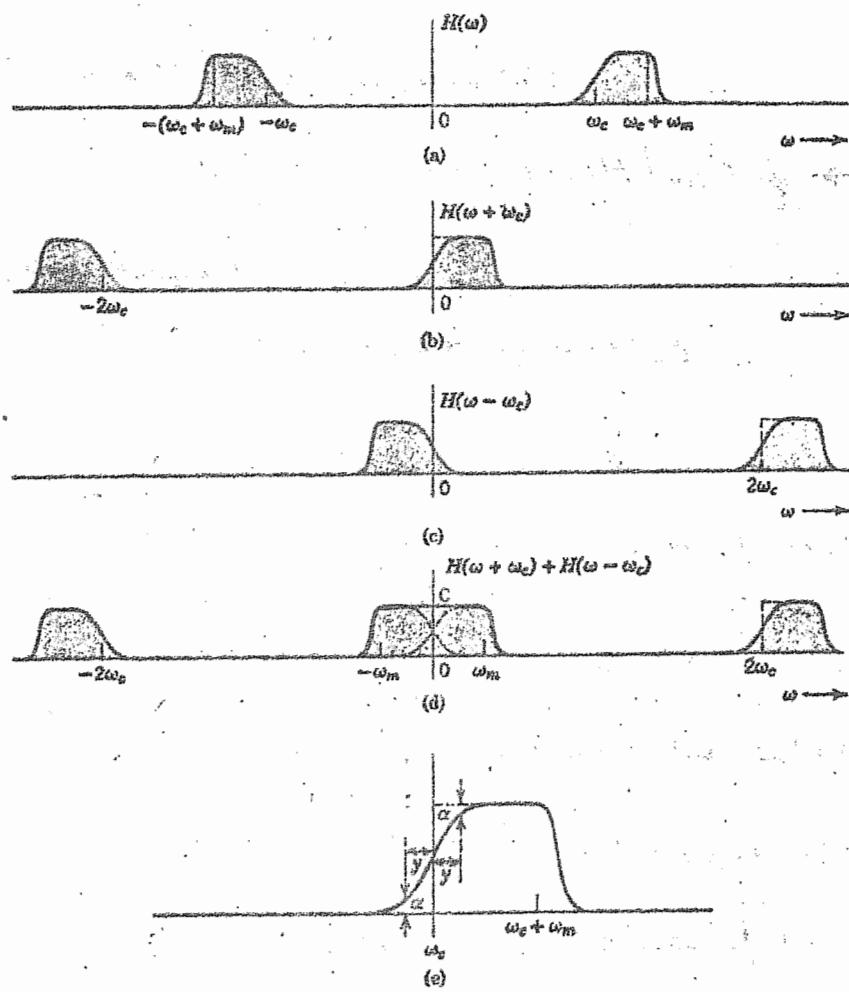


Figure 3.24

جمل $\pm 2\omega_c$ و $F(\omega)$ نشان دهنده انتقال $F(\omega - 2\omega_c)$ و $F(\omega + 2\omega_c)$ میباشد، و میتوان بلیک فیلتر پائین گذر (Low Pass filter) آنها را حذف نمود.

خروجی منجیه $e_o(t)$ بصورت زیر است

$$e_o(t) \leftrightarrow \frac{1}{4} [F(\omega)] \times [H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)] \quad (3-47)$$

و برای دریافت بدون اعوجاج سیگنال باید راشته باشیم:

$$e_o(t) \leftrightarrow K F(\omega)$$

در این صورت تابع انتقال $H(\omega)$ میباشند در شرط زیر صدق کند

$$H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = C \quad (C \text{ ثابت است}) \quad (3-48)$$

با توجه به معادله (3-47)، مشاهده میشود که چون $|w| > \omega_m$

است، لذا میباشند رابطه (3-48) تنها در $|w| < \omega_m$ صادق باشد، لذا داریم:

$$H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = C \quad |w| < \omega_m$$

جمل $H(\omega - \omega_c)$ و $H(\omega + \omega_c)$ به فرکانس‌های $\omega - \omega_c$ و $\omega + \omega_c$ نمایشگر انتقال $H(\omega)$ است. این امر در شکل‌های (3-24C) و (3-24D) نشان داده شده است، مجدداً

این دو جمله میتواند در فاصله $|w| < \omega_m$ ثابت باشد.

بسارگی (شکل 3-24) میتوان دریافت که این امر فقط وقتی ممکن است که مشخصه قطع فیلتر

در اطراف گیر حالت کامل^۱ متقارن راشته باشد. (همچنان‌که در شکل 3-22-۴ نشان

داره شده است).

بدین ترتیب نشان داره ایم که با آشکار سازی همزمان میتوان از یک سیگنال باند کناری و سنجیال و نیز حذف گریر، سیگنال اولیه را بدست آورد. میتوان نشان دار که اگر کمیت بزرگی از گیر به سیگنال باند کناری و سنجیال افزوده شود، آشکار سازی را میتوان با آشکار ساز پوششی (یا یکساز) نیز انجام دار. این امر از نظر کیفی بسارگی قابل توجیه است، اگر دامنه

گریر بسیار بلند باشد (نسبت به ϕ_{ν}) ، سیگنال ترکیب شده در حدود همان نقاطی که گریر صفر میشود ، صفر خواهد شد و بنابراین یکسو سازی اینچنین سیگنالی معادل ضرب سیگنال در معن مربعی $P(t)$ خواهد بود و بدینه است که هم ارز با آشکار سازی همزمان میباشد .

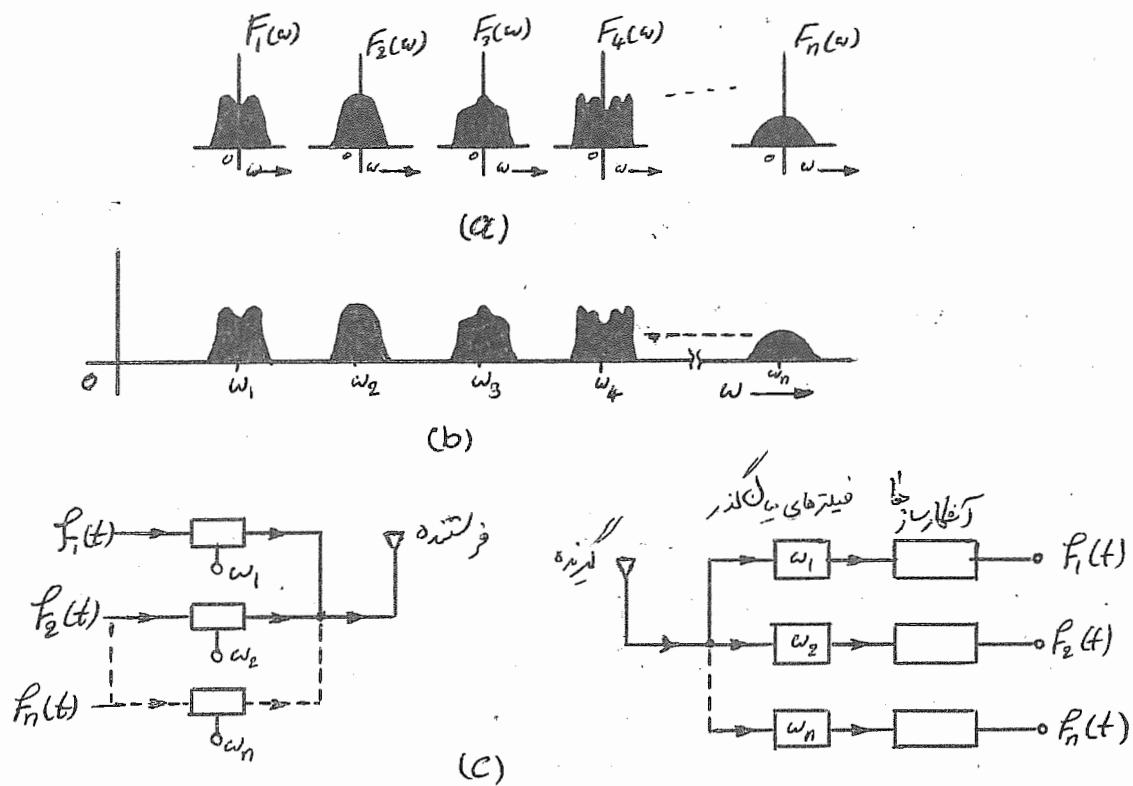
باند های گذاری وستیجیال ، برتری های FSB و $D\delta B$ را ترکیب نموده و گاستی های آنها را حذف مینماید . در عمل ، در اینجا ما به همان پهنانی باندی محتاجیم که در — FSB ($D\delta B$) لازم بود (نصف $D\delta B$) ، و میتوان آنرا از سیگنالهای $D\delta B$ با فیلترهای *Selective fading* نسبتاً ساده تری با منحنی مشخصه برش تدریجی بدست آورد . از نظر $D\delta B$ و AM هم در اینجا آزادی بیشتری داریم . اگر یک گریر بزرگ به سیگنال وستیجیال اضافه شود ، میتوان آنرا با آشکار ساز پوش آشکار ساخت ، در این روش باند های گذاری وستیجیال همه برتریهای AM و $D\delta B$ و FSB را ترکیب مینماید . در سیستمهای تلویزیون عمومی ، سیگنالهای تصویر تلویزیونی با باند های گذاری وستیجیال منتقل میشود ، و این امر آشکار سازی سیگنال را با آشکار ساز پوشش کر گیرنده ممکن میسازد .

۳-۹ : مولتنی پلکسینگ تقسیم فرانکنس

از آنچه تا گذون در مورد مدولا سیون گفتیم به سادگی میتوان فایده مدولا سیون را در ارسال چند سیگنال بطور همزمان و در آن واحد درک نمود . فرض کنید میخواهیم n سیگنال را روی یک کانال در آن واحد انتقال دهیم ، و فرض کنید که هر سیگنال با باند محدود Δf_m را دیگری داشته باشد . برای اینکار ما از AM استفاده خواهیم کرد ، اما این توضیحات میتوانند بر ثانیه منتقل شود . برای اینکار ما از AM سیگنال اگذون با گریر های ω_1 و ω_2 عیناً در سایر روشها ای انتقال هم بکار رود . فرض میگنیم این n سیگنال اگذون با گریر های ω_1 و ω_2 مدله شده اند ، بطوريکه هر گریر از گریر مجاور خود لااقل به اندازه $\frac{1}{2} \Delta f_m$ را دیگری داشته باشد . هر سیگنال مدله شده دارای پهنانی باندی برابر $\frac{1}{2} \Delta f_m$ بوده

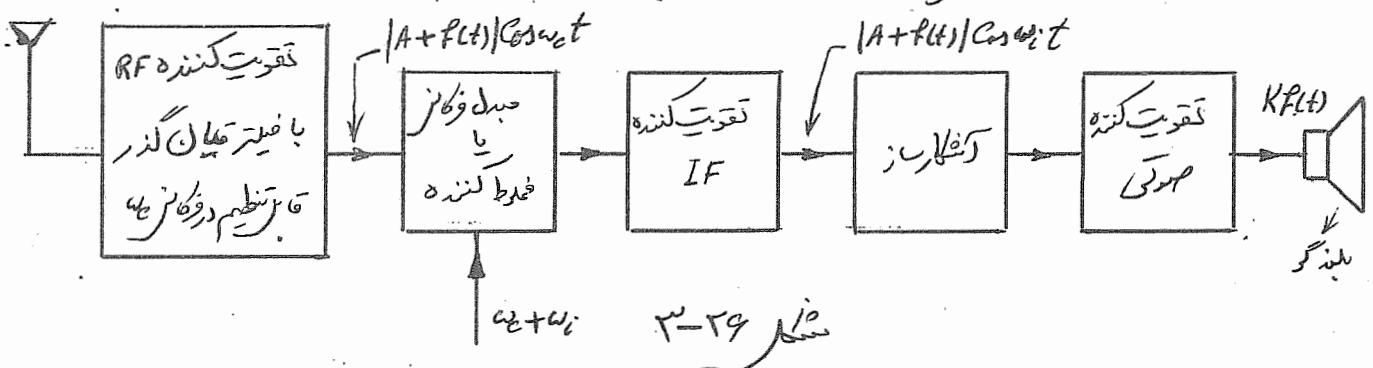
و همین طیف‌ها در فرکانس‌های منفی نیز وجود دارد شکل (۳-۲۵) ، طیف سیگنال‌های جداگانه و شکل ۳-۲۵(a) طیف مجموع سیگنال‌های مدوله شده در فرستنده را نشان میدهد . در گیرنده طیف‌های گوناگون با استفاده از فیلتر میان گذر مناسب جدا می‌شوند . برای بدست آوردن سیگنال‌های اصلی ، سیگنال‌ها را بعد از فیلتر کردن آشکار می‌گردند . فرستنده و گیرنده های رادیو و تلویزیون مثال‌های آشنایی از مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس می‌باشند ، هر فرستنده یک سیگنال مدوله شده را با کریری که از کریرهای ایستگاه‌های فرستنده دیگر لااقل به اندازه 10 KHz جدا است می‌فرستد . در فرستنده رادیو این در حدود 10 KHz می‌باشد . گیرنده میتواند سیگنال‌های مطلوب را با مدار هماهنگ مناسب بگیرد و به باند مورد نظر اجازه عبور را دارد و سایر فرکانس‌ها را تضعیف مینماید این سیگنال حال نیز بود وله می‌شود تا سیگنال اولیه بدست آید . با اینهمه تقریباً در همه گیرنده‌های تجاری AM ، آشکار سازی مستقیماً انجام نمی‌گیرد . سیگنال مدوله شده نخست به یک فرکانس ثابت بنام فرکانس میانی (IF) و برابر با 455 KHz است . انتقال سیگنال به یک فرکانس میانی ، با مدولاسیون سیگنال وارد شده و یک سیگنال محلی که در گیرنده تولید می‌شود و فرکانس آن با کریر وارد شده به اندازه 455 KHz اختلاف دارد انجام می‌گیرد . سیگنالی که اکنون به یک فرکانس ثابت 455 KHz تبدیل شده است ، تقویت و آشکار شده تا سیگنال مورد نظر بدست آید . فایده تبدیل به یک فرکانس میانی آنستکه برای دریافت ایستگاه‌های مختلف کافیست تنها نخستین طبقه (Stage) و نوسان گندله محلی تنظیم شود ، و به این ترتیب تمام تقویت گنده‌ها بعدی احتیاج به تنظیم نخواهد داشت .

* فرکانس میانی - intermediate frequency



(3-25) شکل -

برای آنکه طیف سیگنال وارد به فرکانس ثابت میانی ۵۰۰۰ کیلو هرتز آورده شود بایستی نوسان ساز محلی سیگنالی بفرکانس ۵۰۰۴ کیلو هرتز بیش (یاکتر) از فرکانس کمتر وارد بسازد. معمولاً فرکانس سیگنال نوسان ساز محلی ۵۰۰۴ کیلو هرتز بیش از فرکانس کمتر وارد میباشد. هر گیرنده‌ای که اینچنین عملی را انجام دهد بآن گیرنده سوپرھترودین میگویند. بلوك دیاگرام گیرنده سوپرھترودین (Superhetrodyne) در شکل (۳-۲۶) مصور گشته است.



مسائل :

۱- یک سیگنال DSB-SC بفرم زیر دارد است :

$$\varphi(t) = f(t) \cos \omega_1 t$$

که در آن ω_1 فرکانس کوپر میباشد . میخواهیم فرکانس کوپر را از ω_1 به ω_2 تغییر دهیم .

(این عمل بنام تغییر فرکانس frequency conversion موسوم است) . ثابت کنید مدولاتور متعادل شکلهای (۳-۴) و (۳-۵) و (۳-۶) میتوانند با ورودیهای $f(t) \cos \omega_1 t$ و $A \cos \omega_2 t$ و قرار دادن فیلتر مناسب در خروجیشان چنین عملی را انجام دهند .

بفرض آنکه $|A| \gg |f(t)|$ باشد .

۲- یک مدار مدولاتور متعادل را نیز میتوان بعنوان آشکار ساز همزمان بگار برد . بفرض آنکه منحنی دیودها مانند شکل (۳-۲a) خطی باشد ، ولتاژ $e_o(t)$ خروجی مدار یکه در شکل (۳-۲b) ترسیم گشته پیدا کنید

$$\varphi_1(t) = f(t) \cos \omega_1 t$$

$$\varphi_2(t) = A \cos \omega_2 t$$

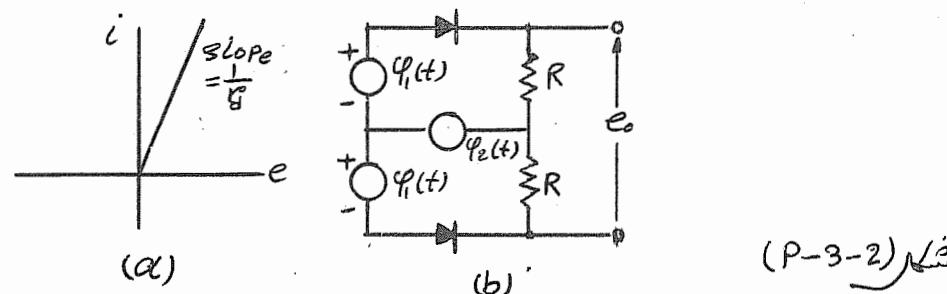
فرض کنید $|A| \gg |f(t)|$ برای تمام مقادیر t باشد .

چگونه میتوان $f(t)$ را از $e_o(t)$ بیرون کشید و آشکار کرد ؟ این مدار را نیز میتوان به عنوان تعمیز دهنده فاز دو شکل موج سینوزوئیدال نسبت بیکدیگرگار برد . نشاند هید که اگر

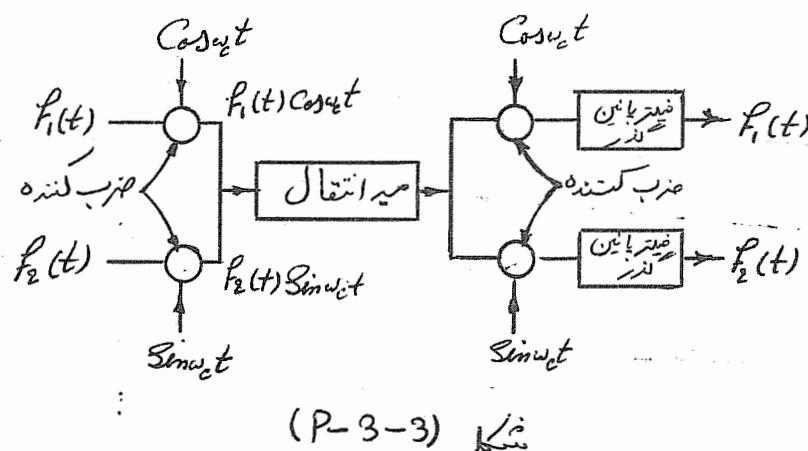
$$\varphi_1(t) = \cos(\omega_1 t + \theta)$$

$$\varphi_2(t) = A \cos \omega_2 t$$

باشد . ولتاژ خروجی $e_o(t)$ شامل یک جمله d-c متناسب با $\cos \theta$ خواهد بود .

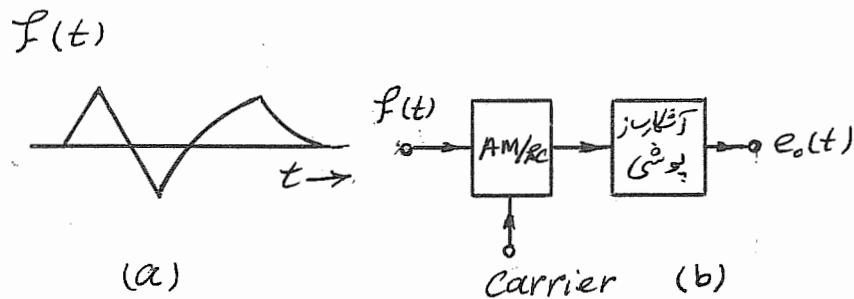


۳- ممکن است دو سیگنال مختلف را همزمان و در آن واحد بوسیله یک فرکانس کریر ارسال شود. برای این کار مداری مطابق شکل (P-3-2) طرح میکنیم. بطوریکه ملاحظه میفرمایید فرکانس سیگنال کریر هر دو کانال یکی است ولی دارای اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ (ربع ۹۰°) میباشد. ثابت گنید میتوان سیگنالها را توسط آشکارساز همزلان از سیگنال دریافت شده طبق شکل آشکار کرد. این روش بنام (quadrature multiplexing) معروف است.



۴- الف: اگر آشکار ساز پوش (یا آشکار ساز پکسوساز) برای آشکار سازی سیگنال DSB-SC بکار برد شود، از نظر کیفی چه اتفاق میافتد.

ب: شکل (P-3-4) سیگنال $f(t)$ را نشان میدهد که تحت مدولاسیون دامنه DSB-SC مدوله میگردد. سیگنال مدوله شده را بیک آشکار ساز پوش میدهیم خروجی آشکار ساز را پیدا کنید.



شکل (P: 3-4)

۵- سیگنال مدوله کننده $f(t)$ بفرم زیر داده شده است :

$$f(t) = A \cos(2000\pi t)$$

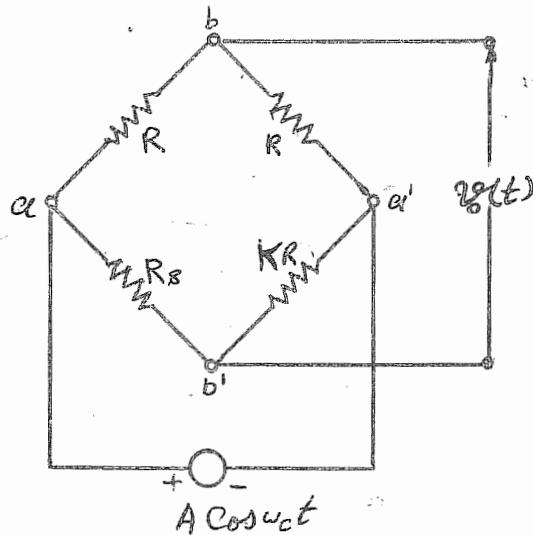
بفرض آنکه فرکانس کریم $10 KHz$ باشد، سیگنالهای مدوله شده $SSB-SC$ و $DSSB-SC$ مربوطه را رسم کنید. اگر ضریب مدولاسیون 75% باشد، شکل موج سیگنال مدوله شده آنرا نیز ترسیم نمایید.

۶- پلهای الکتریکی معمولاً برای اندازه‌گیریها بکار می‌روند. پل مقاومت غالباً برای اندازه‌گیری کمیاتی که میتوانند بطور خطی یک مقاومت را تغییر دهند مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً تنش سنج "strain gauge" دستگاهی است که در آن یک عنصر حساس به تنش، به جسم مورد آزمایش پنهانی الماق می‌گردد در آن صورت مقاومت عنصر متناسب با تنش جسم تغییر خواهد گرد. در مورد دیگر، برخی عناصر نسبت به درجه حرارت حساس بوده و مقاومتشان بطور خطی بر حسب درجه حرارت تغییر می‌کند (مثلاً: ترمیستور) پلی که در شکل (P: 3-6) مصور گشته از سه مقاومت ثابت و یک مقاومت متغیر با کمیت مورد اندازه‌گیری تشکیل یافته است. فرض-

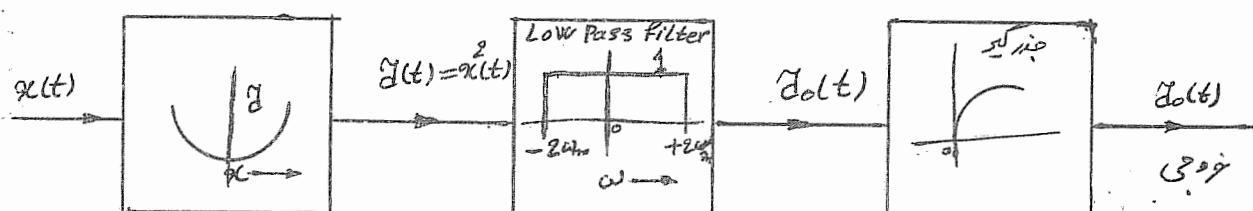
$$R_\beta = KR [1 + \alpha f(t)]$$

کنید R_β بدین فرم تغییر نماید.

که در آن $f(t)$ کمیت مورد سنجش (مثلاً درجه حرارت یا تنفس) و α ثابت تابع است.
ولتاژ $A \cos \omega t$ بدوسر' $\alpha a'$ اعمال میگردد . خروجی $\omega b' b$ را بدست آورده و نوع
مد ولاسیون آنرا تعیین کنید . برای این خروجی چه آشکار سازی پیشنهاد میکنید ؟
فرض کنید $\omega f(t) \ll 1$.

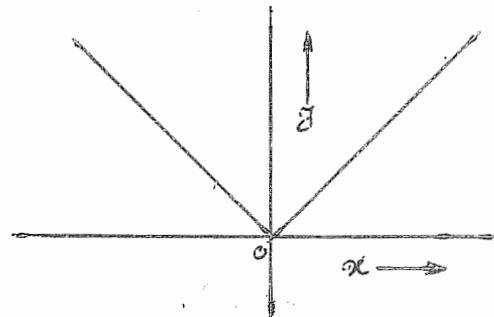


- ثابت کنید سیستم که در شکل (P: ۳-۷) مصور گشته میتواند سیگنالهای AM را آشکار نماید . یک یکسو ساز نظام موج مجدو رکنده (Square Law) میباشد . اولاً نشاند هیدکه فیلتر پائین گذر این دستگاه باشندی دارای فرکانس قطع $2\omega_m$ باشد ، ω_m حد اکثر فرکانس سیگنال خبر $f(t)$ است . ثانیاً بطور کلی ثابت کنید دستگاه شکل (P: ۳-۷) بصورت یک آشکار ساز پوشی عمل میکند ، لذا نصیتواند سیگنالهای با حذف کریر را آشکار نماید .



(P: ۳-۷) نکل

- ۸ - ثابت کنید در شکل (۳-۷) اگر طبقه اول یک یکساز تمام موج خطی با مشخصه ای مانند شکل (P: ۳-۸) باشد .



