

ای نسخی نامه‌ای که تویی
ای آنسه‌ی حال شاهی که تویی
بیرون ز تونیست آنچه د عالم هست
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی

تقدیم به روان پاگ

دکتر حسن مرشد

پژوهان گزار علم نوین میکافتها و امواج در آزادان



۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فاظریه فوریه در اپتیک

۶

پژوهشی اطلاعات نوری

نویسنده: تویوھیکو یاتاگای

Toyohiko Yatagai

به کوشش

دکتر محمد صادق ابریشمیان

استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فهرست مطالب

۶	پیشگفتار (نویسنده)	۱.۰
۷	پیشگفتار (مترجم)	۲.۰
نور و امواج			
۹	امواج و معادله موج	۱.۱
۹	موج مسطح	۲.۱
۱۱	موج کروی	۳.۱
۱۵	نمایش مختلط امواج	۴.۱
۱۶	اصل برهم نهی	۵.۱
۱۷	موج اسکالر و موج برداری	۶.۱
تداخل و پراش			
۲۱	تداخل	۱.۲
۲۱	دید حاشیه‌ای	۲.۲
۲۴	آزمایش یانگ	۳.۲
۲۵	تداخل سنج	۴.۲
۲۷	پراش	۵.۲
۲۸	پراش فرنل	۶.۲
۳۲	پراش فراونهوفر	۷.۲
۳۵	روزنه مستطیلی	۱.۷.۲
۳۶	روزنه دایره‌ای	۲.۷.۲
۳۷	توری پراش	۳.۷.۲
تبديل فوريه و کانولوشن			
۴۳	سری فوريه	۱.۳
۴۳	تقريب چند جمله‌ای بهينه	۲.۳
۵۰	چند جمله‌ای متعدد ترماليزه	۳.۳
۵۱	تبديل فوريه	۴.۳
۵۲	برخی از بازنمایی‌های تبدیل فوریه	۵.۳

۵۵	خواص تبدیل فوریه	۶.۳
۵۸	تابع دلتا	۷.۳
۶۰	انتگرال کانولوشن و تابع همبستگی	۸.۳
۶۳	برخی توابع و تبدیل فوریه آنها	۹.۳
۶۵	قضیه نمونه برداری	۱۰.۳

۷۳	سیستم‌های خطی	۴
۷۳	سیستم و اپراتور	۱.۴
۷۴	سیستم خطی و سیستم مستقل از انتقال	۲.۴
۷۴	سیستم خطی	۱.۲.۴
۷۵	سیستم مستقل از انتقال	۲.۲.۴
۷۶	پاسخ ضربه‌ای	۳.۲.۴
۷۷	تابع پاسخ فرکانسی	۳.۴
۷۸	تابع ویژه و مقادیر ویژه	۴.۴

۸۱	تبدیل فوریه گسته و تبدیل فوریه سریع	۵
۸۱	تبدیل فوریه گسته	۱.۵
۸۴	تابع پنجره	۲.۵
۸۶	اصول تبدیل فوریه سریع (FFT)	۳.۵
۸۹	محاسبه عددی با استفاده از FFT	۴.۵
۹۱	درونيابی در DFT	۵.۵
۹۱	لایه بندی صفر	۶.۵
۹۲	برخی از تکنیک‌های درون‌یابی دیگر	۷.۵

۹۷	اپتیک فوریه	۶
۹۷	پراش فرنل	۱.۶
۹۹	تبدیل فوریه عمرکرد لنز	۲.۶
۱۰۲	تصویربرداری همدوس	۳.۶
۱۰۵	تصویربرداری ناهمدوس	۴.۶
۱۰۶	پاسخ فرکانسی سیستم نوری	۵.۶
۱۰۶	تصویربرداری همدوس	۱.۵.۶
۱۰۷	تصویربرداری ناهمدوس	۲.۵.۶
۱۰۸	قدرت تفکیک	۶.۶
۱۱۰	روش طیف زاویه‌ای	۷.۶
۱۱۱	پراش بر اساس طیف فوریه سه بعدی	۸.۶

۱۱۹	هلوگرافی	۷
۱۱۹	هلوگرافی نوری متعارف	۱.۷

۱۲۱	تولید هولوگرافی با کامپیوتر	۲.۷
۱۲۲	سلول گرا CGH	۱.۲.۷
۱۲۴	نقطه گرا CGH	۲.۲.۷
۱۲۵	کینوفرم	۳.۲.۷
۱۲۵	هولوگراف دیجیتالی	۳.۷

محاسبات نوری		
		۸
۱۲۹	فیلتر فرکانس مکانی	۱.۸
۱۳۱	فیلترهای پائین گذر و بالا گذر	۱.۱.۸
۱۳۲	فیلترهای دیفرانسیلی و لاپلاسین	۲.۱.۸
۱۳۳	فیلتر کنتراست فاز	۳.۱.۸
۱۳۴	وضوح فوق العاده و آپادیزاسیون	۴.۱.۸
۱۳۵	فیلتر تطبیقی	۲.۸
۱۳۸	فیلتر بهینه برای نویز افزودنی	۳.۸
۱۴۰	فیلتر بهینه برای نویز ضربی	۴.۸
۱۴۲	تحلیلگر طیف	۵.۸
۱۴۴	همبستگی نوری	۶.۸
۱۴۴	نوع انتگرال مکانی	۱.۶.۸
۱۴۵	نوع انتگرال زمانی	۲.۶.۸
۱۴۶	همبستگی تبدیل مشترک	۷.۸
۱۴۷	جمع و تفریق نوری	۸.۸
۱۵۰	تبدیل مختصات	۹.۸
۱۵۱	تصویربرداری با بزرگنمایی برابر	۱.۹.۸
۱۵۲	تبدیل مختصات لگاریتمی	۲.۹.۸
۱۵۲	تبدیل ملین	۱۰.۸
۱۵۴	تبدیل موجک	۱۱.۸
۱۵۷	توموگرافی کامپیوتراًی با اشعه ایکس	۱۲.۸
۱۵۹	روش تبدیل فوریه دو بعدی	۱.۱۲.۸
۱۵۹	روش تابشی پشت فیلتر شده	۲.۱۲.۸
۱۶۳	سیگنال تحلیلی و تبدیل هیلبرت	۹
۱۶۳	نمایش مختلط و فرکانس منفی	۱.۹
۱۶۵	سیگنال تحلیلی	۲.۹
۱۶۷	تبدیل هیلبرت	۳.۹
۱۷۱	همدوسی، طیف‌سنجی و تحلیل حاشیه	۱۰
۱۷۱	همدوسی	۱.۱۰
۱۷۴	همدوسی زمانی	۱.۱.۱۰

۱۷۵	۲.۱.۱۰ همدوسی مکانی
۱۷۸	۲.۱۰ طیف سنجی تبدیل فوریه
۱۸۰	۳.۱۰ انتقال فاز در اینترفروگرام
۱۸۴	۴.۱۰ تحلیل حاشیه تبدیل فوریه
۱۸۶	۵.۱۰ تحلیل حاشیه با تبدیل هیلبرت

۱۹۱	پردازش سیگنال زمان-مکان
۱۹۱	۱.۱۱ شکل دهنده پالس فمتوثانیه
۱۹۱	۱.۱.۱۱ تابع توری
۱۹۳	۲.۱.۱۱ پرتو پراکنده شده
۱۹۵	۲.۱۱ فیلتر فرکانس مکانی برای پالس فوق کوتاه
۱۹۶	۳.۱۱ همبستگی تبدیل فوریه مشترک مکانی-زمانی
۱۹۹	۴.۱۱ توموگرافی همدوس نوری
۲۰۳	۵.۱۱ هولوگرافی طیفی

۲۰۷	تابع توزیع ویگنر
۲۰۷	۱.۱۲ WDF برای سیگنال مکانی
۲۰۷	۱.۱.۱۲ تعاریف و خواص آنها
۲۰۹	۲.۱.۱۲ تابع توزیع ویگنر در سیستم نوری
۲۱۱	۲.۱۲ تابع توزیع ویگنر برای سیگنال زمانی-مکانی
۲۱۱	۱.۲.۱۲ بسط به سیگنال‌های مکانی-زمانی
۲۱۳	۲.۲.۱۲ اثر عدسی در WDF مکانی-زمانی
۲۱۴	۳.۲.۱۲ مدولاتور فاز زمانی (عدسی زمانی)
۲۱۴	۴.۲.۱۲ انتشار و پاشندگی
۲۱۵	۵.۲.۱۲ توری پراش
۲۱۶	۶.۲.۱۲ نمایش ماتریسی تبدیل WDF

۲۲۱	تبدیل فوریه کسری
۲۲۱	۱.۱۳ تعریف تبدیل فوریه کسری
۲۲۲	۲.۱۳ برخی از نمایش‌های تبدیل فوریه کسری
۲۲۵	۳.۱۳ کاربرد محاسبات نوری
۲۲۵	۱.۳.۱۳ فیلتر وینر
۲۲۸	۲.۳.۱۳ همبسته ساز و فیلتر تطبیقی
۲۲۹	۳.۳.۱۳ همبسته ساز تبدیل فوریه کسری مشترک

۲۳۷	محاسبه عددی پراش فرنل گستته
-----	-------	------------------------------------

- ۲۴۱ ب محاسبه عددی هلوگرام فرنل
۲۵۹ نمایه

۱۰ پیشگفتار (نویسنده)

تحلیل فوریه یکی از مهمترین مفاهیم در مواردی است که شما ایده‌های فیزیکی را در مسائل مهندسی به کار می‌گیرید. اپتیک، مکانیک، الکترومغناطیس، مکانیک کوانتومی، پردازش سیگنال، تئوری سیستم و کنترل و غیره ابزارهای اساسی در مهندسی فیزیکی هستند که تحلیل فوریه قوی‌ترین نقش را در آن‌ها ایفا می‌کند و تحلیل فوریه کلی ترین مفهوم آن‌هاست.

تبديل فوریه در گذشته به صورت بخشی در ریاضیات، فیزیک، نظریه سیستم و غیره توصیف شده است. در اینجا من سعی می‌کنم دوباره ایده تبدیل فوریه را درست کنم، زیرا فکر می‌کنم با درک مفهوم تحلیل فوریه می‌توان دیدگاه واحدی از بسیاری از پدیده‌های علوم و مهندسی به دست آورد. درک عمیق یک مفهوم به‌ما قدرت زیادی برای درک زمینه‌های جدید علوم و مهندسی می‌دهد.

ساخت سری فوریه تحلیل فوریه ابزاری ریاضی برای حل مسائل هدایت حرارتی بود که توسط ژوزف فوریه^۱ توسعه یافت. تبدیل فوریه نه تنها به عنوان یکی از روش‌های بسیار مهم ریاضی شناخته می‌شود، بلکه اساس تابع پاسخ و طیف توان در نظریه سیستم‌ها نیز می‌باشد. این یک وسیله ضروری برای توصیف سیستماتیک بسیاری از پدیده‌ها در علم و مهندسی است. تحلیل فوریه یک مفهوم انتزاعی در ریاضیات نیست، اما در بسیاری از موارد، به عنوان مثال، در پراش و طیف‌سنجی، معنای فیزیکی واقعی دارد. در این حالت تبدیل فوریه مستقیماً به عنوان توزیع شدت مشاهده می‌شود

در این کتاب پدیده‌های نوری بر اساس تحلیل فوریه مورد بحث قرار گرفته است. من معتقدم درک عمیق معانی انتزاعی در تحلیل فوریه توسط پدیده‌های نوری ابزار قدرتمندی برای درک همه مفاهیم در علم و مهندسی به‌ما می‌دهد.

این کتاب در ابتدا در سال ۱۹۹۲ به زبان ژاپنی منتشر شد. بیش از دو دهه است که به عنوان یک کتاب درسی در بسیاری از دوره‌های نوری در مقاطع تحصیلات تکمیلی استفاده می‌شود. بسیاری از دانشجویان، محققان نوری و مهندسانی که این کتاب را خوانده‌اند در بهبود آن کمک کننده بوده‌اند. می‌خواهم، از همه دانشجویان سابقم، به ویژه پروفسور باز جسی جکین، دکتر یوسوکه ساندو و پروفسور کن-ایچیرو سوگیساکا برای بهبود نسخه خطی، صمیمانه تشکر کنم. علاوه بر این، از پروفسور واسودوان لاکشمینارایانان که انتشار این کتاب را پیشنهاد کرد و در مورد پروژه نظر داد، تشکر ویژه‌ای دارم.

تویوهیکو یاتاگای

^۱Jean Baptiste Joseph Fourier

۲۰ پیشگفتار (مترجم)

خداآوند متعال را شاکرم که بمن توفيق داد اين کتاب را در اختيار شما دانشپژوهان قرار دهم. دانشجويان در درس رياضيات، سيگنالها و سيستمها، مخابرات با تبديل فوريه و کاردهای آن در حوزه زمان آشنا می‌شوند ولی اين تبديل نه تنها در اين دروس بلکه در درس اپتیک و دستگاههای نوری و پردازش سیگنالهای نوری کاربرد دارد. لذا بر آن شدم اين کتاب که را برای آن گروه از دانشجويانی که حوصله خواندن متن اصلی کتابهای خارجی ندارند و ضمناً افرادی که میخواهند دانش خود را برای طراحی و استفاده از دستگاه نوری افزایش دهند، ترجمه کنم. دنيای مخابرات آيند نياز به دانش ادوات و دستگاههای نوری است. بنابراین توصيه بندе بهدانشجويان گرایش مخابرات اين است که هر چه بيشتر اطلاعات خود را در اين زمينه زياد كنند و از يادگيری مطالب فيزيك مدرن و مكانيك كوانتم بهرمند شوند. اميدوارم دانشجويان عزيز فقط به مطالعه اين کتاب اكتفا نکنند و خود به مطالعه متن زبان اصلی ساير کتب که در اين زمينه نوشته شده است، نمایند. بدويهی است که اين کتاب عاري از عيب نiest و از شما خواننده محترم تقاضا دارم اشتباهات را به اينجانب از طريق ايميل كوشزد تا در صدد رفع آنها برآيد.

msabrish@eetd.kntu.ac.ir

محمد صادق ابريشمييان
۱۴۰۲ فروردین

فصل ۱

نور و امواج

نور یک موج الکترومغناطیسی است که طول موج آن بین امواج رادیویی و اشعه ایکس است. طول موج نور از 100 میکرومتر تا 10 نانومتر و فرکانس آن از 10^{12} هرتز تا 10^{17} هرتز است. به طور کلی نور از نظر طول موج طبقه بندی می‌شود. طول موج نور مرئی بین 380 نانومتر برای بنفش و 800 نانومتر برای قرمز گسترش می‌یابد. نوری که طول موج کمتری دارد، فرابینفش و بلندتر مادون قرمز نامیده می‌شود. طیف مرئی نور معمولاً به عنوان "نور" شناخته می‌شود. در فیزیک مدرن، نور هم به عنوان ذره و هم به عنوان موج درک می‌شود، اما در این کتاب نور به عنوان موج در نظر گرفته شده است، زیرا فقط پدیده انتشار نور عمده‌تاً مورد بحث قرار گرفته است. خاصیت ذرات نور تنها در مورد برهمنکش انرژی بین امواج الکترومغناطیسی و ماده آشکار می‌شود.

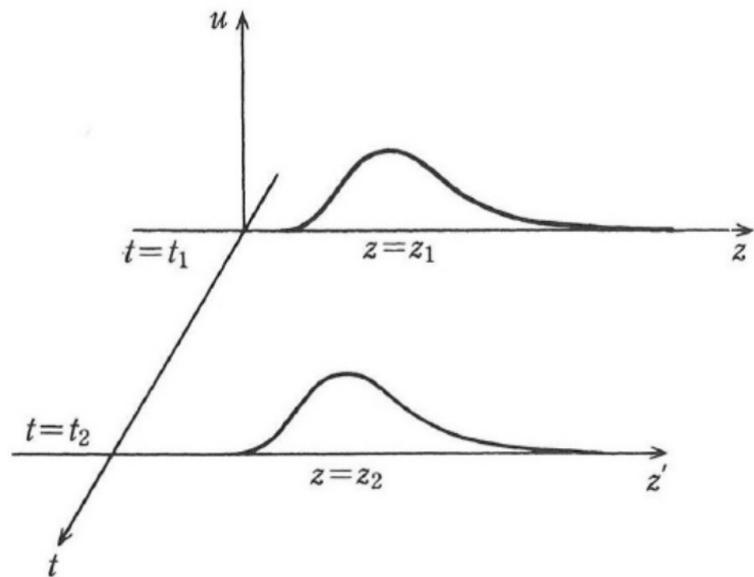
لازم به ذکر است که قوانین انتشار و خواص نور در تمام محدوده طیف الکترومغناطیسی معتبر است. می‌توانیم همه پدیده‌ها، از جمله انتشار امواج رادیویی، تصویربرداری از نور مرئی و پراش اشعه ایکس را به صورت یکپارچه مورد بحث قرار دهیم. این خاصیت موج نور است.

۱.۱ امواج و معادله موج

صوت انتشار تغییرات فشار یا تغییرات چگالی هوا است. نور انتشار تغییرات در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است.

ارتعاش u که در جهت z با سرعت v منتشر می‌شود، همانطور که در شکل (۱.۱) نشان داده شده، در نظر گیرید. با فرض شکل f تغییر موج u که در جهت z در زمان $t = 0$ منتشر می‌شود، داریم

$$u(z, t = 0) = f(z) \quad (1.1)$$



شکل ۱.۱: انتشار موج

موج u مسافت vt را در زمان t می‌پیماید، اما شکل آن تغییر نمی‌کند، بنابراین داریم

$$u(z, t) = f(z - vt) \quad (2.1)$$

این بدان معنی است که تغییر موج به طور مستقل با متغیرهای زمان t و موقعیت z تغییر نمی‌کند، بلکه فقط به صورت تابعی از $z - vt$ است. رابطه بین تغییر u ، موقعیت z و زمان t وجود دارد اما به شکل تغییر f بستگی ندارد. با استفاده از

$$\tau = z - vt \quad (3.1)$$

داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (5.1)$$

دوباره از اینها مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (7.1)$$

بنابراین داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.1)$$

این معادله موج در جهت $+z$ را با سرعت $\pm v$ منتشر می‌کند. این را معادله موج می‌نامند^۱ بطور کلی، با بسط معادله (۸.۱)، معادله موج در سه بعد (x, y, z) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (9.1)$$

یا با استفاده از عملگر لاپلاسین

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (10.1)$$

معادله سه بعدی را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.1)$$

۲.۱ موج مسطح

ساده‌ترین جواب معادله موج، موج سینوسی است. انتشار موج سینوسی در جهت z با سرعت v به صورت زیر نوشته می‌شود

$$u(z, t) = A \cos[k(z - vt) + \phi] \quad (12.1)$$

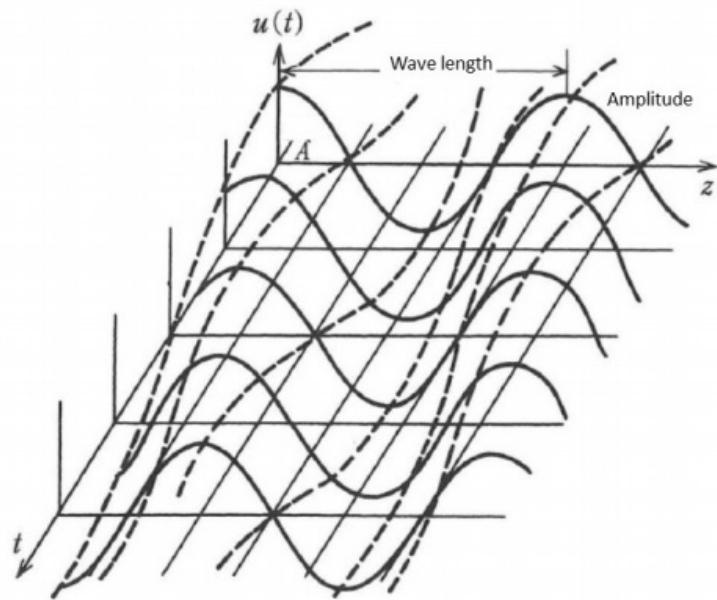
این معادله به وضوح معادله موج (۸.۱) را برآورده می‌کند. حداکثر تغییر A دامنه نامیده می‌شود و ϕ فاز است. همانطور که در شکل (۲.۱) نشان داده شده است، موج سینوسی یکتابع تناوبی هم در فضا و هم در زمان است. دوره در فضا طول موج نامیده و با λ نشان داده می‌شود. اگر موج در فاصله λ منتشر شود، فاز موج در معادله (۱۲.۱) بقدر 2π تغییر می‌کند:

$$k\lambda = 2\pi, \quad (13.1)$$

بنابراین داریم

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (14.1)$$

^۱ موج $f(z + vt)$ در جهت $-z$ منتشر می‌شود و معادله (۸.۱) را ارضاء می‌کند.



شکل ۲.۱: تناوبی بودن موج. خطوط توپر امواج سینوسی در فضا و خطوط نقطه چین امواج سینوسی را در زمان نشان می‌دهند.

از آنجایی که k به معنای تعداد در طول 2π است و k عدد موج یا ثابت انتشار نامیده می‌شود، در حوزه موج نوری^۲، ϕ فاز اولیه است، و می‌تواند، اگر مختصات مکانی z و مختصات زمانی t مقادیر دلخواه باشند، صفر شود. زمان تناوب T برابر است با

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (15.1)$$

و عکس T فرکانس است

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (16.1)$$

سرانجام، برای فرکانس ν داریم

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \quad (17.1)$$

که بدین معنی است که فرکانس تعداد امواج بر واحد مسافت v (مسافت منتشر شده در واحد زمان) است. فرکانس زاویه^۳‌ای بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\omega = 2\pi\nu \quad (18.1)$$

^۲در طیف سنجی، $\sigma = 1/\lambda$ را عدد موج می‌گویند. اگر هر دو عدد موج باید طبقه بندی شوند، k عدد موج زاویه‌ای و σ عدد موج طیفی نامیده می‌شود.

سرعت نور در خلاء یک ثابت فیزیکی c است. در این حالت موج نور، v سرعت نور در یک محیط است. نسبت v به c ضریب شکست n میباشد.

$$n = \frac{c}{v} \quad (۱۹.۱)$$

فرکانس بصورت زیر نوشته میشود

$$\nu = \frac{c}{n\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \quad (۲۰.۱)$$

که در آن λ_0 نمایشگر طول موج در خلاء است. بنابراین، λ_0 طول موج محیط بصورت زیر نوشته میشود

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (۲۱.۱)$$

میباشد توجه کرد که معادله (۱۲.۱) نیز بصورت زیر بازنویسی میشود

$$u(z, t) = A \cos(kz - \omega t) \quad (۲۲.۱)$$

که در آن فاز ϕ حذف شده است.

یک سطح هم فاز یا یک جبهه موج با فازی مشخص میشود که در هر زمان در فضای سه بعدی ثابت میماند. معادلات (۱۲.۱) و (۲۲.۱) یک موج یک بعدی را توصیف میکند که در جهت z منتشر میشود و همچنین موجی را در مختصات سه بعدی توصیف میکند که جبهه موج آن مسطح و عمود بر محور z است. موجی با جبهه موج مسطح را موج صفحه‌ای میگویند. لازم بهذکر است که یک موج در جهت عمود بر جبهه موج خود منتشر میشود.

بهمنظور توصیف یک موج مسطح در فضای دو بعدی یا سه بعدی، یک موج صفحه سینوسی را در نظر بگیرید که در جهتی که نسبت به محور x زاویه θ دارد، همانطور که در شکل (۳.۱) نشان داده شده، در سیستم مختصات دو بعدی (x, y) منتشر میشود. از آنجایی که جبهه موج آن عمود بر جهت انتشار است، این موج به صورت زیر نوشته میشود

$$u(x, y, t) = A \cos(kX - \omega t) \quad (۲۳.۱)$$

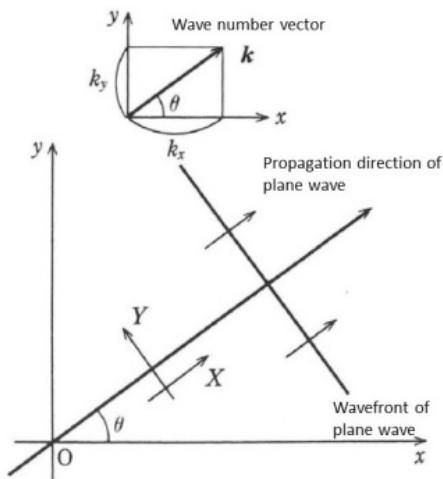
که جهت انتشار جهت محور X و جبهه موج روی محور Y است. با تبدیل مختصات از (x, y) به (X, Y) داریم؛

$$u(x, y, t) = A \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \quad (۲۴.۱)$$

که در آن

$$k_x = k \cos \theta \quad (۲۵.۱)$$

$$k_y = k \sin \theta \quad (۲۶.۱)$$



شکل ۳.۱: موج صفحه‌ای منتشر شونده در جهت θ

در اینجا، بردار عدد موج $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ معرفی می‌شود. جهت \mathbf{k} جهت انتشار موج و $|\mathbf{k}| = k = \frac{\pi}{\lambda}$

گسترش انتشار موج دو بعدی به سه بعدی به ما یک موج مسطح می‌دهد که در فضای سه بعدی

$$u(x, y, z, t) = A \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \quad (27.1)$$

همانطور که در شکل (۲۷.۱) نشان داده شده، منتشر می‌شود. در این مورد، بردار عدد موج به صورت $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ تعریف می‌شود. با معرفی بردار موقعیت $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ، یک حاصل ضرب داخلی به دست می‌آید

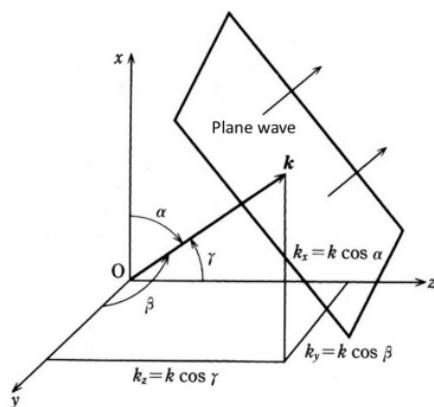
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (28.1)$$

معادل (۲۷.۱) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$u(r, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (29.1)$$

فرض کنید کسینوس دایرکتورهای \mathbf{k} بصورت $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ باشند. معادله (۲۸.۱) زا می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

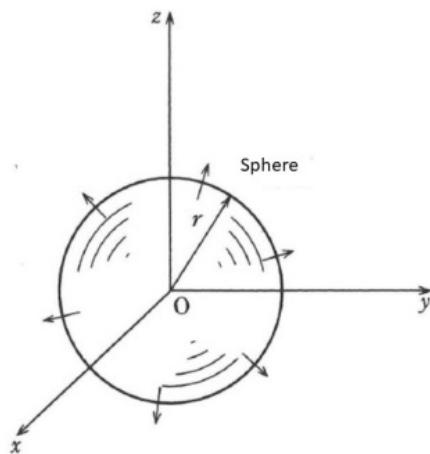
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{\pi}{\lambda_0} n(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \quad (30.1)$$



شکل ۴.۱: انتشار موج صفحه‌ای در فضای سه بعدی

۳.۱ موج کروی

همانطور که در شکل (۵.۱) نشان داده شده است، موج با جبهه موج کروی، موج کروی نامیده می‌شود. ابتدا معادله موج (۱۱.۱) را در مختصات کروی در نظر بگیرید.



شکل ۵.۱: موج کروی

$$\frac{1}{v^r} \frac{\partial^r u}{\partial t^r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^r (ru)}{\partial r^r} \quad (31.1)$$

یا معادل آن

$$\frac{1}{v^r} \frac{\partial^r (ru)}{\partial t^r} = \frac{\partial^r (ru)}{\partial r^r} \quad (32.1)$$

جواب این معادله برابر است با

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f(r \pm vt) \quad (33.1)$$

که در آن $f(r - vt)/r$ نمایشگر یک موج کروی است که از مبداء کسترش می‌یابد و $f(r + vt)/r$ یک موج کروی است که بسوی مبداء می‌آید. انتشار موج کروی سینوسی بصورت زیر داده می‌شود

$$u(r, t) = \frac{A}{r} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} r - \omega t\right) \quad (34.1)$$

اگر نقطه مشاهده خیلی دور از مبداء باشد، تغییرات $\frac{1}{r}$ زیاد مهم نیست و رابطه‌ای ساده‌تر خواهیم داشت

$$u(r, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} r - \omega t\right) \quad (35.1)$$

۴.۱ نمایش مختلط امواج

بطور کلی، موج صفحه‌ای که با معادله (۲۹.۱) نشان داده شد، می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$u(r, t) = \operatorname{Re}\{A \exp[j(\omega t - k \cdot r)]\} \quad (36.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{زیرا} \\ & \exp(j\alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha \end{aligned} \quad (37.1)$$

که در آن $\operatorname{Re}\{\dots\}$ نشان‌دهنده قسمت حقیقی عدد مختلط است. معادله (۳۶.۱) نیز بصورت زیر نمایش داده می‌شود

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \{A \exp[j(\omega t - k \cdot r)] + A^* \exp[-j(\omega t + k \cdot r)]\} \quad (38.1)$$

$$= \frac{1}{2} A \exp[j(\omega t - k \cdot r)] + c.c., \quad (39.1)$$

که در آن A^* نشان‌دهنده مزدوج مختلط A و $c.c.$ به معنی مزدوج مختلط^۳ جمله قبلی است. در برخی حالتهای علامت قسمت حقیقی $\operatorname{Re}\{\dots\}$ نیز حذف می‌شود بطوری که معادله (۳۶.۱) بصورت ساده زیر نوشته می‌شود

$$u(r, t) = A \exp[j(\omega t - k \cdot r)] \quad (40.1)$$

این دامنه مختلط نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که موجی که به صورت فیزیکی وجود دارد با یک عدد حقیقی نشان داده می‌شود و بنابراین دامنه مختلط فقط یک عبارت

^۳Complex Conjugate

ریاضی است. ما دامنه مختلط را برای راحتی ریاضی معرفی کردہ‌ایم. مثلاً برای محاسبه مجموع امواج

$$A = \sum_m A_m \exp[j(\omega t - k_m \cdot r)] = \left[\sum_m A_m \exp(-jk_m \cdot r) \right] \cdot \exp(j\omega t) \quad (41.1)$$

می‌توانیم ابتدا یک قسمت مکانی و یک قسمت زمانی را جدا کنیم و سپس اجزای مکانی را به طور مستقل محاسبه کنیم و در نهایت قسمت زمانی $\exp(jt)$ را ضرب کنیم. دامنه حقیقی توسط بخش حقیقی نتیجه نهایی داده می‌شود. در بسیاری از موارد نوری، فقط جملات مکانی در نظر گرفته می‌شوند. در صورت لزوم، عبارت وابسته به زمان با نتایج نهایی محاسبات مکانی ضرب می‌شود. لازم بهذکر است که چنین روش‌هایی در نمادگذاری مختلط موج فقط در مورد عملیات خطی معتبر هستند.

در حالت غیر خطی، برای مثال، برای انجام ضرب امواج، از آنجا که

$$A_1 \exp(-jk_1 \cdot r) \times A_2 \exp(-jk_2 \cdot r) = A_1 A_2 \exp[-j(k_1 + k_2) \cdot r] \quad (42.1)$$

بخش حقیقی آن $A_1 A_2 \cos[(k_1 + k_2) \cdot r]$ است، در حالی که حاصل ضرب امواج در نماد حقیقی $A_1 \cos(k_1 \cdot r) \times A_2 \cos(k_2 \cdot r)$ است. این بهاین معنی است که حاصل ضرب امواج از حاصل ضرب بخش‌های حقیقی دامنه‌های مختلط، اما نه توسط بخش حقیقی حاصل ضرب دامنه‌های مختلط، به‌دست می‌آید.

همانطور که میدانیم، انرژی موج با مریع دامنه موج داده می‌شود. خوبی‌خانه، حاصل ضرب اجزای حقیقی دامنه‌های مختلط ضروری نیست، اما شدت دامنه مختلط با محدوده قدر مطلق دامنه مختلط داده می‌شود.^۴

$$I = |u|^2 \quad (43.1)$$

۵.۱ اصل برهم نهی

تعدادی موج را در نظر بگیرید که همزمان به یک نقطه می‌رسند. برای سادگی، دو موج $f_1(z - vt)$ و $f_2(z - vt)$ معادله موج یکسانی را برآورده می‌کنند.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \quad (44.1)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \quad (45.1)$$

^۴ شدت نور به عنوان انرژی عبوری به صورت عمود بر واحد سطح در واحد زمان تعریف می‌شود. در تئوری الکترومغناطیسی نور، انرژی لحظه‌ای توسط بردار پواین‌تینگ S داده می‌شود. از آنجایی که فرکانس نور بسیار زیاد است، تنها مقدار میانگین زمانی اندازه بردار پواین‌تینگ (S) را می‌توان با آشکارسازهای نوری اندازه‌گیری کرد. این بما $E = \langle ev | E | v \rangle / 2$ را می‌دهد، که در آن v و $\langle \dots \rangle$ به ترتیب نشان دهنده ثابت دیالکتریک محیط، سرعت نور در محیط، میدان الکتریکی نور و میانگین زمانی هستند. در اپتیک، مربع میدان الکتریکی نور شدت نور را می‌دهد.

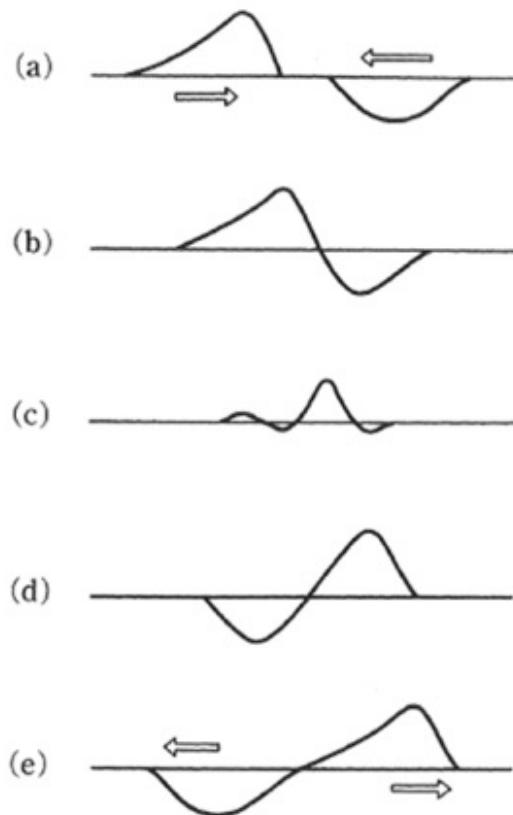
موج ترکیبی f از مجموع دامنه‌های دو موج f_1 و f_2 به دست می‌آید.

$$f = f_1 + f_2 \quad (46.1)$$

با استفاده از معادله (۴.۱)،

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (47.1)$$

این بدان معنی است که موج ترکیبی معادله موج را برآورده می‌کند. یعنی مجموع دامنه امواج، دامنه موج ترکیبی را می‌دهد. این **اصل برهمنهی** (یا اصل جمع اثرها)^۵ در فیزیک موج است. اصل برهمنهی یکی از اساسی‌ترین اصول در فیزیک موج است که به دلیل خطی بودن معادله موج است. یک مثال در شکل (۶.۱) نشان داده شده است که در آن دو موج در جهت مخالف یکدیگر منتشر می‌شوند.



شکل ۶.۱: برخورد امواج

^۵The Principle of Superposition

اصل برهم نهی ادعا می کند که مجموع امواج می تواند به صورت موج وجود داشته باشد. بر عکس، یک موج را می توان به مجموع تعداد دلخواه امواج تجزیه کرد. مثلاً معادله (۴۶.۱) نشان می دهد که موج f به دو موج f_1 و f_2 تجزیه می شود

روش های زیادی برای تجزیه امواج وجود دارد. مفید ترین آنها تجزیه امواج صفحه با اعداد موج متفاوت است

$$\begin{aligned} f(z - vt) &= A_0 + A_1 \cos[k(z - vt) + \phi_1] + A_2 \cos[2k(z - vt) + \phi_2] + \dots \\ &= \sum_m A_m \cos[mk(z - vt) + \phi_m] \end{aligned} \quad (48.1)$$

که در آن A_m دامنه یک موج صفحه تجزیه شده را نشان می دهد. ضریب A_m میزان سهم موج صفحه تجزیه شده m ام برای موج اصلی f است. لازم به ذکر است که تمام امواج جمع شده جواب های معادله موجی هستند که موج اصلی آن را برآورده می کند.

شرایط ریاضی برای تجزیه ممکن بعداً به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت، اما خوب است در اینجا توجه داشته باشیم که این تجزیه سری فوریه نامیده می شود.

۶.۱ موج اسکالر و موج برداری

تا به حال، جهت تغییر میدان الکتریکی \mathbf{E} را در نظر نمی گرفتیم. نور یک موج الکترومغناطیسی است. با فرض انتشار نور در جهت محور z ، جهت تغییر میدان های الکتریکی و مغناطیسی جهت محور های x و y هستند. به این نوع موج، موج عرضی می گویند. از طرف دیگر، موج صوتی یک موج طولی است که جهت تغییر آن در جهت انتشار z است. به طور کلی، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی بردارهایی با سه مولفه هستند:

$\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$ و $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$. بنابراین، انتشار موج نور طبیعتاً عمودی است. در یک محیط همگن، مثلاً خلاء، آب یا شیشه، خواص نوری بستگی به موقعیت و جهت انتشار ندارد، و از این رو مولفه های $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ هر یک مستقل از معادله موج را ارضاء می کنند:

$$\nabla^2 E_x = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (49.1)$$

و برای بقیه به همین نحو. این معادلات در معادله (۱۱.۱) موج ادغام می شوند. این موج را موج اسکالر می نامند.

به طور کلی، موج نور به عنوان یک موج اسکالار در نظر گرفته می شود، اما در یک محیط ناهمگن یا نزدیک یک روزنہ یا مرز محیط همگن، مولفه های میدان الکتریکی و مغناطیسی مستقل نیستند و با یکدیگر تعامل دارند. در چنین حالتی تقریب اسکالار معتبر نیست و موج نور باید به عنوان یک موج برداری در نظر گرفته شود.

سپس، یک موج سینوسی مختلط را به صورت جواب معادله موج اسکالار در نظر بگیرید،

$$u(r, t) = U(r) \exp(j\omega t), \quad (50.1)$$

که در آن
(۵۱.۱)

$$U(r) = A(r) \exp[-j\phi(r)]$$

از آنجایی که این معادله، معادله موج (۱۱.۱) را برآورده می‌کند، معادله (۵۰.۱) در معادله (۱۱.۱) جایگزین می‌کنیم که معادله هلم‌هولتز^۶ را بما می‌دهد:

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0. \quad (۵۲.۱)$$

که در آن k عدد موج معادله (۱۴.۱) را نشان می‌دهد. معادله هلم‌هولتز (۵۲.۱) انتشار موج تک رنگ در یک محیط همگن را توصیف می‌کند.

پرسش‌ها

۱. نشان دهید که موج $u = f(z + vt)$ که در جهت z منتشر می‌شود، معادله موج (۱۱.۱) را برآورده می‌کند.

۲. موج صفحه‌ای زیر را در نظر گیرید:

$$u(z, t) = 20 \cos[2\pi(32t - 8z)] \quad (۵۳.۱)$$

سرعت، جهت انتشار، زمان تناب، طول موج و عدد موج را که واحد طول و زمان متر و ثانیه است، محاسبه کنید.

۳. فرکانس و عدد موج یک موج نوری با طول موج 6328 nm میکرومتر را محاسبه کنید.

۴. دو موج زیر

$$u_1 = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_1}(z - vt)\right]$$

و

$$u_2 = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda_2}(z - vt)\right]$$

که بترتیب دارای طول موج λ_1 و λ_2 هستند و با هم اندکی اختلاف دارند درنظر گیرید. ترکیب دو موج بالا در زمان $t = 1 \text{ s}$ و $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ که در آن $A = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ است، رسم کنید.

مراجع:

Hecht, E. 2002. *Optics*, 4th ed. Pearson Education.

Born, M. and Wolf, E. 1999. *Principles of Optics*, 7th ed. Cambridge University Press.

^۶Helmholtz equation

فصل ۲

تداخل و پراش

در این فصل، پدیده‌های تداخل و پراش مورد بحث قرار گرفته و برخی از خواص متمایز موج نور ارائه شده است. برهم نهی امواج نور پدیده تداخل و پراش را می‌سازند. در ابتداء، تداخل دو موج صفحه و دید حاشیه‌ای^۱ آن مورد بحث قرار می‌گیرد. دید حاشیه با همدوسی مرتبط است. سپس آزمایش یانگ^۲ و چند تداخل‌سنجد معرفی می‌شوند. به عنوان بسط آزمایش یانگ، پراش معرفی شده است. به طور خاص، پراش فراونهوفر^۳ را می‌توان به عنوان تبدیل فوریه نشان داد. چند نمونه عددی از الگوهای پراش اشیاء ساده ارائه شده است. این مثال‌ها درک شهودی از تبدیل فوریه را به دست می‌دهند.

۱.۲ تداخل

دو موج سینوسی را در نظر گیرید که از نقطه A به نقطه C و از نقطه B به نقطه C می‌گذرند. برای سادگی، فرکانس دو موج یکسان است. بردارهای AC و BC به ترتیب با \mathbf{r}_{BC} و \mathbf{r}_{AC} و بردارهای عدد موج آنها به ترتیب با \mathbf{k}_A و \mathbf{k}_B نشان داده می‌شوند (شکل ۱.۲). موج صفحه‌ای که از نقطه A به نقطه C می‌رسد با رابطه زیر داده می‌شود

$$u_A = A_A \exp[j(\omega t - \mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}_{AC} - \phi_A)] \quad (1.2)$$

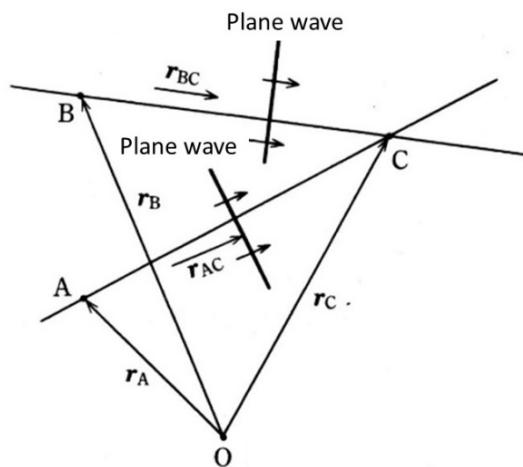
و موج صفحه‌ای که از نقطه B به نقطه C می‌رسد، خواهد بود

$$u_B = A_B \exp[j(\omega t - \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}_{BC} - \phi_B)] \quad (2.2)$$

^۱Fringe Visibility

^۲Young's experiment

^۳Fraunhofer diffraction



شکل ۱.۲: تداخل امواج صفحه‌ای

فرض کنید بردارهای موقعیت نقاط A و C بترتیب $\mathbf{r}_A(x_A, y_A, z_A)$ و $\mathbf{r}_C(x_C, y_C, z_C)$ هستند و داریم

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A \quad (۳.۲)$$

با استفاده از معادله (۳۰.۱)، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}_{AC} &= \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} n [(x_C - x_A) \cos \alpha_A + (y_C - y_A) \cos \beta_A + (z_C - z_A) \cos \gamma_A] \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

که در آن کسینوس دایرکتورهای بردار \mathbf{k}_A برابر $(\cos \alpha_A, \cos \beta_A, \cos \gamma_A)$ است. اگر

$$(x_C - x_A) \cos \alpha_A + (y_C - y_A) \cos \beta_A + (z_C - z_A) \cos \gamma_A = l_{AC} \quad (۵.۲)$$

باشد، در این صورت nl_{AC} فاصله بین نقطه A و C را می‌دهد و در آن n ضریب شکست محیط است. معادله (۱.۲) و (۲.۲) بصورت زیر بازنویسی می‌شوند

$$u_A = A_A \exp \left[-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} nl_{AC} + \phi_A - \omega t \right) \right] \quad (۶.۲)$$

۹

$$u_B = A_B \exp \left[-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} nl_{BC} + \phi_B - \omega t \right) \right] \quad (۷.۲)$$

از آنجا که دامنه u_C در نقطه C از جمع اثرهای دو موج u_A و u_B بدست می‌آید، خواهیم

داشت

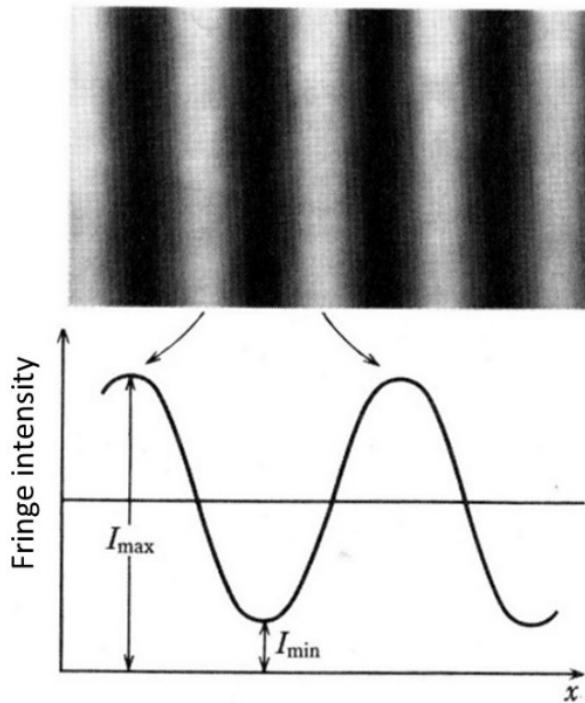
$$\begin{aligned} u_C &= A_A \exp \left[-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} nl_{AC} + \phi_A - \omega t \right) \right] + B \exp \left[-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} nl_{BC} + \phi_B - \omega t \right) \right] \\ &= \left\{ A_A \exp \left[-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} nl_{AC} + \phi_A \right) \right] + B \exp \left[-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} nl_{BC} + \phi_B \right) \right] \right\} \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad (8.2)$$

بنابراین، شدت در نقطه C برابر است با

$$I_C = |u_C|^2 = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} n(l_{BC} - l_{AC}) + (\phi_B - \phi_A) \right] \quad (9.2)$$

که در آن $I_B = |u_B|^2$ و $I_A = |u_A|^2$ است.

در اینجا I_C شدت مجموع شدت I_A و I_B نیست، بلکه جمله سوم اضافه شده است. این عبارت اصطلاح تداخل است و به صورت سینوسی با توجه به تفاوت مسیر نوری $n(l_{BC} - l_{AC})$ تغییر می‌کند و الگوی حاشیه‌ای همانطور که در شکل (۲.۲) نشان داده شده است ایجاد می‌شود. اگر اختلاف فاز به صورت زیر تعریف شده باشد



شکل ۲.۲: حاشیه‌های تداخل (جمع اثرهای دو موج صفحه‌ای)

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(l_{BC} - l_{AC}) + \phi_B - \phi_A \quad (10.2)$$

بیشینه I_{max} و کمینه I_{min} شدت حاشیه‌ای با روابط زیر داده می‌شود

$$I_{max} = (A_A + A_B)^2 \quad : \Phi = 2\pi m \quad (11.2)$$

$$I_{min} = (A_A - A_B)^2 \quad : \Phi = \pi(2m + 1) \quad (12.2)$$

که در آن m یک عدد صحیح است. عبارت وابسته به زمان در معادله (۹.۲) حذف می‌شود و شدت حاشیه‌ای تداخل مستقل از زمان است. این به‌این معنی است که می‌توان مدت زمان را در معادلات ابتدایی معادله (۱.۲) و (۲.۲) نادیده گرفت. در مورد تداخل امواج با فرکانس یکسان. در این کتاب، اصطلاحات وابسته به زمان را حذف می‌کنیم، مگر اینکه نیاز باشد.

۲.۲ دید حاشیه‌ای

به عنوان معیار وضوح حاشیه تداخل، کنتراست یا قابلیت بینائی^۴ بصورت زیر تعریف می‌شود؛

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (13.2)$$

که در آن I_{max} و I_{min} بهتر تیب بیشینه و کمینه شدت حاشیه‌ای هستند. داریم

$$V = \frac{2\sqrt{I_A I_B}}{I_A + I_B} \quad (14.2)$$

با استفاده از معادله (۹.۲) حداکثر کنتراست $V = 1$ زمانی به‌دست می‌آید که $I_A = I_B$ باشد. هنگامی که I_A یا I_B برابر صفر است، حداقل $V = 0$ به‌طوری که حاشیه نامرئی است.

آیا وقتی $A_A = A_B$ ، کنتراست همیشه $V = 1$ است؟ در واقع، یک شرط خاص برای $V = 1$ ضروری است. حاشیه تداخل به‌طور پایدار در هر زمانی وجود دارد، تنها زمانی که اختلاف $\phi_B - \phi_A$ فاز اولیه ϕ_A و ϕ_B در نقطه A و B در هر زمانی که پایدار باشد. تفاوت $\phi_B - \phi_A$ به‌خواص منابع نور، فوائل منبع نور تا نقطه A و B وغیره بستگی دارد. این بدان معناست که کنتراست حاشیه تداخل نه تنها به‌تفاوت مسیر $l_{BC} - l_{AC}$ بلکه به‌خواص منبع نور و چیدمان سیستم نوری نیز بستگی دارد.

فاز موج از منبع نور در بسیاری از موارد در کمتر از 10^{-8} ثانیه پایدار است. می‌توانیم ببینیم که شکل موج فقط در این زمان کوتاه سینوسی است، جایی که دامنه و فاز در یک زمان مناسب ثابت می‌شوند. بسیاری از موجک‌ها با مدت زمان ثابت تولید شده از منبع نور، امواج عملی را تشکیل می‌دهند. از این مفهوم، برای ایجاد یک حاشیه تداخل پایدار در نقطه C ، امواج A و B که از یک منبع خارج می‌شوند و در همان زمان باید در نقطه C

^۴Visibility

روی هم قرار گیرند. دستگاهی که برای انجام چنین برهمنهی استفاده می‌شود، تداخل سنج نامیده می‌شود.

همانطور که در بخش ۱.۱۰ توضیح داده شد، پایداری اختلاف فاز $\phi_B - \phi_A$ به خواص منبع نور بستگی دارد. اندازه‌گیری درجه همدوسی^۵ γ_{AB} نامیده می‌شود. ما $1 \leq \gamma_{AB} \leq ۰$ داریم. در مورد $۱ = \gamma_{AB}$ ، دو موج از نقطه A و B به یکدیگر همدوس و در مورد $۰ = \gamma_{AB}$ ناهمdos نامیده می‌شوند. هنگام در نظر گرفتن همدوسی، انقباض حاشیه‌ای بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$V = \frac{2\sqrt{I_A I_B}}{I_A + I_B} \gamma_{AB} \quad (15.2)$$

بنابراین معادله (۹.۲) شدت حاشیه‌ای در حالت منبع نور همدوس $۱ = \gamma_{AB}$ را توصیف می‌کنند.

معادله (۹.۲) شدت حاشیه‌ای بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$I_C = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B} \gamma_{AB} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} n(l_{BC} - l_{AC}) + (\phi_B - \phi_A) \right] \quad (16.2)$$

در حالت ناهمدوسی امواج داریم

$$I_C = I_A + I_B \quad (17.2)$$

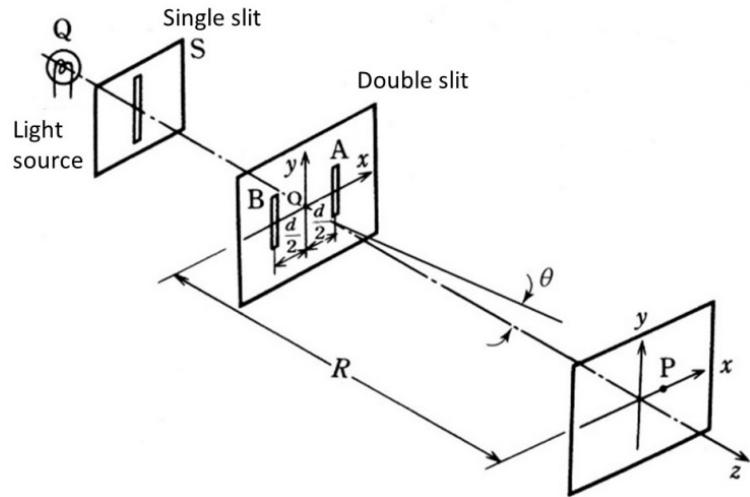
مجموع شدت I_A و I_B شدت کل I_C را می‌دهد. در مورد امواج همدوس، شدت حاشیه با محدود مجموع دامنه امواج، همانطور که در معادله (۹.۲) نشان داده شده، به دست می‌آید.

۳.۲ آزمایش یانگ

همانطور که در شکل (۳.۲) نشان داده شده است، یک چیدمان نوری ساده برای مشاهده تداخل نوری را در نظر گیرید. این معروف‌ترین تداخل‌سنج نوری است که توسط توماس یانگ^۶ در سال ۱۸۰۱ برای نشان دادن موجی بودن نور ساخته شد. دو شکاف باریک در پشت شکاف تک منبع نور قرار دارد. در صفحه مشاهده‌ای که در فاصله کافی از شکاف‌های دوتایی قرار دارد، امواج از شکاف‌های A و B بر روی هم قرار می‌گیرند. فرض کنید صفحه دو شکاف و پرده مشاهده موازی یکدیگر هستند و فاصله آنها R است. مبدأ O مختصات در مرکز شکاف دوتایی تنظیم شده است. منبع نور، شکاف S و مبدأ O بر روی محور z قرار دارند. شکاف‌های دوتایی در $x = -d/2$ و $x = d/2$ قرار دارند. عرض شکاف کسری از طول موج نور λ بسیار کوچک است و بنابراین امواج پس از شکاف‌ها به صورت امواج کروی در حال گسترش در صفحه $x - z$ منتشر می‌شوند. روی پرده، دو موج از شکاف‌های A و B روی هم قرار گرفته‌اند. از آنجایی که فواصل شکاف S تا A و B برابر است، فازهای اولیه ϕ_A و ϕ_B امواج کروی همیشه با یکدیگر مساوی و همدوس هستند.

^۵Degree of Coherence

^۶Thomas Young



شکل ۳.۲: چیدمان نوری آزمایش یانگ.

موجی که از شکاف A به نقطه P در صفحه مشاهده منتشر می‌شود برابر است با

$$u_A = A \exp(-jkr_{AP}) \quad (18.2)$$

در موردی که فاصله R به اندازه کافی بزرگ است، $R \gg x$ و $R \gg d/2$ ، که در آن

$$r_{AP} = \sqrt{R^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} \approx R + \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)}{2R} \quad (19.2)$$

به طور مشابه، موج کروی منتشر شده از شکاف B به نقطه مشاهده P روی صفحه نمایش داده می‌شود.

$$u_B = A \exp(-jkr_{BP}) \quad (20.2)$$

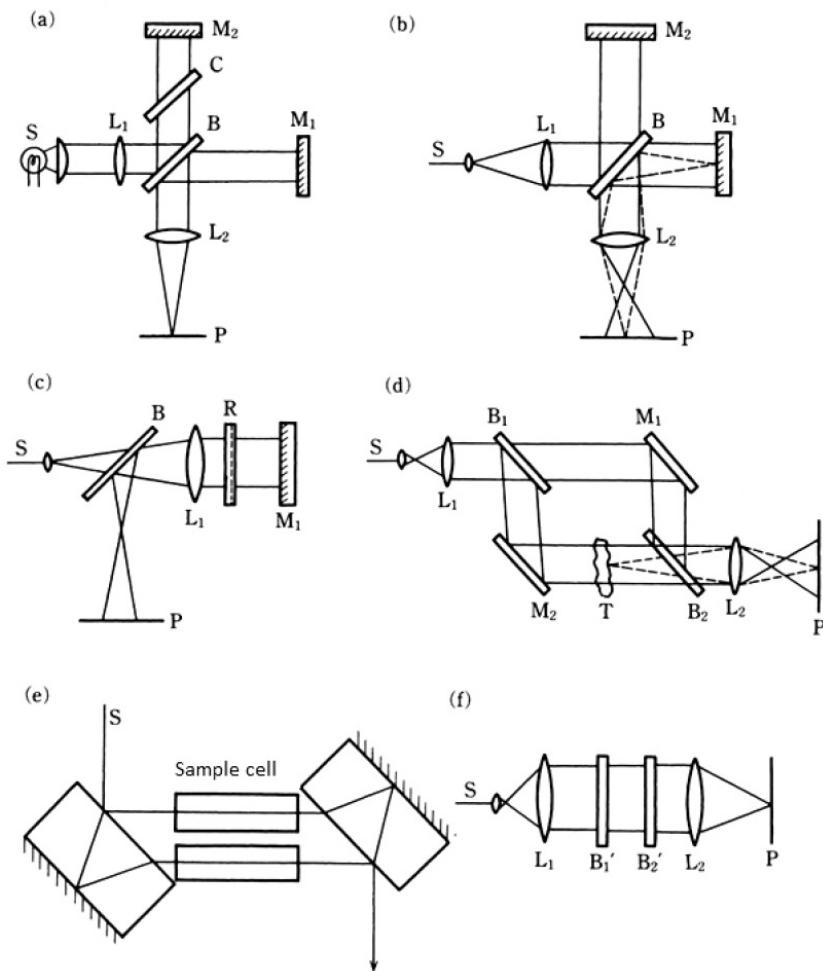
که در آن

$$r_{BP} = \sqrt{R^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} \approx R + \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)}{2R} \quad (21.2)$$

در نهایت، شدت حاشیه تداخل در P داده می‌شود

$$\begin{aligned} I_P &= |u_A + u_B|^2 \\ &= 2A^2 [1 + \cos k(r_{BP} - r_{AP})] \\ &= 2A^2 \left[1 + \cos \left(\frac{kd}{R} x \right) \right]. \end{aligned} \quad (22.2)$$

یک حاشیه سینوسی با دوره مساوی روی پرده مشاهده می‌شود. به این حاشیه یانگ^v می‌گویند که کنتراست آن $V = 1$ است.



شکل ۴.۲: تداخل‌سنج‌های معمولی (الف) تداخل‌سنج مایکلسون، (ب) تداخل‌سنج توایمن-گرین، (ج) تداخل‌سنج فیزو، (د) تداخل‌سنج ماخ زندر، (ه) تداخل‌سنج جامین، و (ف) تداخل‌سنج فابری-پرو. S : منبع نور، M : عدسی، B : آینه، C : تقسیم کننده پرتو، R : جبران کننده، P : سطح مرجع، B' : سطح با بازتاب بالا، T : جسم شفاف، P : صفحه مشاهده.

۴.۲ تداخل‌سنج

تداخل‌سنج افزارهایی است که با تقسیم و قرار دادن امواج از یک منبع نور، امواج را تداخل ایجاد می‌کند. تداخل‌سنج‌های مختلفی برای اندازه‌گیری فواصل، ضریب شکست و غیره

^vYoung fringe

ساخته شده‌اند. آنها ابزارهای اندازه‌گیری هستند که از مقیاس دقیقی از ترتیب طول موج نور استفاده می‌کنند. تداخل سنج‌های رایج در شکل (۴.۲) نشان داده شده است.

تداخل سنج مایکلسون شکل (۴.۲)(الف) دارای اهمیت تاریخی است که برای اندازه‌گیری طول استاندارد متریک و همچنین نشان دادن عدم وجود اتر^۱ استفاده شد. تداخل سنج توایمن-گرین شکل (۴.۲)(ب) و تداخل سنج فیزو شکل (۴.۲)(ج) برای اندازه‌گیری شکل سطح در اپتیک و ماشین‌کاری دقیق استفاده می‌شود. تداخل سنج ماخ - زندر شکل (۴.۲)(د) برای تجسم جریان‌ها و توزیع ضربی شکست گاز و پلاسمای استفاده می‌شود. ضربی شکست گاز و مایع توسط تداخل سنج جامین اندازه‌گیری می‌شود. شکل (۴.۲)(ه). تداخل سنج فابری-پروت شکل (۴.۲)(ف) به عنوان یک طیف سنج دقیق استفاده می‌شود.

۵.۲ پراش

تداخل سنج یانگ که در شکل (۳.۲) نشان داده شده، را دوباره در نظر گیرید. برای سادگی تحلیل، فرض کنید که تک شکاف S در فاصله کافی طولانی از شکاف‌های دوتایی A و B قرار دارد، به‌طوری که امواج شکاف‌های A و B را می‌توان به صورت امواج صفحه‌ای در نظر گرفت. پرده صفحه نمایش نیز در فاصله کافی قرار دارد. زاویه بین نقطه x و مبدأ در صفحه نمایشگر با استفاده از رابطه زیر داده می‌شود

$$\theta = \frac{x}{R} \quad (۲۳.۲)$$

شدت حاشیه‌ای یانگ در صفحه نمایشگر به صورت تابعی از زاویه θ نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} I &= |u_A + u_B|^2 = \left| A \exp\left(j \frac{kd\theta}{2}\right) + A \exp\left(-j \frac{kd\theta}{2}\right) \right|^2 \\ &= 2A^2 [1 + \cos(kd\theta)] \end{aligned} \quad (۲۴.۲)$$

که در آن u_A و u_B بصورت تقریبی زیر داده شده است.

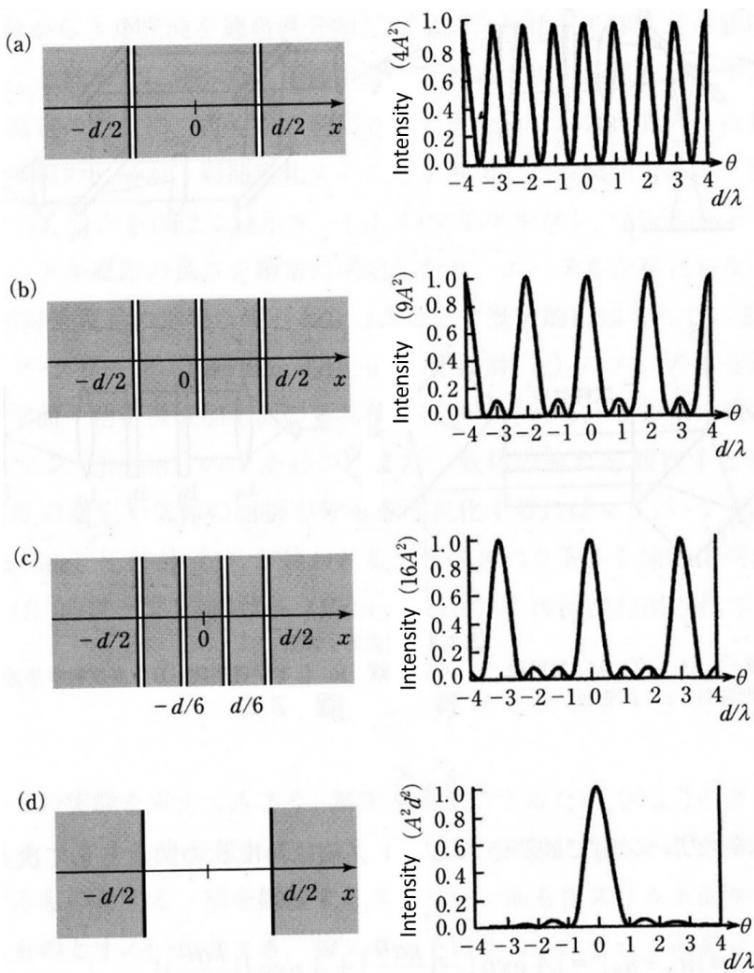
$$u_A = A \exp\left(j \frac{kd\theta}{2}\right) \cdot \exp(-jkR) \quad (۲۵.۲)$$

$$u_B = A \exp\left(-j \frac{kd\theta}{2}\right) \cdot \exp(-jkR) \quad (۲۶.۲)$$

نمایه حاشیه‌ها در شکل (۵.۲)(الف) نشان داده شده است. سپس مورد سه شکاف که در شکل (۵.۲)(ب) نشان داده شده، را در نظر گیرید. در قیاس با مورد دو شکاف، شدت حاشیه برای مورد سه شکاف را داریم.

$$\begin{aligned} I &= \left| A \exp\left(j \frac{kd\theta}{2}\right) + A + A \exp\left(-j \frac{kd\theta}{2}\right) \right|^2 \\ &= 3A^2 + 4A^2 \cos\left(\frac{kd\theta}{2}\right) + 2A^2 \cos(kd\theta) \end{aligned} \quad (۲۷.۲)$$

^۱Ether



شکل ۵.۲: (الف)–(ج) پراش از چندین شکاف و (د) تک شکاف

مورد چهار شکاف که در شکل (۵.۲)(ج) نشان داده شده را در نظر گیرید. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} I &= \left| A \exp\left(j \frac{kd\theta}{2}\right) + A \exp\left(j \frac{kd\theta}{6}\right) + A \exp\left(-j \frac{kd\theta}{6}\right) + A \exp\left(-j \frac{kd\theta}{2}\right) \right|^2 \\ &= 4A^2 + 6A^2 \cos\left(\frac{kd\theta}{3}\right) + 4A^2 \cos\left(\frac{2kd\theta}{3}\right) + 2A^2 \cos(kd\theta) \end{aligned} \quad (28.2)$$

با استفاده از روشی مشابه، با افزایش تعداد شکاف‌ها، اما بدون تغییر عرض d ، روزنه‌ای با عرض d داریم. در این حالت، توزیع دامنه در صفحه نمایشگر خواهد بود

$$u = \int_{-d/2}^{d/2} A \exp(jk\theta\tau) d\tau = Ad \frac{\sin(kd\theta/2)}{kd\theta/2} \quad (29.2)$$

در این صورت توزیع شدت برابر است با

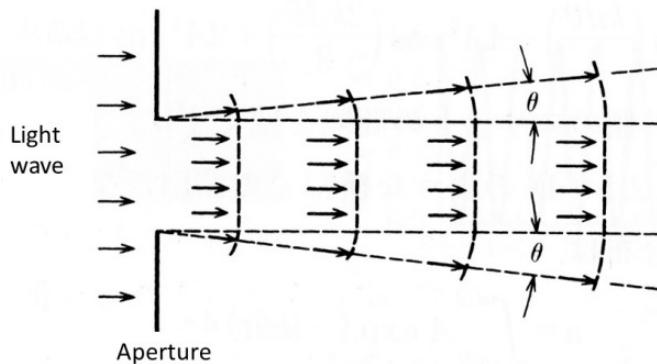
$$u = A^2 d^2 \left[\frac{\sin(kd\theta/2)}{kd\theta/2} \right]^2 \quad (30.2)$$

موج روی صفحه‌ای که دور از روزنه قرار دارد گسترش می‌یابد که توسط یک نور همدوس روشن می‌شود. پراش یک پدیده نوری از انتشار موج پس از مانع مانند روزنه است که در آن موج با مقداری واگرایی منتشر می‌شود. برای تعریف وسعت الگوی پراش، فاصله مرکز الگوی پراش تا شدت صفر اول را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{kd\theta}{2} = \pi \quad (31.2)$$

در این صورت زاویه گسترش خواهد بود

$$\theta = \frac{\lambda}{d} \quad (32.2)$$



شکل ۶.۲: پراش از روزنه

میزان پراش با طول موج متناسب و با اندازه روزنه نسبت معکوس دارد. همانطور که در شکل (۶.۲) نشان داده شده است، بهدلیل پراش، موج در پشت مانع منتشر می‌شود. هرچه عرض روزنه کوتاه‌تر باشد، اثر پراش آشکارتر است و بنابراین، قسمت انتشار مستقیم کاهش می‌یابد. اگر عرض روزنه با طول موج یکسان باشد، می‌توان موج پراش شده را به عنوان یک موج کروی در نظر گرفت. بنابراین، در بخش ۳.۲، امواج حاصل از شکاف‌ها به عنوان امواج کروی در نظر گرفته شدند. انتگرال معادله (۲۹.۲) به این معنی است که برهم نهی بسیاری از امواج کروی که از صفحه روزنه منشا می‌گیرند دامنه موج پراشیده را می‌دهد.

در تاریخچه اپتیک، اصل هویگنس نشان داده شده در شکل (۷.۲) پراش را توصیف کرده است. طبق اصل هویگنس، هر نقطه در جبهه موج تابشی Σ در یک زمان منبعی از امواج ثانویه است که موجک نامیده می‌شود. پوشش' Σ' موجک‌ها در دفعات بعدی باعث ایجاد جبهه موج جدید می‌شود. این اصل پراش را به‌طور کامل توضیح نمی‌دهد. فرنل



شکل ۷.۲: اصل هویگنس

توضیح داد که تداخل موجک‌ها دامنه موج پراشیده را می‌دهد. بهاین اصل هویگنس می‌گویند.

بر طبق اصل هویگنس، پراش شکل (۵.۲)(d) بصورت زیر است

$$u_P = \iint_S \frac{A \exp(-jkr)}{(-j\lambda r)} dx dy \quad (33.2)$$

با استفاده از مختصات نشان داده شده در شکل (۸.۲)، که در آن r نشان دهنده فاصله یک نقطه در روزنے تا نقطه مشاهده P است، $dx dy$ یک عنصر سطح کوچک در صفحه روزنے است و انتگرال‌گیری بر روی ناحیه روزنے انجام می‌شود.

موجک با $A/r \exp(-jkr)$ توصیف شده است. فرض کنید فاصله R از صفحه روزنے تا صفحه مشاهده به اندازه کافی بزرگتر از اندازه روزنے باشد. در این حالت اگر موقعیت (x, y) در داخل روزنے تغییر کند، تغییر r بسیار کم است و بنابراین $1/r$ ثابت در نظر گرفته شده و برابر با $1/R$ است.

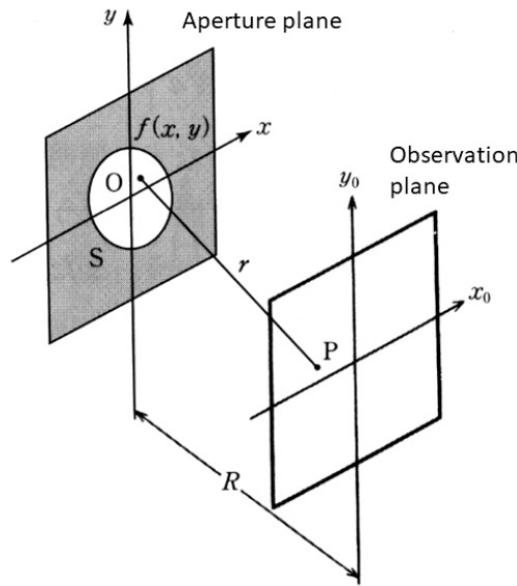
بعد، تابع روزنے را تعریف می‌کنیم،

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 : & \text{داخل روزنے } S \\ 0 : & \text{خارج روزنے } S \end{cases} \quad (34.2)$$

معادله (۳۳.۲) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$u_P(x, y) = \frac{jA}{\lambda R} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-jkr) dx dy \quad (35.2)$$

این معادله دامنه موج پراشیده از روزنے S را که توسط یک موج صفحه‌ای عمود بر صفحه روزنے، روشن می‌شود، به ما می‌دهد.



شکل ۸.۲: مختصات برای رابطه مندی پراش

۶.۲ پراش فرنل

برای بحث بیشتر، یک نوع ساده شده از معادله (۳۵.۲) را بدست می‌آوریم. فاصله یک نقطه (x, y) در روزنه تا نقطه مشاهده (x_0, y_0) با

$$r = \sqrt{R^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (36.2)$$

چون $(y - y_0)^2$ و $(x - x_0)^2 \gg R^2$ است، معادله (۳۶.۲) را می‌توان بصورت زیر تقریب زد

$$\begin{aligned} r &= R \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R^2}} \\ &\approx R + \frac{1}{2R} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \frac{1}{8R^3} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 \end{aligned} \quad (37.2)$$

در اینجا فرض می‌کنیم

$$\left| \frac{k}{\lambda R^3} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 \right| \ll 1 \quad (38.2)$$

به عبارت دیگر، اگر

$$R^2 \gg \frac{\pi^2}{4\lambda} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \quad (39.2)$$

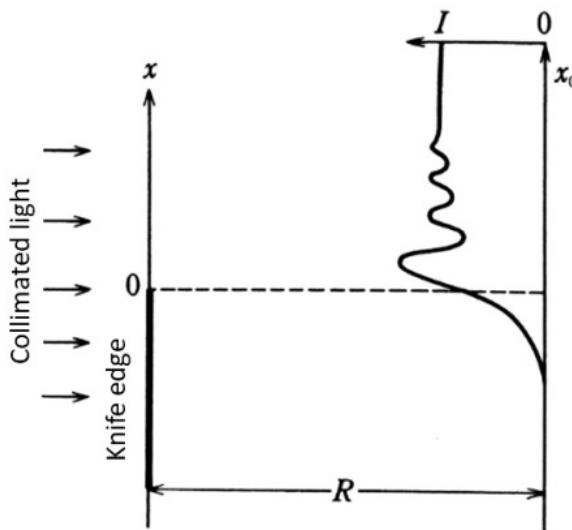
معادله (۳۷.۲) را بازنویسی می‌کنیم

$$r = R + \frac{1}{2R} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \quad (40.2)$$

بنابراین، معادله پراش (۴۱.۲) خواهد شد

$$u_P(x_0, y_0) = \frac{jA}{\lambda R} \exp(-jkR) \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp \left\{ \frac{-jk}{\lambda R} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} dx dy \quad (41.2)$$

پراش تحت شرایط معادله (۳۹.۲)^۹ و معادله (۴۱.۲)^{۱۰} معادله پراش فرنل نامیده می‌شود.



شکل ۹.۲: هندسه پراش فرنل از لبه تیغه.

همانطور که در شکل (۹.۲) نشان داده شده است، ساده‌ترین حالت، عبور نور از لبه تیغه را در نظر گیرید. در اینجا جسم مانع، لبه تیغه در $x < 0$ قرار دارد. معادله پراش فرنل برای شرایط بالا

$$u_P(x_0) = \frac{jA}{\lambda R} \exp(-jkR) \int_0^{\infty} \exp \left[\frac{-j\pi}{\lambda R} (x - x_0)^2 \right] dx \quad (42.2)$$

این معادله بصورت زیر اصلاح می‌شود

$$u_P(x_0) = jA \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} \exp(-jkR) \int_{\xi'}^{\infty} \exp \left(-j \frac{\pi}{\lambda R} \xi^2 \right) d\xi \quad (43.2)$$

که در آن

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} (x - x_0), \quad (44.2)$$

^۹ Fresnel diffraction

^{۱۰} Fresnel diffraction equation

که حد پائین این انتگرال برابر است با

$$\xi' = -\sqrt{\frac{2}{\lambda R}} x_0 \quad (45.2)$$

با استفاده از انتگرال فرنل،

$$C(\xi) = \int_0^\xi \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi'\right) d\xi \quad (46.2)$$

$$S(\xi) = \int_0^\xi \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi'\right) d\xi \quad (47.2)$$

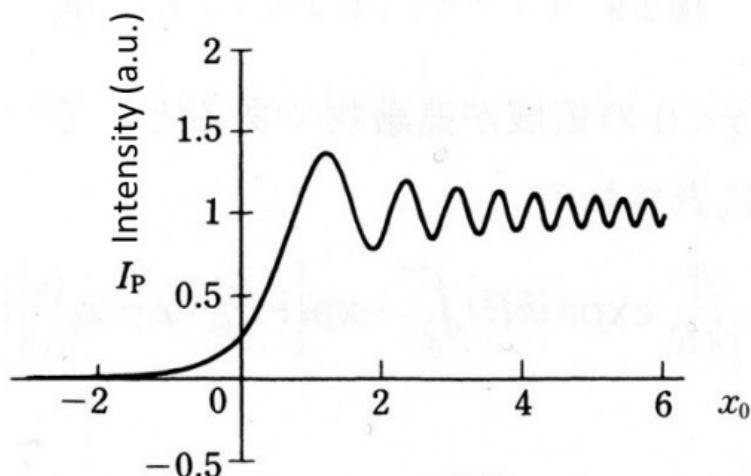
سرانجام معادله (۴۳.۲) بصورت زیر بازنویسی می‌شود؛

$$u_P(x_0) = jA\sqrt{\frac{1}{\lambda R}} \exp(-jkR) \{C(\infty) - C(\xi') - j[S(\infty) - S(\xi')]\} \quad (48.2)$$

پراش فرنل معادله (۴۸.۲) منجر به انتگرال‌های فرنل می‌شود که یک تابع ابتدایی نیست. مقدار انتگرال‌های فرنل به صورت عددی به دست می‌آید. شدت الگوی پراش خواهد شد

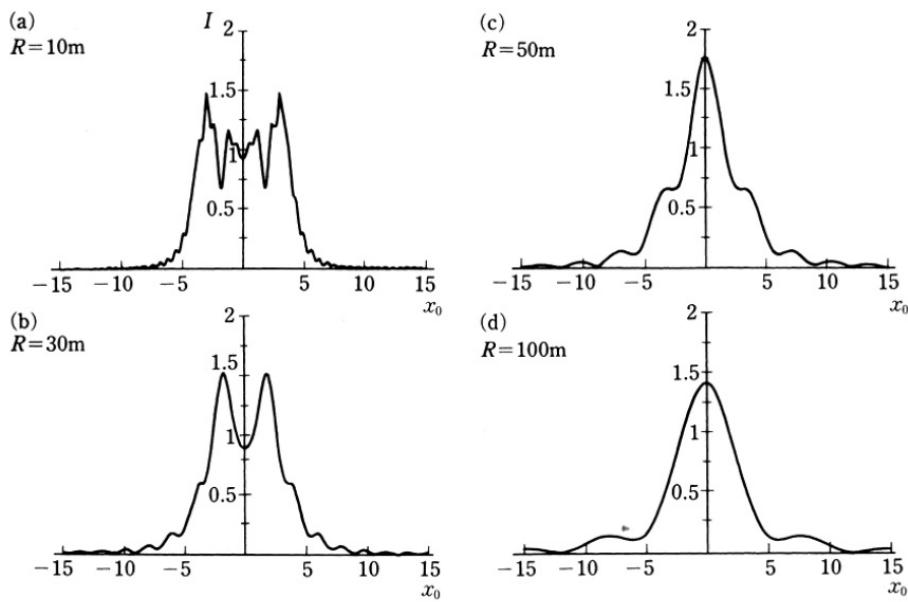
$$I_P(x_0) \propto [C(\infty) - C(\xi')]^2 + [S(\infty) - S(\xi')]^2 \quad (49.2)$$

همانطور که در شکل (۱۰.۲) نشان داده شده است، موج پراشیده در ناحیه سایه هندسی



شکل ۱۰.۲: الگوی پراش فرنل از لبه تیغه

منتشر و حاشیه‌های قابل مشاهده در یک ناحیه بدون مانع ظاهر می‌شوند. شکل (۱۱.۲) شدت الگوهای پراش فرنل یک شکاف را در نقاط مشاهده مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۲: الگوی پراش فرنل از یک شکاف. شکاف به عرض ده میلی‌متر و طول موج $\lambda = 0.63\mu\text{m}$ است.

۷.۲ پراش فراونهوفر

از رابطه تقریبی (۴۰.۲) داریم

$$r = R - \frac{1}{R}(xx_0 + yy_0) + \frac{1}{2R}(x_0^2 + y_0^2) \quad (50.2)$$

با صرفنظر کردن از جملات x^2 و y^2 با توجه به شرط

$$\left| \frac{k}{2R}(x_0^2 + y_0^2) \right| \ll 1 \quad (51.2)$$

که خیلی بیش از حالت پراش فرنل محدود می‌شود. این شرط میدهد

$$R \gg \frac{\pi}{\lambda}(x_0^2 + y_0^2) \quad (52.2)$$

برای مثال، هنگامی که $R > 1/2Km$ و عرض روزنه یک سانتی‌متر و طول $0.5\mu\text{m}$ است. با جایگزینی معادله (۵۰.۲) در (۳۵.۲)، داریم

$$\begin{aligned} u_P(x_0, y_0) &= \frac{jA}{\lambda R} \exp(-jkR) \cdot \exp\left[-j\frac{k}{2R}(x_0^2 + y_0^2)\right] \\ &\times \iint f(x, y) \exp\left[j\frac{k}{R}(xx_0 + yy_0)\right] dx dy \end{aligned} \quad (53.2)$$

مقادیر زیر را تعریف می‌کنیم

$$v_x = \frac{x_0}{\lambda R}, \quad v_y = \frac{y_0}{\lambda R} \quad (54.2)$$

در این صورت داریم

$$u_p(v_x, v_y) = A' \iint f(x, y) \exp[j2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy \quad (55.2)$$

که در آن

$$A' = j \frac{A}{\lambda R} \exp(-jkR) \cdot \left[-j \frac{k}{\lambda R} (x_0^2 + y_0^2) \right] \quad (56.2)$$

معادله (۵۳.۲) یا معادله (۵۵.۲) تحت شرط معادله (۵۲.۲) پراش فراونهوفر^{۱۱} نامیده می‌شود.

