

ای نسخی نامه الهی که تویی
ای آنسه‌ی حال شاهی که تویی
بیرون ز تونیست آنچه د عالم هست
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی

تقدیم به روان پاگ

دکتر حسن مرشد

پژوهشگر علوم نوین میکانیک و امواج در ایران



۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مپانی موجپرهاي نوادي

نويسنده: کاستوناری اوکاموتو

Katsunari Okamoto

به کوشش

دکتر محمد صادق ابریشمیان

استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فهرست مطالب

۷	پیشگفتار (نویسنده: چاپ اول)	۱.۰
۹	پیشگفتار (نویسنده: چاپ دوم)	۲.۰
۱۱	پیشگفتار (نویسنده: چاپ سوم)	۳.۰
۱۳	پیشگفتار (متترجم)	۴.۰
۱۵	تئوری موجی موجبرهای نوری		۱
۱۵	ساختار موجبر	۱.۱
۱۶	تشکیل مودهای هدایت شده	۲.۱
۲۱	معادلات ماکسول	۳.۱
۲۴	انتشار توان	۴.۱
۲۹	موجبرهای نوری مسطح		۲
۲۹	موجبرهای تیغه‌ای	۱.۲
۲۹	استخراج معادلات پایه	۱.۱.۲
۳۱	معادلات پاشندگی برای مودهای TE و TM	۲.۱.۲
۳۵	محاسبه ثابت انتشار	۳.۱.۲
۳۷	توزيع میدان الکتریکی	۴.۱.۲
۴۱	معادله پاشندگی برای مود TM	۵.۱.۲
۴۲	موجبرهای مستطیلی	۲.۲
۴۲	معادلات بنیادی	۱.۲.۲
۴۴	معادلات پاشندگی برای مودهای E_{pq}^x و E_{pq}^y	۲.۲.۲
۴۷	روش کومار	۳.۲.۲
۵۲	روش ضریب شکست موثر	۴.۲.۲
۵۶	میدان تشعشعی از موجبر	۳.۲
۵۷	نواحی فرنل و فرانهوفر	۱.۳.۲
۵۸	الگوی تشعشع پرتو گوسی	۲.۳.۲
۶۲	دستگاه تداخل چند مودی (MMI)	۴.۲
۶۸	تبديل پرتو و ماتریس انتقال اشعه	۵.۲
۷۳	انتقال پرتو توسط عدسی‌ها	۱.۵.۲

۷۶	کانونی کردن و تبدیل اندازه لکه بوسیله دستگاه عدسی ها	۲.۵.۲	فیبر نوری	۳
۷۸	دستگاه دو عدسی هم کانون	۳.۵.۲		
۸۳				فیبر نوری
۸۳	معادلات اصلی			۱.۳
۸۴	نظریه موجی فیبرهای با ضریب شکست پلهای			۲.۳
۸۴	مودهای TE			۱.۲.۳
۸۸	مودهای TM			۲.۲.۳
۸۹	مودهای هایبرید			۳.۲.۳
۹۳	توان نوری انتقالی توسط هر مود			۳.۳
۹۳	مودهای TE			۱.۳.۳
۹۴	مود TM			۲.۳.۳
۹۵	مودهای هایبرید			۳.۳.۳
۹۶	مودهای قطبش خطی (LP)			۴.۳
۹۶	معادله پاشندگی منسجم برای مودهای LP			۱.۴.۳
۱۰۰	ویژگی های پاشندگی مودهای LP			۲.۴.۳
۱۰۲	توان انتشار مودهای LP			۳.۴.۳
۱۰۴	مود اصلی HE ₁₁			۵.۳
۱۰۸	ویژگی های پاشندگی فیبرهای با ضریب شکست پلهای			۶.۳
۱۰۸	اعوجاج سیگنال ناشی از پاشندگی سرعت گروهی			۱.۶.۳
۱۱۴	سازوکار سبب پاشندگی			۲.۶.۳
۱۱۶	رابطه تاخیر زمانی			۳.۶.۳
۱۲۰	پاشندگی رنگی			۴.۶.۳
۱۲۴	طول موج پاشندگی صفر			۵.۶.۳
۱۲۵	نظریه موجی فیبرهای با ضریب شکست تدریجی			۷.۳
۱۲۵	معادلات اصلی و مفاهیم مود در فیبرهای با ضریب شکست			۱.۷.۳
۱۲۵	تدریجی			
۱۳۱	تحلیل فیبرهای با ضریب شکست تدریجی توسط روش WKB			۲.۷.۳
۱۳۵	ویژگی های پاشندگی فیبرهای با ضریب شکست تدریجی			۳.۷.۳
۱۴۰	رابطه بین پاشندگی و ظرفیت انتقال			۸.۳
۱۴۱	فیبر چند مودی			۱.۸.۳
۱۴۱	فیبر تک مودی			۲.۸.۳
۱۴۲	فیبرهای نوری دوشکستی			۹.۳
۱۴۲	دو مود قطبش متعامد در فیبرهای اسمی تک مودی			۱.۹.۳
۱۴۵	استخراج معادلات اصلی			۲.۹.۳
۱۴۸	فیبرهای با هسته بیضوی			۳.۹.۳
۱۵۰	دوشکستی مودی			۴.۹.۳

۱۵۱	پاشندگی مود قطبشی	۵.۹.۳
۱۵۶	کنترل پاشندگی در فیبرهای نوری تک مودی	۱۰.۳
۱۵۶	یکسان‌سازی پاشندگی در فیبرها	۱.۱۰.۳
۱۵۶	فیبر با پاشندگی جابجا شده	۲.۱۰.۳
۱۶۰	فیبر با پاشندگی صاف	۳.۱۰.۳
۱۶۲	فیبرهای جبران کننده پاشندگی گسترده	۴.۱۰.۳
۱۶۶	فیبرهای کریستال فتونیک	۱۱.۳

۱۸۱	نظریه مود تزویجی	۴
۱۸۱	استخراج معادلات مود تزویجی بر اساس نظریه تغییرات جزئی	۱.۴
۱۸۸	تزویج کننده‌های همجهت	۲.۴
۱۹۱	ترویج ضد همجهت در موجبرهای همجهت	۳.۴
۱۹۱	ویژگی‌های انتقال و بازتاب در توری‌های یکنواخت	۱.۳.۴
۱۹۷	توری انتقال فاز	۲.۳.۴
۱۹۹	استخراج ضرایب تزویج	۴.۴
۱۹۹	ضرایب تزویج برای موجبرهای تیغه‌ای	۱.۴.۴
۲۰۰	ضریب تزویج برای موجبر چهارگوش	۲.۴.۴
۲۰۱	محاسبه ضریب تزویج بر مبنای تداخل مودی	۳.۴.۴
۲۰۵	ضرایب تزویج برای فیبرهای نوری	۴.۴.۴
۲۰۹	ضریب تزویج برای موجبرهای موجدار	۵.۴.۴
۲۱۶	دستگاه‌های موجبر نوری با استفاده از کوپلرهای جهت‌دار	۵.۴
۲۱۶	تداخل سنج ماخ-زندر	۱.۵.۴
۲۱۷	تشدید کننده حلقه‌ای	۲.۵.۴
۲۲۱	دستگاه‌های دوپایدار	۳.۵.۴
۲۲۳	توری‌های فیبر برآگ	۶.۴

۲۲۹	اثرات غیرخطی در فیبرهای نوری	۵
۲۲۹	عدد شایستگی برای اثرات غیرخطی	۱.۵
۲۳۰	اثر نوری کر	۲.۵
۲۳۱	مدولاسیون خود-فازی	۱.۲.۵
۲۳۳	معادله شرودینگر غیرخطی	۲.۲.۵
۲۳۷	سالیتون نوری	۳.۵
۲۳۷	سالیتون‌های اصلی و مرتبه بالاتر	۱.۳.۵
۲۴۱	جبران تلفات فیبر با تقویت کننده نوری	۲.۳.۵
۲۴۵	ناپایداری مدولاسیونی	۳.۳.۵
۲۴۸	سالیتون‌های تیره	۴.۳.۵
۲۴۸	فسرده سازی پالس نوری	۴.۵
۲۵۲	پراکندگی نور در محیط همسانگرد	۵.۵

۲۵۳	ارتعاش شبکه یک بعدی	۱.۵.۵
۲۵۶	قوانين انتخاب برای پراکندگی نور توسط فونون	۲.۵.۵
۲۵۹	پراکندگی رامان تحریک شده	۶.۵
۲۶۲	پراکندگی بریلوین تحریک شده	۷.۵
۲۶۶	تولید هارمونیک دوم	۸.۵
۲۶۸	تقویت کننده فیبر آغشته به اربیوم	۹.۵
۲۷۰	مخلوط چهار موج در فیبر نوری	۱۰.۵
روش اجزای محدود		۶
۲۸۱		
۲۸۱	مقدمه	۱.۶
۲۸۲	روش اجزای محدود در تحلیل موجبرهای تیغه‌ای	۲.۶
۲۸۲	فرمول بندی فراتابع	۱.۲.۶
۲۸۴	گسته‌سازی فراتابع	۲.۲.۶
۲۸۶	معادله پاشندگی بر مبنای شرط ایستائی	۳.۲.۶
۲۸۹	مشخصه پاشندگی موجبرهای با ضریب شکست تیغه‌ای	۴.۲.۶
۲۹۳	تحلیل روش اجزای محدود برای فیبرهای نوری	۳.۶
۲۹۳	فرمول بندی وردشی	۱.۳.۶
۲۹۵	گسته‌سازی فراتابع	۲.۳.۶
۲۹۵	معادله پاشندگی بر مبنای شرط ایستائی	۳.۳.۶
۲۹۷	شرایط تک مودی در فیبرهای با ضریب شکست تدریجی	۴.۳.۶
۲۹۹	رابطه فراتابع برای تاخیر زمانی	۵.۳.۶
۳۰۱	تحلیل روش اجزای محدود موجبرهای مستطیلی	۴.۶
۳۰۱	تحلیل اسکالار و برداری	۱.۴.۶
۳۰۴	رابطه‌بندی فراتابع و گسته‌سازی در تعداد محدود عناصر	۲.۴.۶
۳۰۸	معادله پاشندگی بر مبنای شرط ایستائی	۳.۴.۶
۳۱۶	تحلیل تنش موجبرهای نوری	۵.۶
۳۱۶	اصل انرژی	۱.۵.۶
۳۱۹	کشش و تنش سطحی	۲.۵.۶
۳۲۰	معادلات پایه برای تنش و کرنش جابجائی	۳.۵.۶
۳۲۱	رابطه‌بندی انرژی پتانسیل کل	۴.۵.۶
۳۲۶	حل مسئله با شرط ایستائی	۵.۵.۶
۳۲۸	ترکیبی از موجبر اجزای محدود و تحلیل تنش	۶.۵.۶
۳۳۲	تحلیل FEM نیمه‌برداری موجبرهای متقابل با ضریب شکست بالا	۶.۶
۳۳۴	رابطه‌بندی میدان الکتریکی E	۱.۶.۶
۳۳۵	رابطه‌بندی میدان H	۲.۶.۶
۳۳۶	تحلیل مود حالت ماندگار	۳.۶.۶

۴۴۷	روش انتشار پرتو	۷
۳۴۷	معادلات اساسی برای روش انتشار پرتو بر مبنای FFT	۱.۷
۳۴۷	۱.۱.۷ انتشار موج در موجبرهای نوری	۱.۱.۷
۳۴۹	۲.۱.۷ انتشار پالس در موجبرهای نوری	۲.۱.۷
۳۵۰	تجزیه و تحلیل FTTBPM انتشار موج نوری	۲.۷
۳۵۰	حل فرمول با استفاده از عملگر (اپراتور)	۱.۲.۷
	روشهای عددی دقیق با استفاده از الگوریتم فوریه تقسیم	۲.۲.۷
۳۵۱	مرحله‌ای	
۳۵۴	تحلیل FTTBPM پالس نوری	۳.۷
۳۵۶	تبديل فوريه گسته	۴.۷
۳۶۳	تبديل فوريه سريع	۵.۷
۳۶۵	رابطه‌سازی روش‌های عددی با استفاده از تبدیل فوريه گسته	۶.۷
۳۶۷	کاربرد FTTBPM	۷.۷
۳۷۸	تحلیل روش تفاضل محدود موجبرهای نوری مسطح	۸.۷
۳۷۸	استخراج معادلات اصلی	۱۰.۷
۳۸۰	شرایط مرزی شفاف	۲.۸.۷
۳۸۱	حل معادلات سه قطری	۳.۸.۷
۳۸۴	تحلیل FDMBPM موجبرهای مستطیلی	۹.۷
۳۸۷	تحلیل FDMBPM انتشار پالس نوری	۱۰.۷
	تحلیل نیمه برداری FDMBPM موجبرهای با تفاوت ضریب شکست	۱۱.۷
۳۹۰	بالا	
۳۹۲	مودهای شبیه TE	۱.۱۱.۷
۳۹۳	مودهای شبیه TM	۲.۱۱.۷
	تقسیم کننده پلاریزاسیون با استفاده از موجر سیلیکون	۳.۱۱.۷
۳۹۵	روی عایق (SOI)	
۳۹۷	۱۲.۷ روش تفاضل محدود حوزه زمان (FDTD)	
۴۱۱	روش پله‌های متواالی	۸
۴۱۱	تقریب پلکانی مرز موجبر	۱.۸
۴۱۴	دامنه و فازهای بین مرزمشترک اتصال	۲.۸
۴۱۹	کوپلهای مالتی پلکس تقسیم طول موج	۳.۸
۴۲۰	کوپلر پخش طول موج	۴.۸
۴۲۹	مدارات موج نوری مسطح	۹
۴۳۰	ساخت موجبر	۱.۹
۴۳۲	کوپلر ستاره‌ای $N \times N$	۲.۹
۴۳۵	توری موجبر آرایه‌ای	۳.۹
۴۳۵	اصول عمکرد و ویژگی‌های بنیادی	۱۳.۹

۴۴۰	رفتار تحلیلی خواص دی مالی پلکس AWG	۲.۳.۹
۴۴۷	چیدمان موجبر AWG	۳.۳.۹
۴۴۹	پاسخ طیف گوسی AWG	۴.۳.۹
۴۵۲	وابستگی به قطبش طول موج عور	۵.۳.۹
۴۵۵	روشن ورنیه برای تنظیم طول موج مرکزی	۶.۳.۹
۴۵۶	مشخصات همسنوائی و پاشندگی AWG ها	۴.۹
۴۵۶	همسنوائی AWG ها	۱.۴.۹
۴۵۹	ویژگی های پاشندگی AWG	۲.۴.۹
۴۶۸	عملکرد موجبرهای آرایه ای	۵.۹
۴۶۸	پاسخ طیف مسطح AWG	۱.۵.۹
۴۸۵	کاهش تلفات در AWG	۲.۵.۹
۴۸۸	فاصله کanal نابرابر AWG	۳.۵.۹
۴۸۹	موجبر آرایه ای با عرض باند متغیر	۴.۵.۹
۴۹۲	تلفات یکنواخت و فرکانس تناوبی AWG	۵.۵.۹

۵۰۷	چند قضیه و رابطه مهم	۱۰
۵۰۷	قضیه گوس	۱.۱۰
۵۱۰	قضیه گرین	۲.۱۰
۵۱۲	قضیه استوکس	۳.۱۰
۵۱۶	قضیه انTEGRAL هلم هولتز و کیرشهوف	۴.۱۰
۵۱۸	رابطه پراش فرنل - کیرشهوف	۵.۱۰
۵۲۱	روابط برای تحلیل برداری	۶.۱۰
۵۲۳	روابط مختصات استوانه ای و کروی	۷.۱۰
۵۲۳	مختصات استوانه ای	۱.۷.۱۰
۵۲۴	مختصات کروی	۲.۷.۱۰

۵۲۷	معادلات موج برداری در فیber با ضریب شکست تدریجی	آ
۵۲۹	استخراج معادله (۲۱۹.۳)	ب
۵۳۳	استخراج معادلات (۸.۴) و (۹.۴)	پ
۵۳۵	حل دقیق معادلات تزویج مودی (۲۶.۴) و (۲۷.۴)	ت
۵۳۷	اسخراج معادله (۵۹.۶)	ث
۵۳۹	اثبات معادله (۶۶.۶)	ج
۵۴۰	نمایه	

۱.۰ پیشگفتار (نویسنده: چاپ اول)

این کتاب برای تشریح مبانی نظری موجبرهای نوری با تاکید ویژه بر نظریه انتقال در نظر گرفته شده است. به منظور بررسی و توسعه سیستم‌های ارتباطی فیبر نوری و مدارهای موج نور مسطح، درک کامل اصل انتشار امواج نور و کاربرد آن در طراحی دستگاه‌های نوری کاربردی مورد نیاز است. برای پاسخ به این اهداف، این کتاب دانش مهم و روش‌های تجزیه و تحلیل را به تفصیل توضیح می‌دهد.

کتاب شامل ده فصل است. در فصل اول تئوری‌های مبانی موجی موجبرهای نوری، که برای درک پدیده انتشار موج نور در موجبرها ضروری است، شرح داده شده است. فصل‌های دوم و سوم به ترتیب به‌ویژگی‌های انتقال در موجبرهای نوری مسطح و فیبرهای نوری می‌پردازند. روش‌های تحلیلی در فصل‌های دوم و سوم برای درک موضوعات اساسی موجبرها مانند (۱) مفاهیم مود و توزیع میدان الکترومغناطیسی، (۲) معادله پاشندگی و ثابت‌های انتشار، و (۳) پاشندگی رنگی و پهنه‌ای باند انتقال بسیار مهم هستند. تزویج کننده‌های جهت‌دار^۱ و توری‌های برآگ^۲ برای ساخت مدارهای موج نور عملی ضروری هستند. در فصل چهارم تئوری مود تزویج شده برای پرداختن به این دستگاه‌ها به تفصیل توضیح داده شده و فناوری دستیابی دقیق ضرایب تزویج برای چندین دستگاه کاربردی ارائه شده است. فصل پنجم اثرات نوری غیرخطی در فیبرهای نوری مانند سالیتون‌های نوری، پراکندگی رامان تحریک شده، پراکندگی بریلوین تحریک شده و تولید هارمونیک دوم را بررسی می‌کند. اگرچه غیرخطی بودن فیبر مبتنی بر سیلیس بسیار کوچک است، اما چندین اثر نوری غیرخطی به‌دلیل چگالی توان بالا و طول برهمنکش طولانی در فیبر، خود را آشکارا نشان می‌دهند. به‌طور کلی تصور می‌شود که اثرات نوری غیرخطی برای سیستم‌های ارتباطی مضر است. اما، اگر اثرات نوری غیرخطی را کاملاً درک کنیم و از آنها به خوبی استفاده کنیم، می‌توانیم سیستم‌های ارتباطی و دستگاه‌های پردازش اطلاعات بسیار متنوع‌تری بسازیم. از فصل ششم تا هشتم روش‌های مختلف تحلیل عددی ارائه شده است. آنها عبارتند از، روش اجزای محدود (FEM)^۳ موجبری و تجزیه و تحلیل تنش، روش انتشار پرتو (BPM)^۴ بر اساس تبدیل فوریه سریع (FFT)^۵ و روش تفاضل محدود (FDM)^۶، و روش پله‌های متواالی. در تجزیه و تحلیل و طراحی مدارهای موج نور عملی، اغلب با مشکلاتی مواجه می‌شویم که به‌دلیل ساختار پیچیده موجبر و دقت ناکافی در نتایج، نمی‌توان روش‌های تحلیلی را برای آنها اعمال کرد. در چنین مواردی باید به روش‌های عددی تکیه کنیم. روش اجزای محدود برای تحلیل مود و تحلیل تنش موجبرهای نوری با هندسه مقطعی دلخواه و پیچیده مناسب است.

روش انتشار پرتو قوی‌ترین تکنیک برای بررسی پدیده‌های انتشار موج نور خطی و غیرخطی در موجبرهای متغیر محوری مانند جفت‌کننده‌های جهتی منحنی، انشعاب و

^۱Directional couplers

^۲Bragg gratings

^۳Finite Element Method (FEM)

^۴Beam Propagation Methods (BPM)

^۵Fast Fourier Transform (FFT)

^۶Finite Difference Methods (FDM)

ترکیب موجبرها و موجبرهای مخروطی است. BPM همچنین برای تجزیه و تحلیل انتشار پالس نور فوق کوتاه در فیبرهای نوری بسیار مهم است. از آنجایی که FEM و BPM روش‌های عددی همه منظوره هستند، به ابزارهای ضروری برای تحقیق و توسعه سیستم‌های ارتباطی فیبر نوری و مدارهای موج نور مسطح تبدیل خواهند شد. در فصل‌های ۶ تا ۸، نمونه‌های زیادی از تحلیل‌های عددی برای دستگاه‌های موجبر عملاً مهم ارائه شده است. روش الحقاق پلکانی یک تکنیک کلاسیک برای تجزیه و تحلیل موجبرهای متغیر محوری است. اگرچه FEM و BPM برای اکثر موارد مناسب هستند و روش الحقاق پلکان به طور گسترده در مسائل امواج نور استفاده نمی‌شود، نویسنده معتقد است که درک مفاهیم اساسی این روش‌های عددی مهم است. در فصل ۹، دستگاه‌های مختلف مدار موج نور مسطح (PLC) به تفصیل توضیح داده شده است. مالتی پلکسرهای شبکه‌ای موجبر آرایه‌ای (AWGs)^V فیلترهای طول موج بسیار مهمی برای سیستم‌های چندگانه تقسیم طول موج (WDM)^A هستند. بنابراین اصول عملیاتی اساسی، رویه‌های طراحی AWG و همچنین عملکرد و کاربردهای آن‌ها به طور گسترده توضیح داده شده است. در نهایت، فصل دهم در خدمت توصیف چندین قضیه و رابطه مهم است که پایه‌ای برای استخراج معادلات مختلف در سراسر کتاب هستند.

تعداد زیادی از افراد به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم در تکمیل این کتاب مشارکت داشته‌اند. از پروفسور فقید تاکانوری اوکوشی از دانشگاه توکیو به‌خاطر تشویق و حمایت مستمرش تشکر می‌کنیم. من همچنین کمک فنی زیادی را مدیون همکارانم در آزمایشگاه فوتونیک NTT هستم. من از پروفسور Un-Chul Paek^B از استیتوی علم و فناوری کوانگجو، کره و دکتر ایوان پی کامینو از آزمایشگاه‌های بل، فناوری‌های لوسنت، که به‌من فرصت انتشار این کتاب را دادند، سپاسگزارم. مایلم از پروفسور قمار دانشگاه سیتی هنگ کنگ که اکثر بخش‌های نظری را بررسی کرده و پیشنهادات گسترده‌ای ارائه کرد، تشکر کنم. همچنین از پروفسور ریوئیچی ایتوه از دانشگاه توکیو که نگارش نسخه اصلی ژاپنی این کتاب را پیشنهاد کرد، سپاسگزارم.

می ۱۹۹۹
کاتسوناری اوکاموتو

^V Arrayed-waveguide grating

^A Wavelength Division Multiplexing

۲۰ پیشگفتار (نویسنده: چاپ دوم)

از زمان انتشار اولین ویرایش این کتاب در سال ۱۹۹۹، پیشرفت چشمگیری در زمینه فیبرهای نوری و مدارهای موج نور مسطح (PLC^۹) رخ داده است. فیبر کریستال فوتونیک (PCF) (HFs^{۱۰}) یا فیبر توخالی (HFs^{۱۱}) یک نوع کاملاً جدید از فیبر هستند. محصور شدن نور به هسته توسط بازتاب برآگ در PCF هسته توخالی به دست می‌آید. بر عکس، نور توسط تفاوت ضریب شکست موثر بین هسته جامد و روکش توخالی در هسته جامد HF محدود می‌شود. یکی از بارزترین ویژگی‌های PCF‌ها این است که طول موج پاشندگی صفر را می‌توان بهناحیه طول موج مرئی منتقل کرد. این امکان تولید نور ابرپیوسته همدوس و پهن باند را از طول موج مرئی تا ناحیه طول موج مادون قرمز نزدیک می‌دهد. نور همدوس و فوق باند پهن نه تنها برای کاربردهایی مانند توموگرافی همدوس نوری و متropolوزی فرکانسی نیز بسیار مهم است.

تحقیقات روی PLC‌ها بیش از ۳۰ سال است که انجام شده است. با این حال، PLC و گریتینگ موجبر آرایه‌ای (AWG^{۱۲}) به طور عملی در سیستم‌های فیبر نوری از اواسط دهه ۱۹۹۰ مورد استفاده قرار گرفتند. بنابراین، PLC‌ها و AWG‌ها در زمان انتشار اولین ویرایش این کتاب در حال پیشرفت بودند. عملکردهای AWG‌ها بعد از اولین نسخه پیشرفت چشمگیری داشته است. به عنوان مثال، AWG ۴۲۰ کاناله با فاصله کanal ۵ گیگاهرتز در آزمایشگاه ساخته شده است. AWG‌های کانال باریک و تعداد کانال‌های بزرگ نه تنها در مخابرات بلکه در طیف سنجی نیز مهم خواهد بود.

بر اساس این پیشرفت‌های سریع در دستگاه‌های موجبر نوری در طول شش سال گذشته، ناشر و من لازم دیدیم که این نسخه دوم را برای ادامه ارائه دانش جامع به خوانندگان ارائه دهیم.

موضوعات جدیدی در فصل‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۹ آورده شده است. دستگاه‌های تداخل چند مودی (MMI) که به فصل دوم اضافه شده‌اند، اجزای نوری یکپارچه بسیار مهمی هستند که می‌توانند عملکردهای تقسیم و ترکیب منحصر به فردی را انجام دهند. در فصل سوم، بحث مفصل در مورد پاشندگی مود پلاریزاسیون (PMD) و کنترل پاشندگی در فیبر تک مودی همراه با بحث جامع PCF‌ها اضافه شده است. اختلاط چهار موجی (FWM^{۱۳}) که به فصل پنجم اضافه شده است، یک اثر غیرخطی مهم به‌ویژه در سیستم‌های مالتی پلکس تقسیم طول موج (WDM^{۱۴}) است.

اکنون PLC‌های با کنتراست بالا مانند موجبرهای سیلیکونی روی عایق (SOI) برای ساخت مدارهای مجتمع اپتوالکترونیک اهمیت فزاینده‌ای پیدا می‌کنند. برای مقابله با موجبرهای کنتراست با شاخص بالا، تحلیل نیمه برداری پیش نیاز است. در فصول ششم و هفتم تحلیل روش اجزای محدود نیمه برداری (FEM) و روش انتشار پرتو (BPM) به تازگی

^۹ Planar Lightwave Circuits (PLCs)

^{۱۰} Photonic Crystal Fibers (PCFs)

^{۱۱} Holey Fibers (HFs)

^{۱۲} Arrayed-Waveguide Grating (AWG)

^{۱۳} Four-Wave Mixing (FWM)

^{۱۴} Wave-length Division Multiplexing (WDM)

اضافه شده است. علاوه بر این، بحث جامع روش تفاضل محدود حوزه زمانی (FDTD)^{۱۵} در فصل ۷ معرفی شده است.

به دلیل پیشرفت‌های اخیر در PLCها و AWGها، تقریباً تمام مطالب در فصل نهم جدید هستند. خوانندگان درک جامعی از اصول عملیاتی در انواع مختلف AWG‌های مسطح با پاسخ طیفی به دست خواهند آورد. منشأ همسنواری و پاشندگی در AWG‌ها به‌طور کامل شرح داده شده است. انواع مختلفی از دستگاه‌های پردازش سیگنال لایه نوری، مانند مولتی‌پلکسرهای نوری قابل تنظیم مجدد (ROADM)^{۱۶}، اکولایزرهای شب پاشندگی، اکولایزرهای PMD و غیره، شرح داده شده‌اند.

من به‌خاطر کارهایی که این چاپ دوم کتاب بر اساس آن ساخته شده است به تعداد زیادی از مردم مدیون هستم. ابتدا، مایلیم از پروفسور فقید تاکانوری اوکوشی از دانشگاه توکیو برای تشویق و حمایت مستمر تشکر کنم. من حمایت فنی زیادی را مدیون همکارانم در آزمایشگاه فوتونیک NTT هستم. من از پروفسور Un-Chul Paek از موسسه علم و فناوری گوانگجو، کره، و دکتر ایوان پی. کمینوف از فناوری امواج نوری کامینو، ایالات متحده که به‌من فرصت انتشار این کتاب را دادند، سپاسگزارم. همچنین از پروفسور قمار شرکت LTK Industries Ltd، هنگ کنگ که پیشنهادهای گستردۀای را برای چاپ اول کتاب ارائه کرد، سپاسگزارم.

در پایان، مایلیم از همسرم کونیکو و پسرانم هیرواکی و ماساکی برای حمایت گرمانش در تکمیل کتاب تشکر صمیمانه داشته باشم.

۲۰۰۵
کاتسوناری اوکاموتو

^{۱۵}Finite Difference Time Domain (FDTD)

^{۱۶}Reconfigurable Optical Add/Drop Multiplexers (ROADM)

۳.۰ پیشگفتار (نویسنده: چاپ سوم)

از زمان انتشار نسخه دوم در سال ۲۰۰۵، پیشرفت قابل توجهی در زمینه فوتونیک سیلیکون هم در تحقیق و توسعه و هم در کاربردهای عملی حاصل شده است.

فوتونیک سیلیکون به عنوان یک فناوری کلیدی برای برآورده کردن الزامات ساخت اندازه تراشه بسیار کوچک و کم هزینه در نظر گرفته می‌شود. تفاوت ضریب شکست بسیار بالا بین هسته سیلیکونی و روکش سیلیسی باعث می‌شود که هسته موجبر یک مقطع زیر میکرونی باشد. چنین محصور کردن میدان حالت تنگ اجازه می‌دهد تا حداقل شعاع خمشی به چند میکرون کاهش یابد و مدارهای مجتمع فوتونیک فوق متراکم را ممکن می‌سازد.

دستگاه‌های فوتونیک Si در ساخت CMOS (نیمه‌هادی اکسید فلزی مکمل) ساخته می‌شوند که در آن تعداد زیادی تراشه ترانزیستوری بر روی یک ویفر سیلیکونی با قطر ۳۰۰ میلی‌متر (۱۲ اینچ) با گره فرآیندی چند نانومتری پردازش می‌شوند. فوتونیک سیلیکون قصد دارد از دانش صنعت نیمه‌هادی‌ها و سرمایه گذاری‌های گستردگی که در طول دهه‌ها انجام داده است، استفاده کند. مزایا شامل نه تنها پردازش ویفر برای ساخت مدارهای فوتونیک، بلکه تجهیزات آزمایش مدار سفارشی و بسته بندی دستگاه نیز می‌شود. فناوری بسته‌بندی، که ادغام مدارهای فوتونیک و الکترونیک با چگالی بالا را تحقق می‌بخشد، برای دستیابی به پهنه‌ای باند بالا و مصرف انرژی کم به‌طور همزمان بسیار جذاب است. فناوری ساخت ریخته‌گری Si مزایای بسیار زیادی مانند ساخت دقیق، عملکرد دستگاه و تولید حجم را به همراه خواهد داشت، که در نهایت نوید تراشه‌های فوتونیک بسیار ارزان‌تر را می‌دهد.

با این حال، به دلیل اندازه هسته بسیار فشرده و کنتراست بسیار بالا با ضریب شکست، موجبرهای فوتونیک Si کاملاً مستعد خطاهای ساخت در عرض و ارتفاع هسته هستند. تغییرات فرآیند در عرض و ضخامت هسته نوسانات ضریب شکست موثر $n_c = \beta/k$ در به همراه دارد. بررسی‌های نظری نشان می‌دهد که نوسان ضریب شکست موثر Δn_c در موجر فوتونیک Si حدود ۱۰۰ برابر بزرگتر از PLC های مبتنی بر سیلیس است. نوسانات شاخص موثر Δn_c بدتر می‌شود (الف) دقت طول موج مرکز دستگاه‌های تداخلی مختلف، (ب) ویژگی‌های تداخل دستگاه‌های فیلتر و غیره.

این چالش‌های تکنولوژیکی در دستگاه‌های فوتونیک سیلیکونی در فصل‌های جدید به‌طور کامل بررسی شده‌اند.

فناوری WDM در دستیابی به‌الزامات رشد سریع پهنه‌ای باند در برنامه‌های مخابراتی/داده کام و حسگر بسیار مهم است. به‌طور عمده چهار نوع دستگاه وجود دارد که قادرند ددها سیگنال WDM را چندگانه/دی‌مولتی‌پلکس کنند. آنها تشید کننده حلقه‌ای (RR)، فیلتر شبکه‌ای (LFF)، گریتینگ موجبر آرایه‌ای (AWG) و توری مقعر مسطح (PCG) هستند. دو اولی دستگاه‌های آبشاری هستند که بر اثر همسنوائی چند پرتوی زمانی تکیه دارند و دو دومی از اثر همسنوائی چند پرتوی فضایی استفاده می‌کنند. به‌منظور دستیابی به‌ویژگی‌های تداخل خوب در اثرات تداخل چند پرتوی زمانی و مکانی، یکنواختی شاخص موثر بسیار مهم است.

درک ویژگی‌های فیلتر چهار نوع دستگاه بسیار پیشرفته شده است و به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

بر اساس میزان پیشرفت فوق العاده بالا در دستگاه‌های فوتونیک Si و پیشرفت چشمگیر در درک ویژگی‌های فیلتر در ۱۵ سال گذشته، ناشر و من تشخیص دادیم که زمان مناسب برای ارائه نسخه سوم برای ارائه دانش جامع به خوانندگان است.

از آنجایی که این کتاب برای تشریح مبانی نظری موجبرهای نوری در نظر گرفته شده است، من حداکثر تلاش خود را برای توصیف اصول اولیه موجبرهای فوتونیک Si اختصاص دادم تا دانشجویان، مهندسان و محققان بتوانند مهارت‌های کافی را در مورد آنها کسب کنند و بتوانند حرفه‌های خود را بر روی فوتونیک Si شروع کنند. . من فکر می‌کنم این امر به‌ویژه برای افرادی که در رشته الکترونیک تحصیل کرده‌اند (و/یا روی آن کار کرده‌اند) مهم است زیرا فوتونیک Si نیاز به درک هر دو الکترونیک و فوتونیک دارد. موضوعات جدیدی در فصل‌های دوم و نهم آورده شده‌اند. تبدیل پرتو و ماتریس انتقال پرتو، که به‌واسطه اضافه شده‌اند، برای طراحی سیستم اتصال نور بهینه بین دیود لیزر و فیبر نوری (یا موجبر) بسیار مهم است. در بخش ۱۴.۹، پیکربندی‌های موجبر اصلی فوتونیک Si شرح داده شده است تا خوانندگان بتوانند درک جامعی از موجبرهای سیم سیلیکونی، پشنۀ سیلیکونی و شیار سیلیکونی بدست آورند.

اصول عملیاتی سه دستگاه فیلتر WDM مانند RR، LFF و PCG در بخش ۱۵.۹ توضیح داده شده است. نکات مهم کلیدی در طراحی AWG‌های فوتونیک سیلیکونی نیز به‌بخش آخر بخش ۱۵.۹ اضافه شده است. در بخش‌های ۱۶.۹ و ۱۷.۹، ویژگی‌های تداخل چهار نوع فیلتر WDM ناشی از نوسانات ضریب شکست مؤثر (تغییرات در عرض و ضخامت هسته) به‌طور کامل بررسی شده‌اند.

تبدیل فوریه، طیف‌سنجهای هترودین فضایی یکپارچه نوری (FISH)^{۱۷} در بخش ۱۸.۹ اضافه شده است. طیف‌سنجهای هتروداین فضایی موجبر یک تکنیک تبدیل فوریه تداخل‌سنجه است که کلاس جدیدی از فناوری‌های طیف‌سنجهای موجبر را ارائه می‌دهد. مزیت عملی طیف‌سنجهای تبدیل فوریه، توانایی تصحیح عیوب تداخل‌سنجه (خطاهای فاز) در مرحله پردازش داده‌ها با استفاده از اطلاعات خطای فاز اندازه‌گیری شده است. طیف‌سنجهای AWG و FISH نقش مهمی در مراقبت‌های بهداشتی روزانه و کاربردهای سنجش محیطی ایفا می‌کنند، زیرا از نظر اندازه فشرده و بالقوه بسیار کم هزینه هستند.

در نهایت، ده‌ها شکل از فصل‌های اول تا ششم با هدف ارائه شکل‌های جدید با وضوح بهتر به‌خوانندگان دوباره ترسیم شده‌اند.

آگوست ۲۰۲۱
کاتسوناری اوکاموتو

^{۱۷}Fourier-transform, integrated-optic spatial heterodyne (FISH)

۴.۰ پیشگفتار (مترجم)

خداآوند متعال را شاکرم که بمن توفيق داد اين کتاب را در اختيار شما دانشپژوهان قرار دهم. مخابرات امروز و فرداي جهان مدیون سرعت انتقال اطلاعات با حجم زياد است. محيطی که بتواند حجم اطلاعات زياد را حمل کند و از هر نظر اطمینان بخش باشد. در موجبرهای نوری و مخابرات نوری است. نظر به اينکه میبايست دانشجویان مخابرات به نحو احسن با نظریه و کابردۀای موجبرهای نوری آشنا شوند، اقدام به ترجمه اين کتاب که توسط يکی از پیشکسوتان این حوزه نگاشته شده است كردم. اميدوارم دانشجویان عزيز فقط به اين کتاب اکتفا نکنند و خود به مطالعه متن زبان اصلی ساير کتب که در اين زمينه نوشته شده است، نمايند. بدیهی است که اين کتاب عاری از عیب نیست و از شما خواننده محترم تقاضا دارم اشتباها را به اينجانب از طریق ايميل کوشزد تا در صدد رفع آنها برآیم.

msabriish@eetd.kntu.ac.ir

محمد صادق ابريشمييان
۱۴۰۱ اسفند

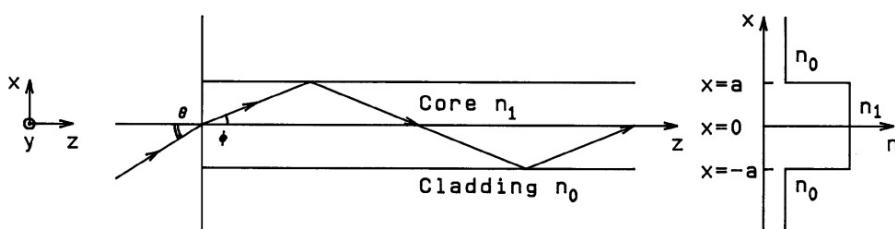
فصل ۱

تئوری موجی موجبرهای نوری

مفاهیم اساسی و معادلات نظریه امواج الکترومغناطیسی مورد نیاز برای درک انتشار امواج نور در موجبرهای نوری ارائه شده است. محصور شدن نور و شکل‌گیری مودها در موجبر با در نظر گرفتن یک مورد موجبر تیغه‌ای به صورت کیفی توضیح داده می‌شود. معادلات ماکسول، شرایط مرزی، و بردار پواین‌تینگ^۱ مختلط به عنوان مبنایی برای فصل‌های بعدی توضیح داده شده‌اند.

۱.۱ ساختار موجبر

فibre‌های نوری و موجبرهای نوری از یک هسته که نور در آن محصور است و یک روکش یا بستر اطراف هسته تشکیل شده است، همانطور که در شکل ۱.۱ نشان داده شده است. ضریب شکست هسته n_1 بیشتر از روکش n_0 است. بنابراین پرتو نوری که به وجه انتهایی موجبر کوپل از طریق بازتاب کامل داخلی در هسته محصور می‌شود. شرط انعکاس داخلی کل در رابطه-روکش توسط $n_1 \sin(\pi/2 - \phi) \geq n_0$ داده شده است. از آنجایی که زاویه ϕ با زاویه تابش θ تحت رابطه $\sin \theta = n_1 \sin \phi \leq \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$ مربوط است، شرایط بحرانی را برای بازتاب داخلی کل (انعکاس کلی) به صورت زیر داده می‌شود:



شکل ۱.۱: ساختار اصلی و نمودار ضریب شکست موجبر نوری.

^۱Poynting

$$\theta \leq \sin^{-1} \sqrt{n_1^2 - n_0^2} \equiv \theta_{max} \quad (1.1)$$

اختلاف ضریب شکست بین هسته و روکش در حدود $n_1 = n_0 = ۱/۰۱$ است. در این صورت معادله (۱.۱) را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد:

$$\theta_{max} \approx \sqrt{n_1^2 - n_0^2} \quad (2.1)$$

زاویه θ_{max} نمایشگر زاویه پذیرش نور بیشینه موجبر است و بنام عدد روزنہ (NA)^۲ معروف است.

اختلاف ضریب شکست نسبی بین n_1 و n_0 بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_0}{n_1} \quad (3.1)$$

مقدار Δ بطور معمول بر حسب درصد بیان می‌شود. عدد روزنہ NA به تفاوت ضریب شکست Δ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$NA = \theta_{max} \approx n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (4.1)$$

زاویه بیشینه برای انتشار نور در داخل هسته با $\phi_{max} \approx \theta_{max}/n_1 \approx \sqrt{2\Delta}$ داده می‌شود. برای موجبر نوری معمولی، $NA = ۰/۲۱$ و $\theta_{max} = ۱۲^\circ$ ($\phi_{max} = ۸/۱^\circ$) وقتی $n_1 = ۱/۴۷$ (برای $n_0 = ۱/۴۵۵$) $\Delta = ۱\%$.

۲.۱ تشکیل مودهای هدایت شده

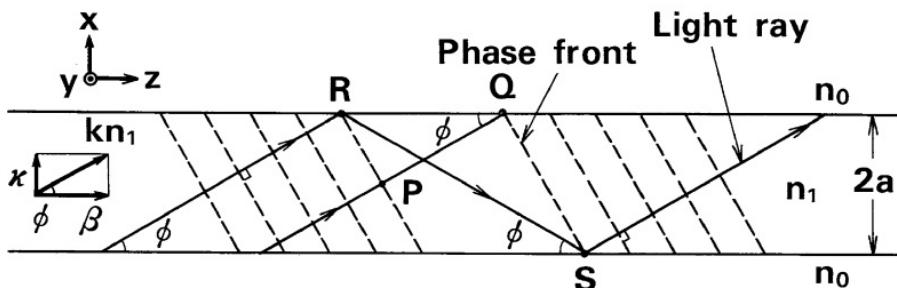
ما سازوکار محصور شدن مود را در نظر گرفته‌ایم و نشان داده‌ایم که زاویه ϕ نباید از زاویه بحرانی تجاوز کند. حتی اگر زاویه ϕ کوچکتر از زاویه بحرانی است، پرتوهای نور با زوایای دلخواه قادر به انتشار در موجبر نیستند. هر مود با پرتوهای نور در یک زاویه انتشار مجزا، همانطور که توسط تجزیه و تحلیل امواج الکترومغناطیسی ارائه شده، همراه است. در اینجا شکل‌گیری مودها را با تصویر پرتو در موجبر تیغه‌ای A ^۱، همانطور که در شکل (۲.۱) نشان داده شده است، شرح می‌دهیم. اجازه دهید موج صفحه‌ای را در نظر بگیریم که در امتداد جهت z با زاویه شبیه ϕ منتشر می‌شود. جبهه فاز امواج صفحه عمود بر پرتوهای نور است. طول موج و تعداد موج نور در هسته به ترتیب λ/n_1 و $k = ۲\pi/\lambda$ هستند، که در آن λ طول موج نور در خلاء است. ثابت‌های انتشار در امتداد z و x (جهت جانبی) با رابطه زیر بیان می‌شوند

$$\beta = kn_1 \cos \phi \quad (5.1)$$

$$k = kn_1 \sin \phi \quad (6.1)$$

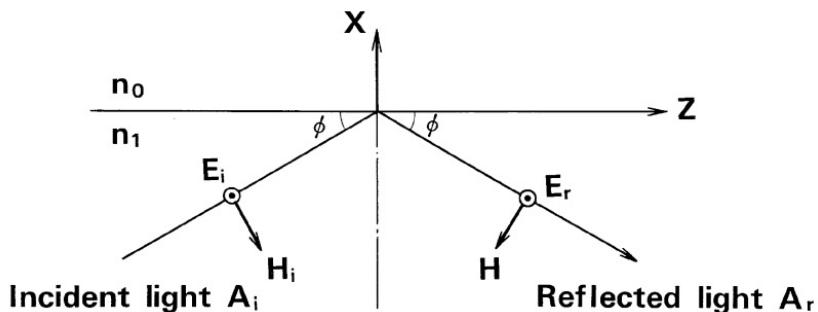
^۱ Numerical Aperture (NA)

قبل از تشریح شکل‌گیری مودها با جزئیات، باید تغییر فاز یک پرتو نور را توضیح دهیم



شکل ۲.۱: پرتوهای نور و جبهه فاز آنها در موجبر.

که از بازتاب کامل رنج می‌برند. ضریب انعکاس نور کاملاً منعکس شده، که به صورت عمود بر صفحه تابشی قطبی شده است (صفحه‌ای که توسط پرتوهای تابشی و بازتاب تشکیل شده است)، همانطور که در شکل (۳.۱) نشان داده شده، در مرجع [۲] آورده شده است.



شکل ۳.۱: بازتاب کلی یک موج مسطح در یک رابط دی الکتریک.

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{n_1 \sin \phi + j \sqrt{n_1^2 \cos^2 \phi - n_0^2}}{n_1 \sin \phi - j \sqrt{n_1^2 \cos^2 \phi - n_0^2}} \quad (7.1)$$

وقتی ضریب بازتاب r را بصورت $r = \exp(-j\Phi)$ مختلط بیان می‌کنیم، اختلاف فاز Φ برابر است با:

$$\Phi = -2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{n_1^2 \cos^2 \phi - n_0^2}}{n_1 \sin \phi} = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{2\Delta}{\sin^2 \phi}} - 1 \quad (8.1)$$

که در آن رابطه (۳.۱) بکار برده شده است. تغییر فاز فوق برای نور کاملاً منعکس شده، تغییر گوس-هانچن [۱، ۳] نامیده می‌شود.

^۱Goos-Hänchen

اجازه دهید اختلاف فاز بین دو پرتو نور متعلق به یک موج مسطح را در شکل (۲.۱) در نظر بگیریم. پرتو نور PQ که از نقطه P به Q منتشر می‌شود، تحت تأثیر بازتاب قرار نمی‌گیرد. از سوی دیگر، پرتو نور RS، که از نقطه R به سوی S منتشر می‌شود، دو بار منعکس می‌شود (در سطح بالایی و پایینی رابطه هسته-روکش). از آنجایی که نقاط P و R یا نقاط Q و S در یک جبهه فاز قرار دارند، مسیرهای نوری PQ و RS (شامل جابجایی‌های گوس-هنچن ناشی از دو بازتاب کل) باید برابر یا تفاوت آنها باید مضرب صحیحی از 2π باشد. از آنجایی که فاصله بین نقاط Q و R برابر $\frac{2a}{\tan \phi} - 2a \tan \phi$ است، فاصله بین نقاط P و Q با رابطه زیر نشان داده می‌شود

$$l_1 = \left(\frac{2a}{\tan \phi} - 2a \tan \phi \right) \cos \phi = 2a \left(\frac{1}{\sin \phi} - 2 \sin \phi \right) \quad (9.1)$$

همچنین، فاصله بین نقاط R و S برابر است با

$$l_2 = \frac{2a}{\sin \phi} \quad (10.1)$$

شرط تطبیق فاز برای مسیرهای نوری PQ و RS در این صورت می‌شود:

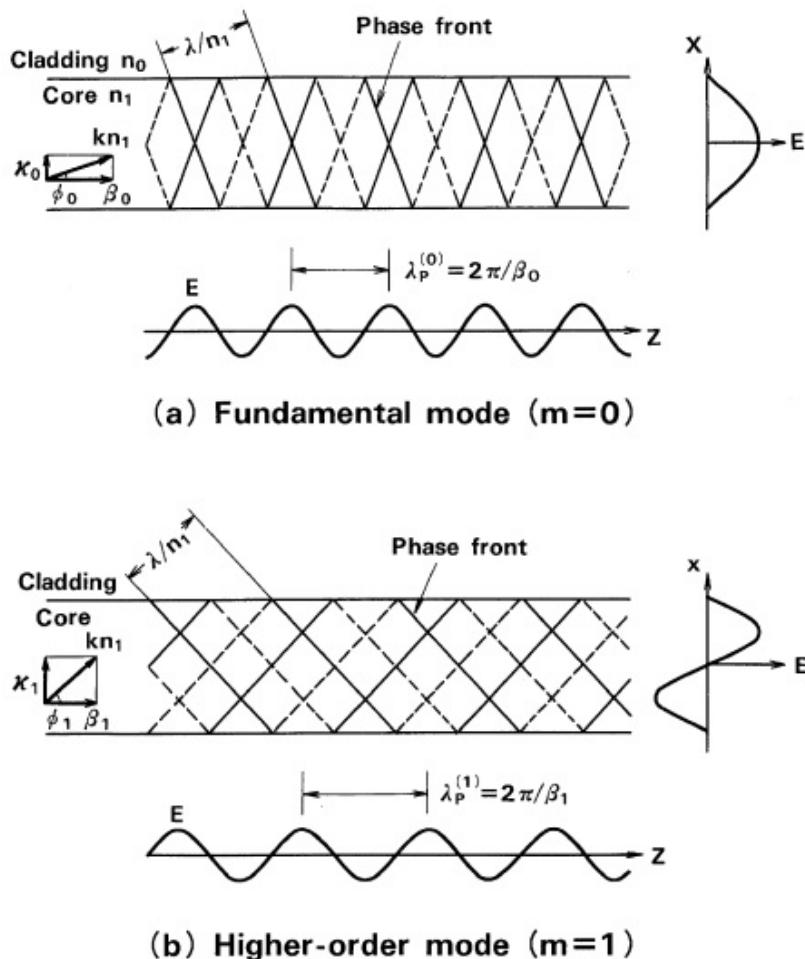
$$(kn_1 l_1 + 2\Phi) - kn_1 l_2 = 2m\pi \quad (11.1)$$

که در آن m یک عدد صحیح است. جایگزینی معادلات (۸.۱) - (۱۰.۱) در معادله (۱۱.۱) شرط زاویه انتشار ϕ را به دست می‌آوریم

$$\tan \left(kn_1 a \sin \phi - \frac{m\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{2\Delta}{\sin^2 \phi} - 1} \quad (12.1)$$

رابطه (۱۲.۱) نشان میدهد که زاویه انتشار پرتو نور گستته است و با ساختار موجبر (شعاع هسته a ، ضریب شکست n_1 ، اختلاف ضریب شکست Δ) و طول موج λ منبع نور (عدد موج $k = 2\pi/\lambda$) بدست می‌آید [۴]. توزیع میدان نوری که شرایط تطبیق فاز میانه (۱۲.۱) را برآورده می‌کند، مود نامیده می‌شود. مقدار مجاز ثابت انتشار β [معادله (۵.۱)] نیز گستته است و به عنوان مقدار ویژه نشان داده می‌شود. مودی که حداقل زاویه را در معادله (۱۲.۱) دارد ($m = 0$) مود اصلی است. مودهای دیگر، با داشتن زوایای بزرگتر، مودهای مرتبه بالاتر ($m \geq 1$) هستند.

شکل (۴.۱) به صورت شماتیک شکل گیری مودها (امواج ایستاده) را برای (الف) مود اصلی و (ب) مود مرتبه بالاتر به ترتیب از طریق تداخل امواج نور نشان می‌دهد. در شکل، خط یکپارچه (ممتد) به ترتیب نمایانگر یک جبهه فاز ثابت و خط نقطه چین جبهه فاز منفی است. دامنه میدان الکتریکی در نقطه‌ای که دو جبهه فاز ثابت (منفی) تداخل دارند به حداقل (حداقل) تبدیل می‌شود. در مقابل، دامنه میدان الکتریکی در نزدیکی رابطه هسته-روکش تقریباً صفر می‌شود، زیرا جبهه فاز ثابت و منفی یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین توزیع میدان در امتداد جهت $-x$ (عرضی) به یک موج ایستاده تبدیل می‌شود و به صورت دوره‌ای در امتداد جهت z با دوره (تناوب) $\lambda_p = (\lambda/n_1)/\cos \phi = 2\pi/\beta$ می‌شود. از آنجایی که $n_1 \sin \phi = \sin \theta \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ از شکل (۱.۱)، معادلات (۱.۱) و



شکل ۴.۱: شکل‌گیری مودها: (الف) مود اصلی، (ب) مود مرتبه بالاتر.

۳.۱) زاویه انتشار به صورت $\sin \phi \leq \sqrt{2\Delta}$ می‌دهند. وقتی پارامتر زیر را معرفی می‌کنیم

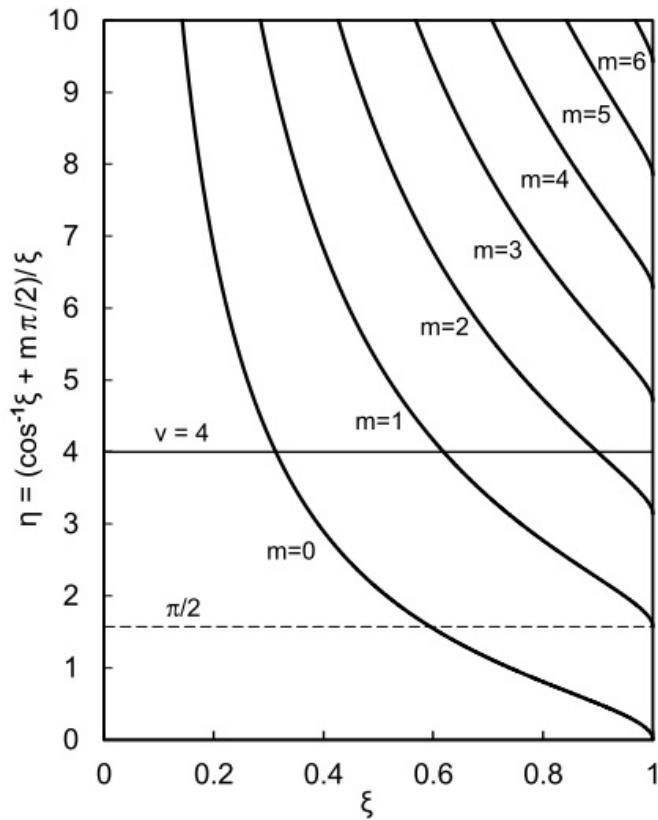
$$\xi = \frac{\sin \phi}{\sqrt{2\Delta}} \quad (13.1)$$

که آن بیک نرمالیزه شده است، تطبیق فاز معادله (۱۲.۱) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$kn_1 a \sqrt{2\Delta} = \frac{\cos^{-1} \xi + m\pi/2}{\xi} \quad (14.1)$$

جمله سمت چپ معادله (۱۴.۱) به عنوان فرکانس نرمال شده^۴ شناخته می‌شود و بصورت

^۴Normalized Frequency



شکل ۵.۱: منحنی پاشندگی موجبر تیغه‌ای

زیر بیان می‌شود

$$v = kn_1 a \sqrt{2\Delta} \quad (15.1)$$

هنگامی که از فرکانس نرمال شده v استفاده می‌کنیم، مشخصه انتشار موجبرها را می‌توان به‌طور کلی (مستقل از هر ساختار موجبر) بررسی کرد.

رابطه بین فرکانس نرمال شده v و ξ (ثابت انتشار β)، معادله (۱۴.۱)، معادله پاشندگی نامیده می‌شود. شکل (۵.۱) منحنی‌های پاشندگی یک موجبر تیغه‌ای^۵ را نشان می‌دهد. نقطه تقاطع بین $\xi = \pi/4$ و $v = v_m = (\cos^{-1}\xi + m\pi)/\xi$ برای هر مود به‌شماره m را می‌دهد و ثابت انتشار β_m از معادله (۵.۱) و (۱۳.۱) بدست می‌آید.

از شکل (۵.۱) مشخص شده است که تنها مود اصلی با $v = v_c$ می‌تواند در حالت $v < v_c$ وجود داشته باشد. v_c وضعیت تک مودی موجبر تیغه‌ای را تعیین می‌کند - به عبارت دیگر، شرایطی که در آن مودهای مرتبه بالاتر قطع می‌شوند. بنابراین به آن مقدار v سرعت قطع گفته می‌شود. وقتی شرط قطع را بر حسب طول موجی که بدست می‌آوریم باز نویسی

^۵Slab Waveguide

کنیم، خواهیم داشت:

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{v_c} a n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (16.1)$$

که در اینجا λ_c را طول موج قطع فضای آزاد می‌نامند. موجبر برای یک تک مود برای طول موج‌های بیش از λ_c کار می‌کند. برای مثال، $\lambda_c = 0.8\mu m$ و قوتی است که در موجبر تیغه‌ای با $n_1 = 1.46$ و $\Delta = 0.3\%$ ($n_1 = 1.455$) هسته برابر $2a = 3.54\mu m$ باشد.

۳.۱ معادلات ماکسول

معادلات ماکسول در یک محیط همگن و دیالکتریک را می‌توان بر حسب میدان الکتریکی e و میدان مغناطیسی h بصورت زیر نوشت [۵]:

$$\nabla \times e = -\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (17.1)$$

$$\nabla \times h = \epsilon \frac{\partial e}{\partial t} \quad (18.1)$$

که در آن ϵ و μ بترتیب گذردهی الکتریکی و نفوذپذیری مغناطیسی است. مقدار ϵ و μ نسبت به مقدار خلاء $[F/m] = 8/854 \times 10^{-12}$ و $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$ برابر است با:

$$\epsilon = \epsilon_0 n^2 \quad (19.1)$$

$$\mu = \mu_0 \quad (19.1b)$$

که در آن n ضریب شکست است. در این صورت عدد موج نور در محیط بصورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$\Gamma = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega n \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = kn \quad (20.1)$$

در معادله (۲۰.۱)، فرکانس زاویه‌ای از میدان‌های الکترومغناطیسی سینوسی متغیر با زمان است. k عدد موج در خلاء است که با فرکانس زاویه‌ای ω مرتبط است

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} \quad (21.1)$$

در معادله (۲۱.۱)، c سرعت سیر نور در خلاء است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \times 10^8 [m/s] \quad (22.1)$$

این واقعیت که واحد سرعت نور c برابر $[m/s]$ است، از واحدهای گذردهی ϵ_0 برابر $[F/m]$ و نفوذپذیری μ_0 برابر $[H/m]$ به صورت زیر تأیید می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{[F/m][H/m]}} = \frac{m}{\sqrt{F \cdot H}} = \frac{m}{\sqrt{[A \cdot s/V][V \cdot s/A]}} = \frac{m}{s}$$

هنگامی که فرکانس موج الکترومغناطیسی $f [Hz]$ باشد، آن با $c/f[m]$ را در یک دوره تغییرات سینوسی منتشر می‌کند. در این صورت طول موج λ موج الکترومغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{\omega/k}{f} = \frac{2\pi}{k} \quad (23.1)$$

که در آن $\omega = 2\pi f$ است.

وقتی میدان‌های الکترومغناطیسی e و h تابع‌های سینوسی زمانی هستند، معمولاً با دامنه‌های مختلط نشان داده می‌شوند، یعنی به اصطلاح فیزورها. به عنوان مثال بردار میدان الکتریکی را در نظر بگیرید

$$e(t) = |\mathbf{E}| \cos(\omega t + \phi) \quad (24.1)$$

که در آن $|\mathbf{E}|$ دامنه و ϕ فاز است. با تعریف دامنه مختلط $e(t)$ بصورت

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}| e^\phi \quad (25.1)$$

رابطه (24.1) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$e(t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \} \quad (26.1)$$

معمولًاً ما $e(t)$ بصورت زیر

$$e(t) = \mathbf{E} e^{j\omega t} \quad (27.1)$$

بحای رابطه (24.1) یا (26.1) نشان می‌دهیم. این عبارت کاملاً صحیح نیست، بنابراین وقتی از این عبارت فیزور استفاده می‌کنیم باید در نظر داشته باشیم که منظور از معادله (27.1)، بخش حقیقی $\mathbf{E} e^{j\omega t}$ است. در اکثر عملیات ریاضی مانند جمع، تفریق، مشتق و انتگرال گیری، جایگزینی معادله (26.1) با شکل مختلط رابطه (27.1) هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کند. با این حال، ما باید در عملیات‌هایی که شامل حاصلضرب توابع سینوسی است، مراقب باشیم. در این موارد ما باید از شکل حقیقی تابع (24.1) یا مزدوج‌های مختلط استفاده کنیم [به معادله (42.1) مراجعه کنید].

وقتی یک موج الکترومغناطیسی با فرکانس زاویه‌ای ω و درجهت z با ثابت انتشار β منتشر می‌شود، میدان الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (28.1)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (29.1)$$

که در آن r نمایشگر موقعیت در صفحه عرضی محور z است. با جایگزین کردن معادلات (۲۸.۱) و (۲۹.۱) در معادلات (۱۷.۱) و (۱۸.۱)، مجموعه معادلات زیر در مختصات دکارتی را خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y & = & -j\omega\mu_0 H_x \\ -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} & = & -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} & = & -j\omega\mu_0 H_z \\ \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y & = & j\omega\epsilon_0 n^2 E_x \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} & = & j\omega\epsilon_0 n^2 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} & = & j\omega\epsilon_0 n^2 E_z \end{array} \right. \quad (۳۰.۱)$$

معادلات فوق مبنایی برای تجزیه و تحلیل موجبرهای تیغه‌ای و مستطیلی هستند. برای تجزیه و تحلیل انتشار موج در فیبرهای نوری که به صورت محوری متقارن هستند، معادلات ماکسول بر حسب مختصات استوانه‌ای نوشته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + j\beta E_\theta & = & -j\omega\mu_0 H_r \\ -j\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} & = & -j\omega\mu_0 H_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} & = & -j\omega\mu_0 H_z \\ \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + j\beta H_\theta & = & j\omega\epsilon_0 n^2 E_r \\ -j\beta H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} & = & j\omega\epsilon_0 n^2 E_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} & = & j\omega\epsilon_0 n^2 E_z \end{array} \right. \quad (۳۱.۱)$$

معادلات ماکسول (۳۰.۱) یا (۳۱.۱) میدان الکترومغناطیسی را به طور کامل تعیین نمی‌کند. از بین جواب‌های ممکن معادلات ماکسول، باید آنهای را انتخاب کنیم که شرایط مرزی مسئله مربوطه را نیز برآورده کنند. رایج‌ترین نوع شرایط مرزی زمانی رخ می‌دهد که ناپیوستگی‌هایی در ثابت دی الکتریک (ضریب شکست) وجود داشته باشد، همانطور که در شکل (۱.۱) نشان داده شده است. در مرز، مولفه مماسی میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی باید شرایط زیر را برآورده کنند

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)} \quad (۳۲.۱)$$

$$H_t^{(1)} = H_t^{(2)} \quad (۳۳.۱)$$

که در آن زیرنویس t مؤلفه‌های مماس بر مرز را نشان می‌دهد و بالانویس‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان دهنده محیط هستند. معادلات (۳۲.۱) و (۳۳.۱) به این معنی است که مولفه‌های مماسی میدان‌های الکترومغناطیسی باید در مرز پیوسته باشند. همچنین شرایط مرزی طبیعی وجود دارد که لازم است میدان‌های الکترومغناطیسی در بینهایت صفر باشند.

۴.۱ انتشار توان

قضیه گوس را برای بردار \mathbf{A} در حجم V در نظر گیرید (بخش ۱۰.۱).

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds \quad (۳۴.۱)$$

که در آن \mathbf{n} بردار واحد عمود بر سطح بسمت خارج از سطح S که حجم V را در بر گرفته و ds بترتیب دیفرانسیل حجم و سطح هستند. وقتی $\mathbf{h} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ را در معادله (۳۴.۱) قرار داده و از اتحاد برداری زیر استفاده کنیم؛

$$\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h} \quad (۳۵.۱)$$

معادله زیر را برای میدانهای الکترومغناطیسی بدست می‌آوریم:

$$\iiint_V (\mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h}) dv = \iint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (۳۶.۱)$$

با جایگزینی معادلات (۳۶.۱) و (۱۸.۱) در معادله (۱۷.۱) نتیجه خواهد شد

$$\iiint_V \left(\epsilon \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \mu \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right) dv = - \iint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (۳۷.۱)$$

اولین جمله در رابطه (۳۷.۱)

$$\epsilon \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \right) \equiv \frac{\partial W_e}{\partial t} \quad (۳۸.۱)$$

که به ترتیب W_e نمایشگر نرخ افزایش انرژی ذخیره شده میدان الکتریکی و جمله دوم

$$\mu \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} \right) \equiv \frac{\partial W_h}{\partial t} \quad (۳۹.۱)$$

نمایشگر نرخ افزایش انرژی ذخیره شده میدان مغناطیسی W_h است. بنابراین، سمت چپ معادله (۳۷.۱) نرخ افزایش انرژی ذخیره شده الکترومغناطیسی را در کل حجم V نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، کل جریان توان را به حجم محدود شده با S نشان می‌دهد. وقتی بردار واحد جهتدار \mathbf{n} را با بردار واحد جهتدار به داخل $(-\mathbf{n})$ جایگزین می‌کنیم، توان کل جریان یافته به حجم از طریق سطح S را بصورت زیر بیان می‌کند.

$$P = \iint_S -(\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{u}_z ds \quad (۴۰.۱)$$

معادله (۴۰.۱) به این معنی است که بردار $\mathbf{e} \times \mathbf{h}$ نشان دهنده جریان توان است و مولفه عمود بر سطح $\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h})$ مقدار توانی را می‌دهد که در واحد سطح عبور می‌کند. بنابراین، بردار $\mathbf{e} \times \mathbf{h}$ چگالی عبور قدرت را نشان می‌دهد و

$$\mathbf{S} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} [W/m^3] \quad (۴۱.۱)$$

بردار پواین‌تینگ^۶ نامیده می‌شود. در این معادله، \mathbf{e} و \mathbf{h} نمایشگر میدان‌های لحظه‌ای نسبت به تابع زمانی t است. اجازه دهید میانگین چگالی عبور توان را در یک میدان متناوب بدست آوریم. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مختلط را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{e}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}\{\mathbf{E}e^{j\omega t} + \mathbf{E}^*e^{-j\omega t}\} \quad (۴۲.1)$$

$$\mathbf{h}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{H}e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2}\{\mathbf{H}e^{j\omega t} + \mathbf{H}^*e^{-j\omega t}\} \quad (۴۲.1)$$

که در آن $*$ نشان دهنده مزدوج مختلط است. سپس میانگین زمانی مولفه نرمال بردار پواین‌تینگ بصورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_z \rangle &= \langle (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{u}_z \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle [(\mathbf{E}e^{j\omega t} + \mathbf{E}^*e^{-j\omega t}) \times (\mathbf{H}e^{j\omega t} + \mathbf{H}^*e^{-j\omega t})] \cdot \mathbf{u}_z \rangle \quad (۴۳.1) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{u}_z) = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \{(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{u}_z\} \end{aligned}$$

که در آن نماد $\langle \rangle$ نمایشگر میانگین زمانی است. در این صورت میانگین زمانی عبور توان برابر است با:

$$P = \iint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{u}_z\} ds \quad (۴۴.1)$$

از آنجایی که $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ اغلب در تحلیل موجبرهای نوری حقیقی می‌شود، میانگین زمانی قدرت انتشار در معادله (۴۴.۱) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$P = \iint_S \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{u}_z ds \quad (۴۵.1)$$

^۶Poynting vector

كتاب نامه

- [1] Marcuse, D. 1974. *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. New York: Academic Press.
- [2] Born, M. and E. Wolf. 1970. *Principles of Optics*. Oxford: Pergamon Press.
- [3] Tamir, T. 1975. *Integrated Optics*. Berlin: Springer-Verlag.
- [4] Marcuse, D. 1972. *Light Transmission Optics*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- [5] Stratton, J. A. 1941. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill.

فصل ۲

موجبرهای نوری مسطح

موجبرهای نوری مسطحی یکی از ابزارهای کلیدی برای ساخت مدارهای نوری یکپارچه و لیزرهای نیمه‌هادی هستند. به طور کلی، موجبرهای مستطیلی شامل یک هسته مرربع یا مستطیل شکل است که با روکشی با ضریب شکست کمتر از هسته احاطه شده است. تحلیل سه بعدی برای بررسی ویژگی‌های انتقال موجبرهای مستطیلی ضروری است. با این حال، تجزیه و تحلیل سه بعدی دقیق معمولاً به محاسبات عددی نیاز دارد و همیشه بینش روشی از مسئله ارائه نمی‌دهد. بنابراین، این فصل ابتدا موجبرهای تیغه‌ای دو بعدی را برای به دست آوردن درک اساسی از موجبرهای نوری توصیف می‌کند. در این صورت چندین تقریب تحلیلی برای تحلیل موجبرهای مستطیلی سه بعدی ارائه شده است. اگرچه این روش‌ها تقریبی هستند، اما مکانیسم ضروری انتقال موج نور در موجبرهای مستطیلی را می‌توان به‌طور کامل بررسی کرد. رفتار دقیق موجبرهای مستطیلی سه بعدی با روش اجزای محدود در فصل ششم ارائه خواهد شد.

۱.۲ موجبرهای تیغه‌ای

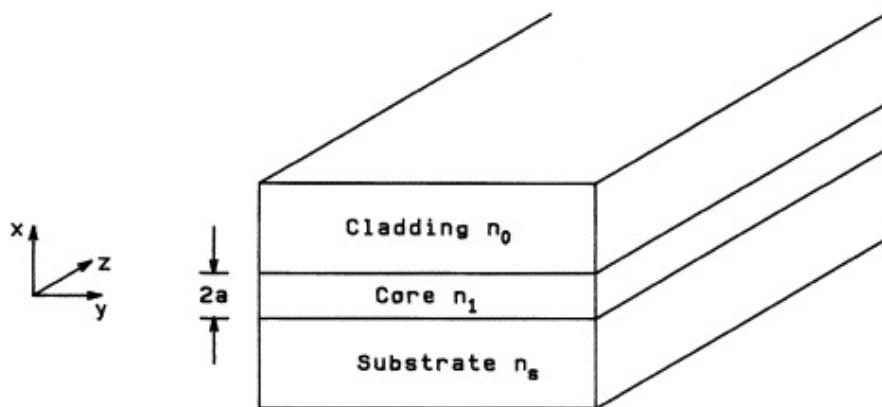
۱.۱.۲ استخراج معادلات پایه

در این بخش، تجزیه و تحلیل موج برای موجبر تیغه‌ای توضیح داده شده است (شکل ۱.۲) که ویژگی‌های انتشار آن توضیح داده شده است [۱، ۳]. با در نظر گرفتن این واقعیت که ما موجبرهای نوری دی‌الکتریک را در نظر می‌گیریم، گذردهی و نفوذپذیری را به صورت $\epsilon = \epsilon_0 n^2$ و $\mu = \mu_0$ در معادله ماکسول (۱.۱) و قرار می‌دهیم؛

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \epsilon_0 n^2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} \quad (1.2\text{ب})$$

که در آن n ضریب شکست است. مطلوب ما انتشار امواج مسطح بصورت زیر است



شکل ۱.۲: موجبر نوری تیغه‌ای

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(x, y)e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (۱۲.۲)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(x, y)e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (۱۲.۲)$$

با جایگزینی معادلات (۱۲.۲) و (۱۲.۲ب) در معادلات (۱۱.۲) و (۱۱.۲ب)، دستگاه معادلات زیر را برای مولفه‌های میدان‌های الکترومغناطیسی بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y &= -j\omega \mu_0 H_x \\ -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega \mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial x} &= -j\omega \mu_0 H_z \end{cases} \quad (۳.۲)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y &= j\omega \epsilon_0 n^2 E_x \\ -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega \epsilon_0 n^2 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial x} &= j\omega \epsilon_0 n^2 E_z \end{cases} \quad (۴.۲)$$

موجبر تیغه‌ای که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است، میدان‌های الکترومغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{H} آن وابسته به محور y نیستند. بنابراین، $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \mathbf{0}$ و $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = \mathbf{0}$ را قرار میدهیم. با قرار دادن این روابط در معادلات (۳.۲) و (۴.۲)، دو مود الکترومغناطیسی مستقل بدست می‌آید، که آنها را بترتیب با مود TE و مود TM نشان میدهند. مود TE معادله موج زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (۱۵.۲)$$

که در آن

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y, \quad (5.2)$$

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{dE_y}{dx}, \quad (5.2)$$

$$E_x = E_z = H_y = 0. \quad (5.2)$$

همچنین مولفه‌های مماسی E_y و H_z باید در مرزهای دو محیط مختلف پیوسته باشند. همانطور که در معادله (5.2) نشان داده شده است. مولفه میدان الکتریکی در امتداد محور z صفر ($E_z = 0$) است. از آنجایی که میدان الکتریکی در صفحه‌ای است که بر محور z عمود است، این توزیع میدان الکترومغناطیسی را مود الکتریکی عرضی (TE) می‌نامند. مود TM در معادله موج زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n^2} \frac{dH_y}{dx} \right) + (k^2 - \frac{\beta^2}{n^2}) H_y = 0. \quad (6.2)$$

که در آن

$$E_x = \frac{\beta}{\omega\epsilon_0 n^2} H_y, \quad (6.2)$$

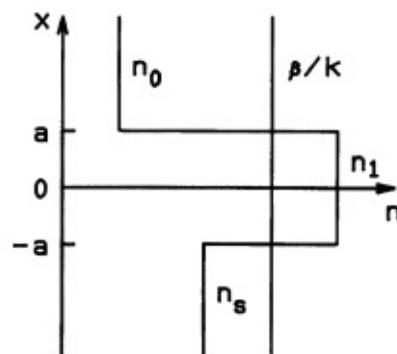
$$E_z = -\frac{j}{\omega\epsilon_0 n^2} \frac{dH_y}{dx}, \quad (6.2)$$

$$H_x = H_z = E_y = 0. \quad (6.2)$$

همانطور که در معادله (6.2) نشان داده شده است مولفه میدان مغناطیسی در امتداد محور z صفر ($H_z = 0$) است. از آنجایی که میدان مغناطیسی در صفحه‌ای است که بر محور z عمود است، این توزیع میدان الکترومغناطیسی را مود مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند.

۲.۱.۲ معادلات پاشندگی برای مودهای TE و TM

ثابت‌های انتشار و میدان‌های الکترومغناطیسی برای مودهای TE و TM را می‌توان با حل معادله (5.2) یا (6.2) به دست آورد. در اینجا روش مشتق برای محاسبه معادله پاشندگی (که معادله مقدار ویژه نیز نامیده می‌شود) و توزیع میدان الکترومغناطیسی آورده شده است. ما موجبر تیغه‌ای را با نمایه ضریب شکست یکنواخت در هسته، همانطور که در شکل (2.2) نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. با توجه به این واقعیت که میدان‌های الکترومغناطیسی هدایت شونده در هسته محدود می‌شوند و به صورت نمایی در روکش میرا می‌شوند، توزیع میدان الکتریکی به صورت زیر بیان می‌شود.



شکل ۲.۲: شکل تغییرات ضریب شکست در موجبر تیغه‌ای

$$E_y = \begin{cases} A \cos(\kappa a - \phi) e^{-\sigma(x-a)} & (x > a) \\ A \cos(\kappa x - \phi) & (-a \leq x \leq a) \\ A \cos(\kappa a + \phi) e^{\xi(x+a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (7.2)$$

که در آن κ, σ و ξ عده‌های موج در محور x در ناحیه هسته و روکش هستند که بقرار زیر میباشند؛

$$\begin{cases} \kappa &= \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2} \\ \sigma &= \sqrt{\beta^2 - k^2 n_0^2} \\ \xi &= \sqrt{\beta^2 - k^2 - n_s^2} \end{cases} \quad (8.2)$$

مولفه میدان الکتریکی E_y در معادله (7.2) در مرزهای فصل مشترک‌های هسته-روکش ($x = \pm a$) پیوسته است. یک شرط مرزی دیگر وجود دارد که مولفه میدان مغناطیسی H_z باید در مرزها پیوسته باشد. H_z با معادله (5.2) داده می‌شود. با صرفنظر کردن از جمله‌های مستقل از x شرط مرزی برای H_z بصورت شرط مرزی dE_y/dx مطابق زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\frac{dE_y}{dx} = \begin{cases} -\sigma A \cos(\kappa a - \phi) e^{-\sigma(x-a)} & (x > a) \\ -\kappa A \sin(\kappa x - \phi) & (-a \leq x \leq a) \\ \xi A \cos(\kappa a + \phi) e^{\xi(x+a)} & (x < -a) \end{cases} \quad (9.2)$$

از شرایطی که باید در $x = \pm a$ پیوسته باشد، معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \kappa A \sin(\kappa a + \phi) = \xi A \cos(\kappa a + \phi) \\ \sigma A \cos(\kappa a - \phi) = \kappa A \sin(\kappa a - \phi). \end{cases}$$

با حذف ثابت A ، خواهیم داشت

$$\tan(u + \phi) = \frac{w}{u}, \quad (110.2)$$

$$\tan(u - \phi) = \frac{w'}{u}, \quad (110.2\text{ب})$$

که در آن

$$\begin{cases} u = \kappa a \\ w = \xi a \\ w' = \sigma a. \end{cases} \quad (111.2)$$

از معادله (110.2) معادلات مقادیر ویژه را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$u = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w'}{u} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (112.2)$$

$$\phi = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{w'}{u} \right) \quad (113.2)$$

عدموج‌های عرضی نرمالیزه w و w' مستقل نیستند. با استفاده از معادلات (110.2) و (111.2) مشخص است که آنها با معادلات زیر به هم مرتبط هستند:

$$u^2 + w^2 = k^2 a^2 (n_s^2 - n_o^2) \equiv v^2, \quad (114.2)$$

$$w' = \sqrt{\gamma v^2 + w^2} \quad (115.2)$$

$$\gamma = \frac{n_s^2 - n_o^2}{n_s^2 + n_o^2} \quad (115.2\text{ب})$$

که در آن فرکانس نرمالیزه، به عنوان معادله (115.1) تعریف شده است و γ اندازه‌گیری عدم تقارن ضریب شکست روکش است. هنگامی که طول موج سیگنال نور و پارامترهای هندسی موجبر مشخص شد، فرکانس نرمالیزه v و γ تعیین می‌شود. بنابراین w و w' با حل معادلات مقدار ویژه معادلات (112.2) و (113.2) تحت محدودیت‌های معادله (114.2) و (115.2) بدست می‌آیند. در موجبر نامتقارن ($n_s > n_o$) همان طور که در شکل (2.2) نشان داده شده است، ضریب شکست بالاتر n_s به عنوان ضریب شکست روکش برای تعریف فرکانس نرمالیزه v استفاده می‌شود. بدان جهت ترجیحاً از ضریب شکست بالاتر n_s استفاده می‌شود که شرایط قطع، موقعی تعیین می‌شود که ثابت انتشار نرمالیزه κ/β با ضریب شکست روکش بالاتر منطبق باشد. معادلات (112.2)، (114.2) و (115.2) معادلات

پاشندگی یا معادلات مقدار ویژه برای مودهای TE_m هستند. هنگامی که طول موج سیگنال نور و پارامترهای هندسی موجبر تعیین می‌شود - به عبارت دیگر، وقتی فرکانس نرمالیزه v و پارامتر عدم تقارن γ تعیین می‌شود - ثابت انتشار را می‌توان از این معادلات تعیین کرد. همانطور که از شکل (۲.۲) یا معادله (۷.۲) و (۸.۲) مشخص است، عدد موج عرضی n باید یک عدد حقیقی برای بخش اصلی میدان نوری باشد که در ناحیه هسته محدود می‌شود. در این صورت شرط زیر باید برآورده شود:

$$n_s \leq \frac{\beta}{k} \leq n_1 \quad (16.2)$$

مقدار β/k است بدون دیماسیون و خودش ضریب شکست برای یک موج مسطح است. بنابراین آنرا ضریب شکست موثر می‌نامند و معمولاً آنرا بصورت زیر بیان می‌کنند؛

$$n_e = \frac{\beta}{k} \quad (17.2)$$

وقتی $n_e < n_s$ است، میدان الکترومغناطیسی در روکش در امتداد عرضی نوسانی می‌شود؛ یعنی، میدان بصورت مود تشعشعی تلف می‌شود. از آنجایی که شرط $\beta = kn_s$ بیانگر شرایط بحرانی است که تحت آن میدان قطع می‌شود و بهمود غیر هدایت شونده تبدیل می‌شود (مود تابشی)، به عنوان شرط قطع^۱ نامیده می‌شود. در اینجا یک پارامتر جدید را بصورت زیر معرفی می‌کنیم

$$b = \frac{n_e^2 - n_s^2}{n_1^2 - n_s^2} \quad (18.2)$$

در این صورت شرایط برای مودهای هدایت شده، از معادلات (۱۶.۲) و (۱۷.۲)، بیان می‌شود:

$$0 \leq b \leq 1 \quad (19.2)$$

و شرط قطع بصورت زیر خواهد بود

$$b = 0. \quad (20.2)$$

که b ثابت انتشار نرمالیزه می‌نامند. با بازنویسی معادله پاشندگی (۱۲.۲) توسط فرکانس نرمالیزه v و ثابت انتشار نرمالیزه b ، بدست می‌آوریم

$$2v\sqrt{1-b} = m\pi + \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{b+\gamma}{1-b}} \quad (21.2)$$

همچنین معادله (۸.۲) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{cases} u = v\sqrt{1-b} \\ w = v\sqrt{b} \\ w' = v\sqrt{b+\gamma}. \end{cases} \quad (22.2)$$

^۱Cutoff

برای موجبرهای متقارن با $n = n_s$ داریم $\gamma = 0$ و معادله پاشندگی (۱۲.۲) و (۱۳.۲) بصورت زیر خلاصه می‌شود

$$u = \frac{m\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) \quad (۱۲۳.۲)$$

$$\phi = \frac{m\pi}{2} \quad (۲۳.۲)$$

معادله (۱۲۳.۲) را نیز می‌توان نوشت

$$w = u \tan \left(u - \frac{m\pi}{2} \right) \quad (۲۴.۲)$$

یا

$$v\sqrt{1-b} = \frac{m\pi}{2} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (۲۵.۲)$$

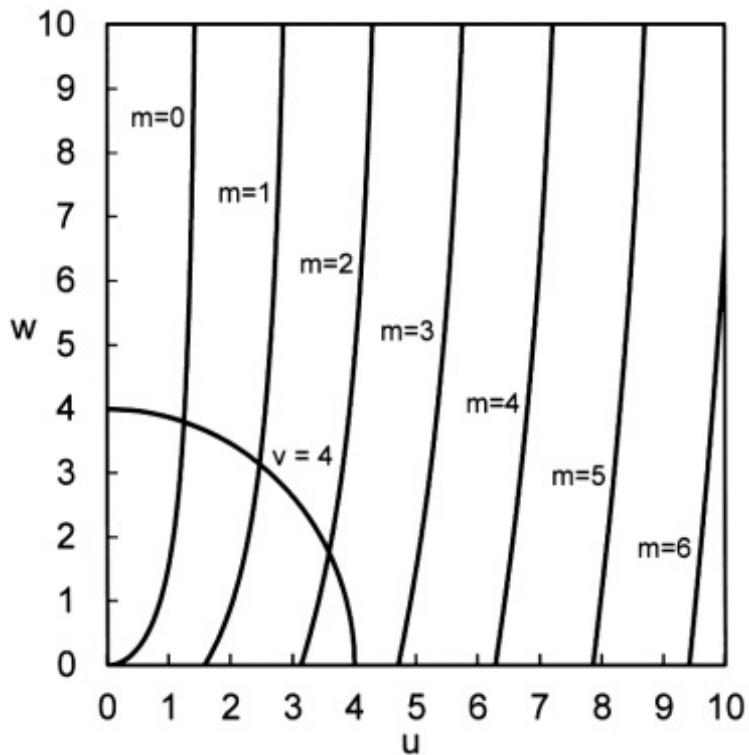
اگر توجه کنیم که عددموچ عرضی $kn_1 \sin \phi$ در معادله (۱۲.۱) را می‌توان با استفاده از پارامترهای حاضر به صورت $u = \kappa a = kn_1 a \sin \phi$ نمایش داد، در این صورت معادله (۱۲.۱) کاملاً با معادله (۲۴.۲) منطبق است.

۳.۱.۲ محاسبه ثابت انتشار

ابتدا روش گرافیکی برای به دست آوردن کیفی ثابت انتشار موجبر تیغه‌ای متقارن نشان داده و سپس روش عددی کمی برای محاسبه دقیق ثابت انتشار توضیح داده شده است. رابطه بین u و w برای موجبر تیغه‌ای متقارن که در معادله (۲۴.۲) آورده‌ایم، در شکل (۳.۲) نشان داده شده است. اعداد موج عرضی u و w باید در معادله (۱۴.۲)، برای یک فرکانس نرمالیزه معین v ، صدق کنند. این رابطه همچنین در شکل (۳.۲) برای مود $v = 4$ به صورت نیم‌دایره با شعاع ۴ ترسیم شده است. سپس جواب‌های معادله پاشندگی به صورت نقاط تلاقی در شکل (۳.۲) داده شده است. به عنوان مثال، اعداد موج عرضی u و w برای مود اصلی با نقطه تلاقی منحنی مماس با $m = 0$ و نیم‌دایره به دست می‌آیند. سپس ثابت انتشار (یا مقدار ویژه) با استفاده از معادله های (۸.۲) و (۱۱.۲) به دست می‌آید. در شکل (۳.۲)، تنها یک نقطه عبور برای مورد $\pi/2 < v < \pi/2$ وجود دارد. این بدان معنی است که مود انتشار تنها مودی است که ساختار موجبر و طول موج نور نابرابری $v_c = \pi/2$ را برآورده کند. سپس مقدار $v_c = \pi/2$ نقطه بحرانی را نشان می‌دهد که در آن مودهای مرتبه بالاتر در موجبر تیغه‌ای متقارن قطع می‌شوند. فرکانس نرمالیزه قطع نامیده می‌شود که از شرایط قطع برای مود $m = 1$ به دست می‌آید.

$$b = w = 0 \quad (۱۲۶.۲)$$

$$u = v = \frac{\pi}{2} \quad (۲۶.۲)$$

شکل ۳.۲: رابطه $w - u$ در موجبر تیغه‌ای

که در آن معادله‌های (۲۰.۲) و (۲۲.۲) استفاده شده است. به‌طور کلی، مقدار قطع v برای مود TE با معادله (۲۱.۲) بصورت زیر داده می‌شود.

$$v_{c,TE} = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{\gamma} \quad (27.2)$$

و برای مود TM بصورت زیر است

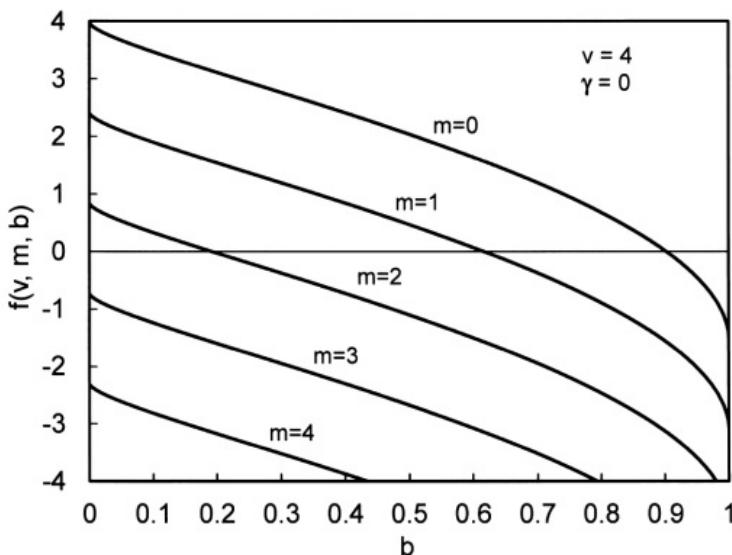
$$v_{c,TM} = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\gamma} \right) \quad (28.2)$$

یک مقدار کیفی را می‌توان با این راه حل گرافیکی برای معادله پاشندگی به‌دست آورد. اما برای به‌دست آوردن جواب دقیق معادله پاشندگی، باید به‌روش عددی تکیه کنیم. در اینجا، ما عملیات عددی را برای موجبر تیغه‌ای متقارن نشان می‌دهیم تا با روش گرافیکی قبلی مقایسه شود. ابتدا معادله پاشندگی (۲۵.۲) را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(v, m, b) = v\sqrt{1-b} - \frac{m\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{1-b}} = 0 \quad (29.2)$$

شکل (۴.۲) نمودار $f(v, m, b)$ برای $v = 4$ را نشان می‌دهد. مقدار b که در آن $f = 0$ ثابت انتشار نرمال شده v را برای مقدار m می‌دهد. حل معادله (۲۹.۲) با روش نیوتون-رافسون

یا روش دوبخشی یا موارد مشابه به دست می‌آید. در اینجا، زیربرنامه^۲ ساده‌ترین روش تقسیم در شکل (۵.۲) نشان داده شده است.



شکل ۴.۲: نمودار $f(v, m, b)$ برای محاسبه مقدار ویژه

ثابت انتشار نرمالیزه b برای هر فرکانس نرمالیزه v محاسبه می‌شود. شکل (۶.۲) رابطه $v - b$ را که منحنی پاشندگی نامیده می‌شود، برای مود TE نشان می‌دهد. شماره مود با زیرنویس m مانند مود TM_m یا TE_m بیان می‌شود. پارامتر در شکل (۶.۲) اندازه‌گیری عدم تقارن γ است. مشخص است که هیچ قطعی برای کمترین مود TE در موجبر متقارن ($\gamma = 0$) وجود ندارد. از سوی دیگر، قطع برای مود TE در موجبر نامتقارن ($\gamma \neq 0$) وجود دارد.

۴.۱.۲ توزیع میدان الکتریکی

هنگامی که مقدار ویژه موجبر به دست آمد، توزیع میدان الکتریکی با معادله (۷.۲) داده شده به جز ثابت دلخواه A تعیین می‌شود. ثابت A زمانی تعیین می‌شود که توان نوری P را که توسط موجبر حمل می‌شود مشخص کنیم. توان P با استفاده از معادله (۴۵.۱) بصورت زیر بیان می‌شود

$$P = \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{u}_z dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx \quad (30.2)$$

برای مود TE می‌توانیم معادله (۳۰.۲) را با استفاده از رابطه (۵.۲) بازنویسی کنیم:

$$P = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx \quad (31.2)$$

^۲Subroutine

```

C ***** EIGEN *****
C *
C * Eigen Value of Single Waveguide *
C *
C *****
C SUBROUTINE EIGEN(V,M,B)
C
C IMPLICIT INTEGER(I-N),REAL(A-H,O-Z)
PAI=3.141592653589793
C
C EPS=1.0E-6
B0=1.0-EPS
DIVSN=0.01
B1=B0
B2=B1-DIVSN
F1=V*SQRT(1.0-B1)-FLOAT(M)*PAI/2.0-ATAN(SQRT(B1/(1.0-B1)))
C
10 F2=V*SQRT(1.0-B2)-FLOAT(M)*PAI/2.0-ATAN(SQRT(B2/(1.0-B2)))
IF(F1*F2.LE.0.0) GO TO 20
B1=B2
B2=B1-DIVSN
F1=F2
GO TO 10
20 IF(DIVSN.LE.EPS) GO TO 30
B2=(B1+B2)/2.0
DIVSN=DIVSN/2.0
GO TO 10
C
30 B=(B1+B2)/2.0
RETURN
END

```

شکل ۵.۲: زیربرنامه روش دوبخشی برای محاسبه مقدار ویژه

با جایگزینی معادله (۷.۲) در معادله (۳۱.۲)، می‌توانیم کسر توان را به ترتیب در نواحی هسته، بستر و روکش به دست آوریم.

$$P_{core} = \frac{\beta a A^2}{2\omega\mu_0} \left\{ 1 + \frac{\sin^2(u + \phi)}{2w} + \frac{\sin^2(u - \phi)}{2w'} \right\} \quad (-a \leq x \leq a) \quad (۳۲.۲)$$

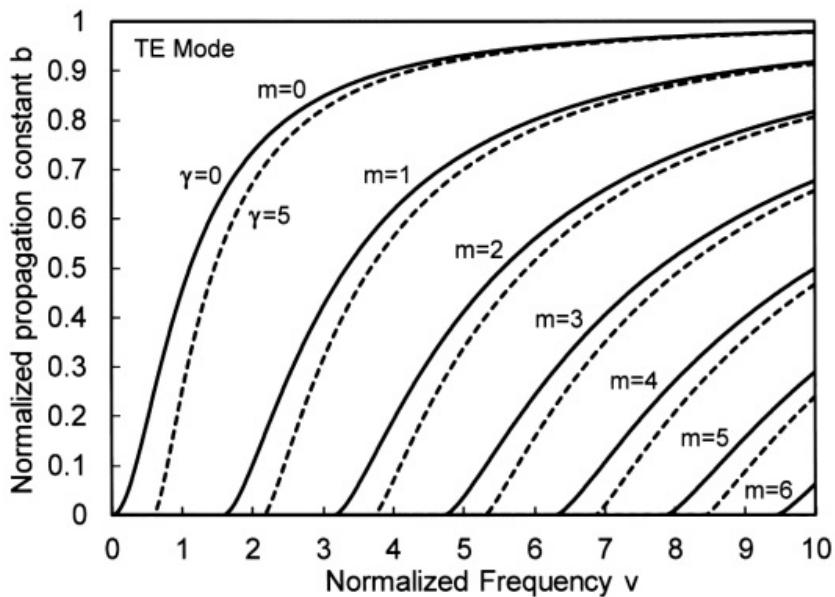
$$P_{sub} = \frac{\beta a A^2}{2\omega\mu_0} \frac{\cos^2(u + \phi)}{2w} \quad (x \leq -a) \quad (۳۲.۲b)$$

$$P_{clad} = \frac{\beta a A^2}{2\omega\mu_0} \frac{\cos^2(u - \phi)}{2w'} \quad (x > a) \quad (۳۲.۲c)$$

برای محاسبه (۳۲.۲) از معادله (۱۰.۲) استفاده می‌کنیم. در این صورت توان کل P برابر است با:

$$P = P_{core} + P_{slab} + P_{clad} = \frac{\beta a A^2}{2\omega\mu_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2w} + \frac{1}{2w'} \right\} \quad (۳۳.۲)$$

در اینجا ثابت A از رابطه زیر تعیین می‌شود



شکل ۶.۲: منحنی‌های پاشندگی برای مودهای TE در یک موجبر تیغه‌ای

$$A = \sqrt{\frac{\gamma \omega \mu_0 P}{\beta a (1 + 1/\gamma w + 1/\gamma w')}} \quad (34.2)$$

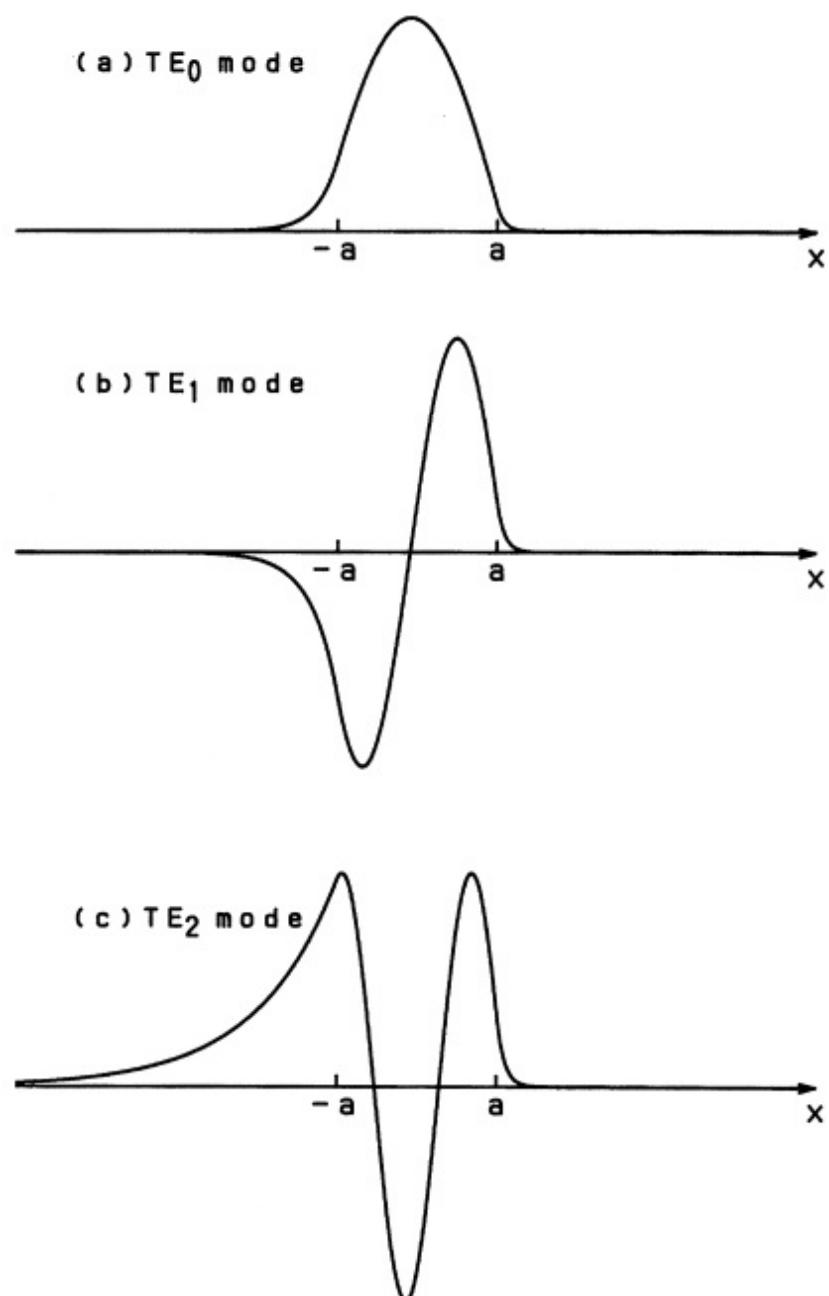
شکل (۷.۲) توزیع میدان الکتریکی مود TE را برای $v = 4$ در موجبر بازاء $n_1 = 3/38, n_s = 1/17, n_\infty = 1/10 (\gamma = 6.6)$ نشان می‌دهد. ضریب توان افزونگی Γ در هسته برای محاسبه چگالی جریان آستانه J_{th} لیزر نیمه‌هادی مهم است [۴]. ضریب افزونگی با استفاده از معادله (۳۲.۲) و (۳۳.۲) بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\Gamma = \frac{P_{core}}{P} = \frac{1 + \frac{\sin^2(u+\phi)}{\gamma_w} + \frac{\sin^2(u+\phi)}{\gamma_{w'}}}{1 + \frac{1}{\gamma_w} + \frac{1}{\gamma_{w'}}} \quad (35.2)$$

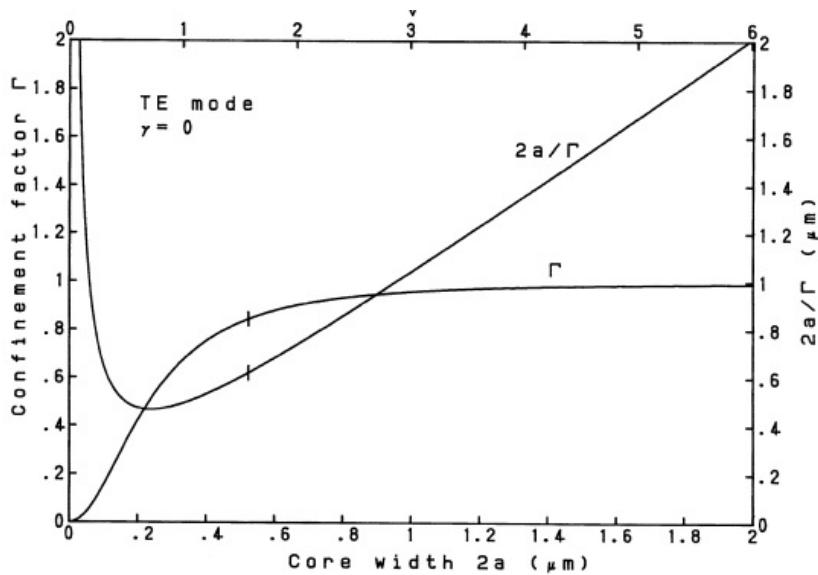
ضریب توان افزونگی Γ و نسبت عرض هسته $2a/\Gamma$ برای مود اصلی در شکل (۸.۲) نشان داده شده است. خطوط عمودی در شکل بیانگر عرض هسته تک مود است.

γ : Power Confinement Factor

Γ : Power Confinement Factor



شکل ۷.۲: توزیع میدان الکتریکی در یک موجبر تیغه‌ای



شکل ۸.۲: ضریب توان افزونگی موجبر تیغه‌ای متقارن

۵.۱.۲ معادله پاشندگی برای مود TM

بر اساس معادله (۶.۲)، معادله پاشندگی برای مود TM شبیه مود TE بدست می‌آید. ابتدا توزیع میدان مغناطیسی H_y را بصورت زیر بیان می‌کنیم

$$H_y = \begin{cases} A \cos(\kappa a - \phi) e^{-\sigma(x-a)} & (x > a) \\ A \cos(\kappa x - \phi) & (-a \leq x \leq a) \\ A \cos(\kappa a + \phi) e^{\xi(x+a)} & (x < -a). \end{cases} \quad (۳۶.۲)$$

با اعمال شرایط مرزی که E_z و H_y پیوسته باشد، معادله پاشنده زیر بدست می‌آید.

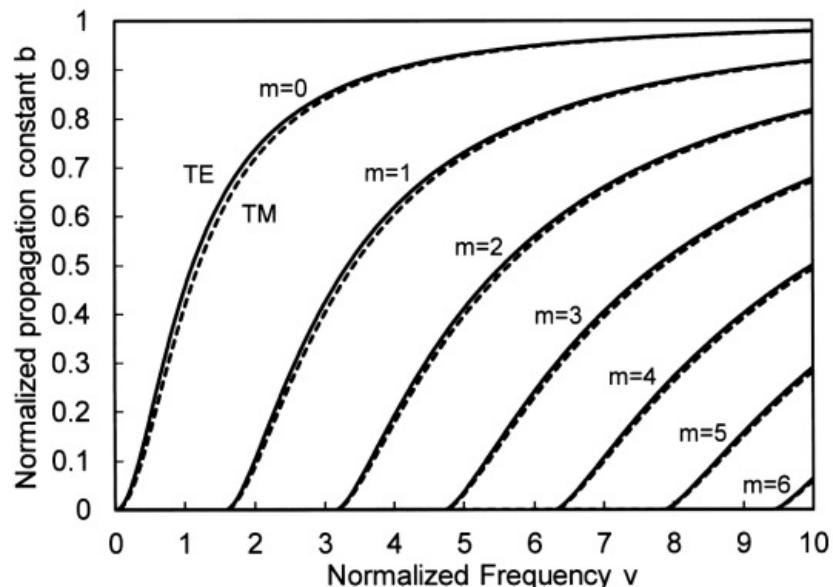
$$u = \frac{m\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{n_s^\gamma w}{n_s^\gamma u} \right) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{n_s^\gamma w'}{n_s^\gamma u} \right) \quad (۳۷.۲)$$

بازنویسی معادله فوق با استفاده از فرکانس نرمالیزه v و ثابت انتشار نرمالیزه b ، به رابطه زیر تقلیل می‌یابد.

$$2v\sqrt{1-b} = m\pi + \tan^{-1} \left(\frac{n_s^\gamma}{n_s^\gamma \sqrt{\frac{b}{1-b}}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{n_s^\gamma}{n_s^\gamma \sqrt{\frac{b+\gamma}{1-b}}} \right) \quad (۳۸.۲)$$

منحنی پاشندگی برای مودهای TM در یک موجبر با $(\gamma = 0)$ در شکل (۹.۲) نشان داده شده و با مودهای TE مقایسه شده است. مشخص است که

ثابت انتشار نرمالیزه b برای مود TM کوچکتر از مود TE با توجه به v یکسان است. این بدان معناست که مود TE کمی بهتر از مود TM در هسته محدود می‌شود. توان حمل شده توسط مود TM از معادله (۳۰.۲) و (۶.۲) رابطه زیر به دست می‌آید.



شکل ۹.۲: منحنی‌های پاشندگی برای مودهای TE و TM برای یک موجبر تیغه‌ای

$$P = \frac{\beta}{2\omega\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} |H_y|^2 dx \quad (39.2)$$

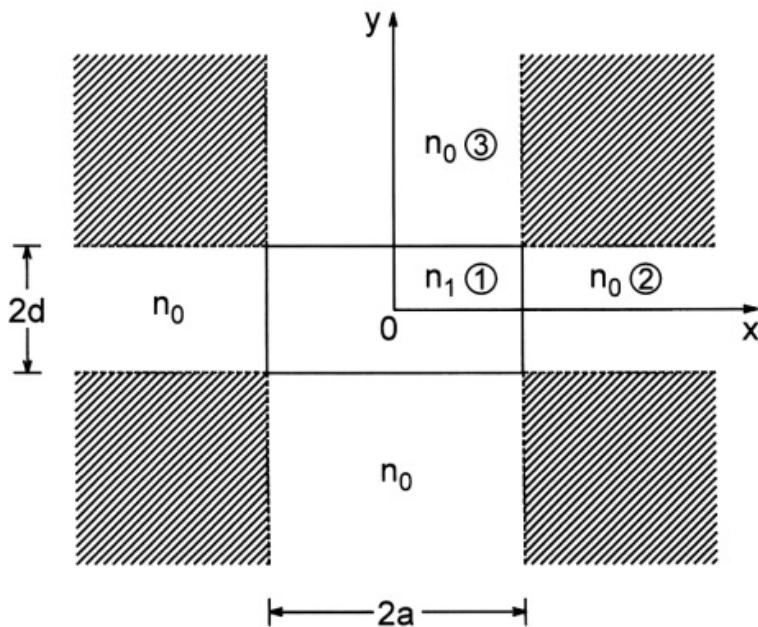
۲.۲ موجبرهای مستطیلی

۱.۲.۲ معادلات بنیادی

در این بخش، روش تحلیلی، که توسط مارکاتیلی^۵ [۵] برای بحث موجبر نوری سه بعدی، همانطور که در شکل (۱۰.۲) نشان داده شده، ارائه شده است. فرض مهم این روش این است که میدان الکترومغناطیسی در ناحیه سایه‌دار در شکل (۱۰.۲) را می‌توان نادیده گرفت زیرا میدان الکترومغناطیسی مود هدایت شده به خوبی در ناحیه روکش به سرعت میرا می‌شود. در این صورت شرایط مرزی را برای میدان الکترومغناطیسی در ناحیه سایه‌دار اعمال نمی‌کنیم.

ابتدا مود الکترومغناطیسی را در نظر می‌گیریم که در آن E_x و H_y غالب هستند. با توجه به بحث مارکاتیلی، $H_x = 0$ را در معادله (۳.۲) و (۴.۲) قرار می‌دهیم. در این صورت

^۵Marcatili



شکل ۱۰.۲: موجبر مستطیلی سه بعدی

معادله موج و نمایش میدان الکترومغناطیسی به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) H_y = 0, \quad (40.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \\ E_x = \frac{\omega \mu_0}{\beta} H_y + \frac{1}{\omega \epsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \\ E_y = \frac{1}{\omega \epsilon_0 n^2 \beta} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} \\ E_z = \frac{-j}{\omega \epsilon_0 n^2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ H_z = \frac{-j}{\beta} \frac{\partial H_y}{\partial y} \end{array} \right. \quad (41.2)$$

از طرف دیگر، $H_y = 0$ را در معادله (۴۰.۲) و (۴۱.۲) قرار می دهیم تا میدان الکترومغناطیسی E_y و H_x را که غالب هستند، در نظر بگیریم. معادله موج و نمایش میدان الکترومغناطیسی بقرار زیر هستند

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) H_x = 0, \quad (42.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y = 0 \\ E_x = -\frac{1}{\omega \epsilon_0 n^r \beta} \frac{\partial^r H_x}{\partial x \partial y} \\ E_y = -\frac{\omega \mu_0}{\beta} H_x - \frac{1}{\omega \epsilon_0 n^r \beta} \frac{\partial^r H_y}{\partial y^r} \\ E_z = \frac{j}{\omega \epsilon_0 n^r} \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ H_z = \frac{-j}{\beta} \frac{\partial H_x}{\partial x} \end{array} \right. \quad (43.2)$$

مودها در معادله (۴۰.۲) و (۴۱.۲) به صورت E_{pq}^x توصیف می‌شوند (p و q اعداد صحیح هستند) زیرا E_x و H_y میدان‌های الکترومغناطیسی غالب هستند. از سوی دیگر، مودهای موجود در معادله (۴۲.۲) و (۴۳.۲) E_y^{pq} نامیده می‌شوند زیرا E_y و H_x میدان‌های الکترومغناطیسی غالب هستند. در قسمت زیر روش حل معادله پاشندگی برای مود E_{pq}^x به تفصیل شرح داده شده است و فقط نتایج برای مود E_y^{pq} نشان داده شده است.

۲.۲.۲ معادلات پاشندگی برای مودهای E_{pq}^x و E_{pq}^y

از آنجایی که موجبر مستطیلی نشان داده شده در شکل (۱۰.۲) با توجه به محورهای x و y متقارن است، ما فقط مناطق ۱-۲ را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. ابتدا میدان‌های جواب را بیان می‌کنیم که در معادله موج (۴۰.۲) صدق می‌کنند

$$H_y = \left\{ \begin{array}{ll} A \cos(k_x x - \phi) \cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه ۱} \\ A \cos(k_x a - \phi) e^{-\gamma_x(x-a)} \cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه ۲} \\ A \cos(k_x x - \phi) e^{-\gamma_y(y-d)} \cos(k_y d - \psi) & \text{ناحیه ۳} \end{array} \right. \quad (44.2)$$

که در آن اعداد موج k_x, k_y, γ_x و γ_y و فازهای نوری ϕ و ψ با روابط زیر داده می‌شوند

$$\left\{ \begin{array}{ll} -k_x - k_y + k^r n_1^r - \beta^r = 0 & \text{ناحیه ۱} \\ \gamma_x^r - k_y^r + k^r n_0^r - \beta^r = 0 & \text{ناحیه ۲} \\ -k_x^r + \gamma_y^r + k^r n_0^r - \beta^r = 0 & \text{ناحیه ۳} \end{array} \right. \quad (45.2)$$

۹

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi = (p-1)\frac{\pi}{4} & (p=1, 2, \dots) \\ \psi = (q-1)\frac{\pi}{4} & (q=1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (46.2)$$

در اینجا باید توجه داشته باشیم که اعداد صحیح p و q از ۱ شروع می‌شوند زیرا از تعریف مود توسط مارکاتیلی پیروی می‌کنیم. بر عکس عدد مود m در معادله (۱۲.۲) برای موجبرهای تیغه‌ای از صفر شروع می‌شود. طبق تعریف مود مرسوم، پایین‌ترین مود در موجبر تیغه‌ای مود $TE_{m=0}$ است (شکل ۷.۲-الف) که دارای یک پیک میدان الکتریکی است. از طرف دیگر، کمترین مود در موجبرهای مستطیلی، $E_{p=1,q=1}^x$ یا $E_{p=1,q=1}^y$ است، (شکل ۱۱.۲) که تنها یک پیک میدان الکتریکی در امتداد هر دو جهت x و y دارد. بنابراین در تعریف مود توسط مارکاتیلی، اعداد صحیح تعداد پیک‌های میدان الکتریکی محلی را در امتداد جهت‌های محور x و y نشان می‌دهند.

وقتی شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم که میدان الکتریکی $E_z \propto (1/n^z) \partial H_y / \partial x$ باید در $x = a$ پیوسته باشد و میدان مغناطیسی $H_z \propto \partial H_y / \partial y$ باید در $y = d$ پیوسته باشد، معادلات پاشندگی زیر را به دست می‌آوریم:

$$k_x a = (p - 1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{n_1^z \gamma_x}{n_\infty^z k_x} \right) \quad (۴۷.۲)$$

$$k_y d = (q - 1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_y}{k_y} \right) \quad (۴۷.۲\text{ب})$$

اعداد موج عرضی k_x, k_y, γ_x و γ_y با رابطه (۴۵.۲) بصورت زیر مربوط هستند

$$\gamma_x^z = k^z (n_1^z - n_\infty^z) - k_x^z, \quad (۴۸.۲)$$

$$\gamma_y^z = k^z (n_1^z - n_\infty^z) - k_y^z, \quad (۴۹.۲)$$

که در آن k_x بترتیب از روابطه (۱۴۷.۲) و (۴۸.۲) و k_y از روابطه (۴۷.۲\text{ب}) و (۴۹.۲) بدست می‌آیند. ثابت انتشار β از رابطه زیر بدست می‌آید

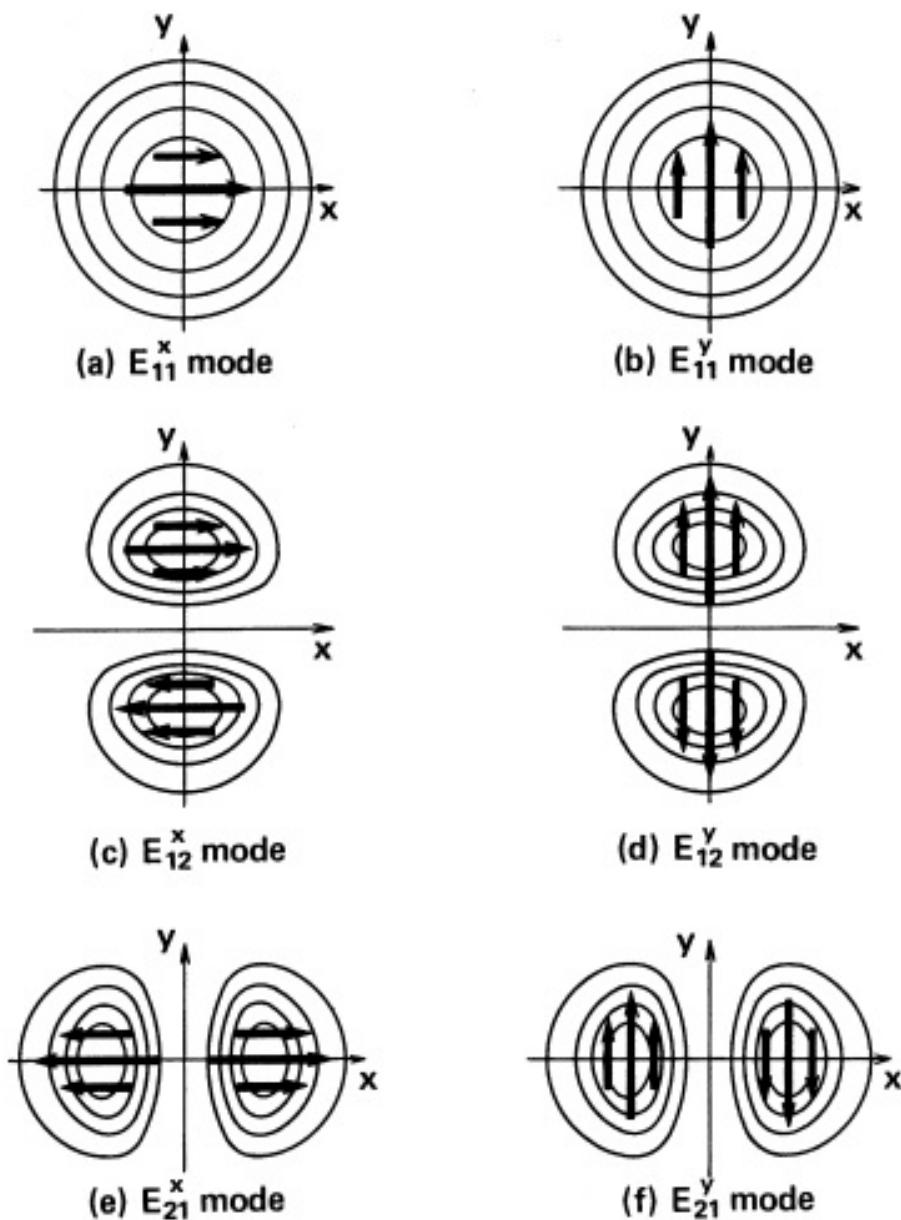
$$\beta^z = k^z n_1^z - (k_x^z + k_y^z) \quad (۵۰.۲)$$

برای اینکه معادله پاشندگی برای مود E_{pq}^y را محاسبه کنیم، ما میدان مغناطیسی H_x را بصورت زیر بیان می‌کنیم

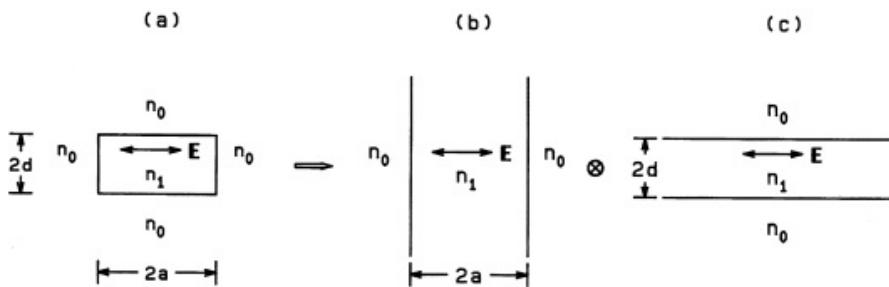
$$H_x = \begin{cases} A \cos(k_x x - \phi) \cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه ۱} \\ A \cos(k_x a - \phi) e^{-\gamma_x(x-a)} \cos(k_y y - \psi) & \text{ناحیه ۲} \\ A \cos(k_x x - \phi) e^{-\gamma_y(y-d)} \cos(k_y d - \psi) & \text{ناحیه ۳} \end{cases} \quad (۵۱.۲)$$

با اعمال شرایط مرزی که میدان مغناطیسی $H_z \propto \partial H_x / \partial x$ باید در $x = a$ پیوسته باشد و $E_z \propto (1/n^z) \partial H_x / \partial x$ باید در $y = d$ پیوسته باشد، از اینرو معادلات پاشندگی زیر را خواهیم داشت

$$k_x a = (p - 1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_x}{k_x} \right) \quad (۵۲.۲)$$



شکل ۱۱.۲: تعریف مودها و توزیع میدان الکتریکی در روش مارکاتیلی



شکل ۱۲.۲: موجبر مستطیلی و معادل آن، دو موجبر تیغه‌ای مستقل، به روش مارکاتیلی.

$$k_y a = (q - 1) \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{n_1^\gamma \gamma_y}{n_0^\gamma k_y} \right) \quad (۵۳.۲)$$

۳.۲.۲ روش کومار

در روش مارکاتیلی، میدان‌های الکترومغناطیسی و شرایط مرزی در ناحیه سایه‌دار در شکل (۱۰.۲) کاملاً ارضا نمی‌شوند. به عبارت دیگر، مودهای ترکیبی در موجبرهای مستطیلی به طور تقریبی با جداسازی بهدو موجبر تیغه‌ای مستقل همانطور که در شکل (۱۲.۲) نشان داده شده است، تجزیه و تحلیل می‌شوند. وقتی معادلات (۱۴۷.۲) و (۱۴۷.۲) پاشندگی را با هم مقایسه می‌کنیم به خوبی درک می‌شود که برای مود E_{pq}^x با معادلات (۱۲.۲) و (۳۷.۲) پاشندگی تیغه‌ای، معادله (۱۴۷.۲) مربوط به معادله پاشندگی مود TM از موجبر تیغه‌ای متقابن [شکل (۱۲.۲)-ب]، و معادله (۱۴۷.۲) با معادله پاشندگی مود TE [شکل (۱۲.۲)-ج] مطابقت دارد.

کومار و همکاران بهبود دقت را برای روش مارکاتیلی با در نظر گرفتن سهم میدان‌ها در ناحیه سایه‌دار در شکل (۱۰.۲) پیشنهاد کرد [۶]. ما این روش را روش کومار می‌نامیم و نمونه‌ای از آن را با تحلیل مود E_{pq}^x در موجبرهای مستطیلی شرح می‌دهیم.
در روش کومار، توزیع ضریب شکست موجبر مستطیلی برابر است با

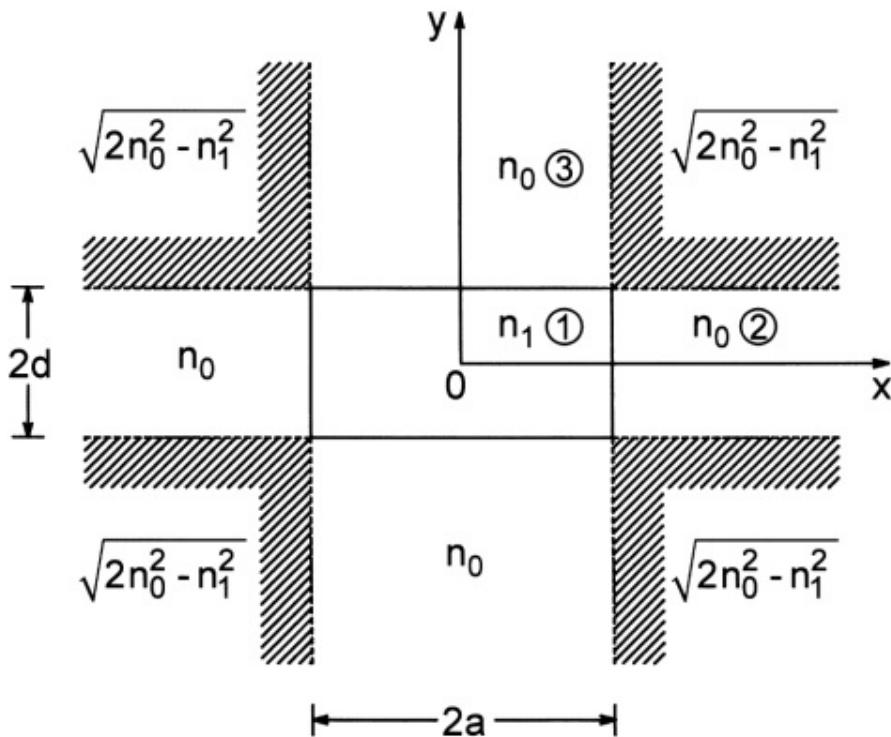
$$n^\gamma(x, y) = N_x^\gamma(x) + N_y^\gamma(y) + O(n_1^\gamma - n_0^\gamma) \quad (۵۴.۲)$$

که در آن

$$N_x^\gamma(x) = \begin{cases} n_1^\gamma / 2 & |x| \leq a \\ n_0^\gamma - n_1^\gamma / 2 & |x| > a \end{cases} \quad (۵۵.۲)$$

$$N_y^\gamma(x) = \begin{cases} n_1^\gamma / 2 & |y| \leq d \\ n_0^\gamma - n_1^\gamma / 2 & |y| > d \end{cases} \quad (۵۵.۲)$$

توزیع ضریب شکست که با معادله‌ها (۵۴.۲) و (۵۵.۲) بیان می‌شود در شکل (۱۳.۲) نشان داده شده است. به طور کلی، تفاوت ضریب شکست بین هسته و روکش ($n_1 \approx n_0$)



شکل ۱۳.۲: شکل ضریب شکست بروش کومار

بسیار کم است و سپس داریم $\approx O(n_0 - n_1)$ در معادله (۵۴.۲) داریم. همچنین ضریب شکست در ناحیه سایه‌دار به صورت تقریبی زیر است

$$\sqrt{n_0^2 - n_1^2} \approx n_0. \quad (56.2)$$

بنابراین مشخص است که ضریب شکست بیان شده توسط معادله (۵۴.۲) و (۵۵.۲) به خوبی توزیع ضریب شکست واقعی موجبر مستطیلی را تقریب می‌زند. اگرچه تقریب خوب است، اما هنوز تفاوت کوچکی در بیان ضریب شکست معادله (۵۴.۲) برای ناحیه سایه‌دار از مقدار واقعی وجود دارد. در روش حاضر تصحیح با استفاده از روش تغییرات جزئی^۶ مطابق شکل زیر انجام می‌شود.

ابتدا حل معادله موج (۴۰.۲) را برای مود E_{pq}^x ، با استفاده از جداسازی متغیرها، به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$H_y(x, y) = X(x)Y(y) \quad (57.2)$$

با جایگزینی معادله (۵۴.۲) و (۵۷.۲) در معادله (۴۰.۲)، معادله موج بصورت زیر خلاصه

⁶Perturbation Method

می‌شود

$$\frac{d^r X}{dx^r} Y + \frac{d^r Y}{dy^r} X + [k^r (N_x^r - N_y^r) - \beta^r] XY = 0. \quad (58.2)$$

که در آن کمیات کوچک مرتبه $O(n_{\downarrow}^r - n_{\circ}^r)$ صرفنظر شده است. معادله (58.2) بر XY تقسیم کرده ازاينرو می‌توانیم آنرا به بدو جمله: بترتیب یکی وابسته به متغیر x و دیگری وابسته به y بصورت زیر جدا کنیم:

$$\frac{1}{X} \frac{d^r X}{dx^r} Y + k^r N_x^r(x) + \frac{1}{Y} \frac{d^r Y}{dy^r} X + N_y^r(y) = \beta^r \quad (59.2)$$

شرایط لازم برای معادله (59.2) برای مقادیر دلخواه x و y زیر صدق می‌کند

$$\frac{1}{X} \frac{d^r X}{dx^r} Y + k^r N_x^r(x) = \beta_x^r \quad (60.2)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^r Y}{dy^r} X + k^r N_y^r(y) = \beta_y^r \quad (60.2)$$

که در آن β_x و β_y ثابت‌هایی است که مستقل از x و y است. در این صورت ما دو معادله مستقل زیر را خواهیم داشت

$$\frac{d^r X}{dx^r} Y + [k^r N_x^r(x) - \beta_x^r] X(x) = 0. \quad (61.2)$$

$$\frac{d^r Y}{dy^r} X + [k^r N_y^r(y) - \beta_y^r] Y(y) = 0. \quad (61.2)$$

از معادلات (59.2) و (60.2) می‌توانیم یک معادله برای تعیین ثابت انتشار بدست آوریم

$$\beta^r = \beta_x^r + \beta_y^r. \quad (62.2)$$

جواب میدان‌های معادله (61.2) و (61.2) شبیه روش قبل در بخش ۲.۲.۲ خواهد بود

$$X(x) = \begin{cases} A \cos(k_x x - \phi) & (0 \leq x \leq a) \\ A \cos(k_x a - \phi) e^{-\gamma_x(x-a)} & (x > a) \end{cases} \quad (63.2)$$

$$Y(y) = \begin{cases} B \cos(k_y y - \psi) & (0 \leq y \leq d) \\ B \cos(k_y d - \psi) e^{-\gamma_y(y-d)} & (y > d) \end{cases} \quad (64.2)$$

که در آن تنها ربع اول بهدلیل تقارن موجبر در نظر گرفته می‌شود و اعدادموج عرضی $k_x, \gamma_x, k_y, \gamma_y$ با β_x و β_y مرتبط هستند.

$$\gamma_x^r = k^r (n_{\downarrow}^r - n_{\circ}^r) - k_x^r, \quad (65.2)$$

$$\gamma_y^r = k^r (n_{\downarrow}^r - n_{\circ}^r) - k_y^r, \quad (65.2)$$

$$\beta_x^* = \frac{k^* n_1^*}{\gamma} - k_x^* \quad (66.2)$$

$$\beta_y^* = \frac{k^* n_1^*}{\gamma} - k_y^* \quad (66.2b)$$

فازهای نوری بصورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} \phi = (p-1)\frac{\pi}{\gamma} & (p=1, 2, \dots) \\ \psi = (q-1)\frac{\pi}{\gamma} & (q=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (67.2)$$

وقتی شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم که میدان الکتریکی

$$E_z \propto (1/n^*) \partial H_y / \partial x = (Y/n^*) dX/dx$$

باید در $x=a$ پیوسته باشد و میدان مغناطیسی $H_z \propto \partial H_y / \partial y = X dY/dy$ باید در $y=d$ پیوسته باشد، از اینرو معادلات پاشندگی زیر را بدست می‌آوریم

$$k_x a = (p-1) \frac{\pi}{\gamma} + \tan^{-1} \left(\frac{n_1^* \gamma_x}{n_\circ k_x} \right), \quad (68.2)$$

$$k_y d = (q-1) \frac{\pi}{\gamma} + \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_y}{k_y} \right). \quad (69.2)$$

ثابت انتشار از معادلات (62.2) و (66.2) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\beta^* = k^* n_1^* - (k_x^* + k_y^*). \quad (70.2)$$

معادله (68.2)-(70.2) برای پاشندگی و ثابت انتشار مانند معادلهای (47.2)، (47.2b) و (50.2) به روش مارکاتیلی شناخته شده است. اما در روش کومار حاضر، بهبود دقت ثابت انتشار را می‌توان با روش تغییرات جزئی نسبت بهناحیه سایه‌دار در شکل (13.2) به دست آورد. ما توزیع ضریب شکست را برای موجبر مستطیلی بازنویسی می‌کنیم:

$$n^*(x, y) = N_x^*(x) + N_y^*(y) + \delta \cdot \eta(x, y), \quad (71.2)$$

که در آن δ کمیت کوچگی است و نمایشگر جمله $\delta \cdot \eta(x, y)$ تغییرات جزئی است که بصورت زیر بیان می‌شود

$$\delta \cdot \eta(x, y) = \begin{cases} (n_1^* - n_\circ) & |x| > a \quad \text{و} \quad |y| > d \\ 0 & |x| \leq a \quad \text{و} \quad |y| \leq d \end{cases} \quad (72.2)$$

بطور کلی معادله موج بصورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla^* f + (k^* n^* - \beta^*) f = 0, \quad (73.2)$$

که در آن $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ است. جواب میدان f و مقدار ویژه β^2 معادله بالا بشكل تغییرات جزئی مرتبه اول بصورت زیر بیان می‌شود

$$f = f_0 + \delta \cdot f_1 \quad (74.2)$$

$$\beta^2 = \beta_0^2 + \delta \cdot \beta_1^2. \quad (75.2)$$

با جایگزینی معادلات (۷۳.۲) و (۷۴.۲) در (۷۵.۲) و مقایسه جملات برای هر مرتبه δ ، معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\nabla^2 f_0 + [k^2 (N_x^2 + N_y^2) - \beta_0^2] f_0 = 0, \quad (76.2)$$

$$\nabla^2 f_1 + [k^2 (N_x^2 + N_y^2) - \beta_1^2] f_1 + k^2 \eta f_0 - \beta_0^2 f_0 = 0. \quad (77.2)$$

در اینجا انتگرال زیر را در ناحیه D در نظر می‌گیریم؛

$$\iint_D [Eq.(2/76)^* \cdot f_1 - Eq.(2/77) \cdot f_0^*] dx dy$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\beta_1^2 \iint_D |f_0|^2 dx dy = \iint_D [|f_0|^2 \nabla^2 f_1 - f_1 \nabla^2 f_0^*] dx dy + k^2 \iint_D \eta |f_0|^2 dx dy \quad (78.2)$$

جمله اول در سمت راست معادله بالا را با استفاده از قضیه گرین (به فصل دهم مراجعه کنید) بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\iint_D [|f_0|^2 \nabla^2 f_1 - f_1 \nabla^2 f_0^*] dx dy = \oint \left[f_0^* \frac{\partial f_1}{\partial n} - f_1 \frac{\partial f_0^*}{\partial n} \right] dl \quad (79.2)$$

که در آن $\partial/\partial n$ نشان دهنده مشتق در امتداد جهت عمود بسمت خارج روی ناحیه انتگرال گیری است، و dl نشان دهنده انتگرال خطی در امتداد محیط است. انتگرال خطی معادله (۷۹.۲) وقتی ناحیه D بسمت بی‌نهایت میل می‌کند، صفر می‌شود. بنابراین خواهیم داشت

$$\beta_1^2 = \frac{k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, y) |f_0|^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_0|^2 dx dy} \quad (80.2)$$

معادله (۷۳.۲) مطابق با (۴۰.۲) و معادله (۷۶.۲) با (۵۸.۲) مطابقت دارد. در این صورت β . مقدار ویژه برای معادلات پاشندگی (۶۸.۲)-(۷۰.۲) و $f_0(x, y)$ توزیع میدانی است که توسط معادلات (۵۷.۲)، (۶۳.۲) و (۶۴.۲) ارائه شده است. بنابراین مقدار ویژه‌ای که توسط

تغییرات جزئی مرتبه اول داده می‌شود از معادلات (۷۵.۲)، (۷۲.۲) و (۸۰.۲) توسط معادله زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\beta^r &= \beta_0^r + \frac{k^r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, y) |X(x)Y(y)|^r dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |X(x)Y(y)|^r dx dy} \\ &= (k^r n_1^r - k_x^r - k_y^r) + \frac{k^r (n_1^r - n_0^r) \int_a^{\infty} |X(x)|^r dx \int_d^{\infty} |Y(y)|^r dy}{\int_0^{\infty} |X(x)|^r dx \int_0^{\infty} |Y(y)|^r dy} \\ &= (k^r n_1^r - k_x^r - k_y^r) + \frac{k^r (n_1^r - n_0^r) \cos^r(k_x a - \phi) \cos^r(k_y d - \psi)}{(1 + \gamma_x a)(1 + \gamma_y d)}\end{aligned}\quad (81.2)$$

جمله دوم معادله (۸۱.۲)، ما تقریب $1 - \frac{n_0^r}{n_1^r} \approx 1$ را بکار می‌بریم. ثابت انتشار نرمالیزه از معادلات (۱۷.۲)، (۱۸.۲) و (۸۱.۲) بدست می‌آید

$$b = 1 - \frac{k_x^r + k_y^r}{k^r (n_1^r - n_0^r)} + \frac{\cos^r(k_x a - \phi) \cos^r(k_y d - \psi)}{(1 + \gamma_x a)(1 + \gamma_y d)} \quad (82.2)$$

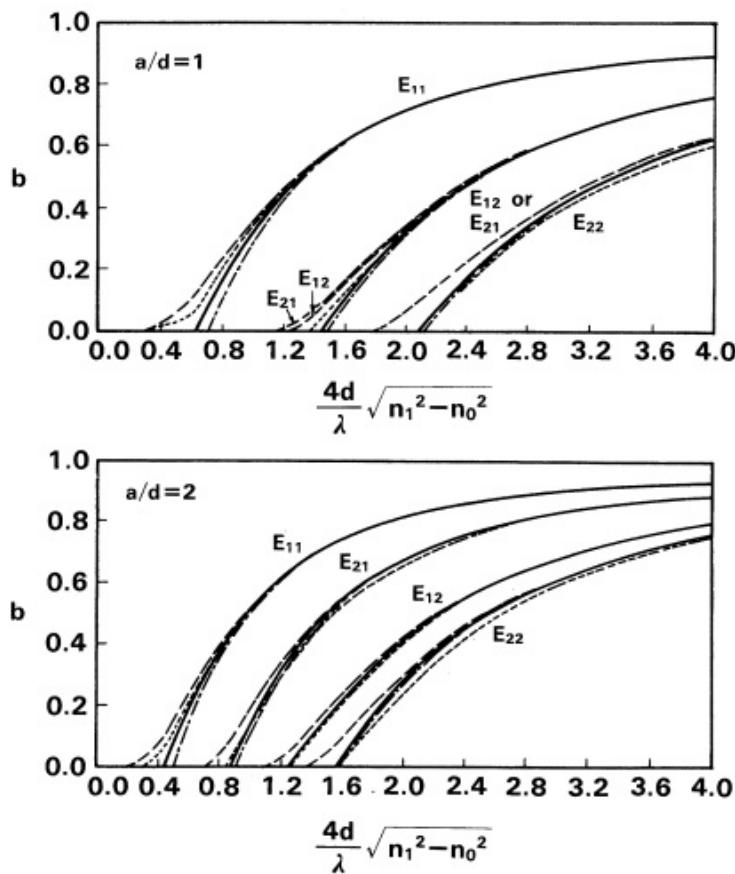
شکل (۱۴.۲) منحنی‌های پاشندگی را برای موجبرهای مستطیلی با هسته نسبت به نسبت‌های $a/d = 1$ و $a/d = 2$ نشان می‌دهد که آنها با استفاده از روش‌های تحلیلی مختلف برای معادله اسکالر [۶] محاسبه شده است. تجزیه و تحلیل با روش تطبیق نقطه‌ای [۷] دقیق‌ترین مقدار را در بین چهار تجزیه و تحلیل می‌دهد و به عنوان استاندارد برای مقایسه دقت استفاده می‌شود. روش ضریب شکست مؤثر در بخش زیر توضیح داده خواهد شد. از شکل (۱۴.۲) مشخص است که روش کومار نتایج دقیق‌تری نسبت به روش مارکاتیلی به دست می‌دهد. دقت روش ضریب شکست مؤثر تقریباً مشابه روش مارکاتیلی است. اما روش ضریب شکست مؤثر تخمین بزرگ‌تری نسبت به جواب دقیق می‌دهد در حالی که روش مارکاتیلی به ترتیب تخمین کمتری را نسبت به جواب دقیق ارائه می‌دهد. با این حال، برای عملی بودن، روش ضریب شکست مؤثر روش بسیار مهمی برای تجزیه و تحلیل است، به عنوان مثال، موجبرهای پشت‌های ^۹ که نیاز به یک روش عددی مانند روش اجزای محدود دارند.

۴.۲.۲ روش ضریب شکست مؤثر

موجبر پشت‌های، که مانند شکل (۱۵.۲) نشان داده شده است، تجزیه و تحلیل آنها با روش مارکاتیلی یا روش کومار دشوار است، زیرا ساختار موجبر بسیار پیچیده است که بتوان با تقسیم موجبر به آن پرداخت. برای تحلیل موجبرهای پشت‌های باید از روش‌های عددی مانند روش اجزا محدود و روش تفاضل محدود استفاده کنیم. روش ضریب شکست مؤثر [۷-۹] یک روش تحلیلی است که برای موجبرهای غامض و پیچیده مانند موجبرهای پشت‌های و موجبرهای آغشته‌ای ^{۱۰} در ادامه،

^۷Ridge Waveguides

^۸Diffused Waveguides



شکل ۱۴.۲: مقایسه منحنی‌های پاشندگی محاسبه شده برای روش‌های آنالیتیک مختلف. خط ممتد: روش مارکاتیلی [۶]؛ خط پرنگ: روش کومار؛ نقطه چین: روش تطبیق نقطه‌ای [۷]؛ و خط چین: روش ضریب شکست موثر.

روش شکست موثر تجزیه و تحلیل، با در نظر گرفتن مود E_{pq}^x در موجبر پشت‌های توضیح داده شده است.

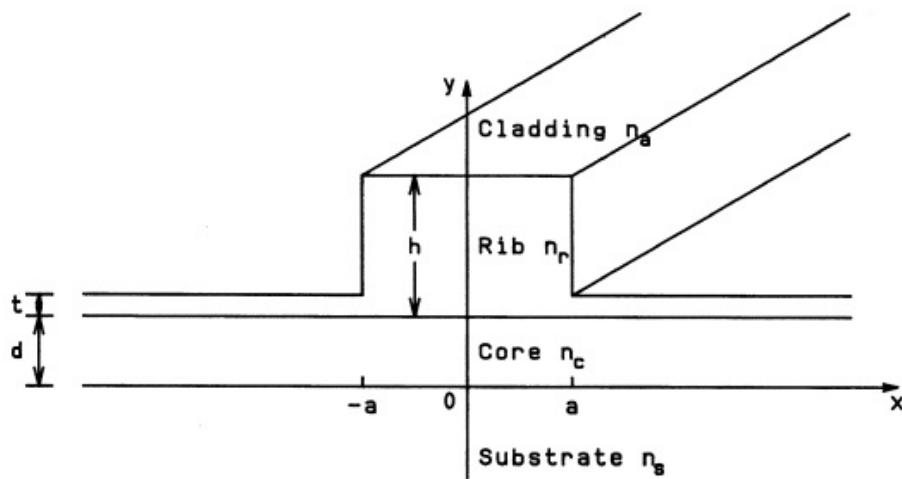
معادله موج برای مود E_{pq}^x بوسیله معادله (۴۰.۲) بصورت زیر داده می‌شود

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + [k^2 n^2(x, y) - \beta^2] H_y = 0, \quad (83.2)$$

فرض اساسی روش ضریب شکست این است که میدان الکترومغناطیسی را می‌توان با جدا سازی متغیرها بصورت زیر بیان کرد

$$H_y(x, y) = X(x)Y(y) \quad (84.2)$$

بنابراین اگر فرض جداسازی متغیرها دقیق نباشد، بهدلیل ساختار موجبر یا طول موج نور، دقت خود روش بسیار ضعیف می‌شود. جایگزینی معادله (۸۳.۲) در معادله (۸۴.۲)



شکل ۱۵.۲: موجبر پشتهدی

و با تقسیم آن بر XY به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{X} \frac{d^{\text{v}} X}{dx^{\text{v}}} + \frac{1}{Y} \frac{d^{\text{v}} Y}{dy^{\text{v}}} + [k^{\text{v}} n^{\text{v}}(x, y) - \beta^{\text{v}}] = 0. \quad (۸۵.۲)$$

در اینجا با اضافه و کم کردن، معادله (۸۵.۲) مقدار $k^{\text{v}} n_{\text{eff}}^{\text{v}}(x)$ مستقل از y و جدا سازی معادله به دو معادله مستقل خواهیم داشت:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^{\text{v}} Y}{dy^{\text{v}}} + [k^{\text{v}} n^{\text{v}}(x, y) - k^{\text{v}} n_{\text{eff}}^{\text{v}}(x)] = 0. \quad (\bar{۸۶}.۲)$$

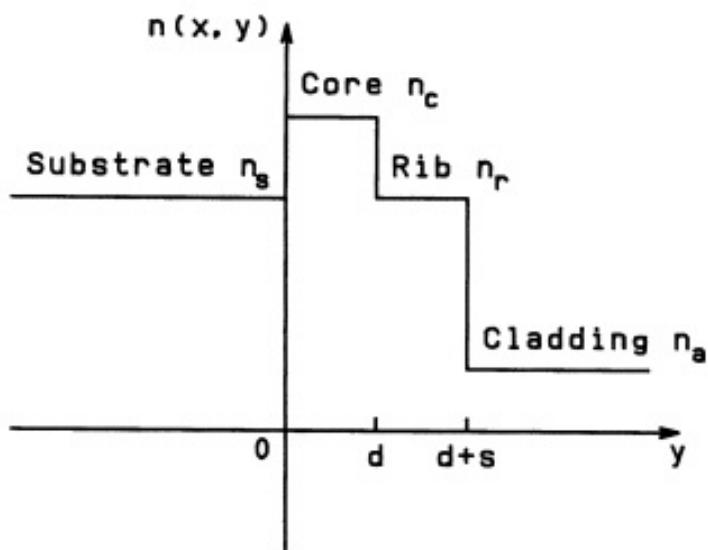
$$\frac{1}{X} \frac{d^{\text{v}} X}{dx^{\text{v}}} + [k^{\text{v}} n_{\text{eff}}^{\text{v}}(x) - \beta^{\text{v}}] = 0. \quad (\bar{۸۶}.۲\text{ب})$$

که n_{eff} توزیع ضریب شکست موثر^۹ نامیده می‌شود. ابتدا معادله (۸۶.۲) را حل و توزیع ضریب شکست موثر $n_{\text{eff}}(x)$ را تعیین می‌کنیم. تغییر شکل ضریب شکست واقعی در شکل (۱۶.۲) نشان داده شده است که در آن $n_r = n_s$ و $s = n(x, y)$ ارتفاع دنده است که بسته به موقعیت x مقادیر زیر را می‌گیرد:

$$s = \begin{cases} h & 0 \leq |x| \leq a \\ t & |x| > a \end{cases} \quad (۸۷.۲)$$

از شرط مرزی که $H_z \propto \partial H_y / \partial y$ باید در $d + s = d$ و $y = 0$ باشد، شرط پیوستگی برای dY/dy را در مرزهای ذکر شده را خواهیم داشت. معادلات پاشندگی برای موجبر

^۹Effective Index Distribution



شکل ۱۶.۲: تغییرات شکست ضریب موثر واقعی $n(x, y)$

تیغه‌ای چهار لایه در شکل (۱۶.۲) با رابطه زیر داده می‌شود

$$\sin(\kappa d - \psi) = \sin(\kappa d) e^{-\sigma s + \psi} \quad (۸۸.۲)$$

که در آن پارامترها برابرند با:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sigma}{\kappa} \right) \quad (۸۹.۲)$$

$$\psi = \tanh^{-1} \left(\frac{\sigma}{\gamma} \right). \quad (۸۹.۲)$$

$$\kappa = k \sqrt{n_c^2 - n_{eff}^2} \quad (۸۹.۲)$$

$$\sigma = k \sqrt{n_{eff}^2 - n_s^2} \quad (۸۹.۲)$$

$$\gamma = k \sqrt{n_{eff}^2 - n_a^2} \quad (۸۹.۲)$$

جواب معادله (۸۸.۲) با $s = h$ ($0 \leq |x| \leq a$) ضریب شکست موثر را برای ψ می‌دهد.

جواب معادله (۸۸.۲) با $s = t(|x| > a)$ ضریب شکست موثر $n_{eff}(t)$ را برای $|x| > a$ میدهد.

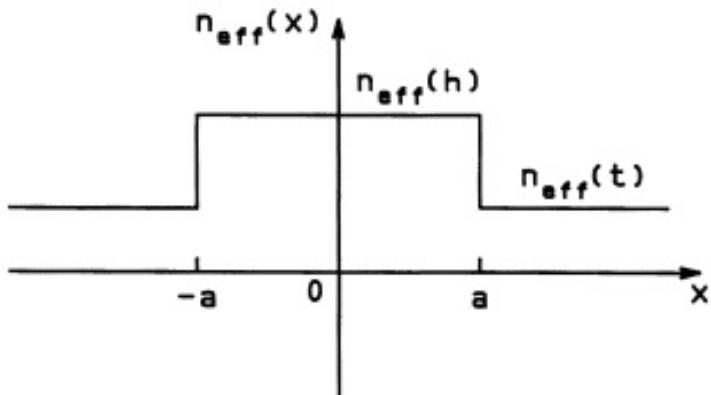
در این صورت توزیع ضریب شکست موثر $n_{eff}(x)$ در شکل (۱۷.۲) بدست می‌آید. جواب

معادله موج (۸۶.۲) بوسیله حل موجبر تیغه‌ای متقارن سه لایه‌ای محاسبه می‌شود.

شرط مرزی که $E_z \propto (1/n^2) \partial H_y / \partial x$ باید در $x = \pm a$ پیوسته باشد است. بنابراین $(1/n^2) X$

باید در $x = \pm a$ پیوسته باشد. تحت شرایط بالا، معادله پاشندگی زیر بدست می‌آید

$$u \tan u = \frac{n_{eff}^2(h)}{n_{eff}^2(t)} w \quad (۹۰.۲)$$

شکل ۱۷.۲: توزیع ضریب شکست موثر $n_{eff}(x)$

که در آن

$$u = ka \sqrt{n_{eff}^r(h) - \left(\frac{\beta}{k}\right)^r} \quad (۹۱.۲)$$

$$u = ka \sqrt{\left(\frac{\beta}{k}\right)^r - n_{eff}^r(t)} \quad (۹۱.۲\text{ب})$$

معادله پاشندگی برای مود E_{pq}^y بهمان نحو بدست می‌آید:

$$\sin(\kappa d - 2\phi) = \sin(\kappa d) e^{-2(\sigma s + \psi)}, \quad (۹۲.۲)$$

$$u \tan(u) = w \quad (۹۳.۲)$$

که در آن

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sigma n_c^r}{\kappa n_s^r} \right) \quad (۹۴.۲)$$

$$\psi = \tanh^{-1} \left(\frac{\sigma n_a^r}{\gamma n_s^r} \right) \quad (۹۴.۲\text{ب})$$

۳.۲ میدان تشعشعی از موجبر

میدان تابشی از یک موجبر نوری به فضای آزاد به طور واگرا منتشر می‌شود. میدان تشعشعی با میدان موجود در موجبر متفاوت است. بنابراین مهم است که مشخصات میدان تابش را برای تزویج موثر نور بین دو موجبر یا بین یک موجبر و یک فیبر نوری بدانیم. در این بخش، استخراج الگوی میدان تابشی از موجبر مستطیلی را شرح می‌دهیم.

۱.۳.۲ نواحی فرنل و فرانهوفر

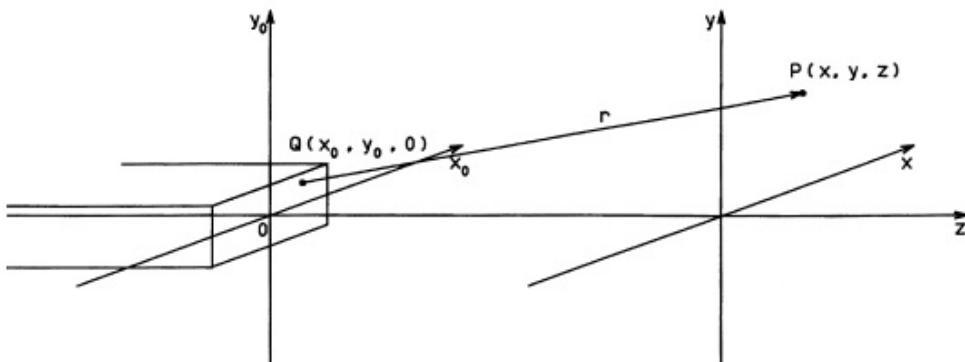
ما سیستم مختصات نشان داده شده در شکل (۱۸.۲) را در نظر می‌گیریم، جایی که سطح انتهایی موجبر در $z = 0$ قرار دارد و میدان الکترومغناطیسی به فضای آزاد با ضریب شکست n تابش می‌کند. میدان الکتریکی در سطح انتهایی موجبر با $(x_0, y_0, 0)$ نشان داده می‌شود و توزیع میدان الکتریکی در صفحه مشاهده در فاصله z به صورت $f(x, y, z)$ بیان می‌شود. با فرمول پراش فرنل-کیرشهوف [۱۰] (به فصل دهم مراجعه کنید)، الگوی تابش $f(x, y, z)$ به میدان انتهایی $(x_0, y_0, 0)$ مرتبط است.

$$f(x, y, z) = \frac{jkn}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0, 0) \frac{1}{r} e^{-jknr} dx_0 dy_0, \quad (95.2)$$

که در آن k عدد موج فضای آزاد $\lambda/2\pi$ و مسافت r بین Q و $P(x, y, z)$ برابر است با:

$$r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{1/2}. \quad (96.2)$$

وقتی فاصله صفحه مشاهده z خیلی نسبت به $|x - x_0|$ و $|y - y_0|$ بسیار بزرگ باشد، رابطه



شکل ۱۸.۲: دستگاه مختصات برای سطح خروجی موجبر ($z = 0$) و صفحه مشاهده ($z = z$).

(۹۶.۲) را می‌توان بصورت زیر تقریب زد

$$\begin{aligned} r &= z \left[1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{z^2} \right]^{1/2} = z + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z} + \dots \\ &= z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z} + \dots \end{aligned} \quad (97.2)$$

تعداد جملات بسط برای تقریب دقیق r به فاصله z بین سطح انتهایی موجبر و صفحه مشاهده بستگی دارد. به طور کلی، میدان الکترومغناطیسی در موجبر در ناحیه کوچکی به اندازه ۱۰ متر محدود می‌شود. بنابراین اگر z بزرگتر از مثلاً یک میلی‌متر باشد، هر عبارتی بالاتر از جمله چهارم در سمت راست معادله (۹۷.۲) باشد را می‌توان نادیده گرفت. میدان تشعشعی که در آن این شرط برآورده می‌شود، منطقه میدان دور یا ناحیه فرانهوفر [۱۰]

^{۱۰} Fraunhofer

نامیده می‌شود. از طرف دیگر وقتی \approx خیلی بزرگ نیست باید تا ترم چهارم معادله (۹۷.۲) را در نظر بگیریم. میدان تشعشعی که این شرایط در آن برقرار است، ناحیه میدان نزدیک یا منطقه فرنل^{۱۱} نامیده می‌شود. با این حال، باید توجه داشته باشیم که حتی تقریب فرنل در منطقه نزدیک به سطح انتهایی موجبر برآورده نمی‌شود. چهارمین عبارت در سمت راست نهایت معادله (۹۷.۲) تعیین می‌کند که کدام تقریب را باید اتخاذ کنیم. به طور کلی سهم به توسط عبارت چهارم، $kn(x^{\circ} + y^{\circ})/2z = \pi/2$ تعیین می‌کند که آیا تقریب فرنل یا فرانهوفر باید استفاده شود. اندازه‌گیری برای قضایت محدود شود، است. به عنوان مثال، اگر میدان نوری در ناحیه مستطیلی با هسته مربع D^2 محدود شود، آنگاه $z = nD^2/\lambda$ در $kn(x^{\circ} + y^{\circ})/2z = \pi/2$ و معیارها را داریم:

$$\begin{cases} z > n\frac{D^2}{\lambda} & \text{ناحیه فرانهوفر} \\ z < n\frac{D^2}{\lambda} & \text{ناحیه فرنل} \end{cases} \quad (۹۸.۲)$$

وقتی تقریب فرانهوفر به r را اعمال می‌کنیم، معادله (۹۵.۲) بصورت زیر کاهش می‌یابد

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{jkn}{2\pi z} \exp \left\{ -jkn \left[z + \frac{x^{\circ} + y^{\circ}}{2z} \right] \right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0, \circ) \exp \left\{ jkn \frac{(xx_0 + yy_0)}{z} \right\} dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (۹۹.۲)$$

از معادله بالا مشخص شده است که الگوی فرانهوفر $f(x, y, z)$ یک تبدیل فوریه فضایی از شکل میدان در سطح انتهایی موجبر $g(x_0, y_0, \circ)$ است.

۲.۳.۲ الگوی تشعشع پرتو گوسی

توضیح داده شده است که الگوی تابش از موجبر با معادله (۹۵.۲) یا (۹۹.۲) بیان می‌شود. توزیع دقیق میدان الکترومغناطیسی در موجبر مستطیلی (x_0, y_0, \circ) به صورت عددی با استفاده از روش اجزای محدود، همانطور که در فصل ششم توضیح داده خواهد شد، تعیین می‌شود. روش تحلیلی مانند روش مارکاتیلی توزیع میدان دقیق را، بهویژه برای منطقه روکش، ارائه نمی‌دهد. حتی اگر دقت مقدار ویژه با روش کومار بهبود یابد، توزیع میدان دقیق نیست زیرا حل معادله (۷۷.۲) برای به دست آوردن میدان تغییرات جزئی f دشوار است. بنابراین محاسبه تحلیلی الگوی تابش از موجبر مستطیلی آسان نیست. در اینجا ما توزیع میدان الکتریکی در موجبر مستطیلی را با یک شکل گوسی برای به دست آوردن الگوی تابش تحلیلی تقریب می‌کنیم. شکل میدان الکتریکی گوسی در موجبر بصورت زیر بیان می‌شود

$$g(x_0, y_0, \circ) = A \exp \left\{ - \left[\frac{x_0^2}{w_x^2} + \frac{y_0^2}{w_y^2} \right] \right\} \quad (۱۰۰.۲)$$

^{۱۱}Fresnel

که در آن w_1 و w_2 اندازه لکه میدان (موقعیتی که میدان الکتریکی $|g|$ به مقدار $1/e$ مقدار پیک میرسد) بتر تیب در طول محور x_0 و y_0 و A ثابت است. با جایگزینی معادله (۹۷.۲) و (۱۰۰.۲) در معادله (۹۵.۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{jkn}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0, 0) \\ &\quad \times \exp \left\{ -jkn \left[z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z} \right] \right\} dx_0 dy_0. \\ &= \frac{jkn}{2\pi z} A e^{-jknz} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x_0^2}{w_1^2} - j \frac{kn}{2z} (x - x_0)^2 \right\} dx_0. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_0^2}{w_2^2} - j \frac{kn}{2z} (y - y_0)^2 \right\} dy_0. \end{aligned} \quad (101.2)$$

که در آن از تقریب فرنل برای r استفاده شده است. از آنجایی که انتگرال در معادله (۱۰۱.۲) برای x_0 و y_0 به یک شکل است، محاسبه دقیق فقط برای x_0 توضیح داده خواهد شد. پارامتر p را به صورت تعریف می‌کنیم

$$p = \frac{1}{w_1^2} + j \frac{\pi n}{\lambda z} \quad (102.2)$$

انتگرال نسبت به x_0 در (۱۰۱.۲) خواهد بود

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x_0^2}{w_1^2} - j \frac{kn}{2z} (x - x_0)^2 \right\} dx_0 \\ &= \exp \left\{ -\frac{\pi n}{\lambda z} x^2 - \frac{\pi^2 n^2 x^2}{p \lambda^2 z^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -p \left(x_0 - j \frac{\pi n x}{p \lambda z} \right)^2 \right\} dx_0 \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp \left\{ -j \frac{\pi n x}{\lambda z} - \frac{\pi^2 n^2 x^2}{p \lambda^2 z^2} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp \left\{ -j \frac{\pi n x}{\lambda} \frac{\left(z - j \frac{\pi n w_1^2}{\lambda} \right)}{\left(z^2 + \frac{\pi^2 n^2 w_1^2}{\lambda^2} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (103.2)$$

ما متغیرهای جدید بیشتری را بصورت زیر معرفی می‌کنیم که معانی فیزیکی آنها بعداً توضیح داده می‌شود

$$W_1(z) = w_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi n w_1} \right)^2} \quad (104.2)$$

$$R_1(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi n w_1}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (104.2)$$

$$\Theta_1(z) = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi n w_1} \right) \quad (104.2)$$

پارامتر p معادله (104.2) را می‌توان با استفاده از معادله (104.2) به صورت زیر بازنویسی کرد

$$p = j \frac{\pi n W_1(z)}{\lambda z w_1} e^{-j\Theta_1}. \quad (105.2)$$

با جایگزینی معادله (105.2) در (103.2)، سرانجام معادله (103.2) خواهد شد

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x_0}{w_1} - \frac{jkn}{2z} (x - x_0)^2 \right\} dx_0 \\ &= \sqrt{\frac{\lambda w_1 z}{jn W_1(z)}} \exp \left\{ - \left[\frac{1}{W_1(z)} + \frac{jkn}{2R_1(z)} \right] x_0^2 + j \frac{\Theta_1(z)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (106.2)$$

سبیه به همین انتگرال نسبت به y در رابطه (101.2) داریم

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y_0}{w_1} - \frac{jkn}{2z} (y - y_0)^2 \right\} dy_0 \\ &= \sqrt{\frac{\lambda w_1 z}{jn W_1(z)}} \exp \left\{ - \left[\frac{1}{W_1(z)} + \frac{jkn}{2R_1(z)} \right] y_0^2 + j \frac{\Theta_1(z)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (107.2)$$

که در آن W_1, R_1 و Θ_1 بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$W_1(z) = w_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi n w_1} \right)^2} \quad (108.2)$$

$$R_1(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi n w_1}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (108.2)$$

$$\Theta_1(z) = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi n w_1} \right) \quad (108.2)$$

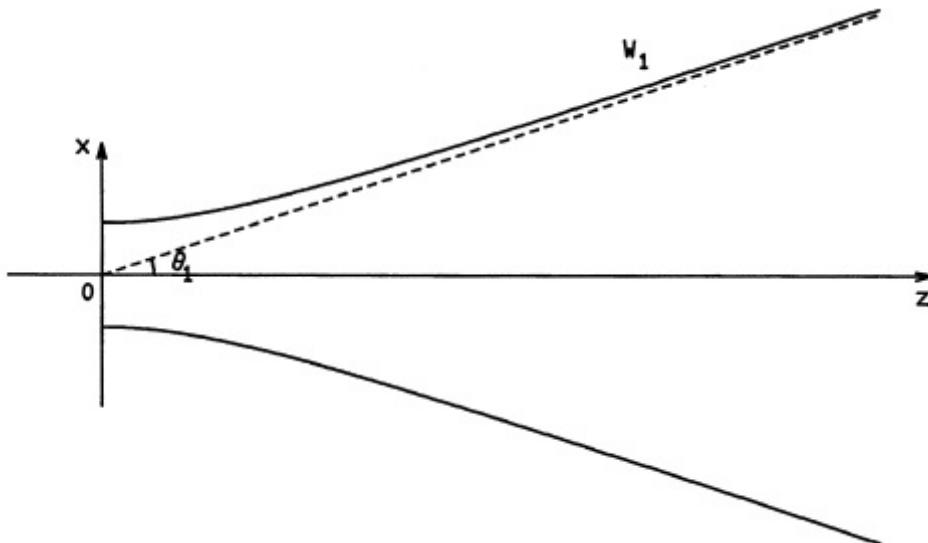
با جایگزینی معادلات (۱۰۶.۲) و (۱۰۷.۲) در (۱۰۱.۲)، الگوی تشعشعی از موجبر مستطیلی $f(x, y, z)$ بدست می‌آید

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{w_1 w_2}{W_1 W_2}} A \exp \left\{ - \left[\frac{x^2}{W_1^2} + \frac{y^2}{W_2^2} \right] - j k n \left[\frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + z \right] + j \frac{(\Theta_1 + \Theta_2)}{2} \right\} \quad (109.2)$$

از معادله بالا مشخص می‌شود که $W_1(z)$ و $R_1(z)$ اندازه نقطه میدان تابش و $W_2(z)$ و $R_2(z)$ به ترتیب نشان دهنده شعاع انحنای جبهه موج هستند. اگر نقطه مشاهده P به اندازه کافی از سطح انتهایی موجبر فاصله داشته باشد و شرایط زیر $\pi n w^2 / \lambda \gg z \gg \pi n w^2 / \lambda$ در ناحیه فرانهوفر برآورده شود، معادله‌های (۱۰۴.۲) و (۱۰۸.۲) به صورت تقریبی زیر هستند

$$\begin{cases} W_1(z) \approx \frac{\lambda z}{\pi n w_1} \\ W_2(z) \approx \frac{\lambda z}{\pi n w_2} \\ R_1(z) \approx R_2(z) \approx z. \end{cases} \quad (110.2)$$

در ناحیه فرانهوفر، انحراف زاویه θ_1 (شکل ۱۹.۲) و θ_2 میدان تابشی در طول محور x ها



شکل ۱۹.۲: تغییرات اندازه لکه در طول محور x ، ($W_1(z)$)

و y ها بصورت زیر بیان می‌شوند

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{W_1(z)}{z} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda}{\pi n w_1} \right) \quad (111.2)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{W_2(z)}{z} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda}{\pi n w_2} \right) \quad (111.2b)$$

اجازه دهید زوایای واگرایی میدان تابش را از یک دیود لیزر نیمه هادی که در $\lambda = 155\mu\text{m}$ کار می‌کند و دارای ضریب شکست لایه فعال (هسته) $n_1 = 1.5$ ، ضریب روکش $n_0 = 1.17$ و عرض و ضخامت هسته به ترتیب $2d = 15\mu\text{m}$ و $2a = 1.52\mu\text{m}$ است را محاسبه کنیم. توزیع میدان الکتریکی موجبر با استفاده از روش المان محدود آنالیز موجبر محاسبه می‌شود که در فصل ششم توضیح داده خواهد شد و برای بدست آوردن اندازه لکه‌ها w_1 و w_2 در امتداد جهت‌های محور x و y برازش گوسی است. اندازه‌های لکه گوسی w_1 و w_2 برابر با:

$$\begin{cases} w_1 = 0.88\mu\text{m} \\ w_2 = 0.35\mu\text{m} \end{cases} \quad (112.2)$$

زاویه واگرایی θ_1 و θ_2 از روابط (111.2) و (112.2) بدست می‌آید

$$\begin{cases} \theta_1 = 29.4^\circ \text{ (رادیان)} \\ \theta_2 = 54.4^\circ \text{ (رادیان)} \end{cases} \quad (113.2)$$

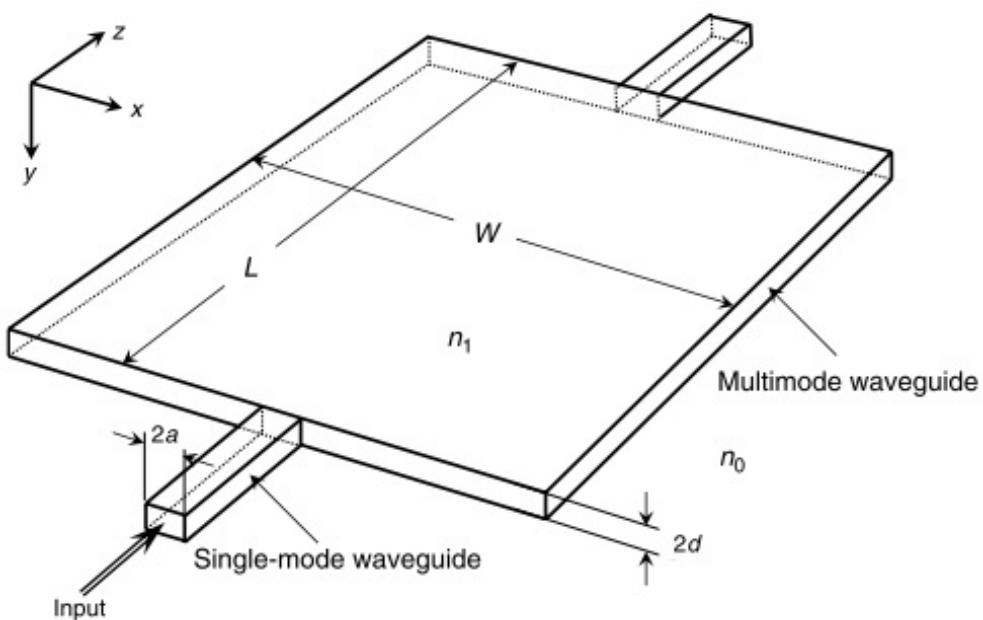
از نتیجه بالا مشخص شد که میدان تابش دیود لیزر نیمه هادی شکلی بیضوی دارد و زاویه واگرایی در امتداد لایه فعال نازک (محور y) بسیار بزرگ‌تر از جهت لایه فعال گسترده (محور x) است.

۴.۲ دستگاه تداخل چند مودی (MMI)

دستگاه‌های تداخل چند مودی^{۱۲}، بر اساس اثر خود تصویربرداری [۱۲، ۱۱]، قطعه‌های نوری یکپارچه بسیار مهمی هستند که می‌توانند بسیاری از وظایف مختلف تقسیم و ترکیب را انجام دهند [۱۳، ۱۶]. شکل (۲۰.۲) یک پیکربندی شماتیک از موجبر MMI را نشان می‌دهد. ساختار کلیدی دستگاه MMI یک موجبر است که برای پشتیبانی از تعداد زیادی مود طراحی شده است. عرض، ضخامت و طول ناحیه چند مودی به ترتیب $W, 2d$ و L هستند. موجبر تک مودی با عرض هسته $2a$ و ضخامت $2d$ به موجبر چند مودی متصل می‌شود. ضریب شکست هسته موجبرهای تک مودی و چند مودی برابر با n_1 و ضریب شکست روکش n_0 است. ساختار موجبر سه بعدی را می‌توان با استفاده از روش ضریب شکست موثر به یک مسئله دو بعدی تقلیل داد. ضریب شکست موثر n_{eff} هسته از حل معادله مود ویژه در امتداد محور y محاسبه می‌شود. شکل (۲۱.۲) پیکربندی دو

^{۱۲} Multimode interference (MMI)

بعدی یک موجبر MMI از n_{eff} ضریب شکست موثر هسته و ضریب شکست روکش n_0 را نشان می‌دهد. میدان الکتریکی در موجبر چند مودی با استفاده از معادله‌ها (۷.۲) - (۱۵.۲) محاسبه می‌شود. در اینجا پارامترهای موجبر n_s و $n_{1,a}$ در معادلات (۷.۲) - (۱۵.۲) به ترتیب با $n_{eff}, W/2$ و n_0 جایگزین می‌شوند. سپس مشخصات میدان الکتریکی برای مود TEM در موجبر چند مودی با رابطه زیر بیان شده است

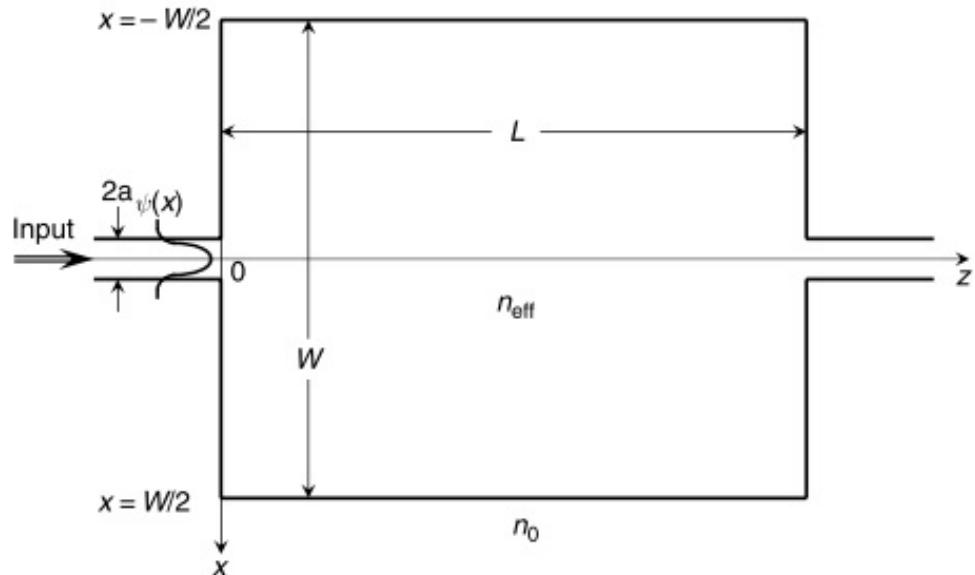


شکل ۲۰.۲: پیکربندی شماتیک موجبر تداخل چند مودی (MMI).

$$E_y^m(x, y) = \begin{cases} A_m \cos\left(u_m + \frac{m\pi}{2}\right) \exp\left[\frac{\gamma w_m}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) - j\beta_m z\right] & \left(x < -\frac{W}{2}\right) \\ A_m \cos\left(\frac{\gamma u_m}{W} x - \frac{m\pi}{2}\right) \exp(-j\beta_m z) & \left(|x| < \frac{W}{2}\right) \\ A_m \cos\left(u_m - \frac{m\pi}{2}\right) \exp\left[-\frac{\gamma w_m}{W} \left(x - \frac{W}{2}\right) - j\beta_m z\right] & \left(x > \frac{W}{2}\right) \end{cases} \quad (114.2)$$

که در آن u_m و w_m نشان دهنده اعداد موج عرضی مود m در هسته و روکش هستند و A_m ثابت است. اعداد موج عرضی از معادله مقدار ویژه بصورت زیر به دست می‌آیند

$$w_m = u_m \tan\left(u_m - \frac{m\pi}{2}\right) \quad (115.2)$$

شکل ۲۱.۲: نمایش دو بعدی یک موجبر *MMI*.

۹

$$u_m^2 + w_m^2 = k^2 \left(\frac{W}{2} \right)^2 (n_{eff}^2 - n_0^2) \equiv v^2 \quad (116.2)$$

هنگامی که عرض هسته W ناحیه *MMI* بزرگ باشد، فرکانس نرمالیزه v نیز بزرگ می‌شود. از شکل ۲.۳ مشخص است که وقتی v بزرگ می‌شود، u_m به $(m+1)\pi/2$ نزدیک می‌شود. سپس ثابت انتشار β_m تقریباً به صورت زیر بیان می‌شود

$$\beta_m = \sqrt{k^2 n_{eff}^2 - (2u_m/W)^2} \approx kn_{eff} - \frac{(m+1)^2 \lambda}{4n_{eff} W^2} \pi \quad (117.2)$$

میدان الکتریکی کل در ناحیه *MMI* از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \Psi(x, z) = \sum_{m=0}^M E_y^m(x, z) &= e^{-kn_{eff}z} \sum_{m=0}^M \cos \left[\frac{(m+1)^2 \pi}{W} x - \frac{m\pi}{2} \right] \\ &\times \exp \left[j \frac{(m+1)^2 \pi \lambda}{4n_{eff} W^2} z \right], \end{aligned} \quad (118.2)$$

که در آن M نمایشگر بیشینه تعداد مود است. در $\Psi(x, z)$ با میدان الکتریکی $\psi(x)$ منطبق است. در این صورت دامنه میدان الکتریکی A_m از (۱۱۸.۲)

بصورت زیر بدست می‌آید

$$A_m = \frac{2}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \psi(x) \cos \left[\frac{(m+1)\pi}{W} x - \frac{m\pi}{2} \right] \quad (119.2)$$

برای سادگی، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن موجبر تک مودی ورودی به مرکز موجبر چند مودی متصل است. در این شرایط، مودها در ناحیه MMI فقط به مودهای متقارن تبدیل می‌شوند. یعنی m به یک عدد زوج $= 2l$ (l : عدد صحیح) تبدیل می‌شود. در نقطه $\lambda = n_{eff}W^2/\lambda$ ، عبارت فاز در معادله (118.2) به رابطه زیر کاهش می‌یابد

$$\exp \left[j \frac{(m+1)^2 \pi \lambda}{4n_{eff}W^2} z \right] = \exp \left[jl(l+1)\pi + j \frac{\pi}{4} \right] = \exp \left(j \frac{\pi}{4} \right) \quad (120.2)$$

اکنون طول مشخصه L_{MMI} را تعریف می‌کنیم

$$L_{MMI} = \frac{n_{eff}W^2}{\lambda} \quad (121.2)$$

شکل میدان الکتریکی در طول L_{MMI} در این صورت از معادله (118.2) بدست می‌آید

$$\Psi(x, L_{MMI}) = e^{-kn_{eff}L_{MMI} + j\pi/4} \sum_{m=0}^M A_m \cos \left[\frac{(m+1)\pi}{W} x - \frac{m\pi}{2} \right] \quad (122.2)$$

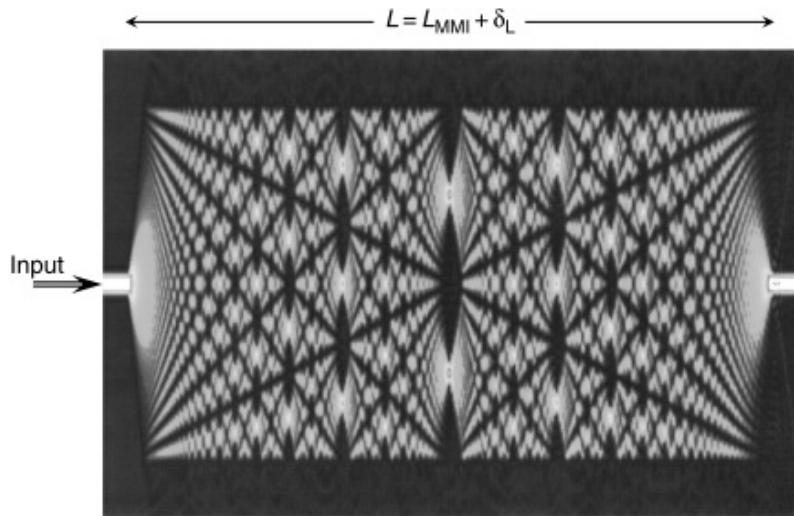
از آنجا که (118.2) در معادله (1) میدان الکتریکی ورودی موجبر $\Psi(x)$ است، معادله بالا را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\Psi(x, L_{MMI}) = \psi(x) e^{-kn_{eff}L_{MMI} + j\pi/4} \quad (123.2)$$

تایید شده است که میدان الکتریکی ورودی $\Psi(x)$ در طول خاص L_{MMI} با تاخیر فاز جزئی بازتولید می‌شود. ویژگی‌های تصویربرداری خود در موجبر MMI با شبیه‌سازی روش انتشار پرتو (BPM)^{۱۳} تأیید می‌شوند. شکل (22.2) شکل‌گیری تصویر برای ورودی نور در مرکز موجبر MMI را نشان می‌دهد. اختلاف ضریب شکست موجبر $\Delta = 75\%$ و طول موج نور $\lambda = 550\text{nm}$ است. پارامترهای موجبر ورودی تک مودی $2a = 7\mu\text{m}$ و $2d = 6\mu\text{m}$ و برای L_{MMI} طول $L = 25.99\text{mm}$ هستند. از توسط معادله (121.2) داده می‌شود 25.89m . از آنجایی که یک اثر گوس-هانچن^{۱۴} وجود دارد، میدان نور کمی به منطقه روکش نفوذ می‌کند. بنابراین، اصلاح جزئی برای عرض W یا طول L ناحیه MMI ضروری است. در شکل (22.2)، طول تصحیح $\delta_L = 100\mu\text{m}$ به طول L_{MMI} خود تصویربرداری تحلیلی اضافه شده است. از شکل (22.2) مشخص است که N تصویر در $z = L_{MMI}/N$ برای هر عدد صحیح N تشکیل می‌شود. شکل (22.2) نشان میدهد که مشخصات تقسیم نور موجبر MMI با طول $xi = (45i)W/8 + \delta'_L$ که در آن $L_{MMI}/8 + \delta'_L$ است. موجبرهای خروجی در

^{۱۳} Beam Propagation Method (BPM)

^{۱۴} Goos-Hanchen



شکل ۲۲.۲: تشگیل تصویر برای ورودی نور در مرکز موجبر MMI

$i-th$ موجبر قرار دارند. شکل (۲۴.۲) ویژگی‌های تقسیم نظری و تجربی مقسم $1 \times 8MMI$ را در $\lambda = 155\mu m$ نشان می‌دهد. مقسم MMI از موجبر سیلیسی با $2a = 75\%$ ساخته شده است. افت تقسیم $1/8$ برابر با $9\mu m$, $2d = 6\mu m$ است. بنابراین مشخص است که تلفات اضافی هر پایانه خروجی کمتر از یک دسی‌بل است.

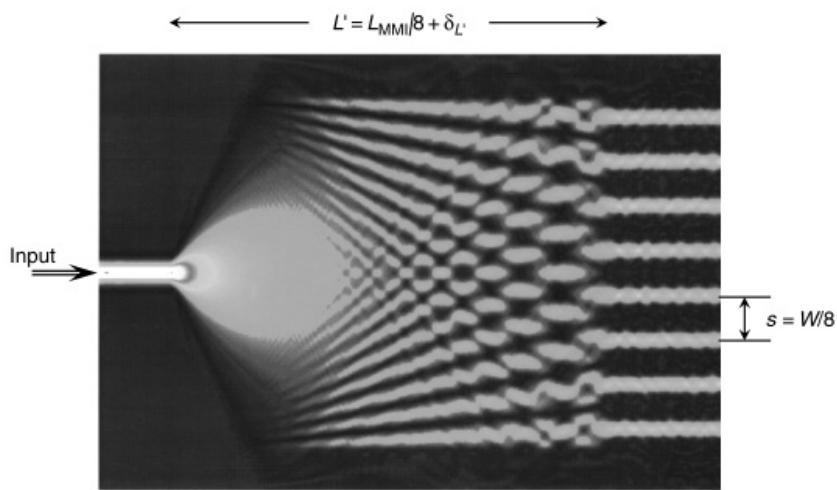
هنگامی که یک موجبر ورودی در موقعیت مناسب از مرکز موجبر MMI قرار می‌گیرد، تصاویر دو برابری با دامنه مساوی در فاصله [۱۷] تشکیل می‌شود.

$$L_{dB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n_{eff} W}{\lambda} \quad (۱۲۴.۲)$$

$$W = (N - 1)s \quad (۱۲۴.۲b)$$

که در آن s نمایشگر جدائی خروجی موجبرها است. شکل (۲۵.۲) یک گوپلر سه دسی‌بل (۳dB) بر اساس مقسم $2 \times 2MMI$ را نشان می‌دهد. ویژگی‌های انتشار نور در گوپلر MMI در شکل (۲۶.۲) نشان داده شده است. طول گوپلر ۳ دسی‌بل با محاسبه BPM به $L = L_{dB} + \delta_{dB} (\delta_{dB} = 200\mu m)$ تعیین می‌شود. شکل (۲۷.۲) نسبت تقسیم طیفی کوپلر MMI^3dB و کوپلر هم جهتی (به بخش ۴.۲ مراجعه کنید) و افت عبوری ^{۱۵} طیف درج کوپلر MMI^3dB را نشان می‌دهد. از شکل مشخص است که نسبت کوپلینگ کوپلر MMI^3dB در مقایسه با کوپلر هم جهتی تقریباً به طول موج غیر حساس است. این مزیت بزرگ کوپلر MMI^3dB نسبت به کوپلر هم جهت است. با این حال ما باید به دو واقعیت توجه کنیم. اول، افت عبوری MMI حتی در شبیه سازی نظری صفر نیست. تلفات

^{۱۵} Insertion Loss



شکل ۲۳.۲: مشخصه تقسیم نور موجبر MMI با طول $W/8$

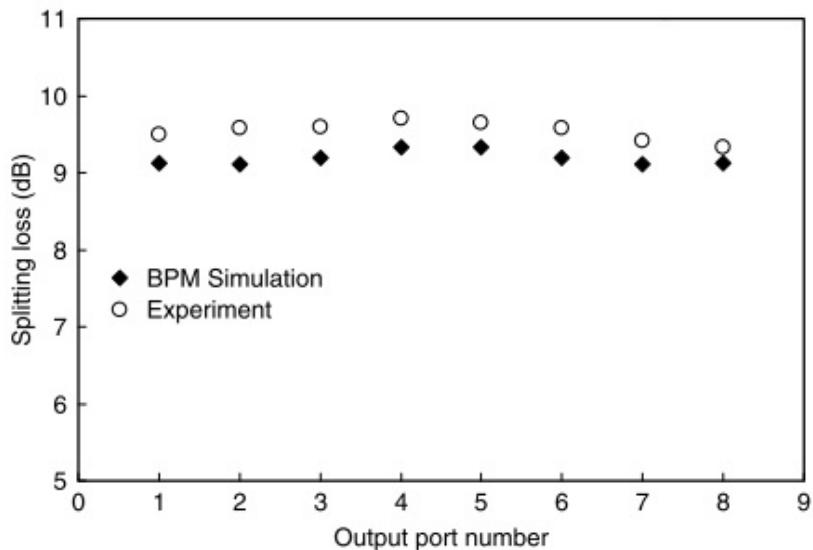
تئوری کوپلر MMI^{3dB} حدود 22° دسیبل در حداقل است. دوم، از دست دادن درج کوپلر MMI به سرعت افزایش می‌یابد که طول موج از طول موج بهینه خارج شود. هنگامی که فاز نور ورودی به درستی تنظیم می‌شود، تقسیم‌کننده $N \times N$ به عنوان MMI ترکیب‌کننده $1 \times N$ عمل می‌کند. شکل (۲۸.۲) ویژگی‌های انتشار نور را در ترکیب کننده 1×16 MMI نشان می‌دهد. میدان الکتریکی مختلط g_i در موجبر ورودی i با سازی BPM نشان داده شده در شکل (۲۸.۲)-الف، دامنه‌های g_i برابر هستند و فازهای آنها به درستی تنظیم شده است. هر پرتو نور از ۱۶ پایانه ورودی به‌طور سازنده تداخل ایجاد می‌کند تا یک تصویر خروجی واحد را در فاصله $L = L_{MMI}/16 + \delta_L$ تشکیل دهد که در آن $\delta_L = 140\mu m$ است. با تعدادی شبیه سازی عددی نشان داده می‌شود که ترکیب کننده $1 \times N$ دارای یک ویژگی منحصر به فرد است که در آن می‌توانیم جمع همدوس^{۱۶} میدان الکتریکی ورودی را به صورت زیر بدست آوریم.

$$T = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g_i \right|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j\theta_i} \right|^2. \quad (125.2)$$

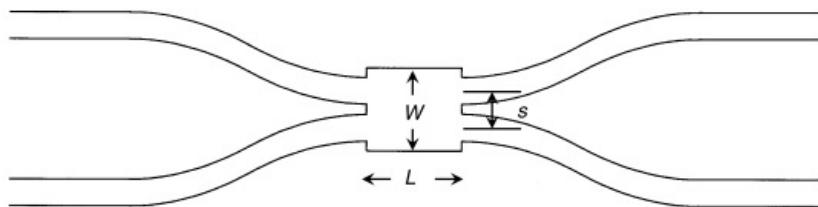
شبیه سازی عددی توسط آزمایش با استفاده از فیلتر عرضی همدوس ۱۶ سر (۱۶) تایید شد^{۱۷}. این دستگاه با استفاده از مدارهای موج نور مسطح مبتنی بر سیلیس ساخته شد. اندازه هسته و اختلاف ضریب شکست موجبرها به ترتیب $7\mu m \times 7\mu m$ و 75% است. شکل (۲۹.۲) توان خروجی نرمالیزه تجربی را با توان تئوری ارائه شده توسط معادله (۱۲۵.۲) مقایسه می‌کند. میدان‌های الکتریکی مختلط پایانه‌های زوج و فرد به ترتیب به صورت^{۱۴} $g_i = \exp(j\alpha)$ ($i = 1, 3, \dots, 15$) و $g_i = 1$ ($i = 0, 2, \dots, 14$) تنظیم

^{۱۶}Coherent

^{۱۷}16-tap



شکل ۲۴.۲: مشخصات تقسیم نظری و عملی مقسم $1 \times 8MMI$.



شکل ۲۵.۲: کوپلر $3dB$ بر اساس مقسم $2 \times 2MMI$

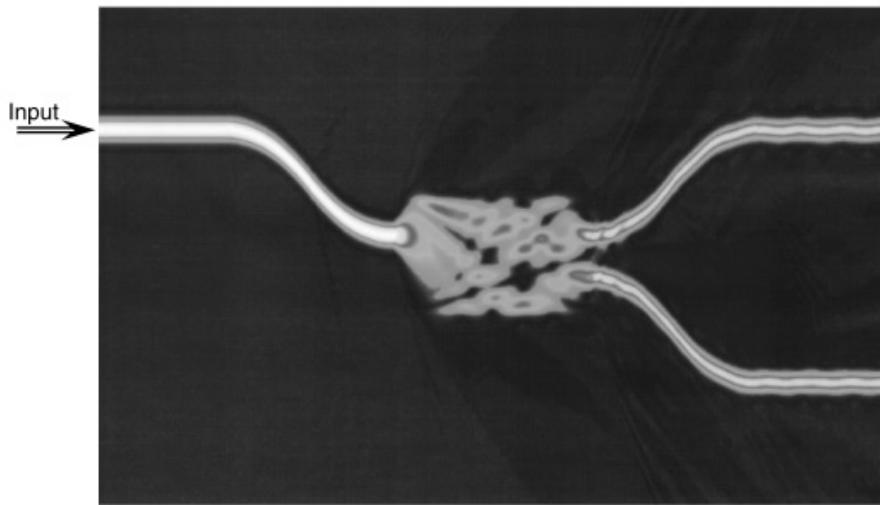
شدنده. تغییر فاز با اثر حرارتی نوری بهموجر معرفی شد. توان خروجی ترکیب کننده از معادله (۱۲۵.۲) توسط رابطه زیر داده شده است.

$$T(\alpha) = \left| \frac{1}{N} (1 + e^{j\alpha}) \frac{N}{2} \right|^2 = \left| \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|^2. \quad (126.2)$$

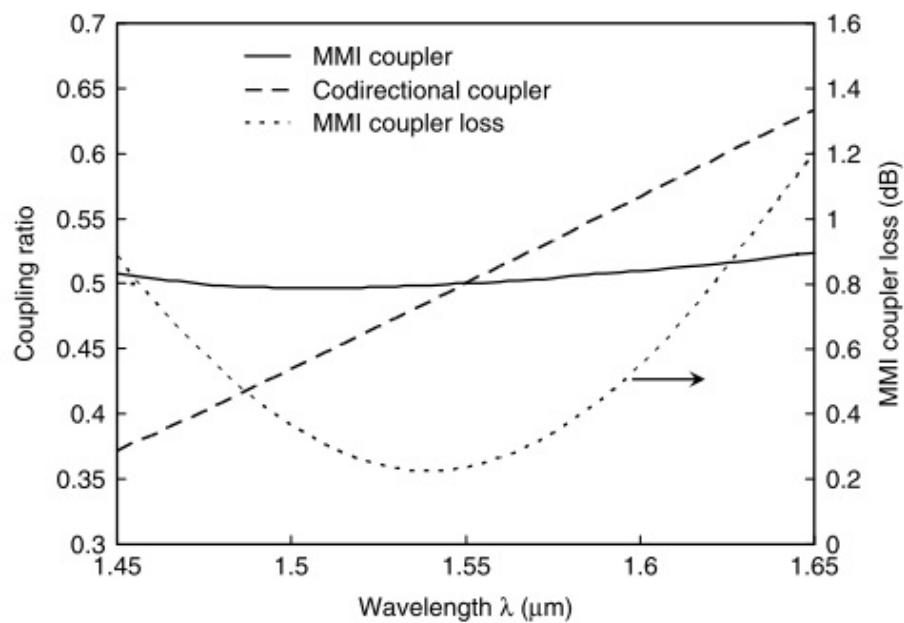
خط پر رنگ در شکل (۲۹.۲) منحنی نظری $|\cos(\alpha/2)|^2$ را نشان می‌دهد و دایره‌ها مقادیر تجربی برای $\alpha = 0^\circ, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ هستند. تأیید می‌شود که جمع مجموعه میدان‌های الکتریکی مختلط با استفاده از ترکیب کننده MMI بدست می‌آید.

۵.۲ تبدیل پرتو و ماتریس انتقال اشعه

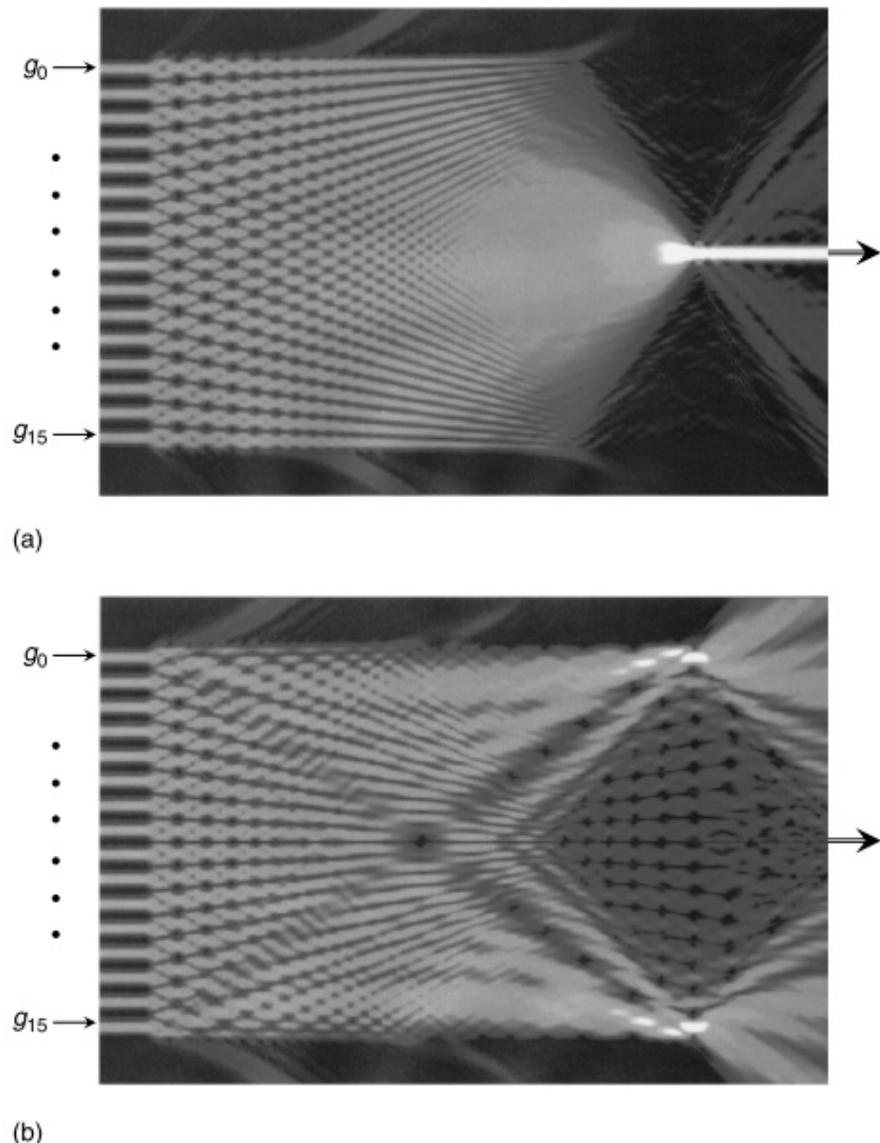
هنگامی که یک پرتو گوسی از یک عدسی (یا چندین عدسی) عبور می‌کند، یک پرتو جدید تشکیل می‌شود و پارامترهای موجود در قوانین انبساط شرح داده شده در معادلات



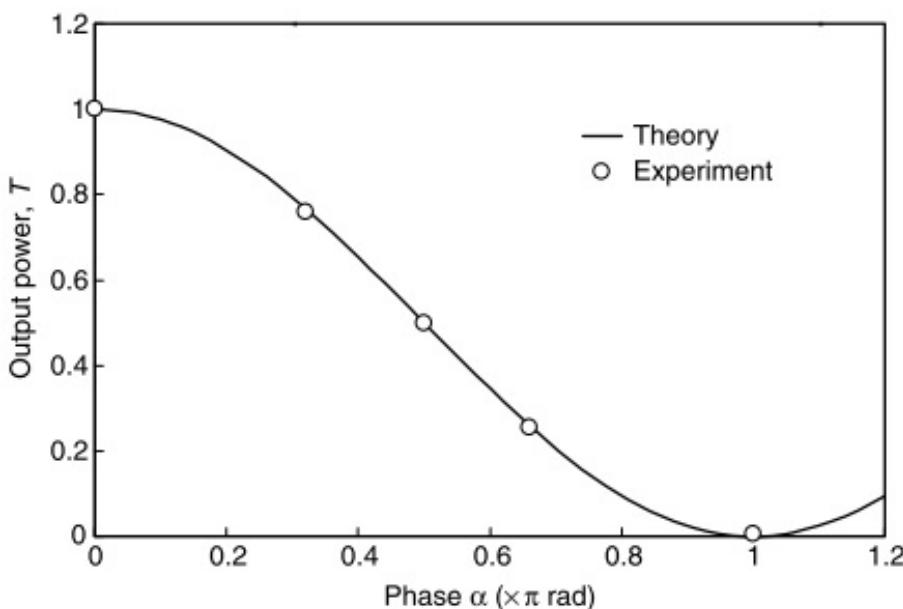
شکل ۲۶.۲: ویژگی‌های انتشار نور در گوپلر MMI $3dB$



شکل ۲۷.۲: نسبت‌های تقسیم طیفی کوپلر 3 دسی‌بل MMI و کوپلر هم جهتی و افت عبوری طیفی کوپلر 3 دسی‌بل MMI



شکل ۲۸.۲: ویژگی‌های انتشار نور در ترکیب کننده 16×1 : (الف) دامنه‌های g_i مساوی هستند و فازهای آن‌ها به درستی تنظیم می‌شوند. و (ب) دامنه‌های g_i مساوی و فازهای آنها کاملاً خارج از فاز است.



شکل ۲۹.۲: توان نرمالیزه خروجی T برای یک ترکیب کننده $1 \text{ MMI} \times 1.6$.

(۱۰۴.۲)-(۱۱۱.۲) تغییر کردند. تبدیل پرتو توسط عدسی بهویژه برای طراحی سیستم تزویج نور بهینه بین دیود لیزر و فیبر نوری (یا موجبر) مهم است.

در این بخش، ماتریس انتقال پرتو برای محیط معمولی انتقال نور مانند فضای آزاد و عدسی رسمیت یافته است. ماتریس انتقال پرتو توضیح می‌دهد که چگونه اندازه نقطه و شعاع انحنای پرتو ورودی پس از عبور از محیط تبدیل می‌شود [۱۹، ۲۰].

ما ابتدا انتشار پرتو گوسی را در فضای آزاد در نظر می‌گیریم که قبلاً در بخش ۲.۳ توضیح داده شد. در اینجا فرض می‌کنیم که پرتو نوری از موجبر متقاضی شعاعی تابش می‌شود ($w_1 = w_2 = w$). سپس معادله (۱۰۹.۲) به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$f(r, z) = \frac{w}{W(z)} \cdot A \exp \left\{ -\frac{r^2}{W^2} - jkn \frac{r^2}{2R} - j(knz - \Theta) \right\} \quad (۱۲۷.۲)$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ شعاع محور z در صفحه مشاهده است و اندازه نقطه $W(z)$ شعاع انحنای $R(z)$ ، و زاویه واگرایی $\Theta(z)$ میدان تابشی از معادله‌ها (۱۰۸.۲) و (۱۰۴.۲) و بصورت زیر داده می‌شود:

$$W(z) = w \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi n w^2}\right)^2} \quad (128.2)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi n w^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (128.2b)$$

$$\Theta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi n w^2} \right) \quad (128.2c)$$

از آنجایی که اندازه لکه W در $z = 0$ حداقل است، این نقطه به عنوان "کمر پرتو"^{۱۸} نامیده می‌شود. مشخص است که شعاع انحنای $R \rightarrow \infty$ در کمر پرتو؛ به عبارت دیگر جبهه فاز بر محور انتشار z عمود است.

ما در اینجا یک پارامتر مختلط جدید $P(z)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$P(z) = \frac{2}{W(z)^2} + j \frac{kn}{R(z)} \quad (129.2)$$

تابع $P(z)$ به نام "تابع جبهه موج" نشان داده می‌شود زیرا حاوی اطلاعات اندازه لکه و شعاع انحنا است. با استفاده از تابع جبهه موج بالا (107.2) ، معادله (128.2) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$f(r, z) = \frac{w}{W(z)} \cdot A \exp \left\{ -\frac{1}{2} P(z) r^2 - j k n \right\} \quad (130.2)$$

که در آن زاویه واگرایی $\Theta(z)$ نادیده گرفته شده است زیرا برای مقادیر بزرگ z ثابت است. اجازه دهید پیشرفت تابع جبهه موج $P(z)$ را در فضای آزاد همانطور که در شکل (30.2) نشان داده شده است در نظر بگیریم. جایگزینی معادلات (128.2) و $(128.2b)$ در (129.2) ، مشخص است که $P(z)$ را می‌توان نوشت

$$P(z) = \frac{2/w^2}{1 - j \frac{\lambda z}{\pi n w^2}} \quad (131.2)$$

تابع جبهه موج P_0, P_1 و P_2 در موقعیت‌های محوری $z = 0, z_1$ و z_2 برابرند با:

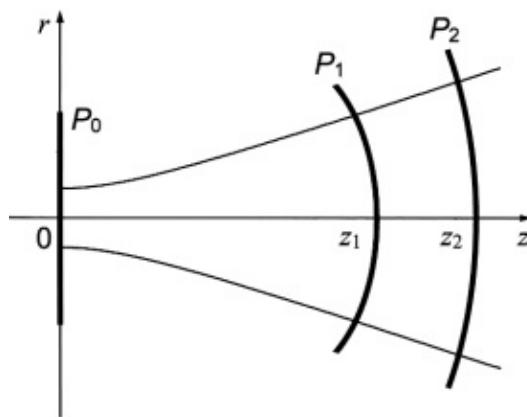
$$P_0 = \frac{2}{w^2} \quad (132.2)$$

$$P_1 = \frac{P_0}{1 - j \frac{\lambda z_1}{\pi n w^2}} \quad (132.2b)$$

$$P_2 = \frac{P_0}{1 - j \frac{\lambda z_2}{\pi n w^2}} \quad (132.2c)$$

با ترکیب معادلات $(132.2)-(132.2c)$ ، داریم

^{۱۸}Beam Waist



شکل ۲.۳۰: پیشرفت تابع جبهه موج $P(z)$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{P_\circ} - j \frac{z_1}{kn} \quad (133.2)$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_\circ} - j \frac{z_2}{kn} \quad (133.2)$$

با حذف P_\circ از معادلات بالا، رابطه‌ای بین P_1 و P_2 بصورت زیر خواهیم داشت

$$P_2 = \frac{P_1}{1 - j \frac{(z_2 - z_1)}{kn} P_1} = \frac{AP_1 + B}{CP_1 + D} \quad (134.2)$$

مقادیر A, B, C و D در معادله بالا بصورت ماتریس F (ماتریس تابعی) زیر بیان می‌شود

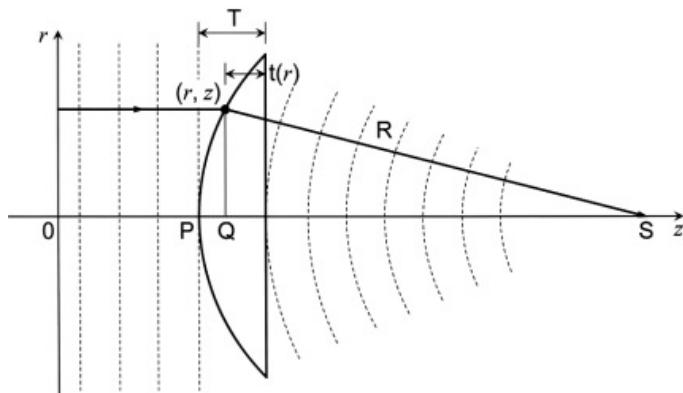
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -j \frac{L}{kn} & 1 \end{bmatrix} \quad (135.2)$$

که در آن $L = z_2 - z_1$. ماتریس F که P_1 و P_2 را با تبدیل دوخطی بهم مرتبط می‌کند "ماتریس انتقال پرتو"^{۱۹} نامیده می‌شود. ماتریس‌های انتقال پرتو برای چندین ساختار نوری در ادامه آورده می‌شود.