شکل (P: ۳-۸)

در آن صورت میتوان سیگنالهای AM را بدون طبقه آخری (یعنی : جذرگیر) آشکار ساخت .
و - خازن C دستکثیر پوشی باید بقدر کافی بزرگ باشد تا تضاریسی که در فرکانس کریز هنگام آشکار سازی سیگنال حالت میگردد حذف نماید . البته اگر C خیلی بزرگ انتخاب شود ، ثابت زمانی RC مدار $R-C$ نیز بزرگ شده از اینرو ممکن است نتواند پوش سیگنال مدوله شده را دنبال نماید . اثر بیش از حد کم یا زیاد بودن ثابت زمانی مدار را بدقت بررسی و بحث کنید

الف - بزرگترین مقدار ثابت زمانی که آشکار ساز خواهد توانست پوش سیگنال مدوله شده شکل (۳-۶) را دنبال نماید تعیین کنید . بشرط آنکه پریود سیگنال مدوله کننده τ^3 ثانیه و پریود سیگنال کریز خیلی کوچکتر از τ^3 ثانیه باشد .

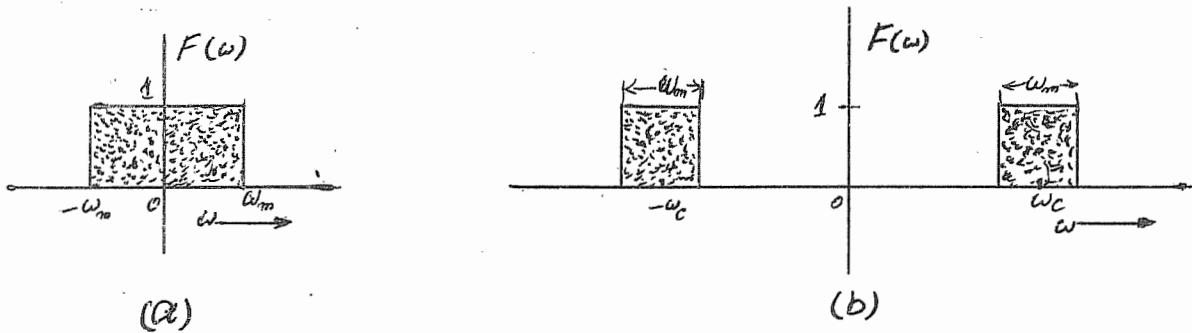
راهنمایی :تابع نهائی مدار $R-C$ را بوسیله دو جمله اول سری تایلور (Taylor) خلاصه و تقریب کرده و سرعت تخلیه مدار $R-C$ را با سرعت نزول پوش برابر بگیرید .

ب - اگر فرکانس سیگنال مدوله کننده یک سیگنال سینوزوئید ال جیکانز پون باشد ، چگونه میتوانید بزرگترین مقدار ثابت زمانی را پیدا کنید تا پوش منحنی دنبال شود ؟

۱ - شکل موجهای دوسری a' و b' و c' مدولاتور چاپر شکل (۳-۱۰) را رسم

گنید چه شرایطی بایستی داشته که سینال سینوزوئیدال و سینال مدوله گنده $f(t)$ را شدید باشند تا در خروجی (دوسر CC^1) یک سینال AM بدمت آید؟ فرض کنید امداد انس ورودی فیلتر میان گذربی نهایت است.

۱۱- سینال $f(t)$ با باند محدود ω_m را دیان بر ثانیه مفروض است. آیا سینال $F(t)$ نیز با باند محدود خواهد بود؟ اگر هست حد اکثر فرکانس آنرا پیدا گنید. بطور کنی درباره طیف $F(t)$ چه میتوانید بگوئید (راهنمایی: از قضیه گانولشن فرکانس استفاره گنید). دو طیف با باند محدود در شکل (۳-۱۱: P) ترسیم شده است برای هر حالت طیف فرکانس $F(t)$ را رسم گنید.



شکل (۳-۱۱: P)

۱۲- سینال پریودیک $f(t)$ که در شکل (P: ۳-۱۲) مصور گشته بعنوان سینال مدوله گنده بکار میرود. داشته سینال کریز برای مدولاسیون AM حداقل چه مقدار میبایست باشد؟ برای این دامنه شکل موج مدوله شده AM را در صورتیکه فرکانس کریز ۱۰۰ KHz / باشد رسم کرده و طیف فرکانس آنرا پیدا گنید. ضمناً سینال DSB-SC مربوطه و طیف فرکانس آنرا رسم نمایید.

۱۳- برای آشکار شازی همزمان یک سینال AM-SC، میتوان سینال مدوله شده دریافتی را در یک سری پالس بفرکانس ω طبق شکل (۳-۷) ضرب کرد. نتیجه این ضرب چنین

خواهد بود :

$$f(t) \cos^3 \omega t P(t)$$

یک رابطه ریاضی برای تابع تکاشف طیف این سیگنال بدست آورده و ثابت کنید سیگنال $f(t)$ را میتوان با یک فیلتر پائین گذر از خروجی جدا و کشف نمود.

راهنمایی : از معادلات (۳-۸) و (۱۱-۳) استفاده کنید

۱۴ - یک ایستگاه مفروضی سیگنالهای $D\delta B - \delta C$ را با قدرت P (مقدار متوسط مربع) وات برای پوشش محدودی بکار میبرد . اگر بجای سیگنالهای فوق از $C\delta B - \delta C$ استفاده شود ، برای پوشش محدوده فوق الذکر با همان مقدار شدت ، چه مقدار قدرت لازم میباشد ؟
شرط آنکه در هر دو حالت از آشکار ساز همزمان با مقدار تولید کریر یکسان استفاده شود .

۱۵ - شکل (۳-۱۲) یک دیتکتور یکسوساز نیم موج دیودی را نشان میدهد . شما دیتکتور یکسوساز تمام موجی را طرح کرده و به ورودی آن یک سیگنال AM بدهید . شکل موج یکسوسازده آنرا قبل از فیلتر پائین گذر و بعد از فیلتر پائین گذر همراه با طیف فرکانس آنها را رسم کنید .

(راهنمایی : عمل یکسوساز تمام موج AM معادل ضرب یک موج مربعی با مقدار متوسط صفر در آن میباشد)

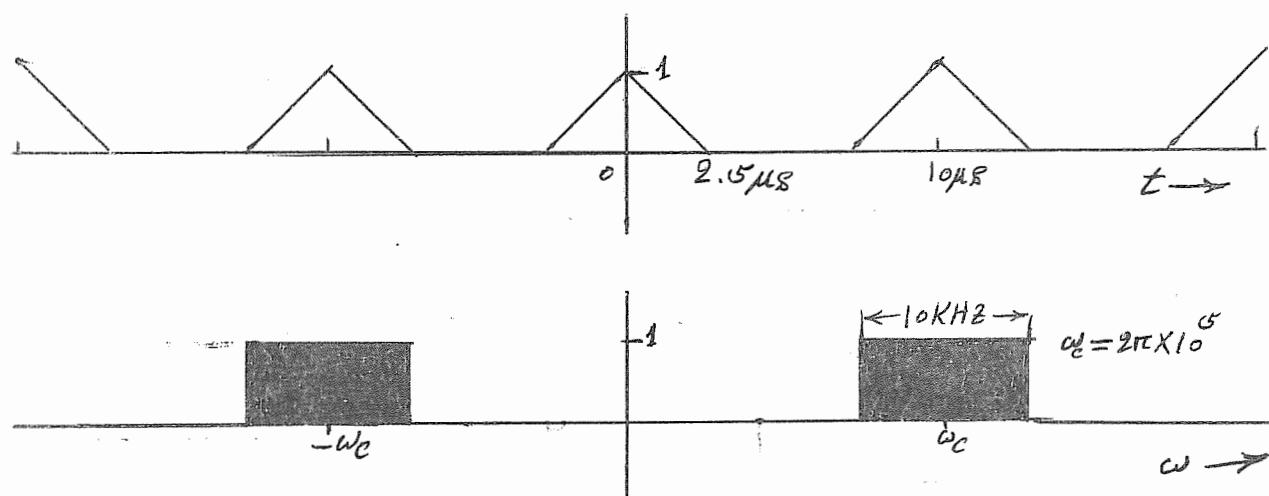
۱۶ - موج شده (distorted) یک سیگنال سینوزوئیدال بفرم $\cos^3 \omega t$ موجود است . برای تولید سیگنال $D\delta B - \delta C$ این سیگنال کریر موج شده را در سیگنال مدوله کننده $f(t)$ ضرب مینماییم . طیف فرکانسی حاصل ضرب $f(t) \cos^3 \omega t$ را پیدا کرده و رسم کنید . چگونه میتوان سیگنال مدوله شده $f(t) \cos(\omega t)$ مطلوب را از این حاصل ضرب بدست آورد .

۱۷ - سیگنال مدوله کننده $f(t)$ با باند محدود $5 KHz$ در سیگنال پریوپیک و مثلثی

(P: ۳-۱۷) ضرب میشود . طیف فرکانس حاصل ضرب مذبور را پیدا کرده رسم نمایند .
برای بدست آوردن سینکال مدوله شده ، این حاصل ضرب را از فیلتر ایده‌آلی مطابق شکل
(P: ۳-۱۷) میگذرانیم . خروجی این فیلتر بصورت :

$$A f(t) \cos \omega t$$

میباشد . مقدار ثابت A را بدست آورد .



(P: ۳-۱۷) شکل

۱۸ - یک سینکال AM بصورت :

$$\varphi_{AM}(t) = (1 + A \cos \omega_m t) \cos \omega t$$

که در آن فرکانس سینکال خیر $f_m = 5 \text{ KHz}$ و فرکانس کریر $f_c = 100 \text{ KHz}$ و مقدار ثابت $A = 15$ میباشد . آیا میتوان این سینکال را توسط رتکتور پوشی آشکار ساخت . خروجی آشکار ساز پوشی چه خواهد بود ؟ طیف فرکانسی خروجی آشکار ساز پوشی را پیدا کنید .

۱۹ - ثابت کنید خروجی $\varphi(t)$ شکل (C-۳-۱) بشرط آنکه عنصر غیر خطی از یک دیور و مقاومت R مشکل گشته و دارای مشخصه $i = R\varphi$ زیر باشد :

$$i = ae + be^2$$

یک سیگنال AM است. در رابطه فوق f جریان دیود و C ولتاژ دو سر عنصر دید - مقاومت است. امپدانس ورودی فیلتر میان گذرا را بی نهایت فرض کنید.

۲۰- سیگنال مدوله کننده $f(t)$ بصورت زیر داده شده:

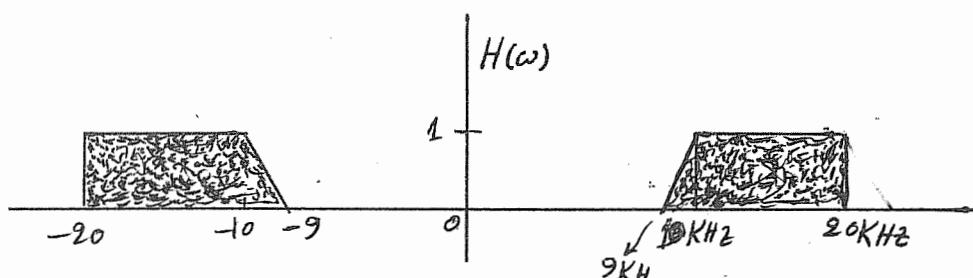
$$f(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(4000\pi t)$$

رابطه سیگنال PSB-SC مربوطه را هنگامیکه فرکانس کریر 10 KHz است پیدا کنید.

۲۱- خروجی تغییر فاز دهنده (Phase-Shiftter) شکل (۳-۱۹) را برای ورودی $A \cos(\omega_c t + \theta)$ پیدا کنید.

۲۲- سیگنال مدوله کننده $f(t)$ یک سیگنال پریودیک بوده و مطابق شکل (۳-۱۲) میباشد. اگر فرکانس کریر 100 KHz باشد. رابطه سیگنال PSB-SC مربوطه را برای $f(t)$ پیدا کنید.

۲۳- تولید سیگنال وستیجیال (Vestigial) از عبور دادن موج AM از یک فیلتر وستیجیال بدست میآید. اگر تابع انتقال این فیلتر مطابق شکل (۳-۲۳) باشد، رابطه سیگنال وستیجیال حاصله را وقتی سیگنال مدوله کننده $f(t)$ باشد محاسبه کنید.



(P: ۳-۲۳)

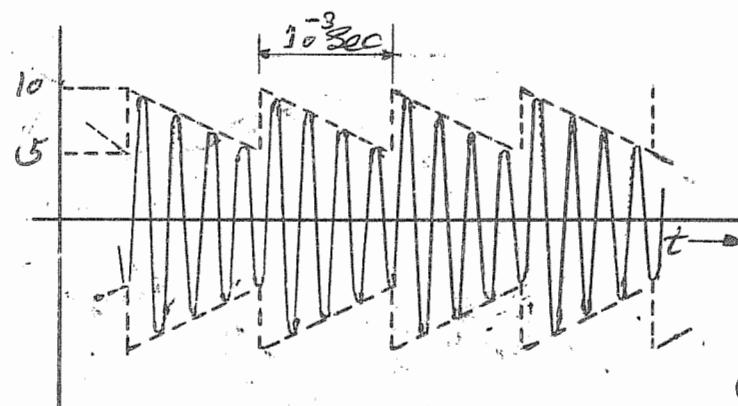
فرکانس کریم 10 KHz و رامنه آنرا $4A$ در نظر گرفته و طیف فرکانسی سیگنال منتجه را در هر
حالت رسم کنید.

- ۲۴ - در مسئله (۳-۲۳) اگر سیگنال مدوله گزنده $f(t)$ بصورت:

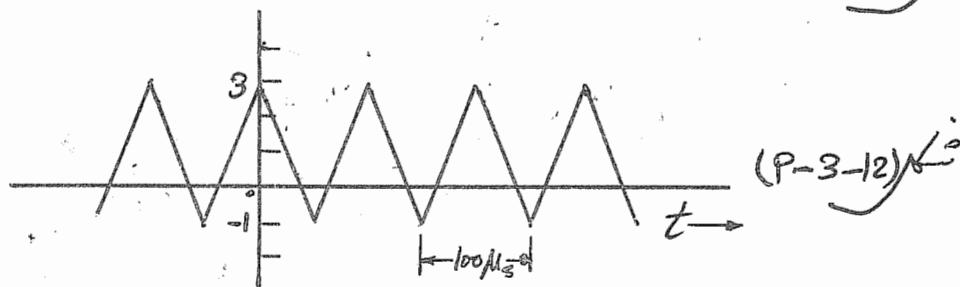
$$f(t) = \text{Sa}(200\pi t)$$

$$f(t) = \text{Sa}^2(200\pi t)$$

باشد، طیف فرکانسی سیگنال وضتیجیال را بفرض آنکه فرکانس کریم حذف شود رسم کنید.



شکل (P-3-9)



شکل (P-3-12)

فصل چهارم

سیستم‌های ارتباط: مدولاسیون زاویه

مدولاسیون زاویه

سیستم‌های ارتباط: مدولاسیون زاویه (Communication Systems: Angle-Mod) در سیگنال‌های AM دامنه کریر با سیگنال $f(t)$ مدوله شده ولذا اطلاعات درون $f(t)$ توسط تغییرات دامنه کریر حمل می‌شود. چون یک سیگنال سینوزوئید ال دارای سه کمیت پیغایر دامنه، فرکانس و فاز می‌باشد از این‌رو امکاناتی وجود دارد تا همان اطلاعات توسط تغییر فرکانس یا فاز کریر حمل گردد. البته «بر حسب تعریف» یک سیگنال سینوزوئید ال بین نهایت قطار موج (Wave-train) با دامنه، فرکانس و فاز ثابت را نمایش میدهد. و در این صورت تغییر هر یک از این سه کمیت تناقضی در تعریف سیگنال سینوزوئید ال پدید می‌آورد. اکنون می‌بایست مفهوم سیگنال سینوزوئید ال را گسترش و بسط داره و بگوئیم ممکن است در فرم عمومی، دامنه فرکانس و فاز آن نسبت به زمان متغیر باشد. در فصول پیشین خود را با مفهوم متغیر بودن دامنه در سیگنال‌های AM آشنا نمودیم و در این فصل تغییر فرکانس و فاز را در نظر می‌گیریم.

برای ارزیابی مفهوم تغییر فرکانس لازم است فرکانس بنام فرکانس لحظه‌ای تعریف نمائیم. شکل (۱-۴) سیگنال سینوزوئید ال $\varphi(t)$ را که دارای فرکانس ثابت ω در لحظات t است نشان میدهد. در لحظه $T = t$ فرکانس بطور ناگهانی به ω_0 تغییر می‌کند و تا لحظه $2T = \tau$ ثابت مانده و پس از آن به ω برگشت می‌کند. بطوریکه در شکل (۱-۴) صور

گشته، در اینجا تغییرات فرکانس خیلی سریع میباشد و هیچگونه اشکالی از نظر درک مفهوم فرکانس متغیر نشان نمیدهد. تابع $\varphi(t)$ یک سیگنال سینوزوئیدال با فرکانس ω در فواصل زمانی $T < t < (2n+1)T$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ عدد دیست صحیح میباشد.

حال میپرسیم: اگر فرکانس بجای آنکه بطور سریع و تند تغییر نماید، مطابق (۴-۱) بطور تدریجی تغییر کند چه اتفاق میافتد؟ در اینجا فرکانس سیگنال با سرعت یکنواخت بطور پیوسته در فواصل زمانی T از t_0 به t_1 میرسد. پس فرکانس سیگنال در هر لحظه با لحظه دیگر متفاوت است. حال بطور صریح باید بگوئیم سیگنال $f(t)$ را نمیتوان به وسیله سیگنال سینوزوئیدال معمولی بیان نمود. شکل (۴-۲) . بنابراین چگونه ممکن است تغییر پیوسته فرکانس در یک سیگنال سینوزوئیدال موجود باشد؟ بدین دلیل مجبوریم یک سیگنال سینوزوئیدال عمومی و کلی را چنین تعریف کنیم:

$$\varphi(t) = A \cos(\theta(t)) \quad (4-1)$$

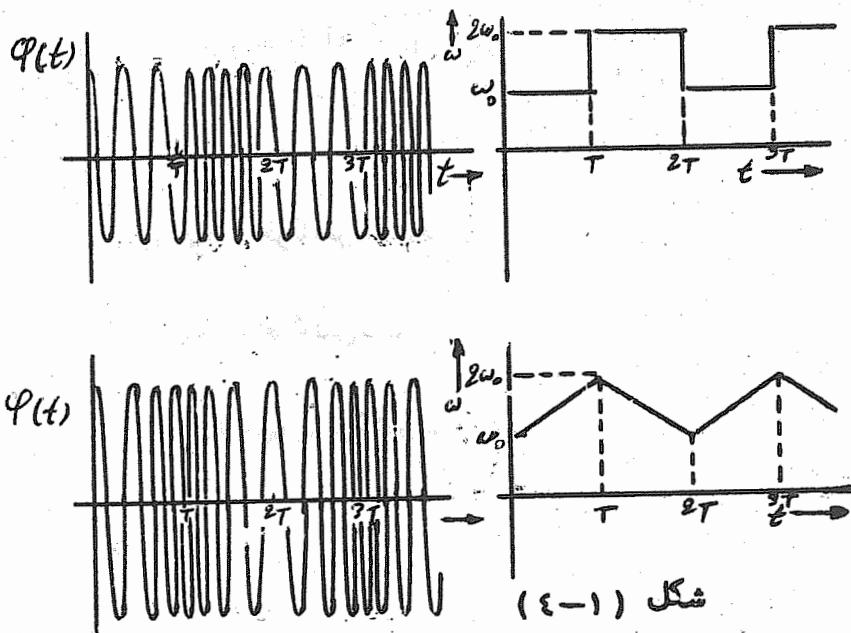
که در آن θ زاویه سیگنال سینوزوئیدال بوده و تابع زمان t میباشد. برای یک سیگنال سینوزوئیدال معمولی با فرکانس ثابت ω خواهیم داشت:

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_0)$$

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0 \quad \text{که در آن}$$

$$\omega_c = \frac{d\theta}{dt}$$

فرکانس ω_c در اینجا ثابت بوده و از مشتق گیری $\theta(t)$ نسبت بزمان بدست میآید.



شکل (۴-۱)

بطور کلی ممکن است مشتق مزبور ثابت نباشد، در آن صورت $\frac{d\theta}{dt}$ را فرکانس لحظه‌ای ω_i تعریف می‌کنیم و ممکن است نسبت به زمان تغییر گند. پس می‌توانیم رابطه بین $\theta(t)$ و —

فرکانس لحظه‌ای ω_i را چنین خلاصه کنیم:

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta = \int \omega_i dt \quad (4-3)$$

حال می‌توانیم امکان ارسال اطلاعات درون $f(t)$ را با تغییر رادن زاویه کریز ارزیابی و تحقیق کنیم. اینچنین روش و تکنیک مدولا سیون که در آن زاویه سیگنال کریز بنحوی بر حسب سیگنال مدوله گشته $f(t)$ تغییر می‌نماید، به نام مدولاسیون زاویه معروف است. در مدولاسیون زاویه دو روش معمولاً بکار می‌رود: مدولاسیون فاز (PM) و مدولاسیون فرکانس (FM)

اگر زاویه $\theta(t)$ بطور خطی بر حسب $f(t)$ تغییر گند، یعنی

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 + k_p f(t) \quad (4-4)$$

که در آن k_p مقدار ثابتی است، در این صورت نتیجه بدست آمده را مدولاسیون فاز گویند. پس

سیگنال $A \cos[\omega_c t + \theta_0 + k_p f(t)]$ نطايشگر کرير مدوله شده بطريقه فازی مي باشد .

توجه کنيد ، فرکانس لحظه اي ω_i برای مدولاسيون فاز چنین است :

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + k_p \frac{df(t)}{dt} \quad (4-5)$$

در مدولاسيون فاز ، فرکانس لحظه اي بر حسب مشتق سیگنال مدوله کننده بطور خطی تغيير مينماید . البته اگر فرکانس لحظه اي را مستقيماً بر حسب سیگنال مدوله کننده بطور خطی تغيير دهيم ، آنوقت مدولاسيون فرکانس بدست مي آيد . فرکانس لحظه اي ω_i در مدولاسيون فرکانس

$$\omega_i = \omega_c + k_p f(t) \quad \text{خواهد بود :} \quad (4-6)$$

$$\theta(t) = \int \omega_i dt = \omega_c t + k_p \int f(t) dt + \theta_0. \quad (4-7)$$

و سیگنال $A \cos[\omega_c t + \theta_0 + k_p \int f(t) dt]$ نطايشگر کرير مدوله شده بطريقه فرکانس مي باشد . از اين بحث نتيجه ميشود که FM و PM دو صور مختلف از مدولاسيون زاويه هستند و — اختلاف فااحش ندارند . در PM زاويه بر حسب سیگنال مدوله کننده بطور خطی تغيير مينماید ولی در FM زاويه بر حسب انتگرال مدوله کننده بطور خطی تغيير مينماید . در واقع اگر مسا ابتداء انتگرال سیگنال مدوله کننده را بدست آورده و سپس مدولاسيون فاز انجام دهيم ، آنوقت مدولاسيون فرکانس خواهيم داشت . همين طور بر عکس اگر ابتداء مشتق سیگنال مدوله کننده $f(t)$ را بدست آورده و مدولاسيون فرکانس انجام دهيم ، حاصل و نتيجه کار ما مدولاسيون — فاز خواهد بود . عملائي از روشهاي توليد سیگنالهاي FM (سیستم FM بطريق غير مستقيم آرمسترانك) بدین نحو است که ابتداء انتگرال سیگنال مدوله کننده $f(t)$ را بدست

آورده و سپس مد ولاسیون فاز انجام میدهد . در حقیقت FM و PM منفک و مجزا از — یک یگر نیستند چون هر گونه تغییری در فاز کریز ، فرکانس را تغییر میدهد و برعکس . بنابراین لازم است هر دو چهره مد ولاسیون زاویه را بررسی و مورد مطالعه قرار دهیم . در این مبحث کمی مفصل و مopsisط درباره مد ولاسیون فرکانس بحث خواهیم کرد ولی گفتار ما بطور مسماً اوی برای مد ولاسیون فاز هم قابل اجراست . نکته قابل ذکر در مد ولاسیون زاویه این است که همچنانه ثابت است . تصاویر (۱-۴) نمونه های از سیگنال FM محسوب میشوند .

$$\varphi_{FM}(t) \text{ و } \varphi_{PM}(t) \text{ را از نظر سمبولیک بترتیب با } \varphi_{PM}(t) \text{ و } \varphi_{FM}(t) \text{ نمایش میدهیم . پس :}$$

$$\varphi_{PM}(t) = A \cos [w_c t + k_p \int f(t) dt]$$

$$\varphi_{FM}(t) = A \cos [w_c t + k_f \int f(t) dt] \quad (4-1)$$

که در آن $f(t)$ سیگنال خبر میباشد . در این معادلات بدون اینکه اشکالی پیش آید فرض میکنیم فاز اولیه θ صفر باشد .

