

ای نسخی نامه‌ای که تویی
ای آنسه‌ی حال شاهی که تویی
بیرون ز تونیست آنچه د عالم هست
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی

تقدیم به روان پاگ

دکتر حسن مرشد

پژوهشگر علوم نوین میکانیک و امواج در ایران



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۱۳۰۷

مسائل الکترومغناطیسی کلاسیک

شامل ۱۵۷ مسئله حل شده

نویسندهان:

Andrea Macchi, Giovanni Moruzzi, Francesco Pegoraro

به کوشش

دکتر محمد صادق ابریشمیان

استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فهرست مطالب

۱۰	پیشگفتار	۱۲
۱	مبانی الکترواستاتیک	۱۷
۱.۱	همپوشانی کره‌های باردار	۱۹
۲.۱	کره باردار با یک محفظه کروی داخلی	۲۰
۳.۱	انرژی کره باردار	۲۰
۴.۱	نوسان‌های پلاسما	۲۱
۵.۱	نوسان‌های می Mie	۲۱
۶.۱	انفجارهای کولمب	۲۱
۷.۱	انفجارهای کولمب صفحه‌ای و استوانه‌ای	۲۲
۸.۱	برخورد دو کره باردار	۲۳
۹.۱	نوسان‌های یک کره رسانا با بار مثبت	۲۳
۱۰.۱	برهمکنش بار نقطه‌ای و دوقطبی الکتریکی	۲۳
۱۱.۱	میدان الکتریکی سطح یک نیم کره باردار	۲۴
۱	ح: مبانی الکترواستاتیک	۲۵
۱.۱	همپوشانی کره‌های باردار	۲۵
۲.۱	کره باردار با یک محفظه کروی داخلی	۲۶
۳.۱	انرژی کره باردار	۲۷
۴.۱	نوسان‌های پلاسما	۲۹
۵.۱	نوسان‌های می	۳۰
۶.۱	انفجارهای کولمب	۳۲
۷.۱	انفجارهای کولمب صفحه‌ای و استوانه‌ای	۳۵
۸.۱	برخورد دو کره باردار	۳۷
۹.۱	نوسانهای در یک کره رسانا با بار مثبت	۳۹
۱۰.۱	برهمکنش بار نقطه‌ای و دوقطبی الکتریکی	۴۰
۱۱.۱	میدان الکتریکی سطح یک نیم کره باردار	۴۲

الکترواستاتیک هادی‌ها

۲

۴۵		
۴۶	کره فلزی در یک میدان خارجی	۱.۲
۴۶	انرژی الکترواستاتیک با بارهای تصویری	۲.۲
۴۷	میدان‌های تولید شده توسط چگالی بار سطحی	۳.۲
۴۷	بار نقطه‌ای مقابله‌ی کره هادی	۴.۲
۴۸	دو قطبی‌ها و کره	۵.۲
۴۸	آزمایش کولمب	۶.۲
۴۹	نگاهی بر حل یک مسئله	۷.۲
۴۹	اتصال الکتریکی کره‌ها	۸.۲
۵۰	بار درون یک پوسته هادی	۹.۲
۵۰	یک سیم باردار در مقابله‌ی کره استوانه‌ای	۱۰.۲
۵۱	سطوح هادی نیم کره	۱۱.۲
۵۲	نیروی بین صفحه‌های یک خازن	۱۲.۲
۵۲	فشار الکترواستاتیک روی یک کره هادی	۱۳.۲
۵۳	هدایت بیضی‌گون کشیده	۱۴.۲

ح: الکترواستاتیک هادی‌های

۲

۵۵		
۵۵	کره فلزی در یک میدان خارجی	۱.۲
۵۶	انرژی الکترواستاتیک با بارهای تصویری	۲.۲
۶۰	میدان‌های تولید شده توسط چگالی بارهای سطحی	۳.۲
۶۱	بار نقطه‌ای مقابله‌ی کره هادی	۴.۲
۶۳	دو قطبی‌ها و کره	۵.۲
۶۵	آزمایش کولمب	۶.۲
۶۸	نگاهی بر حل یک مسئله	۷.۲
۷۰	اتصال الکتریکی کره‌ها	۸.۲
۷۱	بار درون یک پوسته هادی	۹.۲
۷۲	یک سیم باردار در مقابله‌ی کره استوانه‌ای	۱۰.۲
۷۶	سطوح هادی نیم کره	۱۱.۲
۷۷	نیروی بین صفحه‌های یک خازن	۱۲.۲
۷۸	فشار الکترواستاتیک روی یک کره هادی	۱۳.۲
۸۰	هدایت بیضی‌گون کشیده	۱۴.۲

الکترواستاتیک محیط دی‌الکتریک

۳

۸۳		
۸۵	دی‌الکتریک مصنوعی	۱.۳
۸۵	بار نقطه‌ای مقابله‌ی نیم فضای دی‌الکتریک	۲.۳
۸۵	کره قطبی شده الکتریکی	۳.۳
۸۶	کره دی‌الکتریک در میدان خارجی	۴.۳
۸۶	شکست میدان الکتریکی در مرز دی‌الکتریک	۵.۳

۸۷	نیروی تماس بین یک تیغه رسانا و یک نیمه فضای دیالکتریک ..	۶.۳
۸۸	یک کره رسانا بین دو دیالکتریک ..	۷.۳
۸۸	اندازه‌گیری ثابت دیالکتریک مایعات ..	۸.۳
۸۹	استوانه رسانا در مایع دیالکتریک ..	۹.۳
۸۹	یک تیغه دیالکتریک در تماس با یک هادی باردار ..	۱۰.۳
۹۰	استوانه قطبی شده عرضی ..	۱۱.۳

ح: الکترواستاتیک محیط دیالکتریک

۳

۹۱	دیالکتریک مصنوعی ..	۱.۳
۹۲	بار نقطه‌ای مقابله‌ای نیم فضای دیالکتریک ..	۲.۳
۹۴	کره قطبی شده الکتریکی ..	۳.۳
۹۵	کره دیالکتریک در میدان خارجی ..	۴.۳
۹۷	شکست میدان الکتریکی در مرز دیالکتریک ..	۵.۳
۹۸	نیروی تماس بین یک تیغه رسانا و یک نیمه فضای دیالکتریک ..	۶.۳
۱۰۲	یک کره رسانا بین دو دیالکتریک ..	۷.۳
۱۰۴	اندازه‌گیری ثابت دیالکتریک مایعات ..	۸.۳
۱۰۶	استوانه رسانا در مایع دیالکتریک ..	۹.۳
۱۰۷	یک تیغه دیالکتریک در تماس با یک هادی باردار ..	۱۰.۳
۱۰۹	استوانه قطبی شده عرضی ..	۱۱.۳

جريان الکتریکی

۴

۱۱۳	آزمایش تولمن-استوارت ..	۱.۴
۱۱۵	زمان آرامش بار در یک کره هادی ..	۲.۴
۱۱۶	مقاومت کابل هم محور ..	۳.۴
۱۱۶	مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (I) ..	۴.۴
۱۱۶	مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (II) ..	۵.۴
۱۱۷	اثرات مقاومت غیر یکنواخت ..	۶.۴
۱۱۸	میرائی بار در خازن کروی تلفاتی ..	۷.۴
۱۱۸	تخلیه سد دیالکتریک ..	۸.۴
۱۱۹	توزيع بار در یک هادی استوانه‌ای بلند ..	۹.۴
۱۱۹	مقاومت نردنی بی‌نهایت ..	۱۰.۴

ح: جریان الکتریکی

۴

۱۲۱	آزمایش تولمن-استوارت ..	۱.۴
۱۲۲	زمان آرامش بار در یک کره هادی ..	۲.۴
۱۲۴	مقاومت کابل هم محور ..	۳.۴
۱۲۵	مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (I) ..	۴.۴
۱۲۶	مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (II) ..	۵.۴

۱۲۸	اثر مقاومت غیر یکنواخت	۶.۴
۱۲۹	میرائی بار در خازن کروی تلفاتی	۷.۴
۱۳۰	تخلیه سد دی الکتریک	۸.۴
۱۳۱	توزیع بار در یک هادی استوانه‌ای بلند	۹.۴
۱۳۴	مقاومت نردبانی بی‌نهایت	۱۰.۴

۱۳۵	مغناطیس ساکن	۵
۱۳۹	آزمایش رولند	۱.۵
۱۳۹	اثر تنگنا در سیم استوانه‌ای	۲.۵
۱۴۰	دو قطبی مغناطیسی در جلو یک نیم فضای مغناطیسی	۳.۵
۱۴۰	شناوری مغناطیسی	۴.۵
۱۴۱	استوانه مغناطیسی یکنواخت	۵.۵
۱۴۱	ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متقطع	۶.۵
۱۴۲	هادی استوانه‌ای با یک حفره خارج از مرکز	۷.۵
۱۴۲	هادی استوانه‌ای در میدان مغناطیسی	۸.۵
۱۴۳	خازن استوانه‌ای چرخان	۹.۵
۱۴۳	کره‌های مغناطیسی	۱۰.۵

۱۴۵	ح: مغناطیس ساکن	۵
۱۴۵	آزمایش رولند	۱.۵
۱۴۶	اثر تنگنا در یک سیم استوانه‌ای	۲.۵
۱۴۸	دو قطبی مغناطیسی در جلو یک نیم فضای مغناطیسی	۳.۵
۱۵۱	شناوری مغناطیسی	۴.۵
۱۵۳	استوانه مغناطیسی یکنواخت	۵.۵
۱۵۴	ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متقطع	۶.۵
۱۵۶	هادی استوانه‌ای با یک حفره خارج از مرکز	۷.۵
۱۵۷	هادی استوانه‌ای در میدان مغناطیسی	۸.۵
۱۵۸	خازن استوانه‌ای چرخان	۹.۵
۱۵۹	کره‌های مغناطیسی	۱۰.۵

۱۶۲	القای مغناطیسی و میدانهای متغیر با زمان	۶
۱۶۴	مولد موج مربعی	۱.۶
۱۶۵	سیم پیچ متحرک در میدان مغناطیسی ناهمگن	۲.۶
۱۶۵	مداری با قطعات "سقوط آزاد"	۳.۶
۱۶۶	متصل به ماهواره	۴.۶
۱۶۷	جريان پیچشی در سیم‌لوله	۵.۶
۱۶۷	پارادوکس فاینمن	۶.۶
۱۶۸	جريان‌های الکتریکی القایی در اقیانوس	۷.۶

۱۶۸	یک کره مغناطیسی شده به عنوان موتور تک قطبی	۸.۶
۱۶۹	گرمایش القایی	۹.۶
۱۶۹	استوانه مغناطیسی به عنوان مولد DC	۱۰.۶
۱۷۰	دیسک فاراده و مولد خودپایدار	۱۱.۶
۱۷۱	القای متقابل بین دو حلقه مدور	۱۲.۶
۱۷۱	القای متقابل بین سیم‌لوله و حلقه	۱۳.۶
۱۷۲	اثر پوستی و اندوکتانس گردابی در سیم اهمی	۱۴.۶
۱۷۲	فشار مغناطیسی و اثر پینچ برای جریان سطحی	۱۵.۶
۱۷۳	فشار مغناطیسی بر یک سیم‌لوله	۱۶.۶
۱۷۳	موتور هموپولار	۱۷.۶

۱۷۵	ح: القای مغناطیسی و میدانهای متغیر با زمان	۶
۱۷۵	مولد موج مربعی	۱.۶
۱۷۷	سیم‌پیچ متحرک در میدان مغناطیسی ناهمگن	۲.۶
۱۷۸	مداری با قطعات "سقوط آزاد"	۳.۶
۱۸۰	سیم متصل به ماهاواره	۴.۶
۱۸۱	جریان پیچشی در سیم‌لوله	۵.۶
۱۸۵	پارادوکس فاینمن	۶.۶
۱۸۷	جریان‌های الکتریکی القای در اقیانوس	۷.۶
۱۸۸	یک کره مغناطیس شده به عنوان موتور تک قطبی	۸.۶
۱۹۰	گرمایش القائی	۹.۶
۱۹۳	استوانه مغناطیسی به عنوان مولد DC	۱۰.۶
۱۹۵	دیسک فاراده و مولد خودپایدار	۱۱.۶
۱۹۶	القای متقابل بین دو حلقه مدور	۱۲.۶
۱۹۸	القای متقابل بین سیم‌لوله و حلقه	۱۳.۶
۱۹۹	اثر پوستی و اندوکتانس متقابل گردابی در سیم اهمی	۱۴.۶
۲۰۳	فشار مغناطیسی و اثر انقباضی برای جریان سطحی	۱۵.۶
۲۰۶	فشار مغناطیسی بر یک سیم‌لوله	۱۶.۶
۲۰۸	موتور هموپولار	۱۷.۶

۲۱۳	نوسان ساز الکترومغناطیسی و انتشار امواج	۷
۲۱۳	نوسانگر RLC تزویجی (۱)	۱.۷
۲۱۴	نوسانگر RLC تزویجی (۲)	۲.۷
۲۱۴	نوسانگر RLC تزویجی (۳)	۳.۷
۲۱۵	شبکه نرdbانی LC	۴.۷
۲۱۵	شبکه نرdbانی CL	۵.۷
۲۱۶	خط ارتباط بدون پاشندگی	۶.۷
۲۱۷	جایگزین شبکه نرdbانی LC	۷.۷

۲۱۸	رزو نانس‌ها در یک شبکه نرdbانی LC	۸.۷
۲۱۸	تشدید سیکلوترون (۱)	۹.۷
۲۱۹	تشدید سیکلوترون (۲)	۱۰.۷
۲۱۹	بسته موج شبه گاوی	۱۱.۷
۲۲۰	بسته موج و خط انتقال با پاشندگی ضعیف	۱۲.۷

ح: نوسان‌ساز الکترومغناطیسی و انتشار امواج		
۲۲۳	نوسانگر RLC تزویجی (۱)	۱.۷
۲۲۵	نوسانگر RLC تزویجی (۲)	۲.۷
۲۲۶	نوسانگر RLC تزویجی (۳)	۳.۷
۲۲۸	شبکه نرdbانی LC	۴.۷
۲۳۱	شبکه نرdbانی CL	۵.۷
۲۳۳	خط ارتباط بدون پاشندگی	۶.۷
۲۳۵	جایگزین شبکه نرdbانی LC	۷.۷
۲۳۷	رزو نانس‌ها در یک شبکه نرdbانی LC	۸.۷
۲۳۹	تشدید سیکلوترون (۱)	۹.۷
۲۴۱	تشدید سیکلوترون (۲)	۱۰.۷
۲۴۳	بسته موج شبه گاوی	۱۱.۷
۲۴۳	بسته موج و خط انتقال با پاشندگی ضعیف	۱۲.۷

معادلات ماکسول و قوانین بقاء		
۲۴۷	بردار پواین‌تینگ در سیم اهمی	۱.۸
۲۴۸	بردار پواین‌تینگ در خازن	۲.۸
۲۴۸	قضیه پواین‌تینک در یک سیم‌لوله	۳.۸
۲۴۹	بردار پواین‌تینگ در یک خازن با صفحه‌های متحرک	۴.۸
۲۵۰	فشار تابشی روی یک آینه کامل	۵.۸
۲۵۰	پرتو گاوی	۶.۸
۲۵۱	شدت و تکانه زاویه‌ای یک پرتو نور	۷.۸
۲۵۲	پارادوکس فاینمن حل شد	۸.۸
۲۵۳	تکقطبی مغناطیسی	۹.۸

ح: معادلات ماکسول و قوانین بقاء		
۲۵۵	بردار پواین‌تینگ در سیم اهمی	۱.۸
۲۵۵	بردار پواین‌تینگ در خازن	۲.۸
۲۵۷	قضیه پواین‌تینگ در یک سیم‌لوله	۳.۸
۲۵۸	بردار پواین‌تینگ در یک خازن با صفحه‌های متحرک	۴.۸
۲۵۹	فشار تابشی روی یک آینه کامل	۵.۸
۲۶۱	بردار پواین‌تینگ برای پرتو نور گاوی	۶.۸

۲۶۶	شدت و تکانه زاویه‌ای یک پرتو نور	۷.۸
۲۶۷	پارادوکس فاینمن حل شد	۸.۸
۲۷۰	تک قطبی مغناطیسی	۹.۸
۲۷۳	تبديل نسبیتی میدان‌ها	۹
۲۷۴	میدان‌های سیم حامل جریان	۱.۹
۲۷۴	میدان‌های یک خازن مسطح	۲.۹
۲۷۵	میدان‌های یک سیم‌لوله	۳.۹
۲۷۵	چهار پتانسیل یک موج مسطح	۴.۹
۲۷۶	نیروی وارد بر یک تک‌قطبی مغناطیسی	۵.۹
۲۷۶	بازتاب از یک آینه متحرک	۶.۹
۲۷۷	برخورد مایل روی آینه متحرک	۷.۹
۲۷۷	تغییر شکل پالس توسط آینه متحرک	۸.۹
۲۷۸	شرایط مرزی روی آینه متحرک	۹.۹
۲۷۹	ح: تبدیل نسبیتی میدان‌ها	۹
۲۷۹	میدان‌های سیم حامل جریان	۱.۹
۲۸۲	میدان‌های یک خازن مسطح	۲.۹
۲۸۳	میدان‌های یک سیم‌لوله	۳.۹
۲۸۵	چهار پتانسیل یک موج مسطح	۴.۹
۲۸۶	نیروی وارد بر یک تک‌قطبی مغناطیسی	۵.۹
۲۸۷	بازتاب از یک آینه متحرک	۶.۹
۲۹۰	برخورد مایل روی آینه متحرک	۷.۹
۲۹۱	تغییر شکل پالس توسط آینه متحرک	۸.۹
۲۹۳	شرایط مرزی روی آینه متحرک	۹.۹
۲۹۵	تابش و پراکندگی	۱۰
۲۹۵	تابش سیکلوترون	۱.۱۰
۲۹۶	فروپاشی اتمی	۲.۱۰
۲۹۶	میرایی تابشی الکترون مقید الاستیک	۳.۱۰
۲۹۷	تابش ساطع شده از بارهای در حال گردش	۴.۱۰
۲۹۷	سرعت چرخش پایین و میدان مغناطیسی یک تپ اختر	۵.۱۰
۲۹۸	آنتن دوقطبی خمیده	۶.۱۰
۲۹۹	آنتن گیرنده حلقوی	۷.۱۰
۳۰۰	پراکندگی امواج توسط ذره قطبی شده	۸.۱۰
۳۰۰	اثرات قطبش بر پراکندگی تامسون	۹.۱۰
۳۰۱	پراکندگی و تداخل	۱۰.۱۰
۳۰۱	۱۱.۱۰ ضربان‌های نوری و "اثر فانوس دریایی"	۱۱.۱۰

۱۲.۱۰ نیروی اصطکاک تشعشعی ۳۰۲

۳۰۵	ح: تابش و پراکندگی	۱۰
۳۰۵	تابش سیکلوترون	۱.۱۰
۳۰۷	فروپاشی اتمی	۲.۱۰
۳۰۸	میرائی تابشی الکترون مقید الاستیک	۳.۱۰
۳۱۰	تابش ساطع شده از بارهای در حال گردش	۴.۱۰
۳۱۲	سرعت چرخش پائین و میدان مغناطیسی یک تپ اختر	۵.۱۰
۳۱۳	آنتن دوقطبی خمیده	۶.۱۰
۳۱۴	آنتن گیرنده حلقوی	۷.۱۰
۳۱۵	قطبیش امواج پراکنده	۸.۱۰
۳۱۶	اثرات قطبیش بر پراکندگی تامسون	۹.۱۰
۳۱۹	پراکندگی و تداخل	۱۰.۱۰
۳۲۰	ضربان‌های نوری و "اثر فانوس دریائی"	۱۱.۱۰
۳۲۱	نیروی اصطکاک تشعشعی	۱۲.۱۰

۳۲۳	امواج الکترومغناطیسی در مواد	۱۱
۳۲۴	انتشار موج در یک هادی در فرکانس‌های بالا و پائین	۱.۱۱
۳۲۴	چگالی انرژی در یک گاز الکترونی آزاد	۲.۱۱
۳۲۵	امواج طولی	۳.۱۱
۳۲۵	انتقال و بازتاب توسط یک فویل نازک رسانا	۴.۱۱
۳۲۶	پوشش ضد انعکاس	۵.۱۱
۳۲۷	دوشکستی و صفحه‌موج	۶.۱۱
۳۲۸	شکست مضاعف مغناطیسی و اثر فاراده	۷.۱۱
۳۲۸	امواج ویسلر	۸.۱۱
۳۲۹	انتشار موج در "زوج" پلاسما	۹.۱۱
۳۲۹	امواج سطحی	۱۰.۱۱
۳۳۱	رزونانس می و یک "فراماده پلاسمونیک"	۱۱.۱۱

۳۳۴	ح: امواج الکترومغناطیسی در مواد	۱۱
۳۳۳	انتشار موج در یک هادی در فرکانس‌های بالا و پائین	۱.۱۱
۳۳۵	چگالی انرژی در یک گاز الکترونی آزاد	۲.۱۱
۳۳۶	امواج طولی	۳.۱۱
۳۳۷	انتقال و بازتاب توسط یک فویل نازک رسانا	۴.۱۱
۳۴۰	پوشش ضد انعکاس	۵.۱۱
۳۴۱	دوشکستی و صفحه‌موج	۶.۱۱
۳۴۲	شکست مضاعف مغناطیسی و اثر فاراده	۷.۱۱
۳۴۳	امواج ویسلر	۸.۱۱

۳۴۴ ۹.۱۱ انتشار موج در "زوج" پلاسما	
۳۴۵ ۱۰.۱۱ امواج سطحی	
۳۴۷ ۱۱.۱۱ رزونانس می و یک "فراماده پلاسمونیک"	
خطوط ارتباط، موجبرها، محفظه‌های رزونانسی	
۳۴۹ ۱۲	
۳۴۹ ۱.۱۲ کابل هم محور	
۳۵۰ ۲.۱۲ خطوط انتقال توان الکتریکی	
۳۵۱ ۳.۱۲ مودهای TEM و TM در یک موجبر "باز"	
۳۵۱ ۴.۱۲ موجبرهای مربعی و مثلثی	
۳۵۲ ۵.۱۲ مودهای موجبر به عنوان یک اثر تداخلی	
۳۵۳ ۶.۱۲ انتشار در فیبر نوری	
۳۵۴ ۷.۱۲ انتشار موج در یک موجبر پُر شده	
۳۵۴ ۸.۱۲ رزونانس شومان	
ح: خطوط ارتباط، موجبرها، محفظه‌های رزونانسی	
۳۵۷ ۱۲	
۳۵۷ ۱.۱۲ کابل هم محور	
۳۵۹ ۲.۱۲ خطوط انتقال توان الکتریکی	
۳۶۱ ۳.۱۲ مودهای TEM و TM در یک موجبر "باز"	
۳۶۲ ۴.۱۲ موجبرهای مربعی و مثلثی	
۳۶۴ ۵.۱۲ مودهای موجبر به عنوان یک اثر تداخلی	
۳۶۶ ۶.۱۲ انتشار در فیبر نوری	
۳۶۷ ۷.۱۲ انتشار موج در یک موجبر پُر شده	
۳۶۹ ۸.۱۲ رزونانس شومان	
مسائل اضافی	
۳۷۱ ۱۳	
۳۷۱ ۱.۱۳ استوانه قطبی شده الکتریکی و مغناطیسی	
۳۷۲ ۲.۱۳ نوسان‌های ملکول سه اتمی	
۳۷۲ ۳.۱۳ امپدانس یک شبکه نردبانی بینهایت	
۳۷۴ ۴.۱۳ تخلیه یک خازن استوانه‌ای	
۳۷۴ ۵.۱۳ میدان‌های ایجاد شده توسط منابع متناوب سطحی	
۳۷۵ ۶.۱۳ شار انرژی و تکانه نزدیک به یک آینه کامل	
۳۷۵ ۷.۱۳ خنک کننده لیزری آینه	
۳۷۶ ۸.۱۳ فشار تابشی روی یک فویل نازک	
۳۷۶ ۹.۱۳ پراکندگی تامسون در حضور میدان مغناطیسی	
۳۷۷ ۱۰.۱۳ تابش موج ساز قوی	
۳۷۷ ۱۱.۱۳ گشتاور الکترومغناطیسی در یک کره رسانا	
۳۷۷ ۱۲.۱۳ امواج سطحی در یک فویل نازک	
۳۷۸ ۱۳.۱۳ اثر فیزو	

۳۷۹	تبدیل لورنتس برای امواج طولی	۱۴.۱۳
۳۷۹	تبدیل لورنتس برای کابل انتقال	۱۵.۱۳
۳۸۰	موج بر با انتهای متحرک	۱۶.۱۳
۳۸۱	موج الکترومغناطیسی قوی "نسبیتی"	۱۷.۱۳
۳۸۱	جريان الکتریکی در یک سیم‌لوله	۱۸.۱۳
۳۸۲	حفره اپتومکانیکی	۱۹.۱۳
۳۸۳	فشار تشعشع بر یک محیط جاذب	۲۰.۱۳
۳۸۳	پراکندگی از یک کره هادی کامل	۲۱.۱۳
۳۸۳	تشعشع و پراکندگی از یک مولکول خطی	۲۲.۱۳
۳۸۴	نیروی کششی تشعشع	۲۳.۱۳

۱۳- ح: مسائل اضافی

۳۸۷	استوانه قطبی شده الکتریکی و مغناطیسی	۱.۱۳
۳۹۰	نوسان‌های ملکول سه اتمی	۲.۱۳
۳۹۱	امپدانس یک شبکه نردبانی بینهایت	۳.۱۳
۳۹۴	تخلیه یک خازن استوانه‌ای	۴.۱۳
۳۹۶	میدان‌های ایجاد شده توسط منابع متنابوب سطحی	۵.۱۳
۳۹۹	شار انرژی و تکانه نزدیک به یک آینه کامل	۶.۱۳
۴۰۰	خنک کننده لیزری آینه	۷.۱۳
۴۰۱	فشار تابشی روی یک فویل نازک	۸.۱۳
۴۰۴	پراکندگی تامسون در حضور میدان مغناطیسی	۹.۱۳
۴۰۴	تابش موج‌ساز قوی	۱۰.۱۳
۴۰۶	گشتاور الکترومغناطیسی در یک کره رسانا	۱۱.۱۳
۴۰۷	امواج سطحی در یک فویل نازک	۱۲.۱۳
۴۰۹	اثر فیزو	۱۳.۱۳
۴۱۰	تبدیل لورنتس برای امواج طولی	۱۴.۱۳
۴۱۲	تبدیل لورنتس برای کابل انتقال	۱۵.۱۳
۴۱۴	موج بر با انتهای متحرک	۱۶.۱۳
۴۱۵	موج الکترومغناطیسی قوی "نسبیتی"	۱۷.۱۳
۴۱۷	جريان الکتریکی در یک سیم‌لوله	۱۸.۱۳
۴۱۸	حفره اپتومکانیکی	۱۹.۱۳
۴۲۰	فشار تابشی بر یک محیط جاذب	۲۰.۱۳
۴۲۱	پراکندگی از کره هادی کامل	۲۱.۱۳
۴۲۲	تشعشع و پراکندگی از مولگول خطی	۲۲.۱۳
۴۲۵	نیروی کششی تشعشع	۲۳.۱۳

آ- چند رابطه و بردار مفید

۴۲۹ آ- گرادیان، کرل ، دیورژانس و لاپلاسین

۴۲۹ ۱۰۰. آ-

فهرست مطالب

۱۱

- | | | |
|-----|-------|--------------------|
| ۴۳۱ | | ۱. آتحادهای برداری |
| ۴۳۲ | | نمایه |

۱۰. پیشگفتار

این کتاب شامل ۱۵۷ مسئله در الکترومغناطیس کلاسیک است که از درس سال دوم نویسنده‌گان به دانشجویان فیزیک دانشگاه پیزا در سال های ۲۰۰۲ تا ۲۰۱۷ نشات گرفته است. متون درسی ما اصول اولیه الکترومغناطیس کلاسیک را بهروشی نسبتاً کامل پوشش می‌دهد. در بخش اول، الکترواستاتیک و مغناطیس استاتیک، جریان‌های الکتریکی و القای مغناطیسی را ارائه و مجموعه کاملی از معادلات ماکسول را معرفی می‌کنیم. بخش دوم به خواص بقای معادلات ماکسول، نظریه کلاسیک تابش، تبدیل نسبیتی میدان‌ها، و انتشار امواج الکترومغناطیسی در ماده یا در طول خطوط انتقال و موجبرها اختصاص دارد. بهطور معمول، مجموع کلاس‌های سخنرانی و تمرین به ترتیب حدود ۹۰ و ۴۵ ساعت است. بیشتر مسائل این کتاب برای امتحانات میانی و نهایی تهیه شده بود. در آزمون امتحانی از دانش آموز خواسته می‌شود که دو یا سه مسئله را در ۳ ساعت حل کند. مسائل پیچیده‌تر در طول کلاس‌ها به تفصیل ارائه و مورد بحث قرار می‌گیرند.

پیش نیاز برای این مسائل، گذراندن موفقیت آمیز سال اول تحصیلات کارشناسی در فیزیک، ریاضیات یا مهندسی، کسب دانش خوب از مکانیک کلاسیک ابتدایی، جبر خطی، حساب دیفرانسیل برای توابع یک متغیره است. بدیهی است که الکترومغناطیس کلاسیک به حساب دیفرانسیل شامل توابع بیش از یک متغیر نیاز دارد. این، در برنامه کارشناسی ما، در دوره‌های موازی سال دوم تدریس می‌شود. با این حال، معمولاً مفاهیم اساسی موردنیاز برای نوشتمن معادلات ماکسول به شکل دیفرانسیل در درس الکترومغناطیس به ساده‌ترین شکل ممکن معرفی و مورد بحث قرار می‌گیرند. در واقع، در حالی که بهروش‌های ریاضی بالاتر به عنوان پیش نیاز لازم نداریم، درس الکترومغناطیس احتمالاً جایی است که دانش آموزان برای اولین بار با موضوعاتی مانند سری فوریه مواجه می‌شوند و حداقل بهروش ابتکاری تبدیل می‌شوند.

در رویکرد ما به تدریس، متقاعد شده‌ایم که بررسی توانایی حل یک مسئله بهترین راه یا شاید تنها راه برای تأیید درک نظریه است. در عین حال، مسائل نمونه‌هایی از کاربرد نظریه را در دنیای واقعی ارائه می‌دهند. به همین دلیل، هر مسئله را با عنوانی ارائه می‌کنیم که اغلب ارتباط آن را با حوزه‌های مختلف فیزیک یا فناوری برجسته می‌کند، به‌طوری که این کتاب همچنین بررسی اکتشافات تاریخی و کاربردهای الکترومغناطیس کلاسیک است. ضمناً به‌طور خاص سعی کردیم نمونه‌هایی را از زمینه‌های مختلف مانند اخترفیزیک یا ژئوفیزیک انتخاب کنیم و موضوعاتی را که به‌دلایلی به‌نظر می‌رسد در برخی کتابهای در نظر گرفته نمی‌شوند؛ مانند فشار تشعشع یا موتورها و ژنراتورهای همقطبی و تک قطبی را در نظر بگیریم. همچنین چند نمونه با الهام از حوزه‌های تحقیقاتی جدید و مدرن، از جمله، فرامواد نوری، پلاسمونیک‌ها، لیزرهای فوق العاده اضافه کردیم. این موضوعات اخیر نشان می‌دهد که امروزه، بیش از ۱۵۰ سال پس از معادلات ماکسول، الکترومغناطیس کلاسیک هنوز یک حوزه حیاتی است که به‌طور مداوم نیاز به درک و بازنگری در جنبه‌های عمیق‌تر آن دارد. مطمئناً نمی‌توان این موارد را در یک دوره درسی سال دوم به تفصیل پوشش داد، اما مجموعه‌ای از مثال‌ها (با حذف پیچیدگی‌های ریاضی غیر ضروری) می‌تواند به عنوان مقدمه‌ای مفید برای آنها باشد. در مسائل، دانش آموزان

می‌توانند یک نگاه اول به موضوعات «پیشرفته» به عنوان مثال، مانند تکانه زاویه‌ای نور، امواج طولی و پلاسمون‌های سطحی، اصول خنک‌کننده لیزری و اپتومکانیک، یا موضوع دیرینه اصطکاک تشعشعی را می‌توان نام برد. در عین حال، آن‌ها می‌توانند مفاهیم اساسی را پیدا کنند، به عنوان مثال، نحوه عملکرد یک فیبر نوری، نام نمایشگر پلاسما از کجا گرفته شده است، یا اصول موتورهای الکتریکی خنده‌دار خانگی که در یوتیوب دیده می‌شود.

سازماندهی کتاب از حداقل دو منبع الهام گرفته شده است، کتاب مسائل منتخب در فیزیک نظری (1992 ETS Pisa، بهایتالیایی؛ 1994 World Scientific به زبان انگلیسی) توسط معلمان و همکاران سابق ما A. Di Giacomo, G. Paffuti and P. Rossi و آرشیو بزرگ نمونه‌های فیزیک و سایر متنوع آموزشی توسط پروفسور کی. مکدونالد (<http://puhep1.princeton.edu/7Emcdonald/examples/>)

که احتمالاً گسترده‌ترین منبع مسائل و نمونه‌های پیشرفته در الکترومغناطیس کلاسیک را شامل می‌شود. هر دوی این مجموعه‌ها برای دانشجویان مقاطع تحصیلات تکمیلی و کارشناسی ارشد طراحی شده‌اند، در حالی که هدف ما ارائه مجموعه‌ای از مسائل و نمونه‌هایی با محتوای فیزیکی ارزشمند، اما در دسترس در مقطع کارشناسی است، هرچند که امیدوارم مرجع مفیدی برای دانشجوی کارشناسی ارشد نیز باشد.

به دلیل پیشینه علمی ما، الهامات ما بیشتر از فیزیک ماده متراکم، مواد و پلاسما و همچنین از اپتیک، فیزیک اتمی و برهمکنش‌های لیزر و ماده می‌آید. می‌توان ادعا کرد که اکثر این موضوعات اساساً به دانش مکانیک کوانتمومی نیاز دارند. با این حال، بسیاری از پدیده‌ها و کاربردها را می‌توان در یک چارچوب کلاسیک، حداقل به صورت پدیدارشناسانه معرفی کرد. علاوه بر این، از آنجایی که الکترومغناطیس کلاسیک اولین نظریه میدانی است که دانشجویان با آن مواجه می‌شوند، مطالعه دقیق خواص آن (با توجه به قوانین بقاء، روابط تقارن و کوواریانس نسبیتی) آموزش مهمی برای مطالعه مکانیک موجی و نظریه‌های میدان کوانتمومی فراهم می‌کند، که دانش آموزان در سال‌های بعدی تحصیل فیزیک با آن مواجه خواهند شد.

در این کتاب (و همچنین در تهیه تست‌ها و امتحانات) سعی کردیم تا حد امکان مسائل اصلی را معرفی کنیم تا معتقد باشیم نسبت به کتاب‌های درسی قبلی بدرجه جدیدی از تازگی رسیده‌ایم. البته، این کتاب نیز شامل مسائل و نمونه‌هایی است که در ادبیات موجود می‌توان یافت: این امر اجتناب ناپذیر است، زیرا بسیاری از مسائل الکترومغناطیس کلاسیک، در واقع، کلاسیک هستند! در هر صورت راه حل‌ها مهمترین بخش کتاب را تشکیل می‌دهند. ما تمام تلاش خود را به کار گرفتیم تا راه حل‌ها تا حد امکان کامل و دقیق باشد و سوالات معمولی، تردیدها و اشتباهات احتمالی دانش آموزان را در نظر بگیریم. در صورت لزوم، مسیرهای جایگزین برای راه حل‌ها ارائه می‌شود. تا حدودی سعی کردیم از مفاهیم فریبنده و ابهامات ظاهری یا «پارادوکس‌هایی» که در الکترومغناطیس کلاسیک ممکن است بیشتر از آنچه انتظار می‌رود ظاهر شوند، عبور نکنیم.

فصل‌های ۱ تا ۱۲ از ترتیب معمولی که در آن مطالب در طول دوره درسی ارائه می‌شود، پیروی می‌کند، و هر فصل بر یک موضوع کاملاً مشخص تمرکز دارد. فصل ۱۳ شامل مجموعه‌ای از مسائل است که در آن مفاهیم از فصول مختلف استفاده می‌شود و

ممکن است برای یک بررسی کلی مفید باشد. تا آنجا که می‌دانیم، در برخی از برنامه‌های کارشناسی، فیزیک سال دوم ممکن است "سبک‌تر" از گروه ما باشد، یعنی عمدتاً محدود به مطالب ارائه شده در شش فصل اول کتاب ما (یعنی تا معادلات ماکسول) به‌اضافه مقداری مطالب اولیه تشعشع (فصل ۱۰) و انتشار موج (فصل ۱۱) را پوشش میدهد. احتمالاً این گزینه برای دوره‌های فیزیک در برنامه‌های ریاضی یا مهندسی نیز خواهد بود. در یک برنامه درس فیزیک، بیشتر محتویات فصل‌های ۷ تا ۱۲ ممکن است در یک دوره پیشرفت‌های در سال سوم ارائه شود، که معتقدیم این کتاب هنوز هم می‌تواند ابزار مناسبی باشد.

البته، این کتاب مسئله باید همراه با یک کتاب درسی خوب باشد که نظریه میدان الکترومغناطیسی را به‌تفصیل توضیح دهد. در دوره درسی ما، علاوه بر یادداشت‌های سخنرانی (تاکنون منتشر نشده)، ما بیشتر جلد دوم سخنرانی‌های مشهور فایمن در مورد فیزیک و جلد ۲ دوره فیزیک بر کلی^۱ توسط E. M. Purcell را توصیه می‌کنیم. برای برخی از موضوعات پیشرفت‌های کتاب معروف الکترودینامیک کلاسیک^۲ نوشته جی دی جکسون نیز توصیه می‌شود، اگرچه بیشتر این کتاب برای دوره‌های بالاتر کافی است. رابطه‌ها و توضیحات مختصری که در ابتدای فصل ارائه شده است به‌هیچ‌وجه به‌منظور ارائه یک بررسی کامل از مفاهیم نظری نیست، و باید بیشتر به‌عنوان یک مرجع سریع برای بیشتر معادلات مهم و برای روش‌کردن نمادهایی که استفاده می‌کنیم نیز باشد.

در فصل‌های اول ۱ تا ۶ از هر دو سیستم آحاد SI و گاووسی c.g.s استفاده می‌کنیم. انتخاب این سیستم واحدها به‌این دلیل انجام شد که، در حالی که ما از استفاده گسترده از واحدهای SI آگاه هستیم، هنوز معتقدیم که سیستم گاووسی به‌دلایل اساسی، مانند ظاهر یک ثابت بنیادی منفرد (سرعت نور^c) مناسب‌ترین سیستم برای الکترومغناطیسی یا همان ابعاد فیزیکی برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است، که به‌نظر می‌رسد، زمانی که فرد متوجه شود که چنین میدان‌هایی از یک میدان الکترومغناطیسی هستند، بسیار مناسب است. به‌عنوان یک مصالحه، ما از هر دو واحد در آن قسمت از کتاب استفاده کردیم که برای یک درس "سبک‌تر" و کلی تر همانطور که در بالا تعریف شد، استفاده کردیم و به‌طور قطع (به‌جز چند مسئله) به‌واحدهای گاووسی در بخش "پیشرفت‌های کتاب"، یعنی فصل ۷ تا ۱۳ تغییر دادیم. این انتخاب شبیه به‌آنچه در ویرایش سوم کتاب بالا توسط جکسون انجام شده است.

حل مسئله می‌تواند یکی از دشوارترین کارها برای یک فیزیکدان جوان باشد، اما همچنین یکی از پر ارزش‌ترین و سرگرم کننده‌ترین کارها است. این حتی برای فیزیکدان مسن‌تری که سعی می‌کند مشکل جدیدی ایجاد کند صادق است و مسلم‌آز این فعالیتی که به‌مدت ۱۵ سال دنبال کردیم چیزهای زیادی آموختیم (بعضی می‌گویند تنها کسی که مطمئناً چیزی در یک دوره درسی می‌آموزد معلم است!). در طول این مدت طولانی، گاهی اوقات ما این تلاش و سرگرمی را با همکارانی از جمله فرانچسکو چکرینی، فولویو کورنولتی، وانی گیمنتی و پیترو منوتی^۳ به‌اشتراک گذاشتبیم، که مایلیم صمیمانه از آنها

^۱ Berkeley Physics Course

^۲ Classical Electrodynamics by J. D. Jackson

^۳ Francesco Ceccherini, Fulvio Cornolti, Vanni Ghimenti, and Pietro Menotti

قدردانی کنیم. ما همچنین از جوزپه برتین^۴ برای خوانش انتقادی از نسخه دست نویس تشکر می‌کنیم. تشکر نهایی ما از دانشجویانی است که تمام تلاش خود را برای حل این مسائل انجام دادند و تا حد زیادی بهبود آنها کمک کردند.

پیزا، توسکانی، ایتالیا می ۲۰۱۷

أندريا مacci^۵

جيوفاني موروزي^۶

فرانچسکو پگورارو^۷

^۴Giuseppe Bertin

^۵Andrea Macchi

^۶Giovanni Moruzzi

^۷Francesco Pegoraro

فصل ۱

مبانی الکترواستاتیک

عناوین. بار الکتریکی. میدان الکتریکی. اصل برهم نهی (جمع اثرها). قانون گاوس. ملاحظات تقارن. میدان الکتریکی توزیع بار ساده (روی صفحه، سیم مستقیم، کره). بارهای نقطه‌ای و قانون کولمب. معادلات الکترواستاتیک. انرژی پتانسیل و پتانسیل الکتریکی. معادلات پواسون و لاپلاس. انرژی الکترواستاتیک. بسطهای چند قطبی. میدان یک دوقطبی الکتریکی.

واحدها. هدف این کتاب ارائه روابط سازگار با هر دو واحد SI در فصل‌های ۱ تا ۶ و واحدهای گاوسی (فرانسوی: Système International d'Unités) که تنها در فصل‌های ۷ تا ۱۳ استفاده خواهد شد است. این با معرفی برخی از ثابت‌های وابسته به سیستم واحدها به دست می‌آید.

اولین ثابتی که به آن نیاز داریم، ثابت کولمب، k_e است که برای مثال در بیان نیروی بین دو بار نقطه الکتریکی q_1 و q_2 در خلاء، به ترتیب با بردارهای موقعیت \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 ظاهر می‌شود. برای مثال، نیروی کولمبی که بر روی q_1 عمل می‌کند، برابر است با:

$$\mathbf{f}_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.1)$$

که در آن k_e ثابت کولمب است، وابسته به واحدهای مورد استفاده برای نیرو، بار الکتریکی و طول. بردار $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ فاصله r_{12} تا q_2 است که به سمت q_1 اشاره می‌کند و $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ بردار واحد مربوطه است. ثابت کولمب برابر است با:

$$k_e = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = ۹\cdot ۹۸۷\ldots \times ۱۰^۹ N \cdot m^۲ \cdot C^{-۲} \approx ۹ \times ۱۰^۹ m/F & SI \\ ۱ & گاوسی \end{cases} \quad (2.1)$$

ثابت $F/m = ۸,۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲۰ \ldots \times ۱۰^{-۱۲} F/m$ را "گذردهی دیالکتریک فضای آزاد" می‌نامند

و بصورت زیر تعریف میشود

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \quad (3.1)$$

که در آن $H/m = 4\pi \times 10^{-7} \mu_0$ نفوذ پذیری مغناطیسی در خلاء و c سرعت سیر نور در خلاء $m/s = 299792458$ است (این یک مقدار دقیق است، زیرا طول متر از این ثابت و استاندارد بین المللی برای زمان تعریف میشود). معادلات پایه. دو معادله اصلی این فصل بصورت دیفرانسیلی و انتگرالی را خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_e \rho, \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k_e \int_V \rho d^3r \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0. \quad (5.1)$$

که در آن $\mathbf{E}(r, t)$ میدان الکتریکی است، و $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ چگالی بار حجمی، در نقطه‌ای از بردار مکانی \mathbf{r} در زمان t است. عنصر حجم بینهایت کوچک $d^3r = dx dy dz$ است. در رابطه (۴.۱) توابعی که باید انتگرال گیری شوند بر روی یک حجم دلخواه V ، یا روی سطح S که حجم V را در بر می‌گیرد، ارزیابی می‌شوند. تابعی که باید در رابطه (۵.۱) انتگرال گیری شود در یک مسیر بسته دلخواه C ارزیابی می‌شود. چون $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است، می‌توان یک تابع پتانسیل الکتریکی $\phi(\mathbf{r})$ را به‌گونه‌ای تعریف کرد که

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (6.1)$$

رابطه کلی پتانسیل تولید شده توسط توزیع بار معلوم $\rho(\mathbf{r})$ برابر است با

$$\phi(\mathbf{r}) = k_e \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (7.1)$$

نیروی اعمالی بر توزیع بار حجمی $\rho(\mathbf{r})$ خواهد بود:

$$\mathbf{f} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r' \quad (8.1)$$

در نتیجه، نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای q واقع در \mathbf{r} (که مربوط به توزیع بار $\rho(\mathbf{r}')$ با $q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ تابع دلتای دیراک) برابر است با:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (9.1)$$

انرژی الکترواستاتیک وابسته به یک توزیع بار الکتریکی و میدان با رابطه زیر داده می‌شود:

$$U_{es} = \int_V \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi k_e} d^3r \quad (10.1)$$

$$U_{es} = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi d^3 r, \quad (11.1)$$

معادلات (۱۰.۱) و (۱۱.۱) به شرطی معتبر هستند که انتگرال‌های حجمی محدود و همه کمیت‌های درگیر به خوبی تعریف شده باشند.
بسط چند قطبی به ما اجازه می‌دهد تا رابطه ساده‌ای را برای جمله‌های اصلی پتانسیل و میدان تولید شده توزیع بار در فاصله‌ای بسیار بزرگتر از گسترش آن بدست آوریم. در ادامه فقط به بسط تا جمله دوقطبی نیاز خواهیم داشت.

$$\phi(\mathbf{r}) \approx k_e \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right), \quad (12.1)$$

که در آن Q کل بار توزیعی است و گشتاور دوقطبی الکتریکی خواهد بود:

$$\mathbf{p} \equiv \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (13.1)$$

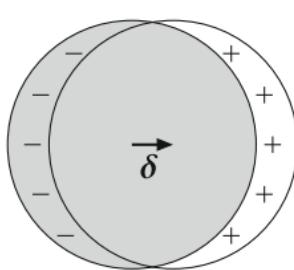
اگر $\mathbf{p} = Q \mathbf{r}$ باشد، در این صورت \mathbf{p} مستقل از مبدأ دستگاه مرجع است. میدان تولید شده توسط توزیع دوقطبی مرکزی در $\mathbf{r} = 0$ خواهد بود

$$\mathbf{E} = k_e \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}}{r^3} \quad (14.1)$$

به طور خلاصه به توزیع بار محلی دارای یک گشتاور دوقطبی به صورت "یک دوقطبی الکتریکی" اشاره خواهیم کرد (ساده‌ترین حالت دو بار نقطه مقابل $q \pm q$ با جدایی فضایی δ است، به طوری که $\mathbf{p} = q\delta$). دوقطبی که در یک میدان خارجی \mathbf{E}_{ext} قرار می‌گیرد دارای انرژی پتانسیل زیر است

$$U_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext} \quad (15.1)$$

۱.۱ همپوشانی کره‌های باردار



شکل (۱-۱)

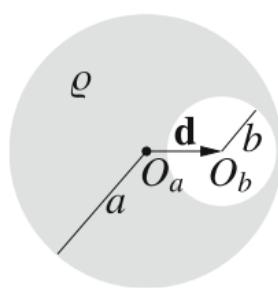
فرض کنید که یک کره خنثی به شعاع R را می‌توان به صورت برهمنهی دو کره "صلب" در نظر گرفت: یکی با چگالی بار مثبت یکنواخت $+rho$ که شامل هسته اتمها است، و یک کره دوم با همان شعاع، اما چگالی بار یکنواخت منفی $-rho$ ، شامل الکترون‌ها است. همچنان فرض کنید که امکان جابجایی دو کره نسبت به یکدیگر با مقدار δ ، همانطور که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است، بدون ایجاد اختلال در ساختار داخلی هر یک از کره‌ها امکان پذیر است

میدان الکترواستاتیک تولید شده توسط توزیع بار کلی را پیدا کنید.

- الف در منطقه «درونى» جائی که در آن دو کره با هم همپوشانی دارند.

- ب در منطقه «خارجی»، یعنی خارج از هر دو کره. در مورد محدودیت جابجایی‌های کوچک $R \ll \delta$ بحث شود.

۲.۱ کره باردار با یک محفظه کروی داخلی



یک کره با شعاع a دارای چگالی بار یکنواخت ρ در تمام حجم خود، به استثنای یک حفره کروی با شعاع b ، که در آن $\rho = 0$ است. مرکز حفره، O_b در فاصله d با شرایط $(a - b) < |d|$ از مرکز کره، O_a قرار دارد. توزیع جرم کره با توزیع بار آن متناسب است.

شکل (۱-۲)

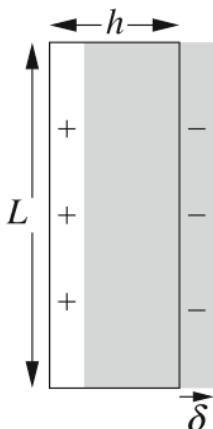
- الف: میدان الکتریکی درون حفره را بدست آورید. اکنون یک میدان یکنواخت E را اعمال می‌کنیم
- ب: نیروی وارد بر کره را تعیین کنید.
- ج: گشتاور را نسبت به مرکز کره و گشتاور را نسبت به مرکز جرم بدست آورید.

۳.۱ انرژی کره باردار

یک بار کل Q به طور یکنواخت توی حجم یک کره به شعاع R توزیع می‌شود. انرژی الکترواستاتیک این پیکربندی بار را به سه روش مختلف زیر محاسبه کنید:

- الف: کار مورد نیاز برای جمع آوری کره باردار را با جابجایی پوسته‌های بینهایت کوچک متوالی بار از بینهایت به مکان نهایی آنها محاسبه کنید.
- ب: انتگرال حجمی $u_E = |\mathbf{E}|^2 / (8\pi k_e)$ را که در آن E میدان الکتریکی است [معادله (۱۰.۱)] محاسبه کنید.
- ج: انتگرال حجمی $\frac{\rho}{2} \phi^2$ را که چگالی بار و ϕ پتانسیل الکترواستاتیکی است [معادله (۱۱.۱)] بدست آورید. تفاوت‌ها را با محاسبه انجام شده در حالت ب بحث کنید.

۴.۱ نوسان‌های پلاسما



یک تیغه فلزی مربعی بطول L دارای ضخامت h با $h \ll L$ است. چگالی الکترون رسانایی و یون در تیغه به ترتیب $n_i = n_e/Z$ و n_e است که Z بار یون است.

یک میدان الکتریکی خارجی همه الکترون‌های رسانا را به مقدار δ ، جابجا می‌کند، به طوری که $\delta \ll h$ ، عمود بر قاعده تیغه است. فرض می‌کنیم که هر دو n_e و n_i ثابت، شبکه یونی توسط میدان خارجی آشفته نمی‌شود، و اثرات مرزی ناچیز هستند.

شکل (۱-۳)

- الف: میدان الکترواستاتیک ایجاد شده توسط جابجاگی الکترون‌ها را محاسبه کنید.
- ب: انرژی الکترواستاتیک سیستم را محاسبه کنید. اکنون میدان خارجی حذف می‌شود و «تیغه الکترونی» شروع به نوسان در اطراف موقعیت تعادل خود می‌کند.
- ج: فرکانس نوسان را در حد جابجاگی کوچک ($h \ll \delta$) بیابید.

۵.۱ نوسان‌های می Mie

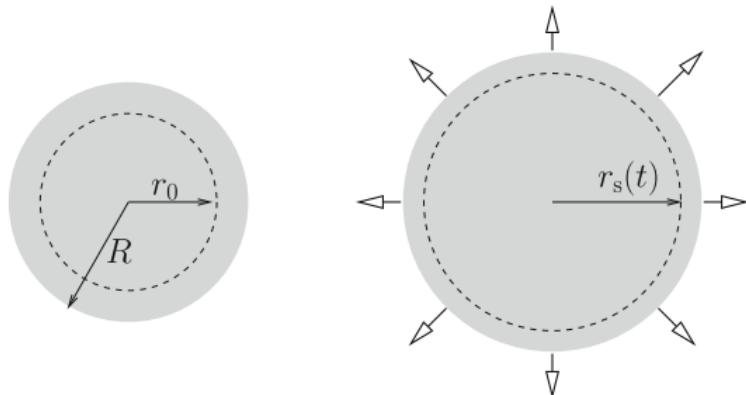
اکنون، به جای تیغه فلزی مسئله ۱-۴، یک کره فلزی به شعاع R را در نظر بگیرید. در ابتدا، تمام الکترون‌های رسانش (هدایتی) (n_e در واحد حجم) مشابه مسئله ۱-۱، توسط یک میدان الکتریکی خارجی به مقدار δ (با $R \ll \delta$) جایه جا می‌شوند.

- الف: در زمان $t = 0$ میدان خارجی به طور ناگهانی حذف می‌شود. حرکت بعدی الکترون‌های رسانا را تحت تأثیر میدان الکترواستاتیکی خودسازگار، بدون توجه به اثرات مرزی روی الکترون‌های نزدیک به سطح کره توصیف کنید.
- ب: وقتی $t \rightarrow \infty$ میل می‌کند، (اما با فرض اینکه $en_e\delta = \sigma_0$ محدود باقی بماند، یعنی توزیع بار یک چگالی سطحی است)، انرژی الکترواستاتیک کره را به صورت تابعی از δ پیدا کنید و از این نتیجه، مانند بند (الف)، برای بحث در مورد حرکت الکترون استفاده کنید.

۶ انفجارهای کولمب

در لحظه $t = 0$ یک ابر کروی به شعاع R و بار کلی Q داریم که شامل N ذرات نقطه مانند است. هر ذره دارای بار $q = Q/N$ و جرم m است. چگالی ذرات یکنواخت است و همه

ذرات در حال استراحت هستند.



شکل (۴ - ۱)

- الف: انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی یک بار که در فاصله $r < R$ از مرکز در $t = 0$ قرار دارد را محاسبه کنید.

- ب: بهدلیل دافعه کولمب، ابر شروع بهانبساطشعاعی می‌کند و تقارن کروی خود را حفظ می‌کند. فرض کنید که ذرات از یکدیگر سبقت نمی‌گیرند، یعنی اگر دو ذره در ابتدا در $r_1(0)$ و $r_2(0)$ قرار داشته باشند، با $r_2(0) > r_1(0) > r_s(t)$ سپس $r_2(t) > r_1(t)$ در هر زمان بعدی $t > 0$. ذرات واقع در پوسته کروی بی نهایت کوچک با $r_s < r_0 + dr$ با $r_0 + dr < R$ در $t = 0$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که معادله حرکت از لایه است

$$m \frac{d^2 r_s}{dt^2} = k_e \frac{qQ}{r_s^2} \left(\frac{r_0}{R} \right)^3 \quad (16.1)$$

- ج: موقعیت اولیه ذراتی را که در طول انبساط ابر بیشترین انرژی جنبشی را به دست می‌آورند، پیدا کنید و مقدار حداکثر انرژی را تعیین کنید.

- د: طیف انرژی، یعنی توزیع ذرات را به صورت تابعی از انرژی جنبشی نهایی آنها بیابید. کل انرژی جنبشی را با انرژی پتانسیل ذخیره شده اولیه در میدان الکترواستاتیک مقایسه کنید.

- ه: نشان دهید که چگالی ذرات در طول انبساط از نظر مکانی یکنواخت می‌ماند.

۷.۱ انفجارهای کولمب صفحه‌ای و استوانه‌ای

- ذرات با جرم m و بار q یکسان با سرعت اولیه صفر و چگالی یکنواخت n در تیغه بی نهایت $|x| < a/2$ در $t = 0$ توزیع می‌شوند. برای $t > 0$ تیغه بهدلیل دافعه الکترواستاتیکی بین جفت ذرات منبسط می‌شود.

- الف: معادله حرکت ذرات، حل آن و انرژی جنبشی بدست آمده توسط ذرات را پیدا کنید.

ب: مسئله مشابه انفجار یک توزیع یکنواخت با تقارن استوانه‌ای را در نظر بگیرید.

۸.۱ برخورد دو کره باردار

دو کره صلب دارای شعاع R یکسان و جرم M یکسان و بارهای مخالف $\pm Q$ هستند. این دو کره در ابتدا در حالت سکون هستند، در فاصله $R \gg x_0$ بین مراکزشان، به‌طوری که انرژی برهمنکنش آنها در مقایسه با مجموع انرژی‌های "داخلی" (ساخت) آنها ناچیز است.

- الف: انرژی اولیه سیستم را محاسبه کنید.

دو کره با داشتن بارهای مخالف یکدیگر را جذب می‌کنند و با $t = 0$ شروع به حرکت می‌کنند.

- ب: سرعت کره‌ها را هنگامی که یکدیگر را لمس می‌کنند (یعنی زمانی که فاصله بین مراکز آنها $x = 2R$ است) محاسبه کنید.

- ج: فرض کنید پس از لمس، دو کره بدون اصطکاک به یکدیگر نفوذ کنند. سرعت کره‌ها را زمانی که دو مرکز روی هم قرار می‌گیرند، محاسبه کنید ($x = 0$).

۹.۱ نوسان‌های یک کره رسانا با بار مثبت

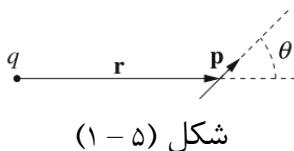
یک کره فلزی خنثی الکتریکی به شعاع a حاوی N الکترون‌های هدایتی است. کسری f از الکترون‌های هدایتی ($1 < f < 1$) از کره حذف می‌شود و $(N-f)$ الکترون‌های هدایتی باقی‌مانده خود را به حالت‌های تعادلی توزیع می‌کنند، در حالی که N یون‌های شبکه ثابت می‌مانند.

- الف: چگالی هدایت-الکترون و شعاع توزیع آنها در کره را محاسبه کنید.
- اکنون کره الکترون هدایتی به طور صلب با δ نسبت به شبکه یونی جابجا شده است، با $|A|$ آنقدر کوچک است که کره الکترون هدایتی در داخل کره یونی باقی بماند.

- ب: میدان الکتریکی داخل کره الکترون هدایتی را بدست آورید.

- ج: فرکانس نوسان کره الکترون هدایتی را هنگام رها شدن آن محاسبه کنید.

۱۰.۱ برهمکنش بار نقطه‌ای و دوقطبی الکتریکی



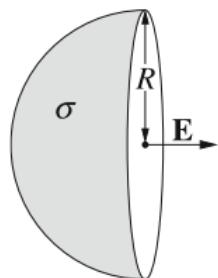
یک دوقطبی الکتریکی p در فاصله r از یک بار نقطه‌ای q قرار دارد، شکل (۱-۵). زاویه بین p و r برابر θ است.

شکل (۱-۵)

• الف: نیروی الکترواستاتیک وارد بر دوقطبی را محاسبه کنید.

• ب: گشتاور اعمال بر دوقطبی را تعیین کنید.

11.1 میدان الکتریکی سطح یک نیمکره باردار



یک سطح نیمکره ای به شعاع R به طور یکنواخت با چگالی بار سطحی σ باردار می‌شود. میدان الکتریکی و پتانسیل را در مرکز آنها محاسبه کنید (راهنمایی: از میدان الکتریکی یک حلقه باردار یکنواخت در امتداد محور آن شروع کنید).

شکل (۱ - ۶)

حل مسائل فصل ۱

ح: مبانی الکترواستاتیک

۱.۱ همپوشانی کره‌های باردار

- الف:** میدان الکترواستاتیک در هر نقطه‌ای از فضا مجموع میدان‌هایی است که توسط هر کره باردار ایجاد می‌شود (اصل برهم نهی یا اصل جمع اثرها). میدانی که توسط یک کره باردار یکنواخت در داخل آن ایجاد می‌شود $E(r) = 4\pi k_e \rho_0 r$ است که چگالی بار و r بردار موقعیت نسبت به مرکز کره است. بنابراین، دو کره در فضای داخلی خود به ترتیب میدان‌های $E_{\pm} = \pm 4\pi k_e \rho_0 r_{\pm}$ را تولید می‌کنند که r_{\pm} بردارهای موقعیت نسبت به دو مرکز هستند.

فرض می‌کنیم که مراکز روی محور x در نقاط O_+ و $O_- \equiv (-\delta/2, 0, 0)$ قرار دارند. بنابراین $r_{\pm} = r \pm \delta/2$ داریم که بردار موقعیت نسبت به مبدأ $O \equiv (0, 0, 0)$ است. کل میدان در ناحیه همپوشانی برابر است با:

$$\mathbf{E}_{in} = + \frac{\gamma \pi k_e}{\gamma} \rho_{\circ} \left(\mathbf{r} - \frac{\delta}{\gamma} \right) - \frac{\gamma \pi k_e}{\gamma} \rho_{\circ} \left(\mathbf{r} + \frac{\delta}{\gamma} \right) = - - \frac{\gamma \pi k_e}{\gamma} \rho_{\circ} \boldsymbol{\delta} \quad (1.1)$$

بنابراین، میدان داخلی E_{in} یکنواخت و متناسب با δ است.

- ۰ ب: میدان الکترواستاتیک تولید شده توسط یک کره باردار یکنواخت، با چگالی بار حجمی ρ ، خارج از حجم آن برابر با میدان بار نقطه‌ای $Q = 4\pi R^3 \rho / 3$ واقع در مرکز آن است. بنابراین، میدان الکترواستاتیک در ناحیه بیرونی (خارج از هر دو کره) مجموع میدان‌های دو بار نقطه‌ای $\pm Q$ است که به ترتیب در O_+ و O_- قرار دارند. اگر

$R \gg \delta$ ، این معادل گشتاور میدان یک دوقطبی الکتریکی است:

$$\mathbf{p} = Q\delta = \frac{4\pi R^3}{3}\delta \quad (2.1)$$

که در مبدأ و روی محور x قرار گرفته است. بنابراین حوزه خارجی خواهد بود:

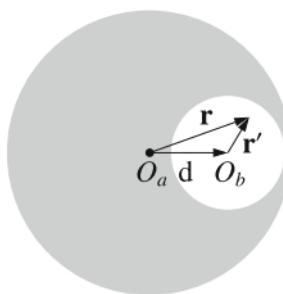
$$\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}) = k_e \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}}{r^3} \quad (3.1)$$

که در آن $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ موقعیت بردار نسبت به مبدأ است.

در دو ناحیه انتقالی "پوسته" ، با چگالی بار خالص ρ_{\pm} ، میدان مجموع میدان داخلی یک کره و میدان بیرونی کره دیگر است. از نوشتن عبارت برای اختصار صرف نظر می‌کنیم (شکل ح-۱).

۲.۱ کره باردار با یک محفظه کروی داخلی

- الف: یک بار دیگر از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم. کره باردار با یک حفره کروی داخلی را می‌توان به عنوان برهم نهی دو کره باردار یکنواخت در نظر گرفت: یک کره با شعاع a با مرکز O_a ، با چگالی بار ρ ، و یک کره کوچکتر از شعاع b به مرکز O_b ، با چگالی بار $-\rho$. میدان الکتریکی در همه جای فضا مجموع میدان‌های تولید شده توسط دو کره است. میدانی که توسط یک کره باردار یکنواخت در داخل آن ایجاد می‌شود $\mathbf{E} = (4\pi k_e/3)\rho\mathbf{r}$ است، که در آن \mathbf{r} فاصله از مرکز کره است. بنابراین، کل میدان داخل حفره در یک نقطه از موقعیت برداری \mathbf{r} نسبت به O_a و موقعیت برداری \mathbf{r}' نسبت به O_b است. بنابراین



شکل (ح-۱)

$$\mathbf{E}_{cav} = \frac{4\pi k_e}{3}\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi k_e}{3}\rho \mathbf{d} \quad (4.1)$$

یکنواخت و موازی با خط مستقیمی که از O_a و O_b می‌گذرد. اگر $d = 0$ همانطور که از قانون گاوس و ملاحظات تقارن انتظار می‌رود، $\mathbf{E} = 0$ به دست می‌آید.

- ب: در یک میدان خارجی \mathbf{E}_0 نیروی کل وارد بر سیستم مجموع نیروهایی است که بر دو بار نقطه‌ای O_a و O_b واقع در O_a و O_b وارد می‌کند، به طوری که

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3}\rho(a^3 - b^3)\mathbf{E}_0 \quad (5.1)$$

- ج: از آنجایی که مجموع بردار نیروها مخالف صفر است، گشتاور به انتخاب ما از مبدأ بستگی دارد. گشتاور نسبت به مرکز کره O_a برابر است با:

$$\tau = \mathbf{d} \times \mathbf{F} = -\frac{4\pi}{3} \rho b^3 \mathbf{d} \times \mathbf{E}. \quad (6.1)$$

اجازه دهید یک سیستم مرجع با محور x که از O_b و O_a می‌گذرد و مبدأ آن در O_a است معرفی کنیم. چگالی جرم را با $\rho_m = \rho$ با مقداری ثابت α نشان می‌دهیم. بنابراین مبدأ مختصات مکان مرکز جرم کره بدون حفره با شعاع a و جرم $M_{tot} = 4\pi a^3 \rho_m / 3$ در حالی که محل مرکز جرم کره‌ای به شعاع b و جرم $M_b = 4\pi b^3 \rho_m / 3$ است. اجازه دهید مرکز جرم کره با حفره را با x_c با جرم $M_c = 4\pi(a^3 - b^3) \rho_m / 3$ نشان دهیم. بنابراین داریم:

$$x_c = -d \frac{M_b}{M_{tot}} = -d \frac{b^3}{a^3 - b^3} \quad (7.1)$$

بنابراین گشتاور مرکز جرم x_c برابر است

$$\tau_c = \frac{b^3 d}{a^3 - b^3} \frac{4\pi}{3} \rho a^3 \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}_c - \left(d + \frac{b^3 d}{a^3 - b^3} \right) \frac{4\pi}{3} \rho b^3 \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}_c = 0. \quad (8.1)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، زیرا هر عنصر حجمی باردار $d^3 r$ تحت نیروی $\rho \mathbf{E}_c d^3 r$ قرار دارد و شتاب می‌گیرد

$$\mathbf{a} = \frac{\rho \mathbf{E}_c}{d} r \rho_m d^3 r = \frac{\mathbf{E}_c}{\alpha} \quad (9.1)$$

برابر با هر عنصر حجم باردار است (شکل ۱-۲).

۳.۱ انرژی کره باردار

- الف: می‌توانیم کره را با حرکت لایه‌های بینهایت کوچک متواالی بار از بینهایت به محل نهایی شان جمع کنیم. اجازه دهید فرض کنیم که قبل از کره با چگالی بار ρ و شعاع $r < R$ جمع آوری کردہ‌ایم، و یک پوسته ضخامت dr را اضافه می‌کنیم. کره جمع شده دارای بار $q(r) = (4\pi r^3 / 3) \rho$ است و پتانسیل آن $\phi(r, r') = \phi(r) - \phi(r')$ در فاصله $r \leq r' \leq R$ از مرکز کره برابر است با:

$$\phi(r, r') = k_e \frac{q(r)}{r'} = k_e \rho \frac{4\pi r^3}{3} \frac{1}{r'} \quad (10.1)$$

کار مورد نیاز برای انتقال پوسته بار جدید $dq = 4\pi r^2 dr$ از بینهایت به r برابر است با:

$$dW = \phi(r, r') dq = k_e \rho \frac{4\pi r^3}{3} \frac{1}{r'} \rho 4\pi r^2 dr = k_e \frac{(4\pi \rho)^2}{3} dr \quad (11.1)$$

کل کار مورد نیاز برای تجمع کردن باردار با نتگرال گیری dW از $r = 0$ (بدون کردن) تا شعاعنهایی R به دست می‌آید.

$$U_0 = k_e \frac{(\pi\rho)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \int_0^R r^{\frac{1}{2}} dr = k_e \frac{(\pi\rho)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{3k_e}{5} \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{R} \quad (12.1)$$

که در آن $\frac{Q}{(4\pi R^3)} = \frac{1}{r^2}$ کل بار کرده است.

- ب: میدان الکتریکی در همه جای فضای طبق قانون گاوس خواهد بود:

$$E(r) = k_e Q \times \begin{cases} \frac{r}{R^{\frac{1}{2}}}, & r \leq R \\ \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}, & r \geq R \end{cases} \quad (13.1)$$

و انتگرال چگالی انرژی مربوطه $u_E = E^2 / (8\pi k_e)$ در کل فضای برابر است با:

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^\infty \frac{E^2(r)}{8\pi k_e} 4\pi r^2 dr = \frac{k_e^2 Q^2}{2k_e} \left[\int_0^R \left(\frac{r}{R^{\frac{1}{2}}} \right)^2 r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \right)^2 r^2 dr \right] \\ &= k_e \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{3k_e}{5} \frac{Q^2}{R} \end{aligned} \quad (14.1)$$

- ج: پتانسیل الکترواستاتیک کرده در همه جای فضای برابر است با:

$$\phi(r) = k_e Q \times \begin{cases} \frac{r}{R^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2R}, & r \leq R \\ \frac{1}{r}, & r > R \end{cases} \quad (15.1)$$

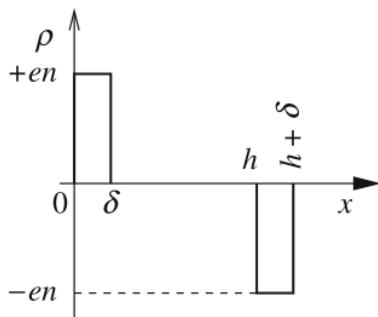
که در آن ثابت $\frac{3k_e Q}{2R}$ که برای $r \leq R$ ظاهر می‌شود لازم است که $\phi(r)$ در $r = R$ پیوسته باشد. از آنجایی که $\rho = 0$ برای $r > R$ است، فقط به انتگرال $\rho\phi/2$ در داخل کرده نیاز داریم:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} \int_0^R \rho k_e Q \left(-\frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2R} \right) 4\pi r^2 dr = k_e \frac{Q}{4} \frac{Q}{R^{\frac{1}{2}}/3} \left(-\frac{R^{\frac{5}{2}}}{5} + R^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{3k_e}{4} \frac{Q^2}{R^{\frac{1}{2}}} \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{5} = \frac{3k_e}{5} \frac{Q^2}{R} \end{aligned} \quad (16.1)$$

تمام روش‌ها، از جمله (ب) و (ج) منجر به نتیجه صحیح، همانطور که انتظار می‌رود، می‌شود. با این حال، مقایسه بین روش‌های (ب) و (ج) نشان می‌دهد که تفسیر "چگالی انرژی" میدان الکتریکی به عنوان "انرژی ذخیره شده در یک منطقه معین از فضای واحد حجم" نادرست است. اگر این معنی را به کمیت $E^2 / (8\pi k_e)$ مانند مورد (ب) بدھیم، نتیجه می‌گیریم که انرژی در کل فضای پخش می‌شود. از طرف دیگر، اگر چگالی انرژی را $\frac{1}{2}\rho\phi^2$ فرض کنیم، مانند مورد (ج)، انرژی فقط در داخل حجم

کرده، یعنی «جایی که بار است» «ذخیره می‌شود». بنابراین، مفهوم چگالی انرژی مبهم است، در حالی که انرژی الکترواستاتیک کل سیستم یک کمیت، حداقل در غیاب بارهای نقطه‌ای، کاملاً تعریف شده است.

۴.۱ نوسان‌های پلاسما



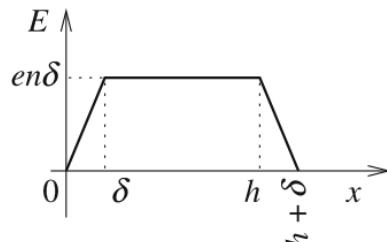
شکل (ح-۱)

الف: با فرض $\rho > \delta$ جابجایی صلب تجمعی الکترون‌های رسانا به دلیل میدان خارجی، چگالی بار را زیر را ناشی می‌شود:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ +en, & 0 < x < \delta \\ 0, & \delta < x < h \\ -en, & h < x < h + \delta \\ 0, & x > h + \delta \end{cases} \quad (17.1)$$

میدان الکترواستاتیک $E(x)$ ایجاد شده توسط این توزیع بار با انتگرال‌گیری از معادله $\nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi k_e \rho$ به دست می‌آید:

$$E_x(x) = 4\pi enk_e \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 < x < \delta \\ \delta, & \delta < x < h \\ h + \delta - x, & h < x < h + \delta \\ 0, & x > h + \delta \end{cases} \quad (18.1)$$



شکل (ح-۲)

اگر جابجایی منفی $-\delta$ (با $x > \delta$) را فرض کنیم، چگالی بار و میدان الکتریکی برابر هستند با:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta, \\ -en, & -\delta < x < 0 \\ 0, & 0 < x < h - \delta \\ +en, & h - \delta < x < h \\ 0, & x > h \end{cases} \quad E_x(x) = 4\pi enk_e \begin{cases} 0, & x < -\delta, \\ -x - \delta, & -\delta < x < 0 \\ -\delta, & 0 < x < h - \delta \\ x - h - \delta, & h - \delta < x < h \\ 0, & x > h \end{cases} \quad (19.1)$$

نمودارها به ترتیب با چرخاندن حول محور x و انتقال باندازه δ به سمت مقادیر x منفی، از شکل‌های (ح-۳) و (ح-۴) به دست می‌آیند.

- ب: انرژی الکترواستاتیکی سیستم، در حالت جابجایی مثبت، را می‌توان با انتگرال‌گیری "چگالی انرژی" $u = E_x^2/(8\pi k_e)$ در کل فضا محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} U_{es} &= \int \frac{E_x^2}{8\pi k_e} d^3r = \frac{L^2}{8\pi k_e} \int_0^{h+\delta} E_x^2 dx \\ &= \frac{L^2}{8\pi k_e} (4\pi en)^2 \left[\int_0^\delta x^2 dx + \int_\delta^h \delta^2 dx + \int_h^{h+\delta} (h+\delta-x)^2 dx \right] \quad (20.1) \\ &= 2\pi k_e (enL)^2 \left[\frac{\delta^3}{3} + \delta^2(h-\delta) + \frac{\delta^3}{3} \right] = 2\pi k_e (enL)^2 \left(h\delta^2 - \frac{\delta^3}{3} \right) \end{aligned}$$

که در آن به دلیل تقارن مسئله از $d^3r = L^2 dx$ استفاده کردیم. دقیقاً همان نتیجه برای جابجایی منفی $-\delta$ به دست می‌آید. δ ظاهر شده در آخرین خط (20.1) در واقع باید به عنوان قدر مطلق $|\delta|$ تفسیر شود.

- ج: در حد $h \ll \delta$ می‌توانیم عبارت مرتبه سوم δ را در از (20.1) نادیده بگیریم، و $U_{es} \approx 2\pi k_e (enL)^2 h \delta^2$ را که انرژی پتانسیل یک نوسانگر هارمونیک است، تقریبی کنیم. بنابراین "تیغه الکترونی" است

$$F = -\frac{\partial U_{es}}{\partial \delta} = -4\pi k_e (enL)^2 h \delta \quad (21.1)$$

که در آن δ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. معادله حرکت الکترون‌ها برابر است با:

$$M\ddot{\delta} = F \equiv -M\omega^2 \delta \quad (22.1)$$

که در آن $M = m_e n L^2 h$ جرم کل تیغه رسانایی-الکترون است. بنابراین داریم:

$$\omega^2 = \frac{4\pi k_e n e^2}{m_e} \equiv \omega_p^2 \quad (23.1)$$

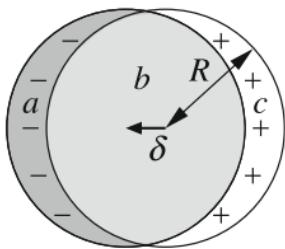
که در آن ω_p فرکانس پلاسمای نامیده می‌شود و یک ویژگی ذاتی رسانایی داده شده است که فقط به چگالی الکترون‌های آزاد وابسته است.

۵.۱ نوسان‌های می

- الف: در مسئله ۱.۱ نشان دادیم، در ناحیه‌ای که کره رسانایی-الکtron‌ها همپوشانی دارند، میدان الکتریکی یکنواخت و برابر با $-\frac{4\pi k_e \rho}{3}$ با $\rho = en_e$ است.

$$\mathbf{E}_{int} = -\frac{4\pi k_e}{3} en_e \delta \quad (24.1)$$

فرض می‌کنیم که جابجایی δ برای حجم‌های a (فقط الکترون‌های رسانش) و c (فقط شبکه یونی) شکل (ح ۱-۵) به اندازه کافی کوچک است، با توجه به مرتبه بزرگی δ در معادله (4.2) فصل دوم، تا در مقایسه با حجم همپوشانی b ناچیز باشد.



شکل (ح-۱)

با فرض اینکه الکترون‌های رساناً مانند یک جسم «صلب» رفتار می‌کنند و در فاز با همان جایه‌جایی $\delta(t) = \delta$ از موقعیت‌های سکون خود نوسان می‌کنند، معادله حرکت برای تک الکترون برابر است با:

$$m_e \frac{d^3\delta}{dt^3} = -e\mathbf{E}_{int} = -e \frac{4\pi k_e}{3} en_e \delta = -m_e \frac{\omega_p^3}{3} \delta \quad (25.1)$$

که در آن ω_p فرکانس پلاسمما است (۲۳.۱). بنابراین، جایه‌جایی هر الکترون رساناً از موقعیت سکون خود خواهد بود:

$$\delta(t) = \delta(0) \cos\left(\frac{\omega_p}{\sqrt{3}}t\right) \quad (26.1)$$

که در آن $\delta(0)$ یک مقدار ثابت است و $\omega_p/\sqrt{3}$ فرکانس می‌شود. این نوع حرکت به عنوان نوسان می‌شود (یا پلاسمون سطح کره) شناخته می‌شود.

• ب: انرژی الکترواستاتیک سیستم توسط انتگرال زیر داده می‌شود

$$U_{es} = \int \frac{E^3}{\lambda \pi k_e} d^3r \quad (27.1)$$

برای δ نزدیک به 0 ، میدان الکتریکی با (۲۴.۱) در داخل کره ($r < R$) و با (۳.۱)، یعنی یک میدان دوقطبی الکتریکی، خارج از کره ($r > R$) داده می‌شود. بنابراین می‌توانیم انتگرال (۲۷.۱) را به مجموع دو جمله، که به ترتیب مربوط به ناحیه انتگرال‌گیری $r > R$ و $r < R$ هستند، تقسیم کنیم.

$$U_{es} = U_{es}^{in} + U_{es}^{out} = \frac{1}{\lambda \pi k_e} \left(\int_{r < R} E^3 d^3r + \int_{r > R} E^3 d^3r \right) \quad (28.1)$$

برای $r < R$ میدان یکنواخت است و بلافاصله آن را پیدا می‌کنیم

$$U_{es}^{in} = \frac{1}{\lambda \pi k_e} \left(k_e \frac{4\pi}{3} en_e \delta \right)^3 \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{8\pi^2}{27} (en_e \delta)^3 R^3 \quad (29.1)$$

برای ارزیابی سهم منطقه بیرونی، جایگزین می‌کنیم

$$d^3r = r^3 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad \text{و} \quad E^3 = \left(\frac{k_e p}{r^3} \right)^3 (3 \cos^2 \theta + 1) \quad (30.1)$$

که در آن (۱.۱)، در انتگرال دوم سمت راست معادله (۲۸.۱) است:

$$U_{es}^{out} = 2\pi \frac{1}{\lambda \pi k_e} k_e^3 p^3 \int_R^\infty r^3 dr \int_0^\pi \sin \theta \frac{3 \cos^2 \theta + 1}{r^6} d\theta \quad (31.1)$$

^۱Mie

و بدست می‌آید:

$$U_{es}^{out} = k_e \frac{p}{\frac{4}{3}R^3} = k_e \frac{\frac{4\pi}{9}(en_e\delta)^2}{\frac{4\pi}{3}} R^3 = k_e \frac{16\pi^2}{27}(en_e\delta)^2 R^3 \quad (32.1)$$

بنابراین $U_{es}^{out} = 2U_{es}^{in}$. برای کل انرژی که در نهایت داریم

$$U_{es} = U_{es}^{in} + U_{es}^{out} = k_e \frac{\frac{8\pi^2}{9}}{(en_e\delta)^2} R^3 \quad (33.1)$$

مشتق U_{es} نسبت به δ نیروی مربوط به جابجایی کره الکترونی را می‌دهد:

$$F = -\frac{\partial U_{es}}{\partial \delta} = -k_e \frac{16\pi^2}{9} R^3 (en_e)^2 \delta \quad (34.1)$$

معادله حرکت کره چلپ الکترون‌ها $M d^3 \delta / (dt^3) = F$ است که در آن $M = m_e n_e 4\pi R^3 / 3$ است. بدین ترتیب؛ جرم کل الکترون‌ها است.

$$\frac{d^3 \delta}{dt^3} = -k_e \frac{4\pi n_e e^2}{3m_e} \delta \equiv -\frac{\omega_p^2}{3} \delta \quad (35.1)$$

و بهنوسان‌های در فرکانس می (۲۶.۱) بازگشته‌ایم.

۶.۱ انفجارهای کولمب

الف: میدان الکتریکی دارای تقارن شعاعی است، $E = E(r)\hat{r}$. طبق قانون گاووس $\oint E \cdot d\ell = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi k_e Q_{int}(r)$ داریم، که بار داخل کره شعاع r است. در $r < R$ برای $Q_{int} = Q$ و $r > R$ برای $Q_{int} = Q(r/R)^3$ در داخل و خارج از ابر بهترتیب خواهد بود:

$$E(r) = k_e Q \times \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & r \leq R, \\ \frac{1}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (36.1)$$

با توجه به تقارن کروی مسئله، $E = -\partial\phi/\partial r$ داریم، که ϕ پتانسیل الکتریکی است، و پتانسیل در $t = 0$ را می‌توان با انتگرال‌گیری ساده بدست آورد:

$$\phi(r) = k_e Q \times \begin{cases} -\frac{r^2}{4R^3} + \frac{3}{4R}, & r \leq R, \\ \frac{1}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (37.1)$$

همانطور که در رابطه (۱۵.۱) مسئله ۱.۳، ثابت‌های انتگرال‌گیری طوری انتخاب شده‌اند که $\phi(\infty) = 0$ و $\phi(r) = R$ در $r = R$ پیوسته باشد. انرژی پتانسیل یک بار آزمایشی واقع در فاصله r بنابراین از مرکز $q_t \phi(r)$ است.

ب: تحت اثر میدان الکتریکی، بار آزمایشی حرکت و تمام انرژی پتانسیل خود را به انرژی جنبشی تبدیل می‌کند، اگر میدان در طول حرکت بار ثابت بماند، یعنی اگر همه بارهای منبع میدان ثابت بمانند. در $t = 0$ میدان الکتریکی درون ابر کروی با r

افزایش می‌یابد. بنابراین، ذرات «بیرونی»، که در r بزرگتر قرار دارند، شتاب بیشتری نسبت به ذرات «داخلی»، واقع در r کوچکتر دارند. پس از یک بازه زمانی بینهاست کوچک، ذرات «خارجی» سرعت بیشتری به دست خواهند آورد (فرض می‌کنیم که همه ذرات در حالت سکون در $t = 0$ هستند)، و ذرات «داخلی» از آنها سبقت خواهند گرفت. علاوه بر این، همچنین شتاب دارای تقارن شعاعی است و بنابراین هر پوسته کروی شکل خود را در زمان حفظ می‌کند. این استدلال‌ها را می‌توان برای هر لحظه بعدی تکرار کرد، و اعتبار فرضیات ما مبنی بر اینکه ذرات از یکدیگر سبقت نمی‌گیرند و اینکه تقارن کروی حفظ شده است را اثبات می‌کند.

اجازه دهید با $r_s(r_0, t)$ موقعیت ذره‌ای را که ابتدا در r_0 قرار داشت نشان دهیم. از آنجایی که ذرات از یکدیگر سبقت نمی‌گیرند، بار درون کره‌ای به شاع $r_s(r_0, t)$ ثابت است. شدت میدان الکتریکی در $r_s(r_0, t)$ را می‌توان با استفاده از قانون گاووس محاسبه کرد:

$$4\pi r_s^3(r_0, t) E[r_s(r_0, t)] = 4\pi k_e Q \left(\frac{r_0}{R}\right)^3 \quad (38.1)$$

و خواهیم داشت

$$E[r_s(r_0, t)] = k_e \frac{Q}{r_s^3(r_0, t)} \left(\frac{r_0}{R}\right)^3 \quad (39.1)$$

که از آن می‌توان معادله (۱۶.۱) را استخراج کرد. نیروهای وارد بر ذرات، و در نتیجه شتاب آنها، با افزایش r_0 افزایش می‌یابد، مطابق با نتیجه «عدم سبقت». توجه داشته باشید که میدان الکتریکی و بنابراین نیرو در $t = 0$ با r_0 متناسب است نه با r_0 ، زیرا در مخرج $r_s^3(r_0, 0) = r_0^3$ داریم.

- ج: هر پوسته کروی بینهایت کوچک از شاع اولیه r_0 به شاع نهایی خود $= r_{\infty}$ تحت تأثیر نیرو (۱۶.۱) منبسط می‌شود. انرژی جنبشی نهایی یک ذره متعلق به پوسته، $K_{fin}(r_0)$ ، برابر با نیروی وارد بر ذره است:

$$K_{fin}(r_0) = \int_{r_i}^{+\infty} k_e \frac{qQ}{r^3} \left(\frac{r_0}{R}\right)^3 dr = k_e \frac{qQ}{r_0} \left(\frac{r_0}{R}\right)^3 = k_e qQ \frac{r_0^3}{R^3} \quad (40.1)$$

کمیت $K_{fin}(r_0)$ ، تابع افزایش یکنواخت r_0 است، بنابراین حداقل مقدار K_{max} آن برای $r_0 = R$ مشاهده می‌شود.

$$K_{max} = k_{fin}(R) = k_e \frac{qQ}{R} \quad (41.1)$$

این بدان معنی است که ذرات در ابتدا در $R = r_0$ ، یعنی در سطح ابر قرار دارند، حداقل انرژی جنبشی نهایی را به دست می‌آورند.

- د: توزیع انرژی یا طیف انرژی تابع $f(K)$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که تعداد dN ذرات با انرژی جنبشی در بازه $(K, K + dK)$ برابر $f(K)dK$ باشد، بنابراین $f(K) = dN/dK$

یک ذره متعلق به پوسته $t = 0$ در $r_0 < rs < r_0 + dr_0$ دارای انرژی جنبشی در بازه

است، که در آن $t = \infty$ در $(K_{fin}(r_0), K_{fin}(r_0) + dK_n)$

$$dK_{fin} = \frac{2k_e q Q r_0}{R^3} dr_0 \quad (42.1)$$

از طرف دیگر، در $t = 0$ تعداد ذرات در پوسته $(r_0, r_0 + dr_0)$ برابر است با:

$$dN = N \frac{3}{4\pi R^3} 4\pi r_0^2 dr_0 = N \frac{3r_0^2}{R^3} dr_0 \quad (43.1)$$

و تعداد ذرات در یک پوسته مشخص در طول حرکت ثابت است، زیرا ذرات از یکدیگر سبقت نمی‌گیرند. بنابراین با جایگزینی (۴۰.۱) و (۴۱.۱) به دست می‌آوریم

$$f(K_{fin}) = \frac{dN}{dK_{fin}} = N \frac{3r_0^2}{R^3} \frac{R^3}{2k_e q Q r_0} = N \frac{3r_0}{2k_e q Q} = \frac{3N}{2K_{max}^{3/2}} \sqrt{K_{fin}} \quad (44.1)$$

که برای $K_{fin} \leq K_{max}$ اعتبار دارد.