۱.۵.۲ انتقال پرتو توسط عدسی‌ها

شکل (۳۱.۲) یک عدسی نازک مسطح محدب را نشان می‌دهد که دارای ضخامت مرکزی T ، شعاع کره R و ضریب شکست n است. فرض براین است که عدسی نازک فقط قسمت جلوی فاز را تغییر می‌دهد و اندازه نقطه پرتو را تغییر نمی‌دهد زیرا موقعیت پرتو r در مقایسه با R ($r \ll R$) به اندازه کافی کوچک است.

^{۱۹}Ray-Transfer Matrix



شکل ۳۱.۲: عدسی مسطح محدب

ضخامت عدسی در موقعیت (r, z) برابر $t(r) = T - \overline{PQ} = T - (R - \overline{QS})$ یا

$$t(r) = T - \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right) \quad (136.2)$$

بر اساس شرط $R \ll r$, معادله بالا را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$t(r) = T - \frac{r^2}{2R} \quad (137.2)$$

در این صورت، عقب ماندگی فاز (تاخیر فاز)^{۲۰} اندازه‌گیری شده از نقطه P خواهد بود

$$\phi(r) = \phi_0 - k \frac{r^2}{2f} \quad (138.2)$$

که در آن $\phi_0 = knT$ و f نمایشگر فاصله کانونی عدسی است که بصورت زیر بیان می‌شود

$$f = \frac{R}{(n-1)} \quad (139.2)$$

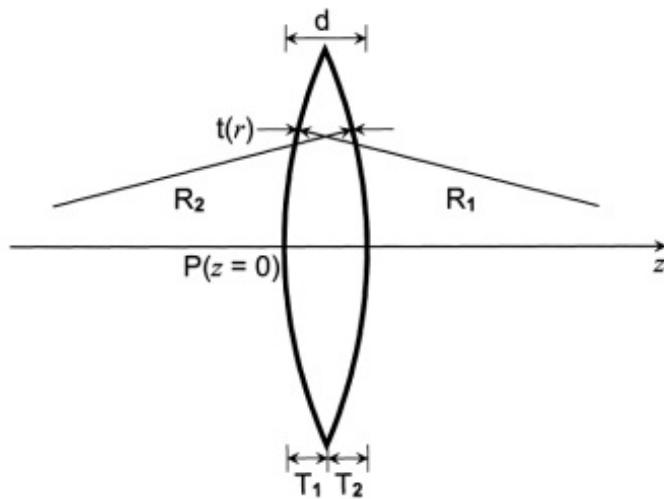
عقب ماندگی فاز یک عدسی محدب دوگانه همانطور که در شکل (۳۲.۲) نشان داده شده است با در نظر گرفتن عدسی محدب دوگانه به صورت آبشاری از دو عدسی محدب مسطح به دست می‌آید.

مشابه روش بدست آوردن قبلی، ضخامت عدسی در موقعیت شعاعی r و تاخیر فاز نسبی اندازه‌گیری شده از نقطه P خواهد بود

$$t(r) = d - \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (140.2)$$

$$\phi(r) = \phi_0 - k \frac{r^2}{2f} \quad (141.2)$$

^{۲۰} Phase retardation



شکل ۳۲.۲: عدسی محدب دوگانه

در اینجا $\phi = knd$ و فاصله کانونی عدسی محدب دوگانه خواهد بود

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (142.2)$$

اکنون، ماتریس انتقال پرتو عدسی نازک را با بررسی تابع جبهه موج ورودی ($P_1(z)$)، تاخیر فاز عدسی ($\phi(r)$) و تابع جبهه موج خروجی ($P_2(z)$) بدست خواهیم آورد. فقط عبارت فاز را در معادله (۱۳۰.۲) در نظر می‌گیریم زیرا فرض می‌شود که عدسی نازک فقط قسمت جلوی فاز را تغییر می‌دهد و اندازه نقطه پرتو $W(z)$ را تغییر نمی‌دهد. با برابر سازی جمله فاز معادله (۱۳۰.۲)، رابطه زیر را داریم

$$-\frac{1}{2}P_2r^2 - jknd = -\frac{1}{2}P_1r^2 - j\phi(r) = -\frac{1}{2}P_1r^2 - jphi_0 + jk\frac{r^2}{2f}$$

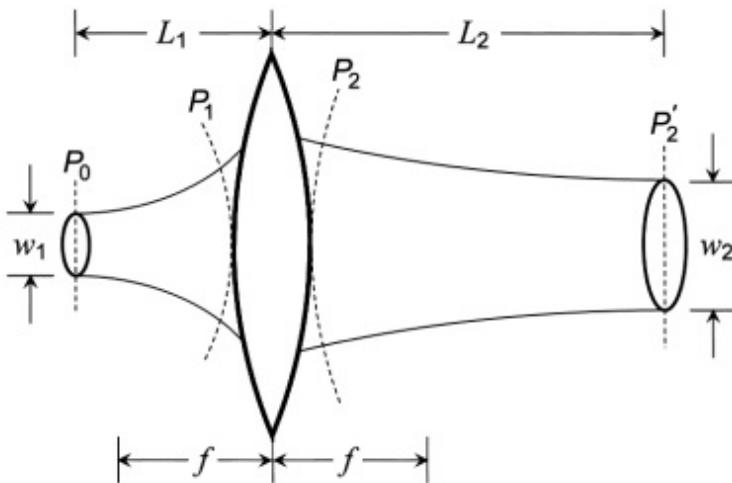
برای اینکه معادله فوق برای مقدار دلخواه \square برقرار باشد، باید داشته باشیم

$$P_2 = P_1 - j\frac{k}{f} = \frac{AP_1 + B}{CP_1 + D} \quad (143.2)$$

در این صورت، ماتریس انتقال پرتو یک عدسی نازک خواهد بود

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\frac{k}{f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (144.2)$$

که در آن فاصله کانونی f بترتیب با معادله (۱۳۹.۲) برای عدسی‌های مسطح محدب و معادله (۱۴۲.۲) برای عدسی‌های محدب دوگانه داده می‌شود.



شکل ۳۳.۲: انتقال پرتو توسط یک عدسی نازک.

۲.۵.۲ کانونی کردن و تبدیل اندازه لکه بوسیله دستگاه عدسی‌ها

انتقال اندازه لکه پرتو زمانی بسیار مهم است که بخواهیم راندمان تزویج نور را برای دیود لیزری (LD)^{۲۱} به فیبر تک مودی (SMF)^{۲۲} بهبود دهیم. شکل (۳۳.۲) به طور شماتیک یک سیستم عدسی منفرد را نشان می‌دهد که در آن اندازه لکه دیود لیزری w_1 به فیبر تک مودی w_2 تبدیل (بزرگنمایی) شده است. اگرچه در اینجا به پرتو متقاضی شعاعی پرداخته می‌شود، عبارات یک پرتو بیضوی را می‌توان به طور مستقیم معادله (۱۰۹.۲) از (۱۲۷.۲) و معادلات (۱۰۸.۲)-(۱۰۸.۲) از (۱۰۴.۲) تا (۱۰۸.۲) را بدست آورد.

تبدیل پرتو در شکل (۳۳.۲) به سه بخش تقسیم می‌شود: (۱) انتشار در فضای آزاد ($P_0 \rightarrow P_1$)، (۲) تبدیل جبهه فاز توسط یک عدسی ($P_1 \rightarrow P_2$)، و (۳) انتشار فضای آزاد دیگر ($P_2 \rightarrow P'_2$). ابتدا، با قرار دادن $n = 1$ در ماتریس F در فضای آزاد (معادله ۱۳۵.۲)، خواهد بود P_1

$$P_1 = \frac{P_0}{-j \frac{L_1}{k} P_0 + 1} \quad (145.2)$$

که در آن $\alpha = 2/w_1$ در کمر پرتو است. در این صورت P_1 توسط عدسی به P_2 تبدیل می‌شود

$$P_2 = P_1 - j \frac{k}{f} \quad (146.2)$$

که در آن معادله (۱۴۳.۲)-(۱۴۴.۲) استفاده شده است. P_2 بعد از انتشار فضای آزاد به

^{۲۱}Laser Diode (LD)

^{۲۲}Single-Mode Fiber (SMF)

P'_2 تبدیل می‌شود

$$P'_2 = \frac{P_1}{-j\frac{L_1}{k}P_1 + 1} \quad (147.2)$$

در اینجا $P'_2 = 2/w_2^z + jk/R'_2$ باید حقیقی باشد ($R'_2 \rightarrow \infty$) در $z = L_1 + L_2$ زیرا فرض می‌کنیم که کمر پرتو در این موقعیت به دست می‌آید. با جایگزینی P_1 (معادله ۱۴۵.۲) و P_2 (معادله ۱۴۶.۲) به معادله (۱۴۷.۲)، شرط زیر را به دست می‌آوریم که باعث می‌شود P'_2 مقدار حقیقی زیر شود

$$L_2 = f + \frac{(L_1 - f)f^z}{(L_1 - f)^z + z^z} \quad (148.2)$$

که در آن $z = k/P_0 = \pi w_2^z/\lambda$ بصورت $z = k/P_0 = \pi w_2^z/\lambda$ تعریف می‌شود. معادله (۱۴۸.۲) موقعیت کمر پرتو (کانون) دستگاه تک عدسی است. بزرگنمائی اندازه لکه با $M = w_2/w_1$ تعریف می‌شود که از بخش حقیقی P'_2 بدست می‌آید

$$M = \frac{w_2}{w_1} = \sqrt{\frac{L_2 - f}{L_1 - f}} = \frac{f}{\sqrt{(L_1 - f)^z + z^z}} \quad (149.2)$$

که در آن از معادله (۱۴۸.۲) استفاده شده است.

ضریب تزویج توان بین بزرگنمائی پرتو گوسی $g(r)$ و پرتو گوسی $F(r)$ در شکل (۳۳.۲) با استفاده از تعریف در معادله‌های (۸۹.۶) و (۹۰.۶) بصورت زیر بیان می‌شود

$$\eta = \frac{\left[\iint g(r)F(r)rdrd\theta \right]^z}{\iint g^z r dr d\theta \iint F^z r dr d\theta} \quad (150.2)$$

که در آن $g(r)$ و $F(r)$ بصورت زیر داده می‌شوند

$$g(r) = A_1 \exp \left\{ -\frac{r^z}{(Mw_1)^z} \right\} \quad (151.2)$$

$$F(r) = A_2 \exp \left(-\frac{r^z}{(Mw_2)^z} \right) \quad (151.2b)$$

مقادیر A_1 و A_2 در معادلات بالا ثابت هستند. با جایگزینی معادله (۱۵۱.۲) و (۱۵۱.۲b) در (۱۵۰.۲) ضریب تزویج توان η بدست می‌آید:

$$\eta = \frac{4}{\left(\frac{w_2}{Mw_1} + \frac{Mw_1}{w_2} \right)^z} \quad (152.2)$$

بیشینه ضریب تزویج وقتی بزرگنمائی برابر $M = w_2/w_1$ است حاصل می‌شود.

اندازه لکه دیود لیزری از معادله (۱۱۲.۲) تقریباً $w_1 \sim 1\mu m$ و $SMF \sim w_2 \sim 5\mu m$ است. در این صورت، $z_0 = (\pi w_1^2 / \lambda)$ برابر چندین دها میکرو متر است. وقتی شرایط اپتیک پرتوی کلاسیک برقرار است، به عبارت دیگر $z_0 \gg f - L_1$ ارضامی شود، معادله (۱۴۸.۲) و (۱۴۹.۲) به عبارت معروف زیر کاوش می‌یابد

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{f} \quad (153.2)$$

و

$$M = \frac{w_2}{w_1} = \frac{L_2}{L_1} \quad (154.2)$$

در مرحله بعد، شرط مخالف مورد قبلی را در نظر می‌گیریم که در آن $f \ll z_0$ یا $L_1 - f = 0$ برآورده می‌شود. این شرایط برای میکرولنزهایی که فاصله کانونی بسیار کمی دارند صادق است. جایگزینی شرط $z_0 \ll f - L_1$ در معادله (۱۴۹.۲)، داریم

$$M = \frac{w_2}{w_1} = \frac{f}{\sqrt{(L_1 - f)^2 + z_0^2}} \sim \frac{f}{z_0} = \frac{\lambda f}{\pi w_1}. \quad (155.2)$$

وقتی w_1, w_2 و M داده شوند، فاصله کانونی بهینه (که در آن بزرگنمایی M به دست می‌آید) برابر است با

$$f = \frac{\pi w_1 w_2}{\lambda} \quad (156.2)$$

با قرار دادن اندازه‌های لکه معمولی LD ($w_1 \sim 1\mu m$) و SMF ($w_2 \sim 5\mu m$ ، فاصله کانونی میکرولنز حدود $10\mu m$ است. مشخص است که دقت تراز بسیار دقیق در حد چند میکرون برای سیستم تزویج میکرو لنز نیاز است.

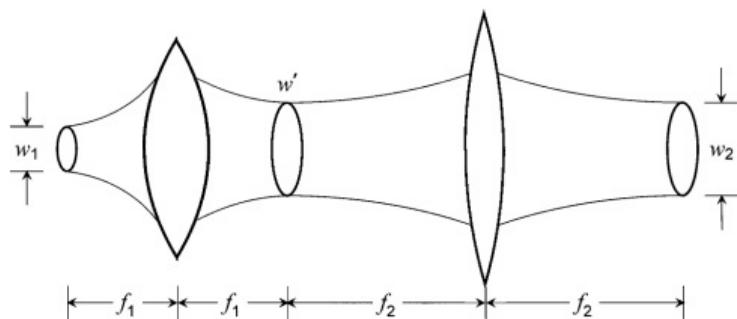
۳.۵.۲ دستگاه دو عدسی همکانون

دستگاه دو عدسی همکانون (کانفوکال) به منظور افزایش تحمل هم ترازی در سیستم‌های عملی تزویج نور LD-SMF توسعه داده شد [۲۱]. شکل (۳۴.۲) یک دستگاه دو عدسی همکانون را نشان می‌دهد، که در آن هر دو عدسی اول و دوم $L_1 = L_2 = f$ را در شکل (۳۳.۲) برآورده می‌کنند. مشابه بحث در میکرولنز، یک لکه مجازی با اندازه w' داده می‌شود

$$w'_1 = \frac{\lambda f_1}{\pi w_1} \quad (157.2)$$

دومین اندازه لکه w_2 در این صورت بصورت زیر بیان می‌شود

$$w'_2 = \frac{\lambda f_2}{\pi w'_1} = \frac{f_2}{f_1} w_1. \quad (158.2)$$



شکل ۳۴.۲: انتقال پرتو توسط دستگاه دو عدسی هم کانونی

میدانیم که ضریب بزرگنمائی از نسبت فواصل کانونی بدست می‌آید

$$M = \frac{w_2}{w_1} = \frac{f_2}{f_1} \quad (159.2)$$

و مستقل از هر مقدار f_1 و f_2 است. این مزیت عدسی کانفوکال است زیرا فاصله کانونی نسبتاً طولانی را می‌توان برای دستیابی به بزرگنمایی مورد نیاز و در عین حال حفظ تلورانس‌های تراز بزرگ انتخاب کرد.

ضریب تزویج قدرت برای لکه پرتو متقاض غیر دایره‌ای به صورت زیر [۲۱] بیان می‌شود.

$$\eta = \frac{4}{\left(\frac{w_r}{w''_x} + \frac{w''_x}{w_r} \right) \left(\frac{w_r}{w''_y} + \frac{w''_y}{w_r} \right)} \quad (160.2)$$

که در آن $w''_y = w_{1y}f_2/f_1$ و $w''_x = w_{1x}f_2/f_1$ لکه‌های پرتو بزرگنمائی شده LD در جهت x و y هستند. مقدار بهینه η_{max} است که η را بیشینه می‌کند و از شرط $\partial\eta/\partial(f_2/f_1) = 0$ محاسبه و بصورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{w_2}{\sqrt{w_{1x}w_{1y}}} \quad (161.2)$$

و بیشینه η برابر است با

$$\eta_{max} = \frac{4}{\left(\sqrt{\frac{w_{1y}}{w_{1x}}} + \sqrt{\frac{w_{1x}}{w_{1y}}} \right)^2} \quad (162.2)$$

در اندازه‌های لکه معمولی $(w_r \sim 5\mu m)$ و $(w_{1x} = 1\mu m)$ و $(w_{1y} = 3.5\mu m)$ از لحاظ نظری $\eta_{max} = 0.81(0.9dB)$ افت قابل ارزیابی است. تایید شده است که تلورانس‌های تراز در امتداد جهت‌های جانبی و محوری با استفاده از سیستم دو عدسی کانفوکال تا حد زیادی افزایش می‌یابد.

کتاب نامه

- [1] Marcuse, D. 1982. *Light Transmission Optics*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- [2] Marcuse, D. 1974. *Theory of Optical Waveguides*. New York: Academic Press.
- [3] Unger, H. G. 1977. *Planar Optical Waveguides and Fibers*. Oxford: Clarendon Press.
- [4] Kressel, H. and J. K. Butler. 1977. *Semiconductor Lasers and Heterojunction LEDs*. New York: Academic Press.
- [5] Marcatili, E. A. J. 1969. *Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics*. Bell Syst. Tech. J. 48:2071 – 2102.
- [6] Kumar, A., K. Thyagarajan and A. K. Ghatak. 1983. Analysis of rectangular-core dielectric waveguides—An accurate perturbation approach. *Opt. Lett.* 8:63 – 65.
- [7] Goell, J. E. 1969. A circular harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides. *Bell Syst. Tech. J.* 48:2133 – 2160.
- [8] Knox, R. M. and P. P. Toulios. 1970. Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range. *Symposium on Submillimeter Waves*, Polytechnic Institute of Brooklyn, pp. 497 – 516.
- [9] Tamir, T. 1975. *Integrated Optics*. Chap. 2, Berlin: Springer-Verlag.
- [10] Born, M. and E. Wolf. 1970. *Principles of Optics*. Oxford: Pergamon Press.
- [11] Bryngdahl, O. 1973. Image formation using self-imaging techniques. *J. Opt. Soc. Amer.* 63:416 – 419.
- [12] Ulrich, R. 1975. Image formation by phase coincidences in optical waveguides. *Opt. Commun.* 13:259 – 264.
- [13] Niemeier, T. and R. Ulrich. 1986. Quadrature outputs from fiber interferometer with 4×4 coupler. *Opt. Lett.* 11:677 – 679.

- [14] Veerman, F. B., P. J. Schalkwijk, E. C. M. Pennings, M. K. Smit and B. H. Verbeek. 1992. An optical passive 3-dB TMI-coupler with reduced fabrication tolerance sensitivity. *IEEE J. Lightwave Tech.* 10:306 – 311.
- [15] Bachmann, M., P. A. Besse and H. Melchior. 1994. General self-imaging properties in $N \times N$ multimode interference couplers including phase relations. *Appl. Opt.* 33:3905 – 3911.
- [16] Heaton, J. M. and R. M. Jenkins. 1999. General matrix theory of self-imaging in multimode interference (MMI) couplers. *IEEE Photon. Tech. Lett.* 11:212 – 214.
- [17] Soldano, L. B. and E. C. M. Pennings. 1995. Optical multi-mode interference devices based on self-imaging: Principles and applications. *IEEE J. Lightwave Tech.* 13:615 – 627.
- [18] Okamoto, K., H. Yamada and T. Goh. 1999. Fabrication of coherent optical transversal filter consisting of MMI splitter/combiner and thermo-optic amplitude and phase controllers. *Electron. Lett.* 35:1331 – 1332.
- [19] Kogelnik, H. 1965. Imaging of optical modes—resonators with internal lenses, *Bell Syst. Technol. J.* 44:455 – 493.
- [20] Joyce, W. B. and B. C. DeLoach. 1984. Alignment of Gaussian beams, *Appl. Opt.* 23:4187 – 4196.
- [21] Saruwatari, M. and T. Sugie. 1981. Efficient laser diode to single-mode fiber coupling using a combination of two lenses in confocal condition, *IEEE J. Quantum Electron.* QE-17:1021 – 1027.

فصل ۳

فیبر نوری

فیبرهای نوری مبتنی بر سیلیس مهمترین وسیله انتقال برای سامانه‌های ارتباطی نوری با ظرفیت زیاد و مسافت‌های طولانی هستند. بارزترین ویژگی فیبر نوری ویژگی‌های کم تلفات آن است. کمترین تلفات انتقالی که تاکنون به دست آمده است 0.154% دسی‌بل در کیلومتر در طول موج $\lambda = 155\mu m$ است [۱]. این بدان معنی است که شدت سیگنال نور پس از انتشار 20 کیلومتر در طول فیبر نوری به نصف قدرت اولیه تبدیل می‌شود. همراه با چنین ویژگی‌های کم تلفات، پاشندگی کم نیز برای انتقال سیگنال مورد نیاز است. اعوجاج سیگنال به دلیل پاشندگی فیبر ارتباط نزدیکی با ساختار هدایت فیبرهای نوری دارد. به منظور تحقیق فیبر با پاشندگی کم، درک ویژگی‌های انتقال با فیبر و طراحی و تجزیه و تحلیل ساختارهای هدایت کننده به شکل دلخواه ضروری است. در این فصل، ابتدا یک تجزیه و تحلیل دقیق از فیبر با ضریب شکست پلهای^۱ ارائه شده است تا خواص اساسی فیبرهای نوری را درک کنیم. سپس مودهای پلاریزه خطی (LP)^۲ که نام‌گذاری مودهای بسیار مهم برای فیبرهای با هدایت ضعیف عملی، شرح داده می‌شوند. استخراج معادلات پاشندگی به منظور درک ویژگی‌های پاشندگی فیبر به طور مفصل توضیح داده شده است. پنهانی باند انتقال سیگنال فیبرهای چند مودی با ضریب شکست تدریجی شده و فیبرهای تک مود در ارتباط با مقادیر پاشندگی آنها مورد بحث و مقایسه قرار گرفته است. در نهایت، اصل خواص حفظ پلاریزاسیون در فیبرهای با ضریب شکست مضاعف^۳ و ویژگی‌های پلاریزاسیون آنها توضیح داده شده است.

۱.۳ معادلات اصلی

میدان‌های الکترومغناطیسی در فیبرهای نوری در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود

^۱Step-Index Fiber

^۲Linearly Polarized (LP)

^۳Birefringent

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(r, \theta) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (آ۱.۳)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(r, \theta) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (آ۱.۳ ب)$$

با جایگزینی معادله (۱.۳) در معادله ماکسول (۳۱.۱)، دو مجموعه از معادلات موج به صورت زیر بدست می‌آوریم [۳، ۲]

$$\frac{\partial^r E_z}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r E_z}{\partial \theta^r} + [k^r n(r, \theta)^r - \beta^r] E_z = 0 \quad (\bar{آ}۲.۳)$$

$$\frac{\partial^r H_z}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^r} \frac{\partial^r H_z}{\partial \theta^r} + [k^r n(r, \theta)^r - \beta^r] H_z = 0 \quad (\bar{آ}۲.۳ ب)$$

در فیبرهای نوری متقارن محوری، توزیع ضریب شکست به θ وابسته نیست و با $n(r)$ بیان می‌شود. در این صورت میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی به صورت زیر به E_z و H_z مربوط می‌شوند:

$$E_r = -\frac{j}{[k^r(n(r)^r - \beta^r)]} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right) \quad (\bar{آ}۳.۳)$$

$$E_\theta = -\frac{j}{[k^r(n(r)^r - \beta^r)]} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (\bar{آ}۳.۳ ب)$$

$$H_r = -\frac{j}{[k^r(n(r)^r - \beta^r)]} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega \epsilon_0 n(r)^r}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) \quad (\bar{آ}۳.۳ ج)$$

$$H_\theta = -\frac{j}{[k^r(n(r)^r - \beta^r)]} \left(\frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \omega \epsilon_0 n(r)^r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (\bar{آ}۳.۳ د)$$

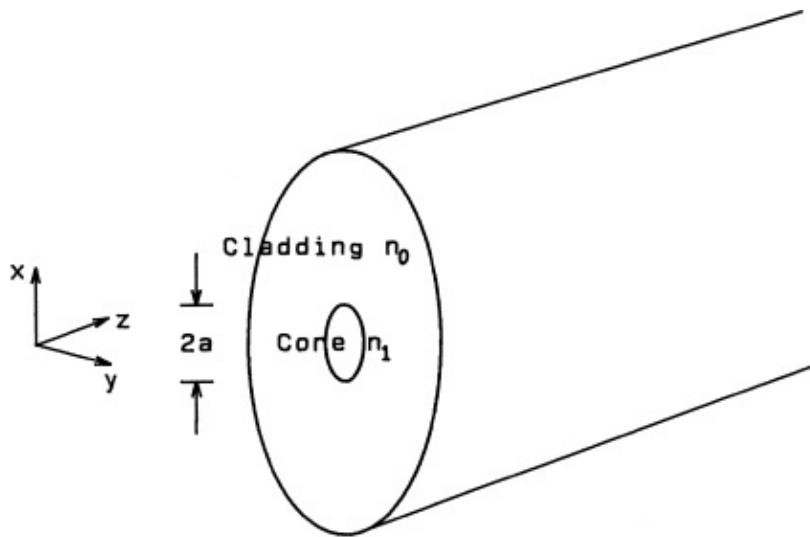
وابستگی میدان‌های الکترومغناطیسی در فیبرهای متقارن محوری با $\cos(n\theta + \psi)$ یا $\sin(n\theta + \psi)$ بیان می‌شود که n یک عدد صحیح است و فاز را نشان می‌دهد. مودها در فیبر نوری به ترتیب شامل مودهای TE (یعنی $E_z = 0$ ، $H_z = 0$)، مودهای TM (یعنی $H_z = 0$ ، $E_z \neq 0$) هستند. در ادامه، میدان‌های الکترومغناطیسی، معادلات پاشندگی و ویژگی‌های انتشار فیبرهای نوری برای فیبرهای با ضریب شکست پله‌ای که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است، توضیح داده شده‌اند که دارای ضریب شکست یکنواخت در هسته است.

۲.۳ نظریه موجی فیبرهای با ضریب شکست پله‌ای

۱.۲.۳ مودهای TE

وقتی $E_z = 0$ در معادله (۲.۳) و (۳.۳) داریم، مجموعه‌ای از معادلات زیر را برای مود TE خواهد بود:

$$\frac{\partial^r H_z}{\partial r^r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \left[k^r n(r)^r - \beta^r - \frac{n^r}{r^r} \right] H_z = 0 \quad (۴.۳)$$



شکل ۱.۳: ساختار موجب فیبر نوری

$$E_r = -\frac{j\omega\mu_0}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (15.3)$$

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu_0}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (16.3)$$

$$H_r = -\frac{j\beta}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (17.3)$$

$$H_\theta = -\frac{j\beta}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (18.3)$$

میدان مغناطیسی در هسته و روکش به صورت زیر بیان می‌شوند

$$H_z = \begin{cases} g(r) & (0 \leq r \leq a) \\ h(r) & (r > a) \end{cases} \quad (6.3)$$

از شرط مرزی که مولفه‌های میدان مماسی H_z و H_θ باید در مرز مشترک هسته-روکش $r = a$ پیوسته باشند، دو شرط زیر را به دست می‌آوریم:

$$g(a) = h(a) \quad (19.3)$$

$$\frac{j\beta}{[k^2 n(a)^2 - \beta^2]} \frac{n}{a} g(a) \sin(n\theta + \psi) = \frac{j\beta}{[k^2 n_\circ^2 - \beta^2]} \frac{n}{a} h(a) \sin(n\theta + \psi) \quad (20.3)$$

از آنجا که در فیبر با ضریب شکست پله‌ای، ضریب شکست در مرز هسته n_1 ($n(a) = n_1$) ضریب شکست هسته است، $n(a)$ برابر با ضریب شکست روکش n_0 نیست. در این صورت میدانیم که n باید برای معادله (20.3) برای هر مقدار دلخواه θ صفر باشد. در نتیجه

وابستگی سمت در مودهای TE برابر $E_r = H_\theta = 0$ و از معادلات (۱۵.۳) و (۱۵.۴) خواهیم داشت

$$E_r = H_\theta = 0 \quad (۸.۳)$$

در فیبر با ضریب شکست تدریجی γ ، که در بخش ۳.۷ مورد بررسی قرار خواهد گرفت، ممکن است این مورد وجود داشته باشد که $n(a) = n_0$ باشد. بنابراین ما نمی‌توانیم بلاعده $n = 0$ را از معادله (۷.۳) استخراج کنیم. با این حال، می‌توانیم شرایط $E_r = H_\theta = 0$ را برای مودهای TE حتی در فیبرهای با ضریب شکست تدریجی، همانطور که در پیوست ۳A/۱ در پایان این فصل نشان داده شده است، استخراج کنیم. با در نظر گرفتن شرایط سمت TE (ازیموتال)، معادله موج و میدان‌های الکترومغناطیسی مربوطه برای مودهای TE به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + [k^2 n(r)^2 - \beta^2] H_z = 0 \quad (۹.۳)$$

$$E_\theta = - \frac{j\omega\mu_0}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (\bar{۱۰}.۳)$$

$$H_r = \frac{j\beta}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (۱۰.۳)$$

$$E_r = H_\theta = 0 \quad (۱۰.۳)$$

در اینجا، عدد موج را در هسته و روکش در جهت عرضی تعریف می‌کنیم

$$\kappa = \sqrt{k^2 n^2 - \beta^2} \quad (\bar{۱۱}.۳)$$

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n^2} \quad (۱۱.۳)$$

موج معادله (۹.۳) برای میدان در داخل هسته $H_z = h(r)$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \kappa^2 g = 0 \quad (0 \leq r \leq a) \quad (۱۲.۳)$$

و معادله موج برای روکش $H_z = h(r)$ خواهد بود

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} + \kappa^2 h = 0 \quad (r > a) \quad (۱۳.۳)$$

جواب‌ها برای معادله (۱۲.۳) بترتیب تابع بسل مرتبه صفر $J_{\nu}(\kappa r)$ و تابع نیومن مرتبه صفر $N_{\nu}(\kappa r)$ [۴، ۵] است. با این حال، $r = 0$ در $N_{\nu}(\kappa r)$ بی‌نهایت واگرا می‌شود. بنابراین $J_{\nu}(r)$ جواب مناسب در هسته است. راه حل‌های معادله (۱۳.۳) به ترتیب تابع بسل از نوع اول $I_{\nu}(\sigma r)$ و توابع بسل اصلاح شده از نوع دوم $K_{\nu}(\sigma r)$ اصلاح شده است. با این حال،

در $r = \infty$ بی‌نهایت واگرا می‌شود. بنابراین $K_*(\sigma r)$ راه حل مناسب در روکش فلزی است. سپس میدان‌های مغناطیسی برای مود TE توسط داده می‌شود.

$$H_z = \begin{cases} AJ_*(\kappa r) & (0 \leq r \leq a) \\ BK_*(\sigma r) & (r > a) \end{cases} \quad (14.3)$$

که در آن A و B ثابت هستند. شرایط مرزی برای میدان‌های H_z و E_θ باید در $r = a$ پیوسته باشد:

$$AJ_*(\kappa a) = BK_*(\sigma a) \quad (15.3)$$

$$\frac{A}{\kappa} J'_*(\kappa a) = -\frac{B}{\sigma} K'_*(\sigma a) \quad (15.3b)$$

با استفاده از عده‌های موج عرضی نرمالیزه

$$u = \kappa a = a \sqrt{k^2 n_*^2 - \beta^2} \quad (16.3)$$

$$w = \sigma a = a \sqrt{\beta^2 - k^2 n_*^2} \quad (16.3b)$$

معادلات (۱۵.۳) و (۱۵.۳b) را می‌توان به صورت معادله پاشندگی زیر خلاصه کرد:

$$\frac{J'_*(u)}{u J_*(u)} = -\frac{K'_*(w)}{w K_*(w)} \quad (17.3)$$

بر مبنای روابط بسل زیر

$$J'_*(u) = -J_1(u) \quad (18.3)$$

$$K'_*(w) = -K_1(w) \quad (18.3b)$$

معادله (۱۷.۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{J_1(u)}{u J_*(u)} = -\frac{K_1(w)}{w K_*(w)} \quad (19.3)$$

اعداد موج عرضی u و w از معادله (۱۶.۳)، بهم مربوط هستند:

$$u^2 + w^2 = k^2 (n_*^2 - n_0^2) a^2 = v^2 \quad (20.3)$$

بنابراین وقتی فرکانس نرمالیزه v داده می‌شود، اعداد موج عرضی u و w از معادله‌های (۱۹.۳) و (۲۰.۳) تعیین می‌شوند. جایگزینی معادلات (۱۴.۳) و (۱۵.۳) به (۱۰.۳)، میدان‌های الکترومغناطیسی برای مود TE به دست می‌آیند؛

$$E_r = E_z = H_\theta = 0 \quad (21.3)$$

• الف میدان در داخل هسته ($r \leq a$) :

$$E_\theta = -j\omega\mu_0 \frac{a}{u} AJ_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \quad (122.3)$$

$$H_r = j\beta \frac{a}{u} AJ_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \quad (122.3)$$

$$H_z = AJ_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \quad (122.3)$$

• ب میدان در روکش خواهد بود ($r > a$) :

$$E_\theta = j\omega\mu_0 \frac{a}{w} \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \quad (123.3)$$

$$H_r = -j\beta \frac{a}{w} \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \quad (123.3)$$

$$H_z = \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \quad (123.3)$$

مقدار ثابت A در رابطه از توانی که توسط مود، در بخش ۳.۳ نشان داده شد، حمل می‌شود تعیین می‌شود.

۲.۲.۳ مودهای TM

وقتی $H_z = 0$ در معادله (۲.۳) و (۳.۳) قرار داده شود، برای مودهای TM همان روش مودهای TE دنبال می‌کنیم، می‌دانیم که $n = 0$ برای مود TM نیز صادق است. در این صورت معادله موج و سایر مولفه‌های میدان الکترومغناطیسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + [k^2 n(r)^2 - \beta^2] E_z = 0 \quad (24.3)$$

$$E_r = \frac{-j\beta}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (25.3)$$

$$H_\theta = \frac{-j\omega\epsilon_0 n^2}{[k^2 n(r)^2 - \beta^2]} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (25.3)$$

$$E_\theta = H_r = 0 \quad (25.3)$$

جواب معادله (۲۴.۳) توابع مرتبه صفر به صورت زیر است

$$E_z = \begin{cases} AJ_0(\kappa r) & (0 \leq r \leq a) \\ BK_0(\sigma r) & (r > a) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \end{matrix} \quad (26.3)$$

که در آن A و B ثابت هستند. با اعمال شرایط مرزی که E_z و H_θ باید در مرز مشترک هسته و روکش $r = a$ پیوسته باشند، خواهیم داشت

$$\frac{J'_\circ(u)}{u J_\circ(u)} = - \left(\frac{n_\circ}{n_1} \right)^\frac{1}{2} \frac{K'_\circ(w)}{w K_\circ(w)} \quad (27.3)$$

با استفاده از روابط بازگشتی بسل (۱۸.۳)، معادله (۲۷.۳) را می‌توان برای پاشندگی مودهای TM به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{J_1(u)}{u J_\circ(u)} = - \left(\frac{n_\circ}{n_1} \right)^\frac{1}{2} \frac{K_1(w)}{w K_\circ(w)} \quad (28.3)$$

میدان‌های الکترومغناطیسی برای مود TM به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$E_\theta = H_r = H_z = 0 \quad (29.3)$$

- الف میدان در داخل هسته $(0 \leq r \leq a)$

$$E_r = j\beta \frac{a}{u} A J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \quad (30.3)$$

$$E_z = A J_\circ \left(\frac{u}{a} r \right) \quad (30.3)$$

$$H_\theta = j\omega \epsilon_\circ n_\circ \frac{a}{u} A J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \quad (30.3)$$

- ب میدان در روکش خواهد بود $(r > a)$

$$E_r = -j\beta \frac{a}{w} \frac{J_\circ(u)}{K_\circ(w)} A K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \quad (31.3)$$

$$E_z = \frac{J_\circ(u)}{K_\circ(w)} A K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \quad (31.3)$$

$$H_\theta = -j\omega \epsilon_\circ n_\circ \frac{a}{w} \frac{J_\circ(u)}{K_\circ(w)} A K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \quad (31.3)$$

۳.۲.۳ مودهای هایبرید

در مودهای هایبرید مولفه‌های E_z و H_z صفر نیستند. جواب‌های معادله (۲۳) بوسیله ضرب توابع بسل مرتبه m و $\sin(n\theta + \psi)$ یا $\cos(n\theta + \psi)$ است. مولفه‌های E_z و H_z باید در مرز $r = a$ پیوسته باشند. همچنین از معادله (۳۰.۳) میدانیم که $\partial H_z / \partial \theta$ و $\partial E_z / \partial r$ (یا $\partial H_z / \partial r$ و $\partial E_z / \partial \theta$) دارای واپستگی به θ یکسان است. با در نظر اینها، مولفه‌های z میدان الکترومغناطیسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E_z = \begin{cases} A J_n \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(m\theta + \psi) & (0 \leq r \leq a) \\ A \frac{J_n(u)}{K_n(w)} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) \cos(m\theta + \psi) & (r > a) \end{cases} \quad (32.3)$$

$$H_z = \begin{cases} C J_n \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(m\theta + \psi) & (0 \leq r \leq a) \\ C \frac{J_n(u)}{K_n(w)} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) \sin(m\theta + \psi) & (r > a) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{الف} \\ \text{ب} \end{array} \quad (33.3)$$

مولفه‌های عرضی با جاگزینی معادله (۳۲.۳) و (۳۳.۳) در معادله (۳۳.۳) به صورت زیر بدست می‌آید.

• الف میدان در داخل هسته ($0 \leq r \leq a$)

$$E_r = -\frac{ja^r}{u^r} \left[A\beta \frac{u}{a} J'_n \left(\frac{u}{a} r \right) + C\omega\mu_0 \frac{n}{r} J_n \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \cos(n\theta + \psi) \quad (34.3)$$

$$E_\theta = -\frac{ja^r}{u^r} \left[-A\beta \frac{n}{r} J_n \left(\frac{u}{a} r \right) - C\omega\mu_0 \frac{u}{a} J'_n \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \sin(n\theta + \psi) \quad (34.3)$$

$$H_r = -\frac{ja^r}{u^r} \left[A\omega\epsilon_0 n \frac{n}{r} J_n \left(\frac{u}{a} r \right) + C\beta \frac{u}{a} J'_n \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \sin(n\theta + \psi) \quad (34.3)$$

$$H_\theta = -\frac{ja^r}{u^r} \left[A\omega\epsilon_0 n \frac{n}{r} J'_n \left(\frac{u}{a} r \right) + C\beta \frac{n}{r} J_n \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \cos(n\theta + \psi) \quad (34.3)$$

• ب میدان در روکش خواهد بود ($r > a$)

$$E_r = \frac{ja^r}{w^r} \left[A\beta \frac{w}{a} K'_n \left(\frac{w}{a} r \right) + C\omega\mu_0 \frac{n}{r} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \frac{J_n(u)}{K_n(w)} \cos(n\theta + \psi) \quad (35.3)$$

$$E_\theta = \frac{ja^r}{w^r} \left[-A\beta \frac{n}{r} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) - C\omega\mu_0 \frac{w}{a} K'_n \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \frac{J_n(u)}{K_n(w)} \sin(n\theta + \psi) \quad (35.3)$$

$$H_r = \frac{ja^r}{w^r} \left[A\omega\epsilon_0 n \frac{n}{r} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) + C\beta \frac{w}{a} K'_n \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \frac{J_n(u)}{K_n(w)} \sin(n\theta + \psi) \quad (35.3)$$

$$H_\theta = \frac{ja^r}{w^r} \left[A\omega\epsilon_0 n \frac{n}{r} K'_n \left(\frac{w}{a} r \right) + C\beta \frac{n}{r} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \frac{J_n(u)}{K_n(w)} \cos(n\theta + \psi) \quad (35.3)$$

شرط مرزی در $r = a$ میگوید که $E_\theta = H_\theta$ باید در مرز پیوسته باشد و از دو معادله (۳۴.۳ب) و (۳۵.۳ب) داریم

$$A\beta \left(\frac{1}{u^r} + \frac{1}{w^r} \right) n = -C\omega\mu_0 \left[\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right] \quad (36.3)$$

و از دو معادله (۳۴.۳) و (۳۵.۳) داریم

$$A\omega\epsilon_0 \left[n \frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + n \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right] = -C\beta \left(\frac{1}{u^r} + \frac{1}{w^r} \right) n \quad (37.3)$$

و از دو معادله (۳۶.۳) و (۳۷.۳) معادله پاشندگی زیر را خواهیم داشت

$$\left[\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right] \left[n \frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + n \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right] = \frac{\beta^r}{k^r} \left(\frac{1}{u^r} + \frac{1}{w^r} \right)^r n^r \quad (38.3)$$

جایگزینی رابطه زیر که از معادله (۳۶.۳) مشتق شده است:

$$\frac{\beta^2}{k^2} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) = \frac{n_1^2}{u^2} + \frac{n_o^2}{w^2} \quad (۳۹.۳)$$

معادله (۳۸.۳) میتوان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} & \left[\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right] \left[\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \left(\frac{n_o}{n_1} \right)^2 \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right] \\ &= n^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left[\frac{1}{u^2} + \left(\frac{n_o}{n_1} \right)^2 \frac{1}{w^2} \right] \end{aligned} \quad (۴۰.۳)$$

ثابت انتشار مودهای ترکیبی با حل معادله (۴۰.۳) با استفاده از معادله (۲۰.۳) رابطه $u - w$ محاسبه می‌شود. اگرچه معادله (۴۰.۳) راه حل دقیق مودهای ترکیبی در فیبرهای ضریب شکست پله‌ای است، بررسی خواص انتشار فیبرهای نوری با معادله (۴۰.۳) نسبتاً دشوار است. در فیبرهای عملی، اختلاف ضریب شکست در حد یک درصد است، بنابراین در برخی موارد می‌توانیم $n_1 \approx n_o$ را تقریب بزنیم. در این موارد معادله (۴۰.۳) را می‌توان همانطور که در بخش ۴.۳ نشان داده شده است ساده کرد و اطلاعات کاربردی و مفید زیادی به دست آورد.

ثابت C در عبارات میدان الکترومغناطیسی (۳۴.۳) و (۳۵.۳) را می‌توان از معادله (۳۶.۳) نوشت.

$$C = -A \frac{\beta}{\omega \mu_o} \quad (\bar{۴۱}.۳)$$

$$s = \frac{n \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)}{\left[\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} \right]} \quad (\bar{۴۱}.۳b)$$

وفتی از روابط بازگشتهای زیر برای توابع بسل استفاده می‌کنیم؛

$$J'_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (\bar{۴۲}.۳)$$

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} [J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)] \quad (\bar{۴۲}.۳b)$$

$$K'_n(z) = -\frac{1}{\sqrt{z}} [K_{n-1}(z) + K_{n+1}(z)] \quad (\bar{۴۳}.۳)$$

$$\frac{n}{z} K_n(z) = -\frac{1}{\sqrt{z}} [K_{n-1}(z) - K_{n+1}(z)] \quad (\bar{۴۳}.۳b)$$

معادلات (۳۴.۳) و (۳۵.۳) به صورت زیر می‌شوند.

• الف در ناحیه هسته ($a \geq r \geq 0$)

$$E_r = -jA\beta \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_{n-1} \left(\frac{u}{a} r \right) - \frac{(1+s)}{2} J_{n+1} \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \cos(n\theta + \psi) \quad (۱۴۴.۳)$$

$$E_\theta = jA\beta \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_{n-1} \left(\frac{u}{a} r \right) + \frac{(1+s)}{2} J_{n+1} \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \sin(n\theta + \psi) \quad (۱۴۴.۳)$$

$$E_z = AJ_n \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(n\theta + \psi) \quad (۱۴۴.۳)$$

$$H_r = -jA\omega\epsilon_n \frac{u}{a} \left[\frac{(1-s)}{2} J_{n-1} \left(\frac{u}{a} r \right) + \frac{(1+s)}{2} J_{n+1} \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \sin(n\theta + \psi) \quad (۱۴۴.۳)$$

$$H_\theta = -jA\omega\epsilon_n \frac{u}{a} \left[\frac{(1-s)}{2} J_{n-1} \left(\frac{u}{a} r \right) - \frac{(1+s)}{2} J_{n+1} \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \cos(n\theta + \psi) \quad (۱۴۴.۳)$$

$$H_z = -A \frac{\beta}{\omega\mu_0} J_n \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(n\theta + \psi) \quad (۱۴۴.۳)$$

• ب در ناحیه روکش ($r > a$)

$$E_r = -jA\beta \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_{n-1} \left(\frac{w}{a} r \right) + \frac{(1+s)}{2} K_{n+1} \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \cos(n\theta + \psi) \quad (۱۴۵.۳)$$

$$E_\theta = jA\beta \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_{n-1} \left(\frac{w}{a} r \right) - \frac{(1+s)}{2} K_{n+1} \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \sin(n\theta + \psi) \quad (۱۴۵.۳)$$

$$E_z = A \frac{J_n(u)}{K_n(w)} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) \cos(n\theta + \psi) \quad (۱۴۵.۳)$$

$$H_r = -jA\omega\epsilon_n \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_{n-1} \left(\frac{w}{a} r \right) - \frac{(1+s)}{2} K_{n+1} \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \sin(n\theta + \psi) \quad (۱۴۵.۳)$$

$$H_\theta = -jA\omega\epsilon_n \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_{n-1} \left(\frac{w}{a} r \right) + \frac{(1+s)}{2} K_{n+1} \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \cos(n\theta + \psi) \quad (۱۴۵.۳)$$

$$H_z = -A \frac{\beta}{\omega\mu_0} s \frac{J_n(u)}{K_n(w)} K_n \left(\frac{w}{a} r \right) \sin(n\theta + \psi) \quad (۱۴۵.۳)$$

که در آن

$$s_1 = \frac{\beta}{k^r n_1^r} \quad (۱۴۶.۳)$$

$$s_0 = \frac{\beta}{k^r n_0^r} \quad (۱۴۶.۳)$$

۳.۳ توان نوری انتقالی توسط هر مود

میانگین زمانی مؤلفه بردار پواین‌تینگ در امتداد محور z در واحد سطح، با معادله (۴۵.۱) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$S_z = \frac{1}{\zeta} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{u}_z = \frac{1}{\zeta} (E_r H_\theta^* - E_\theta H_r^*), \quad (47.3)$$

که در آن \mathbf{u}_z بردار واحد در جهت z است. در این صورت توان حمل شده توسط فیبر نوری خواهد بود

$$P = \int_0^{\pi} \int_0^\infty S_z r dr d\theta = \frac{1}{\zeta} (E_r H_\theta^* - E_\theta H_r^*) r dr d\theta \quad (48.3)$$

عبارات تحلیلی برای توان انتقال در هر مود در زیر توضیح داده شده است.

۱.۳.۳ مودهای TE

توان انتقالی در هسته و روکش از معادلات (۲۳.۳) و (۴۸.۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} P_{core} &= \pi \omega \mu_0 \beta |A|^{\frac{1}{2}} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} \int_0^a J_1^*(\frac{u}{a}r) r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \omega \mu_0 \beta |A|^{\frac{1}{2}} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} [J_1^*(u) - J_0(u) J_2(u)], \end{aligned} \quad (49.3)$$

$$\begin{aligned} P_{clad} &= \pi \omega \mu_0 \beta |A|^{\frac{1}{2}} \frac{a^{\frac{1}{2}} J_0^*(u)}{w^{\frac{1}{2}} K_0^*(w)} \int_a^\infty K_1^*(\frac{w}{a}r) r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \omega \mu_0 \beta |A|^{\frac{1}{2}} \frac{a^{\frac{1}{2}} J_0^*(u)}{w^{\frac{1}{2}} K_0^*(w)} [K_0^*(w) K_2(w) - K_1^*(w)], \end{aligned} \quad (50.3)$$

که در آن از روابط انتگرال تابع بسل زیر استفاده شده است

$$\int_0^a J_m^*(\frac{u}{a}r) r dr = \begin{cases} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} [J_0^*(u) + J_1^*(u)] & (m = 0) \\ \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} [J_m^*(u) - J_{m-1}(u) J_{m+1}(u)] & (m \geq 1) \end{cases} \quad (51.3)$$

$$\int_a^\infty K_m^*(\frac{w}{a}r) r dr = \begin{cases} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} [K_0^*(w) - K_1^*(w)] & (m = 0) \\ \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} [K_{m-1}(w) K_{m+1}(w) - K_m^*(w)] & (m \geq 1) \end{cases} \quad (52.3)$$

برای محاسبه معادله (۴۹.۳)، ابتدا آنرا به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[J_1^*(u) - J_0(u) J_2(u)] = J_1^* \left[1 - \frac{J_0 J_2}{J_1^*} \right] \quad (53.3)$$

سپس معادله پاشندگی را برای مود TE معادله (۱۹.۳) را در رابطه بازگشتی تابع بسل $J_\gamma(u)$ در معادله (۴۲.۳) جایگزین می‌کنیم:

$$J_\gamma(u) = \frac{2J_1(u)}{u} - J_0(u) \quad (۵۴.۳)$$

و همچنین از رابطه بازگشتی برای تابع بسل اصلاح شده نوع دوم برای بدست آوردن عبارت $J_\gamma(u)$ استفاده می‌کنیم:

$$J_\gamma(u) = \frac{2K_1(w)J_0(u)}{wK_0(w)} - J_0(u) = -\frac{K_\gamma(w)}{K_0(w)}J_0(u). \quad (۵۵.۳)$$

با قرار دادن معادله (۵۵.۳) در (۵۳.۳) و استفاده دوباره از معادله پاشندگی (۱۹.۳)، معادله (۵۳.۳) به رابطه زیر تقلیل می‌یابد:

$$[J_1(u) - J_0(u)J_\gamma(u)] = J_1(u) \left[1 + \frac{w^2}{u^2} \frac{K_0(w)K_\gamma(w)}{K_1(w)} \right] \quad (۵۶.۳)$$

سپس توان حمل شده توسط نواحی هسته و روکش برابر خواهد بود

$$P_{core} = \frac{\pi}{4}\omega\mu_0\beta|A|^2 \frac{a^4}{u^4} J_1(u) \left[1 + \frac{w^2}{u^2} \frac{K_0(w)K_\gamma(w)}{K_1(w)} \right] \quad (۵۷.۳)$$

$$P_{clad} = \frac{\pi}{4}\omega\mu_0\beta|A|^2 \frac{a^4}{u^4} J_1(u) \left[\frac{K_0(w)K_\gamma(w)}{K_1(w)} - 1 \right] \quad (۵۸.۳)$$

توان کل حمل شده توسط مود TE برابر است با

$$P = P_{core} + P_{clad} = \frac{\pi}{4}\omega\mu_0\beta|A|^2 \frac{a^4 v^2}{u^4} J_1(u) \frac{K_0(w)K_\gamma(w)}{K_1(w)} \quad (۵۹.۳)$$

ثبت مجھول A را می‌توان از معادله (۵۹.۳)، هنگامی که کل عبور توان P را در فیبر نوری مشخص می‌کنیم، تعیین کرد. نسبت نسبت‌های افزونگی ^۴ توان به توان کل در هر هسته و ناحیه روکش به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{P_{core}}{P} = 1 + \frac{u^2}{v^2} \left[1 - \frac{K_1(w)}{K_0(w)K_\gamma(w)} \right] \quad (۶۰.۳)$$

$$\frac{P_{clad}}{P} = \frac{u^2}{v^2} \left[1 - \frac{K_1(w)}{K_0(w)K_\gamma(w)} \right] \quad (۶۰.۳)$$

۲.۳.۳ مود TM

جایگزینی معادلات (۲۹.۳)-(۳۱.۳) در (۴۸.۳) و با اعمال روشی مشابه برای مود TE قدرت در هسته و روکش برای مود TM خواهد بود

$$P_{core} = \frac{\pi}{4}\omega\epsilon_0 n_1 \beta|A|^2 \frac{a^4}{u^4} [J_1(u) - J_0(u)J_\gamma(u)] \quad (۶۱.۳)$$

^۴Confinement

$$P_{clad} = \frac{\pi}{\gamma} \omega \epsilon_0 n_\infty^\gamma \beta |A|^\gamma \frac{a^\gamma}{w^\gamma} \frac{J_\infty^\gamma(u)}{K_\infty^\gamma(w)} [K_\infty(w) K_\infty^\gamma(w) - K_\infty^\gamma(w)] \quad (62.3)$$

معادلات (۶۱.۳) و (۶۲.۳) با استفاده از روابط بازگشتی تابع بسل و معادله پاشندگی (۲۸.۳) بازنویسی می‌شوند

$$\begin{aligned} P_{core} &= \frac{\pi}{\gamma} \omega \epsilon_0 n_\infty^\gamma \beta |A|^\gamma \frac{a^\gamma}{u^\gamma} J_\infty^\gamma(u) \\ &\times \left[1 + \frac{n_\infty^\gamma}{n_\infty} \frac{w^\gamma}{u^\gamma} \frac{K_\infty(w) K_\infty^\gamma(w)}{K_\infty^\gamma(w)} + \left(1 - \frac{n_\infty^\gamma}{n_\infty} \right) \frac{J_\infty^\gamma(u)}{J_\infty(u)} \right] \end{aligned} \quad (63.3)$$

$$P_{clad} = \frac{\pi}{\gamma} \omega \epsilon_0 n_\infty^\gamma \beta |A|^\gamma \frac{a^\gamma}{u^\gamma} J_\infty^\gamma(u) \frac{n_\infty^\gamma}{n_\infty} \left[\frac{K_\infty(w) K_\infty^\gamma(w)}{K_\infty^\gamma(w)} - 1 \right] \quad (64.3)$$

$$\begin{aligned} P &= P_{core} + P_{clad} \\ &= \frac{\pi}{\gamma} \omega \epsilon_0 n_\infty^\gamma \beta |A|^\gamma \frac{a^\gamma}{u^\gamma} J_\infty^\gamma(u) \\ &\times \left[\frac{n_\infty^\gamma}{n_\infty} \frac{v^\gamma}{u^\gamma} \frac{K_\infty(w) K_\infty^\gamma(w)}{K_\infty^\gamma(w)} + \left(1 - \frac{n_\infty^\gamma}{n_\infty} \right) \left(1 - \frac{n_\infty^\gamma}{n_\infty} \frac{J_\infty^\gamma(u)}{J_\infty(u)} \right) \right] \end{aligned} \quad (65.3)$$

وقتی تقریب هدایت ضعیف $1 \approx n_1/n_\infty$ برآورده شود، معادلات (۶۳.۳) – (۶۵.۳) شبیه به معادلات (۵۷.۳) – (۵۹.۳) برای مود TE ساده می‌شود.

۳.۳.۳ مودهای هایبرید

رابطه تحلیلی عبور برای مودهای هایبرید نسبتاً مشکل است. در اینجا فقط رابطه را برای P_{clad} و P_{core} نشان می‌دهیم:

$$P_{core} = \frac{\pi}{\gamma} \omega \epsilon_0 n_\infty^\gamma \beta |A|^\gamma \frac{a^\gamma}{u^\gamma} \left[(1-s)(1-s_1) \int_0^a J_{n-1}^\gamma \left(\frac{u}{a} r \right) r dr \right. \\ \left. + (1+s)(1-s_1) \int_a^\infty J_{n+1}^\gamma \left(\frac{u}{a} r \right) r dr \right] \quad (66.3)$$

$$\begin{aligned} P_{clad} &= \frac{\pi}{\gamma} \omega \epsilon_0 n_\infty^\gamma \beta |A|^\gamma \frac{a^\gamma}{w^\gamma} \frac{J_n^\gamma(u)}{w K_n^\gamma(w)} \left[(1-s)(1-s_\infty) \int_a^\infty K_{n-1}^\gamma \left(\frac{w}{a} r \right) r dr \right. \\ &\left. + (1+s)(1+s_\infty) \int_a^\infty K_{n+1}^\gamma \left(\frac{w}{a} r \right) r dr \right] \end{aligned} \quad (67.3)$$

توانهای P_{core} و P_{clad} را می‌توان با استفاده از روابط انتگرال معادله (۵۱.۳) و (۶۲.۳) به معادلات (۶۶.۳) و (۶۷.۳) محاسبه کرد. اگر تقریب $1 \approx n_1/n_\infty$ همانطور که در بخش بعدی ۳.۴.۳ نشان داده شده است برقرار باشد، P_{core} و P_{clad} به شکل‌های ساده‌تری بیان می‌شوند.

۴.۳ مودهای قطبش خطی (LP)

در بخش‌های قبل، تحلیل‌های دقیقی برای مودهای TM و TE هایپریدی در فیبر با ضریب شکست پلهای توصیف شده‌اند. تفاوت ضریب شکست فیبر عملی در حد یک درصد است. علاوه بر این، تفاوت‌های ضریب شکست مهم‌ترین فیبرهای تک مودی برای ارتباطات نوری حدود $n_{1/n} \approx 0.8\% - 0.3\%$ است. در این صورت می‌توانیم بهصورت $1 \approx n_{1/n}/n_1$ تقریب کنیم. این تقریب بهما اجازه می‌دهد تا تجزیه و تحلیل فیبرهای نوری را بهشدت ساده کنیم و ما را قادر می‌سازد نتایج کاملاً واضحی بهدست آوریم. تجزیه و تحلیل فیبر بر اساس تقریب با $1 \approx n_{1/n}$ برای اولین بار توسط اسنایدر^۶ [۲۸] ارائه شد. پس از آن، چنین گروههایی با تقریب $1 \approx n_{1/n}$ مودهای LP^۷ (قطبش خطی) توسط گلوگ^۸ [۲۹] تعیین شدند. از آنجایی که یک مود LP با تقریب $1 \approx n_{1/n}$ بهدست می‌آید، بهاین معنی است که افرونگی نور در هسته آنقدر فشرده نیست. بنابراین این تقریب را تقریب هدایت ضعیف^۹ می‌نامند. مودهای LP را در قسمت‌های بعدی بهتفصیل بررسی خواهیم کرد.

۱.۴.۳ معادله پاشندگی منسجم برای مودهای LP

راه حل دقیق [معادله (۱۹.۳)] برای مودهای TE همانطور که هست پذیرفته شده است. برای مودهای TM، تقریب هدایت ضعیف $1 \approx n_{1/n}$ بهمعادله پاشندگی دقیق (۲۸.۳) برای بهدست آوردن شکل تقریبی، اعمال می‌شود.

$$\frac{J_1(u)}{u J_{\circ}(u)} = -\frac{K_1(w)}{w K_{\circ}(w)} \quad (68.3)$$

این معادله همان معادله پاشندگی برای مودهای TE (۱۹.۳) شناخته شده است. برای مودهای ترکیبی، تقریب هدایت ضعیف $1 \approx n_{1/n}$ را در معادله پاشندگی دقیق (۴۰.۳) اعمال می‌کنیم و یک زوج معادله زیر را بهدست می‌آوریم:

$$\frac{J'_n(u)}{u J_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{w K_n(w)} = \pm n \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (69.3)$$

که در آن $n \geq 1$ است. این معادله را با استفاده از توابع بازگشتی بسل (۱۴۵.۳) و (۱۴۵.۳ب) بهصورت زیر بازنویسی می‌کنیم؛

$$\frac{J_{n+1}(u)}{u J_n(u)} = -\frac{K_{n+1}(w)}{w K_n(w)} \quad (70.3)$$

$$\frac{J_{n-1}(u)}{u J_n(u)} = \frac{K_{n-1}(w)}{w K_n(w)} \quad (71.3)$$

⁶Snyder

⁷LINERLY POLARIZED (LP)

⁸Gloge

⁹Weakly guiding approximation

که در آن معادله (۷۰.۳) بترتیب از علامت مثبت معادله (۶۹.۳) و معادله (۷۱.۳) از علامت منفی معادله (۶۹.۳) به دست می‌آید. مودهای مربوط به علامت مثبت معادله (۶۹.۳) مودهای EH و آنها یی که با علامت منفی معادله (۶۹.۳) مطابقت دارند، مودهای HE نامیده می‌شوند. تعیین مود EH و HE هیچ پایه و منطق خاصی ندارد و صرفاً متعارف است. از لحاظ تاریخی، مهندسان مایکروویو برای اولین بار به مود پایین‌ترین مرتبه (مود بدون قطع) در یک موجبر میله‌ای دی‌الکتریک به عنوان مود HE_{11} اشاره کردند^[۲].^[۳] بعداً، نام‌گذاری مودهای EH و HE مطابق با این رسم به دست آمد. با این حال، شایان ذکر است که در مودهای EH ، میدان مغناطیسی محوری H_z نسبتاً قوی است، در حالی که در مودهای HE مودهای الکتریکی محوری E_z نسبتاً قوی است.

تقریب $n_1 \approx n_0$ به ما امکان می‌دهد رابطه (۴۶.۳) را به $s \approx s_1 \approx s_0$ بازنویسی کنیم. بنابراین معادلات نشان دهنده میدان‌های الکترومغناطیسی (۴۴.۲) و (۴۵.۳) نیز ساده شده است. از آنجایی که $s = 1$ برای مودهای EH است، از معادلات (۴۱.۳) و (۶۹.۳)، تقریب $1 \approx s_1 \approx s_0$ را به دست می‌آوریم. در این صورت میدان الکترومغناطیسی مودهای EH با قرار دادن $1 \approx s_1 \approx s_0$ در معادله‌ها (۴۴.۳) و (۴۵.۳) داده می‌شود. مشخص است که جملات با (ur/a) و $J_{n+1}(wr/a)$ در مودهای EH غالب هستند. از سوی دیگر، از آنجایی که $s = -1$ برای مودهای HE از معادلات (۴۱.۳) و (۶۹.۳)، ما تقریب‌های $-1 \approx s_1 \approx s_0$ را به دست می‌آوریم. در این صورت میدان الکترومغناطیسی مودهای HE با قرار دادن $-1 \approx s_1 \approx s_0$ در معادله‌های (۴۴.۲) و (۴۵.۳) پیدا می‌شود. مشخص است که جملات با (ur/a) و $J_{n-1}(wr/a)$ در مودهای HE غالب هستند.

معادله پاشندگی برای مودهای HE که دارای مود ازیموتال شماره $2 \geq n$ هستند را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد. اول، معادله (۷۱.۳) معکوس کرده، سپس روابط بازگشتی برای توابع بسل (۴۲.۳) و (۴۵.۳) به $J_n(u)$ و $K_n(w)$ اعمال می‌شود تا رابطه زیر را بدست آید:

$$\frac{J_{n-1}(u)}{u J_{n-2}(u)} = -\frac{K_{n-1}(w)}{w K_{n-2}(w)} \quad (72.3)$$

معادله پاشندگی برای مودهای HE که دارای مود ازیموتال شماره $2 \geq n$ هستند استفاده می‌شود. معادلات پاشندگی برای TE و TM و مودهای EH و HE هایبریدی تحت تقریب هدایت ضعیف در جدول (۱.۳) خلاصه شده است. عدد صحیح یک مرتبه مود در جهت ازیموتال (سمت) θ و $(1 \geq l)$ مرتبه مود در جهت شعاعی است. به طور دقیق‌تر، حل اامین هر معادله پاشندگی را نشان می‌دهد. با توجه به شباهت بین مودهای LP در جدول (۱.۳)، یک پارامتر جدید را معرفی می‌کنیم

$$m = \begin{cases} 1 & (TE \text{ و } TM \text{ مود}) \\ n+1 & (EH \text{ مود}) \\ n-1 & (HE \text{ مود}) \end{cases} \quad (73.3)$$

سپس معادلات پاشندگی مودهای LP را می‌توان به صورت یکپارچه زیر بیان کرد

جدول ۱.۳: معادلات پاشندگی برای تقریب هدایت ضعیف

معادله پاشندگی	تعیین مود ($l \geq 1$)
$\frac{J_1(u)}{u J_n(u)} = -\frac{K_1(w)}{w K_n(w)}$	$\begin{cases} TE_{\circ l} & \text{مود} \\ TM_{\circ l} & \text{مود} \end{cases}$
$\frac{J_{n+1}(u)}{u J_n(u)} = -\frac{K_{n+1}(w)}{w K_n(w)}$	$(n \geq 1) \quad EH_{\circ l} \quad \text{مود}$
$\frac{J_{\circ l}(u)}{u J_1(u)} = \frac{K_{\circ l}(w)}{w K_1(w)}$	$HE_{\circ l} \quad \text{مود}$
$\frac{J_{n-1}(u)}{u J_{n-2}(u)} = -\frac{K_{n-1}(w)}{w K_{n-2}(w)}$	$(n \geq 2) \quad HE_{nl} \quad \text{مود}$

$$\frac{J_m(u)}{u J_{m-1}(u)} = -\frac{K_m(w)}{w K_{m-1}(w)} \quad (74.3)$$

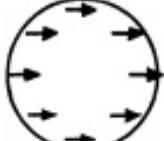
برای مود $m = 0$ با $EH_{\circ l}$ ، فرمول های تابع بسل $J_{-1}(u) = -J_1(u)$ و $K_{-1}(w) = K_1(w)$ باید در معادله (۷۴.۳) استفاده شود.

از معادله (۷۴.۳) معلوم است که مودی که پارامتر مود یکسان m (و l) را دارد دارای مقدار ویژه یکسان تحت تقریب هدایت ضعیف است. البته، از آنجایی که آنها مودهای موكدی نیستند، مقادیر ویژه در معادلات پاشندگی دقیق کمی متفاوت هستند. بنابراین مودهای LP مودهای تقریبی هستند که توسط مقادیر ویژه طبقه بندی می‌شوند.

جدول (۲.۳) رابطه بین مودهای LP و مودهای معمولی را مقایسه می‌کند. سه نوع مود مربوط به $HE_{\circ l}, TM_{\circ l}$ و $TE_{\circ l}$ معرفی می‌شوند. مود $HE_{\circ l}$ تقریباً معادله پاشندگی یکسانی را برآورده می‌کند. همچنان، ترکیب مود HE_{m+1} و EH_{m-1} ، که مربوط به $m \geq 2$ است، معادله پاشندگی یکسان را برآورده می‌کند. این بدان معنی است که ثابت‌های انتشار این گروههای مود تقریباً منحط^{۱۰} هستند. علاوه بر این، مودهای EH و HE دارای دو مولفه مستقل $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ هستند [۰ = ψ و $\pi/2$ در معادله‌های (۳۲.۳) - (۳۵.۳)]. مودهای TE و TM از نظر قطبش منحط نیستند، زیرا دارای توزیع میدانی متقارن محوری $= 0$ هستند. سپس حل معادله پاشندگی متناظر با ترکیب (m, l) به ترتیب انحطاط دو برابری برای $m = 0$ و چهار برابری برای $m \geq 1$ است.

شکل (۲.۳) رابطه بین بردارهای میدان الکترویکی و شکل شدت میدان E_x را برای مودهای LP و مودهای متعارف به صورت گروه مود سه‌تائی ($LP_{\circ 1}(HE_{\circ 1}), LP_{\circ 1}(TE_{\circ 1}, TM_{\circ 1}), HE_{\circ 1}$) و ($LP_{\circ 1}(EH_{\circ 1}, HE_{\circ 1})$ نشان می‌دهد [۴، ۳]. میدانیم که شکل شدت میدان‌های الکترویکی عرضی (E_x یا E_y) به مود LP یکسان، توزیع یکسانی دارند.

^{۱۰} Degenerate

LP-mode designations	Traditional designations	Electric field distribution	Intensity distribution of E_x
LP ₀₁	HE ₁₁		
LP ₁₁	TE ₀₁		
	TM ₀₁		
	HE ₂₁		
LP ₂₁	EH ₁₁		
	HE ₃₁		

شکل ۲.۳: بردارهای میدان الکتریکی و شکل شدت مودهای LP و مودهای متعارف

جدول ۲.۳: مقایسه مودهای LP با مودهای متعارف

معادله پاشندگی	مود متعارف ($l \geq 1$)	مود ($l \geq 1$) LP
$\frac{J_*(u)}{u J_1(u)} = \frac{K_*(w)}{w K_1(w)}$	$HE_{\setminus l}$ مود	$(m = \circ) LP_{\circ l}$ مود
$\frac{J_1(u)}{u J_*(u)} = -\frac{K_1(w)}{w K_*(w)}$	$TM_{\circ l}$ مود	$(m = \circ) LP_{\setminus l}$ مود
$\frac{J_m(u)}{u J_{m-1}(u)} = -\frac{K_m(w)}{w K_{m-1}(w)}$	$EH_{m-\setminus l}$ مود $HE_{m+\circ l}$ مود	$(m \geq 2) LP_{ml}$ مود

۲.۴.۳ ویژگی‌های پاشندگی مودهای LP

ثابت انتشار فیبر با ضریب شکست پلهای با حل معادله پاشندگی در جدول (۲.۳) تحت شرایط $u^{\circ} + w^{\circ} = v^{\circ}$ به دست می‌آید. روابط بین اعداد موج عرضی u و w که از طریق خود معادله پاشندگی و $u^{\circ} + w^{\circ} = v^{\circ}$ برای $v = 5$ محاسبه و در شکل (۳.۳) نشان داده شده است.

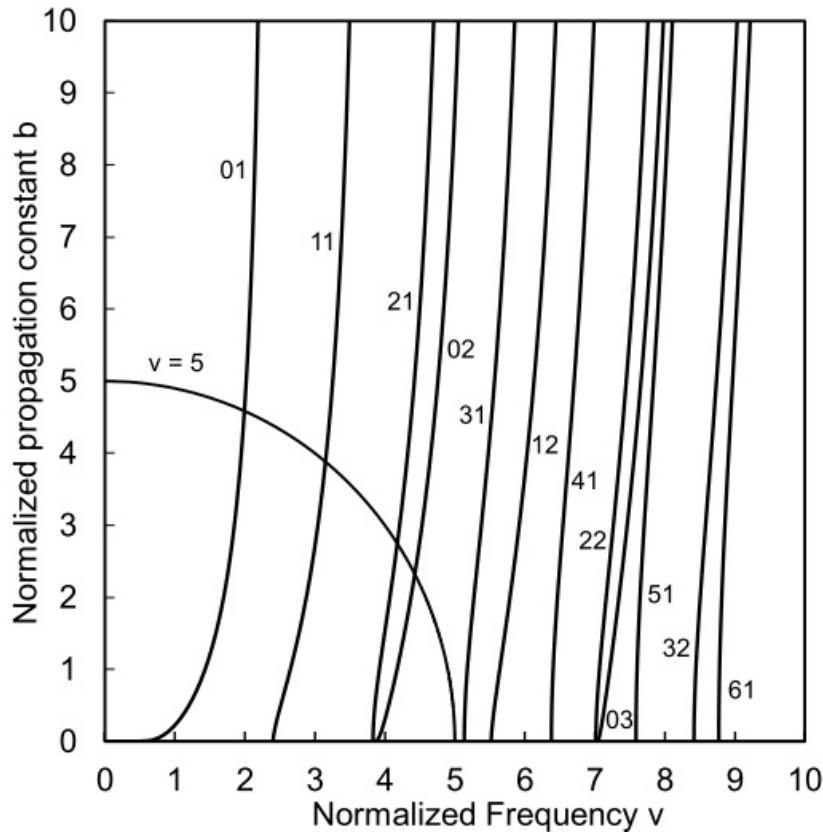
عدد متصل به هر منحنی نشان دهنده شماره مود ml برای مود LP است. نقاط تلاقی منحنی‌های عمودی و نیم‌دایره مجموعه‌ای از مقادیر ویژه u و w را به ما می‌دهند. هنگامی که $u \rightarrow w$ (و همزمان $v \rightarrow u$) را در معادله پاشندگی قرار می‌دهیم، مقادیر قطع v با معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{J_*(v)}{v J_1(v)} \rightarrow \infty \quad (75.3)$$

$$\frac{J_m(v)}{v J_{m-1}(v)} \rightarrow -\infty \quad (75.3)$$

در بدست آوردن این دو معادله، ما از رابطه تقریبی برای تابع بسل اصلاح شده بازاء $w \ll 1$ استفاده کردیم:

$$K_m(w) \approx \begin{cases} -\ln(w) + 0.1159315\dots & (m = \circ) \\ \frac{1}{w} & (m = 1) \\ \frac{(m-1)! 2^{m-1}}{w^m} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (76.3)$$



شکل ۳.۳: رابطه $w-u$ در فیبر با ضریب شکست پله‌ای

مقدادر قطع (v_{cs}) از رابطه (۷۵.۳)، با توجه به علامت توابع بسل بقرار زیر است:

$$v_c = \begin{cases} \circ & HE_{11}(LP_{01}) \\ j_{1,l-1} & HE_{1l}(LP_{0l}), \quad (l \geq 2) \end{cases} \quad (77.3)$$

$$v_c = j_{m-1,l} \quad LP_{ml} \quad (m \geq 1, l \geq 1) \quad (77.3b)$$

که در آن $j_{n,l}$ و l نقطه صفر تابع بسل مرتبه n است. از معادله (۷۷.۳) میدانیم که مقدار قطع برای مود $HE_{11}(LP_{01})$ وجود ندارد، از اینرو مود HE_{11} مود اصلی فیبر نوری است. چون کمترین نقطه صفر تابع بسل $j_{0,1}$ است، مود LP_{01} بازاء $m=1$ و $l=1$ بنام مود مرتبه دوم معروف است. در این صورت مقدار v قطع مود LP_{01} برابر است با:

$$v_c = j_{0,1} = 2/4048256\dots \quad (78.3)$$

که شرط تک مود فیبر با ضریب شکست پله‌ای است.

رفتار معادله پاشندگی برای $w \gg 1$ با استفاده از رابطه تقریبی تابع بسل اصلاح شده به صورت زیر محقق شده است

$$K_m(w) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2w}} e^{-w} \quad (79.3)$$

و مقدار

$$\frac{J_\circ(u)}{u J_1(u)} \rightarrow \circ \quad (m = \circ) \quad (80.3)$$

$$\frac{J_m(u)}{u J_{m-1}(u)} \rightarrow \circ \quad (m \geq 1) \quad (80.3\text{ب})$$

میدانیم که بازاء $w \gg 1$ مقدار u خواهد بود

$$u = j_{m,l} \quad (m \geq \circ) \quad (81.3)$$

حدود تغییرات u برای مودهای LP از رابطه (77.3) و (81.3) برابر است با

$$LP_{\circ,1}(HE_{11}) \text{ مود} \quad u = \circ - j_{\circ,1},$$

$$LP_{\circ,l}(HE_{1l} : l \geq 2) \text{ مود} \quad u = j_{1,l-1} - j_{\circ,l},$$

$$LP_{ml}(m \geq 1, l \geq 2) \text{ مود} \quad u = j_{m-1,l} - j_{m,l},$$

شکل (4.3) منحنی پاشندگی مودهای LP را در فیبر نوری با ضرب شکست پلهای نشان میدهد. آنها از طریق حل عددی معادلات پاشندگی جدول (1.3) با توجه به محدودیت $v^2 + w^2 = u^2$ [معادله (20.3)] محاسبه شده‌اند. محور افقی شکل (4.3) فرکانس نرمالیزه v و محور عمودی ثابت انتشار نرمالیزه است

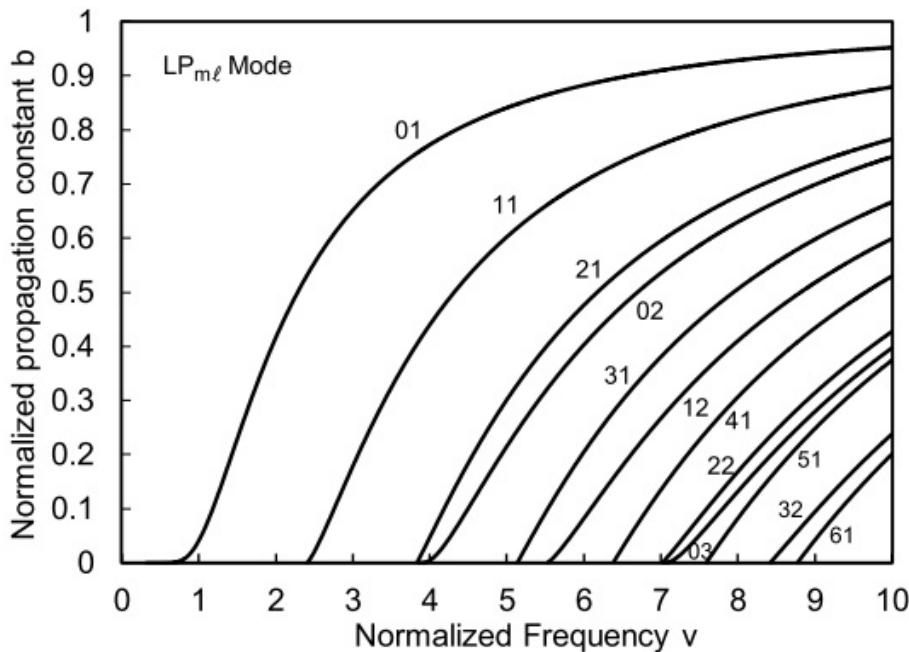
$$b = \frac{(\beta/k)^2 - n_\circ^2}{n_1^2 - n_\circ^2} \quad (82.3)$$

۳.۴.۳ توان انتشار مودهای LP

معادلات دقیق (59.3) و (60.3) را برای مود TE اعمال می‌کنیم. اگر تقریب هدایت ضعیف $n_1 \approx n$ را برای مود TM در معادلات (63.3) و (65.3) اعمال کنیم، همان رابطه برای مود TE را بدست می‌آوریم. در این صورت توان حمل شده توسط مودهای TE و TM به صورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{P_{core}}{P} = 1 - \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_1(w)] \quad (83.3)$$

$$\frac{P_{clad}}{P} = \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_1(w)] \quad (83.3\text{ب})$$



شکل ۴.۳: منحنی پاشندگی مودهای LP در فیبر با ضریب شکست پله‌ای

که در آن

$$\xi_m(w) = \frac{K_m^*(w)}{K_{m-1}(w)K_{m+1}(w)} \quad (۸۴.۳)$$

توان نوری مود EH را با قرار دادن $s \approx s_1 \approx s_0 \approx 1$ در معادله (۶۶.۳) و (۶۷.۳) با استفاده از (۷۰.۳) و رابطه بازگشتی تابع بسل خواهیم داشت

$$P_{core} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \omega \epsilon_0 n_0^2 \beta |A|^2 \frac{a^4}{u^4} J_{n+1}^*(u) \left[1 + \frac{w^2}{u^2} \frac{1}{\xi_{n+1}(w)} \right], \quad (۸۵.۳)$$

$$P_{clad} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \omega \epsilon_0 n_0^2 \beta |A|^2 \frac{a^4}{u^4} \left[\frac{1}{\xi_{n+1}(w)} - 1 \right], \quad (۸۵.۳b)$$

$$P = P_{core} + P_{clad} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \omega \epsilon_0 n_0^2 \beta |A|^2 \frac{a^4}{u^4} J_{n+1}^*(u) \frac{v^2}{\xi_{n+1}(w)}. \quad (۸۶.۳)$$

ثبت A برای میدان الکترومغناطیسی مود EH , هنگامی که توان نوری P مشخص شد, از معادله (۸۶.۳) داده می‌شود. نسبت‌های افزونگی توان هسته و روکش با استفاده از روابط زیر داده می‌شود.

$$\frac{P_{core}}{P} = 1 - \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_{n+1}(w)], \quad (۸۷.۳)$$

$$\frac{P_{clad}}{P} = \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_{n+1}(w)]. \quad (۸۷.۳b)$$

توان نوری مود HE با قرار دادن $s \approx s_1 \approx s_0 \approx -1$ در معادله (۶۶.۳) و (۶۷.۳) با استفاده از (۷۱.۳) و رابطه بازگشتی تابع بسل خواهیم داشت

$$P = P_{core} + P_{clad} = \frac{\pi}{\gamma} \omega \epsilon_0 n \beta |A|^2 \frac{a^4}{u^4} J_{n-1}^2(u) \frac{v^2}{\xi_{n-1}(w)}. \quad (88.3)$$

$$\frac{P_{core}}{P} = 1 - \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_m(w)], \quad (89.3)$$

$$\frac{P_{clad}}{P} = \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_m(w)]. \quad (89.3b)$$

که در آن $(73.3) \quad K_n^2(w) = K_{n-1}^2(w)/K_{n-1}^2(w)$ است. هنگامی که پارامتر m مود را در معادله (۷۳.۳) بکار می‌بریم، توان حمل شده توسط مود LP از روابط منسجم زیر بدست می‌آید

$$\frac{P_{core}}{P} = 1 - \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_m(w)], \quad (90.3)$$

$$\frac{P_{clad}}{P} = \frac{u^2}{v^2} [1 - \xi_m(w)]. \quad (90.3b)$$

شکل (۵.۲) و استنگی ضریب افرونگی توان هسته P_{core}/P را بر حسب فرکانس نرمالیزه v نشان میدهد. از شکل (۵.۳) معلوم می‌شود که (۱) برای تقریباً اکثر مودها در فیبرهای چند مودی ($1 \gg v$)، ضریب $1 \approx P_{core}/P$ است. (۲) و بیش از ده درصد توان نوری در فیبرهای نوری تک مود در روکش حتی در $v = 2/4$ حمل می‌شود.

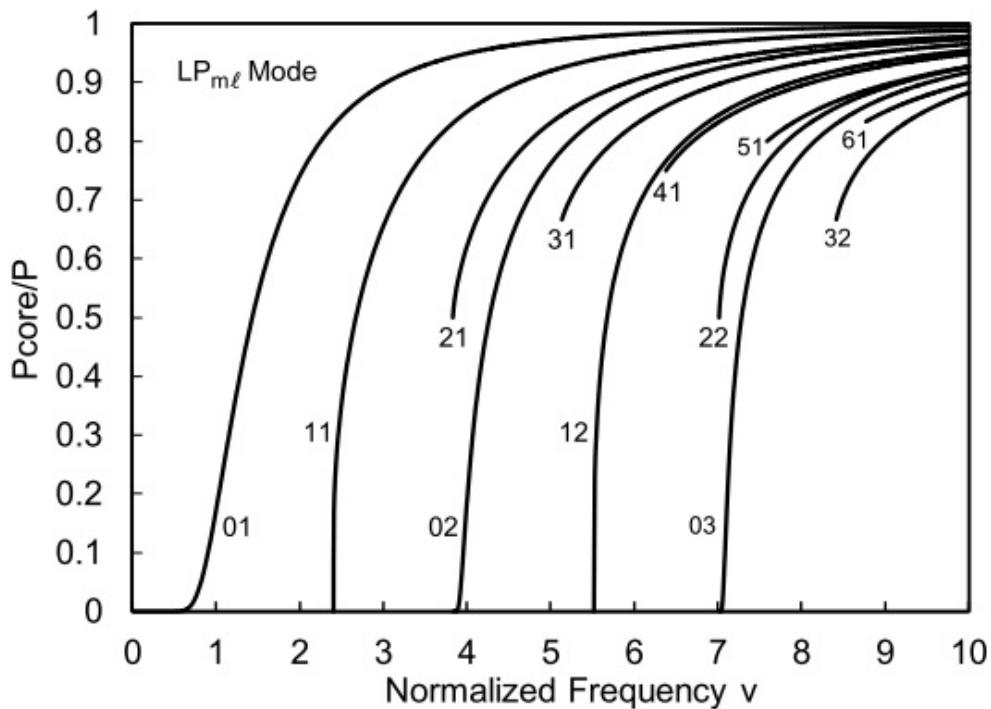
۵.۳ مود اصلی HE_{11}

در قسمت‌های قبلی مشخص شد که مود اصلی فیبر نوری مود HE_{11} است. بنابراین درک ویژگی‌های انتشار مود HE_{11} بهمنظور درک خواص انتقال سیگنال فیبرهای تک مودی ضروری است. در اینجا ویژگی‌های پاشندگی و توزیع میدان الکترومغناطیسی مود HE_{11} به تفصیل بررسی شده است. بهمنظور بازنویسی معادلات (۴۰.۳) و (۴۱.۳b) برای درک آسان عبارات، از فرمول‌های بازگشتی $J'_1(u) = -J_1 - J_1/w$ و $K'_1(u) = -K_1 - K_1/w$ استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه $\Delta \ll 1$ در فیبرهای عملی و همچنین معادله پاشندگی به صورت زیر

$$\frac{J'_1(u)}{u J_1(u)} + \frac{K'_1(w)}{w K_1(w)} \approx - \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$$

را می‌توان برای مود HE_{11} ، معادله (۴۰.۳) و (۴۱.۳b) استفاده کرده تا به صورت زیر کاهش یابد.

$$\frac{J_1(u)}{u J_1(u)} = (\Delta) \frac{K_1(w)}{w K_1(w)} \quad (91.3)$$



شکل ۵.۳: ضریب افزونگی توان در هسته یک فیبر نوری با ضریب شکست پلهای

$$s = -1 + \frac{uw}{v} \frac{J_0(u)}{u J_1(u)} \Delta + O(\Delta)^2 \quad (92.3)$$

از آنجایی که حداقل مقدار $(uw/v) J_0(u)/u J_1(u)$ حدود ۷٪ است، s را می‌توان به خوبی با -1 تقریب زد. معادله (۹۱.۳) یک معادله پاشندگی کمی دقیق‌تر از تقریب مود LP ساده معادله (۷۱.۳) است.

با قرار دادن $n = 1$ در معادله (۴۴.۳) و (۴۵.۳)، و استفاده از روابط تبدیل زیر

$$\begin{cases} E_x = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta \\ E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (93.3)$$

$$\begin{cases} H_x = H_r \cos \theta - H_\theta \sin \theta \\ H_y = H_r \sin \theta + H_\theta \cos \theta \end{cases} \quad (93.3)$$

توزیع میدان الکترومغناطیسی مود HE_{11} در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر خواهد بود.

• الف در ناحیه هسته ($r \leq r \leq a$)

$$E_x = -jA\beta \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos \psi - \frac{(1+s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۴.۳)$$

$$E_y = jA\beta \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin \psi + \frac{(1+s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۴.۳)$$

$$E_z = AJ_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(\theta + \psi) \quad (۹۴.۳)$$

$$H_x = -jA\omega\epsilon_n \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin \psi + \frac{(1+s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۴.۳)$$

$$H_y = -jA\omega\epsilon_n \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos \psi - \frac{(1+s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۴.۳)$$

$$H_z = -A \frac{\beta}{\omega\mu_0} s J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(\theta + \psi) \quad (۹۴.۳)$$

• ب در ناحیه روکش ($r \geq a$)

$$E_x = -jA\beta \frac{aJ_1(u)}{wK_1(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos \psi + \frac{(1+s)}{2} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۵.۳)$$

$$E_y = jA\beta \frac{aJ_1(u)}{wK_1(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin \psi - \frac{(1+s)}{2} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۵.۳)$$

$$E_z = A \frac{J_1(u)}{K_1(w)} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos(\theta + \psi) \quad (۹۵.۳)$$

$$H_x = -jA\omega\epsilon_n \frac{aJ_1(u)}{wK_1(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin \psi - \frac{(1+s)}{2} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۵.۳)$$

$$H_y = -jA\omega\epsilon_n \frac{aJ_1(u)}{wK_1(w)} \left[\frac{(1-s)}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos \psi + \frac{(1+s)}{2} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos(2\theta + \psi) \right] \quad (۹۵.۳)$$

$$H_z = -A \frac{\beta}{\omega\mu_0} s \frac{J_1(u)}{K_1(w)} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin(\theta + \psi) \quad (۹۵.۳)$$

دو مود با قطبش مستقل در معادله (۹۴.۳) و (۹۵.۳) وجود دارد، که با $\psi = 0$ و $\psi = \pi/2$ مطابقت دارد. مولفه‌های میدان الکتریکی در هسته با $\psi = 0$ به صورت زیر بیان شوند

$$E_x = -jA\beta \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) - \frac{(1+s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(2\theta) \right] \quad (96.3)$$

$$E_y = jA\beta \frac{a}{u} \frac{(1+s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(2\theta) \quad (96.3)$$

$$E_z = AJ_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(\theta) \quad (96.3)$$

و بازاء $\psi = \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت

$$E_x = -jA\beta \frac{a}{u} \frac{(1-s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(2\theta) \quad (97.3)$$

$$E_y = jA\beta \frac{a}{u} \left[\frac{(1-s)}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) + \frac{(1+s)}{2} J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(2\theta) \right] \quad (97.3)$$

$$E_z = -AJ_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(\theta) \quad (97.3)$$

معادلات (۹۴.۳) - (۹۷.۳) توزیع میدان الکترومغناطیسی دقیق برای مود HE_{11} هستند. مشخص است که E_x مود غالب در معادله (۹۶.۳) است در حالی که E_y مود غالب در معادله (۹۷.۳) است. از آنجایی که ما رابطه $1 - s \approx \Delta \ll 1 + s/2 \approx (1 + s)/2 \approx 1$ را از معادله (۹۲.۳) می‌دانیم. بنابراین، مود پلاریزاسیون در معادله (۹۶.۳) با $\psi = 0$ مود HE_{11}^x و در معادله (۹۷.۳) با $\psi = \pi/2$ مود HE_{11}^y نامیده می‌شود. نشان داده شده است که دو مود HE_{11} قطبی شده عمودی در به اصطلاح "فیبر تک مودی" منحص هستند. اگرچه مود E_y مود غالب در مود HE_{11}^x است، یک مولفه کاملاً کوچک (E_y/E_x) که قطبش عمود بر هم دارد به معنای دقیق آن وجود دارد. نسبت دامنه چنین مولفه فرعی به‌اصلی از مرتبه ۱ ($\Delta \ll 1$) است و بنابراین در بیشتر موارد می‌توان از آن صرف نظر کرد. در واقع، در مود LP (تقریب هدایت ضعیف)، آن مولفه جزئی نادیده گرفته می‌شوند. تحت این تقریب مود LP ، میدان الکتریکی مود HE_{11}^x تنها مولفه E_x در صفحه مقطع است و بنابراین بردار میدان الکتریکی خطی می‌شود. به همین دلیل است که مود با تقریب هدایت ضعیف "مود قطبش خطی"^{۱۱} نامیده می‌شود.

با جایگزینی معادلات (۹۴.۳) و (۹۵.۳) و داشتن تقریب $1 - s \approx s$ در معادله توان انتقالی (۴۸.۳)

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_0^\infty (E_x H_y^* - E_y H_x^*) r dr d\theta \quad (98.3)$$

و ملاحظه رابطه تبدیل (۹۳.۳)، ضریب دامنه A میدان خواهد بود

$$A = \frac{uw}{\beta a^2 v J_1(u)} \sqrt{\frac{2P}{\pi \epsilon_0 n_1 c}} \quad (99.3)$$

^{۱۱} Linearly Polarized Mode

که در آن c سرعت نور در خلاء است. اگرچه مقدار ویژه مود HE_{11} از حل عددی معادله (۹۱.۳) داده می‌شود، یک تقریب مفید توسط مارکوس^۹[۱۲] استخراج شده است:

$$u = v\sqrt{1 - b} = 2,4048e^{-0.8985/v}. \quad (100.3)$$

وقتی مقدار ویژه u را که با حل عددی معادله (۹۱.۳) به دست می‌آید مقایسه می‌کنیم، با قرار دادن $\Delta = 0$ ، با معادله (۱۰۰.۳)، مقدار ویژه u ، توسط معادله (۱۰۰.۳) مقدار کمی کوچکتر از مقدار دقیق می‌دهد. خطای مقدار ویژه توسط معادله (۱۰۰.۳) کمتر از 0.75% در محدوده $v = 0.9 - 1.0$ و کمتر از 0.5% در محدوده $v = 0.9 - 2.4048$ است.

۶.۳ ویژگی‌های پاشندگی فیبرهای با ضریب شکست پله‌ای

۱.۶.۳ اعوجاج سیگنال ناشی از پاشندگی سرعت گروهی

اجازه دهید پاسخ یک پالس نوری با پوشش گوسی شکل به صورت زیر را وقتی به یک فیبر اعمال می‌شود در نظر بگیریم.

$$f(t) = A \exp \left[- \left(\frac{t}{t_{in}} \right)^2 + j\omega_0 t \right] \quad (101.3)$$

در اینجا ω_0 فرکانس زاویه‌ای مرکزی، t_{in} عرض پالس ورودی (که مربوط به عرض کامل نیم‌بیشینه^{۱۳}(FWHM) $\tau_0 = t_{in}\sqrt{2\ln 2} \approx 1.177t_{in}$ است)، و A مقداریست ثابت. شگل موج پالس بعداز انتشار در امتداد فیبر در مسافت z به صورت زیر بیان می‌شود^{۱۰}[۱۰]

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} d\omega, \quad (102.3)$$

که در آن به ترتیب $\alpha(\omega)$ و $\beta(\omega)$ نشان دهنده ضریب تضعیف دامنه و ثابت انتشار فیبر و $F(\omega)$ طیف فرکانس پالس نوری است. طیف فرکانس $F(\omega)$ از معادله (۱۰۱.۳) داده شده است.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \sqrt{\pi} A t_{in} \exp \left\{ - \left[\frac{(\omega - \omega_0)t_{in}}{2} \right]^2 \right\} \quad (103.3)$$

از آنجا که ضریب تضعیف $\alpha(\omega)$ فیبر نوری تقریباً مستقل از ω در محدود طیف $\omega_0 - 2/t_{in} \leq \omega \leq \omega_0 + 2/t_{in}$ به صورت ثابت در معادله (۱۰۲.۳) در نظر گرفته می‌شود. ثابت انتشار

^{۱۰}Marcuse

^{۱۳}Full Width at the Half Maximum (FWHM)

بوسیله سری تیلور در حول فرکانس مرکزی ω_0 تقریب زده می‌شود؛

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (104.3)$$

که در آن $\beta' = d\beta/d\omega$ و $\beta'' = d^2\beta/d\omega^2$ است. شکل موج پالس خروجی $g(t, z)$ با جایگزینی معادلات (103.3) و (104.3) در معادله (102.3) :

$$g(t, z) = \frac{A}{\sqrt{t_{out}/t_{in}}} \exp \left\{ -\alpha z - \left[\frac{1}{2} \beta'' z^2 + j [\omega_0 - \beta_0 z + \theta(t, z)] \right] \right\} \quad (105.3)$$

که در آن

$$t_{out} = \left[t_{in} + \left(\frac{2}{t_{in}} \beta'' z \right)^2 \right]^{1/2} \quad (106.3)$$

$$\theta(t, z) = \frac{2\beta'' z}{t_{in}^2} \left(\frac{t - \beta' z}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\beta'' z}{t_{in}^2} \right) \quad (107.3)$$

از معادله (105.3) میدانیم که رابطه $(t - \beta' z)$ نمایشگر پیشرفت پالس نوری است. در این صورت سرعت پالس نوری (سیگنال) به صورت زیر خواهد بود

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad (108.3)$$

که در آن v_g سرعت گروهی نامیده می‌شود. در معادله (106.3) t_{out} عرض پالس خروجی $\tau_{out} = t_{out} \sqrt{2 \ln 2}$ برابر FWHM بعداز انتشار مسافت z است. از آنجا که t_{in} عرض پالس ورودی است،

$$\delta t = \left| \frac{2}{t_{in}} \beta'' z \right| \quad (109.3)$$

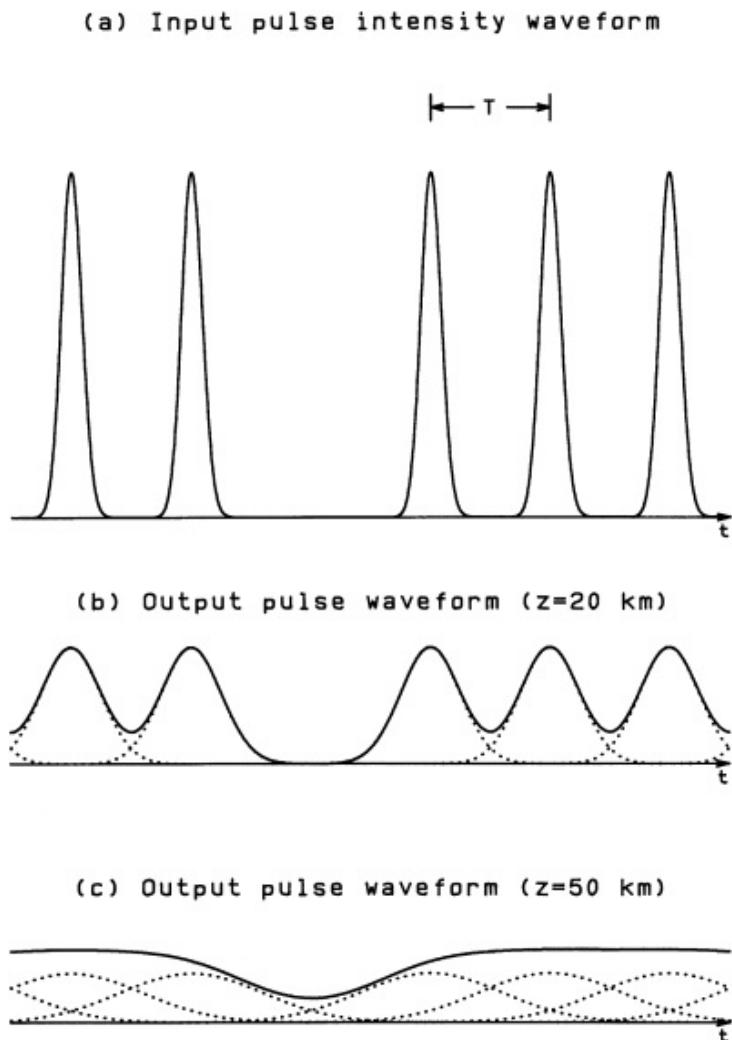
گسترش پالس (اعوجاج سیگنال) ناشی از فیبر نوری است. مشتق دوم β با سرعت گروهی طبق رابطه $\beta''/(\beta')^2 = -dv_g/d\omega$ به هم مربوط هستند. بنابراین اگر سرعت گروهی با فرکانس سیگنال ω_0 با مولفه طول موج سیگنال λ تغییر کند، $dv_g/d\lambda \neq 0$ (یا $v_g/d\omega \neq 0$)، مشتق دوم β مخالف صفر $\neq \beta''$ می‌شود و اعوجاج سیگنال را به همراه می‌آورد. تغییر سرعت گروهی با فرکانس سیگنال (طول موج) پاشندگی سرعت گروهی (GVD)^{۱۴} نامیده می‌شود.

از معادله (103.3) معلوم است که $\omega_0 = 2/t_{in}$ در آن تقریباً عرض طیفی پالس سیگنال است. بنابراین، گسترش پالس برای $|\beta''|$ بزرگ و عرض طیفی بزرگ t_{in} عرض پالس ورودی کوچک) بزرگ می‌شود.

مقدار معمولی β'' در طول موج $1/55\mu m$ در حدود $-2 \times 10^{-2} ps^2/m$ است. شکل (6.3) شکل موج پالس خروجی یک قطار پالس $B = 1^\circ$ گیگابیت بر ثانیه را با کد PCM (مدولاسیون کد پالس^{۱۵}) "۱۱۰ ۱۱۱" نشان می‌دهد، زمانی که به فیبر دارای $\beta'' = -2 \times 10^{-2}$

^{۱۴}Group Velocity Dispersion (GVD)

^{۱۵}Pulse Code Modulation (PCM)



شکل ۶.۳: چندین شکل موج پالس با کد PCM "۱۱۰۱۱". (الف) شکل موج پالس ورودی، (ب) شکل موج پالس خروجی پس از $z = 20$ کیلومتر از فیبر با $\beta'' = -2 \times 10^{-2} ps^2/m$ ، و (ج) پالس خروجی پس از انتشار $z = 50$ کیلومتر.

$B = 1/T$ کوپل می‌شود. عرض FWHM پالس ورودی $= 20ps$ و نرخ بیت $\tau = ps^2/m$ است که T نرخ تکرار پالس است. نشان داده شده است که با افزایش طول انتشار، گسترش پالس بزرگ می‌شود و سیگنال تقریباً به طور کامل در $z = 50\text{ cm}$ کیلومتر از بین می‌رود (تلفات انتشار فیبر در شکل ۶.۳) در نظر گرفته شده است). در اینجا باید توجه داشت که حتی اگر قدرت نوری به خودی خود تلف نمی‌شود، سیگنال می‌تواند توسط پاشندگی فیبر همانطور که در شکل ۶.۳-ج نشان داده شده است از بین برود. در فیرهای عملی، انرژی سیگنال با تضعیف فیبر بیشتر از بین می‌رود. بنابراین دو عامل محدود کننده فاصله انتقال (یا فاصله تکرار کننده) سیگنال در فیبر وجود دارد: پاشندگی و تضعیف. بسته به غلبه اثرات دو مورد در نظر گرفته می‌شود. اول موردی است که در آن میرایی بزرگتر از پاشندگی است. به عنوان مثال، برای مورد نشان داده شده در شکل ۶.۳-ب، هنگامی که شدت پیک سیگنال بیت "۱" کمتر از سطح تشخیص گیرنده می‌شود، سیگنال را نمی‌توان دریافت کرد، حتی اگر اعوجاج سیگنال ناشی از پاشندگی آنقدر زیاد نیست این وضعیت "حد اتفاف"^{۱۶} نامیده می‌شود. در مقابل مورد دوم است، که در آن پاشندگی بزرگتر از تضعیف است. همانطور که در شکل ۶.۳-ج نشان داده شده است، هنگامی که مولفه سیگنال به دلیل پاشندگی از بین می‌رود، سیگنال نمی‌تواند دریافت شود حتی اگر انرژی نوری خود بزرگتر از سطح تشخیص باشد. چنین وضعیتی "حد پاشندگی"^{۱۷} نامیده می‌شود.

کاهش تضعیف فیبرهای نوری مدیون پیشرفت در فناوری‌های ساخت است و تضعیف فوق العاده کم $m^{-1} = 10^{-6}$ در $154dB/km$ ($\alpha = 1/77 \times 10^{-6}$) متر به دست آمده است [۱]. در مقابل، ویژگی‌های پاشندگی فیبر نوری ارتباط نزدیکی با مشخصات ضربی شکست دارد. بنابراین، یک روش تحلیلی که محاسبه ثابت انتشار و مشتق دوم آن را برای پروفایل‌های ضربی شکست دلخواه امکان پذیر می‌کند، به شدت مورد نیاز است. توزیع شدت طیفی رشته پالس تکراری [شکل ۶.۳-الف] که بشكل زیر است

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \exp \left\{ - \left[\frac{(t - nT)}{t_{in}} \right]^2 + j\omega_0 t \right\} \quad (110.3)$$

به صورت زیر داده می‌شود

$$S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (111.3)$$

هنگامی که شدت پیک $S(\omega)$ به واحد نرمالیزه و به صورت زیر بیان می‌شود

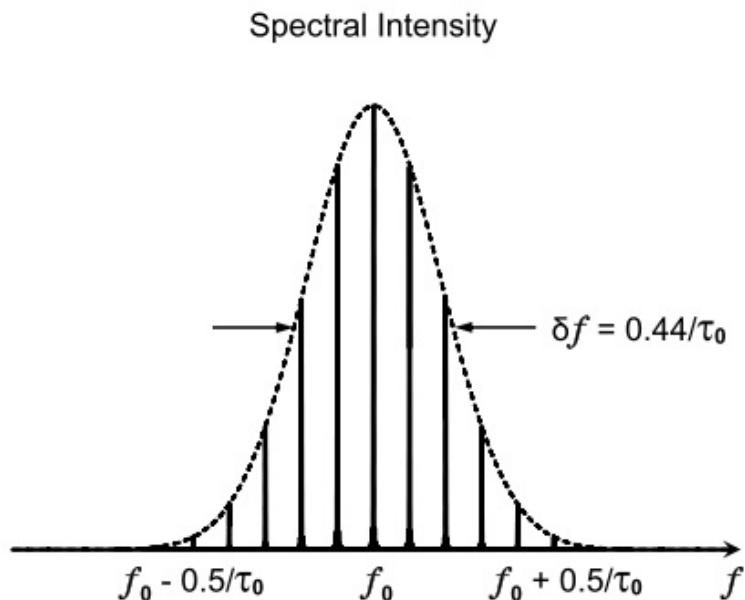
$$S(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\sin(N\phi)}{2N \sin(\phi/2)} \right]^2 e^{-[(\omega - \omega_0)t_{in}]^2/2} \right\} \quad (112.3)$$

که در آن ϕ خواهد بود

$$\phi = (\omega - \omega_0)T = 2\pi(f - f_0)T. \quad (113.3)$$

^{۱۶}Loss Limit

^{۱۷}Dispersion Limit



شکل ۷.۳: توزیع شدت طیف برای رشته پالس تکراری با عرض پالس FWHM برابر τ_0

مقدار داخل پرانترز معادله (۱۱۲.۳) بازاء $m = \phi / 2m\pi$ عددی صحیح است) برابر واحد و صفر بازاء سایر مقادیر ϕ است. بنابراین، توزیع شدت $S(\omega)$ یک طیف خطی مطابق شکل (۷.۳) است. فواصل طیف خطی برابر $f_m - f_{m-1} = 1/T$ است. پوش $S(\omega)$ شکل گوسی با طیف FWHM

$$\delta f = \frac{0.44}{\tau_0} \quad (114.3)$$

این طیف، عرض فرکانس حدود $f_0 - 0.5/\tau_0 \leq f \leq f_0 + 0.5/\tau_0$ را اشغال می‌کند. با در نظر گرفتن رابطه $\text{FWHM} = t_{in} \sqrt{2 \ln 2}$ ، عرض فرکانس زاویه‌ای برابر است با:

$$\delta\omega = 2\pi\delta f = \frac{2.35}{\tau_{in}} \quad (115.3)$$

با جایگزینی (۱۱۵.۳) در (۱۰۹.۳) گسترش پالس ناشی از پاشندگی تقریباً به صورت زیر بیان می‌شود

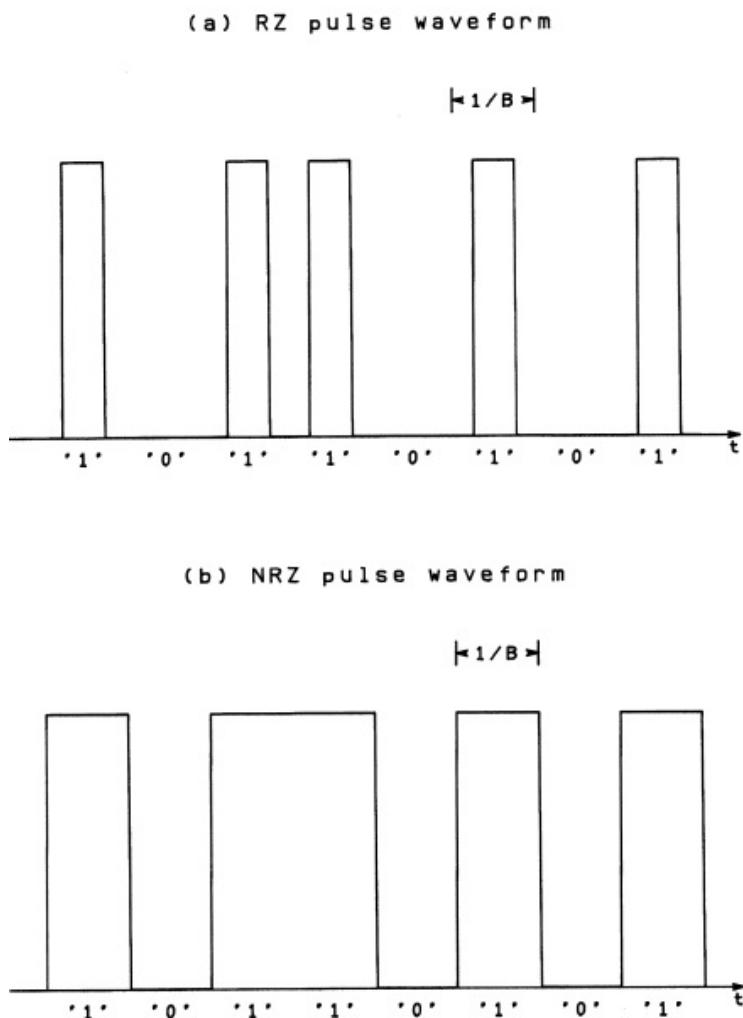
$$\delta t \approx |\beta'' z \delta\omega| \quad (116.3)$$

دو شکل اصلی مدولاسیون در PCM^{۱۸} وجود دارد که در شکل (۸.۳) نشان داده شده است. یکی RZ^{۱۹} (برگشت به صفر) که شکل موج پالس در شکل (۸.۳)-الف نشان داده شده است و دیگری NRZ^{۲۰} (عدم برگشت به صفر) است که شکل موج مربوطه در شکل

^{۱۸}Pulse Code Modulation (PCM)

^{۱۹}Return-to-Zero (RZ)

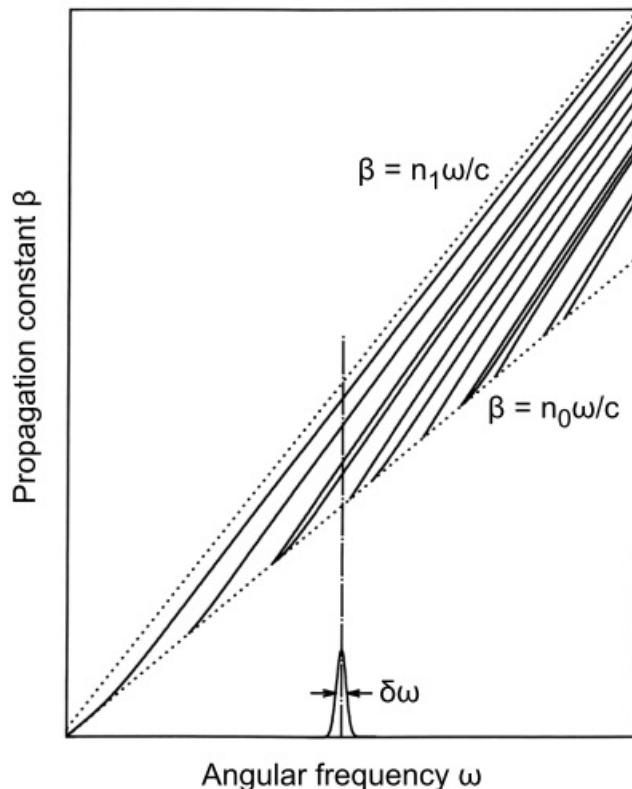
^{۲۰}NonReturn-to-Zero (NRZ)



شکل ۸.۳: دو شکل مدولاسیون PCM: (الف) شکل موج پالس RZ و (ب) شکل موج NRZ.

(۸.۳) نشان داده شده است. عرض پالس RZ یک بیت تقریباً $\tau_{RZ} = 0.5/B$ که در آن B نرخ بیت ^{۲۱} است. از طرف دیگر، حداقل عرض پالس NRZ حدود $\tau_{NRZ} = 1/B$ است. از رابطه (۱۱۴.۳) بین عرض پالس و عرض طیفی برای پالس گوسی، FWHM طیفی پالس $\delta f_{NRZ} \approx 0.5/\tau_{NRZ} = B/2$ NRZ و پالس $\delta f_{RZ} \approx 0.5/\tau_{RZ} = B$ RZ که اشغال پهنه‌ای باند در پالس NRZ نصف پالس RZ در هنگام ارسال همان بیت ریت (نرخ بیت) B است. محدوده فرکانس سیگنال یک پالس NRZ حدود $f_0 + B/2 \leq f \leq f_0 - B/2$ است. وقتی شکل (۷.۳) را در نظر بگیریم $\tau_0 = \tau_{NRZ} = 1/B$ است.

^{۲۱}Bitrate

شکل ۹.۳: نمودار $\omega - \beta$ یک فیبر نوری

۲.۶.۳ سازوکار سبب پاشندگی

زمان تاخیر (انتشار) سیگنال در یک فیبر نوری حول فرکانس مرکزی ω_0 برابر است با

$$t = \frac{L}{v_g} = \left[\frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} \cdot L + (\omega - \omega_0) \left[\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right]_{\omega=\omega_0} \cdot L \quad (117.3)$$

که در آن v_g سرعت گروه است [معادله (۱۰۸.۳)] و L طول فیبر است. هنگامی که زمان تأخیر سیگنال با توجه به مولفه‌های طیفی مختلف متفاوت است، که ناشی از مدولاسیون یا گسترش طیفی خود منبع است، شکل موج سیگنال در انتهای گیرنده فیبر تک مودی تحریف می‌شود. در فیبر چند مودی، خود سرعت گروه ممکن است از مودی به مود دیگر متفاوت باشد و این باعث گسترش پالس می‌شود. چهار نوع پاشندگی با تاخیر فیبر وجود دارد.

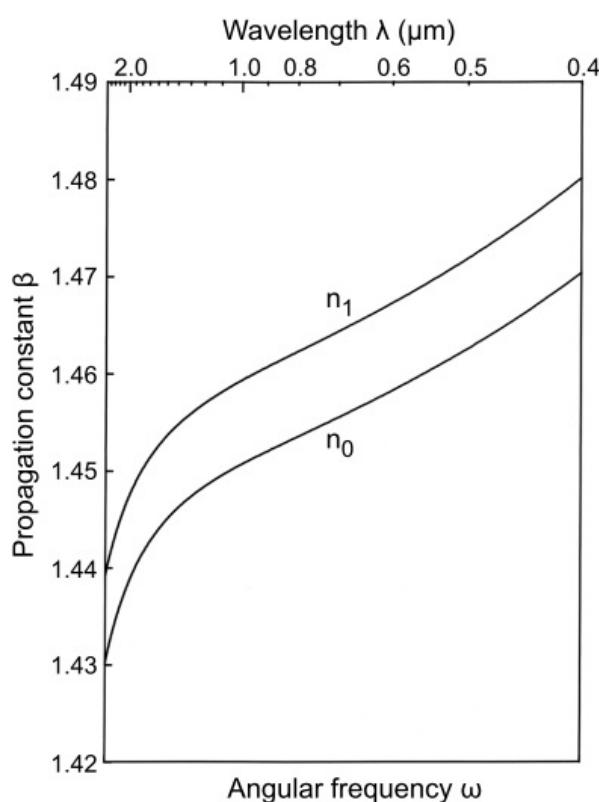
پاشندگی چند مودی

پاشندگی چند مودی پاشندگی تاخیر-زمانی ناشی از اختلاف سرعت گروهی مودهای مختلف [جمله اول در سمت راست معادله (۱۱۷.۳)] در یک فیبر چند مودی است.

نمودار $\omega-\beta$ -در شکل (۹.۳) ویژگی‌های انتقال یک فیبر نوری را نشان می‌دهد. منحنی‌های پاشندگی زیادی مربوط به مودهای بین دو خط $\beta = n_0 \omega/c$ و $\beta = n_1 \omega/c$ وجود دارد. شیب منحنی ω در نقطه تلاقی منحنی با خط فرکانس ثابت (خط نقطه چین) سرعت گروه را برای هر مود می‌دهد. بنابراین پاشندگی چند مودی به دلیل تفاوت تمایل بین بسیاری از مودها ایجاد می‌شود.

پاشندگی مود قطبشی

پاشندگی مود قطبشی یک تفاوت زمان تاخیر بین مودهای HE_{\parallel}^x و HE_{\perp}^y قطبی شده متعامد در فیبرهای تک مودی "اسمی" یا فیبر دوشکستی (انکسار مضاعف) (که در بخش ۳.۹ توضیح داده خواهد شد) است. انکسار جزئی در فیبر تک مودی به دلیل عدم هم مرکزیت هسته و تغییر شکل بیضوی هسته ایجاد می‌شود. دو پاشندگی بعدی حتی زمانی که فیبر واقعاً تک مودی است وجود دارد. آنها توسط آخرین جمله در معادله (۱۱۷.۳) ایجاد می‌شوند و متناسب با عرض طیف سیگنال ($\omega - \omega_0$) هستند.



شکل ۱۰.۳: ضریب شکست شیشه سیلیکا به صورت تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω (یا طول موج λ).

پاشندگی مواد

پاشندگی مواد یک پاشندگی تاخیر زمانی^{۲۲} است که به دلیل این واقعیت است که ضریب شکست ماده شیشه‌ای مطابق با تغییر فرکانس سیگنال (یا طول موج) تغییر می‌کند. شکل (۱۰.۳) وابستگی ضریب شکست هسته و روکش را به فرکانس برای فیبر نوری با اختلاف نسبی ضریب شکست $\Delta = 0.6\%$ نشان می‌دهد. از شکل (۱۰.۳) مشخص است که دو خط نقطه چین $\beta = n_0 \omega/c$ و $\beta = n_1 \omega/c$ ، که به صورت خطوط مستقیم در شکل (۹.۳) نشان داده شده‌اند، کمی خمیده هستند. یعنی به صورت غیرخطی به فرکانس وابسته هستند. این غیرخطی بودن ضریب شکست باعث یک مقدار غیر صفر برای $d\beta/d\omega$ می‌شود.

پاشندگی موجبری

پاشندگی موجبر یک پاشندگی تاخیری است که در اثر محصور شدن نور در ساختار موجبر ایجاد می‌شود. همانطور که در شکل (۹.۳) یا (۴.۳) نشان داده شده است، وابستگی ثابت انتشار β (یا ثابت انتشار نرمال شده b) به فرکانس زاویه‌ای ω (یا فرکانس نرمالیزه v) برای انتشار نور در موجبر غیرخطی است. بنابراین پاشندگی موجبر یک پاشندگی ضروری است که بهناچار در موجبرها وجود دارد.

۳.۶.۳ رابطه تاخیر زمانی

بیایید ترم اول معادله (۱۷.۳) را محاسبه کنیم که مربوط به پاشندگی چند مودی است. زمان تاخیر t در فیبر نسبت به زمان تاخیر در خلاء، L/c ، به صورت زیر است

$$\frac{ct}{L} = \frac{d\beta}{dk} \quad (118.3)$$

هنگامی که یک موج مسطح (ثابت انتشار β) که در محیط همگن با ضریب شکست n را در نظر می‌گیریم، زمان تاخیر نرمالیزه به صورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{d\beta}{dk} = \frac{d(kn)}{dk} = n + k \frac{dn}{dk} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \equiv N \quad (119.3)$$

که در آن N را ضریب شکست گروهی^{۲۳} می‌نامند، زیرا آن تابع هر دو ضریب شکست و سرعت گروهی v_g از طریق $v_g = c(d\beta/d\omega) = c/v_g$ است [۱۱]. ضریب شکست شیشه سیلیکا به خوبی با چند جمله‌ای سلمایر^{۲۴} تقریب می‌شود [۱۲]

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \lambda^2}{(\lambda^2 - b_i)}} \quad (\lambda : \mu m) \quad (120.3)$$

^{۲۲} Delay-Time Dispersion

^{۲۳} Group Index

^{۲۴} Sellmeier polynomial

که در آن a_i و b_i ضرایب سلمایر هستند. ضرایب برای شیشه سیلیکا در مرجع [۱۳] داده شده است:

$$\begin{cases} a_1 = 0,6965325 \\ a_2 = 0,4083099 \\ a_3 = 0,8968766, \end{cases} \quad (121.3)$$

$$\begin{cases} b_1 = 4,368309 \times 10^{-3} \\ b_2 = 1,394999 \times 10^{-2} \\ b_3 = 9,793399 \times 10^1. \end{cases} \quad (121.3b)$$

ضرایب سلمایر در شیشه‌های سیلیسی آغشته شده به مواد ناخالص و غلظت بستگی دارد. به عنوان مثال، ضرایب سلمایر شیشه‌های آغشته شده با G_eO_2 با غلظت $6/3$ مول درصد با به صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{cases} a_1 = 0,7083952 \\ a_2 = 0,4203993 \\ a_3 = 0,8663412, \end{cases} \quad (122.3)$$

$$\begin{cases} b_1 = 7,290464 \times 10^{-3} \\ b_2 = 1,050294 \times 10^{-2} \\ b_3 = 9,79342 \times 10^1. \end{cases} \quad (122.3b)$$

تفاوت نسبی ضریب شکست بین شیشه آغشته شده با G_eO_2 با غلظت $6/3 mol\%$ و شیشه سیلیکا خالص حدود $\Delta = 0,6\%$ است. شکل (۱۰.۳) پاشندگی ضریب شکست فیبری را نشان می‌دهد که دارای $6/3$ مول درصد شیشه آغشته شده با G_eO_2 به عنوان هسته (n_1) و شیشه سیلیسی خالص به عنوان روکش (n_0) است.

ثابت انتشار β بر حسب ثابت انتشار نرمالیزه b به صورت زیر بیان می‌شود

$$\beta = k \sqrt{n_0^2 + (n_1^2 - n_0^2)b} \approx k[n_0 + (n_1 - n_0)b]. \quad (123.3)$$

با جایگزینی معادله بالا در (۱۱۸.۳)، خواهیم داشت

$$\frac{d\beta}{dk} = N_0 + (N_1 - N_0)b + k(n_1 - n_0) \frac{db}{dk} \quad (124.3)$$

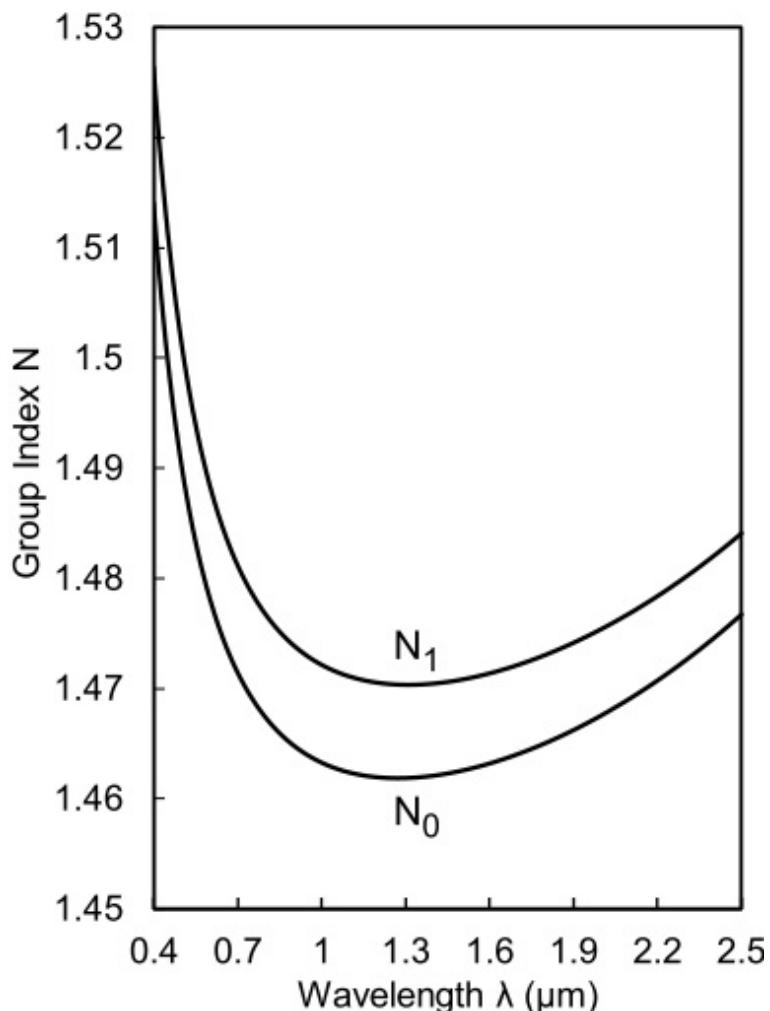
با توجه به رابطه $v \propto k$ و اینکه تفاوت بین ضرایب شکست هسته-روکش تقریباً مشابه بین ضریب گروهها است، می‌توانیم به صورت تقریبی تخمین بزنیم.

$$(n_1 - n_0) \approx (N_1 - N_0), \quad (125.3)$$

در این صورت معادله (۱۲۴.۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{d\beta}{dk} \approx N_0 + (N_1 - N_0) \frac{d(vb)}{dv} \quad (126.3)$$

تا خیر زمانی نرمالیزه $\frac{d\beta}{dk}$ را می‌توان از منحنی پاشندگی $v - b$ و ضرایب گروه N_1 و N_0 به صورت زیر محاسبه کرد.



شکل ۱۱.۳: ضریب شکستهای گروهی از یک فیبر مت Shank از یک هسته با $G_e O_2$ و روکش سیلیس خالص آغشته شده با $G_e O_2$ و روکش سیلیس خالص را نشان می‌دهد. در ادامه ما محاسبه $d(vb)/dv$ را در نظر خواهیم گرفت. ابتدا، معادله (۷۴.۳) پاشندگی منسجم برای مود LP_{ml} با v متمایز

ضریب شکست گروهی N_1 و N_0 از معادله (۱۱۹.۳) و (۱۲۰.۳) محاسبه می‌شوند. شکل (۱۱.۳) ضرایب گروهی یک فیبر مت Shank از یک هسته با $G_e O_2$ و روکش سیلیس خالص را نشان می‌دهد. در ادامه ما محاسبه $d(vb)/dv$ را در نظر خواهیم گرفت. ابتدا، معادله (۷۴.۳) پاشندگی منسجم برای مود LP_{ml} با v متمایز

می‌شود. در اینجا با معکوس کردن مخرج و صورت بیان می‌شود:

$$\frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -\frac{wK_{m-1}(w)}{K_m(w)} \quad (127.3)$$

به طوری که مشتق گیری آسان می‌شود.
مشتق گیری از هر دو جمله رابطه (127.3) نسبت به v میدهد؛

$$\frac{d}{du} \left[\frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} \right] \frac{du}{dv} = -\frac{d}{dw} \left[\frac{wK_{m-1}(w)}{K_m(w)} \right] \frac{dw}{dv} \quad (128.3)$$

$$\frac{d}{du} \left[\frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} \right] = u \left[\frac{J_{m-1}(u)J_{m+1}(u)}{J_m(u)} - 1 \right] \quad (129.3)$$

۶

$$\frac{d}{dw} \left[\frac{wK_{m-1}(w)}{K_m(w)} \right] = w \left[\frac{K_{m-1}(w)K_{m+1}(w)}{K_m^*(w)} - 1 \right] \quad (129.3)$$

در اینجا با توجه به رابطه بازگشتی توابع بسل (۴۲.۳) و (۴۳.۳) می‌توانیم (127.3) را به شکل دیگری بیان کنیم و به دست آوریم:

$$\frac{uJ_{m+1}(u)}{J_m(u)} = -\frac{wK_{m+1}(w)}{K_m(w)} \quad (130.3)$$

ترکیب معادلات (127.3) و (130.3)، رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\frac{J_{m-1}(u)J_{m+1}(u)}{J_m^*(u)} = -\frac{w^*}{u^*} \frac{K_{m-1}(w)K_{m+1}(w)}{K_m^*(w)} \quad (131.3)$$

علاوه بر این، وقتی رابطه $u^* + w^* = v^*$ و معادلات (۸۴.۳)، (۱۲۹.۳) و (۱۳۱.۳) را در معادله (128.3) قرار می‌دهیم، آن به صورت زیر کاهش می‌یابد

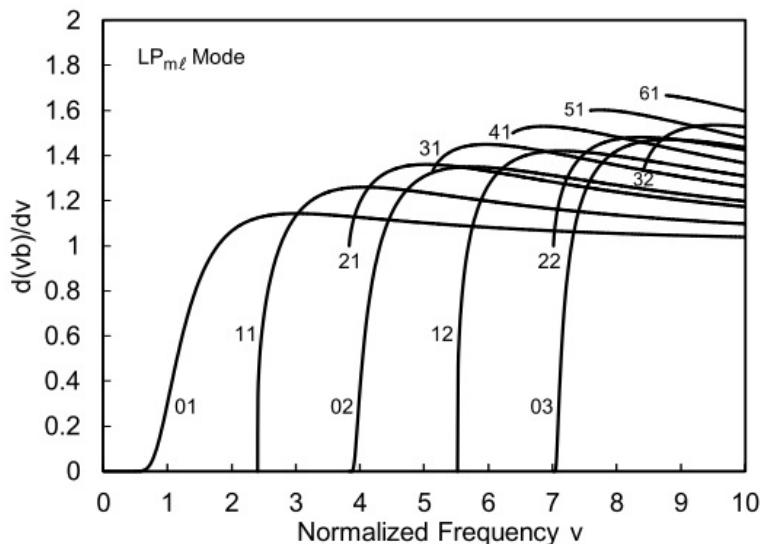
$$\frac{du}{dv} = \frac{u}{v} [1 - \xi_m(w)]. \quad (132.3)$$

رابطه $u = \sqrt{1-b}$ را در نظر گیرید، برای $d(vb)/dv$ رابطه زیر را بدست می‌آوریم

$$\frac{d(vb)}{dv} = b + 2(1-b)\xi_m(w) \quad (133.3)$$

شکل ۳.۱۲ وابستگی $d(vb)/dv$ برای مود LP_{ml} به فرکانس نرمالیزه v را نشان می‌دهد. هنگامی که انرژی الکترومغناطیسی به شدت در هسته افزون و محدود می‌شود - به عبارت دیگر برای v بزرگ - تاخیر گروهی نرمالیزه $d(vb)/dv$ به یک نزدیک می‌شود. در چنین شرایطی از معادله (۱۱۸.۳) و (۱۲۶.۳) معلوم می‌شود که $N_1 d\beta/dk = t$ ، و تاخیر زمانی برابر می‌شود با:

$$t = \frac{N_1 L}{c} \quad (134.3)$$



شکل ۱۲.۳: تاخیر گروهی برای فیبر با ضریب شکست پله‌ای

پاشندگی چند مودی به عنوان پاشندگی تاخیر زمان گروهی هر مود در یک فرکانس مشخص تعریف می‌شود. بنابراین، پاشندگی چند مودی یک فیبر با ضریب شکست پله‌ای را می‌توان با محاسبه واریانس مقدار $d(vb)/dv$ هر مود در نقطه تلاقي منحنی تاخیر گروهی نرمالیزه با خط مستقیم در یک مقدار v ثابت در شکل (۱۲.۳) به دست آورد. با این حال، صدها مود وجود دارد [به معادله (۱۳۴.۳) در بخش ۳.۷.۲ مراجعه کنید]. در فیبر چند مودی با $\Delta = 1\%$ و $2a = 50\mu m$ محاسبه $d(vb)/dv$ برای هر مود کاملاً خسته کننده است. علاوه بر این، شکل ضریب شکست بهینه یک فیبر چند مودی، که در آن پاشندگی چند مودی به حداقل می‌رسد، یک شکل ضریب شکست درجه دوم است تا یک ضریب شکست پله‌ای. روش^{۲۵} WKB روشهای مناسب برای تجزیه و تحلیل ویژگی‌های انتشار و خواص پاشندگی فیبر با ضریب شکست درجه بندی شده^{۲۶} است. تجزیه و تحلیل فیبر با ضریب شکست درجه بندی شده با استفاده از روش WKB در بخش ۳.۷ توضیح داده خواهد شد.

۴.۶.۳ پاشندگی رنگی

مجموع پاشندگی مواد و پاشندگی موجبری را پاشندگی رنگی می‌نامند. پاشندگی تاخیر زمانی گروهی، همانطور که در معادله (۱۱۶.۳) یا (۱۱۷.۳) نشان داده شده، به صورت زیر است.

$$\delta t = \left[\frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} \cdot L \delta \omega \quad (135.3)$$

^{۲۵} Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB)

^{۲۶} Graded-index

این معادله را می‌توان با استفاده از رابطه $\omega = kc = 2\pi/\lambda$ نشان داد که

$$\delta t = -\frac{\delta\lambda}{\lambda} \frac{L}{c} k \frac{d^\gamma \beta}{dk^\gamma}, \quad (136.3)$$

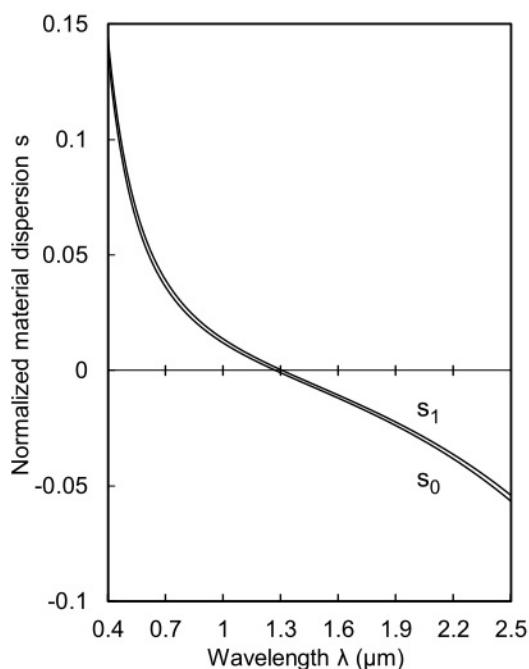
که در آن $\delta\lambda/\lambda$ نمایشگر عرض طیف نسبی سیگنال منبع است. با مشتق گیری از معادله (126.3) نسبت به k در حالی که رابطه $v \propto k$ در نظر داریم:

$$k \frac{d^\gamma \beta}{dk^\gamma} = k \frac{dN_0}{dk} + k \frac{d(N_1 - N_0)}{dk} \frac{d(vb)}{dv} + (N_1 - N_0)v \frac{d^\gamma(vb)}{dv^\gamma} \quad (137.3)$$

مشتق ضریب شکست گروهی N معادله (119.3) با توجه به k در این صورت به شکل زیر کاهش می‌یابد

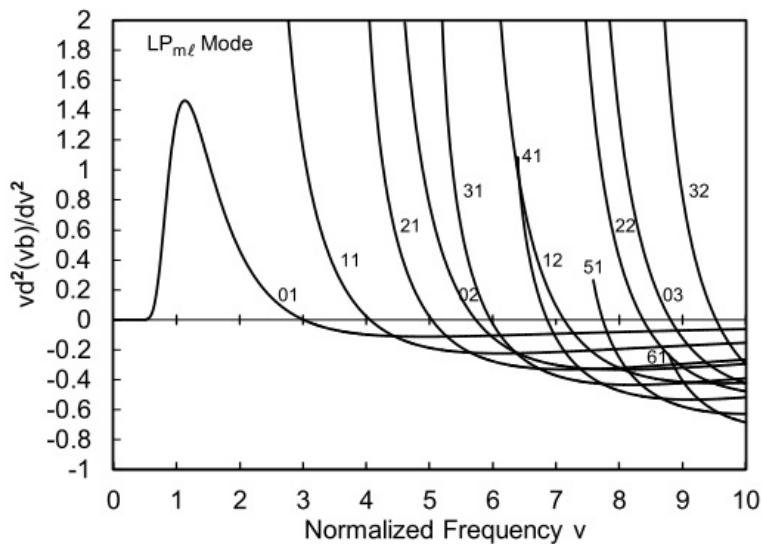
$$k \frac{dN}{dk} = -\lambda \frac{dN}{d\lambda} = \lambda^\gamma \frac{d^\gamma n}{d\lambda^\gamma} \equiv s \quad (138.3)$$

که در آن s پاشندگی مواد نرمالیزه و به‌آسانی با مشتق گیری از ضریب شکست n توسط



شکل ۱۳.۳: پاشندگی‌های مواد نرمالیزه یک فیبر که شامل هسته شیشه G_eO_2 ، $6/3 mol\%$ آغشته با G_eO_2 و روکش سیلیکای خالص

چند جمله‌ای سلمایر به دست می‌آید. شکل (13.3) پاشندگی مواد نرمالیزه یک فیبر مت Shank از هسته با $6/3 mol\%$ درصد شیشه آغشته با G_eO_2 و روکش سیلیس خالص را نشان می‌دهد. مشخص است که پاشندگی مواد فیبر نوری مبتنی بر سیلیس در منطقه ۱۳ متری صفر می‌شود.



شکل ۱۴.۳: پاشندگی موجبری برای فیبر با ضریب شکست پلهای

در معادله (۱۳۷.۳)، $vd^2(vb)/dv^2$ با مشتق‌گیری معادله (۱۳۳.۳) نسبت به v به دست می‌آید و ممکن است نوشه شود

$$v \frac{d^2(vb)}{dv^2} = 2(1-b)\xi_m(w) \left[(1-2\xi_m) + \left(1 + \frac{(1-b)}{b}\xi_m \right) (2-\xi_m) \right] \quad (139.3)$$

که ξ_m برابر است با

$$\xi_m(w) = w \left[\frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} + \frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} - \frac{K_m(w)}{K_{m+1}(w)} - \frac{K_m(w)}{K_{m-1}(w)} \right], \quad (140.3)$$

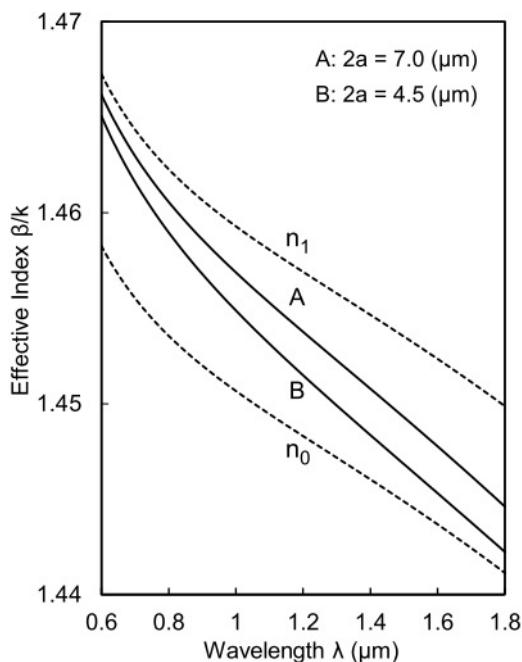
و

$$\frac{d\xi_m}{dw} = \frac{\xi_m}{w} (2 - \xi_m). \quad (141.3)$$

شکل (۱۴.۳) پاشندگی موجبر نرمالیزه $vd^2(vb)/dv^2$ مودهای LP_{ml} را برای فیبر با ضریب شکست پلهای نشان می‌دهد. نشان داده شده است که $0 < vd^2(vb)/dv^2 < 2/405$ در ناحیه تک مودی (۱۳۷.۳) به صورت زیر ساده کرد

$$k \frac{d^2\beta}{dk^2} = s_0 + (s_1 - s_0) \frac{d(vb)}{dv} + (N_1 - N_0)v \frac{d^2(vb)}{dv^2} \quad (142.3)$$

به بیان دقیق، پاشندگی مواد و پاشندگی موجبری به طور پیچیده‌ای با هم مخلوط می‌شوند و نمی‌توان آنها را به دو پاشندگی مستقل جدا کرد. با این حال، ترم سوم در معادله (۱۴۲.۳) بهوضوح تأثیر ساختار موجبر را نشان می‌دهد. بنابراین، در اینجا عبارت سوم به عنوان پاشندگی موجبر و مجموع عبارت اول و دوم به ترتیب به عنوان پاشندگی ماده



شکل ۱۵.۳: ضریب شکست موثر β/k یک فیبر شامل هسته با G_eO_2 آغشته به $6/3\text{mol}\%$ و روکش سلیس. (خطوط نقطه چین نمایشگر ضرایب شکست هسته و روکش است)

تعریف می‌شود. اگرچه گسترش پالس ناشی از پاشندگی رنگی با (۱۳۶.۳) داده می‌شود، پاشندگی معمولاً بر حسب طول واحد فیبر و واحد گسترش طیفی بیان می‌شود:

$$\sigma = \frac{\delta t}{L\delta\lambda} = -\frac{1}{c\lambda} k \frac{d\beta}{dk^2} \quad (143.3)$$

در این صورت پاشندگی رنگی را می‌توان چنین بیان کرد:

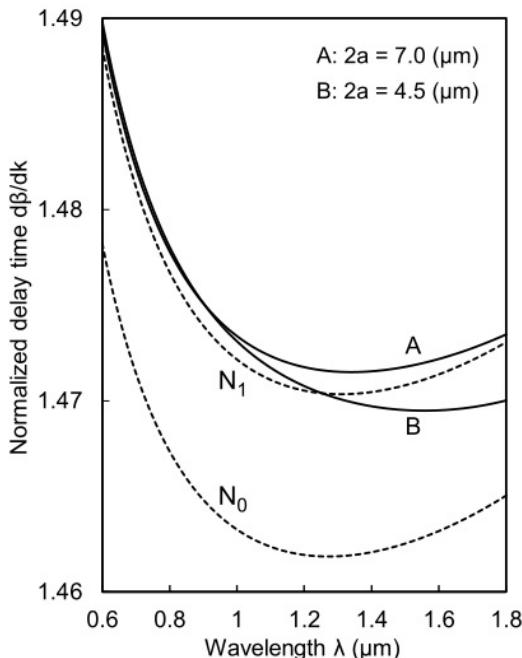
$$\sigma = \sigma_m + \sigma_w \quad (144.3)$$

که در آن

$$\sigma_m = -\frac{1}{c\lambda} \left[s_{\circ} + (s_1 - s_{\circ}) \frac{d(vb)}{dv} \right] \quad (145.3)$$

$$\sigma_w = -\frac{(N_1 - N_{\circ})}{c\lambda} v \frac{d^2(vb)}{dv^2} \quad (145.3)$$

شکل‌های (۱۵.۳)، (۱۶.۳)، و (۱۷.۳) ضریب شکست‌های موثر β/k [معادله (۱۲۳.۳)، (۱۲۴.۳) و (۱۲۵.۳)] تاخیر زمانی نرمالیزه $d\beta/dk$ [معادله (۱۲۶.۳)] و پاشندگی رنگی [معادله (۱۴۴.۳)] برای دو قطر هسته $2a = 4.5\mu m$ و $2a = 7.0\mu m$ در فیبری مت Shank از یک هسته با $6/3\text{mol}\%$ شیشه آغشته با G_eO_2 و روکش سلیس خالص. همانطور که در شکل‌ها (۱۳.۳) و (۱۷.۳) نشان داده شده است، پاشندگی مواد شیشه آغشته به G_eO_2 تقریباً مشابه شیشه سلیکا خالص



شکل ۱۶.۳: تاخیرهای زمانی $d\beta/dk$ یک فیبر شامل هسته با $G_eO_2 \approx 6/3 mol\%$ و روکش سلیس. (خطوط نقطه چین نمایشگر ضرایب گروهی هسته و روکش است)

۰ $s_1 - s_0 \approx$ است. وابستگی پاشندگی موجبری به فرکانس نرمالیزه v ، که در شکل (۱۴.۳) نشان داده شده است، در شکل (۱۸.۳) به صورت تابعی از طول موج نرمالیزه λ/λ_c نشان داده شده است، که در آن λ_c طول موج قطع مود LP_{11} است. پاشندگی موجبری نرمالیزه در $(v = v_c(\lambda/\lambda_c = 0))$ برابر است با

$$-\frac{c\lambda}{(N_1 - N_0)}\sigma_w = v \frac{d^2(vb)}{dv^2} = ۰/۱۹۳$$

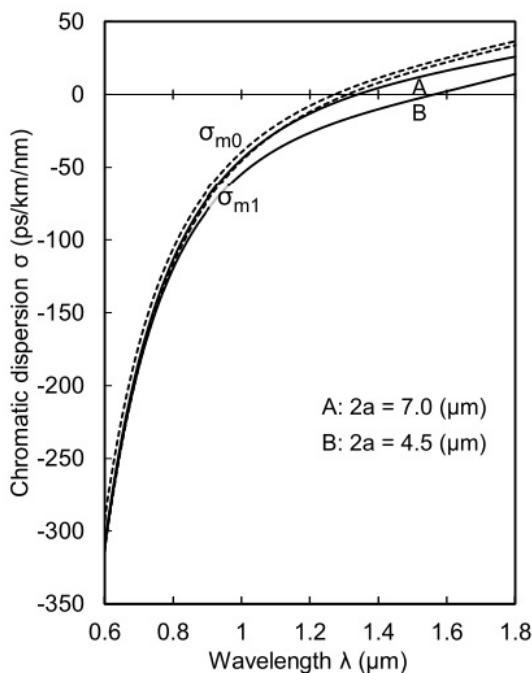
و یک بیشینه (ماکزیمم) $v = ۱/۱۳۱(\lambda/\lambda_c = ۲/۱۲۶)$ خواهد بود

$$-\frac{c\lambda}{(N_1 - N_0)}\sigma_w = v \frac{d^2(vb)}{dv^2} = ۱/۴۶۴$$

مشخص شده است که مقدار پاشندگی موجبری σ_w را می‌توان با انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای موجبر N_1 و N_0 و طول موج λ کنترل کرد.

۵.۶.۳ طول موج پاشندگی صفر

پاشندگی کروماتیک (رنگی) در یک فیبر تک مودی، مجموع پاشندگی مواد و پاشندگی موجبری است، همانطور که در معادله (۱۴۴.۳) و (۱۴۵.۳) نشان داده شده است. همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد، پاشندگی موجبری را می‌توان با انتخاب مناسب پارامترهای موجبر کنترل کرد، در حالی که پاشندگی مواد تقریباً مستقل از این پارامترها



شکل ۱۷.۳: پاشندگی‌های رنگی σ برای یک فیبر شامل هسته با GeO_4 ۶٪ آغشته به G_{eO_4} و روکش سلیس. (خطوط نقطه چین نمایشگر پاشندگی نرمالیزه گروهی هسته و روکش است)

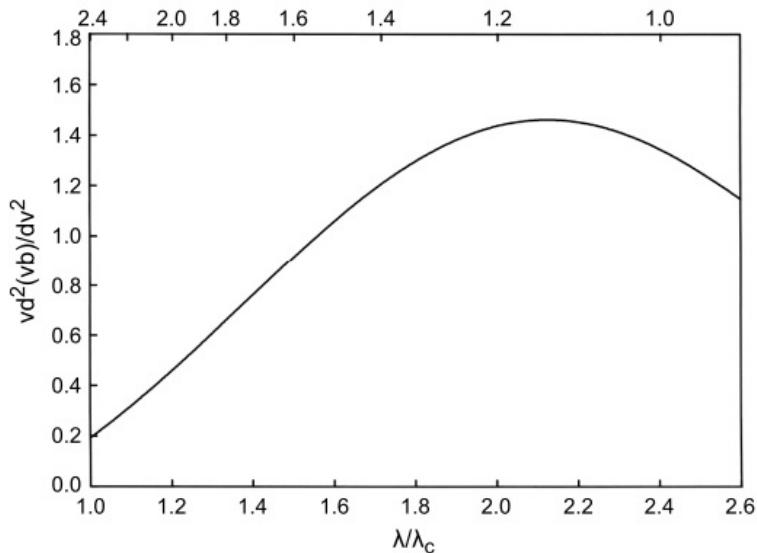
است. بنابراین، طول موج پاشندگی صفر، که در آن مجموع پاشندگی مواد و موجبری به صفر می‌رسد، نیز می‌تواند با تغییر قطر هسته $2a$ و اختلاف نسبی ضریب شکست Δ (به‌طور کلی طول موج قطع λ_c) کنترل شود. شکل ۱۹.۳-(الف) و (ب) پاشندگی مواد، موجبری و پاشندگی کل را برای یک فیبر که (الف) $2a = 8.2\mu m$ و $\Delta = 0.3\%$ و (ب) $2a = 4.6\mu m$ و $\Delta = 0.7\%$ است. از شکل تأیید می‌شود که طول موج پاشندگی صفر را می‌توان برای طول موج $1555\mu m$ و حداقل تلفات فیبرهای نوری منطبق کرد.

۷.۳ نظریه موجی فیبرهای با ضریب شکست تدریجی

۱.۷.۳ معادلات اصلی و مفاهیم مود در فیبرهای با ضریب شکست تدریجی

ابتدا، معادلات پایه برای انتشار موج در فیبر با ضریب شکست تدریجی استخراج می‌شود. بحث دقیق در مرجع [۴] شرح داده شده است. توزیع ضریب شکست و ثابت انتشار را بشکل‌ها زیر بیان می‌شود

$$n^s(r) = n_s^s[1 - f(r)], \quad (146.3)$$



شکل ۱۸.۳: پاشندگی موجبری نرمالیزه مود LP_1 در یک فیبر با ضریب شکست پلهای

$$\beta^* = k^* n_1^* (1 - \chi) \quad (147.3)$$

که در آن n_1 حداکثر ضریب شکست در هسته است و بنابراین $f(r) > 0$ به صورت $f(r) = \Psi(r)$ در نظر گرفته می‌شود. اجازه دهید E_z و H_z را به صورت حاصل ضرب توابع r و θ بیان کنیم:

$$E_z = \frac{k^* n_1^*}{\beta} \Phi(r) \cos(n\theta + \varphi_n) \quad (\tilde{148.3})$$

$$H_z = \omega \epsilon_1 \Psi(r) \sin(n\theta + \varphi_n) \quad (148.3b)$$

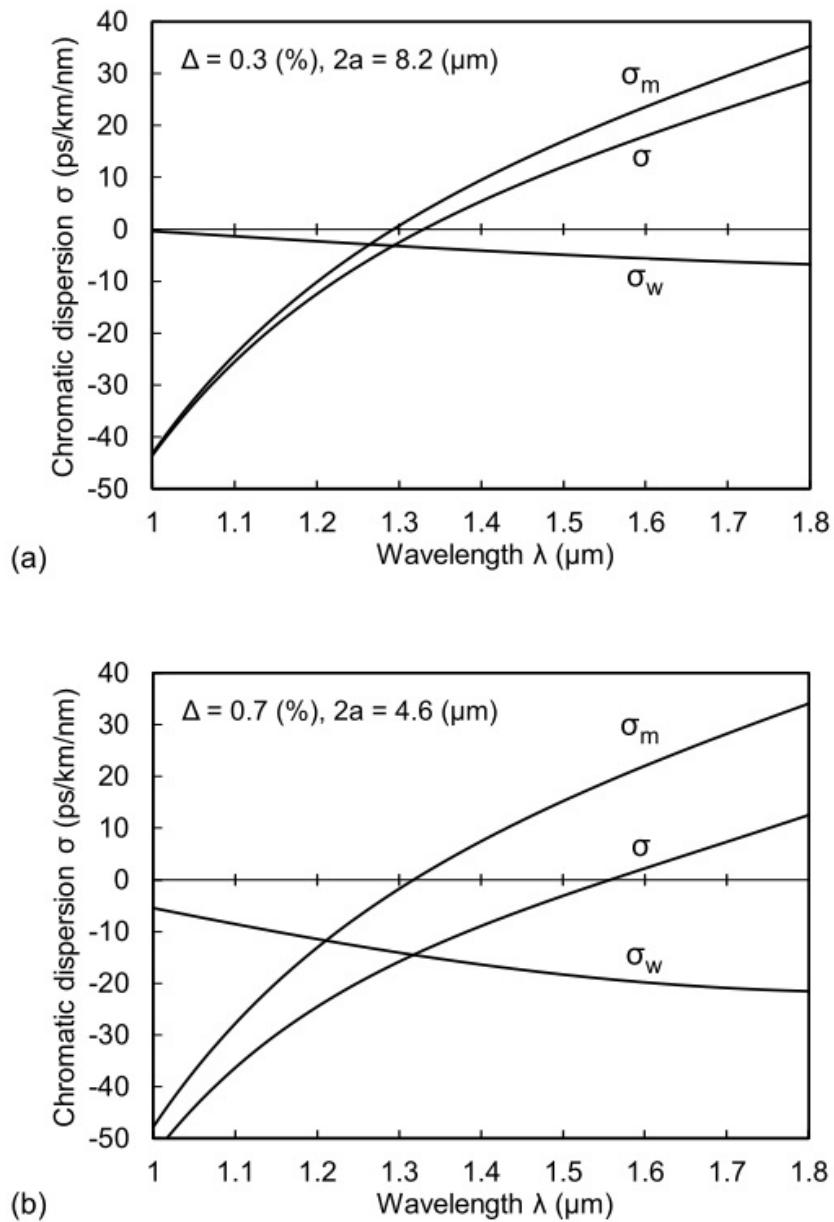
که در آن n یک عدد صحیح و $\varphi_n = \pi/2$ است. با جایگزینی معادله‌های (۱۴۶.۳)–(۱۴۸.۳) در معادلات ماسکسول [معادلات (۲۵۰.۳) و (۲۵۱.۳) در پیوست ۳–آ] و استفاده از تقریب هدایت ضعیف

$$1 - f \approx 1, \quad 1 - \chi = \frac{\beta^*}{k^* n_1^*} \approx 1, \quad (149.3)$$

خواهیم داشت

$$(\chi - f) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(\chi - f)} r \frac{d\Phi}{dr} \right] + \left[k^* n_1^* (\chi - f) - \frac{n^*}{r^*} \right] \Phi + \frac{n}{r} (\chi - f) \Psi \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi - f} \right) = 0 \quad (150.3)$$

$$(\chi - f) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(\chi - f)} r \frac{d\Psi}{dr} \right] + \left[k^* n_1^* (\chi - f) - \frac{n^*}{r^*} \right] \Psi + \frac{n}{r} (\chi - f) \Phi \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi - f} \right) = 0 \quad (151.3)$$



شکل ۱۹.۳: پاشندگی مواد (σ_m)، موجبری (σ_w) و پاشندگی کل (σ) بترتیب برای یک فیبر که دارای (الف) $\Delta = 0.3\%$ و $2a = 8.2\text{ }\mu\text{m}$ و (ب) $\Delta = 0.7\%$ و $2a = 4.6\text{ }\mu\text{m}$ است.

مولفه‌های میدان الکترومغناطیسی عرضی بر حسب Φ و Ψ بیان می‌شوند:

$$E_r = -j \frac{1}{\chi - f} \left[\frac{d\Phi}{dr} + \frac{n}{r} \Psi \right] \cos(n\theta + \varphi_n) \quad (152.3)$$

$$E_\theta = j \frac{1}{\chi - f} \left[\frac{d\Psi}{dr} + \frac{n}{r} \Phi \right] \sin(n\theta + \varphi_n) \quad (153.3)$$

$$H_r = -j \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{1}{\chi - f} \left[\frac{d\Psi}{dr} + \frac{n}{r} \Phi \right] \sin(n\theta + \varphi_n) \quad (154.3)$$

$$H_\theta = -j \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{1}{\chi - f} \left[\frac{d\Phi}{dr} + \frac{n}{r} \Psi \right] \cos(n\theta + \varphi_n) \quad (155.3)$$

که بترتیب مورد $\Phi = 0$ و $\Psi = 0$ در معادلات $(150.3) - (155.3)$ مربوط به مود TE و مود TM است. اگر بنویسیم

$$R(r) = \begin{cases} j \frac{1}{\chi - f} \frac{d\Psi}{dr} & TE \text{ مود} \\ -j \frac{1}{\chi - f} \frac{d\Phi}{dr} & TM \text{ مود} \end{cases} \quad (156.3)$$

برای هریک از مودهای TE یا TM و جایگزینی در معادلات (150.3) و (151.3) ، بدست می‌آوریم

$$\Psi = \frac{j}{k^2 n^2} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r} R \right] \quad TE \text{ مود} \quad (157.3)$$

$$\Phi = \frac{-j}{k^2 n^2} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r} R \right] \quad TM \text{ مود}$$

علاوه بر این، جایگزینی هر یک از معادلات به معادلات (156.3) -الف یا (156.3) -ب، معادله موج منسجم را برای مودهای TE و TM بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 n^2 (\chi - f) - \frac{1}{r^2} \right] R = 0 \quad (158.3)$$

در ادامه مودهای ترکیبی (هاپرید) را در نظر می‌گیریم. دو متغیر جدید را معرفی می‌کنیم:

$$\phi = \frac{\Phi + \Psi}{2} \quad (159.3)$$

$$\psi = \frac{\Phi - \Psi}{2} \quad (160.3)$$

اگر مجموع و تفاضل معادله‌ها (۱۵۰.۳) و (۱۵۱.۳) را در نظر بگیریم و این معادلات را بر حسب ϕ و ψ بازنویسی می‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$(\chi - f) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(\chi - f)} r \frac{d\psi}{dr} \right] + \left[k^2 n_1^2 (\chi - f) - \frac{n^2}{f^2} \right] \psi - \frac{n}{r} (\chi - f) \psi \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi - f} \right) = 0, \quad (161.3)$$

$$(\chi - f) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(\chi - f)} r \frac{d\phi}{dr} \right] + \left[k^2 n_1^2 (\chi - f) - \frac{n^2}{f^2} \right] \phi - \frac{n}{r} (\chi - f) \phi \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi - f} \right) = 0. \quad (162.3)$$

اکنون درک می‌شود که اگر تقریب‌های مناسب انجام دهیم [معادله (۱۴۹.۳)] و تبدیل متغیرها [معادله (۱۵۹.۳) و (۱۶۰.۳)]، معادلات دیفرانسیل همزمان اصلی [معادله (۱۵۰.۳) و (۱۵۱.۳)] را می‌توان بهدو معادله مستقل برای دو کمیت اسکالار ϕ و ψ جدا کرد. بنابراین، مانند مودهای TE و TM، دو مود مستقل داریم؛ آنها $\phi = 0, \psi = 0$ و $\phi = 0, \psi \neq 0$ هستند. امواج ارضاء کننده شرایط (۱) مربوط به مودهای EH هستند، و آنهای که شرایط ارضاء کننده (۲) با مودهای HE مطابقت دارند، با مقایسه میدان‌های الکترومغناطیسی این مودها با فیبرهای با ضریب شکست پله‌ای شناسایی می‌شوند.

• الف مود :EH
از $\phi = 0$ بدست می‌آید $\Phi = -\Psi, \psi = \Phi$. اگر بنویسیم

$$R(r) = -j \frac{1}{\chi - f} \left[\frac{d\psi}{dr} - \frac{n}{r} \psi \right], \quad (163.3)$$

و جایگزینی در معادله (۱۶۱.۳) خواهیم داشت

$$\psi = \frac{-j}{k^2 n_1^2} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{n+1}{r} R \right] \quad (164.3)$$

علاوه بر این، با جایگزینی معادله (۱۶۳.۳) در معادله (۱۶۴.۳)، معادله دیفرانسیل زیر را بدست می‌آوریم

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 n_1^2 (\chi - f) - \frac{(n+1)^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (165.3)$$

این معادله موج برای مودهای EH است.

• ب مود :HE
از $\psi = 0$ بدست می‌آید $\Phi = \Psi, \psi = \Phi$. بنابراین اگر بنویسیم

$$R(r) = -j \frac{1}{\chi - f} \left[\frac{d\phi}{dr} + \frac{n}{r} \phi \right] \quad (166.3)$$

و با جایگزینی این در معادله (۱۶۲.۳)، بدست می‌آوریم

$$\phi = \frac{-j}{k^2 n_1^2} \left[\frac{dR}{dr} - \frac{n-1}{r} R \right]. \quad (167.3)$$

با جایگزینی معادله (۱۶۷.۳) در رابطه (۱۶۷.۳)، معادله دیفرانسیلی زیر را خواهیم داشت

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 n_1^2 (\chi - f) - \frac{(n-1)^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (168.3)$$

این معادله موج برای مودهای HE است.

با مقایسه معادلات (۱۵۸.۳)، (۱۶۸.۳) و (۱۶۵.۳)، اکنون درمی‌یابیم که معادله موج اصلی برای فیبرهای با ضریب شکست تدریجی به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0. \quad (169.3)$$

که در آن عدد صحیح m قبلاً در معادله (۷۳.۳) به صورت زیر تعریف شده است.

$$m = \begin{cases} 1 & TE \text{ و } TM \text{ مودهای} \\ n+1 & EH \text{ مود} \\ n-1 & HE \text{ مود} \end{cases} \quad (n \geq 1) \quad (170.3)$$

در اکثر فیبرهای عملی، ضریب شکست در هسته متفاوت است اما در روکش ثابت است. علاوه بر این، یک ضریب شکست پله‌ای اغلب در مرز هسته-روکش وجود دارد. بنابراین، حل معادله موج در هسته و روکش به طور جداگانه بسیار راحت‌تر است (یک جواب تحلیلی در روکش فلزی به دست می‌آید، زیرا ضریب شکست یکتاخت است) و مطابقت با این راه حل‌ها در مرز هسته-روکش مطابق با شرایط مرزی فیزیکی اگر توابع میدان عرضی در هسته و روکش به ترتیب با $R_{clad}(r)$ و $R(r)$ نشان داده شوند، شرایط مرزی تحت تقریب هدایت ضعیف خواهد بود

$$R(a) = R_{clad}(a), \quad (171.3)$$

$$\left[\frac{dR}{dr} \right]_{r=a} = \left[\frac{dR_{clad}}{dr} \right]_{r=a} \quad (172.3)$$

چندین روش برای تجزیه و تحلیل فیبر با ضریب شکست تدریجی شده شناخته شده است: روش WKB^{۲۷} [۱۴]، روش اجزای محدود (FEM)^{۲۸} [۱۵]، و روش‌های دیگر. روش WKB برای تجزیه و تحلیل فیبرهای چند مودی با مقدار v بزرگ مناسب است. از سوی دیگر، FEM برای آنالیز فیبرهای با ضریب شکست تدریجی تک مودی مناسب است، زیرا

^{۲۷}Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB)

^{۲۸}Finite Element Method (FEM)

به یک محاسبه عددی نیاز دارد. روش تحلیل WKB در بخش زیر و FEM در فصل ششم به تفصیل توضیح داده شده است.

۲.۷.۳ تحلیل فیبرهای با ضریب شکست تدریجی توسط روش WKB

در اینجا تجزیه و تحلیل فیبرهای با ضریب شکست تدریجی چند مودی را با استفاده از روش WKB مطابق با بحث در مرجع [۱۶] شرح می‌دهیم. هنگامی که روش WKB را برای معادله (۱۶۹.۳) موج فیبرهای با ضریب شکست تدریجی اعمال می‌کنیم، معادله پاشندگی که ثابت انتشار مود (m, l) را تعیین می‌کند، به دست می‌آید.

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right]^{1/2} dr = \left(l - \frac{1}{2} \right) \pi \quad (173.3)$$

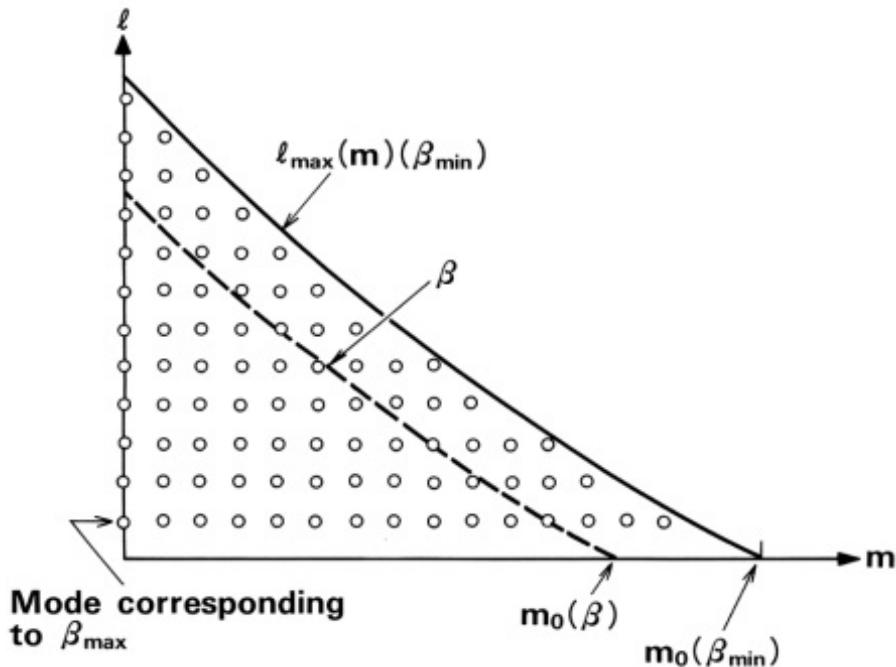
که در آن r_1 و r_2 نمایشگر نقطه تنظیم جائی است که مقدار در داخل برآکت معادله (۱۷۳.۳) صفر می‌شود. در فیبرهای چند مودی عملی با $\Delta = 1\%$ و $\Delta = 50 \mu m$ ، تعداد کل مودهای منتشر شونده چند صد عدد است. بنابراین، می‌توانیم در معادله (۱۷۳.۳) $m \geq 1$ و $l \geq 1$ را فرض کنیم. در این صورت معادله (۱۷۳.۳) تقریباً به صورت زیر است

$$\int_{r_1(m)}^{r_2(m)} \left[k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right]^{1/2} dr \approx l\pi \quad (174.3)$$

اگرچه معادله (۱۷۴.۳) دارای بخی خطاهای برای m و l کوچک است، می‌توان آن را برای اکثر مودها در فیبرهای چند مودی اعمال کرد. از این پس، به گونه‌ای پیش می‌رویم که گویی معادله (۱۷۴.۳) برای هر مجموعه‌ای از m و l صادق است. اگر حداقل تعداد مود شعاعی یک مود انتشار را با یک عدد مود m ازیموتال با $l_{max}(m)$ نشان داده شود، ممکن است مستقیماً از معادله (۱۷۴.۳) بنویسیم؛

$$l_{max}(m) = \frac{1}{\pi} \int_{r_1(m)}^{r_2(m)} \left[k^2 n^2(r) - \beta_{min}^2 - \frac{m^2}{r^2} \right]^{1/2} dr \quad (175.3)$$

که در آن β_{min} برای مود سمت با ملاحظات عدد m است. از معادله (۱۷۵.۳) مشاهده می‌شود که مودهای شعاعی $l_{max}(m)$ ($l = 1, 2, \dots, l_{max}(m)$) برای مودهای سمت (آزیموت) m ($m = 0, 1, \dots, m_{max}$) را شامل می‌شود. هرچه عدد مود آزیموتال m بزرگتر باشد، حداقل تعداد مود شعاعی $l_{max}(m)$ کوچکتر است. این رابطه در شکل (۲۰.۳) نشان داده شده است. حداقل تعداد انتشار حداقل زمانی که $m = 0$ و $l = 1$ باشد. حداقل ثابت انتشار β_{min} ، از شرط قطع، با $\beta_{min} = kn$ داده می‌شود. بنابراین، اگر تعداد مودهایی که دارای ثابت انتشار بین β و β_{max} هستند با $v(\beta)$ نشان داده شود، تقریباً با شمارش تعداد دایره‌های ترسیم شده در زیر سمت چپ پایین منحنی خط چین در شکل (۲۰.۳) می‌توان آن را یافت:

شکل ۲۰.۳: رابطه بین ثابت انتشار β و اعداد مود m و l

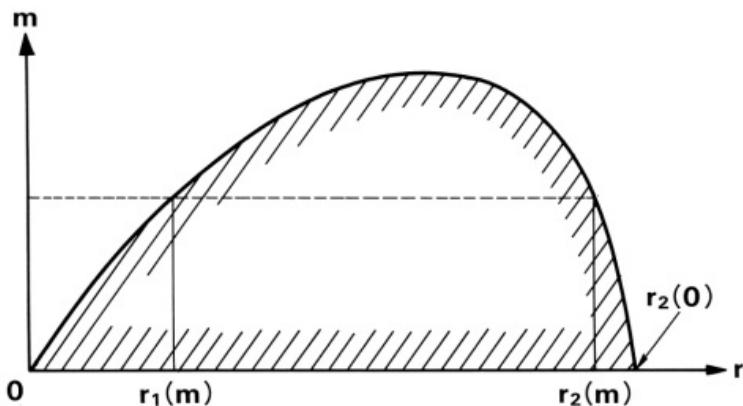
$$v(\beta) = \frac{4}{\pi} \int_0^{m_*(\beta)} l(m) dm = \frac{4}{\pi} \int_0^{m_*(\beta)} \int_{r_1(m)}^{r_2(m)} \left[k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right]^{1/2} dr dm, \quad (176.3)$$

که در آن $m_*(\beta)$ بیشینه m بازاء β داده شده است. ضریب ۴ در معادله (۱۷۶.۳) بیانگر این حقیقت است که چهار مود متعارف متعلق به هر مود LP [به جدول (۲.۳) مراجعه کنید] است. همچنین توجه کنید که مجموع برای m با انتگرال نسبت به m عوض شده است زیرا $1 \gg m_*$ فرض شده است. از رابطه (۱۷۶.۳) مشاهده می‌شود که $\left[k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right]^{1/2}$ باید در ناحیه هاشور خورده شکل (۲۱.۳) انجام شود. با تغییر مرتبه انتگرال گیری، می‌توانیم معادله (۱۷۶.۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$v(\beta) = \frac{4}{\pi} \int_0^{r_1(\beta)} \int_r^{r(k^2 n^2 - \beta^2)^{1/2}} \left[k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right]^{1/2} dr dm. \quad (177.3)$$

در این عبارت، حد بالائی انتگرال $m_*(\beta)$ با رابطه زیر عوض می‌شود

$$m_* = r \left[k^2 n^2(r) - \beta^2 \right]^{1/2} \quad (178.3)$$



شکل ۲۱.۳: ناحیه انتگرال‌گیری در معادله (۱۷۶.۳).

زیرا m از قرار دادن $= l$ در رابطه (۱۷۴.۳) بدست می‌آید. انتگرال‌گیری نسبت به m را می‌توان بدون مشکلی انجام داد و بدست آورد:

$$v(\beta) = \int_0^{r_2(0)} [k^2 n^2(r) - \beta^2] r dr. \quad (179.3)$$

در اینجا شکل ضریب شکست به اصطلاح توان α را در نظر می‌گیریم

$$n(r) = n_1 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right]^{1/2} \quad (0 \leq r \leq a) \quad (180.3)$$

$$n_\infty = n_1 (1 - 2\Delta)^{1/2} \quad (r > a) \quad (181.3)$$

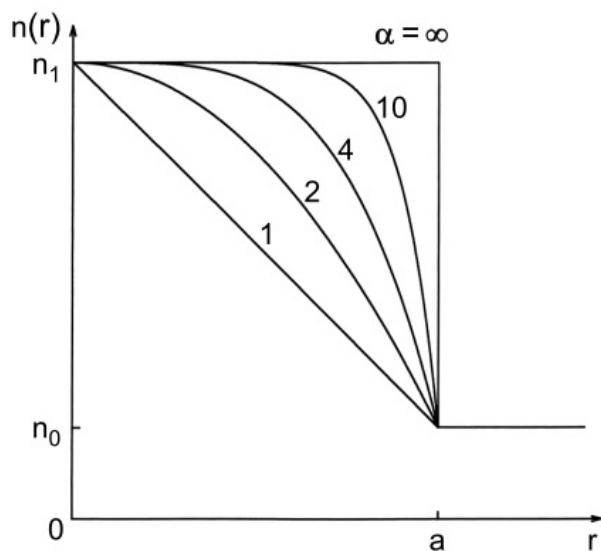
که در آن ضریب توان α بین ۱ و ∞ فرض می‌شود. شکل α برای مقادیر مختلف در شکل (۲۲.۳) نشان داده شده است. سودمندی این شکل در این واقعیت نهفته است که شکل‌های واقعی موجود در بسیاری از فیبرها را تقریب می‌کند. به عنوان مثال، $\alpha = 2$ نشان دهنده مشخصات ضریب شکست درجه دوم و $\alpha = \infty$ مربوط به فیبر با ضریب شکست پله‌ای است.

با جایگزینی معادلات (۱۸۰.۳) و (۱۸۱.۳) در معادله (۱۷۹.۳) و انجام انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

$$v(\beta) = k^2 n_1^2 \Delta r_2(0) \left[\frac{k^2 n_1^2 - \beta^2}{k^2 n_1^2 2\Delta} - \frac{2}{\alpha + 2} \left(\frac{r_2(0)}{a} \right)^\alpha \right] \quad (182.3)$$

در این معادله، $r_2(0)$ نمایشگر نقطه تنظیم خارجی برای $m = 0$ است؛ یعنی، جواب معادله $k^2 n^2(r_2) - \beta^2 = 0$. در این صورت برای $r_2(0)/a$ رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\frac{r_2(0)}{a} = \left(\frac{k^2 n_1^2 - \beta^2}{k^2 n_1^2 2\Delta} \right)^{1/\alpha}. \quad (183.3)$$



شکل ۲۲.۳: شکل ضریب شکست توان α که تحت معادلات (۱۸۰.۳) و (۱۸۱.۳) داده شده است.

با جایگزینی معادله (۱۸۳.۳) در (۱۸۲.۳) می‌دهد

$$v(\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+2} k^2 n_1^2 \Delta a^2 \left(\frac{k^2 n_1^2 - \beta^2}{k^2 n_1^2 2 \Delta} \right)^{(\alpha+2)/\alpha}. \quad (184.3)$$

تعداد کل مودهای منتشر شونده N با قرار دادن $\beta = \beta_{min} = kn_0$ در معادله (۱۸۴.۳) خواهد بود؛

$$N = \frac{\alpha}{\alpha+2} k^2 n_1^2 n_0^2 \Delta a^2 = \frac{\alpha}{\alpha+2} \frac{v^2}{2}, \quad (185.3)$$

که در آن v فرکانس نرمالیزه که یک کمیت با رابطه (۲۰.۳) برای فیبر با ضریب شکست پله‌ای تعریف می‌شود و برای فیبر با ضریب شکست تدریجی نیز استفاده می‌شود. تعداد کل مودها فیبر با ضریب شکست پله‌ای ($\alpha = \infty$) برابر است با

$$N = \frac{v^2}{2}, \quad (186.3)$$

و برای با ضریب شکست درجه دوم ($\alpha = 2$) برابر است با

$$N = \frac{v^2}{4}. \quad (187.3)$$

از معادله (۱۸۴.۳)، ثابت انتشار β بر حسب N خواهد بود

$$\beta = kn_1 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{v}{N} \right)^{\alpha/(\alpha+2)} \right]^{1/2} \quad (188.3)$$

همانطور که در مورد فرکانس نرمال شده v ، تعریف معادله (۱۸۲.۳) را برای ثابت انتشار نرمالیزه فیبر با ضریب شکست تدریجی، اعمال می‌کنیم. در این صورت زیر بیان می‌شود

$$\beta = k [n_1^2 + b(n_1^2 - n_\infty^2)]^{1/2} = kn_1 [1 - 2\Delta(1 - b)]^{1/2} \quad (189.3)$$

علاوه بر این، برای سهولت در محاسبه در بخش زیر، یک متغیر جدید را معرفی می‌کنیم که مستقیماً با b مرتبط است.

$$\chi = 1 - b \quad (190.3)$$

با مقایسه هریک از جمله‌های معادلات (۱۸۸.۳) و (۱۸۹.۳) و استفاده از معادله (۱۹۰.۳)، بدست می‌آوریم

$$\frac{v}{N} = \chi^{(\alpha+2)/\alpha}. \quad (191.3)$$

۳.۷.۳ ویژگی‌های پاشندگی فیبرهای با ضریب شکست تدریجی

تاخیر زمانی گروهی در فیبرهای نوری با معادله (۱۱۷.۳) داده شده است. در فیبرهای چند مودی، عبارت اول در معادله سمت راست تأثیر غالبی بر پاشندگی چند مودی دارد. در این صورت تاخیر زمانی به صورت زیر بیان می‌شود

$$t = \frac{L}{v_g} = \left[\frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} \cdot L = \frac{L}{c} \frac{d\beta}{dk} \quad (192.3)$$

جایگزینی این معادله در رابطه (۱۸۸.۳) و با توجه به اینکه ضریب شکست n_1 و اختلاف ضریب شکست Δ مستقل از طول موج هستند، داریم

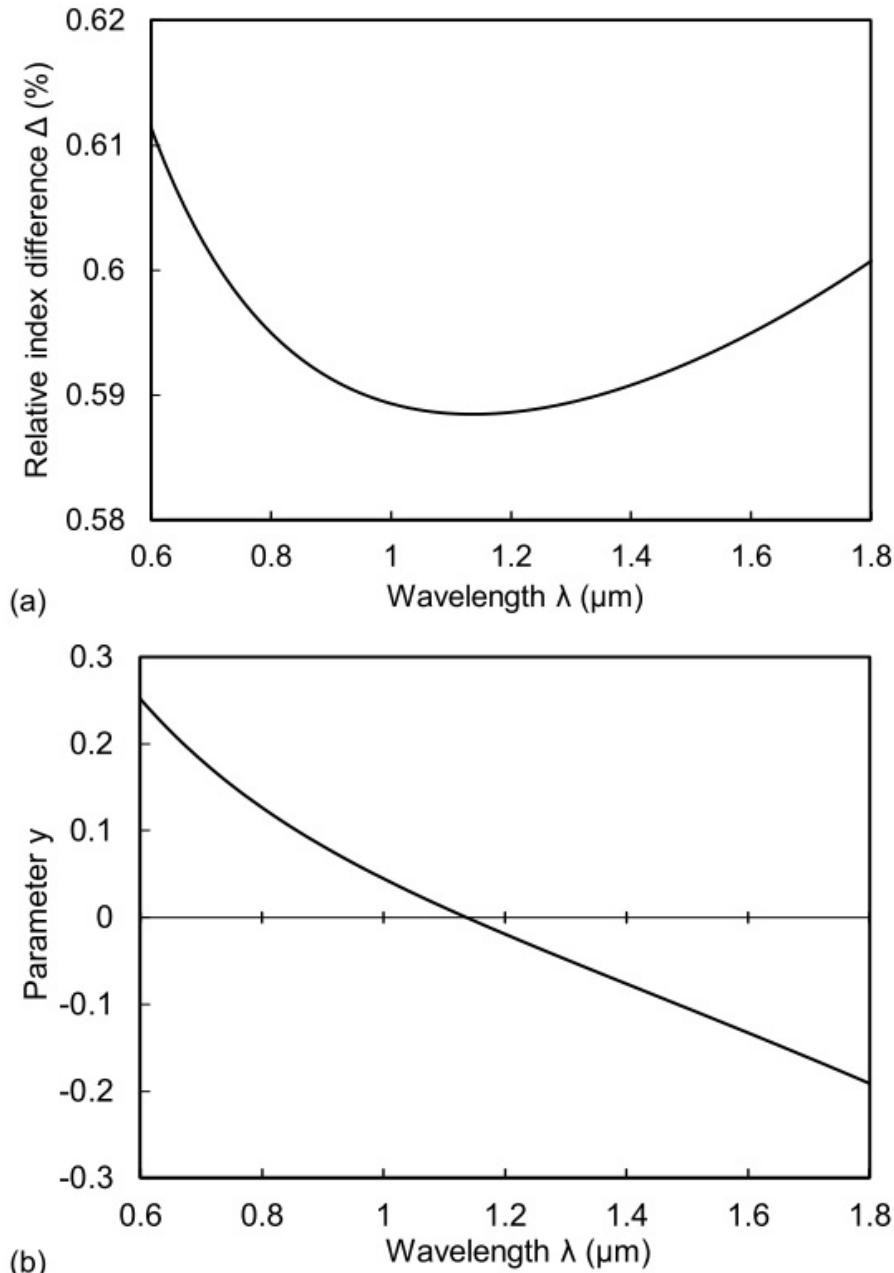
$$t = \frac{LN_1}{c} \frac{1}{(1 - 2\Delta x)^{1/2}} \left[1 - \left(2 + \frac{y}{2} + \frac{n_1}{N_1} \frac{k}{x} \frac{dx}{dk} \right) \Delta x \right] \quad (193.3)$$

که در آن N_1 ضریب شکست گروهی و y کمیتی برای اندازه‌گیری وابستگی طول موج Δ است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$y = \frac{2n_1}{N_1} \frac{k}{\Delta} \frac{d\Delta}{dk} = -\frac{2n_1}{N_1} \frac{\lambda}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\lambda} \quad (194.3)$$

شکل (۲۳.۳) وابستگی طول موج Δ و y را در یک فیبر آغشته به $G_e O_2$ نشان می‌دهد. در اینجا، هنگامی که ما رابطه $dN/dk = (N/k)(2 + y/2)$ را، که از معادله (۱۸۵.۳) بدست می‌آید در نظر می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\frac{k}{x} \frac{dx}{dk} = -\frac{\alpha}{\alpha + 2} \left(2 + \frac{y}{2} \right) \quad (195.3)$$



شکل ۲۳.۳: وابستگی طول موج (الف) به ضریب شکست Δ و (ب) به پارامتر y یک فیبر که شامل هسته آغشته به $6.3\text{ mol\% } GeO_2$ و روکش سیلیکا.

با قرار دادن معادله (۱۹۵.۳) در رابطه (۱۹۳.۳) و استفاده از بسط تیلور $\approx (1 - 2\Delta x)^{-1/2}$ ، تأخیر زمانی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$t = \frac{LN_1}{c} \left[1 + \frac{(\alpha - 2 - y)}{(\alpha + 2)} \Delta x + \frac{(3\alpha - 2 - 2y)}{2(\alpha + 2)} \Delta^2 x^2 + O(\Delta^3) \right] \quad (۱۹۶.۳)$$

عبارت دوم و سوم این معادله نشان دهنده وابستگی تأخیر زمانی به مرتبه مود x است. از آنجا که $1 \ll \Delta$ است، تفاوت تأخیر زمانی عمدتاً توسط جمله دوم تعیین می‌شود. بنابراین، پاشندگی چند مودی وقتی که ضریب شکست بسیار کوچک می‌شود خواهد بود

$$\alpha = \alpha_0 = 2 + y \quad (۱۹۷.۳)$$

به طور دقیق‌تر، پاشندگی چند مودی تابعی از تأخیر زمانی t است. در این صورت پاشندگی چند مودی t از پاسخ ضربه‌ای $h(t)$ به دست می‌آید

$$\delta = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) t^{\alpha} dt - \langle t \rangle^{\alpha} \right]^{1/2} \quad (۱۹۸.۳)$$

که در آن میانگین تأخیر زمانی $\langle t \rangle$ برابر است با

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad (۱۹۸.۳)$$

پاسخ ضربه‌ای فیبر توان α طبق مرجع [۱۶] خواهد بود

$$h(t) = \begin{cases} \frac{(\alpha+2)}{\alpha} \left| \frac{(\alpha+2)}{(\alpha-2-y)} \Delta \right|^{(\alpha+2)/\alpha} \tau^{2/\alpha} & (\alpha \neq 2+y), \\ \frac{\tau}{\Delta^2} & (\alpha = 2+y) \end{cases} \quad (۱۹۹.۳)$$

که در آن τ نمایشگر تفاوت تأخیر زمانی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

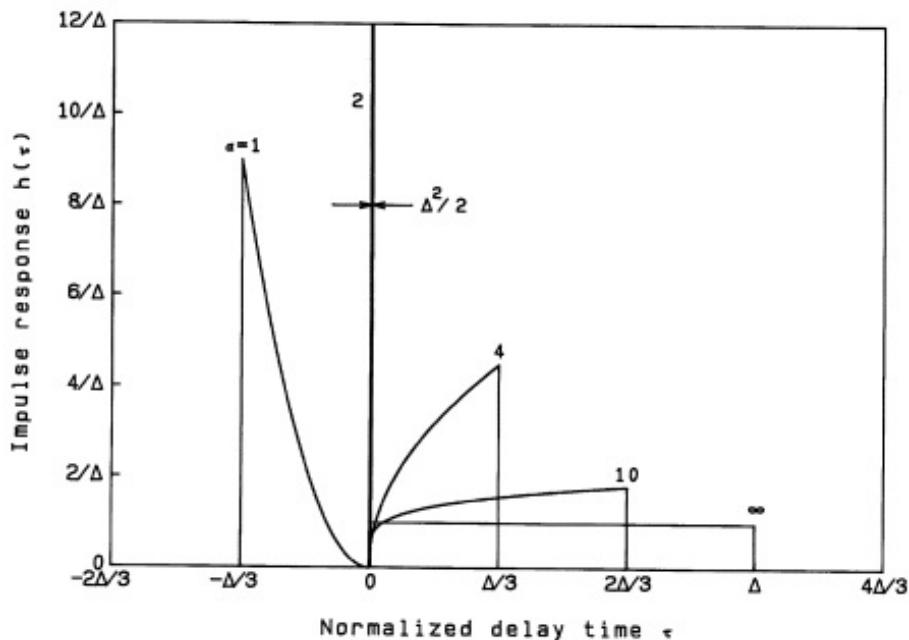
$$\tau = \frac{ct}{N_1 L} - 1 \quad (۲۰۰.۳)$$

شکل (۲۴.۳) پاسخ ضربه‌ای را برای فیبرهای با ضریب شکست تدریجی نشان می‌دهد. چون $h(\tau) = 1/\Delta$ در فیبرهای با ضریب شکست پله‌ای است، پاشندگی چند مودی از معادله (۱۹۸.۳) به صورت زیر بدست می‌آید

$$\delta t = 0.289 \frac{N_1 L}{c} \Delta \quad (۲۰۱.۳)$$

جایگزینی معادله (۱۹۶.۳) و (۱۹۹.۳) در (۱۹۸.۳) و پیدا کردن کمینه مقدار δt بهینه مقدار α برای فیبرهای با ضریب شکست تدریجی بدست می‌آید [۱۷]

$$\alpha_{opt} = 2 + y - \Delta \frac{(4+y)(3+y)}{(5+2y)}. \quad (۲۰۲.۳)$$



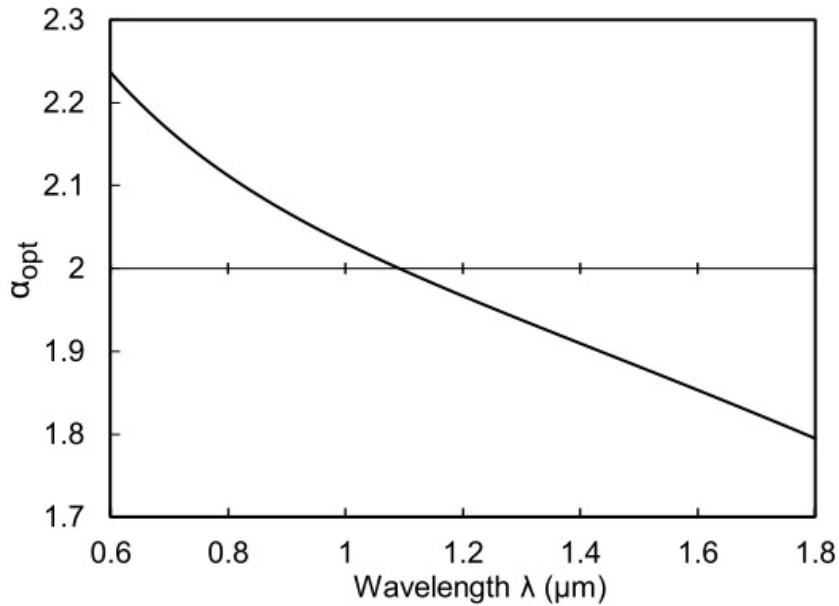
شکل ۲۴.۳: پاسخ ضربهای فیبرهای با ضریب شکست تدریجی توان α

پاشندگی چند مودی در فیبری با شکل توان α_{opt} برابر است با:

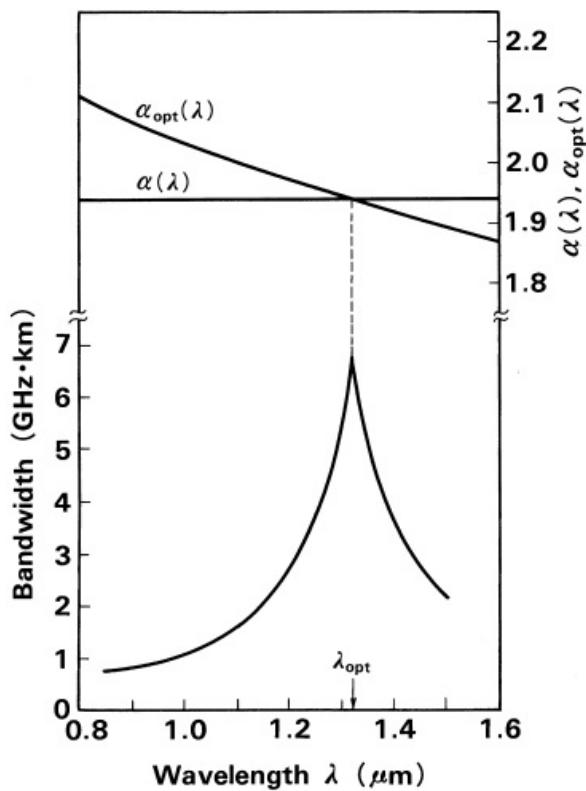
$$\delta t = \text{مقدار معادله (۲۰.۳.۳)} \quad (۲۰.۳.۳)$$

وقتی معادله (۲۰.۳.۳) را با معادله (۲۰.۱.۳) مقایسه می‌کنیم، متوجه شدیم که پاشندگی شکل توان $\alpha_{opt} = \Delta/13$ حدود $1/1300$ (۱٪ برای $\Delta = \Delta$) کوچکتر از فیبر با ضریب شکست پله‌ای است. با این حال، ساخت قییر با ضریب شکست تدریجی با مشخصات شکل توان α_{opt} بهینه بسیار دشوار است، زیرا پاشندگی چند مودی به تغییرات جزئی در پارامتر پروفایل بسیار حساس است. به عنوان مثال، هنگامی که پارامتر پروفایل کمی از مقدار بهینه به $(1 \pm \Delta) = \alpha_{opt}$ منحرف می‌شود، پاشندگی چند مودی شش برابر بزرگتر از حداقل مقدار معادله (۲۰.۳.۳) می‌شود.

پارامتر پروفایل بهینه α_{opt} به ماده ناخالص (آغشته کننده) و طول موج بستگی دارد. شکل (۲۵.۲) وابستگی طول موج $\alpha_{opt}(\lambda)$ را در فیبر هسته آغشته به $G_e O_2$ نشان می‌دهد. بر عکس، پارامتر پروفایل $\alpha(\lambda)$ فیبر ساخته شده معلوم است که تقریباً مستقل از طول موج است. بنابراین، پهنه‌ای باند انتقال فیبر تدریجی (به بخش ۳.۸ مراجعه کنید) در طول موج λ_{opt} که در آن $\alpha(\lambda) = \alpha_{opt}$ برآورده می‌شود حداقل می‌شود و همانطور که در شکل (۲۶.۲) نشان داده شده است به سرعت در هر دو طرف طول موج بهینه کاهش می‌یابد.



شکل ۲۵.۳: وابستگی به طول موج $\alpha_{opt}(\lambda)$ در یک فیبر با هسته آغشته به G_eO_2



شکل ۲۶.۳: وابستگی به طول موج عرض باند یک فیبر چند مودی با ضریب شکست تدریجی

۸.۳ رابطه بین پاشندگی و ظرفیت انتقال

ما تأثیر و بزرگی چندین نوع پاشندگی (چند مودی، مواد و موجبری) را بر روی پاشندگی تأخیرزمانی δt (گسترش پالس) بررسی کرده‌ایم. در اینجا اجازه دهید رابطه بین δt گسترش پالس و پهنهای باند انتقال یک فیبر نوری را در نظر بگیریم. هنگامی که گسترش پالس یک فیبر نوری δt است، پاسخ ضربه‌ای با [۱۸] رابطه زیر بیان می‌شود.

$$h(t) = \frac{1}{\delta t \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{t^2}{2(\delta t)^2} \right], \quad (20.4.3)$$

که در آن فرض بر این است که پالس نوری گوسی شکل است. به آسانی تأیید می‌شود که $h(t)$ که توسط معادله (۲۰.۴.۳) داده می‌شود، معادله (۱۹.۸.۳) را برآورده می‌کند. پاسخ فرکانس باند پایه یک فیبر نوری با تبدیل فوریه پاسخ ضربه‌ای $h(t)$ به صورت زیر داده می‌شود.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp[-j2\pi(f - f_0)t] dt = \exp \left\{ - \left[\sqrt{2\pi}(f - f_0)\delta t \right]^2 \right\} \quad (20.5.3)$$

که در آن f_0 فرکانس مرکزی سیگنال را نشان می‌دهد. همانطور که در بخش ۱.۶.۳ توضیح داده شد، پالس سیگنال NRZ محدوده فرکانس زیر را اشغال می‌کند.

$$|f - f_0| \leq \frac{B}{2}$$

که در آن B نشان دهنده نرخ بیت است. یعنی حداقل و حداقلتر فرکانس‌ها توسط

$$\begin{cases} f_{min} \approx f_0 - \frac{B}{2} \\ f_{max} \approx f_0 + \frac{B}{2} \end{cases} \quad (20.6.3)$$

داده می‌شود.

از رابطه (۲۰.۵.۳) میدانیم که پاسخ فرکانسی باند پایه با کاهش فرکانس مدولاسیون f (یا نرخ بیت B) افزایش می‌یابد. در اینجا بیشینه فرکانس مدولاسیون f_{max} را به صورت فرکانسی که شرط زیر را ارضاء می‌کند [۱۸] تعریف می‌کنیم

$$10 \log \frac{H(f_{max})}{H(f_0)} \geq -1 \quad [dB] \quad (20.7.3)$$

این معادله بدین معنی است که پاسخ فرکانسی باند پایه $H(f)$ یک دسیبل (۱dB) کمتر از (-1) در $H(f_0)$ می‌شود. ترکیب معادلات (۲۰.۵.۳) - (۲۰.۷.۳)، میدهد؛

$$B \cdot \delta t \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{2 \ln 10^{0.1}} \approx 0.22 \quad (20.8.3)$$

در این صورت حد بالائی نرخ بیت خواهد بود

$$B \leq \frac{0.22}{\delta t} \quad [bit/s], \quad (20.9.3)$$

زمانی که گسترش پالس ناشی از پاشندگی فیبر δt باشد. ظرفیت انتقال سیگنال را برای چندین مورد معمولی در فیبرهای چند مودی و تک مودی بررسی خواهیم کرد.

۱.۸.۳ فیبر چند مودی

ظرفیت‌های انتقال یک فیبر چند مودی با ضریب شکست پلهای و یک فیبر با ضریب شکست تدریجی با مشخصات α_{opt} که از معادله‌ها (۲۰۱.۳) و (۲۰۳.۳) بیان می‌شوند به صورت زیر است

$$B \leq \begin{cases} \frac{154}{L} & [Mbit/s] \text{ ضریب شکست پلهای} \\ \frac{203}{L} & [Gbit/s] \text{ مشخصات } \alpha_{opt} \end{cases} \quad (210.3)$$

که در آن L نمایشگر طول فیبر بر حسب کیلو متر و اختلاف ضریب شکست $\% = \Delta$ و ضریب شکست گروهی $N_1 = 1/48$ فرض شده است.

۲.۸.۳ فیبر تک مودی

گسترش پالس فیبر تک مود به صورت زیر داده می‌شود

$$\delta t = \sigma L \delta \lambda$$

همانطور که در معادله (۱۴۳.۳) نشان داده شده است، δt متناسب با پاشندگی رنگی فیبر σ و عرض طیفی منبع سیگنال $\delta \lambda$ است. اجازه دهید این مورد را در نظر بگیریم که طول موج مرکز سیگنال به ترتیب $m = 1/55\mu m$ و پاشندگی رنگی $\lambda_0 = 1ps/kmnm$ است. بسته به میزان گسترش طیفی به دلیل خود لیزر و مدولاسیون سیگنال، دو مود ممکن وجود دارد.

حالت اول: گسترش طیفی ناشی از مدولاسیون سیگنال بیش از سیگنال لیزر است.

محدوده فرکانسی سیگنال یک پالس NRZ توسط معادله (۲۰۶.۳) داده می‌شود. اگر این را بر حسب طول موج بازنویسی کنیم، خواهیم داشت

$$B = f_{max} - f_{min} = \frac{c}{(\lambda_0 - \delta \lambda)} - \frac{c}{(\lambda_0 + \delta \lambda)} \approx \frac{2c\delta\lambda}{\lambda_0^2} \quad (211.3)$$

که در آن $\delta \lambda$ گسترش طیفی ناشی از مدولاسیون سیگنال است و در این صورت میدانیم که گسترش طیفی ناشی از مدولاسیون سیگنال در نرخ بیت B به صورت زیر است

$$\delta \lambda = \frac{\lambda_0^2}{2c} B. \quad (212.3)$$

برای مثال، وقتی ترخ بیت پالس NRZ برابر با $B = ۱۰ Gbit/s$ است، گسترش طیف $\delta\lambda = \frac{۰.۰۴nm}{۰.۹nm}$ می‌شود. با قرار دادن معادله (۲۱۲.۳) و (۲۰۹.۳) در (۲۱۳.۳)، رابطه‌ای بین نرخ بیت B و پاشندگی رنگی σ بدست می‌آوریم:

$$B \leq \sqrt{\frac{۰.۰۴c}{\lambda\sigma L}} = \frac{۲۳۴}{\sqrt{L}} \quad [G bit/s] \quad (۲۱۳.۳)$$

حالت دوم: گسترش طیفی لیزر به دلیل مدولاسیون سیگنال بزرگتر از آن است. چون گشترش طیفی $\delta\lambda$ برای عبارت $\delta t = \sigma L \delta\lambda$ با عرض طیف $\delta\lambda$ تعیین می‌شود، ما بسادگی از رابطه (۲۰۹.۳) مقدار B را بدست می‌آوریم:

$$B \leq \frac{۰.۰۲۲}{\sigma \cdot \delta\lambda \cdot L} \quad [G bit/s] \quad (۲۱۴.۳)$$

برای مثال، هرگاه گشترش طیفی لیزر $۱ nm = \delta\lambda$ باشد، بیشینه نرخ بیت (بیت ریت) B را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$B \leq \frac{۲۲۰}{L} \quad [G bit/s].$$

هنگامی که معادلات (۲۱۳.۳) و (۲۱۴.۳) را مقایسه می‌کنیم، بسهولت در میابیم که وابستگی بطول فیبر برای دو مود گشترش طیفی متفاوت است. بیشینه نرخ بیت برای فیبری بطول $L = ۱۰۰ km$ به صورت زیر است

$$B = \begin{cases} ۲۳/۴ & \text{حالت اول} \\ ۲/۲ & \text{حالت دوم} \end{cases} \quad [G bit/s]$$

واضح است که ماکزیمم بیت ریت وقتی بالاست که عرض طیفی لیزر نسبت به مدولاسیون سیگنال باریکتر باشد. همچنین مشخص است که پهنه‌ای باند یک فیبر تک مودی حتی با شکل α_{opt} بهینه، بیشتر از یک فیبر چند مودی است.

۹.۳ فیبرهای نوری دوشکستی

۱.۹.۳ دو مود قطبی متعامد در فیبرهای اسمی تک مودی

همانطور که در بخش ۳.۵ نشان داده شده است، در فیبر تک مودی متقارن محوری، دو مود قطبی متعامد وجود دارد. آنها با توجه به جهت قطبی خود به عنوان مودهای $HE_{۱1}^x$ و $HE_{۱1}^y$ شناخته می‌شوند. اگر ساختار موجبر فیبر واقعاً متقارن محوری باشد، این مودهای قطبی متعامد ثابت‌های انتشار یکسانی دارند و بنابراین منحط^{۲۹} می‌شوند. به همین دلیل است که به چنین فیبری فیبر "تک مودی" می‌گویند. با این حال، در فیبرهای عملی، یک

^{۲۹}Degenerate

عدم تقارن محوری توسط تغییر شکل هسته و/یا خروج از مرکز هسته به قطر خارجی ایجاد می‌شود و باعث تفاوت جزئی در ثابت‌های انتشار دو مود قطبی‌سازی می‌شود. در چنین فیبری، حالت پلاریزاسیون (SOP)^{۳۰} نور خروجی به طور تصادفی متفاوت است، زیرا تزویج مودی بین مودهای HE_{\parallel}^y و HE_{\perp}^x انجام می‌شود که ناشی از نوسانات قطر هسته در امتداد جهت ζ ارتعاش و تغییرات دما است. بنابراین، چنین فیبرهایی را نمی‌توان برای کاربردها در حسگرهای فیبر نوری و در ارتباطات نوری همدوس که در آن از SOP و اثرات تداخل استفاده می‌شود، استفاده کرد.