انتگرال معادله (۵۳.۲) به عنوان انتگرال فوریه یا تبدیل فوریه نیز شناخته می‌شود. هدف این کتاب بحث در مورد معنای فیزیکی و مهندسی تبدیل فوریه از نظر نوری است. اما در این فصل معادله (۵۳.۲) را به عنوان انتگرال پراش در نظر گرفته و در مورد این انتگرال با چند مثال بحث می‌کنیم.

۱.۷.۲ روزنه مستطیلی

پراش فراونهوفر را از یک روزنه مستطیلی با اندازه $D_x \times D_y$ در نظر بگیرید. از معادله (۵۳.۲)، دامنه پراش با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= A' \int_{-D_y/2}^{D_y/2} \int_{-D_x/2}^{D_x/2} \exp \left[j \frac{k}{\lambda R} (xx_0 + yy_0) \right] dx dy \\ &= A' D_x D_y \frac{\sin \left(\frac{kD_x}{\lambda R} x_0 \right)}{\frac{kD_x}{\lambda R} x_0} \cdot \frac{\sin \left(\frac{kD_y}{\lambda R} y_0 \right)}{\frac{kD_y}{\lambda R} y_0} \end{aligned} \quad (57.2)$$

با استفاده از تابع سینک

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (58.2)$$

معادله (۵۷.۲) را بازنویسی می‌کنیم

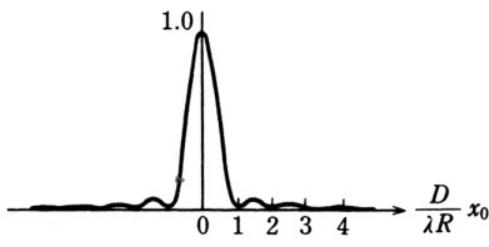
$$u(x_0, y_0) = A' D_x D_y \text{sinc} \left(\frac{D_x x_0}{\lambda R} \right) \cdot \text{sinc} \left(\frac{D_y y_0}{\lambda R} \right) \quad (59.2)$$

بنابراین، توزیع شدت خواهد بود

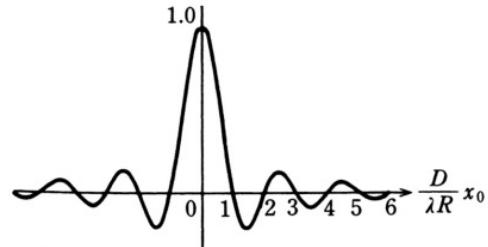
$$I(x_0, y_0) = A'^2 D_x^2 D_y^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{D_x x_0}{\lambda R} \right) \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{D_y y_0}{\lambda R} \right) \quad (60.2)$$

توزیع دامنه پراش فراونهوفر یک روزنه مستطیلی در شکل (۱۲.۲) و توزیع شدت آن در شکل (۱۳.۲) نشان داده شده است.

^{۱۱}Fraunhofer diffraction



شکل ۱۳.۲: شدت پراش فراونهوفر یک روزنه مستطیلی



شکل ۱۲.۲: دامنه پراش فراونهوفر یک روزنه مستطیلی

۲.۷.۲ روزنه دایره‌ای

پراش فراونهوفر از یک روزنه دایره‌ای به قطر D را در نظر گیرید. در مختصات قطبی داریم:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & y &= \rho \sin \theta \\ x_0 &= w \cos \phi, & y_0 &= w \sin \phi \end{aligned} \quad (61.2)$$

معادله (۵۳.۲) را بازنویسی می‌کنیم؛

$$u(w, \phi) = A' \int_0^{D/2} \int_0^{\pi} \exp \left[j \frac{k}{R} \rho w \cos(\theta - \phi) \right] \rho d\rho d\phi \quad (62.2)$$

با استفاده از تابع بسل نوع اول مرتبه n

$$J_n(x) = \frac{j^n}{2\pi} \int_0^{\pi} \exp(-jx \cos \alpha) \exp(-j n \alpha) d\alpha \quad (63.2)$$

در این صورت داریم

$$u(w) = 2\pi A' \int_0^{D/2} J_n \left(\frac{k}{R} \rho w \right) \rho d\rho \quad (64.2)$$

با استفاده از روابط توابع بسل

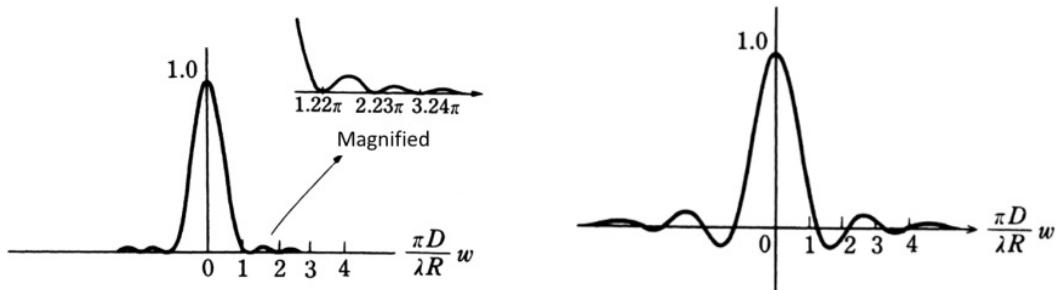
$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x) \quad (65.2)$$

معادله (۶۴.۲) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$u(w) = \pi A' \left(\frac{D}{2} \right)^n \cdot \frac{2 J_1 \left(\frac{kD}{\lambda R} w \right)}{\frac{kD}{\lambda R} w} \quad (66.2)$$

در نهایت، شدت پراش فراونهوفر یک روزنه دایره‌ای برابر است با

$$I(w) = I_0 \left[\frac{2 J_1 \left(\frac{kD}{\lambda R} w \right)}{\frac{kD}{\lambda R} w} \right]^n \quad (67.2)$$



شکل ۱۵.۲: شدت پراش فراونهوفر یک روزنه دایره‌ای

شکل ۱۴.۲: دامنه پراش فراونهوفر یک روزنه دایره‌ای

که در آن

$$I_{\circ} = \frac{\pi^2 A'^2 D^4}{16} \quad (68.2)$$

توزیع دامنه پراش فراونهوفر یک دیافراگم دایره‌ای و توزیع شدت آن به ترتیب در شکل‌ها (۱۴.۲) و (۱۵.۲) نشان داده شده است.

کمینه شدت در 1.22π , 2.23π , 3.24π و غیره برای مقدار $kDw/2R$ صفر است. بیشینه دوم شدت در $kDw/2R = 1.635$ است که در آن $I/I_{\circ} = 0.175$ است. انرژی الگوی پراش در ناحیه دیسک مرکزی متوجه شود که به آن دیسک ایری^{۱۲} می‌گویند. اندازه دیسک ایری با شاعع Δw اولین حلقه تیره تخمین زده می‌شود.

$$\Delta w = 1.22 \frac{\lambda R}{D} \quad (69.2)$$

۳.۷.۲ توری پراش

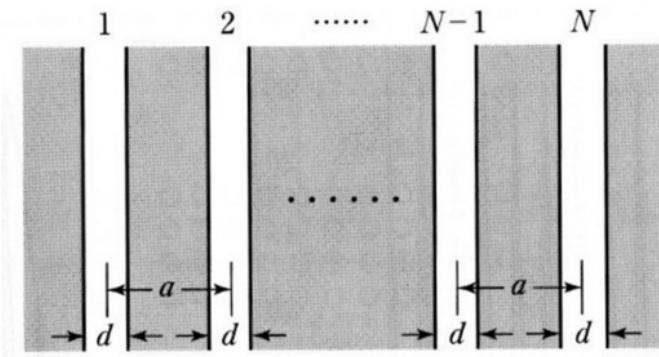
همانطور که در شکل (۱۶.۲) نشان داده شده است، پراش فراونهوفر یک توری متشکل از N شکاف مستقیم با عرض w موازی با یکدیگر را در نظر گیرید. فرض کنید فاصله شکاف‌ها a باشد. با توجه به معادله (۵۵.۲)، ما امواج پراشیده از شکاف شماره n داریم

$$\begin{aligned} u_n(v_x) &= A' \int_{an-d/\sqrt{2}}^{an+d/\sqrt{2}} \exp(j\sqrt{2}\pi x v_x) dx \\ &= A' \exp(j\sqrt{2}\pi a n v_x) \int_{-d/\sqrt{2}}^{d/\sqrt{2}} \exp(j\sqrt{2}\pi x v_x) dx \\ &= A' \exp(j\sqrt{2}\pi a n v_x) u_{\circ}(v_x) \end{aligned} \quad (70.2)$$

که در آن

$$u_{\circ}(v_x) = \int_{-d/\sqrt{2}}^{d/\sqrt{2}} \exp(j\sqrt{2}\pi x v_x) dx = d \operatorname{sinc}(dv_x) \quad (71.2)$$

^{۱۲}Airy disc



شکل ۱۶.۲: توری پراش

کل امواج پراشیده خواهد بود

$$\begin{aligned} u(v_x) &= \sum_{n=0}^{N-1} u_n(v_x) \\ &= A' u_*(v_x) \frac{1 - \exp(j2\pi a N v_x)}{1 - \exp(j2\pi a v_x)} \end{aligned} \quad (72.2)$$

شدت پراش فراونهوفر امواج توری برابر است با

$$\begin{aligned} I(v_x) &= I_* \operatorname{sinc}^2(dv_x) \frac{1 - \cos(2\pi a N v_x)}{1 - \cos(2\pi a v_x)} \\ &= I_* \operatorname{sinc}^2(dv_x) \cdot U(v_x) \end{aligned} \quad (73.2)$$

که در آن

$$I_* = A'^2 d^2 \quad (74.2)$$

$$U(v_x) = \left[\frac{\sin(2\pi a N v_x)}{\sin(2\pi a v_x)} \right]^2 \quad (75.2)$$

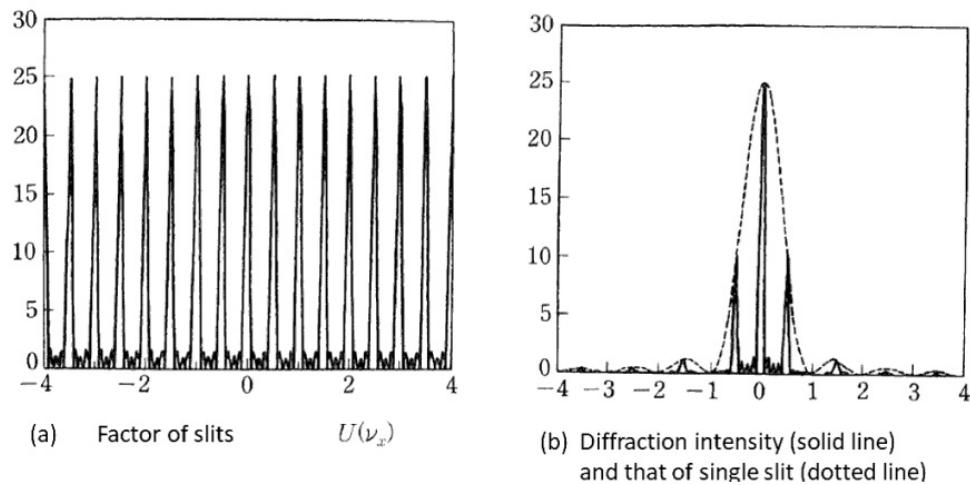
پراش فراونهوفر یک توری مضربی از دو قسمت است، پراش از یک شکاف، معادله (۷۱.۲) و یک عامل ناشی از N شکاف، معادله (۷۵.۲)). ضریب معادله (۷۵.۲) حداکثر N^2 برای مقادیر زیر است

$$\pi a v_x = \pi n \quad (\text{عدد صحیح :}) \quad (76.2)$$

و صفر برای مقادیر

$$\pi a N v_x = \pi m \quad (m : \text{ عدد صحیح اما نه برای مضاربی از } N) \quad (77.2)$$

که در شکل (۱۷.۲)(الف) برای قله‌های تیز نشان داده شده است.



شکل ۱۷.۲: توری پراش فراونهوفر. (الف) ضریب (x) ، و (ب) شدت پراش از توری (خط توپر) و از یک شکاف منفرد (خط نقطه چین).

توزیع شدت پراش فراونهوفر یک توری که در شکل ۱۷.۲(ب) نشان داده شده، مضربی از ضریب معادله ۷۵.۲ و پراش یک شکاف از معادله ۷۱.۲ است. نقطه روشنی که روی محور نوری قرار دارد، نقطه پراش مرتبه صفر نامیده می‌شود و نقاطی که خارج از مرتبه صفر قرار دارند، مرتبه‌های پراش \pm اول، \pm دوم، \dots است. عرض نقطه پراش با افزایش تعداد N شکاف‌ها کاهش می‌یابد. پهنانی پوش الگوی پراش (این بهدلیل پراش یک شکاف منفرد است) با کوتاه شدن عرض شکاف‌ها گستردگر می‌شود.

پرسش‌ها

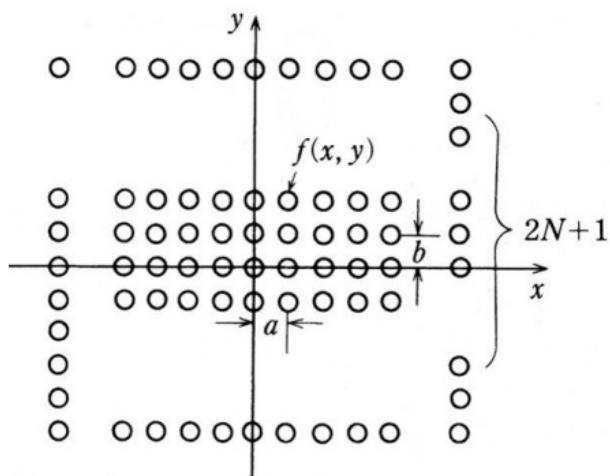
۱. توضیح دهید که وقتی دو موج با فرکانس‌های مختلف روی هم قرار می‌گیرند چه نوع پدیده‌هایی روی می‌دهند.

۲. دو شکاف به عرض D در فاصله l قرار دارند که توسط نور تک رنگی با طول موج λ روشن می‌شوند. الگوی پراش فراونهوفر را جایی که $D < l < D_1$ است، محاسبه کنید.

۳. الگوی پراش فراونهوفر یک روزنه حلقوی که قطرهای بیرونی و داخلی آن D_1 و D_2 است و با نور تک رنگی به طول موج λ روشن می‌شود را محاسبه کنید.

۴. الگوی پراش فراونهوفر آرایه‌ای از روزنه‌ها را همانطور که در شکل ۱۸.۲ نشان داده شده است، محاسبه کنید، که در آن همه روزنه‌ها با $f(x, y)$ یکسان توصیف می‌شوند. تعداد روزنه‌ها $(2M+1) \times (2N+1)$ و فاصله آنها در جهت x و y به ترتیب a و b است.

وقتی روزنه‌ها به طور تصادفی توزیع می‌شوند، الگوی پراش چیست؟



شکل ۱۸.۲: آرایه‌ای از روزنه‌ها

مراجع:

- Hecht, E. 2002. *Optics*, 4th ed. Pearson Education.
- Born, M. and Wolf, E. 1999. *Principles of Optics*, 7th ed. Cambridge University Press.
- Guenther, R. 1990. *Modern Optics*. John Wiley & Sons., New York.
- Sharma, K. K. 2006. *Optics*. Academic Press, Amsterdam.
- Lakshminarayanan, K. K. and Varadharajan, L. S. 2015. *Special Functions for Optical Science and Engineering*. SPIE Press.

فصل ۳

تبدیل فوریه و کانولوشن

تبدیل فوریه نقش بسیار مهمی در بسیاری از زمینه‌های علمی و مهندسی ایفا می‌کند. تحلیل فوریه ابزاری جهانی برای دستیابی به تعدادی راه حل ممکن است که از دیدگاه وسیع علم و فناوری مناسب هستند.

در این فصل، ابتدا مفهوم سری فوریه را شرح می‌دهیم و سپس بسط آن، تبدیل فوریه، معرفی می‌شود. برای اعمال تحلیل فوریه در اپتیک، بر دقت ریاضی تأکید نمی‌کنیم، بلکه بر درک شهودی و مفهومی تحلیل فوریه تأکید می‌کنیم. در مرحله بعد، یک مفهوم مهم در تجزیه و تحلیل سیستم را مورد بحث قرار می‌دهیم، یعنی انتگرال کانولوشن، تابع همبستگی و تبدیل فوریه آنها. در نهایت، قضیه نمونه برداری برای تبدیل سیگنال‌های آنالوگ به سیگنال‌های دیجیتال معرفی می‌شود. پیش نیازهای ریاضی در این کتاب با این توضیحات تکمیل می‌شود.

۱.۳ سری فوریه

جمع توابع سینوزوئیدال ($A_n \cos(2\pi nx/T + \phi_n)$) با توزین ($n = 0, 1, 2, \dots$) را با توجه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx + \phi_n\right) \quad (1.3)$$

را سری فوریه می‌نامند. برای متقارن کردن، معادله (۱.۳) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right] \quad (2.3)$$

که در آن
 $a_0 = 2A_0 \cos \phi_0 \quad (3.3)$

$$a_n = A_n \cos \phi_n \quad (4.3)$$

$$a_n = -A_n \sin \phi_n \quad (5.3)$$

سمت راست معادله (۱.۳) و (۲.۳) همه توابع تناوبی هستند و بنابراین تابع $f(x)$ نیز یک تابع تناوبی است.

در بخش ۵.۱، توضیح دادیم که سری فوریه را می‌توان به صورت بسط تابع تناوبی $f(x)$ به توابع سینوسی تفسیر کرد. عوامل وزن در معادله (۲.۳) و a_n و b_n هستند. وزن‌ها را می‌توان به صورت زیر بدست آورد: ابتدا، هر دو جمله در معادله (۲.۳) را در $\cos(2\pi mx/T)$ ضرب و سپس در یک دوره تناوب $[-T/2, T/2]$ انتگرال‌گیری می‌شوند.

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \left(2\pi \frac{m}{T} x \right) dx &= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2} \cos \left(2\pi \frac{m}{T} x \right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(2\pi \frac{n}{T} x \right) \cos \left(2\pi \frac{m}{T} x \right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(2\pi \frac{n}{T} x \right) \cos \left(2\pi \frac{m}{T} x \right) dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

با استفاده از تعامد توابع سینوزوئیدال

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \left(2\pi \frac{n}{T} x \right) \cos \left(2\pi \frac{m}{T} x \right) dx = \begin{cases} T/2 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \left(2\pi \frac{n}{T} x \right) \sin \left(2\pi \frac{m}{T} x \right) dx = 0. \quad (8.3)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \left(2\pi \frac{n}{T} x \right) \sin \left(2\pi \frac{m}{T} x \right) dx = \begin{cases} T/2 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (9.3)$$

داریم

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \left(2\pi \frac{n}{T} x \right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10.3)$$

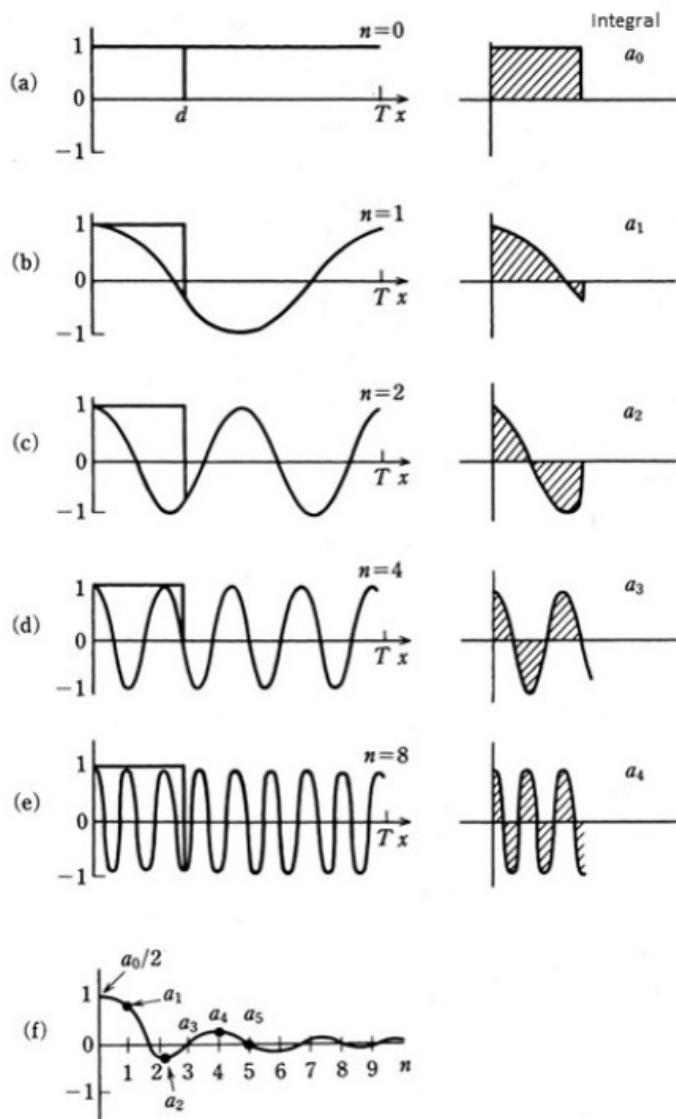
به طور مشابه، هر دو عبارت در معادله (۲.۳) در $\sin(2\pi mx/T)$ ضرب و سپس در یک دوره تناوب $[-T/2, T/2]$ انتگرال‌گیری می‌شوند. خواهیم داشت

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \left(2\pi \frac{n}{T} x \right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.3)$$

در اینجا از متعامد تابع سینوسی معادله (۸.۳) و (۹.۳) استفاده کردیم. شکل (۱.۳) روش به دست آوردن ضرایب a_n را برای یک تابع مستطبی تناوبی با عرض d نشان می‌دهد. ضرایب سری فوریه مقادیری از مولفه‌های $\cos(2\pi nx/T)$ را در تابع $f(x)$ در دوره تناوب T نشان می‌دهد. دو تناوب، و به طور کلی، $n \cos(2\pi nx/T)$ تناوب، n فرکانس نامیده می‌شود، که همان تعریف در معادله (۱۶.۱) است. ضرایب a_n و b_n معیار

مولفه‌های فرکانس هستند که طیف نامیده می‌شود. این بدان معنی است که طیف تابع تناوبی $f(x)$ مجموعه‌ای از فرکانس‌های گستته a_n و b_n است (n یک عدد صحیح است). درست در مواردی که موج با یک تابع نمایی مختلط توصیف می‌شود، نوع مختلط سری فوریه در بسیاری از موارد راحت است.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(-j\frac{2\pi}{T}nx\right) \quad (12.3)$$



شكل ۱.۳: محاسبه ضرایب فوریه a_n

که در آن

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (13.3)$$

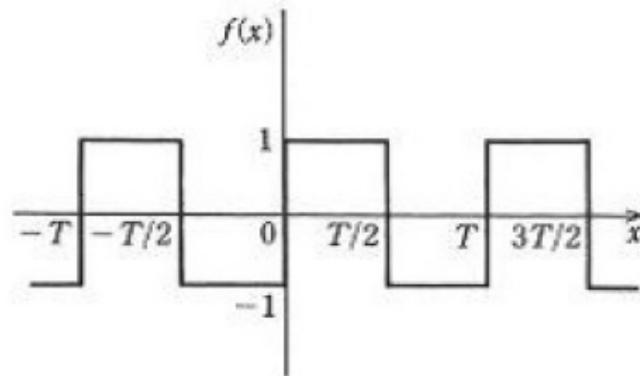
$$c_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (14.3)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n - jb_n}{2} = c_n^* \quad (15.3)$$

و c_n^* نمایشگر مزدوج مختلط c_n است. از معادله (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم:

$$c_n = c_{-n}^* = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp\left(j2\pi\frac{n}{T}x\right) dx \quad (16.3)$$

شکل (۲.۳) یک تابع تناوبی با دوره تناوب T را نشان می‌دهد که به صورت زیر تعریف



شکل ۲.۳: تابع تناوبی (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم

شده است

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-T/2 \leq x < 0) \\ 1 & (0 < x < T/2) \end{cases} \quad (17.3)$$

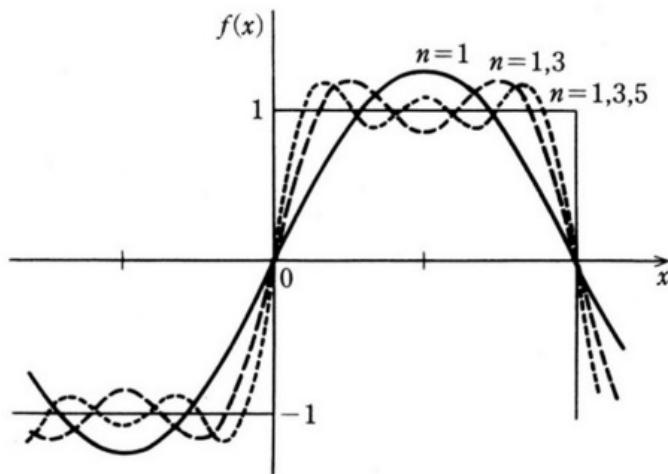
با استفاده معادلات (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم

$$a_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \cos\left(2\pi\frac{n}{T}x\right) dx + \int_0^{T/2} (1) \cos\left(2\pi\frac{n}{T}x\right) dx \right] = 0 \quad (18.3)$$

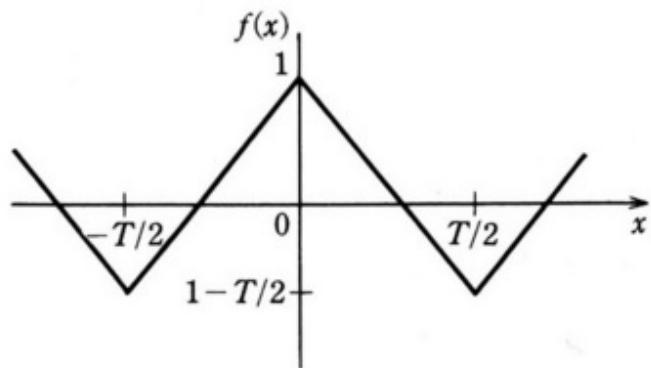
$$b_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \sin\left(2\pi\frac{n}{T}x\right) dx + \int_0^{T/2} (1) \sin\left(2\pi\frac{n}{T}x\right) dx \right] = \frac{4}{n\pi} \quad (n : \text{ صحیح فرد}) \quad (19.3)$$

سرانجام، داریم

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi x}{T} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi x}{T} + \dots \right) \quad (20.3)$$



شکل ۳.۳: شکل تابع تناوبی مصور در شکل (۲.۳) و سری فوریه آن ($n \leq 5$).



شکل ۴.۳: تابع مثلث تناوبی

که سری تا $n = 5$ در شکل (۳.۳) نشان داده شده است.
تابع مصور در شکل (۴.۳) بصورت زیر نوشته می‌شود

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (-T/2 \leq x < 0) \\ -x + 1 & (0 < x < T/2) \end{cases} \quad (۲۱.۳)$$

و ضرایب سری فوریه آن

$$a_0 = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \quad (۲۲.۳)$$

$$a_n = \frac{T}{\pi n} [1 - (-1)^n] \quad (۲۳.۳)$$

$$b_n = 0 \quad (۲۴.۳)$$

سرانجام، داریم

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{T}{2} \right) + \frac{2T}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi}{T}x + \frac{1}{3} \cos \frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5} \cos \frac{10\pi}{T}x + \dots \right) \quad (25.3)$$

نمونه‌هایی از توابع متناوب و سری فوریه آنها در جدول (۱.۳) نشان داده شده است.
سری فوریه از معادلات (۲۰.۳) و (۲۵.۳)، یا a_n یا b_n صفر است. این به‌این دلیل است که آیا تابع $f(x)$ یک تابع فرد است یا یک تابع زوج. تابع $f(x)$ به‌طوری که $f(x) = f(-x)$ است یک تابع زوج نامیده می‌شود. تابعی که $f(x) = -f(x)$ است یک تابع فرد می‌باشد. ضریب سری فوریه a_n به‌مولفه‌های کسینوس (تابع زوج) تابع $f(x)$ و b_n سینوس آنها (تابع فرد) مربوط می‌شود. به‌راحتی قابل درک است که اگر تابع $f(x)$ یک تابع فرد باشد، $a_n = 0$ و اگر تابع $f(x)$ یک تابع زوج باشد، $b_n = 0$ است.
بطور کلی، هر تابع مانند $f(x)$ را می‌توان به دو تابع $f_e(x)$ زوج و $f_o(x)$ فرد تقسیم کرد.
یعنی

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad (26.3)$$

$$f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (27.3)$$

البته داریم

$$f(x) = f_e(x) + f_o(-x) \quad (28.3)$$

ضرایب سری فوریه بصورت زیر داده می‌شود

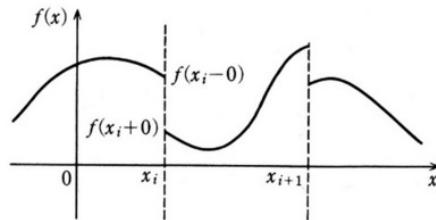
$$a_n = \frac{4}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_e(x) \cos \left(\frac{2\pi n}{T}x \right) dx \quad (29.3)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_o(x) \sin \left(\frac{2\pi n}{T}x \right) dx \quad (30.3)$$

لازم به‌ذکر است که سری فوریه برای تابع دلخواه $f(x)$ همیشه وجود ندارد. برای اینکه سری فوریه وجود داشته باشد، تابع $f(x)$ باید در بازه $[-T/2, T/2]$ محدود و قابل انتگرال باشد، اما پیوسته نباشد. همانطور که در شکل (۵.۳) نشان داده شده است، اگر تابع $f(x)$ مشتق آن $f'(x)$ به جز تعداد قابل شمارش ناپیوستگی، پیوسته باشند، تابع $f(x)$ یک تابع نیمه صاف نامیده می‌شود. به‌شرطی که یک تابع نیمه صاف در $x = x_1$ ناپیوستگی داشته باشد، ثابت می‌شود که سری فوریه آن به‌میانگین $\frac{1}{2}[f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)]$ همگرا می‌شود، جایی که $f(x_1 - 0)$ و $f(x_1 + 0)$ به‌ترتیب حدهای سمت چپ و راست در ناپیوستگی $x = x_1$ هستند.

جدول ١.٣: توابع متناوب و سرى فوريه آنها

	$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left\{ \cos \frac{2\pi}{T}x - \frac{1}{3} \cos \frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5} \cos \frac{10\pi}{T}x - \dots \right\}$
	$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left\{ \sin \frac{2\pi}{T}x + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi}{T}x + \dots \right\}$
	$\frac{8A}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{2\pi}{T}x + \frac{1}{3^2} \cos \frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5^2} \cos \frac{10\pi}{T}x + \dots \right\}$
	$\frac{8A}{\pi^2} \left\{ \sin \frac{2\pi}{T}x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{10\pi}{T}x - \dots \right\}$
	$\frac{2A}{\pi} \left\{ \sin \frac{2\pi}{T}x - \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi}{T}x - \dots \right\}$
	$-\frac{2A}{\pi} \left\{ \sin \frac{2\pi}{T}x + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T}x + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi}{T}x + \dots \right\}$
	$\frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \cos \frac{2\pi}{T}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2A \cos(4\pi/T)nx}{\pi(4n^2-1)}$
	$\frac{A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(2\pi/T)nx}$ または $\frac{2A}{T} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi}{T}nx \right\}$



شکل ۵.۳: تابع تا حدی صاف

۲.۳ تقریب چند جمله‌ای بهینه

تابع متناوب $f(x)$ را با دوره تناوب T در نظر گیرید. در این صورت این تابع با چند جمله‌ای توابع سینوزوئیدال تقریب زده می‌شود.

$$P_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right] \quad (31.3)$$

تابع شایستگی خطای ریشه میانگین مربع برای ارزیابی تقریب معرفی شده است.

$$Q_N = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(x) - P_N(x)]^2 dx \quad (32.3)$$

بعد، α_n و β_n را برای به حداقل رساندن تابع شایستگی پیدا می‌کنیم. این به عنوان تقریب چند جمله‌ای بهینه نامیده می‌شود. در ابتدا معادله (۳۲.۳) گسترش یافته است،

$$Q_N = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)^2 dx - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)P_N(x)dx + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_N(x)^2 dx \quad (33.3)$$

با جایگزینی معادله (۳۱.۳) در معادله (۳۳.۳)، داریم

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)^2 dx \\ &\quad - \frac{2}{T} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx + \sum_{n=1}^N \left[\alpha_n \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_n \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right] \right\} + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\alpha_0^2}{4} dx \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{T} \sum_{n=1}^N \int_{-T/2}^{T/2} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \int_{-T/2}^{T/2} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right]^2 dx \end{aligned} \quad (34.3)$$

برای پیدا کردن α_0 ، α_n و β_n برای کمینه کردن Q_n ، عبارت $\partial Q_N / \partial \alpha_0 = 0$ و $\partial Q_N / \partial \alpha_n = 0$ را انجام داده در نهایت خواهیم داشت

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx \quad (35.3)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad (36.3)$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \quad (37.3)$$

ضرایب در معادله (35.3) تا (37.3) برابر با معادلات (10.3) و (11.3) است. هنگامی که یکتابع تناوبی $f(x)$ با $P_N(x)$ چند جمله‌ای سینوسی مرتبه n این تقریب زده می‌شود، ضرایب بهینه چند جمله‌ای ضرایب سری فوریه است. لازم بهذکراست که ضرایب $\alpha_n(x)$ و $\beta_n(x)$ چند جمله‌ای بهینه بهطور منحصر بهفردي تعیین می‌شوند و بهترتبیب N بستگی ندارند. هنگامی که ترتیب تقریب از N به $N+1$ افزایش می‌یابد، ضرایب قدیمی α_n و β_n هستند. بتوانند همانطور که هستند بکار گرفته می‌شوند. فقط ضرایب جدید α_{n+1} و β_{n+1} باید محاسبه شوند.

۳.۳ چند جمله‌ای متعامد نرمالیزه

ضرایب c_n در سری فوریه مختلط معادله (12.3) با استفاده از معادله (16.3) محاسبه می‌شود، اما می‌توانیم مستقیماً c_n را با خاصیت چند جمله‌ای‌های فوریه محاسبه کنیم.

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(j\frac{2\pi nx}{T}\right) \cdot \exp\left(-j\frac{2\pi mx}{T}\right) dx = \delta_{m,n} \quad (38.3)$$

که در آن $\delta_{n,m}$ دلتای کرونکر^۱ است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (39.3)$$

این بدان معناست که ضرایب فوریه c_n در سری مختلط با ضرب $\exp(j2\pi nx/T)$ در دو طرف معادله (12.3) و انتگرال گیری آن در دوره تناوب $[-T/2, T/2]$ ، بهدست می‌آید. خواص معادله (38.3) ما را قادر می‌سازد تا ضرایب فوریه c_n را در سری مختلط محاسبه کنیم. بسط چند جمله‌ای‌های با n عدد صحیح این ویژگی را دارند. بهاین ویژگی تعامد می‌گویند. چند جمله‌ای $\exp(-j2\pi nx/T)$ در دوره تناوب $[-T/2, T/2]$ متعامد هستند.

^۱Kronecker delta

به طور کلی، توابع $\{f_n(x)\}$ را در نظر گرفته و حاصلضرب داخلی آنها با آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f_n, f_m) = \int_{-T/2}^{T/2} f_n(x) \cdot f_m^*(x) dx \quad (40.3)$$

که در آن نماد $*$ نمایشگر مزدوج مختلط است. هرگاه

$$(f_n, f_m) = \delta_{n,m} \quad (41.3)$$

باشد، توابع f_n و f_m بر یکدیگر متعامدند و مجموعه $\{f_n(x)\}$ را تابع متعامد می‌نامند. نورم (هنجار)^۲ تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} \quad (42.3)$$

و نرمال سازی تابع $f(x)$ با ضرب یک ثابت دلخواه در تابع $f(x)$ انجام می‌شود تا نورم آن واحد شود. چند جمله‌ای‌های نرمالیزه و متعامد را چند جمله‌ای‌های متعامد نرمالیزه می‌گویند. به عنوان مثال، چند جمله‌ای‌های زیر چند جمله‌ای‌های متعامد نرمالیزه هستند.

$$\sqrt{\frac{1}{T}} \exp\left(-j \frac{2\pi n x}{T}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (43.3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (44.3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (45.3)$$

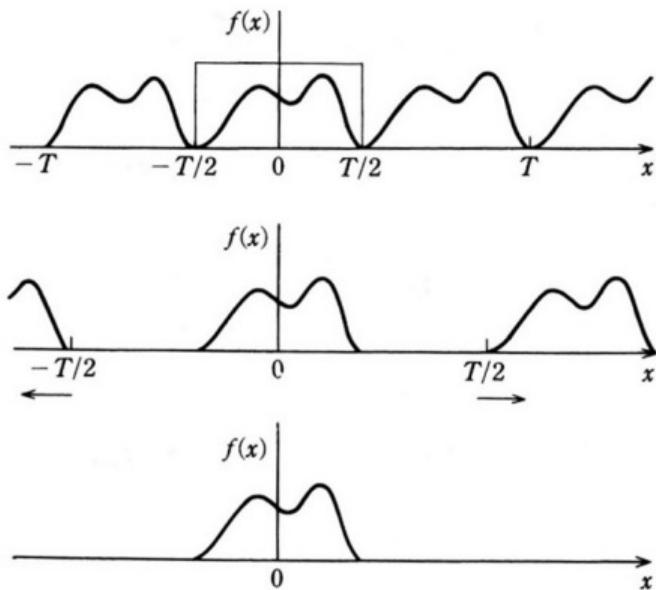
۴.۳ تبدیل فوریه

همانطور که در بخش ۱.۳، یک تابع تناوبی را می‌توان با مجموع توابع سینوزوئیدال یعنی سری فوریه، بسط داد. در مورد تابع غیر تناوبی چطور؟ در واقع، تابع غیر تناوبی را می‌توان بهروشی مشابه بسط داد. این تبدیل فوریه است. این تعمیم آسان است. همانطور که در شکل (۶.۳) نشان داده شده است، باید توجه داشت که یک تابع تناوبی زمانی بیک تابع غیر تناوبی تبدیل می‌شود که دوره T تا بینهایت $\infty \rightarrow T$ افزایش یابد. تابع تناوبی $f(x)$ را در نظر بگیرید که دوره T به صورت یک سری فوریه مختلط بسط داده شده است.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(-j \frac{2\pi n x}{T}\right) \quad (46.3)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp\left(j \frac{2\pi n x}{T}\right) dx \quad (47.3)$$

^۲Norm



شکل ۶.۳: بسط سری فوریه به تبدیل فوریه.

در این صورت c_n بصورت تابعی از n در نظر گرفته می‌شود.

$$F(n) = T c_n \quad (48.3)$$

بنابراین داریم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n)}{T} \exp\left(-j \frac{2\pi n x}{T}\right) \quad (49.3)$$

$$F(n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp\left(j \frac{2\pi n x}{T}\right) dx \quad (50.3)$$

ضرایب فوریه c_n دارای مقادیری گستته در نقاط ν_n با دوره تناوب T است، یعنی

$$\nu = n/T \quad (51.3)$$

سپس، در حالتی که $T \rightarrow \infty$ کند، c_n مقداری حقیقی پیوسته خواهد شد و ازاینرو، میباشد مقدار متغیر حقیقی ν را بجای n بکار ببریم. در این صورت معادله (۵۰.۳) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(j 2\pi \nu x) dx \quad (52.3)$$

و شبیه همین، معادله (۴۹.۳) می‌شود

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(-j 2\pi \nu x) d\nu \quad (53.3)$$

تابع $F(\nu)$ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ و $f(x)$ تبدیل فوریه معکوس $F(\nu)$ نامیده می‌شود. $F(\nu)$ یک زوج تبدیل فوریه نامیده می‌شوند و رابطه آن بصورت زیر توصیف می‌شود

$$f(x) \iff F(\nu) \quad (54.3)$$

تبدیل فوریه به عنوان یک عملگر نگاشت در نظر گرفته می‌شود

$$\mathcal{F}(x) = F(\nu) \quad (55.3)$$

و عکس نگاشت^۱ \mathcal{F}^{-1} است، در این صورت داریم

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = f(x) \quad (56.3)$$

۹

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f(x)] = f(x) \quad (57.3)$$

۵.۳ برخی از بازنمایی‌های تبدیل فوریه

تبدیل فوریه با استفاده از فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2\pi\nu$ تعریف می‌شود:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(j\omega x) dx \quad (58.3)$$

و عکس تبدیل فوریه خواهد بود

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-j\omega x) d\omega \quad (59.3)$$

به همین ترتیب، تعریف زیر با علامت مخالف واحد موهومی نیز امکان پذیر است.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx \quad (60.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega x) d\omega \quad (61.3)$$

در ریاضیات، زوج تبدیل فوریه بصورت زیر تعریف می‌شود

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(j\omega x) dx \quad (62.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-j\omega x) d\omega \quad (63.3)$$

همه تعاریف به یک اندازه معتبر هستند. نویسنده‌گان مختلف با توجه به حوزه مورد مطالعه از تعاریف متفاوتی استفاده می‌کنند. این می‌تواند گیج کننده باشد. بنابراین تعریف استفاده شده را در نظر داشته باشید.

۶.۳ خواص تبدیل فوریه

خواص کلی تبدیل فوریه را در نظر بگیرید.

۱. خطی بودن:

تبدیل فوریه یک تبدیل خطی است و از اینرو، اصل برهمنهی (جمع اثرها) صادق است.

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] = a_1 \mathcal{F}[f_1(x)] + a_2 \mathcal{F}[f_2(x)] \quad (64.3)$$

که در آن a_1 و a_2 مقادیر ثابتی هستند.

۲. تقارن: (زوج و فرد)

ویژگی‌های تقارن نقش مهمی در تبدیل فوریه ایفا می‌کنند. به عنوان مثال، یک تابع حقیقی را در نظر بگیرید. از معادلات (۲۶.۲) و (۲۷.۲)، می‌توانیم تابع $f(x)$ را به یک تابع فرد $f_o(x)$ و یک تابع زوج $f_e(x)$ تجزیه کنیم.

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_e(x) + f_o(x)] \exp(j2\pi\nu x) dx \\ &= 2 \left[\int_0^{\infty} f_e(x) \cos(2\pi\nu x) dx + j \int_0^{\infty} f_o(x) \sin(2\pi\nu x) dx \right] \quad (65.3) \\ &= F_e(\nu) + F_o(\nu) \end{aligned}$$

که در آن

$$F_e(\nu) = 2 \int_0^{\infty} f_e(x) \cos(2\pi\nu x) dx \quad (66.3)$$

$$F_o(\nu) = 2 \int_0^{\infty} f_o(x) \sin(2\pi\nu x) dx \quad (67.3)$$

معادلات (۶۶.۳) و (۶۷.۳) با ضرایب a_n و b_n سری فوریه مطابقت دارند و به ترتیب تبدیل کسینوس فوریه و تبدیل سینوس فوریه نامیده می‌شوند. این بدان معناست که تبدیل فوریه یک تابع زوج حقیقی یک تابع حقیقی است و با تبدیل کسینوس فوریه به دست می‌آید و تبدیل فوریه یک تابع فرد حقیقی، موهومی است و با تبدیل سینوس فوریه به دست می‌آید. همانطور که ضرایب c_n در سری فوریه طیف نامیده می‌شود، $F(\nu)$ نیز طیف و ν فرکانس نامیده می‌شود. باید توجه داشت که ν یک عدد صحیح گستته نیست بلکه یک عدد حقیقی پیوسته است زیرا $f(x)$ یک تابع غیر تناوبی است. جدول (۲.۳) ویژگی‌های تقارن تبدیل فوریه را نشان می‌دهد، جایی که هرمیشن به معنای زوج است و قسمت موهومی آن فرد است و ضد هرمیشن به معنای فرد و قسمت موهومی آن زوج است.

جدول ۲.۳: خواص تقارن تبدیل فوريه

$F(\nu)$	$f(x)$
مختلط و غیرمتقارن	مختلط و متقارن
حقيقي و نامتقارن	هرميشن
موهومي و نامتقارن	ضد هرميشن
مختلط و زوج	مختلط و زوج
مختلط و فرد	مختلط و فرد
هرميشن	حقيقي و نامتقارن
حقيقي و زوج	حقيقي و زوج
موهومي و فرد	حقيقي و فرد
ضد هرميشن	موهومي و نامتقارن
موهومي و زوج	موهومي و زوج
حقيقي و فرد	موهومي و فرد

۳. شبهات:

فرض کنید $f(x)$ و $F(\nu)$ یک زوج تبدیل فوريه باشد، بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \left[f \left(\frac{x}{a} \right) \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} [f \left(\frac{x}{a} \right) \exp(j2\pi\nu x)] dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) \exp(j2\pi\nu ax)] dx \\ &= |a|F(a\nu)\end{aligned}\quad (68.3)$$

که در آن a یک عدد حقيقي غیر صفر است. این بدان معناست که سیگنالی با گستره باریکتر دارای طیف وسیع تری است و عکس آن نیز درست است، همانطور که در شکل (۷.۱۳) نشان داده شده است.

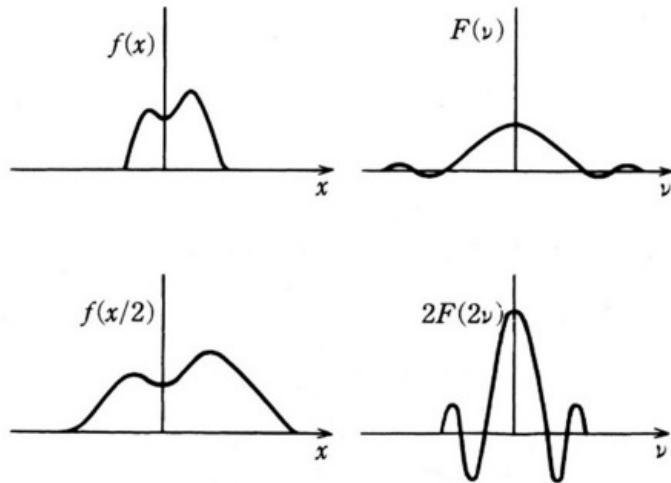
۴. قضیه انتقال:

سیگنال $f(x)$ که باندازه a انتقال یافته است را در نظر گیرید.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} [f(x-a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) \exp(j2\pi\nu x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[j2\pi\nu(x-a)] dx \\ &= \exp(j2\pi a\nu) F(\nu)\end{aligned}\quad (69.3)$$

فرض کنید سیگنال حقيقي است، بنابراین داریم

$$\begin{aligned}F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(j2\pi\nu x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx + j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) dx\end{aligned}\quad (70.3)$$



شکل ۷.۳: قضیه شباهت تبدیل فوریه

در نتیجه

$$Re[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx \quad (71.3)$$

$$Im[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) dx \quad (72.3)$$

جدول (۳.۳) خواص تبدیل فوریه را نشان می‌دهد

جدول ۳.۳: خواص تبدیل فوریه

$f(\pm x)$	$F(\pm\nu)$
$f^*(\pm x)$	$F^*(\pm\nu)$
$F(\pm x)$	$f(\mp\nu)$
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\nu}{a}\right)$
$f(x \pm a)$	$F(\nu) \exp(\pm 2\pi a\nu)$
$f(x) \cos(2\pi ax)$	$\frac{1}{2} [F(\nu + a) + F(\nu - a)]$
$f(x) \sin(2\pi ax)$	$\frac{1}{2j} [F(\nu + a) - F(\nu - a)]$
$\frac{d^n f}{dx^n}$	$(-j 2\pi\nu)^n F(\nu)$
$(j 2\pi x)^n f(x)$	$\frac{d^n F(\nu)}{d\nu^n}$

۷.۳ تابع دلتا

برای در نظر گرفتن کاربردهای تبدیل فوریه، تابع مربوط به یک ضربه را معرفی می‌کنیم. بسیاری از انواع توابع ضربه‌ای را می‌توان مورد بحث قرار داد. به عنوان مثال، یک تابع گوسی که مقدار انتگرال آن یک است و عرض آن بینهایت کوچک، در نظر می‌گیریم:

$$\delta(x) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{w} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{w^2}\right) \quad (73.3)$$

این "تابع" را تابع تعمیم یافته یا تابع توزیع نامیده می‌شود که تعریف دقیق تابع نیست. این $\delta(x)$ به عنوان نوعی تابع تفسیر می‌شود که با کاهش عرض آن در $x = 0$ به بینهایت نزدیک می‌شود، اما مقدار انتگرال آن واحد است. این یک تابع بسیار مفید برای توصیف یک منبع نور نقطه‌ای، یک جسم نقطه‌ای و یک تصویر نقطه‌ای در این کتاب است و تابع δ دیراک^۳ نامیده می‌شود.

تابع پله هویساید^۴ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x \leq 0 \end{cases} \quad (74.3)$$

این تابع در $x = 0$ قابل تمایز است اما دیفرانسیل رسمی آن دارای خاصیت تابع دلتا $\delta(x)$ است، بنابراین داریم

$$H'(x) = \delta(x) \quad (75.3)$$

برای یک تابع ریاضی با رفتار خوب $f(x)$ ، انتگرال‌گیری آن جزء به جزء داده می‌شود

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H'(x)dx \\ &= [f(x)H(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)H(x)dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = -[f(x)]_{-\infty}^{\infty} = f(0) \end{aligned} \quad (76.3)$$

این بدان معنی است که تابع دلتا $\delta(x)$ دارای خاصیت زیر است

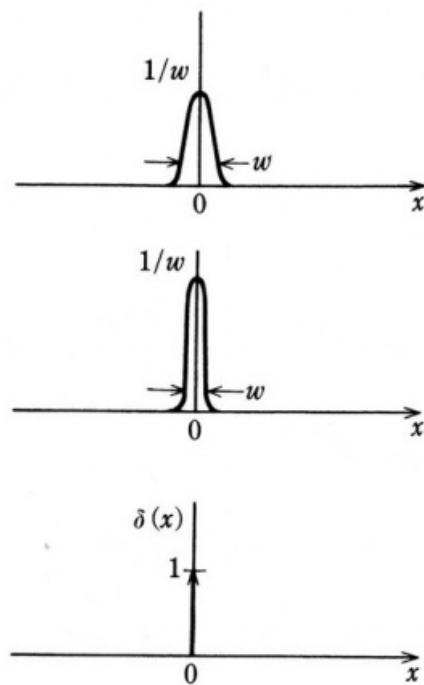
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (77.3)$$

بر عکس، تابع دلتا $\delta(x)$ را می‌توان با معادله (۷۷.۳) تعریف کرد. تابع دلتا $\delta(x)$ یک تابع غیر تناوبی است اما آرایه‌ای از تابع دلتا با دوره تناوب T بصورت زیر داده شده است:

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) \quad (78.3)$$

^۳Dirac

^۴Heaviside step function



شکل ۸.۳: $\delta(x)$ مفهوم تابع

که آن یک تابع متناوب است. این بدین معنی است که سری فوريه آنرا می‌توان بدست آورد. ضرایب سری فوريه آن عبارتند از

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(x) dx = \frac{2}{T} \quad (79.3)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = \frac{2}{T} \quad (80.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx = 0 \quad (81.3)$$

سرانجام، سری فوريه تابع $\delta_T(x)$ خواهد بود

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \quad (82.3)$$

از آنجایی که ضرایب فوريه آن $\frac{2}{T}$ مستقل از n است، این سری فوريه همگرا نمی‌شود. به طور مشابه، تابع دلتا به طور رسمی با $\delta(x)$ توصیف می‌شود، که در $x = 0^\circ$ واگرا است، این سری فوريه به طور رسمی به صورت $\delta_T(x)$ نوشته می‌شود. تبدیل فوريه تابع دلتا $\delta(x)$

جدول ۴.۳: تبدیل فوریه برخی تابع که شامل $\delta(x)$ هستند

$f(\pm x)$	$F(\pm \nu)$
$\delta(x)$	۱
$\delta(x \pm a)$	$\exp(\mp j 2\pi a\nu)$
$\cos(2\pi ax)$	$\frac{1}{2} [\delta(\nu + a) + \delta(\nu - a)]$
$\sin(2\pi ax)$	$\frac{1}{2j} [\delta(\nu + a) - \delta(\nu - a)]$

را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp(j 2\pi \nu x) dx = \exp(0) = 1. \quad (83.3)$$

این بدان معنی است که تبدیل فوریه تابع دلتا یکسان است. با استفاده از این ویژگی، تبدیل فوریه $\exp(-j 2\pi ax)$ را داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\exp(-j 2\pi ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j 2\pi ax) \cdot \exp(j 2\pi \nu x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp[j 2\pi x(\nu - a)] dx \\ &= \delta(\nu - a) \end{aligned} \quad (84.3)$$

شبیه همین داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(2\pi ax)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} \exp(-j 2\pi ax) + \frac{1}{2} \exp(j 2\pi ax)\right] \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\nu - a) + \delta(\nu + a)] \end{aligned} \quad (85.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin(2\pi ax)] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j} \exp(j 2\pi ax) - \frac{1}{2j} \exp(-j 2\pi ax)\right] \\ &= j \frac{1}{2} [\delta(\nu - a) - \delta(\nu + a)] \end{aligned} \quad (86.3)$$

زوج تبدیل فوریه مربوط به تابع دلتا در جدول (۴.۳) نشان داده شده است.

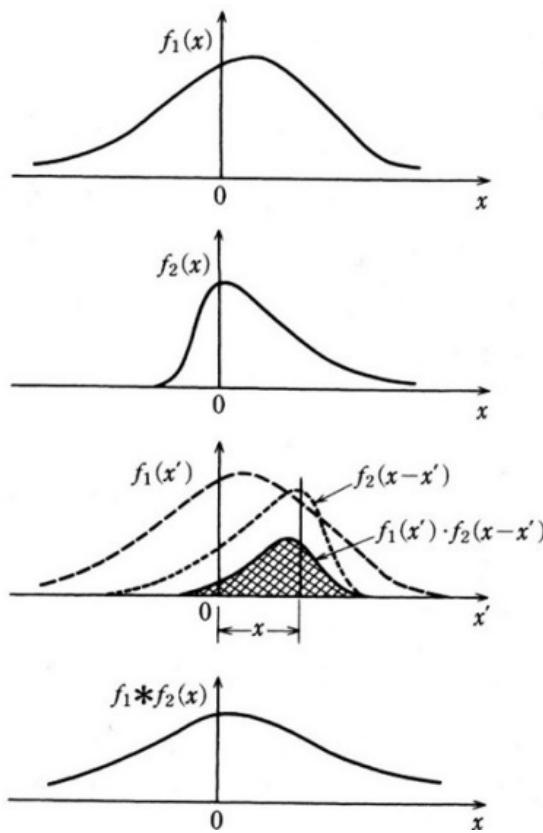
۸.۳ انتگرال کانولوشن و تابع همبستگی

کانولوشن و همبستگی^۵ مفاهیم بسیار مهمی در برخی از زمینه‌های علمی و مهندسی، مانند پاسخ سیستم‌های خطی در فصل چهارم، هستند. دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را در نظر بگیرید، بقسمی که:

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' \quad (87.3)$$

^۵Correlation Function

بهاین انتگرال کانولوشن یا پیچیدگی می‌گویند. کانولوشن ناحیه همپوشانی توابع $f_1(x')$



شکل ۹.۳: انتگرال کانولوشن

و $f_2(x - x')$ با پارامتر جابجایی x' است. لازم بهذکر است که تابع $f_2(x - x')$ تابعی است که از راست به چپ برگردانده شده و x را انقلاب می‌دهد. عملیات کانولوشن در شکل ۹.۳ نشان داده شده است.

تبديل فوريه کانولوشن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را در نظر بگيريد که تبدل فوريه آنها به ترتيب $F_1(\nu)$ و $F_2(\nu)$ است.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1 * f_2] &= \iint_{-\infty}^{\infty} [f_1(x') f_2(x - x') dx' \cdot \exp(j2\pi\nu x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - x') \exp(j2\pi\nu x) dx' \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') \exp(j2\pi\nu x') dx' \\ &= F_1(\nu) F_2(\nu) \end{aligned} \quad (88.3)$$

تبديل فوريه یک انتگرال کانولوشن حاصلضرب تبدل فوريه هر تابع را می‌دهد. برعكس،

تبديل فوريه حاصلضرب دو تابع، انتگرال کانولوشن دو تابع را مي‌دهد، يعني

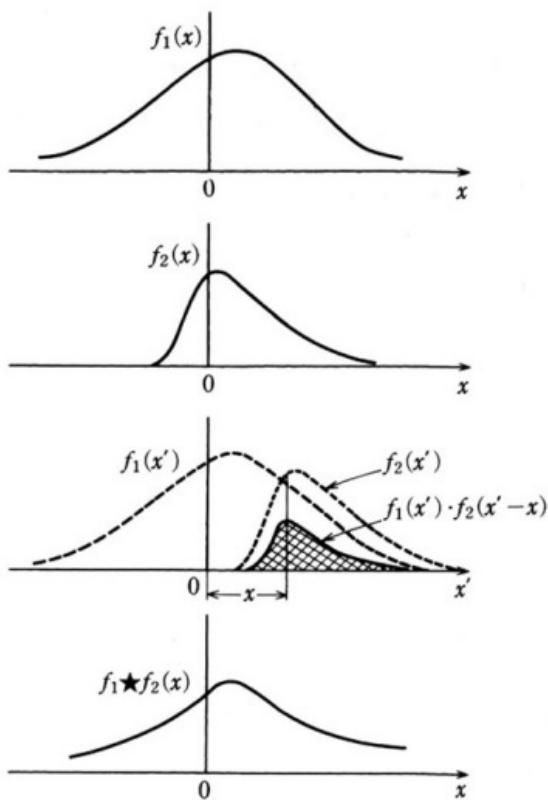
$$f_1(x) * f_2(x) \Leftrightarrow F_1(\nu)F_2(\nu) \quad (89.3)$$

اين را قضيه کانولوشن ميگويند.

بعارت دیگر، تابع همبستگی دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بصورت زير تعریف می‌شود

$$f_1(x) \star f_2^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2^*(x' - x) dx' \quad (90.3)$$

كه در آن $f^*(x)$ مزدوج مختلط تابع $f(x)$ است. بطوری که در شکل (10.3) نشان داده



شکل ۱۰.۳: تابع همبستگی $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x' - x) dx'$ در حالتی است که دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ حقیقی هستند.

شده است، در همبستگی، يکی از توابع از راست به چپ برگردانده نشده است، اما از مزدوج مختلط آن، متفاوت با کانولوشن استفاده می‌شود.
تبديل فوريه تابع همبستگی خواهد بود

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(x) * f_2^*(x)] &= \iint_{-\infty}^{\infty} [f_1(x') f_2^*(x' - x) dx' \cdot \exp(j2\pi\nu x)] dx \\ &= F_1(\nu)F_2^*(\nu) \end{aligned} \quad (91.3)$$

بنابراین داریم

$$f_1(x) * f_2^*(x) \Leftrightarrow F_1(\nu) \cdot F_2^*(\nu) \quad (92.3)$$

این را همبستگی می‌نامند.

به طور کلی، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متفاوت هستند و بنابراین تابع همبستگی را تابع همبستگی متقاطع^۶ می‌نامند، اما در صورت یکسان بودن دو تابع، به آن تابع خودبستگی^۷ می‌گویند. بدیهی است که از معادله (۹۱.۳) داریم:

$$f(x) * f^*(x) \Leftrightarrow |F(\nu)|^2 \quad (93.3)$$

که مربع قدرمطلق تبدیل فوريه آن را بهما می‌دهد. با بازنويسي معادله (۹۳.۳)، داریم

$$\iint_{-\infty}^{\infty} [f(x') f^*(x' - x)] dx' = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 \exp(-j2\pi\nu x) d\nu \quad (94.3)$$

اکنون با در نظر گرفتن $x = \circ$ در معادله (۹۴.۳) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \quad (95.3)$$

به این قضیه پارسوال^۸ می‌گویند. قیاس با بحث معادله (۴۳.۱)، اگر $f(x)$ دامنه امواج باشد، $|f(x)|^2$ انرژی موج را می‌دهد. بنابراین، $|F(\nu)|^2$ مربوط به انرژی طیف فوريه است، یعنی انرژی طیفی که به آن طیف توان یا طیف انرژی می‌گویند. یعنی قضیه پارسوال به این معنی است که انرژی در فضای حقیقی برابر با انرژی در فضای طیف است. قانون بقاء انرژی بین فضای وحقیقی و فضای طیف معتبر است.

۹.۳ برخی توابع و تبدیل فوريه آنها

در این بخش، برخی از توابع مورد استفاده در بحث های آینده تعریف شده و تبدیل فوريه آنها توضیح داده شده است.

۱. تابع مستطیلی:

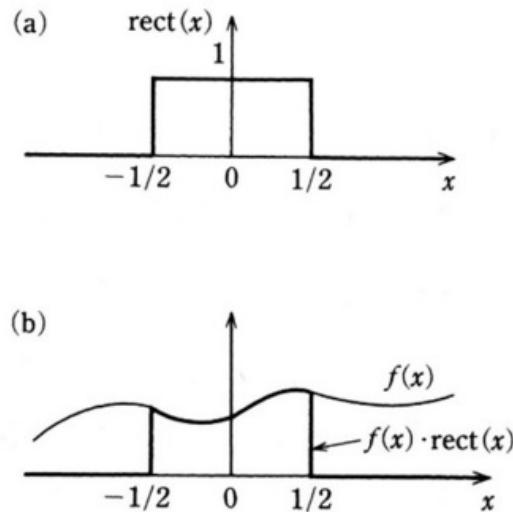
$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1: & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0: & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (96.3)$$

این تابع یک شکل مستطیلی دارد، که در شکل (۱۱.۳)(الف) نشان داده شده است. این تابع مستطیلی $\text{rect}(x)$ دارای عملیاتی است که جدای از $-1/2$ تا $1/2$ را در امتداد محور x از تابع $f(x)$ استخراج می‌کند. یعنی $f(x) \cdot \text{rect}(x)$ محدوده $f(x)$ را از $f(-1/2)$ تا $f(1/2)$ می‌دهد، که در شکل (۱۱.۳)(ب) نشان داده شده است. تابعی

⁶Cross-correlation Function

⁷Autocorrelation Function

⁸Parseval theorem



شکل ۱۱.۳: (الف) تابع مستطیلی $\text{rect}(x)$ و (ب) کار آن بصورت تابع پنجره.

با این ویژگی تابع پنجره یا تابع دروازه نامیده می‌شود. چنین تابعی برای توصیف گاهی اوقات یک عملیات شکاف و مکان یک شی در تجزیه و تحلیل سیستم نوری استفاده می‌شود.

۲. تابع سینک:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (97.3)$$

۳. تابع مثلثی:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| : & |x| \leq 1 \\ 0 : & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (98.3)$$

۴. تابع شانه:

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad (99.3)$$

۵. تابع علامت:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 : & x > 0 \\ 0 : & x = 0 \\ -1 : & x < 0 \end{cases} \quad (100.3)$$

۶. تابع دايره‌اي:

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 : & r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0 : & \text{در غير اين صورت} \end{cases} \quad (10.1.3)$$

۷. تابع گوس:

$$\text{gauss}(r) = \exp(-\pi r^2) \quad (10.2.3)$$

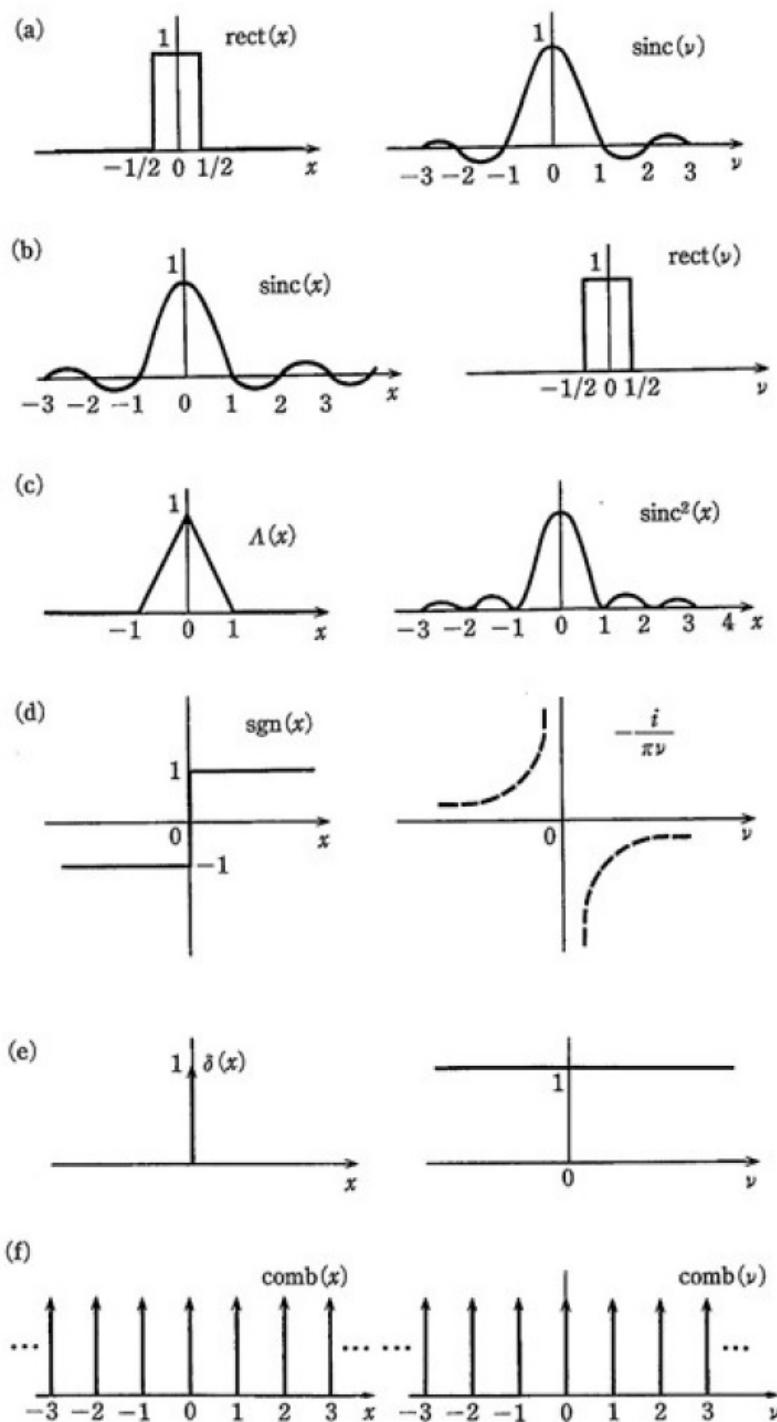
جدول ۵.۳: تبديل فوريه برخی توابع (۱)

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(-j2\pi\nu x) d\nu$	$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(j2\pi\nu x) dx$
۱	$\delta(\nu)$
$\delta(x)$	۱
$\text{gauss}(x) = \exp(-\pi x^2)$	$\text{gauss}(\nu) = \exp(-\pi\nu^2)$
$\cos(2\pi\nu_0 x)$	$\frac{1}{2} [\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)]$
$\sin(2\pi\nu_0 x)$	$\frac{j}{\pi} [\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)]$
$\text{rect}(x)$	$\text{sinc}(\nu)$
$\Lambda(x)$	$\text{sinc}^2(\nu)$
$\exp(- x)$	$\frac{1}{1+(2\pi\nu)^2}$
$J_0(2\pi x)$	$\frac{\text{rect}(\nu/2)}{\pi(1-\nu^2)^{1/2}}$
$\frac{J_1(2\pi x)}{2x}$	$(1-\nu^2)^{1/2} \text{rect}(\nu/2)$
$\text{sgn}(x)$	$\frac{j}{\nu\nu}$
$H(x)$	$\frac{1}{\pi} \delta(\nu) + j \frac{1}{\pi}$
$\exp(-j\pi x^2)$	$\exp[-j(\frac{\pi}{4})] \exp(j\pi\nu^2)$
$\text{comb}(ax)$	$\frac{1}{ a } \text{comb}(\frac{\nu}{a})$
x^k	$(\frac{-j}{\pi})^k \delta^{(k)}(\nu)$
$\text{sech}(\pi x)$	$\text{sech}(\pi\nu)$
$\frac{1}{\sqrt{ x }}$	$\frac{1}{\sqrt{ \nu }}$

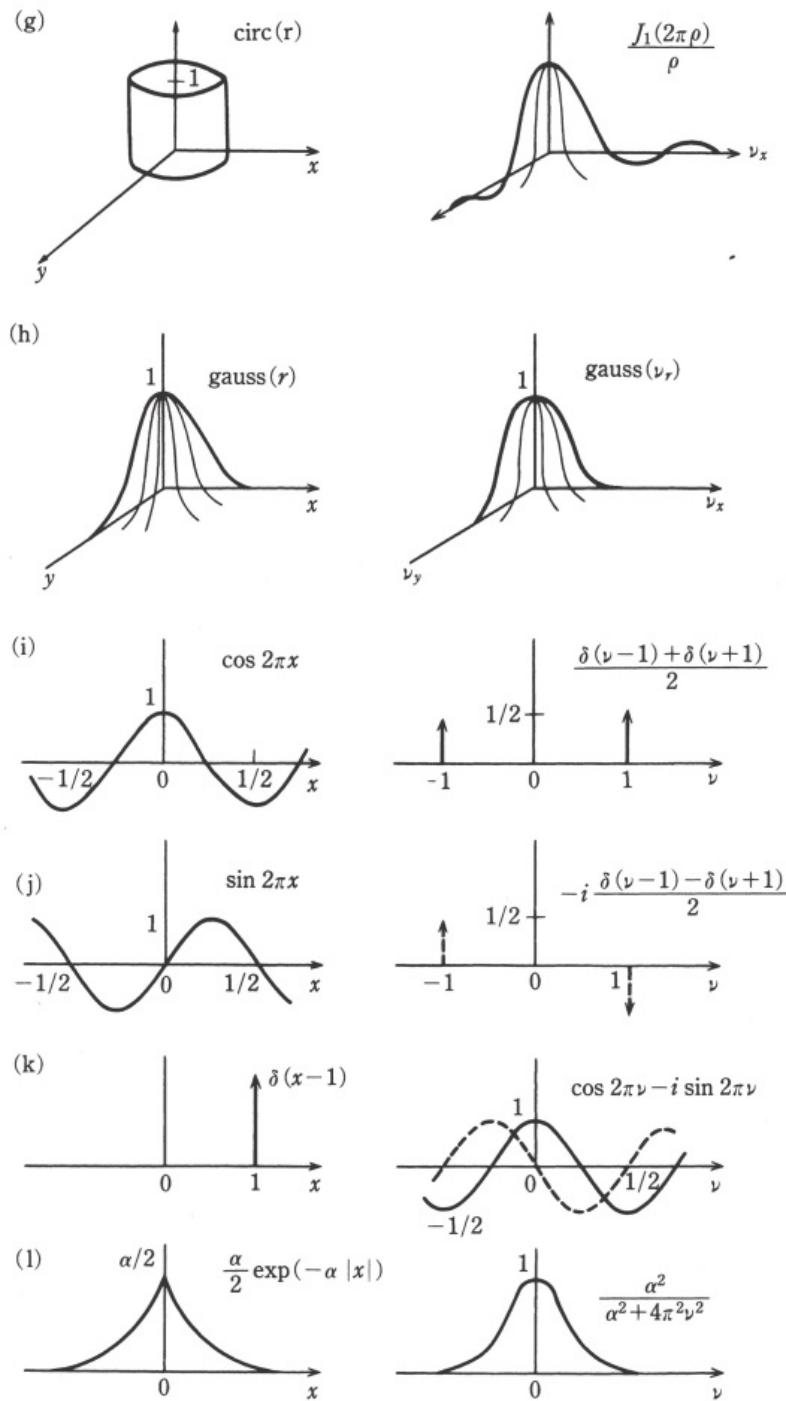
اشکال و تبديل فوريه آنها در شكل (۱۲.۳) و (۱۳.۳) و جداول (۵.۳) و (۶.۳) نشان داده شده است.

۱۰.۳ قضيه نمونه‌برداری

تا به حال، تبديل فوريه يک تابع پيوسته x را مورد بحث قرار داده‌ایم، اما در مورد يک آرایه گسسته از داده‌ها برای نمونه‌برداری متناسب از نقاط گسسته يک تابع پيوسته، باید



شکل ۱۲.۳: نمونه‌هایی از توابع و تبدیل فوریه آنها (۱)



شکل ۱۳.۳: نمونه‌هایی از توابع و تبدیل فوریه آنها (۲)

جدول ۶.۳: تبدیل فوریه برخی توابع (۲)

$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) \exp[-j\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y$	$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[j\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy$
۱	$\delta(\nu_x, \nu_y)$
$\delta(x, y)$	۱
$\text{rect}(x) \text{rect}(y)$	$\text{sinc}(\nu_x) \text{sinc}(\nu_y)$
$\Lambda(x)\Lambda(y)$	$\text{sinc}^\star(\nu_x) \text{sinc}^\star(\nu_y)$
$\text{gauss}(r) = \exp(-\pi r^2)$	$\text{gauss}(\rho) = \exp(-\pi \rho^2)$
$\text{circ}(r)$	$\frac{J_1(\pi \rho)}{\rho}$
$\delta(r - a)$	$2\pi a J_0(2\pi a \rho)$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{\rho}$
$\exp(-j\pi r^2)$	$-j \exp(j\pi \rho^2)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\rho = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$ که در آن

تبدیل فوریه عددی را توسط یک کامپیووتر ارزیابی کنیم. انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (10.3.3)$$

برای توصیف نمونه‌برداری از تابع پیوسته $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ بسیار مفید است. همانطور که در شکل (۱۴.۳) نشان داده شده است، در نمونه‌برداری از N نقطه در $x = nT$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) با دوره تناوب نمونه‌برداری T ، آرایه داده را نمونه‌برداری کردہ‌ایم.

$$f_s(x) = f(x) \cdot \text{comb}\left(\frac{x}{T}\right) \quad (10.4.3)$$

لازم به ذکر است که

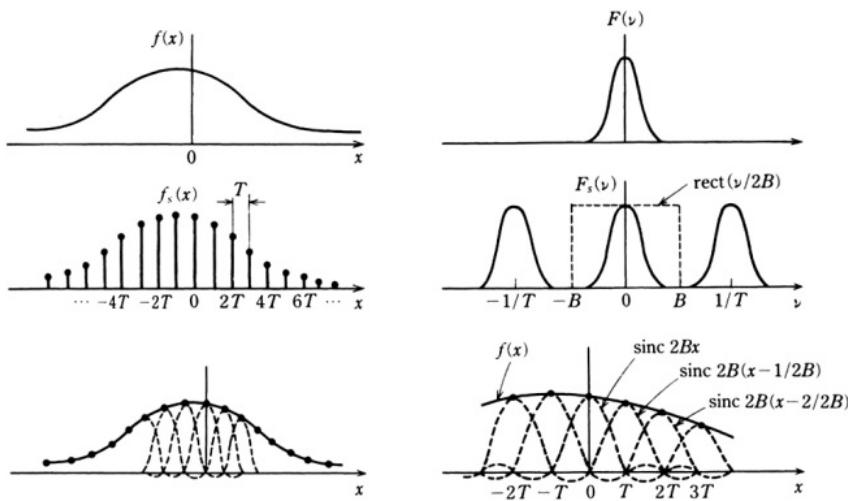
$$\text{comb}\left(\frac{x}{T}\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT). \quad (10.5.3)$$

از شکل (۱۲.۳)(و)، داریم

$$\mathcal{F}[\text{comb}(x)] = \text{comb}(\nu) \quad (10.6.3)$$

و در نتیجه

$$\mathcal{F}\left[\text{comb}\left(\frac{x}{T}\right)\right] = T \text{comb}(T\nu) \quad (10.7.3)$$



شکل ۱۴.۳: قضیه نمونهبرداری

با استفاده از قانون تشابه در تبدیل فوریه که توسط معادله (۶۸.۳) داده شده است. با تبدیل فوریه دو طرف معادله (۱۰۴.۳)، داریم

$$F_s(\nu) = F(\nu) * \mathcal{F} \left[\text{comb} \left(\frac{x}{T} \right) \right] \quad (108.3)$$

معادله (۱۰۸.۳) را بازنویسی می‌کنیم؛

$$F_s(\nu) = F(\nu) * T \text{comb}(T\nu) \quad (109.3)$$

چون

$$T \text{comb}(T\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\nu - \frac{n}{T} \right) \quad (110.3)$$

در نهایت طیف فوریه نمونه برداری شده معادله (۱۰۹.۳) را داریم.

$$F_s(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F \left(\nu - \frac{n}{T} \right) \quad (111.3)$$

شکل (۱۴.۳) فرآیند نمونه برداری و یک تابع نمونه برداری شده $f_s(x)$ و تبدیل فوریه آن $F_s(\nu)$ را نشان می‌دهد. معادله (۱۱۱.۳) به این معنی است که طیف فوریه $F_s(\nu)$ نمونه آرایه‌ای از طیف $F(\nu)$ تابع پیوسته $f(x)$ با دوره تناوب $1/T$ است.

برای بازیابی تابع پیوسته اصلی $f(x)$ از تابع نمونه برداری شده $f_s(x)$ ، باید $F(\nu)$ را از یک تابع تناوبی $F_s(\nu)$ در حوزه فوریه خارج کنیم. برای انجام این کار، لازم است که هر جزء طیف در $F_s(\nu)$ با تفکیک کافی قرار گیرد. اگر اجزای طیف با هم همپوشانی داشته

باشدند، طیف اصلی $F(\nu)$ به درستی بازیابی نمی‌شود. عرض طیف $F(\nu)$ را در نظر بگیرید که پهنانی باند نامیده می‌شود $2B$ است. شرط عدم همپوشانی توسط

$$\frac{1}{T} \geq 2B \quad (112.3)$$

زیرا دوره طیف $F_s(\nu)$ بازه طیف محدود را سیگنال باند محدود می‌نامند.

برای پیدا کردن $F(\nu)$ از $F_s(\nu)$ ، ازتابع پنجره $\text{rect}(\nu/2B)$ با عرض $2B$ استفاده می‌کنیم. تابع اولیه بصورت زیر استخراج می‌شود

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left[F_s(\nu) \text{rect} \left(\frac{\nu}{2B} \right) \right] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [F_s(\nu)] * \mathcal{F}^{-1} \left[\text{rect} \left(\frac{\nu}{2B} \right) \right] \end{aligned} \quad (113.3)$$

از رابطه (104.3) داریم

$$\mathcal{F}^{-1} [F_s(\nu)] = f_s(x) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(x - nT) \quad (114.3)$$

و از جدول (5.3)، تبدیل فوریه تابع مستطیلی برابر است با

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\text{rect} \left(\frac{\nu}{2B} \right) \right] = 2B \text{sinc}(2Bx) \quad (115.3)$$

سرانجام، معادله (113.3) بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$f(x) = (2BT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \text{sinc}[2B(x - nT)] \quad (116.3)$$

با استفاده از تناوب نمونه‌برداری بحرانی $T = 1/2B$ ، تابع اولیه با باند محدود $f(x)$ بدست می‌آید:

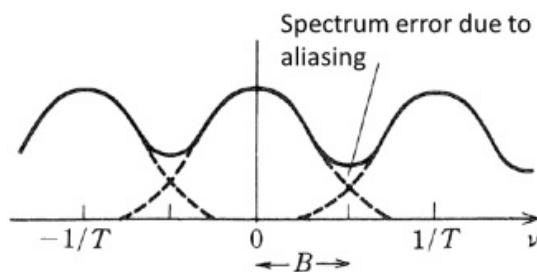
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f \left(\frac{n}{2B} \right) \text{sinc} \left[2B \left(x - \frac{n}{2B} \right) \right] \quad (117.3)$$

این بدان معنی است که یک تابع پیوسته $f(x)$ را می‌توان تنها با استفاده از آرایه داده‌های نمونه‌برداری $f(n/2B)$ بازیابی کرد. به این قضیه نمونه‌برداری می‌گویند. لازم به ذکر است که قضیه نمونه‌برداری وقتی معتبر است که تابع اصلی باند محدود باشد (پهنانی باند $2B$) و دوره نمونه‌برداری کمتر از $1/2B$ باشد.

در حالتی که $T \geq 1/2B$ ، باندهای طیف با هم همپوشانی دارند و اجزای بالاتر طیف همانطور که در شکل (10.3) نشان داده شده است تا می‌شوند و سپس خطاهایی در طیف ایجاد می‌شود. به این نوع خطاهای همچوئی^۹ می‌گویند.

