

ای نسخی نامه‌ای که تویی  
ای آنسه‌ی حال شاهی که تویی  
بیرون ز تونیست آنچه د عالم هست  
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی





۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

# دانشگاهی دوپاره په مفاهیم

تألیف و ترجمه :

دکتر محمد صادق ابریشمیان

استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

## ۱۰. هدف این کتاب: پیشگفتار (نویسنده)

الکترومغناطیس یکی از مولفه‌های اصلی برنامه درسی آموزش فیزیک در دانشگاه‌ها است. با این حال، در ک آن دشوارتر از مولفه اصلی دیگر، مانند مکانیک است. یکی از دلایل این دشواری این است که متغیرهای اصلی در الکترومغناطیس، مانند پتانسیل و میدان‌ها را نمی‌توان بطور مستقیم دید و یا برایتی تجربه کرد، درحالی که در مورد مکانیک، مانند جابجایی و سرعت را می‌توان برایتی مشاهده و درک نمود.

در مقایسه با سایر میدان‌های الکترومغناطیسی، میدان‌های الکترواستاتیک ساده‌تر تلقی می‌شوند، زیرا آنها اصولاً بر اساس پتانسیل اسکالر هستند. با این حال، مطالعه میدان‌های الکترواستاتیکی مفاهیم زیادی را دربر می‌گیرند که گیج‌کننده بوده و یا برایتی قابل درک نیستند. در الکترومغناطیس گاهی اوقات مسائل را می‌توان بصورت آزمایشی انجام داد و در حین آزمایش دانشجویان می‌توانند به نکات ریز را درک کنند.

متاسفانه در کتب مدار و الکترومغناطیس تغییرات جامعی انجام نداده‌ایم و حتی در برخی مسائل مثل تعریف مقاومت، نفوذپذیری مغناطیسی، گذردهی الکتریکی بالامدن فرمود برای دانشجویان تناقص فراهم کرده‌ایم. وقتی از دانشجو می‌پرسیم مقاومت را تعریف کن، می‌گویید؛  $R = \frac{v}{i}$  نسبت ولتاژ به جریان. اما هنگامی که از او می‌پرسیم مقاومت منفی یعنی چه؟ اینجا است که بی جواب است. ولی اگر از روز اول مقاومت را شیب تعریف می‌کردیم حتی کمی در باره رابطه خطی و غیر خطی ولتاژ و جریان در عنصر مقاومت می‌گفتیم، و مقاومت را  $R = \frac{dv}{di}$  برایش تعریف می‌کردیم و متذکر می‌شدیم که در عنصری با مقاومت منفی با افزایش جریان ولتاژ کم می‌شود آن وقت راحت‌تر می‌فهمید و با آوردن یک لامپ نئون فازمتر میتوانیم ساخت نوسان ساز هم با عنصر مقاومت منفی به او راحت‌تر به او آموزش دهیم.

مطلوب دیگری که در کتب فیزیک الکتریسته و الکترومغناطیس به وفور یافت می‌شود این مسئله است: یک دیسک داریم که بار یکنواخت روی آن توزیع شده است. پتانسیل یا شدت میدان الکتریکی آنرا در فلان نقطه پیدا کنید. این یک مسئله کاملاً غلط و بد آموز است زیر بار الکتریکی به‌هیچوجه یکنواخت توزیع نمی‌شود. میباشد از روز اول که بار الکتریکی آموزش میدهیم باید یاد آوری کنیم که بار در نقاط نوک تیز بیشتر تجمع می‌کند و از آن نقطه جرقه و تخلیه بار صورت می‌گیرد و از همان جا است که خرابی رخ میدهد. در این کتاب سعی شده است این مطلب در سطوح مختلف از نظر ریاضی بررسی شود. مسئله دیگر در این زمینه برای اثبات این که بار در روی نقاط نوک تیز جمع می‌شود، برخی کتاب‌های الکتریسته یا الکترومغناطیس از دو کره فلزی یکی کوچک و دیگری بزرگ این را به نحوه مضمونی اثبات کرده‌اند و ما آنرا با شکل یکی از کتابها آورده‌ایم.

مطلوب دیگر که در این کتاب به آن اشاره شده است چرا خازن جریان مستقیم را عبور نمی‌دهد ولی جریان متغیر را عبور میدهد؟ اگر یک سطح بسته در نظر بگیریم که سیم خازن و قسمتی از فضای دیالکتریک درون خازن را در بر گیرد، جمع جبری جریانها که میباشد برای این سطح بسته صفر شود تناقص است. چه کسی بچه صورت این تناقص را رفع کرد؟ در این کتاب با مثالی ساده آنرا روش‌ن کرده‌ایم.

## ۱.۰ هدف این کتاب: پیشگفتار (نویسنده)

بعضی مسائل بصورت زنگ تفریح آورده شده ولی مطالعه دقیق و ظریف آنها خالی از لطف نیست. امیدوارم دوستان و اساتید دانشگاهی از ذکر اشتباهاتی که ناخواسته کرده‌ام به این جانب کوشزد کنند تا در آینده بشرط وجود حیات آن اشتباهات مرتفع شود.

محمد صادق ابریشمیان.  
۱۴۰۳ دی ماه

# فهرست مطالب

۱۰۰	هدف این کتاب: پیشگفتار (نویسنده)
۵	مقدمه
۵	اثر پوستی
۱۰	اتصال خازن شارژ شده به خازن دیگر
۱۳	توزیع بار الکتریکی روی اجسام
۱۴	۱.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی یک سطح فلزی
۲۰	۲.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی یک کروی گون پخ فلزی
۲۴	۳.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی یک کروی گون کشیده فلزی
۲۵	۴.۳.۱ توزیع بار الکتریکی در روی یک جسم فلزی
۲۸	۵.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی سطح میله فلزی نازک
۳۰	۴.۱ کره فلزی در میدان الکتریکی یکنواخت
۳۲	۴.۱.۱ چگالی بار سطحی کره فلزی در میدان الکترواستاتیکی
۳۳	کره دی الکتریک در میدان الکتریکی یکنواخت
۳۶	۱.۵.۱ یک قطعه دی الکتریک در میدان الکترومغناطیسی
۴۰	۲.۵.۱ محاسبه عناصر ماتریس
۴۲	۳.۵.۱ جسم دی الکتریک در میدان الکترواستاتیک یکنواخت
۵۳	۶.۱ حفاظت مغناطیسی
۵۷	۷.۱ طبقه‌بندی مواد مغناطیسی
۶۱	۸.۱ آیا قانون ولتاژ‌های کیرشهف حالت خاصی از قانون فاراده است؟
۶۴	۹.۱ نظریه دکتر والتزلوبن
۶۷	پدیده رزونانس
۶۷	۱.۲ مقدمه
۶۹	۲.۲ مدار $LC$
۷۰	۳.۲ مدار $RLC$ سری
۷۱	۴.۲ پهنهای باند
۷۲	۵.۲ کزینش و ضریب کیفیت
۷۳	۶.۲ مدار $RLC$ موازی

۷۵	مدار رزونانس و خط ارتباط	۷.۲
۷۷	خطوط ارتباط و رزونانس	۸.۲
۷۹	رزونانس شومن	۹.۲
۸۰	۱.۹.۲ معادله مشخصه دو کره فلزی	
۸۳	رزوناتورهای عایقی	۱۰.۲
۸۳	پدیده رزونانس و تحلیل مودهای ویژه	۱۱.۲
۸۴	روش ممان برای مسائل تحریکی	۱۲.۲
۸۵	پراش ریلی	۱۳.۲
۸۹	تولید برق	۳
۸۹	مقدمه	۱.۳
۸۹	اثر تریبوالکتریک	۲.۳
۹۴	اثر ترمو الکتریک	۳.۳
۹۶	۱.۳.۳ یخچال ترموالکتریک	
۹۷	اثر فوتوا کتریک	۴.۳
۹۷	اثر پیزو الکتریک	۵.۳
۹۹	۱.۵.۳ کاربردهای مکانیکی پیزو الکتریک	
۱۰۲	مگنتو استریکشن	۶.۳
۱۰۲	الکتروشیمیائی	۷.۳
۱۰۷	تقویت کننده ها	۴
۱۰۷	بهره تقویت کننده ها	۱.۴
۱۰۸	۱.۱.۴ محاسبات سرانگشتی برای دسی بل	
۱۰۹	تقویت کننده های لامپی	۲.۴
۱۰۹	۱.۲.۴ لامپ تریود	
۱۱۱	بار فضائی	۳.۴
۱۱۴	۱.۳.۴ تقویت سیگنال با لامپ تریود	
۱۱۵	۲.۳.۴ بهره ولتاژ	
۱۱۵	پارامترهای لامپ تریود	۴.۴
۱۱۶	تقویت کننده های پارامتری	۵.۴
۱۱۷	۱.۵.۴ تقویت کننده پارامتری غیر تبهکن	
۱۲۰	۲.۵.۴ بهره توان	
۱۲۰	۳.۵.۴ عدد نویز	
۱۲۲	تقویت کننده پارامتری تبهکن	۶.۴
۱۲۲	۱۶.۴ اصول کار	
۱۲۵	مقاومت منفی	۵
۱۲۵	مقدمه	۱.۵

## فهرست مطالب

۳

۱۲۶	.....	مقاومت استاتیکی .....	۲.۵
۱۲۷	.....	مقاومت دیفرانسیلی .....	۳.۵
۱۲۸	.....	تقویت کنندگی دیود تونلی .....	۴.۵
۱۲۹	.....	۱.۴.۵ محاسبه بھرہ .....	۱.۴.۵
۱۳۴	.....	نوسان ساز دیود تونلی .....	۵.۵
۱۳۵	.....	مبدل امپدانس منفی .....	۶.۵
۱۳۷	.....	۱.۶.۵ ظرفیت و خودالقائی منفی .....	۱.۶.۵
۱۳۷	.....	مقاومت بالاست .....	۷.۵
۱۳۸	.....	۱.۷.۵ مقاومت بالاست چیست؟ .....	۱.۷.۵
۱۳۹	.....	۲.۷.۵ مقاومت بالاست در مدار LED .....	۲.۷.۵
<b>۶ سیگنالها و سیستمهای</b>			
۱۴۱	.....	سیگنال های پیوسته .....	۱.۶
۱۴۴	.....	سیگنال گسته .....	۲.۶
۱۴۵	.....	تبديل فوریر .....	۳.۶
۱۴۹	.....	حل یک مسئله .....	۴.۶
۱۵۶	.....	تبديل هیلبرت .....	۵.۶
۱۵۶	.....	۱.۵.۶ تعریف تبدیل هیلبرت .....	۱.۵.۶
<b>۷ موجکها</b>			
۱۵۹	.....	مقدمه ای بر موجک ها در الکترومغناطیس عددی .....	۱.۷
۱۵۹	.....	۱.۱.۷ نظریه موجک ها .....	۱.۱.۷
۱۶۱	.....	۲.۱.۷ موجک ها .....	۲.۱.۷
۱۶۷	.....	۳.۱.۷ تبدیل های موجک .....	۳.۱.۷
۱۶۹	.....	کاربرد در الکترومغناطیس .....	۲.۷
۱۷۰	.....	۱.۲.۷ حل معادله انگرالی .....	۱.۲.۷
۱۷۴	.....	۲.۲.۷ نتیجه .....	۲.۲.۷
<b>۸ زمان صعود و پهنهای باند سه دسی بل</b>			
۱۸۳	.....	زمان صعود چیست؟ .....	۱.۸
۱۸۳	.....	چگونه می توان زمان افزایش یک سیستم را اندازه گیری کرد؟ .....	۲.۸
۱۸۳	.....	۳.۸ پهنهای باند ۳ دسی بل یک سیستم چقدر است؟ .....	۳.۸
۱۸۴	.....	۴.۸ چه زمانی می توان پاسخ فرکانسی یک سیستم را با استفاده از فیلتر پایین گذر $RC$ مدل کرد؟ .....	۴.۸
۱۸۵	.....	نمایه .....	نمایه
۱۸۸	.....		



# فصل ۱

## مقدمه

---

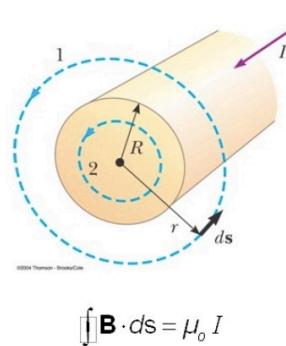
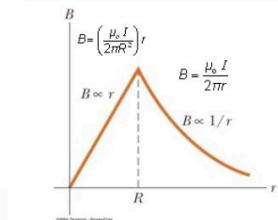
در این فصل مطالب متنوعی را به همراه مسائل زنگ تفريح مطرح می‌کنیم. ابتدا اثر پوستی که یکی از موضوع‌های مهم با معادلات ریاضی نسبتاً پیچیده است را در نظر می‌گیریم. البته این اثر پوستی را هم می‌توان با راه حل قابل فهم برای دانشجویانی که فقط میخواهند مفهوم فیزیکی را درک کنند و مطرح کرده‌ایم. لازم به ذکر است که زنگ تفريح در اینجا ممکن است ربطی به اثر پوستی نداشته باشد و صرفاً یک مسئله دیگری را بصورت زنگ تفريح بیان کرده‌ایم.

### ۱.۱ اثر پوستی

غالباً دانشجویان در رشته برق اثر پوستی را با عمق نفوذ در درس میدان‌ها و امواج می‌خوانند. ولی در اکثر مواقع صحبتی از رفتار مقاومت و خود القائی داخلی سیم در فرکانس‌های زیاد نمی‌شود. در واقع دانشجویان درک عمیقی از اثر فرکانس زیاد بر مقاومت و ضریب خودالقائی سیم با مقطع مدور ندارند. در اینجا می‌خواهیم اثر فرکانس را روی مقاومت یا بهتر بگوئیم امپدانس سیم برق با توجه به روابط دقیق ریاضی بیان کنیم. قبل از این که وارد بحث ریاضیات شویم ابتدا بیائید یکبار این مسئله را با بیان ساده بررسی کنیم.

یک سیم در نظر گیرید که از درون آن جریان مستقیم عبور می‌کند. همان طور که در شکل (۲.۱) نشان داده شده است، میدان مغناطیسی در داخل سیم مناسب با  $\frac{2\pi}{\lambda}$  تغییر می‌کند وسط سیم میدان صفر و در روی سیم حداکثر است. حال از وسط سیم و بسمت روی سیم و بطول  $\lambda$  از سیم یک مربع مستطیل در نظر گیرید. بدیهی است که میدان مغناطیسی بر این مربع مستطیل عمود است. حال اگر جریان تغییر کند میدان مغناطیسی در این مقطع ولتاژ القاء خواهد کرد (قانون فاراده) و اختلاف پتانسیلی بین

- The field is proportional to  $r$  inside the wire
- The field varies as  $1/r$  outside the wire
- Both equations are equal at  $r=R$



$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

شکل ۱.۱: میدان مغناطیسی درون و بیرون سیم حامل جریان

مرکز سیم و روی سیم بوجود می‌آورد. این پتانسیل الکترون‌ها را بسمت بیرون از سیم می‌کشد بنابراین حرکت الکترون‌ها که همان جریان است از مقاطع کمتری عبور می‌کند و مقاومت سیم زیاد می‌شود. این مقاومت تابع فرکانس است.  
معادله‌های ماکسول در یک محیط هادی می‌نویسیم. از جریان جابجایی  $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  صرف‌نظر می‌کنیم، قانون آمپر.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

و ضمناً قانون فاراده را داریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

از این معادله کرل می‌گیریم:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

اما می‌دانیم

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

چون  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  است، و با توجه به  $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$  خواهیم داشت.

$$\nabla^2 \mathbf{J} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (2.1)$$

تغییرات زمانی را  $e^{j\omega t}$  در نظر می‌گیریم، بنابراین معادله موج (۲.۱) در حوزه فرکانس خواهد بود

$$\nabla^2 \mathbf{J} = j\omega \mu \sigma \mathbf{J} \quad (2.1)$$

اکنون دستگاه مختصات قطبی را برای یک سیم توپر استوانه‌ای که محور آن در امتداد محور  $z$  است، در نظر می‌گیریم. چون طول سیم را طویل و نسبت به زاویه  $\phi$  متقاضی است، معادله (۲.۱) فقط نسبت به  $\rho$  تغییرات دارد.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial J_z}{\partial \rho} \right) = j\omega \mu \sigma J_z \quad (3.1)$$

$$\rho^{\circ} J_z'' + \rho J_z' - j\omega\mu\sigma J_z = 0 \quad (4.1)$$

این یک معادله بسل اصلاح شده مرتبه صفرام است و جواب کلی آن بصورت زیر است:

$$J_z(\rho) = A_1 I_{\circ}(\gamma\rho) + A_2 K_{\circ}(\gamma\rho) \quad (5.1)$$

که در آن

$$\gamma = \sqrt{(j\omega\mu\sigma)} = \alpha + j\beta \quad (6.1)$$

ضمناً

$$\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j), \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

در درس میدان‌ها و امواج به  $\gamma = \alpha + j\beta$  ثابت انتشار گفته می‌شود. مقدار حقیقی آن نمایشگر افت میدان در داخل هادی است  $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$  که به عمق نفوذ معروف و  $f$  فرکانس است.

بر گردیدیم به جواب معادله بسل یعنی رابطه (5.1). در مسئله سیم یا میله استوانه‌ای فلزی  $A_2$  صفر است، زیرا آن جمله مقدار جریان را در مرکز بینهایت می‌کند. و میبایست  $A_1$  را از شرایط مرزی بدست آوریم. اگر جریان را در  $\rho = a$  که  $a$  شعاع میله است داشته باشیم، در آن صورت

$$J_z(a) = A_1 I_{\circ}(\gamma a) \implies A_1 = \frac{J_z(a)}{I_{\circ}(\gamma a)} \quad (7.1)$$

بنابراین

$$J_z(\rho) = \frac{J_z(a)}{I_{\circ}(\gamma a)} I_{\circ}(\gamma\rho) \quad (8.1)$$

با تعریف

$$\gamma\rho = \sqrt{j} \frac{\sqrt{2}}{\delta} = \sqrt{j}x$$

خواهیم داشت:

$$I_{\circ}(\gamma\rho) = ber(x) + jbei(x) \quad (9.1)$$

$$\text{که دوتابع بر } ^1 \text{ و بی } ^2 \text{ به صورت زیر تعریف می‌شوند} \\ I_{\circ}(\gamma\rho) = I_{\circ}(\sqrt{j}x) = ber(x) + jbei(x) \quad (10.1)$$

که در آن

$$ber(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(m\pi/2)(x/2)^{2m}}{(m!)^2} \quad (11.1)$$

$$bei(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(m\pi/2)(x/2)^{2m}}{(m!)^2} \quad (12.1)$$

---

<sup>1</sup>ber

<sup>2</sup>bei

بنابراین با استفاده از توابع بر و بی خواهیم داشت:

$$J_z(\rho) = J_z(a) \frac{ber(x) + jbei(x)}{ber_{\circ}(y) + jbei(y)} \quad (۱۳.۱)$$

که در آن  $y = \sqrt{2}\rho/\delta$  و  $x = \sqrt{2}a/\delta$  است.

جريان مختلط نمایشگر داشتن امپدانس است. اختلاف پتانسیل بر واحد طول معادل شدت میدان روی سطح هادی و در نتیجه جريان سطحی است، یعنی  $E_z(a) = J_z(a)/\sigma$  اگر جريان کل سیم هادی را  $I_z$  بنامیم، بنابراین

$$Z_i = R + j\omega L_i = \frac{V}{I_z} = \frac{E_z \cdot L}{I_z} = \frac{J_z(a)}{\sigma I_z}, \quad L = ۱[meter] \quad (۱۴.۱)$$

اکنون باید بدنبال پیدا کردن جريان کل باشیم. می‌دانیم  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$  و  $H_{\phi}$  در دستگاه قطبی خواهد بود:

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = j\omega\mu H_{\phi}(\rho) \quad (۱۵.۱)$$

و طبق قانون آمپر

$$I_z = ۲\pi a H_{\phi}(a) \quad (۱۶.۱)$$

از ترکیب رابطه‌های قبلی (۱۵.۱) و (۱۷.۱) خواهیم داشت:

$$H_{\phi}(\rho) = \frac{۱}{j\omega\mu\sigma} \frac{\partial J_z(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\sqrt{2}/\delta}{j\omega\mu\sigma} A_1 \left( ber' \frac{\sqrt{2}\rho}{\delta} + j bei' \frac{\sqrt{2}\rho}{\delta} \right) \quad (۱۷.۱)$$

که در آن  $bei'(x) = \frac{d bei(x)}{dx}$  و  $ber'(x) = \frac{d ber(x)}{dx}$  مشتق توابع بر و بی است. با قرار دادن  $a = \rho$  در رابطه (۱۷.۱) و ترکیب با رابطه (۱۶.۱) داریم:

$$I_z = \frac{۲\pi a A_1 \sqrt{2}/\delta}{j\omega\mu\sigma} \left( ber' \frac{\sqrt{2}\rho}{\delta} + j bei' \frac{\sqrt{2}\rho}{\delta} \right) \quad (۱۸.۱)$$

با قرار دادن  $A_1$  از رابطه (۱۷.۱)

$$J_z(a) = A_1 \left( ber \frac{\sqrt{2}a}{\delta} + j bei \frac{\sqrt{2}a}{\delta} \right)$$

خواهیم داشت:

$$I_z = \frac{۲\pi a \sqrt{2}/\delta}{j\omega\mu\sigma} J_z(a) \left( \frac{ber' \sqrt{2}a/\delta + j bei' \sqrt{2}a/\delta}{ber \sqrt{2}a/\delta + j bei \sqrt{2}a/\delta} \right) \quad (۱۹.۱)$$

سرانجام با قرار دادن مقدار  $I_z$  در رابطه (۱۹.۱) داریم:

$$R + j\omega L = \frac{jR_s}{\sqrt{2}\pi a} \left( \frac{ber \sqrt{2}a/\delta + j bei \sqrt{2}a/\delta}{ber' \sqrt{2}a/\delta + j bei' \sqrt{2}a/\delta} \right) \quad (۲۰.۱)$$

در اینجا نماد  $R_s$  برای  $\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{۱}{\sigma\delta}$  است.

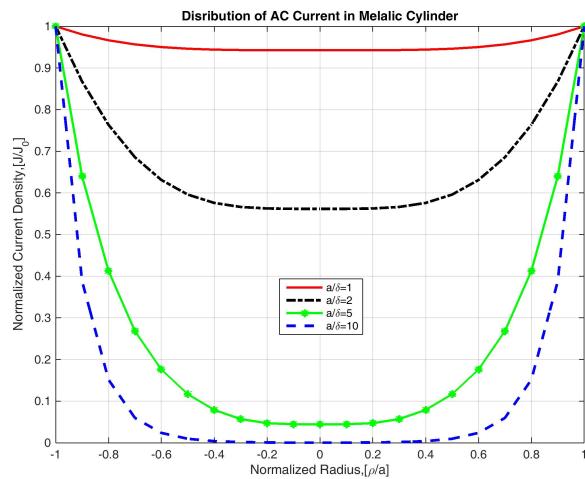
اگر مقاومت واحد طول را برای جريان ثابت  $R_{dc} = \frac{۱}{\sigma\pi a^۲}$  اهم بر متر و ضریب خود القائی داخلی را  $L_{idc} = \frac{\mu}{\lambda\pi}$  در نظر گیریم، جدول (۱۱) تغییرات  $R/R_{dc}$  و  $L_i/L_{idc}$  برای  $a/\delta$  مختلف و در جدول (۲۱) تغییرات مقاومت و ضریب خود القائی داخلی را برای یک سیم مسی نشان میدهد.

جدول ١.١: مقاومت و ضریب خودالقائی نسبی یک سیم

$a/\delta$	$R/R_{d-e}$	$L_i/L_{i d-e}$	$a/\delta$	$R/R_{d-e}$	$L_i/L_{i d-e}$
0	1.000	1.000	2.3	1.404	0.805
0.5	1.001	1.000	2.4	1.454	0.783
0.7	1.005	0.998	2.5	1.505	0.760
0.8	1.009	0.996	2.6	1.557	0.737
0.9	1.014	0.993	2.7	1.610	0.715
1.0	1.021	0.989	2.8	1.663	0.693
1.1	1.030	0.984	2.9	1.716	0.672
1.2	1.042	0.978	3.0	1.769	0.652
1.3	1.057	0.971	3.1	1.821	0.632
1.4	1.075	0.962	3.2	1.873	0.613
1.5	1.097	0.951	3.3	1.924	0.595
1.6	1.122	0.938	3.4	1.974	0.578
1.7	1.152	0.924	3.5	2.024	0.562
1.8	1.187	0.908	3.6	2.074	0.547
1.9	1.225	0.890	3.7	2.124	0.533
2.0	1.266	0.870	3.8	2.174	0.520
2.1	1.309	0.849	3.9	2.224	0.507
2.2	1.355	0.827	4.0	2.274	0.495

جدول ٢.١: مقاومت و ضریب خودالقائی یک سیم مسی نسبت به فرکانس

Frequency hertz	$a/\delta$	$R/R_{d-e}$	$R$ ohms/m	$L_i/L_{i d-e}$	$L_i$ henries/m	$\omega L_i$ ohms/m	$\omega L_i/R$
0	0	1.000	0.0264	1.000	$5.00 \times 10^{-8}$	0	0
60	0.0533	1.000	0.0264	1.000	$5.00 \times 10^{-8}$	$1.88 \times 10^{-5}$	$7.1 \times 10^{-4}$
$10^3$	0.218	1.000	0.0264	1.000	$5.00 \times 10^{-8}$	$3.14 \times 10^{-4}$	0.0119
$10^4$	0.689	1.005	0.0265	0.998	$4.99 \times 10^{-8}$	$3.13 \times 10^{-3}$	0.118
$10^5$	2.18	1.346	0.0355	0.831	$4.16 \times 10^{-8}$	0.0261	0.736
$10^6$	6.89	3.71	0.0980	0.289	$1.45 \times 10^{-8}$	0.0909	0.930
$10^8$	68.9	34.7	0.914	0.0288	$1.44 \times 10^{-7}$	0.905	0.991
$10^{10}$	689	344	9.09	0.00291	$1.45 \times 10^{-10}$	9.09	1.000



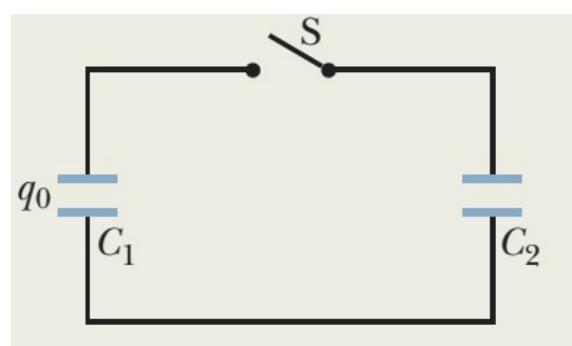
شکل ۲.۱: توزیع چگالی جریان در داخل یک استوانه فلزی مدور نسبت به عمق نفوذهای مختلف

## ۲.۱ اتصال خازن شارژ شده به خازن دیگر

ابتدا خازن  $C_1$  را با بار  $q_0$  شارژ کرده و سپس از طریق کلید  $S$  به خازن  $C_2$  متصل می‌کنیم. با توجه به این که میدانیم انرژی اولیه خازن  $C_1$  برابر مقادیر زیر است

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1} = \frac{1}{2} C_1 V_1^2, \quad V_1 = q_0 / C_1$$

میخواهیم انرژی ذخیره شده  $W_1$  در خازن  $C_1$  و انرژی ذخیره شده  $W_2$  در خازن  $C_2$  را بدست آوریم. در نهایت این دو انرژی  $W_1$  و  $W_2$  را جمع کرده و مشاهده کنیم که آیا اصل بقاء انرژی یعنی  $W_0 = W_1 + W_2$  درست یا خیر؟



شکل ۳.۱: اتصال دو خازن یکی باردار و دیگری بدون بار

## زنگ تفريح

■ دو خازن يكى باردار  $q_1$  و ظرفيت  $C_1$ ، ديگرى بدون بار و به ظرفيت  $C_2$  داده شده است، (شکل ۳.۱). کلید  $S$  را مibنديم و سرانجام بار هر خازن و انرژى ذخیره شده در هر يك را محاسبه مى کنيم. اختلاف پتانسیل خازن  $C_1$  و انرژى آن قبل از اتصال کلید برابر است با

$$V_0 = \frac{q_0}{C_1}$$

$$W_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$$

پس از بسته شدن کلید، بار  $q = q_1 + q_2$  روی دو خازن تقسيم، ( $q_0 = q_1 + q_2$ )، و پتانسیل دو خازن برابر  $V$  مى شود.

$$V = \frac{q_0}{C_1 + C_2} = \frac{q_0}{C_1 + C_2}$$

چون

$$q_0 = q_1 + q_2$$

بنابراین از دو رابطه اخیر خواهیم داشت

$$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_0 \quad q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_0$$

و

$$V = \frac{q_0}{C_1 + C_2} = \frac{q_0}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_0}{C_1 + C_2}$$

اکنون انرژى ذخیره شده در هر خازن را محاسبه مى کنيم.

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V^2 = W_0 \frac{C_1}{(C_1 + C_2)^2}, \quad W_2 = \frac{1}{2} C_2 V^2 = W_0 \frac{C_2}{(C_1 + C_2)^2}$$

جمع اين دو انرژى خواهد شد

$$W = W_1 + W_2 = W_0 \frac{C_1 + C_2}{(C_1 + C_2)^2}$$

اگر آنرا از انرژى اوليه  $W_0$  کم کنيم خواهیم داشت:

$$W' = W_0 - W = W_0 \left( \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

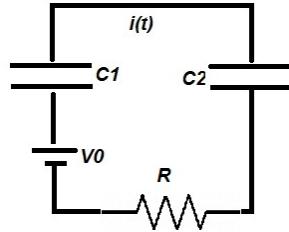
اين مقدار انرژى در اين تحول گم شده است؟ اگر دو خازن مساوی باشند، پنجاه در صد انرژى خازن اول گم مى شود. پس اصل بقاء انرژى چيست؟

**جواب :**

★ اين مسئله ديناميکي است نه استاتيکي. بدويهی است که وقتی جريان با منبع لحظه‌اي و کلید در کار باشد، اين بار مى خواهد با سرعت از کلید رد شود در عين حال مدار مقداری مقاومت هم دارد و اين باعث مى شود که در کلید جرقه زده شود و ضمناً حتماً تشيعش امواج الکترومغناطيسی ديگر (بجز نور جرقه) در کار هم هست (تابع دلتا  $V_{\delta}(t)$  حاوی فرکانس‌های زيادي است) بنابراین اگر در کنار اين دستگاه راديو  $AM$  هم روشن باشد به وضوح مى توان اثر نويز امواج را هم شنيد.

اگر بدنطال مسئله چالش برانگيز هستيد اين مسئله را وقتی يك مقاومت با خازن  $C_2$  سرى است حل کنيد. آيا مى توانيد اصل بقاء انرژى را تحقيق کنيد؟

★ برای حل اين قسمت مدار زير را در نظر گيريد



شکل ۴.۱: خازن  $C_1$  با بار  $q$  (ولتاژ  $V$ ) که بطور سری با  $R$  و  $C_2$  است.

برای پیدا کردن جریان از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم.

$$\frac{V}{S} = RI(s) + \frac{I(s)}{SC}$$

که در آن  $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$  ظرفیت معادل دو خازن است. بنابراین

$$I(s) = \frac{V/S}{R + 1/CS} = \frac{V \cdot C}{RCS + 1}$$

یا

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

برای پیدا کردن کل انرژی تلف شده در مقاومت  $R$  داریم:

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2(t)dt = \frac{V^2}{R} \left[ -\frac{RC}{2} e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^\infty$$

یا

$$W_R = \frac{V^2}{2} C = \frac{V^2 C_1}{2} \left( \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

این مقدار انرژی درست همان مقدار گم شده است و ضمناً به مقدار  $R$  نیز بستگی ندارد! البته میتوانیم بدون استفاده از تبدیل لاپلاس نیز مسئله را حل کنیم. پس از بستن کلید جریانی گذرا در مدار بصورت زیر با ثابت زمانی  $\tau = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$  خواهیم داشت.

$$i = I_{max} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t), \quad I_{max} = \frac{V}{R}$$

انرژی مصرف شده در مقاومت خواهد بود

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{V^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{V^2}{R} \frac{\tau}{2} = W \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

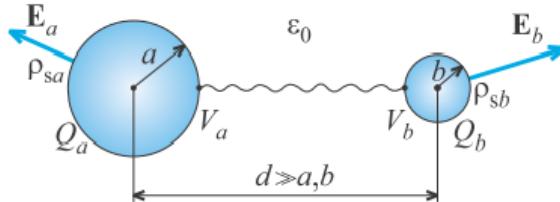
### ۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی اجسام

یکی از مسائلی که تقریباً در تمام کتب الکتریسته و مغناطیس یا الکترومغناطیس دانشگاهی مانعنوان میشود این است یک دیسک داریم که باری روی آن قرار میدهیم و بار الکتریکی روی دیسک **یکنواخت** توزیع شده و از داشجو میخواهیم که شدت میدان الکتریکی یا پتانسیل را در فلان نقطه فضا پیدا کنند!

در اینگونه مسائل ناخودآگاه به دانشجویان القاء می‌کنیم که بار همیشه یکنواخت توزیع می‌شود و از این مسئله غلط نتیجه بسیار غلطی در مغز دانشجو القاء می‌کنیم. ایکاش در ابتدای این مسئله اظهار میکردیم که هیچوقت در اینگونه مسائل بار یکنواخت توزیع نمی‌شود و چگالی بار در نقاط لبه و نوک تیز از سایر نقاط بیشتر است. در دیسک توزیع بار در لبه‌ها خیلی بیشتر از وسط است. در ضمن از همین نقطه است که جرقه زده می‌شود و مداراتی که در آینده ممکن است طرح کنید خرابی به وجود می‌آورد.

در برخی کتب سعی شده است به نحوی اثبات کنند که توزیع بار در نقاط نوک تیز یا با انحنا کم از سایر نقاط با انحنا زیادتر بیشتر است. اینگونه اثبات می‌کنند!

دو کره فلزی داریم یکی بزرگ با شعاع  $a$  و دیگری کوچک به شعاع  $b$  ( $b < a$ )



شکل ۵.۱: اثبات اینکه بار روی نقاط نوک تیز جمع می‌شود!

ابتدا فرض می‌کنیم روی کره بزرگ بار  $Q_0$  گذاشته‌ایم و البته چون کره متقاضن است بار بطور یکنواخت روی آن توزیع می‌شود. اکنون با یک سیم نازک و طویل همان طور که در شکل نشان داده شده  $d \gg a, b$  این دو کره را آن طور که در کتابها درسی یا در درس دکتر والتر لوین در دانشگاه ام آی تی میگوید با یک سیم نازک بهم وصل می‌کنیم تا هم پتانسیل شوند. تا اینجا هیچ تناقضی بوجود نمی‌آید. اما مسئله را این طور حل می‌کنند

$$Q_0 = Q_a + Q_b, \quad V = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b}$$

چون دو کره هم پتانسیل هستند. به این فرمول خوب نگاه کنید ما میخواهیم ثابت کنیم که بار روی نقاط نوک تیز بیشتر از سایر نقاط است. پس نقش سیم نازک در توزیع بار چیست؟ آیا بار روی سیم نازک وجود دارد؟ آیا این رابطه برای کره‌ها درست است؟ آیا طرفی که به سیم نازک وصل می‌شود با چگالی بار در سمت مقابل نقطه اتصال یکسان است؟ از یک آزمایش غلط میخواهیم نتیجه صحیح بگیریم؟ در کتابها این طور حل می‌کنند.

از دو معادله بالا داریم:

$$Q_b = \frac{b}{a+b} Q_a, \quad Q_a = \frac{a}{a+b} Q_b \quad Q_b = \frac{b}{a} Q_a$$

ضمناً چگالی بار روی هر کره

$$\rho_{sa} = \frac{Q_a}{(4\pi a^2)} \quad \rho_{sb} = \frac{Q_b}{(4\pi b^2)}$$

در نتیجه

$$\rho_{sb} = \frac{a}{b} \rho_{sa}$$

در حقیقت نتیجه درست است. چگالی بار با کره شعاع کوچکتر (انحنا کمتر) زیادتر کره با شعاع بزرگتر است.

متاسفانه از این جور مسائل غلط ما مدت‌ها است که چه در کتاب میدانها و امواج دیود چنگ صفحه ۱۰۵ یا سایر کتابهای الکترومغناطیس عنوان شده است (شکل ۵.۱). کسی به آنها نگفت که بار روی همان سیم نازک جا خوش می‌کند و چرا برود روی کره فلزی !! ممکن است پرسید پس چگونه اثبات کنیم که چگالی بار روی نقاط یا لبه یک دیسک بیشتر از سایر نقاط روی دیسک است؟

در زیر برای داشجویان سال اول می‌توانیم این را بشکل زیر عنوان کنیم:

### زنگ تفریح

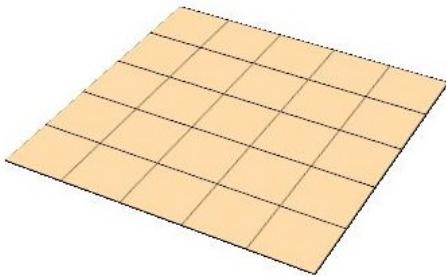
■ چرا از نظر فیزیکی بار الکتریکی که روی قطعات فلزی می‌گذاریم، چگالی بار در نقاط نوک تیز بیشتر از چگالی بار در نقاط صاف و با انحنای کمتری است؟  
جواب :

★ بخش بعدی را دقیقاً مطالعه کنید.

## ۱.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی یک سطح فلزی

در این بخش، توزیع بار را در یک فضای دو بعدی در نظر می‌گیریم. برای سادگی شگل دیسک را یک سطح مربعی به ضلع  $a$  در نظر می‌گیریم که بار  $Q$  روی آن توزیع شده است. میخواهیم چگالی بار روی این دیسک را محاسبه کنیم. ضمناً اگر کار ما درست باشد باید چگالی بار روی لبه‌های دیسک مربعی شکل از وسط دیسک بیشتر و بار چهار گوشه از لبه اضلاع مربع از همه بیشتر باشد چون نوک تیزتری دارد. قبل از این که حل مسئله را شروع کنیم. چند نکته را میبایست در نظر بگیریم. اول اینکه اگر  $n$  بار نقطه‌ای داشته باشیم پتانسیل بخواهیم پتانسیل را در نقطه مورد نظری حساب کنیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$V_x = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \quad (1)$$



شکل ۱.۶: صفحه مربعی شکل بار دار فلزی شامل بیست و پنج مربع کوچک

دوم؛ شکل دیسک مربعی (۷.۱) را که بار دارد را در نظر گیرید. آنرا به قطعات مربع کوچگی تقسیم می‌کنیم. اگر قطعات خیلی بزرگ نباشند می‌توانیم توزیع بار را روی آن مربع‌های کوچک یکنواخت در نظر گیریم! شاید بگوئید که شما از یکنواختی قرار نبود استفاده کنید. بله در یک تکه کوچک این کار جایز است. اما توجه کنید که مقدار بار هر تکه با تکه بعدی متفاوت است. حال بیائید این مسئله که در کتابهای درسی ممکن است گفته شود را حل کنیم:

یک دیسک مربع شکل دارای چگالی بار یکنواخت است و میخواهیم پتانسیل آن را در مرکز خود مربع کوچک بدست آوریم:

$$(4\pi\epsilon_0)V_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Q_1}{d^4} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(4\pi\epsilon_0)V_c = -2d \ln(3 - 2\sqrt{2}) \times \frac{Q_1}{d^4} \approx \frac{2.525Q_1}{d}$$

راستی اگر این مربع کوچک بضرع  $d$  هم سطح آن برابر دایره‌ای بشعاع  $\pi R^2 = d^2$  بود در آن موقع پتانسیل در مرکز دایره چقدر بود؟ انتگرال گیری آن ساده است و جواب خواهد بود

$$(4\pi\epsilon_0)V_c = \frac{Q_1}{d^4} 2\sqrt{\pi} \approx \frac{2.544Q_1}{d}$$

بنابراین از نظر محاسباتی زیاد اختلافی ندارند. این نتایج را نگه دارید و میخواهیم از این نتایج برای مسئله اصلی خود استفاده کنیم.

چون مربع‌های کوچک را هم اندازه انتخاب کردیم سطح آنها برابر اما چگالی بار هر کدام متفاوت است. حال بیائید از فرمول (۱) بالا استفاده کنیم و برای هر مربع کوچک با توجه به اثر سایر مربعات دیگر و خود مربع، پتانسیل را در مرکز هریک از مربع‌ها محاسبه کنیم. مربع اصلی را به  $n$  مربع کوچک تقسیم می‌کنیم. اگر هر ضلع مربع بزرگ را به  $m$  قطعه تقسیم کنیم، طول هر ضلع مربع کوچک برابر  $\frac{a}{m}$  و کل تعداد مربع‌ها  $n = m^2$  خواهد بود. اکنون میخواهیم در مرکز مربع شماره یک پتانسیل را تعیین کنیم. برای ساده شدن مطلب فرض کنید سایر مربعها بارشان در مرکز متتمرکز باشد. بنابراین بار هر کدام اگر مختصات مرکز هر مربع را  $x_n, y_n$  بنامیم میتوانیم بنویسیم.

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ V'_1 + \frac{Q_2}{R_{21}} + \frac{Q_3}{R_{31}} + \dots + \frac{Q_2}{R_{n1}} \right]$$

## نگاهی دوباره به مفاهیم

که در آن  $R_{nm} = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$  و  $V'_n = \frac{2520Q_n}{d}$  فاصله مرکز مربع شماره  $n$  تا مربع شماره  $m$  است. حال برای تک تک هر مربع این را می‌توانیم بنویسیم. توجه کنید که مقدار بار هر مربع کوچک برای ما مجھول است و باید آنرا تعیین کنیم. بنابراین

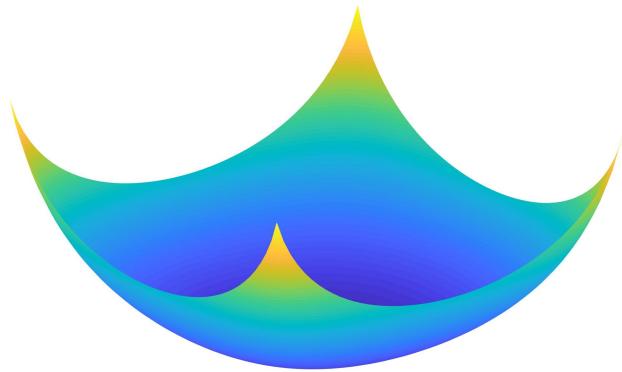
$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ V'_1 + \frac{Q_1}{R_{11}} + \frac{Q_2}{R_{12}} + \cdots + \frac{Q_n}{R_{1n}} \right] \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{R_{21}} + V'_2 + \frac{Q_2}{R_{22}} + \cdots + \frac{Q_n}{R_{2n}} \right] \\ &\vdots = \vdots \\ V_n &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{R_{n1}} + \frac{Q_2}{R_{n2}} + \frac{Q_3}{R_{n3}} + \cdots + V'_n \right] \end{aligned}$$

نکته جالب توجه این که این دیسک مربع شکل هم پتانسیل است. بنابراین اگر پتانسیل آنرا  $V_0$  ولت معلوم فرض کنیم  $V_0 = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$  با معلوم بودن سایر کمیت‌ها بجز بار  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  می‌توانیم با حل  $n$  معادله  $n$  مقادیر مجھولی مجھول را بر حسب  $V_0$  بدست آوریم. اما چون  $V_0$  با دانستن  $Q_i$  تعیین کنیم، یک نتیجه دیگر را هم می‌توانیم محاسبه کنیم: ظرفیت خازنی این دیسک مربع شکل. زیرا

$$C = \frac{Q_0}{V_0}$$

حال بیاید یک صفحه فلزی نازک به ضلع یک متر در نظر بکیریم که بار  $Q$  را روی آن قرار داده‌ایم. میخواهیم توزیع بار را روی سطح آن محاسبه و رسم کنیم. ضمناً ظرفیت خازنی آنرا نیز محاسبه کنیم. بطوری که از شکل بالا پیدا است در چهار گوش دیسک

**Charge Distribution on a Square Plate**



شکل ۷.۱: توزیع بار روی صفحه فلزی مربعی به ضلع یک متر.

مقدار چگالی بار بیش از سایر نقاط است. ضمناً در وسط دیسک چگالی بار از سایر نقاط کمتر است. ظرفیت خازن در حدود  $37/877pF$  تعداد مربع‌های کوچک  $2500$  عدد است. اگر

مايل باشيد می توانيد مطالب مفصل تری در اين زمينه که شرح داده شده است. مطالعه کنيد.

### ۱. اثر بار نقطه‌ای بر بار نقطه‌ای دیگر

بار نقطه‌ای  $Q$  در يک نقطه از سطح دو بعدی در نقطه  $(x, y)$  پتانسیل  $V(x, y)$  را ایجاد می‌کند. يعني

$$V(x, y) = \frac{Q(x', y')}{4\pi\epsilon\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}$$

حالا فرض کنيد چندین بار نقطه‌ای داريم که می خواهيم پتانسیل مجموع آنها در نقطه  $(x, y)$  را بدست آوريم؛

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{Max} \frac{Q(x_n, y_n)}{4\pi\epsilon\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}}$$

اکنون سطح مربع شکل فلزی که بار  $Q$  روی آن توزيع شده مانند شکل (۷.۱) در نظر گيريد. فرض کنيد هر کدام از اين مربع‌های کوچک داراي بار يکنواخت دارد و مختصات مرکز هر مربع را  $(x_n, y_n)$  مجموع کل را  $Max$  در نظر می‌گيريم. مثلاً در شکل  $Max = 25$  است. ضمناً فرض کنيد پتانسیل صفحه  $V$  است. اکنون فرض کنيد تمام سطح‌ها با هم برابر هستند. اگر سطح کل  $S$  باشد، در اين صورت

$$\Delta x = \Delta y = \sqrt{\frac{S}{Max}}$$

بعثت کوچک بودن مربع‌ها، چگالي توزيع بار هر يک از آنها را يکنواخت در نظر می‌گيريم، مثلاً بار مربع شماره  $n$  که مختصات مرکز آن  $(x_n, y_n)$  است، چگالي بار آنرا  $\sigma_n(x_n, y_n)$  می‌ناميم بنابراین پتانسیل ناشی از تک تک همه مربع‌ها در نقطه  $y$  در روی صفحه خواهد بود:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{Max} \frac{Q(x_n, y_n)}{4\pi\epsilon\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}} = \sum_{n=1}^{Max} \frac{\sigma_n(x_n, y_n)\Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon\sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}}$$

حال پتانسیل صفحه را مربعی شکل را  $V_0 = 1 \text{ volts}$  فرض کنيد. يعني تمام مربع‌های کوچک داراي پتانسیل  $V_0$  هستند. بنابراین می توانيم پتانسیل در روی يکی از مربع‌های کوچک مثلًا  $(x_m, y_m)$  را بصورت زير بنويسيم

$$V_0(x_m, y_m) = V_0 = \sum_{n=1}^{Max} \frac{\sigma_n(x_n, y_n)\Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon\sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}}$$

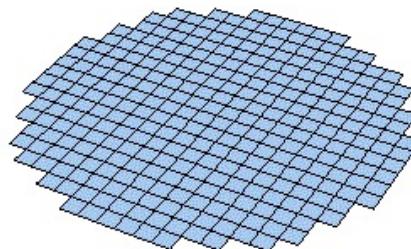
اگر این رابطه را برای تک تک مربع‌ها بنویسیم، یک دستگاه معادلات خطی بصورت زیر خواهیم داشت

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{Max} \frac{\sigma_n(x_n, y_n) \Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon \sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2}} \\ V_2 = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2}}^{Max} \frac{\sigma_n(x_n, y_n) \Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon \sqrt{(x_2 - x_n)^2 + (y_2 - y_n)^2}} \\ \vdots \\ V_m = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{Max} \frac{\sigma_n(x_n, y_n) \Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}} \\ \vdots \\ V_{Max} = \sum_{n=Max}^{Max} \frac{\sigma_n(x_n, y_n) \Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon \sqrt{(x_{Max} - x_n)^2 + (y_{Max} - y_n)^2}} \end{array} \right.$$

در حل این دستگاه معادلات خطی به معضلی برخورد می‌کنیم و آن وقتی است که  $m = n$  یعنی درایه‌های قطر ماتریس است. در این حالت عدد تقسیم بر صفر می‌شود و با مشکل روبرو می‌شویم. مفهوم این درایه این است میباشد اثر توزیع بار خود قطعه شماره  $n$  را روی مرکز خودش محاسبه کنیم. نه بار نقطه‌ای خود روی خود. اصطلاحاً گفته می‌شود که با نقطه تکین<sup>۳</sup> مواجه هستیم. برای حل این مطلب اثر این انتگرال را بدین نحو محاسبه می‌کنیم. فرض کنید  $\Delta x = \Delta y = D$

$$V_{m=n} = \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{\sigma_{m=n} dx dy}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2}} \approx \frac{0.28\sigma D}{\epsilon}$$

اکنون بیائید این روابط را برای دیسک مدور که جوابی آنالیتیک و دقیق دارد، تحقیق کنیم. یک دیسک مدور بشعاع  $a$  در نظر گیرید. آنرا به قطعه‌های کوچک چهار گوش، مانند شکل (۸.۱)، تقسیم می‌کنیم. با توجه به رابطه‌های بالا، برنامه



شکل ۸.۱: صفحه مدور باردار بشعاع  $a$

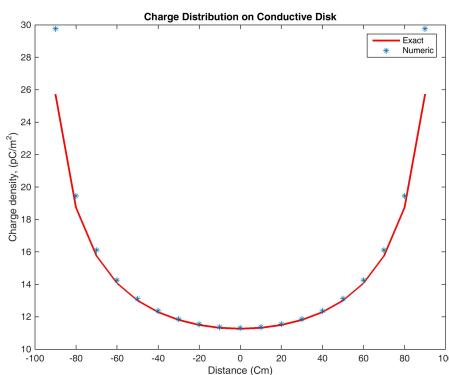
<sup>۳</sup>Singularity Point

کامپیوتری می‌نویسیم که این دستگاه معادلات خطی را حل کند. فرض کنید شعاع دیسک دور  $a = 1$  متر و  $\epsilon_0 = \epsilon$  است. شعاع این دیسک را به ۵ قسمت تقسیم می‌کنیم، یعنی  $D = a/10$  بنا براین دایره تقریباً با تعداد ۳۱۷ مربع تشکیل می‌شود.

رابطه آنالیتیک توزیع چگالی بار روی دیسک از رابطه

$$\rho_s = \frac{4\epsilon_0 V_0}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}$$

بدست می‌آید. در شکل (۹.۱) توزیع بار روی قطر دیسک بروش دقیق، مثلاً روی محور  $x$ ‌ها، و روش تقریبی رسم شده است. همان‌طوری که مشاهده می‌کنید، روش تقریبی و روش دقیق سازگاری خوبی دارند. در لبه‌ها چگالی بار بسیار زیاد و در وسط دیسک کمینه است.



شکل ۹.۱: چگالی توزیع بار الکتریکی روی صفحه دور بشعاع  $a$

## ۲. اثر بار سطحی یک قطعه بر نقطه مرکز قطعه دیگر

همان‌طوری که برای میله فلزی یک بعدی بیان شد، این روش تقریبی خیلی دقیق نیست و بار سطحی هر قطعه را در مرکز قطعه قزاردادیم و اثر نقطه به نقطه عمل کردیم. اکنون بیانید کمی دقت کار خود را بالا ببریم و اثرباره بار سطحی یک قطعه در مرکز قطعه دیگر محاسبه کنیم. بدیهی است که باید انتگرال‌گیری در سطح انجام دهیم. یعنی

$$V(x_m, y_m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_n-d/2}^{x_n+d/2} \int_{y_n-d/2}^{y_n+d/2} \frac{\sigma_n(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2}}$$

که در آن  $d$  ضلع هر قطعه مربع شکل با مرکز  $x_m, y_m$  و  $x_n, y_n$  مرکز قطعه مورد نظر است.

## ۳. اثر بار سطحی یک قطعه بر سطح قطعه دیگر

در صورتی که بخواهیم هر جزء از یک قطعه را در مقابل جزء قطعه دیگر اثر دهیم، بدیهی که نسبت به نقطه مشاهد نیز باید انتگرال‌گیری کنیم. بنا براین در این حالت خواهیم داشت:

$$V_{\circ} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{x_m-d/2}^{x_m+d/2} \int_{y_m-d/2}^{y_m+d/2} \int_{x_n-d/2}^{x_n+d/2} \int_{y_n-d/2}^{y_n+d/2} \frac{\sigma_n(x', y') dx dy dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید تعداد انتگرال‌های زیاد و زمان برخواهد بود. بعضی وقت‌ها مجبوریم از روش‌های عددی انتگرال‌گیری استفاده کنیم، که خود زمان اجرای برنامه را طولانی خواهد کرد. اگر مسائل دیالکتریک داشته باشیم، مجبوریم از حجم استفاده کنیم، در آن صورت برای چنین حالتی مجبوریم شش انتگرال پشت سر هم را محاسبه کنیم!

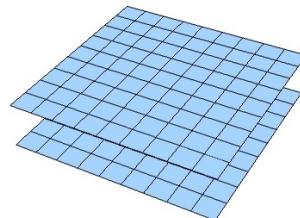
لازم به یادآوری است که در حل مسائل بالا، توزیع چگالی بار را روی قطعات یکنواخت فرض کردیم. اما این ممکن است جواب خیلی دقیقی بما ندهد، بنابراین بعضی وقت‌ها دانشمندان ریاضی توابع خاصی نسبت به نوع مسئله مطرح می‌کنند که آن تابع خود بر زمان اجرای کل برنامه تاثیر دارد.

۱. مسئله: یک دیسک فلزی بشعاع یک متر ( $a = 1m$ ) در نظر گیرید. با یک روش تقریبی ظرفیت این دیسک را بدست آورده و سپس با استفاده رابطه دقیق  $C_{disk} = 8\epsilon a$  جواب خود را ارزیابی کنید.

۲. مسئله: یک صفحه مربع پلی‌پلی یک متر و به پتانسیل یک ولت در نظر گیرید. توزیع چگالی بار را روی آن محاسبه کرده و ظرفیت ( $C = q/V$ ) آنرا محاسبه کنید.

۳. مسئله: دو صفحه موازی فلزی مربع شکل به طول  $L$  و به فاصله  $d$  در هوا تشکیل یک خازن می‌دهند. اگر اختلاف پتانسیل بین دو صفحه  $V$  باشد، منحنی تغییرات ظرفیت نرمالیزه  $C/C_0$  را نسبت به فاصله نرمالیزه  $d/L$  محاسبه و رسم کنید.

$$\epsilon_0 \frac{L}{d}$$



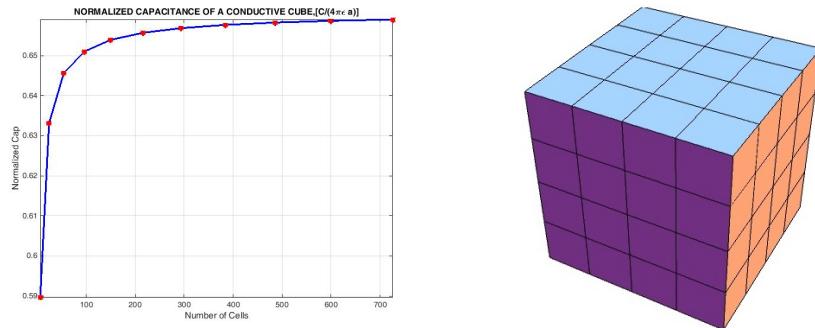
شکل ۱۰.۱: خازن با صفحات موازی مربع شکل و فاصله هوایی

۴. مسئله: یک مکعب فلزی به ضلع یک متر در نظر گیرید. ظرفیت نرمالیزه  $C/(4\pi\epsilon a)$  را نسبت به تعداد قطعات رسم کرده و نشان دهید چگالی بار در رئوس بیشترین و در وسط اضلاع مکعب کمترین مقدار هستند.

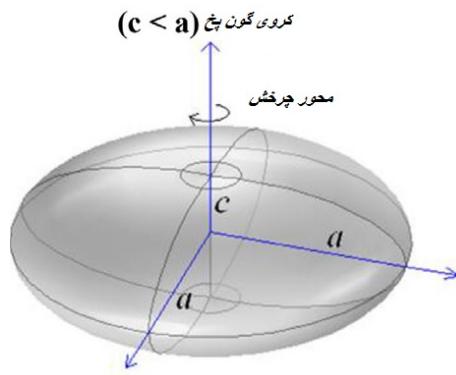
### ۲.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی یک کروی گون پخ فلزی

یک کروی گون (اسفروئید) پخ<sup>۴</sup> فلزی مانند شکل (۳.۲) در نظر می‌گیریم. رابطه دستگاه

<sup>۴</sup> Oblate Spheroid



شکل ۱۱.۱: مکعب فلزی و ظرفیت نرمالیزه آن



شکل ۱۲.۱

مختصات کروی‌گون پخ و دکارتی بصورت زیر است

$$\begin{aligned} x &= f \left[ (1 - \eta^2)(\xi^2 + 1) \right]^{1/2} \cos \phi \\ y &= f \left[ (1 - \eta^2)(\xi^2 + 1) \right]^{1/2} \sin \phi \\ z &= f \xi \eta \end{aligned} \quad (۲۱.۱)$$

و رابطه آن با مختصات استوانه‌ای

$$\begin{aligned} \rho &= f \left[ (1 - \eta^2)(\xi^2 + 1) \right]^{1/2} \\ \phi &= \phi \\ z &= f \xi \eta \end{aligned} \quad (۲۲.۱)$$

می‌خواهیم میدان الکترواستاتیک اطراف یک کروی‌گون پخ فلزی که دارای پتانسیل  $V_0$  است را محاسبه کنیم. شرایط مرزی زیر به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 & V &= V_0 \\ \xi &\rightarrow \infty & V &= 0 \end{aligned}$$

معادله لاپلاس در مختصات کروی گون پخ بصورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( (1 - \eta^2) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 + 1) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \quad (23.1)$$

چون پتانسیل اطراف کروی گون پخ فقط تابع  $\phi$  است، بنابراین

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 + 1) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (24.1)$$

و جواب کلی این معادله دیفرانسیل خواهد بود:

$$V = A \tan^{-1}(\xi) + B \quad (25.1)$$

با اعمال شرایط مرزی بالا

$$A = \frac{V_0}{\tan^{-1}(\xi_0) - \pi/2}, \quad B = -\frac{A\pi}{2} \quad (26.1)$$

و میدان الکتریکی برابر است با:

$$E = -\nabla V = -a_\xi \frac{1}{h_\xi} \frac{dV}{d\xi} \quad (27.1)$$

یا

$$E_\xi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{-V_0}{(\tan^{-1} \xi - \pi/2)(1 + \xi^2)} \quad (28.1)$$

و با ساده کردن

$$E_\xi = \frac{1}{a \sqrt{(1 + \xi^2)(\xi^2 + \eta^2)}} \frac{-V_0}{(\tan^{-1} \xi - \pi/2)} \quad (29.1)$$

و چگالی بار سطحی را می‌توانیم از رابطه  $\rho_s = D_n = \epsilon E_\xi$  محاسبه کنیم

$$\rho_s = \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(1 + \xi^2)}} \frac{-\epsilon V_0}{a[\tan^{-1} \xi_0 - \pi/2]} \quad (30.1)$$

و بازاء  $\eta = \pm 1$  مقدار چگالی بار سطحی کمینه  $\rho_{sMin}$  و بازاء  $\eta = 0$  مقدار چگالی بار سطحی بیشینه  $\rho_{sMax}$  خواهد بود.

$$\rho_{sMin} = \frac{1}{(1 + \xi_0^2)} \frac{-\epsilon V_0}{a[\tan^{-1} \xi_0 - \pi/2]} \quad (31.1)$$

$$\rho_{sMax} = \frac{1}{a \xi_0 \sqrt{1 + \xi_0^2}} \frac{-\epsilon V_0}{[\tan^{-1} \xi_0 - \pi/2]} \quad (32.1)$$

وقتی  $\phi = 0$  شود، گروی گون پخ فلزی به دیسک فلزی تبدیل می‌شود، بنابراین چگالی بار سطحی برای دیسک خواهد بود:

$$\rho_s = \frac{2\epsilon V_0}{a\pi\eta} \quad (33.1)$$

اما میدانیم

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = a^2(1 - \eta^2)(1 + \xi^2)$$

و برای دیسک

$$\eta = \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2}$$

با جا گذاری در رابطه ۳۴.۱ توزیع بار در روی دیسک خواهد بود

$$\rho_s = \frac{4\epsilon V_0}{\pi \sqrt{a^2 - \rho^2}} \quad (34.1)$$

بطوری که مشاهده می‌کنید چگالی بار در مرکز دیسک کمترین و در لبه‌ها بینهایت است. لازم بذکر است که عملأ هیچگاه دیسکی با ضخامت صفر وجود ندارد. ضمناً این توزیع برای دیسک دو رویه است. درصورتی که بخواهیم برای یک دیسک یک رویه محاسبه کنیم. خواهیم داشت:

$$\rho_s = \frac{4\epsilon V_0}{\pi \sqrt{a^2 - \rho^2}} \quad (35.1)$$

برای پیدا کردن ظرفیت، از رابطه  $C = \frac{Q}{V_0}$  استفاده می‌کنیم.

$$Q = \iint \rho_s ds$$

مسئله:

۱. یک سطح فلزی کروی گون پخ به قطر بزرگ  $2A$  و قطر کوچک  $2B$  مفروض است. ظرفیت این سطح فلزی را محاسبه کنید.