فیبرهای دوشکستی (انکسار مضاعف، انکسار دوگانه)^{۳۱} برای حل چنین مسائل نوسان‌های پلاریزاسیون پیشنهاد و ساخته شده‌اند [۱۹]. تفاوت ثابت‌های انتشار بین مودهای HE_{\parallel}^x و HE_{\parallel}^y عمدتاً در فیبر دوشکستگی بزرگ است. فیبرهای دوشکستی را فیبرهای نگهدارنده پلاریزاسیون^{۳۲} نیز می‌نامند.

تزویج مودها (یا تبدیل مودها) بین مودهای HE_{\parallel}^y و HE_{\perp}^x به شدت اتفاق می‌افتد (به‌فصل چهارم مراجعه کنید) زمانی که مولفه‌های فرکانس یکسان یا تقریباً مساوی در نوسانات طولی وجود داشته باشد به عنوان تفاوت ثابت‌های انتشار $\delta\beta = \beta_x - \beta_y$ بین دو مود قدرت تزویج مود متناسب با بزرگی مولفه فرکانس مکانی نوسان است. شکل (۲۷.۳) چگالی توان اندازه گیری شده فرکانس مکانی را در نوسان‌های قطر بیرونی یک فیبر نوری تک مودی نشان می‌دهد [۲۰]. طیف توان نوسان هسته همانند شکل (۲۷.۳) در نظر گرفته می‌شود. مشخص است که طیف توان نوسان برای مولفه‌های فرکانس مکانی پایین زیاد است و برای مولفه‌های فرکانس مکانی بالا به سرعت کاهش می‌یابد. در این صورت، اگر یک فیبر دوشکستی با اختلاف ثابت انتشار بسیار زیاد بین مودهای HE_{\parallel}^y و HE_{\perp}^x بسازیم، تزویج مود کاهش می‌یابد، زیرا مولفه فرکانس مکانی نوسان با بزرگی بسیار کوچک است.

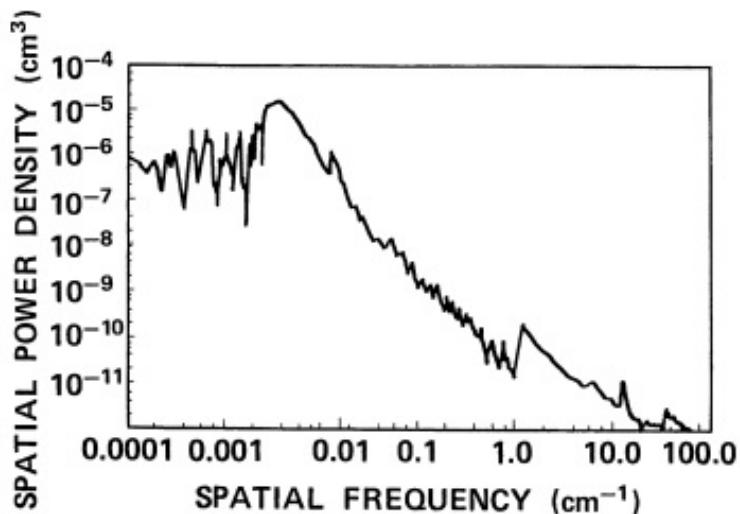
فیبرهای دوشکستی به دو دسته تقسیم می‌شوند: (۱) نوع انکسار دوگانه هندسی و (۲) نوع انکسار دوگانه ناشی از استرس [۲۱]. در نوع دوشکست هندسی، دوشکستی توسط هسته نامتقارن محوری یا ساختارهای مجاورت هسته تولید می‌شود. بر عکس، انکسار مضاعف در نوع انکسار دوگانه ناشی از تنفس توسط یک تنفس نامتقارن در هسته ایجاد می‌شود. با این حال، در فیبر دوشکستی هندسی، در صورت وجود عدم تقارن محوری در ساختار موجب، معمولاً توزیع تنفس نامتقارن وجود دارد. بنابراین، عملأ در ک فیبر نوع انکسار دوگانه کاملاً هندسی بسیار دشوار است. بر عکس، می‌توان تفاوت ثابت‌های انتشار را صرفاً توسط اثر تنفس ایجاد کرد.

شکل (۲۸.۳) ساختارهای مقطعی فیبر دوشکستی معمولی را نشان می‌دهد. شکل (۲۸.۳)-الف و (۲۸.۳)-ب متعلق به نوع دوشکستگی هندسی است. تفاوت $\delta\beta$ ثابت‌های انتشار بین مودهای HE_{\parallel}^y و HE_{\perp}^x توسط تغییر شکل هسته بیضوی [۲۲] در (۲۸.۳)-الف و توسط مناطق با ضربه شکست پایین‌تر نسبت به هسته [۲۳] یا سوراخ‌های هوا [۲۴] در هر دو طرف هسته در (ب) ایجاد می‌شود. از سوی دیگر، شکل‌های (۲۸.۳)-ج و (د)،

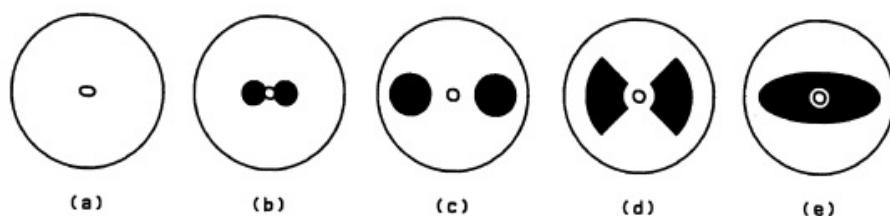
^{۳۰} State Of Polarization (SOP)

^{۳۱} Birefringence

^{۳۲} Polarization-Maintaining Fibers



شکل ۲۷.۳: چگالی توان اندازه‌گیری شده فرکانس مکانی در نوسان‌های قطر بیرونی فیبر نوری تک مودی.



شکل ۲۸.۳: ساختار سطح مقطع فیبرهای معمولی دو شکستی: **الف** فیبرهای هسته بیضوی، **ب** فیبرهای تونل کناری یا چاه کناری، **ج** فیبر پاندا، **د** فیبر پاپیونی، **ه** فیبر با پوشش بیضوی

متعلق به فیبرهای نوع القا شده با استرس [۲۷، ۲۵] است. نواحی تاریک در این شکل‌ها بخش‌های تنش‌زا هستند که در آن شیشه‌های سیلیسی آغشته با ضریب انبساط حرارتی بزرگ وارد شده‌اند. وقتی قطعات تنش‌زا پس از کشیدن فیبر خنک می‌شوند، تنش (یا کرنش) زیادی به هسته وارد می‌کنند زیرا بهشدت منقبض می‌شوند. به‌طور کلی، یک نیروی کششی بزرگ در امتداد جهت محور x و یک نیروی فشاری در امتداد جهت محور y [۲۱] ایجاد می‌شود، زیرا قطعات تنش‌زا در جهت محور x تخصیص می‌یابند. ضریب شکست شیشه تحت تنش با اثر فتوالاستیک تغییر می‌کند [۲۸]. بنابراین ضریب شکست هسته برای مودهای $HE_{\parallel\parallel}^y$ و $HE_{\parallel\parallel}^x$ به‌دلیل تفاوت در تنش در ناحیه هسته متفاوت می‌شود. دو شکستی مودی B به صورت تفاوت نرمالیزه ثابت‌های انتشار بین مودهای $HE_{\parallel\parallel}^y$ و $HE_{\parallel\parallel}^x$ به عدد موج k تعریف می‌شود:

$$B = \frac{(\beta_x - \beta_y)}{k} = \frac{\delta\beta}{k} \quad (215.3)$$

همانطور قبلًا توضیح داده شد، انکسار مضاعف یک فیبر دوشکستی معمولی $B = 1 \times 10^{-4}$ است. فرکانس مکانی مربوطه در طول موج $\lambda = 1.\mu m$ برابر با $\delta B = 6/3 - 7/7 cm^{-1}$ است. چگالی توان نوسان‌های هسته برای چنین مولفه‌های فرکانس مکانی بالا در شکل (۲۷.۳) کاملاً کوچک تأیید شده است. بنابراین، تزویج مود به خوبی در فیبر دوشکستگی حذف می‌شود.

۲.۹.۳ استخراج معادلات اصلی

برای محاسبه میدان‌های الکترومغناطیسی $\tilde{\mathbf{E}}$ و $\tilde{\mathbf{H}}$ در فیبر دوشکستی، باید هم ساختار موجبر غیر متقارن و هم توزیع تنش نامتقارن را در نظر بگیریم. برای تجزیه و تحلیل دقیق این گونه موجبرها، باید به تحلیل عددی با استفاده از روش اجزای محدود [۱۵] تکیه کنیم. تجزیه و تحلیل ترکیبی تنش FEM و تحلیل موجبر FEM در فصل ششم توضیح داده خواهد شد. اگرچه تجزیه و تحلیل FEM نتایج دقیقی ارائه می‌دهد، اما همیشه بینش روشنی ارائه نمی‌دهد زیرا به محاسبات عددی نیاز دارد. بنابراین در اینجا روش تحلیلی مبتنی بر روش تغییرات جزئی ^{۳۳} شرح داده خواهد شد. تغییر ضریب شکست ناشی از تنش نامتقارن در فیبرهای انکسار دوگانه عملی در حد 10^{-4} است که به‌اندازه کافی کوچکتر از اختلاف ضریب شکست Δ است. بنابراین، میدان‌های الکترومغناطیسی $\tilde{\mathbf{E}}$ و $\tilde{\mathbf{H}}$ در فیبر دوشکستی تحت تنش به عنوان تغییرات جزئی از میدان‌های $\tilde{\mathbf{E}}_p$ و $\tilde{\mathbf{H}}_p$ بازه $p = 1, 2$ مربوط به مود \mathbf{HE}_1^x و \mathbf{HE}_2^y بدون تنش، در نظر گرفته می‌شود. میدان‌های الکترومغناطیسی با تغییرات جزئی $\tilde{\mathbf{E}}$ و $\tilde{\mathbf{H}}$ با استفاده از میدان‌های بدون تغییرات جزئی $\tilde{\mathbf{E}}_p$ و $\tilde{\mathbf{H}}_p$ [۲۹] به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}} = A(z)\tilde{\mathbf{E}}_1 + B(z)\tilde{\mathbf{E}}_2 \\ \tilde{\mathbf{H}} = A(z)\tilde{\mathbf{H}}_1 + B(z)\tilde{\mathbf{H}}_2 \end{cases} \quad (216.3)$$

هر یک از زوج میدان‌های بدون تغییرات جزئی در معادلات ماقسول صدق می‌کند

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_p = -j\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}_p \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_p = j\omega\epsilon_0\mathbf{K}\tilde{\mathbf{E}}_p \end{cases} \quad (p = 1, 2) \quad (217.3)$$

که در آن \mathbf{K} نمایشگر تانسور گذردهی نسبی الکتریکی فیبر بدون تانسور عدم تقارن است. در اینجا، اثر هندسی ساختار هسته نامتقارن در \mathbf{K} لحاظ می‌شود. با جایگزینی (۲۱۶.۳) در معادلات ماقسول که دارای تانسور گذردهی نسبی با تغییرات جزئی $\tilde{\mathbf{E}}$ است

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_0\mathbf{K}\tilde{\mathbf{E}} \end{cases} \quad (218.3)$$

^{۳۳}Perturbation Method

و با بازنویسی این معادلات با استفاده از معادله (۲۱۷.۳)، خواهیم داشت (به پیوست سه-ب مراجعه کنید)؛

$$\begin{cases} \frac{dA}{dz} = -j\Gamma_1 A \\ \frac{dB}{dz} = -j\Gamma_2 B \end{cases} \quad (219.3)$$

از این معادله، Γ_p بدست می‌آید

$$\Gamma_p = \frac{\omega\epsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty \mathbf{E}_p^* \cdot (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \mathbf{E}_p r dr d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_p + \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*) r dr d\theta}, \quad (220.3)$$

که در آن \mathbf{E}_p و \mathbf{H}_p میدان‌های الکترومغناطیسی سطح مقطع میدان‌های بدون تغییرات جزئی $\tilde{\mathbf{E}}_p$ و $\tilde{\mathbf{H}}_p$ هستند که با وابستگی به z به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_p(r, \theta, z) = \mathbf{E}_p(r, \theta) \exp(-j\beta_p z), \\ \tilde{\mathbf{H}}_p(r, \theta, z) = \mathbf{H}_p(r, \theta) \exp(-j\beta_p z). \end{cases} \quad (221.3)$$

که در اینجا β_p ثابت انتشار بترتیب مود ($p = 1$ و HE_{11}^y) ($p = 2$ و HE_{11}^x) است. جواب معادله (۲۱۹.۳) به صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{cases} A(z) \propto \exp(-j\Gamma_1 z), \\ B(z) \propto \exp(-j\Gamma_2 z). \end{cases} \quad (222.3)$$

در این صورت، ثابت‌های انتشار مودهای HE_{11}^y و HE_{11}^x فیبر دو شکستی تحت تنفس غیر متقارن است

$$\begin{cases} \beta_x = \beta_1 + \Gamma_1 \\ \beta_y = \beta_2 + \Gamma_2 \end{cases} \quad (223.3)$$

با جایگزینی این در معادله (۲۱۵.۳)، رابطه‌ای برای دوشکستی مودی بدست می‌آوریم

$$B = \frac{\beta_1 - \beta_2}{k} + \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{k} \quad (224.3)$$

جمله اول معادله (۲۲۴.۳) انکسار مضاعف ناشی از ساختار موجبر نامتقارن را نشان می‌دهد و انکسار مضاعف هندسی نامیده می‌شود. عبارت دوم نشان دهنده انکسار مضاعف ناشی از توزیع تنفس نامتقارن است و انکسار دو جانبی ناشی از تنفس نامیده می‌شود. شکست مضاعف هندسی و ناشی از تنفس به طور جداگانه به صورت زیر بیان می‌شود

$$B_g = \frac{\beta_1 - \beta_2}{k} \quad (۲۲۵.۳)$$

$$B_s = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{k} \quad (۲۲۵.۴)$$

انکسار مضاعف هندسی B_g را می‌توان با روش همایند ^{۳۴} [۳۰] یا تحلیل موجبر اجزاء محدود محاسبه کرد. از سوی دیگر، انکسار دوگانه ناشی از تنش با تحلیل تنش اجزاء محدود محاسبه می‌شود.

تansور گذره‌ی نسبی \tilde{K} تحت اثر تنش به صورت زیر بیان می‌شود [۳۱]

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} (n - C_1\sigma_x - C_2(\sigma_y + \sigma_z))^2 & 2n(C_2 - C_1)\tau_{xy} & \dots \\ 2n(C_2 - C_1)\tau_{xy} & (n - C_1\sigma_y - C_2(\sigma_z + \sigma_x))^2 & \dots \\ \dots & \dots & (n - C_1\sigma_z - C_2(\sigma_x + \sigma_y))^2 \end{pmatrix} \quad (۲۲۶.۳)$$

که در آن n نمایشگر ضریب انکسار بدون تنش و $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ تنش‌های در امتداد جهت محورهای x, y و z و τ_{xy} تنش برشی و C_1 و C_2 نمایشگر ثابت‌های فتوالاستیک هستند. ثابت‌های فتوالاستیک شیشه سیلیکا به صورت زیر داده می‌شوند [۳۲]

$$\begin{cases} C_1 = 7/420 \times 10^{-6} & (nm^2/kg) \\ C_2 = 4/102 \times 10^{-5} & (nm^2/kg) \end{cases} \quad (۲۲۷.۳)$$

تansور گذره‌ی نسبی K تحت اثر تنش به صورت زیر بیان می‌شود

$$K = \begin{pmatrix} n^2 & \dots & \dots \\ \dots & n^2 & \dots \\ \dots & \dots & n^2 \end{pmatrix} \quad (۲۲۸.۳)$$

بنابراین جمله $(\tilde{K} - K)$ در معادله (۲۲۰.۳) را می‌توان نوشت

$$\tilde{K} - K = \begin{pmatrix} -2n(C_1\sigma_x - C_2(\sigma_y + \sigma_z)) & 2n(C_2 - C_1)\tau_{xy} & \dots \\ 2n(C_2 - C_1)\tau_{xy} & -2n(C_1\sigma_y - C_2(\sigma_z + \sigma_x)) & \dots \\ \dots & \dots & -2n(C_1\sigma_z - C_2(\sigma_x + \sigma_y)) \end{pmatrix} \quad (۲۲۹.۳)$$

که در آن ار جملات کوچک C_1^2, C_2^2 و C_1C_2 صرفنظر کرده‌ایم. با جایگزینی این در معادله (۲۲۰.۳) و بحساب آوردن اینکه $H_y \approx (\omega\epsilon_0 n^2/\beta)E_x$ و E_x مولفه‌های غالب در (E_1, H_1) مود HE_{11}^y و E_y و $H_x \approx -(\omega\epsilon_0 n^2/\beta)E_y$ مود (E_2, H_2) هستند،

^{۳۴}Collocation

بدست می‌آوریم

$$\frac{\Gamma_1}{k} = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} [C_1 \sigma_x + C_2 (\sigma_y + \sigma_z)] |\mathbf{E}_1|^2 r dr d\theta}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_1|^2 r dr d\theta} \quad (230.3)$$

$$\frac{\Gamma_2}{k} = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} [C_1 \sigma_y + C_2 (\sigma_z + \sigma_x)] |\mathbf{E}_2|^2 r dr d\theta}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_2|^2 r dr d\theta} \quad (231.3)$$

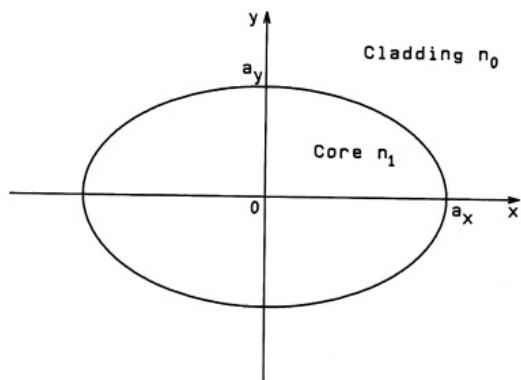
از معادله‌های (۲۳۰.۳) و (۲۳۱.۳) پیدا است که سهم تنش در ثابت‌های انتشار با انتگرال همپوشانی توزیع تنش و توزیع شدت نوری بدست می‌آید.

۳.۹.۳ فیبرهای با هسته بیضوی

همانطور که در شکل (۲۹.۳) نشان داده شده است، ابتدا هندسه یک فیبر هسته بیضوی را تعریف می‌کنیم. شاعع‌های هسته در امتداد جهت محور x و a_x و y و a_y هستند که در آن a_x بزرگتر از a_y فرض می‌شود. ضریب شکست هسته و روکش با n_1 و n_0 نشان داده می‌شود. بیضویت هسته ϵ ^{۲۵} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\epsilon = \frac{a_x - a_y}{a_x} \quad (232.3)$$

به منظور محاسبه انکسار دوگانه هندسی فیبر هسته بیضوی و سایر فیبرهای هسته غیر



شکل ۲۹.۳: هندسه فیبر با هسته بیضوی

متقارن، تجزیه و تحلیل دقیق بدون استفاده از تقریب مود LP (تقریب اسکالار) برای محاسبه ثابت‌های انتشار مودهای HE_1^y و HE_1^x ضروری است. تجزیه و تحلیل دقیق، تحلیل برداری نامیده می‌شود، زیرا جهت‌گیری بردار میدان الکتریکی را بدقت در نظر

^{۲۵}Core Ellipticity

می‌گیرد. روش همایند^{۳۰} [۲۰] و روش اجزاء محدود برداری به صورت تحلیل برداری شناخته می‌شود و تحلیل روش تغییرات جزئی^{۳۱} [۳۱] همچنین برای محاسبه انکسار دوگانه هندسی، با این محدودیت که بیضی بودن هسته بهاندازه کافی کوچک است، قابل استفاده است.
انکسار دوگانه هندسی^{۳۲} B_g با روش تغییرات جزئی بطور تحلیلی بدست می‌آید

$$B_g = n_1 \Delta^\top \epsilon G(v), \quad (۲۳۳.۳)$$

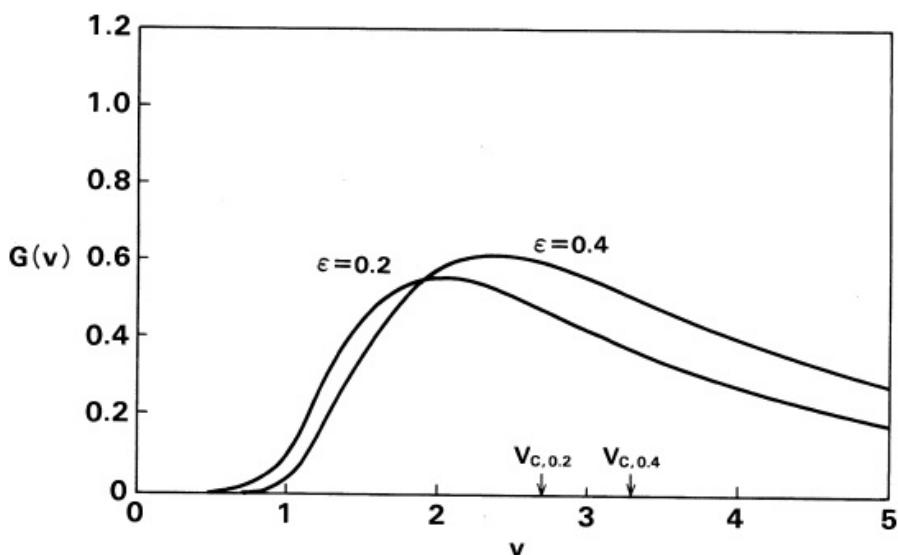
که در آن v نمایشگر فرکانس نرمالیزه است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$v = kn_1 a_x \sqrt{2\Delta} \quad (۲۳۴.۳)$$

و انکسار مضاعف هندسی $G(v)$ خواهد بود

$$G(v) = \frac{w^\top}{u^\top} \left\{ u^\top + (u^\top - w^\top) \left[\frac{J_0(u)}{J_1(u)} \right]^\top + uw^\top \left[\frac{J_0(u)}{J_1(u)} \right]^\top \right\} \quad (۲۳۵.۳)$$

معادله (۲۳۳.۳) برای بیضویت کوچک در حدود $\approx 10\%$ کاربرد دارد. حتی برای یک



شکل ۳۰.۳: انکسار مضاعف هندسی نرمالیزه $G(v)$ برای فیبر با هسته بیضوی

بیضویت نسبتاً بزرگ، معادله (۲۳۳.۳) هنوز تقریباً باقی است. با این حال، انکسار مضاعف هندسی نرمالیزه $G(v)$ ، همانطور که در شکل (۳۰.۳) نشان داده شده است، وابستگی‌های v متفاوتی نسبت به ϵ را دارد. شکست دوگانه هندسی نرمالیزه در شکل (۳۰.۳) به صورت عددی با استفاده از روش همایند^{۳۳} [۳۳] محاسبه می‌شود.

^{۳۶}Collocation Method

۴.۹.۳ دوشکستی مودی

ضریب شکست موثر مدهای HE_{xx}^x و HE_{yy}^y در یک فیبر دو شکستی از معادلات (۲۳۲.۳)، (۲۳۱.۳) و (۲۳۰.۲) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$n_x = \frac{\beta_x}{k} = n_{x_0} - C_1 \hat{\sigma}_x - C_2 (\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z) \quad (236.3)$$

$$n_y = \frac{\beta_y}{k} = n_{y_0} - C_1 \hat{\sigma}_y - C_2 (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x) \quad (237.3)$$

که در آن $n_{x_0} = \frac{\beta_x}{k}$ و $n_{y_0} = \frac{\beta_y}{k}$ نمایشگر ضریب شکست موثر با چشم پوشی از اثر تنش نامتقارن است. به عبارت دیگر، $n_{x_0} - n_{y_0}$ نشاندهنده دو شکستی هندسی B_g است. تنش اصلی موثر ($s = x, y, z$) با انتگرال همپوشانی توزیع تنش و شدت نور محاسبه می‌شود:

$$\hat{\sigma}_s = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \sigma_s(r, \theta) |\mathbf{E}|^2 r dr d\theta}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}|^2 r dr d\theta} \quad (s = x, y, z) \quad (238.3)$$

میدان الکتریکی $\mathbf{E}(r, \theta)$ برای هسته متقارن دایره‌ای بطور تحلیلی با معادلات (۹۴.۳) و (۹۵.۳) داده می‌شوند. به عبارت دیگر، میدان الکتریکی $\mathbf{E}(r, \theta)$ برای فیبر با هسته نامتقارن را باید با استفاده از روش همایند یا روش اجزاء محدود محاسبه کرد. دوشکستی القاء تنش B_s ^{۳۷} از معادلات (۲۳۵.۳)، (۲۳۵.۳ ب) و (۲۳۷.۳) به صورت زیر بدست می‌آید

$$B_s = (C_2 - C_1)(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y). \quad (239.3)$$

دو شکستی القاء تنش معمولاً بوسیله اصل اختلاف تنش در مرکز هسته $\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}$ تقریب می‌شود:

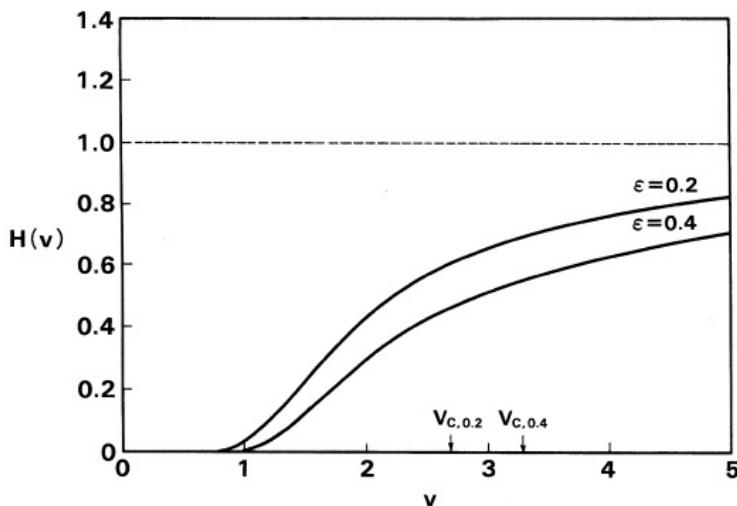
$$B_{s_0} = (C_2 - C_1)(\sigma_{x_0} - \sigma_{y_0}). \quad (240.3)$$

بطور کلی B_{s_0} نشان دهنده بیشینه دو شکستی القاء تنش است. در این صورت دو شکستی القاء تنش نرم‌الیزه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(v) = \frac{B_s}{B_{s_0}} \quad (241.3)$$

شکل (۳۱.۳) و (۳۲.۳) دو شکستی القاء تنش نرم‌الیزه را بترتیب برای فیبر با هسته بیضوی و پاندا (PANDA) نشان می‌دهد [۳۴]. از شکل‌ها مشاهده می‌شود که $H(v) \leq 0.5$ در فیبر با هسته بیضوی و ≈ 1.0 در فیبر پاندا در شرایط کارکرد عادی است. شکل‌های (۳۳.۳) و (۳۴.۳) انکسارهای هندسی و ناشی از تنش فیبر هسته بیضوی را با استفاده از ترکیب روش همایند برای B_g و روش اجزای محدود برای B_s مقایسه می‌کنند [۳۵]. در تجزیه و تحلیل تنش FEM، مدول یانگ $E = 783^\circ$ کیلوگرم بر میلی‌متر مربع، نسبت

^{۳۷} Stress-Induced Birefringence



شکل ۳۱.۳: انکسار مضاعف القائی نرمالیزه $H(v)$ برای فیبر با هسته بیضوی

پواسون $\nu = 0.186$ و اختلاف دما ΔT از دمای فرضی تا دمای اتاق، همانطور که در جدول ۳.۳ فهرست شده است، استفاده شده است [۳]. همچنین، فرکانس نرمالیزه v در $v = 0.9v_c$ برای هر فیبر هسته بیضوی انتخاب شده است. B_g و B_s در فیبرهای هسته بیضوی علامت یکسانی دارند و سپس به طور افزایشی به انکسار دوگانه کل کمک می‌کنند. بطوری که از شکل‌های (۳۳.۳) و (۳۴.۳) (۲۴.۳) دیده می‌شود، (۱) و (۲) متناسب با Δ^2 و Δ هستند و (۲) بیش از یک مرتبه بزرگتر از B_g برای فیبرهای کوچک با ضریب شکست $\Delta = 0.2 - 0.4\%$ است. و (۳) B_g برای فیبرهای بزرگ با ضریب شکست $> 1/5\%$ بزرگتر از B_s می‌شود. بنابراین، فیبر هسته بیضوی همیشه از نوع فیبر دوشکستگی هندسی نیست.

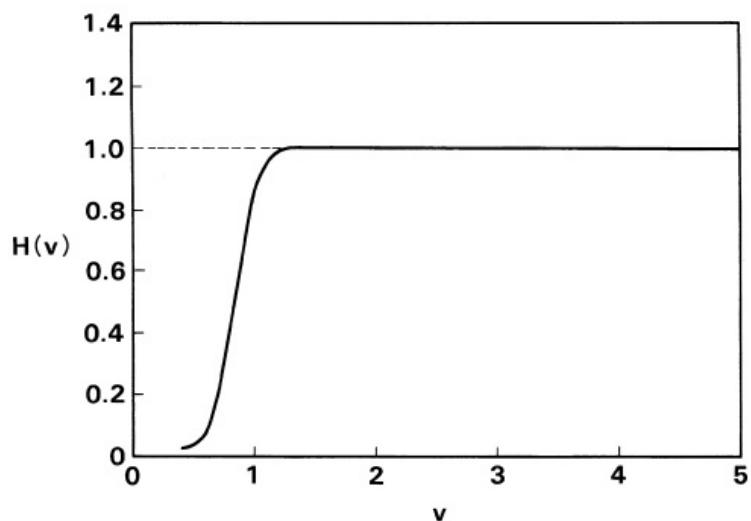
۵.۹.۳ پاشندگی مود قطبی

پاشندگی مود پلاریزاسیون، که با اختلاف تاخیر زمانی بین مودهای $HE_{\parallel\perp}^{11}$ و $HE_{\parallel\perp}^{22}$ داده می‌شود، از معادله‌های (۱۱۸.۳)، (۲۲۳.۳)، (۲۲۴.۳) و (۲۲۵.۳) به صورت زیر بیان می‌شود [۳۴].

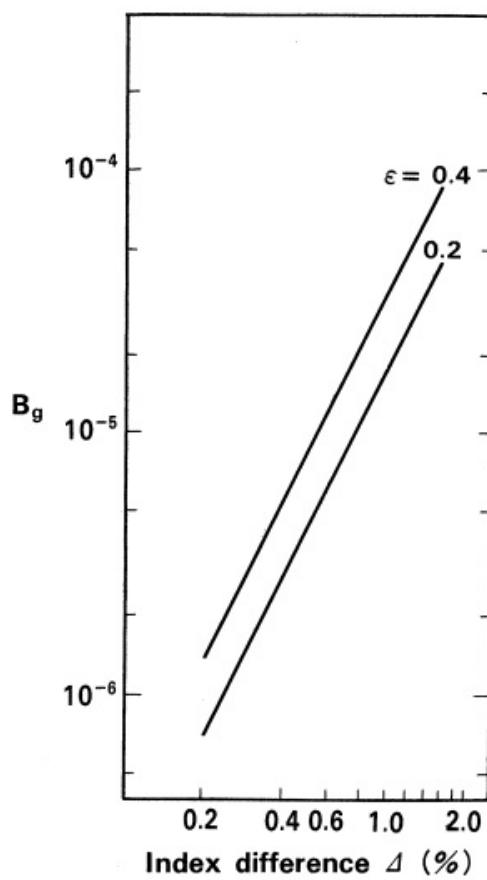
$$D = t_x - t_y = \frac{L}{c} \left(\frac{dB_x}{dk} - \frac{dB_y}{dk} \right) = \frac{\frac{L}{c} \frac{d(kB_g)}{dk} + \frac{L}{c} \frac{d(kB_s)}{dk}}{\frac{L}{c} \epsilon n_1 \Delta^2 \frac{d(vG)}{dv} + \frac{L}{c} B_{s\circ} \frac{d(vH)}{dv}} \quad (242.3)$$

به طور کلی، B_g و B_s هر دو به عدد موج k (یا فرکانس نرمالیزه v) بستگی دارند. بنابراین مشتق $G(v)$ و $H(v)$ نسبت به v باید در نظر گرفته شود. در فیبرهای صرفاً ناشی از تنش مانند فیبر پاندا، پاشندگی مود پلاریزاسیون به صورت زیر است

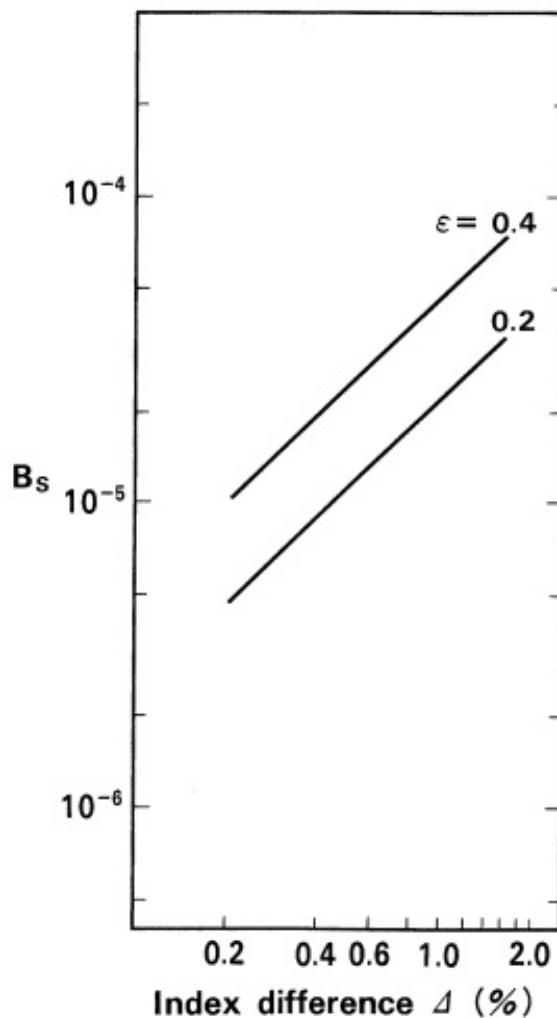
$$D = \frac{L}{c} B_{s\circ} = \frac{L}{c} (C_2 - C_1) (\sigma_{x\circ} - \sigma_{y\circ}), \quad (243.3)$$



شکل ۳۲.۳: انکسار مضاعف القائی نرمالیزه $H(v)$ برای فیبر پاندا (PANDA).



شکل ۳۳.۳: دو شکستی هندسی B_g در فیبر با هسته بیضوی



شکل ۳.۳: دو شکستی القائی تنش B_s در فیبر پاندا (PANDA).

جدول ۳.۳: ضرایب انبساط حرارتی و اختلاف دما

$\Delta T [^{\circ}C]$	$\alpha [\times 10^{-7} ^{\circ}C^{-1}]$	$\Delta (\%)$
-98°	6/6	0/2
-95°	8/0	0/4
-85°	10/6	0/8
-70°	17/6	1/6

از آنجایی که انکسار دوگانه هندسی $B_g = 0$ و انکسار دو جانبه ناشی از تنش، همانطور که در شکل (۳۲.۳) ($v > 1/5$) نشان داده شده است، تقریباً ثابت هستند. رفتار شکل موج پالس در فیبرهای نوری دو مودی، که در آن دو مود انرژی خود را از طریق تزویج مودی مبادله می‌کنند، در مراجع [۳۶] و [۳۷] آورده شده است. اختلاف تاخیر زمانی در مرکز دو مود به صورت زیر بیان می‌شود

$$T_{DGD} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}hL}}{\frac{1}{2}h} \cdot \frac{1}{c} \frac{d(\delta\beta)}{dk}, \quad (244.3)$$

که در آن $\delta\beta = \beta_x - \beta_y$ و $h(m^{-1})$ نمایشگر ضریب تزویج مودی (یا تبدیل مودی) است. T_{DGD} را تاخیر گروهی جزئی (DGD)^{۳۸} می‌نامند. برای دو حالت حد با $1 \ll hL \ll 1$ و $hL \gg 1$ می‌شود:

$$T_{DGD} = \begin{cases} \frac{L}{c} \frac{d(\delta\beta)}{dk} & (hL \ll 1) \\ \frac{1}{2hc} \frac{d(\delta\beta)}{dk} & (hL \gg 1) \end{cases} \quad (245.3)$$

عرض پالس $\delta\tau_{PMD}$ از طریق جذر میانگین مربع (rms)^{۳۹} حل معادله تزویج مودی [۳۶]

$$\delta\tau_{PMD} = \sqrt{\langle(\delta\tau)^2\rangle} = \frac{\sqrt{(e^{-\frac{1}{2}hL} - 1)/2 + hL}}{h} \cdot \frac{1}{c} \frac{d(\delta\beta)}{dk} \quad (246.3)$$

که در آن $\delta\tau_{PMD}$ نمایشگر پاشندگی مود قطبی در فیبرهای تک مودی معمولی است. عرض پالس rms به صورت زیر ساده می‌شود

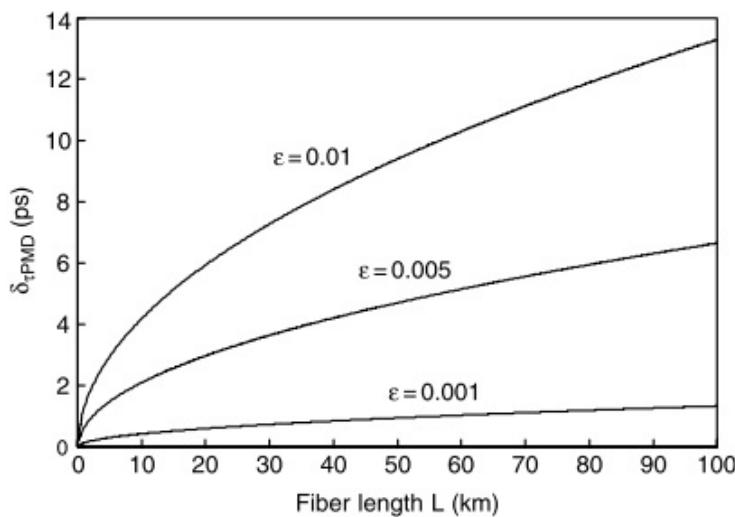
$$\delta\tau_{PMD} \approx \begin{cases} \frac{L}{c} \frac{d(\delta\beta)}{dk} & (hL \ll 1) \\ \frac{\sqrt{L/h}}{c} \frac{d(\delta\beta)}{dk} & (hL \gg 1) \end{cases} \quad (247.3)$$

برای دو حالت محدود کننده با $1 \ll hL \ll 1$ و $hL \gg 1$ است. در حد تزویج مود ناچیز، حالات اصلی پلاریزاسیون به مودهای پلاریزاسیون فیبر تبدیل می‌شوند و تاخیر زمانی جزئی بین حالت‌های اصلی به سادگی با تفاوت در سرعت گروهی برای دو مود قطبی تعیین می‌شود. در نتیجه، $\delta\tau_{PMD} \propto L$ مقادیر $\delta\tau_{PMD}$ را می‌گیرد. در حد تزویج مودی گسترده، حالات اصلی و تاخیر زمانی جزئی در یک فیبر دیگر با خواص فیبر محلی مرتبط نیستند زیرا به اثرات جمعی تزویج مود تصادفی در کل مسیر انتشار فیبر بستگی دارند. بنابراین، تزویج مودی دارای اثر یکسان‌سازی^{۴۰} است، زیرا واریانس $\delta\tau$ را با ضریب $1/\sqrt{hL}$ نسبت به حالت تزویج بدون مود کاهش می‌دهد.

^{۳۸}Differential Group Delay (DGD)

^{۳۹}Root-Mean-Square (rms)

^{۴۰}Equalizing Effect



شکل ۳۵.۳: وابستگی طولی عرض پالس rms در فیبرهای هسته بیضوی

[۳۸] ضریب تزویج مودی h به صورت زیر بیان می‌شود

$$h = \frac{h_0}{1 + (\beta_x - \beta_y)^2 L_0}, \quad (۲۴۸.۳)$$

که در آن مقادیر معمولی $h_0 = 5/3 \times 10^{-3} (m^{-1})$ و $L_0 = 2.7 \times 10^{-2} (m)$ معمولاً برابر هستند با جمله $(L/c)[d(\delta\beta)/dk]$ برای فیبر با هسته بیضوی از معادله (۲۴۲.۳) خواهد بود

$$\frac{L}{c} \frac{d(\delta\beta)}{dk} = \frac{L}{c} \epsilon n_1 \Delta^2 \frac{d(vG)}{dv} + \frac{L}{c} B_{s0} \frac{d(vH)}{dv} \quad (۲۴۹.۳)$$

مقادیر $d(vH)/dv$ و $d(vG)/dv$ را بترتیب با استفاده از شکل (۳۰.۳) و شکل (۳۱.۳) بصورت عددی محاسبه می‌شود. شکل (۳۵.۳) وابستگی طولی عرض پالس rms در فیberهای با هسته بیضوی با $v = 2/2$ و $\Delta = 0.8\%$ را نشان میدهد. از شکل‌های (۳۰.۳) و (۳۱.۳)، $G(v) = 0.4353$ ، $H(v) = 0.4777$ ، $d(vG)/dv = 0.132$ و $d(vH)/dv = 0.101$ بدست می‌آید. از شکل (۳۵.۳) معلوم است که عرض پالس بترتیب برای $\epsilon = 0.01$ برابر با $\delta\tau_{PMD} \propto 1/33 ps/km^{1/2}$ و برای $\epsilon = 0.005$ برابر با $\delta\tau_{PMD} \propto 1/66 ps/km^{1/2}$ و بازاء $\epsilon = 0.001$ برابر با $\delta\tau_{PMD} \propto 1/3 ps/km^{1/2}$ بیان می‌شود.

۱۰.۳ کنترل پاشندگی در فیبرهای نوری تک مودی

۱.۱۰.۳ یکسان‌سازی پاشندگی در فیبرها

فیبرهای نوری تک مودی که در آنها طول موج‌های پاشندگی صفر بهناحیه $1/55\mu m$ منتقل می‌شود (شکل ۴۲.۵) فیبرهای پاشندگی انتقال یافته (DSFs)^{۴۱} نامیده می‌شوند. بهمنظور تمایز فیبرهای تک مودی استاندارد با طول موج‌های پاشندگی صفر در اطراف ناحیه $1/3\mu m$ (شکل ۴۲.۶) از DSF‌ها، فیبرهای تک مود استاندارد به سادگی فیبرهای تک مودی (SMFs)^{۴۲} نامیده می‌شوند. همانطور که در بخش ۳.۸ توضیح داده شد، حداکثر نرخ بیت B فیبر با $B = 234/\sqrt{\sigma L}(Gbit/s)$ که در آن σ پاشندگی رنگی بر حسب $ps/km/nm$ و طول فیبر L بر حسب کیلومتر است، داده می‌شود. از آنجایی که پاشندگی رنگی SMF حدود ۱۷ $ps/km/nm$ در ناحیه $1/55\mu m$ است، حداکثر نرخ بیت $B = 5/7$ گیگابیت بر ثانیه برای $L = 100$ کیلومتر است. در این صورت نمی‌توانیم سیگنال ده گیگابیت بر ثانیه را در چنین فیبرهای SMF ارسال کنیم. فیبر جبران کننده پاشندگی (DCF)^{۴۳} مولفه‌های مبتنی بر فیبر کاملاً جالب برای ارتقاء SMF‌های موجود هستند. شکل (۳۶.۳) به ترتیب پاشندگی‌های رنگی SMF و DCF را نشان می‌دهد. اختلاف Δ ضریب شکست $2/8\%$ و قطر هسته $2a = 1/6\mu m$ و $\lambda_c = 0/74\mu m$ است. پاشندگی رنگی DCF در $1/55\mu m$ - است. مشخص است که وقتی $16/2$ کیلومتر طول DCF را به طول 100 کیلومتر SMF متصل می‌کنیم، پاشندگی رنگی کل فیبر انتقال در $1/55\mu m$ صفر می‌شود.

۲.۱۰.۳ فیبر با پاشندگی جابجا شده

فیبرهای با پاشندگی بر اساس ضریب شکست پله‌ای قبل^۳ در بخش ۳.۶.۵ توضیح داده شده است. طول موج قطع DSF ضریب شکست پله‌ای معمولاً $1/0\mu m$ است تا پاشندگی موجبر در ناحیه $1/55\mu m$ بزرگتر شود. تحت پارامترهای موجبر، $\Delta = 0/7\%$ و $2a = 4/6\mu m$ ، طول موج قطع $\lambda_c = 1/0/3\mu m$ بنا براین مستعد از دست دادن خمین زیاد است زیرا افزونگی نور در هسته ضعیف می‌شود. علاوه بر این، از آنجایی که DSF ضریب شکست پله‌ای قطر هسته کوچکی دارد، اندازه نقطه میدان نور کوچک می‌شود. اثر نوری غیرخطی در فیبرهای نوری بهشت میدان نور همانطور که در فصل پنجم توضیح داده خواهد شد بستگی دارد. شدت نوری I با رابطه زیر بیان می‌شود

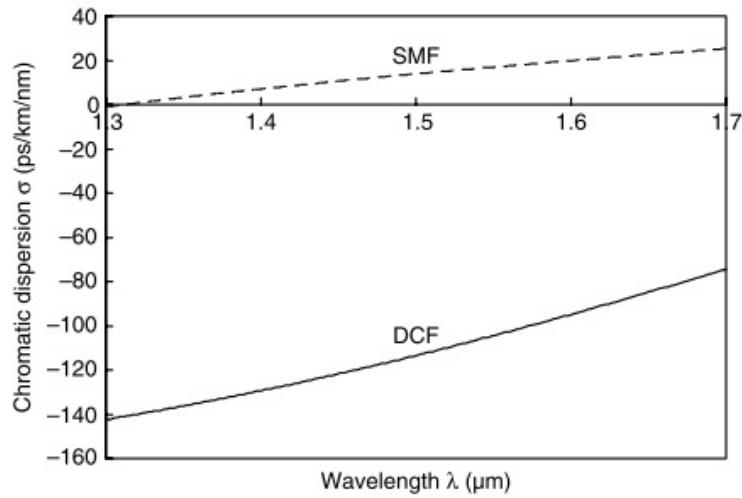
$$I = \frac{P}{A_{eff}} \quad (250.3)$$

که در آن P قدرتی است که توسط مود حمل و A_{eff} نشان دهنده ناحیه هسته موثر تعريف شده توسط معادله (۴۲.۵) است. شکل (۳۷.۳) مساحت هسته موثر SMF را به ترتیب با

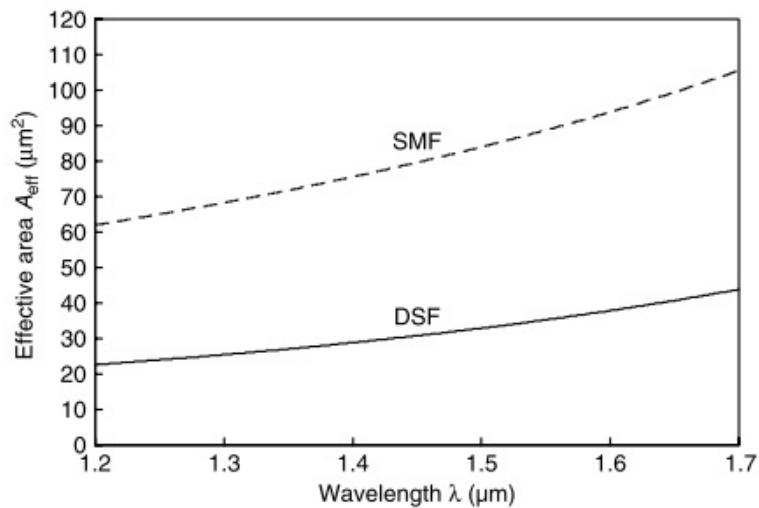
^{۴۱} Dispersion-Shifted Fibers (DSFs)

^{۴۲} Single-Mode Fibers (SMFs)

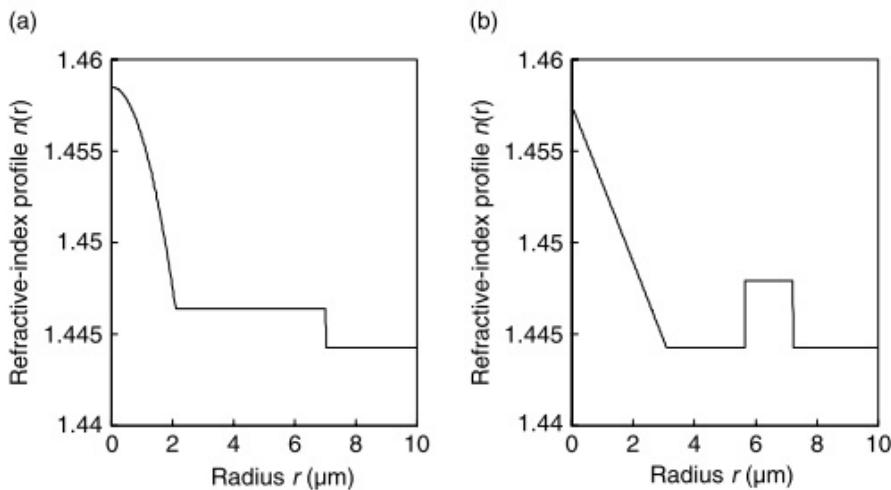
^{۴۳} Dispersion Compensating Fibers (DCFs)



شکل ۳۶.۳: پاشندگی رنگی SMF با $\Delta = 0.3\%$ و DCF با $\Delta = 2.8\%$ (نقطه چین) و (خط پُر) $2a = 1.6 \mu\text{m}$



شکل ۳۷.۳: سطح هسته موثر SMF با $\Delta = 0.3\%$ و DSF با $\Delta = 0.75\%$ (نقطه چین) و (خط پُر) $2a = 4.6 \mu\text{m}$



شکل ۳۸.۳: شکل ضریب شکست (الف) DSF هسته شکل دوگانه و (ب) DSF هسته تکهای

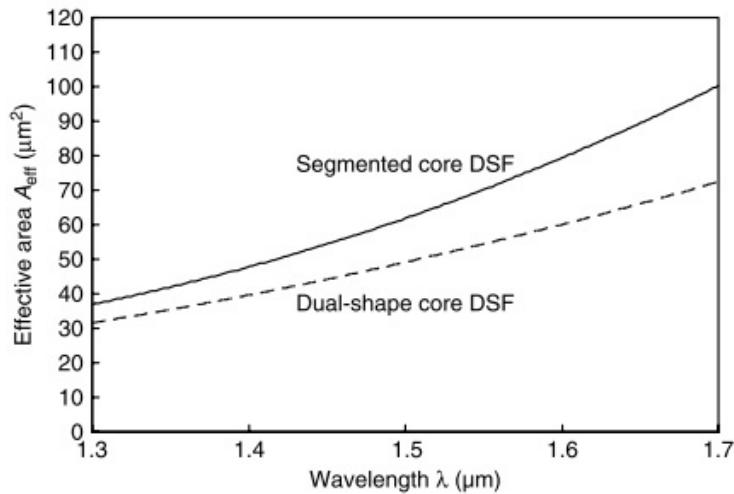
خط نقطه چین) و DSF با $\Delta = ۰/۷۵\%$ ، $\Delta = ۸/۲\mu m$ ، $\Delta = ۴/۶\mu m$ (خط نشان می‌دهد. مساحت موثر DSF حدود $۱/۲/۵ \mu m^2$ ، $A_{eff} = ۳۵/۳ \mu m^2$) DSF است. اثرات نوری غیرخطی معمولاً باعث اعوجاج شکل موج سیگنال از طریق مدولاسیون خودفازی و اثر مخلوط چهار موجی می‌شود که در فصل پنجم توضیح داده خواهد شد. به منظور بزرگ‌تر کردن ناحیه هسته مؤثر DSF ، انواع مختلفی از پیکربندی‌های ضریب شکست پیشنهاد شده‌اند. در میان آنها (الف) DSF هسته شکل دوگانه [۳۹] و (ب) DSF هسته تکهای [۴۰] شرح داده خواهد شد. شکل (۳۸.۳) (الف) و (ب) شکلهای ضریب شکست (الف) DSF هسته شکل دوگانه و (ب) DSF هسته تکهای را نشان می‌دهد. فیبر هسته شکل دوگانه دارای ناحیه پایه است و فیبر هسته تکهای دارای ناحیه حلقه بیرونی است تا میدان نور را بهشت محدود کند. نقش این نواحی دوگانه است: یکی کاهش افت خمی و دیگری بزرگ کردن ناحیه موثر هسته. شکل (۳۹.۳) ناحیه هسته موثر DSF هسته شکل دوگانه و DSF هسته تکهای را نشان می‌دهد. مساحت موثر DSF هسته شکل دوگانه و DSF هسته تکهای در m به $۱/۵۵ \mu m^2$ ، $A_{eff} = ۵۴/۴ \mu m^2$ و $۷۰/۲ \mu m^2$ بزرگ شده است.

شکل (۴۰.۳) پاشندگی‌های رنگی DSF هسته دو شکل (خط نقطه چین)، DSF هسته تکهای (خط جامد ضخیم) و DSF ضریب شکست پله‌ای (خط جامد نازک) را نشان می‌دهد. مشخص شده است که شب پاشندگی رنگی در DSF هسته شکل دوگانه و DSF هسته تکهای دو برابر بزرگ‌تر از DSF ضریب شکست پله‌ای می‌شود. شب پاشندگی رنگی را شب پاشندگی می‌گویند که توسط رابطه زیر بیان می‌شود

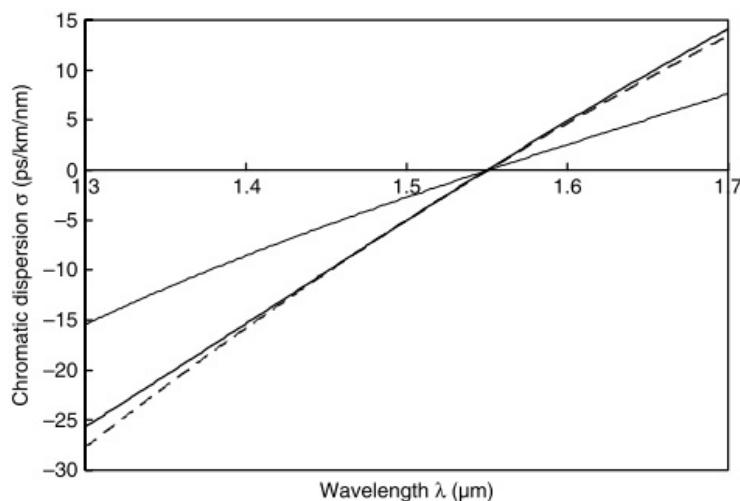
$$\rho = \frac{d\sigma}{d\lambda} \quad (۲۵۱.۳)$$

^{۴۴}Dual-Shape Core DSF

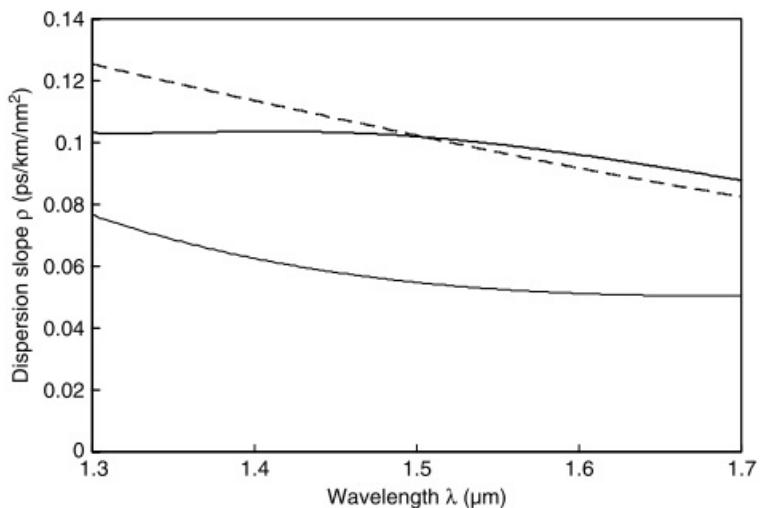
^{۴۵}Segmented Core



شکل ۳۹.۳: سطح موثر هسته DSF هسته شکل دوگانه (نقطه چین) و DSF هسته تکه‌ای (خط توپر)



شکل ۴۰.۳: پاشندگی‌های رنگی DSF هسته شکل دوگانه (خط نقطه چین)، DSF هسته تکه‌ای (خط جامد ضخیم) و DSF ضریب شگست پله‌ای (خط جامد نازک).



شکل ۴.۱.۳: شیب‌های پاشندگی DSF هسته شکل دوگانه (خط نقطه چین)، DSF هسته تکهای (خط جامد ضخیم) و DSF ضریب شکست پله‌ای (خط جامد نازک).

شکل (۴۱.۳) شیب‌های پاشندگی DSF هسته شکل دوگانه (خط نقطه چین)، DSF هسته تکهای (خط جامد ضخیم) و DSF ضریب شکست پله‌ای (خط جامد نازک) را نشان می‌دهد. در فیبرهای شیب پاشندگی بزرگ، زمانی که طول موج سیگنال از طول موج پاشندگی صفر جدا شود، پاشندگی رنگی به سرعت بزرگ می‌شود. در این صورت سیگنال‌های با نرخ بیت بالا، که دارای طیف فرکانس وسیع هستند، تمایل به اعوجاج سیگنال دارند. فیبر با شیب پاشندگی بزرگ نیز در سیستم‌های مالتی پلکس تقسیم طول موج (۴۶)(WDM) مشکل ایجاد می‌کند. کانال‌های سیگنالی که از طول موج پاشندگی صفر جدا می‌شوند، به دلیل پاشندگی‌های رنگی زیاد، دچار اعوجاج سیگنال بیشتری می‌شوند.

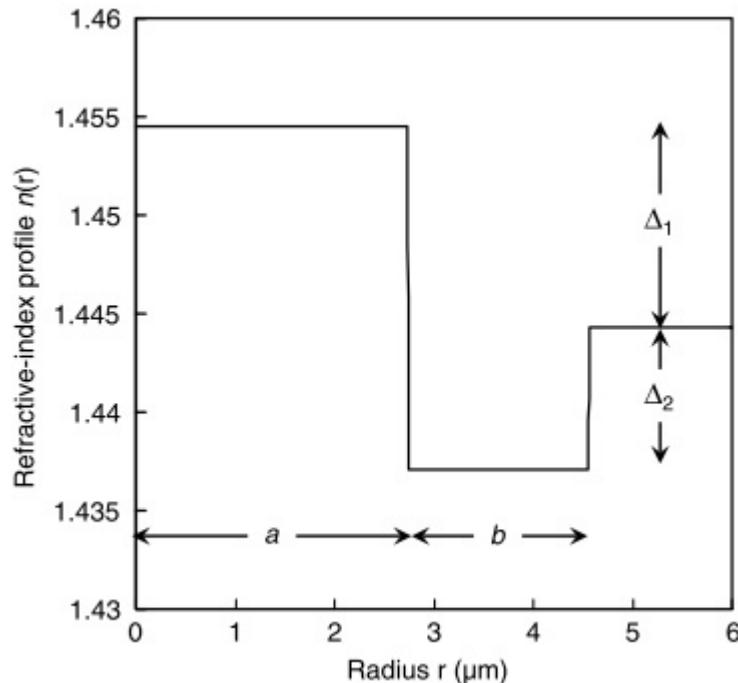
۳.۱۰.۳ فیبر با پاشندگی صاف

همانطور که در بخش قبل بحث شد، به حداقل رساندن شیب پاشندگی برای انتقال با نرخ بیت بالا و سیستم‌های WDM مهم است. فیبرهای نوری که دارای پاشندگی بسیار کمی در یک محدوده طول موج وسیع هستند، فیبرهای با پاشندگی صاف (۴۷)(DFFs) نامیده می‌شوند. اولین پیشنهاد DFF توسط اکاموتو [۴۸]، [۴۹] با استفاده از فیبر تک مودی با شکل‌های ضریب شکست نوع W [۴۳] ارائه شد. شکل ضریب شکست DFF نوع W در شکل (۴۲.۳) نشان داده شده است. شعاع هسته a ، ضخامت روکش داخلی b ، اختلاف ضریب شکست هسته و روکش داخلی Δ_1 و Δ_2 به ترتیب بهینه شده‌اند به طوری که پاشندگی موجبر پاشندگی مواد را تقریباً به طور کامل حذف می‌کند. شکل (۴۳.۳)

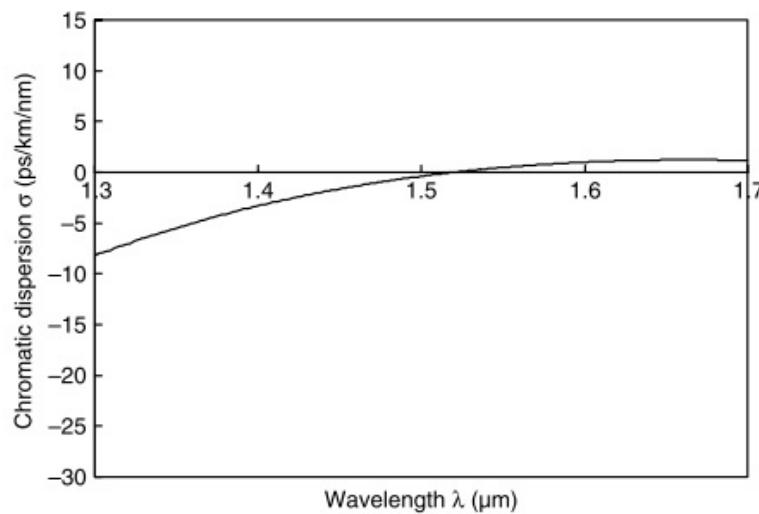
^{۴۶}Wavelength Division Multiplexing (WDM)

^{۴۷}Dispersion Flattened Fibers (DFFs)

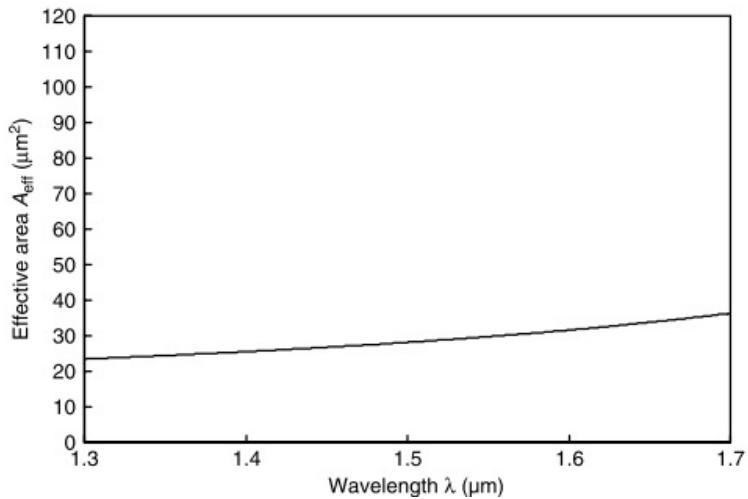
^{۴۸}Okamoto



شکل ۴۲.۳: شکل ضریب شکست نوع DFF . W و $\Delta_1 = +7\%$ ، $b = 1.77\mu\text{m}$ ، $a = 2.73\mu\text{m}$ ، $\Delta_2 = -5\%$



شکل ۴۳.۳: مشخصات پاشندگی رنگی نوع DFF . W



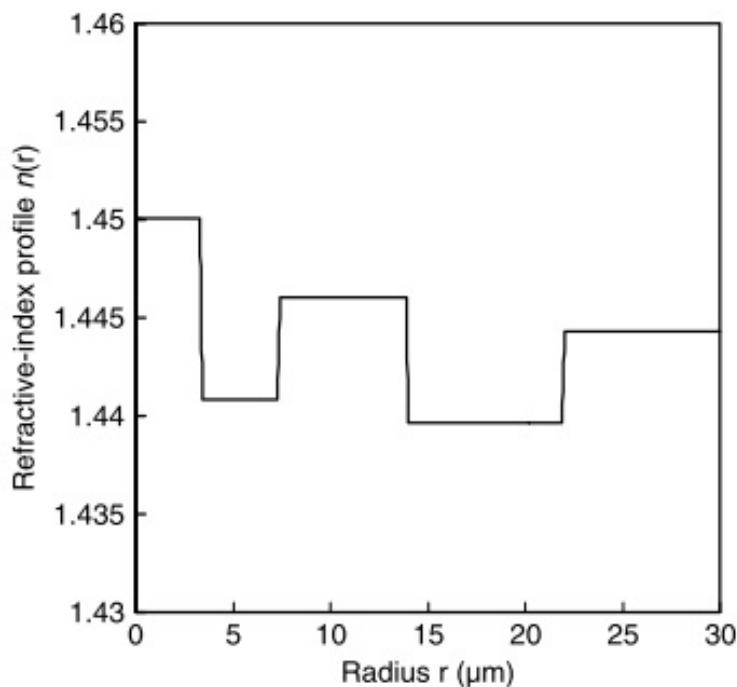
شکل ۴.۳: سطح هسته موثر DFF نوع W

ویژگی‌های پاشندگی رنگی DFF نوع W را نشان می‌دهد. مشخص است که پاشندگی رنگی در محدوده طول موج $1/47 - 1/6 \mu\text{m}$ به کمتر از $1 \text{ ps/km/nm} \pm 1 \text{ ps/km/nm}$ کاهش می‌یابد. مساحت موثر DFF نوع W حدود $A_{eff} = 30 \mu\text{m}^2$ در طول موج $1/55 \mu\text{m}$ است (شکل ۴۴.۳)، که برای حذف اعوجاج شکل موج سیگنال به دلیل اثر نوری غیرخطی به اندازه کافی بزرگ نیست. به منظور بزرگ‌تر کردن ناحیه هسته مؤثر و در عین حال حفظ پاشندگی کم در یک محدوده طیفی وسیع، یک DFF با پوشش چهارگانه (QC)^{۴۹} پیشنهاد شده است [۴۶]. شکل (۴۵.۳) شکل ضریب شکست DFF نوع QC را نشان می‌دهد. ناحیه حلقه‌ای شکل $r = 7 - 14 \mu\text{m}$ و حلقه بیرونی روکش تحت فشار $22 \mu\text{m}$ برای بزرگ‌کردن ناحیه اصلی هسته مفید است. شکل‌های (۴۶.۳) و (۴۷.۳) ویژگی‌های پاشندگی رنگی و ناحیه هسته موثر DFF از نوع QC را نشان می‌دهند. پاشندگی رنگی به کمتر از $1 \text{ ps/km/nm} \pm 1 \text{ ps/km/nm}$ در محدوده طول موج $1/43 - 1/6 \mu\text{m}$ کاهش می‌یابد. مساحت موثر DFF نوع QC حدود $A_{eff} = 55 \mu\text{m}^2$ در طول موج $1/55 \mu\text{m}$ است که تقریباً دو برابر بزرگ‌تر از DFF نوع W است. شکل (۴۸.۳) شیب‌های پاشندگی DFF نوع W (خط نقطه چین) و QC نوع DFF (خط توپر) را نشان می‌دهد. تایید شده است که شیب‌های پاشندگی در محدوده طول موج (λ) $1/4 - 1/6 \mu\text{m}$ بسیار کوچک هستند زیرا پاشندگی‌ها در این مناطق طیفی مسطح می‌شوند.

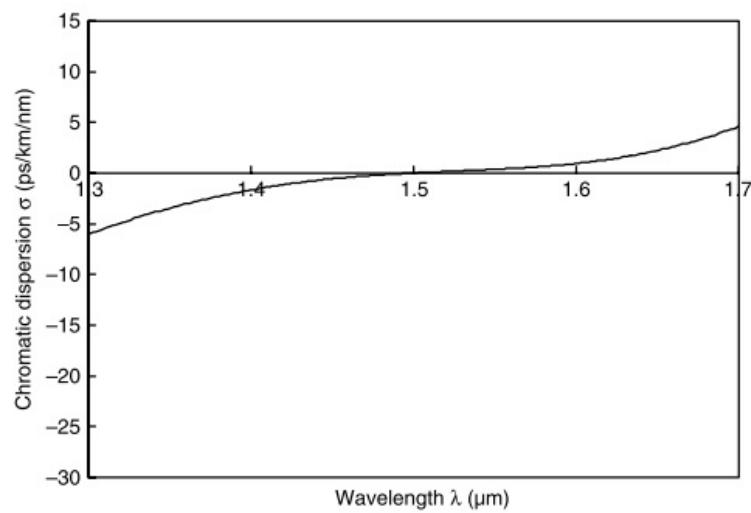
۴.۱۰.۳ فیبرهای جبران کننده پاشندگی گسترده

فیبرهای DFF یک محیط انتقال ایده‌آل برای سیستم‌های تک کاناله با نرخ بیت فوق العاده بالا است. با این حال، در سیستم‌های WDM، اثرات نوری غیرخطی بین کانالی

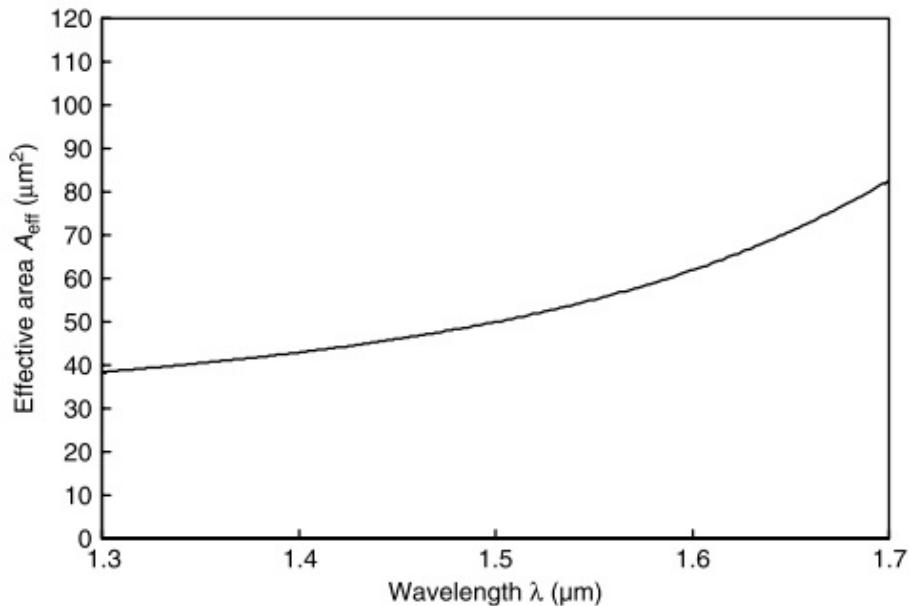
^{۴۹} Quadruple-Clad (QC)



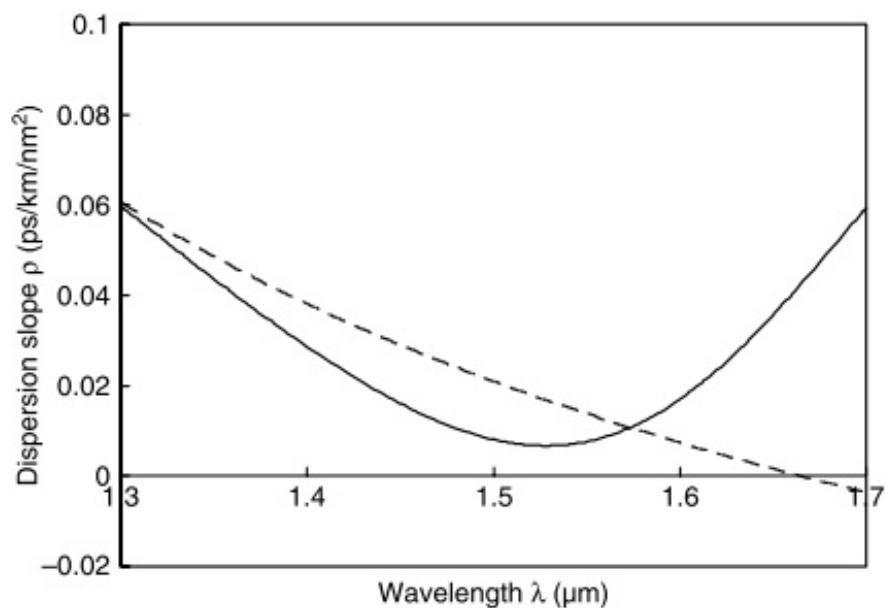
شکل ۴۵.۳: شکل ضریب شکست نوع DFF QC



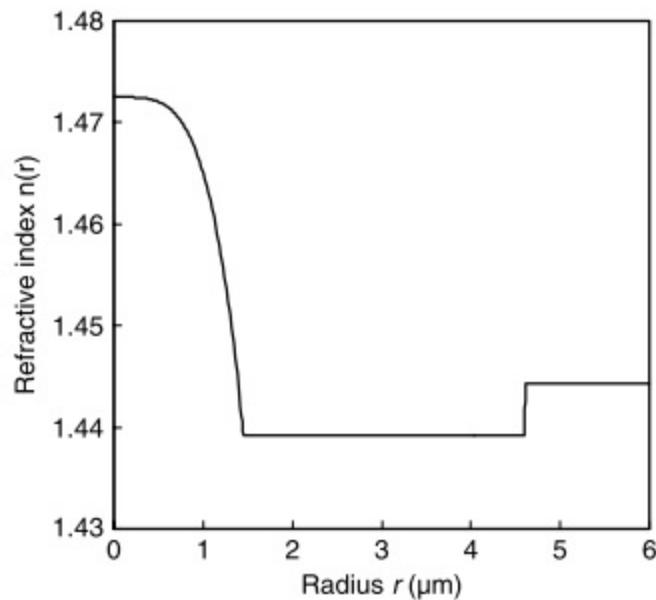
شکل ۴۶.۳: مشخصات پاشندگی رنگی نوع DFF QC



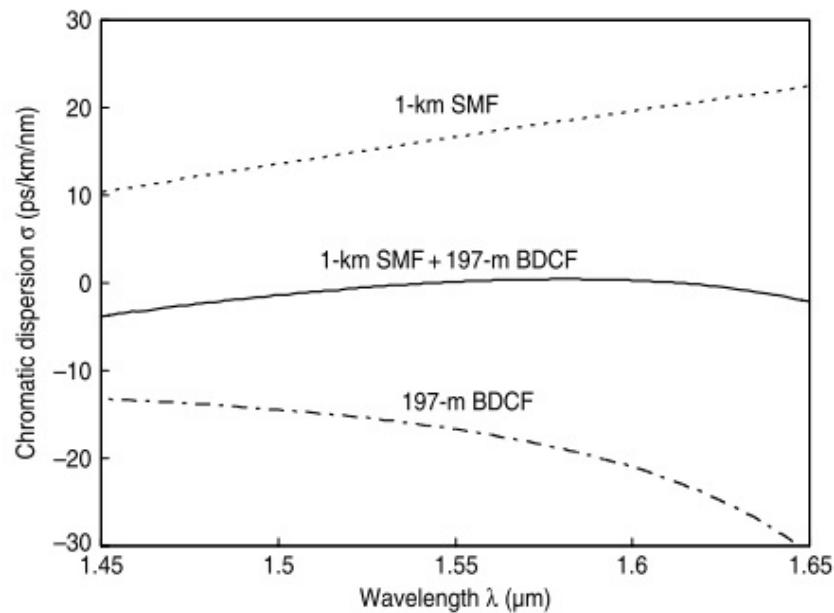
شکل ۴۷.۳: سطح هسته موثر نوع DFF QC



شکل ۴۸.۳: شیب‌های پاشندگی DFF نوع W (نقطه چین) و DFF نوع QC (خط توپر)



شکل ۴۹.۳: شکل ضریب شکست BDCF.



شکل ۵۰.۳: پاشندگی رنگی یک کیلومتر از SMF (نقطه چین) BDCF ۱۹۷m (خط - نقطه) و پاشندگی کلی BDCF+SMF (خط توپر)

مانند مخلوط چهار موج (رجوع کنید به بخش ۵.۱۰) و مدولاسیون فاز متقطع (XPM)^{۵۰} [۴۵] باعث تخریب شدید شکل موج سیگنال می‌شوند، زیرا سیگنال‌های نوری دارای طول موج‌های متفاوت تقریباً با همان سرعت‌های گروهی مدولاسیون فاز متقطع همیشه با مدولاسیون خود فاز (SPM)^{۵۱} همراه است و به این دلیل رخ می‌دهد که ضربیت شکست مؤثر یک موج نه تنها به شدت آن موج بلکه به شدت سایر امواج هم انتشار در WDM نیز بستگی دارد. فیبرهای جبران کننده پاشندگی گستردگی (BDCFs)^{۵۲} [۴۷، ۴۶] برای کاهش اختلال سیگنال غیرخطی در حالی که صافی پاشندگی حفظ می‌شود، پیشنهاد شده است. شکل (۴۹.۳) شکل ضربیت شکست BDCF معمولی را نشان می‌دهد. اساساً، BDCF دارای شکل‌های ضربیت شکست نوع W [۴۶] یا هسته تکه‌ای [۴۷] است. پاشندگی کروماتیک BDCF به گونه‌ای طراحی شده است که تقریباً به طور کامل پاشندگی SMF را هنگامی که دو فیبر با نسبت مشخصی از طول به هم متصل می‌شوند، خنثی می‌کند. شکل (۵۰.۳) پاشندگی رنگی SMF یک کیلومتری (خط نقطه چین)، ۱۹۷ متری BDCF (خط شکسته) و پاشندگی کل BDCF + SMF (خط توپر) را نشان می‌دهد. پاشندگی رنگی کل + SMF به کمتر از $\lambda = 1,524 - 1,624 \mu\text{m}$ در محدوده $\pm 0.5 \text{ ps/km/nm}$ کاهش می‌یابد. مزیت خط انتقال متشکل از SMF و BDCF این است که پاشندگی محلی هر فیبر به طور قابل ملاحظه‌ای زیاد است. این بدان معنی است که سیگنال‌های نوری با طول موج‌های مختلف در سیستم‌های WDM با سرعت‌های گروهی مختلف در SMF و BDCF حرکت می‌کنند. سپس، تعاملات غیرخطی بین کانال‌های WDM به حداقل می‌رسد. اگرچه پاشندگی محلی بزرگ است، اما پاشندگی کل برای همه کانال‌های WDM، همانطور که در شکل (۵۰.۳) نشان داده شده، تقریباً به صفر می‌رسد. بنابراین، سیگنال‌های با نرخ بیت فوق العاده بالا می‌توانند در فواصل طولانی بدون آسیب‌های سیگنال غیرخطی بین کانالی منتقل شوند.

۱۱.۳ فیبرهای کریستال فتونیک

فیبرهای نوری سنتی، که ضربیت شکست هسته آنها بالاتر از روکش فلزی است، میدان نور را با بازتاب کلی داخلی محدود می‌کنند. یه و همکاران^{۵۳} فیبر برآگ پیشنهادی (شکل ۵۱.۳) که در آن حلقه‌هایی با ضربیت شکست بالا و پایین در اطراف یک هسته مرکزی قرار گرفته‌اند [۴۸]. در فیبرهای برآگ، نور نمی‌تواند به روکش نفوذ کند زیرا نور توسط شرایط برآگ منعکس می‌شود. در این صورت، پرتو نور، که در انتهای ورودی به فیبر برآگ متصل می‌شود، در امتداد فیبر منتشر می‌شود. از آنجایی که نور توسط شرایط برآگ محدود می‌شود، ضربیت شکست هسته می‌تواند کمتر از روکش باشد یا هسته می‌تواند هوا باشد [۴۹، ۵۰]. محدوده فرکانس ممنوع در ساختارهای دی‌الکتریک تناوبی روکش، گاف باند فوتونیک^{۵۴} نامیده می‌شود. فیبرهای برآگ از تناوب عرضی یک بعدی حلقه‌های

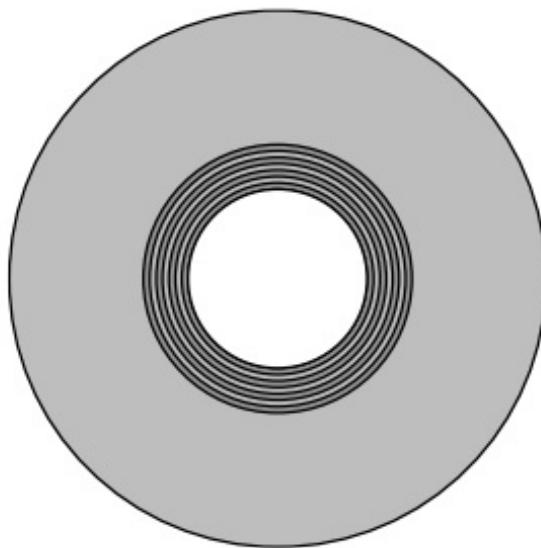
^{۵۰} Cross-Phase Modulation (XPM)

^{۵۱} Self-Phase Modulation (SPM)

^{۵۲} Broadly Dispersion Compensating Fibers

^{۵۳} Yeh et al.

^{۵۴} Photonic Bandgaps



شکل ۵۱.۳: فیبر برگ

متحdalمرکز استفاده می‌کنند. دسته دیگری از فیبرهای وجود دارد که از تناوب عرضی دو بعدی استفاده می‌کنند [۵۱، ۵۲]. این فیبرها را فیبرهای کریستال فوتونی (PCF) یا فیبرهای توخالی (HFs)^{۵۵} می‌نامند. PCF‌ها به دو دسته طبقه بندی می‌شوند: PCF هسته جامد (شکل ۵۲.۲) و PCF هسته توخالی (شکل ۵۲.۳). یک PCF هسته جامد نور را در زوایای تابش تند در مرز هسته-روکش شکست می‌دهد. هنگامی که زاویه بهاندازه کافی کم عمق است، نور در هسته محبوس و در امتداد فیبر هدایت می‌شود. یک PCF هسته توخالی با روکش مناسب می‌تواند نور را در زوایای تابشی جایی که گاف باند فوتونیک عمل می‌کند هدایت کند. بنابراین، PCF هسته توخالی نیاز به کنترل دقیق ساختارهای روکش تناوبی دارد.

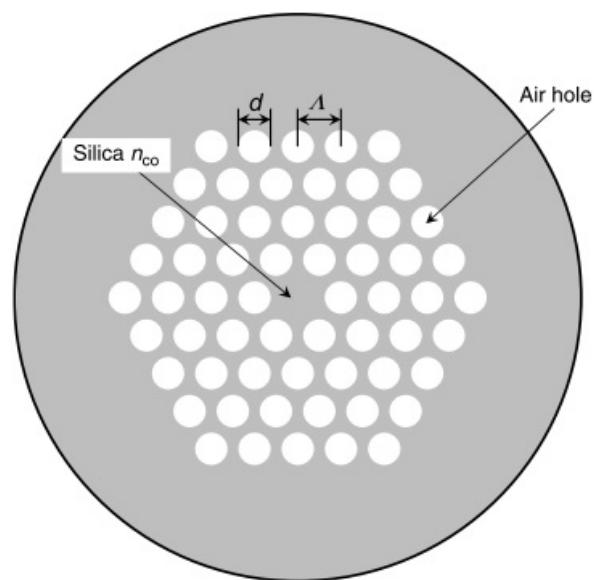
ساختار فیبر PCF توسط (الف) گام سوراخ هوا، (ب) قطر سوراخ d و (ج) تعداد سوراخهای هوا NAH تعیین می‌شود. اصل هدایت نور PCF هسته جامد اساساً مشابه فیبرهای نوری سنتی است. با این حال، هیچ مرز مشخصی بین ناحیه هسته جامد و ناحیه روکش هوا سوراخ وجود ندارد. از طرف دیگر، تفاوت ضریب شکست وجود دارد زیرا میانگین ضریب شکست در روکش فلزی کمتر از ضریب شکست در هسته است. مشخص شد که مرز مشترک هسته-روکش ناپیوسته به طور مستقیم تأثیر بسیار مهمی بر هدایت میدان نور دارد [۵۳]. فرکانس نرمالیزه موثر برای PCF با رابطه زیر تعریف شده است.

$$v_{eff} = \frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2}, \quad (252.3)$$

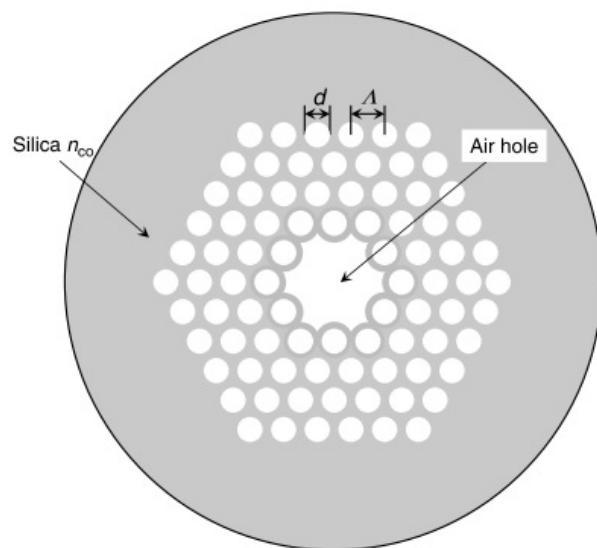
که در آن n_{co} ضریب شکست سیلیس است، $n_{cl} = \beta_{FSM}/k$ نشان دهنده ضریب شکست

^{۵۵}Photonic Crystal Fibers (PCFs)

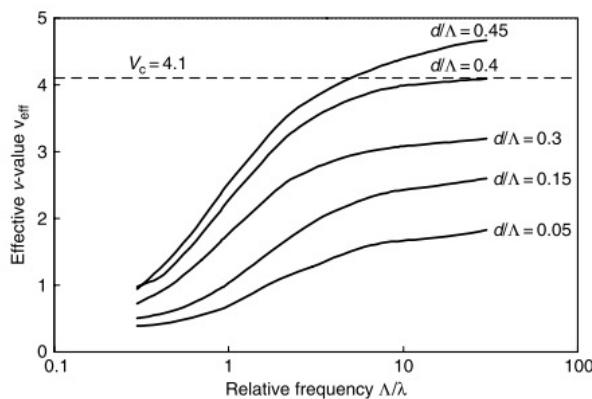
^{۵۶}Holey fFbers (HFs)



شکل ۵۲.۳: فیبر کریستال فوتونی هسته-جامد



شکل ۵۳.۳: فیبر کریستال فوتونی هسته-توخالی

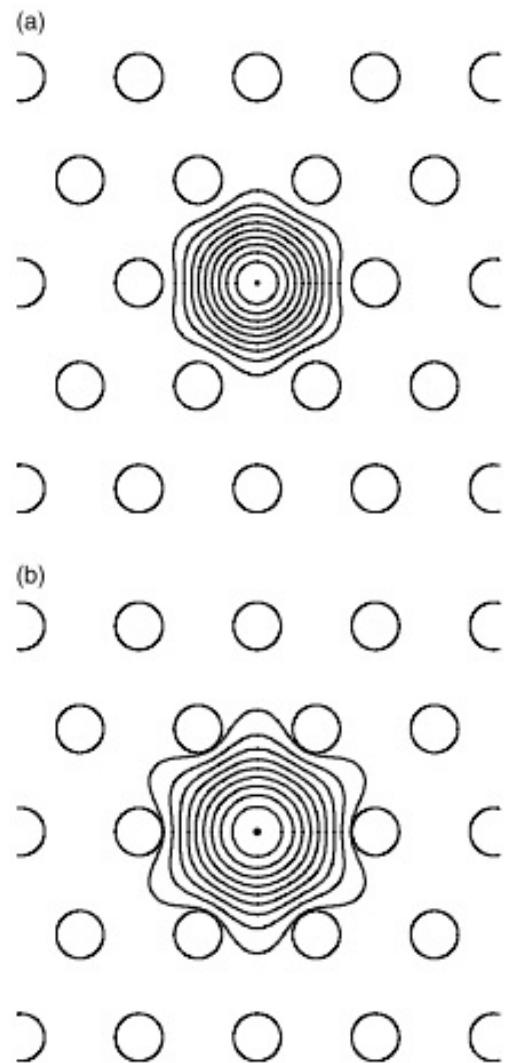


شکل ۵۴.۳: تغییرات v_{eff} نسبت به Λ/λ برای قطرهای مختلف سوراخ d/λ . خط چین برای $v_c = 4.1$ مقدار قطع v برای PCF است.

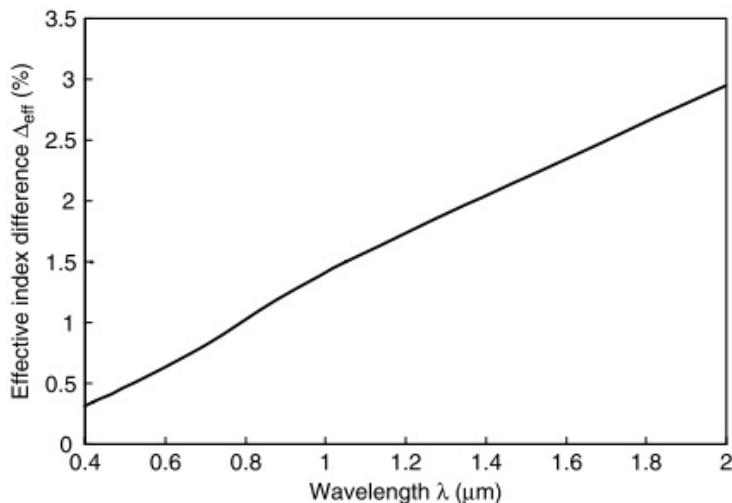
موثر روکش و β_{FSM} ثابت انتشار مود اصلی پر کردن فضا(FSM)^{۵۷} است. FSM مود اصلی روکش کریستال فوتونیک نامتناهی است اگر هسته وجود نداشته باشد، بنابراین β_{FSM} حداقل β مجاز در روکش است. شکل (۵۴.۳) تغییر v_{eff} را با توجه به Λ/λ برای قطر سوراخ‌های نسبی مختلف d/Λ نشان می‌دهد. خط چین $v_c = 4.1$ مقدار قطع v برای PCF مشخص می‌کند [۵۴]. برای قطر سوراخ نسبی d/Λ کمتر از حدود 0.4 ، مود مرتبه دوم هرگز حتی در فرکانس بی‌نهایت هدایت نمی‌شود. یعنی v همیشه کمتر از v_c است و PCF بی‌نهایت تک مودی است. شکل‌های (۵۵.۳)-(الف) و (ب) نمودارهای کانتور شدت مود اصلی را در PCF هسته جامد با قطر سوراخ نسبی $d/\Lambda = 0.4\mu m$ و $d/\Lambda = 0.1\mu m$ در $\lambda = 0.4\mu m$ و $\lambda = 0.55\mu m$ نشان می‌دهند. توزیع میدان مود با استفاده از FEM محاسبه شده است (به فصل ۶.۶ مراجعه کنید). مود مرتبه دوم حتی در طول موج کمتر از $\lambda = 0.4\mu m$ ظاهر نمی‌شود. پدیده بی‌پایان تک مودی با ذکر این نکته توضیح داده می‌شود که مود اصلی طول موج مؤثر عرضی است که تقریباً برابر با دو برابر دوره سوراخ Λ است. بنابراین نور قادر به فرار نیست زیرا نمی‌تواند شکاف‌های بین سوراخ‌های هوا را "تصویر" کند، یعنی نمی‌تواند بین آنها "فسرده شود". در این صورت مود اصلی به طور موثر در داخل یک "الک" به دام می‌افتد، در حالی که مودهای مرتبه بالاتر، با طول موج‌های موثر عرضی کوچکتر، می‌توانند به سرعت از طریق شکاف‌های بین سوراخ‌های هوا نشت کنند [۵۵].

ویژگی‌های پاشندگی رنگی PCF به‌طور مشخص با فیبرهای نوری سنتی متفاوت است. این عمدتاً به‌دلیل این واقعیت است که پاشندگی موجبر در PCF بسیار بزرگ می‌شود. برای بدست اوردن پاشندگی موجبر فیبرهای نوری سنتی، از پاشندگی طول موج (یا فرکانس) جمله $n_{co} - n_{cl}$ در معادله (۱۲۳.۳) صرف‌نظر کرده‌ایم. با این حال، تفاوت ضریب شکست موثر $\Delta_{eff} = (n_{co} - n_{cl}) / 2n_{co}$ به‌شدت به طول موج (یا فرکانس) بستگی دارد. شکل (۵۶.۳) اثر اختلاف ضریب شکست موثر PCF هسته جامد با قطر سوراخ نسبی Δ_{eff}

^{۵۷}Fundamental Space-filling Mode (FSM)



شکل ۵.۳: (الف) منحنی کانتور مود اصلی $\lambda = 1.4\mu m$ در هسته جامد PCF با قطر سوراخ نسبی $d/\Lambda = 0.4$ و (ب) منحنی کانتور مود اصلی $\lambda = 1.55\mu m$ در هسته جامد PCF با قطر سوراخ نسبی $d/\Lambda = 0.4$ و $d = 1.84\mu m$ ($\Lambda = 2.1\mu m$)

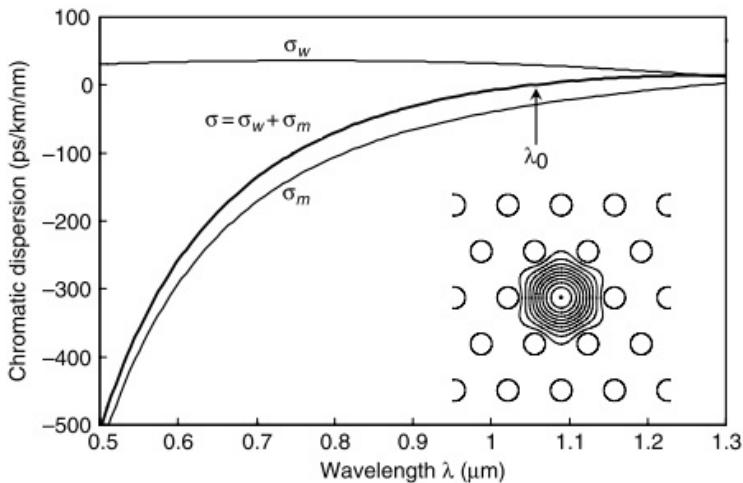


شکل ۵۶.۳: اختلاف ضریب شکست موثر PCF هسته جامد با قطر سوراخ نسبی $d/\Lambda = ۰/۴$ (۵۷.۳) و $d = ۰/۸۴\mu m$ و $\Lambda = ۲/۱\mu m$.

با عث افزایش پاشندگی موجبر در PCF می‌شود. در شکل (۵۷.۳) پاشندگی‌های رنگی (پاشندگی موجبر σ_w ، پاشندگی مواد σ_m و پاشندگی کل σ) در برابر طول موج در محدوده $۰/۵\mu m$ تا $۱/۳\mu m$ رسم شده است. ورودی شکل (۵۷.۳) نمودار کانتور شدت نوری را در $\lambda = ۱/۰۵\mu m$ نشان می‌دهد. شیشه سیلیس حجیم^{۵۸} دارای پاشندگی نرمال (منفی) در این محدوده است. در فیبر تک مودی معمولی، طول موج پاشندگی صفر معمولاً بزرگتر از $۱/۳\mu m$ است زیرا پاشندگی موجبر در ناحیه تک مودی منفی است. با این حال، طول موج پاشندگی صفر PCF به $۱/۰۵\mu m$ کاهش می‌یابد زیرا پاشندگی موجبر حتی در ناحیه تک مودی ارزش مثبت زیادی دارد. همانطور که سوراخ‌های هوا بزرگتر می‌شوند، هسته به طور فزاینده‌ای عایقی شده و شروع به شبیه به یک رشته شیشه سیلیسی می‌شود که در هوا نشسته است. پاشندگی موجبر چنین رشته‌ای در مقایسه با پاشندگی مواد بسیار قوی است. شکل (۵۸.۳) ویژگی‌های پاشندگی رنگی PCF هسته جامد با قطر سوراخ نسبی $d/\Lambda = ۰/۸$ و $d = ۱/۶۸\mu m$ را نشان می‌دهد. ورودی شکل (۵۸.۳) نمودار کانتور شدت نوری را در $d/\Lambda = ۰/۸$ و $d = ۰/۸۶\mu m$ نشان می‌دهد. طول موج پاشندگی صفر در مقایسه با PCF با سوراخ هوای نسبی $d/\Lambda = ۰/۴$ به $d = ۰/۸۶\mu m$ انتقال می‌یابد. متفاوت از مورد $d/\Lambda = ۰/۴$ با PCF با $d/\Lambda = ۰/۸$ در $d = ۰/۸۶\mu m$ چند مودی می‌شود.

از آنجایی که PCF با قطر سوراخ هوای بزرگ به سمت فیبر با ضریب شکست پله‌ای و روکش هوا می‌کند، بررسی ویژگی‌های پاشندگی رنگی فیبر سیلیسی با روکش هوا ارزشمند است. تأخیر زمانی فیبر سیلیسی با پوشش هوا به طور دقیق با رابطه زیر بیان

^{۵۸}Bulk silica glass



شکل ۵۷.۳: ویژگی‌های پاشندگی رنگی PCF هسته جامد با قطر سوراخ نسبی 4% و $\Lambda = 2.1 \mu m$ و $\lambda_0 = 1.05 \mu m$.

می‌شود

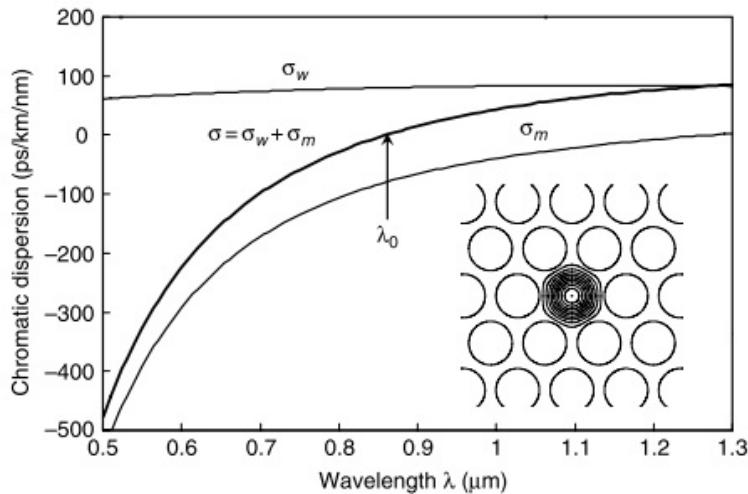
$$\frac{d\beta}{dk} = n_e + \frac{1}{n_e} \left\{ n_{co}(N_{co} - n_{co})b + \frac{(n_{co}^2 - 1)}{2} \left[\frac{d(vb)}{dv} - b \right] \right\} \quad (253.3)$$

که در آن n_{co} و N_{co} نمایشگر ضریب شکست و ضریب شکست گروهی هسته سلیسی است و

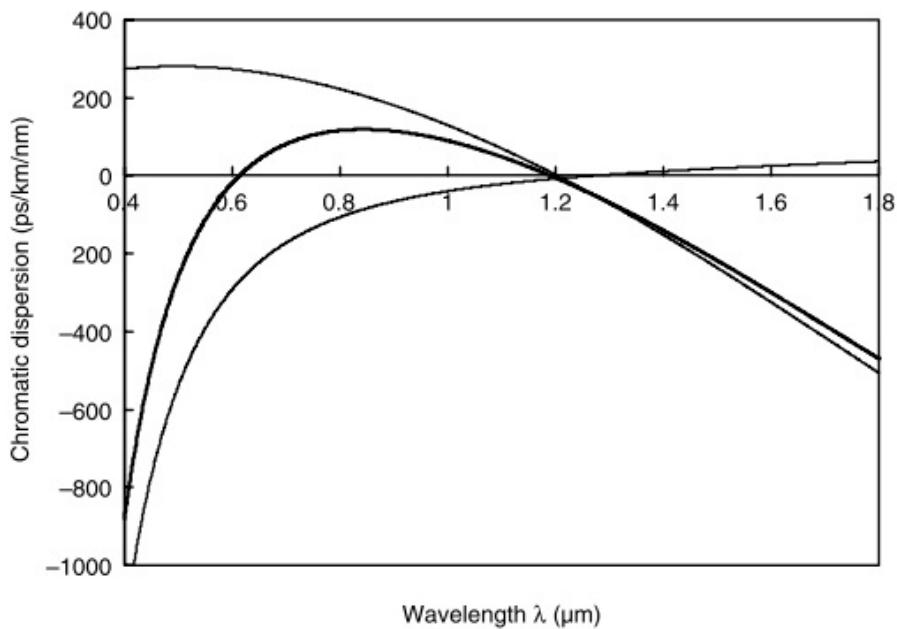
$$n_e = \frac{\beta}{k} = \sqrt{1 + (n_{co}^2 - 1)b}. \quad (254.3)$$

پاشندگی رنگی σ با مشتق عددی $d\beta/dk$ نسبت به λ بدست می‌آید. به منظور راحتی، پاشندگی موجبر σ_w با کم کردن پاشندگی مواد σ_m از پاشندگی کل σ محاسبه می‌شود. شکل‌های (۵۹.۳) پاشندگی رنگی فیبر با ضریب شکست پله‌ای و روکش هوا را با $2a = 2.6 \mu m$ و $\Delta = 0.6 \mu m$ در $\lambda = 1.0 \mu m$ نشان می‌دهد. طول موج قطع برای مود مرتبه دوم $\lambda_c = 1.386 \mu m$ است. منشأ پاشندگی موجبر بزرگ در PCF با قطر حفره هوای بزرگ و فیبر سلیسی با ضریب شکست پله‌ای پوشیده از هوا را می‌توان به تفاوت ضریب شکست بزرگ بین هسته سلیسی و روکش هوا توضیح داد [۵۶].

یکی از جالب‌ترین و مفیدترین کاربردهای PCF، تولید نور ابرپیوسته پهن باند از سیستم‌های لیزری پالس کوتاه است [۵۷]. این امر با ترکیبی از هسته‌های بسیار کوچک و صفرهای پاشندگی امکان‌پذیر می‌شود که می‌توانند با طول موج لیزر پمپ منطبق شوند. نور ابرپیوسته پهن باند نه تنها در ارتباطات راه دور بلکه در کاربردهایی مانند توموگرافی همدوس نوری [۵۸] و متropolozی فرکانس [۵۹] بسیار مهم است.



شکل ۵.۸.۳: ویژگی‌های پاشندگی رنگی PCF هسته جامد با قطر سوراخ نسبی $d = 0.8$ و $d/\Lambda = 0.8$ است. ($\Lambda = 2.1 \mu m$ و $1.68 \mu m$).



شکل ۵.۹.۳: پاشندگی رنگی فیزی با ضریب شکست پلهای و روکش هوایی با $1.0 \mu m$ و $2a = 0.6 \mu m$ در $\Delta = 26.5\%$. طول موج قطع مود مرتبه دوم برابر $\lambda_c = 1.386 \mu m$ است.

كتاب نامه

- [1] Yokota, H., H. Kanamori, Y. Ishiguro, G. Tanaka, S. Tanaka, H. Takada, M. Watanabe, S. Suzuki, K. Yano, M. Hoshikawa, and H. Shinba. 1986. Ultra low-loss pure silica core single-mode fiber and transmission experiment. *Tech. Digest of Opt. Fiber Commun.*, Atlanta, Postdeadline Paper, PD3.
- [2] Snitzer, E. 1961. Cylindrical dielectric waveguide modes. *J. Opt. Soc. Amer.* 51:491–498.
- [3] Okoshi, T. 1982. *Optical Fibers*. New York: Academic Press.
- [4] Abramowitz, M., and J. A. Stegun. 1965. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications.
- [5] Watson, G. N. 1962. *Theory of Bessel Functions*. New York: Cambridge University Press.
- [6] Snyder, A. W. 1969. Asymptotic expression for eigenfunctions and eigenvalues of dielectric optical waveguides. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.* MTT-17:1130–1138.
- [7] Gloge, D. 1971. Weakly guiding fibers. *Appl. Opt.* 10:2252–2258.
- [8] Carson, J. R., S. P. Mead, and S. A. Schelkunoff. 1936. Hyper frequency waveguides—Mathematical theory. *Bell. Syst. Tech. J.* 15:310–333.
- [9] Marcuse, D. 1976. Microbending losses of single-mode step-index and multimode, parabolic-index fibers. *Bell. Syst. Tech. J.* 55:937–955.
- [10] Collin, R. E. 1960. *Field Theory of Guided Waves*. New York: McGraw-Hill.
- [11] Gloge, D. 1971. Dispersion in weakly guiding fibers. *Appl. Opt.* 10:2442–2445.
- [12] Malitson, I. H. 1965. Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica. *J. Opt. Soc. Amer.* 55:1205–1209.

- [13] Shibata, N. and T. Edahiro. 1980. Refractive index dispersion properties of glasses for optical fibers (in Japanese). Paper of Technical Group, IEICE Japan, no.OQE80, pp.114–118.
- [14] Morse, P. M. and H. Feshbach. 1953. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill.
- [15] Koshiba, M. 1973. *Optical waveguide analysis*. New York: McGraw-Hill.
- [16] Gloge, D., and E. A. J. Marcatili. 1973. Multimode theory of graded-core fibers *Bell. Syst. Tech. J.* 52:1563–1578.
- [17] Olshansky, R., and D. B. Keck. 1976. Pulse broadening in graded-index optical fibers. *Appl. Opt.* 15:483–491.
- [18] Henry, P. S. 1985. Lightwave primer. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-21:1862–1879.
- [19] Kaminow, I. P. 1981. Polarization in optical fibers. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-17:15–22.
- [20] Krawarik, P. H., and L. S. Watkins. 1978. Fiber geometry specifications and its relation to measured fiber statistics. *Appl. Opt.* 17:3984–3989.
- [21] Noda, J., K. Okamoto, and Y. Sasaki. 1986. Polarization-maintaining fibers and their applications. *J. Lightwave Tech.* LT-4:1071–1089.
- [22] Dyott, R. B., J. R. Cozens, and D. G. Morris. 1979. Preservation of polarization in optical-fiber waveguides with elliptical cores. *Electron. Lett.* 15:380–382.
- [23] Hosaka, T., K. Okamoto, Y. Sasaki, and T. Edahiro. 1981. Single-mode fibers with asymmetrical refractive-index pits on both sides of the core. *Electron. Lett.* 17:191–193.
- [24] Okoshi, T., K. Oyamada, M. Nishimura, and H. Yokota. 1982. Side-tunnel fiber—An approach to polarization-maintaining optical waveguiding scheme. *Electron. Lett.* 18:824–826.
- [25] Hosaka, T., K. Okamoto, T. Miya, Y. Sasaki, and T. Edahiro. 1981. Low-loss single-polarization fibers with asymmetrical strain birefringence. *Electron. Lett.* 17:530–531.
- [26] Birch, R. D., M. P. Varnham, D. N. Payne, and E. J. Tarbox. 1982. Fabrication of polarization-maintaining fibers using gas-phase etching. *Electron. Lett.* 18:1036–1038.

- [27] Katsuyama, T., H. Matsumura, and T. Saganuma. 1981. Low-loss single-polarization fibers. *Electron. Lett.* 17:473–474.
- [28] Nye, J. F. 1957. *Physical Properties of Crystals*. Oxford: Oxford University Press.
- [29] Marcuse, D. 1972. *Light Transmission Optics*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- [30] Goell, J. E. 1969. A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides. *Bell. Syst. Tech. J.* 48:2133–2160.
- [31] Scherer, G. W. 1980. Stress-induced index profile distribution in optical waveguides. *Appl. Opt.* 19:2000–2006.
- [32] Sinha, N. K. 1978. Normalized dispersion of birefringence of quartz and stress optical coefficient of fused and plate glass. *Phys. and Chem. of Glass.* 19:69–77.
- [33] Sakai, J., and T. Kimura. 1981. Birefringence and polarization characteristics of single-mode optical fibers under elastic deformations. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-17:1041–1051.
- [34] Okamoto, K., T. Edahiro, and N. Shibata. 1982. Polarization properties of single-polarization fibers. *Opt. Lett.* 7:569–571.
- [35] Okamoto, K., T. Hosaka, and T. Edahiro. 1981. Stress analysis of optical fibers by a finite element method. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-17:2123–2129.
- [36] Kawakami, S. and M. Ikeda. Transmission characteristics of a two-mode optical waveguide. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-14:608–614.
- [37] Poole, C. D. Statistical treatment of polarization dispersion in single-mode fiber. *Opt. Lett.* 8:687–689.
- [38] Tsubokawa, M. N. Shibata and S. Seikai. Evaluation of polarization mode coupling coefficient from measurement of polarization mode dispersion. *IEEE J. Lightwave Tech.* LT-3:850–854.
- [39] Kuwaki, N. M. Ohashi, C. Tanaka, N. Uesugi, S. Seikai and Y. Negishi. 1987. Characteristics of dispersion-shifted dual shape core single-mode fibers. *IEEE J. Lightwave Tech.* LT-5(6):792–797.
- [40] Croft, T. D. J. E. Ritter and V. A. Bhagavatula. 1985. Low-loss dispersion-shifted single-mode fiber manufactured by the OVD process. *IEEE J. Lightwave Tech.* LT-3(5):931–934.
- [41] Okamoto, K., T. Edahiro, A. Kawana and T. Miya. 1979. Dispersion minimization in single mode fibers over a wide spectral range. *Electron. Lett.* 15(22):729–731.

- [42] Miya, T. K. Okamoto, Y. Ohmori and Y. Sasaki. 1981. Fabrication of low dispersion single mode fibers over a wide spectral range. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-17(6):858–861.
- [43] Kawakami S. and S. Nishida. 1974. Characteristics of a doubly clad optical fiber with a low-index inner cladding. *IEEE J. Quantum Electron.* 10(12):879–887.
- [44] Cohen, L. G. W. L. Mammel and S. J. Jang. 1982. Low-loss quadruple-clad single-mode lightguide with dispersion below 2 ps/km/nm over the 1.28m–1.65m wavelength range. *Electron. Lett.* 18:1023–1024.
- [45] Agrawal G. P. 1989. *Nonlinear Fiber Optics*. San Diego, Academic Press.
- [46] Mukasa, K. Y. Akasaka, Y. Suzuki and T. Kamiya. 1997. Novel network fiber to manage dispersion at $1.55\mu m$ with combination of $1.3\mu m$ zero dispersion single mode fiber. *ECOC'97, Mo3C*, pp. 127–130, Sept. 22–25, Edinburgh, UK.
- [47] Hirano, M. A. Tada, T. Kato, M. Onishi, Y. Makio and M. Nishimura. 2001. Dispersion compensating fiber over 140 nm-bandwidth, *ECOC '01*, Th.M.1.4, pp. 494–495, Sept. 30–Oct. 4, Amsterdam, The Netherlands.
- [48] Yeh, P. A. Yariv and E. Marom. 1978. Theory of Bragg fiber. *J. Opt. Soc. Am.* 68:1196–1201.
- [49] Miyagi M. and S. Kawakami. 1984. Design theory of dielectric-coated circular metallic waveguides for infrared transmission. *J. Lightwave Tech.* LT-2(2):116–126.
- [50] Johnson, S. G. M. Ibanescu, M. Skorobogatiy, O. Weisberg, T. D. Engeness, M. Soljacic, S. A. Jacobs, J. D. Joannopoulos and Y. Fink. 2001. Low-loss asymptotically single-mode propagation in large-core omniguide fibers. *Optics Express* 9(13):748–779.
- [51] Birks, T. A. P. J. Roberts, P. St. J. Russell, D. M. Atkin and T. J. Shepherd. 1995. Full 2-D photonic band gaps in silica/air structures. *Electron. Lett.* 31:1941–1942.
- [52] Monro, T. M. D. J. Richardson, N. G. R. Broderick and P. J. Bennett. 1999. Holey optical fibers: An efficient modal model. *J. Lightwave Tech.* LT-17:1093–1102.
- [53] Birks, T. A. J. C. Knight and P. St. J. Russell. 1997. Endlessly single-mode photonic crystal fiber. *Opt. Lett.* 22:961–963.
- [54] Birks, T. A. D. Mogilevtsev, J. C. Knight, P. St. J. Russell, J. Broeng and P. J. Roberts. 1999. The analogy between photonic crystal fibers and step index fibers. *OFC/IOOC '99*, San Diego, CA Feb. 21–26, FG4, pp. 114–116.

-
- [55] Russell, P. St. J. 2000. Photonic crystal fibers. *Science* 299:358–362.
 - [56] Birks, T. A. W. J. Wadsworth and P. St. J. Russell. 2000. Supercontinuum generation in tapered fibers. *Opt. Lett.* 25:1415–1417.
 - [57] Ranka, J. K. R. S. Windeler and A. J. Stentz. 2000. Visible continuum generation in air-silica microstructure optical fibers with anomalous dispersion at 800 nm. *Opt. Lett.* 25:25–27. Optical Fibers
 - [58] Holzwarth, R. A. Y. Newsky, M. Zimmermann, T. Udem, T. W. Hänsch, J. Von Zanthier, H. Walther, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, P. St. J. Russell, M. N. Skvortsov and S. N. Bagayev. 2001. Absolute frequency measurement of iodine lines with a femtosecond optical synthesizer. *Appl. Phys. B* 73:269–271.
 - [59] Hundertmark, H. D. Kracht, D. Wandt, C. Fallnich, V. V. Ravi Kanth Kumar, A. K. George, J. C. Knight and P. St. J. Russell. 2003. Supercontinuum generation with 200 pJ laser pulses in an extruded SF6 fiber at 1560 nm. *Opt. Exp.* 11:3196–3201.

فصل ۴

نظریه مود تزویجی

در دو فصل قبل، ویژگی های انتقال موجبرهای نوری مسطح مستقل و فیبرهای نوری بررسی شده است. برای ساخت دستگاه های نوری عملی، استفاده از برهمنکش موج نور متقابل بین دو پرتو نور انتشار مشترک^۱ در موجبرهای مجاور یا برهمنکش بین دو پرتو انتشار متضاد^۲ در موجبرهای نوری موجدار^۳ بسیار مهم است. نظریه مود تزویجی^۴ با برهمنکش های موج نور متقابل بین دو مود انتشار سروکار دارد. در این فصل ابتدا استخراج معادلات مود تزویجی بر اساس نظریه تغییرات جزئی^۵ ارائه شده است و سپس روش های مشخص محاسبه ضرایب تزویج برای چندین وسیله عملاً مهم به تفصیل توضیح داده شده است. در نهایت، چندین دستگاه موجبر با استفاده از تزویج کننده جهتی مانند تداخل سنج های ماخ-زندر^۶، تشدید کننده های حلقه ای و دستگاه های دوپایا^۷ توصیف شده اند.

۱.۴ استخراج معادلات مود تزویجی بر اساس نظریه تغییرات جزئی

در موجبرهای نوری یکنواخت محوری، همانطور که در فصل های قبلی توضیح داده شد، تعدادی مود انتشار وجود دارد. این مودهای انتشار مختص هر موجبر هستند و شرایط تعامل بین مودها را برآورده می کنند. اگر دو موجبر همانطور که در شکل (۱.۴) نشان داده شده است به هم نزدیک شوند، مودهای نوری هر موجبر یا تزویج می کنند یا با یکدیگر تداخل دارند. هنگامی که

^۱Copropagating light beams

^۲Contrapropagating two beams

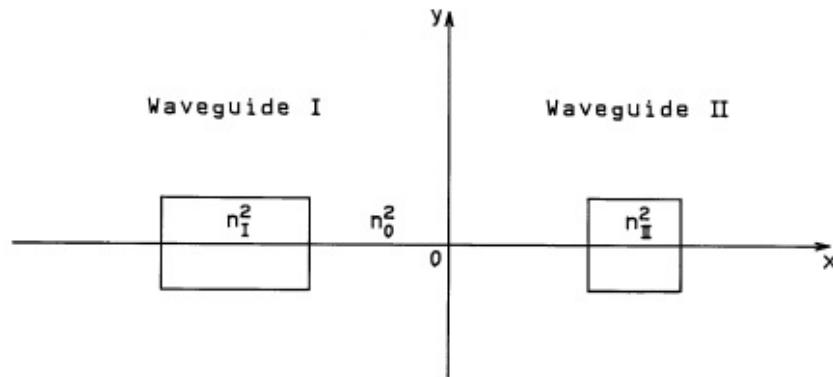
^۳Corrugated optical waveguides

^۴Coupled Mode Theory

^۵Perturbation Theory

^۶Mach-Zehnder

^۷Bistable Devices



شکل ۱.۴: موجبرهای نوری تزویجی جهت دار.

توزیع های میدان الکترومغناطیسی پس از تزویج مودی به طور قابل ملاحظه ای با توزیع های قبل از کوپلینگ متفاوت نیست، ویژگی های انتشار موجبرهای تزویج شده را می توان با روش تغییرات جزئی تحلیل کرد [۱].

هر گاه مودهای ویژه در هر موجبر نوری را قبل از تزویج با $\tilde{\mathbf{E}}_p, \tilde{\mathbf{H}}_p, (p = 1, 2)$ نمایش دهیم، در معادلات ماکسول صدق می کنند:

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_p = -j\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}_p \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_p = j\omega\epsilon_0 N_p^* \tilde{\mathbf{E}}_p \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن $N_p^*(x, y)$ نشانده نده توزیع ضریب شکست هر موجبر است. فرض می کنیم که میدان های الکترومغناطیسی موجبرهای تزویج شده را می توان بصورت جمع مودهای ویژه هر یک از موجبرها بیان کرد:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}} = A(z)\tilde{\mathbf{E}}_1 + B(z)\tilde{\mathbf{E}}_2 \\ \tilde{\mathbf{H}} = A(z)\tilde{\mathbf{H}}_1 + B(z)\tilde{\mathbf{H}}_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

میدان های الکترومغناطیسی $\tilde{\mathbf{E}}$ و $\tilde{\mathbf{H}}$ در موجبر کوپل شده نیز باید در معادلات ماکسول صدق کند. در این صورت جایگزینی معادله (۲.۴) در

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_0 N^* \tilde{\mathbf{E}} \end{cases} \quad (3.4)$$

و استفاده (۱.۴) و روابط برداری

$$\nabla \times (A\mathbf{E}) = A\nabla \times \mathbf{E} + \nabla A \times \mathbf{E} = A\nabla \times \mathbf{E} + \frac{dA}{dz} \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}$$

$$\text{روابط زیر را بدست می‌آوریم} \\ (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_1) \frac{dA}{dz} + (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_2) \frac{dB}{dz} = 0, \quad (4.4)$$

$$(\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{H}}_1) \frac{dA}{dz} - j\omega\epsilon_0(N^r - N'_1)A\tilde{\mathbf{E}}_1 \\ + (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{H}}_2) \frac{dB}{dz} - j\omega\epsilon_0(N^r - N'_2)B\tilde{\mathbf{E}}_2 = 0. \quad (5.4)$$

در اینجا $N^r(x, y)$ نمایشگر توزیع ضریب شکست در تمام موجبر کوپل تزویج شده است. با جایگزینی معادله (۴.۴) و (۵.۴) در معادلات انتگرال زیر

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot (5.4) - \tilde{\mathbf{H}}_1^* \cdot (4.4)] dx dy = 0. \quad (6.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot (5.4) - \tilde{\mathbf{H}}_2^* \cdot (4.4)] dx dy = 0. \quad (7.4)$$

بدست می‌آوریم (پیوست ج)

$$\frac{dA}{dz} + \frac{dB}{dz} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) dx dy} \\ + jA \frac{\omega\epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^r - N'_1) \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) dx dy} \\ + jB \frac{\omega\epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^r - N'_2) \tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) dx dy} \\ \frac{dB}{dz} + \frac{dA}{dz} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_2^*) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) dx dy} \\ + jA \frac{\omega\epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^r - N'_2) \tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) dx dy} \\ + jB \frac{\omega\epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^r - N'_1) \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_2^*) dx dy} = 0. \quad (9.4)$$

در اینجا وابستگی میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی و محوری را جدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_p = \mathbf{E}_p \exp(-j\beta_p z) \\ \tilde{\mathbf{H}}_p = \mathbf{H}_p \exp(-j\beta_p z) \end{cases} \quad (p = 1, 2) \quad (10.4)$$

با جایگزینی معادله (۱۰.۴) و (۹.۴)، خواهیم داشت

$$\frac{dA}{dz} + c_{12} \frac{dB}{dz} \exp[-j(\beta_2 - \beta_1)z] + j\chi_1 A - \kappa_{12} B \exp[-j(\beta_2 - \beta_1)z] = 0 \quad (11.4)$$

$$\frac{dB}{dz} + c_{11} \frac{dA}{dz} \exp[j(\beta_2 - \beta_1)z] + j\chi_2 B - \kappa_{21} A \exp[-j(\beta_2 - \beta_1)z] = 0 \quad (12.4)$$

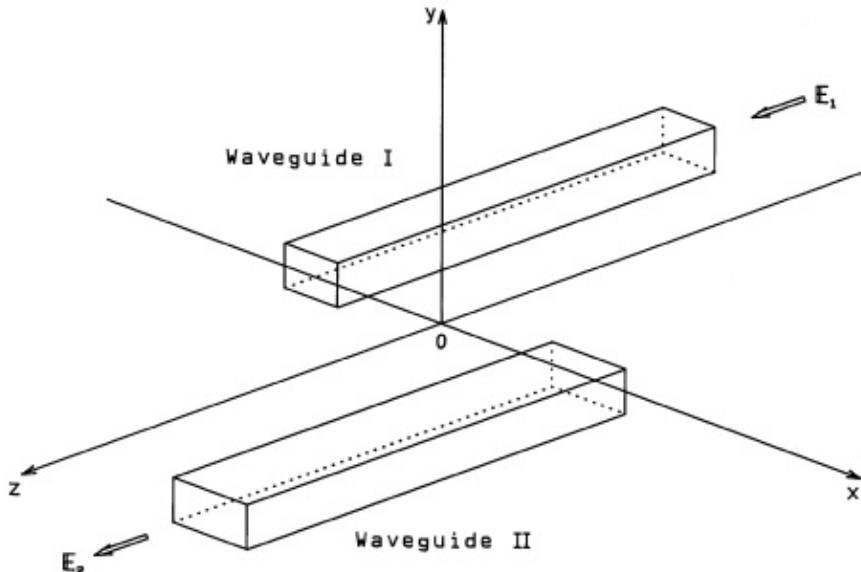
که در آن

$$\kappa_{pq} = \frac{\omega \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^r - N_q^r) \mathbf{E}_p^* \cdot \mathbf{E}_q dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_p + \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*) dx dy} \quad (13.4)$$

$$c_{pq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_p^*) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_p + \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*) dx dy} \quad (14.4)$$

$$\chi_p = \frac{\omega \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^r - N_p^r) \mathbf{E}_p^* \cdot \mathbf{E}_p dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_p + \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*) dx dy} \quad (15.4)$$

و زوج p و q بترتیب یا (۲، ۱) هستند. κ_{pq} ضریب تزویج مود کوپلر



شکل ۲.۴: توضیح ضریب تزویج لب به لب

جهتدار است. مفهوم c_{pq} بصورت زیر است. بیایید شکل موجبر نشانده شده در شکل (۲.۴) که در آن موجبر I فقط در ناحیه $z < 0$ و موجبر II در $z \geq 0$ وجود دارد. وقتی

مود ویژه (E_1, H_1) موج از جهت منفی $z = 0$ بسوی $z = \infty$ منتشر می‌کند، میدان اکترومغناطیسی در روکش مود ویژه (E_2, H_2) در $z = \infty$ تحریک می‌کند. این کارائی (راندمان) تحریک c_{12} در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، c_{pq} نشان دهنده ضریب تزویج لب به لب بین دو موجبر است [۳، ۲].

سپس مقدار κ_{pq} و χ_p را برای مود $p = 1$ و $q = 2$ مقایسه می‌کنیم. همانطور که در شکل (۳.۴) ج نشان داده شده است، مقدار واقعی $(N^3 - N_2^3)$ در موجبر I برابر است با $(n^3 - n_2^3)$ و در تمام مناطق دیگر صفر می‌شود. سپس انتگرال κ_{12} فقط در داخل ناحیه هسته موجبر I انجام می‌شود. میدان الکتریکی E_2 در موجبر I (که $|\mathbf{E}_2| = \eta |\mathbf{E}_1|$) را نشان می‌دهیم) در مقایسه با E_1 بسیار کوچک است. سپس مقدار جمله انتگرال κ_{12} در صورت کسر حدود $(\eta - n_2^3)$ است. انتگرال χ_1 در معادله (۱۵.۴) در موجبر II انجام می‌شود، جایی که $N^3 - N_2^3$ صفر نیست. بزرگی جمله انتگرال κ_{12} در صورت کسر حدود $(\eta - n_2^3)$ است، زیرا قدرت میدان الکتریکی E_1 در موجبر II حدود η است. بر اساس مقایسه‌های فوق، مشخص شده است که χ_p برابر با κ_{pq} کوچکتر است. بنابراین، زمانی که دو موجبر به اندازه کافی از هم جدا شده‌اند و $\eta \ll 1$ برقرار است، می‌توان از χ_p صرف نظر کرد، زیرا χ_p بسیار کوچکتر از κ_{pq} است. بر عکس، وقتی دو موجبر نزدیک به هم هستند، نمی‌توان از χ_p صرف نظر کرد.

در بیشتر تحلیل‌های مرسوم تزویج کننده‌های جهتی، $c_{pq} = \chi_p$ در نظر گرفته می‌شوند. با این حال، هر دو c_{pq} و χ_p باید در نظر گرفته شوند تا اثر تزویج شدن مود به طور دقیق تحلیل شود. توان نوری حمل شده توسط مود ویژه در موجبر $(p = 1, 2)$ از معادله (۱۵.۴) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$P_p = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*) \cdot \mathbf{u}_z dx dy \quad (p = 1, 2) \quad (16.4)$$

از این معادله مشخص می‌شود که مخرج معادله‌ها $(15.4) \square (13.4)$ برابر $4P_p$ هستند. از این پس فرض می‌کنیم که مودهای ویژه در هر دو موجبر برای برآوردن شرایط عادی شده‌اند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_p + \mathbf{E}_p \times \mathbf{H}_p^*) \cdot \mathbf{u}_z dx dy = 4P_p = 1 \quad (p = 1, 2) \quad (17.4)$$

در این صورت از معادله (۱۴.۴) بدست می‌آوریم،

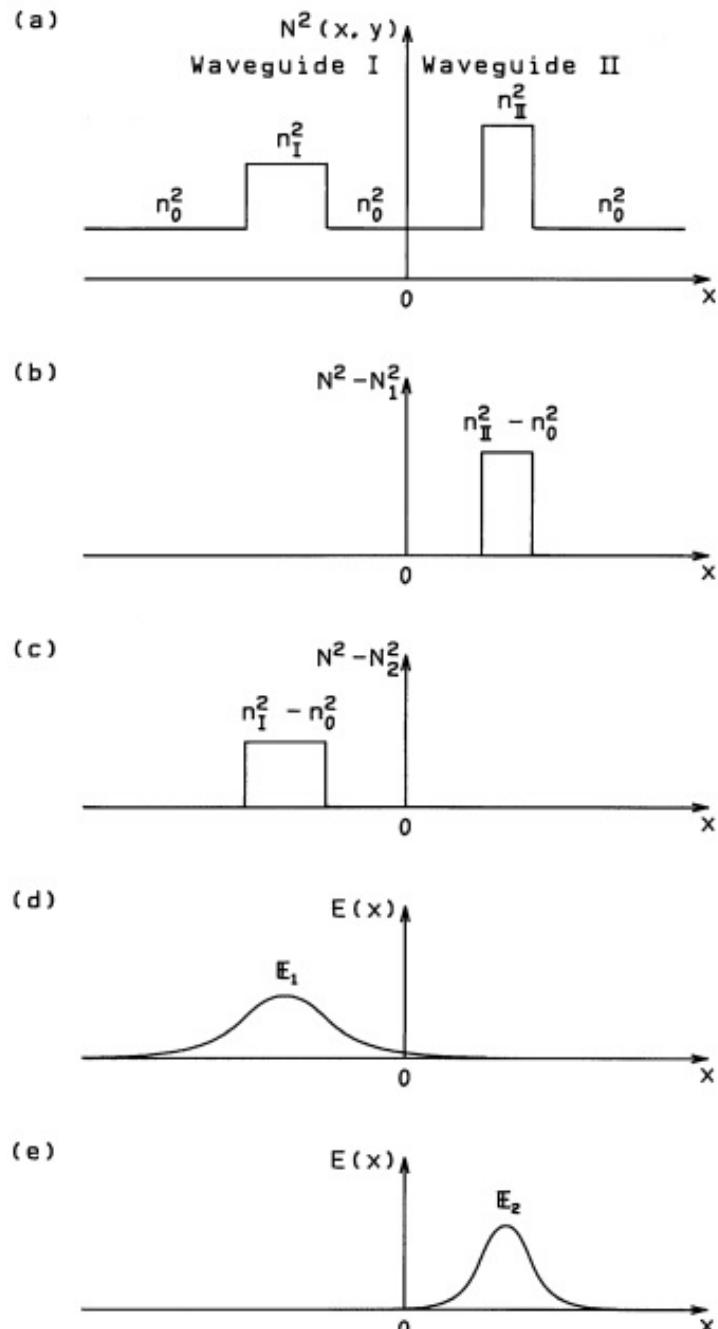
$$c_{21} = c_{12}^*, \quad (18.4)$$

سپس بطور مستقیم از رابطه (۱۵.۴) بدست می‌آید

$$\chi_p = \chi_p^* \quad (p = 1, 2) \quad (19.4)$$

در اینجا اختلاف ثابت‌های انتشار بین موجبرهای I و II را بیان می‌کنیم

$$\delta = \frac{(\beta_2 - \beta_1)}{2} \quad (20.4)$$



شکل ۳.۴: توزیع ضریب شکست $N^2(x, y)$ موجبرهای تزویج شده، تفاوت توزیع ضریب‌های شکست $(N^2 - N_p^2)$ و میدان الکتریکی E_p که در معادلات (۱۳.۴) و (۱۴.۴) ظاهر می‌شود.

توان نوری در تمام موجبرهای تزویج شده را بصورت زیر بیان می‌کنیم

$$P = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathbf{u}_z dx dy \quad (21.4)$$

با جایگزینی معادلات (۲۰.۴) و (۲۱.۴) در (۱۰.۴) می‌دهد

$$P = \frac{1}{2} [|A|^2 + |B|^2 + A^* B c_{12} \exp(-2j\delta z) + AB^* c_{12}^* \exp(j2\delta z)]. \quad (22.4)$$

برای بدست آوردن معادله اخیر، از معادلات (۱۴.۴)، (۱۷.۴) و (۱۸.۴) استفاده شده است. در یک موجبر با تلفات، توان نوری ثابت باقی میماند زیرا داریم

$$\frac{dP}{dz} = 0. \quad (23.4)$$

جایگزینی معادلات (۱۱.۴)، (۱۲.۴) و (۲۲.۴) در معادله (۲۳.۴)، خواهیم داشت

$$jA^*B(\kappa_{21} - \kappa_{12} - 2\delta c_{12}) \exp(-j2\delta z) \quad (24.4)$$

$$-jAB^*(\kappa_{21} - \kappa_{12}^* - 2\delta c_{12}^*) \exp(j2\delta z) = 0.$$

برای اینکه معادله (۲۴.۴) مستقل از z باشد، باید داشته باشیم

$$\kappa_{21} = \kappa_{12}^* + 2\delta c_{12}^* \quad (25.4)$$

در بیشتر تحلیل‌های مرسوم، رابطه متقابل ضرایب تزویج با $\kappa_{21} = \kappa_{12}^*$ بیان مشود، زیرا صفر در نظر گرفته می‌شود. با این حال، $\kappa_{21} = \kappa_{12}^*$ فقط زمانی برقرار است که (۱) ثابت انتشار دو موجبر برابر ($\delta = 0$) یا (۲) دو موجبر به اندازه کافی از هم جدا شده باشند ($c_{12} \approx 0$). به خصوص هنگامی که دو موجبر با هندسه‌های هسته متفاوت نزدیک به هم قرار می‌گیرند، باید مراقب بود، زیرا عبارت دوم سمت راست معادله (۲۵.۴) را نمی‌توان نادیده گرفت.

سپس معادلات مودهای تزویجی را با استفاده از معادله (۱۱.۴) و (۱۲.۴) استخراج می‌کنیم از برابری معادلات $0 = c_{21} \exp(j2\delta z) - (11.4) \times c_{12} \exp(j2\delta z)$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dA}{dz} = -\kappa_a B \exp(-j2\delta z) + j\alpha_a A. \quad (26.4)$$

شبیه قبل، از تساوی $0 = c_{21} \exp(j2\delta z) - (11.4) \times c_{12} \exp(j2\delta z)$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{dB}{dz} = -\kappa_b A \exp(2\delta z) + j\alpha_b B. \quad (27.4)$$

در دو معادله اخیر، پارامترهای $\kappa_a, \kappa_b, \alpha_a$ و α_b بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\kappa_a = \frac{\kappa_{12} - c_{12}\chi_2}{1 - |c_{12}|^2} \quad (\bar{128.4})$$

$$\kappa_b = \frac{\kappa_{12} - c_{12}^*\chi_1}{1 - |c_{12}|^2} \quad (28.4b)$$

$$\alpha_a = \frac{\kappa_{12}c_{12} - \chi_1}{1 - |c_{12}|^2} \quad (29.4)$$

$$\alpha_b = \frac{\kappa_{12}c_{12}^* - \chi_2}{1 - |c_{12}|^2} \quad (29.4b)$$

در ادامه، روش حل معادله (۲۶.۴) و (۲۷.۴) برای کوپلر هم جهت^{۱۰} ($\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$) و کوپلر ضد هم جهت^۹ ($\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$) تشریح می‌شود. با این حال، $c_{pq} = \chi_p = 0$ ($p, q = 1, 2$) را فرض کرده و معادلات (۲۶.۴) و (۲۷.۴) را بصورت خیلی ساده بازنویسی می‌کنیم، زیرا تحلیل دقیق خیلی پیچیده خواهد بود. البته، تحلیل دقیق بر اساس معادلات (۲۶.۴) و (۲۷.۴) امکان پذیر است و راه حل‌های آنها برای تزویج کننده هم جهت در پیوست-(ج) در انتهای توضیح داده شده است.

با فرض ($p, q = 1, 2$) $c_{pq} = \chi_p = 0$ ، می‌توانیم معادلات (۲۶.۴) و (۲۷.۴) را بصورت زیر بازنویسی کنیم

$$\frac{dA}{dz} = -j\kappa_{11}B \exp[-j(\beta_2 - \beta_1)z] \quad (30.4)$$

$$\frac{dB}{dz} = -j\kappa_{21}A \exp[j(\beta_2 - \beta_1)z] \quad (31.4)$$

که در آن κ_{pq} با معادله (۱۳.۴) داده می‌شود. رابطه هم‌پاسخی^{۱۰} ضرایب تزویج بصورت زیر می‌باشد:

$$\kappa_{21} = \kappa_{12}. \quad (32.4)$$

در بیشتر کوپلرهای جهت دار، κ_{pq} حقیقی است. بنابراین، $\kappa_{21} = \kappa_{12} = \kappa$ را درنظر می‌گیریم. رابطه هم‌پاسخی برای کوپلر ضد هم جهت بصورت زیر بیان می‌شود

$$\kappa_{21} = -\kappa_{12}^*. \quad (33.4)$$

۲.۴ تزویج کننده‌های هم جهت

جواب‌های کوپلرهای هم جهت ($\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$) بصورت‌های زیر فرض می‌شوند

$$A(z) = [a_1 e^{jqz} + a_2 e^{-jqz}] \exp(-j\delta z) \quad (34.4)$$

$$B(z) = [b_1 e^{jqz} + b_2 e^{-jqz}] \exp(j\delta z) \quad (34.4b)$$

^{۱۰}Codirectional Coupler

^۹Contradirectional Coupler

^{۱۱}Reciprocity Relation

که در آن q پارامتر مجھولی است که باید بدست آورده شود. ثابت‌های a_1, a_2, b_1 و b_2 باید در شرایط اولیه صدق کنند.

$$a_1 + a_2 = A(\circ) \quad (35.4)$$

$$b_1 + b_2 = B(\circ) \quad (35.4b)$$

با جایگزینی معادلات (۳۴.۴) در معادلات تزویج مودی (۳۰.۴) و (۳۱.۴) و اعمال شرایط اولیه معادله (۳۵.۴)، بدست می‌آوریم

$$A(z) = \left\{ \left[\cos(qz) + j \frac{\delta}{q} \sin(qz) \right] A(\circ) - j \frac{\kappa}{q} \sin(qz) B(\circ) \right\} \exp(-j\delta z), \quad (36.4)$$

$$B(z) = \left\{ -j \frac{\kappa}{q} \sin(qz) A(\circ) + \left[\cos(qz) - j \frac{\delta}{q} \sin(qz) \right] B(\circ) \right\} \exp(j\delta z), \quad (37.4)$$

که در آن q برابر است با

$$q = \sqrt{\kappa^2 + \delta^2} \quad (38.4)$$

برای اکثر موارد عملی، که در آن نور بدرون موجب I فقط در $z = \circ$ تزویج می‌شود، ما شرایط $B(\circ) = A(\circ) = A_\circ$ و $A(\circ) = A_\circ$ را داریم. در این صورت توان نوری عبوری در امتداد جهت z خواهد بود

$$P_a(z) = \frac{|A(z)|^2}{|A_\circ|^2} = 1 - F \sin^2(qz) \quad (39.4)$$

$$P_b(z) = \frac{|B(z)|^2}{|A_\circ|^2} = F \sin^2(qz) \quad (40.4)$$

که در آن F نمایشگر ضریب تزویج توان بیشینه است که بصورت زیر تعریف می‌شود

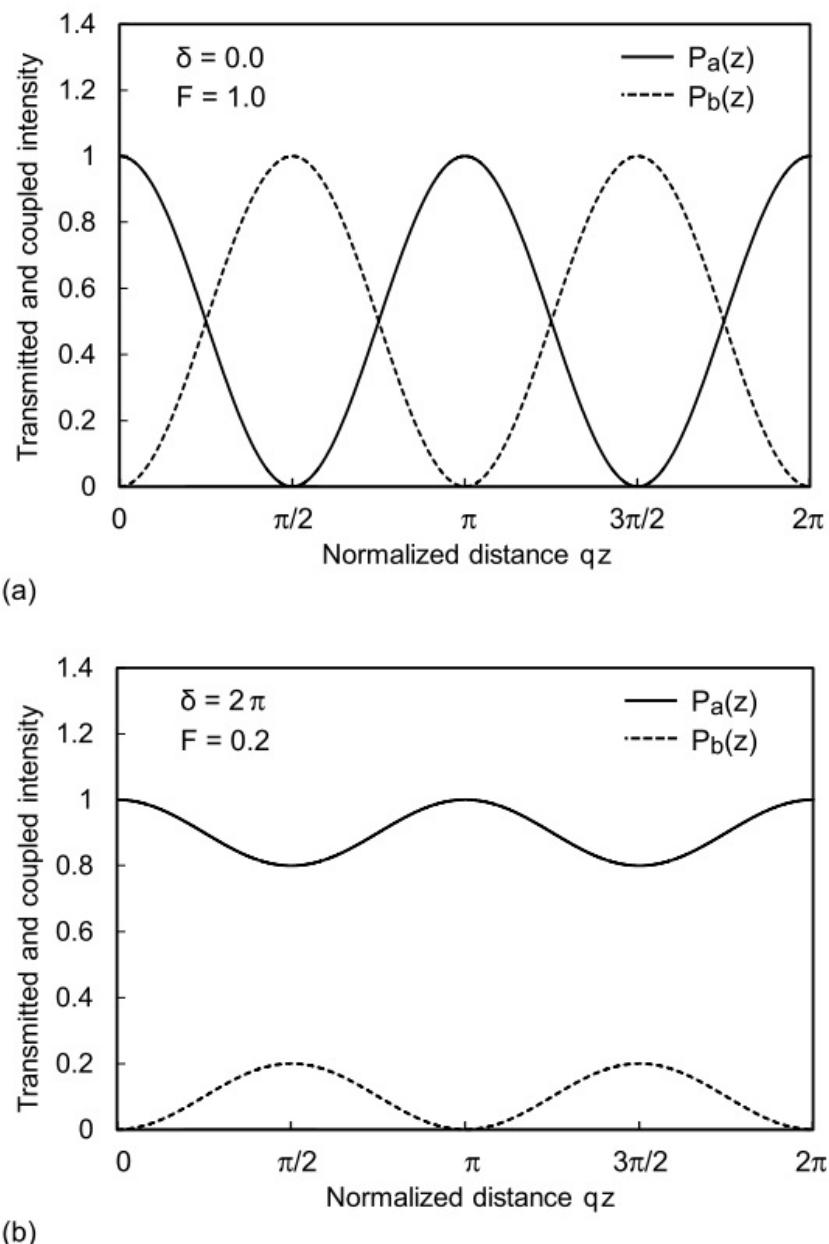
$$F = \left(\frac{\kappa}{q} \right)^2 = \frac{1}{1 + (\delta/\kappa)^2} \quad (41.4)$$

شکل (۴.۴) وابستگی P_a و P_b به طول نرمالیزه qz را برای دو پیکربندی کوپلر جهت دار $F = ۱/۲$ و $F = ۰/۲$ نشان می‌دهد. کارائی تزویج توان از موجب تحریک I به موجب II وقتی بیشینه می‌شود که

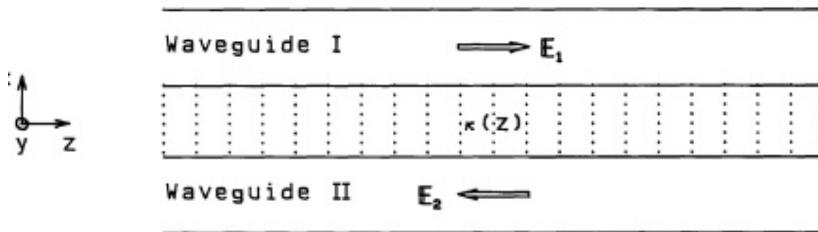
$$z = \frac{\pi}{2q}(2m + 1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (42.4)$$

طول z در $m = \circ$ را طول تزویج می‌نامند و برابر است با

$$L_c = \frac{\pi}{2q} = \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa^2 + \delta^2}} \quad (43.4)$$



شکل ۴.۴: تغییرات توان نوری در کوپلر هم جهت با (الف) $F = ۰/۲$ و (ب) $F = ۱/۰$



شکل ۵.۴: موجبرهای تزویجی ضد هم جهتی

هنگامی که ثابت‌های انتشار دو موجبر برابر ($\beta_1 = \beta_2$) در نتیجه $\delta = 0$ باشد، 100% تزویج توان در طول تزویج اتفاق می‌افتد

$$L_c = \frac{\pi}{\gamma \kappa} \quad (44.4)$$

۳.۴ تزویج ضد هم‌جهت در موجبرهای هم‌جهت

۱.۳.۴ ویژگی‌های انتقال و بازتاب در توری‌های یکنواخت

هنگامی که جهت انتشار نور مخالف ($\beta_1 < \beta_2$) باشد، تزویج نور صرفاً با نزدیک کردن موجبرهای I و II به یکدیگر اتفاق نمی‌افتد. اجازه دهید پیکربندی کوپلر را در نظر بگیریم که در آن محیط (ضریب شکست یا ضریب شکست موثر) بین موجبرهای I و II ، همانطور که در شکل (۵.۴) نشان داده شده، بطور دوره‌ای (تناوبی) آشفته^{۱۱} می‌شود. فرض می‌کنیم که ضریب تزویج با $\kappa_{12} = \kappa_G \exp[-j(2\pi/\Lambda)z]$ بیان شود (Λ دوره‌ای از تغییرات جزئی^{۱۲} است). معادلات مود تزویجی از معادله (۳۰.۴) و (۳۱.۴) بصورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\frac{dA}{dz} = -j\kappa_G B \exp \left[j \left(\beta_1 - \beta_2 - \frac{2\pi}{\Lambda} \right) z \right], \quad (45.4)$$

$$\frac{dB}{dz} = j\kappa_G A \exp \left[-j \left(\beta_1 - \beta_2 - \frac{2\pi}{\Lambda} \right) z \right], \quad (46.4)$$

برای بدست آوردن معادلات (۴۵.۴) و (۴۶.۴)، از رابطه هم‌پاسخی استفاده کردیم

$$\kappa_{21} - \kappa_{12}^* = -\kappa_G \exp \left(j \frac{2\pi}{\Lambda} z \right), \quad (47.4)$$

^{۱۱}Periodically Perturbed

^{۱۲}Perturbation

که از قضیه بقاء توان برای $P = \infty |A|^2 - |B|^2$ انتشار در امتداد جهت مثبت z بدست آوردیم:

$$\frac{d}{dz}(|A|^2 - |B|^2) = 0 \quad (48.4)$$

ما در اینجا یک پارامتر جدید را معرفی می‌کنیم که شرایط تطبیق فاز را به صورت زیر بیان می‌کند

$$\varphi = \frac{(\beta_1 - \beta_2 - 2\pi/\Lambda)}{2} \quad (49.4)$$

تغییرات جزئی تناوبی در ناحیه $z = 0 - L$ وجود دارد. شرایط اولیه و مرزی برای ورودی نور به موجبر I توسط $A(0) = A_0$ و $B(L) = 0$ (بازتاب نور در $z = L$ صفر است زیرا هیچ تغییر جزئی در $z > L$ وجود ندارد). تحت این شرایط مرزی، حل مود تزویجی معادله (۴۵.۴) و (۴۶.۴) برای هر شرایط تطبیق فاز به شرح زیر آورده شده است.

• الف $|\varphi| > \kappa_G$

$$A(z) = A_0 \frac{\rho \cos[\rho(z - L)] - j\varphi \sin[\rho(z - L)]}{\rho \cos(\rho L) + j\varphi \sin(\rho L)} \exp(j\varphi z) \quad (50.4)$$

$$B(z) = A_0 \frac{j\kappa_G \sin[\rho(z - L)]}{\rho \cos(\rho L) + j\varphi \sin(\rho L)} \exp(-j\varphi z) \quad (51.4)$$

$$\rho = \sqrt{\varphi^2 - \kappa_G^2} \quad (52.4)$$

• ب $|\varphi| = \kappa_G$

$$A(z) = A_0 \frac{1 - j\varphi(z - L)}{1 + j\varphi L} \exp(j\varphi z) \quad (53.4)$$

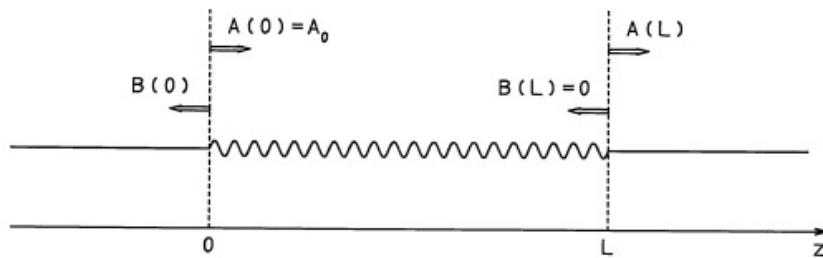
$$B(z) = A_0 \frac{j\kappa_G(z - L)}{1 + j\varphi L} \exp(-j\varphi z) \quad (54.4)$$

• ج $|\varphi| < \kappa_G$

$$A(z) = A_0 \frac{\alpha \cosh[\alpha(z - L)] - j\varphi \sinh[\alpha(z - L)]}{\alpha \cosh(\alpha L) + j\varphi \sinh(\alpha L)} \exp(j\varphi z) \quad (55.4)$$

$$B(z) = A_0 \frac{j\kappa_G \sinh[\alpha(z - L)]}{\alpha \cosh(\alpha L) + j\varphi \sinh(\alpha L)} \exp(-j\varphi z) \quad (56.4)$$

$$\alpha = \sqrt{\kappa_G^2 - \varphi^2} \quad (57.4)$$



شکل ۶.۴: موجبر نوری برآگ

مهمترین وسیله نوری که از تزویج کننده خلاف جهت استفاده می‌کند، موجبر برآگ [۴] است، همانطور که در شکل (۶.۴) نشان داده شده، در آن ضریب شکست هسته یا روکش شامل تغییرات جزئی ضریب شکست موثر تموج هندسی) به طور تناوبی تغییر می‌یابد. موجبرهای برآگ اجزای ضروری در لیزرهای بازخورد توزیع شده (DFB)^{۱۳} و لیزرهای بازتابنده برآگ توزیع شده (DFB) هستند [۵].

در موجبر برآگ، مقدار ثابت‌های انتشار یکسان است و دارای علائم مخالف است، زیرا موجبرهای I و II یکسان هستند. بعد می‌توانیم بنویسیم

$$\beta_1 = -\beta_2 = kn_{eff} \quad (58.4)$$

که در آن n_{eff} ضریب شکست موثر است. پارامتر تطبیق فاز φ از (۴۹.۴) و (۵۸.۴) بصورت زیر بیان می‌شود

$$\varphi = kn_{eff} - \frac{\pi}{\Lambda} \quad (59.4)$$

توان نوری نرمالیزه عبوری (مستقیم) و بازتابش (معکوس) در موجبر توری برآگ را می‌توان با استفاده از معادلات (۵۰.۴) تا (۵۶.۴) بصورت زیر بیان کرد

$$\bullet \text{ الف} : |\varphi| > \kappa_G$$

$$P_f(z) = \frac{|A(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{\rho^2 + \kappa_G^2 \sin^2[\rho(z-L)]}{\rho^2 + \kappa_G^2 \sin^2(\rho L)} \quad (60.4)$$

$$P_b(z) = \frac{|B(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{\kappa_G^2 \sin^2[\rho(z-L)]}{\rho^2 + \kappa_G^2 \sin^2(\rho L)} \quad (60.4\text{ب})$$

$$\bullet \text{ ب} : |\varphi| = \kappa_G$$

^{۱۳}Distributed Feedback (DFB)

$$P_f(z) = \frac{|A(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{1 + \kappa_G^2(z - L)^2}{1 + \kappa_G^2 L^2} \quad (۶۱.۴)$$

$$P_b(z) = \frac{|B(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{\kappa_G^2(z - L)^2}{1 + \kappa_G^2 L^2} \quad (۶۱.۴\text{ب})$$

$$|\varphi| < \kappa_G \quad \bullet$$

$$P_f(z) = \frac{|A(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{\alpha^2 + \kappa_G^2 \sinh^2[\alpha(z - L)]}{\alpha^2 + \kappa_G^2 \sinh^2(\alpha L)} \quad (۶۲.۴)$$

$$P_b(z) = \frac{|B(z)|^2}{|A_0|^2} = \frac{\kappa_G^2 \sinh^2[\alpha(z - L)]}{\alpha^2 + \kappa_G^2 \sinh^2(\alpha L)} \quad (۶۲.۴\text{ب})$$

شکل (۷.۴)-الف و (۷.۴)-ب) توان نوری نرمالیزه مستقیم و معکوس در موجبرهای براگ در دو شرط تطبیق فاز متفاوت (الف) ($\rho = \pi/L$, $\kappa_G = 2/L$) و (ب) ($\rho = 0$, $\kappa_G = 0$) است، موج تابشی از سمت مخالف موجبر براگ، همان طور که در شکل (۷.۴)-الف نشان داده شده، ارسال می‌شود. فرکانس زاویه‌ای موج نوری که این شرط را برآورده می‌کنند خواهد بود.

$$\frac{\omega}{c} n_{eff} < \frac{\pi}{\Lambda} - \kappa_G, \quad (۶۳.۴)$$

$$\frac{\omega}{c} n_{eff} > \frac{\pi}{\Lambda} + \kappa_G. \quad (۶۳.۴\text{ب})$$

به این گستره فرکانسی باند عبور^{۱۴} می‌گویند. در مقابل، موج نور، همانطور که در شکل (۷.۴)-ب نشان داده شده است، با شرایط تطبیق فاز $|\varphi| < \kappa_G$ به صورت نمائی میرا و بیشتر به عقب منعکس می‌شود. این گستره فرکانس را باند توقف^{۱۵} می‌گویند و بصورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{\pi}{\Lambda} - \kappa_G < \frac{\omega}{c} n_{eff} > \frac{\pi}{\Lambda} + \kappa_G \quad (۶۴.۴)$$

به خصوص، طول موج نوری ارضاء کننده $\phi = 0$ از معادله (۵۹.۴) $(\omega/c)n_{eff} = \pi/\Lambda$ نامیده و بصورت زیر بیان می‌شود

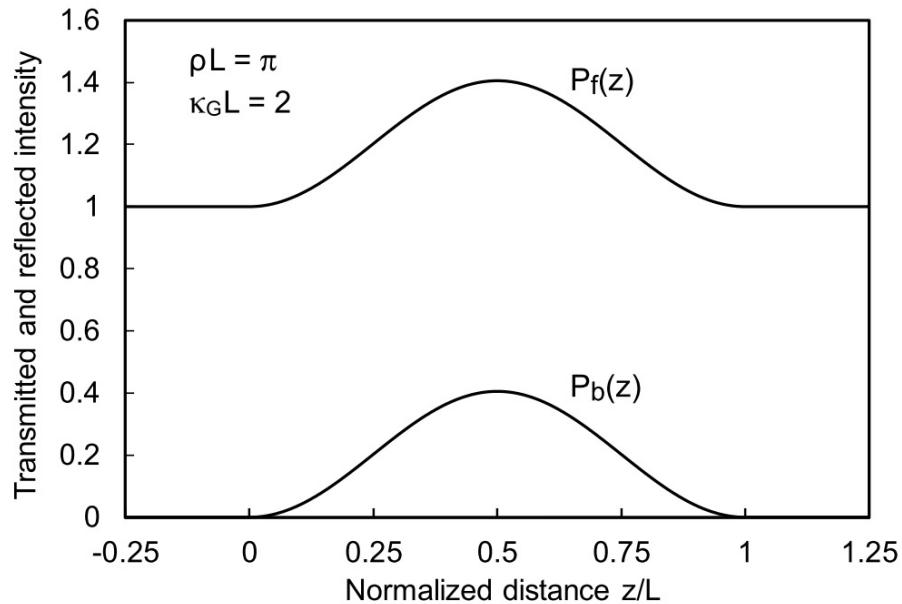
$$\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda \quad (۶۵.۴)$$

موجبر براگ به عنوان فیلتر حذف باند عمل می‌کند که موج نور را نزدیک طول موج براگ منعکس کرده و نور را به خارج از طول موج براگ منتقل می‌نماید. ویژگی‌های عبور و بازتابش موجبر براگ با $\kappa_G L = 2$ در شکل (۸.۴) نشان داده شده است. محور افقی روی

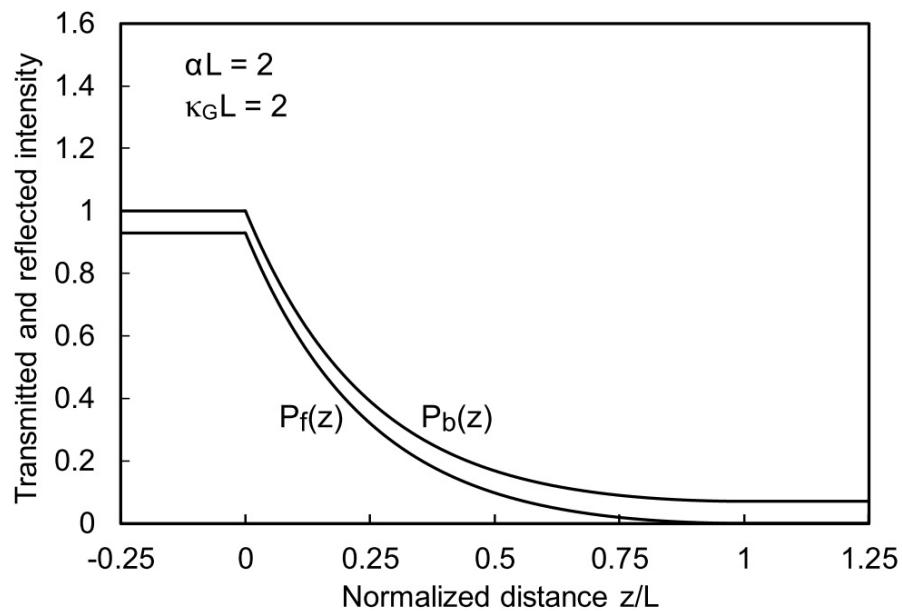
^{۱۴}Pass Band

^{۱۵}Stop Band

^{۱۶}Bragg wavelength

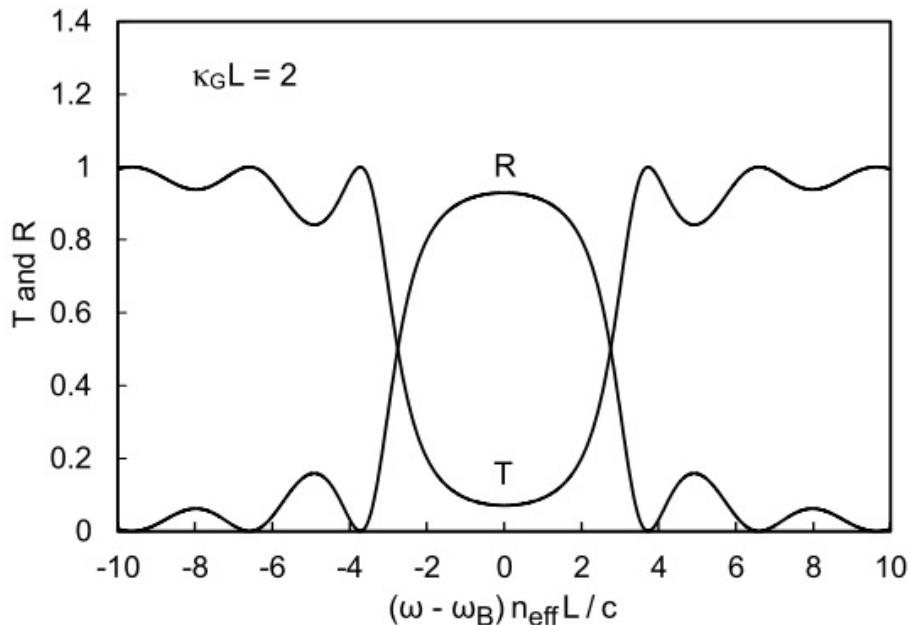


(a)



(b)

شکل ۷.۴: توان نوری نرمالیزه مستقیم و معکوس در موجبرهای برآگ برای (الف) $\rho = \pi/L$, $\kappa_G = 2/L(|\varphi| = 0)$ و (ب) $\alpha = \kappa_G = 2/L(|\varphi| > \kappa_G)$



شکل ۸.۴: ویژگی‌های بازتاب و عبور موجبر برآگ با $\kappa_G L = 2$

از فرکانس زاویه‌ای برآگ $\omega_B = (2\pi/\lambda_B)c$ تنظیم است. عبور دهی T و بازتابش R توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$T = \frac{|A(L)|^2}{|A_0|^2} \quad (66.4)$$

$$R = \frac{|B(0)|^2}{|A_0|^2}. \quad (66.4)$$

سپس بازتابش R از معادلات (۶۰.۴) و (۶۲.۴) بصورت زیر بدست می‌آید

$$R = \frac{(\kappa_G/\rho)^2 \sin^2(\rho L)}{1 + (\kappa_G/\rho)^2 \sin^2(\rho L)} \quad \text{برای} \quad \left| \frac{(\omega - \omega_B)n_{eff}}{c} \right| > \kappa_G \quad (67.4)$$

$$R = \frac{(\kappa_G/L)^2}{1 + (\kappa_G/L)^2} \quad \text{برای} \quad \left| \frac{(\omega - \omega_B)n_{eff}}{c} \right| = \kappa_G \quad (68.4)$$

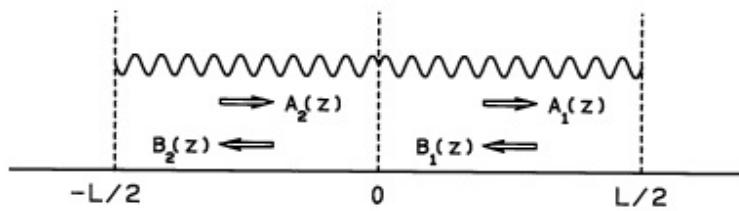
$$R = \frac{(\kappa_G/\alpha)^2 \sinh^2(\alpha L)}{1 + (\kappa_G/\alpha)^2 \sinh^2(\alpha L)} \quad \text{برای} \quad \left| \frac{(\omega - \omega_B)n_{eff}}{c} \right| < \kappa_G \quad (69.4)$$

و ضریب عبور توان T برای تمام حالت‌های معادلات (۶۷.۴) – (۶۹.۴) خواهد بود

$$T = 1 - R \quad (70.4)$$

^{۶۷}Reflectance

^{۶۸}Transmittanc



شکل ۹.۴: موجبر برآگ انتقال فاز

بازتابش در طول موج برآگ λ_B (فرکانس زاویه‌ای $\omega = \omega_B$) با قرار دادن $\alpha = \kappa_G$ در معادله (۶۹.۴) به دست می‌آید:

$$R = \tanh(\kappa_G L). \quad (71.4)$$

برای مثال، بازاء طول تزویج $R = 0.93$ مقدار بازتابش خواهد بود.

۲.۳.۴ توری انتقال فاز

فاز موج منعکس شده توسط موجبر برآگ برای کاربردهای لیزرهای DFB و DBR بسیار مهم است. اجازه دهید بازتابش دامنه موج برآگ را که در $z = 0$ اندازه‌گیری شده، (شکل ۸.۴) بصورت زیر بیان کنیم.

$$r = \frac{B(0)}{A_0} = \sqrt{R} e^{-j\theta} \quad (72.4)$$

که در آن θ فاز نوری در طول موج نزدیک طول موج برآگ است که از معادلات (۵۶.۴)، (۷۲.۴) و (۶۹.۴) بصورت زیر بدست می‌آید

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left[\frac{\varphi}{\alpha} \tanh(\alpha L) \right] \quad (73.4)$$

در مرکز طول موج برآگ ($\varphi = 0$ ، $\theta = \pi/2$)، همانطور که در شکل (۹.۴) نشان داده شده است، پیکربندی لیزر DFB از دو موجبر برآگ تشکیل شده است. سپس کل تغییر فاز یک رفت و برگشت در طول موج برآگ با $\pi = 2 \times \pi/2 = 2\pi$ داده می‌شود. بنابراین، شرط تطبیق فاز یک رفت و برگشت مضرب صحیح 2π است (در پیکربندی معمولی DFB برآورده نمی‌شود. بر عکس، شرایط تطبیق فاز برای دو طول موج کمی از هم جدا شده است [۶]. این دو پیک نوسان طیفی ایجاد می‌کند و باعث تخریب ویژگی‌های انتقال سیگنال در هنگام استفاده به عنوان منبع نور ارتباطات فیبر نوری می‌شود).

اجازه دهید در ادامه موجبرهای برآگ را در نظر بگیریم که دارای 2θ تغییر فاز در $z = 0$ ، همانطور که در شکل (۹.۴) نشان داده شده، هستند. معادلات مود تزویج شده برای دو موجبر برآگ از معادله‌های (۴۵.۴) و (۴۶.۴) بصورت زیر داده شده است.

$$\frac{dA_l}{dz} = -j\kappa_G B_l \exp(j\varphi z \pm j\Theta) \quad (74.4)$$

$$\frac{dB_l}{dz} = -j\kappa_G A_l \exp(-j\varphi z \mp j\Theta) \quad (l = 1, 2) \quad (74.4)$$

در این معادلات، $l = 1$ و 2 با حروف بزرگ و کوچک علامت مثبت یا منفی مطابقت دارد. در اینجا معادله (74.4) را بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{d}{dz} \left[A_l \exp \left(\mp \frac{j\Theta}{2} \right) \right] = -j\kappa_G \left[B_l \exp \left(\pm \frac{j\Theta}{2} \right) \right] \exp(j\varphi z) \quad (75.4)$$

$$\frac{d}{dz} \left[B_l \exp \left(\pm \frac{j\Theta}{2} \right) \right] = j\kappa_G \left[A_l \exp \left(\mp \frac{j\Theta}{2} \right) \right] \exp(-j\varphi z) \quad (75.4)$$

وقتی معادله‌ها (75.4) و (46.4) مقایسه می‌کنیم، مشاهده می‌شود که موجبر برآگ تغییر فاز داده شده را می‌توان با معادلات (45.4) و (46.4)، به سادگی با جایگزین کردن پارامترها به صورت زیر، تجزیه و تحلیل کرد:

$$\begin{cases} A \rightarrow A_l \left(\mp \frac{j\Theta}{2} \right) \\ B \rightarrow B_l \left(\pm \frac{j\Theta}{2} \right) \end{cases} \quad (76.4)$$

با تاب دامنه r_1 موجبر برآگ سمت راست، با توجه به رابطه زیر، از معادله (72.4) داده شده است.

$$\sqrt{R}e^{-j\theta} = \frac{B_1(\circ) \exp(j\Theta/2)}{A_1(\circ) \exp(-j\Theta/2)} = \frac{B_1(\circ)}{A_1(\circ)} \exp(j\Theta)$$

بصورت

$$r_1 = \frac{B_1(\circ)}{A_1(\circ)} = \sqrt{R}e^{-j(\theta+\Theta)} \quad (77.4)$$

شبیه همین رویه، بازتابش دامنه r_2 موجبر برآگ دست چپی بصورت زیر بدست می‌آید

$$r_2 = \frac{B_2(\circ)}{A_2(\circ)} = \sqrt{R}e^{-j(\theta+\Theta)} \quad (78.4)$$

در این صورت اختلاف فاز کل یک مسیر رفت و برگشت در موجبر برآگ تغییر فاز برابر است با

$$\psi = 2(\theta + \Theta) = \pi + 2\Theta + 2 \tan^{-1} \left[\frac{\varphi}{\alpha} \tanh(\alpha L/2) \right] \quad (79.4)$$

انتقال فاز در مرکز طول موج برآگ ($\varphi = 0^\circ$) برابر $\psi = \pi + 2\Theta$ است. به خصوص هنگامی که تغییر فاز توری برآگ $\Theta = \pi/2$ باشد، تغییر فاز نوری در مرکز طول موج برآگ $\psi = 2\pi$ می‌شود و بنابراین شرط تطبیق فاز برآورده می‌شود. انتقال فاز توری $\pi = 2\Theta = \pi/\lambda_B/n_{eff}$ مطابق با تناوب توری و همچنین مربوط به یک چهارم طول موج λ_B/n_{eff} در داخل موجبر است. بنابراین، انتقال فاز توری $\pi = 2\Theta = \lambda/4$ "انتقال یک چهارم λ " نامیده می‌شود [4].

۴.۴ استخراج ضرایب تزویج

ضریب تزویج مودی κ برای محاسبه طول تزویج در کوپلر همجهت بسیار مهم است [معادله (۴۴.۴)]، بازتاب در تزویج کننده مخالف جهت دار [معادله (۷۱.۴)]، وغیره. در این بخش، استخراج ضریب تزویج برای چندین تزویج کننده موجبر نوری معمولی توضیح داده خواهد شد.

۱.۴.۴ ضرایب تزویج برای موجبرهای تیغه‌ای

در اینجا ضریب تزویج مود TE را در کوپلر جهتی مشکل از موجبرهای تیغه‌ای متقارن استخراج می‌کنیم. ضریب تزویج $\kappa_{\text{ک}} = \kappa_{\text{ک}}(= \kappa_{\text{ک}})$ از معادله (۱۳.۴) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\kappa = \frac{\omega \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} (N^y - N_y^*) \mathbf{E}_y^* \cdot \mathbf{E}_y dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_y^* \times \mathbf{H}_y + \mathbf{E}_y \times \mathbf{H}_y^*) dx} \quad (۸۰.۴)$$

مولفه‌های الکترومغناطیسی مود TE از معادله (۵.۲) بصورت $E_x = H_x = 0$ و $E_y = H_y = 0$ - بیان می‌شود. بنابراین، معادلات زیر را خواهیم داشت.

$$\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_y^* \times \mathbf{H}_y + \mathbf{E}_y \times \mathbf{H}_y^*) = \frac{2\beta}{\omega \mu_0} |E_y| \quad (۸۱.۴)$$

$$\mathbf{E}_y^* \cdot \mathbf{E}_y = E_y^* \cdot E_y \quad (۸۱.۴\text{ب})$$

چون $(N^y - N_y^*)$ خارج از موجبر I صفر است، انتگرال گیری (۸۰.۴) فقط باید در داخل موجبر I انجام شود. مبدأ محور x در مرکز موجبر I گرفته می‌شود، همانطور که در شکل (۱۰.۴)، و جداسازی مرکز هسته با D نشان داده می‌شود. جایگزینی معادلات (۸۱.۴) در معادله (۸۰.۴)، به دست می‌آوریم

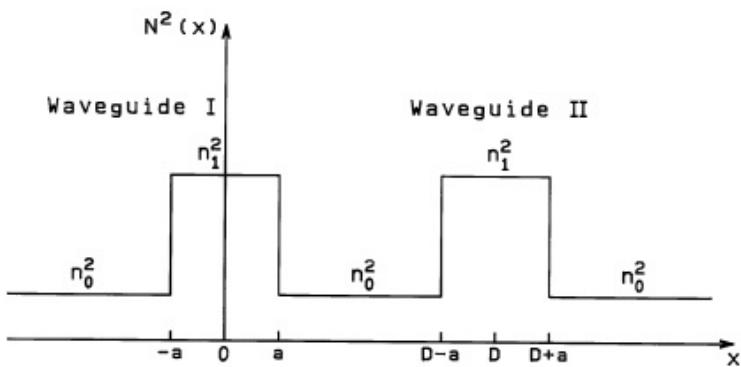
$$\kappa = \frac{\omega \epsilon_0 (n^y - n_y^*) \int_{-a}^a E_y^* \cdot E_y dx}{\frac{2\beta}{\omega \mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx} \quad (۸۲.۴)$$

مولفه‌های میدان الکتریکی در موجبر تیغه‌ای از معادله (۷.۲) خواهد بود

$$E_y = \begin{cases} A \cos\left(\frac{u}{a}x\right) & (|x| \leq a) \\ A \cos(u) \exp\left[-\frac{w}{a}(|x| - a)\right] & (|x| > a) \end{cases} \quad (۸۳.۴)$$

$$E_y = A \cos(u) \exp\left[\frac{w}{a}(x - D + a)\right] \quad |x| \leq a \quad (۸۴.۴)$$

و در داخل هسته موجبر I



شکل ۱۰.۴: کوپلر جهت دار شامل موجبرهای نوری تیغه‌ای

جایگزینی معادلات (۸۳.۴) و (۸۴.۴) در معادله (۸۲.۴) و با استفاده از معادله مقدار ویژه برای مود TE [معادله (۲۴.۲)] بصورت

$$w = u \tan(u) \quad (۸۵.۴)$$

معادله (۸۲.۴) به صورت زیر تقلیل می‌یابد

$$\kappa = \frac{k}{\beta} (n_1^2 - n_0^2) \frac{u^2 w^2}{(1+w)v^4} \exp \left[-\frac{w}{a}(D-2a) \right] \quad (۸۶.۴)$$

در اینجا معادله (۸۶.۴) را می‌توان با استفاده از $\beta \approx kn_1$ و $\Delta \approx 2n_1^2 \Delta$ بازنویسی کرد:

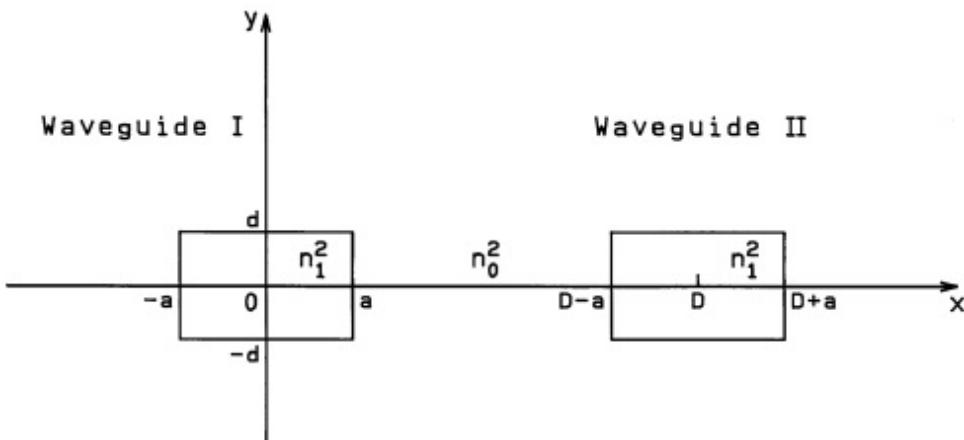
$$\kappa = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a} \frac{u^2 w^2}{(1+w)v^4} \exp \left[-\frac{w}{a}(D-2a) \right] \quad (۸۷.۴)$$

برای مثال، ضریب تزویج مودی کوپلر جهت دار که شامل موجبر تیغه‌ای با $2a = 6\mu m$ ، $v = 1/5$ ، $\Delta = 0.3\%$ ، $w = 0.39 mm^{-1}$ است. و فاصله دو هسته $D = 4a = 4mm$ محاسبه شده است. طول تزویج این کوپلر از رابطه (۴۴.۴)، $L_c = 4mm$ بدست می‌آید.

۲.۴.۴ ضریب تزویج برای موجبر چهارگوش

در اینجا کوپلر جهتی مت Shankl از موجبرهای مستطیلی سه بعدی را در نظر می‌گیریم، همانطور که در شکل (۱۱.۴) نشان داده شده است. وقتی با مود E_{\perp}^x سروکار داریم، از معادله (۴۱.۲)، $H_x = 0$ است. چون می‌توانیم $|E_x| \gg |E_y|$ را برای مود E_{\perp}^x در معادله (۱۳.۴) فرض کنیم، ضریب تزویج مودی با رابطه زیر بیان می‌شود

$$\kappa = \frac{\omega \epsilon_0 (n_1^2 - n_0^2) \int_{-a}^a \int_{-d}^d E_{\perp x}^* \cdot E_{\perp x} dx dy}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp x}^* \cdot H_{\perp y} dx dy} \quad (۸۸.۴)$$



شکل ۱۱.۴: کوپلر جهت دار شامل موجبرهای چهارگوش سه بعدی

با جایگزینی معادله (۴۴.۴) در معادله (۸۸.۴) و استفاده از رابطه $E_x \approx (\omega\mu_0/\beta)H_y$ و صورت رابطه (۸۸.۴) بصورت زیر محاسبه می شود

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\text{lx}}^* \cdot H_{\text{ly}} dx dy \approx \frac{2\omega\mu_0}{\beta} |A|^2 \left(a + \frac{1}{\gamma_x} \right) \left(d + \frac{1}{\gamma_y} \right), \quad (89.4)$$

۶

$$\begin{aligned} & \omega\epsilon_0(n_1^2 - n_0^2) \int_{-a}^a \int_{-d}^d E_{\text{lx}}^* \cdot E_{\text{ly}} dx dy \\ & \approx \frac{2\omega\mu_0}{\beta^2} |A|^2 \left(d + \frac{1}{\gamma_y} \right) \frac{k_x^2 \gamma_x a^2}{v^2} \times \exp[-\gamma_x(D - 2a)] \end{aligned} \quad (90.4)$$

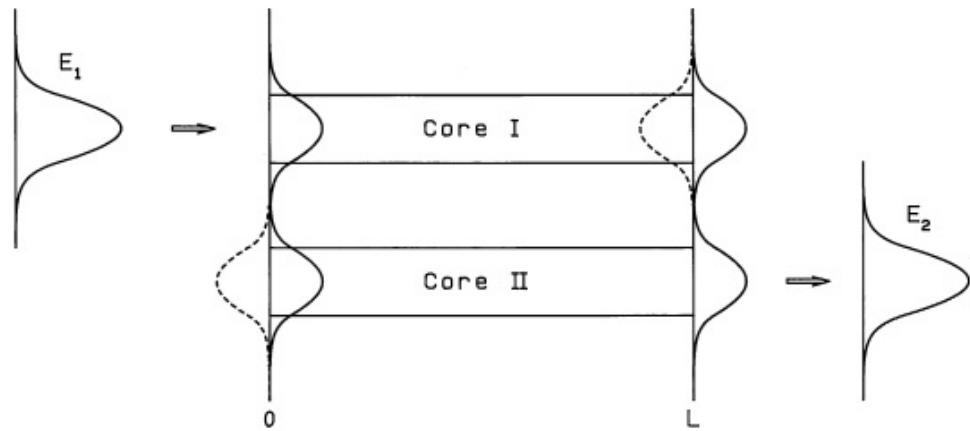
در اینجا فرکانس نرمالیزه بصورت $v = kn_0 a \sqrt{2\Delta}$ تعریف می شود. سپس ضریب تزویج مودی خواهد بود

$$\kappa = \frac{\sqrt{2\Delta}}{a} \frac{(k_x a)^2 (\gamma_x a)^2}{(1 + \gamma_x a)^2} \exp[-\gamma_x(D - 2a)] \quad (91.4)$$

ضریب تزویج مودی کوپلر جهت دار با فاصله مرکز هسته ها $D = 3a$ ، $\kappa = 0.638 mm^{-1}$ ، $L_c = \pi/2\kappa = 2.46 mm$ به دست می آید.

۳.۴.۴ محاسبه ضریب تزویج بر مبنای تداخل مودی

همانطور که در شکل (۱۲.۴) نشان داده شده است، اثر تزویج مود در کوپلر جهت دار می تواند توسط پدیده تداخل بین مودهای زوج و فرد در موجبر تیغه ای پنج لایه [۱] تحلیل شود. وقتی از مودهای مرتبه بالاتر صرف نظر کنیم، میدان الکتریکی در کوپلر جهت دار می توان با جمع مود زوج (مود مرتبه اول در موجبر موج پنج لایه) و مود فرد تقریب زد. (مود مرتبه دوم در موجبر پنج لایه):



شکل ۱۲.۴: مود زوج (خط توپر) و فرد (نقطه چین) در موجبر تیغه‌ای پنج لایه

$$E(x, y) = E_e(x) \exp(-j\beta_e z) + E_o(x) \exp(-j\beta_o z), \quad (92.4)$$

که در آن $E_e(x)$ و β_e نشان دهنده میدان الکتریکی و ثابت انتشار مود زوج و $E_o(x)$ و β_o به ترتیب نشان دهنده مود فرد هستند. میدان الکتریکی تابشی که با موجبر I در $z = 0$ تزویج می‌شود،

$$|E(x, 0)| = |E_e(x) + E_o(x)| = E_1(x). \quad (93.4)$$

در اینجا $E_1(x)$ مود ویژه موجبر I را نشان می‌دهد. وقتی هسته‌های موجبر I و II خیلی نزدیک نیستند، این عبارت با دقت خوبی برقرار است. دامنه میدان الکتریکی در z از معادله (۹۲.۴) بصورت زیر داده شده است.

$$|E(x, z)| = |E_e(x) + E_o(x) \exp[j(\beta_e - \beta_o)z]|. \quad (94.4)$$

در این صورت توزیع میدان الکتریکی در $z = \pi/(\beta_e - \beta_o)$ خواهد بود

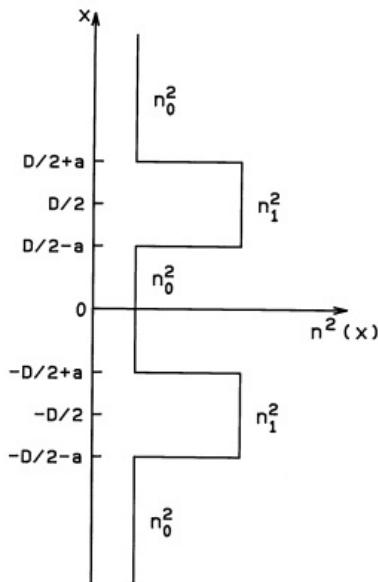
$$|E(x, z)| = |E_e(x) + E_o(x)| = E_2(x), \quad (95.4)$$

که در آن $E_2(x)$ نمایشگر مود ویژه موجبر II است. معادله (۹۵.۴) بدین معنی است که میدان تابشی تزویج شده با موجبر I در فاصله زیر به موجبر II انتقال می‌یابد

$$L_c = \frac{\pi}{\beta_e - \beta_o} \quad (96.4)$$

که در آن L_c طول تزویج است. ضریب تزویج مودی از رابطه (۴۴.۴) و (۹۶.۴) بدست می‌آید:

$$\kappa = \frac{\pi}{2L_c} = \frac{\beta_e - \beta_o}{2} \quad (97.4)$$



شکل ۱۳.۴: توزیع ضریب شکست موجبر تیغه‌ای پنج لایه

اجازه دهید ضریب کوپلینگ مود را برای مود TE در موجبر تیغه‌ای پنج لایه محاسبه کنیم. معادلات مقدار ویژه موجبر تیغه‌ای پنج لایه در سیستم مختصات شکل (۱۳.۴) نشان داده شده خواهد بود

$$2u = \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) + \tan^{-1} \left\{ \frac{w}{u} \tanh \left[\left(\frac{D}{2a} - 1 \right) w \right] \right\} \quad (\text{مود زوج}) \quad (98.4)$$

$$2u = \tan^{-1} \left(\frac{w}{u} \right) + \tan^{-1} \left\{ \frac{w}{u} \coth \left[\left(\frac{D}{2a} - 1 \right) w \right] \right\} \quad (\text{مود فرد}) \quad (99.4)$$

که در آن

$$u = a \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2} \quad (100.4)$$

$$w = a \sqrt{\beta^2 - k^2 n_0^2} \quad (100.4)$$

هنگامی که فاصله مرکز دو هسته D وقتی بهبی نهایت ($D \rightarrow \infty$) نزدیک می‌شود، معادله (۹۹.۴) و (۹۸.۴) هر دو به معادله مود ویژه در موجبر تک تیغه‌ای تقلیل می‌یابند:

$$u_{\circ} = \tan^{-1} \left(\frac{w_{\circ}}{u_{\circ}} \right) \quad (101.4)$$

ثبت انتشار حاصل از معادله (۱۰۱.۴) را به صورت $\beta^{(0)}$ نشان می‌دهیم. هنگامی که تزویج مود بین دو موجبر ضعیف باشد، معادلات مود ویژه (۹۸.۴) و (۹۹.۴) به عنوان یک

تغییرات جزئی از معادله (۱۰۱.۴) در نظر گرفته می‌شود. در این صورت ثابت انتشار برای مود زوج بصورت زیر بیان می‌شود

$$\beta_e = \beta^{(0)} + \delta\beta_e \quad (102.4)$$

با جایگزینی معادله (۱۰۰.۴) در (۱۰۲.۴)، خواهیم داشت

$$2u = 2a\sqrt{k^2 n_1^2 - (\beta^{(0)} - \delta\beta_e)^2} \approx u_{\circ} - \frac{2\beta^{(0)} a^2}{u_{\circ}} \delta\beta_e. \quad (103.4)$$

به روشی مشابه، هر جمله سمت راست معادله (۹۸.۴) را می‌توان به صورت زیر تقریبی تخمین زد

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{w}{u}\right) &\approx u_{\circ} + \frac{\beta^{(0)} a^2}{u_{\circ} w_{\circ}} \delta\beta_e, \\ \tan^{-1}\left\{\frac{w}{u} \tanh\left[\left(\frac{D}{2a} - 1\right) w\right]\right\} \\ &\approx -u_{\circ} + \frac{\beta^{(0)} a^2}{u_{\circ} w_{\circ}} \delta\beta_e - \frac{u_{\circ} w_{\circ}}{v_{\circ}^2} \exp\left[-w_{\circ} \left(\frac{D}{2a} - 1\right)\right] \end{aligned} \quad (104.4)$$

که در آن از تقریب $\tanh(z) \approx 1 - 2e^{-2z}$ استفاده شده است. جایگزینی معادلات (۱۰۳.۴) و (۱۰۴.۴) در معادله (۹۸.۴)، به دست می‌آید

$$\frac{(1+w_{\circ})}{u_{\circ} w_{\circ}} \beta^{(0)} a^2 \delta\beta_e = u_{\circ} + \frac{u_{\circ} w_{\circ}}{v_{\circ}^2} \exp\left[-\frac{w_{\circ}}{a} (D - 2a)\right]. \quad (105.4)$$

به روشی مشابه، رابطه برای $\delta\beta_o = \beta_o - \beta^{(0)}$ بدست می‌آید

$$\frac{(1+w_{\circ})}{u_{\circ} w_{\circ}} \beta^{(0)} a^2 \delta\beta_o = u_{\circ} - \frac{u_{\circ} w_{\circ}}{v_{\circ}^2} \exp\left[-\frac{w_{\circ}}{a} (D - 2a)\right]. \quad (106.4)$$

با جایگزینی معادلات (۱۰۵.۴) و (۱۰۶.۴) در معادله (۹۷.۴)، ضریب تزویج مودی κ بدست خواهد آمد

$$\kappa = \frac{(\delta\beta_e - \beta\beta_o)}{2} = \frac{u_{\circ}^2 w_{\circ}^2}{\beta^{(0)} a^2 (1+w_{\circ}) v_{\circ}^2} \exp\left[-\frac{w_{\circ}}{a} (D - 2a)\right] \quad (107.4)$$

این معادله را وقتی با مقادیر $\beta^{(0)} \approx kn_1$ و $v_{\circ}^2 = k^2 a^2 (n_1^2 - n_{\circ}^2)$ جایگزین کنیم به معادله (۱۰۶.۴) تقلیل می‌یابد.

۴.۴.۴ ضرایب تزویج برای فیبرهای نوری

ضریب تزویج مود در معادله (۱۳.۴) بازنویسی می‌کنیم

$$\kappa = \frac{\omega\epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^\uparrow - N_\downarrow) \mathbf{E}_\downarrow^* \cdot \mathbf{E}_\uparrow dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_\downarrow^* \times \mathbf{H}_\downarrow + \mathbf{E}_\downarrow \times \mathbf{H}_\downarrow^*) dx dy} \quad (10.8.4)$$

با قرار دادن ۱ و تعویض $A = s_1 = s_2 = -j(\beta a/u)A$ در معادله (۹۴.۴) و (۹۵.۴)، میدان‌های الکترومغناطیسی مود اصلی HE_{11} بصورت زیر بیان می‌شود؛

• (الف) ناحیه هسته ($0 \leq r \leq a$) :

$$E_x = CJ_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos \psi, \quad (10.9.4)$$

$$E_y = -CJ_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin \psi, \quad (10.9.4)$$

$$E_z = j \frac{u}{\beta a} CJ_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos(\theta + \psi), \quad (10.9.4)$$

$$H_x = \frac{\omega\epsilon_0 n_1^\uparrow}{\beta} CJ_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin \psi, \quad (10.9.4)$$

$$H_y = \frac{\omega\epsilon_0 n_1^\uparrow}{\beta} CJ_0 \left(\frac{u}{a} r \right) \cos \psi, \quad (10.9.4)$$

$$H_z = j \frac{u}{\omega\epsilon_0 a} CJ_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \sin(\theta + \psi), \quad (10.9.4)$$

• (ب) ناحیه روکش ($r < a$) :

$$E_x = C \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos \psi, \quad (110.4)$$

$$E_y = -C \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin \psi, \quad (110.4)$$

$$E_z = j \frac{u}{\beta a} C \frac{J_1(u)}{K_1(w)} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos(\theta + \psi), \quad (110.4)$$

$$H_x = \frac{\omega\epsilon_0 n_0^\uparrow}{\beta} C \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin \psi, \quad (110.4)$$

$$H_y = \frac{\omega\epsilon_0 n_0^\uparrow}{\beta} C \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \cos \psi, \quad (110.4)$$

$$H_z = j \frac{u}{\omega\epsilon_0 a} C \frac{J_1(u)}{K_1(w)} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) \sin(\theta + \psi), \quad (110.4)$$

ثابت C با توان نوری P با رابطه (۹۹.۴) بهم مربوط هستند:

$$|C| = \frac{w}{avJ_1(u)} \sqrt{\frac{2P\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{\pi n_1}} \quad (111.4)$$

که در آن سرعت نور c با $\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ جایگزین شده است. مخرج معادله (۱۰۸.۴) از معادله (۱۷.۴) بصورت زیر نرمالیزه شده است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_1^* \times \mathbf{H}_1 + \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) dx dy = 4P \quad (112.4)$$

سپس انتگرال صورت کسر معادله (۱۰۸.۴) را در نظر می‌گیریم. همانطور که در شکل (۱۴.۴) نشان داده شده است، $N^*(r, \theta) - N_*(r, \theta)$ خارج از هسته ۱ صفر است. توجه داشته باشید که میدان الکتریکی هسته برای \mathbf{E}_1 [معادله (۱۰۹.۴)] و برای میدان روکش \mathbf{E}_2 [معادله (۱۱۰.۴)] استفاده می‌شود. برای انتگرال درون هسته ۱، $\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{E}_1$ برابر است با

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 &= E_x^* E_{x2} + E_y^* E_{y2} + E_z^* E_{z2} \\ &= |C|^2 \frac{J_*(u)}{K_*(w)} J_*(\frac{u}{a} r) K_*(\frac{w}{a} R) + \left(\frac{u}{\beta a}\right)^2 |C|^2 \frac{J_1(u)}{K_1(w)} J_1\left(\frac{u}{a} r\right) K_1\left(\frac{w}{a} R\right) \\ &\quad \times \cos(\theta + \psi) \cos(\Theta + \psi), \end{aligned} \quad (113.4)$$

که در آن (R, Θ) دستگاه مختصاتی است که مبداء مختصات آن در مرکز هسته ۲ و در شکل (۱۵.۴) نشان داده شده است. فاصله دو مرکز هسته با D مشخص می‌شود. هنگامی که $D \gg r$ برقرار باشد، شعاع R می‌تواند به صورت تقریبی بیان شود.

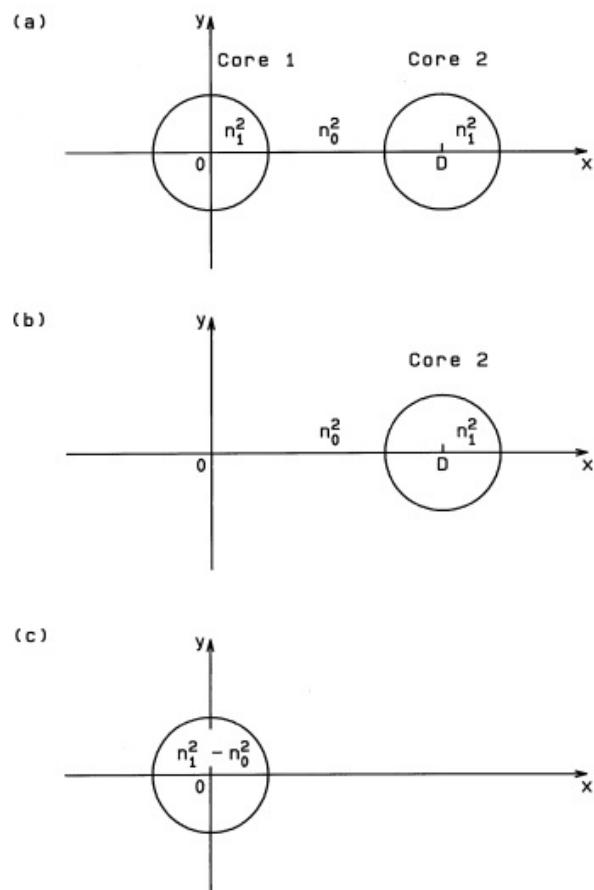
$$R = (D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta)^{1/2} \approx D - r \cos \theta \quad (114.4)$$

چون جمله دوم سمت راست معادله (۱۱۳.۴) به اندازه کافی کوچکتر از جمله اول است، انتگرال صورت کسر در معادله (۱۰۸.۴) می‌شود [۱۰، ۹]:

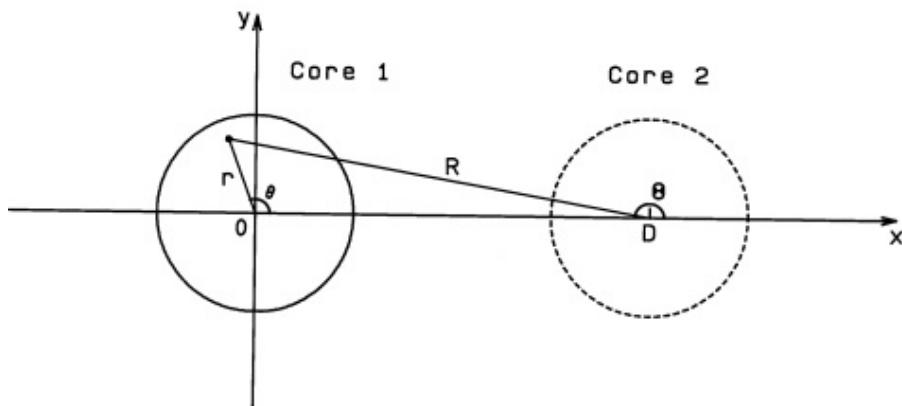
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (N^* - N_*) \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a (n^* - n_*) |C|^2 \frac{J_*(u)}{K_*(w)} J_*(\frac{u}{a} r) \\ &\quad \times K_*(\frac{w}{a} R) r dr d\theta \end{aligned} \quad (115.4)$$

هنگامی که آرگومان تابع بسل اصلاح شده $K_*(z)$ در معادله (۱۱۵.۴) بزرگ باشد، می‌توان آنرا تقریب زد.

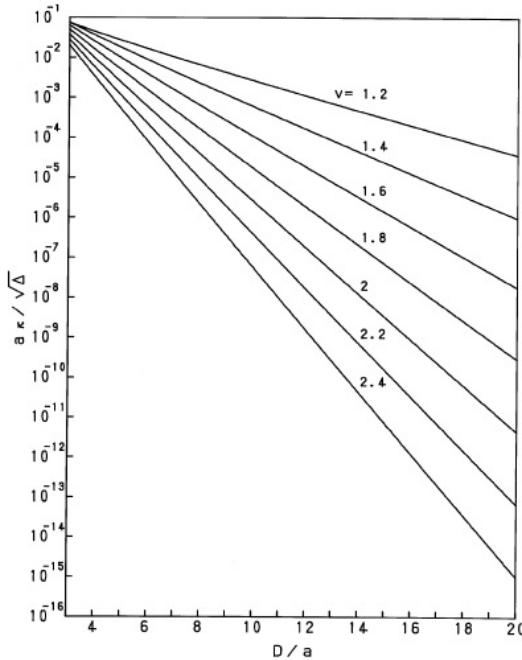
$$K_*(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \quad (116.4)$$



شکل ۱۴.۴: شکل هندسی برای محاسبه ضریب تزویج مودی. (الف)، (ب) و (ج) نمایشگر بترتیب $N^r(r, \theta)$ ، $N_r^r(r, \theta)$ و $N^r(r, \theta) - N_r^r(r, \theta)$ هستند.



شکل ۱۵.۴: دستگاه مختصات برای انتگرال‌گیری $E_1^* \cdot E_2$



شکل ۱۶.۴: وابستگی‌های ضریب تزویج نرمالیزه $\kappa a \sqrt{\Delta}$ بر حسب فاصله نسبی مرکز هسته بازه مقادیر مختلف v .

با جایگزینی معادله (۱۱۵.۴) در معادله (۱۱۶.۴) خواهیم داشت

$$S = (n_v - n_o) |C|^v \frac{J_o(u)}{K_o(w)} \sqrt{\frac{\pi a}{4wD}} \exp\left(-\frac{w}{a}D\right) \int_0^{\pi} \int_0^a J_o\left(\frac{u}{a}r\right) \times \exp\left(\frac{w}{a}r \cos \theta\right) r dr d\theta \quad (117.4)$$

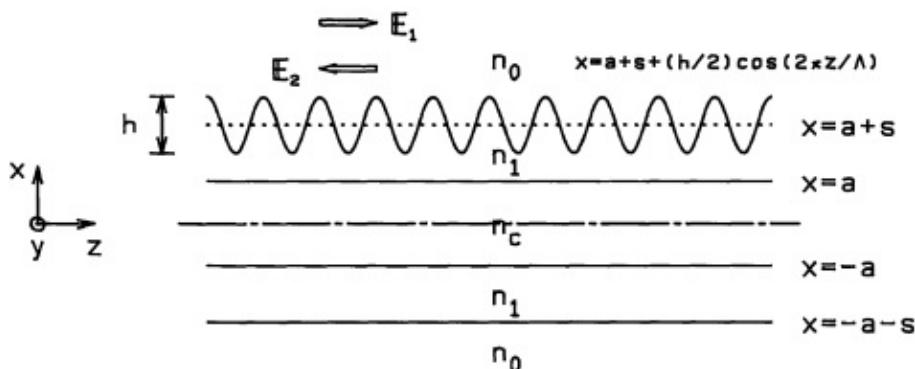
معادله (۱۱۷.۴) را می‌توان با استفاده از انتگرال توابع بسل بازنویسی کرد [۱۱]

$$I_o(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(z \cos \theta) d\theta \quad (118.4)$$

$$\int_0^1 J_o(uz) I_o(wz) z dz = \frac{J_o(u) w I_1(w) + I_o(w) u J_1(u)}{u^v + w^v} \quad (118.4b)$$

بنابراین

$$S = (n_v - n_o) |C|^v \frac{J_o(u)}{K_o(w)} \sqrt{\frac{\pi a}{4wD}} \exp\left(-\frac{w}{a}D\right) \times \frac{u J_1(u)}{v^v K_1(w)} \times \left[\frac{J_o(u)}{u J_1(u)} w K_1(w) I_1(w) + K_1(w) I_o(w) \right] \quad (119.4)$$



شکل ۱۷.۴: موجبر نوری برآگ با شکل ضریب شکست $N(x, z)$. خط نقطه نشان دهنده شکل ضریب شکست $N(x, z)$ بدون نوری است.

اگر از معادله مقدار ویژه مود HE_{113} [معادله ۱۶.۳] با $n = 1$ و رابطه تابع بسل اصلاح شده استفاده کنیم

$$K_0(w)I_1(w) + K_1(w)I_0(w) = \frac{1}{w} \quad (120.4)$$

در این صورت ضریب تزویج مودی کوپلر جهت دار فیبر نوری خواهد بود

$$\kappa = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \frac{u}{v^3 K_1^3(w)} \sqrt{\frac{\pi a}{w D}} \exp\left(-\frac{w}{a} D\right) \quad (121.4)$$

شکل (۱۶.۴) وابستگی‌های ضریب تزویج نرمالیزه $\kappa a / \sqrt{\Delta}$ را نسبت به فاصله نسبی مرکز هسته D/a برای مقادیر مختلف v نشان می‌دهد.