نتایج نمایش نعلی سیگنالهای سینوزوئید ال بر همه ما واضح و مبرهن است ، بدین دلیل سیگنال سینوزوئید ال معادله (۱-۴) بر حسب جزئی از نتایج مربوطه اش مینویسیم :

$$A \cos \theta(t) \sim A e^{j\theta(t)}$$

اما از نظر گن میتوانیم بنویسیم :

$$A \cos \theta(t) = \operatorname{Re} [A e^{j\theta(t)}]$$

ضمناً همبل $\hat{\varphi}(t)$ برای نمایش نتایج (اکسپوننسیل) $\varphi(t)$ بکار میبریم . لذا اگر :

$$\varphi(t) = A \cos \theta(t)$$

$$\hat{\varphi}(t) = A e^{j\theta(t)}$$

$$\varphi(t) = \operatorname{Re} [\hat{\varphi}(t)]$$

بنابراین :

و

بر طبق این قرار داد، گیر FM و PM معادلات (۴-۸) را میتوان بصورت زیر بیان

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{PM}(t) &= A e^{j[\omega_c t + k_f f(t)]} \\ \hat{\varphi}_{FM}(t) &= A e^{j[\omega_c t + k_f \int f(t) dt]}\end{aligned}\quad (4-9)$$

برای سهولت فرض میکنیم:

$$\int f(t) dt = g(t)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A e^{j[\omega_c t + k_f g(t)]} \quad (4-10)$$

FM با باند باریک (N.B-FM) :

رابطه کلی برای سیگنال FM معادله (۴-۱۰) و فرکانس لحظه‌ای ω_i چنین میباشد:

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + k_f \frac{d g(t)}{dt} = \omega_c + k_f f(t)$$

واضح است که متناسب با سیگنال خبر $f(t)$ میباشد. جمله $k_f f(t)$ نمایش دهنده

انحراف فرکانس گیر از مقدار ثابت اولیه آش ω_c است. بنابراین ثابت k_f انحراف فرکانس گیر را کنترول مینماید. برای مقادیر کوچک k_f ، انحراف فرکانس کم و انتظار داریم پهنای باند طیف سیگنال FM باریک باشد، بر عکس اگر k_f بزرگ انتخاب شود، انتظار میرود عرض باند مربوطه نیز عریض و پهن باشد. این نیز واقعیت دارد. ابتداً اجازه دهید حالت باند باریک را در نظر گیریم. اگر k_f آنقدر کوچک باشد که راشته باشیم:

$$k_f g(t) \ll t \quad (\text{برای تمام مقادیر } k_f)$$

$$e^{jk_f g(t)} \simeq 1 + j k_f g(t)$$

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A [1 + j k_f g(t)] e^{j \omega_c t}$$

$$\varphi_{FM}(t) = \operatorname{Re} [\hat{\varphi}_{FM}(t)] = A \cos \omega_c t - A k_f g(t) \sin \omega_c t$$

کرر

باند نواری

حال جالب است سیگنال کریر AM را که مطابق با معادله (۴-۱۲) میباشد دوباره — مشاهده کیم :

$$\varphi_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + f(t) \cos \omega_c t \quad (4-12)$$

اما با باند باریک چنین میباشد :

$$\varphi_{FM}(t) = A \cos \omega_c t - A k_f g(t) \sin \omega_c t \quad (4-13)$$

و مشابه رابطه فوق برای سیگنال PM با باند باریک خواهیم داشت :

$$\varphi_{PM}(t) = A \cos \omega_c t - A k_p f(t) \sin \omega_c t \quad (4-14)$$

هر سیگنال دارای یک جمله کریر و دو باند کناری است که در $\omega_c \pm \omega_m$ قرار دارند . اگر :

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \text{و}$$

$$g(t) \longleftrightarrow G(\omega) \quad \text{و} \quad g(t) = \int f(t) dt \quad \text{وچون}$$

بنابراین با استفاده از خواص انتگرال گیری در فضای زمان "معادله ۱۱-۱" خواهیم داشت :

$$g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (4-15)$$

در این صورت :

$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (4-16)$$

پس اگر $F(\omega)$ با باند محدود ω_m باشد ، $G(\omega)$ نیز با باند محدود ω_m خواهد بود . طیف فرکانس $(\varphi_{FM}(t))$ سیگنال کریر FM ، معادله (۱۱-۴) را میتوان با استفاده از معادله (۱۱-۶) پیدا نمود . بنابراین اگر :

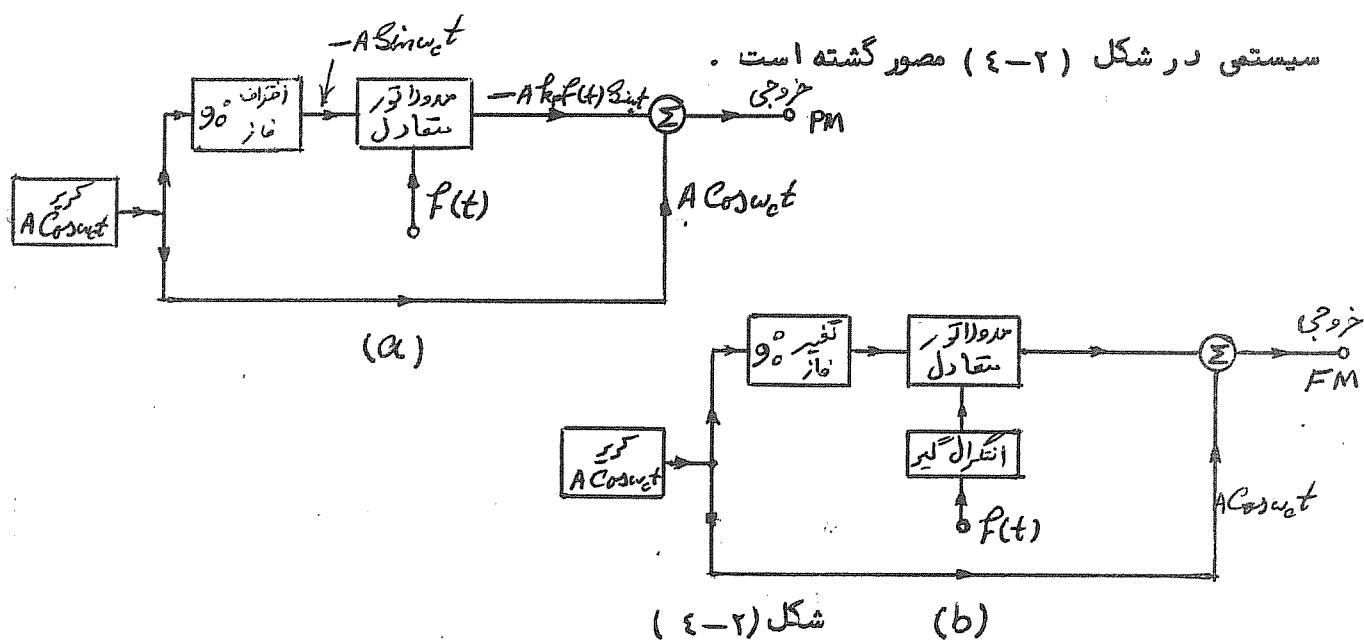
$$\varphi_{FM}(t) \longleftrightarrow \Phi_{FM}(\omega)$$

$$\Phi_{FM}(\omega) = \text{Re} \left[S(\omega - \omega_c) + \overline{S}(\omega + \omega_c) \right] + \frac{jA k_f}{2} \left[G(\omega - \omega_c) - G(\omega + \omega_c) \right]$$

مقایسه طیف فرکانس FM (معادله ۱۲-۴) با AM (معادله ۱۲-۳) وجوه تشابه و تفاوت این دو نوع مدولاسیون را نشان میدهد . در هر دو حالت فرکانس کریز و دوباندگناری در اطراف ω_0 وجود دارد . بطوریکه در AM هر دو باند کناری با کریز هم‌فاز ولی در FM دارای اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ میباشد . چون طیف فرکانس $F(\omega)$ دارای باند محدود ω_m است ، لذا طیف $G(\omega) = \frac{1}{\omega} F(\omega)$ نیز با باند محدود ω_m خواهد بود . پس سیگنال FM با باند باریک (و نیز PM با باند باریک) هر دو پهنهای باند $2\Delta\omega$ را همچنانکه سیگنال AM در اختیار میگیرد ، اشغال مینمایند . باید خاطرنشان کنیم با وجود یکه سیگنالهای AM و FM از لحاظ ظاهری شباهت زیادی دارند ولی شکل موجهای آنها تفاوت فاحشی دارند . در سیگنالهای AM فرکانس ثابت ولی دامنه بر حسب زمان تغییر مینماید در حالیکه در سیگنال FM دامنه ثابت ولی فرکانس بر حسب زمان تغییر میکند .

معادلات (۱۲-۴) و (۱۲-۴) مقدارهای ممکن تولید سیگنالهای FM و PM با باند باریک را با استفاده از مدولاتور متعارض تداعی و پیشنهاد میکند . بلوک دیاگرام نمایش این تجهیزات —

سیستمی در شکل (۲-۴) مصور گشته است .



زیر نویش : ۴-۲ تولید سینالهای fM و PM با باند باریک با استفاده از مد ولا تور -

تعارل

۴-۲ : FM با باند عریض (Wideband-FM)

اگر انحراف فرکانس کریم بقدر کافی زیاد باشد، یعنی، اگر ثابت k_f بقدر کافی زیاد انتخاب شود، از اینرو شرط $1 \ll k_f g(t)$ صادق نبوده و تجزیه و تحلیل سینالهای FM برای سینال کلی $f(t)$ بسیار پیچیده و غامض میشود. در این وضع پیدا کردن پهنهای باند سینال مدوله شده FM برای حالت کلی $f(t)$ امکان ندارد زیرا FM یک نوع مد ولا سیون غیر خطی میباشد (به بخش ۳-۴ و ۵-۴ مراجعه کنید) ابتدا رابطه پهنهای باند را بطور غیر قانونی برای FM با باند عریض بدست میآوریم و بعداً برای چند سینال این نتیجه را - اثبات میکنیم. پهنهای باند W سینال مدوله شده FM تقریباً چنین میباشد :

$$W = 2 \left[k_f |f(t)|_{\max} + 2\omega_m \right] \quad (4-17)$$

که در آن ω_m حد اکثر فرکانس $f(t)$ است. میدانیم :

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t)$$

بنابراین $k_f |f(t)|_{\max}$ نشاند هندسه ماتریم انحراف فرکانس کریم میباشد. اگر حد اکثر انحراف فرکانس را با $\Delta\omega$ نشاند هیم، پهنهای باند FM خواهد شد :

$$W = 2 \left[\Delta\omega + 2\omega_m \right] \quad (4-18)$$

برای بدست آوردن این نتیجه، سینال خبر $f(t)$ را بوسیله سینال نردهای مطابق شکل (۴-۳۷) تقریب میکنیم. سینال $f(t)$ دارای باند محدود f_m هرتس است، بنابراین معقول و منطقی است که فرض کنیم سینال مذبور در طو فواصل زمان تناوب نمونه برداری نایکوپست (Nyquist) $\frac{1}{2f_m}$ مقدار ثابتی دارد. تقریب نردهای مناسب در شکل (۴-۳۸)

صور گشته است . سیگنال کریر FM برای یک سیگنال تقریب شده نویسندگان ، شامل پالس‌های سینوزوئیدال با فرکانس ثابت و زمان طی $\frac{1}{2f_m}$ می‌باشد .

توجه کنید ، در هر لحظه نمونه برداری یک تغییر فرکانس شدید و تندی وجود دارد . نمونه‌ای از اینگونه پالس در شکل (۴-۳) نشان داده شده است . طیف این پالس را میتوان با استفاده از جدول (۴-۱) و قصیه مدولا سیون [و همچنین به شکل (۱-۳۴) مراجعه شود]، بدست آورد . طیف فرکانسی پالس شکل (۴-۳) در تصویر (۴-۳) نمایش داده شده است . بطوریکه در این شکل میتوان دید ، طیف فرکانسی این پالس ، باند $\omega_c + 2\omega_m$ تا $\omega_c + 2\omega_m$ که در آن ω_c فرکانس پالس سینوزوئیدال است ، اشغال مینماید . در این

خلاصه :

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t_k)$$

که در آن k_f لحظه t_k نمونه برداری است . پس طیف فرکانسی از $\omega_c - 2\omega_m$ تا $\omega_c + 2\omega_m$ قرار دارد و واضح است که طیف تمام FM ناحیه وحدت و فرکانس‌های $\omega_c + k_f |f(t)|_{max} - 2\omega_m$ تا $\omega_c - k_f |f(t)|_{max} - 2\omega_m$ را در برابر میگیرد . و پهنای باند W خواهد شد :

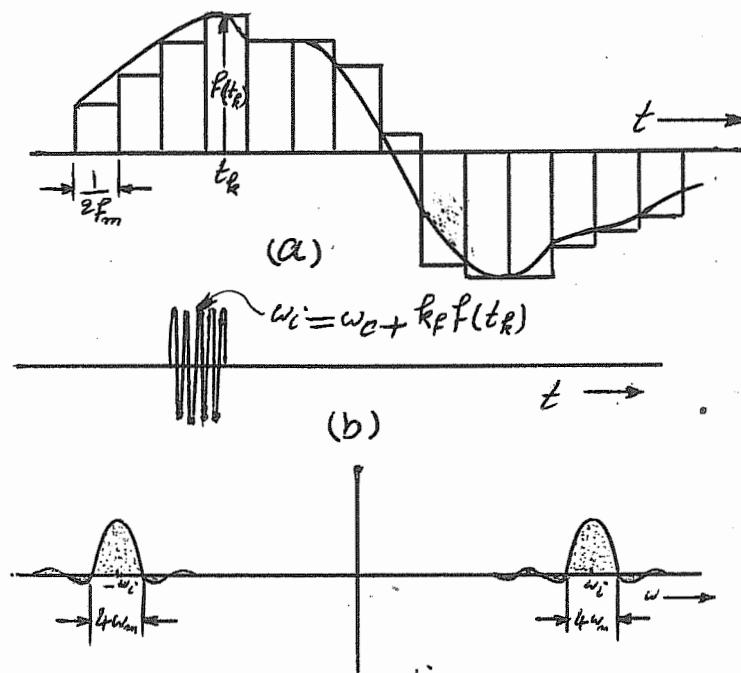
$$W \simeq 2k_f |f(t)|_{max} + 4\omega_m$$

$$= 2(\Delta\omega + 2\omega_m)$$

برای FM با باند عریض ω_m و در نتیجه $\Delta\omega \ll \omega_m$ میباشد . پس نتیجه میگیریم که پهنای باند FM تقریباً $W \simeq 2\Delta\omega$ است . این نتیجه هم بسیار معقول است .

اگر فرکانس کریر ω_c را دارای حد اکثر انحراف فرکانس $\Delta\omega$ باشد ، فرکانس سیگنال FM از $\omega_c - \Delta\omega$ تا $\omega_c + \Delta\omega$ تغییر میکند . بنابراین با یک تخمین سطحی انسان باید حدس بزند که اینگونه

سیگنال‌ها فرکانس‌هایی در آن ناحیه فرکانسی دارند و پهنه‌ای باند $2\Delta\omega$ را اشغال مینمایند.



شکل (4-3)

حال میخواهیم این نتیجه را هنگامیکه سیگنال مدوله کننده $f(t)$ یک سیگنال سینوزوئیدال است. اثبات کنیم.

$$f(t) = a \cos \omega_m t$$

فرض کنید سیگنال $f(t)$ را در لحظه $t=0$ سویچ کردیم. لذا:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int f(t) dt = a \int_0^t \cos \omega_m t \cdot dt \\ &= \frac{a}{\omega_m} \sin \omega_m t \end{aligned} \quad (4-19)$$

چون فرکانس لحظه‌ای از رابطه (4-6) بدست میآید پس:

$$\omega_i = \omega_c + k_p f(t) = \omega_c + k_p a \cos \omega_m t \quad (4-20)$$

بطوریکه از معادله (4-20) استنتاج میگردد، ماگزینم انحراف فرکانس سیگنال کمتر αk_p را دیان

$$\Delta \omega = \alpha k_p \quad (4-21)$$

با جاگذاری رابطه (۴-۱۹) در (۰-۱) و با بکار بردن معادله (۱-۲۱) خواهیم داشت:

$$\hat{\varphi}_{fm}(t) = A e^{j[\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t]}$$

کمیت $\frac{\Delta\omega}{\omega_m}$ که نسبت مانگزیم انحراف فرکانس به فرکانس سیگنال خبر است بنام ضریب مد ولا سیون m_f موسوم است. بنابراین:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m} = m_f \quad (4-22)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{fm}(t) &= A e^{j[\omega_0 t + m_f \sin \omega_m t]} \\ &= A e^{j m_f \sin \omega_m t} \cdot e^{j \omega_0 t} \end{aligned} \quad (4-23)$$

تابع نعائی اولی رابطه (۴-۲۳) یک تابع پریودیک با پریود $\frac{2\pi}{\omega_m}$ است و نیتوان آن را بوسیله سری نعائی فوریر بسط داد:

$$e^{j m_f \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j n \omega_m t} \quad \text{که در آن}$$

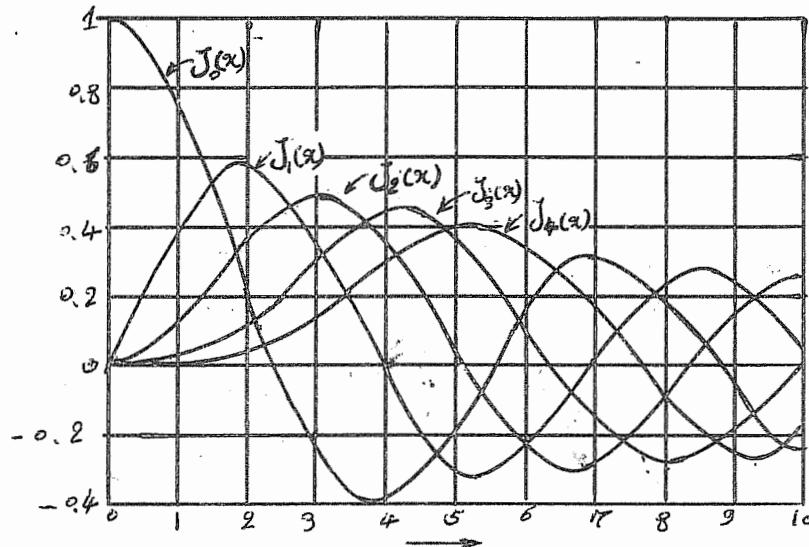
$$C_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} e^{j m_f \sin \omega_m t} \cdot e^{j n \omega_m t} dt$$

فرض کنید $\omega_m t = x$ باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m_f \sin x - nx)} dx$$

انتگرال فوق را نیتوان در صورت فعلی اش محاسبه کرد. ابتدا میبایست آنرا بصورت سری بی نهایت جعله درآورد و سپس از آن انتگرال گرفت. این انتگرال که بسیار معروف است، بوسیله عده کثیری محاسبه و یعنی بندی گشته و با سهل (Bessel function) مشخص و بنام تابع بیسل از نوع اول و مرتبه n خوانده میشود. اینگونه تابع در شکل (۴-۴a) رسم شده است.

$$e^{j m_f \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) e^{j n \omega_m t} \quad \text{بنابراین: (4-24)}$$



شکل (۴-۴)

بعلاوه میتوان نشان داد که :

$$J_n(m\varphi) = J_{-n}(m\varphi) \quad (نوج است)$$

$$J_n(m\varphi) = -J_n(m\varphi) \quad (فرد است)$$

(4-25)

با جاگذاری رابطه (4-24) در معادله (4-23) خواهیم داشت :

$$\hat{\psi}_{Fm}(t) = A e^{\int a_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\varphi) e^{jn\omega_m t}$$

$$\psi_{Fm}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m\varphi) \cos(\omega_c + n\omega_m)t \quad (4-26a)$$

با توجه به خواص معادله (4-25) میتوان رابطه (4-26) را بصورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{FM}(t) = A & \left\{ J_0(m_F) \cos \omega_c t + \right. \\
 & + J_1(m_F) \left[\cos(\omega_c + \omega_m)t - \cos(\omega_c - \omega_m)t \right] \\
 & + J_2(m_F) \left[\cos(\omega_c + 2\omega_m)t + \cos(\omega_c - 2\omega_m)t \right] \\
 & \left. + J_3(m_F) \left[\cos(\omega_c + 3\omega_m)t - \cos(\omega_c - 3\omega_m)t \right] \right\} \dots \quad (4-26b)
 \end{aligned}$$

با وجود یکه رابطه (4-26a) غالباً در کتابها بکار برده میشود ولی چون رابطه (4-26b) خلاصه‌تر است ما آنرا ترجیح میدهیم.

همانطوریکه از رابطه (4-26) پیداست، سیگنال مدوله گشته $f(t)$ بفرکانس ω_m باعث میشود باندهای کناری ω_m ، $\omega_c \pm 2\omega_m$ و $\omega_c \pm 3\omega_m$ و ... وغیره (مطابق با شکل 4-4) بوجود آید. پس در FM چنین وانمود میشود که سیگنال مدوله شده بی نهایت باندهای کناری و در نتیجه پهنای باندی بی نهایت وسیع دارد. البته در عمل دامنه مؤلفه فرکانسی زیاد قابل اعماض است و از اینرو تقریباً تمام انرژی سیگنال FM در مؤلفه‌های فرکانسی که در باند معین قرار میگیرند جا دارد. این را میتوان از شکل (4-4a) بسهولت درک کرد. هنگام که $m_F = 1$ باشد، فقط $J_0(m_F)$ و $J_1(m_F)$ دارای مقدار کافی میباشند و بقیه توابع یعنی: $(J_2(m_F))$ و $(J_3(m_F))$ وغیره از نظر مقدار قابل صرفنظر کردن است. برای این حالت فقط دو باند کناری و کمتر اهمیت دارند و این همان چیزیست که در FM با باند باریک در بخش قبل مورد بررسی قرار گرفت.

اگر $m_F = 2$ باشد توابع $(J_0(m_F))$ و $(J_1(m_F))$ وغیره دارای مقدار ناچیزی هستند، پس مؤلفه‌های فرکانس موجود برای حالت که $m_F = 2$ است چنین میباشد:

$\omega_c \pm 4\omega_m$ و $\omega_c \pm 3\omega_m$ و $\omega_c \pm 2\omega_m$ و $\omega_c \pm \omega_m$ و ω_c و پهنای باند کافی در این حالت $8\omega_m$ میباشد. هر قدر m_F افزایش یابد، باندهای کناری بیشتری حادث میگردد. اگر فرض کنیم باندهای کناری کافی و با اهمیت آنها هستند

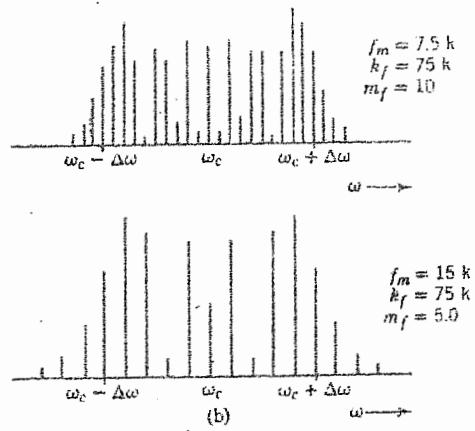
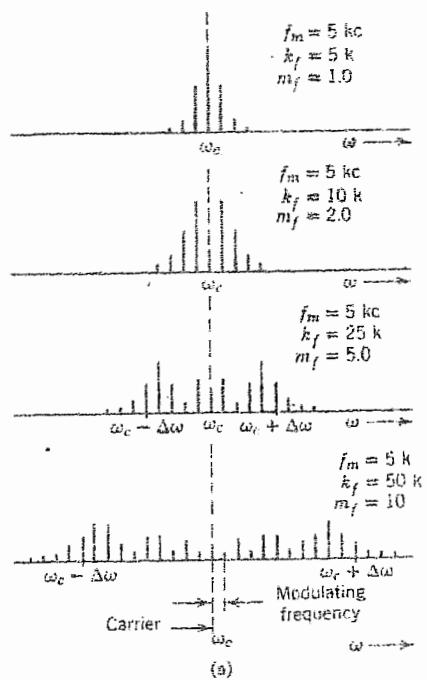
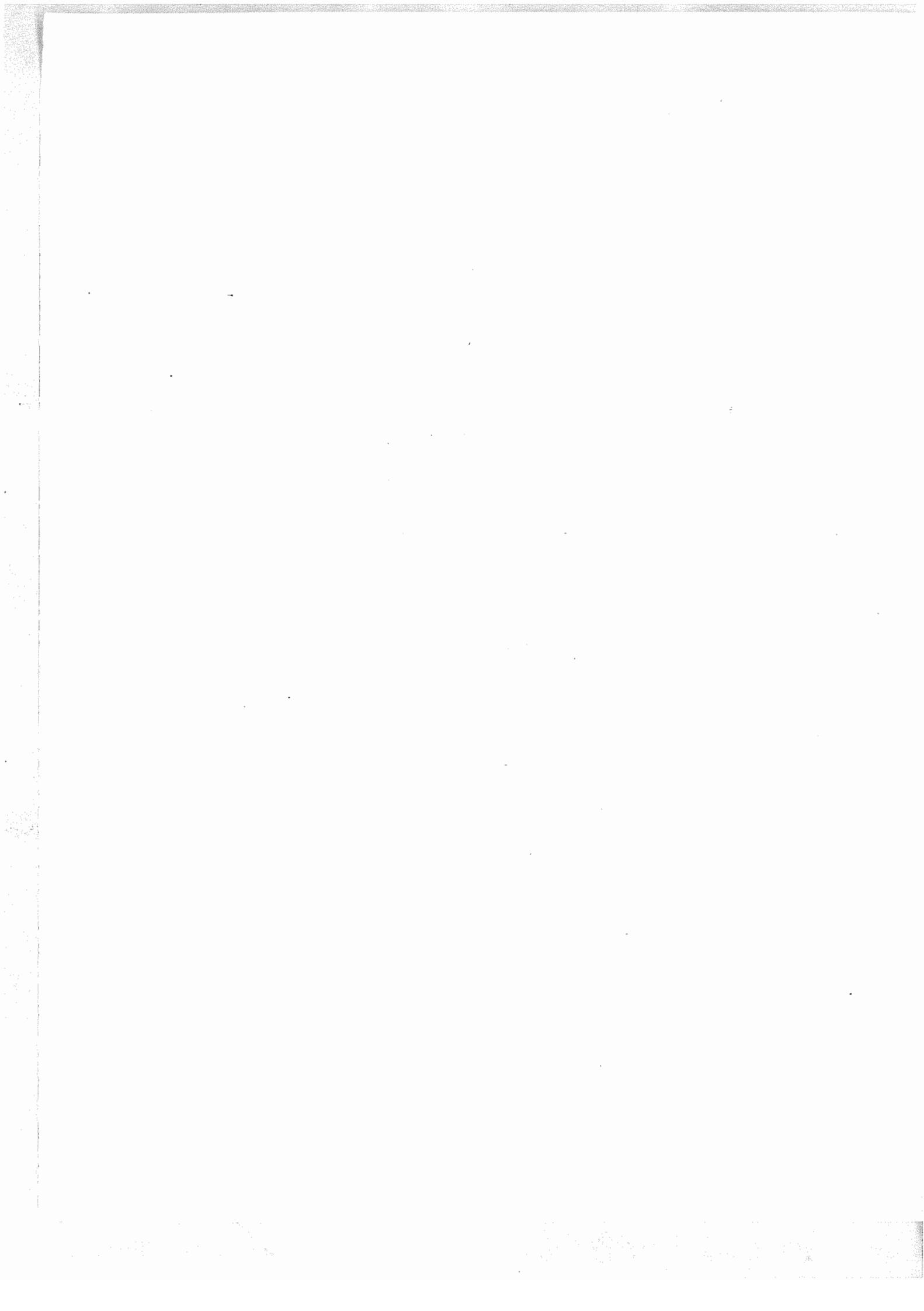


Figure 4.6



که رامنه شان یک صدم رامنه کریر است، در آن صورت برای تمام باندهای کناری با اریش — خواهیم داشت $\left| J_n(mf) \right| < \frac{1}{100}$ برای مقادیر مختلف m_f ، تعداد باندهای کناری را میتوان از نطايش منحنی توابع بدل پیدا کرد. بطوريکه از اين منحنی ها استنتاج میگردد، $J_n(mf)$ برای $m_f < n$ بسرعت حذف و محو میگردد. پس بطوريکه $J_n(mf)$ برای $m_f > n$ قابل اختصاص است. اين موضوع برای مقادير $1 < m_f < n$ واقعیت دارد. پس برای FM با باند عريض، که در آن تعداد باندهای کناری مفيد وجود دارد ممکن است نزد پکترین عدد صحیح به $m_f = n$ در نظر گرفت ($m_f = n$). کل پهنای باند Δf سیگنال FM چنین خواهد بود:

$$W \approx 2n\omega_m \approx 2mf\omega_m \quad (\text{RPS})$$

۱۶۱

$$mf = \frac{\alpha k_f}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$$

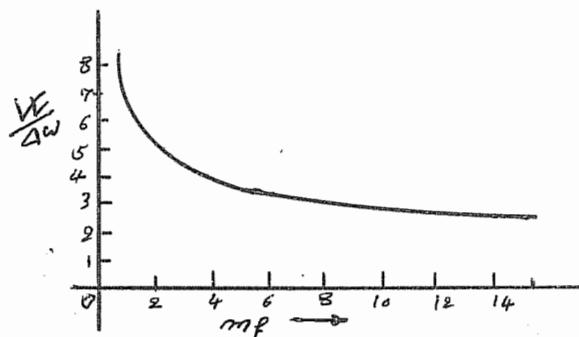
واز اينرو

$$W \approx 2mf\omega_m = 2\Delta\omega \quad (\text{RPS}) \quad (4-27)$$

رابطه $W = 2(\Delta\omega + 2\omega_m)$ میباشد بنابراین داریم:

$$W \approx 2(\Delta\omega + 2\omega_m) \quad (4-28)$$

اين يك قانون تخمين تسيباً خوبی برای پهنای باند FM با باند عريض (M) (W.B.-FM) با باند باریک (Narrow W) که در آن $\Delta\omega \ll \omega_m$ ، پهنای باند تقریباً برابر $2\omega_m$ میباشد. بنابراین پهنای باند يك سیگنال FM تقریباً دو برابر انحراف فرکانس سیگنال است. رابطه دقیق بین $\Delta\omega$ و $\Delta\omega - \Delta\omega$ اندیشید. بطوريکه از اين تصویر پیدا است، برای $1 < m_f < n$ پهنای باند Δf تقریباً دو برابر انحراف فرکانس سیگنال کریر است.