۲. یک دیسک فلزی بشعاع  $a$  مفروض است، ظرفیت آنرا محاسبه کنید.

جواب:  $\frac{8\epsilon a}{3}$

### زنگ تفریح

■ یک کمربند به دور کره زمین فرض کنید. حال اگر یک متر به طول این کمربند اضافه کنیم، در فاصله‌ای که بین کمربند و سطح کره زمین بوجود می‌آید آیا

الف: مورچه می‌تواند عبور کند؟ (عبور مورچه حدود یک میلی متر)

ب: سوسک می‌تواند عبور کند؟ (حدود پنج میلی متر)

ج: موش می‌تواند عبور کند؟ (حدود دو سانتی‌متر)

د: گربه می‌تواند عبور کند؟ (حدود پانزده سانتی‌متر)

جواب :

★ می‌دانیم محیط یک دایره برابر است با

$$C = 2\pi R$$

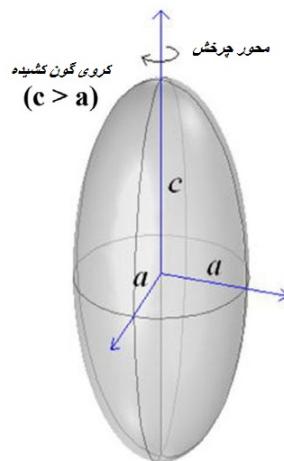
اگر نسبت به  $R$  مشتق بگیریم می‌توان نوشت

$$\Delta C = 2\pi \Delta R \implies \Delta R = \frac{\Delta C}{2\pi} = \frac{1^{..}}{2\pi} = 15/9 [cm]$$

بنابراین گربه براحتی می‌تواند عبور کند!

### ۳.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی یک کروی گون کشیده فلزی

یک سطح کروی گون کشیده فلزی مطابق شکل (۸.۲) درنظر گیرید. می خواهیم توزیع چگالی بار را روی این کروی گون کشیده بدست آوریم.



شکل ۱۳.۱:

روابط تبدیل مختصات کروی گون کشیده و دکارتی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x &= f [(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)]^{1/2} \cos \phi \\ y &= f [(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)]^{1/2} \sin \phi \\ z &= f \xi \eta \end{aligned} \quad (۳۶.۱)$$

و معادله لاپلاس خواهد بود

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( (\xi^2 - 1) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\eta^2 - 1) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1)} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \quad (۳۷.۱)$$

در این مسئله، تغییرات نسبت به  $\phi$  نداریم. معادله لاپلاس برای کروی گون کشیده برابر است با:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 - 1) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (۳۸.۱)$$

شرایط مرزی زیر را برای این کروی گون کشیده فلزی در نظر می گیریم

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 & V = V_0 \\ \xi \rightarrow \infty & V = 0 \end{cases} \quad (۳۹.۱)$$

و جواب معادله (۳۸.۱) با توجه به شرایط مرزی برابر است با:

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)}{\ln\left(\frac{\xi_0-1}{\xi_0+1}\right)} \quad (40.1)$$

و میدان الکتریکی خواهد بود

$$E_\xi = -\frac{1}{h_\xi} \frac{dV}{d\xi} \quad (41.1)$$

که پس از ساده کردن

$$E_\xi = \frac{2V_0}{a\sqrt{(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \eta^2)} \ln\left(\frac{\xi_0-1}{\xi_0+1}\right)} \quad (42.1)$$

چگالی بار سطحی بیشینه بازاء  $\eta = \theta$  (مطابق با زاویه‌های  $\pi = 0^\circ$ ) بدست می‌آید و برابر است با:

$$\rho_{sMax} = D_n = \epsilon E_\xi = \frac{2\epsilon V_0}{a\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1} \ln\left(\frac{\xi_0-1}{\xi_0+1}\right)} \quad (43.1)$$

چگالی بار سطحی کمینه بازاء  $\eta = \pi/2$  (مطابق با زاویه  $1^\circ$ ) بدست می‌آید و برابر است با:

$$\rho_{sMin} = \frac{2\epsilon V_0}{a(\xi_0^2 - 1) \ln\left(\frac{\xi_0-1}{\xi_0+1}\right)} \quad (44.1)$$

در اینجا نیز متذکر می‌شویم که بار در نقاطی که شعاع انحنای کمتری دارند، بیشتر متتمرکز می‌شوند.

**مسئله:**

۱. یک سطح فلزی کروی گون کشیده به قطر بزرگ  $2A$  و قطر کوچک  $2B$  مفروض است. ظرفیت این سطح فلزی را محاسبه کنید.

۲. با توجه به رابطه (۴۲.۱)، با رسم یک منحنی نقاط کمینه و بیشینه چگالی بار الکتریکی را نشان دهید.

### ۴.۳.۱ توزیع بار الکتریکی در روی یک جسم فلزی

وقتی وارد مباحثت برق شدیم با مفهوم میدان الکتریکی و پتانسیل برای یک بار نقطه‌ای آشنا شدیم؛ رابطه اصلی بار الکتریکی و پتانسیل را برایمان گفتند:

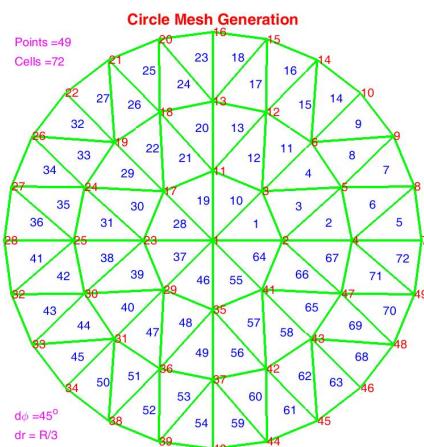
$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho_v dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (45.1)$$

موقعی که این رابطه را خواهد در فیزیک الکتریسته و یا در الکترومغناطیس می‌خواندیم، همیشه مسئله‌ای که در کلاس مطرح می‌شود این بود که چگالی بار طولی، سطحی یا حجمی را داریم و اکثراً هم یکنواخت بود و در فلان نقطه پتانسیل را می‌باشد پیدا کنیم. اما

کمتر استادی یا کتابی در سطح کارشناسی بیان می‌شود که این هیچوقت در طبیعت پیدا نمی‌شود، و اگر صحبت از فلز می‌شد، فقط بعضی وقت‌ها می‌گفتند، نه اینکه اثبات کنند، بار در نقاط نوک تیز بیشتر جمع می‌شود. در برخی از کتب نیز دو کره فلزی یکی کوچک و یکی بزرگ رسم می‌شد که با سیم نازکی این دو بهم وصل می‌شد و ثابت می‌کردند که چگالی بار در روی کره با ساع کوچکتر بیشتر از چگالی بار روی کره با ساع بزرگ‌تر. چیزی که حرفی از آن بیان نمی‌آمد اینکه خود سیم واسط پس چه نقشی دارد؟ و چون نازک است پس چرا نگوئیم بار در روی سیم نازک جا خوش می‌کند و هم آنجا می‌ماند. چرا برود روی کره کوچکتر جا خوش کند!

در این قسمت می‌خواهیم یک توزیع بار الکتریکی را در روی جسم فلزی حساب کنیم. بدیهی است که چگالی بار سطحی در هر نقطه از سطح موردنظر ما است. هر قدر بار زیادتر باشد، البته پتانسیل هم بیشتر است. بیائید فرض کنیم که پتانسیل جسم فلزی برای ما معلوم و مجھول ما توزیع بار و سپس کل بار است. اگر کل بار را حساب کنیم، آنوقت ظرفیت  $C = \frac{q}{V}$  جسم را هم می‌توانیم بدست آوریم. این مسئله خلاف مسائل معمول در کتاب الکتریسته یا الکترومغناطیس است. اگر در رابطه (۴۵.۱) پتانسیل را داشته باشیم و بخواهیم چگالی بار را پیدا کنیم به چنین معادله‌ای معادله انتگرالی می‌گویند. این جا است که همه از دستش فرار می‌کنند و عطایش را به لقایش می‌بخشند! ولی شما نترسید با همان ریاضیات ساده اولیه دبیرستانی می‌توانیم به چنگ این معادله انتگرالی برویم.

خوب برای ساده تر شدن مطلب یک سطح دو بعدی یا یک میله یک بعدی در نظر می‌گیریم. ابتداء سطح جسم را به قطعات کوچک تقسیم، سپس شماره گذاری کرده و اگر سطح آن قطعه را در چگالی آن قطعه ضرب کنیم، بار آن قطعه خواهد بود که بعنوان بار مجھول به صورت بار نقطه‌ای (بطور تقریبی) در مرکز آن قطعه قرار می‌دهیم. برای مثال یک سطح دایره مانند شکل (۱۴.۱) در نظر گیرید. بار هر قطعه را بصورت



شکل ۱۴.۱: قطعات مثلث تشکیل دهنده سطح یک دیسک باردار

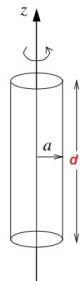
بار نقطه‌ای در مرکز مثلث‌ها قرار میدهیم. این بارهای نقطه‌ای از ضرب چگالی بار سطحی

هر قطعه که ثابت فرض می‌کنیم در سطح مثلث بدهست می‌آید، لذا با یک سری بار نقطه‌ای سر و کار داریم.

### مسئله

قبل از اینکه به خواهیم توزیع چگالی بار روی سطح یک میله فلزی یا توزیع بار روی یک صفحه فلزی را مطرح کنیم، لازم است ابتداء دو مسئله را که بیشتر در کتاب‌های درسی عنوان می‌کنند مطرح و برای توزیع غیر یکنواخت بار روی سطوح واقعی از آنها استفاده کنیم.

یک میله بطول  $d$  به شاعع  $a$  در نظر گیرید، شکل (۱۵.۱). فرض کنید که چگالی بار روی سطح این میله  $\sigma$  و یکنواخت است. می‌خواهیم در مرکز میله که روی محور  $z$  است، پتانسیل را محاسبه کنیم. یک تکه از روی این سطح به مختصات  $z, \phi, a$  به مقدار  $ds = ad\phi dz$  در مرکز این میله پتانسیل  $dV$  را تولید می‌کند



شکل ۱۵.۱: استوانه مدور با چگالی بار یکنواخت

$$dV = \frac{\sigma ad\phi dz}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + z^2}}$$

بنابراین

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sigma a d\phi dz}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{a\sigma}{2\epsilon} \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + d^2} + d}{\sqrt{4a^2 + d^2} - d} \right) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + d^2} + d}{\sqrt{4a^2 + d^2} - d} \right) \quad (۴۶.۱)$$

که  $\sigma$  چگالی بار سطحی میله و  $\rho_L$  چگالی بار طولی است. این جواب را در توزیع بار روی میله‌ای بطول  $L$  بکار خواهیم برد. اما مسئله دیگر:

یک سطح مربع شکل به ضلع  $d$  که مرکز آن در مبداء مختصات است، در نظر گیرید. فرض کنید که چگالی بار روی این سطح یکنواخت و برابر  $\sigma$  باشد. یک تکه از این سطح به مختصات  $x, y$  در مرکز مختصات پتانسیل  $dV$  را تولید می‌کند، یعنی

$$dV = \frac{\sigma dx dy}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2}}$$

اما می‌دانیم

$$\int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 4d \sinh^{-1}(1) \approx 3.525d$$

بنابراین

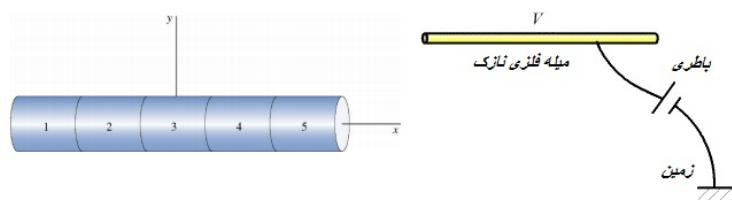
$$V = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sigma dx dy}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2}} \approx \frac{0.28\sigma d}{\epsilon}$$

از این جواب برای توزیع بار روی یک دیسک فلزی استفاده خواهیم کرد.

### ۵.۳.۱ توزیع بار الکتریکی روی سطح میله فلزی نازک

یک میله باریک فلزی بطول  $L$  باردار درنظر گیرید. بدیهی است که توزیع چگالی بار روی این میله یکنواخت نخواهد بود، و می خواهیم این توزیع بار را بدست آوریم. فرض کنید پتانسیل میله فلزی  $V$  و شاعر این میله  $a$  است. اکنون انواع حالت های مختلف تقریب را برای این میله در نظر میگیریم.

۱. تقریب با بار نقطه‌ای برای هر قطعه:  
میله را به قطعات مساوی تقسیم کرده و بار هر قطعه را در مرکز آن قطعه قرار



شکل ۱۶.۱: تقسیم میله فلزی را به قطعات

می دهیم. چگالی بار روی هر قطعه تقریباً یکنواخت و برابر  $\sigma$  کولن بر متر مربع یا  $\rho_L$  کولن بر متر است. پتانسیلی که قطعه  $m$  در نقطه  $x$  ایجاد می کند برابر است با:

$$V(x) = \frac{q_n}{4\pi\epsilon(x - x_n)} = \frac{\sigma_n(2\pi ad)}{4\pi\epsilon(x - x_n)} = \frac{\rho_n d}{4\pi\epsilon(x - x_n)}$$

بنابراین این قطعه در مرکز قطعه  $m$  پتانسیلی را ایجاد می کند، خواهد بود:

$$V_{mn} = \frac{\rho_n d}{4\pi\epsilon(x_m - x_n)}$$

و اگر اثر تمام قطعات را بخواهیم، پتانسیل نهائی خواهد شد

$$V(x_m) = V_0 = \sum_{n=1}^{Max} \frac{\rho_n d}{4\pi\epsilon(x_m - x_n)}$$

در محاسبه این رابطه به مشکلی مواجه می شویم و آن موقعی است که پتانسیل خود قطعه در اثر بار خود قطعه است که نمی توانیم از رابطه

$$V_{nn} = \frac{\rho_n d}{4\pi\epsilon(x_n - x_n)}$$

استفاده کنیم. و بینهایت می شود. (ریاضی دادنها به این وضعیت نقطه تکین می گویند. اثر بار خود قطعه بر خودش را از جواب مسئله ای که قبلًا مطرح کرده بودیم، استفاده می کنیم یعنی رابطه (۴۶.۱)).

اکنون اگر تک تک قطعات را بنویسیم، یک دستگاه معادلات جبری زیر را خواهیم داشت

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{Max} \frac{\rho_n(x_1)d}{4\pi\epsilon|x_1 - x_n|} \\ V_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{Max} \frac{\rho_n(x_2)d}{4\pi\epsilon|x_2 - x_n|} \\ \vdots \\ V_m = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{Max} \frac{\rho_n(x_m)d}{4\pi\epsilon|x_m - x_n|} \\ \vdots \\ V_{Max} = \sum_{i=1}^{Max} \frac{\rho_n(x_{Max})d}{4\pi\epsilon|x_{Max} - x_n|} \end{array} \right.$$

این یک دستگاه معادلات خطی با تعداد  $Max$  مجهول  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{Max}$  خواهیم داشت.

ماتریس آن به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} S & \frac{d}{4\pi\epsilon|x_1 - x_1|} & \cdots & \frac{d}{4\pi\epsilon|x_1 - x_{Max}|} \\ \frac{d}{4\pi\epsilon|x_1 - x_1|} & S & \cdots & \frac{d}{4\pi\epsilon|x_1 - x_{Max}|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d}{4\pi\epsilon|x_{Max} - x_1|} & \frac{d}{4\pi\epsilon|x_{Max} - x_1|} & \cdots & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{Max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{Max} \end{bmatrix}$$

که در آن درایه‌های قطر برابر است با (رابطه ۴۶.۱):

$$S = V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + d^2} + d}{\sqrt{4a^2 + d^2} - d} \right)$$

اکنون این دستگاه معادلات را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$[A][X] = [B]$$

(۴۷.۱)

که در آن  $[A]$  یک ماتریس  $Max \times Max$  و  $[X]$  و  $[B]$  بردارهای با  $Max$  عنصر، بنابراین  $j = 1, 2, \dots, Max$  برای  $B_j = V_j$  و  $i = 1, 2, \dots, Max$  و  $X_i = \rho_i$  ،  $A_{ij} = \frac{d}{4\pi\epsilon|x_i - x_j|}$  است. بنابراین حل مسئله

$$[X] = [A]^{-1}[B]$$

(۴۸.۱)

بخاطر داشته باشید که عناصر قطر ماتریس با استفاده از رابطه (۴۶.۱) محاسبه می‌شود. به نقاط نزدیک دو سر میله توجه کنید که چگالی بار از نقاط وسط میله بسیار بیشتر است. یعنی بار در نقاط نوک بیشتر جمع می‌شود.

## ۲. تقریب با بار سطحی برای هر قطعه:

در تقریب قبلی بار هر قطعه را در مرکز قطعه فرض کردیم و اثر آنرا روی مرکز قطعات دیگر بحساب آوردیم. بدیهی است که این تقریب زیاد خوبی نیست، زیرا بار در روی نقاط مختلف سطح قطعه تجمع کرده است. بنابراین بهتر است اثر تکه تکه‌های هر قطعه را در مرکز قطعه دیگر بدست آوریم. البته این بهتر است، اما بهترین نخواهد بود. واضح است که میباشد انتگرال‌گیری کنیم؛ یعنی پتانسیلی که قطعه  $m$  در مرکز قطعه  $m$  ایجاد می‌کند:

$$V(x_m) = \frac{\rho_n d}{4\pi\epsilon} \int_{x_n-d/2}^{x_n+d/2} \frac{dx'}{\sqrt{a^2 + (x_m - x')^2}}$$

در این حالت هم اثر خود قطعه در مرکز خود قطعه از رابطه (۴۶.۱) استفاده می‌کنیم.

جواب انتگرال بالا را با تغییر متغیر می‌توانیم از رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln[u + \sqrt{a^2 + u^2}] \quad (49.1)$$

## ۳. تقریب با اثر بار سطحی هر نقطه از یک قطعه بر هر نقطه از سطح قطعه دیگر

این تقریب از دو تقریب دیگر بهتر است و در ریاضیات به آن روش گالرکین<sup>۵</sup> می‌نامند.

در اینجا بجای یک انتگرال دو انتگرال بصورت زیر خواهیم داشت

$$V = \frac{\rho_n d}{4\pi\epsilon} \int_{x_n-d/2}^{x_n+d/2} \int_{x_m-d/2}^{x_m+d/2} \frac{dxdx'}{\sqrt{a^2 + (x - x')^2}}$$

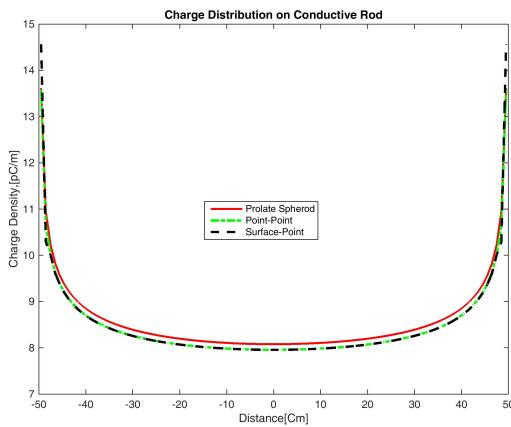
$$\int \int \frac{dudv}{\sqrt{a^2 + (u+v)^2}} = \sqrt{a^2 + W^2} - W \ln(W + \sqrt{a^2 + W^2}); \quad W = u + v \quad (50.1)$$

اکنون یک برنامه کامپیوتی در نرم افزار متلب می‌نویسیم تا توزیع بار را روی میله بdst آوریم. یک میله بطول  $L = 1$  متر و بشاعر یک میلی‌متر ( $a = 1mm$ ) را به را به صد قسمت ( $Max = 100$ ) تقسیم می‌کنیم. نتایج توزیع چگالی بار روی میله فلزی بصورت شکل زیر خواهد بود.

## ۴.۱ کره فلزی در میدان الکتریکی یکنواخت

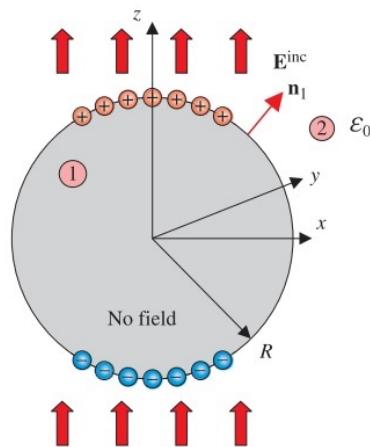
این مسئله را در کتابهای درسی الکترومغناطیس حل کرده‌ایم. اینجا دوباره آنرا مرور می‌کنیم تا جواب‌های روش عددی خود را با آن مقایسه کنیم. در شکل (۱۸.۱) کره‌ای فلزی را مشاهده می‌کنید که در میدان یکنواخت الکتریکی قرار گرفته است. بدیهی است که در اطراف کره بعلت بارهای القائی تغییر می‌کند ولی در نقاط دور از کره میدان بصورت

<sup>5</sup>Galerkin



شکل ۱۷.۱: توزیع چگالی بار طولی روی میله‌ای به طول یک متر و قطر دو میلی متر به روش‌های تقریبی مختلف

ثبت و یکنواخت باقی می‌ماند. کره فلزی در میدان الکترویکی که در جهت  $\hat{z}$  است قرار داده شده و میدان در داخل فلز صفر است. ابتدا بد نیست متذکر شویم که خیلی دور از



شکل ۱۸.۱: کره فلزی در میدان یکنواخت الکترویکی

کره فلزی اثر کره فلزی از بین می‌رود؛ یعنی

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{total}(\mathbf{r}) = E_z \mathbf{a}_z \quad (51.1)$$

این بدین معنی است که در مختصات کروی داریم:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi^{total}(\mathbf{r}) = -E_z z = -E_z r \cos \theta \quad (52.1)$$

تابع  $\psi$  تابع پتانسیل الکترویکی اسکالر است. بنابراین جواب برای پتانسیل الکترویکی پتانسیل الکترویکی خارجی بعلاوه پتانسیل ناشی از دوقطبی الکترویکی به مرکز مبداء

مختصات است که در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

$$\psi^{total}(\mathbf{r}) = -E_r r \cos \theta + \frac{b_1}{r^3} \cos \theta \quad (53.1)$$

در اینجا مقدار  $b_1$  مجھول است. پتانسیل می‌تواند فقط روی روی سطح کره فلزی ثابت باشد. چون روی سطح این وابسته به زاویه  $\theta$  نیست، این می‌دهد.

$$-E_r R + \frac{b_1}{R^3} = 0 \implies b_1 = E_r R^3 \quad (54.1)$$

بنابراین، جواب آنالیتیک بصورت زیر خواهد بود:

$$\psi^{total}(\mathbf{r}) = -E_r r \cos \theta \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (55.1)$$

با گرفتن گرادیان از تابع پتانسیل، می‌توانیم میدان را در تمام فضا بدست آوریم:

$$\mathbf{E}^{total}(\mathbf{r}) = -\nabla \psi^{total}(\mathbf{r}) = E_r \left( 1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \mathbf{a}_r - E_r \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \mathbf{a}_\theta \quad (56.1)$$

وقتی  $r \rightarrow \infty$ ، معادله (51.1) را خواهیم داشت. اکنون چون میدان الکتریکی را داریم، می‌توانیم چگالی بار القائی را طبق قانون گوس بدست آوریم ( $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ ).

$$\lim_{r \rightarrow R} \mathbf{E}^{total}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_r \implies \sigma_s = 2\epsilon_0 E_r \cos \theta \quad (57.1)$$

در شکل (18.1) چگالی بار القائی نشان داده شده است. می‌توان ثابت کرد که کل بار القائی در روی سطح کره صفر است.

$$Q = 2\epsilon_0 E_r R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = 0. \quad (58.1)$$

## ۱.۴.۱ چگالی بار سطحی کره فلزی در میدان الکترواستاتیکی

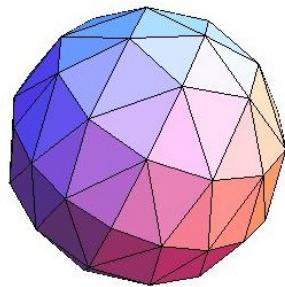
فرض کنید یک کره فلزی به شعاع  $a$  در میدان یکنواخت  $\mathbf{E}_{inc} = E_r \mathbf{a}_z$  قرار دارد. اکنون سطح کره را به مثلث‌های کوچکی مانند شکل (19.1) تقسیم می‌کنیم. در این تقسیم خوانده‌ایم توزیع بار الکتریکی را روی کره محاسبه کرده و با روش دقیق (آنالیتیک) مقایسه کنیم. ذکر چند نکته ضروری است. اگر صفحه باردار یکنواختی داشته باشیم میدان در یک طرف صفحه برابر است با:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \frac{\sigma}{2} \implies E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

از این رابطه برای روش ممان استفاده خواهیم کرد.

سطح کره را به مثلث‌های کوچکی مانند شکل (19.1) تقسیم می‌کنیم. در این تقسیم بندی تعداد مثلث‌ها و مختصات هر رأس باید معلوم باشد. چون این سطوح در میدان الکتریکی قرار گیرند، روی آنها باری القاء می‌شود. فرض کنید چگالی بار سطحی در روی هر مثلث بعلت کوچکی آن یکنواخت باشد. اگر  $N$  تعداد کل مثلث‌ها باشد، میدانی که سبب بوجود آمدن بار روی سطح هر مثلث می‌شود برابر است با:

$$\mathbf{E}_j^{total} = \mathbf{E}_j^{inc} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{E}_i^{tri} \quad (59.1)$$



شکل ۱۹.۱: تقسیم بندی سطح کره فلزی با مثلث های کوچک

که  $\mathbf{E}_j^{total}$  کل میدان در مثلث شماره  $j$ ; و  $\mathbf{E}_j^{inc}$  میدان خارجی و سرانجام  $\mathbf{E}_i^{tri}$  اثر سایر بارهای روی سطح مثلثها است. اگر طرفین این رابطه را در بردار واحد عمود بر سطح  $\mathbf{n}_j$  و  $\epsilon$  ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\epsilon \cdot \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{E}_j^{total} = \epsilon \cdot \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{E}_j^{inc} + \epsilon \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{E}_i^{tri} \quad (60.1)$$

که جمله  $\epsilon \cdot \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{E}_j^{total}$  نمایشگر مقدار چگالی بار سطحی  $\sigma_j / 2$  و جمله های بعدی نمایشگر اثرات سایر مثلثها است. بنابراین:

$$\frac{\sigma_j}{2} = \epsilon \cdot \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{E}_j^{inc} + \epsilon \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\sigma_i \Delta S_i \cdot \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi \epsilon \cdot R^2} \quad (61.1)$$

که در آن  $\Delta S_i$  سطح مثلث  $i$  و

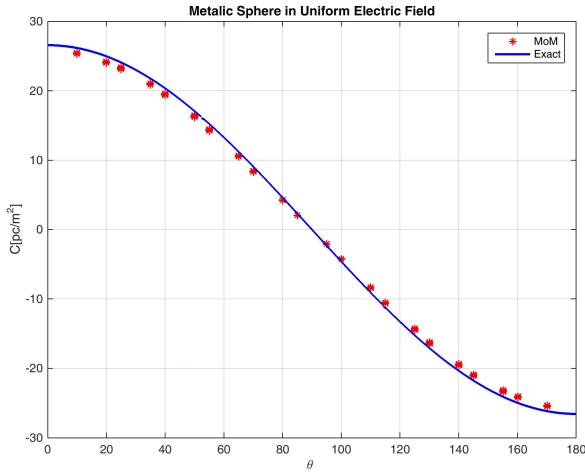
$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{R} = \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|}$$

$$R = |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

اگر  $N = 1, 2, \dots, j$  تغییر کند، یک دستگاه معادلات خطی خواهیم داشت که می توانیم بكمک کامپیوتر آنرا حل کنیم. جواب دقیق ( $\sigma_s = 3\epsilon \cdot E \cdot \cos \theta$ ) است.

## ۵.۱ کره دیالکتریک در میدان الکتریکی یکنواخت

در این حالت برای مطالعه یک قطعه دیالکتریک در میدان الکتریکی یکنواخت، یک کره دیالکتریک به گذردهی الکتریکی نسبی  $\epsilon_r$  را در میدان الکتریکی  $\mathbf{E}^{inc} = E \cdot \mathbf{a}_z$  بشعاع  $R$ ، مانند شکل (۲۱.۱) در نظر می گیریم. می خواهیم میدان های داخل و خارج و قطبی شدگی کره دیالکتریک (P) را محاسبه کرده و سپس از آن یعنوان یک مسئله دقیق برای صحت سنجی روش عددی خود از آن استفاده کنیم. برای ساده شدن مطالب خود کره را در فضای آزاد درنظر می گیریم.



شکل ۲۰.۱: چگالی بر روی سطح کره در میدان  $E_{\circ} = 1 [V/m]$

تابع پتانسیل داخل و خارج کرہ را بصورت زیر می‌نویسیم

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \psi_1(\mathbf{r}) & r < R \\ \psi_2(\mathbf{r}) & r > R \end{cases}$$

که در آن  $\psi_1(\mathbf{r})$  تابع پتانسیل داخل کرہ و  $\psi_2(\mathbf{r})$  تابع پتانسیل خارج کرہ است. باید دو تابع  $\psi_1(\mathbf{r})$  و  $\psi_2(\mathbf{r})$  را بنحوی پیدا کنیم که

- (الف) تابع  $\psi_1(\mathbf{r})$  برای  $r \leq R$  معین باشد.
- (ب) تابع  $\psi_2(\mathbf{r}) + E_{\circ} r \cos \theta$  در بینهایت معین باشد.
- (ج) دو تابع در  $r = R$  برابر باشند، یعنی  $\psi_1(\mathbf{r}) = \psi_2(\mathbf{r})$ .

• (د) برای دو تابع در  $r = R$  داشته باشیم:

$$\epsilon_1 \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r})}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r})}{\partial r}$$

یعنی چگالی شار الکتریکی نرمال،  $D_{n1} = D_{n2}$ ، در دو ناحیه با هم برابر باشد.

با حل معادله لاپلاس در مختصات کروی و با توجه به شرایط بالا

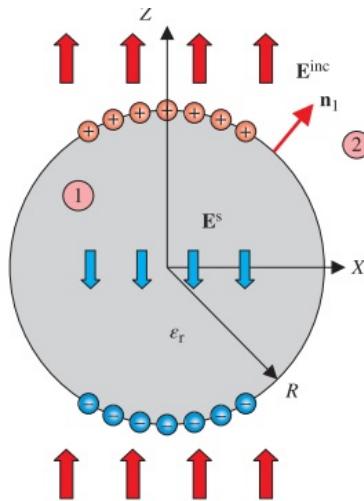
$$\psi_1(r, \theta) = - \left( \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_{\circ} r \cos \theta \quad (62.1)$$

و با گرفتن گرادیان تابع پتانسیل میدان در داخل کرہ دیالکتریک خواهد شد:

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \psi_1 = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_{\circ} \mathbf{a}_z \quad (63.1)$$

و همین طور میدان خارج از کرہ خواهد شد:

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \psi_2$$



شکل ۲۱.۱: کره دیالکتریک در میدان یکنواخت

$$\psi_2(r, \theta) = - \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) \frac{R^3}{r^3} \right] E_0 r \cos \theta \quad (۶۴.۱)$$

و گشتاور دوقطبی الکتریکی کره خواهد شد:

$$\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 R^3 \mathbf{a}_z \quad (۶۵.۱)$$

چون چگالی گشتاور دوقطبی الکتریکی کره ثابت است، بنابراین

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{P}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\epsilon_2 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 \mathbf{a}_z \quad (۶۶.۱)$$

در حل صحت سنجی حل عددی مسائل از این روابط زیاد استفاده خواهیم کرد. ضمناً چگالی بار سطحی مقید را نیز می‌توان برای کره بدست آورد

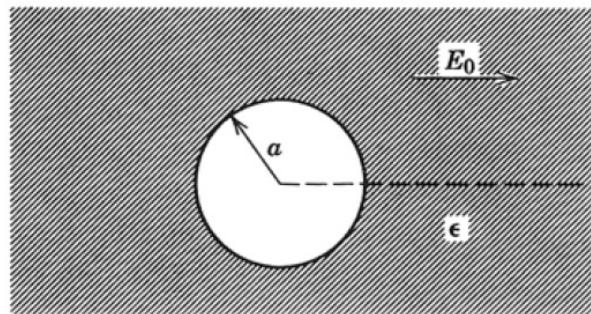
$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = 3\epsilon_2 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 \cos \theta \quad (۶۷.۱)$$

در شکل (۲۲.۱) یک محفظه کروی توخالی در داخل یک دیالکتریک با میدان الکتریکی یکنواخت را نشان میدهد. میدان الکتریکی در خارج محفظه کروی برابر  $E_0$  و میدان داخل محفظه برابر است با:

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3\epsilon_r}{2\epsilon_r + 1} \mathbf{E}_0 \quad (۶۸.۱)$$

$$\mathbf{E}_{in} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (۶۹.۱)$$

اگر کره در فضای آزاد باشد  $\epsilon_2 = \epsilon_0$  است.



شکل ۲۲.۱: محفظه کروی در داخل یک دیالکتریک با میدان الکتریکی یکنواخت

### ۱.۵.۱ یک قطعه دیالکتریک در میدان الکترومغناطیسی

یکی از مسائل مهم در الکترومغناطیس پیدا کردن میدان الکترومغناطیسی داخل و خارج یک جسم دیالکتریک که تحت تاثیر یک میدان الکتریکی ساکن یا میدان متغیر نسبت به زمان مثل وجود یک آنتن در مقابل سر یا بدن انسان را بدست آوریم. در این بخش یک جسم دیالکتریک همراه با تلفات مانند بدن انسان را در معرض میدان الکترومغناطیسی بدست میآوریم و در حالت خاص میتوانیم با تغییرات جزئی آنرا برای میدان الکترواستاتیکی بسط و نتیجه‌گیری کنیم.

قبل از اینکه وارد بحث الکترومغناطیس شویم، بهتر است چند جمله‌ای در مورد تابع گرین صحبت کنیم. تابع گرین پاسخ ضربه‌ای یک سیستم خطی است. در درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها در فضای زمان بود و اینجا جایش را در الکترومغناطیس به مکان داده است. آنجا یک پالس باریک بود و اینجا یک بار نقطه‌ای یا یک آنتن هرتز است. در آنجا اگر سیستم خطی مستقل زمان بود انتگرال کانونش برابر پاسخ هر تابع دیگری با پاسخ ضربه‌ای استفاده میکردیم و اینجا اگر محیطی خطی و همگن داشته باشیم، پاسخ هر آنتنی را میتوانیم پیدا کنیم. اما در الکترومغناطیس آنتن یا بار نقطه‌ای که بعنوان تابع ضربه‌ای استفاده میکنیم جهت دارد این مطلوبی است که در سیگنال و سیستم نداشتم. مثلاً اگر یک آنتن کوچک هرتز که در جهت  $\hat{z}$  است را جلو قطعه دیالکتریک قرار دهیم، پاسخ و جواب در هر نقطه از فضا، فقط در جهت  $\hat{z}$  نخواهد بود و در جهت  $\hat{x}$  و  $\hat{y}$  نیز مولفه خواهیم داشت. بنابراین با سه تابع گرین مواجه هستیم. این در الکترومغناطیس برایمان جدید خواهد بود و بد نیست بگوئیم که اگر آنتن جهتی قرار گیرد که بتوانیم به سه مولفه تجزیه کنیم، در آن صورت با نه تابع گرین اسکالر که به صورت ماتریس بیان میشوند مواجه هستیم. ریاضیدان‌ها برای این موضوع ریاضیات خاصی نوشته‌اند که به آن دیادیک<sup>۶</sup> بمعنی دوتائی است که میبایست با آنها خود را آماده برای حل مسائل الکترومغناطیس کنیم. اکنون نگاه مختصری به بردارهای یکه  $a_x$ ،  $a_y$  و  $a_z$  به صورت برداری بیاندازیم

در ریاضیات دو بردار  $A$  و  $B$  در نظر گیرید که هریک سه مولفه دارند. سه نوع ضرب

<sup>۶</sup>Dyadic

در بردارها تعریف می‌کنند. ضرب داخلی و خارجی که همه با آن آشنا هستیم

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{a}_x + A_2 \mathbf{a}_y + A_3 \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{B} = B_1 \mathbf{a}_x + B_2 \mathbf{a}_y + B_3 \mathbf{a}_z$$

ضرب داخلی

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

ضرب خارجی

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \mathbf{a}_x + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \mathbf{a}_y + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathbf{a}_z$$

اما ضرب دیگری داریم که هیچ‌گونه علامتی بین دو بردار وجود ندارد و نتیجه آن دیادیک که همان ماتریس است.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}$$

و جابجائی آن با قبلی تفاوت دارد

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} B_1 A_1 & B_1 A_2 & B_1 A_3 \\ B_2 A_1 & B_2 A_2 & B_2 A_3 \\ B_3 A_1 & B_3 A_2 & B_3 A_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\mathbf{a}_x \mathbf{a}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_x \mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب سطر-ستون می‌نویسیم

$$\mathbf{a}_y \mathbf{a}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_y \mathbf{a}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_y \mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_z \mathbf{a}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_z \mathbf{a}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و نمایشگر دیاد واحد است:

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{a}_x \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ضرب داخلی یک بردار در یک دیاد یک بردار است. مثلًا ضرب بردار در دیاد  $\bar{A} = 2a_x a_y + \sqrt{3}a_y a_x + a_z a_z$  برابر است با:

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{A}} = (\sqrt{2}\mathbf{a}_x + \pi\mathbf{a}_y + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{a}_z) \cdot (2\mathbf{a}_x\mathbf{a}_y + \sqrt{3}\mathbf{a}_y\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z\mathbf{a}_z) = \pi\sqrt{3}\mathbf{a}_x + 2\sqrt{2}\mathbf{a}_y + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} \pi\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

اما اگر جابجا کنیم، جواب تغییر می‌کند، ولی باز هم یک بردار است.

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a} = 2\pi\mathbf{a}_x + \sqrt{6}\mathbf{a}_y + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{a}_z = \begin{bmatrix} 2\pi \\ \sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

**مسئله:**

اگر بردارهای  $a = i - 2j + 2k$  و  $b = 4i - 3j$  و دیاد  $M = 3ii + 2ij - ji + kj$  را داشته باشیم، عبارت  $a \cdot 2M \cdot b$  را محاسبه کنید.

**جواب:**  $a \cdot 2M \cdot b = 16$

هنگامی که یک جسم دیالکتریک در معرض میدان الکترومغناطیسی قرار می‌گیرد، جریان معادل  $J_{eq}(r)$  در جسم بوجود می‌آید:

$$\mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}) = \{\sigma(\mathbf{r}) + j\omega[\epsilon_r(\mathbf{r}) - \epsilon_0]\} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (70.1)$$

اولین جمله جریان هدایتی و جمله‌های بعدی مربوط به چگالی جریان قطبی شدگی است. این جریان معادل می‌توانیم میدان پراش  $\mathbf{E}^s$  و  $\mathbf{H}^s$  را با حل معادلات زیر بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}^s &= \mathbf{J}_{eq} + j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^s \\ \nabla \times \mathbf{E}^s &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H}^s \end{aligned} \quad (71.1)$$

که در آن  $\mathbf{E}^s$ ،  $\mathbf{H}^s$  و  $\mathbf{J}_{eq}$  مقادیر مختلط هستند. از رابطه‌های (71.1) به معادلات موج زیر میرسیم

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^s - k_s \mathbf{E}^s &= -j\omega\mu_0 \mathbf{J}_{eq} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}^s - k_s \mathbf{E}^s &= \nabla \times \mathbf{J}_{eq} \end{aligned} \quad (72.1)$$

که در آن  $k_s = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  است. جواب معادله الکتریک موج بالا بقدر زیر است.

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = PV \int_v \mathbf{J}_{eq}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{\mathbf{J}_{eq}}{4\pi\omega\epsilon_0} \quad (73.1)$$

$$\begin{aligned} \text{که در آن } PV \text{ مقدار اصلی انتگرال است و} \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -j\omega\mu_0 \left[ \bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{k_s^2} \right] \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (74.1)$$

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk_s R}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (75.1)$$

و ضمناً  $\nabla \nabla$  یک دیادیک است و گاهی آنرا بصورت تانسوری (با نماد اندیس) می‌نویسند

$$\nabla \nabla = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

هریک از عدهای یک دو و سه نمایشگر محور  $x$ ,  $y$  و  $z$  است که می‌توانیم آنرا بصورت ماتریس نیز نشان دهیم

$$\nabla \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (76.1)$$

تابع گرین دایادیک  $\bar{G}(r, r')$  در معادله بالا یک ماتریس سه در سه است.

$$\begin{bmatrix} G_{xx}(r, r') & G_{xy}(r, r') & G_{xz}(r, r') \\ G_{yx}(r, r') & G_{yy}(r, r') & G_{yz}(r, r') \\ G_{zx}(r, r') & G_{zy}(r, r') & G_{zz}(r, r') \end{bmatrix} \quad (77.1)$$

میدان الکتریکی کل داخل جسم جمع میدان تابشی  $E^i$  و میدان پراش  $E^s$ <sup>۱</sup> است، یعنی

$$E = E^i + E^s \quad (78.1)$$

با ترکیب رابطه (۷۸.۱) و (۷۸.۱) خواهیم داشت:

$$\left[ 1 + \frac{\tau(r)}{3j\omega\epsilon_0} \right] E(r) - PV \int_v \tau(r) E(r') \cdot \bar{G}(r, r') dV' = E^i(r) \quad (79.1)$$

که در آن  $\tau(r) = \{\sigma(r) + j\omega[\epsilon(r) - \epsilon_0]\}$  است. ضرب داخلی  $E(r) \cdot \bar{G}(r, r')$  را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$E(r) \cdot \bar{G}(r) = \begin{bmatrix} G_{xx}(r, r') & G_{xy}(r, r') & G_{xz}(r, r') \\ G_{yx}(r, r') & G_{yy}(r, r') & G_{yz}(r, r') \\ G_{zx}(r, r') & G_{zy}(r, r') & G_{zz}(r, r') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(r') \\ E_y(r') \\ E_z(r') \end{bmatrix} \quad (80.1)$$

اکنون از ریاضیات تانسوری بصورت زیر استفاده می‌کنیم

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

بنابراین ماتریس تابع گرین  $G_{x_i x_j}(r, r')$  به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$G_{x_i x_j}(r, r') = -j\omega\mu_0 \left[ \delta_{ij} + \frac{1}{k_0} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \right] \psi(r, r') \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (81.1)$$

ماتریس رابطه (۸۰.۱) متقارن است. هر مولفه رابطه (۷۹.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[ 1 + \frac{\tau(r)}{3j\omega\epsilon_0} \right] E_{x_i}(r) - PV \int_v \tau(r) \left[ \sum_{j=1}^3 G_{x_i x_j}(r, r') E_{x_j}(r') \right] dV' = E_{x_i}^{inc}(r) \quad i = 1, 2, 3 \quad (82.1)$$

حال بیاید این معادله انتگرالی را با استفاده از روش ممان حل کنیم. جسم مورد نظر را به  $N$  سلول که معمولاً مکعبی شکل است تقسیم و فرض کنید میدان  $E(r)$  و  $\tau(r)$  ثابت

<sup>۱</sup>Dyadic Green's function

<sup>۲</sup>Scattering

است. حجم سلول  $m$  را با  $V_m$  و مرکز آنرا با  $r_m$  نشان می‌دهیم. رابطه (۸۲.۱) را برای سلول‌ها می‌نویسیم

$$\left[ 1 + \frac{\tau(r_m)}{3j\omega\epsilon_0} \right] E_{x_i}(r_m) - \sum_{j=1}^3 \sum_{n=1}^N \left[ \tau(r_n) PV \int_{V_n} G_{x_i x_j}(r_m, r') dV' \right] E_{x_j}(r_n) = E_{x_i}^{inc}(r_m) \quad i = 1, 2, 3 \quad (83.1)$$

بعداز تعریف کمیت زیر

$$\bar{G}_{x_i x_j}^{mn} = \tau(r_n) PV \int_{V_n} G_{x_i x_j}(r_m, r') dV' \quad (84.1)$$

رابطه (۸۳.۱) را بازنویسی می‌کنیم

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{n=1}^N \left[ \bar{G}_{x_i x_j}^{mn} - \delta_{ij} \delta_{mn} \left( 1 + \frac{\tau(r_m)}{3j\omega\epsilon_0} \right) \right] E_{x_j}(r_n) = -E_{x_i}^{inc}(r_m) \quad i = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (85.1)$$

فرض کنید ماتریس  $[G_{x_i x_j}]$  دارای  $N \times N$  عنصر دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_{x_i x_j}^{mn} = \bar{G}_{x_i x_j}^{mn} - \delta_{ij} \delta_{mn} \left[ 1 + \frac{\tau(r_m)}{3j\omega\epsilon_0} \right] \quad (86.1)$$

و فرض کنید بردارهای  $[E_{x_i}^{inc}]$  و  $[E_{x_i}]$  مولفه هستند.

$$[E_{x_i}] = \begin{bmatrix} E_{x_i}(r_1) \\ \vdots \\ E_{x_i}(r_N) \end{bmatrix}, \quad [E_{x_i}^{inc}] = \begin{bmatrix} E_{x_i}^{inc}(r_1) \\ \vdots \\ E_{x_i}^{inc}(r_N) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (87.1)$$

وقتی  $m$  و  $i$  تمام مقادیر ممکن خود را دارند، در این صورت ماتریس زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} [G_{xx}] & [G_{xy}] & [G_{xz}] \\ [G_{yx}] & [G_{yy}] & [G_{yz}] \\ [G_{zx}] & [G_{zy}] & [G_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_x] \\ [E_y] \\ [E_z] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [E_x^{inc}] \\ [E_y^{inc}] \\ [E_z^{inc}] \end{bmatrix} \quad (88.1)$$

یا بطور نمادین رابطه (۸۸.۱) را بصورت زیر نوشت:

$$[G][E] = -[E^{inc}] \quad (89.1)$$

ماتریس  $[G]$  یک ماتریس  $3N \times 3N$  و بردارهای  $[E]$  و  $[E^{inc}]$  هریک  $3N$  مولفه دارند. از حل دستگاه معادلات خطی (۸۹.۱) میدان در مرکز هر سلول را می‌توان بدست آورد.

## ۲.۵.۱ محاسبه عناصر ماتریس

محاسبه رابطه‌های (۸۸.۱) و (۸۶.۱) عناصر ماتریس  $[G_{x_i x_j}]$  را تعریف می‌کند.

$$\bar{G}_{x_i x_j}^{mn} = \tau(r_n) PV \int_{V_n} G_{x_i x_j}(r_m, r') dV' - \delta_{ij} \delta_{mn} \left[ 1 + \frac{\tau(r_m)}{3j\omega\epsilon_0} \right] \quad (90.1)$$

ابتدا عناصر خارج از قطر  $[G_{x_i x_j}]$  را درنظر گیرید. واضح است که  $r_m \notin V_n$  و در نتیجه  $G_{x_i x_j}(r_m, r')$  پیوسته است، بنابراین، می‌توانیم مقدار اصلی جلوی

عملیات را در محاسبه برداریم. رابطه (۹۰.۱) خواهد شد:

$$G_{x_i x_j}^{mn} = \tau(r_n) \int_{V_n} G_{x_i x_j}(r_m, r') dV', \quad m \neq n \quad (91.1)$$

با تقریب اول داریم:

$$G_{x_i x_j}^{mn} = \tau(r_n) G_{x_i x_j}(r_m, r_n) \Delta V_n \quad m \neq n \quad (92.1)$$

که در آن

$$\Delta V_n = \int_{V_n} dV'$$

با استفاده از رابطه (۸۱.۱)، محاسبه  $G_{x_i x_j}(r_m, r_n)$  می‌دهد:

$$\begin{aligned} G_{x_i x_j}^{mn} &= \frac{-j\omega\mu_{\circ k_{\circ}}\tau(r_n)\Delta V_n \exp(-j\alpha_{mn})}{4\pi\alpha_{mn}^r} \\ &\cdot [(a_{mn}^r - 1 - j\alpha_{mn})\delta_{ij} + \cos\theta_{x_i}^{mn}] \quad m \neq n \\ &\cdot \cos\theta_{x_j}^{mn} (\gamma - \alpha_{mn}^r + 3j\alpha_{mn}) \end{aligned} \quad (93.1)$$

که در آن

$$\alpha_{mn} = k_{\circ} R_{mn}, \quad R_{mn} = |r_m - r_n|$$

$$\cos\theta_{x_i}^{mn} = \frac{(x_i^m - x_i^n)}{R_{mn}}, \quad \cos\theta_{x_j}^{mn} = \frac{(x_j^m - x_j^n)}{R_{mn}}$$

و ضمناً

$$r_m = (x_1^m, x_2^m, x_3^m), \quad r_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)$$

اگر  $N$  بقدر کافی بزرگ باشد، روابط تقریبی (۹۲.۱) و (۹۳.۱) می‌تواند جواب نسبتاً دقیقی انتظار داشت. برای دقت بالاتر، انتگرال رابطه (۹۱.۱) می‌توان به روش عددی بهتری محاسبه کرد.

برای محاسبه عناصری قطری ماتریس  $[G_{x_i x_j}]$  رابطه (۹۰.۱) می‌شود

$$\bar{G}_{x_i x_j}^{nn} = \tau(r_n) PV \int_{V_n} G_{x_i x_j}(r_n, r') dV' - \delta_{ij} \left[ 1 + \frac{\tau(r_n)}{3j\omega\epsilon_{\circ}} \right] \quad (94.1)$$

حجم عنصر  $V_n$  را برابر حجم کره معادل آن با شعاع  $r_n$  در نظر می‌گیریم. این به ما این اجازه را میدهد که انتگرال رابطه (۹۴.۱) را دقیق محاسبه کنیم.

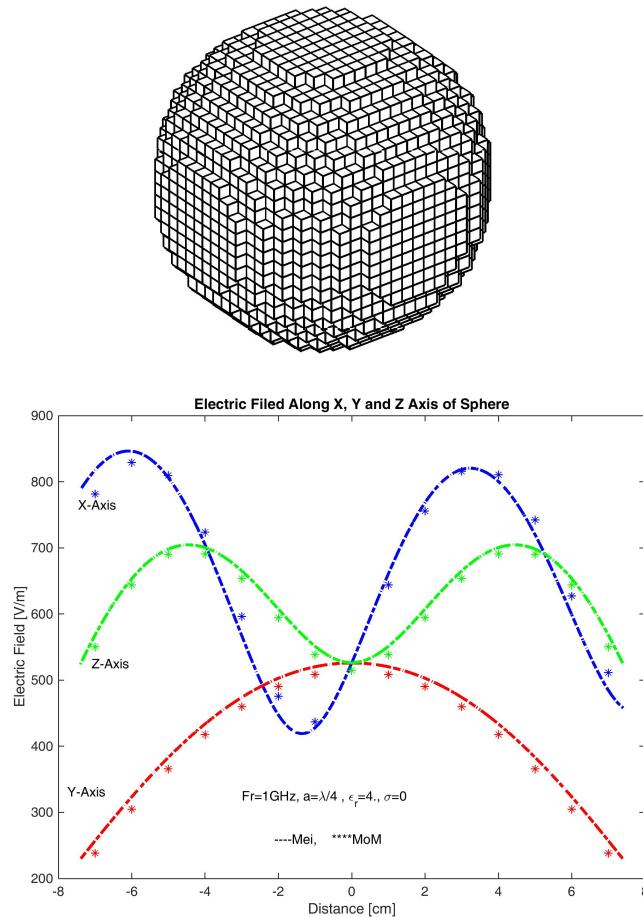
فرض کنید شعاع کره  $a_n$  باشد. بعد از عملیات ریاضی مبسوط خواهیم داشت:

$$\bar{G}_{x_i x_j}^{nn} = \delta_{ij} \left\{ \frac{-2j\omega\mu_{\circ}\tau(r_n)}{3k_{\circ}} [\exp(-jk_{\circ}a_n)(1 + jk_{\circ}a_n) - 1] - \left[ 1 + \frac{\tau(r_n)}{3j\omega\epsilon_{\circ}} \right] \right\} \quad (95.1)$$

که در آن

$$a_n = \left( \frac{3\Delta V_n}{4\pi} \right)^{1/3}$$

اگر شکل حجم  $V_n$  خیلی از شکل کره تفاوت داشته باشد، ممکن است تقریب جواب عددی مناسبی ندهد. در چنین حالتی، انتگرال گیری عددی لازم است. برای صحت سنجی مطالب بالا یک آنتن دیپل نیموج در جهت  $z$  ها بفاصله  $d = \frac{\lambda}{8}$  از یک کره دیکتریک بشuang  $\epsilon_r = 4$  و به ثابت دیکتریک  $R = \frac{\lambda}{4}$  در فرکانس  $1 GHz$  قرار گرفته است. آنتن با جریان یک آمپر تغذیه می‌شود. دو روش دقیق  $MoM$  و روش عددی  $Mei$  برای کره بکار



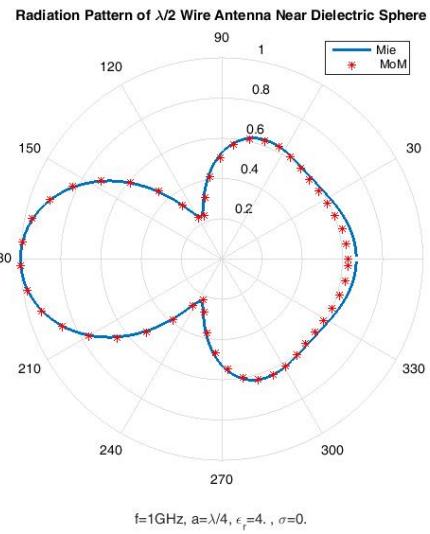
شکل ۲۳.۱: توزیع میدان الکتریکی در روی سه محور کره دیالکتریک

برده شده و صحت آن در شکل (۲۳.۱) نشان داده شده است. برای روش ممان کرده به دیالکتریک‌های مکعب شکل تقسیم شده است. در مسئله بالا می‌توانیم الگوی تشعشعی افقی آنتن را با وجود کره دیالکتریک بدست می‌آوریم. شکل این الگوی تشعشعی نشان داده شده است.

### ۳.۵.۱ جسم دیالکتریک در میدان الکترواستاتیک یکنواخت

در این بخش دو روش عددی را برای پیدا کردن میدان در داخل و خارج یک جسم دیالکتریک بکار خواهیم برد.

- الف: در این روش عددی می‌توانیم علی‌رغم اینکه دیالکتریک همگن یا ناهمگن است استفاده کنیم. این روش حالت خاص معادله انتگرالی است که برای پیدا کردن میدان داخل و خارج دیالکتریک در میدان الکتریکی متغیر با زمان هارمونیکی است.



شکل ۲۴.۱: الگوی تشعشعی آنتن دیپل نیموج در نزدیکی کره دیالکتریک

اگر دیالکتریک را به  $N$  سلول مکعب شکل تقسیم کنیم، برای پیدا کردن میدان در داخل دیالکتریک نیاز به حل  $3N \times 3N$  معادله خطی هستیم. در این حالت خاص روابط متغیر هارمونیکی به رابطه زیر تبدیل می‌شوند:

$$G_{x_i x_j}^{mn} = \begin{cases} -\delta_{ij} \frac{\epsilon_r + 2}{3} & m = n \\ \frac{(\epsilon_r - 1)\Delta V}{4\pi\epsilon_0 R_{mn}} (\delta_{ij} + 3 \cos\theta_{x_i}^{mn} \cos\theta_{x_j}^{mn}) & m \neq n \end{cases} \quad (96.1)$$

که در آن

$$\cos\theta_{x_i}^{mn} = \frac{(x_i^m - x_i^n)}{R_{mn}}, \quad \cos\theta_{x_j}^{mn} = \frac{(x_j^m - x_j^n)}{R_{mn}}$$

و

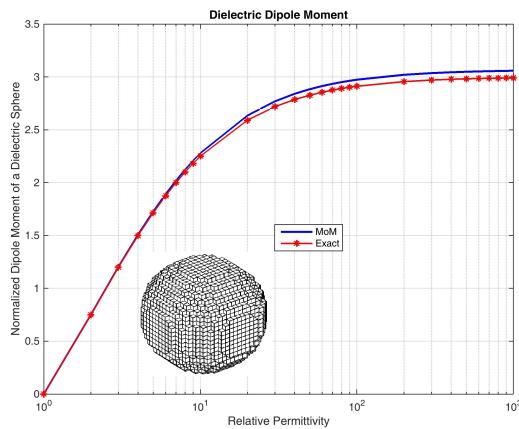
$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2}$$

و برای کره مقدار نرمالیزه دقیق گشتاور دو قطبی برابر است با:

$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}, \quad P = \frac{p}{\epsilon_0 E \cdot V}$$

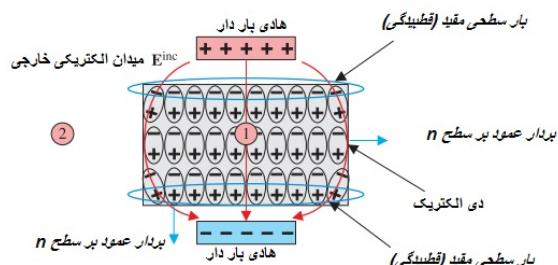
این روش را برای یک کره که به حدود ۵۱۷ عدد مکعب شکل تقسیم شده است با روش ممان محاسبه و بار روش دقیق مقایسه و در شکل (۲۵.۱) نشان داده شده است.

- ب: در این روش عددی فرض بر این است که جسم دیالکتریک همگن است. در این صورت می‌توانیم از روش بار سطحی قطبی که روی سطح تشکیل می‌شود برای حل معادله انتگرالی بروش ممان استفاده کنیم.



شکل ۲۵.۱: چگالی گشتاور دوقطبی نرمالیزه یک کره دیالکتریک روش ممان و روش دقیق

وقتی یک قطعه دیالکتریک همگن در یک میدان الکترواستاتیک قرار می‌گیرد، بار سطحی در دو سمت آن که بنام بار مقید نام می‌بریم تشکیل می‌شود. می‌خواهیم



شکل ۲۶.۱: دیالکتریک همگن در میدان الکتریکی یکنواخت

معادله انتگرالی برای این قطعه دیالکتریک در میدان الکترواستاتیکی را نوشتی و با روش ساده ممان آنرا حل کنیم.

وقتی این قطعه در میدان قرار می‌گیرد بعلت تجمع بارهای مقید در دو سطح مقابل میدان کل در داخل دیالکتریک کاهش پیدا می‌کند. در هر نقطه‌ای از سطح می‌توان شرایط مرزی زیر را نوشت:

$$\epsilon_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1^{total}(\mathbf{r}) - \epsilon_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2^{total}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (97.1)$$

که در آن  $\mathbf{n}$  بردار واحد عمود بر سطح و  $\mathbf{E}_1^{total}$  میدان الکتریکی کل بترتیب در داخل و خارج دیالکتریک است. محیط دوم معمولاً هوا است. در هر نقطه‌ای از فضا میدان کل  $\mathbf{E}^{total}(\mathbf{r})$  جمع دو میدان اعمالی  $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})$  و میدان الکتریکی اضافی  $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$  که بوسیله بارهای مقید سطحی تولید می‌شوند.

$$\mathbf{E}^{total} = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^s \quad (98.1)$$

بنابراین برای میدان‌های ناشی از بار مقید می‌توان نوشت

$$\mathbf{E}^s = -\nabla \psi^s(\mathbf{r}) = \int_s \frac{\sigma_p(\mathbf{r}') ds'}{4\pi\epsilon_0 R'} \mathbf{a}_R \quad (99.1)$$

که در آن

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z}{R}$$

اما میدان ناشی از بار سطحی مقید  $\sigma_p$  از طرف داخل و خارج در روی سطح دو بخس است و بعلت جهت بردار عمود بر سطح علامت آنها بصورت زیر تغییر می‌کند

$$\mathbf{E}_\downarrow^s(\mathbf{r}) = \int_s \frac{\sigma_p(\mathbf{r}') ds'}{4\pi\epsilon_0 R'} \mathbf{a}_R - \mathbf{n} \frac{\sigma_p(\mathbf{r})}{2\epsilon_0} \quad \mathbf{r} \in S \quad (100.1)$$

$$\mathbf{E}_\uparrow^s(\mathbf{r}) = \int_s \frac{\sigma_p(\mathbf{r}') ds'}{4\pi\epsilon_0 R'} \mathbf{a}_R + \mathbf{n} \frac{\sigma_p(\mathbf{r})}{2\epsilon_0}$$

ممکن است پرسیده شود که چرا در رابطه بالا  $\epsilon$  فضای آزاد درنظر گرفته شده است؟ بدلیل آنکه دیالکتریک با بار مقید معادل سازی شده است.