و کل انرژی جنبشی برابر است با:

$$\begin{aligned} K_{total} &= \int_0^{K_{max}} K f(K) dK = \frac{3N}{2K_{max}^{3/2}} \int_0^{K_{max}} = \frac{3N}{5} K_{max} \\ &= \frac{3k_e N q Q}{5 R} = \frac{3k_e Q^3}{5 R} \end{aligned} \quad (45.1)$$

که برابر است با کل انرژی الکترواستاتیک ذخیره شده در کره باردار در $t = 0$ (مسئله ۱.۳). در اینجا $Nq = Q$ را جایگزین کرده‌ایم. بنابراین، تمام انرژی الکترواستاتیک ذخیره شده در پیکربندی اولیه در نهایت به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود.

این یک خطای نسبتاً رایج است که فرض کنیم انرژی جنبشی نهایی یک ذره در ابتدا در پوسته $r_0 < r_s < r_0 + dr$ برابر با انرژی پتانسیل همان ذره در $t = 0$ است، یعنی $K_n = q\phi(r_0)$ ، که در آن ϕ توسط (۳۷.۱) داده می‌شود. بدیهی است که اشتباہ است، زیرا یک ذره در ابتدا در $r_0 = 0$ دارای بالاترین انرژی پتانسیل اولیه ممکن است، $3k_e Q/(2R)$ ، در حالی که کمترین بهره ممکن را در انرژی جنبشی (صفر) متحمل می‌شود! علاوه بر این، این رفتار انرژی کل سیستم را حفظ نمی‌کند، زیرا انرژی پتانسیل اولیه کره است (به مسئله ۱.۳ مراجعه کنید).

$$U(0) = \frac{1}{2} \sum_i q\phi[r_i(0)], \quad \text{نه} \quad U(0) = \sum_i q\phi[r_i(0)]$$

نکته این است که در حالی که میدان در هر زمان الکترواستاتیک است ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، وابسته به زمان است. بنابراین، ϕ را می‌توان برای هر مقدار t تعریف کرد، اما نمی‌توان از آن برای ارزیابی انرژی جنبشی نهایی استفاده کرد، زیرا ϕ با حرکت ذرات تغییر می‌کند).

افزایش انرژی جنبشی برابر با انرژی پتانسیل اولیه $q\phi(R, t = 0)$ در ابتدا در $r_i = R$ یعنی برای خارجی ترین ذرات است. فقط این ذرات توسط میدانی شتاب می‌گیرند که می‌توان آن را ثابت تلقی کرد، که به سادگی برابر با میدان بار نقطه‌ای Q واقع در $r = 0$ در هر زمان است.

۵: اگر متغیر جدید $x(t) = r_s(r_0, t)/r$ را معرفی کنیم، رابطه (۶.۱) می‌شود

$$m \frac{d^3 x}{dt^3} = k_e \frac{qQ}{R^3 x^3} \quad (46.1)$$

که مستقل از r_0 است. جواب معادله (۴۶.۱)، $x = x(t)$ با شرط اولیه $x(0) = r_1$ برای تمام ذرات ابر معتبر است. بنابراین، اگر دو پوسته، با برچسب ۱ و ۲، دارای شعاع اولیه r_{10} و r_{20} باشند، با $r_2 > r_1$ ، شعاع بعدی آنها $r_1(t) = r_s(r_1, t) = r_1 \cdot x(t)$ و $r_2(t) = r_s(r_2, t) = r_2 \cdot x(t)$ است و پوسته داخلی $r_2(t) > r_1(t)$ خواهد بود. آن همیشه $r_2(t) > r_1(t)$ است و پوسته داخلی نمی‌تواند از پوسته خارجی سبقت بگیرد. تعداد ذرات موجود بین لایه‌های ۱ و ۲ ثابت و برابر است با:

$$\delta N_{12} = \frac{N}{R^3} (r_{20}^3 - r_{10}^3) \quad (47.1)$$

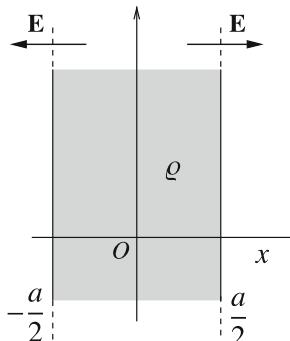
بنابراین چگالی ذرات بین دو لایه در زمان t برابر است با:

$$n(t) = \frac{3}{4\pi [r_2^3(t) - r_1^3(t)]} \delta N_{12} = \frac{3N}{4\pi R^3} \frac{r_{20}^3 - r_{10}^3}{(r_{20}^3 - r_{10}^3 x^3(t))} = \frac{3N}{4\pi R^3} x^{-3}(t) \quad (48.1)$$

این نتیجه به انتخاب خاصی از دو لایه بستگی ندارد و چگالی ذرات در هر زمان t یکنواخت است و با افزایش زمان به صورت $x^{-3}(t)$ کاهش می‌یابد.

۷.۱ انفجارهای کولمب صفحه‌ای و استوانه‌ای

- الف: میدان الکتریکی موازی با محور x و مستقل از مختصات y و z به دلایل تقارن است، بنابراین $E(x, y, z) = E(x)\hat{x}$ داریم. باز هم به دلایل تقارن، میدان الکتریکی $E(-x) = E(x)$ ضد تقارن، به طوری که نسبت به صفحه $x = 0$ است. بنابراین، کافی است که میدان را برای $x \geq 0$ در نظر بگیریم. چگالی بار در $\rho(x) = \rho$ برابر است و با افزایش زمان به صورت $\Theta(x)$ تابع پله‌ای همی‌ساید، به صورت $\Theta(x) = 1$ برای $x > 0$ و $\Theta(x) = 0$ برای $x < 0$ ، تعریف شده است. میدان الکتریکی در $t = 0$ را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi k_e \rho(x)$ با شرط مرزی $E(0) = 0$ بدست آورد:



شکل (ح-۱)

$$E(x) = 4\pi k_e \begin{cases} qn \cdot x, & x < \frac{a}{2} \\ qn \cdot \frac{a}{2}, & x > \frac{a}{2} \end{cases} \quad (49.1)$$

از آنجایی که ذرات در $t = 0$ در حالت سکون هستند و میدان الکتریکی با افزایش x افزایش می‌یابد، ذرات نمی‌توانند از یکدیگر سبقت بگیرند. حرکت یک ذره در ابتدا در x با یک معادله $x_s = x_s(x, t)$ توصیف می‌شود. اجازه دهید یک متوازی الاضلاع از پایه S را در نظر بگیریم که روی صفحه $x = 0$ و ارتفاع $x_s(x_0, t)$ قرار دارد. بار داخل متوازی الاضلاع در زمان ثابت است زیرا هیچ ذره‌ای نمی‌تواند از پایه متحرک عبور کند. می‌توانیم قانون

گاوس را برای ارزیابی میدان الکتریکی روی ذره واقع در $x_s(x_0, t)$ اعمال کنیم.

$$E[x_s(x_0, t), t]S = 4\pi k_e Q_{in} = 4\pi Q_{in}(0) = 4\pi k_e q n_0 x_0 S \quad (50.1)$$

بنابراین، میدان شتاب دهنده هر ذره در زمان ثابت و برابر است با:

$$E(x_0, t) = 4\pi k_e q n_0 x_0. \quad (51.1)$$

که در آن x_0 موقعیت ذره در $t = 0$ است. بنابراین معادله حرکت برابراست با:

$$m \frac{d^2 x_s(x_0, t)}{dt^2} = q E(x_0) = 4\pi k_e q n_0 x_0. \quad (52.1)$$

با شرایط اولیه $\dot{x}_s(x_0, 0) = 0$ و $x_s(x_0, 0) = x_0$ جواب خواهد بود:

$$x_s(x_0, t) = x_0 + 2\pi k_e \frac{q n_0 x_0}{m} t^2 = x_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2 t^2}{2} \right) \quad (53.1)$$

که در آن $\omega_p = \sqrt{4\pi k_e q n_0 / m}$ "فرکانس پلاسمای لایه باردار بینهایت در $t = 0$ " است (مسئله ۱-۴). بنابراین، شتاب یک لایه مسطح بینهایت کوچک با ضخامت dx متناسب با مختصات x اولیه آن است و لایه‌های خارجی بیشتر از لایه‌های داخلی بیشتر سریعتر هستند. سرعت و انرژی جنبشی هر لایه با گذشت زمان به طور نامحدودی رشد می‌کند، که جای تعجب نیست زیرا سیستم دارای انرژی پتانسیل اولیه نامحدود است (شکل ۱-۶).

اگر متغیر بی بعد $\xi = x_s/x_0$ را معرفی کنیم، معادله حرکت آن خواهد بود:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = q E(x_0) = 4\pi k_e q n_0. \quad \xi(0) = 1, \quad \frac{d\xi(0)}{dt} = 0, \quad (54.1)$$

مستقل از x_0 است. بنابراین موقعیت هر ذره‌ای را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$x_s(x_0, t) = x_0 \xi(t), \quad (55.1)$$

که نشان می‌دهد که چگالی ذرات و چگالی بار در طول انفجار یکنواخت می‌مانند.

• ب: حالت انفجار کولمب سیستمی از ذرات باردار که ابتدا در حالت سکون در داخل یک استوانه بینهایت به شعاع a محصور شده بود، مشابه است. ما از مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم که چگالی ذرات اولیه یکنواخت و برابر n_0 برای $r < a$ و صفر برای $r > a$ است. همه ذرات دارای جرم m و بار q هستند. طبق قانون گاوس، در $t = 0$ ، میدان در موقعیت (r_0, ϕ, z) با $r_0 < a$ خواهد بود:

$$E(r_0) = 2\pi k_e n_0 qr. \quad (56.1)$$

باز هم ذرات نمی‌توانند از یکدیگر سبقت بگیرند زیرا با افزایش r میدان الکتریکی $r_s = r_s(r_0, t)$ در امتداد مختصات r طبق قانون افزایش می‌یابد. یک ذره در ابتدا در r_0 در موقعیت r با $r < a$ خواهد بود.

با $r_s(r_0, t) = r_0$ حرکت می‌کند. میدانی که در زمان t روی ذره اثر می‌گذارد برابر است با:

$$E(r_0, t) = \frac{2\pi k_e n_0 q r_0^2}{r_s(r_0, t)} \quad (57.1)$$

و معادله حرکت خواهد بود:

$$m \frac{d^2 r_s(r_0, t)}{dt^2} = q \frac{2\pi k_e n_0 q r_0^2}{r_s(r_0, t)} \quad (58.1)$$

حل (58.1) برای $r_s(r_0, t)$ به روش ساده امکان پذیر نیست، با این حال، می‌توانیم هر دو طرف را در $dr_s(r_0, t)/dt$ ضرب کنیم و به دست آوریم:

$$m \frac{dr_s(r_0, t)}{dt} \frac{d^2 r_s(r_0, t)}{dt^2} = 2\pi k_e n_0 q^2 r_0^2 \frac{1}{r_s(r_0, t)} \frac{dr_s(r_0, t)}{dt} \quad (59.1)$$

معادله (59.1) قابل بازنویسی است

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{dr_s(r_0, t)}{dt} \right]^2 = 2\pi k_e n_0 q^2 r_0^2 \frac{d}{dt} \ln[r_s(r_0, t)], \quad (60.1)$$

که می‌تواند نسبت به زمان انتگرال گیری شود، که منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{dr_s(r_0, t)}{dt} \right]^2 &= 2\pi k_e n_0 q^2 r_0^2 \ln[r_s(r_0, t)] + C \\ &= 2\pi k_e n_0 q^2 r_0^2 \ln \left(\frac{r_s(r_0, t)}{r_0} \right) \end{aligned} \quad (61.1)$$

که در آن C ثابت انتگرال گیری، به شرطی که انرژی جنبشی ذره، در $t = 0$ وقتی $r_s(r_0, t) = r_0$ است، باید صفر باشد بدست می‌اید. طرف اول معادله (61.1) انرژی جنبشی $K(r_s)$ در زمان t است، زمانی که ذره در $r_s(r_0, t)$ قرار دارد، که به سادگی می‌توانیم آن را با r_s نشان دهیم. بنابراین معادله زیر را داریم که ظاهراً مستقل از زمان برای انرژی جنبشی یک ذره است که ابتدا در r_0 قرار دارد.

$$K(r_s) = 2\pi k_e q^2 r_0^2 \ln \left(\frac{r_s}{r_0} \right) \quad (62.1)$$

در حد $\infty \rightarrow t \rightarrow \infty$ انتگرال به صورت لگاریتمی واگرا می‌شود. باز هم، این به دلیل انرژی پتانسیل نامتناهی است که در ابتدا در سیستم ذخیره شده است.

۸.۱ برخورد دو گره باردار

الف: انرژی الکترواستاتیک یک گره باردار یکنواخت به شعاع R و بار کل Q مطابق با نتیجه مسئله ۳.۱ است.

$$U_0 = \frac{3}{5} k_e \frac{Q^2}{R} \quad (63.1)$$

به طوری که انرژی اولیه سیستم دو کره است

$$U_{tot} = 2U_0 = \frac{6}{5}k_e \frac{Q^2}{R} \quad (64.1)$$

- ب: اجازه دهد که فاصله بین مرکز دو کره را با x نشان دهیم. هنگامی که x به گونه ای است که انرژی اندکنش $U_{int}(x)$ دیگر نسبت به U_0 ناچیز نباشد، اما همچنان بزرگتر از $2R$ باشد، کل انرژی پتانسیل $U_{pot}(x)$ سیستم برابر است با:

$$U_{pot}(x) = 2U_0 + U_{int}(x) \quad (65.1)$$

تا وقتی که $x \gg 2R$ نیروی بین کره‌ها با نیروی بین دو بار نقطه‌ای $\pm Q$ واقع در مرکز کره‌ها یکسان باشد، و

$$U_{int}(x) = -k_e \frac{Q^2}{x} \quad (66.1)$$

هر دو تکانه کل و انرژی کل سیستم حفظ می‌شود. بنابراین، سرعت دو کره همیشه برابر و مخالف است. تا وقتی که $x \gg 2R$ انرژی کل سیستم $U_{tot} = 2U_0$ برابر با مجموع انرژی‌های پتانسیل و جنبشی سیستم باشد.

$$U_{tot}(x) = \frac{1}{2}Mv^2(x) + 2U_0 + U_{int}(x) \quad (67.1)$$

که در آن M جرم هر کره و $v(x)$ سرعت دو کره است. بدین ترتیب

$$\frac{6}{5}k_e \frac{Q^2}{R} = Mv^2(x) + \frac{6}{5}k_e \frac{Q^2}{R} - k_e \frac{Q^2}{x}, \quad \text{و} \quad v(x) = \sqrt{k_e \frac{Q^2}{Mx}} \quad (68.1)$$

هنگامی که $x = 2R$ سرعت برابر است با:

$$v(2R) = \sqrt{k_e \frac{Q^2}{4MR}} \quad (69.1)$$

- ج: هنگامی که دو کره کاملاً همپوشانی دارند، چگالی بار و میدان الکترواستاتیک در کل فضا صفر می‌شود، بنابراین انرژی الکترواستاتیک نیز صفر می‌شود. این بدان معنی است که تمام انرژی اولیه به انرژی جنبشی تبدیل شده است. یعنی:

$$\frac{1}{2}Mv^2(0) = 2U_0 \quad (70.1)$$

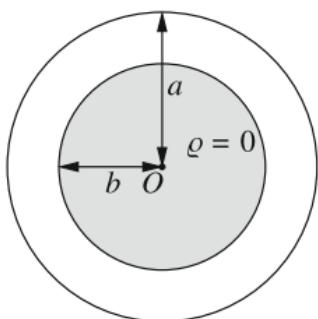
که از آن به دست می‌آوریم

$$v(0) = \sqrt{\frac{6}{5}k_e \frac{Q^2}{MR}} \quad (71.1)$$

۹.۱ نوسانهای در یک کره رسانا با بار مثبت

الف: در حالت تعادل، الکترون‌های رسانش $N(f - 1)$ باقیمانده باید در معرض میدان الکتریکی صفر باشند. به دلایل تقارن، این تنها در صورتی امکان‌پذیر است که حجم کروی شعاع $a < b$ متحدم‌المرکز با کره رسانا را اشغال کنند، جایی که e بار الکتریکی اولیه است و n_i و n_e به ترتیب چگالی رسانایی-الکترون و چگالی یون هستند. بنابراین، باید $n_e = n_i$ با چگالی بار کل ρ صفر، داشته باشیم. ازین‌رو داریم

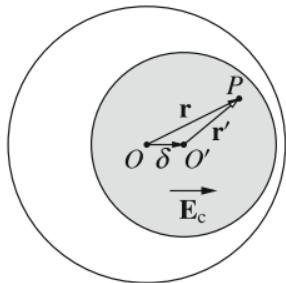
$$\rho(r) = e(n_i - n_e) = 0, \quad \text{برای } r < b \quad (72.1)$$



شکل (ح-۱)

$$n_i = \frac{3N}{4\pi a^3} \quad \text{و} \quad n_e = \frac{3(1-f)N}{4\pi b^3} \quad \begin{matrix} \text{که در آن} \\ (73.1) \end{matrix}$$

$$b = a\sqrt[3]{1-f} \quad \begin{matrix} \text{و خواهیم یافت} \\ (74.1) \end{matrix}$$



شکل (ح-۲)

$$\rho(r) = \frac{3N_e}{4\pi a^3} \quad \text{برای } b < r < a \quad (75.1)$$

توجه داشته باشید که میدان الکتریکی در پوسته کروی $b < r < a$ غیر صفر است. با این حال، این ناحیه رسانا نیست، زیرا الکترون‌های رسانا در ناحیه داخلی $b < r$ محصور هستند (شکل ح-۱).

شکل ح-۱

ب: اکنون کره الکترون رسانایی به‌طور چلب با مقدار δ نسبت به کره فلزی در مرکز O جابجا می‌شود، به‌طوری که مرکز آن در O' مانند شکل (ح-۲)، است. میدان الکتریکی در هر نقطه‌ای از فضا را می‌توان با برهمنهی، با افزودن میدان ایجاد شده توسط شبکه یونی، با چگالی بار $\rho_i = en_i$ و میدان تولید شده توسط الکترون‌های رسانایی با چگالی بار $\rho_e = -en_e$ ارزیابی کرد. میدان الکتریکی E_c در یک نقطه P در داخل کره هدایت-الکترون، با موقعیت برداری r نسبت به O ، و r' نسبت به O' برابر است با:

$$E_c = \frac{4\pi k_e}{3} (\rho_i r - \rho_e r') = \frac{4\pi k_e}{3} \frac{3Ne}{4\pi a^3} (r - r') = \frac{k_e Ne}{a^3} \delta \quad (76.1)$$

یکنواخت مکانی و موازی با δ است.

- ج: هر الکترون رسانایی تحت تأثیر نیرو قرار دارد

$$\mathbf{F}_c = -e\mathbf{E}_c = -\frac{k_e Ne^{\gamma}}{a^3} \delta \quad (77.1)$$

که متناسب با جابجایی از موقعیت تعادل آن است. معادله حرکت برای هر الکترون خواهد بود:

$$m_e \frac{d^{\gamma} \delta}{dt^{\gamma}} = \mathbf{F}_c = -\frac{k_e Ne^{\gamma}}{a^3} = -m_e \omega_M^{\gamma} \delta \quad (78.1)$$

که در آن m_e جرم الکترون و ω_M فرکانس نوسان برای حرکت هارمونیک حاصل است. فرکانس نوسان برابر است با:

$$\omega_M = \sqrt{\frac{k_e Ne^{\gamma}}{m_e a^3}} \quad (79.1)$$

یعنی فرکانس می ω رابطه (٧٦.١) است.

١٠.١ برهمکنش بار نقطه‌ای و دوقطبی الکتریکی

انرژی پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی p در حضور یک میدان الکتریکی خارجی E برابر است با:

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta \quad (80.1)$$

و در این مورد، داریم

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q}{r^3} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{و} \quad U = -k_e \frac{qp \cos \theta}{r^3} \quad (81.1)$$

- الف: بنابراین نیروی وارد بر دوقطبی است

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -2k_e \frac{qp \cos \theta}{r^3} \hat{\mathbf{r}} \quad (82.1)$$

با فرض مثبت بودن بار نقطه‌ای q ، اگر $\cos \theta > 0$ باشد، نیرو جاذبه و اگر $\cos \theta < 0$ دافعه است.

- ب: اثر گشتاور بر دوقطبی برابر است با:

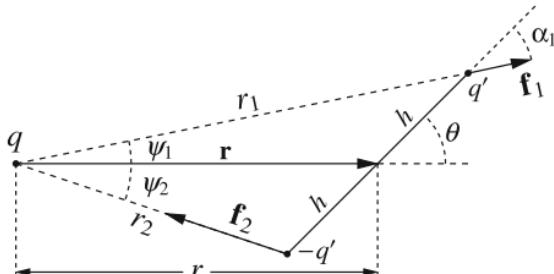
$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \theta} U \hat{\mathbf{z}} = -k_e \frac{qp \sin \theta}{r^3} \hat{\mathbf{z}} \quad (83.1)$$

که در آن $\hat{\mathbf{z}}$ بردار واحد عمود بر صفحه تعیین شده توسط بردارهای r و p است که در شکل ٥-١ بهبیرون از کاغذ اشاره می‌کند. اگر $q > 0$ باشد، گشتاور تمایل دارد که p را با r تراز کند.

از طرف دیگر، می‌توانیم دوقطبی p را به عنوان حدی در نظر بگیریم که سیستمی متشکل از دو بار مخالف q و $-q'$ در فاصله $2h$ از یکدیگر (مانند شکل ٩-١)، به عنوان $h \rightarrow \infty$ و $q' \rightarrow 0$ به آن نزدیک می‌شود. حاصل ضرب $p = 2hq = p$ ثابت است. فرض کنید بارهای نقطه‌ای q و q' مثبت هستند. فاصله r_1 بار q' از q ، و r_2 بار $-q'$ از q را می‌توان

به صورت توابعی از h و θ نوشت:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + h^2 + 2rh \cos \theta}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta} \quad (84.1)$$



شکل (ح-۱)

که در آن از قانون کسینوس‌ها استفاده کردیم. نیروی f_1 وارد بر بار مثبت q' دوقطبی برابر است با:

$$f_1 = k_e \frac{qq'}{r_1^2} \hat{r}_1 = k_e \frac{qq'}{r^2 + h^2 + 2rh \cos \theta} \hat{r}_1 \quad (85.1)$$

و نیروی f_2 بر بار $-q'$ خواهد بود:

$$f_2 = -k_e \frac{qq'}{r_2^2} \hat{r}_2 = -k_e \frac{qq'}{r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta} \hat{r}_2 \quad (86.1)$$

علامت منفی بهاین معنی است که نیرو برای $q > 0$ جاذبه است. هر دو زاویه ψ_1 و ψ_2 با

$$\lim_{h \rightarrow 0} \hat{r}_1 = \hat{r}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \hat{r}_2 = \hat{r} \quad (87.1)$$

بنابراین، کل نیروی F وارد بر دوقطبی را می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ q' \rightarrow \infty \\ rhq' = p}} (f_1 + f_2) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ q' \rightarrow \infty \\ rhq' = p}} \hat{r} k_e qq' \left(\frac{1}{r^2 + h^2 + 2rh \cos \theta} - \frac{1}{r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta} \right) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ q' \rightarrow \infty \\ rhq' = p}} \hat{r} k_e qq' \frac{-4rh \cos \theta}{(r^2 + h^2 + 2rh \cos \theta)(r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta)} \\ &= -4k_e \frac{qp \cos \theta}{r^2} \hat{r} \end{aligned} \quad (88.1)$$

که با رابطه (۸۲.۱) مطابقت دارد.

با $h \rightarrow 0$ و $\psi_1 \rightarrow 0$ زاویه α_1 به θ نزدیک می‌شود و حد گشتاور f_1 روی دوقطبی برابر

است با:

$$\tau_1 = -\hat{z} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ q' \rightarrow \infty \\ rhq' = p}} hf_1 \sin \alpha_1 = -\hat{z} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ q' \rightarrow \infty \\ rhq' = p}} k_e \frac{qq' h \sin \alpha_1}{r^2 + h^2 + 2rh \cos \theta} = -k_e \frac{qp \sin \theta}{2r^2} \hat{z} \quad (89.1)$$

به طور مشابه، حد گشتاور f_2 برابر است با:

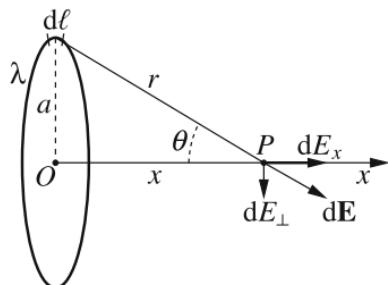
$$\tau_2 = -k_e \frac{qp \sin \theta}{2r^2} \hat{z} \quad (90.1)$$

و گشتاور کل روی دوقطبی برابر است با:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -k_e \frac{qp \sin \theta}{r^2} \hat{z} \quad (91.1)$$

که با رابطه (۸۳.۱) مطابقت دارد.

۱۱.۱ میدان الکتریکی سطح یک نیم کره باردار



شکل (ح۱۰-۱)

از میدان الکتریکی ایجاد شده توسط حلقه‌ای به شعاع a و چگالی بار خطی λ در نقطه عمومی P در روی محور آن، در فاصله x از مرکز O حلقه شروع می‌کنیم. با ارجاع به شکل (ح۱۰-۱)، قوس حلقه بینهایت کوچک dl ، با بار λdl ، میدان dE در P ایجاد می‌کند. بزرگی dE برابر است با:

$$dE = k_e \frac{\lambda dl}{a^2 + x^2} \quad (۹۲.۱)$$

میدان dE دارای یک مولفه dE_x موازی با محور حلقه و یک مولفه dE_{\perp} عمود بر محور است. ما فقط به مولفه موازی نیاز داریم

$$dE_x = \cos \theta dE = k_e \frac{\lambda dl}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{2\pi a \lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (۹۳.۱)$$

زیرا وقتی که در کل حلقه انتگرال کیری می‌کنیم، مولفه عمود به دلیل تقارن از بین می‌رود. وقتی انتگرال گیری می‌کنیم، θ و r به موقعیت d بستگی ندارند و کل میدان در P برابر است با:

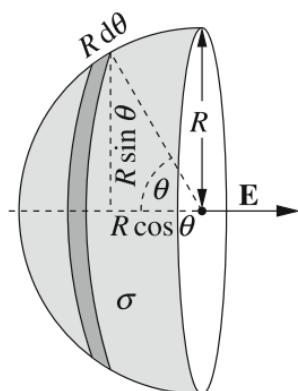
$$E_x = k_e \frac{2\pi a \lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = k_e \frac{2\pi a \lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} & SI \\ \frac{2\pi a \lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} & \text{گاووس} \end{cases} \quad (۹۴.۱)$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\mathbf{E} = \hat{x} k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (۹۵.۱)$$

که در آن $Q = 2\pi a \lambda$ بار کل حلقه است.



شکل (ح۱۱-۱)

سطح نیمکره باردار را می‌توان به نوارهای بینهایت کوچک بین "موازی" هم عرضی θ و $\theta + d\theta$ با توجه به محور تقارن نیمکره، مانند شکل (ح۱۱-۱) تقسیم کرد. هر نوار بینهایت کوچک معادل یک حلقه باردار با شعاع $R \sin \theta$ و بار کل حلقه‌ها، در فاصله $x = R \cos \theta$ از مرکز هر حلقه قرار دارد. بنابراین، سهم هر نوار به میدان در مرکز خواهد بود:

$$dE = k_e \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta R \cos \theta}{(R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (۹۶.۱)$$

$$= k_e \sigma 2\pi \cos \theta \sin \theta d\theta$$

و کل میدان برابر است با:

$$E = k_e \sigma \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = k_e \pi \sigma \quad (97.1)$$

که مستقل ازشعاع R است.

فصل ۲

الکترواستاتیک هادی‌ها

عناوین: پتانسیل الکترواستاتیک در خلاء. قضیه یکتائی برای معادله پواسون. معادله لaplاس، توابع هارمونیک و خواص آنها. شرایط مرزی در سطح هادی‌ها: دیریکله، نویمان و شرایط مرزی ترکیبی. ظرفیت یک هادی. ظرفیت صفحه، استوانه، و کره. میدان الکترواستاتیک و فشار الکترواستاتیک در سطح یک هادی. روش تصویر بارها: بارهای نقطه‌ای در مقابل یک صفحه و یک کره هادی.
معادلات پایه: معادله پواسون بقرار زیر است:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi k_e \rho(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

که در آن (\mathbf{r}) پتانسیل الکترواستاتیک، و (\mathbf{r}) چگالی بار الکتریکی در نقطه \mathbf{r} بردار موقعیت است. حل معادله پواسون اگر شرایط زیر صحیح باشد، یکتا است.

۱. **شرط مرزی دیریکله:** ϕ در تمام سطوح مرزی شناخته شده و بهخوبی تعریف شده است.

۲. **شرط مرزی نویمان:** $E = -\nabla \phi$ در تمام سطوح مرزی شناخته شده و بهخوبی تعریف شده است.

۳. **شرط مرزی نویمان اصلاح شده** (همچنین شرایط مرزی رابین نامیده می‌شود): شرایطی که در آن مرزها به عنوان هادی‌هائی با بارهای شناخته شده مشخص می‌شوند.

۴. **شرط مرزی ترکیبی:** ترکیبی از دیریکله، نویمان و شرایط مرزی اصلاح شده نویمان:

معادله لaplاس حالت خاص معادله پواسون است

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.2)$$

که در خلاء صادق است.

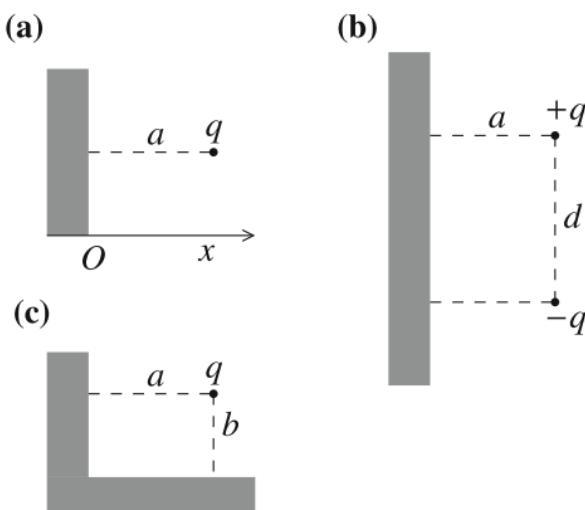
۱.۲ کره فلزی در یک میدان خارجی

یک کره فلزی با شعاع R شامل یک شبکه «صلب» از یون‌ها، هر کدام از بار $+Ze$ ، و الکترون‌های ظرفیت هر کدام از بار $-e$ است. چگالی یون را با n_i و چگالی الکترون را با n_e نشان می‌دهیم. بار خالص کره صفر است، بنابراین $n_e = Zn_i$. کره در یک میدان الکتریکی خارجی، ثابت و یکنواخت E قرار دارد. این میدان باعث جابجایی δ "دریایی الکترونی" نسبت به شبکه یونی می‌شود، به‌طوری که کل میدان داخل کره، E ، صفر است. با استفاده از مسئله ۱-۱ به عنوان مدل، مطلوب است

- الف جابجایی δ ، که یک تخمین عددی برای $E = 10^3 \text{ V/m}$ ارائه می‌دهد.
- ب میدان ایجاد شده توسط کره در قسمت بیرونی آن، به صورت تابعی از E .
- ج چگالی بار سطحی روی کره

۲.۲ انرژی الکترواستاتیک با بارهای تصویری

پیکربندی بارهای نقطه‌ای را در حضور صفحات هادی نشان داده شده در شکل (۲-۱) در نظر بگیرید. برای هر مورد، راه حلی برای پتانسیل الکترواستاتیک در کل فضا پیدا کنید و انرژی الکترواستاتیک سیستم را محاسبه کنید. از روش بارهای تصویری استفاده کنید.



شکل (۲-۱)

- الف بار q بفاصله a از صفحه بینهایت قرار دارد.
- ب دو بار متضاد $+q$ و $-q$ بفاصله d از یکدیگر در همان فاصله a از صفحه هادی قرار دارند.

- ج بار q بترتیب تحت فاصله‌های a و b از دو نیم صفحه بینهایت عمود برهم قرار دارد.

۳.۲ میدان‌های تولید شده توسط چگالی بار سطحی

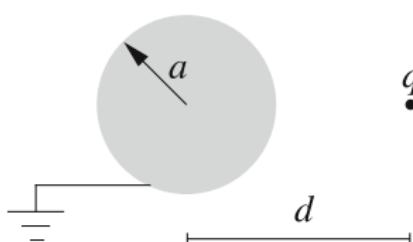
حالت الف مسئله ۲-۲ را درنظر گیرید: یک بار نقطه‌ای q تحت فاصله a از یک صفحه هادی بینهایت داریم.

- الف چگالی بار سطحی σ و کل بار القاء شده q_{ind} روی صفحه را محاسبه کنید.
- ب حال فرض کنید یک صفحه ناهادی (عایق) با توزیع بار سطحی مشابه مورد (الف) داشته باشید. میدان الکتریکی را در کل فضا پیدا کنید.
- ج یک سطح کروی ناهادی بهشعاع a دارای توزیع بار یکسانی با کره هادی مسئله ۴-۲ است. میدان الکتریکی را در کل فضا پیدا کنید.

۴.۲ بار نقطه‌ای مقابل یک کره هادی

بار نقطه‌ای q در فاصله d از مرکز یک کره هادی زمین شده بهشعاع $a < d$ قرار دارد. مطلوبست:

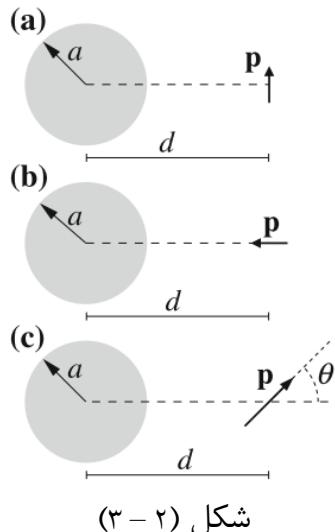
- الف پتانسیل الکتریکی ϕ در تمام فضا.
- ب نیروی اعمالی بهبار نقطه‌ای.
- ج انرژی الکتریکی سیستم.



شکل (۲-۲)

این سوال‌ها را نیز برای حالت یک کره بدون بار عایق ایزوله (بجایی وصل نیست) پاسخ دهید

۵.۲ دو قطبی‌ها و کره



یک دوقطبی الکتریکی p در فاصله d از مرکز یک کره هادی به شعاع a قرار دارد. پتانسیل الکترواستاتیک ϕ را در کل فضا با فرض‌های زیر محاسبه کنید

- الف p عمود بر جهت از p به مرکز کره است.

- ب p بسوی مرکز کره است.

- ج p زاویه دلخواه θ نسبت به خط مستقیمی که از مرکز دوقطبی و مرکز کره می‌گذرد، می‌سازد.

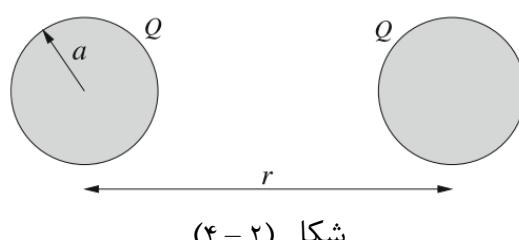
در هر سه مورد، دو امکان (i) کره زمین شده و (ii) کره ایزوله بدون بار الکتریکی است را در نظر بگیرید.

۶.۲ آزمایش کولمب

کولمب، در آزمایش اولیه خود، نیروی بین دو کره فلزی باردار را به جای نیروی بین دو «بار نقطه‌ای» اندازه‌گیری کرد. می‌دانیم که میدان کره‌ای که سطح آن به طور یکنواخت باردار است، برابر با میدان بار نقطه‌ای است و نیروی بین دو توزیع بار، هر کدام از تقارن کروی، برابر با نیروی بین دو بار نقطه‌ای است.

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^3} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.2)$$

که در آن q_1 و q_2 بارهای روی کره‌ها هستند و $r = r\hat{\mathbf{r}}$ فاصله بین دو مرکز تقارن است. اما همچنین می‌دانیم که القای الکتریکی چگالی بار سطحی هادیها را تغییر می‌دهد، به طوری که اصلاح در معادله (۳.۲) مورد نیاز است. انتظار داریم که اگر شعاع a کره‌ها نسبت به r ناچیز نباشد، اثرات القایی مهم باشد.

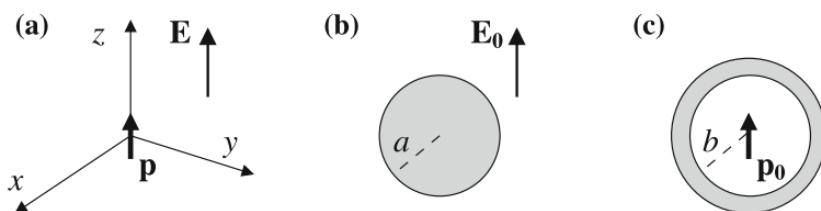


- الف با استفاده از روش تصویر بارها، راه حل پتانسیل الکتریکی خارج از کره‌ها را به صورت بسط سری پیدا کرده و پارامتر بسط را بدست آورید. برای سادگی، کره‌ها را یکسان با بار Q مساوی مانند شکل فرض کنید.

- ب کمترین مرتبه اصلاح نیروی بین کره‌ها را با توجه به قانون کولمب (۳.۲) محاسبه کنید.

۷.۲ نگاهی بر حل یک مسئله

یک دوقطبی الکتریکی p در مبدا یک دستگاه مختصات دکارتی، موازی با محور z ، در حضور یک میدان الکتریکی یکنواخت E ، همچنین موازی با محور z قرار دارد.

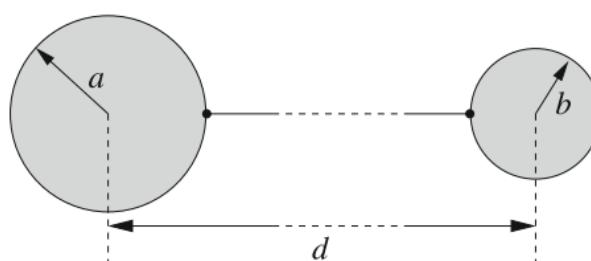


شکل (۷-۲)

- الف کل پتانسیل الکترواستاتیک $\phi(r) = \phi_0$ را با شرط $\phi = \phi_0$ در صفحه xy پیدا کنید. نشان دهید که علاوه بر صفحه xy سطح همپتانسیل دیگری با $\phi = \phi_0$ وجود دارد که این سطح کروی است، و شعاع R آن را محاسبه کنید. اکنون از نتیجه مورد (الف) برای پیدا کردن پتانسیل الکتریکی در کل فضا برای مسائل زیر استفاده کنید:
- ب یک کره هادی به شعاع a که در یک میدان الکتریکی یکنواخت E قرار می‌گیرد.
- ج یک دوقطبی p که در مرکز یک پوسته کروی هادی به شعاع b قرار می‌گیرد.
- د با استفاده از روش بارهای تصویری، جواب مسئله ج را پیدا کنید.

۸.۲ اتصال الکتریکی کره‌ها

دو کره هادی با شعاع a و b به ترتیب توسط یک سیم فلزی نازک با ظرفیت ناچیز به هم متصل می‌شوند. مرکز دو کره در فاصله $d \gg a > b$ از یکدیگر قرار دارند. یک بار خالص کل Q روی سیستم قرار دارد.



شکل (۸-۲)

با نادیده گرفتن اثرات القایی بر روی سطوح دو کره، تقریب مرتبه صفر را ارزیابی کنید.

• الف چگونه بار Q بین دو کره تقسیم می‌شود،

• ب مقدار V پتانسیل الکترواستاتیک سیستم (با فرض پتانسیل صفر در بی‌نهایت) و

$$C = Q/V$$
 ظرفیت

• ج میدان الکتریکی در سطح هر کره، مقایسه شدتهای و بحث در مورد حد $\rightarrow b$.

• د اکنون اثرات القای الکترواستاتیک را در نظر بگیرید و نتایج قبلی را به مرتبه اول در a/d و b/d ارتقا دهید.

۹.۲ بار درون یک پوسته هادی

یک بار نقطه‌ای q در فاصله d از مرکز یک پوسته هادی کروی به شعاع داخلی $R > d$ و شعاع خارجی $R' > R$ قرار دارد. پوسته زمین شده، به طوری که پتانسیل الکتریکی آن صفر است.

• الف پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی را در کل فضا پیدا کنید.

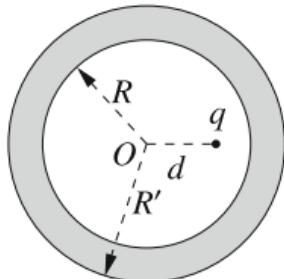
• ب نیروی اعمال بر بار را محاسبه کنید.

• ج ثابت کنید که بار القای روی سطح داخلی کره برابر $-q$ است.

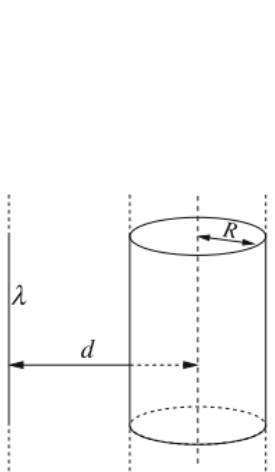
• د اگر پوسته زمین نباشد، اما از نظر الکتریکی با بار کل برابر با صفر جدا شده باشد، پاسخ الف چگونه تغییر می‌کند؟

۱۰.۲ یک سیم باردار در مقابل یک هادی استوانه‌ای

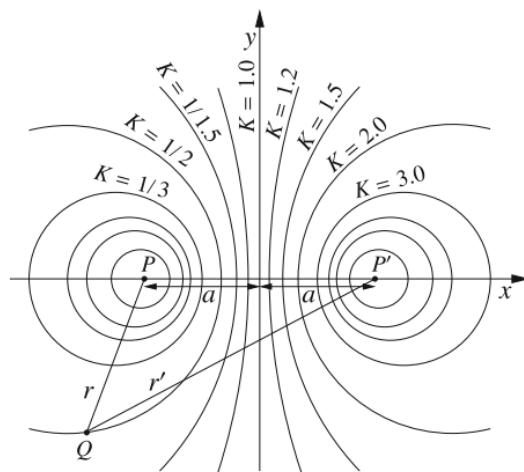
دو نقطه ثابت $(-a, 0)$ و $P' \equiv (+a, 0)$ و یک نقطه سوم، عمومی $Q \equiv (x, y)$ در صفحه xy داریم. فرض کنید $r' = \overline{QP'}$ به ترتیب فواصل Q از P' باشند.



شکل (۷-۲)



شکل (۹ - ۲)



شکل (۸ - ۲)

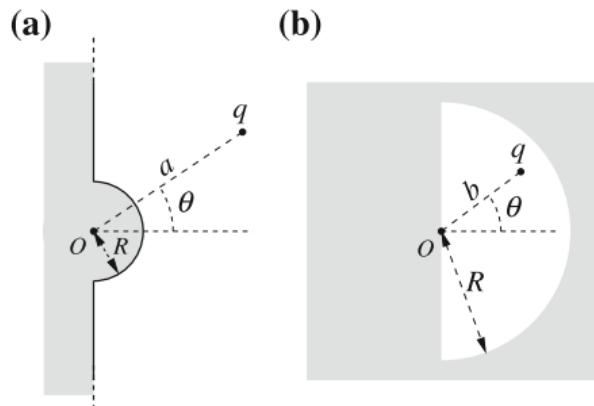
- الف نشان دهید که گروه منحنی‌هایی که با معادله $K = r/r'$ تعریف می‌شوند، با K ثابت، گروه محیط‌های ترسیم شده در شکل (۸ - ۲) است.

ب اکنون میدان الکترواستاتیکی را در نظر بگیرید که توسط دو سیم مستقیم بینهایت موازی با چگالی بار خطی λ و $-\lambda$ - ایجاد می‌شود. یک دستگاه مختصات مرجع دکارتی را انتخاب می‌کنیم به طوری که محور z موازی با سیم‌ها باشد و دو سیم صفحه xy را به ترتیب در $(-a, 0)$ و $(+a, 0)$ قطع کنند. از نتیجه هندسی نقطه a استفاده کنید تا نشان دهید که سطوح همپتانسیل میدان الکترواستاتیکی که توسط دو سیم ایجاد می‌شود، سطوح استوانه‌ای نامتناهی هستند که محل تلاقی آن با صفحه xy ، محیط‌های نشان داده شده در شکل (۸ - ۲) است.

ج برای حل مسئله زیر به روش بارهای تصویری از نتایج نقاط الف و ب استفاده کنید. یک سیم مستقیم بینهایت با چگالی بار خطی λ در مقابل یک سطح استوانه‌ای هادی بینهایت به شعاع R قرار دارد. سیم موازی با محور استوانه است و فاصله بین سیم و محور استوانه d با $R > d$ ، همانطور که در شکل (۹ - ۲) نشان داده شده است. پتانسیل الکترواستاتیک را در کل فضا پیدا کنید.

۱۱.۲ سطوح هادی نیم کره

پیکربندی بارهای تصویری را پیدا کنید که مسائل نشان داده شده در شکل (۱۰ - الف) و (۱۰ - ب) و توزیع بار القایی مربوطه را حل کند. بهیاد داشته باشید که پتانسیل الکتریکی یک هادی بینهایت صفر است.



شکل (۲ - ۱۰)

• الف سطح صفحه بینهایت یک هادی دارای یک برآمدگی نیمکره بهشعاع R با مرکز انحنا در O است. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ای $a > R$ از O قرار دارد، پاره خط از O تا q زاویه θ را با محور تقارن مسئله تشکیل می‌دهد.

• ب یک هادی بینهایت دارای یک حفره نیمکره بهشعاع R است. یک بار نقطه‌ای q در داخل حفره، در فاصله $b < R$ از O قرار دارد. باز هم، پاره خط از O تا q زاویه θ را با محور تقارن مسئله تشکیل می‌دهد.

۱۲.۲ نیروی بین صفحه‌های یک خازن

صففحه‌های یک خازن مسطح و صفحه موازی دارای سطح S و فاصله $\sqrt{S} \ll h$ هستند. نیروی بین صفحه‌ها را، هم برای خازن ایزوله (بهصورت تابعی از بار ثابت Q)، و هم برای خازن متصل بهمنبع ولتاژ ایده‌آل (بهصورت تابعی از ولتاژ ثابت V) پیدا کنید. در هر دو مورد، از دو روش مختلف استفاده کرده، یعنی نیرو را محاسبه کنید

• الف از روش فشار الکترواستاتیک روی سطح صفحه‌ها.

• ب از روش بیان انرژی بهصورت تابعی از فاصله بین صفحات.

۱۳.۲ فشار الکترواستاتیک روی یک کره هادی

یک کره هادی بهشعاع a دارای بار خالص Q و از نظر الکتریکی ایزوله است. فشار الکترواستاتیکی را در سطح کره پیدا کنید

• الف بهطور مستقیم، از چگالی بار سطحی و میدان الکتریکی روی کره،

• ب با محاسبه تغییرات انرژی الکترواستاتیک با توجه به a .

- ج حالا دوباره فشار روی کره را محاسبه کنید، با این فرض که کره جدا نشده، بلکه به یک منبع ولتاژ ایده‌آل متصل است و کره را در پتانسیل ثابت V نسبت به بی‌نهایت نگه می‌دارد.

۱۴.۲ هدایت بیضی‌گون کشیده

- الف نشان دهید که سطوح هم پتانسیل تولید شده توسط یک قطعه خطی با بار یکنواخت، بیضی‌گونه‌های کشیده^۱ هستند که از چرخش یک قطعه خط، بطوری که نقاط کانون آنها منطبق بر نقاط انتهایی قطعه خط هستند.
- ب میدان الکتریکی تولید شده توسط یک بیضی‌گونه کشیده هادی با چرخش محور اصلی $2a$ و محور فرعی $2b$ ، حامل بار Q را محاسبه کنید. ظرفیت الکتریکی بیضی‌گون و ظرفیت یک خازن دو بیضی‌گون هم کانون را محاسبه کنید.
- ج از نتایج فوق برای محاسبه تقریبی ظرفیت یک سیم استوانه‌ای هادی مستقیم به طول h و قطر $2b$ استفاده کنید.

^۱Prolate Ellipsoid

حل مسائل فصل ۲

ح: الکترواستاتیک هادی‌های

۱.۲ کره فلزی در یک میدان خارجی

الف: مجموع میدان الکتریکی داخل یک هادی در شرایط ایستا باید صفر باشد. بنابراین، در حضور یک میدان خارجی E_{\circ} ، توزیع بار سطحی کره باید یک میدان $E_{in} = -E_{\circ}$ در داخل آن ایجاد کند. همانطور که در مسئله ۱.۱ دریافتیم، یک جابجایی صلب δ - از کره الکترونی (یا "دریای الکترونی") با توجه به شبکه یونی، میدان یکنواخت داخلی را تولید می‌کند (۱.۱).

$$E_{in} = k_e \frac{4\pi}{3} \rho_{\circ} \delta \quad (1.2)$$

که در آن $\rho_{\circ} = en_e$ چگالی بار "کره الکترونی" است. بنابراین، مقدار جابجایی δ برابر است با:

$$\delta = \frac{3E_{\circ}}{4\pi k_e \rho_{\circ}} \quad (2.2)$$

برای تخمین عددی تقریبی، می‌توانیم فرض کنیم که هر اتم یک الکترون هادی‌بی منفرد دارد ($Z = 1$). اگر جرم اتمی اتم‌های M باشد، M گرم فلز حاوی اتم $N_A \approx 6.0 \times 10^{23}$ است (ثابت آوو گادرو)، و حجم $M/\rho_m cm^3$ را اشغال می‌کند، که در آن چگالی جرم است. مقادیر معمول برای یک فلز $M \sim 60$ و $\rho_m \sim 8g/cm^3$ است که منجر به مقادیر زیر می‌شود:

$$n_e \sim \frac{N_A \rho_m}{M} \sim 10^{22} cm^{-3}, \quad \text{و} \quad \rho_{\circ} = en_e \sim 5 \times 10^{12} statC/cm^3 \quad (3.2)$$

در واحدهای SI ما در واحدهای C/m^3 داریم. با جایگزینی در رابطه (۲.۳) و با فرض $E_{\circ} = 1000 V/m$ (۰.۰۰۳ statV/cm)، در نهایت به دست می‌آوریم

$$\delta \sim 10^{-15} cm \quad (4.2)$$

^۱Avogadro constant

این مقدار برای δ از نظر قدر کوچکتر از فاصله بین اتم‌ها در یک شبکه کریستالی است (10^{-8} cm ~)، بنابراین منطقی است که بار را به صورت توزیع شده روی سطح در نظر بگیریم. به طور رسمی، این معادل است با گرفتن حدود $\rho_0 \rightarrow \infty$ و $\delta \rightarrow 0$ ثابت نگه داشتن حاصل ضرب

$$\sigma_0 = \rho_0 \delta = \frac{3E_0}{4\pi k_e} \quad (5.2)$$

• ب: طبق مسئله ۱.۱، میدان تولید شده توسط توزیع بار کره فلزی در خارج از حجم آن برابر با میدان دوقطبی الکتریکی $\mathbf{P} = Q\delta$ است، که در آن $Q = (4\pi/3)R^3\epsilon n_e$ ، در مرکز کره قرار دارد. جایگزینی δ با مقدار آن در معادله (۲.۳) برای گشتاور دوقطبی داریم:

$$\mathbf{P} = \frac{R^3}{k_e} \mathbf{E}_0 \quad (6.2)$$

میدان خارج از کره ($r > R$) مجموع \mathbf{E}_0 و میدان تولید شده توسط \mathbf{P} است

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + [3(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{E}_0] \left(\frac{R}{r} \right)^3 \quad (7.2)$$

• ج: میدان خارجی در سطح کره با جایگزینی r با R در معادله (۷.۲) به دست می‌آید.

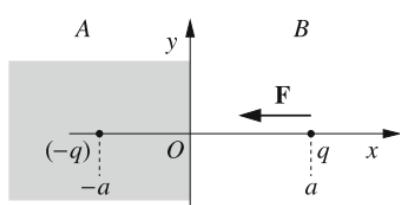
$$\mathbf{E}_{surf} = \mathbf{E}_0 + 3(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{E}_0 = 3(\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \quad (8.2)$$

که طبق انتظار عمود بر سطح است. چگالی بار سطحی است

$$\sigma = \frac{1}{4\pi k_e} \mathbf{E}_{surf} \cdot \hat{\mathbf{r}} = k_e \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta \quad (9.2)$$

که در آن $\sigma_0 = 3k_e E_0 / (4\pi)$ و θ زاویه بین $\hat{\mathbf{r}}$ و \mathbf{E}_0 است.

۲.۲ انرژی الکترواستاتیک با بارهای تصویری



در همه موارد، نیم صفحه‌های هادی کل فضا را به دو ناحیه تقسیم می‌کنند: یکی بدون بار (A)، و دیگری حاوی بارهای الکتریکی (B)، که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. از آنجایی که توزیع بار محدود است، پتانسیل الکتریکی ϕ در مرازهای هر دو ناحیه، یعنی در سطوح هادی و در بینهایت، برابر با صفر است.

شکل (۱-۲)

بنابراین می‌توانیم از قضیه یکتایی برای معادله پواسون استفاده کنیم. پتانسیل ϕ (و بنابراین میدان الکتریکی \mathbf{E}) به طور یکنواخت برابر با صفر در ناحیه A است. مسئله پتانسیل در منطقه B، اگر توزیع بار تصویری واقع در منطقه A را پیدا کنیم، که شرایط مرازی منطقه B را تکرار می‌کند، حل می‌شود. پتانسیل و میدان الکتریکی (و در نتیجه نیروهای وارد بر بارهای حقیقی) در ناحیه B مانند بارهای تصویر واقعی هستند.

الف: ما یک دستگاه مرجع با محور x عمود بر صفحه هادی و عبور از بار معرفی می‌کنیم. مبدا و محورهای y و z روی صفحه قرار دارند. بنابراین بار در $(x = 0, y = 0, z = 0)$ قرار می‌گیرد و مسئله پتانسیل برای $x > 0$ با قرار دادن یک بار تصویری $-q$ در $(x = -a, y = 0, z = 0)$ حل می‌شود. نیروی وارد بر بار واقعی $F = -k_e q^2 / (4a^2)$ است. انرژی الکترواستاتیک U_{es} سیستم برابر است با کار W انجام شده توسط میدان زمانی که بار واقعی از $x = a$ به $x = +\infty$ حرکت می‌کند. به طور همزمان، بار تصویر از $x = -a$ به $x = -\infty$ حرکت می‌کند، اما برای این کار نیازی به کار اضافی نیست، زیرا آنچه در واقع حرکت می‌کند بار سطحی در صفحه هادی است که دائماً در پتانسیل صفر است. بنابراین داریم

$$U_{es} = W = \int_a^\infty F dx = -k_e \frac{q^2}{4} \int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = -k_e \frac{q^2}{4a} \quad (10.2)$$

این نیمی از انرژی الکترواستاتیک سیستمی است که از دو بار واقعی q و $-q$ در فاصله $2a$ از یکدیگر تشکیل شده است. ضریب $1/2$ به این دلیل است که اگر دو بار واقعی در جهت مخالف به سمت بی نهایت حرکت کنند، کار انجام شده توسط میدان برابر است با:

$$W_{real} = \int_{+a}^{+\infty} F dx - \int_{-a}^{-\infty} (-F) dx = 2 \int_{+a}^{+\infty} F_x dx = -k_e \frac{q^2}{4a} \quad (11.2)$$

زیرا نیروی وارد بر $-q$ مخالف نیروی وارد بر q است و $U_{real} = W_{real}$

ضریب $1/2$ را می‌توان با محاسبه انرژی‌های الکترواستاتیک برای سیستم ما و برای سیستم دو بار واقعی توضیح داد. در هر دو مورد، به دلیل تقارن استوانه‌ای حول محور x میدان الکترواستاتیک تابعی از مختصات طولی x است و فقط در فاصله شعاعی $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ است، یعنی $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, r)$. در مورد دو بار واقعی داریم:

$$\begin{aligned} U_{real} &= \frac{1}{\lambda \pi k_e} \int d^3r \mathbf{E}^2 = \frac{1}{\lambda \pi k_e} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi r dr \mathbf{E}^2(x, r) \\ &= 2 \frac{1}{\lambda \pi k_e} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} 2\pi r dr \mathbf{E}^2(x, r) \end{aligned} \quad (12.2)$$

چون $\mathbf{E}(x, r) = \mathbf{E}(-x, r)$ است، از این‌رو $\mathbf{E}(x, r) = -\mathbf{E}(-x, r)$. در این حالت بار در مقابل صفحه هادی داریم

$$U_{es} = \frac{1}{\lambda \pi k_e} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} 2\pi r dr \mathbf{E}^2(x, r) \quad (13.2)$$

زیرا $\mathbf{E} = 0$ برای $x < 0$ (در ناحیه A)، در حالی که میدان مانند حالت واقعی برای $x > 0$ است. بنابراین $U_{es} = U_{real}/2$. انرژی الکترواستاتیک شامل هر دو انرژی برهمنکش بین بارها، U_{self} ، و "خود انرژی"، U_{int} ، از هر بار می‌شود. برای سیستم "واقعی" داریم

$$U_{real} = U_{self}(q) + U_{self}(-q) + U_{int}(q, -q) = 2U_{self}(q) + U_{int}(q, -q) \quad (14.2)$$

زیرا $U_{self}(-q) = U_{self}(q)$ است. برای بار در مقابل صفحه هادی داریم

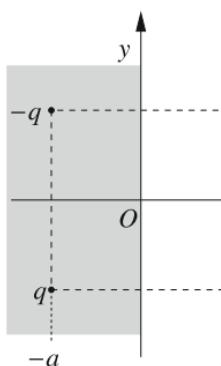
$$U_{es} = U_{self}(q) + U_{int}(q, \text{صفحه}) \quad (15.2)$$

زیرا فقط یک بار واقعی وجود دارد. در واقع، اگر به شاعع بار اجازه دهیم به U_{self} خود-انرژی به بینهایت نزدیک می‌شود، اما این موضوع در اینجا واقعاً مرتبط نیست. در هر صورت، واگرایی ممکن است با فرض شاعع دلخواه کوچک، اما غیر صفر برای بار، درنظر گرفته شود. از آنجایی که $U_{int}(q, \text{صفحه}) = U_{real}/2$ ، $U_{es} = U_{real}/2$ نیز داریم.

- ب: مجدداً یک دستگاه مرجع با محور x عمود بر صفحه هادی انتخاب می‌کنیم، به طوری که q دارای مختصات $(a, d/2, 0)$ و $-q$ دارای مختصات $(a, -d/2, 0)$ باشد. مسئله پتانسیل برای $x > 0$ نیم فاصله با قرار دادن بار تصویر $-q$ در $(-a, d/2, 0)$ و یک بار تصویر q در $(-a, -d/2, 0)$ حل می‌شود. با توجه به استدلالهای انتهای مورد الف، انرژی الکترواستاتیک U_{es} سیستم نصف انرژی کل یک سیستم چهار بار است که همه آنها واقعی در یک مکان هستند. می‌توانیم U_{real} را با وارد کردن چهار بار یک به یک محاسبه کنیم، که هر کدام فقط با بارهای وارد شده قبلی در تعامل است.

$$U_{real} = k_e \left(-\frac{q^2}{d} - \frac{q^2}{2a} + 2 \frac{q^2}{\sqrt{d^2 + 4a^2}} \right) \quad (16.2)$$

همین نتیجه با محاسبه کار نیروهای الکتریکی هنگامی که دو بار واقعی به فاصله بینهایت از صفحه و فاصله بینهایت از یکدیگر حرکت می‌کنند به دست می‌آید. این کار در دو مرحله قابل انجام است. ابتدا بار را روی $(a, d/2, 0)$ و سپس بار را روی $(a, -d/2, 0)$ حرکت می‌دهیم. وقتی اولین بار را جابه‌جا می‌کنیم، سه نیرو روی آن اثر می‌گذارند: F_1 به دلیل تصویر خودش که همزمان به سمت ∞ -حرکت می‌کند و F_2 و F_3 به دلیل بار واقعی دوم و تصویر آن به ترتیب در فواصل r_2 و r_3 کل کار روی بار اول به این ترتیب است:

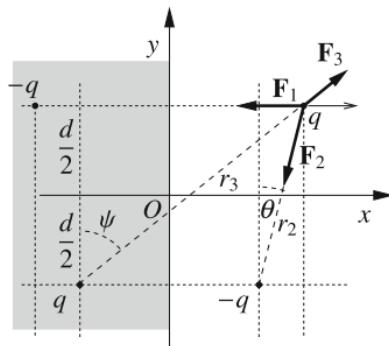


شکل (ح-۲)

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \int_a^\infty \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^\infty \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^\infty \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r} \quad (17.2)$$

که در آن \mathbf{r} بردار موقعیت اولین بار است، و انتگرال اول همان انتگرال رابطه (۱۰.۲) و برابر $-k_e q^2/(4a)$ است. انتگرال دوم را می‌توان بر حسب زاویه θ در شکل (ح-۳) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} W_1 &= -k_e \int_a^\infty \frac{q}{r_1} \sin \theta dx \\ &= -k_e q \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{d} \sin \theta \frac{d}{\cos \theta} d\theta \\ &= -k_e \frac{q}{d} \end{aligned} \quad (18.2)$$



شکل (ح-۲)

که در آن از حقایقت $dx = (d/\cos 2\theta)d\theta$ و $r_2 = d/\cos \theta$ استفاده کرده‌ایم. انتگرال سوم (۱۷.۲) را می‌توان به‌طور مشابه، از نظر زاویه ψ شکل (ح-۳)، بررسی کرد.

$$\begin{aligned} W_3 &= k_e \int_a^\infty \frac{q^2}{r^2} \sin \psi dx \\ &= k_e \frac{q^2}{d} \int_{\psi_1}^{\pi/2} \sin \psi d\psi \\ &= k_e \frac{q^2}{\sqrt{4a^2 + d^2}} \end{aligned} \quad (۱۹.۲)$$

که در آن $\psi = \arccos(d/\sqrt{4a^2 + d^2})$ مقدار ψ است وقتی q در $x = a$ است، یعنی (۱۶.۲) بنا براین، کار انجام شده توسط میدان الکتریکی هنگامی که اولین بار به‌بینهایت منتقل می‌شود،

$$W = k_e \left(-\frac{q^2}{4a} - \frac{q^2}{d} + \frac{q^2}{\sqrt{d^2 + 4a^2}} \right) \quad (۲۰.۲)$$

ما همچنان باید دومین بار واقعی را به‌بینهایت منتقل کنیم، این فقط در حضور بار تصویر خودش انجام می‌شود، و کار $-k_e q^2/(4a)$ است. بالاخره داریم

$$U_{eq} = W - k_e \frac{q^2}{4a} = k_e \left(-\frac{q^2}{2a} - \frac{q^2}{d} + \frac{q^2}{\sqrt{d^2 + 4a^2}} \right) \quad (۲۱.۲)$$

یعنی، نیمی از مقدار U_{real} رابطه (۱۶.۲)، همانطور که انتظار می‌رود.

- ج: یک دستگاه مرجع را انتخاب می‌کنیم که نیم صفحه ($x = 0, y \geq 0$) و ($y = 0, x \geq 0$) با دو نیم صفحه هادی منطبق باشد. بنابراین، بار واقعی q در ($x = a, y = b, z = 0$) قرار دارد. اگر دو بار تصویر به ترتیب در ($-a, b, 0$) و $q'_1 = q'_2 = -q$ در ($a, -b, 0$) اضافه کنیم و یک بار تصویر $q'_3 = q$ در ($-a, -b, 0$ ، پتانسیل در صفحات $y = 0$ و $x = 0$) و در بینهایت صفر است. این مسئله پتانسیل در کنج قائمه که بار واقعی در آن قرار دارد را حل می‌کند.

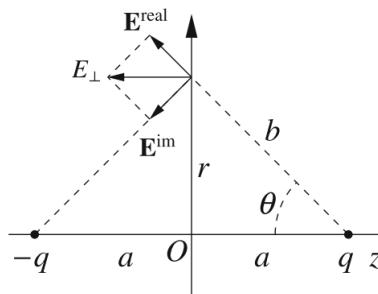
پس از بحث موارد الف و ب ارزی الکترواستاتیک این سیستم یک چهارم ارزی یک سیستم است که شامل چهار بار است که همه آنها واقعی در یک مکان هستند، زیرا چگالی ارزی در سه چهارم کل فضا صفر است.

$$U_{es} = \frac{1}{4} k_e \left(-\frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{b} + \frac{q^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad (۲۲.۲)$$

از طرف دیگر، می‌توانیم کار انجام شده توسط میدان الکتریکی را زمانی که بار واقعی از ($a, b, 0$) به $(\infty, \infty, 0)$ منتقل می‌شود محاسبه کنیم.

٣.٢ میدان‌های تولید شده توسط چگالی بارهای سطحی

- الف: از مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با میدا O در صفحه هادی و محور z عمود بر صفحه و عبور از بار واقعی q استفاده می‌کنیم. بار واقعی در $(0, \phi, z)$ و بار تصویری در $(a, \phi, -z)$ قرار دارد، وقتی که $r = 0$ است، به ϕ ربطی ندارد. میدان الکتریکی در صفحه هادی عمود بر صفحه است، و فقط به r بستگی دارد.



شکل (ح-۲)

در یک نقطه عمومی $P \equiv (r, \phi, z)$ روی صفحه، بزرگی میدان E^{real} ایجاد شده توسط بار واقعی برابر است با:

$$E_{real} = k_e \frac{q}{b^2} = k_e \frac{q}{a^2 + r^2} \quad (23.2)$$

میدان ایجاد شده در P توسط بار تصویری، E^{im} ، دارای همان بزرگی، همان مولفه z ، اما مولفه r مخالف E^{real} شکل (ح-۲) است. بنابراین کل میدان الکتریکی در P عمود بر صفحه و دارای بزرگی زیر است:

$$E(r) = 2E_z^{real}(r) = -2k_e \frac{q}{a^2 + r^2} \frac{a}{\sqrt{(a^2 + r^2)^{3/2}}} = -2k_e \frac{qa}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \quad (24.2)$$

از اینرو چگالی بار سطحی خواهد بود

$$\sigma(r) = \frac{1}{4\pi k_e} E(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qa}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \quad (25.2)$$

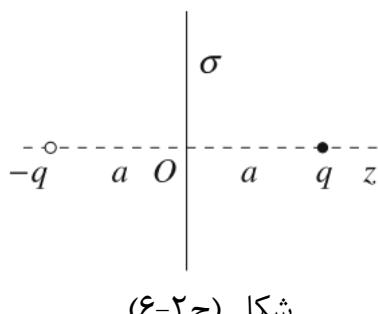
و حلقه بین r و $r + dr$ در صفحه هادی دارای بار زیر است:

$$\begin{aligned} dq_{ind} &= \sigma 2\pi r dr = \frac{q a r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{q}{a^2} \cos^3 \theta 2\pi a^2 \tan \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -q \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (26.2)$$

چون $r = a \tan \theta$ است. مجموع بار القایی در صفحه هادی برابر است با:

$$q_{ind} = \int_0^{\pi/2} dq_{ind} = -q \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = -q \quad (27.2)$$

- ب: در مسئله بار واقعی q واقع در محور z ، در $z = a$ در مقابل یک صفحه هادی، تنها بارهای واقعی q و توزیع بار سطحی σ روی صفحه هستند. چیزی که مشاهده می‌کنیم هیچ میدانی در نیم فضای $z < 0$ نیست، در حالی که در نیم فضای $z > 0$ ، میدانی معادل میدان q را مشاهده می‌کنیم، به علاوه میدان یک بار تصویر $-q$ واقع در محور z در $z = -a$. میدان تولید شده توسط توزیع بار سطحی به تنها یک معادل میدان یک بار $-q$ واقع در $z = +a$ در نیم فاصله $z < 0$ و با میدان بار q واقع در $z = -a$ در نیم فاصله $z > 0$ است.



شکل (ح-۲)

در نیم فاصله $z < 0$ ، میدان توزیع بار سطحی و میدان یا بار واقعی یکدیگر را خنثی می‌کنند. ناپیوستگی میدان در $z = 0$ به دلیل وجود یک چگالی بار سطحی محدود در صفحه هادی است که دلالت بر چگالی بار حجمی نامحدود دارد.

- ج: اجازه دهید یک سیستم مختصات کروی (r, θ, ϕ) را در مسئله ۲.۴، با مبدأ O در مرکز کره هادی و محور z در خط از O و بار واقعی q معروفی کنیم. پتانسیل الکتریکی خارج از کره، از $r \geq a$ با جایگزینی a با r ، و q' و d' با مقادیر آنها (۳۷.۲) به دست می‌آید. ما داریم:

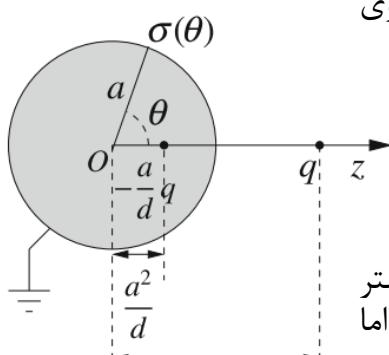
$$\phi(r, \theta) = k_e \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} - \frac{q \frac{a}{d}}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{d^2} - 2r \frac{a}{d} \cos \theta}} \right] \quad (28.2)$$

که مستقل از ϕ است. میدان الکتریکی در $r = a^+$ روی سطح خارجی کره برابر است با:

$$E_{\perp}(a^+, \theta) = - \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (29.2)$$

و چگالی بار سطحی روی کره خواهد بود.

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi k_e} E_{\perp}(a^+, \theta) \quad (30.2)$$



شکل (ح-۲)

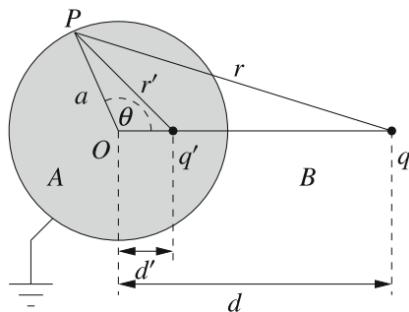
ارزیابی واقعی مشگل خاصی ایجاد نمی‌کند، بلکه بیشتر در گیر هستیم و ما در اینجا از آن صرفنظر می‌کنیم. اما می‌توانیم از همان آرگومان‌هایی در مورد (ب) استفاده کنیم. تنها بارهای واقعی مسئله، بار واقعی q و توزیع بار سطحی کره است.

هیچ میدان خالصی در داخل کره وجود ندارد و میدان $r > a$ معادل میدان q است، به علاوه میدان یک بار تصویر $-qa/d$ که در $z = a^+/d$ قرار دارد. بنابراین، توزیع بار سطحی به تنها یک میدان معادل بار $-q$ واقع در $z = d$ در داخل کره، و یک میدان معادل با میدان بار تصویر $-qa/d$ ، واقع در $z = a^+/d$ خارج از کره ایجاد می‌کند.

۴.۲ بار نقطه‌ای مقابل یک کره هادی

- الف: یک کره هادی زمین شده به شعاع a و بار الکتریکی q در فاصله $d > a$ از مرکز آن O قرار دارد. باز هم، کل فضا به دو ناحیه تقسیم می‌شود: داخل کره ناحیه (A) و بیرون کره (B). پتانسیل الکترواستاتیک در ناحیه A به‌طور یکنواخت برابر با صفر است زیرا کره زمین شده است. سعی می‌کنیم با قرار دادن بار تصویری q' در داخل کره، روی خط عبوری O و q در فاصله d از مرکز O ، مسئله پتانسیل در منطقه B را حل کنیم. اگر بتوانیم مقادیر q' و d' طوری را پیدا کنیم که پتانسیل الکتریکی ϕ در همه جای سطح کره صفر شود، مسئله حل می‌شود. ما شرایط مرزی را برای منطقه B، با $\phi = 0$ هم در سطح کره و هم در بینهایت، و فقط بار واقعی q در بین آن، اعمال می‌کنیم. اجازه دهید پتانسیل $(P)\phi$ را در یک نقطه عمومی P از سطح

کره ارزیابی کنیم، به طوری که پاره خط OP یک زاویه θ را با پاره خط Oq تشکیل دهد، همانطور که در شکل (ح-۲) نشان داده شده است. باید داشته باشیم:



شکل (ح-۲)

$$\begin{aligned} \phi(P) &= k_e \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) \\ &= k_e \left(\frac{q}{\sqrt{a^2 + d'^2 - 2ad \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta}} \right) \end{aligned} \quad (31.2)$$

که r فاصله P تا q ، r' فاصله P تا q' است و از قانون کسینوس‌ها استفاده کرده‌ایم. می‌بینیم که علامت q باید مخالف علامت q' باشد. اگر مربع (۳۱.۲) را بگیریم، خواهیم داشت

$$q^2(a^2 + d'^2 - 2ad' \cos \theta) = q'^2(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta) \quad (32.2)$$

که باید برای هر θ صدق کند. بنابراین باید جداگانه داشته باشیم

$$q^2(a^2 + d'^2) = q'^2(a^2 + d^2) \quad (33.2)$$

$$2q^2 ad' \cos \theta = 2q'^2 ad \cos \theta \quad (34.2)$$

معادله (۳۴.۲) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$q'^2 = q^2 \frac{d'}{d}, \quad q' = -q \sqrt{\frac{d'}{d}} \quad (35.2)$$

$$\text{که می‌تواند در (۳۳.۲) وارد شود، و منجر به} \\ dd'^2 - (a^2 + d'^2)d' + a^2 d = 0 \quad (36.2)$$

که دارای دو جواب $d = a^2/d$ و $d' = a^2/d$ است. جواب اول قابل قبول نیست زیرا بزرگتر از شعاع کره a است (در واقع مطابق با جواب ساده قرار دادن یک بار $-q$ به بار q است). بنابراین فقط $d' = a^2/d$ باقی می‌ماند که می‌توان آن را در (۳۵.۲) جایگزین کرد و منجر به جواب نهایی زیر می‌شود.

$$q' = q \frac{a}{d}, \quad d' = \frac{a^2}{d} \quad (37.2)$$

اگر کره ایزوله باشد و دارای بار خالص Q باشد، مسئله در ناحیه B با قرار دادن بار تصویر q' در d' ، مانند بالا، و بار نقطه‌ای دیگر $q'' = Q - q$ در O حل می‌شود، بنابراین که پتانسیل روی سطح کره یکنواخت است و بار کل کره Q است. مورد $\phi = 0$ مربوط به یک کره بدون بار و ایزوله (جدا شده) است.

- ب: مجموع نیروی f بر q برابر است با مجموع نیروهای وارد شده بر q توسط بار تصویر واقع در d' ، $d' = -q' = -q$ که هر دو در O قرار دارند. بنابراین $f = f' + f'' + f'''$ با

$$f' = k_e \frac{qq'}{(d - d')^2} = -k_e \frac{q^2 ad}{(d^2 - a^2)^2}, \quad f'' = k_e \frac{q^2}{d^2}, \quad f''' = k_e \frac{qQ}{d^2} \quad (38.2)$$

با $f'' = f''' = 0$ اگر کره زمین شود.

- ج: اگر بار واقعی q بهبی‌نهایت منتقل شود، انرژی الکترواستاتیک U سیستم برابر با کار میدان الکتریکی است. وقتی که q در فاصله x از O قرار دارد، نیروی وارد بر آن را با جایگزین کردن d با x در (۳۸.۲) محاسبه می‌کنیم. بنابراین، کار مجموع سه جمله خواهد بود:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_d^\infty f' dx = k_e \left[\frac{q^{\gamma} a}{2(x^{\gamma} - a^{\gamma})} \right]_d^\infty = -k_e \frac{q^{\gamma} a}{2(d^{\gamma} - a^{\gamma})} \\ W_2 &= \int_d^\infty f'' dx = -k_e \left[\frac{q^{\gamma} a}{2x^{\gamma}} \right]_d^\infty = k_e \frac{q^{\gamma} a}{2d^{\gamma}} \\ W_3 &= \int_d^\infty f''' dx = k_e \frac{qQ}{d} \end{aligned} \quad (۳۹.۲)$$

بنابراین $U = W_1 + W_2$ برای کره زمین شده، $U = W_1 + W_2 + W_3$ برای کره باردار ایزوله شده داریم.

جالب است که این نتیجه را برای انرژی کره بدون بار جدا شده با انرژی الکترواستاتیک یک سیستم متشکل از سه بار واقعی q' ، q' و $-q'$ که به ترتیب در d' و O قرار دارند، مقایسه کنیم:

$$\begin{aligned} U_{real} &= k_e \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = k_e \left(\frac{qq'}{d - d'} - \frac{qq'}{d} - \frac{q'^2}{d'} \right) \\ &= k_e \left(-\frac{q^{\gamma} a}{d^{\gamma} - a^{\gamma}} + \frac{q^{\gamma} a}{d^{\gamma}} - \frac{q^{\gamma}}{d} \right) \end{aligned} \quad (۴۰.۲)$$

می‌بینیم که U از U_{real} با نصف کردن انرژی‌های برهمکنش بار واقعی با دو بار تصویر، و نادیده گرفتن انرژی برهمکنش بین دو بار تصویر، به دست می‌آید.

۵.۲ دوقطبی‌ها و کره

- الف: ابتدا مورد کره زمین شده را در نظر می‌گیریم تا پتانسیل آن صفر شود. می‌توانیم دوقطبی را به عنوان سیستمی از دو بار نقطه‌ای $\pm q$ در نظر بگیریم که به فاصله $2h$ مانند شکل (۹-۲) از هم قرار دارند. در نهایت، اجازه می‌دهیم q به بی‌نهایت میل کند، و h به صفر نزدیک شود، بطوری که حاصلضرب $p = 2hq$ ثابت باقی بماند. به دنبال مسئله ۴.۲، دو بار دو تصویر

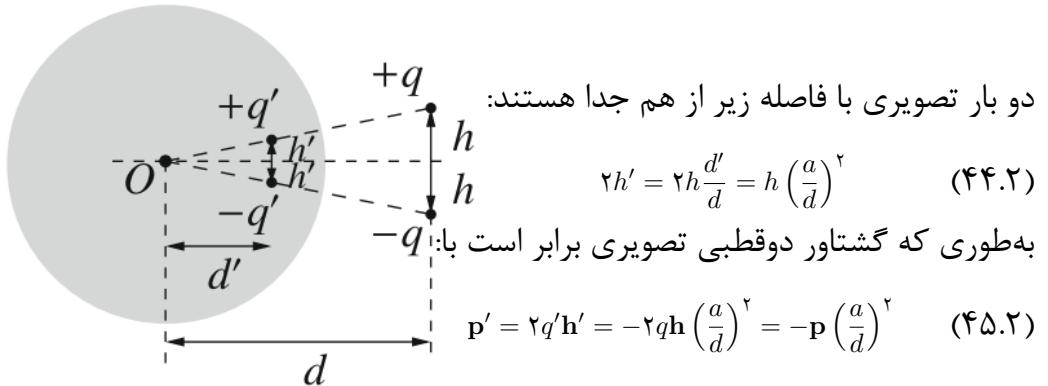
$$\pm q' = \mp q \frac{a}{\sqrt{d^{\gamma} + h^{\gamma}}} \quad (۴۱.۲)$$

به ترتیب، هر کدام در فاصله زیر

$$d' = \frac{a^{\gamma}}{\sqrt{d^{\gamma} + h^{\gamma}}} \quad (۴۲.۲)$$

از مرکز کره O که هر کدام روی خط مستقیمی قرار دارد که از O و بار واقعی مربوطه می‌گذرد، ایجاد می‌کنند. از آنجایی که به حد $h \rightarrow 0$ علاقه مندیم (از این‌رو، $h \ll d$)، می‌توانیم از تقریب‌های زیر استفاده کنیم:

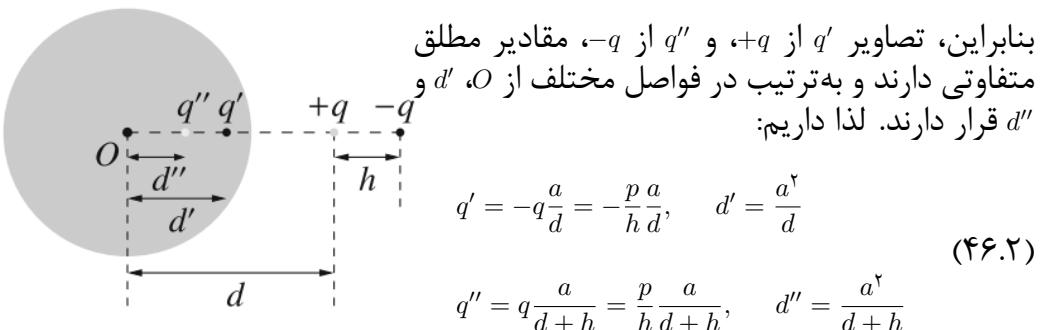
$$\pm q' \approx \mp q \frac{a}{d}, \quad \text{و} \quad d' = \frac{a^{\gamma}}{d} \quad (۴۳.۲)$$



شکل (ح-۲)

دوقطبی تصویری ضد موازی با دوقطبی واقعی است، یعنی دو قطبی روی خطوط مستقیم موازی قرار دارند، اما در جهت مخالف هستند. مجموع بارهای تصویری که برابر با کل بار القایی روی سطح کره است، صفر میباشد. بنابراین این جواب برای یک کره بدون بار ایزوله نیز معتبر است.

- ب: همچنین در این مورد ابتدا کره زمین شده را در نظر می‌گیریم. دوباره، دوقطبی را می‌توان به عنوان یک سیستم از دو بار $\pm q$ ، که با فاصله $h = p/q$ از هم جدا شده‌اند، در نظر گرفت. این دفعه بار $+q$ در فاصله d از مرکز کره O ، در حالی که $-q$ در فاصله $d + h$ است.



شکل (ح-۱۰-۲)

مقادیر مطلق q' و q'' نیز در حدود $h \rightarrow \infty$ با یکدیگر متفاوت می‌مانند، به طوری که یک بار خالص تصویری q''' بر دوقطبی تصویری سوار می‌شود.

$$q''' = \lim_{h \rightarrow \infty} (q' + q'') = \lim_{h \rightarrow \infty} -p \frac{a}{h} \frac{h}{d(d+h)} = -p \frac{a}{d^2}$$
 (۴۷.۲)

گشتاور دوقطبی الکتریکی تصویری را می‌توان به عنوان حد قدر مطلق بار q' در $(d' - d'')$ محاسبه کرد

$$p' = \lim_{h \rightarrow \infty} |q'| (d' - d'') = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p}{h} \frac{a}{d} \frac{a^2 h}{d(d+h)} = p \left(\frac{a}{d}\right)^3$$
 (۴۸.۲)

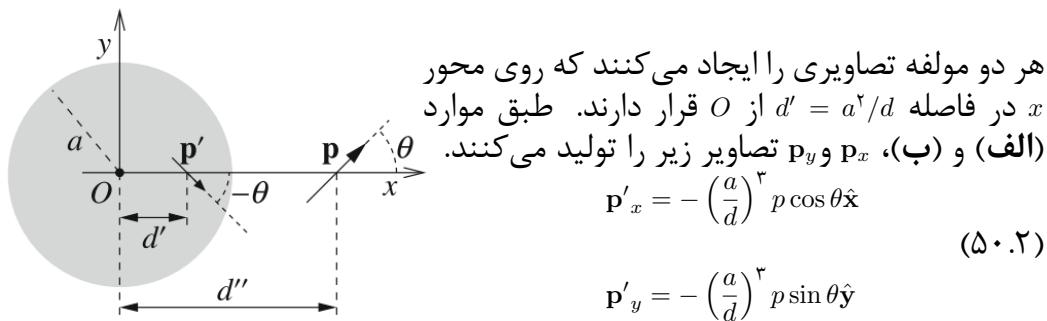
همان نتیجه با محاسبه حد $(d' - d'')$ به دست می‌آید. بنابراین دوقطبی p واقعی و دوقطبی تصویری p' روی یک خط مستقیم قرار دارند و در یک جهت قرار دارند.

دوقطبی تصویری در فاصله a^3/d از O قرار دارد.

از آنجایی که یک بار خالص q''' برای داشتن پتانسیل صفر در سطح کره مورد نیاز است، این راه حل فقط در مورد یک کره زمین شده معتبر است. راه حل برای یک کره بدون بار ایزوله شده به یک بار تصویری $q''' = +pa/d^3$ در مرکز کره نیاز دارد، به طوری که بار کل تصویر صفر و سطح کره هم‌پتانسیل باشد.

- ج: از حالت کره زمین شده شروع کرده و از یک دستگاه مرجع دکارتی استفاده می‌کنیم که مبدأ آن در مرکز کره قرار دارد، O ، محور x از دوقطبی P می‌گذرد، و محور y در صفحه دوقطبی قرار دارد. مانند شکل (ح-۱۱-۲)، زاویه بین دوقطبی الکتریکی P و محور x را با θ نشان می‌دهیم. می‌توانیم دوقطبی را به مجموع بردار مولفه x و y آن تجزیه کنیم

$$\mathbf{p}_x = p \cos \theta \hat{\mathbf{x}}, \quad \text{و} \quad \mathbf{p}_y = p \sin \theta \hat{\mathbf{y}} \quad (49.2)$$



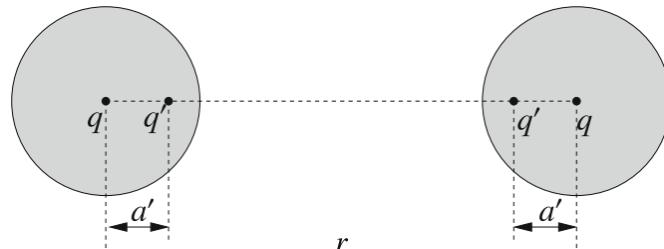
شکل (ح-۱۱-۲)

که منجر به ایجاد یک دوقطبی تصویری $\mathbf{p}' = p(a/d)^3$ با مدول p' تشکیل یک زاویه θ - با محور x و قرار گرفتن در یک بار خالص $q''' = +p \cos \theta (a/d)^3$ از آنجا که اکنون "دم" \mathbf{p}_x است که به سمت O است. در مورد یک کره بدون بار ایزوله، باید یک بار نقطه‌ای q''' - را در O اضافه کنیم، به طوری که بار خالص کره صفر شود.

۶.۲ آزمایش کولمب

- الف: راه حل مرتبه صفر با نادیده گرفتن اثرات القایی با در نظر گرفتن توزیع بارها به صورت یکنواخت بر روی سطوح دو کره به دست می‌آید. بنابراین، در مرتبه صفر، نیروی بین دو کره برابر با نیروی بین دو بار نقطه‌ای است که هر یک برابر Q ، واقع در مراکز آنها، است. به منظور محاسبه جواب‌های مرتبه بالاتر، معرفی پارامتر بدون بعد $\alpha = (a/r) < 1$ ، که در آن a شعاع دو کره و r فاصله بین مراکز آنها، راحت است. جواب مرتبه n با قرار دادن بار نقطه‌ای q در داخل هر کره با همان مرتبه مقدار Q در مرکز آن، به اضافه بارهای نقطه‌ای $q^{(n)}$ به طور فزاینده کوچکتر $q^{(n)}, q^{(n)}, \dots, q^{(n)}$ در موقعیت‌های مناسب، با مقادیر $\sim \alpha^n Q$ ، $\sim \alpha^{n+1} Q$ ، \dots ، $\sim \alpha^{n+k} Q$ ، به دست

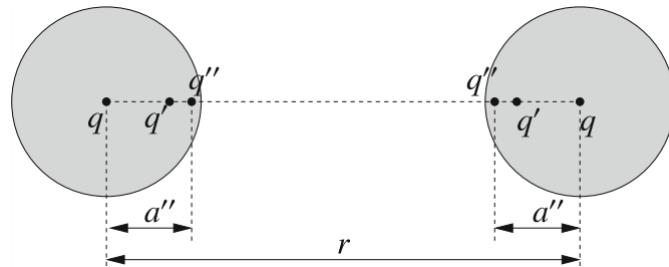
می‌آید. بارها باید از شرایط عادی سازی (نرمالیزه) $\text{پ}^{\text{ر}} \text{Q}$ پیروی کنند.