شکل (۴-۵)

زیرنویس: پهنهای باند سیگنال FM بر حسب تابعی از ضریب مد ولاسیون اتحادیه ارتباطات (FCC) برای ایستگاههای پخش همگانی FM تجاری، حداکثر انحراف فرکانس $4f$ را 75 KHz تعیین کرده است. بنابراین پهنهای باند تقریباً مورد نیاز برای رادیوهای FM تقریباً 50 کیلو هرتز است.

بطوریگه از شکل (۴-۵) پیداست: برای پهنهای باند FM ($mf \gg 1$)، پهنهای باند لازم تقریباً 24ω رادیان بر ثانیه یا $24f$ هرتز است. بنابراین:

$$\Delta\omega = \alpha k_f = m_f \omega_m$$

هر قدر m_f افزایش یابد، $\Delta\omega$ نیز با ثابت بودن ω_m افزایش می‌یابد. این موضوع در شکل (۴-۶α) روشن شده است. در اینجا ω_m ثابت $f_m = 5\text{ KHz}$ است. طیف فرکانس FM برای $mf = 1, 5, 2, 5, 10$ نشان داده شده است. انحراف فرکانس Δf ، بترتیب $5, 10, 25, 50$ و 100 می‌باشد. توجه کنید برای مقادیر بزرگ و زیاد m_f پهنهای باند تقریباً $24f$ می‌باشد.

شکل (۶-۴) حالت را نشان میدهد که در آن $\Delta\omega$ ثابت و $m_f = \frac{\Delta\omega}{\alpha_{\omega_m}}$ با تغییر بودن ω_m تغییر مینماید. در اینجا $\Delta f = 75$ کیلو هرتز و با تغییر کردن f_m از ۱۰ تا ۵، بقدار ۷.۵ تا ۱۵ کیلو هرتز تغییر مینماید. در این حالت پهنهای باند تقریباً برابر است با :

$$B.W = 2\Delta f = 150 \text{ KHz}$$

۳-۴: مدولاسیون فرکانس با چند موج مدوله گشته

در بخش (۲-۴) حالت خاص یعنی سیگنال مدوله گشته با یک فرکانس در نظر گرفته شد. اکنون میخواهیم سیگنال مدوله شده را برای حالت که چند فرکانس باشد بسط دهیم. ابتدا فق ط دو فرکانس را در نظر گرفته و بعد آنرا برای چند فرکانس تعمیم میدهیم. فرض کنید :

$$f(t) = \alpha_1 \cos \omega_1 t + \alpha_2 \cos \omega_2 t$$

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t)$$

$$= \omega_c + k_f (\alpha_1 \cos \omega_1 t + \alpha_2 \cos \omega_2 t)$$

$$\Delta\omega = (\alpha_1 + \alpha_2) k_f \quad \text{و حد اکثر انحراف فرکانس خواهد شد :}$$

$$\theta(t) = \int \omega_i dt = \omega_c t + \frac{\alpha_1 k_f}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{\alpha_2 k_f}{\omega_2} \sin \omega_2 t$$

$$= \omega_c t + m_1 \sin \omega_1 t + m_2 \sin \omega_2 t$$

که در آن :

$$m_1 = \frac{\alpha_1 k_f}{\omega_1}, \quad m_2 = \frac{\alpha_2 k_f}{\omega_2}$$

$$\psi_{fm}(t) = A e^{j\theta(t)} = A e^{j(\omega_c t + m_1 \sin \omega_1 t + m_2 \sin \omega_2 t)}$$

و همچنین

$$= A e^{j\omega_c t} (e^{jm_1 \sin \omega_c t}) (e^{jm_2 \sin \omega_c t}) \quad (4-22)$$

بدینه است که توابع نمایی داخل پرانتزها توابع پریودیک با پریودهای $\frac{2\pi}{\omega_1}$ و $\frac{2\pi}{\omega_2}$ بترتیب میباشند. این توابع نمایی را میتوان بر حسب سری فوریر با استفاده از تابع $\hat{\phi}_{FM}(t)$ (به معادله ۴-۲۴ مراجعه شود) نتایش دار، لذا :

$$\hat{\phi}_{FM}(t) = A e^{j\omega_c t} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_1) e^{jn\omega_c t} \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_2) e^{jk\omega_c t} \right]$$

$$= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(m_1) J_k(m_2) e^{j(\omega_c + n\omega_1 + k\omega_2)t} \quad (4-20)$$

$$\varphi(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(m_1) J_k(m_2) \cos[(\omega_c + n\omega_1 + k\omega_2)t] \quad (4-21)$$

همانطوریکه از این نتیجه پیداست، وقتی $f(t)$ شامل دو فرکانس ω_1 و ω_2 باشد، طیف سیگنال FM شامل باندهای کناری $\omega_c \pm n\omega_1$ و $\omega_c \pm k\omega_2$ مربوط به فرکانسها ω_1 و ω_2 میباشد. بعلاوه جملات مدوله شده $(\omega_c \pm n\omega_1 \pm k\omega_2)$ نیز وجود دارد. توجه کنید این موضوع با آنچه در AM دیدیم مغایرت دارد. در AM هر سیگنال جدید که میباشد مدوله کننده اضافه میگردد، خود باند کناری مخصوص بخود را بوجود میآورد. با این دلیل AM را مدولاسیون خطی مینامند. اما FM یک نوع مدولاسیون غیرخطی است. این موضوع بطور مبسوط در بخش (4-5) بحث و مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

نتایجی که در این بخش برای دو فرکانس بدست آمد، میتوان برای چندین فرکانس بسط و توسعه دار.

۴-۴ : مدولاسیون فرکانس یک موج مربعی

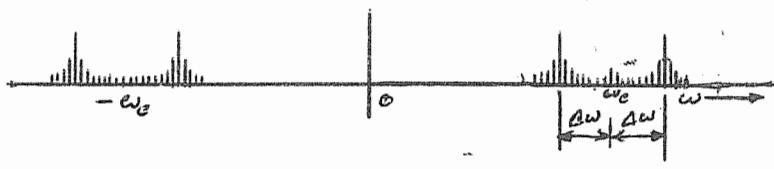
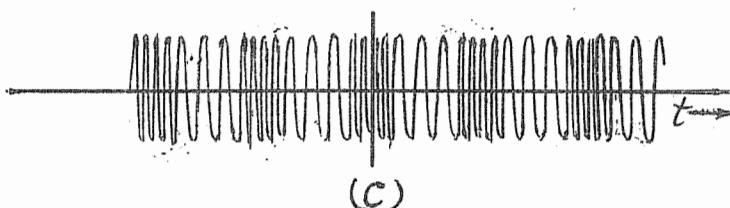
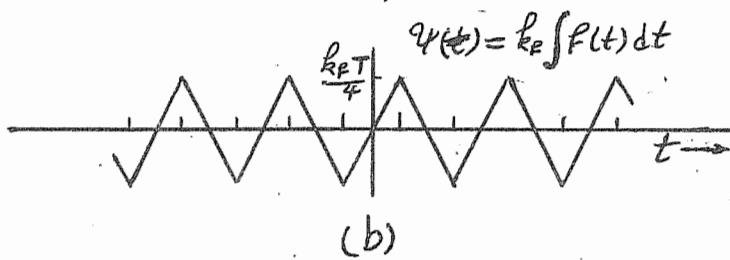
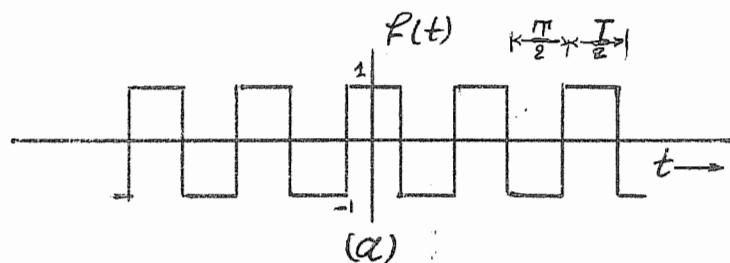
در اینجا یکی از حالتهای خاص مدولاسیون FM را که در آن سیگنال مدوله کننده $f(t)$ یک موج مربعی مطابق شکل (4-7Q) میباشد در نظر خواهیم گرفت. روشی که در اینجا بحث

میگردد بسیار کلی و میتوان برای نوع سیگنال مدوله گندله پریودیک اعمال و اجرا کرد . برای منج مربعی (شکل ۴-۲) فرکانس لحظه ای کریر $F M$ اینطور بدست می آید .

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t)$$

وفاز $\theta(t)$ خواهد شد :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int \omega_i dt = \omega_c t + k_f \int f(t) dt \\ &= \omega_c t + \psi(t) \end{aligned}$$



شکل (۴-۲)

$$\psi(t) = k_f \int F(t) dt$$

که در آن :

و در شکل (۴-۷b) نشان داده شده است. این یک تابع پریودیک مثلث با پریود T میباشد.

توجه کنید: ماگزینم انحراف $\Delta\omega$ در این حالت k_f است زیرا $|f(t)|_{m_{\max}} = 1$ میباشد.

$$k_f = \Delta\omega$$

بنابراین:

و

$$\psi(t) = \begin{cases} (\Delta\omega)t & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ (\Delta\omega)\left[\frac{T}{2} - t\right] & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \end{cases}$$

و

$$\psi(t) = \psi(t \pm nT)$$

$$\hat{\phi}_{fm}(t) = A e^{j\theta(t)} = A e^{j\psi(t)} \cdot e^{j\omega_c t}$$

همچنین

تابع نهائی $e^{j\psi(t)}$ نیز یک تابع پریودیک با پریود T است و میتوان آنرا بر حسب سری فوریه بسط را در:

$$e^{j\psi(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\omega_s t} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

که در آن:

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{j\psi(t)} \cdot e^{jn\omega_s t} dt$$

با جاگذاری روابط (۴-۳۲) در این معادله و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left\{ S_{\alpha} \left[\frac{\pi}{2}(\beta - n) \right] + (-1)^n S_{\alpha} \left[\frac{\pi}{2}(\beta + n) \right] \right\} \quad (4-33)$$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \quad \text{که در آن}$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{fm}(t) &= A e^{j\psi(t)} \cdot e^{j\omega_c t} \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j(\omega_c + n\omega_s)t} \end{aligned}$$

و

$$\phi_{fm}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cos((\omega_c + n\omega_s)t)$$

طیف فرکانس (۴-۷b) در شکل (۴-۷b) نشان داده است روشی که در اینجا بحث گردید

یک راه عمومی است و برای هر سیگنال مدوله کننده پریودیک $f(t)$ که دارای مقدار متوسط صفر باشد قابل اجراست.

۴-۵: مدولاسیون خطی و غیرخطی

باندهای کناری سیگنالهای AM از اصل جمع پذیری (Superposition) پیروی میکند. یعنی اگر سیگنالهای $f_1(t)$ و $f_2(t)$ هر یک بtentهائی باندهای کناری φ_1 ، φ_2 را بوجود آورند، باندهای کناری ترکیب دو سیگنال $f_1(t) + f_2(t)$ برابر $\varphi_1 + \varphi_2$ خواهد بود. در این مورد خوب باندهای کناری یا (Intermodulation) بطوریکه در FM دیدیم وجود ندارد. باین دلیل AM را از نوع مدولاسیون خطی تلقی مینماییم.

تعریف عمومی مدولاسیون خطی چنین است:

سیگنال مدوله شده تابعی از سیگنال مدوله کننده $f(t)$ میباشد. فرض کنید $\varphi[f(t)]$ سیگنال مدوله شده باشد. هنگام مدولاسیون خطی است که مقدار عبارت زیر مستقل از $f(t)$ باشد.

$$\left\{ \frac{d}{d[f(t)]} \right\} \left\{ \varphi[f(t)] \right\}$$

در غیر اینصورت مدولاسیون غیرخطی است. خوانندگان میتوانند این تعریف را برای AM و FM آزمایش کنند.

در مدولاسیون خطی بعلت خاصیت خطی بودن انجام بسیاری از عملیات و تغییر و تبدیلهای ریاضی آسان است. طیف یک سیگنال مدوله شده ناشی از جمع دو سیگنال مدوله کننده را میتوان با محاسبه نمودن طیف هر یکی از سیگنالها بهtentهائی و سپس جمع آنها بدست آورد. این در ماحصل نویز (Noise) سیستمهای ارتباط اهمیت زیادی پیدا میکند، زیرا برای سیستمهای مدولاسیون خطی، اثر نویز اضافی روی کانال را میتوان با فرض صفر بودن سیگنال محاسبه کرد. این موضوع

برای مد ولا سیون غیر خطی صادق نیست زیرا جملات مد ولا سیون ضرب شونده حاصل میگردد.
با این دلیل سعی میکنیم مد ولا سیون غیر خطی را بطور تقریبی بصورت خطی درآوریم. این شبیه آن چیزیست که در سیستم‌های غیر خطی انجام میدهیم و سیستم‌های غیر خطی را برای دامنه محدودی از سیگنال‌ها، خطی تقریب میکنیم. اگنون نشان خواهیم داد سیگنال‌های برای ضریب مد ولا سینونهای کوچک تقریباً همان رفتار خطی بودن را دارا میباشد.

خطی بودن یک سیگنال FM برای ضریب مد ولا سینونهای کوچک

وقتی ضریب مد ولا سیون کوچک است، سیگنال‌های FM تقریباً رفتاری دارند که خطی بودن از خود نشان میدهند. و باره حالت را در نظر گیرید بطریکه سیگنال مد وله کننده $f(t)$ دو فرکانس ω_1 و ω_2 را شامل میشود. در این حالت سیگنال FM طبق رابطه (۴-۲۶) میباشد. اگر $1 \gg m_2, m_1$ باشند، خواهیم داشت:

$$f(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t$$

$$\hat{\phi}_{fm}(t) \simeq A(1 + j m_1 \sin \omega_1 t)(1 + j m_2 \sin \omega_2 t) e^{j \omega_c t}$$

$$\simeq A(1 + j m_1 \sin \omega_1 t + j m_2 \sin \omega_2 t) e^{j \omega_c t} \quad (4-34)$$

اگر داشته باشیم

$$f_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t \quad , \quad m_1 \ll 1$$

$$\hat{\phi}_{fm}(t) = A e^{j m_1 \sin \omega_1 t} \cdot e^{j \omega_c t} \quad \text{در آن صورت:}$$

$$\simeq A [1 + j m_1 \sin \omega_1 t] e^{j \omega_c t}$$

$$f_2(t) = a_2 \cos \omega_2 t \quad , \quad m_2 \ll 1 \quad \text{اگر:}$$

$$\hat{\phi}_{fm}(t) \simeq A(1 + j m_2 \sin \omega_2 t) e^{j \omega_c t} \quad \text{لذا:}$$

هنگامیکه $m_1 > m_2$ هستند، پیدا است که باند های کناری سیگنال مدوله گشته $f_1(t) + f_2(t)$ برابر مجموع باند های کناری هر یک از دو سیگنال به تنهائی میباشد. بنابراین مدولاسیون FM را هنگامی میتوان خطی تصور نمود که ضریب مدولاسیون کوچک باشد. تحت این شرایط میتوان از اثر باند های کناری بر یک‌یگر صرف نظر کرد.

۶-۴: ملاحظاتی چند در مدولاسیون فاز

بطوریکه در مدولاسیون زاویه دیدیم پهناهی باند سیگنال مدوله شده تقریباً دو برابر حد اکثر انحراف فرکانس سیگنال کریز است. بنابراین اگر انحراف فرکانس کریز ثابت نگه داشته شود، طیف سیگنال مدوله شده را رای پهناهی باند ثابتی خواهد بود.

برای سیگنالهای FM، فرکانس لحظه‌ای ω_i از رابطه (۶-۴) بدست میآید:

$$\omega_i = \omega_c + \alpha k_p \cos \omega_m t$$

انحراف فرکانس کریز $\Delta\omega = \alpha k_p$ و مستقل از فرکانس سیگنال مدوله گشته ω_m میباشد. بنابراین بدون در نظر گرفتن فرکانس مدوله گشته، پهناهی باند سیگنالهای FM تقریباً برابر است با:

$$2\Delta\omega = 2\alpha k_p$$

و بعبارت دیگر برای مدولاسیون فاز داریم:

$$\theta(t) = \omega_c t + \alpha k_p \cos \omega_m t$$

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c - \alpha k_p \omega_m \sin \omega_m t \quad (6-30)$$

از معادله (۶-۳۰) پیدا است که حد اکثر انحراف فرکانس کریز در PM ثابت نبوده بلکه برابر-

$$\alpha k_p \omega_m$$

بنابراین برای ارسال یک سیگنال کریز PM، پهناهی باند مورد نیاز ثابت نبوده و به شکل

موج سیگنال مدوله گفنده بستگی تام دارد.

البته در عمل تولید سیگنال PM آسانتر از سیگنال FM است. در چندی قبل نهان داریم، اگر ابتداً از سیگنال مدوله گفنده انتگرال بگیریم و سپس با آن مدولاسیون فاز انجام دهیم، در این صورت کریم FM خواهیم داشت. در اکثر سیستمها، سیگنال FM را با استفاده از مدولاتورهای PM که به آن $\int f(t) dt$ [، انتگرال سیگنال مدوله گفنده اعمال میشود، تولید مینمایند.

۷-۴: قدرت در مدولاسیون زاویه

در مدولاسیون رامه AM دیدیم کل قدرت حمل شده توسط سیگنال مدوله شده تابعی از ضریب مدولاسیون m میباشد. برای مدولاسیون زاویه، رامه سیگنال مدوله شده همیشه بدون در نظر گرفتن ضریب مدولاسیون ثابت است. پس معقول و منطقی است که انتظار داشته باشیم، قدرت حمل شده توسط مدولاسیون زاویه بدون در نظر گرفتن بسط مدولاسیون ثابت است. معادله (۴-۲۶) را در نظر گیرید:

$$\varphi_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) \cos(\omega_e + n\omega_m)t$$

در این حالت سیگنال مدوله شده یک تابع پریودیک میباشد و میتوان آنرا بر حسب جمع مجزائی از مؤلفه های سینوزوئیدال بیان نمود. قدرت $\varphi_{FM}(t)$ برابر جمع قدرت هر یک از مؤلفه ها میباشد در این صورت

$$\overline{\varphi_{FM}^2(t)} = \frac{A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(m_f)$$

میتوان نشان داد که مجموع جملات دست راست برای تمام مقادیر m_f همیشه واحد است لذا:

$$\overline{\varphi_{FM}^2(t)} = \frac{A^2}{2}$$

ضمناً قدرت سیگنال کریم مدوله نشده نیز $\frac{A^2}{2}$ میباشد پس قدرت سیگنال مدوله شده و نشده

برای سیگنالهای FM یکسان است. سیگنال مدوله شده، معادله (۲۶-۴) از مؤلفه های کریر و باند های کناری مشکل گشته است و در معادله مذبور $J_n(m_f) = A$ نطايشگر دامنه مؤلفه کریر و $A = J_n(m_f)$ دامنه باند های کناری مرتباً ۷۱ میباشد. با انتخاب مناسب m_f میتوان $J_n(m_f)$ را تحت المکان کوچک نمود. در حقیقت با زاویه m_f برابر 2.405° ، 52.5° وغیره [به شکل ۳-۳، مراجمه شود] است.

بنابراین قدرت حمل مؤلفه کریر را میتوان تا حد دلخواه کوچک انتخاب کرد. در این وضع بیشتر قدرت توسط باند های کناری حمل میگردد. پس میتوان با انتخاب مناسب m_f راندمان ارتباط را به $1/\text{متر}^2$ نزدیک کرد. توجه کنید، هر قدر تعداد باند های کناری را افزایش دهیم، $J_n(m_f)$ کاهش میابد و از اینرو راندمان ارتباط بیشتر میشود.

-۴: خصوصیات کاهش نویز مدولاسیون زاویه

بطوریکه از مباحث قبل میرهن و آشکار است، برای یک سیگنال مدوله گنده مفروض، پهنای باند یک سیگنال مدوله شده در مدولاسیون زاویه خیلی بیشتر از مدولاسیون دامنه است. مثلاً اگر f_m برابر 1 کیلو هرتز باشد پهنای باند امواج AM آن 20 کیلو هرتزو پهنای باند FM مربوط بشرط آنکه $\Delta f = 75 \text{ KHz}$ ، تقریباً 150 KHz میشود. و برای FM با باند باریک تقریباً همان 20 KHz و تحت هیچگونه شرایطی پهنای باند FM از 20 KHz کمتر نمیشود. البته این یکی از معايیب سیستم FM بشمار میآید. با این دلیل مدولاسیون فرکانس را در ابتدای پیدایش و کشف آن غیر علی تصورش میگردند (۱۹۳۰). غلط بودن موضوع مذکور بعداً توسط مهندس ارجمند او وین - ه - آرمسترانگ که شرکت آن در سیستم های رادیو قابل مقایسه با هرتزو مارکنی است، ثابت شد.

اگرچه میدانیم FM از نظر نویز و تداخل سیگنالها خیلی بهتر است، اگر پهنای باند اشغالی

توسط FM دو برابر شود، بطوریکه در فصل هفتم ثابت خواهد شد، نسبت سیگنال به نویز dB افزایش می‌باید. ضعف کم کردن نویز به نسبت $\frac{30}{1}$ (تقریباً $\frac{1000}{1}$ در قدرت) با استفاده از با باند عریض کار مشکل نیست. خاصیت کاهش نویز FM ، مستقیماً از تئوری ارتباطات پیروی می‌کند. در فصل هشتم بطور کلی ثابت خواهیم کرد که اگر پهنه‌ای باند افزایش می‌باید، نسبت سیگنال به نویز افزایش می‌باید. بعبارت دیگر، اگر خواستار سیگنال به نویز کمتری هستیم، می‌بایست سیگنال را از یک سیستم با پهنه‌ای باند کم ارسال داریم. باید خاطر نشان کنیم که خواص تمیز دهنده‌گی نویز در مدولا سیون زاویه هنگامی اهمیت دارد که پهنه‌ای باند لازم برای ارسال سیگنال، عریض باشد. یعنی وقتی است که m بزرگ انتخاب شود. در FM با باند باریک، پهنه‌ای باند لازم برای ارسال سیگنال، عریض باشد. است ولذا افزایش نسبت سیگنال به نویز اهمیت ندارد.

۹-۴: تولید سیگنال‌های

بد و طریق میتوان سیگنال‌های FM را تولید کرد: مستقیم و غیر مستقیم. در این بخش ابتداً مدولا سیون فرکانس را از طریق غیر مستقیم بحث مینماییم. مدولا سیون FM بطریقه غیر مستقیم بدین معنی است که از تولید سیگنال‌های PM حاصل می‌گردد.