دو رابطه (100.1) را در شرایط مرزی قرار داده و معادله انتگرالی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\sigma_p(\mathbf{r})}{2\epsilon_0} = \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \left[ \int_s \frac{\sigma_p(\mathbf{r}') ds'}{4\pi\epsilon_0 R'} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_R + \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \right] \quad \mathbf{r} \in S \quad (101.1)$$

اکنون از روش ممان با ساده ترین صورت آن یعنی تطبیق نقطه‌ای که در مسائل قبل حل کردیم استفاده می‌کنیم. برای مثال یک کره دیالکتریک که جواب دقیق آنرا داریم استفاده می‌کنیم. سطح کره را به قطعات کوچک مثلث شکل مانند شکل زیر تقسیم می‌کنیم. میبایست مرکز هر مثلث و سطح آن معلوم باشد. چگالی بار روی هر را یکنواخت درنظر می‌گیریم. محیط دوم را هوا و ثابت دیالکتریک کره را  $\epsilon_r$  فرض می‌کنیم، بنابراین معادله (101.1) بصورت زیر خواهد بود

$$\frac{\sigma_j}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^{inc} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\sigma_i \Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}^2} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{a}_{R_{ij}} \right] \quad (102.1)$$

اکنون به رابطه بالا  $j = 1, 2, \dots, N$  مقدار می‌دهیم و یک دستگاه معادله  $N$  مجھولی خواهیم داشت. شکل ماتریسی آن بصورت زیر خواهد بود

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{X}] = [\mathbf{B}]$$

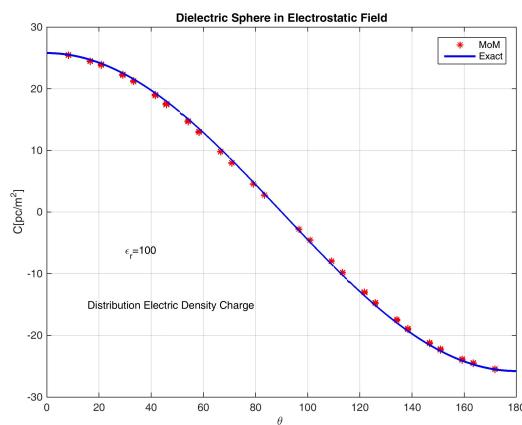
که در آن و  $B_j = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{E}^{inc}$  و  $X_j = \sigma_j$

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0} & i = j \\ \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{\Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}^2} (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{a}_{R_{ij}}) & i \neq j \end{cases} \quad (103.1)$$

اکنون یک کره به حجم واحد و ثابت دیالکتریک  $\epsilon_r = 100$  در یک میدان الکتریکی یکنواخت  $E = a_z [V/m]$  در نظر گیرید. شکل (۲۷.۱) توزیع چگالی بار الکتریکی را نسبت به زاویه  $\theta$  در مختصات کروی نشان می‌دهد. رابطه دقیق برای کره

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{3} \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \cos \theta$$

است.



شکل ۲۷.۱: کره دیالکتریک همگن در میدان الکتریکی یکنواخت

## زنگ تفريح

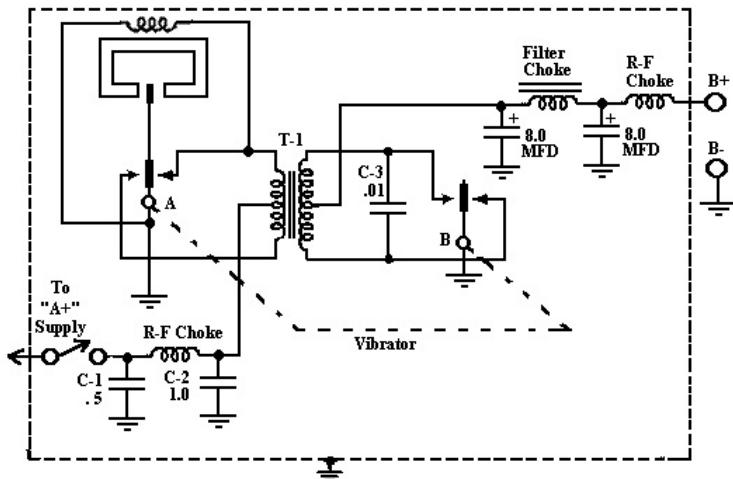
■ چگونه می‌توانیم بدون استفاده از دیود، ترانزیستور یا لامپ‌های خلاء دو ولت مستقیم (DC) را به صد ولت مستقیم (DC) تبدیل کنیم؟ (بدو روش)  
جواب :

★ در این روش از موتورهای دی سی و ژنراتورهای دی سی استفاده می‌شود که به آنها دایناموتور *Dynamotor* گفته می‌شود. این دستگاه در جنگ جهانی دوم در فرستنده‌های لامپی روی خودروها استفاده می‌شد که امروزه منسخ شده است. ابتدا ولتاژ بیک موتور دی سی داده شده و حرکت و چرخش محوری ایجاد می‌کند. سپس این چرخش بیک ژنراتور دی سی که در خروجی آن جاروبک‌های نصب شده است اعمال می‌شود. این دو قسمت روی یک محور و در آرمیچر انجام می‌شود (شکل ۲۸.۱).

★ در روش دوم که برای گیرنده‌های کم توان استفاده می‌شود، استفاده از ویبراتور مکانیکی توسط رله است. ابتداء ولتاژ مستقیم را به رله داده و جریان باطری را قطع و صل می‌کند. بعداً توسط ترانس افزاینده ولتاژ به ولتاژ بالاتری انتقال داده و با همان رله‌ای که ورودی ترانس را قطع و وصل می‌کرد دوباره پالس‌های مثبت و منفی را بهم متصل می‌نمود. در آخر فیلتر جهت صاف کردن شکل موج استفاده می‌شد (شکل ۲۹.۱).



شکل ۲۸.۱: دایناموتور که در طرفین جاروبک‌ها نشان داده شده است.



شکل ۲۹.۱: ویراتور همزمان برای تبدیل ولتاژ مستقیم به مستقیم

## زنگ تفریح

■ حتماً در جیب خود یک فلش برای حمل اطلاعات کامپیوتر دارید. راستی یک فلش بدون آنکه به کامپیوترا وصل شود چند سال می‌تواند اطلاعاتش را نگه دارد؟ این زمان را زمان مانگاری (*Retention Time*) گویند.

**جواب :**

★ نمیدانیم جنس عایق بکار رفته در حافظه‌های یو اس بی دقیقاً از چه موادی ساخته شده است. اما باشد یک تخمین ساده‌ای در ذهن خود داشته باشیم. اگر عایق خوبی مثل کوارتز بکار رفته باشد، مشخصات الکتریکی آن بقرار زیر است

$$\sigma = 1/3 \times 10^{-18} [S/m] \quad \epsilon = 3/5\epsilon_0 \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} [F/m]$$

بنابراین ثابت زمانی آن خواهد بود:

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} = 315 \text{ روز}$$

اگر پنج برابر این زمان را تخلیه کامل فرض کنیم، حدود چهار سال طول می‌کشد. این بشرط آنست که در این مدت به دستگاهی وصل نشود. برخی این زمان را دو سال بیشتر ندانسته‌اند!

## زنگ تفريح

■ چگونه می‌توانیم فقط با خط کش، پرگار، چند صفحه کاغذ، صفحه برنجی و مسافت‌ياب‌های قدیمی (طناب کشی و شمارنده چرخ گاری و ....) شعاع کره زمین را تعیین کنیم؟ این کار را ابوالیحان بیرونی بیش از هزار سال پیش انجام داد.

جواب :

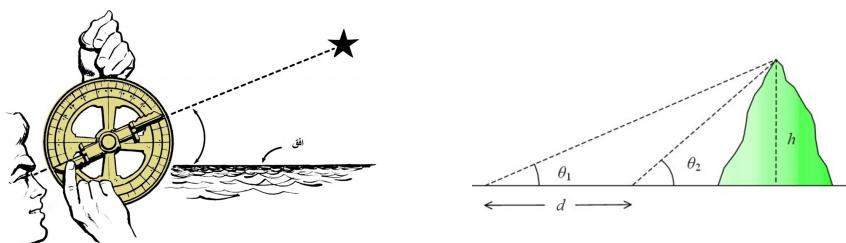
★ در زمان سلطان محمود غزنوی ابوالیحان بیرونی توسط اسطرلاب که یک وسیله اندازه‌گیری زاویه است شعاع زمین را تعیین کرد. او که همراه سلطان محمود غزنوی عازم سفر به هند بود، در بین راه، کوه بلند و دشت نسبتاً صاف و مسطحی یافت که توانست شعاع کره زمین را اندازه‌گیری کند.

با علم ریاضی ابتدا ارتفاع کوه را محاسبه کرد. در شکل (۳۰.۱) مسافت  $d$  و زوایای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را اندازه‌گیری کرد، در این صورت ارتفاع از رابطه زیر بدست می‌آید

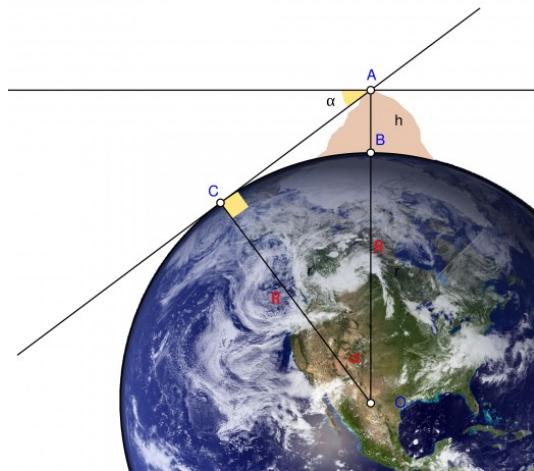
$$h = \frac{d \tan \theta_1 \tan \theta_2}{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}$$

سپس با اندازه‌گیری زاویه  $\alpha$ ، شکل (۳۱.۱)، شعاع از رابطه زیر بدست می‌آید.

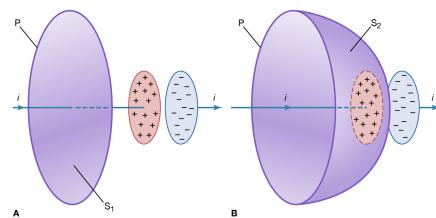
$$R = \frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$



شکل ۳۰.۱: کار برد اسطرلاب در اندازه‌گیری زاویه



شکل ۳۱.۱: اندازه‌گیری شعاع زمین



شکل ۳۲.۱: ماکسول با تعریف جریان جابجایی درون دیالکتریک‌ها، قانون آمپر را تکمیل کرد

## زنگ تفریح

■ به شکل (۳۲.۱) نگاه کنید یک جعبه که در داخل آن یک ترانزیستور و چند عدد خازن، مقاومت، دیود، ترانس تبدیل برق شهر به دوازده ولت (برای منبع تغذیه) است. در قسمت فوقانی جعبه یک سیم مسی از جعبه خارج شده که به یک سر لامپ رشته‌ای کوچک وصل شده و سر دیگر لامپ به یک سیم مسی متصل است. سر دیگر سیم همان‌طوری که مشاهده می‌کنید به جایی وصل نیست. کلید دستگاه را می‌زنیم و چراغ روشن می‌شود. دلیل آن چیست؟ مدار از کجا بسته می‌شود؟ قانون ولتاژهای و جریان‌های کیرشهف کجاست؟ (در این مسئله کلک و حقه‌ای در کار نیست و واقعیت دارد)

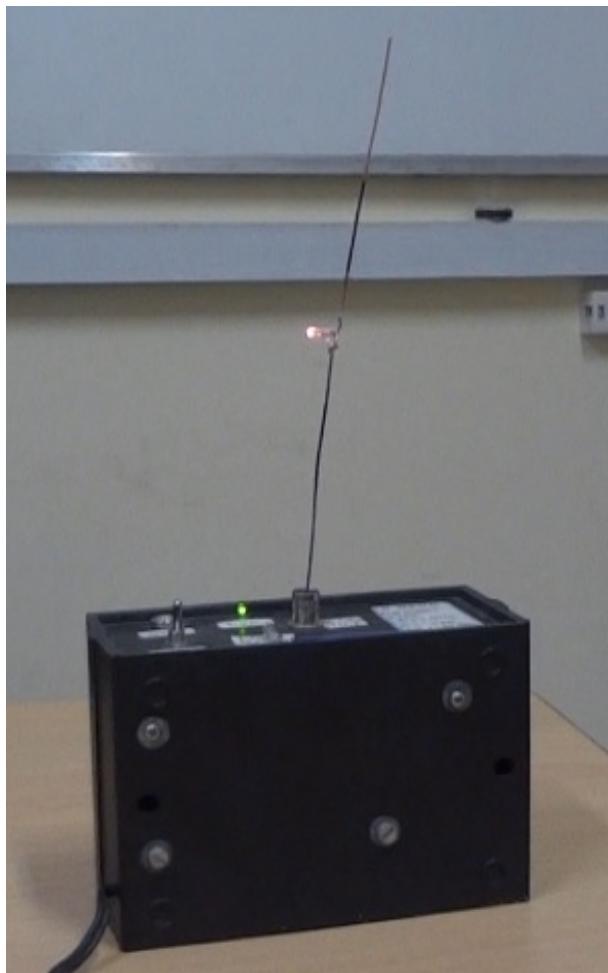
جواب :

★ به شکل (۳۲.۱) توجه کنید. اگر قانون آمپر را برای این سطح بسته که قسمتی از آن سیم هادی و قسمت دیگر فضای خازن را در بر می‌گیرد بنویسیم، با تناقض روبرو می‌شویم. برای از بین بردن این تناقض ماکسول جریان جابجایی را در دیالکتریک‌ها ارائه داد و قانون آمپر را تکمیل کرد. جریان جابجایی در نتیجه تغییر میدان الکتریکی نسبت به زمان بوجود می‌آید و در جریان مستقیم و ثابت وجود ندارد. چگالی جریان جابجایی  $J = \frac{\partial D}{\partial t}$  است. برای تکمیل قانون جریان‌های کیرشهف، از اصل بقاء بار الکتریکی شروع می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

که در آن  $\rho$  چگالی بار حجمی و  $J$  چگالی جریان در هادی است.

بجای  $\rho$  از قانون گوس یعنی  $\nabla \cdot D = \rho$  استفاده می‌کنیم، لذا



شکل ۳۳.۱: جعبه حاوی یک ترانزیستور و منبع تغذیه و خازن و مقاومت وسیم پیچ.

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \nabla \cdot D}{\partial t} = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

یا

$$\nabla \cdot \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0$$

برای ساده شدن مطلب، از طرفین انتگرال روی سطح بسته می‌گیریم و از قضیه گرین استفاده می‌کنیم

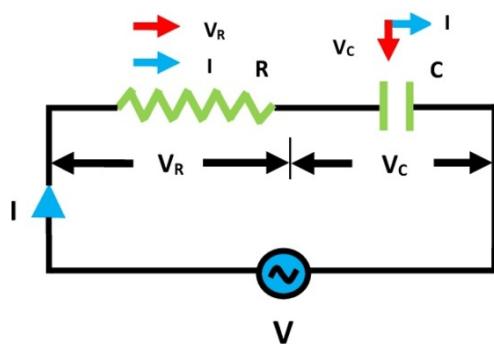
$$\oint_s \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS = 0$$

ماکسول نام کمیت  $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$  که در عایق‌ها وجود دارد را جریان جابجائی نام نهاد و رابطه بالا جمع جبری جریانها در یک سطح بسته مساوی صفر است را نشان میدهد.

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که در مدار زیر جریان هدایتی درون سیم خازن با جریان جابجایی درون دیالکتریک خازن با هم برابرند. فرض کنید جریان در درون سیم در مدار شکل (۳۴.۱) برابر  $i_c$  باشد. اگر ولتاژ دوسر خازن را  $v_c$  در نظر گیریم در این صورت میدان الکتریکی درون خازن برابر  $E_d = v_c/d$  و در اینجا  $d$  فاصله دو صفحه،  $A$  سطح صفحات،  $\epsilon_d$  گذردهی الکتریکی دیالکتریک، و  $C$  ظرفیت خازن است.

$$i_d = J_d A = A \frac{\partial D}{\partial t} = A \epsilon_d \frac{\partial E_d}{\partial t} = \left( \frac{A \epsilon_d}{d} \right) \frac{\partial v_c}{\partial t} = C \frac{\partial v_c}{\partial t} = i_c$$

اما در مدارهای الکتریکی با امپدانس آشنا هستیم. اگر در مدار شکل (۳۴.۱)،  $R$  نماد لامپ



شکل ۳۴.۱: جریان هدایتی درون سیم خازن برابر جریان جابجایی درون عایق خازن است.

روشنائی باشد، و در فرکانسی لامپ بعلت جریان متناوب روشن شود (مانند لامپ‌های برق شهر)، در آن صورت

$$Z = \frac{1}{j\omega C}$$

بديهی است که اگر فاصله دو صفحه خازن را زياد کنیم،  $C = (\frac{A \epsilon_d}{d})$ ، ظرفیت خازن کم و لامپ ما در مدار کم نورتر ( $Z$  زيادتر و جریان کمتر) می‌شود، اما در اينجا برای روشن ماندن لامپ فرکانس برق را زياد می‌کنیم، تا آن اثر را خنثی کند. بنابراین وقتی خازن مدار بيک سيم تبدیل شود ولی فرکانس زياد باشد لامپ هنوز روشن باقی می‌ماند و فضای اطراف سيم نقش همان دیالکتریک خازن را دارد!

## زنگ تفریح

■ سرعت انتقال علائم الکتریکی به چه عواملی بستگی دارند و چگونه سرعت انتقال در خطوط دوسیمه، کابل هممحور، یا تار نوری را می‌توان تخمین زد؟ سرعت سوئیچینگ یک دستگاه را چگونه می‌توان تخمین زد؟

## زنگ تفريح

■ چگونه می‌توانیم نوارهای مغناطیسی یا دستگاههای حساس به میدان مغناطیسی را در مقابل میدان مغناطیسی (مثل آهنرباهای قوی) حفاظت کنیم؟

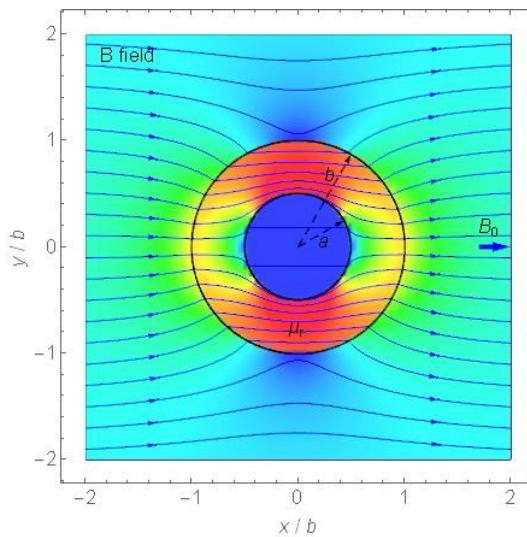
جواب :

★ برای حفاظت از میدان مغناطیسی، دو سازوکار را می‌توان بکار برد. برای فرکانس‌های کم می‌توان از کنجه‌های با دیوار آهنی با نفوذپذیری زیاد  $\mu$  استفاده کرد که بخش زیر را به همین موضوع اختصاص می‌دهیم. درجه و میزان حفاظت آن بستگی به نفوذپذیری مواد، شکل هندسی و ضخامت دیوارهای دارد.

برای میدان‌های مغناطیسی متغیر با زمان از مواد با هدایت زیاد مثل مس و آلومنیوم میباید استفاده کرد که با ایجاد جریان الکتریکی القائی در مواد با عامل بوجود آورنده مخالفت کند. بنابراین مواد فرومغناطیس برای فرکانس‌های بالا مناسب نیست و بهتر از مواد با هدایت بالا استفاده کرد. برخی اطاق‌های محافظت از میدان را دو جداره می‌سازند، آهن و مس.

## ۶.۱ حفاظت مغناطیسی

در اینجا می‌خواهیم یک مسئله معروف که اغلب در کتابهای درسی است را دوباره مرور کنیم. یک پوسته کره آهنی توخالی در نظر گیرید. ما آنرا بترتیب از داخل به طرف بیرون یک، دو و سه نام گذاری می‌کنیم. چگالی فلوي میدان مغناطیسی را بصورت  $B = B_0 \cdot a_z$



شکل ۳۵.۱: پوسته کروی داخل میدان مغناطیسی ثابت

در نظر می‌گیریم. دو ناحیه داخل و خارج از پوسته هوا ( $\mu_0$ ) و نفوذ پذیری مغناطیسی پوسته ( $\mu$ ) است. اکنون می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در هر ناحیه بدست آوریم. شدت میدان مغناطیسی و پتانسیل اسکالر مغناطیسی به صورت زیر بهم مربوط هستند

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi_M \quad (10.4.1)$$

چون  $\mu H = B = \mu \cdot \nabla \psi$  است، با تعریف رابطه (10.4.1)، معادله لاپلاس را در مغناطیس داریم:

$$\nabla^2 \psi_M = 0 \quad (10.5.1)$$

تابع پتانسیل را در هر ناحیه نامگذاری می‌کنیم

$$\nabla^2 \psi_M = \begin{cases} \psi_M^{(1)}(\mathbf{r}), & 0 \leq r \leq a \\ \psi_M^{(2)}(\mathbf{r}), & a \leq r \leq b \\ \psi_M^{(3)}(\mathbf{r}), & b \leq r \leq \infty \end{cases} \quad (10.6.1)$$

که در آن  $i = 1, 2, 3$  باید در شرایط زیر صدق کند.

.۱

$$\nabla^2 \psi_M^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{برای}$$

.۲. در بینهایت مقدار  $\psi_M^{(3)}(\mathbf{r}) + H_0 r \cos \theta$  باید معین باشد

.۳. در  $r \leq a$  مقدار  $\psi_M^{(1)}(\mathbf{r})$  باید معین باشد.

.۴. در  $r = b$  باید  $\psi_M^{(2)}(\mathbf{r}) = \psi_M^{(3)}(\mathbf{r})$  باشد.

.۵. در  $r = a$  باید  $\psi_M^{(1)}(\mathbf{r}) = \psi_M^{(2)}(\mathbf{r})$  باشد.

.۶. در  $r = a$  باید

$$\mu_0 \frac{\partial \psi_M^{(1)}}{\partial r} = \mu \frac{\partial \psi_M^{(2)}}{\partial r}$$

.۷. در  $r = b$  باید

$$\mu \frac{\partial \psi_M^{(2)}}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \psi_M^{(3)}}{\partial r}$$

دو شرط آخر میگوید که مولفه قائم (نرمال) چگالی فلوی مغناطیسی باید در مرز برابر باشند. با حل معادله لاپلاس و استفاده از شرایط مرزی بالا سه تابع پتانسیل اسکالر مغناطیسی زیر را خواهیم داشت:

$$\psi_M^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (10.7.1)$$

$$\psi_M^{(2)} = -H_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (10.8.1)$$

$$\psi_M^{(\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \beta_n r^n + \frac{\gamma_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta) \quad (109.1)$$

در اینجا با چهار مجھول مواجه هستیم،  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ . چهار شرط مرزی چهار معادله می‌نویسیم

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\alpha_0}{b} - \left( \beta_0 + \frac{\gamma_0}{b} \right) \right] P_0(\cos \theta) + \left[ \left( -H_0 b + \frac{\alpha_1}{b^r} \right) - \left( \beta_1 b + \frac{\gamma_1}{b^r} \right) \right] P_1(\cos \theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_n}{b^{n+1}} - \left( \beta_n b^n + \frac{\gamma_n}{b^{n+1}} \right) \right] P_n(\cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (110.1)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \mu_0 \left( -\frac{\alpha_0}{b^r} \right) + \mu \frac{\gamma_0}{b^r} \right] P_0(\cos \theta) + \left[ \mu_0 \left( -H_0 - \frac{\alpha_1}{b^r} \right) - \mu \left( \beta_1 - \frac{\gamma_1}{b^r} \right) \right] P_1(\cos \theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \mu_0 \left( -\frac{(n-1)\alpha_n}{b^{n+r}} \right) - \mu \left( n\beta_n b^{n-1} - \frac{(n+1)\gamma_n}{b^{n+r}} \right) \right] P_n(\cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (111.1)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \beta_0 + \frac{\gamma_0}{a} \right) - \delta_0 \right] P_0(\cos \theta) + \left[ \left( \beta_1 a + \frac{\gamma_1}{a^r} \right) - \delta_1 a \right] P_1(\cos \theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \beta_n a^n + \frac{\gamma_n}{a^{n+1}} \right) - \delta_n a^n \right] P_n(\cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (112.1)$$

و سرانجام

$$\begin{aligned} & \left[ \mu \left( -\frac{\gamma_0}{a^r} \right) \right] P_0(\cos \theta) + \left[ \mu \left( \beta_1 - \frac{\gamma_1}{a^r} \right) - \mu_0 \delta_1 \right] P_1(\cos \theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \mu \left( n\beta_n a^{n-1} - \frac{(n-1)\gamma_n}{a^{n+r}} \right) - \mu_0 n \delta_n a^{n-1} \right] P_n(\cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (113.1)$$

می‌توان  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$  با قراردادن ضریب‌های (113.1) و (107.1) رابطه‌های (110.1) و (111.1) را برابر صفر بدهست آورده. این رابطه‌ها مقدارشان را صفر میدهند  
 $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \delta_0 = 0$

برای  $n \geq 2$  ضریب‌های  $P_n(\cos \theta)$  را برای ۲ در رابطه‌های (110.1) و (113.1) را برابر صفر قرار میدهیم:

$$\frac{\alpha_n}{b^{n+1}} - \left( \beta_n + \frac{\gamma_n}{b^{n+1}} \right) = 0, \quad -\frac{\mu_0(n+1)\alpha_n}{b^{n+r}} - \mu \left( nb^{n-1}\beta_n - \frac{(n+1)\gamma_n}{b^{n+r}} \right) = 0 \quad (114.1)$$

$$\left( \beta_n a^n + \frac{\gamma_n}{a^{n+1}} \right) - \delta_n a^n = 0, \quad \mu \left( na^{n-1}\beta_n - \frac{(n+1)\gamma_n}{a^{n+r}} \right) - \mu_0 n a^{n-1} \delta_n = 0 \quad (115.1)$$

بعد از مقداری عملیات ریاضی

$$\beta_1 = \frac{2\mu + \mu_0}{3\mu} \delta_1, \quad \gamma_1 = \frac{\mu - \mu_0}{3\mu} a^r \delta_1 \quad (116.1)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{(2\mu - \mu_0)(\mu - \mu_0)}{((2\mu - \mu_0)(\mu - 2\mu_0) - 2\frac{a^r}{b^r}(\mu - \mu_0)^2)} \right] (b^r - a^r) B_0 \quad (117.1)$$

$$\delta_1 = - \left[ \frac{9\mu}{(2\mu - \mu_0)(\mu - 2\mu_0) - 2\frac{a^r}{b^r}(\mu - \mu_0)^2} \right] B_0 \quad (118.1)$$

و از رابطه‌های (۱۰۷.۱) و (۱۰۸.۱) تابع‌های پتانسیل داخلی و خارجی را می‌توان بدست آورد

$$\psi_M^{(1)} = -H_0 r \cos \theta + \frac{\alpha_1}{r^3} \cos \theta \quad (119.1)$$

$$\psi_M^{(2)} = \delta_1 r \cos \theta = \delta z \quad (120.1)$$

که در آن  $\alpha_1$  و  $\delta_1$  از (۱۱۷.۱) و (۱۱۸.۱) بدست می‌آیند. دیگر ضریب‌ها صفر هستند. مولفه‌های شعاعی و عرضی میدان  $B$  خارج از کره به صورت زیر خواهد بود:

$$B_r = -\mu_0 \frac{\partial \psi_M^{(1)}}{\partial r} = B_0 \cos \theta + \frac{2\mu_0 \alpha_1}{r^3} \cos \theta \quad (121.1)$$

$$B_\theta = -\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial \psi_M^{(1)}}{\partial \theta} = -B_0 \sin \theta + \frac{\mu_0 \alpha_1}{r^3} \sin \theta \quad (122.1)$$

بنابراین میدان خارج از پوسته کروی مجموع میدان یکنواخت  $B_0$  و میدان دیپل با گشتاور  $4\pi\alpha_1$  است. در داخل محفظه میدان یکنواخت است:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \frac{\partial \psi_M^{(2)}}{\partial z} \mathbf{a}_z = -\delta_1 \mathbf{a}_z \quad (123.1)$$

برای  $\mu_0 \gg \mu$ , میدان درون محفظه می‌شود:

$$\mathbf{B} = -\delta_1 \mathbf{a}_z \approx \frac{9}{2\mu_0 \left(1 - \frac{a^r}{b^r}\right)} \mathbf{B}_0 \quad (124.1)$$

به طوری که مشاهده می‌کنید میدان داخل محفظه متناسب با  $1/\mu$  است. بنابراین میدان درون محفظه برای محافظت مغناطیسی بشدت با نفوذ پذیری مغناطیسی نسبی  $\mu/\mu_0 = 10^6$  تا  $10^{10}$  کاهش می‌یابد. البته این در فرکانس‌های کم تا حدود ۵۰۰ هرتز نیز صادق است.

## زنگ تفريح

■ دمای کوری *Curie Temperature* و دمای نیل *Neel Temperature* چه درجه حرارتی هستند و برای چه مواد تعریف می‌شوند؟ کاربرد عملی آنها در کجاست؟

جواب :

★ در علم مواد **دمای کوری** به دمائی گفته می‌شود که بیش از آن دما خاصیت مغناطیسی دائمی ماده از بین می‌رود. **دمای نیل** دمائی است که در آن مواد آنتی فرومغناطیس به پارامغناطیس تبدیل می‌شوند. این دما را به افتخار لوئیس نیل فیزیکدان فرانسوی و برنده حایزه نوبل ۱۹۷۰، دمای نیل می‌خوانند.

## ۷.۱ طبقه‌بندی مواد مغناطیسی

تمام مواد را می‌توان بر حسب رفتار آهنربائی آنها بیکی از پنج نوع زیر بر حسب پذیرندگی مغناطیسی آنها تقسیم‌بندی کرد. دو نوع متداول مغناطیس شوندگی، دیامغناطیس و پارامغناطیس است که خاصیت مغناطیسی بیشترین مواد جدول تناوبی در دمای اطاق را تشکیل میدهند.

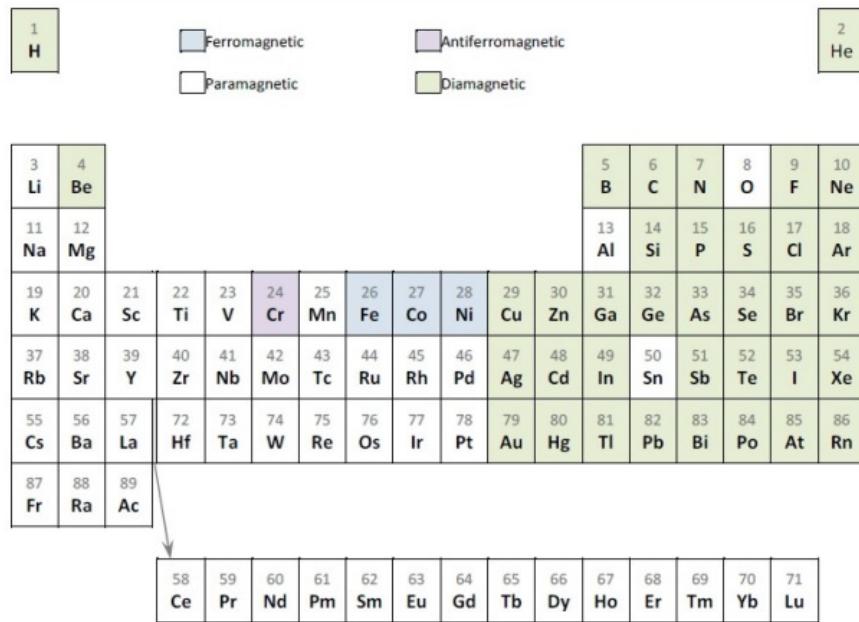
مواد مغناطیسی و کاربردهای آن مواد مغناطیسی نقش مهمی در فناوری جدید ایفا می‌کند. آنها یکی از اجزا کلیدی در موتورها، ژنراتورها، مبدل‌ها (ترانسفورمرها) هستند. استفاده از مواد مغناطیسی تاریخ طولانی دارد. بر حسب اطلاعات چینی، قطب‌نما ۴۵۰۰ سال پیش در چین کشف شد. ضمناً گفته می‌شود که ۳۵۰۰ سال قبل مغناطیس طبیعی در شهر مغنسیا (آسیای میانه) پیدا شده است. مواد مغناطیسی نقش مهمی در تاریخ تمدن بشر داشته‌اند. به‌طور سنتی، فقط نه ماده که خاصیت فرومغناطیسی یا فری‌مغناطیسی که "مغناطیس" می‌گویند از خود نشان می‌دهند. تمام فلزات، که از آنها سه ماده (آهن، کوبالت و نیکل) گروه آهن محسوب می‌شوند و شش ماده بقیه (Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm) عناصر نادر زمین Rare Earth Elements نئودیمیوم (Nd) یک عنصر خاک نادر با عدداتمی ۶۰ است که در سال ۱۸۸۵ بوسیله شیمیدان استرالیائی کارل آیور ولسباخ کشف شد. نئودیمیوم را با آهن و برم و چند عنصر دیگر مخلوط و آلیاژ فرومغناطیسی بسیار قوی درست می‌کنند. آهنرباهای نئودیمیوم بسیار قوی و کاهی نیز خطرناک بشمار می‌روند. مواد را از نظر خاصیت آهنربائی که گشتاور مغناطیسی دی‌پل‌های مغناطیسی مربوط می‌شوند، تقسیم‌بندی می‌کنند.

تمام مواد را می‌توان بر حسب رفتار مغناطیسی‌شان به پنج طبقه که به پذیرندگی آنها بستگی دارد، تقسیم کرد. دو نوع متداول مغناطیس شوندگی دیامغناطیس و پارامغناطیس هستند که بیشترین عناصر جدول تناوبی (شکل ۳۶.۱) را در دمای اطاق تشکیل می‌دهند. این عناصر عموماً بنام غیرمغناطیس شناخته می‌شوند. تنها نوع دیگر منغناطیس شوندگی در عناصر خالص که در دمای اطاق مشاهده می‌شود، ضدفرومغناطیس (انتی فرومغناطیس) است. سرانجام مواد فرومغناطیسی است که می‌توان آنرا در در طبقه‌بندی آورد، گرچه این مورد در هیچ عنصر خالصی مشاهده نمی‌شود، اما فقط در ترکیباتی مانند اکسیدهای مخلوط منسوب به فریتها یافت می‌شود که نام آن فری‌مغناطیس است. در زیر رفتار پذیرندگی مغناطیسی این عناصر بطور خلاصه آورده می‌شود:

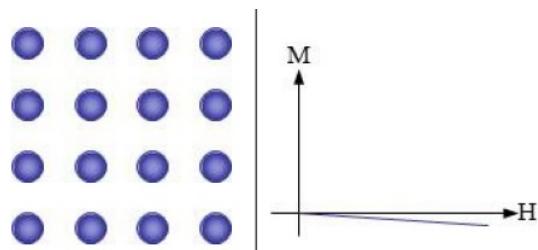
- دیامغناطیس** گازهای بی‌اثر؛ خیلی از فلزات مانند، طلا، مس، جیوه، عاصر غیرفلزی از قبیل: برم، سیلیسیوم، فسفر، گوگرد؛ خیلی از یون‌ها: مانند سدیم، کلر و نمک‌های آنها، هیدرژن، ازت، آب را می‌توان نام برد.

اتم آنها گشتاور مغناطیسی ندارند و پذیرندگی مغناطیسی آنها منفی  $-10^{-5}$  تا  $-10^{-6}$  است. یعنی نفوذپذیری مغناطیسی نسبی آنها ( $\chi_{\mu_r} = 1 + \chi$ ) کمتر از واحد است.

- پارامغناطیس** بعضی مواد مانند آلومینیوم، برخی گازهای دیاتمی مثل اکسیژن، ازت، یون‌های فلزی و فلزات خاک نادر و نمک‌هایشان، اکسیدهای خاکهای نادر را می‌توان نام برد.



شکل ۳۶.۱: جدول تناوبی از نظر مغناطیسی



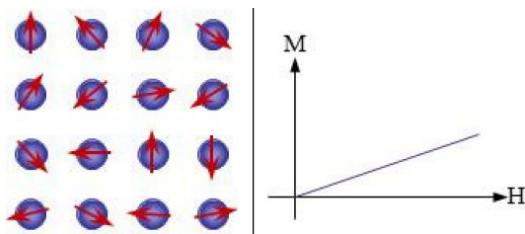
شکل ۳۷.۱: دیامغناطیس و منحنی مشخصه آن

اتمهای آنها دارای گشتاور مغناطیسی تصادفی دارند. پذیرندگی مغناطیسی آنها خیلی کوچک و مثبت ( $\chi = +10^{-5}$  تا  $-10^{-3}$ )، بعارت دیگر نفوذپذیری مغناطیسی نسبی آنها کمی بیشتر از یک است.

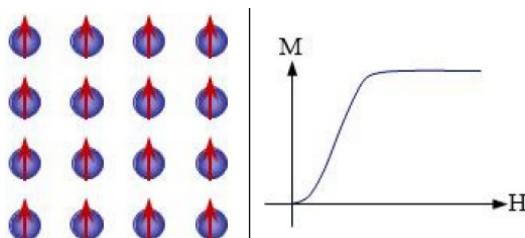
- **فرومغناطیس فلزات انتقالی** آهن، نیکل، کوبالت؛ خاکهای کمیاب با عدد اتمی  $69 \leq Z \leq 64$ ، آلیاژهای عناصر فرمغناطیسی، برخی آلیاژهای منیزیوم مانند  $MnBi$ ،  $Cu_2MnAl$  را می‌توان نام برد.

اتمهای آنها دارای ممان مغناطیسی ترازشده موازی هستند. پذیرندگی مغناطیسی آنها در دمای کمتر از دمای کوری بسیار زیاد است.

- **آنتی‌مغناطیس فلزات انتقالی** منگنز، کرم و خیلی از ترکیبات مانند  $MnO$ ,  $CoO$ ,  $NiO$ ,  $Cr_2O_3$ ,  $MnS$ ,  $MnSe$ ,  $CuC_{12}$

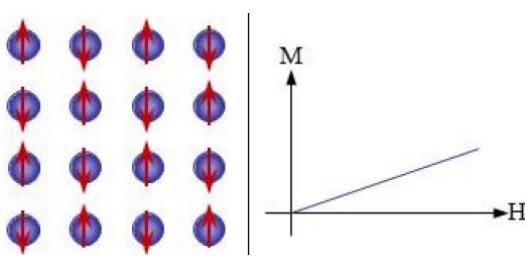


شکل ۳۸.۱: پارامغناطیس و منحنی مشخصه آن



شکل ۳۹.۱: فرومغناطیس و منحنی مشخصه آن

آنتری مغناطیس محسوب می‌شوند. اتم‌های ضد موازی گشتاور مغناطیسی تراز شده‌اند. پذیرندگی مغناطیسی کم و مثبتی  $\chi = +10^{-5}$  تا  $+10^{-3}$  دارد.



شکل ۴۰.۱: آنتی فرومغناطیس و منحنی مشخصه آن

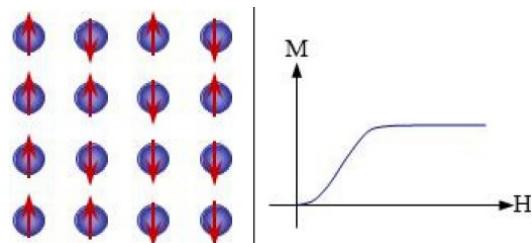
### • فرمغناطیس

همانند فرمغناطیس، ماده فرمغناطیس هم پس از مغناطیس شدن توانایی نگهداری آن را در نبود میدان دارد؛ و از سویی دیگر همانند پادفرومغناطیس اسپین جفت‌الکtron‌ها تمایل به جهت‌دار بودن برخلاف سوی همدیگر را دارند.

لویس نیل این باور را که مگنتایت (که نخستین ماده مغناطیسی کشف شده بود) یک فرمغناطیس است را رد و آن را فرمغناطیس دانست. مگنتایت ( $Fe_3O_4$ )؛ کما مگیمایت ( $Fe_2O_3 - \gamma$ )؛ مخلوط اکسیدهای آهن و سایر عناصر از قبیل سلفور فریت در این طبقه بندی قرار می‌گیرند.

اتم‌ها دارای مخلوطی از عناصر موازی و ضد موازی گشتاور مغناطیسی هستند.

پذیرندگی مغناطیسی بسیار بزرگی زیر دمای کوری دارند.



شکل ۴۱.۱: فریمغناطیس و منحنی مشخصه آن

### زنگ تفریح

■ یک منبع ولتاژ داریم وقتی ولتاژ آنرا با ولتمتر اندازه می‌گیریم ۱۰۰۰ ولت را نشان می‌دهد، اما وقتی دوسر سیم منبع را با دست خالی می‌گیریم، آنچنان دردناک و کشنده نیست. دلیل آن چیست؟

**جواب :**



### زنگ تفریح

■ چرا سیم‌های دستگاه‌های مخابراتی را افشاران می‌سازند؟ دلیل آن چیست؟

**جواب :**



### زنگ تفریح

■ چرا برای انتقال دو سیم با جریان زیاد نزدیک هم آنها را در یک لوله فولادی می‌گذارند؟ چه مسئله‌ای در کار است؟

**جواب :**



### زنگ تفريح

■ کمترین مقدار امپدانس مشخصه یک خط ارتباط دو سیمه چقدر است؟ (بین دو سیم هواست).

**جواب :**

★ رابطه امپدانس مشخصه بستگی به فاصله دو سیم  $d$  و قطر سیمها  $2r$  دارد.

$$Z_0 = 276 \log \frac{d}{r} \quad d = 2r \implies Z_0 = 276 \log 2 = 83 \Omega$$

عملأً امپدانس خطوط دو سیمه بین  $200\Omega$  تا  $800\Omega$  معمول است. اگر فاصله را زیاد کنیم درست است که امپدانس مشخصه زیاد می شود ولی باند فرکانس آن بعلت تشعشع کاهش می یابد از این نظر برای مخابرات مطلوب نیست. برای انتقال برق شهر چطور؟

### زنگ تفريح

■ اگر در یک کابل هم محور قطر سیم داخلی دو میلی متر باشد، برای امپدانس مشخصه  $Z_0 = 600\Omega$  شعاع سیم خارجی چقدر است؟ (بین دو سیم هواست).

**جواب :**

★ امپدانس مشخصه کابل هم محور بستگی نسبت دو قطر سیمها دارد.

$$Z_0 = 138 \log \frac{R_2}{R_1} \quad R_1 = 1 \text{ mm} \implies R_2 \approx 22 \text{ meter !!!}$$

در کابل های هم محور امپدانس مشخصه بین  $200\Omega$  تا  $50\Omega$  معمول است.

## ۸.۱ آیا قانون ولتاژ های کیرشهف حالت خاصی از قانون فاراده است؟

ابتدا باید بگوئیم قانون ولتاژ های کیرشهف چه میگوید:  
در یک حلقه بسته در مدار جمع جبری ولتاژها برابر صفر است. یا عبارت ریاضی

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

این انتگرال بما میگوید جمع جبری ولتاژها در یک مسیر بسته صفر است. و این نوع میدانهای الکترواستاتیک هستند. اما در الکترودینامیک که قانون فاراده حاکم است داریم:

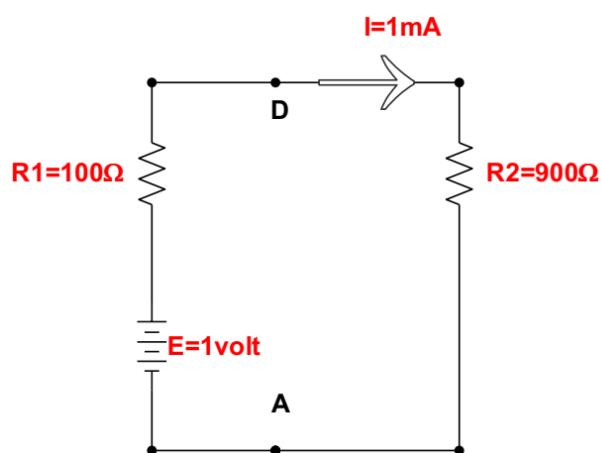
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

این بما می‌گوید که جمع جبری ولتاژها در یک حلقه بسته صفر نیست و برابر مقدار ولتاژی که در این حلقه بوجود می‌آید. در واقع این میدان متغیر و القاء در کار است. اکنون یک مسئله ساده که دکتر والترلوین (استاد فیزیک دانشگاه ام آی تی) مطرح کرده است را بازنویسی می‌کنیم: مدار زیر را در نظر گیرید. می‌خواهیم ولتاژ  $V_D - V_A$  را بدست آوریم

$$I = \frac{1\text{ volt}}{100\Omega + 900\Omega} = 1\text{ mA}$$

$$VD - VA = 1\text{ mA} \times 900\Omega = 0.9\text{ V}$$

یا



شکل ۴۲.۱: مداری شامل دو مقاومت و یک باتری

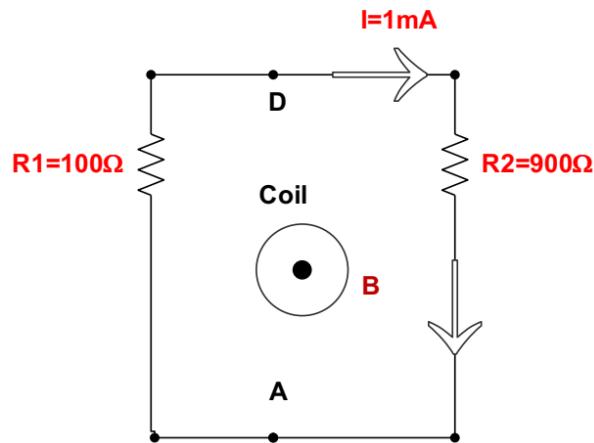
$$VA - VD = -1V + 1\text{ mA} \times 100\Omega = -0.9V \quad \text{یا} \quad VD - VA = 0.9V$$

یعنی به مسیر بستگی ندارد.

اکنون مدار (۴۶.۱) را در نظر گیرید. این همان دو مقاومت را دارد، اما منبع آن یک سیم پیچ القائی است که در وسط حلقه مدار تعییه شده و یک لحظه بهبتری وصل می‌شود. جهت میدان مغناطیسی B بسمت بیرون صفحه کاغذ و افزایشی است سطح و مقدار میدان مأگزینیم به نحوی طراحی شده که  $\frac{d\phi}{dt} = 1V$  و لذا جریان القائی  $1\text{ mA}$  (یک میلی‌آمپر) و ضمناً چون سیم پیچ به یک باتری وصل می‌شود، شکل تغییر B و  $\frac{dB}{dt}$  نسبت به زمان بصورت زیر (۴۶.۱) است. مقدار چگالی شار مغناطیسی یک سیم پیچ تقریباً از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$B = \mu_0 \mu_r \left( \frac{N \times I}{l} \right) \quad \text{Teslas}(T)$$

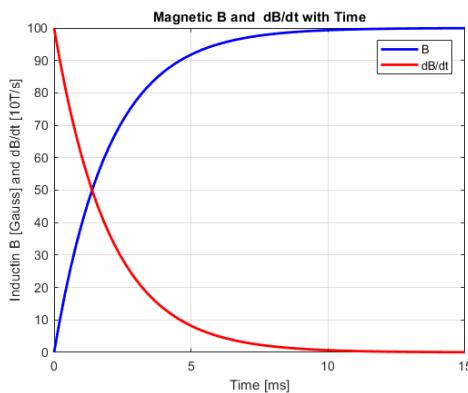
که در آن  $I$  جریان درون سیم پیچ،  $N$  تعداد دور و  $l$  طول سیم پیچ است. اگر  $N = 500$



شکل ۴۳.۱: مداری شامل دو مقاومت و یک منبع ولتاژ القائی

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m \quad l = 15cm \quad I = 3A$$

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{500 \times 3}{0.12} = 0.1256T$$



شکل ۴۴.۱: تغییرات  $B$  و  $\frac{dB}{dt}$  نسبت به زمان

سطح مقطع استوانه سیمپیچ القائی  $A = 100cm^2 = 10^{-2}m^2$  یا شعاعی تقریباً  $5.65cm$  است. بد نیست بدانیم که یک تsla برابر  $10^4$  گاووس است، بنابراین تعداد دور و طول سیمپیچ به نحوی است که چگالی شار مغناطیسی  $100$  گاووس در یک میلی ثانیه است. بنابراین

$$\frac{dB}{dt} = 100 \times 10^4 G/s = 10 T/s$$

و اگر این مقدار را در سطح مقطع سیمپیچ ضرب کنیم، نیروی محرکه القائی را بما میدهد، یعنی

$$\frac{d\phi}{dt} = A \times \frac{dB}{dt} = emf = 10 T/s \times 10^{-2} m^2 = 0.1V$$

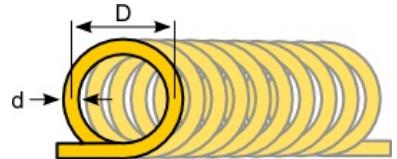
در این صورت با این ولتاژ میتوانیم مقیاس دامنه منحنی‌ها را ده برابر نشان داده شده در نظر گیریم. زیرا در مسئله قبل که با تری بود یک ولت در نظر گرفتیم. بهتر است در باره ثابت زمانی مطالبی عنوان شود. با توجه به منحنی‌ها بدست آمده شکل (۴۶.۱) عرض مفید منحنی را تقریباً  $10ms$  در نظر گیریم، از اینرو ثابت زمانی مدار سیم‌پیچ القائی خواهد بود:

$$5\tau = 10ms \quad \Rightarrow \quad \tau = 2ms$$

به عبارت دیگر نسبت ضریب خودالقائی به مقاومت سیم‌پیچ برابر

$$\tau = \frac{L}{R} = 2ms$$

$$L \equiv \mu_0 \mu_r N^2 r \left[ \ln \left( \frac{8r}{d/2} \right) - 2 \right] \text{ Henries (H)}$$



رابطه تقریبی محاسبه سیم‌پیچ در شکل مصور گشته است. در اینجا  
= ضریب خودالقائی بر حسب هانری.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$  = نفوذپذیری مغناطیسی.

$\mu_r$  = نفوذپذیری مغناطیسی نسبی.

$D$  = قطر حلقه سیم‌پیچ.

$d$  = قطر سیم

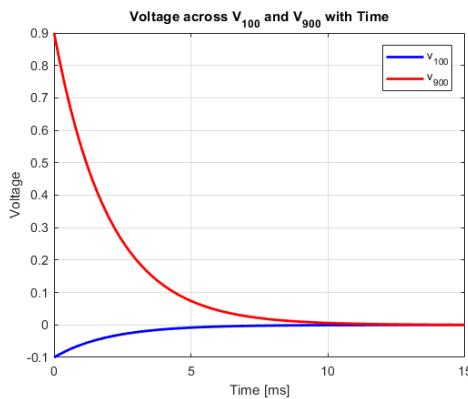
= تعداد دور سیم‌پیچ.

## ۹.۱ نظریه دکتر والتر لوین

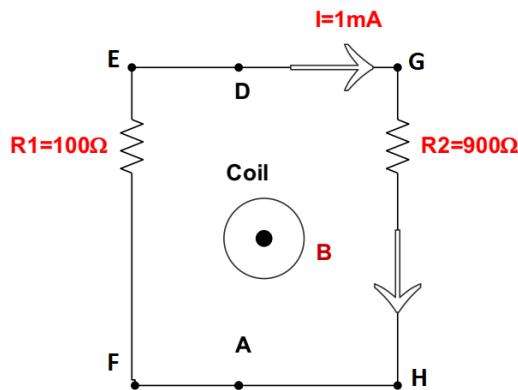
ایشان میگوید که در این حالت یعنی شکل (۴۶.۱) ولتاژ دوسر مقاومت  $R_1 = 100\Omega$  و  $R_2 = 90\Omega$  بستگی به مسیری که آنها را محاسبه می‌کنیم هستند و هر شکل متفاوتی دارند بنابراین شکل موج ولتاژ  $V_{DA}$  بستگی به مسیر دارد، یعنی دو مقدار متفاوت. این هم درست است و آزمایش هم آنرا تائید می‌کند. در شکل (۴۶.۱) منحنی قرمز رنگ  $\frac{dB}{dt}$  متناسب با جریان  $i$  و یا  $e$  است. آنچه دکتر والتر لوین در فیلم نشان میدهد بفرار ذیل است.

بیایید یکبار دیگر به شکل مدار با توجه به نام گذاری سیم‌های رابط مدار داشته باشیم دکتر والتر لوین این طور استباط می‌کند که چون چهار سیم‌های رابط  $FA$ ,  $DG$ ,  $ED$  و  $AH$  نسبتاً ضخیم هستند و مقاومت ناچیزی دارند، بنابراین ولتاژ دوسر مقاومت  $90\Omega$  برابر  $V_{DA}$  و ولتاژ دوسر مقاومت  $100\Omega$  برابر  $V_{AD}$  است که مجموعاً همان مقدار یک ولت القائی در نقطه شروع است. نکته‌ای ایشان در نظر نمی‌گیرند ولتاژ القائی در چهار سیم رابط است و از طول مقاومت‌های  $90\Omega$  و  $100\Omega$  صرفنظر می‌کنیم. فرض کنید مدار کویل در سمت چپ خط فرضی عمودی  $DA$  در کل ولتاژ  $v_1$  و در سمت راست خط فرضی نامبرده برابر  $v_2$  القاء می‌کند. بنابراین در کل مدار

$$v = v_1 + v_2 = 1 \text{ volts}$$



شکل ۴۵.۱: ولتاژ دوسر مقاومت‌های  $100\Omega$  و  $900\Omega$



شکل ۴۶.۱: مدار با توجه به نام گذاری سرهای سیم‌های رابط.

اکنون با توجه به مدار بوجود آمده می‌توانیم برای بخش چپ بنویسیم

$$V_{AD} = -v_1 + R_1 i$$

که در آن  $i = \frac{v}{R_1 + R_2}$  است. اما برای بخش راست:

$$V_{DA} = -v_2 + R_2 i$$

با قرار دادن جریان خواهیم داشت

$$V_{AD} = -v_1 + R_1 \frac{v_1 + v_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 v_2 - R_2 v_1}{R_1 + R_2}$$

و

$$V_{DA} = -v_2 + R_2 i = \frac{R_2 v_1 - R_1 v_2}{R_1 + R_2}$$

اگر به این دو رابطه اخیر نگاه کنید متوجه می‌شویم که هر دو رابطه یکی است و استدلال دکتر لوین غلط است اگر این مدار کاملاً متقارن باشد، در این صورت ولتاژ دو سر مدار با توجه به مقادیر داده شده برابر  $V_{DA} = 0.4 \text{ volts}$  در لحظه اول خواهد بود.

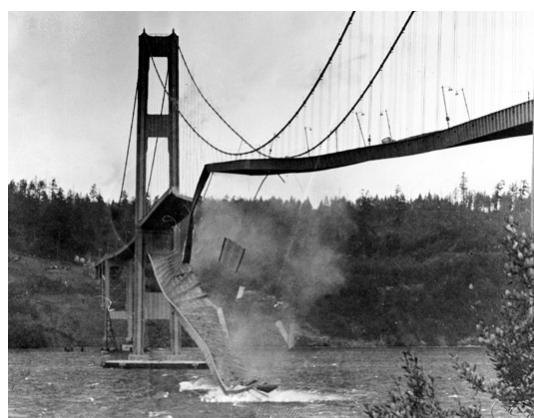


## فصل ۲

# پدیده رزونانس

### ۱.۲ مقدمه

وقتی سخن از پدیده تشدید یا رزونانس می‌آید، انسان بیاد ادوات موسیقی یا فاجعه پل تاکوما<sup>۱</sup>، شکل (۱.۲)، می‌افتد. هر پدیده قوی در طبیعت یک طرف تاریک دارد که پدیده رزونانس جلوه‌گری می‌کند و فاجعه ببار می‌آورد. برای مثال دیده شده است که وقتی یک خواننده اپرا با صدای خاص خود می‌خواند لیوانی که در همان نزدیکی او قرار داشته است، مرتعش شده و می‌شکند. در سال ۱۹۴۰، پل تاکوما، چهار ماه بعداز ساخته شدنش شروع به نوسان می‌کند و همانطوری که در شکل (۱.۲) ملاحظه می‌کنید، فرومیریزد. البته این پل برای شرعت باد ۱۲۰ مایل در ساعت طراحی شده بود اما در وقت فروپاشی فقط سرعت باد ۴۲ مایل در ساعت بود! این چگونه اتفاق افتاد؟ در برق، سیم‌پیچ تسلا در مدار



شکل ۱.۲: نوسان پل تاکوما- امریکا

مبدل رزونانسی در سال ۱۸۹۱ توسط نیکلای تسلا درست شد. دستگاه او برای تولید ولتاژ

<sup>۱</sup>Tacoma

زیاد، جریان کم، جریانهای متناوب فرکانس زیاد بکار بردش. آزمایشهای تسلسل شامل دو یا سه مدار رزونانسی کوپل شده بود. او از آنها برای تولید آذرخش<sup>۲</sup> استفاده کرد. البته او در این فکر بود از انرژی آذرخش (پدیده رعد و برق) و مقدار متناوبی الکتریسته از بدرورون زمین می‌رود را جمع آوری کند و از آنها استفاده نماید. او ادعا می‌کرد می‌تواند از این انرژی، برق تمام جهانیان را تامین نماید. آیا بین فرکانس رزونانس طبیعی زمین که در حدود تقریبی هفت و نیم هرتز است و پدیده آذرخش رابطه‌ای وجود دارد؟ در سال ۱۹۵۰ این فرکانس توسط شومن<sup>۳</sup> محاسبه و سپس اندازه‌گیری شد.

در این جزو سعی می‌کنیم تا با نگاه ریاضی و تکیه بر مفاهیم فیزیکی الکترومغناطیس، پدیده رزونانس را تشریح کرده و فرکانس‌های مربوطه را بدست آوریم.

در فیزیک، بازآوایی یا رزونانس یا تشدید عبارت است از تمایل سیستم به نوسان با بیشینه دامنه در فرکانس‌های خاص که به آنها فرکانس رزونانس یا فرکانس تشدید گویند. در چنین فرکانس‌هایی انرژی ارتعاشی در جسم ذخیره می‌شود و در نتیجه نیرویی کوچک و متناوب می‌تواند باعث حرکتی نوسانی با دامنه بزرگ شود.

در یک مدار الکتریکی، موقعیتی پیش می‌آید که رکتانس القائی با رکتانس خازنی از نظر مقدار برابر می‌شوند و باعث می‌شود که انرژی الکتریکی بین میدان مغناطیسی سیم‌پیچ و میدان الکتریکی خازن نوسان کند و این پدیده را رزونانس می‌گوئیم. در مکانیک انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل و بر عکس بهم تبدیل می‌شوند.

رزونانس وقتی اتفاق می‌افتد که میدان مغناطیسی سیم‌پیچ، که جریان الکتریکی در درون آن تولید کرده شروع به از بین رفتن می‌کند و خازن را پُر (شارژ) می‌نماید و سپس بار خازن بدرورون سیم‌پیچ تخلیه شده و این تحول و فرآیند ادامه می‌یابد. در حالت رزونانس، امپدانس دو عنصر بصورت سری در کمینه مقدار و در صورتی که موازی باشند در بیشینه مقدار است.

رزونانس برای مدارات هماهنگی<sup>۴</sup>، فیلتر کردن<sup>۵</sup> و نوسان‌سازها<sup>۶</sup> و تقویت کننده‌های هماهنگ شده<sup>۷</sup> بکار بردش می‌شود، زیرا رزونانس در فرکانس خاصی بازاء مقدار معلومی از ظرفیت خازن و ضریب خودالقائی سیم‌پیچ رخ می‌دهد. رزونانس در ادوات و مدارات مخابراتی نقش تعیین کننده دارد و می‌تواند در صورتی که کنترول نشود خرابی ایجاد نماید. و همانطوری در مکانیک بخارتر داریم باعث ویرانی پل تاکوما شده است. این پدیده در کتابهای فیزیک و معالات دیفرانسیل توصیف شده و حتی می‌توان فرکانس رزونانس انهدام را هم تعیین کرد. فرکانس رزونانسی که ما اکنون از آن صحبت می‌کنیم با مقادیر ویژه<sup>۸</sup> که در کوانتم و الکترومغناطیس هست خیلی بهم وابسته هستند. در فصول و بخش‌های بعدی مفصلأ در بار آن صحبت خواهیم کرد.