برای جلوگیری از خطاهای همچوئی، فیلتر پایین گذر سیگنال قبل از نمونه‌برداری ضروری است.

^۹ Aliasing Error



شکل ۱۵.۳: خطای همخوانی

پرسش‌ها

۱. سری فوریه تابع زیر را در بازه $[-1/2, 1/2]$ بدست آورید.

$$f(x) = \cos(\pi x)$$

۲. سری فوریه تابع زیر را در بازه $[-1/2, 1/2]$ تعیین کنید.

$$f(x) = x^{\gamma}$$

۳. تبدیل‌های فوریه توابع زیر را بدست آورید:

• الف

$$f(x) = \exp(-j2\pi\alpha x^{\gamma})$$

• ب

$$f(x) = \exp(-2\pi\alpha|x|) \quad (\alpha > 0)$$

• ج

$$f(x) = \exp(-\alpha|x|) \cos(2\pi\nu_0 x)$$

۴. نمودارهای توابع کانولوشن و همبستگی توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ مصور در شکل (۱۶.۳) را رسم کنید.

۵. انتگرال کانولوشن

$$\exp(-\alpha x^{\gamma}) * \exp(-\beta x^{\gamma}) \quad (\alpha, \beta > 0)$$

را با و بدون تبدیل فوریه تعیین کنید.

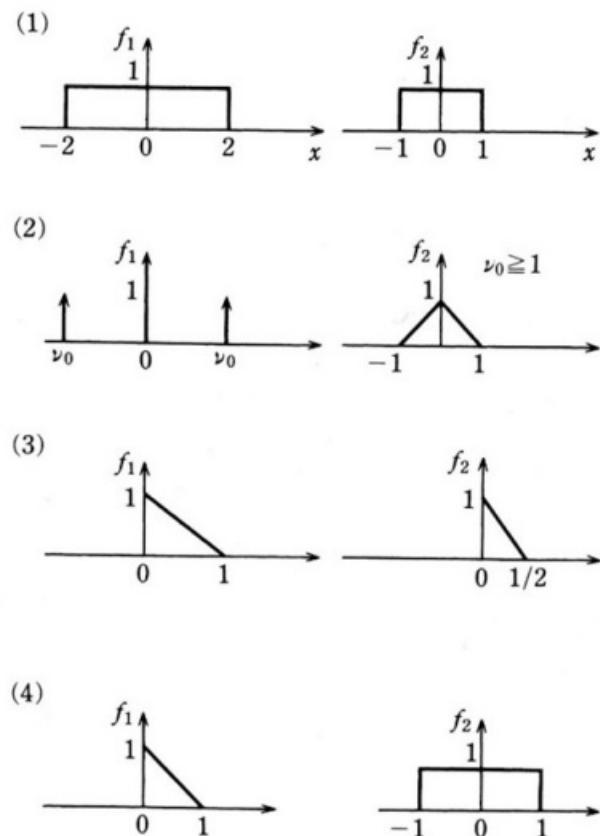
۶. روابط زیر را اثبات کنید

• الف

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

• ب

$$\mathcal{F}[\text{comb}(x)] = \text{comb}(\nu_x)$$



شکل ۱۶.۳: توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ برای مسئله چهارم.

ج •

$$\text{comb}(ax) = \frac{1}{|a|} \sum \delta(x - n/a)$$

۷. قضیه پارسوال را برای روابط زیر بدست آورید.

الف •

$$f(x) = \exp(-|x|)$$

ب •

$$f(x) = \text{rect}(x)$$

مراجع:

Papoulis, A. 1968. *Systems and Transforms with Applications in Optics*. McGraw-Hill, New York.

Bracewell, R. N. 1986. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, New York.

فصل ۴

سیستم‌های خطی

در بسیاری از موارد، هنگامی که سیستم‌های علمی و مهندسی و همچنین سیستم‌های نوری را تجزیه و تحلیل می‌کنیم، از روشنی استفاده می‌کنیم که در آن ویژگی‌های یک سیستم از طریق رابطه بین ورودی و خروجی آن تخمین زده یا ارزیابی می‌شود. این رویکرد ما را قادر می‌سازد تا خصوصیات کلی سیستم را بدون آگاهی از ساختار درونی و خواص فیزیکی سیستم تجزیه و تحلیل کنیم. این روش در بسیاری از موارد زمانی که ویژگی‌های کلی سیستم را تعیین می‌کنیم یا ویژگی‌های سیستم را با مقایسه با سایر سیستم‌ها درک می‌کنیم، ساده‌اما بسیار ارزشمند به‌نظر می‌رسد.

در این فصل، سیستم خطی و مستقل از انتقال به‌طور عمده مورد بحث قرار گرفته و مفاهیم اساسی ریاضی و رفتارهای ریاضی آن شرح داده شده است.

۱.۴ سیستم و اپراتور

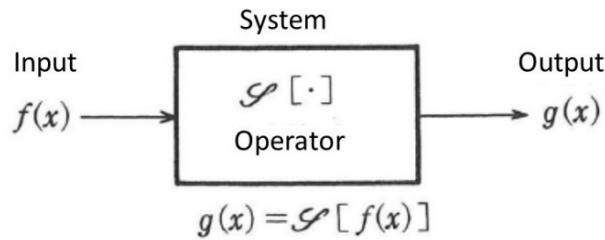
هنگامی که یک پدیده پیچیده را تحت شرایط خاص تجزیه و تحلیل می‌کنیم، می‌توانیم از رویکردی استفاده کنیم تا ویژگی‌های کلی پدیده را فقط از روی رویدادی که باعث پدیده می‌شود و رویدادی که از آن پدیده حاصل می‌شود، پیدا کنیم. یک سیستم دلخواه با ورودی $f(x)$ و خروجی $g(x)$ را در نظر بگیرید، همانطور که در شکل (۱.۴) نشان داده شده است. این سیستم را به‌این صورت توصیف می‌کنیم

$$\mathcal{S}[f(x)] = g(x) \quad (1.4)$$

این بدان معناست که تابع $f(x)$ توسط \mathcal{S} به تابع $g(x)$ تبدیل یا نگاشت می‌شود که به آن عملگر (اپراتور)^۱ و \mathcal{S} اغلب سیستم (سامانه)^۲ نامیده می‌شود.

^۱Operator

^۲System



شکل ۱.۴: سیستم خطی

مفهوم اپراتور بسیار کلی است. به عنوان مثال، معادله موج معادله (۹.۱)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۲.۴)$$

بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۳.۴)$$

که با استفاده از اپراتور لاپلاسین نوشته شده است

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۴.۴)$$

این بدان معنی است که معادله موج یک سیستم است که $u(x, y, z)$ را به $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ توسط عملگر لاپلاسین نگاشت می‌کند.

به عنوان مثالی دیگر، عملگر تبدیل فوریه \mathcal{F} در معادله (۵۵.۳) معرفی شده است. عملگر تبدیل فوریه یک تابع $f(x)$ را در فضای حقیقی به تابع $F(\nu)$ در فضای فوریه یا فضای فرکانس نگاشت می‌کند.

۲.۴ سیستم خطی و سیستم مستقل از انتقال

۱.۲.۴ سیستم خطی

سیستمی را در نظر بگیرید که توسط اپراتور \mathcal{L} دو ورودی $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و بترتیب خروجی‌های آنها $g_1(x)$ و $g_2(x)$ توصیف شده است.

$$\mathcal{L}[f_1(x)] = g_1(x) \quad (۵.۴)$$

$$\mathcal{L}[f_2(x)] = g_2(x) \quad (۶.۴)$$

سیستم را وقتی خطی گویند که از شرط خطی بودن زیر پیروی کند:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] \\ = \mathcal{L}[a_1 f_1(x)] + \mathcal{L}[a_2 f_2(x)] \\ = a_1 \mathcal{L}[f_1(x)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(x)] \\ = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) \end{aligned} \quad (7.4)$$

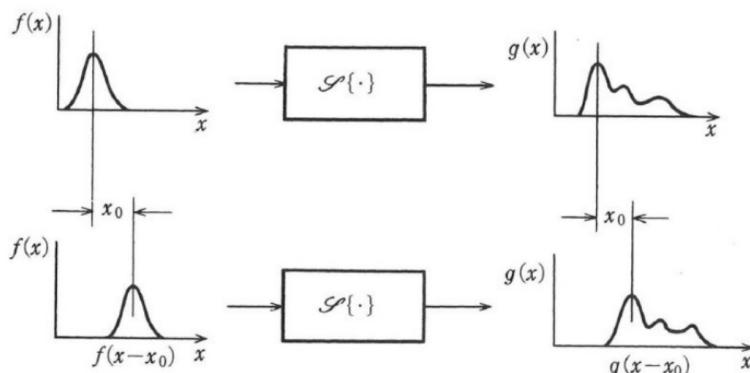
که در آن a_1 و a_2 ثابت هستند. از قیاس به معادله (۴۷.۱)، اصل برهم نهی (اصل جمع اثرها) در یک سیستم خطی معتبر است. یعنی خطی بودن متراffد اصل برهم نهی است. عملگر لاپلاسین و عملگر تبدیل فوریه، عملگرهای خطی هستند و اصل برهم نهی در پدیده‌های موجی و تبدیل فوریه معتبر است.

۲.۲.۴ سیستم مستقل از انتقال

دوباره یک سیستم \mathcal{S} را در نظر بگیرید که ورودی آن $f(x)$ و خروجی $g(x)$ است.

$$\mathcal{S}[f(x)] = g(x) \quad (8.4)$$

اگر ورودی $f(x)$ باندازه x انتقال یابد، در این صورت خروجی $g(x)$ نیز بهمان مقدار x .



شکل ۲.۴: سیستم مستقل از انتقال

همان طور که در شکل (۲.۴) نشان داده شده، انتقال می‌یابد. لذا

$$\mathcal{S}[f(x - x_0)] = g(x - x_0) \quad (9.4)$$

این سیستم نسبت به انتقال x_0 ثابت است و به این سیستم یک سیستم مستقل از انتقال می‌گویند. ویژگی مستقل از انتقال برای مختصات فضای x به این معنی است که مشخصه سیستم \mathcal{S} تغییر نمی‌کند و شکل خروجی تغییر نمی‌کند، اما بسته به موقعیت ورودی، موقعیت تغییر می‌کند. سیستم مستقل از انتقال در زمان را گاهی اوقات یک سیستم ثابت یا یک سیستم مستقل زمانی می‌نامند. سیستم ثابت در زمان پایدار است.

سیستم خطی و مستقل از انتقال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{S}[a_1 f_1(x - x_1) + a_2 f_2(x - x_2)] = a_1 g_1(x - x_1) + a_2 g_2(x - x_2) \quad (10.4)$$

۳.۲.۴ پاسخ ضربه‌ای

یک سیستم خطی و مستقل از انتقال در نظر گیرید:

$$\mathcal{S}[f(x)] = g(x) \quad (11.4)$$

و ورودی یک ضربه است. ضربه یک ورودی ایده‌آل با اندازه بینهایت کوچک است، یعنی، مانند یک منبع نور نقطه‌ای است. ضربه با تابع دلتا $\delta(x)$ توصیف و پاسخ آن بصورت زیر داده می‌شود

$$\mathcal{S}[\delta(x)] = h(x) \quad (12.4)$$

از آنجا که سیستم مستقل از انتقال است، داریم

$$\mathcal{S}[\delta(x - x_0)] = h(x - x_0) \quad (13.4)$$

خروجی ورودی ضربه را پاسخ ضربه‌ای می‌گویند. شگفت آور است که تمام ویژگی‌های سیستم خطی و مستقل از انتقال توسط پاسخ ضربه‌ای توصیف می‌شود. با استفاده از اصل برهمنهی یک سیستم خطی، ورودی $f(x)$ را به یک سری ضربه تجزیه می‌کنیم.

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - nT) \quad (14.4)$$

اگر دوره T ضربه‌ها به بینهایت کوچک کاهش یابد، همانطور که در شکل (۳.۴) نشان داده شده، خواهیم داشت.

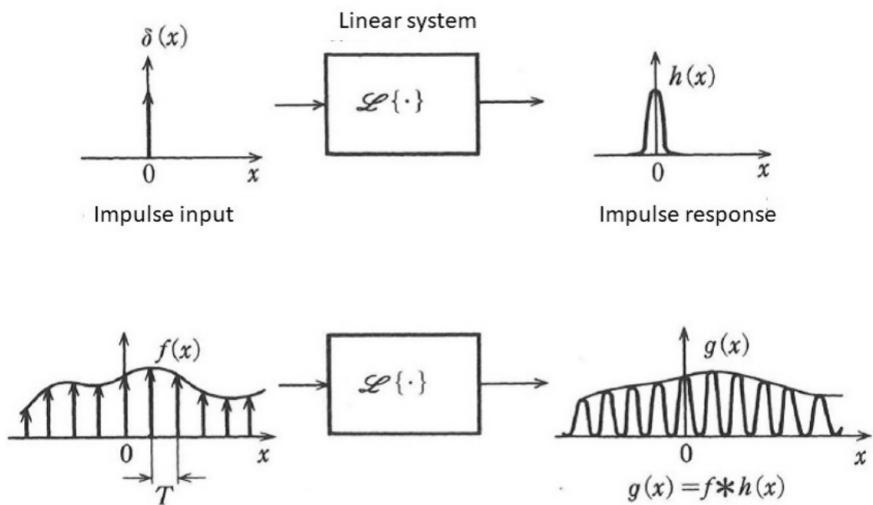
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x - x')dx' \quad (15.4)$$

معادله (۱۵.۴) همان تعریف تابع دلتا $\delta(x)$ در معادله (۷۷.۳) است. جایگزینی معادله (۱۵.۴) در معادله (۱۱.۴)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{S}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x - x')dx'\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathcal{S}[\delta(x - x')]dx' \end{aligned} \quad (16.4)$$

جایگزینی معادله (۱۳.۴) در معادله (۱۶.۴)،

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x - x')dx' \\ &= f(x) * h(x) \end{aligned} \quad (17.4)$$



شکل ۳.۴: پاسخ ضربه‌ای و اصل برهم‌نگاری در یک سیستم خطی

خروجی یک سیستم خطی و مستقل از انتقال، کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه است.

۳.۴ تابع پاسخ فرکانسی

ورودی $f(x)$ و خروجی $g(x)$ یک سیستم خطی و مستقل از انتقال و پاسخ ضربه‌ای آن را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه هر یک خواهد بود

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(j2\pi\nu x) dx \quad (18.4)$$

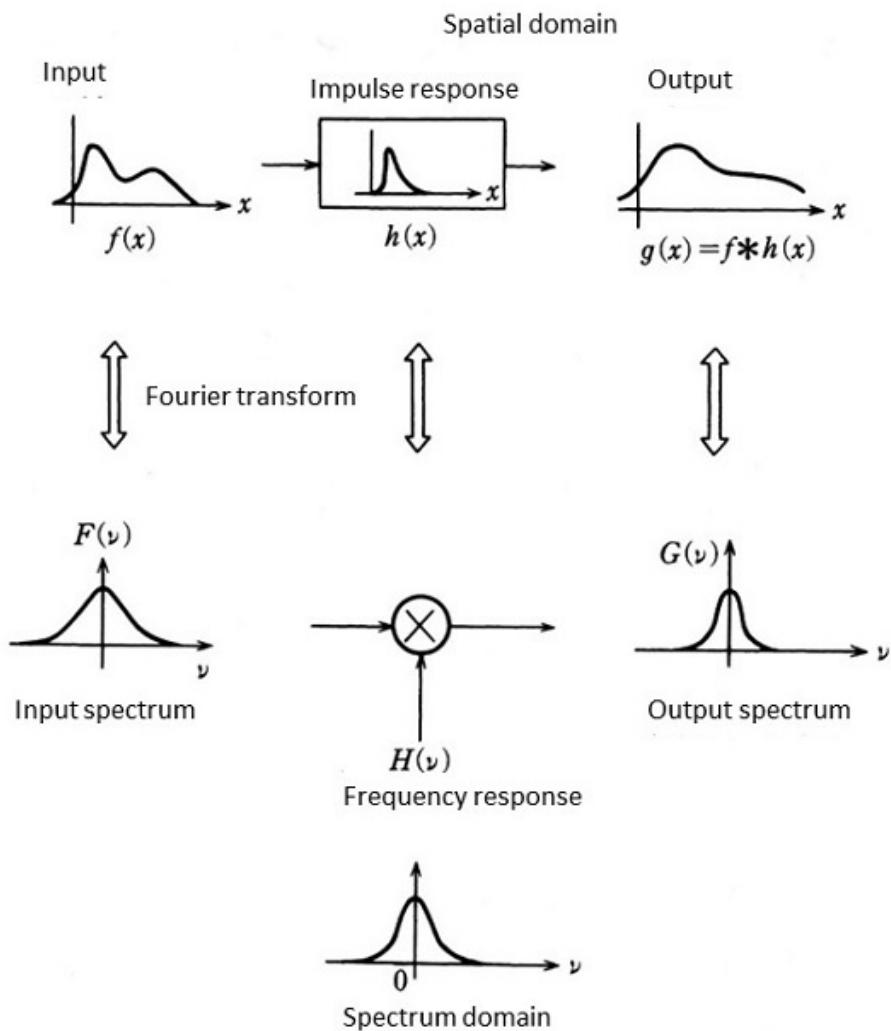
$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(j2\pi\nu x) dx \quad (19.4)$$

$$H(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp(j2\pi\nu x) dx \quad (20.4)$$

خروجی سیستم با کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه‌ای سیستم به دست می‌آید که در معادله (۱۶.۴) نشان داده شده و با استفاده از قضیه کانولوشن، داریم

$$G(\nu) = F(\nu) \cdot H(\nu) \quad (21.4)$$

در اینجا $H(\nu)$ پاسخ فرکانسی سیستم خطی و مستقل از انتقال نامیده می‌شود. معادله (۲۱.۴) به این معنی است که سیستم طیف ورودی $F(\nu)$ را به طیف خروجی $G(\nu)$ با $H(\nu)$ بار (دفعه) تغییر می‌دهد. یعنی تابع پاسخ فرکانسی، مقدار پاسخ سیستم را در هر فرکانس ν نشان می‌دهد. از آنجایی که پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه‌ای یک زوج تبدیل فوریه هستند و بنابراین اطلاعات هر دو یکسان است، تمام ویژگی‌های سیستم خطی و



شکل ۴.۴: رابطه بین پاسخ ضربه‌ای و پاسخ فرکانسی.

مستقل از انتقال با پاسخ فرکانسی توصیف شده، همانطور که در شکل (۴.۴) نشان داده شده است.

۴.۴ توابع ویژه و مقادیر ویژه

پاسخ ضربه می‌تواند یک سیستم خطی مستقل از انتقال را توصیف کند. روش دیگری برای توصیف ویژگی‌های سیستم مورد بحث قرار می‌گیرد. حالتی را در نظر بگیرید که خروجی سیستم $\Psi(x; \xi)$ به‌شکل ورودی $\Psi(\xi)$ با میرایی

مناسب $H(\xi)$ باشد.

$$\mathcal{S}[\psi(x; \xi)] = H(\xi)\psi(x; \xi) \quad (22.4)$$

که در آن ξ یک ثابت مختلط است. در اینجا وجود راه حل را ثابت نمی‌کنیم، اما یک مثال عملی بعداً نشان داده می‌شود.

هنگامی که ورودی و خروجی سیستم با معادله (۲۲.۴) داده می‌شود، $(\Psi(x; \xi))$ تابع ویژه عملگر \mathcal{T} و $(H(\xi))$ مقدار ویژه تابع ویژه $(\Psi(x; \xi))$ نامیده می‌شود. این مورد را در نظر بگیرید که $\exp(-j2\pi\xi x)$ یک ورودی و خروجی آن $(g(x; \xi))$ باشد.

$$\mathcal{S}[\exp(-j2\pi\xi x)] = g(x; \xi) \quad (23.4)$$

در این صورت ورودی بقدر x' انتقال یافته است،

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\{\exp[-j2\pi\xi(x - x')]\} \\ = \mathcal{S}[\exp(-j2\pi\xi x)] \exp(j2\pi\xi x') \\ = g(x; \xi) \exp(j2\pi\xi x') \end{aligned} \quad (24.4)$$

از آنجا که سیستم مستقل از انتقال است.

$$\mathcal{S}\{\exp[-j2\pi\xi(x - x')]\} = g(x - x' : \xi) \quad (25.4)$$

سرانجام رابطه زیر را خواهیم داشت

$$g(x - x' : \xi) = \exp(j2\pi\xi x')g(x; \xi) \quad (26.4)$$

اگر داشته باشیم

$$g(x : \xi) = H(\xi) \exp(-j2\pi\xi x) \quad (27.4)$$

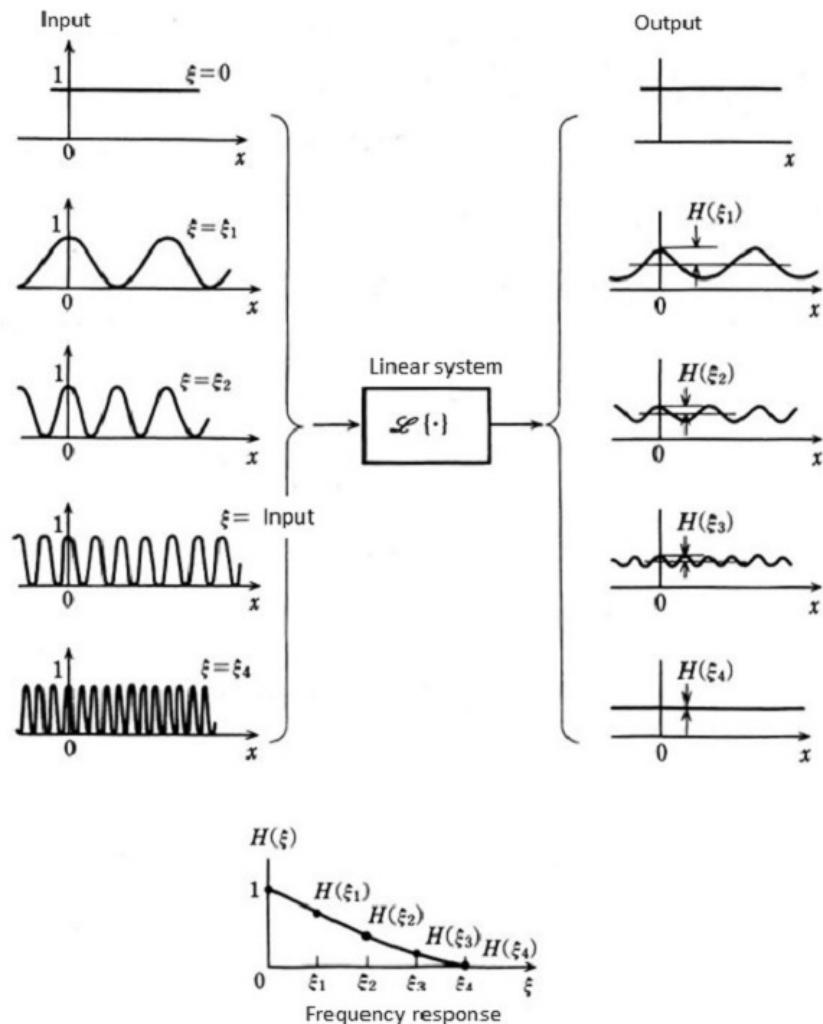
بدیهی است که معادله (۲۶.۴) صادق و در آن $H(\xi)$ مختلط است. لازم بهذکر است که

$$\mathcal{S}[\exp(-j2\pi\xi x)] = H(\xi) \exp(-j2\pi\xi x) \quad (28.4)$$

تابع $\exp(-j2\pi\xi x)$ یک تابع ویژه معادله (۲۲.۴) است و موردی که $x = 0$ است داریم؛

$$H(\xi) = g(0 : \xi) \quad (29.4)$$

این بدان معنی است که مقدار ویژه $(H(\xi))$ توسط خروجی در مبدأ $x = 0$ برای ورودی سیستم $\exp(-j2\pi\xi x)$ بهدست می‌آید. استفاده از پاسخ ضربه‌ای یا پاسخ فرکانسی برای توصیف ویژگی‌های سیستم مورد بحث قرار گرفته است. پاسخ یک تابع سینوسی مختلط $\exp(-j2\pi\xi x)$ با فرکانس ξ برابر $H(\xi) \exp(-j2\pi\xi x)$ است، که خروجی از ورودی $\exp(-j2\pi\xi x)$ بوده که توسط $H(\xi)$ ضعیف شده است. این بدان معناست که مقدار ویژه $(H(\xi))$ به تابع ویژه $\exp(-j2\pi\xi x)$ خود پاسخ فرکانسی است. پاسخ فرکانس با کنتراست خروجی سینوسی برای ورودی سینوسی با تغییر فرکانس اندازه‌گیری می‌شود، و در شکل (۵.۴) نشان داده شده است.

شکل ۵.۴: مقدار ویژه $H(\xi)$ و پاسخ فرکانسی

پرسش‌ها

۱. سه مثال از سیستم خطی و مستقل از انتقال را در حوزه علوم و مهندسی نشان دهید.

۲. پاسخ فرکانسی سیستمی که شکل خروجی آن تغییر نکرده است را برای ورودی زیر تعیین کنید.

$$f(x) = [1 + \cos(2\pi\nu_1 x)][1 + \cos(2\pi\nu_2 x)] \quad (۳۰.۴)$$

که در آن $\nu_2 > \nu_1$ است.

فصل ۵

تبدیل فوریه گستته و تبدیل فوریه سریع

تبدیل فوریه دیجیتال برای تعداد زیادی از نقاط نمونه با یک الگوریتم محاسبات مستقیم معمولاً باعث افزایش نمائی در زمان محاسباتی می‌شود. به خصوص در زمینه‌های نوری، باید از داده‌های تصویر دو بعدی یا سه بعدی با تعداد زیادی از نقاط نمونه‌برداری استفاده کنیم. هزینه‌های محاسباتی آنها در برخی موارد زیاد است. خوشبختانه، یک الگوریتم کارآمد به نام تبدیل فوریه سریع (FFT)^۱، توسعه یافته است که به طور گسترده در اپتیک، پردازش سیگنال، فیزیک، ریاضیات و غیره استفاده می‌شود. در این فصل، تبدیل فوریه گستته، که یک نوع دیجیتالی از تبدیل فوریه است و سپس توابع پنجره‌ای برای انجام تبدیل فوریه گستته، و در نهایت الگوریتم FFT و برنامه ریزی آن را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۵ تبدیل فوریه گستته

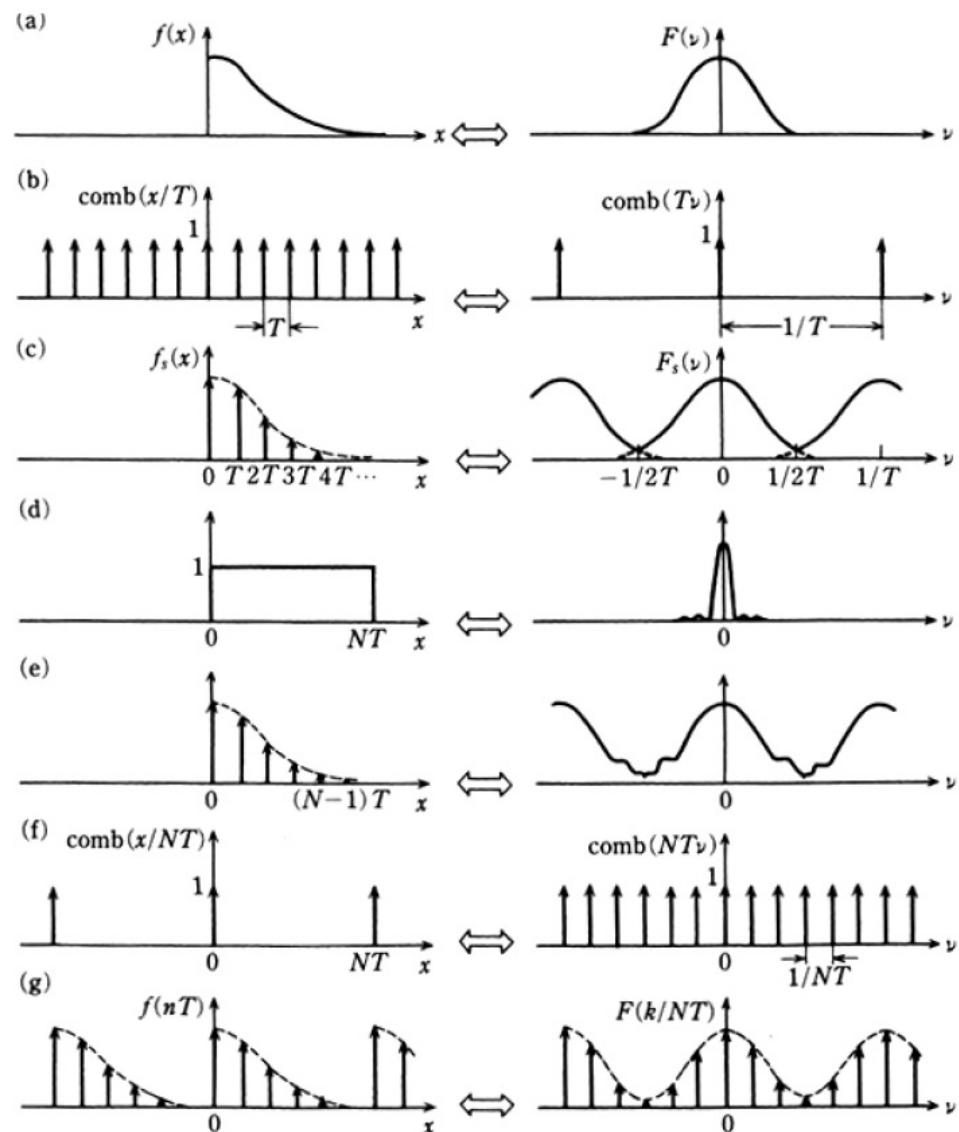
قضیه نمونه‌برداری نشان می‌دهد که آرایه داده‌های گستته $f_s(nT)$ با نمونه‌برداری از یک سیگنال پیوسته $f(x)$ با دوره نمونه‌برداری مناسب T بdst می‌آید. اما، طیف فوریه $F_s(\nu)$ آن یک تابع تناوبی پیوسته است. برای انجام پردازش دیجیتال، طیف فوریه باید دیجیتالی شود. این روش در شکل (۱.۵) نشان داده شده است.

اجازه دهد طیف فوریه یک سیگنال پیوسته $f(x)$ باشد. سیگنال پیوسته توسط اجزاء با تناوب T نمونه‌برداری می‌شود.

$$f_s(x) = f(x) \times \text{comb}\left(\frac{x}{T}\right) \quad (1.5)$$

و طیف آن خواهد بود

^۱Fast Fourier Transform (FFT)



شکل ۱.۵: روش نمونه برداری تبدیل فوریه

$$\begin{aligned}
 F_s(\nu) &= \mathcal{F}[f_s(x)] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-nT) \right] \exp(j2\pi\nu x) dx \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \exp(j2\pi\nu nT)
 \end{aligned} \tag{۲.۵}$$

طیف $F_s(\nu)$ تابع نمونه برداری شده، همانطور که در شکل (۱.۵)(ج) نشان داده شده است، تناوبی و پیوسته است. از قضیه نمونه برداری، طیف $F_s(\nu)$ شامل اطلاعات کافی در بازه از $-1/2T$ تا $1/2T$ تحت شرایط $2B \geq 1/T$ است.

از آنجایی که می‌توانیم تعداد محدودی از داده‌های گسته را مشاهده کنیم، فقط داده‌های نمونه برداری شده در نقاط $n = 0, 1, \dots, N-1$ استفاده می‌شوند و سایر نقاط قطع می‌شوند. سپس طیف به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F_s(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \exp(j2\pi\nu nT) \tag{۳.۵}$$

که در شکل (۱.۵)(ه) نشان داده شده است. قطع کردن نقاط بیرونی مانند پنجره یک تابع پنجره مستطیلی در محدوده $0 \leq nT \leq NT$ است. سیگنالی با بازه فرکانس محدود را سیگنال باند محدود می‌نامیم، سیگنالی با بازه فضای محدود را سیگنال فضای محدود می‌نامیم. در مرحله بعد، از طیف $F_s(\nu)$ با فضای محدود نمونه برداری کنید. با اعمال قضیه نمونه برداری در فضای فوریه، دوره نمونه برداری $1/NT$ برآورد می‌شود. از آنجایی که k امین نقطه نمونه برداری در $\nu = k/NT$ است همانطور که در شکل (۱.۵)(و) نشان داده شده است، معادله (۳.۵) به صورت بازنویسی می‌شود

$$F\left(\frac{k}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{۴.۵}$$

تبدیل فوریه گسته (DFT) $f(nT)$ نامیده می‌شود، که یک سیگنال تناوبی با دوره NT است، همانطور که در شکل (۱.۵)(ح) نشان داده شده است. با استفاده از ویژگی متعامد،

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j\frac{2\pi kn}{N}\right) \exp\left(-j\frac{2\pi mn}{N}\right) = \begin{cases} 1 : k = m \\ 0 : \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۵.۵}$$

تابع $f(nT)$ را می‌توان بازنویسی کرد

$$f(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F\left(\frac{k}{NT}\right) \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{۶.۵}$$

این را عکس تبدیل فوریه گسته می‌نامند. برای سهولت

$$f(n) = f(nT) \tag{۷.۵}$$

^۱Discrete Fourier Transform (DFT)

$$F(k) = F\left(\frac{k}{NT}\right) \quad (8.5)$$

$$W = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right) \quad (9.5)$$

در این صورت تبدیل فوریه گسسته و معکوس آن خواهد بود؛

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W^{kn} \quad (10.5)$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W^{-kn} \quad (11.5)$$

زوج‌های تابع سینوسی اصلی و نسخه نمونه‌برداری آن: $F(x)$ و $f(n)$ و $F(\nu)$ و $f(n)$ به دلیل اثر برش نقاط نمونه‌برداری همیشه برابر نیستند. آرایه داده‌های نمونه‌برداری فقط تقریبی از یک تابع پیوسته است. از سوی دیگر، باید توجه داشت که زوج معادله (۱۰.۵) و (۱۱.۵) تبدیل فوریه گسسته به شدت با رابطه ریاضی مرتبط هستند.

۲.۵ توابع پنجره

تبدیل فوریه گسسته برای توابع تناوبی تعریف شده است. در بسیاری از کاربردها، می‌توانیم بخش محدودی از تابع را استخراج کنیم و آن را به صورت دوره‌ای مرتب کنیم تا یک تابع تناوبی ایجاد کنیم، حتی اگر تابع اصلی در ناحیه نسبتاً بزرگی گسترش یابد. این روش شبیه مشاهده سیگنال از طریق یک پنجره است.

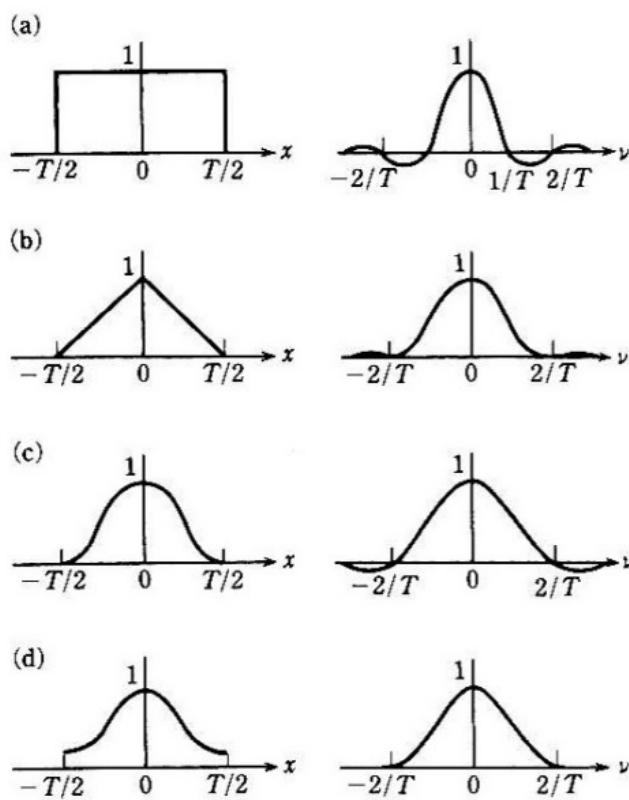
یک پنجره ساده به عنوان یک تابع مستطیل شکل توصیف می‌شود که مقدار آن در داخل پنجره یک و در غیر این صورت صفر است. در هر دو طرف پنجره، مقادیر تابع در برخی موارد با هم تفاوت دارند. این امر باعث ناپیوستگی در تابع تناوبی و برخی مشکلات در تبدیل فوریه می‌شود. برای جلوگیری از این مشکل، پنجره‌های وزنی مورد بحث قرار می‌گیرند که در آن‌ها مقدار هر دو طرف به آرامی به صفر می‌رسد.
تابع پنجره شده $f_w(x)$ به شرح زیر است

$$f_w(x) = f(x) \cdot w(x) \quad (12.5)$$

که در آن $f(x)$ و $w(x)$ به ترتیب نشان دهنده تابع ورودی و تابع پنجره هستند. طیف تابع خواهد بود

$$F_w(\nu) = F(\nu) * W(\nu) \quad (13.5)$$

که در آن $F_w(\nu)$ ، $F(\nu)$ و $W(\nu)$ به ترتیب نشان دهنده طیف $f_w(x)$ ، $f(x)$ و $w(x)$ هستند. از آنجایی که تابع پنجره شده باید مشابه تابع اصلی باشد، $W(\nu)$ پهنای وسیعی دارد و به سرعت و به آرامی صفر شود. تابع پنجره باید چنین شرایط متناقضی را برآورده کنند.



شکل ۲.۵: توابع پنجره و طیف آنها: (الف) پنجره مستطیلی، (ب) پنجره بارتلت، (ج) پنجره هانینگ و (د) پنجره هامینگ.

توابع پنجره معمولی و طیف آنها به شرح زیر است و در شکل (۲.۵) نشان داده شده است.

۱. تابع پنجره مستطیلی

$$w_1(x) = \text{rect}(x/T) \quad (14.5)$$

$$W_1(\nu) = T \text{sinc}(T\nu) \quad (15.5)$$

۲. تابع پنجره بارتلت^۳

$$w_2(x) = \Lambda\left(\frac{2x}{T}\right) \quad (16.5)$$

$$W_2(\nu) = \frac{T}{\gamma} \text{sinc}^{\gamma}\left(\frac{T\nu}{\gamma}\right) \quad (17.5)$$

^۳Bartlett window function

۳. عملکرد پنجره تعمیم یافته هامینگ^۴

$$w(x) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{T}x\right) & : |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (18.5)$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ بهخصوص، در حالتی که $\alpha = 0.5$ باشد، تابع پنجره هامینگ نامیده می‌شود

$$w_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \cos\left(\frac{\pi}{T}x\right)] & : |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (19.5)$$

$$W_T(\nu) = \frac{T}{2} \frac{\sin(T\nu)}{1 - T^2\nu^2} \quad (20.5)$$

در حالتی که $\alpha = 0.54$ است، تابع پنجره را تابع پنجره هامینگ می‌نامند

$$w_F(x) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi}{T}x\right) & : |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (21.5)$$

$$W_F(\nu) = \frac{T}{2} \frac{1.08 - 1.6T^2\nu^2}{1 - T^2\nu^2} \sin(T\nu) \quad (22.5)$$

۳.۵ اصول تبدیل فوریه سریع (FFT)

دوباره تبدیل فوریه گسسته معادله (۱۰.۵) را در نظر بگیرید.

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W^{kn} \quad (23.5)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ و

$$W = \exp\left(j \frac{2\pi}{N}\right) \quad (24.5)$$

هنگامی که تبدیل فوریه گسسته بر اساس معادله (۲۳.۵) محاسبه می‌شود، ضرب N^2 برابر و جمع N^2 برابر باید انجام شود. از آنجایی که زمان محاسبه ضرب بسیار بزرگتر از جمع است، کل زمان محاسبه عمده‌ای به زمان محاسبه ضرب بستگی دارد. زمان محاسبه با زمان ضرب اندازه‌گیری می‌شود.

فرض که تعداد N نمونه با دو عامل r_1 و r_2 فاکتور می‌شود،

$$N = r_1 \times r_2 \quad (25.5)$$

^۴ پنجره هامینگ و پنجره هانینگ به ترتیب از ریچارد دبلیو هامینگ و جولیوس فون هان سرچشمه می‌گیرند.

جدول ۱.۵: تجزیه ضرایب k و n ($r_1 = 4, r_2 = 3$)

k/n	k_1	k_0	n_1	n_2
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۱
۲	۰	۲	۰	۲
۳	۰	۳	۱	۰
۴	۱	۰	۱	۱
۵	۱	۱	۱	۲
۶	۱	۲	۲	۰
۷	۱	۳	۲	۱
۸	۲	۰	۲	۲
۹	۲	۱	۳	۰
۱۰	۲	۲	۳	۱
۱۱	۲	۳	۳	۲

 ضریب طیف k بصورت زیر توصیف می‌شود

$$k = k_0 r_1 + k_1 \quad (26.5)$$

که در آن

$$k_0 = 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1$$

$$k_1 = 0, 1, 2, \dots, r_2 - 1$$

بطوری که در جدول (۱.۵) نشان داده شده، k بدروه r_2 و k_1 تجزیه شده است.
به همین ترتیب، ضریب n داده‌های ورودی با دو عامل n_0 و n_1 توصیف می‌شود.

$$n = n_0 r_1 + n_1 \quad (27.5)$$

که در آن

$$n_0 = 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1$$

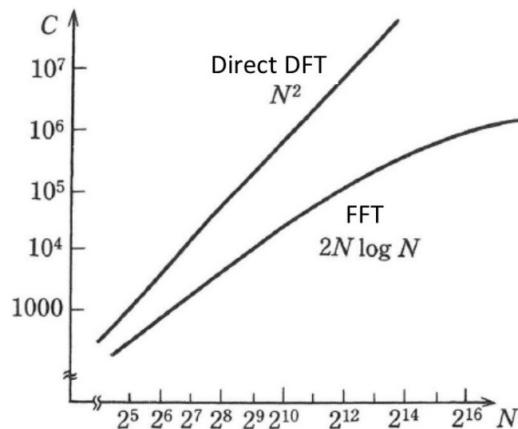
$$n_1 = 0, 1, 2, \dots, r_2 - 1$$

با استفاده از این تجزیه، معادله (۱۰.۵) نوشته می‌شود:

$$F(k_0, k_1) = \sum_{n_0=0}^{r_1-1} \sum_{n_1=0}^{r_2-1} f(n_0, n_1) W^{kn_0 r_1} W^{kn_1 r_2} \quad (28.5)$$

 در این صورت جمع برای n بازنویسی می‌شود:

$$F_1(k_0, n_0) = \sum_{n_1=0}^{r_1-1} f(n_0, n_1) W^{kn_0 r_1} W^{kn_1 r_2} \quad (29.5)$$



شکل ۳.۵: تعداد عملیات مورد نیاز برای محاسبه تبدیل فوریه گسسته با استفاده از الگوریتم FFT در مقایسه با الگوریتم مستقیم آن.

معادله (۲۹.۵) تبدیل فوریه یک دنباله است که با حذف N آرایه داده $f(n_1, n_0)$ در هر r_2 به دست می‌آید. علاوه بر این، ارائه معادله (۲۹.۵) به معادله (۲۸.۵) می‌دهد

$$F(k_1, k_0) = \sum_{n_1=0}^{r_1-1} F_1(k_0, n_0) W^{(k_1 r_1 + k_0) n_1} \quad (30.5)$$

این هم DFT است. این بدان معنی است که یک DFT را می‌توان به دو مرحله DFT تجزیه کرد. در معادله (۲۹.۵) از $F_1(k_0, n_0)$ از N جزء تشکیل شده است. از آنجایی که هر جزء به ضرب زمان r_1 نیاز دارد، ضرب $N r_1$ برای محاسبه کل $F_1(k_0, n_0)$ ضروری است^۵ محاسبه دو مرحله‌ای به $N(r_1 + r_2)$ نیاز دارد.

تجزیه دو مرحله‌ای زمان محاسبه را با $N(r_1 + r_2)/N^2 = (r_1 + r_2)/N$ بار کاهش می‌دهد. لازم به ذکر است که کاهش بیشتر در زمان محاسباتی را می‌توان با تجزیه r_1 و r_2 انجام داد. بر اساس این ایده، زمان محاسبات را می‌توان به شدت کاهش داد. این الگوریتم تبدیل فوریه سریع (FFT) [۱] است.

به عنوان عدد نمونه N در FFT^{m^3} ، توان ۲، در بسیاری از موارد انتخاب می‌شود. در صورتی که محاسبه به m گام تجزیه شود، زمان محاسباتی به صورت زیر تخمین‌زده می‌شود

$$C = N(2 + 2 + \dots + 2) = N \times (2m) = 2N \log_2 N \quad (31.5)$$

مقایسه زمان محاسبه بین موارد DFT مستقیم و FFT در شکل (۳.۵) نشان داده شده است. هرچه تعداد نمونه افزایش یابد، قدرت FFT بیشتر نمایش داده می‌شود.

^۵ برای محاسبه ضریب W ، ضرب $k_0 n_1 r_2$ لازم است، اما این ضرب عدد صحیح است که زمان محاسبه برای آن کوتاه است. در اینجا ضرب مختلط در نظر گرفته می‌شود.

۴.۵ محاسبه عددی با استفاده از FFT

بسیاری از بسته های نرم افزاری FFT در بسیاری از زبان های برنامه نویسی از جمله FORTRAN, C, Basic, VBA, Mathematica, Maple, Python وغیره توسعه یافته‌اند. نمونه‌ای از کد پایتون برای تبدیل فوریه یک دنباله خطی در اینجا ارائه شده است. پایتون یک زبان برنامه نویسی شی‌گرا با کاربری آسان، قدرتمند و با دسترسی باز است. علاوه بر یک کتابخانه غنی، چندین هزار مؤلفه و ماثول در دسترس است.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # rect function
5 def rect(x):
6     return(np.where(np.abs(x)<=0.5,1,0))
7
8 N = 32 # sample number
9 x = np.linspace(-N/2-1,N/2,N)
10 # input signal: rectangular with spacing of 5
11 sig = rect(x/5)
12
13 fig = plt.figure()
14 plt.plot(x,sig) # plot of input signal
15 plt.savefig('fig_rect.jpg') # save plot
16
17 fx = np.fft.fft(sig) # FFT of signal
18 fig = plt.figure()
19 plt.plot(np.real(fx)) # plot of real part of spectrum
20 plt.plot(np.imag(fx),'-') # imaginary part of spectrum
21 plt.savefig('fig_rect_fft.jpg')
22
23 sig_shift=np.fft.fftshift(sig) # shift of imput signal
24 fig = plt.figure()
25 plt.plot(x,sig_shift) # plot of shifted signal
26 plt.savefig('fig_rect_shift.jpg')
27
28 fx_shift=np.fft.fft(sig_shift) # FFT of shifted signal
29 fig=plt.figure()
30 plt.plot(np.real(fx_shift)) # plot of real part of spectrum
31 plt.plot(np.imag(fx_shift), '-') # imaginary part of signal

```