– بطریقه غیر مستقیم – FM

بعلت ساده بودن تولید کریم PM ، غالباً سیگنال‌های FM را بروش غیر مستقیم یعنی تولید سیگنال‌های PM بوجود می‌آورند. بطوریکه از معادله (۴-۸) استنتاج می‌گردد، اگر سیگنال $\int f(t) dt$ به ورودی مولد PM داره شود، خروجی سیگنال FM خواهد بود. در اوائل این روش بمنظور FM با باند باریک بکار برده می‌شد. شکل (۴-۲) اصولاً یک مولد FM از طریق مولد PM با باند باریک است، بطوریکه بورودی آن سیگنال $\int f(t) dt$ اعمال

میگردد . البته این سیستم FM با باند باریک تولید میکند . میتوان با استفاده از چند برابر کننده ها ، سیگنال FM با باند باریک را به FM با باند عریض تبدیل کرد . چند برابر کننده فرکانس یک دستگاه غیر خطی بوده و فرکانس ورودی را چند برابر میکند مثلاً دستگاه مجدور کننده (*Square Law*) میتواند فرکانس را دو برابر کند . برای یک دستگاه

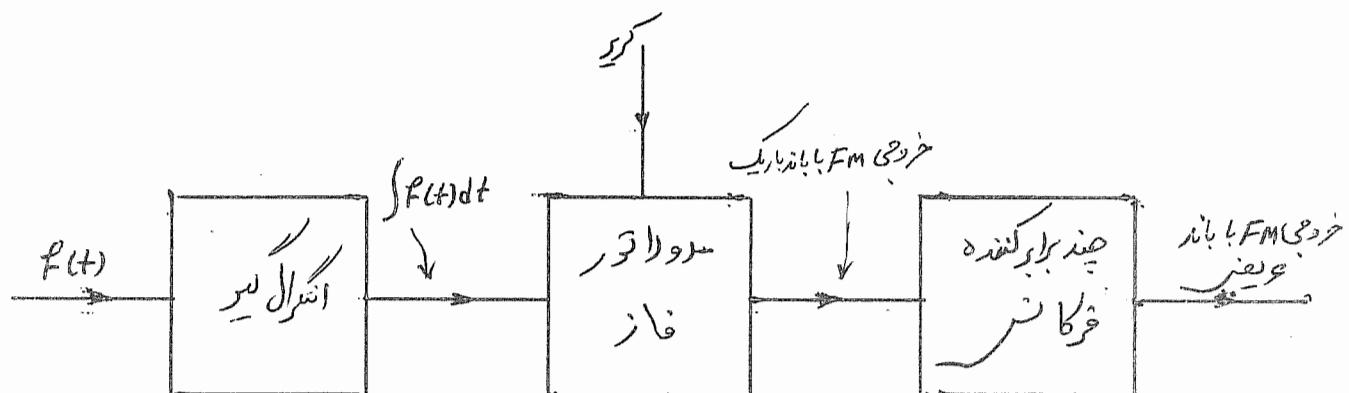
مجدور کننده ، رابطه بین سیگنال ورودی و خروجی بدین صورت است :

$$e_o(t) = [e_i(t)]^2 \quad \text{اگر :} \quad e_i(t) = \varphi_{FM}(t) = \cos[\omega_c t + k_f \int f(t) dt]$$

$$e_o(t) = \cos^2[\omega_c t + k_f \int f(t) dt]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos[2\omega_c t + 2k_f \int f(t) dt] \right\}$$

بدینه است که فرکانس کریز و ضریب مد ولاسیون سیگنال خروجی دو برابر ورودیست . بطورکلی اگر شخص یک دستگاه مرتبه n ام بکار برد ، ضریب مد ولاسیون و فرکانس کریز خروجی n برابر میشود . این روش تولید FM با باند عریض از یک مولد PM با باند باریک ، بنام سیستم غیر مستقیم آرمسترانگ معروف و در شکل (۸-۴) بلوک دیاگرام مربوطه وصور کشته است



شکل ۸-۴

تولید FM بطریقه مستقیم

در روش FM بطریقه مستقیم، سیگنال مدolle کننده مستقیماً فرکانس کریر را تغییر میدهد. در اینجا از نوسان ساز الکترونیکی استفاده کرده و یکی از عناصر C و L مدار هماهنگی نوسان ساز متناسب با $f(t)$ تغییر میدهد. اگر L و C بترتیب اند و کننس و ظرفیت مدار هماهنگی نوسان ساز باشند، فرکانس نوسان ساز خواهد بود:

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

اگر یکی از عناصر C یا L را بطور خطی بر حسب $f(t)$ تغییر دهیم، میتوان نشان داد که برای تغییرات کوچک $f(t)$ ، فرکانس لحظه‌ای نوسان ساز نیز بطور خطی متناسب با $f(t)$ تغییر میکند. فرض کنید خازن C بر حسب $f(t)$ تغییر کند:

$$C = C_0 + \alpha f(t) = C_0 \left[1 + \frac{\alpha}{C_0} f(t) \right]$$

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{L C_0} \left[1 + \frac{\alpha}{C_0} f(t) \right]^{1/2}}$$

اگر $\frac{\alpha}{C_0} f(t) \ll 1$ باشد، خواهیم داشت:

$$\omega_i \approx \frac{1}{\sqrt{L C_0}} \left[1 - \frac{\alpha}{2 C_0} f(t) \right]$$

$$= \omega_c + k_f f(t)$$

که در آن $k_f = -\frac{\alpha \omega_c}{2 C_0}$ و $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L C_0}}$ میباشد.

بدیهی است که خروجی نوسان ساز سیگنال FM مورد نظر است.

مدل التور واری کپ (دیور خازنی)

راکتانس متغیر را میتوان از مدارات ترکیبی (Sub Circuit) که در دوسر ورودی آنها امپدانس ورودی یک راکتانس خالص بوده و متناسب با سیگنال مدolle کننده تغییر مینماید بدست

میگردد . البته این سیستم FM با باند باریک تولید میگند . میتوان با استفاده از چند برابر کننده ها ، سیگنال FM با باند باریک را به FM با باند عریض تبدیل کرد . چند برابر کننده فرکانس یک دستگاه غیر خطی بوده و فرکانس ورودی را چند برابر میگرد مثلاً دستگاه

مجد ور کننده (*Square Law*) میتواند فرکانس را دو برابر کند . برای یک دستگاه

مجد ور کننده ، رابطه بین سیگنال ورودی و خروجی بدین صورت است :

$$e_o(t) = [e_i(t)]^2 \quad \text{اگر:} \\ e_i(t) = \varphi_{FM}(t) = \cos[\omega_c t + k_f \int f(t) dt]$$

$$e_o(t) = \cos^2[\omega_c t + k_f \int f(t) dt]$$

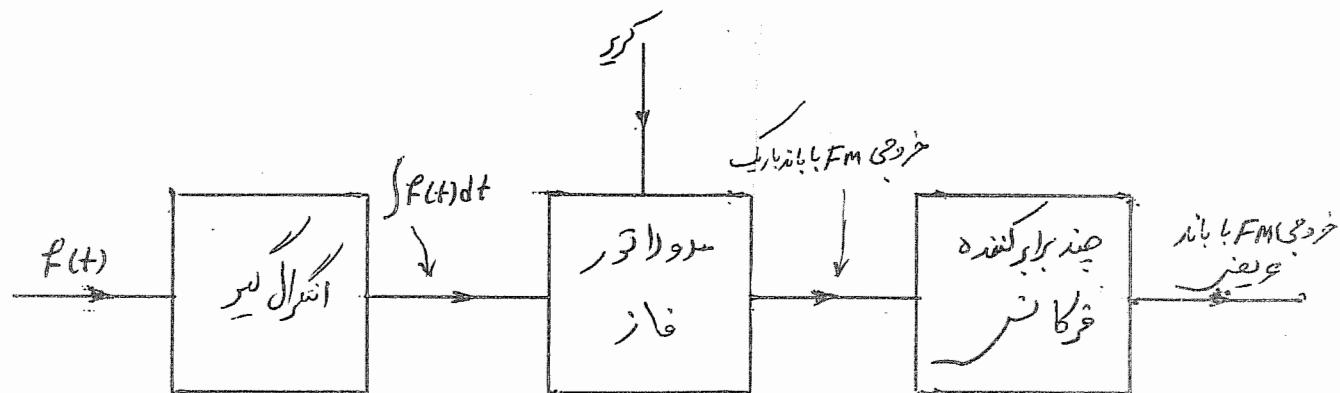
$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos[2\omega_c t + 2k_f \int f(t) dt] \right\}$$

بدینه است که فرکانس گریر و ضریب مدولا سیگنال خروجی دو برابر ورودیست . بطورکمی

اگر شخص یک دستگاه مرتبه n ام بکار برد ، ضریب مدولا سیگنال و فرکانس گریر خروجی n برابر

میشود . این روش تولید FM با باند عریض از یک مولد PM با باند باریک همان سیستم

غیر مستقیم آزمایشگ معروف و در شکل (۴-۸) بلوک دیاگرام مربوطه و صور گشته است



شکل ۴-۸

تولید FM بطریقه مستقیم

در روش FM بطریقه مستقیم، سیگنال مدوله کنده مستقیماً فرکانس کریور را تغییر میدهد. در اینجا از نوسان ساز الکترونیکی استفاده کرده و یکی از عناصر C و L مدار هماهنگی نوسان ساز متناسب با $f(t)$ تغییر میدهد. اگر L و C بترتیب آند و کتانس و ظرفیت مدار هماهنگی نوسان ساز باشند، فرکانس نوسان ساز خواهد بود:

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

اگر یکی از عناصر C یا L را بطور خطی بر حسب $f(t)$ تغییر دهیم، میتوان نشان داد که برای تغییرات کوچک $f(t)$ ، فرکانس لحظه‌ای نوسان ساز نیز بطور خطی متناسب با $f(t)$ تغییر میگرد. فرض کنید خازن C بر حسب $f(t)$ تغییر کند:

$$C = C_0 + \alpha f(t) = C_0 \left[1 + \frac{\alpha}{C_0} f(t) \right]$$

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{L C_0} \left[1 + \frac{\alpha}{C_0} f(t) \right]^{1/2}}$$

اگر $\frac{\alpha}{C_0} f(t) \ll 1$ باشد، خواهیم داشت:

$$\omega_i \approx \frac{1}{\sqrt{L C_0}} \left[1 - \frac{\alpha}{2 C_0} f(t) \right]$$

$$= \omega_c + k_f f(t)$$

که در آن $k_f = -\frac{\alpha \omega_c}{2 C_0}$ و $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L C_0}}$ میباشد.

بدیهی است که خروجی نوسان ساز سیگنال FM بورده نظر است.

مدولاتور واری کپ (دیود خازنی)

راکتانس متغیر را میتوان از مدارات ترکیبی (Sub Circuit) گه در دو سرورودی آنها امپدانس ورودی یک راکتانس خالص بود و متناسب با سیگنال مدوله کنده تغییر مینماید بدست

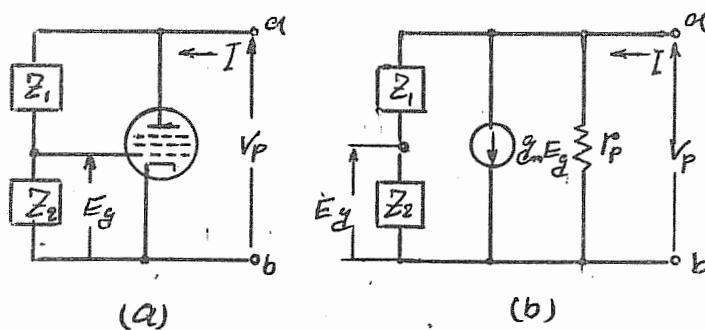
آورد . مثلاً ظرفیت بایاس معکوس یک دیود تابعی از ولتاژ و سرعت میباشد . بنابراین با اعطای ولتاژ موله کننده $f(t)$ بد و سر دیود با بایاس معکوس ، میتوان ظرفیت اتصالس را بنحوه لخواهی تغییر داد .

مدلاتور با هسته اشیاع

در این حالت خود القائی یک سیم پیچ بر حسب سیگنال موله کننده $f(t)$ تغییر مینماید . میدانیم قابلیت نفوذ مغناطیسی فریت تابعی از میدان مغناطیسی خارجی میباشد . از این جهت برای ایجاد میدان خارجی فریت را در داخل یک سیم پیچ قرار میدهد و جریانی متناسب با سیگنال موله کننده از آن عبور میدهد . در این صورت رآکتانس سیم پیچ اصلی متناسب با سیگنال موله کننده $f(t)$ تغییر مینماید . این روش تولید FM به نهایت جالب است زیرا با وجود همه سادگیش ، انحراف فرکانس لازم برای پخش همگانی در حدود ± 100 کیلوهرتز را مستقیماً بدون احتیاج به مدارات چند برابر کننده انجام میدهد .

مدلاتور لا مپ رآکتانس

امپانس دوسر مداریکه بنام مدلاتور لا مپ رآکتانس معروف است ، شکل (۹-۴) یک رآکتانس متغیر (خازنی یا القائی) متناسب با سیگنال ورودی $f(t)$ ظاهر میسازد . شطای مدار لا مپ رآکتانس در شکل (۹-۴) مصور گشته است . مدار معادل این لا مپ مطابق شکل (۹-۴) میباشد . چون μ معمولاً خیلی زیاد است ، میتوان از آن صرف نظر کرد .



شکل (۹-۴)

با استفاده از شکل (۴-۹) میتوان نوشت:

$$I = g_m E_g + \frac{V_g}{Z_1 + Z_2} \quad (4-36)$$

$$E_g = -\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_p \quad (4-37)$$

با جاگذاری معادله (۴-۳۷) در (۴-۳۶) خواهیم داشت:

$$I = -\frac{g_m Z_2 + 1}{Z_1 + Z_2} V_p$$

و این تابع دوسر αb برابر است با:

$$y_{ab} = \frac{g_m Z_2 + 1}{Z_1 + Z_2}$$

معمولاً $|g_m Z_2| \gg 1$ و اگر $Z_1 \gg Z_2$ انتخاب شود

$$y_{ab} \approx \frac{g_m Z_2}{Z_1}$$

هدایت انتقالی (transconductance) لامب تابعی از ولتاژ شبکه میباشد. اگر

سیگنالی متناسب با $f(t)$ بر شبکه لامب مذکور اعمال کنیم:

$$g_m = g_{m_0} + b f(t)$$

$$y_{ab} = \frac{[g_{m_0} + b f(t)] Z_2}{Z_1}$$

از این معادله پیدا است که اگر $Z_1 = \frac{1}{j \omega C}$ باشد، y_{ab} نایشگر

ارضیانسی است که ظرفیت آن بر حسب زمان متغیر است:

$$C = C_0 + \beta f(t)$$

در هر یک از این حالتها، فرکانس کریتر و ضریب مد ولا سیون کوچک نگه داشته میشود. برای به دست آوردن کریتر مطلوب میتوان از چند برابر کننده های فرکانس و انتقال فرکانس مناسب استفاده کرد. بعلاوه چند برابر کننده فرکانس ضریب مد ولا سیون m_f را نیز افزایش میدهد.

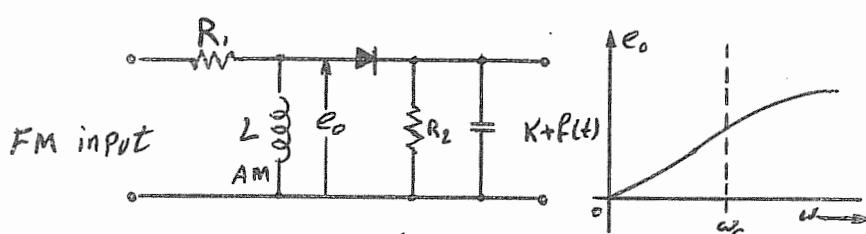
مدولا سیون فرکانس را نیز میتوان بوسیله دستگاههای کنترول ولتاژ از قبیل کلاسترอน و مولتی و پیراتور ایجاد کرد . در اینگونه دستگاهها ، فرکانس نوسان را میتوان با اعمال ولتاژ در نقطه مناسبی کنترول و تنظیم کرد . در رفلکس کلاسترون فرکانس نوسان تابعی از ولتاژ ریپلسر (دور گنده) میباشد . در مولتی و پیراتور فرکانس نوسان را میتوان با تنظیم ولتاژ شبکه کنترول گنده در لامپها و بیس در ترانزیستورها کنترول نمود .

۱-۴: آشکار سازی سیگنالهای FM

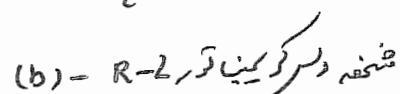
برای استخراج سیگنال مدولا گنده ($f(t)$) از کریتر FM باید مداری تعییه کنیم که خروجی آن بطور خطی بر حسب فرکانس سیگنال ورودی تغییر گند . پس آشکار ساز FM یک دستگاه حساس نسبت به فرکانس است و بدین لحاظ بدآن تمیز دهد . (دیسکریمنیتور)

اطلاق مینیمايند . بطور کلی میتوان گفت آشکار ساز FM دستگاهی است که بهره (Gain) آن بطور خطی با فرکانس تغییر میگند . بنابراین بوسیله AM این دستگاه حساس بفرکانس سیگنال FM را به AM تبدیل نموده و بعداً سیگنال حاصله را توسط آشکار ساز پوشی (یک دیود و مدار $R-C$) آشکار نمیگردد .

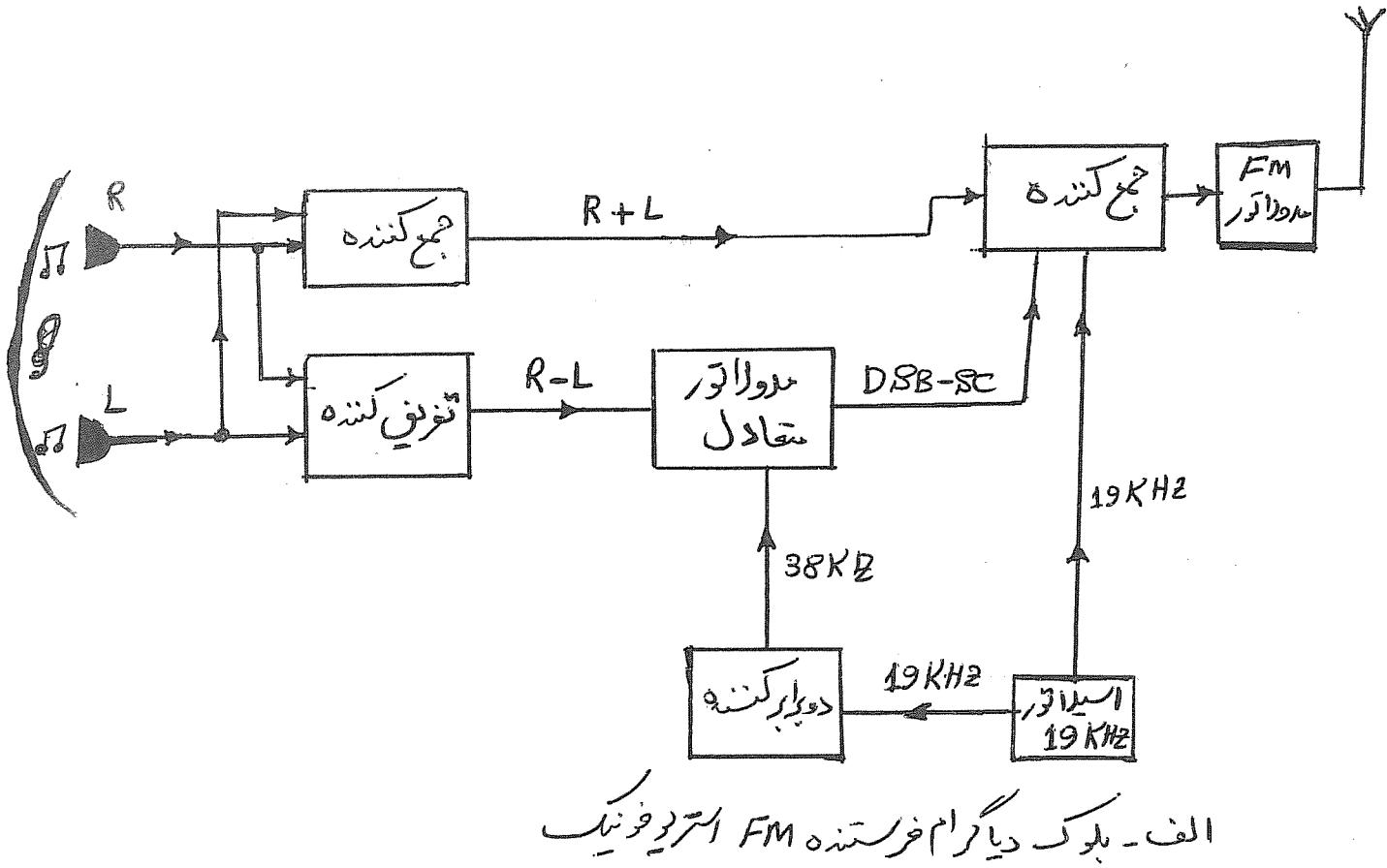
شکل (۱-۴-۲) یک مدار ساده آشکار ساز FM را نشان میدهد .



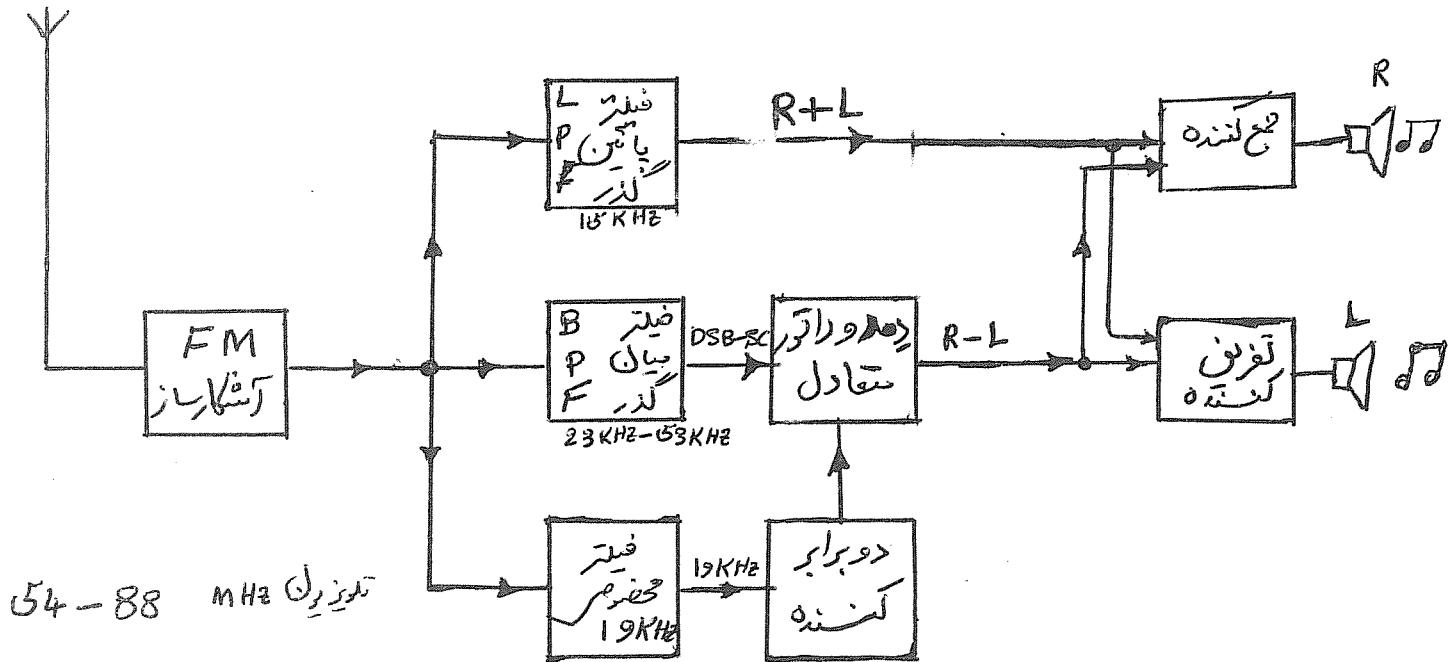
(a) مدار دیکرینتیور $L-R$



(b) مشخصه دیکرینتیور $R-L$

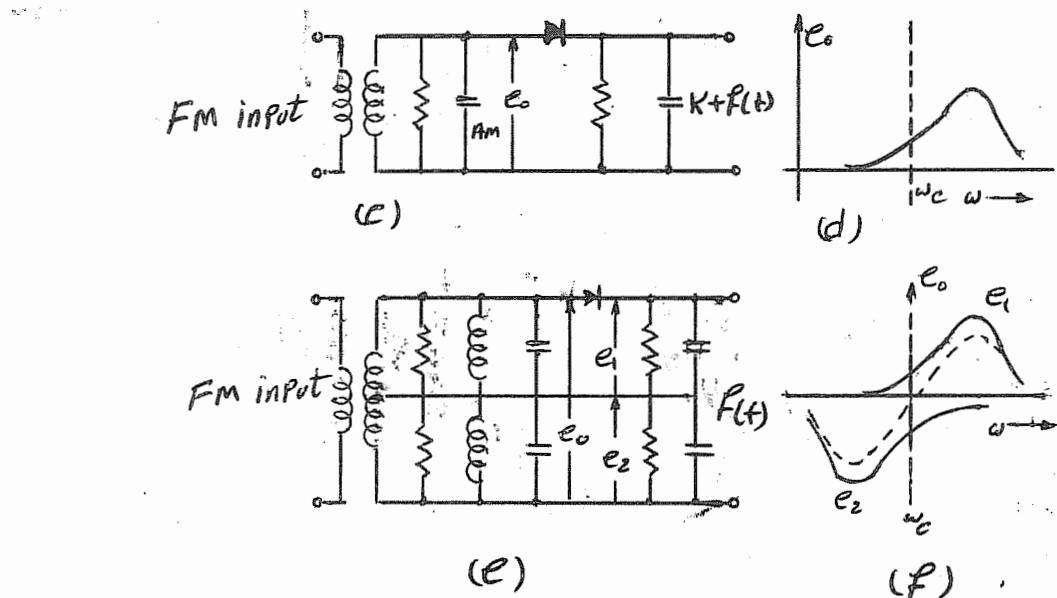


الف - بلوک دیاگرام خرستنڈ FM اسٹریو فونیک



54-88 MHz
تلویزیون
88-108 MHz
FM رادیو
108-138 MHz
حاجیانی
144-148 MHz
رماکرو رہا
148-175 MHz
ریڈیو سسی

ب - بلوک دیاگرام خرستنڈ FM اسٹریو فونیک



در شکل (۱۰-۴) نخست مدار (R-L) سیگنالهای FM را به AM تبدیل کرده و سپس AM بوسیله دیود و مدار C (آشکار ساز پوشی) آشکار میگردد. در شکل (۱۰-۴) سیگنالهای FM بوسیله مدار هماهنگی که فرکانس رزونانس آن مختصری از فرکانس ω_c منحرف است (شکل ۱۰-۴) به سیگنال AM تبدیل گشته و سپس شبیه جالت قبل AM مربوطه با آشکار ساز پوشی آشکار میگردد. بطوریکه از شکل (۱۰-۴) مشاهده میشود، ولتاژ دوسر مدار هماهنگی نسبت بفرکانس پطور خطی کامل تغییر مینماید. یعنی اعوجاج ایجاد میکند. مدار R-L شکل (۱۰-۴) دارای حساسیت ضعیف و مدار دیسکریمناتور (۱۰-۴) دارای حساسیت بهتر ولی مشخصه فرکانس آن غیر خطی است. برای بر طرف کردن این عیوب مدار دیسکریمناتور متعادل (۱۰-۴) ابداع شده

است . و آن بقسم است که دارای حساسیت و مشخصه خط نسبتاً بهتری میباشد . مدارهای هماهنگی بالائی و پائینی در فرکانس‌های بیشتر و کمتر از فرکانس کریر تنظیم ($tuned$) میشوند . ولتاژ L_1 و L_2 بر حسب تابعی از فرکانس در شکل ($f = f_0 - \frac{1}{2}$) رسم شده اند . ولتاژ خروجی منتجه ($L_0(t)$) بر حسب فرکانس بطور نقطه چین ترسیم گشته است . آشکار ساز متعادل نسبت به مدار هماهنگی قبلی دارای مشخصه فرکانسی بهتر و بعلت متعادل بودن نشان هارمونیک‌های زوج را حذف مینماید .