برای مدارات رزونانسی این اصطلاحات و پارامترها را تعریف می‌کنند

<sup>۲</sup>lighting

<sup>۳</sup>Schumann Resonance

<sup>۴</sup>tuning

<sup>۵</sup>filtering

<sup>۶</sup>osillators

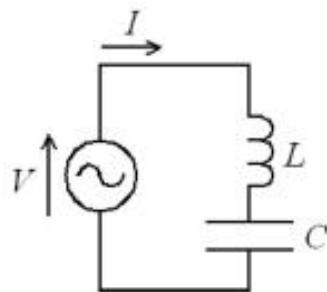
<sup>۷</sup>tuned amplifiers

<sup>۸</sup>eigenvalues

- فرکانس مرکزی یا فرکانس رزونانس  $\omega_0$  (بر حسب هرتز)
- پهنهای باند یا عرض باند نیم توان یا سه دسی بل ( $3dB$ ): محدوده فرکانس‌های اطراف که توان در آن فرکانس‌ها نسبت به توان بیشینه تا نیم توان یا سه دسی بل ( $3dB$ ) کمتر هستند.
- ضریب کیفیت ( $Q$ ): نسبت انرژی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده

## ۲.۲ مدار $LC$

اجازه دهید از ابتدائی‌ترین مدار رزونانس بحث ریاضی خود را شروع کنیم. یک مدار سری  $LC$  ساده با خازن بدون بار و سیم‌پیچی بدون جریان مانند شکل (۲.۲) در نظر می‌گیریم. در فضای فرکانس (فیزوری) امپدانس مدار برابر است با:



شکل ۲.۲: مداری  $LC$  سری

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (1.2)$$

$$ZI = V \quad (2.2)$$

$$\text{پاسخ ورودی صفر مدار خواهد بود} \\ ZI = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{و این وقتی رخ میدهد که } Z \text{ برابر صفر شود؛} \\ j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{از رابطه (۴.۲) اگر فرکانس برابر} \\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.2)$$

باشد مقدار امپدانس صفر خواهد شد که این همان فرکانس رزونانس مدار است. حال بیایید مدار را در فضای زمان بررسی کنیم. طبق قوانین ولتاژهای کیرشهف داریم

$$L \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = v(t) \quad (6.2)$$

که پاسخ ورودی صفر مدار خواهد بود:

$$L \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 0 \quad (7.2)$$

یا

$$L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad (8.2)$$

$$\text{عملگر } L \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{C} \text{ روى جريان } i(t) \text{ عمل مى نماید. با قرار دادن} \\ i(t) = e^{\lambda t} \quad (9.2)$$

در رابطه (8.2) خواهیم داشت

$$\left( L\lambda^2 + \frac{1}{C} \right) e^{\lambda t} = 0 \quad (10.2)$$

که از اینجا دو جواب بدست می آید.

$$\lambda = \pm \frac{j}{\sqrt{LC}} \quad (11.2)$$

بنابراین جواب معادله خواهد بود

$$i(t) = A e^{j \frac{t}{\sqrt{LC}}} + B e^{-j \frac{t}{\sqrt{LC}}} = C \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + D \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (12.2)$$

که جوابی سینوزوئیدال به فرکانس  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  دارد. اگر در این فرکانس مدار تحریک شود مقدار امپدانس صفر و جریان بینهایت خواهد شد که از نظر عملی امکان پذیر نیست و هر مداری مقداری تلفات دارد که آنرا محدود میکند و ما در بخش بعد آنرا در نظر خواهیم گرفت.

### ۳.۲ مدار RLC سری

چون مدار بدون تلفات عملاً وجود ندارد، مقاومت سیم پیچ یا هر گونه مقاومت دیگری را بصورت سری در مدار مانند شکل (۳.۲) در نظر می گیریم. در اینجا امپدانس برابر است با:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (13.2)$$

و رابطه فیزور ولتاژ و فیزور جریان رابطه زیر خواهد بود.

$$ZI = V \quad (14.2)$$

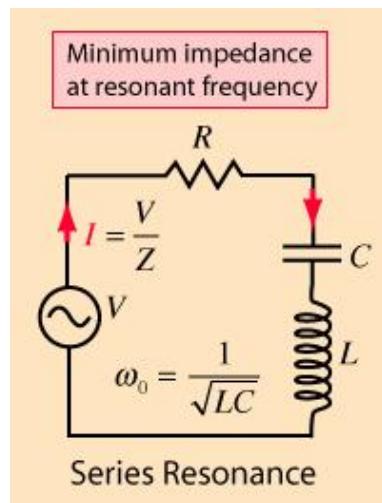
و پاسخ ورودی صفر مدار برابر است با:

$$ZI = 0 \quad (15.2)$$

در اینجا وقتی بخش موهومی امپدانس مدار صفر شود  $Im[Z] = X = 0$  پدیده رزونانس رخ میدهد، بنابراین فرکانس رزونانس برابر است با:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (16.2)$$

در این فرکانس مقدار امپدانس اهمی خالص  $R$  است و جریان بیشترین مقدار و امپدانس مدار کمترین مقدار خود را دارد.

شکل ۳.۲: مدار  $RLC$  سری

## تمرین ۱

- فرض کنید در یک مدار  $RLC$  سری  $V_{rms} = ۵\text{ }mV$ ,  $L = ۲\text{ }\mu H$ ,  $C = ۰.۵\text{ }\mu F$  باشد.
- الف- فرکانس رزونانس  $\omega$  مدار را محاسبه کنید.
  - ب- بازاء  $I_{rms}$  را بر حسب  $\omega$  در محدوده  $\omega = ۸\omega_0$  تا  $\omega = ۱۳\omega_0$  رسم کنید.
  - ج- ثابت کنید که توان تلف شده در مدار از رابطه زیر بدست می‌آید
- $$P_{avg} = \frac{V_{rms}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (17.2)$$
- د- منحنی  $P_{avg}$  را بر حسب  $\omega$  در محدوده  $\omega = ۸\omega_0$  تا  $\omega = ۱۳\omega_0$  رسم کنید. فرکانس زاویه‌ای رزونانس است.

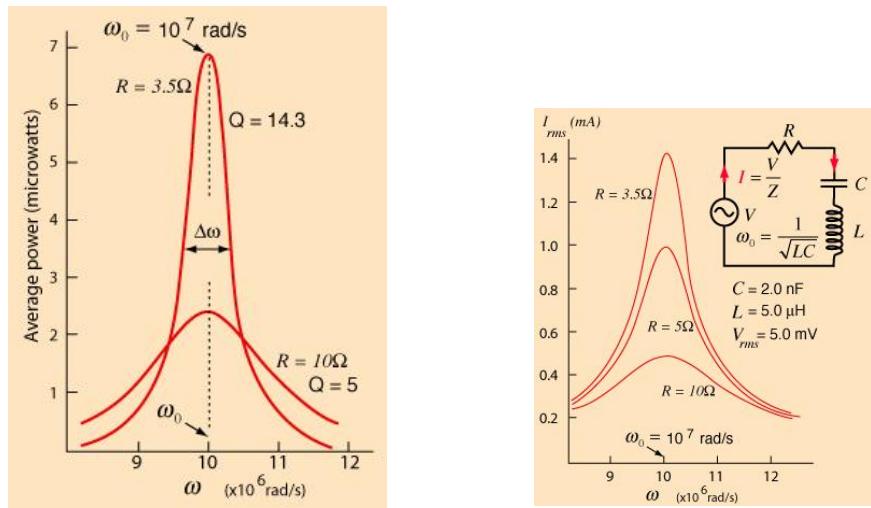
## جواب ۱

در شکل (۹.۲) این نمودار رسم شده است.

## ۴.۲ پهنه‌ای باند

معمولًاً در مدار محدوده فرکانس‌هایی که در بین نصف توان بیشینه واقع می‌شوند را پهنه‌ای باند مدار می‌گویند. با توجه به مدار  $RLC$  سری داریم:

$$P_{avg} = \frac{V_{rms}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (18.2)$$



شکل ۴.۲: نمودار جریان بر حسب فرکانس  $\omega$  شکل ۵.۲: منحنی توان تلف شده در مدار برای سه مقاومت اهمی مختلف.

و در فرکانس رزونانس مقدارش برابر است با:

$$P_{avg} = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{V_{max}^2}{R} \quad (19.2)$$

بنابراین بازاء دو فرکانس  $\omega_1$  و  $\omega_2$  بنام **فرکانس‌های نیم توان**<sup>۱۰</sup> داریم:

$$P_{avg}(\omega_1) = P_{avg}(\omega_2) = \frac{1}{4} \frac{V_{max}^2}{R} \quad (20.2)$$

و از تعریف فوق دو فرکانس  $\omega_1$  و  $\omega_2$  بدست می‌آید:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}, \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (21.2)$$

این دو فرکانس را پهنه‌ای نیم توان باند مدار رزونانسی می‌گویند؛ ازین‌رو

$$\Delta\Omega = \omega_2 - \omega_1 = R/L, \quad \Delta f = \Delta\Omega/2\pi \quad (22.2)$$

## ۵.۲ گزینش و ضریب کیفیت

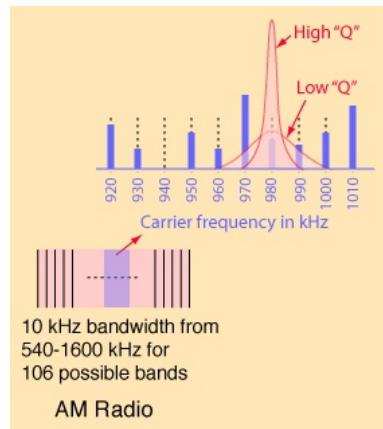
مدارات رزونانسی برای گزینش سیگنالی با طیف فرکانسی خاص از سایر طیف فرکانسی بکار بردۀ می‌شود. در رادیو و تلویزیون همه ما از آن استفاده کرده‌ایم. با چرخانیدن پیچ ایستگاه یا ب رادیو، طیف ایستگاه رادیوئی مورد نظر خود را از سایر طیف‌ها موجود در فضای انتخاب و گزینش می‌نمائیم، شکل (۶.۲). هر قدر پاسخ فرکانسی مدار گزینش گر دستگاه تیزتر باشد، می‌گوئیم که "قابلیت گزینش"<sup>۱۱</sup> "مدار بیشتر است. "ضریب کیفیت"<sup>۱۲</sup>  $Q$  کمیتی است که قابلیت گزینش مدار را بیان می‌کند. هرقدر  $Q$  مدار بیشتر

<sup>۱۰</sup> half-power frequencies

<sup>۱۱</sup> Selectivity

<sup>۱۲</sup> Quality factor

باشد، گزینش باریک‌تر و کم عرض‌تر است.



شکل ۶.۲: نمونه‌ای از کاربرد مدار رزونانس به مدار هماهنگی نیز معروف است در رادیوهای *AM* استفاده می‌شود. باید قابلیت گزینش مدار بقدر کافی زیاد باشد تا بتواند ایستگاه‌های مختلف را از یکدیگر تفکیک نماید.

در کتاب‌های درسی تعاریف مختلفی برابر ضریب کیفیت یا  $Q$  مدار تعریف می‌کنند ولی همه به رابطه زیر ختم می‌شود

$$Q = \frac{f_{\circ}}{f_2 - f_1} = \frac{f_{\circ}}{\Delta f} \quad (23.2)$$

که برای مدار سری خواهد شد

$$Q = \frac{\omega_{\circ} L}{R} = \frac{1}{\omega_{\circ} R C} = \frac{R_{\circ}}{R}, \quad R_{\circ} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

مقدار  $\% \times \frac{1}{Q}$  را درصد پهنای باند مدار می‌گویند.

## تمرین ۲

ثابت کنید فرکانس رزونانس واسطه هندسی بین دو فرکانس نیم توان است؛ یعنی

$$f_{\circ} = \sqrt{f_1 f_2}$$

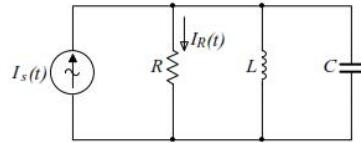
و برای  $Q > 10$  تقریباً می‌توان نوشت:

$$f_1 \approx f_{\circ} - \Delta f / 2, \quad f_2 \approx f_{\circ} + \Delta f / 2$$

## ۶.۲ مدار $RLC$ موازی

مدار رزونانسی  $RLC$  موازی شکل (۸.۲) را در نظر گیرید. در این مدار تلفات سیم پیچ با  $R_L$  و حازنی با  $R_C$  نشان داده شده است. ما می‌توانیم مشخصه رزونانسی مدار  $RLC$  موازی را محاسبه کنیم. امپدانسی که از منبع جریان دیده می‌شود برابر است:

$$Z = \frac{j\omega L}{(1 - \omega^2 LC + \frac{j\omega L}{R})} \quad (24.2)$$

شکل ۷.۲: مدار  $RLC$  موازی

در فرکانس رزونانس  $\omega^* = \sqrt{LC}$  و امپدانسی که از منبع دیده می‌شود مقاومت خالص خواهد بود. و ترکیب خازن و سیمپیچ بصورت مدار باز عمل می‌کنند. بنابراین در فرکانس رزونانس کل جریان از مقاومت می‌گذرد.

$$\omega_* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

شبیه مدار سری فرکانس‌های نیم توان برابرند با

$$\frac{1}{2} = \frac{(\omega L)^2}{(R - \omega^* LCR)^2 + (\omega L)^2}$$

که از این معادله

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{\omega_*^2}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{\omega_*^2}} \quad (25.2)$$

پهنه‌ای باند و ضریب کیفیت  $Q$  خواهد بود

$$Q = \frac{f_*}{\Delta f} = \omega_* RC = \frac{R}{\omega_* L} = \frac{R}{R_*}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi RC}, \quad R_* = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

اکنون میخواهیم فرکانس رزونانس را برای مدار شکل (۸.۲) بدست آوریم. امپدانس معادل مدار برابر است با:

$$\frac{1}{Z_{equiv}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}, \quad Z_{equiv} = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} \quad (26.2)$$

که در آن

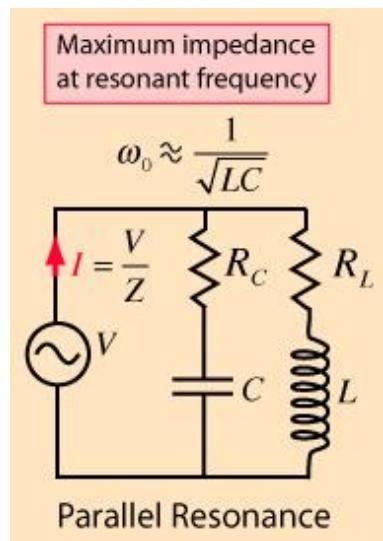
$$Z_L = R_L + j\omega L, \quad Z_C = R_C + \frac{1}{j\omega C}$$

با قرار دادن بخش موهومی امپدانس معادل برابر صفر فرکانس رزونانس بدست می‌آید.

$$\omega_* = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left[ \frac{R_L^* C - L}{R_C^* C - L} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (27.2)$$

در صورتی که مقدار مقاومت‌های  $R_L$  و  $R_C$  کوچک باشد، فرکانس رزونانس تقریباً خواهد بود

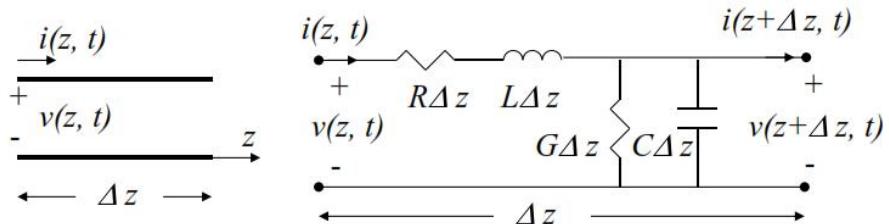
$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



شکل ۸.۲: مدار RLC موازی

## ۷.۲ مدار رزونانس و خط ارتباط

مدارهای  $LC$  که بوسیله خازن و سیم پیچ درست میشود تا حدود فرکانس‌های دویست مگاهرتز کار می‌کنند اما با افزایش فرکانس یعنی طول موج‌های کمتر از یک متر عملأً وارد بحث جدید مدارهای رزونانسی خطوط ارتباط یعنی مدارات با اجزاء گستردگی شویم.



شکل ۹.۲: یک جزء کوچکی از خط ارتباط

اجزاء  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ، و  $G$  در یک خط ارتباط در طول خط گستردگی شده است. و آنها را برای واحد طول در نظر میگیریم. با استفاده از قوانین جریان و ولتاژ کیرشهف داریم:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -Ri(z, t) - L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (۲۸.۲)$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -Gi(z, t) - C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (۲۹.۲)$$

که در آن

• مقاومت واحد طول، بر حسب اهم بر متر.

• ضریب خود القائی واحد طول، بر حسب هانری بر متر.

• هدایت واحد طول، بر حسب زیمنس بر متر.

• ظرفیت واحد طول، بر حسب فاراد بر متر

از این دو رابطه (۲۸.۲) و (۲۹.۲) معادله خط ارتباط که به معادله تلگراف معروف است بدست می‌آید. اگر تغییرات زمانی  $e^{j\omega t}$  (هارمونیکی) در نظر گیریم

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \quad (30.2)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)I(z) \quad (31.2)$$

از این دو رابطه (۳۰.۲) و (۳۱.۲)، معادله موج در فضای فرکانس بدست می‌آید:

$$\frac{d^{\gamma} V(z)}{dz^{\gamma}} - \gamma^{\gamma} V(z) = 0 \quad (32.2)$$

$$\frac{d^{\gamma} I(z)}{dz^{\gamma}} - \gamma^{\gamma} I(z) = 0 \quad (33.2)$$

که در آن

$$\gamma \equiv \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \equiv \alpha + j\beta \quad (34.2)$$

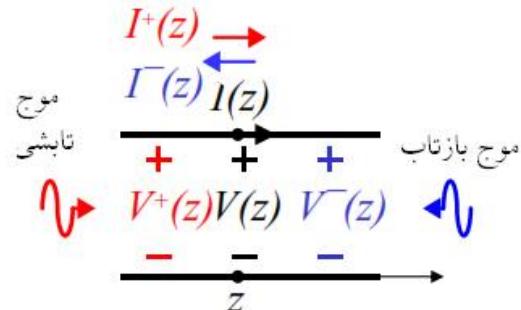
بنام ثابت انتشار خوانده می‌شود.  $\alpha$  ضریب تضعیف بر حسب نپرمتر و  $\beta$  ثابت فاز بر حسب رادیان بر متر است.

از معادل موج (۳۲.۲) و (۳۳.۲) خواهیم داشت

$$V(z) \equiv V^+(z) + V^-(z) \equiv V_+^+ e^{-\gamma z} + V_-^- e^{\gamma z} \quad (35.2)$$

$$I(z) \equiv I^+(z) - I^-(z) \equiv I_+^+ e^{-\gamma z} - I_-^- e^{\gamma z} = \frac{1}{Z_0} (V_+^+ e^{-\gamma z} - V_-^- e^{\gamma z}) \quad (36.2)$$

که در آن  $V_+^+$  دامنه ولتاژ موج رفت  $V_-^-$  دامنه ولتاژ موج بازتاب و همچنین  $I_+^+$  دامنه



شکل ۱۰.۲: موج تابشی و موج بازتاب روی خط

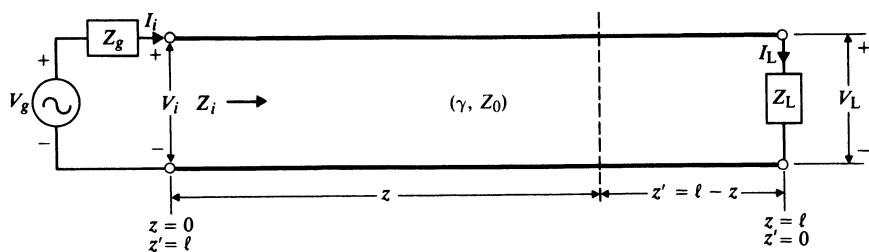
جريان موج رفت و  $I_{\circ}^-$  دامنه جريان موج بازتاب (برگشت) است. می‌توان ثابت کرد که

$$Z_{\circ} \equiv \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{V_{\circ}^+}{I_{\circ}^+} = \frac{V_{\circ}^-}{I_{\circ}^-} \quad (37.2)$$

که  $Z_{\circ}$  را امپدانس مشخصه خط ارتباط می‌گویند.

## ۸.۲ خطوط ارتباط و رزونانس

خط ارتباط به مشخصات  $\gamma$  و  $Z_{\circ}$  که در سمت راست به امپدانس بار  $Z_L$  ختم شده و در سمت چپ منبعی با امپدانس داخلی  $Z_g$  و ولتاژ  $V_g$  وصل شده است، مطابق شکل (۱۱.۲)، در نظر گیرید. میدانیم امپدانس در ورودی برابر است با



شکل ۱۱.۲: یک خط ارتباط که رابط منبع  $V_g$  تغذیه و بار  $Z_L$  است.

$$Z_i = Z_{\circ} \frac{Z_L + Z_{\circ} \tanh \gamma l}{Z_{\circ} + Z_L \tanh \gamma l} \quad (38.2)$$

اکنون دو حالت را در نظر می‌گیریم:

- الف- خط کم افت (کم تلفات)  $\alpha l << 1$  و انتهای خط اتصال کوتاه  $Z_L = \infty$  و طول خط مضربی از نیم موج  $l = n\lambda/2$  باشد، در این صورت خواهیم داشت.

$$Z_{is} = Z_{\circ} \tanh \gamma l \quad (39.2)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} Z_{is} &= Z_{\circ} \tanh \gamma l = Z_{\circ} \frac{\sinh(\alpha + j\beta)l}{\cosh(\alpha + j\beta)l} \\ &= \frac{\sinh \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \sin \beta l}{\cosh \alpha l \cos \beta l + j \sinh \alpha l \sin \beta l} \end{aligned} \quad (40.2)$$

با قرار دادن  $\alpha l << 1$  و  $\sin \beta l = 0$ ،  $\beta l = n\pi$  و  $l = n\lambda/2$  در رابطه (۴۰.۲) خواهیم داشت

$$Z_{is} = Z_{\circ} \tanh(\alpha l) \approx Z_{\circ} (\alpha l) \quad (41.2)$$

وقتی خط با تلفات کم باشد امپدانس  $Z_{is}$  رابطه (۴۱.۲) کوچک است اما صفر نیست. این همان شرایط مدار رزونانس سری است.

- ب- وقتی طول خط اتصال کوتاه مضرب فردی از  $\lambda/4$  باشد، امپدانس ورودی زیاد است ولی بینهایت نخواهد بود. یعنی  $\cos \beta l = 0$  و از رابطه (۴۰.۲) خواهیم داشت

$$Z_{is} = \frac{Z_0}{\tanh(\alpha l)} \approx \frac{Z_0}{(\alpha l)} \quad (42.2)$$

این همان شرایط مدار رزونانس موازی است.

اکنون بیائید ضریب کیفیت <sup>۱۳</sup> یا  $Q$  را با استفاده از بدست آوردن پهنهای باند نیم توان <sup>۱۴</sup> محاسبه کنیم. پهنهای باند نیم توان مدار رزونانس موازی  $\Delta f = f_2 - f_1$  حول فرکانس میانی  $f_0$  است که در آن  $f_2 = f_0 + \Delta f/2$  و  $f_1 = f_0 - \Delta f/2$  و فرکانس‌های نیم توان از روی توان ماگزیموم در فرکانس  $f_0$  و نصف آن بدست می‌آید. بایستی توجه کرد که توان متناسب با  $|Z_{is}|^2$  است.

فرض کنید  $f = f_0 + \delta f$  و در آن  $\delta f$  تغییر کوچک از فرکانس رزونانس است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \beta l &= \frac{2\pi f}{u_p} l = \frac{2\pi(f_0 + \delta f)}{u_p} l \\ &= \frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (43.2)$$

$$\cos \beta l = -\sin \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right] \approx -\frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \quad (44.2)$$

$$\sin \beta l = -\cos \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right] \approx 1, \quad (45.2)$$

در اینجا فرض ما  $1 \ll \frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right)$  است. با قرار دادن (۴۳.۲) و (۴۴.۲) و (۴۵.۲) در رابطه (۴۰.۲) و با توجه به  $1 \ll \alpha l$  و کمی عملیات ریاضی خواهیم داشت:

$$Z_{is} = \frac{Z_0}{\alpha l + j \frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right)} \quad (46.2)$$

$$|Z_{is}|^2 = \frac{|Z_0|^2}{(\alpha l)^2 + \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right]^2} \quad (47.2)$$

در فرکانس  $f = f_0$ ،  $\delta f = 0$  و مقدار  $|Z_{is}|^2_{max} = |Z_0|^2 / (\alpha l)^2$  ماقزیموم و برابر است. بنابراین

$$\frac{|Z_{is}|^2}{|Z_{is}|^2_{max}} = \frac{1}{1 + \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha l} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) \right]^2} \quad (48.2)$$

<sup>۱۳</sup>quality factor

<sup>۱۴</sup>half-power bandwidth

وقتی  $\delta f = \pm \Delta f / 2$  است، فرکانس نیم توان را در فرکانس‌های  $f_1$  و  $f_2$  خواهیم داشت. یعنی رابطه (۴۸.۲) برابر  $\frac{1}{2}$ ، یا

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) = \frac{\beta}{2\alpha} \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) = 1 \quad (49.2)$$

در نتیجه  $Q$  مدار رزونانس موازی (یک خط اتصال کوتاه با طولی برابر مضرب فردی از  $\frac{1}{4}$ ) خواهد بود:

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (50.2)$$

ما اغلب در میدانها و امواج الکترومغناطیس از ثابت انتشار مختلط  $k$  استفاده می‌کنیم. بنابراین  $\gamma = jk$  و

$$Q = \frac{Re(k)}{\Im(k)} \quad (51.2)$$

این رابطه مهمی برای مطالب بعدی ما است و از آن برای تعیین  $Q$  رزوناتورهای دیالکتریک استفاده خواهیم کرد.

## ۹.۲ رزونانس شومن

در سال ۱۹۵۲ وینفرید اتو شومن<sup>۱۵</sup> از نظر ریاضی پدیده رزونانس امواج الکترومغناطیس دور کره زمین را پیشگوئی کرد. رزونانس شومن بعلت فضای بین سطح زمین و ناحیه هادی یونسفر که بصورت یک موجبر بسته است پدید می‌آید. با این وصف این موجبر بسته یک محفظه رزونانس تشکیل میدهد که محرک آن در باند امواج ELF است. این محفظه رزونانسی بطور طبیعی با جریان الکتریکی آذرخش (صاعقه و رعد و برق) تحریک می‌شود که طیفی از سه هرتز تا ۶۰ هرتز را شامل می‌شود و در جاهاهای خاصی از باند ELF پیکهایی در فرکانس  $14/3, 20/8, 27/3, 33/8$  ظاهر می‌شود.

مود عادی فرکانس رزونانس شومن، مود اصلی امواج ساکن در محفظه رزونانسی دور کره زمین با طول موجی برابر محیط کره زمین است. کمترین فرکانس با بیشترین شدت است و فرکانس‌های تمام مودها بستگی به اثرات تغییرات جزئی خورشید روی یونسفر دارد که ضخامت آن را تغییر می‌دهد. تقریباً در مودهای بالا بفاصله  $6/5$  هرتز با هم فاصله دارند.

با وجودی که ریاضیات مهمی برای موجرهای کروی بوسیله واتسون<sup>۱۶</sup> در سال ۱۹۱۸ مدون کرد، اما شومن اولین کسی است که فرکانس‌های رزونانس کره زمین و یونسفر را

<sup>۱۵</sup>Winfried Otto Schumann

<sup>۱۶</sup>G. N. Watson

از جنبه نظری در بین سال‌های ۱۹۵۲ – ۱۹۵۴ مطالعه کرد. با این حال، فقط در سال‌های ۱۹۶۳ – ۱۹۶۰ بود که اندازه‌گیری توسط بالسر و واگنر انجام شد و علی رغم نویز زمینه‌ای، فرکانس رزونانس بدست آمد. از آن زمان به بعد در زمینه فرکانس شومن علاقمندان زیادی پیدا شد.

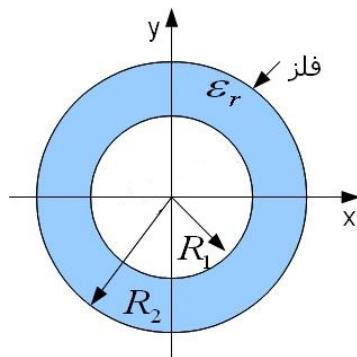
در محفظه ایده‌آل، فرکانس مود  $f_n$  بوسیله شعاع زمین  $R$  و سرعت سیر نور  $C$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_n = \frac{C}{2\pi R} \sqrt{n(n+1)}$$

میدانیم که موجبر بین زمین و یونسفر یک محفظه رزونانس الکترومغناطیسی کاملی نیست و تلفات نیر وجود دارد. این خود روی فرکانس رزونانس تاثیر دارد، ضمناً شب و روز ارتفاع یونسفر و میدان مغناطیسی زمین و طول و عرض جغرافیائی روی شدت آن موثر است.

### ۱.۹.۲ معادله مشخصه دو کره فلزی

فرض کنید بین دو کره فلزی هم مرکز هوا است. می‌خواهیم معادله‌ای بدست آوریم که از حل آنها بتوان فرکانس‌های محفظه رزونانسی بین دو کره را بدست آورد. بدیهی است که دو نوع مود  $TM^r$  و  $TE^r$  مورد نظر است.



شکل ۱۲.۲: محفظه رزونانسی بین دو کره فلزی

شعاع کره داخلی فلزی را  $R_1$  و شعاع کره خارجی فلزی را  $R_2$  و فاصله بین این دو هوا در نظر می‌گیریم. در بین فاصله بین این دو شعاع یک منبع محرک (آنتن هرتز) در نقطه  $(r_0, \theta_0, \phi_0)$  قرار می‌دهیم.

تشعشع الکترومغناطیسی یک دیپل هرتز را می‌توان بطور آنالیتیک بدست آورد. فرض کنید گشتاور دیپل  $P_o = p_o a_d$  در آن  $I = \frac{I_{\Delta l}}{j\omega}$  و  $p_o = I a_d$  جریان دیپل،  $\Delta l$  طول دیپل، بالاخره  $a_d$  بردار واحد است که نشان‌دهنده جهت دیپل در نقطه  $r_0, \theta_0, \phi_0$  است. برای

میدان این آنتن بازاء  $r < r_0$  می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \left[ a_{mn}^{(\ell)} \mathbf{M}^{(1)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{(\ell)} \mathbf{N}^{(1)}(r, \theta, \phi) \right] \quad (52.2)$$

$$\mathbf{H}^i = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \left[ a_{mn}^{(\ell)} \mathbf{N}^{(1)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{(\ell)} \mathbf{M}^{(1)}(r, \theta, \phi) \right] \quad (53.2)$$

و برای  $r > r_0$  شاخص (۴) و (۱) بایستی بترتیب به (۱) و (۴) تغییر یابند. لذا:

$$\mathbf{E}^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \left[ a_{mn}^{(1)} \mathbf{M}_{mn}^{(\ell)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{(1)} \mathbf{N}_{mn}^{(\ell)}(r, \theta, \phi) \right] \quad (54.2)$$

$$\mathbf{H}^i = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \left[ a_{mn}^{(1)} \mathbf{N}_{mn}^{(\ell)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{(1)} \mathbf{M}_{mn}^{(\ell)}(r, \theta, \phi) \right] \quad (55.2)$$

مقادیر  $b_{mn}^{(1),(\ell)}$  و  $a_{mn}^{(1),(\ell)}$  عبارتند از:

$$a_{mn}^{(1),(\ell)} = \left( \frac{-jk^r p_\circ}{4\pi\epsilon} \right) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \mathbf{a}_d \cdot \mathbf{M}_{-m,n}^{(1),(\ell)}(r_\circ, \theta_\circ, \phi_\circ) \quad (56.2)$$

$$b_{mn}^{(1),(\ell)} = \left( \frac{-jk^r p_\circ}{4\pi\epsilon} \right) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{2n+1}{n(n+1)} \mathbf{a}_d \cdot \mathbf{N}_{-m,n}^{(1),(\ell)}(r_\circ, \theta_\circ, \phi_\circ) \quad (57.2)$$

که در آن  $\eta$  امپدانس ذاتی فضا و  $M$  و  $N$  عبارتند از:

$$\mathbf{M}_{mn}^{(g)} = M_{mn,r}^{(g)} \mathbf{a}_r + M_{mn,\theta}^{(g)} \mathbf{a}_\theta + M_{mn,\phi}^{(g)} \mathbf{a}_\phi \quad (58.2)$$

$$\mathbf{N}_{mn}^{(g)} = N_{mn,r}^{(g)} \mathbf{a}_r + N_{mn,\theta}^{(g)} \mathbf{a}_\theta + N_{mn,\phi}^{(g)} \mathbf{a}_\phi \quad (59.2)$$

همچنین:

$$M_{mn,r}^{(g)} = \circ \quad (60.2)$$

$$M_{mn,\theta}^{(g)} = \frac{jm}{\sin\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) z_n^{(g)}(kr) e^{jm\phi} \quad (61.2)$$

$$M_{mn,\phi}^{(g)} = -\frac{d}{d\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) z_n^{(g)}(kr) e^{jm\phi} \quad (62.2)$$

$$N_{mn,r}^{(g)} = \frac{n(n+1)}{kr} P_n^{|m|}(\cos\theta) z_n^{(g)}(kr) e^{jm\phi} \quad (63.2)$$

$$N_{mn,\theta}^{(g)} = \frac{d}{d\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [rz_n^{(g)}(kr)] e^{jm\phi} \quad (64.2)$$

$$N_{mn,\phi}^{(g)} = \frac{jm}{\sin\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [rz_n^{(g)}(kr)] e^{jm\phi} \quad (65.2)$$

میدان این آنتن امواجی به دو سمت یکی بطرف کره داخلی و دیگری خارجی میفرستد. از سطح کره داخلی و خارجی نیز امواج بازتاب می‌شوند امواجی که از کره بشعاع  $R_1$  بازتاب می‌شود را با انديس يك و امواجي که از کره بشعاع  $R_2$  بازتاب می‌شود را با انديس دو بيان می‌کنيم، بنابراین

$$\mathbf{E}^{\text{۱}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^{\text{۱}} \mathbf{M}_{mn}^{(\text{۱})}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{\text{۱}} \mathbf{N}_{mn}^{(\text{۱})}(r, \theta, \phi)] \quad (66.2)$$

$$\mathbf{H}^{\text{۱}} = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^{\text{۱}} \mathbf{N}_{mn}^{(\text{۱})}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{\text{۱}} \mathbf{M}_{mn}^{(\text{۱})}(r, \theta, \phi)] \quad (67.2)$$

$$\mathbf{E}^{\text{۲}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^{\text{۲}} \mathbf{M}_{mn}^{(\text{۲})}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{\text{۲}} \mathbf{N}_{mn}^{(\text{۲})}(r, \theta, \phi)] \quad (68.2)$$

$$\mathbf{H}^{\text{۲}} = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^{\text{۲}} \mathbf{N}_{mn}^{(\text{۲})}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^{\text{۲}} \mathbf{M}_{mn}^{(\text{۲})}(r, \theta, \phi)] \quad (69.2)$$

البته در این مسئله نیازی به نوشتن میدان مغناطیسی  $\mathbf{H}$  نیست، بهر حال برای آن دسته از خوانندگان که بخواهند توزیع میدان‌ها را داشته باشند مفید خواهد بود. در روری سطح دو کره شدت میدان الکتریکی مماسی صفر است. چون دو مولفه  $E_{\theta}$  و  $E_{\phi}$  هر دو باید روی سطوح دو کره صفر باشند، از این نظر با توجه به مولفه‌ها صفر شدن یکی دیگری هم صفر خواهد شد. بنابراین در روی سطح کره بشاعر  $R_1$  باید داشته باشیم:

$$E_{\phi}^i + E_{\phi}^{\text{۱}} + E_{\phi}^{\text{۲}} \Big|_{r=R_1} = 0 \quad r < r_0. \quad (70.2)$$

و همین طور در روی سطح کره بشاعر  $R_2$  باید داشته باشیم:

$$E_{\phi}^i + E_{\phi}^{\text{۱}} + E_{\phi}^{\text{۲}} \Big|_{r=R_2} = 0 \quad r > r_0. \quad (71.2)$$

چون  $\mathbf{M}$  و  $\mathbf{N}$  متعامد هستند و ضمناً تابع  $e^{jm\phi}$  و  $P_n^{|m|}(\cos \theta)$  نیز متعامدند از اینرو از رابطه (۷۰.۲) داریم:

$$a_{mn}^{i(\text{۱})} j_n(kR_1) + a_{mn}^{\text{۲}} j_n(kR_1) = a_{mn}^{\text{۱}} h_n^{(\text{۲})}(kR_1) \quad (72.2)$$

چون این رابطه برای میدان الکتریکی از  $\mathbf{M}$  ناشی شده است، می‌توان گفت که برای مود  $TE^r$  است. همین طور از رابطه (۷۱.۲) داریم

$$a_{mn}^{i(\text{۱})} h_n^{(\text{۱})}(kR_2) + a_{mn}^{\text{۲}} h_n^{(\text{۲})}(kR_2) = a_{mn}^{\text{۲}} j_n(kR_2) \quad (73.2)$$

از دو رابطه (۷۲.۲) و (۷۳.۲) می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} h_n^{(\text{۱})}(kR_1) & -j_n(kR_1) \\ -h_n(kR_2) & j_n(kR_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{\text{۱}} \\ a^{\text{۲}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{mn}^{i(\text{۱})} j_n(kR_1) \\ a_{mn}^{i(\text{۲})} h_n^{(\text{۲})}(kR_2) \end{bmatrix} \quad (74.2)$$

دترمینان ماتریس بالا برابر صفر معادله مشخصه این محفظه رزونانسی را بما میدهد:

$$j_n(kR_1)y_n(kR_2) - j_n(kR_2)y_n(kR_1) = 0. \quad (75.2)$$

که در آن  $k = \frac{2\pi f_r}{C}$  فرکانس رزونانس  $f_r$  مجھول است.  $C$  سرعت سیر نور در محفظه است. البته این معادله مشخصه برای مودهای  $TM^r$  است. بهمین نحو برای مودهای خواهیم داشت:

$$\hat{j}'_n(kR_1)\hat{y}'_n(kR_2) - \hat{j}'_n(kR_2)\hat{y}'_n(kR_1) = 0. \quad (76.2)$$

که در اینجا  $\hat{z}_n^{(g)}(kr)$  توابع بسل ریکاتی مختلف هستند.

## ۱۰.۲ رزوناتورهای عایقی

رزوناتورهای عایقی

$$\mathbf{E}^t = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^t \mathbf{M}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^t \mathbf{N}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi)] \quad (77.2)$$

$$\mathbf{H}^t = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^t \mathbf{N}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^t \mathbf{M}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi)] \quad (78.2)$$

$$\mathbf{E}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^s \mathbf{M}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^s \mathbf{N}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi)] \quad (79.2)$$

$$\mathbf{H}^s = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} [a_{mn}^s \mathbf{N}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi) + b_{mn}^s \mathbf{M}^{(\gamma)}(r, \theta, \phi)] \quad (80.2)$$

$$a_{mn}^s = \frac{\frac{\mu_r}{\mu_1} \hat{J}'_n(\rho_1) j_n(\rho_2) - j_n(\rho_1) \hat{J}'_n(\rho_2)}{\hat{J}'_n(\rho_2) h_n^{(\gamma)}(\rho_1) - \frac{\mu_1}{\mu_2} j_n(\rho_2) \hat{H}'_n^{(\gamma)}(\rho_1)} A_i \quad (81.2)$$

$$b_{mn}^s = \frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\left(\frac{k_r}{k_1}\right)^2 \hat{J}'_n(\rho_1) j_n(\rho_2) - j_n(\rho_1) \hat{J}'_n(\rho_2)}{\hat{J}'_n(\rho_2) h_n^{(\gamma)}(\rho_1) - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\left(\frac{k_r}{k_1}\right)^2 j_n(\rho_2) \hat{H}'_n^{(\gamma)}(\rho_1)} B_i \quad (82.2)$$

$$a_{mn}^t = \frac{-j/\rho_1}{j_n(\rho_2) \hat{H}'_n^{(\gamma)}(\rho_1) - \frac{\mu_1}{\mu_2} \hat{J}'_n(\rho_2) h_n^{(\gamma)}(\rho_1)} A_i \quad (83.2)$$

$$b_{mn}^t = \frac{j/\rho_1}{\frac{k_r}{k_1} \hat{J}'_n(\rho_2) h_n^{(\gamma)}(\rho_1) - \frac{k_r \mu_1}{k_1 \mu_2} j_n(\rho_2) \hat{H}'_n^{(\gamma)}(\rho_1)} B_i \quad (84.2)$$

## ۱۱.۲ پدیده رزونانس و تحلیل مودهای ویژه

در روش ممان (MoM)<sup>۱۷</sup> ما معمولاً مسئله تحریک را از طریق یک معادله جبری ماتریسی حل کرده و کمتر از مود و فرکانس رزونانس حرف میزنیم. در اینجا میخواهیم "تحلیل مودها"<sup>۱۸</sup> را انجام دهیم. ضمناً نظر خود را فقط به مهندسی برق معطوف نکرده و پدیده رزونانس را از طریق ماتریس بررسی میکنیم. بعلاوه، با قطربندی کردن ماتریس، حل مسئله خود را با ترکیب خطی از بردارهای ویژه که برای درک مودهای رزونانسی که معمولاً دارای دامنه زیادی هستند بیان میکنیم. پدیده رزونانس فقط به برق محدود نمیشود بلکه در مهندسی مکانیک، مهندسی عمران، هواشناسی، آکوستیک و اقتصاد، و ... خودنمایی میکند.

<sup>۱۷</sup>Method of Moments, Moment Method, MoM

<sup>۱۸</sup>eigenmode analysis

## ۱۲.۲ روش ممان برای مسائل تحریکی

اغلب در مهندسی با معادله  $\mathcal{L}(f) = g$  مواجه می‌شویم. در اینجا  $\mathcal{L}$  اپراتور است که ممکن است انتگرالی یا دیفرانسیلی یا ترکیب این دو باشد.  $f$ تابع نامعلومی است که می‌بایست آنرا بدست آوریم. و در آخر  $g$  که همانتابع تحریک ما محاسبه می‌شود. در یک فرکانس ثابت، بوسیله روش ممان این را به ماتریس زیر تبدیل می‌کنیم.

$$\mathcal{L}(f) = g \Rightarrow \begin{bmatrix} & \\ Z & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ I & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ V & \end{bmatrix} \quad (85.2)$$

در اینجا  $[Z]$  ماتریس عکس العمل<sup>۱۹</sup>، معلوم،  $[I]$  بردار ضرایب وزن<sup>۲۰</sup>، مجھول و  $[V]$  بردار تحریک<sup>۲۱</sup>، معلوم هستند.  
اکنون همان ماتریس  $[Z]$  را در معادله (۸۵.۲) را (با  $\omega$  یا  $k$  ثابت) استفاده می‌کنیم.  
این ماتریس را بصورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} & \\ Z & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ I & \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} & \\ I & \end{bmatrix} \quad (86.2)$$

در رابطه (۸۶.۲)،  $\lambda$  نیز مجھول است. این را یک مسئله مقدار ویژه با مقدار اسکالر  $\lambda$  و بردار  $[I]$  مجھول می‌نامند. مخواهیم بدانیم مفهوم این رابطه چیست. وقتی  $\lambda = 0$  است،  
این بدین معنی است که در آن فرکانس دستگاه در حالت رزونانس است. زیرا

$$\begin{bmatrix} & \\ Z & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ I & \end{bmatrix}_{\lambda=0} = \lambda \begin{bmatrix} & \\ I & \end{bmatrix}_{\lambda=0} = 0 \begin{bmatrix} & \\ I & \end{bmatrix}_{\lambda=0} = 0 \quad (87.2)$$

این بدین معنی است که وقتی  $\lambda = 0$  است، می‌بایست دترمینان ماتریس  $[Z]$  بایستی صفر شود.

$$\det \begin{bmatrix} & \\ Z & \end{bmatrix} = 0 \quad (88.2)$$

<sup>۱۹</sup>Reaction Matrix

<sup>۲۰</sup>Weighting Coeff. Vector

<sup>۲۱</sup>Excitation Vector

ضمناً میدانیم که دترمینان ماتریس  $[Z]$  برابر حاصل ضرب مقادیر ویژه آن ماتریس است.  
 $(\det[Z] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)$

اکنون میخواهیم ماتریس رابطه (۸۶.۲) را برحسب بردارهای ویژه و مقادیر ویژه اش بیان کنیم. در ماتریس این را بصورت تبدیلات تشابه‌ی <sup>۲۲</sup> بیان می‌کنند.

$$Z = S \Lambda S^{-1} =$$

$$S \Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}^{-1} \quad (۸۹.۲)$$

### زنگ تفریح

■ چرا آسمان آبی است؟

★ جواب :

به بخش بعدی مراجعه کنید.

## ۱۳.۲ پراش ریلی

در سال ۱۸۷۱ لرد ریلی <sup>۲۳</sup> فیزیکدان انگلیسی که نام اصلی او جان ویلیام استورت <sup>۲۴</sup> است، روشی را برای پراش <sup>۲۵</sup> امواج الکترومغناطیسی از ذرات هوا ارائه داد و علت آبی بودن آسمان را عنوان کرد. سی سال بعد دانشمند آلمانی کوستاو می <sup>۲۶</sup> نظریه پراش امواج را برای حالتهای کلی تر بیان کرد که حالت خاص آن همان پراش ریلی است.

ریلی ذرات ریز هوا را یک کره دیالکتریک فرض کرد که قطر آنها  $\lambda \ll D$  خیلی کوچکتر طول موجی است که به آنها می‌تابد. و در چنین حالتی میدان الکتریکی  $E$  اطراف کره را الکترواستاتیک یکنواخت در نظر گرفت. یک کره دیالکتریک بشعاع  $R > \lambda$  و به ثابت دیالکتریک  $\epsilon_r$  در یک میدان یکنواخت الکترواستاتیکی  $E$  در نظر گیرید.

چگالی قطبش این کره در میدان الکتریکی  $E$  برابر است با

$$p = 3 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \epsilon_r E \quad (۹۰.۲)$$

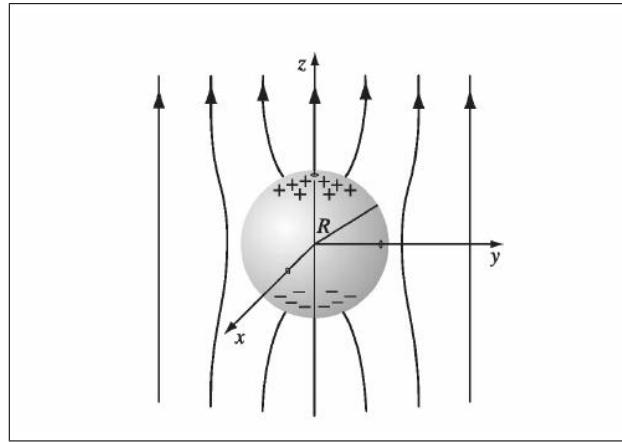
<sup>۲۲</sup>similarity transformation

<sup>۲۳</sup>Lord Rayleigh

<sup>۲۴</sup>John William Strutt

<sup>۲۵</sup>Scattering

<sup>۲۶</sup>Gustav Mie



شکل ۱۳.۲: کره دیالکتریک در میدان یکنواخت الکترواستاتیک

بنابراین قطبش کل کره خواهد بود

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3 p = 4\pi R^3 \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \epsilon_r E \quad (91.2)$$

طبق تعریف قطبش  $Q = d \cdot P$

$$Q = \frac{P}{2R}, \quad i = \frac{dQ}{dt}, \quad \text{یا} \quad \mathbf{I} = j\omega \mathbf{Q} \quad (92.2)$$

و المان جریان خواهد بود

$$\mathbf{I} \Delta L = \mathbf{I}(2R) = j\omega \mathbf{P} \quad (93.2)$$

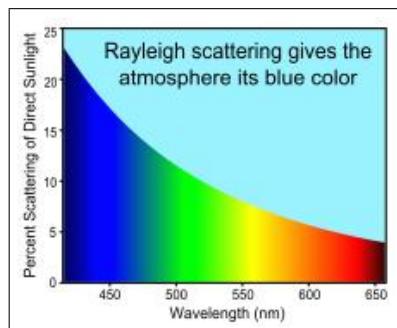
اگر این المان جریان را یک دیپل هرتز درنظر گیریم که با فرکانس همان میدان تابشی نوسان می‌کند، میدان‌های دور این آنتن برابر خواهد بود با

$$E_\theta = j\eta k \frac{I \Delta L}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \quad H_\phi = jk \frac{I \Delta L}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \quad (94.2)$$

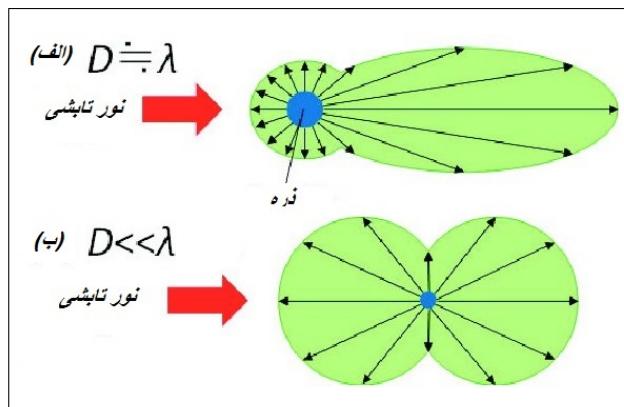
که در آن  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  است. در حقیقت این همان میدان‌های پراشیده از کره دیالکتریک با در نظر گرفتن حالت  $R \ll \lambda$  است. اکنون می‌توانیم سطح مقطع را داری منواستاتیکی این کره را محاسبه کنیم.

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} (4\pi r^2) \frac{|E^s|^2}{|E^i|^2} = \frac{128}{3} \pi^2 (\pi R^2) \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \left( \frac{R}{\lambda} \right)^4 \quad (95.2)$$

بطوری که از این رابطه پیداست، انرژی که توسط این کره تحت این شرایط ( $R \ll \lambda$ ) پراکنده می‌شود، متناسب با  $1/\lambda^4$  یا  $f^4$  است. یعنی امواج با فرکانس‌های بیشتر نسبت به فرکانس‌های کمتر (یا طول موج‌های کوچکتر نسبت به طول موج‌های بلندتر) بیشتر انرژی را پراکنده می‌کنند، و لرد ریلی با این روش آبی بودن آسمان را نشان داد.



شکل ۱۴.۲: علت آبی بودن آسمان



شکل ۱۵.۲: توزیع پراکندگی امواج: الف-پراش می؛ ب- پراش ریلی

### زنگ تفريح

■ چگونه می‌توانیم قطر قطره‌های آب (مثل اسپری، ذرات مه، یا باران) را اندازه‌گیری کنیم؟



## فصل ۳

# تولید برق

### ۱.۳ مقدمه

در این بخش با شش روش مختلف تولید برق آشنا و آنها را بررسی می‌کنیم؛ شیمیائی، مالشی، گرمائی، نوری، مغناطیسی و فشاری. در حقیقت این روش‌ها تبدیل یک نوع انرژی به انرژی برق هستند.

### ۲.۳ اثر تریبوالکتریک

اثر تریبوالکتریک<sup>۱</sup> یا همان تولید الکتریسته از طریق مالش یا اصطکاک است. وقتی سطح دو ماده مختلف را بهم اتصال و مالش می‌دهیم، الکتریسیته تولید می‌شود. مثلاً وقتی یک میله شیشه‌ای را با پوست خز مالش می‌دهیم یا موی سر را با شانه پلاستیکی شانه می‌کنیم، الکتریسیته ساکن تولید می‌شود. بیشتر الکتریسته ساکن روزمره اثر تریبوالکتریک یا همان الکتریسیته مالشی است. قطبیت و بزرگی بارهای تولید شده به مواد، زبری و ناهمواری سطح، دما، فشار تماس و سایر خصوصیات بستگی دارد و متفاوت است. اثر تریبوالکتریک بسیار غیرقابل پیش‌بینی است و فقط می‌توان کلیات گسترده‌ای را بیان کرد. به عنوان مثال، کهربا می‌تواند با مالش (یا اصطکاک) با ماده‌ای مانند پشم، بار الکتریکی بدست آورد. این ویژگی اولین با توسط تالس یونانی ثبت شده است. کلمه "الکتریسیته" از سکه اولیه ویلیام گیلبرت "الکترا" و از کلمه یونانی کهربا elecktron گرفته شده است. پیشوند "تریبو" (tribo) به یونانی مالش یا اصطکاک اشاره دارد. نمونه‌های دیگری از مواد هنگام مالش مانند مالیدن شیشه به ابریشم، لاستیک سخت شده به خز، مقدار قابل توجهی الکتریسیته ساکن تولید کرد.

<sup>۱</sup>triboelectric effect

با آزمایش‌های ساده‌ای به راحتی اثبات وجود دو نوع بار الکتریکی یکی مثبت و دیگری منفی قابل اندازه‌گیری و تعریف است. در حال حاضر اثر تربیوالکتریک را مربوط به پدیده چسبندگی یعنی جائی که دو ماده متشکل از مولکول‌های مختلف به دلیل جاذبه بین مولکول‌های مختلف تمایل دارند بهم بچسبند. با وجودی که چسبندگی یک پیوند شیمیائی بین اتم‌ها نیست، تبادل الکترون بین انواع مختلف مولکول‌ها وجود دارد و در نتیجه بین مولکول‌هایی که آنها را بهم متصل می‌کند، یک جاذبه الکترواستاتیکی ایجاد می‌شود. جداسازی فیزیکی موادی که بهم چسبیده باشند، منجر به اصطکاک بین مواد می‌شود. از آنجا که انتقال الکترون بین مولکول‌ها در مواد مختلف بلافضله برگشت پذیر نیست، الکترون‌های اضافی در یک نوع مولکول باقی می‌مانند، در حالی که در نوع دیگر کمبود الکترون وجود دارد. بنابراین یک ماده می‌تواند بار مثبت یا منفی ایجاد کند که پس از جدا شدن مواد روی جسم پراکنده می‌شود.

سازوکارهای انتقال برق (یا الکتریسیته مالشی) برای سال‌ها بحث شده است. مکانیسم احتمالی از جمله انتقال الکترون، انتقال یون یا انتقال ذرات مواد وجود دارد. مطالعات جدید سال ۲۰۱۸ با استفاده از میکروسکوپ کاوشنگر کلوین و نانو ژنراتورهای الکتریسیته مالشی نشان داد که انتقال الکترون، سازوکار غالب برای انتقال برق بین جسم جامد و جامد است. از مدل تابع کار<sup>۲</sup> می‌توان برای توضیح انتقال الکترون بین فلز و دی‌الکتریک استفاده کرد. از مدل ترازهای سطح<sup>۳</sup> می‌توان برای توضیح انتقال الکترون بین دو دی‌الکتریک استفاده کرد. برای حالت کلی، از آنجا که برق‌مالشی<sup>۴</sup> برای هر ماده‌ای اتفاق می‌افتد، یک مدل کلی توسط وانک پیشنهاد شده است که در آن انتقال الکترون به‌دلیل همپوشانی ابرالکترونی قوی بین دو اتم برای کاهش یافتن سد پتانسیل بین اتمی با کوتاه شدن طول پیوند ایجاد می‌شود. بر اساس این مدل، اثرات دما و تحریک نوری روی برق‌مالشی تحقیق شده است. اینگونه مدل‌ها را می‌توان در موارد مایع و جامد یا مایع و مایع یا حتی گاز و مایع بسط و گسترش داد.

## سری مواد تربیوالکتریک

سری تربیوالکتریک جدولی از مواد است که به ترتیب خاصیت‌هایی مربوطه منظم و ردیف می‌شوند، مانند چکونگی سرعت تولید بار الکتریکی نسبت به سایر مواد. یوهان کارل ویلکا اولین مقاله را در باره ساکن در سال ۱۷۵۷ منتشر کرد. وقتی مواد با جسم دیگری مالیده می‌شوند، غالباً به ترتیب جدائی بار مرتب و ردیف می‌شوند. هنگامی که به ماده‌ای در بالای جدول دست می‌زنید، این ماده نسبت به ماده‌ای که انتهای جدول است، بار منفی بیشتری پیدا می‌کند. هر چه دو ماده از این مجموعه دورتر از یکدیگر باشند، بار بیشتری نیز انتقال می‌یابد. مواد نزدیک به یکدیگر در این مجموعه ممکن است هیچ باری را انتقال ندهند، یا حتی ممکن است عکس آنچه در جدول ذکر شده است باشد. این می‌تواند ناشی از آلودگی‌ها یا اکسید شدن یا سایر عوامل ایجاد شود.

<sup>۲</sup> Work Function

<sup>۳</sup> Surface State Model

<sup>۴</sup> Triboelectrification

## علت

اگر چه بخش "Tribo" از زبان یونانی به معنی "مالش" یا "اصطکاک" گرفته شده است این دو ماده فقط برای انتقال الکترون‌ها باید در تماس باشند. چون پس از تماس، بین قسمت‌های دو سطح پیوند شیمیائی ایجاد که چسبندگی می‌شود، بارها از یک ماده به ماده دیگر منتقل شده تا پتانسیل الکتروشیمیائی آنها یکسان شود. این همان چیزی است که عدم تعادل بار خالص بین اشیاء را ایجاد می‌کند. وقتی از هم جدا می‌شوند، برخی از اتم‌های پیوندی تمایل به نگه داشتن الکترون‌های اضافی و برخی تمایل به دادن آنها را دارند. اگر چه عدم تعادل با تونل زنی یا شکست الکتریکی (معمولًاً تخلیه کرنائی) از بین میروند.

برای سطوح با هندسه متفاوت، مالش ممکن است منجر به گرم شدن برآمدگی‌ها شود که سبب جدا سازی با پیرووالکتریک می‌شود که ممکن است به الکتریسیته کنونی موجود اضافه شود یا ممکن است با قطبیت موجود مخالف باشد و بار را کم کند. اثرات نانو سطح به خوبی درک نشده است و میکروسکوپ نیروی اتمی، پیشرفت سریع در این زمینه از فیزیک را امکان پذیر کرده است.

## حرقه

چون سطح ماده‌ای که اکنون از نظر الکتریکی، منفی یا مثبت بار دار شده است، هر گونه تماس با یک جسم رسانای بدون بار یا با جسمی که بار آن کاملاً متفاوت است، ممکن است باعث تخلیه الکتریکی الکتریسیته ساکن تولیده شده شود: یعنی حرقه! شخصی که روی فرش راه می‌رود، پیراهن نایلونی که از پوشش بیرون می‌آوریم، یا روی صندلی ماشین می‌مالد نیز می‌تواند اختلاف پتانسیل هزاران ولت را تولید کند که برای ایجاد حرقه‌ای بطول یک میلی‌متر یا بیشتر کافی است. تخلیه الکترواستاتیک ممکن است در آب و هوای مرطوب رخ ندهد زیرا تراکم سطحی بطور معمول از شارژ تربیووالکتریک جلوگیری می‌کند، در حالی که افزایش رطوبت رسانای الکتریکی هوا را افزایش می‌دهد. تخلیه الکترواستاتیک (به غیر از رعد و برق ناشی از باردار شدن مالشی یخ و قطرات آب درون ابرها) باعث کمترین آسیب می‌شود زیرا انرژی ( $W = \frac{1}{2}CV^2$ ) بسیار کم است، به طور معمول چندین دهم میکرو ژول در هوای خشک و سرد و بسیار کمتر در شرایط مرطوب است، با این حال، چنین حرقه‌هایی می‌توانند بخارات قابل اشتعال را مشتعل کنند. این مورد زمانی نیست که ظرفیت یکی از اجسام بسیار زیاد باشد.

## سازوکار برق‌مالشی

برای درک فعل و انفعالات بین اتم‌ها می‌توان از پتانسیل برهمکنش درون اتمی استفاده کرد. وقتی دو اتم در موقعیت تعادل قرار دارند، با یک فاصله بین اتمی تعادل، ابرهای الکترونی یا توابع موج تا حدی با هم همپوشانی دارند. عبارت دیگر، اگر دو اتم تحت فشار یک نیروی خارجی به یکدیگر نزدیک شوند، فاصله بین اتمی کوتاهتر از فاصله تعادل است، بنابراین دو اتم بهدلیل افزایش همپوشانی ابر الکترونی، یکدیگر را دفع می‌کنند. این در منطقه‌ای است که انتقال الکترون اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر، اگر دو اتم از یکدیگر

جدا شوند به طوری که فاصله بین اتمی بیشتری نسبت به فاصله تعادل داشته باشند، به دلیل بر هم کنش وان در والس<sup>۵</sup> با فاصله طولانی، به یکدیگر جذب می‌شوند. یک سازوکار انتقال بار در مقیاس اتمی (مدل ابر-پتانسیل-ابر) برای برق‌مالشی پیشنهاد شده است. اولاً، قبل از تماس در مقیاس اتمی دو ماده، هیچ‌گونه همپوشانی بین ابرهای الکترونی آنها نیست ولی نیروی جذابی وجود دارد. الکترون‌ها در مدارهای خاص بسیار محکم مقید هستند، بطوری که نمی‌توانند آزادانه فرار کنند. سپس، وقتی دو اتم در دو ماده بهم نزدیک می‌شوند. با همپوشانی ابر الکترون یک پیوند یونی یا کووالانسی ایجاد می‌شود. یک نیروی خارجی می‌تواند فاصله بین اتمی (طول پیوند) را کاهش دهد و همپوشانی شدید ابر الکترون باعث افت سد انرژی بین این دو شود، و در نتیجه انتقال الکترون فرایند برق‌مالشی بوجود آید. وقتی دو اتم از هم جدا شدند، الکترون‌های منتقل شده باقی می‌مانند زیرا برای انتقال مجدد الکترون‌ها به انرژی نیاز دارند و بارهای الکترواستاتیکی روی سطح مواد تشکیل می‌شود.

### برق‌مالشی در هواپیما و فضای پیما

هواپیماهایی که در هوا پرواز می‌کنند، بار ساکنی ناشی از اصطکاک هوا روی بدنه هواپیما یا فضای پیما ایجاد می‌شود. بارهای ساکن را می‌توان با تخلیه کننده‌های استاتیکی یا فتیله‌های استاتیکی تخلیه کرد. ناسا از "قانون برق‌مالشی" پیروی می‌کند و در نتیجه در صورتی که پیش‌بینی شود دستگاه پرتاپی از درون ابرهای خاصی عبور خواهد کرد، پرتاپ را الغو می‌کند. پرواز از درون ابرهای بالا می‌تواند "بارهای استاتیکی پی"<sup>۶</sup> (پی اول حرف بارندگی Precipitation) در اطراف ماهواره‌بر ایجاد کند که با سیگنال‌های رادیوئی ارسال شده به ماهواره‌بر یا از ماهواره‌بر به ایستگاه‌های مربوطه تداخل بوجود آورد. این عمل ممکن است از انتقال داده‌های دورسنجی و سامانه‌های ناوبری جلوگیری کند.