```

32 plt.savefig('fig_rect_shift_fft.jpg')
33
34 abs_fx_shift=np.abs(fx_shift)
35 fig=plt.figure()
36 plt.plot(abs_fx_shift**2) # plot of powerspectrum
37 plt.savefig('fig_rect_shift_fft_Intn.jpg')
38
39 fig=plt.figure()
40 # plot of power spectrum shifted to center
39 plt.plot(x,np.fft.fftshift(abs_fx_shift**2))
39 plt.savefig('fig_fft_Intn_shft.jpg')

```

ماژول پایتون، Numpy، برای محاسبه آرایه استفاده می‌شود. همانطور که در شکل (۴.۵)(الف) نشان داده شده، یک تابع rect را در مرکز داده‌ها در نظر گیرید. در اسناد اپتیک، از جمله این کتاب، شی از $N/2 - 1$ تا $N/2 + 1$ تعریف شده است، در حالی که باید توجه داشت که DFT با N نقطه داده از $n = 0$ تا $n = N - 1$ ، مطابق معادله (۱۰.۵) تعریف و که در شکل (۴.۵)(ب) نشان داده شده است. قسمت‌های حقیقی و موهومی تبدیل‌های فوریه (الف) و (ب) در شکل‌ها بترتیب (۴.۵)(ج) و (د) نشان داده شده است. خطوط توپر و خطوط نقطه چین با قسمت‌های حقیقی و موهومی آنها مطابقت دارد. شدت طیف شکل‌های (۴.۵)(ج) و (د) در شکل (۴.۵)(ه) و نسخه تغییر یافته آن در شکل (۴.۵)(و) نشان داده شده است. تبدیل فوریه گسسته دو بعدی بصورت زیر تعریف می‌شود

$$F(k, j) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) W^{km} W^{jn} \quad (32.5)$$

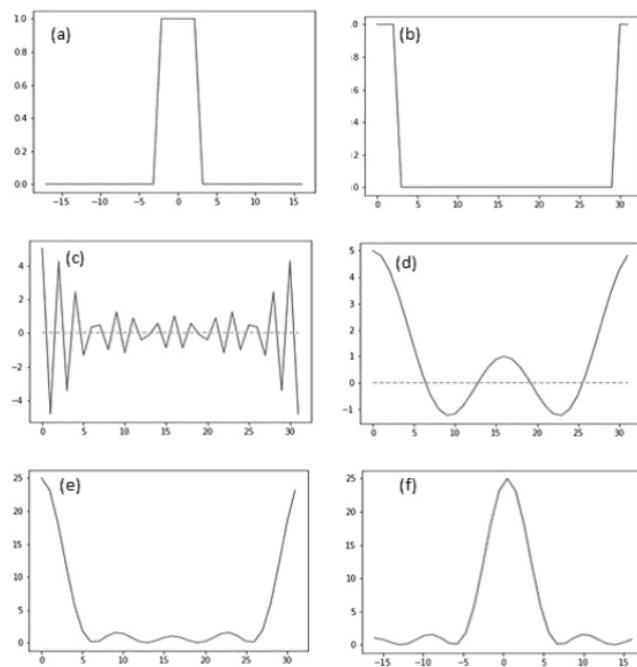
تبدیل فوریه گسسته یک بعدی در جهت x بصورت زیر است

$$F_x(k, n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m, n) W^{km} \quad (33.5)$$

در این صورت معادله (۳۲.۵) را می‌توان جدا کرد

$$F(k, j) = \sum_{n=0}^{N-1} F_x(k, n) W^{jn} \quad (34.5)$$

این بدان معنی است که تبدیل فوریه گسسته دو بعدی را می‌توان با DFT‌های یک بعدی متوالی در جهت x و سپس در جهت y ساخت.



شکل ۴.۵: محاسبه عددی با استفاده از $N = 32$ FFT. (الف) داده‌های ورودی، (ب) داده‌های ورودی انتقالی، (ج) FFT از (الف)، قسمت حقیقی (خط یکپارچه) و قسمت موهومی (خط نقطه چین)، (د) از (ب)، قسمت حقیقی (خط جامد) و قسمت موهومی (خط نقطه چین)، (ه) شدت (ج) و (د)، و (و) شدت انتقالی (ه)

۵.۵ درونیابی در DFT

۶.۵ لایه بندی صفر

یکی از تکنیک‌های متداول برای افزایش نرخ نمونه‌برداری در حوزه طیف «لایه بندی صفر»^۶ است. لایه صفر به این صورت است که نمونه‌های با ارزش صفر را به‌انتهای نمونه‌های اصلی اضافه می‌کند. DFT دنباله‌ای از نمونه‌های $f(p\Delta)$ ، $1 \leq p \leq N - 1$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(n\Omega) = \sum_{p=0}^{N-1} f(p\Delta) \exp(jnp\Omega\Delta), \quad (35.5)$$

که در آن تناوب نمونه‌برداری با $\Delta = 2\pi/(N\Delta)$ نشان داده می‌شود. با این مشخصه فقط N مقدار مجزا و مستقل قابل محاسبه با معادله (۳۵.۵) وجود دارد، یعنی کسانی که برای $n = 0, \dots, N-1$.

زیر دوره‌های K را در دوره نمونه‌برداری Ω تنظیم می‌کنیم. تناوب جدید با

^۶Zero Padding

داده می‌شود. دنباله $F(n\Omega)$ نمونه‌هایی از دنباله مورد نظر را تنها در فواصل زمانی K نمونه با نرخ نمونه‌برداری جدید ارائه می‌دهد. نمونه‌های باقی مانده باید با درونیابی [۲] پر شوند. خاصیت انتقال در تبدیل فوریه گستته خواهد بود

$$F(n\Omega + k\omega) = \sum_{p=0}^{N-1} f(p\Delta) \exp(jnp\omega\Delta) \exp(jnp\Omega\Delta) \quad (36.5)$$

$$(k = 0, 1, \dots, K-1)$$

معادله (۳۷.۵) با N نقطه DFT دنباله $f(p\Delta)$ با ضریب فاز $\exp(jkp\omega\Delta)$ توصیف شده است. نمونه درونیابی شده $F(n\Omega+k\omega)$ با استفاده از ضریب فاز مناسب $\exp(jkp\omega\Delta)$ داده می‌شود. توالی کل نمونه‌های NK با روش‌های درونیابی پی در پی به دست می‌آید. تبدیل فوریه گستته معکوس دنباله درونیابی شده $F(n\Omega+k\omega)$ در اینجا در نظر گرفته شده است که توسط

$$f'(r\Delta) = \frac{1}{NK} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} F(n\Omega + k\omega) \exp[-j(n\Omega + k\omega)r\Delta] \quad (37.5)$$

$$(r = 0, 1, \dots, NK-1)$$

جایگزینی معادله (۳۷.۵) در معادله (۳۸.۵) خواهیم داشت

$$f'(r\Delta) = \frac{1}{NK} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{p=0}^{N-1} f(p\Delta) \exp(jkp\omega\Delta) \exp(jnp\Omega\Delta) \exp[-j(n\Omega + k\omega)r\Delta] \quad (38.5)$$

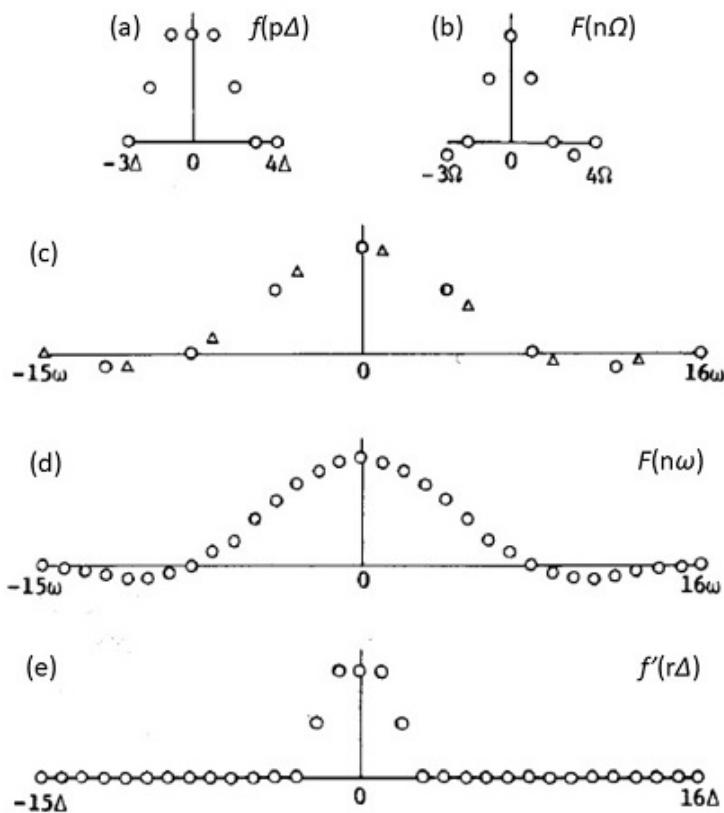
$$= \begin{cases} f(r\Delta) : & 0 \leq r \leq N-1 \\ 0 : & N \leq r \leq NK-1 \end{cases}$$

از معادله (۳۸.۵)، DFT طیف درونیابی شده $F(n\Omega + k\omega)$ دنباله اصلی نمونه N نمونه با نمونه‌های با ارزش صفر است. این روش نشان می‌دهد که تبدیل فوریه یک دنباله نمونه از دنباله نمونه اصلی که با یک نمونه با مقدار صفر اضافه شده است، طیف فوریه درونیابی شده فوریه اصلی را به دست می‌دهد [۲]. به این روش، لایه‌بندی صفر می‌گویند.

۷.۵ برخی از تکنیک‌های درونیابی دیگر

در بخش ۱.۵.۵، بحث شده است که لایه‌بندی صفر، درونیابی را در حوزه شی امکان پذیر می‌کند. در این بخش، برخی دیگر از تکنیک‌های درونیابی بر اساس DFT [۳] مورد بحث قرار می‌گیرند.

فرض کنید تناوب نمونه برداری Δ در حوزه شی به K زیر تناوب با $\Delta/K = \delta$ داده شده است. از آنجایی که دنباله $f(\Delta p)$ نمونه‌هایی ازتابع مورد نظر را فقط در فواصل زمانی K نمونه با نرخ نمونه‌برداری جدید ارائه می‌دهد، باید نمونه‌های باقی مانده را با درونیابی پر کنیم. سپس، دنباله k -ام را که از k -امین نمونه در هر دوره از Δ تشکیل



شکل ۳۹.۵: روش درونیابی در حالت یک بعدی ($N = 8, K = 4$). (الف) دنباله اصلی ($f(p\Delta)$)، (ب) DFT آن ($F(n\Omega)$)، (ج) دنباله در درونیابی (\circ): دنباله اصلی، Δ : اولین دنباله درونیابی شده، (د) دنباله درونیابی ($F(n\omega + k\omega)$)، و (ه) دنباله درونیابی ($f'(r\Delta)$)، که با DFT معکوس (د) به دست می‌آید.

شده است، تعریف می‌کنیم. دنباله درونیابی $f(p\Delta + k\delta)$ بر اساس برخی از انواع درونیابی تعریف می‌شود. DFT معکوس دنباله درونیابی شده $F(p\Delta + k\delta)$ توسط رابطه

$$F'(r\Omega) = \frac{1}{NK} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} f(p\Delta + k\delta) \exp[j(np\Delta + k\delta)r\Omega], \quad (r = 0, 1, \dots, NK - 1) \quad (39.5)$$

طیف فوریه درونیابی شده با جایگزینی $f(p\Delta + k\delta)$ در معادله (۳۹.۵) داده می‌شود. انواع مختلفی از درونیابی وجود دارد، مانند درونیابی ثابت، مثلثی، زنگی و مکعبی [۳]. در اینجا فقط درونیابی ثابت یا درونیابی مرتبه صفر را در نظر می‌گیریم. تعداد نقاط طیف افزایش می‌یابد زیرا یک نمونه از طیف درونیابی شده توسط درهم تنیدن کی زمانی ^۴ ساخته شده است. دنباله درونیابی $f(p\Delta + k\delta) = f(p\Delta)$ ، سپس معادله (۳۹.۵)

^۴interlace K-time

است که به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 F'(r\Omega) &= \frac{1}{NK} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} f(p\Delta) \exp[j(p\Delta + k\delta)r\Omega] \\
 &= \frac{1}{NK} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(n\Omega) \exp(-jnp\Omega\Delta) \exp[j(p\Delta + k\delta)r\Omega] \\
 &= F([r]_N\Omega)W(r)
 \end{aligned} \tag{۴۰.۵}$$

که در آن $r = [r]_N$ مدول N و $W(r)$ ضریب وزن در حوزه فوریه به صورت زیر داده می‌شود.

$$W(r) = \frac{1}{K} \frac{1 - \exp(j2\pi r/N)}{1 - \exp(j2\pi r/NK)} \tag{۴۱.۵}$$

نتیجه حاصلضرب دنباله $F([r]_N\Omega)$ که پسوند تناوب $F(n\Omega)$ و ضریب وزن $W(r)$ است.

پرسش‌ها

۱. معادله (۵.۵) را بدست آورید.
۲. قضیه خطی بودن، تشابه و انتقال را در DFT ثابت کنید.
۳. قضیه کانولوشن، قضیه همبستگی و فرمول پارسوال را در DFT ثابت کنید.
۴. توابع $\text{rect}(x-a)$ و $\text{rect}(x-a)$ را با استفاده از FFT محاسبه کنید و قسمت‌های حقیقی و موهومی آنها را رسم کنید.
۵. کانولوشن توابع $\text{rect}(x/a)$ و $\text{rect}(x/a)$ را با استفاده از FFT محاسبه کنید.
۶. زمان‌های محاسباتی خودبستگی را با تعداد نمونه $N = 2^M$ مقایسه کنید.
۷. زمان محاسبه برای یک دنباله داده حقیقی با N عدد نمونه را می‌توان با تقسیم داده‌ها به دنباله داده‌های اعداد فرد و زوج کاهش داد.

برای دنباله داده حقیقی $f(n)$ ، $(n = 0, 1, \dots, N-1)$ ، را به دو دنباله تقسیم کنید:

$$g_\text{v}(m) = f(2m), \quad g_\text{r}(m) = f(2m-1), \quad (m = 0, 1, \dots, N/2-1).$$

$$\begin{aligned}
 &\text{سپس، دنباله‌ای مختلط از تعداد داده } N/2 \\
 &h(m) = g_\text{v}(m) - jg_\text{r}(m)
 \end{aligned}$$

ساخته می‌شود. نشان دهید که دنباله حقیقی $f(n)$ می‌تواند تبدیل فوریه توسط FFT از دنباله مختلط $h(m)$ با تعداد داده $N/2$ باشد.

كتابنامه

- Nussbaumer, H. J. 1981. *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*. Springer-Verlagl, Berlin.
- Landau, R. H., Paez, M. J. and Bordeianu, C. C. 2015. *Computational Physics: Problem Solving with Python*, 3rd ed. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.

مراجع

1. Cooley, J. W. and Tukey, J. W. 1965. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.* 19: 297.
2. Yatagai, T. 1977. Interpolation method of computer-generated filters for large object formats. *Opt. Commun.* 15: 347.
3. Yoshikawa, N., Itoh M. and Yatagai, T. 1995. *Interpolation of reconstructed image in Fourier transform computer-generated hologram*. *Opt. Commun.* 119: 33.

فصل ۶

اپتیک فوریه

سیستم‌های نوری را می‌توان به عنوان سیستم‌های خطی در نظر گرفت، بنابراین با استفاده از تبدیل فوریه می‌توان آنها را تجزیه و تحلیل کرد. در ابتداء، نشان می‌دهیم که پراش فرنل به صورت یک انتگرال کانولوشن توصیف می‌شود و سپس ویژگی تبدیل فوریه عدسی مورد بحث قرار می‌گیرد. در ک سیستماتیک بسیاری از ویژگی‌های نوری سیستم‌های تصویربرداری همدوس و ناهمدوس انجام می‌شود.تابع انتقال نوری (OTF)^۱ در سیستم‌های تصویربرداری همدوس و ناهمدوس برای بحث در مورد خواص تصویربرداری معرفی شده‌اند. سپس قدرت تفکیک تعریف می‌شود. روش طیف زاویه‌ای برای تجزیه و تحلیل انتشار موج نیز مورد بحث قرار گرفته است. در نهایت، پراش در فضای سه بعدی بر اساس طیف سه بعدی ارائه شده است.

۱.۶ پراش فرنل

دوباره معادله (۴۱.۲) پراش فرنل را در نظر بگیرید. در تنظیم نوری شکل (۱.۶)، فرض کنید دامنه در صفحه‌های P_1 و P_2 به ترتیب $f(x_i, y_i)$ و $g(x_0, y_0)$ باشد. اگر فاصله l شرایط پراش فرنل را برآورده کند، معادله (۳۹.۲)، دامنه (x_0, y_0) را خواهد داد:

$$g(x_0, y_0) = \frac{jA}{\lambda l} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_i, y_i) \exp \left\{ -j \frac{k}{\lambda l} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} dx_i dy_i \quad (1.6)$$

معادله (۱.۶) برای سهولت می‌توان بصورت انتگرال کانولوشن بازنویسی کرد:

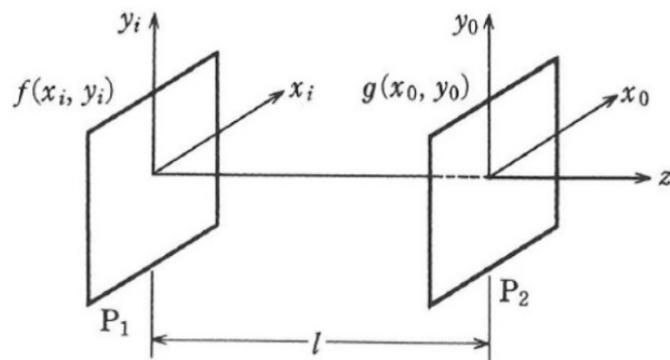
$$g(x_0, y_0) = A f(x_0, y_0) * h_l(x_0, y_0) \quad (2.6)$$

که در آن

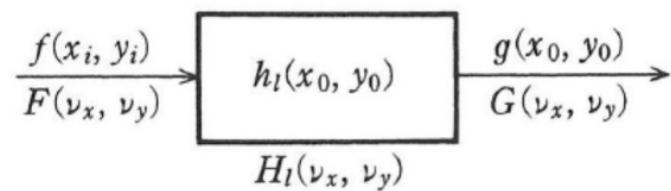
$$h_l(x_0, y_0) = \frac{j}{\lambda l} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda l} (x_0^2 + y_0^2) \right] \quad (3.6)$$

که در اپتیک به آن پاسخ ضربه یا تابع گسترش نقطه می‌گویند.

^۱Optical Transfer Functions (OTF)



شکل ۱.۶: هندسه برای محاسبه پراش فرنل



شکل ۲.۶: سیستم اپتیکی پراش فرنل

معادله (۲.۶) نشان می‌دهد که یک سیستم خطی با تابع پاسخ $h_l(x_0, y_0)$ خروجی را برای ورودی $f(x_i, y_i)$ می‌دهد. تبدیل فوریه معادله (۲.۶) خواهد بود

$$G(\nu_x, \nu_y) = C \cdot F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y) \quad (4.6)$$

که در آن

$$G(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[g(x_0, y_0)] \quad (5.6)$$

$$F(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[f(x_i, y_i)] \quad (6.6)$$

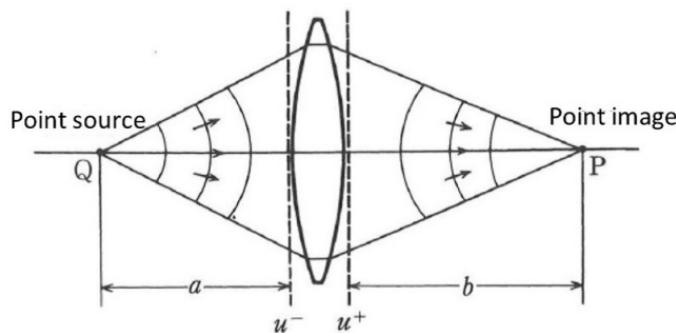
$$H(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[h_l(x_0, y_0)] = \exp[j\lambda l \pi(\nu_x, \nu_y)] \quad (7.6)$$

و C مقدار ثابتی است. نمودار سیستم تبدیل فرنل در شکل (۲.۶) نشان داده شده است. با توجه به پاسخ ضربه‌ای، باید توجه داشت که خروجی سیستم $h_l(x_0, y_0)$ توسط ورودی منبع نقطه‌ای $\delta(x_i, y_i)$ واقع در صفحه P_1 و معادله (۳.۶) یک موج کروی است که توسط معادله (۳۵.۱) توصیف شده است، داده می‌شود^۲

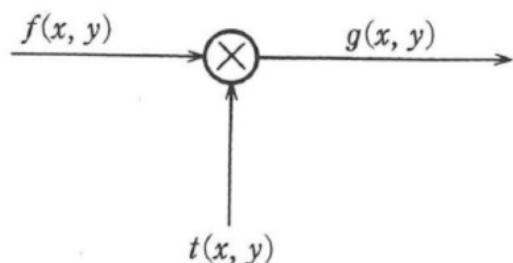
^۲ به درستی کروی نیست، بلکه یک پارaboloid حاصل از دوران است.

۲.۶ تبدیل فوریه عمکرد لنز

همانطور که در شکل (۳.۶) نشان داده شده است، منبع نقطه‌ای Q را در نظر بگیرید که در مقابل عدسی با فاصله a و تصویر P آن در فاصله b از عدسی قرار دارد. معادله تصویربرداری عدسی خواهد بود



شکل ۳.۶: عملکرد عدسی



شکل ۴.۶: سیستم خطی عدسی

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (8.6)$$

که در آن f نشان دهنده فاصله کانونی است. جبهه موج از منبع نقطه‌ای Q ، که به صفحه جلویی عدسی می‌رسد، یک موج کروی است که توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$u^-(x, y) = A \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda a} (x^2 + y^2) \right] \quad (9.6)$$

به همین ترتیب، یک جبهه موج کروی از صفحه پشتی عدسی با روزنه $p(x, y)$ که به تصویر نقطه‌ای می‌رسد، خواهد بود

$$u^+(x, y) = A' \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda b} (x^2 + y^2) \right] \cdot p(x, y) \quad (10.6)$$

که در آن تابع $p(x, y)$ تابع مردمک نامیده می‌شود که به صورت زیر تعریف شده است

$$(11.6) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & : \text{داخل روزنه لنز} \\ 0 & : \text{خارج روزنه لنز} \end{cases}$$

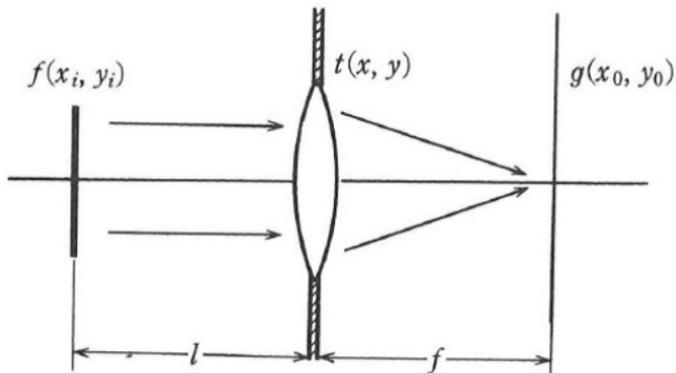
میزان عبور $t(x, y)$ عدسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(12.6) \quad t(x, y) = \frac{u^+(x, y)}{u^-(x, y)}$$

که در آن دامنه بین صفحه جلویی A و صفحه پشتی A' عدسی تغییر نمی‌کند. با استفاده از معادله (۸.۶)، داریم

$$(13.6) \quad t(x, y) = \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x^+ + y^+) \right] \cdot p(x, y)$$

این معادله عملکرد عدسی را توصیف می‌کند که نمودار عملیاتی آن در شکل (۴.۶) نشان داده شده است.



شکل ۵.۶: تبدیل فوریه عملکرد لنز

همانطور که در شکل (۵.۶) نشان داده شده است، جسم $f(x, y)$ را در جلوی عدسی در فاصله l در نظر بگیرید و صفحه مشاهده در صفحه کانونی پشتی عدسی قرار دارد. از آنجایی که انتشار موج در فاصله l از صفحه جسم پراش فرنل است، جبهه موج درست در جلوی عدسی به صورت زیر داده می‌شود

$$(14.6) \quad u^-(x, y) = f(x, y) * \frac{j}{\lambda l} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda l} (x^+ + y^+) \right] = \frac{j}{\lambda l} \iint f(x_i, y_i) \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda l} [(x - x_i)^+ + (y - y_i)^+] \right\} dx_i dy_i$$

با استفاده از معادله (۲.۶)، تبدیل فوریه آن خواهد بود

$$(15.6) \quad U^-(\nu_x, \nu_y) = F(\nu_x, \nu_y) \exp [j \lambda l \pi (\nu_x^+ + \nu_y^+)]$$

دامنه درست بعذار عدسی داده می‌شود:

$$u^+(x, y) = t(x, y)u^-(x, y) \quad (16.6)$$

تبديل فرنل معادله (۱۶.۶) دامنه را در صفحه کانونی میدهد

$$\begin{aligned} g(x_0, y_0) &= u^+(x, y) * \frac{j}{\lambda f} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x^0 + y^0) \right] \\ &= \frac{j}{\lambda f} \iint u^+(x, y) \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda f} [(x_0 - x)^0 + (y_0 - y)^0] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (17.6)$$

سرانجام با وارد کردن معادلات (۱۶.۶) و (۱۳.۶) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g(x_0, y_0) &= \frac{j}{\lambda f} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x_0^0 + y_0^0) \right] \\ &\quad \times \iint u^-(x, y) p(x, y) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (xx_0 + yy_0) \right] dx dy \\ &= \frac{j}{\lambda f} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x_0^0 + y_0^0) \right] U^-(\nu_x, \nu_y) * P(\nu_x, \nu_y) \end{aligned} \quad (18.6)$$

که در آن

$$\nu_x = \frac{x_0}{\lambda f} \quad (19.6)$$

$$\nu_y = \frac{y_0}{\lambda f} \quad (20.6)$$

$$U^-(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[u^-(x, y)] \quad (21.6)$$

$$P(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[p(x, y)] \quad (22.6)$$

$p(x, y) = 1$. حالتی را در نظر بگیرید که اندازه روزنہ به اندازه کافی بزرگ است، یعنی

$$P(\nu_x, \nu_y) = \delta(\nu_x, \nu_y) \quad (23.6)$$

سرانجام، داریم

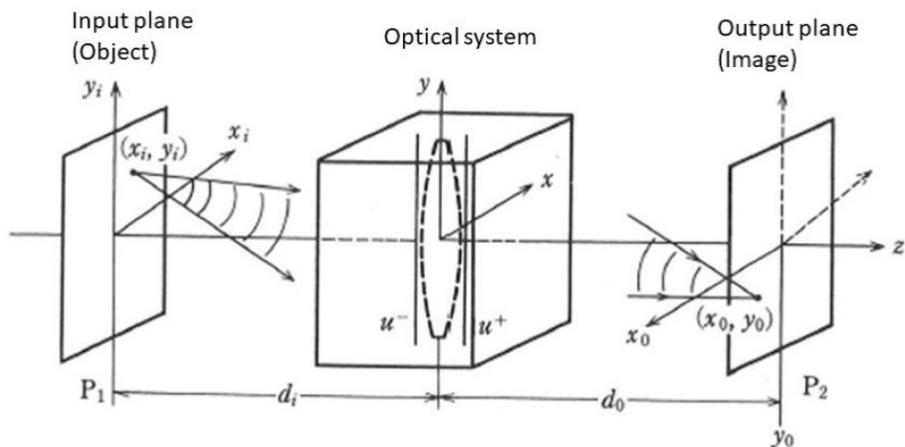
$$g(x_0, y_0) = \frac{j}{\lambda f} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} \left(1 - \frac{l}{f} \right) (x_0^0 + y_0^0) \right] \cdot F \left(\frac{x_0}{\lambda f}, \frac{y_0}{\lambda f} \right) \quad (24.6)$$

این به این معنی است که تبدیل فوریه سیگنال ورودی $f(x, y)$ در صفحه کانونی به دست می‌آید، به جز عبارت فاز $[-j\pi(1-l/f)(x_0^0 + y_0^0) / \lambda f]$ لازم به ذکر است که عبارت فاز در مورد $f = l$ حذف می‌شود. یعنی ورودی واقع در صفحه کانونی جلوئی تبدیل فوریه کامل را می‌دهد که در صفحه کانونی عقب به دست می‌آید. به این عمل تبدیل فوریه عدسی می‌گویند، که در آن تبدیل فوریه با $1/\lambda f$ مقیاس‌بندی می‌شود.

۳.۶ تصویربرداری همدوس

تا به حال، به طور ضمنی درباره پدیده‌های پراش برای یک منبع نور تک رنگ بحث کرده‌ایم و امواج نور از نقاط جسم با یکدیگر همدوس (منسجم) هستند. در همین شرایط، پدیده‌های تصویربرداری در این فصل تحلیل می‌شوند. فرض کنید که انتشار موج خطی است و بنابراین، اصل برهم‌نہی دامنه موج معتبر است. در مورد تصویربرداری این اصل معتبر است.

سیستم نوری نشان داده شده در شکل (۶.۶) را در نظر بگیرید. جسمی در صفحه P_1 قرار دارد و تصویر آن در صفحه P_2 تشکیل می‌شود. وقتی مطابقت یک نقطه (x_i, y_i) روی جسم با صفحه مشاهده (x_0, y_0) و دامنه جسم $f(x_i, y_i)$ باشد، دامنه در صفحه مشاهده P_2 توسط انتگرال برهم‌نہی به صورت زیر نوشته می‌شود



شکل ۶.۶: سیستم نوری تصویربرداری

$$\delta(x - x_i, y - y_i) \rightarrow \frac{1}{i\lambda d_i} \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda d_i} (x^2 + y^2)\right] \rightarrow \times \rightarrow \frac{1}{i\lambda d_0} \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda d_0} (x^2 + y^2)\right] \rightarrow h(x_0, y_0)$$

$$t(x, y) = \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)\right] \cdot p(x, y)$$

شکل ۷.۶: سیستم خطی تصویربرداری جسم نقطه‌ای

$$g(x_0, y_0) = \iint f(x_i, y_i) h(x_0, y_0; x_i, y_i) dx_i dy_i \quad (25.6)$$

تابع $h(x_0, y_0; x_i, y_i)$ پاسخ ضربه است و تابع پاسخ نقطه یا تابع گسترش نقطه نامیده می‌شود. اگر سیستم نوری کامل باشد، توزیع تصویر نقطه‌ای یک نقطه کامل است که با

تابع دلتا توصیف می‌شود

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = g(x_0, y_0) = A\delta(x_0 \pm mx_i, y_0 \pm ny_i) \quad (26.6)$$

که در آن A و m به ترتیب نشان دهنده یک مقدار ثابت مختلط و بزرگنمایی سیستم نوری هستند. در موارد علامت $+$ ، یک تصویر قائم و - یک تصویر وارونه به دست می‌آید. در موارد کلی، تصویر نقطه‌ای به دلیل اثر پراش یک روزنۀ محدود سیستم نوری تصویربرداری یک نقطه نیست.

سپس، تابع گسترش نقطه را در یک سیستم تصویربرداری همدوس محاسبه می‌کنیم. حالتی را در نظر بگیرید که یک جسم نقطه‌ای در (x_i, y_i) در صفحه جسم P_1 در فاصله d_i از عدسی تصویربرداری قرار دارد و با نور تک رنگ با دامنه واحد خود، همانطور که در شکل (۲۶.۶) نشان داده شده، روش می‌شود. دامنه مختلط در صفحه P_1 با $\delta(x - x_i, y - y_i)$ توصیف می‌شود. تابع گسترش نقطه $h(x_0, y_0, x_i, y_i)$ با دامنه در صفحه تصویر P_2 که در فاصله d_0 از عدسی تصویربرداری قرار دارد، داده و جبهه موج $f(x_i, y_i)$ بسوی عدسی منتشر می‌شود، سپس از عدسی عبور کرده و به صفحه تصویربرداری انتشار می‌یابد. نمودار سیستم این فرآیند در شکل (۷.۶) نشان داده شده است.

$$u^-(x, y) = \delta(x - x_i, y - y_i) * \frac{j}{\lambda d_i} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d_i} (x^\circ + y^\circ) \right] \quad (27.6)$$

$$u^+(x, y) = t(x, y) \times u^-(x, y) \quad (28.6)$$

$$g(x_0, y_0) = u^+(x_0, y_0) * \frac{j}{\lambda d_0} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d_0} (x_0^\circ + y_0^\circ) \right] \quad (29.6)$$

سرانجام داریم

$$\begin{aligned} h(x_0, y_0; x_i, y_i) &= g(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{\lambda^2 d_i d_0} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d_0} (x_0^\circ + y_0^\circ) \right] \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d_i} (x_i^\circ + y_i^\circ) \right] \\ &\quad \times \iint p(x, y) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f} \right) (x^\circ + y^\circ) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{x_i}{d_i} + \frac{x_0}{d_0} \right) x + \left(\frac{y_i}{d_i} + \frac{y_0}{d_0} \right) y \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (30.6)$$

از آنجایی که شدت تصویر فقط قابل مشاهده است، اصطلاح فاز خارج از انتگرال $\exp[-j\pi/\lambda d_0 \cdot (x_0^\circ + y_0^\circ)]$ ممکن است نادیده گرفته شود، اما عبارت فاز دیگر $\exp[-j\pi/\lambda d_i \cdot (x_i^\circ + y_i^\circ)]$ را نمی‌توان نادیده گرفت، زیرا متغیرهای انتگرال x_i و y_i در معادله (۲۶.۶) انتگرال برهم نهی گنجانده شده‌اند.

در یک سیستم تصویربرداری معمولی، تمام ناحیه صفحه جسم یک نقطه در صفحه تصویربرداری را شامل نمی‌شود، اما ناحیه محدود جسم نقطه تصویر را تشکیل می‌دهد. بر این اساس، می‌توان $y_i = m$ و $x_i = x_0 = m$ را در نظر گرفت و بنابراین این جمله فاز نیز تابعی از (x_0, y_0) در نظر گرفته می‌شود. به همین دلیل، زمانی که جمله فاز اول

نادیده گرفته می‌شود، جمله فاز دوم را می‌توان نادیده گرفت. معادله (۳۰.۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} h(x_0, y_0; x_i, y_i) &= \frac{1}{\lambda^2 d_i d_0} \iint p(x, y) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f} \right) (x^* + y^*) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{x_i}{d_i} + \frac{x_0}{d_0} \right) x + \left(\frac{y_i}{d_i} + \frac{y_0}{d_0} \right) y \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (31.6)$$

با استفاده از معادله عدسی

$$\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f} = 0 \quad (32.6)$$

خواهیم داشت

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = \frac{1}{\lambda^2 d_i d_0} \iint p(x, y) \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{x_i}{d_i} + \frac{x_0}{d_0} \right) x + \left(\frac{y_i}{d_i} + \frac{y_0}{d_0} \right) y \right] \right\} dx dy \quad (33.6)$$

از آنجایی که بزرگنمائی m سیستم تصویربرداری از رابطه زیر بدست می‌آید

$$m = \frac{d_0}{d_i} \quad (34.6)$$

معادله (۳۳.۶) را بازنویسی می‌کنیم

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = \frac{1}{\lambda^2 d_i d_0} \iint p(x, y) \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda d_0} [(x_0 + mx_i)x + (y_0 + my_i)y] \right\} dx dy \quad (35.6)$$

با تعریف شرایط جدید

$$\nu_x = \frac{x}{\lambda d_0} \quad (36.6)$$

$$\nu_y = \frac{y}{\lambda d_0} \quad (37.6)$$

تابع گسترش نقطه بصورت زیر داده می‌شود

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = \iint p(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y) \exp \{ j 2\pi [(x_0 + mx_i)\nu_x + (y_0 + my_i)\nu_y] \} d\nu_x d\nu_y \quad (38.6)$$

این بدان معنی است که تابع گسترش نقطه تبدیل فوریه تابع مردمک $p(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y)$ است. با تبدیل مختصات بیشتر

$$x'_i = -mx_i \quad (39.6)$$

$$y'_i = -my_i \quad (40.6)$$

تابع گسترس نقطه تابعی از $x_0 - x'_i$ و $y_0 - y'_i$ خواهد بود

$$h(x_0 - x'_i, y_0 - y'_i) = \iint p(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y) \exp\{j2\pi[(x_0 - x'_i)\nu_x + (y_0 - y'_i)\nu_y]\} d\nu_x d\nu_y \quad (41.6)$$

این تابع گسترس نقطه‌ای تنها تابعی از تفاوت مختصات است و بنابراین شکل آن، نه به موقعیت جسم بلکه به موقعیت نسبی، تغییرناپذیر است. این بدان معنی است که این سیستم نوری مستقل از مکان است و انتگرال برهم‌نهی معادله (۲۵.۶) به عنوان یک انتگرال کانولوشن نوشته شده است،

$$g(x_0, y_0) = \frac{1}{m^4} \iint f\left(-\frac{x'_i}{m}, -\frac{y'_i}{m}\right) h(x_0 - x'_i, y_0 - y'_i) dx'_i dy'_i \quad (42.6)$$

در اینجا مختصات را در صفحه P_2 به صورت (x_i, y_i) با توجه به معادلات (۳۹.۶) و $h(x_0 - x_i, y_0 - y_i)/m$ و $f(-x_i/m, -y_i/m)/m$ را به ترتیب به صورت (۴۰.۶) و $f(x_i, y_i)$ دوباره تعریف می‌کنیم. داریم

$$g(x_0, y_0) = \iint f(x_i, y_i) h(x_0 - x_i, y_0 - y_i) dx_i dy_i = f(x_0, y_0) * h(x_0, y_0) \quad (43.6)$$

و شدت تصویر خواهد بود

$$I_c = |f(x_0, y_0) * h(x_0, y_0)|^2 \quad (44.6)$$

در موردی که طول موج λ به اندازه کافی کوچک و اندازه مردمک به اندازه کافی بزرگ است، می‌توانیم $p = 1$ را فرض کنیم. از معادله (۴۱.۶) داریم

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = \delta(x - x_i, y - y_i) \quad (45.6)$$

فقط در این حالت اثر پراش ناچیز است و تصویر کاملی به دست می‌آید.

۴.۶ تصویربرداری ناهمدوس

هنگامی که یک جسم توسط یک منبع نور سفید و نه توسط یک منبع خاص مانند لیزر روشن می‌شود، امواج نوری پراکنده شده از جسم با یکدیگر ناهماهنگ هستند. اجازه دهید دامنه موج $f(x_i, y_i)$ و $f(x'_i, y'_i)$ از نقاط (x_i, y_i) و (x'_i, y'_i) روی جسم باشد. با توجه به بخش ۱.۱۰، اگر دو موج ناهمدوس باشند، میانگین زمانی حاصل ضرب دو موج $\langle f(x_i, y_i) f^*(x'_i, y'_i) \rangle$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle f(x_i, y_i) f^*(x'_i, y'_i) \rangle = c I_f(x_i, y_i) \delta(x_i - x'_i, y_i - y'_i) \quad (46.6)$$

که در آن c نشان دهنده عدد ثابت است. این بدان معنی است که شدت $I_f(x_i, y_i)$ به دلیل تداخل فقط بین امواج از یک نقطه روی جسم به دست می‌آید و شدت در سایر موارد صفر است زیرا امواج از نقاط مختلف با یکدیگر تداخل ندارند.

در این حالت، شدت تصویر توسط

$$I_i(x_0, y_0) = c \iint [h(x_0 - x', y_0 - y')]^2 I_f(x', y') dx' dy' \quad (47.6)$$

شدت تصویر I_i توسط یک انتگرال کانولوشن از شدتتابع گسترش نقطه $|h|^2$ و شدت جسم I_f نوشته می‌شود. این رابطه با رابطه‌ای مطابقت دارد که دامنه تصویر g توسط انتگرال کانولوشن دامنه تابع نقطه گسترش h و دامنه شی f در تصویربرداری همدوس به دست می‌آید. شدت تصویر در تصویربرداری همدوس با مجذور قدر مطلق دامنه تصویر داده می‌شود. سیستم تصویربرداری در هر مورد به شرح زیر خلاصه می‌شود.

$$\begin{aligned} I_c &= |h * f|^2 && \text{تصویربرداری همدوس} \\ I_i &= |h|^2 * I_f = |h|^2 * |f|^2 && \text{تصویربرداری ناهمدوس} \end{aligned}$$

۵.۶ پاسخ فرکانسی سیستم نوری

توابع انتقال نوری (OTF)^۴ را در تصویربرداری همدوس و ناهمدوس در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی شامل تمام اطلاعات مربوط به سیستم، همانطور که در بخش ۳.۲.۴ و ۳.۴ ذکر شد، خطی است.

۱.۵.۶ تصویربرداری همدوس

از آنجا که کانولوشن دامنه شیء و عملکرد گسترش نقطه دامنه تصویر را نشان می‌دهد، منطقی است که عملکرد پاسخ فرکانس با تبدیل فوریه از دامنه عملکرد پاسخ نقطه تعریف شود. از معادله (۴۱.۶) و با $m = 1$ داریم

$$h(x_0, y_0) = \iint p(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y) \exp[j2\pi(x_0 \nu_x + y_0 \nu_y)] d\nu_x d\nu_y \quad (48.6)$$

تبدیل فوریه گرفتن عملکرد گسترش نقطه، پاسخ فرکانسی را می‌دهد

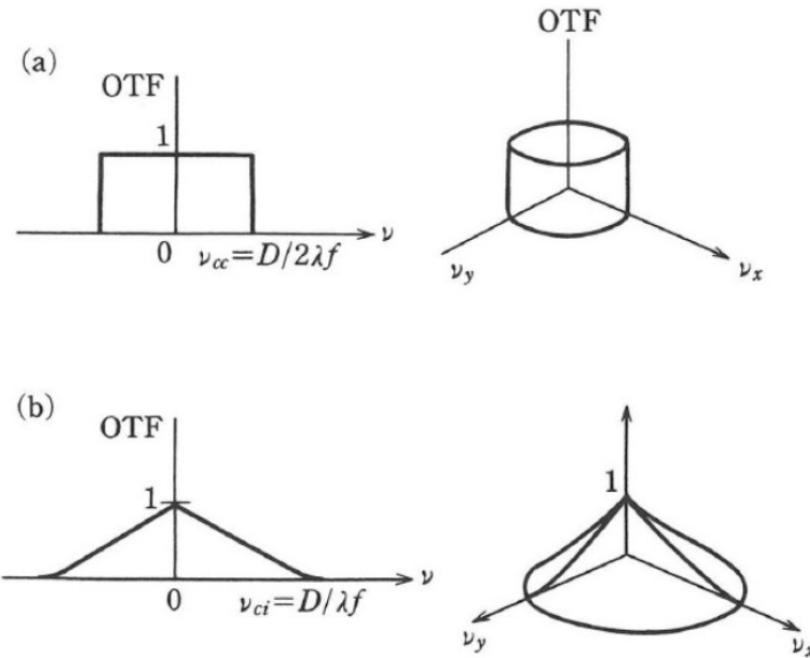
$$\begin{aligned} H(\nu_x, \nu_y) &= \mathcal{F}[h(x_0, y_0)] \\ &= \mathcal{F}\{\mathcal{F}[p(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y)]\} \\ &= p(-\lambda d_0 \nu_x, -\lambda d_0 \nu_y) \end{aligned} \quad (49.6)$$

با تعریف مختصات تابع مردمک، داریم

$$H(\nu_x, \nu_y) = p(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y) \quad (50.6)$$

توابع انتقال نوری در سیستم تصویربرداری همدوس با خود تابع مردمک برابر است. شکل (الف) OTF از یک سیستم تصویربرداری همدوس کامل با قطر D مردمک دایره‌ای را

^۴ Optical Transfer Functions (OTF)



شکل ۸.۶: توابع انتقال نوری در (الف) تصویربرداری همدوس کامل (ب) و تصویربرداری ناهمدوس کامل.

نشان می‌دهد. بالاترین فرکانس عبور از این سیستم تصویربرداری همدوس به نام فرکانس قطع نامیده می‌شود و برابر است با:

$$\nu_{cc} = \frac{D}{2\lambda f} \quad (51.6)$$

۲.۵.۶ تصویربرداری ناهمدوس

در سیستم تصویربرداری ناهمدوس، شدت تصویر با کانولوشن شدت جسم و شدت تابع پاسخ نقطه‌ای داده می‌شود. OTF از سیستم تصویربرداری ناهمدوس با رابطه زیر داده می‌شود

$$H(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[|h(x_0, y_0)|^r] \quad (52.6)$$

معمولًاً OTF با مقدار فرکانس صفر نرمالیزه می‌شود.

$$\begin{aligned} H(\nu_x, \nu_y) &= \frac{\mathcal{F}[|h(x_0, y_0)|^r]}{\mathcal{F}[|h(x_0, y_0)|^r]_{\nu_x=0, \nu_y=0}} \\ &= \iint \frac{H(\nu_x, \nu_y) * H^*(\nu_x, \nu_y)}{|H|^r d\nu_x d\nu_y} \\ &= \frac{p(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y) * p^*(\lambda d_0 \nu_x, \lambda d_0 \nu_y)}{|p|^r d\nu_x d\nu_y} \end{aligned} \quad (53.6)$$

خودبستگی تابع مردمک، OTF را در سیستم تصویربرداری ناهمدوس می‌دهد. شکل (۸.۶)(ب) OTF از یک سیستم تصویربرداری ناهمدوس کامل با قطر D مردمک دایره‌ای را نشان می‌دهد. فرکانس قطع آن برابر است با

$$\nu_{ci} = \frac{D}{\lambda f} \quad (۵۴.۶)$$

و دو برابر بزرگتر از سیستم تصویربرداری همدوس با همان بعد مردمک است.

۶.۶ قدرت تفکیک

همانطور که در بالا ذکر شد، مفهوم OTF برای ارزیابی عملکرد نوری مهم است. رابطه بین OTF و ضوح نوری، که به طور گسترده به عنوان یکی از معیارهای عملکرد نوری استفاده می‌شود، مورد بحث قرار می‌گیرد.

وضوح نوری^۴ معیاری است که نشان می‌دهد یک سیستم نوری چگونه می‌تواند جسم ریز را تمیز دهد. آن بستگی به شرایط تشخیص دارد. از آنجایی که جسم توسط چشم یا توسط یک آشکارساز الکتروپتیکی مشاهده می‌شود، به طور کلی تعریف آن دشوار است. یکی از معیارهای مفید حدود تفکیک، معیار ریلی^۵ است. دو منبع نقطه‌ای را در نظر بگیرید که با یکدیگر ناهمدوس هستند و سیستم تصویربرداری ایده‌آل و بدون ابیراهی^۶ است. معیار ریلی به عنوان کوچکترین فاصله بین دو تصویر از منبع نقطه‌ای که می‌تواند تفکیک شود تعریف می‌شود. همانطور که در شکل (۹.۶) نشان داده شده است، اگر منابع نقطه‌ای به اندازه کافی از هم جدا شده باشند، منابع نقطه‌ای به عنوان دو تصویر جدا شده تفکیک می‌شوند. اگر دو منبع نقطه‌ای نزدیک‌تر شوند، تصاویر آنها نزدیک‌تر، همپوشانی بیشتر، و در نهایت به عنوان یک تصویر مشاهده می‌شوند.

از معادله (۶۷.۲)، شدت تصویر به شرح زیر است

$$I(w) = I_0 \left| \frac{2J_1\left(\frac{kD}{\lambda f}w\right)}{\frac{kD}{\lambda f}w} \right|^2 \quad (۵۵.۶)$$

معیار ریلی حداقل فاصله بین دو تصویر نقطه را نشان می‌دهد که می‌تواند به عنوان دو تصویر تفکیک شود. حداقل فاصله L به عنوان فاصله بین موقعیت حداقل شدت تصویر نقطه‌ای و اولین حداقل شدت تصویر نقطه دیگر، شعاع Δw اولین حلقه حلقوی تیره دیسک ایری^۷ که بصورت زیر

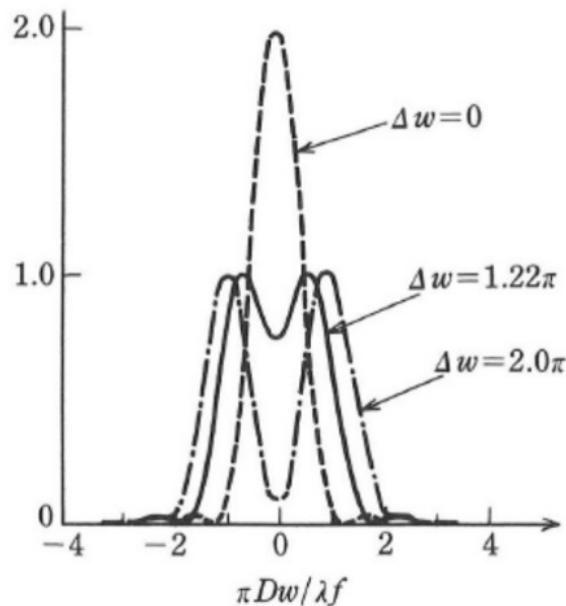
$$\Delta = 1/22 \frac{\lambda f}{D} \quad (۵۶.۶)$$

^۴Optical Resolution

^۵Rayleigh criterion

^۶Aberration

^۷Airy disc



شکل ۹.۶: معیار ریلی توزیع شدت دو تصویر نقطه ایدهآل با فاصله متفاوت Δw .

از معادله (۲۶.۲) داده می‌شود. حداقل فاصله خواهد بود

$$L = 1/22 \frac{\lambda f}{D} \quad (57.6)$$

در این حالت، شدت نقطه میانی بین دو تصویر نقطه‌ای حدود ۲۰ درصد کمتر از شدت بیشینه تصاویر نقطه‌ای است. عکس فاصله R قدرت تفکیک R^{\wedge} را می‌دهد

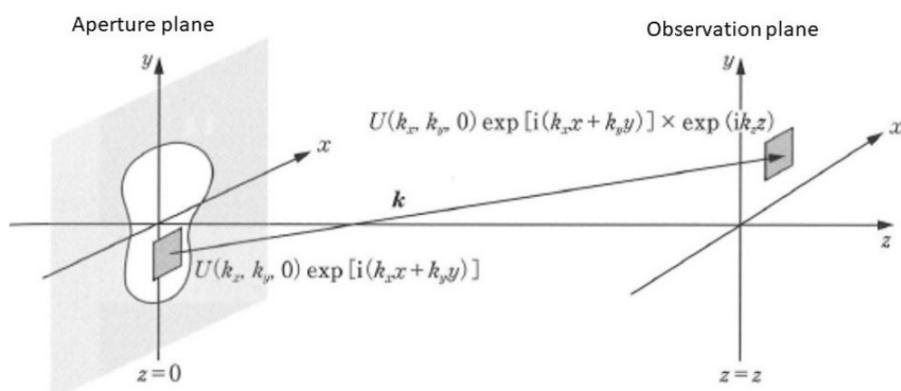
$$R = \frac{1}{L} = 0.82 \frac{D}{\lambda f} \quad (58.6)$$

فرکانس قطع $\nu_c = D/\lambda f$ بر اساس OTF و توان تفکیک R به خوبی با یکدیگر مطابقت دارد، اما این تفاوت حدود ۲۰ درصد است. OTF پاسخ فرکانسی را برای همه فرکانس‌های فضایی توصیف می‌کند، اما توان تفکیک کننده R فقط حد فرکانس را بر اساس معیار ریلی نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که فرکانس قطع برابر با توان تفکیک R برای مردمک مستطیلی سیستم تصویربرداری است زیرا پراش فراونهوفر یک روزنہ مستطیلی با معادله (۵۹.۲) داده می‌شود.

^λResolving Power

۷.۶ روش طیف زاویه‌ای

معادله پراش فرنل^۹ (۴۱.۲) یک معادله تقریبی است که دامنه مختلط از جبهه موج پراش مشاهده شده در فاصله‌ای از روزنے را توصیف می‌کند. دامنه در فاصله کوتاهتر از روزنے توسط انتگرال پراش فرنل-کیرشهوف یا معادله پراش ریلی-سومرفلد بدون تقریب به دست می‌آید.



شکل ۷.۶: محاسبه پراش با روش طیف زاویه‌ای

رویکرد دیگر بر اساس معادله هلم‌هولتز (۵۲.۱) است. موجی را در نظر بگیرید که در جهت z ، همانطور که در شکل نشان داده شده، منتشر می‌شود. روزنے در صفحه $z = 0$ قرار دارد و مختصات آن (x, y) است. اجازه دهید دامنه مختلط موج پراش را در صفحه $z = z$ محاسبه کنیم. تبدیل فوریه دامنه مختلط موج $u(x, y, \circ)$ در صفحه روزنے با

$$U(\nu_x, \nu_y, \circ) = \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y, \circ) \exp[j2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] dx dy \quad (۵۹.۶)$$

و عکس تبدیل فوریه آن خواهد بود

$$u(x, y, \circ) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\nu_x, \nu_y, \circ) \exp[-j2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] d\nu_x d\nu_y \quad (۶۰.۶)$$

این بدان معنی است که دامنه مختلط موج $u(x, y, \circ)$ در صفحه روزنے به امواج صفحه‌ای $\exp[-j2\pi(x\nu_x, +y\nu_y)]$ با دامنه آنها $U(\nu_x, \nu_y, \circ)$ تجزیه و به جهات مختلف منتشر می‌شود. لازم به ذکر است که موج صفحه‌ای که در جهت k منتشر می‌شود با $A \exp[-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ داده و مولفه‌های بردار عدد موج آن عبارتند از

$$k_x = 2\pi\nu_x, \quad k_y = 2\pi\nu_y, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (۶۱.۶)$$

^۹Fresnel diffraction

در این صورت معادله (۵۹.۶) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$U(k_x, k_y, \circ) = \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y, \circ) \exp[j(xk_x + yk_y)] dx dy \quad (62.6)$$

جمله $U(k_x, k_y, \circ)$ بنام طیف زاویه‌ای نامیده می‌شود.

برای محاسبه موج در صفحه مشاهده $z = z$ ، انتشار مؤلفه موج مسطح $U(k_x, k_y, \circ) \exp[-j(k_x x + k_y y)] \times \exp(-jk_z z)$ را از \circ به $z = z$ با $k_y y$ در نظر گیریم.^{۱۰}

سرانجام، مجموع امواج مؤلفه منتشر شده، دامنه مختلط موج را در صفحه مشاهده $z = z$ می‌دهد:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U(k_x, k_y, \circ) \exp[-j(xk_x + yk_y)] \exp(-j(\sqrt{k_x^2 - k_y^2} \cdot z)) dk_x dk_y \quad (63.6)$$

شکل‌های (۱۱.۶) و (۱۲.۶) نمونه‌هایی از محاسبه پراش بوسیله روش طیف زاویه‌ای را نشان می‌دهند.^{۱۱}

۸.۶ پراش بر اساس طیف فوریه سه بعدی

تا کنون، همانطور که در شکل (۱.۶) نشان داده شده است، فقط توزیع دو بعدی $f(x, y)$ را به عنوان یک الگوی ورودی در نظر می‌گیریم. پراش از یک توزیع سه بعدی $f(x, y, z)$ را می‌توان به طور مستقیم بر اساس طیف فوریه سه بعدی محاسبه کرد [۳]. شکل (۱۳.۶) هندسه پراش از جسم سه بعدی $f(x, y, z)$ را نشان می‌دهد. اگرچه جسم سه بعدی با یک نور همدوس مانند لیزر روشن می‌شود، می‌توان آن را به صورت مجموعه‌ای از منابع نور نقطه‌ای خود نورانی در نظر گرفت که جبهه موج‌های کروی همسانگرد ساطع می‌کنند. جبهه موج پراش در یک نقطه (x, y, z) در فضای سه بعدی با رابطه زیر داده می‌شود:

$$g(x, y, z) = \iiint f(x_0, y_0, z_0) h(x - x_0, y - y_0, z - z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (64.6)$$

$$= f * h(x, y, z) \quad (65.6)$$

اچون موج در $z = z$ با رابطه زیر داده می‌شود:^{۱۲}

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U(k_x, k_y, z) \exp[-j(xk_x + yk_y)] dk_x dk_y \quad (A)$$

این معادله باید معادله هلم‌هولتز (۵۲.۱) را برآورده کند. با جایگزینی این معادله در معادله (۵۲.۱)، داریم

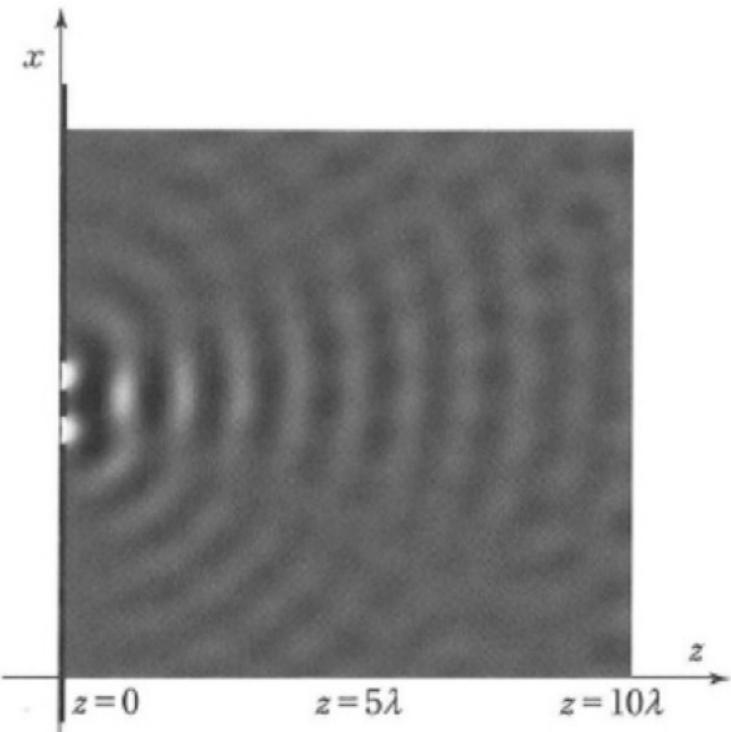
$$-(k_x^2 + k_y^2)U(k_x, k_y, z) + \frac{d^2}{dz^2}U(k_x, k_y, z) + k^2 U(k_x, k_y, z) = 0$$

و جواب آن برابر است با

$$U(k_x, k_y, z) = U(k_x, k_y, \circ) \exp\left(-j\sqrt{k_x^2 - k_y^2} \cdot z\right) \quad (B)$$

معادله (۶۳.۶) از جایگزینی معادله (B) در معادله (A) بدست می‌آید.

^{۱۲} همانطور که در بخش ۱.۶، تئوری پراش اسکالار در نزدیکی روزنه یا روزنه بسیار کوچک، که اندازه آن از چندین طول موج کوچکتر است، صحیح نیست. اینها فقط نمونه‌های کیفی هستند.



شکل ۱۱.۶: محاسبه پراش با روش طیف زاویه‌ای. دو روزنه به عرض 5λ ٪ و به فاصله λ .

که در آن

$$h(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \exp\left(\frac{-j2\pi}{\lambda} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \quad (66.6)$$

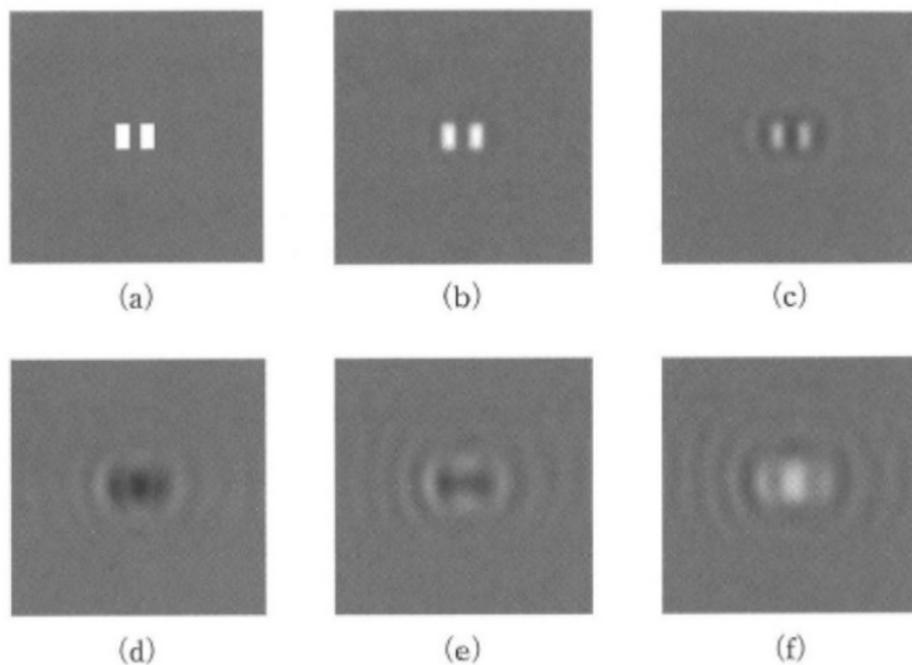
زیرا تابع گسترش نقطه‌ای معادله (۶۶.۶) یک موج کروی را نشان می‌دهد و معادله هلم‌هولتز معادله (۵۲.۱) را برآورده می‌کند. در فضای آزاد سه بعدی، معادله (۶۶.۶) یک فرمول پراش دقیق به دست می‌دهد. طیف فوریه سه بعدی $h(x, y, z)$ را می‌توان به صورت تحلیلی زیر بدست آورد [۴]:

$$H(u, v, w) = \mathcal{F}[h(x, y, z)] = \frac{1}{4\pi^2(u^2 + v^2 + w^2 - 1/\lambda^2)} \quad (67.6)$$

که در آن (u, v, w) مختصات فرکانس مکانی (x, y, z) را نشان می‌دهد. با استفاده از قضیه کانولوشن در (۶۵.۶)، معادله (۶۵.۶) بازنویسی می‌شود

$$g(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint \frac{F(u, v, w)}{u^2 + v^2 + w^2 - 1/\lambda^2} \exp[-j2\pi(ux + vy + wz)] du dv dw \quad (68.6)$$

که در آن $F(u, v, w)$ طیف سه بعدی فوریه $f(x, y, z)$ را نشان می‌دهد. از آنجا که جبهه $z = r$ موج پراکنده باید در یک صفحه دو بعدی خاص در نظر گرفته شود، توزیع دو بعدی



شکل ۱۲.۶: محاسبه پراش با روش طیف زاویه‌ای. همان دو روزنہ که در شکل (۱۱.۶) نشان داده شد. در (الف) $z = 0$ ، (ب) $z = 1\lambda$ ، (ج) $z = 25\lambda$ ، (د) $z = 50\lambda$ ، (ه) $z = 75\lambda$ در شکل (۱۰.۶).

از $g(x, y, z)$ به شرح زیر استخراج می‌شود:

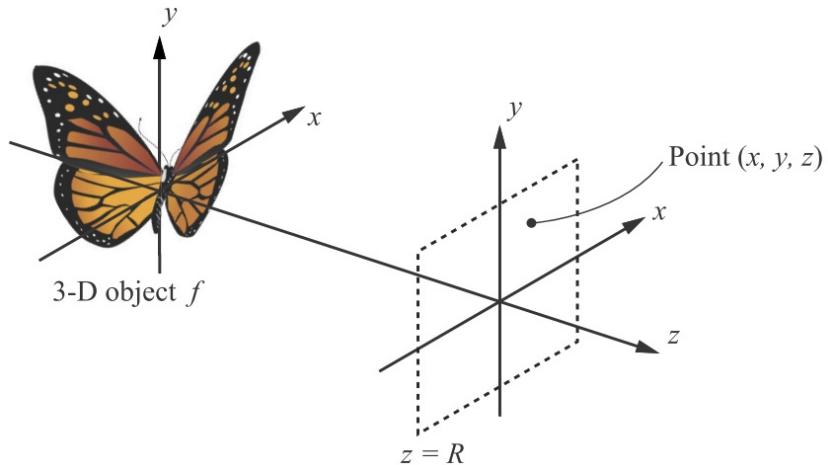
$$g(x, y, z)|_{z=R} = \frac{1}{4\pi^2} \iiint \frac{F(u, v, w)}{u^2 + v^2 + w^2 - 1/\lambda^2} \exp[-j2\pi(ux + vy + wR)] dudvdw \quad (۶۹.۶)$$

انتگرال (۶۹.۶) با توجه به w دارای دو تکین^{۱۲} در $w = \pm\sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}$ است. انتگرال با در نظر گرفتن صفحه مختلط $\xi - j\eta$ همانطور که در شکل (۱۴.۶) نشان داده شده است.

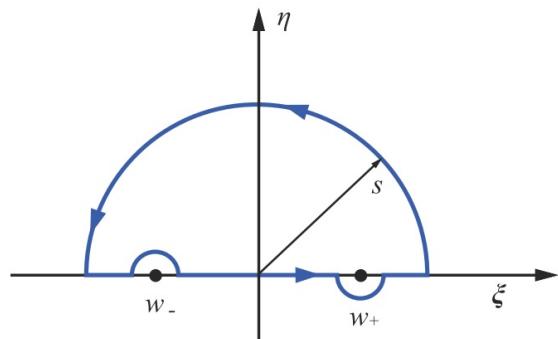
مسیر انتگرال خطی روی w یک کانتور بسته شامل یک تکین در $w_+ = \sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}$ است. تکین دیگر $w_- = \sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}$ حذف شده است زیرا انتشار جبهه موج در جهت $s+z$ در اینجا در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه انتگرال با کانتور بسته، شعاع نیم‌دایره باید به صورت مناسب نزدیک شود. سپس، طبق قضیه باقیمانده، معادله (۶۹.۶) به صورت تحلیلی محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} g(x, y, z)|_{z=R} &= \frac{-j}{4\pi^2} \iint \frac{F(u, v, \sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2})}{\sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}} \exp(-j2\pi R\sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}) \\ &\quad \times \exp[-j2\pi(ux + vy)] dudv \end{aligned} \quad (۷۰.۶)$$

^{۱۲}Singularity



شکل ۱۳.۶: نمای سیستم نوری مشاهده سه بعدی.

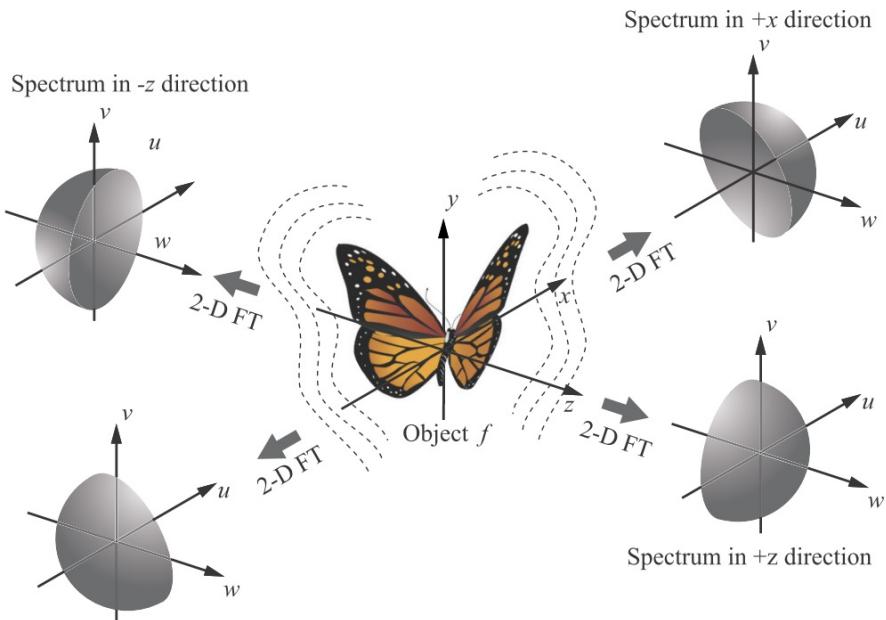


شکل ۱۴.۶: مسیر انتگرال خطی

سرانجام، با تبدیل فوریه دو بعدی گرفتن از هر دو طرف معادله (۷۰.۶)، معادله زیر را داریم:

$$G(u, v)|_{z=R} = \frac{-j}{4\pi} \frac{F(u, v, \sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2})}{\sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}} \exp(-j2\pi R \sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}) \quad (71.6)$$

وقتی $w(u, v)$ را به صورت $\sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}$ تعریف می‌کنیم، معادله (۷۱.۶) به این معنی است که طیف فوریه دو بعدی جبهه موج پراکنده $g(x, y, z)|_{z=R}$ با حاصل ضرب سه مولفه به دست می‌آید، یعنی طیف روی سطح نیم‌دایره‌ای که مرکز آن در مبدا قرار دارد و شعاع آن $1/\lambda$ در طیف فوریه سه بعدی $F(u, v, w)$ ، فاکتور وزن R و عامل فاز $\frac{-j}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1/\lambda^2 - u^2 - v^2}}$ است. فاصله پراش R مولفه‌های فاز را تعیین می‌کند. به عبارت دیگر، اطلاعات جبهه موج پراکنده از جسم سه بعدی به صورت محلی روی سطح نیم‌کره در فضای فوریه سه بعدی وجود دارد.



شکل ۱۵.۶: طیف فوریه در نیمکره، که مربوط به جبهه‌های موج پراکنده در جهات مختلف است.

سپس جهت انتشار موج پراش تعمیم داده و معنای فیزیکی معادله (۱۵.۶) به صورت گرافیکی که بر اساس شکل (۱۵.۶) توضیح داده شده، بیان می‌شود. شکل (۱۵.۶) نشان می‌دهد که طیف فوریه دو بعدی یک جبهه موج پراکنده شده توسط طیف روی یک نیمکره در طیف فوریه سه بعدی جسم سه بعدی داده می‌شود. محور چرخشی نیمکره با جهت انتشار تعیین می‌شود. به عنوان مثال، در موردی که جبهه موج در جهت $+z$ منتشر می‌شود، محور چرخش به جهت $+w$ تبدیل می‌شود. به طور مشابه، طیف در جهت $+x$ مربوط به نیمکره‌ای است که محور چرخش آن $+u$ است و طیف آن تا حدی با طیف پراش در جهت $+z$ مشترک است. بنابراین، می‌توان تمام جبهه موج‌های پراکنده شده را بر روی یک کره بیان کرد. تمام طیف فوریه سه بعدی هرگز ضروری نیست. به عبارت دیگر، طیف روی یک کره واحد شامل تمام اطلاعات مربوط به پراش است.

پرسش‌ها

۱. یک جسم شفاف $g(x, y)$ را در نظر بگیرید که بین یک عدسی مثبت (فاصله کانونی f) و نقطه کانونی آن قرار دارد. فاصله بین عدسی و جسم d است. اگر عدسی با یک نور موازی تک رنگ روشن شود، دامنه موج را در صفحه کانونی عدسی بیابید.
۲. جسمی را در فاصله $2f$ به سمت چپ یک عدسی مثبت در نظر بگیرید (فاصله کانونی f). موقعیت و بزرگنمایی تصویر جسم را پیدا کنید.
۳. دو عدسی دارای فاصله کانونی f_1 و f_2 هستند.

• **الف** اگر دو عدسی نازک در تماس باشند، فاصله کانونی عدسی ترکیبی را تعیین کنید.

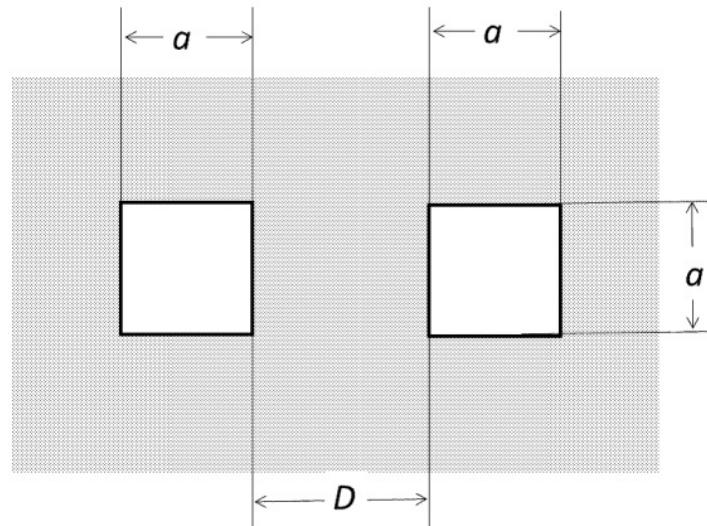
• **ب** اگر دو عدسی در فاصله d قرار می‌گیرند، فاصله کانونی عدسی ترکیبی را وقتی که $f_1 < d$ و $f_2 < d$ است، تعیین کنید.

۴. جسمی با گذرش دامنه^{۱۳}

$$t(x, y) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\pi(x^3 + y^3)]$$

با نور تک رنگ روشن می‌شود. دامنه نور را در فاصله d از جسم تعیین کنید.

۵. ضریب عبور (گذرش) عدسی را همانطور که در معادله (۱۳.۶) نشان داده شده برای شعاع انحنای R_1 و R_2 و ضخامت Δ تعیین کنید.



شکل ۱۶.۶:

۶. تابع انتقال نوری (OTF)‌های یک سیستم نوری را با مردمکی که در شکل (۱۶.۶) نشان داده شده، برای موارد روشنایی همدوس و ناهمدوس ترسیم کنید. حالت‌های $D > a$ ، $D = a$ و $D < a$ را در نظر بگیرید.

۷. تصویر و محدودیت وضوح یک جسم را

$$t(x, y) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\pi(x^3 + y^3)]$$

که با یک سیستم نوری ایده‌آل، در موارد روشنایی همدوس و ناهمدوس، بحث کنید.

^{۱۳} Amplitude Transmittance

كتابنامه

- J.W. Goodman. 1996. *Introduction to Fourier Optics*, 3rd ed. Roberts & Co. Englewood, CO.
- O. K. Ersoy. 2006. *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*. Wiley Interscience.
- R. L. Easton, Jr. 2010. *Fourier Methods in Imaging*. John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex.

مراجع

1. Lohmann, A. W., Mendlovic, D. and Zalevsky, Z. 1998. *Fractional transforms in optics*. Prog Opt. XXXVIII: 263–342.
2. Ozaktas, H. M., Zalevsky, Z. and Kutay, M. A. 2001. *The Spectrum for Omni-Directional Fractional Fourier Transform*. John Wiley & Sons, Chichester.
3. Sando, Y., Barada, D. and Yatagai, T. 2012. Fast calculation of computer-generated holograms based on 3-D Fourier spectrum for omnidirectional diffraction from a 3-D voxel-based object, Opt Express. 20: 20962–20969.
4. Kak, A. C. and Slaney, M. 1988. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 203–273.

فصل ۷

هولوگرافی

هولوگرافی می‌تواند دامنه مختلط را از یک جسم سه بعدی ضبط و بازسازی کند. در عکاسی معمولی، ثبت مستقیم دامنه مختلط دشوار است. در هولوگرافی، ضبط و بازسازی دامنه مختلط با قرار دادن یک موج حامل بر دامنه مختلطی که باید ثبت شود، انجام می‌شود.

هولوگرافی همچنین می‌تواند ویژگی‌های دامنه مختلط را در فیلتر فرکانس فضایی درک و اصلاح کند و بنابراین پیشرفت بزرگی در فناوری محاسبات نوری برای ما بهار مغان می‌آورد. هولوگرام تولید رایانه (CGH)^۱ همچنین برای تولید فیلترهای دامنه مختلط با پیچیدگی و نمایش سه بعدی اشیاء غیر موجود مورد بحث قرار می‌گیرد. در نهایت یک نوع دیجیتالی از هولوگرافی به نام هولوگرافی دیجیتالی ارائه شده است.

۱.۷ هولوگرافی نوری متعارف

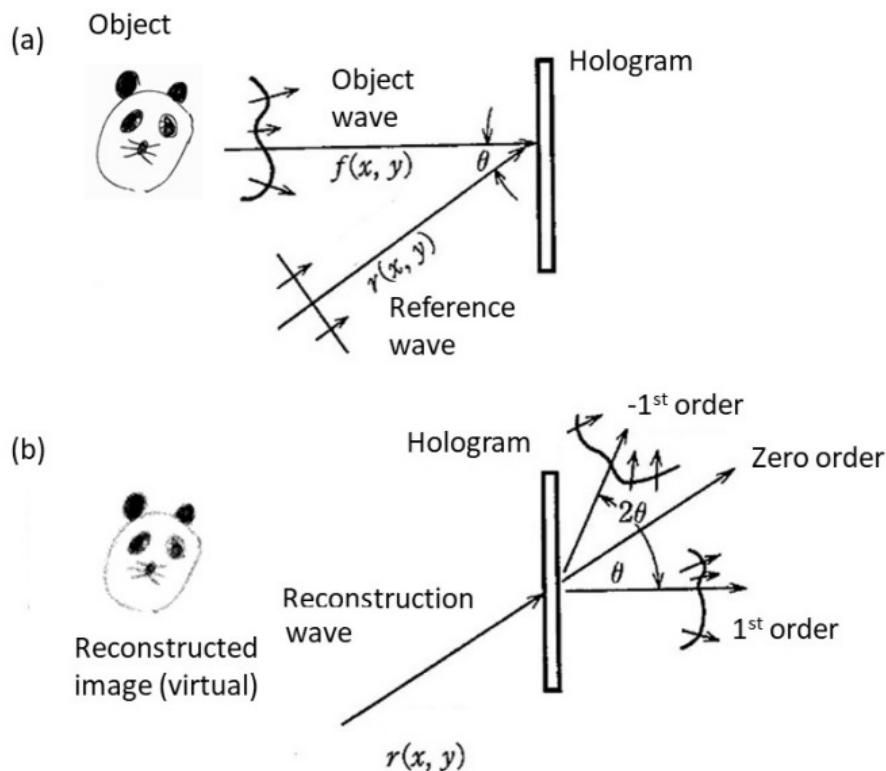
دامنه دریافتی از یک جسم را در محیط ضبط در نظر بگیرید. این موج را موج جسم نامیده و دامنه مختلط آن با $f(x, y) = A(x, y) \exp[-j\phi(x, y)]$ ، همانطور که در شکل ۷.۱ نشان داده شده، توصیف می‌شود. در اینجا دامنه $A(x, y)$ و $\phi(x, y)$ فاز آن است. اگر موج جسم مستقیماً مجدداً رمزگذاری شود، شدت آن با رابطه زیر داده می‌شود

$$I(x, y) = |A(x, y) \exp[-j\phi(x, y)]|^2 = |A(x, y)|^2 \quad (1.7)$$

و بنابراین اطلاعات فاز از بین می‌رود. فرض کنید یک موج صفحه‌ای با زاویه θ نسبت به x ، که موج مرجع نامیده می‌شود، می‌تابد،

$$r(x, y) = R \exp(-j2\pi x \sin \theta / \lambda) \quad (2.7)$$

^۱Computer-generate hologram (CGH)



شکل ۱.۷: اساس هولوگرافی (الف) ضبط هولوگرام و (ب) بازسازی هولوگرام.

و با قرار دادن موج مرجع به موج جسم، شدت در صفحه ضبط برابر است با

$$\begin{aligned}
 I(x, y) &= |f(x, y) + r(x, y)|^2 \\
 &= |A(x, y) \exp[-j\phi(x, y)] + R \exp(-j2\pi x \sin \theta / \lambda)|^2 \\
 &= |A(x, y)|^2 + |R|^2 \\
 &\quad + A(x, y)R \exp\{-j[\phi(x, y) - 2\pi x \sin \theta / \lambda]\} \\
 &\quad + A(x, y)R \exp\{j[\phi(x, y) - 2\pi x \sin \theta / \lambda]\} \\
 &= |A(x, y)|^2 + |R|^2 + 2A(x, y)R \cos[\phi(x, y) - 2\pi x \sin \theta / \lambda]
 \end{aligned} \tag{۳.۷}$$

این شدت شامل اطلاعات فاز جسم $\phi(x, y)$ و همچنین دامنه $A(x, y)$ است. این تکنیک هولوگرافی نامیده می‌شود که دامنه مختلط موج جسم را با استفاده از موج مرجع ثبت می‌کند. ترم سوم در معادله (۳.۷) یک جمله کسینوسی است که نشان دهنده حاشیه‌های تداخلی است و محیط ضبط شده هولوگرام نامیده می‌شود.

گذرش t دامنه هولوگرام، توزیع شدت ثبت شده، توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$t(x, y) = t_0 + \gamma I(x, y) \tag{۴.۷}$$

γ transmittance

اگر هلوگرام با همان موج مرجع روشن شود، امواج زیر پراشیده می‌شوند

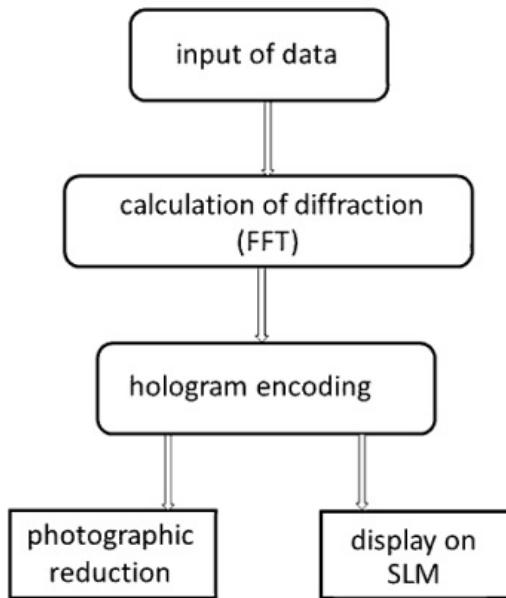
$$\begin{aligned} t(x, y)r(x, y) = & [t_0 + \gamma\{|A(x, y)|^2 + \gamma|R|^2 R \exp(-j2\pi x \sin \theta/\lambda) \\ & + \gamma A(x, y)R^2 \exp[-j\phi(x, y)] \\ & + \gamma A(x, y)R^2 \exp\{-j[\phi(x, y) - 4\pi x \sin \theta/\lambda]\}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

اولین جمله در معادله (5.7) موج پراش مرتبه صفر است که در همان جهت موج مرجع منتشر می‌شود و اطلاعات فاز جسم را از دست می‌دهد. جمله دوم موج پراش مرتبه اول است که موج جسم را با ضریب ثابت γR^2 بازسازی می‌کند و در همان جهتی که موج جسم اصلی است، منتشر می‌شود. با نگاه کردن به هلوگرام، تصویر جسم در همان موقعیتی که محل جسم قرار دارد مشاهده می‌شود. اگر جسم صفحه نباشد، بلکه سه بعدی باشد، تصویر بازسازی شده سه بعدی خواهد بود. این دلیل اصلی استفاده از هلوگرام برای ضبط و نمایش تصاویر سه بعدی است. جمله سوم موج پراش مرتبه اول است که در جهت 2θ منتشر می‌شود. آن از دامنه اصلی $A(x, y)$ تشکیل شده، اما فاز آن معکوس است و بنابراین، تصویر پراشیده، تصویر مزدوج نامیده می‌شود.

۲.۷ تولید هلوگرافی با کامپیوتر

دامنه مختلط با دامنه $A(x, y)$ و فاز $\phi(x, y)$ را می‌توان با استفاده از تکنیک هلوگرافی که در بخش ۱.۷ توضیح داده شد، ثبت و بازسازی کرد. از آنجایی که دامنه مختلط $A(x, y)$ یک جسم باید با یک موج مرجع برای ثبت هلوگرام تداخل داشته باشد، جسم باید در دنیای واقعی وجود داشته باشد. ساخت فیلتری با ویژگی‌های مختلط با تکنیک هلوگرافی بسیار دشوار است. هلوگرام تولید شده توسط کامپیوتر (CGH) را می‌توان تنها با روش‌های محاسباتی سنتز کرد. این بهاین معنی است که جبهه موجی که باید ثبت شود نیازی نیست همیشه در دنیای واقعی وجود داشته باشد. تکنیک هلوگرافی کامپیوتراًی به طور گسترده برای بازسازی اشیاء موجود، برای سنتز فیلترهای فضایی با ویژگی‌های مختلط، برای تولید جبهه موج با اشکال ایده‌آل که ساخت آنها با روش‌های مرسوم دشوار است و غیره استفاده می‌شود.

روش سنتز یک CGH در شکل (۲.۷) نشان داده شده است. در ابتدا، داده‌های تصویر جسم در یک مدل دو بعدی یا سه بعدی در کامپیوتر ذخیره می‌شوند. بر اساس تئوری پراش، دامنه مختلط وارد شده به صفحه هلوگرام از فضای جسم محاسبه می‌شود. همانطور که در فصل ششم ذکر شد، پراش فرنل و پراش فراونهوفر با استفاده از تبدیل فوریه سریع (FFT) محاسبه می‌شوند. نمونه‌هایی از روش‌های محاسبه پراش در پیوست A توضیح داده شده‌اند. در نهایت، دامنه مختلط محاسبه شده هلوگرام در برخی از قالب‌ها ترسیم شده است. CGH‌های سلول گرا و نقطه گرا معمولاً از فرمتهای هلوگرام استفاده می‌شوند.



شکل ۲.۷: روش سنتز هولوگرام کامپیوتری.

۱.۲.۷ سلول گرا CGH

یکی از CGH‌های معمولی سلول گرا، لومان CGH است. لومان CGH یک هولوگرام باینری است که گذرش دامنه آن باینری ۰ یا ۱ است [۲]. دامنه مختلط $H(\nu_x, \nu_y)$ را در یک نقطه نمونه برداری (m, n) در نظر بگیرید.

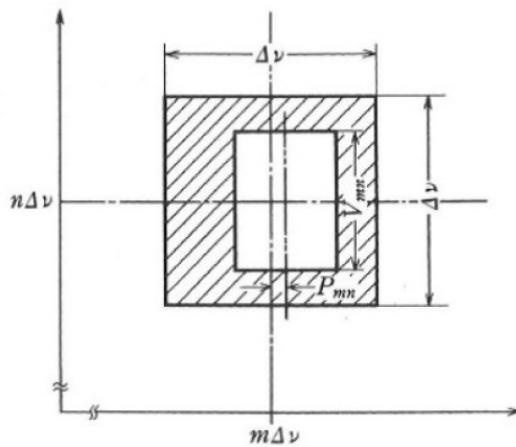
$$H_{mn} = H(m\Delta\nu, n\Delta\nu) = A_{mn} \exp(-j\phi_{mn}) \quad (6.7)$$

که در آن فاصله نقاط نمونه برداری با $\Delta\nu$ و دامنه و فاز H_{mn} به ترتیب با A_{mn} و ϕ_{mn} نشان داده می‌شود.

ساختر سلولی لومان CGH در شکل (۳.۷) نشان داده شده است. هولوگرام لومان شامل نمونه برداری از سلول‌ها با فاصله $\Delta\nu$ است. هر سلول شامل یک دیافراگم مستطیل شکل با ارتفاع V_{mn} و تغییر P_{mn} از مرکز روزنه است تا دامنه A_{mn} و فاز ϕ_{mn} در نقطه نمونه برداری (m, n) مشخص شود. انتقال دامنه لومان CGH توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$t(\nu_x, \nu_y) = \sum_m \sum_n \text{rect}\left(\frac{\nu_x - m\Delta\nu - P_{mn}}{c}\right) \times \text{rect}\left(\frac{\nu_y - n\Delta\nu}{V_{mn}}\right) \quad (7.7)$$