مسائل

- ۱- در مدولاسیون زاویه (FM ، PM) اگر سیگنال مدوله کننده یک سیگنال سینوزوئید $A \cos(\omega_m t)$ باشد ، ثابت کنید مطلقاً راهی برای تشخیص FM یا PM بودن سیگنال دریافتی وجود ندارد .
- ۲- یک سیگنال کریر PM بفرکانس حامل 10 MHz و دامنه واحد بوسیله یک سیگنال سینوزوئید الی بفرکانس 10 kHz مدوله شده است . حداقل انحراف فاز وقتی دامنه سیگنال مدوله کننده واحد است 10 رادیان میباشد .
 - الف - بطور تقریبی پهنانی باند سیگنال PM را محاسبه کنید
 - ب - اگر فرکانس سیگنال مدوله کننده به 5 kHz تغییر یابد ، پهنانی باند سیگنال PM جدید را بدست آورید .
- ج - اگر فرکانس همان 10 kHz ثابت باقی بماند ولی دامنه سیگنال مدوله کننده دو برابر شود پهنانی باند را در این حالت محاسبه نمایید .
- ۴- یک سیگنال کریر FM بفرکانس حامل 100 MHz بوسیله یک سیگنال سینوزوئید ال بفرکانس 10 kHz مدوله و حداقل انحراف 1 MHz ایجاد شده است . پهنانی باند تقریبی FM را بدست آورید . ضمناً اگر فرکانس یا دامنه سیگنال مدوله کننده دو برابر شود پهنانی باند FM

را در حالات فوق الذکر تعیین کنید.

۴- یک سیگنال کریر PM بفرکانس حامل $100 MHz$ با یک سیگنال سینوزوئید ال بفرکانس $10 kHz$ و $\phi_m = 10^\circ$ مدوله شده موجود است. اگر دامنه سیگنال مدوله کنده واحد باشد، پهنای باند سیگنال PM را بدست آورید. اگر دامنه یا فرکانس سیگنال مدوله کنده دو برابر شود پهنای باند را محاسبه نمایید.

۵- یک سیگنال کریر با فرکانس خیلی زیاد بوسیله یک سیگنال مدوله کنده بخوبی $\alpha \cos \omega_m t$ مدولاسیون فاز شده است. ثابت انحراف فاز ϕ_p میباشد (معادله -۴) تمام روابط بین خطأکثر انحراف فرکانس، حد اکثر انحراف فاز $A\phi$ ، ثابت انحراف فاز ϕ_p ، فرکانس سیگنال مدوله کنده ω_m و دامنه α را بدست آورید.

۶- یک سیگنال کریر بفرکانس $10 MHz$ با یک سیگنال سینوزوئید ال بفرکانس $10 kHz$ و دامنه واحد مدولاسیون فاز شده و حد اکثر انحراف فاز α را بیان میباشد. پهنای باند سیگنال PM را محاسبه کنید. (توجه کنید در این حالت انحراف فرکانس نسبتاً کوچک است ولذا از منحنی شکل ۵-۴ برای محاسبه پهنای باند بایستی استفاده شود).

۷- یک سوچ مدوله شده (مدولاسیون زاویه) تحت معادله زیر راه شده است:

$$\phi(t) = 10 \cos(2 \times 10^6 \pi t + 10 \cos 2000 \pi t)$$

مطلوبیت

الف - قدرت سیگنال

ب - حد اکثر انحراف فرکانس

ج - حد اکثر انحراف فاز

د - پهنای باند سیگنال - آسیتاپنیه این سینال FM را با PM

۸- یک سیگنال کریر بوسیله سیگنال مدوله کنده $f(t)$ مدوله شده است.

(مدولا سیون فرکانس) . ثابت مدولا سیون $k_p = 30,000$ میباشد . قدرت کریز و کل قدرت

تمام باندهای گناری را برای حالات زیر محاسبه کنید .

a) $f(t) = \cos 5000t$

d) $f(t) = 2.405 \cos 30000t$

b) $f(t) = 2 \sin 2500t$

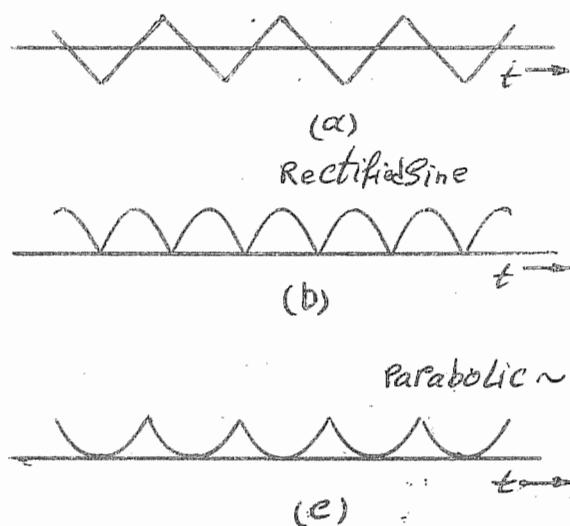
e) $f(t) = 10 \sin(1000t + \theta)$

c) $f(t) = \frac{1}{2} \cos 2500t$

f) $f(t) = 5.52 \sin(30000t + \varphi)$

۹- شکل موجهای FM و PM را وقتی سیگنال مدولا کنده (مطابق شکل)

باشد رسم کنید . (P: ۴-۹)



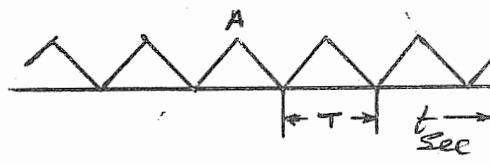
شکل (P : ۴-۹)

۱۰- برای هر یک از سیگنالهای پریودیک شکل (P: ۴-۹) طیف فرکانس FM مربوطه را بدست آورده و مقدار قدرتی که توسط کریز و باندهای گناری حل میشود محاسبه کنید .

۱۱- برای هر یک از اشکال (P: ۴-۹) طیف PM مربوطه را پیدا کنید .

۱۲- یک سیگنال کریز بفرکانس 100 MHz بوسیله سیگنال $f(t)$ مطابق شکل

(P: ۴-۹) مدولا سیون فاز شده است ثابت $k_p = 10^6$ میباشد .



(P-4-18) شکل

الف - شکل موج PM آنرا رسم کنید .

ب — طیف سیگنال مدوله شده را برای حالات زیر پیدا و رسم کنید .

۱) $A = 2 \times 10^{-3}$ $T = 2 \times 10^{-3}$

۲) $A = 2 \times 10^{-3}$ $T = 10^{-3}$

۳) $A = 10^{-3}$ $T = 2 \times 10^{-3}$

۴) $A = 10^{-3}$ $T = 10^{-3}$

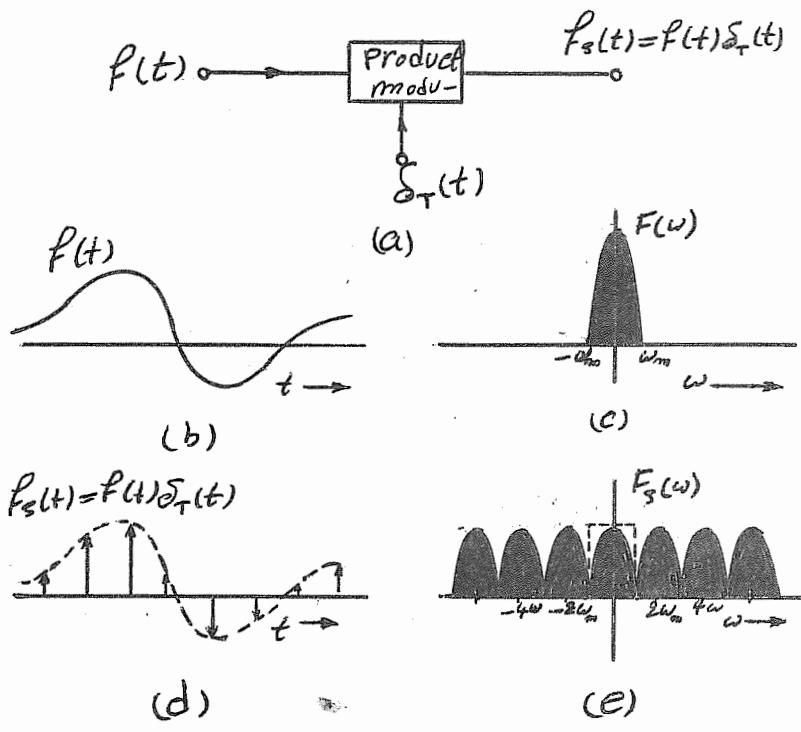
فصل پنجم

سیستم های ارتباط: مدولا سیون پالس

قضیه نمونه برداری که در بخش (۱۶-۱) بحث گردید، مباری تئوری تکنیک مدولا سیون پالس را تدارک مینماید. در آنجا ثابت کردیم، یک سیگنال با باند محدود که در طیف فرکانس آن بیش از فرکانس $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه (یا کمتر) قرار دارد، بوسیله مقادیرش که بطور $\frac{1}{2f_m}$ یکنواخت بمقاسه زمانی $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه (آنرا ارسال داریم)، اطلاعات درون نمونه ها را میتوان با مدولا سیون پالس دفعه در ثانیه (آنرا ارسال داریم). اطلاعات درون نمونه ها را میتوان با مدولا سیون پالس ارسال داشت. اگرچه میخواهیم صور مختلف مدولا سیون پالس را بررسی کنیم.

(۱-۵: مدولا سیون دامنه پالس (PAM))

در این روش مقدار نمونه ها بوسیله پالسهای که دامنه آنها متناسب با مقدار نمونه ها تغییر مینماید ارسال میگردد. در ابتدا برای سهولت، ارسال نمونه های ایده آل (ایپالس) را مطابق شکل (۱-۵) در نظر میگیریم. نمونه ها بمقاسه زمانی $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه جدا از یکیگر قرار دارند. بطوریکه در بخش (۱۶-۱) دیدیم، طیف سیگنال نمونه برداری شده $f_s(t)$ ، تابع پریودیک $F(\omega)$ طیف $f(t)$ میباشد. شکل (۱-۵) از شکل (۱-۵) پیداست که تابع $f(t)$ را میتوان با عبور دادن $f_s(t)$ از یک فیلتر پائین گذر بفرکانس قطع f_m بدست آورد.



شکل (۵-۱)

طیف سیگنال $f_s(t)$ ، تابع $F_s(\omega)$ بر طبق معادله (۱-۱۳۶) محاسبه میگردد،

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_m)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$T < \frac{1}{2f_m}$$

شکل (۱-۵) برای حالت که $T = \frac{1}{2f_m}$ رسم شده است. برای این حالت:

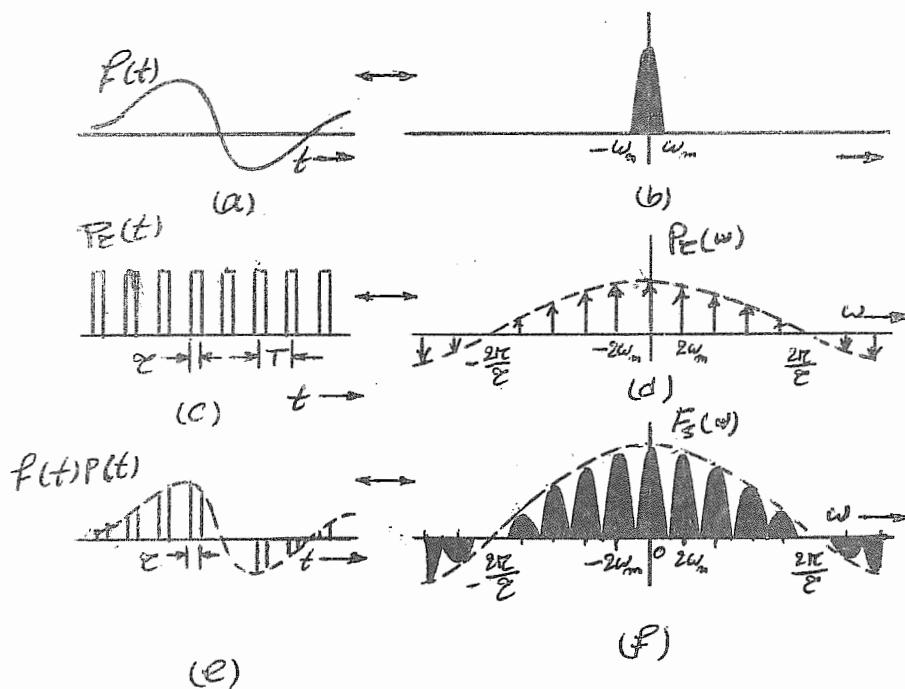
$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2n\omega_m) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_m} \quad (1-1)$$

نمونه برداری طبیعی

تحولی که اکنون بحث شد تابع $f(t)$ را در لحظات معین بوستله ایمپالس (نمونه برداری - لحظه‌ای) نمونه برداری میگرد. از شکل (۱-۵) پیداست که طیف اینچنین سیگنال نمونه - برداری شده ایده‌آل، پهنای باند $50 + 2\omega_m$ را اشغال مینماید. یعنی تمام مؤلفه‌های -

فرکانس را شامل میشود . البته در عمل اینگونه نمونه برداری ایده‌آل (نمونه برداری لحظه‌ای) امکان پذیر نیست چون نمیتوان ایمپالس واقعی تولید کرد . معمولاً نمونه برداری از طریق پالس‌های باریک با عرض معین انجام میگردد . بنابراین نمونه برداری بوسیله اینگونه پالس‌ها لحظه‌ای نیووده بلکه مدت زمان معین را در بر میگیرد و دوام دارد . اکنون میخواهیم خواص اینگونه نمونه برداری را تحقیق کنیم .

فرض کنید نمونه برداری توسط یک سری پالس‌های پریودیک با عرض پالس $\Delta\tau$ و زمان تکرار T ثانیه انجام شود . این قطار پالس را با $P_c(t)$ شکل (۵-۲c) نشان می‌دهیم .



شکل ۵-۲

زمان تکرار پالسها برابر با فاصله نایکویست $(\frac{1}{2f_m})$ ثانیه اختیار میکنیم . $P_c(\omega)$ طیف قطار پالسها است و در شکل (۵-۲d) نمایش داده شده است . سیگنال نمونه برداری شده $f_c(t)P_c(t)$ از ضرب $f_c(t)$ در $P_c(t)$ بدست می‌آید . چون (ω) طیف (ω)

میباشد لذا آن از کانولشن $(\omega) F$ و $P_E(\omega)$ حاصل میشود. کانولشن دوتابع مذکور در شکل (۵-۲) مصور گشته است. نمونه برداری غیرایده آل $f(t)$ شبیه نمونه برداری ایده آل است لیکن رامنه آن بتدربیج محو و گاهش میباشد. این نتیجه را میتوان از نقطه نظر ریاضی بدست آورد. در این حالت داریم:

$$f_s(t) = f(t) \cdot P_E(t)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P_E(\omega) \quad (5-2)$$

تابع $(\omega) F_s$ را میتوان از معادله (۳-۱) بدست آورد.

$$\tau = \frac{1}{2P_m} = \frac{\pi}{\omega_m} \quad , \quad \omega_0 = \frac{\pi}{\tau} = 2\omega_m$$

و

$$P_E(\omega) = 2A \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a(n\omega_m) \delta(\omega - n\omega_m) \quad (5-3)$$

با جاگذاری معادله (۵-۳) در معادله (۳-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{A \omega_m}{\pi} F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a(n\omega_m) \delta(\omega - n\omega_m) \\ &= \frac{A \omega_m}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a(n\omega_m) F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_m) \end{aligned}$$

$$F_s(\omega) = \frac{A \omega_m}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a(n\omega_m) F(\omega - n\omega_m) \quad (5-4)$$

قسمت دست راست معادله (۴-۵) نمایشگر طیف $F(\omega)$ است بطوریکه هر $2\omega_m$ رادیان

بر ثانیه تکرار میشود و رامنه آن بصورت $S_a(n\omega_m)$ تغییر مینماید. این معادله

نشاند هندسه شکل (۵-۲) میباشد. پالسهاي نمونه برداری لزومی ندارد مستطیل شکل

مطابق شکل (۵-۲) باشد. میتوان تمام نمونه ها را با هر شکل پالس دیگری مانند $\delta(t)$ که انتخاب شود آنها را نشاندار

. آن ضرفاً باعث تغییر شکل پوش $(\omega) F$ در شکل (۵-۲) میشود. این پوش $(\omega) F$ تبدیل فوریه (t) است.

بنابراین نمونه برداری غیره ایده آل $f(t)$ طیف آنرا تکراری رامنه طیف را بتدربیج کم و میرا مینماید

در اینجا نیز میتوان $f(t)$ را با عبور دادن $\hat{f}(t)$ از یک فیلتر پائین گذر بفرکانس قطع نیست بدست آورد . تحول آشکار سازی برای مدولاسیون پالس (نمونه برد اری غیرایده آل) درست شبیه آن چیزیست که برای حالت ایده آل گفته شد میباشد . توجه کنید $\hat{f}(t)$ را میتوان بد ون هیچگونه اهوجاجی حتی اگر نمونه برد اری غیرایده آل باشد آشکار نمود . پهنانی باند یک سیگنال نمونه برد اری شده ایده آل (مدولاسیون ایمپالس) بی نهایت است در حالیکه برای مدولاسیون پالس پهنانی باند معین و محدود بوده زیرا طیف (n) (شکل ۵-۲) با فرکانس کاهش میباید و انرژی فرکانسها زیاد آن کم و قابل صرفنظر است .

هر قدر عرض پالس بزرگ انتخاب شود ، طیف پالس بسرعت کاهش و تنزل یافته و پهنانی باند لازم برای ارسال خبر کوچک میشود . بنابراین چنین بنظر میرسد که مدولاسیون پالس (نمونه برد اری غیرایده آل) بر مدولاسیون ایمپالس (نمونه برد اری ایده آل) ارجحیت دارد زیرا پهنانی باند کوچکتری برای ارسال خبر لازم دارد . البته هر چه از فضای فرکانس بهره میگیریم در فضای زمان از دست میدهیم . برای سیگنال نمونه برد اری شده مدولاسیون پالس ، عامله زمانی بزرگتری نسبت به مدولاسیون ایمپالس احتیاج دارد . چون عرض پالس در مدولاسیون معین میباشد ، از اینرو فقط ارسال یک عدد معین سیگنال خبر همزمان و مشترک در زمان امکان پذیر است ، ولی در مدولاسیون ایمپالس این تعداد محدود و معین نیست . مدولاسیون که در فوق ذکر شد بنام مدولاسیون دامنه پالس (PAM) موسوم است . زیرا سیگنال نمونه برد اری شده نمایشگر یک سری پالس پریود یک است بطوریکه دامنه اش با $f(t)$ موله شده است .

سیگنال نمونه برد اری شده را میتوان از ضرب $f(t)$ در یک سری پالس یکتاخت بدست آورد .

$$f_s(t) = f(t)g_s(t)$$

$$= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT)$$

گه در آن $(t)\hat{f}$ پالس نمونه برداری اولیه میباشد . این نوع نمونه برداری بنام نمونه برداری طبیعی معروف است.

نمونه برداری لحظه‌ای

در نمونه برداری طبیعی هر پالس نمونه بردار در طی زمان نمونه برداری در تابع $f(t)$ ضرب و در نتیجه پالس‌های نمونه برداری شده سیگنال $f_s(t)$ شکل موجه‌ای مختلف دارد . این هم از شکل (۵-۲) پیداست ، قله هر پالس در فالله زمانی نمونه برداری شکل سیگنال $f(t)$ را در برابر میگیرد . در مقابل این موضوع ، نمونه برداری لحظه‌ای را در نظر میگیریم گه در آن — تمام پالس‌های سیگنال نمونه برداری شده ، شبیه بیکدیگر بوده ولی دامنه آنها متناسب با مقدار نمونه برداری از سیگنال میباشد (شکل ۳-۵) . این نوع نمونه برداری اطلاعات کامل تمام نمونه‌ها را حمل میکند ولذا تمام اطلاعات مربوط به $f(t)$ را شامل میشود (البته بشرط آنکه فواصل نمونه برداری از $\frac{1}{2\pi}$ ثانیه کمتر باشد) . توجه کنید ، نمونه برداری طبیعی (شکل ۵-۲) ، اطلاعات $f(t)$ را در سراسر عرض هر پالس نمونه بردار حمل میکند ولی نمونه برداری لحظه‌ای ، اطلاعات $f(t)$ را فقط در لحظه نمونه برداری در برابر میگیرد و بدین دلیل این نوع نمونه برداری بنام نمونه برداری لحظه‌ای خوانده میشود . لازم بذکر است که نمونه برداری توسط یک سری ایمپالس ، (شکل ۱-۵) ، ممکن است نمونه برداری طبیعی یا لحظه‌ای در نظر گرفت .