### خطرات و اقدامات متقابل

برای خودروهای حامل مایعات فرار، گازهای قابل اشتعال یا اکسیژن بیمارستان‌ها، باید برای وسیله نقلیه لوازم تخلیه بار الکترونیکی ساکن افاده‌های صورت گیرد. در مورد منسوجات، این می‌تواند منجر به ایجاد جرقه، لکه و یا آتش سوزی شود. می‌توان با مواد تمیزکننده ضد استاتیک، از جذب گرد و غبار جلوگیری کرد. در کورهای با برج بلند مانند کارخانجات سیمان برای جلوگیری از آلودگی هوا از فیلترهای الکترواستاتیکی استفاده می‌شود. برخی از دستگاه‌های الکترونیکی، به‌ویژه مدارهای مجتمع و ترانزیستورهای ماسفت، می‌توانند بطور تصادفی در اثر تخلیه الکترواستاتیک ولتاژ بالا تخریب شوند. چنین اجزائی معمولاً برای محافظت در محفظه‌های فلزی قرار داده می‌شوند. وقتی با مدارات مجتمع و الکترونیک حساس کار می‌کنید بهتر است مج پا خود را از طریق یک سیم هادی به زمین میز کار خود وصل کنید. روش دیگر برای تلف کردن بار الکترواستاتیکی اطاق عمل، استفاده از تشكهای لاستیکی که دارای کربن سیاه است.

<sup>۵</sup>Van der Waals

<sup>۶</sup>P-Static

دستگاههای حاوی اجزاء حساس باید در هنگام استفاده، نصب و قطع وصل برق محافظت شوند و این می‌تواند از طریق مدارهای خارجی دیگر که جهت حفاظت طراحی شده‌اند انجام شود. این ممکن است توسط ایزولاتورهای نوری صورت گیرد.

### زنگ تفریح

■ تعداد  $K$  عدد باتری هر کدام به ولتاژ  $E$  ولت و مقاومت داخلی  $R$  اهم است را چگونه بهم وصل ( $N$  عدد سری در  $M$  عدد موازی) کنیم تا بیشترین توان به مقاومت بار  $R_L$  منتقل شود.

**جواب :**

★ میدانیم تعداد کل باتری‌ها برابر است با

$$K = N \cdot M$$

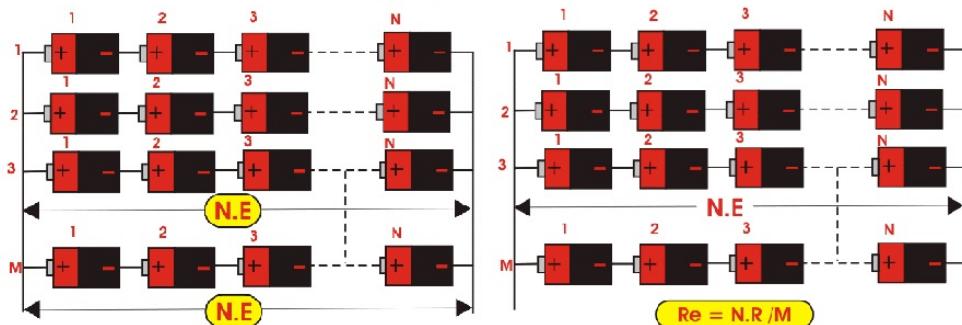
طبق قضیه بیشینه انتقال توان به بار باید مقاومت داخلی معادل برابر مقاومت بار باشد:

$$R_{eq} = \frac{NR}{M} = R_L$$

از این دو رابطه داریم

$$N = \sqrt{\frac{KR_L}{R}}, \quad M = \sqrt{\frac{KR}{R_L}}$$

اتصال سری و موازی پاطریها



شکل ۱.۳: اتصال سری و موازی باتری‌ها برای انتقال بیشترین توان

### ۳.۳ اثر ترمو الکتریک

اثر ترموالکتریک<sup>۴</sup> یا تبدیل انرژی حرارتی به انرژی الکتریکی است. تاریخ تولید ترموالکتریک از سال ۱۸۲۱ آغاز شد، و در آن زمان توماس سی بک<sup>۵</sup> دریافت که وقتی دو فلز غیر مشابه، با اتصال هائی در دمای مختلف، قرار می‌گیرند، جریان الکتریکی جاری و عقریه قطب‌نمایی که در نزدیکی سیم‌ها قرار داشت منحرف می‌شود. این اثر را بنام وی اثر سی بک نامیدند. البته او فکر می‌کرد این تبدیل مستقیم حرارت به میدان مغناطیسی است. بعداً هانس اورستد دریافت که میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی درون سیم‌ها است. جدا از تولید برق، این پایه و اساس ترموکوپل است، روشی که برای اندازه‌گیری دما به طور گسترده استفاده می‌شود. علی‌اغم این که اثر ترموالکتریک بنام سی بک است، در همان

Metals	Seebeck Coefficient	Semiconductors	Seebeck Coefficient
	µV/K		µV/K
Antimony	47	Se	900
Nichrome	25	Te	500
Molybdenum	10	Si	440
Cadmium	7.5	Ge	300
Tungsten	7.5	n-type Bi <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	-230
Gold	6.5	p-type Bi <sub>2-x</sub> Sb <sub>x</sub> Te <sub>3</sub>	300
Silver	6.5	p-type Sb <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	185
Copper	6.5	PbTe	-180
Rhodium	6.0	Pb <sub>0.3</sub> Ge <sub>0.7</sub> Se <sub>58</sub>	1670
Tantalum	4.5	Pb <sub>0.6</sub> Ge <sub>0.4</sub> Se <sub>58</sub>	1410
Lead	4.0	Pb <sub>0.9</sub> Ge <sub>0.1</sub> Se <sub>58</sub>	-1360
Aluminum	3.5	Pb <sub>1.3</sub> Ge <sub>0.7</sub> Se <sub>58</sub>	-1710
Carbon	3.0	Pb <sub>1.5</sub> Ge <sub>0.5</sub> Se <sub>58</sub>	-1990
Mercury	0.6	SnSb <sub>4</sub> Te <sub>7</sub>	25
Platinum	0	SnBi <sub>4</sub> Te <sub>7</sub>	120
Sodium	-2.0	SnBi <sub>2.5</sub> Sb <sub>1.5</sub> Te <sub>7</sub>	151
Potassium	-9.0	SnBi <sub>2</sub> Sb <sub>2</sub> Te <sub>7</sub>	110
Nickel	-15	PbBi <sub>4</sub> Te <sub>7</sub>	90
Constantan	-35		-53
Bismuth	-72		

شکل ۲.۳: ضرایب سی بک برای فلزات و نیمهادی‌ها

ایام هم اورستد، فوریه و اهم نیز روی آن کار کردند. البته بیشتر استفاده از ترموالکتریک در کارهای اهم، تولید منبع ولتاژ برای تحقیق قانون اهم بوده است. دیگران هم آنرا برای سنجش دما بکار می‌برند.

#### کاربردها

در سال‌های بعداز جنگ جهانی دوم روسها، مولدهای حرارتی مبتنی بر چراغهای نفتی برای تبدیل انرژی حرارتی به الکتریکی جهت منبع تغذیه رادیوهای لامپی تولید کردند.

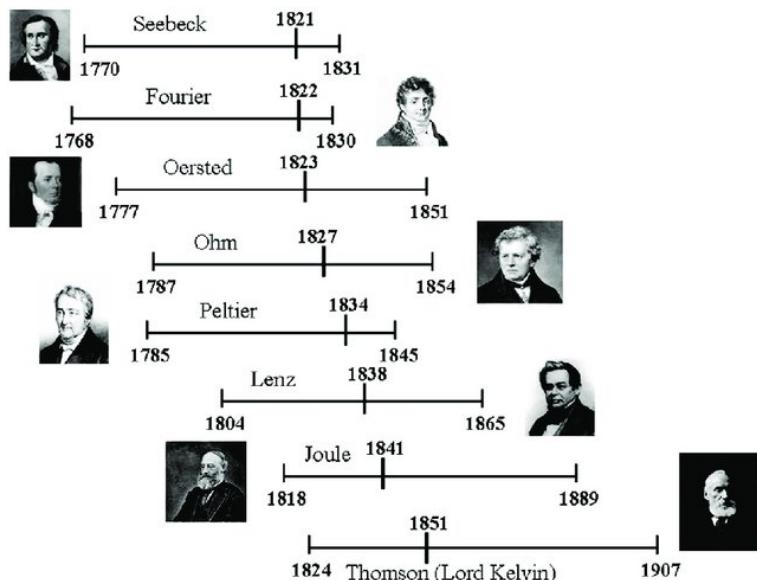
<sup>4</sup>thermoelectric effect

<sup>5</sup>Thomas Johann Seebeck (1770-1831)

امروزه به چنین رادیوهایی که از چراغ نفتی همراه دستگاه ترمومالکتریک استفاده می‌کنند، رادیو نفتی می‌نامند. شکل (۳.۲) چراغ را همراه رادیو نشان می‌دهد.



شکل ۳.۳: چراغ نفتی و مولد ترمومالکتریک آن برای رادیو نفتی



شکل ۴.۳: دانشمندان و زمانی که روی پدیده ترمومالکتریک تحقیق و گزارش کردند

یکی از کاربردهای مهم اندازه‌گیری دمای کوره‌ها و ماشین‌های حرارتی است. اما بیشتر کاربرد امروزه آنرا می‌توان در ترموموگوپل اجاق‌های گاز و دستگاه مانند آبگرم‌کن‌ها است. نمونه‌ای از آن را در شکل (۵.۲) ملاحظه می‌کنید.



شکل ۳.۵: آزمایش ترموکوپل همراه با کلید قطع و وصل شیر ورود گاز

### زنگ تفريح

■ اگر رادیو نفتی نیازمند ولتاژ ۹۰ ولت برق برای صفحات لامپ‌ها باشد، چند عدد ترموکوپل با ضریب حرارتی سیبیک  $200\mu V/K$  با اختلاف دمای بین دو طرف ترموکوپل  $300^{\circ}C$  باید بکار رود؟ جریان مورد نیاز دوازده میلی آمپر است هم‌چنین برای تولید یک و نیم ولت فیلامن لامپ‌ها که باید توانائی تولید  $250mA$  را داشته باشد، چند عدد ترموکوپل مورد نیاز است؟

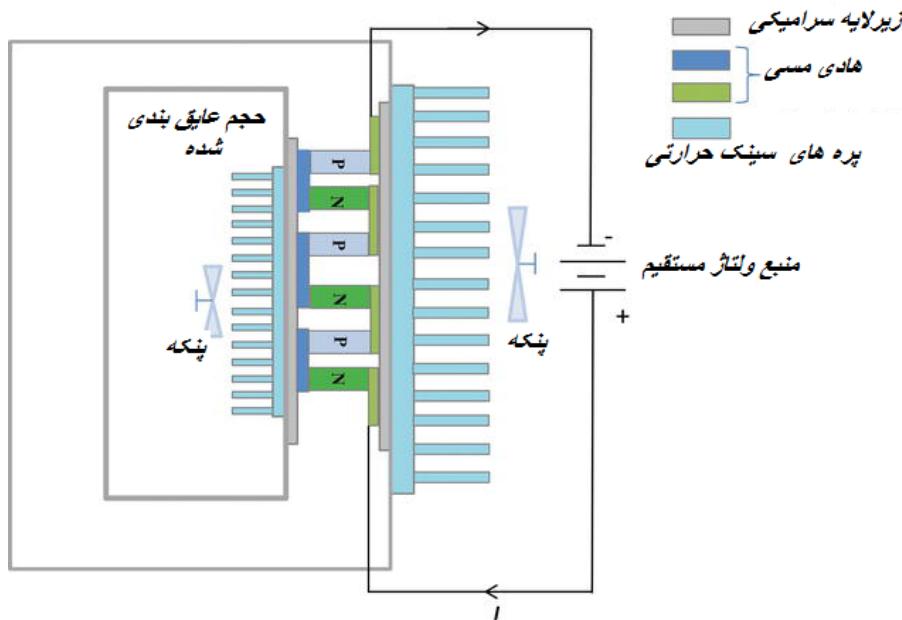
جواب :



### ۱.۳.۳ یخچال ترمومالکتریک

قبل‌آغازیم در اثر ترمومالکتریک تبدیل انرژی حرارتی به الکتریکی را اثر سی‌بک می‌نامند. عکس اثر سی‌بک را اثر پلتیر<sup>۹</sup> است که آن تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی حرارتی است بدین ترتیب که انرژی گرمائی را از یک طرف گرفته به طرف دیگر انتقال میدهد. اگر قطب مولد جریان را عوض کنیم جهت انتقال انرژی گرمائی نیز عوض می‌شود. در سال ۱۸۳۴ پلتیر دانشمند فرانسوی این اثر را کشف کرد. از مزایای این نوع یخچال می‌توان مجتمع بودن، سبک وزن و قابل حمل و نقل، ارزان قیمت، و با باتری می‌تواند کار کند. ضمناً از گازهای سمی که در برخی یخچال‌ها استفاده می‌شود، وجود ندارد. سرویس آن ساده و ارزانتر تعمیر می‌شود. تنها بخش متحرک آن پنکه است که با برق دوازده ولت کار می‌کند و اصولاً صدا و نویز کمی دارد. امروزه سعی بر این است در کامپیوتر برای انتقال حرارت از این روش استفاده کنند.

<sup>۹</sup>Peltier effect



شکل ۶.۳: اصول یخچال ترمومالکتریک

### ۴.۳ اثر فتوالکتریک

اثر فتوالکتریک<sup>۱۰</sup> یا تبدیل انرژی نور و بطور کلی امواج الکترومغناطیسی به ولتاژ و جریان الکتریکی است. در این بخش منظور همان تبدیل انرژی نور به الکتریکی بصورت ولتاژ و ولتاژ جریان است.

### ۵.۳ اثر پیزوالکتریک

اثر پیزوالکتریک توانایی برخی مواد برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی می‌باشد. این اثر را پیر کوری، در دهه ۱۸۸۰ کشف کرد. اثر پیزوالکتریک<sup>۱۱</sup> بار الکتریکی است که در برخی مواد جامد (مانند بلورها، سرامیک‌های خاص و مواد بیولوژیکی مانند استخوان و دی‌ان‌ای (DNA) و پروتئین‌های مختلف) در مقابل فشار مکانیکی، تجمع می‌یابد. این تبدیل انرژی فشار مکانیکی به انرژی الکتریکی یا الکتریکی به مکانیکی است. این کلمه از زبان یونانی فشار و کهربائی گرفته شده است. این پدیده دو طرفه است یعنی اگر اینگونه مواد را تحت فشار یا کشش قرار دهیم، در روی آن بار الکتریکی خواهیم داشت و اگر به آن مواد سیگنال الکتریکی اعمال شود سبب تغییرات ابعاد قطعه می‌شود. اثر پیزوالکتریک یک روند برگشت‌پذیر است.

<sup>۱۰</sup> photoelectric effect

<sup>۱۱</sup> piezoelectric effect

در حقیقت اثر پیزوالکتریسیته ناشی از اثر متقابل الکترومکانیکی خطی بین حالت‌های مکانیکی و الکتریکی در مواد کریستالی بدون تقارن وارونگی است. به عنوان مثال، بلورهای تیتانات زیرکونات سرب، پیزوالکتریک قابل اندازه‌گیری تولید می‌کنند که ساختار ثابت آنها با حدود  $\pm 1\%$  از اندازه اصلی تغییر شکل می‌دهد. بر عکس، همین کریستال‌ها در صورت اعمال یک میدان الکتریکی خارجی بر روی ماده، تقریباً  $\pm 1\%$  از ابعاد ساکن خود را تغییر می‌دهند. از اثر پیزوالکتریک معکوس در تولید امواج صوتی و فرماحتوی استفاده می‌شود.

از مواد پیزوالکتریک در مبدل‌ها و وسایلی که انرژی الکتریکی را به انرژی مکانیکی تبدیل می‌کنند یا بر عکس استفاده می‌شود. کاربردهای نام‌آشنایی از جمله پیکاپ گرامافون، میکروفون‌ها، مولدات‌های ماوراء صوت و حسگرهای سونار از خاصیت پیزوالکتریک استفاده می‌کنند. در پیکاپ گرامافون همچنان که قلم شیارهای ضبط شده را می‌بیناید یک اختلاف فشار به ماده پیزوالکتریک موجود در پیکاپ وارد می‌شود که نهایتاً به سیگنال الکتریکی تبدیل می‌شود. این سیگنال قبل از ورود به بلندگو تقویت می‌شود. اولین



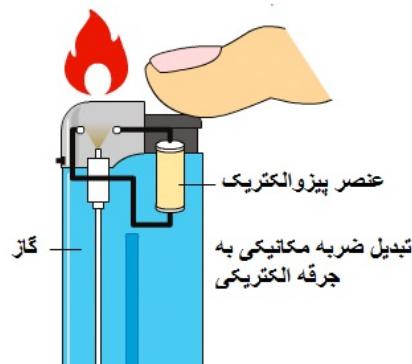
شکل ۷.۳: کریستال پیزوالکتریک برای تولید زنگ اخبار (بیزرا)

استفاده عملی از دستگاه‌های پیزوالکتریک، سونار (دستگاه کاشف زیردریایی به وسیله امواج صوتی) بود که در جنگ جهانی اول توسعه پیدا کرد. در سال ۱۹۱۷ در فرانسه پائول لانگ وین و همکارانش روی یک آشکارگر ماوراء صوت کار کردند. دستگاه از یک مبدل ساخته شده بود که از کریستال‌های نازک کوارتز که با دقیق بین دو صفحه نازک فولاد متصل شده بودند و یک هیدروفن (دستگاهی که اصوات زیر آب را ثبت می‌کند) برای شناسایی و بازگرداندن انعکاس صوت، تشکیل شده بود. با فرستادن صوت فرکانس بالا از مبدل و اندازه‌گیری مدت زمان رفت و برگشت صدا می‌توان فاصله تا شیء مورد نظر را اندازه‌گیری کرد.

استفاده موفقیت‌آمیز پیزوالکتریک در سونار موجب شد علاقه فزاینده‌ای در توسعه دستگاه‌های پیزوالکتریک ایجاد شود. در چند دهه بعد، مواد و کاربردهایی جدیدی از پیزوالکتریک کشف شد.

دستگاه‌های پیزوالکتریک در بسیاری از زمینه‌ها جا باز کردند. بازتاب سنج‌های ماوراء صوت می‌توانستند ترکهای فلزات را در ریخته‌گری بیابند که موجب افزایش ایمنی در ساختارها شد.

شناخته شده‌ترین کاربرد موجود فندک الکتریکی می‌باشد: فشار شستی باعث می‌گردد چکش فنری به کریستال پیزوالکتریک ضربه وارد کند و جریان الکتریکی با ولتاژ کافی ایجاد گردد و جرقه تولید می‌شود، و در نتیجه گاز را گرم و مشتعل می‌نماید. در حال حاضر بسیاری از جرقه‌زن‌های قابل حمل مبتنی بر این فناوری ساخته می‌شوند.



شکل ۸.۳: فشار مکانیکی، ولتاژ زیاد و در نتیجه جرقه الکتریکی در فندک گازی

تحقیقات مشابهی نیز توسط دارپا در ایالات متحده صورت گرفته که پروژه آن زراعت انرژی نام گرفته است. این پروژه شامل بر فعالیت‌هایی بود که تجهیزات زمین جنگ از طریق ژنراتورهای پیزوالکتریک جای گرفته در چکمه سربازان باردار شود. با این حال، این منابع زراعت انرژی در مجموع آثاری بر روی بدن سربازان دارند. تلاش‌های دارپا در جهت به دست آوردن ۱ تا ۲ وات از اثر برخورد مستمر پوتین سربازان با زمین به هنگام راه رفتن، به واسطه عدم کاربردی بودن و به خاطر ناراحتی‌های ناشی از انرژی ایجاد شده توسط فردی که پوتین‌ها را به پا کرده است، متوقف گشت.

مبدل پیزوالکتریک نوعی چندراهه با ولتاژ متناوب می‌باشد. برخلاف یک مبدل معمولی (ترانسفورمر) که از تزویج مغناطیسی بین ورودی و خروجی بهره می‌گیرد، مبدل پیزوالکتریک از تزویج صوتی استفاده می‌کند. این ابزارها می‌توانند در تبدیل‌های ای‌سی-دی‌سی برای به کار اندختن لامپ‌های فلورسنت با کاتد سرد به کار گرفته شوند.

یکی از استفاده از کریستال پیزوالکتریک در تولید فرکانس ثابت در ساعت‌ها دیزیتالی است که در مدار نوسان‌سازهای ساعت استفاده می‌شود. در ایستگاه‌های فرستنده و برخی گیرندهای و کامپیوترها بمظور تولید پالس ساعت نیز کاربرد دارد. البته در ردیف فرکانس‌های زیاد از چند برابر کننده فرکانس استفاده می‌کنند.

### ۱.۵.۳ کاربردهای مکانیکی پیزوالکتریک

دستگاه‌های پیزوالکتریک برای انجام عملکرد اثر پیزوالکتریک مستقیم و معکوس استفاده می‌شوند. هر دو این اثرات پیزوالکتریک در ساختارهای بلورهای برخی مواد یافت می‌شوند. برای مثال، هنگامی که به سرامیک‌ها ولتاژ الکتریکی اعمال می‌شود، فشرده، تاب خورده و یا منحرف شده و جابجائی فیزیکی ایجاد می‌کنند. چندین نوع دستگاه مختلف موجود است. برخی از مهمترین آنها عبارتند از:

۱. **محرك‌های پیزوالکتریک** محرك‌های پیزوالکتریک دستگاه‌هایی هستند که هنگام اعمال ولتاژ، یک جابجایی کوچک با قابلیت نیروی بالا تولید می‌کنند. کاربردهای فراوانی وجود دارد که محرك‌های پیزوالکتریک را می‌توان استفاده کرد. مانند موقعیت فوق العاده دقیق در تولید و کنترل نیروها یا فشار بالا در شرایط استاتیکی یا دینامیکی.

۲. **موتورهای پیزوالکتریک** موتورهای پیزوالکتریک یک نوع موتور الکتریکی است که از عنصر سرامیک پیزوالکتریک برای تولید ارتعاشات فراصوت از نوع مناسب در ساختار استاتور استفاده می‌کنند. حرکات بیضوی استاتور به حرکتی کشونی تبدیل می‌شود که از طریق تماس اصطکاکی به استاتور فشار داده می‌شود. حرکت بعدی ممکن است چرخشی یا خطی باشد که به طراحی سازه بستگی دارد. موتورهای پیزوالکتریک خطی، مثلاً در مراحل خطی، معمولاً یک درجه آزادی دارند، اما می‌توان آنها را ترکیب کرد و عوامل موقعیتی پیچیده‌تری را ایجاد کرد. موتورهای پیزوالکتریک چرخشی معمولاً در دستگاه‌های موقعیت‌یابی زیر میکرومتری استفاده می‌شوند. با ترکیب چندین واحد چرخشی می‌توان گشتاور مکانیکی بزرگی بدست آورد.

موتورهای پیزوالکتریک، مزیت‌های بلقوه‌ای نسبت به موتورهای الکترومغناطیسی معمولی دارند. آنها به طور کلی از نظر توان خروجی کوچک و جمع و جور هستند و نیرو و گشتاور بیشتری را از آنچه ابعاد آنها نشان می‌دهند تامین می‌کنند. علاوه بر نسبت مثبت اندازه بر توان موتورهای پیزوالکتریک، دارای گشتاور نگهداری بالائی هستند که در توان ورودی صفر حفظ می‌شوند، و اینرسی کمتری را از روتورهای خود ارائه میدهند که خود تامین کننده مشخصه شروع و توقف سریع است. علاوه بر این، آنها تحت تاثیر میدان‌های الکترومغناطیسی که می‌تواند موتورها را مختل کند، ندارند.

معمولًاً موتورهای پیزوالکتریک میدان مغناطیسی تولید نمی‌کنند و همچنین تحت تاثیر میدان‌های خارجی قرار نمی‌گیرند. از آنجا که آنها در فرکانس‌های فراصوت کار می‌کنند، این موتورها هنگام کار صدا تولید نمی‌کنند.

۳. **خم کننده‌های پیزوالکتریک** چند لایه

۴. **تقویت کننده‌های پیزوالکتریک**

### زنگ تفريح

■ مدار تولید برق يك برق ماهی را می توانيم به صورت زير (شکل ۹.۳) شبیه سازی کنیم.  
اگر يك طعمه ۵۰۰ اهمی برای آن فرض کنیم، تقریباً چند آمپر جریان از بدن طعمه عبور می کند؟

$$\text{الف: } ۳۰A \quad \text{ب: } ۱۵A \quad \text{ج: } ۳A \quad \frac{۱}{۱۵}A$$

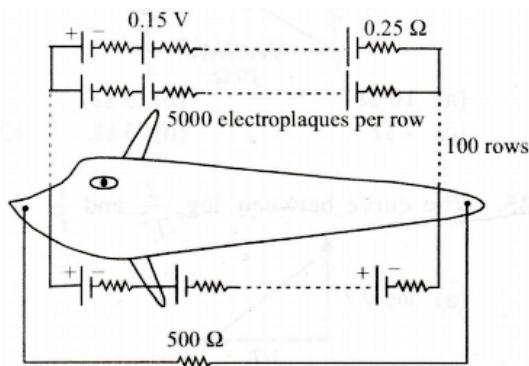
جواب :

★ تقریباً يك و نیم آمپر !

$$50000 \times 0.15 = 750V$$

$$\frac{5000 \times 0.25}{100} = 12.5\Omega$$

$$\frac{750}{500 + 12.5} = 1.46 \approx 1.5A$$



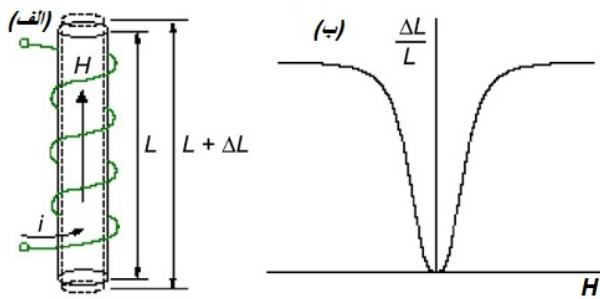
شکل ۹.۳: تولید برق بوسیله برق ماهی

### زنگ تفريح

■ چگونه در زمان اشکانیان آبکاری (نشاندن فلز روی فلز دیگر) را انجام میداند؟  
(اشکانیان ۲۴۷ سال قبل از میلاد تا ۲۲۴ سال بعد از میلاد در ایران حکومت کردند).

### ۶.۳ مگنتو استریکشن

مواد مگنتو استریکتیو وقتی در میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند تغییر شکل میدهند. اکثر مواد فرومغناطیسی برخی خاصیت مگنتو استریکشن<sup>۱۲</sup> یا مغناطو کشسانی فابل اندازه گیری از خود نشان میدهند که این پدیده گُرنش مواد بر اثر اعمال میدان مغناطیسی را تنگش مغناطیسی می‌گویند. بنابراین، مگنتو استریکشن تغییر شکل ظاهری در موادی است که تحت میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرند. اولین بار در سال ۱۸۴۲ توسط جیمز ژول<sup>۱۳</sup> فیزیک دان انگلیسی کشف شد. چون این پدیده شامل تبدیل انرژی دو طرفه بین حالت میدان مغناطیسی و کشسانی است، از اینرو از آن برای کاربرد تحریک<sup>۱۴</sup> و حسگر<sup>۱۵</sup> استفاده می‌کنند. ضمناً از آنها بطور وسیعی برای کنترل نوسانات در دستگاه‌های مکانیکی استفاده می‌نمایند.



شکل ۶.۳: مگنتو استریکشن ژول (الف) تغییر شکل در پاسخ میدان مغناطیسی  $H$ : شدت میدان مغناطیسی  $H$  با جریان عبوری از سیم پیچ متناسب است. (ب) رابطه بین  $\Delta L/L$  و  $H$

یکی از مشکلات ناشی از پدیده مگنتو استریکشن در ترانسفورمرها رخد میدهد که صدای وزوز آنها در مناطق مسکونی آزار دهنده است. با تغییر فلوی مغناطیسی هسته ترانس بصورت متناوب تغییر طول میدهد که حرکت اجسام نیز صدا تولید می‌کند. نظر باینکه عنصر ترانس دارای منحنی غیرخطی است و فرکانس برق در حد ۵۰ یا ۶۰ هرتز است، از این نظر امواج صوتی تولید شده در حد شنوازی است و دامنه آن بستگی به توان ترانس دارد.

### ۷.۳ الکتروشیمیائی

باتری با اکسیداسیون و واکنش کاهش یک الکتروولیت با فلزات کار می‌کند. هنگامی که دو ماده فلزی متفاوت به نام الکتروود در یک الکتروولیت رقیق شده قرار می‌گیرد بسته به واپستگی الکترون الکتروودها در واکنش اکسیداسیون و کاهش شرکت می‌کنند. در نتیجه

<sup>۱۲</sup>Magnetostriiction

<sup>۱۳</sup>James Prescott Joule

<sup>۱۴</sup>actuation

<sup>۱۵</sup>sensing

واکنش اکسیداسیون، یک الکترود منفی بهنام کاتد باردار می‌شود و به دلیل واکنش کاهش، الکترود دیگر بار مثبت‌دار گرفته که همان آند است. کاتد ترمینال منفی و آند ترمینال مثبت را تشکیل میدهد. هنگامی که دو فلز متفاوت در یک الکترولیت غوطه‌ور می‌شوند، اختلاف پتانسیل بین دو قطب ایجاد می‌شود. زمانی که ترکیبات خاص به‌آب اضافه و حل می‌شود یون‌های مثبت و منفی تولید می‌شوند. که به این محلول ترکیب الکترولیت گفته می‌شود. نمونه‌های محلول الکترولیت بسیار رایج هستند؛ انواع نمک، اسید و ... می‌باشند.

انرژی آزاد شده هنگام پذیرش الکترون توسط یک اتم خنثی به عنوان انرژی خروج شناخته می‌شود. از آنجا که ساختار اتمی مواد مختلف است میل الکترون یا انرژی خروج مواد متفاوت خواهد بود. اگر دو فلز در همان محلول الکترولیت غوطه‌ور شوند یکی از آن‌ها الکترون را دریافت و دیگری آزاد می‌کند. کدام فلز الکترون را دریافت و دیگری آزاد می‌کند بستگی با میل الکترونی این فلزات دارد. فلز با میل به الکترون کم یون منفی را بدست می‌آورد. از طرف دیگر فلز با میل الکترون بالا، الکترون را آزاد می‌کند و این الکترون‌ها در محلول الکترولیت بیرون می‌آیند و به یون‌های مثبت محلول اضافه می‌شوند. به این ترتیب یکی از آن‌ها الکترون بدست آورده و دیگری از دست می‌دهد. در نتیجه تفاوت در غلظت الکترون بین این دو فلز به وجود خواهد آورد. این اختلاف غلظت باعث ایجاد اختلاف پتانسیل در بین فلزات می‌شود. این اختلاف پتانسیل به عنوان ولتاژ در مدارهای الکتریکی مورد استفاده است. این یک اصل کلی و اساسی باتری است که به این ترتیب باتری کار می‌کند.

پیل الکتریکی در ایران باستان در فاصله سال‌های ۲۵۰ ق. م تا ۲۲۴ پ. م در تیسفون ساخته شد. این باتری‌ها به باتری‌های بغداد و پیل الکتریکی مشهورند. شرکت جنرال الکتریک این باتری‌ها را با روش تاریخ‌گذاری رادیوکربن<sup>۱۶</sup> شبیه‌سازی کرده است. معلوم شده است که قدمت این پیل‌ها به ۲۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد. این پیل‌ها دارای بدنه بیرونی از جنس ارتن ور بوده که حاوی میله‌ای آهنی است و به وسیله بخشی از بدنه مسی (میله آهنی درون استوانه مسی) ایزوله شده است. زمانی که درون محافظه با محلولی الکترولیت مانند آبلیمی پر شود، این وسیله جریان الکتریکی خفیفی تولید می‌کند. این احتمال وجود دارد که این وسیله برای آبکاری الکتریکی جواهر به کار می‌رفته است.

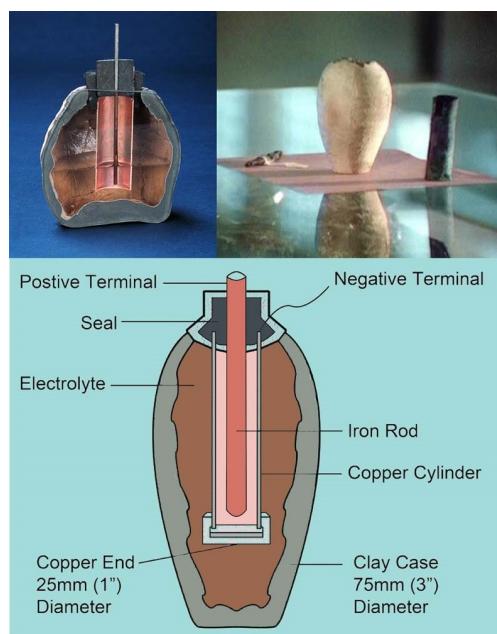
در سال ۱۳۱۷ خورشیدی برابر با ۱۹۳۸ میلادی، باستان‌شناس آلمانی ویلهلم کونیک و همکارانش ابزارهایی را در نزدیکی تیسفون پایتخت ایران در دوران اشکانیان یافته‌ند. پس از بررسی معلوم شد که این ابزارها پیل‌های الکتریکی هستند، که در دوره تاریخی ایران اشکانی ساخته شده و به کار برده می‌شده‌اند. او این پیل‌های تیسفون را باتری پارتی نامید که امروزه با نام‌های دیگر همچون باتری پارتیان یا پیل اشکانی هم مشهورند. او در مقاله‌ای این مطلب را منتشر کرد و از این وسیله با عنوان باتری باستانی یاد کرد که برای آبکاری الکتریکی و انتقال لایه‌ای از طلا یا نقره از سطحی به سطح دیگر به کار می‌رفته است.

این اکتشاف مربوط به دوره تاریخی سلسله اشکانیان، تاحدی موجب شگفتی است. حتی برخی از دانشمندان اروپایی و آمریکایی این باتری را به موجودات فضایی افسانه‌ای

## نگاهی دوباره به مفاهیم

و احتمالاً ساکنان فرا هوشمند سیارات دیگر که تصور می‌شود با بشقاب‌های پرنده و کشتی‌های فضایی به زمین آمده بودند، نسبت دادند، و آن را فراتر از دانش اندیشمندان و پژوهشگران آن دوران دانستند. برای ایشان پذیرفتی نبود که دانش ایرانیان در ۱۵۰۰ سال پیش از گالوالی ایتالیایی (۱۷۸۶ میلادی) که پیل الکتریکی را اختراع کرد تا به این حد بالا باشد.

به احتمال زیاد، ساکنان بین‌النهرین از این پیل‌های الکتریکی جریان برق تولید می‌کردند و از آن برای آبکاری اشیاء زینتی سود می‌جستند. اما در پهنه دریانوری منطقه خاورمیانه از این اختراع جهت آبکاری ابزارهای آهنی در کشتی و جلوگیری از زنگ زدن و تخریب آن‌ها استفاده می‌کردند



شکل ۱۱.۳: باطری اشکانی

این تئوری بعدها توسط دانشمندان دیگری به بوته آزمایش سپرده شد. ویلارد گری، مهندس برق شرکت جنرال الکتریک در ایالت ماساچوست، پس از مطالعه مقاله کونیگ تصمیم گرفت باتری بغداد را بازسازی کند. وی درون کوزه سفالین را با آب انگور، سرکه یا محلول سولفات مس پُر کرد و موفق به تولید ولتاژ حدود ۱/۵۵ ولت شد. بعدها دکتر اگبرشت، مصربشناس مشهور در سال ۱۹۷۸ نمونه‌ای از باتری‌های بغداد را بازسازی کرد و آن را با آب انگور پر نمود و توانست ولتاژ ۰/۸۷ ولت تولید کند. وی از این پیل‌ها برای طلاکاری یک پیکره نقره‌ای استفاده کرد. نمونه‌های بیشتری از این باتری‌های باستانی در سال ۱۹۹۹ توسط دانشجویان دکتر سنچل<sup>۱۷</sup> استاد ریاضیات و تاریخ علم در کالج اسمنت ماساچوست، ساخته شد. آن‌ها با پر کردن کوزه آن با سرکه قادر به تولید ولتاژ ۰/۱ ولت

<sup>۱۷</sup>Marjorie Senechal

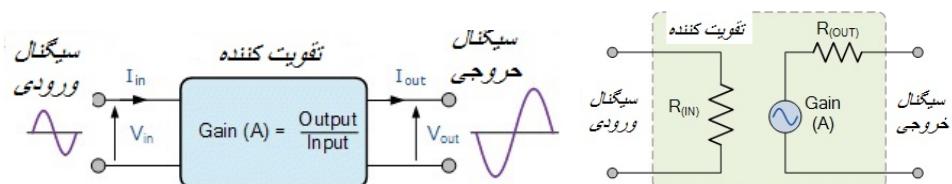
بودند. علاوه بر تئوری استفاده از این باتری‌ها برای آبکاری الکتریکی فلزها، تئوری‌های دیگری مبنی بر استفاده پزشکی یا موارد دیگر داده شده‌اند.



## فصل ۴

# تقویت کنندہ‌ها

تقویت کنندہ یک اصطلاح کلی است برای توصیف مداری که سیگنالی که ورودیش داده می‌شود، توان آنرا افزایش داده و شبیه آنرا در خروجی تحویل دهد. البته تمام مدارهای تقویت کنندہ‌ها یکسان و همانند هم نیستند و بر حسب شکل کار و عملکرد آنها متفاوتند. انواع مختلفی از مدارهای الکترونیکی وجود دارد که به عنوان تقویت کنندہ طبقه بندی می‌شوند؛ از تقویت کننده‌های عملیاتی و تقویت کننده‌های سیگنال کوچک گرفته تا تقویت کننده‌های بزرگ سیگنال قدرت. ضمناً بر حسب کار در باندهای فرکانسی مثلاً صوتی یا رادیوئی و یا حتی مایکروویوی و لیزر با هم اختلاف بسیار زیادی دارند. با وجود این تفاوت‌ها همگی آنها را می‌توان بصورت یک نمودار جعبه‌ای با ورودی و خروجی نشان داد.



شکل ۱.۴: نمودار جعبه‌ای تقویت کنندہ همراه مدار معادل تقویت کننده ایده‌آل

## ۱.۴ بهره تقویت کنندہ‌ها

بهره تقویت کنندہ را نسبت سیگنال اندازه‌گیری شده در خروجی به سیگنال اندازه‌گیری شده در ورودی تعریف کرد. سه نوع مختلف بهره برای تقویت کننده‌ها تعریف می‌کنند. بهره ولتاژ ( $A_v$ ), بهره جریان ( $A_i$ ) و سرانجام بهره توان ( $A_p$ ).

$$\begin{aligned} \text{بهره ولتاژ} &= A_v = \frac{V_{out}}{V_{in}} \\ \text{بهره جریان} &= A_i = \frac{I_{out}}{I_{in}} \\ \text{بهره توان} &= A_p = \frac{P_{out}}{P_{in}} = A_v \times A_i \end{aligned}$$

اکثراً بهره تقویت‌کننده‌ها را بر حسب دسی‌بل ( $dB$ ) بیان می‌کنند.

$$X[dB] = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} = 20 \log \frac{V_{out}}{V_{in}} + 10 \log \frac{R_{in}}{R_{out}} = 20 \log \frac{I_{out}}{I_{in}} + 10 \log \frac{R_{out}}{R_{in}}$$

در صورتی که مقاومت خروجی و ورودی برابر باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$X[dB] = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} = 20 \log \frac{V_{out}}{V_{in}} = 20 \log \frac{I_{out}}{I_{in}}$$

این لگاریتم در مبنای اعشاری است. گاهی در مخابرات برای تضعیف یا تقویت از معیار نپر هم استفاده می‌کنند در این صورت

$$\alpha[Naper] = \frac{1}{\ln 10} \ln c$$

و رابطه دسی‌بل و نپرخواهد بود:

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = 10^{\alpha/Naper} = e^{\alpha} \implies X[dB] = 10\alpha$$

يعنى يك نپر معادل ۱۰α دسی‌بل است.

این معیار معلوم نمی‌کند که مقدار توان چقدر است فقط نسبت دو توان را میدهد. بعضی مواقع در یک نقطه خاص توان را اندازه‌گیری کرده و آنرا نسبت به یک میلی‌وات می‌سنجدن. به آن دی بی ام ( $dBm$ ) می‌گویند مثلاً اگر توان در ورودی تقویت‌کننده‌ای  $X_1[dBm]$  باشد، یعنی

$$X_1[dBm] = 10 \log \frac{P_{in}}{1mW}$$

و همین طور توان در خروجی تقویت‌کننده‌ای  $X_2[dBm]$  باشد، یعنی

$$X_2[dBm] = 10 \log \frac{P_{out}}{1mW}$$

بنابراین

$$X[dB] = X_2[dBm] - X_1[dBm]$$

#### ۱.۱.۴ محاسبات سرانگشتی برای دسی‌بل

می‌توان با حفظ دو عدد محاسبات لگاریتمی دسی‌بل را بدون ماشین حساب بطور تقریبی انجام داد بازاء هر سه دسی‌بل نسبت دو برابر و بازاء ده دسی‌بل نسبت ده برابر می‌شود. پس با همین دو عدد و دانستن این موضوع که کارهای جمع و تفریق در لگاریتم معادل ضرب و تقسیم در در اعداد معمولی، کافی است تا محاسبات خود را انجام دهیم. مثلاً تقویت‌کننده‌ای که دارای بهره توان  $13dB$  است، نسبت توان خروجی به ورودی تقریباً بیست است، چرا

$$13dB = 10dB + 3dB \quad \equiv \quad \frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \times 2 = 20$$

$$\begin{aligned} 10dB - 9dB &= 1dB & \text{یک دسی‌بل را چگونه محاسبه کنیم} \\ \equiv & \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = 1/2^3 & 1/2^3 = 1/8 \end{aligned}$$

که دقیق آن  $1/2^3$  است. همین‌طور دو دسی‌بل

$$\begin{aligned} 12dB - 10dB &= 2dB & \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{1} = 1/6 \\ \equiv & & \end{aligned}$$

که دقیق آن  $1/6$  است. حال شما  $4dB$ ,  $5dB$ ,  $7dB$  و  $8dB$  را محاسبه کنید و عدد خود را با ماشین حساب یا کامپیوتر مقایسه کنید.

### زنگ تفريح

■ چگونه می‌توانیم بدون هیچگونه مواد نیمه‌هادی (دیود-ترانزیستور) یا لامپ‌های خلاء سیگنال تلفن را تقویت کنیم؟ بجند طریق این امکان پذیر است؟

## ۲.۴ تقویت‌کننده‌های لامپی

ساده‌ترین لامپ خلاء، دیود است که در سال ۱۹۰۴ بوسیله فلیمینگ<sup>۱</sup> مهندس انگلیسی اختراع شد. آن صرفاً می‌توانست جریان را از یک جهت عبور دهد. بنابراین در دستگاه الکترونیکی نقش یکسو سازی را ایفا می‌کند. او یکی از مشاورین شرکت تلگراف بی‌سیم مارکنی و تلفن ادیسون بود.

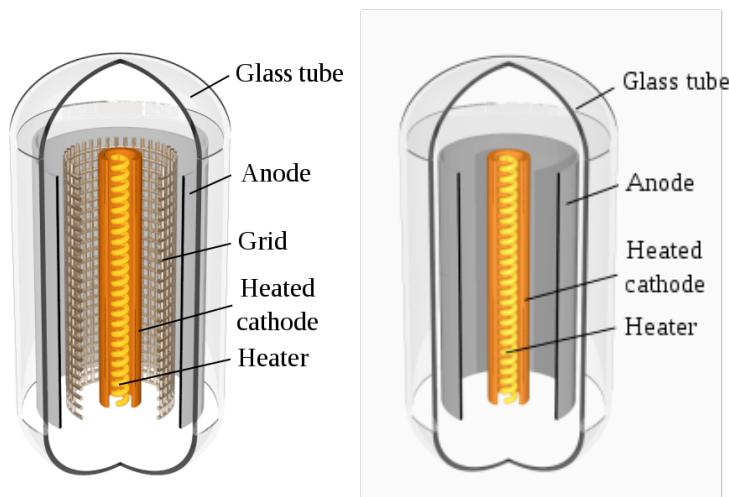
اولین دستگاه الکتریکی عملی که می‌تواند سیگنال الکتریکی تقویت کند، لامپ خلاء تریود است که در سال ۱۹۰۶ توسط لی دی فارست<sup>۲</sup> ابداع شد. اگر چه لی دی فارست درک محدودی از نحوه کار لامپ داشت، اما پایه و اساس رشد الکترونیک بود. او با قرار دادن یک شبکه در لامپ دیود فلمینگ، توانست جریان آند را کنترل کند. امروزه بیشتر تقویت‌کننده‌ها از ترانزیستور استفاده می‌کنند. آیا فقط لامپ و ترانزیستور می‌توانند سیگنال را تقویت کنند؟ بدیهی است خیر! تقویت‌کننده مغناطیسی و مکانیکی-الکتریکی نیز ساخته شده‌اند که می‌توانند عمل تقویت کردن سیگنال را انجام دهند. آنچه مهم است، راندمان، سرعت کنترل و خلاصه پارامترهای الکتریکی موردنظر طراحان علم الکترونیک است.

### ۱.۲.۴ لامپ تریود

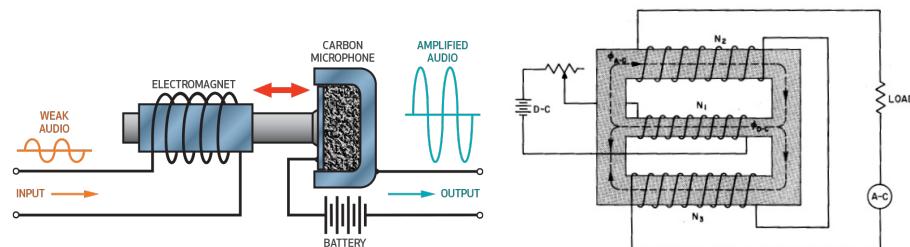
همه تریودها یک الکترود بنام کاتد دارند که بوسیله یک رشته (فیلامان) گرم می‌شود تا الکترون‌ها را آزاد کند. یک صفحه توری بنام شبکه که الکترون‌های عبور از آنرا کنترل کند. سرانجام آند یا صفحه لامپ که بعلت ولتاژ مثبتی به آن وصل است الکترون‌ها را جذب نماید. همه اینها در یک پوشش حباب شیشه‌ای که از هوا تخلیه شده (در حدود

<sup>۱</sup>John Ambrose Fleming

<sup>۲</sup>Lee De Forest



شکل ۲.۴: ساختمان لامپ دیود (راست) و لامپ تریود خلاء کم توان (چپ). فسمتی از حباب برای نشان دادن بخش‌های لامپ برداشته شده است.



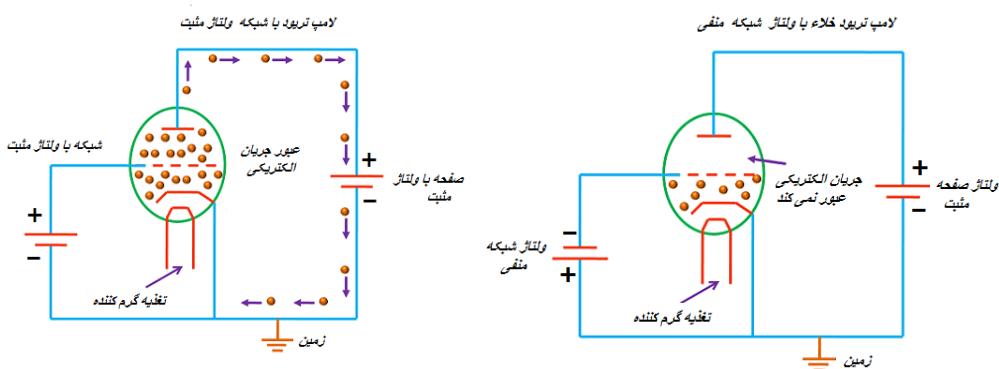
شکل ۳.۴: تقویت‌کننده مغناطیسی (راست); تقویت‌کننده الکترومکانیکی (چپ)

۱۰⁻⁹ اتمسفر) است، قرار دارد. از آنجا که رشتہ داغ می‌شود، عمر لامپ‌های خلاء محدود است و بنابراین بصورت یک واحد قابل تعویض ساخته می‌شود. الکترودها روی پایه انتهائی و با یک سوکت به قسمت‌های دیگر مدار متصل می‌شود. طول عمر یک تریود برای سیگنال‌های کوچک و معمولی (مثل گیرنده‌های رادیوئی) حدود دو هزار ساعت و برای لامپ‌های پرقدرت ده هزار ساعت است.

وقتی مدار یک لامپ تریود را طراحی یا تعمیر می‌کنید، لازم است تا با نحوه کار و مشخصات آن آشنائی داشته باشد. رابطه ولتاژ و جریان در تریود برای آند و شبکه هم‌چنین ضریب تقویت، مقاومت و هدایت آند (صفحه) مهم هستند.



شکل ۴.۴: (الف): نمونه‌هایی از سیر تکاملی لامپ تریود از سال ۱۹۱۸ تا ۱۹۶۰ ؛ (ب): نمودار مداری لامپ



شکل ۵.۴: نحوه کار یک لامپ تریود: شبکه منفی است و از رسیدن الکترونها به صفحه جلوگیری می‌کند (راست)؛ شبکه مثبت است و رسیدن الکترونها به صفحه لامپ را تسريع می‌کند (چپ).

### ۳.۴ بار فضائی

بار فضائی توزیع افراش بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا است که معمولاً خلاء است. کشف این پدیده مربوط به مطالعات ریجاردسون<sup>۳</sup> در حدود سال‌های ۱۹۰۰ میلادی بر می‌گردد. او دریافت که گسیل ترمیونیک با ابر الکترونی اطراف کاتد محدود می‌شود. با استفاده از الکترودینامیک وی دریافت که با افراش دمای کاتد و نیز افراش سطح فیلامان بطور مثبتی روی حد جریان بیشینه موثر است و این شبیه معادله آرنیوس است که بعداً به شکل  $T^{1/2}$  تغییر نام داد. ابا این حال، در سال ۱۹۲۸، کشفیات تجربی بیشتر روی فیلامان‌ها و خلاء‌های بالاتر، اشتباه بودن نظریه‌های کلاسیک را اثبات شد در حالی

<sup>۳</sup> Richardson

که نظریه ذره‌ای بودن آنرا تقویت کرد و باعث شد ریچاردسون به لطف قانونی که بنام وی نامگذاری شده بود، جایزه نوبل را بدست آورد:

$$J_R = A \cdot T^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{W}{kT}\right] \quad [A/m^2]$$

در سال ۱۹۱۱ چایلد<sup>۴</sup> دریافت که علاوه بر دمای کاتد، میدان شتابدهنده نیز نقش مهمی در گسیل جریان ساطع شده دارد. سپس دقیقاً رابطه بین جریان یونی و ولتاژ بین آند-کاتد و فاصله بین این دو الکترود را بدست آورد:

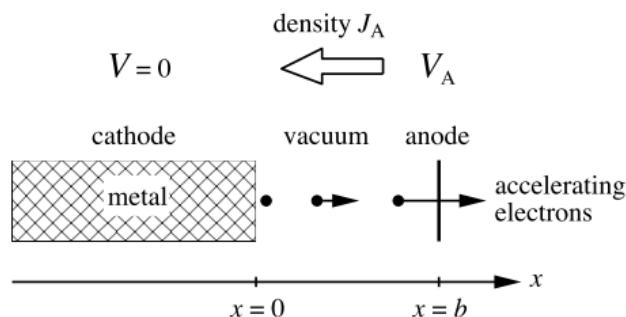
$$J_{cL} = \frac{4\epsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2q}{m}} V_a^{3/2}$$

این رابطه بعداً بنام جریان حد چایلد-لانجمویر<sup>۵</sup> نامیده شد، زیرا لانجمویر نیز بطور مستقل آنرا در لامپ استوانه‌ای شکل بدست آورد.

هر دو قانون در مورد پیش‌بینی انتشار کاتدهای گرم مفید هستند: حد جریان بصورت تابعی از ولتاژ آند توسط کمتر از این دو تعریف می‌شود. با فزایش ولتاژ، انتقال بین قانون چایلد و ریچاردسون به نرمی اتفاق می‌افتد زیرا بار فضائی شکل خود را در فضای سه بعدی تغییر می‌دهد.

### قانون چایلد

یک شکل یک بعدی مطابق شکل زیر در نظر گیرید. فضای بین  $x = 0$  و  $x = b$  خالی



شکل ۴.۶: تصویر یک بعدی از موقعیت الکترودها

نیست، بلکه مملو از بارهایی است که از کاتد کنده شده‌اند و تشکیل یک ابر الکترونی با چگالی  $n$  داده‌اند. اگر ولتاژ اعمالی بین آند و کاتد  $V_a$  باشد، الکترون‌ها با این میدان خارجی شتاب یافته و جریان مثبت  $J_A$  را در جهت قراردادی از آند به کاتد تولید می‌کنند. این چگالی جریان برابر است با:

$$J_A = qn(x)v(x) = -J$$

<sup>۴</sup>Child

<sup>۵</sup>Child-Langmuir (CL) limit current

با بالا رفتن از چاه پتانسیل الکترون‌ها انرژی خود را از دست داده، بنابراین وقتی تحت میدان خارجی شروع به شتاب گرفتن می‌کند، تقریباً انرژی آنها صفر است. این فرض مهمی است، زیرا وقتی سرعت اولیه را نتوانیم صرفنظر کنیم، حد جریان بطرز چشم‌گیری افزایش می‌یابد. برای این مثال، فرض می‌کنیم دمای کاتد در حدود  $2000\text{ K}$  باشد، در این صورت الکترون‌ها انرژی حرارتی متوسط نزدیک  $eV/3$  دارند که برای پتانسیل آند چند صد ولت بسیار ناچیز است. با استفاده از اصل بقاء انرژی، می‌توان رابطه سرعت بر حسب تابع پتانسیل  $V(x)$  را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2}mv^2 - qV(x) = 0 \implies v = \sqrt{\frac{2q}{m}V(x)}$$

اصل بقاء بار الکتریکی در حالت ماندگار اطمینان می‌دهد که چگالی جریان بستگی به  $x$  ندارد، ازینرو  $n(x)$  با شتاب الکترون‌ها بسمت آند، باید کاهش یابد. بار فضائی بر پتانسیل طبق معادله پواسون تاثیر می‌گذارد:

$$\frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} = \frac{qn(x)}{\epsilon_0} = \frac{J_A}{\epsilon_0 \sqrt{2qV(x)/m}} = aV^{-1/2}$$

برای حل این معادله دیفرانسیل دو شرایط مرزی لازم است: اولین مورد از ثابت بودن پتانسیل کاتد است و مورد دوم بین معنی است که چگالی بار در اطراف کاتد آنقدر زیاد است که میدان  $E$  در  $x=0$  برابر صفر است و هیچگونه جریانی نمی‌تواند خارج شود:

$$V(0) = 0, \quad \frac{dV(x)}{dx}|_{x=0} = 0$$

انتگرال‌گیری را می‌توان با جداسازی متغیرها انجام داد:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} \frac{d^4 V(x)}{dx^4} &= aV^{-1/2} \frac{dV(x)}{dx} \\ \int d \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right)^{1/2} \right] &= \int aV^{-1/2} dx \\ \frac{1}{2} \left( \frac{d^4 V(x)}{dx^4} \right)^{1/2} &= 2aV^{1/2} + c_1 \end{aligned}$$

با شرایط مرزی دوم بالا،  $c_1$  باید صفر شود.

$$\int V^{-1/4} dV = \int \sqrt{4a} dx$$

$$V(x) = \left( \frac{3}{4} \sqrt{4a} x \right)^{4/3} + c_2$$

مقدار ثابت  $c_2$  باید صفر شود، در نتیجه، پتانسیل را در طول  $x$  می‌توان بصورت زیر نوشت:

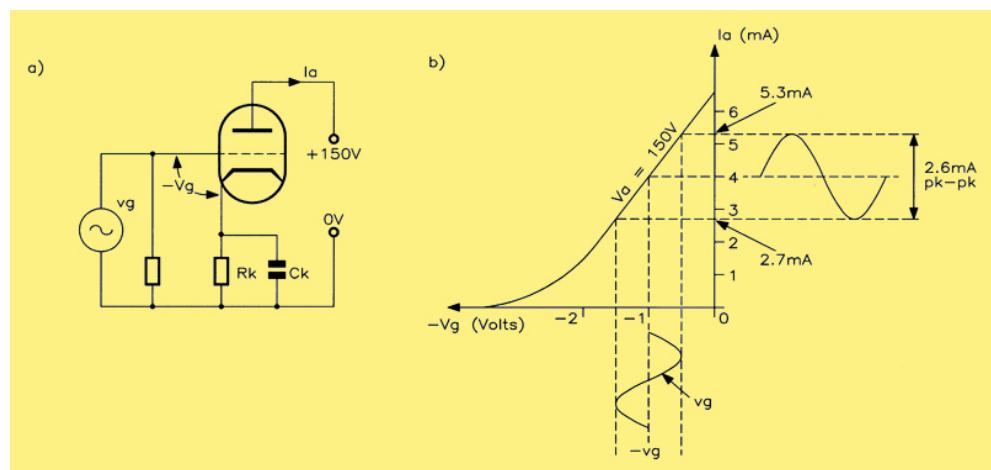
$$V(x) = \left( \frac{9}{4} \frac{J_A}{\sqrt{2q/m}} \right)^{1/3} x^{4/3}$$

سرانجام، با قرار دادن ولتاژ آند برابر  $V_A = V(b)$  و معکوس کردن رابطه، به قانون چایلد می‌رسیم:

$$J_A = \frac{4\epsilon_0}{9b^2} \sqrt{\frac{2q}{m}} V_A^{7/2}$$

### ۱.۳.۴ تقویت سیگنال با لامپ تریود

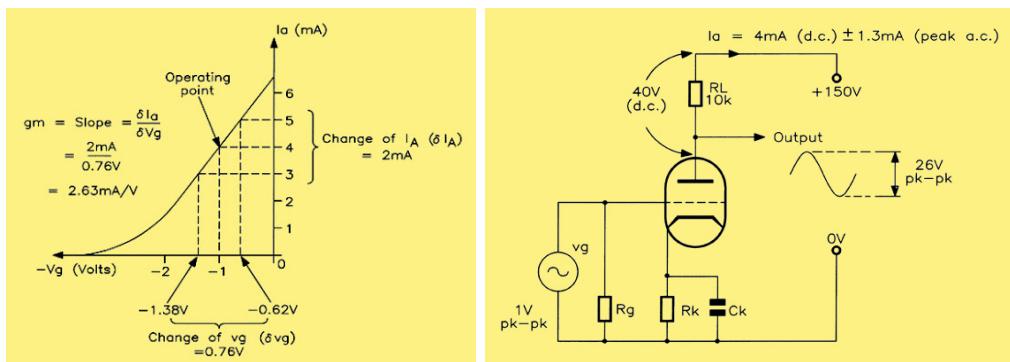
برای درک این که چگونه یک لامپ تریود سیگنال مورد نظری را تقویت می‌کند، لازم است تا در مورد ویرگی‌های لامپ یعنی وابستگی مقابله نمودار جریان آند  $I_a$  و ولتاژ شبکه  $V_g$  مطالبی یادآوری کنیم. برای یک لامپ تریود نمودار ولتاژ آند در مقابل ولتاژ منفی شبکه بازاء ولتاژ ثابت صفحه برای نمونه مانند شکل (۷.۴) است. شکل (a) یک لامپ تریود را نشان میدهد که با مقاومت  $R_k$  و خازن  $C_k$  و مقاومت نشتی  $R_g$  کاتد بایاس شده است. وقتی یک جریان متناوب  $v_g$  (با ولتاژ  $DC$  بایاس  $V_g$  اشتباه نشود) به شبکه



شکل ۷.۴: (الف)- لامپ تریود با ولتاژ بایاس  $V_g$  و یک سیگنال متناوب  $v_g$  (ب)- نمودار تغییرات جریان صفحه و در نتیجه تقویت سیگنال وروی.

وصل می‌شود، جریان آند هم همان‌طوری که در شکل (b) نشان داده شده است، تغییر می‌کند. برای این لامپ ولتاژ بایاس  $-1.0V$  درنظر گرفته شده است. در اینجا جریان متغیر آند در حول  $4mA$  تغییر می‌کند. ولتاژ بایاس صفحه  $150V$  است. این اعداد مربوط به ولتاژ و جریان  $DC$  لامپ بود. اگر ولتاژ شبکه بین  $-0.5V$  تا  $+1.5V$  بصورت سینوسی تغییر کند جریان آند در حدود  $2.7mA$  تا  $5.3mA$  یعنی بین کمینه و بیشینه  $2.6mA$   $pk-pk$  سینوسی تغییر می‌کند. اگر ولتاژ منفی شبکه به اندازه کافی بزرگ شود، جریان آند کاملاً قطع می‌شود.