شکل (۱۲-۲)

در مرتبه اول، بار نقطه‌ای q در مرکز هر کره یک بار تصویری $-\alpha q$ در کره دیگر القا می‌کند، که در فاصله $a' = a^{\frac{1}{3}}/r = r\alpha^{\frac{1}{3}}$ از مرکز آن قرار دارد (مسئله ۴.۲) که در شکل (۱۲-۲) نشان داده شده است. بنابراین، با حل معادلات همزمان $q + q' = Q$ و $-\alpha q + q' = -\alpha q$ ، مقادیر دو بار را بدست می‌آوریم.

$$q = \frac{1}{1 - \alpha} Q, \quad q' = \frac{\alpha}{1 - \alpha} Q \quad (51.2)$$



شکل (۱۳-۲)

در مرتبه دوم، بار مرتبه اول بار q' در داخل هر کره، بار تصویری q'' را در کره دیگر، که در فاصله a'' از مرکز آن قرار دارد، همانطور که در شکل (۱۳-۲) نشان داده شده، القا می‌کند. از آنجایی که فاصله a' از مرکز کره دیگر $ra' = r(1\alpha^{\frac{1}{3}})$ است، داریم

$$q'' = -q' \frac{\alpha}{r - a'} = q' \frac{\alpha}{1 - \alpha^{\frac{1}{3}}}, \quad a'' = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{r - a'} = r \frac{a^{\frac{1}{3}}}{1 - \alpha^{\frac{1}{3}}} \quad (52.2)$$

با ترکیب معادله فوق برای q'' با معادلات $q + q' + q'' = Q$ و $q' = \alpha q$ در نهایت به دست می‌آید.

$$q = Q \frac{1 - \alpha^{\frac{1}{3}}}{1 - \alpha + \alpha^{\frac{1}{3}}}, \quad q' = -Q \frac{\alpha(1 - \alpha^{\frac{1}{3}})}{1 - \alpha + \alpha^{\frac{1}{3}}}, \quad q'' = Q \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{1 - \alpha + \alpha^{\frac{1}{3}}} \quad (53.2)$$

^۱Normalization

تقریب مرتبه بالاتر با تکرار رویه به دست می‌آید. بنابراین دنباله‌ای از بارهای تصویری q, q', q'', q''', \dots در داخل هر کره به دست می‌آوریم. در هر تکرار، بار تصویری جدید به ترتیب α برابر بار اضافه شده در تکرار قبلی است. بنابراین، هر چه مقدار $\alpha = a/r$ کوچکتر باشد، زودتر می‌توان دنباله را کوتاه کرد و تقریب خوبی به دست آورد.

- ب: ما تقریب مرتبه اول نیروی بین دو کره را تنها با در نظر گرفتن بارهای (۵۱.۲) برای هر کره به دست می‌آوریم. با این تقریب، نیروی بین کره‌ها مجموع چهار جمله است. جمله اول نیروی بین دو بار q مرتبه صفر در فاصله r از یکدیگر است. عبارت دوم و سوم نیروهایی است که بین بار مرتبه صفر یک کره و بار مرتبه اول q کره دیگر وجود دارد. فاصله بین این بارها $ra' = r(1 - \alpha^2)$ است. جمله چهارم نیروی بین دو بار مرتبه اول q' در فاصله $r - 2a' = r(1 - 2\alpha^2)$ از یکدیگر است. با جمع بندی همه این مشارکت‌ها به دست می‌آوریم

$$F = k_e \frac{Q}{r^4} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \left[1 - \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} + \left(\frac{\alpha}{(1 - 2\alpha^2)} \right) \right] \quad (54.2)$$

از بسط تیلور، معتبر برای $x < 1$

$$\frac{1}{(1 - x)^4} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + O(x^4) \quad (55.2)$$

برای مرتبه چهارم خواهیم داشت

$$\frac{1}{(1 - \alpha^2)^2} = 1 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4 + O(\alpha^6) \quad (56.2)$$

$$\frac{1}{(1 - 2\alpha^2)^2} = 1 + 4\alpha^2 + 12\alpha^4 + O(\alpha^6) \quad (57.2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} F &= k_e \frac{Q^2}{r^4} (1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \dots) (1 - 2\alpha + \alpha^2 - 4\alpha^3 + \dots) \\ &= k_e \frac{Q^2}{r^4} [1 - 4\alpha^3 + O(\alpha^6)] \end{aligned} \quad (58.2)$$

از اینرو تمام جملات مرتبه‌های α و α^2 ناپذید می‌شوند و از بین می‌روند. بنابراین اولین تصحیح ناپذید شدن نیروی «کولمب» در مرتبه سوم در a/r است.

$$F = k_e \frac{Q^2}{r^4} \left(1 - 4 \frac{a^3}{r^3} \right) \quad (59.2)$$

این نتیجه را می‌توان بر حسب بسط چند قطبی توزیع بار کره‌ها تفسیر کرد. دو گشتاور چند قطبی اول توزیع بار هر کره یک تک قطبی برابر بار کل Q و یک دوقطبی الکتریکی $\mathbf{Q} = -q'a/\hat{r} = -(\alpha Q)(\alpha^2 r)\hat{r}$ ، $\mathbf{p} = -\mathbf{Q}$ ، با \hat{r} به سمت مرکز کره مقابله اشاره می‌کند. سهم گشتاورهای تک قطبی به کل نیرو $F_{mm} = k_e Q^2 / r^4$ است. اکنون ما به نیروی نیاز داریم که از طرف جمله‌های تک قطبی هر کره بر دو قطبی کره دیگر وارد می‌شود. تک قطبی مثلاً کره چپ یک میدان $E = k_e Q / r^2 \hat{r}$ در مرکز کره سمت راست ایجاد می‌کند. می‌توانیم گشتاور دوقطبی کره راست را

به عنوان حد $\rightarrow h$ دو بار در نظر بگیریم، در $r - h$ از مرکز کره سمت چپ، و قطبی نیروی بین تک قطبی چپ و دوقطبی راست است

$$\begin{aligned} F_{md} &= \lim_{h \rightarrow 0} k_e Q q' \left[-\frac{1}{(r-h)^2} + \frac{1}{r^2} \right] \approx \lim_{h \rightarrow 0} k_e Q q' \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{2h}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right) \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} k_e q' \frac{2h}{r^3} - 2k_e \frac{Q p}{r^3} = -2k_e a^3 \frac{Q}{r^3} \end{aligned} \quad (60.2)$$

که در آن از بسط تیلور مرتبه اول $(r-h)^{-2}$ استفاده کرده‌ایم. با اضافه کردن نیروی بین تک قطبی سمت راست و دوقطبی چپ، نیروی کل به دست می‌آید:

$$F = F_{mm} + 2F_{md} = k_e \frac{Q}{r^3} \left(1 - \frac{4a^3}{r^3} \right) \quad (61.2)$$

که با (59.2) سازگار است. همین نتیجه را می‌توان با اعمال رابطه نیروی بین یک بار نقطه‌ای و یک دوقطبی الکتریکی، $F = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$ به دست آورد. همچنین مسئله ۱۰.۱ را در مورد این موضوع مشاهده کنید.

از رابطه (59.2) دریافتیم که نسبت $a/r \approx 1/13$ برای کاهش انحراف سیستماتیک از قانون مربع معکوس خالص زیر یک درصد کافی است.

۷.۲ نگاهی بر حل یک مسئله

الف: پتانسیل الکتریکی کل در یک نقطه از بردار موقعیت \mathbf{r} حاصل جمع پتانسیل دوقطبی و پتانسیل میدان الکتریکی یکنواخت خارجی است.

$$\phi(\mathbf{r}) = k_e \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} - Ez = k_e \frac{p \cos \theta}{r^2} - Er \cos \theta \quad (62.2)$$

که در آن θ زاویه بین \mathbf{r} و محور z است. توجه داشته باشید که نمی‌توان نقطه مرجع را برای پتانسیل الکترواستاتیک در بینهایت در نظر گرفت، زیرا پتانسیل میدان الکتریکی یکنواخت برای $z \rightarrow \pm\infty$ و اگرما می‌شود. بنابراین $\phi = \phi_{xy}$ را در صفحه xy انتخاب کرده‌ایم، که هم برای دوقطبی و هم برای میدان الکتریکی یکنواخت یک سطح هم پتانسیل است. اکنون به دنبال یک سطح هم پتانسیل بیشتر می‌گردیم که روی آن $\phi = 0$. در این سطح باید داشته باشیم

$$\phi = k_e \frac{p \cos \theta}{r^2} - Er \cos \theta = 0 \quad (63.2)$$

و علاوه بر حل $\theta = \pi/2$ ، مربوط به صفحه xy ، راه حل مستقل از θ را داریم.

$$r = k_e^{1/3} \left(\frac{p}{E} \right)^{1/3} \equiv R \quad (64.2)$$

مربوط به کره‌ای با شعاع R . توجه داشته باشید که دو سطح هم پتانسیل یکدیگر را در محیط $x^2 + y^2 = R^2$ در صفحه $z = 0$ قطع می‌کنند. این امکان پذیر است زیرا میدان الکتریکی دوقطبی در محیط تقاطع است

$$\mathbf{E}_{dis} = k_e \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{r^3} = -k_e \frac{\mathbf{p}}{R^3} = -\mathbf{E} \quad (65.2)$$

به‌طوری که کل میدان روی محیط صفر باشد، یعنی تنها میدانی که می‌تواند بر هر دو سطح هم پتانسیل عمود باشد.

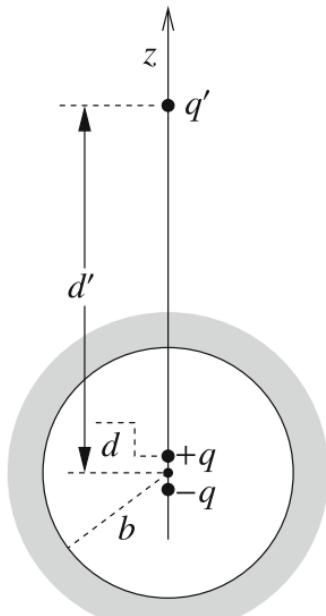
- ب: ما باید راه حلی برای پتانسیل ϕ پیدا کنیم که شرایط $\phi = 0$ در سطح کره هادی برآورده کند، یعنی $\phi = 0$ در $|r| = a$ و به‌گونه‌ای که در فاصله زیاد از هادی، میدان E باشد.

طبق بند الف، میدان خارج از کره باید برابر با E_0 به‌اضافه میدان یک دوقطبی الکتریکی p_0 ، موازی با E_0 واقع در مرکز کره باشد. گشتوار دوقطبی با جایگزینی $R = a$ در (۶۴.۲) بدست می‌آید.

$$P_i = k_e^{-1} a^3 E_0 = \frac{3}{4\pi k_e} V_a E_0 \quad (66.2)$$

که در آن V_a حجم کره است. بنابراین پتانسیل $r \geq a$ است

$$\phi = k_e \frac{\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{r}}{r^3} - E_0 z \quad (67.2)$$



شکل (ح ۱۴-۲)

در حالی که $\phi = 0$ برای $r \leq a$ است. مجموع بار القا شده بر روی کره صفر است، به‌طوری که جواب برای یک کره زمین شده و برای یک کره ایزوله و بدون بار یکسان است. جواب با جوابی که در مسئله ۱.۲ از طریق یک رویکرد (ابتکاری) متفاوت به‌دست آمده، یکسان است.

- ج: برای دوقطبی در مرکز یک حفره هادی کروی، شرایط مرزی $\phi = 0$ در $r = b$ است. بارهای قطبش روی سطح داخلی باید یک میدان یکنواخت E_i موازی با p_0 و با توجه به (۶۴.۲) با شدت ایجاد کنند.

$$E_i = k_e \frac{p_0}{b^3} = k_e \frac{4\pi p_0}{3V_b} = k_e \frac{p_0}{b^3} \quad (68.2)$$

همانطور که در مورد قبل، کل بار القایی صفر است و بنابراین مهم نیست که پوسته زمین باشد یا ایزوله و بدون بار.

- د: می‌توانیم دوقطبی را به عنوان سیستمی از دو بار نقطه‌ای $\pm q$ ، به‌ترتیب در $z = \pm d$ با $p = 2qd$ ، مانند شکل (ح ۱۴-۲)، در نظر بگیریم. با توجه به روش بارهای تصویری، بار $+q$ توزیع بار سطح داخلی پوسته را تغییر می‌دهد، به‌طوری که یک میدان در داخل کره، معادل میدان بار تصویری $-q$ ، $z = d = b^3/d$ ، واقع در $z = d = b^3/d$ ایجاد می‌کند. همچنین وجود بار $-q$ بر توزیع بار سطحی تأثیر می‌گذارد، به‌طوری که کل میدان داخل پوسته، مجموع میدان‌های دو بار واقعی به‌اضافه میدان دو بار تصویری به‌ترتیب واقع در $z = \pm b^3/d$ و $z = d = b^3/d$ است. اجازه دهید $d \rightarrow \infty$ و ثابت نگه داشتن حاصل ضرب $p = 2qd$ ، میدان بارهای واقعی به‌میدان

دوقطبی $p = p\hat{z}$ واقع در مرکز پوسته نزدیک شود، در حالی که میدان بارهای تصویری به یک یکنواخت نزدیک می‌شود. اجازه دهید میدان بارهای تصویری را در مرکز پوسته ارزیابی کنیم:

$$E_c = 2k_e \frac{qb}{d} \left(\frac{d}{b^2} \right)^1 = k_e \frac{2qd}{b^3} = k_e \frac{p}{b^3} \quad (69.2)$$

که مطابق با نتیجه بند (ج) است. از روش بارهای تصویری نیز می‌توان برای به دست آوردن نتیجه بند (ب) استفاده کرد.

۸.۲ اتصال الکتریکی کره‌ها

الف: با تقریب مرتبه صفر a/d و b/d ، بارهای سطحی را به طور یکنواخت توزیع فرض می‌کنیم. بنابراین پتانسیل الکترواستاتیک تولید شده توسط هر کره خارج از حجم آن برابر با پتانسیل بار نقطه‌ای واقع در مرکز کره است. اجازه دهید بارهای هر کره را با Q_a و Q_b ، با $Q_a + Q_b = Q$ نشان دهیم. با روی سیم ناچیز است زیرا فرض کردہ ایم که ظرفیت آن ناچیز است. پتانسیل‌های الکترواستاتیک کره‌ها نسبت به بی‌نهایت به ترتیب برابر

$$V_a \approx k_e \frac{Q_a}{a}, \quad V_b \approx k_e \frac{Q_b}{b} \quad (70.2)$$

از آنجایی که کره‌ها به صورت الکتریکی بهم متصل هستند، $V_a = V_b \equiv V$. مقدار بارها را به دست می‌آوریم

$$Q_a \approx Q \frac{a}{a+b}, \quad Q_b \approx Q \frac{b}{a+b} \quad (71.2)$$

در نتیجه $Q_a > Q_b$ است.

ب: از نتایج بند (الف) آمده است

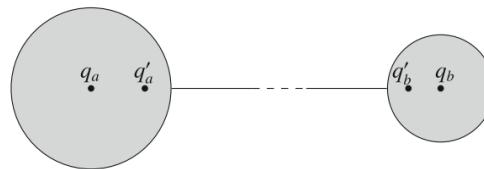
$$V \approx k_e \frac{Q}{a+b}, \quad C \approx \frac{a+b}{k_e} \quad (72.2)$$

ج: میدان‌های الکتریکی در سطوح کره برابر:

$$E_a \approx k_e \frac{Q_a}{a^2} = k_e \frac{Q}{a(a+b)}, \quad E_b \approx k_e \frac{Q_b}{b^2} = k_e \frac{Q}{b(b+a)} \quad (73.2)$$

که در آن $E_b > E_a$ است. در حد $a \rightarrow b \rightarrow \infty$ در حالی که $E_b \rightarrow \infty$ داریم.

د: مانند مسئله ۶.۲ ادامه می‌دهیم. با انتخاب مرتبه صفر، میدان هر کره خارج از حجم آن را به دلیل بار نقطه‌ای در مرکز کره در نظر می‌گیریم.



شکل (ح-۲-۱۵)

مقادیر این بارهای نقطه‌ای را با q_a و q_b نشان می‌دهیم. برای تقریب مرتبه اول در a/d و b/d ، در نظر می‌گیریم که هر بار مرتبه صفر یک بار تصویر را در کره دیگر، با مقادیر زیر القا می‌کند.

$$q'_a = -q_b \frac{a}{d}, \quad q'_b = -q_a \frac{b}{d} \quad (74.2)$$

که به ترتیب در فواصل a^3/d و b^3/d از مرکز هستند. در هر ترتیب متوالی، تصاویری از تصاویر اضافه شده به ترتیب قبلی را اضافه می‌کنیم. این منجر به بارهای تصویری با مرتبه بالاتر و بالاتر در a/d و b/d می‌شود.

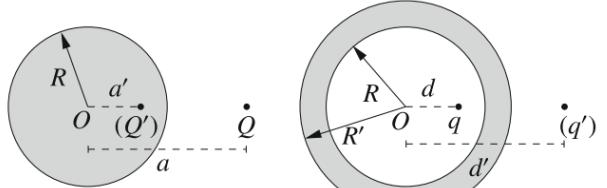
بنابراین تا مرتبه اول، چهار بار نقطه‌ای با شرط $q_a + q_b + q'_a + q'_b = Q$ داریم. یک شرط دیگر این است که پتانسیل در سطوح کره خواهد بود:

$$V_a \approx k_e \frac{q_a}{a}, \quad V_b \approx k_e \frac{q_b}{b} \quad (75.2)$$

زیرا در سطح هر کره، پتانسیل‌های ناشی از بار مرتبه صفر خارجی و بار مرتبه اول داخلی یکدیگر را خنثی می‌کنند. در نهایت باید $V_a = V_b$ داشته باشیم، زیرا کره‌ها توسط سیم به هم وصل شده‌اند، به‌طوری که

$$q_a \approx \frac{Q}{1 + b/a - 2b/d}, \quad q_b \approx \frac{Q}{1 + a/b - 2a/d} \quad (76.2)$$

۹.۲ بار درون یک پوسته هادی



شکل (۹-۲)

- الف: اجزه دهید ابتدا مسئله ۴.۲ را به‌خاطر بیاوریم، اکنون با یک بار نقطه‌ای Q در فاصله a از مرکز O یک کره هادی و زمین شده، به‌شعاع $R < a$ را در نظر می‌گیریم. یک دستگاه مختصات کروی با مبدأ O را معرفی می‌کنیم. فقط به‌مختصات شعاعی r نیاز داریم.

دیدیم که شرایط مرزی برای $R \geq r$ با قرار دادن یک بار تصویر $Q' = Q(a/R)$ در داخل کره، در فاصله $a' = R^3/a$ از O ، روی خطی که O و Q را به‌هم می‌پیوندد، تکرار می‌شود. در مورد حاضر با مسئله معکوس سروکار داریم و می‌توانیم با معکوس کردن نقش بارهای واقعی و تصویری، جواب را در ناحیه $R \leq r \leq R'$ بدست آوریم. بار واقعی q اکنون در داخل حفره یک پوسته کروی هادی و زمین شده با شعاع داخلی R ، در فاصله $d < R$ از مرکز O قرار دارد. شرایط مرزی داخل حفره با قرار دادن بار تصویر خارجی $q' = q(R/d)$ در فاصله $d' = R^3/d$ از O ، در خط مستقیم از طریق O و q' مانند شکل (۹-۲)، تکرار می‌شود. بنابراین، پتانسیل الکتریکی داخل حفره برابر است با مجموع پتانسیل‌های q و q' . پتانسیل ϕ در ناحیه $R \leq r \leq R'$ ثابت است زیرا در اینجا در یک هادی در شرایط ایستا قرار داریم و برابر با صفر است زیرا پوسته زمین شده است. برای $r \geq R'$ نیز $\phi = 0$ هم روی سطح کروی در $R = R'$ و هم در بینهایت، و هیچ باری در این بین وجود ندارد.

- ب: نیروی بین q و پوسته برابر با نیروی کولن بین q و بار تصویری آن q' است و جالب می‌باشد.

$$F = k_e \frac{qq'}{(d' - d)^2} = -k_e \frac{q^3 R d}{(R^3 - d^3)^2} \quad (77.2)$$

• ج: اجازه دهدید یک سطح کروی با شعاع $R'' < R' < R$ با مرکز O در نظر بگیریم. شار میدان الکتریکی از طریق این سطح بسته صفر است، زیرا میدان در همه جای یک هادی صفر است. بنابراین طبق قانون گاووس، بار کل داخل کرده باید صفر باشد. این بدان معناست که بار القا شده در سطح داخلی پوسته $-q$ است، همانطور که ممکن است مستقیماً با محاسبه بار سطحی و انتگرال گیری در کل سطح تأیید شود.

• د: پتانسیل الکتریکی هنوز باید برای $R \leq r \leq R'$ ثابت باشد، اما دیگر محدود به صفر نیست. پتانسیل الکتریکی در ناحیه $r \leq R$ هنوز معادل پتانسیل تولید شده توسط بارهای q و q' بند (الف) به اضافه مقدار ثابت ϕ_0 که باید تعیین شود. میدان الکتریکی در ناحیه $R \leq r \leq R'$ هنوز صفر است، به طوری که پتانسیل ثابت و برابر با ϕ_0 است. از آنجا که کل بار روی سطح داخلی باید صفر باشد، باید بار q روی سطح داخلی به شعاع R را برای جبران بار $-q$ توزیع شده روی سطح داخلی توزیع کنیم. از آنجایی که بار واقعی q و بار $-q$ توزیع شده روی سطح شعاع R یک پتانسیل ثابت برای $r \geq R$ ایجاد می‌کنند، بار q باید به طور یکنواخت روی سطح خارجی توزیع شود تا پتانسیل کل در منطقه $R \leq r \leq R'$ ثابت بماند.

پتانسیل در ناحیه $r \geq R'$ معادل پتانسیل تولید شده توسط بار نقطه‌ای q واقع در O است. بنابراین اگر $\phi(\infty) = 0$ را انتخاب کنیم، $\phi(r) = k_e q/r$ برای $r \geq R'$ داریم. بنابراین $R \leq r \leq R'$ برای $\phi(r) = \phi_0$ و $\phi_0 = \phi(R') = k_e q/R'$ دارد. برای $r \leq R$ داریم

$$\phi(r) = k_e \left(\frac{q}{r_a} + \frac{q'}{r_{q'}} \right) + \phi_0. \quad (78.2)$$

که در آن r_q فاصله نقطه از بار واقعی q و $r_{q'}$ فاصله نقطه از بار تصویر q' است. میدان داخل حفره برای پوسته زمین شده یا ایزوله یکسان است.

۱۰.۲ یک سیم باردار در مقابل یک هادی استوانه‌ای

• الف: در اینجا داریم $r' = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ و $r = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ که در آن x و y مربوط به مختصات Q است. بنابراین مربع معادله خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} &= K^2 \\ x^2 + 2ax + a^2 + y^2 &= K^2 x^2 - 2K^2 ax + K^2 a^2 + K^2 y^2 \\ -(x^2 + y^2)(K^2 - 1) + 2ax(K^2 - 1) &= a^2(K^2 - 1) \\ x^2 + y^2 - \frac{2K^2 + 1}{K^2 - 1} ax &= a^2 \end{aligned} \quad (79.2)$$

از طرف دیگر، معادله محیطی با مرکز $(x_0, 0)$ و شعاع R برابر است با:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + y^2 &= R^2 \\ x^2 + y^2 - 2x_0 x &= R^2 - x_0^2 \end{aligned} \quad (80.2)$$

با مقایسه (۸۰.۲) با (۷۹.۲) می‌بینیم که منحنی‌های تعریف شده با معادله $K = r/r'$ محیط‌هایی هستند که در مرکز زیر قرار دارند.

$$x_{\circ}(K) = \frac{K^{\frac{1}{2}} + 1}{K^{\frac{1}{2}} - 1} a, y_{\circ} = 0 \quad (81.2)$$

و شعاع

$$R(K) = \frac{2K}{|K^{\frac{1}{2}} - 1|} a \quad (82.2)$$

توجه کنید که

$$x_{\circ}\left(\frac{1}{K}\right) = -x_{\circ}(K) \quad \text{و} \quad R\left(\frac{1}{K}\right) = -R(K) \quad (83.2)$$

بنابراین، ممکن است خود را به $1 > K > a > 0$ محدود کنیم، به‌طوری که علامت مقدار مطلق را در عبارت $R(K)$ حذف کنیم. محیط‌های مربوط به $0 < K < 1$ با بازتاب در محور y محیط‌های مربوط به $1/K$ به‌دست می‌آیند.

• ب: طبق قانون گاووس، میدان الکترواستاتیک و پتانسیل تولید شده توسط یک سیم مستقیم بی‌نهایت طویل با چگالی بار خطی λ خواهد بود:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ} r} \quad \text{و} \quad \phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ}} \ln\left(\frac{r}{r_{\circ}}\right) \quad (84.2)$$

که در آن r فاصله از سیم و r_{\circ} یک ثابت دلخواه است که مربوط به فاصله‌ای است که در آن $\phi = 0$ قرار می‌دهیم. پتانسیل تولید شده توسط دو سیم موازی با چگالی بار به‌ترتیب λ و $-\lambda$ ، برابر است با:

$$\phi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ}} \ln\left(\frac{r}{r_{\circ}}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ}} \ln\left(\frac{r'}{r'_{\circ}}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ}} \ln\left(\frac{r'}{r}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ}} \ln\left(\frac{r_{\circ}}{r'_{\circ}}\right) \quad (85.2)$$

که در آن r' یک ثابت دلخواه دوم، مشابه r_{\circ} است. عبارت

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ}} \ln\left(\frac{r_{\circ}}{r'_{\circ}}\right) \quad (86.2)$$

در واقع یک ثابت دلخواه است که می‌توانیم آن را برابر با صفر قرار دهیم. با این انتخاب، پتانسیل الکترواستاتیک در صفحه $x = 0$ یک دستگاه مرجع دکارتی که در آن دو سیم روی خطوط مستقیم قرار دارند ($x = +a, y = 0$) و ($x = -a, y = 0$) صفر است. معادله سطوح هم‌پتانسیل در این دستگاه مرجع هست

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_{\circ}} \ln\left(\frac{r'}{r}\right) = \phi \quad (87.2)$$

که منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\frac{r_{\circ}}{r'} = e^{-2\pi\epsilon_{\circ}\phi/\lambda} \quad (88.2)$$

بنابراین می‌توانیم $K = e^{-2\pi\epsilon_{\circ}\phi/\lambda}$ را در (۸۱.۲) و (۸۲.۲) جایگزین کنیم. می‌بینیم که سطوح هم‌پتانسیل، سطوح استوانه‌ای نامتناهی هستند که محورهای آنها دارای معادلات زیر هستند.

$$x_{\circ}(\phi) = \frac{e^{-2\pi\epsilon_{\circ}\phi/\lambda} + 1}{e^{-2\pi\epsilon_{\circ}\phi/\lambda} - 1}, \quad y_{\circ} = 0 \quad (89.2)$$

که دارای شعاع‌های زیر هستند

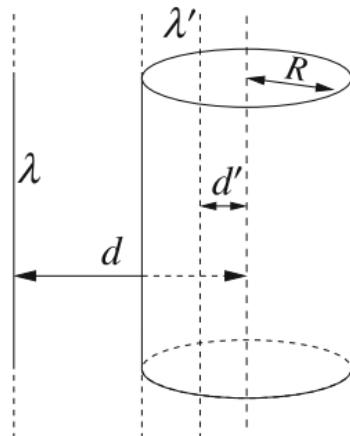
$$R(\phi) = \frac{2e^{-2\pi\epsilon_0\phi/\lambda}}{|e^{-2\pi\epsilon_0\phi/\lambda} - 1|} a \quad (90.2)$$

با ضرب صورت و مخرج عبارات فوق در $e^{2\pi\epsilon_0\phi/\lambda}$ در نهایت به سمت می‌آید:

$$x(\phi) = \frac{e^{-2\pi\epsilon_0\phi/\lambda} + e^{2\pi\epsilon_0\phi/\lambda}}{e^{-2\pi\epsilon_0\phi/\lambda} - e^{2\pi\epsilon_0\phi/\lambda}} a = -a \coth\left(\frac{2\pi\epsilon_0\phi}{\lambda}\right) \quad (91.2)$$

$$R(\phi) = \frac{2}{|e^{-2\pi\epsilon_0\phi/\lambda} - e^{2\pi\epsilon_0\phi/\lambda}|} a = \left| \frac{a}{\sinh(2\pi\epsilon_0\phi/\lambda)} \right| \quad (92.2)$$

اگر سیم منفی روی خط مستقیم ($x = -a, y = 0$) قرار گیرد، استوانه‌های هم‌پتانسیل در نیم فضای $\phi < 0$ در شکل ۲-۲ در $r < r'$ و $\phi > 0$ هم‌پتانسیل در نیم فضای $x > 0$ قرار دارند.



شکل (۱۷-۲)

- ج: می‌توانیم با قرار دادن سیم تصویری با چگالی بار $\lambda' = -\lambda$ در داخل استوانه مسئله را حل کنیم. در شکل ۲-۲، اجازه دهید سیم تصویری $P \equiv (-a, 0)$ و سیم تصویری را در $P \equiv (a, 0)$ در یکی از محیط‌های سطح استوانه هادی صفحه xy را در آنجا که $d > R$ قطع می‌کند. این همیشه تا آنجا که $d > R/r' = K$ امکان‌پذیر است. با این مکان‌های سیم‌های واقعی و تصویری، پتانسیل سطح استوانه ثابت و برابر با مقدار معین ϕ است. با توجه به R و d ، می‌توانیم مقادیر a و d را با تعریف ثابت بی‌بعد $\lambda = 2\pi\epsilon_0\phi_0/\lambda$ و سپس حل معادلات همزمان بدست آوریم.

$$2a + d' = d, \quad a + d' = x_0 = a \coth \phi', \quad \frac{a}{\sinh \phi'} = R \quad (93.2)$$

از معادله اول $a = (d - d')/2$ بدست می‌آوریم که با دو معادله دیگر جایگزین می‌کیم.

$$\frac{d + d'}{2} = \frac{d - d'}{2} \coth \phi', \quad \frac{d - d'}{2} = R \sinh \phi' \quad (94.2)$$

و معادله اخیر منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\sinh \phi' = \frac{d - d'}{2R} \quad (95.2)$$

که مستقل از λ است. از روابط

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \text{و} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

خواهیم داشت

$$\coth \phi' = \frac{\sqrt{4R^2 + (d - d')^2}}{d - d'} \quad (96.2)$$

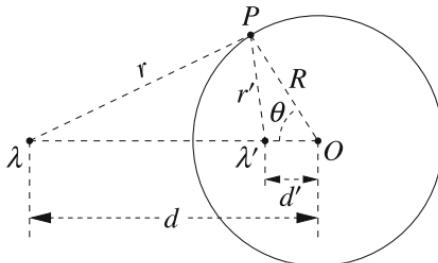
که با جایگزینی در اولین رابطه (۹۳.۲) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\frac{d+d'}{2} = \frac{d-d'}{2} \frac{\sqrt{4R^2 + (d-d')^2}}{d-d'} \quad (97.2)$$

با صرف نظر از جواب ساده $d = d'$ (مربوط به دو سیم روی هم قرار گرفته با چگالی بار خطی λ و $-\lambda$ ، که میدان صفر را در کل فضا ایجاد می‌کند)، داریم.

$$d' = \frac{R}{d}, \quad a = \frac{d'+R}{2d}, \quad \phi' = \cosh^{-1} \left(\frac{d'+2R}{d'+R} \right) \quad (98.2)$$

ممکن است به طور مشابه، به مسئله شناخته شده پتانسیل یک بار نقطه‌ای در مقابل یک کره زمین شده و هادی متناوباً ادامه دهیم.



شکل (ح-۲) تقاطع با صفحه xy استوانه هادی

با شعاع R ، سیم باردار واقعی در فاصله d از محور استوانه، و سیم تصویری در فاصله d' از محور را نشان می‌دهد. ما تقارن انتقالی عمود بر شکل داریم. پتانسیل ϕ تولید شده توسط سیم واقعی با چگالی بار خطی λ و سیم تصویری با چگالی بار خطی λ' باید روی سطح استوانه ثابت باشد.

پتانسیل در یک نقطه عمومی P سطح هست:

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r - \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0} \ln r' = \text{const} \quad (99.2)$$

که در آن r فاصله P از سیم واقعی و r' فاصله P' از سیم تصویری است. با ضرب $-2\pi\epsilon_0$ به دست می‌آوریم

$$\lambda \ln r + \lambda' \ln r' = \text{const} \quad (100.2)$$

که می‌توان با بیان r و r' بر حسب d ، d' و زاویه θ بین r و شعاع اتصال P به تقاطع محور استوانه با صفحه xy و اعمال قانون کسینوس‌ها بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$\lambda \ln \left(\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta} \right) + \lambda' \ln \left(\sqrt{d'^2 + R^2 - 2Rd' \cos \theta} \right) = \text{const} \quad (101.2)$$

با مشتق‌گیری نسبت به θ بدست می‌آید:

$$\frac{\lambda R d \sin \theta}{d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta} = -\frac{\lambda' R d' \sin \theta}{d'^2 + R^2 - 2Rd' \cos \theta} \quad (102.2)$$

به این معنی که λ و λ' باید دارای عالم متضاد باشند. با تقسیم هر دو طرف بر $R \sin \theta$ ، پس از مقداری عملیات جبری،

$$\lambda d(d'^2 + R^2 - 2Rd' \cos \theta) = -\lambda' d'(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta) \quad (103.2)$$

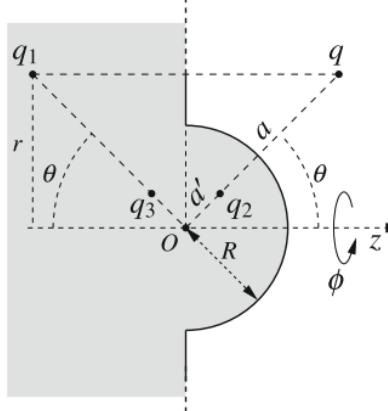
$$\lambda(d d'^2 + d R^2 - 2R d d' \cos \theta) = -\lambda'(d' d^2 + d' R^2 - 2R d d' \cos \theta)$$

که به $-\lambda' = \lambda$ نیاز دارد تا معادله از θ مستقل شود، و با صرف نظر از جواب ساده $d = d'$ ، در نهایت به دست می‌آوریم

$$d' = \frac{R}{d} \quad (104.2)$$

۱۱.۲ سطوح هادی نیم کره

- الف:** یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) را با محور تقارن مسئله به عنوان محور z به‌طوری که بار نقطه‌ای در $(a \sin \theta, \phi, a \cos \theta)$ با ϕ زاویه ثابت معین، مانند شکل (ح-۲۱)، انتخاب می‌کنیم. سطح هادی، شامل برجستگی نیمکره و قسمت صفحه، با $\phi = 0^\circ$ برابر است. اگر سطح هادی به‌سادگی صاف و بدون برجستگی بود، مسئله با قرار دادن بار تصویری $q_1 = -q$ در $(a \sin \theta, \phi, -a \cos \theta)$ ، مانند شکل (ح-۲۱) حل می‌شد. از طرف دیگر، اگر هادی یک سطح کروی زمین شده با شعاع R باشد، مسئله با قرار دادن بار تصویری $q_2 = -q(R/a)$ در $(a \sin \theta, \phi, a \cos \theta)$ ، با $a' = R^2/a$ حل می‌شود.

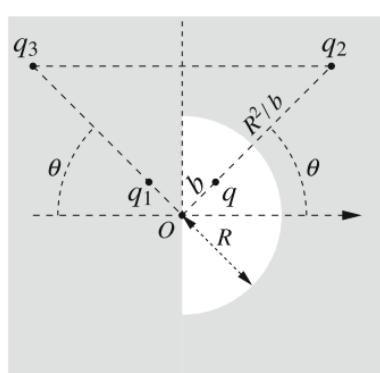


شکل (ح-۲۱)

بار واقعی q ، با دو بار تصویری q_1 و q_2 ، منشا یک پتانسیل $\varphi_q(\mathbf{r}) = \varphi_q(\mathbf{r}) + \varphi_{q_1}(\mathbf{r}) + \varphi_{q_2}(\mathbf{r})$ می‌دهد که با صفر روی سطح هر دو صفحه که در آن برابر $\varphi_{q_1}(r) = \varphi_q(r) + \varphi_{q_2}(r)$ متفاوت است زیرا در صفحه $\varphi_q(\mathbf{r}) + \varphi_{q_2}(\mathbf{r})$ جایی که برابر $\varphi_{q_1}(\mathbf{r})$ برابر صفر است. مسئله با افزودن بار سوم تصویری $q_3 = q(R/a)$ در $(a \sin \theta, \phi, -a \cos \theta)$ حل می‌شود، به‌طوری که زوج‌های $\{q_1, q_3\}$ و $\{q_2, q_3\}$ ایجاد می‌کنند. یک پتانسیل φ در سطح صفحه، و زوج‌های $\{q_1, q_2\}$ و $\{q_1, q_3\}$ یک پتانسیل φ در سطح کروی (و نیمکره‌ای!) ایجاد می‌کنند. طبق قانون گاوس، کل بار القا شده بر هادی برابر با مجموع بارهای تصویری است.

$$q_{ind} = q_1 + q_2 + q_3 = -q + \left(-\frac{R}{a}q \right) + \left(\frac{R}{a}q \right) = -q \quad (10.5.2)$$

توجه داشته باشید که از آنجایی که میدان الکتریکی تولید شده توسط بار واقعی به‌اضافه سه بار تصویری همیشه عمود بر سطح هادی است، باید در محیط (R, ϕ, z) در اینجا با هر مقدار ϕ ، جایی که نیمکره به آن سطح می‌پیوندد، صفر باشد.

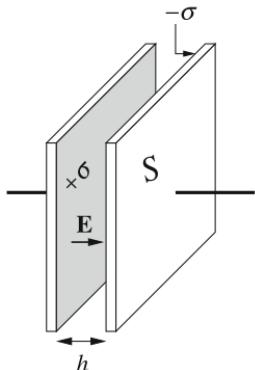


شکل (ح-۲۰)

- ب:** اکنون بار واقعی q در $(b \sin \theta, \phi, b \cos \theta)$ در داخل حفره نیمکره ای با شعاع $b > R$ ، مانند شکل (ح-۲۰)، در هادی قرار دارد. راه حل مشابه حل بند الف است: ما سه بار تصویر را در هادی، خارج از حفره، $q_1 = -(R/b)q$ در $(b \sin \theta, \phi, -b \cos \theta)$ ، $q_2 = -q_1 = -q$ در $(b \sin \theta, \phi, b \cos \theta)$ در $b = R^2/b > R$ با $q_3 = -q_2 = b = R^2/b$ ، قرار می‌دهیم.

۱۲.۲ نیروی بین صفحه‌های یک خازن

ما این مسئله ساده را به منظور اشاره و جلوگیری از دو خطای معمولی مکر ارائه می‌کنیم. خطای اول مربوط به فشار الکترواستاتیکی در سطح رسانا است و خطای دوم مربوط به اشتقاق نیرو از انرژی یک سیستم است.



- الف: اجزاء دهید ابتدا فشار الکترواستاتیک را در نظر بگیریم. اگر Q بار خازن و S سطح صفحات آن باشد، چگالی بار سطحی (که فقط روی سطوح داخلی قرار دارد!) $= \pm Q/S = \pm \sigma$ است. در تقریب، میدان الکتریکی بین دو سطح باردار یکنواخت، $E = 4\pi k_e \sigma$ و در هر جای دیگر صفر است. این منجر به فشار الکترواستاتیک می‌شود

$$P = \frac{1}{2} \sigma E = 2\pi k_e \sigma^2 \quad (106.2)$$

شکل (۲۱-۲)

در اینجا، اشتباه معمولی فراموش کردن عامل $1/2$ و نوشتن $P = \sigma E$ در علامت «=» مخفف اشتباه است!). در واقع، تنها یک نیمی از میدان الکتریکی به دلیل بار روی صفحه دیگر است. نیروی F جاذب است زیرا دو صفحه دارای بارهای مخالف هستند و می‌توانیم بنویسیم

$$F = -PS = -2\pi k_e \frac{Q^2}{S^2} S = -2\pi k_e \frac{Q^2}{S} \quad (107.2)$$

بنابراین نیرو فقط به Q بستگی دارد و مستقل از فاصله h بین صفحات است. رابطه (۱۰۷.۲) هم برای یک خازن ایزوله و هم برای خازن متصل به منبع ولتاژ که اختلاف پتانسیل ثابت V را حفظ می‌کند معتبر است. اما در مورد دوم، شارژ دیگر ثابت نیست و راحت است Q را با حاصلضرب CV جایگزین کنید، بهاید داشته باشید که ظرفیت یک خازن صفحه موازی $C = S/(4\pi k_e h)$ است. بدین ترتیب

$$F = -2\pi k_e \frac{(CV)^2}{S} = -\frac{V^2 S}{8\pi k_e h^2} \quad (108.2)$$

ب: در مورد یک خازن ایزوله، نیروی بین صفحات را نیز می‌توان به صورت منهای مشتق انرژی الکترواستاتیکی خازن با توجه به فاصله بین صفحات، h محاسبه کرد. نوشتن U_{es} به صورت تابعی از بار Q ، برای خازن ایزوله ثابت راحت است.

$$U_{es} = \frac{Q^2}{2C} = 2\pi k_e \frac{Q^2 h}{2S} \quad (109.2)$$

به طوری که نیروی بین صفحات برابر است با:

$$F = -\frac{\partial U_{es}}{\partial h} = -2\pi k_e \frac{Q^2}{S} \quad (110.2)$$

که موافق رابطه (۱۰۷.۲) است.

اگر خازن به منبع ولتاژ متصل باشد، اختلاف پتانسیل V بین صفحات مقدار ثابت است. بنابراین، نوشتن U_{es} به صورت تابعی از V راحت‌تر است

$$U_{es} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{\lambda \pi k_e} \frac{V^2 S}{h} \quad (111.2)$$

در این مرحله، محاسبه نیروی بین صفحات به صورت منهای مشتق U_{es} نسبت به h ، و سوسه انگیز، اما اشتباه است. در آن وضع بدست می‌آوریم:

$$F \stackrel{w}{=} -\frac{\partial U_{es}}{\partial h} = \frac{1}{\lambda \pi k_e} \frac{V^2 S}{h^2} \quad (112.2)$$

و اگر علامت "+" درست بود، اکنون نیرو دافعه خواهد بود، اگرچه از نظر بزرگی برابر با (10.8.2) است! البته این نمی‌تواند درست باشد، زیرا صفحات دارای بارهای مخالف هستند و یکدیگر را جذب می‌کنند. خطای این است که اکنون منبع ولتاژ را نیز گردایان انرژی پتانسیل یک سیستم جدا شده است که اکنون منبع ولتاژ پتانسیل خازن را شامل می‌شود. و منبع ولتاژ باید مقداری کار کند تا اختلاف پتانسیل خازن را در حین تغییر ظرفیت ثابت نگه دارد. اجازه دهید یک تغییر بی‌نهایت کوچک از جداسازی صفحه را در نظر بگیریم، dh که منجر به تغییر بی‌نهایت کوچک ظرفیت، dC می‌شود. منبع ولتاژ باید یک بار $dQ = VdC$ را در طول اختلاف پتانسیل V حرکت دهد تا V را ثابت نگه دارد. بنابراین منبع کار را انجام می‌دهد

$$dW = VdQ = V^2 dC \quad (113.2)$$

و انرژی درونی آن (ماهیتش هر چه باشد: مکانیکی، شیمیایی، ...) باید به مقدار زیر تغییر کند.

$$dU_{source} = -dW = -V^2 dC \quad (114.2)$$

از آنجایی که در همان زمان انرژی الکترواستاتیک خازن $1/2V^2 dC$ تغییر می‌کند، تغییر انرژی کل سیستم ایزوله، dU_{tot} ، است.

$$dU_{tot} = dU_{source} + dU_{es} = -V^2 dC + \frac{V^2}{2} dC = -\frac{V^2}{2} dC = -dU_{es} \quad (115.2)$$

بنابراین، نیرو برابر است با:

$$F = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial h} = +\frac{\partial U_{es}}{\partial h} = -\frac{V^2 S}{\lambda \pi k_e h^2} \quad (116.2)$$

که موافق با رابطه (10.8.2) است.

۱۳.۲ فشار الکترواستاتیک روی یک کره هادی

الف: بار سطحی $S = Q/S = \sigma$ است، که در آن $S = 4\pi a^2$ سطح کره است. میدان الکتریکی در سطح $E = 4\pi k_e \sigma$ ، به طوری که فشار برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} \sigma E = \frac{1}{2} \sigma (4\pi k_e \sigma) = k_e \frac{Q^2}{\lambda \pi a^4} \quad (117.2)$$

- ب: بر طبق قانون گاوس، میدان الکتریکی کره برابر است با:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ k_e \frac{Q}{r^2}, & r > a \end{cases} \quad (118.2)$$

و انرژی الکترواستاتیک برابر است با:

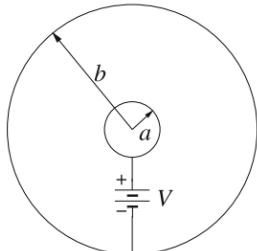
$$U_{es} = \int \frac{1}{\lambda \pi k_e} E(r) d^3 r = \int_a^\infty \frac{k_e}{\lambda \pi} \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = k_e \frac{Q^2}{2a} \quad (119.2)$$

مشتق U_{es} نسبت به a که ابعاد نیرو دارد را می‌توان به صورت انتگرال فشار الکترواستاتیک روی سطح کره تفسیر کرد. از آنجایی که فشار به دلایل تقارن یکنواخت است،

می‌توانیم بنویسیم

$$P = \frac{1}{4\pi a^2} \left(-\frac{dU_{es}}{da} \right) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{k_e Q^2}{2a^2} = k_e \frac{Q^2}{8\pi a^4} \quad (120.2)$$

که موافق با رابطه (۱۱۷.۲) است.



شکل (ح-۲-۲)

- ج: این مسئله معادل تعیین بار Q بر روی کره است، به طوری که اختلاف پتانسیل بین کره و بی نهایت V است. همچنین می‌توان این مسئله را به عنوان یک خازن کروی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و اختلاف پتانسیل V در حد b به بی نهایت نزدیک می‌شود، در نظر گرفت. ظرفیت برابر است با:

$$C = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{k_e} \frac{ab}{b-a} = \frac{a}{k_e} \quad (121.2)$$

در حالی که پتانسیل الکتریکی داخل خازن خواهد بود

$$\varphi(r) = \begin{cases} V, & (r < a) \\ V \frac{a}{r}, & (r > a) \end{cases} \quad (122.2)$$

به طوری که بار روی کره به شعاع a $Q = aV/k_e$ است. با جایگزینی Q در رابطه (۱۱۷.۲) بدست می‌آوریم

$$P = \frac{V^2}{\lambda \pi k_e a^2} \quad (123.2)$$

یا می‌توانیم انرژی الکترواستاتیک (۱۱۹.۲) را تابعی از V بنویسیم،

$$U_{es} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{aV^2}{2k_e} \quad (124.2)$$

و از مسئله ۱۲.۲ به یاد داشته باشید که اگر شعاع a با da در ولتاژ ثابت افزایش یابد، انرژی الکترواستاتیکی "خازن" با dU_{es} تغییر می‌کند، و به طور همزمان، منبع ولتاژ کار $dW = 2dU_{es}$ را انجام می‌دهد، به طوری که تغییرات انرژی "کل" برابر است با:

$$dU_{tot} = dU_{es} - dW = -dU_{es} \quad (125.2)$$

و فشار برابر است با:

$$P = \frac{1}{4\pi a^2} \left(-\frac{dU_{tot}}{da} \right) = \frac{1}{4\pi a^2} \left(-\frac{dU_{es}}{da} \right) = \frac{V^2}{\lambda \pi k_e a^2} \quad (126.2)$$

که موافق با رابطه (۱۲۳.۲) است.

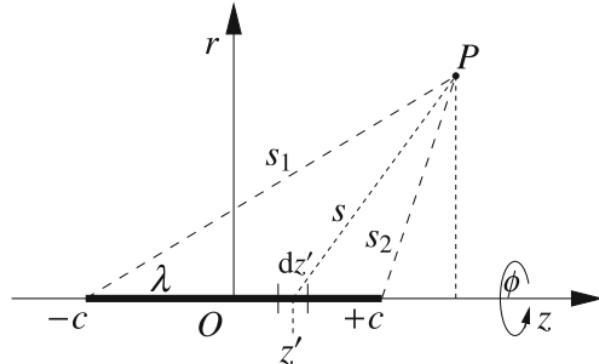
۱۴.۲ هدایت بیضی گون کشیده

الف: اجازه دهید یک پاره خط به طول $2c$ با چگالی بار الکتریکی خطی یکنواخت λ در نظر بگیریم، به طوری که بار کل قطعه $Q = 2c\lambda$ باشد. از یک سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) شروع می‌کنیم، به طوری که نقاط انتهایی قطعه دارای مختصات $(0, \phi, \pm c)$ هستند، که مقدار ϕ وقتی $r = 0$ است، بی‌ربط است. پتانسیل الکتریکی φ یک نقطه عمومی P ، به مختصات (r, ϕ, z) برابر است با:

$$\varphi(P) = k_e \int_{-c}^{+c} \frac{\lambda dz'}{s} k_e \lambda \int_{-c}^{+c} \frac{dz'}{\sqrt{(z - z')^2 + r^2}} \quad (127.2)$$

که در آن s فاصله P تا نقطه قطعه باردار مختصات z' ، شکل (۲۳-۲) است. انتگرال نامعین زیر برابر است با:

$$\int \frac{dz'}{\sqrt{(z - z')^2 + r^2}} = -\ln \left[2\sqrt{(z - z')^2 + r^2} + 2(z - z') \right] + C \quad (128.2)$$



شکل (۲۳-۲)

همانطور که می‌توان با محاسبه مشتق بررسی کرد که منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\varphi(P) = k_e \lambda \ln \left[\frac{\sqrt{(z+c)^2 + r^2} + z + c}{\sqrt{(z-c)^2 + r^2} + z - c} \right] = k_e \frac{Q}{2c} \ln \left(\frac{s_1 + z + c}{s_2 + z - c} \right) \quad (129.2)$$

که در آن $s_1 = \sqrt{(zc)^2 + r^2}$ و $s_2 = \sqrt{(z-c)^2 + r^2}$ از نقاط انتهایی پاره خط باردار، شکل (۲۳-۲)، هستند. اکنون مختصات بیضی u و v را معرفی می‌کنیم

$$u = \frac{s_1 + s_2}{2c}, \quad v = \frac{s_1 - s_2}{2c} \quad (130.2)$$

بنابراین

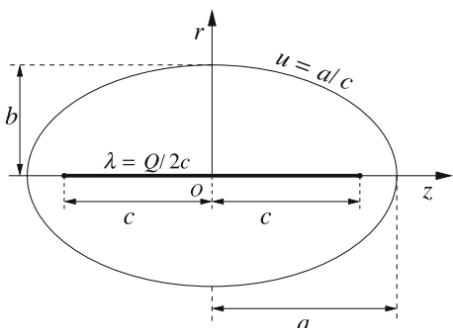
$$s_1 = c(u + v), \quad s_2 = c(u - v)$$

و

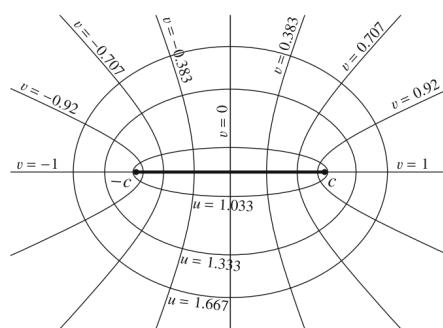
$$uv = \frac{s_1^2 + s_2^2}{4} = \frac{z^2}{c^2} \quad (131.2)$$

به دلیل رابطه (۱۳۰.۲)، ما $1 \leq v \leq -1$ و $u \geq 1$ داریم. همانطور که در شکل (ح-۲۴) نشان داده شده است، سطوح $v = const$ بیضی‌های هم کانونی چرخشی هستند و سطوح $v = const$ هیپربولوئیدهای هم کانونی چرخشی هستند. سطح $u = 1$ منطبق یک بیضی با شعاع اصلی $a = c$ و شعاع کوچک $b = 0$ است که با قطعه $v = \pm 1$ منطبق است. سطح $v = 0$ حالت منطبق صفحه $z = 0$ است، در حالی که مربوط به موارد انحطاط هذلولوئیدهای فرو ریخته به نیم خطوط $(c, +\infty)$ و $(-c, -\infty)$ است. بر حسب u و v معادله (۱۲۹.۲) می‌شود

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= k_e \frac{Q}{2c} \ln \left[\frac{c(u+v) + cv + c}{c(u-v) + cv - c} \right] = k_e \frac{Q}{2c} \ln \left[\frac{(u+1)(v+1)}{(u-1)(v+1)} \right] \\ &= k_e \frac{Q}{2c} \ln \left(\frac{u+1}{u-1} \right)\end{aligned}\quad (132.2)$$



شکل (ح-۲۵)



شکل (ح-۲۴)

بنابراین، پتانسیل الکتریکی فقط به مختصات بیضی u بستگی دارد و در سطوح بیضی $u = const$ ثابت است. سطوح $v = const$ بر سطوح هم پتانسیل عمود هستند، به طوری که تقاطع سطوح $v = const$ با صفحات $\phi = const$ (هذلولی هم کانونی) خطوط میدان میدان الکتریکی هستند. اگر به u اجازه دهیم به‌نهایت نزدیک شویم، یعنی برای $s_1 \approx s_2$ ، $s_1 + s_2 \gg c$ و

$$\frac{u+1}{u-1} \approx 1 + \frac{2}{u}, \quad \ln \left(1 + \frac{2}{u} \right) \approx \frac{2}{u} \quad (133.2)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(P) = k_e \frac{Q}{2c} \frac{2}{u} = k_e \frac{Q}{cu} \approx k_e \frac{Q}{s_1} \quad (134.2)$$

زیرا $s_2 \approx s_1$ است. این چیزی است که برای بار نقطه‌ای انتظار می‌رود. به عبارت دیگر، سطوح هم پتانسیل بیضی گونه $\infty \rightarrow u$ به کروی شکل‌ها نزدیک می‌شوند.

- ب: برای یک بیضی شکل که از چرخش به ترتیب شعاع‌های اصلی و فرعی a و b حادث می‌شود، فاصله بین مرکز O و یک نقطه کانونی، c برابر است با:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (135.2)$$

در هر نقطه از سطح بیضی گونه $a = s_1 + s_2$ داریم، به طوری که معادله سطح در مختصات بیضی $u = a/c$ است. یک پاره خط با بار یکنواخت با نقاط انتهایی

و چگالی بار خطی $\lambda = Q/(2c)$ و (ϕ, c) را روی سطح بیضی تولید می‌کند.

$$\varphi(a, b) = k_e \frac{Q}{2c} \ln \left(\frac{u+1}{u-1} \right) = k_e \frac{Q}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \quad (136.2)$$

از طرف دیگر، پتانسیل تولید شده توسط قطعه باردار در بینهایت صفر است و هیچ باری بین سطح بیضی و بینهایت وجود ندارد. شار میدان الکتریکی از طریق هر سطح بسته حاوی بیضی Q است. بنابراین، پتانسیل و میدان الکتریکی تولید شده توسط بخش باردار خارج از سطح بیضی با پتانسیل برابر است و میدان الکتریکی ایجاد شده توسط رسانا بیضی حامل بار Q است و این مسئله را حل می‌کند. ظرفیت بیضی به‌این ترتیب برابر است با:

$$C = \frac{Q}{\varphi(a, b)} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{k_e} \left[\ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \right]^{-1} \quad (137.2)$$

مخرج آرگومان لگاریتم را می‌توان گویا کرد که منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2}{a - a^2 + b^2} = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)^2 \quad (138.2)$$

و ظرفیت بیضی گون گشیده^۳ را می‌توان بازنویسی کرد

$$C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{k_e} \left[\ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right]^{-1} \quad (139.2)$$

صفحات یک خازن بیضی هم کانونی، سطوح دو بیضی گون کشیده چرخشی هستند که نقاط کانونی یکسانی را که در محور z قرار دارند، و شعاع‌های اصلی a_1 و a_2 به ترتیب با $a_1 < a_2$ بهاشتراک می‌گذارند. طبق روابط (135.2) و (136.2) پتانسیل موجود در دو صفحه

$$\varphi_{1,2} = k_e \frac{Q}{2c} \ln \left(\frac{a_{1,2} + c}{a_{1,2} - c} \right) \quad (140.2)$$

به طوری که ظرفیت برابر است با:

$$C = \frac{Q}{\varphi_{1,2}} = \frac{2c}{k_e \ln \left(\frac{a_1 + c}{a_1 - c} \frac{a_2 - c}{a_2 + c} \right)} = \frac{2c}{k_e \ln \left(\frac{a_1 a_2 - c^2 + c(a_2 - a_1)}{a_1 a_2 - c^2 - c(a_2 - a_1)} \right)} \quad (141.2)$$

- ج: یک سیم مستقیم با ارتفاع h و قطر $2b$ ، با $h \gg b$ می‌تواند در نهایت با یک بیضی گون کشیده، به شعاع اصلی $a = h/2$ و شعاع کوچک b ، البته با $b \ll a$ ، تقریب زده شود. از رابطه

$$\sqrt{a^2 - b^2} \approx a - \frac{b^2}{a} \quad \text{برای } b \ll a \quad (142.2)$$

و رابطه (139.2) داریم

$$C_{wire} \approx \frac{a}{2k_e \ln(2a/b)} = \frac{h}{k_e \ln(h/b)} \quad (143.2)$$

^۳Prolate Ellipsoid

فصل ۳

الکترواستاتیک محیط دی الکتریک

عنوانین: قطبش بارها. دی الکتریکها (عایقها). قطبش دائمی و القائی. بردار کمکی D . شرایط مرزی در سطح دی الکتریکها. گذردهی نسبی ϵ_r دی الکتریکها.
معادلات پایه: نماد P قطبش الکتریکی^۱ (گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم) یک ماده را نشان می دهیم. برخی از مواد خاص دارای قطبش الکتریکی غیر صفر دائمی هستند، اما در بیشتر موارد پلاریزاسیون (قطبشن) فقط در حضور میدان الکتریکی E ظاهر می شود. ما مواد دی الکتریک خطی را در نظر می گیریم که P موازی و متناسب با E است، بنابراین

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \epsilon_0 \chi \mathbf{E} & \chi = \epsilon_r - 1, \\ \chi \mathbf{E} & \chi = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن χ حساسیت الکتریکی و ϵ_r گذردهی نسبی ماده^۲ نامیده می شود. توجه کنید که ϵ_r یک کمیت بدون بعد با مقدار عددی یکسان در واحدهای SI و گاووسی است. چگالی بار حجمی الکتریکی محدود و بار الکتریکی آزاد را به ترتیب با ρ_b و ρ_f و چگالی بار سطحی محدود را با σ_b و σ_f نشان خواهیم داد. کمیتهای ρ_b و σ_b با قطبش الکتریکی P با روابط زیر بهم مرتبط هستند

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad \text{و} \quad \sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.3)$$

^۱ Electric Polarization
^۲ در محیط های ناهمسانگرد (مانند کریستال های غیر مکعبی) P و E ممکن است موازی یکدیگر نباشند، در این مورد χ و ϵ_r در واقع تانسورهای رتبه دوم هستند. در اینجا، با این حال، ما فقط به محیط های همسانگرد و همگن علاقه مندیم، که χ و ϵ_r کمیتهای اسکالر هستند.

مسائل الکترومغناطیس

که در آن بردار واحدی است که از سطح مرزی ماده پلاریزه به سمت بیرون اشاره می‌کند. بنابراین می‌توانیم (۴.۱) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} & = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad SI \\ 4\pi(\rho_f + \rho_b) & = 4\pi\rho_f - 4\pi \nabla \cdot \mathbf{P} \end{cases} \quad (۴.۳)$$

ما همچنین می‌توانیم بردار کمکی \mathbf{D} (که جابجایی الکتریکی^۳ نیز نامیده می‌شود) را معرفی کنیم که به صورت زیر تعریف شده است.

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} & SI \\ \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۴.۴)$$

بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \begin{cases} \rho_f & SI \\ 4\pi\rho_f & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۵.۳)$$

علاوه بر این، $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ در شرایط ایستا برقرار است. بنابراین، در فصل مشترک بین دو ماده دی‌الکتریک مختلف، مولفه \mathbf{E} موازی با سطح مشترک، و مولفه \mathbf{D} عمود بر سطح مشترک پیوسته هستند. در ماده‌ای با گذردگی الکتریکی ϵ_r داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \begin{cases} \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} & SI \\ \epsilon_r \mathbf{E} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۶.۳)$$

برای سهولت استفاده از معادلات پایه در این فصل همچنین با واحدهای مستقل از سیستم، برخی از آنها را در جدول (۱.۲) خلاصه می‌کنیم:

جدول ۱.۳: معادلات پایه برای الکترواستاتیک در دی‌الکتریک‌ها

سیستم مستقل	گاوی	SI	کمیت
$\frac{\epsilon_r - 1}{4\pi k_e} \mathbf{E}$	$\frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \mathbf{E}$	$\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$	قطبیش \mathbf{P} در محیط دی‌الکتریک همسانگرد با گذردگی نسبی ϵ_r
$4\pi k_e (\rho_f + \rho_b)$	$4\pi (\rho_f + \rho_b)$	$\frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E}$
$4\pi k_e \rho_f$	$4\pi \rho_f$	$\frac{\rho_f}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E})$
◦	◦	◦	$\nabla \times (\epsilon_0 \mathbf{E})$

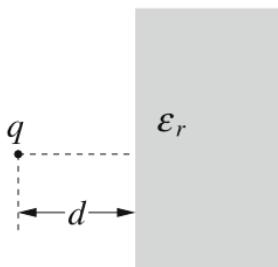
^۳Electrical Displacement

۱.۳ دیالکتریک مصنوعی

در یک ماده دیالکتریک مایع با گذردهی نسبی $\epsilon_r = 1$ ، تعدادی کره هادی معلق ضعیف، هر یک به شعاع a داریم. تعداد کره ها در واحد حجم n است.

- **الف** پذیرندگی دیالکتریک^۴ χ سیستم را به صورت تابعی از کسری از حجم پر شده توسط کره های رسانا محاسبه کنید. از تقریب میدان میانگین^۵ (MFA) استفاده کنید، که بر اساس آن میدان الکتریکی ممکن است در سرتاسر محیط یکنواخت فرض شود.
- **ب** (MFA) مستلزم آن است که میدانی که توسط یک کره منفرد در نزدیکترین همسایه ایجاد می شود، به دلیل مشارکت جمعی همه کره ها، بسیار کوچکتر از میدان میانگین باشد. یک شرط برای n و a جهت اعتبار (MFA) بدست آورید.

۲.۳ بار نقطه ای مقابله نیم فضای دیالکتریک



یک صفحه کل فضا را به دو نیمه تقسیم می کند که یکی از آنها خالی و دیگری توسط یک محیط دیالکتریک با گذردهی نسبی ϵ_r پر شده است. یک بار نقطه ای q در خلاء، همانطور که در شکل (۲ - ۱) نشان داده شده است، در فاصله d از محیط قرار دارد.

شکل (۲ - ۱)

- **الف** با استفاده از روش بارهای تصویری، پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی را در کل فضا پیدا کنید.
- **ب** چگالی بار پلاریزاسیون سطحی در صفحه رابط و بار پلاریزاسیون کل صفحه را ارزیابی کنید.
- **ج** میدان ایجاد شده توسط بار پلاریزاسیون را در کل فضا پیدا کنید.

۳.۳ کره قطبی شده الکتریکی

فروالکتریک خاصیت برخی از مواد مانند نمک روشنل، موم کارنائوبل، تیتانات باریم، تیتانات سرب و ... است. . . ، که دارای قطبش الکتریکی خود به خودی در غیاب میدان های خارجی هستند.

^۴Dielectric Susceptibility

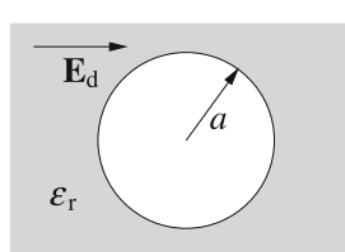
^۵Mean Field Approximation (MFA)

• الف یک کره فروالکتریک با شعاع a و قطبش یکنواخت P را در غیاب میدان‌های خارجی در نظر بگیرید و میدان الکتریکی را در کل فضا محاسبه کنید (راهنمائي: به مسئله ۱-۱ مراجعه کنید).

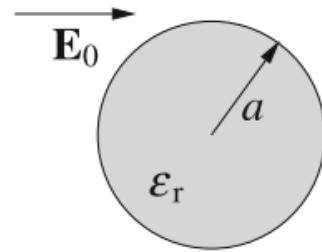
• ب اکنون دوباره یک کره فروالکتریک با شعاع a و قطبش یکنواخت P ، اما با یک سوراخ کروی متحدم‌مرکز به شعاع $a < b$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی و میدان جابجایی را در کل فضا محاسبه کنید.

۴.۳ کره دیالکتریک در میدان خارجی

یک کره دیالکتریک با گذردهی نسبی ϵ_r و شعاع a در خلاء، در یک میدان الکتریکی خارجی اولیه یکنواخت E ، همانطور که در شکل (۲-۲) نشان داده شده، قرار می‌گیرد.



شکل (۳-۳)



شکل (۲-۳)

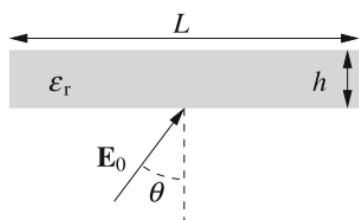
• الف میدان الکتریکی را در کل فضا پیدا کنید (راهنمائي: از نتایج مسئله ۳-۳ و اصل برهمنهی استفاده کنید).

یک حفره کروی به شعاع a در داخل یک محیط دیالکتریک نامتناهی با گذردهی نسبی ϵ_r قرار دارد، مانند شکل (۳-۲). این سیستم در حضور یک میدان الکتریکی خارجی است که دور از حفره (یعنی در فاصله $a \gg$) یکنواخت و برابر با E_d است.

• ب میدان الکتریکی را در کل فضا پیدا کنید.

۵.۳ شکست میدان الکتریکی در مرز دیالکتریک

یک صفحه دیالکتریک با ضخامت h ، طول $L \gg h$ و گذردهی دیالکتریک ϵ_r در یک میدان الکتریکی یکنواخت خارجی E قرار می‌گیرد. مانند شکل (۴-۴)، زاویه بین E و عمود بر سطح تیغه θ است.



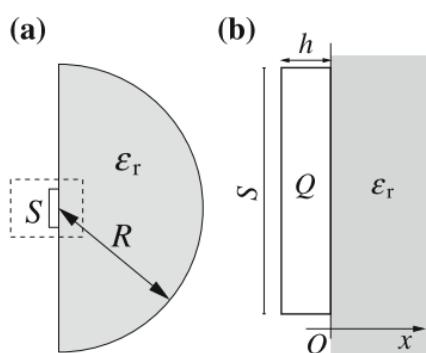
شكل (۴ - ۳)

• الف میدان الكتريکي' E' را در داخل تیغه و زاویه' θ' بین' E' و نرمال بر سطح تیغه را پیدا کنید.

• ب چگالی بار پلاريزاسيون را در محيط دی الكتريک بیابيد.

• ج در صورت وجود، گشتاور اعمال شده توسط میدان خارجي بر روی تیغه را محاسبه کنید. از تمام اثرات مرزی چشمپوشی کنید

۶.۳ نيروي تماس بين يك تيغه رسانا و يك نيمه فضاي دیالكتريک



شكل (۵ - ۳)

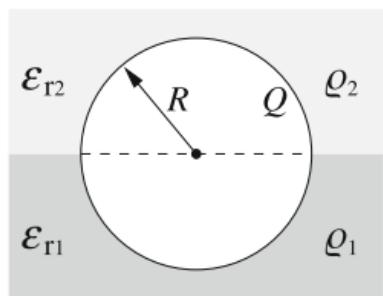
یک تیغه مربع رسانا با سطح a^2 و ضخامت $a \ll h$ در تماس با محيط دیالكتريک با گذردهی نسبی ϵ_r است. محيط دیالكتريک بسیار بزرگتر از تیغه است، بنابراین، میتوانیم آن را به صورت نیمکرهای با شعاع $R \gg a$ در نظر بگیریم، همانطور که در شکل (۴ - ۵)-الف بخش ب شکل (۴ - ۵) نشان داده شده است. بزرگ شدن ناحیه محصور شده در مستطیل چین خورده قسمت الف است). با این فرض، میتوانیم تیغه را در تماس با یک محيط نیمه نامتناهی فرض کنیم که نیم فضا $x > 0$ را پر میکند، در حالی که در نیمه فضای $x < 0$ خلاء داریم. تیغه رسانا بار کل Q را حمل میکند و فرض میکنیم که اثرات مرزی در لبهای آن ناچیز است.

• الف با در نظر گرفتن هر دو حالتی که در آن تیغه در تماس با دیالكتريک است و در آن به مقدار x در سمت چپ جایجا میشود، چگالی بار آزاد را در سطوح چپ (σ_1) و سمت راست (σ_2) تیغه پیدا کنید. چگالی بار پلاريزاسيون (σ_b) در سطح دیالكتريک و میدان الكتريکي در کل فضا.

• ب نیروی الکترواستاتیک وارد بر تیغه را محاسبه کنید.

• ج اگر محیط دیالکتریک یک لایه بینهایت (در جهت y و z) با ضخامت محدود w در جهت x فرض شود، این نتایج چگونه تغییر می‌کنند؟

٧.٣ یک کره رسانا بین دو دیالکتریک



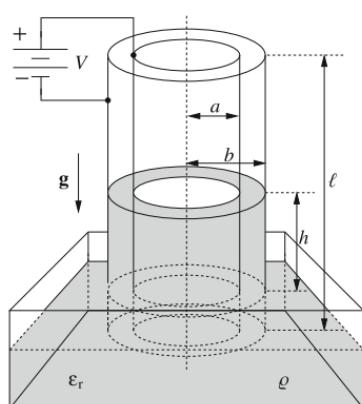
یک کره رسانا با چگالی جرم ρ و شعاع R در مایعی با چگالی $\rho_1 > \rho_2$ و گزندگی نسبی دیالکتریک ϵ_{r1} در حضور میدان گرانشی شناور می‌شود. در بالای مایع یک محیط گازی با چگالی جرمی $\rho \ll \rho_2$ و گزندگی دیالکتریک نسبی $\epsilon_{r2} < \epsilon_{r1}$ وجود دارد. به کره باری داده می‌شود که دقیقاً نیمی از حجم آن در آب فرو می‌رود. محاسبه کنید:

شکل (٦ - ٢)

• الف میدان الکتریکی در کل فضا، چگالی بار آزاد سطح روی کره، و چگالی بار پلاریزاسیون سطحی دو دیالکتریک، به صورت تابعی از R , ϵ_{r1} , ϵ_{r2} و Q .

• ب مقدار Q .

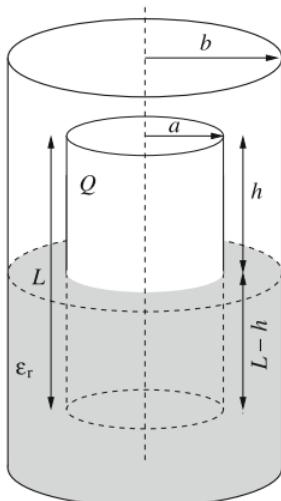
٨.٣ اندازه‌گیری ثابت دیالکتریک مایعات



یک خازن استوانه‌ای دارای شعاع داخلی a ، شعاع خارجی $b > a$ و طول $l \gg l$ است، به‌طوری که اثرات مرزی ناچیز است. محور خازن عمودی است و انتهای خازن در یک ظرف حاوی مایعی با چگالی جرمی ρ و گزندگی دیالکتریک ϵ_r در حضور میدان گرانشی غوطه‌ور می‌شود. اگر یک منبع ولتاژ اختلاف پتانسیل V را بین دو صفحه استوانه‌ای حفظ کند، مایع برای ارتفاع h در پوسته استوانه‌ای بین صفحه‌ها بالا می‌رود. نشان دهید که چگونه می‌توان مقدار ϵ_r را از اندازه‌گیری h محاسبه کرد. (این مسله از مرجع [۱] است)

شکل (٧ - ٣)

۹.۳ استوانه رسانا در مایع دی الکتریک



شکل (۸-۳)

یک استوانه رسانا با جرم M , شعاع a و ارتفاع $L \gg a$ برای $L \gg h$ (با $\epsilon_r \gg 1$) در یک مایع دی الکتریک با گذردهی نسبی ϵ_r غوطه ور می شود. مایع در یک ظرف استوانه ای به شعاع $a > b$ با سطح جانبی رسانا قرار دارد. یک بار آزاد روی استوانه داخلی قرار دارد. اثرات مرزی ناچیز فرض می شود. استوانه آزاد است که به صورت عمودی با حفظ محور خود حرکت کند. پیدا کنید:

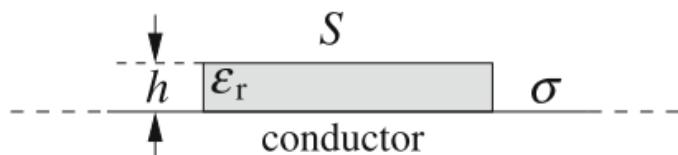
- **الف** میدان الکتریکی $E(a)$ در سطح سیلندر داخلی و چگالی بار سطحی.
- **ب** میدان الکتریکی در ناحیه بین سطح جانبی استوانه داخلی و ظرف مایع ($a < r < b$):

• **ج** نیروی الکترواستاتیک روی استوانه داخلی

• **د** فرض کنید که استوانه داخلی دارای جرم M است و مایع دارای چگالی جرم ρ است. در مورد شرایط تعادل بحث کنید.

۱۰.۳ یک تیغه دی الکتریک در تماس با یک هادی باردار

یک تیغه دی الکتریک با گذردهی نسبی ϵ_r ، ضخامت h و سطح S در تماس با یک سطح هادی صفحه ای است که دارای چگالی بار سطحی یکنواخت σ ، شکل (۹-۳)، است. اثرات مرزی ناچیز است.

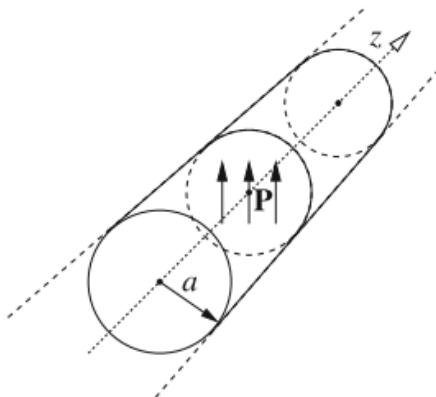


شکل (۹-۳)

- **الف** میدان الکتریکی را در کل فضا محاسبه کنید.
- **ب** چگالی بار سطحی پلاریزاسیون روی سطوح دی الکتریک را محاسبه کنید.
- **ج** اگر تیغه در فواصل $s < h$ از صفحه رسانا حرکت کند، پاسخ نقاط **الف** و **ب** چگونه تغییر می کند؟ انرژی الکترواستاتیک سیستم چگونه به آن بستگی دارد؟ آیا نیروی برهمنکشی بین تیغه و هادی وجود دارد؟

۱۱.۳ استوانه قطبی شده عرضی

همانطور که در شکل (۱۰-۲) نشان داده شده است، یک استوانه بی‌نهایت به‌شعاع a دارای قطبش الکتریکی یکنواخت داخلی P ، عمود بر محور آن است. چگالی بار الکتریکی در سطح جانبی استوانه، پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی در کل فضا را محاسبه کنید.
راهنمایی: از مسئله ۱-۱ استفاده کنید.



شکل (۱۰ - ۲)

مرجع:

1. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1975, Problem 4.13

حل مسائل فصل ۳

ح: الکترواستاتیک محیط دی الکتریک

۱.۳ دی الکتریک مصنوعی

- الف: بر طبق رابطه (۶.۲) مسئله ۱.۲، یک کره فلزی در یک میدان خارجی یکنواخت E یک گشتاور دوقطبی به ما می‌دهد.

$$\mathbf{p} = \frac{a^3}{k_e} \mathbf{E} = \frac{3}{4\pi k_e} V \mathbf{E} \quad (1.3)$$

که در آن $V = 4/3\pi a^3$ حجم کره است. قطبی شدن تعليقی برابر است با:

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \frac{3n}{4\pi k_e} V \mathbf{E} \quad (2.3)$$

در واحدهای SI ما $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ ، و $\chi = 3f$ داریم، در حالی که در واحدهای گاووسی، $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ ، و $\chi = 3f/(4\pi)$ داریم. در هر دو مورد $f = nV$ کسری از حجم اشغال شده توسط کره‌ها است. از آنجایی که حداقل فاصله بین مراکز دو کره $2a$ است، داریم

$$f \leq \frac{4\pi a^3}{3} \frac{1}{8a^3} = \frac{\pi}{6} \quad (3.3)$$

که منجر به $\chi \leq \pi/2$ در واحدهای SI، و $\chi \leq 1/8$ در واحدهای گاووسی می‌شود.

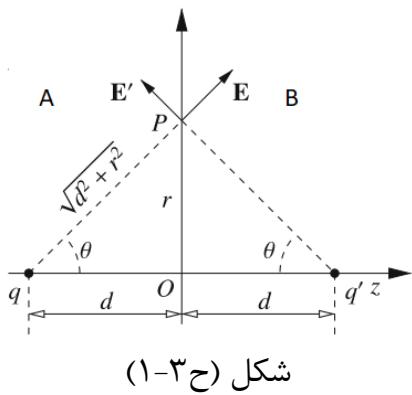
- ب: فاصله متوسط بین دو مرکز کره از مرتبه $n^{-1/3}$ است. میدان الکتریکی یک دوقطبی در فاصله a از مرتبه زیر است

$$E_{dip} \approx k_e \frac{p}{l^3} \approx k_e \frac{a^3}{k_e} En = a^3 En \quad (4.3)$$

بنابراین، شرط $E_{dip} \ll E$ به $n \ll 1/a^3$ نیاز دارد.

۲.۳ بار نقطه‌ای مقابله نیم فضای دی الکتریک

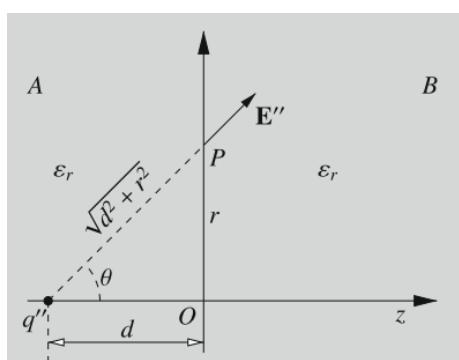
نیم فضا $z < 0$ که خلاء است را با A نشان میدهیم و حاوی بار واقعی q و نیم فضای $z > 0$ را که دی الکتریک است را با B نشان میدهیم و بدون بار آزاد است. بهمنظور اعمال قضیه یگانگی برای معادله پواسون، دو نیم فضا را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم، حدسهای درستی می‌زنیم. ما از مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم که بار واقعی در $(0, \phi, -d)$ قرار دارد. همه فرمول‌های مستقل از مختصات سمت (آزمودت) ϕ زمانی که $r = 0$ باشد تعیین نشده و مرتبط نیستند.



شکل (ح-۳-۱)

الف: میدان در نیم فضای A را با فرض خلاء در کل فضا، از جمله نیمه فضای B را در نظر می‌گیریم. به عنوان پیش فرض^۱، یک بار تصویری q' را با مقداری که باید تعیین شود، در $(0, 0, +d)$ ، در نیمه فضایی که در نظر نمی‌گیریم، شکل (ح-۳-۱)، قرار می‌دهیم. اکنون میدان الکتریکی $E^{(-)}$ را در یک نقطه عمومی $P \equiv (r, \phi, 0^-)$ محاسبه می‌کنیم. فاصله بین P و q برابر $\sqrt{d^2 + r^2}$ است و زاویه از صفحه $z = 0$ محور z تشکیل می‌دهد. همچنین فاصله بین P و q' برابر $\sqrt{d^2 + r^2}$ خواهد بود. میدان در نقطه P ، $E^{(-)}$ ، مجموع برداری میدان‌های E ناشی از بار واقعی q و E' ناشی از بار تصویری q' است. مولفه‌های $E^{(-)}$ ، به ترتیب عمود و موازی با صفحه $z = 0$ هستند.

$$\begin{aligned} E_{\perp}^{(-)} &= k_e \frac{q}{d^2 + r^2} \cos \theta - k_e \frac{q'}{d^2 + r^2} \cos \theta = k_e \frac{d}{(d^2 + r^2)^{3/2}} (q - q') \\ E_{\parallel}^{(-)} &= k_e \frac{q}{d^2 + r^2} \sin \theta + k_e \frac{q'}{d^2 + r^2} \sin \theta = k_e \frac{r}{(d^2 + r^2)^{3/2}} (q + q') \end{aligned} \quad (5.3)$$



شکل (ح-۳-۲)

نیم فضای B را با این فرض برخورد می‌کنیم که کل فضا، از جمله نیم فضای A ، توسط یک محیط دی الکتریک با گذردهی نسبی ϵ_r پر شده است. ما مجاز به وارد کردن بار یا تغییر چیز دیگری در B نیستیم، اما، به عنوان یک حدس آگاهانه، بار واقعی q را که در نیم فضای A قرار دارد، با یک بار q'' ، که باید تعیین شود (شکل (ح-۳-۲)، جایگزین می‌کنیم. ما میدان $E^{(+)}$ را در همان نقطه P مانند قبل محاسبه کرده، اما در صفحه $z = 0^+$ مولفه‌های $E^{(+)}$ عمود و موازی با صفحه $z = 0$ هستند:

^۱Ansatz

در این صورت:

$$\begin{aligned} E_{\perp}^{(-)} &= \frac{k_e}{\epsilon_r} \frac{q''}{d^{\gamma} + r^{\gamma}} \cos \theta = \frac{k_e}{\epsilon_r} \frac{d}{(d^{\gamma} + r^{\gamma})^{3/2}} q'' \\ E_{\parallel}^{(-)} &= \frac{k_e}{\epsilon_r} \frac{q''}{d^{\gamma} + r^{\gamma}} \sin \theta = \frac{k_e}{\epsilon_r} \frac{r}{(d^{\gamma} + r^{\gamma})^{3/2}} q'' \end{aligned} \quad (6.3)$$

اگر حدسهای ما درست باشد، شرایط مرزی دی الکتریک باید در $z = 0$ باشد.

$$q - q' = q'', \quad \text{و} \quad q + q' = \frac{q''}{\epsilon_r} \quad (7.3)$$

که از حل آن

$$q' = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} q, \quad \text{و} \quad q'' = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} q \quad (8.3)$$

به راحتی می توانیم بررسی کنیم که در حد $1 \rightarrow \epsilon_r \rightarrow \infty$ (خلاء در کل فضا)، $q' \rightarrow 0$ و $q'' \rightarrow q$ داشته باشیم، یعنی در کل فضا فقط حوزه بار q را داریم. در حد $\epsilon_r \rightarrow 0$ (هادی \rightarrow دی الکتریک) $-q \rightarrow 2q - q' \rightarrow 2q$ داریم، یعنی میدان بار واقعی q و تصویر آن $-q$ در نیم فضای A و میدان صفر در نیمه فضای B ، مانند مورد (الف) مسئله ۲.۲ داریم. مقدار متناهی q'' برای میدان در نیم فضای B بی ربط است، زیرا مقدار ϵ_r نامتناهی است.

توجه داشته باشید که همچنین می توانیم معادلات (۶.۳) را بدون ϵ_r در مخرج بنویسیم، بنابراین بار مقید دی الکتریک را در q'' بنویسیم. این منجر به معادلات زیر می شود

$$q - q' = \epsilon_r q'', \quad \text{و} \quad q + q' = q'' \quad (9.3)$$

که از حل آن

$$q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} q, \quad \text{و} \quad q'' = \frac{2}{\epsilon_r + 1} q \quad (10.3)$$

که همان عبارات را برای میدان الکتریکی برای انتخاب (۶.۳) می دهد.

• ب: چگالی بار پلاریزاسیون در صفحه $z = 0$ ، $\sigma_b(r)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma_b(r) &= -\frac{1}{4\pi k_e} (E_{\perp}^{(-)} - E_{\parallel}^{(+)}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{(d^{\gamma} + r^{\gamma})^{3/2}} \left(q - q' - \frac{q''}{\epsilon_r} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{(d^{\gamma} + r^{\gamma})^{3/2}} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} q = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{(d^{\gamma} + r^{\gamma})^{3/2}} q' \end{aligned} \quad (11.3)$$

بار پلاریزاسیون کل در صفحه $z = 0$ برابر است با

$$q_p = \int_0^\infty \sigma_b(r) 2\pi r dr = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} q \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = q' \quad (12.3)$$

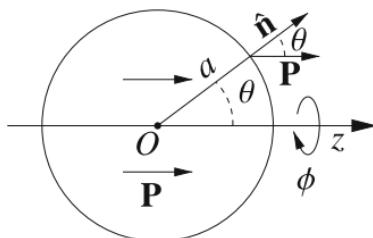
که در آن $dr = d/d\theta / \cos^2 \theta$ و $r = d/\cos \theta$ ، $\cos \theta = d/\sqrt{d^2 + r^2}$ را جایگزین کردہایم.

• ج: بار پلاریزاسیون صفحه $z = 0$ یک میدان الکتریکی برابر با میدان بار q' که در $(\epsilon_r + 1)/(\epsilon_r - 1)$ واقع شده است، ایجاد می کند. نیم فضای $z < 0$ و برابر با میدان بار q' واقع در $(\epsilon_r + 1, \epsilon_r - 1)$ در نیم فضای $z > 0$ است.

۳.۳ کره قطبی شده الکتریکی

الف: از آنجایی که پلاریزاسیون P کره یکنواخت است، با توجه به $\rho_b = \nabla \times P$ ، چگالی بار مقید حجمی نداریم. اگر یک دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) را با محور سمت موازی P ، مطابق شکل (ح-۳) اختاب کنیم، می‌بینیم که چگالی بار مقید سطح کره $\sigma_b = P \cos \theta$ است. بنابراین، در اصل، می‌توانیم میدان الکتریکی را در همه جای فضا به صورت میدانی که توسط توزیع بار مقید روی سطح کره ایجاد می‌شود، محاسبه کنیم.

با این حال، در نظر گرفتن کره قطبی شده به صورت برهم نهی (جمع اثر) دو کره با بار یکنواخت، هر دو با شعاع a ، یکی از چگالی بار حجمی ρ ، و دیگری با چگالی بار حجمی $-\rho$ ، مانند شکل ۱.۱ مسئله ۱.۱ آسانتر است. مرکز دو کره با فاصله کمی δ از هم جدا می‌شوند. بنابراین، دو عنصر حجمی بینهایت کوچک در ابتدا از دو کره، به ترتیب بار $\pm \rho d^3 r$ روی هم قرار گرفته‌اند، به‌یک گشتاور دوقطبی الکتریکی بینهایت کوچک $dp = \delta d^3 r$ پس از جابجایی منتج می‌شوند.