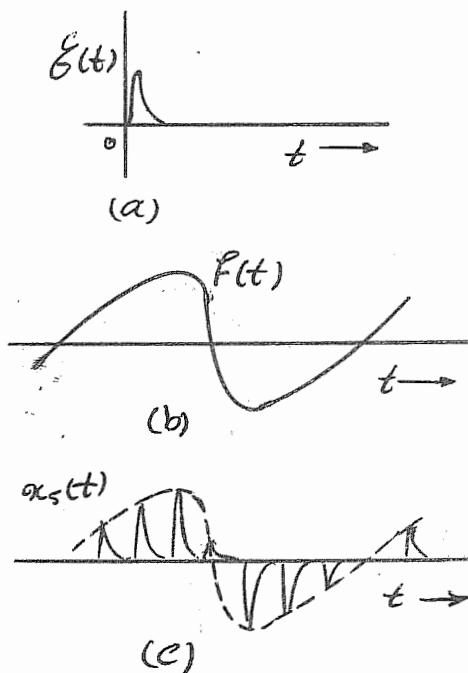
فرض کنید پالس دلخواهی مانند $(t)\hat{f}$ مطابق شکل (۵-۳) بعنوان پالس اصلی این نمونه برداری بکار رود . سیگنال نمونه برداری شده را با $(t)\hat{x}$ نشان میدهیم . بنابراین برای نمونه برداری لحظه‌ای خواهیم داشت :

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) g(t-nT) \quad (5-5)$$

ما سمبول $(t)\hat{f}$ را که برای نشان دادن نمونه برداری $f(t)$ توسط یک سری ایمپالس بکار

بردیم تغییر داریم

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$



شکل (۵-۳)

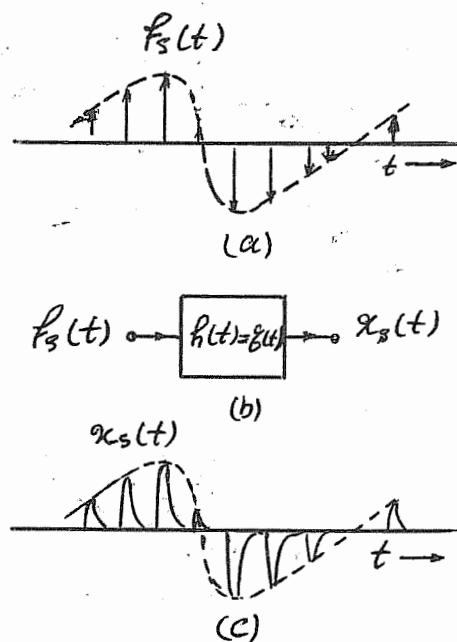
اگنون میخواهیم طیف $\chi_s(t)$ را برای یک پالس مانند $E(t)$ باشکل $F(t)$ بخواهیم پیدا کنیم.
میتوان $\chi_s(t)$ را پاسخ سیستمی دانست که پاسخ تک ضربه ای (ایمپالس رسپانس) آن $F(t)$ و سیگنال ورودی آن $E(t)$ (معادله ۵-۲) یا شکل (۵-۵) باشد،
 $E(t) \leftrightarrow Q(\omega)$
 $\chi_s(t) \leftrightarrow Q(\omega) F_s(\omega)$

با استفاده از معادله (۱-۵) خواهیم داشت:

$$\chi_s(t) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(\omega) F(\omega - 2n\omega_m) \quad (5-2)$$

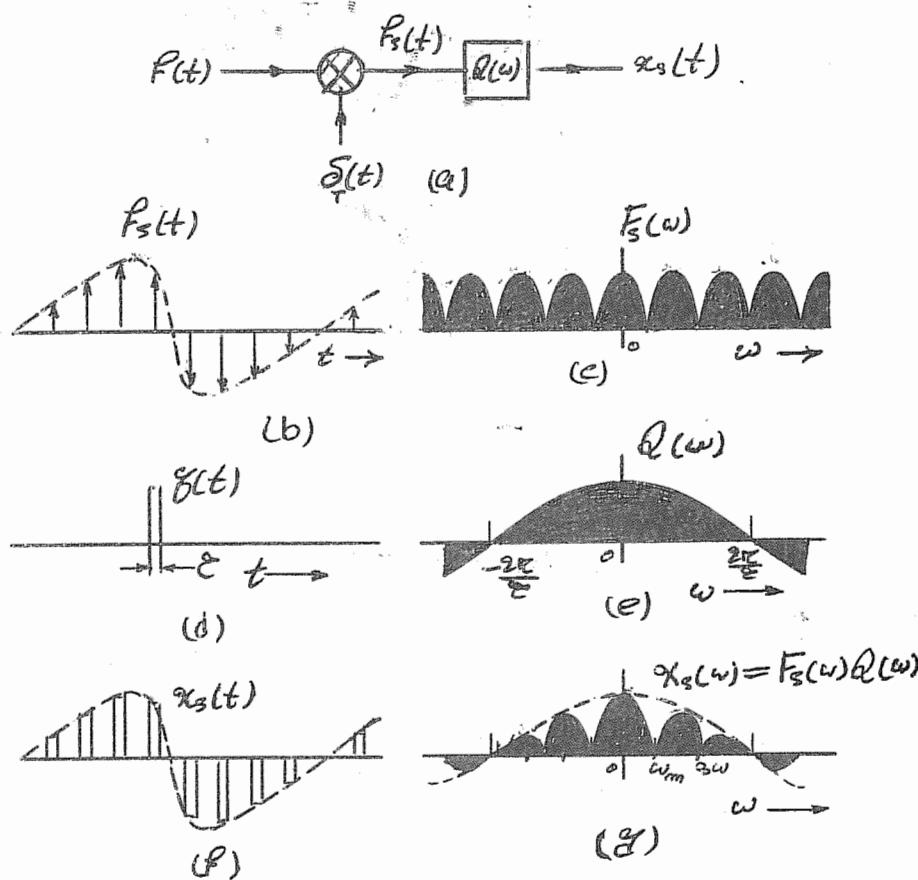
$$T = \frac{2\pi}{\omega_m}$$

از معادله (۵-۲) پیدا است که طیف تابع نمونه برداری شده $\chi_s(t)$ شامل تکرار پریودیکی است و آن بقسمی است که $\mathcal{Q}(\omega)$ در آن ضرب شده است. برای حالتن که انتهای پالس صاف باشد این موضوع در شکل (۵-۵) مصور گشته است.



شکل (۵-۴)

توجه گنید، $\mathcal{Q}(\omega) \chi_s(t)$ طیف (۵-۵) که در شکل (۵-۵) مصور گشته، مانند شکل (۵-۲) نمیباشد. شکل (۵-۲) شامل طیف $\mathcal{F}(\omega)$ است، که بطور پریودیکی به دامنه کم شونده تکرار میشود. البته ریخت و شکل $\mathcal{F}(\omega)$ در هر سیکل بدون اعوجاج باقی میماند. بعنایارت دیگر در شکل (۵-۵)، $\mathcal{F}(\omega)$ شکل اصلیش را از دست داده و در $\mathcal{Q}(\omega)$ ضرب میشود. این حقیقت را میتوان از معادلات (۵-۲) و (۵-۴) بسهولت دریافت در معادله (۵-۴) ضریب $S_Q(72\omega_m)$ بازاء هر سیکل مقداریست ثابت ولی در معادله (۵-۲) ضریب $\mathcal{Q}(\omega)$ تابعی از فرکانس میباشد.



شکل (۵-۵)

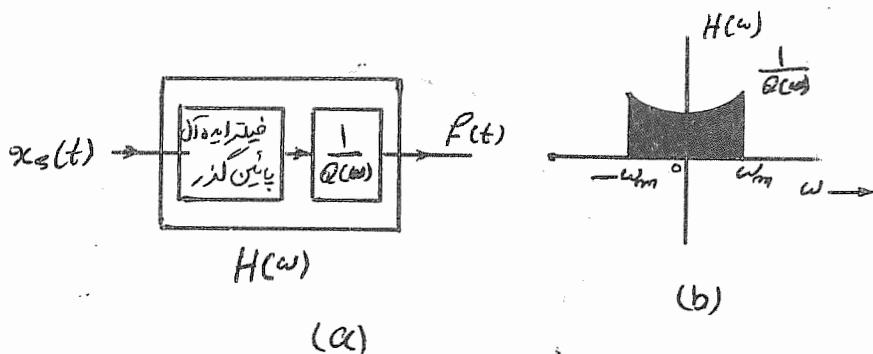
استخراج $f(t)$ از نمونه برداری لحظه‌ای

طیف تابع نمونه برداری شده $F_s(t)$ ، شکل (۵-۵) « شامل شکل موجهای پسوند اعوجاج $F(\omega)$ مانند نمونه برداری طبیعی، شکل (۵-۲۶) نمی‌باشد ». (این بیان با این تفاوت صحیح است - نمونه برداری ایمپالس) . به این را با استفاده از فقط یک فیلتر پائین گذر امکان پذیر نیست . اگر فیلتر پائین گذری با فرکانس قطع ω_m بکار برده شود، در خروجی طیف $F(\omega)$ بدست خواهد آمد برای استخراج سیگنال سیگنال

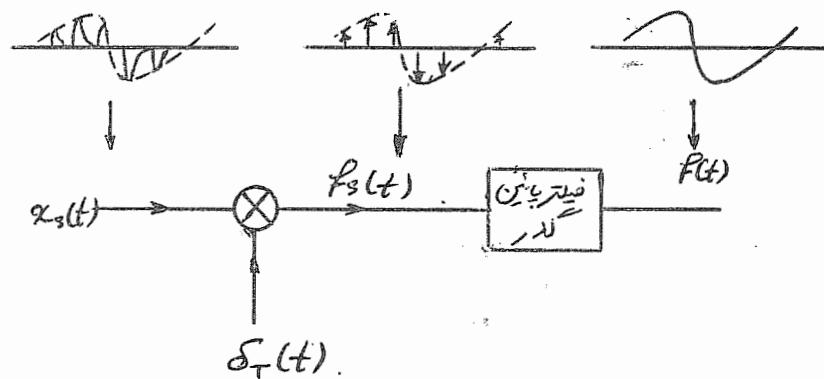
مطلوب $f(t)$ میتوان خروجی اخیر الذکر را از درون فیلتر دیگری که تابع انتقال آن $\frac{1}{Q(\omega)}$ است عبور داد و بدان دست یافت، شکل (۵-۱۲) . چون $F(\omega)$ با باند محدود ω_m رادیان بر ثانیه میباشد، فیلتر ثانوی، شکل (۵-۱۲)، که رارای تابع انتقال $\frac{1}{Q(\omega)}$ است فقط لازم است، حدود فرکانس‌های ($\omega_m - \omega$) را دربرگیرد . خارج از این محدوده فرکانسی، هر مقدار دلخواهی را ممکن است برای سهولت در طرح آن انتخاب کرد . ضمناً میتوانیم هر دو فیلتر را در یک فیلتر مركب که پاسخ فرکانس آن مطابق شکل (۵-۱۲) است خلاصه و جمع کنیم . بدیهی است که تابع انتقال $H(\omega)$ این فیلتر باقیستی در ناحیه $\omega_m - \omega$ برابر $\frac{1}{Q(\omega)}$ و خارج از ناحیه مذکور صفر باشد . بنابراین $H(\omega)$ ، تابع انتقال فیلتر را میتوان بدین صورت بیان کرد .

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{Q(\omega)} & |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{(برای هر فرکانس دیگر)} \end{cases}$$

اگر پالس (t)^ع بی نهایت باریک باشد، آن بسمت یک ایمپالس میل کرده و $H(\omega)$ صاف و مسطح میشود بعبارت دیگر، $H(\omega)$ در ناحیه $(\omega_m - \omega)$ ثابت و یکنواخت باقی میماند . در این حالت، فیلتر مركب شکل (۵-۱۲) بیک فیلتر پائین گذرایده آل با فرکانس قطع ω_m تبدیل شده واستخراج $f(t)$ مشابه استخراج در نمونه برد اری طبیعی خواهد بود . زیرا انتظار میورد اگر (t)^ع بی نهایت باریک شود، آن بسمت تابع ایمپالس میل کرده و نمونه برد اری با یک سری ایمپالس انجام میگردد .



ضمناً تابع $f(t)$ را میتوان از ضرب $(t)x_s(t)$ در $\delta_f(t)$ (یک سری ایمپالس) بدست آورد. واضح است که $\delta_f(t)$ مطابق شکل (۵-۲) حاصل میگردد و سیگنال مطلوب $f(t)$ را میتوان با عبور دادن $(t)x_s(t)$ از یک فیلتر پائین گذر ایده آل بدست آورد.

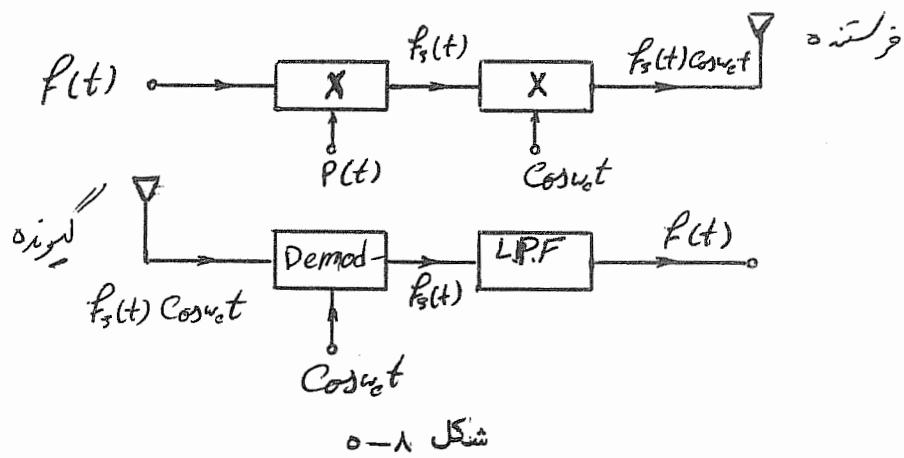


شکل (۵-۲)

ارسال سیگنالهای PAM

سیگنالهای PAM را میتوان با استفاده از خطوط دو سیمه مستقیماً ارسال داشت ولی نمیتوان آنها را با آسانی با امواج الکترو مغناطیسی مستقیماً بدرون فضای آزاد پخش کرد. زیرا طیف PAM در حوالی فرکانسها کم متغیر است و طول آنتن برای ارسال آن خیلی بزرگ و غیر عملی میگردد. برای پخش بوسیله آنتن، میبایست طیف فرکانس آنرا با استفاده از تکنیک مد ولا سیون دامنه طبق آنچه قبلاً بحث گردید به فرکانسها زیاد انتقال دارد. در گیرنده، سیگنال آشکار و طیف آن بجای اولیه اش منتقل میشود. خروجی این آشکار ساز

$f_s(t)$ میباشد و میتوان $f(t)$ را با عبور دادن $f_s(t)$ از یک فیلتر پائین گذر بدست آورد . باین سیستم ، سیستم PAM/AM اطلاق میگردد .



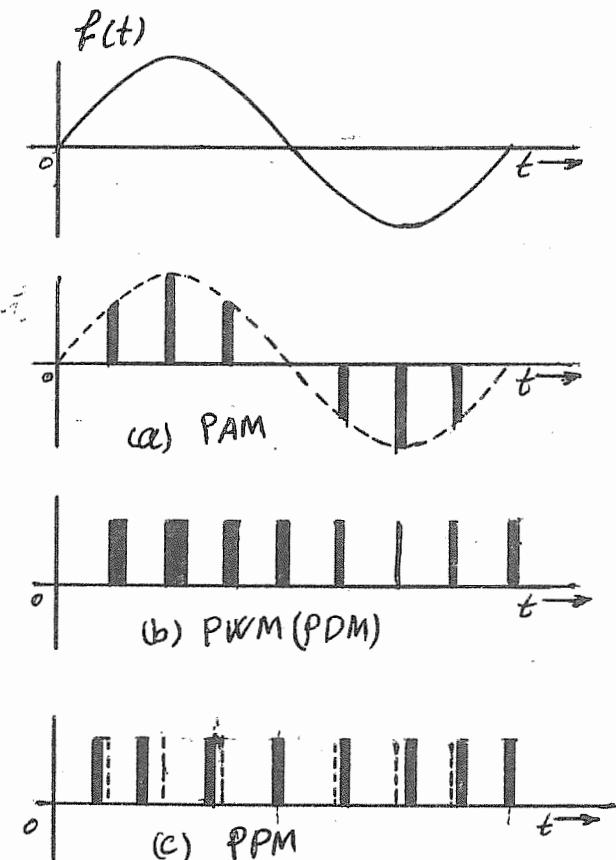
طیف سیگنالهای PAM را نیز میتوان با استفاده از تکنیک مد ولا سیون زاویه بفرکانس‌های زیار انتقال راد . اینگونه سیستم را PAM-FM یا PAM-PM میگویند .
بلوک دیاگرام سیستم PAM-AM در شکل (۵-۱) نشان داده شده است .

۵-۵: صور دیگر مد ولا سیون پالس

برای ارسال سیگنال $f(t)$ ، لازم است اطلاعات آنرا بوسیله مقادیرش در فواصل زمانی $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه از یک دیگر فرستار . نکته قابل توجه در اینجا این است که لازم نیست یک سیگنال با باند محدود را بطور پیوسته ارسال داشت بلکه میتوان اطلاعات مربوطه را تکه تکه و مجرماً فرستار اینگونه اطلاعات مجرماً و ناپیوسته را میتوان بصور مختلف ارسال نمود . مد ولا سیون دامنه پالس PAM که در بخش (۱-۵) بحث گردید مثال خوبی میباشد .

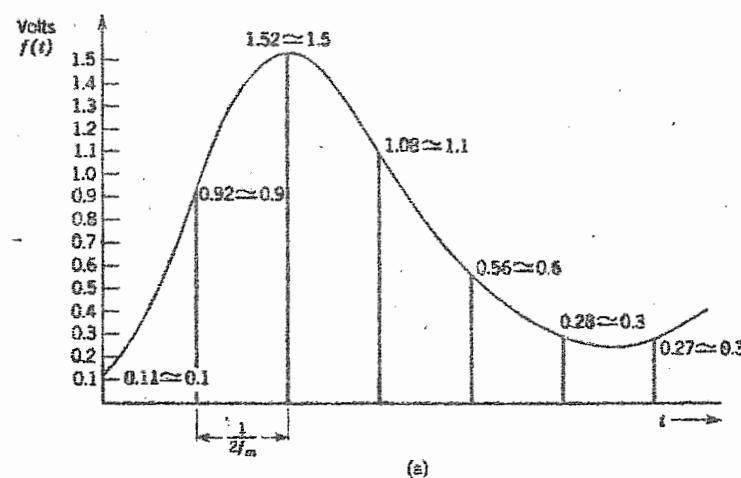
در سیگنالهای PAM، اطلاعات توسط دامنه پالسها حمل میگردد. اما میتوانستیم دامنه تمام پالسها را ثابت نگه داشته ولی عرض آنها را متناسب با مقدار نمونه های $f(t)$ در هر لحظه تغییر دهیم. اینچنین سیستم اگر طرح شود بدان مدولاسیون عرض پالس (Pulse duration modulation) یا مدولاسیون گذرهای پالس (Pulse duration modulation-PWM) گفته میشود. بعلاوه اگر عرض و دامنه پالسها را ثابت نگه داشته ولی جا و موقعیت پالسها را متناسب با مقدار نمونه های $f(t)$ در هر لحظه نمونه برداری تغییر دهیم در آنصورت بدان مدولاسیون وضع یا موقعیت پالس (Pulse Position modulation-PPM) اطلاق میگردد. ذر شکل (۵-۹) سیگنالهای PPM و PWM / PAM مدلوله گشته دهند.

$f(t)$ نشانداره شده است.



شکل (۵-۹)

یکی دیگر از طرور مدولاسیون پالس که بسیار با اهمیت تلقی میشود مدولاسیون رمز پالس
با بی - سی - م^۱ (Pulse Code modulation = PCM) میباشد . در این
سیستم هر مقدار نمونه ای از $f(t)$ بر حسب شکل عده ای پالس که یک حالت رمزی (Code)
با خود میگیرند . ارسال میگردد . ابتداء سیگنال $f(t)$ نامونه برداری شده و سپس هر
نامونه به نزد یکترین سطح مجاز مطابق با شکل (a) تقریب میشود . در این حالت ۱۶
سطح مجاز که بفاصله $1/16$ ولتاژ یکدیگر قرار دارند طرح شده است . در اینجا هر سطح
ولتاژ بر حسب شکل و ریخت معین از پالسهای نمایشنده میشود . نامونه ای از این گذرهای
در شکل (a) مصور گشته است . بنابراین بجای آنکه هر نامونه بنهای ارسال گردد ،
ترکیبی از پالسهای که شکل معین را میسازند فرستاده میشود .
در مثالی که در اینجا آورده شده ، ما از پالسهای دو تائی (با یکنی Binary)
پالسهایی که میتوانند فقط دو مقدار را قبول کنند) استفاده گرده ایم . بطور کلی میتوان از
پالسهای که تائی (پالسهای که میتوانند گه مقدار را قبول نمایند) لیستفاده نمود . برای
مقادیر بزرگتر از گه تعداد پالس کمتری بازا هر نامونه احتیاج است . پس در PCM بجای
آنکه یک پالس بازا هر نامونه (پللاً رسم PAM) فرستاده شود ، فقط لازم است یک سری پالس
بازا هر نامونه ارسال گردد . بنابراین برای ارسال سیگنال $f(t)$ بصورت PCM ، فواصل
زمانی بیشتری نسبت به سلیر سیستمها مدولاسیون مورد نیاز میباشد . البته این عیب در PCM
با مصونیت در مقابل تداخل نویز آن بر طرف پوشیده میشود . برای دریافت سیگنالهای
بد وک توجه به دامنه یا شکل پالس ، لازم است بد افکم آیا پالس وجود دارد یا خیر . بنابراین هر
گونه تداخل خارجی که منجر به اعوجاج ارتفاع یا عرض پالس شود ، اثری بر روی سیگنال PCM
ندارد ، (این نکته اساسی در بخش ۷ بتفصیل بحث شده است)



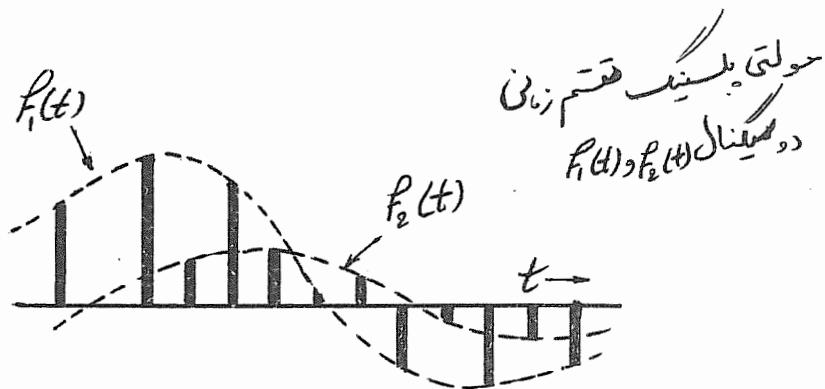
Digit	Binary equivalent	Pulse-code waveform
0	0000	
1	0001	1 1 1 1
2	0010	1 1 1 1 1
3	0011	1 1 1 1 1 1
4	0100	1 1 1 1 1 1 1
5	0101	1 1 1 1 1 1 1 1
6	0110	1 1 1 1 1 1 1 1 1
7	0111	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
8	1000	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
9	1001	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
10	1010	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
11	1011	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
12	1100	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
13	1101	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
14	1110	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
15	1111	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

(b)

Figure 5.10 (b) A possible form of pulse code.

۳-۵: مولتی پلکسینگ تقسیم زمان

قضیه نمونه برداری ما را یاری میکند تا بتوانیم اطلاعات کاملی از یک سیگنال پیوسته با باند محدود را با ارسال نمونه هایش در فواصل معین، انجام دهیم. ارسال این نمونه ها فقط لحظاتی از زمان کانال ارتباطی را اشغال میکند و ممکن است چندین سیگنال را بر مبنای اشتراک زمانی بطور همزمان فرستاد. این کار با نمونه برداری از تمام سیگنالها و پیش هم قرار دادن نمونه هایشان مطابق شکل (۱۱-۵) انجام میگردد.



شکل (۱۱-۵)

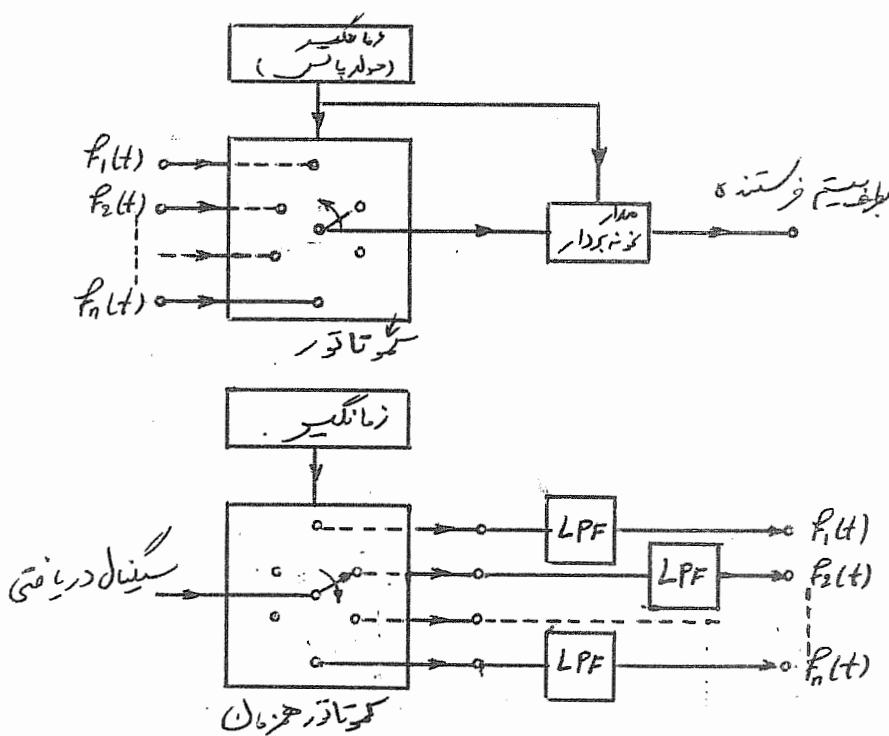
در شکل فوق الذکر نمونه های دو سیگنال $f_1(t)$ و $f_2(t)$ پیش هم قرار داده شده اند در گیرنده نمونه های هر سیگنال با تکنیک مناسب از یکدیگر جدا میشود. اگنون میخواهیم یک سیستم فرستنده و گیرنده مولتی پلکسینگ تقسیم زمان را بطور خلاصه تشریح کیم.

شکل (۱۱-۶) بلوك دیاگرام یک فرستنده و گیرنده مولتی پلکسینگ تقسیم زمان را نشان میدهد. در فرستنده گوتاتور بطور مکرر با مدت زمانی که مدار زمان گیر تعیین میکند از کانال به کانال دیگر سویچ میشود و میتوان گفت پالس های نمونه برداری را تولید مینماید. بنابراین گوتاتور کانال های

مختلف را مگر این بدار نمونه بردار وصل کرده و آن سیگنالها را بین در پی بوسیله پالسهاشی که توسط مدار زمان گیر (Timing circuit) تولید میگردد نمونه برداری میکند. سوچینگ کمotaور و پالسهاشی نمونه بردار همزمان هستند. سیگنال خروجی مدار نمونه بردار شامل تمام نمونه های سیگنالها بوده که در کنار هم قرار گرفته اند. در گیرنده مدار زمانگیر دیگری که با مدار زمان گیر فرستنده همزمان است وجود دارد و بمنظور سوچنگ کردن کمotaور به کانالهای مختلف مدار بکار میرود.

(Low Pass Filter = LPF)

فیلتر پائین گز

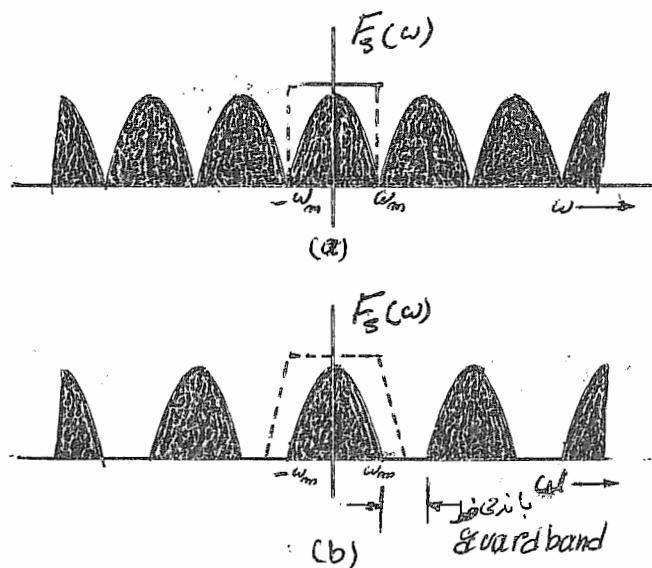


شکل (۵-۱۲)

یعنی نمونه های مختلف هر سیگنال بنحو مناسبی از سایر نمونه ها جدا میگردد و سیگنال مطلوب هر کانال بوسیله فیلتر پائین گزراز نمونه های کانالها مهیوظه استخراج میشود.