اما بدنبال تقویت ولتاژ هستیم. اکنون یک مقاومت بار برای مدار بالا درنظر می‌گیریم و برای آنکه مقدار تقویت را کاملاً نشان دهیم مدار (۸.۴) را درنظر گیرید. بدیهی است با عبور این جریان آند از یک مقاومت در دو سر آن ولتاژ خواهیم داشت. مقاومت بار را  $10K\Omega$  درنظر می‌گیریم بنابراین بازاء  $I_a = 4mA$  افت ولتاژ  $-dc = 4V$  و ولتاژ سینوسی  $26V$   $pk-pk$  خواهیم داشت. بیاد داشته باشید که ولتاژ سینوسی ورودی  $1V$   $pk-pk$  بود بنابراین در اینجا تقریباً بیست و شش برابر تقویت ولتاژ خواهیم داشت که بدنبال آن بودیم!



شکل ۸.۴: مقاومت بار لامپ (راست) و بهره ولتاژ (چپ)

### ۲.۳.۴ بهره ولتاژ

یکی از پارامترهای لامپ خلاء تریوود ترانس‌کنداکتانس<sup>۶</sup> یا هدایت متقابل<sup>۷</sup>  $g_m$  است که بصورت زیر حول نقطه کار (بایاس) تعریف می‌شود:

$$g_m = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g}$$

و معمولاً بر حسب میلی زیمنس یا گاهی میلی مو (عکس اهم) بیان می‌شود. در شکل ۸.۴-چپ) هدایت متقابل برابر است با:

$$g_m = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} = \frac{2mA}{0.76V} = 2.63mA/V$$

که با داشتن مقاومت بار، بهره تقویت ولتاژ (VAF) بدست خواهد آمد:

$$VAF = g_m R_L = 2.63(mA/V) \times 10(k\Omega) = 0.0263(A/V) \times 10,000\Omega = 26/3$$

### ۴.۴ پارامترهای لامپ تریوود

همانطوری که در بالا تعریف کردیم یکی از پارامترهای مهم لامپ هدایت متقابل است که با  $g_m$  نشان دادیم:

$$g_m = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} \Big|_{V_a=const.}$$

که معمولاً بر حسب میلی آمپر بر ولت بیان می‌شود.

یکی دیگر از پارامترهای لامپ مقاومت دینامیکی صفحه (یا آند) است و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$r_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} \Big|_{Vg=const.}$$

<sup>۶</sup>Transconductance

<sup>۷</sup>Mutual Conductance

<sup>۸</sup>Voltage Amplification Factor (VAF)

این پارامتر معمولاً بر حسب کیلو اهم بیان می‌شود. سرانجام ضریب تقویت  $\mu$  است، که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu = \frac{\Delta V_p}{\Delta V_g} \Big|_{I_a=const.}$$

و داریم

$$\mu = g_m \times r_a$$

در جدول (۱.۴) پارامترهای واقعی سه لامپ مختلف *ECC81*, *ECC82* و *ECC83* آورده شده است. از آنجا که در داخل هر حباب لامپ دو عدد تریود است، فیلامان آنها را می‌توان

جدول ۱.۴: مشخصات سه لامپ تریود مختلف

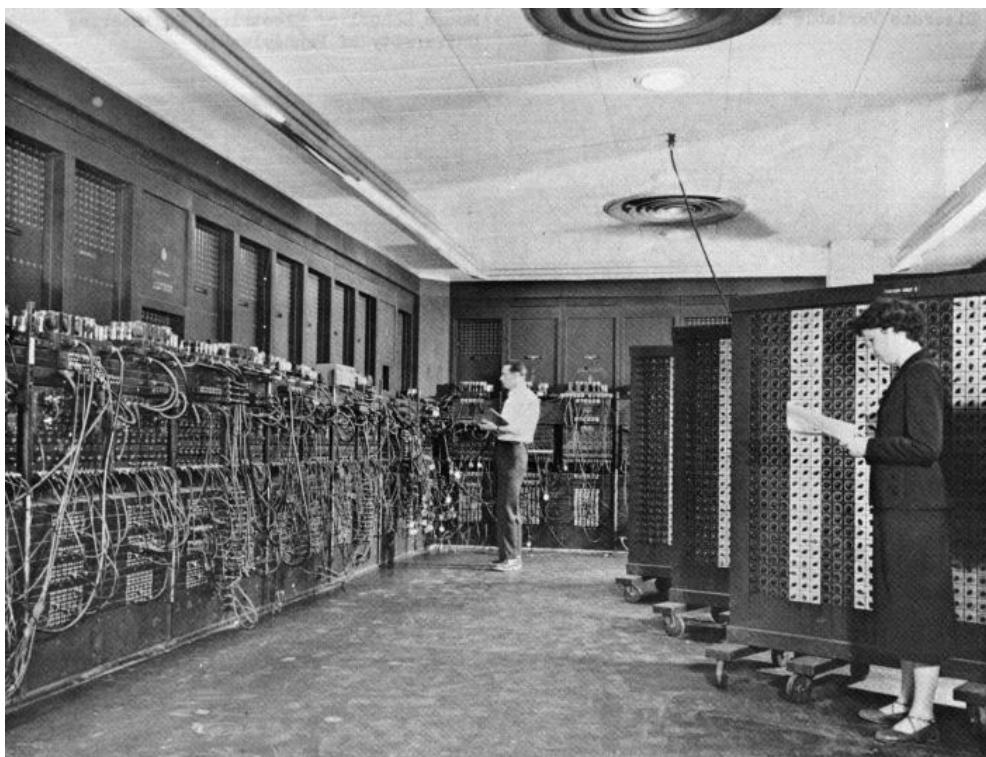
Type	Heater		Anode		Negative Grid Volts	$r_a$ (kΩ)	$g_m$ (mA/V)	$\mu$
	Volts	Amps	Volts	Amps				
<b>ECC81</b>	6.3	0.3	100	3.7	1·0	13·5	4	54
	12.6	0.15	180	11·0	1·0	9·4	6·6	62
<b>ECC82</b>	6.3	0.3	100	11·8	0	6·2	3·1	19
	12.6	0.15	250	10·5	8·5	7·7	2·2	17
<b>ECC83</b>	6.3	0.3	100	0·5	1·0	80	1·25	100
	12.6	0.15	250	1·2	2·0	62·5	1·6	100

سری یا موازی بهم متصل کرد. از این نظر در ستون اول از چپ به راست ولتاژ فیلامان را دو ولتاژ ۶,۳ و ۱۲,۶ ولت برای موازی یا سری آورده است. فیلامان هر عدد لامپ با ۶,۳ ولت متناوب تغذیه می‌شود. در ستون دوم جریان فیلامان (گرم کننده) آورده شده است. در ستون سوم و چهارم ولتاژ و جریان آند (صفحه) و در ستون پنجم ولتاژ شبکه بیان شده است. سه ستون دیگر پارامترهای لامپ هستند.

از لامپ می‌توان بعنوان نوسان ساز و شکل موج دهنده و مدارهای منطقی نیز استفاده کرد. بد نیست بدانید که در سال ۱۹۴۷ کامپیوتر ENIAC ساخته شد. در این اولین کامپیوتر که برای استفاده عمومی طراحی شد، هزاران لامپ را بکار بردن. وزن کامپیوتر (شکل ۹.۴) حدود ۳۰۰۰۰ کیلوگرم است. در ساخت آن از دیودهای کریستالی، رله‌ها، مقاومت‌ها، خازن‌ها و ۱۷,۴۶۸ لامپ خلا استفاده شده است.

## ۵.۴ تقویت‌کننده‌های پارامتری

دستگاهی که هدایت منفی از خود نشان می‌دهد، از قبیل دیود تونلی، می‌تواند آنر برای تقویت و نوسان‌سازی استفاده کرد. لیزر نیز یکی از دستگاه‌هایی است که هدایت منفی دارد و بعنوان نوسان‌ساز استفاده می‌شود. طبقه دیگری از تقویت‌کننده‌ها و



شکل ۹.۴: کامپیوتر ENIAC

نوسان‌سازهای وجود دارند که بر اساس سوسیپتانس<sup>۱۰</sup> غیرخطی که به عنوان تقویت‌کننده و یا نوسان‌ساز پارامتری شناخته می‌شوند.

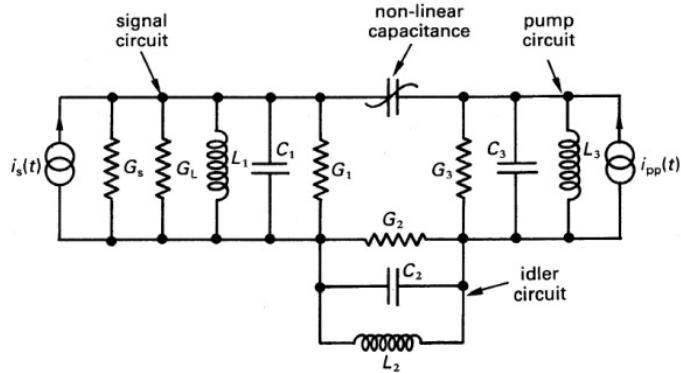
به عنوان مثال، یک اتصال PN با بایاس معکوس، مشخصه ولتاژ-بار غیرخطی دارد که ناشی از ظرفیت وابسته به ولتاژ است. اختلاط بین سه مولفه فرکانسی امواج سیگنال، بیکاره و پمپ در اینگونه عناصر می‌تواند رخداد و انرژی از یک موج پمپ قوی به امواج سیگنال ضعیف و بیکاره جریان یابد. این انتقال و جریان توان از پمپ به سیگنال توسط هدایت منفی در مدار سیگنال است. در حوزه طیف نوری، گشتاورهای دیپل اتمی، که بوسیله نور لیزر پمپ قوی انجام می‌شود، دارای مشخصه غیرخطی است و می‌تواند به تقویت سیگنال ضعیف و امواج بیکاره منجر شود.

#### ۱.۵.۴ تقویت‌کننده پارامتری غیر تبهکن

مدار معادل یک تقویت‌کننده غیر تبهکن در شکل (۱۰.۴) نشان داده شده است. خازن غیرخطی با سه مدار موازی LCR محصور شده که نمایشگر مدارهای سیگنال، بیکاره و پمپ است.

بار<sup>۶</sup> روی طرفیت غیرخطی وظیفه ولتاژ دو سر مدار را دارد. با استفاده از بسط سری

<sup>۱۰</sup> اقسامی موہومی ادمیتانس و ادمیتانس عکس امپدانس است



شکل ۱۰.۴: مدار معادل یک تقویت‌کننده پارامتری غیر تبھکن

تیلوور، بار را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$q(t) = a_1 v(t) + a_2 v'(t) + a_3 v''(t) + \dots \quad (1.4)$$

وقتی تمام ضریب‌ها بغیر از اول و دوم صفر هستند، بار به صورت معادله درجه دوم زیر خواهد بود:

$$q(t) = Cv(t) + a_2 v'(t) \quad (2.4)$$

که در آن  $a_1$  با ظرفیت خازن خطی  $C$  جایگزین شده است. جریان جاری در خازن غیرخطی برابر است با:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt} + 2a_2 v(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.4)$$

که در آن ولتاژ دوسر خازن غیرخطی شامل امواج سیگنال، بیکاره و پمپ بترتیب در فرکانس‌های  $\omega_1$ ،  $\omega_2$  و  $\omega_3$  است.

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) \\ &= V_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + V_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + V_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

فرکانس‌ها رابطه (۴.۴) از روابط زیر پیروی می‌کنند:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (5.4)$$

$$\omega_i = 1/\sqrt{L_i(C_i + C)} \quad (6.4)$$

با استفاده از رابطه (۴.۴) در رابطه (۳.۴)، رابطه جریان را بدست می‌آوریم،

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \quad (7.4)$$

که در آن

$$i_1(t) = -\omega_1 C V_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_1 a_2 V_2 V_3 \sin(\omega_1 t + \phi_3 - \phi_2) \quad (8.4)$$

$$i_1(t) = -\omega_1 C V_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 a_2 V_2 V_1 \sin(\omega_2 t + \phi_2 - \phi_1) \quad (9.4)$$

$$i_2(t) = -\omega_2 C V_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) - \omega_1 a_1 V_1 V_2 \sin(\omega_1 t + \phi_1 + \phi_2) \quad (10.4)$$

روابط (۱۰.۴)–(۱۱.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$i_1(t) = C \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{a_2 V_2 V_1}{V_1} \left\{ \cos(\phi_2 - \phi_1 - \phi_1) \frac{dv_1(t)}{dt} - \omega_1 v_1(t) \sin(\phi_2 - \phi_1 - \phi_1) \right\} \quad (11.4)$$

$$i_2(t) = C \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{a_1 V_1 V_2}{V_2} \left\{ \cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1) \frac{dv_2(t)}{dt} - \omega_2 v_2(t) \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1) \right\} \quad (12.4)$$

$$i_3(t) = C \frac{dv_3(t)}{dt} + \frac{a_1 V_1 V_2}{V_1} \left\{ \cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1) \frac{dv_3(t)}{dt} + \omega_2 v_2(t) \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1) \right\} \quad (13.4)$$

با گرفتن تبدیل فوریه از روابط (۱۱.۴)–(۱۳.۴)، ادمیتانس  $Y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) که مدارهای سیگنال، بیکاره و پمپ مشاهده می‌کنند، برابر است با:

$$Y_1 = \frac{I_1(j\omega)}{V_1(j\omega)} = j\omega_1 C + j\omega_1 a_2 \frac{V_2 V_3}{V_1} \exp[j(\phi_2 - \phi_1 - \phi_1)] \quad (14.4)$$

$$Y_2 = \frac{I_2(j\omega)}{V_2(j\omega)} = j\omega_2 C + j\omega_2 a_1 \frac{V_1 V_3}{V_2} \exp[j(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1)] \quad (15.4)$$

$$Y_3 = \frac{I_3(j\omega)}{V_3(j\omega)} = j\omega_3 C + j\omega_3 a_1 \frac{V_1 V_2}{V_3} \exp[-j(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1)] \quad (16.4)$$

روابط ولتاژ-جريان برای سه مدار خواهد بود:

$$I_s(j\omega) = \left\{ G_T + j\omega_1 a_2 \frac{V_2 V_3}{V_1} \exp[j(\phi_2 - \phi_1 - \phi_1)] \right\} V_1(j\omega) \quad (17.4)$$

$$O = \left\{ G_T + j\omega_2 a_1 \frac{V_1 V_3}{V_2} \exp[j(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1)] \right\} V_2(j\omega) \quad (18.4)$$

$$I_P(j\omega) = \left\{ G_T + j\omega_3 a_1 \frac{V_1 V_2}{V_3} \exp[-j(\phi_1 - \phi_2 - \phi_1)] \right\} V_3(j\omega) \quad (19.4)$$

در اینجا  $I_s(j\omega)$  و  $I_P(j\omega)$  تبدیل فوریه ورودی جریان‌های سیگنال و پمپ، و ضمناً  $G_T = G_s + G_L + G_1$  است. شرط تشدید مدار  $LC$  رابطه (۸.۴) بکار برده شده است.

با حذف  $V_3$  و  $V_2$  از رابطه (۱۷.۴) با استفاده از روابط (۱۸.۴) و (۱۹.۴)، ادمیتانس مدار سیگنال را بدست می‌آوریم:

$$Y_s = G_T - G = G_T - \frac{\omega_1 \omega_2 a_2}{G_2 G_3} \frac{|I_P(j\omega)|^2}{[1 + \frac{\omega_3 \omega_1}{G_1 G_2} a_1^2 V_1^2]^2} \quad (20.4)$$

بعلت موج پمپ در فرکانس  $\omega_2$  ظرفیت غیرخطی بطرف هدایت منفی سوق داده می‌شود.  
اگر شرایط زیر صادق باشد،

$$\frac{\omega_2 \omega_3}{G_1 G_2} a_1^2 V_1^2 \ll 1 \quad (21.4)$$

هدایت منفی مستقل از ورودی سیگنال خواهد بود و تقویت کننده پارامتری محقق خواهد شد.

### ۲.۵.۴ بهره توان

بهره توان  $G$  تقویت کننده پارامتری غیر تبهکن از نسبت توان تحویلی به بار  $G_L$  به توان ورودی به منبع  $G_s$  است:

$$G = \frac{G_L V_1^2}{(|I_s|^2 / 4G_s)} = \frac{4G_s G_L}{|Y_s|^2} \quad (22.4)$$

وقتی پمپ وجود نداشته باشد ( $|I_P(j\omega)| = 0$ ، تقویت کننده بهره‌ای ندارد ( $G_s = G_T$ ) وقتی جریان پمپ به مقدار آستانه میرسد:

$$|I_P(j\omega)|^2 = \frac{G_T G_V G_s^2}{\omega_1 \omega_2 a_2^2} \quad (23.4)$$

سیستم ناپایدار می‌شود ( $\rightarrow |Y_s| = 0$ ) و تقویت کننده شروع به نوسان می‌کند. بین این دو شرایط شدید، تقویت کننده خطی سیگنال ورودی تا آنجا که سیگنال ورودی خیلی قوی نباشد، یعنی رابطه (۲۱.۴) برقرار باشد، انجام می‌شود.

### ۳.۵.۴ عدد نویز

نویز در تقویت کننده پارامتری بوسیله هدایت مدار  $G_s$ ،  $G_1$  و  $G_2$  تولید می‌شود. نویز تولید شده بوسیله هدایت مدار پمپ  $G_2$  را می‌توان معمولاً نادیده گرفت زیرا جریان پمپ  $i_P(t)$  غالباً خیلی زیاد است و می‌توان یک موج سینوسی بدون نویز در نظر گرفت. نویز ناشی از هدایت بار  $G_L$  را نیز می‌توان چشم‌پوشی کرد، زیرا معمولاً در مرحله بعدی آنرا در نظر می‌گیرند.

رابطه (۱۷.۴) پیشنهاد می‌کند که تغییرات ولتاژ  $\Delta V_2$  در دوسر جریان بیکاره در فرکانس  $\omega_2$  جریان متغیر  $\Delta I_s$  را در مدار سیگنال با فرکانس  $\omega_1$  تولید می‌کند. چگالی طیف تغییرات ولتاژ  $\Delta V_2$  از رابطه زیر بدست می‌اید:

$$\overline{S_{V_2}(\omega)} = \begin{cases} 4k_B T / G_2 & \text{حد حرارتی} \\ 2\hbar\omega_2 / G_2 & \text{حد کوانتومی} \end{cases} \quad (24.4)$$

$$\text{چگالی طیف تغییرات جریان القائی } \Delta I_s \text{ برابر است با} \quad (25.4)$$

$$\overline{S_{I_s}(\omega)} = \omega_2^2 |C'|^2 \overline{S_{V_2}(\omega)}$$

$$\text{که در آن} \quad (26.4)$$

$$|C'| = a_2 V_2 \approx a_2 |I_P(j\omega)| / G_2$$

تساوی دوی با چشم‌پوشی از اثر بهره اشباع رابطه (۲۱.۴) است. چگالی طیف مولدهای جریان وابسته به  $G_s$  و  $G_1$  عبارتند از:

$$\overline{S_{I_{ss}}(\omega)} = \begin{cases} 4k_B T / G_s & \\ 2\hbar\omega_1 / G_s & \end{cases} \quad (27.4)$$

$$\overline{S_{I_{s1}}(\omega)} = \begin{cases} 4k_B T / G_1 \\ 2\hbar\omega_1 / G_1 \end{cases} \quad (28.4)$$

از آنجا که هیچگونه وابستگی بین این سه منبع نویز وجود ندارد، عدد نویز تقویت‌کننده در حد حرارتی را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\overline{S_{I_{ss}}(\omega)} + \overline{S_{I_{s1}}(\omega)} + \overline{S_{I_{s2}}(\omega)}}{\overline{S_{I_{ss}}(\omega)}} \\ &= 1 + \frac{G_1}{G_s} + \frac{\omega_1 |C'|^2}{G_s G_s} \end{aligned} \quad (29.4)$$

از رابطه (۲۰.۴) و (۲۶.۴) می‌توانیم رابطه  $|C'|^2$  را بر حسب هدایت منفی  $G$  بیان کنیم:

$$|C'|^2 = \frac{G_2 G}{\omega_1 \omega_2} \quad (30.4)$$

با استفاده از رابطه (۳۰.۴) در (۲۹.۴) عدد نویز را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$F = 1 + \frac{G_1}{G_s} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{G}{G_s} \quad (31.4)$$

عدد نویز را می‌توان بوسیله صرفنظر از تلفات مدار سیگنال ( $G_s \ll G_1$ ) و زیاد کردن نسبت  $\omega_2/\omega_1$  به یک (تقویت ایده‌آل) تقلیل داد.

عدد نویز تقویت‌کننده در حد کوانتوم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F = 1 + \frac{G_1}{G_s} + \frac{G}{G_s} \quad (32.4)$$

برای تقویت‌کننده‌های با بهره زیاد  $G \approx G_s (G_1, G_L \ll G_s)$  در حد کوانتوم کمترین عدد نویز، یعنی  $F_{min} = 1(0 \text{ dB})$  در حد حرارتی است.

## زنگ تفریح

■ هزار سکه یک جور را یکبار به هوا پرتاب کرده و سپس نتیجه را یادداشت می‌کنیم. حال اگر یکی از آن سکه‌ها را هزار بار به هوا پرتاب کنیم و نتیجه را یادداشت کنیم. جواب این دو آزمایش چه فرقی باهم دارند؟ از این آزمایش چه نتیجه‌های بدست می‌آید؟

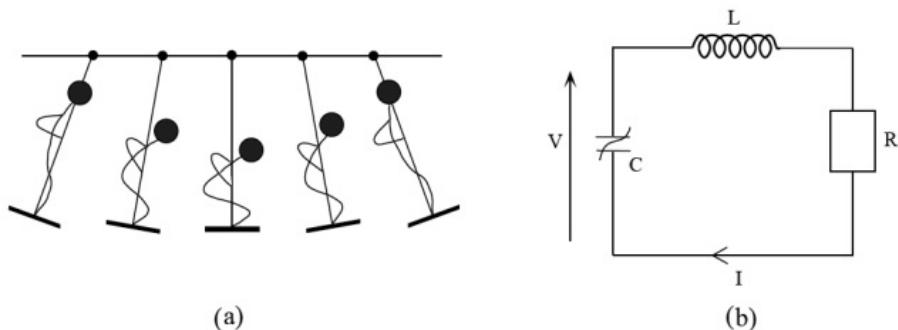
جواب :



## ۶.۴ تقویت کننده پارامتری تبهکن

### ۱۶.۴ اصول کار

وقتی امواج بیکاره و سیگنال فرکانس یکسانی داشته باشند، اینگونه تقویت کننده‌های پارامتری را تقویت کننده پارامتری تبهکن<sup>۱۱</sup> می‌نامند و دارای مشخصه یکتائی است. شخصی که روی تاب است را در شکل (۱۱.۴)-الف در نظر گیرید. در طی یک نیم سیکل



شکل ۱۱.۴: مدار معادل شخصی تاب می‌خورد

(از چپ به راست) تاب خوردن، شخص یک یک سیکل کامل (بالا-پائین-بالا) را تکمیل می‌کند. فرکانس شخص تاب خورنده (پمپ) و تاب متحرک (سیگنال) از رابطه  $\omega_P = 2\omega_s$  پیروی می‌کنند. شکل (۱۱.۴)-ب مدار معادل  $RLC$  تاب است بطوری‌که در آن عمل شخص تاب خورنده توسط خازن غیرخطی نشان داده شده است.  
معادله مدار بقرار زیر است:

$$\begin{aligned} -I &= \frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}CV \\ V &= RI + L\frac{d}{dt}I \end{aligned} \quad (۳۳.۴)$$

با حذف  $I$  از رابطه (۳۳.۴)، بدست می‌آید:

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} + \frac{1}{LC} \right] V = 0 \quad (۳۴.۴)$$

جواب مدار نوسانی هارمونیکی میرائی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$V = V_0 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \exp\left(\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) \quad (۳۵.۴)$$

اگر ظرفیت با فرکانس پمپ  $\omega_P$  بصورت زیر مدوله شود

$$C = C_0 [1 - \Delta C \sin(\omega_P t + \phi)] \quad (۳۶.۴)$$

<sup>۱۱</sup>Degenerate Parametric Amplifier

رابطه (۳۴.۴) به صورت زیر اصلاح می‌شود

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \left[ 1 + \frac{\Delta C}{C_0} \sin(\omega_P t + \phi) \right] \right\} V \approx 0. \quad (37.4)$$

که در آن  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  و فرض بر این است که  $\Delta C \ll C_0$ . اگر فرض کنیم که جواب معادله (۳۷.۴) بصورت زیر است،

$$V = Re \{ 2V_0 \exp(\alpha t) \exp(j\omega t) \} \quad (38.4)$$

بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & 2V_0 \exp(\alpha t) \left[ \left( \alpha^2 - \omega^2 + \frac{R}{L} \alpha + \omega_0^2 \right) \cos(\omega t) - \left( 2\omega\alpha + \frac{R}{L}\omega \right) \sin(\omega t) \right] \\ & = -2V_0 \exp(\alpha t) \frac{\omega_0^2 \Delta C}{2C_0} [\sin(\omega t) \cos\phi + \cos(\omega t) \sin\phi] \end{aligned} \quad (39.4)$$

با مقایسه جملات  $\sin(\omega t)$  و  $\cos(\omega t)$  در دو طرف رابطه (۳۹.۴)، معادله‌ای خواهیم داشت که فرکانس نوسان جدید  $\omega$  و ضریب تقویت یا میرائی  $\alpha$  را معلوم می‌دارد.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{\omega_0^2 \Delta C}{2C_0} \sin\phi \quad (40.4)$$

$$2\alpha = \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0} \cos\phi - \frac{R}{L} \quad (41.4)$$

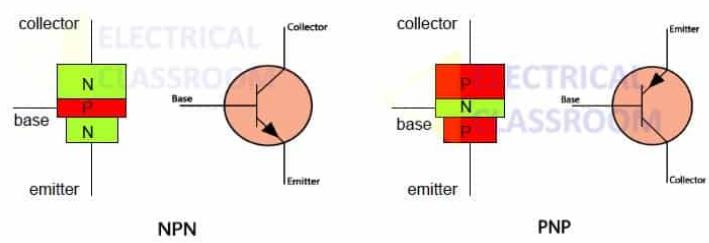
اگر  $\phi = 0^\circ$  باشد، جواب افزایشی را خواهیم داشت ( $\alpha > 0$ ). انرژی از پمپ برای سیگنال تهیه می‌شود. اگر  $\phi = \pi$  یا  $\frac{3\pi}{2}$  باشد، تبادل انرژی بین پمپ و موج سیگنال صورت نمی‌گیرد. اگر  $\phi = \pi$  باشد، جواب تضعیف شوندگی خواهیم داشت ( $\alpha < -\frac{R}{L}$ ). انرژی از سیگنال گرفته و به پمپ انتقال می‌یابد.

### زنگ تفریح

■ حتماً در درس الکترونیک با ترانزیستور  $NPN$  و  $PNP$  (شکل ۱۲.۴)، آشنا هستید. می‌گویند تقویت کننده ترانزیستوری یک عنصر یکطرفه است. آیا واقعاً با این شکل اگر جای گلکتور و امیتر عوض شود مدار فرق می‌کند؟ این شکل که می‌گوید عنصری دو طرفه است. شاید بگویید بعلت ساختار، ترانزیستور می‌سوزد و خراب می‌شود، اما اگر توان را کم در نظر بگیریم، آیا می‌توان گفت که عنصری دو طرفه است؟

### زنگ تفریح

■ مقاومت منفی چیست؟ ما ولتاژ را اندازه‌گیری می‌کنیم یک عدد اسکالار مثبت است. جریان را هم اندازه‌گیری می‌کنیم یک عدد مثبت است. ولتاژ را به جریان تقسیم می‌کنیم باز آنهم یک عدد مثبت است. بنابراین این اصطلاح مقاومت منفی چیست؟ آیا ظرفیت منفی هم داریم؟ خودالقائی منفی چطور؟



شکل ۱۲.۴: ترانزیستور  $NPN$  و  $PNP$

## فصل ۵

# مقاومت منفی

### ۱.۵ مقدمه

در الکترونیک مقاومت منفی<sup>۱</sup> خاصیتی است که برخی مدارهای الکتریکی و ادوات در اثر افزایش ولتاژ در دوسر پایانه‌شان جریان عبوری از آن کم می‌شود. این مغایر آنچه در مقاومت‌های معمولی است که با افزایش ولتاژ دو سر مقاومت، متناسب با آن جریان عبوری از مقاومت طبق قانون اهم<sup>۲</sup> نیز افزایش می‌یابد و مقاومت مثبت توان را مصرف می‌کند در حالی که مقاومت منفی توان تولید می‌کند. در برخی شرایط می‌توان یک سیگنال الکتریکی را تقویت کرد.

مقاومت منفی یک خاصیت غیرمعمولی است که در برخی افزارهای الکترونیکی غیرخطی اتفاق می‌افتد. در افزارهای غیرخطی، دو نوع مقاومت می‌توان تعریف کرد: «استاتیکی» یا مقاومت مطلق که نسبت  $\frac{\Delta v}{i}$  است، و مقاومت دیفرانسیلی، که آن نسبت تغییر ولتاژ ناشی از تغییر جریان  $\frac{\Delta v}{\Delta i}$  است. اصطلاح مقاومت منفی بعلت این است که شب منحنی ( $\frac{\Delta v}{\Delta i} < 0$ ) منفی است. مقاومت در منفی در در دو سر یک عنصر که بوسیله منبع DC تغذیه می‌شود، می‌تواند منجر به تقویت سیگنال AC شود به از همان دو سر به عنصر اعمال گردیده است. انرژی از منبع تغذیه مستقیم به سیگنال AC تبدیل می‌شود. در فرکانس ریز موجها عناصر مقاومت منفی می‌توانند علاوه بر خاصیت تقویت کننده‌گی به عنوان نوسان‌ساز نیز بکار برد شوند. نمونه‌ای از عناصر با مقاومت منفی می‌توان در لامپ‌های گازی، لامپ نئون، لامپ فلورستن و نیمه‌رسانها، دیود تونلی<sup>۳</sup> و دیود گان<sup>۴</sup> را نام برد. آنها نیز می‌توانند هیسترزیس<sup>۵</sup> و دوپایداری<sup>۶</sup> داشته

<sup>۱</sup>Negative Resistance

<sup>۲</sup>Ohm's Law

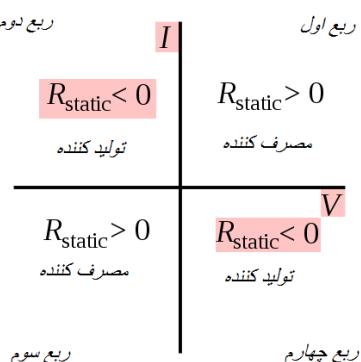
<sup>۳</sup>Tunnel diode

<sup>۴</sup>Gunn diode

<sup>۵</sup>Hysteresis

<sup>۶</sup>Bistable

باشند که در مدارهای سوئیچینگ و حافظه استفاده شوند. علاوه بر این مدارهایی که شامل افزارهای تقویت‌کننده از قبیل ترانزیستور یا تقویت‌کنندهای عملیاتی (اوپ-امپ) با بازخورد مثبت هستند، می‌توانند مقاومت دیفرانسیل منفی داشته باشند. این‌ها در نوسان‌سازها و فیلترهای فعال استفاده می‌شوند.



شکل ۱.۵: چهار ربع صفحه  $V - I$ ، نمایشگر افزارهای فعال و غیرفعال

چون آنها غیرخطی هستند، افزارهای مقاومت منفی رفتار خیلی پیچیده‌ای نسبت به مقاومت‌های مثبت اهمی دارند که در مدارهای الکترونیکی مشاهده می‌شود. بر عکس مقاومت مثبت، مقاومت منفی بستگی به ولتاژ یا جریان اعمالی به افزاره را دارد. و عموماً در بازه محدودی از ولتاژ یا جریان اعمالی می‌توان مقاومت منفی را مشاهده کرد.

## ۲.۵ مقاومت استاتیکی

مقاومت استاتیکی یا مقاومت مطلق یا فقط مقاومت، با نسبت ولتاژ به جریان تعریف می‌شود.

$$R_{static} = \frac{v}{i}$$

در منبع تغذیه، مانند باطری یا مولد برق، جریان مثبت از سر ولتاژ مثبت خارج می‌شود که خلاف جهت جریان در مقاومت است، یعنی جریان از پایانه‌ای که وارد می‌شود دارای پتانسیل مثبت است. بنابراین از قرارداد مدارهای غیرفعال  $v - i$ ، علامت مخالف است. در منحنی  $v - i$ ، مقاومت استاتیکی ناچیه اول و سوم قرار می‌گیرد. برای مدارهای فعال مانند باطربهای مولدهای برق مقاومت استاتیکی منفی  $< R_{static} \circ$  دارند. البته این اصطلاح در عمل بکار برد نمی‌شود، زیرا اصطلاح «مقاومت» برای عناصر غیرفعال بکار برد نمی‌شود که انرژی را مصرف می‌کنند و دارای مقاومت استاتیکی مثبتی هستند، در حالی که در افزارهای فعال که تولید نیروی برق می‌کنند بکار برد نمی‌شود.

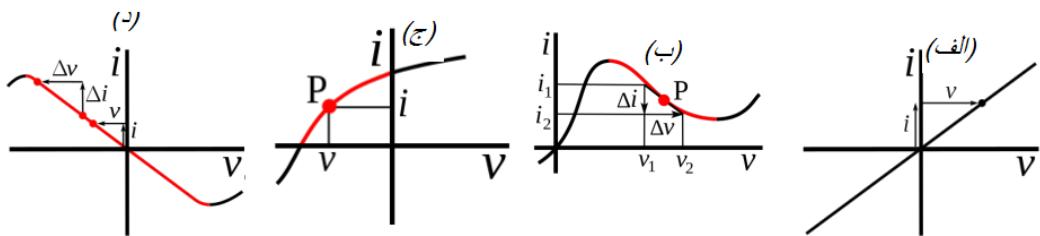
### ۳.۵ مقاومت دیفرانسیلی

مقاومت دیفرانسیلی یا دینامیکی مشتق ولتاژ نسبت به جریان است که آنرا می‌توان نسبت نمو ولتاژ به نمو جریان دانست:

$$R_{diff} = \frac{dv}{di}$$

مقاومت دیفرانسیلی فقط مربوط به جریان‌های متغیر با زمان است. نقاطی از منحنی که شیب منفی است، بدین معنی است که با افزایش ولتاژ جریان کاهش می‌یابد از اینرو  $R_{diff}$  مقاومت دیفرانسیلی منفی است. افزارهایی از این نوع می‌توانند سیگنال‌ها را تقویت کرده و بعضی مواقع منظور از اصطلاح مقاومت منفی همین است.

مقاومت منفی مانند مقاومت مثبت بر حسب اهم اندازه‌گیری می‌شود. ضمناً، بطور کلی، مقاومت دیفرانسیلی منفی یک عصر دو پایانه‌ای است که می‌تواند تقویت کند، یعنی توان  $DC$  اعمالی به پایانه‌ها را به توان خروجی  $AC$  برای تقویت سیگنال  $AC$  اعمالی که همزمان بدو سر عنصر اعمال شده است تقویت کند. آنها در نوسان‌سازها و تقویت‌کننده‌های الکترونیکی به ویژه در فرکانس‌های مایکروویو استفاده می‌شوند. بیشتر انرژی مایکروویو با عنصر مقاومت منفی دیفرانسیلی تولید می‌شوند.



شکل ۲.۵: منحنی  $I - V$  در نواحی مختلف برای مقاومت استاتیکی و دیفرانسیلی

- در شکل (۲.۵)-الف؛ هر دو مقاومت استاتیکی و دیفرانسیلی مثبت هستند

$$R_{static} = \frac{v}{i} = R_{diff} = \frac{dv}{di} > 0$$

- در شکل (۲.۵)-ب در ناحیه قرمز رنگ مقاومت دیفرانسیلی منفی است. مقاومت دیفرانسیلی  $R_{diff}$  در نقطه  $P$  برابر شیب خط مماسی روی منحنی است. چون  $\Delta v < 0$  و  $\Delta i < 0$  منفی است، از اینرو مقاومت در آن نقطه منفی است  $R_{diff} < 0$ .

- در شکل (۲.۵)-ج این منحنی یک منبع تغذیه است. در ناحیه ربع دوم (ناحیه قرمز رنگ) جریان از پایانه مثبت خارج می‌شود بنابراین توان از افزاره بسوی بیرون می‌رود. برای مثال در نقطه  $P$  ولتاژ  $v < 0$  و جریان  $i > 0$  بنابراین

$$R_{static} = \frac{v}{i} < 0$$

- در شکل (۲.۵)-د منحنی  $v - i$  یک خط با شیب منفی است (ناحیه قرمز رنگ). آن دارای مقاومت دیفرانسیلی و استاتیکی منفی است

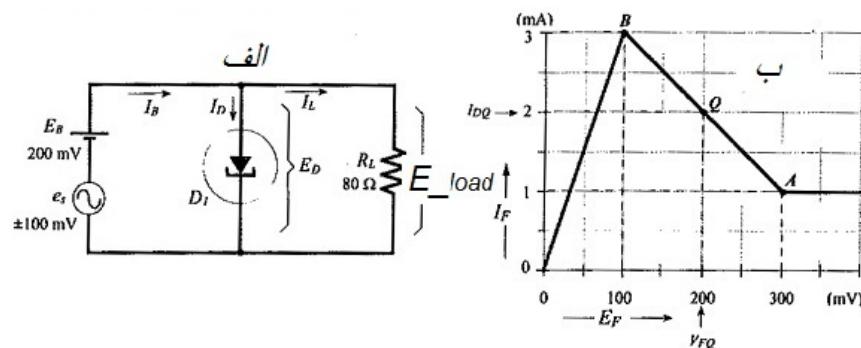
$$R_{static} = \frac{v}{i} = R_{diff} = \frac{dv}{di} < 0$$

جدول ۱.۵: تعاریف اصطلاحات

$R_{diff} < 0$ مقاومت دیفرانسیلی منفی	$R_{diff} > 0$ مقاومت دیفرانسیلی مثبت	
مقاومت دیفرانسیلی منفی غیرفعال: • دیود تونلی • دیود گان • لامپهای تخلیه گازی	مقاومت مثبت: • مقاومتها • دیودها معمولی • بیشتر عناصر غیرفعال	$R_{static} > 0$ غیرفعال: توان مصرف می‌کند
مقاومت های فعال: • تقویت کننده‌های با بازخورد مثبت: • نوسان‌سازهای بازخورد • مبدل‌های امپدانس منفی • فیلترهای فعال	منبع تغذیه: • باتری‌ها • مولدها • ترانزیستورها • بیشتر عناصر فعال	$R_{static} < 0$ توان تولید می‌کند

## ۴.۵ تقویت‌کنندگی دیود تونلی

برای عملکرد یک دیود تونلی بمنظور تقویت کننده، باید دیود در منطقه مقاومت منفی بایاس ( نقطه کار تعیین ) شود. شکل (۳.۵)-الف مدار یک تقویت کننده دیود تونلی را نشان می‌دهد. مقاومت  $R_L$  بطور موازی با دیود  $D_1$  متصل است و توسط جریان که توسط



شکل ۳.۵: مدار ساده‌ای از عملکرد دیود تونلی به عنوان تقویت کننده

منبع ولتاژ  $E_B$  و منبع سیگنال  $e_s$  تدارک دیده شده است تغذیه می‌شود. شکل (۳.۵)-ب مشخصه خطی گونه دیود تونلی را همراه نقطه کار دیود در ناحیه مقاومت منفی نشان می‌دهد. در این نقطه کار سیگنال متغیر می‌تواند  $e_s(t) = \pm 100 mV$  نوسان داشته باشد.

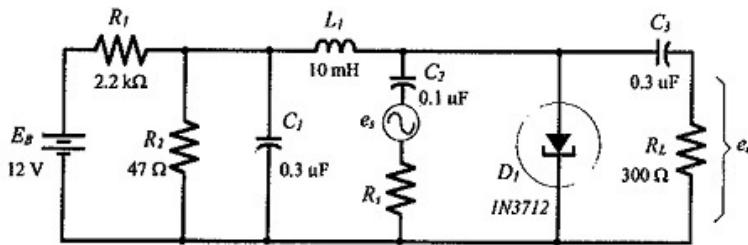
بهره تقویت کننده برابر است با

$$A_i = \frac{R_D}{R_D - R_L} \quad (1.5)$$

در معادله (۱.۵) مقاومت منفی در نظر گرفته شده است. البته ما مقدار قدر مطلق  $A_i$  را محاسبه می‌کنیم. برای  $R_D = ۱۰۰\Omega$  و  $R_L = ۸۰\Omega$  بهره خواهد بود

$$A_i = \frac{۱۰۰}{۱۰۰ - ۸۰} = ۵$$

از معادله (۱.۵) مشاهده می‌شود که وقتی  $R_L \ll R_D$  باشد، در آن صورت  $A_i \approx ۱$  است و هنگامی که  $R_L \gg R_D$  باشد بهره  $A_i < ۱$  کمتر از واحد و وقتی  $R_L = R_D$  باشد بهره  $A_i = \infty$  می‌شود. بهره جریان بینهایت بدین معنی است که مدار نوسان می‌کند. برای پایداری بهره جریان بیشینه،  $R_L$  را قدری کمتر از  $R_D$  در نظر می‌گیرند.



شکل ۴.۵: مدار عملی یک تقویت کننده سیگنال توسط دیود تونلی

شکل (۴.۵) مدار عملی یک تقویت کننده سیگنال را توسط دیود تونلی نشان میدهد. برای تزویج سیگنال به بار و همچنین جدا سازی و ممانعت از جریان مستقیم باطربی در بار و منبع سیگنال خازن‌های تزویج بکار برده شده است.

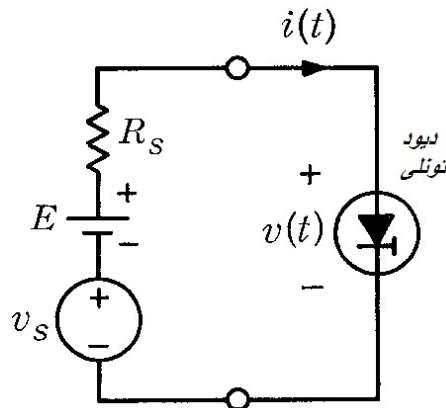
#### ۱.۴.۵ محاسبه بهره

مدار شکل (۵.۵) را در نظر گیرید که در آن دیود تونلی از طریق مقاومت  $R_s$  منبع ولتاژ ثابت  $E$  و منبع ولتاژ متغیر  $v_s(t)$  بطور سری بهم وصل شده‌اند. برای بحث فعلی فرض کنید که  $|v_s(t)| \ll E$  برای تمام  $t$  است. این بدین معنی است که ولتاژ متغیر زمانی برای تمام زمان‌ها قدر مطلق آن کوچکتر از منبع ولتاژ ثابت است. در عمل منبع ولتاژ متغیر همان سیگنال موردنظری است که می‌خواهیم تقویت شود. منبع ولتاژ ثابت را بایلیس<sup>۴</sup> یا تعیین نقطه کار می‌نامند. مسئله این است که ولتاژ  $v(t)$  و جریان  $i(t)$  مدار را برای دیود تونلی که در شکل (۵.۵) نشان داده شده است، تعیین کنیم.

از قوانین کیرشهف و معادلات شاخه‌ای تمام عناصر در مدار برای تعیین روابط لازم استفاده می‌کنیم. ابتداء قانون جریان‌های کیرشهف می‌گوید که از هر عنصر در مدار شکل (۵.۵) جریان یکسان  $i(t)$  عبور می‌کند. سپس قانون ولتاژهای کیرشهف را برای حلقه داده شده اعمال می‌کنیم

$$E + v_s(t) = R_s i(t) + v(t) \quad \text{برای تمام زمانهای } t \quad (2.5)$$

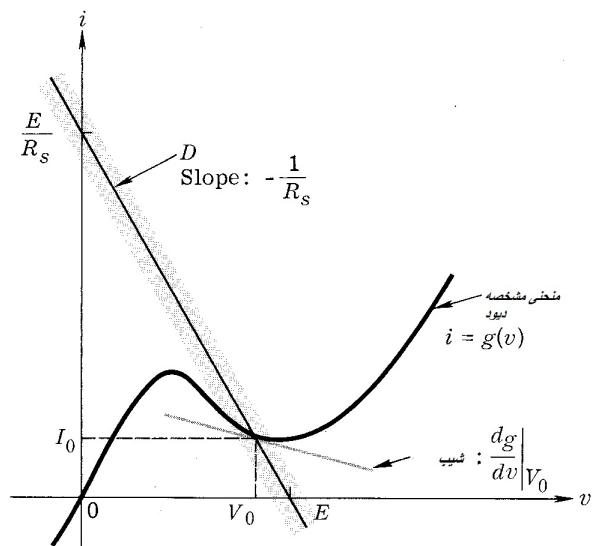
<sup>۴</sup>Bias



شکل ۵.۵: تقویت کننده سیگنال توسط دیود تونلی

فرض کنید منحنی مشخصه دیود با رابطه زیر بیان شود  
 $i = g(v)$  (۳.۵)

منحنی مشخصه دیود تونلی در صفحه  $vi$  شکل ۶.۵ رسم شده است. با ترکیب روابطهای (۲.۵) و (۳.۵) خواهیم داشت:



شکل ۶.۵: منحنی مشخصه دیود تونلی و مشخصه مدار باقیمانده

$$E + v_s(t) = R_s g[v(t)] + v(t) \quad (۴.۵)$$

مجھول این معادله فقط  $v(t)$  است. چون بازاء جمیع مقادیر  $t$  این رابطه برقرار است، معادله (۴.۵) را باید برای هر مقدار  $t$  حل کرد و  $v(\cdot)$  را نقطه به نقطه بدست آورد.

قبل از آنکه برای حل معادله (۴.۵) اقدام کنیم، از این حقیقت که ورودی جمع دو جمله یعنی منبع ولتاژ  $E$  ثابت و منبع ولتاژ متغیر  $v_s(t)$  است، استفاده خواهیم کرد. ابتداء برای راحتی حل مسئله فقط منبع  $DC$  را در نظر می‌گیریم. بعداز این که جواب  $DC$  مسئله را بدست آوردهیم، سپس منبع متغیر زمانی را در مدار کنجدانیده و تمام مسئله را با تحلیل سیگنال‌های کوچک، تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

#### • مرحله اول

منبع ولتاژ  $v_s(t) = 0$  بازای تمام مقادیر زمانی  $t$  صفر است. منبع ولتاژ  $v_s$  در شکل (۶.۵) اتصال کوتاه می‌شود، بنابراین از قانون ولتاژ‌های کیرشهف داریم

$$E - R_s i = v \quad (6.5)$$

دیود تونلی مورد نظر، مشخصاتش در شکل (۶.۵) نشان داده شده است. دو معادله (۳.۵) و (۵.۵) دارای دو مجھول  $i$  و  $v$  هستند. مسئله بطور ترسیمی حل می‌کنیم. در شکل (۶.۵)، خط مستقیم که با حرف  $D$  مشخص شده، مکان هندسی تمام نقاط  $(v, i)$  هستند که در رابطه (۵.۵) صدق می‌کنند. بهمین نحو، مشخصه دیود تونلی مکان هندسی تمام نقاط  $(v, i)$  هستند که در رابطه (۳.۵) صدق می‌کنند. بنابراین هر نقطه ای مانند  $(v, i)$  که هم در روی خط  $D$  و هم در منحنی مشخصه دیود صدق کند در معادله (۵.۵) و (۳.۵) صدق می‌کند. بنابراین محل تقاطع خط مستقیم و منحنی مشخصه دیود جواب دستگاه دو معادله دو مجھولی (۵.۵) و (۳.۵) خواهد بود. در وضع فعلی فقط یک جواب  $(V_0, I_0)$  وجود دارد که در شکل (۶.۵) نشان داده شده است. ازاینرو (۶.۵) در هر دو معادله (۵.۵) و (۳.۵) صدق می‌کند، یعنی

$$E - R_s I_0 = V_0 \quad (6.5)$$

$$I_0 = g(V_0) \quad (7.5)$$

نقطه  $(V_0, I_0)$  بنام نقطه کار خوانده می‌شود. اکنون تمام مسئله را اقدام می‌کنیم.

#### • مرحله دوم

ولتاژ  $v_s$  بطور یکسان صفر نیست. معادله‌ای که این موقعیت را توصیف می‌کند بقرار زیر است:

$$E + v_s(t) - R_s i(t) = v(t) \quad \text{برای تمام زمانهای } t \quad (8.5)$$

$$i(t) = g[v(t)] \quad \text{برای تمام زمانهای } t \quad (9.5)$$

برای هر لحظه مکان هندسی تمام نقاط  $(v(t), i(t))$  که در رابطه (۸.۵) صدق می‌کنند، یک خط مستقیم موازی خط  $D$  در صفحه  $vi$  شکل (۶.۵) است. این خط اگر  $v_s(t) > 0$  باشد، بالای خط  $D$  و اگر  $v_s(t) < 0$  باشد پائین خط  $D$  است. مکان هندسی تمام نقاط  $(v(t), i(t))$  که در رابطه (۹.۵) صدق می‌کنند، مشخصه دیود تونلی هستند که موقع ثابت می‌مانند. بنابراین، هر نقطه  $(v(t), i(t))$  که روی هر دو خط مستقیم و مشخصه دیود است در روابط (۸.۵) و (۹.۵) صدق می‌کند. بطور خلاصه، محل تلاقی جواب

مسئله است. بنابراین، معادله‌های (۸.۵) و (۹.۵) را می‌توان همواره بطور ترسیمی حل کرد.

فرض براین است که بازاء جمیع مقدار زمان  $E \ll |v_s(t)|$  باشد. تحلیل سیگنال‌های کوچک یک روش تقریبی برای جواب است مشروط بر آنکه  $|v_s(t)|$  کوچک باشد. اولین مرحله نوشتند جواب  $(v(t), i(t))$  بصورت مجموع دو جمله است، بنابراین

$$v(t) = V_0 + v_1(t) \quad (10.5)$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \quad (11.5)$$

توجه کنید که  $(V_0, I_0)$  نقطه کار است، یعنی وقتی  $v_s(t) = 0$  است. چون  $v_s(t)$  کوچک است، جواب  $(v(t), i(t))$  در نزدیکی نقطه  $(V_0, I_0)$  قرار دارد. بنابراین  $i_1(t)$  و  $v_1(t)$  را می‌توان بصورت تغییرات جزئی از حل  $(V_0, I_0)$  در نظر گرفت. این تغییرات جزئی توسط سیگنال کوچک منبع  $v_s(t)$  بوجود آمده است. اکنون بیایند  $i_1(t)$  و  $v_1(t)$  را برای تمام مقدار  $t$  بدست آوریم.

ابتدا، فرض کنید مشخصه دیود تونلی  $i = g(v)$  است. با استفاده از روابط (۱۰.۵) و (۱۱.۵) داریم

$$I_0 + i_1(t) = g[V_0 + v_1(t)] \quad (12.5)$$

چون  $v_1(t)$  را کوچک فرض کردیم، می‌توانیم بخش سمت راست رابطه (۱۲.۵) را با سری تیلور بسط داده و فقط دو جمله اول آنرا در تقریب بکار گیریم، بنابراین

$$I_0 + i_1(t) \approx g(V_0) + \frac{dg}{dv}|_{V_0} v_1(t) \quad (13.5)$$

با قرار دادن (۷.۵) در (۱۳.۵)، یک معادله ساده برای  $i_1(t)$  و  $v_1(t)$  خواهیم داشت،

در نتیجه:

$$i_1(t) \approx \frac{dg}{dv}|_{V_0} v_1(t) \quad (14.5)$$

جمله  $\frac{dg}{dv}|_{V_0}$  شب منحنی مشخصه دیود تونلی در نقطه کار  $(V_0, I_0)$  است که در شکل (۹.۵) نشان داده شده است. بنایید فرض کنیم که

$$\frac{dg}{dv}|_{V_0} \triangleq G = \frac{1}{R} \quad (15.5)$$

و  $G$  را هدایت سیگنال کوچک نقطه کار  $(V_0, I_0)$  دیود تونلی نامند. توجه کنید که  $G$  منفی است. بنابراین، برای منبع سیگنال کوچک  $v_s$  دیود تونلی یک مقاومت خطی فعال است زیرا تا آنجا که به  $v_s$  مربوط می‌شود مشخصه مقاومت دیود به مبداء  $(V_0, I_0)$  و در حوالی  $(V_0, I_0)$  مقاومت خطی با شب منفی است. در نتیجه:

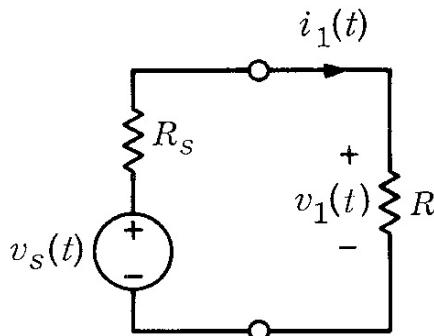
$$i_1(t) = Gv_1(t) \quad \text{یا} \quad v_1(t) = Ri_1(t) \quad (16.5)$$

برای اینکه  $v_1(t)$  و  $i_1(t)$  را محاسبه کنیم، باید ابتدا به معادله ولتاژهای کیرشهف برگردیم. یعنی معادله (۸.۵)، و ترکیب آن با معادلات (۱۰.۵) و (۱۱.۵) خواهیم

داشت:

$$E + v_s(t) - R_s[I_0 + i_1(t)] = V_0 + v_1(t) \quad (17.5)$$

با استفاده از اطلاعات رابطه (۱۶.۵) که  $I_0$  و  $V_0$  را بهم مربوط میدارد، ما رابطه بین  $v_1(t)$  و  $i_1(t)$  را بدست می‌آوریم:



شکل ۷.۵: مدار معادل سیگنال کوچک

$$v_s(t) - R_s i_1(t) = v_1(t) \quad (18.5)$$

معادله (۱۶.۵) و (۱۸.۵) یک دستگاه معادله جبری خطی را تشکیل می‌دهند که دو مجهول  $v_1(t)$  و  $i_1(t)$  دارد و برای تبدیل آنها به مجهول  $G$  در رابطه (۱۶.۵) ثابت است، رابطه (۱۶.۵) معادله شاخه‌ای مقاومت فعلی متغیر نسبت به زمان را توصیف می‌کند. رابطه (۱۸.۵) نمایشگر معادله ولتاژهای کیرشهف برای مدار شکل (۷.۵) است. این مدار را مدار معادل سیگنال کوچک دیود تونلی شکل (۵.۵) می‌نامند. از رابطه (۱۶.۵) و رابطه (۱۸.۵)، مجهول‌ها را بدست می‌آوریم:

$$i_1(t) = \frac{v_s(t)}{R_s + R} \quad (19.5)$$

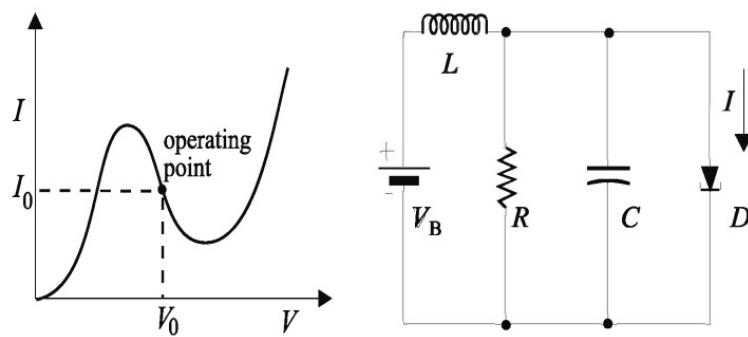
$$v_1(t) = R i_1(t) = \frac{R v_s(t)}{R_s + R} \quad (20.5)$$

در وضع فعلی  $R = 1/G$  منفی است، از این‌رو اگر  $R_s$  مناسب انتخاب شود،  $v_1(t)$  خیلی بیش از  $v_s(t)$  خواهد بود. و این همان تقویت ولتاژ  $v_s(t)$  توسط دیود تونلی خواهد بود.

بديهی است که در تحليل بالا خیلی ساده سازی‌ها انجام شده است و از عناصر پارازیتیک مانند خازن‌های پارازیتیک در دیود تونلی صرف‌نظر شده است. اين روابط ساده نشان می‌دهد که چطور می‌توان در مسائل از آنها استفاده کرد.

## ۵.۵ نوسان‌ساز دیود تونلی

یکی از عناصر مدارهای الکترونیکی که بخشی از منحنی مشخصه  $I - V$  دارای مقاومت منفی است دیود تونلی است که در قسمت‌های قبل در باره توانائی استفاده از آن در تقویت سیگنال صحبت شد. اکنون می‌خواهیم معادله آنرا بعنوان نوسان‌کننده بررسی کنیم. در سال ۱۹۵۸ دیود تونلی توسط اساکی<sup>۱</sup> معرفی شد. تفاوت آن با دیودهای معمولی در نحوه ساخت آن در مواد و ابعاد است. ضمناً توانائی سوئیچینگ سریع را دارد. در شکل (۵.۵) منحنی  $I - V$  و همچنین استفاده از آن بعنوان مدار نوسان‌ساز نشان داده شده است.



شکل ۵.۵: منحنی  $I - V$  دیود تونلی (چپ). مدار نوسان‌ساز (راست)

مدار نوسان‌ساز دیود تونلی را می‌توان با قرار دادن دیود در مدار شکل (۵.۵)(راست) بطوری که در ناحیه مقاومت منفی کار کند درست کرد. فرض کنید نقطه کار  $(I_0, V_0)$  باشد. این با تنظیم ولتاژ باطری  $V_B$  برابر  $V$  امکان‌پذیر است. بیایید جریان  $i(t) = I(t) - I_0$  و  $v(t) = V(t) - V_0$  تابع زمان  $t$  نسبت به نقطه کار باشد. ضمناً فرض کنید منحنی در حول نقطه کار بصورت  $i = -av + bv^3$  باشد که در آن  $a$  و  $b$  ضرایب ثابت و مثبتی هستند و بستگی به مشخصه دیود تونلی دارند. برای مثال برای دیود تونلی ۱N۳۷۱۹ که  $i$  بر حسب آمپر و  $v$  بر حسب ولت، برابر  $= ۰.۰۵$  و  $b = ۱/۰$  است.

فرض کنید  $I_L$ ,  $I_C$ ,  $I_R$  و  $I$  جریان‌های درون خودالقائی  $L$ , مقاومت  $R$ , خازن  $C$  و دیود است. طبق قانون جریان‌های کیرشهف داریم:

$$-I_L + I_R + I_C + I = 0 \quad (21.5)$$

افت ولتاژ دوسر خازن  $C$  و مقاومت  $R$  برابر افت ولتاژ دوسر دیود است، یعنی  $V_C = V_R = V$ . افت ولتاژ دوسر خودالقائی  $L$  برابر است با  $V_L = V_B - V = V_0 - V = -v$ . با گرفتن مشتق از رابطه (۲۱.۵)، و با توجه باین که  $I = I_0 + i = I_0 - av + bv^3$ ، و قانون اهم  $dI_L/dt = V_L/L = V_R/R$  و تعریف ضریب خودالقائی  $I_C = C(dV_C/dt)$  داریم:

$$\frac{v}{L} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^3v}{dt^3} - a \frac{dv}{dt} + 3bv^2 \frac{dv}{dt} = 0$$

<sup>۱</sup>Leo Esaki

یا کمی جمع کردن جملات و تقسیم بر  $C$  خواهیم داشت:

$$\frac{d^{\alpha}v}{dt^{\alpha}} + \frac{1}{C} \left( \frac{1}{R} - av + 3bv^2 \right) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0. \quad (22.5)$$

این را می‌توان بصورت یک معادله دیفرانسیل معمولی با معرفی پارامترهای جدید نوشت:

$$\omega = \frac{1}{LC}, \quad \epsilon = \frac{(a - 1/R)}{\omega C}, \quad \tau = \omega t, \quad x = \frac{\sqrt{3}bv}{\sqrt{(a - 1/R)}} \quad (23.5)$$

در نتیجه یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی بدون بعد که معادله وان در پُل<sup>۹</sup> نامیده می‌شود خواهیم داشت:

$$\ddot{x}(\tau) - \epsilon[1 - x(\tau)^2]\dot{x}(\tau) + x(\tau) = 0. \quad (24.5)$$

در سال ۱۹۲۶ مهندس برق آلمانی وان در پُل این معادله را وقتی با مدارهای الکتریکی لامپ‌های خلاء کار می‌کرد بدست آورد. معادله وان در پُل در خیلی از کاربردهای مختلف وجود دارد:

- لیزرها

- ماشین  $Q$  که در فیزیک پلاسمما کاربردی بکار می‌رود.

- تخلیه قوس الکتریکی

- فعالیت‌های الکتریکی دستگاه گوارش

توجه کنید که از نظر ریاضی معادل وان در پُل یک معادله ساده نوسانی با جمله میرائی غیرخطی است. اگر پارامتر  $\epsilon > 1/a$  باشد، میرائی منفی  $x < 1$  وقتی  $x > 1$  باشد، میرائی مثبت معروف را خواهیم داشت. بنابراین، اگر یک دامنه نویز یا سیگنال کوچکی در ابتدا داشته باشیم، با افزایش زمان، دامنه تقویت می‌شود. این مدار حتی اگر منبع متناوب نداشته باشد ( فقط با باطری تغذیه شود)، بنوسان می‌افتد. وقتی  $\epsilon < 1$  باشد، میرائی مثبت باعث کاهش نوسان‌ها می‌شود. از ویژگی‌های مهم معادله وان در پُل این است که برای  $\epsilon < 0$  یک چرخه محدود را نشان میدهد؛ یعنی، بر روی یک حلقه بسته توسط  $\epsilon$  در صفحه فاز  $x$  در مقابل  $y \equiv \dot{x}$  ثابت می‌شود و مهم نیست شرایط اولیه چیست.