که در آن c نشان دهنده عرض روزنه مستطیلی است. اگر روزنه در نقطه نمونه برداری (m, n) توسط یک موج صفحه $\exp(j2\pi x \cdot \nu_x)$ روشن شود. موج پراشیده از روزنه خواهد



شکل ۳.۷: ساختار سلولی هلوگرام لومان

بود

$$\begin{aligned} & \iint \text{rect}\left(\frac{\nu_x - m\Delta\nu - P_{mn}}{c}\right) \times \text{rect}\left(\frac{\nu_y - n\Delta\nu}{V_{mn}}\right) \exp(j2\pi x_0 \nu_x) d\nu_x d\nu_y \\ & = c V_{mn} \text{sinc}(cx_0) \exp[j2\pi x_0(m\Delta\nu + P_{mn})]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

از آنجایی که دامنه این موج پراش باید برابر با H_{mn} باشد، داریم

$$A_{mn} c V_{mn} \text{sinc}(cx_0) \quad (9.7)$$

$$\phi_{mn} = 2\pi x_0(m\Delta\nu + P_{mn}) \quad (10.7)$$

اگر از N امین موج پراشیده استفاده کنیم،

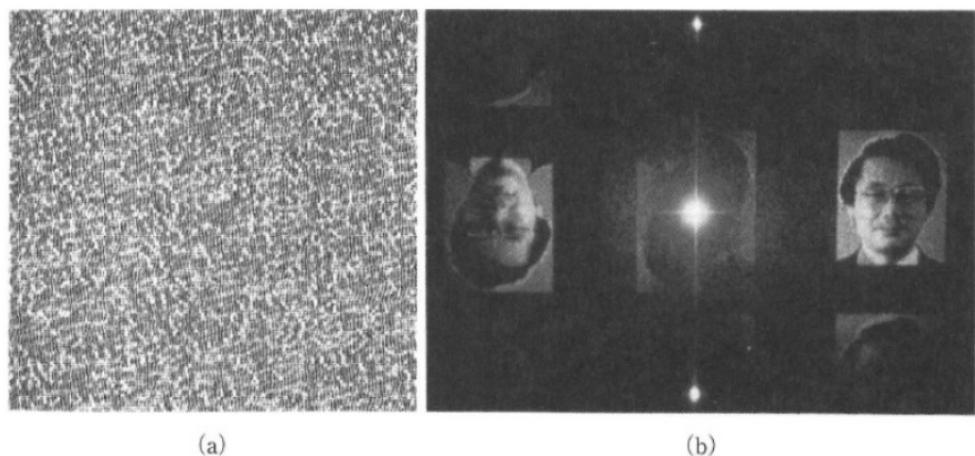
$$x_0 \Delta\nu = N \quad (11.7)$$

معمولًاً به دلیل استفاده از موج پراش مرتبه اول، $x_0 = N = 1$ را تنظیم می‌کنیم. برای افزایش راندمان پراش، $c = \Delta\nu/2$ را قرار میدهیم. در نهایت، نوع ساده‌تری از ارتفاع روزنہ و انتقال آن از معادله (۹.۷) و (۱۰.۷) داریم

$$V_{mn} = \frac{A_{mn} \Delta\nu}{\max(A_{mn})} \quad (12.7)$$

$$P_{mn} = \frac{\phi_{mn} \Delta\nu}{2\pi} \quad (13.7)$$

که در آن $\max(A_{mn})$ حداکثر A_{mn} است. شکل (۴.۷) نمونه‌ای از لومان CGH (الف) و تصویر بازسازی شده آن (ب) را نشان می‌دهد. تعداد نمونه 256×256 می‌باشد.



شکل ۷.۴: (الف): هولوگرام لومان (ب): تصویر یازسازی شده آن

۲.۲.۷ نقطہ گرا CGH

برای سادگی، تبدیل فوریه CGH را در نظر بگیرید که یک تصویر $f(x, y)$ را بازسازی می‌کند. در CGH نقطه گرا، اشاره شده است که انتقال هولوگرام $T(\nu_x, \nu_y)$ واقعی و مثبت است. بنابراین تبدیل فوریه آن $t(x, y)$ باید پرآورده شود

$$t(x, y) = t^*(-x, -y) \quad (14.4)$$

اگر قرار دھیں

$$t(x, y) = f(x - x_0, y - y_0) + f^*(-x - x_0, -y - y_0) \quad (\text{18.4})$$

برای باز سازی تصویر $(x, y)^f$, تبدیل فوریه آن $T(\nu_x, \nu_y)$ گذرش هولوگرام را، همانطور که در شکل ۵.۱۷ نشان داده شده، می‌دهد.

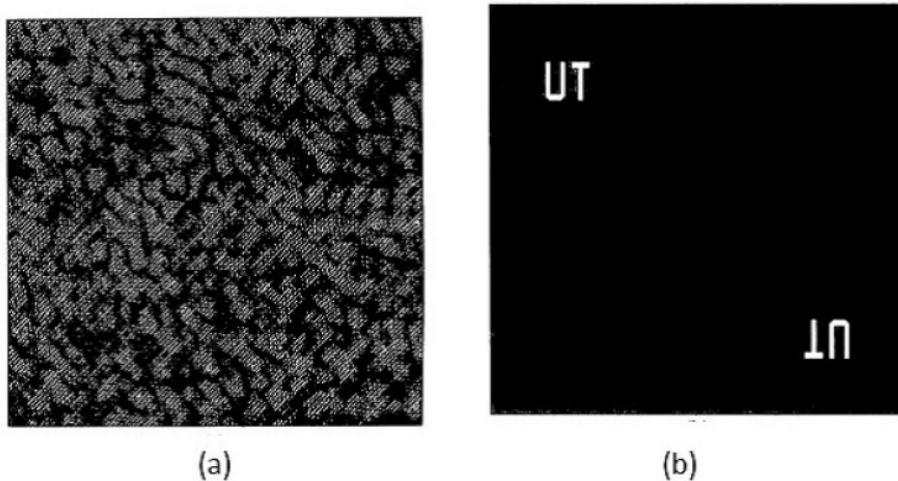
در حالتی که موجی که باید بازسازی شود با یکتابع ساده $\phi(x, y)$ توصیف شود، الگوی حاسه‌های CGH با فرکانس حامل α را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$h(x, y) = A + B \cos[\gamma \pi \alpha x + \phi(x, y)] \quad (16.1)$$

اگر کنتراست حاشیه‌ای B ثابت فرض شود، گذرش CGH باینری بصورت زیر داده می‌شود

$$t(x,y) = \begin{cases} 1 & : \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cos[2\pi\alpha x + \phi(x,y)] > c \\ 0 & : \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (17.7)$$

که در آن c یک عدد ثابت ($1 < c < \infty$) و معمولاً $c = 1/2$ است. نمونه‌ای از CGH نوع حاصله‌ای که در شکل ۶.۷ نشان داده شده است.



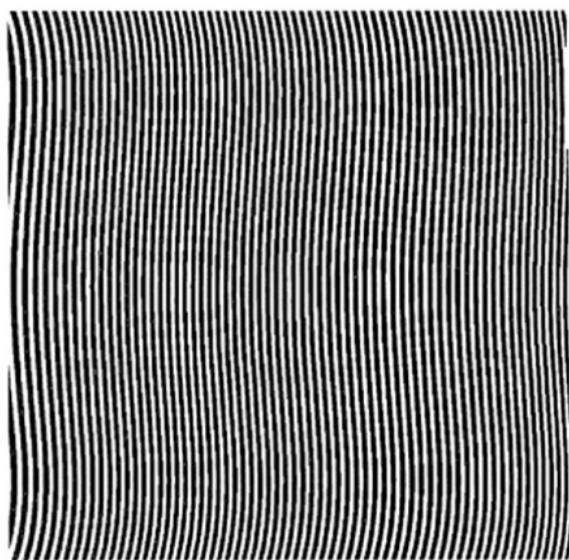
شکل ۵.۷: (الف) CGH نقطه گرا و (ب) تصویر بازسازی شده.

۳.۲.۷ کینوفرم

در هولوگرافی، از موج مرجع برای وارد کردن فرکانس حامل به فاز هولوگرام استفاده می‌شود. فرکانس حامل ما را قادر می‌سازد تا امواج پراشیده صفر و ± 1 آم را در بازسازی جدا کنیم. اگر بتوانیم توزیع دامنه مختلط را مستقیماً تولید یا نمایش دهیم، فرکانس حامل ضروری نیست. برای سادگی، دامنه موج پراشیده از یک جسم پراکنده کننده ثابت و فاز آن مدوله شده در نظر گرفته می‌شود. در چنین حالتی، عنصر نوری فقط فازی که توسط یک کامپیوتر تولیده شود، کینوفرم [۲] نامیده و بازده پراش آن بالاتر از CGH‌های معمولی است. اطلاعات فاز کینوفرم با یک نمایه برجسته بر روی یک ماده ضبط کننده مانند امولسیون عکاسی نشان داده یا بر روی یک مدولاتور نور فضایی نوشته شده، نشان داده می‌شود. کینوفرم می‌تواند شامل نویز بازسازی ناشی از نادیده گرفتن تغییرات دامنه و کوانتیزاسیون فاز باشد. از آنجایی که نویز در تصویر بازسازی شده یک مشکل جدی است، لازم است که توزیع فاز کینوفرم برای کاهش نویز بهینه شود. چندین روش مورد بحث قرار گرفته است. شکل (۵.۷) نتیجه یک روش تکرار بازپخت شبیه سازی شده را نشان می‌دهد [۳]. نویز بازسازی شده به دلیل افزایش تعداد تکرار کاهش می‌یابد.

۳.۷ هولوگراف دیجیتالی

تکنیک ثبت هولوگرام در حافظه دیجیتالی، هولوگراف دیجیتالی نامیده می‌شود. شکل (۵.۸) چیدمان نوری هولوگراف دیجیتالی را نشان می‌دهد. مشابه هولوگرافی معمولی، شدت حاشیه تداخل موج جسم و موج مرجع با معادله (۳.۷) داده می‌شود. از آنجایی که تعداد پیکسل یک حسگر تصویر محدود است، فرکانس حامل باید تا حد امکان کم حذف شود. بر این اساس، زاویه بین جسم و موج مرجع تا حد امکان کوچک تنظیم می‌شود و اندازه جسم محدود می‌شود.



شکل ۶.۷: CGH از نوع حاشیه‌ای

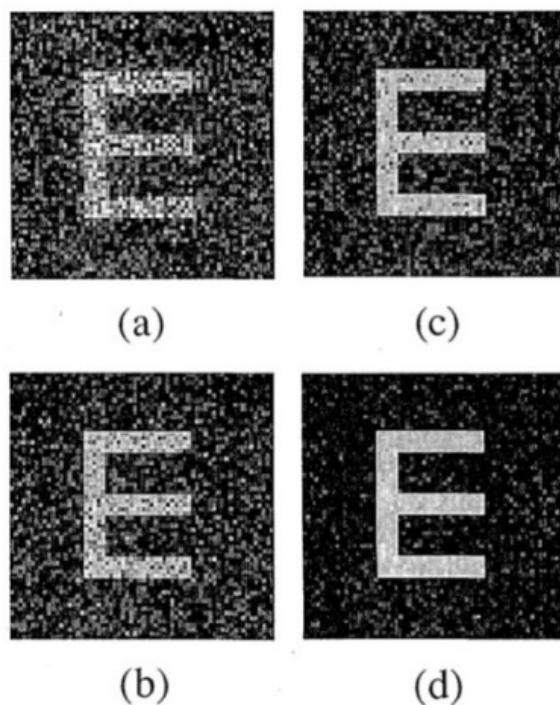
همانطور که در شکل (۱.۷) نشان داده شده است، حالتی را در نظر بگیرید که تصویر بازسازی شده جسم در محل اصلی جسم واقع شده قرار دارد. موج بازسازی شده موج مزدوج موج مرجع در این مورد است. موج بازسازی موجی است که به سمت عقب از صفحه هولوگرام منتشر می‌شود $r^*(x, y) = R \exp(j2\pi x \sin \theta / \lambda)$. موج پراشیده از هولوگرام بصورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} t(x, y)r^*(x, y) &= [t_0 + \gamma|A(x, y)|^2 + \gamma R^2] R \exp\left(j\frac{2\pi x}{\lambda} \sin \theta\right) \\ &\quad + \gamma A(x, y) R^2 \left[-j\phi(x, y) + j\frac{4\pi x}{\lambda} \sin \theta \right] \\ &\quad + \gamma A(x, y) R^2 \exp[j\phi(x, y)] \end{aligned} \quad (18.7)$$

جمله سوم تصویر حقیقی واقع در موقعیت اصلی را می‌دهد. تصویر بازسازی شده به صورت عددی با رابطه‌های پراش به صفحه تصویر از صفحه هولوگرام محاسبه می‌شود. مشابه CGH‌ها، محاسبه پراش با پراش فرنل، پراش فراونهوفر یا روش طیف زاویه‌ای انجام می‌شود. در این محاسبه عددی، موقعیت جسم باید دقیقاً مشخص شود. نمونه‌ای از روش‌های عددی برای هولوگراف دیجیتالی در پیوست ب آورده شده است.

بعد، هولوگرافی درون خطی را در نظر بگیرید. برای حذف موج پراش صفر و حل مسئله تصویر دوقلو در هولوگرام درون خطی از روش مدولاسیون فاز استفاده می‌شود. شدت هولوگرام درون خطی با معادله (۳.۷) توسط $\theta = \text{توسط}$ توصیف شده، اما مدولاسیون فاز δ معرفی شده است.

$$I(x, y, \delta) = |A(x, y)| + |R|^2 + 2A(x, y)R \cos[\phi(x, y) - \delta]. \quad (19.7)$$



شکل ۷.۷: تصاویر بازسازی شده از کینوفرم بهینه‌سازی شده فاز با روش تکرار. تعداد تکرارها (الف) ۱۰، (ب) ۱۰۰، (ج) ۳۰۰ و (د) ۵۰۰ است.

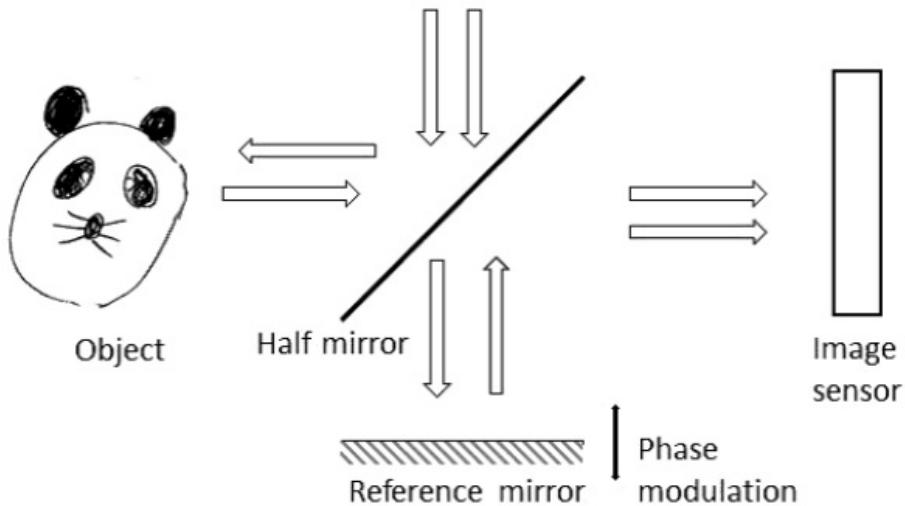
اگر چهار هولوگرام $I(x, y, 0)$, $I(x, y, \pi/2)$, $I(x, y, \pi)$ و $I(x, y, 3\pi/2)$ را با فازهای به ترتیب $\delta = 0, \pi/2, \pi$ و $3\pi/2$ مرجع مختلف ثبت کنیم، دامنه موج جسم روی حسگر تصویر خواهد بود

$$A(x, y) \exp[-j\phi(x, y)] = \frac{1}{4R} \{ [I(x, y, 0) - I(x, y, \pi)] - j[I(x, y, \pi/2) - I(x, y, 3\pi/2)] \} \quad (20.7)$$

پراش فرنل موج جسم $A(x, y) \exp[-j\phi(x, y)]$ به صفحه جسم تصویر بازسازی شده را می‌دهد.

پرسش‌ها

۱. ویژگی‌ها و کاربردهای هولوگرافی را شرح دهید.
۲. کاربردهای عملی هولوگرافی کامپیوترباز را شرح دهید.



شکل ۷.۸: چیدمان نوری برای هولوگراف دیجیتالی.

کتابنامه

- Goodman, J. W. 1996. *Introduction to Fourier Optics*. 3rd ed. Roberts & Co., Englewood, CO.
- Hariharan, P. 1984. *Optical Holography*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.
- Schnars, U. and Jueptner, W. 2005. *Digital Holography*. Springer, Berlin.

مراجع

1. Lohmann, A. W. and Paris, D. P. 1967. Binary Fraunhofer holograms generated by computer. *Appl. Opt.* 6: 1739.
2. Lesem, L. P., Hirsch, P. M. and Jordan, Jr., J. A. 1969. The kinoform: a new wave front reconstruction device. *IBM J. Res. Dev.* 13: 150.
3. Yoshikawa, N. and Yatagai, T., 1994. Phase optimization of a kinoform by simulated annealing. *Appl. Opt.* 33: 863.

فصل ۸

محاسبات نوری

به عنوان یکی از کاربردهای مهم اپتیک فوریه، فناوری پردازش اطلاعات نوری با استفاده از انتشار اطلاعات موازی و با سرعت بالا، محاسبات نوری را در نظر بگیرید. این فناوری شامل پردازش تصویر آنالوگ و پردازش موازی دیجیتال است. در این فصل به محاسبات نوری آنالوگ موازی که بیشتر مربوط به اپتیک فوریه است پرداخته می‌شود.

طیف دو بعدی ($2D$) توسط سیگنال ورودی تبدیل فوریه نوری به دست می‌آید و سپس توسط فیلتر فرکانس مکانی اصلاح می‌شود. به این تکنیک، فیلتر کردن فرکانس مکانی می‌گویند که یکی از معمولی‌ترین عملیات محاسبات نوری موازی است. این عملیات را می‌توان یک عملیات کانولوشن نوری در نظر گرفت.

۱.۸ فیلتر فرکانس مکانی

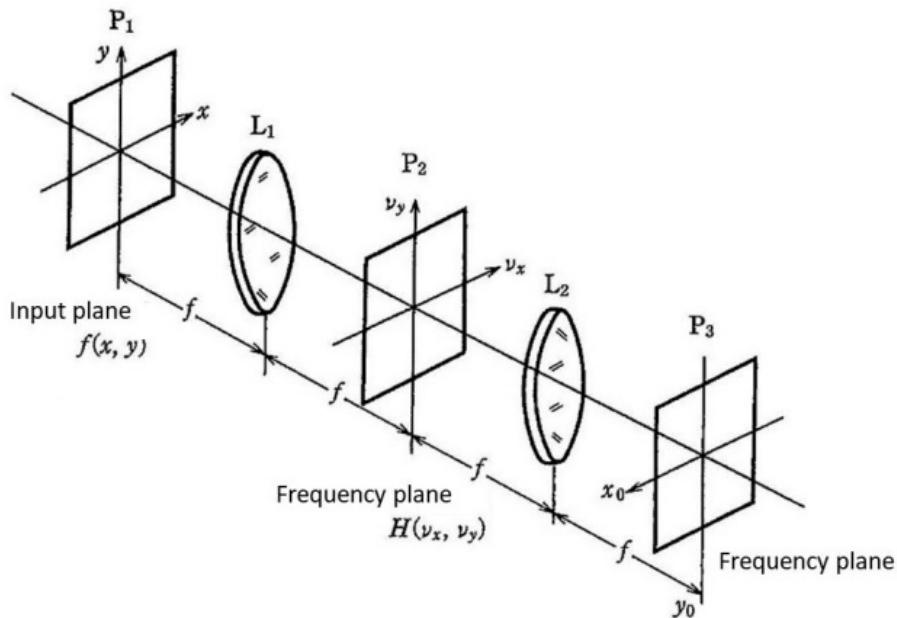
فیلتر فرکانس مکانی به عنوان اصلاح فرکانس مکانی به منظور تقویت بخشی از سیگنال ورودی، استخراج یک جزء خاص از سیگنال یا آشکارسازی سیگنال در نویز تعریف می‌شود. توانایی تبدیل فوریه یک عدسی باعث تبدیل فوریه تصویر ورودی شده و این ما را قادر می‌سازد تا فیلتر فرکانس مکانی را برای تصاویر دو بعدی انجام دهیم. این یکی از تکنیک‌های اساسی در محاسبات نوری است [۱، ۲].

یک سیستم نوری همدوس را همانطور که در شکل (۱.۸) نشان داده شده در نظر گیرید. تصویر ورودی ($f(x, y)$ واقع در صفحه P_1 توسط یک نور همدوس ستونی روشن و تبدیل فوریه توسط عدسی L_1 انجام و طیف فوریه

$$F(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[f(x, y)] \quad (1.8)$$

در صفحه P_1 بدست می‌آید. فیلتری که گذرش^۱ دامنه مختلط آن ($H(\nu_x, \nu_y)$) است در صفحه P_2 قرار دارد. دامنه مختلط درست بعد از صفحه P_2 برابر ($F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y)$) است

^۱Transmittance



شکل ۱.۸: سیستم نوری فیلتر مکانی

که به این معنی است که طیف $F(\nu_x, \nu_y)$ ورودی توسط $H(\nu_x, \nu_y)$ اصلاح می‌شود. تبدیل فوریه $F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y)$

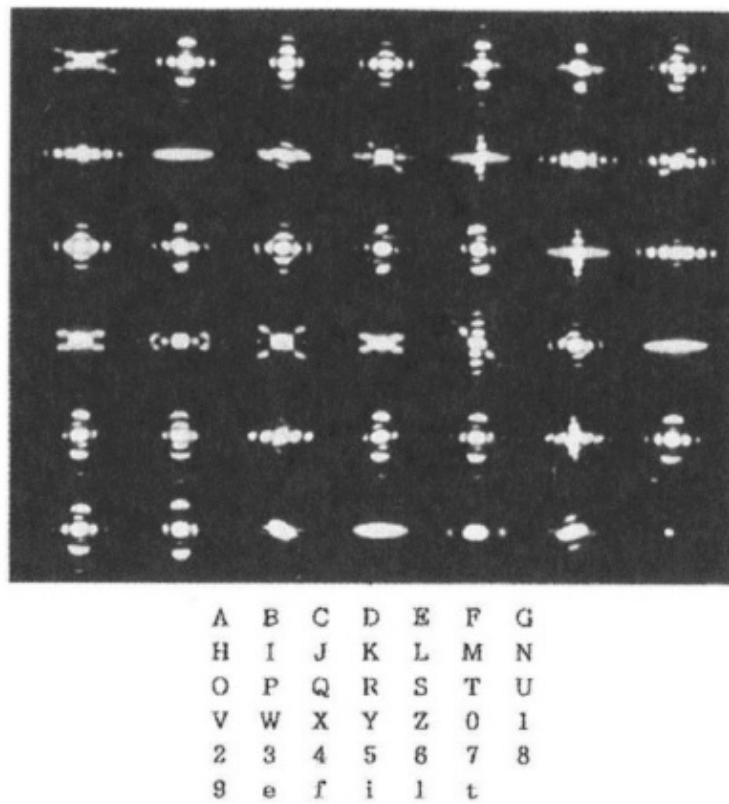
$$\mathcal{F}[F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y)] = h * f(x_0, y_0) \quad (2.8)$$

در صفحه خروجی P_2 را میدهد، که در آن

$$h(x_0, y_0) = \mathcal{F}[H(\nu_x, \nu_y)] \quad (3.8)$$

و (x_0, y_0) پاسخ ضربه‌ای فیلتر $H(\nu_x, \nu_y)$ است. سیستم نوری نشان داده شده در شکل (۱.۸) کارولوشن بین ورودی $f(x, y)$ و پاسخ ضربه $H(\nu_x, \nu_y)$ فیلتر را محاسبه می‌کند. از آنجایی که سیستم نوری نشان داده شده در شکل (۱.۸) تبدیل فوریه را دو بار انجام می‌دهد، این سیستم نوری سیستم نوری پراش دوگانه نامیده می‌شود. از آنجایی که تبدیل فوریه بدون مولفه فاز در حالتی به دست می‌آید که ورودی در فاصله کانونی f عدسی قرار گیرد، همانطور که در بخش ۲.۶ اشاره شد، سیستم نوری نشان داده شده در شکل (۱.۸) نیز "سیستم نوری $f - 4$ " نامیده می‌شود.

شکل (۲.۸) الگوهای طیف فوریه را برای حروف و اعداد نشان می‌دهد. الگوهای طیف فوریه ویژگی‌های الگوهای ورودی مانند شکل، عرض و جهت اجزا و غیره را نشان می‌دهند. گاهی اوقات، تنها با شکل الگوی طیف، تشخیص یا طبقه‌بندی انجام می‌شود.

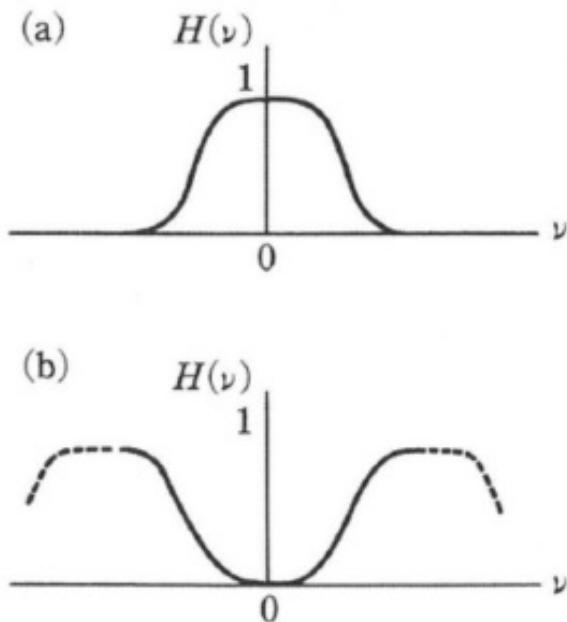


شکل ۲.۸: طیف فوریه الفبا و اعداد

۱.۱.۸ فیلترهای پائین گذر و بالا گذر

به طور کلی، مولفه‌های فرکانس پایین شامل اطلاعات ساختاری تصویر است، و لبه‌ها یا اطلاعات ساختاری ظریف به مولفه فرکانس بالا مربوط می‌شود. اگر مولفه فرکانس‌های پایین توسط یک فیلتر عبور داده شود، نویز شامل مولفه فرکانس‌های بالا را می‌توان کاهش داد. چنین فیلتری را فیلتر پائین گذر می‌نامند. از طرف دیگر، فیلتری که از مولفه فرکانس بالا را عبور می‌دهد، فیلتر بالا گذر نامیده می‌شود. فیلتر بالا گذر برای تشخیص مرز تصویر و بهبود ساختار دقیق تصویر استفاده می‌شود. فیلتر میان گذر، که مولفه طیف خاصی را عبور می‌دهد یا برش می‌دهد، برای کاهش ساختار شبکه بندی نقطه نیمه تن^۲ استفاده می‌شود. شکل ۳.۸ (پاسخ‌های فرکانسی برای (الف) یک فیلتر پائین گذر و (ب) یک فیلتر بالا گذر را نشان می‌دهد.

^۲Half-tone dot



شکل ۳.۸: پاسخ فرکانسی (الف) فیلتر پائین گذر (ب) فیلتر بالا گذر

۲.۱.۸ فیلترهای دیفرانسیلی و لاپلاسین

فیلتر دیفرانسیلی (تفاضلی) برای همان هدف فیلتر بالا گذر استفاده می‌شود. دامنه مختلط تصویر ورودی $f(x, y)$ را در نظر گیرید

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y \quad (4.8)$$

و مشتق آن نسبت به جهت x خواهد بود

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iint (-j2\pi\nu_x) F(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y \quad (5.8)$$

بنابراین، پاسخ فرکانسی فیلتر دیفرانسیلی برابر است با:

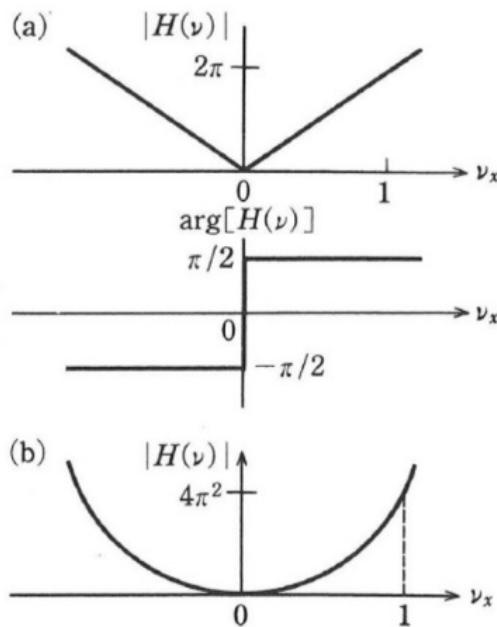
$$H(\nu_x, \nu_y) = -j2\pi\nu_x \quad (6.8)$$

که در شکل (۴.۸)(الف) نشان داده شده است. چون

$$\left(\frac{\partial^f}{\partial x^2} + \frac{\partial^f}{\partial y^2} \right) = - \iint (4\pi^2)(\nu_x^2 + \nu_y^2) F(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y \quad (7.8)$$

پاسخ فرکانسی فیلتر لاپلاسین خواهد بود

$$H(\nu_x, \nu_y) = -4\pi^2(\nu_x^2 + \nu_y^2) \quad (8.8)$$



شکل ۴.۸: پاسخ فرکانسی (الف) فیلتر دیفرانسیلی (ب) فیلتر لاپلاسین

که در شکل (۴.۸)(ب) نشان داده شده است [۳]. از آنجایی که فیلترهای دیفرانسیلی نوعی فیلتر بالا گذر هستند، باید توجه داشت که مولفه‌های نویز در برخی موارد افزایش می‌یابد.

۳.۱.۸ فیلتر کنتراست فاز

فیلتر کنتراست فاز، که توزیع فاز را بهشت انتقال می‌دهد، برای تصویربرداری از جسم فاز، به عنوان مثال، نمونه‌های بیولوژیکی نیمه شفاف استفاده می‌شود. توزیع دامنه یک نمونه شفاف بصورت زیر داده می‌شود

$$f(x, y) = A \exp[-j\phi(x, y)] \quad (9.8)$$

که در آن A یک دامنه ثابت و $\phi(x, y)$ توزیع فاز نمونه است. اگر تصویر نمونه به صورت شدت آشکارسازی شود، داریم

$$I(x, y) = A^\gamma \quad (10.8)$$

و هیچ کنتراست تصویر به دست نمی‌آید. حالتی را در نظر بگیرید که تغییر فاز آن بسیار کوچک است، $1 \ll \phi$ ، دامنه جسم خواهد بود

$$f(x, y) = A[1 - j\phi(x, y)] \quad (11.8)$$

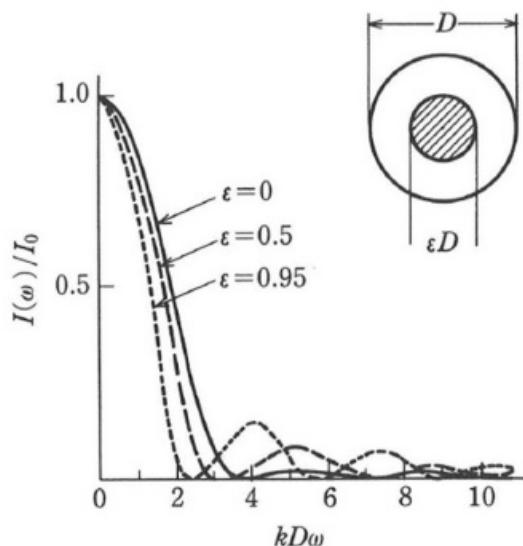
از آنجایی که دامنه A ثابت است، طیف ناشی از دامنه جسم نزدیک به فرکانس صفر متمنکز، اما طیف فاز $\phi(x, y)$ به طور گستردگی توزیع می‌شود. اگر از فیلتر فازی که مولفه فرکانس بالاتر را با $\pi/2$ تغییر می‌دهد استفاده شود، شدت خروجی برابر است با

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |A| [1 - \phi(x, y)]^2 \\ &\doteq A^2 - 2A^2\phi(x, y) \end{aligned} \quad (12.8)$$

و بنابراین، اطلاعات فاز $\phi(x, y)$ به کنتراست تغییر می‌کند. این فیلتر، فیلتر کنتراست فاز [۴] نامیده و در برخی از عدسی‌های شبیه میکروسکوپی بیولوژیکی استفاده می‌شود.

۴.۱.۸ وضوح فوق العاده و آپادیزاسیون

قدرت تفکیک سیستم نوری مطابق با معیار ریلی به صورت متقابل شعاع دیسک ایری^۳ تعریف می‌شود، همانطور که در بخش ۶.۶ توضیح داده شد. این بدان معنی است که با کاهش دیسک ایری وضوح افزایش می‌یابد. سیستم تصویربرداری کاملی را در نظر بگیرید که عملکرد مردمک آن دایره‌ای به قطر D است. اگر روزنه دایره‌ای با قطر $(1 + \epsilon)D$ متوقف شود، همانطور که در شکل (۵.۸) نشان داده شده است، دامنه آن در مرکز مردمک قرار می‌گیرد. تصویر نقطه با رابطه زیر



شکل ۵.۸: پراش روزنه حلقوی

$$u(w) = \pi A' \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot \frac{2J_1 \left(\frac{kD}{\gamma R} w \right)}{\frac{kD}{\gamma R} w} - \pi A' \left(\frac{\epsilon D}{2} \right)^2 \cdot \frac{2J_1 \left(\frac{k\epsilon D}{\gamma R} w \right)}{\frac{k\epsilon D}{\gamma R} w} \quad (13.8)$$

^۳Airy Disc

بر طبق معادله (۶۶.۲) داده می‌شود. شدت آن برابر است با

$$I(w) = |u(w)|^2 = I_0 \left| \frac{2J_1\left(\frac{kD}{\lambda R}w\right)}{\frac{kD}{\lambda R}w} - \epsilon \frac{2J_1\left(\frac{k\epsilon D}{\lambda R}w\right)}{\frac{k\epsilon D}{\lambda R}w} \right|^2 \quad (14.8)$$

که در آن

$$I_0 = \left[\pi A' \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right]^2 \quad (15.8)$$

همانطور که در شکل (۵.۸) نشان داده شده است، یک الگوی پراش باریکتر از سیستم نوری کامل به دست آمده است. روشی که عملکرد مردمک را برای بهبود وضوح بالاتر از سیستم نوری کامل تغییر می‌دهد، وضوح فوق العاده نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که عرض قله اصلی کاهش می‌یابد، اما شدت قله‌های حلقوی خارجی در وضوح فوق العاده فعلی افزایش می‌یابد [۵، ۶].

در روش معکوس، سطح بیرونیتابع مردمک به تدریج کاهش می‌یابد به‌طوری که از شدت قله‌های حلقوی بیرونی کاسته می‌شود، اما عرض قله اصلی افزایش می‌یابد. به‌این روش آپادیزاسیون^۴ گفته می‌شود که در تصویربرداری از یک جسم کوچک تاریک در نزدیکی یک جسم روشن استفاده می‌شود.

۲.۸ فیلتر تطبیقی

نسبت سیگنال به نویز (SNR)^۵ به عنوان معیار عملکرد تشخیص سیگنال تعریف می‌شود:

$$\text{SNR} = \frac{\text{توان سیگنال}}{\text{توان نویز}} \quad (16.8)$$

به منظور آشکارسازی یک الگوی خاص و موقعیت آن، فیلتری باید طراحی شود که SNR خروجی را به حداقل برساند. این فیلتر تطبیقی^۶ نامیده می‌شود [۷]. در آشکارسازی الگو، یکی از مسائل اصلی جستجوی موقعیت‌هایی است که الگوهای هدف شناخته شده در تصویر ورودی قرار دارند. از آنجایی که مشکل فقط تعیین وجود یا عدم وجود الگوهایی است که باید شناسایی شوند، خروجی همیشه شکل اصلی را حفظ نمی‌کند. یک روش کاهش نویز را با استفاده از یک فیلتر مناسب برای تصویر ورودی با الگوی شناخته شده و نویز در نظر بگیرید تا به راحتی الگو را تشخیص دهد [۷، ۸]. ورودی $g(x, y)$ را متشکل از سیگنال $f(x, y)$ با نویز $n(x, y)$ در نظر بگیرید.

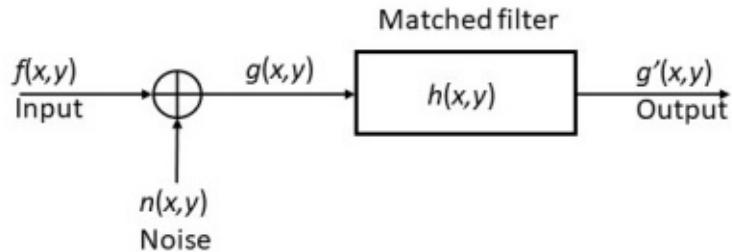
$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (17.8)$$

^۴Apodization

^۵Signal to Noise Ratio (SNR)

^۶Matched Filter

لازم به ذکر است که نویز $n(x, y)$ به سیگنال $f(x, y)$ اضافه می‌شود. اجزه دهید تابع پاسخ فیلتر تطبیقی، همانطور که در شکل (۶.۸) نشان داده شده، $h(x, y)$ باشد.



شکل ۶.۸: فیلتر تطبیقی

خروجی فیلتر تطبیقی $g'(x, y)$ برای سیگنال ورودی $f(x, y)$ خواهد بود

$$g'(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \quad (۱۸.۸)$$

و برای نویز

$$n'(x, y) = n(x, y) * h(x, y) \quad (۱۹.۸)$$

اگر نویز $n(x, y)$ نویز سفید باشد، طیف نویز ثابت خواهد بود. این بدین معنی است که نویز $n(x, y)$ با متغیر تصادفی ^۴ توصیف می‌شود. توان نویز خیلی ساده با $|n(x, y)|^2$ که آن هم تصادفی و غیرارادی ^۵ است. مقدار میانگین آماری آن بصورت مقدار ارادی ^۶ داده می‌شود. نسبت سیگنال به نویز، SNR، برای فیلتر تطبیقی بصورت زیر تعریف می‌شود

$$SNR = \frac{|g'(x, y)|^2}{E[|n(x, y)|^2]} \quad (۲۰.۸)$$

میانگین آماری نویز $E[|n'(x, y)|^2]$ بصورت زیر باز نویسی می‌شود

$$E[|n'(x, y)|^2] = N^{\gamma} \iint |H(\nu_x, \nu_y)|^2 d\nu_x d\nu_y \quad (۲۱.۸)$$

که در آن N^{γ} نمایشگر طیف توان نویز و $H(\nu_x, \nu_y)$ تبدیل فوریه $h(x, y)$ که پاسخ فرکانسی فیلتر تطبیقی است. با اعمال قضیه کانولوشن معادله (۱۹.۳) در معادله (۱۸.۸) و استفاده از معادله (۲۱.۸) خواهیم داشت

$$SNR = \frac{\iint F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y) d\nu_x d\nu_y]^2}{N^{\gamma} \iint |H(\nu_x, \nu_y)|^2 d\nu_x d\nu_y} \quad (۲۲.۸)$$

^۴Random Variable

^۵Nondeterministic

^۶Deterministic

با استفاده از نامعادله شوارتز^{۱۰}

$$\left| \iint a(x, y)b(x, y) \right|^{\frac{1}{2}} \leq \iint |a(x, y)|^{\frac{1}{2}} dx dy \cdot \iint |b(x, y)|^{\frac{1}{2}} dx dy \quad (23.8)$$

و اگر $a = b^*$ باشد مساوی است، داریم

$$SNR \leq \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \iint |F(\nu_x, \nu_y)|^{\frac{1}{2}} d\nu_x d\nu_y \quad (24.8)$$

بیشینه SNR وقتی بدست می‌آید که

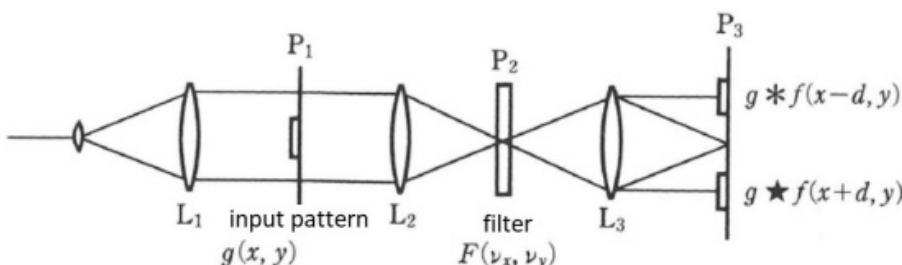
$$H(\nu_x, \nu_y) = F^*(\nu_x, \nu_y) \exp[j2\pi(\nu_x x_0 + \nu_y y_0)] \quad (25.8)$$

این پاسخ فرکانسی فیلتر تطبیقی است، که مزدوج مختلط تبدیل فوریه الگوی قابل آشکارسازی است.

از آنجایی که خروجی فیلتر تطبیقی با $h^* f$ ، از معادله (۱۸.۸) داده می‌شود، داریم

$$\begin{aligned} g'(x, y) &= \iint H(\nu_x, \nu_y) \cdot F(\nu_x, \nu_y) \exp([-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]) d\nu_x d\nu_y \\ &= \iint F^*(\nu_x, \nu_y) \exp([j2\pi(\nu_x x_0 + \nu_y y_0)]) \\ &\quad \times F(\nu_x, \nu_y) \exp([-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]) d\nu_x d\nu_y \\ &\quad + \iint N(\nu_x, \nu_y) \cdot F^*(\nu_x, \nu_y) \exp([j2\pi(\nu_x x_0 + \nu_y y_0)]) \\ &\quad \times \exp([-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]) d\nu_x d\nu_y \\ &= f \star f(x - x_0, y - y_0) + n \star f(x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \quad (26.8)$$

قله خودبستگی در موقعیت (x_0, y_0) که باید آشکار سازی شود قرار دارد. از آنجایی که قله خودبستگی بسیار بزرگتر از همبستگی بین الگوی قابل آشکارسازی و نویز است، مکان الگوی آشکارسازی شده به راحتی قابل تشخیص است.



شکل ۷.۸: چیدمان نوری فیلتر تطبیقی

فیلتر تطبیقی را با استفاده از تکنیک هولوگرافیک برای آشکارسازی الگوی سیگنال $f(x, y)$ در نظر بگیرید. لازم به ذکر است که موج پراش مرتبه ۱-ام از تبدیل فوریه $f(x, y)$ پاسخ

^{۱۰} Schwarz' inequality

فرکانسی معادله (۲۵.۸) را می‌دهد. یک چیدمان نوری برای فیلتر تطبیقی در شکل (۷.۸) نشان داده شده است. الگوئی $f(x, y)$ که باید آشکارسازی شود در صفحه P_1 قرار دارد و تبدیل فوریه $F(\nu_x, \nu_y)$ توسط یک عدسی تبدیل فوریه L_1 در صفحه P_2 تشکیل می‌شود. با استفاده از موج مرجع $R \exp(-j2\pi\nu_x f_L \sin\theta)$ ، یک هولوگرام تبدیل فوریه در صفحه P_2 تشکیل می‌شود، که در آن f_L نشان‌دهنده فاصله کانونی عدسی L_2 است. مانند معادله (۳.۷) و (۵.۷)، گذرش دامنه 12 هولوگرام به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} t(\nu_x, \nu_y) = & t_1 + \gamma RF(\nu_x, \nu_y) \exp(j2\pi\nu_x f_L \sin\theta) \\ & + \gamma RF^*(\nu_x, \nu_y) \exp(-j2\pi\nu_x f_L \sin\theta) \end{aligned} \quad (۲۷.۸)$$

$$\begin{aligned} \text{که در آن} \\ t_1 = t_0 + \gamma(|F|^2 + |R|^2) \end{aligned} \quad (۲۸.۸)$$

عبارت مورد نظر از فیلتر تطبیقی عبارت سوم معادله (۲۷.۸) است. برای ساخت فیلترهای تطبیقی، الگوی ورودی در صفحه P_1 قرار دارد. موجی که از فیلتر تطبیقی می‌گذرد تبدیل فوریه بر روی آن انجام شده و سپس تصویر خروجی در صفحه P_2 به دست می‌آید. در صفحه خروجی همانطور که در شکل (۲۷.۸) نشان داده شده است، موج پراش مرتبه صفر در ناحیه مرکزی قرار می‌گیرد و امواج پراش مرتبه ± 1 سمت راست و چپ مربوط به کانولوشن و جملات همبستگی، به ترتیب در $g * f(xd, y)$ و $g * f(x + d, y)$ قرار دارد، که در آن

$$d = f_L \sin\theta \quad (۲۹.۸)$$

شکل (۸.۸) نمونه‌ای از فیلتر تطبیقی (الف) را برای تشخیص کاراکتر E ، پاسخ ضربه (ب) و خروجی همبستگی (ج) را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که نقطه همبستگی روشن در موقعیتی است که شخصیت E وجود دارد.

۳.۸ فیلتر بهینه برای نویز افزودنی

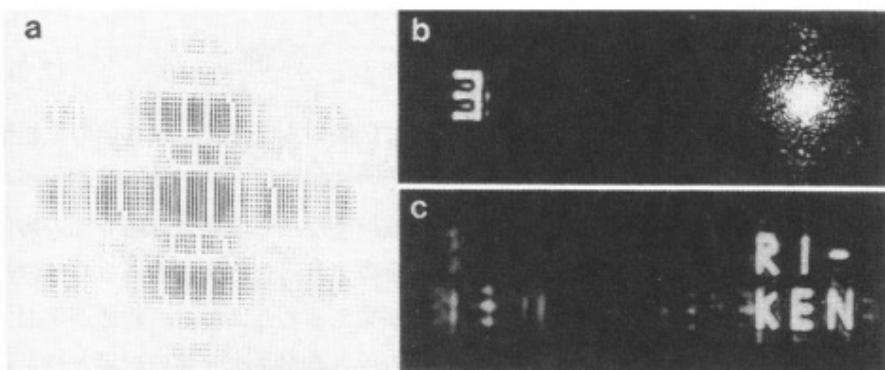
فیلتر تطبیقی می‌تواند موقعیت یک تصویر هدف را در یک الگوی ورودی با نویز تصادفی تشخیص دهد. در اینجا، فیلتری که می‌تواند نویز افزودنی 13 را حذف کرده و تصویر تحریب شده را بازیابی کند، مورد بحث قرار می‌گیرد. یک سیستم نوری مصور در شکل (۹.۸) را در نظر بگیرید. خروجی سیستم تصویربرداری $(g(x, y))$ با نویز افزودنی $(n(x, y))$ بصورت زیر داده می‌شود

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + n(x, y) \quad (۳۰.۸)$$

در آن x نشان‌دهنده مختصات در صفحه فیلتر است. از آنجایی که فرکانس مکانی ν_x در صفحه فیلتر با $\nu_x = x_0 / \lambda f_L$ و موج صفحه مورب با $\exp(-j2\pi\nu_x f_L \sin\theta)$ نشان داده می‌شود.

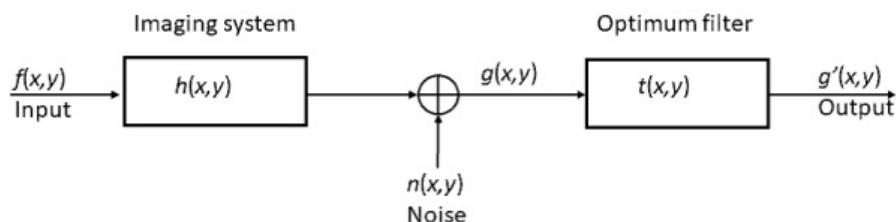
^{۱۲} Amplitude Transmittance

^{۱۳} Additive Noise



شکل ۸.۸: خروجی فیلتر تطبیقی. (الف) کامپیوتر فیلتر منطبق تولید شده، (ب) پاسخ ضربه ای (الف) و (ج) خروجی همبستگی.

که در آن $f(x, y)$ و $h(x, y)$ به ترتیب نشان دهنده تصویر ورودی و تابع توزیع نقطه‌ای



شکل ۹.۸: فیلتر بهینه برای نویز افزودنی

سیستم هستند. نویز را یک فرآیند تصادفی ثابت با حس گستردگی مرتبه دوم شناخته شده در نظر بگیرید و نویز از نظر آماری مستقل از تصویر $g(x, y)$ باشد. یک فیلتر بهینه طراحی شده است که می‌تواند نویز و تخریب تصویر را به حداقل برساند. تصویر پس از فیلتر بهینه بصورت زیر داده می‌شود

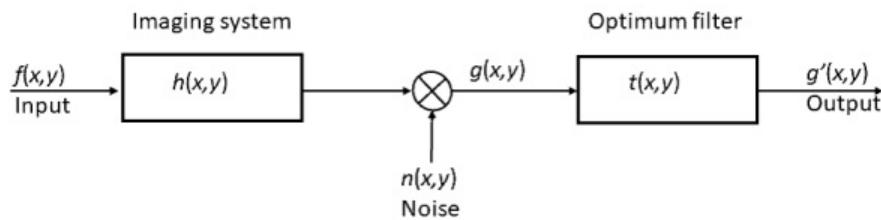
$$g'(x, y) = g(x, y) * t(x, y) \quad (31.8)$$

که در آن $t(x, y)$ تابع گسترش نقطه‌ای سیستم ترمیم^{۱۴} را نشان می‌دهد. فیلتر بهینه میانگین مربع خطای خطا را به حداقل می‌رساند، یعنی میانگین اختلاف مربع بین ورودی اصلی و خروجی فیلتر $g'(x, y)$ خواهد بود

$$E = \langle |f(x, y) - g'(x, y)|^2 \rangle \quad (32.8)$$

که در آن $\langle \dots \rangle$ نمایشگر میانگین آماری است.

^{۱۴} Restoration System



شکل ۱۰.۸: فیلتر بهینه برای نویز ضربی

حل آن خواهد بود

$$t(x, y) * \phi_{gg}(x, y) = \phi_{fg}(x, y) \quad (33.8)$$

که در آن ϕ_{fg} و ϕ_{gg} نماشگر خودبستگی $g(x, y)$ و همبستگی متقارب $f(x, y)$ و است [۹]. با تبدیل فوریه گرفتن از دو طرف معادله (۳۳.۸) می‌دهد

$$T(\nu_x, \nu_y) \Phi_{gg}(\nu_x, \nu_y) = \Phi_{fg}(\nu_x, \nu_y) \quad (34.8)$$

که در آن $T(\nu_x, \nu_y)$ ، $\Phi_{gg}(\nu_x, \nu_y)$ و $\Phi_{fg}(\nu_x, \nu_y)$ بترتیب نماشگر تبدیل فوریه $g(x, y)$ و $f(x, y)$ هستند. علاوه بر این، $\Phi_{gg}(\nu_x, \nu_y)$ و $\Phi_{fg}(\nu_x, \nu_y)$ طیف توان توان $n(x, y)$ و طیف توان متقارب $g(x, y)$ و $f(x, y)$ است. در این صورت فیلتر بهینه بصورت زیر داده می‌شود

$$T(\nu_x, \nu_y) = \frac{\Phi_{fg}(\nu_x, \nu_y)}{\Phi_{gg}(\nu_x, \nu_y)} = \frac{|F(\nu_x, \nu_y)|^2 H^*(\nu_x, \nu_y)}{|F(\nu_x, \nu_y)|^2 |H(\nu_x, \nu_y)|^2 + |N(\nu_x, \nu_y)|^2} \quad (35.8)$$

که در آن $N(\nu_x, \nu_y)$ نماشگر طیف فوریه نویز $n(x, y)$ است. اگر سیستم تصویر برداری ایده‌آل باشد ازاینرو $H(\nu_x, \nu_y) = 1$ و معادله بصورت زیر می‌شود

$$T(\nu_x, \nu_y) = \frac{|F(\nu_x, \nu_y)|^2}{|F(\nu_x, \nu_y)|^2 + |N(\nu_x, \nu_y)|^2} \quad (36.8)$$

این را فیلتر وینر^{۱۵} می‌نامند.

۴.۸ فیلتر بهینه برای نویز ضربی

فرکانس مکانی برای نویز افزودنی، مانند فیلتر تطبیقی و فیلتر وینر، قبلاً مورد بحث قرار گرفته است. حال، نویزی را در نظر بگیرید، که افزودنی نیست بلکه ضربی^{۱۶} است، مانند نویز خال^{۱۷}. شدت نویز خال خالی به شدت سیگنال بستگی دارد.

^{۱۵}Wiener filter

^{۱۶}Multiplicative Noise

^{۱۷}Speckle Noise

مدلی از یک فیلتر مکانی بازیابی برای الگوهای تخریب شده با نویز ضربی در شکل (۱۰.۸) نشان داده شده است [۱۰]. تصویر تخریب شده بصورت زیر نشان داده می‌شود

$$g(x, y) = [f(x, y) * h(x, y)] \cdot n(x, y) \quad (۳۷.۸)$$

خروجی $g'(x, y)$ فیلتر ترمیمی $t(x, y)$ خواهد بود

$$g'(x, y) = g(x, y) * t(x, y) \quad (۳۸.۸)$$

مسئله به حداقل رساندن میانگین خطای مربع تعریف شده در معادله (۳۲.۸) است. مانند حالت نویز افزودنی، پاسخ فرکانس فیلتر بهینه خواهد بود

$$T(\nu_x, \nu_y) = \frac{\Phi_{fg}(\nu_x, \nu_y)}{\Phi_{gg}(\nu_x, \nu_y)} \quad (۳۹.۸)$$

که در آن $\Phi_{fg}(\nu_x, \nu_y)$ طیف توان متقابل $f(x, y)$ و $g(x, y)$ است؛

$$\Phi_{fg}(\nu_x, \nu_y) = \langle n \rangle F^*(\nu_x, \nu_y) \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y) \quad (۴۰.۸)$$

و $\Phi_{gg}(\nu_x, \nu_y)$ طیف توان $g(x, y)$ است.

$$\Phi_{gg}(\nu_x, \nu_y) = |F(\nu_x, \nu_y)|^2 \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y) * \Phi_{nn}(\nu_x, \nu_y) \quad (۴۱.۸)$$

در نهایت، فیلتر بهینه برای نویز ضربی خواهد بود

$$T(\nu_x, \nu_y) = \frac{\langle n \rangle F^*(\nu_x, \nu_y) \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y)}{|F(\nu_x, \nu_y)|^2 \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y) * \Phi_{nn}(\nu_x, \nu_y)} \quad (۴۲.۸)$$

که در آن $\langle n \rangle$ نمایشگر میانگین نویز و $\Phi_{nn}(\nu_x, \nu_y)$ طیف توان نویز است. سپس، حالت زیر را در نظر گیرید

$$n(x, y) = \langle n \rangle + m(x, y) \quad (۴۳.۸)$$

که در آن $m(x, y)$ نویز تصادفی با میانگین صفر است. در این حالت، طیف توان نویز خواهد بود

$$\Phi_{nn}(\nu_x, \nu_y) = \langle n \rangle^2 + \delta(\nu_x, \nu_y) + \Phi_{mm}(\nu_x, \nu_y) \quad (۴۴.۸)$$

که در آن $\Phi_{mm}(\nu_x, \nu_y)$ نمایشگر طیف توان $m(x, y)$ است. در این صورت معادله برابر است با

$$T(\nu_x, \nu_y) = \frac{\langle n \rangle F^*(\nu_x, \nu_y) \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y)}{\langle n \rangle^2 |F(\nu_x, \nu_y)|^2 \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y) + |F(\nu_x, \nu_y)|^2 \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y) * \Phi_{mm}(\nu_x, \nu_y)} \quad (۴۵.۸)$$

باید توجه داشت که وقتی طیف توان $\Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y)$ در مقایسه با $\langle n \rangle$ کوچک باشد، فیلتر بهینه به فیلتر معکوس کاهش می‌یابد.

$$T(\nu_x, \nu_y) \propto \frac{1}{F(\nu_x, \nu_y)} \quad (46.8)$$

هنگامی که عرض منطقه قابل توجه $\Phi_{mm}(\nu_x, \nu_y)$ از $\Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y)$ کوچکتر است، جمله دوم مخرج معادله (۴۵.۸) با $\langle f \rangle^2 \Phi_{mm}(\nu_x, \nu_y)$ تقریب زده می‌شود، که در آن $\langle f \rangle$ میانگین $f(x, y)$ را نشان می‌دهد. در این حالت، فیلتر ترمیم بهینه تصویر برای نویز ضربی خواهد بود

$$T(\nu_x, \nu_y) = \frac{\langle n \rangle F^*(\nu_x, \nu_y) \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y)}{\langle n \rangle^2 |F(\nu_x, \nu_y)|^2 \Phi_{ff}(\nu_x, \nu_y) + \langle f \rangle^2 \Phi_{mm}(\nu_x, \nu_y)} \quad (47.8)$$

که بسیار شبیه به فیلتر بهینه برای نویز افروزنی بدست آمده است [۱۱]. برای تأیید نتایج نظری، یک شبیه سازی عددی انجام شده است. برای سادگی، ما یک مورد تصویربرداری یک بعدی و ایده آل ارائه می‌دهیم، یعنی $H(\nu_x, \nu_y) = 1$ را در نظر بگیرید که تصویر اصلی $f(x, y)$ از دوتابع مستطیل شکل و پس زمینه تاریک تشکیل شده است

$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x - a}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x + a}{a}\right) + b \quad (48.8)$$

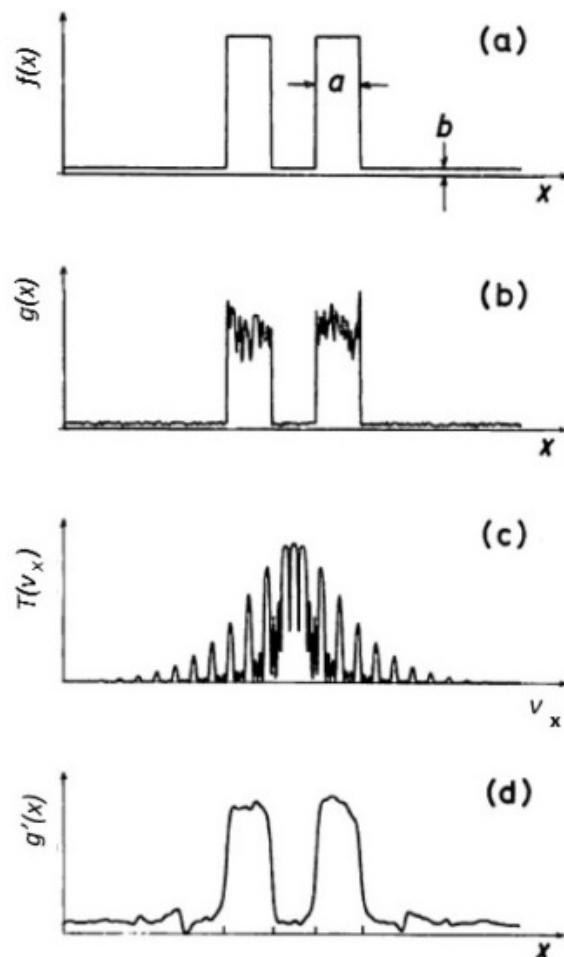
که در آن a و b ثابت هستند. نویز $n(x, y)$ توسط مولد اعداد شبه تصادفی در یک کامپیوتر تولید می‌شود. شکل (۱۱.۸)(الف) و (ب) تصویر اصلی $f(x)$ را که توسط معادله (۴۸.۸) توصیف شده است بترتیب با $a = 10$ و $b = 0$ و نوع نویز $g(x)$ آن نشان می‌دهد. پس از فیلتر کردن با فیلتر بهینه معادله (۴۲.۸) نشان داده شده در (ج)، ما تصویر فیلتر شده (د) را به دست آورده‌یم.

۵.۸ تحلیلگر طیف

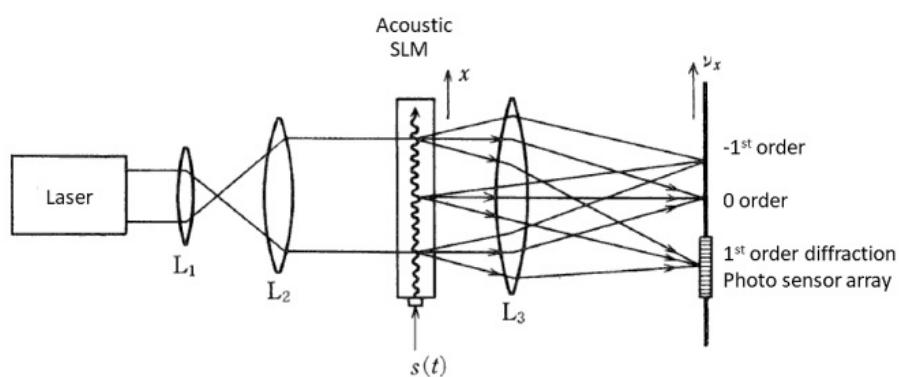
از آنجایی که اثر تبدیل فوریه یک عدسی ما را قادر می‌سازد تا طیف فوریه یک سیگنال $f(x, y)$ را محاسبه کنیم، تبدیل فوریه دو بعدی را می‌توان در اندازه‌گیری طیف توان الگوهای دو بعدی، اندازه گیری قطر ذرات کوچک، و غیره استفاده کرد [۱۲]. تجهیزاتی برای آنالیز طیف سیگنال وابسته به زمان $f(t)$ تحلیلگر (آنالایزر) طیف ^{۱۸} نامیده می‌شود. برای محاسبه طیف سیگنال وابسته به زمان $f(t)$ با ابزار نوری، سیگنال وابسته به زمان باید به سیگنال فضایی $f(x)$ تبدیل شود. برای این منظور از مدولاتور نور فضایی (SLM) استفاده می‌شود [۱۳]. به عنوان مثال، همانطور که در شکل (۱۲.۸) نشان داده شده است، سیگنال وابسته به زمان

$$s(t) = f(t) \cos(2\pi\nu_a t) \quad (49.8)$$

^{۱۸}Spectrum Analyzer



شکل ۱۱.۸: آزمایش عددی فیلتر بهینه برای نویز ضربی. (الف) تصویر اصلی، (ب) تصویر کاهش یافته توسط نویز ضربی، (ج) تابع انتقال فیلتر بهینه، و (د) تصویر فیلتر شده. منحنی های این شکل با این مقادیر حداقل اندازه نرمال دارند.



شکل ۱۲.۸: تحلیلگر طیف

ورودی به یک مدولاتور نور فضایی فراصوت است، جایی که ν_a نشان دهنده فرکانس حامل موج صوتی است. این سیگنال که در SLM فراصوت منتشر می‌شود، مدولاسیون ضریب شکست مناسب با $s(x - vt)$ را ایجاد می‌کند. جبهه موج نوری پس از عبور از SLM به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\exp[-j\alpha s(x - vt)] \approx 1 - j\alpha s(x - vt) = 1 - j\alpha f(x - vt) \cos[k_a(x - vt)] \quad (50.8)$$

هنگامی که تغییر ضریب شکست کوچک است، که α یک ثابت و k_a عدد موج موج فراصوت است. موج پراشیده در صفحه کانونی یک عدسی خواهد بود

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{1 - j\alpha f(x - vt) \cos[k_a(x - vt)]\} \\ = \delta(v_x) - j\alpha \mathcal{F}[f(x) \cos(k_a x)] \exp(j2\pi v_x \nu_a t) \end{aligned} \quad (51.8)$$

دامنه موج پراش مرتبه اول $F(\nu_x) \exp(j2\nu_x vt)$ است و با یک آرایه آشکارساز عکس یک بعدی شناسایی می‌شود به طوری که طیف توان $|F(\nu_x)|^2$ از سیگنال $f(x)$ به دست می‌آید.

۶.۸ همبستگی نوری

همبستگی نوری دو بعدی با استفاده از فرکانس مکانی، همانطور که در بخش ۱.۸ توضیح داده شد، انجام می‌شود. در فیلتر فرکانس مکانی، در اینجا، همبسته نوری یک بعدی توضیح داده شده است [۱۴]. برای محاسبه همبستگی سیگنال وابسته به زمان، سیگنال وابسته به زمان باید با استفاده از یک SLM صوتی به سیگنال نوری تبدیل شود.تابع همبستگی دو سیگنال ورودی $f_1(t)$ و $f_2(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau \quad (52.8)$$

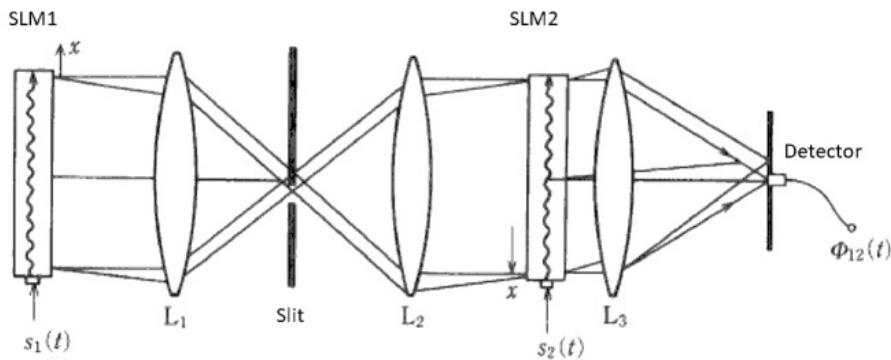
$$\text{یا} \\ \Phi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) dt \quad (53.8)$$

همبستگی تعریف شده توسط معادله (۵۲.۸) نوع انتگرال مکانی نامیده می‌شود زیرا متغیر انتگرال t یک متغیر مکانی x است. از سوی دیگر، همبستگی تعریف شده توسط معادله (۵۳.۸) نوع انتگرال زمانی نامیده می‌شود زیرا متغیر انتگرال t متغیر زمانی t است.

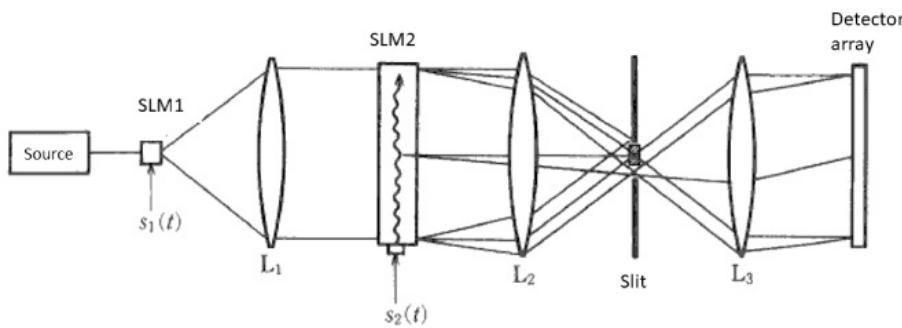
۱.۶.۸ نوع انتگرال مکانی

فرض کنید که سیگنال $f_1(t)$ در SLM1 صوتی روی سیگنال $f_2(t)$ در SLM2 صوتی تصویر شده است، همانطور که در شکل (۱۳.۸) نشان داده شده است [۱۵]. موج نوری که از SLM1 عبور می‌کند با رابطه زیر داده می‌شود

$$1 - j\alpha f_1(x - vt) \cos[k_a(x - vt)] \quad (54.8)$$



شکل ۱۳.۸: همبستگی نوع انتگرال مکانی



شکل ۱۴.۸: همبستگی نوع انتگرال زمانی

در SLM2، موج آکوستیک در جهت مخالف موج صوتی SLM1 منتشر می‌شود. موج نوری که از SLM2 عبور می‌کند با رابطه زیر داده می‌شود

$$1 - j\alpha f_{\text{A}}(x + vt) \cos[k_a(x + vt)] \quad (۵۵.۸)$$

اولین مرتبه پراش از موج SLM1 انتخاب شده و SLM2 را روشن می‌کند. اولین موج مرتبه پراش از SLM2 انتخاب شده و شدت خروجی نهایی خواهد بود

$$I(t) = \alpha^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - vt) f_2(x + vt) dx \right|^2 = \alpha^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x + 2vt) dx \right|^2 \quad (۵۶.۸)$$

تابع همبستگی $\Phi_{12}(t)$ به صورت سیگنال زمان به دست می‌آید.

۲.۶.۸ نوع انتگرال زمانی

سیگنال زمان $s_1(t)$ شدت منبع نور را توسط SLM1 مدوله و SLM2 را، همانطور که در شکل (۱۴.۸) نشان داده شده، روشن می‌کند [۱۶].

موج پراش مرتبه اول از SLM2 بصورت زیر داده می‌شود

$$1 - j\alpha f_\gamma(t - x/v) \cos[2\pi\nu_a(t - x/v)] \quad (57.8)$$

انتگرال‌گیری در حوزه زمان پراش مرتبه صفر با اختلاف فاز $\pi/2$ و موج پراش مرتبه اول داده می‌شود

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \left| -j - j \frac{\alpha}{\gamma} f_\gamma(t - x/v) \exp[-j2\pi\nu_a(t - x/v)] \right|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cos(2\pi\nu_a t) dt \\ &\quad + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_\gamma(t - x/v) \cos(2\pi\nu_a t) \cos(2\pi\nu_a(t - x/v)) dt \\ &\quad + \frac{\alpha}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_\gamma^*(t - x/v) \cos(2\pi\nu_a t) dt \\ &\propto \cos(k_a x) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_\gamma(t - x/v) dt \end{aligned} \quad (58.8)$$

پوش حامل $\cos(2k_a x)$ تابع همبستگی $\Phi_{12}(x)$ را می‌دهد که توسط یک آرایه حسگر عکس خطی شناسایی می‌شود.

۷.۸ همبستگی تبدیل مشترک

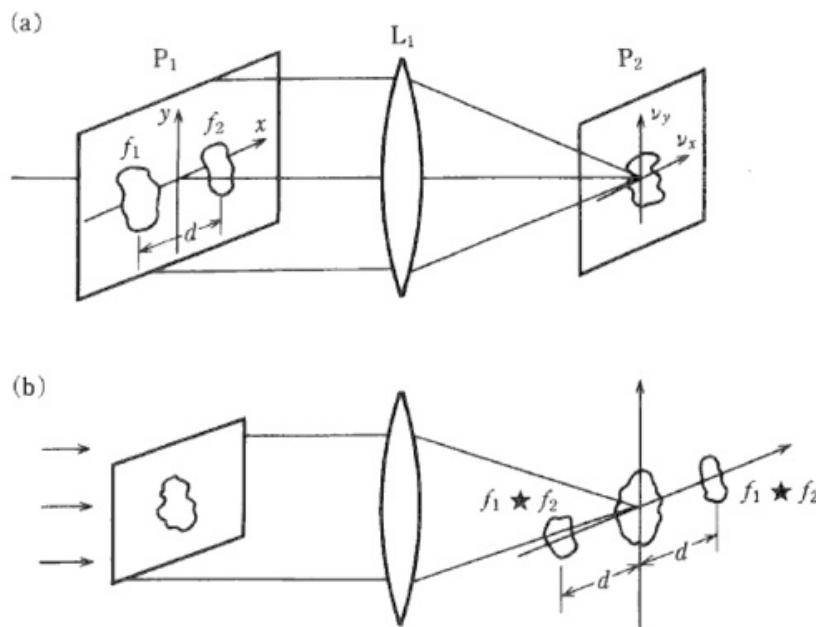
یک روش جایگزین برای همبسته‌های نوری، همبسته تبدیل فوریه مشترک است [۱۷، ۱۸]. دو الگوی ورودی $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ را در نظر بگیرید، که در صفحه ورودی P_1 با فاصله d قرار دارند، همانطور که در شکل (۱۵.۸)(الف) نشان داده شده است. شدت تبدیل فوریه ورودی‌ها در صفحه P_2 به عنوان مثال با یک فیلم عکاسی ثبت می‌شود. توزیع شدت ثبت شده با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} I(\nu_x, \nu_y) &= |\mathcal{F}[f_1(x + d/2, y) + f_2(x - d/2, y)]|^2 \\ &= |F_1(\nu_x, \nu_y) \exp(-j\pi d\nu_x) + F_2(\nu_x, \nu_y) \exp(j\pi d\nu_x)|^2 \\ &= |F_1(\nu_x, \nu_y)|^2 + |F_2(\nu_x, \nu_y)|^2 \\ &\quad + F_1(\nu_x, \nu_y) F_2^*(\nu_x, \nu_y) \exp(-j2\pi d\nu_x) \\ &\quad + F_1^*(\nu_x, \nu_y) F_2(\nu_x, \nu_y) \exp(j2\pi d\nu_x) \end{aligned} \quad (59.8)$$

که در آن تبدیل فوریه $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ به ترتیب $F_1(\nu_x, \nu_y)$ و $F_2(\nu_x, \nu_y)$ هستند. گذرش فیلم ثبت شده بصورت زیر داده می‌شود.

$$\begin{aligned} t(\nu_x, \nu_y) &= t_0 + \gamma [|F_1|^2 + |F_2|^2] \\ &= +\gamma [F_1 F_2^* \exp(-j2\pi d\nu_x) + F_1^* F_2 \exp(j2\pi d\nu_x)] \end{aligned} \quad (60.8)$$

^{۱۹}Transmittance



شکل ۱۵.۸: همبستگی تبدیل مشترک

با تبدیل فوریه گرفتن این با دستگاه نوری همدوس، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[t(\nu_x, \nu_y)] &= t \cdot \delta(x, y) \\ &\quad + \gamma[f_1 * f_2(x, y) + f_2 * f_1(x, y)] \\ &= +\gamma[f_1 * f_2(x + d, y) + f_1 * f_2(-x + d, -y)] \end{aligned} \quad (۶۱.۸)$$

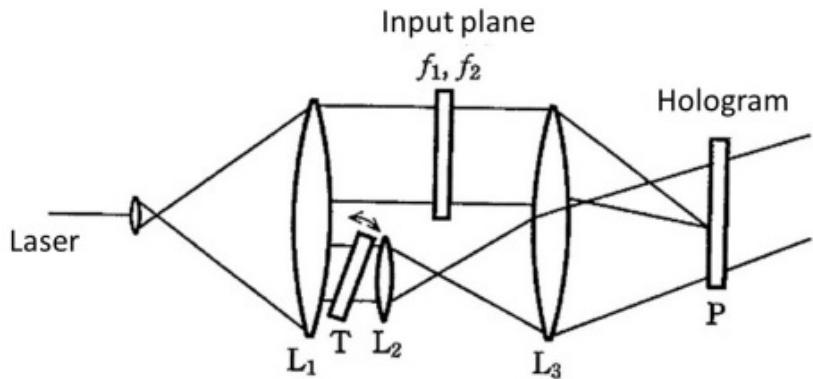
یعنی دو الگوی همبستگی $f_1 * f_2$ واقع با فاصله d حول محور نوری، همانطور که در شکل (ب) نشان داده شده، به دست می‌آید.

۸.۸ جمع و تفریق نوری

عملیات افزودن نوری شدت الگوها را می‌توان به راحتی با آشکارساز یکسان یا ثبت نوردهی دوگانه بر روی یک محیط عکاسی انجام داد. برای افزودن دامنه، دو دامنه از الگوها به عنوان یک هولوگرام نوردهی دوگانه ثبت می‌شود و دو تصویر به طور همزمان بازسازی می‌شوند تا برهمنهی دو دامنه به دست آید.

از آنجایی که شدت غیرمنفی است، تفریق نوری الگوی شدت آسان نیست. عملیات تفریق نوری با تفریق دامنه پس از تبدیل توزیع شدت الگوها به توزیع های دامنه یا استفاده از ویژگی های غیرخطی مدولاتورهای نور مکانی یا آشکارسازهای عکس انجام می‌شود [۱۹].

به عنوان نمونه ای از روش قبلی، روش هولوگرافی با نوردهی دوگانه معرفی شده است [۲۰]. همانطور که در شکل (۱۶.۸) نشان داده شده است، اولین و دومین هولوگرام تبدیل



شکل ۱۶.۸: تفريقي نوري با هلوگرام

فوريه از الگوي $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ واقع در صفحه ورودي به عنوان يك هلوگرام نوردهي دوگانه ثبت مي شود، در آنجا فاز مرجع هلوگرام دوم به مقدار π انتقال مي يابد. گذرش هلوگرام با نوردهي دوگانه با رابطه زير داده مي شود

$$\begin{aligned} t(x, y) &= t_0 + \gamma [|F_1(\nu_x, \nu_y)|^2 + |F_2(\nu_x, \nu_y)|^2 + 2|R|^2] \\ &= t_0 + \gamma [|F_1(\nu_x, \nu_y)|^2 + |F_2(\nu_x, \nu_y)|^2 + 2|R|^2] \\ &\quad + \gamma R[F_1(\nu_x, \nu_y) - F_2(\nu_x, \nu_y)] \exp[j2\pi\nu_x \sin(\theta/\lambda)] \\ &\quad + \gamma R[F_1^*(\nu_x, \nu_y) - F_2^*(\nu_x, \nu_y)] \exp[-j2\pi\nu_x \sin(\theta/\lambda)] \end{aligned} \quad (62.8)$$

با توجه به معادلات (۳.۴) و (۴.۷). با بازسازی با اولین جبهه موج مرجع $R \exp(-j2\pi\nu_x \sin(\theta/\lambda))$ و تبدیل فوریه آن، تصویر بازسازی شده خواهد بود

$$g(x, y) = g_0(x + d, y) + g_1(x, y) + g_{-1}(x + 2d, y) \quad (63.8)$$

كه در آن $d = \sin \theta / \lambda$ است.

$$g_0(x, y) = \mathcal{F}\{t_0 + \gamma [|F_1|^2 + |F_2|^2 + 2|R|^2]\} \quad (64.8)$$

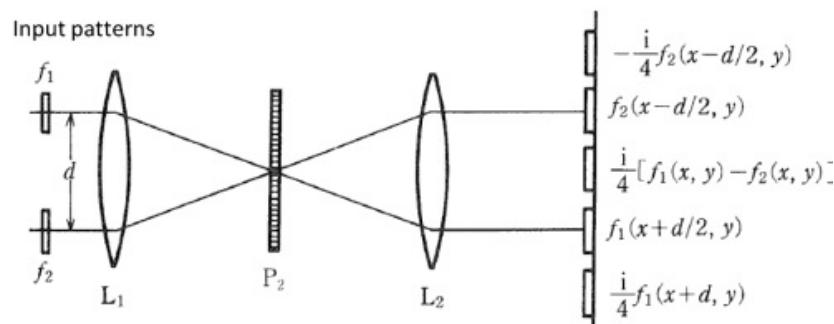
$$g_1(x, y) = \gamma R^2 [f_1(x, y) - f_2(x, y)] \quad (65.8)$$

$$g_{-1}(x, y) = \gamma R^2 [f_1^*(x, y) - f_2^*(x, y)] \quad (66.8)$$

شدت مولفه پراش اول $g_1(x, y)$ تفاوت الگوهای ورودی $|f_1(x, y) - f_2(x, y)|^2$ را نشان می دهد. به دلیل روش نوردهی دوگانه، این یک فرآیند زمان حقیقی نیست. روش تفريقي توري (گريتینگ)^{۲۰} همانطور که در شکل (۱۷.۸) نشان داده شده است، يك روش زمان حقيقی^{۲۱} است [۲۱]. دو الگوي ورودی $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ را در نظر بگيريد

^{۲۰} Grating Subtraction Method

^{۲۱} Real Time Method



شکل ۱۷.۸: تفريق نوری با توری

كه با فاصله d قرار دارند. مشابه مورد همبستگی تبدیل مشترک، تبدیل فوریه دو الگو در صفحه P_2 تشکیل می‌شود.

$$\begin{aligned} G(\nu_x, \nu_y) &= \mathcal{F} \left[f_1 \left(x + \frac{d}{\lambda}, y \right) + f_2 \left(x - \frac{d}{\lambda}, y \right) \right] \\ &= F_1(\nu_x, \nu_y) \exp(-j\pi d\nu_x) + F_2(\nu_x, \nu_y) \exp(j\pi d\nu_x) \end{aligned} \quad (۶۷.۸)$$

سپس یک توری با گام Λ در حوزه فرکانس مکانی در صفحه P_2 قرار می‌گیرد.

$$H(\nu_x) = 1 + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi\nu_x}{\Lambda} + \delta \right) \quad (۶۸.۸)$$

كه در آن δ نشان دهنده فاز توری است. با تبدیل فوریه دوباره با عدسی L_2 ، داریم

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathcal{F} [G(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x)] \\ &= f_1 \left(x + \frac{d}{\lambda}, y \right) + f_1 \left(x - \frac{d}{\lambda}, y \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathcal{F} \left\{ F_1(\nu_x, \nu_y) \exp \left[j2\pi \left(\frac{1}{\Lambda} - \frac{d}{\lambda} \right) \nu_x \right] \cdot \exp(j\delta) \right. \\ &\quad + F_2(\nu_x, \nu_y) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{1}{\Lambda} - \frac{d}{\lambda} \right) \nu_x \right] \cdot \exp(-j\delta) \\ &\quad + F_1(\nu_x, \nu_y) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{d}{\lambda} \right) \nu_x \right] \cdot \exp(-j\delta) \\ &\quad \left. + F_2(\nu_x, \nu_y) \exp \left[j2\pi \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{d}{\lambda} \right) \nu_x \right] \cdot \exp(j\delta) \right\} \end{aligned} \quad (۶۹.۸)$$

در حالتی که وقتی $1/\Lambda = d/2$ و $\delta = -\pi/2$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f_1 \left(x + \frac{d}{\lambda}, y \right) + f_1 \left(x - \frac{d}{\lambda}, y \right) - \frac{j}{4} [f_1(x, y) - f_2(x, y)] \\ &\quad + \frac{j}{4} [f_1(x+d, y) - f_2(x-d, y)] \end{aligned} \quad (۷۰.۸)$$

در نهایت تفاوت الگوها را داریم $|f_1(x, y) - f_2(x, y)|^2$ در اطراف موقعیت $x = d, d/2, 0, -d/2, -d$ در صفحه خروجی به دست می‌آید. در این روش، پنج الگوی نزدیک به موقعیت‌ها،

در صفحه خروجی مشاهده می‌شود. برای افزایش تفکیک الگوهای خروجی، روش سه پرتو توری پیشنهاد شده است [۲۲].

۹.۸ تبدیل مختصات

در بسیاری از موارد، مانند عملیات جمع، تفریق و همبستگی بین الگوها، عادی‌سازی (نمایلیزه کردن) مختصات الگوها مورد نیاز است. تبدیل مختصات با استفاده از یک فیلتر فاز مبتنی بر هولوگرام تولید شده با کامپیوتر مورد بحث قرار گرفته است [۲۳]. نگاشت نقطه (x, y) در سیستم مختصات $y - x$ را به نقطه (u, v) در سیستم مختصات $u - v$ در نظر بگیرید.

$$u = p(x, y) \quad (71.8)$$

$$v = q(x, y) \quad (72.8)$$

چنین تبدیلهایی به عنوان جوابهای نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل را به ما می‌دهد. وجود راه حل‌هایی مانند

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \quad (73.8)$$

موردنیاز است.

یک چیدمان نوری را که در آن سیستم مختصات $y - x$ و سیستم مختصات $u - v$ یکدیگر را، همانطور که در شکل ۱۸.۸ نشان داده شده و یک فیلتر برای تبدیل مختصات درست بعد از صفحه $y - x$ قرار دارد و تبدیل فوریه انجام می‌دهند، در نظر بگیرید. در صفحه خروجی، داریم

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-jk\phi(x, y)] \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda f}(xu + yv)\right] dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-jk\Phi(x, y, u, v)] dx dy \end{aligned} \quad (74.8)$$

که در آن

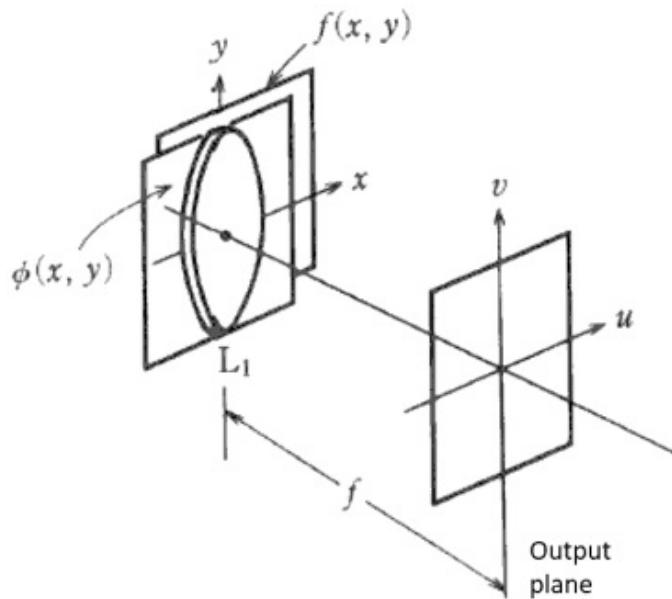
$$\Phi(x, y, u, v) = \frac{\lambda}{2\pi} \phi(x, y) - \left(\frac{xu}{f} + \frac{yv}{f} \right) \quad (75.8)$$

لازم به ذکر است که عدد موج $k = 2\pi/\lambda$ بسیار بزرگ است. به جز ناحیه‌ای که $\phi(x, y)$ به آرامی در حال تغییر است، عبارت $\exp[-jk\phi(x, y)]$ به شدت بین $1 \pm$ تغییر می‌کند و بنابراین، این عبارت به انتگرال‌گیری معادله (۷۴.۸) ۲۲ کمک نمی‌کند. جمله‌ای که

۲۲ اگر انتگرال معادله (۷۴.۸) فقط در نقطه (x_0, y_0) دارای مقدار حداقلی باشد، داریم

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_y(x_0, y_0) = 0.$$

که $f(x, y)$ در نقطه نقطه (x_0, y_0) پیوسته است و $\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2 = 0$ و $\Phi_{xy} \neq 0$.



شکل ۱۸.۸: سیستم تبدیل مختصات نوری

به انتگرال کمک می‌کند نقطه زیر است

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (76.8)$$

در نهایت، از معادله (۷۵.۸) معادلات دیفرانسیل نگاشت را داریم

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda f} u \quad (77.8)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \frac{2\pi}{\lambda f} v \quad (78.8)$$

۱.۹.۸ تصویربرداری با بزرگنمایی برابر

از آنجایی که $u = -x, v = -y$ برای ایجاد بزرگنمایی یکسان در تصویربرداری، با انتگرال گیری از معادلات (۷۷.۸) و (۷۸.۸) داریم

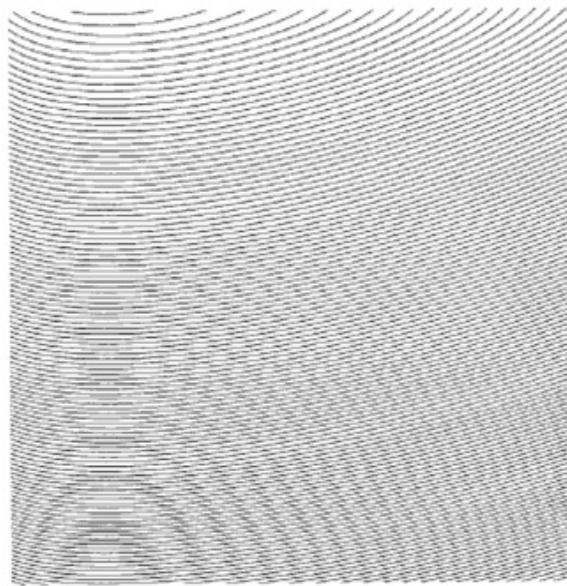
$$\phi(x, y) = \frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda f} \quad (79.8)$$

این همان عدسی توصیف شده با معادله (۱۲.۶) است.

که در آن Φ_{xx}, Φ_{yy} و Φ_{xy} مشتقه جزئی در (x_0, y_0) هستند. در این حالت اگر $k \rightarrow \infty$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-jk\Phi(x, y, u, v)] dx dy = \frac{-j2\pi f(x_0, y_0)}{k\sqrt{\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2}} \exp[-jk\Phi(x_0, y_0)]$$

معتبر است. به این روش برای محاسبه انتگرال، روش فاز ثابت می‌گویند



شکل ۱۹.۸: CGH برای تبدیل مختصات

۲.۹.۸ تبدیل مختصات لگاریتمی

در مورد تبدیل مختصات لگاریتمی مانند $u = \ln x, v = \ln y$ ، داریم

$$\phi(x, y) = \frac{\pi(x \ln x - x + y \ln y - y)}{\lambda f} \quad (80.8)$$

شکل (۱۹.۸) فیلتر CGH تبدیل مختصات لگاریتمی که با معادله (۸۰.۸) توصیف می‌شود را نشان می‌دهد. تبدیل مختصات با استفاده از این فیلتر و تبدیل فوریه نوری، تبدیل ملین^{۲۳} ذکر شده در بخش ۱۰.۸ را می‌دهد.

۱۰.۸ تبدیل ملین

تبدیل ملین برای سیگنال ورودی $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{M}[f(x)] = M(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \quad (81.8)$$

در این تبدیل، اگر بزرگنمایی سیگنال ورودی تغییر کند، قدر مطلق تبدیل ملین آن تغییر نمی‌کند. تبدیل ملین برای پردازش سیگنال مستقل از مقیاس، یعنی عادی‌سازی (نرم‌الیزه) الگوهای ورودی با بزرگنمایی‌های مختلف برای فیلتر فرکانس مکانی مفید

^{۲۳}Mellin transform

است [۲۴]. فرض کنید تبدیل ملین نگاشت فضای مختلط با یک عدد مختلط است

$$s = \alpha - j\omega \quad (82.8)$$

و $x = \exp(\xi)$ معادله (۸۱.۸) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f[\exp(\xi)] \exp[\xi(\alpha - j\omega)] d\xi \quad (83.8)$$

این تبدیل لاپلاس است. فرض کنید s یک عدد موهومی خالص باشد، مانند $s = j2\pi\nu$. معادله (۸۴.۸) به ۴ صورت زیر بازنویسی شده است

$$M(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f[\exp(\xi)] \exp(j2\pi\nu\xi) d\xi \quad (84.8)$$

این تبدیل فوریه است.
تبدیل ملین نیز بصورت زیر تعریف می‌شود

$$M(\mu) = \int_0^{\infty} f(x)^{j2\pi\nu-1} dx \quad (85.8)$$

با عدد موهومی خالص $s = j2\pi\nu$. تبدیل ملین معکوس نیز بصورت زیر وجود دارد

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} M(\nu)^{-j2\pi\nu} d\nu \quad (86.8)$$

سپس، تبدیل ملین تابع $f(\alpha x)$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(\alpha x)] &= \int_0^{\infty} f(\alpha x) x^{j2\pi\nu-1} dx = \int_0^{\infty} f(x) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{j2\pi\nu-1} \frac{dx}{\alpha} \\ &= \alpha^{-j2\pi\nu} \int_0^{\infty} f(x) x^{j2\pi\nu-1} dx = \alpha^{-j2\pi\nu} \mathcal{M}[f(x)] \end{aligned} \quad (87.8)$$

در نهایت داریم؛

$$|\mathcal{M}[f(\alpha x)]| = |\mathcal{M}[f(x)]| \quad (88.8)$$

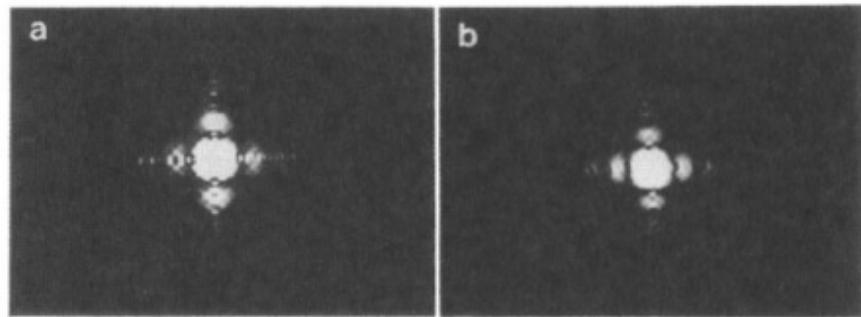
این به این معنی است که قدر مطلق تبدیل ملین ثابت است.
تبدیل ملین دو بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) x^{j2\pi\nu_x-1} y^{j2\pi\nu_y-1} dx dy \quad (89.8)$$

با استفاده از

$$x = \exp(\xi) \quad (90.8)$$

$$y = \exp(\eta) \quad (91.8)$$



شکل ۲۰.۸: تبدیل ملین اندازه‌های مختلف مستطیل

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f[(\exp(\xi), \exp(\eta)] \exp[j 2\pi(\nu_x \xi + \nu_y \eta)] d\xi d\eta \quad (۹۲.۸)$$

بنابراین، تبدیل فوریه $f[(\exp(\xi), \exp(\eta)]$ تبدیل ملین را می‌دهد.
از آنجا که

$$\xi = \ln x \quad (۹۳.۸)$$

$$\eta = \ln y \quad (۹۴.۸)$$

فیلتر برای تبدیل مختصات با استفاده از معادله (۹۰.۸) بصورت زیر داده شده است.

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi(x \ln x - x + \ln y - y)}{\lambda f} \quad (۹۵.۸)$$

این فیلتر قبلاً در شکل (۱۹.۸) نشان داده شده است. تبدیل ملین با تبدیل مختصات یک الگوی ورودی با استفاده از فیلتری که در شکل (۱۹.۸) مصور است بدست می‌آید و سپس تبدیل فوریه نوری گرفته می‌شود. نمونه‌ای از تبدیل نوری ملین روزنه‌های مستطیلی با اندازه‌های مختلف در شکل (۲۰.۸) نشان داده شده است [۲۵]. بهدلیل شدت تبدیل ملین، اندازه آنها یکسان است.

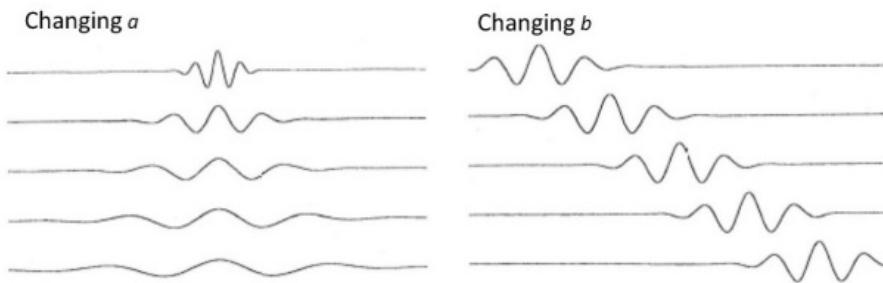
۱۱.۸ تبدیل موجک

تبدیل فوریه برای آشکارسازی تناوب در سیگنال‌ها استفاده می‌شود زیرا هسته انتگرال $\exp(-j 2\pi \nu_x)$ یکتابع تناوبی است. علاوه بر این، تبدیل فوریه برای یافتن شباهت در داده‌ها استفاده می‌شود زیرا طیف فوریه با سری توانی برای داده‌های با خود شباهتی^{۲۴} نشان داده می‌شود.

بحث در مورد اطلاعات محلی در طیف فوریه دشوار است زیرا هسته تبدیل فوریه $\exp(-j 2\pi \nu_x)$ در محدوده کامل x گسترش می‌یابد. بههمین دلیل، برای بهدست آوردن

^{۲۴}Self-Similarity

یک طیف محلی، یک تابع ورودی فقط در یک منطقه محلی با یک تابع پنجره و تبدیل فوریه محدود می‌شود. با این حال، این روش به دلیل هسته انتگرال محلی، وضوح تناوب را کاهش می‌دهد. تبدیل موجک تناوب را حفظ نمی‌کند، اما شباهت را به شدت حفظ می‌کند. این تبدیل در تحلیل شباهت محلی در داده‌ها به دلیل هسته انتگرال محلی و شباهت آن مناسب است [۲۶].