شکل (ح-۳)

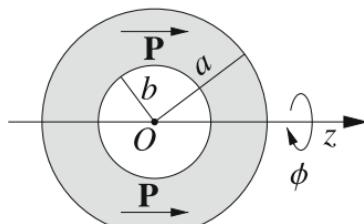
این مربوط به قطبش $dp/d^3 r = \rho \delta$ است، ما باید $P = \rho \delta$ داشته باشیم و در حد $\delta \rightarrow 0$ ، $\rho \rightarrow \infty$ باشد. ثابت $P = \rho \delta$ اکنون می‌توانیم حل مسئله ۱.۱ را دنبال کنیم. طبق رابطه (۱.۱)، میدان الکتریکی داخل کره یکنواخت و برابر است با:

$$\mathbf{E}_{in} = -\frac{4\pi k_e}{3} \rho \delta = -\frac{4\pi k_e}{3} P \quad (۱۳.۳)$$

مسئله میدان خارج از کره در بند ب مسئله ۱.۱ حل شده است، داریم:

$$\mathbf{E}_{ext}(r) = k_e \frac{\frac{2\hat{r}(\mathbf{P} \cdot \hat{r}) - \mathbf{P}}{r^3}}{r^3} \quad (۱۴.۳)$$

که در آن $\mathbf{P} = P(4\pi a^3/3)$ گشتاور دوقطبی کل کره است.



شکل (ح-۴)

ب: مسئله را می‌توان با اصل برهم نهی حل کرد. شعاع حفره b را می‌توان به عنوان کره‌ای با قطبش الکتریکی یکنواخت $-P$ که روی کره شعاع a و قطبش P قرار گرفته است در نظر گرفت. کره شعاع b میدان زیر را در فضای داخلی آن ایجاد می‌کند.

$$\mathbf{E}_{in}^{(b)} = \frac{4\pi k_e}{3} P \quad (۱۵.۳)$$

بنابراین، کل میدان داخل حفره کروی $\mathbf{E}_{in}^{(a+b)} = \mathbf{E}_{in}^{(a)} + \mathbf{E}_{in}^{(b)}$ است. میدان داخل پوسته کروی $b < r < a$ مجموع میدان یکنواخت (۱۳.۳) و میدان تولید شده توسط یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور $p^{(b)}$ واقع در مرکز O برابر است با

$$p^{(b)} = \frac{4\pi b^3}{3} P \quad (۱۶.۳)$$

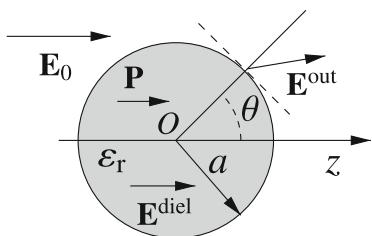
^۱ Surface Bound-Charge Density

در نهایت، میدان خارجی ($r > a$) برابر است با میدانی که توسط یک دوقطبی منفرد واقع در O ایجاد می‌کند

$$\mathbf{P}^{(a+b)} = \frac{4\pi(a^3 - b^3)}{3} \mathbf{P} \quad (17.3)$$

۴.۳ کره دی الکتریک در میدان خارجی

• الف: به عنوان یک حدس، فرض کنید میدان خارجی یک قطبش الکتریکی یکنواخت P را در کره القا می‌کند.



شکل (ح-۳)

در مسئله ۳.۳ دیدیم که یک کره با قطبش الکتریکی \mathbf{E}^{pol} یک میدان الکتریکی یکنواخت $= (4\pi k_e/3)P$ در داخل خود ایجاد می‌کند. تفاوت این است که در مورد فعلی P دائمی نیست اما توسط میدان الکتریکی محلی القا می‌شود و

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi k_e} \mathbf{E}^{dielectric} \quad (18.3)$$

که در آن $\mathbf{E}^{dielectric}$ میدان داخل کره دی الکتریک است که مجموع میدان‌های خارجی و القایی است:

$$\mathbf{E}^{dielectric} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{pol} \quad (19.3)$$

در نتیجه داریم

$$\mathbf{E}^{dielectric} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi k_e}{3} \mathbf{P} = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{3} \mathbf{E}^{dielectric} \quad (20.3)$$

که از حل آن میدان $\mathbf{E}^{dielectric}$ بدست می‌اید:

$$\mathbf{E}^{dielectric} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \quad (21.3)$$

از آنجایی که $\epsilon_r > 1$ ، میدان داخل کره دی الکتریک کوچکتر از \mathbf{E}_0 است. میدان الکتریکی خارج از کره \mathbf{E}^{out} با مجموع \mathbf{E}_0 و میدان یک دوقطبی داده می‌شود.

$$\mathbf{P} = \frac{4\pi a^3}{3} \mathbf{P} = \frac{a^3}{3k_e} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \quad (22.3)$$

واقع در مرکز کره است. بدین ترتیب

$$\mathbf{E}^{out} = \mathbf{E}_0 + k_e \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{P}}{r^3} \quad (23.3)$$

بررسی اینکه راه حل فوق شرایط مرزی سطح کره را برآورده می‌کند، برای موارد زیر آموزنده و مفید است. سپس با فرض اینکه میدان $\mathbf{E}^{dielectric}$ در داخل کره ($r < a$) یکنواخت و موازی با میدان خارجی \mathbf{E}_0 ، و اینکه میدان \mathbf{E}^{out} خارج از کره ($r > a$) مجموع میدان خارجی و یک دوقطبی \mathbf{P} واقع در مرکز کره و همچنین موازی با \mathbf{E}_0

است. بنابراین می‌توانیم $\mathbf{E}^{diel} = \alpha \mathbf{E}_\circ$ و $\mathbf{p} = \eta \mathbf{E}_\circ$ با ثابت‌های α و η را که با شرایط مرزی در $r = a$ تعیین می‌شوند، بنویسیم. با انتخاب یک سیستم مختصات کروی با مبدأ O در مرکز کره، و محور قطبی z موازی با \mathbf{E}_\circ داریم.

$$\begin{aligned} E_r^{diel} &= \alpha E_\circ \cos \theta & E_r^{out} &= E_\circ \cos \theta + k_e \eta E_\circ \frac{\cos \theta}{r^3} \\ E_\theta^{diel} &= \alpha E_\circ \sin \theta & E_\theta^{out} &= E_\circ \sin \theta - k_e \eta E_\circ \frac{\sin \theta}{r^3} \\ E_\phi^{diel} &= 0 & E_\phi^{out} &= 0 \end{aligned} \quad (24.3)$$

شرط مرزی در سطح کره $E_{||}^{diel} = E_{||}^{out}$ و $\epsilon_r E_\perp^{diel} = E_\perp^{out}$ است که در مختصات کروی می‌دهد
 $\epsilon_r E_r^{diel}(r = a^-) = E_r^{out}(r = a^+)$, $E_\theta^{diel}(r = a^-) = E_\theta^{out}(r = a^+)$ (25.3)

با استفاده از معادله (24.3) و حذف عوامل مشترک خواهیم داشت

$$\epsilon_r \alpha = 1 + \frac{k_e}{a^3} \eta, \quad \alpha = 1 - \frac{k_e}{a^3} \eta \quad (26.3)$$

$$\alpha = \frac{3}{(\epsilon_r + 2)}, \quad \eta = \frac{a^3 \epsilon_r - 1}{k_e \epsilon_r - 2} \quad (27.3)$$

و در نهایت روابط (21.3) و (22.3) بهبود می‌یابند.

• ب: یک حدس دقیق مشابه با نکته قبلی انجام می‌دهیم، یعنی فرض می‌کنیم که میدان داخل حفره، \mathbf{E}^{cav} ، یکنواخت و موازی با \mathbf{E}_d است، و میدان در محیط دی‌الکتریک، \mathbf{E}^{diel} ، حاصل جمع \mathbf{E}_d و میدان دوقطبی الکتریکی \mathbf{p}_c ، واقع در مرکز حفره و موازی با \mathbf{E}_d است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{E}^{cav} = \alpha \mathbf{E}_d, \quad \mathbf{p}_c = \eta \mathbf{E}_d \quad (28.3)$$

که در آن، دوباره، α و η ثابت‌هایی هستند که با شرایط مرزی تعیین می‌شوند. با استفاده مجدد از مختصات کروی با مبدأ در مرکز حفره کروی و محور z موازی با \mathbf{E}_d ، عبارات مشابه با (24.3) هستند.

$$\begin{aligned} E_r^{diel} &= \alpha E_\circ \cos \theta & E_r^{out} &= E_\circ \cos \theta + k_e \eta E_\circ \frac{\cos \theta}{r^3} \\ E_\theta^{diel} &= \alpha E_\circ \sin \theta & E_\theta^{out} &= E_\circ \sin \theta - k_e \eta E_\circ \frac{\sin \theta}{r^3} \\ E_\phi^{diel} &= 0 & E_\phi^{out} &= 0 \end{aligned} \quad (29.3)$$

$$\epsilon_r E_r^{diel}(r = a^-) = E_r^{out}(r = a^+), \quad E_\theta^{diel}(r = a^-) = E_\theta^{out}(r = a^+) \quad (30.3)$$

بنابراین مقادیر α و η را می‌توان به راحتی با حل یک دستگاه خطی از دو معادله مانند بند (الف) به دست آورد. با این حال، می‌توانیم بلافرضیه با توجه به‌این که (29.3) و (30.3) با (24.3) و (25.3) یکسان هستند، اما برای جایگزین‌های E_d و E^{med} ، $E^{cav} \leftrightarrow E^{out}$ ، $E^{cav} \leftrightarrow E^{diel}$ ، $E_\circ \leftrightarrow 1/\epsilon_r \leftrightarrow \epsilon_r$ به جواب دست یابیم. بنابراین، جواب‌های \mathbf{E}^{cav} و \mathbf{p}_c از جواب‌های \mathbf{E}^{diel} و \mathbf{p}_c ، روابط (21.3) و (22.3)، با جایگزینی E_d به جای E_\circ و $1/\epsilon_r$ به جای ϵ_r به دست می‌آیند:

$$\mathbf{E}^{cav} = \frac{3}{1/\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_d = \frac{3\epsilon_r}{2\epsilon_r + 1} \mathbf{E}_d \quad (31.3)$$

$$\mathbf{p}_c = \frac{a^3}{3k_e} \frac{1/\epsilon_r - 1}{1/\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_d = \frac{a^3}{3k_e} \frac{1 - \epsilon_r}{1 + 2\epsilon_r} \quad (32.3)$$

بنابراین $E^{cav} > E_d$, یعنی میدان داخل حفره قوی‌تر از میدان بیرون آن است، و \mathbf{p}_c ضد موازی با \mathbf{E}_d است.

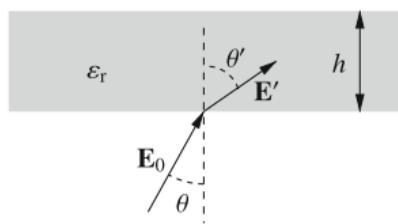
۵.۳ شکست میدان الکتریکی در مرز دی الکتریک

- الف: ابتدا، توجه می‌کنیم که میدان الکتریکی \mathbf{E}_0 در خارج از تیغه دی الکتریک برابر با میدانی است که در غیاب تیغه در خلاء خواهیم داشت. با نادیده گرفتن اثرات مرزی، چگالی بار سطحی مقید تیغه مشابه چگالی بار سطحی خازن صفحه موازی است. اینها یک میدان الکتریکی یکنواخت در داخل خازن ایجاد می‌کنند، اما هیچ میدانی در خارج ایجاد نمی‌کنند. بنابراین، میدان الکتریکی داخل تیغه مجموع \mathbf{E}_0 و میدان تولید شده توسط چگالی بار پلاریزاسیون سطحی است.

اگر میدان الکتریکی داخلی را با \mathbf{E}' نشان دهیم، شرایط مرزی در سطوح دی الکتریک خواهد بود:

$$E_{\perp} = \epsilon_r E'_{\perp}, \quad E_{\parallel} = \epsilon_r E'_{\parallel} \quad (33.3)$$

که در آن زیرنویس‌ها \perp و \parallel مولفه میدان را به ترتیب در جهت عمودی و موازی با سطح مرز مشترک نشان می‌دهند. بر حسب زوایای θ و θ' شکل (۶-۳) داریم:



$$E_{\perp} \cos \theta = \epsilon_r E'_{\perp} \cos \theta' \quad (34.3)$$

$$E_{\perp} \sin \theta = E'_{\perp} \sin \theta' \quad (34.4)$$

اگر جمله دوم رابطه (۳۴.۴) را بر جمله اول تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\epsilon_r} \tan \theta' = \tan \theta \quad (35.3)$$

و چون $\epsilon_r > 1$ است، در این صورت $\theta' > \theta$ خواهد بود.

- ب: از قانون گاووش بدست می‌آوریم

$$\sigma_b = \frac{1}{4\pi k_e} (E_{\perp} - E'_{\perp}) = \frac{1}{4\pi k_e} E_{\perp} \cos \theta \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (36.3)$$

- ج: چگالی انرژی الکترواستاتیک در داخل تیغه برابر است با:

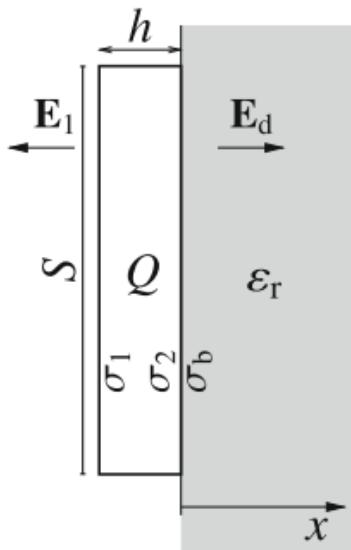
$$\begin{aligned} u_{es} &= \frac{\epsilon_r}{4\pi k_e} \mathbf{E}'^2 = \frac{\epsilon_r}{4\pi k_e} (E'^2_{\perp} + E'^2_{\parallel}) = \frac{\epsilon_r}{4\pi k_e} E_{\perp}^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_r} + \sin^2 \theta \right) \\ &= \frac{1}{4\pi k_e \epsilon_r} E_{\perp}^2 [(\epsilon_r - 1) \sin^2 \theta + 1] \end{aligned} \quad (37.3)$$

به طوری که u_{es} با افزایش θ افزایش می‌یابد، و انتظار داریم که گشتاور τ که تیغه را به سمت زاویه حداقل انرژی، یعنی $\theta = 0^\circ$ بچرخاند. با صرف نظر از اثرات مرزی، کل انرژی الکترواستاتیک تیغه $U_{es} = V_{ues}$ است، که در آن V حجم تیغه، و گشتاور اعمال شده توسط میدان الکتریکی برابر است با:

$$\tau = -\frac{\partial U_{es}}{\partial \theta} = -\frac{1}{\lambda \pi k_e \epsilon_r} E_0^2 V (\epsilon_r - 1) \sin 2\theta < 0. \quad (38.3)$$

۶.۳ نیروی تماس بین یک تیغه رسانا و یک نیمه فضای دیالکتریک

الف: با نادیده گرفتن اثرات مرزی در لبه‌های تیغه، میدان الکتریکی به دلیل تقارن در تمام مناطق مورد نظر موازی با محور x است. بنابراین، می‌توانیم نماد برداری را حذف کرده، و برای بردارهایی که بردار واحد آنها \star است، از اعداد مثبت و در غیر این صورت از اعداد منفی استفاده خواهیم کرد.



شکل (ح ۸-۳)

طبق قانون گاوس، یک صفحه باردار یکنواخت با چگالی بار سطحی σ_a ، میدان‌های یکنواخت را در دو طرف، به ترتیب با شدت $E_a = \pm \sigma_a / 2\epsilon_0$ ، خود ایجاد می‌کند. در این مسئله سه سطح صفحه موازی باردار داریم: با σ_1 چگالی بار سطحی در سطح چپ تیغه، با σ_2 چگالی روی سطح راست آن و با σ_b چگالی بار سطح مقید مواد دیالکتریک روی سطح آن، همانطور که در شکل (ح ۸-۳) نشان داده شده، را نشان می‌دهیم. از آنجایی که مجموع بار آزاد روی تیغه Q است، داریم

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} = \sigma_{tot} \quad (39.3)$$

در هر نقطه‌ای از فضا، میدان الکتریکی کل مجموع میدان‌های تولید شده توسط سه بار سطحی است. اکنون، میدان الکتریکی باید در داخل تیغه رسانا صفر باشد. بنابراین مجموع تمام چگالی بار سطحی (شامل بارهای آزاد و مقید) در سمت راست تیغه باید با مجموع تمام چگالی بار سطحی در سمت راست برابر باشد، به طوری که میدان‌های مربوطه آنها در داخل تیغه خنثی شود. این نتیجه‌گیری هم زمانی که تیغه در تماس با دیالکتریک است و هم زمانی که یک شکاف خلاء بین آنها وجود دارد صادق است. بنابراین، داریم

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_b \quad (40.3)$$

میدان الکتریکی E_d در داخل محیط دی الکتریک $E_d = 4\pi k_e(\sigma_1 + \sigma_b)$ است. این به معنی قطبش دی الکتریک محیط P برابر است با

$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi k_e} E_d = (\epsilon_r - 1) \sigma_1 \quad (41.3)$$

از آنجایی که نیز $P = -\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\sigma_b = -\sigma_1$ داریم، رابطه اضافی زیر را به دست می آوریم

$$\sigma_b = -(\epsilon_r - 1)(\sigma_1 + \sigma_b) \quad (42.3)$$

که منجر به

$$\sigma_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_1 \quad (43.3)$$

سرانجام از روابط (۳۹.۳)، (۴۰.۳) و (۴۳.۳) داریم

$$\sigma_1 = \frac{1}{\epsilon_r + 1} \sigma_{tot}, \quad \sigma_2 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \sigma_{tot}, \quad \sigma_b = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \sigma_{tot} \quad (44.3)$$

بزرگی میدان الکتریکی در سمت چپ تیغه E_1 و میدان الکتریکی داخل محیط دی الکتریک E_d را می توان از قانون گاووس محاسبه کرد و یادآوری می شود که میدان در داخل تیغه صفر است. داریم

$$E_1 = -4\pi k_e \sigma_1 = -\frac{4\pi k_e}{\epsilon_r + 1} \sigma_{tot}, \quad E_d = 4\pi k_e(\sigma_2 + \sigma_b) = -E_1 \quad (45.3)$$

در مورد شکاف خلاء بین تیغه رسانا و محیط دی الکتریک، همانطور که در شکل (ح ۹-۳) نشان داده شده است، میدان E_2 در شکاف برابر است با:

$$E_2 = 4\pi k_e \sigma_2 = 4\pi k_e \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \sigma_{tot} = -\epsilon_r E_1 \quad (46.3)$$

مقادیر E_1 و E_d تحت تأثیر وجود شکاف خلاء نیستند.

به عنوان یک رویکرد جایگزین، می توانیم به دنبال مسئله ۲.۳ فرض کنیم که لایه های بار آزاد σ_1 و σ_2 لایه های بار تصویر σ'_1 و σ'_2 را در دی الکتریک القا می کنند.

$$\sigma'_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \sigma_1, \quad \sigma'_2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \sigma_2 \quad (47.3)$$

با صفحات تصویر که در موقعیت متقارن نسبت به سطح دی الکتریک قرار دارند. با توجه به قانون گاووس، چگالی بار سطحی مقید، مجموع چگالی بارهای تصویری برابر است با:

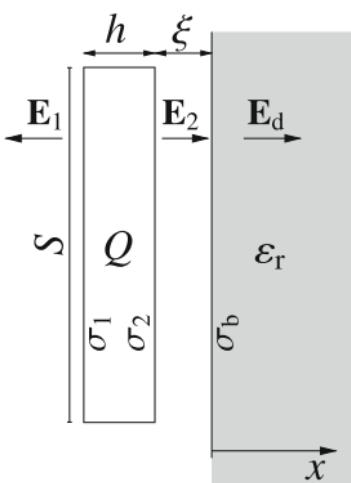
$$\sigma_p = \sigma'_1 + \sigma'_2 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{Q}{S} \quad (48.3)$$

اکنون چگالی بار آزاد را می توان با ناپدید شدن میدان در داخل تیغه پیدا کرد: با حذف عامل ضریب مشترک داریم:

$$\circ = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma'_1 - \sigma'_2 = 2 \frac{\epsilon_r \sigma_1 - \sigma_2}{\epsilon_r + 1} \quad (49.3)$$

که از آن $\sigma_2 = \sigma_1 - \circ$ بدست می آوریم و در نهایت چگالی بار سطحی آزاد و مقید (۴۴.۳) را بازیابی می کنیم.

شکل (ح ۹-۳)



- ب: به منظور محاسبه نیروی الکترواستاتیکی وارد بر تیغه رسانا، ابتدا وجود یک شکاف خلاء کوچک به عرض بین تیغه و محیط دیالکتریک را، همانطور که در شکل (ح۳-۹) نشان داده شده، فرض می‌کنیم.
می‌توانیم کل نیروی الکترواستاتیک F وارد بر تیغه رسانا را به سه روش معادل محاسبه کنیم:

۱. می‌توانیم تغییرات کل انرژی الکترواستاتیک U_{es} مصرف شده را زمانی که تیغه با مقدار نامتناهی (بی‌نهایت کوچک) dx به سمت راست جابه‌جا می‌شود، محاسبه کنیم، بنابراین شکاف را کاهش می‌دهیم. در این حالت U_{es} در سمت چپ تیغه به میزان $E_1 S dx / (8\pi k_e)$ افزایش می‌یابد، زیرا عرض ناحیه «پر شده» توسط میدان E_1 با dx افزایش می‌یابد، و به طور متضاظر با $E_2 S dx / (8\pi k_e)$ در سمت راست آن کاهش می‌یابد. بنابراین، $dU_{es} = (E_1 - E_2) S dx / (8\pi k_e)$ که از آن نیرو در واحد سطح خواهد بود:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dU_{es}}{dx} = \\ &= 2\pi k_e \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{Q^2}{S} \end{aligned} \quad (50.3)$$

در اینجا $> F$ داریم، یعنی تیغه توسط محیط دیالکتریک جذب می‌شود.

۲. می‌توانیم بار Q تیغه را در میدان محلی ضرب کنیم، یعنی در میدانی که توسط همه بارها به استثنای بارهای تیغه ایجاد می‌شود، ضرب کنیم. در این حالت، میدان محلی میدانی است که توسط چگالی بار سطحی مقید تولید شده است. لذا داریم :

$$E_p = -2\pi k_e \sigma_b = 2\pi k_e \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \sigma_{tot}, \quad F = 2\pi k_e \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{Q^2}{S} \quad (51.3)$$

۳. می‌توانیم نیروی وارد بر تیغه را با جمع نیروهای F_1 در سمت چپ و F_2 در سطح راست آن محاسبه کنیم. اینها با ضرب بارهای مربوطه $Q_1 = S\sigma_1$ و $Q_2 = S\sigma_2$ در میدان‌های میانگین در سطوح به دست می‌آیند.

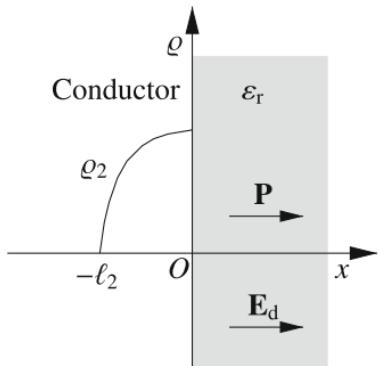
$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = Q_1 \frac{E_1}{2} + Q_2 \frac{E_2}{2} = -\frac{Q}{\epsilon_r + 1} \dots \\ &= 2\pi k_e \frac{\epsilon_r - 1}{(\epsilon_r + 1)^2} \frac{Q^2}{S} = 2\pi k_e \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{Q^2}{S} \end{aligned} \quad (52.3)$$

نیروی F مستقل از ψ است، بنابراین نتیجه فوق باید در حد $\psi \rightarrow 0$ نیز معتبر باشد، یعنی زمانی که بین تیغه فلزی و دیالکتریک تماس وجود دارد. با این حال، ممکن است کسی استدلال کند که در این شرایط، میدان $x = 0^+$ یعنی در سمت راست تیغه، توسط $E_d = E_1$ داده می‌شود، به طوری که به دنبال رویکرد (۳) می‌توان نوشت.

$$F = F_1 + F_2 \stackrel{?}{=} Q_1 \frac{E_1}{2} + Q_2 \frac{E_d}{2} \neq Q_1 \frac{E_1}{2} + Q_2 \frac{E_2}{2} \quad (53.3)$$

این اختلاف به این دلیل است که در واقع میانگین میدان در بارهای آزاد واقع در سطح سمت راست تیغه $E_d/2$ نیست، که میانگین میدان در دو لایه ادغام شده

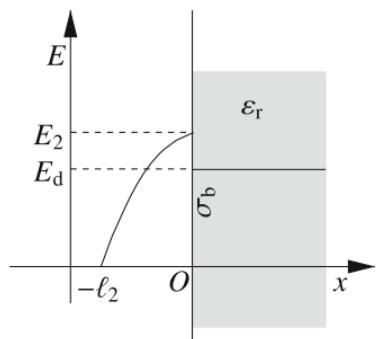
بارهای آزاد و مقید است. با این حال، نیروی وارد بر تیغه باید با محاسبه میدان متوسط فقط با بارهای آزاد محاسبه شود.



شکل (ح ۱۰-۳)

برای نشان دادن این موضوع، اجازه دهید برای لحظه‌ای فرض کنیم که بارهای آزاد در سطوح تیغه در لایه‌ای با عرض کوچک اما محدود توزیع شده‌اند، تا بتوانیم بدون ادغام آن‌ها با بارهای مقید، دقیقاً جایه را که بارهای آزاد هستند، محلی کنیم. به طور خاص، اجازه دهید لایه بار سطحی آزاد بضمایت σ_2 و چگالی بار حجمی $\rho_2(x)$ داشته باشد به‌طوری که

$$\int_{-l_r}^0 \rho_2 dx = \sigma_2 \quad (54.3)$$



شکل (ح ۱۱-۳)

همانطور که در شکل (ح ۱۰-۳) نشان داده شده است. میدان الکتریکی به‌دلایل تقارن همچنان در امتداد محور x هدایت می‌شود. قانون گاوس در یک بعد $E(-l_2) = \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi k_e \rho$ می‌دهد. از آنجایی که $E(-l_2) = 0$ (در عمق هادی میدان باید محو شود) میدان الکتریکی را در ناحیه $-l_2 \leq x \leq 0$ داریم.

$$E(x) = 4\pi k_e \int_{-l_r}^x \rho_2(x') dx' \quad (55.3)$$

بنابراین مجموع نیروی وارد بر بارهای آزاد تنها می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود

$$\begin{aligned} F_2 &= S \int_{-l_r}^0 E(x) \rho_2(x) dx \\ &= \frac{S}{4\pi k_e} \int_{-l_r}^0 E(x) \frac{\partial E(x)}{\partial x} dx = \frac{S}{4\pi k_e} \int_{-l_r}^0 \frac{\partial E^2(x)}{\partial x} dx \\ &= \frac{S}{4\pi k_e} E^2 = \frac{S(4\pi k_e \sigma_2)^2}{8\pi k_e} = 2\pi k_e S \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (56.3)$$

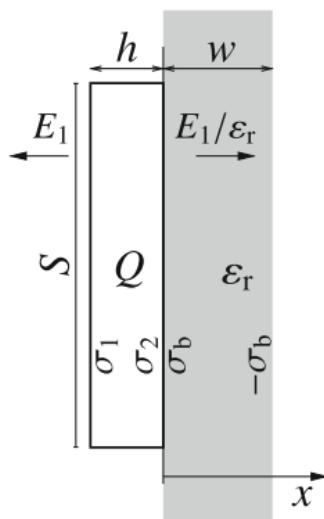
میدان الکتریکی در $x = 0^-$ برابر E_2 است، همانطور که در شکل (ح ۱۱-۳) نشان داده شده است، و فشار الکترواستاتیک حاصل $p_2 = F_2/S = 2\pi k_e \sigma_2^2$ ، مستقل از توزیع خاص $\rho_2(x)$ و مطابق نتیجه (۵۲.۳) با قبلی است. با این حال، میدان الکتریکی در $x = 0^+$ به‌دلیل وجود بار مقید به‌سطح E_d است.

• ج: اگر محیط دی الکتریک در واقع یک تیغه محدود در $w = x$ ، همانطور که در شکل (ح ۱۲-۳) نشان داده شده باشد، یک چگالی بار سطح مقید بیشتر $-\sigma_b$ ، مخالف

^۳ممکن است فرض کنیم که بار پلاریزاسیون لایه‌ای از عرض l_d را در سطح دی الکتریک پر می‌کند. با این حال، این فقط به‌این معنی است که میدان در $x \geq d$ تبدیل به E_d می‌شود و بر نتیجه‌گیری ما بر روی نیروهای وارد بر هادی تأثیری نخواهد داشت.

مسائل الکترومغناطیس

چگالی σ_b در $x = 0$ در سطح w ظاهر می‌شود. این توزیع بار با یک خازن صفحه یکسان است، به‌طوری که بارهای مقید میدان خارج از تیغه دی‌الکتریک ایجاد می‌کند. به‌عنوان پیامدهای بی‌اهمیت، چگالی بار سطحی روی تیغه رسانا نیز می‌کند. میدان داخل دی‌الکتریک $E_1/\epsilon_r = Q/(2\epsilon_0 \epsilon_r S)$ است و هیچ نیرویی بین تیغه و دی‌الکتریک وجود ندارد. علاوه بر این، این نتیجه مستقل از w است و بنابراین باید در حد $\infty \rightarrow w$ نیز معتبر باشد.



تضاد ظاهری با نتایج بند (الف) و (ب) این است که در دو تلاش برای تقریب شرایط واقعی توسط اجسام با اندازه نامحدود، شرایط مرزی متفاوتی را در بینهایت فرض می‌کنیم. برای بحث در مورد این موضوع اجازه دهید دوباره به‌شکل (۳-۵) نگاه کنیم که تیغه بار Q را در مقابل یک نیمکره دی‌الکتریک با شعاع R نشان می‌دهد. در حد $R \rightarrow \infty$ ، میدان در نیمه فضای دی‌الکتریک به‌میدانی نزدیک می‌شود که اگر محیط دی‌الکتریک کل فضا را پر می‌کرد، خواهیم داشت و سطح S چگالی بار سطحی $\sigma'' = 2\epsilon_r \sigma / (\epsilon_r + 1)$ داشت. مسئله ۲.۳ را ببینید. بنابراین، میدان، پلاریزاسیون و چگالی بار سطحی پلاریزاسیون همگی در سطح نیمکره به‌صفر نزدیک می‌شوند.

شکل (ح ۳-۳)

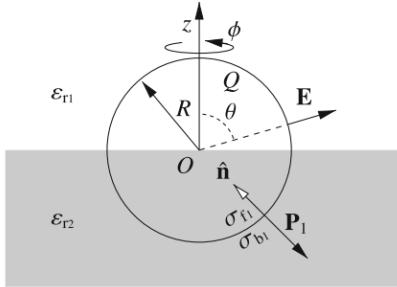
بخش (ب) شکل ۳-۵ بزرگ شدن ناحیه محصور شده در مستطیل چین خورده قسمت بند (الف) همان شکل است و طبق نتیجه، چگالی بار محو شده روی سطح نیمکره به‌میدان، مسئله ۱۱.۱، این ناحیه کمک نمی‌کند. این شرایط مرزی فرض شده در بند (الف) و (ب) را تحریک می‌کند. در مقابل، در بند (ج) چگالی بار سطح مقید در بینهایت از بین نمی‌رود و یک میدان یکنواخت ایجاد می‌کند که در خلاء میدان تولید شده توسط سطح دی‌الکتریک در $x = 0$ را خنثی می‌کند.

۷.۳ یک کره رسانا بین دو دی‌الکتریک

الف: همانطور که در شکل (ح ۳-۳) نشان داده شده است، از یک دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) با مبدأ O در مرکز کره، و جهت اوج عمود بر صفحه جداکننده دو محیط دی‌الکتریک استفاده می‌کنیم. میدان الکتریکی داخل کره رسانا صفر است. میدان الکتریکی خارج از کره، $\mathbf{E}(r, \theta, \phi)$ ، به‌دلیل تقارن مسئله، مستقل از ϕ است. از آنجایی که کره رسانا است، میدان الکتریکی $\mathbf{E}(R^+, \theta, \phi)$ باید بر سطح آن عمود باشد و تنها مولفه غیر صفر آن E_r است. اگر معادله ماکسول $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ در مختصات کروی روی سطح کروی بنویسیم $r = R^+$ (به‌جدول ۱-۱ پیوست مراجعه

کنید)، می‌بینیم که مولفه‌های r و θ کرل به طور خودکار صفر می‌شوند زیرا $E_\phi = 0$ ، $E_\theta = 0$ و تمام مشتقات نسبت به ϕ صفر هستند. شرطی که مولفه ϕ کرل نیز باید صفر باشد این است:

$$\frac{\partial E_r}{\partial \theta} = \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = E_\theta + r \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \quad (57.3)$$



شکل (ح۱۳-۳)

سمت راست رابطه (۵۷.۳) صفر است زیرا $E_\theta(R^-) = 0$ ، $E_\theta(R^+) = 0$. بنابراین، $\frac{\partial E_r(R)}{\partial \theta} = 0$ ، و $E_r(R^+) = 0$ در نتیجه، به محیط دیالکتریک) بستگی ندارد. اگر مجموع چگالی بار سطح آزاد σ_f و چگالی بار مقید σ_b را با σ_{tot} نشان دهیم، رابطه

$$\sigma_{tot} = \frac{E(R^+, \theta, \phi)}{4\pi k_e} = \frac{E(R^+)}{4\pi k_e} \quad (58.3)$$

نشان می‌دهد که σ_{tot} در کل سطح کره ثابت است. بنابراین میدان الکتریکی در کل فضای خارج از کره با میدان یک بار نقطه‌ای $Q_{tot} = Q + Q_b$ که در O قرار دارد، با برابر است، که در آن Q_b بار پلاریزاسیون کل (مقید) است:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}(r) = 4\pi k_e \sigma_{tot} \frac{R}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad r > R \quad (59.3)$$

چون این میدان فقط به r بستگی دارد. چگالی بار پلاریزاسیون روی سطوح دو دیالکتریک در تماس با کره به ترتیب عبارتند از:

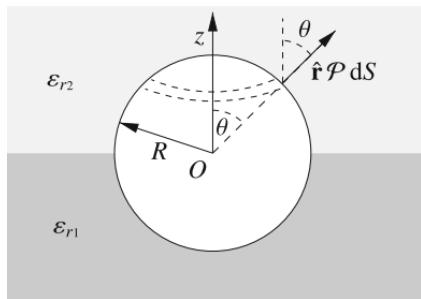
$$\begin{aligned} \sigma_{b1} &= \frac{\epsilon_{r1} - 1}{4\pi k_e} E(R) = -(\epsilon_{r1} - 1) \sigma_{tot} \\ \sigma_{b2} &= \frac{\epsilon_{r2} - 1}{4\pi k_e} E(R) = -(\epsilon_{r2} - 1) \sigma_{tot} \end{aligned} \quad (60.3)$$

که در آن بردار واحد $\hat{\mathbf{n}}$ به سمت مرکز کره اشاره می‌کند. چگالی بار سطحی آزاد در نواحی در تماس با دو دیالکتریک σ_{f1} و σ_{f2} به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_{f1} &= \sigma_{tot} - \sigma_{b1} = \epsilon_{r1} \sigma_{tot} \\ \sigma_{f2} &= \sigma_{tot} - \sigma_{b2} = \epsilon_{r2} \sigma_{tot} \end{aligned} \quad (61.3)$$

از آنجایی که $2\pi R^2 (\sigma_{f1} + \sigma_{f2}) = Q$ است، در نهایت به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \frac{Q}{2\pi R^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}, & \mathbf{E}(r) &= k_e \frac{Q}{2\pi R^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \hat{\mathbf{r}} \\ \sigma_{f1} &= \frac{\epsilon_{r1} Q}{2\pi R^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}, & \sigma_{f2} &= \frac{\epsilon_{r2} Q}{2\pi R^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \\ \sigma_{b1} &= \frac{(\epsilon_{r1} - 1) Q}{2\pi R^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}, & \sigma_{b2} &= \frac{(\epsilon_{r2} - 1) Q}{2\pi R^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \end{aligned} \quad (62.3)$$



شکل (ح) ۱۴-۳

- ب فشارهای الکترواستاتیک روی دو سطح نیمکره برابر با چگالی انرژی الکترواستاتیک در محیط دیالکتریک مربوطه است و به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{fi} &= \frac{2\pi k_e}{\epsilon_{ri}} \sigma_{fi}^z = \frac{2\pi k_e}{\epsilon_{ri}} \left[\frac{\epsilon_{ri} Q}{2\pi R^2 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \right]^2 \\ &= k_e \frac{\epsilon_{ri} Q^2}{2\pi R^4 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2} \end{aligned} \quad (63.3)$$

با $i = 1, 2$. بنابراین $\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2$ زیرا $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$ و فشار کره را به سمت محیط با گذردگی بالاتر هُل می‌دهد. نیروی وارد بر عنصر سطح کره $dF = \hat{r} \mathcal{P}_{fi} dS$ است، با $i = 1$ اگر $\theta > \pi/2$ و $i = 2$ اگر $\theta < \pi/2$ است. نیروی کل عملکرد بر روی نیمکره فوقانی ($\theta < \pi/2$) است بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \hat{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta R^2 \sin \theta \cos \theta k_e \frac{\epsilon_{r2} Q^2}{2\pi(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2 R^4} \\ &= \hat{\mathbf{z}} R^2 k_e \frac{\epsilon_{r2} Q^2}{2\pi(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2 R^4} = \hat{\mathbf{z}} R^2 \mathcal{P}_2 = \hat{\mathbf{z}} k_e \frac{\epsilon_{r2} Q^2}{2(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2 R^4} \end{aligned} \quad (64.3)$$

به سمت بالا هدایت می‌شود، زیرا مولفه‌های نیرو عمود بر محور z حذف می‌شوند. توجه داشته باشید که \mathbf{F}_2 به سادگی برابر است با ضرب در سطح مقطع کره πR^2 کل نیروی وارد بر نیمکره تحتانی ($\theta > \pi/2$) به طور مشابه،

$$\mathbf{F}_1 = -\hat{\mathbf{z}} k_e \frac{\epsilon_{r1} Q^2}{2(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2 R^4} \quad (65.3)$$

بنابراین کل نیروی الکترواستاتیکی که بر کره رسانا وارد می‌شود:

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\hat{\mathbf{z}} k_e \frac{(\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}) Q^2}{2(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2 R^4} \quad (66.3)$$

اگر کره زمانی که نیمی از حجم آن در آب فرو می‌رود در حالت تعادل باشد، به اضافه وزن کره باید نیروی شناور ارشمیدس را متعادل کند.

$$k_e \frac{(\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}) Q^2}{2(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2 R^4} = g \frac{2\pi R^3}{3} (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho) \quad (67.3)$$

که در آن g شتاب گرانشی است. بنابراین، در حالت تعادل، بار الکتریکی روی کره باید باشد

$$Q = \sqrt{\frac{4\pi R^5 (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})^2 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho) g}{3 k_e (\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})}} \quad (68.3)$$

۸.۳ اندازه‌گیری ثابت دیالکتریک مایعات

خازن نیمه پر معادل دو خازن است که به صورت موازی بهم متصل شده‌اند، یکی با خلاء بین صفحات و دیگری با مایع دیالکتریک پُر شده است. دو خازن دارای شعاع‌های داخلی و خارجی یکسان، a و b هستند، اما طول‌های متفاوتی، به ترتیب $h-l$ و h دارند. ظرفیت

کل برابر است با:

$$C = \frac{l - h}{2k_e \ln(b/a)} + \frac{\epsilon_r h}{2k_e \ln(b/a)} = \frac{l + (\epsilon_r - 1)h}{2k_e \ln(b/a)} \quad (69.3)$$

و انرژی الکترواستاتیک خازن است

$$U_{es} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{l + (\epsilon_r - 1)h}{4k_e \ln(b/a)} V^2 \quad (70.3)$$

اگر مایع به مقدار dh افزایش یابد افزایش ظرفیت خواهد بود:

$$dC = \frac{(\epsilon_r - 1)dh}{2k_e \ln(b/a)} \quad (71.3)$$

و اگر اختلاف پتانسیل V در صفحات خازن ثابت نگه داشته شود، انرژی الکترواستاتیک خازن مقداری افزایش می‌یابد.

$$dU_{es} = \frac{1}{2} V^2 dC = \frac{(\epsilon_r - 1)dh}{4k_e \ln(b/a)} V^2 \quad (72.3)$$

به طور همزمان منبع ولتاژ یک کار را انجام می‌دهد

$$dW = V dQ = V^2 dC = \frac{(\epsilon_r - 1)dh}{2k_e \ln(b/a)} V^2 \quad (73.3)$$

زیرا بار خازن باید $dQ = V dC$ افزایش یابد تا اختلاف پتانسیل بین صفحات ثابت بماند و این به معنای جابجایی بار dQ از یک صفحه به صفحه دیگر است. انرژی منبع ولتاژ تغییر می‌کند

$$dU_{source} = \frac{(\epsilon_r - 1)dh}{2k_e \ln(b/a)} V^2 = -2U_{es} \quad (74.3)$$

ما همچنان باید افزایش انرژی پتانسیل گرانشی مایع را محاسبه کنیم. هنگامی که مایع به اندازه dh بالا می‌رود، یک استوانه حلقه‌ای بین نهایت کوچک با جرم $dm = \rho\pi(b^2 - a^2)dh$ در بالای آن اضافه می‌شود و انرژی گرانشی افزایش می‌یابد.

$$dU_g = g\rho\pi(b^2 - a^2)h dh \quad (75.3)$$

بنابراین تغییرات انرژی کل برابر است با:

$$\begin{aligned} dU_{tot} &= dU_{es} + dU_{source} + dU_g = -dU_{es} + dU_g \\ &= -\frac{(\epsilon_r - 1)dh}{4k_e \ln(b/a)} V^2 + g\rho\pi(b^2 - a^2)h dh \end{aligned} \quad (76.3)$$

و نیروی کل خواهد بود

$$F = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial h} = \frac{(\epsilon_r - 1)dh}{4k_e \ln(b/a)} V^2 - g\rho\pi(a^2 - b^2)h \quad (77.3)$$

در حالت تعادل $F = 0$ است که مربوط به

$$h = \frac{(\epsilon_r - 1)V^2}{4\pi k_e g \rho (b^2 - a^2) \ln(b/a)} \quad \text{و} \quad \epsilon_r = 1 + \frac{4\pi k_e g \rho (a^2 - b^2) \ln(b/a)}{V^2} h \quad (78.3)$$

برای پذیرندگی الکتریکی χ ، در واحدهای SI $\chi = \epsilon_r - 1$ داریم

$$\chi = \frac{g\rho(a^2 - b^2) \ln(b/a)}{\epsilon_0 V^2} h \quad (79.3)$$

^ΔElectric Susceptibility

در حالی که در واحدهای گاووسی $\chi = (\epsilon_r - 1)/4\pi$ و داریم

$$\chi = \frac{g\rho(a^2 - b^2) \ln(b/a)}{V^2} h \quad (80.3)$$

۹.۳ استوانه رسانا در مایع دی الکتریک

الف: یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) را انتخاب می‌کنیم که محور طولی z روی محور استوانه رسانا قرار دارد و مبدأ O در ارتفاع سطح مرزی بین مایع دی الکتریک و خلاء بالای آن قرار دارد. زاویه آزمیوتال (سمت) ϕ برای مسئله حاضر نامربوط است. میدان الکتریکی $E(r, \phi, z)$ عمود بر سطح استوانه است، بنابراین نامربوط است. میدان در سطح مرز دی الکتریک-خلاء پیوسته $E(r, \phi, z) \equiv [E_r(r, z), 0, 0]$ داریم. میدان در سطح مرز دی الکتریک-خلاء پیوسته است، زیرا موازی با آن است. بنابراین مستقل از z داریم $E_r(r, z) = E_r(r)$. بگذارید با σ_1 و σ_2 چگالی سطح بار آزاد در سطح جانبی استوانه را به ترتیب برای $z > 0$ و $z < 0$ نشان دهیم. مقادیر σ_1 و σ_2 به میدان الکتریکی در سطح استوانه $E_r(a)$ به ϵ_r و Q مربوط می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E_r(a)}{4\pi k_e}, & \sigma_2 &= \frac{\epsilon_r E_r(a)}{4\pi k_e} \\ Q &= 2\pi a[\sigma_1 h + \sigma_2(L-h)] \end{aligned} \quad (81.3)$$

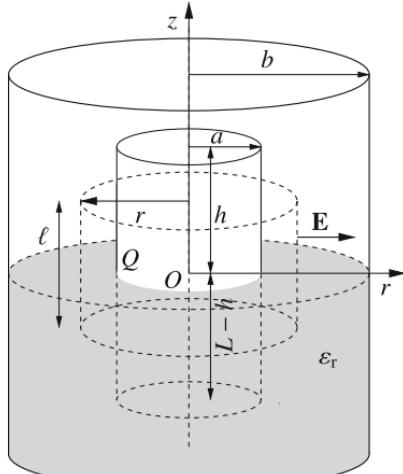
بنابراین داریم

$$\begin{aligned} E_r(a) &= Q \frac{2k_e}{a[h + \epsilon_r(L-h)]} \\ &= Q \frac{2k_e}{a[\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h]} \end{aligned} \quad (82.3)$$

ب: میدان الکتریکی $E_r(r)$ در ناحیه $a < r < b$ را می‌توان با اعمال قانون گاووس بر روی یک سطح استوانه‌ای بسته به شعاع r و ارتفاع $l \ll L$ هم محور با استوانه رسانا محاسبه کرد. با چشم‌پوشی از اثرات مرزی، شار میدان الکتریکی از طریق قاعده‌های سطح گاووسی صفر است و داریم:

$$\begin{aligned} 2\pi r l E_r(r) &= 4\pi k_e Q_{int} \\ E_r(r) &= \frac{2k_e Q_{int}}{rl} \end{aligned} \quad (83.3)$$

که در آن Q_{tot} کل بار داخل سطح گاووسی است که شامل بارهای آزاد و پلاریزاسیون می‌شود. اگر اجازه دهیم r با ثابت نگهداشت l به a نزدیک شود، Q_{int} ثابت می‌ماند و داریم



شکل (۱۵-۳)

$$\lim_{r \rightarrow a} E_r = \frac{2k_e Q_{int}}{al} = E_r(a), \quad \text{در نتیجه} \quad E_r(r) = E_r(a) \frac{a}{r} \quad (84.3)$$

و با جایگزینی در رابطه (۸۲.۳)

$$E_r(r) = \frac{\epsilon_r k_e Q}{r[\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h]} \quad (85.3)$$

• ج: انرژی الکترواستاتیکی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} U_{es} &\approx \frac{1}{4\pi k_e} \left[\epsilon_r \int_0^{L-h} dz \int_a^b E_r^*(r) 2\pi r dr + \int_{L-h}^L dz \int_a^b E_r^*(r) 2\pi r dr \right] \\ &= \frac{1}{4\pi k_e} \left[\frac{2k_e Q}{[\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h]} \right]^* \left\{ [\epsilon_r(L-h) + h] \int_a^b \frac{2\pi}{r} dr \right\} \\ &= k_e \left[\frac{Q}{[\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h]} \right]^* [\epsilon_r(L-h) + h] \ln \left(\frac{b}{a} \right) \\ &= k_e \frac{Q^* \ln \left(\frac{b}{a} \right)}{\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h} \end{aligned} \quad (86.3)$$

یعنی انرژی الکترواستاتیکی دو خازن استوانه‌ای که به صورت موازی و با بار کلی Q بهم متصل شده‌اند. هر دو خازن دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b هستند، یکی دارای طول $L-h$ و با مواد دی الکتریک پر شده است، دیگری دارای طول h و خلاه بین صفحات است. نیروی الکترواستاتیک هدایت شده در امتداد z برابر است با:

$$F_{es} = -\frac{dU_{es}}{dh} = -k_e \frac{(\epsilon_r - 1) \ln \left(\frac{b}{a} \right) Q^*}{[\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h]^2} < 0. \quad (87.3)$$

نیروهای الکترواستاتیک تمایل به کاهش h دارند، یعنی استوانه را در مایع فرمی برند.

• د: مجموع نیروهای گرانشی و شناوری (بهدلیل اصل ارشمیدس) روی استوانه برابر است با:

$$F_g = -Mg + \rho g(L-h)\pi a^2 \quad (88.3)$$

و هنگامی که $F_{es} + F_g = 0$ استوانه در تعادل است، یعنی زمانی که

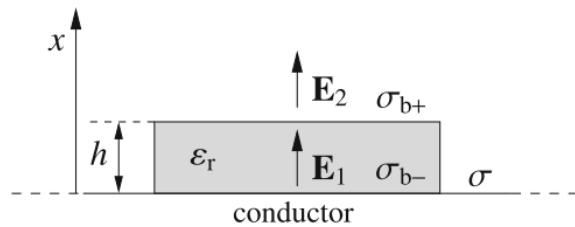
$$\rho g(L-h)\pi a^2 - Mg = k_e \frac{(\epsilon_r - 1) \ln \left(\frac{b}{a} \right) Q^*}{[\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h]^2} \quad (89.3)$$

با توجه به L ، h و ϵ_r ، بازاء مقدار زیر تعادل داریم

$$Q = [\epsilon_r L - (\epsilon_r - 1)h] \sqrt{\frac{\rho g(L-h)\pi a^2 - Mg}{k_e (\epsilon_r - 1) \ln \left(\frac{b}{a} \right)}} \quad (90.3)$$

۱۰.۳ یک تیغه دی الکتریک در تماس با یک هادی باردار

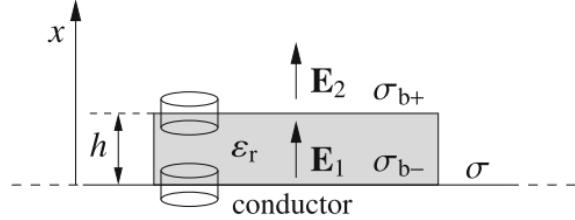
• الف: در تقریب‌های ما، میدان‌های الکتریکی عمود بر سطح هادی هستند. ما یک دستگاه مرجع دکارتی را با مبدأ روی سطح هادی و محور x عمود بر سطح انتخاب می‌کنیم، شکل (۱۶-۳)، به طوری که تنها مولفه غیر صفر میدان‌های الکتریکی مولفه x آنها باشد. میدان الکتریکی داخل تیغه دی الکتریک را با E_1 و میدان الکتریکی در خلاء را با E_2 نشان می‌دهیم، در حالی که میدان در داخل هادی صفر خواهد بود.



شکل (ح ۱۶-۳)

میدان‌های E_1 و E_2 را می‌توان با اعمال معادله $\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = 4\pi k_e \rho_f$ به دو جعبه قرص گاوی محاسبه کرد، که به ترتیب از سطوح $x = h$ و $x = 0$ عبور می‌کنند. می‌بینیم که E_1 در سطح $x = h$ ناپیوسته و در سطح $x = 0$ پیوسته است:

$$\epsilon_1 E_1 = 4\pi k_e \sigma, \quad E_2 = \epsilon_r E_1 \quad (91.3)$$



شکل (ح ۱۷-۳)

که منجر به رابطه زیر می‌شود

$$E_1 = \frac{4\pi k_e}{\epsilon_r} \sigma, \quad E_2 = 4\pi k_e \sigma \quad (92.3)$$

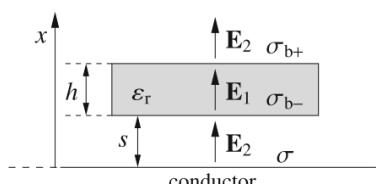
• ب: چگالی بار پلاریزاسیون سطحی را با σ_{b+} و σ_{b-} به ترتیب در $x = h$ و $x = 0$ نشان می‌دهیم. این مقادیر را می‌توان با اعمال قانون گاووس $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_e(\rho_f + \rho_b)$ محاسبه کرد و به دست آورده:

$$E_1 = 4\pi k_e(\sigma + \sigma_{b-}), \quad E_2 - E_1 = 4\pi k_e \sigma_{b+} \quad (93.3)$$

با معرفی معرفی (۹۱.۳) در (۹۳.۳) در نهایت داریم:

$$\sigma_{b+} = -\sigma_{b-} = \quad (94.3)$$

• ج: در ناحیه خلاء بین هادی و تیغه دیالکتریک، میدان $E = 4\pi k_e \sigma = E_2$ ، مستقل از s است. میدان الکتریکی داخل تیغه دیالکتریک، و بالای تیغه، به ترتیب E_1 و E_2 هستند، همانطور در مورد $s = 0$ ، بنابراین مستقل از s است.



شکل (ح ۱۸-۳)

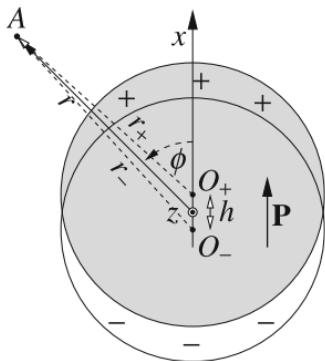
نیروی الکترواستاتیک خالص وارد بر تیغه، مستقل از s صفر است، زیرا نیروهای وارد بر سطوح بالایی و پایینی تیغه دقیقاً مخالف هستند. علاوه بر این، اگر انرژی الکترواستاتیک سیستم را به صورت انگرال حجمی $\epsilon_r E^2 / (8\pi k_e)$ محاسبه کنیم، می‌بینیم که این کمیت نیز در حدود تقریب ما مستقل از s است.

۱۱.۳ استوانه قطبی شده عرضی

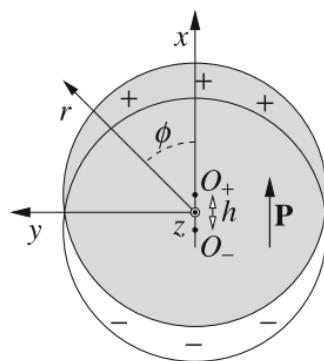
یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) را انتخاب می‌کنیم که محور استوانه به عنوان محور z و صفحه مرجع (صفحه‌ای که زاویه ϕ از آن اندازه‌گیری می‌شود) موازی با P باشد. تقارن انتقالی در امتداد z داریم، به طوری که از نظر ریاضی، مسئله دو بعدی است. چگالی پلاریزاسیون بار سطحی استوانه $\sigma(\phi) = P \cdot \hat{n}$ که در آن \hat{n} بردار واحد خروجی عمود بر سطح استوانه است، بنابراین

$$\sigma(\phi) = P \cos \phi \quad (95.3)$$

مشابه مسئله ۱.۱، استوانه پلاریزه عرضی را می‌توان به صورت حد $r \rightarrow \infty$ و $h \rightarrow 0$ در نظر گرفت. دو محور استوانه، خطوط مستقیم $x = \pm h/2$ هستند که هر دو بدون کاغذ در شکل (ح ۱۹-۳) هستند. حاصلضرب ρh ثابت است و برابر با پلاریزاسیون P استوانه اصلی است. پتانسیل الکترواستاتیک $\phi_{\pm}^{ext}(A)$ که توسط هر استوانه باردار در یک نقطه خارجی $A \equiv (r, \phi, z)$ ایجاد می‌شود، برابر با پتانسیل یک بار خطی بینهایت با چگالی بار خطی $\lambda_{\pm} = \pm \pi a^2 \rho$ که بر روی محور استوانه است.



شکل (ح ۲۰-۳)



شکل (ح ۱۹-۳)

$$\phi_{\pm}^{ext}(A) = \mp 2k_e \pi a^2 \rho \ln \left(\frac{r_{\pm}}{R_{\pm}} \right) \quad (96.3)$$

که در آن

$$r_{\pm} \approx r \mp \frac{h}{2} \cos \phi \quad (97.3)$$

فاصله A از محورهای دو استوانه، شکل (ح ۲۰-۳)، است. کمیت‌های R_{\pm} دو ثابت دلخواه هستند، به طوری که $\varphi_{\pm}^{ext}(r_{\pm}, \phi, z) = 0$. انتخاب $R_+ = R_- = R_{\pm}$ راحت است، به طوری که $\ln(R_+/R_-) = 0$ در محاسبات زیر خنثی می‌شود و پتانسیل برابر با صفر در $r = \infty$ باقی می‌ماند. بنابراین پتانسیل الکترواستاتیک تولید شده توسط هر دو

استوانه است

$$\begin{aligned}
 \varphi^{ext}(A) &= \varphi_+^{ext}(A) + \varphi_-^{ext}(A) = 2k_e \pi a^r \rho \ln \left(\frac{r_-}{r_+} \right) + 2k_e \pi a^r \rho \ln \left(\frac{R_-}{R_+} \right) \\
 &\approx 2k_e \pi a^r \rho \ln \left[\frac{r + (h/2) \cos \phi}{r - (h/2) \cos \phi} \right] = 2k_e \pi a^r \rho \ln \left[\frac{1 + (h/2r) \cos \phi}{1 - (h/2r) \cos \phi} \right] \\
 &= 2k_e \pi a^r \rho \left[\ln \left(1 + \frac{h}{2r} \cos \phi \right) - \ln \left(1 - \frac{h}{2r} \cos \phi \right) \right] \\
 &\approx 2k_e \pi a^r \rho \frac{h}{r} \cos \phi = 2k_e \pi a^r \frac{P \cos \phi}{r} = 2k_e \pi a^r \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r}
 \end{aligned} \tag{۹۸.۳}$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ بردار واحد مختصات استوانه‌ای r است. بنابراین، پتانسیل دوقطبی الکتریکی دو بعدی ما به صورت r^{-1} کاهش می‌یابد، در حالی که پتانسیل دوقطبی الکتریکی معمولی به صورت r^{-2} کاهش می‌یابد. در مختصات دکارتی داریم

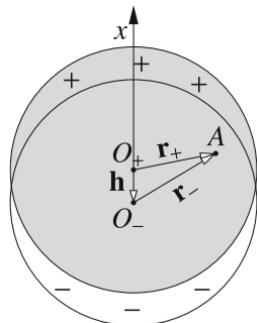
$$\varphi^{ext}(x, y, z) = 2k_e \pi a^r \frac{Px}{x^2 + y^2} \tag{۹۹.۳}$$

که در آن محورهای x و y همانهایی هستند که در شکل (۱۹-۳) نشان داده شده است. میدان الکتریکی خارجی با محاسبه $\mathbf{E}^{ext} = -\nabla \varphi^{ext}$ به دست می‌آید. مولفه‌های استوانه‌ای از جدول پیوست (۱-۱) آورده شده است.

$$\begin{aligned}
 E_r^{ext} &= -\frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial r} = 2k_e \pi a^r \frac{P \cos \phi}{r^2} \\
 E_\phi^{ext} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial \phi} = 2k_e \pi a^r \frac{P \sin \phi}{r^2} \\
 E_z^{ext} &= -\frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \tag{۱۰۰.۳}$$

میدان متناسب با r^{-2} کاهش می‌یابد، در حالی که میدان دوقطبی الکتریکی معمول به صورت r^{-1} کاهش می‌یابد. مولفه‌های دکارتی میدان بقرار زیر هستند:

$$\begin{aligned}
 E_x^{ext} &= -\frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial x} = 2k_e \pi a^r P \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
 E_y^{ext} &= -\frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial y} = 2k_e \pi a^r P \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
 E_z^{ext} &= -\frac{\partial \varphi^{ext}}{\partial z} = 0
 \end{aligned} \tag{۱۰۱.۳}$$



شکل (ح ۲۱-۳)

میدان الکتریکی تولید شده توسط هر استوانه در داخل آن، طبق قانون گاووس، $E_{\pm}^{int} = \pm 2\pi k_e \rho r_{\pm}$ است، که در آن r_{\pm} فاصله از محور مربوطه، شکل (ح ۲۱-۳)، است. جمع دو میدان داخلی یکنواخت است:

$$\mathbf{E}^{int}(A) = 2\pi k_e \rho (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -2\pi k_e \rho h \hat{\mathbf{x}} = -2\pi k_e \mathbf{P} \quad (10.2.3)$$

بنابراین پتانسیل الکترواستاتیک داخل استوانه، در مختصات دکارتی و استوانه‌ای است.

$$\varphi^{int} = 2\pi k_e x + C = 2\pi k_e r \cos \phi + C \quad (10.3.3)$$

که در آن C یک مقدار ثابت دلخواه است. از آنجایی که پتانسیل باید پیوسته باشد، باید در مختصات استوانه‌ای داشته باشیم

$$\varphi^{int}(a, \phi, z) = \varphi^{ext}(a, \phi, z) \quad (10.4.3)$$

که اگر $\circ = C$ را انتخاب کنیم تایید می‌شود.

فصل ۴

جريان الکتریکی

عناوین. چگالی جريان الکتریکی. رابطه پیوستگی. جريانهای الکتریکی ثابت. مدل درود^۱ برای هادی‌ها. قانون اهم. گرمایش ژول. معادلات پایه [چگالی جريان الکتریکی $J(r, t) = J$ عبور بار محلی از واحد سطح است که بصورت رابطه پیوستگی زیر ظاهر می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

كه بيانگر بقای بار الکتریکی کل است. بهصورت انتگرالی داريم:

$$\frac{dQ}{dt} \equiv \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 r = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \equiv I \quad (2.4)$$

كه در آن، مجموع بار موجود در حجم V محدود شده توسط سطوح بسته S است. معمولاً شار (يا جريان الکتریکی) برای يك سطح باز نيز تعریف می‌شود، بهصورت بار کل عبور از سطح در واحد زمان. کمیت

$$w = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (3.4)$$

بهعنوان کار در واحد زمان و حجم توسط میدان‌های \mathbf{EM} که بر روی توزیع جريان‌ها انجام شده، تفسیر می‌شود.
در مدلی از ماده که در آن چندین گونه از ذرات باردار وجود دارد (با شاخص‌ها s مشخص می‌شود) که هر کدام دارای بار q_s ، چگالی ذرات $n_s = n_s(\mathbf{r}, t)$ و با سرعت عبور $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t)$ هستند، چگالی جريان با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{J} = \sum_s q_s n_s \mathbf{v}_s \quad (4.4)$$

¹Drude Model

در فلزی که الکترون‌ها تنها حامل بار هستند، $\mathbf{J} = e n_e \mathbf{v}_e$ است. مدل درود برای الکترون‌های یک فلز معادله کلاسیک حرکت را فرض می‌کند:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \nu \mathbf{v}_e \quad (5.4)$$

که ν یک ضریب اصطکاک پدیدارشناسی^۲ است. در حالت ثابت ($\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = 0$) این منجر به قانون اهم برای یک هادی می‌شود.

$$\mathbf{J} = \frac{n_e e^2}{m_e \nu} \mathbf{E} \equiv \sigma \mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad (6.4)$$

که σ رسانایی (هدایت) و $\rho = 1/\sigma$ مقاومت^۳ ماده است. ماده‌ای که از رابطه (۶.۴) پیروی می‌کند، مورد دوم نشان می‌دهد که جریانی که بین دو نقطه (یا لایه) در مقادیر مختلف پتانسیل الکتریکی جریان دارد، افت پتانسیل V متناسب با I است که منجر به تعریف مقاومت R می‌شود:

$$V = RI \quad (7.4)$$

در مثال معمول (اما خاص) یک هادی مستقیم به طول l و سطح مقطع A ، به طوری که میدان الکتریکی در داخل هادی یکنواخت باشد، $R = l/(\sigma A) = \rho l/A$ به دست می‌آید. معادلات (قوانین کیرشف) که مدارهای الکتریکی DC را توصیف می‌کنند، یعنی شبکه‌هایی از هادی‌های متصل به هم که هر کدام معادله (۷.۴) را برآورده می‌کنند، در هر کتاب درسی یافت می‌شوند و در اینجا تکرار نمی‌شوند.

معادله (۷.۴) به قانون اهم معروف است، اما استفاده از این نام برای معادله زیربنایی و کلی‌تر (۶.۴) به دلیل قوانین کیرشف مناسب است. هادی اهمی به هر ماده‌ای گفته می‌شود که (۶.۴) را برآورده کند. برای چنین موادی، معادله (۳.۴) توان اتلاف شده در ماده به ازای واحد حجم را در نتیجه جمله اصطکاک نشان می‌دهد.

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{E^2}{\rho} \quad (8.4)$$

که باعث گرم شدن مواد می‌شود (اثر ژول). برای مثال فوق، این معادل این است که توان تلف شده در کل هادی $W = RI^2$ است.

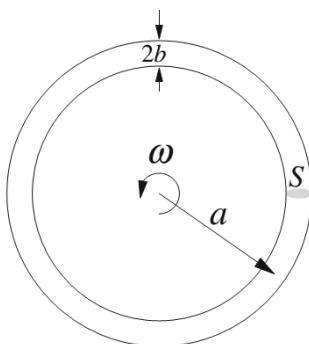
توجه داشته باشید که تمام معادلات بالا، هم در SI و هم در سیستم گاووسی، شکل یکسانی دارند. با این حال، واحدهای اندازه‌گیری متفاوت است. به عنوان مثال، جریان I بر حسب C/s یا آمپر ($1A = 1C/s$) در SI، و در وضعیت statAmpere یا statCoulomb/s در واحدهای گاووسی اندازه‌گیری می‌شود، در حالی که مقاومت بر حسب اهم (Ω) در SI و بر حسب s/cm در واحدهای گاووسی اندازه‌گیری می‌شود. برای دومی، σ ابعاد معکوس

^۲ Phenomenological Friction Coefficient

^۳ متأسفانه حروف کوچک یونانی که معمولاً به عنوان نمادهای مقاومت و رسانایی استفاده می‌شوند، به ترتیب برای چگالی بار حجمی و سطحی استفاده می‌شوند. با این حال، معنای نمادهای استفاده شده در فرمول‌های سراسر کتاب باید در متن روشن شود.

زمان را دارد، و بنابراین با s^{-1} اندازه‌گیری می‌شود، در حالی که μ را می‌توان بر حسب s اندازه‌گیری کرد.

۱.۴ آزمایش تولمن-استوارت



شکل (۱ - ۴)

آزمایش تولمن و استوارت [۱] به منظور نشان دادن اینکه رسانایی در فلزات به دلیل الکترون‌ها است، تصور شد. یک چنبره فلزی (حلقه) با شعاع اصلی a و شعاع کوچک b با سرعت زاویه‌ای بسیار بالا ω حول محور خود می‌چرخد. فرض می‌کنیم که $b \ll a$ ، به طوری که حرکت شعاعی حامل‌های بار را می‌توان نادیده گرفت. سطح مقطع حلقه $S = \pi b^2$ است.

در آزمایش تولمن و استوارت^۴ در لحظه $t = 0$ چرخش حلقه به طور ناگهانی متوقف می‌شود. یک جریان $I = I(t)$ که در حلقه جریان دارد، مشاهده می‌شود که نسبت به زمان برای $t > 0$ میرا می‌شود.

- الف با استفاده از مدل درود^۵ برای هدایت در فلزات، $I = I(t)$ و زمان میرائی مشخصه آن τ را برای یک حلقه مسی پیدا کنید (رسانایی الکتریکی $\sigma \approx 10^{17} \Omega^{-1} m^{-1}$ و چگالی الکترون $n_e = 8.5 \times 10^{28} m^{-3}$).

- ب باری که در حلقه از $t = 0$ تا $t = \infty$ جریان دارد را به صورت تابعی از σ محاسبه کنید.

۲.۴ زمان آرامش بار در یک کره هادی

یک کره رسانا به شعاع a و رسانایی σ دارای بار خالص Q است. در زمان $t = 0$ بار به طور یکنواخت توی حجم کره، با چگالی بار حجمی $(Q/4\pi a^3)/(\rho/2)$ توزیع می‌شود. از آنجایی که در شرایط ایستا بار در یک هادی جدا شده فقط می‌تواند روی سطح هادی قرار گیرد، برای $t > 0$ بار به تدریج به سطح کره حرکت می‌کند.

- الف تکامل زمانی توزیع بار روی کره و میدان الکتریکی در همه جای فضا را محاسبه کنید. یک مقدار عددی برای ثابت زمانی τ در مورد یک هادی خوب (مثالاً مس) ارائه دهید.

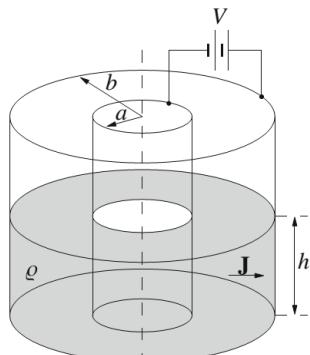
- ب تکامل زمانی انرژی الکترواستاتیک کره را در طول توزیع مجدد بار محاسبه کنید.

^۴Tolman-Stewart Experiment

^۵Drude

- ج نشان دهید که انرژی تلف شده به گرمای ژول برابر با از دست دادن انرژی الکترواستاتیک است.

۳.۴ مقاومت کابل هم محور

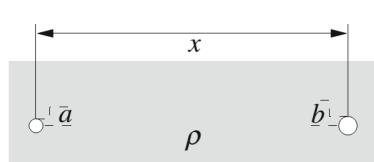


شکل (۲ - ۴)

دو صفحه استوانه‌ای هم محور با مقاومت بسیار کم ρ_0 دارای شعاع‌های به ترتیب $a < b$ با $a < b$ هستند. فضای بین صفحات استوانه‌ای مانند شکل (۲ - ۴) تا ارتفاع h با ماده‌ای به مقاومت $\rho \gg \rho_0$ پر می‌کنیم. یک منبع ولتاژ با اختلاف پتانسیل V را بین صفحات ثابت نگه می‌داریم.

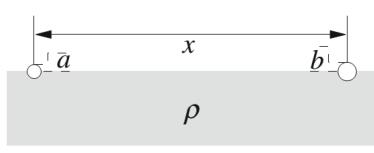
- الف مقاومت سیستم را محاسبه کنید.
- ب رابطه بین مقاومت R و ظرفیت خازن استوانه‌ای بشعاع a و b بحث کنید.

۴.۴ مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (I)



شکل (۳ - ۴)

الف دو کره بسیار رسانا به شعاع‌های a و b به ترتیب در آب یک دریاچه در فاصله x از یکدیگر با $a \ll x \ll b$ عمیقاً غوطه‌ور هستند. آب دریاچه دارای مقاومت ρ است. مقاومت تقریبی بین دو کره را با استفاده از نتایج پاسخ در مورد ب مسئله ۳-۴ محاسبه کنید.



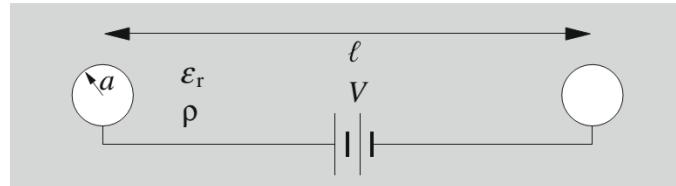
شکل (۴ - ۴)

ب حال فرض کنید که این دو کره کاملاً در زیر آب قرار نگرفته‌اند، بلکه فقط به گونه‌ای غرق شده‌اند که مراکز آنها دقیقاً همانطور که در شکل نشان داده شده، در تراز سطح دریاچه قرار گیرند. مقاومت بین آنها را محاسبه کنید.

۵.۴ مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (II)

دو کره یکسان و کاملاً رسانا به شعاع a در سیالی با مقاومت ρ و گذردهی الکتریکی نسبی ϵ_r غوطه‌ور می‌شوند. فاصله مرکز دو کره a است. یک اختلاف پتانسیل ثابت V بین کره‌ها

توسط یک منبع ولتاژ مناسب برقرار می‌شود. به صورت اولین تقریب، فرض کنید بار به طور یکنواخت، بدون توجه به اثرات القای الکترواستاتیک، در سطح هر کره توزیع شده است. محاسبه کنید:

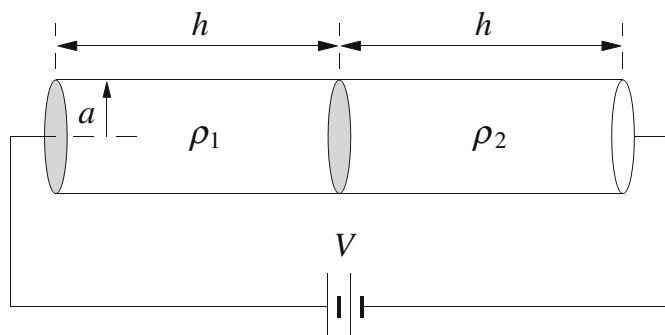


شكل (۴ - ۵)

- الف بار روی هر کره.
- ب مقاومت R و جریان I بین دو کره.
- ج قانون زمانی و زمان میرائی تخلیه کره‌ها را در هنگام قطع منبع ولتاژ پیدا کنید.
- د بحث کنید که چگونه القای الکترواستاتیک پاسخ‌های قبلی را به کمترین مرتبه نسبت به a/l تغییر می‌دهد.

۶.۴ اثرات مقاومت غیر یکنواخت

دو هادی استوانه‌ای که از نظر هندسی یکسان هستند، هم ارتفاع h و هم شعاع a دارند، اما مقاومت‌های متفاوت ρ_1 و ρ_2 دارند. دو استوانه مانند شکل (۶ - ۴) به صورت سری به هم متصل شده‌اند و یک استوانه رسانا با ارتفاع $2h$ و سطح مقطع $S = \pi a^2$ را تشکیل می‌دهند. همانطور که در شکل نشان داده شده است، دو پایه مخالف به یک منبع ولتاژ متصل شده بطوری که اختلاف پتانسیل V را از طریق سیستم حفظ می‌کند.

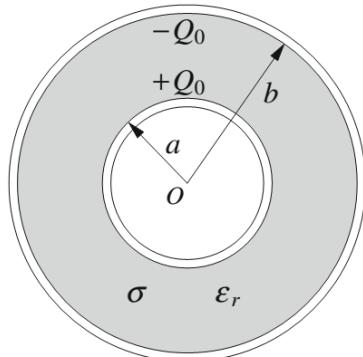


شكل (۶ - ۴)

- الف میدان‌های الکتریکی، جریان الکتریکی و چگالی جریان در دو استوانه را در شرایط ثابت محاسبه کنید.
- ب چگالی بار سطحی را در سطح جداکننده دو ماده و در سطوح پایه متصل به منبع ولتاژ محاسبه کنید.

۷.۴ میرائی بار در خازن کروی تلفاتی

یک خازن کروی دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است. پوسته کروی $a < r < b$ توسط یک محیط دیالکتریک پُر تلفات با گذردهی نسبی دیالکتریک ϵ_r و رسانایی σ پُر می‌شود. در زمان $t = 0$ ، بار خازن Q_0 است.



شکل (۷ - ۴)

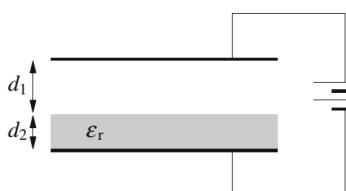
- الف ثابت زمانی برای تخلیه خازن را محاسبه کنید.

- ب توان تلف شده توسط گرمایش ژول در داخل خازن را محاسبه کرده و آن را با تغییرات زمانی انرژی الکترواستاتیک مقایسه کنید.

۸.۴ تخلیه سد دیالکتریک

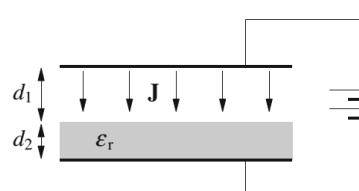
صفحه‌های یک خازن صفحه موازی سطح S و فاصله d هستند. فضای بین صفحه‌ها به ترتیب موازی با صفحه‌ها به ضخامت d_1 و d_2 با $d_1 + d_2 = d$ مانند شکل (۸ - ۴) تقسیم می‌شود. لایه با ضخامت d_1 با گازی با حساسیت دیالکتریک ناچیز پُر شده است ($\chi \approx 1$) در حالی که لایه با ضخامت d_2 با یک ماده دیالکتریک با گذردهی دیالکتریک $\epsilon_r > 1$ پُر شده است. اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات، توسط یک منبع ولتاژ ثابت نگه داشته می‌شود. اثرات مرزی را می‌توان نادیده گرفت.

- الف میدان الکتریکی داخل خازن را پیدا کنید.
یک تخلیه یونیزاسیون در لایه گازی در $t = 0$ شروع و گاز فوراً رساناً می‌شود. فرض می‌کنیم V که برای $t > 0$ گاز یونیزه شده را می‌توان به صورت یک هادی اهمی با مقاومت ثابت و یکنواخت r در نظر گرفت.



شکل (۸ - ۴)

- ب پس از مدت زمان کافی طولانی مشاهده می‌کنیم که جریان در گاز متوقف می‌شود و سیستم به حالت ماندگار می‌رسد (یعنی همه کمیت‌های فیزیکی ثابت هستند). میدان الکتریکی خازن را در این شرایط و چگالی بار آزاد سطح بین دو لایه را بیابید.

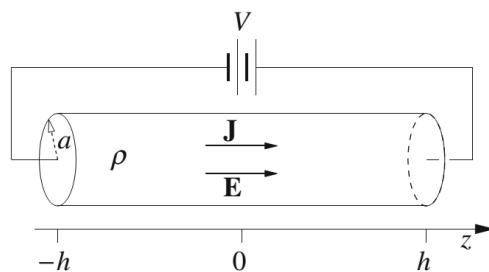


شکل (۹ - ۴)

- ج وابستگی زمانی میدان الکتریکی را در طول فاز گذرا ($t > 0$) و زمان آرامش مورد نیاز سیستم برای رسیدن به وضعیت ماندگار را بدست آورید.

۹.۴ توزیع بار در یک هادی استوانه‌ای بلند

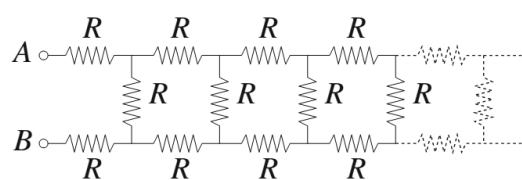
سیم استوانه‌ای همگن رسانایی به شعاع a و طول $2h$ ، با $h \gg a$ و مقاومت ρ را در نظر بگیرید. سیم به یک منبع ولتاژ متصل است که اختلاف پتانسیل V را در سرتاسر دو انتهایش ثابت نگه می‌دارد. می‌دانیم که میدان الکتریکی \mathbf{E} و در نتیجه، چگالی جریان $J = E/\rho$ باید در داخل سیم یکنواخت باشد، به مسئله ۶-۴ مراجعه کنید. این به معنای وجود توزیع بار است که میدان یکنواخت را ایجاد می‌کند. فقط توزیع بار سطحی در یک هادی در شرایط ثابت مجاز است. توزیع بار بر روی پایه‌های استوانه برای ایجاد یک میدان تقریباً یکنواخت در این مورد $2h \ll a$ کافی نیست. بنابراین، یک چگالی بار σ_L باید در سطح جانبی نیز وجود داشته باشد. بررسی کنید که چگالی بار سطحی $\sigma_L = \gamma z$ که در آن γ یک مقدار ثابت و z مختصات در امتداد محور استوانه است، منجر به تقریب خوبی برای میدان داخل هادی دور از دو انتهای شود [۲].



شکل (۱۰-۴)

۱۰.۴ مقاومت نردبانی بینهایت

یک نردبان مقاومت نامتناهی از تعداد نامتناهی مقاومت تشکیل شده است که همگی مقاومت R هستند که مطابق شکل (۱۱-۴) مرتب شده‌اند. مقاومت اندازه‌گیری شده بین پایانه‌های A و B را محاسبه کنید. راهنمائی: از ویژگی تغییرپذیری نردبان استفاده کنید.



شکل (۱۱-۴)

مراجع:

-
1. R.C. Tolman, T.D. Stewart, The electromotive force produced by the acceleration of metals. *Phys. Rev.* 8, 97–116 (1916)
 2. C.A. Coombes, H. Laue, Electric fields and charge distributions associated with steady currents. *Am. J. Phys.* 49, 450–451 (1981)

حل مسائل فصل ۴

ح: جریان الکتریکی

۱.۴ آزمایش تولمن-استوارت

- الف: معادله حرکت الکترون‌های آزاد (رسانا) در یک فلز مطابق مدل درود است.

$$m \frac{d\langle v \rangle}{dt} = F - m\eta\langle v \rangle \quad (1.4)$$

که در آن $\langle v \rangle$ سرعت میانگین الکtron، F نیروی خارجی روی الکترون‌ها، و $\eta\langle v \rangle$ نیروی اصطکاک پدیدارشناختی^۱ است. در حالت ماندگار ($d\langle v \rangle/dt = 0$) در حضور میدان الکتریکی خارجی E ، به طوری که $F = eE$ ، الکترون‌ها دارای سرعت متوسط ثابت زیر هستند.

$$\langle v \rangle = -\frac{e}{m\eta} E \quad (2.4)$$

چگالی جریان $J = en_e\langle v \rangle$ که چگالی حجمی الکترون‌های آزاد است. از اینجا شکل میکروسکوپی قانون اهم را بدست می‌آوریم

$$J = \frac{n_e e^2}{m\eta} E \equiv \sigma E \quad (3.4)$$

مقدار فرکанс میرایی η برای مس برابر است با:

$$\eta = \frac{n_e e^2}{m\sigma} = \frac{8/5 \times 10^{28} (1/6 \times 10^{-19})^2}{9/1 \times 10^{-31} \times 10^7} \approx 2/4 \times 10^{14} s^{-1} \quad (4.4)$$
$$(m = m_e = 9/1 \times 10^{-31} kg)$$

در $v = v_0 e^{-\eta t}$ سرعت مماسی الکترون $v = aw$ است. برای $w > 0$ به دلیل عدم وجود نیروهای خارجی، حل معادله (۱.۴) خواهد بود:

$$v = v_0 e^{-\eta t} \quad (5.4)$$

^۱Phenomenological friction force

بنابراین جریان کل با رابطه

$$I = I_{\circ} e^{-\eta t}, \quad I_{\circ} = -(2n_e v_{\circ}) S \quad (6.4)$$

و تاخیر زمانی برابر $s^{-15} \approx 4 \times 10^{-15}$ است.

• ب: کل بار پرتاپ شده در حلقه است :

$$Q = \int_{\circ}^{\infty} I(t) dt = \frac{I_{\circ}}{\eta} = -\frac{m}{e} \sigma S v_{\circ} \quad (7.4)$$

بنابراین، اندازه‌گیری v_{\circ}, S, η و Q مقدار e/m را می‌توان به دست آورد. در آزمایش اولیه، تولمن و استوارت توانستند Q را با استفاده از یک گالوانومتر بالستیک در یک مدار همراه با یک سیم پیچ دورانه اندازه‌گیری کنند.

۲.۴ زمان آرامش بار در یک کره هادی

• الف: به دلایل تقارن، میدان الکتریکی شعاعی است و استفاده از یک دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) با مبدأ واقع در مرکز کره راحت است. مختصات θ و ϕ برای این مسئله بستگی ندارد و نامربوط هستند. اجازه دهید بار الکتریکی موجود در کره $r < a$ را در زمان $t \geq 0$ با $q(r, t)$ نشان دهیم. اگر قانون گاوس را روی سطح کره اعمال کنیم، به دست می‌آوریم

$$E(r, t) = k_e \frac{q(r, t)}{r^3} \quad (8.4)$$

با توجه به معادله پیوستگی، شار چگالی جریان $E = \sigma J$ در سطح کروی برابر با مشتق زمانی $q(r, t)$ است:

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 J(r, t) = 4\pi r^2 \sigma E(r, t) = -\frac{\partial q(r, t)}{\partial t} \quad (9.4)$$

با جایگزینی رابطه (۹.۴) در رابطه (۸.۴) خواهیم داشت

$$\frac{\partial q(r, t)}{\partial t} = -4\pi k_e \sigma q(r, t) \quad (10.4)$$

و از حل آن خواهیم داشت

$$q(r, t) = q(r, \circ) e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{1}{4\pi k_e \sigma} \quad (11.4)$$

از آنجایی که در $t = 0$ چگالی بار $\rho(r, t)$ در سراسر حجم کره به شعاع a یکنواخت است، داریم

$$\rho(r, \circ) = \rho_{\circ} = Q \frac{3}{4\pi a^3}, \quad r < a, \quad \text{بنابراین} \quad q(r, \circ) = Q \frac{r^3}{a^3} \quad (12.4)$$

بنابراین، با توجه به معادله (۱۱.۴)، چگالی $\rho(r, t)$ روی حجم کره (مستقل از r) در هر زمان $t > 0$ یکنواخت می‌ماند.

$$\rho(r, t) = \rho(t) = \rho_{\circ} e^{-t/\tau} \quad (13.4)$$

چگالی بار سطحی $q_s(t)$ (قبل از حرف یونانی σ برای رسانایی استفاده کرد) می‌تواند از معادله پیوستگی محاسبه شود، زیرا همچنین می‌تواند از

$$\frac{\partial q_s(t)}{\partial t} = +J(a, t) = \sigma E(a, t) = k_e \sigma \frac{Q}{a^2} e^{-t/\tau} = \frac{Q}{4\pi a^2 \tau} e^{-t/\tau} \quad (14.4)$$

به طوری که به صورت مجانبی،

$$q_s(\infty) = \int_0^\infty \frac{\partial q_s(t)}{\partial t} dt = \frac{Q}{4\pi a^2 \tau} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \frac{Q}{4\pi a^2} \quad (15.4)$$

معادله تکامل زمانی میدان الکتریکی در داخل کره ($r < a$) برابر است با:

$$E(r, t) = k_e \frac{q(r, t)}{r^2} = k_e Q \frac{r}{a^2} e^{-t/\tau}, \quad r < a \quad (16.4)$$

در حالی که میدان الکتریکی مستقل از زمان خارج از کره است:

$$E(r, t) = E(r) = k_e \frac{Q}{r^2}, \quad r > a \quad (17.4)$$

ثابت زمانی $(4\pi k_e \sigma)^{-1} = \tau$ در یک هادی خوب بسیار کوتاه است. برای مس (بر حسب واحد SI) $\sigma \approx 6 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ در دمای اتاق داریم، بنابراین

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \approx \frac{8.854 \times 10^{-12}}{6 \times 10^7} s \sim 1.4 \times 10^{-19} s = 1.4 as \quad (18.4)$$

که در آن یک اتوثانیه برابر $1as = 1attosecond = 10^{-18}s$ در زبان دانمارکی به معنای هجده است). این مقدار بسیار کوتاه نباید تعجب آور باشد، زیرا نیازی نیست که الکترون‌ها مسافت‌هایی را حتی به ترتیب فاصله اتمی در زمان استراحت طی کنند. یک جابجایی جمیعی بسیار کوچک از الکترون‌ها برای رسیدن به شرایط تعادل مکانیکی کافی است (همچنین به مسئله ۱.۲ مراجعه کنید).