## ۶.۵ مبدل امپدانس منفی

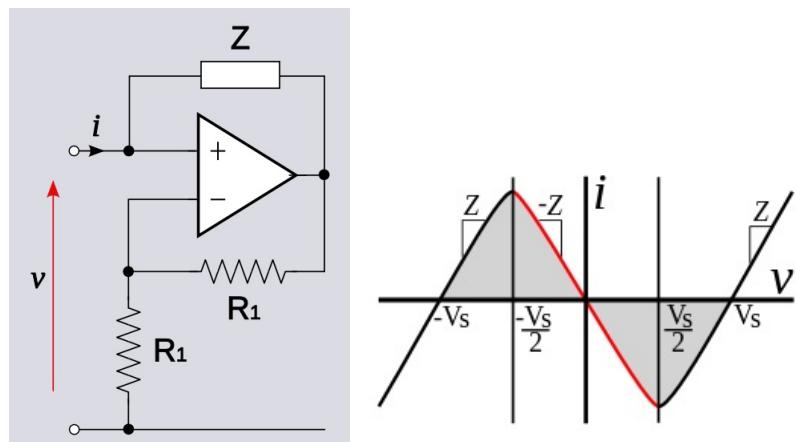
مبدل امپدانس منفی<sup>۱۰</sup> یک مدار تقویت‌کننده تک پایانه است بطوریکه بعنوان یک بار منفی<sup>۱۱</sup> عمل کرده و بر عکس بار که انرژی را مصرف می‌کند، انرژی به درون مدار تزریق می‌نماید. این با اضافه یا کم کردن ولتاژ متغیر بیش از حد بطور سری در افت ولتاژ دو

<sup>۹</sup> Van der Pol

<sup>۱۰</sup> negative impedance converter (NIC)

<sup>۱۱</sup> Negative Load

سر امپدانس مثبت معادل است. این قطبش ولتاژ یا جهت جریان پایانه را معکوس کرده و اختلاف فاز  $180^\circ$  بین ولتاژ و جریان برای منبع تغذیه ایجاد می‌کند. مدار " مقاومت فعال " شکل (۹.۵) نمونه ساده‌ای از مبدل امپدانس منفی است. دو مقاومت  $R_1$  و یک



شکل ۹.۵: مبدل امپدانس منفی

تقویت‌کننده عملیاتی (آپ-امپ) یک تقویت‌کننده با بازخورد منفی با بهره دو تشکیل می‌دهند. ولتاژ خروجی تقویت‌کننده عملیاتی برابر است با:

$$v_o = \frac{R_1 + R_1}{R_1} v = 2v$$

بنابراین اگر ولتاژ بر ورودی اعمال شود، همان ولتاژ بر دو سر  $Z$  ظاهر خواهد شد و سبب جریان بدرون مدار جاری شود. این جریان برابر است با:

$$i = \frac{v - v_o}{Z} = \frac{v - 2v}{Z} = -\frac{v}{Z}$$

و امپدانس ورودی مدار برابر است با:

$$z_{in} = \frac{v}{i} = -Z$$

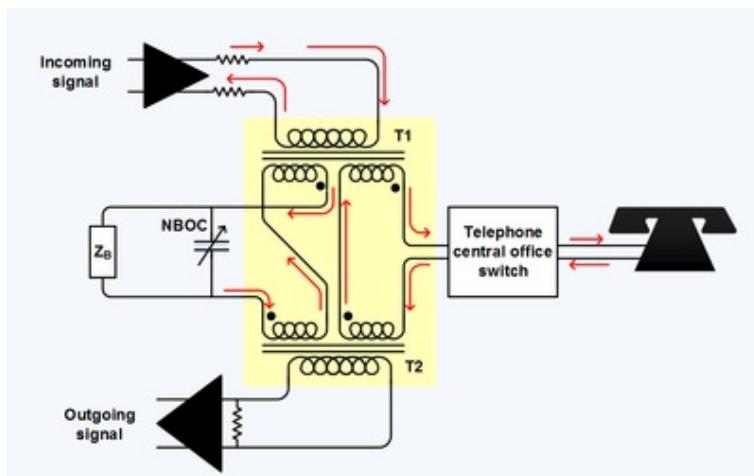
مدار امپدانس  $Z$  را منفی می‌کند. اگر مقاومتی بمقدار  $R$  باشد، در محدوده خطی کار تقویت‌کننده عملیاتی  $-V_s/2 < v < V_s/2$  امپدانس ورودی بعنوان مقاومت منفی  $-R$  عمل می‌کند. اگر ورودی پایانه مدار را بیک مدار دیگر برای مثال خط تلفن وصل کنیم، تقویت دو طرفه خواهیم داشت. در این صورت لازم نیست از مدار دو سیم چهار سیم (مدار هایبرید) استفاده کنیم.

### زنگ تفریح

■ مدار دو سیم چهار سیم چیست؟

**جواب :**

★ شکل (۱۰.۵) را ملاحظه کنید.



شکل ۱۰.۵: مدار دوسیم چهار سیم و تقویت کننده در مسیر هر طرف سخن‌گوئی

### ۱.۶.۵ ظرفیت و خودالقائی منفی

با تعویض  $Z$  در مدار (۹.۵) با ظرفیت  $C$  یا خودالقائی  $L$ ، ظرفیت و خودالقائی منفی را می‌توان بدست آورد. ظرفیت منفی دارای رابطه  $i - v$  و امپدانس  $Z_c(j\omega)$  زیر است:

$$i = -C \frac{dv}{dt} \quad Z_c = -\frac{1}{j\omega C}$$

چون  $C > 0$  است، این نقش یک خودالقائی را ایفا می‌کند و همین طور اگر  $L$  قرار دهیم

$$v = -L \frac{di}{dt} \quad Z_L = -j\omega L$$

که می‌تواند نقش یک خازن را داشته باشد.

### ۷.۵ مقاومت بالاست

بر طبق لغتنامه‌های انگلیسی لغت "بالاست" <sup>۱۲</sup> بمعنی چیزی است که پایداری می‌دهد. بنابراین وقتی صحبت از بالاست الکتریکی است، آن دستگاهی است که نقش مهمی در برقراری پایداری مدار الکتریکی ایفا می‌کند. البته، سوالی که ممکن است مطرح شود، این است که چطور این کار انجام می‌شود؟ برخی از مدارهای بالاست جریان و برخی دیگر ولتاژ را کنترل می‌کنند که بستگی به مدار دارد. با انجام این عمل، از افزایش بیش از حد جریان جلوگیری کرده و پایداری را برای مدار فراهم می‌آورد.

بالاست الکتریکی انواع مختلف و پیچیده‌ای دارد و ممکن است گاهی یک مقاومت ساده، خازن، سیم‌بیج یا ترکیبی از اینها همراه مدارات الکترونیکی مانند بالاست الکترونیکی مورد استفاده در لامپ‌های فلورسنت باشد.

<sup>۱۲</sup>Ballast

### ۱.۷.۵ مقاومت بالاست چیست؟

مقاومت بالاست در مدارهای الکتریکی برای محدود کردن و افزایش بیش از حد جریان استفاده می‌شود. در اینجا وقتی جریان در مدار تغییر می‌کند و از مقدار آستانه ویژه‌ای بالا می‌رود، مقاومت شروع به افزایش کرده و از این بهنوبه خود جریان را کاهش داده و از خرابی ناشی از افزایش جریان جلوگیری می‌کند. بنابراین پایداری در مدار ایجاد می‌نماید. این دستگاه اغلب بصورت موازی با بار در مدار الکتریکی بسته می‌شود. بنابراین مقاومت بالاست را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

« مقاومتی است که جریان مدار را با افزایش مقاومت از افزایش جریان از مقدار معینی جلوگیری می‌کند »

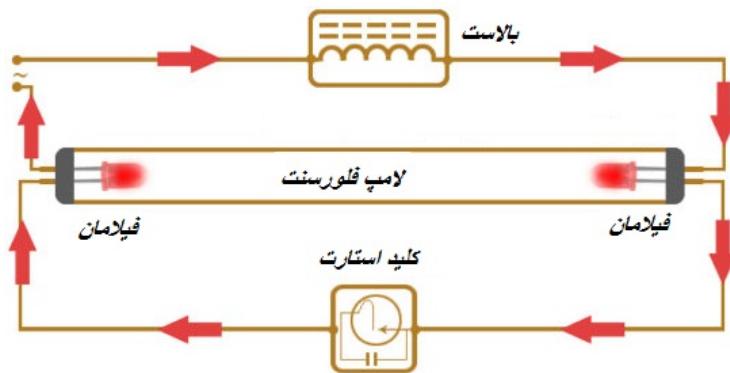
در شکل (۱۱.۵) شکل ظاهری یک مقاومت بالاست را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۵: مقاومت بالاست

میدانیم که لامپ فلورسنت یکی از لامپ‌های پرصرف و مفید در دستگاه‌های روشنایی است. البته، این نوع سامانه روشنایی نکته منفی دارد. اگر لامپ را مستقیماً به منبع ولتاژ وصل کنیم، خیلی زود داغ می‌شود. این بعلت کشش جریان غیرقابل کنترل توسط لامپ بمحض روشن شدن است. برای جلوگیری از داغ شدن لامپ بدلیل کشش جریان زیاد، مقاومت بالاست در مدار بصورت سری قرار می‌دهند.

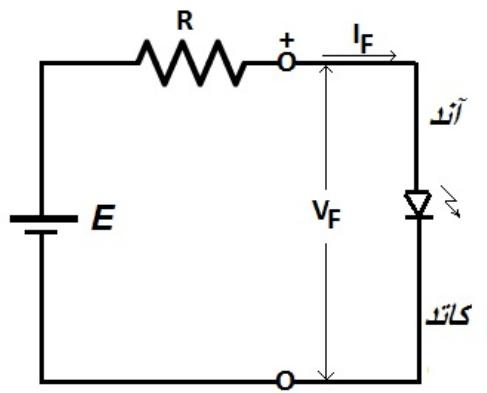
به حال، برای روشن شدن لامپ، یک قوس الکتریکی بین دو سر لامپ (الکترودها) لازم است. در این حالت، یک ولتاژ در حدود ولتاژ منبع تغذیه لازم است. مقاومت بالاست این ولتاژ را برای لامپ در لحظه شروع تدارک می‌نماید و بمحض تشکیل قوس ولتاژ کم شده و از افزایش جریان جلوگیری می‌کند. شکل (۱۲.۵) نمودار مداری لامپ فلورسنت همراه مقاومت بالاست و سوئیچ راهانداز را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲.۵: مقاومت بالاست در لامپ فلورسنت

### ۲.۷.۵ مقاومت بالاست در مدار LED

در مدار LED، اگر منبع ولتاژ بیش از ولتاژ تعیین شده لامپ LED باشد، ممکن است به لامپ صدمه وارد آید. بنابراین برای جلوگیری از خراب شدن آن، یک مقاومت بالاست بطور سری با لامپ توصیه و تأکید می‌شود. در این حالت مقاومت بالاست می‌تواند ولتاژ



شکل ۱۳.۵: دیود LED همراه مقاومت بالاست

دوسر لامپ LED را تا حد قابل تحملی کاهش دهد. شکل (۱۳.۵) نمودار مدار LED را نشان میدهد. مقدار مقاومت بالاست را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$R = \frac{E - V_f}{I_f}$$

که در آن  $R$  مقاومت بالاست؛  $E$  ولتاژ منبع تغذیه؛  $V_f$  ولتاژ هدایت LED؛ و  $I_f$  جریان هدایت دیود است. بنابراین اگر LED با ولتاژ چهار ولت و جریان ده میلیآمپر کار کند و ولتاژ منبع شما شش ولت باشد، این بدین معنی است که باید ولتاژ دوسر LED چهار

ولت یا کمی کمتر باشد. بنابراین باید یک مقاومت

$$R = \frac{6 - 4}{0.01} = 200 \Omega$$

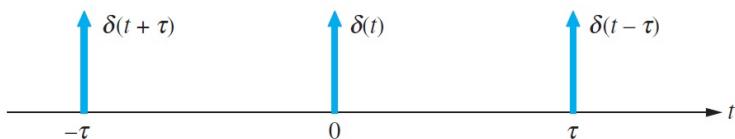
عنوان مقاومت بالاست در مدار بکار برد.

## فصل ۶

# سیگنال‌ها و سیستم‌ها

### ۱.۶ سیگنال‌های پیوسته

یادی از درس سیگنال و سیستم کنیم. اگر یادتان باشد، سیگنال‌ها را بدو دسته، پیوسته و گسسته تقسیم کردیم. ضمناً در آنجا توابع مختلفی از آن جمله تابع تک ضربه‌ای یا ضربه واحد  $\delta(t)$ ، پله واحد یا تک پله‌ای  $u(t)$ ، تابع نمائی، گوسی، و ... را تعریف کردیم. در اینجا فقط می‌خواهیم روی تابع تک ضربه‌ای تکیه کنیم.



شکل ۱.۶: تابع تک ضربه یا ضربه واحد و یا همان تابع دلتا در زمان‌های مختلف

تابع ضربه  $\delta(t)$  که در فضای پیوسته تعریف شد دامنه‌ای بی‌نهایت با عرض صفر دارد!

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.6)$$

از عجایب ریاضیات اینکه سطح زیر منحنی آن یک است. البته در ریاضی این تابع را حد توابع مختلفی تعریف می‌کنند.

#### • پالس چهارگوش شکل (۲.۶)-الف

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad -\infty < t < \infty \quad \lim_{T \rightarrow 0} x(t) = \delta(t)$$

## • پالس نمائی دو طرفه شکل (۲.۶)-ب

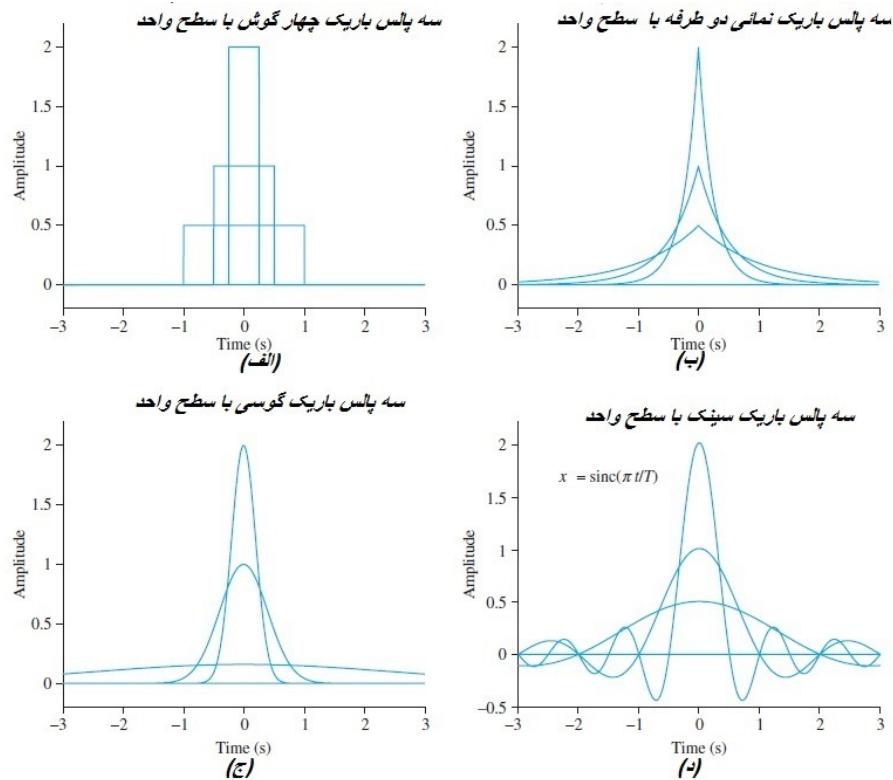
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{|t|}{\tau}} \quad -\infty < t < \infty \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} x(t) = \delta(t)$$

## • پالس گوسی شکل (۲.۶)-ج

$$x(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} \quad -\infty < t < \infty \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} x(t) = \delta(t)$$

## • پالس سینک شکل (۲.۶)-د

$$x(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} \quad -\infty < t < \infty \quad \lim_{T \rightarrow 0^+} x(t) = \delta(t)$$



شکل ۲.۶: تابع  $\delta(t)$  را می‌توان بصورت حد پالس‌های باریک با سطح واحد تعریف کرد.

از خواص مهم این تابع انتگرال زیر (۲.۶) است

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (2.6)$$

برای اثبات آن می‌توان چنین نوشت:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} f(t) dt$$

برای مقادیر کوچک  $T$  تقریباً داریم:

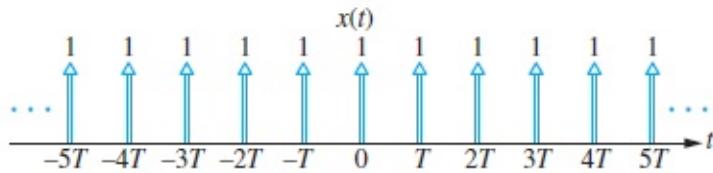
$$I \approx \frac{f(t_0 - T/2) + f(t_0 + T/2)}{2}$$

و در حد داریم:

$$I = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(t_0 - T/2) + f(t_0 + T/2)}{2} = f(t_0)$$

اکنون قطار تابع ضربه متناوب با زمان تناوب  $T$  شکل (۳.۶) را در نظر گیرید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



شکل ۳.۶: قطار تابع ضربه

### زنگ تفریح

■ آیا عملأ (از نظر فیزیکی) پالس ضربه‌ای با دامنه بینهایت و عرض صفر وجود دارد؟  
جواب :

★ خیر در فیزیک بینهایت نداریم. عملأ این یک پالس باریک و باعرض کوچک است و صرفاً برای راحتی در محاسبات و حالت ایدهآل آنرا با دامنه بینهایت و عرض صفر درنظر می‌گیریم.

### زنگ تفریح

■ آیا قطار تابع ضربه‌ای شکل (۳.۶) پیوسته است یا گسسته؟  
جواب :

★ این عملأ یک سری پالس باریک است که با وجود اینکه گسسته است اما با مدل پیوسته بیان شده و برای نمونه برای یکنواخت در حوزه زمانی پیوسته استفاده می‌کنیم. بنابراین علی رغم گسسته بودن در فضای پیوسته و ریاضیات پیوسته عنوان شده است.

**زنگ تفریح**

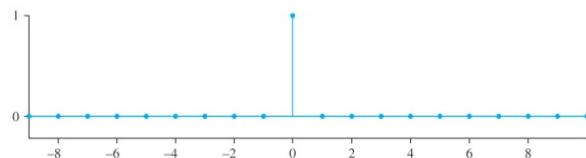
■ آیا سیگنالها همیشه دامنه نسبت به زمان هستند؟

**جواب :**

★ خیر، ممکن است دامنه نمایشگر فشار نسبت به مکان باشد. در مخابرات بیشتر اطلاعات ولتاژ یا جریان نسبت به زمان است.

## ۲.۶ سیگنال گسسته

سیگنال گسسته یک رشته‌ای از اعداد است که بازاء عده‌های صحیح وجود دارد. نمونه‌ای از این توابع گسسته تابع تک ضربه‌ای  $\delta[n]$  که در شکل نشان داده شده است.



شکل ۴.۶: تابع تک ضربه‌ای در فضای گسسته

**زنگ تفریح**

■ تفاوت  $\delta(t)$  و  $\delta[n]$  چیست؟ آیا عملًا می‌توانیم سیگنال  $\delta[n]$  در مخابرات که  $n$  نمایشگر زمان باشد داشته باشیم؟

**جواب :**

★ این دو سیگنال عملًا از نظر مهندسین مخابرات بیان یک پالس باریک است که دامنه محدودی دارند ولی یکی در فضای زمان پیوسته و دیگری زمان گسسته عنوان شده است. ممکن است بپرسید دلیل اینکه بسراغ ریاضیات گسسته رفتیم چیست؟ جواب مسئله مدل سازی و سریع و دقیق به جواب رسیدن است. یک حقیقت فیزیکی وجود دارد اما به آن از زوایای مختلف نگاه و او را آنالیز و ارزیابی می‌کنیم. آن روش که ساده‌تر و صحیح‌تر جواب مسئله را بدهد برای ما ارجح خواهد بود!

ممکن است بپرسید اگر زمان در کار نباشد آن وقت کدام بهتر است؟ مسئله فرقی نمی‌کند هر فضا یا روش که ساده‌تر و دقیق‌تر ما را به جواب برساند آن بهتر است. کار علمی درک و مدل کردن مسائل طبیعی است.

### زنگ تفریح

- تفاوت اعمال سیگنال  $\cos(\omega t)u(t)$  و  $\cos(\omega t)$  ب یک مدار در چیست و کدام ابزار و تبدیل (فیزور، فوریه، لاپلاس، زی) بهتر است بکار بریم؟
  - چرا در مخابرات بیشتر از تبدیل فوریه و در سیستم‌های کنترل از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم؟
- جواب :**

★ وقتی یک سیگنال سینوزوئیدال مثل  $\cos(\omega t)$  اعمال می‌کنیم، برای ما شرایط اولیه مطرح نیست و جواب گذرای مدار برایمان مهم نیست بنابراین بهتر است از فیزور استفاده کنیم. اما وقتی  $\cos(\omega t)u(t)$  را به مداری اعمال می‌کنیم، منظور بدست آوردن هر دو جواب گذرای و ماندگار سیستم است بنابراین از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم.

★ در مخابرات بیشتر با سیگنال مدوله شده سرکار داریم و پاسخ گذرا از درجه اهمیت کمتری برخودار است بنابراین، از تبدیل فوریه استفاده می‌شود، اما در کنترل لحظه به لحظه وضعیت و پاسخ و شکل موج قسمت‌های مختلف سیستم مورد توجه است، ازین‌رو از تبدیل لاپلاس که هم پاسخ حالت گذرا و ماندگار را می‌دهد استفاده می‌کنیم.

### زنگ تفریح

- آیا از سیگنال پیوسته می‌توان سیگنال گستته بدست آورد؟
- آیا از سیگنال گستته می‌توان سیگنال پیوسته بدست آورد؟

**جواب :**

★ هر دو حالت را می‌توان بدست آورد. ولی تحت چه شرایطی می‌شود یا نمی‌شود جای سوال است؟

## ۳.۶ تبدیل فوریر

تبدیل فوریر و لاپلاس به صورت گسترده‌ای در حل مسائل علوم و مهندسی استفاده می‌شود. تبدیل فوریر در تحلیل سیستم‌های خطی، طراحی آنتن‌ها، مدل سازی فرایندهای نوری، نظریه احتمالات، فیزیک کوانتم، و مسائل مقدار مرزی استفاده می‌شود.

در این بخش مروری بر روابط تبدیل فوریر خواهیم کرد. ما چهار نوع تبدیل فوریر تعریف می‌کنیم:

- پیوسته و غیرتناوبی  $\Leftrightarrow$  پیوسته و غیرتناوبی

فضای فرکانس	فضای زمان
پیوسته و غیرتناوبی	
$X(f)$	$x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j\pi f t} df \iff X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\pi f t} dt \quad (3.6)$$

در اینجا سیگنال پیوسته و غیر تناوبی است و تبدیل فوریه آن نیز بشرط وجود! پیوسته و غیرتناوبی است و مثال معروف آن نیز تبدیل تابع گوس نیز خود تابع گوس خواهد بود

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \iff X(f) = e^{-\pi f^2}$$

راستی خود  $f$  نمایشگر چیست؟ این پیوستگی فرکانس چه مفهومی در بر دارد؟ ما همه با سیگنال سینوسی و کسینوسی کار کرده‌ایم و آنجا با تغییرات سیگنال نسبت به زمان آشنائی داریم. اینجا هم فرکانس نمایشگر تغییرات است اما این تغییرات را درجه بندی می‌کند مثلاً میگوید که در سخن‌گوئی، فرکانس‌های کم، دامنه زیادتر نسبت به فرکانس‌های زیاد دارند و اگر فرکانس‌های زیاد را برای سخن‌گوئی (تلفنی) از دست بدھید مطلب درک می‌شود ولی کیفیت عالی مثل کسی که آواز می‌خواند ندارد. یا

$$x(t) = \delta(t) \iff X(f) = 1$$

که مثل یک آذربخش می‌ماند که حاوی تمام فرکانس‌ها مانند نور مرئی و فرابنفش و حتی فرکانس‌های ده و پانزده هرتز است که در موجبر دور کرده زمین (یونسفر و سطح زمین) حرکت می‌کند! از اینرو هرگاه پرشی در سیگنال بوجود آید آن حاوی فرکانس‌های زیادی خواهد بود.

## گسسته سازی در یک فضا معادل تناوبی کردن در فضای دیگر است و برعکس

- پیوسته و تناوبی  $\iff$  گسسته و غیرتناوبی
- نوع دیگری داریم که در فضای زمان متناوب بوده ولی در فضای فرکانس گسسته است. اینجاست که مسئله فرکانس اصلی و هارمونیک‌های سیگنال پیش می‌اید.

فضای فرکانس	فضای زمان
گسسته و غیرتناوبی	پیوسته و تناوبی
$X(mf_0), \quad f_0 = \frac{1}{T_p}$	$x(t) = x(t + T_p)$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(mf_0) e^{j2\pi m f_0 t} \iff X(mf_0) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) e^{-j2\pi m f_0 t} dt \quad (4.6)$$

- **گسسته و غیرتناوبی  $\iff$  پیوسته و تناوبی**  
بیاد داشته باشیم که گسسته سازی همان نمونه برداری از سیگنال است. قضیه نمونه برداری و فواصل زمان نایکوست  $T \leq \frac{1}{2f_{max}}$  را کاملاً بخارط داشته باشید!

فضای فرکانس	فضای زمان
پیوسته و تناوبی	گسسته و غیرتناوبی
$X(f) = X(f + f_p)$	$x(nT), \quad T = \frac{1}{f_p}$

که در آن  $T$  سرعت نمونه برداری است و با ماکریم فرکانس  $f_{max}$  سیگنال  $x(t)$  تحت رابطه  $T \leq \frac{1}{2f_{max}}$  بهم مربوطند.

$$x(nT) = \frac{1}{f_p} \int_0^{f_p} X(f) e^{j2\pi f n T} df \iff X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi f n T} \quad (5.6)$$

در فیزیک اگر از سیگنال متناوبی میباشد انتگرال گیری شود، باید حدود انتگرال یک دوره تناوب انتخاب و بر مقدار تناوب نیز تقسیم شود!

سرانجام تبدیل فوریه‌ای که هم در فضای زمان و هم در فضای فرکانس گسسته و متناوب هستند:

- **گسسته و تناوبی  $\iff$  گسسته و تناوبی**

فضای فرکانس	فضای زمان
گسسته و تناوبی	گسسته و تناوبی
$X(mf_0) = X(mf_0 + Nf_0), f_0 = \frac{1}{NT}$	$x(nT) = x(nT + NT), T = \frac{1}{Nf_0}$
$x(nT) = \sum_{m=0}^{N-1} X(mf_0) e^{\frac{j\pi}{N} mn} \iff X(mf_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-\frac{j\pi}{N} mn} \quad (6.6)$	

این تبدیل آخر را تبدیل فوریر گسسته (DFT)<sup>۱</sup> می‌نامند، و می‌توان آن را به صورت ماتریسی نوشت. چون کامپیوتر دیجیتالی فقط با دادهای گسسته کار می‌کند، محاسبات عددی تبدیل فوریر  $x(t)$  نیازمند نمونه‌های گسسته  $x(t)$  است و ما آن را با  $x(nT)$  نشان می‌دهیم. ضمناً کامپیوتر می‌تواند  $X(f)$  را در مقادیر گسسته  $f$  محاسبه کند، لذا کامپیوتر نمونه‌های گسسته تبدیل فوریر  $(X(f_0))$  را بما می‌دهد

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(f_0) \\ \vdots \\ X[(N-1)f_0] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & \dots & W^{(N-1)} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W^{(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(T) \\ \vdots \\ x[(N-1)T] \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

که در آن  $W = e^{-\frac{j\pi}{N}}$  و  $T = \frac{1}{2f_{max}}$  فواصل زمانی نمونه برداری  $f_{max}$  را مانند  $f_0 = \frac{1}{NT}$  فرکانس لازم برای پردازش  $x(t)$  است. اگر در طیف سینگنال مورد نظر  $x(t)$  رزولوشن بیشتری مورد نیاز باشد، یعنی  $f_0 = \frac{1}{NT}$  باستی زمان تناوب  $T_p = NT$  را افزایش دهیم، بعبارت دیگر ابعاد ماتریس  $N \times N$  را بزرگتر کنیم. تبدیل فوریر سریع یا (FFT)<sup>۲</sup> را می‌توان برای محاسبات  $[X(0), X(f_0), \dots, X[(N-1)f_0]]$  بکار برد. الگوریتم در سال ۱۹۶۵ توسط تاکی و کولی<sup>۳</sup> ارائه شد. و آن می‌تواند حجم محاسبات را از مرتبه  $N^2$  به  $N \log N$  کاهش دهد. اگر  $N$  عددی از توان دو انتخاب شود الگوریتم ساده می‌شود ولی این لازمه کار نیست.

اکنون می‌توانیم همین تبدیل فوریر را برای توابعی که تابع مکان هستند بیان کنیم. راستی مفهوم فیزیکی فرکانس مکانی چیست؟ باز هم این نمایش سرعت تغییرات تابع شما نسبت به مکان است. مثلاً می‌بایست بین یک مسیر هموار و صاف با مسیری که چاله

<sup>۱</sup> Discrete Fourier Transform

<sup>۲</sup> Fast Fourier Transform

<sup>۳</sup> Tukey and Cooley

و پستی و بلندی دارد فرق کند و معیار در ذهن افراد همان میزان تغییرات تابع نسبت به مکان است.

در امواج اول چیزی که در ذهن خطوط می‌کند تناوبی بودن امواج نسبت به مکان هستند و در امواج از آنها بعنوان طول موج یاد می‌شود.

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) e^{j2\pi\zeta x} d\zeta \iff X(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi\zeta x} dx} \quad (8.6)$$

می‌توان نوشت

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-j2\pi\zeta x'} dx' \right] e^{j2\pi\zeta x} d\zeta$$

چون

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx'$$

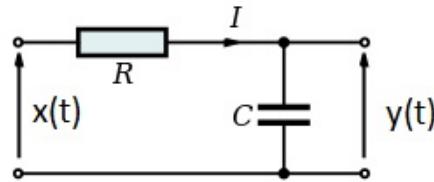
بنابراین تابع دلتا را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\delta(x - x') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\zeta(x-x')} d\zeta$$

## ۴.۶ حل یک مسئله

برای این که مطالب بالا را بهتر درک کنیم این مسئله را در نظر گیرید.

**الف** - پاسخ سیستم را بازاء ورودی  $x(t) = A \sin(\omega_0 t) u(t)$  فقط در فضای زمان بدست



شکل ۵.۶: مدار  $RC$

آورید.

**ب** - پاسخ سیستم را بازاء ورودی  $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$  فقط در فضای زمان بدست آورده و جواب خود را با قسمت الف مقایسه کنید.

**ج**- این دو پاسخ بالا چه مفاهیمی را در بر می‌گیرند و هر قسمت چه نام دارند؟

**د**- قسمت الف را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

**ه**- قسمت ب را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید.

**و**- قسمت ب را با استفاده از تبدیل فیزور حل کنید.

حل: ابتدا پاسخ ضربه‌ای سیستم را بدست می‌آوریم  

$$x(t) = RCy'(t) + y(t)$$

۹

$$\delta(t) = RCh'(t) + h(t)$$

$$RCh'(t) + h(t) = 0 \implies h(t) = De^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

اکنون مقدار مجھول  $D$  را با قرار دادن رابطه بالا در معادله دیفرانسیل مدار بدست می‌آوریم

$$\delta(t) = RCD\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}u(t) + De^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) + De^{-\frac{t}{RC}}u(t) = D\delta(t)$$

از این رابطه  $D = \frac{1}{RC}$  بدست می‌آید. بنابراین

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t)u(t)$$

اکنون از انتگرال کانولوشن برای محاسبه  $y(t)$  استفاده می‌کنیم

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

یا

$$y(t) = \frac{A}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \sin(\omega_0 \tau) u(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = \frac{A}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} \sin(\omega_0 \tau)d\tau$$

پس از عملیات انتگرال‌گیری خواهیم داشت:  
جواب بخش الف:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ y_1(t) &= \frac{A(\omega_0 RC)}{1 + (\omega_0 RC)^2} e^{-\frac{t}{RC}} \\ y_2(t) &= \frac{A}{1 + (\omega_0 RC)^2} [\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 RC) \cos(\omega_0 t)] \end{aligned}$$

برای پاسخ سیستم برای قسمت ب، یعنی  
 $A \sin(\omega_0 t) = RCy'(t) + y(t)$

چون ورودی سیستم یک سیگنال متناوب است، جواب این معادله دیفرانسیل بصورت  
تابع تناوبی زیر فرض می‌کنیم:

$$y(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t)$$

دو مقدار  $a$  و  $b$  مجھول هستند. این جواب باید بازاء هر لحظه از زمان در معادله دیفرانسیل  
بالا صدق کند.

$$A \sin(\omega_0 t) = (a\omega_0 RC) \cos(\omega_0 t) - (b\omega_0 RC) \sin(\omega_0 t) + a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t)$$

بنابراین

$$a = \frac{A}{1 + (\omega_0 RC)^2}, \quad b = -\frac{A(\omega_0 RC)}{1 + (\omega_0 RC)^2}$$

و در نتیجه

$$y(t) = y_1(t) = \frac{A}{1 + (\omega_0 RC)^2} [\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 RC) \cos(\omega_0 t)]$$

ج- سیستم بازه ورودی  $A \sin(\omega_0 t)u(t)$  دو پاسخ یکی گذرا یعنی  $y_1(t)$  و دیگری ماندگار  $y_2(t)$  را میدهد. در قسمت ب فقط جواب ماندگار را خواهیم داشت. بنابراین پس از چند لحظه که به ثابت زمانی  $RC$  بستگی دارد،  $y_1(t)$  میرا شده و پاسخ ماندگار  $y_2(t)$  باقی خواهد ماند.

د- از معادله دیفرانسیل بالا، بازه ورودی  $x(t) = A \sin(\omega_0 t)u(t)$  تبدیل لاپلاس می‌گیریم. ضمناً  $\omega = 2\pi f$

$$\mathbb{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \int_0^\infty \sin(\omega_0 t)e^{-st} dt = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathbb{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \int_0^\infty \cos(\omega_0 t)e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathbb{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$$

با توجه به این روابط و در نظر گرفتن  $y(0) = 0$ ، خواهیم داشت

$$sRCY(s) + Y(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

در نتیجه

$$Y(s) = \frac{1}{1 + sRC} \cdot \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

اکنون از تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{1 + sRC} \cdot \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{b_1}{1 + sRC} + \frac{b_2}{s + j\omega_0} + \frac{b_3}{s - j\omega_0} \quad (9.6)$$

برای پیدا کردن  $b_1$  دو طرف معادله (9.6) را در  $1 + sRC$  ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت

$$\frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = b_1 + \frac{RCs + 1}{s + j\omega_0} b_2 + \frac{RCs + 1}{s - j\omega_0} b_3$$

با جایگزینی  $s = -\frac{1}{RC}$  در رابطه بالا، خواهیم داشت

$$b_1 = \frac{A(RC)^2 \omega_0}{\omega_0^2 + (RC)^2}$$

برای پیدا کردن  $b_2$  دو طرف معادله (9.6) را در  $s + j\omega_0$  ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت

$$\frac{1}{RCs} \cdot \frac{A\omega_0}{s - j\omega_0} = \frac{s + j\omega_0}{RCs + 1} b_1 + b_2 + \frac{s + j\omega_0}{s - j\omega_0} b_3$$

با جایگزینی  $s = -j\omega_0$  در معادله بالا، در این صورت

$$b_2 = -\frac{A}{2j} \frac{1}{1 - jRC\omega_0}$$

شبیه همین روش را برای  $b_3$  بکار خواهیم برد و خواهیم داشت

$$b_3 = \frac{A}{2j} \frac{1}{1 + jRC\omega_0}$$

ضرایب  $b_1$  و  $b_2$  را می‌توان بر حسب توابع نمائی نوشت

$$b_1 = \frac{A}{2j} \frac{1 - jRC\omega_0}{1 + (RC\omega_0)^2} = \frac{A}{2j} \frac{e^{-j\phi}}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}}$$

که در آن

$$\phi = \tan^{-1} RC\omega_0.$$

بنابراین  $Y(s)$  خواهد بود

$$Y(s) = \frac{A(RC)^2\omega_0}{1 + (RC\omega_0)^2} \cdot \frac{1}{RCs + 1} - \frac{A}{2j} \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{s + j\omega_0} + \frac{A}{2j} \frac{e^{-j\phi}}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{s - j\omega_0}$$

از رابطه بالا عکس تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$y(t) = \frac{A(RC)^2\omega_0}{1 + (RC\omega_0)^2} \cdot \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{A}{2j} \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}} \cdot e^{-j\omega_0 t} + \frac{A}{2j} \frac{e^{-j\phi}}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

پس از کمی ساده کردن این رابطه خواهیم داشت

$$y(t) = \frac{A(\omega_0 RC)}{1 + (RC\omega_0)^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{A}{\sqrt{(RC\omega_0)^2 + 1}} \sin(\omega_0 t - \phi)$$

البته می‌توان ثابت کرد که این رابطه همان رابطه‌ای است که از طریق دیگر محاسبه شده است.

میدانیم

$$\sin(\omega_0 t - \phi) = \sin(\omega_0 t) \cos \phi - \cos(\omega_0 t) \sin \phi$$

اما

$$\tan \phi = RC\omega_0, \quad \sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}, \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$$

بنابراین

$$\sin \phi = \frac{RC\omega_0}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}}, \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}}$$

سرانجام

$$y(t) = \frac{A(\omega_0 RC)}{1 + (RC\omega_0)^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega_0 RC)^2}} [\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 RC) \cos(\omega_0 t)]$$

۵- در این قسمت میخواهیم از تبدیل فوریه استفاده کنیم،

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) \implies X(f) = \mathbb{F}\{x(t)\} = \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

و ازینرو

$$X(f) = j\omega RC Y(f) + Y(f) \implies Y(f) = \frac{1}{1 + j\omega RC} X(f)$$

با در نظر گرفتن ورودی، و رابطه

$$Y(f) = \frac{A}{2j} \frac{1}{1 + j\omega_0 RC} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} \frac{1}{1 - j\omega_0 RC} \delta(f + f_0)$$

یا

$$Y(f) = \frac{A}{1 + (\omega_0 RC)^2} \left\{ \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \right\} - \frac{A\omega_0 RC}{1 + (\omega_0 RC)^2} \left\{ \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \right\}$$

اگر عکس تبدیل فوریه بگیریم، خواهیم داشت

$$y(t) = y_V(t) = \frac{A}{1 + (\omega_0 RC)^2} [\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 RC) \cos(\omega_0 t)]$$

که همان جواب ماندگار سیستم خواهد بود.

و- برای استفاده از فیزور، یکبار دیگر نگاهی به تعاریف فیزور می‌کنیم؛

**فیزور:** دیدیم ریاضیات تبدیل لاپلاس و فوریه در این مسئله بالا کمی مشکل و زمانبر است. اکثر مدارات دستگاه‌های الکتریکی ما نیازی به رفتار پاسخ گذرا ندارد و بصورت تناوبی است که با توجه به سری فوریه می‌توان آنرا بصورت مجموعه‌ای از توابع سینوسی یا کسینوسی بیان کرد. بنابراین یک ریاضیات ساده‌تری بنام فیزور که در فضای اعداد مختلط است مدون شده است.

فرض کنید ولتاژی بصورت زیر داریم

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

یک کمیت مختلط بنام فیزور تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_0 \angle \phi_v$$

و اگر بخواهیم ولتاژ بالا از روی فیزور مربوطه بدست آوریم

$$v(t) = \operatorname{Re} [\mathbf{V} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [V_m e^{j(\omega t + \phi)}] = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \iff \mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_0 \angle \phi_v$$

$$\boxed{\text{فضای زمان} \quad \iff \quad \text{فضای فیزور}}$$

توان: اگر ولتاژ و جریان در مداری بصورت زیر مفروض باشند، در این صورت

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v), \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

در این صورت توان لحظه‌ای و توان متوسط انتقالی برابر است با

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \cdot I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

و توان متوسط

$$P_{av} = P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) [W]$$

اکنون توان مختلط را از طریق فیزور بدست می‌آوریم

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}^* = P + jQ$$

که در آن توان ظاهری برابر است با

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m [VA]$$

و توان متوسط مصرفی و توان واکنشی برابر است با:

$$P = \operatorname{Re}\{\mathbf{S}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) [W], \quad Q = \operatorname{Im}\{\mathbf{S}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m \sin(\phi_v - \phi_i) [VAR]$$

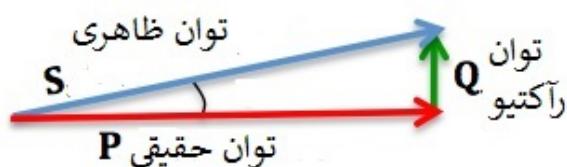
اگر نسبت فیزور ولتاژ با در مداری به فیزور جریان تقسیم کنیم، امپدانس را در فضای مختلط فیزور خواهیم داشت

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + jX$$

در این صورت توان مصرفی در  $R$  و توان واکنشی در  $X$  برابر است با

$$P = \operatorname{Re}\{\mathbf{S}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m^* R, \quad Q = \operatorname{Im}\{\mathbf{S}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m^* X$$

که در این شکل  $\phi = \phi_v - \phi_i$  است و کسینوس فی یا ضریب توان در مهندسی برق معروف



شکل ۶.۶: رابطه بین توانها

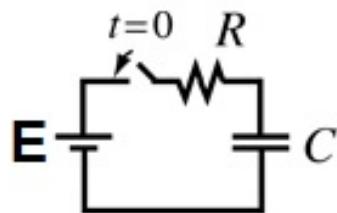
است.

■ باطری  $E$  و کلید  $S$  و خازن  $C$  را بطور سری بهم وصل می‌کنیم. در لحظه  $t = 0$  کلید  $S$  را وصل می‌کنیم. اکنون می‌خواهیم انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه کنیم. حالت ایده‌آل در نظر گرفته و چنین عمل می‌کنیم:

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = EC \frac{du(t)}{dt} = EC\delta(t) \quad (10.6)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)i(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} Eu(t)EC\delta(t)dt = CE^2 \quad (11.6)$$

اما میدانیم، انرژی ذخیره شده در خازن برابر با  $W = \frac{1}{2}CE^2$  است؟ این تناقض از کجا ناشی شده است؟

شکل ۷.۶: تحلیل مدار  $RC$  در فضای زمان**جواب :**

★  
بعقیده نگارنده تناقض از تعریف تابع  $u(t)$  ناشی شده است در رابطه بالا از تعریف زیر استفاده شده است

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

اما اگر تعریف زیر بکار برده شود، آنگاه تناقض برطرف می‌شود

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} Eu(t) EC\delta(t) dt = \frac{1}{2} CE^2 \quad (12.6)$$

ضمناً ثابت کنید اگر مقاومت  $R$  با خازن  $C$  سری باشد، در آن صورت هم انرژی ذخیره شده در خازن  $\frac{1}{2} CE^2$  خواهد بود.

**زنگ تفریح**

■ هزار سکه یکسان را یکبار به فضا پرتاب کرده و نتایج را یادداشت می‌کنیم. اکنون یکی از همان سکه‌های قبیل را هزار بار پرتاب کرده و جواب را یادداشت می‌کنیم. طبق چه اصل و یا قانونی این نتایج یکی است؟

**جواب :**

★

### زنگ تفریح

■ چرا پدیده‌های طبیعی مثل نویز تابع توزیع احتمال گوسی دارند؟ قضیه حد مرکزی چیست و چه می‌گوید؟  
**جواب:**



## ۵.۶ تبدیل هیلبرت

در ریاضیات و در پردازش سیگنال، تبدیل هیلبرت یک عملگر خطی خاص است که  $u(t)$  از یک تابع متغیر حقیقی را می‌گیرد و تابع دیگری از یک متغیر حقیقی تولید می‌کند. این عملگر خطی با کانولوشن  $(1/\pi t) \hat{u}(t)$  با تابع تعریف می‌شود. تبدیل هیلبرت نمایش ساده‌ای در حوزه فرکانس دارد: تغییر فاز  $\pm \frac{\pi}{2}$  رادیان) را بهر مولفه فرکانس یک تابع می‌دهد، علامت تغییر  $\pm$  به علامت فرکانس بستگی دارد. تبدیل هیلبرت در پردازش سیگنال مهم است، تبدیل هیلبرت برای اولین بار توسط دیوید هیلبرت برای حل یک مورد خاص از مسئله ریمان-هیلبرت برای توابع تحلیلی معرفی شد.

### ۱.۵.۶ تعریف تبدیل هیلبرت

طبق تعریف داریم

$$x(t) \longleftrightarrow \mathbb{H}\{x(t)\} = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

ضمناً

$$\hat{x}(t) = -x(-t)$$

یعنی  $180^\circ$  درجه تغییر فاز خواهیم داشت. حالی از لطف نیست نگاهی به تبدیل هیلبرت چند تابع داشته باشیم

جدول ۱.۶: تبدیل هیلبرت چند تابع نمونه

$x(t)$	تبدیل هیلبرت $\hat{x}(t)$
$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 \hat{x}_1(t) + a_2 \hat{x}_2(t)$
$\sin(\omega t)$	$\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$
$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t}{1+t^2}$
$\frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1-\cos(t)}{\pi t}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$\frac{1}{\pi} \ln[\frac{t+1}{t-1}]$	$u(t + \frac{1}{\pi}) - u(t - \frac{1}{\pi})$

از خواص مهم تبدیل هیلبرت تعامل  $x(t)$  و  $\hat{x}(t)$  است؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0$$

اگر تبدیل فوریه  $x(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t)$  باشد، تبدیل فوریه  $\hat{x}(t)$  برابر است با:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) \longleftrightarrow \hat{X}(f) = -j sgn(f)X(f)$$

زیرا

$$sgn(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

و با استفاده از قضیه دوگانگی

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j sgn(f)$$

ضمناً

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + sgn(t)] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

اکنون بیک نتیجه خوب میرسیم که اگر سیگنالی علی باشد، در آن صورت

$$x(t)u(t) \longleftrightarrow X(f) * \left\{ \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ X(f) - jX(\hat{f}) \right\}$$

یعنی قسمت موهومی تبدیل هیلبرت قسمت حقیقی طیف است.

در الکترومغناطیس ما با تابع مختلط گذردگی الکتریکی در حوزه فرکانس سروکار داریم و این از یک تابع حقیقی علی نتیجه شده است:

$$\epsilon(t)u(t) \longleftrightarrow \epsilon'(f) - j\epsilon''(f)$$

$$\epsilon''(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(u)}{f-u} du$$

بنابراین قسمت موهومی تبدیل هیلبرت قسمت حقیقی طیف خواهد بود و این بنام رابطه کرامرز-کرونیک<sup>۴</sup> معروف است.

---

<sup>۴</sup>kramers-kronig



## فصل ۷

# موجکها

### ۱.۷ مقدمه‌ای بر موجک‌ها در الکترومغناطیس عددی

اخيراً موجک‌ها<sup>۱</sup> توجه قابل توجهی را در جامعه الکترومغناطیسی به‌خود جلب کرده‌اند. آنها به عنوان توابع پایه برای حل کارآمد معادلات انتگرالی الکترومغناطیسی و معادلات دیفرانسیل جزئی در قالب معادلات ماکسول استفاده شده‌اند. با وجود صدها کتاب و هزاران مقاله در این زمینه، مفهوم موجک می‌تواند برای یک مبتدی‌ها ترسناک باشد. این به‌دلیل این واقعیت است که بسیاری از ادبیات فعلی از اصطلاحات ریاضی بسیار پیچیده استفاده می‌کنند. هدف این قسمت ارائه یک مقدمه ساده و واضح برای این زمینه هیجان انگیز است تا نیازهای محققان مهندسی مایکروویو را که ممکن است بخواهند تحلیل موجک را در کار خود اعمال کنند، برآورده کند.

#### ۱.۱.۷ نظریه موجک‌ها

نظریه موجک شاخه‌ای از ریاضیات است که با ساختن مدلی برای یک سیستم یا فرآیند با استفاده از مجموعه‌ای از سیگنال‌های خاص به نام موجک سروکار دارد. موجک‌ها «امواج کوچک» هستند، در حالی که توابع سینوسی «امواج بزرگ» هستند. باید دامنه‌ای داشته باشد که در هر دو جهت مثبت و منفی به سرعت به صفر برسد. این باعث می‌شود موجک‌ها برای تحلیل گذرا و برای تقریب داده‌ها با نایپیوستگی‌های تیز مناسب باشند، همانطور که معمولاً در پراش امواج الکترومغناطیسی از اجسام با لبه‌های تیز یافت می‌شود. ایده موجک در سال ۱۹۸۰ توسط ژئوفیزیکدان مورلت<sup>۲</sup> برای تجزیه سیگنال و تقریب ارائه شد. این ایده جدیدی نیست؛ تقریب با استفاده از برهم نهی (جمع اثرها) توابع

<sup>۱</sup>Wavelets

<sup>۲</sup>J. Morlet

از اوایل دهه ۱۸۰۰ وجود داشته است، زمانی که جوزف فوریه کشف کرد که می‌تواند سینوس‌ها و کسینوس‌ها را برای نشان دادن توابع دیگر روی هم قرار دهد. با این حال، تا همین اواخر بود که مفاهیم یکپارچه مورد نیاز برای درک کلی موجک‌ها تولید نشد. از آن زمان، تحولات در نظریه موجک بسیار زیاد بوده است [۱]-[۳].

یکی از جنبه‌های جالب موجک‌ها این است که آنها شاخه‌های مختلفی از ریاضیات، علوم و مهندسی را با هم متعدد کرده‌اند. آنها در زمینه‌های مختلفی مانند ریاضیات، علوم کامپیوتر، فیزیک، نجوم، زمین شناسی، مهندسی، پزشکی، موسیقی و آکوستیک استفاده می‌شوند [۱]-[۴]. به نظر می‌رسد هیچ محدودیتی برای مناطقی که موجک‌ها ممکن است در آنها کاربرد پیدا کنند وجود ندارد. بنابراین، تاریخ موجک‌ها را می‌توان به عنوان درختی در نظر گرفت که ریشه‌های آن به‌اعماق و در جهات مختلف می‌رسد [۵]. موجک‌ها در تعدادی از زمینه‌های مهندسی برق، از جمله ارتباطات و پردازش سیگنال [۶]-[۱۳]، سیستم‌های قدرت [۱۴]-[۱۵]، سیستم‌های کنترل [۱۶]-[۱۸]، الکترونیک [۱۹]، [۲۰] استفاده شده‌اند، و زیست پزشکی [۶]، [۲۱]-[۲۷].

در جامعه الکترومغناطیس محاسباتی، علاقه به موجک‌ها نسبتاً جدید است. چند سال پیش، موجک‌ها برای اولین بار برای تحلیل الکترومغناطیس حوزه فرکانس از طریق روش ممان (MoM) [۲۸]-[۳۴] و بعداً برای تجزیه و تحلیل الکترومغناطیس حوزه زمان از طریق تکنیک‌های تفاضل محدود در حوزه زمان (FDTD) [۳۵]-[۳۸] استفاده شدند. اخیراً از موجک‌ها برای حل مسائل مقادیر ویژه الکترومغناطیسی استفاده شده است [۳۹]-[۴۰]. تحلیل موجک نیز برای حل معادله لاپلاس [۴۱]-[۴۲] استفاده شده است. بیشتر برای حل طیف گسترده‌ای از مسائل مایکروویو، از جمله ساختارهای غیرفعال و دستگاه‌های فعال مانند ترانزیستورهای مایکروویو استفاده شده است.

چندین مسئله الکترومغناطیسی را می‌توان به عنوان معادلات انتگرالی فرموله کرد. حل عددی چنین معادلاتی معمولاً توسط MoM بدست می‌آید. با این حال، استفاده از توابع پایه معمولی و توابع وزن همیشه منجر به یک معادله ماتریسی کامل می‌شود. یکی از اصلاحات تبدیل ماتریس متراکم به یک ماتریس تُنک<sup>۳</sup> با استفاده از موجک‌ها به عنوان توابع پایه بوده است. بنابراین، استفاده از تبدیل موجک می‌تواند منجر به معادلات ماتریس تُنک شود که می‌تواند به‌طور موثر توسط حل کننده‌های تُنک حل شود.

در حال حاضر دانش زیادی در مورد موجک‌ها وجود دارد. بیش از ۱۳۰۰۰ مقاله و کتاب در این زمینه از سال ۱۹۸۹ منتشر شده است. با این حال، مفهوم موجک هنوز هم می‌تواند برای یک مبتدیان ترسناک باشد. در واقع، بسیاری از متون فعلی از اصطلاحات ریاضی بسیار پیچیده استفاده می‌کنند و زمان قابل توجهی برای ایجاد درک کلی از تحلیل موجک مورد نیاز است. ما معتقدیم که موجک‌ها ابزار قدرتمندی هستند که می‌توانند برای افراد دیگری غیر از ریاضیدانان در دسترس باشند. هر کسی که سابقه جبر خطی پایه داشته باشد می‌تواند در مورد موجک‌ها بیاموزد و با آنها کار کند. این مقاله با این ذهنیت نوشته شده است. ابتدا یک مقدمه کلی بر مفهوم موجک ارائه می‌کند. سپس تبدیل‌های

<sup>۳</sup> Method of Moment (MoM)

<sup>۴</sup> Finite Difference Time Domain (FDTD)

<sup>۵</sup> Sparse Matrix

موجک را پوشش می‌دهد و در نهایت، کاربردهای تحلیل موجک در الکترومغناطیس را مورد بحث قرار می‌دهد.

### ۲.۱.۷ موجک‌ها

موجک یک شکل موج نوسانی کوتاه است که حداقل برای چند سیکل ادامه دارد. ایده اساسی پشت موجک‌ها تجزیه و تحلیل آنها بر اساس مقیاس است. این شامل ایجاد ساختارهای ریاضی است که در مقیاس متفاوت هستند. طبق تعریف گروسمان و مورلت، "موجک تابعی است  $\varphi(t)$  در  $L^2(\mathbb{R}^n)$  که تبدیل فوریه (FT) آن  $(\omega)\bar{\varphi}$ ، شرط  $\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\varphi}(t\omega)|^2 \frac{dt}{t} = 1$  را در همه جا برآورده می‌کند"<sup>۴۳</sup>.

بنابراین، موجک‌ها توابعی هستند که الزامات ریاضی خاصی را برآورده می‌کنند و در نمایش داده‌ها یا سایر توابع استفاده می‌شوند. یک تابع با مقدار واقعی یا مختلط  $\varphi(t)$  به عنوان موجک <sup>۴۴</sup> تعریف می‌شود اگر:

۱. انتگرال  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 0$  صفر است؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 0. \quad (1.7)$$

این بدان معنی است که یک موجک باید مقدار متوسط صفر در حوزه زمان (یا جزء  $\text{dc}$  صفر) داشته باشد و موجک باید یک تابع باند گذر باشد. بنابراین، باید نوسانی باشد (باید موج باشد).

۲. انتگرال  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) dt = 1$  باید برابر یک باشد؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) dt = 1. \quad (2.7)$$

(الزام سوم کمی بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت.)

چندین عملکرد وجود دارد که این الزامات را برآورده می‌کند. برخی از موجک‌های مشهور عبارتند از <sup>۴۵</sup>:

• موجک مورلت <sup>۶</sup> (گوسی مدوله شده):

$$\varphi(t) = e^{j\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad (3.7)$$

---

<sup>6</sup>Morlet wavelet

- موجک هار<sup>۴</sup> (به نام ریاضیدان آلمانی آلفرد هار<sup>۵</sup>):

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (4.7)$$

- موجک شانون<sup>۶</sup>:

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi t / 2}{\pi t / 2} \cos(3\pi t / 2) \quad (5.7)$$

- موجک کلاه مکزیکی (مشتق دوم تابع گوس):

$$\varphi(t) = n(1-t^2)e^{-t^2/2} \quad (6.7)$$

که در آن  $n$  ضریب نرمالیزه است. این موجکها در شکل (۱.۷) نشان داده شده است و به عنوان **موجک‌های مادر** معروف هستند. چندین موجک دیگر مانند موجک Bessel, Cauchy, Coifman, cubic-spline, Daubechies, Dubuc, Franklin, Lagrange, Lazy, Lemarie, Maar, Meyer وجود دارد. موجک‌های جدید به طور منظم کشف می‌شوند. برنامه خاص تعیین می‌کند که کدام موجک انتخاب شود. هر یک از موجک‌های مادر می‌تواند برای تولید موجک‌های دیگر برای تشکیل مجموعه‌ای از توابع پایه استفاده شود. این امر توسط

## ۱. انتقال

$$\varphi(t) = \varphi(t+k) \quad (7.7)$$

## ۲. مقیاس

$$\varphi(t) = \varphi(mt) \quad (8.7)$$

که در آن  $k$  ضریب ترجمه و  $m$  ضریب مقیاس است. بنابراین، موجک‌های دیگر از یک موجک پایه  $\varphi(t)$ , به اصطلاح موجک مادر، با مقیاس بندی و ترجمه مطابق (۸.۷) و (۹.۷) تولید می‌شوند. این منجر به سومین ویژگی مهم یعنی متعامد می‌شود. توابع پایه تولید شده باید متعامد باشند

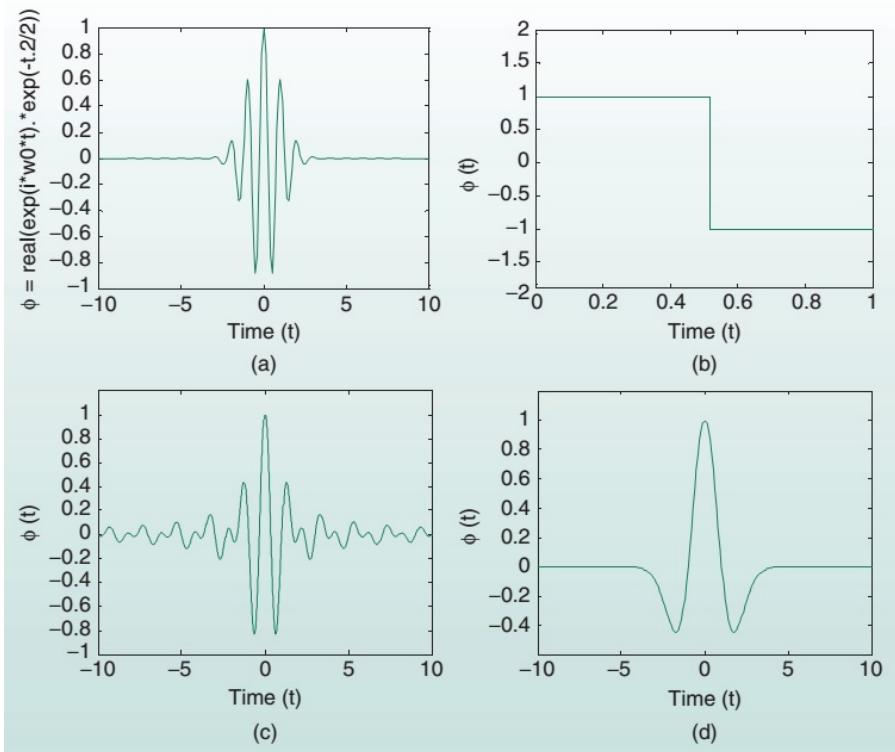
$$\int \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} n, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (9.7)$$

---

<sup>۴</sup>Haar wavelet

<sup>۵</sup>Alfred Haar

<sup>۶</sup>Shannon wavelet



شکل ۱.۷: موجک‌های مشهور: (الف) موجک مارلت، (ب) موجک هار، (ج) موجک شانون، (د) موجک کلاه مکزیکی

که در آن  $n$  یک عامل نرمالیزه کردن است. (بهیان دقیق، لازم نیست که موجک‌ها متعامد باشند، اما استفاده از موجک‌های متعامد محاسبات را ساده می‌کند.) ما این مفاهیم را با موجک هار که احتمالاً ساده‌ترین موجک برای درک است، توضیح می‌دهیم.