۵.۴.۴ ضریب تزویج برای موجبرهای موجدار

همانطور که در شکل (۱۷.۴) نشان داده شده است، در اینجا روش بدست آوردن ضریب تزویج مودی κ_G در موجبر برآگ [۱۲] را شرح می‌دهیم. از آنجایی که امواج منعکس شده موج تابشی دارای توزیع عرضی یکسان اما با جهت انتشار مخالف هستند، داریم

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E}, \quad (\bar{122.4})$$

$$\beta_2 = -\beta_1 = \beta \quad (122.4b)$$

همانطور که در معادله (۱۸۱.۴) نشان داده شده است، معادلات زیر را برای مود TE در موجبر تیغه‌ای داریم:

$$\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_\downarrow^* \times \mathbf{H}_\downarrow + \mathbf{E}_\downarrow \times \mathbf{H}_\downarrow^*) = \frac{\gamma\beta}{\omega\mu_0} |E_y|^2 \quad (1123.4)$$

$$\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_\uparrow^* \times \mathbf{H}_\uparrow + \mathbf{E}_\uparrow \times \mathbf{H}_\uparrow^*) = \frac{\gamma\beta}{\omega\mu_0} |E_y|^2 \quad (1123.4)$$

$$\mathbf{E}_\downarrow^* \cdot \mathbf{E}_\downarrow = \mathbf{E}_\uparrow^* \cdot \mathbf{E}_\uparrow = |E_y|^2 \quad (1123.4)$$

جایگزینی معادلات (۱۳.۴) و (۱۲۳.۴) در معادلات (۳۰.۴) و (۳۱.۴)، معادلات کوپلینگ مود برای موجبر نوری برآگ توسط معادلات زیر خواهد بود

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dz} = -jB \exp(j\gamma\beta z) \frac{k^2}{\gamma\beta} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (N^u - N_\downarrow^u) |E_y|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx} \\ \frac{dB}{dz} = jA \exp(-j\gamma\beta z) \frac{k^2}{\gamma\beta} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (N^u - N_\uparrow^u) |E_y|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(الف)} \\ \text{(ب)} \end{array} \quad (1124.4)$$

که در آن $N^u = N_\downarrow^u - N_\uparrow^u$. بطوری که در شکل (۱۱۷.۴) نشان داده شده است، جمله تغییرات جزئی $[N^u(x, z) - N_\downarrow^u(x)]$ خارج از ناحیه توری صفر است. در این صورت این بصورت زیر بیان می‌شود

$$\left\{ \begin{array}{ll} \circ & \left(x > a + s + \frac{h}{2} \right) \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(x) \exp \left(-j \frac{\gamma\pi m}{\Lambda} z \right) & \left(a + s - \frac{h}{2} \leq x \leq a + s + \frac{h}{2} \right) \\ \circ & \left(x < a + s - \frac{h}{2} \right) \end{array} \right. \quad (1125.4)$$

که در آن s نشان دهنده میانگین ضخامت لایه توری و h ارتفاع توری است. ضرایب بسط فوریه A_m به دست می‌آید

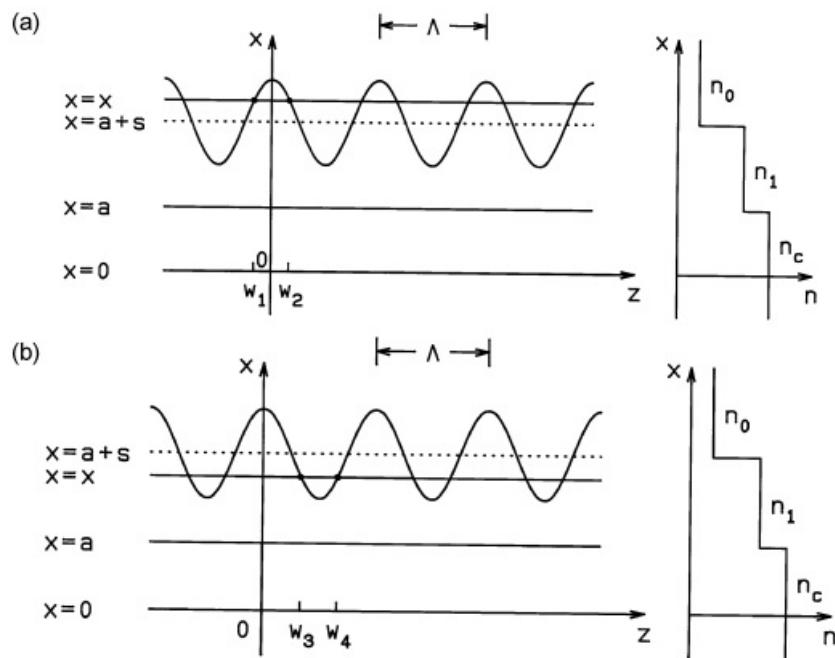
$$A_m(x) = \frac{1}{\Lambda} \int_{u_-}^{w_+ + \Lambda} [N^u(x, z) - N_\downarrow^u(x)] \exp \left(j \frac{\gamma\pi m}{\Lambda} z \right) dz \quad (1126.4)$$

که در آن w_+ بصورت زیر داده می‌شود

$$w_+ = \frac{\Lambda}{\gamma\pi} \cos^{-1} \left[\frac{2}{h} (x - a - s) \right] \quad (1127.4)$$

انتگرال‌گیری معادله (۱۱۶.۴) را به دو حالت مربوط به علامت $(x - a - s)$ بطوری که در شکل (۱۸.۴) نشان داده شده است، تقسیم می‌کنیم

• (الف) (۱۸.۴) (الف) شکل [، $x \geq a + s$] •



شکل ۱۸.۴: دستگاه مختصات برای محاسبه $A_m(x)$ در محدوده (الف) (ب) $x < a + s$ و $x \geq a + s$

$$A_m(x) = \begin{cases} \frac{\gamma w_\gamma}{\Lambda} (n_1^\gamma - n_\circ^\gamma) & (m = \circ) \\ \frac{n_1^\gamma - n_\circ^\gamma}{\pi m} \sin\left(\frac{\gamma \pi m}{\Lambda} w_\gamma\right) & (m \neq \circ) \end{cases} \quad (128.4)$$

$$w_\gamma = \frac{\Lambda}{\gamma \pi} \cos^{-1} \left[\frac{\gamma}{h} (x - a - s) \right] \quad (129.4)$$

شکل (۱۸.۴)-ب، $x < a + s$ •

$$A_m(x) = \begin{cases} -\left(\frac{\gamma w_\gamma}{\Lambda} - 1\right) (n_1^\gamma - n_\circ^\gamma) & (m = \circ) \\ -\frac{n_1^\gamma - n_\circ^\gamma}{\pi m} \sin\left(\frac{\gamma \pi m}{\Lambda} w_\gamma\right) & (m \neq \circ) \end{cases} \quad (130.4)$$

$$w_\gamma = \frac{\Lambda}{\gamma} + \frac{\Lambda}{\gamma \pi} \cos^{-1} \left[\frac{\gamma}{h} (a + s - x) \right] \quad (131.4)$$

در این صورت تغییرات جزئی ضریب شکست $N_\gamma^\gamma(x, z) - N_\gamma^\gamma(x)$ از معادلات (۱۲۵.۴)

(۱۳۱.۴) خواهد بود -

$$N^* - N_r^* = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n_r^* - n_s^*}{\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m}{\Lambda} w_r\right) \exp\left(-j \frac{2\pi m}{\Lambda} z\right) & (x > a + s + \frac{h}{2}) \\ - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n_r^* - n_s^*}{\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m}{\Lambda} w_r\right) \exp\left(-j \frac{2\pi m}{\Lambda} z\right) & (a + s \leq x \leq a + s + \frac{h}{2}) \\ . & (a + s - \frac{h}{2} \leq x \leq a + s) \\ . & (x < a + s - \frac{h}{2}) \end{cases} \quad (132.4)$$

عدد صحیح m در این معادله نشان‌دهنده مرتبه پراش^{۱۹} توری است. معادله مود تزویج شده برای m امین مرتبه از معادلات (۱۲۴.۴) و (۱۳۲.۴) بصورت زیر داده می‌شود

$$\begin{cases} \frac{dA}{dz} & -j\kappa_G B \exp\left[j\left(2\beta - \frac{2\pi m}{\Lambda}\right)\right] \\ \frac{dA}{dz} & -j\kappa_G A \exp\left[-j\left(2\beta - \frac{2\pi m}{\Lambda}\right)\right] \end{cases} \quad (133.4)$$

که در آن

$$\kappa_G = \frac{k^*}{2\beta P} \frac{n_r^* - n_s^*}{\pi m} \left[\int_{a+s}^{a+s+h/2} \sin\left(\frac{2\pi m}{\Lambda} w_r\right) |E_y|^2 dx \right. \quad (134.4)$$

$$\left. - \int_{a+s-h/2}^{a+s} \sin\left(\frac{2\pi m}{\Lambda} w_r\right) |E_y|^2 dx \right] \quad (135.4)$$

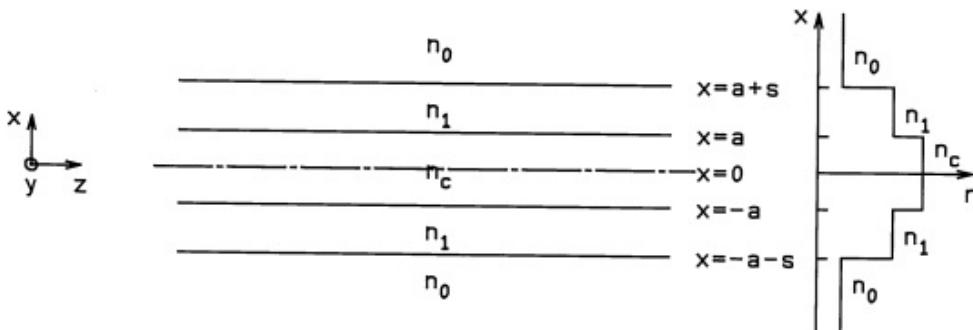
اجازه دهید توزیع میدان الکتریکی E_y را در شکل ضریب شکست بدون تغییرات جزئی $N_r(x)$ یا $N_s(x)$ بدست آوریم تا κ_G را محاسبه کنیم. در اینجا ما پارامترهای عملی زیر را در موجب تیغه‌ای پنج لایه همانطور که در شکل (۱۹.۴) نشان داده شده است، فرض می‌کنیم^[۶]:

$$\begin{cases} n_c = ۳/۵, & n_1 = ۳/۳۸, & n_2 = ۳/۱۷ \\ ۲a = ۰/۲۵\mu m, & s = ۰/۱\mu m, & h = ۱۰۰ - ۱۵۰\text{ }A^\circ \end{cases} \quad (136.4)$$

تحت این پارامترهای موجبر، ثابت انتشار β بین $kn_1 < \beta < kn_2$ قرار می‌گیرد. توزیع میدان الکتریکی در این صورت خواهد بود

$$E_y = \begin{cases} Q \cos(\eta x) & (0 \leq |x| \leq a) \\ H \cos[\gamma(x-a)] + C \sin[\gamma(x-a)] & (a \leq |x| \leq a+s) \\ D \exp[-\sigma(x-a-s)] & (|x| > a+s) \end{cases} \quad (137.4)$$

^{۱۹}Diffraction



شکل ۱۹.۴: شکل ضریب شکست بدون تغییرات جزئی $N_1(x)$ یا $N_2(x)$ قبل از تشکیل توری

که در آن عده‌های موج عرضی خواهد بود

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = k \sqrt{n_c^2 - \left(\frac{\beta}{k}\right)^2} \\ \gamma = k \sqrt{n_1^2 - \left(\frac{\beta}{k}\right)^2} \\ \sigma = k \sqrt{\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 - n_0^2} \end{array} \right. \quad (138.4)$$

معادله مقدار ویژه برای مود TE با اعمال شرایط پیوستگی برای E_y و $H_x \propto dE_y/dx$ بدست می‌آید:

$$\left[\frac{\gamma + \sigma \tan(\gamma s)}{\sigma - \gamma \tan(\gamma s)} \right] \eta \sin(\eta a) = \gamma \cos(\eta a). \quad (139.4)$$

ثابت‌های H, C و D در معادله (۱۳۷.۴) و توان نوری P در معادله (۱۳۵.۴) بر حسب Q بصورت زیر بیان می‌شوند

$$\frac{H}{Q} = \cos(\eta a), \quad (140.4)$$

$$\frac{C}{Q} = -\frac{\eta}{\gamma} \sin(\eta a) \quad (140.4)$$

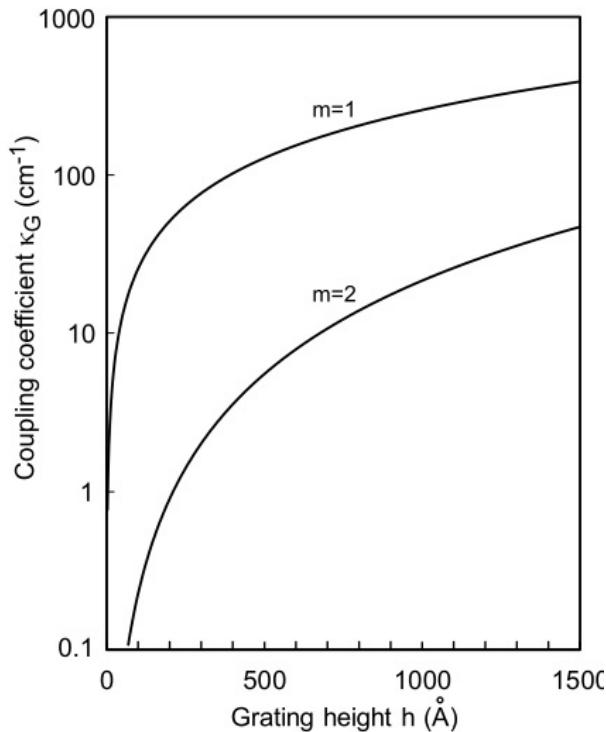
$$\frac{D}{Q} = \cos(\eta a) \cos(\gamma s) - \frac{\eta}{\gamma} \sin(\eta a) \sin(\gamma s) \quad (140.4)$$

$$P_0 \equiv \frac{P}{Q} = a + \frac{\sin(2\eta a)}{2\eta} + \left(\frac{D}{Q}\right)^2 \frac{1}{\sigma} + \left(\frac{H}{Q}\right)^2 \left[s + \frac{\sin(2\gamma s)}{2\gamma}\right] + \frac{H}{Q} \frac{C}{Q} \frac{1}{\gamma} [1 - \cos(2\gamma s)] + \left(\frac{C}{Q}\right)^2 \left[s - \frac{\sin(2\gamma s)}{2\gamma}\right] \quad (140.4)$$

جایگزینی معادله (۱۳۴.۴)- (۱۳۷.۴) در معادله (۱۴۱.۴)، ضریب تزویج موجبر برآگ خواهد بود

$$\lambda \kappa_G = \frac{1}{(\beta/k) P_0} \frac{n_1^2 - n_0^2}{m} \int_0^{h/2} F(\xi) \sin \left[m \cos^{-1} \left(\frac{2}{h} \xi \right) \right] d\xi \quad (141.4)$$

$$F(\xi) = \left(\frac{D}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-2\sigma\xi) - \cos(m\pi) \times \left\{ \frac{H}{Q} \cos[\gamma(s-\xi)] + \frac{C}{Q} \sin[\gamma(s-\xi)] \right\}. \quad (142.4)$$



شکل ۲۰.۴: ضریب تزویج موجبر برآگ نسبت به ارتفاع توری h .

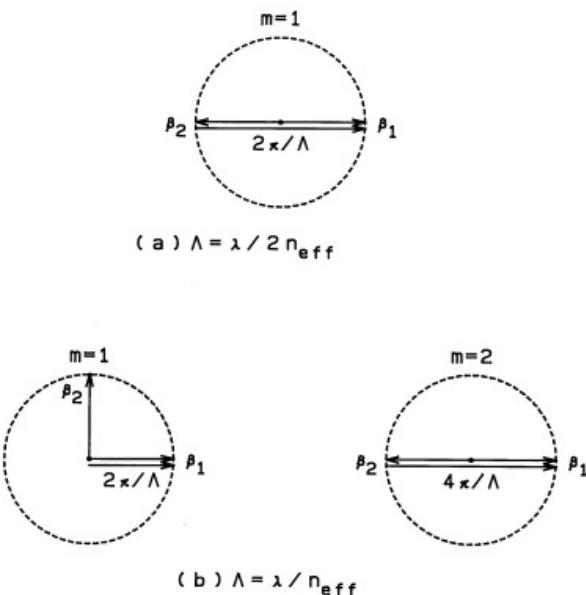
شکل (۲۰.۴) ضریب تزویج κ_G مود TE را در موجبر برآگ با پارامترهای معادله (۱۳۶.۴) نشان می‌دهد. ضریب شکست موثر موجبر بدون تغییرات جزئی با پارامترهای معادله (۱۳۶.۴) محاسبه می‌شود

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k} = ۳,۲۸۹۱۳۶ \quad (143.4)$$

شرط تطبیق فاز برای تزویج مود بیشینه از معادله (۸۵.۴) خواهد بود

$$\Lambda = m \frac{\lambda}{2n_{eff}} \approx ۰,۲۳۵۶m \quad (\mu m) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (144.4)$$

از رابطه (۱۴۴.۴) مشاهده می‌شود که برای ساخت لیزرهای DFB با پراش مرتبه اول ($m = 1$) گام توری باید $\Lambda = ۰,۲۳۵۶ \mu m$ باشد. برای توری پراش مرتبه اول با ارتفاع توری $h = ۱۰۰۰ \text{ nm}$, ضریب تزویج مود، از شکل (۲۰.۴)، با $\kappa_G \approx ۳۰۰ \text{ cm}^{-1}$ داده شده است. اگر بخواهیم بازتاب توری R را بزرگتر از ۹۵% کنیم، از معادله (۷۱.۴) مشاهده می‌شود

شکل ۲۱.۴: رابطه جهت انتشار موج پراشیده توسط توری با تناوب Λ .

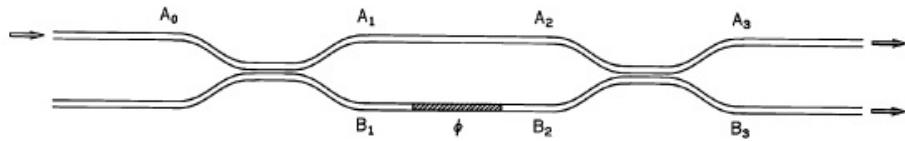
که $\kappa_G L \geq 2/18$ باید برآورده شود. سپس حداقل طول توری لازم توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$L \geq \frac{2/18}{\kappa_G} \approx 73 \quad (\mu\text{m}) \quad (145.4)$$

شرط تطبیق فاز کلی موجبر نوری برآگ با جایگزینی معادله‌های (۱۳.۴) و (۱۳۲.۴) در (۳۰.۴) و (۳۱.۴) بدست می‌آید:

$$\frac{2\pi}{\Lambda} m = \beta_1 - \beta_2 \quad (146.4)$$

سپس جهت انتشار موج پراشیده، بسته به بزرگی Λ ، همانطور که در شکل (۲۱.۴) نشان داده شده، تغییر می‌کند. هنگامی که $\Lambda = \lambda/n_{\text{eff}}$ ، همانطور که در شکل (۲۱.۴)-ب نشان داده شده، موج پراش مرتبه اول عمود بر موج تابشی، معنکس می‌شود. بنابراین، لیزرهای نیمه‌هادی دارای این توری برای لیزرهای ساطع کننده سطح قابل استفاده هستند. از شکل سمت راست شکل (۲۱.۴)-ب مشاهده می‌شود که لیزر DFB را می‌توان حتی زمانی که گام توری $\Lambda = \lambda/n_{\text{eff}}$ است، اگر از پراش مرتبه دوم $m = 2$ استفاده کنیم، ساخته می‌شود. با این حال، ضریب تزویج مود $\kappa_G \approx 20 \text{ cm}^{-1}$ برای موج پراش مرتبه دوم در ارتفاع توری $h = 100^\circ A$ است. در این صورت حداقل طول توری لازم برای بدست آوردن بازتاب $R \geq 1/1 (mm)$ می‌شود. چنین توری طولانی برای لیزر مضر است، زیرا اندازه تراشه بزرگ و افت انتشار در توری افزایش می‌یابد. به خوبی درک شده است که گریتینگ مرتبه اول به ویژه برای لیزرهای DFB مهم است.



شکل ۲۲.۴: تداخل سنج نوری ماخ-زندر

۵.۴ دستگاههای موجبر نوری با استفاده از کوپلهای جهت‌دار

کوپلهای جهت‌دار اجزای بسیار مهمی در ساخت دستگاههای نوری مختلف هستند. در این بخش، چندین دستگاه نوری با استفاده از کوپلهای جهت‌دار توضیح داده شده است.

۱.۵.۴ تداخل سنج ماخ-زندر

موردی را در نظر می‌گیریم که در آن نور به موجبر بالایی یک تداخل سنج ماخ-زندر-تزویج می‌شود. در اینجا فرض می‌کنیم که هر دو بازو دارای ساختار موجبری یکسانی هستند. یعنی در معادلات (۳۶.۴) و (۳۷.۴)، $q = \kappa$ و $\delta = ۰$ داریم. جایگزینی $A(۰) = A_۰$ و $B(۰) = B_۰$ در معادلات (۳۶.۴) و (۳۷.۴)، خروجی‌های اولین تزویج کننده جهت‌دار توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{cases} A_۱ = A_۰ \cos(\kappa l) \\ B_۱ = -jA_۰ \sin(\kappa l), \end{cases} \quad (۱۴۷.۴)$$

که در آن l نشان دهنده طول تزویج است. در اینجا لازم به ذکر است که کوپلینگ مود نه تنها در ناحیه کوپلینگ مستقیم بلکه در نواحی منحنی نیز صورت می‌گیرد. بنابراین، طول تزویج در این بخش فرعی یک طول تزویج مستقیم مؤثر است که شامل کل اثر تزویج مود در مناطق تزویج مستقیم و منحنی است [۱۳]. هنگامی که اولین کوپلر یک تزویج ۳ دسی‌بل با $\kappa l = \pi/۴$ باشد، نسبت تقسیم نور $A_۱ = A_۰/\sqrt{۲}$ و $B_۱ = -jA_۰/\sqrt{۲}$ است. پس از عبور از بازوهای مستقیم تداخل سنج، $A_۲$ و $B_۲$ می‌شوند

$$\begin{cases} A_۲ = A_۱ \exp(-j\beta L) = \frac{A_۰}{\sqrt{۲}} \exp(-j\beta L) \\ B_۲ = \exp(-j(\beta L + j\phi)) = -j \frac{A_۰}{\sqrt{۲}} \exp(-j\beta L + j\phi), \end{cases} \quad (۱۴۸.۴)$$

که در آن ϕ همانطور که در شکل (۲۲.۴) نشان داده شده، تغییر فاز اضافی را در بازو پایین نشان می‌دهد. سپس خروجی‌های تداخل سنج با جایگزینی معادله (۱۴۸.۴) در

معادلات (۳۶.۴) و (۳۷.۴) داده می‌شود:

$$\begin{cases} A_r = -jA_0 \sin\left(\frac{\phi}{\gamma}\right) \exp\left(-j\beta L + \frac{j\phi}{\gamma}\right) \\ B_r = -jA_0 \cos\left(\frac{\phi}{\gamma}\right) \exp\left(-j\beta L + \frac{j\phi}{\gamma}\right) \end{cases} \quad (۱۴۹.۴)$$

در اینجا فرض کردیم که کوپلر دوم نیز یک کوپلر ۳ دسی‌بل با $\pi/4$ است. شدت نوری در هر پایانه خروجی توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{cases} |A_r|^2 = |A_0|^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{\gamma}\right) \\ |B_r|^2 = |A_0|^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{\gamma}\right) \end{cases} \quad (۱۵۰.۴)$$

از این معادلات مشاهده می‌شود که با تغییر فاز می‌توان نور را از پایانه A به پایانه B یا بر عکس ϕ را از π به صفر تغییر داد. هنگامی که تداخل سنج ماخ-زندر به عنوان یک مدولاتور نوری استفاده می‌شود، فاز نوری ϕ متناسب با سیگنال ورودی مدوله می‌شود. وقتی فاز ϕ اندکی $\delta\phi$ مدوله شود، شدت خروجی در معادلات (۱۵۰.۴) تبدیل به $|A_r|^2 \approx |A_0|^2(1 + \delta\phi/2)^2$ و $|B_r|^2 \approx |A_0|^2$ می‌شود. نشان داده شده است که مدولاسیون خطی با شرایط فعلی به دست نمی‌آید. اگر بایاس فاز ϕ را اضافه کنیم و مدولاسیون فاز $\delta\phi$ را اعمال کنیم، معادله (۱۵۰.۴)-الف می‌شود

$$|A_r|^2 = |A_0|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}|A_0|^2[1 + \sin(\delta\phi)] \approx \frac{1}{2}[|A_0|^2 + (1 + \delta\phi)] \quad (۱۵۱.۴)$$

در این صورت شدت نوری به طور خطی به سیگنال ورودی $\delta\phi$ وابسته می‌شود.

۲.۵.۴ تشدید کننده حلقه‌ای

رابطه ورودی-خروجی حالت ماندگار^{۲۰} تشدید کننده حلقه‌ای^{۲۱} نوری در شکل (۲۲.۴) بصورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} A = (1 - \gamma)^{1/2}[A_0 \cos(\kappa l) - jB_0 \sin(\kappa l)] \\ B = (1 - \gamma)^{1/2}[-jA_0 \sin(\kappa l) + B_0 \cos(\kappa l)] \end{cases} \quad (۱۵۲.۴)$$

که در آن، κ و γ به ترتیب ضریب تزویج مودی کوپلر جهت‌دار، طول تزویج و ضریب شدت افت عبوری^{۲۲} را نشان می‌دهد^{۱۴}. در معادلات (۱۵۲.۴)، فرض کردیم که موجرهای

^{۲۰}Steady-State

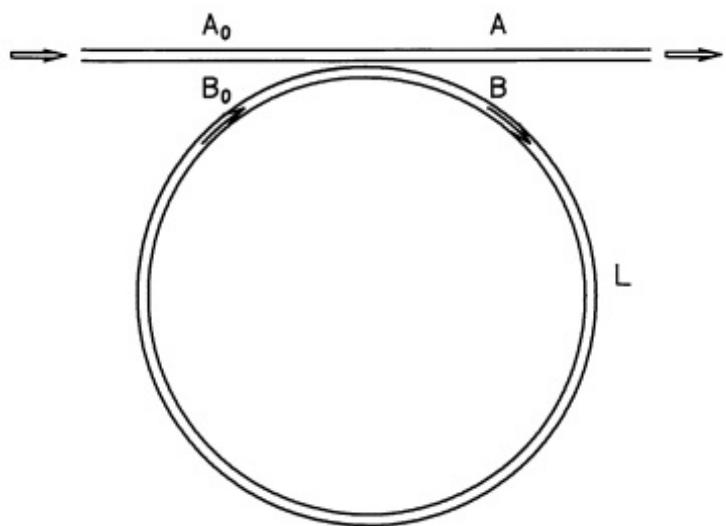
^{۲۱}Ring Resonators

^{۲۲}Intensity-Insertion-Loss Coefficient

وروودی/خروجی و تشدید کننده (رزوناتور) ثابت انتشار β یکسانی دارند. وقتی ضریب تضعیف شدت موجبر حلقه‌ای را با ρ نشان دهیم، B خواهد بود

$$B_s = B \exp\left(-\frac{\rho}{\gamma}L - j\beta L\right). \quad (153.4)$$

در این صورت دامنه ارسال تشدید کننده حلقه‌ای نوری، از معادلات (152.4) و (153.4)



شکل ۲۳.۴: تشدید کننده حلقه‌ای

میدهد

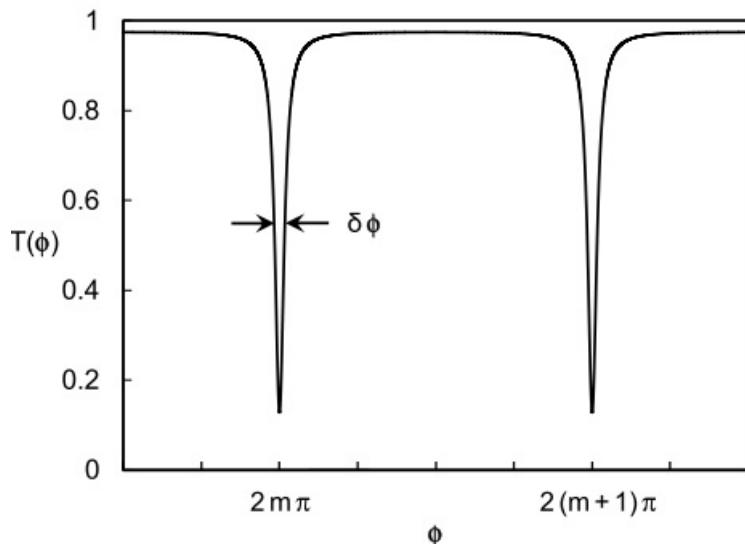
$$\frac{A}{A_s} = (1 - \gamma)^{1/2} \left[\frac{\cos(\kappa l) - (1 - \gamma)^{1/2} \exp(-\frac{\rho}{\gamma}L - j\beta L)}{1 - (1 - \gamma)^{1/2} \cos(\kappa l) \exp(-\frac{\rho}{\gamma}L - j\beta L)} \right] \quad (154.4)$$

اکنون پارامترهای جدید x, y و ϕ را معرفی می‌کنیم،

$$\begin{cases} x = (1 - \gamma)^{1/2} \exp(-\frac{\rho}{\gamma}L) \\ y = \cos(\kappa l) \\ \phi = \beta L \end{cases} \quad (155.4)$$

در این صورت شدت ارسال تشدید کننده حلقه‌ای نوری خواهد بود

$$T(\phi) = \left| \frac{A}{A_s} \right|^2 = (1 - \gamma) \left[1 - \frac{(1 - x^2)(1 - y^2)}{(1 - xy)^2 + 4xy \sin^2(\phi/2)} \right] \quad (156.4)$$



شکل ۲۴.۴: مشخصه انتقال تشدید کننده حلقه‌ای نوری

شکل (۲۴.۴) ویژگی‌های انتقال تشدید کننده حلقه‌ای نوری را به صورت تابعی از ϕ نشان می‌دهد. بیشینه و کمینه انتقال توسط روابط زیر داده می‌شود

$$T_{max} = (1 - \gamma) \frac{(x + y)^2}{(1 + xy)^2} \quad (157.4)$$

$$T_{min} = (1 - \gamma) \frac{(x - y)^2}{(1 - xy)^2} \quad (158.4)$$

از این معادلات مشاهده می‌شود که $x \approx y \approx 1$ باید برآورده شود تا T_{max} را به حداقل برسانیم در حالی که T_{min} را حد امکان به حداقل برسانیم. عرض کامل در نیمه حداقل $\delta\phi$ و ظرافت F تشدید کننده توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$\delta\phi = \frac{2(1 - xy)}{\sqrt{xy}} \quad (159.4)$$

$$F = \frac{2\pi}{\delta\phi} = \frac{\pi\sqrt{xy}}{(1 - xy)} \quad (160.4)$$

پیک تسدید در معادله (۱۵۸.۴) از مقدار زیر بدست می‌آید

$$\phi = \beta L = 2m\pi \quad (161.4)$$

علاوه بر این، وقتی T_{min} صفر می‌شود که $x = y$ یا

$$\cos(\kappa l) = (1 - \gamma)^{1/2} \exp\left(-\frac{\rho}{\gamma} L\right) \quad (162.4)$$

برای مثال، بهترین مشخصه تشدید در مقادیر زیر

$$\begin{cases} m = 20000 \\ \kappa l = 0.262 \end{cases} \quad (163.4)$$

در تشدید کننده حلقه‌ای با افت عبوری شدت کوپلر ≈ 0.023 ($\gamma \approx 0.023$)، طول تشدید کننده حلقه $L = 2\text{cm}$ ، ضریب تضعیف شدت $\approx 0.023\text{cm}^{-1}$ ($\rho \approx 0.023$)، طول موج نور $\lambda = 1.5\mu\text{m}$ و ضریب شکست موثر هسته $n = 1.5$ ($\beta = 2\pi \times 10^4 \text{cm}^{-1}$) بdst می‌آید.

ضریب خلوص $F = 45$ تشدید کننده حلقه‌ای در این شرایط است.

اجازه دهید فاصله دو قله تشدید را بdst آوریم. عدد موج مربوط به $\phi = 2m\pi$ به عنوان k و مربوط به $\phi = 2(m+1)\pi$ به عنوان $(k+\Delta k)$ در نظر گیریم. از آنجایی که m بسیار بزرگ است، همانطور که در معادله (163.4) نشان داده شده است، انحراف عدد موج Δk نسبت به k بسیار کم است. به عبارت دیگر $| \Delta k | \leq k$ داریم. انحراف در β ناشی از تغییر $[\beta(k + \Delta k) - \beta(k)] = 2\pi/L$ بهدست می‌آید، به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\frac{d\beta}{dk} \Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad (164.4)$$

جایگزینی $\beta = kn$ (ضریب شکست) در معادله (164.4)، بdst می‌آید

$$\frac{d\beta}{dk} = n + k \frac{dn}{dk} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \equiv N \quad (165.4)$$

که در آن N یک ضریب شکست گروهی است که توسط معادله (119.3) داده می‌شود. از آنجایی که تغییر فرکانس Δf و تغییر طول موج $\Delta\lambda$ به تغییر عدد موج k به صورت $\Delta k = -(N/2\pi)\Delta f$ و $\Delta\lambda = -(N/2\pi)\Delta f$ رزونانس مرتبط هستند، فواصل بر حسب فرکانس و طول موج خواهد بود

$$\Delta f = \frac{c}{NL} \quad (166.4)$$

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda^*}{NL}$$

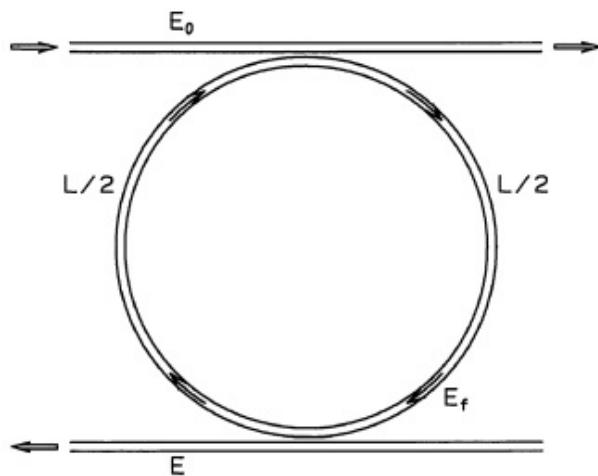
فاصله فرکانسی دو قله تشدید، محدوده طیفی آزاد (FSR)^{۲۴} نامیده می‌شود. بر حسب فرکانس و طول موج در قله‌های تشدید، از معادلات (160.4) و (161.4) داده شده‌اند.

$$\delta f = \frac{c}{FNL} \quad (167.4)$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^*}{FNL}$$

^{۲۳}Finesse

^{۲۴}Free Spectral Range (FSR).



شکل ۲۵.۴: تشدید کننده حلقه‌ای نوری نوع باز

که در آن از رابطه $\delta\phi = \delta(\beta L) = (d\beta/dk)\delta k = 2\pi F$ استفاده کردیم. برای پارامترهای قبلی تشدید کننده حلقه‌ای، قله‌های تشدید خواهند بود:

$$\Delta f = 10 \text{ GHz} \quad (168.4)$$

$$\Delta\lambda = -0.75 \text{ nm}$$

و FWHM برابر است با

$$\delta f = 222 \text{ MHz}$$

$$\delta\lambda = 0.17 \text{ nm}$$

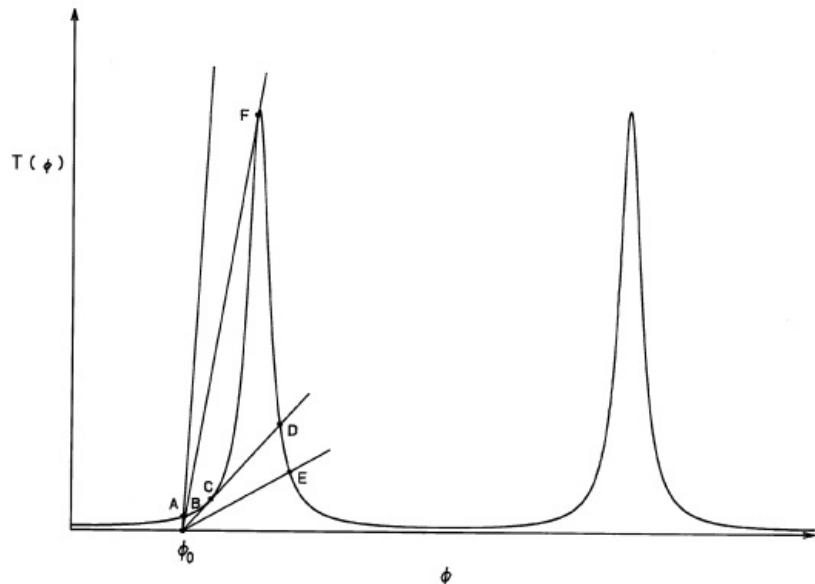
در اینجا برای سادگی $N = n$ فرض می‌کنیم.

۳.۵.۴ دستگاه‌های دوپایدار

در اینجا نوع باز تشدید کننده حلقه را در نظر می‌گیریم، همانطور که در شکل (۲۵.۴) نشان داده شده است، متشکل از موجبر نوری که ضریب شکست آن مطابق با شدت نوری، یعنی محیط کر [۱۵۲] تغییر می‌کند. انتقال شدت نوع باز تشدید کننده حلقه با استفاده از پارامترهای معادله (۱۵۵.۴) داده شده است،

$$T(\phi) = \left| \frac{E}{E_0} \right|^2 = \frac{P}{P_0} = (1 - \gamma) \frac{x^2(1 - y)^2}{(1 - x^2y^2)^2 + 4x^2y^2 \sin^2(\phi/2)} \quad (169.4)$$

^{۱۵} Kerr medium



شکل ۲۶.۴: تنمایش نموداری دستگاه نوری دوپایدار. خطوط مستقیم و خمیده نمایشگر به ترتیب معادلات (۱۶۹.۴) و (۱۷۱.۴) هستند.

وابستگی انتقال شدت به فاز نوری ϕ در شکل (۲۶.۴) نشان داده شده است. از سوی دیگر، انتقال شدت در امتداد $P \rightarrow P_f$ توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$(1 - \gamma) \sin^2(\kappa l) = (1 - \gamma)[1 - \cos^2(\kappa l)] = (1 - \gamma)(1 - y^2)$$

چون انتفال دامنه در امتداد $E_f \rightarrow E$ با $j\sqrt{1-\gamma} \cdot \sin(\kappa l)$ - بیان می‌شود. در این صورت رابطه بین توان نوری داخل حلقه P_f و توان خروجی P به دست می‌آید

$$P = (1 - \gamma)(1 - y^2)P_f \quad (170.4)$$

فاز نوری ϕ در محیط کر برابر است با

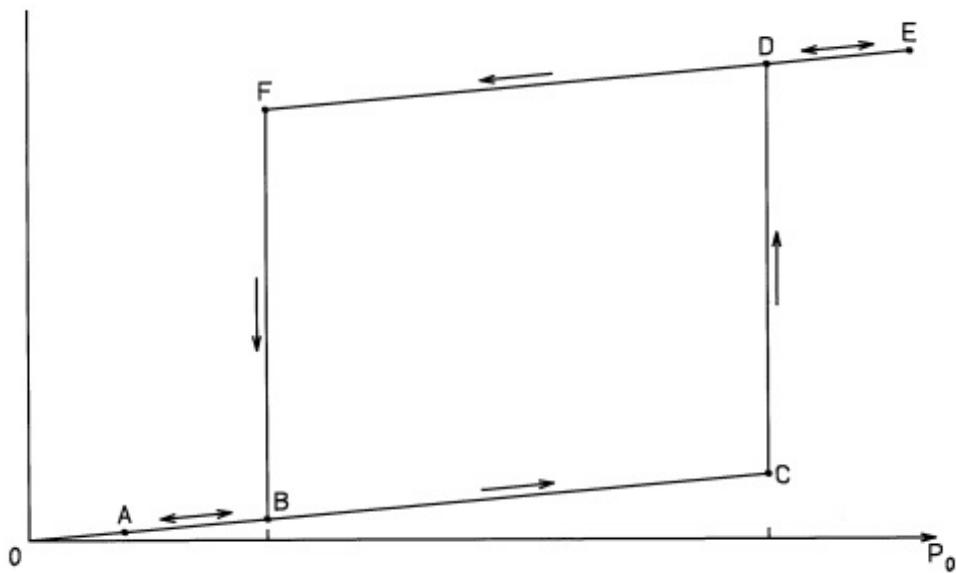
$$\phi = \beta L = knL = k \left(n_0 + n_2 \frac{P_f}{A_{eff}} \right) L \quad (171.4)$$

که در آن n_2 و A_{eff} به ترتیب ضریب کر [۱۵] و سطح هسته موثر موجبر را نشان می‌دهند. به عنوان مثال، $n_2 = 2/18 \times 10^{-2} m^2/W$ برای موجبر سیلیسی و $n_2 = 2 \times 10^{-14} m^2/W$ برای شیشه‌های نیمه هادی آغشته [۱۶]. جایگزینی معادله (۱۷۰.۴) در معادله (۱۷۱.۴)، بدست می‌آید

$$T(\phi) = \frac{P}{P_0} = \frac{S}{P_0}(\phi - \phi_0), \quad (172.4)$$

که در آن
(۱۷۳.۴)

$$\phi_0 = kn_0 L$$



شکل ۲۷.۴: منحنی هیسترزیس دستگاه نوری دوپایدار

$$S = (1 - \gamma)(1 - y^2) \frac{A_{eff}}{kn_2 L} \quad (174.4)$$

چندین خط مستقیم در شکل (۲۶.۴) معادله (۱۷۲.۴) را برای توان ورودی‌های مختلف P ، نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۲۶.۴) نشان داده شده است، هنگامی که یک فاز نوری ثابت ϕ ، به نام تنظیم ^{۲۶}، به درستی تنظیم شود، توان خروجی P در امتداد $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ مطابق با تغییر توان ورودی، همانطور که در شکل (۲۷.۴) نشان داده شده است، تغییر می‌کند. در مقابل، وقتی توان ورودی کاهش می‌یابد، توان خروجی در امتداد $E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow A$ تغییر می‌کند. بنابراین، یک شرایط دوپایداری برای همان توان ورودی P اما برای جهت‌گیری متفاوت به دست می‌آید.

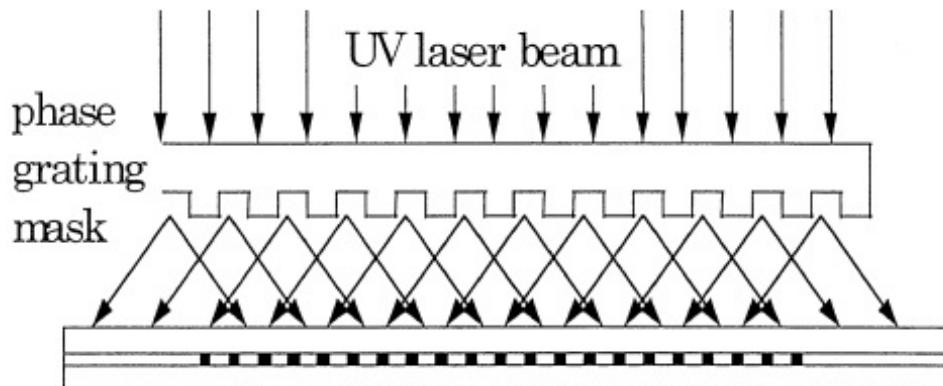
۶.۴ توری‌های فیبر برآگ

توری فیبر برآگ ^{۲۷}، که دارای تغییرات تناوبی ضریب شکست در هسته فیبر است، به عنوان یک فیلتر بازتابی گزینشی طول موج ^{۲۸} عمل می‌کند. قرار گرفتن در معرض اشعه ماوراء بنفش (فرابینخش UV) باعث تغییر ضریب شکست در شیشه سیلیکا آغشته با ژرمانیوم می‌شود ^[۱۷، ۱۸]. توری فیبر برآگ با قرار دادن یک الگوی تداخل UV در جهت عرضی به هسته فیبر ساخته می‌شود. شکل (۲۸.۴) روش ساخت توری (گریتینگ) را با

^{۲۶}Detuning

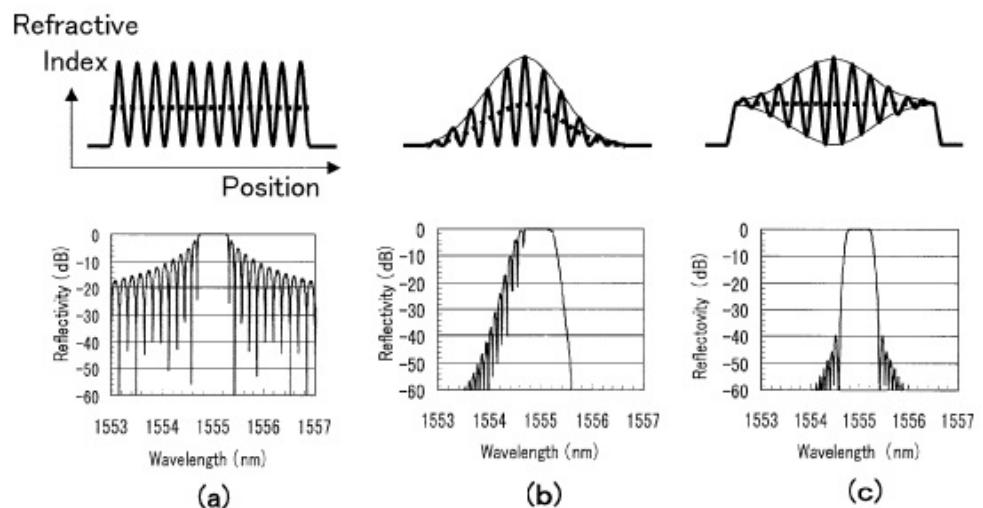
^{۲۷}FIBER BRAGG GRATINGS

^{۲۸}Wavelength-Selective Reflection Filter



شکل ۲۸.۴: روش ساخت توری برآگ فیبری با استفاده از ماسک فازی

استفاده از ماسک فاز نشان می‌دهد. طول موج نور فرا بنسخ برای مطابقت با باند جذب شیشه آغتشه به ژرمانیوم انتخاب می‌شود. به طور کلی، یک لیزر آگزایمر KrF (۲۴۸ نانومتر) یا یک لیزر SHG Ar (۲۴۴ نانومتر) به عنوان منبع نور UV استفاده می‌شود. حساسیت به نور را می‌توان با افزایش غلظت ژرمانیوم یا بارگیری هیدروژن افزایش داد. در مورد بارگذاری هیدروژن، تغییر ضریب شکست بیش از 10^{-2} را می‌توان به دست آورد.



شکل ۲۹.۴: شکل ضریب شکست و طیف بازتابی محاسبه شده برای (الف) توری یکنواخت، (ب) توری آپودایز گاوی، و (ج) توری آپودایز گاوی با ضریب شکست متوسط افزایش یافته.

طیف انعکاس فیلتر توری برآگ با معادله (۶۷.۴) - (۶۹.۴) و شکل (۸.۴) داده شده است. اگر توری به طور یکنواخت، همانطور که در شکل (۶.۴) یا شکل (۲۹.۴)-الف نشان داده شده، تشکیل شود، سطح لبه کناری طیف بازتاب نسبتاً بالا می‌رود (حدود ۰/۲

در شکل ۸.۴). برای کاربردهای فیلتر باند عبور یا باند حذف، سطح لوب کناری^{۲۹} باید بسیار کمتر از -30 dB باشد. وزن دهی دامنه مدولاسیون با استفاده از یک تابع پنجره خاص، که عموماً آپادیزاسیون^{۳۰} نامیده می‌شود، برای حذف لوب کناری موثر است [۱۹]. شکل (۲۹.۴)-ب یک طیف بازتاب محاسبه شده از یک توری آپودایز گاوی را نشان می‌دهد [۲۰]. در این حالت، عدم یکنواختی ضریب شکست متوسط در امتداد فیبر باعث ایجاد تضاریس تشدید فبری-پرو^{۳۱} در ناحیه طول موج کوتاه باند بازتابی می‌شود. همانطور که در شکل (۲۹.۴)-ج نشان داده شده است، با تصحیح غیریکنواختی ضریب شکست متوسط، می‌توان یک طیف متقارن و حذف شده توسط لوب کناری بدون تضاریس^{۳۲} به دست آورد.

^{۲۹}Sidelobe Level

^{۳۰}Apodization

^{۳۱}Fabry–Perot

^{۳۲}Ripple

کتاب نامه

- [1] Marcuse, D. 1972. *Light Transmission Optics*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- [2] Hardy, A., and W. Streifer. 1985. Coupled-mode theory of parallel waveguides. *IEEE J. Light-wave Tech.* LT-3:1135–1147.
- [3] Marcatili, E. A. J. 1986. Improved coupled-mode equations for dielectric guides. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-22:988–993.
- [4] Yariv, A. 1985. *Introduction to Optical Electronics*. New York: Holt, Reinhart and Winston.
- [5] Haus, H. A. 1984. *Waves and Fields in Optoelectronics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [6] Koyama, F., Y. Suematsu, K. Kojima, and K. Furuya. 1984. $1.5\mu\text{m}$ phase adjusted active distributed reflector laser for complete dynamic single-mode operation. *Electron. Lett.* 10:391–393.
- [7] Utaka, K., S. Akiba, K. Sakai, and Y. Matsushita. 1984. Analysis of quarter-wave-shifted DFB laser. *Electron. Lett.* 20:326–327.
- [8] Marcuse, D. 1974. *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. New York: Academic Press.
- [9] Marcuse, D. 1971. The coupling of degenerate modes in two parallel dielectric waveguides. *Bell. Syst. Tech. J.* 50:1791–1816.
- [10] Snyder, A. W., and J. D. Love. 1983. *Optical Waveguide Theory*. London: Chapman and Hall.
- [11] Watson, G. N. 1962. *Theory of Bessel Functions*. New York: Cambridge University Press.
- [12] Streifer, W., D. R. Scifres, and R. D. Burnham. 1975. Coupling coefficients for distributed feedback single- and double-heterostructure diode lasers. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-11:867–873.

- [13] Takato, N., M. Kawachi, M. Nakahara, and T. Miyashita. 1989. Silica-based single-mode guided-wave devices. *Integrated Optics Optoelectronics SPIE* 1177:92–100.
- [14] Stokes, L. F., M. Chodorow, and H. J. Shaw. 1982. All-single-mode fiber resonator. *Opt. Lett.* 7:288–290.
- [15] Stegeman, G. I., E. M. Wright, N. Finlayson, R. Zanoni, and C. T. Seaton. 1988. Third order nonlinear integrated optics. *IEEE J Lightwave Tech.* LT-6:953–970.
- [16] Ironside, C. N., J. F. Duffy, R. Hutchins, W. C. Bany, C. T. Seaton, and G. I. Stegeman. 1985. Waveguide fabrication in nonlinear semiconductor-doped glasses. *Proc. 11th European Conf. Opt. Commun.*, Venetia, Italy, 1985, pp. 237–240.
- [17] Hill, K. O., Y. Fujii, D. C. Johnson, and B. S. Kawasaki. 1978. Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication. *App. Phys. Lett.* 32:647–649.
- [18] Meltz, G., W. W. Morey, and W. H. Glenn. 1989. Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method. *Opt. Lett.* 14:823–825.
- [19] Malo, B., S. Theriault, D. C. Johnson, F. Bilodeau, J. Albert, and K. O. Hill. 1995. Apodized in-fiber Bragg grating reflectors photoimprinted using a phase mask. *Electron. Lett.* 31:223–225.
- [20] Inoue, A., T. Iwashima, T. Enomoto, S. Ishikawa, and H. Kanamori. 1998. Optimization of fiber Bragg grating for dense WDM transmission system. *IEICE Trans. Electron.* E81-C:1209–1218.

فصل ۵

اثرات غیرخطی در فیبرهای نوری

اگرچه غیرخطی بودن فیبر مبتنی بر سیلیس بسیار کوچک است، چندین اثر نوری غیرخطی خود را آشکارا نشان می‌دهند به دلیل اینکه (الف) چگالی توان بسیار بالا است زیرا نور در یک سطح مقطع کوچک افزون می‌شود، (ب) طول برهمکنش بین موج نور و مواد فیبر به دلیل خاصیت کم تلفات فیبر بسیار طولانی است و (ج) برهمکنش همدوس ممکن است زیرا توزیع میدان مودی و قطبش به خوبی تجویز و در طول طولانی حفظ می‌شود^[۱]. اثرات نوری غیرخطی مختلف، مانند سالیتون‌های نوری، پراکندگی رامان تحریک شده، پراکندگی بریلوین تحریک شده، و نسل دوم هارمونیکی، در فیبرها توضیح داده خواهد شد.

۱.۵ عدد شایستگی برای اثرات غیرخطی

هنگامی که یک وات توان نوری به فیبر نوری تک مودی با قطر هسته 10 میکرومتر تزویج می‌شود، چگالی توان نوری از یک مگاوات بر سانتی‌متر مربع فراتر می‌رود. چنین چگالی توان بالا و طول اندرکنش بسیار طولانی از ویژگی‌های اثرات نوری غیرخطی در فیبرهای نوری است. حاصل ضرب $I \cdot L$ که برای ارزیابی برهمکنش‌های غیرخطی مهم است، به صورت حاصل ضرب شدت نوری I (نماینده توان نوری P) تقسیم بر سطح موثر پرتو^۱ و طول اندرکنش L تعریف می‌شود. در اپتیک حجیم^۲، زمانی که اندازه نقطه (شعاع پرتوی که در آن میدان الکتریکی $1/e$ می‌شود) در نقطه کانونی برابر W است، شعاع پرتو $(z)w$ در فاصله z از نقطه کانونی با رابطه زیر بیان می‌شود^[۲].

$$w(z) = w_{\circ} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_z}{\pi n w_{\circ}^2} \right)^2} \quad (1.5)$$

^۱Bulk Optics

که در آن λ و n بترتیب نمایشگر طول موج نور و ضریب شکست محیط هستند. شدت نور در z برابر است با

$$I_B(z) = \frac{P}{\pi w(z)^2} \quad (2.5)$$

در این صورت حاصل ضرب $I \cdot L$ در یک دستگاه عدسی خواهد بود

$$[I \cdot L]_B = \int_{-\infty}^{\infty} I_B(z) dz = \pi \frac{n P}{\lambda} \quad (3.5)$$

مشخص است که راهی جز افزایش توان ورودی P به منظور افزایش اثر غیرخطی در سیستم اپتیک حجیم وجود ندارد. در مقابل، شدت نوری فیبر در فاصله z با استفاده از رابطه زیر داده می‌شود

$$I_f(z) = \frac{P \exp(-\alpha z)}{\pi w_c^2} \quad (4.5)$$

که در آن α و w_c بترتیب نمایشگر ضریب تضعیف و اندازه لکه فیبر است. حاصل ضرب $I \cdot L$ فیبری به طول L خواهد بود

$$[I \cdot L]_f = \int_{-\infty}^{\infty} I_f(z) dz = \frac{P}{\pi w_c^2} L_{eff} \quad (5.5)$$

که در آن L_{eff} نمایشگر طول موثر برهمنکنش است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L_{eff} = \frac{[1 - \exp(\alpha L)]}{\alpha} \quad (6.5)$$

از معادله (5.5) مشاهده می‌شود که حاصل ضرب $I \cdot L$ را می‌توان لا استفاده از تلفات کم و هسته کوچک (اختلاف ضریب شکست زیاد) فیبرها افزایش داد. هرگاه طول فیبر L بقدر کافی طولانی باشد، طول موثر می‌تواند تقریباً برابر $L_{eff} = 1/\alpha$ تخمین زد. در این صورت نسبت $I \cdot L$ بین اپتیک حجیم و فیبرهای نوری را بصورت زیر بیان کرد

$$\frac{[I \cdot L]_f}{[I \cdot L]_B} = \frac{\lambda}{(\pi w_c)^2 n \alpha} \quad (7.5)$$

برای مثال، برای فیبر با پارامترهای $\lambda = 1 \text{ } \mu\text{m}$, $n = 1.5$, $w_c = 2.4 \mu\text{m}$ و $\alpha = 2/3 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ (افت یک دسیبل بر کیلومتر) و $[I \cdot L]_F/[I \cdot L]_B \approx 5 \times 10^7$ داریم. میدانیم که یک وات توان نوری در فیبرهای نوری برای ایجاد همان سطح اثرات غیر خطی که چندین مکاوات برای آن نیاز است کافی است.

۲.۵ اثر نوری کر

اثر نوری کر^۴ پدیده‌ای است که در آن ضریب شکست محیط با تغییر شکل مدار الکترون توسط میدان الکتریکی قوی تغییر می‌کند^۵. ضریب شکست تحت اثر کر به صورت

^۴ Optical Kerr Effect

$n_0 + n_2 |E|^2$ بیان می‌شود که در آن n_0 و n_2 به ترتیب نشان دهنده ضریب شکست خطی و ضریب کر هستند. ضریب کر در فیبر شیشه سیلیکا معمولاً با $10^{-22} m^2/V^2$ داده می‌شود^۴. در سیستم‌های واحد مختلف به صورت $n_2 = 1/22 \times 10^{-22} m^2/V^2$ یا $n_2 = 3/18 \times 10^{-20} m^2/W$ یا $n_2 = 1/1 \times 10^{-13} cm^2/statvolt^2$ (esu) بیان می‌شود. اثرات غیرخطی جالب و مهم در فیبرهای نوری با استفاده از اثر نوری کر عبارتند از (۱) سالیتون‌های نوری، (۲) فشرده سازی پالس نوری و (۳) ناپایداری‌های مدولاسیونی هستند.

۱.۲.۵ مدولاسیون خود-فازی

هنگامی که یک پالس کوتاه با شدت بالا به فیبر نوری تزویج می‌شود، فاز لحظه‌ای پالس نوری به سرعت از طریق اثر نوری کر تغییر می‌کند. اگر پوشش پالس نوری را به صورت E و ضریب شکست خطی را در فرکانس زاویه‌ای ω_0 به صورت $n(\omega_0)$ بیان کنیم، ضریب شکست موثر فیبر نوری خواهد بود

$$n(\omega_0, |E|^2) = \frac{c\beta}{\omega_0} = n(\omega_0) + n_0 |E|^2 \quad (8.5)$$

از آنجا که فاز نوری را بصورت $\Phi = \omega_0 t - \beta z$ تعریف می‌کنیم، فرکانس زاویه‌ای لحظه‌ای بصورت مشتق Φ نسبت به زمان t است:

$$\omega(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \omega_0 - \frac{\omega_0 n_2}{c} z \frac{\partial |E|^2}{\partial t} \quad (9.5)$$

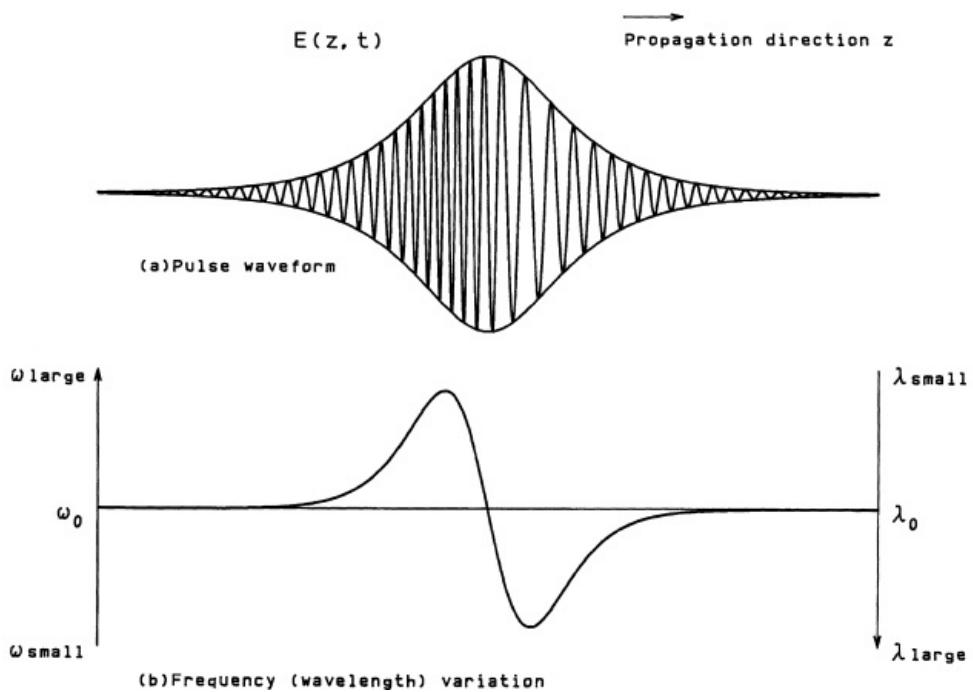
در اینجا تغییر شدت نوری در z در طول عبور پالس نوری در نظر می‌گیریم. بنابراین، زمان t از سمت راست (لبه قبلی پالس) شکل (۱.۵) به سمت چپ (لبه عقب) پیش می‌رود. همانطور که در شکل (۱.۵) نشان داده شده است، $\frac{\partial |E|^2}{\partial t} > 0$ در لبه قبلی پالس و $\frac{\partial |E|^2}{\partial t} < 0$ در لبه عقب داریم. سپس از معادله (۹.۵) مشاهده می‌شود که فرکانس زاویه‌ای در لبه قبلی کاهش می‌یابد ($\omega_0 < \omega$) و در لبه انتهایی پالس ($\omega_0 > \omega$) افزایش می‌یابد. این به صورت شماتیک در شکل (۱.۵)-ب نشان داده شده است. این پدیده مدولاسیون خود فاز (SPM)^۳ نامیده می‌شود که باعث چیرپ فرکانسی^۴ پالس نوری می‌شود.

همانطور که در بخش ۴.۶.۳ توضیح داده شد، وابستگی‌های طول موج سرعت گروهی برای یک فیبر $1/3 \mu m$ با پاشندگی صفر و یک فیبر $1/55 \mu m$ با پاشندگی صفر (فیبر پاشندگی انتقال یافته^۵) در شکل (۲.۵) نشان داده شده است. ناحیه طیفی کوتاه‌تر از طول موج پاشندگی صفر λ_c ، ناحیه پاشندگی معمولی و آن ناحیه که بیشتر از λ_c باشد، ناحیه پاشندگی غیرعادی نامیده می‌شود. در ناحیه پاشندگی غیرعادی، هرچه فرکانس کمتر باشد (طول موج بیشتر)، سرعت گروهی کوچکتر است. سپس سرعت گروهی در لبه قبلی پالس نوری با فرکانس کمتر کوچک می‌شود. در مقابل، سرعت گروهی در لبه انتهایی پالس نوری با فرکانس بالاتر بزرگ می‌شود. این پالس نوری را فشرده می‌کند.

^۳ Self-Phase Modulation(SPM)

^۴ Frequency Chirping

^۵ Dispersion-Shifted Fiber, DSF



شکل ۱.۵: مدولاسیون خودفاز پالس نوری: (الف) شکل موج پالس و (ب) تغییر فرکانس زاویه‌ای (یا طول موج) لحظه‌ای.

اگر فشردگی پالس نوری به دلیل مدولاسیون خودفاز با گسترش پالس ناشی از پاشندگی متعادل شود و آن را خنثی کند، پالس نوری در حالی که شکل پالس اصلی خود را حفظ می‌کند در فیبر منتشر می‌شود. این یک سالیتون نوری (به طور دقیق‌تر، سالیتون نوری درخشان^۶) نامیده می‌شود^۷[۴]. از نظر تاریخی موج سالیتون معروف بر روی سطح آب کم عمق و ارتعاش غیرخطی شبکه یک بعدی، خودشان امواج سالیتون‌های هستند. با این حال، در فیبر نوری، پوش پالس نوری به یک موج سالیتون تبدیل می‌شود. بنابراین یک سالیتون در فیبر، سالیتون بسته‌ای^۸ نامیده می‌شود.

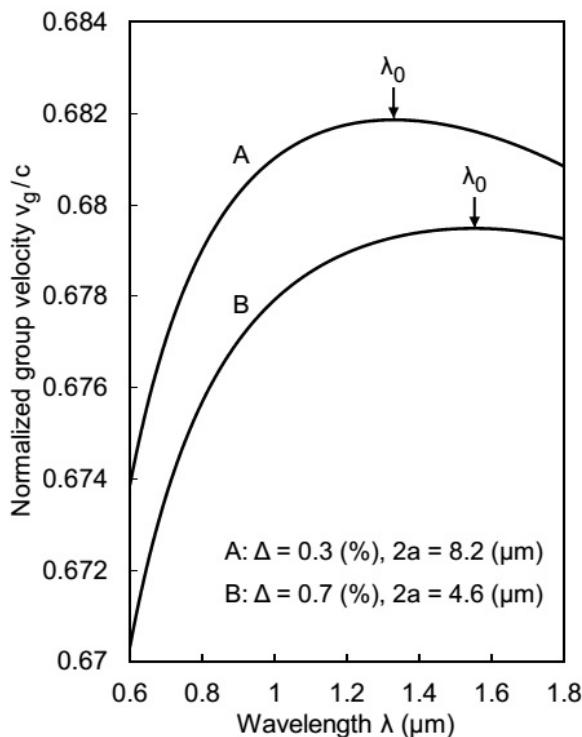
در ناحیه پاشندگی معمولی، سرعت گروهی در لبه قبلی پالس نوری با فرکانس کمتر بزرگ می‌شود و سرعت گروهی در لبه انتهایی پالس نوری با فرکانس بالاتر کوچک می‌شود. سپس انرژی پالس نوری به لبه‌های قبلی و انتهایی پالس پاشنده و شکل زمانی پالس مربع می‌شود. هنگامی که چنین پالس با فرکانس و مریع شکل از یک محیط غیرعادی مانند یک تزویج کننده توری عبور داده می‌شود، پالس نوری فشرده می‌شود. این در بخش ۴.۵ توضیح داده خواهد شد.

در ناحیه پاکندگی معمولی، سالیتون تاریک^۹ وجود دارد. سالیتون تاریک نیز یک موج سالیتون است که با برش بخشی از یک موج پیوسته ایجاد می‌شود. چیرپ غیرخطی افت

⁶Bright Optical Soliton

⁷Envelope Soliton

⁸Dark Soliton



شکل ۲.۵: وابستگی‌های سرعت گروهی به طول موج در فیبرهای نوری. الف: فیبر $1.3\text{ }\mu\text{m}$ با پاشندگی صفر؛ ب: فیبر پاشندگی صفر $1.55\text{ }\mu\text{m}$ (فیبر پاشندگی-انتقال یافته، DSF).

شدت در موج پیوسته، پاشندگی سرعت گروهی فیبر نوری را در ناحیه معمولی متعادل می‌کند.

۲.۲.۵ معادله شرودینگر غیرخطی

معادله موج در محیط با قطبش الکتریکی غیرخطی F_{NL} به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \quad (10.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL} \quad (11.5)$$

قطبیش غیرخطی F_{NL} کوچک فرض و به عنوان تغییرات جزئی ناشی از قطبیش خطی در نظر گرفته می‌شود. در مرحله بعد فرض می‌شود که میدان نوری قطبیش خود را در طول فیبر حفظ می‌کند تا یک رویکرد اسکالر معتبر باشد. ثالثاً، عرض طیفی پالس نوری $\delta\omega$ در مقایسه با فرکانس زاویه مرکزی ω به اندازه کافی کوچک فرض می‌شود. از آنجایی که $\approx 10^{15}\text{ s}^{-1}$ آخرين فرض برای پالس‌هایي معتبر است که عرض آنها

^۹(SVEA) است. فرض سوم یک تقریب بسته متغیر آهسته ($\tau_0 > \frac{1}{\delta\omega} ps < 2 \times 10^{13}s^{-1}$) نامیده می‌شود، که در آن تغییرات زمانی پوش پالس در مقایسه با تناوب نوری به اندازه کافی آهسته است. در تقریب بسته با تغییرات آهسته، قسمتی از میدان الکتریکی که به سرعت در حال تغییر است از پوش آهسته متغیر بصورت زیر جدا می‌شود.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_x [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(j\omega_0 t) + c.c.] \quad (12.5)$$

که در آن $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ یکتابع به آرامی متغیر از زمان نسبت به تناوب نوری است، *c.c.* نشان دهنده مزدوج مختلط ^{۱۰} و \mathbf{u}_x بردار واحد قطبی نور است که فرض می‌شود به صورت خطی در امتداد محور x قطبی شده است. هنگامی که افت یا بهره نوری را به تغییر ضریب شکست ناشی از اثر کر اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت [۱].

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \left(n + n_r |E|^2 - j \frac{\alpha}{k} \right) \mathbf{E} \quad (13.5)$$

که در آن α ضریب تضعیف و $k = \omega_0/c$ است. با فرض اینکه پلاریزاسیون غیرخطی و تضعیف فیبر کوچک هستند، می‌توانیم معادله (۱۳.۵) را از هم جدا کنیم.

$$\epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \left(n^2 - j \frac{\alpha}{k} n \right) \mathbf{E} \quad (14.5)$$

$$\mathbf{P}_{NL} = 2\epsilon_0 n n_r |E|^2 \mathbf{E} \quad (15.5)$$

تابع پوش میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ به صورت حاصل ضرب توزیع میدان عرضی $R(r, \theta)$ و تغییر دامنه محوری $A(z, t) \exp(-j\beta_0 z)$ بیان می‌شود:

$$E(\mathbf{r}, t) = R(r, \theta) A(z, t) \exp(-j\beta_0 z), \quad (16.5)$$

که در آن β_0 نشان دهنده ثابت انتشار در غیاب اثر کر است. جایگزینی معادلات (۱۲.۵) و (۱۶.۵) در معادله (۱۰.۵)، $\nabla^2 \mathbf{E}$ خواهد بود

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{u}_x \nabla^2 e_x = \mathbf{u}_x \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e_x \quad (17.5)$$

که در آن

$$e_x = \frac{1}{2} R(r, \theta) A(z, t) \exp[j(\omega_0 t - \beta_0 z)] + c.c. \quad (18.5)$$

از آنجایی که تغییر $A(z, t)$ در امتداد جهت z بسیار کندر از $\exp(-j\beta_0 z)$ است، می‌توانیم $\partial^2 A / \partial z^2 \ll \beta_0^2 A$ را فرض کنیم. با در نظر گرفتن این موضوع، معادله (۱۷.۵) به صورت

^۹Slowly Varying Envelope Approximation (SVEA)

^{۱۰}Complex Conjugate

زیر کاهش می‌یابد

$$\nabla^{\text{v}} \mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{u}_x \left\{ \left[A(z, t) \left(\frac{\partial^{\text{v}} R}{\partial r^{\text{v}}} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^{\text{v}}} \frac{\partial^{\text{v}} R}{\partial \theta^{\text{v}}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + R(r, \theta) \left(-2j\beta_{\circ} \frac{\partial A}{\partial z} - \beta_{\circ}^{\text{v}} A \right) \right] \exp[j(\omega_{\circ} t - \beta_{\circ} z)] + c.c. \right\} \quad (19.5)$$

سمت راست معادله (۱۰.۵) با جایگزینی معادلات (۱۱.۵)-(۱۶.۵) در آن و استفاده از تغییرات آهسته پوش بطور تقریبی محاسبه می‌شود:

$$\mu_{\circ} \frac{\partial^{\text{v}} (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t^{\text{v}}} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{u}_x k^{\text{v}} \left(n^{\text{v}} - j2n \frac{\alpha}{k} \right) \\ \times \{ R(r, \theta) A(z, t) \exp[j(\omega_{\circ} t - \beta_{\circ} z)] + c.c. \} \quad (20.5)$$

$$\mu_{\circ} \frac{\partial^{\text{v}} \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^{\text{v}}} = -\mathbf{u}_x k^{\text{v}} n n_{\text{v}} |\mathbf{E}|^{\text{v}} \{ R(r, \theta) A(z, t) \exp[j(\omega_{\circ} t - \beta_{\circ} z)] + c.c. \} \quad (21.5)$$

از معادلات (۱۹.۵)-(۲۱.۵)، معادله (۱۰.۵) بصورت زیر کاهش می‌یابد

$$\left[\frac{\partial^{\text{v}} R}{\partial r^{\text{v}}} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^{\text{v}}} \frac{\partial^{\text{v}} R}{\partial \theta^{\text{v}}} + (k^{\text{v}} n^{\text{v}} - \beta_{\circ}^{\text{v}}) R \right] A \\ + \left(-2j\beta_{\circ} \frac{\partial A}{\partial z} - j2\beta_{\circ} k n \alpha A + 2k^{\text{v}} n n_{\text{v}} |\mathbf{E}|^{\text{v}} A \right) R = 0 \quad (22.5)$$

بهبیان دقیق، شکل مود عرضی فیبر نوری تحت غیرخطی بودن اثر کر با شکل بدون تغییرات جزئی $R(r, \theta)$ متفاوت است. با این حال، بر اساس تئوری تغییرات جزئی مرتبه اول، می‌توان شکل میدان الکتریکی $R(r, \theta)$ را مشابه حالت خطی تقریب زد، اگرچه ثابت انتشار به صورت $\beta(\omega) \rightarrow \beta_{\circ}$ متفاوت می‌شود. در این صورت میدان الکتریکی $R(r, \theta)$ معادله موج را برآورده می‌کند

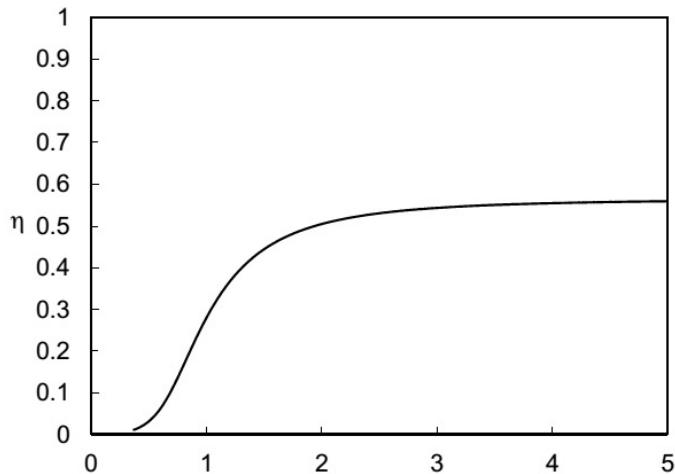
$$\frac{\partial^{\text{v}} R}{\partial r^{\text{v}}} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^{\text{v}}} \frac{\partial^{\text{v}} R}{\partial \theta^{\text{v}}} + (k^{\text{v}} n^{\text{v}} - \beta_{\circ}^{\text{v}}) R = 0 \quad (23.5)$$

جایگزینی معادله (۲۲.۵) در معادله (۲۳.۵) می‌دهد

$$(\beta^{\text{v}} - \beta_{\circ}^{\text{v}}) R A + \left(-j2\beta_{\circ} \frac{\partial A}{\partial z} - j2k n \alpha A + 2k^{\text{v}} n n_{\text{v}} |R|^{\text{v}} |A|^{\text{v}} A \right) R = 0 \quad (24.5)$$

با ضرب این معادله در R^* و انتگرال‌گیری آن در سطح مقطع، داریم

$$(\beta^{\text{v}} - \beta_{\circ}^{\text{v}}) A - j2\beta_{\circ} \frac{\partial A}{\partial z} - j2k n \alpha A + 2k^{\text{v}} n n_{\text{v}} \eta |A|^{\text{v}} A = 0 \quad (25.5)$$



شکل ۳.۵: وابستگی η به فرکانس نرمالیزه v برای مود HE_{11} در فیبر نوری با ضریب شکست پله‌ای

که در آن η بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\eta = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R|^4 r dr d\theta}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R|^2 r dr d\theta} \quad (26.5)$$

شکل (۳.۵) تغییر فرکانس نرمالیزه برای مود HE_{11} را در فیبر با ضریب شکست پله‌ای نشان می‌دهد، که در آن میدان‌های الکتریکی عرضی در هسته و روکش به ترتیب با $J_0(ur/a)$ و $J_0(uw/K(w))K_0(wr/a)$ داده می‌شود. [به معادلات (۹۴.۳) و (۹۵.۳) یا معادلات (۱۰۹.۴) و (۱۱۰.۴) مراجعه کنید]. از شکل (۳.۵) مشاهده می‌شود که می‌توانیم در شرایط عملیاتی معمولی فیبرهای نوری ($v = 1/5 - 2/4$) مقدار $\eta \approx 1/2$ تقریب بزنیم. بر اساس تقریب هدایت ضعیف، ما $\beta \approx \beta_0 \approx kn$ را در معادله (۲۵.۵) تقریب می‌زنیم. معادله (۲۵.۵) را بر $2kn$ تقسیم کرده و به دست می‌آوریم

$$(\beta - \beta_0)A - j \frac{\partial A}{\partial z} - j\alpha A + \frac{1}{4} kn^2 |A|^2 A = 0. \quad (27.5)$$

ثابت انتشار $(\omega)^{\beta}$ با بسط سری تیلور تقریب زده می‌شود

$$\beta(\omega) - \beta_0 = (\omega - \omega_0)\beta' + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \beta'' + \dots \quad (28.5)$$

جایگزینی این معادله در معادله (۲۷.۵) می‌دهد

$$j \frac{\partial A}{\partial z} - (\omega - \omega_0)\beta' A - \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \beta'' A + j\alpha A - \frac{1}{4} kn^2 |A|^2 A = 0. \quad (29.5)$$

در اینجا به رابطه تبدیل فوریه برای معادله دیفرانسیل زیر توجه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial t} \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt \\ &= [A(z, t) \exp\{-j(\omega - \omega_0)t\}]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} j(\omega - \omega_0) A \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt \quad (۱۳۰.۵) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} j(\omega - \omega_0) A \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt = \int_{-\infty}^{\infty} -(\omega - \omega_0)^2 A \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt \quad (۱۳۰.۶) \end{aligned}$$

با مقایسه جملات معادلات (۱۳۰.۵) و (۱۳۰.۶) مشاهده می‌کنیم که جایگزینی روابط زیر برقرار است:

$$j(\omega - \omega_0) A \rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} \quad (۱۳۱.۵)$$

$$(\omega - \omega_0)^2 A \rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (۱۳۱.۶)$$

در این صورت رابطه (۲۹.۵) را با استفاده از معادله (۳۱.۵) بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$j \left[\frac{\partial A}{\partial z} + \beta' \frac{\partial A}{\partial t} + \alpha A \right] = -\frac{1}{2} \beta'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{2} k n_2 |A|^2 A. \quad (۳۲.۵)$$

این معادله غیرخطی شرودینگر است که تابع پوش پالس نوری $A(z, t)$ تحت غیرخطی بودن اثر کروافت (یا بهره) در فیبرهای نوری حاکم است.

۳.۵ سالیتون نوری

ابتدا معادله غیرخطی شرودینگر را در حالت ایده‌آل فیبر بدون تلفات حل کرده و سالیتون نوری را بررسی می‌کنیم.

۱.۳.۵ سالیتون‌های اصلی و مرتبه بالاتر

هنگامی که تلفات فیبر نوری صفر باشد، معادله (۳۲.۵) می‌شود:

$$j \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2} \beta'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{2} k n_2 |A|^2 A. \quad (۳۳.۵)$$

که در آن ($v_g = 1/\beta'$) سرعت گروهی رابطه (۱۰.۸.۳) است. به منظور بررسی پیشرفت شکل پالس نوری، سیستم مختصات ثابت را به مختصات متحرک در سرعت v_g تغییر می‌دهیم:

$$\begin{cases} A(z, t) = \phi(z, \tau) & \text{(الف)} \\ \tau = t - \frac{z}{v_g} & \text{(ب)} \end{cases} \quad (۳۴.۵)$$

در این صورت مشتق جزئی A نسبت به z و t خواهد بود

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (۳۵.۵)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad (۳۵.۶)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \quad (۳۵.۷)$$

جایگزینی معادله (۳۵.۵) در معادله (۳۳.۵) میدهد

$$j \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{\chi} \beta'' \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\chi} k n \chi |\phi|^2 \phi. \quad (۳۶.۵)$$

جواب اصلی معادله (۳۶.۵) خواهد بود [۶]

$$\phi(z, \tau) = \phi_p \exp \left(j \frac{\beta''}{2t_*} z \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\tau}{t_*} \right) \quad (۳۷.۵)$$

که در آن t_* مربوط به FWHM (عرض کامل در نصف بیشینه) عرض شدت نور است

$$t_* = \frac{\tau_*}{2 \cosh^{-1} \sqrt{\frac{1}{2}}} \approx 0.567 \tau_* \quad (۳۸.۵)$$

همانطور که با جایگزینی معادله (۳۶.۵) در معادله (۳۷.۵) تایید می‌شود، دامنه قله میدان الکتریکی ϕ_p باید در رابطه زیر صدق کند

$$|\phi_p|^2 = \frac{-2\beta''}{t_*^2 k n \chi} \quad (۳۹.۵)$$

از آنجایی که $(\partial v_g / \partial \lambda) < 0$ ، سالیتون نوری در ناحیه غیرعادی ($\beta'' = \partial v_g / \partial \omega \propto \partial v_g / \partial \lambda < 0$) تولید می‌شود، همانطور که در بخش ۱.۲.۵ نشان داده شده است، جایی که طول موج سیگنال از طول موج پاشندگی صفر بیشتر است، β'' پاشندگی سرعت گروهی را نسبت به طول موج نشان می‌دهد و پاشندگی سرعت گروهی (GVD)^{۱۱} نامیده می‌شود.

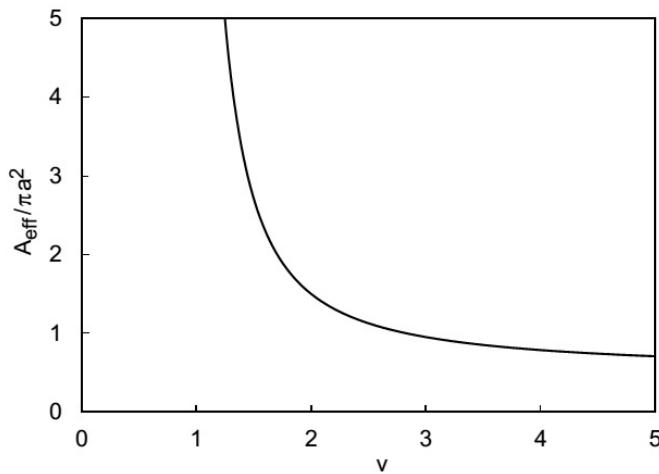
در ادامه شرط سالیتون معادله (۳۹.۵) را از نظر قدرت نوری بیان می‌کنیم. میدان‌های الکترومغناطیسی مود HE_{\perp}^x با (بخش ۳.۵) بیان می‌شود.

$$\begin{cases} H_y = n \epsilon_0 E_x \\ E_y = H_x = 0, \end{cases}$$

که در آن فرض بر $\beta = kn$ است. توان قله لحظه‌ای مود HE_{\perp}^x بصورت زیر داده می‌شود

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (E_x H_y^* - E_y H_x^*) r dr d\theta = n \epsilon_0 c \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |E_x|^2 r dr d\theta \quad (۴۰.۵)$$

^{۱۱} Group Velocity Dispersion (GVD).



شکل ۴.۵: وابستگی A_{eff} تقسیم بر سطح هسته نسبت به فرکانس نرمالیزه v برای مود HE_{11} در فیبر نوری با ضریب شکست پلهای

جایگزینی (۴۰.۵) در معادله $E_x = R(r, \theta)\phi(z)$ بدست می‌آید

$$P = n_1 \epsilon_0 c |\phi_p|^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R|^2 r dr d\theta \quad (41.5)$$

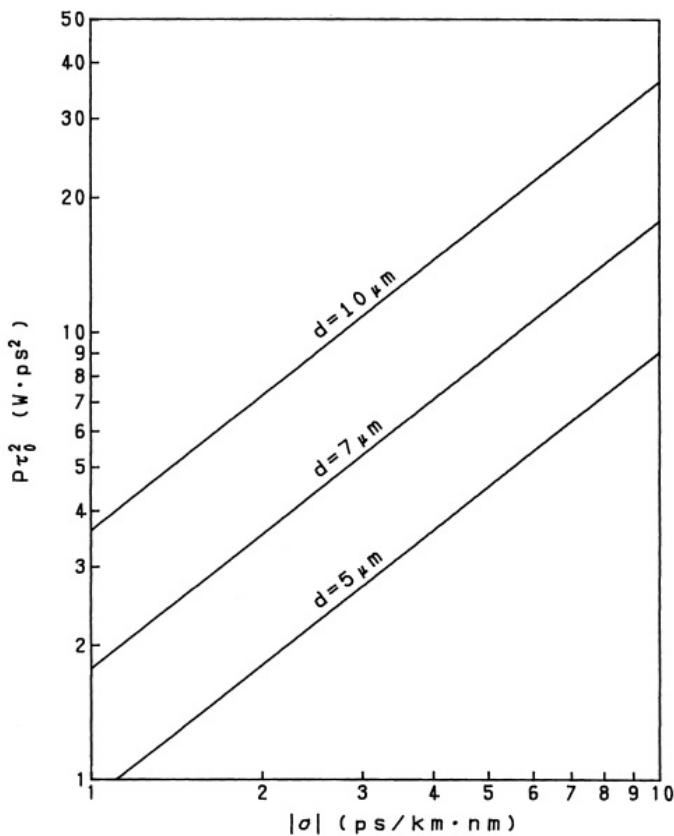
معادله (۴۱.۵) برای مود HE_{11}^y نیز بدست می‌آید. در اینجا پارامتر جدیدی بصورت زیر تعریف می‌کنیم [۴۱.۵]

$$A_{eff} = \frac{\left[\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R|^2 r dr d\theta \right]^2}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R|^4 r dr d\theta} \quad (42.5)$$

در اینجا A_{eff} نمایشگر سطح مقطع اشغال شده توسط بخش قابل توجهی از میدان نور است و سطح موثر نامیده می‌شود. با استفاده از معادله (۲۶.۵) و (۴۲.۵)، معادله (۴۱.۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$P = \eta n_1 \epsilon_0 c |\phi_p|^2 A_{eff} \approx \frac{1}{\eta} n_1 \epsilon_0 c |\phi_p|^2 A_{eff} \quad (43.5)$$

که در آن η برابر 5% فرض می‌شود. شکل (۴.۵) وابستگی A_{eff} تقسیم بر سطح هسته را به فرکانس نرمالیزه برای مود HE_{11} در فیبر ابا ضریب شکست پلهای نشان می‌دهد. جایگزینی معادله (۳۹.۵) در معادله (۴۳.۵) شرایط توان تولید سالیتون نوری اصلی را می‌دهد. در اینجا باید توجه داشته باشیم که ضریب کر n_2 معادله (۳۹.۵) در واحد m^3/V^2 است. برای به دست آوردن شرایط توان سالیتون نوری، ثابت کر در $= m^3/V^2(n_2 = ۳/۱۸ \times ۱۰^{-۳} m^3/W)$ تبدیل شود. رابطه $1/22 \times ۱۰^{-۲۲} m^3/V^2$



شکل ۵.۵: وابستگی $P\tau_0^2$ پاشندگی رنگی σ در طول موج $1/55\mu m$

تبديل خواهد بود

$$n_1[m^\gamma/V^\gamma] = n_\gamma[m^\gamma/W] \cdot n_1 \epsilon_0 c \quad (44.5)$$

که در آن $n_1 = 1/45$ و $\epsilon_0 = 8/854 \times 10^{-12} F/m$ است. جایگزینی معادلات (۳۸.۵) و (۳۹.۵) در معادله (۴۳.۵) و استفاده از رابطه پاشندگی رنگی $\beta'' = -(\lambda^\gamma/2\pi c)\sigma$ [معادله (۱۴۳.۳)]، اوج توان برای تولید سالیتون اصلی بدست می‌آید:

$$P = \frac{\circ/7768\lambda^3 A_{eff} |\sigma|}{\pi^2 c n_1 \tau_0^\gamma} \quad (45.5)$$

به منظور ساده کردن این معادله، پاشندگی رنگی σ را بر حسب واحد طول موج λ را بر حسب واحد μm ، و قطر هسته d را بر حسب μm و $\xi = A_{eff}/\pi(d/2)^2$ بیان می‌کنیم. در این صورت شرط توان خواهد شد

$$P\tau_0^\gamma = 6/48 \times 10^{-3} \xi d^2 \lambda^3 |\sigma| \quad [W \cdot ps^\gamma] \quad (46.5)$$

شکل (۵.۵) وابستگی $P\tau_{\circ}$ را به پاشندگی رنگی در طول موج $1/55\mu m$ برای پارامتر سطح موثر ($v = ۲/۰$) نشان می‌دهد. برای مثال، زمانی که پاشندگی رنگی فیبر $\sigma = ۲ps/km \cdot nm$ و قطر هسته $d = ۵\mu m$ باشد، $P\tau_{\circ} = ۱/۸۱$ به دست می‌آید. بنابراین، اوج توان $P = ۱۸/۱mW$ برای تولید سالیتون نوری با عرض پالس FWHM $\tau_{\circ} = ۱۰ps$ است. هنگامی که نرخ بیت پالس (نرخ تکرار پالس) B باشد، میانگین توان سالیتون به دست می‌آید.

$$P_{av} = B \int_{-1/\sqrt{B}}^{-1/\sqrt{B}} \left[P^{1/2} \operatorname{sech} \left(\frac{\tau}{t_{\circ}} \right) \right]^2 d\tau \approx BP \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\tau}{t_{\circ}} \right) d\tau \\ = t_{\circ} \cdot BP \left[\tanh \left(\frac{\tau}{t_{\circ}} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = ۲t_{\circ} \cdot BP = \frac{\tau_{\circ} \cdot BP}{\cosh^{-1} \sqrt{2}} \approx ۱/۱۳۵\tau_{\circ} \cdot BP. \quad (۴۷.۵)$$

در این صورت توان متوسط پالس نوری با نرخ $B = ۱۰Gbit/s$ تقریباً $P_{av} = ۲/۱mW$ است. بطور کلی، پارامتر

$$\nu = |\phi_p| t_{\circ} \sqrt{\frac{kn_{\gamma}}{-2\beta''}} \quad (۴۸.۵)$$

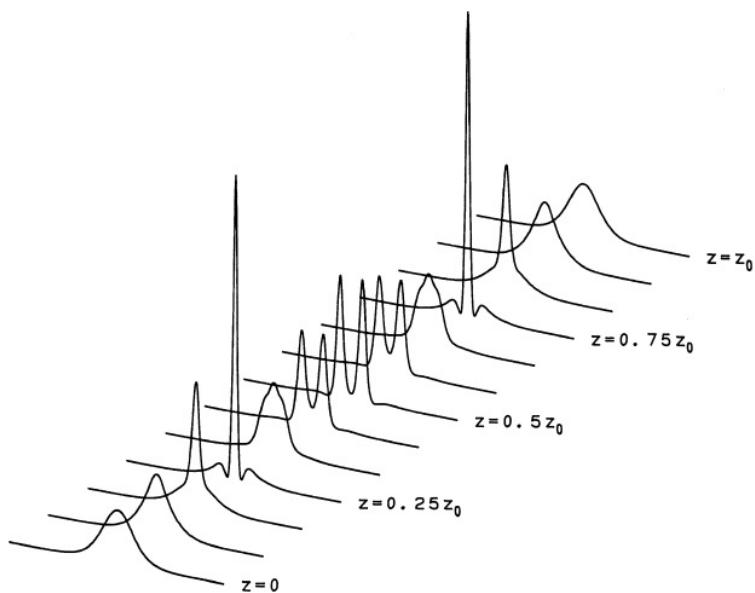
برای ارزیابی تولید سالیتون‌های نوری درجه بالاتر استفاده می‌شود. حتی اگر معادله (۴۸.۵) یگانه نیست، مشخص است که سالیتون اصلی زمانی تولید می‌شود که پارامتر $\nu \geq ۰/۵$ را برآورده کند [۶]. با این حال، برای حالت $\nu < ۰/۵$ کارائی تحریک سالیتون کم می‌شود، زیرا موج غیر سالیتونی وجود دارد. هنگامی که یک پالس نوری با قدرت اوج بالاتر از سالیتون اصلی به یک فیبر نوری ترویج می‌شود، یک سالیتون مرتبه بالاتر $N = [\nu + ۰/۵]$ یک عدد صحیح است) برای $\nu > ۰/۵$ تولید می‌شود. دستور سالیتون نوری به طور تناوبی شکل پالس زمانی خود را تغییر می‌دهد، همانطور که در شکل (۶.۵) ($\nu = ۳$) نشان داده شده است. طول تناوب توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$z_{\circ} = \frac{\pi t_{\circ}^2}{2|\beta''|} = ۰/۳۲۲ \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{c\tau_{\circ}^2}{|\sigma|} \quad (۴۹.۵)$$

پهنهای پالس سالیتون مرتبه بالاتر در $z < z_{\circ}$ فشرده می‌شود، زیرا باریک شدن پالس به دلیل چیرپ غیرخطی در این ناحیه غالب است. این فشرده سازی سالیتون نامیده می‌شود و می‌توان از آن برای فشرده سازی پالس نوری استفاده کرد [۷].

۲.۳.۵ جبران تلفات فیبر با تقویت‌کننده نوری

سالیتون نوری یک شکل موج سیگنال ایده‌آل برای ارتباطات نوری دوربرد با نرخ بیت بسیار بالا است، زیرا از اعوجاج شکل موج سیگنال توسط پاشندگی رنگی فیبر نوری رنج نمی‌برد. با این حال، در بحث‌های قبلی تلفات فیبر صرف‌نظر کرده‌ایم. هنگامی که تلفات در فیبر وجود دارد، قدرت اوج پالس کاهش می‌یابد و عرض پالس گسترده می‌شود، زیرا باریک شدن پالس ناشی از صدای چیرپ غیرخطی ضعیف می‌شود. شکل (۷.۵) تغییر



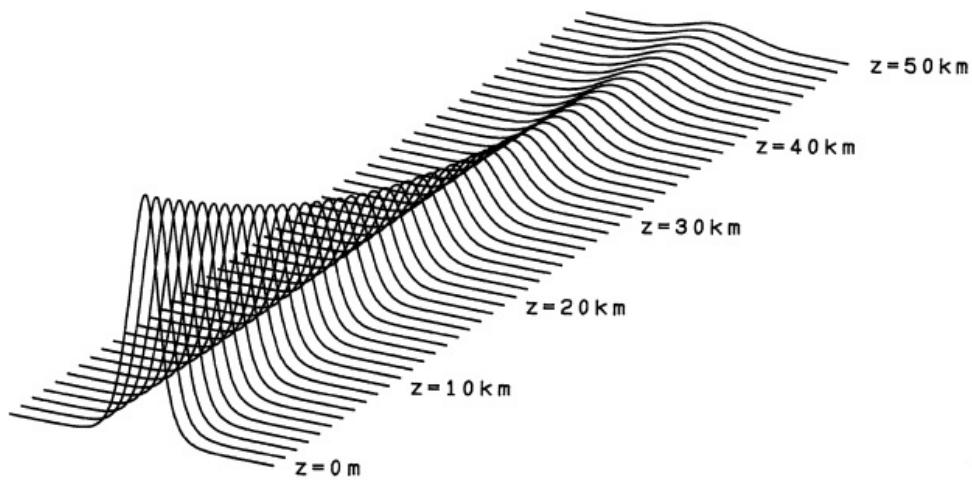
شکل ۶.۵: تغییرات تناوبی شکل پالس زمانی برای مرتبه سوم ($\nu = 3$) سالیتون نوری.

شکل موج پالس زمانی را نشان می‌دهد که با استفاده از روش انتشار پرتو (BPM)^{۱۲} محاسبه می‌شود، زمانی که پالس نوری با حداکثر توان $P = 18mW$ و عرض FWHM $\tau = 9.4ps$ بهفیبر نوری با تضعیف $18dB/km$ در طول موج $1.55\mu m$ تزویج می‌شود. شبیه سازی عددی توسط BPM در فصل هفتم توضیح داده خواهد شد.

هنگامی که تلفات سیگنال بزرگتر از حدود ۳ دسیبل می‌شود (فاصله انتشار بیش از ۱۵ کیلومتر در شکل ۷.۵)، سالیتون نوری اثر باریک شدن خود را از دست می‌دهد و توسط پاشندگی رنگی کنترل می‌شود. برای جبران تلفات نوری، سالیتون نوری باید مستقیماً در مرحله نوری تقویت شود. پراکندگی رامان^{۱۳} تحریک شده در فیبر نوری [۹] و یک تقویت کننده نوری آغشته به Er^{3+} [۱۰] می‌تواند برای تقویت مستقیم نوری سالیتون‌های نوری استفاده شود. پراکندگی رامان تحریک شده پدیده‌ای است که وقتی نور تک رنگ قوی به مواد تابش می‌کند مشاهده می‌شود [۱۱]. نور همدوس با تغییر طول موج خاص از طریق تعامل بین فونون نوری ماده و میدان نوری تحریک، پراکنده می‌شود. تغییر عدد موج در شیشه سیلیسی حدود $440cm^{-1}$ است. به عنوان مثال، وقتی از نور در $\lambda_p = 1.45\mu m$ به عنوان چراغ پمپاژ استفاده می‌کنیم، می‌توانیم نور سیگنال را مستقیماً در $(1/\lambda_p - 440cm^{-1}) / (1/\lambda_s - 1.55\mu m) = 1.05 \times 10^{-4}cm$ از طریق برهmekش با فونون نوری، تقویت کنیم. تقویت کننده فیبر آغشته به Er^{3+} است که در آن یون Er^{3+} در هسته با چند صد قسمت در میلیون آغشته شده است. هنگامی که توسط نور در طول موج $1.48\mu m$ یا $1.45\mu m$ پمپ می‌شود، سیگنال نوری در ناحیه طول موج

^{۱۲} Beam Propagation Method (BPM)

^{۱۳} Raman scattering

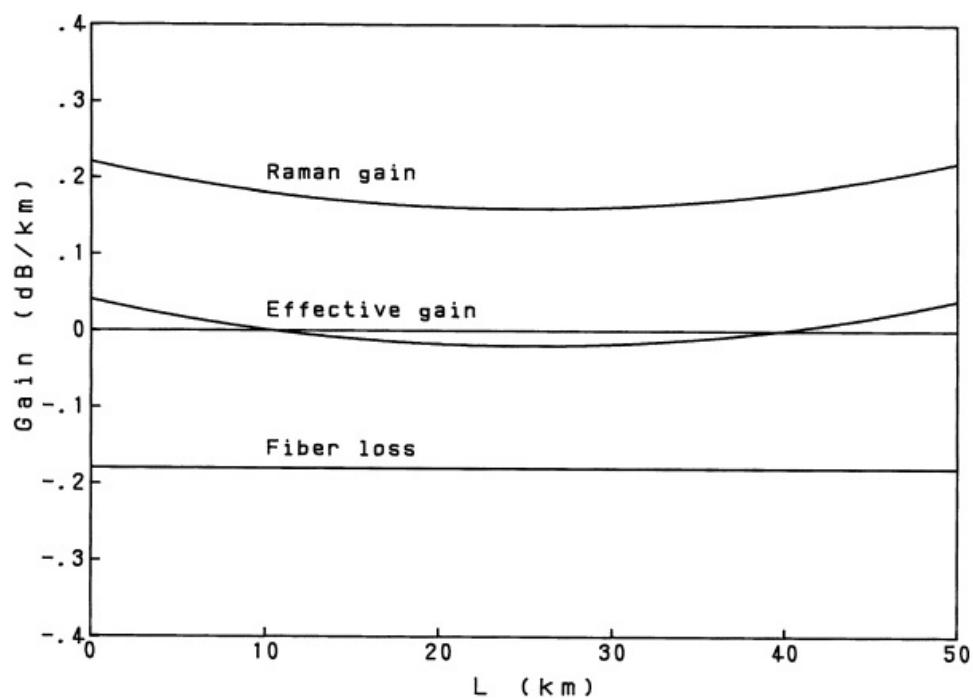


شکل ۷.۵: تغییر شکل پالس سالیتون اصلی در یک فیبر نوری تلفاتی

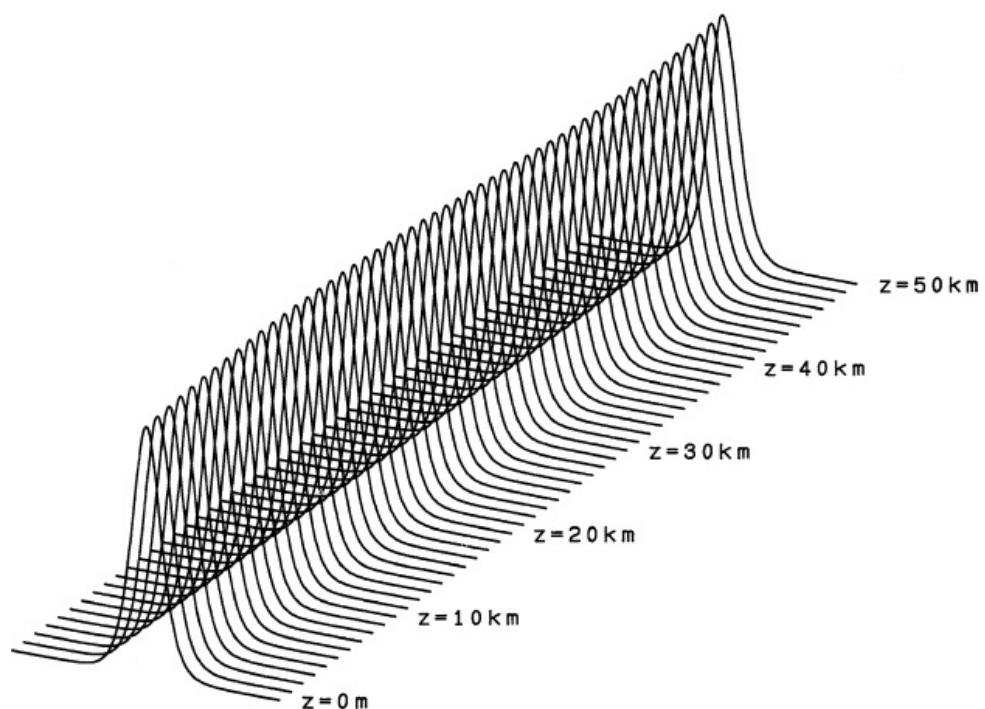
از طریق انتشار تحریک شده بین خطوط طیف $I_{13/2} \rightarrow I_{15/2}$ تقویت $1/\mu\text{m}^2$ شود. در ادامه، تقویت سالیتون نوری با استفاده از پراکنندگی رامان تحریک شده تشریح خواهد شد.

با شبیه سازی عددی نشان داده است که یک سالیتون نوری با طول موج سیگنال $\lambda_s = 1/\mu\text{m}^2$ متر، عرض پالس $P = 18\text{mW}$ و حداکثر توان $\tau_s = 9/4\text{ps}$ FWHM سرعت $10 \text{ جیگابیت بر ثانیه در چندین هزار کیلومتر انتقال داده شود$. فیبر با پاشندگی رنگی $A_{eff} = 2\text{ps/km}$ ، سطح موثر $25\mu\text{m}^2$ (قطر هسته تقریباً 5 میکرومتر)، افت در طول موج سیگنال 18% دسی بل بر کیلومتر، و افت در طول موج پمپ $\lambda_p = 1/\mu\text{m}^2$ از 29% دسی بل در کیلومتر هنگامی که توسط یک نور پمپاژ 50 میلیوات (CW) فیبر قدرت تزویجی با تناوب 5 کیلومتر تقویت می شود [۱۲]. شکل ۸.۵ وابستگی طول فیبر تلفاتی، بهره رامان، و تلفات یا بهره خالص را با پارامترهای قبلی نشان می دهد. شکل ۹.۵ تغییر شکل موج پالس را در طول یک روش تقویت کننده نوری محاسبه شده توسط BPM نشان می دهد. نشان داده شده است که سالیتون اصلی را می توان از طریق یک فیبر طولانی با تقویت نوری مستقیم منتقل کرد.

در آزمایش انتقال سالیتون با تقویت رامان، سیگنال از لیزر مرکز F در $1.6\mu\text{m}$ (عرض پالس 55ps FWHM، حداکثر توان $15 \text{ میلیوات و نرخ تکرار } 100 \text{ مگاهرتز}$) در حلقه فیبر چرخش مجدد شد. طول $41/7$ کیلومتر (طول کل 4000 کیلومتر) با استفاده از نور پمپ لیزری مرکز F در $1.5\mu\text{m}$ با عنوان آزمایش انتقال با استفاده از یک تقویت کننده فیبر آغشته به Er ، یک لیزر MQW-DFB با نوسان $1.52\mu\text{m}$ (عرض پالس 20ps FWHM برابر Er)، حداکثر توان $6-4 \text{ میلیوات و نرخ بیت سیگنال } 20 \text{ گیگابیت بر ثانیه}$ مخابره شد. بیش از 200 کیلومتر با تقویت سیگنال با تناوب 25 کیلومتری با استفاده از لیزر نیمه هادی از $1.48\mu\text{m}$ به عنوان منبع پمپ [۱۴].



شکل ۸.۵: وابستگی طول فیبر تلفاتی به بهره رمان، تلفات خالص یا بهره در تقویت رامان



شکل ۹.۵: تغییر شکل پالس زمانی در طول روبش تقویت نوری

۳.۳.۵ ناپایداری مدولاسیونی

ناپایداری مدولاسیونی (MI)^{۱۴} پدیده‌ای است که در یک محیط پاشنده غیرخطی مشاهده می‌شود که در آن مولفه باند جانبی نور مدوله شده با دامنه بهصورت نمائی رشد می‌کند که شرایط خاصی برآورده شود^{۱۵}[۱۵]. جواب حالت ماندگار معادله غیرخطی شرودینگر (۳۶.۵) (جواب موج پیوسته تحت شرط $\partial\phi/\partial\tau = 0$) برابطه زیر داده می‌شود

$$\phi_{cw} = \phi_0 \exp(-j\delta z), \quad (۵۰.۵)$$

$$\delta = \frac{kn_2}{\gamma} |\phi_0|^2, \quad (۵۰.۶)$$

که در آن ϕ ثابت است. هنگامی که یک تغییرات کوچکی به جواب حالت ماندگار [معادله (۵۰.۵)] در ناحیه غیرعادی اعمال می‌شود، میدان الکتریکی تحت شرایط خاصی ناپایدار می‌شود. برای بررسی ناپایداری مدولاسیونی، یک تغییرات کوچک $q(z, \tau)$ به جواب حالت ماندگار ϕ_{cw} اضافه می‌کنیم. میدان با تغییرات جزئی بهصورت زیر بیان می‌شود

$$\phi = [\phi_0 + q(z, \tau)] \exp(-j\delta z) \quad (۵۱.۵)$$

جایگزین کردن این در معادله (۳۶.۵) با این فرض که تغییرات جزئی بهاندازه کافی کوچک است، معادله دیفرانسیل را برای q به دست می‌آوریم.

$$j \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\beta''}{\gamma} \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + \delta(q + q^*). \quad (۵۲.۵)$$

جواب کلی برای $q(z, \tau)$ را بصورت زیر فرض می‌کنیم

$$q(z, \tau) = q_1 \cos(\Omega t - Kz) + q_2 \sin(\Omega t - Kz), \quad (۵۳.۵)$$

که در آن Ω و K بترتیب نمایشگر فرکانس زاویه‌ای و عدد موج تغییرات جزئی است. رابطه پاشنده‌گی بین K و Ω با جایگزینی معادله (۵۳.۵) در معادله (۵۲.۵) بدست می‌آید:

$$K^2 = \left(\frac{\beta'' \Omega}{\gamma} \right)^2 \left[\Omega^2 + \frac{2kn_2}{\beta''} |\phi_0|^2 \right] \quad (۵۴.۵)$$

از رابطه (۵۴.۵) مشاهده می‌شود که K وقتی شرایط زیر برآورده شود، عدد خالص موهومی می‌شود:

$$\frac{n_2}{\beta''} < 0 \quad (۵۵.۵)$$

$$\Omega < \Omega_c \equiv \left[\frac{2kn_2}{-\beta''} |\phi_0|^2 \right]^{1/2}. \quad (۵۶.۵)$$

^{۱۴}Modulational Instability

در این صورت φ به صورت نمائی رشد می‌کند. البته، جوابی داریم که به طور نمائی در حال میرائی است. اما اینجا مهم نیست. اگر تغییرات جزئی مدولاسیون دامنه باشد، این پدیده حاکی از آن است که عمق مدولاسیون به صورت نمائی افزایش می‌یابد. بنابراین چنین پدیده‌ای را ناپایداری مدولاسیونی^{۱۵} می‌نامند.

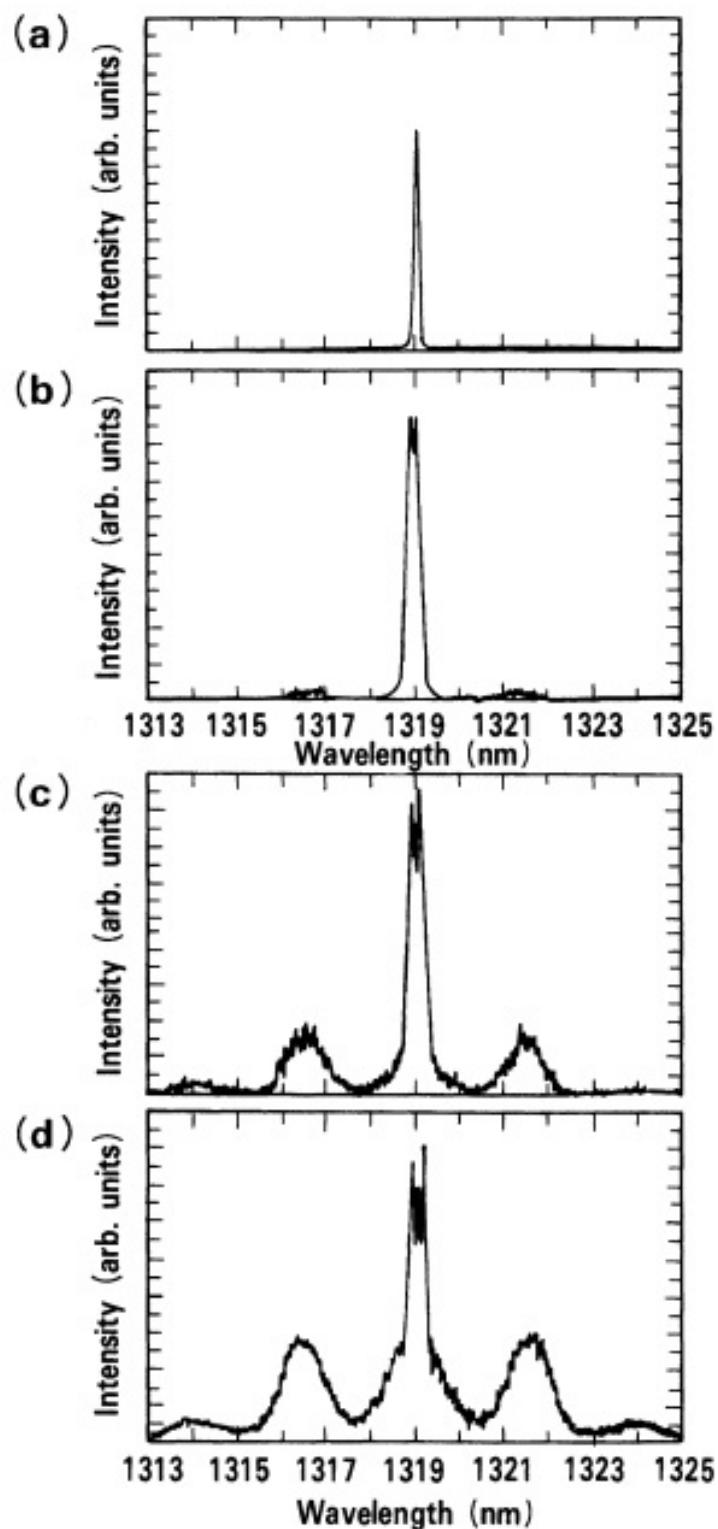
فرکانس زاویه‌ای که در آن نرخ افزایش تغییرات جزئی با $\pm\Omega_c/\sqrt{2} = \Omega$ داده می‌شود، به بیشینه می‌رسد. در اینجا نرخ رشد φ با رابطه $z = \exp(kn_c \cdot \phi) \cdot \Omega_c^2 / 2$ بیان می‌شود.

حتی زمانی که تغذیه تغییرات جزئی وجود نداشته باشد، بذر تغییرات جزئی ممکن است از فونون فعال حرارتی منشا بگیرد. شکل (۱۰.۵) رشد اجزای باند جانبی توسط ناپایداری مدولاسیونی در فیبر نوری را بطور تجربی نشان می‌دهد^{۱۶}. منبع نور در آزمایش یک لیزر Nd:YAG با مود قفل شده با نرخ تکرار ۱۰۰ مگاهرتز و عرض پالس ۱۰۰ پیکو ثانیه بود. دلیل اینکه چرا به جای استفاده از نور CW از یک پالس ۱۰۰ پیکو ثانیه استفاده شد، حذف پراکندگی بریلوین تحریک شده بود (به بخش ۷.۵ مراجعه کنید). پارامترهای فیبر مورد استفاده در آزمایش عبارت بودند از: پاشندگی کروماتیک $\sigma = 2.4 ps/km nm$ ، طول فیبر $L = 1$ کیلومتر، مساحت هسته موثر $A_{eff} = 6.0 \mu m^2$ و افت فیبر $6.7 dB/km$.

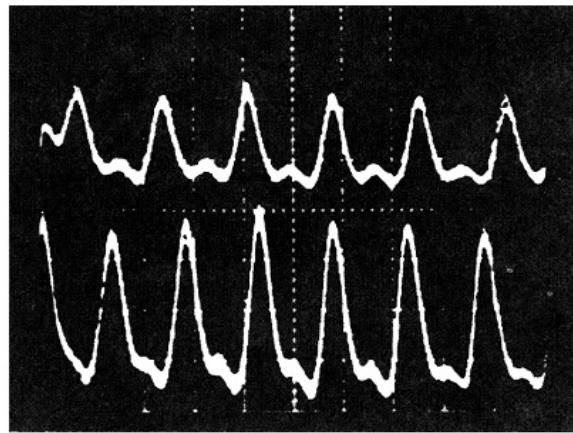
شکل (۱۰.۵)-(الف) طیف خروجی را برای توان ورودی کم نشان می‌دهد. طیف خروجی در این سطح توان با طیف ورودی منطبق است. هنگامی که توان ورودی به (ب) $5.5 W$ ، (ج) $11 W$ و (ج) $21 W$ افزایش می‌یابد، یک باند جانبی از فونون برانگیخته حرارتی در فرکانس زاویه‌ای $\Omega_c/\sqrt{2}$ تولید می‌شود [شکل ۱۰.۵-(ب)], و مطابق با افزایش توان ورودی رشد می‌کند [شکل ۱۰.۵-(ج)]. هنگامی که توان ورودی باز هم بیشتر می‌شود، یک باند جانبی مرتبه بالاتر ظاهر می‌شود [شکل ۱۰.۵-(د)]. جدایی طول موج بین نور پمپ و باند جانبی با افزایش توان ورودی گستردگرتر می‌شود، زیرا فرکانس زاویه‌ای باند جانبی $\Omega_c/\sqrt{2}$ با ورودی ϕ متناسب است.

ناپایداری مدولاسیونی می‌تواند عمدهاً با تزریق یک مولفه باند جانبی با فرکانس زاویه‌ای در مجاورت $\Omega_m = \Omega_c/\sqrt{2}$ همراه با موج حامل ایجاد شود. این ناپایداری مدولاسیونی القایی نامیده می‌شود. یک قطار پالس نوری با تکرار بالا می‌تواند با استفاده از این ناپایداری مدولاسیونی القایی ایجاد شود. دوره تکرار معکوس فرکانس مدولاسیون داده شده $\Omega_m/2\pi$ است. یک قطار پالسی با نرخ بیت بسیار بالا با تکرار $THz^{-1} = 34 \times 10^{19} ps$ با عرض پالس $5 \times 10^{-10} ps$ FWHM بر اساس ناپایداری مدولاسیونی القایی تولید شد^{۱۷}. منبع نور آزمایش یک لیزر Nd:YAG با حالت قفل بود که در $1.319 \mu m$ نوسان داشت (عرض پالس $10 \times 10^{-10} ps$ و حداقل توان ۳ وات) و یک لیزر نیمه هادی InGaAsP با حفره خارجی (خروجی $cw = 0.5 mJ$ وات) با فرکانس نوسان در $THz^{-1} = 34 \times 10^{19} ps$ (FWHM $\Omega_m/2\pi \approx 1.8 nm$) جدا از نور منبع به عنوان یک نور تزریق باند جانبی استفاده می‌شود. شکل (۱۰.۵) رد خودهمبستگی اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهد زمانی که لیزر پمپاژ Nd:YAG و لیزر نیمه هادی InGaAsP باند جانبی به فیبر تک مودی با طول موج پاشندگی صفر در $1.275 \mu m$ تزویج می‌شوند (پاشندگی رنگی در $1.319 \mu m$ برابر $3.75 ps/km$ است). از آنجایی که طول موج لیزرهای نیمه هادی InGaAsP باند جانبی در رد بالایی و پایینی آنها متفاوت است، فرکانس‌های زاویه‌ای تکرار متفاوت است. عرض پالس FWHM پالس تولید شده حدود $5 ps$ است. ناپایداری

^{۱۵}Modulational Instability



شکل ۱۰.۵: رشد اجزای باند جانبی توسط ناپایداری مدولاسیونی در فیبر نوری. توان ورودی: (الف) کم، (ب) $5/5W$ ، (ج) $6/1W$ ، (د) $7/1W$.



شکل ۱۱.۵: آثار خود همبستگی قطارهای پالس ایجاد شده توسط ناپایداری مدولاسیونی القایی. طول موج لیزرهای نیمه هادی InGaAsP باند جانبی در رد بالایی و پایینی آنها متفاوت است.

مدولاسیونی القایی یکی از تکنیک‌های امیدوارکننده برای تولید قطارهای پالس کوتاه با نرخ بیت بسیار بالا است.

۴.۳.۵ سالیتون‌های تیره

یک سالیتون روش نمی‌تواند در ناحیه پاشندگی معمولی که در آن $\beta'' > 0$ باشد وجود داشته باشد. با این حال، یک سالیتون تاریک که یک شیب دامنه در موج پیوسته است، می‌تواند در این ناحیه پاشندگی معمولی وجود داشته باشد [۱۹]. حل معادله (۳۶.۵) تحت شرط $\beta'' < 0$ توسط داده می‌شود

$$\phi(z, \tau) = \phi_p \exp\left(-j \frac{\beta''}{2t_c} z\right) \tanh\left(\frac{\tau}{t_c}\right) \quad (57.5)$$

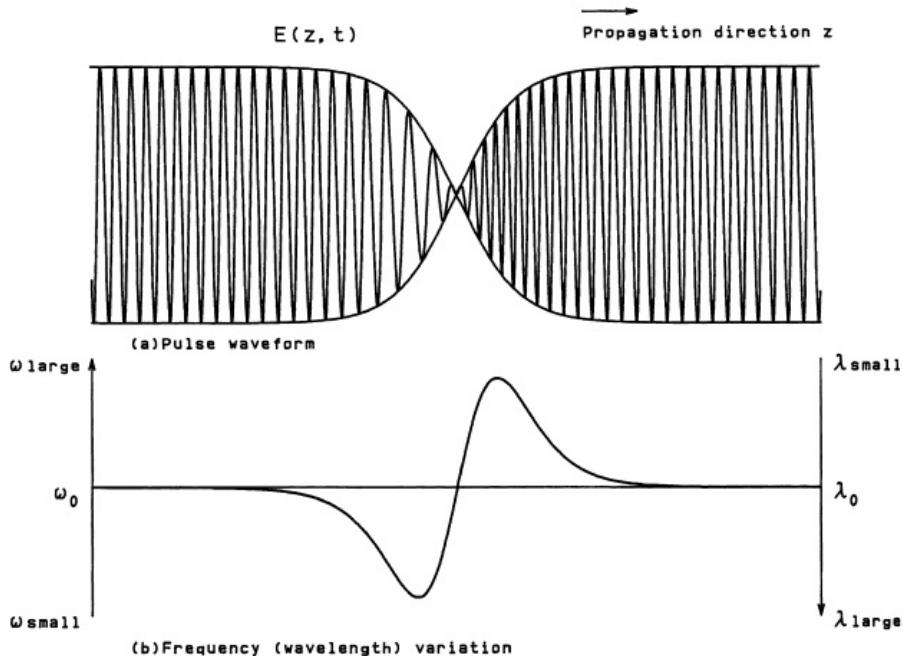
که در آن تعریف t_c همان معادله (۵۸.۵) است. شرط پیک میدان الکتریکی ϕ_p با استفاده از

$$|\phi_p|^2 = \frac{2\beta''}{t_c^2 k n_\chi} \quad (58.5)$$

شکل (۱۲.۵) شکل موج پالس و خاصیت صدای جیک یک سالیتون تاریک را نشان می‌دهد. فاز سالیتون تاریک در نقطه حداقل دامنه پرش می‌کند. مشاهده تجربی سالیتون تاریک قبل از گزارش شده است [۱۹].

۴.۵ فشرده سازی پالس نوری

پالس‌های نوری فوق کوتاه برای تحقیق در مورد پدیده‌های فوق سریع ضروری هستند. عرض پالس نوری نوسانی $27fs$ از یک لیزر رنگی قفل شده در مود پالس برخوردي با

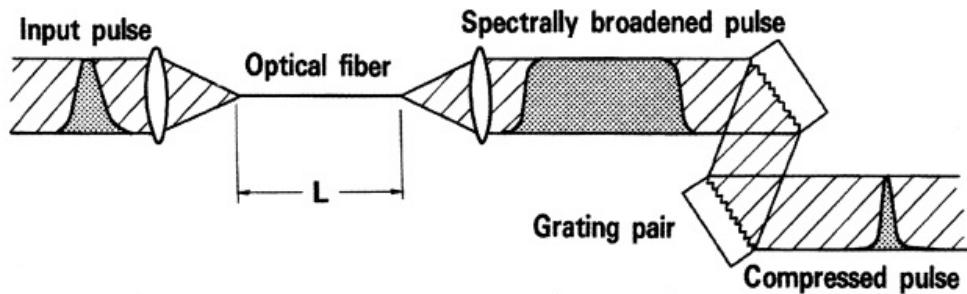


شکل ۱۲.۵: شکل پالس و خواص چیرپ سالیتون تیره

جبران پاشندگی سرعت گروهی (GVD)^{۱۶} در حفره لیزر با زنجیره‌های منشوری گزارش شده است^[۲۰]. با این حال، از نقطه نظر عملی، فناوری تولید پالس‌های نور فوق کوتاه از خود لیزر نسبتاً نامناسب است، زیرا منطقه طول موج نوسان لیزر محدود است. فناوری فشرده سازی پالس نوری^[۲۱] بر این اساس، به عنوان مثال، بر اساس ترکیب فیبر تک مودی (محیط چیرپ) و زوج توری (محیط پاشنده) قادر است محدوده طیفی وسیعی را پوشش دهد، زیرا فشرده سازی پالس در خارج از حفره لیزر انجام می‌شود.

یک پالس نوری با عرض 50 fs از لیزر رنگی قفل شده با پالس برخوردی که در 620 nm نانومتر نوسان می‌کرد، با فناوری فشرده سازی پالس به 6 fs فشرده شد^[۲۲]. تا کنون این کوتاهترین پالس نوری است. شکل (۱۳.۵) شماتیک فشرده سازی پالس نوری را با استفاده از فیبر و زوج توری نشان می‌دهد. گذرهای از شکل موج پالس نوری منتشر شده در فیبر تک مود توسط معادله (۳۲.۵) توصیف شده است. در ناحیه پاشندگی معمولی، که در آن مولفه با طول موج بلندتر در لبه قبلی پالس سریعتر از مولفه کوتاهتر در لبه انتهایی حرکت می‌کند، شکل موج پالس مربعی شکل و به صورت خطی چیرپ می‌شود. این برای فشرده سازی پالس با استفاده از یک زوج توری بسیار مطلوب است. همانطور که معروف شده، عرض پالس نوری Δt و عرض طیفی با اصل عدم قطعیت $1 / \Delta t \cdot \Delta \omega \geq 1$ مرتبط هستند. بنابراین مدولاسیون خودفاز بر اساس غیرخطی بودن در فیبر نوری برای گسترش عرض طیفی به گونه‌ای عمل می‌کند که با فشرده سازی پالس، عرض پالس کوتاه‌تر Δt را ایجاد

^{۱۶}Group Velocity Dispersion (GVD)



شکل ۱۳.۵: پیکربندی شماتیک فشردهسازی پالس نوری با استفاده از فیبر و زوج توری

کنید.

شکل (۱۴.۵) گذرهای فرکانس زاویه‌ای لحظه‌ای پالس، شدت پالس نوری و شدت طیفی را در طول انتشار در فیبر پاشندگی معمولی نشان می‌دهد که با شبیه سازی عددی بر اساس معادله غیرخطی شرودینگر محاسبه شده است [۲۳]. پارامترهای t و z با معادله (۳۸.۵) و (۴۹.۵) داده می‌شوند. یک پالس خطی و مربعی شکل، همانطور که در شکل (۱۴.۵)-ج نشان داده شده است، بهترین پالس برای فشردهسازی با استفاده از یک زوج توری است [۲۴]. زمان تاخیر وابسته به طول موج (فرکانس) زوج توری، همانطور که در شکل (۱۵.۵) نشان داده شده است، با رابطه زیر بیان شده است.

$$\tau = \tau_G - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} + O(\omega - \omega_0)^2, \quad (۵۹.۵)$$

که در آن τ_G و μ خواهند بود

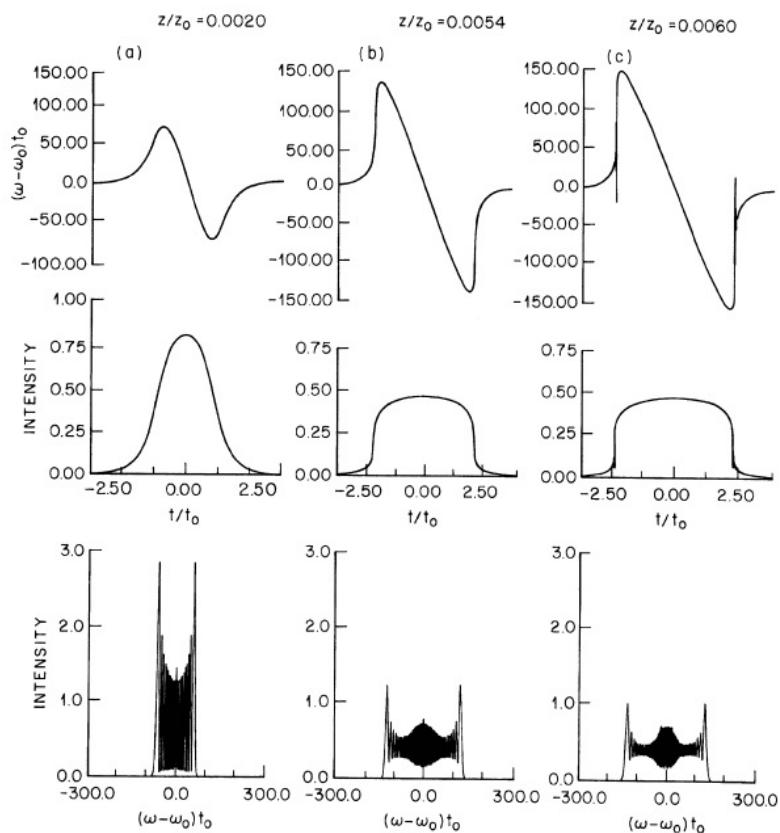
$$\tau_G = \frac{b}{c}(1 + \cos \theta), \quad (۶۰.۵)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{4\pi^2 cb}{\omega^2 d^2 \{1 - [(2\pi c)/\omega d] - \sin \gamma\}^2} \quad (۶۱.۵)$$

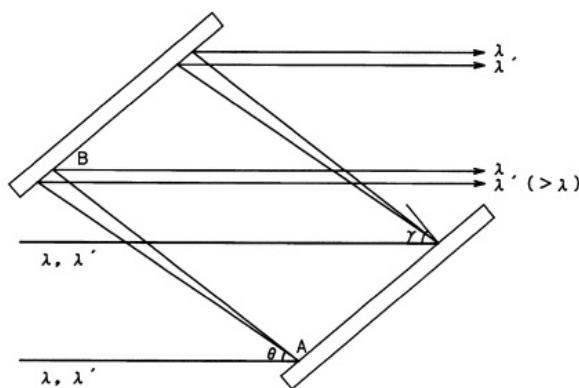
در این معادلات، cd و b به ترتیب در شکل (۱۵.۵)، سرعت نور، گام توری و فاصله بین توری‌های A و B را نشان می‌دهند. γ زاویه تابش نور و θ زاویه بین نور تابشی و نور پراش شده است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\sin(\gamma - \theta) = \frac{\lambda}{d} - \sin \gamma. \quad (۶۲.۵)$$

اگر از عبارت مرتبه بالاتر $O(\omega - \omega_0)^2$ در معادله (۵۹.۵) صرفنظر کنیم، مشاهده می‌شود که زوج نوری محیطی است که در آن مولفه با فرکانس بالاتر (طول موج کوتاه‌تر) زمان تاخیر کمتری دارد (سرعت گروه بزرگ‌تر). این معادل فیبر نوری تک مودی در ناحیه غیرعادی است. همچنین از معادله (۶۱.۵) تایید شده است که اختلاف زمان تاخیر را می‌توان با بزرگ کردن فاصله زوج توری افزایش داد.



شکل ۱۴.۵: شبیه سازی عددی فرکانس زاویه‌ای لحظه‌ای پالس (ردیف بالا)، شدت پالس نوری (ردیف مرکزی) و شدت طیفی (ردیف پایین) در حین انتشار در فیبر پاشندگی معمولی



شکل ۱۵.۵: زوج توری برای فشرده‌سازی پالس. دو مسیر نوری برای دو مولفه طول موج ($\lambda' > \lambda$) متفاوت نشان داده شده است. فاصله انتشار برای مولفه با طول موج بلندتر λ' از مولفه با طول موج کوتاه‌تر λ است و از تأخیر بیشتری متحمل می‌شود.

یک زوج منشور همچنین می‌تواند به عنوان محیط غیرعادی برای فشرده‌سازی پالس استفاده کرد^[۲۵]. در این مورد، فاصله بین دو منشور باید زیاد باشد، زیرا اثر پاشندگی منشورها از زوج توری کوچکتر است. با این حال، افت عبوری^[۱۹] منشور را می‌توان با تنظیم زاویه منشور به‌زاویه بروستر کاهش داد. بنابراین، زوج منشور در ناحیه تولید پالس زیر پیکو ثانیه کاملاً سودمند است.

تا کنون از تأثیر جمله سوم در معادله (۵۹.۵) صرفنظر کرده‌ایم. با این حال، این عبارت مرتبه بالاتر را نمی‌توان در تولید پالس مرتبه 10^{fs} نادیده گرفت. به‌منظور جبران ترم سوم در معادله (۵۹.۵)، یک طرح فشرده سازی ابداع شده است که زوج منشور را در داخل زوج توری ترکیب می‌کند. یک پالس نوری فوق کوتاه^۶ با این پیکربندی تولید شد. با توجه به‌اینکه یک تناوب نور در $\lambda = \lambda/c = 62\mu m$ برابر $T = 2/1 fs$ است، می‌بینیم که فناوری‌های فشرده‌سازی پالس نوری به مرحله نهایی خود نزدیک می‌شوند.

۵.۵ پراکندگی نور در محیط همسانگرد

به‌طور کلی، هنگامی که نور در ناحیه مرئی به‌یک ماده شفاف تزریق می‌شود، بخشی از نور به‌صورت غیر الاستیک پراکنده می‌شود. هنگامی که نور پراکنده را مشاهده می‌کنیم، نور پراکنده ریلی با طول موجی مشابه با نور ورودی (تحریک) و همچنین نور جدید با طول موج بلندتر یا کوتاه‌تر از نور تحریک وجود دارد^[۲۶]. این اثر عموماً اثر رامان^[۱۸] نامیده می‌شود. هنگامی که نور پراکنده جدید از طریق برهمکنش نور تحریک با ارتعاش مولکولی، فونون‌های نوری جامد و سایر تحریکات ابتدایی مانند ناخالصی، پلاسمما و پلاریتون تولید می‌شود، پراکندگی رامان^[۱۹] می‌نامند. از سوی دیگر، اگر نور پراکنده از برهمکنش میدان تحریک با فونون‌های صوتی مایع یا جامد ایجاد شود، به آن پراکندگی بریلوین^[۲۰] می‌گویند.

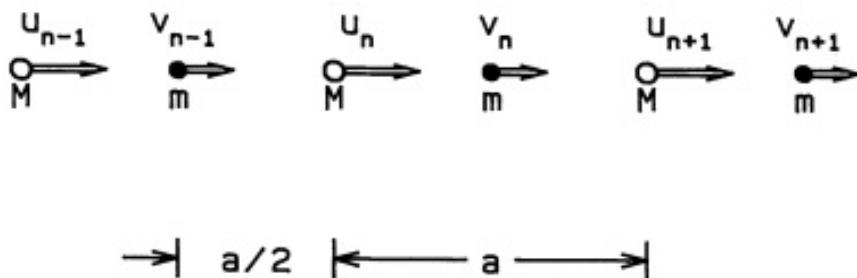
پراکندگی خود به خودی رامان یا بریلوین پدیده‌ای است که در آن نور استوکس با فرکانس زاویه‌ای $\omega_S = \omega_L \omega_F$ و نور ضد استوکس با فرکانس زاویه‌ای $\omega_A = \omega_L + \omega_F$ ساطع می‌شود که در آن به ترتیب ω_L و ω_F فرکانس‌های زاویه‌ای نور تحریک و فونون نوری یا صوتی را نشان می‌دهند. امواج استوکس و ضد استوکس از طریق مدولاسیون پلاریزاسیون الکترونیکی P توسط قطبش پذیری α به صورت $P = \alpha E \cos(\omega_L t)$ ایجاد می‌شوند، زیرا قطبش پذیری α با فرکانس زاویه‌ای خاص فونون به صورت $\alpha = \alpha_0 + (\partial \alpha / \partial k) k \cos(\omega_F t)$ تغییر می‌کند. وقتی میدان تحریک کوچک است، نور پراکنده ناهمدوس است، زیرا هر ارتعاش شبکه در فاز تصادفی است. با این حال، هنگامی که میدان تحریک قوی می‌شود، ارتعاش شبکه به‌طور همدوس در فرکانس زاویه‌ای $(\omega_L - \omega_S)$ توسط برهمکنش غیرخطی بین نور تابشی و نور استوکس برانگیخته می‌شود. تزویج ارتعاش شبکه همدوس با میدان نور ورودی باعث پلاریزاسیون غیرخطی مرتبه سوم و ایجاد پراکندگی تحریک شده نور

^{۱۷}Insertion Loss

^{۱۸}Raman Effect

^{۱۹}Raman Scattering

^{۲۰}Brillouin Scattering



شکل ۱۶.۵: شبکه یک بعدی شامل دو اتم مختلف

استوکس می‌شود. این منشاء پراکندگی رامان تحریک شده (SRS)^{۲۱} و پراکندگی بریلوین تحریک شده (SBS)^{۲۲} است.

۱.۵.۵ ارتعاش شبکه یک بعدی

فونون حالت کوانتیزه ارتعاش شبکه است. اجازه دهید ارتعاش یک شبکه یک بعدی مت Shank از دو نوع اتم را در نظر بگیریم تا تصویر فیزیکی یک فونون را بدست آوریم. یک شبکه خطی را در نظر می‌گیریم که در آن دو اتم مختلف با جرم‌های M و m به طور متناظر مطابق شکل (۱۶.۵) در یک راستا قرار گرفته‌اند و رابطه پاشندگی موج ارتعاشی منتشر شده در امتداد جهت خطی را بدست می‌آوریم. جابجایی اتم‌ها از موقعیت‌های ایستا به صورت u_n و v_n برای n اتم M و m بیان می‌شود، جایی که موقعیت دو اتم با $s_n = x_n + (1/2)a$ برای n اتم M نشان داده می‌شود. اتم‌های M و m در اینجا تناوب اتم (یا سلول واحد) آمده است. اگر فرض کنیم که هر اتم فقط توسط اتم‌های مجاور مجبور است و از قانون هوک پیروی کند، معادله حرکتی زیر را برای زوج n اتم به دست می‌آوریم:

$$M \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -q(u_n - v_n) - q(u_n - v_{n-1}) = -q(2u_n - v_n - v_{n-1}), \quad (۱۶۳.۵)$$

$$m \frac{d^2 v_n}{dt^2} = -q(v_n - u_{n+1}) - q(v_n - u_n) = -q(2v_n - u_{n+1} - u_n), \quad (۱۶۳.۶)$$

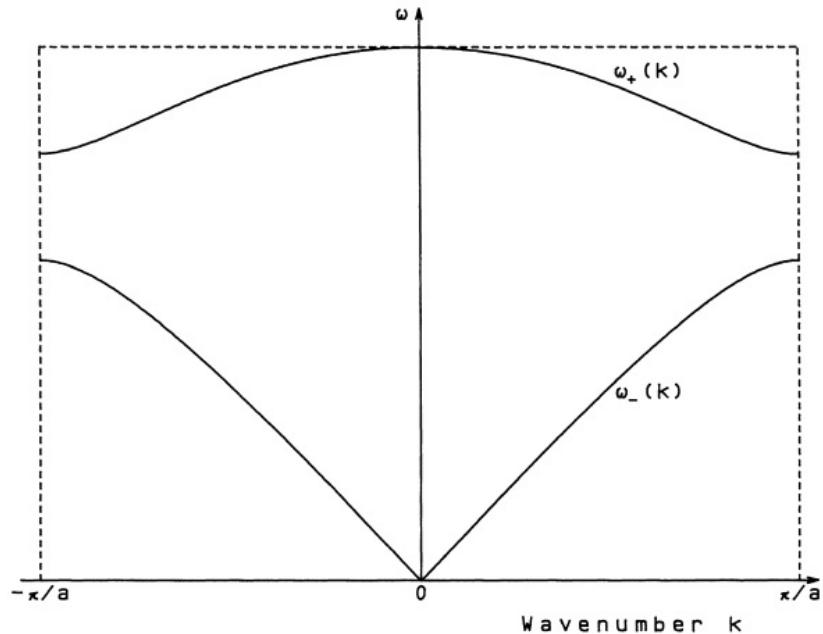
که در آن q ثابت هوک را نشان می‌دهد. از آنجایی که بهموج ارتعاشی در حال حرکت علاقه‌مندیم، u_n و v_n را به شکل‌های زیر بیان می‌کنیم:

$$u_n = A \exp j(\omega t - kx_n), \quad (۱۶۴.۵)$$

$$v_n = B \exp j\left[\omega t - k\left(x_n + \frac{1}{2}a\right)\right] \quad (۱۶۴.۶)$$

^{۲۱}Stimulated Raman Scattering (SRS)

^{۲۲}Stimulated Brillouin Scattering (SBS)



شکل ۱۷.۵: رابطه پاشندگی ω_+ و ω_- نسبت به عدد موج k

جایگزینی معادلات (۶۴.۵) در معادلات (۶۳.۵) می‌دهد

$$(-M\omega^2 + 2q)u_n = q(1 + e^{jka})v_n, \quad (65.5)$$

$$q(1 + e^{-jka})u_n = (-m\omega^2 + 2q)v_n \quad (65.5)$$

حل این معادلات همزمان ω را بما میدهد

$$\omega^2 = q \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \pm q \sqrt{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(ka/2)}{Mm}} \quad (66.5)$$

از چهار جواب ممکن معادله (۶۶.۵)، دو جواب مثبت ω_+ و ω_- جواب‌های موج متحرک را ارائه میدهد. روابط پاشندگی ω_+ و ω_- با توجه به موج عدد k در شکل (۱۷.۵) نشان داده شده است. ما داریم

$$\omega_+ = \sqrt{2q \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)}, \quad \omega_- = 0. \quad (67.5)$$

برای $k = 0$. برای k کوچک، جائی که می‌توانیم تقریب $\sin(ka/2) \approx ka/2$ بکار ببریم، خواهیم داشت:

$$\omega_+ = \omega_{+0} \left[1 - \frac{mM(ka)^2}{\Lambda(M+m)^2} \right] \quad (68.5)$$

$$\omega_- = ka \sqrt{\frac{q}{2(M+m)}} \quad (68.5)$$

که در آن ω_+ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega_+ = \sqrt{2q \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)} \quad (69.5)$$

اجازه دهید در ادامه ω_+ و ω_- را در $k = \pi/a$ در نظر بگیریم، که مربوط به لبه‌های اولین منطقه بریلوین (بریلوین) ($-\pi/a \leq k \leq \pi/a$) است. وقتی $M > m$ را فرض کنیم، به دست می‌آوریم

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2q}{m}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{2q}{M}} \quad (70.5)$$

دو حالت ارتعاشی مربوط به منحنی‌های بالایی و پایینی شکل (17.5) به ترتیب ارتعاشات نوری و صوتی نامیده می‌شوند. معانی فیزیکی این اصطلاحات در ادامه توضیح داده خواهد شد.

نسبت دامنه نسبی ارتعاشات بین اتم نور مجاور m و اتم سنجین M نزدیک $\approx k$ ، از معادله‌های (65.5) و (68.5) بصورت زیر داده شده است.

$$\begin{cases} \frac{v_n}{u_n} \approx -\frac{M}{m} & \text{(ارتعاش نوری)} \\ \frac{v_n}{u_n} \approx 1 & \text{(ارتعاش صوتی)} \end{cases} \quad (71.5)$$

مشاهده می‌شود که در مود ارتعاش نوری اتم‌های M و m در جهت مخالف حرکت می‌کنند و دامنه ارتعاش آنها با جرم آنها نسبت معکوس دارد. به عنوان مثال، هنگامی که دو اتم یون‌هایی با علائم مثبت و منفی مانند Na^+ و Cl^- هستند، ارتعاش نوری با ارتعاش قطبش الکتریکی مطابقت دارد و بهشت با میدان نور تعامل می‌کند. بنابراین به آن مود ارتعاشی نوری می‌گویند. از سوی دیگر، در مود ارتعاش صوتی، جهت ارتعاش برای دو اتم یکسان و دامنه آنها نیز یکسان است. از آنجایی که چنین ارتعاشی در هنگام انتشار یک موج صوتی در کریستال مشاهده می‌شود، به آن مود ارتعاشی صوتی می‌گویند.

به طور کلی، مودهای عرضی و طولی برای امواج وجود دارد. سپس چهار مود ارتعاشی ممکن برای هر عدد موج k وجود دارد، همانطور که در شکل (18.5) نشان داده شده است: مودهای نوری عرضی (TO)^{۲۳}، نوری طولی (LO)^{۲۴}، آکوستیک عرضی (TA)^{۲۵} و آکوستیک طولی (LA)^{۲۶}. علاوه بر این، دو ارتعاش متعامد (جهت‌های x و y) برای مود عرضی وجود دارد، ارتعاشات TA و TO دو برابر تبیه کنن^{۲۷} می‌شوند.

^{۲۳}Transverse Optic (TO)

^{۲۴}Longitudinal Optic (LO)

^{۲۵}Transverse Acoustic (TA)

^{۲۶}Longitudinal Acoustic (LA)

^{۲۷}Twofold Degenerated

	Transverse Mode	Longitudinal Mode
Optical Mode		
Acoustical Mode		

شکل ۱۸.۵: جابجایی اتم‌ها در ارتعاش صوتی و نوری

۲.۵.۵ قوانین انتخاب برای پراکندگی نور توسط فونون

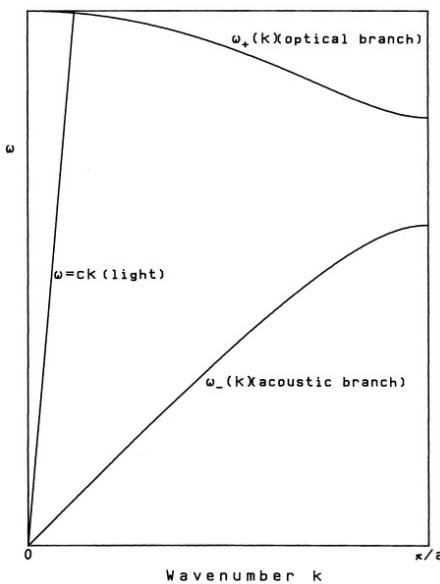
شکل ۱۹.۵) روابط پاشندگی فونون‌های نوری و صوتی و یک موج نور (الکترومغناطیسی) $\omega = ck$ را نشان می‌دهد. نقاط تقاطع بین فونون‌ها و نور شرایط انتخاب را برای تعامل بین فونون و نور فراهم می‌کند. از آنجایی که سرعت نور c در مقایسه با یک موج فونون نوری بسیار بزرگ است، منحنی پاشندگی نور ($\omega = ck$) با شاخه نوری نزدیک به ω_+ قطع می‌شود. انرژی یک فونون نوری حدود $\hbar\omega_+ \approx 10^{-2} eV$ است که در آن $\hbar = h/2\pi$ و ثابت پلانک $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$ است. در این صورت فرکانس زاویه‌ای $\omega_+ \approx 1/5 \times 10^{13} s^{-1}$ است که مربوط به موج الکترومغناطیسی با طول موج $120 \mu m$ است. عدد موج k در نقطه تقاطع بین شاخه نوری و نور با $k = \omega_+/c = 1/5 \times 10^{13}/3 \times 10^8 \approx 500 cm^{-1}$ بدست می‌آید. این عدد موج در مقایسه با عدد موج $k_{max} = \pi/a \approx 10^8 cm^{-1}$ در لبه ناحیه بربیلوئن [۲۷] بسیار کوچک است، جایی که ثابت شبکه $a = 3 \times 10^{-8} m$ سانتی‌متر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، عدد موجی که در آن فونون نوری با نور تعامل دارد $\approx k/k_{max}$ در نظر گرفته می‌شود.

قوانین انتخاب مرتبه اول بین فونون و نور توسط

$$\omega_s = \omega_p \pm \omega_f \quad (72.5)$$

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_p \pm \mathbf{k}_f \quad (73.5)$$

که در آن (ω_s, \mathbf{k}_s) ، (ω_p, \mathbf{k}_p) و (ω_f, \mathbf{k}_f) مجموعه‌ای از فرکانس‌های زاویه‌ای و بردارهای موج نور پمپ، نور پراکنده و فونون هستند. معادلات (۷۲.۵) و (۷۳.۵) به ترتیب قانون بقای انرژی و قانون بقای حرکت را نشان می‌دهند. علامت مثبت یا منفی در معادله (۷۲.۵)



شکل ۱۹.۵: رابطه پاشندگی بین فونون‌های صوتی و نوری و یک موج نور (الکترومغناطیسی)

و (۱۹.۵) مربوط به ضد استوکس یا استوکس پراکندگی^{۲۸} است. هنگامی که ضریب شکست محیط برای پمپ و نور پراکنده به ترتیب به صورت n_p و n_s بیان می‌شود، به دست می‌آوریم.

$$\frac{k_p c}{\omega_p} = n_p \quad (19.5)$$

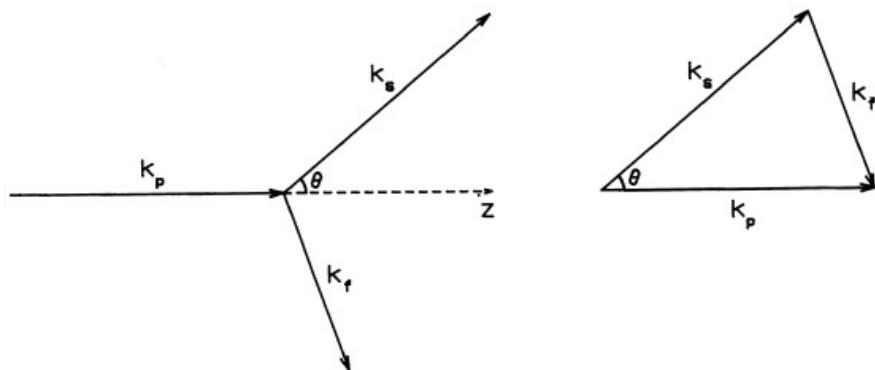
$$\frac{k_s c}{\omega_s} = n_s \quad (19.5)$$

که در آن $k_p = |\mathbf{k}_p|$ و $k_s = |\mathbf{k}_s|$. چون فرکانس زاویه‌ای ω_f کاملاً کوچک $\approx \omega_s$ (که در آن $\omega_p \approx \omega_s$) است، از رابطه (۱۹.۵) بدست می‌آوریم

$$k_s = \frac{n_s}{n_p} k_p \quad (19.5)$$

اگر محیط همسانگرد و پاشندگی ضریب شکست $(n_s \approx n_p)$ کوچک باشد، می‌توانیم $k_s \approx k_p$ را فرض کنیم. شکل (۲۰.۵)-الف رابطه بردارهای موج بین پمپ و نور پراکنده و فونون را نشان می‌دهد. وقتی پراکندگی استوکس ($\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_f$) را در نظر می‌گیریم، نمودار پراکندگی با شکل (۲۰.۵)-ب نشان داده می‌شود، و در آن θ نشان دهنده زاویه

^{۲۸}Anti-Stokes or Stokes Scattering



شکل ۲۰.۵

پراکندگی است. عدد موج فونون $k_f = |k_f|$ از معادله (۷۲.۵) و (۷۴.۵) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} k_f^2 &= k_p^2 + k_s^2 - 2k_p k_s \cos \theta = \left(\frac{n_p}{c}\right)^2 \left[(\omega_p - \omega_s)^2 + 4\omega_p \omega_s \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{n_p}{c}\right)^2 \left[\omega_f^2 + 4\omega_p (\omega_p - \omega_f) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (۷۶.۵)$$

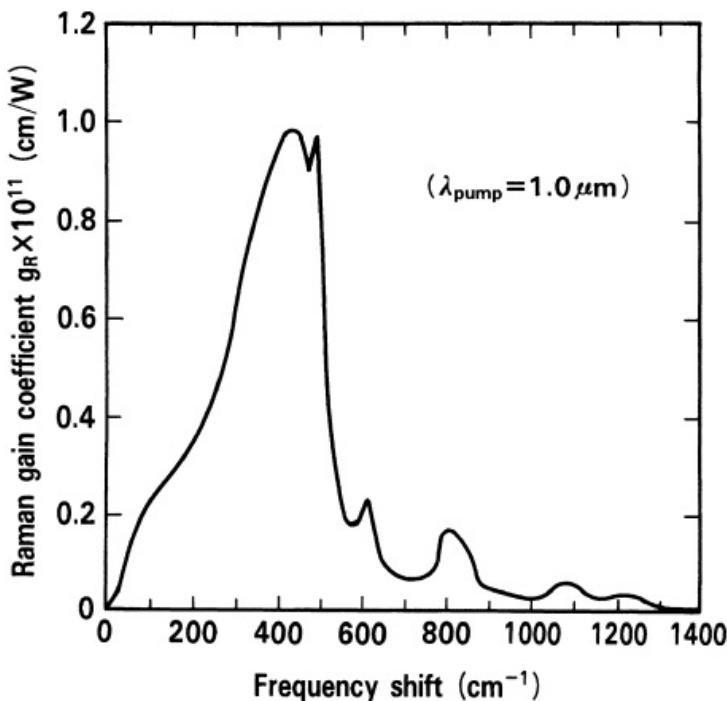
که در آن $n_s \approx n_p$ را فرض کردیم. معادله بالا رابطه بین زاویه نور پراکنده و دامنه بردار موج فونون k_f را نشان می‌دهد که در پراکندگی نقش دارد. وقتی $\omega_f \approx n_p$ و $\omega_p \gg \omega_f$ در معادله (۷۶.۵) فرض کنیم، روابط زیر را برای k_f بدست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0^\circ & \text{(پیش پراکندگی)} \quad k_f = \frac{n_p \omega_f}{c} \\ \theta = 90^\circ & \text{(راست پراکندگی)} \quad k_f = \sqrt{\frac{n_p \omega_p}{c}} = \sqrt{\gamma} k_p \\ \theta = 180^\circ & \text{(پس پراکندگی)} \quad k_f = \sqrt{\frac{n_p \omega_p}{c}} = 2k_p \end{array} \right. \quad (۷۷.۵)$$

عدد موج نور پمپ از مرتبه $k_p = 4 \times 10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-1}$ در لبه اولین منطقه بریلووین $k_{max} = 10^8 \text{ cm}^{-1}$ در حدود $10^{-4} - 10^{-3}$ بسیار کوچک است. بنابراین، k_f در معادلات (۷۷.۵) در مجاورت مرکز منطقه بریلووین قرار دارند و صرف نظر از رابطه زیر داریم: زاویه پراکندگی θ

$$k_f/k_{max} \approx 0 \quad (۷۸.۵)$$

به خصوص، برای k_f پراکندگی رو به جلو بسیار کوچک است، زیرا $\omega_f \approx 10^{13} \text{ s}^{-1}$ ($\ll \omega_p \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$)



شکل ۲۱.۵: طیف بهره رامان شیشه سیلیکا.

۶.۵ پراکندگی رامان تحریک شده

پراکندگی رامان پراکندگی ناشی از برهمکنش بین نور پمپ و فونون نوری است. همانطور که در شکل (۲۱.۵) نشان داده شده است، اولین قله نور استوکس در فیبر سیلیکا در طول موج 440 cm^{-1} قرار دارد که از طول موج پمپ جابجا شده است. ضریب بهره رامان اولین نور استوکس هنگامی که در $\text{cm}/W \lambda = 1\text{ }\mu\text{m}$ $g_R = 1 \times 10^{-11}\text{ cm}/W$ پمپ می‌شود و با طول موج نسبت معکوس دارد.

در پراکندگی رامان تحریک شده، پراکندگی پیشرو و پسرو تقریباً به طور مساوی مشاهده می‌شود. به همین دلیل است که رابطه پراکندگی فونون نوری در مجاورت مرکز ناحیه بریلوین برابر است با

$$\omega_+(k_f) \approx \text{ثابت}$$

همانطور که در معادله (۱۷.۵) و (۱۶۸.۵) نشان داده شده است. به عبارت دیگر، اگرچه عدد موج فونون k_f که به پراکندگی پیشرو یا پسرو کمک می‌کند، تا در قانون بقای تکانه متفاوت [معادله (۷۳.۵)] باشد، قانون بقای انرژی برای هر زاویه پراکندگی برقرار است، زیرا $\omega_+(k_f)$ تقریباً ثابت است.

پیشرفت شدت نور پمپ I_p و شدت نور استوکس I_s در پراکندگی رامان تحریک شده

با معادلات تزویجی زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dI_s}{dz} = g_R I_p I_s - \alpha_s I_s, \quad (۷۹.۵)$$

$$\frac{dI_p}{dz} = -\frac{\omega_p}{\omega_s} g_R I_p I_s - \alpha_p I_p, \quad (۷۹.۵\text{ب})$$

که در آن α_p و α_s به ترتیب نشان دهنده تلفات فیبر در طول موج پمپ و نور استوکس است. وقتی تخلیه پمپ را نادیده می‌گیریم و $I_p = I_0 \exp(\alpha_p z)$ را فرض می‌کنیم (۷۹.۵) شدت پمپ در $z = ۰$ است، معادله (۷۹.۵) به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$\frac{dI_s}{dz} = g_R I_s I_0 \exp(-\alpha_p z) - \alpha_s I_s \quad (۸۰.۵)$$

و جواب معادله (۸۰.۵) خواهد بود

$$I_s(L) = I_s(۰) \exp(g_R I_0 L_{eff} - \alpha_s L) \quad (۸۱.۵)$$

که در آن طول موثر L_{eff} بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L_{eff} = \frac{1 - \exp(-\alpha_p L)}{\alpha_p} \quad (۸۲.۵)$$

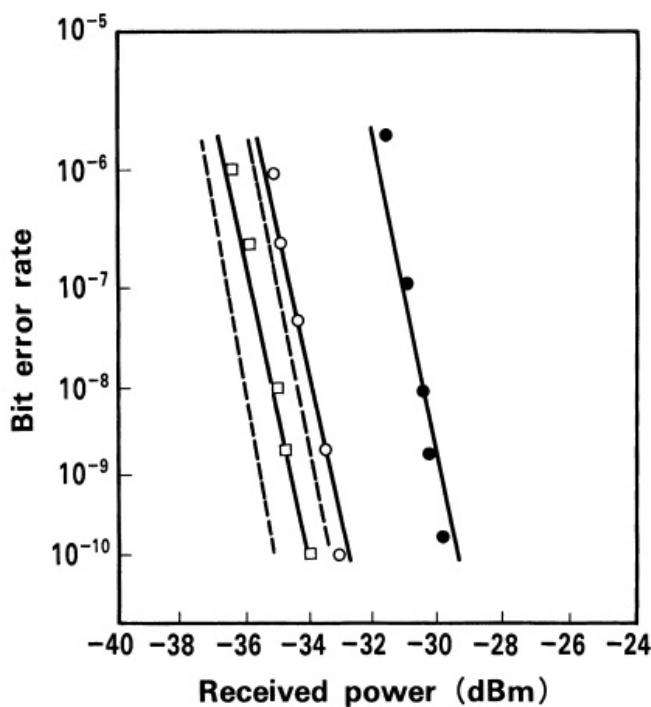
هنگامی که دانه نور استوکس $I_s(۰)$ است در $z = ۰$ تزریق نمی‌شود، پراکندگی رامان تحریک شده از پراکندگی رامان خود به خود ایجاد می‌شود. در این حالت، توان بحرانی پمپ که در آن قدرت استوکس برابر با توان پمپ می‌شود به صورت زیر بدست می‌آید [۲۴].

$$P_c = \frac{16 A_{eff}}{g_R L_{eff}} \quad (۸۳.۵)$$

در اینجا سطح هسته موثر A_{eff} تقریباً با معادله (۴۲.۵) داده می‌شود. با این حال، به طور دقیق باید تفاوت طول موج بین پمپ و نور استوکس را در نظر بگیریم. سپس بیان دقیق سطح موثر توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A_{eff} = \frac{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R_p|^2 r dr d\theta \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R_s|^2 r dr d\theta}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |R_p|^2 |R_s|^2 r dr d\theta} \quad (۸۴.۵)$$

که در آن $R_p(r)$ و $R_s(r)$ بترتیب نمایشگر توزیع میدان الکتریکی پمپ و نور استوکس است. توان بحرانی برای فیبر تک مودی با سطح موثر $A_{eff} = ۵ \mu m^2$ ، $\alpha_p = ۰.۲ dB/km$ ، $g_R = ۰.۶ \times 10^{-11} cm/W$ ، $L = ۱/۵۵ \mu m$ ، $P_c = ۱/\alpha_p (\approx ۲۲ km)$ و $\lambda = ۱.۰ \mu m$ برابر بدست می‌آید.



شکل ۲۲.۵: مشخصه‌های نرخ خطای بیت آزمایش تقویت نوری با استفاده از SRS. دایره‌های سیاه نمایشگر نور پمپ و دایره‌ها و مربع‌های توخالی نمایشگر بترتیب بهره $\frac{3}{5}dB$ و $\frac{5}{8}dB$ است.

در مرحله بعد وقتی دانه استوکس (I_s) است (سیگنال که باید توسط SRS تقویت شود) در معادله (۸۱.۵) تزریق می‌شود، ضریب بهره را توسط SRS به دست می‌آوریم. وقتی برای سادگی $\alpha_p = \alpha_s = ۰$ را فرض کنیم، ضریب بهره به صورت زیر به دست می‌آید.

$$G = \frac{I_s(L)}{I_s(0)} = \exp(g_R I_s L). \quad (۸۵.۵)$$

اگر توان پمپ $P_p = ۴W$ در فیبر دارای $A_{eff} = ۵\mu m^2$ و $g_R = ۰.۶ \times 10^{-11} cm/W$ باشد، بهره $21dB$ در طول فیبر یک کیلومتر به دست می‌آید. شکل (۲۲.۵)^{۲۹} مشخصه‌های نرخ خطای بیت (BER) آزمایش تقویت رامان فیبر (سیگنال و پمپ در جهت مخالف منتشر می‌شوند) زمانی که یک لیزر DFB با طول موج $1.57\mu m$ به عنوان سیگنال و یک طول موج $1.47\mu m$ و لیزر F-center به عنوان پمپ استفاده می‌شود [۲۹]. نرخ بیت سیگنال و طول فیبر به ترتیب $1 Gbit/s$ و 45 کیلومتر است. ضریب بهره در توان پمپ 100 میلی واتی حدود $\frac{3}{5}dB$ و حداقل بهره $\frac{5}{8}dB$ است. خطوط نقطه چین در شکل مقادیر نظری BER را نشان می‌دهد. هر گونه تفاوت از مقدار نظری به نوسانات نور پمپ و پراکندگی پشتی آن نسبت داده می‌شود.

^{۲۹} Bit Error Rate (BER)

^{۳۰} Back Scattering

۷.۵ پراکندگی بریلوین تحریک شده

پراکندگی بریلوین تحریک شده، پراکندگی ناشی از تعامل بین نور پمپ و فونون صوتی است. از آنجایی که فرکانس زاویه‌ای یک فونون صوتی رابطه پراکندگی خطی را با عدد موج در مرکز ناحیه بریلوین برآورده می‌کند [معادله (۸۶.۵)]، فقط پراکندگی پسرو به‌شدت رخ می‌دهد.

پراکندگی بریلوین تحریک شده را می‌توان توسط مکانیک کلاسیک به صورت برهمنکش پارامتریک بین پمپ، استوکس و امواج صوتی توصیف کرد [۳۶]. ابتدا، نور پمپ $E_p \exp(j(\omega_p t - k_p \cdot r))$ به‌طور خود به‌خود توسط فونون آکوستیک برانگیخته حرارتی در محیط پخش می‌شود و نور پراکنده $E_s \exp(j(\omega_s t - k_s \cdot r))$ را تولید می‌کند. سپس میدان‌های الکتریکی پمپ و نور پراکنده، نوسانات چگالی را از طریق الکترواستریکشن ایجاد می‌کنند. نوسان چگالی یک توری گذر موج سیار است که با $\exp(\pm j(\Omega t - q \cdot r))$ بیان می‌شود. اینجا Ω و q توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$\Omega = \omega_p - \omega_s \quad (۸۶.۵)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s \quad (۸۶.۵)$$

این توری گذردهی نور پمپ را پراکنده می‌کند و نور استوکس را تولید می‌کند که منجر به پراکندگی بریلوین تحریک شده می‌شود. واریانس گذردهی نسبی $\delta \varepsilon_s$ برای نور استوکس ناشی از توری گذردهی است که توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\delta \varepsilon_s = \rho_0 \left(\frac{\delta \varepsilon}{\delta \rho} \right)^2 \frac{|E_p|^2}{16\pi} \frac{q^2}{(\Omega_B^2 - \Omega^2 - j2\Omega\Gamma)} \quad (۸۷.۵)$$

در اینجا، ρ_0 محیط واحد است، و Γ عرض طیفی FWHM گذردهی است که با $\tau_A = 1/\tau_A$ ، که در آن τ_A زمان استراحت میراثی موج صوتی است. Ω_B فرکانس زاویه‌ای فونون آکوستیک است که توسط داده می‌شود

$$\Omega_S = |\mathbf{q}| v_A = q v_A, \quad (۸۸.۵)$$

که در آن v_A سرعت موج صوتی طولی است. در شیشه سیلیکا، داریم $\rho_0 = 2.2 g/cm^3$ ، $\tau_A = 20 ns$ در طول موج $\lambda = 1.55 \mu m$ ، $v_A = 5940 m/s$ و [۳۱، ۳۲]. از معادله (۸۷.۵)، ضریب شکست برای نور استوکس n_s از رابطه زیر بدست می‌آید

$$n_s = (n_0 + \delta \varepsilon_s)^{1/2} \approx n_0 + \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n_0} \quad (۸۹.۵)$$

که در آن n_0 نشان‌دهنده ضریب شکست اصلی است. وقتی تضعیف موج استوکس را

نادیده می‌گیریم، تغییرات دامنه آن بصورت زیر بیان می‌شود

$$E_s(L) = E_s(\circ) \exp(-jk_s n_s L) = E_s(\circ) \exp\left(-jk_s n_s L - \frac{jk_s \delta \varepsilon_s L}{2n_s}\right) \quad (90.5)$$

از معادله اخیر مشاهده می‌شود که بخش موهومی $\delta \varepsilon_s$ بهره نور استوکس را می‌دهد. معادله (۹۲.۵) بصورت شدت بازنویسی می‌شود:

$$I_s(L) = I_s(\circ) \exp\left(\frac{k_s}{n_s} Im[\delta \varepsilon_s L] L\right) \quad (91.5)$$

در اینجا باید توجه داشته باشیم که رابطه بین شدت نور (= توان/سطح موثر) و دامنه میدان الکتریکی در سیستم واحدهای MKS به صورت زیر بیان شده است.

$$I_s = \frac{1}{2} n_s \epsilon_0 c |E_s|^2 \quad [W/m^2] \quad (92.5)$$

و در سیستم واحدهای cgs بصورت زیر بیان می‌شود

$$I_s = \frac{n_s c}{\lambda \pi} |E_s|^2 \quad [erg \cdot s^{-1}/cm^2] \quad (92.5)$$

وقتی نور استوکس را نزدیک فرکانس زاویه تشید (۹۱.۵) $\Omega_B = qv_A$ در نظر می‌گیریم، معادله (۸۷.۵) بصورت زیر کاهش می‌یابد

$$Im[\delta \varepsilon_s] = \frac{n_s^\gamma p_{12}^\gamma}{4c\rho_s v_A} \frac{q\Gamma}{[(\Omega - \Omega_B)^2 + \Gamma^2]} I_s \quad (93.5)$$

که در آن $I_s = (n_s c / \lambda \pi) |E_p|^2$ در دستگاه cgs و رابطه زیرنیز استفاده شده است

$$\rho_s \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = n_s^\gamma p_{12} \quad (94.5)$$

ضریب فتوالاستیک p_{12} برای شیشه سیلیکا $p_{12} = 0.27$ است. در این صورت ضریب بهره SBS از معادله (۹۱.۵) و (۹۳.۵) خواهد بود

$$g_B = \frac{n_s^\gamma p_{12}^\gamma}{2c\lambda\rho_s v_A \Delta\nu_B} q \frac{(\Delta\nu_B/2)^2}{[(\nu - \nu_B)^2 + (\Delta\nu_B/2)^2]} \quad (95.5)$$

در اینجا ν فرکانس نور استوکس ($\nu = \Omega/2\pi$)، ν_B فرکانس انتقال نور استوکس و $\Delta\nu_B$ عرض FWHM بهره بریلوین است که از $\Delta\nu_B = \Gamma/\pi = 1/\pi\tau_A$ بدست می‌آید. چون $q = |\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s| \approx 0$ برای پراکندگی پیشرو^{۳۱} [معادله (۷۷.۵)] است، بهره بریلوین تقریباً برای پراکندگی بریلوین صفر است^{۳۲}. در مقابل q بازاء $q \approx 2|\mathbf{k}_p| \approx 4\pi n_s / \lambda$ برای پراکندگی پسرو^{۳۲} بیشینه می‌شود. در این صورت بهره بریلوین نیز برای پراکندگی پسرو بیشینه می‌شود.

$$g_{B\circ} = \frac{2\pi n_s^\gamma p_{12}^\gamma}{c\lambda^\gamma \rho_s v_A \Delta\nu_B} \quad (96.5)$$

^{۳۱} Forward Scattering

^{۳۲} Backward Scattering

از آنجایی که عرض FWHM بهره بریلوین به طول موج ($\Delta\nu_B \propto 1/\lambda^2$) بستگی دارد، بهره بریلوین خود تقریباً مستقل از طول موج است. انتقال فرکانس ν_B نور استوکس برای پراکندگی پسرو به حداقل‌تر می‌رسد و با رابطه زیر داده می‌شود

$$\nu_B = \frac{\Omega_B}{2\pi} = \frac{qv_A}{2\pi} = \frac{2n_0 v_A}{\lambda} \quad (97.5)$$

انتقال فرکانس ν_B نور استوکس در $\nu_B = 11/1 GHz = 1/55 \mu m$ است. چون زمان آرامش τ_A ^{۳۳} فونون صوتی در طول موج $\lambda = 1/55 \mu m \approx 20 ns$ است، عرض طیف FWHM بهره بریلوین برابر $\Delta\nu_B = 1/\pi\tau_A \approx 16 MHz$ داده می‌شود. در ناحیه طول موج $\nu_B = 13/3 GHz$ ، $\lambda = 1/3 \mu m$ است.

بهره بریلوین g_B در ناحیه طول موج $\lambda = 1/55 \mu m$ از رابطه (۹۶.۵) برابر $= 1/45 \times 10^{-9} cm/W$ بدست می‌آید که در آن $n_0 = 1/45$ است. بهره پراکندگی بریلوین تحریک شده تقریباً 400 برابر بزرگتر از SRS ($g_R = 0.6 \times 10^{-11} cm/W$) است. طیف بهره بریلوین، همانطور که در شکل (۹۵.۵) نشان داده شده، شکل لورنتس است. هنگامی که طیف نور پمپ دارای شکل لورنتس با FWHM $\Delta\nu_p$ است، ضریب بهره بریلوین با انتگرال کانولوشن توزیع دو طیف داده می‌شود [۳۴]:

$$g_B = \frac{\Delta\nu_B}{\Delta\nu_B + \Delta\nu_p} \quad (98.5)$$

هنگامی که نور پمپ دارای طیفی نسبتاً باریک نسبت به عرض بهره ($\Delta\nu_p \ll \Delta\nu_B$) است، بهره SRS تقریباً $g_B \approx g_B^0$ می‌باشد. با این حال، اگر نور پمپ دارای عرض طیف عریضتری نسبت به بهره بریلوین ($\Delta\nu_p \gg \Delta\nu_B$) باشد، بهره SRS کوچک شده و بطور معکوس متناسب با $\Delta\nu_p$ یا $\Delta\nu_B / \Delta\nu_p$ می‌شود. بنابراین دیده می‌شود که نور منبع پمپ با عرض طیف باریک لازم است تا SRS موثری را تولید کند.

تغییر نور استوکس در فرآیند SRS به روشنی مشابه در SRS به دست می‌آید. وقتی در نظر بگیریم که نور استوکس در جهتی خلاف جهت نور پمپ حرکت می‌کند، به دست می‌آوریم

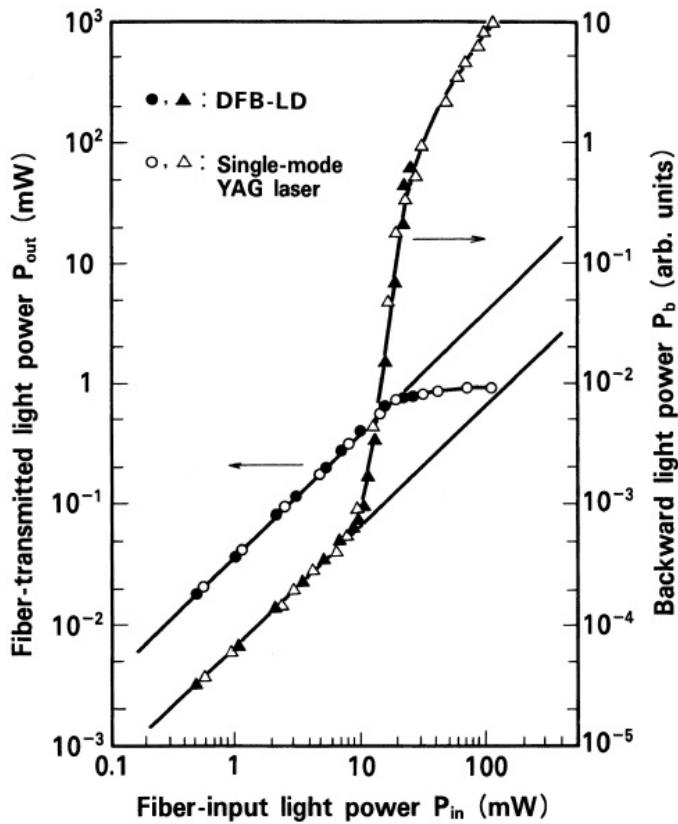
$$I_s(\theta) = I_s(L) \exp(g_B I_0 L_{eff} - \alpha L) \quad (99.5)$$

که در آن $\alpha \approx \alpha_p \approx \alpha_s$ را فرض کردیم. پراکندگی بریلوین تحریک شده از پراکندگی خود به خودی بریلوین برانگیخته حرارتی ایجاد می‌شود. توان ورودی بحرانی P_c که در آن قدرت نور استوکس برابر با توان پمپ می‌شود توسط [۲۸] به دست می‌آید.

$$P_c = \frac{2A_{eff}}{g_B L_{eff}} = \frac{\Delta\nu_B + \Delta\nu_p}{\Delta\nu_B} \frac{2A_{eff}}{g_B L_{eff}} \quad (100.5)$$

در یک فیبر نوری تک مودی با $\alpha = 0.2 dB/km$ ، $A_{eff} = 50 \mu m^2$ در طول $L \gg 1/\alpha (\approx 22 km)$ ، $P_c = 1/2 mW$ و $g_B = 4/1 \times 10^{-9} cm/W$ ، توان بحرانی $1/55 \mu m$

^{۳۳}Relaxation Time

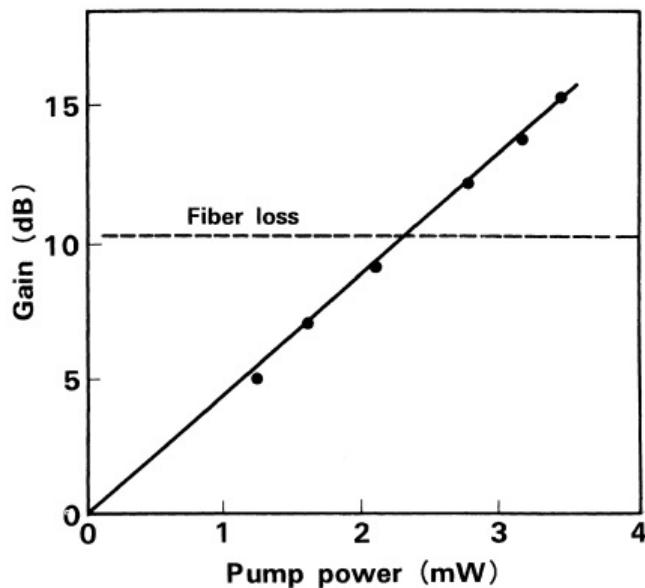


شکل ۲۳.۵: قدرت نور انتقال و بازتاب شده توسط SBS.

برای طیف خط پمپ باریک $P_c = (\Delta\nu_p/\Delta\nu_B) \times 1/2mW$ و برابر $\Delta\nu_p \ll \Delta\nu_B$ برای طیف خط پمپ عریض است.

یک لیزر Ar تک مود طولی و لیزر YAG با عرض طیفی باریک برای تولید SBS استفاده شده است [۳۱]. با این حال، پس از توسعه پهنانی خط طیفی باریک (کمتر از ۱۰ مگاهرتز) و لیزرهای نیمههادی تک مودی پرقدرت، مشاهده تجربی [۳۵] SBS و تقویت سیگنال توسط SBS [۳۶] با استفاده از لیزر نیمههادی که به عنوان نور پمپ انجام شده، گزارش شده است. شکل (۲۳.۵) اندازه‌گیری توان آستانه SBS را با استفاده از یک لیزر DFB با طول موج $1/3\mu m$ با عرض طیفی ۱۵ مگاهرتز نشان می‌دهد [۳۵]. میرایی و طول فیبر تک مودی به ترتیب $46dB/km$ در $1/3\mu m$ و ۳۰ کیلومتر است. مشخص است که توان ورودی آستانه برای SBS حدود ۱۰ میلیوات است. این بدان معناست که نور با بیش از ۱۰ میلیوات توان نمی‌تواند در فیبر تک مودی منتقل شود، زیرا حتی اگر سطح توان ورودی را افزایش دهیم، به عقب منعکس می‌شود.

پهنانی باند بهره SBS را می‌توان با اتصال انواع مختلف فیبر تا حدود چند صد مگاهرتز افزایش داد، زیرا فرکانس جابجایی بریلوین شیشه سیلیس آغشته شده بسته به ماده ناخالص کمی متفاوت است. شکل (۲۴.۵) نتیجه آزمایش تقویت سیگنال توسط SBS را با



شکل ۲۴.۵: تقویت نوری توسط SBS با استفاده از الیاف با طیف افزایش یافته

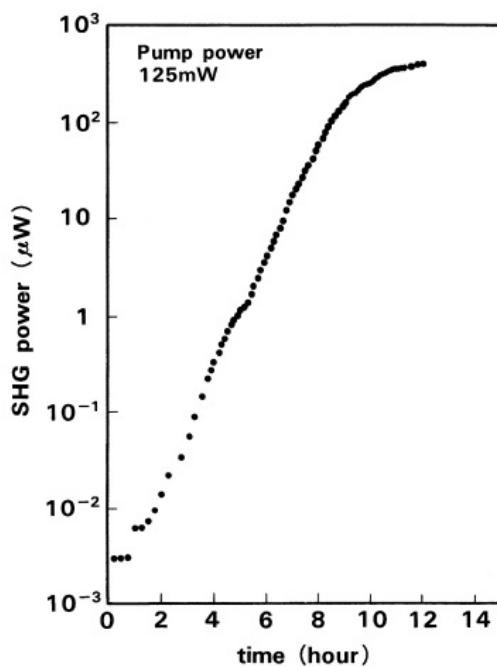
استفاده از فیبرهای تک مود با طیف افزایش یافته نشان می‌دهد [۳۶]. لیزرهای سیگنال و پمپ، لیزرهای نیمه‌هادی با حفره خارجی هستند که در $1.5\mu\text{m}$ و $1.42 - 1.52\mu\text{m}$ دارند (عرض طیف ۱۵ کیلوهرتز و محدوده تنظیم $27/5$ کیلومتر است. بهره تقویت با توجه به توان پمپ یک برابر کیلومتر و طول کل فیبر 37.5 کیلومتر است. بسیار کارآمدتر از پراکندگی رامان تحریک شده است. با میلی‌واتی $4/3$ دسی‌بل است که بسیار کارآمدتر از $27/5$ کیلومتر است. با این حال، از آنجایی که پهنهای باند بهره SBS حداقل چند صد مگاهرتز است، نمی‌تواند سیگنال پهن باند (با نرخ بیت بالا) یا پالس‌های نوری فوق باریک را تقویت کند.

۸.۵ تولید هارمونیک دوم

به‌طور کلی، اعتقاد بر این است که تولید هارمونیک دوم (SHG)^{۳۴} در مواد متقارن مرکز مانند شیشه سیلیس غیرممکن است. با این حال، SHG با راندمان نسبتاً بالا در فیبرهای نوری تک مود گزارش شده است. شکل (۲۵.۵) رشد توان SHG را نشان می‌دهد که پالس‌های لیزر Nd:YAG با حالت قفل و سوئیچ Q در طول موج $1.06\mu\text{m}$ (عرض پالس 100 تا 120 پیکوثانیه و توان متوسط 125 میلی‌وات) از طریق طول یک متر فیبر تک مود منتشر می‌شوند [۳۷]. توان هارمونیک دوم با گذشت زمان تقریباً به صورت نمانی افزایش می‌یابد و حداقل بازده تبدیل 3% به دست آمد.

سازوکارهای فیزیکی برای توضیح تولید هارمونیک دوم به‌طور کامل درک نشده است. با این حال، مشخص شده است که منشا SHG با کارایی بالا ممکن است به‌دلیل تشکیل

^{۳۴}Second-Harmonic Generation (SHG)



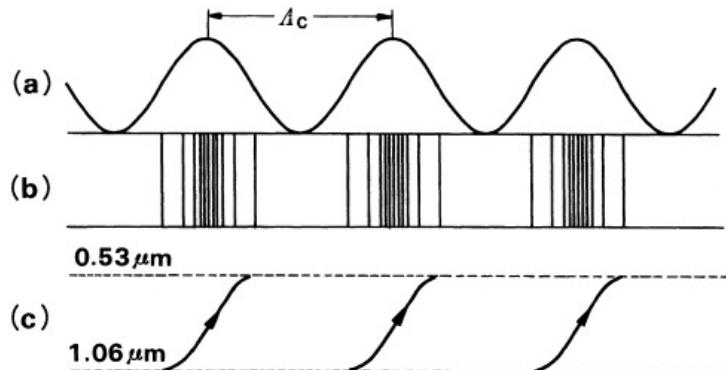
شکل ۲۵.۵: قدرت هارمونیک دوم تولید شده در فیبر سیلیکا به صورت تابعی از زمان.

مراکز رنگی تناوبی یا نقص باشد [۳۸]. اولاً، غیرخطیهای کوچک مرتبه بالاتر برای ایجاد هارمونیک دوم ضعیف حتی در فیبرهای نوری وجود دارد. آنها عبارتند از: غیر خطی در سطح مشترک هسته-روکش و غیرخطیهای حاصل از گشتاورهای چهار قطبی و دوقطبی مغناطیسی [۳۹]. هنگامی که طول موج پمپ $\lambda_p = 1.06\mu m$ حدود $\lambda_s = 0.53\mu m$ SHG نور را نشان می‌دهند. در اینجا $\Delta k = k_s - 2k_p$ است، تناوب مولفه ضربان تولید شده توسط نور پمپ با k_p و نور k_s به ترتیب $\Lambda_c = 2\pi/\Delta k \approx 30 - 40\mu m$ با در نظر گرفتن اثر پاشندگی است [۴۰]. در اینجا $\Delta k = k_s - 2k_p$ است، که k_p و k_s به ترتیب تعداد موج پمپ و نور SHG را نشان می‌دهند. در SHG معمولی، تغییر توان SHG با رابطه زیر داده می‌شود [۲].

$$P_s(z) \propto \frac{\sin^4(\Delta k_z/2)}{((\Delta k_z)^2)} \quad (10.1.5)$$

وقتی شرط تطبیق فاز ($\Delta k = 0$) برآورده شود، توان SHG با افزایش فاصله انتشار z افزایش می‌یابد. با این حال، توان SHG زمانی که شرایط تطبیق فاز برآورده نشود، رشد نمی‌کند ($\Delta k \neq 0$).

بر خلاف SHG معمولی، شرایط تطبیق فاز به طور خودکار زمانی که نقص‌های ناشی از نور به طور تناوبی در فیبر نوری ایجاد می‌شوند، برآورده می‌شود. همانطور که در شکل (۲۶.۵)-(الف) نشان داده شده است، پمپ و نور SHG به ترتیب در موقعیت‌هایی که در فاز یا خارج از فاز هستند، یکدیگر را جمع یا خنثی می‌کنند. سپس نقص‌های ناشی از نور و همچنین $\chi^{(2)}$ در موقعیت‌هایی که شدت ضربان قوی است ایجاد می‌شود. توزیع حاصل



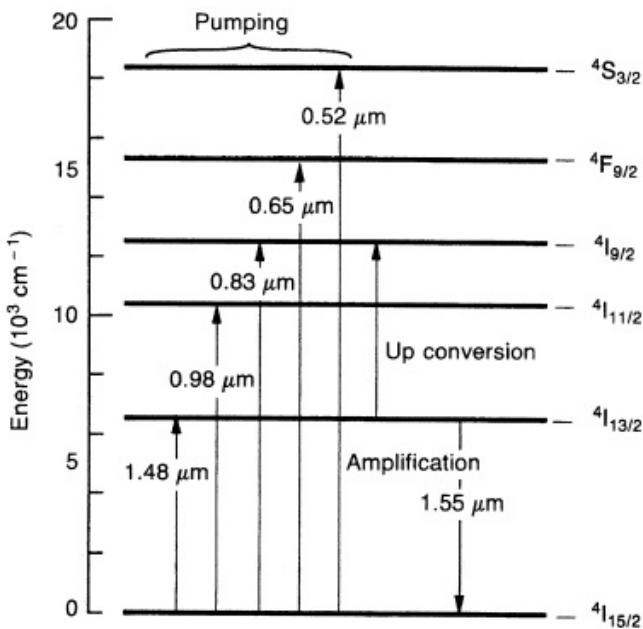
شکل ۲۶.۵: شماتیک برای توضیح SHG در فیبر نوری: (الف) موج ضربانی ایجاد شده توسط پمپ و نور SHG، (ب) توری ۲ دلاری ناشی از نقص های ناشی از نور و (ج) SHG کارآمد در موقعیت هایی که پمپ و نور SHG در فاز قرار می گیرند.

از $\chi^{(2)}$ در فیبر به یک توری با تنابوب A_c تبدیل می شود. از آنجایی که هارمونیک های دوم فقط در جایی تولید می شوند که پمپ و نور SHG در فاز هستند، نور SHG متناسب با فاصله انتشار افراش می یابد [شکل (۲۶.۵)-ج]. کوپلینگ برگشتی از نور SHG به نور پمپ، که در SHG معمولی مشاهده می شود، ممنوع است، زیرا هیچ $\chi^{(2)}$ وجود ندارد که در آن SHG و نور پمپ خارج از فاز باشند ($\chi^{(2)}$ ناجیز وجود دارد که ناشی از آن است. غیرخطی مرتبه بالاتر مانند گشتاور چهار قطبی). SHG در فیبرهای تک مود برای اثرات نوری غیرخطی بسیار جالب است، زیرا شرایط تطبیق فاز به طور خودکار برآورده و مودهای عرضی نیز به خوبی در طول تعامل حفظ می شوند.

۹.۵ تقویت کننده فیبر آغشته به اربیوم

تقویت کننده فیبر آغشته به اربیوم^{۳۵} (EDFA) تأثیر زیادی بر سیستم های ارتباطی فیبر نوری داشت [۴۱، ۱۰]. EDFA دارای پهنای باند بهره وسیعی در اطراف ناحیه طول موج $1,55\mu\text{m}$ است که با طول موج انتقال کم تلفات فیبر شیشه سیلیس منطبق است. یون های اربیوم دارای نمودار سطح انرژی هستند که در شکل (۲۷.۵) نشان داده شده است. سه حالت، یعنی حالت پایه ($I_{15/2}^0$)، حالت برانگیخته اول ($I_{13/2}^0$ ، و یکی از حالت های برانگیخته دیگر، به عنوان لیزر سه سطحی در تقویت $1,55\mu\text{m}$ ، به جز پمپاژ با طول موج $1,48\mu\text{m}$ ، شرکت و عمل می کنند. در مورد پمپاژ $1,48\mu\text{m}$ ، قسمت بالایی حالت $I_{15/2}^0$ که دارای پهنای باند مشخصی است، همانطور که در ادامه توضیح داده شد، به عنوان سطح پمپاژ استفاده می شود و یون های Er به عنوان یک لیزر شبه سه سطحی عمل می کنند. تفاوت انرژی بین حالت $I_{13/2}^0$ و حالت $I_{15/2}^0$ مربوط به باند طول موج $1,55\mu\text{m}$ است. هنگامی که یک فوتون سیگنال تابشی در حالت برانگیخته $I_{13/2}^0$ به یون

^{۳۵}Erbium-Doped Fiber Amplifier (EDFA)



شکل ۲۷.۵: نمودار سطوح انرژی یون اربیوم سه یونیزه شده.

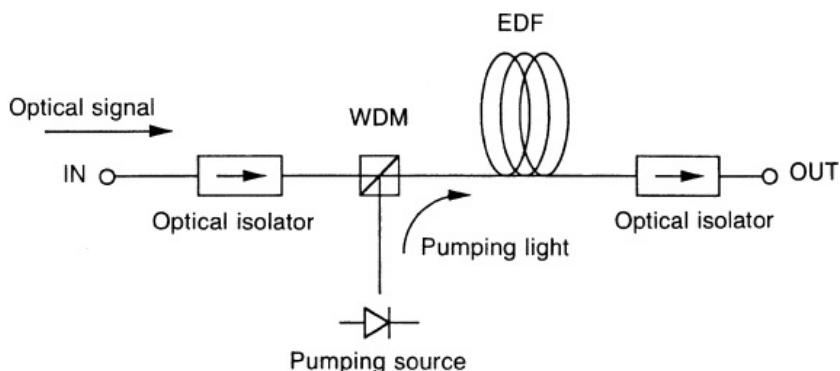
وارد می‌شود، یون Er فوتونی را با احتمال مشخصی ساطع می‌کند و از طریق فرآیند انتشار تحریک شده به حالت پایه باز می‌گردد. فوتون تولید شده توسط گسیل تحریک شده دقیقاً همان فرکانس و فاز فوتون تابشی را دارد، بنابراین تقویت سیگنال را ممکن می‌کند. حتی اگر فوتون تابشی وجود نداشته باشد، سطح $I_{13/2}$ ^{۳۶} به حالت پایه تجزیه می‌شود و با انتشار خود به‌خودی همراه است.

از آنجایی که نور تابشی خود به‌خودی هیچ ارتباطی با نور تابشی از نظر فرکانس و فاز ندارد، نور تشعشع خود به‌خودی تقویت شده (ASE) ^{۳۶} به منبع نویز تقویت‌کننده‌های فیبر نوری تبدیل می‌شود. همانطور که در شکل (۲۸.۵) نشان داده شده است، EDFA اساساً از یک فیبر آغشته به Er، یک منبع نور پمپاژ، یک تزویج کننده نوری که سیگنال و نور پمپ را با هم ترکیب می‌کند، و جداکننده‌های (ایزولاتور) نوری برای دفع نور ناخواسته پس پراکنده تشکیل شده است. یک کوپلر WDM فیبر مخروطی ذوب شده یا یک آینه دو رنگ ^{۳۷} با چند لایه دیکتریک برای مولتی‌پلکس کردن پمپ و نورهای سیگنال استفاده می‌شود. جهت انتشار پمپ لزوماً با جهت سیگنال یکسان نیست. یک عدد نویز بهتر ^{۳۸} (NF) را می‌توان با طرح پمپ مشترک در مقایسه با پمپ ضد انتشار به دست اورد. با این حال، طرح ضد انتشار به عنوان یک برنامه تقویت کننده مناسب است، زیرا بازده تبدیل بالاتری با این طرح به دست می‌آید. یک فیلتر میان‌گذر در مسیر خروجی برای حذف نور

^{۳۶}Amplified Spontaneous Emission (ASE)

^{۳۷}Dichroic Mirror

^{۳۸}Noise Figure (NF)



شکل ۲۸.۵: پیکربندی تقویت کننده فیبر آغشته به

ASE اضافه شده است.

به منظور دستیابی به بهره بالا و آستانه پمپار پایین در EDFA، کاهش قطر میدان مود فیبر آغشته به Er در طول موج پمپ ضروری است. فیبر آغشته به Er معمولاً دارای اختلاف ضریب شکست بالا و هسته کوچکی برای کاهش قطر میدان مود است. غلظت آغشته‌گی بالای یون Er برای کوتاه کردن طول فیبر و کاهش اندازه تقویت کننده مطلوب است. با این حال، محدودیتی در حداقل غلظت آغشته‌گی موجود بهدلیل فرآیند تبدیل به بالا وجود دارد. حداقل غلظت Er ممکن است کمتر از 10 wt.ppm برای فیبر آغشته به Ge/Er باشد، در حالی که غلظت تا 1000 wt.ppm برای فیبر آغشته به Er/Al مجاز است. کودوپینگ آلومینیوم برای افزایش غلظت مجاز Er موثر است. کودوپینگ آلومینیومی همچنین مزیتی در گسترش و صاف کردن طیف بهره سیگنال دارد.

شکل (۲۹.۵) مقایسه‌ای بین طیف بهره فیبر آغشته به Er با و بدون کودوپینگ آلومینیومی را نشان می‌دهد. طیف افزایش فیبر غشته به Er با 3000 wt.ppm در مقایسه با فیبر بدون Al بطور قابل توجهی مسطح و وسیع است.

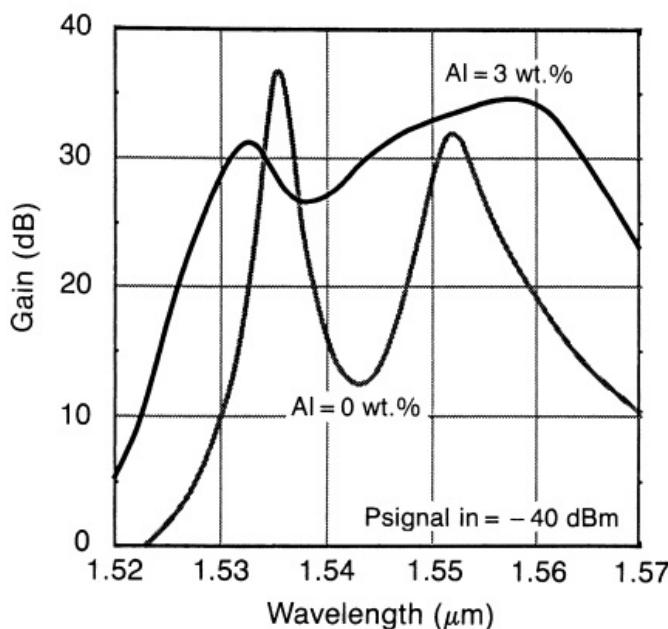
تقویت کننده EDFA سیگنال نوری را مستقیماً تقویت می‌کند و بنابراین نرخ انتقال سیستم را می‌توان حتی پس از ساخت سیستم تغییر داد. EDFA به سرعت در سیستم‌های انتقال زمینی و زیردریایی دوربرد نفوذ می‌کند.

۱۰.۵ مخلوط چهار موج در فیبر نوری

پدیده مخلوط چهار موج (FWM)^{۳۹} یکی از غیرخطی‌های مهم در فیبرهای نوری است [۴۲]. در فعل و انفعالات FWM، یک نور با طول موج چهارم از سه نور با طول موج‌های مختلف تولید می‌شود. این پدیده باعث تحریب سیستم در سیستم‌های انتقال چند کاناله مانند سیستم مالتی‌پلکس تقسیم طول موج (WDM)^{۴۰} می‌شود [۴۳]. بر خلاف آن،

^{۳۹}Four-Wave Mixing (FWM)

^{۴۰}Wavelength Division Multiplexing (WDM)



شکل ۲۹.۵: طیف بهره فیبر آغشته به Er همراه با غلظت‌های مختلف آلومینیوم.

می‌تواند برای تولید فرکانس جدید استفاده شود [۴۴]. کارایی این برهmekنش غیرخطی بهشت به شرایط تطبیق فاز بستگی دارد. کارایی امواج جدید تولید شده در فرآیند FWM به جداسازی فرکانس کانال، پاشندگی رنگی فیبر و طول فیبر بستگی دارد.

از طریق یک فرآیند FWM، سه موج با فرکانس‌های f_i , f_j و f_k ($j \neq k$) فرکانس $f_{ijk} = f_i + f_j - f_k$ را تولید می‌کنند (زیرنویس‌های j, i, k اعداد ۱, ۲ و ۳ را انتخاب می‌کنند). توان نوری میانگین زمانی تولید شده از طریق فرآیند FWM برای مولفه فرکانس f_{ijk} به صورت زیر نوشته شده است [۴۲].

$$P_{ijk}(L) = \frac{10^{-24}\pi^2}{n^4 \lambda^2 c^2} \left(D \chi_{1111}^{(3)} \right)^2 \frac{P_i P_j P_k}{A_{eff}} \left| \frac{e^{(j\Delta\beta-\alpha)L}}{j\Delta\beta - \alpha} \right|^2 \cdot e^{-\alpha L}, \quad (10.2.5)$$

که در آن L طول فیبر، n ضریب شکست هسته، λ طول موج نور، c سرعت نور در خلاء، $D = 3$ برای ضرب دو تون و ۶ برای ضرب سه تون، $(4 \times 10^{-15} \text{ esu}) \chi_{1111}^{(3)}$ پذیرندگی غیرخطی مرتبه سوم، A_{eff} سطح موثر برای مود هدایت شده P_i , P_j و P_k و α توانهای ورودی به فیبر نوری تک مود، $\Delta\beta$ اختلاف تضعیف و $\Delta\alpha$ اختلاف ثابت انتشار که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta\beta = \beta_{ijk} + \beta_k - \beta_i - \beta_j. \quad (10.3.5)$$

پذیرندگی غیرخطی مرتبه سوم $\chi_{1111}^{(3)}$ را می‌توان بر حسب ضریب شکست غیرخطی n_2

بیان کرد که در حالت تک قطبش بصورت زیر است [۴۵]

$$\chi_{111}^{(3)}[esu] = \frac{cn^4}{48\pi^2} n_v [m^4/W]. \quad (10.4.5)$$

ثابت انتشار β را بر حسب سری تیلور حول فرکانس زاویه‌ای ω بسط میدهیم

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \\ &\quad + \frac{(\omega - \omega_0)^3}{6} \left(\frac{d^3\beta}{d\omega^3} \right)_{\omega=\omega_0} \\ &= \beta(\omega_0) \frac{\omega - \omega_0}{v_g} - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2} \pi c \sigma + \frac{(\omega - \omega_0)^3}{\omega_0^3} \frac{\pi c \lambda_0}{2} \left(\frac{2\sigma}{\lambda_0} + \rho \right) \end{aligned} \quad (10.5.5)$$

که در آن معادله (۱۰.۳.۳) و (۱۴۳.۳) برای بیان سرعت گروهی v_g و پاشندگی رنگی σ استفاده می‌شود. در معادله بالا، ρ شیب پاشندگی است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho = \frac{d\sigma}{d\lambda}. \quad (10.6.5)$$

در این صورت $\Delta\beta$ از معادلات (۱۰.۳.۵) و (۱۰.۵.۵) داده می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \frac{\pi \lambda_0^4 \sigma}{c} \left\{ (f_i - f_0)^2 + (f_j - f_0)^2 - (f_k - f_0)^2 - (f_{ijk} - f_0)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\pi \lambda_0^4}{3c^2} \left(\frac{2\sigma}{\lambda_0} + \rho \right) \left\{ (f_{ijk} - f_0)^2 + (f_k - f_0)^2 - (f_i - f_0)^2 - (f_j - f_0)^2 \right\} \\ &= \frac{2\pi \lambda_0^4 \sigma}{c} (f_i - f_k)(f_k - f_j) \\ &\quad + \frac{\pi \lambda_0^4}{c^2} \left(\frac{2\sigma}{\lambda_0} + \rho \right) (f_i + f_j - 2f_0)(f_i - f_k)(f_j - f_k), \end{aligned} \quad (10.7.5)$$

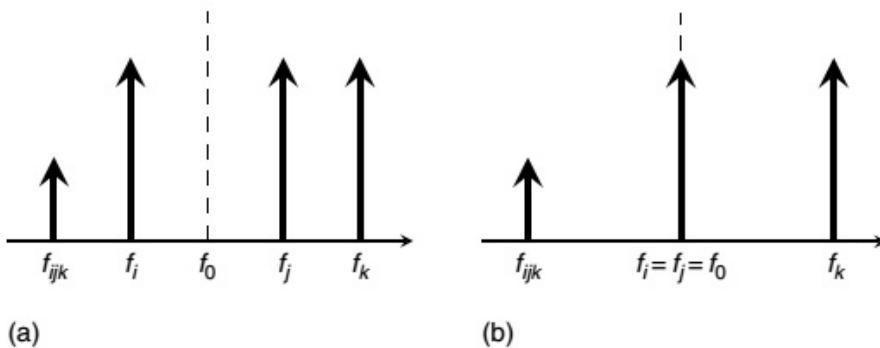
که در آن $f_l = \omega_l / 2\pi$ و شرط تطبیق فاز $f_{ijk} = f_i + f_j - f_k$ بکار برد شده است. در اینجا فرکانس f_0 را به عنوان فرکانس پاشندگی صفر ($\sigma(f_0) = 0$) انتخاب کردیم. هنگامی که فرکانس‌های f_{ijk} و f_i, f_j, f_k نزدیک فرکانس پاشندگی صفر باشند، σ نیز صفر می‌شود. در این حالت، معادله (۱۰.۷.۵) بصورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\Delta\beta = \frac{\pi \lambda_0^4}{c^2} \rho (f_i + f_j - 2f_0)(f_i - f_k)(f_j - f_k) \quad (10.8.5)$$

میدانیم که شرط تطبیق فاز ($\Delta\beta = 0$) هنگامی که فرکانس پاشندگی صفر در وسط دو سیگنال با فرکانس f_i و f_j (قرار داد، $f_0 = (f_i + f_j)/w$) است، در این صورت رابطه‌ای برای فرکانس نور FWM بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$f_0 - f_{ijk} = f_k - f_0. \quad (10.9.5)$$

بنابراین، نور FWM در طرف مقابل f_k با جداسازی فرکانس برابر با فرکانس پاشندگی صفر تولید می‌شود. ترتیب فرکانس این شرایط تطبیق فاز در شکل (۳۰.۵)-الف نشان داده شده



شکل ۳۰.۵: آرایش فرکانس سیکنال شرط تطبیق فاز ناحیه پاشندگی صفر را در (الف) غیر منحاط و (ب) حالت جزئی منحاط برآورده می‌کند.