- ب: به راحتی می‌توانیم تغییرات انرژی الکترواستاتیک ΔU_{es} را در طول استراحت بار با توجه به ثابت بودن میدان الکتریکی $E(r, t)$ در خارج از کره رسانا ($r > a$) محاسبه کنیم. میدان الکتریکی داخل کره از نمایه اولیه $E(r, \circ) = (Q/4\pi\epsilon_0)(r/a^3)$ به $u_{es} = E(r, \infty) = 0$ تجزیه می‌شود. بنابراین، با استفاده از "چگالی انرژی" می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \Delta U_{es} &= -\frac{1}{4\pi k_e} \int_{sphere} E(r, \circ) d^3x = -\frac{1}{4\pi k_e} \left(\frac{k_e Q}{a^2} \right) \int_0^a r^2 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{k_e Q}{10} \end{aligned} \quad (19.4)$$

- ج: مشتق زمانی انرژی الکترواستاتیک را می‌توان به صورت زیر نوشت
- $$\begin{aligned} \frac{\partial U_{es}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi k_e} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a E(r, t) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi k_e} \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{4\pi k_e} \int_0^a \left(-\frac{2}{\tau} \right) E(r, t) 4\pi r^2 dr = -\frac{1}{4\pi k_e \tau} \int_0^a k_e Q \frac{r^2}{a^2} e^{-rt/\tau} 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{k_e Q}{5\tau} e^{-rt/\tau} = -\frac{4\pi k_e \sigma Q}{5a} e^{-rt/\tau} \end{aligned} \quad (20.4)$$

که در آن از (۱۶.۴) و (۱۷.۴) استفاده کردیم. تلفات توان ناشی از گرمایش ژول برابر است با

$$\begin{aligned} P_d &= \int_0^\infty \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} 4\pi r^2 dr = \int_0^a \sigma E(r, t) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi k_e \sigma Q}{5a} e^{-2t/\tau} \end{aligned} \quad (۲۱.۴)$$

زیرا برای $r < a$ و برای $r > a$ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ داریم. بنابراین $P_d = -\frac{\partial U_{es}}{\partial t}$ و تمام انرژی الکترواستاتیکی که کره در طی فرآیند آرامش از دست می‌دهد به گرمای ژول تبدیل می‌شود.

۳.۴ مقاومت کابل هم محور

• الف: از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم که محور z با محور مشترک صفحات استوانه‌ای منطبق است. مواد بین صفحات را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از مقاومت‌های استوانه‌ای پوسته‌ای بینهایت کوچک، هر یک از شعاع داخلی و خارجی r و $r + dr$ و ارتفاع h در نظر گرفت. مقاومت پوسته استوانه‌ای بین r و $r + dr$ برابر است با:

$$dR = \rho \frac{dr}{S(r)} = \rho \frac{dr}{2\pi r h} \quad (۲۲.۴)$$

زیرا dr "طول" مقاومت و $S(r) = 2\pi r$ "مساحت مقطع" آن است. مقاومت مواد بدین ترتیب است

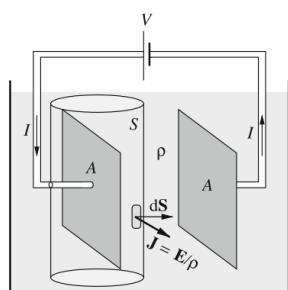
$$R = \frac{\rho}{2\pi h} \int_a^b \frac{dr}{r} = \rho \frac{\ln(b/a)}{2\pi h} \quad (۲۳.۴)$$

• ب: ظرفیت یک خازن استوانه‌ای با شعاع a و b و طول h برابر است با:

$$C_o = \frac{h}{2k_e \ln(b/a)} \quad (۲۴.۴)$$

با فرض اینکه فضای بین صفحات با خلاء پر شده باشد. بنابراین، در این حالت داریم

$$R = \frac{\rho}{4\pi k_e C_o} \quad (۲۵.۴)$$



شکل (۱-۴)

معادله (۲۵.۴) در واقع اعتبار کلی‌تری دارد و تقریب بسیار خوبی برای محاسبه مقاومت بین دو الکترود با رسانایی بالا و ظرفیت قابل محاسبه غوطه‌ور در محیطی با مقاومت شناخته شده است. به عنوان مثال، دو صفحه مربعی بسیار رسانا را در نظر بگیرید که در یک محیط اهمی غوطه‌ور شده‌اند و مانند شکل (ح-۴) به یک منبع ولتاژ توسط کابل‌های عایق متصل شده‌اند. جریانی که به عنوان مثال از صفحه سمت چپ می‌گذرد را می‌توان نوشت

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\rho} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (۲۶.۴)$$

که در آن شار از طریق سطحی که الکترود را در بر می‌گیرد، به جز ناحیه‌ای که جریان از طریق آن وارد آن می‌شود، مانند سطح بسته استوانه‌ای شکل (ح ۱-۴)، محاسبه می‌شود. در اکثر موارد سهم ناحیه حذف شده در شار E در یک مسئله الکترواستاتیک ناچیز است، در حالی که، طبق قانون گاووس، داریم

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k_e Q \quad (27.4)$$

که در آن Q بار روی الکترود است که میدان E را ایجاد می‌کند. با تقریب در نظر گرفتن آخرین انتگرال (۲۶.۴) برابر با انتگرال در کل سطح بسته، داریم.

$$I = \frac{4\pi k_e}{\rho} Q \quad (28.4)$$

از طرف دیگر، اگر دو الکترود را به صورت صفحات یک خازن با ظرفیت C در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$Q = C \cdot V \quad (29.4)$$

که در آن V اختلاف پتانسیل بین آنهاست. بنابراین داریم

$$I = \frac{4\pi k_e}{\rho} C \cdot V = \frac{V}{R} \quad (30.4)$$

که از آن (۲۵.۴) بدست می‌آید.

۴.۴ مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (I)

الف: با محاسبه ظرفیت C دو کره در خلاء، با هندسه یکسان مسئله، شروع می‌کنیم. اجازه دهید کره شعاع a حامل بار Q باشد و کره شعاع b بار $-Q$. با فرضیات $a \leq x \leq b$ پتانسیل الکتریکی φ_a و φ_b دو کره تقریباً با

$$\varphi_a \approx k_e Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right) \quad \text{و} \quad \varphi_b \approx k_e Q \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{x} \right) \quad (31.4)$$

که در آن پتانسیل φ را در بین نهایت صفر فرض و از اثرات القایی بین دو کره که در مسئله ۶.۲ بحث شده، صرفنظر کردہایم. بنابراین ظرفیت دو کره را می‌توان به صورت تقریبی زیرنوشت

$$C = \frac{Q}{\varphi_a - \varphi_b} \approx \frac{1}{k_e} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{x} \right)^{-1} \quad (32.4)$$

و بر طبق رابطه (۲۵.۴)، مقاومت بین آنها برابر است با:

$$R = \frac{R}{4\pi k_e C} \approx \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{x} \right) \quad (33.4)$$

که می‌توان بیشتر به آن تقریب زد

$$R \approx \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (34.4)$$

که مستقل از فاصله بین x بین مراکز کره‌ها است.

• ب: در این مورد مقاومت بین کره‌ها دو برابر مقدار محاسبه شده در بند (الف) است، زیرا در بند (الف) می‌توانیم صفحه افقی را معرفی کنیم که از مرکز کره‌ها می‌گذرد، که سیال را به دو نیمه معادل هر یک با مقاومت $2R$ تقسیم می‌کند. بهطوری که بهطور موازی آنها معادل مقاومت R هستند. در حالت حاضر نیمه بالایی با خلاء جایگزین می‌شود، بهطوری که فقط مقاومت $2R$ از نیمه پایین باقی می‌ماند. این مسئله در ارتباط با مدارهای الکتریکی که از زمین به عنوان مسیر برگشت استفاده می‌کنند، مورد توجه است. در این حالت مقاومت زمین است (البته فرض یکنواخت بودن ρ یک تقریب بسیار نامعقولی است). در کاربردهای عملی، مقاومت زمین در همسایگی الکترودها را می‌توان با مرتبط کردن زمین اطراف آنها کاهش داد.

۵.۴ مقاومت الکتریکی بین دو کره در زیر آب (II)

• الف: با توجه به (۴.۴) مسئله (۳۲.۴)، و به یاد داشته باشید که اکنون محیط دارای گذردهی دی الکتریک نسبی ϵ_r است، بار هر کره برابر است با:

$$\begin{aligned} Q &\approx \epsilon_r C_e V = \frac{\epsilon_r}{k_e} \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{l} \right)^{-1} V = \frac{\epsilon_r}{k_e} \frac{l}{l-a} \frac{a}{2} V \\ &\approx \frac{\epsilon_r a}{2k_e} \left(1 + \frac{a}{l} \right) V \approx \frac{\epsilon_r a}{2k_e} V \end{aligned} \quad (35.4)$$

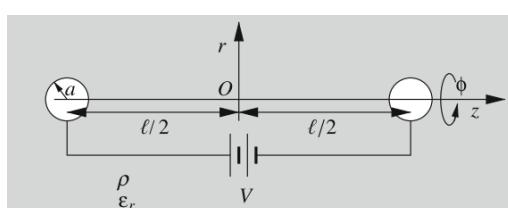
که در آن دو جمله آخر تقریب‌های مرتبه اول و صفر در a/l هستند.

• ب: طبق (۳۳.۴) و (۳۴.۴) داریم

$$R \approx \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{l} \right) \approx \frac{\rho}{2\pi a} \quad (36.4)$$

دوباره به تقریب مرتبه صفر در a/l است. در این صورت جریان I برابر است با:

$$I = \frac{V}{R} \frac{2\pi a}{\rho} V \quad (37.4)$$



شکل (ح-۴)

این نتیجه را می‌توان با معرفی یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با محور z از طریق مراکز دو کره و میدا O بهطوری که مراکز کره به ترتیب در $(0, 0, -l/2)$ و $(0, 0, +l/2)$ باشند بررسی کرد، و محاسبه شار چگالی جریان J از طریق صفحه $z=0$ خواهد بود

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty E_z(r) 2\pi r dr$$

که در آن

$$E_z(r) = \frac{2k_e Q}{\epsilon_r} \frac{l/2}{[(l/2)^2 + r^2]^{3/2}} \quad (38.4)$$

بنابراین

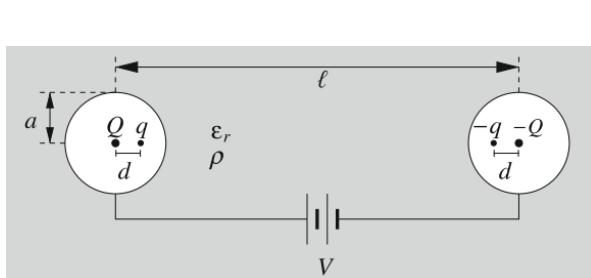
$$I = \frac{2k_e Q}{\epsilon_r \rho} \int_0^\infty \frac{l/2}{[(l/2)^2 + r^2]^{3/2}} dr = \frac{4\pi k_e}{\epsilon_r \rho} Q = \frac{4\pi a}{\rho} V \quad (39.4)$$

- ج: با داشتن یک سیستم معادل یک خازن به موازات یک مقاومت، انتظار کاهش نمایی بار Q را با ثابت زمانی $\tau = RC$ داریم. ثابت زمانی مستقل از شکل هندسه مسئله است زیرا ظرفیت $C = \epsilon_r C_0$ است، که در آن C_0 ظرفیتی است که محیط با خلاء جایگزین می شود، در حالی که، طبق رابطه (۲۵.۴)، مقاومت برابر است، به طوری که $R = \rho / (4\pi k_e C_0)$

$$\tau = RC = \frac{\epsilon_r \rho}{4\pi k_e} \quad (40.4)$$

این رابطه برای هر "خازن نشتی" برقرار است، اگر تخلیه فقط از طریق نشت رخ دهد. در حالت اخیر از معادله پیوستگی به دست می آوریم

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\frac{4\pi k_e}{\epsilon_r \rho} Q, \quad Q(t) = Q(0)e^{-\tau/t}, \quad \tau = \frac{\epsilon_r \rho}{4\pi k_e} \quad (41.4)$$



شکل (۳-۴)

۵: در مرتبه اول a/l اثرات القای الکترواستاتیک را می توان با در نظر گرفتن میدان الکتریکی خارج از دو کره به دلیل دو بار $\pm Q$ واقع در مرکز کره ها و دو بار $\pm q = \pm(a/l)Q$ توصیف کرد. در فواصل $d = a^2/l$ از مراکز، روی خطی که دو مرکز را به هم متصل می کند، مانند شکل، هر یک به سمت کره دیگر قرار دارد.

بنابراین، با مرتبه اول، پتانسیل هر کره $\approx \pm k_e Q / (\epsilon_r a)$ است، زیرا سهم بار $\pm Q$ در کره دیگر توسط بار تصویر $\pm q$ موجود در کره حذف می شود. ما $Q \approx \epsilon_r a V / (2k_e)$ داریم، در حالی که قدر مطلق بار کل هر کره $Q + q = Q(1 + a/l)$ است. ظرفیت سیستم به این ترتیب است:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_r a}{2k_e} \left(1 + \frac{a}{l} \right) \quad (42.4)$$

همین نتیجه از (۳۲.۴) مسئله ۴.۴ به دست آمده است

$$C = \epsilon_r C_0 = \frac{\epsilon_r}{k_e} \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{l} \right)^{-1} = \frac{\epsilon_r a}{2k_e} \frac{l}{l-a} \approx \frac{\epsilon_r a}{2k_e} \left(1 + \frac{a}{l} \right) \quad (43.4)$$

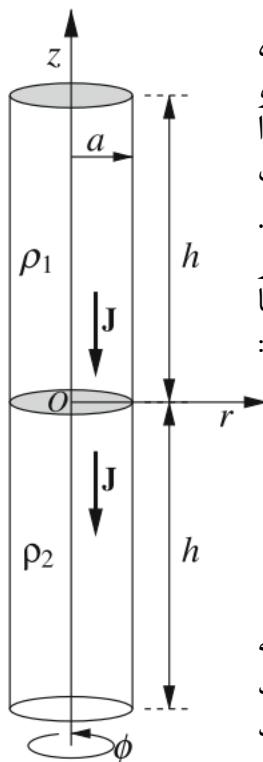
در جایی که بارهای تصویر نادیده گرفته شده اند، اما اثر بار روی هر کره بر پتانسیل کره دیگر در نظر گرفته شده است.

طبق رابطه (۳۳.۴) مقاومت اکنون می شود

$$R = \frac{\rho}{4\pi k_e C_0} = \frac{\rho}{4\pi a} \frac{l-a}{a} \quad (44.4)$$

به طوری که ثابت زمانی $\tau = RC = \epsilon_r \rho / (4\pi k_e)$ تغییر نمی کند.

۶.۴ اثر مقاومت غیر یکنواخت



الف: از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم که محور z در امتداد محور مشترک دو استوانه و مبدأ O بر روی سطح دو استوانه را مانند شکل (ح-۴) جدا می‌کند. چگالی بار حجمی را با q_v نشان می‌دهیم، زیرا حرف یونانی ρ قبلاً برای نشان دادن مقاومت‌ها استفاده شده است. در حالت ثابت باید در همه جا $\frac{\partial q_v}{\partial t} = 0$ داشته باشیم، در غیر این صورت چگالی بار حجمی به طور نامحدود افزایش یا کاهش می‌یابد. بنابراین با توجه به معادله پیوستگی نیز داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial q_v}{\partial t} = 0 \quad (45.4)$$

از سوی دیگر، از $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_e q_v$ بدست می‌آوریم

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi k_e}{\rho} q_v \quad (46.4)$$

نشان می‌دهد که همچنین چگالی بار حجمی q_v باید در همه جای یک هادی در شرایط ساکن صفر باشد. این امر وجود چگالی بار سطحی را بر روی سطوحی که یک هادی را محدود می‌کنند منتفی نمی‌کند.

شکل (ح-۴)

اگر $a \gg h$ را فرض کنیم، از $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ نتیجه می‌شود که \mathbf{J} در داخل استوانه‌ها یکنواخت است و در جهت z به سمت پایین اشاره می‌کند. از آنجایی که \mathbf{E} و \mathbf{J} در داخل هر استوانه با یکدیگر متناسب هستند، بنابراین \mathbf{E} نیز در داخل هر استوانه یکنواخت است. چگالی جریان \mathbf{J} باید از طریق سطح جداکننده دو استوانه پیوسته باشد، در غیر این صورت بار به طور نامحدود روی سطح جمع می‌شود. بنابراین، \mathbf{J} در کل هادی یکنواخت است و جریان $I = J\pi a^2$ است.

مقاومت ای $R_{1,2}$ از دو استوانه به ترتیب عبارتند از

$$R_{1,2} = \rho_{1,2} \frac{h}{\pi a^2} \quad (47.4)$$

منجر به مقاومت کلی R سیستم می‌شود

$$R = R_1 + R_2 = (\rho_1 + \rho_2) \frac{h}{\pi a^2} \quad (48.4)$$

جریان و چگالی جریانی که در سیستم عبور می‌کنند

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\pi a^2 V}{h(\rho_1 + \rho_2)}, \quad J = \frac{V}{h(\rho_1 + \rho_2)} \quad (49.4)$$

از آنجایی که چگالی جریان یکسانی در دو رسانا با مقاومت‌های مختلف داریم و $E = \rho J$

میدان‌های الکتریکی در دو رسانا باید متفاوت باشند، یعنی

$$E_1 = \rho_1 J = \frac{\rho_1 V}{h(\rho_1 + \rho_2)}, \quad E_2 = \rho_2 J = \frac{\rho_2 V}{h(\rho_1 + \rho_2)} \quad (50.4)$$

- ب: چگالی بار سطحی روی سطح جداکننده دو استوانه را می‌توان از قانون گاوس محاسبه کرد.

$$\sigma = \frac{1}{4\pi k_e} (E_2 - E_1) = \frac{1}{4\pi k_e} \frac{(\rho_2 - \rho_1)V}{h(\rho_1 + \rho_2)} \quad (51.4)$$

با فرض اینکه میدان الکتریکی بالای پایه بالایی و زیر پایه پایینی هادی صفر باشد، چگالی بار سطحی در دو پایه نیز از قانون گاوس به دست می‌آید.

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{4\pi k_e} = \frac{1}{4\pi k_e} \frac{\rho_1 V}{h(\rho_1 + \rho_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{E_2}{4\pi k_e} = -\frac{1}{4\pi k_e} \frac{\rho_2 V}{h(\rho_1 + \rho_2)} \quad (52.4)$$

۷.۴ میرائی بار در خازن کروی تلفاتی

- الف: از یک دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) با مبدأ O در مرکز خازن استفاده می‌کنیم. برای $r < a$ و $r > b$ داریم $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. به دلایل تقارن، میدان الکتریکی \mathbf{E} شعاعی است و فقط در پوسته کروی $a < r < b$ به r و t بستگی دارد. شار $\epsilon_r \mathbf{E}$ از طریق یک سطح کروی با مرکز O و شعاع r مستقل از r و برابر است با:

$$\epsilon_r \oint \mathbf{E}(r, t) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k_e Q(t) \quad (53.4)$$

که در آن $Q(t)$ بار آزاد موجود در سطح است، یعنی بار سطح آزاد کره رسانا با شعاع a . بنابراین داریم

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{k_e}{\epsilon_r} \frac{Q(t)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (54.4)$$

علاوه بر بار آزاد، سیستم شامل بارهای پلاریزاسیون سطحی در $r = a$ و $r = b$ به ترتیب مقادیر $\pm Q(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r$ است. هیچ بار پولاریزاسیون حجمی وجود ندارد، زیرا

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi k_e} \nabla \cdot \mathbf{E}(r, t) = 0 \quad (55.4)$$

میدان الکتریکی $\mathbf{E}(r, t)$ در حضور رسانایی الکتریکی σ منشأ چگالی جریان J را می‌دهد.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \frac{k_e}{\epsilon_r} \frac{Q(t)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (56.4)$$

به طوری که یک نرخ شار بار کل (جریان الکتریکی) از سطح داشته باشیم

$$I = \frac{dQ}{dt} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi \sigma k_e}{\epsilon_r} Q(t) \quad (57.4)$$

بار عبوری از سطح از بار آزاد در کره رسانای داخلی کم می‌شود، به طوری که

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{4\pi \sigma k_e}{\epsilon_r} Q(t) \quad (58.4)$$

که منجر به رابطه زیر می شود:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{با} \quad \tau = \frac{\epsilon_r}{4\pi\sigma k_e} \quad (۵۹.۴)$$

و ثابت میرایی مستقل از اندازه خازن است، که موافق رابطه (۴۰.۴) می باشد.

• ب: توان تلف شده بر حجم خازن است

$$\begin{aligned} P_d &= \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \sigma \int \mathbf{E}^r d^3x = \sigma \int_a^b \left[\frac{k_e Q(t)}{\epsilon_r r^2} \right]^r 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\sigma k_e}{\epsilon_r} Q_0 e^{-t/\tau} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi\sigma k_e (b-a)}{\epsilon_r ab} Q_0 e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (۶۰.۴)$$

انرژی الکترواستاتیک خازن است

$$U_{es} = \frac{1}{2} \frac{Q^r(t)}{C} = \frac{k_e(b-a)}{2\epsilon_r ab} Q_0 e^{-t/\tau} \quad (۶۱.۴)$$

بنابراین

$$\frac{dU_{es}}{dt} = -\frac{k_e(b-a)}{\tau\epsilon_r ab} Q_0 e^{-t/\tau} = -\frac{4\pi\sigma k_e(b-a)}{\epsilon_r ab} Q_0 e^{-t/\tau} = -P_d \quad (۶۲.۴)$$

بنابراین، انرژی الکترواستاتیک خازن به گرمایش ژول تلف می شود.

۸.۴ تخلیه سد دی الکتریک

• الف: میدان های الکتریکی در گاز و در لایه های دی الکتریک را به ترتیب با E_1 و E_2 نشان می دهیم. از آنجایی که افت ولتاژ بین صفحات V است، باید داشته باشیم

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = V \quad (۶۳.۴)$$

در غیاب بارهای سطحی آزاد، مولفه عمودی (نرمال) \mathbf{E}_r از طریق سطح جداکننده دو لایه پیوسته است، به طوری که

$$E_1 = \epsilon_r E_2 \quad (۶۴.۴)$$

با ترکیب (۶۳.۴) و (۶۴.۴) به دست می آوریم

$$E_1 = \frac{\epsilon_r V}{\epsilon_r d_1 + d_2}, \quad E_2 = \frac{V}{\epsilon_r d_1 + d_2} \quad (۶۵.۴)$$

• ب: در شرایط حالت ماندگار، چگالی جریان در گاز، J ، باید صفر باشد، در غیر این صورت بار آزاد روی سطح جداکننده گاز و ماده دی الکتریک به طور پیوسته افزایش می یابد. چون چگالی جریان $J = E_1/\rho$ است، باید $E_1 = 0$ داشته باشیم. از طرف دیگر (۶۳.۴) همچنان پابرجاست، به طوری که $E_2 = V/d_2$. چگالی بار آزاد بر روی سطح جداکننده لایه ها در شرایط برابر است با:

$$\sigma_s = \frac{1}{4\pi k_e} (\epsilon_r E_2 - E_1) = \frac{\epsilon_r}{4\pi k_e} E_2 = \frac{\epsilon_r}{4\pi k_e} \frac{V}{d_2} \quad (۶۶.۴)$$

• ج: معادله پیوستگی برای σ و J خواهد بود

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = J = \frac{E_1}{\rho} \quad (۶۷.۴)$$

از رابطه (۶۶.۴)، اکنون با $E_1 \neq 0$ (شرایط تخلیه)، داریم:

$$E_1 = \epsilon_r E_2 - 4\pi k_e \sigma \quad (68.4)$$

و ترکیب با (۶۳.۴) منجر به

$$E_1 = \epsilon_r \left(\frac{V}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} E_1 \right) - 4\pi k_e \sigma, \quad \text{يعنى} \quad E_1 = \frac{\epsilon_r V}{\epsilon_r d_1 + d_2} - \frac{4\pi k_e d_2}{\epsilon_r d_1 + d_2} \sigma \quad (69.4)$$

معادله (۶۹.۴) را در (۶۷.۴) جایگزین کرده، می‌دهد

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{4\pi k_e d_2}{\rho(\epsilon_r d_1 + d_2)} \sigma + \frac{\epsilon_r V}{\rho(\epsilon_r d_1 + d_2)} \quad (70.4)$$

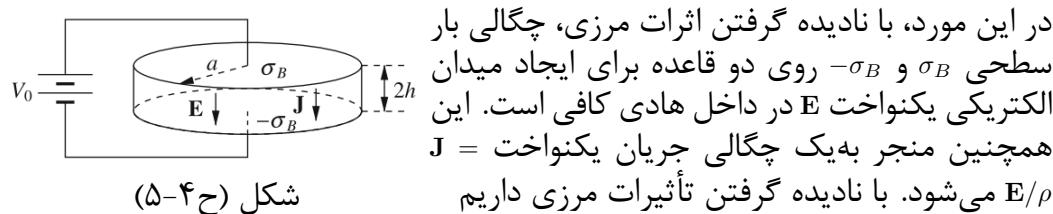
واز حل آن خواهیم داشت:

$$\sigma = \frac{\epsilon_r V}{4\pi k_e d_2} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \equiv \sigma_s \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{که در آن} \quad \tau = \frac{\rho(\epsilon_r d_1 + d_2)}{4\pi k_e d_2} \quad (71.4)$$

این مسئله مفهوم "تخلیه سد دیالکتریک" را نشان می‌دهد. این طرح، که در آن لایه دیالکتریک به عنوان یک محدود کننده جریان عمل می‌کند، در دستگاه‌های تخلیه الکتریکی مختلف استفاده می‌شود، به عنوان مثال در نمایشگرهای تلویزیون پلاسما، که در آن تخلیه به صورت یک منبع میکرو ماوراء بنفسج برای فعال کردن فسفر در هر پیکسل از صفحه نمایش عمل می‌کند.

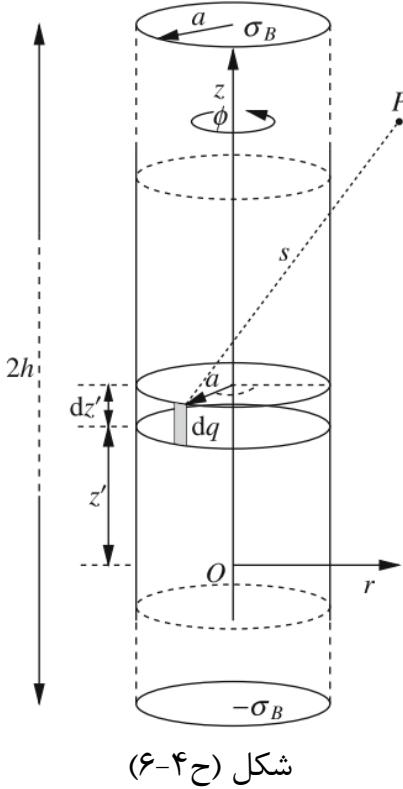
۹.۴ توزیع بار در یک هادی استوانه‌ای بلند

همانطور که در بند الف از مسئله ۶.۴ دیدیم، چگالی بار حجمی q_v در همه جای استوانه هادی صفر است، در حالی که E و J یکنواخت هستند. وجود یک میدان الکتریکی مستلزم وجود توزیع بار است که آن را تولید می‌کند، و از آنجایی که نمی‌توان در شرایط ثابت چگالی بار حجمی در داخل هادی وجود داشت، بارهای تولید کننده میدان‌ها باید بر روی سطوح رسانا توزیع شوند. هادی استوانه‌ای نازکی را که در شکل (۵-۴) نشان داده شده است، به شعاع a و طول $2h$ ، با $a \ll h$ ، متصل به منبع ولتاژ V_0 در نظر بگیرید.



$$E = \frac{V_0}{2h}, \quad \sigma_B = \frac{E}{4\pi k_e} = \frac{V_0}{4\pi k_e h} \quad (72.4)$$

^۱ Dielectric-Barrier Discharge (DBD)



اما در اینجا با حالت مخالف روبرو هستیم، زمانی که اختلاف پتانسیل V روی قاعدهای یک استوانه بسیار کشیده با $h \gg a$ اعمال می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، پتانسیل را در قاعده بالایی $+V/2$ و در قاعده پایینی $-V/2$ فرض می‌کنیم. با این هندسه، چگالی بار سطحی $\pm\sigma_B$ روی دو قاعده به تنها ی نمی‌تواند یک میدان الکتریکی یکنواخت را در داخل کل رسانا ایجاد کند. ما به چگالی بار دیگری σ_L نیاز داریم که لزوماً یکنواخت نیست و روی سطح جانبی استوانه توزیع شده باشد. برای حل مسئله، یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) را معرفی می‌کنیم که محور z با محور استوانه منطبق است، مبدأ O به گونه‌ای قرار دارد که قاعدهای بالا و پایین به ترتیب در $z = \pm h$ باشد، (این به دلایل عملی در شکل (ح۴-۴) مشخص نیست). به دلیل تقارن، σ_L نمی‌تواند به ϕ بستگی داشته باشد. و نمی‌تواند در امتداد سطح جانبی ثابت باشد، در غیر این صورت، با چشم‌پوشی از اثرات مرزی، هیچ میدانی در داخل هادی ایجاد نمی‌کند. بنابراین، σ_L باید تابعی از z و فقط z باشد. به عنوان یک حدس آموزشی، فرض می‌کنیم که σ_L متناسب با z است، بنابراین داریم

$$\sigma_L(z) = \gamma z \quad (73.4)$$

با γ ثابت. این انتخاب منجر به $\sigma_L(z) = \gamma z$ شده و با علائم مخالف به سمت قاعدهای بالا و پایین، $|\sigma_L|$ افزایش می‌یابد. اجازه دهید پتانسیل الکتریکی را در یک نقطه $P \equiv (r, \phi, z)$ با $r \ll h$ نه لزوماً در داخل هادی، محاسبه کنیم. انتخاب $\Phi(r, \phi, z)$ به دلیل تقارن چرخشی حول محور z ، کلیت رویکرد را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد. سهم عنصر بار $dq = \gamma z' ad\phi dz$ واقع در سطح جانبی هادی در (a, ϕ, z) به پتانسیل $\Phi(r, \phi, z)$ است.

$$d\Phi = k_e \frac{dq}{s}$$

که در آن s فاصله بین نقاط (a, ϕ, z) و (r, ϕ, z') است. فاصله s را می‌توان با رابطه کسینوس‌ها محاسبه کرد،

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(z - z')^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi} \\ &= \sqrt{(z' - z)^2 + a^2 \left(1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a} \cos \phi\right)} \\ &= \sqrt{(z' - z)^2 + a^2 f(r, \phi)} \end{aligned} \quad (74.4)$$

که در آن تابع زیر را تعریف کردیم

$$f(r, z) = \left(1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a} \cos \phi\right) \quad (75.4)$$

بنابراین داریم

$$d\Phi = k_e a \gamma z' \frac{d\phi dz'}{\sqrt{(z' - z)^2 + a^2 f(r, \phi)}} \quad (76.4)$$

و پتانسیل الکتریکی در P خواهد بود

$$\Phi(P) = k_e a \gamma z' \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h}^h \frac{dz'}{\sqrt{(z' - z)^2 + a^2 f(r, \phi)}} \quad (77.4)$$

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $\zeta = z' - z$ استفاده می‌کنیم

$$\Phi(P) = k_e a \gamma \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h-z}^{h-z} \frac{(z + \zeta) d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + a^2 f(r, \phi)}} \quad (78.4)$$

اکنون انتگرال نامعین زیر را جهت محاسبه معرفی می‌کنیم

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + b}} = \ln \left(2\zeta + 2\sqrt{\zeta^2 + b} \right), \quad \text{و} \quad \int \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + b}} = \sqrt{\zeta^2 + b} \quad (79.4)$$

می‌توانیم $\Phi(P)$ را به مجموع دو جمله $\Phi_1(P) + \Phi_2(P)$ تقسیم کنیم، که در آن

$$\begin{aligned} \Phi_1(P) &= k_e a \gamma z \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h-z}^{h-z} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + a^2 f(r, \phi)}} \\ &= k_e a \gamma z \int_0^{2\pi} d\phi \ln \left[\frac{h - z + \sqrt{(h - z)^2 + a^2 f(r, \phi)}}{-h - z + \sqrt{(h + z)^2 + a^2 f(r, \phi)}} \right] \end{aligned} \quad (80.4)$$

و

$$\begin{aligned} \Phi_2(P) &= k_e a \gamma \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-h-z}^{h-z} \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + a^2 f(r, \phi)}} \\ &= k_e a \gamma \int_0^{2\pi} d\phi \left[\sqrt{(h - z)^2 + a^2 f(r, \phi)} - \sqrt{(h + z)^2 + a^2 f(r, \phi)} \right] \end{aligned} \quad (81.4)$$

جذر ظاهر شده در انتگرال‌ها را می‌توان به صورت تقریبی نوشت:

$$\sqrt{(h \pm z)^2 + a^2 f(r, \phi)} \approx h \pm z + \frac{a^2}{2(h \pm z)} f(r, z) \quad (82.4)$$

که تا مرتبه دوم در a/h و r/h تقریب زده می‌شود. تقریب مرتبه دوم فقط در مخرج آرگومان لگاریتم موجود در (80.4) مورد نیاز است، جایی که مرتبه اول با $-h - z$ حذف می‌شود. بنابراین، $\Phi_1(P)$ را می‌توان به صورت زیر تقریبی تخمین زد:

$$\begin{aligned} \Phi_1(P) &\approx k_e a \gamma z \int_0^{2\pi} d\phi \ln \left\{ \frac{2(h - z)}{a^2 f(r, \phi) / [2(h + z)]} \right\} \\ &= 2\pi k_e a \gamma z \int_0^{2\pi} d\phi \ln \left[\frac{4(h^2 - z^2)}{a^2 f(r, \phi)} \right] \approx 2\pi k_e a c z \int_0^{2\pi} d\phi \ln \left[\frac{4h^2}{a^2 f(r, \phi)} \right] \end{aligned} \quad (83.4)$$

در حالی که تقریب برای $\Phi_2(P)$ خواهد بود:

$$\Phi_2(P) \approx -k_e a \gamma \int_0^{2\pi} 2z d\phi = -4\pi k_e a c z. \quad (84.4)$$

شرکت جمع این دو برابر است با

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= \Phi_1(P) + \Phi_2(P) \approx 2\pi k_e a \gamma z \left\{ \int_0^{\pi} d\phi \ln \left[\frac{4h^3}{a^2 f(r, \phi)} \right] - 2 \right\} \\ &= 2\pi k_e a \gamma z \left\{ 2\pi \ln \left(\frac{h^3}{a^2} \right) + \int_0^{\pi} d\phi \ln \left[\frac{4}{f(r, \phi)} \right] - 2 \right\} \\ &= 2\pi k_e a \gamma z \left\{ 4\pi \ln \left(\frac{h}{a} \right) + \int_0^{\pi} d\phi \ln \left[\frac{4}{f(r, \phi)} \right] - 2 \right\}\end{aligned}\quad (85.4)$$

اگر h به اندازه کافی بزرگ باشد، اولین عبارت در مهاربندها (آکولادها) غالب است و داریم

$$\Phi(P) \approx 8\pi^2 k_e a \gamma \ln \left(\frac{h}{a} \right) z \quad (86.4)$$

بنابراین، همانطور که انتظار می‌رود، در تقریب ما مستقل از r است. از آنجایی که ما $\Phi(r, h) = V_c / 2$ را فرض کرده‌ایم، باید داشته باشیم

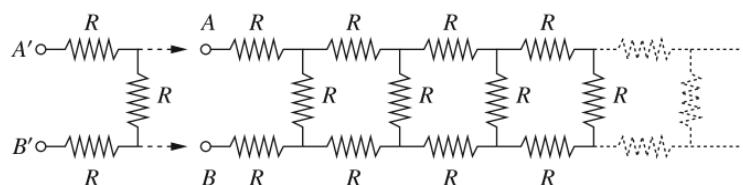
$$\frac{V_c}{2} = 8\pi^2 k_e a \gamma \ln \left(\frac{h}{a} \right) h \quad (87.4)$$

که منجر به روابط زیر می‌شود:

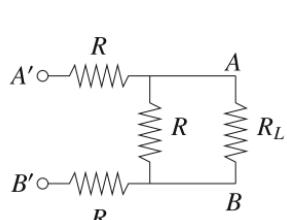
$$\gamma = \frac{V_c}{16\pi^2 k_e a h \ln \left(\frac{h}{a} \right)} \quad \text{و} \quad \sigma_L(z) = \frac{V_c}{16\pi^2 k_e a h \ln \left(\frac{h}{a} \right)} z \quad (88.4)$$

۱۰.۴ مقاومت نردبانی بینهایت

اجازه دهید مقاومت اندازه‌گیری شده بین پایانه‌های A و B را با R_L نشان دهیم. اگر یک واحد دیگر از سه مقاومت به سمت چپ نردبان اضافه شود، مانند شکل (۷-۴)، مقاومت "جدید" اندازه‌گیری بین پایانه‌های A و B باید برابر با مقاومت "قدیمی" R_L باشد.



شکل (۷-۴)



شکل (۸-۴)

نردبان مقاومت "قدیمی" در سمت راست پایانه‌های A و B را می‌توان با مقاومت معادل R_L جایگزین کرد که منجر به پیکربندی شکل (۸-۴) می‌شود. می‌بینیم که مقاومت بین پایانه‌های A و B جواب است

$$\begin{aligned}R_L &= 2R + \frac{RR_L}{R + R_L} \\ RR_L + R_L^2 &= 2R^2 + 2RR_L + RR_L \\ R_L^2 - 2RR_L - 2R^2 &= 0\end{aligned}\quad (89.4)$$

و با در نظر نگرفتن جواب منفی، خواهیم داشت:

$$R_L = R(1 + \sqrt{3}) \quad (90.4)$$

فصل ۵

مغناطیس ساکن

عنایین. میدان مغناطیس ساکن در خلاء. نیروی لورنتس. حرکت بار الکتریکی نقطه‌ای در میدان مغناطیسی. نیروی مغناطیسی وارد بر جریان. میدان مغناطیسی جریان‌های ثابت. انرژی مکانیکی یک مدار در میدان مغناطیسی. قانون بیو و ساوار. قانون مداری آمپر. مغناطیس شوندگی ماده. چگالی جریان مغناطیسی سطحی و حجمی (جریان‌های مقید). پذیرندگی مغناطیسی. بردارهای کمکی H . شرایط مرزی میدان مغناطیسی. روش بار مغناطیسی معادل.

واحدها. بهمنظور نوشتن روابط سازگار با هر دو واحد SI و گاووسی، دو ثابت جدید "وابسته به سیستم"، b_m و k_m را معرفی می‌کنیم که به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$k_m = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} & SI \\ \frac{1}{c} & \text{گاووسی} \end{cases} \quad b_m = \begin{cases} 1 & SI \\ \frac{1}{c} & \text{گاووسی} \end{cases} \quad (1.5)$$

که در آن، دوباره، $A = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A$ نفوذ پذیری مغناطیسی خلاء و $c = 29979245800 cm/s$ سرعت نور در خلاء است.

معادلات پایه: دو معادله ماکسول برای میدان مغناطیسی B مربوط به‌این فصل عبارتند از:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times B = 4\pi k_m J \quad (3.5)$$

معادله (۲.۵) همیشه معتبر است (در صورت عدم وجود تک قطبی مغناطیسی^۱)، در حالی که (۳.۵) در غیاب میدان‌های الکتریکی وابسته به زمان معتبر است. بنابراین می‌توان

^۱Magnetic Monopoles

یک بردار پتانسیل \mathbf{A} را معرفی کرد، به‌طوری که

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

با اعمال شرط سنجش $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، پتانسیل برداری در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\nabla^{\star} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -4\pi k_m \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (5.5)$$

که این بردار شبیه معادله پوآسون (۱.۲) است، ازین‌رو

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k_m \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (6.5)$$

یک مورد خاص و معمولی جریان‌های "خطی" بسته است، به عنوان مثال. جریان در مداری با سیم‌هایی با ضخامت ناچیز است. در چنین حالتی می‌توان $\mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'$ را با $I(\mathbf{r}') d\mathbf{l}$ جایگزین کرد و میدان را از طریق رابطه بیو-ساوار محاسبه کرد.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \oint \frac{I(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (7.5)$$

که در آن انتگرال مسیر بسته جریان را دنبال می‌کند.
نیروی اعمال شده توسط یک میدان مغناطیسی بر توزیع جریان برابر است با:

$$\mathbf{f} = b_m \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (8.5)$$

بار نقطه‌ای q که در \mathbf{r} قرار دارد و با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند، معادل چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{v}$ است، به‌طوری که نیروی مغناطیسی روی بار نقطه‌ای خواهد بود:

$$\mathbf{f} = b_m q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.5)$$

انرژی مربوط به توزیع میدان مغناطیسی با رابطه زیر بیان می‌شود

$$U_m = \int_V \frac{b_m B^{\star}}{8\pi k_m \mu_r} d^3 r \quad (10.5)$$

در غیاب تک قطبی‌های مغناطیسی، اولین جمله غیر صفر بسط چند قطبی، دوقطبی مغناطیسی m است.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (11.5)$$

در حالت ساده یک سیم پیچ صفحه کوچک با مساحت A و جریان الکتریکی I این به‌انتگرال خطی در مسیر سیم پیچ C کاهش می‌یابد.

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{l} = AI\hat{\mathbf{n}} \quad (12.5)$$

^۴ Vector Potential

که در آن \hat{n} عمود بر سطح سیم پیچ است. یک عبارت دوقطبی مغناطیسی واقع در $r = 0$ میدان مغناطیسی زیر ایجاد می‌کند:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3} \quad (13.5)$$

در یک میدان خارجی \mathbf{B}_{ext} , نیروی مغناطیسی بر یک دوقطبی مغناطیسی برابر است با:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext} \quad (14.5)$$

چگالی مغناطیس شوندگی M یک ماده بصورت گشتاور دوقطبی در واحد حجم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV} \quad (15.5)$$

قضیه هم ارزی آمپر بیان می‌کند که چگالی مغناطیسی شوندگی $M = M(r)$ همیشه معادل توزیع چگالی جریان حجمی J_m و چگالی جریان سطحی K_m است که بهماده مقید^۳ شده و با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{J}_m = \frac{1}{b_m} \nabla \times \mathbf{M} \quad (16.5)$$

$$\mathbf{K}_m = \frac{1}{b_m} \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (17.5)$$

که در آن \hat{n} بردار واحد عمود بر سطح و بسمت خارج از سطح ماده است. حجم کل و چگالی جریان سطحی خواهد بود:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_m \quad (18.5)$$

زیرنویس f نمایش دهنده چگالی جریان "آزاد" (یعنی هدایتی) است. میدان کمکی \mathbf{H} بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} & SI \\ \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} & \text{گاووسی} \end{cases} \quad (19.5)$$

بنابراین معادله (۳.۵) می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi k_m \mathbf{J}_f \quad (20.5)$$

یک ماده ممکن است دارای مغناطیش دائمی باشد یا مغناطیسی ناشی از یک میدان مغناطیسی. در مواد دیامغناطیس و پارامغناطیس خطی، همسانگرد، M موازی و متناسب با \mathbf{H} است،

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (21.5)$$

^۳Bound

که χ_m پذیرندگی مغناطیسی ماده است، $\mu_r < \chi_m < \infty$ برای مواد دیامغناطیسی و $\mu_r > \chi_m$ برای مواد پارامغناطیسی^۴ است. نفوذپذیری مغناطیسی (نسبی) μ_r به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_r = \begin{cases} 1 + \chi_m & SI \\ 1 + 4\pi\chi_m & \text{گاوی} \end{cases} \quad (22.5)$$

برای مواد دیامغناطیسی $1 < \mu_r$ و برای مواد پارامغناطیسی $\mu_r > 1$ داریم. با جایگزینی (21.5) و (22.5) در (19.5) بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mu_r \mathbf{H} & SI \\ \mu_r \mathbf{H} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (23.5)$$

که برای مواد همسانگرد غیر فرومغناطیسی صادق است.
برای سهولت استفاده از معادلات پایه در این فصل همچنین با واحدهای مستقل از سیستم، برخی از آنها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم (جدول 1.5):

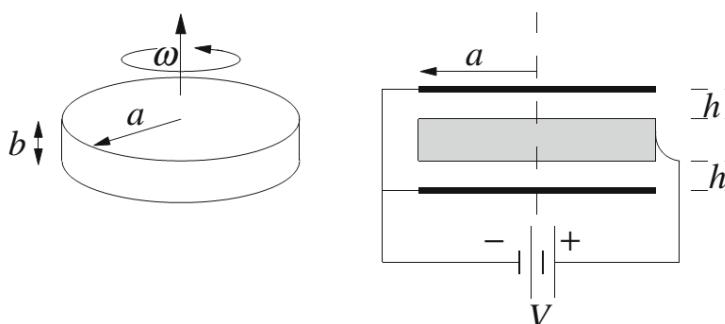
جدول ۱.۵: معادلات پایه برای مغناطیسی ساکن

سیستم مستقل	گاوی	SI	کمیت
$4\pi k_m \mathbf{J}$	$\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$	$\mu_0 \mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{B}$
$b_m q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$	$q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	نیروی مغناطیسی روی بار نقطه‌ای q و سرعت \mathbf{v} در میدان مغناطیسی \mathbf{B}
$k_m \frac{Idl \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$	$\frac{1}{c} \frac{Idl \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$	$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$	میدان مغناطیسی \mathbf{B} در تولیدی عنصر جریان dl حامل جریان I
$b_m I \mathbf{S}$	$\frac{1}{c} I \mathbf{S}$	$I \mathbf{S}$	گشتاور مغناطیسی m یک مدار حلقوی حامل جریان I و سطح S
$\frac{b_m B^2}{\lambda \pi k_m \mu_r}$	$\frac{B^2}{\lambda \pi \mu_r}$	$\frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$	چگالی انرژی مغناطیسی u_m

^۴ مغناطش به دلایل تاریخی به جای میدان مغناطیسی \mathbf{B} بر حسب میدان کمکی \mathbf{H} بیان می‌شود. در مواد فرومغناطیسی به دلیل پسماند مغناطیسی، بین \mathbf{M} و \mathbf{H} (بین \mathbf{M} و \mathbf{B}) مطابقت یک به یک وجود ندارد.

۱.۵ آزمایش رولند

این آزمایش توسط هانری رولند^۵ (۱۸۷۶) با هدف نشان دادن اینکه بارهای متوجه میدان‌های مغناطیسی ایجاد می‌کنند، انجام شد. یک دیسک فلزی به شعاع a و ضخامت $b \ll a$ بار الکتریکی دارد و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در چرخش نگه داشته می‌شود.



شکل (۱ - ۵)

• **الف** دیسک بین دو صفحه رسانا، یکی در فاصله $h/5 \approx 0.5$ سانتی‌متر بالاتر از سطح بالایی خود، و دیگری در زیر سطح پایینی خود، مانند شکل (۱ - ۵)، می‌چرخد. دو صفحه به دوسر یک منبع ولتاژ متصل و اختلاف پتانسیل $V = 10^4$ را حفظ می‌کنند، در حالی که سر دیگر دیگر منبع ولتاژ توسط یک کنتاکت تماسی به دیسک متصل می‌شود. چگالی بار سطحی روی سطوح دیسک را محاسبه کنید.

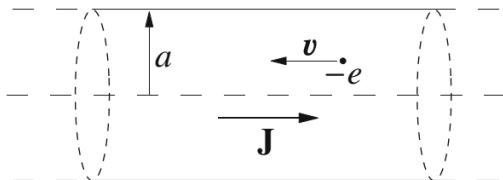
• **ب** میدان مغناطیسی B_r نزدیک مرکز دیسک و مولفه میدان مغناطیسی B_r موازی و نزدیک به سطح دیسک، به صورت تابعی از فاصله از محور محاسبه کنید. مقادیر تجربی معمولی $a = 10$ سانتی‌متر و $\omega = 2\pi \times 10^2 \text{ rad/s} \approx 2\pi \text{ دوره تناوب } T = 10^{-2} \text{ s}$ بود.

• **ج** مولفه میدان B_r تولید شده توسط دیسک در $r = a$ را می‌توان با جهت‌گیری دستگاه به گونه‌ای اندازه‌گیری کرد که عمود بر میدان مغناطیسی زمین B_\oplus با بزرگی $T \approx 10^{-5} \times 5 \times 10^{-5} \text{ T} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ ، و اندازه‌گیری انحراف عقربک مغناطیسی هنگام چرخش دیسک زاویه انحراف عقربک را پیدا کنید.

۲.۵ اثر تنگنا در سیم استوانه‌ای

یک چگالی جریان یکنواخت J در یک رسانای استوانه‌ای نامتناهی به شعاع a جریان دارد. حامل‌های جریان الکترون‌هایی هستند (بار $-e$) با تعداد چگالی حجم n_e و سرعت رانش v ، موازی با محور استوانه. یون‌ها را می‌توان در فضا ثابت و با چگالی تعداد یکنواخت n_i و بار Z_e در نظر گرفت. این سیستم در کل خنثی است.

^۵Henry A. Rowland (1876)



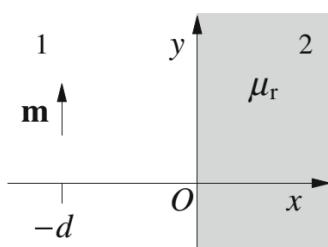
شکل (۵-۲)

الف میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان و نیروی مغناطیسی حاصل از آن بر روی الکترون‌ها را محاسبه کنید. نیروی مغناطیسی توزیع حجم الکترون‌ها را تغییر می‌دهد و این بهنوبه خود باعث ایجاد میدان الکتریکی ساکن می‌شود. در حالت تعادل نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون‌ها توسط نیروی الکترواستاتیکی جبران می‌شود.

ب میدان الکتریکی را که نیروی مغناطیسی روی الکترون‌ها را جبران می‌کند و توزیع بار مربوطه را محاسبه کنید.

ج اثر را در شرایط "استاندارد" برای یک هادی اهمی خوب محاسبه کنید.

۳.۵ دوقطبی مغناطیسی در جلو یک نیم فضای مغناطیسی



شکل (۳-۵)

صفحه $x = 0$ را به دو نیم فضا تقسیم می‌کند که به ترتیب با ۱ و ۲ نامگذاری شده‌اند. در نیمه فضای ۱ خلاء داریم، در حالی که نیمه فضای ۲ توسط یک محیط با گذردهی مغناطیسی μ_r پر شده است. یک دوقطبی مغناطیسی m ، موازی با محور y ، در خلاء در موقعیت $x = d$ قرار دارد. مطلوبست:

الف میدان مغناطیسی B در کل فضا.

ب نیروی وارد بر دوقطبی مغناطیسی.

۴.۵ شناوری مغناطیسی

در یک ناحیه معین از فضا، یک میدان مغناطیسی ساکن داریم که در یک دستگاه مرجع استوانه‌ای (r, ϕ, z) حول محور z متقارن است، یعنی مستقل از ϕ است و می‌توان آن را $B = B_{rz}(z)$ نوشت. مولفه میدان در امتداد $z = B_z(z) = B_{rz}(z)/L$ است که در آن B و L پارامترهای ثابت هستند.

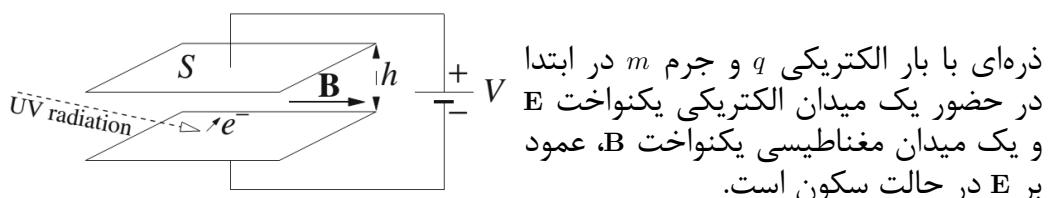
- الف مولفه شعاعی B_r را نزدیک به محور z پیدا کنید. ذرهای با قطبش‌پذیری مغناطیسی α (به طوری که یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی القایی $m = \alpha B$ در یک میدان مغناطیسی B بدست می‌آورد)، نزدیک به محور z قرار دارد.
- ب انرژی پتانسیل ذره در میدان مغناطیسی را بیابید.
- ج وجود موقعیت‌های تعادلی برای ذره را مورد بحث قرار دهید و فرکانس نوسانات جابجایی‌های کوچک از تعادل را در امتداد z یا r بیابید (اجازه دهید M جرم ذره باشد).

۵.۵ استوانه مغناطیسی یکنواخت

یک استوانه "سخت" مغناطیسی با شعاع R و ارتفاع h ، با $h \ll R$ ، دارای یک مغناطش یکنواخت M موازی با محور خود است.

- الف نشان دهید که چگالی جریان مغناطیسی حجمی J_m در داخل سیلندر صفر است، در حالی که سطح جانبی استوانه دارای چگالی جریان مغناطیسی سطحی $|K_m| = |M|$ است، با K_m .
- ب میدان مغناطیسی B را در داخل و خارج استوانه، در حد $\infty \rightarrow h$ پیدا کنید.
- ج حال حالت مخالف یک استوانه مسطح، یعنی $R \ll h$ را در نظر بگیرید و میدان مغناطیسی B را در مرکز استوانه محاسبه کنید.
- د با توجه به نتیجه ج، $\lim_{R/h \rightarrow \infty} B = 0$. همان نتیجه را با استفاده از روش بار مغناطیسی معادل بدست آورید.

۶.۵ ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متقاطع

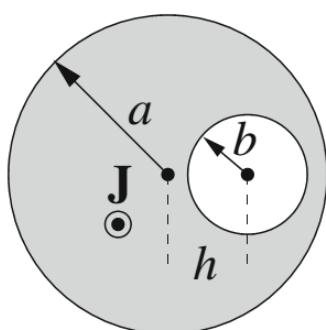


شکل (۴-۵)

- الف حرکت بعدی ذره را شرح دهید.
- ب از نتیجه بالا برای بحث در مورد مسئله زیر استفاده کنید. یک خازن صفحه موازی با سطح S و فاصله صفحه‌ها h با اعمال ولتاژ V ، مانند شکل (۴-۵)، داریم.

یک میدان مغناطیسی یکنواخت B بر روی خازن، عمود بر میدان الکتریکی خازن، یعنی موازی با صفحه‌ها اعمال می‌شود. اشعه ماوراء بنفس باعث می‌شود صفحه منفی الکترون‌هایی با سرعت اولیه صفر منتشر کند. حداقل مقدار B را که الکترونها نمی‌توانند به صفحه مثبت برسند را محاسبه کنید.

۷.۵ هادی استوانه‌ای با یک حفره خارج از مرکز

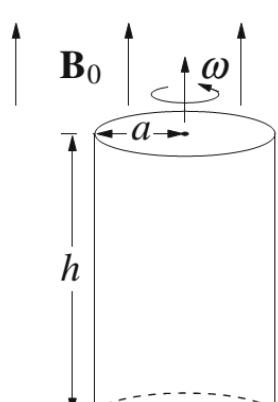


شکل (۵ - ۵)

یک رسانای استوانه‌ای نامتناهی با شعاع a دارای حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع b است که به موازات و در فاصله $h < a - b$ از محور استوانه (شکل ۵ - ۵) حفر شده است، که بخشی از هادی را نشان می‌دهد. چگالی جریان J عمود بر بخش هادی و یکنواخت است (به عنوان مثال، به استثنای حفره!). شکل بخشی از هادی را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی B را محاسبه کرده و نشان دهید که در داخل حفره میدان یکنواخت است.

۸.۵ هادی استوانه‌ای در میدان مغناطیسی

یک استوانه رسانا به شعاع a و ارتفاع $a \gg h$ حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 ، موازی با محور استوانه می‌چرخد.



شکل (۵ - ۶)

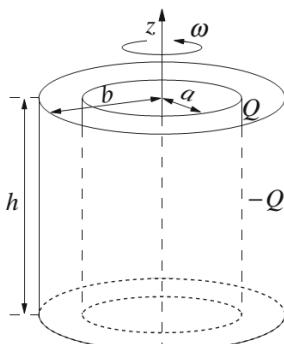
- الف نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون‌های رسانا را با فرض $B = 5 \times 10^{-5} T$ (میدان مغناطیسی زمین) و نسبت نیروی مغناطیسی به نیروی گریز از مرکز را محاسبه کنید. فرض کنید استوانه در شرایط ثابت در حال چرخش است.

- ب میدان الکتریکی داخل استوانه، و حجم و چگالی بار سطحی را محاسبه کنید.

- ج میدان مغناطیسی B_1 که توسط جریان‌های چرخشی داخل استوانه ایجاد می‌شود، و مرتبه بزرگی B_1/B_0 را محاسبه کنید (مقدار $a \approx 0.1 m$ فرض کنید).

۹.۵ خازن استوانه‌ای چرخان

پوسته‌های استوانه‌ای متحدم‌مرکز یک خازن استوانه‌ای، به ترتیب دارای شعاع a و $b > b$ و ارتفاع $h \gg b$ هستند. بار خازن، با $+Q$ در پوسته داخلی در شعاع a و $-Q$ در پوسته بیرونی در شعاع b ، مانند شکل (۷-۵) است. کل خازن حول محور خود با سرعت زاویه‌ای $\omega = 2\pi/T$ می‌چرخد. اثرات مرزی ناچیز است.



شکل (۷-۵)

- الف میدان مغناطیسی B تولید شده توسط خازن دوار را در کل فضا محاسبه کنید.

- ب نیروهای مغناطیسی روی بارهای دو پوسته استوانه‌ای دوار را محاسبه کرده و آنها را با نیروهای الکترواستاتیک مقایسه کنید.

۱۰.۵ کره‌های مغناطیسی

الف کره‌ای به شعاع R دارای مغناطیسی یکنواخت و دائمی M است. میدان مغناطیسی داخل و خارج کره را محاسبه کنید. (راهنمائي: به مسئله ۳-۳ مراجعه کنيد).

ب یک کره به شعاع R دارای بار کلی Q به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. کره با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. میدان مغناطیسی داخل و خارج کره را محاسبه کنید.

ج یک کره به شعاع R دارای نفوذپذیری مغناطیسی μ_r است و در یک میدان مغناطیسی خارجی و یکنواخت B_0 قرار دارد. کل میدان مغناطیسی داخل و خارج کره را محاسبه کنید، در مورد حد یک ماده کاملاً دیامغناطیسی ($\mu_r = \infty$)، به عنوان یک ابررسانا بحث کنید.

حل مسائل فصل ۵

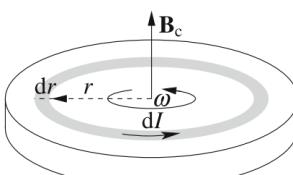
ح: مغناطیس ساکن

۱.۵ آزمایش رولند

- الف: با صرفنظر کردن از اثرات مرزی، میدان الکتریکی E_0 در نواحی بین دیسک و صفحات یکنواخت، عمود بر سطوح دیسک است و بزرگی آن در هر دو ناحیه $E_0 = V_0/h$ است. در هر دو منطقه، با توجه به قطبیت منبع نشان داده شده در شکل ۱.۵، میدان از دیسک به سمت بیرون هدایت می‌شود. چگالی بار سطوح پایین و بالایی دیسک، σ ، از نظر مدول و علامت برابر است، زیرا میدان باید در داخل دیسک صفر باشد. بنابراین $(\epsilon_0 V_0/h) \sigma = E_0 / (4\pi k_e h)$ داریم. در واحدهای SI $\sigma = \epsilon_0 V_0/h = 8.85 \times 10^{-12} C/m^2$ ، $h = 5 \times 10^{-3} m$ ، $V_0 = 10^4 V$ ، $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C/V \cdot m$ ، که منجر به $\sigma = 5/3 statC/cm^2$ در واحدهای گاووسی، $\sigma = V_0/(4\pi h)$ با $V_0 = 33.3 statV$ و $h = 0.5 cm$ است.

- ب: میدان مغناطیسی B_c را در مرکز دیسک با تقسیم سطوح بالایی و پایینی آن به حلقه‌های شعاع r ($r < a$) و عرض dr محاسبه می‌کنیم. در هر سطحی، هر حلقه حامل بار $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr$ است. بدلیل چرخش دیسک، هر حلقه معادل یک سیم پیچ با شدت جریان $dI = \omega dq / (2\pi)$ است که در مرکز خود یک میدان مغناطیسی $dB_c = 2\pi k_m dI / r \hat{\omega}$ ، عمود بر صفحه دیسک ایجاد می‌کند. بنابراین، کل میدان در مرکز دیسک توسط انتگرال زیر داده می‌شود

$$B_c = 2 \int_{0}^{a} 2\pi k_m \frac{dI}{r} = 4\pi k_m \sigma \omega \int_{0}^{a} \frac{r dr}{r} = 4\pi k_m \omega \sigma a = \begin{cases} \mu_0 \omega \sigma a \approx 1/4 \times 10^{-9} T & SI \\ \frac{\gamma}{c} \omega \sigma a \approx 1/4 \times 10^{-5} G & \text{گاووسی} \end{cases} \quad (1.5)$$

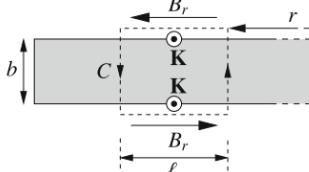


شکل (ح-۱-۵)

که در آن ضریب ۲ در مقابل انتگرال اول به دلیل مشارکت سطوح بالایی و پایینی دیسک به میدان مغناطیسی است.

مولفه میدان مغناطیسی B_r ، موازی با سطح دیسک و نزدیک به آن، می‌تواند با اعمال قانون آمپر در مسیر مستطیلی بسته C که در شکل (۳-۵) نشان داده شده است، ارزیابی شود. مسیر در فاصله r از محور چرخش قرار می‌گیرد و اضلاع موازی با سطح دیسک دارای طول $\ell \ll r$ هستند، به طوری که B_r تقریباً در امتداد اضلاع ثابت است. سهم مسیرهای عمودی به انتگرال خطی یکدیگر را حذف می‌کنند.

$$4\pi k_m I_c = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \approx 2B_r l \quad (3.5)$$



شکل (۳-۵)

که در آن I_c جریانی است که از حلقه مستطیلی C می‌گذرد و از ضد تقارن B_r نسبت به صفحه میانی استفاده شده است. چرخش دیسک منجر به چگالی جریان سطحی $K = \sigma v = \sigma wr\hat{\phi}$ می‌شود و در نتیجه جریان کل از حلقه مستطیلی $I_c = 2Kl = 2\sigma wrl$ داریم: می‌گذرد. بنابراین، با توجه به رابطه (۳.۵) داریم:

$$B_r(r) = \frac{2\pi k_m I_c}{l} = \frac{2\pi k_m}{l} 2\sigma wrl = 4\pi k_m \sigma wr \quad (3.5)$$

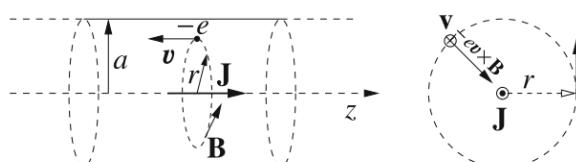
حداکثر مقدار $B_r(r)$ در $r = a$ جایی که $B_r(a) = B_c$ است رخ می‌دهد،

• ج: زاویه انحراف سوزن با $\tan \theta = B/B_{\oplus}$ داده می‌شود، بنابراین

$$\theta \approx \frac{B}{B_{\oplus}} = 2.8 \times 10^{-5} rad = 1.6 \times 10^{-3} deg \quad (4.5)$$

زاویه مورد انتظار بسیار کوچک است و اندازه‌گیری آن نیاز به مراقبت استثنایی دارد.

۲.۵ اثر تنگنا در یک سیم استوانه‌ای



شکل (۳-۵)

• الف: از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با محور z در امتداد محور استوانه استفاده می‌کنیم. بردارهای J و v در امتداد z هستند. اگر $v < 0$ را فرض کنیم، $J = -n_{ee}v$ است.

میدان مغناطیسی B به دلیل تقارن (سمت) ازیموتال، همانطور که در شکل نشان داده شده است، تنها مولفه $B_{\phi}(r)$ آن را می‌توان به راحتی با اعمال قانون مداری آمپر در مسیر بسته دایره‌ای هم محور با استوانه محاسبه کرد. بنابراین داریم:

$$2\pi r B_{\phi} = 4\pi^2 r^2 k_m J = \begin{cases} \mu_0 \pi r^2 J, & SI \\ \frac{4\pi^2 r^2}{c} J, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (5.5)$$

ازاینرو
(۶.۵)

$$B_\phi = 2\pi k_m J r = -2\pi k_m n_e e v$$

و $B_\phi > v$ زیرا v بنا بر این خطوط میدان B نسبت به محور z در خلاف جهت عقربه های ساعت قرار دارند.

نیروی مغناطیسی $F_m = -eb_m(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ شعاعی است و به سمت محور z هدایت می شود.

$$\mathbf{F}_m = -2\pi k_m b_m n_e e^r v^r \mathbf{r} = \begin{cases} -\frac{\mu_n e^r v^r}{c^r} \mathbf{r}, & SI \\ -\frac{2\pi n_e e^r v^r}{c^r} \mathbf{r}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (7.5)$$

بنا بر این نیروی مغناطیسی حامل های بار را مستقل از علامت آنها به سمت محور سیم می کشد. پرتوی از ذرات باردار همیشه منشأ میدان مغناطیسی می شود که تمایل دارد پرتو را «بهم بفسرد»، یعنی آن را به سمت محورش منقبض کند. با این حال، اگر پرتو در خلاء منتشر شود، دافعه کولن بین ذرات باردار غالب است. در این حالت، یا در مورد پلاسماء، محیط به طور کلی خنثی است، و در ابتدا، چگالی بار مثبت و منفی روی محیط یکنواخت است، به طوری که حداقل در اصل می توان اثر فشرده شدن را مشاهده کرد.

• ب:

ب) نیروی لورنتس $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + b_m \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ است. در حالت تعادل مولفه F_L باید در حضور الکترون های رسانا صفر باشد (مسئله ۹.۱)، به طوری که الکترون ها فقط در امتداد محور z جریان داشته باشند. بنابراین مولفه r میدان الکتریکی، E_r ، باید باشد

$$E_r = -b_m v B = 2\pi k_m b_m n_e e v^r r \quad (8.5)$$

در حالی که $E_z = J/\sigma$ ، که σ رسانایی ماده است. طبق قانون گاوس، چگالی بار، یکنواخت بر روی حجم استوانه، یک میدان $E = 2\pi k_e \rho r$ ایجاد می کند و میدان مورد نیاز E_r توسط چگالی بار تولید می شود.

$$\rho = \frac{k_m b_m}{k_e} n_e e v^r = n_e e \frac{v^r}{c^r} \quad (9.5)$$

مستقل از سیستم واحدها است. از سوی دیگر، چگالی بار جهانی $(\rho = e(Zn_i - ne)$ است، به طوری که

$$n_e = \frac{Zn_i}{1 - v^r/c^r} \quad (10.5)$$

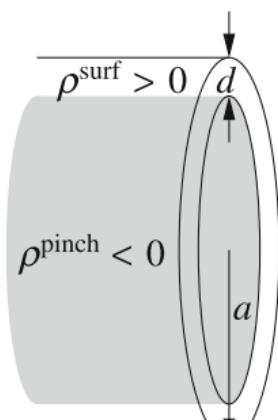
بنابراین، چگالی الکtron را روی حجم سیم یکنواخت است، اما از مقدار $n_{e0} = Zn_i$ که مربوط به $\rho = 0$ است، فراتر می رود. این بدان معنی است که چگالی عددی الکترون ها با یک ضریب $(1 - v^r/c^r)^{-1}$ افزایش می یابد، و ρ در داخل سیم منفی است. بار مثبت "از دست رفته" به طور یکنواخت روی سطح هادی توزیع می شود.

ج: برای الکترون ها در یک رسانای اهمی معمول، $v \approx 1\text{cm/sec} = 10^{-2}\text{m/sec}$ ، مربوط به $\rho \approx 10^{-21} (v/c)^2$ است، و اثر «تنگنا» حاصل آنقدر کوچک است که نمی توان آن را مشاهده کرد. از سوی دیگر، این اثر ممکن است در پرتوهای ذرات با چگالی بالا یا پرتوهای پلاسماء قوی باشد، جایی که v نسبت به c ناچیز نیست.

برای اینکه بینش بیشتری در مورد اندازه اثر بدست آوریم، اجازه دهید یک هادی استوانه‌ای اهمی (سیم) به شعاع a را در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم که چگالی الکترون در یک ناحیه استوانه‌ای مرکزی به شعاع $a-d$ ، که در آن $n_e^{pinch} = Zn_i / (1 - v^2/c^2)$ و چگالی بار حجمی برابر است با:

$$\rho^{pinch} = e(Zn_i - n_e^{pinch}) = -eZn_i \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1 - v^2/c^2} < 0. \quad (11.5)$$

در حالی که پوسته استوانه‌ای بین $r = a-d$ و $r = a$ از الکترون‌های رسانایی تهی شده است، به طوری که $\rho^{surf} = eZn_i$ چگالی بار آن برابر است. ضخامت d پوسته استوانه‌ای تخلیه شده را می‌توان با محدودیت بقای بار تخمین زد.



یک تکه سیم به طول a باید به طور کلی خنثی باشد، بنابراین، با فرض $a \ll d$ ، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} \pi(a-d)^2 l \rho^{pinch} &= -2\pi ad l \rho^{surf} \\ \pi(a-d)^2 eZn_i \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1-v^2/c^2} &= 2\pi ad eZn_i \\ (a^2 - 2ad + d^2) \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1-v^2/c^2} &= 2ad \end{aligned} \quad (12.5)$$

و از آنجا که $c \ll v$ و $d \ll a$ است، می‌توانیم تقریب زیر را بکار ببریم

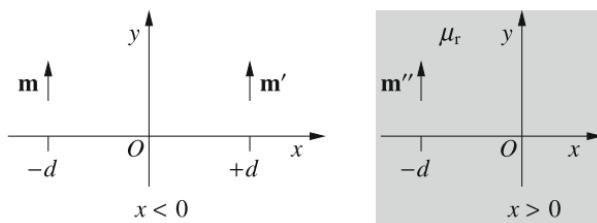
$$a^2 \frac{v^2}{c^2} \approx 2ad, \quad \text{بنابراین} \quad d \approx \frac{a v^2}{2 c^2} \quad (13.5)$$

شکل (۴-۵)

با یادآوری اینکه v^2/c^2 از مرتبه 10^{-21} است، می‌بینیم که مقدار d از مرتبه فاصله شبکه کریستالی ($10^{-10} m \approx 10^{11} \text{ Å}$) بهسیمی با شعاع 10^{11} m نیاز دارد، شعاع بسیار بزرگی است!

۳.۵ دوقطبی مغناطیسی در جلو یک نیم‌فضای مغناطیسی

- **الف:** با مقایسه بین معادلات مغناطیس استاتیک در غیاب جریان آزاد (بدون جریان) با معادلات الکترواستاتیک دیالکتریک در غیاب بارهای آزاد ($\nabla \times \mathbf{H} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) نشان می‌دهد که راه حل این مشکل مشابه مسئله (۲.۳) خواهد بود. بنابراین، مشابه مسئله (۲.۳)، نیمه‌فضای خلاء و نیمه‌فضای متوسط را به طور جداگانه با حدسهای آموزشی جداگانه برای میدان مغناطیسی در هر نیم‌فضا بررسی می‌کنیم.



شکل (ح-۵)

این برای بهره برداری از قضیه یکتایی برای معادله پواسون (۵.۵) است. حدس ما برای نیم فضای ۱، ($\circ < x$)، این است که میدان مانند این است که محیط مغناطیسی از نیم فضای ۲ حذف شده باشد (بنابراین، خلاء در کل فضا) و با یک دوقطبی مغناطیسی تصویر m' که به صورت متقابله به m نسبت به صفحه $x = 0$ در $x = d$ قرار دارد، جایگزین شود. حدس ما برای نیم فاصله ۲ ($\circ > x$) این است که میدان همان است که اگر محیط مغناطیسی کل فضا را پر کرده باشد و دوقطبی مغناطیسی m با یک دوقطبی مغناطیسی متفاوت m'' جایگزین شود که در همان مکان قرار گرفته است. بنابراین به دنبال مقادیر m' و m'' می‌گردیم که میدان مغناطیسی B را در نیم فضای ۱ ایجاد، و یک میدان مغناطیسی B_2 را در نیم فضای ۲، که شرایط فصل مشترک را در $x = 0$ برآورده می‌کند.

$$B_{\perp}(x = \circ^-) = B_{\perp}(x = \circ^+), \quad B_{\parallel}(x = \circ^-) = \frac{1}{\mu_r} B_{\parallel}(x = \circ^+) \quad (14.5)$$

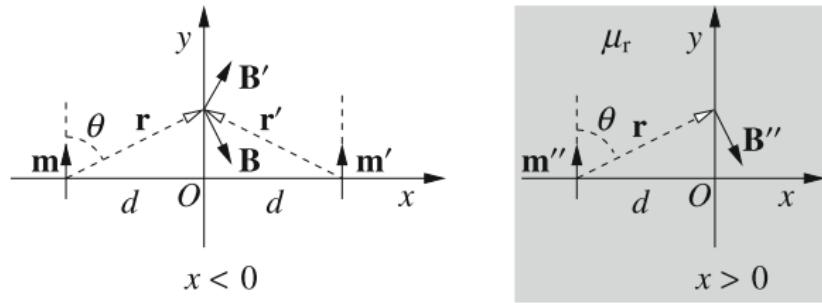
زیرنویس‌ها \parallel و \perp به ترتیب موازی و عمود بر صفحه $x = 0$ هستند. بنابراین، در یک نقطه عمومی $P \equiv (\circ, y, z)$ باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} B_x(\circ^-, y, z) &= B_x(\circ^+, y, z) \\ B_y(\circ^-, y, z) &= \frac{1}{\mu_r} B_y(\circ^+, y, z) \\ B_z(\circ^-, y, z) &= \frac{1}{\mu_r} B_z(\circ^+, y, z) \end{aligned} \quad (15.5)$$

میدان تولید شده توسط یک دوقطبی مغناطیسی m در محیطی با گذردهی مغناطیسی نسبی μ_r است

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{k_m}{b_m} \mu_r \frac{\mathbf{3}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \quad (16.5)$$

که در آن r بردار فاصله از m به سوی نقطه‌ای است که میدان را محاسبه می‌کنیم، و $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ بردار واحد در امتداد r است. توجه داشته باشید که برخلاف مسئله (۲.۳)، در اینجا تقارن استوانه‌ای حول محور x نداریم، زیرا دوقطبی مغناطیسی واقعی روی x قرار ندارد. معرفی زوایای $\theta = \arctan(z/y)$ و $\phi = \arcsin(d/r)$ و نوشتن مولفه‌های دکارتی B به طور جداسازی راحت است.



شکل (۶-۵)

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{k_m}{b_m} \mu_r \frac{3m \cos \theta \sin \theta}{r^3} \\ B_y &= \frac{k_m}{b_m} \mu_r \frac{3m \cos^2 \theta \cos \phi - m}{r^3} \\ B_z &= \frac{k_m}{b_m} \mu_r \frac{3m \cos^2 \theta \sin \phi}{r^3} \end{aligned} \quad (17.5)$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ اگر رابطه (۱۷.۵) را به (۱۵.۵) جایگزین و بر (k_m/b_m) تقسیم کنیم، شرایط مرزی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3m \cos \theta \sin \theta}{r^3} - \frac{3m' \cos \theta \sin \theta}{r'^3}}{\frac{3m \cos^2 \theta \cos \phi - m}{r^3} + \frac{3m' \cos^2 \theta \cos \phi - m'}{r'^3}} &= \frac{\mu_r \frac{3m'' \cos \theta \sin \theta}{r^3}}{\frac{3m'' \cos^2 \theta \cos \phi - m''}{r^3}} \\ \frac{\frac{3m \cos^2 \theta \sin \phi}{r^3} + \frac{3m' \cos^2 \theta \sin \phi}{r'^3}}{\frac{3m \cos^2 \theta \cos \phi}{r^3} + \frac{3m' \cos^2 \theta \cos \phi}{r'^3}} &= \frac{\frac{3m'' \cos^2 \theta \sin \phi}{r^3}}{\frac{3m'' \cos^2 \theta \cos \phi}{r^3}} \end{aligned} \quad (18.5)$$

که می‌توان آن را بیشتر ساده کرد

$$\begin{aligned} \mathbf{m} - \mathbf{m}' &= \mu_r \mathbf{m}'' \\ \mathbf{m} + \mathbf{m}' &= \mathbf{m}'' \end{aligned} \quad (19.5)$$

که منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\mathbf{m}' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \mathbf{m}, \quad \mathbf{m}'' = -\frac{2}{\mu_r + 1} \mathbf{m} \quad (20.5)$$

همانطور که انتظار می‌رود، عبارات m' و m'' به صورت توابع شبیه به (۱۸.۳) برای بارهای تصویر q' و q'' به عنوان توابع بار واقعی q هستند (اگرچه مسئله ۲.۳ شامل بارهای نقطه‌ای است، تعمیم به دوقطبی‌های الکتریکی فوری است).

- ب: نیروی اعمال شده توسط نیم‌فضای مغناطیسی بر \mathbf{m} برابر با نیرویی است که توسط یک دوقطبی مغناطیسی واقعی \mathbf{m}' واقع در $x = +d$ بر \mathbf{m} وارد می‌کند. نیروی بین دو دوقطبی مغناطیسی در فاصله r از یکدیگر برابر است با:

$$\mathbf{f} = -\frac{k_m}{b_m} \nabla \left[\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' - 3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}' \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^3} \right] \quad (21.5)$$

در این حالت، $\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{m}' \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ و $r = 2d$ بر \mathbf{m} خواهد بود

$$\mathbf{f} = -\frac{k_m}{b_m} \frac{3m^3}{r^4} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \hat{\mathbf{x}} = \frac{k_m}{b_m} \frac{3m^3}{16d^4} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (22.5)$$

این نیرو برای $\mu_r < 1$ (مواد دیا مغناطیسی) دافعه (ضد موازی با $\hat{\mathbf{x}}$) و برای $\mu_r > 1$ (مواد پارامغناطیسی) جاذبه (موازی با $\hat{\mathbf{x}}$) است. در حد $\mu_r \rightarrow \infty$ ماده دیامغناطیس کاملی داریم (ابرسانا)، و $\mathbf{m}' \rightarrow \mathbf{m}$ ، دوقطبی موازی هستند و همانطور که انتظار می‌رود نیرو دافعه است. در این مورد $\mathbf{m}'' \neq 0$ به طوری که $\mathbf{H} \neq 0$ در نیم فضا، که در آن، با این حال، $\mu_r = 0$ در نتیجه $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = 0$ است. وضعیت برخلاف وضعیت یک رسانای کامل در الکترواستاتیک است، که در آن یک دوقطبی الکتریکی یک دوقطبی تصویر مخالف را القا می‌کند و نیرو جاذبه خواهد بود.

در حد $\mu_r \rightarrow \infty$ (ماده فرومغناطیسی کامل)، $\mathbf{m}' \rightarrow -\mathbf{m}$ ، مربوط به یک نیروی جاذبه است، در حالی که $\mathbf{H} \rightarrow 0$ در داخل ماده است. این وضعیت مشابه مورد یک هادی در الکترواستاتیک است. توجه کنید که \mathbf{B} در داخل ماده محدود است

$$\text{(زیرا } \mathbf{m}'' \rightarrow 2\mathbf{m} \text{)} \text{ و بصورت زیر داده شده است:} \\ \mathbf{B} = \frac{k_m}{b_m} \frac{\mu_r}{\mu_r} \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}'') - \mathbf{m}''}{4\pi r^3} \rightarrow 2 \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{4\pi r^3} \quad (23.5)$$

به طوری که ماده پارامغناطیس مقدار میدان مغناطیسی در خلاء را در حد $\mu_r \rightarrow \infty$ دو برابر می‌کند.

۴.۵ شناوری مغناطیسی

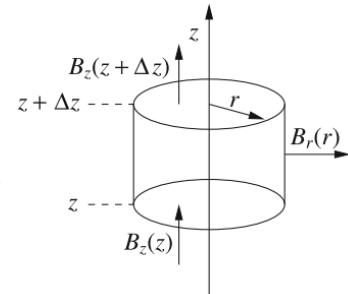
الف: مولفه شعاعی B_r میدان مغناطیسی نزدیک به محور z را می‌توان با اعمال قانون گاووس $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ بر روی یک استوانه بسته کوچک با شعاع r ، هم محور با محور z و با قاعده‌های z و $z + \Delta z$ ، همانطور که در شکل (۷-۵) نشان داده شده، محاسبه کرد. شار \mathbf{B} در کل سطح استوانه باید صفر باشد، بنابراین داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{cylinder} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= 2\pi r \Delta z B_r(r) + \pi r^2 [B_z(z + \Delta z) - B_z(z)] \end{aligned} \quad (24.5)$$

که منجر به

$$B_r = -\frac{r[B_z(z + \Delta z) - B_z(z)]}{2\Delta z} \quad (25.5)$$

$$\approx -\frac{B_z(z)}{2L} r$$



شکل (۷-۵)

ب: مطابق جدول (۱.۵)، نیروی وارد شده توسط یک میدان مغناطیسی خارجی \mathbf{B} بر دوقطبی مغناطیسی \mathbf{m} برابر $\mathbf{f} = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{m}$ است. اگر فرض کنیم که دوقطبی در ناحیه‌ای عاری از چگالی جریان الکتریکی حرکت می‌کند، به طوری که $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ، کار

مسائل الکترومغناطیس

$dr \equiv (dx, dy, dz)$ که یک جابجایی بینهایت کوچک انجام می‌شود برابر است با:^۱

$$dW = \mathbf{f} dr = [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \cdot dr = \mathbf{m} \cdot d\mathbf{B} \quad (۲۷.۵)$$

برای یک دوقطبی مغناطیسی دائمی این منجر به بیان معروف انرژی پتانسیل یک دوقطبی واقع در \mathbf{r} می‌شود:

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (۲۸.۵)$$

اما در اینجا دوقطبی مغناطیسی دائمی نیست. بلکه یک دوقطبی القایی داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) &= - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{m} \cdot d\mathbf{B} = -\alpha \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{B} = -\frac{\alpha}{2} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dB^z \\ &= \frac{\alpha}{2} [B^z(\mathbf{r}_2) - B^z(\mathbf{r}_1)] = \frac{1}{2} [\mathbf{m}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{m}(\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)] \end{aligned} \quad (۲۹.۵)$$

و انرژی پتانسیل برای دوقطبی القایی در \mathbf{r} نوشته می‌شود

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (۳۰.۵)$$

برای مشکل فعلی، این منجر به

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \alpha B^z(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha B^z_0}{L^2} \left(z^2 + \frac{r^2}{4} \right) \quad (۳۱.۵)$$

• ج: انرژی پتانسیل U در مبدأ حداقل است ($r = 0, z = 0$) اگر $\alpha < 0$ (ذره دی‌مغناطیسی) باشد. نیرو برابر است با:

$$\mathbf{f} = -\nabla U = -\frac{1}{2} |\alpha| \frac{2B^z_0}{L^2} \left(z\hat{z} + \frac{r}{4}\hat{r} \right) \quad (۳۲.۵)$$

بنابراین، یک نیروی هارمونیکی هم برای جابجایی شعاعی و هم برای جابجایی محوری، با فرکانس‌های نوسان متناظر داریم.

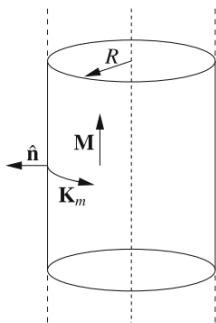
$$\omega_z = \sqrt{\frac{|\alpha| B^z_0}{ML^2}}, \quad \omega_r = \frac{\omega_z}{2} \quad (۳۳.۵)$$

^۱داریم

$$dW = [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \cdot dr = \sum_{i,j} m_i \partial_i B_j dx_j = \sum_{i,j} m_i \partial_j B_i dx_j = \sum_i m_i dB_i = \mathbf{m} \cdot d\mathbf{B} \quad (۲۶.۵)$$

که در آن، طبق معمول، $\partial_i B_j = \partial_j B_i$ برای $i = j$ بی‌همیت، $\partial_{1,2,3} = \partial x, \partial y, \partial z$ و $x_{1,2,3} = x, y, z$ می‌باشد. ما از ویژگی $\partial_i B_j = \partial_j B_i$ برای $i \neq j$ استفاده کردیم. در حالی که شرط $\nabla \times B = 0$ دلالت بر $\partial_i B_j \partial_j B_i = 0$ نیز برای $i \neq j$ دارد.

۵.۵ استوانه مغناطیسی یکنواخت



شکل (ح-۵-۸)

- الف: چگالی جریان مغناطیسی حجم (جریان مقید) J_m در سرتاسر حجم استوانه صفر است زیرا مغناطیسی استوانه M یکنواخت است و $J_m = \nabla \times M/b_m$ برای مسئله مغناطیس کردن چگالی جریان سطحی K_m برای مسئله $K_m = M \times \hat{n}/b_m$ داریم، که در آن \hat{n} بردار واحد عمود بر سطح جانبی استوانه است، و b_m ثابت وابسته به سیستم است که در (۱.۵) تعریف شده است. چون M و \hat{n} بر هم عمود هستند، $K_m = |K_m| = |M|/b_m$

- ب: استوانه مغناطیسی معادل یک سلونوبید (سیم‌لوله) با $nI = K_m$ است که n تعداد سیم پیچ‌ها در واحد طول و I جریان الکتریکی در گردش در هر سیم پیچ است. بنابراین، در حد $R \gg h$ ، میدان مغناطیسی به‌طور یکنواخت در خارج از استوانه صفر و یکنواخت و برابر مقدار زیر در داخل است.

$$B = \frac{4\pi k_m}{b_m} nI = \frac{4\pi k_m}{b_m} K_m = \frac{4\pi k_m}{b_m} M = \begin{cases} \mu_0 M, & SI \\ \frac{4\pi M}{\mu_0}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (34.5)$$

میدان کمکی H هم در داخل و هم در خارج از استوانه صفر است زیرا

$$H_{in} = \begin{cases} \frac{B_{in}}{\mu_0} - M = 0, & SI \\ B_{in} - 4\pi M = 0, & \text{گاوی} \end{cases} \quad H_{out} = \begin{cases} \frac{B_{out}}{\mu_0} = 0, & SI \\ B_{out} = 0 & \text{گاوی} \end{cases} \quad (35.5)$$

- ج: در حد "استوانه تخت"، $R \gg h$ ، استوانه معادل یک سیم پیچ تکی با شعاع R که دارای جریان $I = hK_m = hM/b_m$ است. بنابراین برای میدان در مرکز آن داریم
- $$B_0 = 2\pi k_m \frac{I}{R} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 Mh}{2\pi R}, & SI \\ \frac{2\pi I}{cR} = \frac{2\pi Mh}{cR}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (36.5)$$
- و $B_0 \rightarrow 0$ با $h/r \rightarrow \infty$.

- د: چگالی بار مغناطیسی معادل به صورت $M \cdot \nabla \rho_m = -\sigma_m$ تعریف می‌شود، بنابراین $\rho_m \equiv 0$ در داخل حجم استوانه، در حالی که دو قاعده استوانه دارای چگالی بار مغناطیسی سطحی $\sigma_m = M \cdot \hat{n} = \pm M$ هستند. بنابراین استوانه مغناطیسی تخت ما معادل "مغناطیسی استاتیک" یک خازن صفحه موازی الکترواستاتیک است. بار مغناطیسی معادل، میدان مغناطیسی کمکی H را ایجاد می‌کند که یکنواخت است و برابر با $H = -M = -\sigma_m$ در داخل حجم استوانه تخت و صفر در خارج است. بنابراین $B = \mu_0(H + M)$ در همه جا صفر است (به‌طور واقع بینانه‌تر، صفر دور از مرزها است).

میدان یک استوانه مغناطیسی و شبیه الکترواستاتیک آن بیشتر در مسئله ۱.۱۳ مورد بحث قرار گرفته است.