شکل ۲۱.۸: موجک با تغییر a و b . موجک مادر موجک مایر ($m(x) = \exp(-j2\pi\nu_x) \cdot \exp(-x^2/2)$) است که قسمت حقیقی آن نشان داده شده است.

در ابتدا تابع $m(x)$ به نام موجک مادر را در نظر بگیرید. با استفاده از موجک مادر، سری تابع با دو پارامتر a و b با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$h_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} m\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (96.8)$$

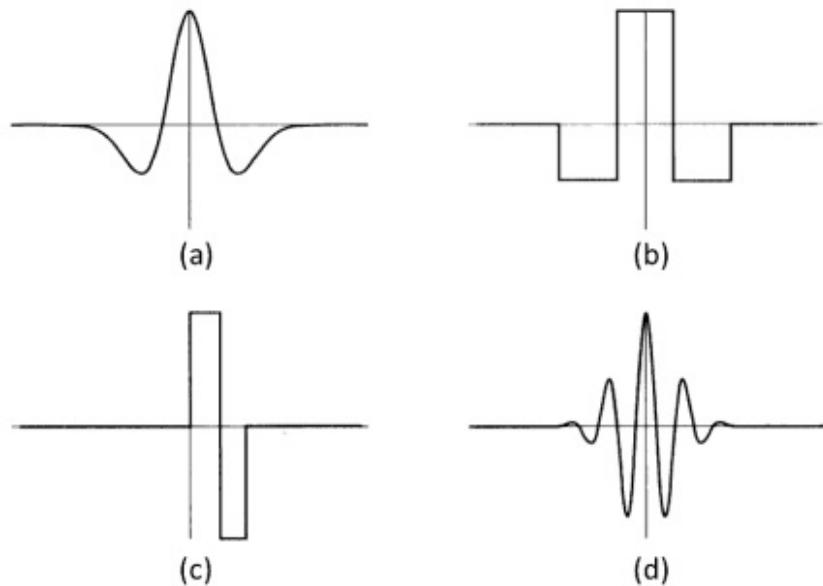
که موجک نامیده می‌شود. همانطور که در شکل (۲۱.۸) نشان داده شده، موجک‌ها مشابه یکدیگر هستند. در مقایسه با تبدیل فوریه، پارامتر a در موجک مربوط به دوره، معکوس فرکانس است، اما پارامتر موقعیت b هیچ پارامتر متناظری در تبدیل فوریه ندارد. تبدیل موجک با استفاده از هسته‌های یک سری موجک تعریف می‌شود. تبدیل موجک با پارامترهای پیوسته a و b تبدیل موجک پیوسته و تبدیل موجک با پارامترهای گسته موجک گسته هستند. تبدیل موجک‌های گسته با هسته‌های متعامد، تبدیل موجک متعامد نامیده می‌شود. چند نمونه از موجک‌های مادر در شکل (۲۲.۸) نشان داده شده است.

تبدیل موجک پیوسته تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف شده است

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx \quad (97.8)$$

از آنجایی که تبدیل موجک همبستگی بین $m(x)$ و $f(x)$ است، تبدیل موجک را می‌توان با فیلتر فرکانس مکانی نوری انجام داد.
تبدیل فوریه موجک توسط

$$H_{a,b}(\nu) = \sqrt{a} \exp(j2\pi b\nu) M(a\nu) \quad (98.8)$$



شکل ۲۲.۸: نمونه‌هایی از موجک‌های مادر (الف) موجک کلاه مکزیکی $m(x) = (1 - \exp(-x^2/2)) \cdot \exp(-x^2/2)$ (ب) موجک کلاه فرانسوی، (ج) موجک هار (Haar) و (د) قسمت حقیقی موجک مایر $m(x) = \exp(-j\pi\nu_x) \cdot \exp(-x^2/2)$ (Meyer)

که در آن $M(\nu)$ تبدیل فوریه $m(x)$ را نشان می‌دهد.
اکنون، فیلتر تطبیقی با تبدیل موجک را در نظر بگیرید. با استفاده از تبدیل فوریه تبدیل موجک سیگنال $s(x, y)$ شناسایی می‌شود

$$W_s(a_x, a_y, b_x, b_y) = \sqrt{a_x a_y} \iint S(\nu_x, \nu_y) \cdot M^*(a_x \nu_x, a_y \nu_y) \times \exp[-j\pi(b_x \nu_x + b_y \nu_y)] d\nu_x d\nu_y \quad (99.8)$$

و تبدیل فوریه تبدیل موجک سیگنال ورودی $f(x, y)$

$$W_f(a_x, a_y, b_x, b_y) = \sqrt{a_x a_y} \iint F(\nu_x, \nu_y) \cdot M^*(a_x \nu_x, a_y \nu_y) \times \exp[-j\pi(b_x \nu_x + b_y \nu_y)] d\nu_x d\nu_y \quad (100.8)$$

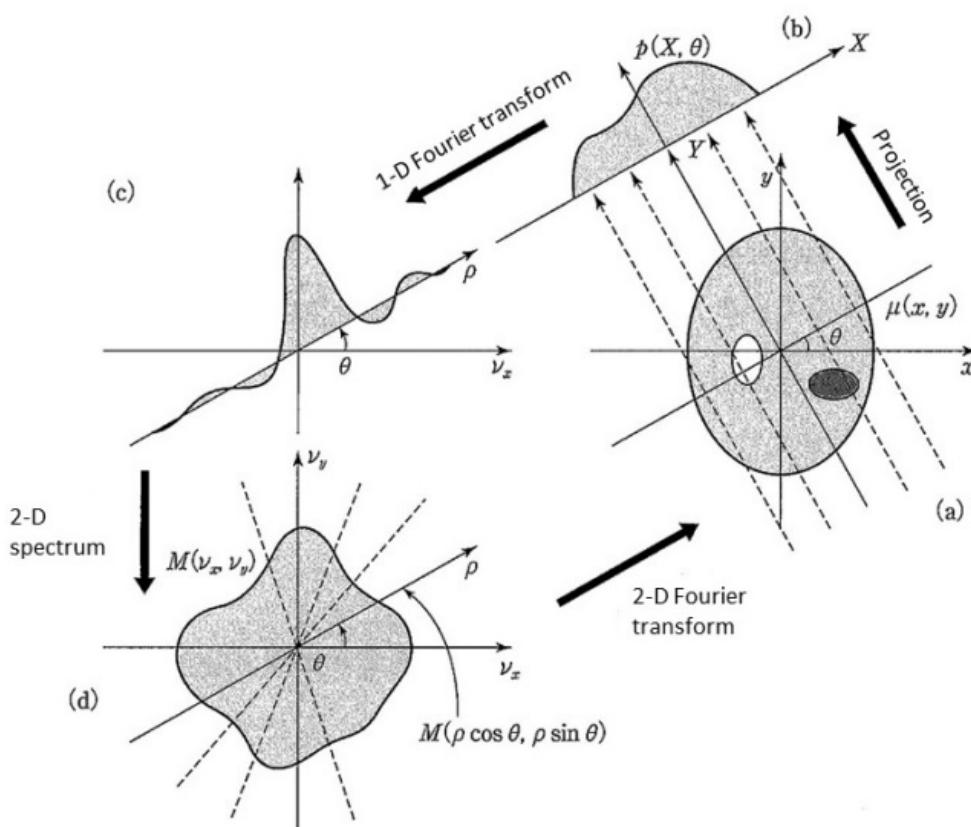
خروجی فیلتر موجک تطبیقی با داده می‌شود

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} W_f(a_x, a_y, b'_x, b'_y) W_s^*(a_x, a_y, b'_x - b_x, b'_y - b_y) db'_x db'_y \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} S^*(\nu_x, \nu_y) \cdot M(a_x \nu_x, a_y \nu_y) \cdot F(\nu_x, \nu_y) \cdot M^*(a_x \nu_x, a_y \nu_y) \\ & \quad \times \exp[-j\pi(b_x \nu_x + b_y \nu_y)] d\nu_x d\nu_y \end{aligned} \quad (101.8)$$

این بدان معناست که فیلتر تطبیقی مبتنی بر موجک با رابطه زیر داده می‌شود

$$G(\nu_x, \nu_y) = S^*(\nu_x, \nu_y) \cdot |M(a_x \nu_x, a_y \nu_y)|^2 \quad (12.8)$$

لازم به ذکر است که فیلتر تطبیقی مبتنی بر موجک، فیلتر تطبیقی معمولی $S^*(\nu_x, \nu_y)$ است که وزن آن $|M(a_x \nu_x, a_y \nu_y)|^2$ است [۲۷].



شکل ۱۲.۸: اصول توموگرافی کامپیوترا اشعه ایکس (روش تبدیل فوریه دو بعدی). (الف) جسم، (ب) تصویر تابیده شده، (ج) تبدیل فوریه تصویر تابیده شده، و (د) طیف فوریه دو بعدی.

۱۲.۸ توموگرافی کامپیوترا با اشعه ایکس

توموگرافی (برش‌نگاری) کامپیوترا با اشعه ایکس تکنیکی برای بدست آوردن تصویر مقطعی از نواحی خاصی از اشیاء اسکن شده است [۲۸]. همانطور که در شکل (۱۲.۸) نشان داده شده است، بسیاری از تصاویر تابیده شده توسط پرتو اشعه ایکس برای یک جسم در زوایای مختلف شناسایی می‌شوند. تصویر مقطعی جسم با استفاده از بسیاری از تصاویر تابیده شده آشکارسازی و محاسبه می‌شود. فرض کنید ضریب جذب جسم

مورد استفاده برای اشعه ایکس μ باشد که به نوعی ماده جسم، چگالی آن، طول موج پرتو ایکس و غیره بستگی دارد. شدت اشعه ایکس ارسالی بعد از جسم خواهد بود

$$I = I_0 \exp(-\mu l), \quad (10.3.8)$$

که در آن I_0 شدت ورودی و l طول مسیر پرتو ایکس را نشان می‌دهد. ضریب جذب خواهد بود

$$\mu = -\frac{\log(I/I_0)}{l} \quad (10.4.8)$$

سپس، توزیع جذب $\mu(x, y)$ جسم را در نظر بگیرید. سیستم مختصات (x, y) ثابت روی جسم تعریف شده است. جهت تابش در امتداد محور Y و جهت متعامد آن به عنوان محور X تعريف می‌شود. زاویه θ با زاویه بین محور x و محور X تعريف می‌شود.

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \quad (10.5.8)$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (10.6.8)$$

توزیع ضریب جذب تابیده شده در جهت محور Y با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} p(X, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) dY \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta) dY \end{aligned} \quad (10.7.8)$$

این تبدیل رادون Radon transform نامیده می‌شود. فرض کنید تبدیل فوریه دو بعدی ضریب جذب $\mu(x, y)$ باشد:

$$M(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) \exp[j2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] dx dy \quad (10.8.8)$$

و مختصات قطبی آن $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ خواهد بود

$$\begin{aligned} M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) \exp[j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(X \cos \theta - Y \sin \theta, X \sin \theta + Y \cos \theta) dY \right] dX \\ &= \times \exp(j2\pi X \rho) dX \\ &= p(X, \theta) \exp(j2\pi X \rho) dX \end{aligned} \quad (10.9.8)$$

Radon transform

۱.۱۲.۸ روش تبدیل فوریه دو بعدی

تبدیل فوریه یک بعدی تصویر تابشی $M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ را بهما می دهد که مولفه طیف محور ρ تبدیل فوریه دو بعدی $M(\nu_x, \nu_y)$ از ضریب جذب $\mu(x, y)$ است. بهاین، قضیه برش تابشی^{۲۶} می گویند. با استفاده از بسیاری از تصاویر تابشی یک بعدی با زوایای مختلف θ و تبدیل فوریه یک بعدی آنها، تمام مولفه های تبدیل فوریه دو بعدی $M(\nu_x, \nu_y)$ بدست می آید و سپس تبدیل فوریه دو بعدی معکوس آن ضریب جذب $\mu(x, y)$ بهدست می آید.

$$\mu(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} M(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] d\nu_x d\nu_y \quad (110.8)$$

این روش توموگرافی اشعه ایکس را روش تبدیل فوریه دو بعدی می نامند.

۲.۱۲.۸ روش تابشی پشت فیلتر شده

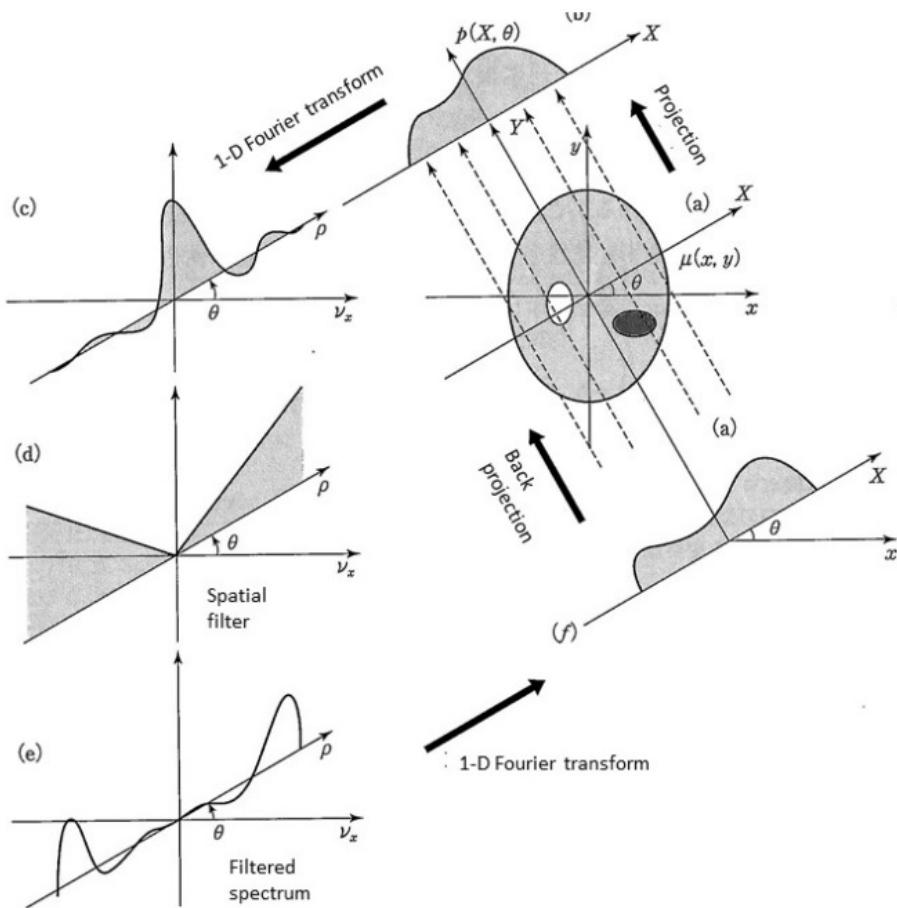
از آنجایی که تبدیل فوریه دو بعدی $M(\nu_x, \nu_y)$ در مختصات متعامد (ν_x, ν_y) و طیف بهدست آمده $M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ در مختصات قطبی (ρ, θ) نشان داده است، سیستم مختصات تبدیل از مختصات قطبی به مختصات متعامد با درون یابی ضروری است. از آنجایی که زاویه θ گسسته است، نقاط داده در فرکانس بالاتر در سیستم مختصات متعامد تنك تر هستند. حتی اگر نقاط داده ها در فرکانس بالاتر درون یابی هستند، خطاهای در فرکانس بالاتر در بسیاری از موارد جدی هستند. برای کاهش خطای درون یابی، روش تابشی فیلتر شده، همانطور که در شکل (۲۴.۸) نشان داده شده، معرفی شده است. در ابتدا، معادله (۱۱۰.۸) با مختصات قطبی $(\nu_x = \rho \cos \theta, \nu_y = \rho \sin \theta)$ بازنویسی می شود.

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} M(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] d\nu_x d\nu_y \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp(-j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) |\rho| \exp(-j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) |\rho| \exp(-j2\pi X\rho) d\rho \right] d\theta \end{aligned} \quad (111.8)$$

تصویر تابشی فیلتر شده با تبدیل فوریه یک بعدی تصویر تابش شده $M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ که با یک فیلتر بالا گذر $|\rho|$ فیلتر شده، بهدست می آید. بهاین تصویر طرح پشت فیلتر شده^{۲۷} می گویند. این روش برای بسیاری از زوایای تابش θ تکرار می شود تا بسیاری از تصاویر تابشی فیلتر شده بهدست آید. در نهایت، انتگرال گیری تصاویر تابشی فیلتر شده با θ ، ضریب جذب $\mu(x, y)$ را بهما می دهد. دو روش، روش تبدیل فوریه دو بعدی و روش تابشی پشت فیلتر شده، از نظر ریاضی یکسان هستند.

^{۲۶}Projection-Slice Theorem

^{۲۷}Filtered back projection image



شکل ۲۴.۸: اصول توموگرافی کامپیوتی اشعه ایکس (روش تبدیل فوریه دو بعدی). (الف) جسم، (ب) تصویر تابیده شده، (ج) طیف فوریه یک بعدی آن، (د) فیلتر مکانی، (ه) طیف فیلتر شده، (و) تبدیل فوریه یک بعدی آن.

پرسش‌ها

۱. فیلتر فرکانس نوری را طراحی کنید، که الگوی $f(x, y)$ را به یک الگوی $g(x, y)$ تبدیل می‌کند. به این فیلتر تبدیل کد می‌گویند.
۲. تبدیل ملین یک تبدیل مستقل از مقیاس است. تبدیل مستقل از چرخش چیست؟ فیلتر مستقل از مقیاس و چرخش چیست؟

مراجع

1. Stark, H., ed. 1982. *Applications of Optical Fourier Transforms*. Academic Press.
2. Feitelson, D. G. 1988. *Optical Computing*. MIT Press, Cambridge
3. YArrathoon, R., ed. 1989. *Optical Computing*. Marcel Dekker, New York.

كتاب نامه

- [1] Cutrona, L. J., Leith, E. N., Palermo, C. J. and Porcello, I. J. 1960. Optical data processing and filtering systems. *IRE Trans Inf Theory*. IT-6: 386.
- [2] Vander Lugt, A. 1974. Coherent optical processing. *Proc. IEEE*. 62: 1300.
- [3] Lee, S. H. 1974. Mathematical Operations By Optical Processing. *Opt. Eng.* 13: 196.
- [4] Zernike, F. 1935. Phase contrast *Z. Tech. Phys.* 16: 454.
- [5] Jacquinot, P. and Roizen-Dossier, B. 1964. Apodisation. *Progress in Optics*. Wolf, E. ed. III: 29. North-Holand.
- [6] Osterberg, H. and Wilkins, Jr., J. E. 1959. The Resolving power of a coated objective. *J. Opt. Soc. Amer.* 39: 553.
- [7] Vander Lugt, A. 1964. Signal detection by complex spatial filtering. *IEEE Trans Inf Theory*. IT-10: 139.
- [8] Turin, G. L. 1964. An introduction to matched filters. *IRE Trans Inf Theory*. IT-6: 311.
- [9] Franks, L. E. 1966. *Signal Theory*. Prentice-Hall.
- [10] Yatagai, T. 1976. Optimum spatial filter for image restoration degraded by multiplicative noise. *Opt. Commun.* 19: 236.
- [11] Helstrom, C. W. 1967. Image restoration by the method of least squares. *J. Opt. Soc. Amer.* 57: 297.
- [12] Casasen, D. P. 1981. *Optical Information Processing*. S. H. Lee ed. Springer-Verlag, Berlin, p. 181.
- [13] Turpin, T. M. 1981. Spectrum analysis using optical processing. *Proc. IEEE*. 69: 79.

- [14] Rhodes, W. T. 1981. Acousto-optic signal processing: Convolution and correlation. *Proc. IEEE.* 69: 65.
- [15] Sprague, R. A. 1977. A review of acousto-optic signal correlators. *Opt. Eng.* 16: 476.
- [16] Sprague, R. A. and Koliopoulos, C. L. 1976. Time integrating acoustooptic correlator. *Appl. Opt.* 15: 89.
- [17] Weaver, C. and Goodman, J. W. 1960. A Technique for Optically Convolving Two Functions. *Appl. Opt.* 5: 124.
- [18] Javidi, B. 1989. Nonlinear joint power spectrum based optical correlation. *Appl. Opt.* 28: 2358.
- [19] Ebersole, J. F. 1975. Optical Image Subtraction. *Opt. Eng.* 14: 436.
- [20] Gabor, D., Stroke, G. W., Restrick, R., Funkhouser, A. and Brumm, B. 1965. Optical image synthesis (complex amplitude addition and subtraction) by holographic Fourier transformation. *Phys. Lett.* 18: 116.
- [21] Lee, S. H., Yao, S. K. and Milnes, A. M. 1970. Optical image synthesis (Complex amplitude addition and subtraction) in real time by a diffraction-grating interferometric method. *J. Opt. Amer.* 60: 1037.
- [22] Matsuda, K., Takeya, K., Tsujiuchi, J. and Shinoda, M. 1971. An experiment of image-subtraction using holographic beam splitter. *Opt. Commun.* 2: 425.
- [23] Bryngdahl, O. 1974. Geometrical transformations in optics. *J. Opt. Soc. Amer.* 64: 1092.
- [24] Casasent, D. and Szczerba, C. 1976. Optical Mellin transforms using computer generated holograms. *Opt. Commun.* 19: 217.
- [25] Yatagai, T., Choji, K. and Saito, H. 1981. Pattern classification using optical Mellin transform and circular photodiode array. *Opt. Commun.* 38: 162.
- [26] Chui, C. K. 1992. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press.
- [27] Roberge, D. and Sheng, Y. 1994. Optical wavelet matched filter. *Appl. Opt.* 33: 5285.
- [28] Saleh, B. 2011. *Introduction to Subsurface Imaging*. Cambridge University Press, Chapter 4.

فصل ۹

سیگنال تحلیلی و تبدیل هیلبرت

استفاده از نمایش مختلط یک موج سینوسی تک رنگ حقیقی $\cos(2\pi\nu t)$ در فصل‌های قبلی ذکر شده و قابلیت استفاده آن مورد تاکید قرار گرفته است. در عملیات خطی، موج به‌شکل مختلط در فرآیند محاسبات استفاده می‌شود و بخش حقیقی نتیجه نهایی عملیات، موج فیزیکی موجود را می‌دهد. در مورد امواج غیر تک رنگ، چه نوع نمایش موج ساده‌تر است؟ سیگنال تحلیلی برای بحث در مورد امواج غیر رنگی معرفی شده است. سیگنال تحلیلی یک سیگنال مختلط است که بخش موهومی آن توسط تبدیل هیلبرت^۱ قسمت حقیقی آن داده می‌شود.

۱.۹ نمایش مختلط و فرکانس منفی

یک سیگنال سینوزوئیدال در نظر گیرید

$$u(t) = A(t) \cos \psi(t) \quad (1.9)$$

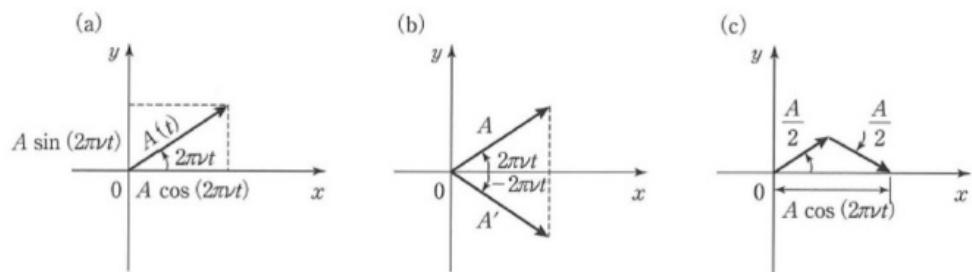
اگر بتوانیم آن را به عنوان یک موج سینوزوئیدال در نظر بگیریم، فاز آن به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\psi(t) = 2\pi\nu t + \phi(t) \quad (2.9)$$

که در آن $A(t)$ و $\phi(t)$ توابع با تغییرات آهسته‌تری در مقایسه با $2\pi\nu t$ هستند. با مشتق گرفتن از دو طرف معادله (۲.۹) داریم:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = 2\pi\nu + \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (3.9)$$

^۱Hilbert transform



شکل ۱.۹: نمایش مختلط سیگنال سینوزوئیدال

چون $2\pi\nu \gg d\phi(t)/dt$ است، جمله دوم را می‌توان چشم‌پوشی کرد و داریم

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt} \quad (4.9)$$

از مشتق‌گیری فاز فرکانس بدست می‌آید.

معادله (۱.۹) نشان می‌دهد که سیگنال $u(t)$ با توجه به افزایش فاز $\psi(t)$ به صورت سینوسی ارتعاش می‌کند. همانطور که در شکل (۱.۹)(الف) نشان داده شده است، این به صورت چرخش یک بردار در نظر گرفته می‌شود. تصویر بردار بر محور x $A(t) \cos \psi(t)$ را به وجود می‌آورد.

لازم به ذکر است که دامنه $A(t)$ و فاز $\psi(t)$ سیگنال $u(t)$ به طور مستقل با استفاده از معادله (۱.۹) تخمین زده نمی‌شوند. شکل (۱.۹)(الف) نشان می‌دهد که طول و جهت بردار با تصویر آن بر محور x $A(t) \cos \psi(t)$ تخمین زده نمی‌شود.

برای تخمین طول و جهت یک بردار، تصویر آن بر محور y $A(t) \sin \psi(t)$ ضروری است. سیستم مختصات نشان داده شده در شکل (۱.۹)(الف) را در یک فضای مختلط در نظر بگیرید، یعنی محور x یک محور حقیقی و محور y یک محور موهومی است. سیگنال حقیقی $u(t)$ به یک سیگنال مختلط $u_c(t)$ گسترش می‌یابد.

$$u_c(t) = A(t) \cos \psi(t) + j A(t) \sin \psi(t) = A(t) \exp[j\psi(t)] \quad (5.9)$$

که شامل اطلاعات طول و جهت بردار است. دلیل اینکه تابع موج با یک مقدار مختلط نشان داده می‌شود این است که سیگنال مختلط عمومی مولفه‌های دامنه و فاز را راحت‌تر از سیگنال حقیقی فقط در محور حقیقی می‌دهد.

به دلیل رابطه $\cos[\psi(t)] = \cos[\psi(t)]$ ، تصویر محور x برای $A(t) \cos \psi(t)$ احتمالاً با دو بردار به دست می‌آید که بر عکس یکدیگر، همانطور که در شکل (۱.۹)(ب) نشان داده شده، چرخیده‌اند. همانطور که در شکل (۱.۹) نشان داده شده است، تصویر بر روی محور x $A(t) \cos \psi(t)$ برابر با مجموع دو بردار نشان داده می‌شود. نمایش مختلط آن بصورت زیر داده می‌شود

$$A(t) \cos \psi(t) = \frac{1}{2} \{A(t) \exp[j\psi(t)] + A(t) \exp[-j\psi(t)]\} \quad (6.9)$$

جمله اول در سمت راست نمایشگر چرخش بردار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و جمله دوم موافق جهت چرخش عقربه‌های ساعت است. وقتی سرعت چرخش بردار ثابت باشد، $\psi(t) = 2\pi\nu t$ است و داریم

$$u(t) = A(t) \cos(2\pi\nu t) = \frac{1}{2} \{A(t) \exp(j2\pi\nu t) + A(t) \exp(-j2\pi\nu t)\} \quad (7.9)$$

این بدان معناست که موج $A(t) \cos(2\pi\nu t)$ با مجموع بردارهای $A(t) \exp(j2\pi\nu t)$ و $A(t) \exp(-j2\pi\nu t)$ توصیف می‌شود که معکوس به یکدیگر می‌چرخدند. یعنی مجموع بردارهایی که به صورت معکوس به یکدیگر می‌چرخدند، برداری را روی محور حقیقی به دست می‌آید که مقدار آن حقیقی است.

جهت چرخش یک بردار معکوس است به‌این معنی که زاویه چرخش آن منفی است و بنابراین فرکانس آن منفی است. این معنای فیزیکی فرکانس منفی است. معادله (7.9) نشان می‌دهد که یک تابع سینوزوئیدال حقیقی از مولفه‌های فرکانس مثبت و منفی تشکیل شده است.

۲.۹ سیگنال تحلیلی

دامنه یک موج نوری تک رنگ حقیقی با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$u(t) = a(t) \cos(\phi - 2\pi\nu t) \quad (8.9)$$

نمایش مختلط آن

$$u(t) = a(t) \exp[-j(\phi - 2\pi\nu t)] \quad (9.9)$$

در صورت لزوم، قسمت حقیقی آن دامنه حقیقی $u(t)$ را می‌دهد. حتی برای نور غیر تک رنگ، استفاده از نمایش مختلط راحت است به طوری که بخش حقیقی $\text{Re}[u_c(t)]$ از نمایش مختلط $u_c(t)$ بتواند دامنه حقیقی موج نور را ارائه دهد. این سیگنال تحلیلی است. نمایش انتگرال فوریه یک سیگنال $v(t)$ را در نظر بگیرید،

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\nu) \exp(-j2\pi\nu t) d\nu \quad (10.9)$$

که در آن

$$V(\nu) = A(\nu) \exp[-j\Phi(\nu)] \quad (11.9)$$

تابع $A(\nu)$ و $\Phi(\nu)$ بترتیب نمایشگر دامنه و فاز $V(\nu)$ است. اگر $v(t)$ حقیقی باشد، داریم

$$A(\nu) = A(-\nu) \quad (12.9)$$

$$\Phi(\nu) = -\Phi(-\nu) \quad (13.9)$$

که با مزدوج مختلط تبدیل فوریه معادله (10.9) به دست می‌آید.

در این حالت داریم

$$v(t) = 2 \int_0^\infty A(\nu) \cos[\Phi(\nu) + 2\pi\nu t] d\nu \quad (14.9)$$

که مربوط به سیگنال حقیقی $v(t)$ است. اجازه دهید یک تابع مختلط را معرفی کنیم

$$z(t) = 2 \int_0^\infty A(\nu) \exp[-j\Phi(\nu) - j2\pi\nu t] d\nu \quad (15.9)$$

چون

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 \int_0^\infty A(\nu) \cos[\Phi(\nu) + 2\pi\nu t] d\nu \\ &\quad - 2j \int_0^\infty A(\nu) \sin[\Phi(\nu) + 2\pi\nu t] d\nu \end{aligned} \quad (16.9)$$

داریم

$$v(t) = \operatorname{Re}[z(t)] \quad (17.9)$$

لازم به ذکر است که یک سیگنال مختلط $z(t)$ فقط با مولفه فرکانس مثبت قابل توصیف است. سیگنال مختلط $z(t)$ سیگنال تحلیلی یک سیگنال حقیقی $v(t)$ نامیده می شود. سیگنال تحلیلی $z(t)$ به صورت بازنویسی می شود

$$z(t) = z_R(t) - jz_I(t) = v(t) - j\hat{v}(t) \quad (18.9)$$

که در آن $z_R(t)$ و $z_I(t)$ به ترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی $z(t)$ را نشان می دهند. تبدیل فوریه سیگنال تحلیلی $z(t)$ به صورت زیر داده می شود

$$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \exp(j2\pi\nu t) dt \quad (19.9)$$

با استفاده از معادله (15.9) داریم

$$\begin{aligned} z(t) &= 2 \int_0^\infty V(\nu) \exp[-j2\pi\nu t] d\nu \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} V(\nu) U(\mu) \exp(-j2\pi\nu t) d\nu \end{aligned} \quad (20.9)$$

که در آن

$$U(\nu) = \begin{cases} 1 & : \nu \geq 0 \\ 0 & : \nu < 0 \end{cases} \quad (21.9)$$

از معادلات (20.9) و (21.9)، رابطه زیر بدست می آید

$$Z(\nu) = \begin{cases} 2V(\nu) & : \nu \geq 0 \\ 0 & : \nu < 0 \end{cases} \quad (22.9)$$

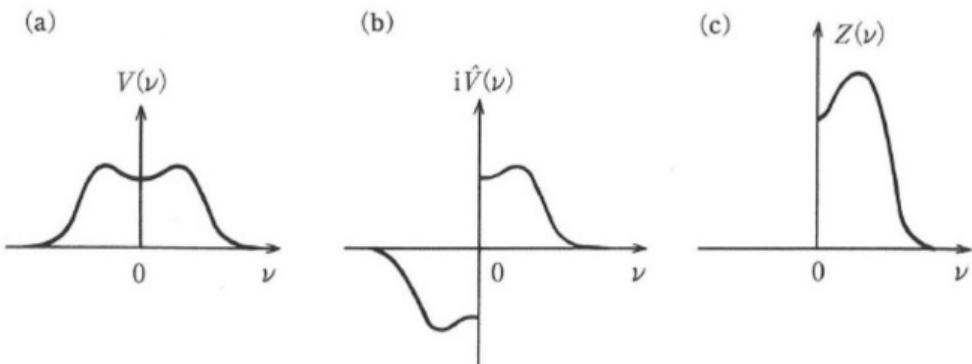
در اینجا معادله (22.9) زا بازنویسی می کنیم

$$Z(\nu) = V(\nu) - j\hat{V}(\nu) \quad (23.9)$$

که در آن

$$\hat{V}(\nu) = \begin{cases} +jV(\nu) & : \nu \geq 0 \\ -jV(\nu) & : \nu < 0 \end{cases} \quad (۲۴.۹)$$

توابع $\hat{V}(\nu)$ و $\hat{v}(t)$ زوج تبدیل فوریه هستند. رابطه $Z(\nu)$ با $V(\nu)$ و $-j\hat{V}(\nu)$ در شکل (۲.۹)



شکل ۲.۹: طیف فوریه $V(\nu)$ و سیگنال تحلیلی $Z(\nu)$ مربوط به $v(t)$ و نیز $-j\hat{V}(\nu)$

نشان داده شده است.

سیگنال تحلیلی در نمایش مختلط امواج نوری غیر رنگی، همانطور که در بخش ۱.۱۰ توضیح داده شد، مفید است.

۳.۹ تبدیل هیلبرت

از معادلات (۱۸.۹) و (۳۰.۹) داریم

$$z_I(t) = \hat{v}(t) = \mathcal{F}[\hat{V}(\nu)] \quad (۲۵.۹)$$

$$= \mathcal{F}\{V(\nu)[j \operatorname{sgn}(\nu)]\} \quad (۲۶.۹)$$

$$= z_R(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (۲۷.۹)$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_R(t')}{t - t'} dt' \quad (۲۸.۹)$$

در اینجا P به معنای مقدار اصلی گوشی است.^۲ این بدان معنی است که قسمت حقیقی $z_I(t) = \hat{v}(t)$ و قسمت موهومی $z_R(t) = v(t)$ از یکدیگر مستقل نیستند. تبدیل از $v(t)$ به

^۲ مقدار اصلی گوشی بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - y} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{y-\epsilon} \frac{f(x)}{x - y} dx + \int_{y+\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - y} dx \right]$$
 و مقدار انتگرال بدون واگرایی در $x = y$ است.

$z_I(t)$ تبدیل هیلبرت نامیده می‌شود.

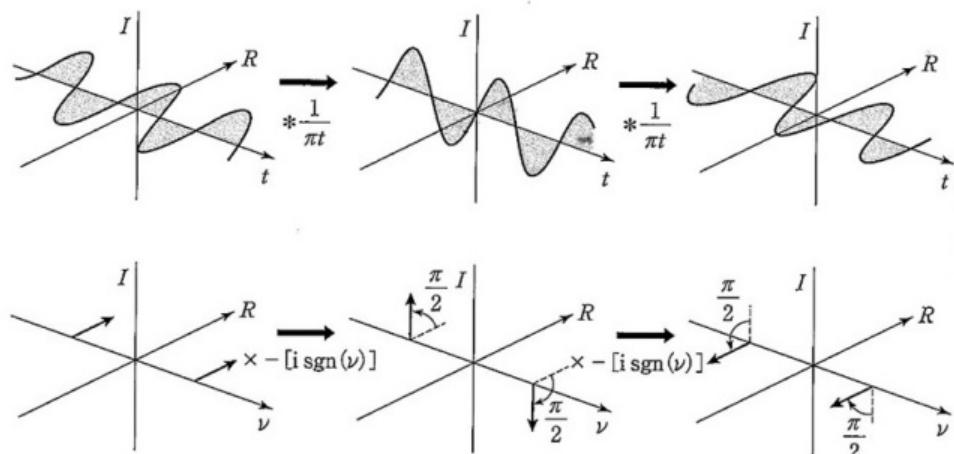
$$\hat{v}(t) = \mathcal{H}[v(t)] = v(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (29.9)$$

که در آن $\mathcal{H}[\cdot]$ نمایشگر تبدیل هیلبرت است.

جدول (۱.۹) نمونه‌هایی از تبدیل هیلبرت را نشان می‌دهد. تبدیل هیلبرت تبدیل معکوس خود را دارد. تبدیل هیلبرت $\cos(2\pi\nu t)$ است و سپس تبدیل هیلبرت آن $-\cos(2\pi\nu t)$ است، همانطور که در شکل (۳.۹) نشان داده شده است.

جدول ۱.۹: توابع و تبدیل هیلبرت آنها

تبدیل هیلبرت	تابع
$-\hat{v}(t)$	$v(t)$
$-jv(t) \exp(j2\pi\nu t)$	$v(t) \exp(j2\pi\nu t)$
$jv(t) \exp(-j2\pi\nu t)$	$v(t) \exp(-j2\pi\nu t)$
$v(t) \sin(2\pi\nu t)$	$v(t) \cos(2\pi\nu t)$
$-v(t) \cos(2\pi\nu t)$	$v(t) \sin(2\pi\nu t)$
$\frac{1}{\pi t}$	$\delta(t)$



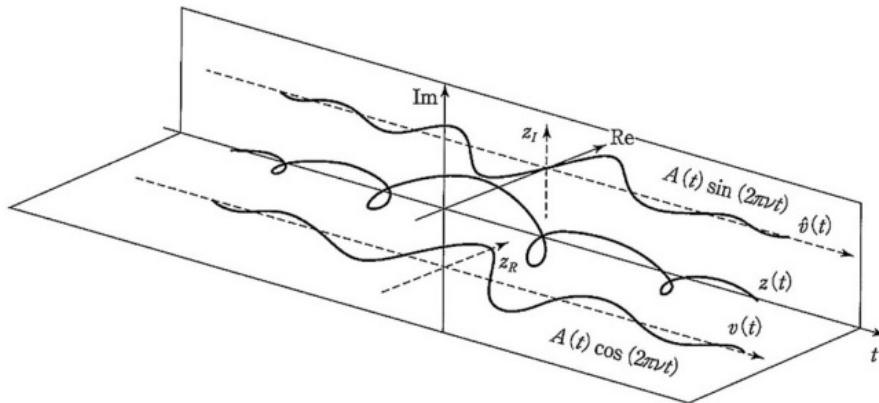
شکل ۳.۹: تبدیل هیلبرت $\cos(2\pi\nu t)$ از کانولوشن $\cos(2\pi\nu t) \cos(2\pi\nu t) / 1$ بدست می‌آید. تبدیل هیلبرت بیشتر آن $-\cos(2\pi\nu t)$ می‌دهد. قسمت بالایی این فرآیند و قسمت پایین تبدیل فوریه آن را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
 \text{یک زوج تبدیل هیلبرت، } v(t) \text{ و } \hat{v}(t) \text{ را در نظر گیرید} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cdot \hat{v}^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[V(\nu) * \hat{V}^*(-\nu)] dt \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} V(\nu - \nu') \hat{V}^*(-\nu') d\nu' \exp(-j2\pi\nu t) d\nu dt \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp(-j2\pi\nu't) dt \hat{V}^*(-\nu') d\nu' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} V(-\nu') \hat{V}^*(-\nu') d\nu' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (j) \operatorname{sgn}(\nu') V(-\nu') \hat{V}^*(-\nu') d\nu' \\
 &= -j \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\nu) |V(\nu)|^2 d\nu \\
 &= .
 \end{aligned} \tag{۳۰.۹}$$

این بدان معناست که قسمت حقیقی و موهومی متعامد با یکدیگر هستند. بخش حقیقی یک سیگنال تحلیلی را مولفه هم فازی آن و قسمت موهومی آن قسمت تربیعی^۳ نامیده می‌شود. از آنجا که

$$A(t) \exp(-j2\pi\nu t) = A(t) \cos(2\pi\nu t) - j A(t) \sin(2\pi\nu t) \tag{۳۱.۹}$$

و تبدیل هیلبرت $A(t) \exp(-j2\pi\nu t)$ است، $A(t) \cos(2\pi\nu t)$ ، $A(t) \cos(2\pi\nu t)$ سیگنال تحلیلی است. $A(t) \cos(2\pi\nu t)$



شکل ۴.۹: سیگنال تحلیلی و مولفه هم فازی و تربیعی آن.

اگر یک سیگنال $A(t)$ با باند فرکانسی محدود با فرکانس ν مدوله شود، این سیگنال مدوله شده به صورت $A(t) \cos(2\pi\nu t)$ نوشته می‌شود که سیگنال تحلیلی آن $(z(t))$ ، مولفه هم فازی آن $(z_R(t))$ و مولفه تربیعی $(z_I(t))$ در شکل (۴.۹) نشان داده شده است.

با توجه به خواص سیگنال تحلیلی، ما مستقیماً دامنه $A(t)$ و فاز $\phi(t)$ سیگنال مدوله شده $[A(t) \cos[2\pi\nu t + \phi(t)]]$ را با قسمت‌های حقیقی و موهومی سیگنال $(z(t))$ تحلیلی آن

^۳Quadrature Part

داریم.

$$A(t) = \sqrt{z_R(t)^2 + z_I(t)^2} \quad (32.9)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \frac{z_I(t)}{z_R(t)} \quad (33.9)$$

کاربرد تبدیل هیلبرت برای تجزیه و تحلیل حاشیه تداخل در بخش ۵.۱۰ توضیح داده شده است.

پرسش‌ها

۱. تبدیل هیلبرت $\hat{v}(t)$ را تعیین کنید، که در آن $v(t)$ تبدیل هیلبرت یک سیگنال زمان پیوسته $v(t)$ است.

۲. تبدیل هیلبرت $m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$ را تعیین کنید.

۳. برای زوج تبدیل هیلبرت، $v(t)$ و $\hat{v}(t)$ ، ثابت کنید که طیف توان آنها (مربع طیف) برابر هستند.

۴. از یک سیگنال مدوله شده با دامنه $m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$ می‌توانیم سیگنال $v(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$ را با استفاده از تبدیل هیلبرت بدست آوریم. در مورد چگونگی آشکارسازی سیگنال اصلی $m(t)$ بحث کنید.

مراجع

Papoulis, A. 1968. *Systems and Transforms with Applications in Optics*. McGraw-Hill, New York.

Goodman, J. W. 1985. *Statistical Optics*. John Wiley & Sons, New York, p. 104.

Bracewell, R. N. 1986. *The Fourier Transform and Its Applications*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York

فصل ۱۰

همدوسی، طیف‌سنجدی و تحلیل حاشیه

جنبه‌های اصلی نور و انتشار آن قبلاً ذکر شده است. موارد ایده‌آل منابع نور نقطه‌ای و تک رنگ نیز مورد بحث قرار گرفته است. در این فصل، برخی از مباحث مربوط بهمنابع نور، مانند همدوسی^۱ نوری مربوط بهاندازه منابع نور و خواص طیفی آنها مورد بحث قرار گرفته است. اکنون در نظر گرفتن منبع نور برای اندازه‌گیری قطر زاویه‌ای ستاره‌ها استفاده می‌شود، در حالی که روش اندازه‌گیری طیف‌سنجدی آن به عنوان طیف‌سنجدی^۲ تبدیل فوریه شناخته می‌شود. تداخل سنجی تغییر فاز نیز در رابطه با طیف‌سنجدی تبدیل فوریه و برخی تکنیک‌های آنالیز حاشیه مورد بحث قرار خواهد گرفت. در نهایت، استفاده از تبدیل هیلبرت در تجزیه و تحلیل حاشیه تداخل‌سنجدی ارائه شده است.

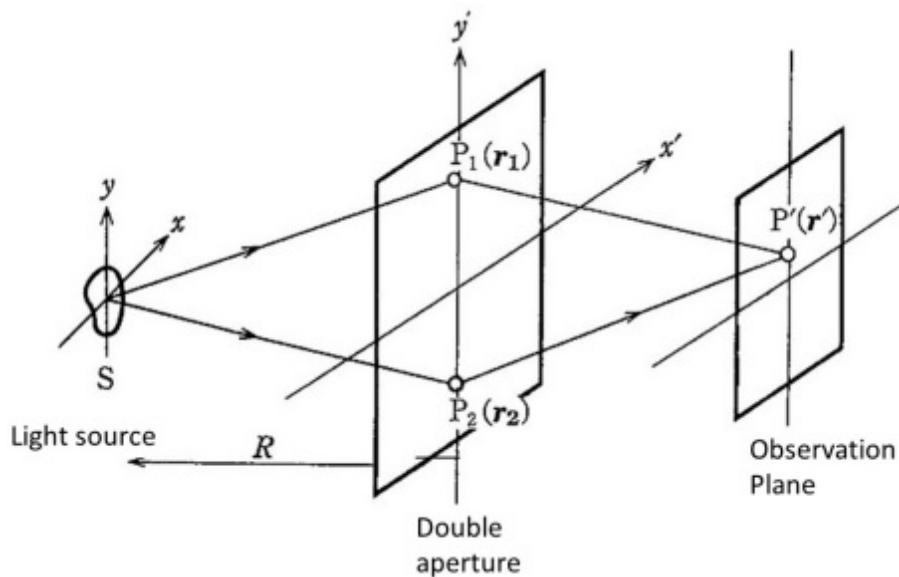
۱.۱۰ همدوسی

همانطور که در شکل (۱.۱۰) نشان داده شده، یک منبع نور گستردۀ وغیر تک رنگ را در نظر بگیرید. همدوسی بین نقاط دلخواه P_1 و P_2 در فضا با اثر تداخل مشاهده شده در نقطه P_0 در پشت صفحه P_1 و P_2 برآورده می‌شود [۱، ۲]. برای تخمین اثر تداخل، حاشیه‌های تداخل بین جبهه موج از دو سوراخ سوزنی در P_1 و P_2 در صفحه P_0 مشاهده می‌شود. بهدلیل یک موج غیر تک رنگ، جبهه موج $v(r, t)$ با استفاده از یک سیگنال تحلیلی توصیف می‌شود که در بخش ۲.۹ توضیح داده شده است. دامنه موج در P_0 به دست می‌آید:

$$v(r_{p'}, t_1, t_2) = v(r_1, t_1) + v(r_2, t_2) \quad (1.10)$$

^۱Coherence

^۲Spectroscopy



شکل ۱.۱۰: تعریف همدوسي

که در آن $v(r_1, t_1)$ و $v(r_2, t_2)$ به ترتیب دامنه‌های مختلط امواج را در P_1 و P_2 نشان می‌دهند.

در مورد یک منبع نور ثابت، $v(r', t_1, t_2)$ تابعی از متغیرهای مستقل t_1 و t_2 نیست، اما تفاوت آن $\tau = t_2 - t_1$ مربوط به تأخیر زمانی بین زمان رسیدن امواج ساطع شده از P_1 است. و P_2 به طور همزمان. بنابراین معادله (۱.۱۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$v(r_p, t_1, t_2) = v(r_1, t + \tau) + v(r_2, t) \quad (۲.۱۰)$$

شدت در نقطه P' خواهد بود

$$I(r') = \langle v(r', t)v^*(r', t) \rangle \quad (۳.۱۰)$$

که در آن (...) نمایشگر عمل میانگین‌گیری است. با جایگزینی معادله (۲.۱۰) در معادله (۳.۱۰)، خواهیم داشت

$$I(r') = I(r_1) + I(r_2) + 2\operatorname{Re}[\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)] \quad (۴.۱۰)$$

$$\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau) = \langle v(r_1, t + \tau)v^*(r_2, t) \rangle \quad (۵.۱۰)$$

که بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau) = \lim T \rightarrow \infty \frac{1}{T} \int_{-T}^T v(r_1, t + \tau)v^*(r_2, t) dt \quad (۶.۱۰)$$

لازم به ذکر است که Γ_{12} همبستگی متقابل مختلط بین امواج در P_1 و P_2 است که در اپتیک فیزیکیتابع همدوسی متقابل نامیده می‌شود.
در حالت $r_1 = r_2$

$$\Gamma_{11}(r_1, r_2, \tau) = \langle v(r_1, t)v^*(r_2, t) \rangle \quad (7.10)$$

که تابع خود همدوسی^۳ نامیده می‌شود. علاوه بر این، اگر $\tau = 0$ باشد،

$$\Gamma_{11}(0) = \langle v(r_1, t)v^*(r_1, t) \rangle = I(r_1) \quad (8.10)$$

که شدت نور را در نقطه r_1 میدهد.

تابع همدوسی متقابل نرمالیزه Γ_{12} با استفاده از Γ_{11} و Γ_{22} خواهد بود

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I(r_1)}\sqrt{I(r_2)}} \quad (9.10)$$

شدت داده شده با معادله (۴.۱۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I(r') = I(r_1) + I(r_2) + 2\sqrt{I(r_1)I(r_2)} \operatorname{Re}[\gamma_{12}] \quad (10.10)$$

با استفاده از نامعادله شوارتز

$$0 \leq \gamma_{12} \leq 1 \quad (11.10)$$

اثبات می‌شود. همانطور که در بخش ۱.۱.۰، نور تحت شرایط $\gamma = 1$ همدوس (منسجم) است، در غیر این صورت $\gamma < 1$ ناهمdos است. نور با $\gamma < 1$ تا حدی همدوس^۴ است. از آنجایی که $\gamma_{12}(\tau)$ مختلط است،

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| \exp[-j\phi_{12}(\tau)] \quad (12.10)$$

معادله (۱۰.۱۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$I(r') = I(r_1) + I(r_2) + 2\sqrt{I(r_1)I(r_2)} |\gamma_{12}| \cos[\phi_{12}(\tau)] \quad (13.10)$$

با استفاده از تعریف قابلیت وضوح رابطه (۱۳.۲)

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (14.10)$$

و معادله (۱۳.۱۰)، قابلیت وضوح خواهد بود

$$V = \frac{2\sqrt{I(r_1)I(r_2)}}{I(r_1) + I(r_2)} |\gamma_{12}| \quad (15.10)$$

این شکل دقیق معادله (۱۵.۲) را می‌دهد.

^۳Auto coherence function

^۴Partially Coherent

۱.۱.۱۰ همدوسی زمانی

در حالتی که نقطه مشاهده P_1 با P_2 منطبق باشد، تابع همدوسی متقابل $\Gamma_{12}(r_1, r_2, \tau)$ به تابع خود همدوسی $\Gamma_{12}(r, \tau)$ تبدیل می‌شود. به دلیل همبستگی یک موج در یک نقطه در زمان‌های مختلف و تابعی که فقط به اختلاف زمان τ بستگی دارد، به این همدوسی زمانی می‌گویند. نمایش انتگرالی معادله (۷.۱۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\Gamma_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t + \tau)v^*(t)dt \quad (16.10)$$

و تبدیل فوریه آن برابر است با

$$\mathcal{F}[\Gamma_{11}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{11}(\tau) \exp(j2\pi\nu\tau)d\tau \quad (17.10)$$

با استفاده از رابطه (۱۶.۱۰)، داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Gamma_{11}(\tau)] &= \iint_{-\infty}^{\infty} v(t + \tau)v^*(t) \exp(j2\pi\nu\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v^*(t) \exp(j2\pi\nu t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v(t + \tau) \exp[j2\pi\nu(t + \tau)]d\tau \\ &= |F(\nu)|^2 \end{aligned} \quad (18.10)$$

که در آن طیف موج بصورت زیر تعریف می‌شود

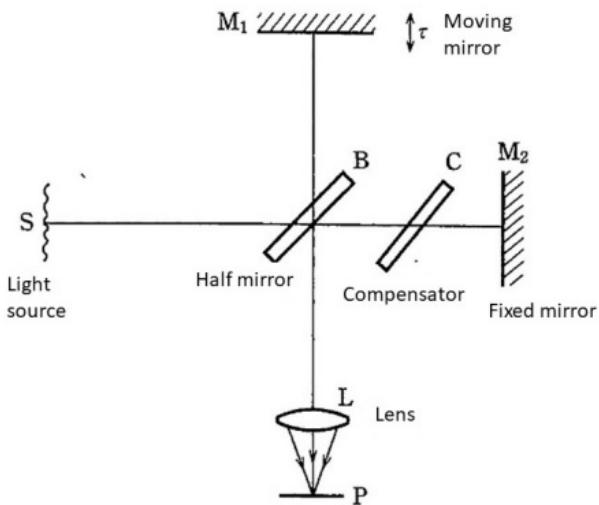
$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp(j2\pi\nu t)dt \quad (19.10)$$

تبدیل فوریه خودبستگی $\Gamma_{11}(\tau)$ برابر است با طیف توان $|F(\nu)|^2$. این قضیه وینر-کینشاين^۵ است. به منظور اندازه گیری همدوسی زمانی، از یک تداخل سنج نوع مایکلسون، همانطور که در شکل ۱ (۲.۱۰) نشان داده شده، استفاده می‌شود. با تغییر طول مسیر نوری می‌توان تفاوت زمانی τ را تغییر داد. دید V به صورت تابعی از اختلاف زمانی τ اندازه گیری و سپس $\Gamma_{11}(\tau)$ ارزیابی می‌شود. تبدیل فوریه آن طیف قدرت منبع نور را می‌دهد. این اصل تداخل سنجی طیفی مایکلسون است [۴].

زمان همدوسی Δt به عنوان اختلاف زمانی تعریف می‌شود که در آن وضوح به صفر کاهش می‌یابد. تعریف دقیق زمان همدوسی Δt است

$$(\Delta t)^r = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^r |\Gamma_{11}(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{11}(\tau)|^2 d\tau} \quad (20.10)$$

^۵ Wiener-Khintchine theorem



شکل ۲.۱۰: تداخل سنج طیف برای تجزیه و تحلیل همدوسی زمانی استفاده می‌شود.

و عرض طیف $\Delta\nu$ با استفاده از طیف توان $G(\nu)$ خواهد بود.

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} (\nu - \bar{\nu})^2 G(\nu)^2 d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} G(\nu)^2 d\nu} \quad (21.10)$$

که در آن فرکانس مرکزی بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{\nu} = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \nu G(\nu) d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} G(\nu) d\nu} \quad (22.10)$$

ضمناً رابطه زیر نیز بدست می‌آید

$$\Delta t \Delta \nu \geq \frac{1}{2} \quad (23.10)$$

این همان اصل عدم قطعیت در مکانیک کوانتمی است.

۲.۱.۱۰ همدوسی مکانی

همدوسی مکانی با همبستگی $(\tau = 0)$ در دو نقطه مختلف، P_1 و P_2 ، در یک زمان ($0 < \tau < \infty$) تعریف می‌شود. همانطور که در شکل (۱.۱۰) نشان داده شده، پیوستگی مکانی یک منبع نور گسترده را در نظر بگیرید. فرض کنید منبع نور شبه تک رنگ است و نقاط مختلف در منبع نور گسترش یافته مستقل هستند، یعنی متقابلاً ناهمدوس هستند. موج شبه

تک رنگ بصورت زیر نشان داده می‌شود

$$v(t) = a(t) \exp(j2\pi\nu t) \quad (۲۴.۱۰)$$

که در آن ν نشان دهنده میانگین فرکانس است. منبع توسعه یافته به مناطق کوچکی به کوچکی یک منبع نقطه‌ای تقسیم می‌شود. ناحیه m با $d\sigma_m$ نشان داده می‌شود. اجازه دهید امواج نور از ناحیه کوچک P_1 تا نقاط $v_{m1}(t)$ و P_2 با $v_{m2}(t)$ نشان داده شوند.تابع همبستگی متقابل خواهد بود

$$\Gamma_{12}(\tau) = \left\langle \left[\sum_{m1} v_{m1}(t + \tau) \right] \left[\sum_{m2} v_{m2}^*(t) \right] \right\rangle \quad (۲۵.۱۰)$$

بدلیل عدم مشارکت $m_1 \neq m_2$ داریم

$$\Gamma_{12}(\tau) = \sum_m \langle v_{m1}(t + \tau) v_{m2}^*(t) \rangle \quad (۲۶.۱۰)$$

از آنجایی که امواج نور از سطح $d\sigma_m$ به نقاط P_1 و P_2 داده می‌شود

$$v_{mj}(t) = a \left(t - \frac{r_{mj}}{c} \right) \frac{\exp[j2\pi\nu(t - r_{mj}/c)]}{r_{mj}} \quad (j = 1, 2) \quad (۲۷.۱۰)$$

میانگین زمانی آنها خواهد بود

$$\begin{aligned} & \langle v_{m1}(t + \tau) v_{m2}^*(t) \rangle \\ &= \langle a(t + \tau - r_{m1}/c) a^*(t - r_{m2}/c) \rangle \exp \left[\frac{-j2\pi\nu(r_{m1} - r_{m2})}{c} \right] / r_{m1} r_{m2} \end{aligned} \quad (۲۸.۱۰)$$

از آنجایی که نقاط داخل منبع توسعه یافته در \circ با یکدیگر ناهمدوس هستند، داریم

$$\langle a(t - r_{m1}/c) a^*(t - r_{m2}/c) \rangle = I(\sigma) d\sigma_m \quad (۲۹.۱۰)$$

که در آن $I(\sigma)$ تماشگر شدت در واحد شطح در منبع نور است. سرانجام داریم

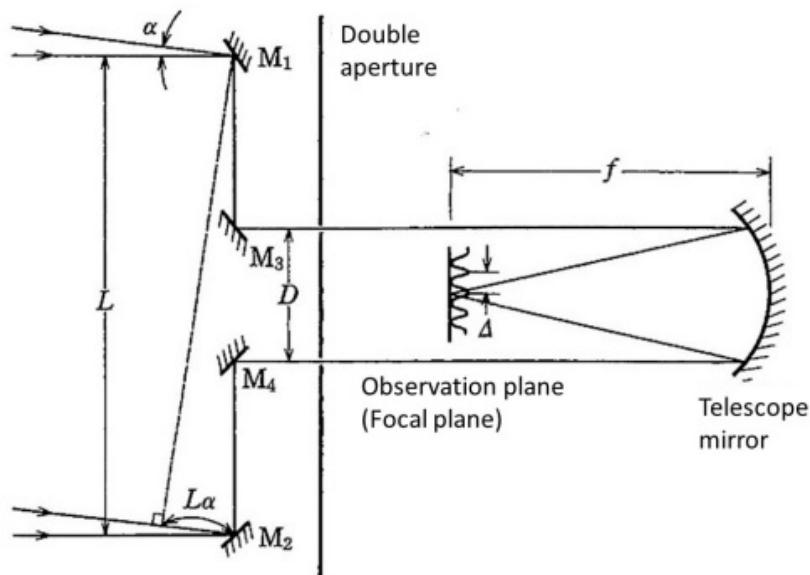
$$\Gamma_{12}(\circ) = \int_S I(\sigma) \frac{\exp[-j2\pi(r_1 - r_2)/\bar{\lambda}]}{r_1 r_2} d\sigma \quad (۳۰.۱۰)$$

که در آن $\bar{\lambda} = c/\bar{\nu}$ نماشگر میانگین طول موج است.
درجه همدوسی متقابل بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\gamma_{12}(\circ) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{11}(\circ) \Gamma_{22}(\circ)}} \int_S I(\sigma) \frac{\exp[-j2\pi(r_1 - r_2)/\bar{\lambda}]}{r_1 r_2} d\sigma \quad (۳۱.۱۰)$$

در مرحله بعد، زمانی را در نظر بگیرید که فاصله بین P_1 و P_2 و اندازه منبع نور گسترد
در مقایسه با فاصله منبع نور تا صفحه روزنه دوگانه به اندازه کافی کوچک باشد. در چنین
حالی، پراش تقریبی پراش فراونهوفر است و سپس داریم

$$\gamma_{12}(\circ) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \exp[-j2\pi(x\nu_x + y\nu_y)] dx dy \quad (۳۲.۱۰)$$



شکل ۳.۱۰: تداخل سنج ستاره‌ای مایکلسون.

که در آن مختصات در صفحه منبع نور x, y ، موقعیت نقطه P_1 و P_2 بترتیب (x'_1, y'_1) و (x'_2, y'_2) هستند و $r_1 = r_2 = R(x'_1, y'_2)$

$$\nu_x = \frac{x'_1 - x'_2}{\lambda R}, \quad \nu_y = \frac{y'_1 - y'_2}{\lambda R} \quad (33.10)$$

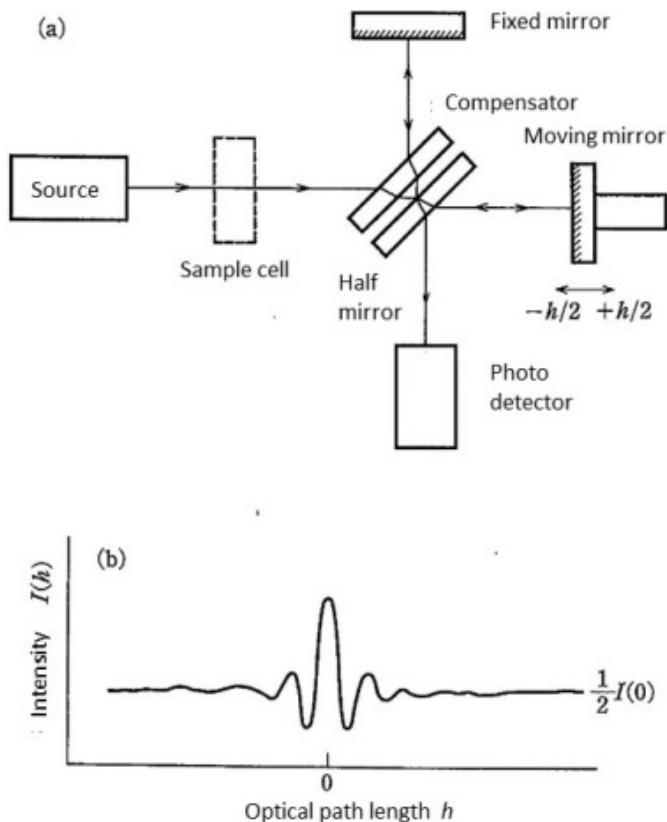
درجه همدوسی متقابل برابر با تبدیل فوریه توزیع شدت منبع نور است. این به عنوان قضیه ون سیترت-زرنیک^۶ شناخته می‌شود. درجه همدوسی مکانی اندازه منبع نور را نشان می‌دهد. تداخل سنج ستاره‌ای مایکلسون مصور در شکل (۳.۱۰) بر اساس این قضیه است [۳]. مایکلسون تصور می‌کرد که این ستاره یک دیسک با توزیع شدت همگن است. با تغییر فاصله L روزنه دوگانه، همدوسی مکانی (۳.۱۰) اندازه گیری شد و سپس قطر زاویه‌ای α ستاره برآورد شد. درجه همدوسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\gamma_{12} = \frac{2J_1\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda}L\right)}{\frac{\pi\alpha}{\lambda}L} \quad (34.10)$$

که در آن $J_1(\dots)$ تابع بسل مرتبه اول از نوع اول است. با افزایش L ، اولین نقطه γ_{12} در $L = 0$ به دست می‌آید و در این صورت

$$\frac{\pi\alpha}{\lambda}L_0 = 3.83 \quad (35.10)$$

^۶ van Cittert-Zernike theorem



شکل ۴.۱۰: طیفسنجی تبدیل فوریه (الف) سیستم نوری و (ب) اینترفروگرام.

در نهایت داریم

$$\alpha = \frac{1/22\bar{\lambda}}{L_0} \quad (36.10)$$

با استفاده از این، مایکلسون قطر زاویه‌ای ستاره Betelgeuse of Orion را 47° ثانیه قوس تخمین زد.

۲.۱۰ طیف سنجی تبدیل فوریه

ترکیب تداخل‌سنج طیف مایکلسون و قضیه وینر-کینیشاين طیف توان منبع نور را به دست می‌دهد. با توجه به پیشرفت فناوری پردازش داده‌ها، طیفسنجی تداخل‌سنجی عملی شده است. این روش طیفسنجی تبدیل فوریه نامیده می‌شود. شکل (۴.۱۰) نمونه‌ای از چیدمان نوری آنرا نشان می‌دهد. شدت تداخل با رابطه زیر داده می‌شود

$$I_\sigma(h) = 2B(\sigma)[1 + \cos(2\pi\sigma h)] \quad (37.10)$$

که در آن شدت منبع نور $B(\sigma)$ برای عدد موج $\sigma^{\textcolor{blue}{Y}}$ و اختلاف مسیر نوری h است. برای منبع نور با توزیع طیف گسترده، شدت به صورت $B(\sigma)d\sigma$ در محدوده عدد موج باریک $\sigma + d\sigma$ نوشته می‌شود. شدت تداخل با رابطه زیر داده می‌شود

$$dI_\sigma(h) = 2B(\sigma)[1 + \cos(2\pi\sigma h)]d\sigma \quad (38.10)$$

که در آن $B(\sigma)$ شدت موج با عدد موج σ است و شدت طیف نامیده می‌شود. برای همه اعداد موج

$$\begin{aligned} I(h) &= 2 \int_0^\infty B(\sigma)[1 + \cos(2\pi\sigma h)]d\sigma \\ &= 2 \int_0^\infty B(\sigma)d\sigma + 2 \int_0^\infty B(\sigma)\cos(2\pi\sigma h)d\sigma \end{aligned} \quad (39.10)$$

شدت حاشیه تداخل چند رنگی $I(h)$ به صورت تابعی از اختلاف مسیر نوری h ، انترفروگرام^A نامیده می‌شود. در حالت $h = 0$ داریم

$$I(0) = 4 \int_0^\infty B(\sigma)d\sigma \quad (40.10)$$

و از این رو داریم

$$I(h) - \frac{I(0)}{2} = 2 \int_0^\infty B(\sigma)\cos(2\pi\sigma h)d\sigma \quad (41.10)$$

سپس داریم

$$B(\sigma) = 2 \int_0^\infty \left[I(h) - \frac{I(0)}{2} \right] \cos(2\pi\sigma h)dh \quad (42.10)$$

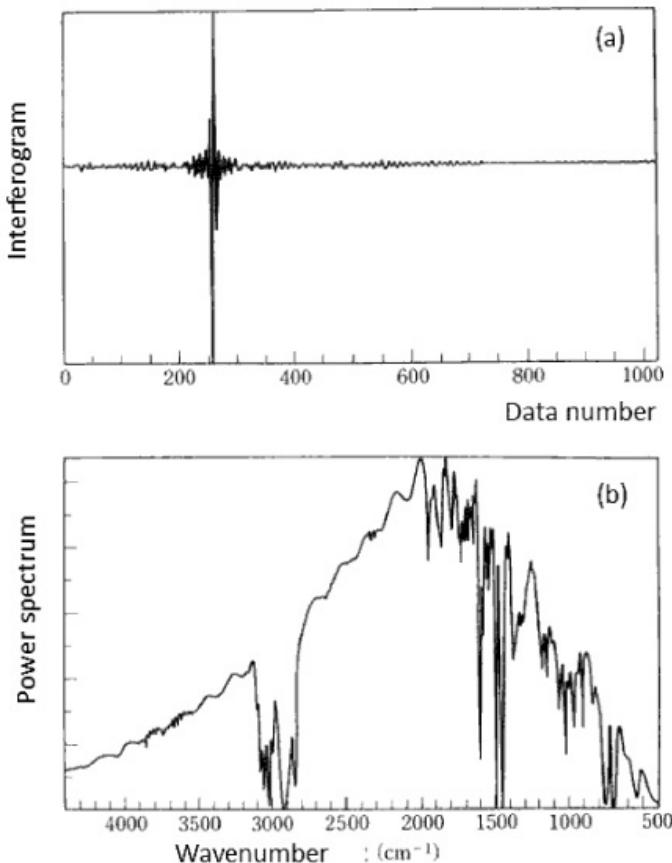
تبديل فوريه اينترفروگرام بدون عبارت با ياس شدت طيف $B(\sigma)$ را بما مي‌دهد. شكل (۴۵.۱۰) اينترفروگرام پلي استاييرن و طيف آن را نشان مي‌دهد.

طيف‌سنجد تبدل فوريه در استفاده از نور ورودی نسبت به سایر دستگاه‌های طيف‌سنجد، مانند منشورها و گريتينگ‌ها، کارآمدتر است. راندمان با استفاده از روزنه اندازه‌گيري می‌شود که با حاصلضرب مساحت روزنه ورودی و زاويه ثابتی که منبع تحت آن قرار می‌گيرد همانطور که از روزنه ديده می‌شود، تعریف می‌شود. در ناحیه مادون قرمز دور، که در آن استفاده از منابع نوری با قدرت بالا و آشکارسازهای نور بسیار کارآمد دشوار است، طيف‌سنجد تبدل فوريه يك ابزار ضروری است.

اجازه دهيد يکی از آينه‌ها با زاويه α کمی کج شود. در اين حالت، شدت موج با عدد موج σ با رابطه زير داده می‌شود؛

$$I_\sigma(x) = 2B(\sigma)[1 + \cos(2\pi\sigma\alpha x)] \quad (43.10)$$

^Aدر اينجا عدد موج، عدد موج طيف‌سنجد نامیده و با $\sigma = 1/\lambda$ تعریف می‌شود.
Interferogram



شکل ۵.۱۰: اینترفروگرام (الف) پلیاستایرن (ب) و طیف آن.

که مشابه معادله (۳۷.۱۰) است. در مورد منبع نور چند رنگی داریم

$$I(x) = 2 \int_0^{\infty} B(\sigma) [1 + \cos(2\pi\sigma\alpha x)] d\sigma \quad (44.10)$$

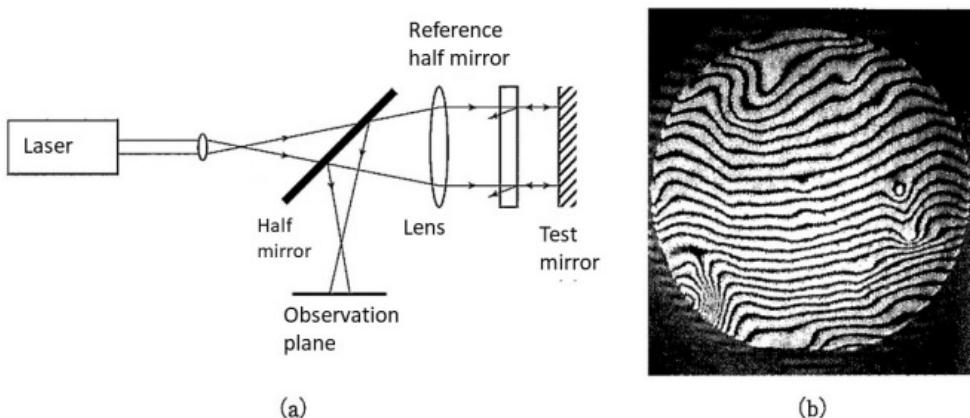
که در آن $I(x)$ تابعی از مختصات حقیقی x است که توسط یک آرایه آشکارساز نوری می‌توان آشکار سازی کرد. تبدیل فوریه $I(x)$ طیف $B(\sigma)$ را همانند معادله (۴۲.۱۰)^۹ می‌دهد. این روش دارای سرعت بالایی نیست، اما بهدلیل عدم وجود اجزای متحرک مکانیکی، طیف متغیر با زمان قابل اندازه‌گیری است.

۳.۱۰ انتقال فاز در اینترفروگرام

تداخل‌سنجهای به عنوان ابزاری برای اندازه‌گیری شکل سطح دستگاههای نوری و اجزای مکانیکی دقیق مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یک تداخل‌سنجه معمولی تداخل‌سنجه فیزو-

^۹Fizeau

که در شکل (۶.۱۰) (الف) نشان داده است. یک پرتو موازی یک تقسیم‌کننده پرتو مرجع را روشن می‌کند، که پرتو منعکس شده برای موج مرجع و دیگری برای روشن کردن سطح جسم استفاده می‌شود. نمونه‌ای از الگوی حاشیه‌ای برای ویفر سیلیکونی در شکل (۶.۱۰) (ب) نشان داده شده است. طول موج $\lambda = 0.63\mu m$ و فاصله حاشیه $\lambda/2 = 0.32\mu m$ است.



شکل ۶.۱۰: (الف) تداخل سنج فیزو (ب) و الگوی حاشیه آن اندازه گیری شد.

سپس، اجزاهه دهید تفاوت مسیر نوری در تداخل سنج را، مانند تداخل سنج تبدیل فوریه، تغییر دهیم. روش اندازه‌گیری فاز از تغییر حاشیه‌های تداخل سنجی، تداخل سنجی تغییر فاز یا روش روبش حاشیه نامیده می‌شود [۵، ۶، ۷]. برای سادگی، تداخل سنج توایمن-گرین^{۱۰} را که در شکل (۷.۱۰) نشان داده شده در نظر بگیرید. با مسیر نوری $h(x, y)$ سطح آزمایش بهدلیل انعکاس^{۱۱} و مسیر نوری جابجا شده، شدت حاشیه تداخل سنجی با رابطه زیر داده می‌شود

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y) - l] \right\} \quad (45.10)$$

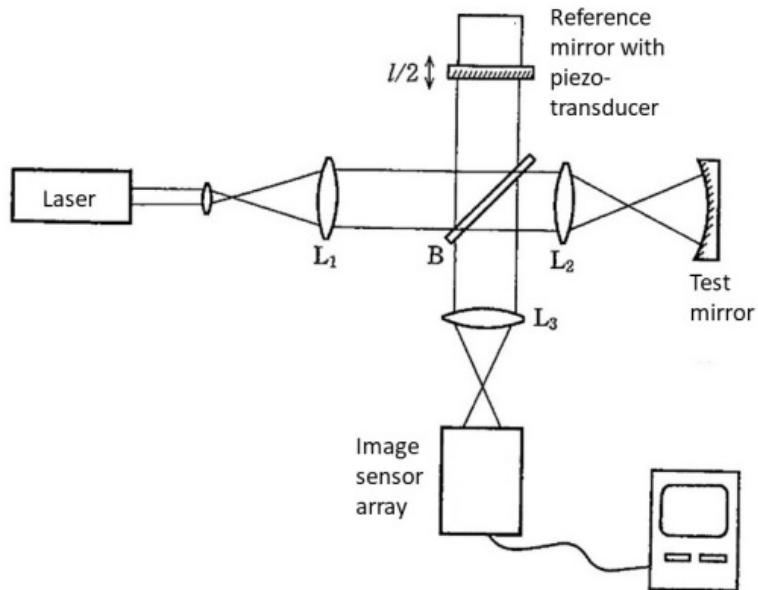
که در آن $a(x, y)$ و $b(x, y)$ بترتیب نمایشگر جمله بایاس شدت حاشیه و کنتراست آن است.

برای به‌دست آوردن فاز $2\pi h(x, y)/\lambda$ سطح از اطلاعات شناخته شده با شدت $I(x, y, l)$ باید جملات $a(x, y)$ و $b(x, y)$ شناخته یا باید حذف شوند. از معادله (۴۵.۱۰) داریم؛

$$\begin{aligned} I(x, y, l) &= a(x, y) \\ &+ b(x, y) \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right) \\ &+ b(x, y) \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right) \end{aligned} \quad (46.10)$$

^{۱۰} Twyman-Green

^{۱۱}تابع $h(x, y)$ مساوی دو برابر شکل سطح است



شکل ۷.۱۰: انیترفروگرام انتقال فاز

با تبدیل فوریه گرفتن از معادله (۴۶.۱۰)؛

$$\begin{aligned}
 \hat{I}(x, y, \nu) &= \mathcal{F}[I(x, y, l)] \\
 &= a(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}l\nu) dl \\
 &\quad + b(x, y) \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right) \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}l\nu) dl \\
 &\quad + b(x, y) \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right) \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}l\nu) dl \quad (47.10) \\
 &= a(x, y)\delta(\nu) \\
 &= +b(x, y) \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \frac{[\delta(\nu - \frac{l}{\lambda}) + \delta(\nu + \frac{l}{\lambda})]}{2} \\
 &= -jb(x, y) \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \frac{[\delta(\nu - \frac{l}{\lambda}) - \delta(\nu + \frac{l}{\lambda})]}{2}
 \end{aligned}$$

فقط با استفاده از عبارت $\nu = \frac{l}{\lambda}$ که مربوط به اولین قله در طیف فوریه است، قسمت‌های حقیقی و موهومی آن بترتیب به صورت زیر می‌باشند.

$$Re[\hat{I}(x, y, \nu)] = \frac{1}{2}b(x, y) \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \quad (48.10)$$

$$Im[\hat{I}(x, y, \nu)] = \frac{1}{2}b(x, y) \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \quad (49.10)$$

در نهايـت داريم

$$h(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{Im[\hat{I}(x, y, \nu)]}{Re[\hat{I}(x, y, \nu)]} \quad (50.10)$$

از سوي ديگـر، از معادله (۴۷.۱۰)، بخشـهای حقـيقـي و موـهـومـي تـبـديـل فـورـيه حـاشـيه تـداـخـلـسـنـجـي بـتـرتـيـب بـهـشـكـل مـتـفـاوـتـي خـواـهـد بـود

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y, l) \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right) dl = \frac{1}{\sqrt{2}} b(x, y) \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \quad (51.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y, l) \sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right) dl = \frac{1}{\sqrt{2}} b(x, y) \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y)] \right\} \quad (52.10)$$

بنابرـاـين دـارـيم

$$h(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y, l) \sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right) dl}{\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y, l) \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right) dl} \right] \quad (53.10)$$

اگـر مـسـير نـورـي l در N بـار با مـقـدار مـساـوى λ/N اـز 0 به λ تـغـيـير كـند. در اـين صـورـت، مـسـير نـورـى h اـمـين با رـابـطـه زـيرـدادـه مـىـشـود

$$l_n = \frac{n}{N} \lambda \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (54.10)$$

از آنجـايـي كـه $I(x, y, l)$ تـابـع تـناـوبـي اـز λ تـا l است، دـارـيم

$$Re[\hat{I}(x, y, l)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I(x, y, l_n) \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \quad (55.10)$$

$$Im[\hat{I}(x, y, l)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I(x, y, l_n) \sin \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \quad (56.10)$$

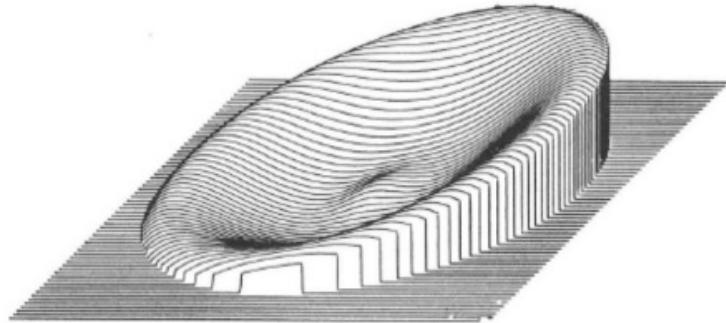
با جـايـگـزـينـي معـادـلهـهـاي (۵۵.۱۰) و (۵۶.۱۰) در معـادـله (۵۰.۱۰)، خـواـهـيم دـاشـت

$$h(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} I(x, y, l_n) \sin \left(\frac{2\pi n}{N} \right)}{\sum_{n=0}^{N-1} I(x, y, l_n) \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right)} \quad (57.10)$$

در مهمـتـرـين مـورـد $N = 4$

$$h(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{I_4 - I_0}{I_0 - I_1} \quad (58.10)$$

زـيرـا معـادـلهـات (۵۷.۱۰) و (۵۸.۱۰) عـبارـت باـيـاس $a(x, y)$ و كـنـترـاست $b(x, y)$ رـا شـامل نـمـىـشـود، اـين الـگـوريـتم تحت تـأـثـير تـأـثـيرـات اـين جـملـات قـرارـنمـىـگـيرـد. نـموـنهـاـي اـز سـطـح كـروـي اـنـداـزـهـگـيرـي شـده در شـكـل (۸.۱۰) نـشـان دـادـه شـده است.



شکل ۴.۱۰: نمونه‌ای از اندازه‌گیری یک آینه کروی توسط تداخل‌سنجدی تغییر فاز.

۴.۱۰ تحلیل حاشیه تبدیل فوریه

مانند حالت معادله (۴۳.۱۰) در طیف‌سنجدی تبدیل فوریه، کجی در آینه مرجع به تداخل‌سنجدی وارد می‌شود که در شکل (۷.۱۰) نشان داده شده است. شدت حاشیه تداخل‌سنجدی بصورت زیر است

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \frac{2\pi}{\lambda} [h(x, y) - \alpha x] \quad (۵۹.۱۰)$$

شدت حاشیه شامل جمله حامل تناوب a/λ است. با تبدیل فوریه گرفتن از معادله (۵۹.۱۰)، داریم

$$\mathcal{F}[I(x, y)] = A(\nu_x, \nu_y) + B(\nu_x - \frac{\alpha}{\lambda}, \nu_y) + B^*(\nu_x + \frac{\alpha}{\lambda}, \nu_y) \quad (۶۰.۱۰)$$

$$\begin{aligned} &\text{که در آن} \\ &A(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[a(x, y)] \end{aligned} \quad (۶۱.۱۰)$$

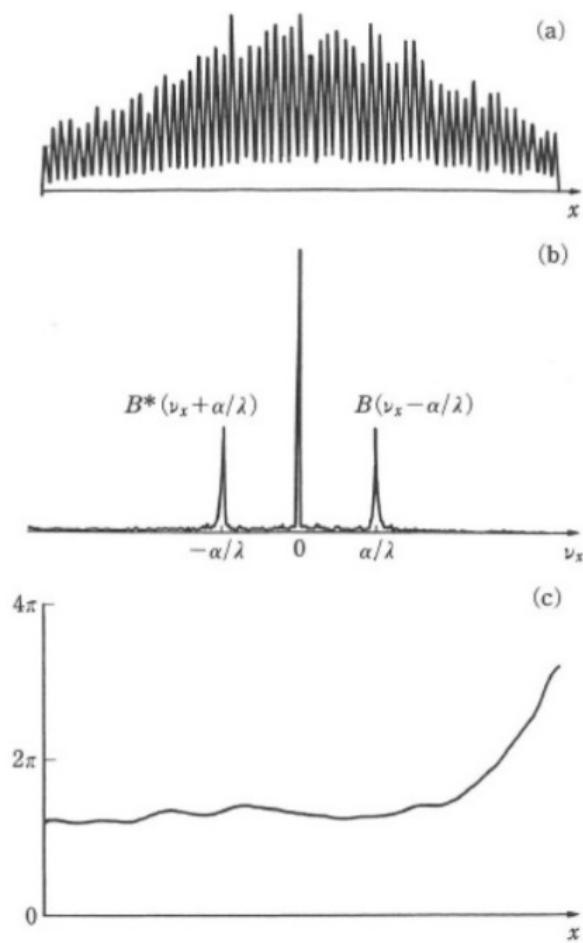
$$B(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} b(x, y) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda} h(x, y) \right] \right\} \quad (۶۲.۱۰)$$

شکل (۹.۱۰) نمونه‌ای از حاشیه با حامل (الف) و تبدیل فوریه آن (ب) را نشان می‌دهد. با جابجایی تنها اولین قله طیف به مرتبه صفر و سپس تبدیل فوریه از آن، جمله زیر را داریم.

$$c(x, y) = b(x, y) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda} h(x, y) \right] \quad (۶۳.۱۰)$$

بگذارید قسمت حقیقی و موهومی آن $c(x, y)$ به ترتیب $c_I(x, y)$ و $c_R(x, y)$ باشند. در نهایت، شکل سطح را داریم:

$$h(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{c_I(x, y)}{c_R(x, y)} \right] \quad (۶۴.۱۰)$$



شکل ۹.۱۰: (الف) شکل حاشیه تداخل‌سنجه با حامل، (ب) تبدیل فوریه آن و (ج) شکل سطح آنالیز شده.

که در شکل (۹.۱۰)(ج) نشان داده شده است. این روش در تحلیل حاشیه‌ای روش تبدیل

فوریه نامیده می‌شود [۲].

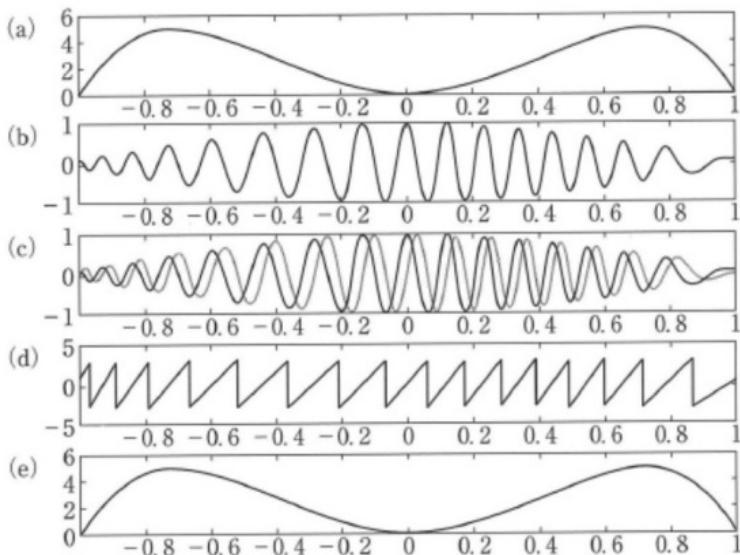
HASHIYE MOAZI HEM FASLHE, MANND HASHIYE YANG^{۱۲} RA DR NEZER BGIRID

$$I(x) = a(x) + b(x) \cos(2\pi\alpha x + \phi) \quad (65.10)$$

که در آن ϕ نشان دهنده فاز اولیه حاشیه است. در حالت اول، توزیع فضایی الگوی حاشیه در نظر گرفته شده است، اما ϕ در این مورد ثابت است. با تبدیل فوریه از معادله (۶۵.۱۰)، داریم

$$\mathcal{F}[I(x)] = A(\nu) + \frac{1}{\sqrt{2}} B(\nu - \alpha) \exp(-j\phi) + \frac{1}{\sqrt{2}} B(\nu + \alpha) \exp(j\phi) \quad (66.10)$$

^{۱۲} Young's fringe



شکل ۵.۱۰.۱: تجزیه و تحلیل حاشیه با تبدیل هیلبرت. (الف) فاز حاشیه $\phi(x) = -10x^4 + 10x^2$ ، (ب) مولفه نوسانی شکل حاشیه با حامل $b(x) \cos[2\pi\nu_x x + \phi(x)]$ ، (ج) مولفه درون فازی (خط جامد) و مولفه تربیعی (خط خاکستری) که با تبدیل هیلبرت ارائه شده است، (د) شکل فاز تحلیل شده و (ه) فاز نهایی $\phi(x)$ پس از باز کردن فاز و حذف حامل $2\pi\nu_x x$.

که در آن $A(\nu)$ و $B(\nu)$ به ترتیب تبدیل فوریه $a(x)$ و $b(x)$ را نشان می‌دهند. اگر $b(x)$ تقریباً ثابت یا متقارن باشد، $B(\nu)$ حقیقی است و بنابراین، فاز اولین قله مقدار ϕ را می‌دهد [۹]. این روش در تعیین فاز موج مرجع [۱۰] و اندازه‌گیری طول مطلق معیار فشرده [۱۳] استفاده می‌شود.

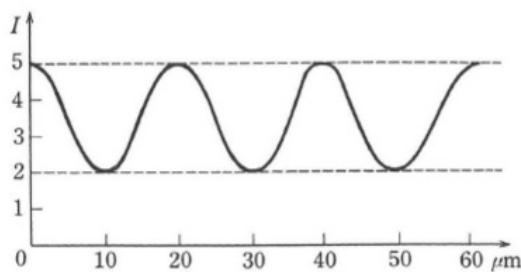
۵.۱۰ تحلیل حاشیه با تبدیل هیلبرت

شدت حاشیه با یک حامل با رابطه زیر داده می‌شود

$$I(x) = a(x) + b(x) \cos[2\pi\nu_x x + \phi(x)] \quad (۵.۱۰)$$

که مشابه معادله (۵.۹.۱۰) است. روش ارزیابی فاز ϕ با استفاده از تبدیل فوریه در بخش ۴.۱ و روشهای با استفاده از تبدیل هیلبرت در اینجا ارائه شده است. در ابتدا جمله بایاس در الگوی حاشیه، با کم کردن میانگین از الگوی حاشیه یا با فیلتر کردن بالا گذر الگوی حاشیه برای حذف مولفه فرکانس پایین‌تر، حذف می‌شود. با هیلبرت تبدیل گرفتن مولفه نوسان ($\nu(x) = b(x) \cos[2\pi\nu_x x + \phi(x)]$ ، مطابق معادله ۲۸.۹)، مولفه تربیعی