است. هنگامی که دو نور از سه نور منحاط (تبهکن)^{۴۱} هستند به صورت $f_i = f_j$, معادله (۱۰.۸.۵) را می‌توان به صورت بازنویسی کرد

$$\Delta\beta = \frac{\pi\lambda_c^2\rho}{c^2} 2(f_i - f_0)(f_i - f_k)^2 \quad (110.5)$$

از معادله (۱۱۰.۵) متوجه می‌شویم که شرط تطبیق فاز همیشه زمانی که f_i با فرکانس پاشندگی صفر منطبق است برآورده می‌شود ($f_i = f_0$). آرایش فرکانس برای این شرایط تطبیق فاز در شکل (۳۰.۵)-ب نشان داده شده است.

بازده موج تولید شده η با توجه به عدم تطبیق فاز $L\Delta\beta$ را می‌توان به دست آورد

$$\eta = \frac{P_{ijk}(L, \Delta\beta)}{P_{ijk}(L, \Delta\beta = 0)} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (\Delta\beta)^2} \cdot \left[1 + \frac{\sin^2(\Delta\beta \cdot L/2)}{\sinh^2(\alpha L/2)} \right] \quad (111.5)$$

مقدار P_{ijk} معادله (۱۰۲.۵) برای دو مورد آرایش فرکانس با استفاده از بازده η بصورت زیر داده شده است

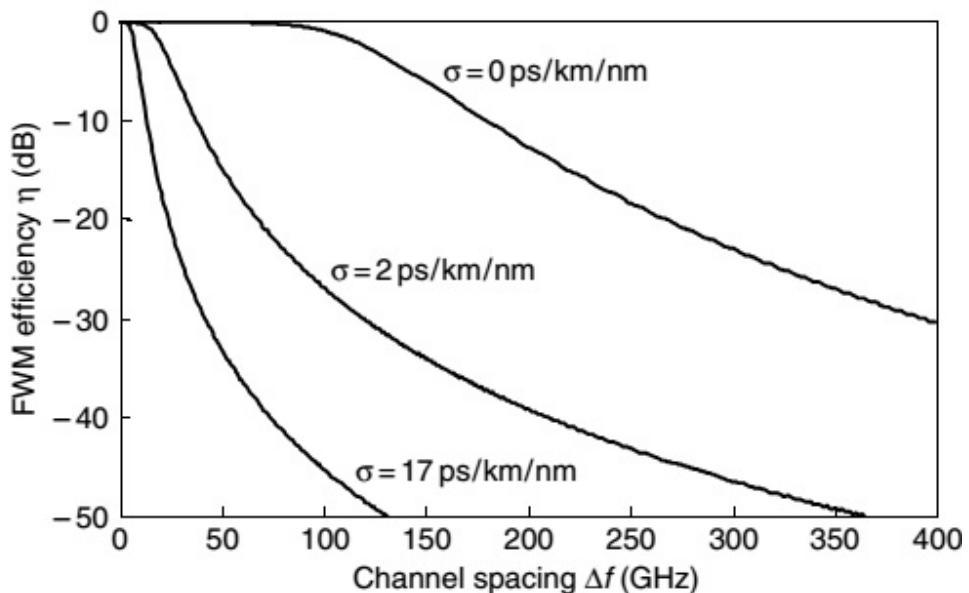
$$P_{ijk} = \eta \frac{1024\pi^6}{n^4 \lambda^2 c^2} \left(\epsilon \chi_{1111}^{(3)} \right)^2 \left(\frac{L_{eff}}{A_{eff}} \right)^2 P_i P_j P_k \cdot e^{-\alpha L} \quad (f_i \neq f_j \neq f_k) \quad (111.5)$$

و

$$P_{iik} = \eta \frac{1024\pi^6}{n^4 \lambda^2 c^2} \left(\epsilon \chi_{1111}^{(3)} \right)^2 \left(\frac{L_{eff}}{A_{eff}} \right)^2 P_i^2 P_k \cdot e^{-\alpha L} \quad (f_i = f_j \neq f_k) \quad (111.5\text{ب})$$

که در آن L_{eff} طول تعامل موثر است (معادله ۶.۵). شکل (۳۱.۵) راندمان η موج تولید شده را برای محصول دو تون ($f_i = f_j \neq f_k$) بصورت تابعی از فاصله کانال Δf در WDM با جایگزینی معادله (۱۰۷.۵) در (۱۱۱.۵)

^{۴۱}Degenerate



شکل ۳۱.۵: راندمان η موج تولید شده برای محصول دو تون ($f_i = f_j \neq f_k$) بصورت تابعی از فاصله کanal Δf در WDM.

نشان می‌دهد. $\Delta\beta$ برای حالت محصول دو تون از رابطه (۱۰.۷.۵) بدست می‌آید

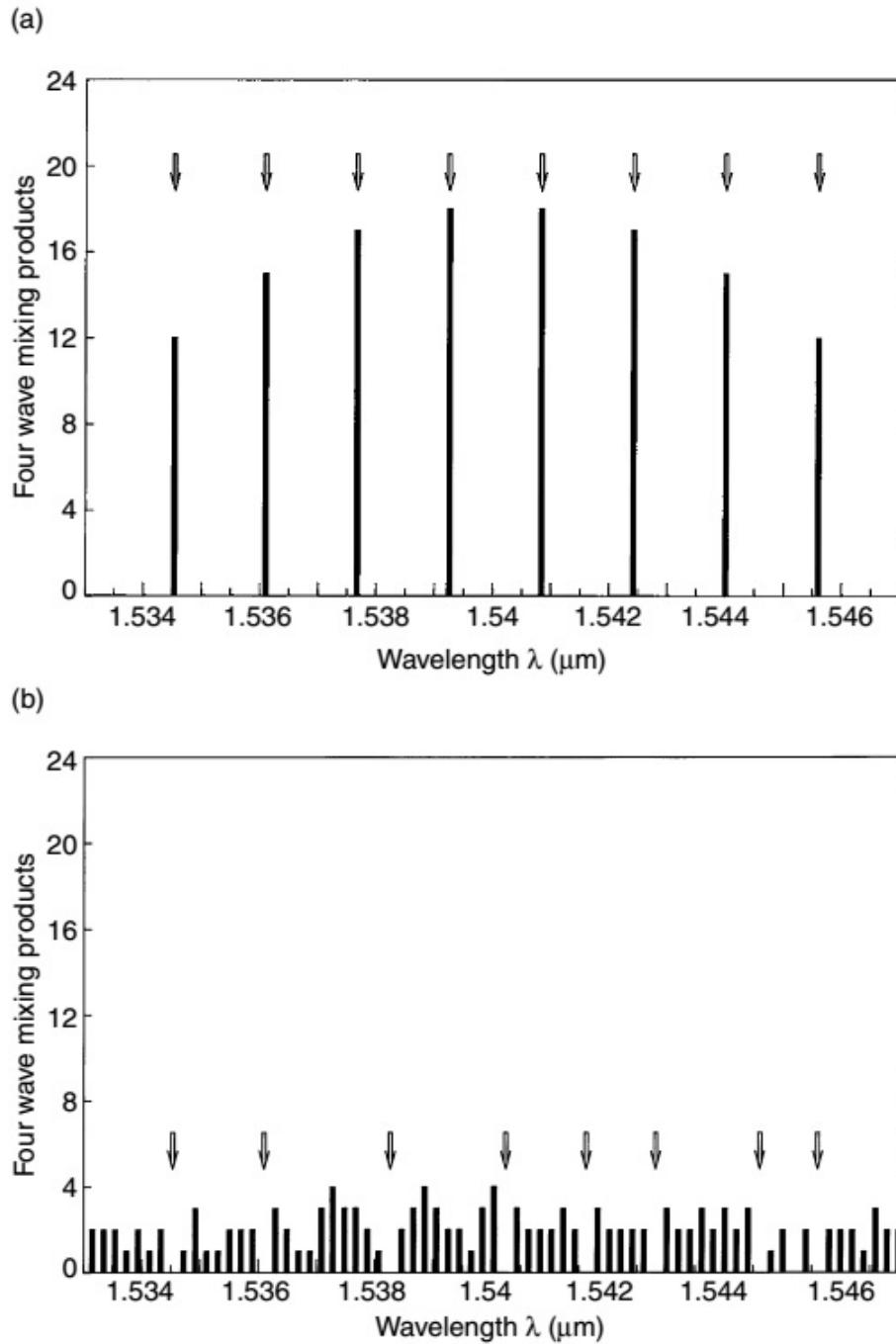
$$\Delta\beta = -\frac{2\pi\lambda_0^2}{c}(f_k - f_i)^2 \left\{ \sigma + \frac{\lambda_0^2}{c} \left(\frac{2\sigma}{\lambda_0} + \rho \right) (f_0 - f_i) \right\} \quad (۱۱۳.۵)$$

پارامترهایی که در محاسبه استفاده می‌شوند عبارتند از $\lambda_0 = 1/55\mu m$ ، $\alpha = 0/2 dB/km$ ، $L = 100 km$ و $f_k = 10^{-5} m^{-1}$ ، $f_i = 10^0 ps/km/nm$ ، $\rho = 10^0 ps/km/nm$ ، $\sigma = 0$ است. در حالت $\sigma = 0$ ، یکی از تون f_i با فرکانس پاشنده‌گی صفر فیبر f_0 منطبق است، و محصول اختلاط دورتر از فرکانس پاشنده‌گی صفر در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۳۱.۵) عنوان شده است که بازده FWM برای DSF (ZMANI) که فاصله کanal Δf کمتر از ۱۰۰ گیگاهرتز باشد، بسیار بالا است. همانطور که در نمودار $\sigma = 2 ps/km/nm$ نشان داده شده است، افزایش جزئی در $|\sigma|$ به طور چشمگیری بازده FWM را کاهش می‌دهد. پاشنده‌گی رنگی باید تا حد امکان کوچک باشد زیرا پهنه‌ی باند سیگنال B با $\sqrt{\sigma}$ (معادله (۲۱۳.۳)) یا σ (معادله (۲۱۴.۳)) نسبت معکوس دارد. سپس مقدار پاشنده‌گی بهینه در حالی که راندمان FWM به اندازه کافی پایین است، $|\sigma| \sim 5 ps/km/nm$ می‌شود. به چنین فیبری، فیبر با پاشنده‌گی غیر صفر (NZDSF^{۴۲}) می‌گویند.

در سیستم‌های WDM با کanal‌های مساوی، تمام جملات محصول تولید شده توسط FWM در پهنه‌ی باند سیستم در فرکانس‌های کanal قرار می‌گیرند و باعث ایجاد تداخل می‌شوند. تداخل با بهره پارامتری ارائه شده توسط توان کanal به امواج FWM افزایش می‌یابد. با فاصله کanal نابرابر مناسب، می‌توان با جلوگیری از ایجاد امواج FWM در

^{۴۲} Nonzero Dispersion-Shifted Fiber (NZDSF)

فرکانس‌های کanal، تداخل FWM را حذف کرد [۴۶]. نشان داده شده است که اگر جداسازی فرکانس هر یک از دو کanal یک سیستم WDM با هر زوج کanal دیگر متفاوت باشد، هیچ امواج FWM در هیچ یک از فرکانس‌های کanal ایجاد نخواهد شد. بنابراین، تخصیص سیگنال با فاصله کanal نابرابر به ویژه برای سیستم‌های WDM با استفاده از DSF کاملاً سودمند است. اثربخشی فاصله کanal نابرابر در نگه داشتن محصول مخلوط خارج از شیارهای فرکانس کanal در شکل (۳۲.۵)-ب نشان داده شده است، که در آن تعداد امواج FWM تولید شده در هر شکاف فرکانس برای مورد یک سیستم هشت کanalی ترسیم شده است. فلش‌ها مکان کanal را نشان می‌دهند. می‌توان مشاهده کرد که همه محصول مخلوط با فاصله کanal مساوی ((۳۲.۵)-ب) در پهنه‌ای باند سیستم در شکاف‌های اشغال شده توسط کanal‌ها قرار دارند و حداقل تداخل را ایجاد می‌کنند. شکل (۳۲.۵)-ب اثر استفاده از فاصله نابرابر مناسب را نشان می‌دهد [۴۶]. شکاف‌های فرکانس اختصاص داده شده به کanal‌ها از ترکیب محصول‌ها عاری است. محصول مخلوط همه به‌طور مساوی در شکاف‌های بین کanal‌ها توزیع می‌شوند و می‌توان آنها را توسط فیلتر حذف کرد [۴۷].



شکل ۳۲.۵: تعداد امواج FWM تولید شده در مورد سیستم WDM هشت کanalی با (الف) مساوی و (ب) فاصله کanal نابرابر. فلش ها مراکز کanal را نشان می دهند.

كتاب نامه

- [1] Agrawal, G. P. 1989. *Nonlinear Fiber Optics*. San Diego: Academic Press.
- [2] Yariv, A. 1977. *Introduction to Optical Electronics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- [3] Hellwarth, R. W. 1977. Third-order optical susceptibilities of liquids and solids. *Prog. Quantum Electron.* 5:1–68.
- [4] Stolen, R. H. and C. Lin. 1978. Self-phase-modulation in silica optical fibers. *Phys. Rev. A* 17:1448–1453.
- [5] Bullough, R. K. and P. J. Caudrey. 1980. *Solitons*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- [6] Hasegawa, A. and Y. Kodama. 1981. Signal transmission by optical solitons in monomode fiber. *Proc. IEEE* 69:1445–1450.
- [7] Miller, S. E., and A. G. Chynoweth. 1979. *Optical Fiber Telecommunications*. New York: Academic Press.
- [8] Mollenauer, L. F., R. H. Stolen, and J. P. Gordon. 1983. Extreme picosecond pulse narrowing by means of soliton effect in single-mode optical fibers. *Opt. Lett.* 8:289–291.
- [9] Lin, C., and R. H. Stolen. 1976. Backward Raman amplification and pulse steepening in silica fibers. *Appl. Phys. Lett.* 29:428–431.
- [10] Mears, R. J., L. Reekie, I. M. Jauncey, and D. N. Payne. 1987. Low-noise erbium-doped fiber amplifier operating at $154\mu m$. *Electron Lett.* 23:1026–1028.
- [11] Stolen, R. H. 1980. Nonlinearity in fiber transmission. *Proc. IEEE* 68:1232–1236.
- [12] Mollenauer, L. F., J. P. Gordon and M. N. Islam. 1986. Soliton propagation in long fibers with periodically compensated loss. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-22:157–173.

- [13] Mollenauer, L. F., and K. Smith. 1988. Demonstration of soliton transmission over more than 4000 km in fiber with loss periodically compensated by Raman gain. *Opt. Lett.* 13:657–677.
- [14] Nakazawa, M., K. Suzuki, K. Yamada, and Y. Kimura. 1990. 20 Gbit/s soliton transmission over 200 km using erbium-doped fiber repeaters. *Electron. Lett.* 26:1592–1593.
- [15] Hasegawa, A. 1984. Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability. *Opt. Lett.* 9:288–290.
- [16] Tai, K., A. Hasegawa, and A. Tomita. 1986. Observation of modulational instability in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.* 56:135–138.
- [17] Tai, K., A. Tomita, J. L. Jewell, and A. Hasegawa. 1986. Generation of subpicosecond soliton-like optical pulses at 0.3 THz repetition rate by induced modulational instability. *Appl. Phys. Lett.* 49:236–238.
- [18] Hasegawa, A., and F. Tappert. 1973. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers II. Normal dispersion. *Appl. Phys. Lett.* 23:171–172.
- [19] Zhao, W., and E. Bourkoff. 1990. Generation of dark solitons under a cw background using waveguide electro-optic modulators. *Opt. Lett.* 15:405–407.
- [20] Valdmanis, J. A., R. L. Fork, and J. P. Gordon. 1985. Generation of optical pulses as short as 27 femtosecond directly from a laser balancing self-phase modulation, group-velocity dispersion, saturable absorption, and saturable gain. *Opt. Lett.* 10:131–133.
- [21] Nakatsuka, H., D. Grischkowsky, and A. C. Balant. 1981. Nonlinear picosecond-pulse propagation through optical fibers with positive group velocity dispersion. *Phys. Rev. Lett.* 47:910–913.
- [22] Fork, R. L., C. H. Brito Cruz, P. C. Becker, and C. V. Shank. 1987. Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation. *Opt. Lett.* 12:483–485.
- [23] Tomlinson, W. J., R. H. Stolen, and A. M. Johnson. 1985. Optical wave breaking of pulses in nonlinear optical fibers. *Opt. Lett.* 10:457–459.
- [24] Treacy, E. B. 1969. Optical pulse compression with diffraction gratings. IEEE *J. Quantum Electron.* QE-5:454–458.

- [25] Kafka, J. D., and T. Baer. 1987. Prism-pair dispersive delay lines in optical pulse compression. *Opt. Lett.* 12:401–403.
- [26] Cardona, M., and G. Ed. Güntherodt. 1982. *Light Scattering in Solids III*. Berlin: Springer-Verlag.
- [27] Grindlay, J., and R. Howard. 1965. *Lattice Dynamics*. New York: Pergamon Press.
- [28] Smith, R. G. 1972. Optical power handling capability of low loss optical fibers as determined by stimulated Raman and Brillouin scattering. *Appl. Opt.* 11:2489–2494.
- [29] Hegarty, J., N. A. Olsson, and L. Goldner. 1985. CW pumped Raman preamplifier in a 45 km-long fiber transmission system operating at $1.5\mu\text{m}$ and 1 Gbit/s. *Electron. Lett.* 21:290–292.
- [30] Zel'dovich, B. Y., N. F. Pilipetsky, and V. V. Shkunov. 1985. *Principles of Phase Conjugation*. Berlin: Springer-Verlag.
- [31] Lagakos, N., J. A. Bucaro, and R. Hughes. 1980. Acoustic sensitivity predictions of single-mode optical fibers using Brillouin scattering. *Appl. Opt.* 19:3668–3670.
- [32] Schroeder, J., L. G. Hwa, M. C. Shyong, G. A. Floudas, D. A. Thompson, and M. G. Drexhage. 1987. Brillouin scattering and phonon attenuation in halide glasses—Stimulated Brillouin emission. *Electron. Lett.* 23:1128–1130.
- [33] Shelby, R. M., M. D. Levenson, and P. W. Bayer. 1985. Resolved forward Brillouin scattering in optical fibers. *Phys. Rev. Lett.* 54:939–942.
- [34] Denariez, M., and G. Bret. 1968. Investigation of Rayleigh wings and Brillouin-stimulated scattering in liquids. *Phys. Rev.* 171:160–171.
- [35] Aoki, Y., K. Tajima, and I. Mito. 1986. Observation of stimulated Brillouin scattering in single-mode fibers with DFB-LD pumping and its suppression by FSK modulation. *Tech. Digest of CLEO '86*, San Francisco, Post Deadline Paper no. ThU4.
- [36] Olsson, N. A., and J. P. van der Ziel. 1986. Cancellation of fiber loss by semiconductor laser pumped Brillouin amplification at $1.5\mu\text{m}$. *Appl. Phys. Lett.* 48:1329–1330.
- [37] Österberg, U., and W. Margulis. 1986. Dye laser pumped by Nd:YAG laser pulses frequency doubled in a glass optical fiber. *Opt. Lett.* 11:516–518.
- [38] Gabriagues, J. M., and H. Fevrier. 1987. Analysis of frequency-doubling processes in optical fibers using Raman spectroscopy. *Opt. Lett.* 12:720–722.

- [39] Bethune, D. S. 1981. Quadrupole second-harmonic generation for a focused beam of arbitrary transverse structure and polarization. *Opt. Lett.* 6:287–289.
- [40] Farries, M. C., P. St. J. Russell, M. E. Fermann, and D. N. Payne. 1987. Second-harmonic generation in an optical fiber by self-written $\chi^{(2)}$ grating. *Electron. Lett.* 23:322–324.
- [41] Snitzer, E. 1961. Optical maser action of Nd^{3+} in a barium crown glass. *Phys. Rev. Lett.* 7:444–446.
- [42] Hill, K. O., D. C. Johnson, B. S. Kawasaki and R. I. MacDonald. 1978. CW three-wave mixing in single-mode optical fibers. *J. Appl. Phys.* 49:5098–5106.
- [43] Shibata, N., K. Nosu, K. Iwashita, and Y. Azuma. 1990. Transmission limitation due to four-wave mixing in single-mode optical fibers. *IEEE J. Select. Area Commun.* 8:1068–1077.
- [44] Lin, C., W. A. Reed, A. D. Pearson, and H. T. Shang. 1982. Designing single-mode fibers for near-IR (1.1mm – 1.7mm) frequency generation by phase-matched four-wave mixing in the minimum chromatic dispersion region. *Electron. Lett.* 18:87–88.
- [45] Tkach, R. W., A. R. Chraplyvy, F. Forghieri, A. H. Gnauck, and R. M. Derosier. 1995. Four-photon mixing and high-speed WDM systems. *IEEE J. of Lightwave Tech.* 13:841–849.
- [46] Forghieri, F., R. W. Tkach, A. R. Chraplyvy, and D. Marcuse. 1994. Reduction of four-wave mixing crosstalk in WDM systems using unequally spaced channels. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 6:754–756.
- [47] Okamoto, K., M. Ishii, Y. Hibino, Y. Ohmori, and H. Toba. 1995. Fabrication of unequal channel spacing arrayed-waveguide grating multiplexer modules. *Electron. Lett.* 31:1464–1465.

فصل ۶

روش اجزای محدود

تحلیل موجبر توضیح داده شده در فصل‌های دوم و سوم به استثنای روش^۱ WKB که در بخش ۲.۷.۳ توضیح داده شده است، از نظر کاربرد برای موجبرهای نوری مسطح با هسته همگن (ضریب شکست پله‌ای) و فیبرهای نوری محدود شده‌اند. با این حال، موجبرها و فیبرهای مسطح با هسته ناهمگن (ضریب شکست تدریجی^۲) در بسیاری از زمینه‌های عملی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین، فناوری‌های تحلیل قادر به حل معادلات موج برای موجبرها و فیبرهای مسطح هسته ناهمگن بسیار مهم است. همانطور که در بخش ۴.۲.۲ نشان داده شده است، موجبرهای پشته‌ای^۳، که دارای یک هسته همگن اما دارای هندسه موجبر مقطوعی پیچیده هستند، اغلب برای دستگاه‌های نوری نیمه‌هادی استفاده می‌شوند، روش اجزای محدود(FEM)^۴ برای تحلیل مود موجبرهای نوری با شکل‌های ضریب شکست و ساختارهای پیچیده موجبر مناسب است. نیازی به گفتن نیست که FEM برای تحلیل تنش موجبرهای نوری نیز قابل استفاده است. در این فصل ابتدا تحلیل‌های مود توسط FEM در موجبرهای تیغه‌ای، موجبرهای مستطیلی و فیبرهای نوری ارائه می‌شود. سپس تحلیل تنش موجبرها و ترکیب تحلیلی تنش با تحلیل مود توضیح داده شده است.

۱.۶ مقدمه

در روش وردشی(روش تغییرات)^۵، مسئله مقدار مرزی (مسئله‌ای که به‌شکل یک معادله دیفرانسیل در یک حوزه معین داده می‌شود، که باید در شرایط مرزی معین حل شود) به مسئله وردشی معادل تبدیل شده و با اعمال اصل وردشی حل می‌شود^[۱، ۴]. در روش اجزای محدود، محدوده مسئله به‌عنصر کوچک گستته می‌شود. حل مسئله در هر عنصر

^۱Wentzel-Kramers-Brillouin

^۲Graded-index

^۳Ridge Waveguides

^۴Finite Element Method (FEM)

^۵Variational Method

تقریب زده و در نقاط گرهای بهم متصل شده تا مدل حل در کل حوزه تحلیل را تشکیل دهد. بنابراین، FEM برای ساختارهای محدوده پیچیده و مسائلی که در آنها میدان‌های الکترومغناطیسی محلی هستند، قابل استفاده است. در روش‌های تحلیلی کلاسیک بدون فرآیندهای تقسیم‌بندی، سیستم با استفاده از توابع تحلیلی تعریف شده در کل منطقه مورد نظر مدل‌سازی می‌شود و بنابراین این رویه‌ها عموماً فقط برای هندسه‌ها و مواد ساده قابل اجرا هستند. یکی از ساده‌ترین روش‌هایی که از روش گستته سازی استفاده می‌کند، روش تفاضل محدود (FDM)^۶ است. در (FDM)، محدوده با استفاده از شبکه‌های مستطیلی منظم به مناطق شبکه‌ای کوچک گستته می‌شود. با این حال، یک شبکه مستطیلی برای مرزهای منحنی یا مرز مشترک مناسب نیست، زیرا آنها خطوط شبکه را به صورت مایل در نقاطی غیر از گره‌ها قطع می‌کنند. علاوه بر این، یک شبکه معمولی برای مسائل با تغییرات بسیار شبیه میدان مناسب نیست. در FEM، یک شکل ساده از تابع برای تقریب میدان در هر عنصر اتخاذ شده است. خطای احتمالی در حل مسئله با افزایش تعداد عناصر و در نتیجه کاهش اندازه عنصر کاهش می‌یابد. همه عناصر کمکی به سیستم برای شکل دادن به فراتابع (تابع تابع)^۷ سرهم می‌شوند. اساس فراتابع شامل مقادیر میدان در n گره و شرایط مرزی در گره‌های محیطی است. یعنی معادلات همزمان خطی مرتبه n بدست می‌آید. حل معادلات همزمان مقادیر میدان مجهول را تعیین می‌کند.

در این فصل، تحلیل موجبرها توسط FEM برای موجبر تیغه‌ای، فیبرهای نوری و موجبرهای سه بعدی و همچنین تحلیل تنش توسط FEM در دستگاه‌های موجبر نوری شرح داده شده است. تجزیه و تحلیل موجبر و تحلیل تنش مسائل کاملاً متفاوتی هستند. با این حال، روش‌های گستته‌سازی و فرمول‌بندی فراتابع در هر دو مسئله تقریباً مشابه هستند. چنین تطبیق پذیری در روش‌های ریاضی مزیت بزرگ FEM است.

۲.۶ روش اجزای محدود در تحلیل موجبرهای تیغه‌ای

۱.۲.۶ فرمول بندی فراتابع

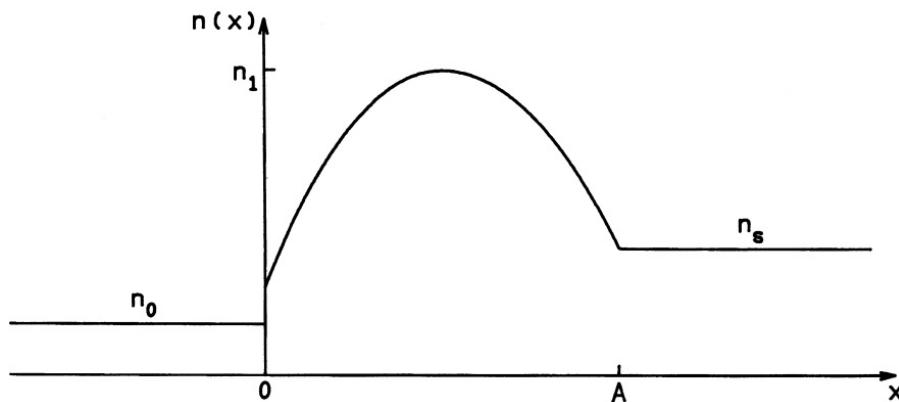
در این بخش، فرمول FEM با در نظر گرفتن مود TE به عنوان مثال در موجبر تیغه‌ای ناهمگن توضیح داده شده است. همانطور که در شکل (۱.۶) نشان داده شده است، ناحیه عرضی $x \leq A$ که دارای مشخصات ضریب شکست ناهمگن، به صورت هسته مشخص شده و ضریب شکست در روکش و زیرلایه ثابت فرض می‌شود. حداقل ضریب شکست در هسته n_1 و ضریب شکست در روکش و زیرلایه به ترتیب n_s و $n_s \geq n_1$ است. در اینجا $n_s \geq n_1$ را فرض می‌کنیم. معادله موج برای مود TE با معادله (۱.۲)^۸ داده شده است.

$$\frac{d^{\gamma} E_y}{dx^{\gamma}} + (k^{\gamma} n^{\gamma} - \beta^{\gamma}) E_y = 0 \quad (1.6)$$

شرایط مرزی برای پیوستگی E_y و

^۶Finite Difference Method (FDM)

^۷Functional



شکل ۱.۶: توزیع ضریب شکست موجبر نوری تیغه‌ای ناهمگن

$$H_y = \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{dE_y}{dx} \quad (2.6)$$

در \$x = 0\$ و \$x = A\$ لازم است. قبل از تبدیل معادله موج (۱.۶) و شرایط مرزی (۲.۶) به مسئله وردشی، پارامترها نرمالیزه می‌شوند.

$$\rho = x/a, \quad E_y = R(\rho), \quad D = A/a \quad (3.6)$$

در این صورت معادله موج و شرایط مرزی را می‌توان بازنویسی کرد:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + [v^2 q(\rho) - w^2] R = 0 \quad (4.6)$$

$$w = a\sqrt{\beta^2 - k^2 n_s^2} \quad (5.6)$$

در اینجا عدد موج عرضی نرمالیزه \$w\$، فرکانس نرمالیزه \$v\$ و توزیع ضریب شکست نرمالیزه \$q(\rho)\$ بصورت زیر هستند

$$w = a\sqrt{\beta^2 - k^2 n_s^2} \quad (5.6)$$

$$v = ka\sqrt{n_1^2 - n_s^2} \quad (6.6)$$

$$q(\rho) = \frac{n_1^2 - n_s^2}{n_1^2 - n_s^2} \quad (6.6)$$

حل معادله موج (۴.۶) تحت قیود شرط مرزی (۵.۶) به عنوان حل مسئله وردشی که شرایط ثابت فراتابی را برآورده می‌کند، به دست می‌آید.

$$I(R) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 d\rho + \int_{-\infty}^{\infty} [v^2 q(\rho) - w^2] R^2 d\rho \quad (7.6)$$

اعتبار روش وردشی فوق به صورت زیر نشان داده شده است. فرض می‌کنیم که $I[R]$ برای $R(\rho)$ ثابت است و کمی انحراف در تابع را در نظر می‌گیریم

$$R_{pert}(\rho) = R(\rho) + \delta \cdot \eta(\rho), \quad (8.6)$$

که در آن δ نمایشگر یک کمیت کوچک حقیقی و $\eta(\rho)$ یک تابع پیوسته دلخواه بر حسب ρ است. جایگزینی $R_{pert}(\rho)$ در معادله (۷.۶) و با فرض این که $I[R_{pert}] = \circ$ ثابت است، داریم

$$\lim_{\delta \rightarrow \circ} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \delta} I[R_{pert}] \right\} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dR}{d\rho} \frac{d\eta}{d\rho} d\rho + \int_{-\infty}^{\infty} [v^* q(\rho) - w^*] R \eta d\rho = \circ. \quad (9.6)$$

با انتگرال‌گیری جز به جز، معادله (۹.۶) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$- \left[\eta \frac{dR}{d\rho} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d^* R}{d\rho^*} + [v^* q(\rho) - w^*] R \right\} \eta(\rho) d\rho = \circ. \quad (10.6)$$

از آنجا که $\eta(\rho)$ تابعی دلخواه از ρ است، جملات اول و دوم معادله (۱۰.۶) باید بطور مستقل صفر شوند. در این صورت $R(\rho)$ در معادله موج (۴.۶) و شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} \frac{dR}{d\rho} = \circ \quad \text{پیوسته است} \quad \frac{dR(\rho)}{d\rho} \quad (11.6)$$

شرط دوم یک شرط مرزی طبیعی است که بیان می‌کند که جواب در بینهایت میرا می‌شود (میدان الکترومغناطیسی در موج افزون می‌شود). در این صورت ثابت می‌شود که تابع $R(\rho)$ که فراتابع (۷.۶) را ایستا می‌کند، معادله موج (۴.۶) و شرط مرزی (۵.۶) را به طور هم‌مان برآورده می‌کند.

۲.۲.۶ گسسته‌سازی فرا تابع

برای ساده کردن محاسبه فرا تابع، شکل میدان در هسته را بصورت زیر گسسته‌سازی و بیان می‌کنیم

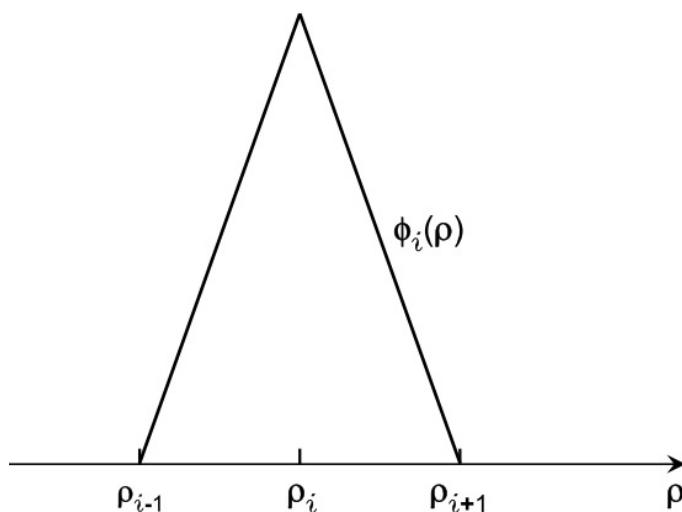
$$R(\rho) = \begin{cases} R_\circ \exp(w_\circ \rho) & (\rho < \circ) \\ \sum_{i=0}^N R_i \phi_i(\rho) & (\circ \leq \rho \leq D) \\ R_N \exp[-w(\rho - D)] & (\rho > D) \end{cases} \quad (12.6)$$

که در آن $R_\circ - R_N$ مقدار تابع در نقاط نموده برداری است و

$$w_\circ = a \sqrt{\beta^* - k^* n_\circ^*} \quad (\bar{13.6})$$

$$R_i = R(\rho_i) \quad (i = 0 - N) \quad (13.6\text{ب})$$

$$q_i = i \frac{D}{N} \quad (i = 0 - N) \quad (13.6\text{ج})$$

شکل ۲.۶: تابع نمونه برداری $\phi_i(\rho)$

حل مسئله در روکش و بستر (زیرلايه)^{۱۲.۶} با توابع تحلیلی داده می‌شود. تابع نمونه برداری $\phi_i(\rho)$ در $\rho = \rho_i$ برابر واحد و در اطراف نقاط نمونه برداری $\rho = \rho_{i-1}$ و $\rho = \rho_{i+1}$ و تمام سایر نواحی، بطوری که در شکل ۲.۶ نشان داده شده، صفر است. رابطه $\phi_i(\rho)$ در زیر داده شده است.

$$\phi_*(\rho) = \begin{cases} \frac{N}{D}(\rho_1 - \rho) & (\rho \leq \rho_1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (14.6)$$

$$\phi_i(\rho) = \begin{cases} \frac{N}{D}(\rho - \rho_{i-1}) & (\rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i) \\ \frac{N}{D}(\rho_{i+1} - \rho) & (\rho_i \leq \rho \leq \rho_{i+1}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (14.6)$$

$$\phi_N(\rho) = \begin{cases} \frac{N}{D}(\rho - \rho_{N-1}) & (\rho_{N-1} \leq \rho \leq \rho_N) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (14.6)$$

از آنجایی که تابع نمونه برداری در اینجا یک تابع خطی از ρ است، معادله ۱۲.۶ به این معنی است که تابع پیوسته $R(\rho)$ با خطوط شکسته تقریب‌زده شده است. توزیع ضریب

^۱Substrate

شکست نرمالیزه $q(\rho)$ نیز با استفاده از تابع نمونه‌برداری

$$q(\rho) = \sum_{i=0}^N q_i \phi_i(\rho) \quad (15.6)$$

$$q_i = \frac{n^*(\rho_i) - n_s^*}{n_i^* - n_s^*} \quad (15.6b)$$

به منظور تعامل با موجبرهایی که دارای شکل‌های ضریب شکست ناهمگن دلخواه هستند، تقریب‌زده شده است. جایگزینی معادله (۱۲.۶) در معادله (۷.۶)، فراتابع را بدست می‌آوریم

$$I = -w_* R_*^* - \int_*^D \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^* d\rho + \int_*^D [v^* q(\rho) - w^*] R_*^* d\rho - w R_N^*. \quad (16.6)$$

۳.۲.۶ معادله پاشندگی بر مبنای شرط ایستائی

شرط ایستائی فراتابع (۱۶.۶) از مشتق جزئی گرفتن نسبت به $R_i (i = 0 - N)$ بصورت زیر بدست می‌ید

$$\begin{aligned} \circ = \frac{\partial I}{\partial R_i} &= -w_* R_* \delta_{i,*} - \int_*^D \frac{dR}{d\rho} \frac{d\phi_i}{d\rho} d\rho + v^* \int_*^D q(\rho) R \phi_i d\rho \\ &\quad - w^* \int_*^D R \phi_i d\rho - w R_N \delta_{i,N} \quad (i = 0 - N) \end{aligned} \quad (17.6)$$

با توجه به اینکه تابع نمونه‌برداری $\phi_i(\rho)$ در خارج از منطقه $\rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_{i+1}$ صفر است، معادله (۱۷.۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \circ = \frac{\partial I}{\partial R_*} &= -w_* R_* - \int_*^{\rho_1} \left(R_* \frac{d\phi_*}{d\rho} + R_1 \frac{d\phi_1}{d\rho} \right) \frac{d\phi_*}{d\rho} d\rho \\ &\quad + v^* \int_*^{\rho_1} (q_* \phi_* + q_1 \phi_1) (R_* \phi_* + R_1 \phi_1) \phi_* d\rho \\ &\quad - w^* \int_*^{\rho_1} (R_* \phi_* + R_1 \phi_1) \phi_* d\rho \end{aligned} \quad (18.6)$$

$$\begin{aligned} \circ = \frac{\partial I}{\partial R_i} &= - \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \left(R_{i-1} \frac{d\phi_{i-1}}{d\rho} + R_i \frac{d\phi_i}{d\rho} \right) \frac{d\phi_i}{d\rho} d\rho \\ &\quad - \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \left(R_i \frac{d\phi_i}{d\rho} + R_{i+1} \frac{d\phi_{i+1}}{d\rho} \right) \frac{d\phi_i}{d\rho} d\rho \\ &\quad + v^* \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} (q_{i-1} \phi_{i-1} + q_i \phi_i) (R_{i-1} \phi_{i-1} + R_i \phi_i) \phi_i d\rho \\ &\quad + v^* \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} (q_i \phi_i + q_{i+1} \phi_{i+1}) (R_i \phi_i + R_{i+1} \phi_{i+1}) \phi_i d\rho \\ &\quad - w^* \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} (R_{i-1} \phi_{i-1} + R_i \phi_i) \phi_i d\rho \\ &\quad - w^* \int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} (R_i \phi_i + R_{i+1} \phi_{i+1}) \phi_i d\rho \quad (i = 1 - N - 1) \end{aligned} \quad (19.6)$$

$$\circ = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial I}{\partial R_N} = - \int_{\rho_{N-1}}^{\rho_N} \left(R_{N-1} \frac{d\phi_{N-1}}{d\rho} + R_N \frac{d\phi_N}{d\rho} \right) \frac{d\phi_N}{d\rho} d\rho \\ + v \int_{\rho_{N-1}}^{\rho_N} (q_{N-1}\phi_{N-1} + q_N\phi_N)(R_{N-1}\phi_{N-1} + R_N\phi_N)\phi_N d\rho \\ - w \int_{\rho_{N-1}}^{\rho_N} (R_{N-1}\phi_{N-1} + R_N\phi_N)\phi_N d\rho - wR_N \quad (۲۰.۶)$$

انتگرال توابع نمونه برداری، که در معادله (۱۸.۶) و (۱۹.۶) ظاهر می شود، بصورت زیر خواهد بود

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \frac{d\phi_{i-1}}{d\rho} \frac{d\phi_i}{d\rho} d\rho = -\frac{N}{d} \quad (i = 1 - N) \quad (۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \left(\frac{d\phi_i}{d\rho} \right)^2 d\rho = \frac{N}{D} \quad (i = 1 - N) \quad (ج ۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \left(\frac{d\phi_i}{d\rho} \right)^2 d\rho = \frac{N}{D} \quad (i = \circ - N - 1) \quad (ج ۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \phi_{i-1}^2 \phi_i d\rho = \frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \quad (i = 1 - N) \quad (د ۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \phi_{i-1} \phi_i^2 d\rho = \frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \quad (i = 1 - N) \quad (ه ۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \phi_i^2 d\rho = \frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \quad (i = \circ - N - 1) \quad (ج ۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \phi_{i-1} \phi_i d\rho = \frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \quad (i = 1 - N) \quad (ج ۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \phi_i^2 d\rho = \frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \quad (i = 1 - N) \quad (ط ۲۱.۶)$$

$$\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \phi_i d\rho = \frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \quad (i = 0 - N - 1) \quad (21.6)$$

جایگزینی معادله (21.6) در معادلات (20.6) - (A.6) می‌دهد:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \frac{\partial I}{\partial R_0} &= R_0 \left\{ 1 - (3q_0 + q_1) \frac{v^r}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^r + \frac{w^r}{\gamma} \left(\frac{D}{N} \right)^r + w_0 \frac{D}{N} \right\} \\ &+ R_1 \left\{ 1 - (q_0 + q_1) \frac{v^r}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^r + \frac{w^r}{\gamma} \left(\frac{D}{N} \right)^r \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\bar{22.6})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \frac{\partial I}{\partial R_i} &= R_{i-1} \left\{ 1 - (q_{i-1} + q_i) \frac{v^r}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^r + \frac{w^r}{\gamma} \left(\frac{D}{N} \right)^r \right\} \\ &+ R_i \left\{ 1 - (q_{i-1} + \gamma q_i + q_{i+1}) \frac{v^r}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^r + \frac{2w^r}{\gamma} \left(\frac{D}{N} \right)^r \right\} \\ &+ R_{i+1} \left\{ 1 - (q_i + q_{i+1}) \frac{v^r}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^r + \frac{w^r}{\gamma} \left(\frac{D}{N} \right)^r \right\} \quad (i = 0 - N - 1) \end{aligned} \quad (22.6)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma} \frac{D}{N} \frac{\partial I}{\partial R_N} &= R_{N-i} \left\{ 1 - (q_{N-1} + q_N) \frac{v^r}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^r + \frac{w^r}{\gamma} \left(\frac{D}{N} \right)^r \right\} \\ &+ R_N \left\{ 1 - (q_{N-1} + 3q_N) \frac{v^r}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^r + \frac{w^r}{\gamma} \left(\frac{D}{N} \right)^r + w \frac{D}{N} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (22.6)$$

معادله (22.6) یک مجموعه مرتبه $(N+1)$ ام معادلات همزمان با $R_0 - R_N$ مقادیر مجھول است. برای اینکه معادله (22.6) دارای جواب‌های غیر ضروری بجز باشد، باید D ترminan C برابر صفر باشد، $R_N = 0$.

$$\det(\mathbf{C}) = 0 \quad (23.6)$$

عناصر ماتریس \mathbf{C} بصورت زیر داده می‌شود:

$$c_{0,0} = 1 - (3q_0 + q_1) \frac{v^r}{12} \delta^r + \frac{w^r}{\gamma} \delta^r + w_0 \delta \quad (\bar{24.6})$$

$$c_{i,i} = 1 - (q_{i-1} + \gamma q_{i+1}) \frac{v^r}{12} \delta^r + \frac{2w^r}{\gamma} \delta^r \quad (i = 1 - N - 1) \quad (24.6)$$

$$c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = -1 - (q_i + q_{i+1}) \frac{v^r}{12} \delta^r + \frac{w^r}{\gamma} \delta^r \quad (i = 0 - N - 1) \quad (24.6)$$

$$c_{N,N} = 1 - (q_{N-1} + 3q_N) \frac{v^r}{12} \delta^r + \frac{w^r}{\gamma} \delta^r + w \delta \quad (24.6)$$

که در آن δ قدم گسسته سازی برابر است با

$$\delta = \frac{D}{N} \quad (25.6)$$

معادله (۲۳.۶) معادله پاشندگی (معادله مقادیر ویژه) برای مودهای TE در شکل ضریب شکل دلخواه است. هنگامی که توزیع ضریب شکست $q(\rho)$ مجبور و فرکانس نرمالیزه v را داده باشند، ثابت انتشار β (بطور ضمنی شامل w و w_0) از معادله (۲۳.۶) و (۲۴.۶) محاسبه می‌شود. هنگامی که در معادله (۲۴.۶) $\beta = kn_s$ $w = 0$ قرار میدهیم، جواب معادله (۲۳.۶) مقدار v قطع مجبور را می‌دهد.

۴.۲.۶ مشخصه پاشندگی موجبرهای با ضریب شکست تیغه‌ای

تجزیه و تحلیل FEM بعدی برای مود TM در موجبرهای تیغه‌ای با ضریب شکست دلخواه تشریح خواهد شد. معادله موج برای مود TM از معادله (۶.۲) داده می‌شود

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n^2} \frac{dH_y}{dx} \right) + \left(k^2 - \frac{\beta^2}{n^2} \right) H_y = 0 \quad (26.6)$$

از شرایط مرزی، پیوستگی و H_y

$$E_z = -\frac{j}{\omega \epsilon_0 n^2} \frac{dH_y}{dx} \quad (27.6)$$

در $x = 0$ و $x = A$ لازم است. با استفاده از نرمالیزه کردن متغیرها، معادلات (۳.۶) و (۶.۶)، مانند مود TE و تبدیل معادله موج (۲۶.۶) و شرط مرزی (۲۷.۶) به یک مسئله فراتابع، فراتابعی به صورت زیر خواهیم داشت.

$$I[R] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_s^2}{n^2(\rho)} \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 d\rho + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_s^2}{n^2(\rho)} [v^2 q(\rho) - w^2] R^2 d\rho \quad (28.6)$$

در این فراتابع، ثابت n_s ضرب شده تا بین مودهای TE و TM سازگاری داشته باشند. با جایگزینی توزیع میدان گسسته (۱۲.۶) در فراتابع و اعمال شرایط ایستائی، معادله پاشندگی برای مود TM به دست می‌آید. عناصر ماتریس C برای مود TM کمی با عناصر برای مود TE متفاوت است. اما اگر از نمادهای زیر استفاده کنیم:

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & TE \\ n_s^2/n^2(\rho_i) & TM \end{cases} \quad (29.6)$$

$$\eta_{s0} = \begin{cases} 1 & TE \\ n_s^2/n_0^2 & TM \end{cases} \quad (29.6b)$$

عناصر ماتریس برای مودهای TE و TM بصورت زیر بیان می‌شود

$$c_{0,0} = \eta_0 - (3q_0 + q_1) \frac{v^2}{12} \delta^2 + \frac{w^2}{3} \delta^2 + \eta_{s0} w_0 \delta \quad (30.6)$$

$$\begin{aligned} c_{i,i} &= (\eta_{i-1} + \eta_i) - (q_{i-1}\eta_{i-1} + 3q_i\eta_i + 3q_i\eta_i + q_{i+1}\eta_i) \frac{v^*}{12} \delta^* \\ &\quad + (\eta_{i-1} + \eta_i) \frac{w^*}{3} \delta^* \quad (i = 1 - N - 1) \end{aligned} \quad (30.6)$$

$$c_{i,i+1} = c_{i+1,i} - \eta_i - (q_i + q_{i+1})\eta_i \frac{v^*}{12} \delta^* + \eta_i \frac{w^*}{6} \delta^* \quad (i = 0 - N - 1) \quad (30.6)$$

$$c_{N,N} = \eta_{N-1} - (q_{N-1} + 3q_N)\eta_{N-1} \frac{v^*}{12} \delta^* + \eta_{N-1} \frac{w^*}{3} \delta^* + w\delta \quad (30.6)$$

هنگامی که مقدار ویژه β ماتریس C به دست می‌آید، بردارهای ویژه مربوطه R_0, R_1, \dots, R_N توسط عملیات ماتریس محاسبه می‌شود. با این حال، در واقع، مقدار نسبی R_i ($i = 1 - N$) با توجه به، به عنوان مثال، به R_0 ($\neq 0$) به دست آمده و R_0 هنوز مجھول است. وقتی توان نوری P را که توسط مود حمل می‌شود مشخص می‌کنیم، R_0 را می‌توان تعیین کرد. عبور توان در موجبر برای مودهای TE و TM از معادله‌ها (۳۱.۲) و (۳۹.۲) آورده شده است.

$$P = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx \quad \text{Mód TE} \quad (31.6)$$

$$P = \frac{\beta}{2\omega\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} |H_y|^2 dx \quad \text{Mód TM} \quad (31.6)$$

با جایگزینی معادلات (۳۱.۶)، (۳۱.۶) و (۳۹.۶) در (۳۱.۶) و (۳۹.۶)، خواهیم داشت

$$P = P_{core} + P_{clad}, \quad (32.6)$$

$$P_{core} = \frac{C}{\pi} \delta \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i (R_i^* + R_i R_{i+1} + R_{i+1}^*), \quad (33.6)$$

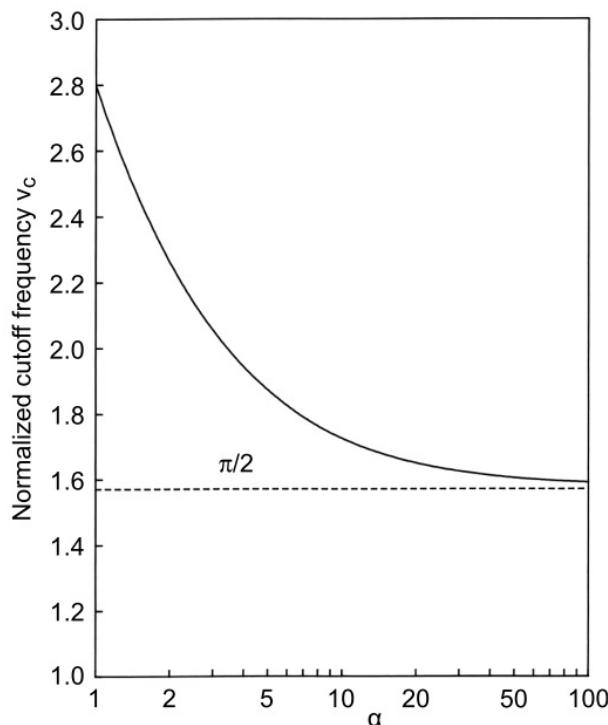
$$P_{clad} = \frac{C}{\pi} \left(\eta_s \frac{R_0^*}{w_0} + \frac{R_N^*}{w} \right) \quad (33.6)$$

که در آن C زیر تعریف می‌شود

$$C = \begin{cases} \frac{\beta a}{2\omega\mu_0} & \text{Mód TE} \\ \frac{\beta a}{2\omega\epsilon_0 n_s^2} & \text{Mód TM} \end{cases} \quad (34.6)$$

در این صورت R_0 از معادله (۳۲.۶) و (۳۳.۶) معلوم باشد، بدست می‌آید. شکل‌های (۳۱.۶)-(۵.۶) نتایج تحلیل‌های FEM را برای مودهای TE برای شکل ضریب شکست توان α که توسط رابطه زیر ارائه شده است نشان می‌دهد.

$$n^*(x) = \begin{cases} n_s^* & (x < 0) \\ n_s^* - (n_s^* - n_s^*) \left| \frac{x}{a} - 1 \right|^\alpha & (0 \leq x \leq 2a) \\ n_s^* & (x > 2a) \end{cases} \quad (35.6)$$



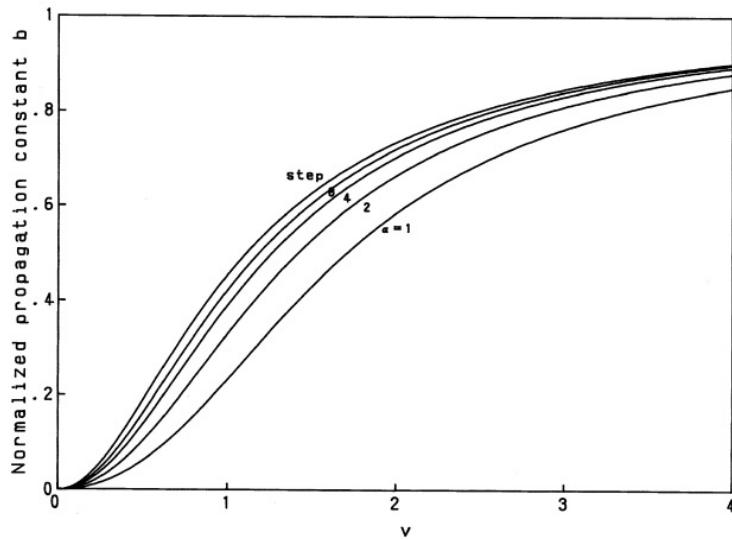
شکل ۳.۶: فرکانس قطع نرمالیزه v_c برای موجبرهای تیغه‌ای با شکل‌های ضریب شکست قدرت α .

در اینجا $2a = A$ پهنه‌ای هسته کامل و تعداد تقسیمات در هسته $N = 100$ است. موجبر تیغه‌ای با ضریب شکست پله‌ای نیز با تنظیم $\alpha = \infty$ در معادله (۳۵.۶) تحلیل می‌شود. شکل‌های (۳.۶)-۵.۶ فرکانس قطعه نرمالیزه v_c ، ثابت انتشار نرمالیزه b را برای مود TE_0 و ضریب افزونگی موجبرهای تیغه‌ای Γ با شکل‌های ضریب شکست -قدرت α را نشان می‌دهند. ضریب افزونگی قدرت، بصورت زیر تعریف می‌شود

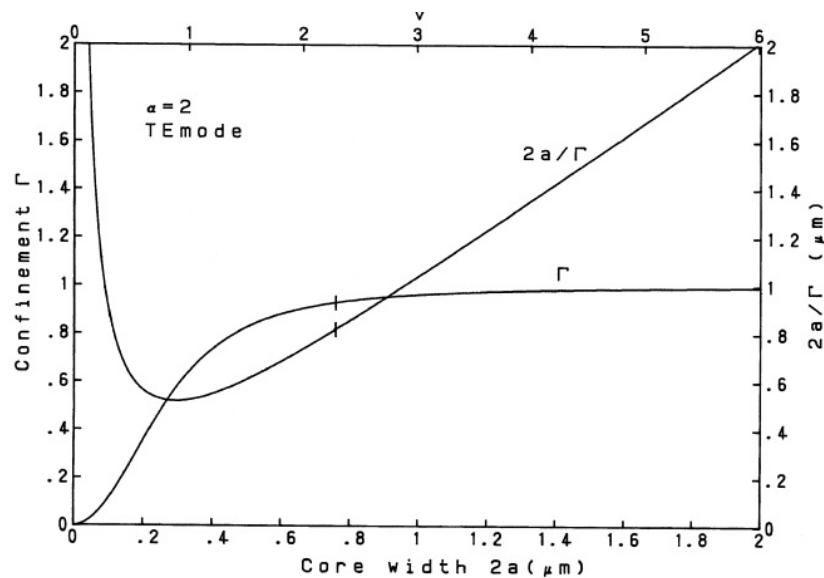
$$\Gamma = \frac{P_{core}}{P} \quad (36.6)$$

و می‌توان با استفاده از معادله‌های (۳۲.۶) و (۳۶.۶) محاسبه کرد. در اینجا $n_1 = ۳/۵$ و $n_s = ۳/۱۷$ را فرض کردیم.

همانطور که در معادله (۲۶.۲) توضیح داده شده است، فرکانس نرمالیزه قطع برای مود TE_0 در موجبر تیغه‌ای با ضریب شکست پله‌ای با $v_{c0} = \pi/2$ داده می‌شود. جدول (۱.۶) وابستگی‌های خطای عددی (%) $\times 100$ را برای فرکانس نرمالیزه قطع نسبت به تعداد تقسیمات هسته N در تحلیل FEM نشان می‌دهد. مشخص است که خطای عددی برای $N > ۳۰$ کمتر از ۵٪ می‌شود.



شکل ۴.۶: ثابت انتشار نرمالیزه b موجبر تیغه‌ای با ضریب شکست توان α



شکل ۵.۶: ضریب افزونگی Γ موجبر تیغه‌ای ضریب شکست توان α .

جدول ۱.۶: خطای عددی در تحلیل FEM نسبت به تعداد تقسیمات N تعداد تقسیمات N مقدار فرکانس قطع v درصد خطا (%)

v	فرکانس قطع	درصد خطا (%)
۰/۴۱۲	۱/۵۷۷۲۶۳۶۹	۱۰
۰/۱۰۳	۱/۵۷۲۴۱۱۷۳	۲۰
۰/۰۴۶	۱/۵۷۱۵۱۴۱۶	۳۰
۰/۰۲۶	۱/۵۷۱۲۰۰۰۹	۴۰
۰/۰۲۶	۱/۱/۵۷۱۲۰۰۹	۵۰
۰/۰۱۶	۱/۱/۵۷۱۰۵۴۷۳	۶۰
۰/۰۱۱	۱/۱/۵۷۰۹۷۵۷۷	۷۰
۰/۰۰۸	۱/۱/۵۷۰۹۲۸۱۶۰	۸۰
۰/۰۰۵	۱/۱/۵۷۰۸۷۶۰۷۷	۹۰
۰/۰۰۴	۱/۱/۵۷۰۸۶۰۹۲۴	۱۰۰

۳.۶ تحلیل روش اجزای محدود برای فیبرهای نوری

۱.۳.۶ فرمول بندی وردشی

در این بخش، تحلیل FEM مود HE_{11} در فیبر نوری با نمایه ضریب شکست دلخواه تشریح خواهد شد. همانطور که در شکل (۶.۶) نشان داده شده است، هسته به عنوان ناحیه $A \leq r \leq n$ تعریف می‌شود، جایی که ضریب شکست ناهمگن است. حداکثر ضریب شکست هسته با n_1 و در روکش n نشان داده می‌شود. معادله موج برای مود HE_{11} با معادله (۱۶۹.۳) داده شده است. با $m = 0$ به صورت

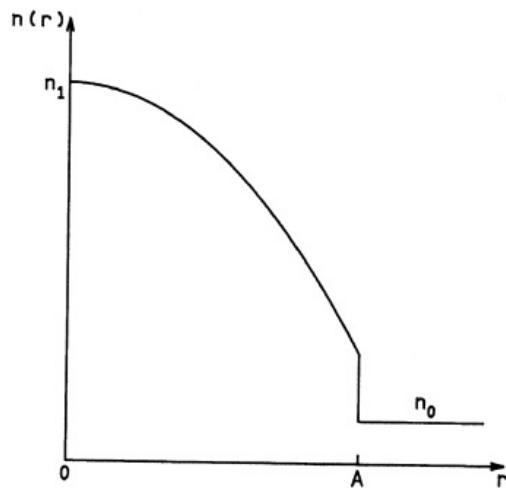
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_t}{dr} \right) + (k^2 n^2 - \beta^2) E_t = 0. \quad (37.6)$$

که در آن (x یا y) میدان الکتریکی عرضی را نشان می‌دهد. شرط مرزی با تداوم E_t و dE_t/dr در $r = A$ داده می‌شود. قبل از تبدیل معادله (۳۷.۶) در بیان فراتابع، پارامترهای موجبر نرمالیزه می‌شوند:

$$\rho = r/a, \quad E_t(r) = R(a), \quad D = A/a. \quad (38.6)$$

با استفاده از این نرمالیزه سازی، معادله موج و شرایط مرزی بازنویسی می‌شوند

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dE_t}{d\rho} \right) + [v^2 q^2(\rho) - w^2] R = 0. \quad (39.6)$$



شکل ۶.۶: توزیع ضریب شکست فیبر نوری ناهمگن

$$\text{د}r \frac{dR(\rho)}{d\rho} = D \quad \text{و} \quad R(\rho) \text{ پیوسته هستند} \quad (40.6)$$

در اینجا عدد موج عرضی w , فرکانس نرمالیزه v و ضریب شکست نرمالیزه $q(\rho)$ بقرار زیر تعریف می‌شوند

$$w = a\sqrt{\beta^2 - k^2 n_0^2} \quad (41.6)$$

$$v = ka\sqrt{n_1^2 - n_0^2} \quad (41.6\text{ب})$$

$$q(\rho) = \frac{n^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_0^2} \quad (41.6\text{ج})$$

حل معادله موج (۳۹.۶) تحت محدودیت شرایط مرزی معادله (۴۰.۶) را می‌توان بصورت حل مسئله وردشی که فراتابع زیر را ایستا^۹ می‌کند:

$$I[R] = - \int_0^\infty \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho + \int_0^\infty [v^2 q(\rho) - w^2] R^2 \rho d\rho. \quad (42.6)$$

درستی معادله (۴۲.۶) شبیه به عملیاتی که در بخش ۱.۲.۶ انجام شد است.

^۹Stationary

۲.۳.۶ گسسته‌سازی فراتابع

به منظور ساده کردن محاسبه فراتابع (۴۲.۶)، شکل میدان در هسته گسسته شده و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$R(\rho) = \begin{cases} \sum_{i=0}^N R_i \phi_i(\rho) & (\circ \leq \rho \leq D) \\ \frac{R_N}{K_{\circ}(wD)} K_{\circ}(w\rho) & (\rho > D) \end{cases} \quad (43.6)$$

که در آن $R_N - R_{\circ}$ مقادیر میدان در نقاط نمونه‌برداری برای باید بدست آیند و K_{\circ} تابع بدل اصلاح شده مرتبه ام است. تعریف‌های $R_i = R(\rho_i)$ و ρ_i همان‌هائی هستند که برای معادلات (۱۳.۶) و (۱۴.۶ج) بکار برده شده، و تابع نمونه‌برداری $\phi_i(\rho)$ در معادله (۱۴.۶) داده شده است. توزیع ضریب شکست نرمالیزه $q(\rho)$ نیز بصورت تابع نمونه‌برداری تقریب زده می‌شود:

$$q(\rho) = \sum_{i=0}^N q_i \phi_i(\rho) \quad (44.6)$$

$$q_i = \frac{n^{\circ}(\rho_i) - n^{\circ}}{n^{\circ} - n^{\circ}} \quad (44.6)$$

با جایگزینی معادله (۴۳.۶) در معادله (۴۲.۶)، فراتابع زیر بدست می‌آید

$$I = - \int_{\circ}^D \left(\frac{dR}{d\rho} \right)^{\circ} \rho d\rho + \int_{\circ}^D [v^{\circ} q(\rho) - w^{\circ}] R^{\circ} \rho d\rho - \frac{w D K_{\circ}(wD)}{K_{\circ}(wD)} R_N^{\circ}. \quad (45.6)$$

۳.۳.۶ معادله پاشندگی بر مبنای شرط ایستائی

شرط ایستائی^{۱۰} فراتابع (۴۵.۶)، با معادله دیفرانسیلی جزئی نسبت به R_i ($i = \circ - N$)، با خواهد بود

$$\begin{aligned} \circ = -\frac{1}{\circ} \frac{\partial I}{\partial R_i} &= - \int_{\circ}^D \frac{dR}{d\rho} \frac{d\phi}{d\rho} \rho d\rho + v^{\circ} \int_{\circ}^D q(\rho) R \phi_i \rho d\rho - w^{\circ} \int_{\circ}^D R \phi_i \rho d\rho \\ &\quad - \frac{w D K_{\circ}(wD)}{K_{\circ}(wD)} R_N \delta_{i,N} \quad (i = \circ - N) \end{aligned} \quad (46.6)$$

^{۱۰} Stationary Condition

جایگزینی معادله (۴۴.۶) در معادله (۴۶.۶) و محاسبه شرایط ایستائی به همان روشی که در بخش ۳.۲.۶ آورده شده، ($N + 1$) معادله همزمان به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_0 \left\{ \frac{1}{2} - (3q_0 + 2q_1) \frac{v^2}{\delta_0} \left(\frac{D}{N} \right)^2 + \frac{w^2}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right\} \\ + R_1 \left\{ -\frac{1}{2} - (2q_0 + 3q_1) \frac{v^2}{\delta_0} \left(\frac{D}{N} \right)^2 + \frac{w^2}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (۴۷.۶)$$

$$\begin{aligned} R_{i-1} \left\{ -\frac{2i-1}{2} - [(\delta i - 3)q_{i-1} + (\delta i - 2)q_i] \frac{v^2}{\delta_0} \left(\frac{D}{N} \right)^2 + \frac{2i-1}{12} w^2 \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right\} \\ + R_i \left\{ 2i - [\delta i - 2)q_{i-1} + 3q_i + (\delta i + 2)q_{i+1}] \frac{v^2}{\delta_0} \left(\frac{D}{N} \right)^2 + \frac{2i}{3} w^2 \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right\} \\ R_{i+1} \left\{ -\frac{2i+1}{2} - [(\delta i + 2)q_i + (\delta i + 3)q_{i+1}] \frac{v^2}{\delta_0} \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{2i+1}{12} w^2 \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right\} = 0. \quad (i = 1 - N - 1) \end{aligned} \quad (۴۷.۶)$$

$$\begin{aligned} R_{N-1} \left\{ -\frac{2N-1}{2} - [(\delta N - 3)q_{N-1} + (\delta N - 2)q_N] \frac{v^2}{\delta_0} \left(\frac{D}{N} \right)^2 + \frac{2N-1}{12} w^2 \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right\} \\ + R_N \left\{ \frac{2N-1}{2} - [\delta N - 2)q_{N-1} + 3(\delta N - 1)q_N] \frac{v^2}{\delta_0} \left(\frac{D}{N} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{4N-1}{12} w^2 \left(\frac{D}{N} \right)^2 + \frac{w D K_1(wD)}{K_0(wD)} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (۴۷.۶)$$

در اینجا باید توجه داشته باشیم که انتگرال‌گیری ضرب توابع نمونه برداری در مختصات استوانه‌ای کمی با مختصات دکارتی متفاوت است. به عنوان مثال، انتگرال $\phi_{i-1}\phi_i$ خواهد بود:

$$\int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \phi_{i-1}\phi_i \rho d\rho = \frac{2i-1}{12} \left(\frac{D}{N} \right)^2$$

برای این که معادله (۴۷.۶) دارای جواب غیر ضروری به جز داشته باشد، باید دترمینان ماتریس C صفر باشد.

$$\det(C) = 0. \quad (۴۸.۶)$$

عناصر ماتریس C بقرار زیر است:

$$c_{0,0} = \frac{1}{2} - (3q_0 + 2q_1) \frac{v^2}{\delta_0} \delta^2 + \frac{w^2}{12} \delta^2 \quad (۴۹.۶)$$

$$c_{i,i} = 2i - [(\delta i - 2)q_{i-1} + 3q_i + (\delta i + 2)q_{i+1}] \frac{v^2}{\delta_0} \delta^2 + \frac{2i}{3} w^2 \delta^2, \quad (i = 1 - N - 1) \quad (۴۹.۶)$$

$$c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = -\frac{2i+1}{2} - [(5i+2)q_i + (5i+3)q_{i+1}] \frac{v^*}{\delta^*} \delta^* + \frac{2i+1}{12} w^* \delta^*, \quad (i = 0 - N - 1) \quad (ج ۴۹.۶)$$

$$c_{N,N} = \frac{2N-1}{2} - [(5N-2)q_{N-1} + 3(5N-1)q_N] \frac{v^*}{\delta^*} \delta^* + \frac{4N-1}{12} w^* \delta^* + \frac{wDK_1(wD)}{K_*(wD)} \quad (د ۴۹.۶)$$

که در آن مرحله گسسته سازی با قدم‌های $\delta = D/N$ داده می‌شود. هنگامی که توزیع ضریب شکست $q(\rho)$ فیبر نوری و فرکانس نرمالیزه w داده می‌شود، ثابت انتشار β (به طور ضمنی در w موجود است) از معادله‌های (۴۸.۶) و (۴۹.۶) محاسبه می‌شود.

۴.۳.۶ شرایط تک مودی در فیبرهای با ضریب شکست تدریجی

به منظور شناخت شرط تک مودی فیبر نوری، مقدار قطع v مود $TE_{01}(LP_{11})$ باید محاسبه شود. معادله موج مود TE با قرار دادن $m = 1$ در معادله (۱۶۹.۳)، خواهیم داشت

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_\theta}{dr} \right) + \left(k^* n^* - \beta^* - \frac{1}{r^*} \right) E_\theta = 0. \quad (۵۰.۶)$$

با اعمال همان نرمالیزاسیون پارامترها مانند آنچه برای معادله (۳۸.۶) و (۴۱.۶) انجام شد و با توجه به این که $w = 0$ در مود قطع است، معادله (۵۰.۶) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR_c}{d\rho} \right) + \left[v^* q(\rho) - \frac{1}{\rho^*} \right] R_c = 0. \quad (۵۱.۶)$$

که در آن $R_c = E_\theta(a\rho)$ است. فراتابعی که معادله (۵۱.۶) را دارد بصورت معادله اولر^{۱۱} زیر بیان می‌شود

$$I[R_c] = - \int_0^\infty \left(\frac{dR_c}{d\rho} \right)^* \rho d\rho + \int_0^\infty \left[v^* q(\rho) - \frac{1}{\rho^*} \right] R_c^* \rho d\rho. \quad (۵۲.۶)$$

هنگامی که شکل میدان الکتریکی R_c را گسسته‌سازی می‌کنیم، باید توجه کنیم که برای مود TE ، در $\rho = 0$ ، $R_c = 0$ است. در این صورت R_c را می‌توان بصورت زیر بیان کرد

$$R_c(\rho) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N R_{c,i} \phi_i(\rho) & (0 \leq \rho \leq D) \\ R_{c,N} \frac{D}{\rho} & (\rho > D) \end{cases} \quad (الف) \quad (ب) \quad (۵۳.۶)$$

علامت جمع در معادله (۵۳.۶)-الف از $i = 1$ شروع می‌شود. از آنجایی که در روکش $q(\rho)$ است، توزیع میدان با ثابت t/ρ همانطور که در معادله (۵۳.۶)-ب نشان داده

^{۱۱}Euler equation

شده، داده می‌شود. جایگزینی معادلات (۵۳.۶) در معادله (۵۲.۶)، فراتابع به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$I = - \int_0^D \left(\frac{dR_c}{d\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \rho d\rho + \int_0^D \left[v^* q(\rho) - \frac{1}{\rho^2} \right] R_c^* \rho d\rho - R_{c,N}^*. \quad (54.6)$$

انتگرال‌گیری فراتابع (۵۴.۶) در هر فاصله گستته‌سازی انجام می‌شود و با اعمال مشتق جزئی نسبت به N معادله هم‌مان بصورت زیر خواهیم داشت

$$R_{c,1} \left\{ -4 \ln 2 + (3q_0 + 3q_1 + 7q_2) \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \right\} + R_{c,2} \left\{ 2 \ln 2 + (7q_1 + 8q_2) \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \right\} = 0. \quad (\bar{5}5.6)$$

$$\begin{aligned} & R_{c,i-1} \left\{ i(i-1) \ln \frac{i}{i-1} + [(\Delta i - 3)q_{i-1} + (\Delta i - 2)q_i] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \right\} \\ & + R_{c,i} \left\{ -(i-1)^2 \ln \frac{i}{i-1} - (i+1)^2 \ln \frac{i+1}{i} \right. \\ & \left. + [(\Delta i - 2)q_{i-1} + 3q_i + (\Delta i + 2)q_{i+1}] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \right\} + R_{c,i+1} \\ & \left\{ i(i+1) \ln \frac{i+1}{i} + [(\Delta i + 2)q_i + (\Delta i + 3)q_{i+1}] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \right\} = 0. \quad (i = 2 - N - 1) \end{aligned} \quad (55.6)$$

$$\begin{aligned} & R_{c,N-1} \left\{ N(N-1) \ln \frac{N}{N-1} + [(\Delta N - 3)q_{N-1} + (\Delta N - 2)q_N] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \right\} \\ & + R_{c,N} \left\{ -2 - (N-1)^2 \ln \frac{N}{N-1} \right. \\ & \left. + [(\Delta N - 2)q_{N-1} + 3(\Delta N - 1)q_N] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \right\} = 0. \end{aligned} \quad (55.6)$$

برای این که معادله (۲۲.۶) بجز برای $R_1 = \dots = R_N = 0$ حل غیر ضروری داشته باشد، دترمینان H باید برابر صفر باشد

$$\det(H) = 0. \quad (56.6)$$

عناصر ماتریس H بصورت زیر بدست می‌آید

$$h_{1,1} = -4 \ln 2 + (3q_0 + 3q_1 + 7q_2) \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \quad (\bar{5}7.6)$$

$$\begin{aligned} h_{i,i} = & -(i-1)^2 \ln \frac{i}{i-1} - (i+1)^2 \ln \frac{i+1}{i} \\ & + [(\Delta i - 2)q_{i-1} + 3q_i + (\Delta i + 2)q_{i+1}] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \quad (i = 2 - N - 1) \end{aligned} \quad (57.6)$$

$$h_{i,i+1} = h_{i+1,i} = i(i+1) \ln \frac{i+1}{i} + [(\Delta i + 2)q_i + (\Delta i + 3)q_{i+1}] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \quad (i = 1 - N - 1) \quad (57.6)$$

$$h_{N,N} = -2 - (N-1)^2 \ln \frac{N}{N-1} + [(\Delta N - 2)q_{N-1} + 3(\Delta N - 1)q_N] \frac{v^*}{\mu^*} \delta^* \quad (57.6)$$

در معادلات قبل، $\delta = D/N$ است. حل معادلات (۵۶.۶) و (۵۷.۶) فرکانس قطع نرمالیزه را برای مود $(TE_{\circ 1}(LP_{11}))$ و شرط تک مود را می‌دهد

۵.۳.۶ رابطه فراتابع برای تاخیر زمانی

هنگامی که $E_t(r)$ حل معادله موج (۳۷.۶) برای مود $HE_{\circ 1}$ است که شرط مرزی را برآورده می‌کند،

$$\beta^* = \frac{-\int_0^\infty \left(\frac{dE_t}{dr}\right)^* r dr + \int_0^\infty k^* n^*(r) E_t^*(r) r dr}{\int_0^\infty E_t^*(r) r dr} \quad (58.6)$$

نسبت به تغییرات کوچک $E_t(r)$ ایستا است. اثبات به همان روشهی که برای معادله (۱۱.۶) نشان داده شده است به دست می‌آید. بر اساس این عبارت فراتابع β ، اولین مشتق از به دست می‌آید [۵] (پیوست-ث)

$$\frac{\beta}{k} \frac{d\beta}{dk} = \frac{\int_0^\infty n^*(r) E_t^*(r) r dr}{\int_0^\infty E_t^*(r) r dr} \quad (59.6)$$

با استفاده از نرمالیزه کردن پارامترها همانطور که در معادله (۳۸.۶) و (۴۱.۶) نشان داده شده و با توجه به $q(r) = 0$ در روکش $D > \rho$ ، به دست می‌آوریم

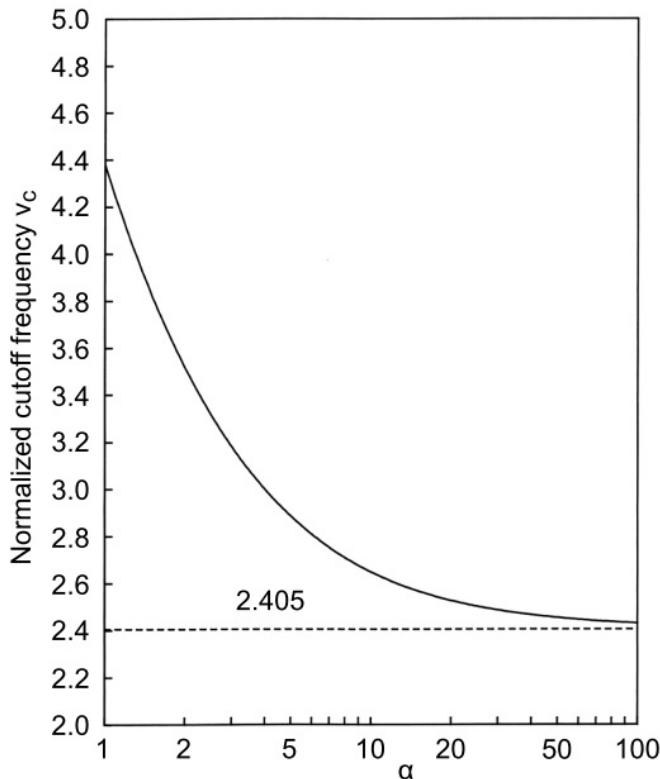
$$\frac{\beta}{k} \frac{d\beta}{dk} = n_\circ^* + (n_\circ^* - n_\circ^*) \frac{\int_0^D q(\rho) R^*(\rho) \rho d\rho}{\int_0^\infty R^*(\rho) \rho d\rho} \quad (60.6)$$

جایگزینی معادلات (۴۰.۶) و (۴۴.۶) در معادله (۴۳.۶) و (۴۵.۶) مخرج و صورت جمله سمت راست معادله (۶۰.۶) میدهد

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R^*(\rho) \rho d\rho &= \frac{\delta^*}{12} \sum_{i=0}^{N-1} [(4i+1)R_i^* + 2(2i+1)R_i R_{i+1}^* + (4i+3)R_{i+1}^* \\ &+ \left[\frac{K_\circ^*(wD)}{K_\circ^*(wD)} - 1 \right] \frac{D^* R_N^*}{4}] \end{aligned} \quad (61.6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^D q(\rho) R^*(\rho) \rho d\rho &= \frac{\delta^*}{12} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\left(3i + \frac{3}{5} \right) q_i R_i^* + \left(i + \frac{2}{5} \right) (2q_i R_{i+1}^* + q_{i+1} R_i) R_i \right. \\ &\quad \left. + \left(i + \frac{3}{5} \right) (q_i R_{i+1}^* + 2q_{i+1} R_i) R_{i+1}^* + \left(2i + \frac{12}{5} \right) q_{i+1} R_{i+1}^* \right] \end{aligned} \quad (62.6)$$

هنگامی که ثابت انتشار β از معادله پاشندگی (۴۸.۶) بدست می‌آید، دامنه میدان الکتریکی در نقاط نمونه برداری R_0, R_1, \dots, R_N به آسانی توسط عملیات ماتریس محاسبه می‌شود. در



شکل ۷.۶: فرکانس قطع نرمالیزه v_c فیبر نوری با شکست توان α

این صورت $R_N, R_1, \dots, R_\infty$ را با معادلات (۶۰.۶)–(۶۲.۶) جایگزین کرده، تا زمان تاخیر،^۷ که توسط

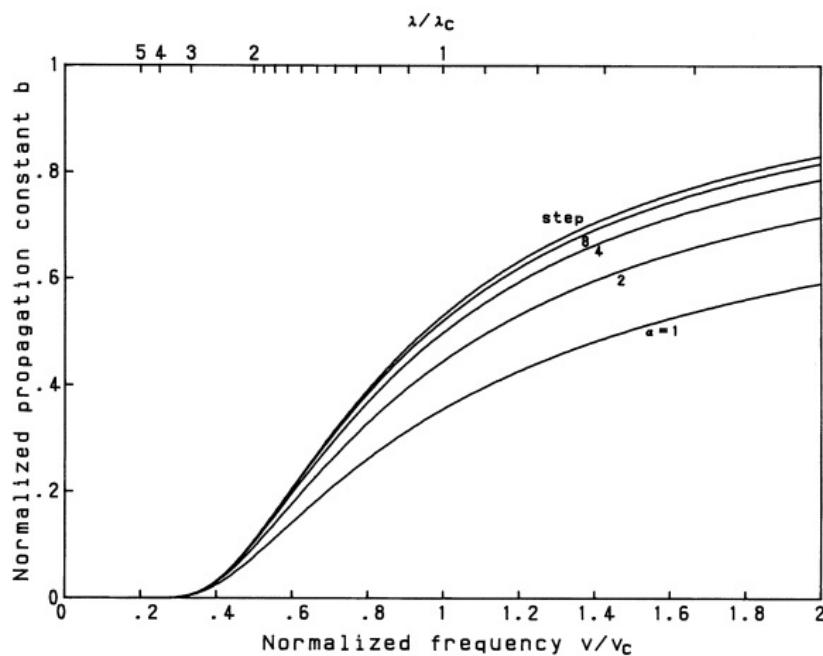
$$\tau = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d\beta}{dk} \quad (63.6)$$

تعریف می‌شود، برای فیبرهای نوری با توزیع ضریب شکست دلخواه به دست آید.

شکل‌های (۷.۶)–(۱۱.۶) نتایج تحلیل‌های FEM را برای فیبرهای نوری با شکست توان α که توسط رابطه زیر است، نشان می‌دهد

$$n^*(r) = \begin{cases} n_1^* - (n_1^* - n_\infty^*) \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha & (0 \leq r \leq a) \\ n_\infty^* & (r > a) \end{cases} \quad (64.6)$$

در اینجا $a (= A)$ شعاع هسته و تعداد تقسیمات در هسته $N = 100$ است. فیبر نوری با ضریب شکست پله‌ای مطابق با $\alpha = \infty$ در معادله (۶۴.۶) است. شکل (۷.۶) فرکانس قطع نرمالیزه v_c را نشان می‌دهد. فرکانس نرمالیزه ضریب شکست درجه دوم ($\alpha = 2$)، $v_c = 2/51816$ است. هر چه α بزرگتر باشد، v_c به فیبر با ضریب شکست پله‌ای $v_c = 2/405$ نزدیک می‌شود. شکل‌های (۸.۶)–(۱۰.۶) به ترتیب ثابت انتشار نرمالیزه (v_b, b) ، تاخیر نرمالیزه $d(vb)/dv$ و پاشندگی نرمالیزه موجبر $d(vb)/dv$ را نشان می‌دهد. هنگامی



شکل ۴.۶: ثابت انتشار نرمالیزه (b) فیبر نوری با شکست ضریب توان α

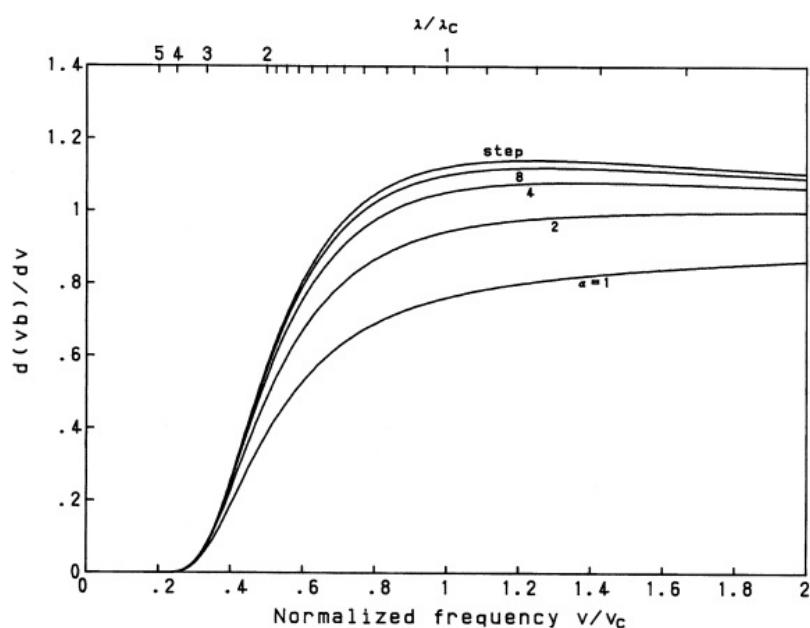
که $d(vb)/dv$ و $d^2(vb)/dv^2$ را برای شکلهای ضریب شکست دلخواه به دست می‌آوریم، می‌توانیم ویژگی‌های پاشندگی رنگی را برای هر نوع فیبر با استفاده از معادله (۱۳۸.۳) و (۱۴۲.۳) محاسبه کنیم.

شکل (۱۱.۶) سطح هسته موثر نسبی A_{eff}/a^2 را برای فیبرهای نوری با ضریب شکست توان α نشان می‌دهد [معادله (۴۲.۵)]. ناحیه هسته موثر A_{eff} در بررسی اثرات غیرخطی در فیبرهای نوری بسیار مهم است.

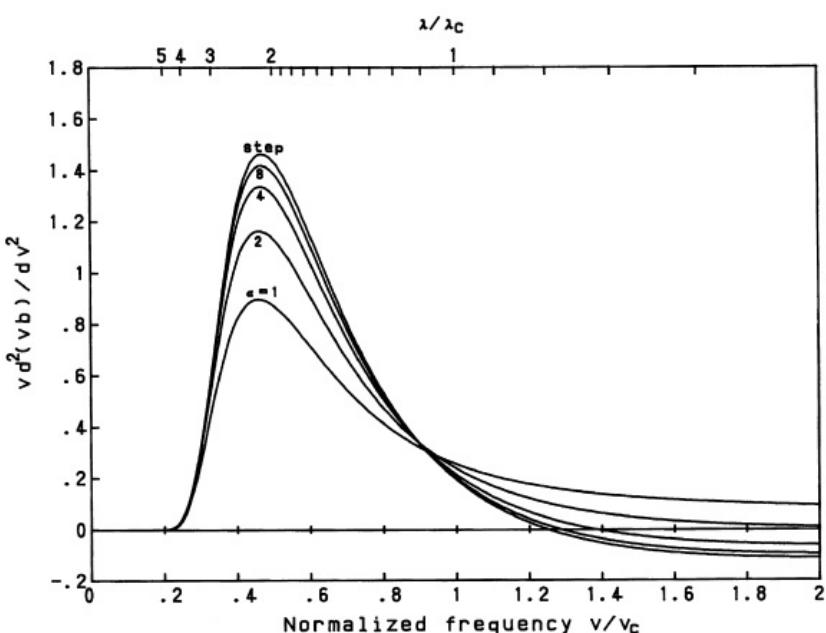
۴.۶ تحلیل روش اجزای محدود موجبرهای مستطیلی

۱.۴.۶ تحلیل اسکالر و برداری

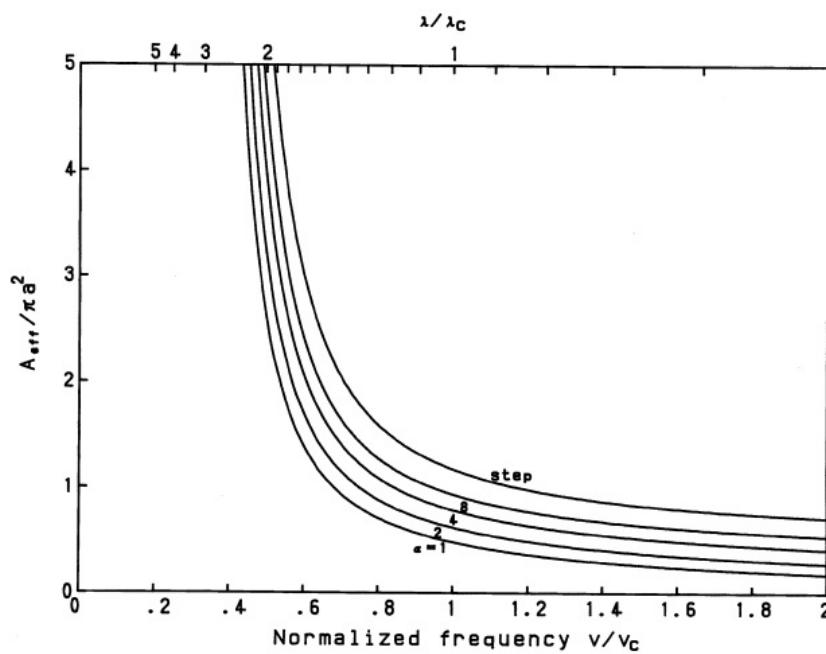
از آنجایی که مودهای هدایت شده در موجبرهای نوری سه بعدی مودهای ترکیبی (هاپرید) هستند، تجزیه و تحلیل موج برداری برای بررسی دقیق ویژگی‌های پاشندگی مورد نیاز است [۶، ۹]. انواع مختلفی از روش‌های اجزای محدود برای چنین تحلیل‌های موج برداری وجود دارد، به عنوان مثال، (۱) FEM با استفاده از مولفه‌های میدان الکترومغناطیسی طولی (E_z و H_z) [۶]، (۲) FEM با استفاده از سه جزء میدان الکتریکی یا مغناطیسی [۷، ۸] و (۳) FEM با استفاده از اجزای میدان الکترومغناطیسی عرضی [۹]. اعتبار و اثربخشی هر یک از این روش‌ها تایید شده است. در تجزیه و تحلیل موج برداری از موجبرهای نوری سه بعدی با استفاده از روش المان محدود، راه حل‌های غیرفیزیکی به نام جواب‌های



شکل ۹.۶: تاخیر نرمالیزه $d(vb)/dv$ فیبر نوری با شکل ضریب شکست توان α



شکل ۱۰.۶: پاشندگی نرمالیزه $vd^2(vb)/dv^2$ فیبر نوری با شکل ضریب شکست توان α

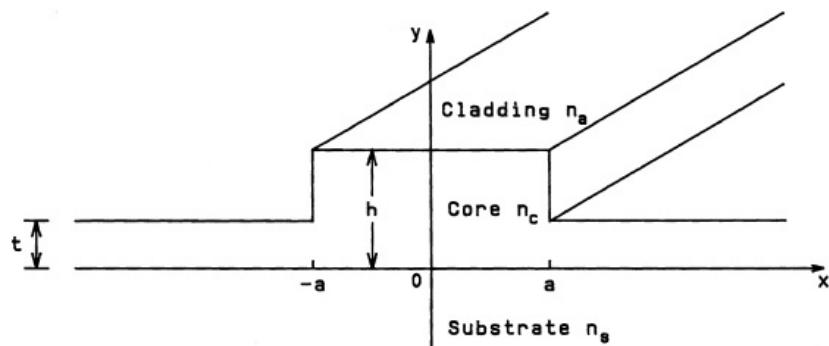


شکل ۱۱.۶: سطح موثر نسبی $A_{eff}/\pi a^2$ فیبر نوری با شکل ضریب شکست توان α

کاذب^{۱۲} تولید می‌شود که از کاربرد FEM جلوگیری می‌کند. دلیل تولید کاذب این است که، اگرچه معادله موج برداری اصلی را برآورده می‌کند، فراتابع شرایط مرزی را در مسئله موجبر اصلی برآورده نمی‌کند. سپس یک عبارت جدید که شرایط مرزی از دست رفته را جبران می‌کند باید در فراتابع اضافه شود تا جواب‌های کاذب حذف شوند. انواع مختلفی از تکنیک‌ها برای حذف جواب‌های کاذب توسعه یافته‌اند^[۷, ۹]. به هر حال، روش‌های ریاضی نسبتاً پیچیده و تکنیک‌های برنامه‌نویسی برای تحلیل‌های FEM موج برداری مورد نیاز است.

در مقابل، جواب‌های کاذب در تحلیل‌های FEM موج اسکالار برای موج‌های مستطیلی سه‌بعدی بر اساس معادلات (۴۰.۲) و (۴۲.۲) و تجزیه و تحلیل FEM فیبرهای نوری با استفاده از معادله (۱۶۹.۳)، ظاهر نمی‌شوند. از آنجائی که اندازه ماتریس برای تحلیل موج اسکالار یک سوم تا دو سوم کوچکتر از آنالیز موج برداری است، حافظه مورد نیاز و زمان CPU (واحد پردازش مرکزی) بسیار کم می‌شود. با مقایسه تحلیل‌های FEM بردار و موج اسکالار، تأیید می‌شود که می‌توان راه حلی با دقت کافی از طریق تحلیل موج اسکالار به دست آورد^[۲].

^{۱۲}Spurious Solutions



شکل ۱۲.۶: موجبر نوری نوع دنده‌ای

۲.۴.۶ رابطه‌بندی فراتابع و گسسته‌سازی در تعداد محدود عناصر در اینجا معادله موج اسکالر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\nabla^2 \phi + [k^2 n^2(x, y) - \beta^2] \phi(x, y) = 0 \quad (65.6)$$

که در آن $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ است. به جای حل مستقیم این معادله، حل معادله موج را می‌توان به عنوان حل مسئله وردشی به دست آورد که فراتابع زیر را ایستا می‌کند:

$$I[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - (k^2 n^2 - \beta^2) \phi^2 \right] dx dy \quad (66.6)$$

اثبات این رابطه در پیوست ج آورده شده است.

در محاسبه فراتابع، کل منطقه مسئله به سطوح‌های کوچک (به‌طور کلی مثلثی) تقسیم می‌شود. میدان الکتریکی $(x, y) \phi$ در هر ناحیه با توابع تحلیلی ساده تقریب زده و در نقاط گرهای (راس‌های مثلث‌ها) بهم متصل می‌شود. در اینجا موجبر دنده‌ای سه بعدی را که در شکل (۱۲.۶) نشان داده شده است در نظر می‌گیریم و ویژگی‌های انتشار را با استفاده از روش اجزای محدود تحلیل می‌کنیم. از آنجایی که هندسه موجبر نسبت به محور y متقارن است، کافی است تنها سمت راست شکل (۱۲.۶) را با در نظر گرفتن تقارن زوایا فرد توزیع میدان الکتریکی تحلیل کنیم. شکل (۱۳.۶) نمونه‌ای از تقسیم عناصر را نشان می‌دهد. تعداد عناصر مثلثی $N = 280$ و تعداد گره‌ها $n = 165$ است. مرزهای در جهت x مثبت و جهت x منفی y را مرزهای ساختگی^{۱۳} می‌نامند که باید به اندازه‌ای از مرکز هسته دور باشند که دامنه میدان الکترومغناطیسی تقریباً صفر شود. البته، قبل از انجام تحلیل FEM، توزیع میدان الکترومغناطیسی را نمی‌دانیم، بنابراین نمی‌توانیم مرز ساختگی را به‌طور کامل تعیین کنیم. بنابراین، ابتدا مرز ساختگی را به اندازه کافی از مرکز هسته دور می‌کنیم و مقدار ویژه (ثابت انتشار) و توزیع میدان الکترومغناطیسی را محاسبه می‌کنیم. سپس با تغییر عرض مرز ساختگی همگرایی مقدار ویژه را بررسی می‌کنیم. اگر

^{۱۳}Fictitious Boundaries

حتی با تغییر عرض مرز ساختگی، تغییر مقدار ویژه کوچک شود، مرز مناسب در نظر گرفته می‌شود.

میدان الکتریکی $\phi(x, y)$ در عنصر $e = 1 - N$ با تابع خطی x و y تقریب زده می‌شود:

$$\phi(x, y) = p_{\circ}^e + p_{\backslash}^e + p_{\checkmark}^e \quad (67.6)$$

که در آن $p_{\circ}^e, p_{\backslash}^e, p_{\checkmark}^e$ ثابت هستند. نقاط گره در اطراف عنصر e را با i, j و k همان طور که در شکل (۱۴.۶) مشخص شده، علامت گذاری کرده و مختصات آنها را با (x_m, y_m) ($m = i, j, k$) نشان می‌دهیم. در اینجا، شماره گذاری نقاط گره‌ها را در جهت عکس عقربه‌های ساعت قرار می‌دهیم. برای مثال نقاط گره برای عنصر $e = 50^\circ$ در شکل (۱۳.۶) برابر $i = 27$ و $j = 28$ و $k = 29$ است. دامنه میدان الکتریکی در هر نقطه گره بصورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} \phi_i = \phi(x_i, y_i) = p_{\circ}^e + p_{\backslash}^e x_i + p_{\checkmark}^e y_i \\ \phi_j = \phi(x_j, y_j) = p_{\circ}^e + p_{\backslash}^e x_j + p_{\checkmark}^e y_j \\ \phi_k = \phi(x_k, y_k) = p_{\circ}^e + p_{\backslash}^e x_k + p_{\checkmark}^e y_k \end{cases} \quad (68.6)$$

ضرایب بسط $p_{\circ}^e, p_{\backslash}^e$ و p_{\checkmark}^e میدان الکتریکی عنصر e بقرار زیر داده می‌شوند

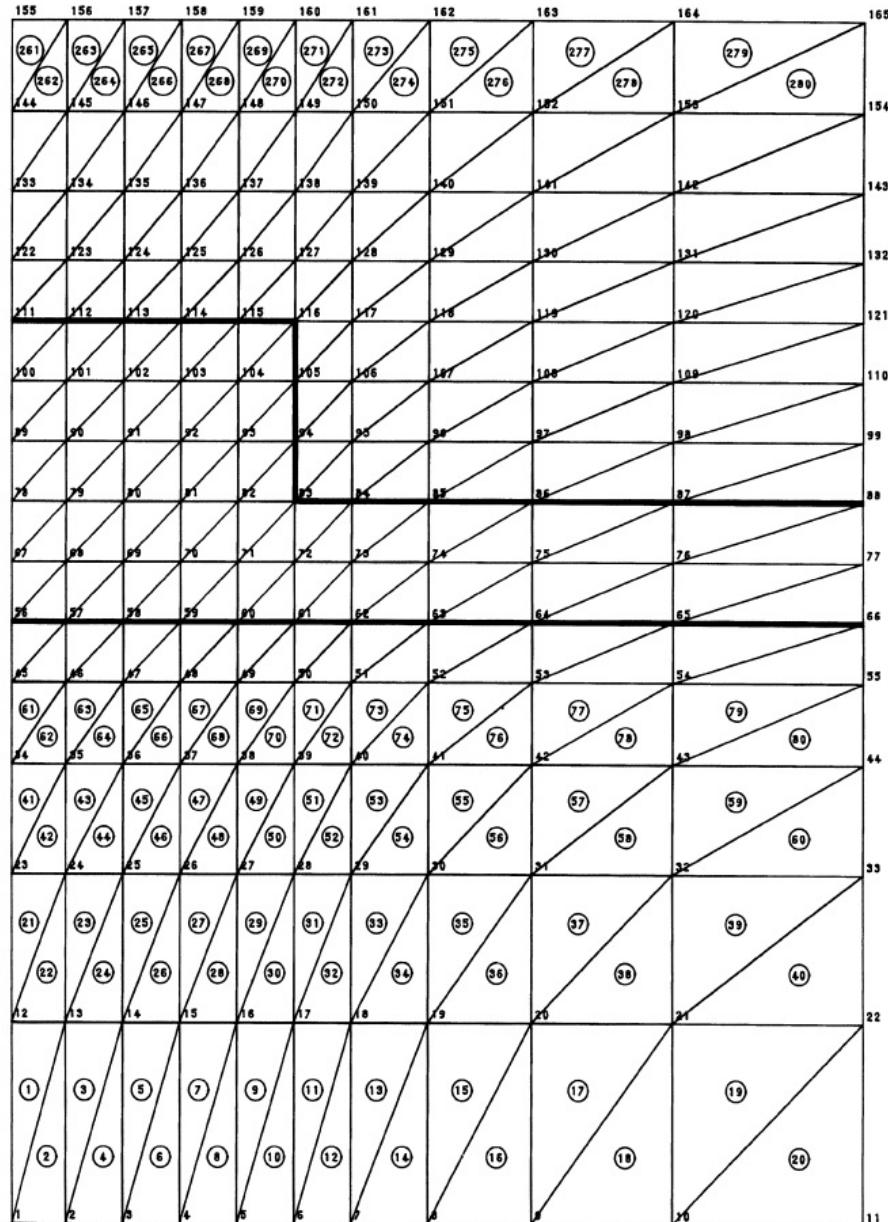
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{\circ}^e \\ p_{\backslash}^e \\ p_{\checkmark}^e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\tau s_e} \begin{bmatrix} (x_j y_k - x_k y_j) & (x_k y_i - x_i y_k) & (x_i y_j - x_j y_i) \\ (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (69.6)$$

در اینجا s_e سطح عنصر e است

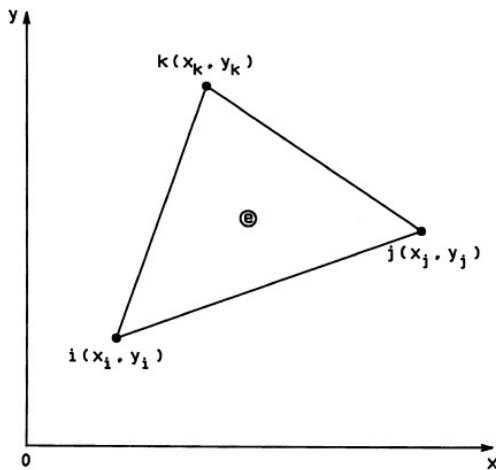
$$s_e = \frac{1}{\sqrt{3}} [(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)] \quad (70.6)$$

وقتی فراتابع معادله (۶۶.۶) را محاسبه می‌کنیم، انتگرال را برای هر عنصر تقسیم می‌کنیم. در این صورت انتگرال در عنصر e ام با استفاده از معادله (۶۹.۶) و (۶۸.۶) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I^e &= \frac{1}{2} \iint_e \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - (k^2 n^2 - \beta^2) \phi^2 \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_e [(p_{\circ}^e)^2 + (p_{\backslash}^e)^2 - (k^2 n^2 - \beta^2)(p_{\circ}^e + p_{\backslash}^e x + p_{\checkmark}^e y)^2] dx dy \\ &= \frac{1}{2} [(p_{\circ}^e)^2 + (p_{\backslash}^e)^2] s_e - \frac{(k^2 n^2 - \beta^2) s_e}{2} \left\{ (p_{\circ}^e)^2 + 2 p_{\circ}^e p_{\backslash}^e x_G^e + 2 p_{\circ}^e p_{\checkmark}^e y_G^e \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} (p_{\backslash}^e)^2 \left[(x_G^e)^2 + \frac{1}{9} (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) \right] + \frac{3}{4} p_{\backslash}^e p_{\checkmark}^e \left[x_G^e y_G^e + \frac{1}{9} (x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} (p_{\checkmark}^e)^2 \left[(y_G^e)^2 + \frac{1}{9} (y_i^2 + y_j^2 + y_k^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (71.6)$$



شکل ۱۳.۶: نمونه‌ای از تقسیم عناصر در تحلیل موجبر FEM. تعداد عناصر مثلثی $N = 28^{\circ}$ و تعداد گره‌ها $n = 165$ است.

شکل ۱۴.۶: مختصات عنصر e

در اینجا $\iint_e dxdy$ نمایشگر انتگرال‌گیری در روی عنصر e است. برای استخراج معادله (۷۱.۶) از فرمول‌های سطح زیر استفاده شده است.

$$\iint_e dxdy = s_e \quad (۷۲.۶)$$

$$\iint_e x dxdy = x_G^e s_e \quad (۷۲.۶)$$

$$\iint_e y dxdy = y_G^e s_e \quad (۷۲.۶)$$

$$\iint_e x^2 dxdy = \frac{1}{4}(x_G^e)^2 s_e + \frac{s_e}{12}(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) \quad (۷۲.۶)$$

$$\iint_e xy dxdy = \frac{1}{4}x_G^e y_G^e s_e + \frac{s_e}{12}(x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k) \quad (۷۲.۶)$$

$$\iint_e y^2 dxdy = \frac{1}{4}(y_G^e)^2 s_e + \frac{s_e}{12}(y_i^2 + y_j^2 + y_k^2) \quad (۷۲.۶)$$

در اینجا x_G^e و y_G^e نمایشگر مرکز میانه (مرکز ثقل) عنصر e است که از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} x_G^e = \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k) \\ y_G^e = \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_k). \end{cases} \quad (۷۳.۶)$$

با جایگزینی معادله (۷۱.۶) در (۶۹.۶) و با استفاده از فرمول‌های انتگرال سطح (۷۲.۶)،

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 I^e &= \frac{1}{\lambda s_e} [(y_j - y_k)\phi_i + (y_k - y_i)\phi_j + (y_i - y_j)\phi_k] \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda s_e} [(x_j - x_k)\phi_i + (x_k - x_i)\phi_j + (x_i - x_j)\phi_k] \\
 &\quad - \frac{(k^r n_e^r - \beta^r) s_e}{12} (\phi_i^r + \phi_j^r + \phi_k^r + \phi_i \phi_j + \phi_j \phi_k + \phi_k \phi_i)
 \end{aligned} \tag{74.6}$$

در این صورت فراتابع معادله (66.6) خواهد بود

$$I = \sum_{e=1}^N I^e \tag{75.6}$$

۳.۴.۶ معادله پاشندگی بر مبنای شرط ایستائی

به منظور بیان فراتابع بصورت نرمالیزه و بشکل بدون دیمانسیون، پارامترهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$n_1 = \max[n(x, y)] \tag{76.6}$$

$$v = ka \sqrt{n_1^r - n_s^r} \tag{76.6}$$

$$q^e = \frac{n_e^r - n_s^r}{n_1^r - n_s^r} \tag{76.6}$$

$$b = \frac{(\beta/k)^r - n_s^r}{n_1^r - n_s^r} \tag{76.6}$$

$$\begin{cases} \xi_m = x_m/a \\ \eta_m = y_m/a \end{cases} \tag{77.6}$$

$$\sigma_e = \frac{s_e}{a^r} = \frac{1}{\zeta} [(\xi_j - \xi_i)(\eta_k - \eta_i) - (\xi_k - \xi_i)(\eta_j - \eta_i)] \tag{78.6}$$

- که در آن n_s نمایشگر ضریب شکست در زیرلایه است. با جایگزینی معادلات (76.6) در معادله (75.6)، فراتابع بصورت زیر بیان می‌شود (78.6)

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{e=1}^N \left\{ \frac{1}{\zeta \sigma_e} [(\eta_j - \eta_k)\phi_i + (\eta_k - \eta_i)\phi_j + (\eta_i - \eta_j)\phi_k] \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\zeta \sigma_e} [(\xi_k - \xi_j)\phi_i + (\xi_i - \xi_k)\phi_j + (\xi_j - \xi_i)\phi_k] \\
 &\quad \left. - \frac{v^r (q^e - b) \sigma_e}{\zeta} (\phi_i^r + \phi_j^r + \phi_k^r + \phi_i \phi_j + \phi_j \phi_k + \phi_k \phi_i) \right\}
 \end{aligned} \tag{79.6}$$

شرط ایستائی معادله (۷۹.۶) با مشتق جزئی گرفتن نسبت به $\phi_l (l = 1 - n)$ بدست می‌آید:

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_l} = \sum_{m=1}^n c_{lm} \phi_m = 0 \quad (l = 1 - n) \quad (۸۰.۶)$$

معادلات همزمان بصورت ماتریس زیر بیان می‌شود

$$C\{\phi\} = \{0\} \quad (۸۱.۶)$$

که در آن C یک ماتریس $n \times n$ و $\{\phi\}$ و $\{0\}$ به ترتیب بردار ستون توزیع میدان الکتریکی $\phi_1 - \phi_n$ و بردار صفر هستند. برای معادله (۸۱.۶) برای داشتن یک جواب غیر ضروری بجز $\{0\}$ ، دترمینان ماتریس C باید صفر باشد. به این معنا که،

$$\det(C) = 0 \quad (۸۲.۶)$$

معادله (۸۲.۶) معادله پاشندگی (مقدار ویژه) برای معادله موج (۶۵.۶) است. مقدار ویژه معادله (۸۲.۶) ثابت انتشار β را می‌دهد و بردار ستونی $\{\phi\}$ توزیع میدان الکتریکی مربوط به β است.

محاسبه عنصر ماتریس $c_{lm} (l, m = 1 - n)$ در روش‌های عملی FEM بسیار مهم است. محاسبه c_{lm} در هر عنصر به شرح زیر انجام می‌شود. ترکیب معادلات (۷۵.۶) و (۸۰.۶)، شرط ایستائی را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_l} = 2 \sum_{e=1}^N \frac{\partial I^e}{\partial \phi_i} = 2 \sum_{e=1}^N \left(\frac{\partial I^e}{\partial \phi_i} + \frac{\partial I^e}{\partial \phi_j} + \frac{\partial I^e}{\partial \phi_k} \right) \quad (۸۳.۶)$$

مشتق جزئی فراتابع عنصر I^e با توجه به (۷۴.۶) مقدار غیرصفری فقط برای مقادیر ϕ_i, ϕ_j و ϕ_k دارد، زیرا I^e با معادله (۷۴.۶) داده می‌شود. به عنوان مثال، نقاط گره عنصر $i (= ۵۰)$ در شکل (۱۳.۶) در $e (= ۵۰)$ و $k = ۳۹$ است. در این صورت، از میان n جملات دیفرانسیل در عنصر (۷۴.۶)، فقط $\partial I^e / \partial \phi_{۲۷}, \partial I^e / \partial \phi_{۲۸}$ و $\partial I^e / \partial \phi_{۳۹}$ غیر صفر باقی می‌مانند. با جمع بندی این عبارات، معادله خطی مرتبه h همزمان ساخته می‌شود. در مرحله بعد، مهم است که اجزای موجود در ماتریس عنصر e را در جزء ماتریس جهانی c_{lm} قرار دهیم. عبارات تفصیلی مشتق جزئی در معادله (۸۳.۶) عبارتند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e}{\partial \phi_i} &= \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_j - \eta_k)^{\dagger} + (\xi_k - \xi_j)^{\dagger}] - \frac{2}{\gamma} v^{\dagger} (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_i \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_j - \eta_k)(\eta_k - \eta_i) + (\xi_k - \xi_j)(\xi_i - \xi_k)] - \frac{1}{\gamma} v^{\dagger} (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_j \quad (۸۴.۶) \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_j - \eta_k)(\eta_i - \eta_j) + (\xi_k - \xi_j)(\xi_j - \xi_i)] - \frac{1}{\gamma} v^{\dagger} (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^e}{\partial \phi_j} &= \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_k - \eta_i)^\gamma + (\xi_i - \xi_k)^\gamma] - \frac{1}{\gamma} v^\gamma (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_j \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_k - \eta_i)(\eta_i - \eta_j) + (\xi_i - \xi_k)(\xi_j - \xi_i)] - \frac{1}{\gamma} v^\gamma (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_k \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_k - \eta_i)(\eta_j - \eta_k) + (\xi_i - \xi_k)(\xi_k - \xi_j)] - \frac{1}{\gamma} v^\gamma (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_i \\
&\quad \text{(۸۴.۶ب)} \\
\frac{\partial I^e}{\partial \phi_k} &= \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_i - \eta_j)^\gamma + (\xi_j - \xi_i)^\gamma] - \frac{1}{\gamma} v^\gamma (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_k \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_i - \eta_j)(\eta_j - \eta_k) + (\xi_j - \xi_i)(\xi_k - \xi_j)] - \frac{1}{\gamma} v^\gamma (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_i \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{\sigma_e} [(\eta_i - \eta_j)(\eta_k - \eta_i) + (\xi_j - \xi_i)(\xi_i - \xi_k)] - \frac{1}{\gamma} v^\gamma (q^e - b) \sigma_e \right\} \phi_j \\
&\quad \text{(۸۴.۶ج)}
\end{aligned}$$

در اینجا لازم به تذکر است که، وقتی فراتابع I نسبت به ϕ_l مشتق گرفته می‌شود، مولفه c_{lm} ماتریس جهانی C ضرایب ϕ_m هستند. در این صورت مشاهده می‌شود که ضرایب $c_{i,k}$ و ϕ_k در معادله (۸۴.۶) بترتیب شامل $c_{i,i}$ و $c_{i,j}$ خواهد بود. بهمین نحو، برای ϕ_i و ϕ_k در معادله (۸۴.۶ب) شامل $c_{k,k}$ و $c_{k,j}$ خواهد بود. در مثال اول برای عنصر $(e=50)$ که در آن $k=39$ و $g=28$ است، ضرایب $\phi_i (= \phi_{27})$ و $\phi_j (= \phi_{28})$ بترتیب شامل $c_{27,27}$ و $c_{27,28}$ خواهند بود. جمع تمام شرکت کنندگان هر عنصر، مولفه c_{lm} ماتریس جهانی C را برای محاسبه مهیا می‌کنند. از معادله (۸۴.۶) مشاهده می‌شود که مولفه $c_{i,j}$ ماتریس جهانی C را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$c_{i,j} = p_{i,j} - b \cdot r_{i,j} \quad (85.6)$$

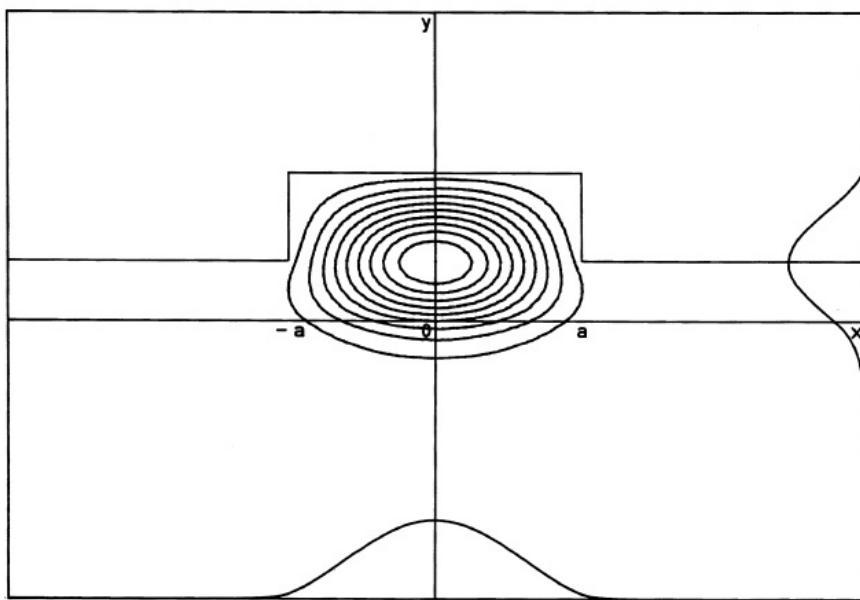
که در آن $p_{i,j}$ و $r_{i,j}$ ثابت و مستقل از مقادیر ویژه b (ثابت انتشار نرمالیزه) هستند. در این صورت معادله (۸۱.۶) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathbf{C}\{\phi\} = (\mathbf{P} - b\mathbf{R})\{\phi\} = \{\circ\} \quad (86.6)$$

که در آن \mathbf{P} و \mathbf{R} ماتریس‌های $n \times n$ هستند که مولفه‌های آنها $p_{i,j}$ و $r_{i,j}$ مibاشد. معادله (۸۶.۶) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathbf{A}\{\phi\} = b\{\phi\} \quad (87.6)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \quad (88.6)$$



شکل ۱۵.۶: توزیع شدت نور مود E_{11} در موجبر دنده‌ای. $n_a = 1/\mu m$, $n_s = ۲/۱۷$, $n_c = ۳/۳۸$, $\lambda = ۱/۵۵\mu m$, $t = ۰/۳\mu m$, $h = ۰/۷۵\mu m$

معادله (۱۵.۶) یک مسئله مقادیر ویژه ماتریس A است. مقادیر ویژه b و توزیع بردار ستونی میدان الکتریکی $\{\phi\}$ را براحتی می‌توان با استفاده از روش ژاکوبی^{۱۴} و روش هاووس‌هولدرز^{۱۵} محاسبه کرد.^{۱۶}

شکل (۱۵.۶) توزیع شدت نور مود E_{11} (مودهای E_{11}^x و E_{11}^y) را نمی‌توان از طریق تحلیل موج اسکالر تعیین کرد) در موجبر دنده‌ای شکل (۱۲.۶) را نشان می‌دهد. پارامترهای موجبر $\lambda = ۱/۵۵\mu m$, $t = ۰/۳\mu m$, $h = ۰/۷۵\mu m$, $n_a = ۱/\mu m$, $n_s = ۲/۱۷$, $n_c = ۳/۳۸$ و $x = ۰ - ۴/۵\mu m$ در نظر گرفته شده است. تعداد ۲۰ قسمت برای پوشش $a = ۰ - ۲\mu m$ و $y = ۰ - h = ۰ - ۷/۵\mu m$ برای $x = a - ۷/۵\mu m$ و $y = h - ۳\mu m$ است. در این صورت کل تعداد عناصر مثلثی شکل $N = ۴۰۰۰$ و تعداد گره‌ها 2091 عدد است. ضریب شکست موثر مود E_{11} برابر $\beta/k = ۳/۲۷۱۱۹۸$ است.

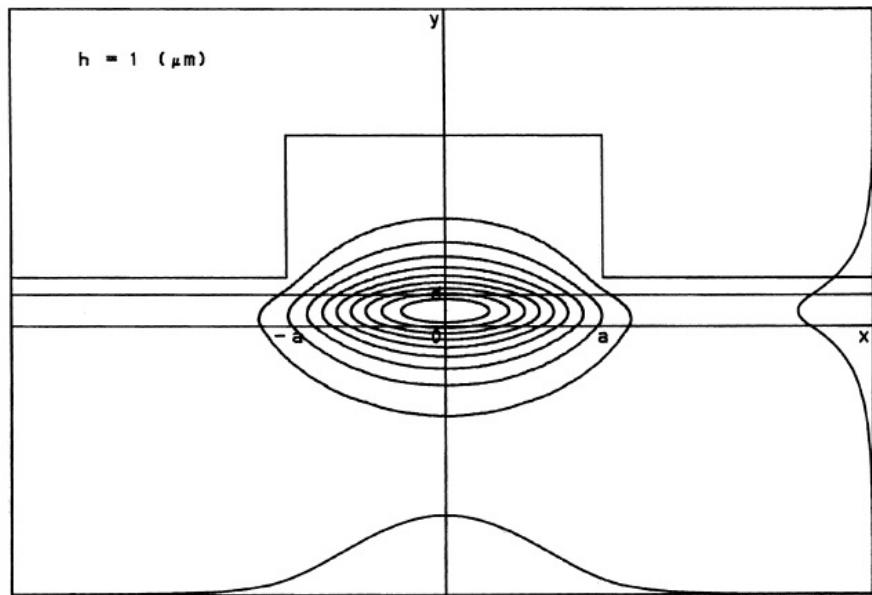
شکل (۱۶.۶) توزیع شدت نور مود E_{11} در موجبر پشته‌ای^{۱۷} (دنده‌ای بار شده^{۱۸}) (تعاریف پارامترهای موجبر در شکل ۱۵.۲ نشان داده شده است)، مصور گشته است. موجبر پشته‌ای در ساخت لیزرهای نیمه‌هادی و موجبرهای نیمه‌هادی غیرفعال بسیار مهم هستند. پارامترهای موجبر عبارتند از $n_r = n_s$, $n_s = ۲/۱۷$, $n_c = ۳/۳۸$, $2a = ۲\mu m$, $t = ۰/۱\mu m$, $h = ۱\mu m$, $d = ۰/۲\mu m$. ضریب شکست موثر مود E_{11} برابر

^{۱۴}Jacobi's method

^{۱۵}Householder's method

^{۱۶}Ridge waveguides

^{۱۷}Rib-loaded



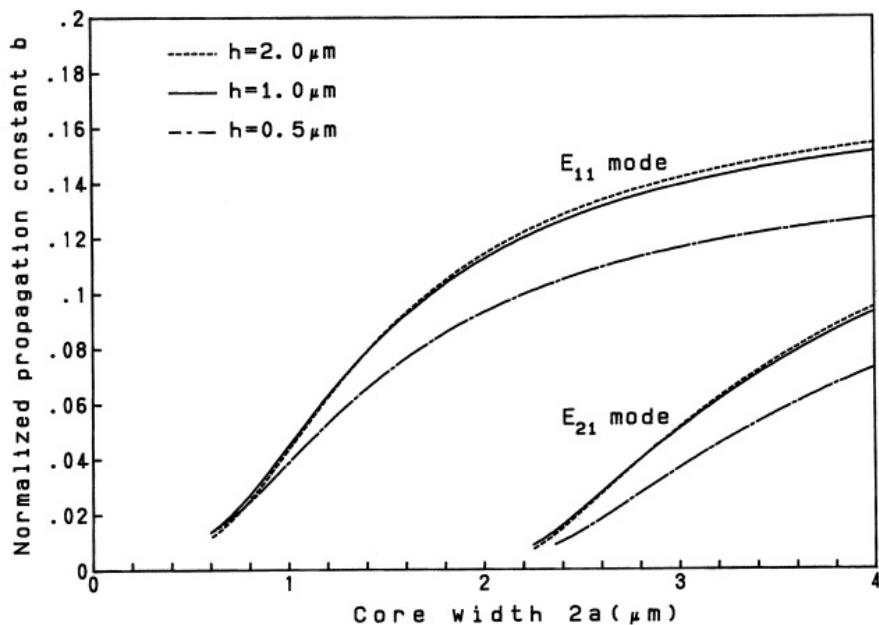
شکل ۱۶.۶: توزیع شدت نوری مود E_{11} در موجبر پشتیاهی. $2a = n_r = n_s \quad n_s = ۳/۱۷ \quad n_c = ۳/۲۸$
 $\lambda = ۱,۵۵\mu m \quad d = ۰,۱\mu m \quad h = ۱\mu m \quad d = ۰,۲\mu m, ۲\mu m$

$$\beta/k = ۳,۱۹۴۳۴۶$$

شکل (۱۷.۶) ویژگی‌های پاشندگی موجبرهای پشتیاهی را با توجه به عرض هسته $2a$ نشان می‌دهد. پارامتر محاسبه ارتفاع دنده در مرکز است. از شرایط قطع برای مود E_{11} مشاهده می‌شود که موجبر فعلی برای عرض هسته کوچکتر از $2a \approx ۲/۲\mu m$ به تک مود تبدیل می‌شود. همچنین مشخص است که ویژگی‌های پاشندگی تقریباً از ارتفاع مرکز دنده h زمانی که $h > ۱\mu m$ است مستقل می‌شود. از آنجایی که موجبر پشتیاهی برای $\infty \rightarrow ۲a$ به موجبر تیغه‌ای سه لایه نزدیک می‌شود، زمانی که عرض هسته $2a$ بزرگ می‌شود، ثابت انتشار عادی b به تدریج به $b = ۰,۱۷۵۱$ نزدیک می‌شود.

شکل (۱۸.۶)-الف و (۱۸.۶)-ب ویژگی‌های پاشندگی موجبرهای نوری مستطیلی را با عرض هسته $2a$ و ضخامت هسته $2d$ در شکل (۱۸.۶)-الف و (۱۸.۶)-ب در شکل (۱۹.۶) نشان می‌دهد. شکل‌های (۱۹.۶)-الف و (۱۹.۶)-ب ویژگی‌های پاشندگی و ضریب افزونگی شدن نور لیزر نیمه‌هادی برپایه InP را با ضخامت هسته $2d = ۰,۱۵\mu m$ در طول موج $\lambda = ۱,۵۵\mu m$ نشان می‌دهند. میله‌های عمودی در شکل (۱۹.۶)-ب شرایط تک مودی را برای عرض هسته $2a$ نشان می‌دهد، که با شرایط قطع E_{11} در شکل (۱۹.۶)-الف تعیین می‌شود. در شکل (۱۹.۶)-ب، سطح s هسته به ضریب افزونگی Γ که نیز تقسیم شده و در تعیین جریان آستانه لیزر مهم است، نشان داده شده است. $s/\Gamma = ۰,۶۹۳$ حداقل مقدار $s/\Gamma = ۰,۸۲\mu m$ را در $2a = ۰,۸\mu m$ دارد.

سپس، تجزیه و تحلیل FEM از راندمان کوپلینگ بین یک موجبر مستطیلی و فیبر نوری توضیح داده خواهد شد. در اینجا فرض می‌کنیم که پارامترهای موجبر فیبر نوری



شکل ۱۷.۶: مشخصه پاشندگی موجبر پشته‌ای

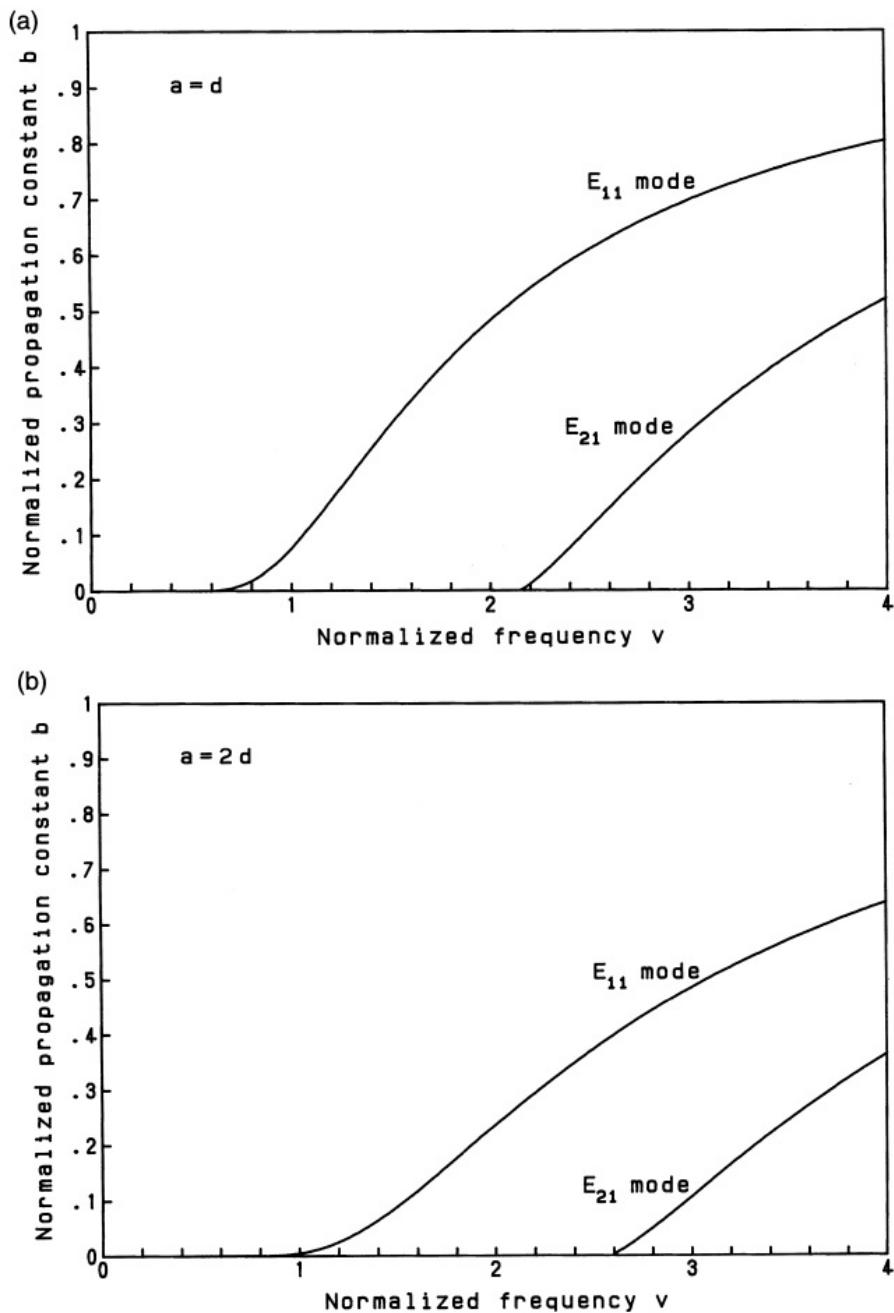
در قطر هسته $2a = 9\mu m$ و اختلاف نسبی ضریب شکست $\Delta = 0/3\%$ ثابت است. در موجبر مستطیلی، ضخامت هسته و اختلاف ضریب شکست در $2d = 6\mu m$ و $\Delta = 0/75\%$ ثابت شده است. در این صورت وابستگی ضریب تزویج به عرض هسته $2a$ در $2a = 1/55\mu m$ محاسبه می‌شود. ضریب تزویج بین فیبر نوری و موجبر مستطیلی شکل توسط رابطه زیر به دست می‌آید [۱۱].

$$C_{AMP} = \frac{\iint f(x, y)g(x, y)dxdy}{\left[\iint f^2 dxdy \right]^{1/2} \left[\iint g^2 dxdy \right]^{1/2}} \quad (۸۹.۶)$$

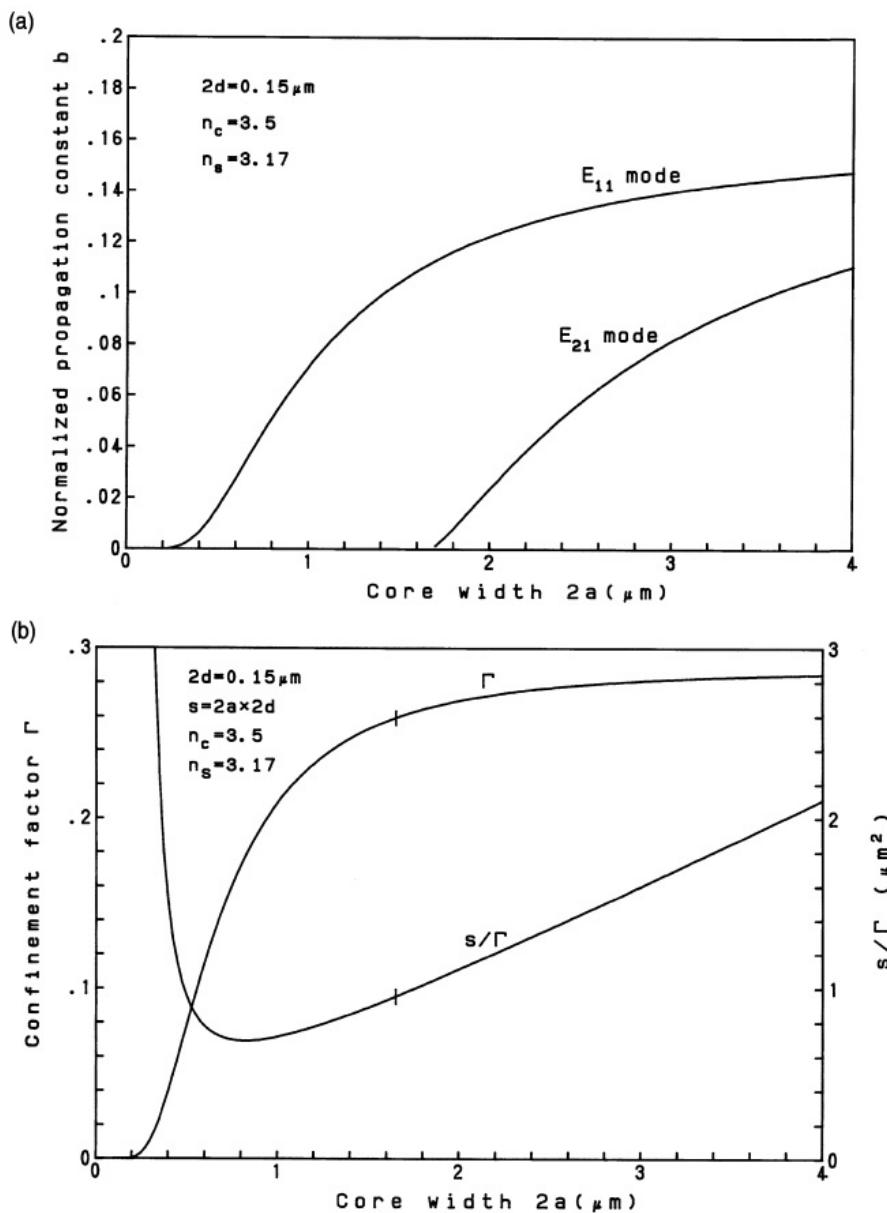
که در آن $f(x, y)$ و $g(x, y)$ به ترتیب توزیع میدان الکتریکی فیبر نوری و موجبر مستطیلی را نشان می‌دهند. در این صورت ضریب کوپلینگ توان با رابطه زیر داده می‌شود

$$c = |C_{AMP}|^2 \quad (۹۰.۶)$$

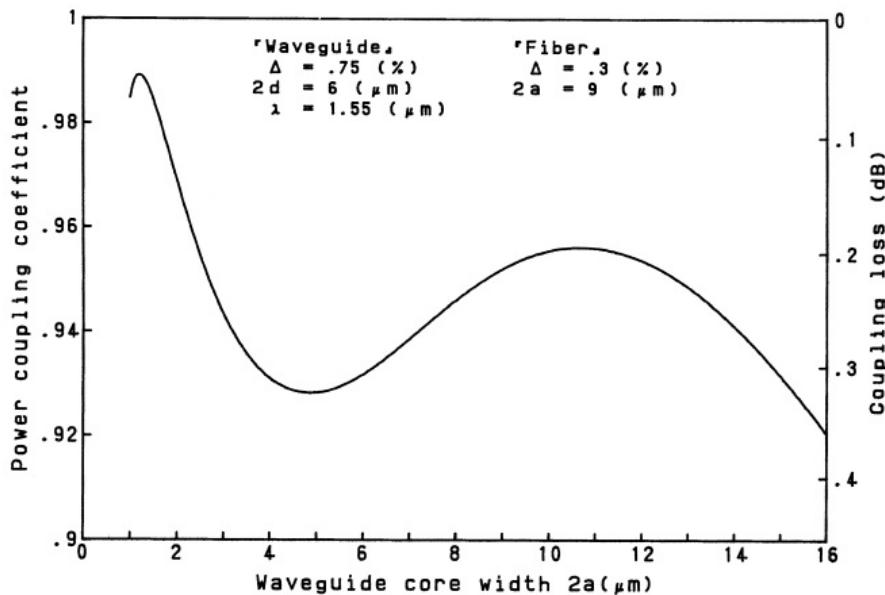
شکل (۲۰.۶) ضریب کوپلینگ توان بین موجبر مستطیلی و فیبر نوری را هنگامی که عرض هسته موجبر $2a$ تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. ضریب تزویج یک موجبر مربعی با پهنهای هسته $2a = 6\mu m$ ($0/31 dB$) تلفات است، زیرا عدم تطبیق میدان‌های بین موجبر و فیبر نسبتاً بزرگ است. دو عرض هسته وجود دارد که در آنها ضریب کوپلینگ دارای حداکثر محلی است. یکی $2a = 1/2\mu m$ و دیگری $2a = 1/7\mu m$ است.



شکل ۱۸.۶: مشخصه پاشندگی موجبرهای نوری مستطیلی با عرض هسته $2a$ و ضخامت هسته a .
الف: $a = d$ **ب**: $a = 2d$



شکل ۱۹.۶: ویژگی‌های پاشندگی در لیزر نیمه‌هادی بر پایه InP برای ضخامت هسته $2d = ۰.۱۵\mu\text{m}$ ، $n_c = ۳/۵$ ، $n_s = ۳/۱۷$ و $\lambda = ۱/۵۵\mu\text{m}$ در طول موج برای ضریب افزونگی نور Γ و سطح هسته تقسیم بر Γ در لیزر نیمه‌هادی بر پایه InP برای ضخامت هسته $2d = ۰.۱۵\mu\text{m}$ ، $n_c = ۳/۵$ ، $n_s = ۳/۱۷$ و $\lambda = ۱/۵۵\mu\text{m}$ در طول موج



شکل ۲۰.۶: ضریب کوپلینگ توان بین یک موجبر مستطیلی و فیبر نوری زمانی که عرض هسته موجبر $2a$ متغیر است.

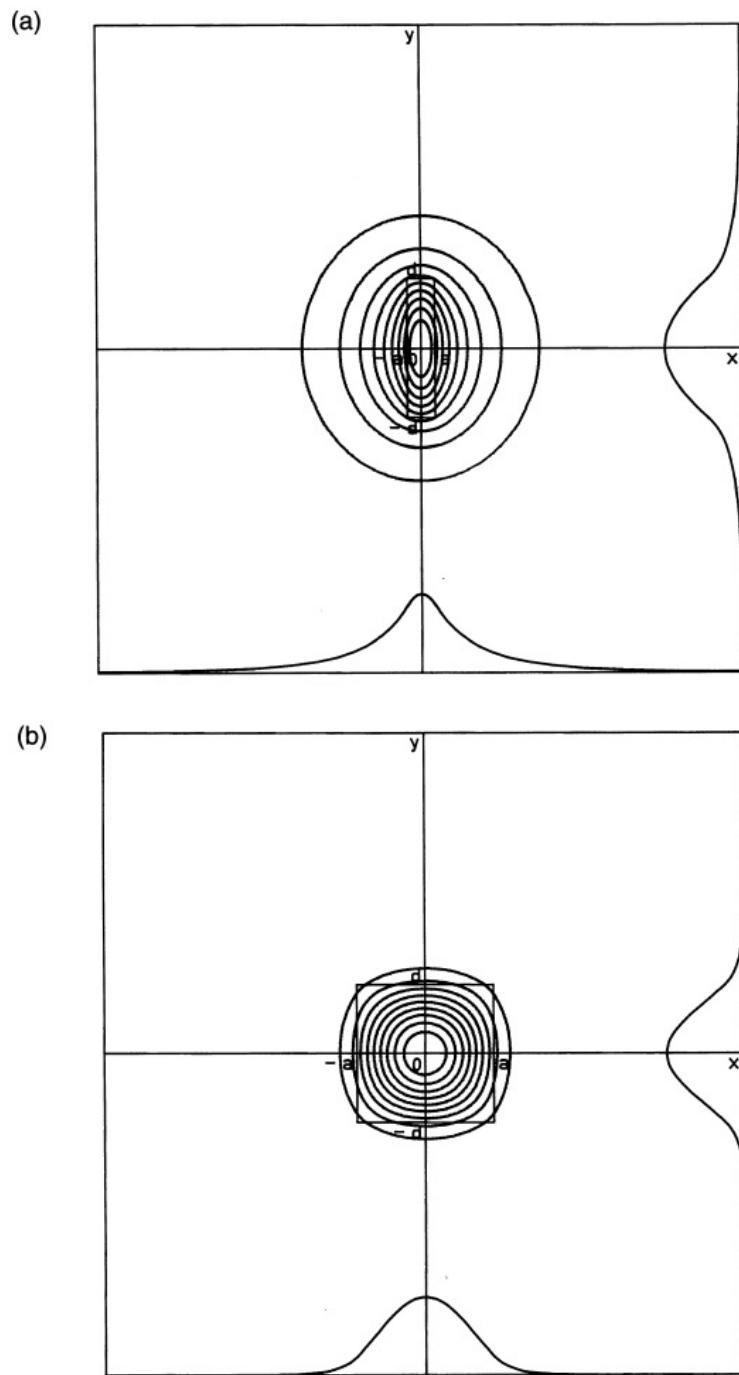
ضرایب تزویج $c = 0.956(-0.05dB)$ در $2a = 1.2\mu m$ و $c = 0.989(-0.05dB)$ در $2a = 1.07\mu m$ است. بالاترین ضریب اتصال زمانی به دست می آید که عرض هسته $2a$ بسیار کوچک باشد. شکل (۲۱.۶) توزیع شدت نور موجبرهای مستطیلی را برای (الف) (ب)، (ج) و (د) نشان می دهد. شکل (۲۱.۶)-د توزیع شدت فیبر نوری با قطر هسته $2a = 9\mu m$ متر و اختلاف ضریب شکست $\Delta = 0.3\%$ را نشان می دهد. از آنجایی که مشخصات میدان الکتریکی تقریباً به طور یکنواخت در شکل (۲۱.۶)-الف منبسط شده است، بالاترین ضریب تزویج با فیبر نوری به دست آمده است.

۵.۶ تحلیل تنش موجبرهای نوری

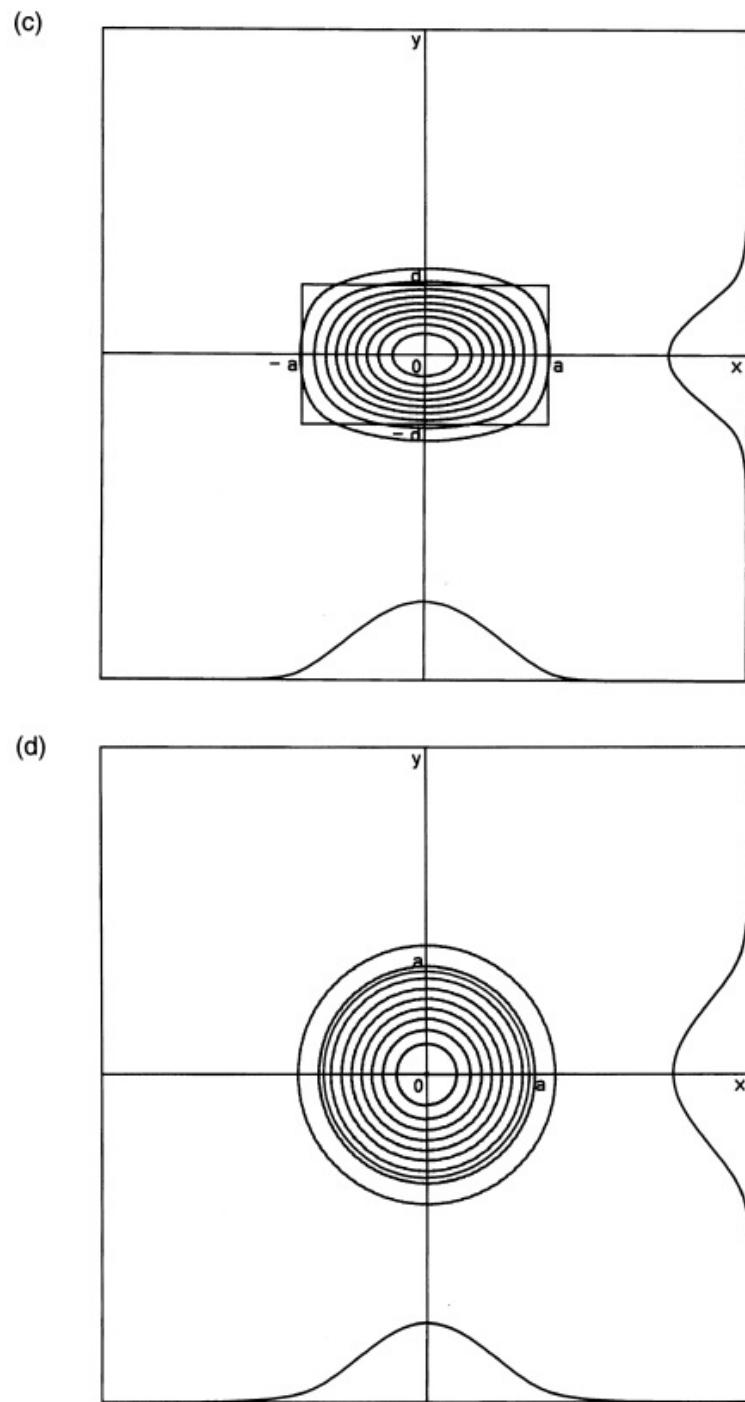
۱.۵.۶ اصل انرژی

روش اجزای محدود در ابتدا برای تحلیل سختی^{۱۸} هواپیما توسعه داده شد [۱۲]. در نتیجه، تحلیل تنش معمول ترین کاربرد FEM است. به طور کلی، به خوبی شناخته شده است که وقتی تنش حرارتی و/یا نیروی خارجی به بدن وارد می شود، کل انرژی پتانسیل II باید حداقل باشد. به عبارت دیگر، توزیع کرنشی (کشنشی) که در واقع بین تمام صور کرنش ممکن ایجاد می شود، توزیعی است که انرژی پتانسیل را به حداقل می رساند. این

^{۱۸}Stiffness



شکل ۲۱.۶: توزیع شدت نور موجبرهای مستطیلی برای (الف) $2a = 1/2 \mu m$



شکل ۲۱.۶: ادامه: (ب) و (ج) (د) توزیع شدت در یک فیبر نوری با هسته $2a = 6\mu m$ و تفاوت ضریب شکست $\Delta = 0.3\%$.

اصل انرژی [۱] نامیده می‌شود. کل انرژی پتانسیل II بدن خواهد بود

$$II = U - V = \text{کار خارجی} - \text{کار داخلی} \quad (۹۱.۶)$$

که در آن U و V بیانگر انرژی کرنش و کار انجام شده توسط نیروی خارجی است؛ در واقع انرژی کرنش U کاری است که در طی فرآیند آزادسازی کرنش ایجاد می‌شود. یعنی U مجموع { نیروی محلی ایجاد شده تحت شرایط کرنش معین } \times { تغییر مکان توسط نیرو } است. از آنجایی که انرژی پتانسیل با مقدار کار انجام شده توسط نیروی خارجی کاهش می‌یابد، V در معادله (۹۱.۶) دارای علامت منفی است.
تحلیل تنش بر اساس اصل انرژی را **روش انرژی** می‌نامند. مراحل محاسبه روش انرژی به شرح زیر خلاصه می‌شود:

۱. انرژی پتانسیل II را بر حسب جابجایی توسط کرنش و نیروی خارجی بیان کنید.
۲. با استفاده از توابع تحلیلی و مقادیر در نقاط گره، جابجایی و نیروی خارجی در داخل یا به سمت هر عنصر را تقریب بزنید.
۳. اعمال اصل انرژی به II ؛ یعنی II را نسبت به جابجایی مشتق‌گیری جزئی کنید و یک معادله متعادل (معادله همزمان خطی) بدست آورید.
۴. معادله همزمان را حل کرده و جابجایی را در هر نقطه گره تعیین کنید.
۵. کرنش و تنش در هر عنصر را با استفاده از جابجایی در گره‌های اطراف عنصر محاسبه کنید.

۲.۵.۶ کشش و تنش سطحی

به طور کلی، تحلیل FEM سه بعدی به حافظه کامپیوتری بزرگ و زمان طولانی CPU برای محاسبه نیاز دارد. بنابراین، تحلیل دو بعدی اغلب برای جسم سه بعدی با استفاده از یک فرض مناسب برای هر مسئله استفاده می‌شود.

ابتدا، اجازه دهید جسمی را در نظر بگیریم که در امتداد جهت محور z خود در مقایسه با سطح مقطع آن طولانی است، مانند فیبرهای نوری و موجبرها. در این حالت، کرنش در بدن در امتداد جهت محور z ، ϵ_z صفر در نظر گرفته می‌شود، مگر در هر دو انتهای در این صورت می‌توانیم فرض کنیم

$$\epsilon_z = 0 \quad (۹۲.۶)$$

تحلیل تنش بر اساس این فرض مسئله کرنش سطحی نامیده می‌شود. از سوی دیگر، هنگامی که یک جسم در مقایسه با سطح مقطع خود کاملاً نازک است، مولفه تنش σ_z عمود به صفحه صفر در نظر گرفته می‌شود. به این معنا که،

$$\sigma_z = 0 \quad (۹۳.۶)$$

تحلیل تنش بر اساس این فرض، مسئله تنش سطحی نامیده می‌شود.
در بخش‌های بعدی، تحلیل تنش موجبرهای نوری بر اساس تقریب کرنش سطحی توضیح داده خواهد شد.

۳.۵.۶ معادلات پایه برای تنش و کرنش جابجایی

تعاریف پارامترها در تحلیل تنش عبارتند از:

جابجایی‌ها به ترتیب در جهت محور x و y :

کرنش‌های اصلی به ترتیب در امتداد جهت محور x ، y و z :

کرنش برشی در صفحه $y - x$:

تنش اصلی به ترتیب در امتداد جهت محور x ، y و z :

تنش برشی در صفحه $x - y$:

نیروهای خارجی به ترتیب در جهت محور x و y :

E و ν : به ترتیب مدول یانگ^{۱۹} و نسبت پواسون^{۲۰}

رابطه بین جابجایی و کرنش توسط مرجع [۱۳] ارائه شده است.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۹۴.۶)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۹۴.۶)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۹۴.۶)$$

بعد، رابطه بین تنش و کرنش به طور کلی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T, \quad (۹۵.۶)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T, \quad (۹۵.۶)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T, \quad (۹۵.۶)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (۹۶.۶)$$

^{۱۹}Young's modulus

^{۲۰}Poisson's ratio

که در آن G, α و ΔT به ترتیب نشان دهنده مدول برشی، ضریب انبساط حرارتی و تغییر دما (منفی برای سرمایش) هستند. جایگزینی معادله (۹۲.۶) در معادله (۹۵.۶)، رابطه بین تنش و کرنش در مسئله کرنش سطحی به صورت زیر داده شده است

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-2\nu)} \quad (۹۷.۶)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-2\nu)} \quad (۹۷.۶\text{ب})$$

$$\sigma_z = \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \alpha E \Delta T \quad (۹۷.۶\text{ج})$$

در مقابل، رابطه بین تنش و کرنش در مسئله تنش سطحی با جایگزینی معادله (۹۳.۶) در (۹۵.۶) داده می‌شود

$$\varepsilon_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-\nu)} \quad (۹۸.۶)$$

$$\varepsilon_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-\nu)} \quad (۹۸.۶\text{ب})$$

در بخش بعدی، تحلیل تنش FEM برای موجبر نوری دنده‌ای، که تحلیل موجبر آن قبلًا در بخش ۲.۴.۶ نشان داده شده است، بر اساس مسئله کرنش سطحی توضیح داده خواهد شد.

۴.۵.۶ رابطه‌بندی انرژی پتانسیل کل

مولفه‌های تنش، کرنش اولیه ناشی از کرنش حرارتی به صورت برداری بیان می‌شوند.

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (۹۹.۶)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (۱۰۰.۶)$$

$$\{\varepsilon_0\} = (1+\nu)\alpha \Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۱۰۱.۶)$$

رابطه بین تنش و کرنش در معادلات (۹۶.۶) و (۹۷.۶) مسئله کرنش سطحی با استفاده از معادله (۹۹.۶)-(۱۰۱.۶) بیان شده است:

$$\{\sigma\} = \mathbf{D}[\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}] \quad (۱۰۲.۶)$$

که در آن D یک ماتریس 3×3 بصورت زیر است

$$D = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (10.3.6)$$

انرژی کرنش در واحد طول بدست می‌آید

$$(\text{کرنش اولیه}) - (\text{کرنش}) [\cdot (\text{تنش})] dxdy = \frac{1}{2}$$

در این صورت U با استفاده از معادلات (۹۹.۶) - (۱۰۱.۶) :

$$U = \frac{1}{2} \iint \{\sigma\}^t [\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}] dxdy \quad (10.4.6)$$

که در آن $\{\sigma\}^t = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]$ یک بردار سطحی σ است. کل ساختار موجبر دندنی (در واقع نیمی از ساختار، از آنجایی که نسبت به محور y متقارن است) به عنصر کوچک تقسیم می‌شود، همانطور که در شکل (۲۲.۶) نشان داده شده است، و انتگرال معادله (۱۰۴.۶) در هر عنصر انجام می‌شود. برخلاف تجزیه و تحلیل FEM در بخش ۲.۴.۶، مرز واقعی بدنه در تجزیه و تحلیل تنش به مرز تبدیل می‌شود، زیرا کرنش و تنش بهمنطقه هوا نفوذ نمی‌کند. تعداد عناصر مثلثی در شکل (۲۲.۶)، $N = 250$ و تعداد گره‌ها $n = 150$ است. کرنش $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در امتداد جهت محور x و y در e امین ($e = 1 - N$) عنصر باتابع خطی x و y تقریب‌زده می‌شود:

$$\begin{cases} u(x, y) = p_{\circ}^e + p_{\backslash}^e x + p_{\checkmark}^e y \\ v(x, y) = q_{\circ}^e + q_{\backslash}^e x + q_{\checkmark}^e y \end{cases} \quad (10.5.6)$$

که در آن $p_{\circ}^e, p_{\backslash}^e, p_{\checkmark}^e, q_{\circ}^e, q_{\backslash}^e, q_{\checkmark}^e$ ثابت هستند. تعداد نقاط گره در عنصر e در شکل (۱۴.۶) با i, j و k مشخص و مختصات نقاط گره بصورت (x_m, y_m) ($m = i, j, k$) بیان شده است. با فرض این که جابجایی نقاط گره i, j و k عنصر e بصورت (u_i, v_i) , (u_j, v_j) و (u_k, v_k) داده شود، ضرایب بسط $p_{\circ}^e, p_{\backslash}^e, p_{\checkmark}^e, q_{\circ}^e, q_{\backslash}^e, q_{\checkmark}^e$ بدست می‌آیند:

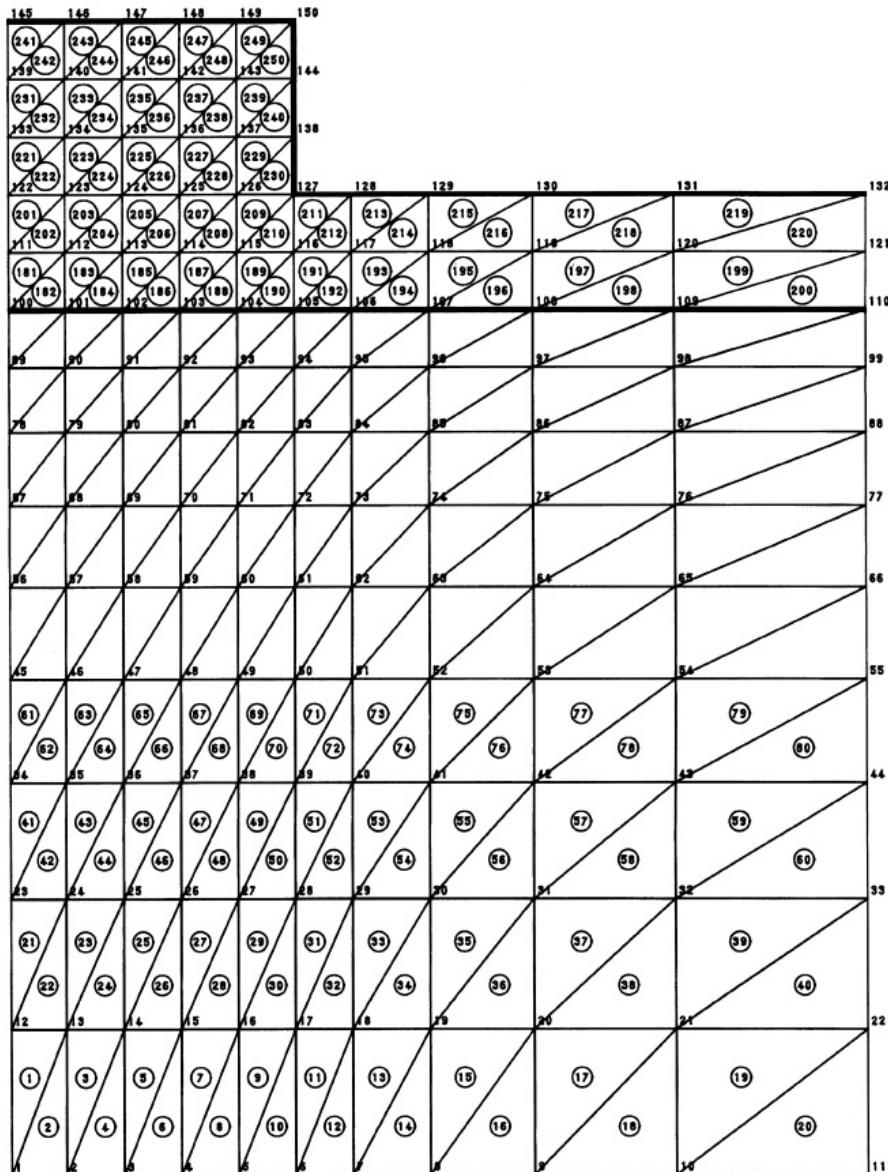
$$\begin{bmatrix} p_{\circ}^e \\ p_{\backslash}^e \\ p_{\checkmark}^e \end{bmatrix} = \mathbf{C}_e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \quad (10.6.6)$$

$$\begin{bmatrix} q_{\circ}^e \\ q_{\backslash}^e \\ q_{\checkmark}^e \end{bmatrix} = \mathbf{C}_e \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix} \quad (10.6.6\text{b})$$

^{۲۱}Transpose

روش اجزای محدود

۳۲۴



شکل ۲۲.۶: نمونه‌ای از تقسیم عناصر در تحلیل تنش FEM. تعداد عناصر مثلثی $N = 25$ و تعداد گره‌ها $n = 15$ است.

در اینجا، ماتریس عنصر C_e بصورت زیر است

$$C_e = \frac{1}{2s_e} \begin{bmatrix} (x_j y_k - x_k y_j) & (x_k y_i - x_i y_k) & (x_i y_j - x_j y_i) \\ (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix} \quad (107.6)$$

سطح مقطع s_e با معادله (۷۰.۶) داده می‌شود. با جایگزینی معادله (۱۰۵.۶) و (۱۰۶.۶) در معادله (۹۴.۶) مولفه‌های عنصر e بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2s_e} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & \circ & (y_k - y_i) & \circ & (i_k - y_j) & \circ \\ \circ & (x_k - x_j) & \circ & (x_i - x_k) & \circ & (x_j - x_i) \\ (x_k - x_j) & (y_j - y_k) & (x_i - x_k) & (y_k - y_i) & (x_j - x_i) & (y_i - y_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (108.6)$$

این را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\{\varepsilon^e\} = B_e \{d^e\} \quad (109.6)$$

که در آن B_e یک ماتریس 6×6 عنصری در سمت راست معادله (۱۰۸.۶) و $\{d^e\}$ یک بردار سطحی 6×1 که نمایشگر جابجایی است. انرژی کرنشی عنصر e بصورت زیر بیان می‌شود

$$U^e = \frac{1}{2} \iint \{\sigma^e\}^t [\{\varepsilon^e\} - \{\varepsilon_0^e\}] dx dy \quad (110.6)$$

که در آن $\{\sigma^e\}^t$ با استفاده از معادلات (۱۰۲.۶) و (۱۰۹.۶) بیان می‌شود

$$\{\sigma^e\}^t = [\{\varepsilon^e\} - \{\varepsilon_0^e\}^t] D_e = [\{d^e\}^t B_e^t - \{\varepsilon_0^e\}^t] D_e \quad (111.6)$$

در معادله بالا، ماتریس عناصر D_e ممکن است برای هر عنصر متفاوت باشد، زیرا مدول یانگ و نسبت پوآسون در ناحیه هسته و زیر لایه مختلف است. با جایگزینی (۱۱۱.۶) و (۱۱۰.۶) می‌دهد

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \iint_e [\{d^e\}^t B_e^t D_e B_e \{d^e\} - 2\{d^e\}^t t B_e^t D_e \{\varepsilon_0^e\} + \{\varepsilon_0^e\}^t D_e \{\varepsilon_0^e\}] dx dy \\ &= \frac{s_e}{2} [\{d^e\}^t B_e^t D_e B_e \{d^e\} - 2\{d^e\}^t t B_e^t D_e \{\varepsilon_0^e\} + \{\varepsilon_0^e\}^t D_e \{\varepsilon_0^e\}] \end{aligned} \quad (112.6)$$

جمله آخر این معادله، $\{\varepsilon_0^e\}^t D_e \{\varepsilon_0^e\}$ ، با استفاده از رابطه (۱۰۱.۶) و (۱۰۳.۶) بصورت زیر بیان می‌شود

$$\{\varepsilon_0^e\}^t D_e \{\varepsilon_0^e\} = \frac{2(1 + \nu_e) E_e}{(1 - 2\nu_e)} (\alpha_e \Delta T)^t \quad (113.6)$$

از آنجائی که معادله (۱۱۳.۶) همواره مثبت است، می‌توان در کمینه کردن انرژی پتانسیل صرفنظر کرد. در این صورت انرژی کرنشی U^e در عنصر e ام بیان می‌شود

$$U^e = \frac{1}{2} \{d^e\}^t \mathbf{A}_e \{d^e\} - \{d^e\}^t \{h^e\} \quad (114.6)$$

در اینجا \mathbf{A}_e یک ماتریس سختی 6×6 عنصری و $\{h^e\}$ بردار تنش حرارتی 1×6 است که بصورت زیر داده می‌شود

$$\mathbf{A}_e = s_e \mathbf{B}_e^t \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e \quad (115.6)$$

$$\{h^e\} = s_e \mathbf{B}_e^t \mathbf{D}_e \{\varepsilon_e\} \quad (115.6)$$

انرژی کرنشی کل با جمع کردن انرژی‌های هر عنصر بدست می‌آید

$$U = \sum_{e=1}^N U^e = \frac{1}{2} \{d\}^t \mathbf{A} \{d\} - \{d\}^t \{H\} \quad (116.6)$$

که در آن \mathbf{A} و $\{H\}$ به ترتیب $1 \times 2n \times 2n$ ماتریس سختی جهانی، و $1 \times 2n \times 2n$ بردار تنش حرارتی جهانی هستند. الگوریتمی که توسط آن اجزای ماتریس سختی عنصر A_e و بردار تنش حرارتی $\{h^e\}$ در ماتریس سختی جهانی \mathbf{A} و بردار تنش حرارتی $\{H\}$ در جدول (۲.۶) نشان داده شده است.

نیروی خارجی اعمال شده به بدن با نیروی مرکزی در گره روی سطح بدن تقریب‌زده می‌شود. در این صورت بردار نیروی خارجی با رابطه زیر بیان می‌شود

$$\{f_L\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \\ g_2 \\ \vdots \\ f_n \\ g_n \end{bmatrix} \quad (\text{تعداد گره ها : } n) \quad (117.6)$$

که در آن f_i و g_i مؤلفه‌های محور x و y نیروی خارجی اعمال شده به نقطه گره i را نشان می‌دهند. هنگامی که یک جاگایی (u_i, v_i) توسط نیروی خارجی (f_i, g_i) ایجاد می‌شود، کار انجام شده توسط نیرو $u_i f_i + v_i g_i$ است. سپس کل کار انجام شده توسط نیروی خارجی به دست می‌آید

$$V = \{d\}^t \{f_L\} \quad (118.6)$$

با جایگزینی معادلات (۱۱۶.۶) و (۱۱۸.۶) در معادله (۹۱.۶)، انرژی پتانسیل کل II

جدول ۲.۶: رابطه بین مولفه‌های عناصر و ماتریس جهانی

Component of the e -th element matrix → component of global matrix	Component of the e -th element matrix → component of global matrix
$a_{11}^e \rightarrow A_{2i-1,2i-1}$	$a_{33}^e \rightarrow A_{2j-1,2j-1}$
$a_{12}^e \rightarrow A_{2i-1,2i}$	$a_{34}^e \rightarrow A_{2j-1,2j}$
$a_{13}^e \rightarrow A_{2i-1,2j-1}$	$a_{35}^e \rightarrow A_{2j-1,2k-1}$
$a_{14}^e \rightarrow A_{2i-1,2j}$	$a_{36}^e \rightarrow A_{2j-1,2k}$
$a_{15}^e \rightarrow A_{2i-1,2k-1}$	$a_{44}^e \rightarrow A_{2j,2j}$
$a_{16}^e \rightarrow A_{2i-1,2k}$	$a_{45}^e \rightarrow A_{2j-1,2k-1}$
$a_{22}^e \rightarrow A_{2i,2i}$	$a_{46}^e \rightarrow A_{2j,2k}$
$a_{23}^e \rightarrow A_{2i,2j-1}$	$a_{55}^e \rightarrow A_{2k-1,2k-1}$
$a_{24}^e \rightarrow A_{2i,2j}$	$a_{56}^e \rightarrow A_{2k-1,2k}$
$a_{25}^e \rightarrow A_{2i,2k-1}$	$a_{66}^e \rightarrow A_{2k,2k}$
$a_{26}^e \rightarrow A_{2i,2k}$	
$h_1^e \rightarrow H_{2i-1}$	$h_2^e \rightarrow H_{2i}$
$h_3^e \rightarrow H_{2j-1}$	$h_4^e \rightarrow H_{2j}$
$h_5^e \rightarrow H_{2k-1}$	$h_6^e \rightarrow H_{2k}$

بدست می‌آید

$$\Pi = \frac{1}{\gamma} \{d\}^t \mathbf{A} \{d\} - \{d\}^t [\{H\} + \{f_L\}] \quad (119.6)$$

در تجزیه و تحلیل تنش حرارتی فیبر دوشکستی و موجبرها بدون نیروی خارجی، به سادگی $\{f_L\} = \{0\}$ در معادله (119.6) انجام می‌دهیم.

۵.۵.۶ حل مسئله با شرط ایستائی

انرژی پتانسیل Π در معادله (119.6) باید بر اساس اصل انرژی کمینه باشد. بنابراین، مشتق جزئی Π نسبت به جابجایی در هر نقطه گره باید صفر باشد. در این صورت $2n$ معادله خطی همزمان را داریم:

$$\mathbf{A}\{d\} = \{H\} + \{f_L\}. \quad (120.6)$$

بردار جابجایی بسادگی از حل معادله بدست می‌آید:

$$\{d\} = \mathbf{A}^{-1}[\{H\} + \{f_L\}]. \quad (121.6)$$

تنش در هر عنصر با استفاده از معادله (102.6) و (109.6) محاسبه می‌شود.

$$\{\sigma^e\} = \mathbf{D}_e[\mathbf{B}_e\{d^e\} - \{\varepsilon_0^e\}] \quad (e = 1 - N) \quad (122.6)$$

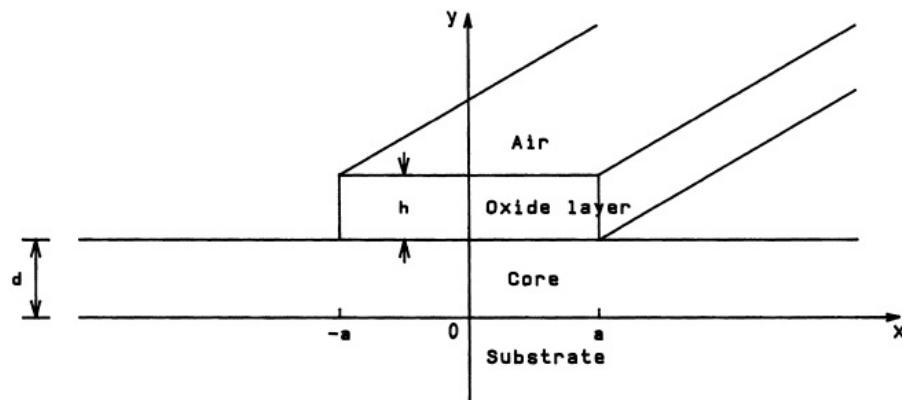
در ساختار متقارن شکل (۲۲.۶)، جابجایی روی محور y در جهت محور y هدایت می‌شود. بنابراین، جابجایی در روی محور y در امتداد جهت محور x باید صفر باشد. این شرایط مرزی که در سطح عنصر در نظر گرفته نمی‌شوند، در فرآیند حل معادلات (۱۲۰.۶) همzمان در نظر گرفته می‌شوند. اما تغییر اندازه ماتریس A برای شرایط مرزی ترجیح داده نمی‌شود، زیرا تعداد شرایط مرزی در هر مسئله متفاوت است. در روش‌های عملی تحلیل تنش FEM، شرایط مرزی به شرح زیر رفتار می‌شود. در اینجا معادلات خطی همzمان مرتبه $2n$ را بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,2i-2} & A_{1,2i-1} & A_{1,2i} & \cdots & A_{1,2n-1} & A_{1,2n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,2i-2} & A_{2,2i-1} & A_{2,2i} & \cdots & A_{2,2n-1} & A_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{2i-2,1} & A_{2i-2,2} & \cdots & A_{2i-2,2i-2} & A_{2i-2,2i-1} & A_{2i-2,2i} & \cdots & A_{2i-2,2n-1} & A_{2i-2,2n} \\ A_{2i-1,1} & A_{2i-1,2} & \cdots & A_{2i-1,2i-2} & A_{2i-1,2i-1} & A_{2i-1,2i} & \cdots & A_{2i-1,2n-1} & A_{2i-1,2n} \\ A_{2i,1} & A_{2i,2} & \cdots & A_{2i,2i-2} & A_{2i,2i-1} & A_{2i,2i} & \cdots & A_{2i,2n-1} & A_{2i,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{2n-1,1} & A_{2n-1,2} & \cdots & A_{2n-1,2i-2} & A_{2n-1,2i-1} & A_{2n-1,2i} & \cdots & A_{2n-1,2n-1} & A_{2n-1,2n} \\ A_{2n,1} & A_{2n,2} & \cdots & A_{2n,2i-2} & A_{2n,2i-1} & A_{2n,2i} & \cdots & A_{2n,2n-1} & A_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{2i-2} \\ F_{2i-1} \\ F_{2i} \\ \vdots \\ F_{2n-1} \\ F_{2n} \end{pmatrix} \quad (123.6)$$

که در آن $\{F\} = \{H\} + \{f_L\}$. به عنوان مثال، شرایط مرزی را در نظر می‌گیریم که در آن جابجایی در امتداد جهت محور x از نقطه گره i ام به عنوان صفر مشخص می‌شود. در این مورد، سهم u_i در معادله (۱۲۳.۶) یا [معادله (۱۲۰.۶)] را می‌توان با قرار دادن عنصر ماتریس $A_{m,2i-1} = 0$ برای $m = 1$ تا $2n$ صفر کرد. با این حال، ما باید یک معادله داشته باشیم که $u_i = 0$ را مشخص کند. این شرط با قرار دادن $F_{2i-1} = 0$ ، $A_{2i-1,2i-1} = 0$ و $A_{2i-1,k} = 0$ برای $k = 1$ تا $2n$ به جز برای $k = 2i - 1$ انجام می‌شود. در این صورت عبارت ماتریس زیر را به دست می‌آوریم که در آن شرط مرزی $u_i = 0$ به طور خودکار گنجانده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,2i-2} & 0 & A_{1,2i} & \cdots & A_{1,2n-1} & A_{1,2n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,2i-2} & 0 & A_{2,2i} & \cdots & A_{2,2n-1} & A_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{2i-2,1} & A_{2i-2,2} & \cdots & A_{2i-2,2i-2} & 0 & A_{2i-2,2i} & \cdots & A_{2i-2,2n-1} & A_{2i-2,2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{2i,1} & A_{2i,2} & \cdots & A_{2i,2i-2} & 0 & A_{2i,2i} & \cdots & A_{2i,2n-1} & A_{2i,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{2n-1,1} & A_{2n-1,2} & \cdots & A_{2n-1,2i-2} & 0 & A_{2n-1,2i} & \cdots & A_{2n-1,2n-1} & A_{2n-1,2n} \\ A_{2n,1} & A_{2n,2} & \cdots & A_{2n,2i-2} & 0 & A_{2n,2i} & \cdots & A_{2n,2n-1} & A_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{2i-2} \\ 0 \\ F_{2i} \\ \vdots \\ F_{2n-1} \\ F_{2n} \end{pmatrix} \quad (124.6)$$

در اینجا، مؤلفه بردار بار F_{2i-1} مربوط به u_i نیز روی صفر تنظیم شده است. به راحتی قابل درک است که راه حل u_i در معادله (۱۲۳.۶) بالا، همانطور که توسط شرط مرزی مشخص شده است صفر می‌شود. شرایط مرزی نسبت به سایر نقاط گره به همان روشی



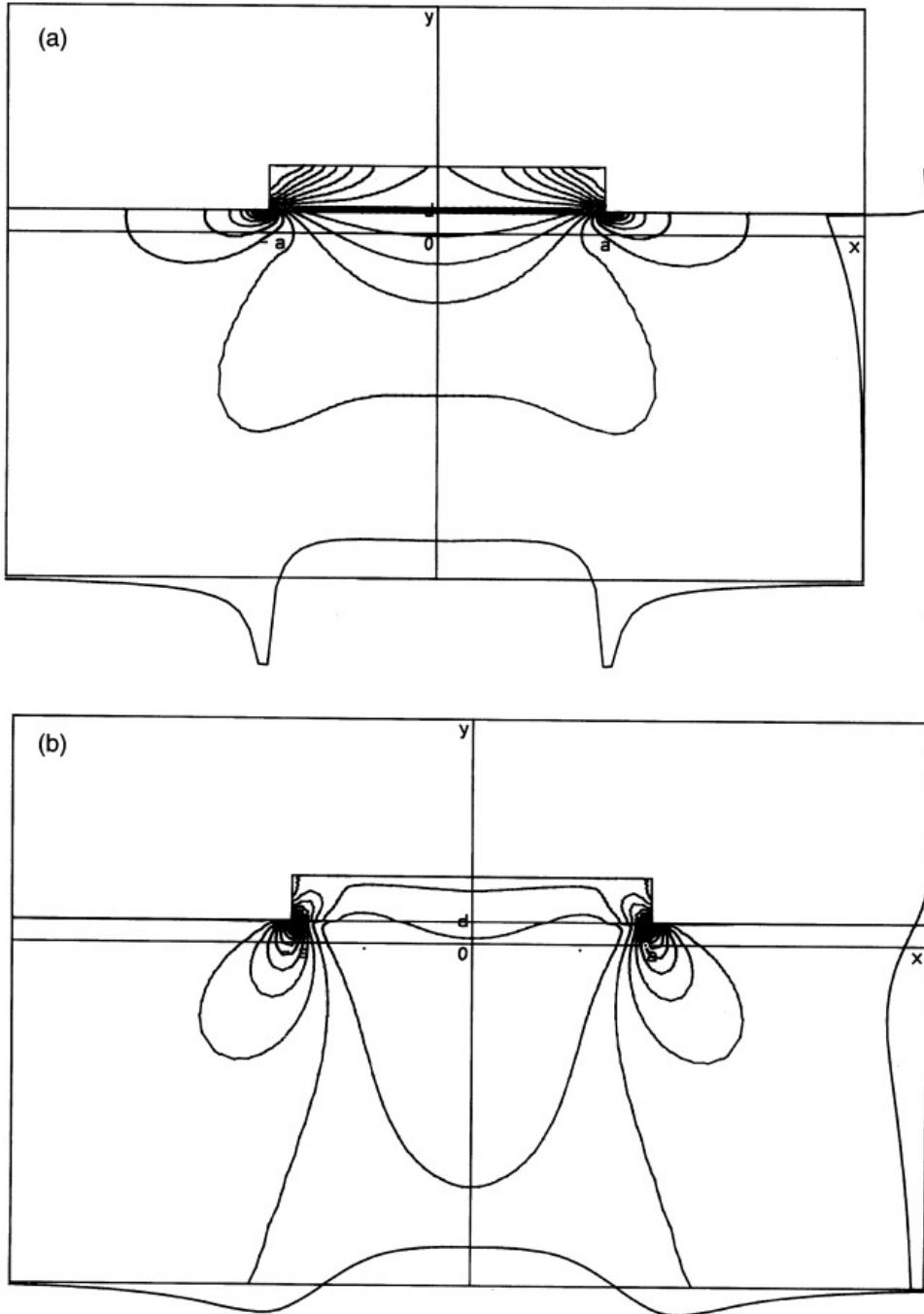
شکل ۲۳.۶: نوار اکسید روی موجبر پشت‌های نیمه‌هادی بار شده است.

که در بالا توضیح داده شد رفتار می‌شود.

۶.۵.۶ ترکیبی از موجبر اجزای محدود و تحلیل تنش

همانطور که در بخش ۳.۹ برای فیبرهای نوری دو شکستی ناشی از تنش توضیح داده شد، مهم است که تغییر ضریب شکست ناشی از اثر فوتولاستیک را در نظر بگیریم تا ویژگی‌های انتشار موجبرهای نوری تحت تنش یا کرنش را بررسی کنیم. در اینجا تحلیل ترکیبی تنش FEM و آنالیز موجبر FEM را برای موجبر پشت‌های شامل هسته نیمه‌هادی GaAlAs و بستر GaAs و یک نوار اکسید بارگذاری شده بر روی لایه هسته GaAlAs همانطور که در شکل (۲۳.۶) نشان داده شده است، توصیف می‌کنیم. متفاوت از تجزیه و تحلیل روش تغییرات جزئی ^{۲۲} شرح داده شده در بخش ۲.۱۰.۳، در تحلیل ترکیبی FEM، تغییر ضریب شکست ابتدا با تحلیل تنش FEM به دست می‌آید، و در تحلیل موجبر FEM در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای موجبر پشت‌های نیمه‌هادی با نوار اکسید در شکل (۲۳.۶) به شرح زیر است: ضخامت و عرض کل هسته GaAlAs به ترتیب $d = 0.2\mu\text{m}$ و $a = 100\text{ }\mu\text{m}$ میکرومتر و عرض کل بستر GaAs هر دو $100\text{ }\mu\text{m}$ میکرومتر و ضخامت و عرض نوار اکسید به ترتیب $h = 0.4\mu\text{m}$ متر و $2a = 3\mu\text{m}$ است. پارامترهای مواد برای هر منطقه در جدول (۳.۶) آورده شده است. تفاوت بین دمای اتاق و دمای رشد $\Delta T = -700^\circ\text{C}$ در نظر گرفته شده است. نمودارهای کانتور تنش اصلی σ_x و σ_y محاسبه شده توسط آنالیز تنش FEM در شکل (۲۴.۶)-الف و (۲۴.۶)-ب نشان داده شده است. منحنی در لبه‌های پایینی شکل‌ها (۲۴.۶)-الف و (۲۴.۶)-ب ترسیم شده است. توزیع تنش اصلی در امتداد خطوط موازی با محور x هستند که از نقاط حداقل تنش اصلی x عبور می‌کنند. و y نمودار منحنی در لبه‌های سمت راست در شکل (۲۴.۶)-الف و (۲۴.۶)-ب توزیع تنش اصلی در امتداد محور y هستند. مقادیر مثبت و منفی تنش اصلی به ترتیب نشان دهنده نیروی کششی و فشاری است.

^{۲۲} Perturbation Method



شکل ۲۴.۶: نمودار کانتور تنش اصلی (الف) σ_x و (ب) σ_y که توسط تحلیل تنش FEM محاسبه شده است.

جدول ۳.۶: پارامترهای مواد بستر، هسته و نوار اکسید

مواد	مدول یانگ kg/mm^2	نسبت پواسون نسبت	ضریب انبساط حرارتی ($^{\circ}C^{-1}$)	ضریب شکست
$GaAs$	۸۷۰۰	۰/۳۱	$۶/۴ \times 10^{-6}$	۲/۳۷
$GaAlAs$	۸۶۲۰	۰/۳۱۵	$۵/۸ \times 10^{-6}$	۲/۳۶
SiO_2	۷۸۳۰	۰/۱۸۶	$۵/۴ \times 10^{-7}$	۱/۴۴۴

وقتی اثر فوتوالاستیک را در نظر می‌گیریم، ضریب شکست برای نورهای پلاریزه x و y با روابط زیر بیان می‌شوند

$$n_x(x, y) = n_{x^0}(x, y) - C_1 \sigma_x(x, y) - C_2 [\sigma_y(x, y) + \sigma_z(x, y)] \quad (125.6)$$

در اینجا n_{x^0} و n_y ضریب شکست بدون تنش و C_1 و C_2 ثابت فوتوالاستیک هستند. ثابت فوتوالاستیک SiO_2 و $GaAs$ [۱۶، ۱۵] داده شده است

$$\begin{cases} C_1 = -1/72 \times 10^{-4} & [mm^2/kg] \\ C_2 = -1/0 \times 10^{-4} & [mm^2/kg] \end{cases} \quad (GaAs) \quad (126.6)$$

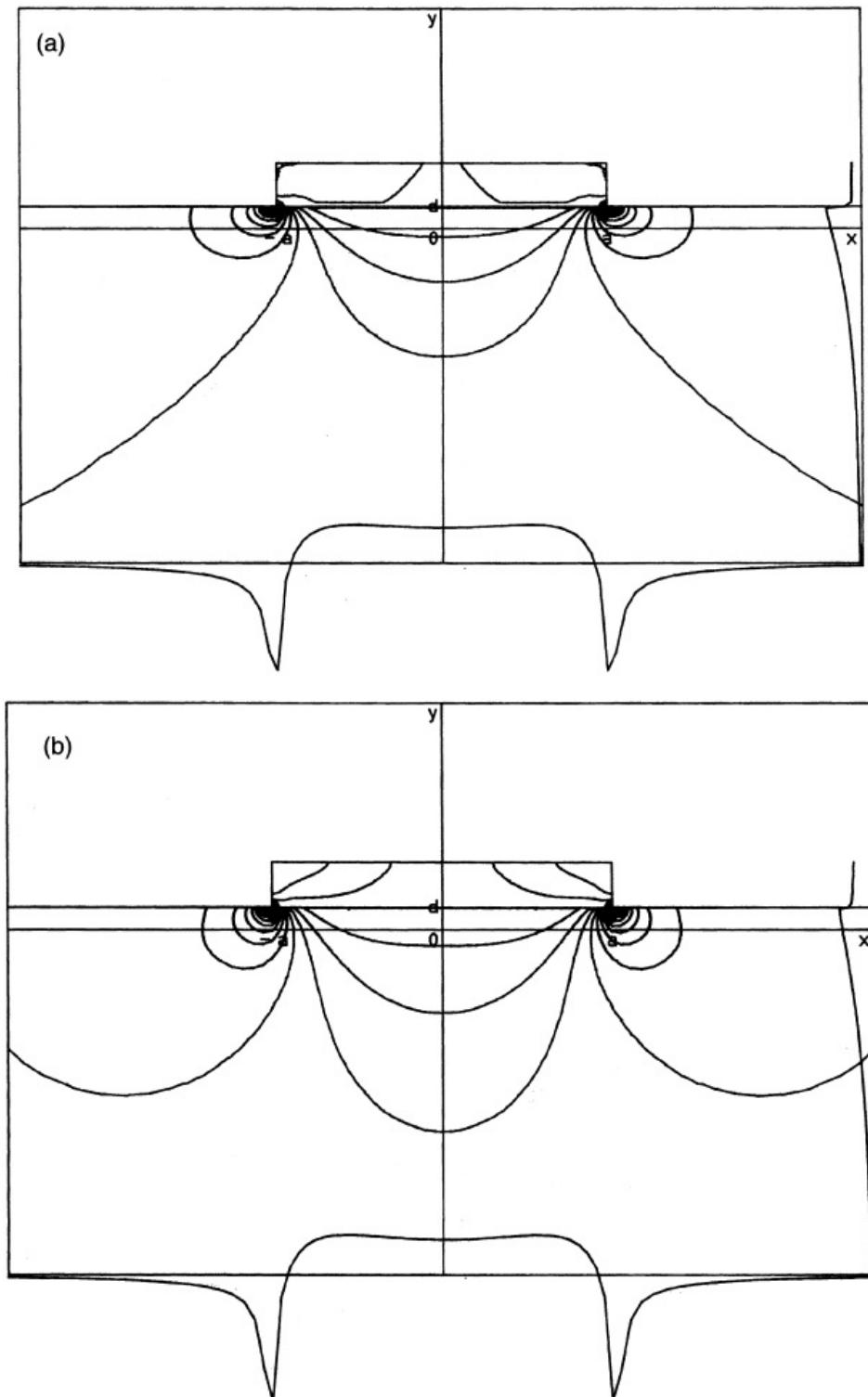
$$\begin{cases} C_1 = 7/42 \times 10^{-6} & [mm^2/kg] \\ C_2 = 4/102 \times 10^{-5} & [mm^2/kg] \end{cases} \quad (SiO_2) \quad (126.6)$$

ثابت فوتوالاستیک C_1 و C_2 با ضریب پوکلز p_{11} و p_{12} با رابطه زیر مرتبط هستند [۱۷]:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{n^2}{2E} (p_{11} - 2\nu p_{12}) \\ C_2 = \frac{n^2}{2E} [-\nu p_{11} + (1 - \nu)p_{12}] \end{cases} \quad (127.6)$$

که در آن E ، ν و n به ترتیب نشان دهنده مدول یانگ، نسبت پواسون و ضریب شکست هستند. جایگزینی تنش اصلی σ_x و σ_y در معادله (۱۲۵.۶)، تغییر ضریب شکست ناشی از استرس $n_y - n_x$ و $n_x - n_{x^0}$ همانطور که در شکل (۲۵.۶) نشان داده شده است ترسیم شده است. از نمودارهای پایین در شکلها (۲۵.۶)-(الف) و (ب) مشخص است که ضریب شکست برای هر دو قطبش به طور قابل توجهی در لبه‌های نوار SiO_2 کاهش می‌یابد (۱۶٪). برای قطبش x و y برای قطبش y . شکل (۲۶.۶) (الف) و (ب) توزیع شدت نور را برای قطبش‌های x و y محاسبه شده توسط تحلیل موجبر FEM نشان می‌دهد. ثابت‌های انتشار نرمالیزه برای قطبش‌های x و y به ترتیب $\beta_x/k = ۳/۳۶۸۸$ و $\beta_y/k = ۳/۳۶۱۲$ هستند. شکل (۲۶.۶)(ج) توزیع شدت نور را بدون در نظر گرفتن تغییر ضریب شکست ناشی از

^{۲۳}Pockels coefficient



شکل ۲۵.۶: تغییر ضریب شکست ناشی از تنش (الف) و (ب) $n_y - n_{y^*}$ و $n_x - n_{x^*}$

تنش نشان می‌دهد. از مقایسه شکل‌های (۲۶.۶) (الف) و (ب) با دیده می‌شود که اثر افزونگی نور به‌دلیل کاهش ضریب شکست در هر دو لبه نوار SiO_2 تنگ‌تر می‌شود.

۶.۶ تحلیل FEM نیمه‌برداری موجبرهای متقابل با ضریب شکست بالا

موجبرهای کنتراست بسیار ($EH - \Delta$) با Δ حدود ۱۰ تا ۴۰ درصد در ساخت دستگاه‌های موجبر بسیار فشرده توجه را به‌خود جلب کرده است [۱۸، ۲۲]. در میان آنها، موجبرهای نوری سیلیکونی به‌عنوان فناوری توانمند برای نسل جدیدی از مدارهای اپتوالکترونیکی پدیدار شده‌اند. موجبرهای نوری سیلیکونی می‌توانند از فناوری پردازش مواد بالغ و عملکرد الکترونیکی گستره سیلیکون استفاده کنند.

تا کنون، عمدهً روش اجزای محدود (FEM) اسکالر را بحث کرده‌ایم که برای موجبرهای با اختلاف ضریب شکست کم قابل استفاده است. با این حال، ویژگی‌های برداری ممکن است در موجبرهای کنتراست (متقابل) با ضریب شکست بالا مهم و حتی ضروری باشند. برای سازه‌های سه‌بعدی، کوپلینگ‌های پلاریزاسیون معمولاً وجود دارند به‌طوری که امواج منتشر شده، به‌طور دقیق، ترکیبی هستند. با این حال، اتصالات بین دو قطبش معمولاً ضعیف هستند و ممکن است اثر قابل توجهی نداشته باشند، مگر اینکه دو قطبش عمداً همگام شوند. بنابراین، هنوز هم ممکن است از اصطلاحات تزویج پلاریزاسیون غفلت کنیم و با استفاده از یک فرمول نیمه‌برداری، دو قطبش را به طور مستقل بحث کنیم. در این بخش، توسعه سیستماتیک معادلات موج نیمه‌برداری توضیح داده شده است.

در حوزه فرکانس، انتشار امواج الکترومغناطیسی در یک محیط غیر همگن توسط معادلات ماکسول به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۲۲].

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (۱۲۸.۶)$$

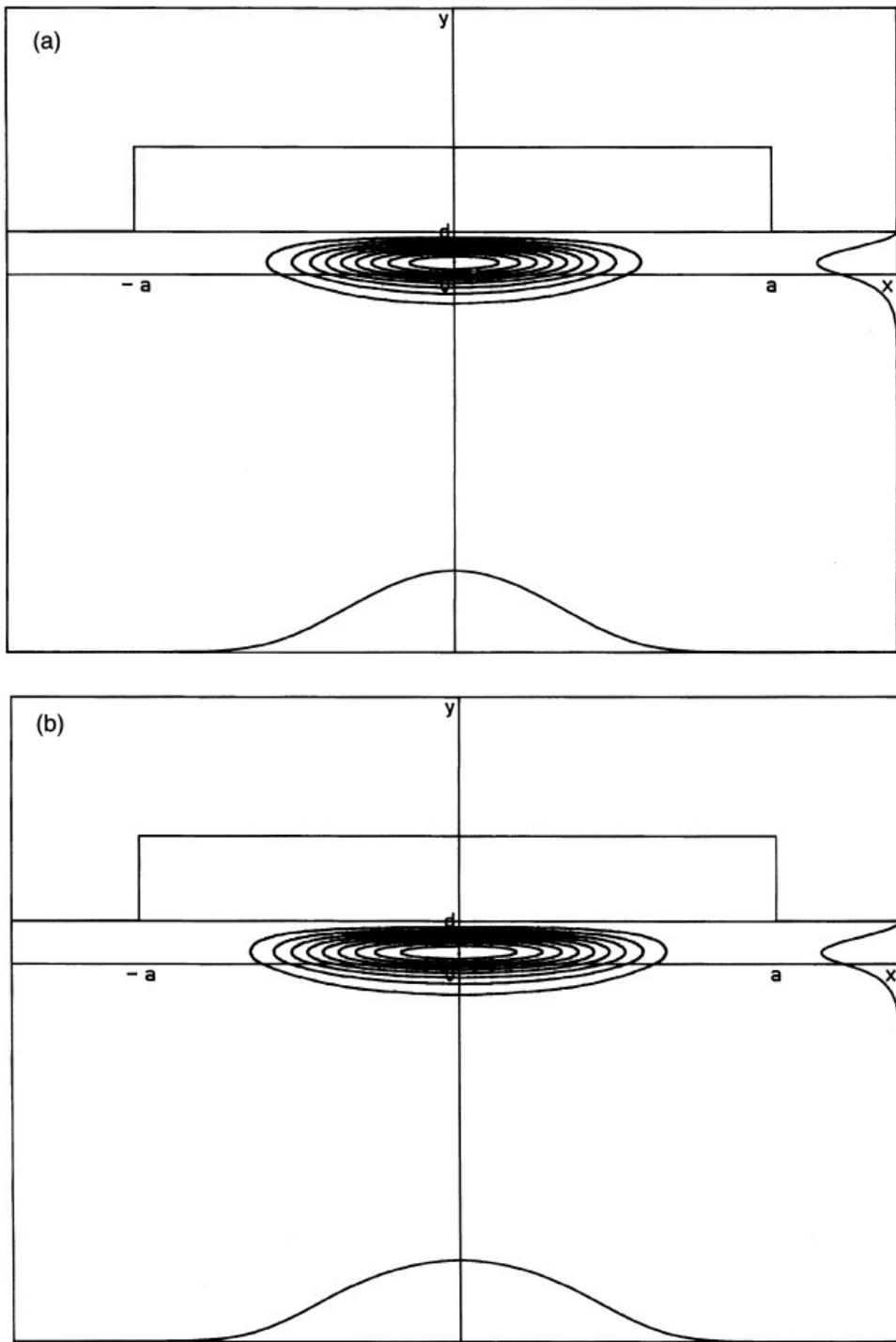
$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E} \quad (۱۲۸.۶b)$$

۹

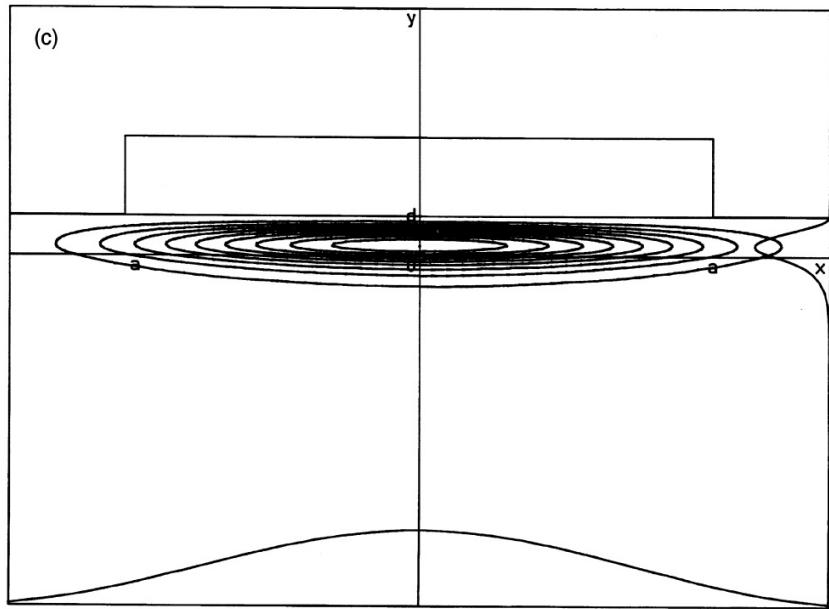
$$\nabla \cdot (\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}) = 0 \quad (۱۲۹.۶)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = 0 \quad (۱۲۹.۶b)$$

که در آن ضریب شکست ($n(x, y, z)$) همسانگرد فرض می‌شود. سیستمی از معادلات موج برداری تزویجی برای میدان‌های الکتریکی یا مغناطیسی عرضی را می‌توان از معادلات بالا به‌دست آورد.



شکل ۲۶.۶: توزیع شدت نور برای (الف) قطبش x و (ب) قطبش y که توسط تحلیل موجبر FEM محاسبه شده است



شکل ۲۶.۶: (ادامه) توزیع شدت نور بدون در نظر گرفتن تغییر ضریب شکست ناشی از تنفس

۱.۶.۶ رابطه بندی میدان الکتریکی \mathbf{E}

معادله موج برداری برای میدان الکتریکی از روابط (۱۲۸.۶) و (۱۲۸.۶ آ) بدست می‌آید

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n^2 \mathbf{E} = k^2 n^2 \mathbf{E} \quad (130.6)$$

که در آن $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ عدد موج در فضای آزاد است. بعلاوه، معادله (۱۲۹.۶ آ) می‌دهد

$$\nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}) = \nabla_t \cdot (n^2 \mathbf{E}_t) + \frac{\partial(n^2 E_z)}{\partial z} = \nabla_t \cdot (n^2 \mathbf{E}_t) + \frac{\partial n^2}{\partial z} E_z + n^2 \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (131.6)$$

که در آن $\nabla_t = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y}$ است. جمله $\frac{\partial(n^2 E_z)}{\partial z}$ در معادله بالا را می‌توان بعلت آنکه بطور معمول کوچکتر از مولفه‌های عرضی E_x و E_y است، صرفنظر کرد و ضمناً ضریب شکست غالباً نسبت به z خیلی به آرامی تغییر می‌کند. در این صورت معادله (۱۳۱.۶) را می‌توان بصورت زیر تقریب زد:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{n^2} \nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}) = \nabla_t \cdot (n^2 \mathbf{E}_t) = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{1}{n^2} \frac{\partial n^2}{\partial x} E_x - \frac{1}{n^2} \frac{\partial n^2}{\partial y} E_y \quad (132.6)$$

در معادله (۱۳۰.۶) بصورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{n^2} \frac{\partial n^2}{\partial x} E_x - \frac{1}{n^2} \frac{\partial n^2}{\partial y} E_y \quad (133.6)$$

جایگزینی معادله (۱۳۳.۶) در معادله (۱۳۰.۶)، خواهیم داشت

$$\nabla_t^* E_x + k^* n^* E_x + \frac{\partial^* E_x}{\partial z^*} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n^*} \frac{\partial n^*}{\partial x} E_x + \frac{1}{n^*} \frac{\partial n^*}{\partial y} E_y \right) = 0 \quad (134.6)$$

$$\nabla_t^* E_y + k^* n^* E_y + \frac{\partial^* E_x}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^*} \frac{\partial n^*}{\partial x} E_x + \frac{1}{n^*} \frac{\partial n^*}{\partial y} E_y \right) = 0 \quad (135.6)$$

تزویج بین دو قطبش خواهد بود

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n^*} \frac{\partial n^*}{\partial y} E_y \right)$$

در معادله (۱۳۴.۶) و

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^*} \frac{\partial n^*}{\partial x} E_x \right)$$

در معادله (۱۳۵.۶) ضعیف هستند. در این صورت می‌توان از این جملات صرفنظر کرد و معادلات (۱۳۴.۶) و (۱۳۵.۶) را مستقل از یکدیگر بحث کرد.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^*} \frac{\partial(n^* E_x)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^* E_x}{\partial y^*} + \frac{\partial^* E_x}{\partial z^*} + k^* n^* E_x = 0 \quad (136.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{n^*} \frac{\partial(n^* E_y)}{\partial y} \right] + \frac{\partial^* E_y}{\partial y^*} + \frac{\partial^* E_y}{\partial z^*} + k^* n^* E_y = 0 \quad (137.6)$$

این معادلات را بر اساس فرمول میدان E معادلات نیمه‌برداری می‌نامند. مودهای میدان الکتریکی به دست آمده از معادلات (۱۳۶.۶) و (۱۳۷.۶) به ترتیب به نام مود شبه ^{۲۴}TE و مود شبه ^{۲۵}TM مشخص می‌شوند.

۲.۶.۶ رابطه‌بندی میدان H

مشابه معادلات موج نیمه‌برداری برای میدان‌های الکتریکی، معادلات میدان‌های مغناطیسی به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{n^*} \nabla \times \mathbf{H} \right) = \omega^* \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{H} = k^* \mathbf{H} \quad (138.6)$$

رابطه $\nabla \times [1/n^* \nabla \times \mathbf{H}]$ را با استفاده از رابطه برداری (۷۷.۱۰) بصورت زیر بیان می‌کنیم

$$\nabla \times \left(\frac{1}{n^*} \nabla \times \mathbf{H} \right) = \nabla \left(\frac{1}{n^*} \right) \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{n^*} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (139.6)$$

برای محاسبه معادله نیمه‌برداری برای H_y (مود شبه TE) و H_z (مود شبه H_z) می‌توان نادیده گرفته شود زیرا H_z معمولاً در معادله بالا، عبارت $[\partial(1/n^*)/\partial z](\partial H_z/\partial y)$ می‌توان نادیده گرفته شود زیرا H_z معمولاً

^{۲۴}Quasi-TE

^{۲۵}Quasi-TM

بسیار کوچکتر از مولفه‌های عرضی H_x و H_y است و همچنین ضریب شکست معمولاً در امتداد محور z به‌آرامی تغییر می‌کند. در این صورت معادله مود شبه TE با رابطه زیر بیان می‌شود

$$n^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + n^2 \frac{\partial(1/n^2)}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial z} + k^2 n^2 H_y = 0 \quad (140.6)$$

در اینجا جمله تزویج قطبش نادیده گرفته شده است. معادله نیمه برداری برای مود شبه (TM) و (E_x) میدان‌های غالب هستند) به‌روشی مشابه محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + n^2 \frac{\partial(1/n^2)}{\partial z} \frac{\partial H_x}{\partial z} + k^2 n^2 H_x = 0 \quad (141.6)$$

عبارت $[\partial(1/n^2)/\partial z](\partial H_z/\partial x)$ و جمله تزویج قطبش در استخراج معادله بالا صرف‌نظر شده است.

معادلات (140.6) و (141.6) به‌نام معادلات نیمه برداری بر اساس فرمول میدان H نامیده می‌شوند. مودهای میدان مغناطیسی به‌دست آمده از (140.6) و (141.6) به‌ترتیب به‌نام مود شبه TE و مود شبه TM نشان داده می‌شوند.

۳.۶.۶ تحلیل مود حالت ماندگار

اگر هندسه موجبر و ضریب شکست در طول انتشار جهت z تغییر نکند، معادله نیمه برداری بر مبنای رابطه بندی میدان E بصورت زیر خلاصه می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial(n^2 \phi_x)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) \phi_x = 0 \quad (142.6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial(n^2 \phi_y)}{\partial y} \right] + (k^2 n^2 - \beta^2) \phi_y = 0 \quad (143.6)$$

که در آن $E_y = \phi_y(x, y) \exp(-j\beta z)$ و $E_x = \phi_x(x, y) \exp(-j\beta z)$ فرض است. شرایط مرزی برای میدان الکتریکی عرضی در معادلات بالا تعییه شده است. میدان‌های الکتریکی عرضی E_x و E_y به‌ترتیب در سرتاسر مرز مشترک‌های داخلی عمودی با محور x و y پیوسته نیستند. با این حال، پیوستگی بردارهای جایجایی الکتریکی $n^2 E_x$ و $n^2 E_y$ در مرز مشترک‌های داخلی عمودی با محور x و y در معادلات بالا برآورده می‌شوند.

اگر کنتراست (تفاوت) ضریب شکست کوچک باشد (ضعیف هدایت کننده)، جملات حاوی $\partial n^2 / \partial x$ و $\partial n^2 / \partial y$ را می‌توان نادیده گرفت. تحت تقریب اسکالار، معادله (142.6) و (143.6) به‌معادله (۶۵.۶) کاهش می‌یابد.