۶.۶ ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متقاطع

- الف: یک دستگاه آزمایشگاهی دکارتی مرجع xyz را انتخاب می‌کنیم که محور y موازی با میدان الکتریکی E ، محور z موازی با میدان مغناطیسی B ، و مبدأ O به‌گونه‌ای قرار دارد که ذره ابتدا در O قرار دارد. نیروی لورنتس بر ذره

$$\mathbf{f} = q[\mathbf{E} + b_m \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

هیچ مولفه z ندارد و حرکت ذره در صفحه xy است. معادلات حرکت بدین ترتیب است:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= b_m q B \dot{y} \\ m\ddot{y} &= -b_m q B \dot{x} + qE \end{aligned} \quad (۳۷.۵)$$

$$\begin{aligned} \text{معروفی دو متغیر جدید } x' \text{ و } y' \text{ راحت است، به‌طوری که} \\ x = x' + v \cdot t, \quad qquady = y' \end{aligned} \quad (۳۸.۵)$$

که در آن v سرعت ثابتی است که برای ساده کردن معادلات حرکت آن را تعیین می‌کنیم. شرایط اولیه برای متغیرهای اولیه عبارتند از:

$$\begin{aligned} x'(0) &= 0, & \dot{x}'(0) &= -v. \\ y'(0) &= 0, & \dot{y}'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (۳۹.۵)$$

با مشتق گرفتن از رابطه (۳۸.۵) نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 + \dot{x}', & \ddot{x} &= \ddot{x}' \\ \dot{y} &= \dot{y}', & \ddot{y} &= \ddot{y}' \end{aligned} \quad (۴۰.۵)$$

که با (۳۷.۵) جایگزین می‌کنیم، بنابراین معادلات زیر را برای تکامل زمانی متغیرهای اولیه به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= b_m q B \dot{y}' \\ m\ddot{y}' &= -b_m q B v_0 - b_m q B \dot{x}' + qE \end{aligned} \quad (۴۱.۵)$$

اکنون سرعت ثابت v_0 را مستقل از بار و جرم ذره انتخاب می‌کنیم

$$v_0 = \frac{E}{b_m B} \begin{cases} \frac{E}{B}, & SI \\ \frac{E}{B} c, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۴۲.۵)$$

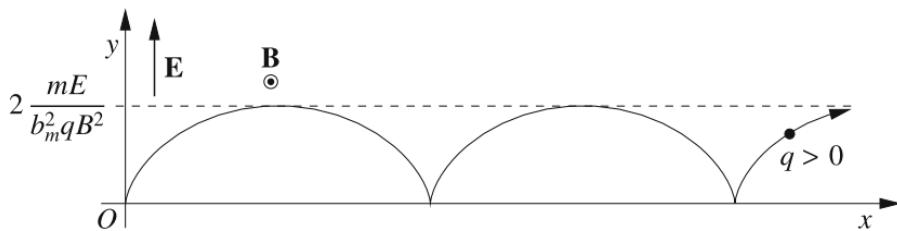
به‌طوری که عبارات qE و $-b_m q B v_0$ در دوم (۴۱.۵) یکدیگر را خنثی می‌کنند. معادلات به کاهش می‌یابد

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= b_m \frac{qB}{m} \dot{y}' \\ \ddot{y}' &= -b_m \frac{qB}{m} \dot{x}' \end{aligned} \quad (۴۳.۵)$$

که معادلات یک حرکت دایره‌ای یکنواخت با سرعت زاویه‌ای $\omega = -b_m q B / m$ هستند. چرخش در جهت عقربه‌های ساعت اگر $q > 0$ باشد، در خلاف جهت عقربه‌های ساعت اگر $q < 0$ باشد. از آنجایی که طبق (۳۹.۵) $x'(0) = -v_0$ و $y'(0) = 0$ شاعر مسیر دایره‌ای است

$$r = \frac{mv_0}{b_m q B} = \frac{mE}{b_m^2 q B^2} \quad (44.5)$$

تکامل زمانی متغیرهای اولیه به‌این ترتیب است



شکل (۹-۵)

$$x' = x_0 + r \cos(\omega t + \phi) = r \sin(\omega t) = -\frac{mE}{b_m^2 q B^2 \sin\left(\frac{b_m q B}{m} t\right)}$$

$$y' = y_0 + r \sin(\omega t + \phi) = r - r \cos(\omega t) = \frac{mE}{b_m^2 q B^2} \left[1 - \cos\left(\frac{b_m q B}{m} t\right) \right] \quad (45.5)$$

که در آن ثابت‌های $y'_0 = -r$ و $x'_0 = 0$ را برای بازتولید شرایط اولیه انتخاب کرده‌ایم. تکامل زمانی متغیرهای پرایم نشده است

$$x = \frac{E}{b_m B} t - \frac{mE}{b_m^2 q B^2 \sin\left(\frac{b_m q B}{m} t\right)} \quad (46.5)$$

$$y = \frac{mE}{b_m^2 q B^2} \left[1 - \cos\left(\frac{b_m q B}{m} t\right) \right]$$

و حرکت مشاهده شده یک سیکلوئید است، همانطور که در شکل (۹-۵) برای بار مثبت نشان داده شده است.

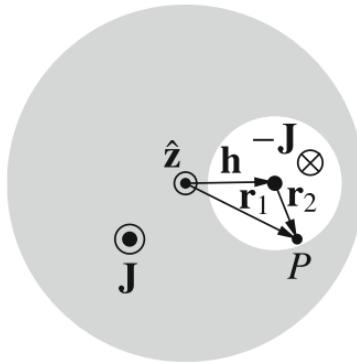
- ب: از نتایج بند (الف) می‌دانیم که حرکت الکترون یک سیکلوئید خواهد بود که از صفحه منفی شروع می‌شود و به حداقل فاصله $2r = 2mE/(b_m^2 q B^2)$ از آن می‌رسد که در آن $E = V/h$ است. شرط نرسیدن الکترون به صفحه مثبت بدین ترتیب است

$$\frac{2mE}{b_m^2 q B^2} = \frac{2mV}{b_m^2 h q B^2} < h, \quad \text{مربوط به } B > \frac{1}{b_m h} \sqrt{\frac{2m_e V}{e}} \quad (47.5)$$

که در آن m_e جرم الکترون و e مقدار مطلق بار الکترون است.

۷.۵ هادی استوانه‌ای با یک حفره خارج از مرکز

با توجه به اصل برهم نهی (جمع اثرها)، چگالی جریان J که به طور یکنواخت از سطح مقطع هادی در جهت z مثبت عبور می‌کند، معادل چگالی جریان یکنواخت J است که در کل بخش دایره‌ای شعاع a عبور می‌کند و روی چگالی جریان J که در جهت z منفی از طریق سوراخ می‌گذرد، قرار دارد.



شکل (۷.۵-۱)

میدان مغناطیسی توسط یک سیم مستقیم و نامتناهی با شعاع a و چگالی جریان $J \hat{z}$ که به طور یکنواخت در سطح مقطع توزیع شده و دارای تقارن آزیموتال (سمت) است، تولید می‌شود. با استفاده از دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با محور z منطبق بر محور سیم، مغناطیسی میدان $B = B_\phi(r)\hat{\phi}$ را می‌توان با استفاده از رابطه (۷.۳.۵) محاسبه کرد: انتگرال خطی بر روی مسیر دایره C به شعاع r انجام می‌شود

شکل (۷.۵-۱)

$$2\pi r B_\phi(r) = 4\pi k_m \oint_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k_m J \times \begin{cases} \pi r^2, & r < a \\ \pi a^2, & r > a \end{cases} \quad (7.5.5)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$B_\phi(r) = \begin{cases} 2\pi k_m J r, & r < a \\ \frac{2\pi k_m J a^2}{r}, & r > a \end{cases} \quad (7.5.6)$$

نوشتن عبارات فوق به صورت بردار فشرده امکان پذیر است و برای موارد زیر مفید است. از آنجایی که $\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{z}$ برای میدان $\mathbf{B}_w = \mathbf{B}_w(\mathbf{r}, a)$ سیم بینهایت طویل به شعاع a در فاصله r از محور داریم:

$$\mathbf{B}_w(\mathbf{r}, a) = \begin{cases} 2\pi k_m \mathbf{r} \times \mathbf{J}, & r < a \\ \frac{2\pi k_m a^2 \mathbf{r} \times \mathbf{J}}{r^2}, & r > a \end{cases} \quad (7.5.7)$$

با بازگشت به هادی استوانه‌ای با یک سوراخ، میدان مغناطیسی در نقطه P حاصل جمع میدانی است که توسط یک سیم به شعاع a با جریان J و یک سیم به شعاع b با جریان $-J$ با فاصله بین محورها از دو سیم برابر با h ، ایجاد می‌شود.. فرض کنید \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 به ترتیب فاصله از محورهای سیم اول و دوم باشد، $\mathbf{h} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ داریم. بنابراین $\mathbf{B}(P) = \mathbf{B}_w(\mathbf{r}_1; a) + \mathbf{B}_w(\mathbf{r}_2; b)$. بنابراین (۷.۵.۷) داریم. به طور خاص، در داخل سوراخ $r < a$ و $r > b$ است، بنابراین

$$\mathbf{B}(P) = 2k_m \mathbf{r}_1 \times \mathbf{J} + 2k_m \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{J}) = 2k_m (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{J} = 2k_m \mathbf{H} \times \mathbf{J} \quad (7.5.8)$$

که یک بردار ثابت است. بنابراین، در داخل سوراخ، میدان مغناطیسی یکنواخت و عمود بر هر دو \mathbf{J} و \mathbf{h} است.

۸.۵ هادی استوانه‌ای در میدان مغناطیسی

- الف: از یک سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم که محور z در امتداد محور استوانه قرار دارد. نیروی گریز از مرکز، \mathbf{F}_c ، و نیروی مغناطیسی، \mathbf{F}_m ، هر دو در امتداد r هدایت می‌شوند و فقط به r بستگی دارند:

$$\mathbf{F}_c = m_e \omega^2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{F}_m = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\circ = -e \omega B_\circ \mathbf{r}, \quad \frac{|\mathbf{F}_c|}{|\mathbf{F}_m|} = \frac{m_e \omega}{e B_\circ} \approx 7/2 \times 10^{-5} \quad (8.5)$$

نیروی مغناطیسی غالب است و در ادامه نیروی گریز از مرکز را نادیده می‌گیریم.

- ب: در شرایط ایستا، نیروی مغناطیسی باید توسط یک میدان الکتریکی \mathbf{E} جبران شود

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\circ = -\omega B_\circ \mathbf{r}. \quad (8.5)$$

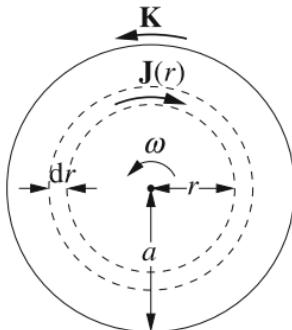
وجود این میدان الکتریکی به معنای چگالی بار یکنواخت است

$$\rho = \frac{1}{4\pi k_e} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{E(r)}{2\pi k_e r} = -\frac{\omega B_\circ}{2\pi k_e} \quad (8.5)$$

از آنجایی که استوانه بار خالصی ندارد، سطح جانبی آن باید دارای چگالی بار باشد

$$\sigma = \frac{\pi a^2 h \rho}{2\pi ah} = -\frac{a\rho}{2} = \frac{\omega a B_\circ}{4\pi k_e} \quad (8.5)$$

- ج: چگالی بار حجمی ρ با چگالی جریان چرخشی حجمی $J(r)$ به دلیل چرخش استوانه مرتبط است.



شکل (۸.۵)

$$\mathbf{J}(r) = \rho \omega r \hat{\phi} = -\frac{\omega^2 r B_\circ}{2\pi k_e} \hat{\phi} \quad (8.5)$$

سهم $\mathbf{J}(r)$ در میدان مغناطیسی روی محور استوانه، B_J ، را می‌توان با تقسیم استوانه به پوسته‌های استوانه‌ای (هم محور بینهایت کوچک بین r و $r + dr$) محاسبه کرد. هر پوسته معادل یک سیم‌لوله (سولونوئید) با شعاع r و حاصل ضرب آن اضافه می‌کند. بنابراین سهم کل $J(r)dr$ را به میدان داخل محور برابر است با:

$$B_J(r) = 4\pi k_m \int_r^a J(r') dr' = -4\pi k_m \frac{\omega^2 B_\circ}{2\pi k_e} \int_r^a r' dr' \quad (8.5)$$

$$= -4\pi k_m \frac{\omega^2 B_\circ}{2\pi k_e} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_r^a = -\frac{k_m}{k_e} \omega^2 B_\circ (a^2 - r^2)$$

اکنون باید سهم B_K چگالی جریان سطحی $K = \sigma \omega a$ را اضافه کنیم

$$B_K = 4\pi k_m \sigma \omega a = 4\pi k_m \omega a \frac{\omega a B_\circ}{4\pi k_m} = \frac{k_m}{k_e} \omega^2 a^2 B_\circ. \quad (8.5)$$

و کل میدان مغناطیسی $B_1(r)$ ناشی از جریان‌های دورانی برابر است با:

$$B_1(r) = B_J(r) + B_K = \frac{k_m}{k_e} \omega^2 a^2 B_0 r^2 \quad (۶۰.۵)$$

که روی محور صفر است و در $r = a^-$ به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد. بنابراین داریم

$$\frac{B_1(a^-)}{B_0} \frac{k_m}{k_e} \omega^2 a^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} \approx (2/1 \times 10^{-7})^2 \ll 1 \quad (۶۰.۵)$$

۹.۵ خازن استوانه‌ای چرخان

- الف: از مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم که محور z با محور خازن منطبق باشد. فرض می‌کنیم $\omega = \omega \hat{z}$ با $\omega = 2\pi/T > 0$ است. بنابراین جریان‌های سطحی ناشی از چرخش خازن برابرند با:

$$K = \sigma v = \frac{Q}{2\pi ah} = \frac{Q}{hT} \quad (۶۱.۵)$$

که در آن $\sigma = Q/(2\pi ah)$ چگالی بار سطحی در پوسته داخلی، و $-K$ در پوسته خارجی، مستقل از a و b است. بنابراین دو پوسته استوانه‌ای معادل دو سیم‌لوله با حاصل‌ضرب $nI = \pm K$ هستند. پوسته بیرونی منشأ یک میدان مغناطیسی $B_b = -4\pi k_m K \hat{z}$ در ناحیه $b < r < b$ و در ناحیه $r > b$ هیچ میدانی نمی‌دهد. پوسته داخلی میدان $B_a = -B_b$ را در ناحیه $a < r < b$ تولید کرده و در ناحیه $r > b$ هیچ میدانی نمی‌دهد. میدان کل $B = B_a + B_b$ به‌این ترتیب برابر است با

$$B = \begin{cases} -4\pi k_m K \hat{z} = -4\pi k_m \frac{Q}{hT} \hat{z} & a < r < b \\ 0 & r < a, r > b \end{cases} \quad (۶۲.۵)$$

- ب: میدان الکتریکی برای $a < r < b$ و $r > b$ صفر است، در حالی که برای $r < a$ است $E(r) = \hat{r} 2k_e Q / (hr)$ و نیروی بین دو پوسته جاذبه است. به عنوان مثال، نیروی الکترواستاتیک در واحد سطح روی پوسته خارجی برابر است با:

$$f_s^e = \sigma_b \frac{E(b)}{2} = -\hat{r} \frac{Q}{2\pi b h} \frac{2k_e Q}{hb} = -\hat{r} \frac{k_e Q^2}{\pi b^2 h^2} \quad (۶۳.۵)$$

که در آن σ_b چگالی بار سطحی روی پوسته است. نیروی مغناطیسی در واحد سطح روی همان پوسته خواهد بود:

$$f_s^m = \sigma_b \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \hat{r} \frac{Q}{2\pi h} \frac{2\pi b}{T} = \hat{r} 4\pi k_m \frac{Q^2}{h^2 T^2} \quad (۶۴.۵)$$

که مخالفجهت نیروی الکترواستاتیک است. نسبت $f_s^{(m)} / f_s^{(e)}$ در پوسته بیرونی برابر است با:

$$\frac{f_s^{(m)}}{f_s^{(e)}} = 4\pi k_m \frac{Q^2}{h^2 T^2} \frac{\pi b^2 h^2}{k_e Q^2} = \frac{k_m}{k_e} \left(\frac{2\pi b}{T} \right)^2 = \frac{v_b^2}{c^2} \quad (۶۵.۵)$$

که در آن $v_b = 2\pi b/T$ سرعت مماسی پوسته بیرونی است. بنابراین نسبت در رابطه (۶۵.۵) در همه موارد عملی به طرز چشمگیری کوچک است.

۱۰.۵ کره‌های مغناطیسی

- الف: سریعترین راه برای به دست آوردن جواب، بهره برداری از مقایسه معادلات مغناطیس ساکن (استاتیک) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ با معادلات الکترواستاتیک (الکتریکی ساکن) $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (همچنین مسئله ۳.۵)، همراه با با تعاریف روابط (۴.۳) و (۱۹.۵) است. توزیع فضایی M مانند P در مسئله (۳.۳) است، و شرایط مرزی برای \mathbf{H} مانند E است. بنابراین از (۱۳.۳) بلافاصله به این نتیجه می‌رسیم که در داخل کره ($r < R$) میدان $\mathbf{H}^{(int)}$ یکنواخت با مقدار ثابت که توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{H}^{(int)} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{M}}{\frac{3}{4}\pi M} & SI \\ -\frac{\mathbf{M}}{\frac{3}{4}\pi M} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۶۶.۵)$$

با استفاده از رابطه (۱۹.۵) میدان مغناطیسی داخل کره را بدست می‌آوریم

$$\mathbf{B}^{(int)} = \begin{cases} -\frac{2\mu_0 \mathbf{M}}{\frac{3}{4}\pi M} & SI \\ -\frac{8\pi \mathbf{M}}{\frac{3}{4}\pi M} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۶۷.۵)$$

در خارج از کره، میدان یک دوقطبی مغناطیسی $\mathbf{M}(\frac{4\pi R^3}{3})$ است که در مرکز کره ($r = 0$) قرار دارد.

- ب: چرخش کره با بار سطحی یکنواخت $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ یک جریان سطحی سمتی (ازیموتال) ایجاد می‌کند.

$$\mathbf{K}_{rot} = \sigma v = \sigma R\omega \sin \theta \hat{\phi} \quad (۶۸.۵)$$

که در آن $\theta = 0$ مربوط به جهت \mathbf{M} است. این جریان توزیع سطحی مشابه جریان توزیع جریان مغناطیسی رابطه (۱۷.۵) برای کره مغناطیسی بند (الف) است.

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{r}} = M \sin \theta \hat{\phi} \quad (۶۹.۵)$$

بنابراین، میدان مغناطیسی تولید شده توسط \mathbf{K}_{rot} با میدان مغناطیسی تولید شده توسط \mathbf{K}_m با جایگزینی $M = \sigma R\omega = Q\omega/(4\pi R)$ است.

- ج: مشابه مسئله ۴.۳ برای یک کره دی الکتریک در یک میدان الکتریکی خارجی، فرض می‌کنیم که مغناطش القایی $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ یکنواخت و موازی با \mathbf{B}_0 است. میدان کل مجموع میدان خارجی $\mathbf{B}_0 \equiv [\mu_0] \mathbf{H}_0$ (با $[\mu_0]$ جایگزین شده با واحدی برای واحدهای گاوی) و حاصل از مغناطیسی خواهد بود. بنابراین، در داخل کره \mathbf{H} یکنواخت است و مقدار $\mathbf{H}^{(int)}$ را بصورت زیر دارد.

$$\mathbf{H}^{(int)} = \begin{cases} \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{M}}{\frac{3}{4}\pi M} = \mathbf{H}_0 - \frac{\chi_m}{\frac{3}{4}\pi} \mathbf{H}^{(int)} & SI \\ \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{M}}{\frac{3}{4}\pi M} = \mathbf{H}_0 - \frac{4\pi \chi_m}{\frac{3}{4}\pi} \mathbf{H}^{(int)} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۷۰.۵)$$

با حل این رابطه برای $\mathbf{H}^{(int)}$ و در نهایت با استفاده از $\mathbf{B}^{(int)} = [\mu_0] \mu_r \mathbf{H}^{(int)}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{H}^{(int)} = \frac{\frac{3}{4}\pi}{\mu_r + \frac{3}{4}\pi} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B}^{(int)} = \frac{\frac{3}{4}\mu_r}{\mu_r + \frac{3}{4}\pi} \mathbf{B}_0. \quad (۷۱.۵)$$

مسائل الکترومغناطیس

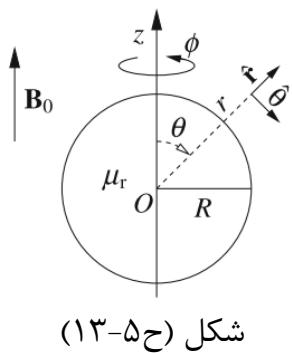
که مستقل از سیستم واحدها است؛ ممکن است جالب باشد که نتیجه را با (۲۱.۳) برای کره دیالکتریک مقایسه کنید. مغناطش با $M = \chi_m H^{(int)}$ داده می‌شود.

در حالت یک کره کاملاً دیامغناطیسی (یک کره ابررسانا) $\mu_r = \infty$ داریم و مغناطش برابر است با

$$M = \frac{3\chi_m}{2} H_0 = \frac{3}{8\pi} \frac{b_m}{k_m} B_0. \quad (72.5)$$

در واقع، در داخل کره، میدان خارجی به طور کامل توسط جریان‌های سطحی رابطه (۶۹.۵) به دلیل مغناطش شوندگی معادله (۷۲.۵) غربال می‌شود.

آموزنده است که راه حل فوق را با بررسی شرایط مرزی در سطح کره، مشابه مورد دیالکتریک جواب (۴۳)، دوباره بررسی کنید. همانطور که در شکل (۱۳-۵) نشان داده شده، یک دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) با جهت اوج z موازی با میدان مغناطیسی خارجی B_0 و مبدأ در مرکز کره O انتخاب می‌کنیم. به عنوان یک



شکل (۱۳-۵)

حدس علمی، ما به دنبال راه حلی هستیم که در آن ۱) میدان مغناطیسی داخل کره، $B^{(int)}$ ، یکنواخت و متناسب با B_0 باشد، و بر این اساس، ۲) مغناطیسی M کره، متناسب با $B^{(int)}$ و یکنواخت باشد و ۳) کل میدان خارجی، $B^{(ext)}$ ، برهم نهی میدان خارجی اعمال شده B_0 و میدان $B^{(mag)}$ است که توسط مغناطش کره ایجاد می‌شود. بنابراین، $B^{(mag)} = \alpha B_0$ میدانی خواهد بود که توسط یک دوقطبی مغناطیسی $m = \alpha B_0$ واقع در مرکز کره، با α ثابتی که باید تعیین شود، ایجاد می‌شود. به طور خلاصه، ما به دنبال راه حل زیر هستیم

$$\begin{aligned} B^{(int)} &= \psi B_0 \\ B^{(ext)} &= B_0 + B^{(mag)} \end{aligned} \quad (73.5)$$

با ثابت ψ دیگری تعیین می‌شود. $B^{(mag)}$ و مولفه‌های کروی برابر هستند با:

$$B^{(mag)} = \alpha B_0 \frac{k_m}{b_m} \left[\left(\frac{\hat{z} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \right) \mathbf{r} - \frac{\hat{z}}{r^3} \right] \quad (74.5)$$

$$B_r^{(mag)} = \alpha B_0 \frac{k_m}{b_m} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \quad (75.5)$$

$$B_\theta^{(mag)} = \alpha B_0 \frac{k_m}{b_m} \frac{2 \sin \theta}{r^3} \quad (76.5)$$

$$B_\phi^{(mag)} = 0 \quad (77.5)$$

که در آن $k_m/b_m = \mu_r/(4\pi)$ در واحدهای SI، و 1 در واحدهای گاووسی است. ثابت‌های α و ψ از شرایط مرزی B و B/μ_r در سطح کره تعیین می‌شوند.

$$B_\perp^{(int)}(R, \theta) = B_\perp^{(ext)}(R, \theta), \quad \frac{B_\parallel^{(int)}(R, \theta)}{\mu_r} = B_\parallel^{(ext)}(R, \theta) \quad (78.5)$$

که منجر به روابط زیر می‌شود

$$\psi B_{\circ} \cos \theta = B_{\circ} \cos \theta + B_r^{(mag)}(R, \theta) = B_{\circ} \cos \theta \left(1 + \alpha \frac{k_m}{b_m} \frac{2}{R^r} \right) \quad (79.5)$$

$$\psi \frac{B_{\circ}}{\mu_r} \sin \theta = B_{\circ} \sin \theta - B_{\theta}^{(mag)}(R, \theta) = B_{\circ} \sin \theta \left(1 - \alpha \frac{k_m}{b_m} \frac{2}{R^r} \right) \quad (80.5)$$

با تقسیم رابطه (80.5) بر $B_{\circ} \cos \theta$ و رابطه (79.5) بر $B_{\circ} \sin \theta$ ، بدست می‌آوریم

$$\psi = 1 + \alpha \frac{k_m}{b_m} \frac{2}{R^r}, \quad \frac{\psi}{\mu_r} = 1 - \alpha \frac{k_m}{b_m} \frac{2}{R^r} \quad (81.5)$$

که از حل آن خواهیم داشت

$$\psi = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2}, \quad \alpha = R^r \frac{k_m}{b_m} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \right) = \begin{cases} \frac{4\pi R^r}{\mu_{\circ}} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \right), & SI \\ R^r \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \right), & \text{گاوی} \end{cases} \quad (82.5)$$

و در نهایت منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\mathbf{B}^{(int)} = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \mathbf{B}_{\circ}, \quad \mathbf{m} = \frac{4\pi R^r}{3} \mathbf{M} = R^r \frac{k_m}{b_m} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \right) \mathbf{B}_{\circ} \quad (83.5)$$

فصل ۶

القای مغناطیسی و میدانهای متغیر با زمان

عناوین. القای مغناطیسی. قانون فاراده. نیروی حرکه. تقریب جریان به آرامی متغیر. القای متقابل و خود القایی. انرژی ذخیره شده در یک سیم پیچ. مدارات تزویج مغناطیسی. انرژی مغناطیسی. جریان جایگاهی و معادلات ماکسول کامل. معادلات پایه. در حضور یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان، معادله (۱-۵) به معادله دقیق تغییر می‌کند. محاسبه کنید.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -b_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.6)$$

از اینرو انتگرال خطی $\nabla \times \mathbf{E}$ روی مسیر بسته C خواهد بود:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -b_m \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.6)$$

بنابراین، برای یک مسیر ثابت، انتگرال خط $\nabla \times \mathbf{E}$ برابر است با مشتق زمانی شار فیلد متغیر از طریق سطحی که با کانتور S محدود شده است. نیروی حرکه (الکتروموتوری) \mathcal{E} ^۱ (emf) در یک مدار واقعی که دارای قطعات متحرک است، کاری است که توسط نیروی لورنتس بر روی یک بار واحد در مسیر مدار انجام می‌شود.

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E} + b_m \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -b_m \frac{d}{dt} \phi_{circ}(\mathbf{B}) \quad (3.6)$$

که در آن \mathbf{V} سرعت عنصر مدار است. اکنون در (۳.۶) شار $\phi_{circ}(\mathbf{B})$ از \mathbf{B} از طریق مدار ممکن است بهدلیل تغییرات زمانی B و هندسه مدار متفاوت باشد. معادله (۳.۶) قانون کلی القاء فارادی است.

^۱ Electromotive force (emf)

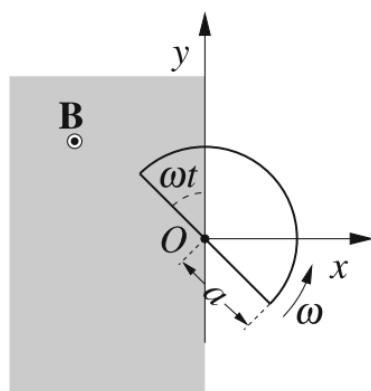
برای سیستمی متشکل از دو مدار الکتریکی، شار مغناطیسی هر مدار را می‌توان تابعی از جریان‌های جاری در هر مدار نوشت.

$$\phi_2 = L_1 I_1 + M_{21} I_2, \quad \phi_1 = L_2 I_2 + M_{12} I_1 \quad (4.6)$$

که در آن جملات حاوی ضرایب (خود) القایی L_i که سهمی در شار تولید شده توسط خود مدار هستند و جملاتی که حاوی ضرایب اندوکتانس متقابل $M_{21} = M_{12}$ شار تولید شده توسط یک مدار را برابر دیگر نشان می‌دهند. در نهایت، برای میدان‌های متغیر با زمان، معادله کامل ماکسول جایگزین (۳.۵) می‌شود.

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k_m \mathbf{J} + \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (\text{گاوی}) \\ \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (SI) \end{cases} \quad (5.6)$$

۱.۶ مولد موج مربعی



شکل (۱ - ۶)

میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$ در نیمه فضای $x < 0$ سیستم مختصات دکارتی داریم، در حالی که میدان برای $x > 0$ صفر است. یک حلقه نیم دایره‌ای به شعاع a و مقاومت R در صفحه xy با مرکز محیط کامل در مبدأ O سیستم مختصات، مانند شکل (۱-۶)، قرار دارد. حلقه حول محور z با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. ابتدا فرض کنید که خود القایی سیم پیچ ناچیز است.

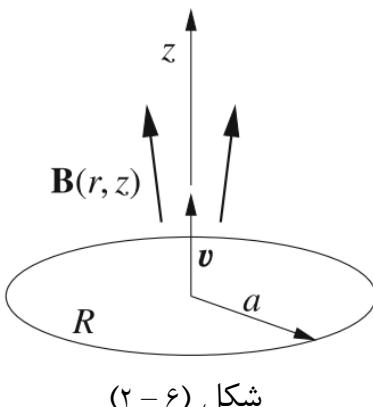
• الف: جریان در حال گردش در سیم پیچ را محاسبه کنید.

• ب: گشتاور اعمال شده توسط نیروهای مغناطیسی روی سیم پیچ و نیروی مکانیکی مورد نیاز برای نگه داشتن سیم پیچ در چرخش را محاسبه کنید. این را با توان الکتریکی تلف شده در سیم پیچ مقایسه کنید.

• ج: اکنون وجود خود القایی سیم پیچ را در نظر بگیرید و در مورد اینکه چگونه بر پاسخ مورد (الف) تأثیر می‌گذارد بحث کنید.

۲.۶ سیم پیچ متحرک در میدان مغناطیسی ناهمگن

یک میدان مغناطیسی دارای تقارن چرخشی حول یک خط مستقیم است که آن را به عنوان محور طولی، z ، یک قاب مرجع استوانه‌ای (r, ϕ, z) انتخاب می‌کنیم. مولفه z میدان روی محور z ، $B_z(z)$ ، شناخته شده است و برابر است با $B_z(z) = B_z(L) = B_z$ ، که در آن L مقدار ثابتی است. یک سیم پیچ دایره‌ای دارای شعاع a ، مقاومت R و محور منطبق بر محور z قاب مرجع ما است. سیم پیچ یک حرکت انتقالی را با سرعت ثابت $v = v\hat{z}$ انجام می‌دهد و شعاع آن به اندازه‌ای کوچک فرض می‌شود که میدان مغناطیسی همیشه تقریباً روی سطح محدود شده توسط سیم پیچ یکنواخت باشد.



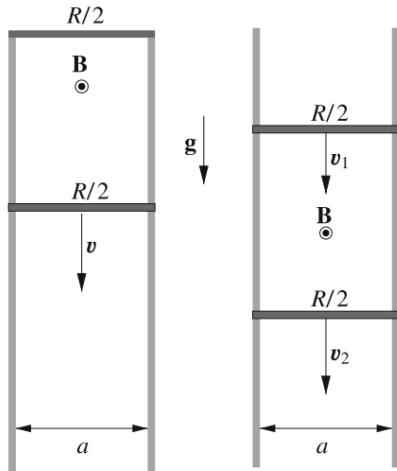
شکل (۶ - ۶)

- الف: جریانی را که در سیم پیچ می‌گذرد پیدا کنید.
- ب: توان P را که در اثر گرمایش ژول توسط سیم پیچ تلف می‌شود و نیروی اصطکاک مربوطه f روی سیم پیچ را پیدا کنید.
- ج: نیروی اصطکاک f را به عنوان نیروی مغناطیسی حاصل روی حلقه حامل جریان I محاسبه کنید.

۳.۶ مداری با قطعات "سقوط آزاد"

در حضور میدان گرانشی زمین g ، دو میله با رسانایی بالا به صورت عمودی و در فاصله a از یکدیگر قرار دارند. یک میدان مغناطیسی یکنواخت و افقی B عمود بر صفحه‌ای است که توسط میله‌های عمودی تعریف شده است. دو میله افقی، هر دو با جرم m ، مقاومت $R/2$ و طول a قادر به حرکت، بدون اصطکاک، با انتهای آنها به طور پیوسته با دو میله عمودی در تماس هستند. مقاومت دو میله عمودی ثابت بسیار کوچکتر از $R/2$ در نظر گرفته می‌شود، به طوری که مقاومت خالص مدار مستطیلی حاصل، با تقریب بسیار خوب، همیشه مستقل از موقعیت دو میله افقی، R است.

ابتدا فرض کنید که نوار افقی بالایی ثابت است، در حالی که میله پایینی یک سقوط "آزاد" را در $t = 0$ شروع می‌کند. بیایید با $v = v(t)$ سرعت میله سقوط در زمان t را با $v(0) = 0$ نشان دهیم.



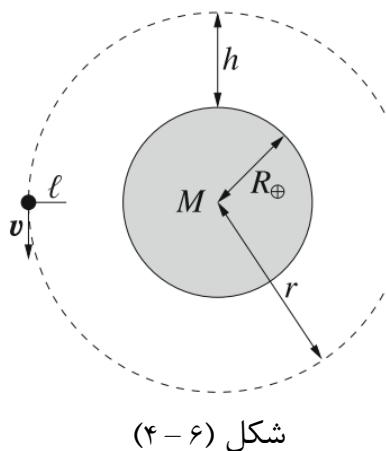
شکل (۳ - ۶)

- الف: معادله حرکت میله در حال سقوط را بنویسید، جواب $v(t)$ را پیدا کنید و نشان دهید که به صورت مجانبی، میله به سرعت انتهائی v_t نزدیک می‌شود.

- ب: توان تلف شده در مدار توسط گرمایش ژول در زمانی که $v(t) = v_t$ و کار مکانیکی انجام شده در واحد زمان توسط گرانش در این شرایط را محاسبه کنید. حال حالتی را در نظر بگیرید که در $t = 0$ ، میله بالایی از قبل دارای سرعت $v_0 \neq 0$ به سمت پایین است، در حالی که میله پایین شروع به سقوط "آزاد" می‌کند.

- ج: معادلات حرکت هر دو میله در حال سقوط را بنویسید و رفتار مجانبی سرعت آنها $v_1(t)$ و $v_2(t)$ و جریان در مدار $I(t)$ را مورد بحث قرار دهید.

۴.۶ متصل به ماهواره



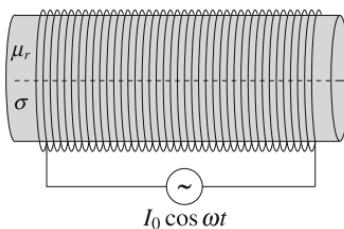
شکل (۴ - ۶)

میدان مغناطیسی زمین در سطح زمین تقریباً به میدان یک دوقطبی مغناطیسی واقع در مرکز زمین نزدیک است. مقدار آن از $2/5 \times 10^{-5}$ تا $6/5 \times 10^{-5}$ تسلا یا 0.25 تا 0.65 گاووس)، (در واحدهای گاووسی)، با مقدار $B_{eq} \approx 3/2 \times 10^{-5} T$ در خط استوا است. همانطور که در شکل نشان داده شده، یک ماهواره بر روی صفحه استوایی مغناطیسی با سرعت $v \approx 8$ کیلومتر بر ثانیه در ارتفاع ثابت $h \approx 100$ کیلومتر بالای سطح زمین حرکت می‌کند (در مقیاس نیست!). یک افسار (بند یا خط سربی)، متشکل از یک کابل فلزی به طول $l = 1$ کیلومتر، از ماهواره آویزان است و به مرکز زمین اشاره می‌کند.

- الف: نیروی محرکه الکتریکی روی سیم را پیدا کنید.

- ب: ماهواره در حال حرکت در یونوسفر است، جایی که حامل‌های بار در فضای بیرونی برای بستن مدار در دسترس هستند، بنابراین جریانی می‌تواند در طول سیم جریان یابد. فرض کنید که یونوسفر به طور چلب با همان سرعت زاویه‌ای زمین در حال چرخش است. توان تلف شده توسط گرمایش ژول در سیم و نیروی مکانیکی روی سیم را به صورت تابعی از مقاومت آن R پیدا کنید.

۶.۵ جریان پیچشی در سیم‌لوله



شکل (۶-۵)

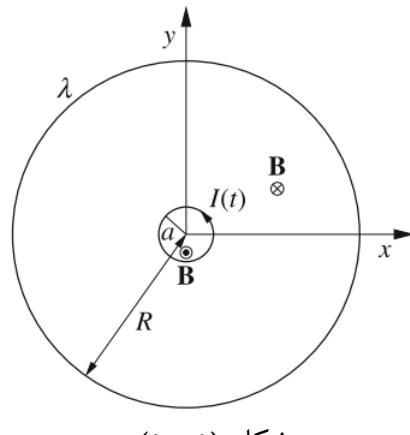
یک سلونونید بلند از یک سیم پیچ مارپیچی از n دور در واحد طول تشکیل شده که به دور یک استوانه فرومغناطیسی نرم به شعاع R و طول R پیچیده شده است. ماده فرومغناطیسی دارای گزندگی مغناطیسی نسبی μ_r و رسانایی الکتریکی σ است. یک جریان AC $I = I_0 \cos \omega t$ در سیم پیچ جریان دارد.

- الف: میدان الکتریکی القا شده در شیر برقی را پیدا کنید.
- ب: توضیح دهید که چرا استوانه گرم می‌شود و توان تلف شده را محاسبه کنید.
- ج: چگونگی تأثیر جریان‌های القایی بر میدان مغناطیسی در شیر برقی را ارزیابی کنید. (اثرات مرزی و جریان جابجایی ناچیز فرض می‌شوند).

۶.۶ پارادوکس فاینمن

یک حلقه نارسانا به شعاع R در صفحه xy با مرکز آن در مبدا دستگاه مختصات، ساکن است. حلقه دارای جرم m ، ضخامت ناچیز و بار الکتریکی Q است که به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است، به طوری که حلقه دارای چگالی بار خطی $\lambda = Q/(2\pi a)$ است. حلقه آزاد است و بدون اصطکاک به دور محور خود می‌چرخد.

یک حلقه دایره‌ای ابرسانا به شعاع $a \ll R$ با محور x با حلقه باردار و حامل جریان الکتریکی I_0 نیز مانند شکل (۶-۶) روی صفحه xy قرار دارد. در زمان $t = 0$ حلقه ابرسانا بالاتر از دمای بحرانی خود گرم می‌شود و به رسانایی عادی تغییر می‌کند. در نتیجه، جریان آن طبق قانون $I = I(t)$ به صفر می‌رسد.



شکل (۶-۶)

- الف: با نادیده گرفتن اثرات خود القایی، سرعت زاویه‌ای $\omega(t) = \omega$ حلقه باردار را به صورت تابعی از جریان $I(t)$ در حلقه کوچکتر محاسبه کنید. سرعت زاویه‌ای نهایی ω_f و تکانه زاویه‌ای نهایی L_f حلقه باردار را پیدا کنید.
- ب: میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه، B_c ، که توسط چرخش حلقه ایجاد شده است، محاسبه کنید.
- ج: بحث کنید که چگونه نتایج الف با در نظر گرفتن "خود القایی" L حلقه باردار اصلاح می‌شوند.

این یکی از نسخه‌های احتمالی پارادوکس دیسک فاینمن [۲] است که در جلد دوم، بخش ۴-۱۷، از سخنرانی‌های فاینمن در مورد فیزیک، ارائه شده است. پارادوکس ظاهری به‌این دلیل به وجود می‌آید که تکانه زاویه‌ای مکانیکی اولیه سیستم صفر است، هیچ گشتاور خارجی اعمال نمی‌شود، و می‌توان انتظار داشت (به‌اشتباه) تکانه زاویه‌ای کل نهایی صفر باشد، یعنی بدون چرخش حلقه. البته این نتیجه‌گیری به‌دلایلی که بیشتر در مسئله ۸-۸ بحث شده، اشتباه است.

۷.۶ جریان‌های الکتریکی القایی در اقیانوس

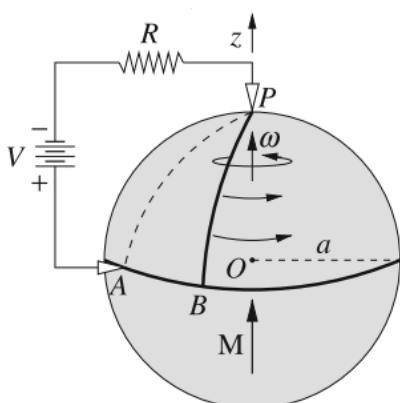
یک سیال با سرعت یکنواخت v در حضور یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت B عمود بر v جریان دارد. سیال دارای هدايت الکتریکی σ و چگالی جرمی ρ است.

• الف: چگالی جریان الکتریکی J القا شده در سیال را محاسبه کنید.

• ب: یک تخمین عددی از $|J|$ برای اقیانوس‌های زمین، با دانستن اینکه میدان مغناطیسی زمین دارای مقدار متوسط $B = 5 \times 10^{-5} T$ ، $\sigma \approx 0.5 G \Omega^{-1} m^{-1}$ ، $\rho \approx 10^1 s^{-1} cm^{-1}$ است (آب دریا گاؤسی)، و یک مقدار معمولی سرعت جریان $v = 1$ متر بر ثانیه است.

• ج: به‌دلیل وجود جریان القایی، نیروی مغناطیسی تمایل به کاهش سرعت سیال دارد. مرتبه بزرگی ثابت زمانی این اثر را تخمین بزنید.

۸.۶ یک کره مغناطیسی شده به عنوان موتور تک قطبی



شکل (۷-۶)

یک کره مغناطیسی شده و غیر رسانا به‌شعاع a ، جرم m و مغناطیسی دائمی و یکنواخت M در سرتاسر M خود دارد. یک مدار الکتریکی با چسباندن یک سیم رسانا در امتداد یک نصف النهار، از قطب P به‌استوا، و یک سیم رسانا دیگر در اطراف کل استواهای کره، همانطور که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است، تشکیل می‌شود. مدار توسط دو کن tact تتماسی (فلش‌های سفید در شکل ۷-۶) که قطب P و نقطه A از سیم روی استواهای کره را به‌منبع ولتاژ نیروی الکتروموتور V متصل می‌کند بسته می‌شود. مدار حاصل دارای مقاومت R است.

• الف: گشتاور روی کره را زمانی که جریان I در مدار می‌گذرد، محاسبه کنید.

• ب: اگر کره آزاد باشد بدون اصطکاک حول محور z در دستگاه مختصات استوانه‌ای، موازی با M و از مرکز O کره بچرخد، به‌طور مجانبی به سرعت زاویه‌ای ω_t می‌رسد. ω_t و زمان مشخصه سیستم را محاسبه کنید.

۹.۶ گرمایش القای

یک ماده همگن با رسانایی الکتریکی σ و نفوذپذیری مغناطیسی نسبی μ_r ، هر دو را حقیقی، مثبت و مستقل از فرکانس در نظر بگیرید. گذردهی الکتریکی $\epsilon_r = 1$ است.

- الف: نشان دهید که اگر چگالی جریان جابجایی $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi k_e} \mathbf{B}$ را بتوان نادیده گرفت، میدان مغناطیسی \mathbf{B} درون ماده از معادله (۶.۶) تبعیت می‌کند و مقدار ثابت حقیقی α را تعیین کنید.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6.6)$$

این ماده در حضور یک میدان مغناطیسی نوسانی یکنواخت،

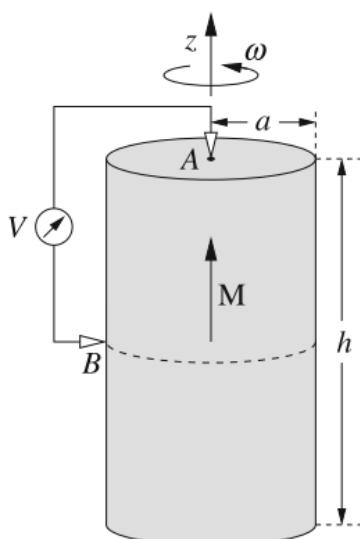
$$\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{y}} B_0 \cos(\omega t) = \hat{\mathbf{y}} R e(B_0 e^{j\omega t})$$

نیم فضای $x > 0$ را پر می‌کند.

- ب: با فرض اینکه جریان جابجایی ناچیز است، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}(x, t)$ را برای $x > 0$ محاسبه کنید. بحث کنید که در چه شرایطی نتیجه تقریب خوبی برای مورد یک تیغه محدود از مواد است.

- ج: توان تلف شده در محیط توسط گرمایش ژول را محاسبه کنید.

۱۰.۶ استوانه مغناطیسی به عنوان مولد DC



یک استوانه سخت آهنی بلند دارای ارتفاع h ، شعاع $a \ll h$ و مغناطیسی دائمی و یکنواخت M در سرتاسر حجم خود است. مغناطش موازی با محور استوانه است که ما آن را به صورت محور z دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) انتخاب می‌کنیم.

- الف: نشان دهید که میدان مغناطیسی داخل استوانه، دور از دو قاعده، $B_0 \approx 4\pi(k_m/b_m)M$ ، $B_0 \approx 4\pi M$ در واحدهای SI، $B_0 = \mu_0 M$ در واحدهای گاوسی است. نشان دهید که بزرگی مولفه z میدان در دو قاعده $B_z \approx B_0/2$ است.

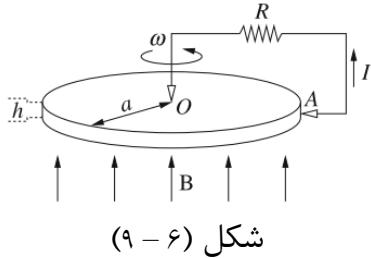
شکل (۶ - ۸)

- ب: دو کنکات تتماسی (فلش‌های سفید در شکل ۶-۶) مرکز قاعده بالای استوانه، A ، و نقطه‌ای از وسط استوانه، B ، را به یک ولت‌متر متصل می‌کنیم. استوانه در چرخش حول محور z با سرعت زاویه‌ای ثابت ω نگه داشته می‌شود. نیروی الکتروموتور اندازه‌گیری شده توسط ولت‌متر را محاسبه کنید.

این مسئله از مثال مرجع [۱]، بخش ۸۸، صفحه ۳۷۹ گرفته شده است.

۱۱.۶ دیسک فاراده و مولد خودپایدار

یک دیسک کاملاً رساناً، به شعاع a و ضخامت $h \ll a$ ، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω (موازی با محور دیسک)، در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت B موازی با ω می‌چرخد.

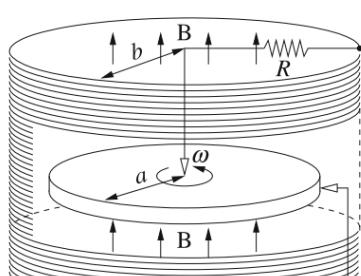


شکل (۶ - ۶)

الف: میدان الکتریکی E را در دیسک در شرایط پایدار، و افت پتانسیل مربوطه بین مرکز و مرز دیسک را محاسبه کنید (راهنمائی: کل نیروی وارد بر حامل‌های بار در حالت تعادل باید صفر باشد).

- ب: اکنون مانند شکل (۶-۶)، با اتصال مرکز دیسک به نقطه‌ای از محیط توسط کنکات‌های تتماسی (فلش‌های سفید در شکل)، یک مدار بسته تشکیل می‌دهد. فرض کنید R مقاومت کل مدار حاصل است. گشتاور خارجی مورد نیاز برای حفظ چرخش دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت را محاسبه کنید.

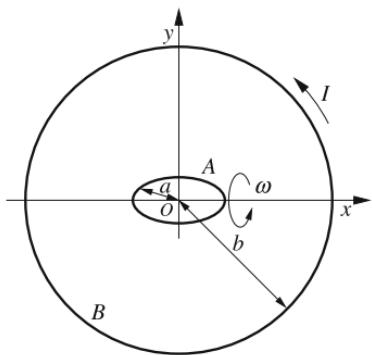
- ج: در نهایت، دیسک چرخان را در مرکز یک سیم‌لوله بلند به شعاع $a > b$ و n دور در واحد طول قرار می‌دهیم. همانطور که در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده است، دیسک و سیم‌لوله هم محور هستند.



شکل (۶ - ۱۰)

دو نقطه کنکات تتماسی (ب) اکنون به انتهای سیم‌لوله متصل شده‌اند، به طوری که دیسک چرخان جریان گردش در پیچ‌ها را تامین می‌کند. مقاومت کل مدار دیسک-سیم‌لوله R است. بنابراین جریان در گردش به دلیل چرخش دیسک و حضور میدان مغناطیسی B است که خود جریان با گردش در سیم‌لوله (دینام خودپایدار) ایجاد می‌کند. مقدار ω را برای شرایط حالت پایدار بیابید. این یک مدل ابتدایی برای یک دینام است که با چرخش، مانند مکانیسم تولید میدان مغناطیسی زمین [۳] خودپایدار است.

۱۲.۶ القای متقابل بین دو حلقه مدور



شکل (۱۱ - ۶)

مراکز دو حلقه رسانای دایره‌ای A و B ، به ترتیب شعاع a و $b \gg a$ ، در مبدأ O یک قاب مرجع دکارتی قرار دارند. در زمان $t = 0$ هر دو حلقه روی آن قرار دارند صفحه xy همانطور که در شکل (۱۱ - ۶) نشان داده شده است، در حالی که حلقه بزرگتر در حالت سکون باقی می‌ماند، حلقه کوچکتر، با مقاومت R ، حول یکی از قطرهای خود، روی محور x ، با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. یک جریان ثابت I در حلقه بزرگتر در گردش است.

- الف: جریان I_A القاء شده در حلقه A را محاسبه کنید و از اثرات خود القایی صرفنظر کنید.

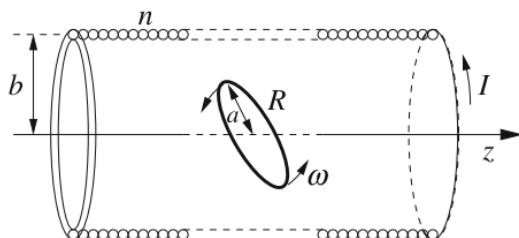
ب: توان تلف شده در حلقه A به دلیل گرمایش ژول را محاسبه کنید.

ج: گشتاور مورد نیاز برای نگه داشتن حلقه A در چرخش و توان مکانیکی مربوطه را محاسبه کرد.

د: حال حالتی را در نظر بگیرید که حلقه A روی صفحه xy در حالت استراحت است، با جریان ثابت I در آن در عبور کرده، در حالی که حلقه B حول محور x با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. با نادیده گرفتن اثرات خود القایی، نیروی الکتروموتور القا شده در B را محاسبه کنید.

۱۳.۶ القای متقابل بین سیم‌لوله و حلقه

یک حلقه رسانا به شعاع a و مقاومت R با مرکز سیم‌لوله با شعاع $b > a$ و چرخش در واحد طول، مانند شکل (۱۲ - ۶)، قرار دارد. حلقه با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول قطری عمود بر محور سیم‌لوله می‌چرخد، در حالی که یک جریان ثابت I در سیم‌لوله جریان دارد.

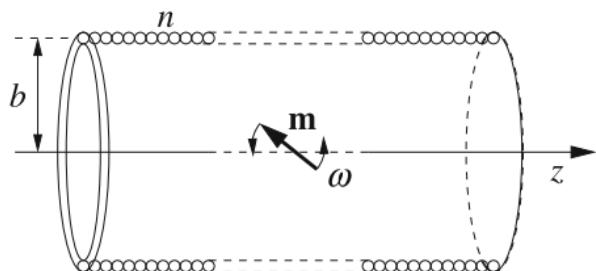


شکل (۱۲ - ۶)

• الف: شار میدان مغناطیسی از طریق سیم پیچ دوار را بهصورت تابعی از زمان محاسبه کنید.

• ب: گشتاور اعمال شده توسط نیروهای خارجی بر روی حلقه را بهمنظور حفظ چرخش آن با سرعت زاویه‌ای ثابت محاسبه کنید. حال فرض کنید که سیم‌لوله از منبع جریان جدا شده است و حلقه دوار با یک دوقطبی مغناطیسی m جایگزین شده است که همچنان با سرعت زاویه ای ثابت ω مانند شکل (۶-۱۳)، در حال چرخش است.

• ج: نیروی الکتروموتور القا شده در سیم لوله را محاسبه کنید.



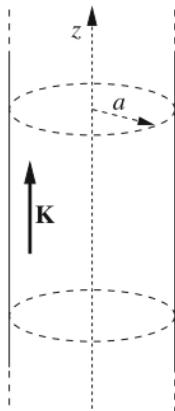
شکل (۶-۱۳)

۱۴.۶ اثر پوستی و اندوکتانس گردابی در سیم اهمی

یک سیم استوانه‌ای بلند و مستقیم بهشعاع r و رسانایی σ (که فرض می‌کنیم در محدوده فرکانس در نظر گرفته شده حقیقی و ثابت است) جریان متناوب فرکانس زاویه‌ای ω را حمل می‌کند. امپدانس در واحد طول سیم، Z_l را می‌توان بهصورت نسبت میدان الکتریکی در سطح سیم بهکل جریان از طریق مقطع سیم تعریف کرد. Z_l را تابعی از ω محاسبه کنید.

۱۵.۶ فشار مغناطیسی و اثر پینچ برای جریان سطحی

جریان I روی سطح استوانه‌ای بهشعاع a و طول بینهایت، در جهت موازی با محور \hat{z} جریان دارد. لایه جاری دارای ضخامت ناچیزی است، بهطوری که می‌توانیم آن را بصورت چگالی جریان سطحی $K = 2\pi aK$ ، با $I = K\hat{z}$ بنویسیم. محاسبه کنید



شکل (۶-۱۴)

- الف: میدان مغناطیسی B در کل فضا،

- ب: نیرو در واحد سطح P بر سطح استوانه

ج: تغییر انرژی میدان مغناطیسی (در واحد طول) dU_m مربوط به تغییرات بینهایت کوچک شعاع da . $da \neq P(2\pi a)^{-1} dU_m / da$ است و نحوه محاسبه صحیح P از تغییر انرژی را توضیح دهد.

راهنمایی: برای حالت (ب) ممکن است مفید باشد، ابتدا نشان دهیم که برای میدان مغناطیسی استاتیک داریم:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi k_m} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right] \quad (7.6)$$

۱۶.۶ فشار مغناطیسی بر یک سیم‌لوله

یک منبع جریان ثابت I را به یک سیم‌لوله به شعاع a ، طول $h \gg a$ می‌دهد، به طوری که اثرات مرزی ناچیز و n سیم پیچ در واحد طول است.

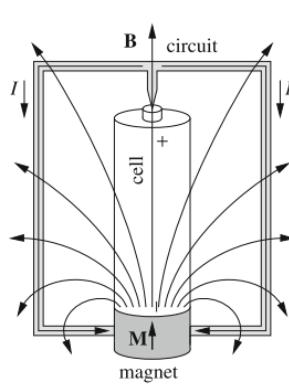
- الف: با محاسبه نیروی مغناطیسی روی سیم پیچ‌ها، فشار مغناطیسی روی سطح سیم‌لوله را مستقیماً محاسبه کنید.

- ب: اکنون فشار مغناطیسی روی سطح سیم‌لوله را با محاسبه تغییر انرژی مغناطیسی سیستم برای افزایش بی‌نهایت کوچک da شعاع سیم‌لوله و کار مربوطه انجام شده توسط منبع جریان به منظور ثابت نگه داشتن I محاسبه کنید.

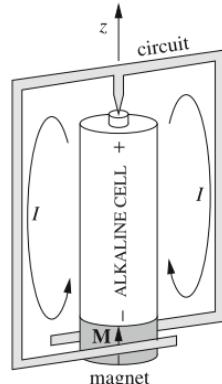
۱۷.۶ موتور هموپولار

موتور هموپولار^۲ یک موتور الکتریکی با جریان مستقیم متشکل از مداری است که جریان مستقیم I را در حضور میدان مغناطیسی ساکن دارد. مدار آزاد است تا حول یک محور ثابت بچرخد، به طوری که زاویه بین جریان و میدان مغناطیسی در هر قسمت از مدار در زمان ثابت بماند. نیروی الکتروموتور حاصل پیوسته است و موتور هم‌قطبی به هیچ وسیله‌ای مانند کموتاتور برای تغییر جریان نیاز ندارد. اما همچنان برای کار کردن به حلقه‌های لغزنده (یا تماس‌های جاروبک) نیاز دارد. "هموپولار" به این معنی است که قطبیت الکتریکی هادی (جهت عبور جریان در هر نقطه از مدار) و میدان مغناطیسی در زمان تغییر نمی‌کند و موتور نیاز به کموتاتور ندارد. یک تحقیق عملی ساده از یک موتور هموپولار در شکل های (۶-۱۵) و (۶-۱۶)، بر اساس مطالب و یکی‌پدیا نشان داده شده است.

^۲Homopolar Motor



شکل (۶ - ۶)



شکل (۶ - ۵)

ایده به شرح زیر است: یک باتری الکتروشیمیایی یک جریان DC را به مدار نشان داده شده در شکل ها اعمال می کند، در حالی که یک میدان مغناطیسی ایجاد می شود که توسط استوانه آهنربای دائمی واقع در پایین سلول، در تماس الکتریکی با قطب منفی آن ایجاد می شود. همانطور که در شکل (۶ - ۶) نشان داده شده است. میدان مغناطیسی دارای تقارن چرخشی حول محور z است و علیرغم چرخش آهنربا در زمان ثابت است و مدار آزاد است تا به دور محور z بچرخد. نیروهای مغناطیسی روی مدار حامل جریان، گشتاور ایجاد و مدار شروع به چرخش می کند.

بعاد، جرم و مقاومت مدار (جرم شامل باتری و آهنربا)، ولتاژ باتری و شدت میدان مغناطیسی تولید شده توسط آهنربا در هر نقطه از مدار مشخص است. گشتاور اثر بر مدار و سرعت زاویه ای سیستم را به صورت تابعی از زمان بیابید

مراجع:

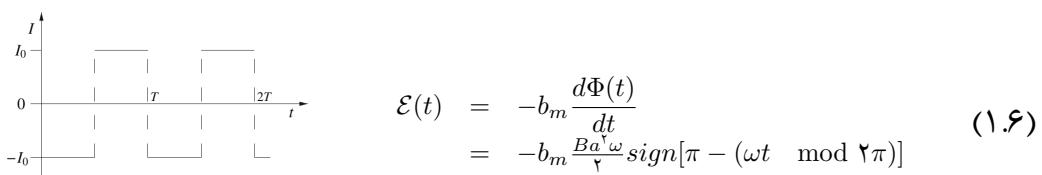
1. R. Becker, *Electromagnetic Fields and Interactions*, vol. I (Electromagnetic Theory and Relativity, Blackie, London and Glasgow, 1964)
2. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 2006. Volume II, Section 17-4
3. R. T. Merrill, *Our magnetic Earth: the Science of Geomagnetism*, Chapter 3, Chicago University Press, 2010

حل مسائل فصل ۶

ح: القای مغناطیسی و میدانهای متغیر با زمان

۱.۶ مولد موج مربعی

الف: حرکت تناوبی است و در یک لحظه که سطح سیم پیچ کاملاً در $x \geq 0$ نیم صفحه xy قرار دارد مبدأ زمان $t = 0$ را انتخاب می‌کنیم. با این انتخاب، شار میدان مغناطیسی از طریق سیم پیچ، $\Phi(t)$ ، با زمان افزایش می‌یابد که $2n\pi < wt < (2n+1)\pi$ ، با n عدد صحیح، و برابر است $\Phi(t) = B(wt \bmod 2\pi)a^2/2$. در اینجا، $(x \bmod y) \Phi(t) = B[2\pi(wt \bmod 2\pi)a^2/2]$ مخفف باقیمانده تقسیم x بر y با یک عدد صحیح است. وقتی $(2n+1)\pi < wt < 2(n+1)\pi$ ، شار با زمان کاهش می‌یابد و برابر با $\Phi(t) = B[2\pi(wt \bmod 2\pi)a^2/2]$ می‌شود. بنابراین نیروی محرکه الکتریکی در سیم پیچ $\mathcal{E}(t)$ است



شکل (ح-۶-۱)

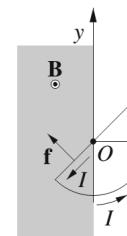
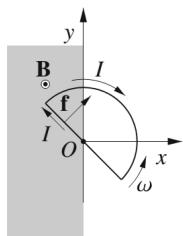
که در آن $sign(x) = x/|x|$ تابع علامت است. بنابراین، \mathcal{E} علامت خود را هر زمان که $wt = n\pi$ با عدد صحیح تقریباً معکوس می‌کند. جریان در سیم پیچ $I = \mathcal{E}/R$ است. همانطور که در شکل (ح-۶-۱) نشان داده شده است، I (و همچنین \mathcal{E}) یک موج مربعی با دوره تناوب $T = 2\pi/\omega$ و دامنه زیر است.

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = b_m \frac{B\omega a^2}{2R} \quad (2.6)$$

ب: گشتاور خارجی اعمال شده به سیم پیچ به منظور ثابت نگه داشتن سرعت زاویه‌ای آن باید گشتاور اعمال شده توسط نیروهای مغناطیسی را متعادل کند. نیروی

مسائل الکترومغناطیس

مغناطیسی روی عنصر مدار حامل جریان $df = b_m Idl \times B$ برابر با صفر متفاوت است. گشتاور متناظر $d\tau = r \times df = b_m^2 I r \times (dl \times B)$ که در آن r فاصله عنصر سیم پیچ dl از محور z همیشه برابر با صفر در قوس محیط



سیم پیچ است، زیرا سه بردارهای حاصلضرب سه گانه در اینجا بر یکدیگر عمود هستند. بنابراین، $d\tau$ فقط در نیمه قسمت مستقیم سیم پیچ در داخل میدان مغناطیسی، جایی که $dl = dr$ با صفر متفاوت است. در اینجا I داریم، $d\tau = -b_m^2 I_r B dr \hat{z}$ نشان داده شده، و گشتاور کل روی سیم پیچ τ برابر است با

شکل (ح-۶)

$$\tau = \int d\tau = -b_m^2 \omega \frac{B^2 a^2}{4R} \hat{z} = -b_m^2 \omega \frac{B^2 a^4}{4R} \hat{z} \quad (۳.۶)$$

و اتلاف توان مربوطه

$$P_{diss} = -\tau \omega = b_m^2 \omega^2 \frac{B^2 a^4}{4R} = RI^2 \quad (۴.۶)$$

که برابر با توان تلف شده توسط گرمایش ژول است. اتلاف توان در زمان با چشم پوشی از فازهای گذرا "سریع" در $t = n\pi/\omega$ ثابت است، که در آن I فوراً عالمت را تغییر میدهد. بنابراین، گشتاور خارجی باید توان تلف شده توسط گرمایش ژول را تامین کند.

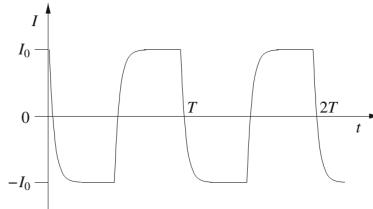
- ج: اگر خود القایی سیم پیچ L را در نظر بگیریم، معادله جریان در سیم پیچ خواهد بود:

$$\mathcal{E}(t) - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (۵.۶)$$

که در آن (t) نیروی محرکه الکتریکی (۱.۶) است، بهدلیل تغییر شار فقط در میدان خارجی. هر چقدر هم که L "کوچک" باشد، سهم آن ناچیز نیست زیرا، اگر I یک موج مربع ایده‌آل بود، مشتق آن dI/dt هر زمان که $t = n\pi/\omega$ (گذرا لحظاتی بین $-I_0$ و $+I_0$) و اگرا می‌شد. راه حل کلی رابطه (۵.۶) با در نظر گرفتن ثابت بودن (t) در هر نیم دوره است.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} + K e^{-t/t_*}, \quad (۶.۶)$$

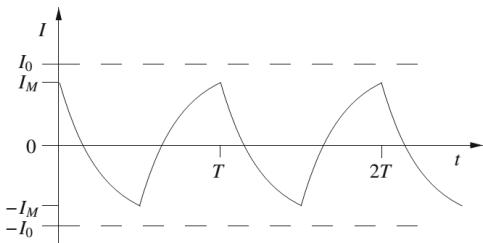
که در آن $t_* = L/R$ زمان مشخصه حلقه است و K مقدار ثابت است که از شرایط اولیه تعیین می‌شود. اگر L به اندازه کافی کوچک باشد، می‌توانیم فرض کنیم که در



شکل (ح-۶)

زمان $t = 0^-$ $I(t) = +I_0$ و $\mathcal{E}(t) = +\mathcal{E}_0$. در زمان $t = 0^+$ $I(t) = -I_0$ از \mathcal{E}_0 به $-\mathcal{E}_0$ تغییر می‌کند و ثابت K با شرط اولیه $I(0^-) = I_0 = \mathcal{E}_0/R$ برابر با $K = 2\mathcal{E}_0/R$ تعیین می‌شود. بنابراین، برای $0 < t < \pi/\omega$

$$I(t) = I_0 (2e^{-t/T} - 1), \quad (7.6)$$



در $t = (\pi/\omega)^{-}$ داریم و می‌توانیم فرض کنیم که $\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}_0$. در $t = \pi/\omega$. $I(t) = -I_0$. در $t = \pi/\omega + \mathcal{E}_0$ تغییر می‌کند، و برای $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ داریم

$$I(t) = -I_0 (2e^{-(t-\pi/\omega)/T} - 1), \quad (8.6)$$

شکل (ح-۶)

و به همین ترتیب برای دوره‌های متوالی. خود القایی سیم پیچ از تغییر آنی جریان بین $+I_0$ و $-I_0$ گلوگیری می‌کند: این تغییر به دنبال یکتابع نمایی با زمان مشخصه $t_0 = L/R$ رخ می‌دهد.

رفتار توصیف شده توسط روابط (7.6) و (8.6) تنها در صورتی معتبر است که $\ll t_0$. $T = 2\pi/\omega$ ، همانطور که در شکل (ح-۶)، نشان دهنده مورد $t_0 = 4T$ است. اگر نسبت به T ناچیز نباشد، جریان بین دو مقدار $+I_M$ و $-I_M$ در نوسان است، با $I_M < I_0$. اجازه دهید بازه زمانی $\pi/\omega \leq t \leq \pi/\omega + 25T$ را در نظر بگیریم. باید $I(\pi/\omega) = I_0$ داشته باشیم. با جایگزینی I با (6.6)، بدست می‌آوریم

$$I_M = I_0 \frac{1 - e^{-T/2t_0}}{1 + e^{-T/2t_0}} \quad (9.6)$$

نمودار $I(t)$ را دیگر نمی‌توان با یک موج مربعی تقریب زد، در شکل (ح-۶) برای حالت $t_0 = 25T$ نشان داده شده است.

۲.۶ سیم‌پیچ متحرک در میدان مغناطیسی ناهمگن

الف: با این فرض که، شار میدان مغناطیسی از طریق سیم‌پیچ را می‌توان به صورت تقریبی زیر تخمین زد:

$$\Phi_B(t) = \Phi[z(t)] \approx \pi a^2 B_0 \frac{z(t)}{L} = \pi a^2 B_0 \frac{z_0 + vt}{L} \quad (10.6)$$

که در آن z موقعیت مرکز سیم‌پیچ در $t = 0$ است. سرعت تغییر این شار مغناطیسی به نیروی الکتروموتور \mathcal{E} مرتبط است و به جریان $I = \mathcal{E}/R$ که در سیم‌پیچ در گردش است.

$$\mathcal{E} = RI = -b_m \frac{d\Phi}{dt} = -b_m \pi a^2 B_0 \frac{v}{L} \quad (11.6)$$

ب: توان تلف شده توسط گرمایش ژول است

$$P = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = b_m^2 \frac{(\pi a^2 B_0 v)^2}{L^2 R} \quad (12.6)$$

بنابراین، برای اینکه سیم‌پیچ با سرعت ثابت در حرکت باشد، باید یک نیروی خارجی f_{ext} بر سیم‌پیچ وارد کرد که کار آن قدرت تلف شده را جبران کند. لذا داریم

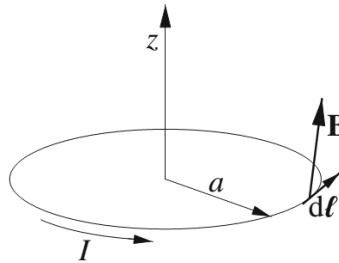
$$f_{ext} \cdot v = P = b_m^2 \frac{(\pi a^2 B_0 v)^2}{L^2 R} \quad (13.6)$$

و به سیم پیج یک نیروی اصطکاکی متناسب با سرعت آن وارد می‌شود

$$\mathbf{f}_{frict} = -\mathbf{f}_{ext} = -b_m^2 \frac{(\pi a^2 B_0 v)^2}{L^2 R} \mathbf{v} \quad (14.6)$$

- ج: نیروی \mathbf{f}_{frict} در واقع نیروی خالصی است که از انتگرال گیری نیروی $b_m I dl \times \mathbf{B}$ بر روی هر عنصر سیم پیج dl به دست می‌آید:

$$\mathbf{f}_{frict} = b_m I \oint_{coil} dl \times \mathbf{B}. \quad (15.6)$$



سهم مولفه z در \mathbf{B} نیروی شعاعی است که طبق قانون لنز، اگر $\frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0$ باشد، سیم پیج را منقبض می‌کند یا اگر $\frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0$ باشد، آن را گستردگی می‌کند. حالت نشان داده شده در شکل (ح-۶-۵) مربوط به مورد دوم است. بنابراین، \mathbf{f}_{ext} که در امتداد z است، تنها به دلیل مولفه شعاعی B_r از \mathbf{B} است.

شکل (ح-۶-۵)

مولفه B_r توسط مسئله داده نمی‌شود، اما همانطور که در پاسخ بند (الف) مسئله ۴.۵ دیدیم، می‌توان با اعمال قانون گاووس آن را محاسبه کرد. یک سطح استوانه‌ای بسته با شعاع r و ارتفاع Δz . طبق رابطه (۲۵.۵)

$$B_r \approx -\frac{B_0}{2L} r, \quad d\mathbf{f}_{frict} = b_m I dl \frac{B_0 a}{2L} \quad (16.6)$$

و با جایگزینی رابطه (۱۱.۶) و انتگرال گیری روی سیم پیج به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{fric} &= b \hat{f} z b_m I \oint_{coil} dl \frac{B_0 a}{2L} = -b \hat{f} z b_m \left(b_m \pi a^2 B_0 \frac{v}{L} \right) \left(\pi a^2 \frac{B_0 a}{2L} \right) \\ &= -b \hat{f} z b_m^2 \frac{(\pi a^2 B_0)^2}{L^2 R} v \end{aligned} \quad (17.6)$$

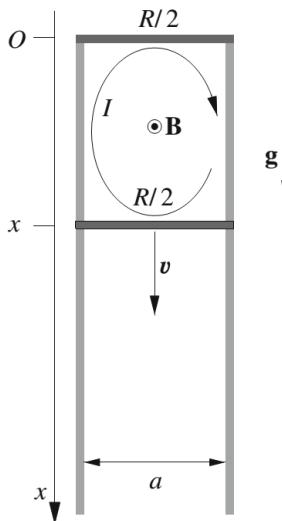
که موافق رابطه (۱۴.۶) است.

۳.۶ مداری با قطعات "سقوط آزاد"

- الف: مانند شکل (ح-۶-۶)، محور x را به سمت پایین انتخاب می‌کنیم، با مبدأ در محل میله افقی بالایی. جریان I در مدار مستطیلی برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -b_m \frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -b_m \frac{Ba}{R} \frac{dx}{dt} = -b_m \frac{bav}{R} \quad (18.6)$$

که در آن x موقعیت میله در حال سقوط، و $v = \dot{x}$ سرعت آن است. سرعت مثبت و جریان منفی است، یعنی در جهت عقربه‌های ساعت، مطابق با قانون لنز، گردش می‌کند. نیروی مغناطیسی روی میله در حال سقوط $\mathbf{f}_B = b_m Ba I \hat{x}$ ، ضد موازی با نیروی گرانشی است و معادله حرکت برابر است با:



شکل (ح-۶-۶)

$$m \frac{dv}{dt} = mg + b_m BaI = mg + b_m \frac{(Ba)^2}{R} v \quad (19.6)$$

جواب معادله (۱۹.۶) با شرط اولیه $v(0) = 0$ خواهد بود:

$$v(t) = v_t (1 - e^{-t/\tau}) \quad (20.6)$$

که در آن

$$\tau = \frac{mR}{(b_m Ba)^2} \quad v_t = g\tau = \frac{mRg}{(b_m Ba)^2} \quad (21.6)$$

با $\infty \rightarrow t$, سقوط میله به سرعت نهایی v_t نزدیک می‌شود.

- ب: وقتی $v = v_t$ توان تلف شده در مدار توسط گرمایش ژول برابر است با:

$$P_j = RI_t^2 = \frac{(b_m Ba v_t)^2}{R} = \left(\frac{mg}{b_m Ba}\right)^2 R \quad (22.6)$$

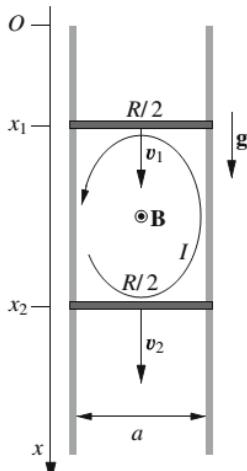
که در آن $I_t = -b_m Ba v_t / R$ "جريان پایانه" است. از طرف دیگر، کار انجام شده توسط نیروی گرانش در واحد زمان برابر است با:

$$P_G = mg \cdot v_t = mg \frac{mgR}{(b_m Ba)^2} = P_j \quad (23.6)$$

در موافق با بقای انرژی برای میله‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

- ج: هنگامی که هر دو میله افقی در حال سقوط هستند، موقعیت میله بالای را با x_1 و موقعیت میله پایینی را با x_2 با $v_1 = \dot{x}_1$ و $v_2 = \dot{x}_2$ مانند شکل (ح-۶-۷)، نشان می‌دهیم. I جریان در مدار است

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -b_m \frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -b_m \frac{Ba}{R} \frac{d}{dt}(x_2 - x_1) \\ = -b_m \frac{Ba}{R} (v_2 - v_1) \quad (24.6)$$



شکل (ح-۶-۷)

گردش در خلاف جهت عقربه‌های ساعت ($I > 0$) است اگر $v_2 > v_1$ و در جهت عقربه‌های ساعت ($I < 0$) اگر $v_1 < v_2$ باشد. نیروهای مغناطیسی وارد بر دو میله در حال سقوط به ترتیب $\mathbf{f}_{B2} = b_m Ba I \hat{x}$ و $\mathbf{f}_{B1} = -b_m Ba I \hat{x}$ هستند. مستقل از علامت I ، $\mathbf{f}_{B2} = -\mathbf{f}_{B1}$ داریم، به طوری که نیروی مغناطیسی خالص روی سیستمی که دو میله در حال سقوط را تشکیل می‌دهد، صفر است. معادلات حرکت بدین ترتیب است

$$m \frac{dv_1}{dt} = mg + b_m \frac{(Ba)^2}{R} (v_2 - v_1) \quad (25.6)$$

$$m \frac{dv_2}{dt} = mg - b_m \frac{(Ba)^2}{R} (v_2 - v_1) \quad (26.6)$$

با شرایط اولیه $v_1(0) = v_0$ و $v_2(0) = v_0$. مجموع معادلات (۲۵.۶) و (۲۶.۶) برابر است

با:

$$\frac{d}{dt}(v_1 + v_2) = 2g, \quad \text{جواب} \quad \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_0}{2} + gt \quad (27.6)$$

به این معنی که مرکز جرم دو میله افقی مستقل از میدان مغناطیسی B از یک سقوط آزاد پیروی می‌کند. از طرف دیگر، تفاوت معادلات (۲۵.۶) و (۲۶.۶) است.

$$\frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = -\frac{2}{\tau}(v_1 - v_2), \quad \text{جواب} \quad \frac{v_1 - v_2}{2} = v_0 e^{-2t/\tau} \quad (28.6)$$

که در آن $\tau = mR/(b_m Ba)^2$ است. برای سرعت‌های دو میله افقی بدست می‌آوریم

$$v_1 = \frac{v_0}{2} \left(1 + e^{-2t/\tau} \right) + gt, \quad v_2 = \frac{v_0}{2} \left(1 - e^{-2t/\tau} \right) + gt \quad (29.6)$$

$$\text{در حد حالت ماندگار } (\tau \gg t) \text{ داریم} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} v_2 = \frac{v_0}{2} + gt, \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I = 0. \quad (30.6)$$

زیرا برای $v_1 = v_2$ ، شار B از درون حلقه ثابت است.

۴.۶ سیم متصل به ماهواره

الف: در حدود تقریبی ما، می‌توانیم فرض کنیم که میدان مغناطیسی در مدار ماهواره ثابت و برابر با میدان استوای زمین، $B_{eq} \approx ۳/۲ \times ۱۰^{-۵} T$ است. میدان موازی با محور مدار ماهواره است و در طول سیم اتصال ثابت است. نیروی محرکه الکتریکی روی سیم اتصال برابر با انتگرال خط نیروی مغناطیسی در طول سیم است.

$$\mathcal{E} = b_m \int_{tether} dl \cdot \mathbf{v}(r) \times \mathbf{B}_{eq} = b_m \int_{R_{\oplus+h}}^{R_{\oplus+h-l}} dr \omega r B_{eq}, \quad (31.6)$$

که در آن $\omega = v/r$ سرعت زاویه‌ای ماهواره است. همچنین در حدود تقریبی ما، می‌توانیم فرض کنیم که $v(r) \approx v(R_{\oplus}) \approx ۸۰۰۰ m/s$ در طول سیم ثابت است و بدست آوریم

$$\mathcal{E} \approx b_m v l B_{eq} = \begin{cases} ۸۰۰۰ \times ۱۰۰۰ \times ۳/۲ \times ۱۰^{-۵} \approx ۲۵۰ V, & SI \\ \frac{1}{c} \times ۸ \times ۱۰^۵ \times ۱۰^۵ \times ۰,۳۲ \approx ۰,۸۵ statV, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (32.6)$$

ب: با نادیده گرفتن مقاومت یونوسفر، جریان I که در سیم در گردش است و توان مربوطه که توسط ژول گرمایش P_{diss} تلف می‌شود، به ترتیب عبارتند از:

$$I = \frac{athcal{E}}{R} = b_m \frac{vl B_{eq}}{R}, \quad P_{diss} = RI^2 = b_m^2 \frac{v^2 l^2 B_{eq}^2}{R} \quad (33.6)$$

توان تلف شده در سیم اتصال توسط گرمایش ژول باید برابر با منهای کار انجام شده توسط نیروی مغناطیسی روی سیم باشد. این را می‌توان به راحتی تأیید کرد، زیرا نیروی مغناطیسی وارد بر سیم برابر است با

$$\mathbf{F} = b_m Il \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{eq} = -b_m^2 \frac{B_{eq}^2 l^2}{R} \mathbf{v} \quad (34.6)$$

و نرخ کار انجام شده مربوطه خواهد بود

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -b_m^2 \frac{B_{eq}^2 l^2}{R} v^2 = -P_{diss} \quad (35.6)$$

اگر فرض کنیم که اتصال سیم مسی (رسانایی $\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ، SI $\sigma \approx 10^{16} s^{-1}$) باشد، مقدار نیروی کشش مغناطیسی روی سیستم گاوی $A = 1 cm^2$ با سطح مقطع $l = 1 cm$ برابر است با:

$$F_{drag} = b_m^2 \frac{B_{eq}^2 l^2}{l/(\sigma A)} v = \begin{cases} \frac{(2/2 \times 10^{-5})^2 \times 1000}{1/(10^7 \times 10^{-4})} \times 8000 \approx 8.2 N, & SI \\ \frac{1}{c} \frac{(0.32)^2 \times 10^5}{1/(9 \times 10^{16})} & گاوی \end{cases} \quad (36.6)$$

این مسئله یک توصیف ابتدایی از اصل "سیستم ماهواره‌ای متصل" را ارائه می‌دهد که در برخی از ماموریت‌های شاتل فضایی به عنوان یک مولد احتمالی نیروی الکتریکی برای سیستم‌های مداری مورد بررسی قرار گرفته است.

۵.۶ جریان پیچشی در سیم‌لوله

الف: جریان وابسته به زمان در سیم‌لوله یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان ایجاد می‌کند که به نوبه خود، سهم وابسته به زمان را در میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. میدان الکتریکی القایی به چگالی جریان جابجایی و در یک هادی به چگالی جریان رسانایی $\sigma E = J$ مرتبط است. هر دو چگالی جریان به نوبه خود بر میدان مغناطیسی تأثیر می‌گذارند. با توجه به فرضیات تقارن ما، در یک سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) ، با محور سلوونوئید به عنوان محور z ، تنها مولفه غیر صفر میدان مغناطیسی E_ϕ و میدان B_z تنها مولفه غیر صفر الکتریکی است، بنابراین تنها مولفه غیر صفر چگالی جریان هدایت J_ϕ است. هر دو E_ϕ و B_z فقط به r بستگی دارند. در اصل ما باید معادلات (۳۷.۶) و (۳۸.۶) را حل کنیم که در مختصات استوانه‌ای نتیجه می‌دهند (جدول آ-۱ پیوست).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} = -b_m \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (37.6)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = 4\pi k_m \sigma + \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial E_\phi}{\partial t} \quad (38.6)$$

یافتن راه حل کامل برای (۳۷.۶) و (۳۸.۶) ممکن است اما تا حدودی پیچیده است. با این حال، اگر فرکانس زاویه‌ای جریان محرک به اندازه کافی کم باشد، تقریب جریان با تغییر آهسته (SVCA)^۱ یک راه حل به اندازه کافی دقیق برای مسئله ارائه می‌دهد.

در SVCA، با محاسبه B مانند حالت استاتیک شروع می‌کنیم. با نادیده گرفتن اثرات مرزی، یک جریان مستقیم I یک میدان مغناطیسی یکنواخت $B = \hat{z} 4\pi k_m \mu_r n I$ در داخل سیم‌لوله ما و $B \equiv 0$ در خارج ایجاد می‌کند. بنابراین، در داخل سیم‌لوله،

^۱Slowly Varying Current Approximation (SVCA)

مسائل الکترومغناطیس

واحدهای $B = \hat{z}4\pi k_m \mu_r n I / c$ و در واحدهای گاووسی $B = \hat{z}\mu_r n I \cos \omega t$ را جایگزین I کنیم، بدست می‌آوریم

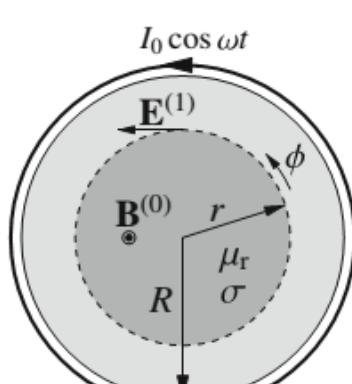
$$\mathbf{B}^{(0)} = \hat{z}4\pi k_m \mu_r n I \cos \omega t \quad (39.6)$$

که آن را به صورت تقریب مرتبه صفر خود برای میدان داخل سیم‌لوله فرض می‌کنیم. در مرحله بعدی SVCA، اصلاح مرتبه اول را با محاسبه میدان الکتریکی $\mathbf{E}^{(1)}$ شده با رابطه (۳۹.۶)، و چگالی جریان مرتبط با آن محاسبه می‌کنیم. این چگالی جریان به نوبه خود به اصلاح مرتبه اول میدان مغناطیسی کمک می‌کند. در گذشته، اگر اصلاح مرتبه اول میدان مغناطیسی، $\mathbf{B}^{(0)}$ ، بسیار کوچکتر از $\mathbf{B}^{(1)}$ باشد، روش ما توجیه خواهد شد. و به همین ترتیب برای دستورهای تصحیح متواتی. برای سادگی بیشتر، از جریان جابجایی، یعنی آخرین عبارت در سمت راست معادله (۳۸.۶)

اگرچه گنجاندن آن دشوار نخواهد بود، چشم‌پوشی می‌کنیم.

با استفاده از رابطه (۱.۶) و مفروضات تقارن، میدان الکتریکی مرتبه اول $\mathbf{E}^{(1)(r)} = \hat{\phi} E^{(1)(r)}$ را می‌توان از مسیر انتگرال آن بر روی محیط شعاع r بدست آورد،

$$\oint \mathbf{E}^{(1)} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E^{(1)(r)} = -b_m \pi r^2 \frac{\partial B^{(0)}}{\partial t} \quad (40.6)$$



شکل (۸-۶)

که میدهد

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)(r)} &= k_m b_m 2\pi \mu_r r n I \omega \sin \omega t \hat{\phi} \\ &= \begin{cases} \frac{\mu_r}{2} r n I \omega \sin \omega t \hat{\phi} & SI \\ \frac{1}{c} 2\pi \mu_r r n I \omega \sin \omega t \hat{\phi} & گاووسی \end{cases} \end{aligned} \quad (41.6)$$

توجه داشته باشید که میدان الکتریکی القایی نیز نیروی الکتروموتور $E^{(1)}$ را در سیم‌لوله ایجاد می‌کند. ما ژنراتور تولید کننده جریان $I(t) = I_0 \cos \omega t$ را یک ژنراتور ایده‌آل فرض می‌کنیم که جریان یکسانی را در برابر هر اثری که در مدار رخ می‌دهد حفظ می‌کند (ظاهر $E^{(1)}$ به کار اضافی برای حفظ جریان نیاز ندارد).