^{۱۳} Block Gauge



شکل : ۱۱.۱۰

فاز $\hat{\nu}(x)$ به دست می‌آید. بالاخره فاز را داریم:

$$2\pi\nu_x x + \phi(x) = \tan^{-1} \left[\frac{\hat{\nu}(x)}{\nu(x)} \right] \quad (68.10)$$

فاز مورد نظر $\phi(x)$ با کم کردن مولفه فرکانس حامل $2\pi\nu_x x$ به دست می‌آید. روش تحلیل حاشیه با استفاده از تبدیل هیلبرت در شکل (۱۰.۱۰) نشان داده شده است.

پرسش‌ها

۱. میزان دید و درجه همدوسى نوری را تعیین کنید که شدت حاشیه تداخل در شکل (۱۱.۱۰) نشان داده شده است.
۲. در طیفسنجی تبدیل فوریه، قله‌های کاذب ممکن است در طیف محاسبه شده از N نقطه داده‌های نمونه برداری یک انترفروگرام گنجانده شوند. در مورد دلیل قله‌های کاذب و اقدامات متقابل آنها بحث کنید.
۳. در طیفسنجی تبدیل فوریه، تأثیرات انترفروگرام یک جسم پاشنده را بحث کنید.
۴. اثر غیرخطی آشکارساز عکس در انترفروگرام تغییر فاز بحث کنید.
۵. خطای فاز محاسبه شده را در حالتی که فاز مرجع به درستی مدوله نشده است، تخمین بزنید.
۶. تداخل سنج هتروداین به عنوان تداخل سنج با دقت بسیار بالا شناخته می‌شود. تفاوت و شباهت بین تداخل سنج هتروداین و تغییر فاز را از نظر اصولی بحث کنید.

مراجع

- Marathay, A. S. 1982. *Elements of Optical Coherence Theory*. John Wiley & Sons, New York.
- Goodman, J.W. 1985. *Statistical Optics*. John Wiley & Sons, New York. Chapters 5 and 6.

كتاب نامه

- [1] Born. M. and Wolf, E. 1980. *Principles of Optics*. 6th ed. p. 491, Pergamon Press.
- [2] Goodman, J. W. 1985. *Statistical Optics*. p. 157, John Wiley & Sons, New York.
- [3] Michelson, A. A. 1968. *Studies in Optics*. University of Chicago Press.
- [4] Okamoto, T., Kawata, S. and Minami, S. 1985. Optical method for resolution enhancement in photodiode array Fourier transform spectroscopy. *Appl. Opt.* 24: 4221.
- [5] Bruning, J. H., Herriott, D. R., Gallagher, J. E., Rosenfeld, D. P., White, A. D. and Brangaccio, D. J. 1974. Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses, *Appl. Opt.* 13: 2693.
- [6] Creath, K. 1988. *Progress in Optics*. E. Wolf ed. XXVI: 351. Amsterdam.
- [7] Schwieder, J. 1990. *Progress in Optics*. E. Wolf ed., XXVII: 273. Amsterdam.
- [8] Takeda, M. 1982. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *J. Opt. Soc. Amer.* 72: 156.
- [9] Lai, G. M. and Yatagai, T. 1994. Use of the fast Fourier transform method for analyzing linear and equispaced Fizeau fringes. *Appl. Opt.* 33: 5935.
- [10] Lai, G. M. and Yatagai, T. 1991. Generalized phase-shifting interferometry. *J. Opt. Soc. Amer.* 8: 822.

فصل ۱۱

پردازش سیگنال زمان-مکان

شباهت‌های زیادی بین تکنیک‌های محاسبات نوری مکانی و زمانی وجود دارد. در این فصل، استفاده از تکنیک‌های محاسبات مکانی برای پردازش سیگنال زمانی مورد بحث قرار می‌گیرد. یک پالس زمانی بسیار کوتاه تبدیل فوریه به عنوان یک تصویر مکانی است که با پردازش نوری مکانی پردازش می‌شود. معمولاً برای این منظور از توری پراش استفاده می‌شود. عملکرد آن به صورت مبدل سیگنال زمانی به مکانی مورد بحث قرار گرفته است. استفاده از همبستگی تبدیل فوریه مشترک در پردازش سیگنال مکانی-زمانی با استفاده از توری پراش ارائه شده است. شکل دهنده پالس نور فمتو ثانیه، اندازه‌گیری عمق نوری و هولوگرافی طیفی مورد بحث قرار گرفته‌اند. توموگرافی همدوسی نوری دامنه طیفی نیز مورد بحث قرار گرفته است.^۱ (OCT)

۱.۱۱ شکل دهنده پالس فمتو ثانیه

۱.۱۱.۱ تابع توری

یک پالس فمتو ثانیه، مثلاً عرض پالس آن $\Delta f_s = 10^{\circ}$ ، یک موج تک رنگ نیست زیرا محدوده طول موج آن $\Delta \lambda = 200$ نانومتر است. در اینجا یک موج تابشی پس از یک توری به صورت کمی مورد بحث قرار می‌گیرد [۱]. موج صفحه‌ای با فرکانس ν را با زاویه برخورد γ و سپس زاویه پراش θ در نظر گیرید. زاویه تابش نور فرکانس ν با زاویه کوچک $\Delta\gamma$ و $\gamma - \Delta\gamma$ کج می‌شود. فرض کنید فرکانس آن تک و منفرد نیست و فرکانس ν آن برای فرکانس مرکزی ν_0 جابجا شده است، فرکانس زاویه‌ای بصورت زیر داده می‌شود

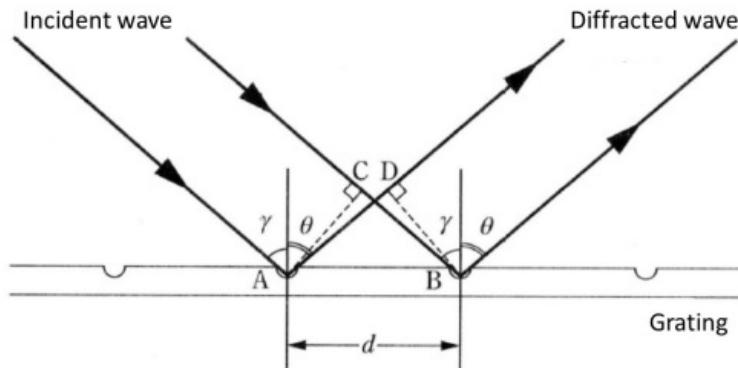
$$\omega = 2\pi(\nu - \nu_0) \quad (1.11)$$

^۱Optical Coherence Tomography (OCT)

بیایید انتقال زاویه‌ای در این حالت را بصورت زیر تعریف کنیم

$$\Delta\theta = \alpha\Delta\gamma + \beta\omega \quad (2.11)$$

این بدان معنی است که زاویه پراش به گسترش زاویه برخورد و پهنه‌ای باند موج تابشی بستگی دارد.



شکل ۱.۱۱: پراش از توری

دو پارامتر بعدی α و β مورد بحث قرار می‌گیرند. یک توری را همانطور که در شکل (۱.۱۱) نشان داده شده است در نظر بگیرید. یک موج مسطح با زاویه تابش γ به نقاط شیار توری A و B می‌آید و به جهت زاویه پراش θ پراش می‌شود. تفاوت مسیر نوری بین دو پرتو نور خواهد بود

$$\Delta l = \bar{BC} - \bar{AD} = d \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] = d(\sin \gamma - \sin \theta) \quad (3.11)$$

که در آن d نمایشگر گام توری است. در این صورت شرط پراش مرتبه m را داریم

$$\sin \gamma - \sin \theta = \frac{m\lambda}{d} \quad (4.11)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۴.۱۱) خواهیم داشت

$$\cos \gamma \cdot \Delta\gamma - \cos \theta \cdot \Delta\theta = 0 \quad (5.11)$$

در این صورت α در معادله (۲.۱۱) برابر است با

$$\alpha = \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \quad (6.11)$$

از معادله (۶.۱۱) برای تغییر طول موج $\Delta\lambda$ ، داریم

$$-\cos \theta \cdot \Delta\theta = \frac{m}{d} \Delta\lambda \quad (7.11)$$

و چون $\omega_0 = 2\pi c / \lambda$ داریم

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} \omega \quad (8.11)$$

زیرا ω به معنای جابجایی از ω_0 است. در نهایت، با استفاده از معادله (۷.۱۱) و (۸.۱۱)، ضریب β در معادله (۲.۱۱) خواهد بود

$$\beta = \frac{2\pi cm}{\omega_0 d \cos \theta_0} \quad (9.11)$$

۲.۱.۱۱ پرتو پراکنده شده

فرض کنید که موج تابشی در جهت z منتشر می‌شود، که جهت γ به توری و دامنه آن $a(x, t)$ و در آن محور x به عنوان جهت عمود نسبت به جهت انتشار محور z تعریف می‌شود. تبدیل فوریه $a(x, t)$ در زمان و تبدیل فوریه معکوس آن با استفاده از رابطه زیر داده می‌شود

$$\tilde{a}(x, \omega) = \int a(x, t) \exp(j\omega t) dt \quad (10.11)$$

$$a(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{a}(x, \omega) \exp(-j\omega t) d\omega \quad (11.11)$$

تبدیل فوریه در فضا و عکس آن خواهد بود

$$\tilde{A}(\xi, \omega) = \int \tilde{a}(x, \omega) \exp(j2\pi\xi x) dx \quad (12.11)$$

$$\tilde{a}(x, \omega) = \int \tilde{A}(\xi, \omega) \exp(-j2\pi\xi x) d\xi \quad (13.11)$$

این به این معنی است که موج تابشی جمع اثرهای (برهم نهی) بسیاری از امواج صفحه $\tilde{A}(\xi, \omega) \exp(-j2\pi\xi x)$ با جهت‌های انتشار متفاوت است. موج انتشاری تغییر جهت $\Delta\gamma$ نسبت به محور z خواهد بود

$$\tilde{a}(z, x, \omega) = \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda} [\sin(\Delta\gamma)x + \cos(\Delta\gamma)z] \right\} \quad (14.11)$$

برای یک $\Delta\gamma$ کوچک، برای موج صفحه‌ای $\exp(-j2\pi\xi_0 x)$ با فرکانس مکانی ξ_0 داریم

$$2\pi\xi_0 x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\Delta\gamma)x = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\gamma x \quad (15.11)$$

با مراجعه به معادله (۱۳.۱۱)، بالاخره داریم

$$\Delta\gamma = \lambda\xi_0 \quad (16.11)$$

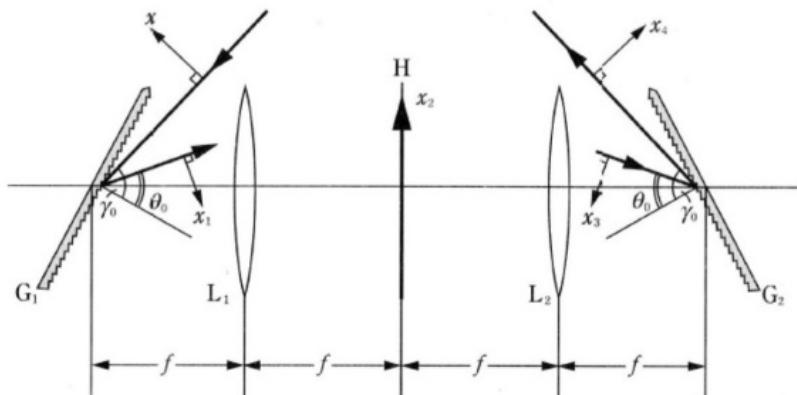
این رابطه بین فرکانس مکانی و جهت انتشار موج (زاویه با محور z) است. همانطور که در معادله (۱۵.۱۱) نشان داده شده است، موج $a_1(x_1, \omega)$ با زاویه $\alpha \Delta \gamma$ از θ_0 متمایل است. این بدان معنی است که فرکانس مکانی به دلیل معادله (۱۵.۱۱) افزایش می‌یابد، که در آن محور x_1 عمود بر جهت انتشار موج پراکنده شده، تعریف شده است. برای اینکه موج پراکنده شده با فرکانس مکانی منتشر شود، فرکانس مکانی موج تابشی مربوطه باید $/a$ باشد. بنابراین مولفه‌های پرتو پراش باید باشد

$$\tilde{A}(\xi, \omega) = b \tilde{A}\left(\frac{\xi}{\alpha}, \omega\right) \quad (۱۷.۱۱)$$

که در آن b مقدار ثابتی است. تبدیل فوریه معکوس معادله (۱۷.۱۱) موج پراش $\tilde{a}(x_1, \omega)$ را می‌دهد، اما مولفه پرتو پراش شامل اثر پاشندگی طول موج $\beta\omega$ است. از آنجایی که ω زاویه انتشار را با $\Delta\theta$ تغییر می‌دهد، فرکانس مکانی در نهایت با رابطه زیر داده می‌شود

$$\xi' = \frac{\Delta\theta}{\lambda} = \frac{\beta\omega}{\lambda} \quad (۱۸.۱۱)$$

که در ارتباط با معادله (۱۶.۱۱) است. تغییر فاز ناشی از پاشندگی طول موج برابر است



شکل ۲.۱۱: شکل دهنده پالس فمتوثانیه با یک زوج توری-عدسی

با:

$$2\pi\xi'x_1 = 2\pi\frac{\beta\omega}{\lambda}x_1 = k\beta\omega x_1 \quad (۱۹.۱۱)$$

سرانجام داریم

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x_1, \omega) &= \int \tilde{A}(\xi, \omega) \exp(-jk\beta\omega x_1) \exp(-j2\pi\xi x_1) d\xi \\ &= b \exp(-jk\beta\omega x_1) \int \tilde{A}\left(\frac{\xi}{\alpha}, \omega\right) \exp(-j2\pi\xi x_1) d\xi \\ &= b' \exp(-jk\beta\omega x_1) \tilde{a}(x_1) \end{aligned} \quad (۲۰.۱۱)$$

۲.۱۱ فیلتر فرکانس مکانی برای پالس فوق کوتاه

همانطور که در شکل (۲.۱۱) نشان داده شده است، سیستم نوری یک زوج عدسی-توری را با تابش نور فموثانیه در نظر بگیرید [۲].

فاصله کانونی عدسی L_1 و L_2 برابر f است و ثابت‌های توری G_1 و G_2 نیز برابر d است. توری‌های G_1 و G_2 به صورت متقاضن تنظیم شده‌اند. زاویه برخورد γ و زاویه پراش θ نیز با توری‌ها در یک زاویه هستند. محور x نسبت به جهت پرتو تابشی $a_{in}(x, t)$ به توری G_1 و محور x_1 به جهت پراش پرتو $a_{in}(x_1, t)$ عمود تعریف می‌شود. به طور مشابه، پرتو ورودی $a_{out}(x_2, t)$ و پرتو پراش $a_{out}(x_3, t)$ تعریف شده‌اند. صفحه کانونی عدسی L_1 صفحه H است و محور مختصات آن به صورت x_4 تعریف شده است.

پرتو ورودی $a_{in}(x, t)$ بطور مجزا نمایشگر بخش مکانی و زمانی است:

$$\tilde{a}_{in}(x, t) = a_{in}(x) \cdot a_{in}(t) \quad (21.11)$$

و طیف وابسته به زمان خواهد بود

$$\tilde{a}_{in}(x, \omega) = a_{in}(x) \cdot a_{in}(\omega) \quad (22.11)$$

از آن جایی که پرتو درست بعداز مشتق‌گیری از توری G_1 با معادله (۲۰.۱۱) نمایش داده می‌شود، داریم

$$\tilde{a}_1(x, \omega) = b' \exp(-jk\beta\omega x_1) \tilde{a}_{in}(x_1, \omega). \quad (23.11)$$

بعد از تبدیل فوریه مکانی، پرتو در صفحه H خواهد بود

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(\chi, \omega) &= b' \tilde{a}_{in}(\omega) \int \tilde{a}_{in}(\alpha x_1) \exp(-jk\beta\omega x_1) \exp(j\chi x_1) dx_1 \\ &= b' \tilde{a}_{in}(\omega) A_{in}\left(\frac{\chi - k\beta\omega}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (24.11)$$

که در آن

$$A_{in}(\chi) = \int \tilde{a}_{in}(x_1) \exp(j\chi x_1) dx_1 \quad (25.11)$$

$$\chi = \frac{2\pi x_1}{\lambda f} \quad (26.11)$$

یک فیلتر مکانی $H(\chi)$ در صفحه H قرار می‌گیرد. تبدیل فوریه موج ارسالی را با عدسی L_2 انجام داده و ما موج را روی گریتینگ (توری) G_2 داریم.

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(x_2, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{A}_1(\chi, \omega) H(\chi) \exp(-j\chi x_2) d\chi \\ &= b'' \tilde{a}_{in}(\omega) \int A_{in}\left(\frac{\chi - k\beta\omega}{\alpha}\right) H(\chi) \exp(-j\chi x_2) d\chi \end{aligned} \quad (27.11)$$

موج پراکنده شده توسط توری G_4 به دست می‌آید

$$\tilde{a}_{out}(x_4, \omega) = b'' \tilde{a}_4\left(\frac{x_4}{\alpha}, \omega\right) \exp(jk\beta\omega x_4) \quad (28.11)$$

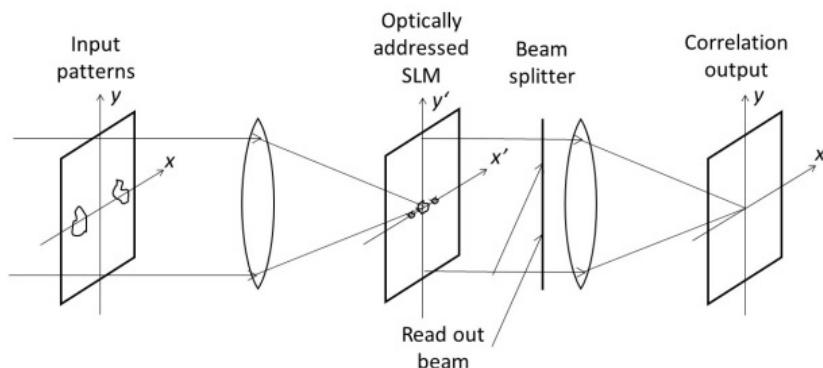
با استفاده از معادله (۲۷.۱۱)، داریم

$$\tilde{a}_{out}(x_4, \omega) = b_{out} \tilde{a}_{in}(\omega) \int A_{in}\left(\frac{\chi - k\beta\omega}{\alpha}\right) H(\chi) \exp\left(-j\frac{\chi x_4}{\alpha}\right) \exp(jk\beta\omega x_4) d\chi \quad (29.11)$$

سرانجام داریم

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ou}(x_4, t) &= b_{out} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \tilde{a}_{out}(x_4, \omega) \exp(-j\omega t) d\omega \\ &= b'_{out} \iint \tilde{A}_{in}\left(\frac{\chi - k\beta\omega}{\alpha}\right) \tilde{a}_{in}(\omega) H(\chi) \exp\left(-j\frac{\chi x_4}{\alpha}\right) d\chi \\ &\quad \times \exp(jk\beta\omega x_4) \exp(-j\omega t) d\omega d\chi \end{aligned} \quad (30.11)$$

زیرا معادله (۳۰.۱۱) تبدیل فوریه حاصلضرب $A_{in}(\chi)$ و $H(\chi)$ با χ است، که با معادله (۲۸) در فیلتر فرکانس مکانی مطابقت دارد. با طراحی فیلتر مناسب، می‌توان فیلتر زمان-فرکانس به پالس ورودی را انجام داد و شکل دهی پالس و فشرده سازی پالس امکان پذیر است. لازم به ذکر است که مولفه‌های زمانی و مکانی در مقایسه با فیلترهای فرکانس مکانی معمولی به طور پیچیده با هم مرتبط هستند.



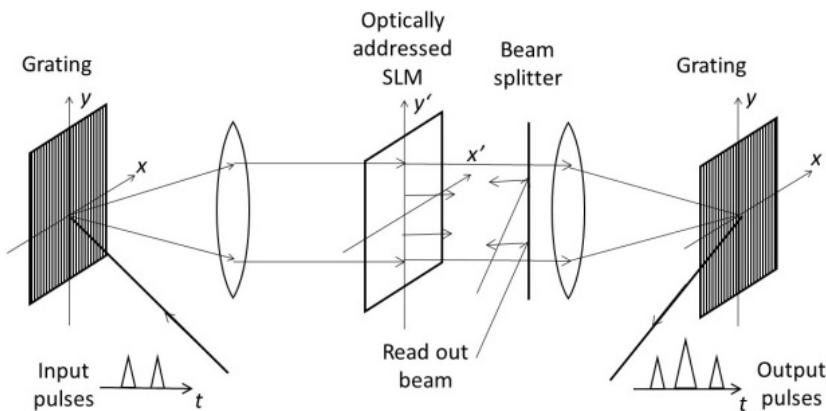
شکل ۳.۱۱: شکل چیدمان همبستگی تبدیل مشترک معمولی.

۳.۱۱ همبستگی تبدیل فوریه مشترک مکانی-زمانی

در بخش ۷.۸ از همبستگی تبدیل فوریه مشترک، دو الگوی ورودی در صفحه ورودی قرار می‌گیرند و سپس دو الگوی ورودی به طور مشترک تبدیل فوریه می‌شوند تا همبستگی متقاطع بین دو الگوی ورودی، همانطور که در شکل (۳.۱۱) نشان داده شده است،

به دست آید. طیف قدرت مکانی یک تصویر ورودی روی یک مدولاتور نور مکانی (SLM)^۲ آدرس دهی نوری نوشته، سپس طیف توسط نور موج پیوسته (cw) خوانده و بعداً به صورت مکانی تبدیل فوریه با یک عدسی انجام می شود. بنابراین، همبستگی تصویر ورودی در صفحه خروجی به دست می آید.

از طرف دیگر، در شکل دهنده پالس نوری، ورودی از دو پالس تشکیل شده است و این سیگنال زمانی ورودی تبدیل فوریه با یک زوج عدسی توری، همانطور که در شکل (۴.۱۱) نشان داده شده انجام می شود. طیف توان زمانی پالس های ورودی روی یک SLM آدرس دهی نوری نوشته، سپس طیف توسط طیف توان زمانی پالس های خروجی خوانده می شود.



شکل ۴.۱۱: شکل چیدمان همبستگی تبدیل مشترک زمانی

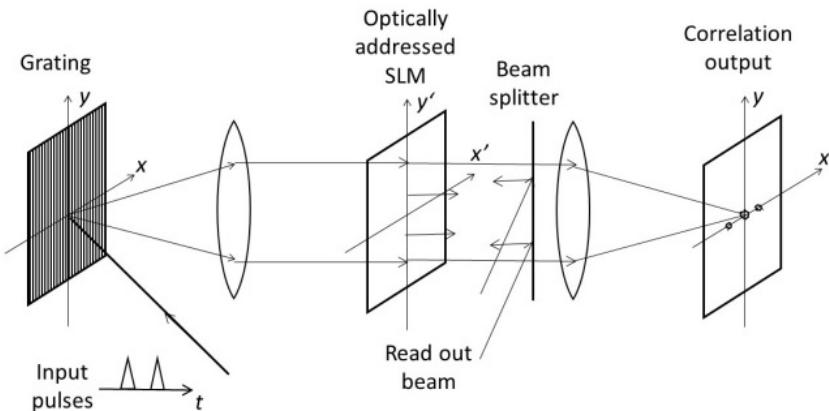
یک عدسی تبدیل فوریه در محاسبات نوری مکانی را در نظر بگیرید که با یک زوج عدسی نوری در محاسبات نوری زمانی جایگزین شده است. با این جایگزینی، یک چیدمان توری (گریتینگ) برای JCT مکانی (همبستگی تبدیل مشترک) در شکل (۳.۱۱) می تواند به تنظیم نوری در شکل (۴.۱۱) تبدیل شود.

در چیدمان نوری، طیف طول موج یک پالس ورودی با یک زوج عدسی توری بر روی SLM پخش می شود. در این صورت طیف به شدت آن تبدیل شده و بر روی یک SLM آدرس دهی نوری نمایش داده می شود. شدت طیف، طیف یک پالس نور خواندنی را در SLM مدوله می کند و طیف مدوله شده توسط یک زوج عدسی توری دیگر به یک پالس زمانی تبدیل می شود. پس از بازسازی، شکل پالس پالس بازسازی شده خودبستگی شکل پالس زمانی پالس ورودی را تشکیل می دهد.

واضح است که در SLM، هم طیف مکانی و هم طیف طول موج به صورت مکانی در چیدمان نوری در شکل های (۳.۱۱) و (۴.۱۱) پخش می شوند. بنابراین، این امکان وجود دارد که نیمه سمت راست شکل (۴.۱۱) با نیمه سمت راست شکل (۳.۱۱) جایگزین شود [۴].

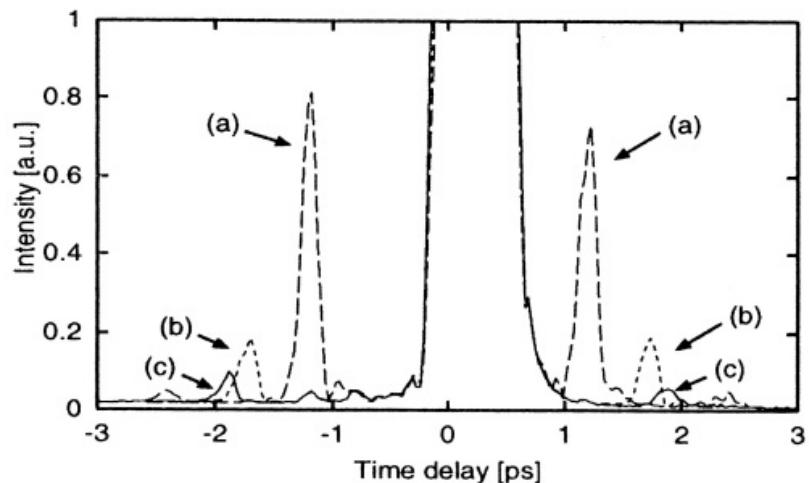
چیدمان جایگزین شده در شکل (۵.۱۱) نشان داده شده است. طیف توان نوری برای

^۲Spatial Light Modulator (SLM)



شکل ۵.۱۱: شکل چیدمان همبستگی تبدیل مشترک مکانی

پالس‌های دوگانه فمتوثانیه بر روی SLM آدرس دهی نوری ثبت می‌شود و سپس این طیف قدرت با یک نور لیزر cw خوانده و تبدیل فوریه به صورت مکانی انجام می‌شود. بنابراین، همبستگی زمانی پالس‌های ورودی به صورت مکانی در صفحه خروجی پخش می‌شود. شکل (۶.۱۱) نتیجه تجربی اندازه‌گیری خودبستگی یک پالس دوقلو را نشان می‌دهد. محور افقی تاخیر زمانی است که به صورت تغییر مکانی نشان داده شده است.



شکل ۶.۱۱: خودبستگی پالس‌های دوقلو با (الف) $1/53 - ps$ ، (ب) $1/38 - ps$ و (ج) $1/02 - ps$ فاصله اندازی شده، که با JCT مکانی-زمانی اندازه‌گیری می‌شوند. می‌توانیم تأیید کنیم که قله‌های همبستگی با جداسازی پالس‌های ورودی تغییر می‌کنند.

شبیه معادله (۲۳.۱۱) در بخش ۲.۱۱، موج پراکنده شده از توری بصورت زیر نوشته

می‌شود

$$\tilde{a}'(x, \omega) = b' \exp(-jk\beta\omega x) \tilde{a}(\alpha x, \omega) \quad (31.11)$$

برای بهدست آوردن عبارت زمانی، تبدیل فوريه زمانی معادله (31.11) می‌دهد

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{a}'(x, \omega) \exp(-j\omega t) d\omega \\ &= b' a(\alpha x, t + k\beta x) = b' s(\alpha x) \cdot t(t + k\beta x) \end{aligned} \quad (32.11)$$

که در آن $s(x)$ و $t(t)$ به ترتیب مولفه مکانی و زمانی $a(\alpha x, t + k\beta x)$ را نشان می‌دهند. تبدیل فوريه مکانی این سیگنال خواهد بود

$$a_H(\chi) \propto S\left(\frac{\chi}{\alpha}\right) * T\left(\frac{\chi}{k\beta}\right) \quad (33.11)$$

که در آن $S(\chi)$ و $T(\chi)$ به ترتیب نشان دهنده طیف فوريه $s(x)$ و $t(t)$ هستند. اندازه $s(x)$ با گسترش پرتو پراش از توری تعیین می‌شود. اگر اندازه $s(x)$ به اندازه کافی بزرگ باشد، $S(\chi)$ را می‌توان به صورت تابع دلتا در نظر گرفت. در این صورت داریم:

$$a_H(\chi) \propto T\left(\frac{\chi}{k\beta}\right) \quad (34.11)$$

این بدان معنی است که تبدیل فوريه شکل زمانی پالس‌های فوق کوتاه به صورت یک توزیع مکانی بهدست می‌آید. شرطی که تبدیل فوريه شکل زمانی پالس‌های نور به صورت مکانی بهدست می‌آید با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{\alpha D} \ll \frac{1}{cT} \quad (35.11)$$

که در آن قطر پرتو نور به گریتینگ و عرض پالس، پالس‌های فوق کوتاه به ترتیب با D و T نشان داده می‌شود. وقتی عرض طیف $\Delta\nu$ به اندازه کافی گسترده باشد، وسعت $S(\chi)$ به اندازه کافی کوچکتر از گستره $T(\chi)$ می‌شود و از آنجایی که $\Delta\nu = 1/T$ ،

$$\frac{1}{\alpha D} \ll \frac{\Delta\nu}{c} \quad (36.11)$$

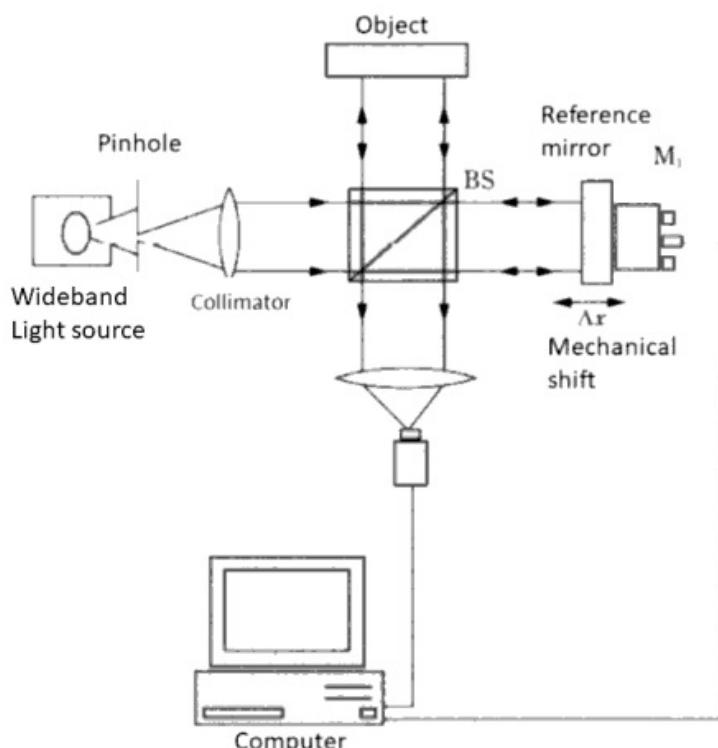
که شرط لازم برای بهدست آوردن تبدیل فوريه شکل زمانی پالس‌های نور است.

۴.۱۱ توموگرافی همدوس نوری

در OCT^۳، یک تداخل سنج نور سفید برای رمزگذاری اطلاعات ژرف یک جسم استفاده می‌شود. اگر جسم دارای ساختار لایه‌ای باشد، دامنه مختلط زمانی موج منعکس شده توسط ساختار لایه‌ای مدوله می‌شود. هنگامی که اطلاعات چند لایه میکرومتری روی پرتو منعکس شده کدگذاری می‌شود، شکل زمانی به سرعت تغییر می‌کند، زیرا برای مثال،

^۳Optical Coherence Tomography (OCT)

عمق یک میکرومتر در 6.6 fs کدگذاری می‌شود، و علاوه بر این، هنگامی که از منبع نور باند پهن cw استفاده می‌کنیم، اطلاعات عمق در فاز نور، نه شدت کدگذاری می‌شود. این بدان معنی است که شکل عمق یک جسم مستقيمهً اندازه‌گیری نمی‌شود حتی اگر یک آشکارساز نوری دارای سرعت پاسخ کافی بالا باشد.



شکل ۷.۱۱: تداخل سنج باند عریض

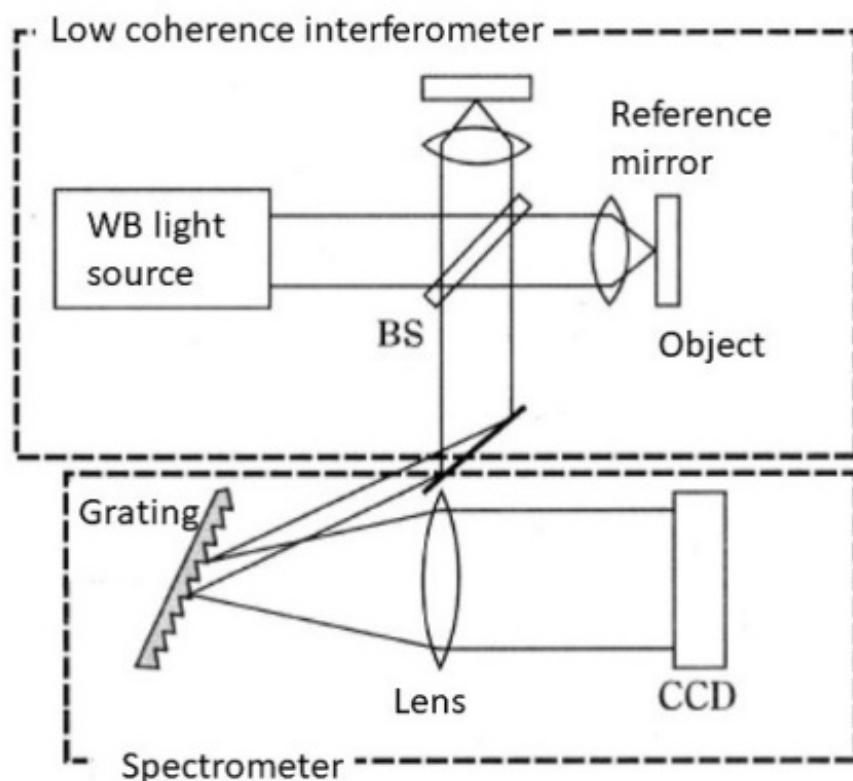
همانطور که در شکل (۷.۱۱) نشان داده شده است، برای تشخیص سیگنال سریع با یک آشکارساز کند و برای اندازه‌گیری تغییر فاز نامرئی، از تداخل سنج پهنانی باند استفاده می‌شود. یک پرتو منعکس شده از آینه مرجع M_r و پرتو جسم از یک ساختار لایه‌ای برای بهدست آوردن حاشیه‌های تداخلی روی هم قرار می‌گیرند. از آنجایی که منبع نور تک رنگ نیست، حاشیه‌های تداخل تنها در مواردی مشاهده می‌شوند که اختلاف مسیر نوری Δx ، همانطور که در شکل (۸.۱۱) نشان داده شده، صفر باشد. به چنین حاشیه‌هایی موضعی، حاشیه‌های نور سفید می‌گویند. در این چیدمان نوری، با جابجایی موقعیت آینه مرجع و تشخیص موقعیت اوج حاشیه‌های نور سفید، می‌توان ساختار لایه‌ای جسم را اندازه‌گیری کرد. این روش OCT نام دارد.

در OCT پیشرفته به نام توموگرافی همدوس نوری دامنه فوریه (FDOCT)^۴، روش مکانیکی آینه مرجع ضروری نیست^[۴]. همانطور که در شکل (۹.۱۱) نشان داده شده

^۴Fourier Domain Optical Coherence Tomography

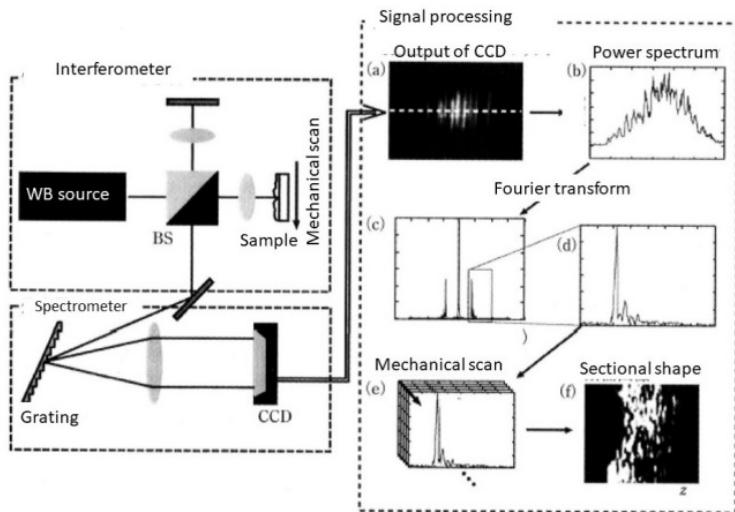


شکل ۸.۱۱: حاشیه نور سفید



شکل ۹.۱۱: تداخل سنج مکانی

است، در نظر بگیرید که خروجی پرتو تداخلی با یک زوج عدسی و توری و طیف مکانی بدست آمده با یک CCD تشخیص داده می‌شود.



شکل ۱۰.۱۱: تداخل سنج باند عریض

سیگنال شناسایی شده به صورت عددی تبدیل فوریه گرفته می‌شود تا ساختار لایه‌ای جسم بدست آید. از معادله (۳۴.۱۱)، توزیع مکانی سیگنال زمانی بدست آمده در صفحه کانونی عدسی $T(\chi/k\beta)$ است. از آنجایی که فرکانس χ با معادله (۱۸.۱۱) داده می‌شود، داریم

$$\frac{\chi}{k\beta} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (۳۷.۱۱)$$

این بدان معناست که $T(\chi/k\beta)$ را می‌توان $T(\omega)$ در نظر گرفت. بنابراین، طیف توان شناسایی شده با CCD خواهد بود:

$$\begin{aligned} I(\omega) &= |T_s(\omega) + T_r(\omega)|^2 \\ &= |T_s(\omega)|^2 + |T_r(\omega)|^2 + T_s(\omega)T_r^*(\omega) + T_s^*(\omega)T_r(\omega) \end{aligned} \quad (۳۸.۱۱)$$

که در آن طیف جسم و طیف پرتو مرجع به ترتیب با $T_s(\omega)$ و $T_r(\omega)$ نشان داده می‌شوند. تبدیل فوریه عددی طیف توان $I(\omega)$ خواهد بود

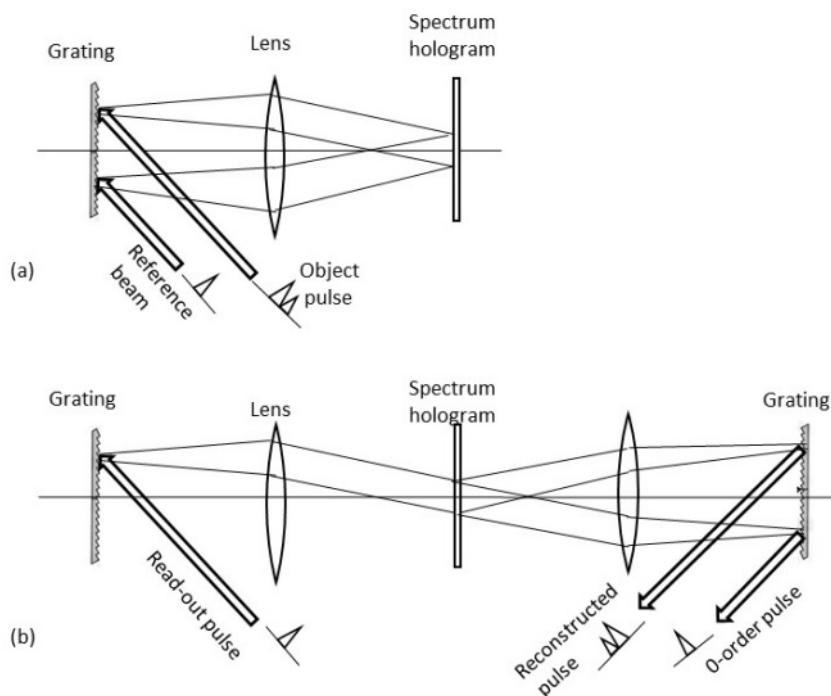
$$\mathcal{F}[I(\omega)] = T_s(t) * T_s^*(t) + T_r(t) * T_r^*(t) + T_s(t) * T_r^*(t) + T_s^*(t) * T_r(t) \quad (۳۹.۱۱)$$

عبارت سوم و چهارم به ترتیب همبستگی بین جسم و پرتوهای مرجع و مزدوخ مختلط آن است و شامل اطلاعات عمق یا ساختار لایه‌ای Δx جسم است. شکل (۱۰.۱۱) پردازش این روش را خلاصه می‌کند. (الف): شدت طیف شناسایی شده توسط CCD، (ب): طیف توان مربوط به معادله (۳۸.۱۱)، (ج): شدت تبدیل فوریه آن، (د): ساختار عمقی مربوط

به جمله سوم در معادله (۳۹.۱۱)، (۵): ساختارهای عمقی به دست آمده با روش مکانیکی نمونه و (و): شکل مقطع نهایی نمونه، که با ساختارهای عمقی (ز) سنتز شده است.

۵.۱۱ هولوگرافی طیفی

در تداخل سنجی طیفی، همانطور که در شکل (۹.۱۱) نشان داده شده، طیفهای جسم و پرتوهای مرجع به صورت برخط روی هم قرار می‌گیرند و تداخل دارند. روش برهم نهی خارج از محور جسم و طیف مرجع، هولوگرافی طیفی است [۴]. سیستم نوری هولوگرافی طیفی در شکل (۱۱.۱۱) نشان داده شده است. با اشاره به معادله (۳۸.۱۱)، شدت آشکارسازی شده در صفحه هولوگرام نشان داده شده است



شکل ۱۱.۱۱: سیستم نوری برای هولوگرافی طیفی؛ (الف) ثبت و ضبط (ب) بازسازی

$$\begin{aligned} I(\omega) &= |T_{\circ}(\omega) \exp(-jk_{\circ}r) + T_r(\omega) \exp(-jk_rr)|^2 \\ &= |T_{\circ}(\omega)|^{\circ} + |T_r(\omega)|^r + T_{\circ}(\omega)T_r^*(\omega) \exp[-j(k_{\circ} - k_r)r] \\ &\quad + T_r^*(\omega)T_{\circ}(\omega) \exp[j(k_{\circ} - k_r)r] \end{aligned} \quad (۴۰.۱۱)$$

که در آن r یک بردار موقعیت است و k_{\circ} و k_r بردارهای عدد موج جسم و امواج مرجع را نشان می‌دهند که به سمت انتشار موج هدایت می‌شوند. اگر شدت $I(\omega)$ متناسب با گذرش

^۴Transmittance

دامنه هولوگرام باشد، موج بازسازی شده با استفاده از پرتو خواندن ($T_{read}(\omega) \exp(-jk_{read}r)$) می‌دهد

$$\begin{aligned} T_{out}(\omega) &= I(\omega)T_{read}(\omega) \exp(-jk_{read}r) \\ &= |T_r(\omega)|^2 + |T_r(\omega)|^2 T_{read}(\omega) \exp(-jk_{read}r) \\ &\quad + T_r(\omega)T_r^*(\omega)T_{read}(\omega) \exp[-j(k_r - k_{read})r] \\ &\quad + T_r^*(\omega)T_r(\omega)T_{read}(\omega) \exp[j(k_r - k_{read})r] \end{aligned} \quad (41.11)$$

اگر $k_r = k_{read}$ و $T_r(\omega)$ در مقایسه با $T_{read}(\omega)$ دارای طیف‌هایی با پهنه‌ای کافی و مسطح باشند، جمله دوم و سوم در معادله (41.11) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$T_r(\omega) \exp[-jk_r r] + T_r(\omega) \exp[j(k_r - 2k_r)r] \quad (42.11)$$

و تبدیل فوریه زمانی آن با سیستم نوری نشان داده شده در شکل (11.11)(ب) خواهد بود:

$$T_{out}(t) \approx T_r(t) \exp[-jk_r r] + T_r(-t) \exp[j(k_r - 2k_r)r] \quad (43.11)$$

جمله اول پالس اصلی بازسازی شده و جمله دوم پالس وارونگی زمانی آن است. اگر $T_r(\omega)$ در مقایسه با $T_{read}(\omega)$ دارای طیف وسیع و مسطح کافی باشد، تیر بازسازی شده شامل

$$T_r(\omega)T_{read}(\omega) \exp[-jk_r r] + T_r^*(\omega)T_{read}(\omega) \exp[j(k_r - 2k_r)r]$$

و تبدیل فوریه زمانی آن همبستگی زمانی ($T_r(t) * T_{read}(t)$) را به دست می‌دهد، که توسط آن فیلتر زمانی مناسب برای پالس‌های نوری محقق می‌شود.

سیستم نوری نشان داده شده در شکل (9.11) در بسیاری از اندازه‌گیری‌ها برای پالس‌های فوق کوتاه استفاده می‌شود. تبدیل فوریه مکانی معادله (42.11) شکل موج زمانی ($T_r(t)$) را به عنوان شکل موج مکانی می‌دهد. شدت هولوگرام معادله (40.11) برای اندازه‌گیری فاز طیف استفاده می‌شود [۴۰].

اگر فازهای جسم و پرتوهای مرجع به ترتیب با $\phi_r(\omega)$ و $\phi_0(\omega)$ نشان داده شوند، معادله (40.11) بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$I(\omega) = |T_r(\omega)|^2 + |T_r(\omega)|^2 + 2|T_r(\omega)||T_r(\omega)| \cos[\phi_0(\omega) - \phi_r(\omega) + (k_r - k_r)r] \quad (44.11)$$

اگر فاز طیف مرجع مشخص باشد، فاز جسم ($\phi_0(\omega)$) را می‌توان تخمین زد [۴۱].

كتاب نامه

- [1] Martinez, O. E. 1986. Grating and prism compressors in the case of finite beam size. *J. Opt. Soc. Amer.* B3: 929.
- [2] Danailov, M. B. and Christov, I. P. 1989. Time-space shaping of light pulses by Fourier optical processing. *J. Mod. Opt.* 36: 725.
- [3] Yasuno, Y., Suto, Y., Yoshikawa, N., Itoh, M., Komori, K., Watanabe, M. and Yatagai, T. 2000. Time-space Conversion of Femtosecond light Pulse by Spatio-temporal Joint Transform Correlator. *Opt. Commun.* 177: 135.
- [4] Yasuno, Y., Nakamura, M., Suto, Y., Itoh, M. and Yatagai, T. 2000. Optical coherence tomography by spectral interferometric joint transform correlator. *Opt. Commun.* 186:51.
- [5] Weiner, A. M., Leaird, D. E., Reize, D. H. and Paek, E. G. 1992. Femtosecond spectral holography. *IEEE J. Quantum. Electron.* 28: 2251.
- [6] Nuss, M. C., Li, M., Chiu, T. H., Weiner, A. M. and Partov, A. 1994. Time-to-space mapping of femtosecond pulses. *Opt. Lett.* 19: 664.
- [7] Meshulach, D., Yelin, D. and Silberberg, Y. 1997. Real-time spatial-spectral interference measurements of ultrashort optical pulses. *J. Opt. Soc. Amer.* B14: 2095.

فصل ۱۲

تابع توزیع ویگنر

تحلیل تبدیل فوریه می‌تواند رابطه بین یک دامنه سیگنال واقعی و دامنه طیفی آن را توصیف کند. تابع توزیع ویگنر (WDF)^۱ یک تابع دو بعدی است که می‌تواند سیگنال را با هم در حوزه‌های حقیقی و فرکانس نشان دهد. تصویر آن به محور حقیقی یا فرکانس قدرت را در دامنه طیفی یا حقیقی می‌دهد. WDF می‌تواند برخی از توابع نوری مانند اثر عدسی، مدولاسیون فاز، توری پراش، انتشار موج و غیره را توصیف کند. کاربردهای آن برای پردازش سیگنال نوری ارائه شده است. WDF چهار بعدی در سیگنال مکان-زمان نیز معرفی شده است.

۱.۱۲ WDF برای سیگنال مکانی

۱.۱.۱۲ تعاریف و خواص آنها

تابع توزیع ویگنر (WDF) برای نشان دادن مقادیر فیزیکی مزدوج با رابطه عدم قطعیت، مانند موقعیت و تکانه در مکانیک کوانتمویی تعریف شده است. در این فصل، موقعیت مکانی x و فرکانس مکانی ν را در نظر می‌گیریم. WDF یک سیگنال حقیقی (x) به صورت زیر تعریف می‌شود [۱، ۲].

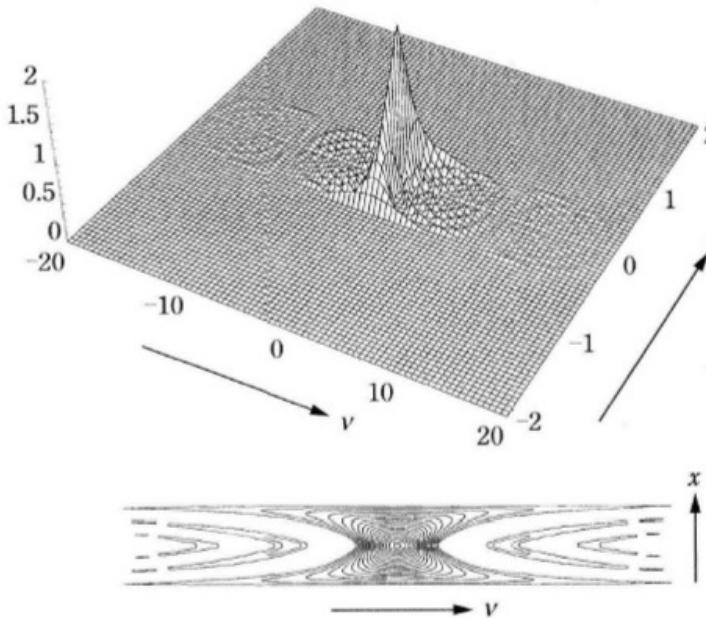
$$W_f(x, \nu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{x'}{2}\right) f^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) \exp(j2\pi x' \nu) dx' \quad (1.12)$$

که تابع توزیع ویگنر (WDF) نیز بصورت زیر تعریف می‌شود

$$W_f(x, \nu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\nu + \frac{\nu'}{2}\right) F^*\left(\nu - \frac{\nu'}{2}\right) \exp(-j2\pi x \nu') d\nu' \quad (2.12)$$

به دلیل خاصیت متقارن در حوزه مکان و فرکانس، که در آن $F(n)$ تبدیل فوریه $f(x)$ است.

^۱ Wigner distribution function (WDF)

شکل ۱.۱۲: توابع توزیع ویگنر $f(x) = \text{rect}(x)$

به طور کلی، WDF توزیع انرژی را در دامنه حقیقی و دامنه فرکانس سیگنال $f(x)$ می‌دهد. زیرا واضح است که دارای خواص زیر است

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, \nu) d\nu = |f(x)|^2 \quad (3.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, \nu) dx = |F(\nu)|^2 \quad (4.12)$$

$$\text{انرژی کل} = \iint_{-\infty}^{\infty} W_f(x, \nu) dx d\nu = \int |f(x)|^2 dx = \int |F(\nu)|^2 d\nu \quad (5.12)$$

توابع توزیع ویگنرهای برخی از سیگنال‌های رایج در جدول (۱.۱۲) آورده شده است. شکل (۱.۱۲) توابع توزیع ویگنر $f(x) = \text{rect}(x)$ را برای مثال نشان می‌دهد. برای بهدست آوردن تابع اصلی $f(x)$ از WDF آن، در ابتداء، داریم

$$f\left(x + \frac{x'}{2}\right) f^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} W_f(x, \nu) \exp(-j2\pi x' \nu) d\nu \quad (6.12)$$

با تبدیل فوریه معکوس معادله (۱.۱۲)، لازم به ذکر است که یک WDF دو بعدی داده شده همیشه نمی‌تواند مانند معادله (۶.۱۲) تجزیه شود. اگر یک تابع دو بعدی به عنوان $W_f(x, \nu)$ شناخته شود، رابطه زیر معتبر است

$$f(x) = \frac{1}{f^*(\circ)} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(x/2, \nu) \exp(-j2\pi x \nu) d\nu \quad (7.12)$$

جدول ۱.۱۲: توابع توزیع ویگنر سیگنال‌های معمولی

$f(x)$	$W_f(x, \nu)$
$\exp(-j2\pi x\nu_0)$	$\delta(\nu - \nu_0)$
$\delta(x - x_0)$	$\delta(x - x_0)$
$v(t) \exp(-j2\pi\nu t)$	$jv(t) \exp(j2\pi\nu t)$
$\exp[-j\pi[\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma]]$	$\delta(\nu - \alpha x - \beta)$
$v(t) \sin(2\pi\nu t)$	$-v(t) \cos(2\pi\nu t)$
$\text{rect}(x)$	$\frac{1}{2}[-2 x] \text{rect}(x) \text{sinc}[2(1 - 2 x)\nu]$

جدول (۲.۱۲) برخی از ویژگی‌های مهم WDF‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۲.۱۲: خواص توابع توزیع ویگنر

$W_f^*(x, \nu) = W_f(x, \nu)$	تابع حقیقی است WDF
$WDF \text{ of } f(x - x_0)$	$W_f(x - x_0, \nu)$
$\delta(x - x_0)$	$\delta(x - x_0)$
$WDF \text{ of } f(x) \exp(-j2\pi\nu x)$	$W_f(x, \nu - \nu_0)$
$WDF \text{ of } f_L(x) * f_R(x)$	$\int W_{f_L}(x - x', \nu) W_{f_R}(x', \nu) dx'$
$WDF \text{ of } f_L(x) \cdot f_R(x)$	$\int W_{f_L}(x, \nu - \nu') W_{f_R}(x, \nu) d\nu'$
$WDF \text{ of } F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$	$W_F(x, \nu) = W_f(-\nu, x)$

۲.۱.۱۲ تابع توزیع ویگنر در سیستم نوری

اثر عدسی‌ها

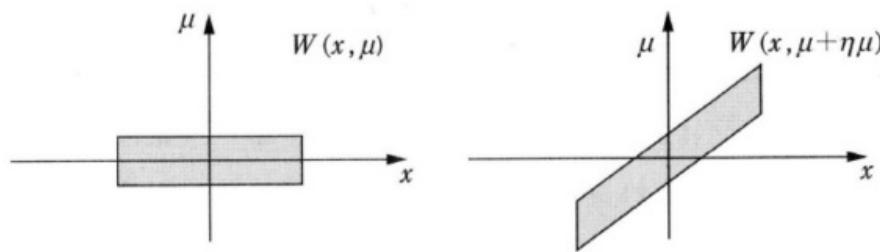
موج f_L پس از عبور از عدسی که فاصله کانونی آن a است،

$$f_L(x) = f_0(x) \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda l_F} x^2\right) \quad (8.12)$$

با توجه به معادله (۱۳.۶)، که در آن $f_0(x)$ یک موج ورودی است، به دست می‌آید. مشابه معادله (۱۹.۶) و (۳۶.۶)، با معرفی مختصات μ در صفحه فوریه، داریم

$$\nu = \frac{\mu}{\lambda l} \quad (9.12)$$

که در آن a ثابتی با طول مناسب یا فاصله کانونی را نشان می‌دهد و $l = l_F \eta$ با ثابت η



شکل ۲.۱۲: تغییر WDF بعداز عدسی

است. معادله (۸.۱۲) خواهد بود

$$\begin{aligned} W_{f_L}(x, \mu) &= \int f_L\left(x + \frac{x'}{\lambda}\right) f_L^*\left(x - \frac{x'}{\lambda}\right) \exp\left(j2\pi \frac{\mu x'}{\lambda l}\right) dx' \\ &= \int f_\circ\left(x + \frac{x'}{\lambda}\right) f_\circ^*\left(x - \frac{x'}{\lambda}\right) \exp\left[j2\pi \frac{x'}{\lambda l}(\mu + \eta x)\right] dx' \\ &= W_{f_\circ}(x, \mu + \eta x) \end{aligned} \quad (10.12)$$

این بدان معناست که اثر عدسی WDF را در جهت μ ، همانطور که در شکل (۲.۱۲) نشان داده شده، تغییر می‌دهد، و متناسب با مقدار x است.

انتشار مکانی

هنگامی که موج $f(x)$ در فاصله $z = \xi$ منتشر می‌شود، مطابق معادله (۲.۶)، داریم

$$u(x) = f(x) * \exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda z}x^2\right) \quad (11.12)$$

با تبدیل فوریه گرفتن از معادله (۱۱.۱۲) و استفاده از معادله (۹.۱۲)، داریم

$$U(\mu) = F(\mu) \exp\left(j\pi \frac{\xi}{\lambda l} \mu^2\right) \quad (12.12)$$

تابع توزیع ویگنر معادله (۱۲.۱۲) می‌دهد

$$\begin{aligned} W_U(x, \mu) &= \int U\left(\mu + \frac{\mu'}{\lambda}\right) U^*\left(\mu - \frac{\mu'}{\lambda}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{x}{\lambda l} \mu'\right) d\mu' \\ &= \int F\left(\mu + \frac{\mu'}{\lambda}\right) F^*\left(\mu - \frac{\mu'}{\lambda}\right) \exp\left[-j2\pi(x - \xi\mu) \frac{\mu'}{\lambda l}\right] d\mu' \\ &= \int f_\circ\left(x + \frac{x'}{\lambda}\right) f_\circ^*\left(x - \frac{x'}{\lambda}\right) \exp\left[j2\pi(\mu - \xi x) \frac{x'}{\lambda l}\right] dx' \\ &= W_{f_\circ}(x - \xi\mu, \mu) \end{aligned} \quad (13.12)$$

۲.۱۲ تابع توزیع ویگنر برای سیگنال زمانی-مکانی

۱.۲.۱۲ بسط به سیگنال‌های مکانی-زمانی

در بخش ۱.۱۲ یک WDF دو متغیره برای حوزه مکانی x و دامنه فرکانس آن ν تعریف شد. پسوند یک تابع چهار متغیری را برای حوزه مکانی x و حوزه فرکانس آن η و حوزه زمانی t و فرکانس زاویه‌ای آن ω [۳] در نظر بگیرید. برای میدان الکتریکی $E(x, t)$ ، تبدیل فوریه آن در حوزه زمان $\tilde{E}(x, \omega)$ و تبدیل فوریه آن در حوزه مکان $\hat{E}(\xi, t)$ به صورت تعریف شده است.

$$\tilde{E}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, t) \exp(-j\omega t) dt \quad (۱۴.۱۲)$$

۶

$$\hat{E}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, t) \exp(j\xi x) dx \quad (۱۵.۱۲)$$

که در آن ω و ξ به ترتیب بیانگر فرکانس در حوزه زمان و در حوزه مکان هستند. علاوه بر این، تبدیل فوریه دو بعدی در حوزه مکان و زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\tilde{E}}(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, t) \exp[j(\xi x - \omega t)] dx dt \quad (۱۶.۱۲)$$

تابع توزیع ویگنر مکانی-زمانی چنین تعریف می‌شود:

$$W^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E\left(x + \frac{x'}{2}, t + \frac{t'}{2}\right) \cdot E^*\left(x - \frac{x'}{2}, t - \frac{t'}{2}\right) \exp[-j(-\xi x' + \omega t')] dx' dt' \quad (۱۷.۱۲)$$

تابع توزیع ویگنر مکانی-زمانی یک تابع حقیقی و انواع تعاریف برای متغیرهای ω, ξ, t, x خواهد بود

$$W^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}\left(x + \frac{x'}{2}, \omega + \frac{\omega'}{2}\right) \cdot \tilde{E}^*\left(x - \frac{x'}{2}, \omega - \frac{\omega'}{2}\right) \exp[-j(-\xi x' - \omega t')] dx' d\omega' \quad (۱۸.۱۲)$$

$$W^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{E}\left(\xi + \frac{\xi'}{2}, t + \frac{t'}{2}\right) \cdot \hat{E}^*\left(\xi - \frac{\xi'}{2}, t - \frac{t'}{2}\right) \exp[-j(\xi' x + \omega t')] d\xi' dt' \quad (۱۹.۱۲)$$

$$W^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{E}}\left(\xi + \frac{\xi'}{2}, \omega + \frac{\omega'}{2}\right) \cdot \hat{\tilde{E}}^*\left(\xi - \frac{\xi'}{2}, \omega - \frac{\omega'}{2}\right) \exp[-j(\xi' x + \omega' t')] d\xi' d\omega' \quad (۲۰.۱۲)$$

توابع توزیع ویگنر مکانی $W^T(x, t, \omega)$ و $W^S(x, \xi, \omega)$ و تابع توزیع ویگنر زمانی $W^{ST}(x, \xi, t, \omega)$ از توابع توزیع ویگنر مکانی-زمانی $W^T(\xi, t, \omega)$ بدست می‌آید

$$W^S(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) d\omega \quad (21.12)$$

$$W^S(x, \xi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) dt \quad (22.12)$$

$$W^T(x, t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) d\xi \quad (23.12)$$

$$W^T(\xi, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) dx \quad (24.12)$$

مشابه معادله (۳.۱۲) و (۴.۱۲)، انتگرال‌گیری WDF مکانی-زمانی توسط دو متغیر دلخواه، توزیع انرژی را برای متغیرهای دیگر می‌دهد.

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) d\xi d\omega = |E(x, t)|^r \quad (25.12)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) d\xi dt = |\tilde{E}(x, \omega)|^r \quad (26.12)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^r} \iint_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) dx d\omega = |E(\xi, t)|^r \quad (27.12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) dt d\omega = |\hat{E}(\xi, \omega)|^r \quad (28.12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) dt d\omega = \int W^S(x, \xi, t) dt \quad (29.12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) dx d\xi = \int W^T(\xi, t, \omega) d\xi \quad (30.12)$$

در نهایت، انتگرال‌گیری WDF مکانی-زمانی توسط هر چهار متغیر، انرژی کل را بهما می‌دهد.

$$\frac{1}{(2\pi)^r} \iint_{-\infty}^{\infty} W^{ST}(x, \xi, t, \omega) dx d\xi dt d\omega = Eng. \quad (31.12)$$

۲.۲.۱۲ اثر عدسی در WDF مکانی-زمانی

بدلیل تغییر مولفه مکانی WDF بعداز عبور از یک عدسی با رابطه (۱۰.۱۲) داده می‌شود،
WDF مکانی-زمانی با رابطه زیر نمایش داده می‌شود [۴]

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = W_{in}^{ST}\left(x, \xi + \frac{k_{\circ}}{f}, t, \omega\right) \quad (32.12)$$

که در آن f و k_{\circ} به ترتیب فاصله کانونی عدسی و عدد موج برای طول موج مرکزی است،
و

$$\xi = 2\pi\nu \quad (33.12)$$

به طور کلی، نحوه تغییر WDF با مدولاسیون فاز را در نظر بگیرید. پس از عبور از یک
عدسی، فاز موج مدوله

$$E_{out}(x, t) = E_{in}(x, t) \exp\left(j \frac{k_{\circ}}{2f} x^{\star}\right) \quad (34.12)$$

بر طبق رابطه (۳۴.۱۲) خواهد بود. اگر مدولاسیون فاز بصورت زیر داده شود،

$$\Phi(x, \xi, t, \omega) = -\frac{k_{\circ}}{2f} x^{\star} \quad (35.12)$$

در این صورت با جایگزینی معادله (۳۴.۱۲) و (۳۵.۱۲) در معادله (۱۶.۱۲)، خواهیم داشت

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_{in}\left(x + \frac{x'}{2}, t + \frac{t'}{2}\right) E^*\left(x - \frac{x'}{2}, t - \frac{t'}{2}\right) \times \exp\left\{-j\left[\Phi\left(x + \frac{x'}{2}\right) - \Phi\left(x - \frac{x'}{2}\right)\right]\right\} \exp[-j(-\xi x' + \omega t')] dx' dt' \quad (36.12)$$

با بسط $\Phi(x)$ داریم

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_{in}\left(x + \frac{x'}{2}, t + \frac{t'}{2}\right) E^*\left(x - \frac{x'}{2}, t - \frac{t'}{2}\right) \times \exp\{j[\xi - \Phi'(x)]x'\} \exp[j\omega t'] dx' dt' \quad (37.12)$$

سرانجام، داریم

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = W_{in}^{ST}\left[x, \xi - \frac{\partial \Phi(x, \xi, t, \omega)}{\partial x}, t, \omega\right] \quad (38.12)$$

با مدولاسیون فاز مکانی، فرکانس مکانی WDF همانطور که با معادله (۳۸.۱۲) توضیح
داده شده تغییر می‌کند. مدولاسیون فاز یک عدسی توسط متوسط WDF (۳۵.۱۲) را
به صورت زیر تغییر می‌دهد

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = W_{in}^{ST}\left(x, \xi + \frac{k_{\circ}}{f}, t, \omega\right) \quad (39.12)$$

در مورد مدولاسیون فاز زمانی، فرکانس به طور مشابه تغییر می‌کند.

۳.۲.۱۲ مدولاتور فاز زمانی (عدسی زمانی)

اگر موج ورودی $E_{in}(x, t)$ به صورت سینوزوئیدال در فاز مدوله شود، موج خروجی خواهد بود [۵، ۶].

$$E_{out}(x, t) = E_{in}(x, t) \exp(j\Phi_m \cos(\omega_m t)) \quad (40.12)$$

که در آن Φ و ω_m نمایشگر دامنه و فرکانس زاویه‌ای مدولاسیون فاز است. اگر زمان در نظر گرفته شده کوتاه‌تر از زمان مدولاسیون باشد، مدولاسیون سینوزوئیدال با جملاتی تا مرتبه دوم تقریب زده می‌شود و در این صورت داریم

$$E_{out}(x, t) = E_{in}(x, t) \exp \left[j\Phi_m \left(1 - \frac{\omega_m^2 t^2}{2} \right) \right] \quad (41.12)$$

چون این مدولاسیون فاز بصورت زیر داده می‌شود

$$\Phi(x, \xi, t, \omega) = -\Phi_m \left(1 - \frac{\omega_m^2 t^2}{2} \right) \quad (42.12)$$

و مشتق جزئی آن برابر است با

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_m \omega_m^2 t \quad (43.12)$$

سپس رابطه ورودی و خروجی WDF‌های مکانی-زمانی برای مدولاتور فاز زمانی خواهد بود

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = W_{in}^{ST}(x, \xi, t, \omega + \Phi_m \omega_m^2 t) \quad (44.12)$$

مقایسه با معادلات (۳۹.۱۲) و (۴۱.۱۲)، مدولاسیون فاز معادله (۴۱.۱۲) اثر عدسی را در حوزه زمانی اعمال می‌کند و سپس به آن عدسی زمان می‌گویند.

۴.۲.۱۲ انتشار و پاشندگی

در محیط پاشنده، پراش فرنل و پاشندگی زمان-فرکانس به طور همزمان ایجاد می‌شوند. موج پاراکسیال (موازی محور) پس از عبور از محیط پاشنده بصورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\hat{\hat{E}}(\xi, \omega, z) = \hat{\hat{E}}(\xi, \omega, 0) \exp[-jk(\omega)z] \exp \left[j \frac{\xi^2}{2k(\omega)} z \right] \quad (45.12)$$

که در آن $k(\omega)$ نشان دهنده ثابت انتشار با ضریب شکست $n(\omega)$ و $k(\omega) = \omega_n(\omega)/c$ است. اگر عرض فرکانس در مقایسه با فرکانس مرکزی ω_m به اندازه کافی کوچک باشد، تقریب زیر معتبر است:

$$k(\omega) = k_0 + k'_0 \omega + \frac{1}{2} k''_0 \omega^2 \quad (46.12)$$

که در آن k'_\circ و k''_\circ بترتیب مشتق اول و دوم $k(\omega)$ است. معادله (۴۵.۱۲) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\hat{\hat{E}}(\xi, \omega, z) = \hat{\hat{E}}(\xi, \omega, \circ) \exp \left[-j \left(k_\circ + k'_\circ \omega + \frac{1}{2} k''_\circ \omega^2 \right) z \right] \exp \left(j \frac{\xi}{2k_\circ} z \right) \quad (47.12)$$

این بدین معنی است که اثر انتشار و پاشندگی باعث مدولاسیون فاز در موج می‌شود.

$$\Phi(x, \xi, t, \omega) = k_\circ z + k'_\circ \omega z + \frac{1}{2} k''_\circ \omega^2 z - \frac{\xi^2 z}{2k_\circ} \quad (48.12)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۴۸.۱۲) خواهیم داشت

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{z}{k_\circ} \xi \quad (49.12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = k'_\circ z + k''_\circ z \omega \quad (50.12)$$

رابطه ورودی-خروجی WDF مکانی-زمانی در انتشار موج و پاشندگی محیط با رابطه زیر داده می‌شود

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = W_{in}^{ST}(x - \frac{z}{k_\circ} \xi, \xi, t - k'_\circ z - k''_\circ z \omega, \omega) \quad (51.12)$$

وقتی معادله (۵۱.۱۲) با معادله (۳۸.۱۲) مقایسه شود، باید توجه داشت که علامت ξ در اولین مولفه جمله سمت راست، مانند $x - z\xi/k_\circ$ است. این به‌این دلیل است که علامت‌های هسته‌های انتگرال فوریه در معادله‌ها (۱۶.۱۲) و (۲۰.۱۲) مخالف هستند. به‌همین دلیل، سمت راست در معادله (۴۴.۱۲) $\Phi_m \omega_m^2 t + \Phi_m \omega_m^2 \omega$ است.

۵.۲.۱۲ توری پراش

موج پس از پراش از یک گریتینگ با رابطه زیر داده می‌شود

$$E_{out}(x, t) = E_{in}(\alpha x, t - \beta x) \quad (52.12)$$

همانطور که در بخش ۱.۱۱ توصیف شد، در آنجا α و β ثابت هستند.

$$\alpha = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_d} \quad (53.12)$$

$$\beta = \frac{\gamma \pi p}{d \omega_\circ \cos \theta_d} \quad (54.12)$$

که در آن p مرتبه پراش توری است، $\cos \theta_d$ و $\cos \theta_i$ به ترتیب نشان دهنده زاویه تابش و زاویه پراش و d نمایشگر گام توری است. جایگزینی معادله (۵۲.۱۲) به معادله (۱۶.۱۲) و تبدیل فوریه مکانی-زمانی، داریم

$$\hat{\hat{E}}_{out}(\xi, \omega) = E_{in} \left(\frac{\xi}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \omega, \omega \right) \quad (55.12)$$

اثر توری در WDF مکانی-زمانی برابر است با:

$$W_{out}^{ST}(x, \xi, t, \omega) = \frac{1}{\alpha} W_{in}^{ST}(\alpha x, \frac{\xi}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \omega, t - \beta x, \omega) \quad (56.12)$$

۶.۲.۱۲ نمایش ماتریسی تبدیل WDF

بحث در مورد تبدیل WDF مکانی-زمانی نشان می‌دهد که تبدیل را می‌توان با تبدیل خطی متغیرها انجام داد. در اینجا یک بردار ورودی X_i و یک بردار خروجی X_0 با چهار عنصر (x, ξ, t, ω) و یک ماتریس M 4×4 معروفی می‌کنیم [۴]. سیستم ورودی-خروجی توسط WDF مکانی-زمانی چنین توصیف شده است

$$W_{out}^{ST}(X_0) = W_{in}^{ST}(M \cdot X_i) \quad (57.12)$$

که در آن m ثابت سیستم است. متغیرهای ورودی-خروجی بصورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$X_0 = M \cdot X_i = \begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \\ t_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{x\xi} & A_{xt} & A_{x\omega} \\ A_{\xi x} & A_{\xi\xi} & A_{\xi t} & A_{\xi\omega} \\ A_{tx} & A_{t\xi} & A_{tt} & A_{t\omega} \\ A_{\omega x} & A_{\omega\xi} & A_{\omega t} & A_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \xi_i \\ t_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (58.12)$$

اگر n سیستم به صورت سری متصل شوند، رابطه ورودی-خروجی WDF خواهد بود

$$W_{out}^{ST}(X_0) = m_n m_{n-1} \cdots m_1 W_{in}^{ST}(M_n \cdot M_{n-1} \cdots M_1 \cdot X_i) \quad (59.12)$$

(عدسی‌ها)

$$M_{lens} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_0/f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60.12)$$

که در آن k_0 نشان دهنده ثابت عدد موج است که برابر با $2\pi/\lambda$ و f نشان دهنده فاصله کانونی عدسی است.

مدولاسیون فاز زمانی (عدسی زمانی)

$$M_{pmod} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_m \omega_m^* & 1 \end{bmatrix} \quad (61.12)$$

که در آن Φ_m دامنه مدولاسیون فاز سینوسی برای اجرای یک عدسی زمانی و ω_m فرکانس زاویه‌ای آن را نشان می‌دهد.

انتشار و پاشندگی

$$\mathbf{M}_{prop} = \begin{bmatrix} 1 & -z/k_{\circ} & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & -k''_{\circ} z \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \quad (62.12)$$

که در آن z و k''_{\circ} به ترتیب نشان دهنده فاصله انتشار و مشق دوم (سرعت گروهی) هستند. $k(\omega)$

توری

$$\mathbf{M}_{grating} = \begin{bmatrix} \alpha & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1/\alpha & \circ & -\beta/\alpha \\ -\beta & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \quad (63.12)$$

که در آن $\alpha = \cos \theta_i / \cos \theta_d$ و $\beta = 2\pi p / (d\omega_{\circ} \cos \theta_d)$ مرتبه پراش، d گام توری، و ω_{\circ} فرکانس مرکزی نور را نشان می‌دهند. همانطور که در بالا توضیح داده شد، برای در نظر گرفتن یک سیستم کلی، حاصل ضرب ماتریس‌ها ماتریس کل سیستم را به ما می‌دهد. به عنوان مثال، سیستم تبدیل فوریه مکانی با یک سیستم $f - 2$ که شامل انتشار، عدسی و انتشار است، خواهد بود

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{prop} \mathbf{M}_{lens} \mathbf{M}_{prop} = \begin{bmatrix} \circ & -f/k_{\circ} & \circ & \circ \\ f/k_{\circ} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \quad (64.12)$$

که در آن $f = k''_{\circ}$ در نظر گرفته شده است. این بدان معنی است که سیستم رابطه بین x و ξ را مبادله می‌کند. اگر x و ξ در مختصات متعامد نشان داده شوند، تبدیل فوریه مکانی مطابق با چرخش 90° درجه‌ای سیستم مختصات است، همانطور که در بخش ۲.۱۳ توضیح داده شد.

ماتریس سیستم یک سیستم نوری طیف سنجی متشکل از یک زوج توری-عدسی خواهد بود

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{lens} \mathbf{M}_{prop} \mathbf{M}_{grating} = \begin{bmatrix} \alpha & -f/(\alpha k_0) & 0 & \beta f/(\alpha k_0) \\ \alpha k_0/f & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65.12)$$

کاربردهای این سیستم در بخش ۱.۱۱ مورد بحث قرار گرفته است.

كتاب نامه

- [1] Classen, T. A. C. M. and Mecklenbrauker, W. F. G. 1980. The Wigner distribution—a tool for time-frequency signal analysis. *Philips J. Res.* 35: 217–250, 276–300, 372–389.
- [2] Lohmann, A. W. and Soffer, B. H. 1994. Relationships between the Radon–Wigner and fractional Fourier transforms. *J. Opt. Soc. Amer. A*11: 1798.
- [3] Paye, J. and Migus, A. 1995. Space–time Wigner functions and their application to the analysis of a pulse shaper. *J. Opt. Soc. Amer. B*12: 1480.
- [4] Bastiaans, M. J. 1978. The Wigner distribution function applied to optical signals and systems. *Opt. Commun.* 25: 26.
- [5] Kolner, B. H. and Nazarathy, M. 1989. Temporal imaging with a time lens. *Opt. Lett.* 14: 630.
- [6] Godil, A. A., Auld, B. A. and Bloom, D. M. 1994. Picosecond time-lenses. *IEEE J. Quantum Electron.* 30: 827.

فصل ۱۳

تبدیل فوریه کسری

تعمیم تبدیل فوریه معمولی، تبدیل فوریه کسری نامیده می‌شود که توسط تابع توزیع ویگنر (WDF)^۱ تبدیل فوریه را می‌دهد. چرخش WDF را می‌توان با ترکیبی از جابجایی WDF انجام داد. بر اساس این عملیات جابجایی متواالی، سیستم‌های نوری که تبدیل فوریه کسری را انجام می‌دهند ارائه می‌شوند. برخی از کاربردهای محاسبات نوری، مانند فیلتر وینر^۲، همبستگی کننده نوری، فیلتر تطبیقی، و همبستگی کننده تبدیل فوریه مشترک ارائه شده‌اند. یک روش جداسازی سیگنال و نویز با استفاده از تبدیل فوریه کسری چندگانه مورد بحث قرار گرفته است.

۱.۱۳ تعریف تبدیل فوریه کسری

تبدیل فوریه سیگنال $f(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(j2\pi x\nu) dx \quad (1.13)$$

تابع توزیع و عکس تبدیل فوریه آن خواهد بود

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(-j2\pi x\nu) d\nu \quad (2.13)$$

با معرفی عملگر تبدیل فوریه \mathcal{F}^a ، تبدیل فوریه به صورت $a = 1$ و عکس تبدیل فوریه بازاء $a = -1$ نشان داده می‌شود، زیرا معادلات (۱.۱۳) و (۲.۱۳) معتبر است. در حالت $a = 0$ معتبر است. در حالت $a = 0$ داریم؛

$$\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}^1[f(x)]] = f(x) \quad (3.13)$$

^۱Wigner distribution function (WDF)

^۲Wiener filtering

که مربوط به عدم تبدیل است. در مورد $a = 25$

$$\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^1[\mathcal{F}^1[f(x)]] = f(-x) \quad (4.13)$$

به طور کلی، در مواردی که a عدد صحیح نباشد، تبدیل را تبدیل فوریه کسری می‌نامند [۱]. [۲]

۲.۱۳ برخی از نمایش‌های تبدیل فوریه کسری

مطابق جدول (۲.۱۲)، WDF تبدیل فوریه $F(\nu)$ یک سیگنال $f(x)$ خواهد بود

$$W_F(x, \nu) = \int F\left(x + \frac{x'}{2}\right) F^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) \exp(j2\pi x' \nu) dx' \quad (5.13)$$

$$W_F(x, \nu) = W_F(-\nu, x) \quad (5.13)$$

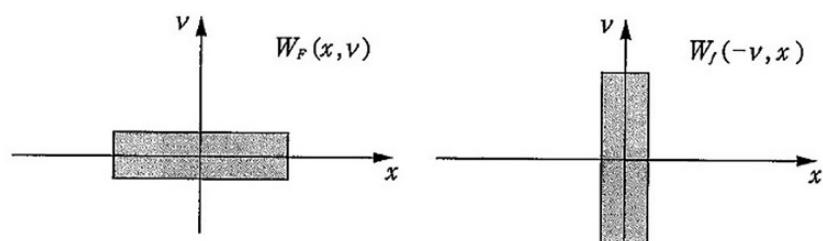
این بدان معنی است که تبدیل فوریه WDF خود را 90° در جهت عقربه ای ساعت، همانطور که در شکل (۱.۱۳) نشان داده شده، می‌چرخاند. به طور کلی، تبدیل فوریه کسری مرتبه a ، محور مختصات WDF خود را با زاویه ϕ می‌چرخاند.

$$\phi = \frac{\pi}{2}a \quad (7.13)$$

بنابراین، WDF تبدیل فوریه کسری مرتبه a بصورت زیر نشان داده می‌شود

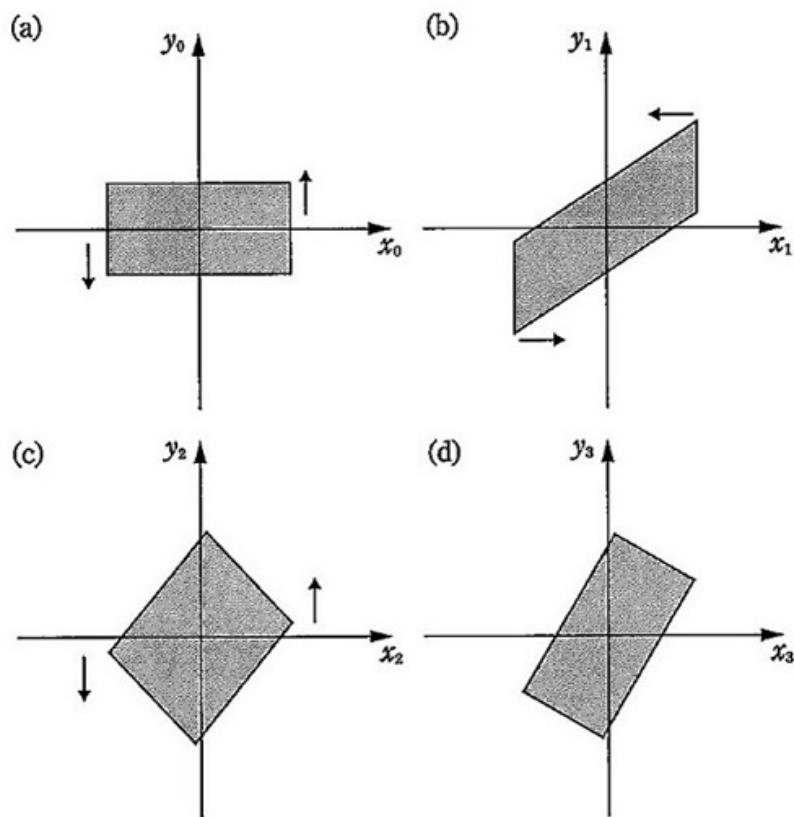
$$W_F^a(x, \nu) = W_f(x \cos \phi - \nu \sin \phi, x \sin \phi + \nu \cos \phi) \quad (8.13)$$