مشابه فرمول میدان E ، اگر هندسه موجبر و ضریب شکست در جهت انتشار z تغییر نکند، معادلات نیمه برداری بر اساس فرمول میدان H خواهد شد

$$n^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) \psi_y = 0 \quad TE \quad (144.6)$$

$$n^{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^{\gamma}} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^{\gamma} \psi_x}{\partial x^{\gamma}} + (k^{\gamma} n^{\gamma} - \beta^{\gamma}) \psi_y = 0 \quad TM \text{ مود شبه} \quad (145.6)$$

که در آن فرض میکنیم $H_y = \psi_y(x, y) \exp(-j\beta z)$ و $H_x = \psi_x(x, y) \exp(-j\beta z)$ باشد. وقتی مستقیماً روش گالرکین^{۲۶} را به معادله (۱۴۵.۶) یا (۱۴۴.۶) اعمال می‌کنیم، مشتق‌گیری عددی n^{γ} ضروری می‌شود. مشتق‌گیری عددی مطلوب نیست زیرا معمولاً باعث خطا در تجزیه و تحلیل می‌شود. معادلات نیمه برداری (۱۴۴.۶) و (۱۴۵.۶) بر اساس فرمول میدان H را می‌توان به شکل متفاوتی بیان کرد.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n^{\gamma}} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + j\beta \frac{1}{n^{\gamma}} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} + \left(k^{\gamma} - \frac{\beta^{\gamma}}{n^{\gamma}} \right) \psi_y = 0, \quad j\beta \psi_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial y}, \quad TE \text{ مود شبه} \quad (146.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^{\gamma}} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) + j\beta \frac{1}{n^{\gamma}} \frac{\partial \psi_z}{\partial x} + \left(k^{\gamma} - \frac{\beta^{\gamma}}{n^{\gamma}} \right) \psi_x = 0, \quad j\beta \psi_z = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad TM \text{ مود شبه} \quad (147.6)$$

که در آن $H_z = \psi_z(x, y) e^{-j\beta z}$ فرض شده است. در پاراگراف‌های بعدی، فرمول اجزای محدود برای مود شبه TE به تفصیل شرح داده خواهد شد. فرمول اجزای محدود برای مود شبه TM به روشنی مشابه مود شبه TE به دست می‌آید. با اعمال روش گالرکین^{۲۴} برای معادله (۱۴۶.۶)، خواهیم داشت [۲۵، ۲۶]:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \sum_{e=1}^N \{u\}^T \iint_e \frac{1}{n^{\gamma}} \frac{\partial[N]}{\partial x} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} dx dy \cdot \{u\} \\ &\quad - \sum_{e=1}^N \{u\}^T \beta \iint_e \frac{1}{n^{\gamma}} [N] \frac{\partial[N]^T}{\partial y} dx dy \cdot \{\mathbf{v}\} \\ &\quad + \sum_{e=1}^N \{u\}^T k^{\gamma} \iint_e [N][N]^T dx dy \cdot \{u\} \\ &\quad - \sum_{e=1}^N \{u\}^T \beta^{\gamma} \iint_e \frac{1}{n^{\gamma}} [N][N]^T dx dy \cdot \{u\} = 0 \end{aligned} \quad (148.6)$$

و

$$\begin{aligned} I_1 &= - \sum_{e=1}^N \{u\}^T \iint_e [N] \frac{\partial[N]^T}{\partial y} dx dy \cdot \{u\} \\ &\quad + \sum_{e=1}^N \{u\}^T \beta \iint_e [N][N]^T dx dy \cdot \{\mathbf{v}\} = 0 \end{aligned} \quad (149.6)$$

^{۲۶}Galerkin's method

که در آن $N(x, y)$ تابع وزن^{۲۷} است که در عنصر مثلثی شکل (۱۴۶) بصورت زیر تعریف شده است

$$[N(x, y)] = \begin{pmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{pmatrix} \quad (150.6)$$

$$L_i = \frac{1}{\sqrt{s_e}} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \quad (151.6)$$

$$L_j = \frac{1}{\sqrt{s_e}} [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] \quad (151.6)$$

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{s_e}} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \quad (151.6)$$

در معادلات (۱۴۸.۶) و (۱۴۹.۶)، $\{\mathbf{v}\} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)^t$ و $\{u\} = (u_i, u_j, u_k)^t$ بترتیب نمایشگر ψ_y و $-j\psi_z$ - در عنصر بصورت زیر هستند

$$\psi_y = \sum_{l=1}^3 L_l u_l \quad (152.6)$$

$$-j\psi_z = \sum_{l=1}^3 L_l v_l \quad (153.6)$$

که در آن $(^t)$ نمایشگر ترانهاده بردار است. فراتوابع I_1 و I_2 در معادلات (۱۴۸.۶) و (۱۴۹.۶) بصورت شکل ماتریسی خواهد بود

$$I_1 = - \sum_{e=1}^N \{u\}^t [\mathbf{G}_e \{u\} + \mathbf{H}_e \{\mathbf{v}\}] = \{\mathbf{U}\}^t [\mathbf{G}\{\mathbf{U}\} + \mathbf{H}\{\mathbf{V}\}] = 0 \quad (154.6)$$

$$I_2 = - \sum_{e=1}^N \{u\}^t [\mathbf{R}_e \{u\} + \mathbf{T}_e \{\mathbf{v}\}] = \{\mathbf{U}\}^t [\mathbf{R}\{\mathbf{U}\} + \mathbf{T}\{\mathbf{V}\}] = 0 \quad (155.6)$$

که در آن \mathbf{G}_e ، \mathbf{H}_e و \mathbf{T}_e ماتریس عنصر 3×3 و $\{\mathbf{U}\}$ و $\{\mathbf{V}\}$ بردارهای ستونی جهانی $N \times 1$ که نمایشگر بترتیب ψ_y و $-j\psi_z$ - هستند. ماتریس عناصر \mathbf{G}_e ، \mathbf{H}_e و \mathbf{T}_e بصورت زیر داده می‌شوند

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = -\frac{1}{n_e^\gamma} \iint_e \frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} dx dy + \left(k^\gamma - \frac{\beta^\gamma}{n_e^\gamma} \right) \iint_e L_i \cdot L_i dx dy \\ g_{12} = -\frac{1}{n_e^\gamma} \iint_e \frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy + \left(k^\gamma - \frac{\beta^\gamma}{n_e^\gamma} \right) \iint_e L_i \cdot L_j dx dy = g_{21} \\ g_{13} = -\frac{1}{n_e^\gamma} \iint_e \frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy + \left(k^\gamma - \frac{\beta^\gamma}{n_e^\gamma} \right) \iint_e L_i \cdot L_k dx dy = g_{31} \\ g_{22} = -\frac{1}{n_e^\gamma} \iint_e \frac{\partial L_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy + \left(k^\gamma - \frac{\beta^\gamma}{n_e^\gamma} \right) \iint_e L_j \cdot L_j dx dy \\ g_{23} = -\frac{1}{n_e^\gamma} \iint_e \frac{\partial L_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy + \left(k^\gamma - \frac{\beta^\gamma}{n_e^\gamma} \right) \iint_e L_j \cdot L_k dx dy = g_{32} \\ g_{33} = -\frac{1}{n_e^\gamma} \iint_e \frac{\partial L_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy + \left(k^\gamma - \frac{\beta^\gamma}{n_e^\gamma} \right) \iint_e L_k \cdot L_k dx dy \end{array} \right. \quad (156.6)$$

^{۲۷}Weight Function

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_{11} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy \\ h_{12} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy \\ h_{13} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy \\ h_{21} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy \\ h_{22} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy \\ h_{23} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy \\ h_{31} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy \\ h_{32} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy \\ h_{33} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy \end{array} \right. \quad (157.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r_{11} & = & \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy \\ r_{12} & = & \frac{1}{2} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy = r_{21} \\ r_{13} & = & \frac{1}{2} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy = r_{31} \\ r_{22} & = & \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy \\ r_{23} & = & \frac{1}{2} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy = r_{32} \\ r_{33} & = & \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy \end{array} \right. \quad (158.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11} & = & \beta \iint_e L_i \cdot L_i dx dy \\ t_{12} & = & \beta \iint_e L_i \cdot L_j dx dy = t_{21} \\ t_{13} & = & \beta \iint_e L_i \cdot L_k dx dy = t_{31} \\ t_{22} & = & \beta \iint_e L_j \cdot L_j dx dy \\ t_{23} & = & \beta \iint_e L_j \cdot L_k dx dy = t_{32} \\ t_{33} & = & \beta \iint_e L_k \cdot L_k dx dy \end{array} \right. \quad (159.6)$$

با حذف $\{V\}$ از معادله (154.6) و (155.6)، معادلات همزمان $\{U\}$ بصورت زیر بدست می‌آید

$$[\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}]\{U\} = \{\circ\} \quad (160.6)$$

که در آن G , H , R و T_e ماتریس‌های جهانی $N \times N$ حاوی $\{U\}$ هستند. برای

معادله (۱۶۰.۶) برای آنکه جواب غیر ضروری بجز $\{U\}$ داشته باشیم، باید دترمینان ماتریس صفر شود، یعنی

$$\det [\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}] = 0. \quad (161.6)$$

معادله (۱۶۱.۶) معادله پاشندگی (مقادیر ویژه) مود شبه TE است.
فرمول اجرای محدود برای مود شبه TM به روش مشابه مود شبه TE به دست می‌آید.
با استفاده از روش گالرکین برای معادله (۱۴۷.۶)، فراتوابع I_1 و I_2 را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$I_1 = - \sum_{e=1}^N \{u\}^t [\mathbf{G}_e \{u\} + \mathbf{H}_e \{\mathbf{v}\}] = \{\mathbf{U}\}^t [\mathbf{G}\{\mathbf{U}\} + \mathbf{H}\{\mathbf{V}\}] = 0. \quad (162.6)$$

$$I_2 = - \sum_{e=1}^N \{u\}^t [\mathbf{R}_e \{u\} + \mathbf{T}_e \{\mathbf{v}\}] = \{\mathbf{U}\}^t [\mathbf{R}\{\mathbf{U}\} + \mathbf{T}\{\mathbf{V}\}] = 0. \quad (163.6)$$

که در آن $\{\mathbf{v}\} = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k)^t$ و $\{u\} = (u_i, u_j, u_k)^t$ در عنصر $-j\psi_z$ بترتیب نمایشگر ψ_x و ψ_y هستند.

$$\psi_x = \sum_{l=1}^r L_l u_l \quad (164.6)$$

$$-j\psi_z = \sum_{l=1}^r L_l \mathbf{v}_l \quad (165.6)$$

و $\{\mathbf{V}\}$ بردار ستوانی جهانی $N \times 1$ که نمایشگر بترتیب ψ_x و ψ_y هستند. عناصر ماتریس \mathbf{V} بقرار زیر داده می‌شوند

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = -\frac{1}{n_e^r} \iint_e \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy + \left(k^r - \frac{\beta^r}{n_e^r} \right) \iint_e L_i \cdot L_i dx dy \\ g_{12} = -\frac{1}{n_e^r} \iint_e \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy + \left(k^r - \frac{\beta^r}{n_e^r} \right) \iint_e L_i \cdot L_j dx dy = g_{21} \\ g_{13} = -\frac{1}{n_e^r} \iint_e \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy + \left(k^r - \frac{\beta^r}{n_e^r} \right) \iint_e L_i \cdot L_k dx dy = g_{31} \\ g_{22} = -\frac{1}{n_e^r} \iint_e \frac{\partial L_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} dx dy + \left(k^r - \frac{\beta^r}{n_e^r} \right) \iint_e L_j \cdot L_j dx dy \\ g_{23} = -\frac{1}{n_e^r} \iint_e \frac{\partial L_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy + \left(k^r - \frac{\beta^r}{n_e^r} \right) \iint_e L_j \cdot L_k dx dy = g_{32} \\ g_{33} = -\frac{1}{n_e^r} \iint_e \frac{\partial L_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial y} dx dy + \left(k^r - \frac{\beta^r}{n_e^r} \right) \iint_e L_k \cdot L_k dx dy \end{array} \right. \quad (166.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_{11} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} dx dy \\ h_{12} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy \\ h_{13} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy \\ h_{21} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} dx dy \\ h_{22} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy \\ h_{23} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy \\ h_{31} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} dx dy \\ h_{32} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy \\ h_{33} & = & -\frac{\beta}{n_e^r} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy \end{array} \right. \quad (167.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r_{11} & = & \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} dx dy \\ r_{12} & = & \frac{1}{2} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} dx dy = r_{21} \\ r_{13} & = & \frac{1}{2} \iint_e L_i \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} dx dy = r_{31} \\ r_{22} & = & \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy \\ r_{23} & = & \frac{1}{2} \iint_e L_j \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} dx dy = r_{32} \\ r_{33} & = & \iint_e L_k \cdot \frac{\partial L_k}{\partial x} dx dy \end{array} \right. \quad (168.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11} & = & \beta \iint_e L_i \cdot L_i dx dy \\ t_{12} & = & \beta \iint_e L_i \cdot L_j dx dy = t_{21} \\ t_{13} & = & \beta \iint_e L_i \cdot L_k dx dy = t_{31} \\ t_{22} & = & \beta \iint_e L_j \cdot L_j dx dy \\ t_{23} & = & \beta \iint_e L_j \cdot L_k dx dy = t_{32} \\ t_{33} & = & \beta \iint_e L_k \cdot L_k dx dy \end{array} \right. \quad (169.6)$$

با حذف $\{V\}$ از معادله (162.6) و (163.6)، معادلات همزمان $\{U\}$ بصورت زیر بدست می‌آید

$$[\mathbf{G} - \mathbf{HT}^{-1}\mathbf{R}]\{U\} = \{\circ\} \quad (170.6)$$

که در آن G , H , R و T ماتریس‌های جهانی $N \times N$ حاوی T_e , H_e , G_e و R_e هستند. برای

معادله (۱۷۰.۶) برای آنکه جواب غیر ضروری بجز $\{U\}$ داشته باشیم، باید دترمینان ماتریس صفر شود، یعنی

$$\det [G - HT^{-1}R] = 0 \quad (171.6)$$

معادله (۱۷۱.۶) معادله پاشندگی (مقادیر ویژه) مود شبه TM است.

كتاب نامه

- [1] Zienkiewicz, O. C. and Y. K. Cheung. 1971. *The Finite Element Method in Engineering Science*. New York: McGraw-Hill.
- [2] Koshiba, M. 1992. *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*. Tokyo: KTK Scientific.
- [3] Itoh, T., G. Pelosi, and P. P. Sylvester. 1996. *Finite Element Software for Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [4] Yamashita, E. 1990. *Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems*. Boston: Artech House.
- [5] Okoshi, T. 1982. *Optical Fibers*. New York: Academic Press.
- [6] Yeh, C., K. Ha, S. B. Dong, and W. P. Brown. 1979. Single-mode optical waveguide. *Appl. Opt.* 18:1490–1504.
- [7] Hayata, K., M. Koshiba, M. Eguchi, and M. Suzuki. 1986. Vectorial finite-element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problem using transverse magnetic-field component. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-34:1120–1124.
- [8] Young, T. P. 1988. Design of integrated optical circuits using finite elements. *IEEE Proc., Part A* 135:135–144.
- [9] Angkaew, T., M. Matsuura, and N. Kumagai. 1987. Finite-element analysis of waveguide modes—A novel approach that eliminates spurious modes. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-35:117–123.
- [10] Golub, G. H. and C. F. van Loan. 1989. *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- [11] Murata, H. 1987. *Handbook of Optical Fibers and Cables*. New York: Marcel Dekker.

- [12] Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp. 1956. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.* 23:805–823.
- [13] Timoshenko, S. and J. N. Goodier. 1951. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill.
- [14] Kressel, H. and J. K. Butler. 1977. *Semiconductor Lasers and Heterojunction LEDs*. New York: Academic Press.
- [15] Dixon, R. W. 1967. Photoelastic properties of selected materials and their relevance for application to acoustic light modulators and scanners. *J. Appl. Phys.* 38:5149–5153.
- [16] TLagakos, N., J. A. Bucaro, and R. Hughes. 1980. Acoustic sensitivity predictions of single-mode optical fibers using Brillouin scattering. *Appl. Opt.* 19:3668–3670.
- [17] Manenkov, A. A. and A. I. Ritus. 1978. Determination of the elastic and elasto-optic constants and extinction coefficients of the laser glasses LGS-247-2, LGS-250-3, LGS-1, and KGSS-1621 by the Brillouin scattering technique. *Sov. J. Quantum Electron.* 8:78–80.
- [18] Soref, R. A., J. Schmidtchen, and K. Petermann. 1991. Large single-mode rib waveguides in GeSi-Si and Si-on-SiO₂. *IEEE J. Quantum Electron.* 27:1971–1974.
- [19] Jalali, B., S. Yegnanarayanan, T. Yoon, T. Yoshimoto, I. Rendina, and F. Copinger. 1998. Advances in silicon-on-insulator optoelectronics. *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electron.* 4:938–947.
- [20] Little, B. E., S. T. Chu, P. P. Absil, J. V. Hryniecicz, F. G. Johnson, F. Seiferth, D. Gill, V. Van, O. King, and M. Trakalo. 2004. Very high-order microring resonator filters for WDM applications. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 16:2263–2265.
- [21] Tsuchizawa, T., K. Yamada, H. Fukuda, T. Watanabe, J. Takahashi, M. Takahashi, T. Shoji, E. Tamechika, S. Itabashi, and H. Morita. 2005. Microphotonics devices based on silicon microfabrication technology. *IEEE J. Selected Topics Quantum Electron.* 11:232–240.
- [22] Bogaerts, W., R. Baets, P. Dumon, V. Wiaux, S. Beckx, D. Taillaert, B. Luyssaert, J. Campenhout, P. Bienstman, and D. Thourhout. 2005. Nanophotonic waveguides in silicon-on-insulator fabricated with CMOS technology. *IEEE J. Lightwave Tech.* 23:401–412.
- [23] Huang, W. P. and C. L. Xu. 1993. Simulation of three-dimensional optical waveguides by a full-vector beam propagation method. *IEEE J. Quantum Electron.* 29:2639–2649.

- [24] Jin, J. 2002. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons.
- [25] Cucinotta, A., S. Selleri, and L. Vincetti. 1998. Finite-elements semivectorial beam propagation method for nonlinear integrated optical devices. *Integrated Photonic Research*. Victoria, British Columbia, Canada, IME3, pp. 62–64.
- [26] Kawano, K., T. Kitoh, and M. Naganuma. 1999. Proposal of the accurate semi-vectorial finite element method for the 2-D cross-sectional optical waveguide analysis. *Transactions of The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers (Japanese Edition)* C-II, J82-C-II:222–223.

فصل ۷

روش انتشار پرتو

کوپلرهای جهتی منحنی، موجبرهای انشعاب و ترکیب، موجبرهای خمیده S شکل و موجبرهای مخروطی، اجزای ضروری در ساخت مدارهای نوری یکپارچه هستند. پدیده کوپلینگ حالت در کوپلرهای جهتی موازی در فصل چهارم بررسی شده است. با این حال، در کوپلرهای جهتی عملی، تزویج نور در مناطق موجبر خمیده S شکل در جلو و عقب موجبرهای موازی باید در نظر گرفته شود تا ارزیابی شود. ویژگی‌های انتشار دقیقاً برای موجبرهای متغیر محوری، تحلیل مود ایستائی FEM که در فصل ششم توضیح داده شده است باید با استفاده از تقریب موج پاراکسیال (موازی محور) و روش گالرکین^[۱] تقریب‌زده شود. روش انتشار پرتو (BPM)^[۲] قوی‌ترین فناوری برای بررسی پدیده‌های انتشار موج نور خطی و غیرخطی در موجبرهای متغیر محوری مانند تزویج‌کننده‌های منحنی خطی، موجبرهای انشعابدار و ترکیبی، موجبرهای خمیده S شکل و موجبرهای مخروطی است. BPM همچنین برای تجزیه و تحلیل انتشار پالس نور فوق کوتاه در فیبرهای نوری بسیار مهم است. دو نوع روش BPM در این فصل توضیح داده شده است: یکی بر اساس تبدیل فوریه سریع FFT^[۳] و دیگری بر اساس روش تفاضل محدود (FDM).

۱.۷ معادلات اساسی برای روش انتشار پرتو بر مبنای FFT

۱.۱.۷ انتشار موج در موجبرهای نوری

معادله موج اسکالر سه بعدی (معادله هلمهولتز) که اساس BPM است، با معادله زیر بیان می‌شود

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{d^2 E}{dy^2} + \frac{d^2 E}{dz^2} + (k^2 n^2(x, y, z)E) = 0 \quad (1.7)$$

^۱ Beam propagation method (BPM)

^۲ Fast Fourier transform (FFT)

^۳ Finite Difference Method (FDM)

میدان الکتریکی $E(x, y, z)$ را به دو بخش جدا می‌کنیم: عبارت پوش با تغییر به آرامی محوری $\phi(x, y, z)$ و عبارت متغیر سریع $\exp(-jkn_z z)$. در اینجا n_z یک ضریب شکست در روکش است. در این صورت زیر بیان می‌داریم

$$E(x, y, z) = \phi(x, y, z) \exp(-jkn_z z) \quad (۲.۷)$$

جایگزینی معادله (۲.۷) در (۱.۷)، بدست می‌آوریم

$$\nabla^2 \phi - j2kn_z \frac{\partial \phi}{\partial z} + k^2 (n^2 - n_{\infty}^2) \phi = 0. \quad (۳.۷)$$

که در آن

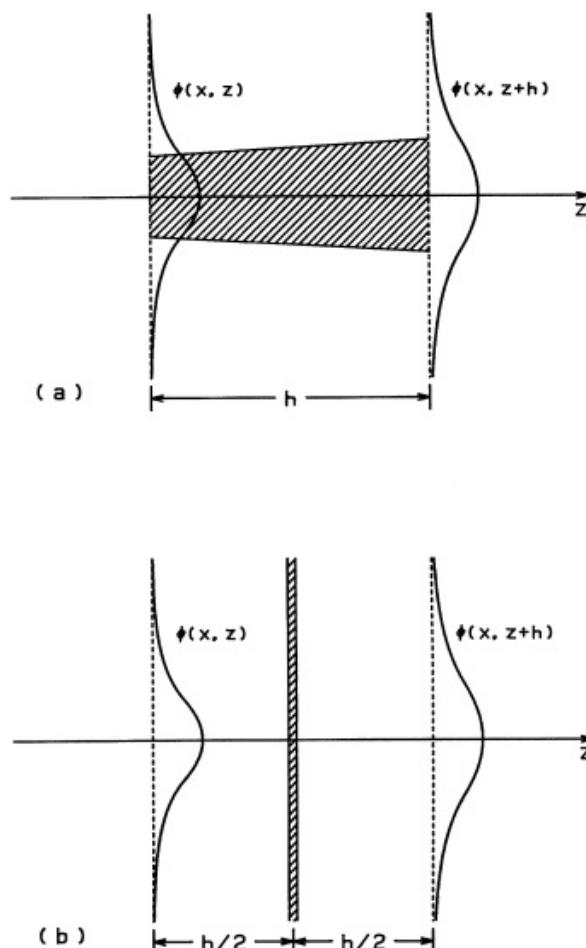
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (۴.۷)$$

شرط انتشار هدیت ضعیف، میتوانیم تقریب (۳.۷) در معادله (۵.۷) را فرض کنیم. در این صورت معادله (۳.۷) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j \frac{1}{2kn_z} \nabla^2 \phi - k(n - n_{\infty}) \phi. \quad (۵.۷)$$

هنگامی که $n = n_{\infty}$ است، فقط جمله اول در سمت راست معادله بالا باقی می‌ماند. بنابراین، میدانیم که جمله اول در معادله (۵.۷) نمایش دهنده انتشار نور در فضای آزاد در محیطی که دارای ضریب شکست n_z است. جمله دوم معادله (۵.۷) نشان دهنده عملکرد یا تأثیر هدایت کننده ناحیه‌ای است که دارای ضریب شکست $n(x, y, z)$ است. هر دو عبارت معادله (۵.۷) به طور همزمان بر انتشار نور تأثیر می‌گذارند. با این حال، در تحلیل BPM، فرض می‌کنیم که دو عبارت را می‌توان از هم جدا کرد و هر جمله به طور جداگانه و متناوب بر انتشار نور در فاصله محوری کوچک h تأثیر می‌گذارد [۲، ۳]. این فرض به صورت شماتیک برای موجبر مخروطی^۴ در شکل (۱.۷) نشان داده شده است. شکل (۱.۷)-الف انتشار نور را در موجبر مخروطی واقعی در فاصله کوچک h نشان می‌دهد و شکل (۱.۷)-ب جدایی انتشار فضای آزاد و اثر موجبر در تحلیل BPM را نشان می‌دهد. در تجزیه و تحلیل BPM، میدان الکتریکی $\phi(x, z)$ ابتدا در فضای آزاد در فاصله $h/2$ منتشر می‌شود. سپس تاخیر فاز کل طول h که مربوط به ناحیه سایه دار در شکل (۱.۷)-الف است، در مرکز انتشار در نظر گرفته می‌شود. این میدان الکتریکی دوباره در فضای آزاد دومی با فاصله $h/2$ منتشر می‌شود تا $\phi(x, z+h)$ به دست آید. روش اصلی BPM در فاصله کوچک h رابطه بندی می‌شود تا میدان ارسالی $\phi(x, z+h)$ را به میدان اولیه $\phi(x, z)$ مرتبط کند. انتشار نور در انواع مختلف موجبرها را می‌توان با تکرار چندین بار این روش تجزیه و تحلیل کرد.

^۴Tapered Waveguide



شکل ۱.۷: تصویر شماتیک تجزیه و تحلیل BPM: (الف) انتشار نور در موجبر مخروطی. (ب) جداسازی انتشار فضای آزاد و اثر موجبر در BPM.

۲.۱.۷ انتشار پالس در موجبرهای نوری

معادله غیرخطی شرودینگر [معادله (۳۲.۵)], که تابع پوش پالس نوری $A(z, t)$ تحت غیرخطی بودن اثر کر و افت (یا تقویت) در فیبرهای نوری را کنترل می‌کند، در اینجا دوباره بیان می‌شود:

$$j \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \beta' \frac{\partial A}{\partial t} + \alpha A \right) = -\frac{1}{4} \beta'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{4} k n_v |A|^2 A. \quad (6.7)$$

به منظور بررسی پیشرفت شکل پالس نوری، سیستم مختصات ثابت را به مختصات متحرک با سرعت $v_g = 1/\beta'$ تغییر می‌دهیم:

$$A(z, t) = \phi(z, \tau) \quad (17.7)$$

$$\tau = t - \beta' z \quad (17.7\text{ب})$$

جایگزینی معادله (۱۷.۷) در (۶.۷)، بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = j \frac{1}{2} \beta'' \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \alpha \phi - j \frac{1}{2} k n_{\tau} |\phi|^2 \phi. \quad (8.7)$$

جمله اول و دوم در سمت راست این معادله نشان دهنده انتشار نور در یک محیط خطی است و جمله سوم نشان دهنده تأثیر غیرخطی بودن اثر کر است. مشابه با تحلیل انتشار موج BPM، فرض می‌کنیم که انتشار نور در یک محیط خطی و تأثیر اثر نوری غیرخطی را می‌توان با تجزیه و تحلیل انتشار پالس توسط BPM از هم جدا کرد.

۲.۷ تجزیه و تحلیل FFTBPM انتشار موج نوری

۱.۲.۷ حل فرمول با استفاده از عملگر (اپراتور)

در اینجا تجزیه و تحلیل BPM برای موج نوری تیغه‌ای به منظور درک آسان فرمول BPM توضیح داده شده است. موجبر سه بعدی را می‌توان پس از تبدیل مسئله سه بعدی به یک مسئله دو بعدی با استفاده از روش ضرب شکست موثر شرح داده شده در بخش ۴.۲.۲ بحث کرد. معادله موج حاکم BPM برای موجبرهای دو بعدی از معادله (۵.۷) به صورت زیر بازنویسی شده است

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -j \frac{1}{2k n_{\circ}} \nabla^2 \phi - \alpha \phi - jk[n(x, z) - n_{\circ}] \phi \quad (9.7)$$

که در آن جمله افت یا تقویت $-\alpha \phi$ – اضافه شده است و ضمناً

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (10.7)$$

اجازه دهدید اثر انتشار فضای آزاد را نشان دهیم [جمله اول در معادله (۹.۷)] توسط عملگر A و اثر هدایت موج [جمله دوم و سوم در معادله (۹.۷)] توسط عملگر B. با استفاده از نمایش عملگر، معادله (۹.۷) به طور رسمی بصورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\phi \quad (11.7)$$

$$\mathbf{A} = -j \frac{1}{2k n_{\circ}} \nabla^2 \quad (\bar{12.7})$$

$$\mathbf{B} = -\alpha(x, z) - jk[n(x, z) - n_{\circ}] \quad (12.7\text{ب})$$

اگر فرض کنیم که عملگر B وابستگی \approx ندارد، معادله (۱۱.۷) می‌تواند به‌طور معمول به‌صورت یکپارچه زیر نوشته شود

$$\phi(x, z + h) = \exp[h(\mathbf{A} + \mathbf{B})]\phi(x, z) \quad (13.7)$$

در اینجا به قضیه بارکر- هاسدورف^۵ برای عملگرهای غیرجابه‌جایی $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ اشاره می‌کنیم که به‌صورت زیر بیان می‌شود^[۴].

$$\exp(\hat{\mathbf{a}})\exp(\hat{\mathbf{b}}) = \exp\left[\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{b}} + \frac{1}{2}\left[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}\right] + \frac{1}{12}\left[\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{b}}, [\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}]\right] + \dots\right] \quad (14.7)$$

که در آن $\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = h\mathbf{B}$ و $\hat{\mathbf{a}} = h\mathbf{A}$ را بسط داده و فرض می‌کنیم که h بقدر کافی کوچک است، می‌توانیم از جمل مرتبه بالاتر از $O(h^2)$ را نادیده بگیریم. بنابراین می‌توانیم تقریب زیر را بکار ببریم

$$\exp(h\mathbf{A} + h\mathbf{B}) \approx \exp(h\mathbf{A})\exp(h\mathbf{B}) \quad (15.7)$$

علاوه بر این، مشخص شده است که دقت معادله (۱۵.۷) را می‌توان با تغییر آن به مرتبه $O(h^3)$ بهبود بخشد.

$$\exp(h\mathbf{A} + h\mathbf{B}) = \exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\exp(h\mathbf{B})\exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right) \quad (16.7)$$

با جایگزینی معادله (۱۶.۷) در معادله (۱۳.۷)، حل رسمی معادله (۱۱.۷) را به‌دست می‌آوریم:

$$\phi(x, z + h) = \exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\exp(h\mathbf{B})\exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\phi(x, z) \quad (17.7)$$

این معادله آخر می‌گوید که میدان الکتریکی $\phi(x, z)$ ابتدا در فضای آزاد (اپراتور \mathbf{A}) در فاصله $h/2$ منتشر و سپس تلفات یا تقویت و تاخیر فاز کل طول h ، در مرکز انتشار (اپراتور \mathbf{B})، در نظر گرفته می‌شود. این میدان الکتریکی دوباره در فضای آزاد دوم (اپراتور \mathbf{A}) با فاصله $h/2$ منتشر می‌شود تا $\phi(x, z + h)$ بدست آید.

با این حال، معادله (۱۷.۷) صرفاً یک راه حل رسمی است و حتی بیشتر از وابستگی \approx به \mathbf{B} نادیده گرفته شده است. بنابراین، مفهوم فیزیکی عملگرهای \mathbf{A} و \mathbf{B} و معادله (۱۷.۷) را در بخش بعدی توضیح می‌دهیم.

۲.۲.۷ روشهای عددی دقیق با استفاده از الگوریتم فوریه تقسیم مرحله‌ای

اجازه دهید ابتدا معنای عملگر \mathbf{A} تعریف شده توسط معادله (۱۲.۷) را که در معادله (۷.۱۷) بیان شده است، بررسی کنیم. طبق تعریف، عملگر \mathbf{A} نشان دهنده انتشار نور در

^۵Barker–Hausdorff theorem

فضای آزاد با ضریب شکست n_\circ است. معادله موج توصیف کننده انتشار نور در فضای آزاد در موجبر تیغه‌ای $(\partial/\partial y = 0)$ از معادله (۱۸.۷) به صورت زیر دست آمده است.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 n_\circ^2 \psi = 0 \quad (18.7)$$

که در آن ψ نشان‌دهنده فضای آزاد است که میدان الکتریکی را منتشر می‌کند تا آن را از E متمایز کند. حل معادله موج فوق را به شکل انتگرال فوریه بیان می‌کنیم.

$$\psi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\rho, z) \exp(j2\pi\rho x) d\rho \quad (19.7)$$

که در آن $\Psi(\rho, z)$ دامنه موج مسطح است که دارای قرکانس مکانی ρ است. با جایگزینی معادله (۱۹.۷) در معادله (۱۸.۷)، معادله دیفرانسیل زیر را برای $\Psi(\rho, z)$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \beta^2 \Psi(\rho, z) = 0 \quad (20.7)$$

که در آن β^2 برابر است با

$$\beta^2 = k^2 n_\circ^2 - (2\pi\rho)^2 \quad (21.7)$$

هنگامی که میدان الکتریکی در $z = z_\circ$ برای $\psi(x, z_\circ)$ معلوم شود، مولفه فرکانس فضایی آن $\Psi(\rho, z_\circ)$ نیز با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\Psi(\rho, z_\circ) = F[\psi(x, z_\circ)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, z_\circ) \exp(-j2\pi\rho x) dx \quad (22.7)$$

در اینجا نماد F نمایشگر تبدیل فوریه است. با استفاده از معادله (۲۲.۷) به عنوان شرایط اولیه، حل معادله (۲۰.۷) خواهد بود

$$\Psi(\rho, z) = \Psi(\rho, z_\circ) \exp[-j\beta(z - z_\circ)]. \quad (23.7)$$

با جایگزینی معادله (۲۳.۷) در معادله (۱۹.۷)، حل را برای معادله موج تیغه‌ای (۱۸.۷) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \psi(x, z) &= F^{-1}[\Psi(\rho, z)] = F^{-1}[\Psi(\rho, z_\circ) \exp[-j\beta(z - z_\circ)]] \\ &= F^{-1}[F\{\psi(x, z_\circ)\} \exp[-j\beta(z - z_\circ)]] \end{aligned} \quad (24.7)$$

در این معادله، نماد F^{-1} نمایشگر عکس تبدیل فوریه‌ای است که با معادله (۱۹.۷) داده شده است. معادله (۲۴.۷) رابطه‌بندی نور منتشر شده $\psi(x, z)$ فضای آزاد را در فاصله $(z - z_\circ)$ با میدان الکتریکی اولیه $(\psi(x, z_\circ))$ در $z = z_\circ$ نشان می‌دهد. بطوری که در معادله (۲۴.۷) نشان داده شده است، تابع پوش با تغییر آرام $\phi(x, z)$ و جمله تغییر سریع $\psi(x, z)$ در $\psi(x, z) = \phi(x, z) \exp(-jkn_\circ z)$ بطور جدا از هم بصورت $\phi(x, z) = \phi(x, z_\circ) \exp(-jkn_\circ z_\circ)$ بیان می‌شود.

با جایگزینی این معادله در معادله (۲۴.۷)، رابطه‌ای برای تابع پوش ϕ در $z = z_0 + h/2$ بدست می‌آوریم:

$$\phi\left(x, z + \frac{h}{2}\right) \exp\left(-\frac{jkn_0 h}{2}\right) = F^{-1} \left[F\{\phi(x, z_0)\} \exp\left(-\frac{j\beta h}{2}\right) \right] \quad (25.7)$$

با معرفی پارامتر جدید $\delta\beta$ ، که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta\beta = \beta - kn_0 = [k^2 n_0^2 - (2\pi\rho)^2]^{1/2} - kn_0. \quad (26.7)$$

و جایگزینی z با z ، معادله (۲۵.۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\phi\left(x, z + \frac{h}{2}\right) = F^{-1} \left[\exp\left(-\frac{j\delta\beta h}{2}\right) F\{\phi(x, z)\} \right] \quad (27.7)$$

وقتی معادله (۲۷.۷) با معادله (۱۷.۷) را مقایسه می‌کنیم، معنای فیزیکی عملگر A به شرح زیر خواهد بود:

$$\phi\left(x, z + \frac{h}{2}\right) = \exp\left(\frac{hA}{2}\right) \phi(x, z) = F^{-1} \left[\exp\left(-\frac{j\delta\beta h}{2}\right) F\{\phi(x, z)\} \right] \quad (28.7)$$

سپس معنای عملگر B را بررسی می‌کنیم. اگر عملگر A در معادله (۱۱.۷) نادیده گرفته شود، معادله دیفرانسیل برای عملگر B به صورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial \Theta}{dz} = B\Theta \quad (29.7)$$

حل این معادله دیفرانسیل بصورت زیر داده شده است

$$\Theta(x, z + h) = \Theta(x, z) \exp \left[\int_x^{z+h} Bd\zeta \right] \quad (30.7)$$

اگر یک گام انتگرال‌گیری h کوچک باشد، جمله انتگرال تقریب زده می‌شود

$$\int_x^{z+h} Bd\zeta \approx \frac{h}{2} [B(z) + B(z + h)] \quad (31.7)$$

بنابراین، عملگر B در معادله (۱۷.۷) بیان می‌شود:

$$\exp(hB) = \exp \left\{ \frac{h}{2} [B(z) + B(z + h)] \right\} \quad (32.7)$$

از آنجایی که عملگر B یک کمیت اسکالر است، همانطور که در معادله (۱۲.۷) نشان داده شده است، معادله (۳۲.۷) به این معنی است که عملکرد عملگر B اضافه کردن تلفات (یا تقویت) و جمله تاخیر فاز توسط معادله (۱۲.۷) به میدان الکتریکی ϕ داده شده است.

هنگامی که معنای عملگرهای A و B را تشخیص می‌دهیم، میدان الکتریکی $\phi(x, z + h)$ در معادله (۱۷.۷) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{۱- انتشار فضای آزاد در نیم گام اول} \\ \phi\left(x, z + \frac{h}{2}\right) &= \exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\phi(x, z) \\ &= F^{-1}\left[\exp\left(-\frac{j\delta\beta h}{2}\right)F\{\phi(x, z)\}\right] \end{aligned} \quad (\bar{A}33.7)$$

$$\begin{aligned} \text{۲- تلفات (یا تقویت) و تاخیر فاز کل گام } h \\ \phi^*\left(x, z + \frac{h}{2}\right) &= \exp(h\mathbf{B})\phi\left(x, z + \frac{h}{2}\right) \\ &= \exp\left\{\frac{h}{2}[\mathbf{B}(z) + \mathbf{B}(z+h)]\right\}\phi\left(x, z + \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (\bar{A}33.7b)$$

$$\begin{aligned} \text{۳- انتشار فضای آزاد در نیم گام دوم} \\ \phi(x, z+h) &= \exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\phi^*\left(x, z + \frac{h}{2}\right) \\ &= F^{-1}\left[\exp\left(-\frac{j\delta\beta h}{2}\right)F\left\{\phi^*\left(x, z + \frac{h}{2}\right)\right\}\right] \end{aligned} \quad (\bar{A}33.7c)$$

۳.۷ تحلیل FFTBPM پالس نوری

وقتی اثر انتشار فضای خطی را نشان می‌دهیم [اولین جمله در معادله (A.7)] توسط عملگر A و اثر افت (یا تقویت) و غیرخطی [جمله دوم و سوم در معادله (A.7)] توسط عملگر B، معادله (A.7) به صورت رسمی زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\phi \quad (34.7)$$

$$\mathbf{A} = j\frac{1}{2}\beta''\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \quad (\bar{A}35.7)$$

$$\mathbf{B} = -\alpha - j\frac{1}{2}kn_2|\phi|^2 \quad (\bar{A}35.7b)$$

مشابه تحلیل موجبر که در بخش قبل تشریح شد، حل رسمی معادله (34.7) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\phi(z+h, \tau) = \exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\exp(h\mathbf{B})\exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\phi(z, \tau). \quad (36.7)$$

طبق تعریف، عملگر A نشان دهنده انتشار نور در فضای خطی است. معادله موجی که انتشار نور در فضای خطی را توصیف می‌کند از معادله (A.7) به دست آمده است:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = j\frac{1}{2}\beta''\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} \quad (37.7)$$

حل این معادله موج را به صورت انتگرال فوریه بیان می‌کنیم:

$$\psi(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (38.7)$$

که در آن $\psi(z, f)$ مولفه طیف فرکانس است. جایگزینی معادله (۳۸.۷) در معادله (۳۷.۷)، معادله دیفرانسیل $\psi(z, f)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -j \frac{1}{2} \beta''(2\pi f)^2 \psi(z, f) \quad (39.7)$$

هنگامی که شکل پالس در $z = z_0, \tau$ معلوم است، مولفه طیف فرکانسی آن ψ تو سط رابطه زیر داده می‌شود

$$\psi(z_0, f) = F[\psi(z_0, \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, \tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (40.7)$$

با استفاده از معادله (۴۰.۷) بعنوان شرط اولیه، حل معادله (۳۹.۷) خواهد بود

$$\psi(z, f) = \psi(z_0, f) \exp[-j\gamma(z - z_0)] \quad (41.7)$$

که در آن γ تعریف می‌شود:

$$\gamma = \frac{\beta''}{2}(2\pi f)^2 \quad (42.7)$$

با جایگزینی معادله (۴۲.۷) در (۳۸.۷)، حل معادله (۳۷.۷) را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \psi(z, \tau) &= F^{-1}[\psi(z, f)] = F^{-1} [\psi(z_0, f) \exp[-j\gamma(z - z_0)]] \\ &= F^{-1} [F\{\psi(z_0, \tau)\} \exp[-j\gamma(z - z_0)]] \end{aligned} \quad (43.7)$$

معادله (۴۳.۷) رابطه‌ای را نشان می‌دهد که نور $\psi(z, \tau)$ منتشر شده در فضای خطی را در فاصله $(z - z_0)$ با شکل موج پالس اولیه $\psi(z_0, \tau)$ در $z = z_0$ مرتبط می‌کند. وقتی فاصله انتشار در فضای خطی $h/2$ باشد، معادله (۴۳.۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\phi\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) = F^{-1} \left[\exp\left(-\frac{j\gamma h}{2}\right) F\{\phi(z, \tau)\} \right] \quad (44.7)$$

که در آن ψ با ϕ و z جایگزین شده است. با مقایسه معادله (۳۶.۷) و (۴۴.۷)، مفهوم فیزیکی عملگر A توصیف می‌شود:

$$\phi\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) = \exp\left(\frac{hA}{2}\right) \phi(z, \tau) = F^{-1} \left[\exp\left(-\frac{j\gamma h}{2}\right) F\{\phi(z, \tau)\} \right] \quad (45.7)$$

با پیروی از روش مشابه برای عملگر B در تجزیه و تحلیل موجبر، می‌بینیم که معنای فیزیکی عملگر B بصورت زیر بیان می‌شود

$$\exp(hB) = \exp \left\{ \frac{h}{2} [B(z) + B(z+h)] \right\} \quad (46.7)$$

که در آن B توسط معادله (۳۵.۷) داده شده است. با این حال، اجرای معادله (۴۶.۷) ساده نیست زیرا $B(z+h)$ در بخش میانی واقع در $z + h/2$ ناشناخته است. لازم است

یک روش تکراری را دنبال کنید که با جایگزینی $B(z+h)$ توسط $B(z)$ آغاز شود. سپس از معادله (۴۶.۷) برای تخمین تقریب مرتبه α $\phi^{(\alpha)}(z+h, \tau)$ استفاده شود که به نوبه خود برای محاسبه مقدار جدید $B(z+h)$ استفاده می‌شود. با استفاده از این مقدار جدید در معادله (۴۶.۷)، یک تقریب بهبود یافته $\phi^{(1)}(z+h, \tau)$ بهدست می‌آید. اگرچه روش تکرار زمان بر است، اما اگر اندازه گام h را بتوان بهدلیل دقت بهبود یافته الگوریتم عددی افزایش داد، همچنان می‌تواند زمان محاسبه کلی را کاهش دهد. مشخص است که دو تکرار به طور کلی در عمل کافی است [۴۶].

هنگامی که مفهوم عملگرهای A و B را تشخیص می‌دهیم، پوش پالس $\phi(z+h, \tau)$ در معادله (۴۶.۷) را به صورت زیر بدست می‌آید:

۱- انتشار فضای آزاد در نیم گام اول $h/2$

$$\begin{aligned}\phi\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) &= \exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\phi(z, \tau) \\ &= F^{-1}\left[\exp\left(-\frac{j\gamma h}{2}\right)F\{\phi(z, \tau)\}\right]\end{aligned}\quad (۴۷.۷)$$

۲- تلفات (یا تقویت) و تأخیر فاز کل گام h :

$$\begin{aligned}\phi^*\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) &= \exp(h\mathbf{B})\phi\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) \\ &= \exp\left\{\frac{h}{2}[\mathbf{B}(z) + \mathbf{B}(z+h)]\right\}\phi\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right)\end{aligned}\quad (۴۷.۷)$$

۳- انتشار فضای آزاد در نیم گام دوم $h/2$

$$\begin{aligned}\phi(z+h, \tau) &= \exp\left(\frac{h\mathbf{A}}{2}\right)\phi^*\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right) \\ &= F^{-1}\left[\exp\left(-\frac{j\gamma h}{2}\right)F\left\{\phi^*\left(z + \frac{h}{2}, \tau\right)\right\}\right]\end{aligned}\quad (۴۷.۷)$$

۴.۷ تبدیل فوریه گستته

انتقال تبدیل فوریه در معادله (۳۳.۷) و (۴۷.۷) به تبدیل فوریه گستته به منظور محاسبه عددی آنها، ضروری است [۴۶]. قبل از توصیف تبدیل فوریه گستته (DFT)^۶، قضیه نمونه برداری [۴۷] که اساس DFT است توضیح داده خواهد شد.

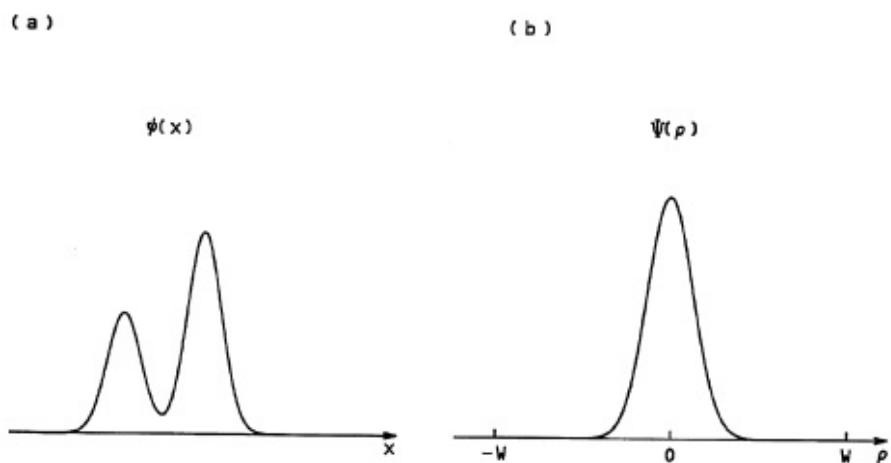
اجازه دهید توزیع میدان الکتریکی $\psi(x)$ مصور در شکل (۲.۷)-الف را در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم که طیف فرکانس مکانی $\Psi(\rho)$ در داخل محدوده فرکانس مکانی $-\rho \leq W \leq \rho$ محدود شده است، همانطور که در شکل (۲.۷)-ب نشان داده شده است؛ یعنی،

$$\Psi(\rho) = 0 \quad (|\rho| > W) \quad (۴۸.۷)$$

در اینجا W نمایشگر فرکانس مکانی بیشینه است. در این صورت انتگرال فوریه $\psi(x)$ را بصورت زیر بیان می‌کنیم

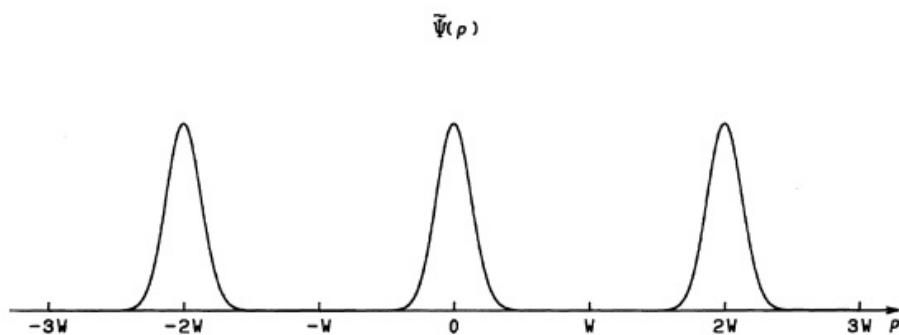
$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\rho) \exp(j2\pi\rho x) d\rho = \int_{-W}^{W} \Psi(\rho) \exp(j2\pi\rho x) d\rho \quad (۴۹.۷)$$

^۶ Discrete Fourier transform (DFT)



شکل ۲.۷: الف میدان الکتریکی $\psi(x)$ و ب طیف فرکانس مکانی آن $\Psi(\rho)$

چون مولفه‌های فرکانس مکانی خارج از $W > |\rho|$ لازم نیست، برای تحریک فرض می‌کنیم که



شکل ۳.۷: توزیع طیف مکانی $\Psi(\rho)$ بطوری که $\Psi(\rho)$ در داخل $W \leq |\rho|$ در طور تناوبی تکرار با تناوب $2W$ تکرار می‌شود

توزیع فرکانس مکانی در این ناحیه قرار دارد. در اینجا فرض می‌کنیم که توزیع فرکانس مکانی $\Psi(\rho)$ در داخل $W \leq |\rho|$ در طور تناوبی، با تناوب $2W$ مانند شکل (۳.۷) تکرار می‌شود. این توزیع طیف تکراری با نماد $\tilde{\Psi}(\rho)$ نشان داده می‌شود. در این صورت معادله (۴۹.۷) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\psi(x) = \int_{-W}^W \tilde{\Psi}(\rho) \exp(j2\pi\rho x) d\rho \quad (50.7)$$

تابع متناوب $\tilde{\Psi}(\rho)$ با استفاده از سری فوریه بصورت زیر بیان می‌شود

$$\tilde{\Psi}(\rho) = \frac{1}{2W} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-j2\pi\rho \frac{n}{2W}\right) \quad (51.7)$$

که در آن ضریب بسط a_n خواهد بود

$$a_n = \int_{-W}^W \tilde{\Psi}(\rho) \exp\left(j2\pi\rho \frac{n}{2W}\right) d\rho \quad (52.7)$$

از آنجا که $\tilde{\Psi}(\rho) = \Psi(\rho)$ در ناحیه داخل $|a_n| \leq W$ بصورت زیر بیان می‌شود

$$a_n = \int_{-W}^W \Psi(\rho) \exp\left(j2\pi\rho \frac{n}{2W}\right) d\rho \quad (53.7)$$

هنگامی که معادله (53.7) با جمله انتهائی سمت راست معادله (49.7) مقایسه می‌کنیم، مشاهد می‌شود که

$$a_n = \psi\left(\frac{n}{2W}\right) \equiv \psi(n\Delta x) \quad (\bar{A}54.7)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2W} \quad (A54.7)$$

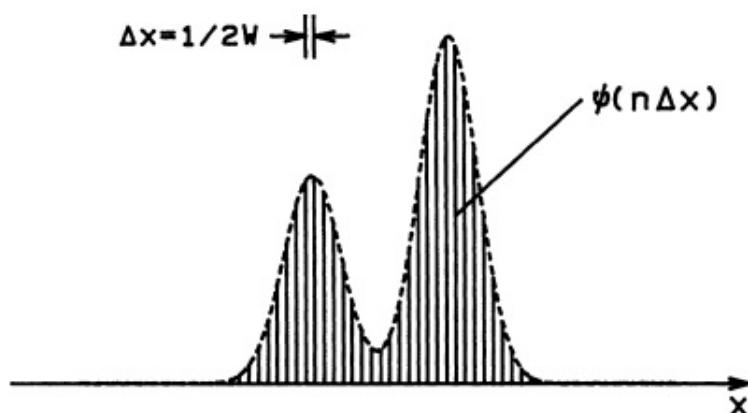
با جایگزینی معادله (51.7) در معادله (50.7) و قرار دادن Ψ_n خواهد شد

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{-W}^W \tilde{\Psi}(\rho) \exp(j2\pi\rho x) d\rho = \frac{1}{2W} \sum_{n=-W}^W \psi_n \int_{-W}^W \exp\left[j2\pi(2Wx - n)\frac{\rho}{W}\right] d\rho \\ &= \psi_n \frac{\sin[\pi(2Wx - n)]}{\pi(2Wx - n)} \end{aligned} \quad (A55.7)$$

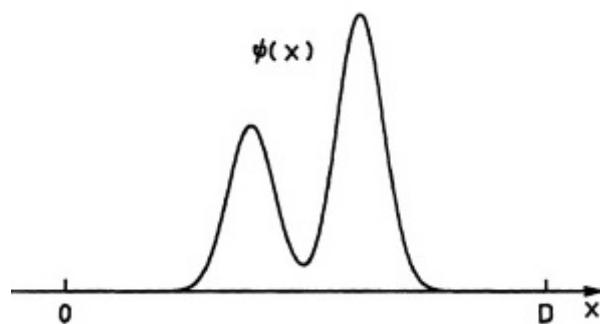
تابع $\sin[\pi(2Wx - n)]/\pi(2Wx - n)$ تابع نمونه‌گیری نامیده می‌شود. این واحد فقط در نقطه نمونه برداری $x = n/2W$ است و در سایر نقاط نمونه برداری $x \neq n/2W$ صفر می‌شود. بنابراین واضح است که $\psi(x)$ که با معادله (55.7) تقریبی است، در هر نقطه نمونه برداری از ψ_n عبور می‌کند. بهنظر می‌رسد منحنی‌های زیادی وجود دارد که از ψ_n عبور می‌کنند. با این حال، منحنی که به طور دلخواه برای عبور از ψ_n ترسیم می‌شود، عموماً شامل مولفه با فرکانس مکانی بالاتر $|W| > \rho$ است. بنابراین، ψ به طور یکتا تحت شرایط $|W| \leq \rho$ تعیین می‌شود.

معادله (55.7) معادله‌ای است که با استفاده از داده‌های گستته روی محور x ها در هر بازه $1/2W$ ، شکل موج‌های پیوسته را به دست می‌دهد. مشاهده می‌شود که وقتی شکل موج $\psi(x)$ ، که طیف فرکانس آن زیر W محدود شده است، با بازه $(W/2, W)$ نمونه برداری می‌شود، سری داده‌های نمونه برداری شده $\{\psi_n\}$ (شکل ۴.۷) اطلاعات کافی برای بازسازی شکل موج پیوسته اصلی $\psi(x)$ دارد. به این قضیه نمونه برداری^۱ می‌گویند. بر اساس قضیه نمونه برداری، تبدیل فوریه گستته توصیف می‌شود. فرض می‌کنیم که توزیع میدان الکتریکی $\psi(x)$ در داخل $x \in [0, D]$ همانطور که در شکل (5.7) نشان داده شده، محدود است. علاوه بر این، فرکانس مکانی آن در محدوده $|W| \leq \rho$ محدود

^۱Sampling Theorem.



شکل ۴.۷: یک سری داده نمونه برداری شده $[\psi(n\Delta x)]$ که در فواصل مکانی $\Delta x = 1/2W$ نمونه برداری شده است.

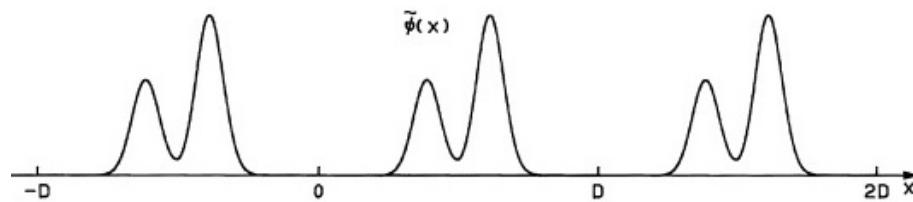


شکل ۵.۷: توزیع میدان الکتریکی $\psi(x)$ که در ناحیه $0 \leq x \leq D$ محدود شده است.

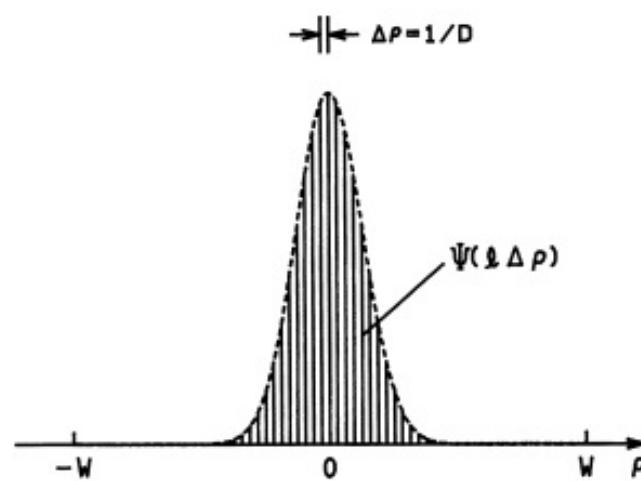
شده است. در اینجا، شکل میدان الکتریکی $(\tilde{\psi}(x))$ را در نظر می‌گیریم که با تکرار (۴.۷) به دست می‌آید، همانطور که در شکل (۴.۷) نشان داده شده است. دنبال کردن روش‌های مشابه معادله (۴۹.۷)-(۵۳.۷)، به دست می‌آوریم

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{D} \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \exp\left(j\frac{2\pi l}{D}x\right) \quad (56.7)$$

$$\begin{aligned} b_l &= \int_0^D \tilde{\psi}(x) \exp\left(-j\frac{2\pi l}{D}x\right) dx \\ &= \int_0^D \psi(x) \exp\left(-j\frac{2\pi l}{D}x\right) dx \end{aligned} \quad (57.7)$$



شکل ۷.۶: نمای میدان الکتریکی که از تکرار $\psi(x)$ در ناحیه $x \leq D$ بدست آمده است.



شکل ۷.۷: یک سری از داده نمونه برداری شده $\{\Psi(l\Delta\rho)\}$ که با بازه $\Delta\rho = 1/D$ نمونه برداری شده است.

هنگامی که معادله (۵۷.۷) با تبدیل فوریه زیر مقایسه می‌کنیم

$$\Psi(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(-j2\pi\rho x) dx = \int_0^D \psi(x) \exp(-j2\pi\rho x) dx \quad (58.7)$$

مشاهده می‌کنیم که

$$b_l = \Psi\left(\frac{l}{D}\right) \equiv \Psi(l\Delta\rho) \quad (\text{آ}59.7)$$

$$\Delta\rho = \frac{1}{D} \quad (\text{آ}59.7\text{ب})$$

بنابراین، مشاهده می‌شود که وقتی توزیع فرکانس مکانی، که میدان الکتریکی متناظر آن در $x \leq D$ محدود است، با بازه $\Delta\rho \leq 1/D$ نمونه برداری شود، سری داده‌های نمونه برداری شده (شکل ۷.۷) اطلاعات کافی برای بازسازی توزیع فرکانس پیوسته اصلی $\Psi(\rho)$ را دارد.

اگر تعداد کل نقاط نمونه برداری هم برای توزیع میدان الکتریکی $\psi(x)$ و هم برای

طیف فرکانس مکانی N باشد، آنها به صورت زیر تقریب زده می‌شوند.

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \delta(x - n\Delta x) \cdot \Delta x \quad (60.7)$$

$$\Psi(\rho) = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi(l\Delta\rho) \delta(\rho - l\Delta\rho) \cdot \Delta\rho \quad (61.7)$$

که در آن $\Delta x = D/N$ و $\Delta\rho = 2W/N$ است. Δx و $\Delta\rho$ قبلاً با معادلات (۵۴.۷) و (۵۴.۷) بصورت $\Delta x = 1/2W$ و $\Delta\rho = 1/D$ داده شده بودند. بنابراین، میدانیم که تعداد کل نقاط نمونه برداری شده با W و D تحت رابطه زیر بهم مرتبط هستند

$$N = 2WD \quad (62.7)$$

با جایگزینی معادله (۶۰.۷) در (۵۸.۷)، رابطه‌ای بین سری خطوط طیف $\{\Psi(l\Delta\rho)\}$ و سری میدان الکتریکی نمونه برداری شده $\{\psi_n\}$ برقرار است.

$$\begin{aligned} \Psi(l\Delta\rho) &= \int_0^D \psi(x) \exp(-j2\pi xl\Delta\rho) dx \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \cdot \Delta x \int_0^D \delta(x - n\Delta x) \times \exp(-j2\pi xl\Delta\rho) dx \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \cdot \Delta x \exp\left(-j2\pi \frac{ln}{N}\right) \\ &= \frac{D}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \exp\left(-j2\pi \frac{ln}{N}\right) \quad (l = -\frac{N}{2} - \frac{N}{2} - 1) \end{aligned} \quad (63.7)$$

در اینجا از $\Delta x \cdot \Delta\rho = 1/N$ استفاده شده است. سپس، رابطه بین $\{\psi_n\}$ و $\{\Psi(l\Delta\rho)\}$ با جایگزینی معادله (۵۳.۷) در معادله (۶۱.۷) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \psi_n &= \int_{-W}^W \Psi(\rho) \exp(j2\pi\rho n\Delta x) d\rho \\ &= \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi(l\Delta\rho) \cdot \int_{-W}^W \delta(\rho - l\Delta\rho) \times \exp(j2\pi\rho n\Delta x) d\rho \\ &= \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi(l\Delta\rho) \cdot \Delta\rho \exp\left(j2\pi \frac{ln}{N}\right) \\ &= \frac{1}{D} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi(l\Delta\rho) \exp\left(j2\pi \frac{ln}{N}\right) \quad (n = 0 - N - 1) \end{aligned} \quad (64.7)$$

معادله (۶۳.۷) و (۶۴.۷) معادلات مستقیم و معکوس تبدیل فوریه هستند. بازه پارامتر $n(0 - N - 1)$ در معادله (۶۳.۷) از $(-N/2 - N/2 - 1)$ متفاوت است.

اگر بازه هر دو l و n یکسان باشند، برای برنامه کامپیوتر بسیار ساده‌تر است. در اینجا، یک پارامتر جدید l' برای l وقتی بازه $l = -N/2 \sim -1$ است معرفی می‌کنیم، یعنی

$$l' = l + N \quad \left(l' = \frac{N}{2} - N - 1 \right) \quad (65.7)$$

در این صورت معادله (۶۳.۷) و (۶۴.۷) را بازنویسی می‌کنیم

$$\Psi(l\Delta\rho) = \frac{D}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi \frac{ln}{N}\right) \quad \left(l = 0 - \frac{N}{2} - 1 \right) \quad (66.7)$$

$$\psi[(l' - N)\Delta\rho] = \frac{D}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi \frac{l'n}{N}\right) \quad \left(l' = \frac{N}{2} - N - 1 \right) \quad (66.7)$$

$$\psi_n = \frac{1}{D} \sum_{l=0}^{N/2-1} \Psi(l\Delta\rho) \exp\left(j2\pi \frac{ln}{N}\right) + \frac{1}{D} \sum_{l'=N/2}^{N-1} \Psi[(l' - N)\Delta\rho] \exp\left(j2\pi \frac{l'n}{N}\right) \quad (67.7)$$

هنگامی که بجای l' در معادلات (۶۶.۷) و (۶۷.۷) l قرار می‌دهیم و Ψ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\Psi_l = \begin{cases} \frac{\sqrt{N}}{D} \Psi(l\Delta\rho) & (l = 0 - \frac{N}{2} - 1) \\ \frac{\sqrt{N}}{D} \Psi[(l - N)\Delta\rho] & (l = \frac{N}{2} - N - 1) \end{cases} \quad (68.7)$$

تبديل فوريه مستقيمه و معكوس(IDFT) بصورت زير بيان مي شوند

$$\Psi_l = DFT(\psi_n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \exp\left(-j2\pi \frac{ln}{N}\right) \quad (l = 0 - N - 1) \quad (69.7)$$

$$\psi_n = IDFT(\Psi_l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \Psi_l \exp\left(j2\pi \frac{ln}{N}\right) \quad (n = 0 - N - 1) \quad (70.7)$$

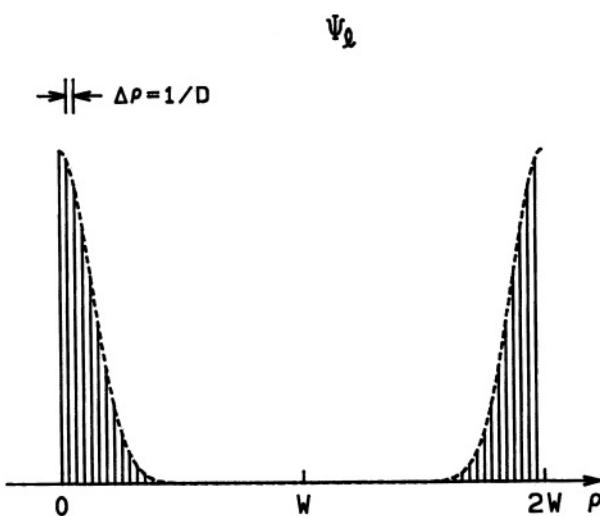
در اينجا باید توجه داشته باشيم که جزء طيفي منفي در شكل (۶.۷) به ناحيه طيفي بالاتر از W ، همانطور که در شكل (۸.۷) نشان داده شده، منتقل می‌شود. زيرا تبديل پارامتر را در معادله (۶۹.۷) معرفی کردیم. معادلات (۶۹.۷) و (۷۰.۷) همتای تبديل فوريه مستقيمه و معكوس پيوسته هستند.

$$\Psi(\rho) = F(\psi) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(-j2\pi\rho x) dx \quad (71.7)$$

$$\psi(xi) = F^{-1}(\Psi) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp(j2\pi\rho x) d\rho \quad (72.7)$$

شكل‌اي (۹.۷) و (۱۰.۷) روابط بين توزيع ميدان الکتروني و طيفهای فرکانس مکانی آن را به ترتیب برای تبدیل فوریه پیوسته و گسسته نشان می‌دهند.

^۱Inverse Discrete Fourier Transforms (IDFT)



شکل ۸.۷: سری طیف خطی جدید $\{\Psi_l\}$ که با معادله (۶۸.۷) تعریف شده است.

۵.۷ تبدیل فوریه سریع

با استفاده از رابطه تبدیل فوریه گسسته معکوس و مستقیم معادلات (۶۹.۷) و (۷۰.۷)، می‌توانیم تبدیل فوریه مستقیم و معکوس را برای توابع دلخواه محاسبه کنیم. با این حال، اگر تعداد تقسیمات N زیاد شود، زمان محاسبه بسیار طولانی می‌شود. کولی و ترکی^۹ یک الگوریتم کارآمد برای کاهش زمان محاسباتی DFT به‌طور قابل ملاحظه‌ای توسعه دادند که در آن دوره‌های تناوب جملات نمایی به‌طور هوشمندانه‌ای استفاده می‌شود [۱۰]. این تبدیل فوریه سریع (FFT)^{۱۰} نامیده می‌شود [۶].

روش DFT‌های مستقیم و معکوس در معادلات (۶۹.۷) و (۷۰.۷) از نظر ریاضی یکسان هستند، زیرا تفاوت فقط در علامت عبارات نمایی است. بنابراین، رابطه FFT را با استفاده از DFT مستقیم توصیف می‌کنیم. برای شروع، معادله (۶۹.۷) به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$F_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n G^{ln} \quad (l = 0 - N - 1) \quad (73.7)$$

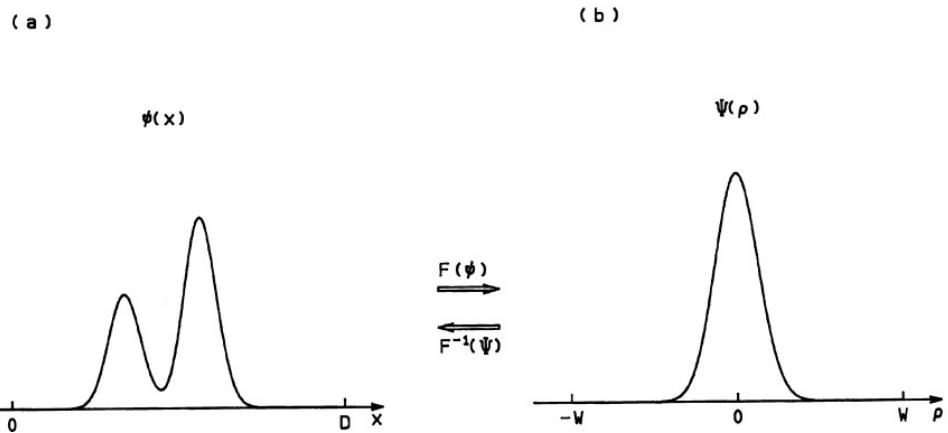
که در آن $F_l = \Psi_l$ ، $f_n = \psi_n / \sqrt{N}$ و $G = \exp\left(-\frac{j2\pi}{N}\right)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$G = \exp\left(-\frac{j2\pi}{N}\right) \quad (74.7)$$

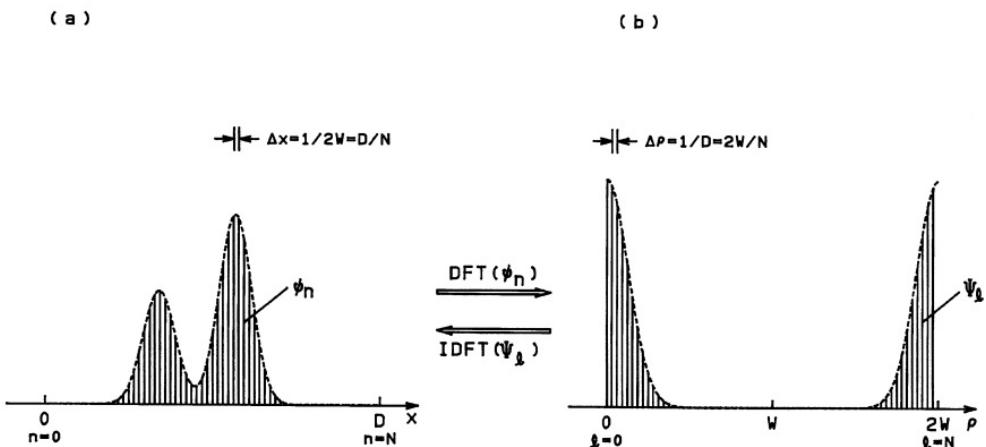
نمایش ماتریس رابطه (۷۳.۷) برای $N = 2^3 = 8$ خواهد بود

^۹Cooley and Turkey

^{۱۰}Fast Fourier Transform (FFT)



شکل ۹.۷: رابطه بین توزیع میدان الکتریکی و طیف فرکانس مکانی برای تبدیل فوریه پیوسته



شکل ۱۰.۷: رابطه بین توزیع میدان الکتریکی و طیف فرکانس مکانی برای تبدیل فوریه گسسته

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & G & G^2 & G^3 & G^4 & G^5 & G^6 & G^7 \\ 1 & G^2 & G^4 & G^6 & G^8 & G^{10} & G^{12} & G^{14} \\ 1 & G^3 & G^6 & G^9 & G^{12} & G^{15} & G^{18} & G^{21} \\ 1 & G^4 & G^8 & G^{12} & G^{16} & G^{20} & G^{24} & G^{28} \\ 1 & G^5 & G^{10} & G^{15} & G^{20} & G^{25} & G^{30} & G^{35} \\ 1 & G^6 & G^{12} & G^{18} & G^{24} & G^{30} & G^{36} & G^{42} \\ 1 & G^7 & G^{14} & G^{21} & G^{28} & G^{35} & G^{42} & G^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (75.7)$$

جملات از G^{l_n} تا G^0 در این معادله وجود دارد. البته، اگر به تناوبی بودن G^{l_n} توجه کنیم، معادلات (۷۳.۷) یا (۷۵.۷) را می‌توان ساده کرد. مقادیر N نمونه برداری شده از

تا f_{N-1} را بدو گروه $n = N/2 - (N-1)$ و $n = 0 - (N/2 - 1)$ تقسیم می‌کنیم. در این صورت معادله (۷۳.۷) بصورت زیر بیان می‌شود

$$F_l = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_n G^{ln} + \sum_{n=N/2}^{N-1} f_n G^{ln} \quad (76.7)$$

جمله دوم این معادله را می‌توان بازنویسی کرد

$$\sum_{n=N/2}^{N-1} f_n G^{ln} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{n+N/2} G^{l(n+N/2)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{n+N/2} G^{ln} G^{lN/2} \quad (77.7)$$

از معادله (۷۴.۷)، $G^{lN/2}$ بدست می‌آید:

$$G^{lN/2} = \exp\left(-j\frac{2\pi l}{N}\frac{N}{2}\right) = \exp(-j\pi l) = (-1)^l \quad (78.7)$$

در این صورت معادله (۷۶.۷) بیان می‌شود:

$$F_l = \sum_{n=0}^{N/2-1} [f_n + (-1)^l f_{n+N/2}] G^{ln} \quad (79.7)$$

نمایش ماتریس معادله (۷۹.۷) بازه $N = 8$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & G^2 & G^4 & G^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & G^4 & G^8 & G^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & G^6 & G^{12} & G^{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G & G^2 & G^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G^3 & G^6 & G^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G^5 & G^{10} & G^{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G^7 & G^{14} & G^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + f_4 \\ f_1 + f_5 \\ f_2 + f_6 \\ f_3 + f_7 \\ f_0 - f_4 \\ f_1 - f_5 \\ f_2 - f_6 \\ f_3 - f_7 \end{bmatrix} \quad (80.7)$$

معادله (۸۰.۷) نشان می‌دهد که عملیات ماتریس 8×8 به دو مجموعه از عملیات ماتریس 4×4 کاهش می‌یابد. عملیات ماتریسی معادله (۸۰.۷) را می‌توان به همان روشی که برای معادله (۷۹.۷) انجام شد به عملیات ماتریس 2×2 کاهش داد. چنین کاهش‌هایی از عملیات ماتریسی به طور سیستماتیک در الگوریتم FFT رابطه بندی شده است [۹].

۶.۷ رابطه‌سازی روش‌های عددی با استفاده از تبدیل فوریه گسسته

در اینجا رابطه‌های BPM را برای تحلیل موجبر بازنویسی می‌کنیم [معادله (۳۳.۷)] و تجزیه و تحلیل انتشار پالس [معادله (۴۷.۷)] به آنها یکی که از تبدیل فوریه گسسته برای

استفاده از زیربرنامه FFT استفاده می‌کنند. در اینجا باید توجه داشته باشیم که مولفه طیفی منفی در حوزه فرکانس بهناحیه طیفی بالاتر از نیمی از پنجره طیفی منتقل می‌شود، همانطور که در شکل (۱۰.۷)-ب نشان داده شده است.

روش‌های BPM برای تجزیه و تحلیل موجبر توضیح داده شده در معادله (۳۲.۷) به صورت گسسته بازنویسی می‌شوند:

۱: انتشار فضای آزاد در نیم گام اول $h/2$

$$\begin{aligned}\phi(m\Delta x, z + h/2) &= \exp(h\mathbf{A}/2)\phi(m\Delta x, z) \\ &= IDFT[\exp(-j\delta\beta_l h/2)DFT\{\phi(m\Delta x, z)\}] \\ &\quad \times(m = 0 - N - 1)\end{aligned}\quad (\text{۸۱.۷})$$

۲: افت (یا تقویت) و تاخیر فاز کل گام $h/2$

$$\begin{aligned}\phi^*(m\Delta x, z + h/2) &= \exp(h\mathbf{B})\phi(m\Delta x, z) \\ &= \exp\left\{\frac{h}{2}[\mathbf{B}(z) + \mathbf{B}(z + h)]\right\}\phi(m\Delta x, z + h/2) \\ &\quad \times(m = 0 - N - 1)\end{aligned}\quad (\text{۸۱.۷ب})$$

۳: انتشار فضای آزاد در نیم گام دوم $h/2$

$$\begin{aligned}\phi(m\Delta x, z + h) &= \exp(h\mathbf{A}/2)\phi^*(m\Delta x, z + h/2) \\ &= IDFT[\exp(-j\delta\beta_l h/2)DFT\{\phi^*(m\Delta x, z + h/2)\}] \\ &\quad \times(m = 0 - N - 1)\end{aligned}\quad (\text{۸۱.۷ج})$$

در اینجا، $\delta\beta_l$ و \mathbf{B} داده می‌شود:

$$\delta\beta_l = \begin{cases} [k^*n^* - (2\pi l\Delta\rho)^*]^{1/2} - kn. & (l = 0 - N/2 - 1) \\ \{k^*n^* - [2\pi(l - N)\Delta\rho]^*\}^{1/2} - kn. & (l = N/2 - N - 1) \end{cases}\quad (\text{۸۲.۷})$$

$$\mathbf{B} = -\alpha(m\Delta x, z) - jk[n(m\Delta x, z) - n_0] \quad (m = 0 - N - 1)\quad (\text{۸۳.۷})$$

روش‌های BPM برای تحلیل انتشار پالس شرح داده شده در معادله (۴۷.۷) به صورت گسسته بازنویسی می‌شوند: ۱: انتشار فضای خطی در نیم گام اول $h/2$

$$\begin{aligned}\phi(z + h/2, m\Delta\tau) &= \exp(h\mathbf{A}/2)\phi(z, m\Delta\tau) \\ &= IDFT[\exp(-j\gamma_l h/2)DFT\{\phi(z, m\Delta\tau)\}] \\ &\quad \times(m = 0 - N - 1)\end{aligned}\quad (\text{۸۴.۷})$$

۲: افت (یا تقویت) و تاخیر فاز کل گام $h/2$

$$\begin{aligned}\phi^*(z + h/2, m\Delta\tau) &= \exp(h\mathbf{B})\phi(z + h/2, m\Delta\tau) \\ &= \exp\left\{\frac{h}{2}[\mathbf{B}(z) + \mathbf{B}(z + h)]\right\}\phi(z + h/2, m\Delta\tau) \\ &\quad \times(m = 0 - N - 1)\end{aligned}\quad (\text{۸۴.۷ب})$$

۳:

انتشار فضای خطی در نیم گام دوم $h/2$

$$\begin{aligned}\phi(z + h, m\Delta\tau) &= \exp(h\mathbf{A}/2)\phi^*(z + h/2, m\Delta\tau) \\ &= IDFT[\exp(-j\gamma_l h/2)DFT\{\phi^*(z + h/2, m\Delta\tau)\}] \\ &\quad \times(m = 0 - N - 1)\end{aligned}\quad (\text{۸۴.۷ج})$$

در اینجا، $\Delta\tau = T/N = 1/2W$ و T بترتیب نمایشگر پنجره زمانی و فرکانس بیشینه پالس زمانی است. هنگامی که گام فرکانس $\Delta f = 2W/N = 1/T$ است، γ_l و B خواهد بود

$$\gamma_l = \begin{cases} \frac{\beta''}{2}(2\pi l \Delta f)^2 & (l = 0 - N/2 - 1) \\ \frac{\beta''}{2}[2\pi(l - N)\Delta f]^2 & (l = N/2 - N - 1) \end{cases} \quad (85.7)$$

$$B = -\alpha(z, m\Delta) - j\frac{1}{\lambda} kn_l |\phi(z, m\Delta\tau)|^2 \quad (m = 0 - N - 1) \quad (86.7)$$

از آنجایی که جمله‌های داخل جذر در معادله (82.7) باید مثبت باشد، روابط زیر را برای متغیر عدد صحیح l داریم:

$$kn_0 \geq 2\pi \frac{l}{D} \quad (l = 0 - N/2 - 1)$$

$$kn_0 \geq 2\pi \frac{(N-l)}{D} \quad (l = N/2 - N - 1) \quad (87.7)$$

در این صورت بازه متغیر l از معادله بالا خواهد بود:

$$l \leq \left[\frac{n_0 D}{\lambda} \right] \equiv l_{max} \quad (l = 0 - N/2 - 1) \quad (87.7)$$

$$N - l \leq \left[\frac{n_0 D}{\lambda} \right] \equiv l_{max} \quad (l = N/2 - N - 1) \quad (87.7)$$

که در آن $[]$ نمایشگر علامت گوس است. اگر l_{max} کوچکتر از $N/2$ باشد، بازه موجود برای l خواهد بود

$$l = 0 - l_{max} \quad (88.7)$$

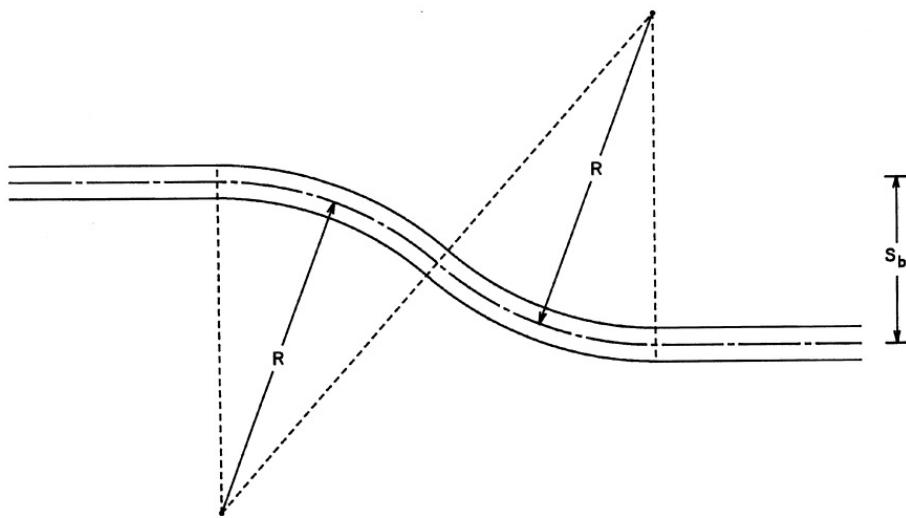
$$l = N - l_{max} - N - 1 \quad (88.7)$$

مولفه طیف فرکانس در بازه پارامتر 1 باید $l = l_{max} + 1 - N - l_{max} - 1$ قرار داده شود.

۷.۷ کاربرد FFTBPM

کاربردهای BPM بر اساس FEM برای انتشار پالس نوری در شکل (9.5)، (7.5) و (9.5) در بخش ۳.۵ نشان داده شده است. بنابراین، در اینجا کاربردهای BPM را برای مسائل موجبر نوری توضیح خواهیم داد.

اول از همه، بررسی BPM را برای کاهش تلفات انتشار در موجبرهای خمیده S شکل (S-bend) توضیح می‌دهیم [10]. موجبر خمیده S شکل، دو موجبر موازی را که با فاصله S_b از هم جدا شده‌اند، همانطور که در شکل (11.7) نشان داده شده، بهم متصل می‌کند.

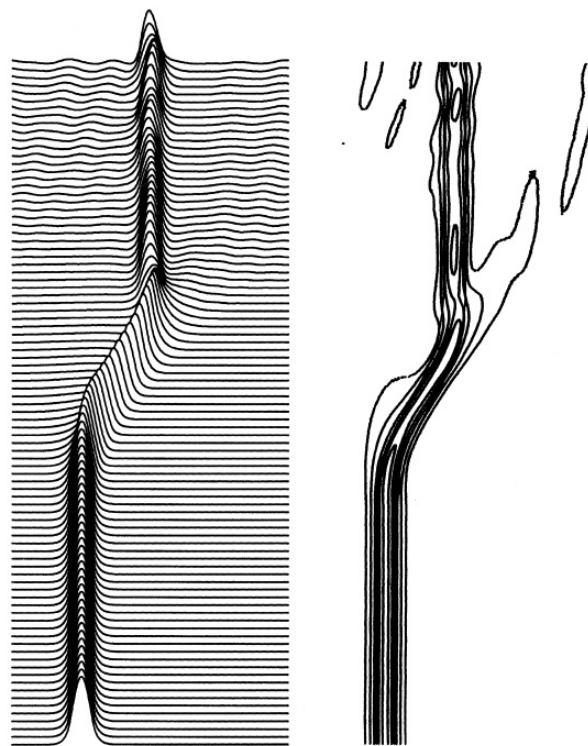
شکل ۱۱.۷: موجبر شکل خمیده S بدون آفست

موجبرهای خمیده S به عنوان موجبرهای ورودی/خروجی برای تزویج‌های جهت‌دار و به عنوان ترانسفورماتور مسیر موجبر در مدارهای مختلف مهم هستند. اساساً دو نوع موجبر خمیده S وجود دارد: موجبر خمیده S متشکل از یک شعاع انحنای ثابت R ، همانطور که در شکل (۱۱.۷) نشان داده شده است، و موجبر (S-bend) با شکل تابع $y = az + b \sin(cz)$ در که شعاع انحنا به طور پیوسته تغییر می‌کند. در اینجا خمیده S و R ثابت قبلی را بررسی می‌کنیم.

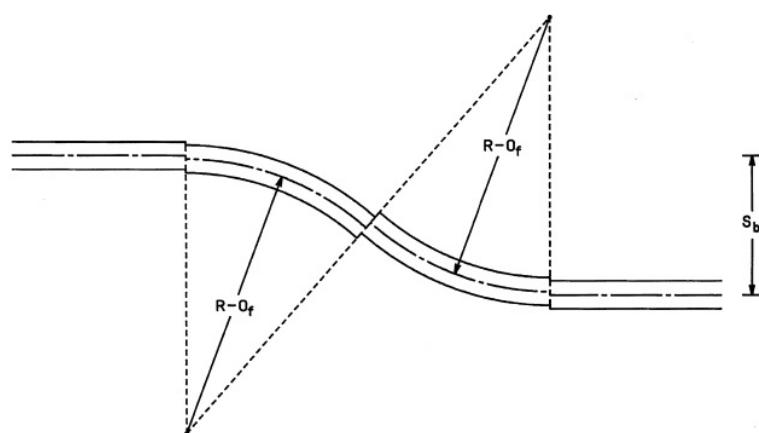
شکل (۱۲.۷) شبیه سازی BPM انتشار نور را در طول موج $\lambda = 1,55\mu m$ موجبر خمیده S شکل (۱۱.۷) نشان می‌دهد. پارامترهای موجبر خمیده S به شرح زیر است: به ترتیب؛ عرض هسته $2a = 8\mu m$ ، ضخامت هسته $2d = 8\mu m$ ، اختلاف ضریب شکست $\Delta = 0,3\%$ ، شعاع انحنا $R = 10\text{mm}$ و جداسازی موجبر $s_b = 25\mu m$ ، است. در اینجا، مسئله موجبر سه بعدی با استفاده از روش ضریب شکست موثر به یک مسئله دو بعدی تبدیل می‌شود. شکل سمت چپ شکل (۱۲.۷) شکل موجهای شدت نور و شکل سمت راست نمودارهای شدت نور را نشان می‌دهد.

در شکل (۱۲.۷) و شکل‌های تحلیل BPM آن، باید توجه داشته باشیم که طول انتشار در جهت محور z بسیار بیشتر از اندازه پنجره افقی محور x است. عرض تحلیل BPM در جهت محور x در شکل (۱۲.۷) $D = 10,24\mu m$ و تعداد تقسیم $N = 512$ ($\Delta x = D/N = 0,02\mu m$)، گام محاسبه در جهت محور z برابر $h = 0,5\mu m$ است. شکل (۱۲.۷) نشان می‌دهد که نور نمی‌تواند با موجبر منحنی تعامل کند و هنگامی که خمش شبیه‌دار باشد به داخل روکش تابش می‌شود. افت تابش ناشی از خمش در شکل (۱۲.۷) حدود $1/45$ دسی‌بل است. روش ساده برای کاهش تلفات ناشی از خمش، افزایش اختلاف ضریب شکست Δ موجبر و محدود کردن میدان نوری بطور فشرده در داخل هسته است.

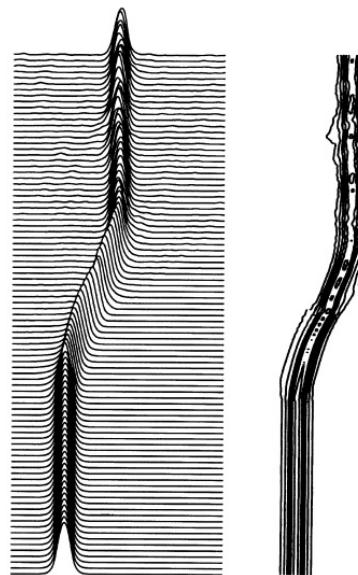
با این حال، راه ممکن دیگری برای کاهش تلفات خمشی بدون افزایش Δ وجود دارد، یعنی معرفی افست موجبر، همانطور که در شکل (۱۳.۷) نشان داده شده است [۱].



شکل ۱۲.۷: شبیه سازی BPM انتشار نور در یک موجبر خمیده S متتشکل از شعاع انحنای ثابت بدون افست.



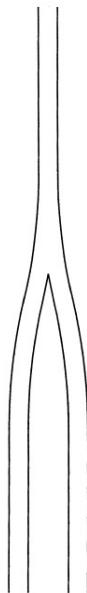
شکل ۱۳.۷: موجبر خمیده S شکل با یک موجبر افست



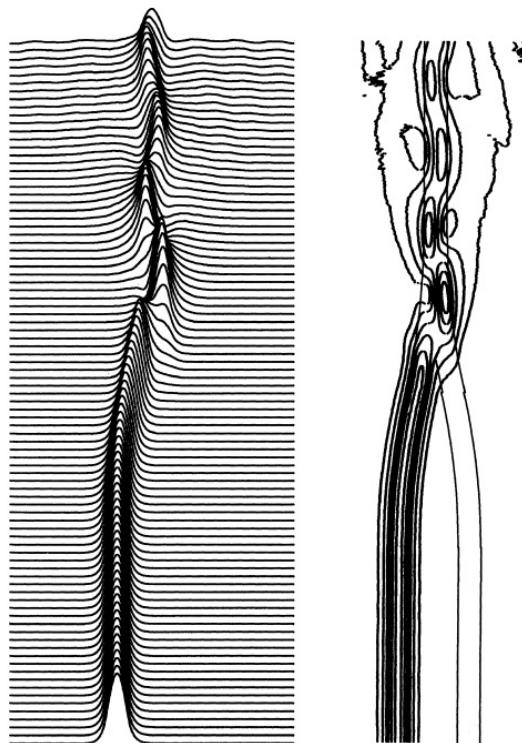
شکل ۱۴.۷: شبیه سازی BPM انتشار نور در یک موجبر خمیده S با افست $O_f = 1/4\mu m$

افست موجبر در حد فاصل بین موجبرهای مستقیم و خمیده یا در حد فاصل بین دو موجبر خم شده مخالف معرفی می شود (شکل ۱۲.۷). در موجبر خمیده، میدان نور کمی به سطح خارجی هسته-روکش فشار داده می شود و تا حدودی از مشخصات اولیه خود تغییر شکل می دهد. موجبر معمولاً توسط افست به سمت داخل جابجا می شود. سپس افست موجبر تغییر شکل میدان را جبران می کند و بنابراین افت تابش ناشی از خمش را کاهش می دهد. شکل (۱۴.۷) یک شبیه سازی BPM از انتشار نور را در یک موجبر خمیده S با $O_f = 1/4\mu m$ نشان می دهد. طول موج نور و پارامترهای موجبر خمیده مانند شکل (۱۲.۷) است. تابش میدان به روکش در گوشه خمها بهوضوح توسط افست موجبر کاهش می یابد. افت تابش ناشی از خمیدگی به حدود 44.5% دسی بل کاهش می یابد. مقدار بهینه جابجایی موجبر بستگی به پارامترهای موجبر و شعاع انحنا دارد. بنابراین، شبیه سازی عددی مانند BPM برای ارزیابی افست مناسب موجبر بسیار مهم است.

در ادامه، تحلیل BPM انواع دستگاههای نوری توضیح داده خواهد شد. شکل (۱۵.۷) یک پیکربندی شماتیک از یک ترکیب کننده Y تک مودی را نشان می دهد. مشخص است که وقتی نور به یکی از دو موجبر ترکیب کننده Y کوپل می شود، تنها نیمی از توان تزریق شده را می توان به موجبر تک مودی خروجی استخراج کرد [۱۲]. این امر به صورت کمی به شرح زیر توضیح داده شده است. هنگامی که نور به یکی از موجبرها تزویج می شود، مودهای زوج و فرد در ناحیه ترکیب ایجاد می شوند، جایی که موجبر بیشتر از موجبر تک مودی است (شکل ۱۲.۴)، دامنه میدان الکتریکی هر مود حدود $1/\sqrt{2}$ است. فراتر از منطقه ترکیب، عرض موجبر به تدریج به پهنانی موجبر تک مودی کاهش می یابد. سپس، حالت فرد مرتبه بالاتر قطع و به داخل روکش تابش می شود. بنابراین نور ارسالی فقط یک مود زوج است و حدود ۳ دسی بل قدرت نور از بین می رود.



شکل ۱۵.۷: پیکربندی شماتیک یک ترکیب کننده Y متشکل از موجبرهای تک مودی.



شکل ۱۶.۷: تحلیل BPM ترکیب کننده Y تک مودی زمانی که نور به یکی از دو موجبر تزویج می‌شود.

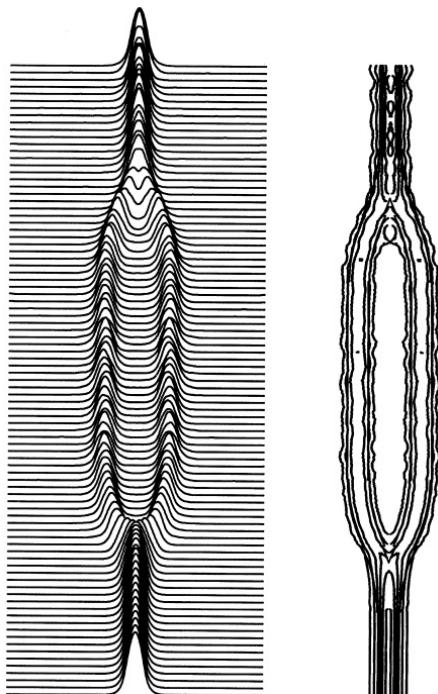


شکل ۱۷.۷: مدولاتور شدت نوری نوع انشعاب Y.

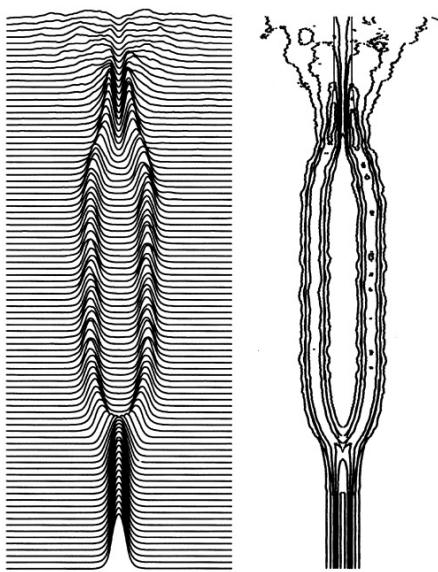
شکل (۱۶.۷) تحلیل BPM ترکیب کننده Y تک مودی را هنگامی که نور به یکی از دو موجبر تزویج می‌شود نشان می‌دهد. پارامترهای ترکیب کننده Y^{۱۱} به شرح زیر است: عرض هسته $2a = 8\mu m$, ضخامت هسته $2d = 8\mu m$, اختلاف ضریب شکست $\Delta = 0.3\%$, جدایی دو موجبر $25\mu m$, زاویه انشعاب در منطقه ترکیبی $\theta_B = 1/2^\circ$ و طول موجبر خروجی یک میلی متر است. موج دار شدن پرتو نور در ناحیه ترکیبی شکل (۱۶.۷) به دلیل اثر تداخل بین مودهای زوج، فرد و تابش در نظر گرفته می‌شود. توان نوری مود ویژه ارسالی در موجبر خروجی شکل (۱۶.۷) (۰.۴۸۸۳۶۷ دسی بل افت) است. با شبیه‌سازی عددی BPM تأیید می‌شود که حدود ۳ دسی بل تلفات اضافی در ترکیب کننده‌های Y تک مودی وجود دارد.

شکل (۱۷.۷) یک مدولاتور شدت نوری نوع شاخه Y را نشان می‌دهد [۱۳]. ناحیه هاشور خورده در شکل (۱۷.۷) یک بخش کلیدزنی است که در آن تاخیر فاز نور (در واقع ضریب شکست موجبر) متفاوت است. پارامترهای مدولاتور نوع شاخه Y به شرح زیر است: عرض هسته $2a = 8\mu m$, ضخامت هسته $2d = 8\mu m$, اختلاف ضریب شکست $\Delta = 0.3\%$, جداسازی دو موجبر برابر $25\mu m$ و انشعاب زاویه در ناحیه ترکیبی $\theta_B = 1/2^\circ$ است. هنگامی که ضریب شکست ناحیه سوئیچینگ تغییر نمی‌کند، دو پرتو نور با تاخیر فاز یکسان (هم‌فاز) در ترکیب کننده Y ترکیب می‌شوند. بنابراین، همانطور که در شکل (۱۸.۷) نشان داده شده است، تقریباً ۱۰۰٪ انتقال نور در موجبر خروجی حاصل می‌شود. در مقابل، هنگامی که ضریب شکست ناحیه سوئیچینگ با δn تغییر می‌کند، تاخیر فاز نسبی بین دو بازو برابر $\phi = \delta\beta \cdot L$ می‌شود، که در آن L نشان دهنده طول ناحیه سوئیچینگ است. اگر عقب ماندگی فاز نسبی ارضا شود؛

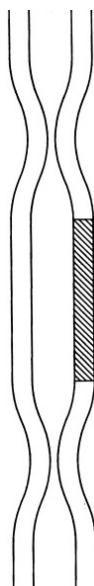
^{۱۱}Y-Combiner



شکل ۱۸.۷: شکل موج شدت و نمودارهای کانتور انتشار نور در یک نوع تعدیل کننده شاخه Y زمانی که ضریب شکست قسمت سوئیچینگ تغییر نمی‌کند.



شکل ۱۹.۷: شکل موج شدت و نمودارهای کانتور انتشار نور در یک نوع تعدیل کننده شاخه Y زمانی که ضریب شکست قسمت سوئیچینگ برای ایجاد اختلاف فاز π تغییر می‌کند.



شکل ۲۰.۷: سوئیچ نوری نوع ماخ-زندر. ناحیه هاشور خورده ناحیه سوئیچینگ است.

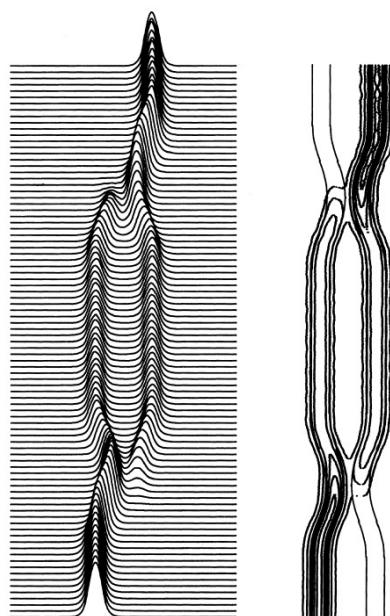
$$\delta\beta \cdot L = \frac{2\pi}{\lambda} \delta n_{eff} = \pi \quad (۸۹.۷)$$

در این صورت دو پرتو نور با شرایط خارج از فاز در ترکیب کننده Y ترکیب می‌شوند. در اینجا δn_{eff} تغییری از ضریب شکست موثر است.

شکل (۱۹.۷) شدت شکل موج و نمودارهای کانتور انتشار نور را در زمانی که ضریب شکست قسمت سوئیچینگ برای ایجاد اختلاف فاز π تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. هنگامی که دو پرتو نور خارج از فاز ترکیب می‌شوند، توزیع میدان الکتریکی، همانطور که در شکل (۷.۲)-ب نشان داده شده، بهمود مرتبه بالاتر تبدیل می‌شود. از آنجایی که یک مود مرتبه بالاتر نمی‌تواند در یک موجبر تک مودی منتشر شود، همانطور که در شکل (۱۹.۷) نشان داده شده، بهداخل روکش تابش می‌شود. بنابراین، عبور نور در شرایط سوئیچینگ معادله (۸۹.۷) تقریباً صفر می‌شود. نوع مدولاتور شاخه Y بهعنوان یک نوع روشن و خاموش سوئیچ نوری یا بهعنوان یک مدولاتور شدت نوری عمل می‌کند.

شکل (۲۰.۷) یک پیکربندی شماتیک از نوع کلید نوری ماخ-زندر (MZ)^{۱۲} را نشان می‌دهد [۱۴]. اصل عملیاتی کلید ماخ-زندر به صورت تحلیلی در بخش ۱.۵.۴ توضیح داده شده است. در اینجا، ویژگی‌های انتقال کلید MZ به صورت عددی توسط BPM تجزیه و تحلیل می‌شود. پارامترهای کلید MZ به شرح زیر است: عرض هسته $2a = 8\mu m$ ، ضخامت هسته $2d = 8\mu m$ ، اختلاف ضریب شکست $\Delta = 0.3\%$ ، و جدایی دو موجبر برابر $25\mu m$ است. دو کوپلر جهتی کوپلرهای ۳ دسیبل هستند. همانطور که در شکل (۲۱.۷) نشان داده شده است، هنگامی که ضریب شکست ناحیه سوئیچینگ تغییر نمی‌کند، پرتو نور از پایانه متقطع خارج می‌شود. این با شرایط $\phi = \delta\beta \cdot L = 0$ در معادله (۱۵۰.۴)

^{۱۲} Mach-Zehnder (MZ)



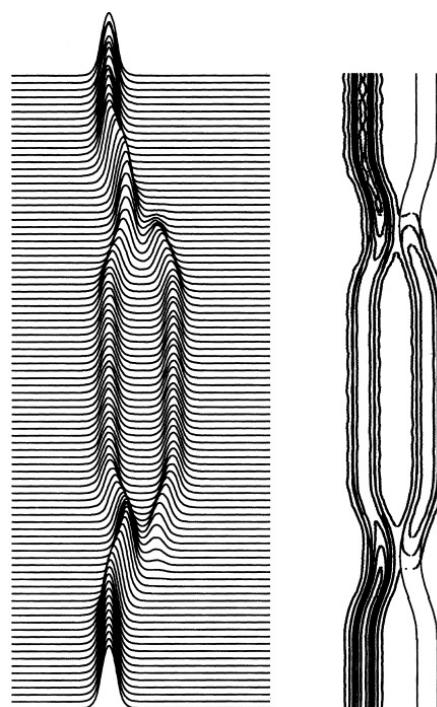
شکل ۲۱.۷: شکل موج شدت و نمودارهای کانتور انتشار نور در کلید MZ زمانی که ضریب شکست ناحیه سوئیچینگ متغیر نیست.

مطابقت دارد. بر عکس، اگر ضریب شکست ناحیه سوئیچینگ طوری تغییر کند که معادله (۲۲.۷) برآورده شود، پرتو نور همانطور که در شکل (۲۳.۷) نشان داده شده است به درگاه عبوری کلید می‌شود. این با شرط $\delta\beta \cdot L = \pi - \phi$ در معادله (۱۵۰.۴) مطابقت دارد.

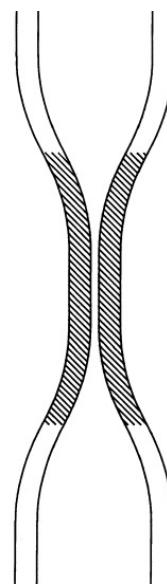
سرانجام، تحلیل BPM یک سوئیچ تمام نوری [۱۵] شرح داده خواهد شد. در این کلید تمام نوری، کوپلر جهت‌دار از یک محیط کر^{۱۳} تشکیل شده است که ضریب شکست آن متناسب با شدت نور تغییر می‌کند. یک پیکربندی شماتیک از یک کلید تمام نوری در شکل (۲۳.۷) نشان داده شده است. ناحیه هاشور خورده نشان دهنده محیط کر و ناحیه دیگر یک محیط خطی است. پارامترهای کلید تمام نوری به شرح زیر است: عرض هسته $a = 8\mu m$ ، ضخامت هسته $d = 8\mu m$ ، اختلاف ضریب شکست $\Delta = 0.3\%$ ، و جدایی دو موجبر برابر $50\mu m$ است. شکاف لبه‌های موجبر در یک کوپلر جهت‌دار $3\mu m$ دسی بل و طول موجر مستقیم کوپلر $800\mu m$ است. در اینجا شیشه آگشته به نیمه‌هادی را به عنوان محیط کر [۱۶] فرض می‌کنیم. ضریب کر $n_2 = 2 \times 10^{-14} m^2/W$ است.

شکل (۲۴.۷) ویژگی‌های انتشار نور را برای یک میلی وات توان ورودی نشان می‌دهد (شدت نور $I = 10^7 W/m^2$). در این حالت، از آنجایی که شدت نور کم است، اثر نوری غیرخطی مشاهده نمی‌شود. سپس، نوع سوئیچ جهتی-کوپلر به عنوان یک کلید خطی عمل می‌کند و پرتو نور طبق طراحی از پایانه متقاطع خارج می‌شود. در مقابل، وقتی شدت نور افزایش می‌یابد، کوپلر جهت‌دار نامتعادل می‌شود، زیرا ضریب شکست موجبری که نور به آن تزویج می‌شود، افزایش می‌یابد. همانطور که در معادلات (۴۰.۴)-(۴۰.۴) و

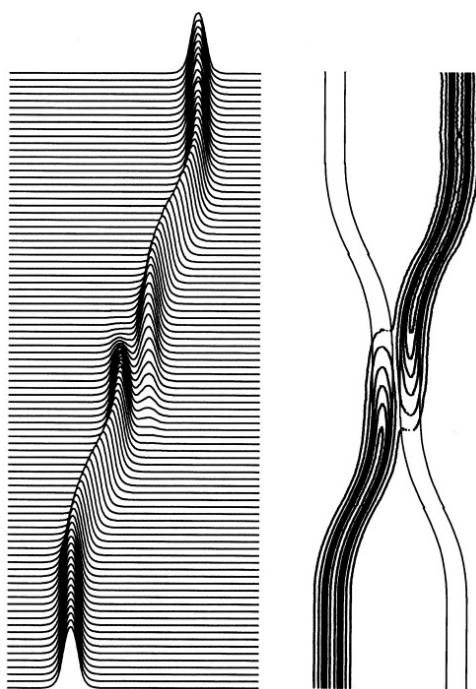
^{۱۳}Kerr medium



شکل ۲۲.۷: شکل موج شدت و نمودارهای کانتور انتشار نور در کلید MZ زمانی که ضریب شکست ناحیه سوئیچینگ متغیر است.



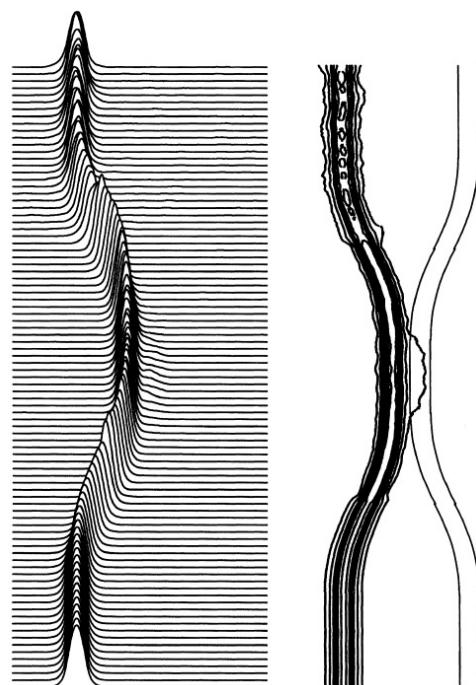
شکل ۲۳.۷: پیکربندی شماتیک کلید تمام نوری. ناحیه هاشور خورده محیط کر را تشکیل می‌دهد.



شکل ۲۴.۷: ویژگی‌های انتشار نور برای یک میلی‌وات توان ورودی. از آنجایی که شدت نور کم است، اثر نوری غیرخطی مشاهده نمی‌شود.

شکل (۲۴.۷)-ب نشان می‌دهد، بازده اتصال به درگاه متقاطع زمانی کاهش می‌یابد که عدم تقارن ضریب شکست بین دو موجبر (معادله ۲۰.۴) زیاد شود. شکل (۲۵.۷) ویژگی‌های انتشار نور را برای ۰.۲ وات توان ورودی نشان می‌دهد (شدت نور $I = 41 \times 10^{10} W/m^2$). از آنجایی که کوپلر جهت‌دار نامتعادل می‌شود، بیشتر پرتو نور از درگاه عبوری خارج می‌شود.

در یک کوپلر جهت‌دار مت Shankel از یک محیط کر، مسیر نور به طور خودکار تغییر می‌کند، بسته به شدت نور، همانطور که در شکل (۲۴.۷) و (۲۵.۷) نشان داده شده است، انتظار می‌رود این سوئیچ تمام نوری به عنوان یک محدود کننده نوری و سوئیچ نوری دوپایدار [۱۸، ۱۷] بکار برده شود. ماده موجبر با ضریب کر بزرگ برای کاهش قدرت خود سوئیچینگ سوئیچ تمام نوری مورد نیاز است. در اینجا باید توجه داشته باشیم که شکل (۲۴.۷) و (۲۵.۷) مشخصه‌های انتقال نور *cw* (موج پیوسته) هستند. هنگامی که یک پالس نوری موقت به یک سوئیچ تمام نوری تزریق می‌شود، سوئیچ به عنوان تزویج کننده جهت‌دار خطی برای بخش با شدت ضعیف پالس رفتار می‌کند. بنابراین، قسمت ضعیف پالس حتی زمانی که نور با شدت بالا به کوپلر تمام نوری تزریق می‌شود، به پایانه متقاطع کوپلر تزویج می‌شود. این باعث تخریب همسنوائی دستگاه می‌شود. چندین روش برای حل چنین مسائلی پیشنهاد شده است [۱۹، ۲۰].



شکل ۲۵.۷: ویژگی‌های انتشار نور برای ۲۲ وات توان ورودی.

۸.۷ تحلیل روش تفاضل محدود موجبرهای نوری مسطح

۱.۸.۷ استخراج معادلات اصلی

تجزیه و تحلیل‌های BPM که در بخش‌های قبلی توضیح داده شد بر اساس FFT هستند و بنابراین FFTBPM نامیده می‌شوند. در اینجا BPM دیگری را بر اساس روش تفاضل محدود (FDMBPM)^{۱۴} توصیف می‌کنیم. از آنجایی که FDMBPM به قضیه نمونه برداری متکی نیست، مزیت بزرگی نسبت به FFTBPM دارد که بعداً در مقایسه دو BPM نشان داده خواهد شد. ابتدا، انتشار موج نور را در موجبرهای تیغه‌ای در نظر می‌گیریم. معادله موج اسکالر دو بعدی از معادله (۹.۱۷) داده شده است؛

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -j \frac{1}{2kn_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \alpha(x, z)\phi - j \frac{k}{2n_0} [n^2(x, z) - n_0^2]\phi. \quad (9.17)$$

در اینجا، $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ با فرض $|\partial^2 \phi / \partial z^2| \ll 2kn_0 |\partial \phi / \partial z|$ نادیده گرفته شده است. این تقریب را تقریب پاراکسیمال (موازی محوری) یا تقریب فرنل می‌نامند. در معادله (۹.۱۷)، از تقریب $(n - n_0) \approx 2n_0(n^2 - n_0^2)$ ، که در معادلات (۹.۱۷) و (۹.۱۸) به بکار برده شد، استفاده

^{۱۴} Finite Difference Method

نمی‌کنیم. به‌طور کلی، یک معادله دیفرانسیل بصورت

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \mathbf{A}(x, z) \frac{\partial^{\text{ز}} \phi}{\partial x^{\text{ز}}} + \mathbf{B}(x, z) \phi \quad (91.7)$$

را می‌توان با روش تفاضل محدود تقریب زد؛

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow \frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta z} \quad (92.7)$$

$$\mathbf{A}(x, z) \frac{\partial^{\text{ز}} \phi}{\partial x^{\text{ز}}} \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{A}_i^{m+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\phi_{i-1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i+1}^m}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i-1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i+1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \right\} \quad (93.7)$$

$$\mathbf{B}(x, z) \phi \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{B}_i^{m+\frac{1}{2}} (\phi_i^{m+1} + \phi_i^m) \quad (94.7)$$

که در آن Δx و Δz نمایشگر گام در جهت‌های x و z است و زیرنما^{۱۵} (اندیس) i و زیرنما^{۱۶} m نقاط نمونه برداری بترتیب در امتداد جهت x و z هستند. تعداد تقسیم در جهت x و z بترتیب $M(m = ۰ - M)$ و $N(i = ۰ - N)$ هستند. بنابراین ϕ_i^m نمایشگر دامنه میدان الکتریکی در $x = x_i = i\Delta x$ و $z = z_m = m\Delta z$ است. با مقایسه معادله (۹۰.۷) و (۹۱.۷)، مشاهده می‌کنیم که

$$A = -j \frac{1}{\gamma k n_0} \quad (95.7)$$

$$B = -\alpha(x, z) - j \frac{k}{\gamma n_0} [n^{\text{ز}}(x, z) - n_{\circ}^{\text{ز}}]. \quad (96.7)$$

با جایگزینی معادلات (۹۰.۷) - (۹۲.۷) در معادله (۹۶.۷)، معادله همزمان زیر را خواهیم داشت

$$-\phi_{i-1}^{m+1} + s_i^m \phi_i^{m+1} - \phi_{i+1}^{m+1} = \phi_{i-1}^m + q_i^m \phi_i^m + \phi_{i+1}^m \equiv d_i^m \quad (i = 1 - N - 1) \quad (97.7)$$

$$s_i^m = 2 - k^{\text{ز}} (\Delta x)^2 \left[(n_i^{m+\frac{1}{2}})^2 - n_{\circ}^{\text{ز}} \right] + j \frac{4k n_0 (\Delta x)^2}{\Delta z} + j 2 k n_0 (\Delta x)^2 \alpha_i^{m+\frac{1}{2}}, \quad (98.7)$$

$$q_i^m = -2 + k^{\text{ز}} (\Delta x)^2 \left[(n_i^{m+\frac{1}{2}})^2 - n_{\circ}^{\text{ز}} \right] + j \frac{4k n_0 (\Delta x)^2}{\Delta z} - j 2 k n_0 (\Delta x)^2 \alpha_i^{m+\frac{1}{2}}, \quad (99.7)$$

هنگامی که توزیع میدان الکتریکی اولیه $\phi_i^{m=0}(i = 0 - N)$ در موقعیت ورودی ($z = z_m = m\Delta z$) داده می‌شود، مشخصات میدان الکتریکی ϕ_i^m در ($m = 1 - M$) متوالی با استفاده از معادله (۹۷.۷) محاسبه می‌شود. در اینجا باید توجه داشت که در معادله (۹۷.۷) فقط (۱) معادله برای ($N + 1$) متغیر مجھول وجود دارد. دو معادله مرزی، در ($N - 1$) وجود ندارد. در مسائل میدان الکتریکی ساکن، شرط

^{۱۵}Subscript

^{۱۶}Superscript

دیریشله یا (دیریکله) ^{۱۷} ($\phi = 0$) یا شرط نویمان ^{۱۸} ($\partial\phi/\partial x = 0$) در مرز داده می‌شود. با این حال، چنین شرایط مرزی در تجزیه و تحلیل انتشار امواج نور کافی نیست، زیرا باید میدان‌های تابشی را که به دور از پنجره محاسبه نفوذ می‌کنند، در نظر گیریم.

۲.۸.۷ شرایط مرزی شفاف

به منظور حل مشکل قبلی، شرط مرزی شفاف (TBC) ^{۱۹} به FDMBPM معرفی شده است [۲۱]. این رفتار شرایط مرزی در مرز سمت راست، $x = D$ توضیح داده شده است. در روش TBC، میدان الکتریکی در مرز با موج صفحه فرض می‌شود:

$$\phi = C \exp(-jkx) \quad (100.7)$$

اینجا k و C به طور کلی اعداد مختلط هستند. هنگامی که توزیع میدان الکتریکی ϕ_i^m را در گام محوری m بدانیم، فرض می‌کنیم که عدد موج در گام محوری $(m+1)$ ام خواهد بود

$$\frac{\phi_N^m}{\phi_{N-1}^m} \exp(-jk\Delta x) \quad (101.7)$$

اگر قسمت حقیقی k مثبت باشد، موج صفحه با معادله (100.7) بیان می‌شود به سمت خارج از مرز منتشر می‌شود. سپس مقدار مرز سمت راست در گام محوری $(m+1)$ ام با رابطه زیر داده می‌شود

$$\phi_N^{m+1} = \phi_{N-1}^{m+1} \exp(-jk\Delta x) \quad (102.7)$$

با این حال، اگر قسمت حقیقی k منفی باشد، موج صفحه معادله (100.7) به سمت داخل مرز منتشر می‌شود. وقتی با ساختار هدایت موج سروکار داریم که عنصر بازتابی ندارد، موجی که به داخل منتشر می‌شود نباید وجود داشته باشد. بنابراین، در چنین حالتی k_r (قسمت حقیقی k) باید مثبت شود:

$$k_r \geq 0. \quad (103.7)$$

قسمت موهومی k که با k_i نشان داده می‌شود، در هر حالت استفاده می‌شود. هنگامی که آن را که با روش‌های بالا به دست می‌آید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$k_{right} = k_r + jk_i \quad (104.7)$$

شرط مرزی در مرز سمت راست خواهد بود

$$\phi_N^{m+1} = \phi_l^{m+1} \exp(-jk_{right}\Delta x) \quad (105.7)$$

^{۱۷} Dirichlet condition

^{۱۸} Neumann condition

^{۱۹} Transparent Boundary Condition (TBC)

عدد موج موج مسطح خروجی در مرز سمت چپ k_{left} به روشنی مشابه به دست می‌آید.
در این صورت شرط مرزی در مرز سمت چپ با رابطه زیر داده می‌شود

$$\phi_{\circ}^{m+1} = \phi_1^{m+1} \exp(-jk_{left}\Delta x) \quad (106.7)$$

جایگزینی معادلات (۱۰۵.۷) و (۱۰۶.۷) در معادله (۹۷.۷) در $(N-1)$ معادلات همزمان را برای $(N-1)$ مجهول $(\phi_i^{m+1} - \phi_{N-1}^{m+1})$ بدست می‌آوریم

$$-a_i \phi_{i-1}^{m+1} + b_i \phi_i^{m+1} - c_i \phi_{i+1}^{m+1} = d_i^m \quad (i = 1 - N - 1) \quad (107.7)$$

که در آن

$$a_1 = 0, \quad b_1 = s_1^m - \exp(-jk_{left}\Delta x), \quad c_1 = 1 \quad (\bar{1}08.7)$$

$$a_i = 1, \quad b_i = s_i^m, \quad c_i = 1, \quad (i = 2 - N - 2) \quad (108.7)$$

$$a_{N-1} = 1, \quad b_{N-1} = s_{N-1}^m - \exp(-jk_{right}\Delta x), \quad c_{N-1} = 0 \quad (108.7)$$

معادله (۱۰۷.۷) را می‌توانیم بصورت ماتریس بیان کنیم:

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{D} \quad (109.7)$$

که در آن \mathbf{A} یک ماتریس $(N-1) \times (N-1)$ است که عناصر آن توسط روابط (۱۰۸.۷) داده می‌شود، Φ یک بردار ستونی میدان الکتریکی با عناصر ϕ_i^{m+1} و \mathbf{D} بردار ستونی d_i^m است. از حل معادله (۱۰۹.۷) بطور کلی $\Phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$ بدست می‌آید. با این حال، از آنجایی که معادله (۱۰۹.۷) یک ماتریس سه قطری است، جواب Φ را می‌توان از طریق رابطه بازگشتی^{۲۰} بدون محاسبه ماتریس معکوس \mathbf{A}^{-1} بدست آورد.

۳.۸.۷ حل معادلات سه قطری

ابتدا میدان الکتریکی ϕ_i^{m+1} را به صورت بازگشتی بیان می‌کنیم:

$$\phi_i^{m+1} = \alpha_i \phi_{i+1}^{m+1} + \beta_i \quad (110.7)$$

هنگامی که ما $i \rightarrow i-1$ را در این رابطه قرار می‌دهیم، داریم $\phi_{i-1}^{m+1} = \alpha_{i-1} \phi_i^{m+1} + \beta_{i-1}$. جایگزینی این ϕ_{i-1}^{m+1} در معادله (۱۰۷.۷)، خواهیم داشت

$$-a_i(\alpha_{i-1} \phi_i^{m+1} + \beta_{i-1}) + b_i \phi_i^{m+1} - c_i \phi_{i+1}^{m+1} = d_i^m$$

در این صورت ϕ_i^{m+1} بصورت زیر بیان می‌شود

$$\phi_i^{m+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i \alpha_{i-1}} \phi_{i+1}^{m+1} + \frac{d_i^m + a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \alpha_{i-1}} \quad (111.7)$$

^{۲۰} Recurrence Formula

مقایسه معادلات (۱۱۰.۷) و (۱۱۱.۷)، معادلات بازگشتی را برای α_i و β_i بدست می‌آوریم:

$$\alpha_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \alpha_{i-1}} \quad (i = 1 - N - 1) \quad (۱۱۱.۷)$$

$$\beta_i = \frac{d_i^m + a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \alpha_{i-1}} \quad (i = 1 - N - 1) \quad (۱۱۱.۷\text{ب})$$

از آنجایی که از معادله (۱۱۰.۸.۷) میدانیم $\alpha_1 = c_1 = 1$ بازاء $i = 1$ است، α_1 و β_1 خواهد بود

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1 - a_1 \alpha_0} = \frac{1}{b_1} \quad (۱۱۱.۷)$$

$$\beta_1 = \frac{d_1^m + a_1 \beta_0}{b_1 - a_1 \alpha_0} = \frac{d_1^m}{b_1} \quad (۱۱۱.۷\text{ب})$$

در این صورت $\alpha_{N-1} = a_{N-1} - \beta_{N-1}$ و $\beta_{N-1} = b_{N-1} - \alpha_{N-1}$ بطور تکراری از رابطه (۱۱۲.۷) و (۱۱۳.۷) محاسبه می‌شوند. چون میدانیم از معادله (۱۱۰.۸.۷ج) $c_{N-1} = N - 1$ بازاء $i = N - 1$ است، α_{N-1} خواهد بود

$$\alpha_{N-1} = \frac{c_{N-1}}{b_{N-1} - a_{N-1} \alpha_{N-2}} = 0 \quad (۱۱۱.۷)$$

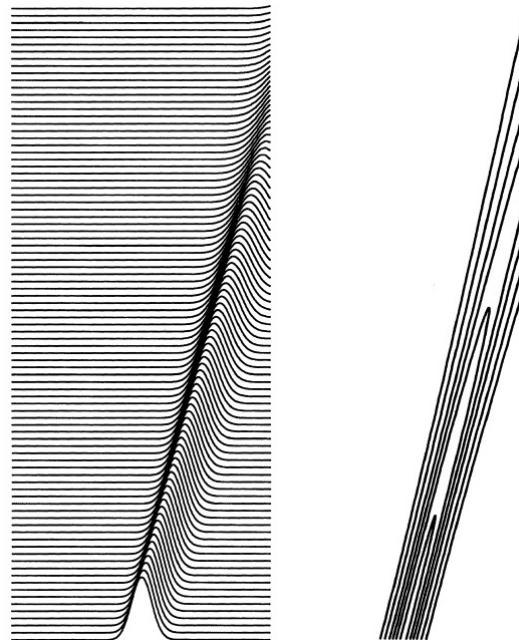
بنابراین ϕ_{N-1}^{m+1} از رابطه (۱۱۰.۷) بدست می‌اید

$$\phi_{N-1}^{m+1} = \beta_{N-1} \quad (۱۱۱.۷)$$

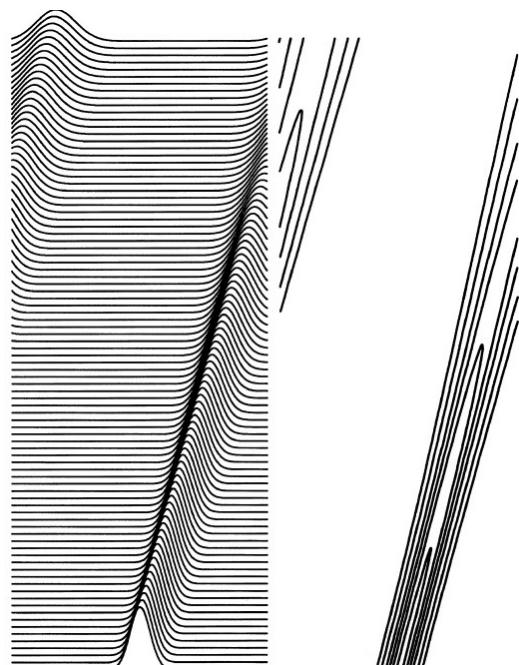
در این صورت میدان الکتریکی $\phi_{N-2}^{m+1} - \phi_{N-1}^{m+1}$ با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۱۰.۷) محاسبه خواهد شد. مقادیر مرزی ϕ_N^{m+1} و ϕ_0^{m+1} در $x = D$ و $x = 0$ قبلاً از معادلات (۱۰۵.۷) و (۱۰۶.۷) داده می‌شود.

شکل (۲۶.۷)-الف موجهای شدت و نمودارهای کانتور انتشار پرتو گوسی را در فضای آزاد با استفاده از FDMBPM نشان می‌دهد. پنجره تحلیل و تعداد تقسیمات به ترتیب $N = ۱۰۲۴$ ($\Delta x = ۰.۲۵\mu m$) و $D = ۲۶۰\mu m$ هستند. مرحله محاسبه در امتداد جهت محوری $x = D$ است. در شکل (۲۶.۷)-الف تایید شده است که انتشار پرتو نور حتی زمانی که با پنجره به درستی تحلیل شود، منطبق است. در مقابل، شکل (۲۶.۷)-ب شدت شکل موجها و نمودارهای کانتور انتشار پرتو گوسی در فضای آزاد با شرایط مشابه شکل (۲۶.۷)-الف با استفاده از FFTBPM را نشان می‌دهد. در FFTBPM، این فرض اساسی است که توزیع میدان الکتریکی در پنجره تحلیل $D \leq \Delta x \leq ۰$ به طور تناوبی در جهت محور x تکرار می‌شود (شکل ۲۶.۷). بنابراین، اگر پرتو نور به پنجره تحلیل در FFTBPM نفوذ کند، گاهی اوقات یک موج غیرفیزیکی ظاهر می‌شود.

چندین تکنیک برای حذف این امواج غیرفیزیکی ابداع شده است [۲۲]. اینها شامل تکنیک‌های (۱) برای قرار دادن منطقه جذب نور در نزدیکی مرزهای تجزیه و تحلیل و (۲) اتخاذ یک پنجره تجزیه و تحلیل به اندازه کافی گستردگی است تا نور در محدوده



شکل ۲۶.۷: شکل موج شدت و نمودارهای کانتور انتشار پرتو گاووسی در فضای آزاد با استفاده از FDMBPM
(الف)



شکل ۲۶.۷: ادامه شکل موج شدت و نمودارهای کانتور انتشار پرتو گاووسی در فضای آزاد با استفاده از (ب) .FFTBPM

محاسبه محوری به آن نفوذ نکند. از آنجایی که شکل و عرض بھینه پنجره جذب برای هر مسئله متفاوت است، روش اول نسبتاً دست و پا گیر و ناکارآمد است. در تکنیک دوم، تعداد زیادی تقسیم در امتداد جهت محور x مورد نیاز است. بنابراین، زمان محاسبه به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد.

در روش FDMBPM با استفاده از TBC، از آنجایی که پنجره تجزیه و تحلیل را می‌توان در مجاورت دستگاه نوری مورد بررسی قرار داد، می‌توان تعداد تقسیم‌های N را کاهش داد.

۹.۷ تحلیل FDMBPM موجبرهای مستطیلی

معادله موج سه بعدی مربوط به معادله (۳.۷) خواهد بود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -j \frac{1}{2k n_o} \nabla^2 \phi - \alpha(x, y, z) \phi - j \frac{k}{2n_o} [n^*(x, y, z) - n_o^*] \phi \quad (116.7)$$

بطوری که در بخش قبل نشان داده شد، میدان الکتریکی در نقطه شبکه $x = i\Delta x$ و $y = l\Delta y$ و $z = m\Delta z$ بصورت زیر بیان می‌شود

$$\phi(i\Delta x, l\Delta y, m\Delta z) = \phi_{i,l}^m \quad (117.7)$$

با استفاده از نماد بالای میدان، معادله (۱۱۶.۷) بصورت تفاضل محدود تقریب زده می‌شود

$$\begin{aligned} A(\phi_{i,l}^{m+1} - \phi_{i,l}^m) &= \frac{\phi_{i-1,l}^m - 2\phi_{i,l}^m + \phi_{i+1,l}^m + \phi_{i-1,l}^{m+1} - 2\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i+1,l}^{m+1}}{2(\Delta x)^2} \\ &\quad + \frac{\phi_{i,l-1}^m - 2\phi_{i,l}^m + \phi_{i,l+1}^m + \phi_{i,l-1}^{m+1} - 2\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l+1}^{m+1}}{2(\Delta y)^2} \\ &\quad + B(\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l}^m) \end{aligned} \quad (118.7)$$

که در آن

$$A = \frac{j \sqrt{k n_o}}{\Delta z} \quad (119.7)$$

$$B = -j k n_o \alpha(i, l, m + \frac{1}{2}) + \frac{k^*}{2} [n(i, l, M + \frac{1}{2}) - n_o^*] \quad (120.7)$$

در اینجا توجه کنید که تعاریف A و B با تعاریف معادله (۹۵.۷) و (۹۶.۷) متفاوت است. این معادله تفاضل محدود (۱۱۸.۷) برای مسئله سه بعدی یک معادله سه قطری مانند مسائل دو بعدی نیست. بنابراین، به طور کلی یک عملیات ماتریس معکوس مورد نیاز است. با این حال، روش حل تقریبی زیر که روش تفاضل محدود ضمنی جهت متناوب^{۲۱} (ADIFDM) نامیده می‌شود^{۲۲} می‌تواند روش‌های محاسبه معادله (۱۱۸.۷) را تا حد زیادی ساده کند.

^{۲۱} Alternating-Direction Implicit Finite Difference Method (ADIFDM)

در ADIFDM، گام محاسبه Δz در جهت z به دو گام $z/2$ تقسیم می‌شود. میدان الکتریکی میانی $(1+i)$ و $\phi_{j,l}^{m+\frac{1}{2}}(j = i-1, i, i+1)$ به صورت میانگین و تقریب زده می‌شود؛

$$\phi_{j,l}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{j,l}^{m+1} + \phi_{j,l}^m}{2} \quad (j = i-1, i, i+1) \quad (121.7)$$

با استفاده از این معادله، می‌توان رابطه (118.7) را به دو معادله تفاضل محدود تقسیم کرد:

$$\begin{aligned} A(\phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} - \phi_{i,l}^m) &= \frac{\phi_{i-1,l}^{m+\frac{1}{2}} - 2\phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} + \phi_{i+1,l}^{m+\frac{1}{2}}}{2(\Delta x)^2} \\ &\quad + \frac{\phi_{i,l-1}^{m+\frac{1}{2}} - 2\phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} + \phi_{i,l+1}^{m+\frac{1}{2}}}{2(\Delta y)^2} + B(\phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} + \phi_{i,l}^m) \end{aligned} \quad (122.7)$$

$$\begin{aligned} A(\phi_{i,l}^{m+1} - \phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}}) &= \frac{\phi_{i-1,l}^{m+\frac{1}{2}} - 2\phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} + \phi_{i+1,l}^{m+\frac{1}{2}}}{2(\Delta x)^2} \\ &\quad + \frac{\phi_{i,l-1}^{m+1} - 2\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l+1}^{m+1}}{2(\Delta y)^2} + B(\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (123.7)$$

معادلات (122.7) و (123.7) را می‌توان بیشتر بازنویسی کرد؛

$$-\phi_{i-1,l}^{m+\frac{1}{2}} + s_{i,l}^m \phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} - \phi_{i+1,l}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} (\phi_{i,l-1}^m + Q_{i,l}^m \phi_{i,l}^m + \phi_{i,l+1}^m) \equiv d_{i,l}^m \quad (124.7)$$

$$-\phi_{i,l-1}^{m+1} + S_{i,l}^m \phi_{i,l}^{m+1} - \phi_{i,l+1}^{m+1} = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} (\phi_{i-1,l}^{m+\frac{1}{2}} + q_{i,l}^m \phi_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} + \phi_{i+1,l}^{m+\frac{1}{2}}) \equiv h_{i,l}^{m+\frac{1}{2}} \quad (125.7)$$

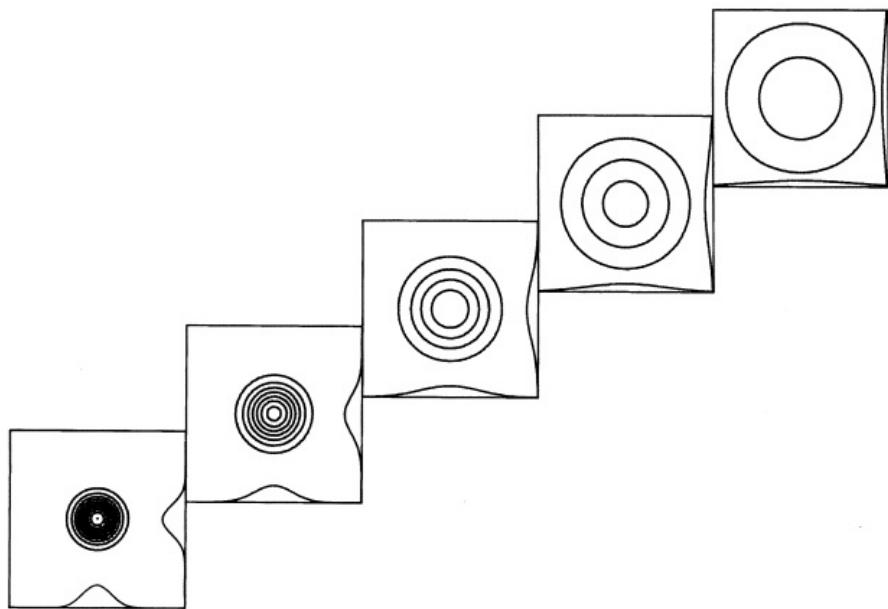
که در آن

$$\begin{aligned} s_{i,l}^m &= \left\{ 1 - \frac{k^2(\Delta x)^2}{4} [n^2(i, l, m + \frac{1}{2}) - n_*^2] \right\} \\ &\quad + j \left\{ \frac{4kn_*(\Delta x)^2}{\Delta z} + kn_*(\Delta x)^2 \alpha(i, l, m + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (126.7)$$

$$\begin{aligned} S_{i,l}^m &= \left\{ 1 - \frac{k^2(\Delta y)^2}{4} [n^2(i, l, m + \frac{1}{2}) - n_*^2] \right\} \\ &\quad + j \left\{ \frac{4kn_*(\Delta y)^2}{\Delta z} + kn_*(\Delta y)^2 \alpha(i, l, m + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (127.7)$$

$$\begin{aligned} q_{i,l}^m &= \left\{ -1 + \frac{k^2(\Delta x)^2}{4} [n^2(i, l, m + \frac{1}{2}) - n_*^2] \right\} \\ &\quad + j \left\{ \frac{4kn_*(\Delta x)^2}{\Delta z} - kn_*(\Delta x)^2 \alpha(i, l, m + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (128.7)$$

$$\begin{aligned} Q_{i,l}^m &= \left\{ -1 + \frac{k^2(\Delta y)^2}{4} [n^2(i, l, m + \frac{1}{2}) - n_*^2] \right\} \\ &\quad + j \left\{ \frac{4kn_*(\Delta y)^2}{\Delta z} - kn_*(\Delta y)^2 \alpha(i, l, m + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (129.7)$$



شکل ۲۷.۷: نمودارهای کانتور انتشار پرتو گوسی در فضای آزاد که توسط ADIFDM محاسبه شده است.

توزیع میدان الکتریکی در وسط گام $(m + \frac{1}{4})\Delta z = z$ ابتدا با استفاده از معادله (۱۲۴.۷) محاسبه می‌شود. سپس با جایگزینی میدان $(m + \frac{1}{4})\Delta z = z$ در معادله (۱۲۵.۷) توزیع میدان در $(m + 1)\Delta z = z$ بدست می‌آید. از آنجائی که معادلات (۱۲۴.۷) و (۱۲۵.۷) معادلات سه قطری هستند، حل مسئله بطوری که در بخش قبل اشاره شد بطور موثری بدست می‌آید. علاوه بر این، از آنجایی که شرط مرزی شفاف در ADIFDM نیز قابل اجرا است، پنجره تحلیل را می‌توان در مجاورت دستگاه نوری تحت بررسی قرار داد و بنابراین زمان محاسباتی را می‌توان کاهش داد.

شکل (۲۷.۷) نمودارهای کانتوری انتشار پرتو گوسی در فضای آزاد محاسبه شده توسط ADIFDM را نشان می‌دهد. پنجره‌های تحلیل و تعداد تقسیم در امتداد جهت محور x و y به ترتیب $N_x = N_y = 256$ ($\Delta x = \Delta y = 0.39\mu m$) و $D_x = D_y = 100\mu m$ هستند. مرحله محاسبه در جهت محور z برابر $\Delta z = 2\mu m$ است. تایید شده است که انعکاس غیرفیزیکی میدان توسط پنجره تحلیل توسط TBC حذف می‌شود. شکل‌های (۲۸.۷)-(الف) و (ب) نمودارهای کانتوری انتشار پرتو را در یک کلید نوری ماخ زندر برای (الف) حالت "خاموش" و (ب) وضعیت "روشن" با پیکربندی مشابه شکل (۲۰.۷) نشان می‌دهند. در محاسبه دو بعدی BPM شکل (۲۰.۷)، از روش ضریب شکست موثر برای تبدیل ساختار ضریب شکست سه بعدی به یک ساختار دو بعدی استفاده کردیم. با این حال، تحلیل سه بعدی BPM را می‌توان به طور موثر با استفاده از ADIFDM انجام داد.

در تجزیه و تحلیل BPM، تقریب پاراکسیمال (یا تقریب فرنل) اتخاذ شده است، همانطور که در معادله (۹۰.۷) یا (۱۱۶.۷) نشان داده شده است. بنابراین، هنگامی که

انتشار پرتو نور را در یک موجبر بسیار کج از جهت محور z ها تجزیه و تحلیل می‌کنیم، خطای محاسبه بزرگ می‌شود. از سوی دیگر، از آنجایی که تقریب پاراکسیال در FFTBPM استفاده نشده است، همانطور که در معادله (۱۸.۷) نشان داده شده، FFTBPM را می‌توان در محاسبات انتشار پرتو در جهت موجبر بسیار شیبدار از محور z اعمال کرد. چندین تکنیک برای بهبود دقت FDMBPM پیشنهاد شده است [۲۴، ۲۵] که رابطه‌بندی ریاضی FDMBPM را نسبتاً دست و پا گیر می‌کند. هر دو FFTBPM و FDMBPM محسن و معایب خاص خود را دارند. بنابراین، باید در نظر گرفت که کدام تکنیک برای تحلیل موجبر مورد بررسی مناسب است.

۱۰.۷ تحلیل FDMBPM انتشار پالس نوری

معادله غیرخطی شرودینگر [معادله (۸.۷)] که تابع پوش پالس نوری $\phi(z, \tau)$ تحت غیرخطی بودن اثر کر و افت (یا تقویت) در فیبرهای نوری را کنترل می‌کند، در اینجا دوباره آورده شده است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = j \frac{1}{\gamma} \beta'' \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \alpha \phi - j \frac{1}{\gamma} k n_r |\phi|^2 \phi. \quad (130.7)$$

بطور کلی، معادله دیفرانسیل بصورت

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = A(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + B(z, \tau) \phi \quad (131.7)$$

را می‌توان با روش تفاضل محدود به صورت تقریبی تخمین زد؛

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow \frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta z} \quad (132.7)$$

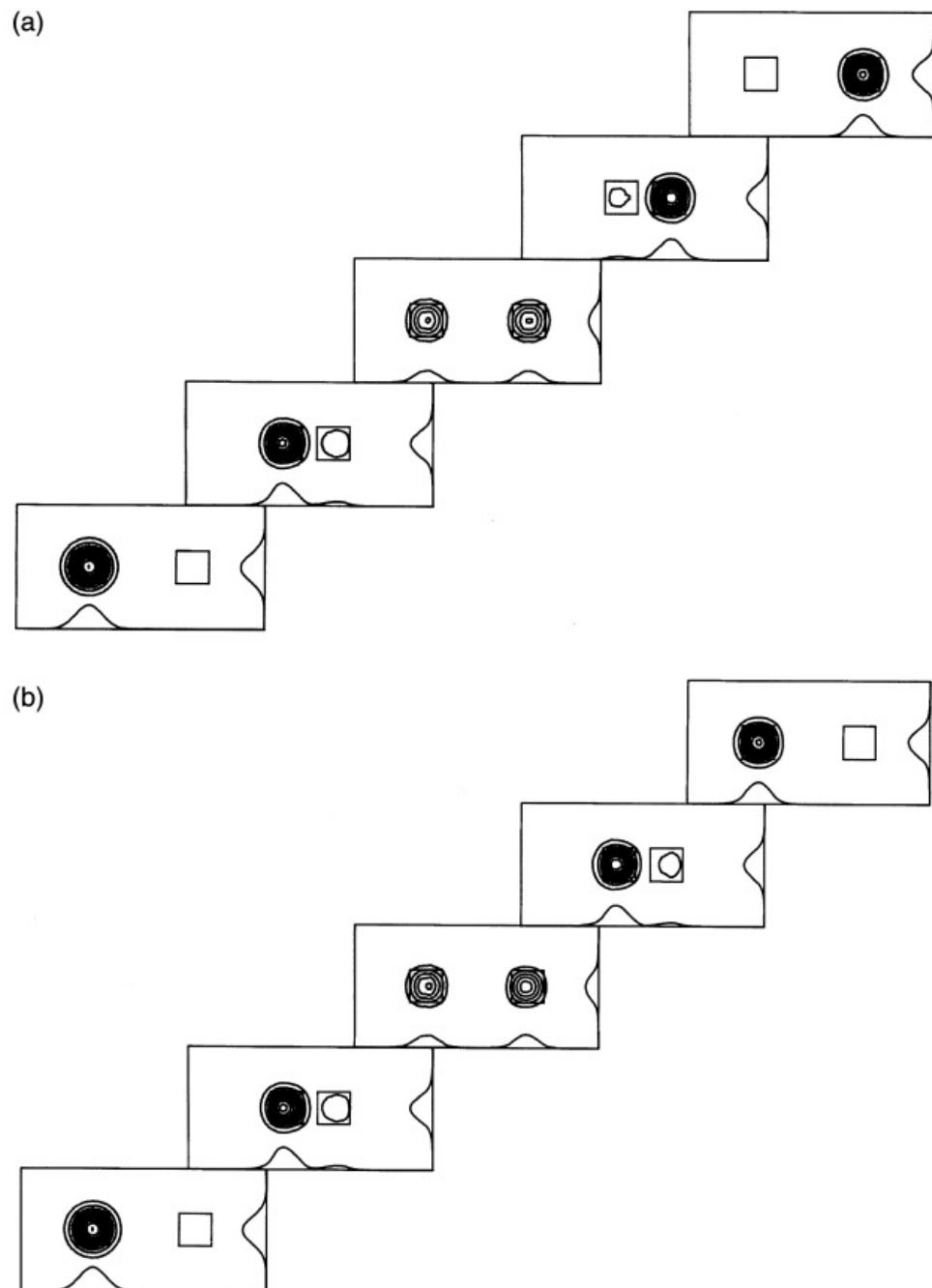
$$A(z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \rightarrow \frac{1}{2} A_i^{m+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\phi_{i-1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i+1}^m}{(\Delta \tau)^2} + \frac{\phi_{i-1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i+1}^{m+1}}{(\Delta \tau)^2} \right\} \quad (133.7)$$

$$B(z, \tau) \phi \rightarrow \frac{1}{\gamma} B_i^{m+\frac{1}{2}} (\phi_i^{m+1} + \phi_i^m) \quad (134.7)$$

که در آن Δz و $\Delta \tau$ مراحل محاسبه را در جهت‌های محور z و τ نشان می‌دهند و زیرنویس i و بالا نویس m به ترتیب نقاط نمونه برداری در امتداد جهت‌های محور z و τ هستند. تعداد تقسیم در امتداد جهت‌های محور z و τ برابر $(N(i=0 - N))$ و $M(m=0 - M)$ است. مقایسه معادلات (۱۳۱.۷) و (۱۳۰.۷) می‌بینیم که

$$A_i^{m+\frac{1}{2}} = \frac{j}{\gamma} \beta'' [(m + \frac{1}{2}) \Delta z], \quad (135.7)$$

$$B_i^{m+\frac{1}{2}} = -\alpha [(m + \frac{1}{2}) \Delta z] - j \frac{k n_r}{\gamma} |\phi[(m + \frac{1}{2}) \Delta z, i \Delta \tau]|^2. \quad (136.7)$$



شکل ۲۸.۷: نمودارهای کانتور انتشار پرتو در یک کلید نوری ماخ زندر با پیکربندی مشابه شکل ۲۰.۷. سوئیچ در (الف) "خاموش" و در (ب) "روشن" است.

جایگزینی معادلات (۱۳۶.۷)–(۱۳۲.۷) در معادله (۱۳۱.۷)، معادلات همزمان زیر را خواهیم داشت:

$$-\phi_{i-1}^{m+1} + s_i^m \phi_i^{m+1} - \phi_{i+1}^{m+1} = \phi_{i-1}^m + q_i^m \phi_i^m + \phi_{i+1}^m \equiv d_i^m \quad (i = 1 - N - 1) \quad (137.7)$$

که در آن

$$s_i^m = 2 + \frac{2(\Delta\tau)^2}{\Delta z A_i^{m+\frac{1}{4}}} - \frac{(\Delta\tau)^2 B_i^{m+\frac{1}{4}}}{A_i^{m+\frac{1}{4}}} \quad (138.7)$$

$$q_i^m = -2 + \frac{2(\Delta\tau)^2}{\Delta z A_i^{m+\frac{1}{4}}} + \frac{(\Delta\tau)^2 B_i^{m+\frac{1}{4}}}{A_i^{m+\frac{1}{4}}} \quad (138.7)$$

وقتی توزیع میدان الکتریکی اولیه ($i = 0 - N$) در موقعیت ورودی ($m = 0$) داده می‌شود، شکل میدان الکتریکی ϕ_i^m در $z = z_m = m\Delta z (m = 1 - M)$ بطور متواالی با استفاده از معادله (۱۳۷.۷) محاسبه می‌شود. در اینجا باید توجه داشت که در (۱۳۷.۷) فقط معادله برای $N+1$ متغیر مجھول وجود دارد. دو معادله مرزی در $z = 0$ و $z = N\Delta\tau (= T)$ یا شرط نویمان وجود ندارد. در مسائل میدان الکتریکی ساکن، شرط دیریکله ($\phi = 0$) یا شرط پنجره ($\partial\phi/\partial\tau = 0$) در مرز داده می‌شود. با این حال، چنین شرایط مرزی در تجزیه و تحلیل انتشار پالس زمانی کافی نیست، زیرا باید میدان‌های تشعشعی را که به دور از پنجره محاسبه نفوذ می‌کنند، بحث کنیم. به منظور حل این مشکل، شرایط مرزی شفاف (TBC) در تجزیه و تحلیل FDMBPM انتشار پالس نوری اتخاذ شده است. روش TBC در تحلیل پالس زمانی همان است که در بخش ۲.۸.۷ توضیح داده شده است. پس از مقداری محاسبات، $1 - N$ معادلات همزمان را برای $1 - N$ متغیر مجھول ($\phi_1^{m+1} - \phi_{N-1}^{m+1}$) به دست می‌آوریم:

$$-a_i \phi_{i-1}^{m+1} + b_i^{m+1} - c_i \phi_{i+1}^{m+1} = d_i^m \quad (i = 1 - N - 1) \quad (139.7)$$

که در آن

$$a_1 = 0, \quad b_1 = s_1^m - \exp(-jk_{left}\Delta\tau), \quad c_1 = 1 \quad (140.7)$$

$$a_i = 1, \quad b_i = s_i, \quad c_i = 1, \quad (i = 2 - N - 2) \quad (140.7)$$

$$a_{N-1} = 1, \quad b_{N-1} = s_{N-1}^m - \exp(-jk_{right}\Delta\tau), \quad c_{N-1} = 0. \quad (140.7)$$

معادله (۱۳۹.۷) را می‌توان بصورت ماتریس بیان کرد:

$$\mathbf{A}^{m+\frac{1}{4}} \Phi^{m+1} = \mathbf{D}^m \quad (141.7)$$

که در آن $\mathbf{A}^{m+\frac{1}{4}}$ یک ماتریس $(N-1) \times (N-1)$ که عناصر آن از معادله (۱۴۰.۷) بدست می‌آید، Φ^{m+1} یک بردار ستونی میدان الکتریکی ϕ_i^{m+1} است، و \mathbf{D}^m یک بردار ستونی d_i^m است. با این حال، از آنجایی که معادله (۱۴۱.۷) یک ماتریس سه قطری است، حل Φ^{m+1}

را می‌توان از طریق رابطه بازگشتی بدون محاسبه ماتریس معکوس $[A^{m+\frac{1}{4}}]^{-1}$ همانطور که در بخش ۳.۸.۷ توضیح داده شد، به دست آورد.

برخی از عناصر ماتریس $A^{m+\frac{1}{4}}$ حاوی s_i^m هستند که در معادلات (۱۳۹.۷) و (۱۴۰.۷) نشان داده شده است. برای محاسبه s_i^m ، $\phi_i^{m+\frac{1}{4}}$ باید از قبل همانطور که توسط معادلات (۱۳۶.۷) و (۱۳۸.۷) تعریف شده است شناخته شود. البته، به طور کلی غیرممکن است زیرا فقط می‌دانیم که تا ϕ_i^m و $\phi_i^{m+\frac{1}{4}}$ مقادیر مجھول هستند که باید تعیین شوند. در چنین حالتی روش جهشی (LF)^{۲۲} کاملاً مفید است. هنگامی که مقادیر ϕ تا مرحله m شناخته می‌شوند، از این مقادیر برای محاسبه مقادیر کمکی $\phi_i^{m+\frac{1}{4}}$ با جابجایی یک مرحله در معادله (۱۳۷.۷) با نیم گام بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} -\phi_{i-1}^{m+\frac{1}{4}} + s_i^{m-\frac{1}{4}} \phi_i^{m+\frac{1}{4}} - \phi_{i+1}^{m+\frac{1}{4}} &= \phi_{i-1}^{m-\frac{1}{4}} + q_i^{m-\frac{1}{4}} \phi_i^{m-\frac{1}{4}} + \phi_{i+1}^{m-\frac{1}{4}} \\ \equiv d_i^{m-\frac{1}{4}} (i = 1 - N - 1) \end{aligned} \quad (۱۴۲.۷)$$

که در آن

$$s_i^{m-\frac{1}{4}} = 2 + \frac{2(\Delta\tau)^4}{\Delta z A_i^m} - \frac{(\Delta\tau)^4 B_i^m}{A_i^m} \quad (۱۴۳.۷)$$

$$q_i^{m-\frac{1}{4}} = -2 + \frac{2(\Delta\tau)^4}{\Delta z A_i^m} - \frac{(\Delta\tau)^4 B_i^m}{A_i^m} \quad (۱۴۳.۷\text{ب})$$

سپس از مقادیر $\phi_i^{m+\frac{1}{4}}$ برای محاسبه عبارت غیرخطی در معادله (۱۳۸.۷)، برای انجام مرحله انتشار موثر، استفاده می‌شود. در اولین مرحله کمکی با $m = 0$ عبارت سمت راست معادله (۱۴۲.۷) با ϕ_i^0 جایگزین می‌شود، زیرا روش جهش قابل استفاده نیست.

۱۱.۷ تحلیل نیمه برداری FDMBPM موجبرهای با تفاوت ضریب شکست بالا

معادلات موج نیمه برداری برای موجبرهای با تفاوت ضریب شکست بسیار بالا ($EH - \Delta$)^{۲۳} در بخش ۶.۶ به دست آمده است. معادلات موج نیمه برداری بر اساس رابطه میدان الکتریکی بصورت زیر بیان شده است؛

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^x} \frac{\partial(n^x E_x)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^x E_x}{\partial y^x} + \frac{\partial^x E_x}{\partial z^x} + k^x n^x E_x = 0 \quad TE \text{ مود شبه} \quad (۱۴۴.۷)$$

$$\frac{\partial^y E_y}{\partial x^y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{n^y} \frac{\partial(n^y E_y)}{\partial y} \right] + \frac{\partial^y E_y}{\partial z^y} + k^y n^y E_y = 0 \quad TM \text{ مود شبه} \quad (۱۴۵.۷)$$

^{۲۲}Leapfrog (LF) Method

^{۲۳}Extremely High-index

و معادلات موج بر اساس میدان مغناطیسی H خواهد بود

$$n^r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n^r} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^r H_y}{\partial y^r} + \frac{\partial^r H_y}{\partial z^r} + n^r \frac{\partial(1/n^r)}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial z} + k^r n^r H_y = 0 \quad TE \quad (146.7)$$

$$\frac{\partial^r H_x}{\partial x^r} + n^r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^r} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^r H_x}{\partial z^r} + n^r \frac{\partial(1/n^r)}{\partial z} \frac{\partial H_x}{\partial z} + k^r n^r H_x = 0 \quad TM \quad (147.7)$$

فرض می‌کنیم که در $H_t = \psi_t(x, y, z) \exp(-jkn_{ref}z)$ و $E_t = \phi_t(x, y, z) \exp(-jkn_{ref}z)$ آن n_{ref} نمایشگر ضریب شکست مرجع و زیرنویس t نشانده‌نده x یا y است. جایگزینی این معادلات در معادلات (144.7) - (147.7) و با استفاده از تقریب پوش تغییر آهسته یعنی؛

$$\left| \frac{\partial^r \phi_t}{\partial z^r} \right| \ll 2kn_{ref} \left| \frac{\partial \phi_t}{\partial z} \right| \quad (148.7)$$

$$\left| \frac{\partial^r \psi_t}{\partial z^r} \right| \ll 2kn_{ref} \left| \frac{\partial \psi_t}{\partial z} \right| \quad (149.7)$$

معادلات نیمه برداری موازی محور BPM را بدست می‌آوریم

$$j2kn_{ref} \frac{\partial \phi_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^r} \frac{\partial(n^r \phi_x)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^r \phi_x}{\partial y^r} + (k^r n^r - k^r n_{ref}^r) \phi_x \quad TE \quad (150.7)$$

$$j2kn_{ref} \frac{\partial \phi_y}{\partial z} = \frac{\partial^r \phi_y}{\partial x^r} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{n^r} \frac{\partial(n^r \phi_y)}{\partial y} \right] + (k^r n^r - k^r n_{ref}^r) \phi_y \quad TM \quad (151.7)$$

و

$$j2kn_{ref} \frac{\partial \psi_y}{\partial z} = n^r \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^r} \frac{\partial(\psi_y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^r \psi_y}{\partial y^r} + \left[k^r n^r - k^r n_{ref}^r - jkn_{ref} n^r \frac{\partial(1/n^r)}{\partial z} \right] \psi_y \quad TE \quad (152.7)$$

$$j2kn_{ref} \frac{\partial \psi_x}{\partial z} = \frac{\partial^r \psi_x}{\partial x^r} + n^r \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{n^r} \frac{\partial(\psi_x)}{\partial y} \right] + \left[k^r n^r - k^r n_{ref}^r - jkn_{ref} n^r \frac{\partial(1/n^r)}{\partial z} \right] \psi_x \quad TM \quad (153.7)$$

جمله $jkn_{ref} n^r \partial(1/n^r) \partial z$ در معادله‌های (152.7) و (153.7) به منظور حفظ خواص بقای توان [۳۱] حفظ شده‌اند.

معادلات (150.7) - (153.7) را می‌توان با استفاده از روش تفاضل محدود حل کرد. در راه حل‌های تفاضل محدود، فضای پیوسته با یک ساختار شبکه گسسته تعریف شده در ناحیه محاسباتی، جایگزین می‌شود. میدان‌های نقطه شبکه با $z = m\Delta z$ و $x = i\Delta x$, $y = l\Delta y$ با عبارات گسسته آنها نشان داده می‌شوند. عملگرهای دیفرانسیل در رابطه‌بندی‌های میدان E و H نیز با تفاضل محدود تقریبی می‌شوند. شکل گسسته عملگرهای دیفرانسیل

در معادلات حاکم (۱۵۰.۷)-(۱۵۳.۷) را می‌توان به روش مستقیم یافت. در ناپیوستگی‌های ضریب شکست، اگرچه میدان‌های الکتریکی معمولی پیوسته نیستند، بردارهای جابجایی $n^{\varepsilon}\phi_y$ و $n^{\varepsilon}\phi_x$ به ترتیب در سرتاسر مرز مشترک‌های ضریب شکست در امتداد محورهای x و y پیوسته هستند. بنابراین طرح تفاضلات مرکزی را می‌توان به طور مستقیم اعمال کرد. در بخش‌های بعدی معادلات (۱۵۰.۷)-(۱۵۳.۷) به ترتیب در استخراج معادلات نیمه برداری FDMBPM برای گره‌های شبه TE و شبه TM استفاده خواهد شد.

۱.۱۱.۷ مودهای شبه TE

بازنویسی ϕ_x به ϕ در معادله (۱۵۰.۷)، معادله نیمه برداری FDMBPM برای مود شبه TE خواهد بود

$$\begin{aligned} j\gamma kn_{ref} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^{\varepsilon}} \frac{\partial(n^{\varepsilon}\phi)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^{\varepsilon}\phi}{\partial y^{\varepsilon}} \\ &+ \left\{ -j\gamma kn_{ref}\alpha(x, y, z) + k^{\varepsilon}[n^{\varepsilon}(x, y, z) - n_{ref}^{\varepsilon}] \right\} \phi \end{aligned} \quad (۱۵۴.۷)$$

که در آن جمله افت یا تقویت ϕ برای کلیت اضافه شده است. بیان تفاضل محدود برای عملگرها در معادله بالا بصورت زیر بدست می‌آید [۳۲]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow \frac{(\phi_{i,l}^{m+1} - \phi_{i,l}^m)}{\Delta z} \quad (۱۵۵.۷)$$

$$\phi \rightarrow \frac{(\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l}^m)}{2} \quad (۱۵۶.۷)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{n^{\varepsilon}} \frac{\partial(n^{\varepsilon}\phi)}{\partial x} \right] &\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\xi_{i,l}^m \phi_{i-1,l}^m - \eta_{i,l}^m \phi_{i,l}^m + \zeta_{i,l}^m \phi_{i+1,l}^m}{(\Delta x)^{\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_{i,l}^m \phi_{i-1,l}^{m+1} - \eta_{i,l}^m \phi_{i,l}^{m+1} + \zeta_{i,l}^m \phi_{i+1,l}^{m+1}}{(\Delta x)^{\varepsilon}} \right\} \end{aligned} \quad (۱۵۷.۷)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\varepsilon}\phi}{\partial y^{\varepsilon}} &\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\phi_{i,l-1}^m - \eta_{i,l}^m + \phi_{i,l+1}^m}{(\Delta y)^{\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_{i,l-1}^{m+1} - \eta_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l+1}^{m+1}}{(\Delta y)^{\varepsilon}} \right\} \end{aligned} \quad (۱۵۸.۷)$$

که در آن

$$\xi_{i,l}^m = \frac{\gamma n^{\varepsilon}(i-1, l, m)}{n^{\varepsilon}(i-1, l, m) + n^{\varepsilon}(i, l, m)} \quad (۱۱۵۹.۷)$$

$$\eta_{i,l}^m = \frac{n^{\varepsilon}(i, l, m)}{n^{\varepsilon}(i-1, l, m) + n^{\varepsilon}(i, l, m)} + \frac{n^{\varepsilon}(i, l, m)}{n^{\varepsilon}(i, l, m) + n^{\varepsilon}(i+1, l, m)} \quad (۱۱۵۹.۷)$$

$$\zeta_{i,l}^m = \frac{\gamma n^{\varepsilon}(i+1, l, m)}{n^{\varepsilon}(i, l, m) + n^{\varepsilon}(i+1, l, m)} \quad (۱۱۵۹.۷)$$

با جایگزینی معادلات (۱۵۵.۷) - (۱۵۶.۷) در معادله (۱۵۴.۷) ، با بیان شکل تفاضل محدود خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} A(\phi_{i,l}^{m+1} - \phi_{i,l}^m) &= \frac{\xi_{i,l}^m \phi_{i-1,l}^m - \eta_{i,l}^m \phi_{i,l}^m + \zeta_{i,l}^m \phi_{i+1,l}^m}{2(\Delta x)^2} \\ &\quad + \frac{\xi_{i,l}^m \phi_{i-1,l}^{m+1} - \eta_{i,l}^m \phi_{i,l}^{m+1} + \zeta_{i,l}^m \phi_{i+1,l}^{m+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,l-1}^m - 2\phi_{i,l}^m + \phi_{i,l+1}^m}{2(\Delta y)^2} \\ &\quad + \frac{\phi_{i,l-1}^{m+1} - 2\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l+1}^{m+1}}{2(\Delta y)^2} + B(\phi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i,l}^m) \end{aligned} \quad (160.7)$$

که در آن

$$A = \frac{j \gamma k n_{ref}}{\Delta z} \quad (161.7)$$

$$B = -j k n_{ref} \alpha(i, l, m + \frac{1}{2}) + \frac{k^2}{2} \left[n^*(i, l, m + \frac{1}{2}) - n_{ref}^* \right] \quad (162.7)$$

معادله (۱۶۰.۷) با استفاده از روش تفاضل محدود ضمنی جهت متناوب (ADIFDM)^{۲۴} با استفاده از روش تفاضل محدود ضمنی جهت متناوب (ADIFDM) بازنویسی می‌کنیم و معادله نیمه برداری FDMBPM برای مود شبه TM را در معادله (۱۵۳.۷) بازنویسی می‌کنیم و معادله

۲.۱۱.۷ مودهای شبه TM

مشابه روش قبلی مود شبه TE_x را در معادله (۱۵۳.۷) بازنویسی می‌کنیم و معادله نیمه برداری FDMBPM برای مود شبه TM را در معادله (۱۵۳.۷) بازنویسی می‌کنیم و معادله

$$\begin{aligned} j \gamma k n_{ref} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left[-j \gamma k n_{ref} \alpha + k^2 n^2 - n_{ref}^2 - j k n_{ref} n^2 \frac{\partial (1/n^2)}{\partial z} \right] \psi \end{aligned} \quad (163.7)$$

رابطه تفاضل محدود برای عملگرها در معادله بالا خواهد بود؛

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \rightarrow \frac{(\psi_{i,l}^{m+1} - \psi_{i,l}^m)}{\Delta z} \quad (164.7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \rightarrow \psi \rightarrow \frac{(\psi_{i,l}^{m+1} + \psi_{i,l}^m)}{2} \quad (165.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\psi_{i-1,l}^m - 2\psi_{i,l}^m + \phi_{i+1,l}^m}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi_{i-1,l}^{m+1} - 2\psi_{i,l}^{m+1} + \phi_{i+1,l}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \right\} \end{aligned} \quad (166.7)$$

^{۲۴} Alternating-Direction Implicit Finite Difference Method (ADIFDM)

$$n^r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n^r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{1}{\gamma} \cdot \left\{ \frac{\xi_{i,l}^m \psi_{i,l-1}^m - \eta_{i,l}^m \psi_{i,l}^m + \zeta_{i,l}^m \psi_{i,l+1}^m}{(\Delta y)^r} + \frac{\xi_{i,l}^m \psi_{i,l-1}^{m+1} - \eta_{i,l}^m \psi_{i,l}^{m+1} + \zeta_{i,l}^m \psi_{i,l+1}^{m+1}}{(\Delta y)^r} \right\} \quad (167.7)$$

که در آن

$$\xi_{i,l}^m = \frac{\gamma n^r(i, l, m)}{n^r(i, l - 1, m) + n^r(i, l, m)} \quad (168.7)$$

$$\eta_{i,l}^m = \frac{n^r(i, l, m)}{n^r(i, l - 1, m) + n^r(i, l, m)} + \frac{n^r(i, l, m)}{n^r(i, l, m) + n^r(i, l + 1, m)} \quad (168.7)$$

$$\zeta_{i,l}^m = \frac{\gamma n^r(i, l, m)}{n^r(i, l, m) + n^r(i, l + 1, m)} \quad (168.7)$$

جمله n^r در معادله (163.7) بصورت زیر تقریب‌زده می‌شود:

$$n^r \frac{\partial(1/n^r)}{\partial z} \rightarrow \frac{(u_{i,l}^{m+1} - u_{i,l}^{m-1})}{\Delta z} \quad (169.7)$$

$$u_{i,l}^{m-1} = \frac{\gamma n^r(i, l, m)}{n^r(i, l, m - 1) + n^r(i, l, m)} \quad (170.7)$$

$$u_{i,l}^{m+1} = \frac{\gamma n^r(i, l, m)}{n^r(i, l, m) + n^r(i, l, m + 1)} \quad (170.7)$$

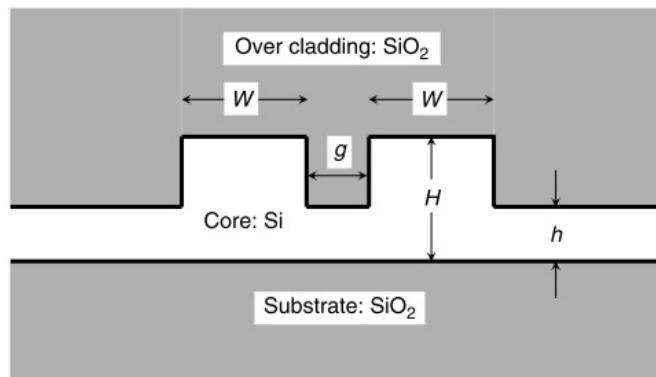
جایگزینی معادلات (163.7)-(164.7) در معادله (170.7)، معادله تفاضل محدود را می‌دهد:

$$A(\psi_{i,l}^{m+1} - \psi_{i,l}^m) = \frac{\psi_{i-1,l}^m - \psi_{i,l}^m + \psi_{i+1,l}^m}{\gamma(\Delta x)^r} + \frac{\psi_{i-1,l}^{m+1} - \psi_{i,l}^{m+1} + \psi_{i+1,l}^{m+1}}{\gamma(\Delta x)^r} + \frac{\xi_{i,l}^m \psi_{i,l-1}^m - \eta_{i,l}^m \psi_{i,l}^m + \zeta_{i,l}^m \psi_{i,l+1}^m}{\gamma(\Delta y)^r} + \frac{\xi_{i,l}^m \psi_{i,l-1}^{m+1} - \eta_{i,l}^m \psi_{i,l}^{m+1} + \zeta_{i,l}^m \psi_{i,l+1}^{m+1}}{\gamma(\Delta y)^r} + B(\psi_{i,l}^{m+1} + \psi_{i,l}^m) \quad (171.7)$$

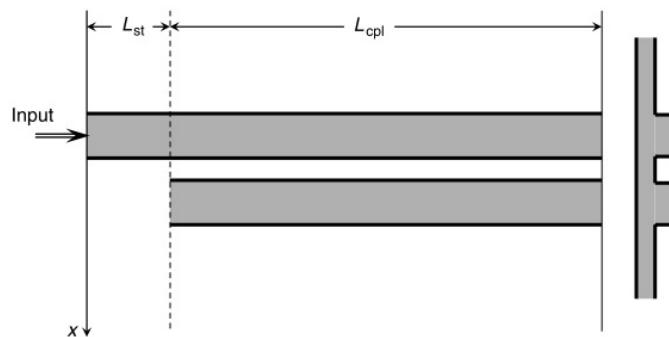
که در آن

$$A = \frac{j\gamma k n_{ref}}{\Delta z} \quad (172.7)$$

$$B = -j k n_{ref} \left[\alpha(i, l, m + \frac{1}{\gamma}) + \frac{(u_{i,l}^{m+1} - u_{i,l}^{m-1})}{\gamma \Delta z} \right] + \frac{k}{\gamma} \left[n^r(i, l, m + \frac{1}{\gamma}) - n_{ref}^r \right]. \quad (173.7)$$



شکل ۲۹.۷: هندسه سطح مقطع کوپلر جهت دار SOI دندانه‌ای



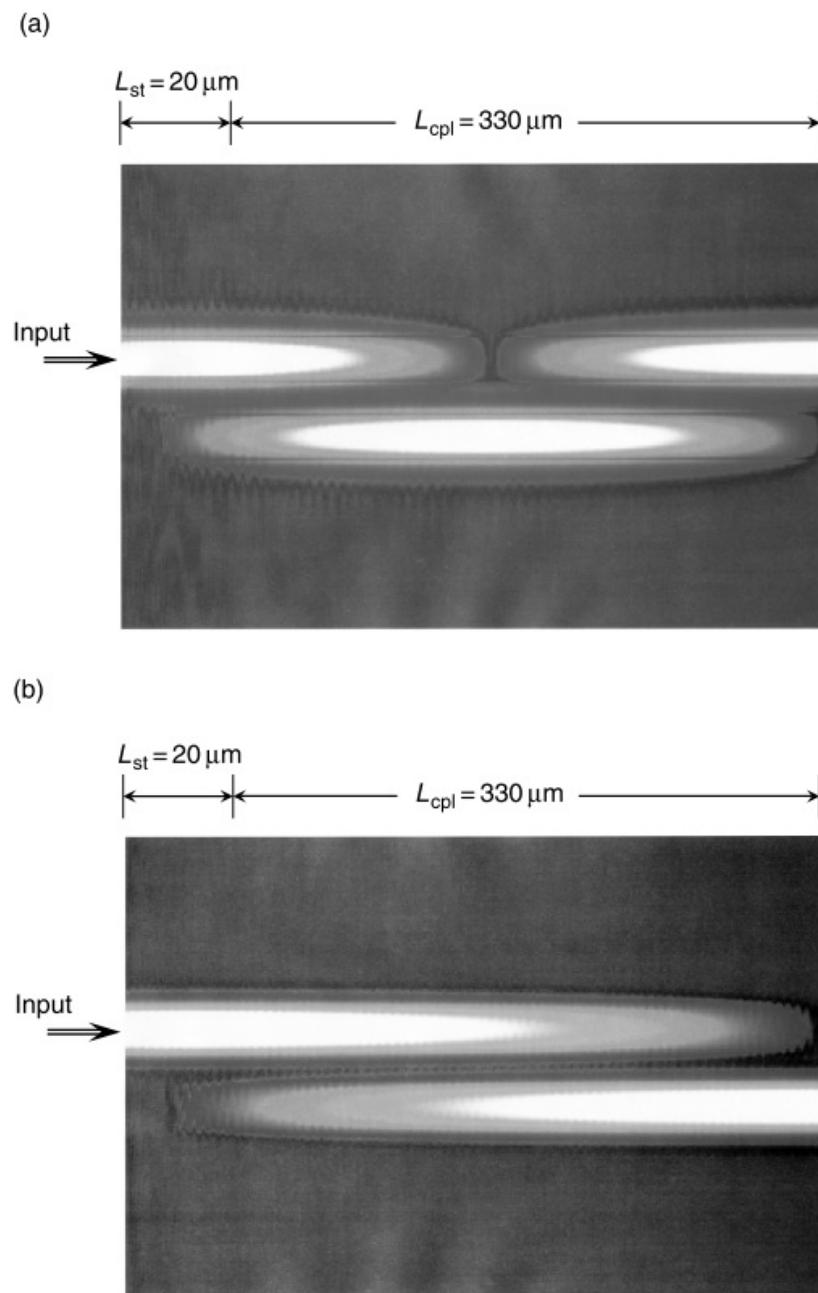
شکل ۳۰.۷: پیکربندی شماتیک تقسیم کننده پلاریزاسیون. L_{st} : طول موجبر تکی، L_{cpl} : طول کوپلر.

معادله (۱۷۱.۷) با استفاده از روش تفاضل محدود ضمنی جهت متناوب (ADIFDM)^{۲۵} که در بخش ۹.۷ توضیح داده شد، حل شده است.

۳.۱۱.۷ تقسیم کننده پلاریزاسیون با استفاده از موجبر سیلیکون روی عایق (SOI).

رفتار وابسته به قطبش موجبرهای نوری دارای دو منبع اصلی است که در بخش ۹.۳ توضیح داده شده است. آنها دوشکست هندسی و دوشکستگی ناشی از تنش هستند. نشان داده شد که انکسار دوگانه هندسی به طور قابل ملاحظه‌ای متناسب با اختلاف ضریب شکست افزایش می‌یابد (شکل ۳۳.۳). در موجبرهای سیلیکون روی عایق (SOI)، اختلاف ضریب شکست از مرتبه $n_1 = 1 - [n_o / n_1]^2 / 2 = 0.41$ می‌شود، که در آن $n_o = 1.444$ و $n_1 = 1.48$ به ترتیب ضریب شکست سیلیکون و شیشه سیلیسی در طول موج هستند. در این صورت وابستگی قطبش در موجبرهای SOI آشکار می‌شود.

^{۲۵}Alternating-Direction Implicit Finite Difference Method (ADIFDM)



شکل ۳۱.۷: نتایج شبیه‌سازی BPM نیمه برداری یک کوپلر با $L_{cpl} = 330 \mu\text{m}$ و $g = 0.7 \mu\text{m}$. (الف) مود شبه $TM(H_x)$. (ب) مود شبه $TE(Ex)$.

تجزیه و تحلیل BPM نیمه برداری تقسیم کننده پلاریزاسیون با استفاده از موجبر دنده‌ای SOI در بخش زیر توضیح داده شده است. شکل (۲۹.۷) هندسه سطح مقطع کوپلر جهتدار دنده‌ای SOI را نشان می‌دهد. عرض هسته W و ارتفاع H هر دو یک میکرومتر انتخاب شده‌اند، در حالی که ارتفاع تیغه $h = ۰.۴۵\mu m$ است. پس از چندین اجرای شبیه‌سازی BPM نیمه برداری، تأیید شد که تقسیم قطبی شدن تقریباً کامل با مقدار شکاف $g = ۰.۷\mu m$ قابل دستیابی است. از آنجایی که اختلاف ضرب شکست بین هسته و روکش بسیار زیاد است، گام محاسبه Δz برابر با $۰.۰۱\mu m$ انتخاب شده است. شکل (۳۰.۷) یک پیکربندی شماتیک از تقسیم کننده پلاریزاسیون است که در آن L_{st} به ترتیب طول موجبر تکی و L_{cpl} طول کوپلر است. نتایج شبیه‌سازی BPM نیمه برداری یک کوپلر با $g = ۰.۷\mu m$ در شکل (۳۱.۷)-(الف و ب) نشان داده شده است. (۳۱.۷)-(الف و ب) شکل موج گذرای مود شبه TE ، مود E_x و مود شبه TM مود H_x را نشان می‌دهد. مود شبه TE به جلو و عقب تزویج و از درگاه بالایی اصلی خارج می‌شود. از سوی دیگر، مود TM تنها یک بار تزویج و در درگاه پایینی خارج می‌شود، بنابراین عملیات تقسیم پرتو قطبی را ممکن می‌کند [۳۲].

۱۲.۷ روش تفاضل محدود حوزه زمان (FDTD)

روش FDTD روبکردنی است که مستقیماً معادلات ماکسول را با گستره سازی مناسب هر دو حوزه زمان و مکان حل می‌کند [۳۴]. معادلات ماکسول در یک محیط همگن و غیرپاشنده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (۱۷۴.۷)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (۱۷۵.۷)$$

جایگزینی رابطه برای میدان الکتریکی \mathbf{E} ، میدان مغناطیسی \mathbf{H} ، چگالی شار الکتریکی \mathbf{D} و چگالی شار مغناطیسی \mathbf{B} به صورت زیر

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\bar{۱}۷۶.۷)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (۱۷۶.۷)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (۱۷۶.۷)$$

در معادلات (۱۷۴.۷) و (۱۷۵.۷)، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \quad (۱۷۷.۷)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (۱۷۸.۷)$$

معادلات بالا را بصورت تفاضل مرکزی بیان می‌کنیم

$$\frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \quad (179.7)$$

$$\frac{\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^n \quad (180.7)$$

که در آن $t = (n - 1)\Delta t$ و Δt نمایشگر جزئی از زمان است. چون نقاط تفاضل مرکزی برای میدان الکتریکی \mathbf{E} در $n-1, n, n+1$ بکار برده‌یم، $\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}$ در معادله (179.7) را بصورت زیر تقریب می‌زنیم

$$\sigma \mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}} \approx \sigma \cdot \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{2} \quad (181.7)$$

در این صورت معادله (179.7) خواهد شد

$$\frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n-1}}{2} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \quad (182.7)$$

با حل معادلات (180.7) و (182.7)، رابطه‌ای برای \mathbf{E}^n و $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$ بدست می‌آوریم؛

$$\mathbf{E}^n = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{\gamma \epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{\gamma \epsilon}} \mathbf{E}^{n-1} + \frac{\Delta t / \epsilon}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{\gamma \epsilon}} \nabla \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \quad (183.7)$$

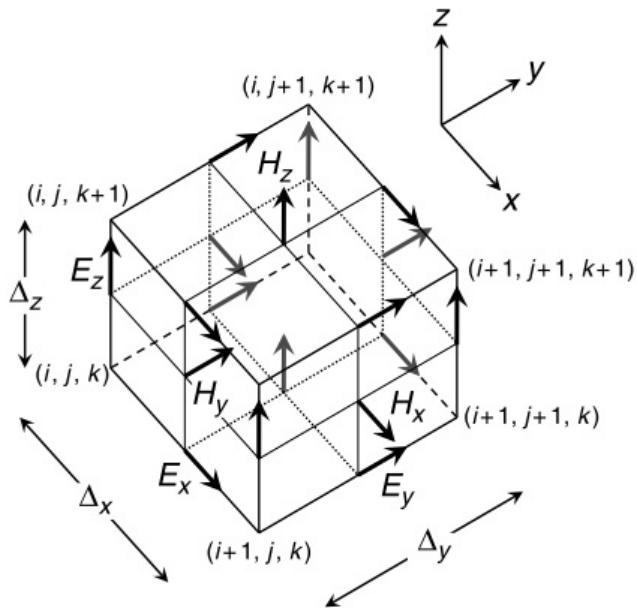
$$\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^n \quad (184.7)$$

به منظور حل مجموعه معادلات (183.7) و (184.7)، یی^{۲۶} طرح جهش-قورباغه‌ای را با استفاده از سلول مکعب شکل همانطور که در شکل (۳۲.۷) نشان داده شده است، معرفی کرد. Δz و $\Delta x, \Delta y$ جزه‌ای گسسته سازی در امتداد جهت محور x, y و z هستند. مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی به ترتیب در لبه‌ها و روی سطح سلول قرار دارند و در هر دو حوزه فضا و زمان به صورت نیمه پله‌ای هستند. نمودار جريان تحليل FDTD در شکل (۳۳.۷) نشان داده شده است. شرایط مرزی جذبی [۳۵] بعداً در این بخش توضیح داده خواهد شد.

استخراج معادله تفاضل محدود برای E_x^n با استفاده از معادله (183.7)، ابتدا به تفصیل شرح داده می‌شود. اعمال معادله (۴۴.۱۰) به معادله (۱۸۳.۷)، E_x^n بصورت زیرا بیان می‌شود

$$E_x^n = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{\gamma \epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{\gamma \epsilon}} E_x^{n-1} + \frac{\Delta t / \epsilon}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{\gamma \epsilon}} \left(\frac{\partial H_z^{n-\frac{1}{2}}}{\partial y} - \frac{\partial H_y^{n-\frac{1}{2}}}{\partial z} \right) \quad (185.7)$$

^{۲۶}Yee



شکل ۳۲.۷: سلول یی

از آنجا که E_x بطوری که در شکل (۳۲.۷) نشان داده شده، در مکان $(i + \frac{1}{\gamma}, j, k)$ قرار دارد، $\partial H_y^{n-\frac{1}{\gamma}} / \partial z$ و $\partial H_z^{n-\frac{1}{\gamma}} / \partial y$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

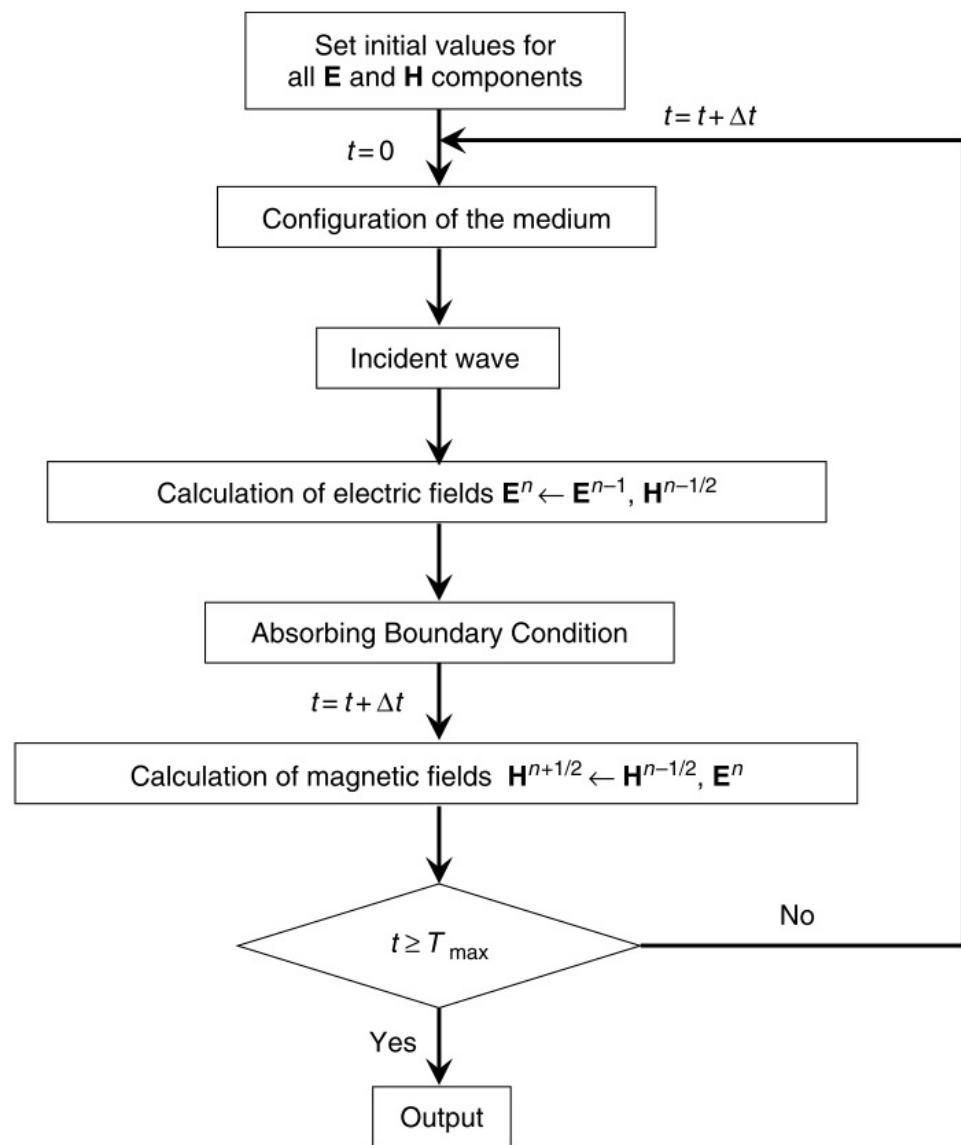
$$\left. \frac{\partial H_z^{n-\frac{1}{\gamma}}}{\partial y} \right|_{(i+\frac{1}{\gamma}, j, k)} = \frac{H_z^{n-\frac{1}{\gamma}}(i + \frac{1}{\gamma}, j + \frac{1}{\gamma}, k) - H_z^{n-\frac{1}{\gamma}}(i + \frac{1}{\gamma}, j - \frac{1}{\gamma}, k)}{\Delta y} \quad (۱۸۶.۷)$$

$$\left. \frac{\partial H_z^{n-\frac{1}{\gamma}}}{\partial y} \right|_{(i+\frac{1}{\gamma}, j, k)} = \frac{H_y^{n-\frac{1}{\gamma}}(i + \frac{1}{\gamma}, j, k + \frac{1}{\gamma}) - H_y^{n-\frac{1}{\gamma}}(i + \frac{1}{\gamma}, j, k - \frac{1}{\gamma})}{\Delta z} \quad (۱۸۶.۷)$$

در این صورت E_x بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} E_x^n \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) &= C_{EX} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) E_x^{n-1} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) + C_{EXLY} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) \\ &\times \left\{ H_z^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) - H_z^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j - \frac{1}{\gamma}, k \right) \right\} \\ &- C_{EXLZ} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) \left\{ H_y^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) \right. \\ &\left. - H_y^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k - \frac{1}{\gamma} \right) \right\} \end{aligned} \quad (۱۸۷.۷)$$

برای $i = ۱ \sim N_x - ۱, j = ۲ \sim N_y - ۱, k = ۲ \sim N_z - ۱,$



شکل ۳۳.۷: نمودار مراحل تحلیل FDTD

که در آن

$$C_{EX} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) = \frac{1 - \frac{\sigma(i + \frac{1}{\gamma}, j, k) \Delta t}{2\epsilon(i + \frac{1}{\gamma}, j, k)}}{1 + \frac{\sigma(i + \frac{1}{\gamma}, j, k) \Delta t}{2\epsilon(i + \frac{1}{\gamma}, j, k)}} \quad (1188.7)$$

$$\begin{aligned} C_{EXLY} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) \cdot \Delta y &= C_{EXLZ} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) \cdot \Delta z \\ &= \frac{\Delta t / \epsilon \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right)}{1 + \frac{\sigma \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right) \Delta t}{2\epsilon \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k \right)}} \end{aligned} \quad (1188.7)$$

به همین ترتیب معادلات تفاضل محدود برای E_y و E_z به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} E_y^n \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) &= C_{EY} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) E_y^{n-1} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) + C_{EYLZ} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) \\ &\quad \times \left\{ H_x^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k + \frac{1}{\gamma} \right) - H_x^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k - \frac{1}{\gamma} \right) \right\} \\ &\quad - C_{EYLY} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) \left\{ H_z^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) \right. \\ &\quad \left. - H_z^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i - \frac{1}{\gamma}, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) \right\} \\ \text{برای } i &= 2 \sim N_x - 1, j = 1 \sim N_y - 1, k = 2 \sim N_z - 1, \end{aligned} \quad (1189.7)$$

که در آن

$$C_{EY} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) = \frac{1 - \frac{\sigma(i, j + \frac{1}{\gamma}, k) \Delta t}{2\epsilon(i, j + \frac{1}{\gamma}, k)}}{1 + \frac{\sigma(i, j + \frac{1}{\gamma}, k) \Delta t}{2\epsilon(i, j + \frac{1}{\gamma}, k)}} \quad (1190.7)$$

$$\begin{aligned} C_{EYLX} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) \cdot \Delta z &= C_{EYLY} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) \cdot \Delta x \\ &= \frac{\Delta t / \epsilon \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right)}{1 + \frac{\sigma \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right) \Delta t}{2\epsilon \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k \right)}} \end{aligned} \quad (1190.7)$$

$$\begin{aligned}
 E_z^n \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) &= C_{EZ} \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) E_z^{n-1} \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) + C_{EZLX} \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) \\
 &\quad \times \left\{ H_x^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i + \frac{1}{\gamma}, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) - H_x^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i - \frac{1}{\gamma}, j, k - \frac{1}{\gamma} \right) \right\} \\
 &\quad - C_{EZLY} \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) \left\{ H_z^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i, j + \frac{1}{\gamma}, k + \frac{1}{\gamma} \right) \right. \\
 &\quad \left. - H_x^{n-\frac{1}{\gamma}} \left(i, j - \frac{1}{\gamma}, k + \frac{1}{\gamma} \right) \right\} \\
 &\text{برای } i = 2 \sim N_x - 1, j = 2 \sim N_y - 1, k = 1 \sim N_z - 1,
 \end{aligned} \tag{۱۹۱.۷}$$

که در آن

$$C_{EZ} \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{1 - \frac{\sigma(i, j, k + \frac{1}{\gamma}) \Delta t}{2\epsilon(i, j, k + \frac{1}{\gamma})}}{1 + \frac{\sigma(i, j, k + \frac{1}{\gamma}) \Delta t}{2\epsilon(i, j, k + \frac{1}{\gamma})}} \tag{۱۹۲.۷}$$

$$\begin{aligned}
 C_{EZLX} \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \Delta x &= C_{EZLY} \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \Delta y \\
 &= \frac{\Delta t / \epsilon \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right)}{1 + \frac{\sigma \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right) \Delta t}{2\epsilon \left(i, j, k + \frac{1}{\gamma} \right)}} \\
 &\quad \text{(۱۹۲.۷)}
 \end{aligned}$$

سپس، استخراج معادله تفاضل محدود برای $H_x^{n+\frac{1}{\gamma}}$ با استفاده از (۱۸۴.۷) به تفصیل شرح داده می‌شود. با اعمال معادله (۱۸۴.۷) به معادله (۴۴.۱۰)، $H_x^{n+\frac{1}{\gamma}}$ خواهد بود؛

$$H_x^{n+\frac{1}{\gamma}} = H_x^{n-\frac{1}{\gamma}} - \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{\partial E_z^n}{\partial y} - \frac{\partial E_y^n}{\partial z} \right) \tag{۱۹۳.۷}$$

از آنجا که در نقطه $(i, j + \frac{1}{\gamma}, k + \frac{1}{\gamma})$ همان طور که در شکل (۳۲.۷) نشانداده شده، قرار دارد، $\partial E_y^n / \partial z$ در $(i, j + \frac{1}{\gamma}, k + \frac{1}{\gamma})$ بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\left. \frac{\partial E_z^n}{\partial y} \right|_{(i, j + \frac{1}{\gamma}, k + \frac{1}{\gamma})} = \frac{E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{\gamma}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{\gamma})}{\Delta y} \tag{۱۹۴.۷}$$

$$\left. \frac{\partial E_y^n}{\partial z} \right|_{(i, j + \frac{1}{\gamma}, k + \frac{1}{\gamma})} = \frac{E_y^n(i, j + \frac{1}{\gamma}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{\gamma}, k)}{\Delta z} \tag{۱۹۴.۷}$$

در این صورت $H_x^{n+\frac{1}{4}}$ خواهد بود

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+\frac{1}{4}} \left(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right) &= H_z^{n-\frac{1}{4}} \left(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right) - C_{HXLY} \left(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right) \\
 &\quad \times \left\{ E_z^n \left(i, j + 1, k + \frac{1}{4} \right) - E_z^n \left(i, j, k + \frac{1}{4} \right) \right\} \\
 &\quad + C_{HXLZ} \left(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right) \left\{ E_y^n \left(i, j + \frac{1}{4}, k + 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - E_y^n \left(i, j + \frac{1}{4}, k \right) \right\} \\
 &\text{برای } i = 2 \sim N_x - 1, j = 1 \sim N_y - 1, k = 1 \sim N_z - 1, \\
 &\qquad\qquad\qquad (195.7) \\
 &\text{که در آن}
 \end{aligned}$$

$$C_{HXLY} \left(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right) = \frac{\Delta t}{\mu(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4})} \cdot \frac{1}{\Delta y} \quad (196.7)$$

$$C_{HXLZ} \left(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4} \right) = \frac{\Delta t}{\mu(i, j + \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4})} \cdot \frac{1}{\Delta z} \quad (196.7)$$

به همین ترتیب معادلات تفاضل محدود برای $H_z^{n+\frac{1}{4}}$ و $H_y^{n+\frac{1}{4}}$ به دست می‌آیند

$$\begin{aligned}
 H_y^{n+\frac{1}{4}} \left(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4} \right) &= H_y^{n-\frac{1}{4}} \left(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4} \right) - C_{HYLZ} \left(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4} \right) \\
 &\quad \times \left\{ E_x^n \left(i + \frac{1}{4}, j, k + 1 \right) - E_x^n \left(i + \frac{1}{4}, j, k \right) \right\} \\
 &\quad + C_{HYLX} \left(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4} \right) \left\{ E_z^n \left(i + 1, j, k + 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - E_z^n \left(i, j, k + \frac{1}{4} \right) \right\} \\
 &\text{برای } i = 1 \sim N_x - 1, j = 2 \sim N_y - 1, k = 1 \sim N_z - 1, \\
 &\qquad\qquad\qquad (197.7) \\
 &\text{که در آن}
 \end{aligned}$$

$$C_{HYLZ} \left(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4} \right) = \frac{\Delta t}{\mu(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4})} \cdot \frac{1}{\Delta z} \quad (198.7)$$

$$C_{HYLX} \left(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4} \right) = \frac{\Delta t}{\mu(i + \frac{1}{4}, j, k + \frac{1}{4})} \cdot \frac{1}{\Delta x} \quad (198.7)$$

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+\frac{1}{\tau}}(i + \frac{1}{\tau}, j + \frac{1}{\tau}, k) &= H_z^{n-\frac{1}{\tau}}(i + \frac{1}{\tau}, j, k + \frac{1}{\tau}) - C_{HZLX}(i + \frac{1}{\tau}, j + \frac{1}{\tau}, k) \\
 &\quad \times \left\{ E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{\tau}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{\tau}, k) \right\} \\
 &\quad + C_{HZLY}(i + \frac{1}{\tau}, j + \frac{1}{\tau}, k) \left\{ E_x^n(i + \frac{1}{\tau}, j + 1, k) \right. \\
 &\quad \left. - E_x^n(i + \frac{1}{\tau}, j, k) \right\} \\
 &\text{برای } i = 1 \sim N_x - 1, j = 1 \sim N_y - 1, k = 2 \sim N_z - 1,
 \end{aligned} \tag{۱۹۹.۷}$$

که در آن

$$C_{HZLX}(i + \frac{1}{\tau}, j + \frac{1}{\tau}, k) = \frac{\Delta t}{\mu(i + \frac{1}{\tau}, j + \frac{1}{\tau}, k)} \cdot \frac{1}{\Delta x} \tag{۲۰۰.۷}$$

$$C_{HZLY}(i + \frac{1}{\tau}, j + \frac{1}{\tau}, k) = \frac{\Delta t}{\mu(i + \frac{1}{\tau}, j + \frac{1}{\tau}, k)} \cdot \frac{1}{\Delta y} \tag{۲۰۰.۷ ب)$$

اندازه گام زمانی Δt باید شرایط کورانت ^{۲۷} زیر را برآورده کند تا ثبات عددی را تضمین کند:

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \tag{۲۰۱.۷}$$

که در آن c سرعت نور است.

در لبه ناحیه محاسبه، یک شرط مرز جذبی (ABC) ^{۲۸} مناسب باید اعمال شود تا از بازتابهای نامطلوب (غیر فیزیکی) جلوگیری شود. مشهورترین ABC در تجزیه و تحلیل FDTD همانی است که توسط مور ^{۲۹} [۳۵] ایجاد شده است.

شرط مرز جذبی مور با استفاده از معادله موج یک طرفه برای E_y , که در جهت $x-$ همانطور که در شکل (۳۴.۷) نشان داده شده است، توصیف می‌شود. مرز جاذب در $x = 0$ قرار می‌گیرد. میدان الکتریکی E_y که در جهت x منفی با سرعت V_x حرکت می‌کند، بصورت زیر بیان می‌شود.

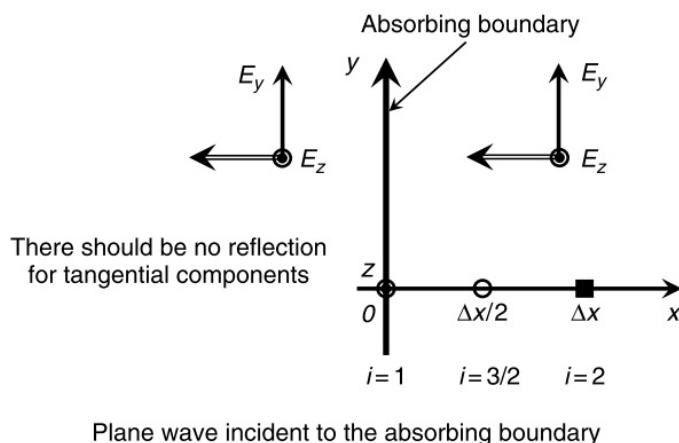
$$E_y = E_y(x + V_x t) \tag{۲۰۲.۷}$$

$$V_x = \frac{\omega}{\beta_x} \tag{۲۰۲.۷ ب)$$

^{۲۷}Courant condition

^{۲۸}Absorbing Boundary Condition(ABC)

^{۲۹}Mur



شکل ۳۴.۷: هندسه برای توضیح شرط مرز جذبی مور ABC

که در آن β_x ثابت انتشار در جهت x است. E_y رابطه زیر را برآورده می‌کند

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = V_x \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (۲۰۳.۷)$$

این بیانی از معادله موج یک طرفه است. از آنجایی که هیچ مرز فیزیکی در $x = 0$ وجود ندارد (اگرچه یک مرز منطقه محاسباتی وجود دارد)، معادله (۲۰۳.۷) باید در $x = 0$ ارضاء شود. وقتی معادله (۲۰۳.۷) را نسبت به زمان گستته می‌کنیم، بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} \Big|_{t=(n-\frac{1}{2})\Delta t} = \frac{(E_y^n - E_y^{n-1})}{\Delta t} \Big|_{x=\Delta x/2} = V_x \cdot \frac{\partial E_y^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x} \Big|_{x=\Delta x/2} \quad (۲۰۴.۷)$$

معادله (۲۰۴.۷) بطور دقیق‌تر بیان می‌کنیم

$$E_y^n \left(\frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - E_y^{n-1} \left(\frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) \over \Delta t \\ = V_x \cdot \frac{E_y^{n-\frac{1}{2}} \left(2, j + \frac{1}{2}, k \right) - E_y^{n-\frac{1}{2}} \left(1, j + \frac{1}{2}, k \right)}{\Delta x} \quad (۲۰۵.۷)$$

چون E_y بطوری که در شکل (۳۲.۷) نشان داده شده، در $(i, j + \frac{1}{2}, k)$ محاسبه می‌شود، $E_y^{n-1} \left(\frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right)$ و $E_y^n \left(\frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right)$ بصورت زیر تقریب زده می‌شوند؛

$$E_y^n \left(\frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) = \frac{E_y^n \left(1, j + \frac{1}{2}, k \right) + E_y^n \left(2, j + \frac{1}{2}, k \right)}{2} \quad (\bar{۲۰۶.۷})$$

$$E_y^{n-1} \left(\frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) = \frac{E_y^{n-1} \left(1, j + \frac{1}{2}, k \right) + E_y^{n-1} \left(2, j + \frac{1}{2}, k \right)}{2} \quad (۲۰۶.۷)$$

شبیه همین رویه، چون تفاضل مرکزی برای میدان الکتریکی E در $1 - n$ و n بکار بردیم، در معادله (۲۰۵.۷) را بصورت زیر تقریب میزنیم؛

$$E_y^{n-\frac{1}{2}}(1, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{E_y^n(1, j + \frac{1}{2}, k) + E_y^{n-1}(1, j + \frac{1}{2}, k)}{2} \quad (207.7)$$

$$E_y^{n-\frac{1}{2}}(2, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{E_y^n(2, j + \frac{1}{2}, k) + E_y^{n-1}(2, j + \frac{1}{2}, k)}{2} \quad (207.7)$$

با جایگزینی معادلات (۲۰۶.۷) و (۲۰۷.۷) در معادله (۲۰۵.۷)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E_y^n(1, j + \frac{1}{2}, k) &= E_y^{n-1}(2, j + \frac{1}{2}, k) + \frac{(V_x \Delta t - \Delta x)}{(V_x \Delta t + \Delta x)} \\ &\times \left\{ E_y^n(2, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^{n-1}(1, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \quad (208.7) \\ &\text{برای } j = 2 \sim N_y - 1, k = 2 \sim N_z - 2. \end{aligned}$$

شرط مرز جذبی مور یک موج معمولی را با دقت بالا از بین میبرد. با این حال، برای امواج تابشی مورب، انعکاس بزرگ میتواند رخ دهد. عملگرهای مرزی دیگری برای از بین بردن امواج در زوایای متعدد معرفی شده‌اند [۳۶، ۳۷].