- ب: به دلیل رسانایی σ هسته سیم‌لوله، میدان الکتریکی $\mathbf{E}^{(1)(r)}$ چگالی جریان آزموموتال $\mathbf{J}^{(1)(r)} = \sigma \mathbf{E}^{(1)(r)}$ (جریان‌های گردابی) در ماده ایجاد می‌کند. اتفاق ژول مربوطه باعث گرم شدن مواد می‌شود. انرژی تبدیل به گرما در واحد حجم در هر لحظه t برابر است با:

$$\mathbf{J}^{(1)(r)} \cdot \mathbf{E}^{(1)(r)} = \sigma [E^{(1)(r)}]^2 = \sigma (k_m b_m 2\pi \mu_r r n I \omega \sin \omega t)^2 \quad (42.6)$$

که میانگین زمانی آن خواهد بود

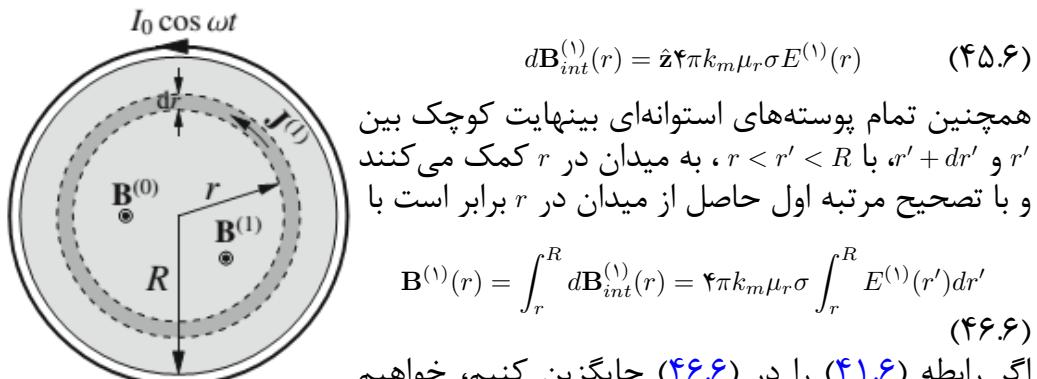
$$\langle \mathbf{J}^{(1)(r)} \cdot \mathbf{E}^{(1)(r)} \rangle = 2\sigma (k_m b_m \pi \mu_r r n I \omega)^2 \quad (43.6)$$

کل توان تلف شده با انتگرال‌گیری از رابطه (۴۳.۶) روی حجم هسته استوانه‌ای

بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} P_d &= \int_{cyl} \langle \mathbf{J}^{(1)}(r) \cdot \mathbf{E}^{(1)}(r) \rangle dr = 2\sigma(k_m b_m \pi \mu_r r n I_0 \omega)^2 \int_0^R r^2 l 2\pi r dr \\ &= \sigma \pi l (k_m b_m \pi \mu_r n I_0 \omega R)^2 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sigma \mu_r^2 \mu_r^2}{16} \pi n^2 I_0^2 \omega^2 l R^4, & SI \\ \frac{1}{c^2} \pi^3 \sigma \mu_r^2 n^2 I_0^2 \omega^2 l R^4, & \text{گاوی} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (44.6)$$

- ج: چگالی جریان القایی $\mathbf{J}^{(1)}(r) = \sigma \mathbf{E}^{(1)}(r)$ در حجم استوانه‌ای محصور در سطحی به شعاع r ایجاد می‌کند. هر پوسته استوانه‌ای بینهایت کوچک بین r و $r+dr$ در شکل (۹-۶) مانند یک سیم‌لوله به شعاع r رفتار می‌کند و میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که مقدار آن با جایگزین کردن حاصل ضرب $n I$ با حاصل ضرب $J^{(1)}(r) dr$ به دست می‌آید. بنابراین، سهم میدان مغناطیسی در r پوسته بینهایت کوچک برابر است با:



شکل (۹-۶)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)}(r) &= \lambda \pi^2 k_m^2 b_m^2 \mu_r^2 n I_0 \omega \sin \omega t \int_r^R r' dr' = \hat{z} 4\pi^2 k_m^2 b_m^2 \mu_r^2 n I_0 (R^2 - r^2) \omega \sin \omega t \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \hat{z} \frac{1}{4} \mu_r^2 \sigma n I_0 (R^2 - r^2) \omega \sin \omega t, & SI \\ \hat{z} \frac{4\pi^2}{c^2} \mu_r^2 \sigma n I_0 (R^2 - r^2) \omega \sin \omega t, & \text{گاوی} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (47.6)$$

- بنابراین، $\mathbf{B}^{(1)}(r)$ حداکثر برای $r = 0$ است، جایی که همه پوسته‌های استوانه‌ای بینهایت کوچک کمک می‌کنند، و صفر برای $r = R$ است. اگر $B^{(1)(0)} \ll B^{(0)}$ برای همه $R < r$ باشد، بحث ما برای تمام t توجیه می‌شود، یعنی اگر

$$\frac{\langle B^{(1)(0)} \rangle}{\langle B^{(0)} \rangle} = \pi k_m b_m \mu_r \sigma \omega R^2 \ll 1 \quad (48.6)$$

که در آن برآکت‌های زاویه نشان دهنده میانگین در طول زمان است. این شرط را

روی ω می‌دهد

$$\omega \ll \frac{1}{\pi k_m b_m \mu_r \sigma R^4} = \begin{cases} \frac{4}{\mu_0 \mu_r \sigma R^4}, & SI \\ \frac{c}{\pi \mu_r \sigma R^4} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (49.6)$$

بنابراین، برای مواد با مقدار بالای حاصل ضرب $\mu_r \sigma$ ، فرکانس باید بسیار کم باشد. به عنوان مثال، آهن دارای نفوذپذیری مغناطیسی نسبی ≈ 5000 و رسانایی $\sigma \approx 10^{-1} m^{-1} \Omega^{-1}$ در واحدهای SI است. با فرض یک سیم‌لوله با $R = 1$ سانتی‌متر، شرایط زیر را در فرکانس ν جریان محرک به دست می‌آوریم

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \ll \frac{4}{8\pi^2 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^3 \times 10^7 \times 10^{-4}} \approx 10^5 Hz \quad (50.6)$$

که مقدار بسیار پایینی است. آهن به دلیل نفوذپذیری مغناطیسی بالا، به عنوان هسته یک آهنربای الکتریکی خوب است، اما به دلیل رسانایی بالا، ماده ضعیفی به عنوان هسته یک ترانسفورماتور یا یک سلف است که باعث تلفات جریان گردابی زیاد می‌شود. از سوی دیگر، فریت منگنز-روی (یک ترکیب سرامیکی حاوی اکسیدهای آهن ترکیب شده با ترکیبات روی و منگنز) نیز دارای نفوذپذیری مغناطیسی نسبی ≈ 5000 است، اما رسانایی بسیار کمتری، $5 \Omega^{-1} m^{-1} \approx 5 \sigma$ دارد. بنابراین شرط فرکانس جریان محرک خواهد بود

$$\nu \ll \frac{4}{8\pi^2 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-4}} \approx 2 \times 10^5 Hz \quad (51.6)$$

و فریت در صنایع الکترونیک برای ساخت هسته‌های سلف و ترانسفورماتور و در اجزای مختلف مایکروویو استفاده می‌شود.

همچنین آموزنده است که انرژی تلف شده در هر تناوب، $U_{diss} = (2\pi/\omega)P_{diss}$ را با کل انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیم‌لوله مقایسه کنید.

$$U_M = \left\langle \frac{b_m (B^{(0)})^2}{4k_m \mu_r} \right\rangle \pi R^4 l = \begin{cases} \left\langle \frac{(B^{(0)})^2}{4\mu_0 \mu_r} \right\rangle \pi R^4 l, & SI \\ \left\langle \frac{(B^{(0)})^2}{8\pi \mu_r} \right\rangle \pi R^4 l & \text{گاوی} \end{cases} \quad (52.6)$$

این نسبت خواهد بود

$$\frac{U_{diss}}{U_M} \approx \frac{\pi}{4} k_m b_m \mu_r \sigma \omega R^4 \quad (53.6)$$

بنابراین، شرط (49.6) نیز معادل این شرط است که اتلاف انرژی در هر تناوب ناشی از گرمایش ژول در مقایسه با کل انرژی مغناطیسی ذخیره شده کم باشد.

۶.۶ پارادوکس فاینمن

- الف: اندوکتانس متقابل M بین حلقه باردار و حلقه ابررسانا با فرض $R \ll a$ است:

(مسئله ۶.۱۲)

$$M = 4\pi k_m b_m \frac{\pi a^2}{2R} \quad (54.6)$$

بنابراین، هنگامی که یک جریان $I(t)$ در حلقه کوچکتر شعاع a در حال گردش است، شار مغناطیسی از طریق حلقه باردار شده برابر است با:

$$\Phi_I = MI(t) = 4\pi k_m b_m \frac{\pi a^2}{2R} I(t) \quad (55.6)$$

اگر Φ_I وابسته به زمان باشد، یک میدان الکتریکی القایی E_I می‌دهد که انتگرال خطی آن در اطراف حلقه باردار برابر است با:

$$\oint \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{l} = -b_m \frac{d\Phi_I}{dt} = -4\pi k_m b_m \frac{\pi a^2}{2R} \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (56.6)$$

به علت تقارن مسئله، میدان E_I روی صفحه xy ازیموتال و مستقل از ϕ است. مقدار آن در حلقه باردار به این ترتیب است

$$E_l = \frac{1}{2\pi R} = \oint \mathbf{E}_l \cdot d\mathbf{l} = -k_m b_m \frac{\pi a^2}{2R} \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (57.6)$$

و نیروی وارد شده بر عنصر بی‌نهایت کوچک dl از حلقه باردار برابر است با:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{E}_I \lambda dl = -\hat{\phi} k_m b_m \frac{\pi a^2}{R} \lambda dl \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (58.6)$$

و گشتاور $d\tau$ در اطراف مرکز حلقه

$$d\tau = \mathbf{r} \times d\mathbf{f} = -\hat{\mathbf{z}} k_m b_m \frac{\pi a^2}{R} \lambda dl \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (59.6)$$

و کل گشتاور روی حلقه باردار خواهد بود

$$\tau = \int d\tau = -\hat{\mathbf{z}} k_m b_m \frac{\pi a^2}{R} \lambda dl \frac{\partial I(t)}{\partial t} = -\hat{\mathbf{z}} k_m b_m \frac{\pi a^2}{R} Q(t) \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (60.6)$$

که در آن $Q = 2\pi R \lambda$ بار کل حلقه است. معادله حرکت برای حلقه باردار به این ترتیب است

$$mR \frac{d\omega}{dt} = \tau = -k_m b_m \frac{\pi a^2}{R} Q(t) \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (61.6)$$

که در آن mR ممان اینرسی حلقه است. جواب برای $\omega(t)$ برابر است با

$$\omega(t) = -k_m b_m \frac{\pi a^2}{mR^2} Q I_0 = \int_0^t \frac{\partial I(t')}{\partial t'} dt' = k_m b_m \frac{\pi a^2}{mR^2} Q [I_0 - I(t)], \quad (62.6)$$

و سرعت زاویه‌ای نهایی خواهد بود

$$\omega_f = k_m b_m \frac{\pi a^2}{mR^2} Q I_0 = \begin{cases} \frac{\mu_0 a^2 Q}{4mR^2} I_0 & SI \\ \frac{\pi a^2 Q}{c^2 mR^2} I_0 & \text{کاوسی} \end{cases} \quad (63.6)$$

و گشتاور زاویه‌ای نهائی مربوطه

$$L_f = mR^\gamma \omega_f = k_m b_m^\gamma \frac{\pi a^\gamma}{R} Q I_\circ = \begin{cases} \frac{\mu_0 a^\gamma Q}{R} I_\circ & SI \\ \frac{\pi a^\gamma Q}{c^\gamma R} I_\circ & \text{گاوسی} \end{cases} \quad (64.6)$$

که مستقل از جرم m حلقه است.

- ب: حلقه باردار دوار معادل یک حلقه دایره‌ای است که جریان $I_{rot} = Q\omega / 2\pi$ را حمل می‌کند. بنابراین، پس از قطع جریان در حلقه کوچک، همچنان یک میدان مغناطیسی به دلیل چرخش حلقه شارژ شده وجود دارد. میدان مغناطیسی نهایی در مرکز حلقه‌ها برابر است با:

$$\mathbf{B}_c = \hat{\mathbf{z}} \frac{k_m}{2} \frac{I_{rot}}{R} = \hat{\mathbf{z}} \frac{k_m}{4\pi} \frac{Q\omega_f}{R}$$

$$= \hat{\mathbf{z}} \frac{k_m b_m^\gamma a^\gamma Q^\gamma}{4mR^\gamma} I_\circ = \begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 a^\gamma Q^\gamma}{4\pi^2 m R^\gamma} I_\circ & SI \\ \hat{\mathbf{z}} \frac{a^\gamma Q^\gamma}{4c^\gamma m R^\gamma} I_\circ & \text{گاوسی} \end{cases} \quad (65.6)$$

که موازی با میدان اولیه $\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{z}} k_m I_\circ / (2a)$ ، مطابق با قانون لنز است. ضمناً داریم $\pi a^\gamma B_c = M I_{rot}$

که در آن M اندوکتانس متقابل حلقه‌های رابطه (54.6) است.

- ج: همانطور که در بالا در بند (ب) مشاهده شد، حلقه باردار دوار یک میدان مغناطیسی در سراسر فضا ایجاد می‌کند. این میدان شار مغناطیسی را از طریق خود حلقه چرخان تغییر می‌دهد و ایجاد خود القایی می‌کند. بگذارید \mathcal{L} "خود القایی" حلقه چرخان باشد. شار مغناطیسی تولید شده توسط حلقه چرخان از طریق خود است

$$\Phi_{rot} = \frac{1}{b_m} \mathcal{L} I_{rot} = \frac{1}{b_m} \mathcal{L} \frac{Q\omega}{2\pi} \quad (67.6)$$

به همین ترتیب، رابطه (56.6) برای انتگرال خطی میدان الکتریکی اطراف حلقه باردار به شرح زیر اصلاح می‌شود:

$$\oint \mathbf{E}_l \cdot d\mathbf{l} = -b_m \left(\frac{d\Phi_I}{dt} + \frac{d\Phi_{rot}}{dt} \right) = -\frac{4\pi^\gamma k_m b_m^\gamma a^\gamma}{2R} \frac{\partial I(t)}{\partial t} - \mathcal{L} \frac{Q\omega}{2\pi} \frac{d\omega}{dt} \quad (68.6)$$

گشتاور روی حلقه خواهد شد

$$\tau = -\hat{\mathbf{z}} \left(\frac{k_m b_m^\gamma \pi a^\gamma Q}{R} \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \mathcal{L} \frac{Q^\gamma a^\gamma}{2\pi} \frac{d\omega}{dt} \right) \quad (69.6)$$

و معادله حرکت رابطه (61.6) خواهد شد

$$mR^\gamma \frac{d\omega}{dt} = -k_m b_m^\gamma \frac{\pi a^\gamma Q}{R} \frac{\partial I(t)}{\partial t} - \mathcal{L} \frac{Q^\gamma a^\gamma}{2\pi} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\left(mR^2 + \mathcal{L} \frac{Q^2 a^2}{2\pi} \right) \frac{d\omega}{dt} = -k_m b_m \frac{\pi a^2 Q}{R} \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (70.6)$$

اگر جرم حلقه باردار را با یک مقدار موثر جایگزین کنیم که معادل (۶۱.۶) است.

$$m_{eff} = m + \mathcal{L} \frac{Q^2 a^2}{2\pi R^2} \quad (71.6)$$

بنابراین وابستگی ω به $I(t)$ را بدست می‌آوریم:

$$\omega(t) = k_m b_m \frac{\pi a^2 Q}{m_{eff} R^2} [I_0 - I(t)], \quad (72.6)$$

و مقدار نهائی آن

$$\omega_f = k_m b_m \frac{\pi a^2 Q}{m_{eff} R^2} I_0, \quad (73.6)$$

و گشتاور زاویه‌ای نهائی مربوطه

$$L_f = mR^2 \omega_f = k_m b_m \frac{\pi a^2 Q}{R + \mathcal{L} a^2 Q^2 / (2\pi m R)} I_0.$$

$$= \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi a^2 Q}{R + \mathcal{L} a^2 Q^2 / (2\pi m R)} I_0 & SI \\ \frac{1}{c} \frac{\pi a^2 Q}{R + \mathcal{L} a^2 Q^2 / (2\pi m R)} I_0 & \text{گاوی} \end{cases} \quad (74.6)$$

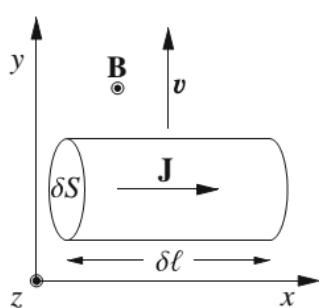
شار مغناطیسی نهایی از طریق حلقه باردار برابر است با

$$\Phi_f = \frac{1}{b_m} \mathcal{L} \frac{Q \omega_f}{2\pi} = k_m b_m \frac{\mathcal{L} a^2 Q^2}{2mR^2 + \mathcal{L} Q^2 a^2 R / \pi} I_0. \quad (75.6)$$

و تقریب‌های بند (الف) تنها در صورتی معتبر است که

$$\Phi_f \ll \Phi_0 = 4k_m b_m \frac{\pi a^2}{2R} I_0. \quad \frac{\mathcal{L} Q^2}{4\pi^2 m R^2 + 2\pi \mathcal{L} Q^2 a^2} \ll 1 \quad (76.6)$$

۷.۶ جریان‌های الکتریکی القای در اقیانوس



شکل (۷۰-۶)

- الف: همانطور که در شکل (۷۰-۶) نشان داده شده است، یک دستگاه مختصات دکارتی با محور y موازی با سرعت v سیال و محور z موازی با میدان مغناطیسی انتخاب می‌کنیم. بهدلیل حرکت سیال، حامل‌های بار (عمدتاً یون‌های Na^+ و Cl^- نمک محلول) تحت نیرویی در واحد بار برابر $b_m v \times B$ موازی با محور x قرار می‌گیرند. این معادل یک میدان الکتریکی $E_{eq} \equiv b_m v \times B$ است. بنابراین چگالی جریان القایی خواهد بود

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_{eq} = b_m \sigma v \times \mathbf{B} \quad (77.6)$$

• ب: با وارد کردن مقادیر معمول در رابطه (۷۷.۶) به دست می‌آوریم

$$J \approx \begin{cases} 4 \times 1 \times 5 \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-4} A/m^2 & SI \\ 3.6 \times 10^{10} \times \frac{100}{c} \times 0.5 = 60 StatA/cm^2 & \text{گاوی} \end{cases} \quad (78.6)$$

- ج: ما نیروی وارد بر یک عنصر سیال استوانه‌ای شکل را با مساحت قاعده δS و ارتفاع δl ، که در آن I موازی J و با محور x موازی است. شدت جریان در استوانه $\delta F = b_m I \delta l \times \mathbf{B} = -b_m B J \delta S \delta \hat{\mathbf{y}} = -b_m B J \delta V \hat{\mathbf{y}}$ است، و نیروی وارد بر آن $\delta m = \rho \delta V$ با $\rho = 10^3 kg/m^3$ گرم بر سانتی متر مکعب در واحدهای گاوی است. جرم استوانه $\delta m = \rho \delta V$ با δV و δF موازی با جهت y هستند و معادله حرکت را می‌توان به صورت اسکالار زیر نوشت.

$$\delta m \frac{dv}{dt} = \delta F \quad (79.6)$$

با جایگزینی مقادیر δm و δF به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \rho \delta V \frac{dv}{dt} &= -b_m B J \delta V \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -b_m B \sigma v \end{aligned} \quad (80.6)$$

- که در آن هر دو طرف را با δV تقسیم کرده‌ایم و J را با عبارت (۷۷.۶) جایگزین کرده‌ایم. جواب یک تابع نمایی کاهشی $v = v_0 e^{-t/\tau}$ با ثابت زمانی زیر است

$$\tau = \frac{\rho}{\sigma b_m B} \approx 10^{11} s \approx 3 \times 10^3 yr. \quad (81.6)$$

۸.۶ یک کره مغناطیس شده به عنوان موتور تک قطبی

- الف: از مسئله ۱۰.۵ به‌یاد می‌آوریم که میدان مغناطیسی درون یک کره مغناطیس شده یکنواخت است و برابر است با:

$$\mathbf{B} = \frac{8\pi k_m}{3} \frac{M}{b_m} \mathbf{M} = \begin{cases} \frac{2\mu_0}{3} M & SI \\ \frac{8\pi}{3} M & \text{گاوی} \end{cases} \quad (82.6)$$

در خارج از کره، همان میدان مغناطیسی را داریم که توسط یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور $M^2 \pi a^3 / 3$ در مرکز $m = M^2 \pi a^3 / 3$ در مدار کره ایجاد می‌شود. هنگامی که یک جریان الکتریکی I در مدار جاری می‌شود، نیروی مغناطیسی وارد بر عنصر dl در سیم "نصف النهار" BP برابر $df = Idl \times \mathbf{B}$ است که در شکل (ح-۶-۱۱) بسوی خارج از کاغذ ترسیم شده است. از آنجایی که مولفه B عمود بر dl در سراسر سطح کره پیوسته است، هیچ ابهامی وجود ندارد. گشتاور $d\tau$ روی عنصر سیم dl برابر است با:

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{r} \times df = Ir \times (dl \times \mathbf{B}) = \hat{z} I a \sin \theta ad\theta B \cos \theta \\ &= \hat{z} I a^2 B \cos \theta \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (83.6)$$

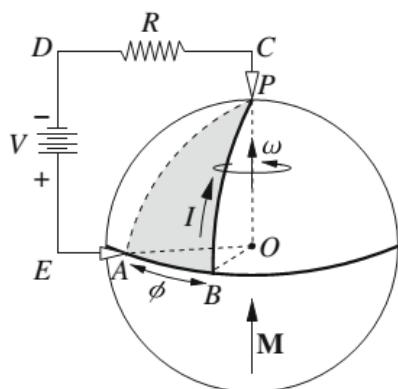
شکل (ح-۶-۱۱)

که در آن r فاصله dl از محور چرخش کره است ($r = a \sin \theta$) و ما از $ad\theta = dl$ استفاده

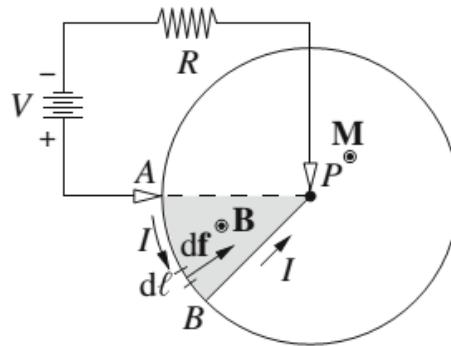
کرده‌ایم. گشتاور کل روی سیم نصف النهار BP به‌این ترتیب است

$$\tau = \int d\tau = \hat{z} I a^\wedge B \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \hat{z} \frac{1}{2} I a^\wedge B \quad (84.6)$$

در حالی که گشتاور در قسمت حامل جریان AB سیم "استوایی" صفر است، شکل (ح-۶-۱۲)، زیرا نیروی مغناطیسی شعاعی است. بنابراین، رابطه (۸۴.۶) کل گشتاور روی کره است.



شکل (ح-۶-۱۳)



شکل (ح-۶-۱۲)

- ب: هنگامی که کره می‌چرخد، کل نیروی الکتروموتور \mathcal{E}_{tot} در مدار مجموع نیروی حرکتی منبع ولتاژ و نیروی الکتروموتور \mathcal{E}_{rot} ناشی از چرخش سیم‌ها خواهد بود

$$\mathcal{E}_{tot} = V + \mathcal{E}_{rot} - b_m \frac{d\Phi}{dt} \quad (85.6)$$

که در آن Φ شار میدان مغناطیسی از طریق هر سطحی است که توسط مسیر بسته ABPCDEA در شکل (ح-۶-۱۳) محدود شده است. خطوط PC، CD و EA، DE هم‌راس هستند که روی صفحه‌ای قرار دارند که شامل محور چرخش کره و قوس نصف النهار PA است، در حالی که AB یک کمان استوایی است و BP یک کمان نصف النهار است که هر دو روی سطح قرار دارند. شار کره B از طریق هر سطحی که توسط مسیر بسته ABPCDEA محدود شده است یکسان است، زیرا $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است. برای سادگی، سطحی شامل دو قسمت را انتخاب می‌کنیم:

۱. سطح مسطح PCDEA، محیط آن توسط قوس AP بسته شده است، که از طریق آن شار صفر است، و
۲. مثلث کروی قطبی PAB که در شکل (ح-۶-۱۳) سایه زده است.

شار عبوری از PAB را می‌توان به راحتی محاسبه کرد با یادآوری اینکه شار B از هر سطح بسته صفر است. سطح بسته تشکیل شده توسط PAB و سه بخش دایره‌ای OAB، OBP و OAP را در نظر بگیرید. شار از طریق OAP و OBP صفر است، بنابراین شار از طریق PAB و شار از طریق OAB باید برابر باشند ($\Phi_{OAB} = \Phi_{PAB}$) باشد با علامت منفی در هنگام محاسبه سهم آن در شار از طریق کل سطح بسته گرفته

شود، زیرا میدان مغناطیسی از طریق OAB وارد و از طریق PAB خارج می‌شود) و داریم

$$\Phi_{PAB} = \Phi_{OAB} = \frac{1}{2} Ba^{\frac{1}{2}} \phi \quad (86.6)$$

که در آن ϕ زاویه AOB است. بنابراین داریم

$$\mathcal{E}_{tot} = V - b_m \frac{d\Phi}{dt} = V - b_m \frac{Ba^{\frac{1}{2}} d\phi}{2 dt} = V - b_m \frac{Ba^{\frac{1}{2}}}{2} \omega, \quad (87.6)$$

و جریان جاری در مدار برابر است با

$$I = \frac{\mathcal{E}_{tot}}{R} = \frac{1}{R} \left(V - b_m \frac{Ba^{\frac{1}{2}}}{2} \omega \right) \quad (88.6)$$

وقتی که $I = 0$ باشد، گشتاور روی کره صفر است، بنابراین سرعت زاویه‌ای انتهایی کره برابر است با:

$$\omega_t = \frac{2V}{b_m Ba^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \frac{2V}{Ba^{\frac{1}{2}}}, & SI \\ \frac{2V}{Ba^{\frac{1}{2}} c}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (89.6)$$

مستقل از ممان اینرسی کره \mathcal{I} و مقاومت R مدار است. معادله حرکت کره برابر است با:

$$\mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} = \tau = \frac{1}{2} Ba^{\frac{1}{2}} I = \frac{Ba^{\frac{1}{2}}}{2R} \left(V - b_m \frac{Ba^{\frac{1}{2}}}{2} \omega \right) \quad (90.6)$$

که با استفاده از (89.6)، می‌توان آن را بازنویسی کرد

$$\mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} = -b_m \frac{(Ba^{\frac{1}{2}})^2}{4\mathcal{I}R} (\omega - \frac{2V}{b_m Ba^{\frac{1}{2}}}) \equiv -\frac{1}{\tau} (\omega - \omega_t) \quad (91.6)$$

که در آن

$$\tau = \frac{4\mathcal{I}R}{b_m (Ba^{\frac{1}{2}})^2} \quad (92.6)$$

با فرض اینکه کره در $t = 0$ در حالت سکون است، جواب خواهد بود

$$\omega(t) = \omega_t \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (93.6)$$

۹.۶ گرمایش القائی

الف: هنگامی که جریان جابجایی نادیده گرفته شود، رابطه (5.6) را می‌توان به صورت

زیرنوشت

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k_m (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m) = 4\pi k_m \mu_r \mathbf{J}_f \quad (94.6)$$

که در آن \mathbf{J}_f چگالی جریان آزاد و \mathbf{J}_m چگالی جریان مغناطیسی است.

اکنون، با استفاده از رابطه (۱۲-۱۲)،

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 4\pi k_m \mu_r \nabla \times \mathbf{J}_f \quad (95.6)$$

و بخارط آورید که $\nabla \cdot \mathbf{B} = \sigma \mathbf{E}$ و $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ ، بدست می‌آوریم

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = 4\pi k_m \mu_r \sigma \nabla \times \mathbf{E} \quad (96.6)$$

$$\text{سرانجام، با استفاده از } \nabla \times \mathbf{E} = -b_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ خواهیم داشت} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (4\pi k_m b_m \mu_r \sigma)^{-1} \nabla^2 \mathbf{B} \equiv \alpha \nabla^2 \mathbf{B} \quad (97.6)$$

که در آن

$$\alpha = \frac{1}{4\pi k_m b_m \mu_r \sigma} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_0 \mu_r \sigma} & SI \\ \frac{c^2}{4\pi \mu_r \sigma}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (98.6)$$

- ب: مولفه مماسی بردار کمکی \mathbf{H} باید در صفحه $x = 0$ پیوسته باشد، بنابراین، مولفه مماسی B/μ_r باید پیوسته باشد. در نیم فضای خلاء ($x < 0$ ، داریم $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} B_0 \cos(\omega t)$ ، فقط در داخل این محیط) برابر است با $B(0^+, t) = \hat{\mathbf{y}} \mu_r B_0 \cos(\omega t)$ (99.6)

در یک بعدی، معادله (6.6) بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (100.6)$$

و به عنوان یک حدس علمی، به دنبال راه حلی به شکل هستیم. معادله دیفرانسیل برای تابع مستقل از زمان $\tilde{B}(x)$ برابر است با:

$$j\omega \tilde{B} = \alpha \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial x^2} \quad (101.6)$$

- و به دنبال یک راه حل نمایی به شکل $\tilde{B}(x) = \tilde{B}(0)e^{-\gamma x}$ با $\tilde{B}(0) = \mu_r B_0$ را می‌دهد، و با جایگزینی در (101.6) ، داریم

$$j\omega \mu_r B_0 e^{-\gamma x} = \alpha \gamma^2 \mu_r B_0 e^{-\gamma x} \quad (102.6)$$

$$\text{که منجر به رابطه } j\omega = \alpha \gamma^2 \text{ می‌شود، بنابراین} \\ \gamma = \pm \sqrt{j \frac{\omega}{\alpha}} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} = \pm (1+j) \frac{1}{l_s} \quad (103.6)$$

که در آن $(1+j)/\sqrt{2} = \sqrt{j}$ است و کمیت

$$l_s = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi k_m b_m \mu_r \sigma \omega}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}}, & SI \\ \sqrt{\frac{c^2}{2\pi \mu_r \sigma \omega}}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (104.6)$$

- که دارای بعد طول است و عمق نفوذ γ (مقاومتی) نامیده می‌شود. مقدار مثبت γ را که منجر به افزایش نمائی میدان مغناطیسی با فاصله از ماده می‌شود، را نادیده می‌گیریم و به دست می‌آوریم.

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} Re \left[\mu_r B_0 e^{j\omega t - (1+j)x/l_s} \right] = \hat{\mathbf{y}} \mu_r B_0 e^{-x/l_s} \cos \left(\omega t - \frac{x}{l_s} \right) \quad (105.6)$$

- بنابراین، میدان مغناطیسی با فاصله از ماده، با طول میرائی l_s ، به طور نمائی کاهش می‌یابد. یک تیغه از مواد می‌تواند نیم نامتناهی در نظر گرفته شود اگر عمق آن بسیار بیشتر از l_s باشد.

[†]Skin Depth

مسائل الکترومغناطیس

• ج: میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x)$ در داخل ماده را می‌توان از $\nabla \times \mathbf{E} = -b_m \frac{\partial B}{\partial t}$ محاسبه کرد. با فرض $\mathbf{E}(x, t) = Re[\tilde{\mathbf{E}}(x)e^{j\omega t}]$ داریم

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_y &= -\frac{\partial}{\partial x} Re[\tilde{E}_z(x)e^{j\omega t}] \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= Re[j\omega \mu_r B_* e^{j\omega t - (1+j)x/l_s}] \end{aligned} \quad (106.6)$$

بنابراین $\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} = jb_m \omega \mu_r B_* e^{-(1+j)x/l_s}$. انتگرال‌گیری نسبت به x خواهیم داشت

$$\tilde{E}_z = \frac{-j}{1+j} b_m \omega \mu_r l_s B_* e^{-(1+j)x/l_s} = -\frac{1+j}{2} b_m \omega \mu_r l_s B_* e^{-(1+j)x/l_s} \quad (107.6)$$

توان تلف شده در واحد حجم، تنها به دلیل جریان آزاد است، بنابراین

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} \rangle &= \frac{\sigma}{2} |\tilde{E}_z|^2 = \frac{\sigma}{4} b_m^2 \mu_r^2 \omega^2 l_s^2 B_*^2 e^{-2x/l_s} = \frac{\sigma}{4} b_m^2 \frac{2\mu_r^2 \omega^2 B_*^2}{4\pi k_m b_m \mu_r \sigma \omega} e^{-2x/l_s} \\ &= b_m \frac{\mu_r \omega B_*^2}{4\pi k_m} e^{-2x/l_s} = \begin{cases} \frac{\mu_r \omega B_*^2}{2\mu_r} e^{-2x/l_s}, & SI \\ \frac{\mu_r \omega B_*^2}{32\pi^2} e^{-2x/l_s}, & گاووسی \end{cases} \end{aligned} \quad (108.6)$$

که در آن رابطه (104.6) را جایگزین l_s در کسر کرده‌ایم. کل توان تلف شده در واحد سطح تیغه برابر است با:

$$\int_0^\infty \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} \rangle dx = b_m \frac{\mu_r \omega B_*^2}{16\pi k_m} l_s = \frac{B_*^2}{16\pi} \sqrt{\frac{b_m \mu_r \omega}{2k_m \sigma}} \quad (109.6)$$

ممکن است تعجب کنید که آیا سهمی از حجم مغناطیسی و چگالی جریان سطحی، K_m و J_m نیز در توان تلف شده وجود دارد. در حضور میدان مغناطیسی معادله (105.6)، محیط نفوذپذیری مغناطیسی نسبی μ_r ، مغناطیسی شوندگی M را می‌دهد.

$$M = \frac{b_m}{4\pi k_m} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} B = \hat{y} \frac{b_m}{4\pi k_m} (\mu_r - 1) Re[B_* e^{j\omega t - (1+j)x/l_s}] \quad (110.6)$$

که مربوط است به

$$\mathbf{J}_m = \frac{1}{b_m} M \quad (111.6)$$

با در نظر گرفتن تقارن مسئله و معرفی دامنه‌های مختلط \tilde{J}_m و \tilde{J}_{mz} به طوری که $\tilde{J}_m = Re(\tilde{J}_m e^{j\omega t}) = \hat{z} Re(\tilde{J}_{mz} e^{j\omega t})$

$$\tilde{J}_{mz} = \frac{\mu_r - 1}{4\pi k_m \mu_r} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} = -\frac{\mu_r - 1}{4\pi k_m \mu_r} \frac{1+j}{l_s} B_* e^{-(1+j)x/l_s} \quad (112.6)$$

و توان مربوطه در واحد حجم برابر است با

$$\langle \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{4} Re(\tilde{J}_{mz} \tilde{E}_z^*) = b_m (\mu_r - 1) \frac{\mu_r \omega B_*^2}{4\pi k_m} e^{-2x/l_s} = (\mu_r - 1) \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} \rangle \quad (113.6)$$

و کل توان در واحد حجم خواهد بود

$$\int_0^\infty \langle \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{E} \rangle dx = (\mu_r - 1) \int_0^\infty \langle \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} \rangle dx = b_m (\mu_r - 1) \frac{\mu_r \omega B_*^2}{16\pi k_m} l_s \quad (114.6)$$

با این حال، همچنین یک چگالی جریان مغناطیسی سطحی K_m داریم که در صفحه $x = 0$ جاری است، که با رابطه زیر داده می‌شود

$$K_m = \frac{1}{b_m} M(+) \times \hat{n} = \hat{z} \frac{\mu_r - 1}{4\pi k_m} \operatorname{Re}(B_0 e^{j\omega t}) = \hat{z} K_m z \cos(\omega t) \quad (115.6)$$

که در آن $\hat{n} = \hat{x}$ بردار واحد رو به بیرون در صفحه مرزی $x = 0$ است. این چگالی جریان سطحی مربوط به توان در واحد سطح است.

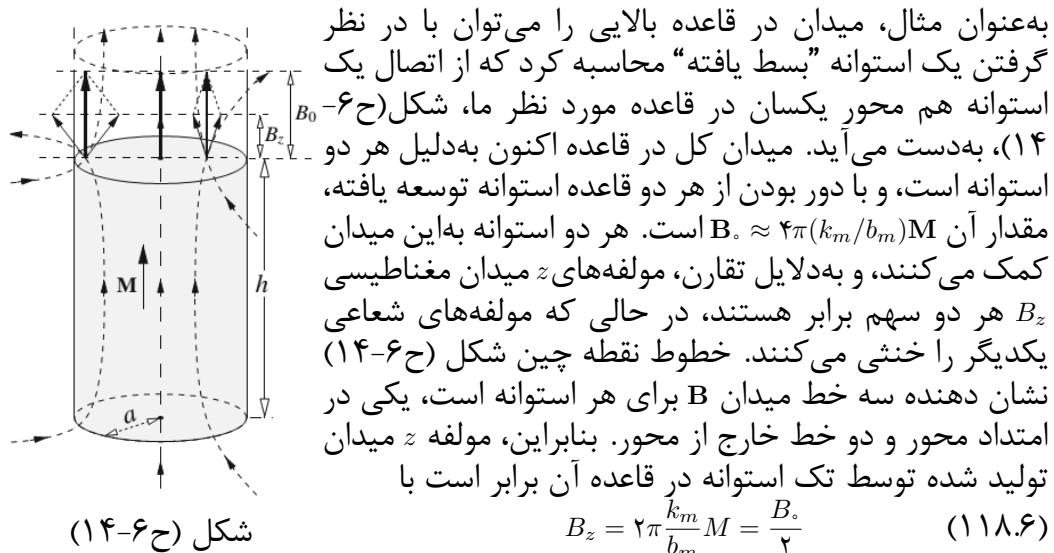
$$\langle \mathbf{K}_m(t) \cdot \mathbf{E}(+, t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [K_m z \tilde{E}_z(+)] = -b_m (\mu_r - 1) \frac{\mu_r \omega B_0^2}{16\pi k_m} l_s \quad (116.6)$$

که مشارکت رابطه (114.6) را حذف می‌کند. بنابراین، کل توان تلف شده در محیط فقط به دلیل جریان آزاد است و توسط معادله (109.6) داده می‌شود. توجه داشته باشید که مولفه موازی میدان الکتریکی باید در مرز بین دو هادی پیوسته باشد، به طوری که در رابطه $E_z(+, t)$ ظاهر می‌شود یک کمیت به خوبی تعریف شده است.

۱۰.۶ اسنوانه مغناطیسی به عنوان مولد DC

الف: می‌توان میدان مغناطیسی را به دلیل چگالی جریان سطح مغناطیسی آزموناً K_m بر روی سطح جانبی استوانه در نظر گرفت. داریم $K_m = M \times \hat{n}/b_m$ ، که در آن \hat{n} بردار واحد بیرونی نرمال بر سطح است. بنابراین، استوانه مغناطیسی معادل یک سیم‌لوله با اندازه‌های یکسان، چرخش در واحد طول، جریان I در هر دور، و حاصل ضرب $nI = K_m$ است. دور از دو قاعده، میدان تقریباً یکنواخت B ، مستقل از شعاع و ارتفاع استوانه داریم.

$$B_0 \approx 4\pi k_m K_m \hat{z} = 4\pi \frac{k_m}{b_m} M = \begin{cases} \mu_0 M, & SI \\ \frac{4\pi}{4\pi M} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (117.6)$$

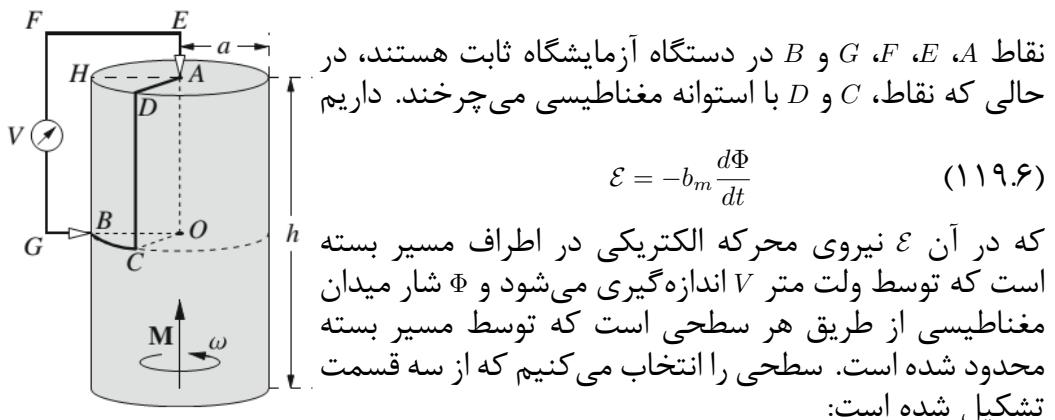


$$B_z = 2\pi \frac{k_m}{b_m} M = \frac{B_0}{2} \quad (118.6)$$

شکل (ح-۶-۱۴)

مسائل الکترومغناطیس

- ب: قانون القای فارادی را برای شار میدان مغناطیسی از طریق مسیر بسته AEFGBCDA، که با خط ضخیم در شکل (ح۶-۱۵) نشان داده شده است، اعمال می‌کنیم.



شکل (ح۶-۱۵)

۱. سطح صفحه محدود شده توسط مسیر AEFGBHA، ثابت در دستگاه آزمایشگاهی، که از طریق آن شار B صفر است.

۲. سطح محدود شده توسط مسیر BCDHB که روی سطح جانبی استوانه قرار دارد. و

۳. بخش دایره‌ای AHD در قاعده بالایی، جایی که نقاط A و H ثابت هستند، در حالی که نقطه D در حال چرخش است.

شار B از طریق دو سطح BCDH و AHD را می‌توان به‌طور مشابه با شار از طریق مثلث کروی قطبی PAB در شکل (ح۶-۱۳) مسئله ۸.۶ محاسبه کرد. سطح بسته را علاوه بر BCDH و AHD، بخش دایره‌ای OBC و دو مستطیل COAD و BOAH را در نظر می‌گیریم. شار باید از طریق کل سطح بسته و از طریق دو مستطیل صفر باشد زیرا B با سطوح آنها موازی است. بنابراین داریم

$$\Phi_{AHD} + \Phi_{BCDH} + \Phi_{OBC} = 0 \quad (120.6)$$

و

$$\Phi_{AHD} + \Phi_{BCDH} = -\Phi_{OBC} = \frac{1}{2} B_0 a^2 \phi \quad (121.6)$$

که در آن ϕ زاویه $BOC = HAD$ است، و علامت این واقعیت را نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی از طریق OBC وارد سطح بسته می‌شود. نیروی الکتروموتور برابر است با:

$$\mathcal{E} = -b_m \frac{d\Phi}{dt} = -b_m \frac{1}{2} B_0 a^2 \frac{d\phi}{dt} = 2\pi k_m Ma^2 \omega = \begin{cases} \frac{\mu_0}{\gamma} Ma^2 \omega, & SI \\ \frac{\gamma \pi}{c} Ma^2 \omega, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (122.6)$$

همین نتیجه را می‌توان با محاسبه نیروی الکتروموتور \mathcal{E} به صورت انتگرال $b_m(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ در طول مسیر AOB بدست آورد.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= b_m \int_A^O (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + b_m \int_O^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = b_m \int_0^a \omega r B_z dr \\ &= \frac{1}{2} B_z a^2 \omega = 2\pi k_m M a^2 \omega\end{aligned}\quad (123.6)$$

زیرا در امتداد مسیر AO که روی محور چرخش استوانه قرار دارد، $\mathbf{v} = \mathbf{v}$ است.

۱۱.۶ دیسک فاراده و مولد خودپایدار

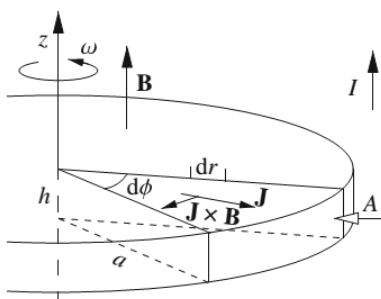
الف: نیروی مغناطیسی روی هر حامل بار دیسک دوار $qb_m \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ است، که q بار حامل است (برای الکترون‌ها)، و $\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{r}$ سرعت یک حامل بار در فاصله r از محور چرخش، در حالت ساکن نسبت به دیسک است. در حالت تعادل، حامل‌ها باید نسبت به دیسک در حالت سکون باشند و نیروی مغناطیسی باید توسط یک میدان الکتریکی ساکن $\mathbf{E} + b_m \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ جبران شود به طوری که $\mathbf{E} + b_m \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$. این مربوط به افت پتانسیل الکتریکی V بین مرکز و محیط دیسک خواهد بود

$$V = \phi(a) - \phi(0) = - \int_0^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = b_m \int_0^a \omega r B dr = b_m \omega B \frac{a^2}{2} \quad (124.6)$$

بنابراین دیسک دوران یک منبع ولتاژ است که به نام دیسک فارادی شناخته می‌شود.

ب: در حضور جاروبک‌های تماسی در نقاط O و A شکل (ح-۶-۹)، نیروی الکتروموتور \mathcal{E} مدار برابر با افت ولتاژ V رابطه (۱۲۴.۶) است. کل جریانی که در مدار گردش می‌کند برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = b_m \frac{\omega B a^2}{2R} \quad (125.6)$$



توان تلف شده در مدار توسط گرمایش ژول $P_d = I^2 R = E^2 / R$ است و باید یک گشتاور خارجی τ_{ext} وجود داشته باشد که توان مکانیکی $P_m = \tau_{ext} \cdot \omega$ را فراهم کند تا چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت P_d حفظ شود. بدین ترتیب،

$$\tau_{ext} = \hat{\mathbf{z}} b_m \frac{\omega B \theta a^4}{4R} \quad (126.6)$$

شکل (ح-۶-۶)

از طرف دیگر، گشتاور خارجی باید گشتاور نیروهای مغناطیسی روی دیسک را جبران کند. از آنجایی که جریان از طریق تماس جاروبک A از دیسک خارج می‌شود، ایجاد فرضیاتی در مورد تقارن توزیع چگالی جریان دشوار است. با این حال، مسئله را می‌توان به صورت زیر حل کرد. گشتاور روی یک عنصر حجمی بینهایت کوچک، در مختصات استوانه‌ای، شکل (ح-۶-۶) است،

و گشتاور مغناطیسی کل روی دیسک با انتگرال گیری $d\tau$ روی حجم دیسک به دست می‌آید.

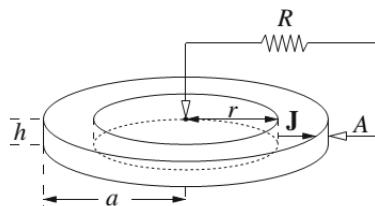
$$\tau_B = b_m \int_0^a dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} r d\phi \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (127.6)$$

حاصلضرب برداری سه گانه در رابطه (127.6) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) = -\hat{\mathbf{z}} Br J_r \quad (128.6)$$

عبارت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ است زیرا \mathbf{r} و \mathbf{B} بر هم عمود هستند و J_r مولفه r بردار \mathbf{J} است. بعلاوه داریم

$$\int_0^h dz \int_0^{2\pi} r d\phi J_r = I \quad (129.6)$$



شکل (ح۷-۶)

که مستقل از r است، زیرا انتگرال دوگانه شار \mathbf{J} از طریق یک سطح استوانه‌ای جانبی بهشعاع r و ارتفاع h ، شکل (ح۷-۶) است. بنابراین برای گشتاور اعمال شده توسط نیروهای مغناطیسی روی دیسک داریم

$$\tau_B = -\hat{\mathbf{z}} b_m BI \int_0^a r dr \quad (130.6)$$

و سرانجام، با جایگزینی رابطه (125.6) برای I خواهیم داشت

$$\tau_b = -\hat{\mathbf{z}} b_m BI \frac{a^2}{2} = -\hat{\mathbf{z}} b_m^2 \frac{\omega B^2 a^4}{4R} = -\tau_{ext} \quad (131.6)$$

• ج: اگر دیسک به عنوان منبع جریان برای سیم‌لوله عمل کند باید داشته باشیم

$$B = 4\pi k_m n I = 4\pi k_m b_m n \frac{\omega B a^2}{2R} \quad (132.6)$$

که از آن در می‌یابیم که فرکانس باید تابعی از پارامترهای مدار باشد

$$\omega = \frac{2R}{4\pi k_m b_m n a^2} = \begin{cases} \frac{\gamma R}{\mu_s n a^2}, & SI \\ \frac{R c^2}{\gamma \pi n a^2}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (133.6)$$

که مستقل از شدت میدان مغناطیسی B است.

۱۲.۶ القای متقابل بین دو حلقه مدور

• الف: می‌توانیم میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان I را که در حلقه B در گردش است، یکنواخت و برابر با $B \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} 2\pi k_m I / b$ در سراسر سطح حلقه A فرض

کنیم، زیرا $a \ll b$ است. زاویه بین محور حلقه A و محور $z = \omega t$ است و شار میدان مغناطیسی از سطح حلقه A برابر است با:

$$\Phi = B_0 \pi a^2 \cos \omega t = \frac{2\pi k_m I}{b} \pi a^2 \cos \omega t = \frac{2\pi^2 a^2 k_m I}{b} \cos \omega t \quad (134.6)$$

بنابراین، طبق قانون القای فارادی، نیروی الکتروموتور \mathcal{E} القایی در حلقه A وجود دارد.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi^2 a^2 k_m I}{b} \omega \sin \omega t \quad (135.6)$$

و جریان چرخشی در حلقه A برابر است با:

$$I_A = \frac{2\pi^2 a^2 k_m I}{Rb} \omega \sin \omega t \quad (136.6)$$

• ب: توان تلف شده در گرمایش ژول خواهد بود

$$P_{diss} = RI_A^2 = \frac{4\pi^4 a^4 \omega^2 k_m^2 I^2}{Rb^2} \sin^2 \omega t \quad (137.6)$$

• ج: گشتاور عمل کننده بر روی حلقه A است، که در آن $\mathbf{m} = \hat{n} I_A \pi a^2 \tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0$ ممکن مغناطیسی حلقه A ، و \hat{n} بردار واحد عمود بر سطح آن است، بهطوری که نوک آن I_A را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌بیند. بدین ترتیب

$$\tau = \frac{2\pi^2 a^2 k_m I}{Rb} \omega \sin \omega t \pi a^2 \frac{2\pi k_m I}{b} \sin \omega t = \frac{4\pi^4 a^4 \omega k_m^2 I^2}{Rb^2} \sin^2 \omega t \quad (138.6)$$

و توان مکانیکی مربوطه برابر است با:

$$P_{mech} = \tau \cdot \omega = \frac{4\pi^4 a^4 \omega k_m^2 I^2}{Rb^2} \sin^2 \omega t = P_{diss} \quad (139.6)$$

و تمام توان مکانیکی مورد نیاز برای چرخش حلقه A با سرعت زاویه‌ای ثابت به گرمایش ژول تبدیل می‌شود.

• د: شار در سطح حلقه B میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط جریان در حال گردش در حلقه A برابر است با

$$\Phi_B = M_{AB} I \quad (140.6)$$

که در آن M_{AB} ضریب القای متقابل بین حلقه A و حلقه B است. می‌دانیم که $M_{AB} = M_{BA}$ و از (134.6) داریم

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{2\pi^2 a^2 k_m}{b} \cos \omega t \quad (141.6)$$

بنابراین

$$\Phi_B = \frac{2\pi^2 a^2 k_m I}{b} \cos \omega t \quad (142.6)$$

و

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi^2 a^2 k_m I}{b} \omega \sin \omega t \quad (143.6)$$

که مطابق (135.6) و (134.6) است.

۱۳.۶ القای متقابل بین سیم‌لوله حلقه

- الف: با صرفنظر از اثرات مرزی، میدان مغناطیسی داخل سیم‌لوله یکنواخت، موازی با محور سیم‌لوله z و برابر است با

$$\mathbf{B} = 4\pi k_m n I \hat{\mathbf{z}} \quad (144.6)$$

بنابراین، شار آن از طریق سطح S سیم پیچ دوار خواهد بود

$$\Phi_a(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}(t) = 4\pi k_m n I \pi a^2 \cos \omega t = 4\pi^2 a^2 k_m n I \cos \omega t = \mathbf{M}_{sl}(t) I \quad (145.6)$$

که در آن

$$\mathbf{M}_{sl}(t) = 4\pi^2 a^2 k_m n \cos \omega t \quad (146.6)$$

ضریب اندوکتانس متقابل بین سلونوئید و حلقه است که به زمان بستگی دارد زیرا حلقه در حال چرخش است. ضریب اندوکتانس متقابله متران است، $M_{sl} = M_{ls}$ ، یعنی اندوکتانس توسط سلونوئید (سیم‌لوله) روی حلقه برابر است با اندوکتانس حلقه روی سیم‌لوله، از این ویژگی برای پاسخ به بند (ج) استفاده خواهیم کرد.

- ب: نیروی محرکه الکتریکی بدست آمده توسط حلقه برابر با نرخ تغییر شار مغناطیسی از طریق آن است.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 4\pi^2 a^2 k_m n I \omega \sin \omega t \quad (147.6)$$

و جریان چرخشی در حلقه برابر است با:

$$I_a = \frac{4\pi^2 a^2 k_m n I \omega}{R} \sin \omega t \quad (148.6)$$

توان تلف شده ناشی از گرمایش ژول خواهد بود

$$P_{diss} = R I_a^2 = \frac{(4\pi^2 a^2 k_m n I \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (149.6)$$

این توان باید توسط کار گشتاور اعمال شده به حلقه تامین شود تا آن را در چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت نگه دارد. توان میانگین زمانی برابر است با:

$$\langle P_{diss} \rangle = \frac{(4\pi^2 a^2 k_m n I \omega)^2}{2R} \quad (150.6)$$

زیرا $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$

- ج: میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط دوقطبی مغناطیسی m با میدان تولید شده توسط یک حلقه حامل جریان به شعاع a و جریان به طوری که $I_1 = m / (4\pi a^2)$ در فواصل $r \gg a$ از مرکز حلقه یکسان است. نتیجه بند (الف) به ویژه در مورد $b \ll a$ معتبر است. در این حالت می‌توانیم دوقطبی مغناطیسی را با یک حلقه جایگزین کنیم و از خاصیت تقارن ضریب القایی متقابله استفاده کنیم. بنابراین، شار Φ_s تولید شده توسط دوقطبی از طریق سیم‌لوله خواهد بود

$$\Phi_s = M_{Is}(t) I_1 = 4\pi^2 a^2 k_m n I_1 \cos \omega t = 4\pi \frac{k_m}{b_m} n m \cos \omega t \quad (151.6)$$

۱۴.۶ اثر پوستی و اندوکتانس متقابل گردازی در سیم اهمی

با فرض یک سیم استوانه‌ای بسیار بلند و مستقیم، مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است. یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با محور z در امتداد محور سیم انتخاب می‌کنیم و انتظار داریم که میدان الکتریکی داخل سیم را بتوان به صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} E(r, t) = \hat{\mathbf{z}} \operatorname{Re} [\tilde{E}(r) e^{j\omega t}] \quad (152.6)$$

که در آن $\tilde{E}(r)$ دامنه مختلط استاتیک مربوط به میدان الکتریکی است. از دو معادله ماکسول شروع می‌کنیم

$$\nabla \times \mathbf{E} = -b_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k_m \mathbf{J} + \frac{1}{b_m c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (153.6)$$

که در آن $\epsilon_r = 1$ و $\mu_r = 1$ در داخل مس فرض کردیم. اگر $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ را در دومین رابطه (۱۵۳.۶) جایگزین کنیم، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= 4\pi k_m \sigma \mathbf{E} + \frac{1}{b_m c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi k_m \sigma \mathbf{E} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\omega}{b_m c} \operatorname{Re} [j \tilde{E}(r) e^{j\omega t}] \\ &= \begin{cases} \mu_0 \sigma \mathbf{E} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\omega}{c} \operatorname{Re} [j \tilde{E}(r) e^{j\omega t}] & SI \\ \frac{4\pi \sigma}{c} \mathbf{E} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\omega}{c} \operatorname{Re} [j \tilde{E}(r) e^{j\omega t}] & \text{گاوی} \end{cases} \end{aligned} \quad (154.6)$$

در واحدهای SI رسانایی مس $1 \Omega^{-1} m^{-1} = 5.96 \times 10^7$ و حاصلضرب $\mu_0 \sigma c = 6.77 \times 10^{18} s^{-1}$ برابر است با:

$$\mu_0 \sigma c = 6.77 \times 10^{18} s^{-1} \quad (155.6)$$

از طرف دیگر، در واحدهای گاوی، رسانایی مس $1 \sigma = 5.39 \times 10^{17} s^{-1}$ و حاصلضرب $4\pi \sigma = 5.96 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ برابر است. بنابراین جریان جابجایی در مقایسه با جریان هدایتی J برای فرکانس‌های $\omega \ll 10^{18}$ هرتز، یعنی تا اشعه مأموراء بنفش ناچیز است. به عبارت دیگر، جریان جابه‌جاوی را می‌توان در مقایسه با جریان هدایتی برای همه اهداف عملی در هادی‌های خوب نادیده گرفت و می‌توان رابطه دومی (۱۵۳.۶) را به سادگی به صورت

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k_m \sigma \mathbf{E} \quad (153.6) \text{ داریم}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -b_m \frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t} = -4\pi k_m b_m \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (156.6)$$

اما بیاد آورید

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (157.6)$$

و فرض می‌کنیم $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ، که منجر به معادله نفوذ برای میدان الکتریکی \mathbf{E} می‌شود

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 4\pi k_m b_m \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (158.6)$$

با معرفی فرض رابطه (۱۵۲.۶)، معادله زیر را در مختصات استوانه‌ای برای دامنه مختلط داریم.

$$\nabla^2 \tilde{E}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \tilde{E}(r)}{\partial r} \right] = j\omega 4\pi k_m b_m \sigma \tilde{E}(r) \quad (159.6)$$

یا

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \tilde{E}(r)}{\partial r} \right] = j \frac{2}{\delta^2} \tilde{E}(r) \quad (160.6)$$

که در آن عمق نفوذ را بصورت زیر معرفی کردیم

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\pi k_m b_m \sigma \omega}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\mu \cdot \sigma \omega}}, & SI \\ \frac{c}{\sqrt{2\pi \sigma \omega}}, & \text{گاووسی} \end{cases} \quad (161.6)$$

وقتی معادله (160.6) را در r^2 ضرب کنیم، معادله دیفرانسیل بسل با $n = 0$ خواهد بود. با این حال، در این کتاب، ترجیح می‌دهیم راه حل‌های تقریبی را برای دو حالت محدود $\delta \ll r_0$ و $\delta \gg r_0$ پیدا کنیم، که در آن r_0 برابر شعاع سیم است. برای اثر ضعیف پوستی، یعنی برای $\delta \gg r_0$ حل معادله (160.6) را به صورت سری تیلور می‌نویسیم.

$$\tilde{E}(r) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{\delta} \right)^n \quad (162.6)$$

که در سمت چپ معادله (160.6) جایگزین می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \tilde{E}(r)}{\partial r} \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n r^{n-1}}{\delta^n} \right] = \frac{1}{r} E_0 \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n r^n}{\delta^n} \\ &= \frac{1}{r} E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n r^{n-1}}{\delta^n} = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n r^{n-1}}{\delta^n} \end{aligned} \quad (163.6)$$

در حالی که بخش سمت راست برابر است با

$$j \frac{2}{\delta^2} \tilde{E}(r) = 2j E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n}{\delta^{n+2}} \quad (164.6)$$

با مقایسه ضرایب یکسان توان‌های r در معادلات (163.6) و (164.6) رابطه بازگشتی زیر را بدست می‌آوریم.

$$a_{n+2} = \frac{2j}{(n+2)\delta^2} a_n \quad (165.6)$$

که منجر به

$$a_{2n} = \frac{j^n}{2^n (n!)^2}, \quad \text{و} \quad a_{2n+1} = 0 \quad (166.6)$$

برای تمام $n \geq 0$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \tilde{E}(r) &= E_0 \frac{j^n}{2^n (n!)^2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{2n} \\ &= E_0 \left[1 + \frac{j}{2} \frac{r^2}{\delta^2} - \frac{1}{16} \frac{r^4}{\delta^4} - \frac{j}{48} \frac{r^6}{\delta^6} + \dots + \frac{j^n}{2^n (n!)^2} \frac{r^{2n}}{\delta^{2n}} + \dots \right] \end{aligned} \quad (167.6)$$

دامنه مختلط I مربوط به جریان کل از سیم برابر است با:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{r_0} J \cdot 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_0^{r_0} \tilde{E}(r) r dr \\ &= 2\pi\sigma E_0 \int_0^{r_0} \left[1 + \frac{j}{2} \frac{r_0^2}{\delta^2} - \frac{1}{16} \frac{r_0^4}{\delta^4} - \frac{j}{48} \frac{r_0^6}{\delta^6} + \dots + \frac{j^n}{2^n (n!)^2} \frac{r_0^{2n}}{\delta^{2n}} + \dots \right] r dr \\ &= 2\pi\sigma E_0 \left[\frac{r_0^2}{2} + \frac{j}{8} \frac{r_0^4}{\delta^2} - \frac{1}{96} \frac{r_0^6}{\delta^4} - \frac{j}{2304} \frac{r_0^8}{\delta^6} + \dots + \frac{j^n}{2^n (n!)^2 (2n+2)} \frac{r_0^{2n+2}}{\delta^{2n}} + \dots \right] \\ &= \pi r_0 \sigma E_0 \left[1 + \frac{j}{4} \frac{r_0^2}{\delta^2} - \frac{1}{48} \frac{r_0^4}{\delta^4} - \frac{j}{1152} \frac{r_0^6}{\delta^6} + \dots + \frac{j^n}{2^n (n+1)! (n!)^2} \frac{r_0^{2n}}{\delta^{2n}} + \dots \right] \end{aligned} \quad (168.6)$$

می‌توانیم امپدانس در واحد طول سیم، $Z = R + j\omega L$ (که در آن R مقاومت در واحد طول و L خود القایی در واحد طول است) را به صورت نسبت میدان الکتریکی در سطح سیم به کل جریان سیم تعریف کنیم. به عنوان مثال، به صورت

$$Z_l = \frac{1}{\pi r_0 \sigma} \underbrace{\left[1 + \frac{j}{2} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 - \frac{j}{48} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right]}_A \times \underbrace{\left[1 + \frac{j}{4} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 - \frac{j}{1152} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right]}_{B^{-1}} \quad (169.6)$$

که در آن A و B بسط‌های تیلور در توان‌های زوج $1 \ll r_0/\delta$ هستند که در مرتبه ششم کوتاه کرده‌ایم. چهار ضریب بسط اول B^{-1} ، یعنی b_1, b_2, b_3 و b_4 را به صورت $b_1 = \left[1 + b_1 \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 + b_2 \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 + b_3 \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right]$ (170.6)

را می‌توان با این الزام محاسبه کرد که حاصلضرب BB^{-1} برابر با یک با باقیمانده مرتبه $(r_0/\delta)^8$ باشد، یعنی.

$$1 = BB^{-1} \approx \left[1 + \frac{j}{4} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 - \frac{j}{1152} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right] \times \left[1 + b_1 \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 + b_2 \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 + b_3 \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right] \quad (171.6)$$

که منجر به

$$b_1 = -\frac{j}{4}, \quad b_2 = -\frac{1}{24}, \quad \text{و} \quad b_3 = \frac{7j}{1152} \quad (172.6)$$

بنابراین، برای Z_l داریم

$$\begin{aligned} Z_l &\approx \frac{1}{\pi r_0 \sigma} \left[1 + \frac{j}{2} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 - \frac{j}{48} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right] \times \left[1 - \frac{j}{4} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 + \frac{7j}{1152} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right] \\ &\approx \frac{1}{\pi r_0 \sigma} \left[1 + \frac{j}{4} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{48} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^4 - j \frac{23}{1152} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^6 + \dots \right] \end{aligned} \quad (173.6)$$

جمله مرتبه چهارم بسط

$$R_l^{(0)} = \frac{1}{\pi r_0 \sigma} \quad (174.6)$$

به سادگی مقاومت جریان مستقیم در واحد طول سیم است. جمله سوم (۱۷۵.۶)

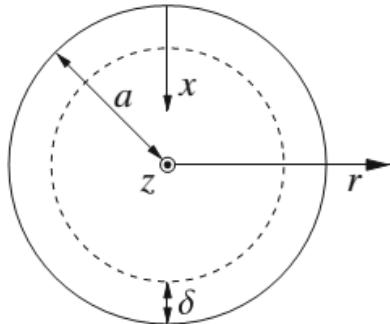
$$R_l^{(1)} = \frac{r_0^2}{4\pi\sigma\delta^4} = \frac{k_m b_m \pi r_0^2 \sigma \omega^2}{12} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \pi r_0^2 \sigma \omega^2}{192}, & SI \\ \frac{\pi r_0^2 \sigma \omega^2}{12c^4}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (175.6)$$

کمترین مرتبه سهم اثر ضعیف پوستی در افزایش مقاومت است. عبارت مرتبه دوم بسط را می‌توان چنین تفسیر کرد

$$\frac{j}{4\pi\sigma\omega^2 r_0^2} \left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2 = j\omega L_i^{(1)} \quad (176.6)$$

که منجر به

$$L_i^{(1)} = \frac{1}{4\pi\sigma\omega^2 r_0^2} \left(\frac{r_0}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{2} k_m b_m = \begin{cases} \frac{\mu_0}{8\pi}, & SI \\ \frac{1}{2c^2}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (177.6)$$



که خود القایی DC در واحد طول یک سیم استوانه‌ای مستقیم است، در حالی که عبارت مرتبه ششم کمترین درجه سهم اثر پوستی ضعیف به خود القایی سیم استوانه‌ای است. بنابراین، در حد فرکانس پایین، جریان به مختصات شعاعی بستگی دارد، اما هیچ اثر پوستی واقعی مشاهده نمی‌شود. طبق (۱۶۸.۶)، جریان در واقع روی محور سیم قوی‌تر از سطح آن است.

شکل (۱۸-۶)

در محدوده فرکانس بالا همه چیز متفاوت است. با افزایش فرکانس، عمق پوست به تدریج کوچکتر می‌شود. وقتی $a \ll r_0$ ، میدان‌ها در فاصله‌ای بسیار کوچک‌تر از شعاع سیم در فضا متغیر خواهند بود، به طوری که انتظار داریم اثر انحصار ناچیز باشد. برای یک اثر پوستی قوی، یعنی برای $a \gg r_0$ ، میدان الکتریکی به طور قابل توجهی با صفر تنها نزدیک به سطح سیم متفاوت است. بنابراین، ما متغیر $x = a - r$ را که در شکل (۱۸-۶) نشان داده شده است، معرفی می‌کنیم. با استفاده از $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}$ دریافت می‌کنیم

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} = j \frac{2}{\delta^2} \tilde{E} \quad (178.6)$$

جایگزین $\tilde{E} = E_0 e^x$ ، داریم

$$\alpha = \pm \sqrt{j \frac{2}{\delta^2}} = \pm \frac{1+j}{\delta} \quad (179.6)$$

و جواب مربوط به کاهش میدان با افزایش x (افزایش عمق در سیم) برابر است با

$$\tilde{E} \approx E_0 e^{-x/\delta} e^{-jx/\delta} = E_0 e^{-(a-r)/\delta} e^{-j(a-r)/\delta} \quad (180.6)$$

که در آن $E_0 e^{j\omega t}$ میدان الکتریکی در سطح سیم است. دامنه مختلط متناظر با جریان

کل از سیم است بنابراین

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a J 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_0^a \tilde{E} r dr = 2\pi\sigma E_0 \int_0^a e^{-(a-r)/\delta} e^{-j(a-r)/\delta} e^{j\omega t} r dr \\ &= 2\pi\sigma E_0 e^{-a(1+j)/\delta + j\omega t} \int_0^a e^{r(1+j)/\delta} r dr \end{aligned} \quad (181.6)$$

بیاد آورید که

$$xe^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (182.6)$$

و با صرفنظر کردن از جملات δ^2 در نهایت بدست می‌آوریم

$$I = \pi a \delta \sigma (1-j) E_0. \quad (183.6)$$

امپدانس واحد طول سیم، Z_l را می‌توان دوباره بصورت زیر تعریف کرد

$$Z_l = R_l + jX_l = \frac{E_0}{I} = \frac{1}{\pi a \delta \sigma (1-j)} = \frac{j}{2\pi a \delta \sigma} + \frac{j}{2\pi a \delta \sigma} \quad (184.6)$$

بهطوری که مقدار مقاومت در واحد طول R_l و راکتانس در واحد طول X_l در حد فرکانس بالا با هم برابرند:

$$R_l = X_l = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma} \quad (185.6)$$

مقدار R_l نشان می‌دهد که جریان در واقع از طریق یک حلقه نازک نزدیک به سطح ("پوست" سیم) با عرض δ و مساحت تقریبی $2\pi a \delta$ جریان می‌یابد. اندوکتانس در واحد طول L_l با توجه به $X_l = \omega L_l$ ، با

$$L_l = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma \omega} = \sqrt{\frac{k_m b_m}{2\pi a^2 \sigma \omega}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu_0}{8\pi^2 a^2 \sigma \omega}}, & SI \\ \sqrt{\frac{1}{2\pi c^2 a^2 \sigma \omega}}, & گاوی \end{cases} \quad (186.6)$$

۱۵.۶ فشار مغناطیسی و اثر انقباضی برای جریان سطحی

• الف: ما از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم که محور استوانه به عنوان محور z است. خطوط میدان B به دلیل تقارن، دایره‌هایی در اطراف محور z هستند. بنابراین، $B_\phi(r)$ تنها مولفه غیر صفر B است. طبق قانون آمپر داریم

$$B_\phi = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{I}{2k_m} \frac{1}{r} = 4\pi k_m K \frac{a}{r}, & r > a \end{cases} \quad (187.6)$$

• ب: رویکرد اول (ابتکاری). جریان dI که در یک نوار سطحی بی نهایت کوچک موازی با z ، با عرض $ad\phi$ ، جریان دارد، $dI = Kad\phi$ است. نیروی df اعمال شده توسط یک میدان مغناطیسی آزمیوتال $(0, B_\phi, 0) \equiv (0, B_\phi, 0)$ بر روی یک نوار بی نهایت کوچک به طول dz برابر است با:

$$df = b_m dz dI \hat{z} \times B = -b_m K a B_\phi d\phi dz \hat{r}, \quad (188.6)$$

به سمت محور هدایت می‌شود، یعنی بهطوری که سطح رسانا را منقبض می‌کند (اثر انقباضی). با این حال، در اینجا باید به خاطر داشته باشیم که $(0, B_\phi(r))$ در سطح استوانه

مسائل الکترومغناطیس

نایپیوسته است و در داخل صفر است. بنابراین، مقدار B_ϕ در (۱۸۸.۶) را با مقدار «متوسط» آن $B_\phi^{aver} = [B_\phi(a^+) - B_\phi(a^-)]/2 = 2\pi k_m K$ جایگزین کنیم (این نقطه برای محاسبه فشار الکترواستاتیک روی یک لایه بار سطحی یکسان است). بنابراین، قدر مطلق نیروی وارد بر یک ناحیه بینهایت کوچک $dS = ad\phi dz$ برابر است با

$$|df| = 2\pi k_m b_m K dS = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi} K dS, & SI \\ \frac{1}{c^2} K dS, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (189.6)$$

و فشار مغناطیسی روی سطح خواهد بود

$$P = \frac{|df|}{dS} = 2\pi k_m b_m K = k_m b_m \frac{I^r}{2\pi a^r} \begin{cases} \frac{\mu_0 I^r}{2(2\pi a)^r}, & SI \\ \frac{1}{c^2} \frac{I^r}{2\pi a^r}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (190.6)$$

روش دوم (دقیق). نیروی مغناطیسی در حجم بینهایت کوچک d^3r ، جایی که چگالی جریان J در حضور یک میدان مغناطیسی B جریان دارد، برابر است با

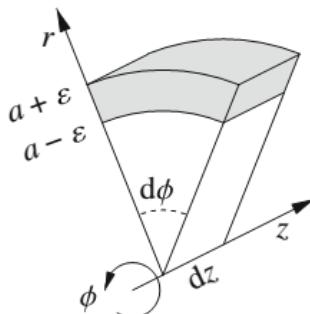
$$d^3f = b_m J \times B d^3r, \quad (191.6)$$

به دلیل تقارن مسئله، عبارت $(\nabla \cdot B)B$ (۷.۶) که در معادله (۷.۶) ظاهر می‌شود برابر است با

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \left(B_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \mathbf{B} = 0. \quad (192.6)$$

که در آن از مولفه‌های گرادیان در مختصات استوانه‌ای جدول (۱-۱) استفاده کرده‌ایم، و این واقعیت که تنها مولفه غیر صفر B_ϕ ، یعنی $B_\theta = 0$ است. عنصر حجم بینهایت کوچک در مختصات استوانه‌ای $d^3r = r dr d\phi dz$ است، بنابراین

$$d^3f = -\hat{r} \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} \left[\frac{\partial B_\phi^r(r)}{\partial r} \right] r dr d\phi dz \quad (193.6)$$



شکل (۱۹-۶)

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \left[\frac{\partial B_\phi^r(r)}{\partial r} \right] r dr = \left[r B_\phi^r(r) \right]_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} - \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} B_\phi^r(r) dr \quad (194.6)$$

در حد $\epsilon \rightarrow 0$ ، اولین جمله در سمت راست برابر است با $(B_\phi^r(a+)) - (B_\phi^r(a-))$ ، زیرا برای $a < r$ ، انتگرال سمت راست به صفر نزدیک می‌شود،

اکنون رابطه (۱۹۳.۶) را با توجه به $r = a - \epsilon$ بین $a - \epsilon$ و $a + \epsilon$ انتگرال گیری می‌کنیم، نیروی d^3f را که بر حجم سایه‌دار کوچک شکل (۱۹-۶)، که توسط دو سطح استوانه‌ای $r = a - \epsilon$ و $r = a + \epsilon$ محدود شده است، با روزنه بینهایت کوچک $d\phi$ و طول dz به دست می‌آوریم. انتگرال گیری جزء به جزء انجام داده و داریم

زیرا، طبق قضیه مقدار میانگین، برابر است با $2\epsilon B_\phi^*(\bar{r})$ ، با مقداری \bar{r} در محدوده $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ است. بنابراین داریم

$$d^*f = -\hat{r} \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} B_\phi^*(a^+) ad\phi dz \quad (195.6)$$

که در آن $ad\phi dz$ عنصر سطحی بینهایت کوچکی است که d^*f روی آن عمل می‌کند. فشار به این ترتیب است

$$P = \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} B_\phi^*(a^+) = \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} (4\pi k_m K)^* = 2\pi b_m k_m K^* \quad (196.6)$$

که با رابطه (190.6) سازگار است. اکنون رابطه (196.6) را ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4\pi k_m (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i &= [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_i = \epsilon_{ijk} \left(\epsilon_{jlm} \frac{\partial B_m}{\partial x_l} \right) B_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \frac{\partial B_m}{\partial x_l} B_k \\ &= \delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il} B_k \frac{\partial B_m}{\partial x_l} = B_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k} - B_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \\ &= (\mathbf{B} \times \nabla) B_i - \frac{1}{2} \frac{\partial (B_k B_k)}{\partial x_i} = (\mathbf{B} \times \nabla) B_i - \frac{1}{2} \nabla_i B^* \end{aligned} \quad (197.6)$$

که در آن زیرنویس‌های i, j, k, l, m به ترتیب از ۱ تا ۳ و $x_{1,2,3} = x, y, z$ هستند. نماد ϵ_{ijk} نماد سیویدتا-لوی^۳ است که با $\epsilon_{ijk} = 1$ تعريف می‌شود اگر (i, j, k) جایگشت حلقوی $(1, 2, 3)$ باشد، اگر $\epsilon_{ijk} = -1$ جایگشت پادحلقه‌ای $(1, 2, 3)$ است و اگر حداقل دو تا از زیرنویس‌ها (i, j, k) برابر باشند.

- ج: انرژی مغناطیسی ΔU_M ذخیره شده در لایه بین z و $z + \Delta z$ برابر با انتگرال حجمی زیر است.

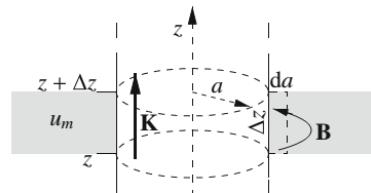
$$\begin{aligned} \Delta U_M &= \int_{layer} u_M d^*r = \int_{layer} \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} B^*(r) d^*r \\ &= 2\pi \Delta z \int_a^\infty \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} B_\phi^*(r) r dr \end{aligned} \quad (198.6)$$

که شامل انتگرال $\int_a^\infty r - 1 dr$ ، بی نهایت است. با این حال، اگر شعاع استوانه با da افزایش یابد، انتگرال برای $r > a + da$ تغییر نمی‌کند، در حالی که حجم انتگرال (شکل ح-۶) به همین ترتیب، مقدار (بی نهایت) انتگرال با مقدار محدود کاهش می‌یابد.

$$d(\Delta U_M) = -\Delta z \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} B_\phi^*(a^+) 2\pi a da \quad (199.6)$$

بنابراین، انبساط سطح حامل جریان منجر به کاهش انرژی مغناطیسی می‌شود. اگر سیستم ایزوله بود، نیروی df وارد بر عنصر سطحی $dS = ad\phi dz$ به صورت شعاعی به سمت بیرون هدایت می‌شد که منجر به انبساط استوانه می‌شود. با این حال، سیستم ایزوله نیست، زیرا یک منبع جریان برای ثابت نگه داشتن چگالی سطح جریان K مورد نیاز است. افزایش شعاع da منجر به کاهش شار مغناطیسی در لایه برایر با $d(\Delta\phi) = B_\phi(a^+) \Delta z da$ می‌شود (شکل را ملاحظه کنید)، که به نوبه خود دلالت بر ظهر نیروی الکتروموتور ΔE دارد.

^۳Levi-Civita



شکل (۲۰-۶)

در واقع، برای ثابت نگه داشتن K در طول بازه زمانی dt که در آن شاعع استوانه به میزان da افزایش می‌یابد، منبع باید انرژی $d(\Delta U_{source})$ را به لایه ارائه دهد، که کار $d(\Delta W) = \Delta \mathcal{E} I dt = \Delta \mathcal{E} K dt$ نیروی الکتروموتور را جبران می‌کند، به طوری که $\Delta \mathcal{E} = b_m d(\Delta \Phi)/dt$

$$\begin{aligned} d(\Delta U_{source}) &= -b_m I d(\Delta \Phi) = 2\pi b_m a K B_\phi(a^+) \Delta z da \\ &= b_m 2\pi a \frac{1}{4\pi k_m} B_\phi(a^+) \Delta z da = -d(\Delta U_m) \end{aligned} \quad (200.6)$$

بنابراین، تراز انرژی کل برای لایه به دست می‌آید

$$d(\Delta U_{tot}) = d(\Delta U_{source}) + d(\Delta U_m) = -d(\Delta U_m) \quad (201.6)$$

و نیرو در واحد سطح برابر است با

$$P = -\frac{1}{2\pi a \Delta z} \frac{d(\Delta U_{tot})}{da} = +\frac{1}{2\pi a \Delta z} \frac{d(\Delta U_m)}{da} \quad (202.6)$$

که با رابطه (۱۹۰.۶) مطابقت دارد.

۱۶.۶ فشار مغناطیسی بر یک سیم‌لوله

- الف: نیروی مغناطیسی df روی یک کمان سیم پیچ بینهایت کوچک به طول dl که حامل جریان I است.

$$df = b_m I dl \times \mathbf{B} \quad (203.6)$$

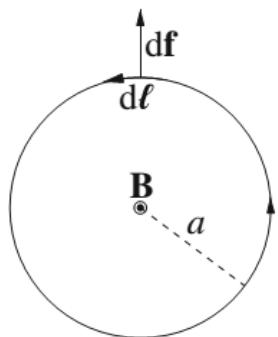
بنابراین، نیروی dF وارد بر عنصر سطحی $dS = dl \times dz$ سیم‌لوله، به عرض dl برابر است با

$$dF = b_m I B n dl \times dz = b_m I B n dS \quad (204.6)$$

از آنجایی که عنصر سطح شامل قوس‌های سیم پیچ ndz است که هر کدام به طول dl هستند. نیروی dF به سمت بیرون سیم‌لوله هدایت می‌شود و سیم‌لوله تمایل به انبساط شعاعی دارد.

میدان مغناطیسی B در سطح سیم‌لوله به دلیل وجود جریان الکتریکی در سیم پیچ‌ها ناپیوسته است. در مرز یک سیم‌لوله بینهایت طولانی در داخل آن داریم

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = 4\pi k_m n I \hat{\mathbf{z}} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} & SI \\ \frac{4\pi}{c} n I \hat{\mathbf{z}} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (205.6)$$



شکل (۲۱-۶)

که در آن \hat{z} بردار واحد در امتداد محور سیم‌لوله و $\circ B =$ در خارج است. بنابراین مقدار متوسط

$$\frac{B(a^+) + B(a^-)}{2} = \frac{B_\circ}{2} = 2\pi k_m n I$$

را برای B در رابطه (۲۰۴.۶) جایگزین می‌کنیم، و بدست می‌آید

$$dF = 2\pi b_m k_m b^\circ I^\circ dS \quad (۲۰۶.۶)$$

فشار P بر روی سطح سیم‌لوله از تقسیم dF بر dS بدست می‌آید، بنابراین

$$P = \frac{dF}{dS} = 2\pi b_m k_m b^\circ I^\circ = \frac{b_m B_\circ}{\lambda \pi k_m} \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} n^\circ I^\circ = \frac{B_\circ}{\frac{\mu_0}{2}} & SI \\ 2\pi n^\circ I^\circ = \frac{B_\circ}{\lambda \pi} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۲۰۷.۶)$$

• ب: انرژی مغناطیسی سیم‌لوله را می‌توان بر حسب چگالی انرژی مغناطیسی u_M مرتبط با میدان مغناطیسی B نوشت.

$$u_M = \frac{b_m}{\lambda \pi k_m} B_\circ^2 = \begin{cases} \frac{B_\circ^2}{\frac{\mu_0}{2}} & SI \\ \frac{B_\circ^2}{\lambda \pi} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۲۰۸.۶)$$

با صرفنظر از اثرات مرزی، کل انرژی مغناطیسی سیم‌لوله U_M را با ضرب u_M در حجم سیم‌لوله بدست می‌آوریم.

$$U_M = \pi a^\circ h u_M = \frac{a^\circ h b_m B_\circ^2}{\lambda k_m} = 2\pi^\circ a^\circ h b_m k_m b^\circ I^\circ \quad (۲۰۹.۶)$$

بنابراین، اگر شعاع سیم‌لوله a بقدر da افزایش یابد، انرژی U_M افزایش می‌یابد

$$dU_M = 4\pi^\circ a h b_m k_m b^\circ I^\circ da \quad (۲۱۰.۶)$$

در حالی که B با رابطه توسط (۲۰۵.۶) داده می‌شود، بنابراین u_M ثابت می‌ماند. این به معنای افزایش شار Φ مربوط به B از طریق هر سیم پیچ سیم‌لوله است

$$d\Phi = 2\pi a B_\circ a = \lambda \pi^\circ k_m n I da \quad (۲۱۱.۶)$$

متناظر با نیروی محرکه الکتریکی کل (سلونوئید شامل hn سیم پیچ است)

$$\mathcal{E} = -b_m \frac{d\Phi}{dt} = -b_m k_m \lambda \pi^\circ a h n^\circ I^\circ \frac{da}{dt} \quad (۲۱۲.۶)$$

که باید توسط منبع جریان جبران شود تا I ثابت بماند. کار dW_{source} انجام شده توسط منبع جریان است بنابراین

$$dW_{source} - \mathcal{E} Idt = b_m k_m \lambda \pi^\circ a n^\circ h I^\circ da \quad (۲۱۳.۶)$$

بنابراین انرژی کل سیم‌لوله سیستم + منبع جریان بصورت زیر تغییر می‌کند

$$dU_{tot} = dU_M - dW_{source} = -4\pi^\circ a h b_m k_m n^\circ I^\circ da \quad (۲۱۴.۶)$$

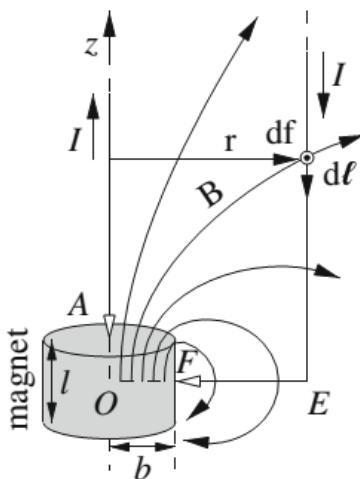
فشار روی سطح سیم‌لوله $P = dU_{tot}/dV$ است، که در آن $V = \pi a^\circ$ حجم سیم‌لوله است. بدین ترتیب

$$P = -\frac{dU_{tot}}{dV} = -\frac{1}{2\pi a h} \frac{dU_{tot}}{da} = 2\pi b_m k_m n^\circ I^\circ \quad (۲۱۵.۶)$$

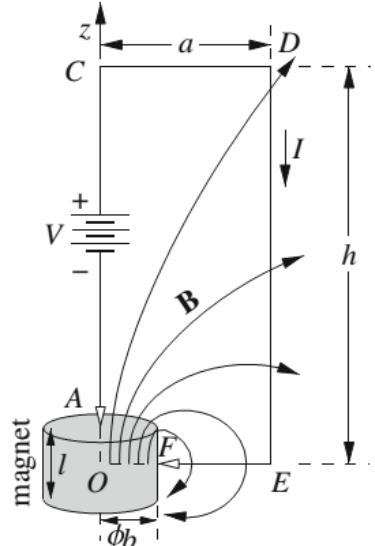
که موافق با رابطه (۲۰۷.۶) است.

۱۷.۶ موتور هموپولار

موتور در نمودار شکل (ح ۲۲-۶) نشان شده است که به دلیل تقارن مشکل فقط یک "نصف" مدار را نشان می‌دهد. از مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با مبدأ O در مرکز آهنربای استوانه‌ای به طول a و شعاع b استفاده می‌کنیم. محور z با محورهای آهنربا و سلول منطبق است که در اینجا با منبع ولتاژ V نشان داده شده است. مدار ACDEF توسط جاروبک تاماسی (فلش‌های سفید در شکل) به آهنربا در نقاط $A \equiv (0, \phi, l/2)$ و $F \equiv (b, \phi, 0)$ بسته می‌شود، به طوری که جریان I می‌تواند از طریق آهنربای رسانا جریان پیدا کند. مدار آزاد است تا حول محور z بچرخد. بگذارید $a > b$ و h به ترتیب اندازه‌های افقی و عمودی مدار باشند. میدان مغناطیسی تولید شده توسط آهنربا را مستقل از ϕ و با $B = B(r, \phi, z)$ نشان می‌دهیم. برخی از خطوط میدان B در شکل (ح ۲۲-۶) ترسیم شده است. میدان مغناطیسی در صفحه $z = 0$ موازی با محور z است که برای $r < b$ به سمت بالا و برای $r > b$ به سمت پایین هدایت می‌شود. برای سادگی، $B(r, \phi, 0) = B_0 \hat{z}$ را برای $r < b$ و B_0 مستقل از r ، حتی اگر این تقریب فقط برای $b \ll l$ معتبر باشد، تقریب می‌کنیم.



شکل (ح ۲۳-۶)



شکل (ح ۲۲-۶)

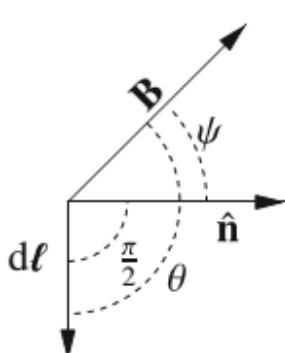
منبع ولتاژ، جریان I را از مدار عبور می‌دهد. وقتی مدار در حالت سکون است به سادگی $I = V/R$ داریم، اما وقتی مدار می‌چرخد، باید حرکت مدار را در حضور میدان مغناطیسی در نظر بگیریم. از آنجایی که میدان مغناطیسی B بر روی صفحه مدار قرار دارد، نیروی $df = Idl \times B$ بر یک قطعه بینهایت کوچک از مدار dl عمود بر صفحه مدار است (در حالتی که در شکل (ح ۲۳-۶) نشان داده شده خارج از کاغذ است). بنابراین، گشتاور بینهایت

کوچک مربوط به محور z است

$$d\tau = \mathbf{r} \times d\mathbf{f} = b_m I \mathbf{r} \times (dl \times \mathbf{B}) \quad (۲۱۶.۶)$$

که در آن \mathbf{r} فاصله dl از محور z است. گشتاور $d\tau$ همیشه موازی (یا پاد موازی) با $\hat{\mathbf{z}}$ است، که مستقل از عنصر مدار dl در نظر می‌گیریم. برای حاصلضرب برداری $dl \times \mathbf{B}$ داریم

$$\begin{aligned} dl \times \mathbf{B} &= \hat{\phi} B dl \sin \theta = -\hat{\phi} B dl \cos \psi \\ &= -\hat{\phi} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \end{aligned} \quad (۲۱۷.۶)$$



که در آن θ زاویه بین dl و \mathbf{B} است، $\hat{\mathbf{n}}$ بردار واحد عمود بر dl است، و $\psi = \theta\pi/2$ زاویه بین B و $\hat{\mathbf{n}}$ است، همانطور که در شکل (۲۴-۶) نشان داده شده است. از آنجایی که $\hat{\mathbf{r}}$ عمود بر $\hat{\phi}$ (بردارهای واحد مختصات استوانه‌ای مربوطه) است، برای کل گشتاور اعمال شده در مدار داریم.

$$\tau = b_m I \int_A^F \mathbf{r} \times (dl \times \mathbf{B}) = -\hat{\mathbf{z}} b_m I \int_A^F \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl \quad (۲۱۸.۶)$$

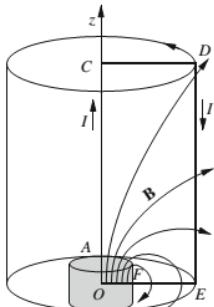
آخرین انتگرال (۲۱۸.۶) را می‌توان با تقریب‌های ما محاسبه کرد، اگر ابتدا نشان دهیم که انتگرال خطی $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl$ در اطراف مسیر بسته OCDEO شکل (۲۲-۶) صفر است، یعنی،

$$\oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl = \int_A^F \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl + \int_F^O \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl + \int_O^A \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl = 0. \quad (۲۱۹.۶)$$

اول، توجه می‌کنیم که انتگرال در طول کل مسیر \overline{OC} صفر است، هم به دلیل اینکه صفر است، هم به دلیل اینکه \mathbf{B} موازی با dl است، بنابراین بر $\hat{\mathbf{n}}$ عمود است. بنابراین، انتگرال (۲۱۹.۶) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl &= \int_{C_D}^D \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dr - \int_{D_E}^E \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dz - \int_{E_O}^O \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dr \\ &= \int_C^D \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dr + \int_E^O \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dz + \int_O^C \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dr \end{aligned} \quad (۲۲۰.۶)$$

زیرا در طول \overline{CD} و در طول \overline{EO} و در طول \overline{OC} $dl = -dr$ است.