تبدیل فوریه کسری $\mathcal{F}^a[f(x)]$ با استفاده از معادلات (۷.۱۳) و (۸.۱۳) به دست می‌آید.



شکل ۱.۱۳: چرخش WDF با تبدیل فوریه

بعد، نشان می‌دهیم که چرخش WDF را می‌توان با ترکیبی از انتقال معادلات (۱۰.۱۲) و (۱۳.۱۲) انجام داد [۳]. مطابق شکل (۲.۱۳)، جابجایی‌های متواالی WDF به جهت y ، جهت x و جهت y انجام می‌شود. مختصات (x_0, y_0) یک نقطه به صورت متواالی زیر تبدیل می‌شوند.



شکل ۲.۱۳: چرخش WDF با انتقال

$$(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, y_0 + A_0) = (x_1, y_1) \quad (9.13)$$

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x_1 - By_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad (10.13)$$

$$(x_2, y_2) \rightarrow (x_2, y_2 + Cx_2) = (x_3, y_3) \quad (11.13)$$

بهمنی نحو، داریم

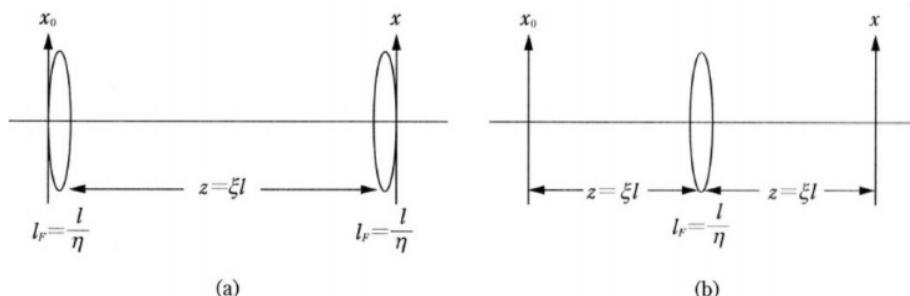
$$x_3 = x_0(1 - AB) - B_0 \quad (12.13)$$

$$y_3 = y_0(1 - BC) + x_0(A + C - ABC) \quad (13.13)$$

برای اینکه جابجایی‌های متواالی به چرخش ϕ درجه تبدیل شوند، لازم است که

$$B = \sin \phi, \quad A = C = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (14.13)$$

$$\xi = \sin \phi, \quad \eta = \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (15.13)$$



شکل ۳.۱۳: سیستم نویز پایی تیدیلی، فوریه کسری

این روش مربوط به عملیات اپتیکی زیر است، یعنی ابتدا عبور از عدسی با فاصله کانونی $l_F = l/\eta$ ، سپس انتشار با فاصله $l = z$ و دوباره عبور عدسی با فاصله کانونی $\eta = l/\eta$ سیستم نوری این عملیات در شکل (۳.۱۳)(الف) نشان داده شده است. این سیستم نوری است که تبدیل فوریه کسری مرتبه a یک سیگنال $(x_0)_u$ را اجرا می‌کند.

سپس، نمایش تبدیل فوریه کسری مرتبه a یک سیگنال $(u(x_0))_u$ را در نظر بگیرید. در ابتداء، جسم $(x_0)_u$ از عدسی با فاصله کانونی l/η ابتدا عبور می‌کند.

$$u_1(x_\circ) = u_\circ(x_\circ) \exp\left(j \frac{\pi \eta}{\lambda l} x_\circ^\gamma\right) \quad (16.13)$$

در این صورت، پراش فرنل در فاصله z ساخته می‌شود

$$u_{\Upsilon}(x_{\Upsilon}) = u_{\Upsilon}(x_{\Upsilon}) * \exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda\xi}x_{\Upsilon}\right) \quad (17.13)$$

نمايش طيف آن است.

$$\tilde{u}_\gamma(\nu_\gamma) = \tilde{u}_\lambda(\nu_\gamma) \exp(j\pi\lambda l\xi\nu_\gamma^\gamma) \quad (18.13)$$

که در آن

$$\tilde{u}_1(\nu_\gamma) = \int u_1(x_\gamma) \exp\left(j \frac{\gamma \pi}{\lambda l} x_\gamma \nu_\gamma\right) dx_\gamma \quad (19.13)$$

پس از عبور مجدد از عدسی با فاصله کانونی $l_F = l/\eta$

$$u_a(x) = u_{\gamma}(x) \exp \left(j \frac{\pi \eta}{\lambda l} x^{\gamma} \right) \quad (20.13)$$

در نهایت، معادلات (۱۶.۱۳)، (۱۷.۱۳) و (۲۰.۱۳) و تبدیل معادله (۱۵.۱۳)، تبدیل فوریه مرتبه a را می‌دهد

$$\begin{aligned} u_a(x) &= \mathcal{F}^a[u_\circ(x_\circ)] \\ &= \int u_\circ(x_\circ) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda l \tan \phi} (x_\circ^\dagger + x^\dagger) \right] \exp \left(j \frac{\gamma \pi}{\lambda l \sin \phi} x x_\circ \right) dx_\circ. \end{aligned} \quad (21.13)$$

چرخش WDF با انتقال نيز می‌تواند توسط انتقال‌های متوالی در جهت‌های $x-y$ و x انجام شود. در اين مورد،

$$\xi = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad \eta = \sin\phi \quad (22.13)$$

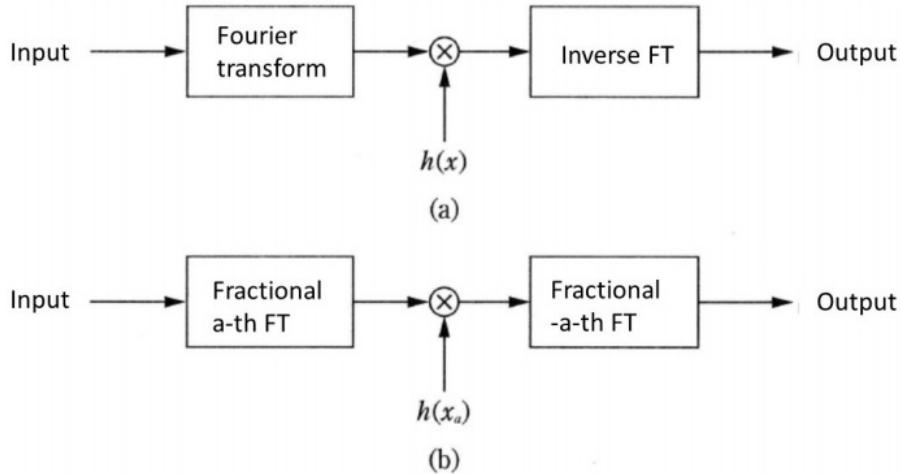
سيستم نوری مربوطه در شکل (۳.۱۳)(ب) نشان داده شده است.
با توجه به بحث بالا و الزامات رياضي، تبدل فوريه کسری مرتبه a ام تابع $f_a(x)$ برای تابع $f(x)$ دوباره به صورت زير تعریف شده است.

$$f_a(x) \equiv \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(x, x') f(x') dx' \quad (23.13)$$

كه در آن

$$K_a(x, x') = A_a \exp\left\{-j\pi[(\cot\phi)x' - 2(\csc\phi)xx' + (\cot\phi)x'^2]\right\} \quad (24.13)$$

$$A_a = \sqrt{1 + j \cot\phi} \quad (25.13)$$



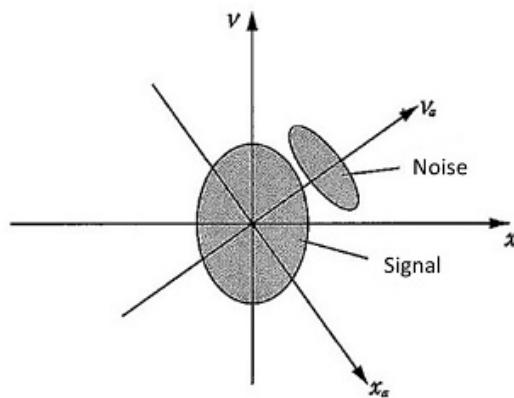
شكل ۴.۱۳: (الف) فیلتر کردن تبدیل فوریه و (ب) تبدیل فوریه کسری

۳.۱۳ کاربرد محاسبات نوری

۱.۳.۱۳ فیلتر وینر

همانطور که در بخش ۳.۸ ذکر شد، فیلتر وینر برای بازیابی تصویر تخریب شده با نویز افزودنی، که توسط معادله (۳۶.۸) شرح داده شده است، بهینه، و در شکل (۴.۱۳)(الف)

نشان داده شده است. فیلتر وینر برای نویز افزودنی WDF همانطور که در شکل (۵.۱۳) نشان داده شده است، همیشه موثر نیست، زیرا طیف توان سیگنال تخریب شده، که با تصویر WDF بر محور v ، معادله (۴.۱۲) داده می‌شود، و طیف قدرت سیگنال و نویز با هم همپوشانی دارند.



شکل ۵.۱۳: توزیع وینر سیگنال و نویز

برای کاهش سطح همپوشانی در حوزه طیفی، استفاده از تبدیل فوریه کسری با نظم مناسب موثر است [۴، ۵، ۶]. در WDF با محور x_a ، طیف‌های توانی که با تصویر کردن WDF بر محور x_a داده می‌شود، همپوشانی ندارند. این بدان معناست که با استفاده از یک ماسک مناسب، نویز به راحتی از بین می‌رود. روش فیلتر کردن با تبدیل فوریه کسری در شکل (۴.۱۳)(ب) نشان داده شده است. فیلتر بهینه آن مربوط به معادله (۳۶.۸) است که بصورت زیر داده می‌شود:

$$h(x_a) = \frac{\iint K_a(x_a, x) K_{-a}(x_a, x') \phi_{fg}(x, x') dx dx'}{\iint K_a(x_a, x) K_{-a}(x_a, x') \phi_{gg}(x, x') dx dx'} \quad (۲۶.۱۳)$$

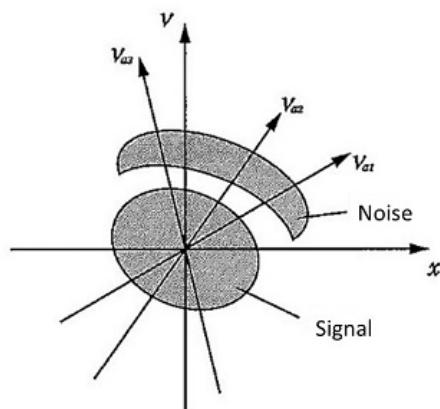
که در آن $K_a(x_a, x)$ با معادله (۲۴.۱۳) تعریف می‌شود، و $\phi_{fg}(x, x')$ و $\phi_{gg}(x, x')$ به ترتیب تابع همبستگی بین $f(x)$ و $g(x)$ و خودبستگی $g(x)$ را نشان می‌دهند.

برای سیگنال با نویز که در شکل (۶.۱۳) نشان داده شده، کاهش نویز را می‌توان با کاربردهای متعدد تبدیل فوریه کسری از دستورات مناسب و فیلتر وینر بهینه پی در پی انجام داد.

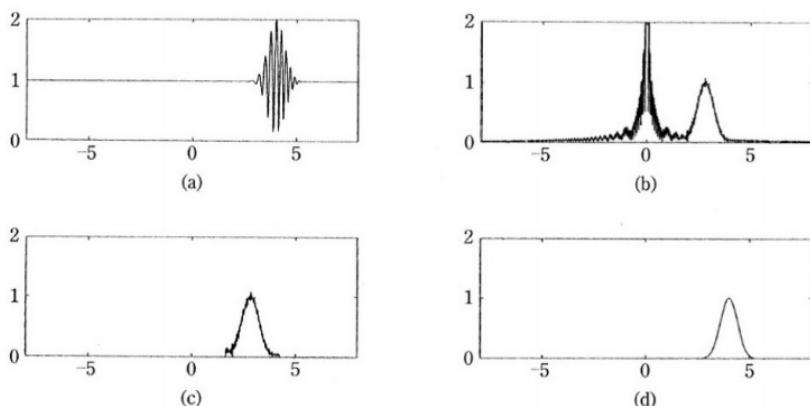
سیگنال زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \exp[-\pi(x - 4)^2] \quad (۲۷.۱۳)$$

که در شکل (۷.۱۳)(الف) نشان داده شده است، و نویز چیرپ v



شکل ۳.۱۳: جداسازی سیگنال و نویز توسط تبدیل فوریه کسری چندگانه.

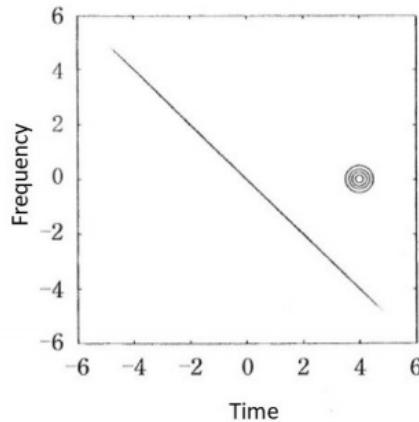


شکل ۷.۱۳: کاهش نویز با تبدیل فوریه کسری

$$n(x) = \exp(j\pi x^{\frac{1}{2}}) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{16}\right) \quad (28.13)$$

تبدیل فوریه کسری از مرتبه $\alpha = 0.5$ در شکل (۷.۱۳)(ب) نشان داده شده است، نتیجه پوشی است که در شکل (۷.۱۳)(ج) نشان داده شده است، و در نهایت، سیگنال کاهش نویز توسط تبدیل فوریه کسری معکوس را داریم که در شکل (۷.۱۳)(د) مصور گشته است. برای مرجع، WDF سیگنال تخریب شده در شکل (۸.۱۳)(آ) نشان داده شده است. به طور کلی، فیلتر کردن با تبدیل فوریه کسری در برخی موارد برای سیگنال با نویز اعوجاج چیرپ موثر است.

^۱Chirp Noise



شکل ۱۳.۸: تابع توزیع ویگنر سیگنال تخریب شده شکل [۷.۱۳] (الف)

۲.۳.۱۳ همبسته ساز و فیلتر تطبیقی

عملیات همبستگی با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$g(x) = f(x) \star h^*(x) \quad (29.13)$$

و تبدیل فوریه آن خواهد بود

$$G(\nu) = F(\nu) \cdot H^*(\nu) \quad (30.13)$$

منطقی است که همبستگی کسری را به صورت زیر تعریف کنیم

$$g_a(x_a) = f_a(x_a)h_a^*(x_a) \quad (31.13)$$

در حالت $a = 0$ ، همبستگی کسری مربوط به حاصل ضرب $g(x) = f(x)h^*(x)$ و در مورد $a = 1$ ، همبستگی متعارف $G(\nu) = F(\nu)H(\nu)$ به طور کلی، همبستگی کسری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_{a1}(x_a) = f_{a1}(x_a)h_{a1}^*(x_a) \quad (32.13)$$

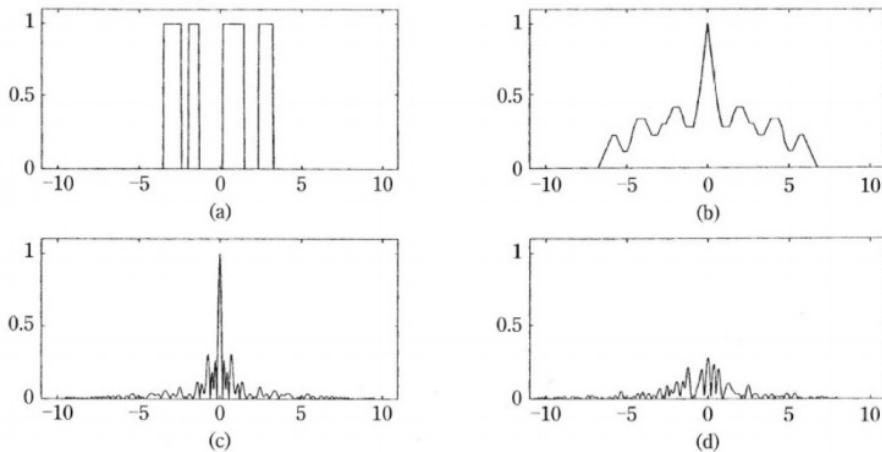
این بدان معناست که تبدیل فوریه کسری از مرتبه a_1 برای $f(x)$ و $g(x)$ ، سپس حاصلضرب هر دو تبدیل و در نهایت تبدیل فوریه کسری معکوس مرتبه a_2 برای حاصلضرب محاسبه می‌شود. این روش را می‌توان بصورت زیر توصیف کرد.

$$g(x_a) = \iint K_{fc}(x_a, x'_a, x''_a) f(x'_a) h_a^*(x''_a) dx'_a dx''_a \quad (33.13)$$

که در آن

$$K_{fc}(x_a, x'_a, x''_a) = \int K_{-a_1}(x_a, x'''_a) K_{-a_1}(x'''_a, x'_a) K_{-a_1}(x'''_a, x''_a) \quad (34.13)$$

لازم به ذکر است که همبستگی کسری برای $f(x)$ تغییر ناپذیر نیست، یعنی همبستگی به موقعیت سیگنال ورودی بستگی دارد. این یک تفاوت بزرگ بین همبستگی کسری و همبستگی متعارف مبتنی بر تبدیل فوریه است.



شکل ۹.۱۳: فیلتر تطبیقی با تبدیل فوریه کسری. (الف) جسم، (ب) خود همبستگی متعارف، (ج) خود همبستگی کسری در $\alpha = 0.5$ و (د) خود همبستگی کسری در $\alpha = 0.8$ برای جسم جابجا شده [۲].

نمونه‌ای از آشکارسازی سیگنال با استفاده از تبدیل فوریه کسری در شکل (۹.۱۳) نشان داده شده است. شکل (۹.۱۳)(الف) جسمی را نشان می‌دهد که باید شناسایی شود، (ب): خود همبستگی معمولی آن، (ج): خود همبستگی کسری از مرتبه $\alpha = 0.5$ و (د): خود همبستگی کسری از مرتبه $\alpha = 0.8$ در مورد جسم جابجا شده همبستگی کسری تغییر ناپذیر نیست.

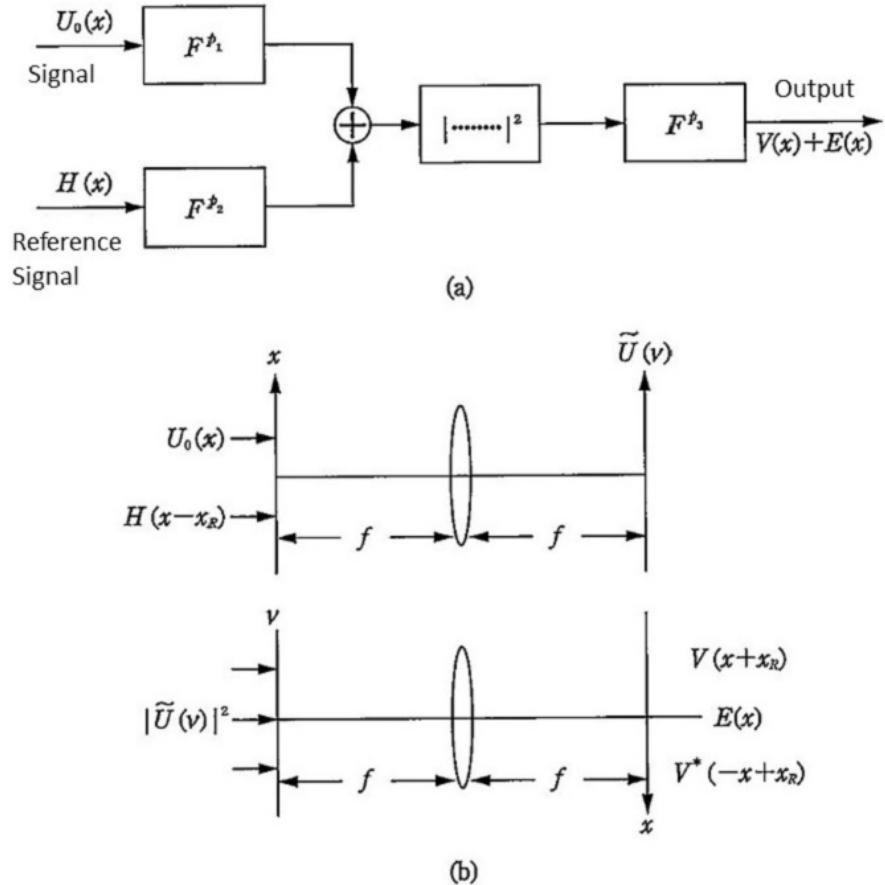
۳.۳.۱۳ همبسته ساز تبدیل فوریه کسری مشترک

شکل (۱۰.۱۳) بلوک دیاگرام یک همبستگی ساز تبدیل فوریه کسری مشترک را نشان می‌دهد [۴]. اگر $p_1 = p_2 = 1$ باشد، آن همبستگی ساز تبدیل مشترک معمولی است.

اجازه دهید در مورد همبستگی ساز تبدیل مشترک با استفاده از WDF بحث کنیم. همانطور که در بخش ۷.۸، فرآیند به دو فرآیند تقسیم می‌شود [۴] در فرآیند اول، یک سیگنال جسمی $U_{\circ}(x)$ و یک سیگنال مرجع $H(x)$ در یک صفحه قرار می‌گیرند و فوریه تبدیل می‌شود. سیگنال‌ها در صفحه ورودی با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$U(x) = U_{\circ}(x) + H(x - x_R), \quad (35.13)$$

که در آن x_R نشان دهنده جدایی بین موقعیت شی و مرجع است. نمایش WDF سیگنال در شکل (۱۱.۱۳) نشان داده شده است، که در آن W_H و $U(x)$ به ترتیب WDF‌های



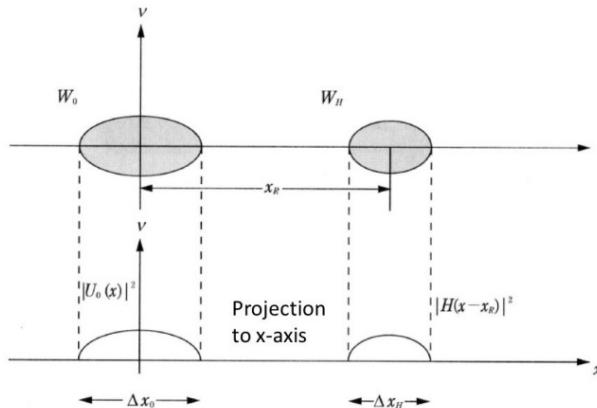
شکل ۱۰.۱۳: همبستگی‌ساز تبدیل مشترک با تبدیل فوریه کسری. (الف) بلوک دیاگرام، و (ب) سیستم نوری برای همبسته تبدیل فوریه کسری مشترک. $V(x)$: سیگنال خروجی و $E(x)$: سیگنال به جز سیگنال خروجی.

و $H(x)$ و $U_0(x)$ و Δx_H و Δx_0 به ترتیب بسط $H(x)$ و $U_0(x)$ آن خواهد بود

$$\tilde{U}(\nu) = \tilde{U}_0(\nu) + \tilde{H}(\nu) \exp(j2\pi\nu x_R) \quad (36.13)$$

و WDF آن در شکل (۱۲.۱۳) نشان داده شده است. WDF‌های جسم و سیگنال‌های مرجع در همان ناحیه x قرار دارند. این بدان معناست که $\tilde{H}(\nu)$ و $\tilde{U}_0(\nu)$ می‌توانند با یکدیگر تعامل داشته باشند. تصویر WDF بر محور x تابع $\tilde{H}(x)$ را می‌دهد و با ورودی در شکل (۱۰.۱۳)(ب) مطابقت دارد.

$$\begin{aligned} \int \tilde{W}(x, \nu) d\nu &= |\tilde{U}(x)|^2 = |\tilde{U}_0 + \tilde{H} \exp(j2\pi x x_R)|^2 \\ &= |\tilde{U}_0(x)|^2 + |\tilde{H}(x)|^2 + \tilde{U}_0 \tilde{H}^* \exp(-j2\pi x x_R) + \tilde{U}_0^* \tilde{H} \exp(j2\pi x x_R) \\ &= \tilde{E} + \tilde{V}(x) \exp(-j2\pi x x_R) + \tilde{V}^*(x) \exp(j2\pi x x_R) \end{aligned} \quad (37.13)$$

شکل ۱۱.۱۳: تابع توزیع ویگنر ورودی $U(x)$

$$\text{که در آن} \quad (38.13)$$

$$\tilde{V}(x) = \tilde{U}_0(x)\tilde{H}^*(x)$$

$$\tilde{E}(x) = |\tilde{U}_0(x)|^2 + |\tilde{H}(x)|^2 \quad (39.13)$$

تابع $|\tilde{U}(x)|$ در شکل (۱۳.۱۳) نشان داده شده است که از سه قسمت تشکیل شده است. برای به دست آوردن سیگنال همبستگی $U_0 H^*$, باید شرط زیر را ارضاء کند.

$$x_R - \frac{\Delta x_H + \Delta x_0}{2} \geq \Delta x_0. \quad (40.13)$$

نمایش WDF همبستگی ساز تبدیل فوریه کسری مشترک را در نظر بگیرید. در ابتدا، تبدیل فوریه کسری از مرتبه p_1 سیگنال $U(x)$ محاسبه می شود که مطابق با چرخش با زاویه $\phi_1 = \frac{\pi}{\chi} p_1$ ، که در شکل (۱۴.۱۳)(الف) نشان داده شده است. به منظور محاسبه $|U(x)|^2$ ، مشابه مورد معادله (۳۷.۱۳)، سیگنال مرجع با تغییر فاز و مدولاسیون فاز خطی مدوله می شود.

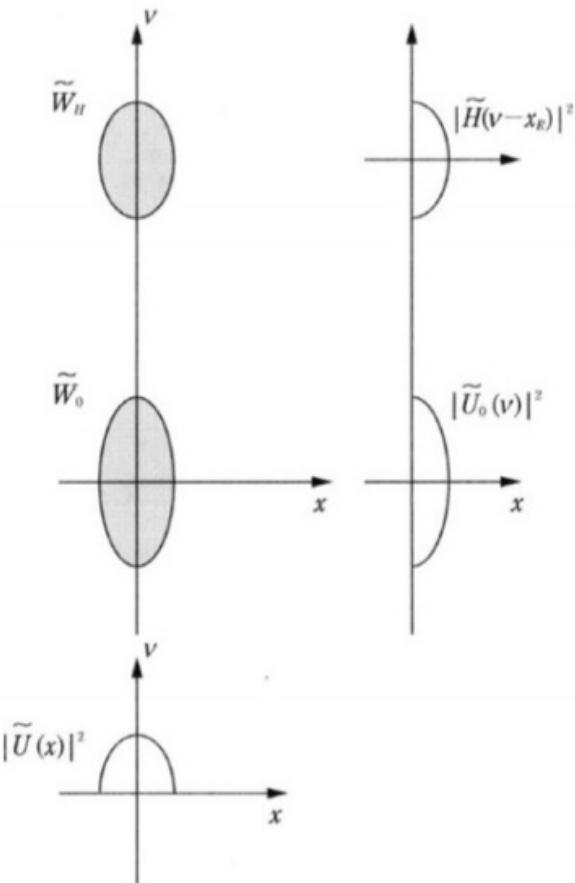
$$H(x) \rightarrow H(x - x_R) \exp(-j2\pi x \nu_R) \quad (41.13)$$

و سپس تبدیل فوریه کسری از مرتبه p_1 محاسبه می شود. این فرآیند به صورت زیر

$$W_H(x, \nu) \rightarrow W_H(x - x_R, \nu - \nu_R) \quad (42.13)$$

همانطور که در شکل (۱۴.۱۳)(ب) نشان داده شده، نمایش داده می شود. بعداً تبدیل فوریه کسری از مرتبه p_2 این سیگنال با چرخش WDF با زاویه $\phi_2 = \frac{\pi}{\chi} p_2$ محاسبه و به دست می آید. برای قرار دادن W'_H روی محور ν ، شرایط

$$x_R = R \cos \left(\frac{\pi}{\chi} - \phi_1 \right) = \sin \phi_2 \quad (43.13)$$



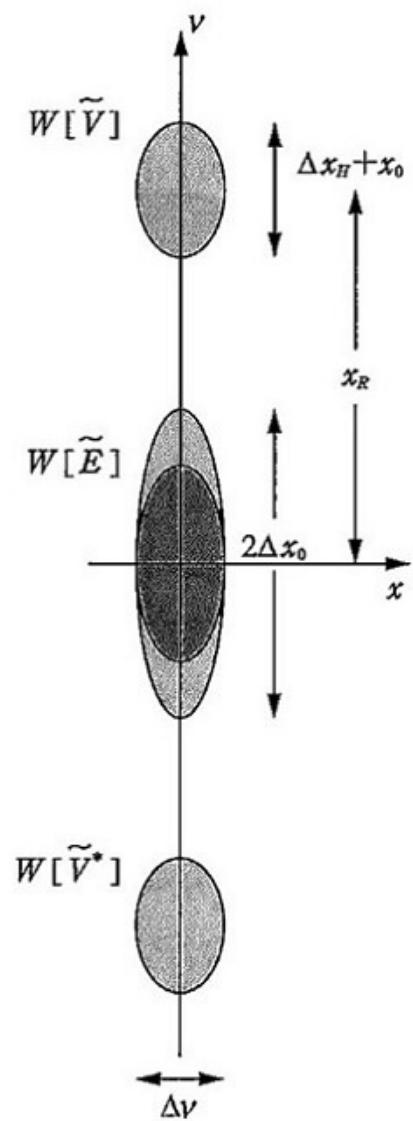
شکل ۱۲.۱۳: تابع توزیع ویگنر معادله (۳۶.۱۳)

$$\nu_R = R \sin \left(\frac{\pi}{4} - \phi_2 \right) = \cos \phi_2 \quad (44.13)$$

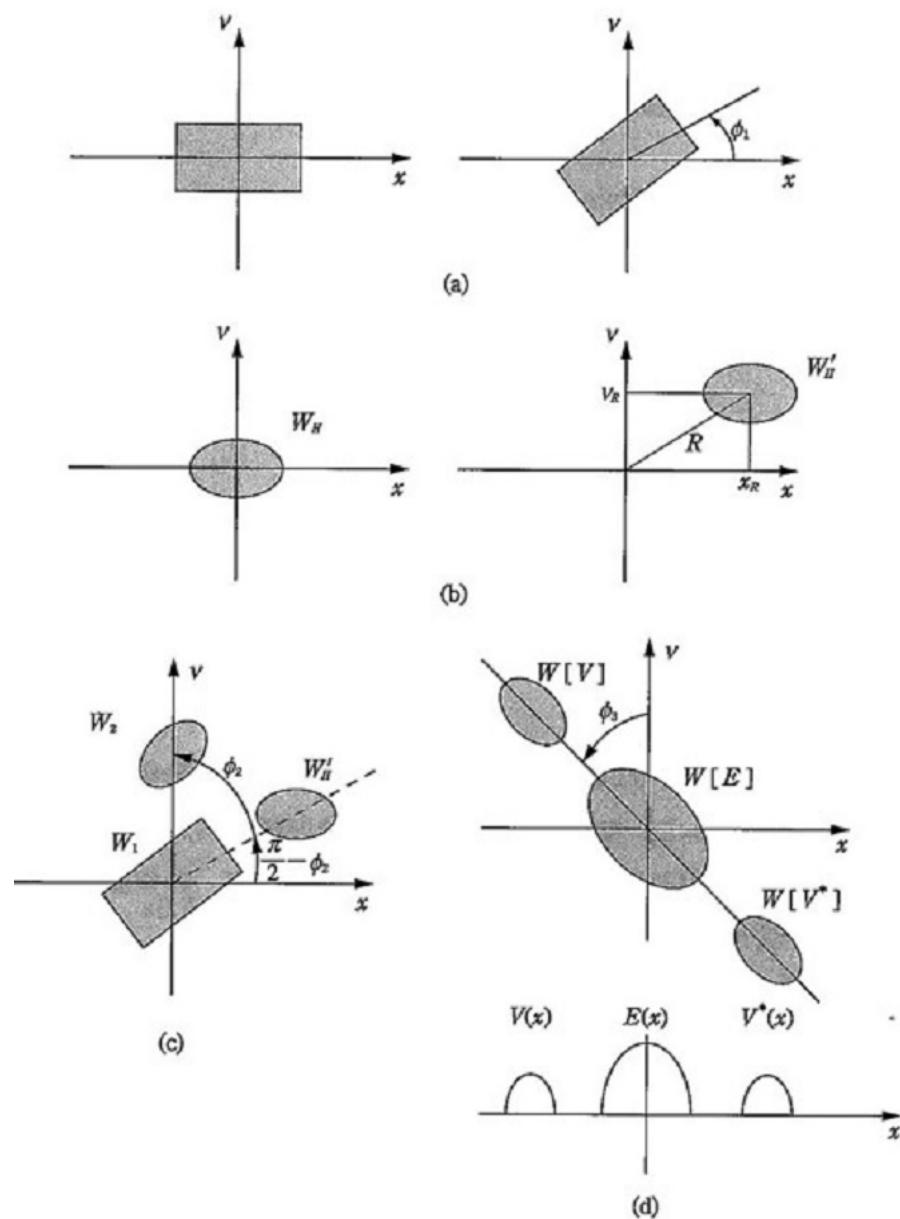
ضروری هستند. در این صورت سیگنال $|U(x)|^2$ مربوط به شکل (۱۱.۱۳)، همانطور که در شکل (۱۴.۱۳)(ج) نشان داده شده است، محاسبه می‌شود. در نهایت، تبدیل فوریه کسری مرتبه p_2 این سیگنال با چرخش WDF با زاویه $\phi_2 = \frac{\pi}{4} p_2$ ، همانطور که در شکل (۱۴.۱۳)(د) نشان داده شده است، محاسبه می‌شود. فاصله جدایی سیگنال همبستگی برابر است با

$$R = \sqrt{x_R^2 + \nu_R^2} \quad (45.13)$$

سیگنال همبستگی نهایی تصویر WDF بر محور x است. فاصله جداسازی R فقط به فاصله جدایی x_R بستگی ندارد، بلکه به گستره طیفی R بستگی دارد، در حالی که فاصله جدایی فقط به فاصله بین سیگنال و سیگنال مرجع x_R در همبستگی‌سازی تبدیل مشترک معمولی بستگی دارد.



شكل ١٣.١٣:تابع توزيع ويگنر معادله (٣٧.١٣)



شكل ۱۴.۱۳: تابع توزیع ویگنر تبدیل فوریه همبستگی ساز مشترک

كتاب نامه

- [1] Lohmann, A. W., Mendlovic, D. and Zalevsky, Z. 1998. Fractional Transforms in Optics, *Progress in Optics*. XXXVIII: 263–342.
- [2] Ozaktas, H. M., Zalevsky, Z. and Kutay, M. A. 2001. *The Fractional Fourier Transform*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [3] Lohmann, A. W. 1993. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Amer.* A10: 2181.
- [4] Mendlovic, D. Zalevsky, Z. and Ozaktas, H. M. Applications of the fractional Fourier transform to optical pattern recognition, *Optical Pattern Recognition*. F. T. S. Yu and S. Jutamulia ed., 89–125, Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] Ozaktas, H. M., Barshan, B., Mendolvic, D. and Oneral, L. 1994. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms. *J. Opt. Soc. Amer.* A11: 547.
- [6] Ozaktas, H. M., Barshan, B. and Mendolvic, D. 1998. Convolution in fractional Fourier domains. *Opt. Rev.* 1: 15.
- [7] Lohmann, A. W., Zalevsky, Z. and Mendolvic, D. 1996. Synthesis pattern recognition filters for fractional Fourier processing. *Opt. Commun.* 128: 199.
- [8] Lohmann, A. W. and Mendlovic, D. 1997. Fractional joint transform correlator. *Appl. Opt.* 36: 7042.

پیوست آ

محاسبه عددی پراش فرنل گسسته

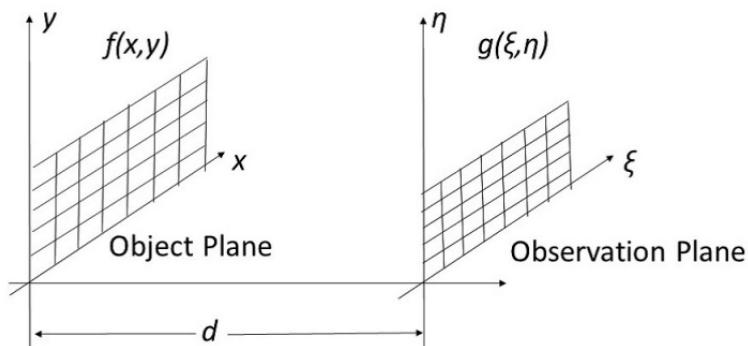
یک جسم $f(x, y)$ را در نظر بگیرید که توسط یک نور همدوس با طول موج λ روشن شده، و در شکل (۱.۱) نشان داده شده است. صفحه مشاهده در فاصله d از صفحه جسم قرار دارد، جایی که یک آرایه حسگر تصویر نصب شده است. مختصات صفحه مشاهده به صورت (ξ, η) انتخاب می‌شود.

اجازه دهید با معادله پراش فرنل، معادله (۴۱.۲) یا معادله (۱.۶) شروع کنیم.

$$g(\xi, \eta) = \frac{j}{\lambda d} \iint f(x, y) \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda d} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] \right\} dx dy \quad (1.1)$$

این را می‌توان بصورت انتگرال کانولوشن بازنویسی کرد

$$g(\xi, \eta) = f * h(\xi, \eta) \quad (2.1)$$



شکل ۱.۱: شکل هندسی محاسبه پراش

که در آن

$$h(\xi, \eta) = \frac{j}{\lambda d} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^\gamma + \eta^\gamma) \right] \quad (۳.\bar{۱})$$

تبدیل فوریه معادله (۲.۱) می‌دهد

$$G(\nu_x, \nu_y) = F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y) \quad (۴.\bar{۱})$$

که در آن

$$\nu_x = \frac{\xi}{\lambda d}, \quad \nu_y = \frac{\eta}{\lambda d}$$

$$F(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[f(x, y)] \quad (۵.\bar{۱})^6$$

$$G(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[g(x, y)] \quad (۶.\bar{۱})$$

$$H(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[h(x, y)] = \exp[j\pi\lambda d(\nu_x^\gamma + \nu_y^\gamma)] \quad (۷.\bar{۱})$$

معادله پراش فرنل، (۱.۱)، نیز بازنویسی می‌شود:

$$g(\xi, \eta) = \frac{j}{\lambda d} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^\gamma + \eta^\gamma) \right] \times \iint f(x, y) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (x^\gamma + y^\gamma) \right] \exp \left[-j \frac{\gamma\pi}{\lambda d} (x\xi + y\eta) \right] dx dy \quad (۸.\bar{۱})$$

سه نوع نمایش برای پراش فرنل ارائه شده است

۱. رویکرد کانولوشن

بر طبق معادلات (۲.۱) و (۴.۱)، پراش فرنل است:

$$g(\xi, \eta) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[h] \} \quad (۹.\bar{۱})$$

سه تبدیل فوریه یا دو تبدیل فوریه بر اساس رابطه زیر نیاز دارد

$$g(\xi, \eta) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}[f] \cdot \exp[j\pi\lambda d(\nu_x^\gamma + \nu_y^\gamma)] \} \quad (۱۰.\bar{۱})$$

۲. رویکرد تبدیل فرنل

بر طبق معادله (۸.۱)، پراش فرنل بصورت زیر داده می‌شود

$$g(\xi, \eta) = \frac{j}{\lambda d} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^\gamma + \eta^\gamma) \right] \mathcal{F} \left\{ f(x, y) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (x^\gamma + y^\gamma) \right] \right\} \quad (۱۱.\bar{۱})$$

و در آن فقط یک تبدیل فوریه انجام می‌شود.

۳. رویکرد طیف زاویه‌ای
بر طبق معادلات (۵۹.۶)، (۶۱.۶) و (۶۳.۶)، پراش فرنل بر اساس روش طیف زاویه‌ای
ارائه می‌شود:

$$u(x, y, d) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\nu_x, \nu_y, \circ) \exp \left(-j2\pi d \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \nu_x^2 - \nu_y^2} \right) \times \exp [-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y \quad (12.\bar{1})$$

بنابراین خواهیم داشت

$$u(x, y, d) = \mathcal{F} \left\{ \mathcal{F}[u(x, y, \circ)] \exp \left(-j2\pi d \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \nu_x^2 - \nu_y^2} \right) \right\} \quad (13.\bar{1})$$

که دو تبدیل فوریه انجام خواهد شد.

در مرحله بعد، در مورد مسائل نمونه‌برداری در محاسبه پراش بحث می‌کنیم. برای محاسبه تبدیل فوریه گسسته، تمام داده‌ها باید قضیه نمونه برداری را برآورده کنند. در ابتدا، اجازه دهید تصویر ورودی $f(x, y)$ قضیه نمونه برداری را برآورده کند. بالاترین فرکانس مکانی تابع گسترش نقطه $h(\xi, \eta)$ فاصله d بین جسم و صفحات مشاهده را محدود می‌کند.

فرکانس‌های مکانی تابع گسترش نقطه‌ای $h(\xi, \eta)$ عبارتند از^۱

$$\nu_{\xi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial h(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\xi}{\lambda d} \quad (14.\bar{1})$$

$$\nu_{\eta} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial h(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\lambda d} \quad (15.\bar{1})$$

در نظریه نمونه‌برداری لازم است که

$$\text{Max} \left[\left| \frac{\xi}{\lambda d} \right| \right] \leq \frac{1}{2\Delta} \quad (16.\bar{1})$$

$$\text{Max} \left[\left| \frac{\eta}{\lambda d} \right| \right] \leq \frac{1}{2\Delta} \quad (17.\bar{1})$$

که در آن Δ تناوب نمونه‌برداری از تابع گسترش نقطه را نشان می‌دهد. در نهایت، حد فاصله d را داریم،

$$d \geq \frac{N\Delta^2}{\lambda} \quad (18.\bar{1})$$

زیرا حداکثر فرکانس مکانی در گوشه انتهایی تابع گسترش نقطه است، یعنی ξ_{max} و $\eta_{max} = N\Delta/2$ که در آن N نشان دهنده تعداد نمونه برداری از تصویر است.

الارم به ذکر است که فرکانس مکانی تابع $\nu_{\xi} = 1/2\pi d\phi(\xi)/d\xi$ توسط $h(\xi) = \exp[-j\phi(\xi)]$ داده می‌شود

به عنوان مثال، هنگامی که $N = ۱۰۲۴$ و $\Delta = ۲۰\mu m$ و $\lambda = ۰,۶۳۳\mu m$ است. تحت این شرایط، روش کانولوشن محاسبه پراش فرنل گستته بدون خطای هم خوانی^۲ انجام می شود.

در غیر این صورت، در روش طیف زاویه‌ای محاسبه پراش فرنل گستته، حداقلر فرکانس تابع پاسخ فرکانسی^۳ $\exp(-j2\pi d\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \nu_x^2 - \nu_y^2})$ به شدت به فاصله d بستگی دارد. این بدان معناست که حد فاصله d در مقایسه با روش کانولوشن بسیار کوچک است. روش طیف زاویه‌ای در نوع دیجیتال در مواردی معتبر است که صفحه مشاهده نزدیک به صفحه جسم قرار گیرد.

^۲ Aliasing

پیوست ب

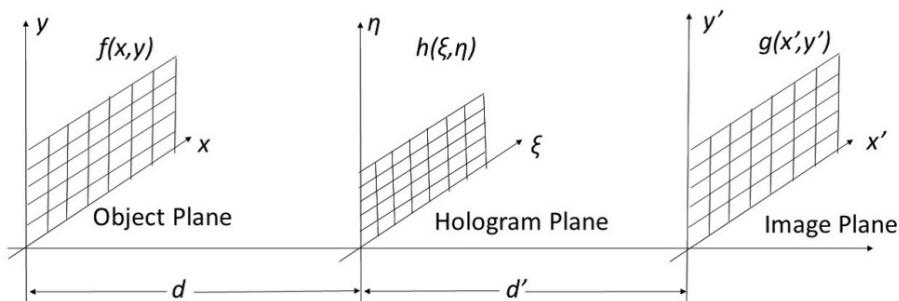
محاسبه عددی هلوگرام فرنل

یک جسم نفوذی را در نظر بگیرید که با نوری همدوس به طول موج λ روشن شده است. دامنه مختلط روی سطح جسم با رابطه زیر داده می‌شود:

$$f(x, y) = A(x, y) \exp[-j\phi(x, y)] \quad (\text{ب.1})$$

که در آن $A(x, y)$ و $\phi(x, y)$ بترتیب نمایشگر دامنه و فاز جسم هستند. هندسه توصیف کننده رویه‌های عددی هلوگرافی دیجیتال در شکل (ب.۱) نشان داده شده است. صفحه هلوگرام در فاصله d از صفحه جسم قرار دارد، جایی که یک آرایه حسگر تصویر نصب شده است. مختصات صفحه هلوگرام به صورت (ξ, η) انتخاب می‌شود. در فاصله d' از صفحه هلوگرام که مختصات آن (x', y') است، صفحه تصویر یا صفحه مشاهده تنظیم می‌شود که در آن شدت تصویر بازسازی شده به دست می‌آید. فرآیندهای عددی، همانطور که بعداً ذکر خواهد شد، دامنه مختلط (x', y') تصویر بازسازی را نشان می‌دهند. با توجه به نظریه پراش فرنل، طبق معادله (ب.۶)، دامنه مختلط در صفحه هلوگرام خواهد بود:

$$h(\xi, \eta) = \frac{j \exp(-jkd)}{\lambda d} \iint f(x, y) \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda d} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] \right\} dx dy \quad (\text{ب.2})$$



شکل ب.۱: شکل هندسی هلوگرافی دیجیتالی

بفرض آنکه ثابت A در معادله (۴.۱.۲) واحد باشد. این انتگرال کانولوشن جسم $f(x, y)$ و تابع پاسخ ضربه‌ای $\exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda d} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] \right\}$ بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$h(\xi, \eta) = \frac{j \exp(-jkd)}{\lambda d} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^2 + \eta^2) \right] \times \iint f(x, y) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda d} (x\xi + y\eta) \right] dx dy \quad (ب.۳)$$

معادله (ب.۳) را دوباره بازنویسی می‌کنیم

$$h(\xi, \eta) = \frac{j \exp(-jkd)}{\lambda d} \exp \left[-j\pi d \lambda (\nu_x^2 + \nu_y^2) \right] \times \iint f(x, y) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2) \right] \exp [j 2\pi (x\nu_x + y\nu_y)] dx dy \quad (ب.۴)$$

که در آن فرکانس‌های مکانی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nu_x = \frac{\xi}{d\lambda} \quad \nu_y = \frac{\eta}{d\lambda} \quad (ب.۵)$$

در عمل، صفحه جسم با تناوب نمونه‌برداری Δx و Δy نمونه‌برداری می‌شود. صفحه هولوگرام همچنین توسط یک آرایه حسگر تصویر در مورد هولوگرافی دیجیتال، که فاصله پیکسلی آن به ترتیب $\Delta \xi$ و $\Delta \eta$ در جهت ξ و η است، نمونه‌برداری می‌شود. مختصات گسسته خواهد بود

$$\xi = n\Delta\xi, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (ب.۶)$$

$$\eta = m\Delta\eta, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (ب.۷)$$

بر طبق معادله (ب.۴)، نوع گسسته فرکانس‌ها در صفحه هولوگرام عبارتند از

$$\nu_x = n\Delta\nu_x, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (ب.۸)$$

$$\nu_y = m\Delta\nu_y, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (ب.۹)$$

تئوری نمونه‌برداری می‌طلبد که

$$\Delta x = \frac{1}{N\Delta\nu_x} = \frac{\lambda d}{N\Delta\xi} \quad (ب.۱۰)$$

$$\Delta y = \frac{1}{M\Delta\nu_y} = \frac{\lambda d}{M\Delta\eta} \quad (ب.۱۱)$$

سپس فرض کنید که موج مرجع در صفحه هولوگرام $r(\xi, \eta)$ باشد. توزیع شدت $h(\xi, \eta)$ به صورت هولوگرام دیجیتالی ثبت می‌شود

$$h(\xi, \eta) = |F(\xi, \eta) + r(\xi, \eta)|^2 \quad (ب.۱۲)$$

برای بازسازی یک تصویر واقعی در صفحه تصویر از هلوگرام، از موج مرتع مزدوج مختلط $r^*(\xi, \eta)$ استفاده می‌شود. برای به دست آوردن دامنه جبهه موج واقعی بازسازی شده در صفحه تصویر، پراش فرنل معکوس محاسبه می‌شود.

$$g(x', y') = \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (x'^\gamma + y'^\gamma) \right] \times \iint h(\xi, \eta) r^*(\xi, \eta) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^\gamma + \eta^\gamma) \right] \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda d} (x' \xi + y' \eta) \right] d\xi d\eta \quad (ب.1۳)$$

که در آن d' برابر d تنظیم می‌شود، تا تصویر کانونی و متتمرکز به دست آید. معادله (ب.1۳) به صورت زیر بازنویسی شده است

$$g(\mu_x, \mu_y) = \exp \left[-j \pi \lambda d (\mu_x^\gamma + \mu_y^\gamma) \right] \times \iint h(\xi, \eta) r^*(\xi, \eta) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^\gamma + \eta^\gamma) \right] \exp [j 2\pi (\xi \mu_x + \eta \mu_y)] d\xi d\eta \quad (ب.1۴)$$

که در آن فرکانس‌های مکانی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_x = \frac{x'}{d\lambda}, \quad \mu_y = \frac{y'}{d\lambda} \quad (ب.1۵)$$

نوع گستته معادله (ب.1۴) خواهد بود:

$$g(n\Delta\mu_x, m\Delta\mu_y) = \exp \left[-j \pi \lambda d (n^\gamma \Delta\mu_x^\gamma + m^\gamma \Delta\mu_y^\gamma) \right] \times \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} h(k\Delta\xi, l\Delta\eta) r^*(k\Delta\xi, l\Delta\eta) \times \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (k^\gamma \Delta\xi^\gamma + l^\gamma \Delta\eta^\gamma) \right] \exp \left[j 2\pi \left(\frac{kn}{N} + \frac{lm}{M} \right) \right] \quad (ب.1۶)$$

که در آن

$$\Delta\mu_x = \frac{1}{N\Delta\xi} = \frac{\Delta x'}{\lambda d} \quad (ب.1۷)$$

$$\Delta\mu_y = \frac{1}{M\Delta\eta} = \frac{\Delta y'}{\lambda d} \quad (ب.1۸)$$

از معادله‌های (ب.1۰) و (ب.1۱) و (ب.1۷) و (ب.1۸) داریم

$$\Delta x = \Delta x' \quad \Delta y = \Delta y' \quad (ب.1۹)$$

تناوب‌های نمونه‌برداری در صفحه جسم و صفحه تصویر با یکدیگر برابر هستند. با توجه به معادلات (ب.1۸) و (ب.1۷)، اندازه پیکسل در صفحه تصویر برابر است با

$$\Delta x' = \frac{\lambda d}{N\Delta\xi} \quad \Delta y' = \frac{\lambda d}{M\Delta\eta} \quad (ب.2۰)$$

حل مسائل انتخابی

فصل اول

۲.۱ • سرعت: $v = 4m/s$ ، جهت انتشار: z ، زمان تناوب: $T = 0.03125s$ ، طول موج: $\lambda = 0.125m$ ، عدد موج: $k = 50/24m^{-1}$

۳.۱ •

$$v = c/\lambda = 2998 \times 10^8 / 0.06328 \times 10^{-9} = 4.7 \times 10^{14}$$

فصل دوم

۱.۲ • اثر ضربان اتفاق می‌افتد.

۳.۲ •

$$\begin{aligned} u(\nu_x) &= A' \int_{l/2-D/2}^{l/2+D/2} \exp(j\pi x \nu_x) dx + A' \int_{-l/2-D/2}^{-l/2+D/2} \exp(j\pi x \nu_x) dx \\ &= \pi A' D \operatorname{sinc}(D\nu_x) \cdot \cos(\pi l \nu_x) \end{aligned}$$

۳.۲ •

$$\begin{aligned} u(\omega, \phi) &= A' \int_{-D_1/2}^{D_1/2} \int_0^{\pi} \exp\left[j \frac{k}{R} \rho \omega \cos(\theta - \phi)\right] \rho d\rho d\theta \\ &= A' \int_0^{D_1/2} \int_0^{\pi} \exp\left[j \frac{k}{R} \rho \omega \cos(\theta)\right] \rho d\rho d\theta \\ &\quad - A' \int_0^{D_1/2} \int_0^{\pi} \exp\left[j \frac{k}{R} \rho \omega \cos(\theta)\right] \rho d\rho d\theta \\ &= \pi A' \left[\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 J_1\left(\frac{kD_1}{\pi R} \omega\right) - \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 J_1\left(\frac{kD_1}{\pi R} \omega\right) \right] \end{aligned}$$

۴.۲ • موج پراکنده شده از روزنه (m, n) برابر است با

$$\begin{aligned} u_{m,n}(\nu_x, \nu_y) &= A' \int_{-\infty}^{\infty} f(x, -ma, y - nb) \exp[j\pi(x\nu_x + y\nu_y)] dx dy \\ &= A' \exp[j\pi(ma\nu_x + nb\nu_y)] \cdot F(\nu_x, \nu_y) \end{aligned}$$

که در آن

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[j\pi(x\nu_x + y\nu_y)] dx dy$$

که پراش فراونهوفر را از روزنه $f(x, y)$ می‌دهد. موج پراکنده از روزنه‌های $(2M+1) \times (2N+1)$ خواهد بود

$$\begin{aligned}
 u(\nu_x, \nu_y) &= \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N u_{m,n}(\nu_x, \nu_y) \\
 &= A' \frac{1 - \exp[j\pi(2M+1)a\nu_x]}{1 - \exp(j\pi a\nu_x)} \\
 &\quad \times \frac{1 - \exp[j\pi(2N+1)b\nu_y]}{1 - \exp(j\pi b\nu_y)} \\
 &\quad \times \exp[-j\pi(Ma\nu_x + Nb\nu_y)] \times F(\nu_x, \nu_y)
 \end{aligned}$$

و شدت آن برابر است با:

$$I(\nu_x, \nu_y) = A'^2 \left\{ \left[\frac{\sin[\pi(2M+1)a\nu_x]}{\sin(\pi a\nu_x)} \right] \right\}^2 \cdot \left\{ \left[\frac{\sin[\pi(2N+1)b\nu_y]}{\sin(\pi b\nu_y)} \right] \right\}^2 \times |F(\nu_x, \nu_y)|^2$$

فصل سوم

۱.۳ •

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(4n^2-1)\pi} \cos(2\pi nx)$$

۲.۳ •

$$f(x) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos(2\pi nx)$$

۳.۳ • (الف)

$$\frac{-j}{2\sqrt{\alpha}} \exp\left(j\frac{\pi\nu}{2\alpha}\right)$$

(ب)

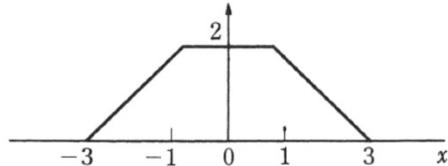
$$\frac{\alpha}{\pi(a^2 + \nu^2)}$$

(ج)

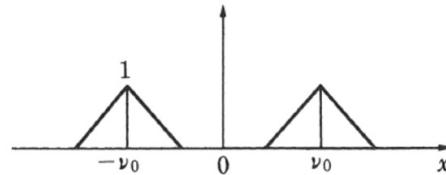
$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2(\nu + \nu_0)^2}$$

۴.۳ •

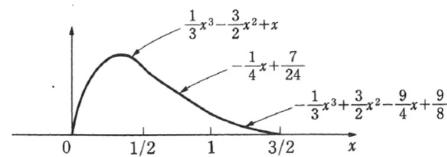
(الف)-کانولوشن و همبستگی



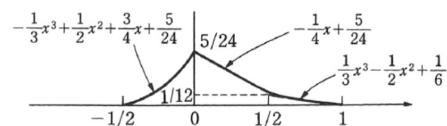
(ب) کانولوشن و همبستگی



(ج) کانولوشن



و همبستگی



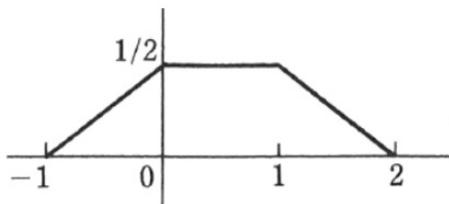
(د) کانولوشن و همبستگی

• ٥.٣ روش مستقيمه:

$$\begin{aligned}
 & \exp(-\alpha x^r) * \exp(-\beta x^r) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha x'^r - \beta(x' - x)^r] dx' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-(\alpha + \beta) \left(x' - \frac{\beta x'}{\alpha + \beta} \right)^r + \frac{(\beta x)^r}{\alpha + \beta} - \beta x^r \right] dx' \\
 &= \exp \left(-\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} x^r \right) \cdot \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha + \beta)x'^r] dx' \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} \exp \left(-\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} x^r \right)
 \end{aligned}$$

روش تبدیل فوريه:

$$\begin{aligned}
 \exp(-\alpha x^r) &= \exp \left[-\pi \left(\sqrt{\frac{\alpha}{x}} \right)^r \right] \\
 \exp(-\alpha x^r) \iff & \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left[-\pi \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \nu \right)^r \right] \\
 \exp(-\beta x^r) \iff & \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp \left[-\pi \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \nu \right)^r \right]
 \end{aligned}$$



$$\mathcal{F}[\exp(-\alpha x^\gamma) * \exp(-\beta x^\gamma)] = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp\left[-\pi\left(\sqrt{\frac{\pi(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}}\nu\right)^\gamma\right]$$

و تبدیل فوریه معکوس آن برابر است با

$$\begin{aligned} & \exp(-\alpha x^\gamma) * \exp(-\beta x^\gamma) \\ &= \frac{\pi}{\alpha\beta} \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\pi(\alpha+\beta)}} \exp\left[-\pi\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\pi(\alpha+\beta)}}x\right)^\gamma\right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^\gamma\right) \end{aligned}$$

٦.٣ • (الف) بدلیل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)\frac{dx}{|a|} = f(0)$$

داریم

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

(ب) از معادله (٨٢.٣) با $T = 1$, داریم

$$\text{comb}(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nx)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{comb}(x)] &= \delta(\nu_x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}[\cos(2\pi nx)] \\ &= \delta(\nu_x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\delta(\nu_x - n) + \delta(\nu_x + n)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu_x - n) \\ &= \text{comb}(\nu_x) \end{aligned}$$

(ج) ترکیب روابط (الف) و (ب):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{comb}(ax)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(ax - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[a(x - n/a)] \\ &= \frac{1}{|a|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n/a)\end{aligned}$$

۷.۳ • (الف) از آنجا که

$$\mathcal{F}[\exp(-|x|)] = \frac{1}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2|x|) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{1 + (2\pi\nu)^2} \right]^2 d\nu$$

و بعلت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2|x|) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{(1 + \nu^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

(ب) از آنجا که

$$\mathcal{F}[\text{rect}(x)] = \text{sinc}(\nu)$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\text{rect}(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\text{sinc}(\nu)]^2 d\nu$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\text{rect}(x)]^2 dx = \int_{-1/2}^{1/2} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \nu}{(\pi \nu)^2} d\nu$$

سرانجام خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \nu}{(\pi \nu)^2} d\nu = \frac{1}{2}$$

فصل چهارم

۱.۴ • پاسخ ورودی-خروجی در تجهیزات صوتی، عملکرد پاسخ در مدارهای RC، سیستم تصویربرداری مبتنی بر اپتیک پاراکسیال، پاسخ ارتعاشی ساختمان‌ها برای مدولاسیون دامنه کوچک و غیره.

۲.۴ •

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)] &= \left\{ \delta(\nu_x) + \frac{1}{4} [\delta(\nu_x - \nu_1) + \delta(\nu_x + \nu_1)] \right\} \\ &\quad * \left\{ \delta(\nu_x) + \frac{1}{4} [\delta(\nu_x - \nu_2) + \delta(\nu_x + \nu_2)] \right\} \\ &= \delta(\nu_x) + \frac{1}{4} [\delta(\nu_x - \nu_1) + \delta(\nu_x + \nu_1) + \delta(\nu_x - \nu_2) + \delta(\nu_x + \nu_2) \\ &\quad + \frac{1}{4} [\delta(\nu_x - \nu_1 - \nu_2) + \delta(\nu_x - \nu_1 + \nu_2) + \delta(\nu_x + \nu_1 - \nu_2) \\ &\quad + \delta(\nu_x + \nu_1 + \nu_2)]] \end{aligned}$$

این بدین معنی است که پاسخ فرکانسی سیستم باید در فرکانس‌های

$$\nu_x = 0, \pm\nu_1, \pm\nu_2, \nu_1 + \nu_2, \nu_1 - \nu_2, -\nu_1 + \nu_2, -(\nu_1 + \nu_2)$$

برابر یک باشد.

فصل پنجم

۶.۵ •

روش مستقیم: N^2 روش FFT

۷.۵ •

روش FFT الگوریتمی برای محاسبه تبدیل فوریه گسسته با مقادیر مختلط است. این بدان معناست که تبدیل فوریه حقیقی را می‌توان با قسمت موهومی با مقدار صفر انجام داد. یک الگوریتم مبتکرانه پیشنهاد شده است که در آن بخش موهومی به طور موثر به کار گرفته شده است.

تبدیل فوریه گسسته یک دنباله حقیقی $f(n)$ را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} F(l) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp \left(j \frac{2\pi nl}{N} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} \left\{ f(2m) \exp \left(j \frac{4\pi ml}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. + f(2m+1) \exp \left[j \frac{4\pi(2m+1)l}{N} \right] \right\} \\ &= F_1(2m) + \exp \left(j \frac{\pi l}{N} \right) F_2(2m+1) \quad (B/21) \end{aligned}$$

که در آن $F_1(2m)$ و $F_2(2m)$ و $f(n)$ تبدیل فوریه گسسته به ترتیب از نمونه اعداد زوج و فرد $f(2m)$ و $f(2m+1)$ هستند. این بدان معنی است که تبدیل فوریه گسسته یک دنباله حقیقی $f(n)$ توسط دو تبدیل فوریه گسسته $F_1(2m)$ و $F_2(2m+1)$ و معادله $(B/21)$ محاسبه می‌شود.

روش دیگر برای محاسبه دوتابع حقیقی به شرح زیر است. دو دنباله حقیقی $g_1(n)$ و $g_2(n)$ را در نظر بگیرید. یک دنباله مختلط

$$h(n) = g_1(n) + jg_2(n)$$

تعریف می‌شود. تبدیل فوریه آن برابر است با

$$H(l) = H_r(l) + jH_i(l)$$

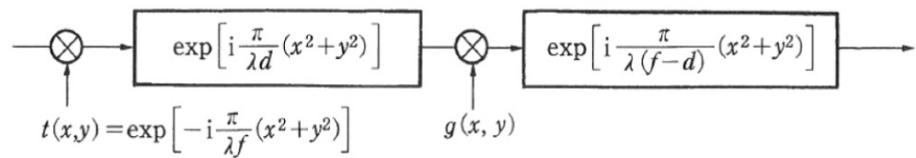
که در آن $H_r(l)$ و $H_i(l)$ بخش‌های حقیقی و موهومی $H(l)$ هستند.

$$G_1(l) = \frac{H_r(l) + H_r(N-l)}{2} + j \left[\frac{H_i(l) - H_i(N-l)}{2} \right]$$

$$G_2(l) = \frac{H_i(l) + H_i(N-l)}{2} + j \left[\frac{H_r(l) - H_r(N-l)}{2} \right]$$

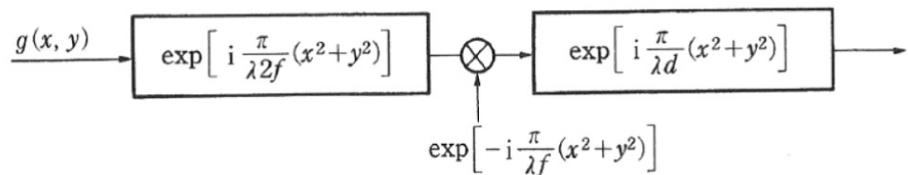
فصل ششم

۱.۶ •



$$\begin{aligned} h(x, y) &= \left[\left\{ \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right] * \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2) \right] \right\} g(x, y) \right] \\ &\quad * \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda (f-d)} (x^2 + y^2) \right] \\ &= \left[\iint \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right] \right. \\ &\quad \left. \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda d} [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] \right\} dx_1 dy_1 \right. \\ &\quad \times g(x, y)] * \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda (f-d)} (x^2 + y^2) \right] \\ &= -j \frac{\lambda f d}{f-d} \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda (f-d)} (x^2 + y^2) \right] \times G \left[\frac{x}{\lambda (f-d)}, \frac{y}{\lambda (f-d)} \right] \end{aligned}$$

۱.۷ •



$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= \iiint g(x_1, y_1) \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] \\
 &\quad \times \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x_2^2 + y_2^2) \right] \\
 &\quad \times \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \right] dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 &= \iiint g(x_1, y_1) \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda f} \left[\frac{2f-d}{d} (x_2^2 + y_2^2) \right. \right. \\
 &\quad - 2 \left(x_1 + \frac{2f}{d} x \right) x_2 - 2 \left(y_1 + \frac{2f}{d} y \right) y_2 + x_1^2 + y_1^2 \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2f}{d} (x^2 + y^2) \right] \right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2
 \end{aligned}$$

اگر $2f = d$ باشد،

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= \iiint g(x_1, y_1) \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda f} \right. \\
 &\quad \left. [-2(x_1 + x)x_2 - 2(y_1 + y)y_2 + x_1^2 + y_1^2 + x^2 + y^2] \right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 &= \iint g(x_1, y_1) \delta(x_1 + x, y_1 + y) \\
 &\quad \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x_1^2 + y_1^2 + x^2 + y^2) \right] dx_1 dy_1 \\
 &= g(-x, -y) \cdot \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right]
 \end{aligned}$$

• ۳.۶ (الف) ترکیب گذرش عدسی‌ها برابر است با

$$\begin{aligned}
 &\exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f_1} (x^2 + y^2) \right] \cdot \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f_2} (x^2 + y^2) \right] \\
 &= \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} (x^2 + y^2) \right]
 \end{aligned}$$

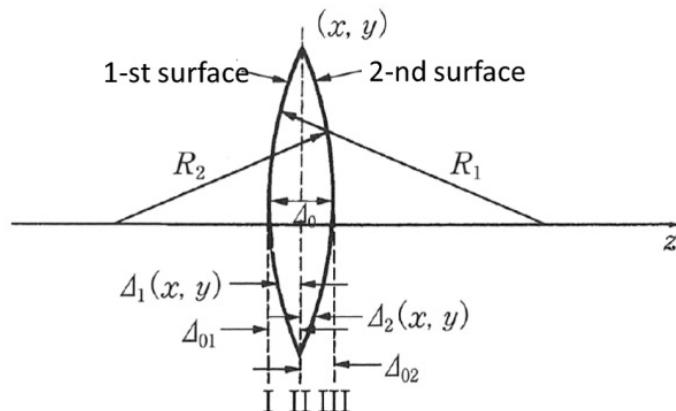
فاصله کانونی یک زوج عدسی خواهد بود

$$\frac{1}{f} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f_1} (x' + y') \right] * \exp \left[-j \frac{\pi}{\lambda d} (x' + y') \right] \right\} \\
 & \times \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f_1} (x' + y') \right] \\
 & = \iint \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f_1} (x_1' + y_1') \right] \\
 & \times \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda d} [(x - x_1)' + (y - y_1)'] \right\} dx_1 dy_1 \\
 & \times \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f_1} (x' + y') \right] \\
 & = \iint \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda f_1} \left(\frac{d - f_1}{d} \right) \left[\left(x_1 + \frac{f_1 x}{d - f_1} \right)' \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(y_1 + \frac{f_1 y}{d - f_1} \right)' \right] - j \frac{\pi (x' + y')}{(d - f_1) \lambda} \right\} dx_1 dy_1 \\
 & \times \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f_1} (x' + y') \right] \\
 & \propto \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda} (x' + y') \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{d - f_1} \right) \right]
 \end{aligned}$$

۵.۶ •



یک عدسی با شعاع انحنای R_1 و R_2 در نظر بگیرید، همانطور که در شکل نشان داده شده است. ضخامت عدسی $\Delta(x, y)$ و قسمت مرکزی آن Δ_0 است که فاصله بین صفحه I و III است. تغییر فاز عدسی برابر است با

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= \frac{2\pi}{\lambda} n \Delta(x, y) + \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta_0 - \Delta(x, y)] \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_0 + \frac{2\pi}{\lambda} [(n - 1)\Delta(x, y)]
 \end{aligned}$$

عدسی بهدو قسمت جلویی و پشتی تقسیم و فاصله آن از مرکز با Δ_{01} و Δ_{02} نشان داده می‌شود. ما $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02}$ داریم. همانطور که در شکل مصور است، فواصل

سطح اول و دوم تا مرکز عدسی با $\Delta_1(x, y)$ و $\Delta_2(x, y)$ نشان داده شده است و داریم

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y)$$

با توجه به رابطه هندسی،

$$\begin{aligned}\Delta_1(x, y) &= \Delta_{\circ 1} - (R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2}) \\ &\approx \Delta_{\circ 1} - \frac{x^2 + y^2}{2R_1} \\ \Delta_2(x, y) &\approx \Delta_{\circ 2} - \frac{x^2 + y^2}{2R_2}\end{aligned}$$

داریم

$$\Delta(x, y) = \Delta_{\circ} - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

در نهایت، ضریب عبور عدسی است

$$\begin{aligned}t(x, y) &= \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} n \Delta_{\circ} \right) \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \\ &= \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda} n \Delta_{\circ} \right) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2) \right]\end{aligned}$$

که در آن

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

از آنجایی که تغییر فاز به دلیل ضخامت عدسی Δ معمولاً نادیده گرفته می‌شود، معادله (۱۳.۶) بدست می‌آید.

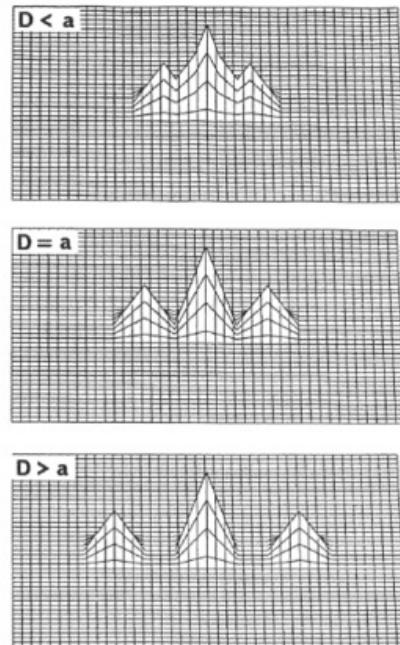
۶.۶ به شکل مربوطه مراجعه کنید.

۸.۶ طیف جسمی در شکل (الف) نشان داده شده است. در مورد تصویربرداری همدوس (ب) و اگر فرکانس قطع $\nu_c > \nu$ باشد، تصویر ایده‌آل بدون هیچ میرایی به دست می‌آید.

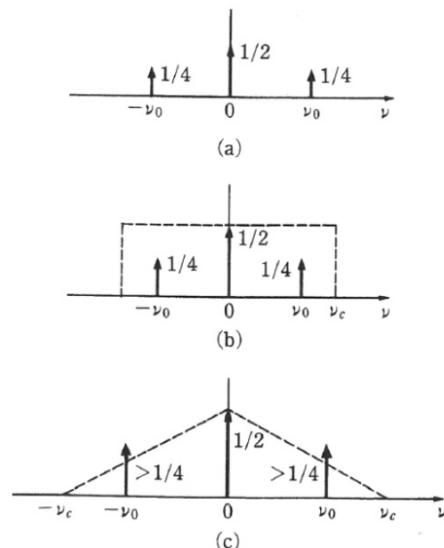
در تصویربرداری ناهمدوس (ج)، تصویربرداری ایده‌آل زمانی انجام می‌شود که $\nu_c \geq \nu$ باشد. تصویر تار، به دلیل تضعیف فرکانس مکانی، زمانی که $\nu_c \geq \nu > \nu_c$ تشکیل می‌شود. وقتی $\nu_c > \nu$ باشد، تصویری به دست نمی‌آید.

فصل هفتم

۱۷ هولوگرافی یک تکنیک رمزگذاری مجدد تصویر است که در آن دامنه مختلط از جسم با تداخل جسم و امواج مرجع ثبت می‌شود. هولوگرافی نوعی روش عکاسی کامل است، زیرا دامنه و فاز جسم قابل ثبت است. از طرف دیگر، عکاسی معمولی می‌تواند تنها شدت تصویر را بدون اطلاعات فاز جسم ثبت کند. به دلیل قابلیت ثبت



شکل ب.۲: مربوط به پرسش ۶.۶



شکل ب.۳: مربوط به پرسش ۸.۶

فاز هولوگرافی، ضبط و بازسازی اشیاء سه بعدی قابل انجام است. تداخل سنجی برای اجسام قابل نفوذ نیز معرفی شده است که برای اندازه‌گیری تغییر شکل و تحلیل ارتعاش بسیاری از قطعات مکانیکی اعمال می‌شود.

۰.۷ هولوگرافی تولید شده توسط کامپیوتر، بازسازی و نمایش اشیاء مصنوعی، تولید جبهه موج نوری، که سنتز آن دشوار است و غیره را امکان پذیر می‌کند. کاربردهای عملی عبارتند از

۱. نمایش جسم مصنوعی سه بعدی

نمایش در گرافیک کامپیوتری و شبیه سازی، نمایش سه بعدی نتایج در CAD، برخی مدل‌ها در مدل‌های خودرو و غیره.

۲. نمونه اولیه تداخل

در آزمایش تداخل سنجی عدسی‌ها و آینه‌های غیرکروی، جبهه موج‌های مرجع با اشکال ایده‌آل توسط CGH‌ها تولید می‌شوند. الگوی حاشیه تداخل سنجی حاصل، خطای جسم آزمایشی را نشان می‌دهد.

۳. عنصر نوری هولوگرافیک (HOE)

عناصر نوری هولوگرافیک با استفاده از CGH در شکل‌دهی پرتو لیزر، اسکن پرتو نوری و دستگاه‌های نوری در اتصالات نوری استفاده می‌شوند.

۴. فیلتر مکانی مختلط

در بخش ۱.۸ شرح داده شده است.

فصل هشتم

۰.۸ طیف فوریه (ν_x, ν_y) و $F(\nu_x, \nu_y)$ جسم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ را در نظر بگیرید. فیلتر تبدیل کد از $f(x, y)$ به $g(x, y)$ برابر است با

$$\frac{G(\nu_x, \nu_y)}{F(\nu_x, \nu_y)}$$

۰.۸ تبدیل از مختصات دکارتی به مختصات قطبی تبدیل ثابت چرخشی است. تبدیل‌های ثابت مقیاس و چرخش توسط بسیاری از نویسندهای مورد بحث قرار گرفته است.

فصل نهم

۰.۹ تبدیل فوریه به ترتیب $V(\nu)$ و $\hat{V}(\nu)$ از سیگنال‌های $v(t)$ و $\hat{v}(t)$ را در نظر بگیرید.

$$\hat{V}(\nu) = j \operatorname{sgn}(\nu) V(\nu)$$

داریم

$$j \operatorname{sgn}(\nu) \hat{V}(\nu) = j \operatorname{sgn}(\nu) \cdot [j \operatorname{sgn} V(\nu)] = -V(\nu)$$

بنابراین

$$\hat{v}(t) = -v(t)$$

۲.۹ • تبدیل فوریه $v(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$ برابر است با

$$V(\nu) = M(\nu) * \frac{\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)}{2}$$

و تبدیل هیلبرت آن خواهد بود

$$\begin{aligned} \hat{V}(\nu) &= j \operatorname{sgn}(\nu) \cdot \left[M(\nu) * \frac{\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)}{2} \right] \\ &= j \left[\frac{M(\nu - \nu_0)}{2} - \frac{M(\nu + \nu_0)}{2} \right] \\ &= \frac{M(\nu + \nu_0) - M(\nu - \nu_0)}{2j} = M(\nu) * \frac{\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)}{2j} \end{aligned}$$

سرانجام عکس تبدیل فوریه آن خواهد بود

$$\hat{v}(t) = m(t) \sin(2\pi\nu_0 t)$$

۳.۹ • تبدیل فوریه به ترتیب $V(\nu)$ و $\hat{V}(\nu)$ از سیگنال‌های $v(t)$ و $\hat{v}(t)$ را در نظر بگیرید.
چون

$$\hat{V}(\nu) = j \operatorname{sgn}(\nu) V(\nu)$$

تابع $V(\nu)$ و $\hat{V}(\nu)$ فقط در فاز اختلاف دارند و بنابراین $|V(\nu)|^2 = |\hat{V}(\nu)|^2$ است. طیف
توان آنها یکسان است.

۴.۹ • از آنجایی که تبدیل هیلبرت سیگنال $\hat{v}(t) = m(t) \sin(2\pi\nu_0 t)$ و $v(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$
است، سیگنال تحلیلی $v(t)$ خواهد بود

$$z(t) = v(t) - j\hat{v}(t)$$

در این صورت

$$z(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t) - jm(t) \sin(2\pi\nu_0 t) = m(t) \exp(-j2\pi\nu_0 t)$$

فاز سیگنال آنالیتک (تحلیلی) خواهد بود

$$\phi_z(t) = \frac{\hat{v}(t)}{v(t)}$$

و آنرا فاز لحظه‌ای می‌نامند. مشتق فاز لحظه‌ای نسبت به زمان

$$2\pi\nu_z = \frac{d\phi_z(t)}{dt}$$

فرکانس لحظه‌ای ν_z نام دارد.

فصل دهم

۱.۱۰ •

$$V = \frac{5-2}{5+2} = \frac{3}{7}$$

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{3}{5}$$

سرانجام، داریم $\gamma_{12} = 46^\circ$

۲.۱۰ • خطای همخوانی تعداد کافی نمونه که تئوری نمونه برداری را برآورده می‌کند.

۳.۱۰ • بگذارید ضخامت مواد پاشنده d باشد. تغییر فاز باشد

$$\phi(\sigma) = 2\pi\sigma d[n(\sigma) - 1]$$

که در آن σ نشان دهنده عدد موج است. اینترفروگرام آن برابر است با:

$$I(h) = 2 \int_0^\infty B(\sigma) \cos[2\pi\sigma h + \phi(\sigma)] d\sigma$$

این بدان معنی است که حاشیه تداخل $I_\sigma(h)$ برای عدد موج σ بسته به $\phi(\sigma)$ جابجا می‌شود و بنابراین تقارن تداخل‌سنجدی به h از بین می‌رود.

۴.۱۰ • حاشیه تداخل $I(x, y, l)$ شامل جملات مرتبه بالاتر مانند $\sin(2\pi nl/\lambda)$ و $\cos(2\pi nl/\lambda)$ است. این یعنی معادله (۵۳.۱۰) معتبر نیست. فاز محاسبه شده شامل اثرات جملات هارمونیک بالاتر است و بنابراین اجمله‌های ارتعاشی با فرکانس‌های بالاتر ظاهر می‌شوند.

۵.۱۰ • به مرجع زیر مراجعه کنید.

Creath, K. 1988. *Progress in Optics*, Wolf, E. ed. Vol. XXVI, 351. North-Holland, Amsterdam

۶.۱۰ • در تداخل‌سنجدی هتروداین، فاز ضربان بین دو فرکانس مجاور ν_1 و ν_2 اندازه‌گیری می‌شود و شدت آن برابر است با:

$$I(x, y, l) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) - 2\pi(\nu_1 - \nu_2)]$$

از سوی دیگر، تداخل‌سنجدی تغییر فاز، شدت حاشیه برابر است با:

$$I(x, y, l) = a(x, y) + b(x, y) \cos \left[\phi(x, y) - \frac{2\pi l}{\lambda} \right]$$

در تداخل سنجی هتروداین، فاز حاشیه‌ها به طور موقت مدوله می‌شود.

$$\theta = -2\pi(\nu_1 - \nu_2)$$

در حالی که در تداخل سنجی تغییر فاز،

$$\theta = -2\pi \frac{l}{\lambda}$$

هر دو تکنیک تداخل سنجی یکسان هستند زیرا حاشیه‌های تداخل سنجی توسط فاز بیرونی θ مدوله می‌شوند.

در مورد تحلیل حاشیه تبدیل فوریه، از معادله (۵۹.۱۰) داریم.

$$\theta = -\alpha x$$

در این حالت فاز به صورت مکانی مدوله می‌شود.

نمایه

- دیسک ابری، ۱۳۴، ۱۰۸، ۳۸
زمان حقیقی، ۱۴۸
سیستم (سامانه)، ۷۳
سیستم ترمیم، ۱۳۹
طیف سنجی، ۱۷۱
عملگر (اپراتور)، ۷۳
غیر ارادی، ۱۳۶
فیزو، ۱۸۱
فیلتر تطبیقی، ۱۳۵
فیلتر وینر، ۲۲۱، ۱۴۰
قابلیت بینائی، ۲۴
قدرت تفکیک، ۱۰۹
قسمت تربیعی، ۱۶۹
قضیه برش ثابتی، ۱۵۹
قضیه وینر-کینشاین، ۱۷۴
قضیه پارسوال، ۶۳
لایه بندی صفر، ۹۱
متغیر تصادفی، ۱۳۶
مدولاتور نور مکانی، ۱۹۷
مزدوچ مختلط، ۱۶
معادله هلم‌هولتز، ۲۰
معادله پراش فرنل، ۲۳
معیار ریلی، ۱۰۸
نامعادله شوارتز، ۱۳۷
نسبت سیگنال به نویز، ۱۳۵
نورم، ۵۲
نویز افزودنی، ۱۳۸
نویز خال خالی، ۱۴۰
نویز ضربی، ۱۴۰
نویز چیرپ، ۲۲۶
- آزمایش یانگ، ۲۱
آپادیزاسیون، ۱۳۵
ابراهی، ۱۰۸
اُتر، ۲۸
ارادی، ۱۳۶
اصل برهم نهی، ۱۸
تابع خودبستگی، ۶۳
تابع انتقال نوری، ۹۷
تابع توزیع ویگنر، ۲۲۱، ۲۰۷
تابع همبستگی، ۶۰
تابع پله هویساید، ۵۸
تابع پنجره بارتلت، ۸۵
تبديل رادون، ۱۵۸
تبديل فوريه سريع، ۸۱
تبديل فوريه گسيسته، ۸۳
تبديل ملين، ۱۵۲
تبديل هيبلرت، ۱۶۳
تحلیگر (آنالایزر) طیف، ۱۴۲
تداخل سنج توایمن-گرین، ۱۸۱
تفریق توری، ۱۴۸
توابع انتقال نوری، ۱۰۶
تماس یانگ، ۲۵
توموگرافی همدوس نوری، ۱۹۹
تکین، ۱۱۳
حاشیه یانگ، ۲۷، ۱۸۵
خطای همخوانی، ۷۰
خود شباهتی، ۱۵۴
خود همدوسی، ۱۷۳
درجه همدوسی، ۲۵
دلتای دیراک، ۵۸
دلتای کرونکر، ۵۱

همبستگي متقطع، ۶۳

همخوانی، ۲۴۰

همدوسي، ۱۷۱

وضوح نوري، ۱۰۸

ون سيترت-زرنيك، ۱۷۷

پراش فراونهوفر، ۳۶، ۲۱

پراش فرنل، ۳۳، ۱۱۰

کذرش دامنه، ۱۱۶

گذرش، ۲۰۴، ۱۴۶، ۱۲۹، ۱۲۰