Sampling Rate

اگر نمونه های یک سیگنال با باند محدود اطلاعات کامل آن سیگنال را در بر گیرند، هیچگاه سرعت (Rate) نمونه برداری نباید کمتر از $2f_m$ نمونه در ثانیه باشد. مینیمم سرعت نمونه برداری (Sampling rate) نمونه در ثانیه را سرعت نایکوپست تلقی مینمایند.



شکل: (۵-۱۳)

واضح است که سرعت نایکوپست از تکرار طیف سیگنال بدون آنکه رویهم افتادگی و هرگونه فاصله ای بین آنها ایجاد شود حاصل شده است، شکل (۵-۱۳-۵) بنابراین برای استخراج $f(t)$ از سیگنال نمونه برداری شده، یکار بردن فیلتر پائین گذر ایده آل گه آن فرکانسهاي ω_m را بدون هیچگونه تضعیف عبور دارد و فرکانسهاي بیش از ω_m را حذف نماید، ضرورت دارد. البته فیلتر پائین گذر واقعی با مشخصه خیلی تیز در ناحیه فرکانس قطع میتوان ساخت ولی تعداد عناصر و اجزاء الکتریکی زیادی مورد نیاز است. برای آنکه از مشکلات فیلتر فارغ و آزاد شویم، میتوانیم سرعت نمونه برداری را بیش از سرعت نایکوپست انتخاب نمائیم. بطوریکه شکل (۵-۱۳-۶)

نشان میدهد، در این حالت فاصله‌ای بین طیف‌ها ی مکرر بنام باند محافظ (Guardband) ایجاد میگردد. و همان‌طوری‌که پیداست میتوان سیگنال مطلوب را از سیگنال نمونه برداری شده با فیلتری که مشخصه چندان تیزی هم ندارد آنرا آشکار کرد.

اینچنین وضعی هم برای مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس اتفاق میافتد. بدلیل فوق در آنجا نیز بین دو طیف یک مقدار فاصله قرار میدهد. در مولتی پلکسینگ تقسیم زمان، نمونه‌های سیگنال‌های مختلف پیش‌هم و در یک ردیف و بفاصله زمانی خیلی کوچکی از یکدیگر قرار میگیرند. زیرا در گیرنده لازم است نمونه‌های هر سیگنال از سایر نمونه‌ها جدا گردد. فاصله زمانی بسیار کوچکی که بین نمونه‌ها برای عدم تداخل پالسها در نظر میگیرند و بنام محافظ زمانی (Guard time) موسوم است.

۴-۵: پهنای باند لازم برای ارسال سیگنال‌های PAM

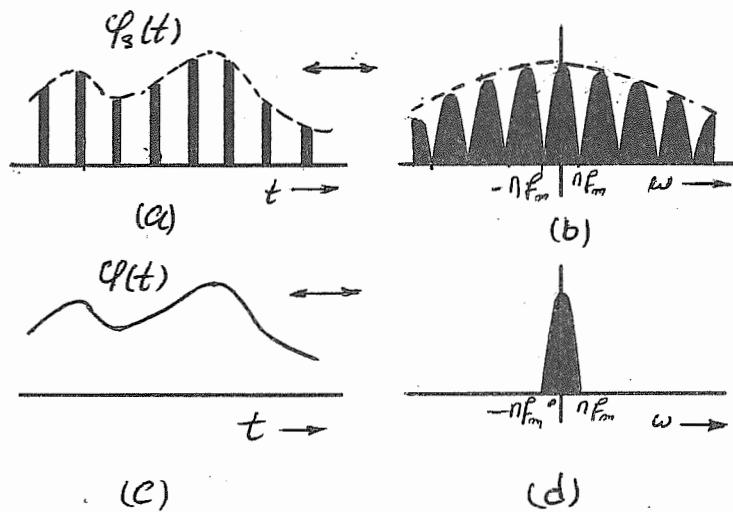
برای مقایسه سیستم PAM با سایر سیستم‌ها، شناخت باند لازم جهت ارسال سیگنال‌های PAM اهمیت دارد. طیف سیگنال‌های PAM بطوری‌که در شکل‌های (۱۶-۱) و (۱۶-۲) دیدیم، شامل فرکانس‌هایی از $(f_0 - \Delta f)$ تا $(f_0 + \Delta f)$ میباشد یعنی برای ارسال کامل سیگنال‌های PAM ما محتاج پهنای باند بی نهایت خواهیم بود. البته نشان خواهیم داد که تمام اطلاعات درون نمونه‌ها را میتوان با باند محدود و معین ارسال نمود. برای مولتی پلکس زمانی n سیگنال پیوسته که هر یک با باند محدود f_m هرتز میباشد، لازم است تا $2f_m$ نمونه در هر ثانیه برای هر سیگنال ارسال شود. بنابراین مولتی پلکسینگ تقسیم زمان n سیگنال $2f_m$ پالس در ثانیه را شامل میشود. اکنون نشان میدهیم که اطلاعات درون این $2f_m$ پالس را میتوان در پهنای باند f_m هرتز ارسال کرد. در نظر اول چنین بنظر میرسد که برای ارسال سیگنال‌های PAM پهنای باند بی نهایت لازم

است زیرا ما پالسها را مستطیل شکل که طیف آن تمام فرکانسها را شامل میگردد، ارسال میداریم البته بایستی خاطر نشان کنیم که مشکل پالس برای ما مطرح نبوده و فقط شناخت ارتفاع پالسها مد نظر است. بنابراین تا وقتی ارتفاع پالسها ثابت است، هر گونه اعوجاج در شکل پالسها برای ما بی اهمیت تلقی میگردد.

میدانیم خروجی سیستم مولتن پلکسینگ تقسیم زمانی PAM شامل $2f_{cm}$ پالس در هر ثانیه است. اکنون مایلیم بدانیم برای ارسال $2f_{cm}$ پالس مستقل اطلاعاتی (نمونه ها) در هر ثانیه، چه پهنهای باندی لازم است. قضیه نمونه برداری بما میگوید:

هر سیگنال با باند محدود B هرتز را میتوان بوسیله $2B$ پالس مستقل اطلاعاتی (نمونه ها) ارسال داشت. بر عکس میتوانیم بگوئیم یک سیگنال نمونه برداری شده با $2f_{cm}$ نمونه در هر ثانیه از یک سیگنال پیوسته با باند محدود f_{cm} هرتز حاصل شده است. در واقع با شناخت این نمونه ها میتوانیم سیگنال $\varphi(t)$ را بر طبق معادله $(1-140)$ بسازیم بنابراین بجای آنکه $2f_{cm}$ نمونه را بفرستیم میتوانیم سیگنال پیوسته $\varphi(t)$ را ارسال داریم چون پهنهای باند این سیگنال f_{cm} هرتز میباشد، لذا پهنهای باند f_{cm} هرتز لازم است.

اما چطور میتوانیم $\varphi(t)$ را از $2f_{cm}$ نمونه در ثانیه پیدا کنیم. میدانیم پالسها صرفاً نمونه های $\varphi(t)$ میباشد پس با توجه به مباحث قبل میتوان سیگنالهای نمونه برداری شده را از درون یک فیلتر پائین گذر با فرکانس قطع f_{cm} هرتز عبور داد و $\varphi(t)$ را بدست آورد.



شکل (۵-۱۴)

ما سیگنالی که با $2nf_m$ پالس در ثانیه است با $\phi_s(t)$ و طیف آنرا با $\phi_s(\omega)$ نشان میدهیم. لازم بذکر است که $\phi_s(\omega)$ از تکرار تناوبی $\phi(\omega)$ تشکیل میشود. در شکل (۵-۱۴) سیگنالهای $\phi_s(t)$ و $\phi(t)$ و طیف‌شان رسم شده است. این نتیجه بسیار مهم بوده و در بخش‌های آینده دوباره مورد استفاده قرار خواهد گرفت، البته با استثنی خاطر نشان کنیم که اگر بخواهیم دوباره همین شکل موج را با همان ارتفاع تولید نمائیم، در آن صورت پهنای باند لازم بیش از $n f_m$ هرتز خواهد شد. پس برای ارسال مستقیم n سیگنال بفرم مولتی پلکس تقسیم زمانی PAM، پهنای باندی برابر $n f_m$ هرتز لازم است و این دقیقاً معادل مولتی پلکس تقسیم فرکانس AM-SSB است. برای ارسال n سیگنال میباشد.

البته قبل اذکر شدیم که تشعشع مستقیم سیگنالهای PAM غیر علی است زیرا انرژی این

گونه سیگنالها در فرکانس‌های کم شمرگز کشته و تشعشع آنها با سیستم‌های موجود موج (آنتن) غیر منطقی و غیر عقلائی می‌باشد. در این گونه موارد، تمام طیف سیگنال PAM را با مد ولا سیون رامه بفرکانس‌های بالاتر انتقال داره و سیگنال حاصل را سیگنال PAM-AM مینامند.

در اثر مد ولا سیون دو باند کناری فوقانی و تحتانی بوجود آمده و پهنای باند آن نیز دو برابر می‌گردد. پس اگر n سیگنال که حد اکثر فرکانس آنها f_m هرتز می‌باشد با مولتی پلکسینگ تقسیم زمانی PAM-AM ارسال گردد، پهنای باند لازم $2nf_m$ هرتز خواهد شد. لازم بذکر است که پهنای باند لازم جهت ارسال n سیگنال با روش مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس AM-DSB نیز همان $2nf_m$ هرتز خواهد بود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که: برای ارسال سیگنال AM-SSB برابر با PAM برابر با سیگنال PAM-AM ارسال سیگنال PAM-AM برابر با سیگنال AM-DSB پهنای باند لازم است.

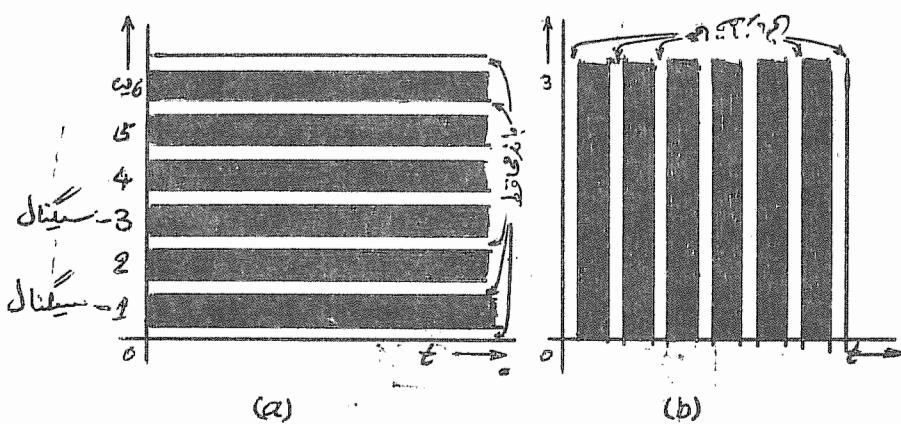
۵-۵: مقایسه مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس و مولتی پلکسینگ تقسیم زمان

در فصول پیشین دو روش برای ارسال همزمان سیگنال‌های با باند محدود بر روی یک کانال بحث گردید. در سیستم مولتی پلکس تقسیم فرکانس، سیگنال‌های ارسال شونده پیوسته بوده و در فضای زمان مخلوط هستند. از نقطه نظر فرکانس، طیف هر سیگنال جای بخصوص از طیف را اشغال می‌نماید و میتوان با فیلتر‌های مناسب آنها را از یکدیگر جدا کرد. پس در مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس جای مناسبی دارند.

در حالت دیگر یعنی مولتی پلکسینگ تقسیم زمان نمونه‌های هر سیگنال از نقطه نظر زمانی جای مناسبی بارند و میتوان آنها را در فضای زمان از یکدیگر تغییر داد. البته طیف فرکانس سیگنال‌های نمونه برداری شده ناحیه فرکانس یکسانی را اشغال می‌کنند بدین معنی که در فضای فرکانس

مخلوط میشوند . چون یک سیگنال بطور کلی با مشخصات فضای فرکانس یا زمانیش شخص میشود ، سیگنالهای مولتی پلکس شده را میتوان در گیرنده با استفاده از تکنیک مناسب در فضای مربوطه اش آشکار و جدا ساخت .

فرق بین دو سیستم فوق الذکر را میتوان از طریق رسم نمودار فضای ارتباط که برای ارسال اطلاعات بکار برده میشود باسانو نشان دار . فضای ارتباط زمانی و فرکانس در شکل (۱۵-۵) برای مولتی پلکسینگ تقسیم زمان و فرکانس نشان داده شده است . برای یک سیستم مولتی پلکس تقسیم فرکانس ، هر سیگنال یک طیف بخصوصی که سیگنال دیگر نباید آنرا اشغال نماید بخود اختصاص دارد ولی از نقطه نظر زمانی همه سیگنالها در کانال مخلوط میباشند . این موضوع در شکل (۱۵-۵) نمایش داده شده است در سیستم مولتی پلکس تقسیم زمان هر نمونه از سیگنال لحظات معینی از فضای زمان را متعلق بخود ساخته (و نبایستی نمونه های سیگنال دیگر آنرا اشغال نمایند) ولیکن از نقطه نظر فرکانسی طیف همه سیگنالها مخلوط میباشند . این موضوع در شکل (۱۵-۵) مصور گشته است .



شکل (۱۵-۵)

هم اکنون گفتم ، پهنای باند لازم جهت ارسال یک عدد سیگنال خواهد در سیستم مولتی پلکس تقسیم زمان با مولتی پلکس تقسیم فرکانس ، یکسان است . (سیگنالهای PAM و AM-88B)

برابر با $\frac{1}{2} f_m$ هر تر و سیگنالهای AM-DSB و PAM-AM برابر f_m هر تر پهنای باند لازم ندارند) پس بنابراین واضح است که برای یک کانال مفروض ، تعداد سیگنالهای با باند محدودی که میتوان در آن واحد و همزمان خواه با مولتی پلکسینگ تقسیم زمان خواهیا مولتی پلکسینگ تقسیم فرکانس ارسال را شت یکسان است .

از نقطه نظر عملی سیستم مولتی پلکس تقسیم زمان بر سیستم مولتی پلکس تقسیم فرکانس رججهان و برتری دارد . اولاً مداراتی که در سیستم مولتی پلکس تقسیم زمان بکار برد میشود در مقام مقایسه با سیستم مولتی پلکس فرکانس ساده تراست ثانیاً برای هر کانال در سیستم مولتی پلکس تقسیم فرکانس با یستقین فرکانس گیر متفاوتی تولید و تدارک نمود . بعلاوه هر سیگنال طیف فرکانس مخصوصی را اشغال کرده ولذا طرح فیلترهای میان گذر مختلفی لازم است . بعبارت دیگر ، سیستمهای مولتی پلکس تقسیم زمان برای هر کانال مدار مشابه و یکسانی را لازم ندارد و آنهم شامل مدارات گیت (gate) یا مدارهای سوچ همزمان نسبتاً ساده‌ای میباشد و ضمناً برای تحول آشکار سازی ، برای هر کانال فیلتر پائین گذر یکسانی لازم است و بدینه است که طرح فیلتر پائین گذر مشابه برای هر کانال ساده و از نقطه نظر اقتصادی مفروض بصریه است . بنابراین این مدارات در مقایسه با مدارات تورها ، آشکار سازها ، مولد های کریپ و فیلترهای میان - گذر مختلف سیستمهای مولتی پلکس تقسیم فرکانس بسیار ساده هستند .

مزایای بعدی سیستم مولتی پلکس تقسیم زمان اینست و حفاظت نسبی در برابر تداخل بین کانالها است (کراس تاک = هم شنوایی) که در سیستم مولتی پلکس تقسیم فرکانس بعملت غیر خطی بودن تقویت گننده های بین راه بوجود میآید . غیر خطی بودن تقویت گننده های مختلف باعث تولید اعوجاج هارمونیکها (چند برابر کردن فرکانس) شده ولذا تداخل در درون کانالها را فراهم میآورد .

مسائل

۱- سیگنالهایی که در زیر داده شده اند با باند محدود نیستند ولی میتوان آنها را بصورت یک سیگنال با باند محدود تقریب کرد . برای هر یک از سیگنالها با فرض یک معیار مناسب، مینیموم سرعت نمونه برداری را در هر حالت حساب کنید .

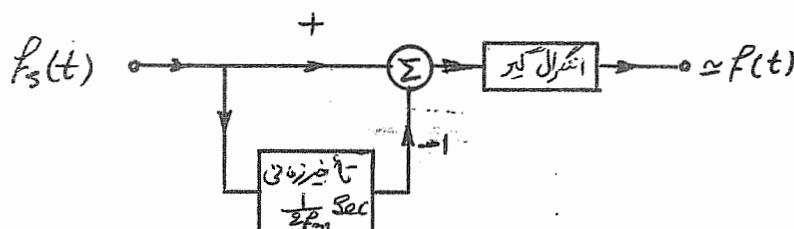
$$a) e^{-2|t|}$$

$$c) te^{-t} u(t)$$

$$b) e^{-st} \cos(\omega_0 t) u(t)$$

$$d) G_{20}(t)$$

۲- اگر $f_s(t)$ یک سیگنال پیوسته با باند محدود f_m هر تزویج $f_s(t)$ سیگنال نمونه برداری شده (با فواصل زمانی یکنواخت $\frac{1}{2f_m}$ ثانیه نمونه برداری شده) باشد ، میتوان $f_s(t)$ را از $f_s(t)$ با عبور $f_s(t)$ از درون یک فیلتر پائین گذر بدست آورد . در عمل از مداریکه در شکل (P:۵-۲) مصور گشته استفاده کرده و $f_s(t)$ را از $f_s(t)$ استخراج مینماییم .



شکل (P:۵-۲)

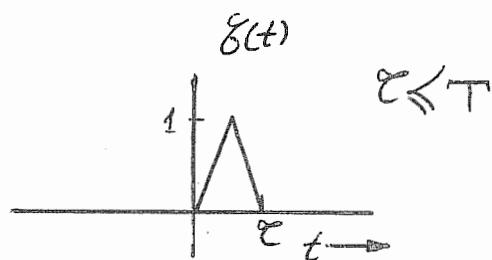
خروجی این مدار تقریباً $f(t)$ خواهد بود :

الف - شکل موجهای نقاط مختلف این مدار را برای یک سیگنال مفروض $f_s(t)$ رسم کنید .

ب - تابع انتقال این دستگاه چیست ؟

(راهنمایی : پاسخ ضربه‌ای آنرا تعیین کنید)

- ج - پاسخ فرکانس سیستم را رسم کرده و آنرا با مشخصه فیلتر پائین گذر ایده آل مقایسه کنید .
- ۳ - سیگنال $f(t)$ با باند محدود $\frac{f_m}{2}$ هرتز میباشد . شکل (۵-۲) نمونه برداری طبیعی $f(t)$ را با پالس‌های چهارگوش نشان میدهد . اگر بجای پالس‌های چهارگوش ، نمونه برداری با شکل موج دلخواه (t) و با تبدیل فوریر (ω) انجام شود ، طیف سیگنال‌های نمونه برداری شده را پیدا کنید . فرض کنید عرض پالسها کمتر از فواصل نمونه برداری نایکوپست است .

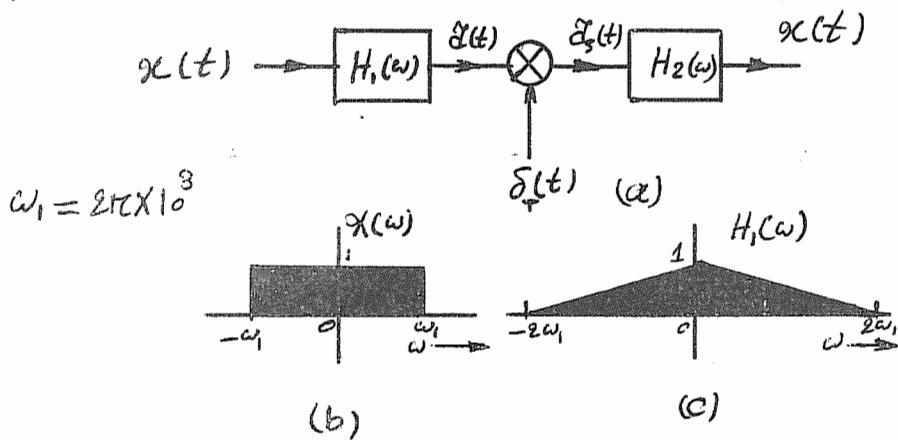


شکل (۵-۳) (P: ۵-۳)

در حالت خاص ، پالسها را مطابق شکل (۵-۳) مثلث شکل در نظر گرفته و سیگنال نمونه برداری شده و طیف آنرا پیدا کرده رسم کنید .

- ۴ - سیگنال $f(t)$ با باند محدود $\frac{f_m}{2}$ هرتز مفروض و با استفاده از پالس‌های مثلثی شکل تصویر (۵-۳) نمونه برداری شده است . عرض پالسها کمتر از فواصل نمونه برداری T میباشد . طیف سیگنال نمونه برداری شده را در حالت نمونه برداری لحظه‌ای پیدا کرده - رسم نمائید .

۵- سیگنال $(t)x$ با طیف $\chi(\omega)$ مطابق شکل (۵-۵b) از درون سیستم
با تابع انتقال $H_1(\omega)$ مطابق شکل (۵-۵c) عبور دارد و میشود.



شکل (۵-۵ :)

سیگنال خروجی $\delta_s(t)$ با یک سری ایمپلیس بطور یکنواخت نمونه برداری میگردد.

الف - فرکانس نمونه برداری δ_s چه مقادیری را میتواند داشته باشد تا بتوان دقیقاً دوباره $\delta_s(t)$ را بدست آورد.

ب - یکی از این مقادیر δ_s را انتخاب نموده و طیف سیگنال نمونه برداری شده را پیدا - کرده، رسم نمائید.

ج - سیگنال نمونه برداری شده $\delta_s(t)$ را از درون سیستم با تابع انتقال $H_2(\omega)$ عبور دارد و میشود. تابع انتقال $H_2(\omega)$ را بقسمی پیدا کنید تا خروجی آن دقیقاً همان $x(t)$ شود.

۶- در دروس قبل بیشتر بحث در باره عرض پالس‌های نمونه برداری آنهم کمتر از فاصله نمونه برداری منحصر و تأکید میشد. بنابراین تمام پالس‌های نمایش دهنده متدار نمونه های مختلف رویهم نصیافتارند. البته اینقدر ها هم سختگیری لازم نیست.

ثابت گنید با بکار بردن پالسهاي روبيهم افتاده (over Lapped) ، (پالسهاي که پهنانی آنها بيشتر از فاصله نمونه برداری است) در نمونه برداری طبیعی، میتوان دوباره سیگنال اصلی را دقیقاً استخراج کرد . و نشان دهید تحول آشکار سازی سیگنال اصلی از سیگنال نمونه برداری شده معادل با آنچیزیست که برای نمونه برداری طبیعی با عرض پالس گمتر از فاصله نمونه برداری بکار برده شد .

اگر نمونه برداری با پالسهاي نمائی $\bar{e}^{\frac{t}{T}}$ = $\mathcal{F}(t)$ انجام گردد، سیگنال نمونه برداری شده و طیف آنرا پیدا کرده رسم گنید .

۷- مسئله ۶ را برای حالت نمونه برداری لحظه‌ای حل گنید .

۸- در نمونه برداری لحظه‌ای، فرض گنید انرژی پالس نمونه برداری E_q برابر با باشد . قدرت سیگنال نمونه برداری شده $\mathcal{F}(t)$ را بر حسب E_q و $\bar{f}(t)$ پیدا گنید . عرض پالسها گمتر از فاصله نمونه برداری T میباشد .

(راهنمایی : از نتایج تعریف ۲-۲ معادله ۳-۲ استفاده گنید)

۹- طیف سیگنال $\mathcal{F}(t)$ را رسم گنید . پهنانی باند این سیگنال 5 هرتز و مینیمم سرعت نمونه برداری 100 نمونه در ثانیه میباشد . نمونه‌های این سیگنال را از زمان $t=0$ با حداقل سرعت نمونه برداری رسم نمائید .

بعلاوه اگر سرعت نمونه برداری 5 و 25 نمونه در ثانیه باشد، نمونه‌های این سیگنال را در سرعت‌های فوق الذکر رسم گنید .

آنچه از این سه حالت حاصل میشود یکسان بودن نمونه‌های این سیگنال میباشد . آیا ممکن است چگونگی این امر را توضیح دهید ؟

(راهنمایی : سیگنال نمونه برداری شده $\mathcal{F}(t)$ است و در آن بازا $\frac{1}{100}$ ، $\frac{1}{25}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ سه حالت را بوجود میآورد . با استفاده از قضیه کانولشن

فرکانس طیف فرکانس $f_s(t)$ را بدست آورده و ثابت کنید در هر حالت $f_s(t)$ شامل اطلاعات کامل $f(t)$ می‌باشد.

۱- قضیه نمونه برداری یکنواخت را برای سیگنالی که با باند محدود f_m هر قز بوده و لیکن موکزیت طیف آن در $\omega = 0$ نمی‌باشد تضمین و گسترش دهد. طیف مشتب آینگونه سیگنالها زیرا f_s تا $f_m - f_c = f_m$ ثابت کنید همینهم سرعت نمونه برداری یکنواخت برای اینگونه سیگنالها $\frac{2f_m}{n}$ باستق نمونه در ثانیه باشد. حد اکثر فرکانس طیف و n بزرگترین عدد صحیح کمتر از $\frac{f_m}{f_c}$ است.