كتاب نامه

- [1] Koch, T. B., J. B. Davies, and D. Wickramasinghe. 1989. Finite element/finite difference propagation algorithm for integrated optical device. *Electron. Lett.* 25:514–516.
- [2] Fleck, J. A., J. R. Morris, and M. D. Feit. 1976. Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere. *Appl. Phys.* 10:129–160.
- [3] Feit, M. D., and J. A. Fleck. 1978. Light propagation in graded-index optical fibers. *Appl. Opt.* 17:3990–3998.
- [4] Lax, M., J. H. Batteh, and G. P. Agrawal. 1981. Channeling of intense electromagnetic beams. *J. Appl. Phys.* 52:109–125.
- [5] Agrawal, G. P., and M. J. Potasek. 1986. Nonlinear pulse distortion in single-mode optical fibers at the zero-dispersion wavelength. *Phys. Rev. A* 33:1765–1776.
- [6] Bringham, E. O. 1974. *The Fast Fourier Transform*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [7] Oliver, B. M., J. R. Pierce, and C. E. Shannon. 1948. The philosophy of PCM. *Proc. of the IRE.* 36:1324–1331.
- [8] Cooley, J. W., and J. W. Turkey. 1965. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.* 19:297–301.
- [9] Golub, G. H., and C. F. van Loan. 1989. *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- [10] Hutcheson, L. D., I. A. White, and J. J. Burke. 1980. Comparison of bending losses in integrated optical circuits. *Opt. Lett.* 5:276–278.
- [11] Neumann, E. G., and R. Nat. 1982. Curved dielectric optical waveguides with reduced transition loss. *IEE Proc., Pt. H* 129:278–280. Beam Propagation Method

- [12] Izutsu, M., Y. Nakai, and T. Sueta. 1982. Operation mechanism of the single-mode optical waveguide Y-junction. *Opt. Lett.* 7:136–138.
- [13] Ranganath, T. R., and S. Wang. 1977. Ti-diffuse LiNbO₃ branched-waveguide modulators-performance and design. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-13:290–295.
- [14] Schmidt, R. V., and L. L. Buhl. 1976. Experimental 4×4 optical switching network. *Electron. Lett.* 12:575–577.
- [15] Jensen, S. M. 1982. The nonlinear coherent coupler. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.* MTT-30:1568–1571.
- [16] Ironside, C. N., J. F. Duffy, R. Hutchins, W. C. Bany, C. T. Seaton, and G. I. Stegeman. 1985. Waveguide fabrication in nonlinear semiconductor-doped glasses. *Proc. 11th European Conf. Opt. Commun.*, Venetia, Italy, pp.237–240.
- [17] Stegeman, G. I., E. M. Wright, N. Finlayson, R. C. Zanoni and C. T. Seaton. 1988. Third order nonlinear integrated optics. *IEEE J. of Lightwave Tech.* LT-6:953–970.
- [18] Aitchison, J. S., A. H. Kean, C. N. Ironside, A. Villeneuve, and G. I. Stegeman. 1991. Ultrafast all-optical switching in $Al_{0.18}Ga_{0.82}$ As directional coupler in $1.55\mu m$ spectral region. *Electron. Lett.* 27:1709–1710.
- [19] Doran, N. J., and D. Wood. 1988. Nonlinear-optical loop mirror. *Opt. Lett.* 13:56–58.
- [20] Nelson, B. P., K. J. Blow, P. D. Constantine, N. J. Doran, J. K. Lucek, I. W. Marshall, and K. Smith. 1991. All-optical Gbit/s switching using nonlinear optical loop mirror. *Electron. Lett.* 27:704–705.
- [21] THadley, G. R. 1992. Transparent boundary condition for beam propagation method. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-28:363–370.
- [22] Yevick, D., and B. Hermansson. 1989. New formulations of the matrix beam propagation method: Application to rib waveguides. *IEEE J. of Quantum Electron.* QE-25:221–229.
- [23] Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. 1986. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press.
- [24] Ratowsky, R. P., and J. A. Fleck Jr. 1991. Accurate numerical solution of the Helmholtz equation by iterative Lanczos reduction. *Opt. Lett.* 16:787–789.

- [25] Hadley, G. R. 1992. Wide-angle beam propagation using Pade approximant operators. *Opt. Lett.* 17:1426–1428.
- [26] Soref, R. A., J. Schmidtchen, and K. Petermann. 1991. Large single-mode rib waveguides in $GeSi - Si$ and $Si - on - SiO_2$. *IEEE J. Quantum Electron.* 27:1971–1974.
- [27] Jalali, B., S. Yegnanarayanan, T. Yoon, T. Yoshimoto, I. Rendina, and F. Copinger. 1998. Advances in silicon-on-insulator optoelectronics. *IEEE J. Selected Topics in Quantum Electron.* 4:938–947.
- [28] Little, B. E., S. T. Chu, P. P. Absil, J. V. Hryniewicz, F. G. Johnson, F. Seiferth, D. Gill, V. Van, O. King, and M. Trakalo. 2004. Very high-order microring resonator filters for WDM applications. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 16:2263–2265.
- [29] Yamada, K., T. Tsuchizawa, T. Watanabe, J. Takahashi, E. Tamechika, M. Takahashi, S. Uchiyama, H. Fukuda, T. Shoji, S. Itabashi, and H. Morita. 2004. Microphotonics devices based on silicon wire waveguiding system. *IEICE Trans. Electron.* E87-C:351–358.
- [30] Bogaerts, W., R. Baets, P. Dumon, V. Wiaux, S. Beckx, D. Taillaert, B. Luyssaert, J. Campenhout, P. Bienstman, and D. Thourhout. 2005. Nanophotonic waveguides in silicon-on-insulator fabricated with CMOS technology. *IEEE J. Lightwave Tech.* 23:401–412.
- [31] Yamauchi, J. 2003. Propagating beam analysis of optical waveguides, Chapter 8. Research Studies Press Ltd., England.
- [32] Huang W. P., and C. L. Xu. 1993. Simulation of three-dimensional optical waveguides by a full-vector beam propagation method. *IEEE J. Quantum Electron.* 29:2639–2649.
- [33] Kiyat, I., A. Aydinli, and N. Dagli. 2005. A compact silicon-on-insulator polarization splitter. *IEEE Photon. Tech. Lett.* 17:100–102.
- [34] Yee, K. S. 1966. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag.* AP-14:302–307.
- [35] Mur, G. 1981. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. Electromagnetic Compat.* EMC- 23(4):377–382.
- [36] Higdon, R. L. 1986. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation. *Math. Comp.* 47:437–459.

- [37] Berenger, J.-P. 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Jour. Comput. Phys.* 114:185–200.

فصل ۸

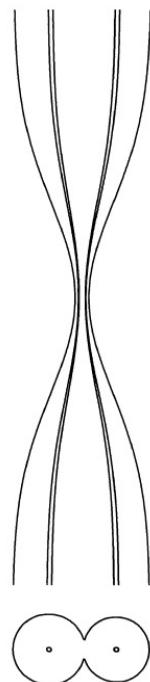
روش پله‌های متوالی

یا موجبرهای متغیر محوری، روش انتشار پرتو توصیف شده در فصل قبل قوی‌ترین تکنیک برای بررسی پدیده‌های انتشار موج نور خطی و غیرخطی است. در مقایسه با BPM، روش پله‌های متوالی یک تکنیک کلاسیک است که برای تحلیل موجبرهای متغیر محوری استفاده شده است. همانطور که در فصل هفتم توضیح داده شد، اندازه گام تحلیل عددی در BPM چیزی بین کسری از طول موج و چندین برابر طول موج است. بنابراین زمان محاسبه و خطاهای گرد کردن در آنالیز دستگاه‌های نوری با طول چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد. روش پله‌های متوالی برای تحلیل چنین وسایل طولانی مناسب است. در این فصل، مفاهیم و رویه‌های اساسی روش پله‌های متوالی از طریق مثال کوپلرهای فیبر مخروطی آغشته شده توضیح داده شده است.

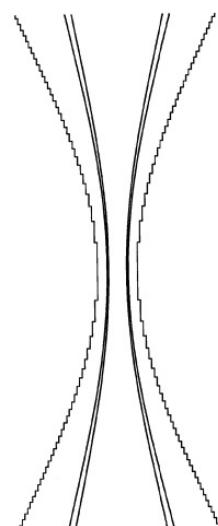
۱.۸ تقریب پلکانی مرز موجبر

در اینجا ویژگی‌های انتقال کوپلر مخروطی ذوب شده (ذوب و کشیده شده) [۱، ۲] نشان داده شده در شکل (۱.۸) را بررسی خواهیم کرد. کوپلر مخروطی ذوب شده بدین صورت ساخته می‌شود که ابتدا دو فیبر موازی را با یک مشعل یا بخاری ذوب کرده و سپس آن را می‌کشند تا طویل شود. قطر کل حداقل ناحیه کمر به حدود $20\mu m$ تا $30\mu m$ از قطر اصلی دو قیبر می‌رسد. در این حالت قطر هسته هر فیبر حدود یک میکرومتر (یک دهم قطر هسته اصلی) می‌شود. بنابراین، بیشتر نور در ناحیه هسته محدود نمی‌شود و به کل روکش گسترش می‌یابد. در این صورت محصور شدن نور توسط روکش هوا فراهم می‌شود. از آنجایی که اختلاف ضرب شکست بین هسته شیشه و روکش هوا حدود ۲۵٪ است، از نظر تئوری مودهای زیادی می‌تواند وجود داشته باشد. با این حال، اگر شیب مخروطی به اندازه کافی کم باشد، مودهای مرتبه بالاتر به ندرت می‌توانند با تبدیل مود ایجاد شوند. تایید شده است که افت عبوری^۱ کوپلر فیبر نوع جوشی ساخته شده در مرتبه ۱٪ دسی‌بل است [۲].

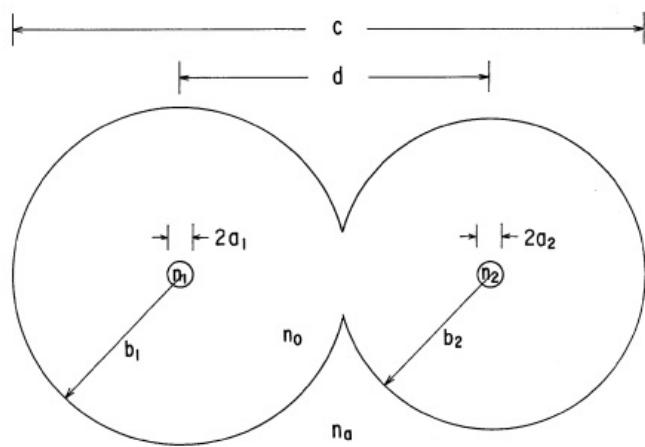
^۱ Insertion Loss



شکل ۱.۸: پیکربندی شماتیک یک کوپلر فیبر ذوب و کشیده شده.



شکل ۲.۸: تقریب پلکانی ناحیه کوپلینگ نور (تقریباً هسته‌های پلکانی به دلیل کوچک بودن آنها نشان داده نمی‌شود).



شکل ۳.۸: پیکربندی مقطع کوپلر مخروطی ذوب شده

همانطور که در شکل (۲.۸) نشان داده شده، اولین مرحله از تجزیه و تحلیل کوپلر مخروطی ذوب شده، تقریب پلکانی ناحیه کوپلینگ صاف است. در هر ناحیه تقریبی پلکان، ساختار هندسی مقطع ثابت فرض می‌شود. پدیده‌های تزویج نور و ویژگی‌های انتشار را می‌توان با تحلیل مبتنی بر تعامل بین مودهای زوج و فرد، همانطور که در بخش ۳.۴.۴ توضیح داده شد، تجزیه و تحلیل کرد.تابع انتقال از یک منطقه پلکانی خاص به یک منطقه متواالی توسط فرمول تحلیلی ارائه شده است که در ادامه نشان داده خواهد شد. در این صورت، اگر شرایط اولیه توزیع میدان الکتریکی را در موقعیتی نسبتاً دور از ناحیه تزویج مشخص کنیم، می‌توانیم پدیده انتشار نور را در کل کوپلر محاسبه کنیم [۴]. در هر منطقه پله‌ها، توزیع میدان الکتریکی مود زوج و فرد به صورت زیر به دست می‌آید: (۱) شکل توزیع ضریب شکست سه بعدی کوپلر بر اساس روش شکست موثر به یک دو بعدی تبدیل می‌شود و (۲) سپس با استفاده از روش اجزای محدود برای موجبرهای تیغه‌ای با نمایه‌های ضریب شکست دلخواه، همانطور که در بخش ۲.۶ نشان داده شده است، تجزیه و تحلیل می‌شود. محاسبه عددی برای آنالیز دو بعدی از نظر زمان CPU و اندازه حافظه بسیار سریعتر و کارآمدتر از آنالیز سه بعدی است. شکل مخروطی کوپلر مخروطی ذوب شده شکل (۱.۸) با تقریب زیر مشخص می‌شود.

$$c(z) = c_{\circ} - (c_{\circ} - c_{min}) \exp \left[- \left(\frac{z}{z_{\circ}} \right)^2 \right] \quad (1.8)$$

که در آن $c(z)$ قطر خارجی کوپل تعریف شده در شکل (۳.۸) است، z نشان دهنده طول مخروطی است، c_{\circ} و c_{min} به ترتیب قطر اولیه و حداقل را نشان می‌دهند. در شکل (۳.۸)، $d(z)$ یک جدایی از مرکز هسته را نشان می‌دهد، و $b_1(z)$ و $b_2(z)$ نشان دهنده شعاع روکش هر فیبر است. فرض می‌شود که پارامترهای $(z, b_1(z), b_2(z), d(z))$ و (z, n_1, n_2) وابستگی‌های یکسانی به محور z مانند $c(z)$ دارند. n_1 و n_2 ضریب شکست هر هسته هستند و n_{\circ} نشان دهنده ضریب شکست روکش و محیط اطراف (عموماً هوا) هستند. $2a_1$ و $2a_2$ قطر

هر هسته است. در تحلیل حاضر، پارامترهای موجبر معمولی زیر را فرض می‌کنیم:

$$2a_1 = 2a_2 = 8\mu m,$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0.3\%,$$

$$n_o = 1.45, \quad n_a = 1.0,$$

$$2b_1 = 125\mu m.$$

محاسبه پدیده‌های تزویج مود با استفاده از روش تقریب پلکانی از موقعیت z_{in} شروع می‌شود، جایی که تزویج بین دو هسته ناچیز است. به طور مشابه، محاسبه تا موقعیت z تا جایی که تزویج متقابل ناچیز است، انجام می‌شود. در تجزیه و تحلیل زیر، $-z_{out}$ و $-z_{in}$ به عنوان موقعیتی تعیین می‌شوند که در آن ضریب تزویج مود κ می‌شود:

$$\frac{\kappa}{k} \approx 10^{-8} \quad (2.8)$$

فاصله بین $-z_{in}$ و $-z_{out}$ توسطتابع پلکانی با N مرحله تقریب زده شده است. به طور معمول N حدود $50 - 40$ است. در اینجا دو پارامتر مهم را معرفی می‌کنیم:

$$\eta = \frac{d}{b_1 + b_2} \quad (3.8)$$

$$\tau = \frac{c_{min}}{c_o} \quad (4.8)$$

که در آن η نشان دهنده درجه‌ای از همچوشی بین دو فیبر و τ نسبت کشیدگی را بیان می‌کند. از آنجایی که فرض می‌شود $b_1 = d$ و b_2 وابستگی به z یکسانی دارند، در هر موقعیت محوری ثابت است. دو فیبر برای $\tau = 1$ در تماس نقطه‌ای هستند و η با اتصال محکم دو فیبر کوچکتر می‌شود.

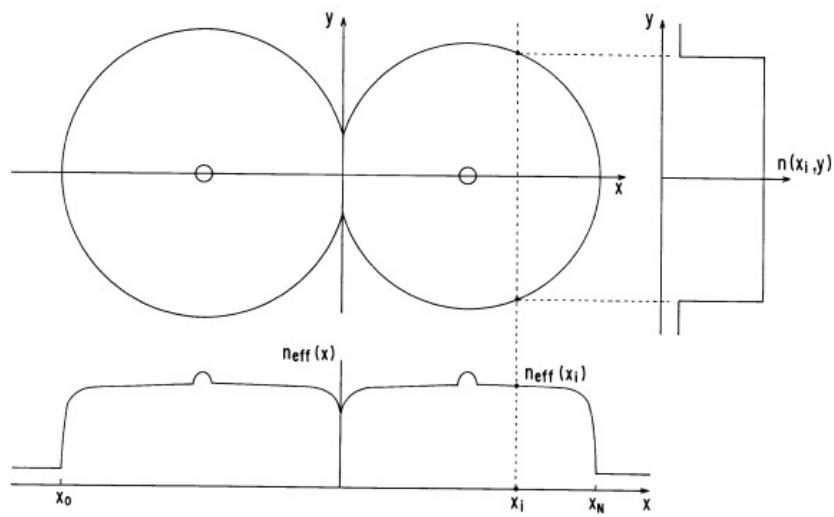
۲.۸ دامنه و فازهای بین مرزمشترک اتصال

شکل (۴.۸) یک نمای مقطعی از کوپلر مخروطی ذوب شده در موقعیت محوری z و توزیع شکست موثر آن $n_{eff}(x)$ را نشان می‌دهد. مودهای زوج و فرد در موجبر تیغه‌ای دارای نمایه ضریب شکست موثر $n_{eff}(x)$ را می‌توان با تجزیه و تحلیل FEM شرح داده شده در بخش ۲.۶ به دست آورد. توزیع میدان الکتریکی کل در $(m = 0 - N)$ امین منطقه پلکانی بصورت زیر بیان می‌شود

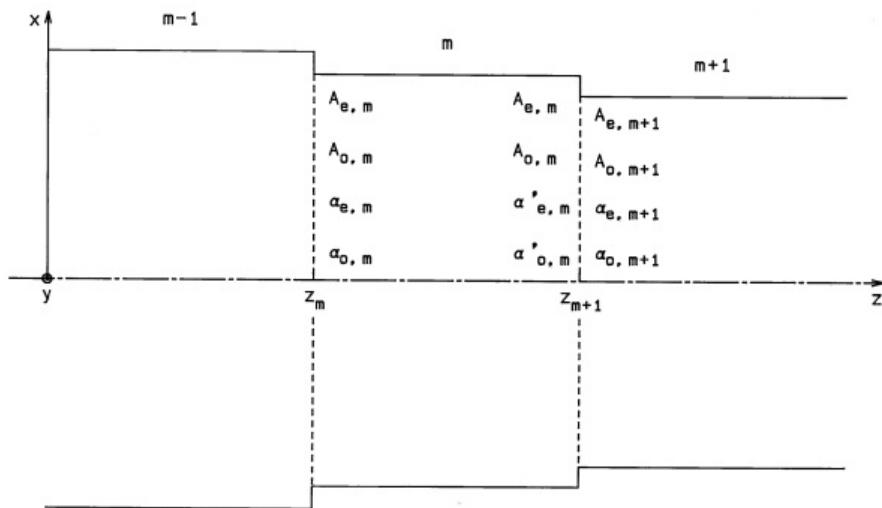
$$E_m(x, z) = A_{e,m}\phi_{e,m}(x)\exp[-j\beta_{e,m}(z + z_{in})] + A_{o,m}\phi_{o,m}(x)\exp[-j\beta_{o,m}(z + z_{in})] \quad (m = 0 - N) \quad (5.8)$$

در اینجا، $A_{e,m}$ ، $\phi_{e,m}$ و $\beta_{e,m}$ بترتیب دامنه، مود ویژه، و ثابت انتشار مود زوج و $A_{o,m}$ ، $\phi_{o,m}$ و $\beta_{o,m}$ به ترتیب دامنه، مود ویژه و ثابت انتشار مود فرد هستند. به طور کلی، مودهای مرتبه بالاتر و مودهای تابشی باید در معادله (۵.۸) در نظر گرفته شوند. با این حال، از آنجایی که افت عبوری^۴ کوپلر فیبر مخروطی عملی بسیار کم

^۴ Insertion Loss



شکل ۴.۸: نمای مقطعی کوپلر ذوب شده و شکل ضریب شکست موثر آن.



شکل ۵.۸: دامنه‌ها و مراحل بین دو منطقه تقریب پلکانی.

است، می‌توان فرض کرد که تزویج مود عمدتاً فقط بین مودهای زوج و فرد اتفاق می‌افتد. و $\phi_{e,m}, \phi_{o,m}, \beta_{e,m}$ برای نمایه ضریب شکست $n_{eff}(x)$ در هر مرحله از $A_{e,m}$ و $A_{o,m}$ ناحیه تقریب پلکانی بدست می‌آید. بنابراین، اگر دامنه‌های $A_{e,m}$ و $A_{o,m}$ را برای مودهای زوج و فرد در هر مرحله تعیین کنیم، می‌توان پدیده‌های تزویج نوری را در کل ناحیه کوپلینگ ارزیابی کرد.

اساساً، دامنه و ضرایب انتقال فاز از موقعیت اولیه m امین گام ($z = z_m$) تا ($m+1$) امین گام ($z = z_{m+1}$)، همانطور که در شکل (۵.۸) نشان داده شده، باید محاسبه شود. شرایط بیوستگی در $z = z_{m+1}$ برای میدان‌های الکترومغناطیسی روابط زیر را می‌دهد:

$$\begin{aligned} & A_{e,m}\phi_{e,m}(x)\exp(-j\alpha'_{e,m}) + A_{o,m}\phi_{o,m}(x)\exp(-j\alpha'_{o,m}) \\ & + B_{e,m}\phi_{e,m}(x)\exp(j\gamma_{e,m}) + B_{o,m}\phi_{o,m}(x)\exp(-j\gamma_{o,m}) \end{aligned} \quad (۶.۸)$$

$$= A_{e,m+1}\phi_{e,m+1}(x)\exp(-j\alpha_{e,m+1}) + A_{o,m+1}\phi_{o,m+1}(x)\exp(-j\alpha_{o,m+1})$$

$$\begin{aligned} & \beta_{e,m}A_{e,m}\phi_{e,m}(x)\exp(-j\alpha'_{e,m}) + \beta_{o,m}A_{o,m}\phi_{o,m}(x)\exp(-j\alpha'_{o,m}) \\ & - \beta_{e,m}B_{e,m}\phi_{e,m}(x)\exp(j\gamma_{e,m}) - \beta_{o,m}B_{o,m}\phi_{o,m}(x)\exp(-j\gamma_{o,m}) \end{aligned} \quad (۷.۸)$$

$$= \beta_{e,m+1}A_{e,m+1}\phi_{e,m+1}(x)\exp(-j\alpha_{e,m+1})$$

$$+ \beta_{o,m+1}A_{o,m+1}\phi_{o,m+1}(x)\exp(-j\alpha_{o,m+1})$$

که در آن

$$\alpha_{e,m} = \beta_{e,m}(z_m + z_{in}) \quad (\bar{۸}.۸)$$

$$\alpha_{o,m} = \beta_{o,m}(z_m + z_{in}) \quad (\bar{۸}.۸)$$

$$\alpha'_{e,m} = \beta_{e,m}(z_{m+1} + z_{in}) = \alpha_{e,m} + \beta_{e,m}(z_{m+1} - z_{in}) \quad (\bar{۸}.۸)$$

$$\alpha'_{o,m} = \beta_{o,m}(z_{m+1} + z_{in}) = \alpha_{o,m} + \beta_{o,m}(z_{m+1} - z_{in}) \quad (\bar{۸}.۸)$$

ضمناً $B_{l,m}$ و $\gamma_{l,m}$ (یا o یا e) بترتیب دامنه و فاز موج بازناب هستند. هنگامی که انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda/\epsilon \times \beta_{e,m+1} - \Lambda/\epsilon] \phi_{e,m+1}^*(x) dx$$

بدست می‌آوریم:

$$B_{e,m} \exp(j\gamma_{e,m}) \approx \frac{\beta_{e,m} - \beta_{e,m+1}}{\beta_{e,m} + \beta_{e,m+1}} A_{e,m} \exp(-j\alpha'_{e,m}). \quad (۹.۸)$$

در اینجا از روابط متعامد و عادی‌سازی ^۳ زیر استفاده کردیم:

$$\frac{\beta_{p,m}}{\epsilon \omega \mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{p,m}(x) \phi_{q,m}^*(x) dx = \delta_{pq} \quad (p, q = e \text{ یا } o) \quad (\bar{۱۰}.۸)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{p,m}(x) \phi_{q,m+1}^*(x) dx \approx 0 \quad (p \neq q) \quad (\bar{۱۰}.۸)$$

^۳Normalization

معادله (۱۰.۸) تا زمانی که تغییر بین دو قطر کوپلر در $z = z_{m+1}$ به اندازه کافی کم باشد، یک تقریب خوب است. به همین ترتیب، انتگرال؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\lambda/6 \times \beta_{o,m+1} - \lambda/4] \phi_{o,m+1}^*(x) dx$$

میدهد:

$$B_{o,m} \exp(j\gamma_{o,m}) \approx \frac{\beta_{o,m} - \beta_{o,m+1}}{\beta_{o,m} + \beta_{o,m+1}} A_{o,m} \exp(-j\alpha'_{o,m}). \quad (11.8)$$

که در آن از معادله (۱۰.۸) استفاده شده است. جایگزینی معادله (۹.۸) و (۱۱.۸) در معادلات (۶.۸) و (۷.۸)، بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma\beta_{e,m}}{\beta_{e,m} + \beta_{e,m+1}} A_{e,m} \phi_{e,m}(x) \exp(-j\alpha'_{e,m}) + \frac{\gamma\beta_{o,m}}{\beta_{o,m} + \beta_{o,m+1}} A_{o,m} \phi_{o,m}(x) \exp(-j\alpha'_{o,m}) \\ &= A_{e,m+1} \phi_{e,m+1}(x) \exp(-j\alpha_{e,m+1}) + A_{o,m+1} \phi_{o,m+1}(x) \exp(-j\alpha_{o,m+1}) \end{aligned} \quad (12.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma\beta_{e,m}\beta_{e,m+1}}{\beta_{e,m} + \beta_{e,m+1}} A_{e,m} \phi_{e,m}(x) \exp(-j\alpha'_{e,m}) \\ &+ \frac{\gamma\beta_{o,m}\beta_{o,m+1}}{\beta_{o,m} + \beta_{o,m+1}} A_{o,m} \phi_{o,m}(x) \exp(-j\alpha'_{o,m}) \\ &= \beta_{e,m+1} A_{e,m+1} \phi_{e,m+1}(x) \exp(-j\alpha_{e,m+1}) \\ &+ \beta_{o,m+1} A_{o,m+1} \phi_{o,m+1}(x) \exp(-j\alpha_{o,m+1}) \end{aligned} \quad (13.8)$$

وقتی انتگرال بصورت زیر را بیشتر محاسبه می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\lambda/12 \times \beta_{e,m} + \lambda/13] \phi_{e,m+1}^*(x) dx$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A_{e,m+1} \exp(-j\alpha_{e,m+1}) &= \frac{\gamma\beta_{e,m}}{\beta_{e,m} + \beta_{e,m+1}} A_{e,m} \exp(-j\alpha'_{e,m}) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{e,m} \phi_{e,m+1}^* dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{e,m+1}|^2} \\ &+ \frac{\gamma\beta_{o,m}}{\beta_{e,m} + \beta_{e,m+1}} \frac{\beta_{e,m} + \beta_{o,m+1}}{\beta_{o,m} + \beta_{o,m+1}} A_{o,m} \exp(-j\alpha'_{o,m}) \\ &\times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{o,m} \phi_{e,m+1}^* dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{e,m+1}|^2} \end{aligned} \quad (14.8)$$

در معادله (۱۴.۸)، انتگرال همپوشانی بین مودهای زوج و فرد، بدون اینکه آن را به صفر تقریب دهیم، همانطور که در معادله (۱۰.۸) انجام شد، به دقت محاسبه می‌شود. به همین ترتیب، انتگرال بصورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\lambda/12 \times \beta_{o,m} + \lambda/13] \phi_{o,m+1}^*(x) dx$$

می‌دهد:

$$\begin{aligned}
 A_{o,m+1} \exp(-j\alpha_{o,m+1}) &= \frac{\gamma\beta_{e,m}}{\beta_{e,m} + \beta_{e,m+1}} \frac{\beta_{o,m} + \beta_{e,m+1}}{\beta_{o,m} + \beta_{o,m+1}} A_{e,m} \exp(-j\alpha'_{e,m}) \\
 &\times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{e,m} \phi_{o,m+1}^* dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{o,m+1}|^2} + \frac{\gamma\beta_{o,m}}{\beta_{o,m} + \beta_{o,m+1}} A_{o,m} \exp(-j\alpha'_{o,m}) \\
 &\times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{o,m} \phi_{e,m+1}^* dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{e,m+1}|^2}
 \end{aligned} \tag{۱۵.۸}$$

در اینجا یک پارامتر جدید به نام $c_{p,q}^{(m)}$ را معرفی می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 c_{p,q}^{(m)} &= \frac{\gamma\sqrt{\beta_{p,m}\beta_{q,m+1}}}{\beta_{p,m} + \beta_{p,m+1}} \frac{\beta_{q,m} + \beta_{p,m+1}}{\beta_{q,m} + \beta_{q,m+1}} \\
 &\times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{p,m} \phi_{q,m+1}^* dx}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{p,m}|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{q,m+1}|^2 dx \right]^{1/2}} \quad (p, q = e \text{ یا } o)
 \end{aligned} \tag{۱۶.۸}$$

در این صورت معادلات (۱۴.۸) و (۱۵.۸) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$A_{e,m+1} \exp(-j\alpha_{e,m+1}) = c_{e,e}^{(m)} A_{e,m} \exp(-j\alpha'_{e,m}) + c_{o,e}^{(m)} A_{o,m} \exp(-j\alpha'_{o,m}) \tag{۱۷.۸}$$

$$A_{o,m+1} \exp(-j\alpha_{o,m+1}) = c_{e,o}^{(m)} A_{e,m} \exp(-j\alpha'_{e,m}) + c_{o,o}^{(m)} A_{o,m} \exp(-j\alpha'_{o,m}) \tag{۱۸.۸}$$

از آنجا که $A_{p,m}$ و $c_{p,q}^{(m)}$ در آخرین دو معادله اعداد حقیقی هستند، مقادیر فاز $\alpha_{e,m+1}$ و $\alpha_{o,m+1}$ در گام $(m+1)$ امین داده خواهد شد:

$$\alpha_{e,m+1}) = \tan^{-1} \left[\frac{c_{e,e}^{(m)} A_{e,m} \sin(\alpha'_{e,m}) + c_{o,e}^{(m)} A_{o,m} \sin(\alpha'_{o,m})}{c_{e,e}^{(m)} A_{e,m} \cos(\alpha'_{e,m}) + c_{o,e}^{(m)} A_{o,m} \cos(\alpha'_{o,m})} \right] \tag{۱۹.۸}$$

$$\alpha_{o,m+1}) = \tan^{-1} \left[\frac{c_{e,o}^{(m)} A_{e,m} \sin(\alpha'_{e,m}) + c_{o,o}^{(m)} A_{o,m} \sin(\alpha'_{o,m})}{c_{e,o}^{(m)} A_{e,m} \cos(\alpha'_{e,m}) + c_{o,o}^{(m)} A_{o,m} \cos(\alpha'_{o,m})} \right] \tag{۲۰.۸}$$

در این صورت دامنه‌های گام $(m+1)$ امین بصورت زیر بیان می‌شود:

$$A_{e,m+1} = c_{e,e}^{(m)} A_{e,m} \cos(\alpha'_{e,m} - \alpha_{e,m+1}) + c_{o,e}^{(m)} A_{o,m} \cos(\alpha'_{o,m} - \alpha_{e,m+1}) \tag{۲۱.۸}$$

$$A_{o,m+1} = c_{e,o}^{(m)} A_{e,m} \cos(\alpha'_{e,m} - \alpha_{o,m+1}) + c_{o,o}^{(m)} A_{o,m} \cos(\alpha'_{o,m} - \alpha_{o,m+1}) \tag{۲۲.۸}$$

معادلات (۱۹.۸) – (۲۲.۸) روابط دامنه‌ها و فازها را بین دو موقعیت $z = z_{m+1}$ و $z = z_m$ در روش تقریب پلکانی نشان می‌دهد. با تکرار متوالی محاسبه، می‌توان پدیده‌های تزویج نور را در کل منطقه تزویج بررسی کرد.
دامنه و فازهای اولیه در $z = z_{m=0} = -z_{in}$ بصورت زیر بیان می‌شود:

$$E_{in}(x) \equiv E_{\circ}(x, -z_{in}) = A_{e,\circ}\phi_{e,\circ}(x) + A_{o,\circ}\phi_{o,\circ}(x) \quad (۲۳.۸)$$

$$\alpha_{e,\circ} = \alpha_{o,\circ} = \circ, \quad (۲۴.۸)$$

که در آن $E_{in}(x)$ نمانگ میدان الکتریکی را در $-z_{in}$ نشان می‌دهد. با اعمال رابطه تعامل معادله (۱۰.۸) در دو معادله آخر، $A_{e,\circ}$ و $A_{o,\circ}$ داده می‌شود؛

$$A_{e,\circ} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{in}(x)\phi_{e,\circ}^*(x)dx \quad (\bar{۲۵}.۸)$$

$$A_{o,\circ} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{in}(x)\phi_{o,\circ}^*(x)dx \quad (۲۵.۸)$$

توزیع میدان الکتریکی در ناحیه m امین پلکان ($z_m \leq z \leq z_{m+1}$) با استفاده از معادلات (۵.۸)، (۸.۸)، و (۲۵.۸) خواهد بود

$$E_m(x, z) = A_{e,m}\phi_{e,m}(x) \exp\{-j[\beta_{e,m}(z - z_m)|\alpha_{e,m}]\} + A_{o,m}\phi_{o,m}(x) \exp\{-j[\beta_{o,m}(z - z_m)|\alpha_{o,m}]\} \quad (۲۶.۸)$$

در بخش‌های بعدی، پدیده‌های انتشار نور در (الف) کوپلر تقسیم طول موج (WDM)^۴ و (ب) کوپلر پخش طول موج (WFC)^۵ با استفاده از روش تقریب پلکانی توضیح داده خواهد شد.

۳.۸ کوپلرهای مالتی پلکس تقسیم طول موج

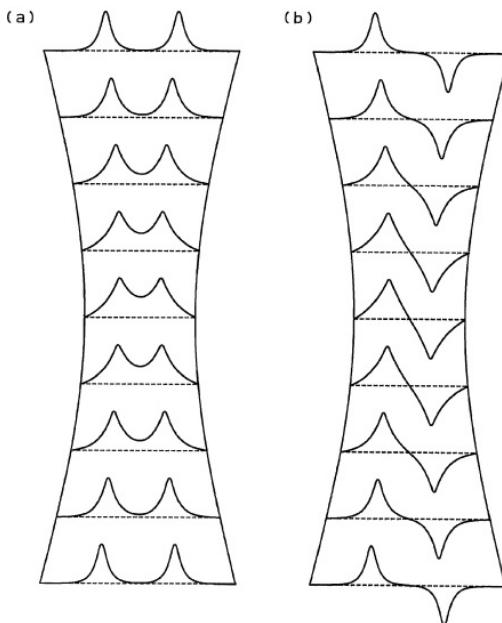
در کوپلر متقارن که از دو فیبر یکسان تشکیل شده است، انتقال نور صدد صد از هسته برانگیخته به هسته دیگر امکان پذیر است (به بخش ۲.۴ مراجعه کنید). در اینجا، اختلاف فاز تجمعی بین مودهای زوج و فرد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Theta = \int_{-z_{in}}^z [\beta_e(\zeta) - \beta_{\circ}(\zeta)]d\zeta \quad (۲۷.۸)$$

وقتی ساختار کوپلری داریم که برای نور با $\lambda = 1/3\mu m$ طول موج $\Theta(z_{out}) = 2\pi$ و $\Theta(z_{out}) = 1/55\mu m$ طول موج $\lambda = 1/55\mu m$ را بطور همزمان ارضاء می‌کند، می‌تواند به عنوان کوپلر WDM عمل کند [۶]. شکل (۶.۸) پیشرفت شکل‌های میدان الکتریکی مودهای زوج و فرد را نشان می‌دهد زمانی که نور به هسته سمت چپ یک کوپلر WDM با پارامترهای $\eta = ۰/۶$ ، $\tau = ۰/۳۴$

^۴Wavelength Division Multiplexing (WDM)

^۵wavelength-flattened coupler (WFC)



شکل ۴.۸: پیشرفت شکل‌های میدان الکتریکی (الف) مودهای زوج و (ب) مودهای فرد در کوپلر WDM.

و $z = 22.25\text{mm}$ کوپل می‌شود. همانطور که در بخش ۳.۴.۴ نشان داده شده است، هنگامی که نور فقط به یکی از دو هسته کوپل می‌شود، روابط زیر را داریم

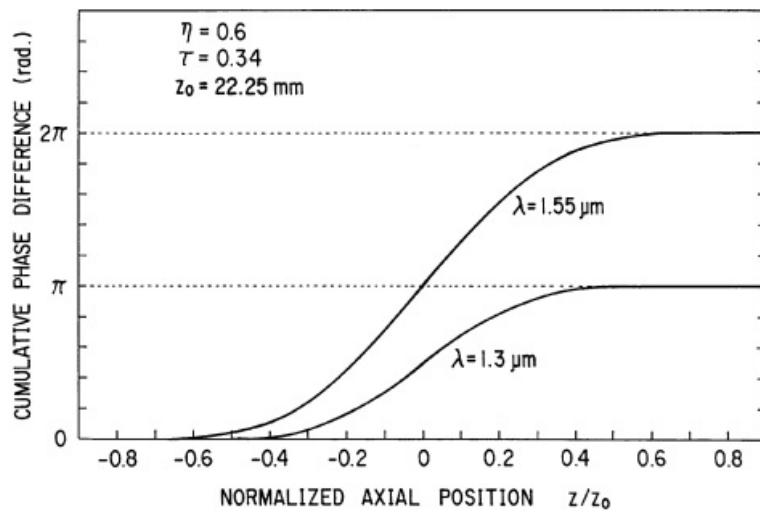
$$E_{in}(x) = C \cdot [\phi_{e,\circ}(x) + \phi_{o,\circ}(x)], \quad (28.8)$$

$$A_{e,\circ} = A_{o,\circ} = C. \quad (29.8)$$

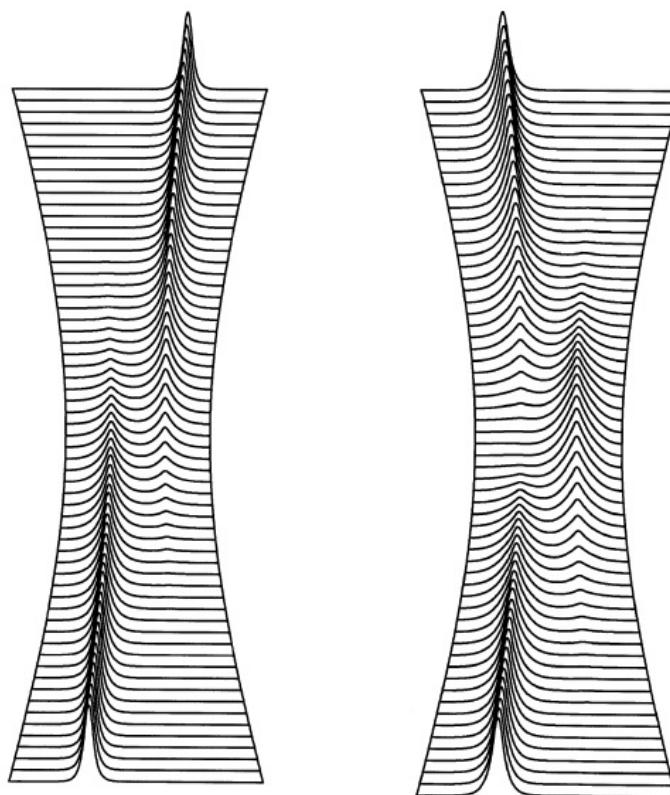
تایید شده است که مودهای زوج و فرد در موقعیت ورودی به یک اندازه برانگیخته می‌شوند. از آنجایی که مودهای زوج و فرد در کوپلر متقاضن همیشه متعامد با یکدیگر هستند، تزویج مود صورت نمی‌گیرد و انتقال توان بین دو موجبر توسط اثر تداخل بین مودهای زوج و فرد انجام می‌شود. اختلاف فاز تجمعی در یک کوپلر WDM با $\tau = 0.34$ و $\eta = 0.6$ در شکل (۲۹.۸) نشان داده شده است. تایید شده است که شرط WDM برای هر دو طول موج $\lambda = 1.3\mu\text{m}$ و $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ به طور همزمان برآورده می‌شود. شکل (۲۹.۸) و (۲۸.۸) نشان داده شده است.

۴.۸ کوپلر پخش طول موج

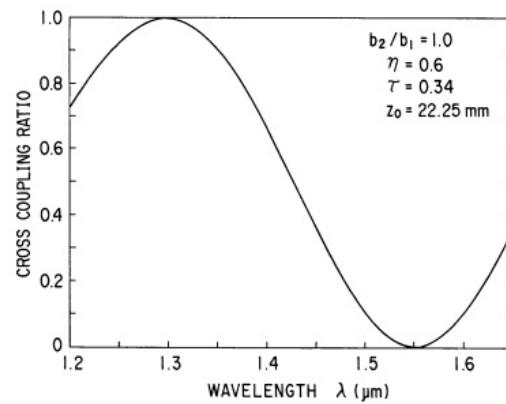
شکل (۱۰.۸) تغییرات مودهای زوج و فرد را در یک کوپلر نامتقارن متشكل با $b_1 = 2.189\text{mm}$ و $b_2 = 1.15\mu\text{m}$ ($b_2/b_1 = 0.92$) نشان می‌دهد.



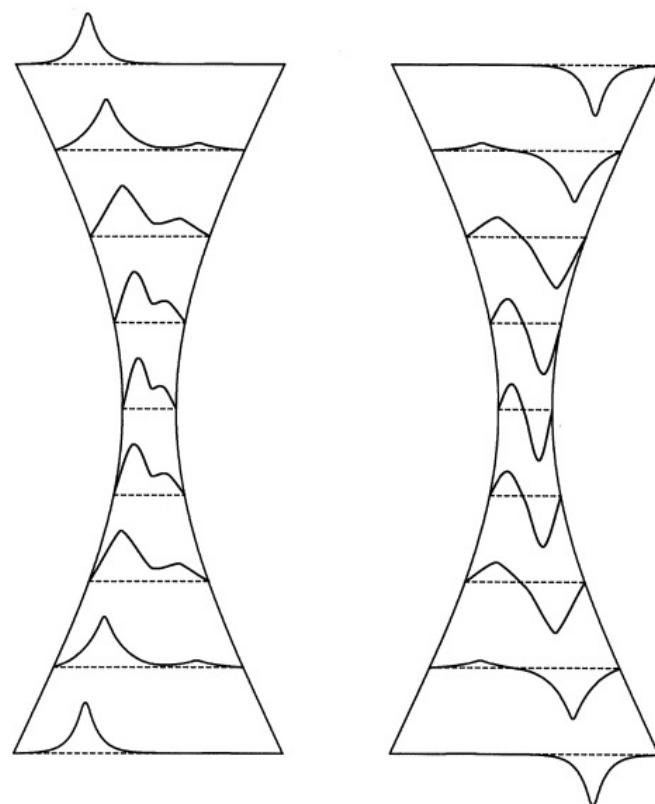
شکل ۷.۸: اختلاف فاز تجمعی در یک کوپلر WDM.



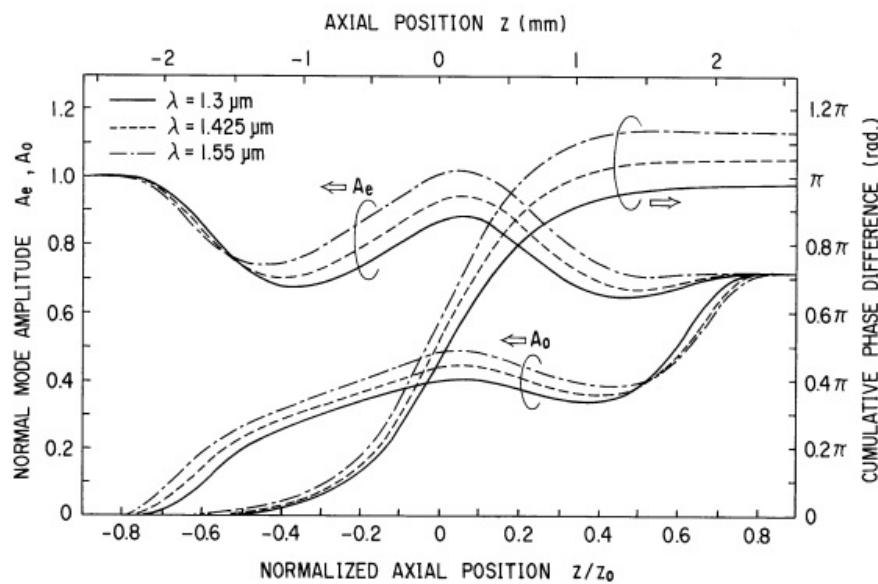
شکل ۸.۸: شکل موج شدت نور در یک کوپلر WDM برای (الف) طول موج $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ (ب) طول موج $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$



شکل ۹.۸: وابستگی نسبت تزویج به طول موج در یک کوپلر WDM



شکل ۱۰.۸: مودهای (الف): زوج (ب): فرد در یک کوپلر نامتقارن



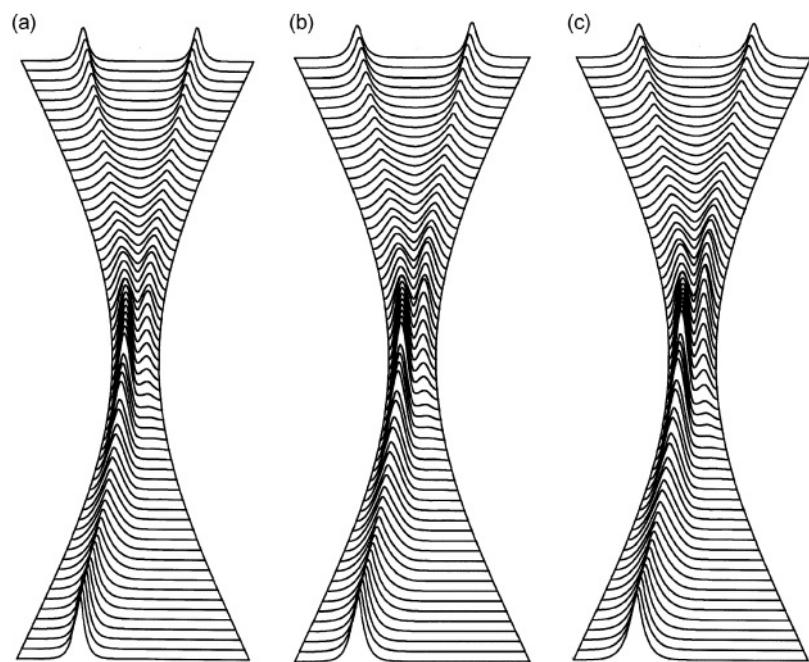
شکل ۱۱.۸: ضرایب دامنه A_e و A_o برای مودهای زوج و فرد و اختلاف فاز تجمعی θ

لازم به ذکر است که مود زوج و فرد در یکی از دو هسته در کوپلر نامتقارن زمانی که دو هسته به اندازه کافی از یکدیگر فاصله دارند، جایگزین می‌شوند. بنابراین، هنگامی که نور به هسته سمت چپ متصل می‌شود، فقط مود زوج تحریک می‌شود. برای به دست آوردن نسبت تزویج سه دسی‌بل در کوپلر نامتقارن، کوپلینگ مود مناسب باید از مود برانگیخته (زوج) به مود دیگر (فرد) انجام شود. ضرایب دامنه A_e, A_o برای مودهای زوج و فرد و اختلاف فاز تجمعی در کوپلر نامتقارن که متشکل است با $b_2/b_1 = 0.92, \tau = 0.962, \eta = 0.962$ در شکل (۱۱.۸) نشان داده شده است. تایید شده است که ضرایب دامنه در انتهای خروجی برابر با:

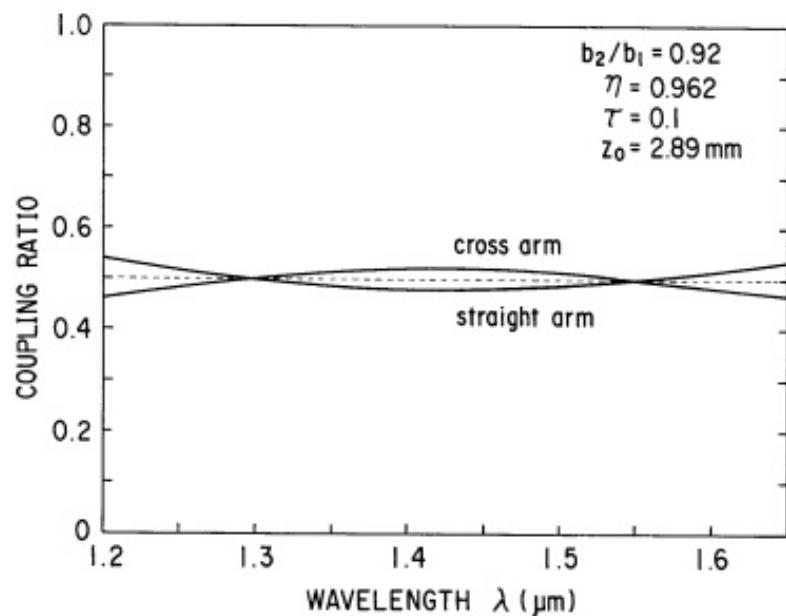
$$A_e \approx A_o \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۳۰.۸)$$

برای هر طول موج $\lambda = 1.425\mu m$, $\lambda = 1.55\mu m$, $\lambda = 1.3\mu m$ و $\lambda = 1.425\mu m$ است، و بنابراین نسبت تزویج سه دسی‌بل حساس به طول موج به دست می‌آید. شکل‌های (۱۲.۸) و (۱۳.۸) گذراهای شدت نور و وابستگی‌های طول موج نسبت‌های تزویج در کوپلر پخش طول موج را نشان می‌دهند [۸، ۷].

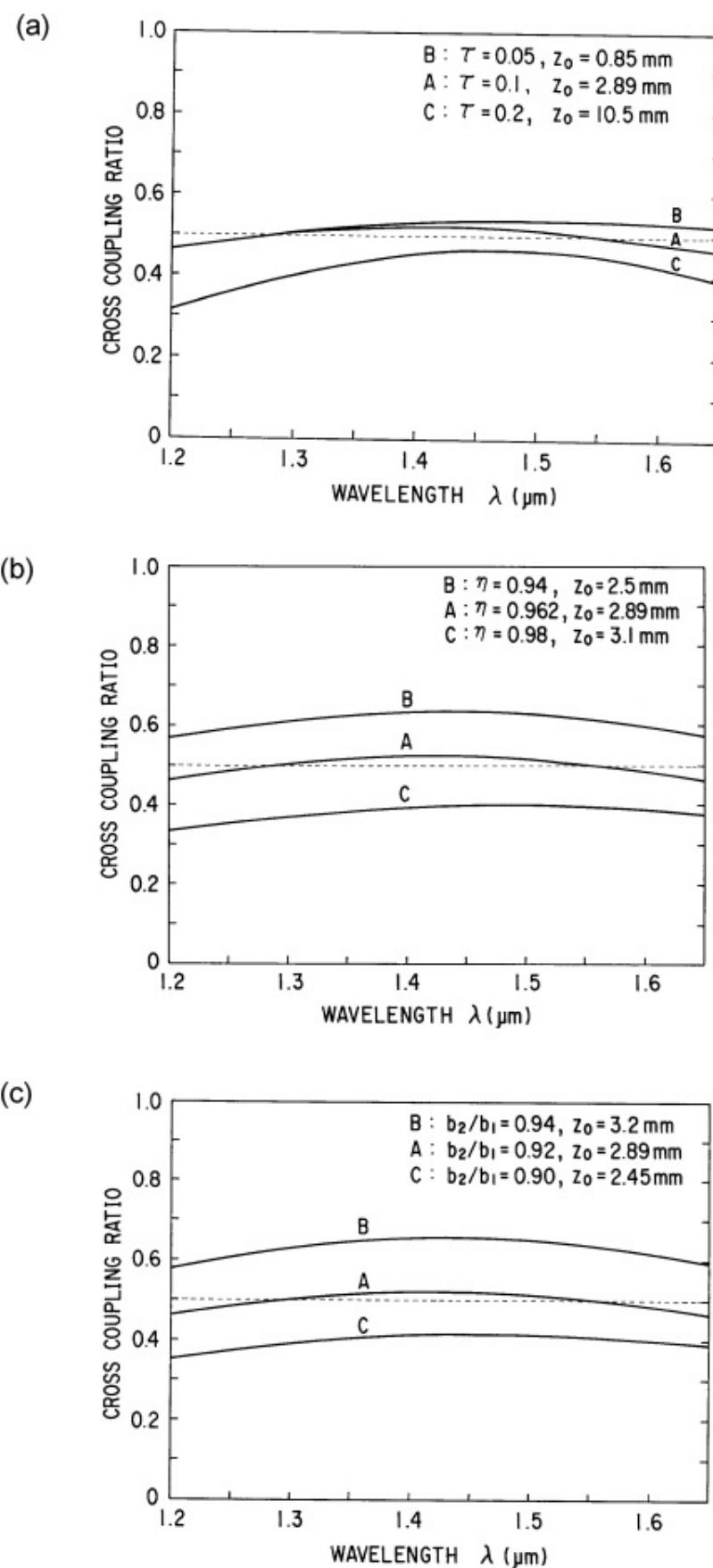
بعداً تأثیر چندین پارامتر کوپلر را بررسی خواهیم کرد: (الف) نسبت مخروطی τ , (ب) درجه هم‌جوشی η و (ج) عدم تقارن قطر خارجی b_2/b_1 بر نسبت تزویج کوپلرهای پخش با طول موج. شکل (۱۴.۸) تأثیرات (الف) نسبت مخروطی τ , (ب) درجه هم‌جوشی η و (ج) عدم تقارن قطر بیرونی b_2/b_1 را بر حسب نسبت تزویج کوپلرهای پخش طول موج نشان می‌دهد. در شکل (۱۴.۸)-الف، طول مخروطی z برای هر کدام زمانی که $b_2/b_1 = 0.92$ و $\eta = 0.962$ ثابت شده است. به طور مشابه، و



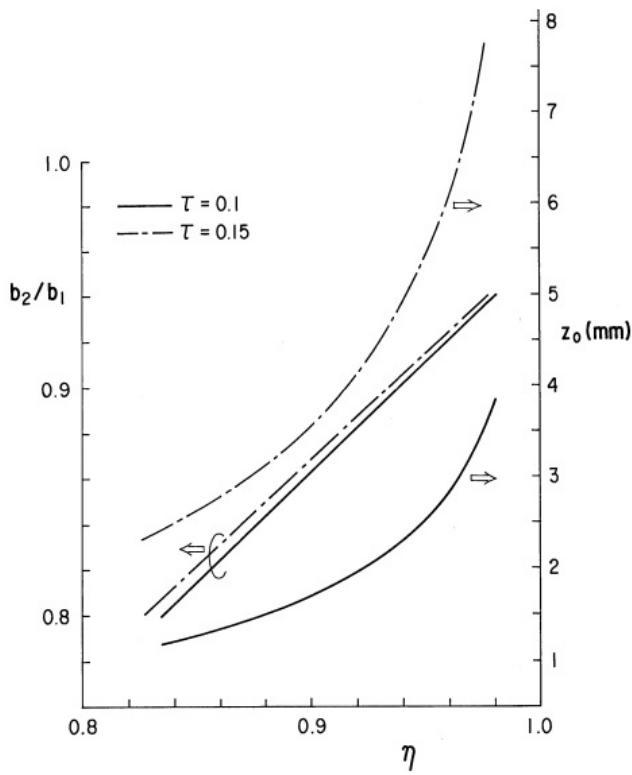
شکل ۱۲.۸: گذراهای شدت نور (الف) : (ج) $\lambda = 1.55\mu m$: (ب) $\lambda = 1.425\mu m$: $\lambda = 1.3\mu m$



شکل ۱۳.۸: وابستگی نسبت توزیع به طول موج برای کوپلر پخش طول موج



شکل ۱۴.۸: تأثیرات (الف) نسبت مخروطی، (ب) درجه همگوشی، و (ج) عدم تقارن قطر بیرونی بر نسبت تزویج کوپلر پخش با طول موج.



شکل ۱۵.۸: روابط بین b_2/b_1 و τ و z_0 هنگامی که نسبت مخروطی در $\tau = 0.1$ و $\tau = 0.15$ ثابت است.

در شکل (۱۴.۸)-ب و τ و z_0 در شکل (۱۴.۸)-ج ثابت شده‌اند. از شکل (۱۴.۸)-الف مشاهده می‌شود که طول مخروطی z_0 زمانی که نسبت مخروطی کوچکتر (بزرگتر) از $1/1$ باشد، بسیار کوتاه (طولانی) می‌شود. هنگامی که طول مخروطی بسیار کوتاه است، افت عبوری افزایش می‌یابد، زیرا عرض ناحیه کوپلینگ به سرعت تغییر می‌کند. در مقابل، اگر طول مخروطی بسیار طولانی باشد، کوپلر به دلیل طول دستگاه زیاد غیر عملی می‌شود. بنابراین مشخص است که نسبت مخروطی در حدود $\tau = 0.1$ مقدار ارجح است. از شکل (۱۴.۸)-ب، مشاهده می‌شود که نسبت کوپلینگ برای τ کوچک (کوپلر با ذوب محکم) بزرگ می‌شود. در مقابل، نسبت کوپلینگ برای بزرگ (کوپلر با ذوب کمی) کوچک می‌شود. از شکل (۱۴.۸)-ج، مشاهده می‌شود که نسبت تزویج کوچکتر (بزرگتر) می‌شود زمانی که b_2/b_1 کوچک (بزرگ) باشد. گرفتن نتایج شکل (۱۴.۸)-الف، (ب)، و (ج) را در نظر بگیرید، مشاهده می‌شود که چندین گزینه ممکن از پارامترهای تزویج برای کوپلرهای پخش طول موج وجود دارد. شکل (۱۵.۸) روابط بین b_2/b_1 و z_0 نشان می‌دهد که نسبت مخروطی τ در 0.1 و 0.15 ثابت است [۱۵.۸]. ویژگی‌های پخش طول موج مشابه شکل (۱۳.۸) با هر ترکیب پارامتر b_2/b_1 و z_0 قابل دستیابی است.

كتاب نامه

- [1] Kawasaki, B. S., K. O. Hill, and R. G. Lamont. 1981. Biconical-taper single-mode fiber coupler. *Opt. Lett.* 6:327–328.
- [2] Yokohama, I., K. Okamoto, M. Kawachi, and J. Noda. 1984. Polarizing fiber coupler with high extinction ratio. *Electron. Lett.* 20:1004–1005.
- [3] Yokohama, I., J. Noda, and K. Okamoto. 1987. Fiber-coupler fabrication with automatic fusionelongation process for low excess loss and high coupling-ratio accuracy. *IEEE J. Lightwave Tech.* LT-5:910–915.
- [4] Burns, W. K., and A. F. Milton. 1975. Mode conversion in planar-dielectric separating waveguides. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-11:32–39.
- [5] Wright, J. V. 1985. Variational analysis of fused tapered couplers. *Electron. Lett.* 21:1064–1065.
- [6] Lawson, C. M., P. M. Kopera, T. Y. Hsu, and V. J. Tekippe. 1984. In-line single-mode wavelength division multiplexer/demultiplexer. *Electron. Lett.* 20:963–964.
- [7] Mortimore, D. B. 1985. Wavelength-flattened fused couplers. *Electron. Lett.* 21:742–743.
- [8] Okamoto, K. 1990. Theoretical investigation of light coupling phenomena in wavelengthflattened couplers. *IEEE J. Lightwave Tech.* LT-8:678–683.

فصل ۹

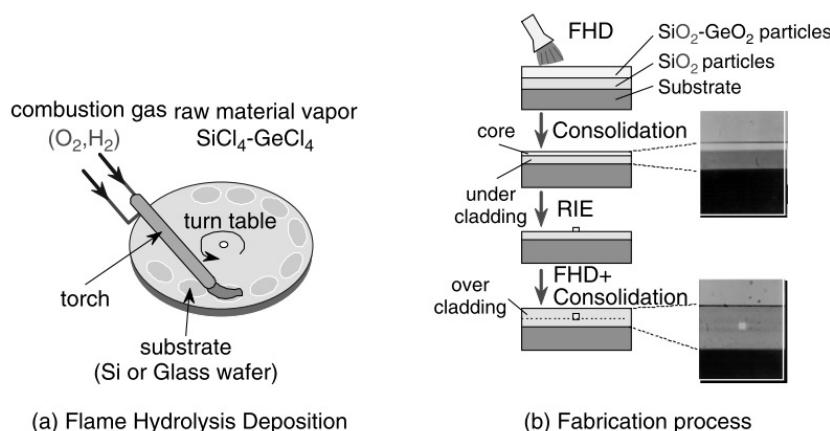
مدارات موج نوری مسطح

ارتقاء شبکه‌های مخابراتی برای افزایش ظرفیت آنها به دلیل افزایش سریع ترافیک شبکه ناشی از ارتباطات چند رسانه‌ای اهمیت فزاینده‌ای پیدا می‌کند. اگرچه فناوری‌های نوری جایگزین اکثر خطوط انتقال شده‌اند، گره‌های شبکه‌ها، مانند گره‌های سوئیچینگ و اتصال متقابل، همچنان به فناوری‌های الکتریکی نسبتاً کند وابسته هستند. این یک مشکل جدی خواهد بود زیرا گره‌ها در شبکه‌ها به دلیل محدودیت‌های مدارهای الکتریکی، توان عملیاتی را در سراسر شبکه محدود می‌کنند. بنابراین، نوری کردن گره‌ها برای حل این مسائل مهم است. این نیاز به مالتی‌پلکس و دی‌مولتی‌پلکس (mux/demux) از طریق فناوری‌های نوری دارد. سیستم‌های مالتی‌پلکس تقسیم زمانی یا ^۱TDM^۲، سیستم‌هایی که به‌طور گسترده در سیستم‌های ارتباطات نوری موجود استفاده می‌شوند، ذاتاً به مدارهای الکتریکی برای مالتی‌پلکس و دی‌مالتی‌پلکس وابسته هستند. گره‌ها در سیستم‌های TDM از تبدیل نوری-الکتریکی، دمولتی- و مالتی‌پلکس الکتریکی و تبدیل الکتریکی-اپتیکی استفاده می‌کنند. این بدان معنی است که توان عملیاتی گره توسط سرعت پردازش در مدارهای الکتریکی محدود می‌شود. از سوی دیگر، فناوری‌های مالتی‌پلکس تقسیم طول موج یا WDM، چند و چند گانه نوری را فعال می‌کنند، زیرا سیگنال‌های منفرد دارای طول موج‌های نوری متفاوتی هستند و می‌توانند به راحتی توسط عناصر نوری انتخابی طول موج جدا شوند. این ممکن است ما را قادر سازد شبکه‌های WDM بسازیم که در آن عملکرد گره توسط فناوری‌های نوری بدون mux/demux الکتریکی پشتیبانی می‌شود.

بارزترین ویژگی موجبرهای سیلیسی ساختار موجبر ساده و کاملاً مشخص است [۱]. این به‌ما امکان می‌دهد دستگاه‌های تداخل چند پرتو یا چند مرحله‌ای، مانند شبکه‌های موجبر آرایه‌ای و اکولایزرهای پاشندگی قابل برنامه‌ریزی شبکه‌ای بسازیم. انواع مدارهای موج نوری مسطح (PLC)^۲ غیرفعال مانند کوپله‌های ستاره‌ای $N \times N$ ، مالتی‌پلکس‌های شبکه‌ای موجبر آرایه‌ای $N \times N$ و سوئیچ‌های ماتریس نوری حرارتی توسعه یافته‌اند [۲].

^۱Time-Division Multiplexing (TDM)

^۲Planar Lightwave Circuits



شکل ۱.۹: فناوری ساخت موجبر مسطح

[۳]. اپتوالکترونیک مجتمع هایبریدی مبتنی بر فناوری های سکوی سیلیکونی تراس دار [۴] هم برای کاربردهای فیبر به خانه (FTTH) [۵] و هم برای دستگاه های پردازش سیگنال با سرعت بالا مهم هستند [۶، ۷]. تئوری سنتز فیلترهای نوری قابل برنامه ریزی به شکل شبکه توسعه یافته است [۸] و برای ساخت اکولایزرها پاشندگی تاخیر گروهی متغیر پیاده سازی شده است [۹].

در این فصل، انواع دستگاه های مدار موج نور مسطح (PLC) برای سیستم های WDM نوری و شبکه های مشترک [۱۰] توضیح داده می شوند.

۱.۹ ساخت موجبر

مدارهای موج نوری مسطح با استفاده از موجبرهای نوری مبتنی بر سیلیسیس بر روی بستر سیلیکونی یا سیلیسی با ترکیبی از رسوب هیدرولیز شعله (FHD) [۱۱] و حکاکی یون واکنشی (RIE) [۱۲] ساخته می شوند. شکل (۱.۹) فناوری ساخت موجبر مسطح را نشان می دهد. ذرات ریز شیشه در شعله اکسی-هیدروژن ^{۱۳} تولید شده و بر روی لایه ها رسوب می کنند. پس از رسوب لایه های زیرین و شیشه ای هسته، ویفر برای یکپارچه شدن تا دمای بالا گرم می شود. الگوی مدار توسط فوتولیتوگرافی و حکاکی یون واکنشی ساخته می شود. سپس ساختارهای پشتیاهی ^{۱۴} هسته با یک لایه روکش پوشیده شده و مجدداً یکپارچه می شوند.

^{۱۱}Terraced-silicon platform technologies

^{۱۲}fiber-to-the-home (FTTH)

^{۱۳}Subscriber Networks

^{۱۴}Flame Hydrolysis Deposition

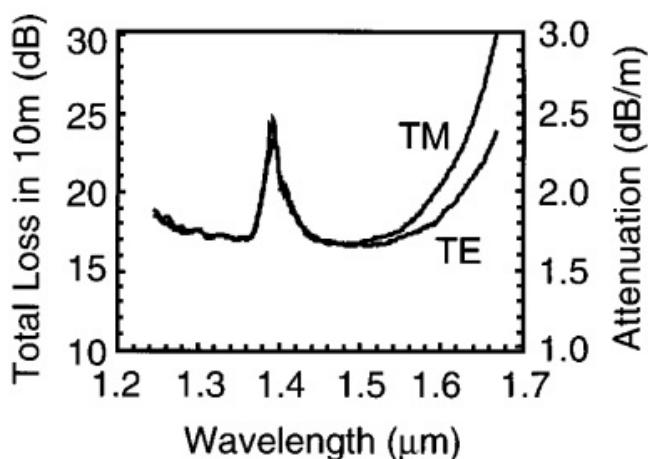
^{۱۵}Reactive Ion Etching

^{۱۶}Oxy-Hydrogen

^{۱۷}Ridge Structures

جدول ۱.۹: پارامترهای موجبر و ویژگی‌های انتشار چهار نوع موجبر.

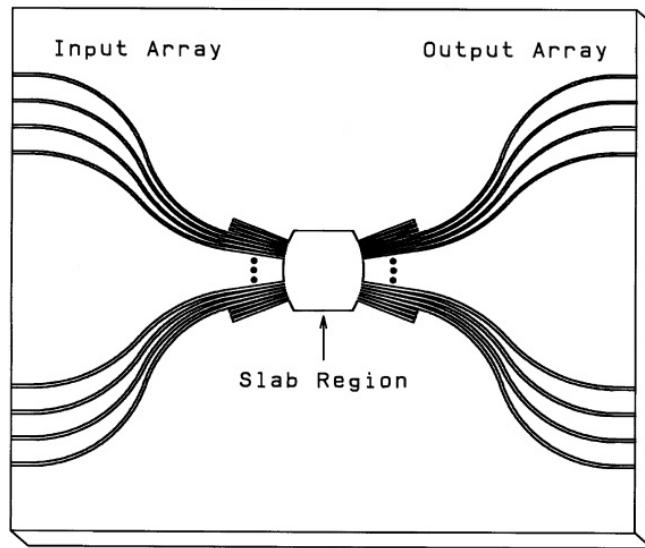
Δ خیلی بالا	Δ بالا	Δ متوسط	Δ کم	
$1/5 - 2$	$0/75$	$0/45$	$0/3$	اختلاف ضریب شکست (%)
$4/5 \times 4/5 - 3 \times 3$	6×6	7×7	8×8	اندازه هسته (μm)
$0/07$	$0/04$	$0/02$	$< 0/01$	افت (dB/cm)
$2/0$	$0/4$	$0/1$	$< 0/1$	افت تزویج ($dB/point$)
۲	۵	۱۵	۲۵	شعاع خمینش (mm)



شکل ۲.۹: طیف افت موجبری بطول ده متر

از آنجایی که شعاع خمینشی معمولی R موجبر سیلیسی حدود ۲-۲۵ میلی‌متر است، اندازه تراشه مدار مجتمع در مقیاس بزرگ چندین سانتی‌متر مربع می‌شود. بنابراین، کاهش تلفات انتشار و یکنواختی ضریب شکست و هندسه هسته در سراسر ویفر بهشدت مورد نیاز است. افت انتشار $0/1$ دسی‌بل بر سانتی‌متر در یک موجبر با طول ۲ متر با اختلاف ضریب شکست $R = 2$ (۰٪)، $\Delta = 2\%$ و افت $0/025$ دسی‌بل در سانتی‌متر در طول $1/6$ متر موجبر بلند با $\Delta = 0/75\%$ اختلاف ضریب شکست ($R = 5mm$) بهدست آمده است [۹]. کاهش تلفات بیشتر تا $0/017dB/cm$ (شکل ۲.۹) در یک موجبر 10 متری با اختلاف ضریب شکست $R = 15mm$ (۴۵٪) در صد دسی‌بل ($R = 15mm$) به دست آمده است [۱۰]. تلفات بیشتر برای مود TM (بردار میدان الکتریکی عمود بر صفحه موجبر است) ممکن است به دلیل ناهمواری دیواره موجبر ناشی از فرآیند حکاکی (اچینگ) RIE باشد. با این حال، تبدیل مود TE به مود TM یا بالعکس کمتر از 20 دسی‌بل در موجبرهای 10 متری انجام شده است.

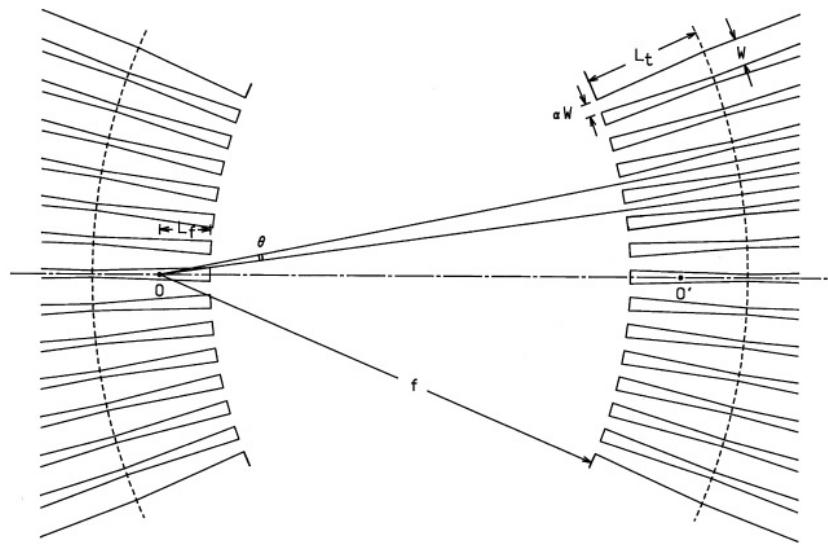
نوع مختلفی از موجبرها بسته به پیکربندی مدار استفاده می‌شود. جدول ۱.۹ پارامترهای موجبر و ویژگی‌های انتشار چهار نوع موجبر را خلاصه می‌کند. تلفات انتشار Δ کم و

شکل ۳.۹: پیکربندی نمای تزویج کننده‌های ستاره $N \times N$

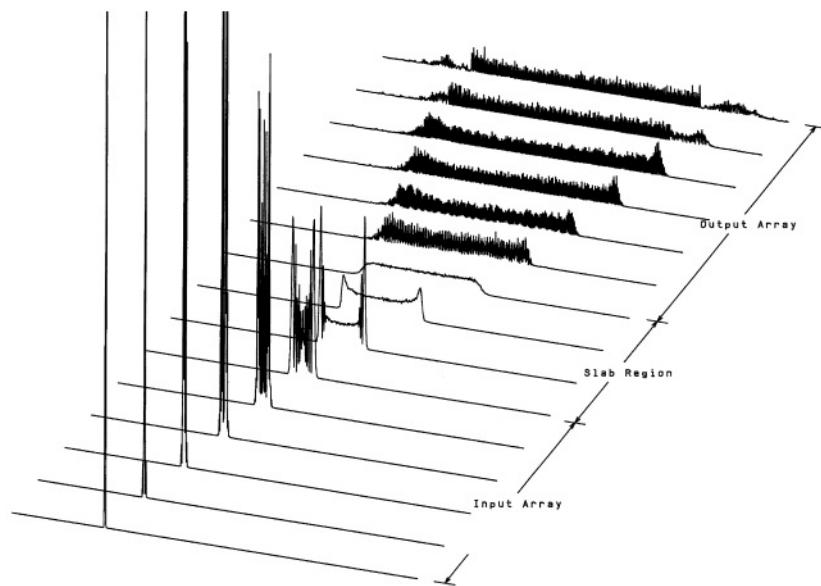
متوسط حدود $1\text{--}4\text{--}7\text{ دسی بل بر سانتی متر}$ و موجبرهای با Δ بالا و فوق بالا حدود $1\text{ دسی بل بر سانتی متر}$ است. موجبرهای Δ کم از نظر تلفات تزویجی فیبر با فیبرهای تک مودی استاندارد نسبت به موجبرهای با Δ بالا برتزی دارند. از سوی دیگر، حداقل شعاع خمشی برای موجبرهای با Δ بالا بسیار کوچکتر از موجبرهای کم Δ است. بنابراین، موجبرهای Δ بالا برای ساخت مدارهای نوری بسیار یکپارچه و در مقیاس بزرگ مانند تزویج کننده‌های ستاره $N \times N$ ، مالتی‌پلکسرهای شبکه‌ای موجبر آرایه‌ای و اکولایزرهای پاشندگی ضروری هستند.

۲.۹ کوپلر ستاره‌ای $N \times N$

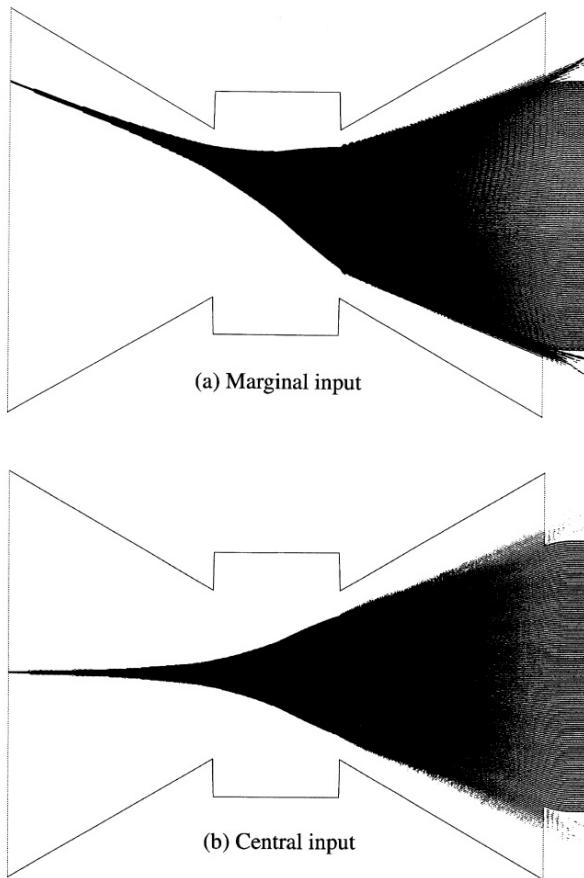
تزویج کننده‌های ستاره $N \times N$ در شبکه‌های نوری پرسرعت و با دسترسی چندگانه کاملاً مفید هستند، زیرا سیگنال ورودی را به طور مساوی بین گیرنده‌های زیادی توزیع می‌کنند و اتصال بین آنها را ممکن می‌سازند. تزویج کننده ستاره نوری یکپارچه از نوع فضای آزاد، که در آن یک ناحیه موجبر تیغه‌ای بین آرایه‌های موجبر کانال ورودی و خروجی پروانه‌ای شکل قرار دارد، برای ساخت تزویج کننده‌های ستاره $N \times N$ در مقیاس بزرگ کاملاً سودمند هستند [۱۱، ۱۲]. شکل (۳.۹) پیکربندی شماتیک کوپلر ستاره $N \times N$ را نشان می‌دهد. توان ورودی، از هر یک از موجبرهای کانال N در آرایه ورودی، به ناحیه تیغه‌ای (فضای آزاد) تابش و توسط آرایه خروجی دریافت می‌شود. برای بدست آوردن توزیع یکنواخت توان در N موجبر خروجی، الگوی تشبع در مرز مشترک تیغه-آرایه سمت خروجی باید روی یک بخش از N موجبر یکنواخت باشد. از آنجایی که الگوی تشبع، الگوی فراونهوفر (تبديل فوريه) شمای میدان در مرز مشترک تیغه سمت ورودی-آرایه است،



شکل ۴.۹: نمای بزرگ شده از ناحیه کوپلینگ مرکزی



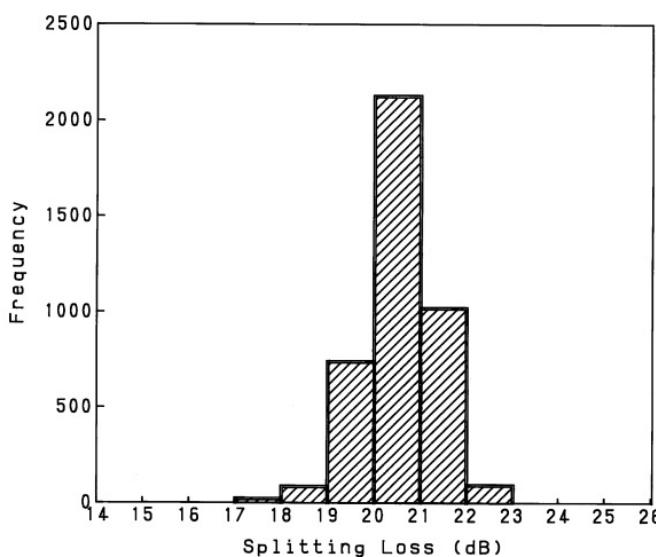
شکل ۵.۹: شکل موج گذرا با شدت نوری در طول موج $\lambda = 155\mu m$ در تزویج‌کننده ستاره‌ای 144×144 زمانی که نور به سمت چپ‌ترین موجبر تزویج می‌شود.



شکل ۶.۹: نمودارهای کانتور انتشار پرتو در تزویج‌کننده ستاره‌ای 144×144 بهینه‌شده زمانی که نور به (الف) حاشیه‌ای و (ب) موجبرهای ورودی مرکزی کوپل می‌شود.

لوب‌های جانبی مناسب باید توسط کوپلینگ مود از موجبر ورودی برانگیخته به همسایه هدایت تا الگوی میدان مستطیلی ایجاد شود. بنابراین، موجبرهای ساختگی برای هدایت حاشیه‌ای ضروری هستند تا شرایط کوپلینگ مشابه هدایت مرکزی را تضمین کنند. شکل (۶.۹) نمای بزرگ شده‌ای از ناحیه کوپلینگ مرکزی را نشان می‌دهد. عرض هسته W در نزدیکی ناحیه تیغه مخروطی شده است تا کوپلینگ مود را دقیقاً کنترل کند. پارامترهای تزویج کننده ستاره‌ای مانند زاویه دیافراگم θ ، شعاع ناحیه تیغه f ، طول مخروطی L_t ، فاصله فرورفتگی L_f و نسبت مخروطی α ، با استفاده از روش انتشار پرتو [۱۳] بهینه شدند تا حداکثر خروجی و یکنواختی تقسیم خوب به دست آید.

شکل (۶.۹) گذرهای شکل موج شدت نوری را در طول موج $m = 1,55\mu\text{m} = \lambda$ در تزویج‌کننده ستاره‌ای 144×144 زمانی که نور به سمت چپ ترین موجبر تزویج می‌شود نشان می‌دهد. بهوضوح نشان داده است که کوپلینگ چند مودی در آرایه ورودی صورت می‌گیرد و الگوی تابش یکنواخت بر روی یک بخش از موجبر خروجی N در مرز مشترک تیغه-آرایه سمت خروجی ایجاد می‌شود. شکل‌های (۶.۹)-(الف) و (ب) نمودارهای کانتور انتشار

شکل ۷.۹: نمودار افت تقسیم کوپلر 64×64 ستاره‌ای.

پرتو را در تزویج‌کننده ستاره‌ای 144×144 نشان می‌دهند، زمانی که نور به ترتیب به موجبر حاشیه‌ای و مرکزی تزویج می‌شود. مشخص است که تقسیم نور تقریباً مساوی مستقل از موقعیت ورودی نور قابل دستیابی است.

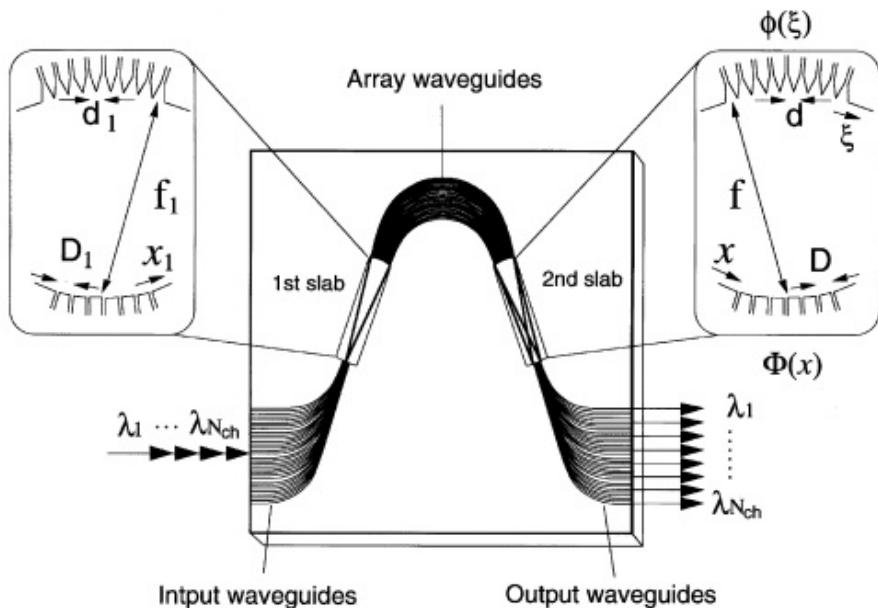
شکل (۷.۹) هیستوگرام تلفات شکاف کوپلر 64×64 ستاره را نشان می‌دهد که در طول موج $\lambda = 1,55\mu m$ اندازه گیری شده است [۱۴]. وقتی نور به طور مساوی در 64 موجبر خروجی توزیع می‌شود، اتفاق تقسیم اساسی $1/1$ دسی‌بل است. بنابراین، میانگین تلفات اضافی $2/5$ دسی‌بل و انحراف استاندارد تلفات تقسیم $0/8$ دسی‌بل است. در تلفات اضافی $2/5$ دسی‌بل، تلفات ناقص اجتناب ناپذیر (تئوری) حدود $1/5$ دسی‌بل، افت انتشار حدود $0/6$ دسی‌بل، و تلفات تزویج با فیبر تک مودی $0/2$ دسی‌بل در وجه $0/2 dB/facet$ است. انواع مختلفی از کوپلرهای ستاره‌ای، از 8×8 تا 256×256 ، ساخته شده است.

۳.۹ توری موجبر آرایه‌ای

۱.۳.۹ اصول عمکرد و ویژگی‌های بنیادی

یک مالتی پلکسر $N \times N$ توری موجبر آرایه‌ای (AWG)^{۱۰} در شبکه‌های نوری WDM بسیار جالب است زیرا قادر به افزایش ظرفیت انتقال مجموع فیبر نوری تک رشته‌ای است [۱۵، ۱۶]. AWG متشکل از موجبرهای ورودی/خروجی، دو ناحیه تیغه متمرکز و یک آرایه فازی از موجبرهای کانال چندگانه با اختلاف طول مسیر ΔL بین موجبرهای همسایه است (شکل ۸.۹). در ناحیه تیغه اول، جداسازی موجبر ورودی D_1 ، جداسازی موجبر آرایه‌ای d_1 و شعاع انحنای f_1 است. به طور کلی پارامترهای موجبر در نواحی تیغه

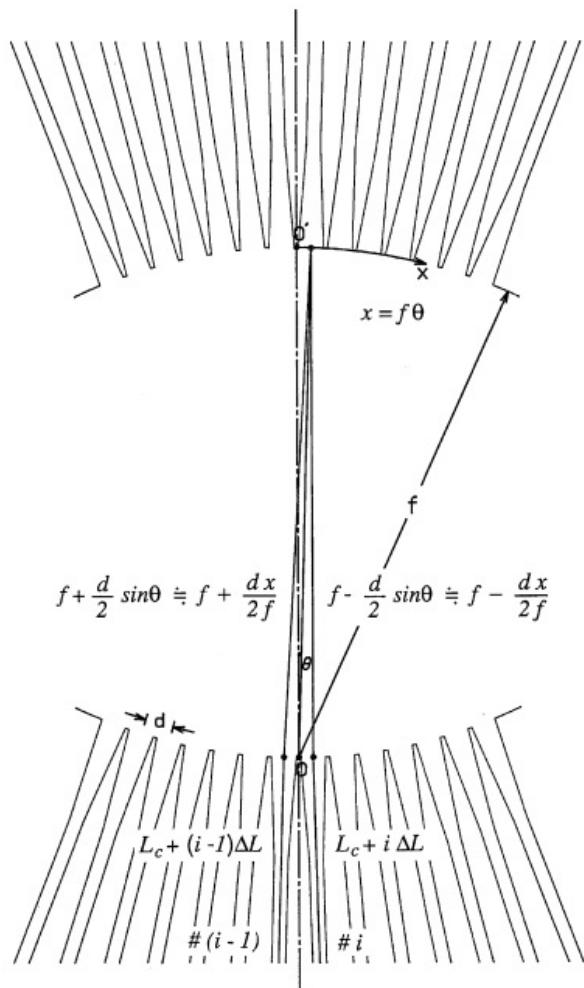
^{۱۰} Arrayed-Waveguide Grating (AWG)



شکل ۸.۹: پیکربندی شماتیک مولتیپلکس توری موجبر آرایه‌ای

اول و دوم ممکن است متفاوت باشد. بنابراین، در ناحیه تیغه دوم، جداسازی موجبر خروجی D ، جداسازی موجبر آرایه‌ای d و شعاع انحنا f است. ورودی نور در موقعیت x_1 در جهت خلاف جهت عقربه‌های ساعت از مرکز موجبر ورودی اندازه‌گیری می‌شود) به اولین تیغه تابیده می‌شود و سپس موجبرهای آرایه‌شده را تحریک می‌کند. دامنه میدان الکتریکی برانگیخته در هر موجبر آرایه $(a_i)_{i=1-N}$ است که در آن N تعداد کل موجبرهای آرایه است. نمای دامنه a_i معمولاً یک توزیع گوسی است. پس از حرکت از طریق موجبرهای آرایه‌شده، پرتوهای نور به طور سازنده در یک نقطه کانونی x تداخل می‌کند. (در جهت خلاف جهت عقربه‌های ساعت از مرکز موجبرهای خروجی) در تیغه دوم اندازه‌گیری می‌شود. مکان این نقطه کانونی به طول موج سیگنال بستگی دارد زیرا تاخیر فاز نسبی در هر موجبر توسط $\Delta L/\lambda$ داده می‌شود.

شکل (۹.۹) نمای بزرگ شده‌ای از ناحیه تیغه دوم را نشان می‌دهد. اجازه دهید عقب ماندگی فاز را برای دو پرتو نوری که از طریق موجبرهای آرایه $(1-i)$ و i عبور می‌کنند در نظر بگیریم. فواصل هندسی بین دو پرتو در ناحیه تیغه دوم به صورت تقریبی همانطور که در شکل (۹.۹) نشان داده شده است. در اولین ناحیه تیغه پیکربندی مشابه شکل (۹.۹) داریم. برای اینکه دو پرتو به طور سازنده در نقطه کانونی x تداخل ایجاد کند، تفاوت بین تاخیر فاز کل برای دو پرتو نوری که از طریق موجبرهای آرایه $(1-i)$ و i عبور می‌کنند باید مضرب صحیحی از 2π باشد. بنابراین شرایط تداخل را بصورت زیر بیان کنیم؛



شکل ۹.۹: نمای بزرگ شده ناحیه تیغه ثانوی

$$\begin{aligned} & \beta_s(\lambda_0) \left(f_1 - \frac{d_1 x_1}{f_1} \right) + \beta_c(\lambda_0) [L_c + (i-1)\Delta L] + \beta_s(\lambda_0) \left(f + \frac{dx}{f} \right) \\ &= \beta_s(\lambda_0) \left(f_1 + \frac{d_1 x_1}{f_1} \right) + \beta_c(\lambda_0) [L_c + i\Delta L] + \beta_s(\lambda_0) \left(f + \frac{dx}{f} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

که در آن β_s و β_c ثابت‌های انتشار ناحیه تیغه و آرایه موجبری است. m یک عدد صحیح، طول موج مرکزی دستگاه WDM و L_c حداقل طول آرایه موجبری است. با کم کردن جملات رایج معادله (۱.۹) خواهیم داشت:

$$\beta_s(\lambda_0) \frac{d_1 x_1}{f_1} - \beta_s(\lambda_0) \frac{dx}{f} + \beta_c(\lambda_0) \Delta L = 2m\pi \quad (2.9)$$

هنگامی که شرط $\beta_c(\lambda_0) \Delta L = 2m\pi$ یا

$$\lambda_0 = \frac{n_c \Delta L}{m} \quad (3.9)$$

برای λ برآورده می‌شود، موقعیت ورودی x_1 و موقعیت خروجی x باید در شرط زیر صدق کنند

$$\frac{d_1 x_1}{f_1} = \frac{dx}{f} \quad (4.9)$$

در معادله (۳.۹) n_c ضریب شکست مؤثر موجبر آرایه‌ای ($n_c = \beta_c/k$) و k عدد موج در خلاء و m مرتبه پراش نامیده می‌شود. معادله بالا بدین معنی است که وقتی نور به ورودی موقعیت ورودی x کوپل می‌شود، موقعیت خروجی x از رابطه (۴.۹) تعیین می‌شود. معمولاً پارامترهای موجبر در نواحی تیغه اول و دوم ($f_1 = f$ و $d_1 = d$) یکسان است. بنابراین فاصله ورودی و خروجی برابر ($x_1 = x$) است. پاشندگی موقعیت کانونی x نسبت به طول موج λ برای موقعیت ورودی نور ثابت x_1 با مشتق‌گیری معادله (۲.۹) نسبت به λ به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \lambda} = -\frac{N_c f \Delta L}{n_s d_1 \lambda_0} \quad (5.9)$$

که در آن n_s شاخص مؤثر در ناحیه تیغه است، N_c ضریب شکست گروهی از ضریب شکست مؤثر n_c از موجبر آرایه‌ای ($N_c = n_c - \lambda dn_c/d\lambda$) است. پاشندگی موقعیت x_1 سمت ورودی با توجه به طول موج λ برای موقعیت خروجی نور ثابت x توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \lambda} = \frac{N_c f_1 \Delta L}{n_s d_1 \lambda_0} \quad (6.9)$$

فاصله موجبر ورودی و خروجی به ترتیب $|D_1| = D$ و $|\Delta x_1| = D$ است، وقتی فاصله کانال سیگنال WDM برابر $\Delta\lambda$ باشد. با قرار دادن این روابط در معادلات (۵.۹) و (۶.۹) داده طول موج در سمت خروجی برای موقعیت ورودی نور ثابت x_1 توسط رابطه زیر داده می‌شود:

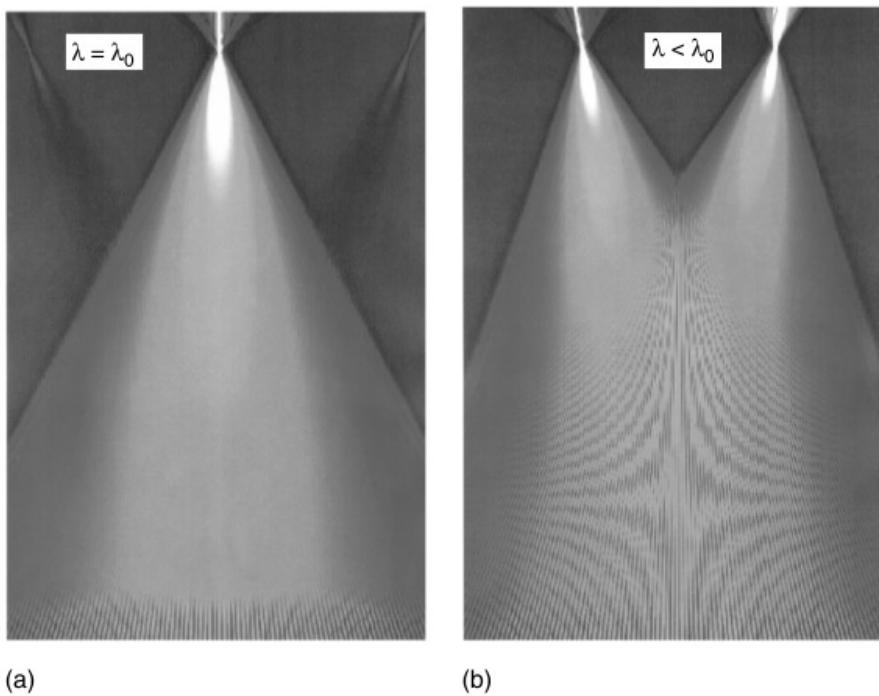
$$\Delta\lambda_{out} = \frac{n_s d D \lambda_0}{N_c f \Delta L} \quad (7.9)$$

و فاصله طول موج در سمت ورودی برای موقعیت خروجی نور ثابت x توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\Delta\lambda_{in} = \frac{n_s d_1 D \lambda_0}{N_c f_1 \Delta L} \quad (8.9)$$

به طور کلی پارامترهای موجبر در نواحی تیغه اول و دوم یکسان است. آنها عبارتند از $D_1 = D$, $d_1 = d$, $f_1 = f$. در این صورت فواصل کانال‌ها $\Delta\lambda_{in} = \Delta\lambda_{out} \equiv \Delta\lambda$ یکسان است. اختلاف طول مسیر ΔL از معادله (۷.۹) یا (۸.۹) به دست می‌آید.

$$\Delta L = \frac{n_s d D \lambda_0}{N_c f \Delta \lambda} \quad (9.9)$$



شکل ۱۰.۹: شبیه‌سازی BPM خواص تمرکز نور در ناحیه تیغه دوم برای (الف) طول موج مرکزی λ و (ب) مؤلفه طول موج کوتاه‌تر $\lambda < \lambda_0$.

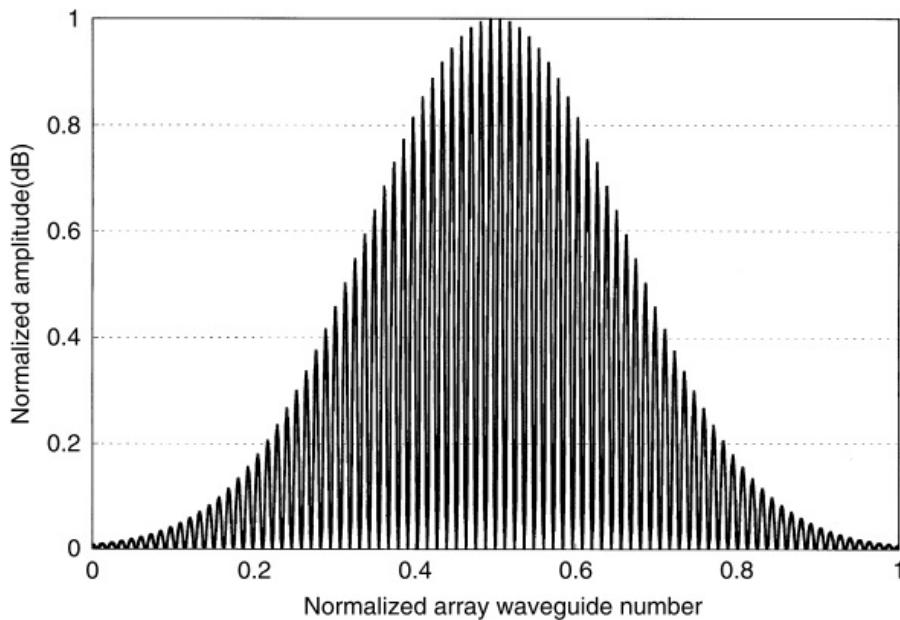
جداسازی فضایی $m + 1$ امین پرتوهای متمرکز برای همان طول موج از معادله (۲.۹) به دست می‌آید.

$$X_{FSR} = x_m - x_{m+1} = \frac{\lambda \cdot f}{n_s d} \quad (10.9)$$

که در آن X_{FSR} بازه فضایی آزاد AWG را نشان می‌دهد. تعداد کانال‌های طول موج موجود با تقسیم X_{FSR} بر جداسازی موجبر خروجی D به دست می‌آید.

$$N_{ch} = \frac{X_{FSR}}{D} = \frac{\lambda \cdot f}{n_s d D} \quad (11.9)$$

شکل‌های (۱۰.۹)-(الف) و (ب) شبیه‌سازی BPM خواص تمرکز نور در ناحیه تیغه دوم را برای (الف) طول موج مرکزی λ_0 و (ب) مؤلفه طول موج کوتاه‌تر $\lambda < \lambda_0$ نشان می‌دهند. برای مؤلفه سیگنالی که به پایانه خروجی خارج از مرکز همگرا می‌شود، همانطور که در شکل (۱۰.۹)-(ب)، پرتوهای پراش درجه بالاتر یا پایین‌تر ظاهر می‌شوند. از آنجایی که یکی از دو پرتو پراش در شکل (۱۰.۹)-(ب) معمولاً دور ریخته می‌شود، افت عبوری برای درگاه خروجی ۳ - ۲ دسی بل بیشتر از درگاه خروجی مرکزی می‌شود. نمایه میدان الکتریکی $\Phi(x)$ در صفحه خروجی AWG (شکل ۸.۹) مجموع الگوهای میدان دور ϕ_i ‌های از هر موجبر آرایه است. بنابراین، $\Phi(x)$ مجموع تبدیل فوریه مکانی

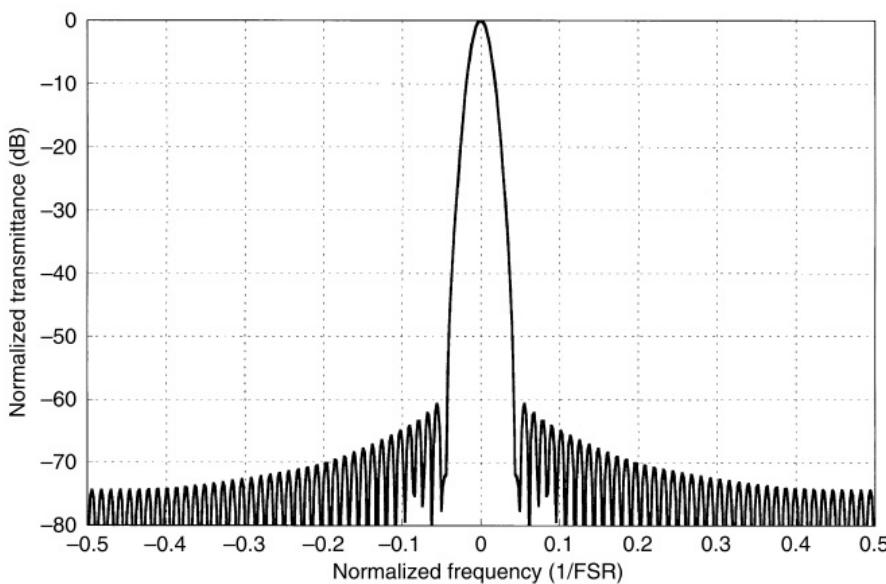


شکل ۱۱.۹: توزیع میدان الکتریکی در یک موجبر آرایه‌ای

های است. جمع و تبدیل فوریه را می‌توان در سیستم خطی مبادله کرد. در این صورت نشان داده می‌شود که نمایه میدان الکتریکی مت مرکز $\Phi(x)$ در خروجی تبدیل فوریه کل نمایه میدان الکتریکی $(\xi)\phi$ در مرز مشترک تیغه-آرایه است. شکل (۱۱.۹) به صورت شماتیک توزیع میدان الکتریکی را در موجبر آرایه نشان می‌دهد. محور افقی یک موجبر آرایه نرمال شده شماره $i/N(i = 1 - N)$ است که N نشان دهنده تعداد کل موجبرهای آرایه است. برای کمینه کردن تلفات جذب نور در موجبرهای آرایه، تعداد موجبرهای آرایه باید به اندازه کافی زیاد باشد. از آنجایی که میدان الکتریکی در موجبر آرایه همانطور که در شکل (۱۱.۹) نشان داده شده قطعه بندی شده است، یعنی میدان گوسی صاف نیست، میدان تبدیل شده فوریه در موقعیت کانونی دارای سطوح مشخصی از اجزای مکانی یا لوپ‌های جانبی بالاتر است که در شکل (۱۲.۹) نشان داده شده و پاسخ فرکانسی نرمالیزه AWG را نشان می‌دهد. چنین لوپ‌های جانبی باعث همشنوائی نظری در AWG می‌شوند. سطح توان همشنوائی نظری در AWG معمولی حدود $60 - 65$ دسیبل است. این بستگی به تعداد کanal AWG و همچنین طراحی موجبر دارد.

۲.۳.۹ رفتار تحلیلی خواص دی‌مالی‌پلکس AWG

میدان الکتریکی مت مرکز در فصل مشترک تیغه دوم و موجبر خروجی را می‌توان تقریباً به طور کامل به شکل تحلیلی بیان کرد. همانطور که در معادله (۵.۹) نشان داده شده است، موقعیت میدان الکتریکی مت مرکز متناسب با تغییر طول موج $\Delta\lambda$ حرکت می‌کند. در این صورت خاصیت دی‌مالی‌پلکس AWG توسط انتگرال همپوشانی میدان الکتریکی



شکل ۱۲.۹: پاسخ فرکانس نرمالیزه توری موجبر آرایه‌ای

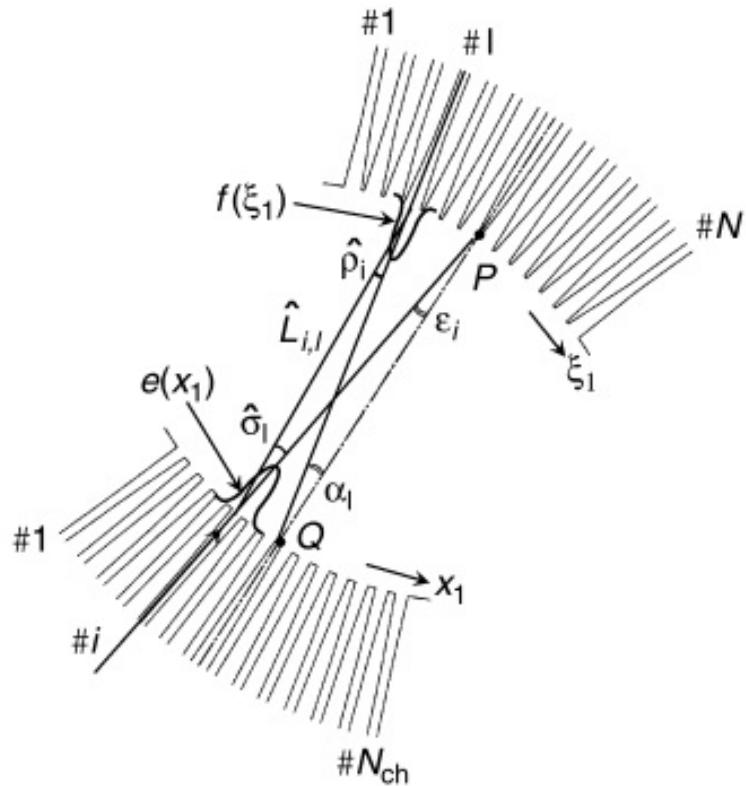
متمرکز با مود ویژه موجبر خروجی داده می‌شود.

در این بخش، رفتار تحلیلی خاصیت دی‌مولتی پلکسینگ AWG به تفصیل شرح داده شده است. شکل (۱۳.۹) هندسه موجبر را در ناحیه تیغه اول نشان می‌دهد. $e(x_1)$ توزیع میدان الکتریکی در سطح مشترک بین موجبر ورودی و تیغه اول است، جایی که x_1 نشان دهنده موقعیت هندسی روی مرز مشترک است. $(\phi_i)_f$ توزیع میدان الکتریکی در فصل مشترک بین تیغه اول و موجبرهای آرایه است، که در آن ϕ_i موقعیت هندسی روی سطح مشترک را نشان می‌دهد. $\hat{\phi}_i$ به ترتیب زوایای مرکز ورودی $\#Am$ و $\#WG$ آرایه WG هستند. $L_{i,l}$ فاصله از موجبر ورودی $\#Am$ تا موجبر آرایه $\#Am$ است.

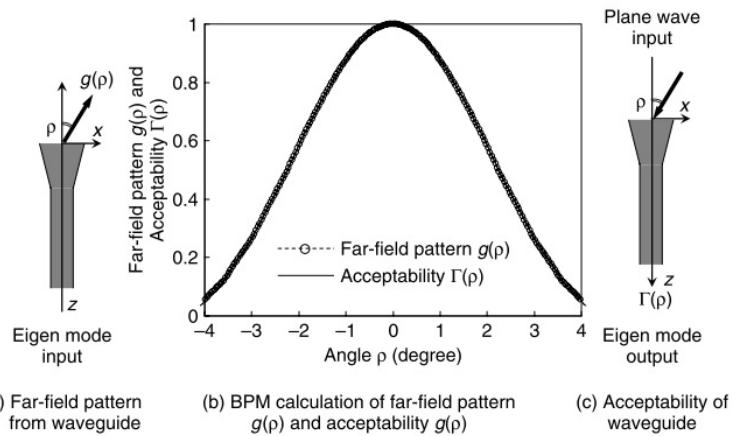
انتظار می‌رود که شبیه هم‌پاسخی دارکتیویتی در آنتن‌های انتقال و دریافت، مقبولیت موجبر همانند الگوی دورمیدان (FFP)^{۱۱} از موجبر باشد. شکل (۱۴.۹)-(الف) هندسه محاسبه FFP از موجبر را نشان می‌دهد. $g(\rho)$ از FFP از موجبر با تبدیل فوریه میدان الکتریکی در سطح انتهایی موجبر همانطور که در بخش ۳.۲ توضیح داده شد به دست می‌آید. در اینجا هندسه موجبر $m = 6\mu m$ ، $2a = 6\mu m$ ، $2d = 6\mu m$ و $\Delta = 75\%$ است. دایره‌های شکل (۱۴.۹)-(ب) FFP را از موجبر نسبت به زاویه تابش ρ نشان می‌دهند. مقبولیت موجبر در شبیه‌سازی عددی BPM با تزویج کردن موج مسطح به موجبر مخروطی همانطور که در شکل (۱۴.۹) نشان داده شده محاسبه می‌شود. از شکل (۱۴.۹)-(ب) تأیید شده است که قابل قبول بودن (ρ) موجبر دقیقاً با FFP از موجبر (ρ) مطابقت دارد.

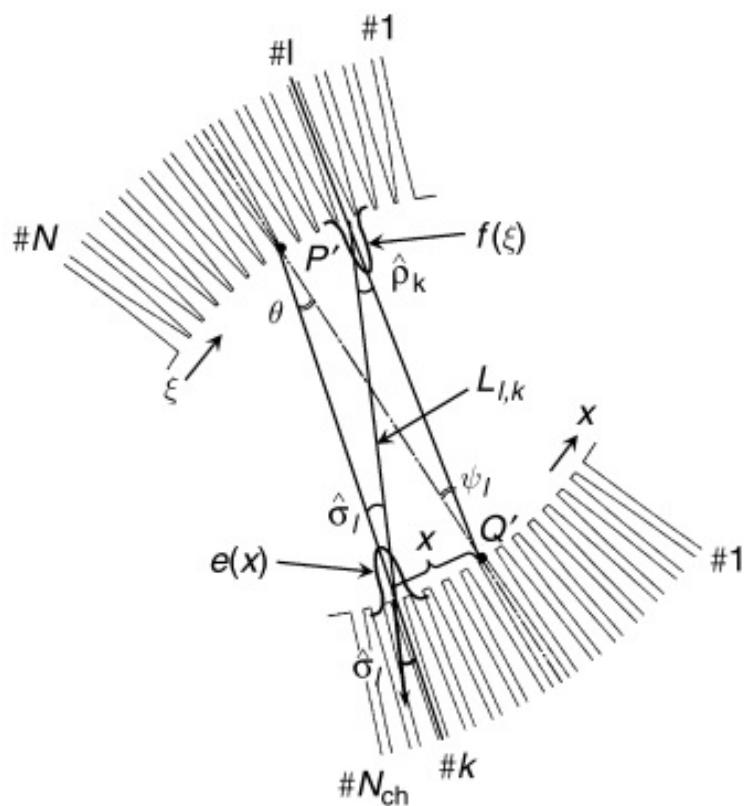
سپس، محاسبه می‌کنیم که چه مقدار دامنه میدان الکتریکی از موجبر ورودی به یک از موجبرهای آرایه در شکل (۱۳.۹) کوپل شده است. در اینجا FFP میدان الکتریکی

^{۱۱}FarField Pattern (FFP)



شکل ۱۳.۹: هندسه ناحیه تیغه اول

شکل ۱۴.۹: (الف) هندسه برای محاسبه FFP از FFP $g(\rho)$ موجبر. (ب) از $g(\rho)$ موجبر و قابل قبول بودن $\Gamma(\rho)$ موجبر با توجه به زاویه تابش. (ج) هندسه برای محاسبه مقبولیت $\Gamma(\rho)$ موجبر.



شکل ۱۵.۹: هندسه ناحیه تیغه دوم

(۱۵.۹) را بصورت $h(\hat{\sigma}_l)$ و میدان الکتریکی $f(\xi)$ را بصورت $g(\hat{\rho}_i)$ تعریف می‌کنیم. همانطور که در شکل (۱۴.۹)-(ب) توضیح داده شده است، الگوی میدان دور $g(\hat{\rho}_i)$ نشان دهنده قابلیت پذیرش دامنه برای میدان ورودی با زاویه $\hat{\rho}_i$ است. از آنجایی که دامنه تابش از موجبر ورودی شماره i به موجبر آرایه با $h(\hat{\sigma}_l)$ داده می‌شود، دامنه میدان الکتریکی که از موجبر ورودی به موجبر آرایه کوپل شده بصورت زیر بیان می‌شود

$$b(l) = h(\hat{\sigma}_l)g(\hat{\rho}_i) \exp\left(-j\beta_s \hat{L}_{i,l}\right) \quad (12.9)$$

شکل (۱۵.۹) هندسه موجبر را در ناحیه تیغه دوم نشان می‌دهد. $f(\xi)$ توزیع میدان الکتریکی در حد فاصل بین موجبر آرایه و تیغه دوم است، که در آن ξ نشان دهنده موقعیت هندسی روی مرز مشترک است. $e(x)$ توزیع میدان الکتریکی در مرز مشترک بین تیغه دوم و موجبر خروجی است، که در آن x موقعیت هندسی روی مرز مشترک را نشان می‌دهد. ρ_k و σ_l به ترتیب زوایای مرکز موجبر آرایه i -امین و خروجی موجبر آرایه‌ای

ام هستند. فاصله از موجبر آرایه‌ای $L_{l,k}$ تا k -امین خروجی WG است.

$$\begin{aligned} s(l) &= b(l) \exp[-j(N-l)\beta_c \Delta L] \\ &= h(\hat{\sigma}_l) g(\hat{\rho}_i) \exp\left\{-j\left[\beta_s \hat{L}_{i,l} + (N-l)\beta_c \Delta L\right]\right\} \end{aligned} \quad (13.9)$$

که در آن طول N -امین موجبر را برای راحتی صفر فرض می‌کنیم. ما FFP میدان الکتریکی (\mathbf{E}) را بصورت $f(\rho_k)$ و میدان الکتریکی $e(x)$ را بصورت $h(\sigma_l)$ تعريف می‌کنیم. بهروشی مشابه با ناحیه تیغه اول، قصد داریم با استفاده از FFP های $g(\rho_k)$ و $h(\sigma_l)$ مقدار دامنه میدان الکتریکی کوپل شده از موجبر آرایه‌ای به موجبر خروجی را محاسبه کنیم. با این حال، از آنجایی که میدان‌های تشعشعی متعدد در مرز مشترک تیغه دوم و موجبرهای خروجی همسنواری می‌کنند، نمی‌توانیم به سادگی از قابلیت پذیرش نور $h(\sigma_l)$ استفاده کنیم زیرا فاز میدان تابش را در نظر نمی‌گیرد. بنابراین، ابتدا میدان الکتریکی متمرکز را در فصل مشترک تیغه دوم و موجبرهای خروجی به دست می‌آوریم و بازده کوپلینگ با تزویج عددی میدان الکتریکی متمرکز به موجبر خروجی محاسبه می‌شود.

از آنجایی که دامنه تابش از موجبر آرایه‌ای z -ام تا خروجی k -امین موجبر آرایه‌ای با $g(\rho_k)$ داده می‌شود، میدان تابش در مرز مشترک دوم و موجبر خروجی با رابطه زیر داده می‌شود:

$$s(l)g(\rho_k) \cos(\sigma_l) \exp(-j\beta_s K_{l,k}) \quad (14.9)$$

که در آن $\cos(\sigma_l)$ ضرب می‌شود تا مؤلفه‌ای که نسبت به محور انتشار موجبر خروجی k -ام عمود است در نظر گرفته شود.

در این صورت میدان الکتریکی متمرکز در موقعیت x با استفاده از معادله (12.9) و (14.9) بدست می‌آید

$$E(x) = \sum_{l=1}^N c(l) \exp[-j\Omega(l)] \quad (15.9)$$

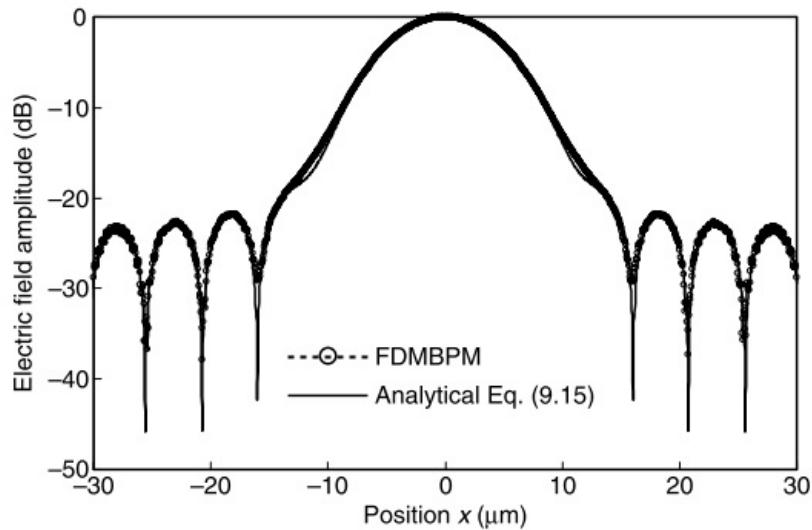
$$c(l) = h(\hat{\sigma}_l) g(\hat{\rho}_i) \cos(\sigma_l) \quad (15.9)$$

$$\Omega(l) = \beta_s \left(\hat{L}_{i,l} + L_{l,k} \right) + (N-l)\beta_x \Delta L. \quad (15.9)$$

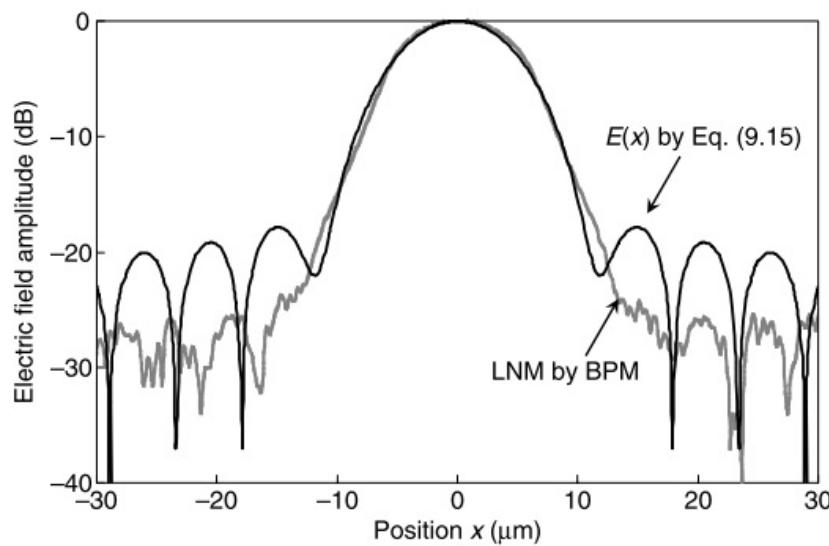
شکل (15.9) که با معادله $|E(x)|$ مقایسه می‌کند. فاصله نمونه برداری شبکه در روشن BPM برابر m و $\Delta x = 0.5\mu m$ و $\Delta z = 10\mu m$ است. تایید می‌شود که میدان الکتریکی تحلیلی داده شده توسط معادله (15.9)-الف به خوبی با BPM موافق است. تضاریس (رایپل) در میدان الکتریکی متمرکز در واقع نوسان سینوسی شکل است.

شکل (17.9) میدان الکتریکی $|E(x)|$ در صفحه خروجی را با مود معمولی محلی (LNM)^{۱۲} موجبر ورودی شکل (13.9) مقایسه می‌کند. مود معمولی محلی، میدان

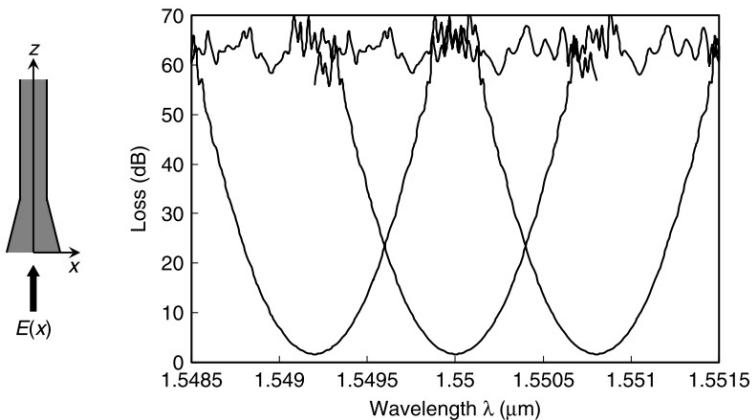
^{۱۲} Local Normal Mode (LNM)



شکل ۱۶.۹: میدان الکتریکی $|E(x)|$ که با معادله (۱۵.۹)-الف تحلیلی بدست آمده و میدان الکتریکی متمرکز که توسط FDMBPM محاسبه شده. فاصله نمونه برداری شبکه در روش BPM به ترتیب برابر $\Delta z = ۱\text{ }\mu\text{m}$ و $\Delta x = ۰.۵\text{ }\mu\text{m}$ است.



شکل ۱۷.۹: مقایسه میدان الکتریکی متمرکز $|E(x)|$ رو صفحه خروجی با مود معمولی محلی در موجبر ورودی



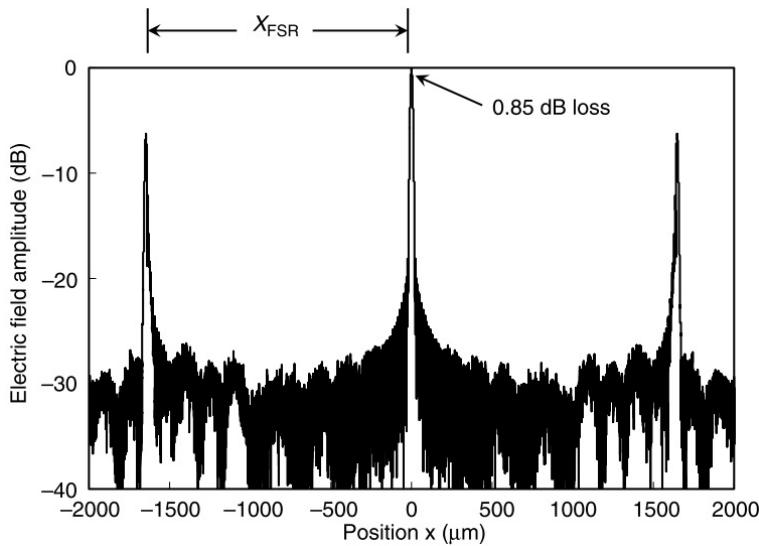
شکل ۱۸.۹: خواص دی‌مولتی‌پلکس نظری ۶۴ کanal AWG در فرکانس 100 GHz .

الکتریکی در سطح انتهایی موجبر مخروطی ورودی است. در اینجا تعداد کانال‌ها و فاصله کanal AWG به ترتیب $N_{ch} = 64$ و $\Delta\lambda = 0.8\text{ nm}$ است. $|E(x)|$ تقریباً مشابه LNM است. تفاوت این است که یک موج در $E(x)$ وجود دارد در حالی که LNM یک تابع هموار در حال میرائی است.

میدان الکتریکی متتمرکز $E(x)$ در جهت $-x$ – با سرعت $(\Delta x/\Delta\lambda = -Ncf\Delta L/(n_s d\lambda_0))$ حرکت می‌کند که طول موج به میزان k ام توسعه انتگرال همپوشانی $E(x)$ با موجبر خروجی k LNM به دست می‌آید. انتگرال همپوشانی توسعه BPM، جایی که میدان اولیه $E(x)$ به موجبر مخروطی شبیه‌سازی BPM تزویج می‌شود، صورت می‌گیرد. در محاسبات عددی، کل میدان ورودی $E(x)$ باید با مقدار $\Delta x = [N_c f \Delta L / (n_s d\lambda_0)] \Delta\lambda$ برای مولفه طول موج $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ جابجا شود.

شکل (۱۸.۹) خواص دی‌مولتی‌پلکسینگ نظری ۶۴ کanal AWG و 100 GHz را نشان می‌دهد. همشنوایی نظری مدل فعلی AWG حدود 60° دسی‌بل است. البته، اگر نوسانی در β_s و ΔL در AWG عملی وجود داشته باشد، همشنوایی بسیار بدتر از 60° دسی‌بل می‌شود.

حتی در خواص دی‌مولتی‌پلکسینگ نظری، افت عبوری AWG صفر نیست. به‌طور عمده دو دلیل وجود دارد. یکی از آنها گرفتن نور ناقص در اولین فصل مشترک و آرایه است، زیرا نمی‌توانیم بین نهایت تعداد موجبر آرایه قرار دهیم. دیگری بر اساس قضیه تبدیل فوریه است. از آنجایی که پوش نمای میدان الکتریکی در موجبرهای آرایه‌ای همانطور که در شکل (۱۱.۹) نشان داده شده، تقسیم بندی شده است، پرتو متتمرکز تبدیل شده به صورت مکانی دارای سطوح مشخصی از مولفه لوب جانبی است. شکل (۱۹.۹) توزیع میدان الکتریکی را در سطح مشترک بین تیغه دوم و موجبرهای خروجی نشان می‌دهد. قله مرکزی همان $|E(x)|$ در شکل (۱۷.۹) است. دو قله در $x \approx \pm 1600\text{ m}$ میکرومتر نشان دهنده لوب‌های جانبی از مرتبه پراش مجاور 1 m است. این مولفه‌های جانبی منشأ دیگری از افت عبوری AWG هستند. افت دریافت ناقص جذب نور در تیغه اول و لوب



شکل ۱۹.۹: توزیع میدان الکتریکی در مرز مشترک تیغه دوم و موجبر خروجی

جانبی کاذب در تیغه دوم باعث افت عبوری اصلی AWG می‌شود. در AWG صد گیگاهرتز، ۶۴ کانال فعلی، این دو تلفات مجموعاً به $1/7$ دسی‌بل می‌رسد که در شکل (۱۸.۹) نشان داده شده است.

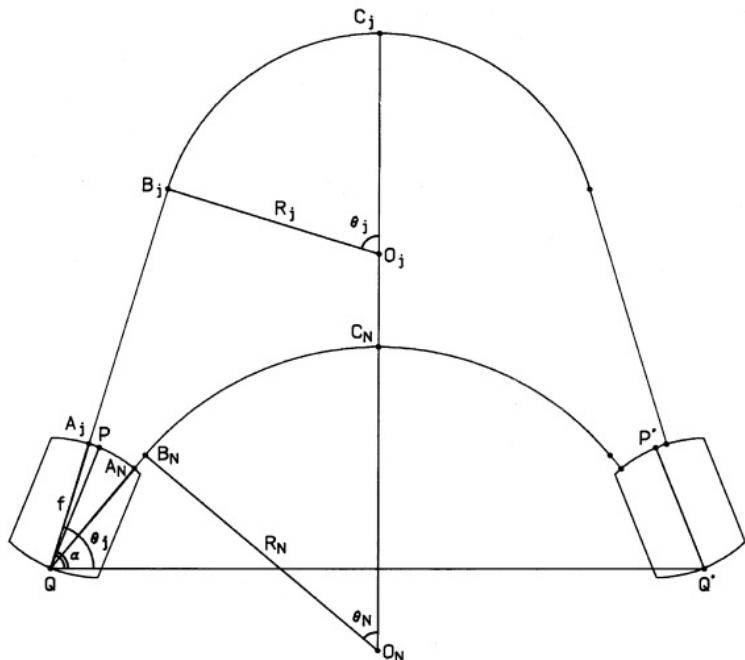
۳.۳.۹ AWG چیدمان موجبر

شکل (۲۰.۹) طرح شماتیک موجبر را برای طراحی AWG نشان می‌دهد. هر بازو در آرایه موجبر از دو موجبر مستقیم با طول متغیر در هر دو طرف تشکیل شده است و آنها به آرامی به یک خم موجبر غیر متمرکز متصل هستند. پارامترهایی که باید تعیین شوند عبارتند از زاویه تیغه $\alpha = \angle PQQ'$ و جداسازی تیغه $L_{slab} =$ فاصله بین Q و Q' . دو معادله اساسی برای طراحی AWG وجود دارد. آن‌ها عبارتند از:

$$S_j + R_j \cdot \theta_j = S_n + R_N \cdot \theta_N + (N - j) \frac{\Delta L}{2} \quad (16.9)$$

$$(f + S_j) \cos \theta_j + R_j \cdot \sin \theta_j = \frac{L_{slab}}{2} \quad (17.9)$$

که در آن S_j و S_N طول مسیر مستقیم هستند که به ترتیب A_j و B_j و A_N و B_N را بهم متصل می‌کنند. معادله (۱۶.۹) لازمه اختلاف طول مسیر موجبر آرایه‌ای است. معادله (۱۷.۹) با این رابطه به دست می‌آید که فاصله بین نقطه و خط مرکزی باید $L_{slab}/2$ باشد. طول مستقیم S_N برای داخلی‌ترین موجبر آرایه‌ای باید از قبل داده شود، که شامل مخروطی و حداقل طول مستقیم لازم است. از معادلات (۱۶.۹) و (۱۷.۹)، R_j و S_j برای



شکل ۲۰.۹: شماتیک چیدمان موجبر آرایه‌ای برای طراحی AWG

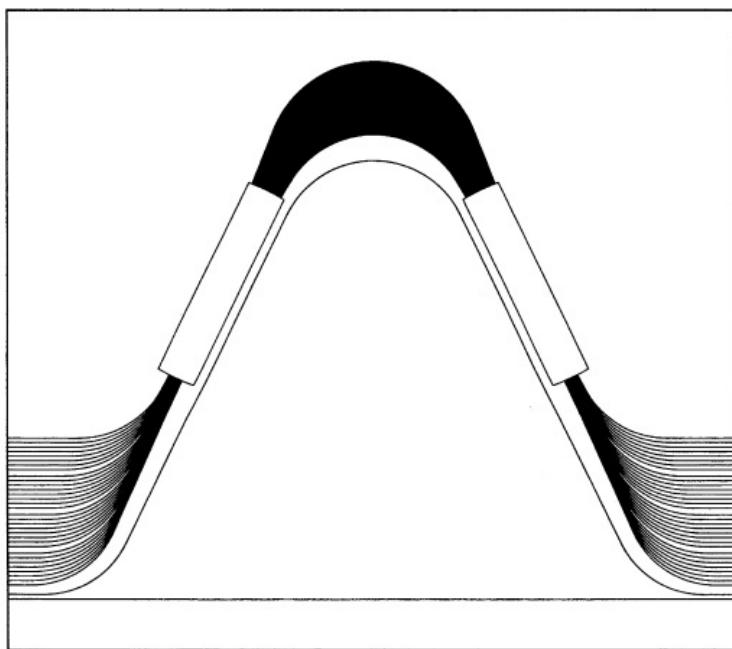
به صورت زیر داده می‌شوند:

$$R_N = \frac{L_{slab}/2 - (f - S_N) \cos \theta_N}{\sin \theta_N}, \quad (18.9)$$

$$R_j = \frac{L_{slab}/2 - [f + S_N + R_N \cdot \theta_N + (N - j)\Delta L/2] \cos \theta_j}{\sin \theta_j - \theta_j \cos \theta_j} \quad (19.9)$$

$$S_j = S_N + (R_N \cdot \theta_N - R_j \cdot \theta_j) + (N - j) \frac{\Delta}{2} \quad (20.9)$$

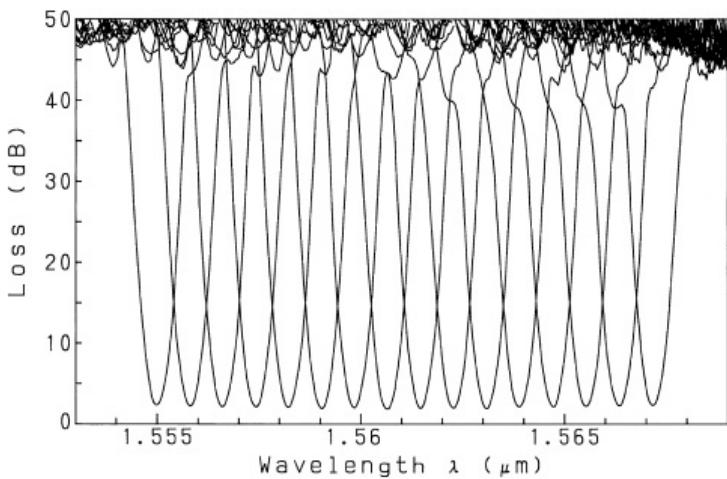
از آنجایی که فقط $2N$ معادله برای $2N + 1$ پارامترهای مجهول وجود دارد (α ، L_{slab} و $R_1 - R_N$ و $S_1 - S_{N-1}$)، نمی‌توانیم این پارامترهای AWG را به طور کامل تعیین کنیم. بنابراین، انتخاب‌های زیادی (یا بی‌نهایت زیاد) برای پارامترهای AWG داریم. با این حال، شرایط محدود کننده‌ای برای چندین پارامتر موجبر وجود دارد. آنها عبارتند از، کمینه R_j باید بزرگتر از کمینه شعاع خمی معلوم R_{min} باشد، طول مستقیم S_j باید بزرگتر از S_{min} باشد، و حداقل جداسازی موجبر آرایه‌ای در مرکز باید بزرگتر از مقدار معلوم S_{min} باشد. سپس می‌توانیم پارامترهای AWG را برای طراحی ماسک تعیین کنیم. اگرچه امکانات طراحی زیادی برای مشخصات AWG داده شده وجود دارد، طراحی بهتر ممکن است طراحی باشد که در آن طول موجبر آرایه‌ای تا حد ممکن کوتاه باشد تا خطاهای فاز ناشی از تغییرات ضریب شکست را به کمینه برساند.



شکل ۲۱.۹: چیدمان موجبر آرایه‌ای ۳۲ کاناله 100 GHz ، AWG.

۴.۳.۹ پاسخ طیف گوسی AWG

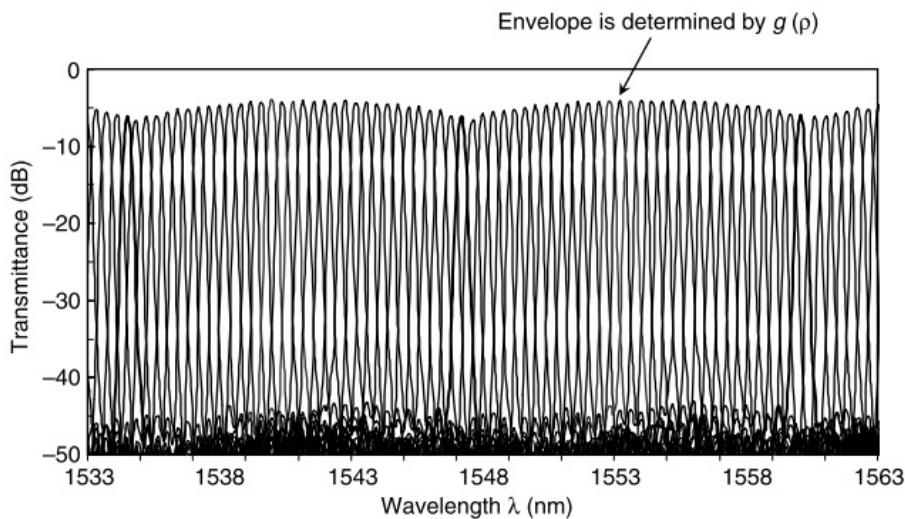
نوری موجبر آرایه‌ای گوسی نشان می‌دهد که پاسخ فرکانسی شکل گوسی است و پاسخ مسطح نیست. شکل (۲۱.۹) طرح موجبر ۳۲ AWG کاناله با فاصله 100 GHz گیگاهرتز را نشان می‌دهد. این شامل ۳۲ موجبر ورودی/خروجی، نواحی تیغه با طول قوس $11/35$ میلی‌متر و آرایه موجبر 100 GHz کاناله با اختلاف طول مسیر ثابت ΔL بین موجبرهای همسایه است. اختلاف طول مسیر ΔL برابر $3\mu\text{m}$ است. ترتیب توری مربوطه در $\lambda = 155\mu\text{m}$ برابر 59 m است که محدوده طیفی آزاد $25/6 \text{ THz}$ و فاصله کانال 0.8 nm (۱۰۰ گیگاهرتز) را به دست می‌دهد. هر بازو در آرایه موجبر از دو موجبر مستقیم با طول متغیر در هر دو طرف تشکیل شده است و آنها به‌آرامی به‌یک خم موجبر غیر متمرکز متصل هستند. اندازه هسته و اختلاف ضریب شکست بین موجبرهای کانال به ترتیب $7\mu\text{m} \times 7\mu\text{m}$ و 75% است. شعاع خمش در آرایه از 5 m میلی‌متر تا $6/3\text{ m}$ میلی‌متر متغیر است و حداقل فاصله از موجبر $30\mu\text{m}$ است. اندازه کل دستگاه $26\mu\text{m} \times 30\mu\text{m}$ است. انواع مختلفی از مالتی پلکسراها از AWG 8 کاناله با فاصله 50 nm متری تا AWG با فاصله 25 GHz گیگاهرتز ساخته شده‌اند [۱۷، ۱۹]. شکل (۲۲.۹) طیف تلفات اندازه‌گیری شده کاناله، $N_{system} = 16$ AWG 100 GHz را نشان می‌دهد زمانی که نور لیزر قابل تنظیم به‌پایانه ورودی مرکزی تزویج می‌شود. در اینجا N_{system} شماره کانالی است که از یک سیستم WDM مورد نیاز است. از طرف دیگر، تعداد کل کانال‌های N_{ch} خود AWG برابر 32 است. رابطه $N_{ch} = 0.5 \times N_{system}$ با N_{ch} در بحث زیر توضیح داده خواهد شد. همچنان‌وائی AWG، که با نشت نور در مرکز کانال مجاور تعریف می‌شود، حدود -40 –



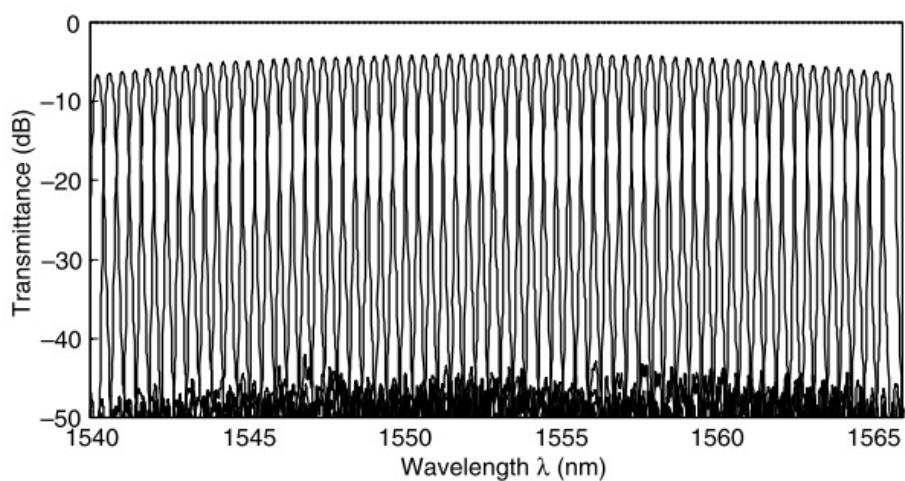
شکل ۲۲.۹: خواص دی‌مالتی پلکس ۱۶ کاناله بفاصله ۱۰۰ گیگاهرتز AWG.

دسی‌بل است. شکل (۲۳.۹) طیف‌های انتقال اندازه‌گیری شده AWG ۳۲ کاناله با فاصله ۵۰ گیگاهرتز را در چهار مرتبه پراش نشان می‌دهد. همانطور که توسط شبیه‌سازی BPM در شکل‌ها (۱۰.۹)-(الف) و (ب) توضیح داده شده است، افت عبوری برای درگاه‌های خروجی محیطی ۳-۲/۵ دسی‌بل بیشتر از درگاه‌های خروجی مرکزی است. پوش قله‌های انتقال توسط FFP ($g(\rho_k)$) همانطور که در بخش ۲.۳.۹ توضیح داده شده است تعیین می‌شود. برای بهدست آوردن ویژگی‌های تلفات یکنواخت در برنامه‌های کاربردی سیستم WDM، تعداد کل کانال‌های N_{ch} از AWG باید بزرگتر از سیستم شماره کانال N_{system} باشد. تعداد پایانه‌های خروجی N_{system} معمولاً حدود $N_{ch} \times (0.5 \sim 0.6)$ است تا تغییرات تلفات کمتر از یک دسی‌بل را تضمین کند.

شکل (۲۴.۹) خواص دی‌مالتی‌پلکس AWG ۶۴ کاناله و ۵۰ گیگاهرتز را نشان می‌دهد. همشنوائی در حدود ۴۰- دسی‌بل در AWG ۶۴ کاناله و ۵۰ گیگاهرتز بهدست آمده است. با بهبود فناوری ساخت و بهینه‌سازی تنظیمات موجبر، ویژگی‌های همشنوائی خوبی حتی در AWG‌های فاصله‌دار ۱۰ تا ۲۵ گیگاهرتز بهدست آمده که در شکل‌های (۲۵.۹) و (۲۶.۹) نشان داده شده است. موجبر فوق العاده Δ با اختلاف ضریب شکست ۱/۵ درصد در AWG ۴۰۰ کاناله و ۲۵ گیگاهرتز استفاده شد تا سطح ناحیه موجبر آرایه‌ای را به حداقل برساند. همشنوائی کانال مجاور و همشنوائی پس زمینه به ترتیب کمتر از ۲۰- دسی‌بل و ۳۰- دسی‌بل بود. شکل (۲۵.۹)-(ب) یک خاصیت مالتی‌پلکسی تک کانالی را در درگاه خروجی مرکزی نشان می‌دهد. قسمت داخلی شکل، ویژگی‌های دی‌مالتی‌پلکس کردن نزدیک را برای سه پایانه خروجی نشان می‌دهد. شکل (۲۶.۹) خواص دی‌مالتی‌پلکس کردن AWG ۳۲ کاناله با فاصله ۱۰ گیگاهرتز را بدون استفاده از فرآیند پست برای جبران خطای فاز (عدم یکنواختی در اختلاف طول مسیر نوری $n_c \Delta L$) نشان می‌دهد. در اینجا از موجبر بالا با اختلاف ضریب شکست ۷۵٪ درصد استفاده شده است. همشنوائی کانال مجاور حدود ۳۰- دسی‌بل حتی در فاصله ۱۰ گیگاهرتز AWG بهدست آمده است. تکنیک



شکل ۲۳.۹: خواص دی‌مالتی‌پلکس ۲۲ کاناله بفاصله ۵ گیگاهرتز AWG روی چهار مرتبه پراش.



شکل ۲۴.۹: خواص دی‌مالتی‌پلکس ۶۴ کاناله بفاصله ۵ گیگاهرتز AWG

جبران خطای فاز می‌تواند همسنوائی AWG‌ها را بیشتر بهبود بخشد. این در بخش ۸.۵.۹ توضیح داده خواهد شد.

۵.۳.۹ وابستگی به قطبش طول موج عبور

وابستگی قطبش به طول موج عبور در AWG عمدتاً توسط انکسار مضاعف موجبر تعیین می‌شود. طول موج مرکزی باند عبور با معادله (۲.۹) به صورت $\lambda_0 = n_c \Delta L / m$ بیان می‌شود. هنگامی که ضریب شکستهای موثر برای مودهای TE و TM متفاوت باشد، باعث ایجاد اختلاف طول موج عبور وابسته به قطبش شده و با رابطه زیر داده می‌شود.

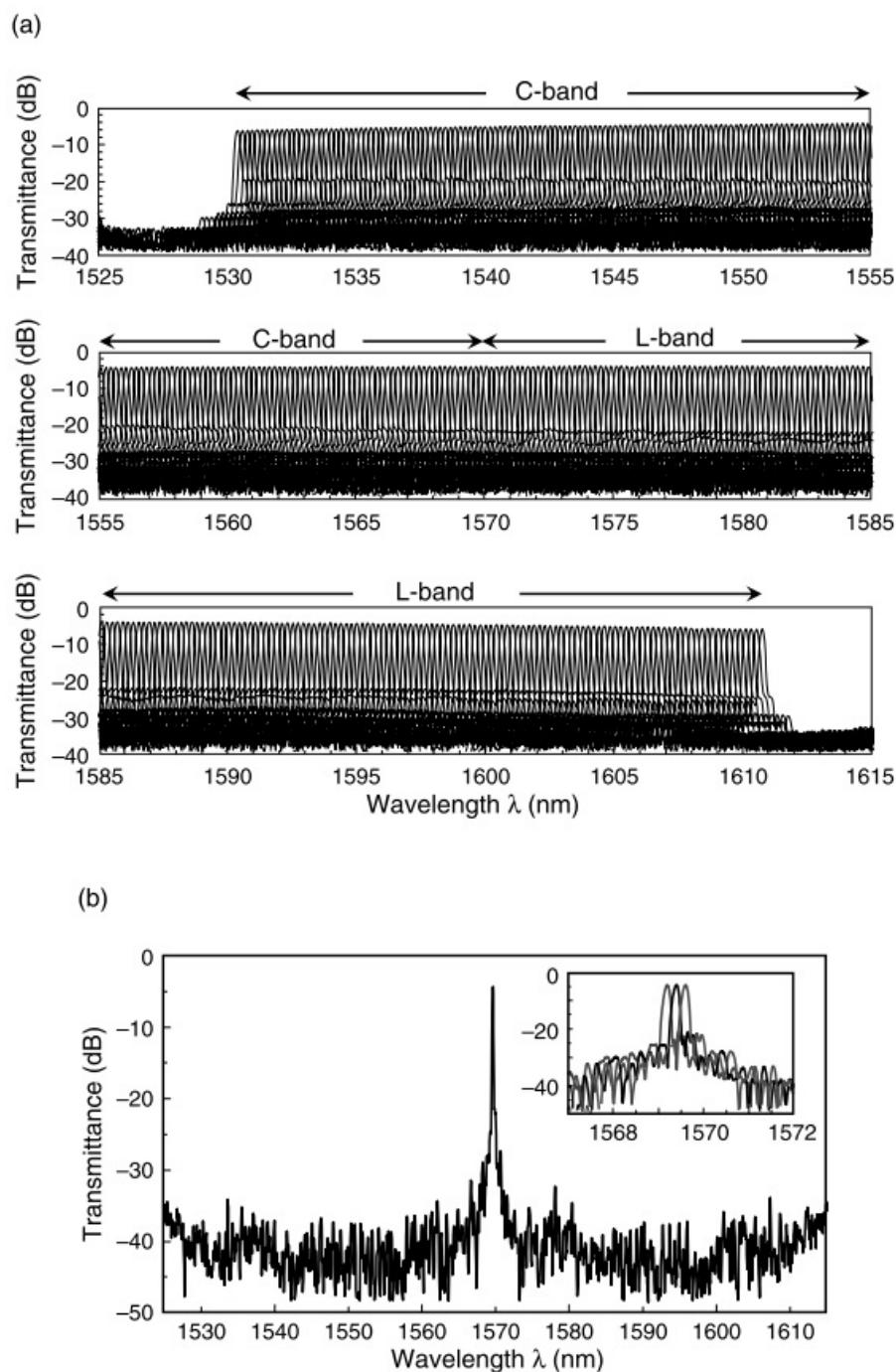
$$\delta\lambda = \lambda_{TE} - \lambda_{TM} = \frac{[n_c(TE) - n_c(TM)]}{m} \Delta L. \quad (21.9)$$

در اینجا $\Delta\lambda$ بنام $PD\lambda$ (λ وابسته به قطبش) نامیده می‌شود. انکسار دوگانه موجبر در سیلیس PLC عمدتاً توسط ناهمسانگردی تنش در امتداد جهت‌های x و y ایجاد می‌شود. در این صورت $PD\lambda$ با استفاده از معادله‌های (۲۱.۹) و (۲۴۰.۳) بیان می‌شود:

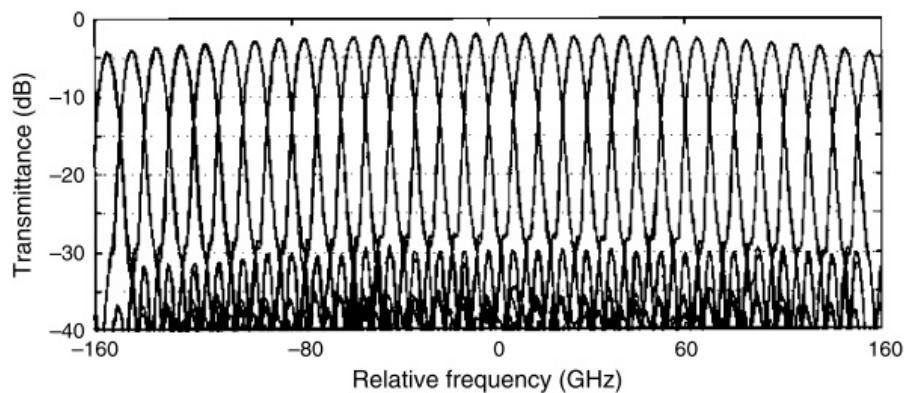
$$\delta\lambda = C \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \frac{\Delta L}{m} \quad (22.9)$$

که در آن $C = ۳,۳۶ \times ۱۰^{-۵} (mm^2/kgwt)$ ، σ_x و σ_y تنش در مرکز هسته در امتداد جهت به ترتیب x و y است. در سیلیکای معمولی روی موجبر سیلیکون، هر دو σ_x و σ_y منفی و $|\sigma_x| > |\sigma_y|$ هستند. در این صورت $\delta\lambda$ در AWG معمولی منفی است ($\lambda_{TE} < \lambda_{TM}$). شکل (۲۷.۹) اختلاف وابستگی طول موج عبور به قطبش را در AWG استفاده از هسته سیلیکا و زیرلایه سیلیکون نشان می‌دهد. $PD\lambda$ معمولاً در حدود $۰.۲nm$ در حدود ۰.۱% است.

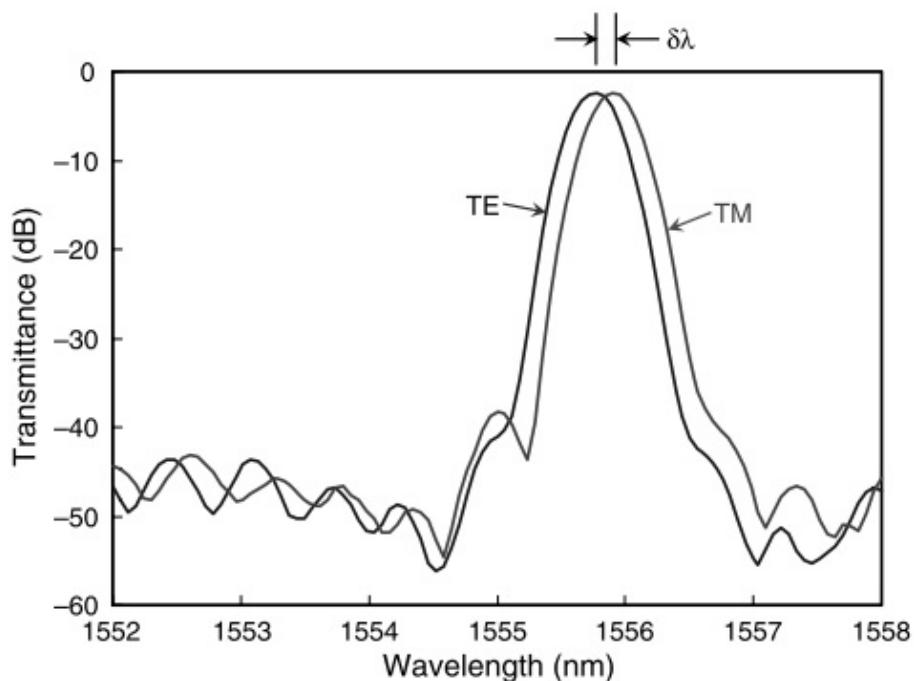
شکل (۲۸.۹)-(الف) یک ساختار پشته زیر روکش برای حذف AWG $PD\lambda$ را نشان می‌دهد [۲۰]. هنگامی که ساختار پشته هسته را بیش از حد به سمت پایین در ناحیه زیر پوشش حک می‌کنیم، می‌توانیم بزرگی σ_x و σ_y را در داخل و اطراف ناحیه هسته تغییر دهیم. در عمق حکاکی بیش از حد مناسب d ، می‌توانیم اختلاف تنش بین σ_x و σ_y را حذف کنیم. از آنجایی که منشأ σ_x انقباض زیرلایه سیلیکونی است که از طریق لایه زیرپوش عمل می‌کند، σ_x با افزایش ارتفاع پشته کاهش می‌یابد. از طرف دیگر، از آنجایی که مبدأ σ_y انقباض روکش است، σ_y با افزایش ارتفاع پشته افزایش می‌یابد. شکل (۲۸.۹)-(ب) طیف‌های انتقال یک AWG را با $d = ۳\mu m$ نشان می‌دهد. در اینجا، از موجبر Δ بالا با هسته $6\mu m$ و 75% استفاده کردیم. طیف‌های انتقال برای هر دو قطبش تقریباً به طور کامل همپوشانی دارند. $PD\lambda$ کمتر از ۱% نانومتر با موفقیت در $d = ۳\mu m$ به دست می‌آید. افت عبوری حدود $۲/۵$ دسی‌بل و همسنوائی پس زمینه کمتر از -۴۰ دسی‌بل است. این نتایج به‌این معنی است که هنگامی که ساختار پشته زیر روکش را در AWG‌ها ترکیب می‌کنیم، در ویژگی‌های نوری تخریب وجود ندارد.



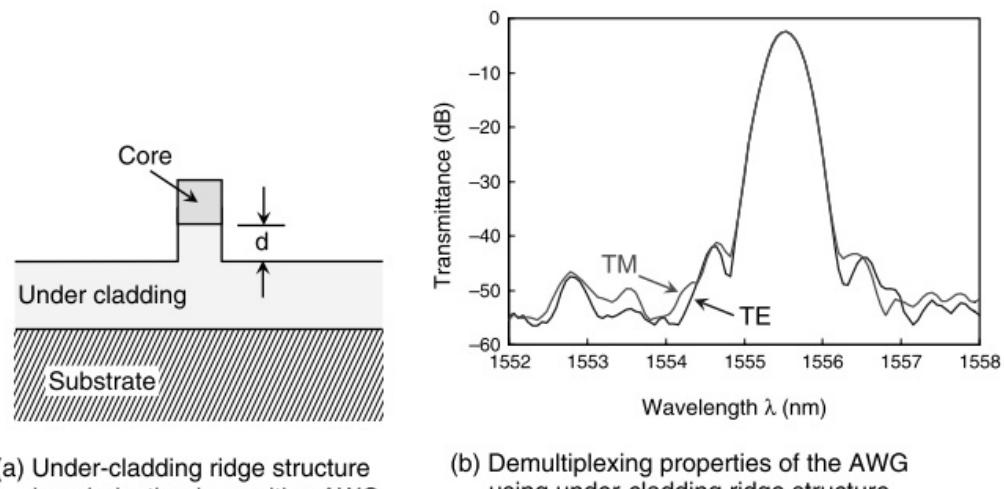
شکل ۲۵.۹: (الف): خواص دی‌مالتی‌پلکس ۴۰۰ کاناله بفاصله ۲۵ گیگاهرتز AWG. (ب): خواص دی‌مالتی‌پلکس تک کانال پایانه خروجی. شکل الحاقی خواص نزدیکی دی‌مالتی‌پلکس را برای سه پایانه خروجی نشان می‌دهد.



شکل ۲۶.۹: خواص دی‌مالتی پلکس ۳۲ کاناله بفاصله ۱۰ گیگاهرتز AWG بدون استفاده از پیش پردازش برای جبران خطای فاز.



شکل ۲۷.۹: اختلاف طول موج عبور وابسته به قطبش در یک AWG معمولی استفاده از هسته سیلیکا و زیرلایه سیلیکون.



شکل ۲۸.۹: (الف) ساختار پشته زیر روکش در AWG غیر حساس بهقطبش. (ب) خصوصیات دیمولتیپلکس AWG با استفاده از ساختار پشته زیر روکش.

۶.۳.۹ روش ورنیه برای تنظیم طول موج مرکزی

هنگامی که برخی از پارامترهای موجبر در تیغه اول (D_1, d_1 و f_1) و پارامترهای ناحیه تیغه دوم (D, d و f) متفاوت باشند، فاصله کانال‌ها $\Delta\lambda_{out}$ با $\Delta\lambda_{in}$ متفاوت می‌شود که در معادلات (۷.۹) و (۸.۹) نشان داده شده است. قرار دادن $x = jD$ ($j = 1, 2, \dots$) در معادله (۲.۹)، می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

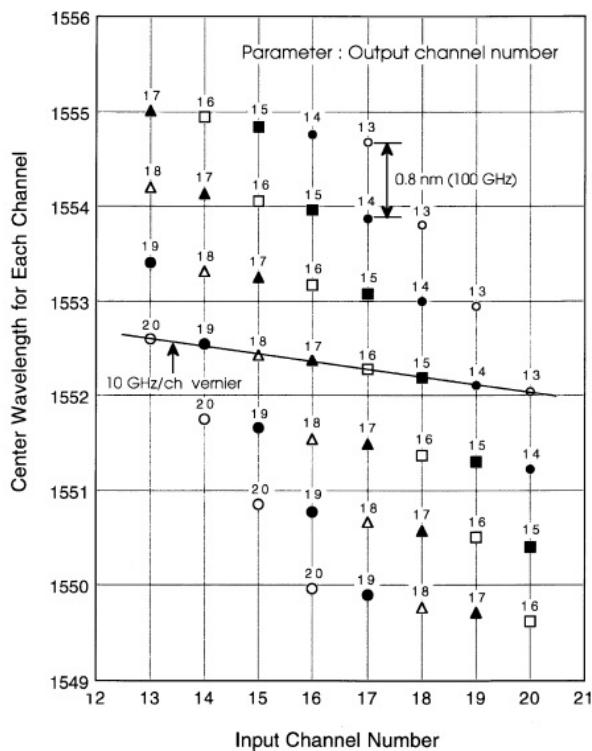
$$n_s(\lambda)j \left(\frac{d_1 D_1}{f_1} - \frac{d D}{f} \right) + n_c(\lambda) \Delta L = m\lambda \quad (23.9)$$

معادله بالا با طول موج مرکزی زیر سازگاری دارد.

$$\lambda = \lambda_0 + j \frac{N_c}{n_c} \left(\frac{d_1 D_1 f}{d D f_1} - 1 \right) \Delta\lambda_{out} \quad (24.9)$$

که در آن از معادله (۹.۹) استفاده کردیم. معادله (۲۴.۹) نشان می‌دهد که طول موج عبوری مرکزی AWG را می‌توان با انتخاب تزویج ورودی-خروجی مناسب j -ام تنظیم کرد. چنین طراحی ورنیه [۲۱] در مواردی نشان داده شد که جداسازی موجبر ورودی و خروجی D و D_1 و متفاوت بود در حالی که $d_1 = d$ و $f_1 = f$. ورنیه AWG می‌تواند تغییر طول موج مرکزی احتمالی را به دلیل خطای ساخت جزئی در پارامترهای موجبر n_c و L جبران کند. ورنیه AWG همچنین می‌تواند با تغییر حداقل یکی از پارامترهای موجبر در تیغه اول (D_1, d_1 و f_1) و در ناحیه تیغه دوم (D, d و f) تحقق یابد. شکل (۲۹.۹) طول موج‌های مرکز اندازه گیری شده را در ۳۲ کاناله و ۱۰۰ گیگاهرتز نشان می‌دهد که دارای ورنیه سمت آرایه است. جداسازی موجبر ورودی و خروجی در ورنیه AWG سمت آرایه $f_1 = f = 13.7\text{mm}$ و $D_1 = D = 25\mu\text{m}$ و $d_1 = 20\mu\text{m}$ و $d = 18\mu\text{m}$ بود. خط

مستقیم در شکل (۲۹.۹) خط ورنیه را برای طول موج‌های مسیر مرکزی نشان می‌دهد. برای کاربردهای فیلتر با طول موج $N \times 1$ ، تکنیک ورنیه در جبران خطاهای احتمالی ساخت در طول موج مرکزی AWG کاملاً مؤثر است.

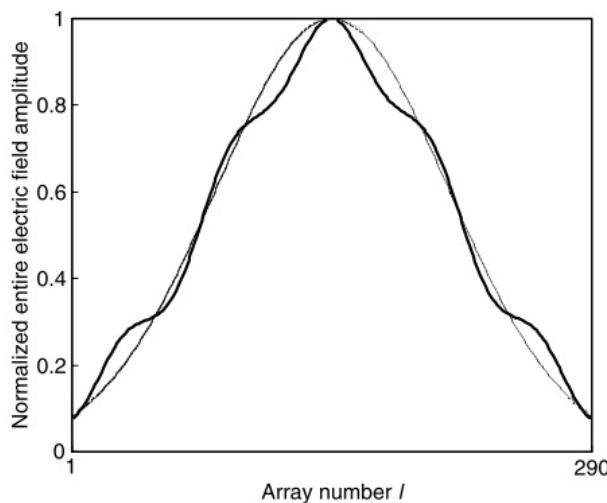


شکل ۲۹.۹: طول موج‌های مرکزی در ورنیه سمت آرایه AWG

۴.۹ مشخصات همنوائی و پاشندگی AWG‌ها

۱.۴.۹ همنوائی AWG‌ها

همنوائی AWG به نوسانات فاز و دامنه در کل شکل میدان الکتریکی در مرزمشترک آرایه سمت خروجی-تیغه نسبت داده می‌شود، زیرا شکل پرتو متراکز در صفحه خروجی تبدیل فوریه مکانی میدان الکتریکی در موجبرهای آرایه است. نوسانات دامنه و/یا فاز در کل شکل میدان الکتریکی باعث ایجاد شکل پرتو متراکز ناقص می‌شود که در آن سطح لوب جانبی بالاتر از شکل (۱۶.۹) می‌شود. در این صورت، سطح همنوائی بسیار بدتر از -60 -دیبل می‌شود، همانطور که در شکل (۱۸.۹) نشان داده شده است. نوسان دامنه ناشی از عدم یکنواختی موجبرهای آرایه است. نوسان فاز در واقع یک نوسان طول مسیر نوری در هر موجبر آرایه است. علت آن عدم یکنواختی در ضرایب شکست و هندسه هسته در ناحیه موجبر آرایه است.



شکل ۳۰.۹: پوش شکل میدان الکتریکی درخروجی مرز مشترک تیغه-آرایه با نوسان دامنه سینوسی $\delta c = N/5$ و $\Lambda = ۰,۰۹۵$

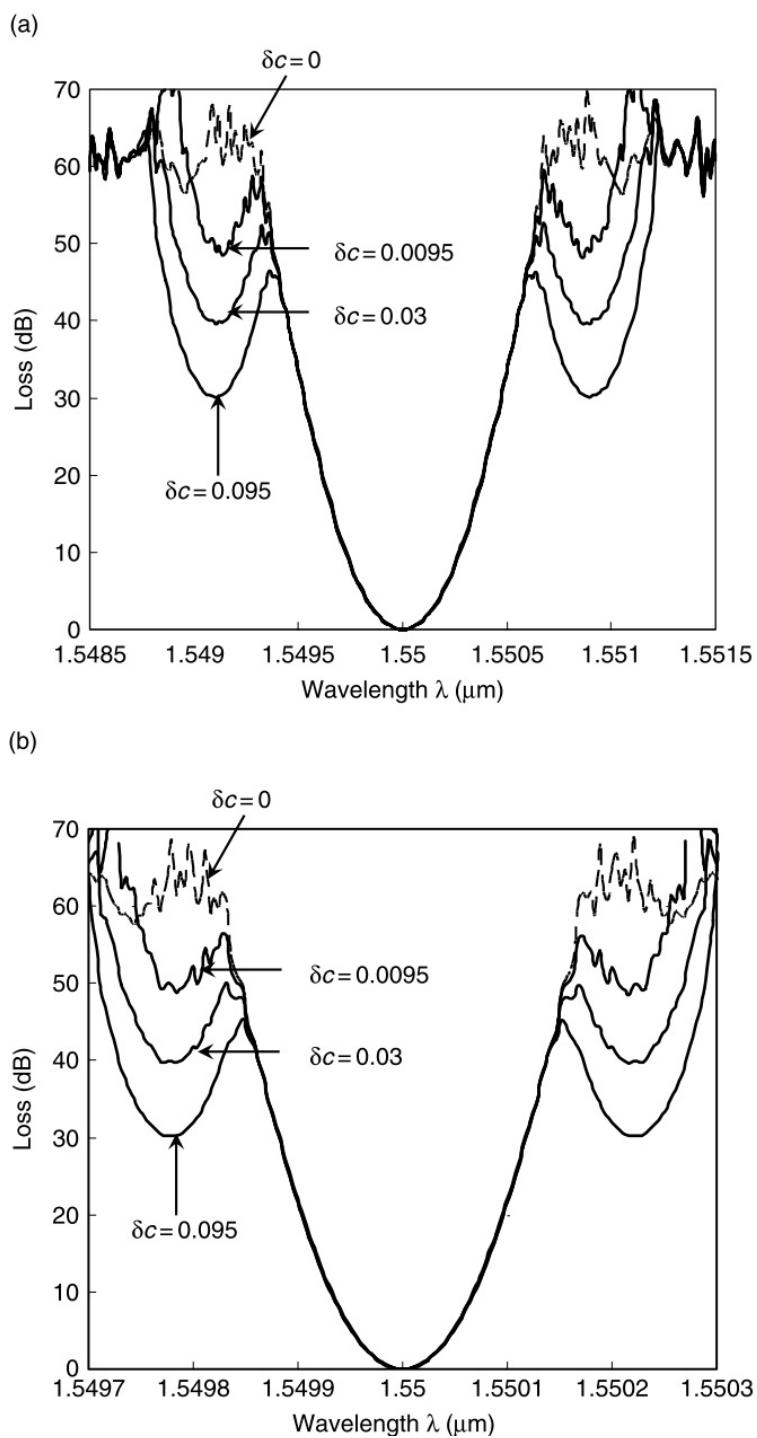
ابتدا تأثیر نوسان دامنه بررسی خواهد شد. برای سادگی، نوسان دامنه سینوسی با دامنه δc و نیم دوره نوسان فرض شده است. نوسان واقعی ممکن است با مجموع مجموعه‌ای از نوسانات سینوسی با دوره‌های مختلف بیان شود. میدان الکتریکی متتمرکز تحت یک نوسان دامنه سینوسی منفرد از معادله (۱۵.۹) داده شده است.

$$E(x) = \sum_{l=1}^N [c(l) + \delta c \cdot \sin\left(l \frac{\pi}{\Lambda}\right)] \exp[-j\Omega(l)]. \quad (۲۵.۹)$$

شکل (۳۰.۹) پوش کل شکل میدان الکتریکی را در مرز مشترک آرایه سمت خروجی-تیغه با نوسان دامنه سینوسی $\delta c = N/5$ و $\Lambda = ۰,۰۹۵$ نشان می‌دهد. خواص دی‌مالتی پلکسینگ AWG که دارای نوسان است را می‌توان بهروشی مشابه آنچه در بخش ۲.۳.۹ توضیح داده شد، بدست آورد.

شکل‌های (۳۱.۹) (الف) و (ب) خواص دی‌مالتی‌پلکس AWG را نشان می‌دهند که دارای نوسانات دامنه سینوسی $\delta c = ۰,۰۹۵$ و $\Lambda = N/5$ با $\Lambda = ۰,۰۹۵$ برای دو نوع AWG با ۱۰۰ و ۲۵ گیگاهرتز فاصله کانال است. محل تحریب همشنوائی به فرکانس مکانی $2\pi/\Lambda$ نوسان بستگی دارد. هنگامی که فرکانس مکانی $2\pi/\Lambda$ افزایش می‌یابد، قله جانبی از مرکز باند عبور دور می‌شود. مشخص است که وقتی $\delta c = \sqrt{10}/2$ برابر بزرگتر می‌شود، همشنوائی حدود 1° دسی‌بل کاهش می‌یابد. همچنین از این شکل‌ها مشخص است که سطح لوب کناری به فاصله کانال بستگی ندارد.

در ادامه، تأثیر نوسان فاز بررسی خواهد شد. در اینجا، نوسان ضربی شکست مؤثر سینوسی با دامنه δn و نیم دوره نوسان Λ فرض شده است. نوسانات واقعی را می‌توان با مجموع مجموعه‌ای از نوسانات سینوسی با نیم دوره مختلف بیان کرد. میدان الکتریکی



شکل ۳۱.۹: خواص دی‌مالتی‌پلکس AWG که دارای نوسان دامنه سینوسی $\delta c = N/5 \cdot 10^{-95} \text{ to } 10^{-95} \text{ GHz}$ با (الف) و $\Lambda = 100 \text{ GHz}$ با (ب) است.

متمرکز تحت یک نوسان ضریب شکست موثر سینوسی از معادله (۱۵.۹) داده شده است.

$$E(x) = \sum_{l=1}^N c(l) \exp[-j\Omega(l)], \quad (۱۲۶.۹)$$

$$\begin{aligned} \Omega(l) &= \beta_s \left(\hat{L}_{i,l} + L_{i,l} \right) + (N-l)\beta_c \Delta L = \beta_s \left(\hat{L}_{i,l} + L_{i,l} \right) \\ &\quad + (N-l) \frac{2\pi}{\lambda} \left[n_c(l) + \delta n \cdot \sin \left(l \frac{\pi}{\Lambda} \right) \right] \Delta L \end{aligned} \quad (۱۲۶.۹b)$$

شکل (۳۲.۹)-(الف) و (ب) شکل میدان الکتریکی متمرکز شده در صفحه خروجی و خواص دی مالتی پلکس AWG در فاصله 100GHz که دارای نوسان فاز سینوسی $\delta n = 5 \times 10^{-5}$ و $\Lambda = N/2$ است را نشان می دهد. هنگامی که نوسان فرکانس مکانی $2\pi/\Lambda$ کوچک باشد، نوسان در مرکز باند عبور ظاهر می شود. وقتی فرکانس مکانی $2\pi/\Lambda$ بزرگ شود، قله لوب کناری بسمت بیرون می رود.

شکل (۳۳.۹)-(الف) و (ب) شکل میدان الکتریکی متمرکز شده را در صفحه خروجی و خواص دی مالتی پلکس در در فاصله 100GHz AWG که دارای نوسان فاز سینوسی $\delta n = 1 \times 10^{-6}$ و $\Lambda = N/10$ است را نشان می دهد. حتی اگر نوسان ضریب شکست کاملاً کوچک باشد، همانطور که در شکل (۳۳.۹)-(ب) نشان داده شده، باعث تخریب همشنوائی از -60° دسی بل ($\delta n = 0^\circ$) به حدود -40° دسی بل می شود. نوسانات فاز با دوره $N/20 \approx \Lambda \approx N/10$ مضرترین هستند زیرا باعث همشنوائی کانال مجاور می شوند. برای دوره های بسیار کوچکتر از نوسانات با $N/20 < \Lambda$ ، تخریب همشنوائی به دور از مرکز باند عبور ظاهر می شود. سپس، منشا همشنوائی پس زمینه AWG ها می شود.

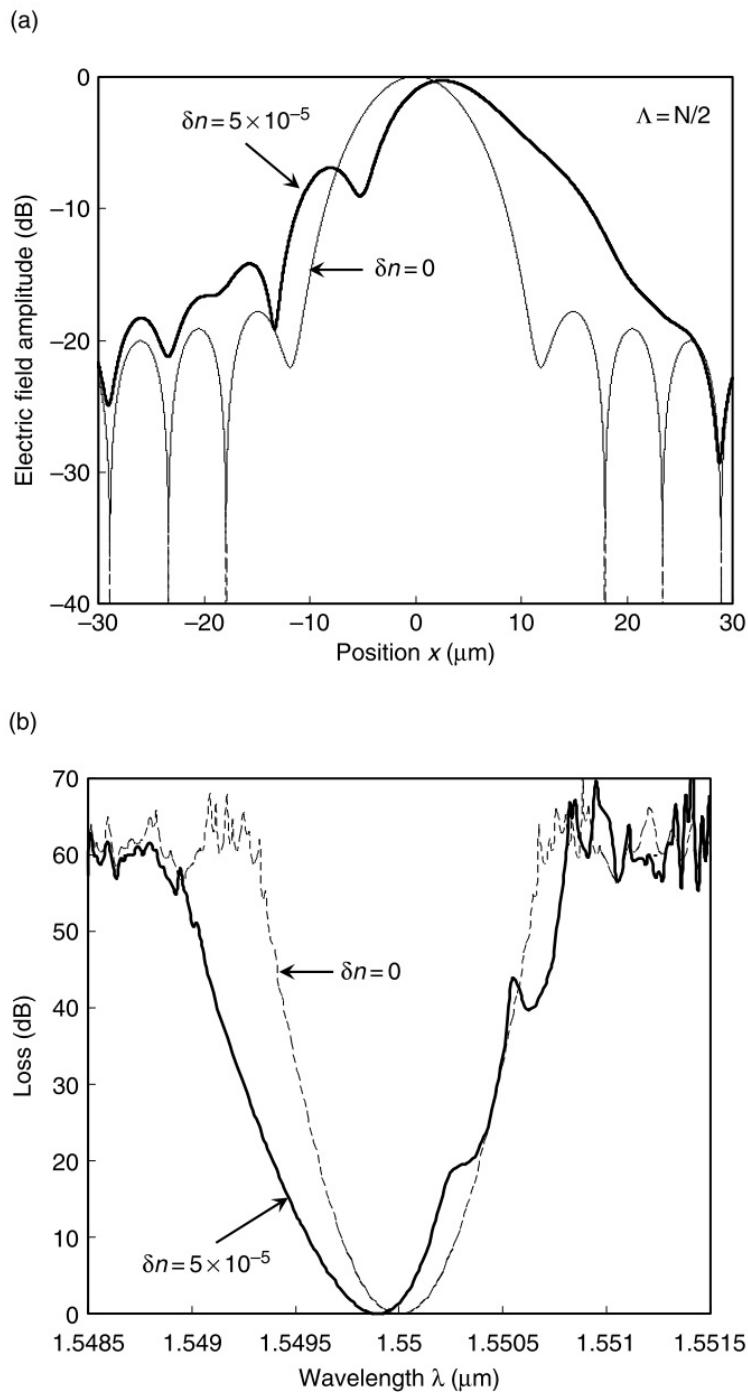
شکل های (۳۴.۹)-(الف) و (ب) خواص دی مالتی پلکس AWG هایی را نشان می دهند که دارای نوسانات فاز سینوسی $\delta n = 1 \times 10^{-6}$ و $\Lambda = N/10$ با 3×10^{-7} برای سه نوع AWG با فاصله کانال ها به ترتیب 100° ، 50° و 25° گیگاهرتز هستند. مشخص است که وقتی فاصله کانال به نصف می رسد، همشنوائی تا حدود ۵ دسی بل کاهش می یابد. همچنین مشخص است که وقتی $\delta n = \sqrt{10}/2$ برابر بزرگتر شود، همشنوائی حدود 10° دسی بل کاهش می یابد. برای نوسانات فاز، سطح لوب کناری به شدت به فاصله کانال بستگی دارد.

۲.۴.۹ ویژگی های پاشندگی AWG

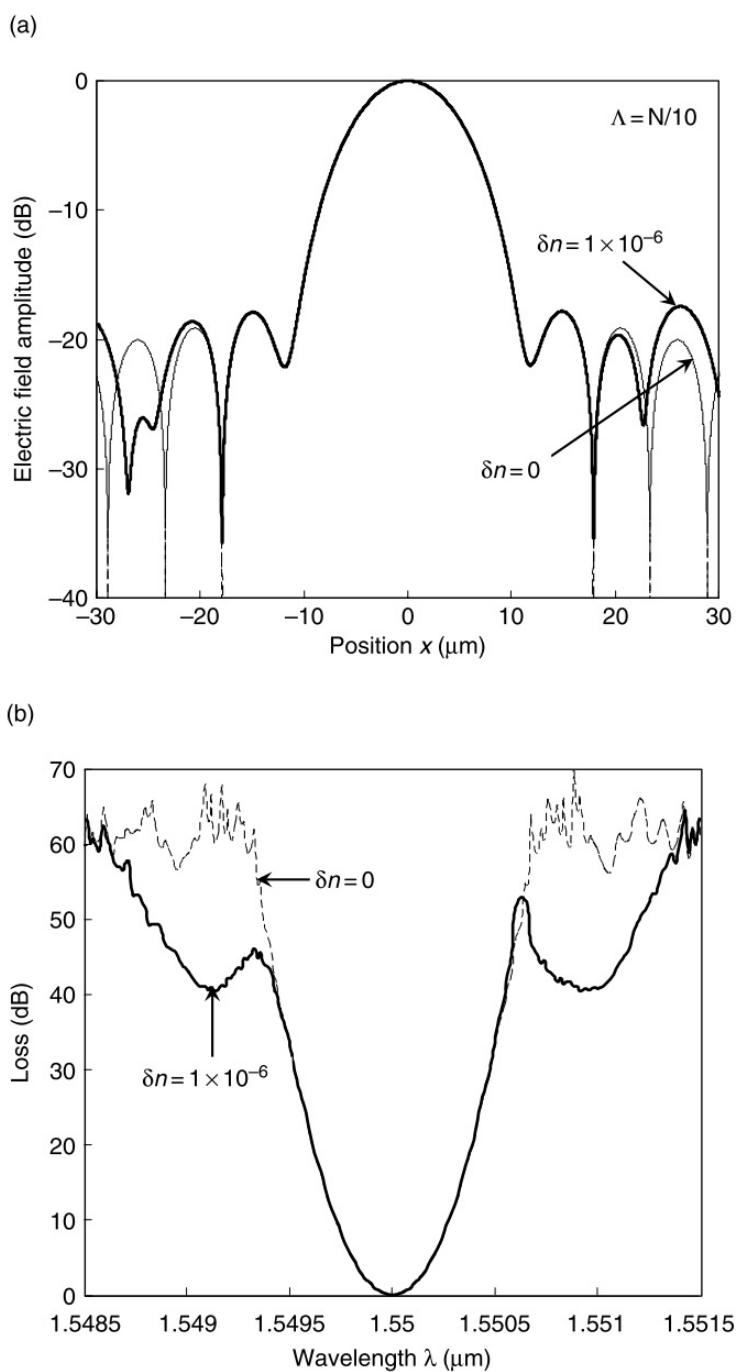
در ادامه، ویژگی های پاشندگی خود فیلتر AWG بررسی خواهد شد. ابتدا باید معادله ای را برای نشان دادن پاسخ فرکانسی AWG ایجاد کنیم. به طور معمول تصور می شود که معادله (۱۵.۹)-الف برای میدان الکتریکی متمرکز ویژگی های فرکانس AWG را نشان می دهد زیرا می توان آن را برای ورودی مرکز ($x_1 = 0^\circ$) و خروجی مرکز ($x = 0^\circ$) بازنویسی کرد.

$$E(x_1 = x = 0^\circ, \nu) = \sum_{l=1}^N c(l) \exp[-j\Omega(l)], \quad (۱۲۷.۹)$$

$$\Omega(l) = 2\beta_s f + (N-l)\beta_c(\nu) \Delta L, \quad (۱۲۷.۹b)$$

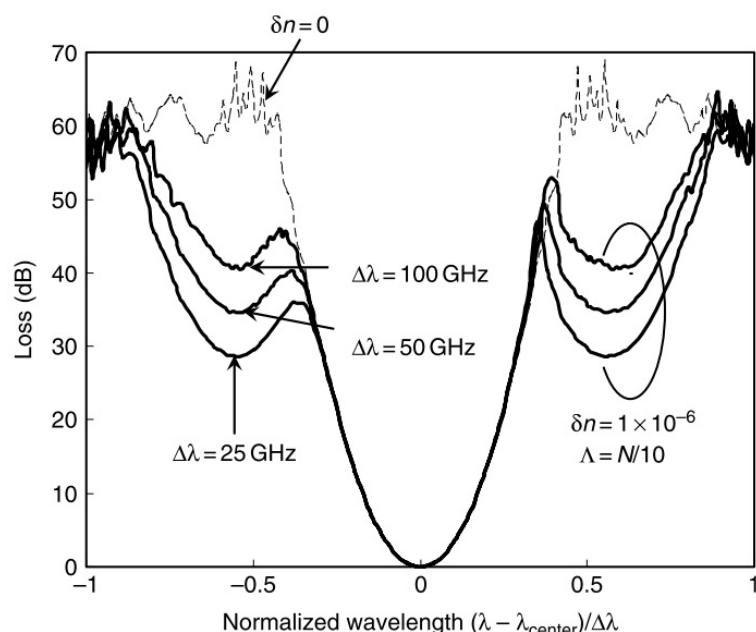


شکل ۳۲.۹: (الف) شکل میدان الکتریکی متغیر کرده در صفحه خروجی و (ب) خواص دی مالتی پلکس در فاصله AWG 100GHz که دارای نوسان فاز سینوسی $\delta n = 5 \times 10^{-5}$ و $\Lambda = N/5$ است.

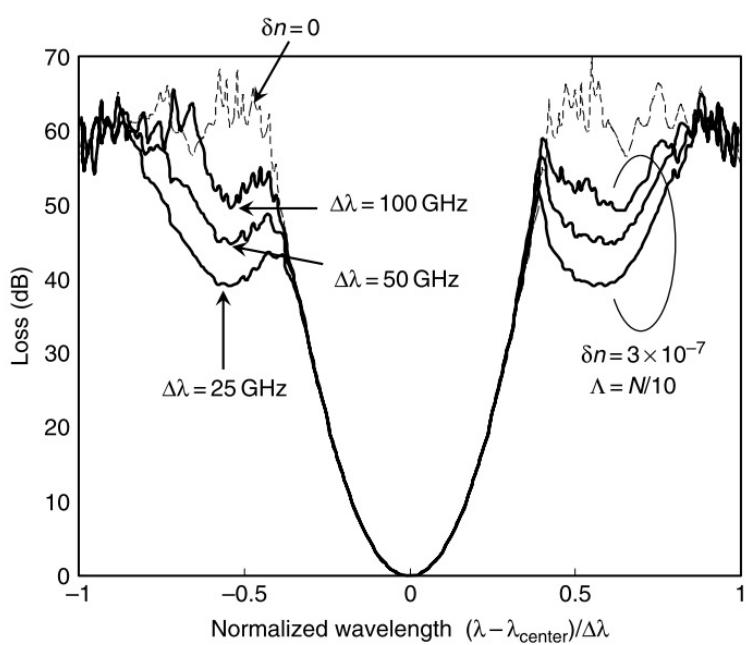


شکل ۳۳.۹: (الف) شکل میدان الکتریکی متمرکز شده در صفحه خروجی و (ب) خواص دی‌مالتی‌پلکس در فاصله AWG 100 GHz که دارای نوسان فاز سینوسی $\delta n = 1 \times 10^{-6}$ و $\Lambda = N/10$ است.

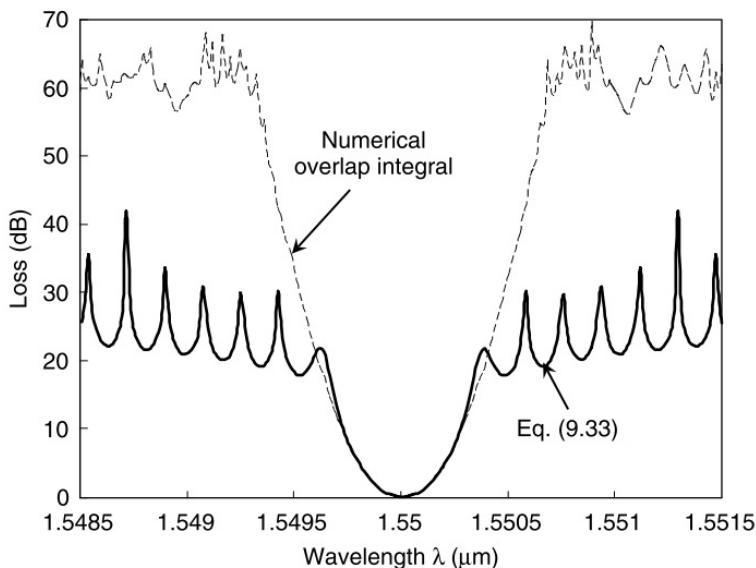
(a)



(b)



شکل ۳۴.۹: خواص دی‌مالتی‌پلکس AWG که دارای نوسان فاز سینوسی $\delta n = 1 \times 10^{-6}$ و $\Lambda = N/10$ با فاصله کanal‌های 25 GHz , 50 GHz , 100 GHz برای سه نوع AWG.



شکل ۳۵.۹: مقایسه پاسخ فرکانسی گوسی AWG محاسبه شده با انتگرال هموشانی عددی با پاسخ استفاده از معادله (۳۳.۹).

که در آن ν فرکانس سیگنال است. از رابطه (۲.۹) برای پرتوهای پراش با پراش مرتبه m و $(m+1)$ رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\beta_c(\nu)\Delta L - 2m\pi = \beta_c(\nu + \nu_{FSR})\Delta L - 2(m+1)\pi \quad (28.9)$$

که در آن ν_{FSR} بازه طیف آزاد^{۱۳} است. از رابطه (۲۸.۹) بدست می‌آید:

$$\nu_{FSR} = \frac{n_c}{N_c} \cdot \frac{\nu_0}{m} \quad (29.9)$$

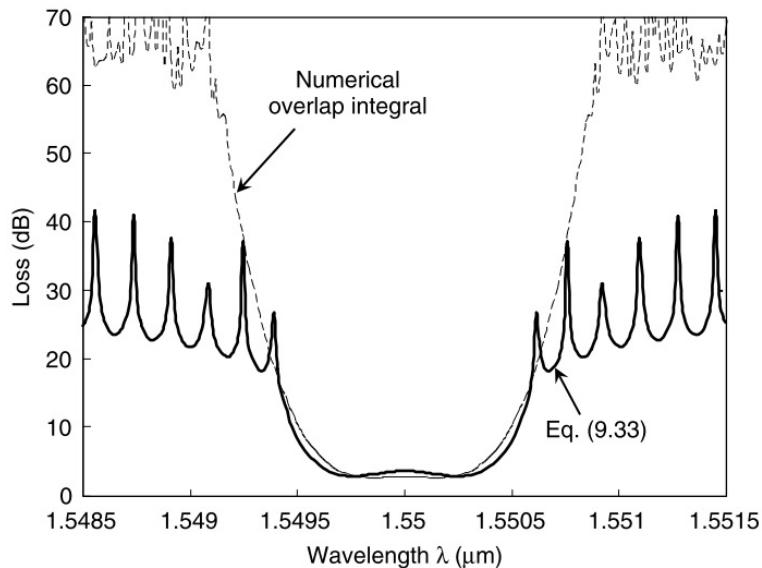
که در آن ν_0 فرکانس مرکزی ($= c/\lambda_0$) است. ν_{FSR} نیز با استفاده از معادلات (۳.۹) و (۲۹.۹) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\nu_{FSR} = \frac{c}{N_c \Delta L} \quad (30.9)$$

معادله فوق بیان جهانی FSR در دستگاه تداخل PLC است که دارای اختلاف طول مسیر ΔL است (معادله ۲۷.۹). در معادله $\beta_c(\nu)\Delta L$ را می‌توان با استفاده از معادله بالا بازنویسی کرد

$$\beta_c(\nu)\Delta L = \frac{2\pi\nu n_c}{c} = 2\pi \frac{n_c}{N_c} \frac{\nu}{\nu_{FSR}} \approx 2\pi \frac{\nu}{\nu_{FSR}} \quad (31.9)$$

^{۱۳}Free Spectral Range (FSR)



شکل ۳۶.۹: مقایسه پاسخ فرکانسی نوع سینک صاف AWG محاسبه شده با انتگرال همپوشانی عددی با پاسخ استفاده از معادله (۳۳.۹).

در اینجا $n_c/N_c \approx 1/55\mu m$ را فرض کردیم زیرا در سیلیس PLC در منطقه طول موج $1/55\mu m$ است. در این صورت معادله (۱۲۷.۹) به کاهش می‌یابد

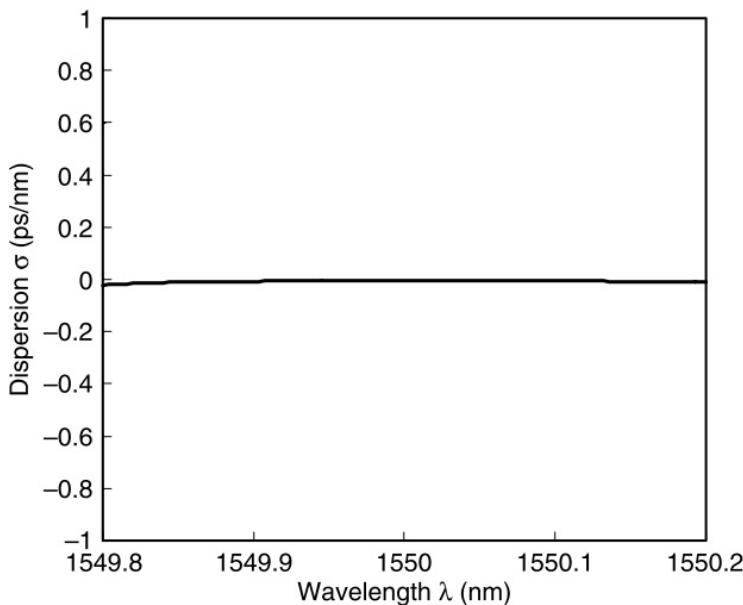
$$E(x_1 = x = 0, \nu) = e^{-j\beta_s f} \sum_{l=1}^N c(l) \exp \left[-j(N-l)2\pi \frac{\nu}{\nu_{FSR}} \right] \quad (32.9)$$

از آنجایی که وابستگی فرکانس عبارت $\exp[-j\beta_s(\nu)f]$ در معادله بالا را می‌توان در مقایسه با جمله دوم نادیده گرفت، ویژگی‌های فرکانس AWG را می‌توان بصورت زیر بیان کرد.

$$E(\nu) = \sum_{l=1}^N c(l) \exp \left[-j(N-l)2\pi \frac{\nu}{\nu_{FSR}} \right] \quad (33.9)$$

اعتبار معادله فوق ابتدا باید با مقایسه پاسخ فرکانسی آن با انتگرال همپوشانی عددی شرح داده شده در بخش ۲.۳.۹ بررسی شود. شکل (۳۵.۹) پاسخ‌های فرکانسی AWG گوسی محاسبه شده توسط انتگرال همپوشانی عددی را با پاسخ فرکانس تحلیلی با استفاده از معادله (۳۲.۹) مقایسه می‌کند. مشخص است که پاسخ فرکانس تحلیلی به خوبی پاسخ AWG گوسی را در اطراف مرکز باند عبور تقریب می‌کند. از آنجایی که به ویژگی‌های فرکانس AWG در اطراف مرکز باند عبور علاقه‌مندیم، تأیید می‌شود که از معادله (۳۲.۹) می‌توان برای بررسی پاسخ فرکانسی و ویژگی‌های پاشندگی AWG‌های گوسی استفاده کرد.

سپس، اعتبار معادله (۳۳.۹) به پاسخ طیفی مسطح AWG مورد بررسی قرار خواهد گرفت. اصل عملکرد در پاسخ طیفی مسطح AWG در بخش ۹.۵.۱ توضیح داده خواهد



شکل ۳۷.۹: مشخصه پاشندگی رنگی AWG ۶۴ کاناله 100GHz بدون داشتن هر گونه نوسان دامنه یا فاز.

شد. می‌توانیم انتگرال همپوشانی عددی شرح داده شده در بخش ۲.۹ را به AWG مسطح اعمال کنیم. شکل (۳۶.۹) پاسخ‌های فرکانسی AWG مسطح نوع سینک^{۱۴} [۲۲] محاسبه شده توسط انتگرال همپوشانی عددی را با پاسخ فرکانس تحلیلی با استفاده از معادله (۳۳.۹) مقایسه می‌کند. اگرچه توافق به خوبی برای AWG گوسی نیست، می‌توانیم از معادله (۳۳.۹) استفاده کنیم. برای بررسی پاسخ فرکانسی و ویژگی‌های پاشندگی AWG مسطح باید در نظر داشته باشیم که پاسخ فرکانسی به دست آمده توسط معادله (۳۳.۹) هنگامی که آن را روی AWG‌های مسطح اعمال می‌کنیم، خطای جزئی دارد. به طور کلی، زمان تاخیر τ محیط انتقال توسط رابطه زیر داده می‌شود

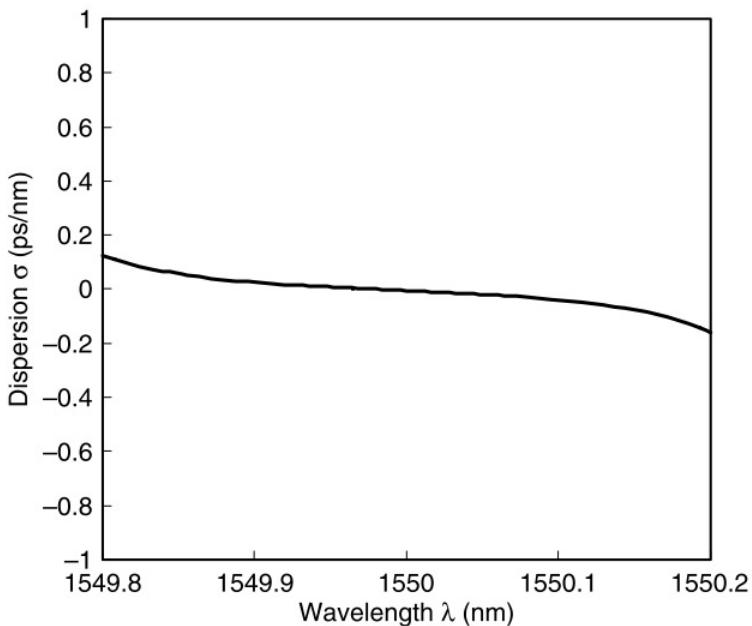
$$\tau = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\nu} [\arg(E)] = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{E'(\nu)}{E(\nu)} \right] \quad (34.9)$$

که در آن $E(\nu)$ پاسخ فرکانسی محیط و $\operatorname{Im}[E]$ قسمت موهومنی آرگومان را نشان می‌دهد. پاشندگی رنگی σ با مشتق‌گیری نسبت به طول موج به دست می‌آید (به معادلات (۱۱۸.۳) و (۱۴۳.۳) رجوع کنید).

$$\sigma = \frac{d\tau}{d\lambda} \quad (35.9)$$

در این صورت پاشندگی AWG با قرار دادن پاسخ فرکانسی $E(\nu)$ (معادله ۳۳.۹) در معادلات (۳۴.۹) و (۳۵.۹) به دست می‌آید.

^{۱۴}Sinc



شکل ۳۸.۹: مشخصه پاشندگی رنگی AWG ۶۴ کanalه 100 GHz با داشتن نوسانات دامنه سینوسی با دامنه $\delta c = 0.003$ و نیم تناوب $\Lambda = N/5$

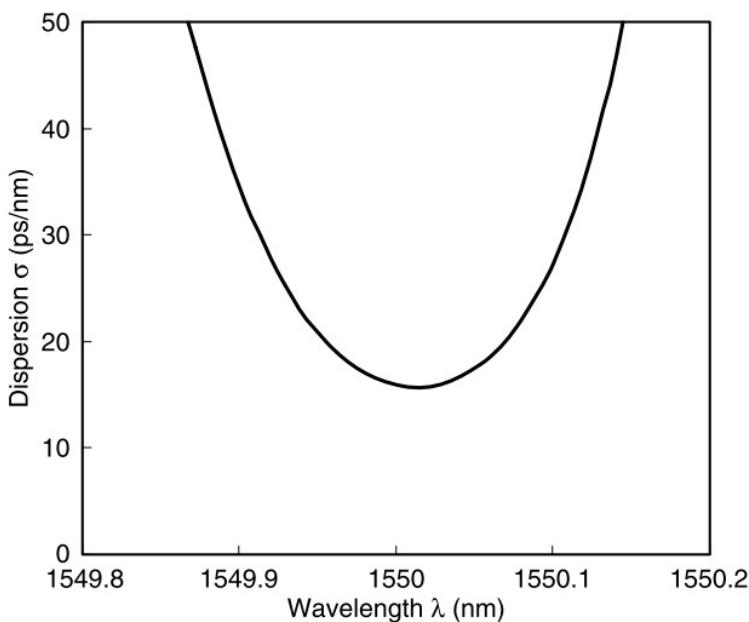
ابتدا، پاشندگی AWG بدون هیچ گونه نوسانات دامنه یا فاز بررسی شده است. شکل (۳۷.۹) ویژگی‌های پاشندگی رنگی AWG گوسی ۶۴ کanalه و 100 GHz را بدون داشتن هیچ گونه نوسانات دامنه یا فاز نشان می‌دهد. مشخص است که هیچ پاشندگی (در حد دقیق تحلیل عددی) در AWG گوسی وجود ندارد. بر خلاف AWG‌های گوسی، برخی از انواع AWG‌های پاسخ مسطح دارای پاشندگی ذاتی بر اساس سازوکار گسترش باند عبور هستند. پاشندگی در AWG‌های مسطح در بخش ۱.۵.۹ توضیح داده خواهد شد.

در ادامه، پاشندگی ناشی از نوسانات دامنه در موجبرهای آرایه بررسی خواهد شد. مشابه تجزیه و تحلیل در بخش ۱.۴.۹، پاسخ فرکانسی AWG دارای نوسانات دامنه سینوسی با دامنه δc و نیم دوره Λ با استفاده از معادله (۳۳.۹) بیان شده است.

$$E(\nu) = \sum_{l=1}^N \left[c(l) + \delta c \cdot \sin \left(l \frac{\pi}{\Lambda} \right) \right] \exp \left[-j(N-l) 2\pi \frac{\nu}{\nu_{FSR}} \right] \quad (36.9)$$

ویژگی‌های پاشندگی رنگی AWG گوسی ۶۴ کanalه و 100 GHz گیگاهرتز که دارای نوسانات دامنه سینوسی با دامنه $\delta c = 0.003$ و نیم دوره $\Lambda = N/5$ در شکل (۳۸.۹) نشان داده شده است. مشخص است که نوسانات دامنه در موجبرهای آرایه هیچ پاشندگی قابل توجهی در AWG‌ها ایجاد نمی‌کند.

در ادامه، پاشندگی ناشی از نوسانات فاز در موجبرهای آرایه بررسی خواهد شد. پاسخ فرکانسی AWG دارای نوسان فاز سینوسی با دامنه δc و نیم دوره Λ با استفاده از معادله‌های



شکل ۳۹.۹: مشخصه پاشندگی رنگی AWG ۶۴ کاناله 100GHz با داشتن نوسانات فاز سینوسی با دامنه $\delta n = 2 \times 10^{-5}$ و نیم تناوب $\Lambda = N/3$

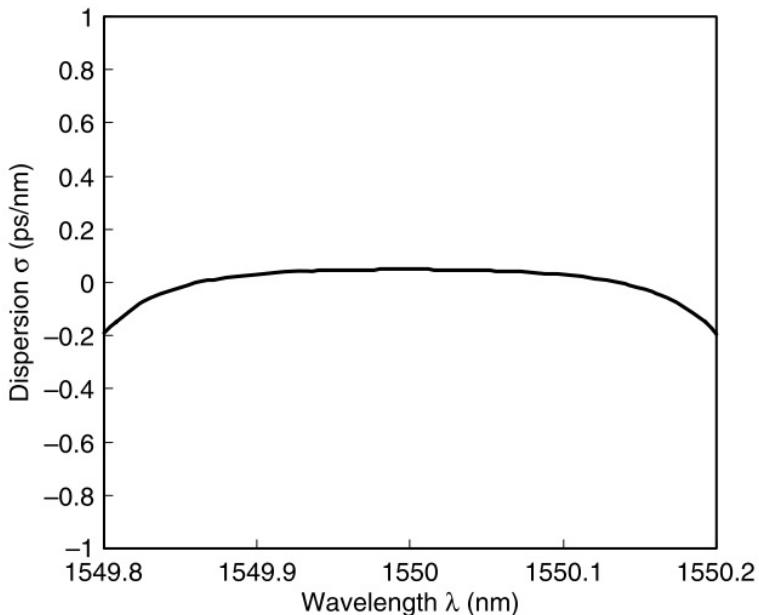
(۳۶.۹) و (۳۳.۹) بیان می‌شود:

$$E(\nu) = \sum_{l=1}^N c(l) \exp \left[-j(N-l) \left(2\pi \frac{\nu}{\nu_{FSR}} + \phi_l \right) \right] \quad (۳۷.۹)$$

$$\phi_l = 2\pi \frac{\nu}{\nu_{FSR}} \frac{\delta n}{n_c} \sin \left(l \frac{\pi}{\Lambda} \right) \quad (۳۷.۹\text{ب})$$

با قرار دادن معادله (۳۵.۹) در (۳۷.۹) ویژگی‌های پاشندگی AWG نوسانات فاز را می‌دهد. شکل (۳۹.۹) ویژگی‌های پاشندگی رنگی AWG گوسی ۶۴ کاناله 100GHz را نشان می‌دهد که دارای نوسان فاز با دامنه $\delta n = 2 \times 10^{-5}$ و نیم دوره $\Lambda = N/3$ است. پراکندگی رنگی ناشی از نوسان فاز بهنوع نوسانها بستگی دارد. اگرچه، نوسان فاز با $\delta n = 2 \times 10^{-5}$ و $\Lambda = N/3$ پراکندگی $\sim 16\text{ps/nm}$ را به همراه دارد، نوسان با $\delta n = 5 \times 10^{-5}$ و $\Lambda = N/3$ باعث پاشندگی $\sim 16\text{ps/nm}$ می‌شود. از آنجایی که تأثیر نوسان از باند عبور مرکزی برای مؤلفه فرکانس مکانی بالاتر (دوره کوچکتر) دور است، همانطور که در شکل (۴۰.۹) نشان داده شده است، پاشندگی ناچیز می‌شود. شکل (۴۰.۹) ویژگی‌های پاشندگی AWG را نشان می‌دهد که دارای نوسان فاز با دامنه $\delta n = 1 \times 10^{-6}$ و نیم دوره $\Lambda = N/10$ است.