اگرچه موجک‌های هار توابعی صاف و در نتیجه به‌طور پیوسته قابل مشتق‌گیری نیستند، موجک هار دارای خاصیت ناپدید شدن در خارج از یک بازه تکین هستند. این ویژگی لحظه‌های ناپدید شدن منجر به‌نمایش کارآمد توابعی می‌شود که صاف هستند، به جز در مجموعه محدودی از تکین‌ها. همچنین، پیاده سازی آنها در کدهای کامپیوتری آسان است. آنها متعامد هستند و در بازه  $1 \leq t < 0$  تابع هار شانزده تابع هار اول در شکل ۲.۷ نشان داده شده است. تابع  $h_0(t)$  تابع مقیاس بندی نامیده می‌شود و  $h_1(t)$  موجک مادر است. تمام موجک‌های دیگر از موجک مادر توسط انتقال و مقیاس بندی تولید می‌شوند. برای مثال،  $h_2(t)$  با فشرده کردن (یا فشردن)  $h_1(t)$  از بازه  $[0, 1]$  تا بازه  $[0, 1/2]$  مانند  $h_2(t) = h_1(2t)$  به دست می‌آید. همچنین، همان  $h_2(t)$  از بازه  $[0, 1]$  است، با این تفاوت که  $1/2$  به راست منتقل شده (یا انتقال داده شده است) [یعنی  $h_2(t) = h_1(2t)$ ]. به‌طور مشابه،  $h_4(t)$  با  $h_2(t)$  و  $h_6(t)$  با  $h_4(t)$  مشابه، و  $h_5(t)$  با  $h_3(t)$  و  $h_7(t)$  با  $h_5(t)$  به راست منتقل می‌شود تا

$h_{\gamma}(t)$  به ترتیب تولید شود. بنابراین، به طور کلی [۱۶]-[۱۷]،

$$(h_{\circ}(t) = 1, \quad h_n(t) = h_{\circ}(2^j t - k/2^j)) \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} n = 2^j + k, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ 0 < k < 2^j \end{aligned} \quad (10.7)$$

توجه کنید که موجک‌های هار بر یکدیگر متعامد هستند:

$$\int_0^1 h_p(t)h_q(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2^j}, & p = q = 2^j + k \\ 0, & p \neq q \end{cases} \quad (11.7)$$

و بنابراین، یک توابع پایه تبدیل خوبی را تشکیل می‌دهد. با این حال، همانطور که قبل ذکر شد، موجک هار به‌طور مداوم قابل مشتق‌گیری نیستند، که کاربرد آنها را محدود می‌کند.

مثال ۱: در این مثال موجک دوبچیز<sup>۱۰</sup> را توصیف می‌کنیم که شاید متداول ترین موجک مورد استفاده باشد. می‌خواهیم تابع مقیاس بندی ضرب N دوبچیز و موجک را بسازیم. به‌طور کلی، یک تابع مقیاس بندی راه حلی برای معادله انتقال [۴۶]-[۴۹] است.

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi(St - k) \quad (12.7)$$

فاکتور انتقال  $S$  به‌عنوان یک گزینه مناسب انتخاب شده است. ضرایب ثابت  $a_k$  به‌ضرایب فیلتر معروف هستند و با اعمال شرایطی بر روی تابع مقیاس‌بندی به‌دست می‌آیند. برای اینکه موجک دارای پشتیبانی فشرده و نوعی صافی باشد، باید سه شرط بر  $\varphi(t)$  اعمال شود. اول، تابع مقیاس‌بندی یک انتگرال غیرصفر کننده دارد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1. \quad (13.7)$$

این به‌رابطه زیر منجر می‌شود؛

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = 1. \quad (14.7)$$

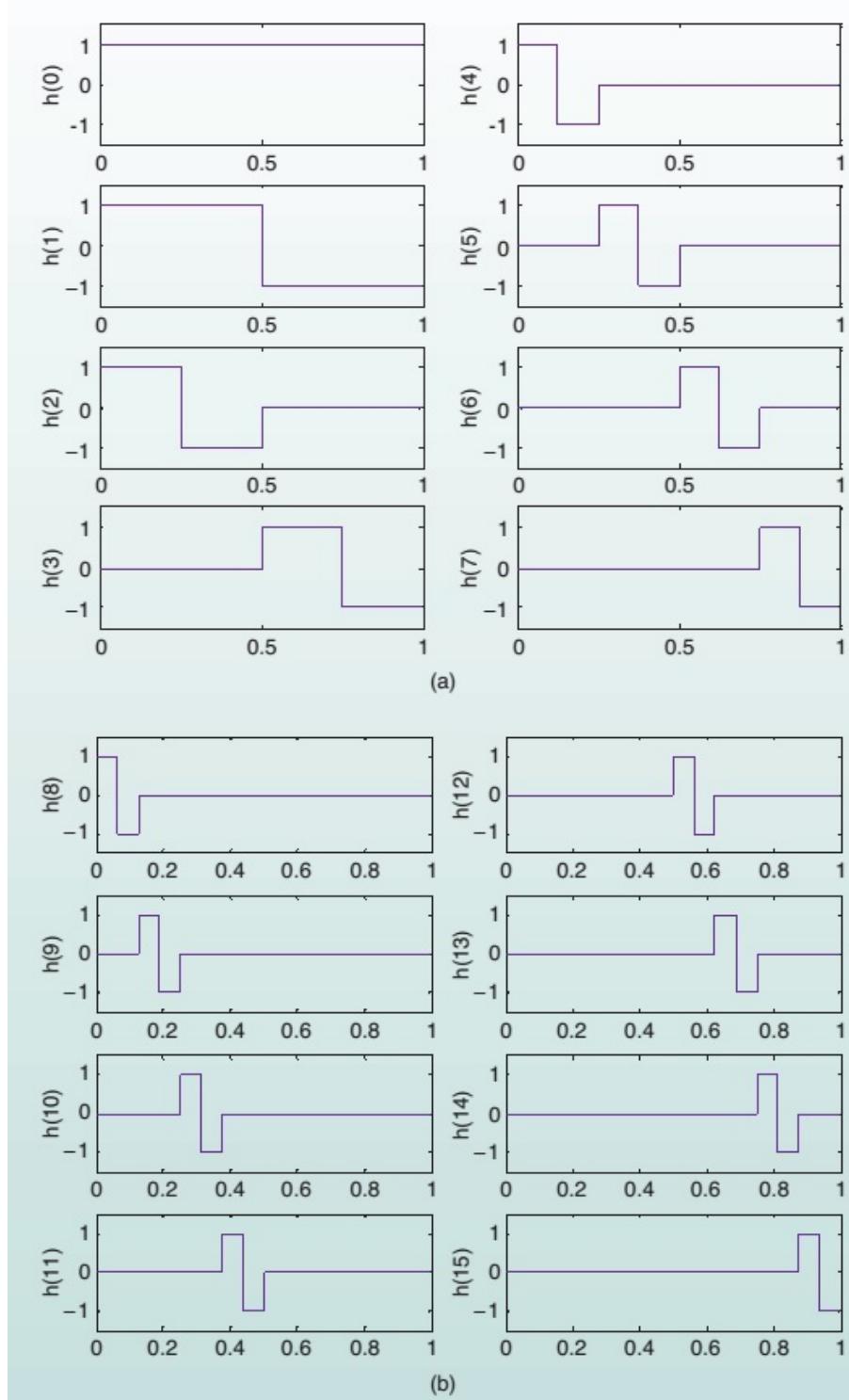
دوم، تابع مقیاس‌بندی بر تابع انتقالی خود عمود است، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\phi(t+m)dt = \delta_{0,m} \quad (15.7)$$

این شرط متعامد بودن بدین معنی است که

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_{k+2m} = 2\delta_{0,m}. \quad (16.7)$$

<sup>۱۰</sup> Daubechies wavelet



شكل ۲.۷: موجک هار. (الف) اولین هشت تابع هار. (ب) دومین هشت تابع هار.

سوم، تابع موجک مادر  $\varphi(t)$  باید دارای لحظه‌های صفر باشد (باید در شرایط لحظه‌ها صدق کند)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)t^p dt = 0, \quad p = 0, 1 \quad (17.7)$$

این نشان می‌دهد که

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k k^p = 0, \quad p = 0, 1 \quad (18.7)$$

برای تابع مقیاس‌بندی چهار ضریب دوبچیز (D4)، (14.7)، (16.7) و (18.7) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 2 \\ a_0' + a_1' + a_2' + a_3' &= 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 0 \\ -a_1 + 2a_2 - 3a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (19.7)$$

که منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4}, & a_1 &= \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ a_2 &= \frac{2-\sqrt{3}}{4}, & a_3 &= \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \quad (20.7)$$

بنابراین تابع مقیاس بندی خواهد شد؛

$$\begin{aligned} \phi(t) &= a_0 \phi(2t) + a_1 \phi(2t-1) \\ &\quad + a_2 \phi(2t-2) + a_3 \phi(2t-3). \end{aligned} \quad (21.7)$$

به طور کلی، حل مستقیم این معادله برای یافتن تابع مقیاس بندی  $\varphi(t)$  ممکن نیست. می‌توان از یکی از روش‌های زیر استفاده کرد.

**روش اول** یک راه حل تکراری زمانی امکان پذیر است که  $\varphi(t)$  به صورت تقریبی باشد

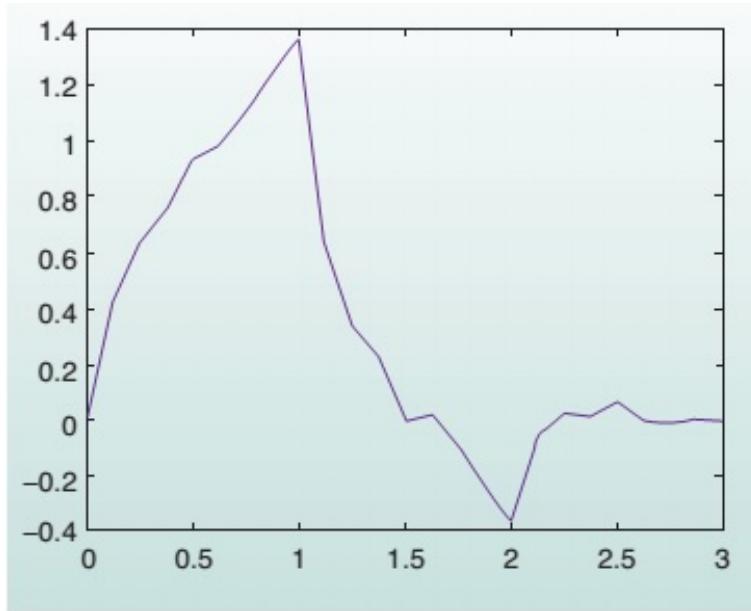
$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= a_0 \phi_{j-1}(2t) + a_1 \phi_{j-1}(2t-1) \\ &\quad + a_2 \phi_{j-1}(2t-2) + a_3 \phi_{j-1}(2t-3). \end{aligned} \quad (22.7)$$

ما تکرار را با  $\varphi_0(t) = 1$  شروع می‌کنیم. روند تکراری تا زمانی که  $\varphi_j(t)$  از  $\varphi_{j-1}(t)$  غیر قابل تشخیص نباشد ادامه می‌دهیم.

**روش دوم** از طرف دیگر، می‌توانیم  $t=1$  و  $t=2$  را جایگزین کنیم تا به دست آید:

$$\phi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad \phi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

ما در نظر داریم که  $\phi(t)$  خارج از بازه  $(0, 3)$  صفر است، مانند  $\phi(0) = \phi(3) = 0$ . سپس از رابطه (21.7) برای بدست آوردن  $\phi(t)$  در  $t = 1/23/25/2$  و  $t = 7/2$  استفاده می‌کنیم زیرا  $20$  در سمت راست یک عدد کامل است. از این زمان‌های نیمه صحیح، به زمان‌های یک چهارم صحیح می‌رویم. در نهایت، مقادیر کافی برای رسم  $\phi(t)$  برای  $t < 3$  داریم.

شکل ۳.۷: موجک  $D_4$  دوبچیز

تابع موجک مربوطه  $\varphi(t)$  از تابع مقیاس‌بندی  $\phi(t)$  با معکوس کردن ترتیب ضرایب و تغییر علامت عبارت‌های متناظر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & -a_3\phi(2t) + a_2\phi(2t-1) \\ & -a_1\phi(2t-2) + a_0\phi(2t-3). \end{aligned} \quad (23.7)$$

بر اساس روش ۲، که برنامه‌ریزی آسان‌تر است، تابع مقیاس‌بندی  $\psi_4$  را همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، می‌سازیم.

### ۳.۱.۷ تبدیل‌های موجک

تبدیل‌های ریاضی اغلب برای سیگنال‌ها اعمال می‌شوند تا اطلاعات بیشتری از آن سیگنال به دست آورند که به آسانی در سیگنال خام موجود نیست. تعدادی تغییر وجود دارد که می‌توان اعمال کرد. موارد رایج عبارتند از تبدیل لایپلاس (Laplace) و傅里叶 برای دهه‌ها، دانشمندان توابع مناسب‌تری نسبت به سینوس و کسینوس (مبنای تحلیل فوریه) برای تقریب سیگنال‌های متزلزل می‌خواستند. طبق تعریف، این سیگنال‌ها غیرمحلي هستند، به این معنی که تا بی‌نهایت گسترش می‌یابند. در نتیجه، آنها در تقریب سنبله‌های تیز ضعیف هستند. اما با تجزیه و تحلیل موجک، می‌توانیم از توابع تقریبی استفاده کنیم که به طور منظم در دامنه محدود قرار دارند. بنابراین، موجک‌ها برای تقریب داده‌ها با ناپیوستگی شدید مناسب هستند. تبدیل موجک (یا تحلیل موجک) احتمالاً جدیدترین راه حل برای غلبه بر کاستی‌های傅里叶 است. در تجزیه و تحلیل موجک، یک پنجره مدوله شده کاملاً مقیاس پذیر برای حل مشکل برش سیگنال استفاده می‌شود. پنجره در امتداد

سیگنال جابجا می شود و طیف برای هر موقعیت محاسبه می شود. سپس، این فرآیند بارها با یک پنجره کوتاه تر (یا طولانی تر) برای هر چرخه جدید تکرار می شود. در پایان، نتیجه مجموعه ای از نمایش های توالی زمانی سیگنال خواهد بود که همگی با وضوح های متفاوت هستند.

**تبديل موجک پیوسته** (CWT)<sup>۱۱</sup> یک سیگنال  $f(t)$  با توجه به موجک مادر  $\varphi(t)$  توسط

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (24.7)$$

که در آن  $a$  و  $b$  به ترتیب پارامترهای مقیاس‌بندی و انتقال به طور پیوسته متغیر هستند. بنابراین، سیگنال دامنه زمانی یک بعدی (1-D)  $f(t)$  به یک فضای تابع دو بعدی (2-D) در سراسر مقیاس و انتقال توسط CWT نگاشت می‌شود. ضریب تبدیل CWT(a,b) نشان می‌دهد که چگونه سیگنال اصلی  $f(t)$  با موجک مادر مقیاس‌بندی و انتقال داده شده مطابقت دارد. رسم CWT(a,b) در برابر  $a$  و  $b$  در یک نمودار سطحی یا کانتوری که به عنوان اسکالوگرام شناخته می‌شود، معمول است.

تبديل موجک دارای خواص زیر است که در تبدیل‌های انتگرال مشترک است(؟؟):

۱. **خطی بودن:** اثبات خطی بودن تبدیل موجک پیوسته ساده است، همانطور که در

$$W[Af(x) + Bg(x)] = AW[f(x)] + BW[g(x)], \quad (25.7)$$

که در آن  $A$  و  $B$  مقادیر ثابتی هستند. با توجه به دو موجک  $\varphi_1(t)$  و  $\varphi_2(t)$ ، ترکیب خطی آنها  $A\varphi_1 + B\varphi_2$  نیز یک موجک است.

۲. **کواریانس انتقال:** تبدیل موجک پیوسته تحت انتقال از  $x$  به  $x+d$  کواریانت است.

$$W[f(x-d)] = CWT(a, b+d). \quad (26.7)$$

بنابراین، اگر  $f(x)$  متنابض باشد،  
 $f(x+n\lambda) = f(x) \quad (27.7)$

که در آن  $n$  یک عدد صحیح و  $\lambda$  طول موج است.

۳. **کواریانس تغییر مقیاس:** تبدیل موجک پیوسته تحت تغییر مقیاس با ضریب  $s > 0$  کواریانت است، یعنی

$$W[f(sx)] = \frac{1}{s} CWT(sa, sb). \quad (28.7)$$

تبديل موجک یک همتای قابل پیاده سازی دیجیتالی دارد، تبدیل موجک گسسته (DWT)<sup>۱۲</sup>. تبدیل موجک گسسته یک دنباله  $f(n)$  [نسخه نمونه برداری شده از سیگنال پیوسته  $f(t)$ ]

<sup>۱۱</sup> Continuous Wavelet Transform (CWT)

<sup>۱۲</sup> Discrete Wavelet Transform (DWT)

گسسته شده در شبکه‌ای که نمونه‌های آن به طور دلخواه هم در زمان  $b$  و هم در مقیاس  $a$  با هم فاصله دارند.

$$DWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=b}^{aL+b+1} f(n) \varphi\left(\frac{n-b}{a}\right), \quad (29.7)$$

که در آن  $\varphi(n)$  موجک مادر،  $L$  اندازه پشتیبانی  $\varphi$  است، و پارامترهای مقیاس بندی و انتقال  $a$  و  $b$  توابعی از یک پارامتر عدد صحیح  $m$  و  $a = a^m$  و  $b = na^m$  هستند. این یک مقیاس بندی هندسی ایجاد می‌کند (یعنی  $(\dots, 1/a^2, 1/a, 1/a^0, \dots, n, 2n, \dots)$  با نمونه برداری از موجک مادر به دست می‌آید). تبدیل موجک گسسته به عنوان تبدیل موجک طبیعی<sup>۱۳</sup> (WT) برای سیگنال‌های زمان گسسته شناخته می‌شود. هر دو پارامتر زمان و مقیاس زمانی گسسته هستند.

**مثال ۲:** تبدیل موجک طبیعی تابع ضربه  $\delta(t_0)$  را در نظر گیرید:

$$\begin{aligned} CWT(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_0) \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right) \end{aligned}$$

اگر موجک کلاه مکزیکی را انتخاب کنیم، در این صورت

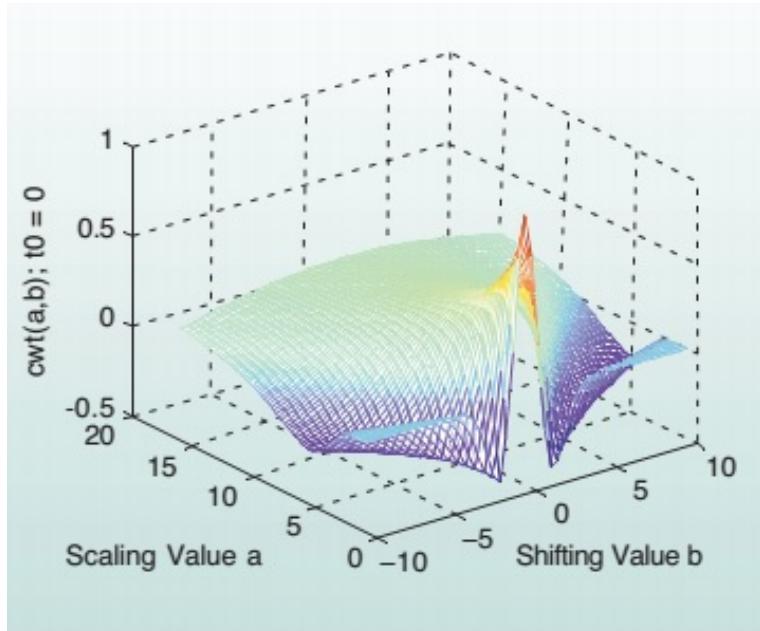
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (1-t^2)e^{-t^2/2} \\ CWT(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} (1-T^2)e^{-\frac{(t_0-b)^2}{aT^2}} \\ T &= (t_0 - b)/a, \end{aligned}$$

که می‌تواند در هر تا برای مقادیر داده شده پارامتر مقیاس  $a$  و پارامتر انتقال  $b$  ارزیابی شود. از آنجایی که  $a$  و  $b$  متفاوت هستند، می‌توان نمودار دو بعدی را تولید کرد. شکل (۴.۷) تبدیل موجک پیوسته  $\delta(t_0)$  در  $t_0 = 0$  است، که اثرات هر دو مقیاس بندی و انتقال را نشان می‌دهد. ضریب مقیاس  $a$  از ۱ تا ۱۶ و ضریب تغییر  $b$  از ۱ تا ۱۰ متغیر است.

## ۲.۷ کاربرد در الکترومغناطیس

موجک‌ها تنها چند سالی است که در الکترومغناطیس استفاده می‌شوند. تجزیه و تحلیل امواج اغلب به دو روش در الکترومغناطیس اعمال می‌شود: ۱) تجزیه و تحلیل حوزه فرکانس معادلات انتگرال از طریق ممان ( $MoM$ ) و ۲) روش حوزه زمانی برای معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت  $FDTD$ .

<sup>۱۳</sup>Natural Wavelet Transform (WT)



شکل ۴.۷: تبدیل موج پیوسته تابع  $\delta(t_0)$  در  $a = [1, 16]$  و  $b = [-10, 10]$  با  $t_0 = 0$  در درجه.

### ۱.۲.۷ حل معادله انتگرالی

معادلات انتگرال یک ابزار اساسی برای توصیف مسائل فیزیکی است. بسیاری از مسائل الکترومغناطیسی را می‌توان با معادلات انتگرال در بصورت زیر فرموله کرد:

$$(30.7) \quad Lf = g,$$

که در آن  $L$  عملگر (اپراتور) خطی،  $g$  منبع تحریک معلوم، و  $f$  تابع پاسخ مجھول است که باید تعیین شود. (به طور کلی،  $L$  ممکن است یک عملگر دیفرانسیلی-انتگرالی باشد). معادله انتگرال به روش معمول با تقسیم حوزه به  $N$  قطعه غیرهمپوشانی با طول مساوی و استفاده از روش  $MoM$  [یا یک روش گسسته سازی مرسوم مانند روش تطبیق نقاط (هممکانی) یا روش گالرکین] گسسته می‌شود. با استفاده از  $MoM$ ، پاسخ مجھول  $f$  را می‌توان بر حسب  $N$  تابع پایه معلوم  $\{f_n\}$  به صورت زیر بسط داد:

$$(31.7) \quad f = \sum_{n=1}^N a_n f_n$$

که در آن  $N$  تعداد مجھولات ضرایب  $\{a_n\}$  است. با جایگزینی (۳۱.۷) در رابطه (۳۰.۷) بدست می‌آید:

$$(32.7) \quad \sum_{n=1}^N a_n L f_n = g.$$

این معادله به تنها یکی برای تعیین  $N$  ضرایب مجھول کافی نیست. ما به مجموعه‌ای از  $N$  توابع وزن دهنی (یا آزمایشی)  $\{w_n\}$  نیاز داریم. تشکیل ضرب داخلی بین هر یک از این

عملکردها منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\langle w_m, g \rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, Lf_n \rangle \quad (33.7)$$

$$m = 1, 2, \dots, N$$

این  $N$  معادله را می‌توان بصورت ماتریس زیر نوشت:

$$[Z] [a] = [V] \quad (34.7)$$

که در آن  $N$  ماتریس ستونی  $Z_{mn} = \langle w_m, Lf_n \rangle$ ,  $V_m = \langle w_m, g \rangle$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, N$  و  $[a]$  ماتریس ستونی ضرایب بسط است. ماتریس  $[Z]$  معمولاً متراکم است، که یک اشکال مهم برای  $MoM$  است. بنابراین، استفاده از توابع پایه و وزن متعارف در  $MoM$  همیشه منجر به یک معادله ماتریس متراکم می‌شود که حل آن برای  $N$  بزرگ دشوار است. با این حال، استفاده از موجکها به عنوان توابع پایه و وزن در  $MoM$  منجر به یک ماتریس تنک می‌شود [۵۱, ۳۴.۷]. برای دستیابی به این فرض کنید  $[W]$  یک ماتریس موجک  $N \times N$  با بردارهای پایه موجک به عنوان ردیف‌های آن باشد. از آنجایی که  $[W]$  یک ماتریس متعامد است،  $[W]^t = [W]^{-1}$ . سپس، رابطه (۳۴.۷) با انجام یک تبدیل تشابه‌ی بر روی آن به حوزه موجک تبدیل می‌شود تا به دست آید

$$[W] [V] = [W] [Z] [W]^t [W] [a] \quad (35.7)$$

یا

$$[V'] = [Z'] [a'] \quad (36.7)$$

که در آن  $[a'] = [W] [a]$ ,  $[Z'] = [W] [Z] [W]^t$ ,  $[V'] = [W] [V]$  و  $t$  نمایشگر ترانسپوزه (ترانهش) است. پس از تبدیل، ماتریس  $[Z']$  تنک می‌شود و بسیاری از عناصر آن به طرز چشمگیری کوچک هستند. با انتخاب یک مقدار آستانه  $\tau$  ( $\tau = 10^{-9}$ ), می‌توانیم عناصری را در  $[Z']$  که اندازه آنها کوچکتر از  $\tau m$  است، که  $m$  بزرگترین اندازه معادله ماتریس است، کنار بگذاریم. ما از تنکی ((۳۶.۷)) استفاده کرده و از حل کننده‌های تنک برای یافتن جواب استفاده می‌کنیم. هنگامی که  $[a']$  حل شد، می‌توان ماتریس  $[a]$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$[a] = [W]^t [a'], \quad (37.7)$$

این فرآیند به طور قابل توجهی عملیات محاسباتی، زمان CPU و نیازهای ذخیره‌سازی را کاهش می‌دهد. این روش یا نوع آن با موقیت برای مسائل مختلف، از جمله مسائل پراش (پراکندگی) و آنتن [۳۱]-[۳۳]-[۵۱]-[۵۴] اعمال شده است. (بهویژه برای مسائل بزرگ الکتریکی توصیه می‌شود). صرفه جویی زیادی در عناصر ماتریس گزارش شده است. به عنوان مثال، شکل (۵.۷) تصویر مقیاس خاکستری اندازه ماتریس امپدانس مبتنی بر  $MoM$  واقعی  $[Z]$  را برای یک استوانه دایره‌ای با محیط ۱۲/۸۸ نشان می‌دهد. شکل ماهیت

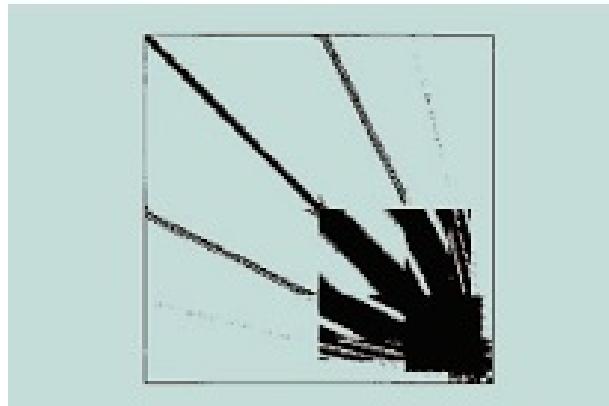
متراکم و نوسانی ماتریس را نشان می‌دهد. شکل (۴.۷) تنک بودن ماتریس را پس از اعمال تبدیل موجک نشان می‌دهد. بزرگترین عناصر بهرنگ سیاه نشان داده شده‌اند [۳۲]. برای توابع پایه  $N$ ، ماتریس سیستم (کلاسیک) پر جمعیت است و وروودی‌های  $N^3$  دارد. از آنجایی که موجک‌ها به عنوان توابع پایه فرستنده (و گیرنده) ضعیفی هستند، تزویج میدان دور آنها ضعیف است. تجزیه و تحلیل موجک تعداد عناصر ذخیره شده را به  $N \log N$  کاهش می‌دهد [۵۵]. بنابراین، با نرخ فشرده سازی بالا، زمان محاسباتی تا حد زیادی کاهش می‌یابد. این نشان می‌دهد که معادله ماتریس را می‌توان با حفظ دقت خوب به‌طور موثرتر حل کرد.



شکل ۵.۷: الگوی متراکم و نوسانی ماتریس  $\mathbb{Z}$  مبتنی بر  $MoM$  قبل از تبدیل موجک [؟].

اگرچه استفاده از موجک‌ها ممکن است پیچیدگی محاسباتی حل یک معادله انتگرال را کاهش ندهد، اما زمان محاسبات را بهمیزان قابل توجهی کاهش می‌دهد. با این حال، در انتخاب موجک‌های مناسب برای مسائل الکترومغناطیسی باید دقت زیادی به خرج داد. انتخاب یک موجک خاص همیشه باید توسط خود مسئله دیکته شود تا ابزارهایی که در حال حاضر در دسترس و مدروز هستند. از آنجایی که تعداد کمی از موجک‌ها را می‌توان به‌شكل‌های بسته بیان کرد، معمولاً به‌انتگرال‌گیری موجک‌های عددی متعددی نیاز است. همچنین، مشاهده شده است که تحلیل موجک به تعداد تکین‌ها در یک مسئله معین حساس است. هر چه تعداد تکین‌ها بیشتر باشند، روش کارایی کمتری دارد. بنابراین تحلیل موجک برای مسائل بزرگ و صاف مناسب‌تر است [۳۰].

در اینجا، ما بر حل نوع هذلولی، معادله ماسکول در حوزه زمان تمرکز می‌کنیم. چندین رویکرد برای بهبود کارایی محاسباتی مدل FDTD Yee با استفاده از تحلیل موجک اتخاذ شده است. اینها شامل تکنیک حوزه زمانی چند تفکیک‌پذیری مبتنی بر موجک Dubuc (MRTD) [۳۵] و [۳۶]، رویکرد چند تفکیک‌پذیری مبتنی بر موجک هار [۳۷]، [۳۸]،



شکل ۷.۶: تنک بودن ماتریس  $Z$  در شکل (۵.۷) پس از تبدیل موجک [۳۲].

طرح مبتنی بر موجک Daubechies [۵۶] است. راه حل ارائه شده ترکیبی از این رویکردها است.

برای محیط های همگن و همسانگرد، معادلات کرل ماکسول بقرار زیر هستند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \quad (38.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (39.7)$$

مشتقهای زمانی را می‌توان در یک تابع مقیاس‌بندی بسط داد، به عنوان مثال، تابع مقیاس‌بندی هار  $h(t)$ . همچنین می‌توان آنرا با تفاضلات محدود مرکزی مرتبه دوم تقریب زد. با استفاده از روش دوم، معادلات صریح را با توجه به زمان بدست می‌آوریم که بصورت زیر خواهد بود؛

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{E}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n-1/2} \quad (40.7)$$

$$\mathbf{H}^{n+1/2} = \mathbf{H}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^n . \quad (41.7)$$

در مرحله بعد، میدان الکترومغناطیسی به سیستمی از توابع موجک متعامد نرمالیزه بسط می‌یابد. مثلاً

$$E_x^n = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K E_{ijk}^{nx} \phi_i(x) \phi_j(y) \phi_k(z) \quad (42.7)$$

که در آن  $E_{ijk}^{nx}$  ضرایبی برای بسط میدان هستند. سایر اجزای میدان را می‌توان به طور مشابه بسط داد. شاخص‌های  $ijk$  و  $n$  شاخص‌های مکان و زمان گستته هستند، یعنی  $t = nt$ ،  $x = ixy$  و  $y = jyz$  است. تابع  $\phi_m(x)$  به صورت تعریف شده است

$$\phi_m(x) = \phi\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right) \quad (43.7)$$

که در آن  $\phi(x)$  یک تابع مقیاس‌بندی یک بعدی مانند موجک Daubechies یا Battle-Lemarie یا تابع مقیاس‌بندی را نشان می‌دهد. با جایگزینی گسترش میدان به (۴۰.۷) و (۴۱.۷) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}_w^n = \mathbf{E}_w^{n-1} + \Delta t M(\epsilon) C \left( \mathbf{H}_w^{n-1/2} \right) \quad (44.7)$$

$$\mathbf{H}_w^{n+1/2} = \mathbf{H}_w^{n-1/2} - \Delta t M(\mu) C \left( \mathbf{E}_w^n \right) \quad (45.7)$$

که در آن  $M$  و  $C$  به ترتیب نشان دهنده عملگرهای ماده و کرل هستند و  $\mathbf{E}_w$  و  $\mathbf{H}_w$  نشان دهنده بسط موجک میدان‌های الکترومغناطیسی هستند. با (۴۴.۷) و (۴۵.۷)، مراحل زیر در طول شبیه‌سازی FDTD [۵۶] اجرا می‌شود:

۱. همه عملگرهای را تنظیم کنید و تبدیل موجک را در شرایط اولیه اعمال کنید.
۲. با استفاده از (۴۴.۷) و (۴۵.۷) مقادیر میدان را محاسبه کنید.
۳. عملگرهای را برای شرایط مرز جذبی اعمال کنید.
۴. ولتاژها و جریان‌های از پیش تعریف شده را ثبت کنید.
۵. اطلاعات شبکه را در هر مرحله زمانی به روز کنید.
۶. برای تعداد گام‌های زمانی از پیش تعریف شده به مرحله ۲ برگردید.

الگوریتم FDTD مبتنی بر موجک، یا نوع آن، با تجزیه و تحلیل ریزنوار (مایکرواستریپ) و کاواک‌های تشدید تأیید شده است [۳۵]-[۳۸]. مشخص شده است که برای همه نتایج و کاربردهای عددی پایدار است. همچنین نشان داده شده است که روش FDTD مبتنی بر موجک از نظر زمان محاسباتی و حافظه کامپیوتر کارآمدتر از FDTD سنتی است.

## ۲.۲.۷ نتیجه

در این مقاله آموزش استفاده از موجک در الکترومغناطیس ارائه شده است. تبدیل موجک ثابت کرده است که در تجزیه و تحلیل طیف وسیعی از سیگنال‌ها و پدیده‌ها بسیار کارآمد و مؤثر است. این، جدایی از ویژگی‌های سیگنال، توصیف محلی دقیق را اجازه می‌دهد. تبدیل موجک نه تنها قادر به تجزیه یک سیگنال به اجزای فرکانس آن است، بلکه برخلاف تبدیل فوريه، می‌تواند یک تقسیم غیریکنواخت حوزه فرکانس را ارائه دهد. وجود انواع مختلفی از موجک‌ها به این معنی است که می‌توان آنها را به گونه‌ای طراحی کرد که برای کاربردهای خاصی مناسب باشد.

در حالی که تجزیه و تحلیل موجک موضوعی نسبتاً جدید است، اما زمینه‌ای با فعالیت و رشد فوق العاده است. موجک‌های جدید به طور منظم در حال اختراع هستند و محققان می‌توانند از میان انباری که به طور پیوسته در حال رشد هستند انتخاب کنند. تصور اینکه در حال حاضر نسل دومی از موجک‌ها وجود داشته باشد، سخت است، در حالی که بسیاری از ما هنوز در حال تلاش برای درک اصول اولیه نظریه موجک (نسل اول) هستیم.

موجک‌های نسل دوم انعطاف پذیر هستند و به راحتی با نمونه‌ها، وزن‌ها یا گوناگونی‌های نامنظم سازگار می‌شوند. در اینجا ایده انتقال و مقیاس‌بندی کنار گذاشته شده است [۵۷].



# كتاب نامه

- [1] A. Graps, "An introduction to wavelets," IEEE Comput. Sci. Eng. Mag., pp. 50–61, Summer 1995.
- [2] J.R. Williams and K. Amaratunga, "Introduction to wavelets in engineering," Int.. J. Numer. Meth. Eng., vol. 37, no. 14, pp. 2365–2388, Jul. 30, 1994.
- [3] P.M. Bentley and J.T.E. McDonnell, "Wavelet transforms: An introduction," Electr. Comm. Eng. J., pp. 175–186, Aug. 1994.
- [4] Special Issue, Proc. IEEE, vol. 84, April 1996. [
- [5] I. Daubechies, "Where do wavelets come from?—A personal point of view," Proc. IEEE, vol. 84, pp. 510–513, Apr. 1996.
- [6] M. Akay, Ed., Time Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1998.
- [7] O. Rioul and M. Vetterli, "Wavelet and signal processing," IEEE Signal Processing Mag., vol. 8, pp. 14–38, Oct. 1991.
- [8] I. Daubechies, "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 36, pp. 961–1005, Sept. 1990.
- [9] G.W. Wornell, "Emerging applications of multirate signal processing and wavelets in digital communications," Proc. IEEE, vol. 84, pp. 586–603, Apr. 1996.
- [10] R.A. Carmona, W.L. Hwang, and B. Torresani, "Characterization of signals by the ridges of their wavelet transform," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 45, pp. 2586–2590, Oct. 1997.
- [11] Z. Shi, G.W. Wei, D.J. Kouri, D.K. Hoffman, and Z. Bao, "Lagrange wavelets for signal processing," IEEE Trans. Image Processing, vol. 10, pp. 1488–1508, Oct. 2001.
- [12] Special issue on wavelets, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 38, Mar. 1992.

- [13] Special issue on wavelets, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, Dec. 1993.
- [14] C.H. Kim and R. Aggarwal, "Wavelet transforms in power systems, Part 1: General introduction to the wavelet transforms," Power Eng. J., vol. 14, pp. 81–87, Apr. 2000.
- [15] C.H. Kim and R. Aggarwal, "Wavelet transforms in power systems, Part 2: Examples of application to actual power system transients," Power Eng. J., vol. 15, pp. 193–202, Aug. 2000.
- [16] C.F. Chen and C.H. Hsiao, "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems," IEE Proc. Control Theory Appl., vol. 144, no. 1, pp. 87–94, Jan. 1997.
- [17] C.F. Chen and C.H. Hsiao, "Wavelet approach to optimizing dynamic systems," IEE Proc. Control Theory Appl., vol. 146, no. 2, pp. 213–219, Mar. 1999.
- [18] N. Sureshbabu and J.A. Farrell, "Wavelet-based system identification for nonlinear control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 44, pp. 412–417, Feb. 1999.
- [19] C. Yu and S.J. Chen, "VLSI implementation of 2-D discrete wavelet transform for real-time video signal processing," IEEE Trans. Consumer Electron., vol. 43, pp. 1270–1279, Nov. 1997.
- [20] S.J. Huang and C.T. Hsieh, "Application of continuous wavelet transform for study of voltage flicker-generated signals," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 36, pp. 925–932, Jul. 2000.
- [21] Special Issue, IEEE Eng. Med. Biol. Mag., vol. 14, Sept–Oct. 1995.
- [22] P.S. Addison, J.N. Watson, G.R. Clegg, M. Holzer, F. Sterz, and C.E. Robertson, "Evaluating arrhythmias in ECG signals using wavelet transforms," IEEE Eng. Med. Biol. Mag., vol. 19, pp. 104–109, Sept–Oct. 2000.
- [23] M. Akay, "Wavelets in biomedical engineering," Ann. Biomed. Eng., vol. 23, no. 5, pp. 531–542, 1995.
- [24] F. Laterza and G. Olmo, "Analysis of EMG signals by means of the matched wavelet transform," Elect. Lett., vol. 33, no. 5, pp. 357–359, Feb. 1997.
- [25] M. Unser and A. Aldroubi, "A review of wavelets in biomedical applications," Proc. IEEE, vol. 84, pp. 626–638, April 1996.
- [26] W.B. Richardson, "Applying wavelets to mammograms," IEEE Eng. Med. Biol. Mag., vol. 14, pp. 551–560, Sept–Oct. 1995.

- [27] L. Senhadji, G. Carrault, J.J. Bellanger, and G. Passariello, "Comparing wavelet transforms for recognizing cardiac patterns," *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.*, vol. 14, pp. 167–173, Sept.–Oct. 1995.
- [28] Z. Xiang and Y. Lu, "A study of the fast wavelet transform method in computational electromagnetics," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, pp. 3323–3326, Sept. 1998.
- [29] G. Pan, "Orthogonal wavelets with applications in electromagnetics," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, pp. 975–983, May 1996.
- [30] Y.H. Lee and Y. Lu, "Accelerating numerical electromagnetic code computation by using the wavelet transform," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, pp. 3399–3402, Sept. 1998.
- [31] J.C. Goswami, A.K. Chan, and C.K. Chui, "On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, pp. 614–622, Jun. 1995.
- [32] R.L. Wagner and W.C. Chew, "A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, pp. 802–810, Aug. 1995.
- [33] W.Y. Tam, "Weighted Haar wavelet-like basis for scattering problems," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 6, pp. 435–437, Dec. 1996.
- [34] G. Schneider, G. Oberschmidt, and A.F. Jacob, "Efficient implementation of a wavelet based Galerkin scheme," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, pp. 2298–2304, Sept. 2004.
- [35] M. Krumpholz and L.P.B. Katehi, "New prospects for time domain analysis," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 5, pp. 382–422, Nov. 1995.
- [36] M. Fujii, D. Lukashevich, I. Sakagami, and P. Russer, "Convergence of FDTD and wavelet-colocation modeling of curved dielectric interface with the effective dielectric constant technique," *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.*, vol. 13, pp. 469–471, Nov. 2003.
- [37] M. Fujii and W.J.R. Hoefer, "A three-dimensional Haar-waveletbased multiresolution analysis similar to the FDTD method— Derivation and application," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 46, pp. 2463–2475, Dec. 1998.
- [38] T. Dogaru and L. Carin, "Scattering analysis by the multiresolution time-domain method using compactly supported wavelet systems," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, pp. 1752–1760, Jul. 2002.

- [39] ] R.L. Wagner, G.P. Otto, and W.C. Chew, “Fast waveguide mode computation using wavelet-like basis functions,” IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol. 3, pp. 208–210, Jul. 1993
- [40] K.R. Shao, J.C. Yang, and J.D. Lavers, “Application of a wavelet transform in eigenvalue problems in electromagnetic field computation,” IEEE Trans. Magn., vol. 37, pp. 3507–3509, Sept. 2001.
- [41] M. Spasojevic, R. Schneider, and P.L. Levin, “On the creation of sparse boundary element matrices for two dimensional electrostatic problems using orthogonal Haar wavelets,” IEEE Trans. Dielec. Elect. Insulation, vol. 4, pp. 249–258, Jun. 1997.
- [42] P.L. Levin, M. Spasojevic, and R. Schneider, “Creation of sparse boundary element matrices for 2-D and axi-symmetric electrostatic problems using bi-orthogonal Haar wavelet,” IEEE Trans. Dielect. Elect. Insulat., vol. 5, pp. 469–484, Aug. 1998.
- [43] S. Jaffard, Y. Meyer, and R.D. Ryan, Wavelets: Tools for Science and Technology. Philadelphia, PA: SIAM, 2001, p. 29.
- [44] R.M. Rao and A.S. Bopardikar, Introduction to Theory and Applications. Reading, MA: Addison-Wesley, 1998, pp. 1–9.
- [45] Y.T. Chan, Wavelet Basics. Boston, MA: Kluwer, 1995.
- [46] J.R. Williams and K. Amaratunga, “Introduction to wavelets in engineering,” Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 37, no. 14, pp. 2365–2388, 1994.
- [47] J.G. Ren, “Wavelet methods for boundary integral equations,” Commun. Numer. Methods Eng., vol. 13, no. 5, pp. 373–385, May 1997.
- [48] G. Strang, “Wavelets,” Amer. Scientist, vol. 82, pp. 250–255, May–June 1994.
- [49] E. Aboufadel and S. Schlicker, Discovering Wavelet. New York: Wiley, 1999, pp. 66–67.
- [50] L.Z. Fang and R.L. Thews, eds., Wavelets in Physics. Singapore: World Scientific, 1998, p. 24.
- [51] Z. Xiang and Y. Lu, “An effective wavelet matrix transform approach for efficient solutions of electromagnetic integral equations,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 45, pp. 1205–1213, Aug. 1997.
- [52] H. Deng and H. Ling, “Wavelet-based preconditioner for threedimensional electromagnetic integral equations,” Electron. Lett., vol. 36, pp. 2063–2065, Dec. 2000.

- 
- [53] H. Kim and H. Ling, "On the application of fast wavelet transform to the integral-equation solution of electromagnetic scattering problems," *Micro. Opt. Tech. Lett.*, vol. 6, no. 3, pp. 168–173, Mar. 1993.
  - [54] B.Z. Steinberg and Y. Leviatan, "On the use of wavelet expansions in the method of moments," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, pp. 610–619, May 1995.
  - [55] G. Oberschmidt, G. Schneider, and A.F. Jacob, "A priori size estimation of wavelet-based Galerkin matrices," in *Conf. Digest Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves*, 2000, pp. 241–242.
  - [56] M. Werthen and I. Wolff, "A novel wavelet based time-domain simulation approach," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 6, pp. 438–440, Dec. 1996.
  - [57] W. Sweldens, "Wavelets: What next?," *Proc. IEEE*, vol. 84, pp. 680–685, Apr. 1996.



## فصل ۸

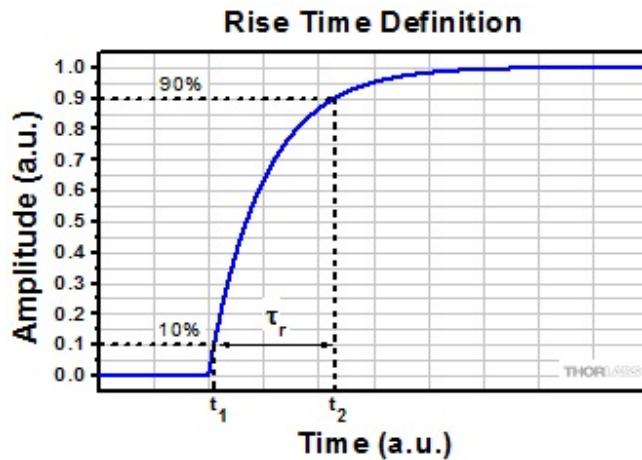
# زمان صعود و پهناى باند سه دسی بل

### ۱.۸ زمان صعود چیست؟

زمان صعود یا زمان افزایش ( $\tau_r$ ) زمان جداسازی دو نقطه در لبه افزایشی سیگنال است. نقاط اغلب  $10^\circ$  درصد و  $90^\circ$  درصد در لبه بالارونده منحنی قرار دارند، اما گاهی اوقات نقاط دیگری روی منحنی انتخاب می‌شوند. هنگامی که زمان صعود یک سیستم مشخص می‌شود، سریع ترین پاسخی را که یک سیستم می‌تواند به تغییر دامنه در سیگنال ورودی بددهد، توصیف می‌کند. اگر سیگنال ورودی شامل ویژگی‌هایی باشد که دامنه آنها سریعتر از آنچه سیستم می‌تواند پاسخ دهد تغییر می‌کند، این ویژگی‌ها در سیگنال خروجی صاف‌تر و گسترده‌تر از سیگنال ورودی خواهند بود.

### ۲.۸ چگونه می‌توان زمان افزایش یک سیستم را اندازه‌گیری کرد؟

حداقل زمان افزایش برای یک سیستم را می‌توان با استفاده از یک سیگنال ورودی پیدا کرد که ابتدا در یک دامنه ثابت و سپس به طور ناگهانی در دامنه بالاتر ثابت است. پرسش از دامنه پایین‌تر به دامنه بالاتر باید سریع‌تر از آن چیزی باشد که سیستم بتواند پاسخ دهد. این نوع سیگنال تابع پله نامیده می‌شود. لبه بالارونده سیگنال خروجی برای اندازه‌گیری زمان افزایش سیستم، همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، استفاده می‌شود.



شکل ۱.۸:

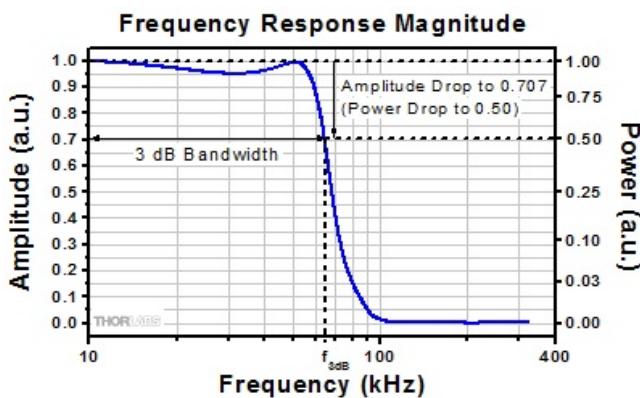
### ۳.۸ پهنهای باند ۳ دسی بل یک سیستم چقدر است؟

پهنهای باند سه دسی بل یکی از معیارهای محدوده فرکانس‌های الکتریکی است که یک سیستم پشتیبانی می‌کند. اجزای فرکانس سیگنال ورودی در این محدوده به‌طور جزئی توسط سیستم تضعیف می‌شوند، در حالی که اجزای خارج از پهنهای باند سه دسی بل به‌شدت تضعیف می‌شوند. داده‌های بزرگی پاسخ فرکانسی سیستم فاکتورهای مقیاس بندی وابسته به فرکانس بین سیگنال‌های ورودی و خروجی را مشخص می‌کند.

به عنوان مثال، شکل ۲ داده‌های بزرگی پاسخ فرکانس را برای یک فیلتر پایین‌گذر نشان می‌دهد که ورودی سیگنال ولتاژ را می‌پذیرد. سیگنال‌های ولتاژ و جریان را می‌توان از نظر دامنه یا قدرت آنها در نظر گرفت. از آنجایی که توان در یکی از این سیگنال‌ها با محدوده ولتاژ یا جریان متناسب است، ضرایب مقیاس بندی توان با محدوده فاکتورهای مقیاس دامنه برابر است.

پهنهای باند ۳ دسی بل محدوده فرکانس‌هایی را مشخص می‌کند که فاکتورهای مقیاس دامنه برای آنها  $\geq 70\%$  است. این معادل محدوده‌ای است که فاکتورهای مقیاس قدرت  $\geq 5\%$  است. از نظر دسی بل، نسبت توان  $5\%$  برابر با  $-3 \text{ dB}$  است. علامت منفی در عبارت "پهنهای باند" ذکر شده است.

محدوده اجزای سیگنال ورودی در پهنهای باند ۳ دسی بل سیستم بر سیگنال خروجی غالب است. هنگامی که پهنهای باند ۳ دسی بل یک سیستم به طور کامل با محدوده فرکانس سیگنال ورودی همپوشانی داشته باشد، سیگنال خروجی نمایش بهتری از سیگنال ورودی است.



شکل ۲.۸

## ۴.۸ چه زمانی می‌توان پاسخ فرکانسی یک سیستم را با استفاده از فیلتر پایین‌گذر $RC$ مدل کرد؟

پاسخ فرکانسی یک سیستم، تأثیری را که سیستم بر روی مقدار و فاز هر جزء فرکانس در یک سیگنال ورودی دارد، توصیف می‌کند. اجزای سیگنال ورودی اغلب به صورت سینوسی‌هایی که در فرکانس‌های ثابت مختلف نوسان می‌کنند، نشان داده می‌شوند که مطابق با نمایش‌های سری فوریه و تبدیل فوریه است. شکل ۳ یک مثال معمولی از اجزای سیگنال سینوسی ورودی و خروجی را نشان می‌دهد که در فاز و دامنه متفاوت هستند. تأثیر سیستم بر دامنه هر یک از اجزای فرکانس سیگنال ورودی با بزرگی پاسخ فرکانسی سیستم مشخص می‌شود که در بخش ۲ مورد بحث قرار گرفت.

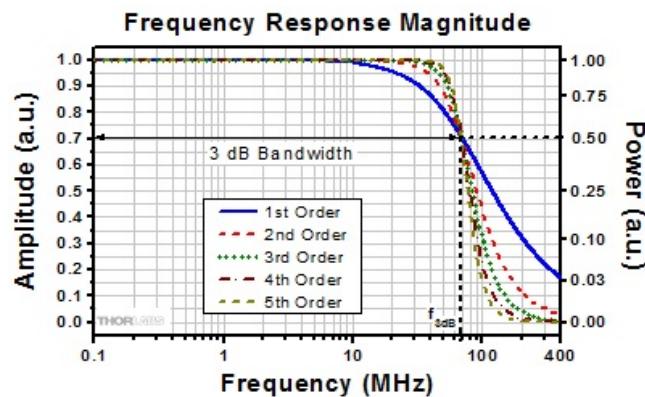
سیستم‌هایی با اندازه‌های پاسخ فرکانسی مشابه فیلترهای پایین‌گذر دارای فاکتورهای مقیاس‌بندی دامنه وابسته به فرکانس هستند که در فرکانس‌های پایین‌تر به طور قابل توجهی بزرگ‌تر از فرکانس‌های بالاتر هستند. با این نوع پاسخ، یک سیستم به شدت مؤلفه‌هایی را با فرکانس‌های بالاتر از فرکانس قطع ( $f_{dB}$ ) ضعیف می‌کند. سیگنال خروجی سیستم توسط اجزای فرکانس پایین سیگنال ورودی تسلط دارد.

یک فیلتر پایین‌گذر را می‌توان با ترتیب آن توصیف کرد، که با شبیه بزرگی پاسخ فرکانسی آن در اطراف فرکانس قطع تعیین می‌شود. هنگامی که شبیه پاسخ با نرخ تقریبی  $N - \omega$  کاهش می‌یابد، آنگاه فیلتر یک فیلتر پایین‌گذر مرتبه  $N$  است. شکل ۴ منحنی‌های مربوط به فیلترهای پایین‌گذر درجه یک تا پنجم ایده‌آل را ترسیم می‌کند که شبیه آنها به ترتیب با نرخ‌های متناسب با ۱ -  $\omega$  تا ۵ -  $\omega$  کاهش می‌یابد. فیلتر پایین‌گذر که پاسخ آن در شکل ۲ نشان داده شده است یک فیلتر پایین‌گذر مرتبه ۵ است.

فیلتر پایین‌گذر  $RC$  یک فیلتر پایین‌گذر درجه یک است، به طوری که دامنه قدر پاسخ فرکانسی آن در فرکانس  $\omega$  تقریباً  $10^{\circ}/\omega$  برابر دامنه در فرکانس  $\omega$  است. این واقعیت آزمایشگاهی معادلاتی را ارائه می‌کند که برای استفاده در سیستم‌هایی که اندازه‌های پاسخ فرکانسی آنها تقریباً مشابه فیلتر پایین‌گذر مرتبه یک است، مناسب است. هنگامی

که پاسخ یک سیستم بسیار شبیه به این پاسخ است، مدل مدار فیلتر پایین گذر  $RC$  باید تقریب معقولی از پاسخ سیستم ارائه دهد. اطلاعات بیشتر در مورد فیلترهای پایین گذر  $RC$  و روش‌هایی برای تعیین اینکه آیا رفتار سیستم مشابه این فیلتر است در کارت‌های زیر ارائه شده است.

لازم به ذکر است که پاسخ فرکانس اندازه‌گیری شده نه تنها به ابزارها و دستگاه‌های موجود در تنظیم بستگی دارد، بلکه به خواص الکتریکی کابل کشی و پاسخ‌های ابزار دقیق بازخوانی نیز بستگی دارد. یک عامل بسیار مهم در عملکرد مدار منطقی دیجیتال سرعت



شکل ۳.۸

سوئیچینگ است. زمان سوئیچینگ کوتاه‌تر اجازه می‌دهد تا عملیات بیشتری در هر ثانیه توسط کامپیوتر انجام شود. در سطح مدار، زمان‌های صعود و سقوط و زمان‌های تأخیر انتشار، معیارهای سرعت هر مدار هستند. زمان افزایش با اعمال یک ورودی بسیار ناگهانی اندازه‌گیری می‌شود که خروجی را به سطح ولتاژ بالا هدایت می‌کند. زمان صرف شده برای حرکت خروجی از  $10^{\circ}$  تا  $90^{\circ}$  درصد کل ولتاژ انتقال، زمان افزایش است. زمان سقوط زمان عبور از همین بازه ولتاژ را هنگامی که خروجی از سطح بالا به سطح پایین هدایت می‌شود، اندازه‌گیری می‌کند. زمان تأخیر انتشار، تفاوت زمانی بین انتقال ورودی و انتقال خروجی است. بین  $5^{\circ}$  و  $10^{\circ}$  درصد نقاط انتقال ورودی و خروجی اندازه‌گیری می‌شود. اگرچه بهترین معیار برای اندازه‌گیری سرعت اجرا نیست، اما سرعت ساعت اصلی یک کامپیوتر، زمان سوئیچینگ مورد نیاز مدارهای منطقی داخلی را نشان می‌دهد. برای اینکه یک عملیات منطقی در یک دوره ساعت انجام شود، مدت چرخه ساعت باید از زمان‌های تأخیر انتشار تجاوز کند که اندازه‌گیری سرعت یک مدار جداینه است. زمان افزایش با اعمال یک ورودی بسیار ناگهانی اندازه‌گیری می‌شود که خروجی را به سطح ولتاژ بالا هدایت می‌کند. زمان صرف شده برای حرکت خروجی از  $10^{\circ}$  به  $90^{\circ}$  ولتاژ انتقال کل، زمان افزایش است. زمان سقوط زمان عبور از همین بازه ولتاژ را هنگامی که خروجی از سطح بالا به سطح پایین هدایت می‌شود، اندازه‌گیری می‌کند. زمان تأخیر انتشار، تفاوت زمانی بین انتقال ورودی و انتقال خروجی است. بین  $5^{\circ}$  و  $10^{\circ}$  اندازه‌گیری می‌شود اگرچه بهترین معیار برای سرعت اجرا نیست، اما سرعت ساعت اصلی یک رایانه نشان‌دهنده زمان سوئیچینگ

مورد نیاز مدارهای منطقی داخلی است. برای اینکه یک عملیات منطقی در یک دوره ساعت انجام شود، مدت چرخه ساعت باید از زمان تأخیر انتشار و زمان افزایش مداری که عملیات را انجام می‌دهد تجاوز کند. در سال ۲۰۰۰، ساعت‌های رایانه شخصی به فرانس ۱ گیگاهرتز رسیدند که در عرض دو دهه از محدوده پایین مگاهرتز بهبود یافت.

سرعت سوئیچینگ مدار توسط ظرفیت های انگلی مرتبط با ترانزیستورها و سیم‌های اتصال محدود می‌شود. کنترل جریان جریان از طریق *MOSFET* یا *BJT* با استفاده از یک ولتاژ کنترل انجام می‌شود. با تغییر این ولتاژ، تغییر در شارژ الکترونیکی در نقاط مختلف دستگاه رخ می‌دهد. از آنجایی که ظرفیت خازنی را می‌توان به صورت تعریف کرد

$$C = \frac{dQ}{dV}$$

این اثرات بار را می‌توان توسط خازن‌های نشان داد یا مدل کرد. این خازن‌ها را انگلی می‌نامند زیرا نتایج سه‌های ساخت دستگاه‌ها هستند. علاوه بر این، اتصالات بین دستگاه‌های روی یک تراشه و بین تراشه‌ها باعث ایجاد ظرفیت خازنی می‌شود که سرعت سوئیچینگ را نیز محدود می‌کند.

به طور کلی، با کوچکتر شدن اندازه دستگاه ماسفت، ظرفیت خازن انگلی کوچکتر می‌شود و سرعت سوئیچینگ بالاتری امکان پذیر است. برای سال‌ها، با پیشرفت فناوری فوتولیتوگرافی برای اجرازه دادن به دستگاه‌های کوچک‌تر، سرعت ساعت کامپیوتر همچنان افزایش می‌یابد.

روش دیگری برای به حداقل رساندن ظرفیت های انگلی، اصول فیزیک را به جای کاهش اندازه اعمال می‌کند. ترانزیستور ناهمگونی دوقطبی از مواد متفاوت اما از نظر ساختاری مشابه، مانند ژرمانیوم و سیلیکون، برای کاهش ظرفیت انگلی استفاده می‌کند. عملکرد این دستگاه‌ها در محدوده ده‌ها گیگاهرتز تا سال ۲۰۰۰ انجام شد.

# نمايه

- فرکانس‌های نیم توان، ۷۲  
فلیمینگ، ۱۰۹  
فیلتر کردن، ۶۸  
قابلیت گزینش، ۷۲  
قانون اهم، ۱۲۵  
لد ریلی، ۸۵  
ماتریس تُنک، ۱۶۰  
مبدل امپدانس منفی، ۱۳۵  
مدل ترازهای سطح، ۹۰  
مقادیر ویژه، ۶۸  
 مقاومت منفی، ۱۲۵  
موجک شانون، ۱۶۲  
موجک مورلت، ۱۶۱  
موجک هار، ۱۶۲  
موجک‌ها، ۱۵۹  
مورلت، ۱۵۹  
مگنتواستریکشن، ۱۰۲  
 نقطه تکین، ۱۸  
نوسان‌سازها، ۶۸  
هماهنگی، ۶۸  
هیسترزیس، ۱۲۵  
واتسون، ۷۹  
وان در والس، ۹۲  
وان در پُل، ۱۳۵  
وینفرید اتو شومن، ۷۹  
پراش، ۸۵، ۳۹  
چایلد، ۱۱۲  
کرامرز-کرونيک، ۱۵۷  
کروی‌گون (اسفروئيد) پخ، ۲۰
- آلفرد هار، ۱۶۲  
اثر پلتير، ۹۶  
اساکي، ۱۳۴  
بار منفي، ۱۳۵  
بالاست، ۱۳۷  
بايس، ۱۲۹  
بر، ۷  
برق‌مالشي، ۹۰  
بي، ۷  
تابع ديديك گرين، ۳۹  
تابع کار، ۹۰  
تاکوما، ۶۷  
تبديل فوري، ۱۴۵  
تبديل موجک طبیعی، ۱۶۹  
تبديل موجک گسسته، ۱۶۸  
تفاضل محدود در حوزه، ۱۶۰  
تقويت کننده‌های هماهنگ شده، ۶۸  
تقويت کننده پarametri تبهکن، ۱۲۲  
توماس سيبك، ۹۴  
جان ويليام استورت، ۸۵  
جييمز ژول، ۱۰۲  
دوپايداري، ۱۲۵  
ديپل هرتز، ۸۰  
دييديك، ۳۶  
ديود تونلي، ۱۲۵  
ديود گان، ۱۲۵  
روش ممان، ۱۶۰  
ريجاردسون، ۱۱۱  
ضرير كيفيت، ۷۲  
عملگر، ۷۰

کوستاو می، ۸۵  
گالرکین، ۳۰