در نهایت، وابستگی پاشندگی به فاصله کanal AWG بررسی خواهد شد. ویژگی‌های پاشندگی AWG هایی که دارای نوسانات فاز $\delta n = 2,5 \times 10^{-6}$ با $\Lambda = N/3$ برای سه نوع AWG با فاصله کanal 100 ، 50 و 25 گیگاهرتز هستند که در شکل‌ها بترتیب (۴۱.۹)-(الف)، (ب) و (ج) نشان داده شده است. پاشندگی در مرکز باند عبور به ترتیب 16ps/nm ، 1ps/nm و $1/9\text{ps/nm}$ است.



شکل ۴۰.۹: ویژگی‌های پاشندگی رنگی AWG که دارای نوسان فاز با دامنه $\delta n = 1 \times 10^{-6}$ و نیم $\Delta = N/10$ تناوب

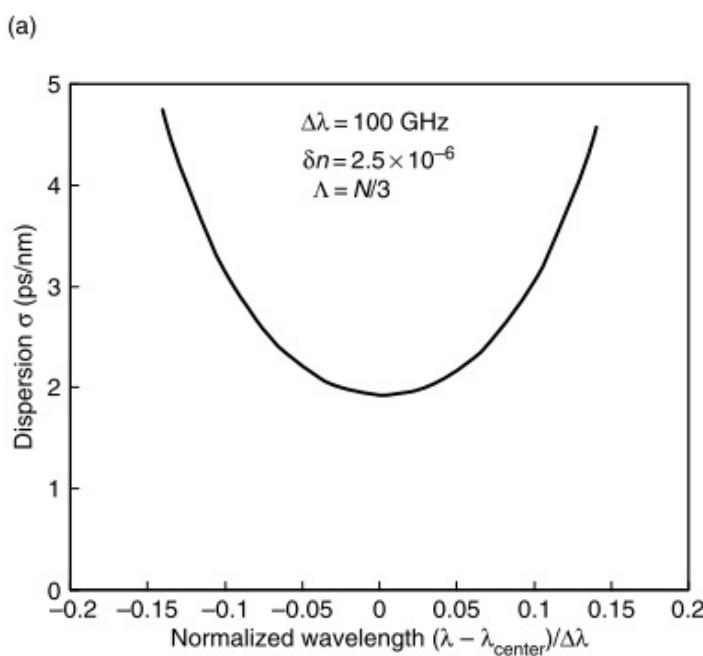
و $129.5 \text{ ps}/\text{nm}$ برای فاصله کanal‌های 100 ، 50 و 25 گیگاهرتز است. از این نتایج مشخص است که پاشندگی زمانی که فاصله کanal نصف شود، حدود 8 برابر بزرگتر می‌شود. به عبارت دیگر، پاشندگی متناسب با $(\text{فاصله کanal})/10$ است. بنابراین، برای کوچک نگه داشتن پاشندگی، بهویژه در AWG‌های با فاصله کم، به کنترل ضریب شکست موثر بسیار دقیقی نیاز است.

۵.۹ عملکرد موجبرهای آرایه‌ای

۱.۵.۹ پاسخ طیف مسطح AWG

از آنجایی که جابجایی موقعیت کانونی x نسبت به طول موج تقریباً ثابت است (معادله ۵.۹)، افت انتقال AWG گوسی به طور یکنواخت در اطراف طول موج مرکزی هر کanal افزایش می‌یابد. این محدودیت‌های سختی را برای تحمل طول موج دیودهای لیزری ایجاد می‌کند و نیاز به کنترل دقیق دما هم برای AWG و هم برای دیودهای لیزر دارد. علاوه بر این، از آنجایی که سیگنال‌های نوری از طریق چندین فیلتر در شبکه‌های حلقه/گذرگاه WDM منتقل می‌شوند، عرض باند عبور تجمعی هر کanal بسیار باریک‌تر از فیلتر نک مرحله‌ای AWG می‌شود. بنابراین، پاسخ‌های طیفی مسطح و گسترده برای مالتی‌پلکسرهای AWG مورد نیاز است.

چندین رویکرد برای صاف کردن باندهای عبور AWG‌ها پیشنهاد شده است [۲۷، ۲۲].

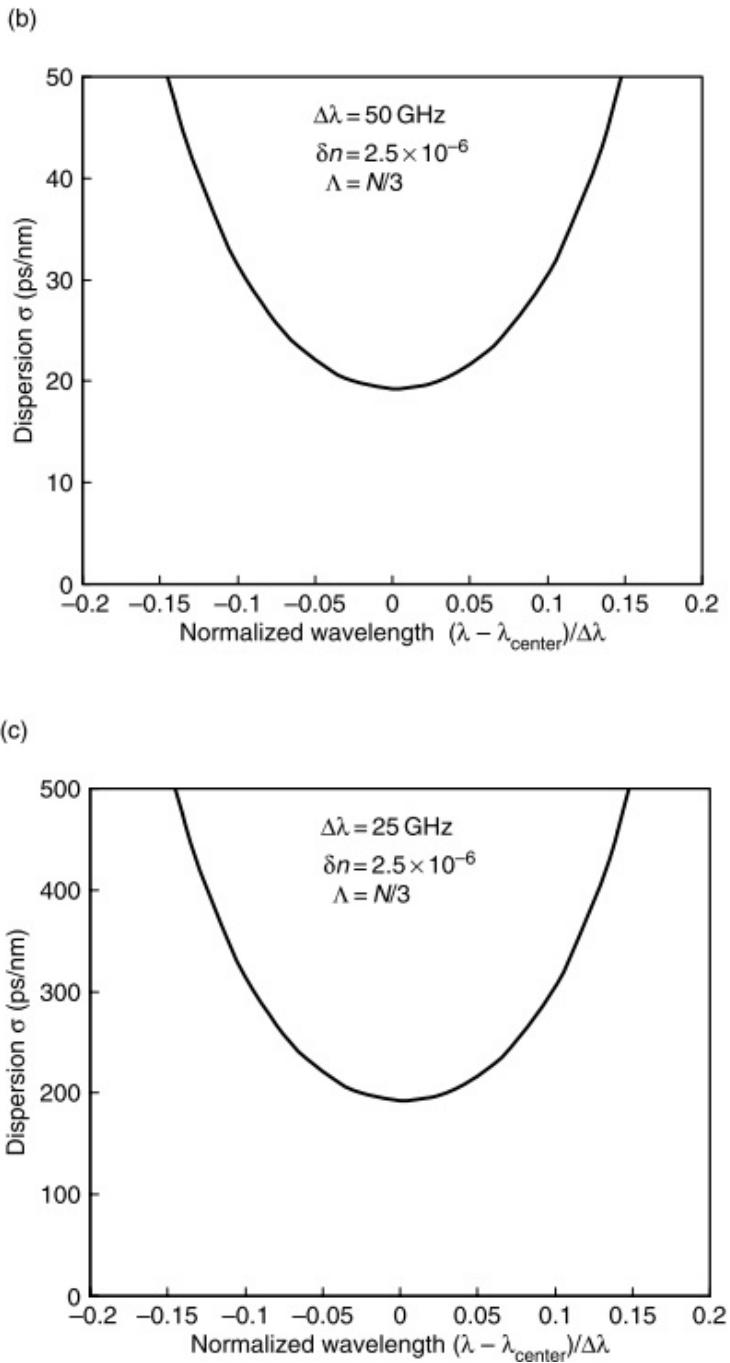


شکل ۴.۱.۹: ویژگی‌های پاشندگی رنگی AWG‌ها که دارای نوسان فاز 2.5×10^{-6} با $\Lambda = N/3$ برای سه نوع AWG با فاصله 100 GHz الف.

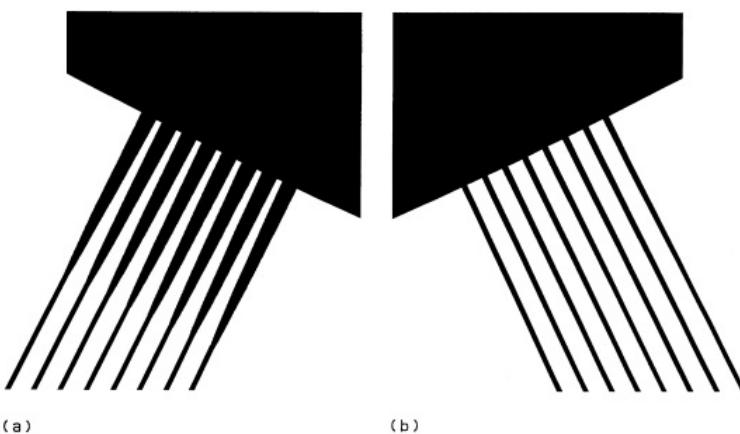
یکی ایجاد توزیع میدان الکتریکی مسطح در موجبر ورودی است. چون AWG یک دستگاه تصویربرداری است، میدان الکتریکی مسطح در صفحه خروجی بازتولید می‌شود. انتگرال همپوشانی میدان مسطح با حالت عادی محلی گوسی پاسخ طیفی مسطح می‌دهد. بوق‌های موجبر سهمی ^{۱۵}[۲۳] یا کوپله‌های تداخل چند مودی 2×1 ^{۱۶}[۲۴] برای ایجاد توزیع میدان الکتریکی مسطح در موجبر ورودی استفاده می‌شود. روش دوم مهندسی طراحی موجبر آرایه‌ای برای ایجاد میدان الکتریکی مسطح در صفحه خروجی است. در این مورد، میدان ورودی یک توزیع گوسی نرمال است. به‌طور عمده دو نوع روش وجود دارد. یکی ساختن یک پوش میدان الکتریکی سینک مانند در موجبرهای آرایه ^{۱۷}[۲۲] است. از آنجایی که نمایه میدان الکتریکی مرکز یک تصویر تبدیل فوریه از میدان الکتریکی در موجبرهای آرایه است، می‌توانیم توزیع میدان مسطح را در صفحه خروجی ایجاد کنیم. دیگری ایجاد دو نقطه کانونی در صفحه خروجی ^{۱۸}[۲۵] است. در اینجا، جهت مرکز نور موجبر آرایه‌ای به‌طور متناسب به‌دو موقعیت کانونی مجزا تغییر می‌کند. در این حالت، شکل میدان مسطح از دو پرتو گوسی تشکیل شده است.

برخی از تکنیک‌های مسطح سازی دیگر نیز وجود دارند که از اصول عملیاتی تا حدودی پیچیده استفاده می‌کنند ^{۱۹}[۲۶، ۲۷]. در این تکنیک‌ها، موقعیت ورودی پرتو به‌طور همزمان با تغییر طول موج سیگنال حرکت می‌کند. سپس، پرتو خروجی در یک موقعیت ثابت مستقل از طول موج در یک دهانه کانال قرار می‌گیرد. در اینجا این نوع AWG مسطح

^{۱۵}Parabolic waveguide horns



شکل ۴۱.۹: ادامه: (ب) فاصله کانال‌ها ۵۰ GHz و (ج) ۲۵ GHz



شکل ۴۲.۹: نمای بزرگ شده مرز مشترک بین (الف) موجبرهای ورودی و تیغه اول و (ب) تیغه دوم و موجبرهای خروجی معمولی.

نوع حرکت پرتو سنکرون نامیده می‌شود و در قسمت آخر قسمت توضیح داده خواهد شد.

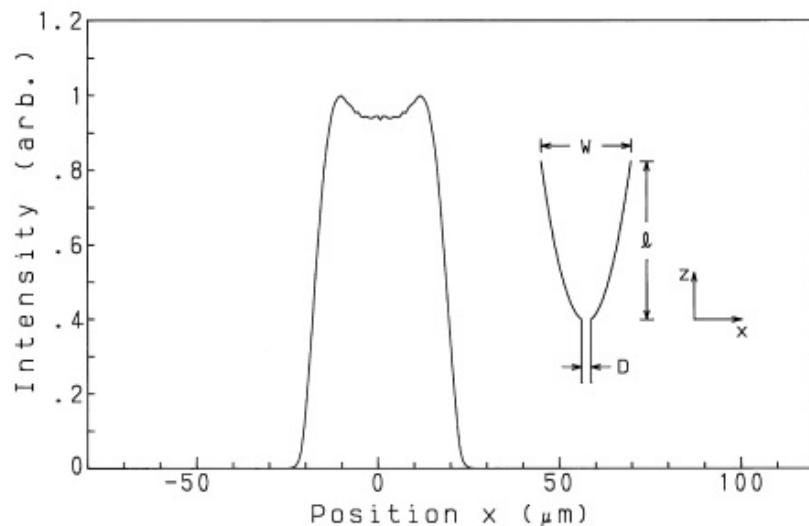
نوع سهموی AWG

شکل (۴۲.۹) نمای بزرگ شده مرز مشترک بین (الف) موجبرهای ورودی سهمی شکل و تیغه اول و (ب) تیغه دوم و موجبرهای خروجی معمولی را به ترتیب نشان می‌دهد. عرض بوق سهموی در امتداد جهت انتشار z توسط [۲۸] بدست می‌آید.

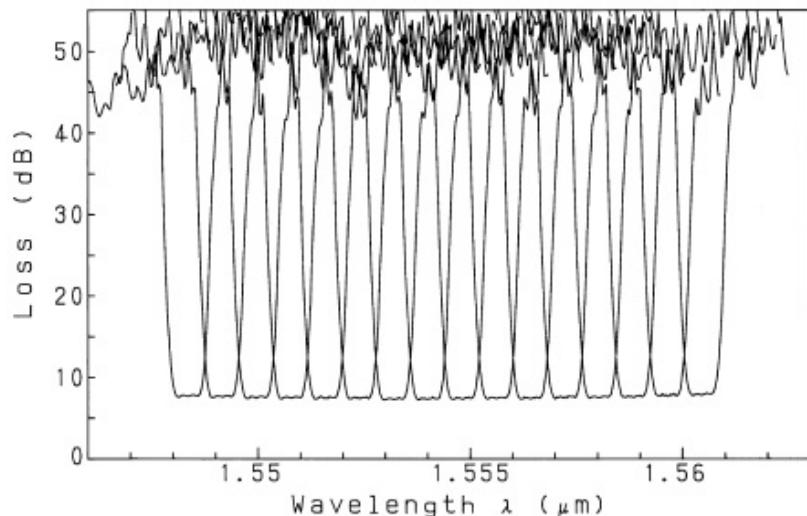
$$W(z) = \sqrt{2\alpha\lambda_g z + (2a)^2}, \quad (38.9)$$

که در آن α یک ثابت کمتر از واحد، $\lambda_g = \lambda/n_c$ طول موج در موجبر و $2a$ عرض هسته موجبر کانال است (شکل ۴۳.۹). در طول بوق مناسب $l = z$ کمتر از طول ستونی، توزیع شدت کمی دو قله همانطور که در شکل (۴۳.۹) نشان داده شده است به دست می‌آید. یک نمایه شدت نوری در حال سقوط گسترده و تیز توسط بوق موجبر سهموی قابل دستیابی است، که برای دستیابی به پهنهای باند بدون تخریب نزدیکترین خصوصیات همسنوائی مجاور کاملاً سودمند است. میدان گسترش یافته و دو قله بر روی ورودی یک موجبر خروجی با عرض هسته طبیعی تصویر می‌شود. انтегرال همپوشانی میدان مرکز با مود عادی محلی موجبر خروجی، پاسخ طیفی مسطح AWG را می‌دهد. شکل (۴۴.۹) خواص دیمالتی‌پلکس AWG فاصله 100GHz و ۱۶ کاناله را نشان می‌دهد که دارای بوقهای سهموی با $W = 40\mu\text{m}$ و $l = 800\mu\text{m}$ است. همسنوائی با کانالهای مجاور کمتر از -35dB و تلفات روی تراشه حدود 7.0 دسی‌بل است. میانگین پهنهای باند 1dB و 2dB به ترتیب $143/3$ و $100/6$ گیگاهرتز است.

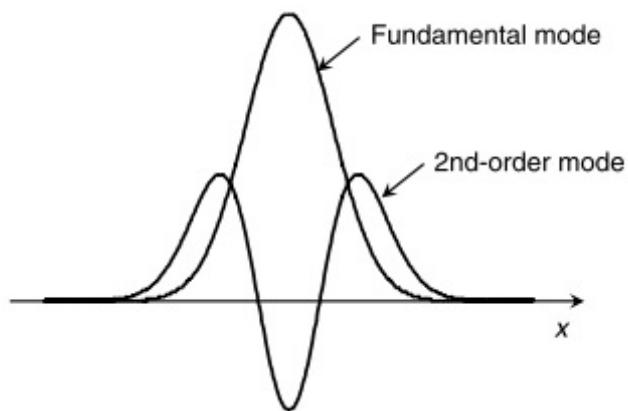
در AWG مسطح از نوع سهمی، توزیع میدان الکتریکی دو قله با تداخل مود اصلی و مود مرتبه دوم همانطور که در شکل (۴۵.۹) نشان داده شده است ایجاد می‌شود. به طور



شکل ۴۳.۹: نمای شدت با روش انتشار پرتو برای بوق سهموی با $l = 800 \mu m$ و $W = 40 \mu m$ محاسبه شده است. پیکربندی شماتیک درج شده بوق موجبر سهموی را نشان می‌دهد.



شکل ۴۴.۹: خواص دیمولتیپلکس موجبر آرایه‌ای ۱۶ کاناله، تحت فاصله $100 GHz$ با بوق سهموی $l = 800 \mu m$ و $W = 40 \mu m$

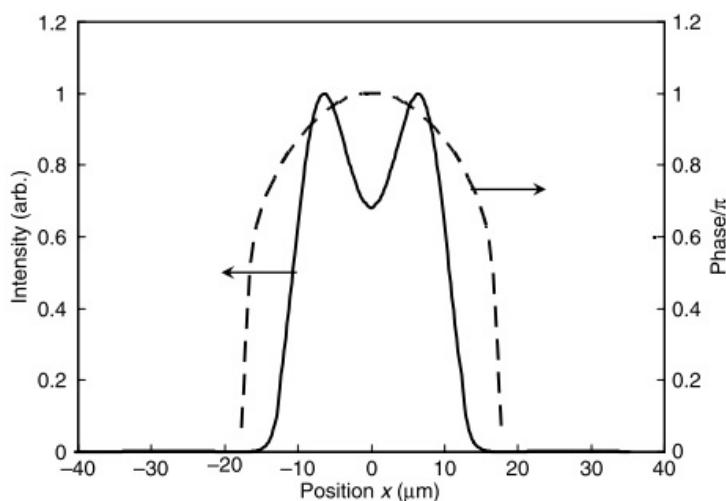


شکل ۴۵.۹: مود اصلی و مود مرتبه دوم در یک بوق موجبر سهموی.

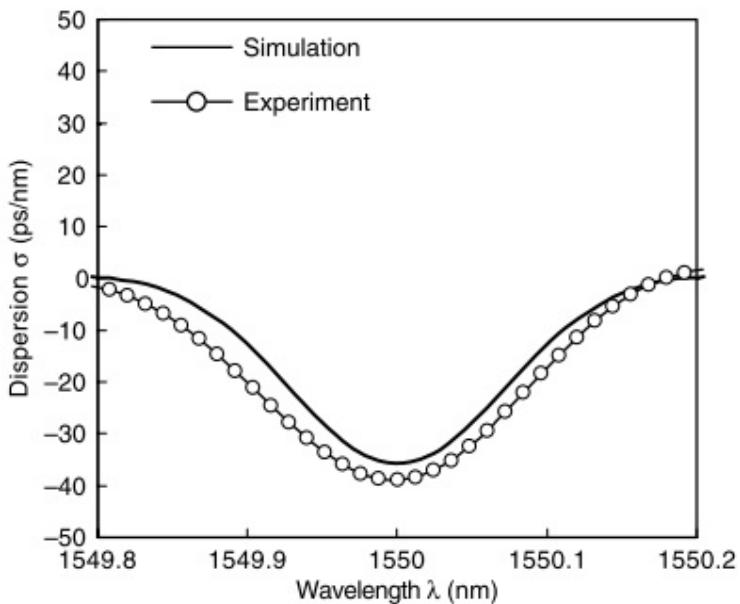
کلی، عقب ماندگی فاز مود اصلی و مود مرتبه دوم متفاوت است. بنابراین، فاز کل در انتهای بوق موجبر سهموی یک فاز یکنواخت نیست که در شکل (۴۶.۹) نشان داده شده است. در اینجا هندسه‌های بوق سهموی $W = 26.1\mu m$ و $l = 27.0\mu m$ هستند. توزیع غیر یکنواخت فاز در موجبر ورودی سهمی باعث عدم یکنواختی فاز در موجبرهای آرایه می‌شود. پاسخ فرکانسی AWG با توزیع فاز غیر یکنواخت به صورت زیر بیان شده است.

$$E(\nu) = \sum_{l=1}^N c(l) \exp \left[-j(N-l)2\pi \frac{\nu}{\nu_{FSR}} - j\theta_l \right] \quad (39.9)$$

که در آن θ_l فاز غیر یکنواخت در موجبر آرایه l را نشان می‌دهد. وقتی معادله بالا را



شکل ۴۶.۹: توزیع شدت و فاز در انتهای بوق موجبر سهموی با $l = 27.0\mu m$ و $W = 26.1\mu m$

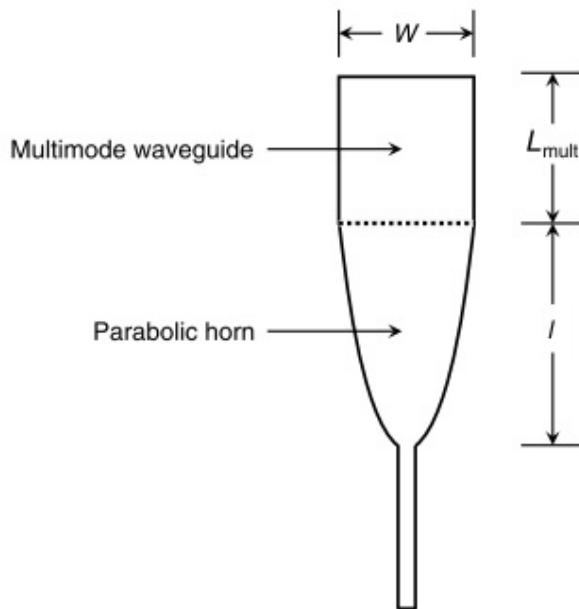


شکل ۴.۷.۹: مشخصات پاشندگی الف نظری ب آزمایشی یک AWG سهموی مسطح ۳۲ کاناله ۱۰۰ گیگاهرتز

با معادله (۴.۷.۹) مقایسه می‌کنیم، مشخص است که فاز غیر یکنواخت شبیه نوسان‌های ضریب شکست موثر در موجبرهای آرایه است. سپس، فاز غیر یکنواخت θ_0 تخمین زده می‌شود که باعث تخریب همشنواری و پاشندگی رنگی همانطور که در بخش ۴.۹ توضیح داده شد است. همان طور که در شکل (۴.۶.۹) نشان داده شده، چون دوره تغییرات فاز Λ ایجاد شده در بوق موجبر سهموی ($\Lambda \approx N$) بزرگ است، لوب جانبی ناشی از تغییر فاز خود را در مجاورت مرکز باند عبور نشان می‌دهد (به ۱.۴.۹ مراجعه کنید). در AWG‌های پاسخ فرکانس مسطح، از آنجایی که پهنهای باند عبور AWG از محلی که لوب کناری ظاهر می‌شود، گستردگر است، مولفه لوب کناری باعث تخریب همشنواری مضر نمی‌شود.

از سوی دیگر، پاشندگی رنگی زمانی ایجاد می‌شود که یک تغییر فاز در AWG وجود داشته باشد. همانطور که در بخش ۲.۴.۹ توضیح داده شد، تغییر فاز با مولفه فضایی کوچک (دوره بزرگ) باعث پاشندگی در نزدیکی مرکز باند عبور می‌شود. شکل (۴.۷.۹) مشخصات پاشندگی نظری و تجربی AWG مسطح ۳۲ کاناله و ۱۰۰ گیگاهرتز را نشان می‌دهد. علاوه بر این، معادله (۲۱۳.۳) حداکثر حد حاصلضرب طول در پاشندگی $L \cdot |\sigma|$ را برای سیستم انتقال با B گیگابیت بر ثانیه نشان می‌دهد. در سیستم ۴۰ گیگابیت بر ثانیه، $L \cdot |\sigma|$ باید کمتر از 25ps/nm در ناحیه طول موج $\lambda = 1/55\mu\text{m}$ باشد. در این صورت، چندین ده پاشندگی رنگی در خود فیلتر AWG مجاز نیست زیرا فیبر انتقال نیز دارای مقدار مشخصی پاشندگی رنگی است. بنابراین، کاهش پاشندگی در پاسخ فرکانس مسطح AWG بسیار مهم است.

عقب ماندگی‌های بین مودهای اصلی و مرتبه دوم در انتهای بوق موجبر سهموی را



شکل ۴۸.۹: بوق موجبر سهموی که دارای یک موجبر چند مودی مستقیم است.

می‌توان با افزودن یک موجبر چند مودی مستقیم [۲۹] همانطور که در شکل (۴۸.۹) نشان داده شده است، تنظیم کرد. در طول موجبر چند مودی مناسب، عقب ماندگی

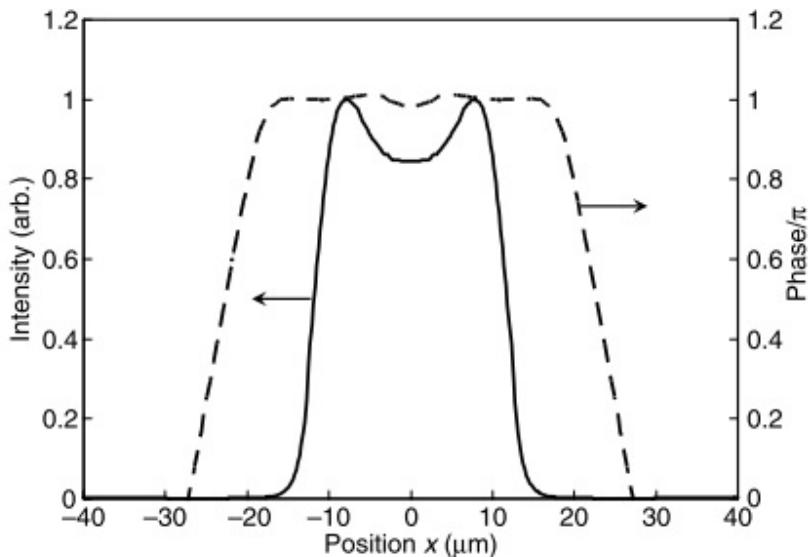
فاز مودهای اصلی و مرتبه دوم تقریباً برابر است. شکل (۴۹.۹) شدت نوری و توزیع فاز را در انتهای موجبر چند مودی مستقیم با $L_{multi} = 85\mu m$ نشان می‌دهد. در حالی که توزیع میدان الکتریکی دو قله حفظ می‌شود، توزیع فاز کل یکنواخت می‌گردد. مشخصات پاشندگی نظری و تجربی AWG مسطح از نوع سهمی با فرکانس 100 گیگاهرتز 32 کاناله با $W = 26.1\mu m$, $L_{multi} = 85\mu m$ و $l = 270\mu m$ در شکل (۵۰.۹) نشان داده شده است.

پاشندگی رنگی به مقدار ناچیز کاهش یافته است. انگرال همپوشانی میدان گسترش یافته و کمی دو قله با مود عادی محلی (LNM)^{۱۶} در موجبر مخروطی خروجی، پاسخ طیفی مسطح را همانطور که در شکل (۵۱.۹) نشان داده شده، می‌دهد. تلفات نظری مدل فعلی AWG از نوع سهمی حدود $4/5$ دسی بل است که شامل (الف) افت جذب نور ناقص در تیغه اول (حدود 85% دسی بل)، (ب) تلفات لبه جانبی که در شکل (۱۹.۹) نشان داده شده (حدود 85% دسی بل) است. () و (ج) از دست دادن عدم تطبیق میدان بین میدان متتمرکز و LNM (حدود $2/8$ دسی بل).

نوع سینک AWG

تأیید شده است که برای به دست آوردن یک پاسخ طیفی مسطح، لازم است که نمایه میدان الکتریکی گستردۀ شده در صفحه کانونی (مرز مشترک بین تیغه دوم و موجبرهای

^{۱۶}Local Normal Mode (LNM)



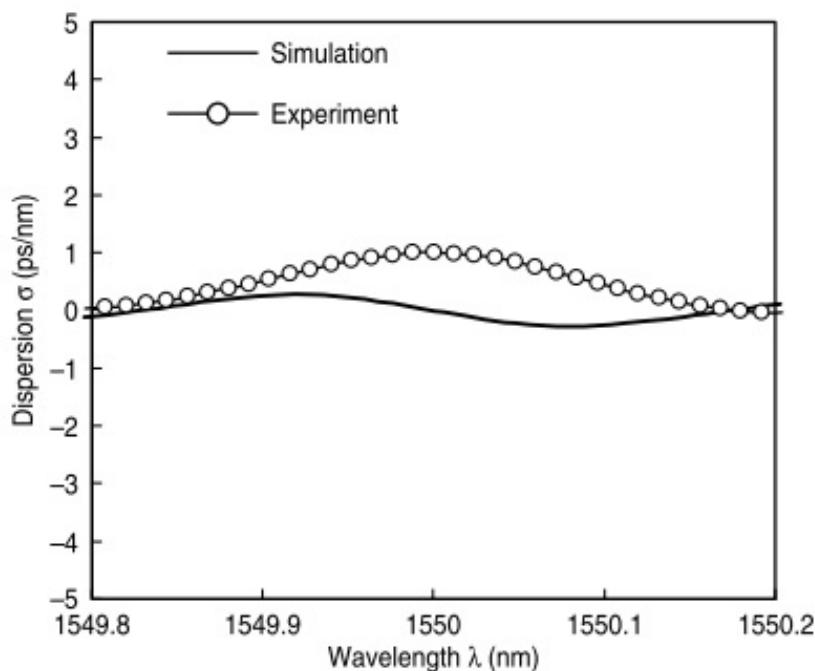
شکل ۴۹.۹: توزیع شدت و فاز در انتهای موجبر چند مود مستقیم با $L_{multi} = 85\mu m$

خروجی) تولید شود. از آنجایی که شکل میدان الکتریکی در صفحه کانونی تبدیل فوریه میدان در روزنخ خروجی آرایه (مرز مشترک بین موجبر موج آرایه و تیغه دوم) است، چنین نمایه میدان گستردگی‌ای تواند زمانی ایجاد شود که میدان الکتریکی در روزنخ خروجی آرایه مطابقت داشته باشد. یک توزیع $\sin(\frac{\pi}{4})$ است که در امتداد روزنخ خروجی آرایه اندازه‌گیری می‌شود (شکل ۴۹.۹). در موجبر ورودی از موجبر مخروطی معمولی استفاده می‌شود. در این صورت، توزیع پوش گوسی در مرز مشترک بین تیغه اول و موجبرهای آرایه برانگیخته می‌شود. به منظور ایجاد توزیع میدان الکتریکی پوشی سینک مانند، تلفات مناسب و تاخیر فاز به موجبرهای مربوطه اضافه می‌شود. شکل (۴۹.۹) توزیع پوش گوسی (خط نقطه چین)، توزیع میدان الکتریکی پوش سینک مانند (خط جامد) و تاخیر فاز اضافی (نقطه و خط شکسته) را در AWG ۶۴ کاناله $100\text{ }\mu\text{m}$ گیگاهرتز نشان می‌دهد. تلفات اضافی با ایجاد شکاف موجبر یا انحراف موجبر در موجبر آرایه محقق می‌شود. تغییر فاز مثبت یا منفی π با طولانی‌تر یا کوتاه‌تر کردن موجبر آرایه‌ای با مقدار $(2n_c/\lambda)$ محقق می‌شود.

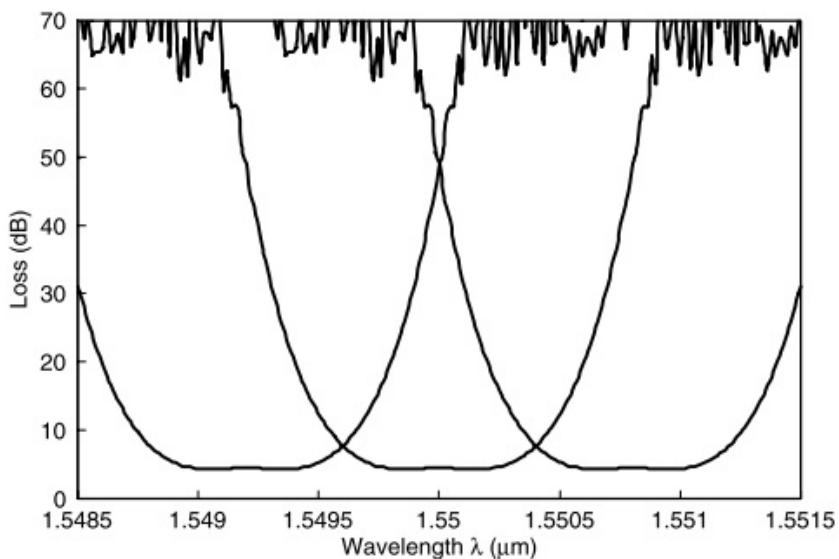
توزیع میدان الکتریکی سینک مانند تولید شده در شکل (۴۹.۹) نشان داده شده است. نمایه‌های میدان الکتریکی در موجبرهای آرایه محیطی کوتاه شده‌اند زیرا توزیع سینک مانند با نمایه گوسی اصلی تعیین می‌شود. توزیع میدان الکتریکی متمرکز با استفاده از معادله (۴۹.۹) به دست می‌آید.

$$E(x) = \sum_{l=1}^N c(l) \exp[-j\Omega(l)], \quad (49.9)$$

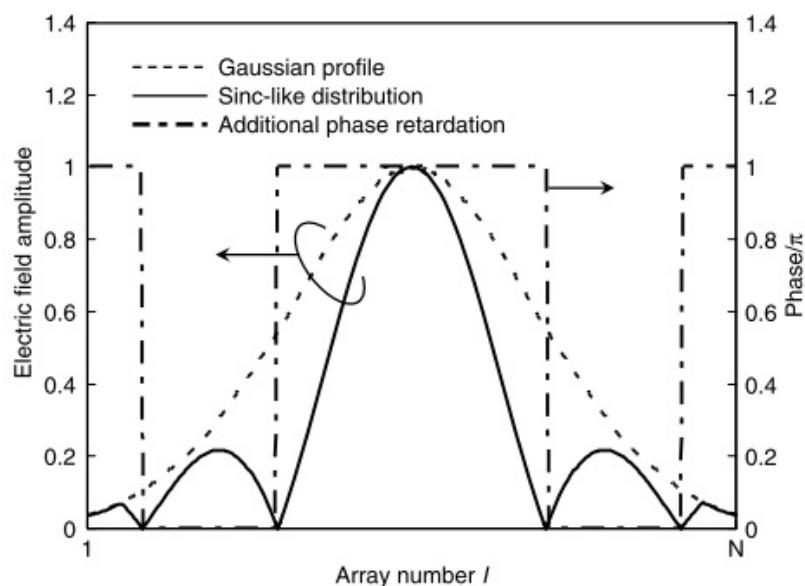
$$c(l) = s(l)g(\hat{\rho}_k) \cos(\sigma_l), \quad (49.9)$$



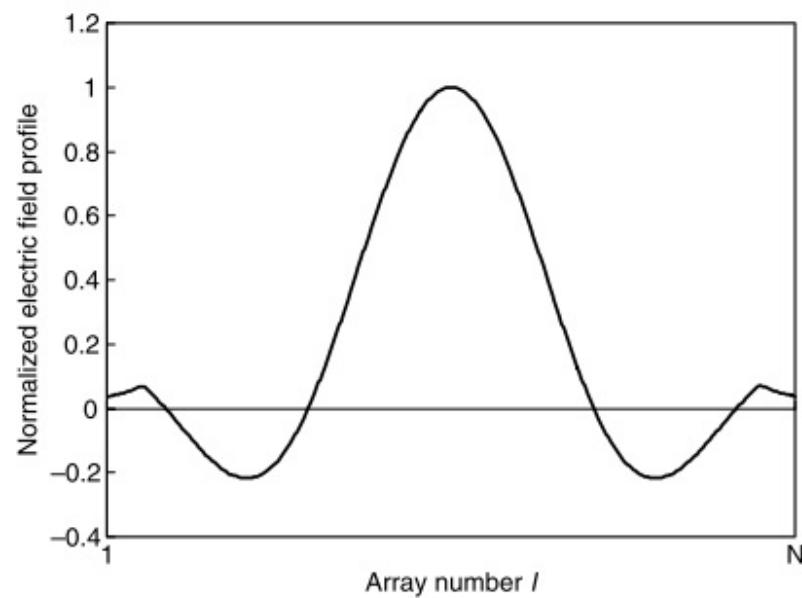
شکل ۵۰.۹: مشخصات پاشندگی نظری و تجربی AWG مسطح سه‌می با فرکانس ۱۰۰ گیگاهرتز
 $L_{multi} = 85\mu m$ و $l = 270\mu m$ و $W = 261\mu m$ ۳۲ کاناله با



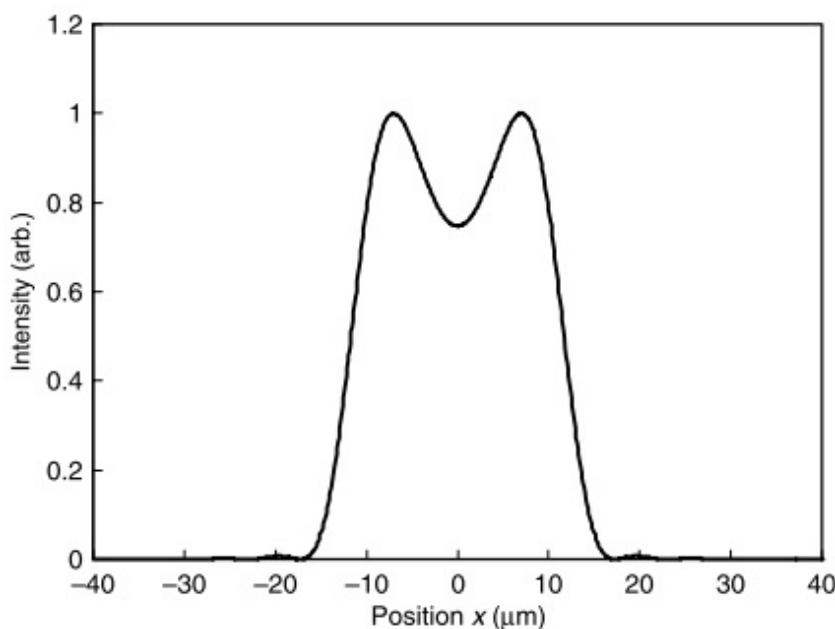
شکل ۵۱.۹: پاسخ طیفی نظری و تجربی AWG نوع سه‌می با فرکانس ۱۰۰ گیگاهرتز ۳۲ کاناله.



شکل ۵.۲.۹: توزیع پوش گوسی (خط نقطه چین)، توزیع میدان الکتریکی شکل پوش سینک مانند (خط جامد) و تاخیر فاز اضافی (نقطه و خط شکسته)



شکل ۵.۳.۹: توزیع میدان الکتریکی سینک مانند تولید شده.

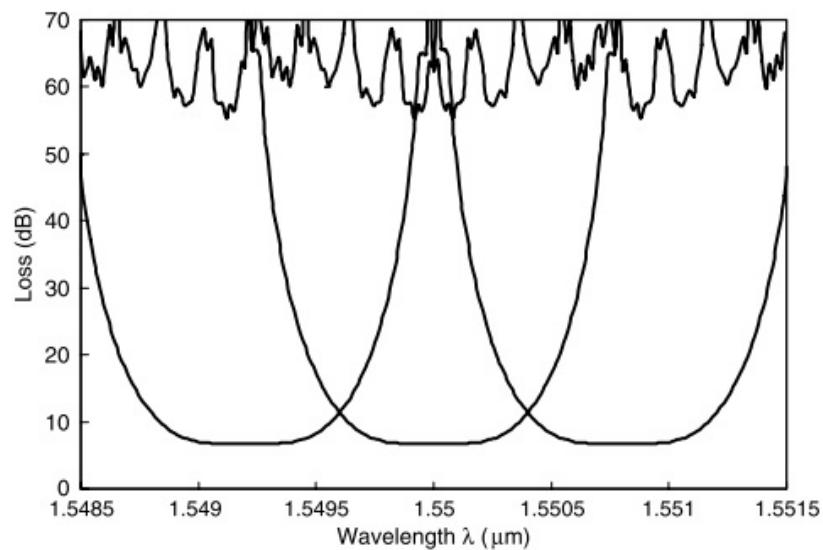


شکل ۵۴.۹: توزیع میدان الکتریکی در مرز مشترک بین تیغه دوم و موجبرهای خروجی.

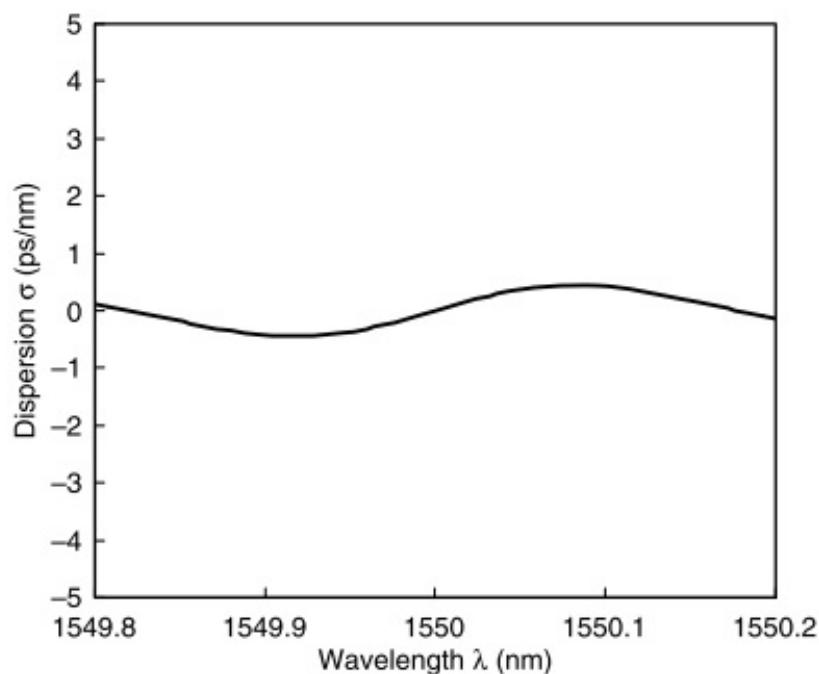
$$\Omega(l) = \beta_s \left(\hat{L}_{i,l} + L_{i,l} \right) + (N - l) \beta_c \Delta L \quad (40.9)$$

که در آن $(l)^s$ توزیع میدان سینک است که در شکل (۵۳.۹) ارائه شده است. شکل (۵۴.۹) توزیع میدان الکتریکی را در سطح مشترک بین تیغه دوم و موجبرهای خروجی نشان می‌دهد. انTEGRAL همپوشانی میدان گسترش یافته و کمی دو قله با LNM در موجبر مخروطی خروجی، پاسخ طیفی مسطح را همانطور که در شکل (۵۵.۹) نشان داده شده است، می‌دهد. تلفات نظری مدل فعلی AWG نوع سینک حدود ۶/۸ دسی‌بل است، که شامل (الف) افت جذب نور ناقص در تیغه اول (حدود ۰/۸۵ دسی‌بل)، (ب) تلفات اضافی در موجبر آرایه برای تشکیل نمایه سینک مانند، حدود ۲/۳ دسی‌بل)، (ج) افت لوب جانبی همانطور که در شکل (۱۹.۹) نشان داده شده است (حدود ۰/۸۵ دسی‌بل) و (د) از دست دادن عدم تطابق میدان بین میدان متترکز و LNM (حدود ۲/۸ دسی‌بل). در AWG تخت از نوع سهمی، هیچ تلفات اضافی در موجبرهای آرایه وجود ندارد. سپس AWG نوع سهمی از نظر اتلاف AWG بر AWG نوع سینک برتری دارد. با این حال، ویژگی‌های پاشندگی AWG نوع سینک به طور کلی نسبت به AWG نوع سهمی برتری دارد زیرا توزیع فاز AWG نوع سینک همانطور که در شکل (۵۲.۹) نشان داده شده یکنواخت است. شکل (۵۶.۹) ویژگی‌های پاشندگی AWG ۶۴ کاناله، ۱۰۰ گیگاهرتز نوع سینک را نشان می‌دهد.

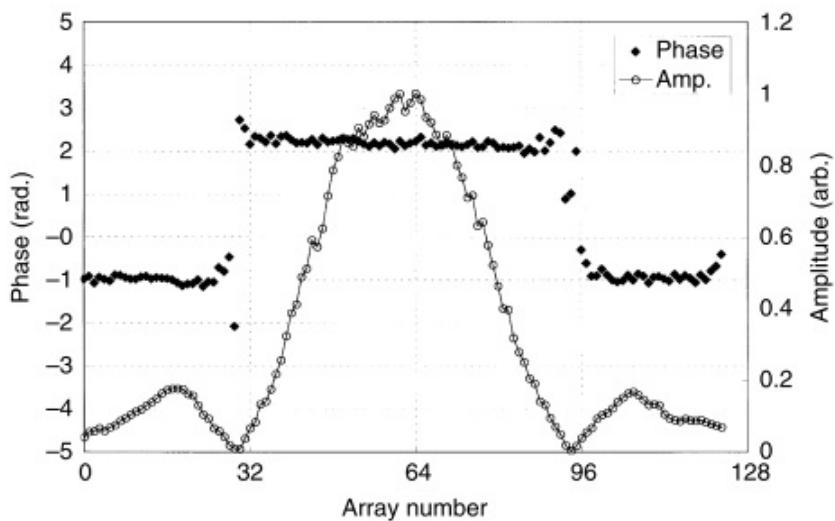
شکل (۵۷.۹) دامنه میدان الکتریکی اندازه‌گیری شده و تاخیرهای فاز نسبی را نشان می‌دهد (مقدار فاز اضافی اضافه شده به $L \times t$ که انشان دهنده موجبر آرایه /امین است) در پاسخ مسطح نوع سینک AWG اندازه‌گیری شده توسط طیف سنجی تبدیل فوریه با همدوس پایین [۴۰]. دامنه میدان الکتریکی و توزیع فاز سینک شکل بهوضوح با تکنیک



شکل ۵۵.۹: پاسخ طیف مسطح نظری AWG ۶۴ کاناله، ۱۰۰ گیگاهرتز نوع سینک.



شکل ۵۶.۹: ویژگی‌های پاشندگی AWG ۶۴ کاناله، ۱۰۰ گیگاهرتز نوع سینک



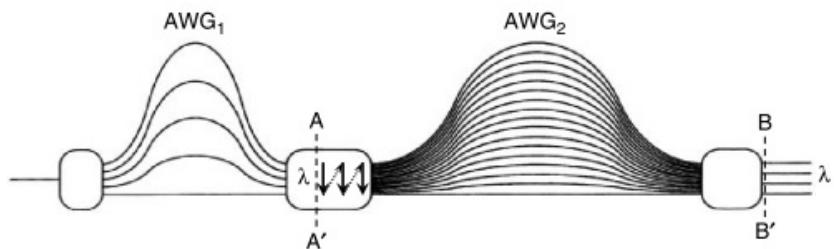
شکل ۵۷.۹: دامنه میدان الکتریکی و تاخیر فاز نسبی در AWG پاسخ مسطح نوع سینک مهندسی آرایه-موجبر در ک می‌شود.

نوع حرکت پرتو سنکرون AWG

در AWG‌های نوع حرکت پرتو سنکرون^{۱۷} (نوع SBM)^{۲۶}، موقعیت ورودی پرتو به طور همزمان با تغییر طول موج سیگنال حرکت می‌کند. در این صورت، پرتو خروجی در یک موقعیت ثابت مستقل از طول موج در یک دهانه کانال قرار می‌گیرد. شکل (۵۸.۹) پیکربندی شماتیک اولین نوع AWG نوع SBM را نشان می‌دهد^{۲۶}. دو AWG در پشت سر هم قرار گرفته‌اند و تصویر AWG اول منبع AWG دوم را تشکیل می‌دهد. تصویر اولین AWG روی خط نقطه چین AA' ایجاد شده است. محدوده طیفی آزاد (FSR)^{۱۸} AWG_۱ طوری طراحی شده است که برابر با فاصله کانال AWG_۱ باشد. تصاویر متمرکز برای AWG_۱ SBM با فاصله گیگاهرتز توسط شبیه‌سازی‌های BPM محاسبه می‌شوند. اولین AWG_۱ کاناله ۱۰۰ GHz و AWG دوم یک ۶۴ کاناله ۱۰۰ GHz است. شکل (۵۹.۹) تصاویر متمرکز (شدت نوری) را روی AA' و BB' برای سه مولفه طیفی $\delta\lambda = -0.2 nm, 0.0 nm, +0.2 nm$ نشان می‌دهد. سه قله در شکل (۵۹.۹) تصاویری برای سه مرتبه پراش هستند. هنگامی که طول موج در یک کانال کاهش می‌یابد (افزایش می‌یابد)، تصویر متمرکز AWG_۱ روی خط نقطه چین AA'، همانطور که در شکل (۵۹.۹)-(الف) نشان داده شده، به سمت بالا (پایین) حرکت می‌کند. هنگامی که تغییر طول موج $\delta\lambda$ نادیده گرفته می‌شود، تصویر دوم در خط BB' در جهت مخالف آن روی AA' حرکت می‌کند که در شکل (۵۹.۹)-(ب) مطابق معادله (۴.۹) نشان داده شده است. با این حال، زمانی که تغییر طول موج $\delta\lambda$ در نظر گرفته شود، نقطه متمرکز روی BB' مطابق معادله (۵.۹) به سمت بالا

^{۱۷}Synchronous-Beam-Movement-type (SBM-type)

^{۱۸}Free Spectral Range (FSR)



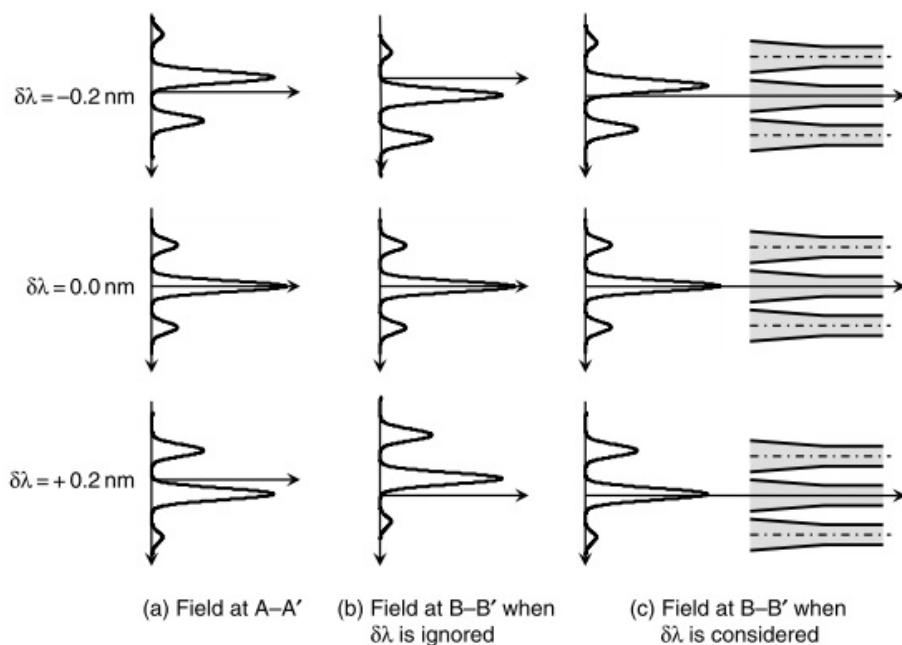
شکل ۵۸.۹: پیکربندی شماتیک نوع اول AWG نوع SBM

(پایین) حرکت می‌کند و نقطه اصلی همانطور که در شکل (۵۹.۹)-(ج) نشان داده شده است، در مرکز موجبر خروجی می‌ماند. سپس، حرکت پرتو در اولین AWG دقیقاً حرکت نقطه متمرکز در BB' را حذف می‌کند و ما را قادر می‌سازد تا پاسخ طیفی مسطح AWG را بدون ایجاد افزایش تلفات اضافی بدست آوریم.

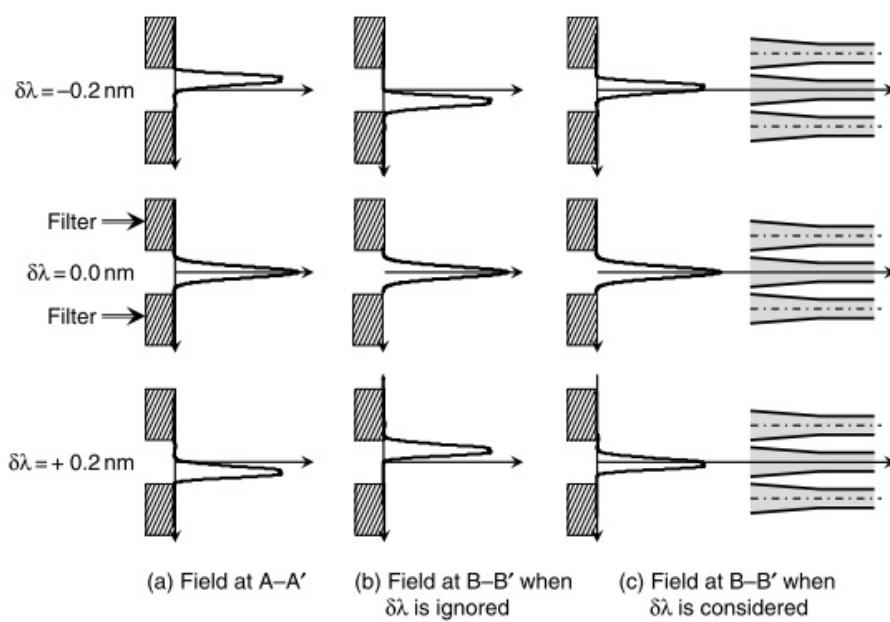
واضح است که دو قله مجاور باعث تخریب قابل توجهی از همشنوائی می‌شوند. بنابراین، فیلتری با عرض مناسب باید در صفحه کانونی AA' گنجانده شود تا دو تصویر مجاور را حذف کند. مناطق هاشور خورده در شکل (۶۰.۹) فیلترهایی را برای بهبود ویژگی‌های همشنوائی نشان می‌دهند. شکل (۶۰.۹) تصاویر متمرکز روی AA' و BB' را نشان می‌دهد که فیلترها برای سه مولفه طیفی $\pm 2nm$ و $\pm 10nm$ قرار می‌گیرند. انترگال همپوشانی میدان متمرکز (۶۰.۹)(ج) با LNM در موجبر مخروطی خروجی، پاسخ طیفی را همانطور که در شکل (۶۱.۹) نشان داده شده است، می‌دهد. تلفات نظری مدل فعلی AWG حدود ۴۰٪ دسی‌بل است که شامل (الف) تلفات ناقص جذب نور در تیغه اول AWG₁ (حدود ۸۵٪ دسی‌بل)، (ب) مسدود کردن افت مرتبه‌های پراش مجاور در تیغه دوم AWG₁ است. (حدود ۱۴۵٪ دسی‌بل)، (ج) از دست دادن ناقص جذب نور در اولین تیغه AWG₂ (حدود ۸۵٪ دسی‌بل)، و (د) افت لوب جانبی همانطور که در شکل (۱۹.۹) نشان داده شده است (حدود ۸۵٪ دسی‌بل).

شکل (۶۲.۹) پیکربندی شماتیک نوع دوم AWG را نشان می‌دهد [۲۷]. تداخل سنج نامتقارن ماخ-زندر (AMZ)^{۱۹} در پشت سر هم قرار گرفته‌اند و تصویر AMZ منبع AWG را تشکیل می‌دهد. تصویر AMZ روی خط نقطه چین AA' ایجاد شده است. AMZ طوری طراحی شده است که برابر با فاصله کانال AWG باشد. اختلاف طول مسیر در AMZ حدود 2.0 mm می‌باشد تا $FSR = 100\text{ GHz}$ محقق شود. اصل عملیاتی AWG نوع SBM مشابه مورد قبلي است. تصاویر کانونی شده برای ۶۴ کاناله و نوع 100 GHz AWG با فاصله $100\text{ }\mu\text{m}$ گیگاهرتز توسط شبیه‌سازی BPM محاسبه شده است. شکل (۶۳.۹) شدت میدان را بر روی AA' و BB' برای سه مولفه طیفی $\pm 2nm$ و $\pm 10nm$ نشان می‌دهد. در اینجا، شکاف موجبر و طول تزویج کننده ۳ دسی‌بل AMZ برای موجبر کانالی به ترتیب $1.5\mu\text{m}$ و $360\mu\text{m}$ که دارای $2a = 7.0\mu\text{m}$ و $2t = 6.0\mu\text{m}$ است. شکل (۶۳.۹)(ب) زمانی که تغییر طول موج $\delta\lambda$ نادیده گرفته شود، تصویر روی BB' را نشان می‌دهد. هنگامی که تغییر طول موج $\delta\lambda$ در نظر

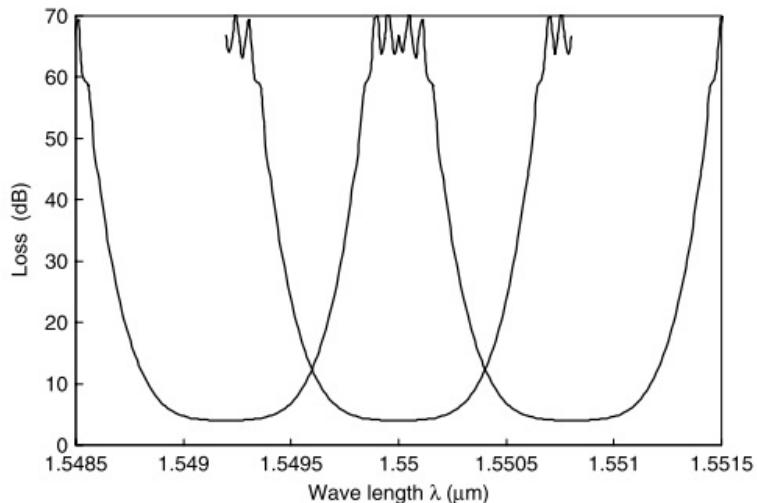
^{۱۹} Asymmetrical Mach-Zehnder (AMZ)



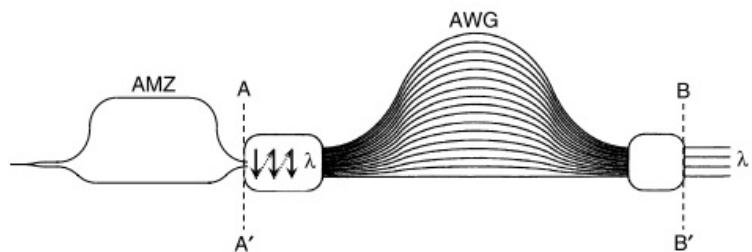
شکل ۵۹.۹: تصاویر متمرکز بر روی خطوط نقطه چین $A - A'$ و $B - B'$ برای سه مولفه طیفی بترتیب برای $\delta\lambda = -0.2\text{ nm}$, 0.0 nm و $+0.2\text{ nm}$



شکل ۶۰.۹: تصاویر متمرکز بر روی خطوط نقطه چین $A - A'$ و $B - B'$ برای سه مولفه طیفی بترتیب برای $\delta\lambda = -0.2\text{ nm}$, 0.0 nm و $+0.2\text{ nm}$ وقتی فیلتر قرار داده شده.

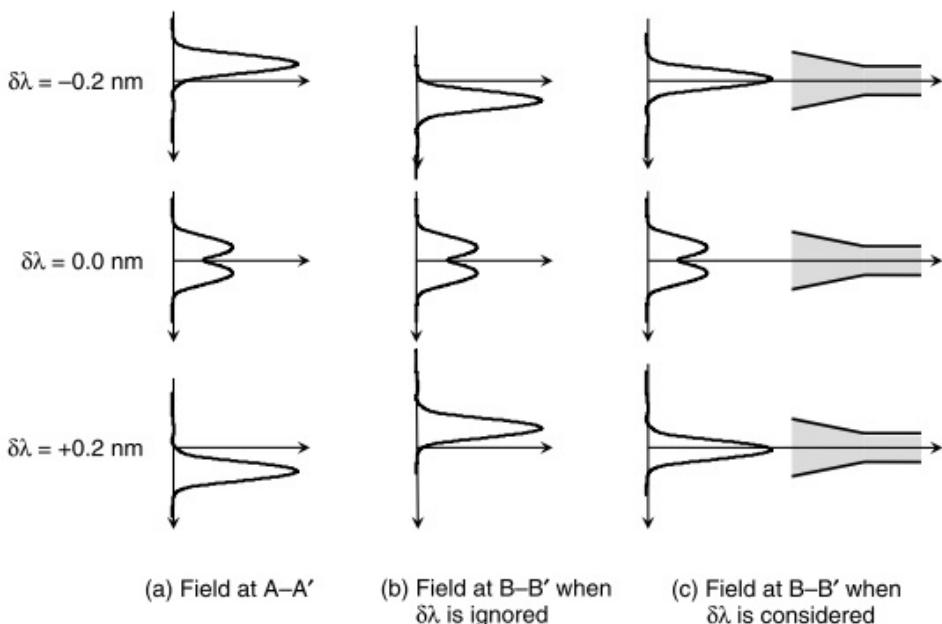


شکل ۶۱.۹: پاسخ طیف مسطح نظری اولین نوع AWG با فاصله ۱۰۰ گیگاهرتز.



شکل ۶۲.۹: پیکربندی شماتیک نوع دوم AWG نوع SBM

گرفته شود، تصویر همانطور که در شکل (۶۳.۹)-(ج) نشان داده شده است، در مرکز موجبر خروجی باقی می‌ماند. توزیع میدان در $m = 0.0\text{nm} = \delta\lambda$ اساساً دوبرابر پیک است، زیرا نور به هر هسته کوپلر ۳ دسی‌بل محلي است. سپس، پهناهی روزنه موجبر مخروطی خروجی به $14.5\mu\text{m}$ متر بهینه می‌شود تا بتواند نور دو قله را به درستی جذب کند. انтегрال همپوشانی میدان مرکز (۶۳.۹)-(ج) با LNM در موجبر مخروطی خروجی، پاسخ طبی را همانطور که در شکل (۶۴.۹) نشان داده شده است، می‌دهد. تلفات نظری مدل فعلی AWG حدود ۲/۵ دسی‌بل است که شامل (الف) تلفات ناقص جذب نور در تیغه اول (حدود ۰/۸۵ دسی‌بل) و (ب) افت عدم تطابق میدان بین میدان نوری و حالت عادی محلی (حدود ۰/۸ دسی‌بل)، و (ج) افت لوب جانبی همانطور که در شکل (۱۹.۹) نشان داده شده (حدود ۰/۸۵ دسی‌بل) است. تحریب همسنوائی در سطح ۳۵ دسی‌بل را می‌توان با استفاده از یک فیلتر مسدود کننده نور در صفحه AA' حذف کرد.

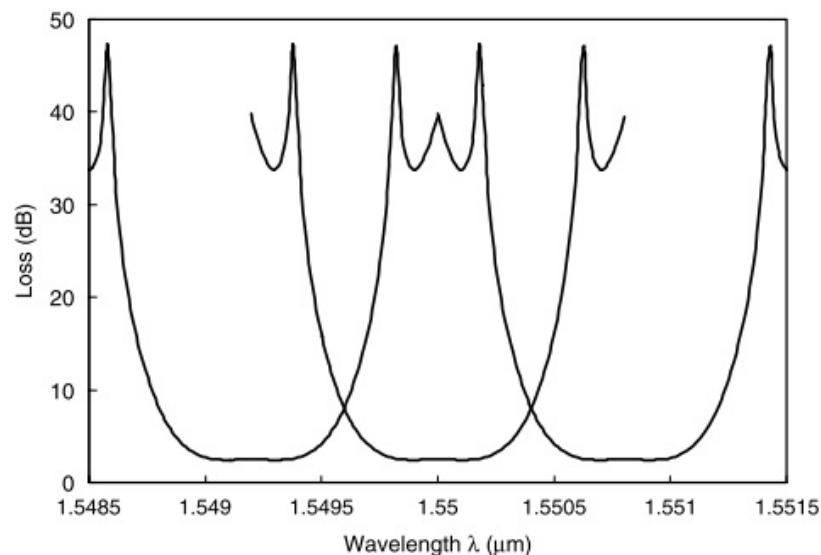


شکل ۶۳.۹: تصاویر متمرکز شده روی خط چین $A - A'$ و $B - B'$ برای بترتیب سه مولفه طیفی $\delta\lambda = -0.2\text{ nm}$, 0.0 nm و $+0.2\text{ nm}$

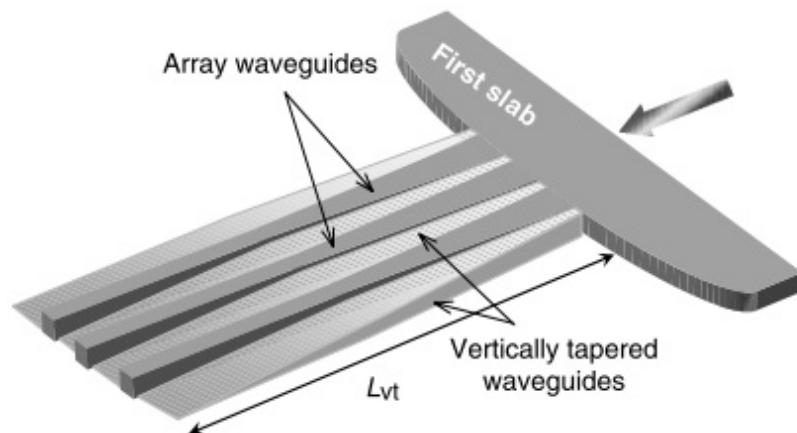
۲.۵.۹ کاهش تلفات در AWG

تلفات AWG به استثنای تلفات جذب و تلفات پراکنده‌گی در موجبر عمدتاً ناشی از تلفات ناقص جذب نور در مرز مشترک تیغه و آرایه است. تلفات ناقص جذب نور عمدتاً دو منشأ دارد. یکی تلفات سرریز است که در آن بخش محیطی FFP نمی‌تواند توسط موجبرهای آرایه گرفته شود زیرا نمی‌توانیم بین نهایت موجبر آرایه را قرار دهیم. دیگری عدم تطبیق میدان‌ها در تیغه و موجبرهای آرایه است. میدان در تیغه به طور کلی یک شکل گوسی گستردگی است. بر عکس، میدان در آرایه به هر موجبر محدود می‌شود. بنابراین، مگر اینکه میدان در تیغه به صورت آدیاباتیک به میدان موجبر آرایه تبدیل شود، عدم تطبیق میدان‌ها باعث تلفات ناقص جذب نور می‌شود. چندین تکنیک برای کاهش تلفات ناقص جذب نور در مرز مشترک تیغه و آرایه پیشنهاد شده است [۳۱، ۳۲، ۳۴]. در میان آنها، تکنیک عمودی مخروطی [۳۲] صاف‌ترین انتقال میدان الکتریکی را ارائه می‌دهد و به طور قابل توجهی تلفات عدم تطبیق میدان را کاهش می‌دهد.

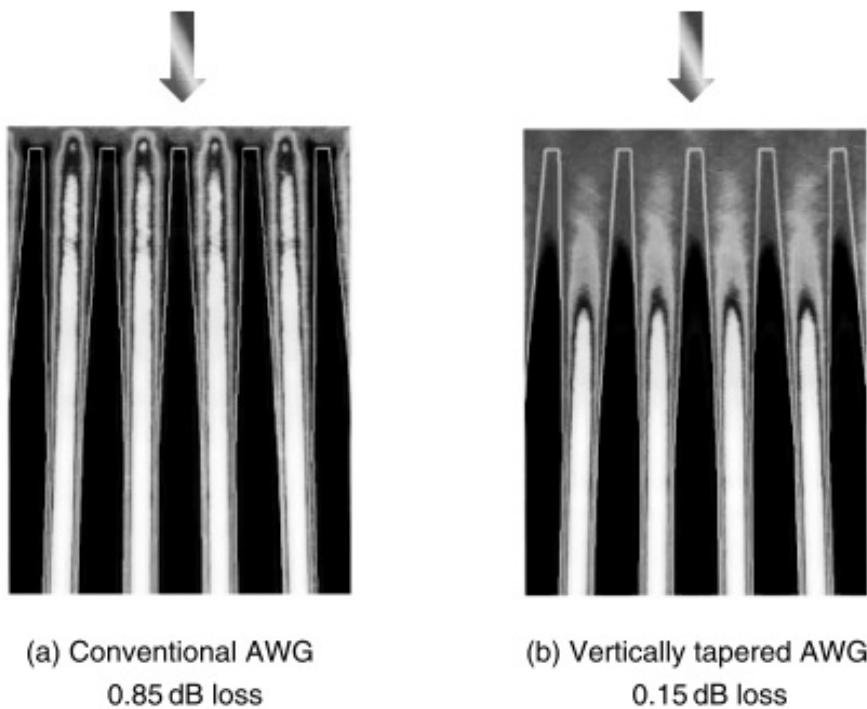
موجبرهای مخروطی عمودی بین موجبرهای آرایه‌ای و تیغه همانطور که در شکل (۶۵.۹) نشان داده شده است، تشکیل می‌شوند. موجبرهای مخروطی عمودی با رنگ خاکستری روش نشان داده شده‌اند. ارتفاع موجبر مخروطی عمودی مانند موجبرهای آرایه‌ای و موجبر تیغه‌ای در سطح مشترک است و به تدریج به صفر کاهش می‌یابد. طول ناحیه عمودی مخروطی $L_{vt} = 500 \sim 1000 \mu\text{m}$ است. مناطق موجبر مخروطی عمودی در همان فرآیند هسته با کنترل شرایط فوتولیتوگرافی و حکاکی ساخته می‌شوند. شکل‌های



شکل ۶۴.۹: پاسخ طیف مسطح نظری نوع دوم AWG با فاصله ۱۰۰ گیگاهرتز.



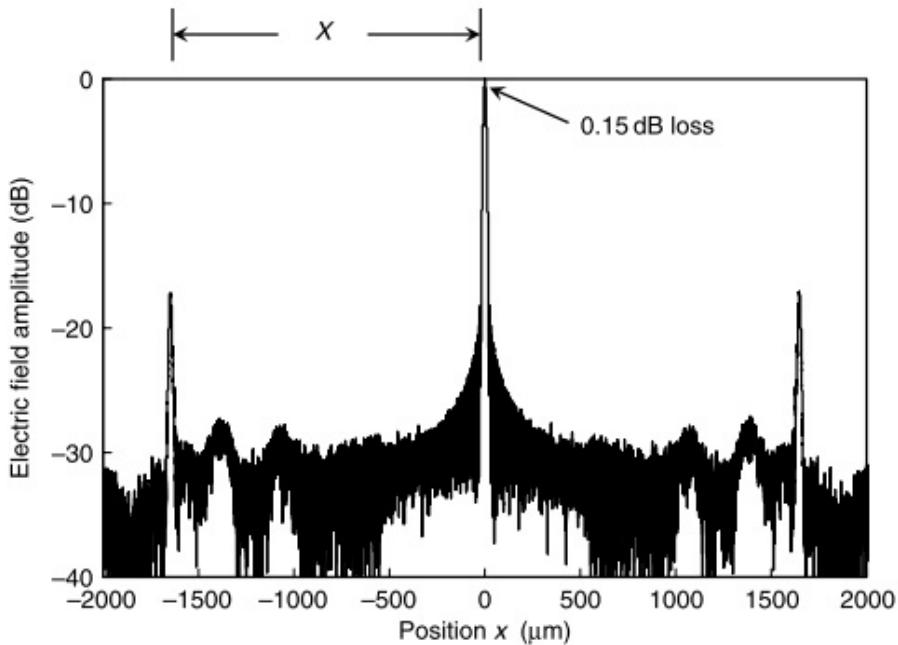
شکل ۶۵.۹: ساختار پشته هسته در حد فاصل بین تیغه اول و موجبرهای آرایه. موجبرهای مخروطی عمودی با رنگ خاکستری روشن نشان داده شده‌اند.



شکل ۶۶.۹: شبیه سازی BPM انتشار نور در (الف) AWG‌های معمولی و (ب) مخروطی عمودی در نزدیکی مرز مشترک اولین تیغه و موجبرهای آرایه‌ای.

(الف) و (ب) شبیه سازی های BPM انتشار نور را در AWG‌های ۶۴ کاناله ۱۰۰ گیگاهرتز معمولی و عمودی در نزدیکی مرز مشترک اولین تیغه و موجبرهای آرایه مقایسه می‌کنند. در AWG معمولی، تلفات عدم تطبیق میدان معمولی حدود ۰/۸۵ دسی بل است زیرا میدان نوری در تیغه اول با تغییر ناگهانی ساختار موجبر در مرز مشترک تیغه-آرایه مواجه می‌شود. از سوی دیگر، همانطور که در (ب) نشان داده شده است، میدان گوسی در ناحیه تیغه اول به‌آرامی (یا آدیاباتیک) به میدان نوری موجبر آرایه منفرد تبدیل می‌شود. تلفات عدم تطبیق میدان به حدود ۰/۱۵ دسی بل کاهش می‌یابد. کاهش تلفات توسط ساختار عمودی مخروطی معمولاً ۰/۷ دسی بل است. از آنجایی که AWG یک دستگاه غیرفعال و متقابل است، می‌توانیم بهبود تلفات ۰/۷ دسی بل دیگری را در ناحیه تیغه دوم بدست آوریم. شکل (۶۷.۹) توزیع میدان الکتریکی را در سطح مشترک بین تیغه دوم و موجبرهای خروجی نشان می‌دهد.

دو قله در $x \approx \pm 1600 \mu m$ نشان دهنده لوب‌های جانبی از مرتبه پراش مجاور ۱ است. وقتی سطح لوب کناری شکل (۶۷.۹) را با شکل (۱۹.۹) AWG معمولی مقایسه می‌کنیم، سطح لوب کناری از $-6dB$ به $-18dB$ کاهش می‌یابد. اتلاف لوب اصلی در مقایسه با افت در شکل (۱۹.۹) حدود ۰/۷ دسی بل بهبود می‌یابد. در مجموع، می‌توانیم کاهش تلفات در شکل (۶۷.۹) را بدست آوریم. شکل (۶۸.۹) ویژگی‌های آزمایشی دی‌مولتی پلکسینگ AWG با مخروطی عمودی را نشان می‌دهد. تلفات فیبر به فیبر AWG برابر $1/2$ دسی بل

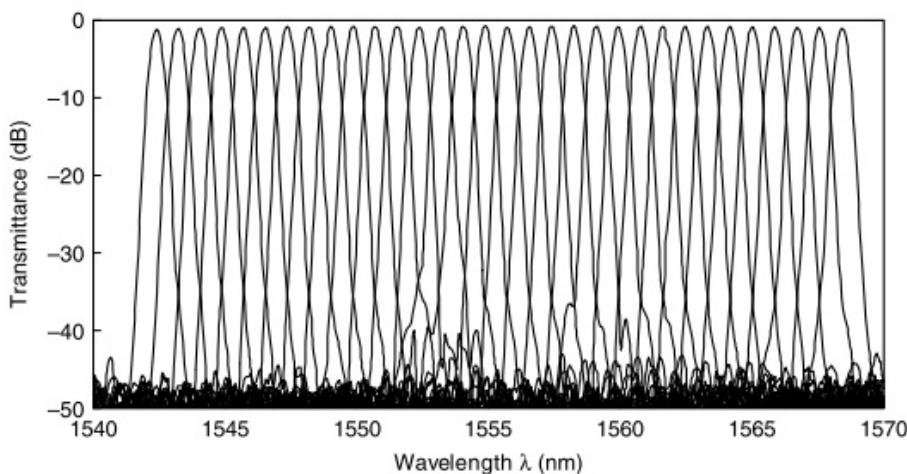


شکل ۶۷.۹: توزیع میدان الکتریکی در رابط بین تیغه دوم و موجبرهای خروجی در ۶۴ AWG کاناله و ۱۰۰ گیگاهرتز عمودی.

است که حدود $1/4$ دسیبل کمتر از AWG معمولی است. تلفات $1/2$ دسیبل شامل تلفات تزویج فیبر $0/6$ دسیبل در هر دو وجه است. بنابراین، تلفات روی تراشه (به استثنای تلفات کوپلینگ فیبر) $0/6$ دسیبل است، که در آن $0/3$ دسیبل تلفات نظری است همانطور که در شکل (۶۶.۹)-(ب) و (۶۷.۹) نشان داده شده، $0/3$ دسیبل افت انتشار موجبر است. همشنوائی -40 دسیبل در AWG مخروطی عمودی به دست آمده است. تایید شده است که ساختار عمودی مخروطی ویژگی‌های همشنوائی را بدتر نمی‌کند.

۳.۵.۹ فاصله کanal نابرابر AWG

برای تحقق سیستم‌های WDM با ظرفیت بسیار زیاد، DSF و فیلترهای طول موج با کارایی بالا مورد نیاز است. استفاده از فیبر با پاشندگی بسیار کم کارایی تولید امواج FWM را افزایش می‌دهد. در سیستم‌های WDM با کانال‌های مساوی، تمام اقلام محصول تولید شده توسط FWM در پهنای باند سیستم در فرکانس‌های کانال قرار می‌گیرند و در نتیجه باعث تخریب همشنوائی می‌شوند. با فاصله کانال نابرابر مناسب، می‌توان با جلوگیری از ایجاد امواج FWM در فرکانس‌های کانال، همشنوائی FWM را حذف کرد [۳۶، ۳۵]. در AWG‌ها حرکت پرتو متتمر Δx در تیغه دوم برای تغییر طول موج واحد $\Delta\lambda$ ، همانطور که در معادله (۵.۹) نشان داده شده، تقریباً ثابت است. بنابراین، مالتی‌پلکسر با فاصله نابرابر را می‌توان با تخصیص موجبر خروجی با فاصله فضایی نابرابر ساخت. شکل (۶۹.۹) نمای $\Delta x/\Delta\lambda = 25\mu m/nm$ AWG با کاناله ۸

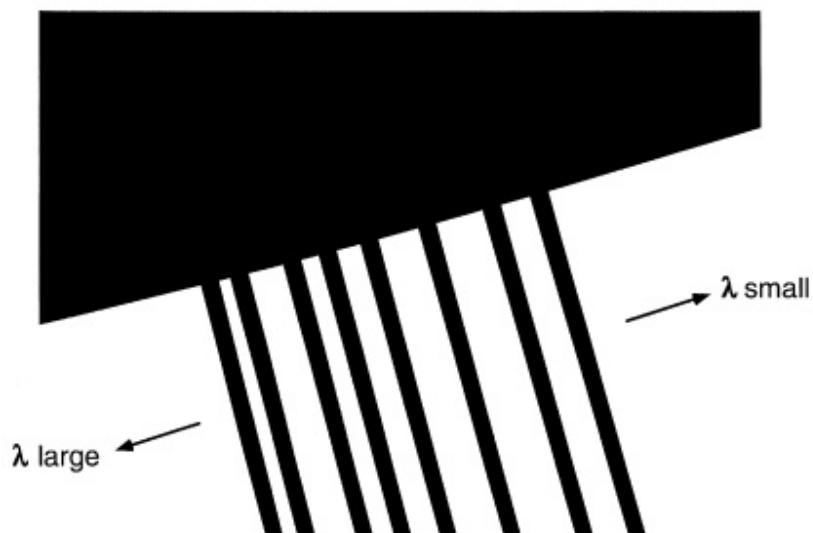


شکل ۶۸.۹: ویژگی‌های دی‌مولتی پلکس AWG ۶۴ کاناله و ۱۰۰ گیگاهرتز مخروطی عمودی.

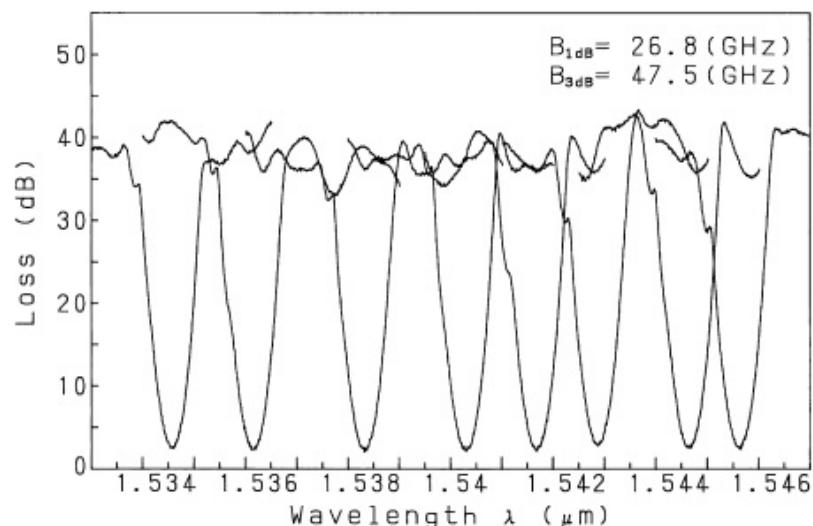
نشان می‌دهد [۳۷]. جداسازی مرکز-هسته از مشخصات کanal نابرابر و رابطه پاشندگی بالا تعیین می‌شود. شکل (۷۰.۹) خواص دی‌مالتی‌پلکس اندازه‌گیری شده AWG با فاصله نابرابر ۸ کاناله است. فاصله کanal از پایانه ۱ تا پایانه ۸ بهخوبی با مقادیر طراحی شده مطابقت دارد. تلفات فیبر به فیبر ۲/۷-۲/۷ دسی‌بل است و همسنوایی با کanal‌های مجاور و سایر کanal‌ها کمتر از ۳۱-۳۱ دسی‌بل است.

۴.۵.۹ موجبر آرایه‌ای با عرض باند متغیر

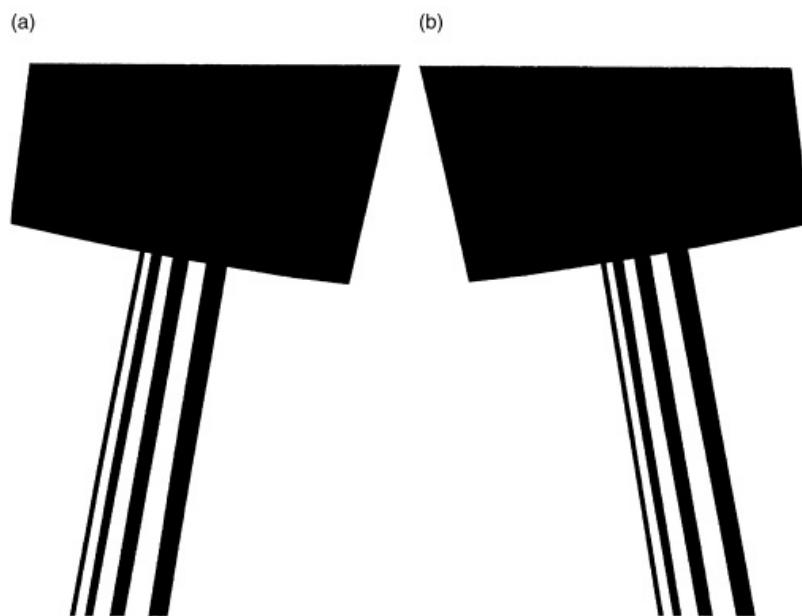
فیلترهای پهنانی باند متغیر در بسیاری از کاربردها مانند (الف) فیلتر باندی در سیستم‌های WDM و (ب) تولید پالس نور فوق العاده کوتاه با استفاده از فیلتر طیفی، ابزار بسیار مهمی هستند. یک فیلتر پهنانی باند متغیر با تغییر پهنانی دیافراگم هسته همانطور که در شکل (۷۱.۹) نشان داده شده است [۳۸] ساخته می‌شود. حرکت پرتو متمرکز در واحد طول موج در مرز مشترک تیغه-آرایه خروجی، که توسط معادله (۵.۹) داده شده است، در ناحیه $1/55\mu m$ تقریباً ثابت است. بنابراین فیلتر پهنانی باند متغیر را می‌توان با تغییر پهنانی روزنه هسته موجبر خروجی متوجه شد. عرض روزنه هسته موجبرهای ورودی و خروجی در شکل (۷۱.۹) $A_1 = 10\mu m$, $A_2 = 24\mu m$, $A_3 = 40\mu m$, $A_4 = 54\mu m$ است. اگر از تزویج‌های موجبر ورودی/خروجی با عرض روزنه یکسان استفاده کنیم، تلفات درج همیشه یکسان باقی می‌ماند. شکل (۷۲.۹) ویژگی‌های طیفی اندازه‌گیری شده فیلترهای پهنانی باند متغیر را برای $\Delta L = 8/6\mu m$ نشان می‌دهد. پهنانی باند ۳ دسی‌بل به ترتیب حدود ۴۰۰ گیگاهرتز، ۸۰۰ گیگاهرتز، ۱۲۰۰ گیگاهرتز و ۱۶۰۰ گیگاهرتز است. از آنجایی که حرکت پرتو متمرکز در واحد تغییر طول موج متناسب با ΔL است، فیلتر پهنانی باند ۳ دسی‌بل باریکتر را می‌توان با افزایش ΔL بدست آورد. در AWG با $\Delta L = 63\mu m$ ، پهنانی باند ۳ دسی‌بل به ترتیب حدود ۴۰ گیگاهرتز، ۸۰ گیگاهرتز، ۱۲۰ گیگاهرتز و ۱۶۰ گیگاهرتز است [۳۸].



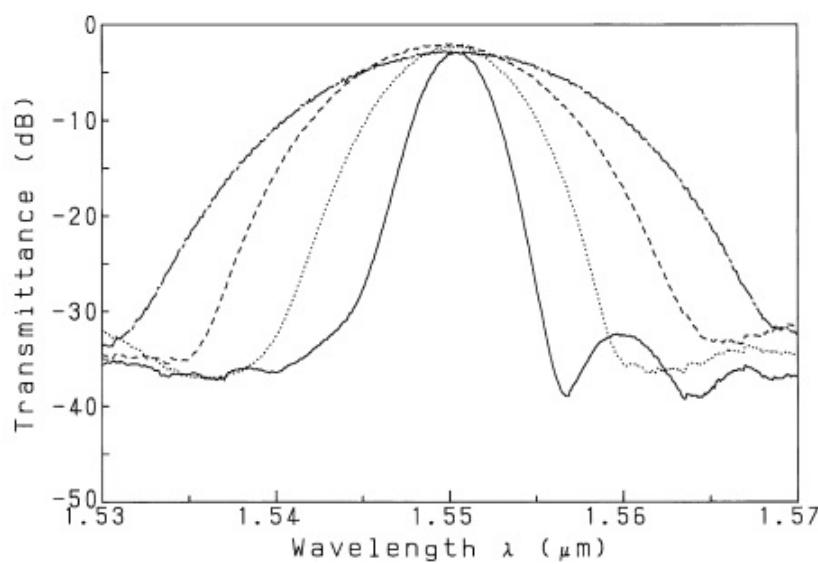
شکل ۶۹.۹: نمای بزرگ شده موجبرهای خروجی در فاصله نابرابر ۸ کاناله AWG



شکل ۷۰.۹: خواص دی‌مالتی‌پلکسینگ در فاصله نابرابر ۸ کاناله AWG



شکل ۷۱.۹: نمای بزرگ شده موجبرهای ورودی خروجی در یک AWG با عرض باند متغیر.



شکل ۷۲.۹: مشخصه پهنه‌ای باند $2dB$ اندازه‌گیری شده برای یک زوج ورودی/ خروجی از A_1 به A_4 با $\Delta L = \lambda/6\mu\text{m}$ (A_1 خط ممتد، A_2 نقطه چین، A_3 خط چین، A_4 خط نقطه)

پالس‌های نوری فوق کوتاه قابل تنظیم با عرض پالس توسط فیلتر طیفی یک منبع ابرپیوسته نانومتری [۳۹] با استفاده از فیلترهای AWG با پهنهای باند متغیر [۴۰] تولید شده‌اند. شکل (۷۳.۹)-(الف) پهنهای پالس تولید شده را با توجه به پهنهای باند AWG $3dB$ نشان می‌دهد. عرض پالس با افزایش پهنهای باند AWG از $11psec$ به $300fsec$ کاهش می‌یابد، در حالی که یک محصل پهنهای باند زمانی ثابت (پالس گوسی) همانطور که در شکل (۷۳.۹)-(ب) نشان داده شده است، حفظ می‌شود.

۵.۵.۹ تلفات یکنواخت و فرکانس تناوبی AWG

در اصل، اتصال $N \times N$ سیگنال را می‌توان در AWG زمانی که یک FSR برابر فاصله کanal باشد، به دست آورد. در اینجا FSR توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$FSR = \frac{n_c \nu_0}{N_c m} \quad (41.9)$$

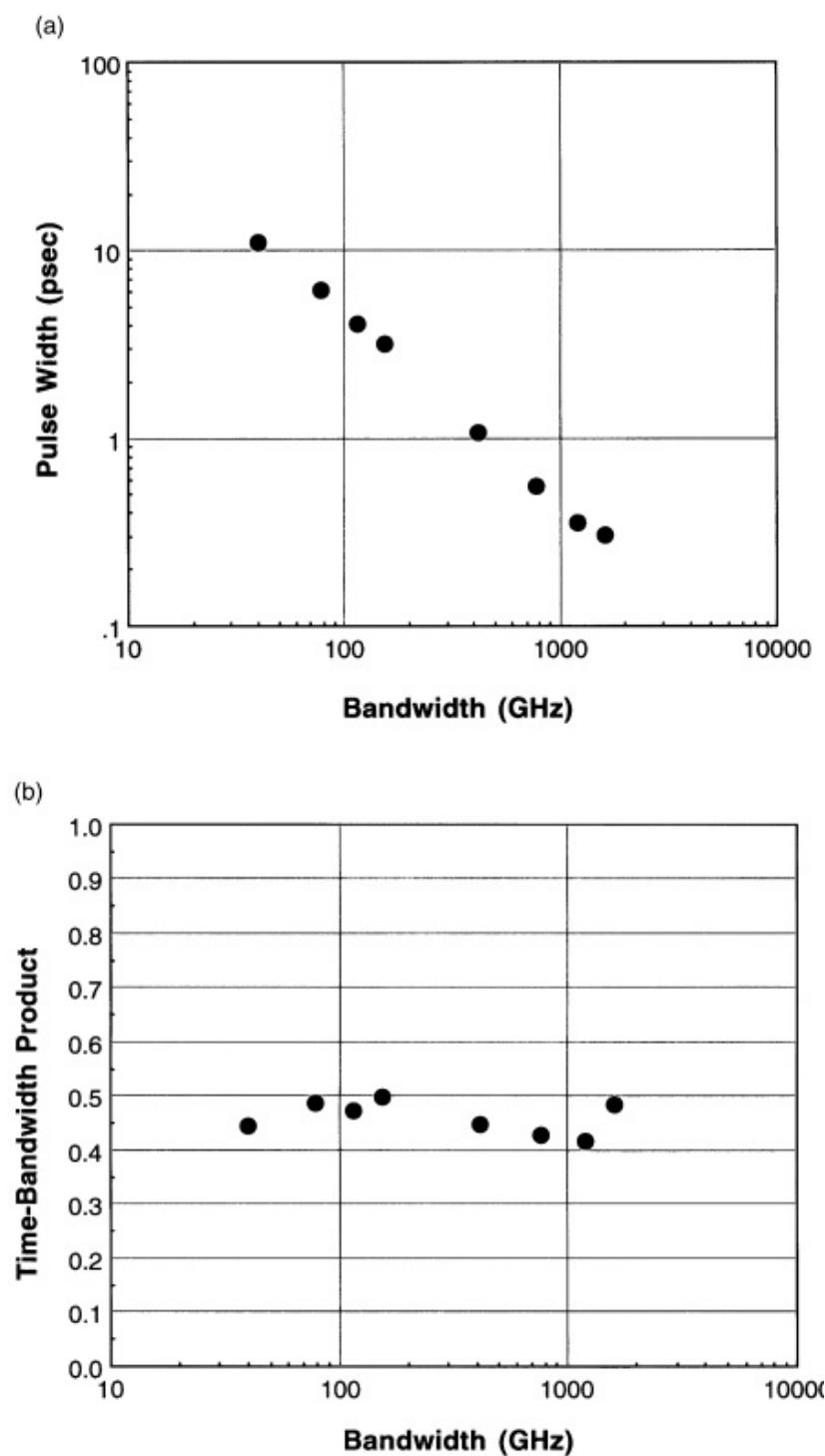
که در آن ν_0 فرکانس مرکزی سیگنال‌های WDM است. به طور کلی پرتوهای نور با سه مرتبه پراش مختلف $1, m, m+1$ برای دستیابی به اتصالات $N \times N$ استفاده می‌شوند [۴۱]. خاصیت تناوبی عملکرد اضافی مهمی را در مقایسه با مالتی‌پلکسرها یا دی‌مالتی‌پلکسرهای ساده فراهم و نقش کلیدی را در دستگاه‌های پیچیده‌تر به عنوان مالتی‌پلکسرهای افزودن/افتادن (*add/drop*) و سوئیچ‌های طول موج ایفا می‌کند.

با این حال، چنین اتصالی همیشه نمی‌تواند با AWG‌های معمولی تحقق یابد. ترتیب پراش معمولی AWG با فاصله کanal m تا $m+1$ ۵۰ تا ۱۰۰ گیگاهرتز ~ 30 است که در بخش ۴.۳.۹ توضیح داده شد. از آنجایی که FSR با m نسبت معکوس دارد (معادله ۲۹.۹)، عدم تطبیق فرکانس عبور قابل توجهی با تفاوت بین سه FSR ایجاد می‌شود. شکل (۷۴.۹) خواص دی‌مالتی‌پلکس اندازه‌گیری شده AWG ۳۲ کanalه با فاصله ۵۰ گیگاهرتز را در سه مرتبه پراش نشان می‌دهد. شکاف طول موج بین $m+1$ و m امین مرتبه پراش بطور صاف با ۵۰ گیگاهرتز در طراحی فعلی بر اساس معادله (۱۰.۹) متصل است. با این حال، فاصله طول موج بین مرتبه‌های پراش m و $(m+1)$ امین حدود ۷۰ گیگاهرتز است.

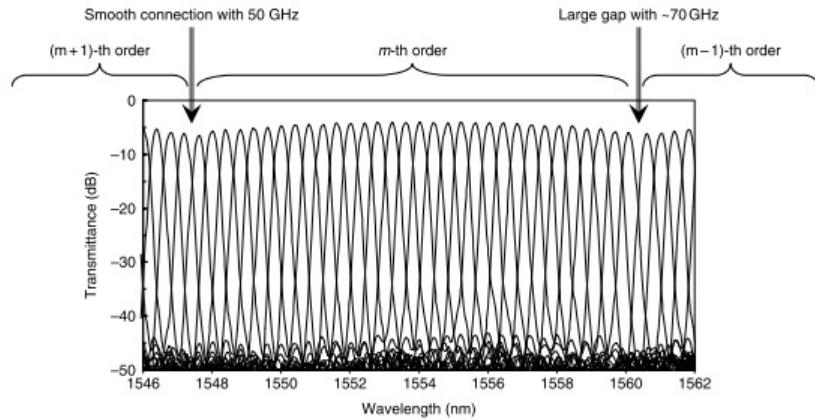
به هر حال، افت عبوری AWG برای پایانه‌های ورودی و خروجی محیطی ۲–۳ دسی‌بل بیشتر از تلفات برای پایانه‌های مرکزی است که در شکل (۲۳.۹) و (۲۴.۹) نشان داده شده است. ویژگی‌های فرکانس غیر تناوبی و عدم یکنواختی تلفات در AWG‌های معمولی، موانع اصلی هستند که از توسعه شبکه‌های مسیریابی $N \times N$ جلوگیری می‌کنند.

یک AWG جدید 32×32 با ویژگی‌های پیشنهاد و ساخته شده است. شکل (۷۵.۹) یک پیکربندی مسائل در AWG‌های معمولی پیشنهاد و ساخته شده است. شکل (۷۵.۹) یک پیکربندی شماتیک از توری موجبر آرایه‌ای با اتفاق یکنواخت و فرکانس تناوبی (ULCF) [۴۲] را نشان می‌دهد. این شامل مالتی‌پلکس 80 کanalه AWG با فاصله ۱۰۰ گیگاهرتز و ۳۲ ترکیب کننده نوری است که به 64 موجبر خروجی مالتی‌پلکس متصل می‌شود. طول قوس تیغه $f = 24,55mm$ و تعداد موجبرهای آرایه 300 با اختلاف طول مسیر ثابت $\Delta L = 24,6\mu m$ بین FSR = $8THz$ ازad است. مرتبه پراش $m = 23$ است که محدوده طیفی آزاد

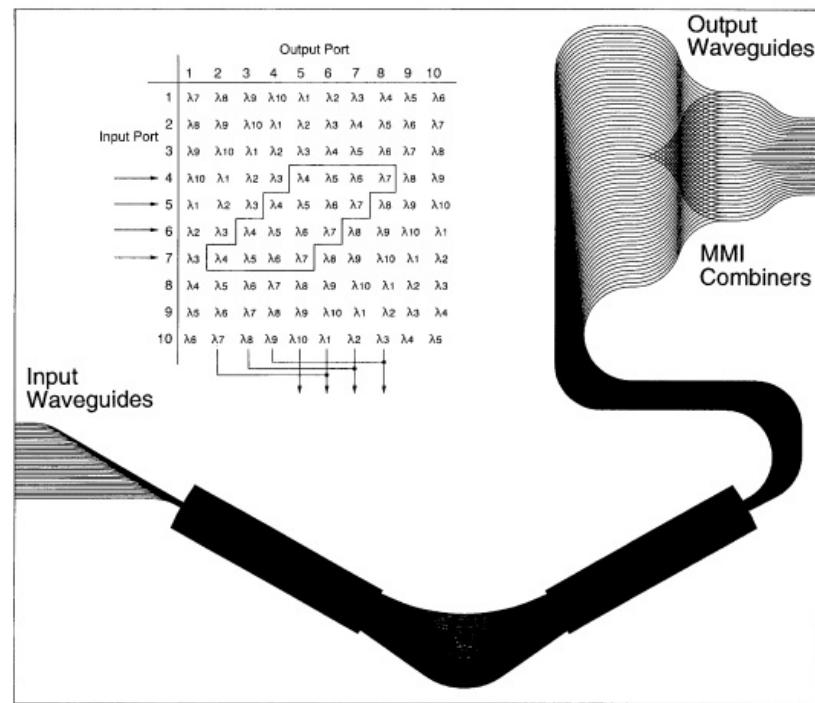
^{۷۰} Uniform-Loss and Cyclic-Frequency (ULCF)



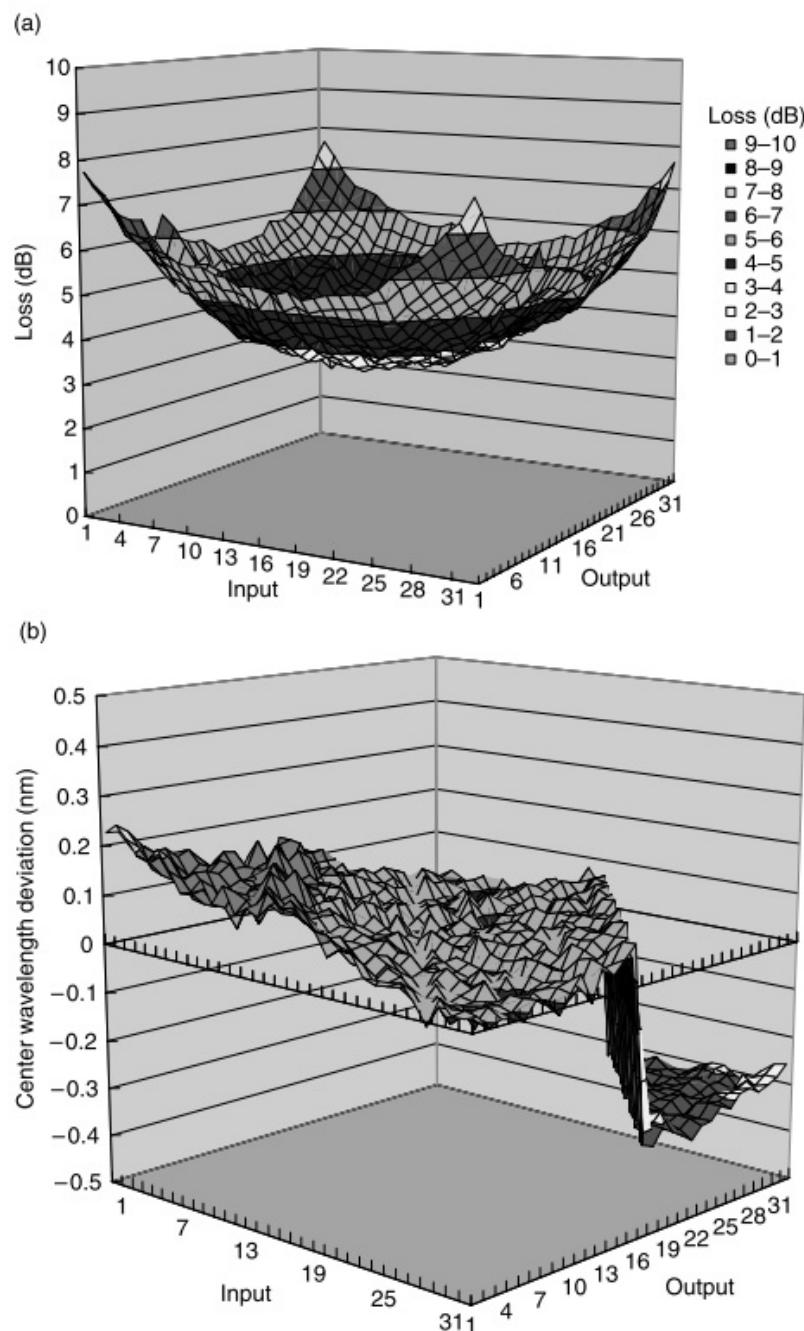
شکل ۷۳.۹: (الف) پهنهای پالس اندازه‌گیری شده در مقابل پهنهای باند AWG. (ب) حاصل ضرب پهنهای باند در زمان اندازه‌گیری شده در مقابل پهنهای باند AWG.



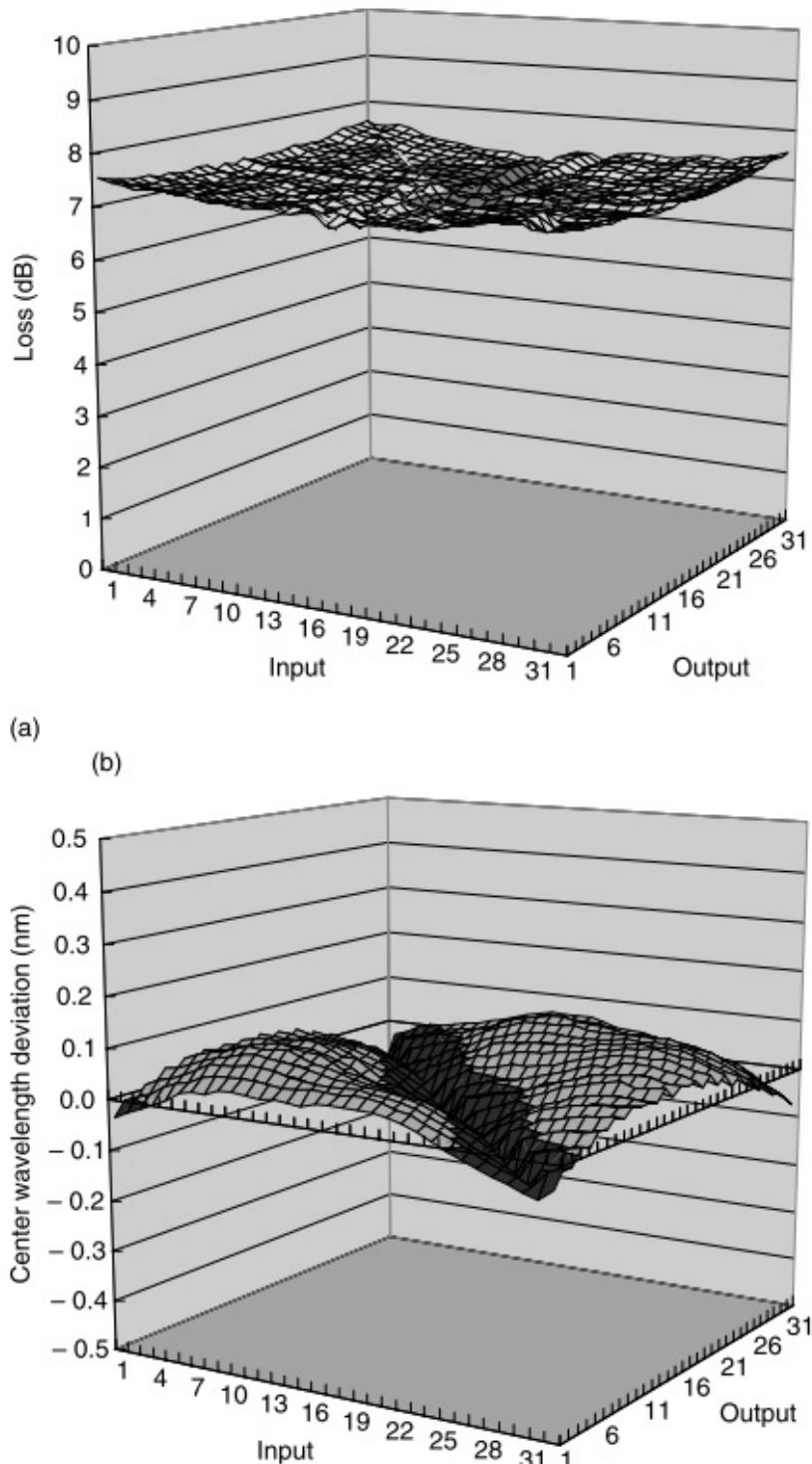
شکل ۷۴.۹: خاصیت دیمالتی پلکسینک اندازه‌گیری شده یک AWG ۲۲ کاناله تحت فاصله ۵۰ گیگا هرتز روی پراش مرتبه سوم.



شکل ۷۵.۹: پیکربندی شمای تلفات یکنواخت و فرکانس تناوبی AWG



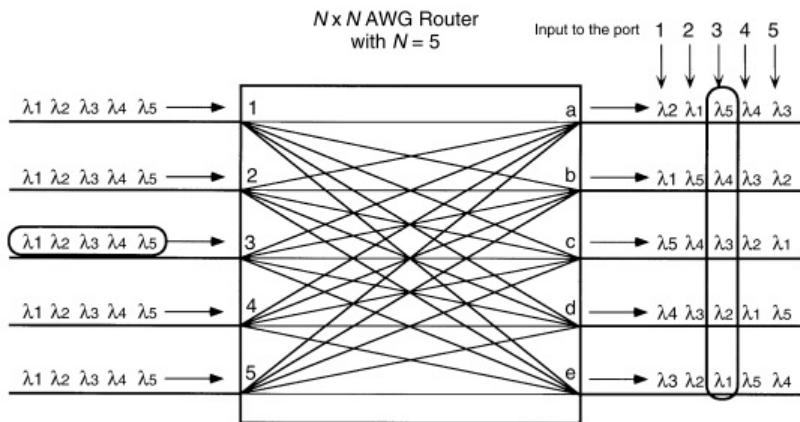
شکل ۷۶.۹: (الف) افت عبوری اندازه‌گیری شده برای کل ترکیب‌های ورودی/خروجی 32×32 در AWG معمولی. (ب) اندازه‌گیری انحرافات فرکانس مرکز کانال برای کل ترکیبات ورودی/خروجی 32×32 در AWG معمولی.



شکل ۷۷.۹: (الف) افت عبوری اندازه‌گیری شده برای کل ترکیب‌های ورودی/خروجی 32×32 در AWG با اتلاف یکنواخت و فرکانس تناوبی. (ب) اندازه‌گیری انحرافات فرکانس مرکز کانال برای کل ترکیب‌های ورودی/خروجی 32×32 در AWG با اتلاف یکنواخت و فرکانس تناوبی.

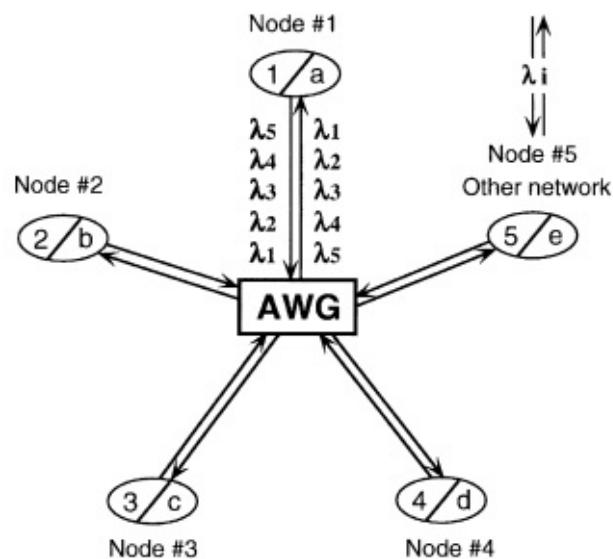
را به دست می‌دهد. در سمت ورودی، ۳۲ موجبر از شماره #۵۶ تا #۲۵ برای موجبرهای ورودی استفاده می‌شود تا ویژگی‌های تلفات یکنواخت را تضمین کنند. در سمت خروجی، دو موجبر $(i+40)$ [امین و $i+4$] امین موجبر برای ۳۲ - $i = 1$ از طریق مقاطع موجبر و کوپلر MMI [۴۳] برای ایجاد یک پایانه خروجی ترکیب می‌شوند. از آنجایی که از پایانه‌های خروجی محیطی استفاده نمی‌شود، ویژگی‌های تلفات یکنواخت به دست می‌آید. قسمت داخلی شکل (۷۸.۹) اساس نحوه ساخت AWG-ULCF را نشان می‌دهد. در این مثال یک AWG 4×4 ULCF از یک AWG اصلی 10×10 ساخته شده است. سیگنال‌های مالتی‌پلکس با طول موج $\lambda_6, \lambda_5, \lambda_4$ و λ_7 که به پایانه ورودی شماره ۴ کوپل شده‌اند در موجبرهای خروجی از ۵ تا ۸ دی‌مالتی‌پلکس می‌شوند. هنگامی که سیگنال‌های $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ و λ_7 به پایانه ورودی شماره ۵ کوپل می‌شوند، جزء سیگنال λ_4 از طریق ترکیب کننده نوری به موجبر خروجی شماره ۸ برمی‌گردد. این اصل عملیاتی AWG ULCF است. به‌منظور مقایسه ویژگی‌های فیلتر AWG ULCF با AWG معمولی، ابتدا ویژگی‌های افت عبوری و ویژگی‌های دی‌مالتی‌پلکسینگ در AWG معمولی ارائه می‌شوند. شکل (۷۶.۹)(الف) افت عبوری اندازه‌گیری شده را برای کل ترکیبات ورودی/خروچی در AWG معمولی نشان می‌دهد. تغییرات قله به قله تلفات $\sigma_{loss} = 7/8$ دسی‌بل (حداقل تلفات $\sigma_{min} = 3/1$ دسی‌بل، حداکثر تلفات $\sigma_{max} = 7/8$ دسی‌بل) و انحراف استاندارد تلفات $\sigma_{loss} = 1/0$ دسی‌بل است. شکل (۷۶.۹)(ب) انحراف فرکانس عبور کانال از فرکانس‌های شبکه تجویز شده را نشان می‌دهد. تغییرات قله به قله $\delta v_{min} = -44/5$ گیگاهرتز و $\delta v_{max} = 31/1$ گیگاهرتز است. شکل (۷۷.۹)(الف) و (ب) افت عبوری و انحرافات فرکانس عبور کانال را برای ترکیب‌های ۳۲ ورودی ۳۲/۲ خروجی در AWG ULCF نشان می‌دهند. تغییرات قله به قله تلفات به $\sigma_{loss} = 0/2 dB$ کاهش می‌یابد، ($\alpha_{min} = 6/63 dB$, $\alpha_{max} = 7/67 dB$) و انحراف معیار تلفات $\sigma_{loss} = 0/2 dB$ است. انحراف فرکانس $\delta v_{min} = -6/8 GHz$, $\delta v_{max} = 15/5 GHz$ (۲۲/۳ GHz)، انحراف معیار $\sigma_{freq} = 4/4 GHz$ است. هم‌شناوی AWG حدود $-26 dB$ است.

شکل (۷۸.۹) عملکرد مسیریاب (روتر) AWG ULCF را برای اتصالات $N \times N$ نشان می‌دهد. در این مثال، مسیریاب طول موج $N=5$ ورودی و $N=5$ پایانه خروجی دارد. هر یک از پایانه‌های ورودی N می‌تواند N طول موج متفاوتی را حمل کند. طول موج‌های N که به عنوان مثال در پایانه ورودی ۳ کوپل شده‌اند، بین پایانه‌های خروجی ۱ تا N توزیع می‌شوند. طول موج‌های N حمل شده توسط سایر پایانه‌های ورودی به همین ترتیب توزیع می‌شوند، اما به صورت تناوبی می‌چرخند. به این ترتیب هر پایانه خروجی N طول موج مختلف را از هر یک پایانه ورودی دریافت می‌کند. برای تحقق چنین طرح اتصال به‌روشی کاملاً غیر مسدود کننده با استفاده از یک طول موج واحد، تعداد زیادی سوئیچ مورد نیاز است. با استفاده از خاصیت تناوبی AWG ULCF، این عملکرد تنها با یک AWG قابل دستیابی است. نمونه‌ای از تمام سیستم‌های اتصال نوری $N \times N$ با استفاده از AWG به عنوان مسیریاب در شکل (۷۹.۹) نشان داده شده است. شکل (۷۹.۹)(الف) توپولوژی فیزیکی بین مسیریاب AWG و گره‌های N را نشان می‌دهد. برخی از مسیریاب‌ها ممکن است برای اتصال به شبکه‌های دیگر استفاده شوند. بر اساس اتصالات متقابل AWG

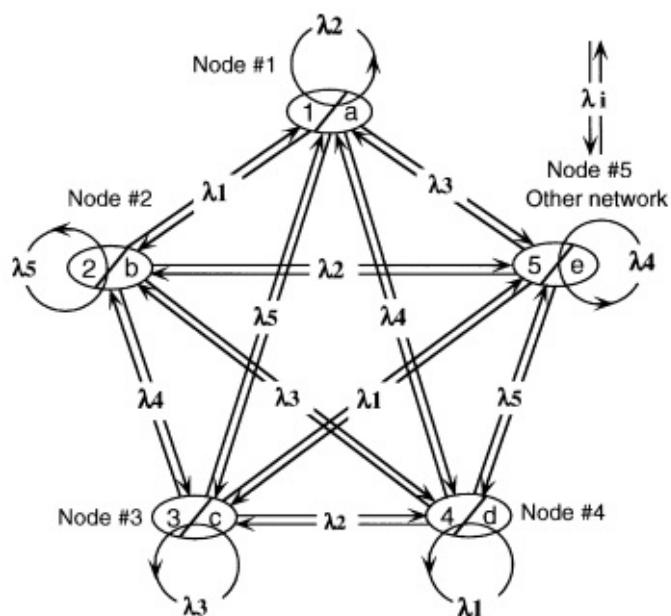


شکل ۷۸.۹: نمودار شماتیک که اتصالات $N \times N$ را در یک مسیریاب طول موج نشان می‌دهد.

در شکل (۷۸.۹)، الگوهای اتصال منطقی حاصله به شبکه ستاره‌ای $N \times N$ تبدیل می‌شوند که در شکل (۷۹.۹)(ب) نشان داده شده است. همه گره‌ها می‌توانند به طور همزمان با یکدیگر ارتباط برقرار کنند، بنابراین اتصالات نوری N^2 را به طور همزمان فعال می‌کنند. سیگنال‌ها را می‌توان آزادانه با تغییر طول موج حامل سیگنال هدایت کرد. هنگامی که با لیزرهای تبدیل طول موج ترکیب می‌شود، این مسیریاب AWG می‌تواند شبکه‌های مسیریابی سیگنال را بدون استفاده از سوئیچ‌های نوری تقسیم فضا بسازد [۴۴، ۴۵].



(a) Physical topology



(b) Resulting logical connectivity

شکل ۷۹.۹: تمام سیستم های اتصال نوری $N \times N$ با استفاده از AWG ULCF به عنوان روتر: (الف) توبولوژی فیزیکی. (ب) ارتباط منطقی حاصل.

كتاب نامه

- [1] Kawachi, M. 1990. Silica waveguide on silicon and their application to integrated-optic components. *Opt. and Quantum Electron.* 22:391–416.
- [2] Okamoto, K. 1997. Planar lightwave circuits (PLCs). In: *Photonic Networks*, edited by Giancarco Prati. New York: Springer-Verlag, pp. 118–132.
- [3] Himeno, A., T. Kominato, M. Kawachi, and K. Okamoto. 1997. System applications of largescale optical switch matrices using silica-based planar lightwave circuits. In: *Photonic Networks*, edited by Giancarco Prati. New York: Springer-Verlag, pp. 172–182.
- [4] Yamada, Y., S. Suzuki, K. Moriwaki, Y. Hibino, Y. Tohmori, Y. Akatsu, Y. Nakasuga, T. Hashimoto, H. Terui, M. Yanagisawa, Y. Inoue, Y. Akahori, and R. Nagase. 1995. Application of planar lightwave circuit platform to hybrid integrated optical WDM transmitter/receiver module. *Electron. Lett.* 31:1366–1367.
- [5] Akahori, Y., T. Ohyama, M. Yanagisawa, Y. Yamada, H. Tsunetsugu, Y. Akatsu, M. Togashi, S. Mino, and Y. Shibata. 1997. A hybrid high-speed silica-based planar lightwave circuit platform integrating a laser diode and a driver IC. *Proc. IOOC/ECOC '97*, Edinburgh, UK, vol. 2, pp. 359–362.
- [6] Jinguiji, K. 1995. Synthesis of coherent two-port lattice-form optical delay-line circuit. *IEEE J. Lightwave Tech.* 13:73–82.
- [7] Takiguchi, K., K. Jinguiji and Y. Ohmori. 1995. Variable group-delay dispersion equalizer based on a lattice-form programmable optical filter. *Electron. Lett.* 31:1240–1241.
- [8] Suzuki, S., K. Shuto, H. Takahashi, and Y. Hibino. 1992. Large-scale and high-density planar lightwave circuits with high- Δ GeO₂-doped silica waveguides. *Electron. Lett.* 28:1863–1864.

- [9] Hibino, Y., H. Okazaki, Y. Hida, and Y. Ohmori. 1993. Propagation loss characteristics of long silica-based optical waveguides on 5-inch Si wafers. *Electron. Lett.* 29:1847–1848.
- [10] [10] Hida, Y., Y. Hibino, H. Okazaki, and Y. Ohmori. 1995. 10-m-long silica-based waveguide with a loss of 1.7 dB/m. *IPR '95*, Dana Point, CA.
- [11] [Dragone, C., C. H. Henry, I. P. Kaminow, and R. C. Kistler. Efficient multichannel integrated optics star coupler on silicon. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 1:241–243.
- [12] Okamoto, K., H. Takahashi, S. Suzuki, A. Sugita, and Y. Ohmori. 1991. Design and fabrication of integrated-optic 8×8 star coupler. *Electron. Lett.* 27:774–775.
- [13] Huang, W. P., C. Xu, S. T. Chu, and S. K. Chaudhuri. 1992. The finite-difference vector beam propagation method: Analysis and assessment. *J. Lightwave Tech.* 10:295–305.
- [14] Okamoto, K., H. Okazaki, Y. Ohmori, and K. Kato. 1992. Fabrication of large scale integratedoptic $N \times N$ star couplers. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 4:1032–1035.
- [15] Smit, M. K. 1988. New focusing and dispersive planar component based on an optical phased array. *Electron. Lett.* 24:385–386.
- [16] Takahashi, H. S. Suzuki, K. Kato and I. Nishi. 1990. Arrayed-waveguide grating for wavelength division multi/demultiplexer with nanometer resolution. *Electron. Lett.* 26:87–88.
- [17] Okamoto, K., K. Moriwaki and S. Suzuki. 1995. Fabrication of 64×64 arrayed-waveguide grating multiplexer on silicon. *Electron. Lett.* 31:184–185.
- [18] Okamoto, K., K. Syuto, H. Takahashi and Y. Ohmori. 1996. Fabrication of 128-channel arrayedwaveguide grating multiplexer with a 25-GHz channel spacing. *Electron. Lett.* 32:1474–1476.
- [19] [Hida, Y., Y. Hibino, T. Kitoh, Y. Inoue, M. Itoh, T. Shibata, A. Sugita and A. Himeno. 2001. 400-channel arrayed-waveguide grating with 25 GHz spacing using 1.5% -Δwaveguides on 6-inch Si wafer. *Electron. Lett.* 37:576–577.
- [20] [Kasahara, R., M. Itoh, Y. Hida, T. Saida, Y. Inoue and Y. Hibino. 2002. Birefringence compensated silica-based waveguide with undercladding ridge. *Electron. Lett.* 38:1178–1179.
- [21] Uetsuka, H., K. Akiba, H. Okano and Y. Kurosawa. 1995. Nove $1 \times N$ guide-wave multi/demultiplexer for WDM. *Proc. OFC '95 Tu07*, p. 276.

- [22] Okamoto K. and H. Yamada. 1995. Arrayed-waveguide grating multiplexer with flat spectral response. *Opt. Lett.* 20:43–45.
- [23] Okamoto K. and A. Sugita. 1996. Flat spectral response arrayed-waveguide grating multiplexer with parabolic waveguide horns. *Electron. Lett.* 32:1661–1662.
- [24] Amersfoort, M. R., J. B. D. Soole, H. P. LeBlanc, N. C. Andreadakis, A. Rajhei and C. Caneau. 1996. Passband broadening of integrated arrayed waveguide filters using multimode interference couplers. *Electron. Lett.* 32:449–451.
- [25] Trouchet, D., A. Beguin, H. Boek, C. Prel, C. Lerminiaux and R. O. Maschmeyer. 1997. Passband flattening of PHASAR WDM using input and output star couplers designed with two focal points. *Proc. OFC '97 ThM7*, Dallas, Texas.
- [26] Thompson, G. H. B., R. Epworth, C. Rogers, S. Day and S. Ojha. 1998. An original low-loss and pass-band flattened SiO₂ on Si planar wavelength demultiplexer. *Proc. OFC '98 TuN1*, San Jose, CA.
- [27] Doerr, C. R., L. W. Stulz and R. Pafchek. 2003. Compact and low-loss integrated box-like passband multiplexer. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 15:918–920.
- [28] Burns, W. K., A. F. Milton and A. B. Lee. 1997. Optical waveguide parabolic coupling horns. *Appl. Phys. Lett.* 30:28–30.
- [29] Kitoh, T., Y. Inoue, M. Itoh and Y. Hibino. 2003. Low chromatic-dispersion flat-top arrayed waveguide grating filter. *Electron. Lett.* 39(15):1116–1118.
- [30] Takada, K., Y. Inoue, H. Yamada and M. Horiguchi. 1994. Measurement of phase error distributions in silica-based arrayed-waveguide grating multiplexers by using Fourier transform spectroscopy. *Electron. Lett.* 30:1671–1672.
- [31] van Dam, C., A. A. M. Staring, E. J. Jansen, J. J. M. Binsma, T. Van Dongen, M. K. Smit and B. H. Verbeek. 1996. Loss reduction for phased array demultiplexers using a double etch technique. *Integrated Photonics Research 1996*, Boston, MA, April 29–May 2, pp. 52–55.
- [32] Sugita, A., A. Kaneko, K. Okamoto, M. Itoh, A. Himeno and Y. Ohmori. 2000. Very low insertion loss arrayed-waveguide grating with vertically tapered waveguides. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 12:1180–1182.
- [33] Doerr, C. R. 2003. Optical add/drops and cross connects in planar waveguides. *Proc. ECOC '03 Th1.3*, Rimini, Italy.

- [34] Maru, K., T. Chiba, M. Okawa, H. Ishikawa, K. Ohira, S. Sato and H. Uetsuka. 2001. Low-loss arrayed-waveguide grating with high index regions at slab-to-array interface. *Electron. Lett.* 37:1287–1289.
- [35] Forghieri, F., A. H. Gnauck, R. W. Tkach, A. R. Chraplyvyy and R. M. Derosier. 1994. Repeaterless transmission of eight channels at 10 Gb/s over 137 km (11 Tb/s-km) of dispersionshifted fiber using unequal channel spacing. *IEEE Photonics Tech. Lett.* 6:1374–1376.
- [36] Oda, K., M. Fukutoku, M. Fukui, T. Kitoh and H. Toba. 1995. 10-channelx10-Gbit/s optical FDM transmission over 500 km dispersion shifted fiber employing unequal channel spacing and amplifier gain equalization. *Proc. OFC '95 TuH1*, San Diego.
- [37] Okamoto, K., M. Ishii, Y. Hibino, Y. Ohmori and H. Toba. 1995. Fabrication of unequal channel spacing arrayed-waveguide grating multiplexer modules. *Electron. Lett.* 31:1464–1465.
- [38] Okamoto, K., M. Ishii, Y. Hibino and Y. Ohmori. 1995. Fabrication of variable bandwidth filters using arrayed-waveguide gratings. *Electron. Lett.* 31:1592–1593.
- [39] Morioka, T., S. Kawanishi, K. Mori and M. Saruwatari. 1994. Transform-limited femtosecond WDM pulse generation by spectral filtering of gigahertz supercontinuum. *Electron. Lett.* 30:1166–1168.
- [40] Morioka, T., K. Okamoto, M. Ishii and M. Saruwatari. 1996. Low-noise, pulsedwidth tunable picosecond to femtosecond pulse generation by spectral filtering of wideband supercontinuum with variable bandwidth arrayed-waveguide grating filters. *Electron. Lett.* 32:836–837.
- [41] Dragone, C., C. A. Edwards and R. C. Kistler. 1991. Integrated optics $N \times N$ multiplexer on silicon. *Photon. Tech. Lett.* 3:896–899.
- [42] Okamoto, K., H. Hasegawa, O. Ishida, A. Himeno and Y. Ohmori. 1997. 32×32 arrayedwaveguide grating multiplexer with uniform loss and cyclic frequency characteristics. *Electron. Lett.* 33:1865–1866.
- [43] Veerman, F. B., P. J. Schalkwijk, E. C. M. Pennings, M. K. Smit and B. H. Verbeek. 1992. An optical passive 3-dB TMI-coupler with reduced fabrication tolerance sensitivity. *Jour. Lightwave Tech.* 10:306–311.
- [44] Kato, K., A. Okada, Y. Sakai, K. Noguchi, T. Sakamoto, S. Suzuki, A. Takahara, S. Kamei, A. Kaneko and M. Matsuoka. 2000. 32×32 full-mesh (1024 path)

- wavelength-routing WDM network based on uniform-loss cyclic-frequency arrayed-waveguide grating. *Electron. Lett.* 36(15):1294–1296.
- [45] Yoo, S. J. B., H. J. Lee, Z. Pan, J. Cao, Y. Zhang, K. Okamoto and S. Kamei. 2002. Rapidly switching all-optical packet routing system with optical-label swapping incorporating tunable wavelength conversion and a uniform-loss cyclic frequency AWGR. *IEEE Photon. Tech. Lett.* 14(8):1211–1213.
- [46] Heise, G., H. W. Schneider and P. C. Clemens. 1998. Optical phased array filter module with passively compensated temperature dependence. *ECOC '98*, pp. 319–320, September 20–24, 1998, Madrid, Spain.
- [47] Inoue, Y., A. Kaneko, F. Hanawa, H. Takahashi, K. Hattori and S. Sumida. 1997. Athermal silica-based arrayed-waveguide grating multiplexer. *Electron. Lett.* 33:1945–1946.
- [48] Gao, R., R. Gao, K. Takayama, A. Yeniay and A. F. Garito. 2002. Low-Insertion Loss Athermal AWG Multi/Demultiplexer Based on Perfluorinated Polymers. *ECOC '02*, 6.2.2, Sept. 8–12, 2002, Copenhagen, Denmark.
- [49] Soole, J. B. D., M. Schlax, C. Narayanan and R. Pafchek. 2003. Athermalisation of silica arrayed waveguide grating multiplexers. *Electron. Lett.* 39(16):1182–1184.
- [50] Kaneko, A., S. Kamei, Y. Inoue, H. Takahashi and A. Sugita. 1999. Athermal silica-based arrayed-waveguide grating (AWG) multiplexers with new low loss groove design. *OFC-IOOC '99 TuO1*, pp. 204–206, San Diego, CA.

فصل ۱۰

چند قضیه و رابطه مهم

در این فصل، چندین قضیه و فرمول مهم [۱، ۴] شرح داده شده است که مبنای برای استخراج معادلات مختلف در سراسر کتاب هستند. قضیه گوس، قضیه گرین و قضیه استوکس پایه‌های نظریه الکترومغناطیسی هستند. قضیه انتگرال هلم‌هولتز و کیرشهوف و فرمول پراش فرنل-کیرشهوف نظریه‌های اساسی برای حل مسائل پراش هستند.

۱.۱۰ قضیه گوس

تابع $f(x, y, z)$ را در حجم V که سطح S را دربر دارد در نظر گیرید. تابع $f(x, y, z)$ و مشتقات $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z$ در حجم V و روی سطح S پیوسته فرض می‌شوند. انتگرال حجمی زیر را در نظر گیرید:

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz. \quad (1.10)$$

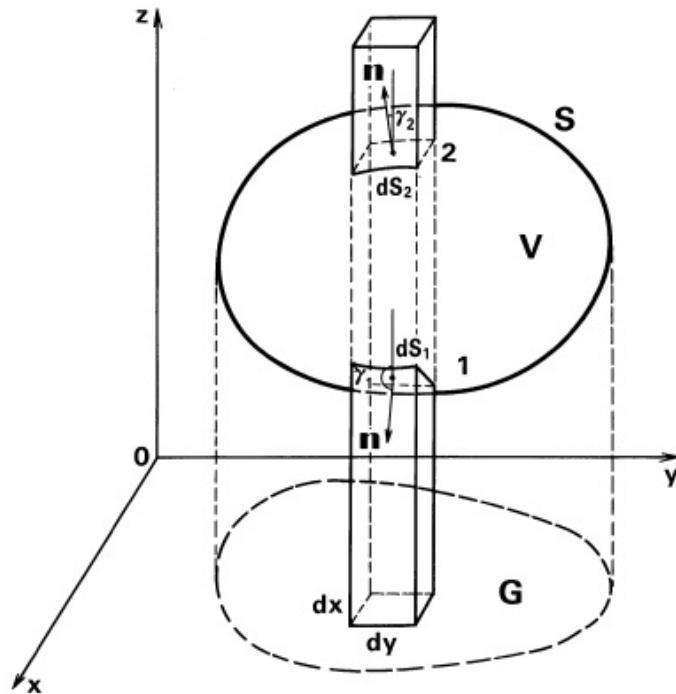
هنگامی که حجم V با ستون dV که موازی با محور z است قرار دارد، همانطور که در شکل (۱.۱۰) نشان داده شده است، به دست می‌آوریم.

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.10)$$

که در آن z_1 و z_2 مختصات محور z را نشان می‌دهند که در آن ستون dV به سطح S نفوذ می‌کند و G تصویر حجم V بر روی صفحه $x - y$ است. انتگرال جزئی معادله (۲.۱۰) با توجه به z می‌دهد؛

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \iint_G f(x, y, z_2) dx dy - \iint_G f(x, y, z_1) dx dy \quad (3.10)$$

ما زوایای بردار واحد n نرمال به سطح افزایشی dS_1 و dS_2 را با γ_1 و γ_2 بیان می‌کنیم. در اینجا γ_1 و γ_2 از محور z مثبت اندازه‌گیری می‌شوند. سپس هر جمله سمت راست معادله (۳.۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد



شکل ۱.۱۰: حجم V محصور شده توسط یک سطح S . حجم V توسط یک ستون dV که موازی با محور z است نفوذ می‌کند.

$$\iint_G f(x, y, z_2) dx dy = \iint_S f(x, y, z_2) \cos \gamma_2 dS_2 \quad (۴.۱۰)$$

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y, z_1) dx dy &= \iint_S f(x, y, z_1) \cos(\pi - \gamma_1) dS_1 \\ &= -\iint_S f(x, y, z_1) \cos \gamma_1 dS_1 \end{aligned} \quad (۴.۱۰\text{ب})$$

جایگزینی معادله (۴.۱۰) و (۴.۱۰\text{ب}) در معادله (۳.۱۰)، خواهیم داشت:

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \iint_S f(x, y, z_1) \cos \gamma_1 dS_1 + \iint_S f(x, y, z_2) \cos \gamma_2 dS_2 \quad (۵.۱۰)$$

جملات اول و دوم معادله (۵.۱۰) نمایشگر بترتیب انتگرال سطح روی سطوح بالائی و پائینی S است. رابطه کلی برای (۵.۱۰) خواهد بود

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \iint_S f(x, y, z) \cos \gamma dS \quad (۶.۱۰)$$

شبیه به این رابطه برای انتگرال حجم $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ خواهیم داشت:

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \iint_S f(x, y, z) \cos \alpha dS \quad (۷.۱۰)$$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \iint_S f(x, y, z) \cos \alpha \cos \beta dS \quad (8.10)$$

در اینجا α زاویه بین بردار نرمال به جزء سطح dS و محور x و β زاویه بین بردار نرمال به جزء سطح dS و محور y را نشان می‌دهد.
هنگامی که تابع $f(x, y, z)$ را در معادلات (۷.۱۰)، (۸.۱۰) و (۶.۱۰) با $X(x, y, z)$ ، $Y(x, y, z)$ و $Z(x, y, z)$ جایگزین و آنها را جمع می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\iiint_V \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right] dx dy dz = \iint_S [X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma] dS \quad (9.10)$$

علاوه بر این، اگر توابع X, Y و Z نشانگر x, y و z مولفه‌های بردار \mathbf{A} باشند، دیورژانس (واگرایی) \mathbf{A} خواهد بود

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (10.10)$$

که در آن ∇ را نابل Nabla می‌نامند. نابل نمایشگر عملگر دیفرانسیلی زیر است:

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (11.10)$$

که در آن $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ و \mathbf{a}_z بردارهای واحد در راستای محورهای x, y و z هستند. رابطه $\nabla \cdot \mathbf{A}$ در معادله (۱۰.۱۰) از ضرب داخلی دو بردار ∇ و \mathbf{A} حاصل شده است:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [X \mathbf{a}_x + Y \mathbf{a}_y + Z \mathbf{a}_z] = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (12.10)$$

با جایگزینی معادله (۱۰.۱۰) در معادله (۹.۱۰)، خواهیم داشت

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dx dy dz = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13.10)$$

که در آن \mathbf{n} بردار خارج شونده عمود بر جزء سطح dS است که بصورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_x \cos \alpha + \mathbf{a}_y \cos \beta + \mathbf{a}_z \cos \gamma \quad (14.10)$$

معادله (۱۳.۱۰) قضیه گوس نامیده می‌شود که بیان می‌کند که مجموع واگرایی بردار \mathbf{A} در فضای حجمی برابر است با مجموع مولفه‌های عادی بیرونی \mathbf{A} در سطحی که فضا را در بر می‌گیرد.

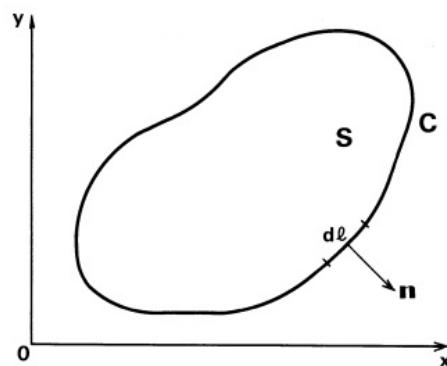
در ادامه اجازه دهید مورد خاصی را در نظر بگیریم که در آن شکل حجم V مانند ستون است، با سطوح بالایی و پایینی آن موازی با صفحه $x-y$ است. با فرض $Z=0$ و Y مستقل از z ، معادله (۹.۱۰) به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$\iint_S \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] dx dy = \oint_C (X \cos \alpha + Y \cos \beta) dl. \quad (15.10)$$

در اینجا سطح S و کانتور (*منحنی بسته*) C که S را، همانطور که در شکل (۲.۱۰) نشان داده شده، در بر می‌گیرد. $\oint dl$ نشان دهنده انتگرال خط در امتداد کانتور C است. وقتی یک عملگر دیفرانسیلی دو بعدی را در صفحه $x-y$ معرفی می‌کنیم.

$$\nabla_t = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (16.10)$$

معادله (۱۵.۱۰) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:



شکل ۲.۱۰: سطح S و کانتور C که S را در قضیه دو بعدی گوس محصور می‌کند.

$$\iint_S \nabla_t \cdot \mathbf{A} dv = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dl. \quad (17.10)$$

۲.۱۰ قضیه گرین

فرض کنید توابع X ، Y و Z در معادله (۹.۱۰) بصورت زیر بیان شوند؛

$$X = F \frac{\partial G}{\partial x}, \quad Y = F \frac{\partial G}{\partial y}, \quad Z = F \frac{\partial G}{\partial z} \quad (18.10)$$

که در آن F و G تابع x ، y و z هستند. جایگزینی معادله (۱۸.۱۰) در معادله (۱۰.۱۰) می‌دهد:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = F \nabla^r G + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \quad (19.10)$$

در اینجا ∇^r عملگر لaplاسین^۱ است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\nabla^r = \frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r} + \frac{\partial^r}{\partial z^r} \quad (20.10)$$

^۱Laplacian operator

از آنجایی که n یک بردار نرمال واحد بیرونی عمود بر جزء سطح dS است، زوایای α ، β و γ بین n و به ترتیب محورهای x و y و z برابرند با:

$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cos \beta = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \cos \gamma = \frac{\partial z}{\partial n} \quad (21.10)$$

در این صورت عبارت $X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$ در رابطه (۹.۱۰) با استفاده از معادله (۲۱.۱۰) و (۱۸.۱۰) بصورت زیر بیان خواهد شد؛

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = F \left[\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] = F \frac{\partial G}{\partial n} \quad (22.10)$$

جایگزینی معادله (۱۹.۱۰) و (۲۲.۱۰) در معادله (۹.۱۰) می‌دهد؛

$$\iiint_V F \nabla^* G + \iiint_V \left[\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \right] dv = \iint_S F \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (23.10)$$

جای F و G را در معادله بالا عوض می‌کنیم؛

$$\iiint_V G \nabla^* F + \iiint_V \left[\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \right] dv = \iint_S G \frac{\partial F}{\partial n} dS \quad (24.10)$$

با تفاضل معادله (۲۳.۱۰) از معادله (۲۴.۱۰) خواهیم داشت؛

$$\iiint_V (F \nabla^* G - G \nabla^* F) dv = \iint_S \left[F \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial F}{\partial n} \right] dS \quad (25.10)$$

این را قضیه گرین می‌نامند.

وقتی معادله (۲۱.۱۰) را در معادله (۱۴.۱۰) جایگزین می‌کنیم، بردار نرمال بیرونی n را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_x \frac{\partial x}{\partial n} + \mathbf{a}_y \frac{\partial y}{\partial n} + \mathbf{a}_z \frac{\partial z}{\partial n} \quad (26.10)$$

در اینجا در میابیم که گرادیان G بصورت زیر بیان می‌شود

$$\text{grad } G = \nabla G = \mathbf{a}_x \frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial G}{\partial z} \quad (27.10)$$

ضرب اسکالار ∇G و n در این صورت خواهد بود؛

$$\begin{aligned} \nabla G \cdot \mathbf{n} &= \left[\mathbf{a}_x \frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial G}{\partial z} \right] \cdot \left[\mathbf{a}_x \frac{\partial x}{\partial n} + \mathbf{a}_y \frac{\partial y}{\partial n} + \mathbf{a}_z \frac{\partial z}{\partial n} \right] \\ &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial n} \end{aligned} \quad (28.10)$$

قضیه گرین را می‌توان با استفاده از رابطه (۲۸.۱۰) بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\iiint_V (F \nabla^* G - G \nabla^* F) dv = \iint_S (F \nabla G - G \nabla F) \cdot \mathbf{n} dS \quad (29.10)$$

در ادامه اجازه دهید مورد خاصی را در نظر بگیریم که در آن شکل حجم V ستون مانند، با سطوح بالایی و پایینی آن موازی با صفحه $x-y$ است. با استفاده از یک مختصات دو بعدی مشابه که در شکل (۳.۱۰) نشان داده شده است، یک بیان دو بعدی از قضیه گرین به دست می آوریم:

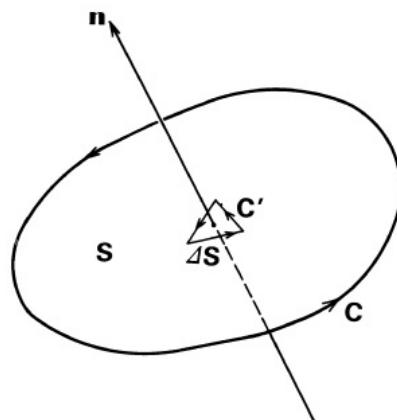
$$\iint_S (F \nabla^* G - G \nabla^* F) dS = \oint_C (F \nabla G - G \nabla F) \cdot n dl \quad (۳۰.۱۰)$$

۳.۱۰ قضیه استوکس

انتگرال خطی بردار \mathbf{A} در طول مسیر کانتور C شکل (۳.۱۰) را در نظر گیرید؛

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (۳۱.۱۰)$$

که در آن $d\mathbf{s}$ نشان دهنده بردار جزئی خط در امتداد کانتور C است. جهت انتگرال گیری



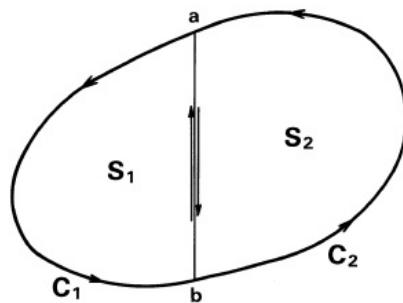
شکل ۳.۱۰: مختصات برای توصیف قضیه استوکس

خطی در روی C توسط پیچ راستگرد با توجه به بردار n نرمال به سطح S ، همانطور که در شکل (۳.۱۰) نشان داده شده، تعریف می شود. وقتی سطح ΔS را به بسیاری از سطوح مثلثی کوچک تقسیم می کنیم، معادله (۳۱.۱۰) از مجموع انتگرال های خطی در امتداد کانتور C' به دست می آید:

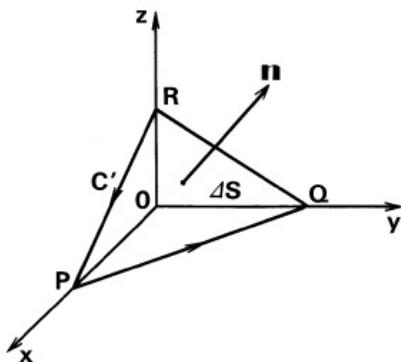
$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \sum \oint_{C'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (۳۲.۱۰)$$

صحت آخرین عبارت به شرح زیر تایید می شود. به عنوان مثال، حالتی را در نظر بگیرید که در آن کانتور C در شکل (۳.۱۰) با خط ab به دو بخش، همانطور که در شکل (۴.۱۰) نشان داده شده، تقسیم شده است. انتگرال های خطی در امتداد C_1 و C_2 یکدیگر را خنثی می کنند، زیرا بردار جزء خط ab در روی خط ab مخالف است. بنابراین، مشخص است که

مجموع انتگرال‌های خطی در امتداد C_1 و C_2 در شکل (۴.۱۰) برابر است با انتگرال خطی در امتداد C در شکل (۳.۱۰). با همان اصل، مجموع انتگرال‌های خطی در امتداد کانتور C' مثلثی تقسیم شده ΔS برابر با انتگرال خطی در امتداد C در شکل (۳.۱۰) می‌شود.



شکل ۴.۱۰: تقسیم انتگرال خطی

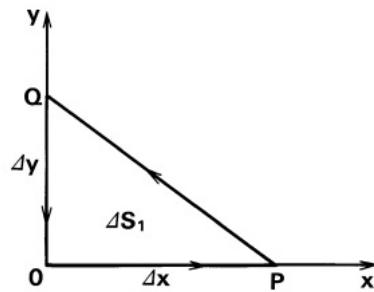


شکل ۵.۱۰: ناحیه مثلث کوچک ΔS برای محاسبه انتگرال خطی

سپس ناحیه مثلث PQR در شکل (۵.۱۰) را به صورت ΔS می‌گیریم و انتگرال خطی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\oint_{C'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (۳۳.۱۰)$$

همانطور که توضیح داده شد، انتگرال خطی در امتداد PQRP برابر است با مجموع انتگرال‌های خط در امتداد OPQO، OQRO و ORPO. ابتدا اجازه دهید انتگرال خط را در امتداد OPQO در نظر بگیریم، همانطور که در شکل (۶.۱۰) نشان داده شده است. از آنجایی که بردار جزء خط ds در امتداد محور x هدایت می‌شود، فقط مولفه x بردار \mathbf{A} مهم است.



شکل ۶.۱۰: انتگرال خطی در مسیر OPQO

مقادیر \mathbf{A} در نقطه O و P بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} (A_x, A_y, A_z) & \text{نقطه } O \\ \left[A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x, A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x, A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x} \Delta x \right] & \text{نقطه } P \end{cases} \quad (۳۴.۱۰)$$

در این صورت انتگرال خطی در روی OP برابر است با

$$\frac{A_x + (A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x)}{2} \Delta x \quad (۳۵.۱۰)$$

در مورد انتگرال خطی در امتداد QO , باید توجه داشته باشیم که مقدار بردار \mathbf{A} در نقطه Q برابر است با

$$\left[A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y, A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y, A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right]$$

از آنجایی که بردار جزء خط ds در امتداد محور منفی y هدایت می‌شود، انتگرال خطی در امتداد QO خواهد بود:

$$\frac{A_y + (A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y)}{2} \Delta y \quad (۳۵.۱۰ب)$$

در مورد انتگرال خطی در امتداد PQ , به اجزای x و y تقسیم می‌شود:

$$\frac{(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x) + (A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y)}{2} \cdot \Delta x = PQ \quad \text{مولفه } x \text{ انتگرال خطی} \quad (۳۶.۱۰)$$

$$\frac{(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x) + (A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y)}{2} \cdot \Delta y = PQ \quad \text{مولفه } y \text{ انتگرال خطی} \quad (۳۶.۱۰ب)$$

در این صورت انتگرال خطی در مسیر OPQO با مجموع معادلات (۳۴.۱۰)، (۳۵.۱۰)، (۳۶.۱۰) و (۳۶.۱۰ب) می‌دهد:

$$\int_{OPQO} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta x \Delta y = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \Delta S_1 \quad (۳۷.۱۰)$$

هنگامی که زاویه بین بردار \mathbf{n} نرمال به مثلث PQR و محورهای x , y و z را به صورت به ترتیب α , β و γ تعریف می‌کنیم، $\Delta S \cos \gamma$ توسط $\Delta S \cos \gamma$ داده می‌شود. بنابراین معادله (۳۷.۱۰) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{OPQO} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \Delta S \cos \gamma. \quad (۳۸.۱۰)$$

به روشی مشابه، انتگرال‌های خطی در امتداد OQRO و ORPO به دست می‌آیند:

$$\int_{OQRO} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \Delta S \cos \alpha. \quad (۳۹.۱۰)$$

$$\int_{ORPO} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \Delta S \cos \beta \quad (۴۰.۱۰)$$

در این صورت انتگرال خطی معادله (۳۳.۱۰) به صورت مجموع انتگرال‌های خطی در معادلات (۳۸.۱۰)-(۴۰.۱۰)-(۴۱.۱۰) داده می‌شود:

$$\oint_{C'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left\{ \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \cos \alpha + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \cos \beta + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \cos \gamma \right\} \Delta S. \quad (۴۱.۱۰)$$

در اینجا بردار \mathbf{B} را تعریف می‌کنیم؛

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z \quad (۴۲.۱۰)$$

از آنجائی که مقدار داخل آکولاد رابطه (۴۱.۱۰) از ضرب داخلی بردار \mathbf{B} و بردار نرمال \mathbf{n} حاصل می‌شود، آنرا بصورت زیر بیان می‌کنیم

$$\oint_{C'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \Delta S. \quad (۴۳.۱۰)$$

بردار \mathbf{B} که با رابطه (۴۱.۱۰) تعریف شد، بنام چرخش (روتاشیون-کرل) بردار \mathbf{A} تعریف و بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x \\ &\quad + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (۴۴.۱۰)$$

در اینجا متوجه می‌شویم که حاصل ضرب خارجی دو بردار \mathbf{E} و \mathbf{H} خواهد بود:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} = (E_y H_z - E_z H_y) \mathbf{a}_x + (E_z H_x - E_x H_z) \mathbf{a}_y + (E_x H_y - E_y H_x) \mathbf{a}_z \quad (۴۵.۱۰)$$

وقتی $\nabla \Rightarrow E \Rightarrow A \Rightarrow H$ [به معادله (۱۱.۱۰) مراجعه کنید] و آخرین معادله، عبارت رسمی $\nabla \times b f A$ با B در معادله (۴۲.۱۰) منطبق است. جایگزینی معادله (۴۳.۱۰) در معادله (۳۲.۱۰)، یک رابطه برای قضیه استوکس به دست می‌آوریم:

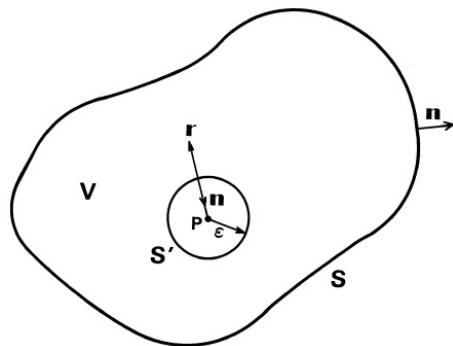
$$\oint_C A \cdot dS = \sum B \cdot n \Delta S = \iint_S B \cdot n dS = \iint_S (\nabla \times A) \cdot n dS \quad (۴۶.۱۰)$$

۴.۱۰ قضیه انتگرال هلم‌هولتز و کیرشهوف

همانطور که در شکل (۷.۱۰) نشان داده شده است، اجازه دهید حجم V محصور شده توسط یک سطح S را در نظر بگیریم. حجم شامل نقطه مفرد P نیست. طبق قضیه گرین رابطه زیر برای توابع داده شده F و G در داخل حجم V محصور در سطح S برقرار است:

$$\iiint_V (F \nabla^2 G - G \nabla^2 F) dv = \iint_S (F \nabla G - G \nabla F) \cdot n dS \quad (۴۷.۱۰)$$

که در آن n بردار بیرونی نرمال بر سطح S است. برای بررسی پراش نور، F را تابع موج



شکل ۷.۱۰: حجم V توسط سطح S محصور شده است. حجم شامل نقطه منفرد P نیست.

نور در نظر می‌گیریم که معادله هلم‌هولتز را برآورده می‌کند:

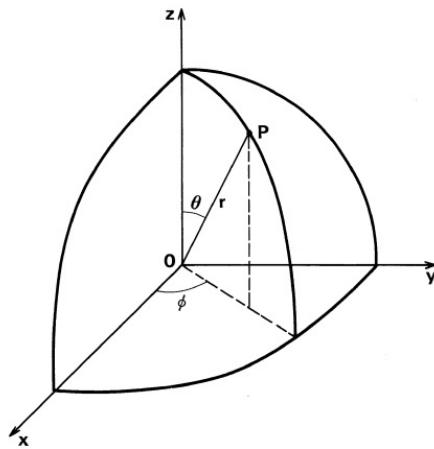
$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad (۴۸.۱۰)$$

در اینجا ضریب شکست در حجم V را $n = 1$ فرض کردیم. سپس، G به صورت یک موج کروی در نظر گرفته می‌شود که از نقطه P منشا می‌گیرد. تابع G بصورت زیر بیان می‌شود.

$$G = \frac{1}{r} e^{-jkr} \quad (۴۹.۱۰)$$

که در آن r از نقطه P اندازه‌گیری می‌شود. از آنجایی که $G \rightarrow \infty$ برای $r \rightarrow 0$ ، نقطه P یک نقطه منفرد است. برای اعمال قضیه گرین برای توابع F و G ، نقطه مفرد باید از حجم V حذف شود. سپس یک کره کوچک در مرکز P با شعاع ϵ از حجم V حذف می‌شود. حذف

این کره یک سطح جدید S ایجاد می‌کند. و سطح کل حجم تبدیل به $S + S'$ می‌شود، جایی که S' سطح خارجی است همانطور که در شکل (۷.۱۰) نشان داده شده است. موج کروی G ارضا می‌کند معادله هلم‌هولتز در مختصات کروی خواهد بود (شکل ۸.۱۰):



شکل ۸.۱۰: دستگاه مختصات کروی

$$\nabla^2 G + k^2 G = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + k^2 G = 0 \quad (\Delta ۱.۱۰)$$

جایگزینی معادلات (۴۸.۱۰) و (۵۰.۱۰) در معادله (۴۷.۱۰) خواهیم داشت

$$\iint_{S+S'} (F \nabla G - G \nabla F) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\Delta ۱.۱۰)$$

جایگزینی معادله (۴۹.۱۰) در معادله (۵۱.۱۰) می‌دهد

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[F \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \nabla F \right] \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \iint_{S'} \left[F \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \nabla F \right] \cdot \mathbf{n} dS = 0 \end{aligned} \quad (\Delta ۲.۱۰)$$

از آنجائی که بردار واحد \mathbf{a}_r و \mathbf{n} موازی اما در جهت مخالف در روی سطح کره‌ای بشعاع ϵ هستند، مقدار $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n} = -1$ است. بنابراین مقدار $\nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cdot \mathbf{n}$ روی سطح کره برابر است با

$$\begin{aligned} \left[\nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} &= \left[\mathbf{a}_r \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} \\ &= - \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n} = \left(jk + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{e^{-jk\epsilon}}{\epsilon} \end{aligned} \quad (\Delta ۳.۱۰)$$

با قرار دادن این مقدار آخر در جمله دوم در سمت چپ معادله (۵۲.۱۰) و حد $\epsilon \rightarrow 0$ را می‌گیریم و با توجه به اینکه $dS = 4\pi\epsilon^2$ در سطح S به دست می‌آوریم

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[F(P + \epsilon) \left(jk + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{e^{-jkr}}{\epsilon} - \frac{e^{-jkr}}{\epsilon} \nabla F \cdot \mathbf{n} \right] 4\pi\epsilon^2 = 4\pi F(P) \quad (54.10)$$

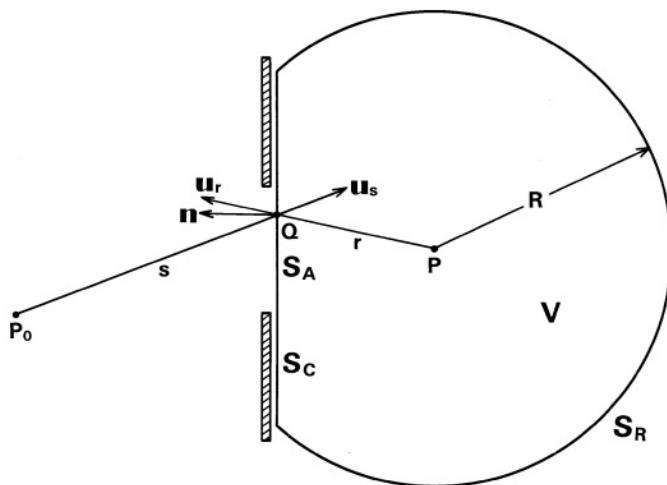
جایگزینی معادله (۵۴.۱۰) در معادله (۵۲.۱۰) می‌دهد:

$$F(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{-jkr}}{r} \nabla F - F \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (55.10)$$

آخرین معادله قضیه انتگرال گیری هلم‌هولتز و کیرشهوف نام دارد. با استفاده از این قضیه، دامنه نور در یک نقطه مشاهده دلخواه P را می‌توان با دانستن توزیع میدان نور F و $\partial F / \partial n = \nabla F \cdot \mathbf{n}$ بر روی سطحی که نقطه مشاهده را در بر می‌گیرد، بدست آورد.

۵.۱۰ رابطه پراش فرنل-کیرشهوف

قضیه انتگرال گیری هلم‌هولتز و کیرشهوف برای یافتن الگوی پراش روزنه وقتی که توسط یک منبع نقطه‌ای روشن می‌شود و بر روی صفحه نمایش داده می‌شود استفاده کرد. اجازه دهید یک محدوده انتگرال گیری محصور شده توسط یک صفحه پوشاننده S_C ، یک سطح S_A که روزنه را پل می‌زند، و یک نیمکره S_R در مرکز نقطه مشاهده P با شعاع R ، همانطور که در شکل (۹.۱۰) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. از آنجایی که دامنه نور در سطح صفحه ماسک S_C صفر است، انتگرال سطح معادله (۵۵.۱۰) می‌شود



شکل ۹.۱۰: شکل محدوده انتگرال گیری برای رابطه پراش فرنل-کیرشهوف.

$$F(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_A + S_R} \left[\frac{e^{-jkr}}{r} \nabla F - F \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (56.10)$$

انتگرال‌گیری روی نیم کره S_R برابر است با:

$$\iint_{S_R} \left[\frac{e^{-jkR}}{R} \nabla F \cdot \mathbf{n} + F \frac{e^{-jkR}}{R} \left(jk + \frac{1}{R} \right) \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n} \right] dS.$$

که در آن \mathbf{a}_r بردار واحد از نقطه P بسوی نقطه‌ای روی سطح S_R است. هنگامی که R خیلی زیاد باشد، انتگرال روی S_R را می‌توان تقریب زد؛

$$\iint_{S_R} \frac{e^{-jkR}}{R} [\nabla F \cdot \mathbf{n} + jkF] R^{\frac{1}{2}} d\Omega, \quad (57.10)$$

که در آن Ω زاویه فضائی از نقطه P بسوی S_R است. از آنجایی که جهت \mathbf{a}_r و \mathbf{n} یکسان است، $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n}$ برابر واحد است. اگر شرط

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [\nabla F \cdot \mathbf{n} + jkF] = 0. \quad (58.10)$$

برآورده شود، انتگرال رابطه (57.10) از بین میروند و صفر می‌شود. این شرط را شرط تابش سامرفلد^۲ می‌نامند. اگر تابع F یک موج کروی باشد که با معادله (49.10) بیان شود، در این صورت معادله (58.10) نیز بصورت زیر اوضاع می‌شود

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [\nabla F \cdot \mathbf{n} + jkF] = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-jkR}}{R} \right) = 0. \quad (59.10)$$

در واقع، موج نوری که وارد روزنه می‌شود، یک موج کروی یا مجموع امواج کروی است. بنابراین، شرایط تابش سامرفلد بهطور کلی برآورده می‌شود.

در این صورت مشاهده می‌شود که برای محاسبه $F(P)$ باید انتگرال را کمی بیش از S_A در نظر بگیریم. با در نظر گرفتن s به عنوان فاصله از منبع P تا نقطه Q ، دامنه یک موج کروی روی روزنه به دست می‌آید:

$$F = A \frac{e^{-jks}}{s} \quad (60.10)$$

که در آن A ثابت است. از آنجایی که جهت بردار ∇F به گونه‌ای است که تغییر F نسبت به تغییر مکان حداکثر است، ∇F هم جهت \mathbf{a}_s است. بنابراین، ∇F به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla F = \mathbf{a}_s A \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-jks}}{s} \right) = \mathbf{a}_s A \left(jk + \frac{1}{s} \right) \frac{e^{-jks}}{s} \quad (61.10)$$

هم‌چنین داریم:

$$\nabla \left(\frac{e^{-jks}}{s} \right) = -\mathbf{a}_r \left(jk + \frac{1}{s} \right) \frac{e^{-jkr}}{s} \quad (62.10)$$

^۲Sommerfeld Radiation Condition

هنگامی که s و r بسیار بیشتر از طول موج هستند، عبارت دوم در داخل پرانتر در سمت راست معادله (۶۱.۱۰) و (۶۲.۱۰) را می‌توان در مقایسه با عبارت اول داخل پرانتر نادیده گرفت. جایگزینی تمام نتایج فوق در معادله (۵۶.۱۰) بدست می‌آوریم:

$$F(p) = j \frac{Ak}{4\pi} \iint_{S_A} \frac{e^{-jk(r+s)}}{sr} [\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{n} - \mathbf{a}_s \cdot \mathbf{n}] dS, \quad (63.10)$$

با بیان زاویه بین بردارهای واحد \mathbf{a}_r و \mathbf{n} به صورت $(\mathbf{a}_r, \mathbf{n})$ و بیان زاویه بین \mathbf{a}_s و \mathbf{n} به صورت $(\mathbf{a}_s, \mathbf{n})$ ، معادله قبل به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$F(p) = j \frac{Ak}{4\pi} \iint_{S_A} \frac{e^{-jk(r+s)}}{sr} [\cos(\mathbf{a}_r, \mathbf{n}) - \cos(\mathbf{a}_s, \mathbf{n})] dS, \quad (64.10)$$

معادله (۶۴.۱۰) بنام **رابطه پراش فرنل-کیرشهوف** معروف است.
در بین عامل‌ها در زیر انتگرال معادله (۶۴.۱۰)، جمله

$$\cos(\mathbf{a}_r, \mathbf{n}) - \cos(\mathbf{a}_s, \mathbf{n}) \quad (65.10)$$

ضریب انحراف^۳ است که به زوایای تابش و انتقال مربوط می‌شود. برای حالت خاصی که در آن منبع نور تقریباً در مرکز نسبت به روزنه قرار دارد، ضریب انحراف $1 + \cos \psi$ می‌شود، که در آن ψ زاویه بین \mathbf{a}_s و خط QP ، همانطور که در شکل (۱۰.۱۰) نشان داده شده، است. در این صورت معادله (۶۴.۱۰) به صورت زیر بیان شده است

$$F(p) = j \frac{Ak}{4\pi} \iint_{S_A} \frac{e^{-jk(r+s)}}{sr} [1 + \cos \psi] dS. \quad (66.10)$$

هنگامی که هر دو s و r تقریباً عمود بر صفحه ماسک هستند، زاویه $\psi \approx 0$ است. در این صورت معادله (۶۶.۱۰) می‌شود

$$F(p) = j \frac{Ak}{4\pi} \iint_{S_A} \frac{e^{-jk(r+s)}}{sr} [1 + \cos \psi] dS. \quad (67.10)$$

اگر دامنه موج کروی روی روزنه را با رابطه زیر بیان کنیم

$$g = A \frac{e^{-jks}}{s}$$

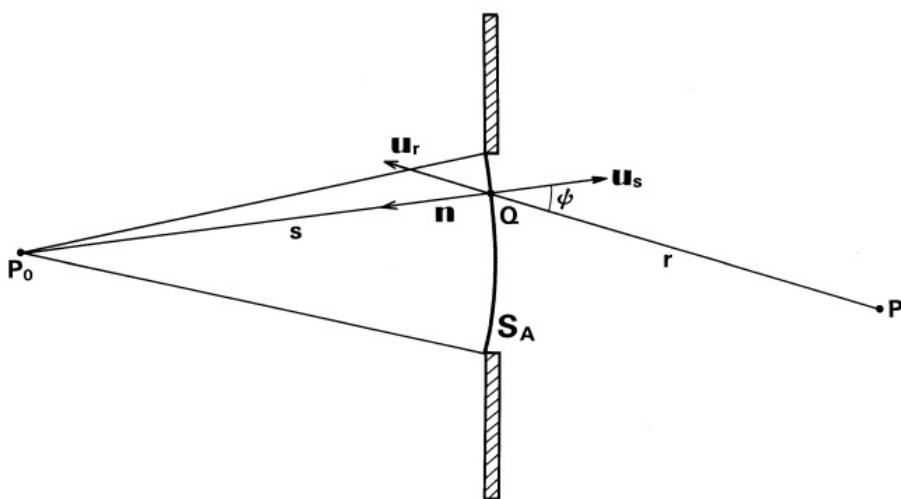
در این صورت $F(p)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$F(p) = j \frac{Ak}{4\pi} \iint_{S_A} g \frac{e^{-jkr}}{r} dS. \quad (68.10)$$

این آخرین معادله بیان می‌کند که اگر توزیع دامنه g نور در سراسر روزنه مشخص باشد، میدان $F(P)$ در نقطه مشاهده را می‌توان با معادله (۶۸.۱۰) بدست آورد. می‌توان آن را به صورت یک رابطه ریاضی از اصل هویگنس^۴ تفسیر کرد. انتگرال را می‌توان به صورت

^۳Obliquity Factor

^۴Huygens' principle



شکل ۱۰.۱۰: موردی که منبع P در نزدیکی مرکز روزنه قرار دارد.

مجموع مشارکت منابع کروی کوچک بیشماری با دامنه gdS در امتداد روزنه S_A در نظر گرفت.

۶.۱۰ روابط برای تحلیل برداری

در اینجا بردارهای واحد در امتداد محور x , y و z را بترتیب با a_x , a_y و a_z نشان می‌دهیم. ابتدا یک معادله مهم که ضرب برداری را بیان میدارد توضیح خواهیم داد.

ضرب اشکال بردار A با $B \times C$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه ضرب برداری در معادله (۴۵.۱۰)، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_x(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_x + A_y(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_y + A_z(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_z \\ &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۶۹.۱۰)$$

مقدار دترمینان در معادله (۶۹.۱۰) وقتی A , B و C را بطور دوری بچرچانیم، یعنی بصورت تبدیل $A \rightarrow B \rightarrow C (\rightarrow A)$ ، یکسان خواهد ماند. در این صورت تساوی زیر را خواهیم داشت

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (۷۰.۱۰)$$

بعد، معادلات مهم مربوط به واگرایی [به معادله مراجعه کنید. (۱۰.۱۰)] و گرادیان [به معادله مراجعه کنید. (۱۰.۲۷)] از بردار \square مشتق خواهد شد.

ابتدا معنای $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ را در نظر می‌گیریم. مولفه x خواهد بود

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{A})_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (71.10)$$

در اینجا $\partial^2 A_x / \partial x^2$ به معادله اضافه و از آن کم شد تا سمت راست‌ترین عبارت به دست آید. به طور مشابه، مولفه‌های y و z به دست می‌آیند:

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_y = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \quad (72.10)$$

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_z = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \quad (73.10)$$

توجه به معادلات (73.10)-(71.10) توجه به شکل عملگر بیان می‌شود.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (74.10)$$

بیان رسمی $\nabla^2 \mathbf{A}$ بکار برده شده از عملگر زیر

$$\nabla^2 (= \partial^2 \partial x^2 + \partial^2 \partial y^2 + \partial^2 \partial z^2)$$

بر A_y و A_z در معادلات (73.10)-(71.10) استفاده شده است. میباشد توجه کنیم که رابطه (74.10) فقط برای $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ در مختصات دکارتی کاربرد دارد. سپس، اجازه دهید رابطه $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla$ را در نظر گیریم. بر طبق رابطه ضرب برداری و دیورژانس یک بردار، $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla$ بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= B_x \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] + B_y \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + B_z \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \\ &\quad - A_x \left[\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right] - A_y \left[\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right] - A_z \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right] \\ &= B_x(\nabla \times \mathbf{A})_x + B_y(\nabla \times \mathbf{A})_y + B_z(\nabla \times \mathbf{A})_z \\ &\quad - \{A_x(\nabla \times \mathbf{B})_x + A_y(\nabla \times \mathbf{B})_y + A_z(\nabla \times \mathbf{B})_z\} \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (75.10)$$

فرض کنید ψ یک تابع اسکالر باشد، دو رابطه مربوط به دیورژانس و کرل برای \mathbf{A} بدست

می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\psi A_z) \\
 &= \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} A_z \right] + \psi \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \quad (76.10) \\
 &= \nabla \psi \cdot \mathbf{A} + \psi \nabla \cdot \mathbf{A} \\
 \nabla \times (\psi \mathbf{A}) &= \mathbf{a}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(\psi A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\psi A_y) \right\} + \mathbf{a}_y \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(\psi A_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\psi A_z) \right\} \\
 &\quad + \mathbf{a}_z \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\psi A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\psi A_x) \right\} \\
 &= \mathbf{a}_x \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} A_z - \frac{\partial \psi}{\partial z} A_y \right] + \mathbf{a}_y \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} A_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} A_z \right] + \mathbf{a}_z \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} A_y - \frac{\partial \psi}{\partial y} A_x \right] \\
 &\quad + \psi \left\{ \mathbf{a}_x \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] + \mathbf{a}_y \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \mathbf{a}_z \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \right\} \\
 &= \nabla \psi \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A} \quad (77.10)
 \end{aligned}$$

سایر روابط مهم تحلیل‌های برداری عبارتند از

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi \quad (78.10)$$

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0 \quad (79.10)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (80.10)$$

۷.۱۰ روابط مختصات استوانه‌ای و کروی

در این قسمت روابط در مختصات استوانه‌ای و کروی خلاصه می‌شود

۱.۷.۱۰ مختصات استوانه‌ای

$$(\nabla \psi)_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (\nabla \psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (\nabla \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (81.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \end{array} \right. \quad (A2.1+)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (A3.1+)$$

$$\nabla^\gamma \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial^\gamma \psi}{\partial \theta^\gamma} + \frac{\partial^\gamma \psi}{\partial z^\gamma} \quad (A4.1+)$$

۲.۷.۱۰ مختصات کروی

$$(\nabla \psi)_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (\nabla \psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (\nabla \psi)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (A5.1+)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right\} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \end{array} \right. \quad (A6.1+)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial}{\partial r} (r^\gamma A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (A7.1+)$$

$$\nabla^\gamma \psi = \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\gamma \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^\gamma \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^\gamma \sin^\gamma \theta} \frac{\partial^\gamma \psi}{\partial \phi^\gamma} \quad (A8.1+)$$

كتاب نامه

- [1] Collin, R. E. 1960. *Field Theory of Guided Waves*. New York: McGraw-Hill.
- [2] Stratton, J. A. 1941. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill.
- [3] Born, M., and E. Wolf. 1970. *Principles of Optics*. Oxford: Pergamon Press.
- [4] Morse, P. M., and H. Feshbach. 1953. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill.

پیوست آ

معادلات موج برداری در فیبر با ضریب شکست تدریجی

توزيع ضریب شکست و ثابت انتشار را بصورت زیر بیان می‌کنیم

$$n^*(r) = n_1^* [1 - f(r)], \quad (1.1)$$

$$\beta^* = k^* n_1^* (1 - \chi), \quad (2.1)$$

که در آن n_1 ضریب شکست بیشینه در هسته و بنابراین f بصورت $f(r) \geq 0$ فرض می‌شود. مولفه‌های میدان الکترومغناطیسی E_z و H_z بصورت زیر بیان می‌شوند

$$E_z = \frac{k^* n_1^*}{\beta} \Phi(r) \cos(n\theta + \varphi_n) \quad (3.1)$$

$$H_z = \omega \epsilon_1 \Psi(r) \sin(n\theta + \varphi_n) \quad (4.1)$$

که در آن n یک عدد صحیح و $\varphi_n = \pi/2$ است. با جایگزینی (1.1) و (4.1) در معادلات موج دقیق زیر [۴]:

$$\begin{aligned} & \frac{(\omega^* \mu \epsilon - \beta^*)}{\epsilon} \nabla \cdot \left[\frac{\epsilon \nabla E_z}{(\omega^* \mu \epsilon - \beta^*)} \right] + (\omega^* \mu \epsilon - \beta^*) E_z \\ & - \nabla \left[\ln \frac{\mu \epsilon}{(\omega^* \mu \epsilon - \beta^*)} \right] \cdot \left[\mathbf{u}_z \times \frac{\omega \mu}{\beta} \nabla H_z \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\omega^* \mu \epsilon - \beta^*)}{\mu} \nabla \cdot \left[\frac{\mu \nabla H_z}{(\omega^* \mu \epsilon - \beta^*)} \right] + (\omega^* \mu \epsilon - \beta^*) H_z \\ & + \nabla \left[\ln \frac{\mu \epsilon}{(\omega^* \mu \epsilon - \beta^*)} \right] \cdot \left[\mathbf{u}_z \times \frac{\omega \epsilon}{\beta} \nabla E_z \right] = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{بدست می‌آوریم} \\ & \left(\frac{\chi - f}{\chi - f} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{1 - f}{\chi - f} \right) r \frac{d\Phi}{dr} \right] + \left[k^* n^* (\chi - f) - \frac{n^*}{r^*} \right] \Phi \\ & \quad + \frac{n}{r} \left(\frac{\chi - f}{\chi - f} \right) \Psi \frac{d}{dr} \left(\frac{1 - f}{\chi - f} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7.\bar{1})$$

$$\begin{aligned} & (\chi - f) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(\chi - f)} r \frac{d\Psi}{dr} \right] + \left[k^* n^* (\chi - f) - \frac{n^*}{r^*} \right] \Psi \\ & \quad + \frac{n}{r} (\chi - f) \Phi \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi - f} \right) = 0, \end{aligned} \quad (8.\bar{1})$$

هنگامی که برای مود $E_z = \Phi = 0$ ، TE قرار می‌دهیم، از معادلات (7.1}) و (8.1}) بدست می‌آوریم،

$$\frac{n}{r} \left(\frac{\chi - f}{\chi - f} \right) \Psi \frac{d}{dr} \left(\frac{1 - f}{\chi - f} \right) = 0 \quad (9.\bar{1})$$

$$(\chi - f) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{(\chi - f)} r \frac{d\Psi}{dr} \right] + \left[k^* n^* (\chi - f) - \frac{n^*}{r^*} \right] \Psi = 0 \quad (10.\bar{1})$$

مشتق جمله شامل $f(r)$ در معادله (9.1}) صفر نیست زیرا ما با فیبرهای با ضریب شکست تدریجی سروکار داریم. بنابراین، عدد مود سمت باید

$$n = 0 \quad (11.\bar{1})$$

برای اینکه معادله (9.1}) برقرار باشد.

پیوست ب

استخراج معادله (۲۱۹.۳)

با جایگزینی معادله (۲۱۶.۳) در معادله (۲۱۸.۳) و استفاده از معادله (۲۱۷.۳)، خواهیم داشت

$$(\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_1) \frac{dA}{dz} + (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_2) \frac{dB}{dz} = 0 \quad (ب.1)$$

$$(\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{H}}_1) \frac{dA}{dz} - j\omega\epsilon_0 A(\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K})\tilde{\mathbf{E}}_1 + (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{H}}_2) \frac{dB}{dz} - j\omega\epsilon_0 B(\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K})\tilde{\mathbf{E}}_2 = 0 \quad (ب.2)$$

که در آن \mathbf{u}_z نمایشگر بردار واحد در جهت z است. در بدست آوردن معادلات (ب.۱) و (ب.۲)، از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\nabla \times (A\mathbf{E}) = A\nabla \times \mathbf{E} + \nabla A \times \mathbf{E} = A\nabla \times \mathbf{E} + \frac{dA}{dz} \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}. \quad (ب.3)$$

توجه کنید که معادلات (ب.۱) و (ب.۲) صفر هستند، ما اینجا انتگرال‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^{\pi} \int_0^\infty \left[\tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot (\underline{2.1}) - \tilde{\mathbf{H}}_1^* \cdot (\underline{1.1}) \right] r dr d\theta = 0 \quad (ب.4)$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^\infty \left[\tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot (\underline{2.1}) - \tilde{\mathbf{H}}_2^* \cdot (\underline{1.1}) \right] r dr d\theta = 0 \quad (ب.5)$$

معادلات (ب.۴) و (ب.۵) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) r dr d\theta \\ + \frac{dB}{dz} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*) r dr d\theta \\ + j\omega\epsilon_0 A \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{E}}_1 r dr d\theta = 0. \end{aligned} \quad (\text{ب.۶})$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \tilde{\mathbf{H}}_2^*) r dr d\theta \\ + \frac{dB}{dz} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \tilde{\mathbf{H}}_2^*) r dr d\theta \\ + j\omega\epsilon_0 A \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{E}}_2 r dr d\theta \\ + j\omega\epsilon_0 B \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{E}}_2 r dr d\theta = 0. \end{aligned} \quad (\text{ب.۷})$$

چون E_x و H_y مولفه‌های غالب میدان الکترومغناطیسی $(\tilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{H}}_1)$ در مود HE_{11}^x و مولفه‌میدان الکترومغناطیسی $(\tilde{\mathbf{E}}_2, \tilde{\mathbf{H}}_2)$ در مود HE_{11}^y همان طور که بخش ۵.۳ تشریح شد هستند، جمله چهارم در معادله (ب.۶) و جمله سوم در معادله (ب.۷) را می‌توان چشم پوشی کرد.

برای اینکه معادلات (ب.۶) و (ب.۷) بیشتر ساده شود، میباشد رابطه تعاملد برای مودهای ویژه $\tilde{\mathbf{E}}_p$ و $\tilde{\mathbf{H}}_p$ در موجبر را بدست آوریم. ابتدا انتگرال گیری برداری حاصل ضرب را روی تمام سطح مقطع بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\iint \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}_p^* \times \tilde{\mathbf{H}}_q + \tilde{\mathbf{E}}_q \times \tilde{\mathbf{H}}_p^* dS \quad (p, q = 1, 2) \quad (\text{ب.۸})$$

با بازنویسی معادله (ب.۸) با استفاده از معادله (۲۱۷.۳) و رابطه برداری زیر

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}, \quad (\text{ب.۹})$$

بدست می‌آوریم

$$\iint \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}_p^* \times \tilde{\mathbf{H}}_q + \tilde{\mathbf{E}}_q \times \tilde{\mathbf{H}}_p^* dS = j\omega\epsilon_0 \iint \tilde{\mathbf{E}}_p^* \cdot (\mathbf{K}^* - \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{E}}_q dS = 0. \quad (\text{ب.۱۰})$$

از آنجائی که تانسور گذردهی نسبی در یک موجبر بدون تلفات حقیقی است، ($\mathbf{K}^* = \mathbf{K}$) معادله (ب. ۱۰) برابر صفر است. در اینجا مودهای ویژه $\tilde{\mathbf{E}}_p$ و $\tilde{\mathbf{H}}_p$ را به مولفه‌های طولی و عرضی جدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_p(r, \theta, z) = \mathbf{E}_p(r, \theta) \exp(-j\beta_p z), \\ \tilde{\mathbf{H}}_p(r, \theta, z) = \mathbf{H}_p(r, \theta) \exp(-j\beta_p z) \end{cases} \quad (ب. ۱۱)$$

با جایگزینی معادله (ب. ۱۱) در (ب. ۱۰) خواهیم داشت

$$\iint \nabla \cdot \left\{ \left(\tilde{\mathbf{E}}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \tilde{\mathbf{H}}_p^* \right) \exp[j(\beta_p - \beta_q)z] \right\} dS = 0. \quad (ب. ۱۲)$$

با استفاده از روابط برداری بصورت زیر

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi = \phi \nabla_t \cdot \mathbf{A} + \frac{d\phi}{dz} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{A}, \quad (ب. ۱۳)$$

معادله (ب. ۱۲) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\iint \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_p^*) dS + j(\beta_p - \beta_q) \iint \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_p^*) dS = 0. \quad (ب. ۱۴)$$

که در آن ∇_t نمایشگر عملگر (اپراتور) دیفرانسیلی در سطح مقطع است. جمله اول در معادله (ب. ۱۴) را می‌توان با استفاده قضیه گوس بصورت انتگرالی اصلاح کرد

$$\iint \nabla_t \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_p^*) dS + \oint (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_p^*) \cdot \mathbf{n} dl \quad (ب. ۱۵)$$

که در آن $\oint dl$ نشاندهنده انتگرال خطی در امتداد پیرامون سطح S و \mathbf{n} نمایشگر بردار واحد عمودی بسمت خارج است. چون میدان الکترومغناطیسی \mathbf{E}_p و \mathbf{H}_p وقتی انتگرال روی پیرامون بقدر کافی دور از مرکز هسته انجام می‌شود صفر است، معادله (ب. ۱۵) نیز صفر می‌شود. در این صورت معادله (ب. ۱۴) بصورت زیر تقلیل می‌یابد

$$j(\beta_p - \beta_q) \iint \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_p^*) dS = 0. \quad (ب. ۱۶)$$

از معادله (ب. ۱۶) رابطه زیر که بعنوان رابطه تعامد^۱ معروف است،

$$\iint \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{E}_p^* \times \mathbf{H}_q + \mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_p^*) dS = 0. \quad (p \neq q) \quad (ب. ۱۷)$$

بین مودهای با ثابت‌های انتشار متفاوت ($\beta_p \neq \beta_q$) برقرار است. در حالت فیبر متقارن دایره‌ای، HE_x^y و HE_y^x منحط بوده و دارای ثابت انتشارهای یکسانی هستند. بنابراین، نمیتوانیم رابطه تعامد (ب. ۱۶) را اثبات کنیم. در چنین حالتی، می‌توانیم رابطه تعامد را بطور مستقیم با قرار دادن میدان‌های الکترومغناطیسی برای

^۱Orthogonality Relation

مودهای HE_{\perp}^x و HE_{\perp}^y [۹۴.۳] و (۹۵.۳) در معادله (۱۷.ب) بدست آوریم. با جایگزینی (۱۷.ب) در (۶.ب) و (۷.ب) خواهیم داشت

$$\frac{dA}{dz} = -jA \frac{\omega \epsilon_0 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{\perp}^* \cdot (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \mathbf{E}_{\perp} r dr d\theta}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^* \times \tilde{\mathbf{H}}_{\perp} + \tilde{\mathbf{E}}_{\perp} \times \tilde{\mathbf{H}}_{\perp}^*) r dr d\theta} \quad (۱۸.ب)$$

$$\frac{dB}{dz} = -jB \frac{\omega \epsilon_0 \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{\parallel}^* \cdot (\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}) \mathbf{E}_{\parallel} r dr d\theta}{\int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_{\parallel}^* \times \tilde{\mathbf{H}}_{\parallel} + \tilde{\mathbf{E}}_{\parallel} \times \tilde{\mathbf{H}}_{\parallel}^*) r dr d\theta} \quad (۱۹.ب)$$

پیوست ب

استخراج معادلات (۸.۴) و (۹.۴)

جمله زیر انتگرال معادله (۴.۴) را می‌توان بصورت زیر بیان کرد

$$I_1 = \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot (\textcolor{blue}{\tilde{\mathbf{H}}_1^* - \tilde{\mathbf{H}}_1}) = \frac{dA}{dz} [\tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{H}}_1) - \tilde{\mathbf{H}}_1^* \cdot (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_1)]$$

$$+ \frac{dB}{dz} [\tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{H}}_1) - \tilde{\mathbf{H}}_1^* \cdot (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_1)] - j\omega\epsilon_0 A(N^r - N_1^r) \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 \quad (1.\text{پ})$$

$$- j\omega\epsilon_0 B(N^r - N_1^r) \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$$

هرگاه که از روابط برداری زیر استفاده کنیم:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{H}}_1) = -\mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1), \quad (2.\text{پ})$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_1^* \cdot (\mathbf{u}_z \times \tilde{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{u}_z \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*)$$

معادله (۱.پ) را می‌توان بازنوسی کرد

$$I_1 = -\frac{dA}{dz} \mathbf{u}_z \cdot [\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*] - \frac{dB}{dz} \mathbf{u}_z \cdot [\tilde{\mathbf{E}}_1^* \times \tilde{\mathbf{H}}_1 - \tilde{\mathbf{E}}_1 \times \tilde{\mathbf{H}}_1^*] \quad (3.\text{پ})$$

$$- j\omega\epsilon_0 A(N^r - N_1^r) \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 - j\omega\epsilon_0 B(N^r - N_1^r) \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$$

شبیه همین روش، جمله زیر انتگرال (۴.۴) را می‌توان بصورت زیر بیان کرد

$$I_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot (\textcolor{blue}{\tilde{\mathbf{H}}_2^* - \tilde{\mathbf{H}}_2}) = -\frac{dA}{dz} \mathbf{u}_z \cdot [\tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \tilde{\mathbf{H}}_2^*]$$

$$- \frac{dB}{dz} \mathbf{u}_z \cdot [\tilde{\mathbf{E}}_2^* \times \tilde{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_2 \times \tilde{\mathbf{H}}_2^*] - j\omega\epsilon_0 A(N^r - N_2^r) \tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2 \quad (4.\text{پ})$$

$$- j\omega\epsilon_0 B(N^r - N_2^r) \tilde{\mathbf{E}}_2^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2$$

پیوست ت

حل دقیق معادلات تزویج مودی (۲۶.۴) و (۲۷.۴)

حل معادلات تزویج مودی (۲۶.۴) و (۲۷.۴) را بصورت‌ها زیر فرض می‌کنیم.

$$A(z) = [a_1 e^{jQz} + a_2 e^{-jQz}] \exp\left[-j\delta z + j\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}z\right] \quad (\text{ت.۱})$$

$$B(z) = [b_1 e^{jQz} + b_2 e^{-jQz}] \exp\left[j\delta z + j\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}z\right] \quad (\text{ت.۲})$$

جایگزینی این معادلات در معادلات (۲۶.۴) و (۲۷.۴)، روابط زیر را خواهیم داشت

$$\chi_a b_1 = -(Q - \hat{\delta}) a_1 \quad (\text{ت.۳})$$

$$\chi_a b_2 = (Q + \hat{\delta}) a_2 \quad (\text{ت.۴})$$

$$\chi_b a_1 = -(Q + \hat{\delta}) b_1 \quad (\text{ت.۵})$$

$$\chi_b a_2 = (Q - \hat{\delta}) b_2 \quad (\text{ت.۶})$$

که در آن

$$\hat{\delta} = \delta + \frac{\alpha_a + \alpha_b}{2} \quad (\text{ت.۷})$$

برای اینکه معادلات (ت.۳)-(ت.۶) دارای جواب غیرضروری بجز $Q(>0)$ باشند، باید داشته باشیم

$$Q = \sqrt{\chi_a \chi_b + \hat{\delta}^2} \quad (\text{ت.۸})$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی در $z = \infty$ بصورت

$$a_1 + a_2 = A(\infty) \quad (ت.9)$$

$$b_1 + b_2 = B(\infty) \quad (ت.10)$$

ضرایب a_1, a_2, b_1 و b_2 خواهد بود

$$a_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{\hat{\delta}}{Q} \right) A(\infty) - \frac{\chi_a}{Q} B(\infty) \right\}, \quad (ت.11)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\hat{\delta}}{Q} \right) A(\infty) + \frac{\chi_a}{Q} B(\infty) \right\}, \quad (ت.12)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\chi_b}{Q} A(\infty) + \left(1 - \frac{\hat{\delta}}{Q} \right) B(\infty) \right\}, \quad (ت.13)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\chi_b}{Q} A(\infty) + \left(1 + \frac{\hat{\delta}}{Q} \right) B(\infty) \right\}. \quad (ت.14)$$

جایگزینی معادلات (ت.11) - (ت.14) در معادلات (ت.1) و (ت.2)، حل دقیق برای معادلات تزویج مودی هم جهت را بدست می‌آوریم:

$$A(z) = \left\{ \left[\cos(Qz) + j \frac{\hat{\delta}}{Q} \sin(Qz) \right] A(\infty) - j \frac{\chi_a}{Q} \sin(Qz) B(\infty) \right\} \exp[-j(\hat{\delta} - \alpha_a)z] \quad (ت.15)$$

$$B(z) = \left\{ -j \frac{\chi_b}{Q} \sin(Qz) A(\infty) + \left[\cos(Qz) - j \frac{\hat{\delta}}{Q} \sin(Qz) \right] B(\infty) \right\} \exp[j(\hat{\delta} - \alpha_b)z] \quad (ت.16)$$

پیوست ث

اسخراج معادله (۵۹.۶)

فرض می‌کنیم که وقتی عدد موج k تغییر جزئی می‌کند β و $E_t(r)$ بترتیب برابر $\delta\beta + \beta$ و $E_t + \delta E_t$ می‌شود. در این حالت، معادله (۵۸.۶) بصورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} & (\beta + \delta\beta)^* \int_0^\infty (E_t + \delta E_t)^* r dr + \int_0^\infty \left[\frac{d}{dr} (E_t + \delta E_t) \right]^* r dr \\ & \int_0^\infty [kn + \delta(kn)]^* (E_t + \delta E_t)^* r dr \end{aligned} \quad (۱.\text{ث})$$

با صرفنظر کردن از جمله δ می‌توانیم این معادله را بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta^* \int_0^\infty E_t^*(r) r dr + \int_0^\infty \left(\frac{dE_t}{dr} \right)^* r dr \int_0^\infty k^* n^*(r) E_t^*(r) r dr \right\} \\ & + \left\{ \beta^* \int_0^\infty \delta E_t^* r dr + \int_0^\infty \delta \left(\frac{dE_t}{dr} \right)^* r dr - \int_0^\infty k^* n^*(r) \delta E_t^*(r) r dr \right\} \\ & + 2 \left\{ \beta \delta \beta \int_0^\infty E_t^*(r) r dr - \int_0^\infty kn \delta(kn) E_t^*(r) r dr \right\} \end{aligned} \quad (۲.\text{ث})$$

با جایگزینی معادله (۵۸.۶) در جمله اول این معادله، و نیز جایگزینی رابطه زیر بدست آمده از شرط ایستائی $\delta\beta^* = 0$

$$\beta^* \int_0^\infty \delta E_t^* r dr + \int_0^\infty \delta \left(\frac{dE_t}{dr} \right)^* r dr - \int_0^\infty k^* n^*(r) \delta E_t^*(r) r dr = 0. \quad (۳.\text{ث})$$

در جمله دوم معادله (۳.ث)، خواهیم داشت

$$\beta \delta \beta \int_0^\infty E_t^* r dr - \int_0^\infty kn \delta(kn) E_t^*(r) r dr = 0. \quad (۴.\text{ث})$$

این را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{\beta}{k} \frac{d\beta}{dk} = \frac{\int_{\circ}^{\infty} n(r) [d(kn)/dk] E_t^*(r) r dr}{\int_{\circ}^{\infty} E_t^*(r) r dr} \quad (\text{ث.5})$$

هنگامی که از پاشندگی ضریب شکست صرفنظر می‌کنیم، این بصورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\frac{\beta}{k} \frac{d\beta}{dk} = \frac{\int_{\circ}^{\infty} n(r) E_t^*(r) r dr}{\int_{\circ}^{\infty} E_t^*(r) r dr} \quad (\text{ث.6})$$

پیوست ج

اثبات معادله (۶۶.۶)

فرض می‌کنیم که $I[\phi]$ برای $\phi(x, y)$ ایستا باشد و تغییرات جزئی تابع را در نظر می‌گیریم

$$\phi_{pert}(x, y) = \phi(x, y) + \delta\eta(x, y) \quad (\text{ج.1})$$

که در آن δ یک کمیت کوچک حقیقی و $\eta(x, y)$ تابع دلخواه پیوسته‌ای از x و y است. با جایگزینی $\phi_{pert}(x, y)$ در معادله (۶۶.۶) و با فرض این که $I[\phi_{pert}]$ بازاء $\delta = 0$ ایستا است، داریم

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \delta} I[\phi_{pert}] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - (k^2 n^2 - \beta^2) \phi \eta \right] dx dy = 0. \quad (\text{ج.2})$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء، معادله (ج.۲) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\eta \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\eta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) \phi \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (\text{ج.3})$$

از آنجایی که $\eta(x, y)$ یک تابع دلخواه است، جمله‌های اول، دوم و سوم معادله (ج.۳) باید به‌طور مستقل صفر باشد. سپس $\phi(x, y)$ معادله موج زیر و شرط مرزی را برآورده می‌کند:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) \phi = 0 \quad (\text{ج.4})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{ج.5})$$

شرط دوم یک شرط مرزی طبیعی است که بیان می‌کند که میدان $\phi(x, y)$ در بینهایت به‌صرف‌می‌رسد (میدان الکترومغناطیسی در موجبر محدود می‌شود). سپس ثابت می‌شود که تابع $\phi(x, y)$ که فراتابع (۶۶.۶) را ثابت می‌کند، معادله موج (۶۵.۶) و شرط مرزی (ج.۵) را به‌طور همزمان برآورده می‌کند.

نمايه

- توری های براگ، ۷
تولید هارمونیک دوم، ۲۶۶
جبران کننده پاشندگی، ۱۵۶
جذر میانگین مریع، ۱۵۴
جواب های کاذب، ۳۰۳
حالت ماندگار، ۲۱۷
حالت پلاریزاسیون، ۱۴۳
حد اتلاف، ۱۱۱
حد پاشندگی، ۱۱۱
حکاکی یون واکنشی، ۴۳۰
خلوص، ۲۲۰
دوشکستی (انکسار مضاعف، انکسار دوگانه)، ۱۴۳
دیود لیزری، ۷۶
رابطه بازگشتی، ۳۸۱
رابطه تعامل، ۵۳۱
رابطه همپاسخی، ۱۸۸
روش اجزای محدود، ۲۸۱، ۷
روش انتشار پرتو، ۲۴۷، ۲۴۲، ۶۵، ۷
روش تغییرات جزئی، ۳۲۸، ۴۸
روش تفاضل محدود، ۳۷۸، ۳۴۷، ۲۸۲، ۷
روش جهشی، ۳۹۰
روش هاووس هولدرز، ۳۱۱
روش همایند، ۱۴۹
روش وردشی (روش تغییرات)، ۲۸۱
روش ژاکوبی، ۳۱۱
روش گالرکین، ۳۳۷
زیرنما، ۳۷۹
زمان آرامش، ۲۶۴
زیربرنامه، ۳۷
- آپادیزاسیون، ۲۲۵
آینه دو رنگ، ۲۶۹
اثر رامان، ۲۵۲
اثر نوری کر، ۲۳۰
ازتابش، ۱۹۶
اصل هویگنس، ۵۲۰
افت عبوری، ۴۱۴، ۴۱۱، ۲۵۲، ۲۱۷، ۶۶
افزونگی، ۹۴
الگوی دورمیدان، ۴۴۱
اپتیک حجیم، ۲۲۹
اکسی-هیدروژن، ۴۳۰
بازه طیف آزاد، ۴۶۳
باند توقف، ۱۹۴
باند عبور، ۱۹۴
بستر (زیرلایه)، ۲۸۵
بیضویت هسته، ۱۴۸
تابع وزن، ۳۲۸
تبديل فوريه سريع، ۳۶۳، ۳۴۷، ۷
تبديل فوريه گسسته، ۳۵۶
تدخل چند مودی، ۶۲
تدخل سنج های ماخ-زندر، ۱۸۱
ترانهاده، ۳۲۲
تشدید کننده، ۲۱۷
تشعشع خودبه خودی تقویت شده، ۲۶۹
تضاریس، ۲۲۵
تغییرات جزئی، ۱۹۱، ۱۴۵
تفاضل محدود حوزه زمانی، ۱۰
تقویت کننده فیبر آغشته به اربیوم، ۲۶۸
توری موجبر آرایه ای، ۴۳۵
توری فیبر براگ، ۲۲۳

- فیبرهای جبران کننده پاشندگی گسترده، ۳۷۹
 ۱۶۶ ساختار پشتهای، ۴۳۰
 ۱۶۷ فیبرهای سوراخدار، ۲۳۲
 ۱۶۷ فیبرهای کریستال فوتونی، ۲۳۲
 ۳۵۱ قضیه بارکر- هاسدورف، سالیتون بستهای، ۲۳۲
 ۳۵۸ قضیه نمونه برداری، سالیتون تاریک، ۲۳۲
 ۳۴ قطع، سطح لوب کناری، ۲۲۵
 ۷۳ ماتریس انتقال پرتو، ۴۶۵
 ۳۷۴ ماخ- زندر، سینک، ۴۶۵
 ۴۲۹ مالتی پلکس، شرایط مرزی شفاف، ۳۸۰
 ۴۱۹ مالتی پلکس تقسیم طول موج، شرایط کورانت، ۴۰۴
 ۴۸۱ محدوده طیفی آزاد، شرط تابش سامرفلد، ۵۱۹
 ۲۲۰ محیط کر، شرط ایستائی، ۲۹۵
 ۲۷۰ مخلوط چهار موج، شرط دیریکله، ۳۸۰
 ۳۲۰ مدول یانگ، شرط مرزی جذبی، ۴۰۴
 ۲۳۱ مدولاسیون خود فاز، شرط نویمان، ۳۸۰
 ۱۶۶ مدولاسیون فاز متقطع، شیشه سیلیس حجیم، ۱۷۱
 ۱۱۲ مدولاسیون پی سی ام، ضرب شکست گروهی، ۱۱۶
 ۱۰۹ مدولاسیون کد پالس، ضرب انحراف، ۵۲۰
 ۳۰۴ مرزهای ساختگی، ضرب توان افزونگی، ۳۹
 ۲۳۴ مزدوج مختلط، ضرب شکست تدریجی، ۲۸۱
 ۲۹۷ معادله اولر، ضرب شکست مضاعف، ۸۳
 ۲۷۳ منحص، ضرب شکست موثر، ۵۴
 ۳۱۱ موجبر دنده‌ای، ضرب شکست پله‌ای، ۸۳
 ۳۴۸ موجبر مخروطی، ضرب پوکلز، ۳۳۰
 ۳۱۱ موجبر پشتهای، طول موج برآگ، ۱۹۴
 ۵۲ موجبرهای آغشتهای، عادی سازی، ۴۱۶
 ۵۲ مود عادی محلی، عدد روزنه، ۱۶
 ۴۷۵ مود قطبش خطی، عدد نویز، ۲۶۹
 ۱۰۷ مود معمولی محلی، عقب ماندگی فاز، ۷۴
 ۴۴۴ مودهای قطبش خطی، عملگر لاپلاسین، ۵۱۰
 ۹۶ مودهای پلاریزه خطی، ۲۲۵- پرو، فراتابع، ۲۸۲
 ۸۳ موز، ۵۷ فرانهوفر، ۵۷
 ۴۰۴ ناپایداری مدولاسیونی، فرنل، ۵۸
 ۲۴۶ نرخ خطای بیت، فیبر با پاشندگی غیر صفر، ۲۷۴
 ۲۴۵ نسبت پواسون، فیبر تک مودی، ۷۶
 ۲۶۱ فیبرهای تک مودی، ۱۵۶

- نظریه مود تزویجی، ۱۸۱
 همایند، ۱۴۷
 همدوس، ۶۷
 پاشندگی انتقال یافته، ۱۵۶
 پاشندگی سرعت گروهی، ۱۰۹
 پراش، ۲۱۲
 پراکندگی بریلوین، ۲۵۲
 پراکندگی رامان، ۲۴۲
 پراکندگی پسرو، ۲۶۳
 پراکندگی پیشرو، ۲۶۳
 پواین‌تینگ، ۱۵، ۲۵
- چند جمله‌ای سلمایر، ۱۱۶
 چیرپ فرکانسی، ۲۳۱
 کر، ۳۷۵
 کمر پرتو، ۷۲
 کولی و ترکی، ۳۶۳
 گاف باند فوتونیک، ۱۶۶
 گوس-هانچن، ۱۷، ۶۵
- یکسان‌سازی، ۱۵۴
 بی، ۳۹۸