در مرحله بعدی، مانند شکل (۲۵-۶)، با چرخاندن مسیر CDEO حول محور z ، یک استوانه تولید می‌کنیم. شار خروجی میدان مغناطیسی \mathbf{B} از سطح کل استوانه برابر است با:

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{\text{سطح جانبی}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{\text{قاعده پائین}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (۲۲۱.۶)$$

زیرا $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است. معادله (۲۲۱.۶) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$0 = \int_0^a \mathbf{B}(r, \phi, h) \cdot \hat{\mathbf{n}} 2\pi r dr + \int_0^h \mathbf{B}(r, \phi, z) \cdot \hat{\mathbf{n}} 2\pi r dz + \int_0^a \mathbf{B}(r, \phi, 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} 2\pi r dr dl, \quad (۲۲۲.۶)$$

که رابطه (۲۱۹.۶) را نشان می‌دهد. برای آخرین انتگرال ظاهر شده در رابطه (۲۱۸.۶) بنابراین داریم

$$\int_A^F \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl = - \int_F^O \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl = \int_0^b B_r r dr = \frac{B_r b^2}{2} \quad (۲۲۳.۶)$$

که در آن به‌یاد داشته باشد که انتگرال‌های خط در روی محور z صفر هستند، $dl = -dr$ در خط \overline{FO} و در حدود تقریب مانند $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -B_r$ مستقل از r در روی خط \overline{FO} . گشتاور در مدار دوار است

$$\tau = -\hat{\mathbf{z}} b_m I \int_A^F \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} r dl = -\hat{\mathbf{z}} b_m \frac{1}{R} \left(V + b_m \omega \frac{B_r b^2}{2} \right) \quad (۲۲۴.۶)$$

به‌همین دلیل است که جاروبک‌های لغزنده در یک موتور همپولار مورد نیاز است. اگر پاره خط \overline{FO} با بقیه مدار در حال چرخش باشد، گشتاور کل در مدار کامل حول محور z صفر خواهد بود، زیرا گشتاوری که بر روی \overline{FO} عمل می‌کند، گشتاور بقیه مدار را جبران می‌کند.

اگر لحظه اینرسی مدار دوار را با I نشان دهیم و برای لحظه از اثرات اصطکاکی صرف نظر کنیم، معادله حرکت برابر است با:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau = -b_m I \frac{B_r b^2}{2} = -\eta \omega \quad (۲۲۵.۶)$$

که در آن وجود یک گشتاور اصطکاکی $\omega_{fr} = -\eta \omega$ را متناسب با سرعت زاویه‌ای فرض کردہ‌ایم. جریان I توسط منبع ولتاژ و نیروی الکتروموتور \mathcal{E} به‌دلیل چرخش مدار در حضور میدان مغناطیسی \mathbf{B} تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= b_m \int_C^F (\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -b_m \omega \int_C^F wr \hat{\phi} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \int_C^F r \hat{\phi} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\ &= b_m \omega \int_C^F r \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = b_m \omega \frac{B_r b^2}{2} \end{aligned} \quad (۲۲۶.۶)$$

که در آن دو مرحله آخر از روابط (۲۱۷.۶) و (۲۲۶.۶) را استفاده کردہ‌ایم. جریان به‌این ترتیب است

$$I = \frac{1}{R} \left(V + b_m \omega \frac{B_r b^2}{2} \right) \quad (۲۲۷.۶)$$

و معادله حرکت برابر است با

$$\begin{aligned} I \frac{d\omega}{dt} &= -b_m \frac{1}{R} \left(V + b_m \omega \frac{B_r b^2}{2} \right) \frac{B_r b^2}{2} - \eta \omega \\ &= -b_m \frac{V B_r b^2}{2R} - \omega \left(b_m \frac{B_r b^2}{4R} + \eta \right) \end{aligned} \quad (۲۲۸.۶)$$

و جواب حل مسئله

$$\omega = -\frac{2b_m V B_r b^2}{b_m^2 B_r^2 b^4 + 4R\eta} \left(1 - e^{-t/T} \right), \quad \text{که در آن} \quad T = \frac{4RT}{b_m^2 B_r^2 b^4 + 4R\eta} \quad (۲۲۹.۶)$$

اگر گشتاور اصطکاکی ناچیز را فرض کنیم، یعنی $b_m^2 B_r^2 b^4 / (4R) \ll \eta$ رابطه (۲۲۹.۶) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\omega = -\frac{2V}{b_m B_r b^2} \left(1 - e^{-t/T} \right), \quad \text{که در آن} \quad T = \frac{4RT}{b_m^2 B_r^2 b^4} \quad (۲۳۰.۶)$$

با این حال، با وارد کردن "مقادیر معقول" در رابطه (۲۳۰.۶) از قبیل $V = ۱/۵$ و $B_0 = ۱۰۰$ گاوس، برابر $T = ۱۰^{-۲}$ و $b = ۰/۵$ سانتی‌متر برای جواب حالت ماندگار به دست می‌آوریم

$$\omega_0 = -\frac{۲V}{b_m B_0 b^۲} \approx -۱۲۰۰ \text{ rad/s}, \quad \nu_0 \approx ۱۹۰ \text{ s}^{-۱} \quad (۲۳۱.۶)$$

که در واقع یک چرخش بسیار سریع است! در صورت عدم وجود اصطکاک، زمانی که $V + \mathcal{E} = ۰$ باشد، به حالت ماندگار می‌رسد، به طوری که $I = ۰$ و هیچ گشتاوری در مدار عمل نمی‌کند. انرژی جنبشی حالت مادگار نهایی مدار دوار در این شرایط برابر است با:

$$K_{ss} = \frac{۱}{۲} \mathcal{I} \omega_0^۲ = \frac{۱}{۲} \mathcal{I} \frac{۴V}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴} = \frac{۲V^۲ \mathcal{I}}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴} \quad (۲۳۲.۶)$$

جريان در مدار برابر است با:

$$I(t) = \frac{۱}{R} \left(V + b_m \omega \frac{B_0 b^۲}{۲} \right) = \frac{V}{R} e^{-t/T} \quad (۲۳۳.۶)$$

و کل انرژی تامین شده توسط منبع ولتاژ می‌باشد

$$U = \int_0^\infty V I dt = \frac{V}{R} \int_0^\infty e^{-t/T} dt = \frac{V}{R} T = \frac{۴V^۲ \mathcal{I}}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴} = ۲K_{ss} \quad (۲۳۴.۶)$$

یا دو برابر انرژی جنبشی نهایی است. مقداری برابر با K_{ss} به صورت گرمای ژول تلف می‌شود. واقع بینانه‌تر، باید گشتاور اصطکاکی را در نظر بگیریم. به عنوان مثال، اگر $۴R\eta = ۹b_m B_0 b^۲$ را فرض کنیم، سرعت زاویه‌ای حالت ماندگار با ضرب ۱۰ کاهش می‌یابد. این، با فرض $R = ۱\Omega$ ، به این معنی است که

$$\eta \approx ۶ \times ۱۰^{-۵} \text{ Nms.} \quad (۲۳۵.۶)$$

در حضور اصطکاک سرعت زاویه‌ای حالت ماندگار برابر است با:

$$\omega_f = -\frac{۲b_m V B_0 b^۲}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴ + ۴R\eta} \quad (۲۳۶.۶)$$

و توان تلف شده توسط اصطکاک است

$$P_{fr} = \tau_{fr} \omega_f = \eta \omega_f^۲ = \eta \left(\frac{۲b_m V B_0 b^۲}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴ + ۴R\eta} \right)^۲ \quad (۲۳۷.۶)$$

منبع ولتاژ جریانی را هدایت می‌کند

$$I_f = \frac{V}{R} \left(۱ - \frac{b_m^۲ B_0^۲ b^۴}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴ + ۴R\eta} \right) = \frac{۴V\eta}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴ + ۴R\eta} \quad (۲۳۸.۶)$$

و قدرت زیر را فراهم می‌کند

$$P_{source} = VI_f = \frac{۴V^۲ \eta}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴ + ۴R\eta} \quad (۲۳۹.۶)$$

توان تلف شده به صورت گرمای ژول برابر است با

$$P_J = RI_f^۲ = R \left(\frac{۴V\eta}{b_m^۲ B_0^۲ b^۴ + ۴R\eta} \right)^۲ \quad (۲۴۰.۶)$$

و به راحتی می‌توانیم آن را بررسی کنیم

$$P_J + P_{fr} = P_{source} \quad (۲۴۱.۶)$$

فصل ۷

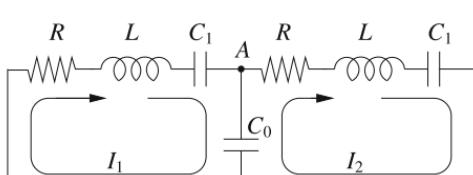
نوسان ساز الکترومغناطیسی و انتشار امواج

عناوین. نوسانگرهای هارمونیکی. تشدید (رزونانس‌ها). نوسانگرهای تزویجی، مودهای عادی و فرکانس‌های ویژه. مبانی تبدیل فوریه مدارهای الکتریکی: امپدانس‌ها، مدارهای ساده RLC و LC. امواج. معادله موج. امواج تکرنگ. پاشندگی. بسته‌های موج. سرعت فاز و سرعت گروه. خطوط انتقال. روابط مورد استفاده این فصل: تبدیل فوریه تابع گاوس

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha k)^2} e^{jkx} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-x^2/4\alpha^2} \quad (1.7)$$

که در آن بطور کلی α یک عدد مختلط با مقدار ${}^\circ$ $.Re(\alpha)$:

۱.۷ نوسانگر RLC تزویجی (۱)



شکل (۱ - ۷)

مدار الکتریکی متشکل از دو مقاومت R یکسان، دو سلف L یکسان، دو خازن یکسان و یک خازن C_0 را در نظر بگیرید که همگی در دو شبکه مانند شکل (۱-۷) مرتب شده‌اند. فرض کنید I_1 و I_2 شدت جریانی باشد که به ترتیب در حلقه چپ و راست مدار جریان دارد، همانطور که در شکل نشان داده شده است. در ابتدا فرض کنید که $I_1 = I_2 = ۰$ در غیاب منابع ولتاژ جریان دارند و $R = \infty$ فرض کنید.

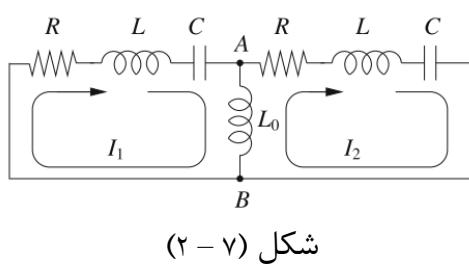
- الف معادلات تکامل زمانی I_1 و I_2 را پیدا کنید. مودهای ماندگار سیستم را توصیف کنید، به عنوان مثال، به دنبال شکل جواب‌های حالت ماندگار باشید.

$$I_1(t) = A_1 e^{j\omega t}, \quad I_2(t) = A_2 e^{j\omega t} \quad (۲.۷)$$

مقادیر ممکن برای ω را تعیین کنید. معادل مکانیکی مدار را پیدا کنید.

- ب اکنون اثر مقاومت‌های غیرصفر R را به صورت سری با هر یک از دو اندوکتانس L در نظر بگیرید. جواب‌های I_1 و I_2 را در این مورد پیدا کنید.
- ج اگر منبع ولتاژ $V = V_0 e^{j\omega t}$ در حلقه سمت چپ مدار قرار داده شود، I_1 و I_2 را به صورت توابعی از ω محاسبه کنید.

۲.۷ نوسانگر RLC تزویجی (۲)

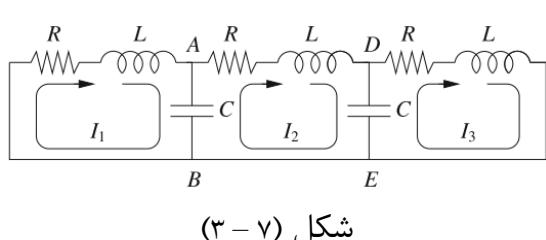


یک مدار الکتریکی از دو مقاومت R یکسان، دو سلف L یکسان، دو خازن یکسان C ، و یک سلف L_0 تشکیل شده است که همگی در دو شبکه مانند شکل (۲ - ۷) مرتب شده‌اند. فرض کنید I_1 و I_2 جریان‌هایی باشند که به ترتیب در حلقه چپ و راست مدار، همانطور که در شکل نشان داده شده، عبور می‌یابند.

- الف در ابتدا فرض کنید که جریان‌ها در غیاب منبع جریان دارند و $R = ۰$ را فرض کنید. معادلات تکامل زمانی $I_1 = I_1(t)$ و $I_2 = I_2(t)$ را پیدا کنید. مودهای عادی مدار را تعیین کنید.

- ب حالا مقاومت $R \neq ۰$ فرض کنید. نشان دهید که اکنون مودهای سیستم میرایی شده‌اند و نرخ‌های میرایی را تعیین کنید.

۳.۷ نوسانگر RLC تزویجی (۳)

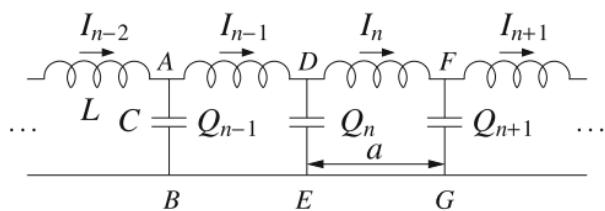


یک مدار الکتریکی از سه مقاومت یکسان R ، سه سلف L یکسان و دو خازن یکسان C تشکیل شده است که در سه شبکه مانند شکل (۳ - ۷) مرتب شده‌اند. فرض کنید I_1 ، I_2 ، و I_3 جریان‌های جاری، مانند شکل، در سه حلقه باشند. در ابتدا $R = ۰$ فرض کنید.

- **الف** معادلات تکامل زمانی $I_n(t)$ را بنویسید. یک سیستم مکانیکی با سه درجه آزادی و معادلات حرکتی مشابه با معادلات $I_n(t)$ پیدا کنید.
- **ب** مودهای نوسان عادی سیستم و فرکانس آنها را تعیین کنید.
- **ج** حالا $R \neq 0$ فرض کنید و نرخ میرائی مودهای عادی را تعیین کنید.

۴.۷ شبکه نردبانی LC

یک شبکه نردبان LC توسط N سلف L و N خازن C ، شکل (۴-۷)، تشکیل شده است. جریان در سلف n را با $I_n = I_n(t)$ نشان می‌دهیم. اثرات مقاومت ناچیز فرض می‌شود. فاصله بین دو گره همسایه a است.



شکل (۴-۷)

- **الف** معادلات تکامل زمانی I_n را پیدا کنید. معادل مکانیکی سیستم کدام است؟
- **ب** نشان دهید که جواب‌ها به‌شکل امواج تکرنگ (تک فرکانس) در حال انتشار هستند

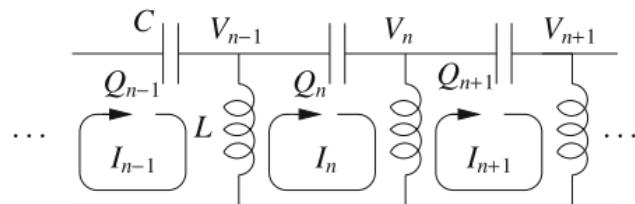
$$I_n = Ce^{j(\omega t - kna)} \quad (3.7)$$

و رابطه پاشندگی بین k و ω را پیدا کنید.

- **ج** برای مقدار معین ω مقادیر مجاز k را با شرایط مرزی $I_0 = I_N = 0$ پیدا کنید.
- **د** در حد بسوی یک سیستم پیوسته، $N \rightarrow \infty$ ، $n \rightarrow \infty$ ، $a \rightarrow \infty$ ، $x \rightarrow \infty$ را با $na \rightarrow x$ با بحث کنید. در این مورد اندوکتانس و ظرفیت به‌طور پیوسته توزیع بوده، یعنی در واحد طول تعریف می‌شوند.

۵.۷ شبکه نردبانی CL

یک شبکه نردبانی بی‌نهایت از خازن‌های یکسان C و سلف‌های L را در نظر بگیرید که مطابق شکل (۵-۷) نشان داده شده است. فرض کنید $Q_n = Q_n(t)$ بار n امین خازن، افت ولتاژ در سلف n ام، و $V_n = V_n(t) = dQ_n/dt$ جریانی است که در n امین حلقه در دوسر n امین خازن، یعنی بین گره‌های شبکه در V_{n-1} و V_n می‌گذرد.



شکل (۷ - ۵)

• الف نشان دهید که جریان‌های I_n معادلات تزویجی را برآورده می‌کنند

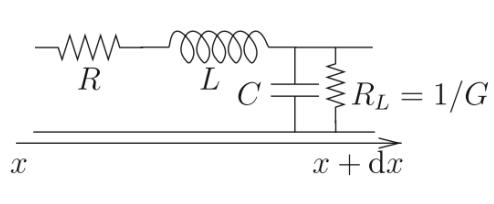
$$L \frac{d^2}{dt^2} (I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}) = \frac{I_n}{C} \quad (۴.۷)$$

• ب نشان دهید که جواب معادله (۴.۷) به صورت زیر است:

$$I_n = A e^{j(\omega t + kna)} \quad (۵.۷)$$

که در آن a فاصله بین دو عنصر نزدیک بهم است و رابطه پاشندگی $\omega(k) = \omega$ را بدست آورید.

۶.۷ خط ارتباط بدون پاشندگی



شکل (۶ - ۷)

طرح "سلول ابتدایی" یک خط انتقال در شکل ترسیم شده است. علاوه بر اندوکتانس L و خازن C معمولی خط انتقال "LC" یک مقاومت R به صورت سری با L وجود دارد که مقاومت محدود دو رسانا است که خط را تشکیل می‌دهند. علاوه بر این، یک نشتی

یک نشتی جریان بین دو هادی (یعنی در جهت "عرضی" نسبت به انتشار) فرض می‌کنیم که با مقاومت دوم R_L به موازات C مدل می‌شود. رسانایی متناظر $G = 1/R_L$ است. در حد یک سیستم پیوسته با خواص همگن و توزیع شده، همه کمیت‌ها را در واحد طول با جایگزینی R با R_{dx} ، L با L_{dx} ، C با C_{dx} و G با G_{dx} تعریف می‌کیم (مناسب است از G به عنوان کمیت تعریف شده در واحد طول به جای R_L استفاده کنید زیرا دومی متناسب با معکوس طول خط است).

• الف

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - L_i C_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) I + (R_i C_i + L_i G_i) \frac{\partial}{\partial t} I + R_i G_i I = 0 \quad (۶.۷)$$

- ب انتشار سیگنال جریان تک رنگ با فرکانس ω را مطالعه کنید، به عنوان مثال، جواب‌ها را جستجو کنید.

$$I = I_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (7.7)$$

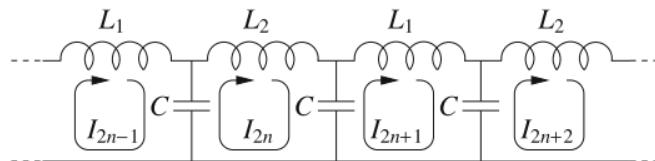
برای $x > 0$ با شرط مرزی $I(0, t) = I_0 e^{j\omega t}$ و رابطه پاشندگی $k = k(\omega)$ را تعیین کنید.

- ج شرایطی را در پارامترهای خط پیدا کنید که بسته موجی که در امتداد خطوط حرکت می‌کند، تحت تضعیف دامنه قرار می‌گیرد اما پاشندگی ندارد. این شرط مربوط به جواب‌هایی است که شکل کلی زیر را دارند:

$$I(x, t) = e^{-kx} f(x - vt) \quad (8.7)$$

که در آن $f(x)$ تابع دلخواه قابل مشتق‌گیری است. روابطی برای v و k بدست آورید.

۷.۷ جایگزین شبکه نردبانی LC



شکل (۷-۷)

یک شبکه نردبانی LC "جایگزین" را در نظر بگیرید که شامل خازن‌های یکسان C و القاگرهایی با ارزش جایگزین L_1 و L_2 است، همانطور که در شکل (۷-۷) نشان داده شده است. فرض کنید I_{2n} جریانی باشد که در حلقه n امین سلف با مقدار L_2 و I_{2n+1} جریانی باشد که در $n-1$ امین سلف با مقدار L_1 جریان دارد.

- الف نشان دهید که جریان‌ها معادلات زیر را برآورده می‌کنند

$$L_2 \frac{d^2 I_{2n}}{dt^2} = \frac{1}{C} (I_{2n-1} - 2I_{2n} + I_{2n+1}), \quad L_1 \frac{d^2 I_{2n}}{dt^2} = \frac{1}{C} (I_{2n} - 2I_{2n+1} + I_{2n+2}), \quad (9.7)$$

معادل مکانیکی این شبکه چیست؟

- ب جواب‌های (۹.۷) بصورت زیر را جستجو کنید

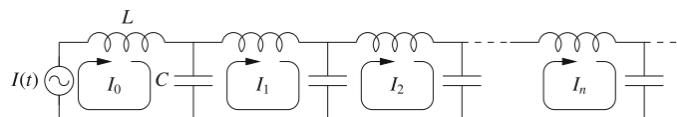
$$I_{2n} = I_e e^{j(\omega t - 2nka)}, \quad I_{2n+1} = I_o e^{j[(\omega t - (2n+1)ka)]} \quad (10.7)$$

که در آن I_e و I_o (زیرنویس‌های "e" و "o" به ترتیب مخفف زوج و فرد هستند) دو ثابت هستند و رابطه پاشندگی $\omega(k) = \omega$ را تعیین می‌کنند. محدوده فرکانس مجاز برای انتشار موج را تعیین کنید (برای سادگی، $L_2 \ll L_1$ را فرض کنید).

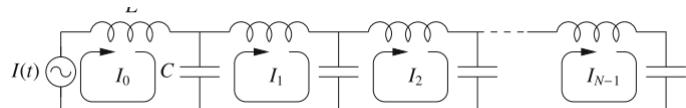
۸.۷ رزونانس‌ها در یک شبکه نردنی LC

شبکه نردنی LC نیمه بینهایت شکل (۸-۷) را در نظر بگیرید. اجازه دهید $I_n = I_n(t)$ جریانی باشد که در شبکه n -ام مدار می‌گذرد. یک منبع جریان ایده‌آل جریان ورودی را تامین می‌کند

$$I(t) = I_s e^{j\omega t} \quad (۱۱.۷)$$



شکل (۸-۷)



شکل (۹-۷)

• **الف** فرض کنید $\omega < 2\omega_c$ است. $I_n(t)$ را بر حسب تابعی از I_s و ω بدست آورید.

• **ب** اکنون بفرض آنکه $\omega > 2\omega_c$ تابع $I_n(t)$ را بدست آورید. راهنمائی: جواب را بصورت زیر جستجو کنید

$$I_n(t) = A\alpha^n e^{j\omega t} \quad (۱۲.۷)$$

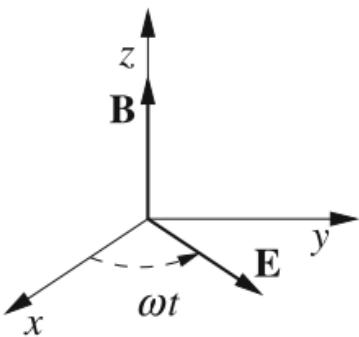
وابستگی α را به ω و ω_c تعیین کنید.

۹.۷ تشدید سیکلوترون (۱)

ذره ای با بار q و جرم m را در حضور میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت $B = B_0 \hat{z}$ و میدان الکتریکی یکنواخت با دامنه $E = E_0(x, y)$ در نظر بگیرید که با فرکانس ω در صفحه (x, y) در جهت عقربه‌های ساعت یا در جهت خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد. (شکل ۹-۷) حالت خلاف جهت عقربه‌های ساعت را نشان می‌دهد).

• **الف** حرکت ذره را تابعی از B و E و ω توصیف کنید و نشان دهید که با توجه به B ، یک تشدید برای علامت و مقدار مناسب ω مشاهده می‌شود.

• **ب** حل معادلات حرکت در رزونانس در غیاب اصطکاک را محاسبه کنید.



شکل (۱۰ - ۷)

- ج حال وجود یک نیروی اصطکاک $f = -m\gamma v$ را فرض کنید، جایی که v سرعت ذره است. حل حالت ماندگار معادلات حرکت را پیدا کنید و توان تلف شده توسط اصطکاک را به صورت تابعی از ω محاسبه کنید.

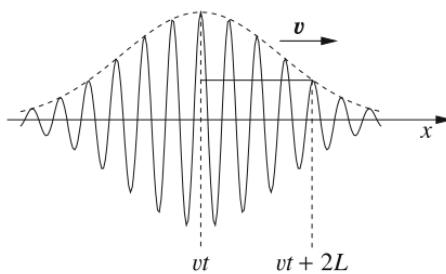
۱۰.۷ تشدید سیکلوترون (۲)

ذره‌ای با بار q و جرم m را در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت ثابت $B = B_0 \hat{z}$ ، و یک میدان الکتریکی یکنواخت نوسانی $E = E_0 \hat{x} \cos \omega t$ در نظر بگیرید.

الف معادلات حرکت را بنویسید (با فرض عدم اصطکاک) و فرکانس رزونانس سیستم را تعیین کنید (راهنمائی: نشان دهید که معادلات مولفه‌های سرعت v_x و v_y را می‌توان بهدو معادله تزویج نشده از نوع نوسان‌ساز هارمونیک اجباری جدا کرد)

ب حال وجود یک نیروی اصطکاک $f = -m\gamma v$ را فرض کنید که $\omega \ll qB_0/m$ و $\gamma \ll qB_0/m$ است. حل حالت پایدار معادلات حرکت و طیف توان جذب شده را پیدا کنید (راهنمائی: معادلات v_x و v_y را نمی‌توان در این مورد از هم جدا کرد، اما به دنبال راه حلی به شکل $v = v_0 e^{j\omega t}$ با v_0 باشید. یک بردار مختلط، کار خواهد کرد).

۱۱.۷ بسته موج شبه گاوی



شکل (۱۱ - ۷)

اجازه دهید بسته موجی بشكل گاوی را در نظر بگیریم که با سرعت v در امتداد محور x در یک محیط غیر پاشنده، با رابطه پاشندگی $\omega(k) = kv$ منتشر می‌شود. در این شرایط، مشخصات بسته موج ثابت می‌ماند و بسته با تابع $g(x-vt)$ توصیف می‌شود (شکل ۱۱ - ۷).

$$\begin{aligned} g(x-vt) &= \sqrt{\pi} \frac{A}{L} e^{-jk_0(x-vt)} e^{-(x-vt)^2/4L^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) e^{-jk(x-vt)} dk \end{aligned} \quad (11.7)$$

مسائل الکترومغناطیس

که در آن A و k پارامترهای ثابت هستند، و $\tilde{g}(k) = Ae^{-(k-k_0)^2 L^2}$ تبدیل فوریه g است. اکنون یک بسته موج دوم را در نظر بگیرید که توسط تابع f توصیف شده است که تبدیل فوریه آن برابر است با:

$$\tilde{f}(k) = \tilde{g}(k)e^{j\phi(k)} = Ae^{-(k-k_0)^2 L^2} e^{j\phi(k)} \quad (14.7)$$

که در آن "آشفتگی فاز"^۱ $\phi(k)$ یک تابع صاف است که می‌توان آن را با بسط چند جمله‌ای تیلور درجه دوم حول $k = k_0$ تقریب زد.

$$\phi(k) \approx \phi(k_0) + \phi'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\phi''(k_0)(k - k_0)^2 \quad (15.7)$$

که در آن ϕ' و ϕ'' مشتقات اول و دوم ϕ هستند. بسته موج دوم را می‌توان به عنوان "تلash" برای ایجاد یک بسته موج گاوی از مولفه طیفی آن، اما با مقداری خطأ در فازهای نسبی خود مولفه‌ها، در نظر گرفت. عرض بسته موج را پیدا کنید و شکل آن را به منظور نشان دادن انحرافات آن از شکل گاوی مورد بحث قرار دهید.

۱۲.۷ بسته موج و خط انتقال با پاشندگی ضعیف

یک خط انتقال از $x = 0$ تا $x = +\infty$ گسترش می‌یابد. یک مولد در $x = 0$ یک سیگنال را وارد می‌کند

$$f(t) = Ae^{j\omega_0 t} e^{-t^2/\tau^2} \quad (16.7)$$

که در آن A و τ ثابت و $\omega_0 \gg 1$ هستند، یعنی سیگنال "شبه تک رنگ" است. رابطه پاشندگی خط انتقال را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\omega = \omega(k) = kv(1 + bk) \quad (17.7)$$

که در آن v و b ثابت معلوم هستند، و ما $k > 0$ را فرض می‌کنیم.

الف عبارت $f(x, t)$ را برای سیگنال منتشر شده، یعنی برای بسته موجی که در امتداد خط حرکت می‌کند، با فرض $k = k_0 = k(\omega_0)$ پیدا کنید.

از این بعد، اثرات پاشنده را کوچک اما ناچیز فرض کنید، به عنوان مثال، $1 \ll b \ll v$. فرض کنید، که در آن $k = k(\omega_0)$ مطابق (۱۷.۷) است.

ب در تقریب بالا، سرعت فاز و گروه را به صورت تابعی از ω تا کمترین مرتبه‌ای که در آن اثرات پاشنده وجود دارد، بنویسید.

ج تخمینی از t_x لحظه‌ای زمانی که "اوج" سیگنال به موقعیت x می‌رسد و طول متناظر بسته موج را ارائه دهید.

^۱Phase Perturbation

- د اکنون با محاسبه انتگرال، بیان شکل بسته موج را به صورت تابعی از (x, t) پیدا کنید.

$$f(x, t) = \int e^{j[\omega t - k(\omega)]} \tilde{f}(\omega) d\omega \quad (18.7)$$

که در آن $\tilde{f}(\omega)$ تبدیل فوریه بسته موج است. به عنوان یک تقریب منطقی، فقط فاکتورها را تا مرتبه دوم در $(k - k_0)^2$ نگه دارید، برای مثال از رابطه زیر استفاده کنید

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2. \quad (19.7)$$

حل مسائل فصل ۷

ح: نوسان‌ساز الکترومغناطیسی و انتشار امواج

۱.۷ نوسانگر RLC تزویجی (۱)

الف: با فرض اینکه دو جریان I_1 و I_2 در جهت عقربه‌های ساعت جریان داشته باشند و قانون حلقه کیرشهوف را در دو حلقه مدار اعمال کنیم، خواهیم داشت؛

$$L \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_0} = 0, \quad L \frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C_1} - \frac{Q_0}{C_0} = 0 \quad (۱.۷)$$

که در آن Q_1 بار خازن چپ، Q_2 بار خازن سمت راست و Q_0 بار خازن C_0 است.
حفظ بار در دو حلقه دال بر

$$\frac{dQ_1}{dt} = I_1, \quad L \frac{dQ_2}{dt} = I_2 \quad (۲.۷)$$

در حالی که قانون اتصال کیرشهوف، که برای اتصال A یا اتصال B اعمال می‌شود، منجر به

$$\frac{dQ_0}{dt} = I_1 - I_2 \quad (۳.۷)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱.۷)، جایگزینی در رابطه (۲.۷) و (۳.۷)، و تقسیم بر L ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d^2I_1}{dt^2} &= -\frac{1}{LC_1}I_1 - \frac{1}{LC_0}(I_1 - I_2), & \text{یا} & \quad \frac{d^2I_1}{dt^2} = -\omega_1^2 I_1 - \omega_0^2(I_1 - I_2) \\ \frac{d^2I_2}{dt^2} &= -\frac{1}{LC_1}I_2 - \frac{1}{LC_0}(I_2 - I_1), & \text{یا} & \quad \frac{d^2I_2}{dt^2} = -\omega_1^2 I_2 - \omega_0^2(I_2 - I_1) \end{aligned} \quad (۴.۷)$$

که در آن کمیت‌های $\omega_1 = 1/\sqrt{LC_1}$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ را معرفی کردہ‌ایم. با جایگزینی از (۲.۷) به (۴.۷)، $I_2 = A_2 e^{j\omega t}$ و $I_1 = A_1 e^{j\omega t}$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 + \omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 &= 0 \\ -\omega_0^2 A_1 + (\omega_1^2 + \omega_0^2 - \omega^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (۵.۷)$$

مسائل الکترومغناطیس

جواب‌های غیر پیش‌پا افتاده برای این سیستم تنها در صورتی وجود دارد که رابطه زیر برابر صفر باشد

$$D = D(\omega) = (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_0^2)^2 - \omega_0^4 = (\omega_1^2 - \omega_0^2)(\omega_2^2 - 2\omega_0^2 - \omega_0^2) \quad (6.7)$$

بنابراین، فرکانس‌های حالت‌های عادی مدار، ریشه‌های معادله $D(\omega) = 0$ هستند، یعنی:

$$\omega = \omega_1 \equiv \Omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_0^2} \equiv \Omega \quad (7.7)$$

با جایگزینی این مقادیر به جای ω در (5.7) بدست می‌آوریم که $A_1 = A_2 = 0$ ، یعنی، $I_1(t) = I_2(t) = -I(t)$ ، برای مود فرکانس Ω_+ و $A_1 = -A_2 = 0$ ، یعنی، $I_1(t) = I_2(t) = I(t)$ ، برای مود فرکانس Ω_- .

مودهای معمولی این حالت ساده، با تنها دو درجه آزادی، می‌تواند به طور ساده‌تر، با جمع‌آوری و تفاضل (4.7) و معادلات نوسانگر هارمونیک محاسبه شود.

$$\frac{d^2 I_{\pm}}{dt^2} = -\Omega_{\pm}^2 I_{\pm} \quad (8.7)$$

برای متغیرهای $I_1 = (I_+ + I_-)/2$ جریان در دو مش به ترتیب $I_1 \equiv I_{\pm} \equiv I_1 \pm I_2$ و $I_2 = (I_+ - I_-)/2$ است.

هنگامی که مدار در مود فرکانس Ω_+ است، هیچ جریانی از شاخه AB (خازن C_0) عبور نمی‌کند، که در آن دو جریان به دلیل $I_1 = I_2 = 0$ حذف می‌شوند. فرکانس به سادگی فرکانس تشیدی یک مدار LC تک حلقه‌ای با اندوکتانس L و ظرفیت C_1 است، یعنی فرکانسی که امپدانس حلقه در آن صفر است.

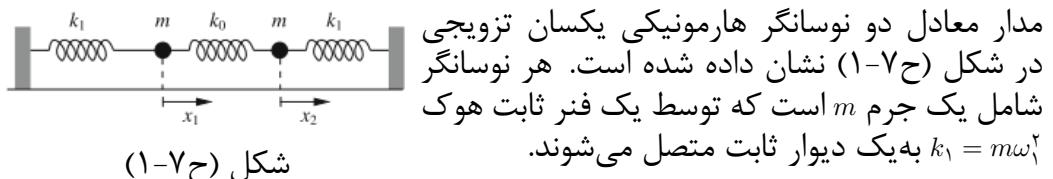
$$Z_{LC}(\omega) = Z_L(\omega) + Z_{C_1}(\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1} = 0 \quad (9.7)$$

از آنجایی که $Z_{LC}(\Omega_+) = 0$ ، جریان "آزادانه" از هر حلقه عبور می‌کند. برای مود فرکانس Ω_- داریم و جریان $I_1 = -I_2 = 2I$ از شاخه AB می‌گذرد. امپدانس مؤثر مدار، سری $Z_{C_0} = (-j\omega C_0)^{-1}$ با موازی دو امپدانس Z_{LC} است.

$$Z = Z_{C_0} + \frac{Z_{LC}Z_{LC}}{Z_{LC} + Z_{LC}} = Z_0 \frac{Z_{LC}}{2} = +\frac{1}{j\omega C_0} + \frac{1}{2} \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1} \right) \quad (10.7)$$

و وقتی صفر می‌شود که

$$\omega^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{2}{C_0} + \frac{1}{C_1} \right) = \Omega_-^2 \quad (11.7)$$



این دو جرم توسط یک فنر سوم ثابت هوک $k_0 = m\omega_0^2$ به یکدیگر متصل می‌شوند. فرض می‌کنیم که تمام فنرها زمانی که دو جرم در موقعیت تعادل خود هستند،

طول ساکن مربوط به خود را دارند. معادلات حرکت برای این دو خواهد بود

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 - k_0(x_1 - x_2), & \text{یا} & \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_1^2 x_1 - \omega_0^2(x_1 - x_2) \\ m \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_1 x_2 - k_0(x_2 - x_1), & \text{یا} & \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_1^2 x_2 - \omega_0^2(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (۱۲.۷)$$

که در آن x_1 و x_2 جایگایی دو جرم از موقعیت‌های تعادلی آنهاست. معادلات (۱۲.۷) برای x_1 و x_2 به طور رسمی معادل معادلات (۴.۷) برای I_1 و I_2 هستند و بنابراین راه حل‌های یکسانی دارند. برای مود در فرکانس Ω_+ ، دو جرم در فاز نوسان می‌کنند ($x_1 = x_2$)، فنر مرکزی (k_0) همیشه طول استراحت خود را دارد و نیرویی بر دو جرم وارد نمی‌کند. بنابراین، فرکانس Ω_+ مشخصه هر نوسانگر هارمونیک منفرد است. برای مود در فرکانس Ω_- داریم $x_1 = -x_2$ و دو جرم با فازهای مخالف نوسان می‌کنند.

• ب: وجود مقاومت غیر صفر R به صورت سری با هر سلف معادله (۱.۷) را تغییر

$$L \frac{dI_1}{dt} + RI_1 + \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_0}{C_0} = 0, \quad L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 + \frac{Q_2}{C_1} - \frac{Q_0}{C_0} = 0. \quad (۱۳.۷)$$

با مشتق گرفتن از معادلات و عملیاتی مانند رابطه (۸.۷) به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2I_{\pm}}{dt^2} = -\Omega_{\pm}^2 I_{\pm} - \gamma \frac{dI_{\pm}}{dt} \quad (۱۴.۷)$$

با $\gamma = R/L$. اینها معادلات دو نوسانگر میرا هستند. دامنه‌های مودهای معمولی در زمان تغییر می‌کند، به صورت $\exp(j\Omega \pm t - \gamma t)$ ، که با ثابت زمانی $\tau = \gamma^{-1}$ تحلیل می‌رود. نرخ میرایی حالت‌های عادی را نیز می‌توان با جستجوی راه حل‌هایی در شکل $I_{1,2} = A_{1,2} e^{j\omega t}$ ، اما به $A_{1,2}$ و ω اجازه می‌دهیم که قسمت‌های خیالی داشته باشند. برای سیستم مکانیکی معادل، معادلات مشابه با وارد کردن نیروهای اصطکاکی در معادلات حرکت (۱۲.۷) به دست می‌آیند.

• ج: با وارد کردن منبع ولتاژ، معادلات (۷.۱۳) به صورت زیر اصلاح می‌شوند:

$$L \frac{dI_1}{dt} + RI_1 + \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_0}{C_0} = V_0 e^{j\omega t}, \quad L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 + \frac{Q_2}{C_1} + \frac{Q_0}{C_0} = 0. \quad (۱۵.۷)$$

و با ادامه مانند معادله (۸.۷) و (۱۴.۷)، داریم

$$L \frac{d^2I_{\pm}}{dt^2} = -\Omega_{\pm}^2 I_{\pm} - \gamma \frac{dI_{\pm}}{dt} + \frac{j\omega V_0}{L} e^{j\omega t} \quad (۱۶.۷)$$

که معادلات دو نوسانگر اجباری با عبارت تحریک $(j\omega V_0/L)e^{j\omega t}$ هستند. رزونانس‌ها زمانی مشاهده می‌شوند که $\Omega_+ = \omega$ و برای $\Omega_- = \omega$ ، یعنی زمانی که فرکانس تحریک برابر با یکی از فرکانس‌های مودهای عادی باشد.

۲.۷ نوسانگر RLC تزویجی (۲)

• الف: طبق راه حل رابطه (۱.۷)، فرض می‌کنیم I_1 و I_2 در جهت عقربه‌های ساعت جریان دارند. با اعمال قانون حلقه کیرشهوف در هر دو حلقه مدار که به دست

می‌آوریم

$$\begin{aligned} L \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C} + L_{\circ} \left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) &= 0 \\ L \frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C} - L_{\circ} \left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (۱۷.۷)$$

دوباره با $I_1 = dQ_1/dt$ و $I_2 = dQ_2/dt$ از رابطه (۱۷.۶) نسبت به t مشتق می‌گیریم

$$\begin{aligned} (L + L_{\circ}) \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{I_1}{C} - L_{\circ} \frac{d^2 I_2}{dt^2} &= 0 \\ (L + L_{\circ}) \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_2}{C} - L_{\circ} \frac{d^2 I_1}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۸.۷)$$

مجموع و تفاضل دو معادله (۱۸.۷) معادلات زیر را برای متغیرهای جدید $I_{\pm} \equiv I_1 \pm I_2$ بهما می‌دهد.

$$\frac{d^2 I_+}{dt^2} = -\frac{I_+}{LC} \equiv -\Omega_+^2 I_+, \quad \frac{d^2 I_-}{dt^2} = -\frac{I_-}{(L + 2L_{\circ})C} \equiv -\Omega_-^2 I_- \quad (۱۹.۷)$$

که نشان می‌دهد که I_{\pm} مودهای نوسان عادی مدار و Ω_{\pm} فرکانس‌های مربوطه هستند.

• ب: با وارد کردن $R \neq 0$ ، معادله (۱۷.۷) بصورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} L \frac{dI_1}{dt} + RI_1 + \frac{Q_1}{C} + L_{\circ} \left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) + R(I_1 - I_2) &= 0 \\ L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 + \frac{Q_2}{C} - L_{\circ} \left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right) - R(I_1 - I_2) &= 0 \end{aligned} \quad (۲۰.۷)$$

با اجرای مجدد مجموع و تفاضل دو معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 I_+}{dt^2} = -\gamma_+ \frac{dI_+}{dt} - \Omega_+^2 I_+, \quad \frac{d^2 I_-}{dt^2} = -\gamma_- \frac{dI_-}{dt} - \Omega_-^2 I_- \quad (۲۱.۷)$$

با L و R و $\gamma_+ = ۳R/(L + ۲L_{\circ})$ و $\gamma_- = R/L$. اینها معادلات دو نوسانگر میرایی، با نرخ میرایی متفاوت γ_{\pm} هستند.

۳.۷ نوسانگر RLC تزویجی (۳)

• الف: اجازه دهید بار خازن‌های روی شاخه‌های AB و DE را به ترتیب با Q_1 و Q_2 نشان دهیم. طبق قانون حلقه کیرشهوف، برای سه حلقه مدار داریم،

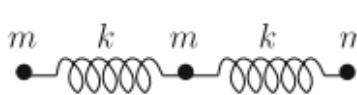
$$L \frac{dI_1}{dt} = -\frac{Q_1}{C}, \quad L \frac{dI_2}{dt} = \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{C}, \quad L \frac{dI_3}{dt} = \frac{Q_2}{C} \quad (۲۲.۷)$$

و بر طبق قانون اتصال کیرشهوف اعمال بر اتصالات A و D

$$\frac{dQ_1}{dt} = I_1 - I_2, \quad \frac{dQ_2}{dt} = I_2 - I_3 \quad (۲۳.۷)$$

با مشتق‌گیری از (۲۲.۷) نسبت به t و جایگزینی dQ_1/dt و dQ_2/dt از رابطه (۲۳.۷)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{d^{\text{v}}I_1}{dt^{\text{v}}} &= \frac{1}{LC}(-I_1 + I_2) \\ \frac{d^{\text{v}}I_2}{dt^{\text{v}}} &= \frac{1}{LC}(I_1 - 2I_2 + I_3) \\ \frac{d^{\text{v}}I_3}{dt^{\text{v}}} &= \frac{1}{LC}(I_2 - I_3)\end{aligned}\quad (24.7)$$



از نظر ریاضی، مدار معادل یک سیستم مکانیکی متشکل از سه جرم یکسان m است که توسط دو فنر یکسان ثابت هوك تزویج شده که در شکل (۲.۷) نشان داده شده است. اگر جابجایی هر جرم را از حالت

سکون خود را با x_1 و x_2 نشان دهیم، معادلات حرکت سه جرم برابر است با:

$$\begin{aligned}\frac{d^{\text{v}}x_1}{dt^{\text{v}}} &= \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \\ \frac{d^{\text{v}}x_2}{dt^{\text{v}}} &= -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) + \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \frac{d^{\text{v}}x_3}{dt^{\text{v}}} &= -\frac{k}{m}(x_2 - x_3)\end{aligned}\quad (25.7)$$

که در معادلات (۲۵.۷)، پس از جایگزینی $x_j \rightarrow J_j$ ، با $j = 1, 2, 3$ ، و $1/(LC) \rightarrow k/m$ ، باز است.

• ب: فرکانس‌های مودهای عادی را می‌توان با جستجوی جواب‌های (۲۵.۷) بصورت زیر پیدا کرد.

$$I_i(t) = A_i e^{j\omega t} \quad (26.7)$$

پس از جایگزینی (۲۶.۷) و (۲۵.۷) به رابطه (۲۵.۷) و تقسیم بر ضریب نمایی مشترک، سیستم معادلات خطی را به صورت ماتریسی به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & (2\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (27.7)$$

که تنها در صورتی که دترمینان ماتریس صفر باشد، جواب‌های غیر ضروری دارد، یعنی اگر

$$(\omega_0^2 - \omega^2) [(2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4(\omega_0^2 - \omega^2)] = 0 \quad (28.7)$$

معادله (۲۸.۷) یک معادله درجه سوم از ω است، در ادامه فقط مقادیر غیرمنفی مربوط به ω را در نظر خواهیم گرفت. جواب اول $\omega = \omega_0 = \Omega_1$ است. اگر $\omega = \Omega_1$ را جایگزین (۲۷.۷) کنیم، $A_1 = -A_3$ ، $A_2 = 0$ ، متناظر با جریان صفر در حلقه مرکزی، و I_1 و I_2 در نوسان با فازهای مخالف به دست می‌آید. برای سیستم مکانیکی شکل (ح-۷-۲)، این جواب مربوط به جرم مرکزی در حالت ساکن است، در حالی که جرم‌های چپ و راست با فازهای مخالف نوسان می‌کنند.

با تقسیم (۲۸.۷) بر $(\omega_0^2 - \omega^2)$ معادله زیر را بدست می‌آوریم

$$-\omega_0^2 + \omega^4 = 0 \quad (29.7)$$

که دارای دو جواب $\omega = \Omega_1 = \Omega_2$ و $\omega = \sqrt{3}\Omega_0$ است. مود فرکانس صفر (Ω_0) مربوط به جریان $I = I_1 = I_2 = I_{DC}$ است که آزادانه از طریق سلف‌ها جریان می‌یابد، در حالی که I_1 و I_2 در شاخه AB و DE در شاخه DE خنثی می‌شوند. برای سیستم مکانیکی، این جواب با یک حرکت انتقالی خالص از سه جرم مطابقت دارد.

با جایگزینی Ω_0 در معادله (۲۷.۷)، خواهیم داشت

$$A_2 = -2A_1, \quad A_3 = A_1 \quad (30.7)$$

یعنی I_1 و I_3 دامنه یکسانی دارند و هم فاز نوسان می‌کنند، در حالی که I_2 با دامنه مضاعف و فاز مخالف نوسان می‌کند. دو جرم خارجی شکل (۲-۷) هم فاز، در فاصله ثابت از یکدیگر نوسان می‌کنند، در حالی که جرم مرکزی با فاز مخالف و دامنه دو برابر نوسان می‌کند، بهطوری که مرکز جرم در حالت سکون است.

سه کمیت خواهند بود:

$$\mathcal{I}_0 = I_1 + I_2 + I_3, \quad \mathcal{I}_1 = I_1 - I_2, \quad \mathcal{I}_2 = I_1 - 2I_2 + I_3 \quad (31.7)$$

منتظر با سه مود عادی مدارها، به ترتیب در فرکانس‌های Ω_0 ، Ω_1 و Ω_2 نوسان می‌کنند.

• ج: با در نظر گرفتن مقاومت‌های معین، رابطه (۲۲.۷) تبدیل می‌شود

$$\frac{dI_1}{dt} + RI_1 = \frac{Q_1}{C}, \quad \frac{dI_2}{dt} + RI_2 = \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{C}, \quad \frac{dI_3}{dt} + RI_3 = \frac{Q_2}{C} \quad (32.7)$$

که برای مودهای معمولی می‌دهد

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}_0}{dt} + \frac{R}{L} \frac{d\mathcal{I}_0}{dt} &= 0 \\ \frac{d\mathcal{I}_1}{dt} + \frac{R}{L} \frac{d\mathcal{I}_1}{dt} + \Omega_1^2 \mathcal{I}_1 &= 0 \\ \frac{d\mathcal{I}_2}{dt} + \frac{R}{L} \frac{d\mathcal{I}_2}{dt} + \Omega_2^2 \mathcal{I}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (33.7)$$

جواب برای \mathcal{I}_0 یک جریان غیر نوسانی و به صورت نمایی کاهشی $\mathcal{I}_0 = C_0 e^{-\gamma t}$ را با نرخ واپاشی $\gamma = R/L$ توصیف می‌کند. دو معادله آخر جریان‌های نوسانی میرا شونده $\mathcal{I}_{1,2} = C_{1,2} \exp(j\tilde{\Omega}_{1,2}t - \gamma t)$ را با

$$\tilde{\Omega}_{1,2} = \sqrt{\omega_{1,2}^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (34.7)$$

که در آن فرض $\gamma/2 < \Omega_{1,2}$ است.

۴.۷ شبکه نردبانی LC

• الف: اجازه دهید Q_n بار خازن بعدی باشد. قانون اتصال کیرشهف در محل اتصال D شکل (۴-۷) می‌گوید که

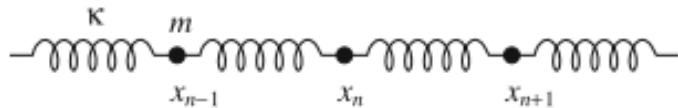
$$\frac{dQ_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \quad (35.7)$$

در حالی وقتی قانون حلقه کیرشیف بر حلقه DEFG اعمال شود، خواهیم داشت

$$\frac{Q_n}{C} - \frac{Q_{n+1}}{C} = L \frac{dI_n}{dt} \quad (36.7)$$

اکنون رابطه (36.7) را نسبت به زمان مشتق گرفته و رابطه (35.7) را برای مشتقات Q_n قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم.

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = \omega_0^2 (I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1}), \quad \text{که در آن} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (37.7)$$



شکل (ح-۷)

سیستم مکانیکی معادل یک دنباله خطی از N جرم یکسان m است که هر زوج جرم متوالی توسط یک فنر از ثابت هوک κ به یکدیگر متصل می‌شوند (در اینجا از حرف یونانی κ استفاده می‌کنیم زیرا بعداً به حرف k برای بردار موج نیاز خواهیم داشت)، که در شکل (ح-۷) نشان داده شده است. جابجایی هر جرم را از موقعیت تعادل خود با x_n نشان می‌دهیم، یعنی موقعیت آن را زمانی که تمام فترها طول ساکن خود را دارند. بنابراین، معادله حرکت m این جرم برابر است با

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -\kappa(x_n - x_{n-1}) + \kappa(x_{n+1} - x_n) \quad (38.7)$$

که با تقسیم بر m و پس از معرفی $\omega_0^2 = \kappa/m$ تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \omega_0^2 (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) \quad (39.7)$$

از نظر ریاضی معادل رابطه (37.7) است. این معادله را می‌توان به سیستم مکانیکی تعمیم داد که در آن جابجایی‌های عرضی علاوه بر جابجایی‌های طولی مجاز است. اگر جرم‌ها بتوانند در سه بعد حرکت کنند و با \mathbf{r}_n جابجایی جرم n را از موقعیت تعادل آن نشان دهیم، معادله حرکت بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = \omega_0^2 (\mathbf{r}_{n-1} - 2\mathbf{r}_n + \mathbf{r}_{n+1})$$

که قابل تفکیک به سه معادله تک بعدی است که هر کدام با رابطه (37.7) یکسان است.

- ب: ابتدا، توجه کنید که، بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم بردار موج ظاهر شده در معادله (3.7) را مثبت ($k > 0$) فرض کنیم، به طوری که رابطه (3.7) موجی است که از چپ به راست حرکت می‌کند. تغییر علامت k به سادگی موجی با فرکانس یکسان در جهت مخالف منتشر می‌کند که رابطه پاشندگی آن به دلیل تقارن وارونگی مسئله مشابه با موج جلو رونده است.

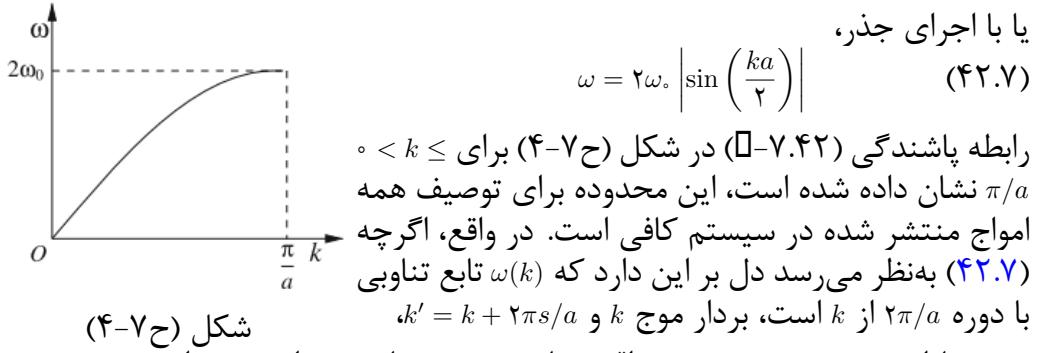
با وارد کردن (3.7) در (37.7) و تقسیم هر دو طرف بر $Ce^{j\omega t}$ به دست می‌آید

$$\omega_0^2 e^{-jkn\alpha} = \omega_0^2 [e^{-jk(n+1)\alpha} - 2e^{-jkn\alpha} + e^{-jk(n-1)\alpha}] \quad (40.7)$$

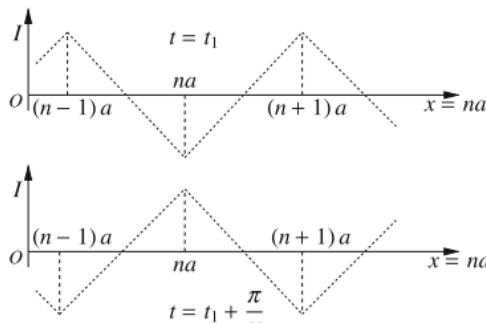
مسائل الکترومغناطیس

که در آن دوباره $\omega = 1/LC$ را جایگزین کرده‌ایم. با تقسیم کردن هر دو طرف بر e^{-jkna} بدست می‌آوریم

$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 - e^{-jkna} - e^{jkna}) = 2\omega_0^2 (1 - \cos ka) = 4\omega_0^2 \sin^2(ka/2) \quad (41.7)$$



مقدار sn یک عدد صحیح است. به همین دلیل است که در نظر گرفتن محدوده $k \leq \pi/a$ کافی است.



وجود بردار موج بیشینه و فرکانس قطع مربوط به ماهیت دوره‌ای گستته شبکه است که حداقل نرخ نمونه برداری را تحمیل می‌کند. مقدار $k_{max} = \pi/a$ مربوط به $\lambda_{min} = 2\pi/k_{max} = 2a$ است، و امواج با طول موج کمتر نمی‌توانند وجود داشته باشند. در این امواج، مقدار شدت جریان در هر دو حلقه شبکه، همانطور که در شکل (۵-۷) نشان داده شده است، تکرار می‌شود. موجی با

پریود کوچکتر به دلیل هندسه شبکه نمی‌تواند وجود داشته باشد. همچنین می‌توان توجه داشت که جهت انتشار موج را نمی‌توان با مشاهده شکل موج در دو لحظه t_1 و $t_1 + \pi/\omega$ (نیم دوره بعد، قسمت‌های بالایی و پایینی شکل (۵-۷) تعیین کرد. این با سرعت گروهی $v_g(k_{max}) = (\partial\omega/\partial k)(k_{max}) = 0$ سازگار است. بیشینه بردار موج مربوط به فرکانس قطع بالا $\omega_{max} = 2\omega_0$ است. زیرا فرکانس‌های بالاتر قابل انتقال نیستند، شبکه LC یک فیلتر پایین گذراست.

- ج: جواب تک رنگ کلی فرکانس ω یک موج ایستاده است، یعنی مجموع دو موج، یکی از چپ به‌راست و دیگری از راست به چپ منتشر می‌شود، شکل می‌گیرد.

$$I_n(t) = A e^{j\omega t - jkna} + B e^{j\omega t + jkna} \quad (44.7)$$

که در آن ω و k با رابطه پاشندگی (۴۲.۷) مرتبط هستند. به دلیل شرایط مرزی

باید داشته باشیم

$$x_n(t) = 0 \implies A + B = 0; \quad x_N(t) = 0 \implies Ae^{-jkNa} + Be^{jkNa} = 0. \quad (45.7)$$

این شرط $e^{-jkNa} - e^{jkNa} = -2j \sin(kNa) = 0$ با $k = \pi l/Na$ می‌دهد، یعنی $\omega_l = \omega(kl)$ بردار موج مجاز k_l و فرکانس‌ها $\omega_l = \omega(kl)$ داریم. توجه داشته باشید که $\lambda_{max} = 2\pi/k_{min} = 2Na$ مربوط به $k_{min} = \pi/N$ است، این یک موج ایستاده با طول موج دو برابر طول سیستم است.

- ۵: در حد یک تابع پیوسته را با اجازه دادن $a \rightarrow \infty$ و $n \rightarrow \infty$ با ثابت $na = x$ به دست می‌آوریم، بطوری که

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}(t) - 2I_n(t) + I_{n-1}(t)}{a^2} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{I(x+a, t) - 2I(x, t) + I(x-a, t)}{a^2} \\ &= \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (46.7)$$

در این حد می‌توانیم یک ظرفیت در واحد طول C_l و یک اندوکتانس در واحد طول L_l مدار تعریف کنیم، به‌طوری که ظرفیت و اندوکتانس یک قطعه مدار به‌طول Δx به‌ترتیب عبارتند از

$$C = C_l \Delta x \quad \text{و} \quad L = L_l \Delta x \quad (47.7)$$

اگر کمیت بیشتری معرفی کنیم

$$v = \sqrt{\frac{1}{L_l C_l}} \quad (48.7)$$

که ابعاد سرعت دارد، رابطه (۴۷.۷) برای سیستم پیوسته بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{v^2}{a^2} [I(x+a, t) - 2I(x, t) + I(x-a, t)] \\ &= v^2 \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (49.7)$$

این معادله موجی است که با سرعت v مستقل از فرکانس موج ω منتشر می‌شود. در محدوده یک سیستم پیوسته پاشندگی وجود ندارد. این در مورد خطوط انتقال ایده‌آل مانند خط دو سیمه (دو سیم موازی) و کابل‌های کواکسیال (هممحور) بدون مقاومت است، به مسئله ۶.۷ مراجعه شود. برای حالت خط انتقال واقعی با تلفات مقاومتی، پاشندگی را می‌توان حذف کرد.

۵.۷ شبکه نردنbanی CL

- الف: در شاخه افقی پایینی هر حلقه، پتانسیل الکتریکی یکسانی داریم و آن را صفر فرض می‌کنیم. افت ولتاژ در خازن l_m برابر است با:

$$V_{n-1} - V_n = \frac{Q_n}{C} \quad (50.7)$$

جریان در سلف I_n برابر $L(dI_n/dt - I_{n+1})$ که مربوط به افت ولتاژ در سلف و برابر $-dI_{n+1}/dt$ است. بنابراین داریم

$$V_{n-1} = L \left(\frac{dI_{n-1}}{dt} - \frac{dI_n}{dt} \right), \quad V_n = L \left(\frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} \right) \quad (51.7)$$

که در (۵۰.۷) قرار داده می‌شود

$$L \left(\frac{dI_{n-1}}{dt} - 2 \frac{dI_n}{dt} + \frac{dI_{n+1}}{dt} \right) = \frac{Q_n}{C} \quad (52.7)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۵۲.۷) نسبت به زمان، و با استفاده از $dQ_n/dt = I_n$ ، بدست می‌آوریم

$$L \left(\frac{d^2 I_{n-1}}{dt^2} - 2 \frac{d^2 I_n}{dt^2} + \frac{d^2 I_{n+1}}{dt^2} \right) = \frac{I_n}{C} \quad (53.7)$$

که برابر با (۴.۷) است.

• ب: با جایگزینی $I_n \pm 1 = Ae^{-jk(n\pm 1)a+j\omega t}$ و $I_n = Ae^{-jkna+j\omega t}$ به (۵۳.۷)، تعریف $LAe^{-jkna+j\omega t} = (LC)^{-1}$ و تقسیم هر دو طرف بر $-\omega^2 (e^{-jka} - 2 + e^{jka}) = \omega_0^2$

$$-\omega^2 (e^{-jka} - 2 + e^{jka}) = \omega_0^2 \quad (54.7)$$

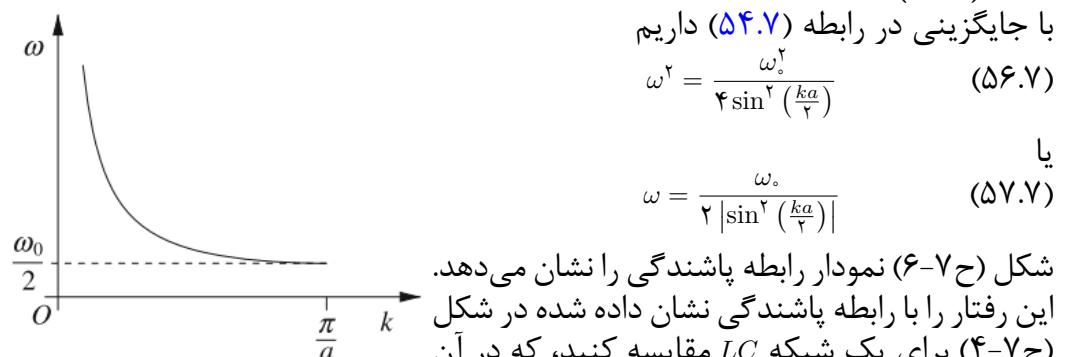
سمت چپ را می‌توان بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} -\omega^2 (e^{-jka} - 2 + e^{jka}) &= -\omega^2 [\cos(ka) - 2] - 2\omega^2 [\cos(ka) - 1] \\ &= -2\omega^2 \left[\cos(ka) - \cos^2 \left(\frac{ka}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \right] \\ &= -2\omega^2 \left[\cos^2 \left(\frac{ka}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{ka}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \right] \\ &= 4\omega^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \end{aligned} \quad (55.7)$$

با جایگزینی در رابطه (۵۴.۷) داریم

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{4 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right)} \quad (56.7)$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{2 \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|} \quad (57.7)$$



شکل (ح-۶) نمودار رابطه پاشندگی را نشان می‌دهد. این رفتار را با رابطه پاشندگی نشان داده شده در شکل (ح-۷) برای یک شبکه LC مقایسه کنید، که در آن خازن‌ها و سلف‌ها با توجه به حالت حاضر تعویض

می‌شوند (مسئله ۴.۷). در شبکه LC فرکانس قطع بالایی ω_0 است. در اینجا، در شبکه CL ، فرکانس قطع کمتری $\omega_0/2$ داریم و شبکه نردنی CL به صورت یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کند.

شکل (ح-۷)

۶.۷ خط ارتباط بدون پاشندگی

• الف: افت ولتاژ از x تا $x + dx$ برابر است با

$$V(x, t) - V(x + dx, t) = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + RI(x, t) \quad (۵۸.۷)$$

که بعداز جا گذاری R با R_l و L خواهیم داشت

$$\frac{\partial V}{\partial x} - L \frac{\partial I}{\partial t} - R_l I \quad (۵۹.۷)$$

بار مربوط به ظرفیت خازنی در واحد طول $Q = Q(x, t) = CV(x, t)$ است و اصل بقای بار میدهد

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = I(x - dx, t) - I(x, t) - I_L(x, t) \quad (۶۰.۷)$$

با جریان نشته

$$I_L = I_L(x, t) = V(x, t)/R_p = V(x, t)G_l dx \quad (۶۱.۷)$$

که با حذف Q و جایگزینی C با C_l بدست می‌آید

$$C_l \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial I}{\partial x} - G_l V \quad (۶۲.۷)$$

اکنون V را حذف کرده و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= -C_l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - G_l \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= +L_l C_l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + C_l R_l \frac{\partial I}{\partial t} + G_l L_l \frac{\partial I}{\partial t} + G_l R_l I \end{aligned} \quad (۶۳.۷)$$

که همان رابطه (۶.۷) خواهد بود.

• ب: با جایگزینی رابطه (۷.۴) در (۶.۷) بدست می‌آوریم

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = j\omega(R_l C_l + L_l G_l) + R_l G_l \quad (۶۴.۷)$$

که در آن $v^2 = (L_l C_l)^{-1}$ است. بنابراین، بردار موج k یک عدد مختلط است. اگر k را بصورت $k = k_r - jk_i$ بنویسیم، بدست می‌آید

$$k_r^2 - k_i^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - R_l G_l \quad (۶۵.۷)$$

$$2k_r k_i = \omega(R_l C_l + L_l G_l) \quad (۶۶.۷)$$

بنابراین موج محو شونده^۱ است،

$$I(x, t) = I_0 e^{-k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)} \quad (۶۷.۷)$$

که در آن مقادیر قابل قبول برای k_i مثبت است. از آنجایی که به‌طور کلی $k_r = k_r(\omega)$ باشد، اثبات مقاومتی باعث می‌شود که خط انتقال پاشنده شود، اگر $R \neq 0$ یا $G_l \neq 0$ باشد، به‌طوری که یک بسته موج در طول انتشار خود اعوجاج پیدا می‌کند.

^۱Evanescence

- ج: اگر فرض کنیم که $k_i^* = R_l G_l$ در رابطه (۶۵.۷) است، آنگاه $k_r = \omega/v_*$ بوده، به این معنی که انتشار غیر پاشنده است: سرعت فاز $v_p = \omega/k_r = v_*$ مستقل از فرکانس است. علاوه بر این، از آنجایی که k_i به ω مستقل ندارد، طول محوشدنی^۱ نیز مستقل از فرکانس است. با جایگزینی $k_i = \sqrt{R_l G_l}$ و $k_r = \omega(LC)^{1/2}$ در معادله (۶۶.۷) شرط زیر را بدست می‌آوریم

$$2\sqrt{R_l G_l} \sqrt{L_l C_l} = R_l C_l + L_l G_l \quad (۶۸.۷)$$

مربع کردن هر دو طرف و مرتب کردن مجدد عبارت‌ها $(R_l C_l - L_l G_l)^2 = 0$ ، که منجر به شرایط ساده و معادل زیر می‌شود

$$R_l C_l = L_l G_l \quad (۶۹.۷)$$

این شرایط برای یک خط انتقال غیر پاشنده یا بدون اعوجاج ناشی از هویساید^۲ است.

اگر جریان ورودی در یک طرف خط، مثلاً $x = 0$ برابر

$$I(0, t) = I_*(t) = \int \bar{I}_*(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (۷۰.۷)$$

که در آن $\bar{I}_*(\omega)$ تبدیل فوریه است. در این صورت جریان در طول خط ارتباط خواهد بود

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \int \bar{I}_*(\omega) e^{j\omega t - jk_r x} e^{-k_r} d\omega = e^{-k_r x} \int \bar{I}_*(\omega) e^{j(\omega t - x/v_*)} d\omega \\ &= e^{-k_r x} I_*(t - x/v_*) \end{aligned} \quad (۷۱.۷)$$

زیرا k_r مستقل از ω است. این معادل این است که جواب کلی (۶.۷) با شرط (۶۹.۷) دارای شکل (۸.۷) با $v = v_*$ و $k_r = k_i$ است.

همین نتیجه را می‌توان با جایگزینی مستقیم رابطه (۸.۷) در معادله (۶.۷) به دست آورد. مشتقات جزئی بصورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= -v e^{-k_r x} f'(x - vt) \\ \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= v^2 e^{-k_r x} f''(x - vt) \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -k_r e^{-k_r x} f(x - vt) + e^{-k_r x} f'(x - vt) \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} &= k_r^2 e^{-k_r x} f(x - vt) - 2k_r e^{-k_r x} f'(x - vt) + e^{-k_r x} f''(x - vt) \end{aligned} \quad (۷۲.۷)$$

که در آن $f''(x) = d^2 f(x)/dx^2$ و $f'(x) = df(x)/dx$ است. در این صورت معادله (۶.۷) می‌شود

$$(k^2 \dots) \quad (۷۳.۷)$$

برای اینکه این معادله برای f دلخواه صادق باشد، ضرایب f ، f' و f'' باید همه صفر باشند. بدین ترتیب

$$k^2 = R_l G_l, \quad 2k = v(R_l C_l + L_l G_l), \quad v^2 = (L_l C_l)^{-1} \quad (۷۴.۷)$$

که دوباره شرایط پارامترهای خط موجود در بالا را می‌دهد.

^۱O. Heaviside

۷.۷ جایگزین شبکه نردنی LC

الف: فرض کنید Q_n بار خازن در سمت راست حلقه n باشد. با اعمال قانون حلقه کیرشهوف به ترتیب حلقه‌های زوج و فرد شبکه نردنی داریم،

$$-\frac{Q_{2n-1}}{C} + L_2 \frac{dI_{2n}}{dt} + \frac{Q_{2n}}{C} = 0, \quad -\frac{Q_{2n}}{C} + L_1 \frac{dI_{2n+1}}{dt} + \frac{Q_{2n+1}}{C} = 0. \quad (75.7)$$

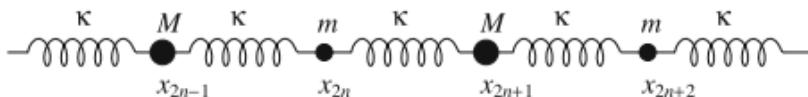
در حالی که قانون اتصال کیرشهوف می‌دهد

$$\frac{dQ_{2n-1}}{dt} = I_{2n-1} - I_{2n}, \quad \frac{dQ_{2n}}{dt} = I_{2n} - I_{2n+1} \quad (76.7)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۷۵.۷) نسبت به زمان، و قرار دادن آن در رابطه (۷۶.۷) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} L_2 \frac{d^2 I_{2n}}{dt^2} &= \frac{1}{C} \left(\frac{dQ_{2n-1}}{dt} - \frac{dQ_{2n}}{dt} \right) = \frac{1}{C} (I_{2n-1} - 2I_{2n} + I_{2n+1}) \\ L_1 \frac{d^2 I_{2n+1}}{dt^2} &= \frac{1}{C} \left(\frac{dQ_{2n}}{dt} - \frac{dQ_{2n+1}}{dt} \right) = \frac{1}{C} (I_{2n} - 2I_{2n+1} + I_{2n+2}) \end{aligned} \quad (77.7)$$

که با رابطه (۹.۷) یکسان است.



شکل (۷-۷)

معادل مکانیکی شبکه مورد نظر، توالی یک بعدی از جرم‌ها و فنرها است که در شکل (۷-۷) نشان داده شده است، که در آن جرم‌ها به طور متناوب مقادیر m و M را دارند، در حالی که همه فنرها با ثابت هوک κ یکسان هستند. اگر موقعیت جرم‌های فرد M را با x_{2n+1} و موقعیت جرم‌های زوج m را با x_{2n} نشان دهیم، معادلات حرکت سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_{2n}}{dt^2} &= -\kappa (x_{2n} - x_{2n+1}) + \kappa (x_{2n-1} - x_{2n}) = \kappa (x_{2n-1} - 2x_{2n} + x_{2n+1}) \\ M \frac{d^2 x_{2n+1}}{dt^2} &= -\kappa (x_{2n+1} - x_{2n+2}) + \kappa (x_{2n} - x_{2n+1}) = \kappa (x_{2n} - 2x_{2n+1} + x_{2n+2}) \end{aligned} \quad (78.7)$$

که پس از تعویض‌های $x \rightarrow I$, $M \rightarrow L_2$, $m \rightarrow L_1$, $\kappa \rightarrow 1/C$ با رابطه (۷۷.۷) یکسان هستند.

ب: با جایگزینی رابطه (۱۰.۷) در رابطه (۷۷.۷)، و تقسیم هر دو طرف بر $e^{j\omega t}$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} -\omega^2 L_2 I_e e^{-j(2n)ka} &= \frac{1}{C} (I_o e^{-j(2n-1)ka} - 2I_e e^{-j(2n)ka} + I_o e^{-j(2n+1)ka}) \\ -\omega^2 L_2 I_o e^{-j(2n+1)ka} &= \frac{1}{C} (I_e e^{-j(2n)ka} - 2I_o e^{-j(2n+1)ka} + I_e e^{-j(2n+2)ka}) \end{aligned} \quad (79.7)$$

مسائل الکترومغناطیس

حالا دو فرکانس زاویه‌ای $\omega_e = 1/\sqrt{L_e C}$ و $\omega_o = 1/\sqrt{L_o C}$ را بر $e^{-j(2n)ka}$ تقسیم می‌کنیم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} (2\omega_e^2 - \omega^2)I_e - 2\omega_e^2 \cos(ka)I_o &= 0 \\ 2\omega_o^2 \cos(ka)I_e - (2\omega_o^2 - \omega^2)I_o &= 0. \end{aligned} \quad (80.7)$$

این دستگاه معادلات خطی جواب‌های غیر اساسی دارد اگر و فقط اگر دترمینان آن صفر باشد، یعنی اگر

$$(2\omega_e^2 - \omega^2)(2\omega_o^2 - \omega^2) - 4\omega_e^2\omega_o^2 \cos^2(ka) = 0. \quad (81.7)$$

جواب این معادله درجه دوم بر حسب ω خواهد بود

$$\omega^2 = \omega_e^2 + \omega_o^2 \pm \sqrt{(\omega_e^2 + \omega_o^2)^2 - 4\omega_e^2\omega_o^2 \sin^2(ka)} \quad (82.7)$$

هر دو جواب از نظر فیزیکی قابل قبول هستند: دستگاه اجازه می‌دهد تا دو نوع امواج منتشر شوند که با دو رابطه پاشندگی مختلف توصیف می‌شوند.

در حد $m \ll L_2 \ll L_1$ (یا $M \ll L_2$) برای سیستم مکانیکی معادل ω_e^2 داریم و (82.7) را می‌توان به صورت تقریبی بیان کرد

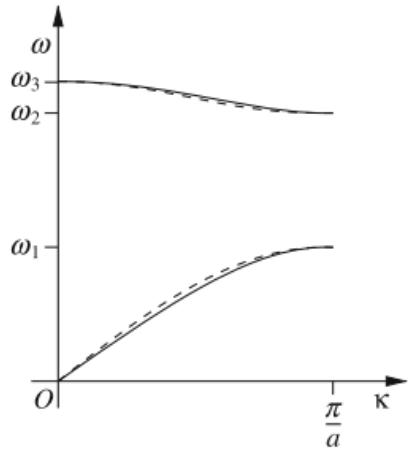
$$\omega^2 \approx \omega_e^2 + \omega_o^2 \pm \omega_e^2 \sqrt{1 + 2\frac{\omega_o^2}{\omega_e^2} - 4\frac{\omega_o^2}{\omega_e^2} \sin^2(ka)} \quad (83.7)$$

که در آن عبارت مرتبه چهارم ω_o^2/ω_e^2 را در داخل جذر نادیده گرفته‌ایم. اگر بیشتر از تقریب $x/2 \approx \sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ استفاده کنیم که برای $x \ll 1$ معتبر است و رابطه (83.7) تبدیل می‌شود

$$\omega^2 \approx \omega_e^2 + \omega_o^2 \pm \omega_e^2 \left\{ 1 + \frac{\omega_o^2}{\omega_e^2} [1 - 2\sin^2(ka)] \right\} \quad (84.7)$$

مربوط به دو رابطه پاشندگی زیر است

$$\omega \approx \begin{cases} \sqrt{2(\omega_e^2 + \omega_o^2) - 2\omega_e^2 \sin^2(ka)} \\ \sqrt{2}\omega_o \sin(ka) \end{cases} \quad (85.7)$$



شکل (۸-۷)

شاخه پایینی می‌تواند برای فرکانس‌های بین صفر و $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_o$ منتشر شود، در حالی که شاخه بالایی بین $(\omega_o^2/\omega_e^2)^{1/2}$ و $\omega_2 = \omega_e \sqrt{2(\omega_o^2/\omega_e^2)}$ قرار دارد. بنابراین، شکافی از فرکانس‌های "ممنوع" بین ω_1 و ω_2 وجود دارد. شکل (۸-۷) راه حل دقیق (خطوط پیوسته) و راه حل تقریبی (خطوط چین) را برای $\omega_e^2/\omega_o^2 = 25$ نشان می‌دهد که هنوز همخوانی خوبی دارند.

البته، این دو شاخه در مورد نوسان سازه‌ای مکانیکی متناوب نیز وجود دارند و مدلی برای اثر شناخته شده در فیزیک حالت جامد ارائه

می‌دهند. ارتعاشات یک شبکه تشکیل شده توسط یون‌های یکسان دارای یک شاخه واحد است (مسئله ۴.۷)، با یک رابطه پاشندگی شبیه به شاخه پایین، که "شاخه آکوستیک" نامیده می‌شود. در یک کریستال یونی، که توسط دو گونه یونی متناوب در محل‌های شبکه تشکیل شده است، شاخه بالایی را نیز مشاهده می‌کنیم که "شاخه نوری" نامیده می‌شود.

۸.۷ رزونانس‌ها در یک شبکه نردبانی LC

- الف: بر طبق مسئله ۴.۷، جریان جاری در حلقه h برابر است با

$$\frac{d^{\text{v}} I_n}{dt^2} = \omega_{\circ}^2 (I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}) \quad (86.7)$$

به دنبال جواب موج منتشر شونده هستیم و فاز را بصورت زیر تعریف می‌کنیم
 $\phi \equiv ka$ (۸۷.۷)

که در آن a طول تک حلقه است که باید در رابطه (۴۴.۷) جایگزین کرد بطوری که $I_n(t)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$I_n(t) = A e^{j\omega t - j\phi} \quad (88.7)$$

با جایگزینی رابطه (۸۸.۷) در (۸۶.۷) و تقسیم بر $e^{j\omega t}$ خواهیم داشت

$$-\omega^2 e^{-jn\phi} = \omega_{\circ}^2 [e^{-j(n+1)\phi} - 2e^{-jn\phi} + e^{-j(n-1)\phi}] \quad (89.7)$$

که از آن رابطه پاشندگی را بدست می‌آوریم

$$\omega^2 = \omega_{\circ}^2 (2 - e^{-j\phi} - e^{j\phi}) = 2\omega_{\circ}^2 (1 - \cos \phi) = 4\omega_{\circ}^2 \sin^2(\phi/2) \quad (90.7)$$

که عکس آن خواهد بود

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\omega}{2\omega_{\circ}}, \quad \phi = 2 \sin^{-1}\left(\frac{\omega}{2\omega_{\circ}}\right) \quad (91.7)$$

که آن نشان میدهد اگر $\omega < 2\omega_{\circ}$ باشد، مقدار ϕ حقیقی است.
به دلیل وجود منبع جریان، اگر جریان در حلقه h باشد، رابطه (۸۸.۷) باقی می‌ماند.

$$I_{\circ}(t) = I_s e^{j\omega t} \quad (92.7)$$

بنابراین باید $A = I_s$ داشته باشیم و عبارت نهایی برای $I_n(t)$ برابر است با

$$I_n(t) = I_s e^{j\omega t - jn\phi} \quad (93.7)$$

که در آن ϕ با رابطه (۹۱.۷) داده می‌شود.

ب: اگر $\omega > 2\omega_{\circ}$ باشد موج جریان نمی‌تواند در نردبان منتشر شود. ما به دنبال جوابی بصورت پیشنهاد شده توسط بخش راهنمائی مسئله هستیم. با جایگزینی (۱۲.۷) در (۸۶.۷) به دست می‌آوریم

$$-\omega^2 \alpha^{-n} = \omega_{\circ}^2 [\alpha^{-(n+1)} - 2\alpha^{-n} + \alpha^{-(n+1)}] \quad (94.7)$$

که با ضرب α^n/ω_0^n در آن خواهیم داشت

$$\alpha^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \alpha + 1 = 0 \quad (95.7)$$

و جواب آن خواهد بود

$$\alpha = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right)^2 - 1} \quad (96.7)$$

باید برای یک نردهان بی نهایت، $1 < |\alpha|$ داشته باشیم در غیر این صورت جریان به طور نامحدود در شبکه‌های متوالی بزرگ می‌شود و رشد می‌کند. بنابراین، جواب را با علامت مثبت نگه می‌داریم، زیرا $\omega > \omega_n$ نشان می‌دهد که همه جواب‌های (96.7) منفی هستند، به دست می‌آید.

$$I_n(t) = I_s(-1)^n |\alpha|^n e^{j\omega t}, \quad |\alpha| = \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} - 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right)^2 - 1} \quad (97.7)$$

که می‌توانیم آنرا بصورت زیر بازنویسی کنیم

$$I_n(t) = I_s e^{-\gamma n + j\omega t} \quad \text{که در آن} \quad \gamma = -j\pi + \ln |\alpha| \quad (98.7)$$

- ج: ابتدا مورد موج انتشار ($\omega < \omega_n$) را در نظر می‌گیریم. اگر نردهان شامل N حلقه شماره گذاری شده مانند شکل (۷-۸) باشد، شرط مرزی در انتهای سمت راست است (شماره حلقه N وجود ندارد!). کلی‌ترین راه حل، مجموع دو موج متقابل انتشار است

$$I_n(t) = A e^{-jn\phi + j\omega t} + B e^{+jn\phi + j\omega t} \quad (99.7)$$

با اعمال شرایط $I_{\infty} = I_s$ و $I_N = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$A + B = I_s \quad Ae^{-jN\phi} + Be^{jN\phi} = 0 \quad (100.7)$$

که جواب آن خواهد بود

$$A = -\frac{j}{2} I_s \frac{e^{jN\phi}}{\sin(N\phi)}, \quad B = \frac{j}{2} I_s \frac{e^{-jN\phi}}{\sin(N\phi)} \quad (101.7)$$

که در آن $\phi = \phi(\omega)$ طبق رابطه (91.7) به ω بستگی دارد. ما تشدید را زمانی مشاهده می‌کنیم که $\sin(N\phi) = 0$ باشد، یعنی برای $\phi = m\pi/N$ با m یک عدد صحیح. رابطه (101.7) را بیاد آورید:

$$N = m \frac{\pi}{\phi} = m \frac{\pi}{ka} = m \frac{\pi}{a} \frac{\lambda}{2\pi} = m \frac{1}{a} \frac{\lambda}{2} \quad (102.7)$$

و با ضرب دو طرف در a

$$L = Na = m \frac{\lambda}{2} \quad (103.7)$$

که در آن L طول کل شبکه نردهانی است. این مطابق با حالتی است که فرکانس منبع جریان با فرکانس یکی از امواج ایستاده محاذ در شبکه برابر باشد، یعنی زمانی که طول شبکه نردهانی مضرب صحیحی از طول نیم موج باشد.

اگر $\omega > \omega_n$ راه حل کلی برابر است با:

$$I_n(t) = A \alpha_+^n e^{j\omega t} + B \alpha_-^n e^{j\omega t} \quad (104.7)$$

که در آن $\alpha_{\pm} = \alpha_{\pm}(\omega)$ هستند. در اینجا نیز مورد $1 > |\alpha|$ مجاز است، زیرا اگر n محدود باشد $|\alpha|^n$ نمی‌تواند واگرا شود. شرایط مرزی هستند:

$$A + B = I_s \quad A\alpha_+^N + B\alpha_-^N = 0. \quad (105.7)$$

که جواب آن خواهد بود

$$A = I_s \frac{\alpha_-^N}{\alpha_-^N - \alpha_+^N}, \quad B = -I_s \frac{\alpha_+^N}{\alpha_-^N - \alpha_+^N} \quad (106.7)$$

ضرایب A و B اگر $\alpha_- = \alpha_+ = \omega$ باشد، یعنی اگر $\omega = \omega_0$ باشد، واگرا می‌شوند. بنابراین، برای $\omega > \omega_0$ هیچ تشدید وجود ندارد، اما پاسخ سیستم با نزدیک شدن فرکانس به مقدار قطع، یعنی به صورت $\omega \rightarrow \omega_0$ واگرا می‌شود.

۹.۷ تشدید سیکلوترون (۱)

الف: میدان الکتریکی دوار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(t) = E_0 (\hat{x} \cos \omega t \pm \hat{y} \sin \omega t) \quad (107.7)$$

که در آن علامت مثبت (منفی) چرخش خلاف جهت عقربه‌های ساعت (در جهت عقربه‌های ساعت) را نشان می‌دهد. از معادله حرکت

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (108.7)$$

مشاهده می‌کنیم که $dv_z/dt = 0$ ، بنابراین، اگر فرض کنیم که $v_z = v_z(0)$ ، حرکت در صفحه (x, y) رخ می‌دهد. معادلات حرکت در امتداد محور x و y بقرار زیر هستند

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= +qv_y \frac{B_0}{mc} + \frac{qE_0}{m} \cos \omega t \\ \frac{dv_y}{dt} &= -qv_x \frac{B_0}{mc} \pm \frac{qE_0}{m} \sin \omega t \end{aligned} \quad (109.7)$$

در اصل، می‌توانیم هر دو معادله را نسبت به زمان مشتق‌گیری کرده، و سپس عبارات $dv_{x,y}/dt$ را جایگزین کنیم، بنابراین دو معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تزویج نشده برای یک نوسان‌ساز هارمونیکی به دست می‌آوریم.

اما یک رویکرد "زیباتر" را ترجیح می‌دهیم، که متغیر مختلط $\zeta = v_x + jv_y$ را معرفی کنیم. بنابراین سرعت با یک بردار مختلط در صفحه $(Re\zeta, Im\zeta)$ نشان داده می‌شود. با اضافه کردن رابطه (109.7) به دومی، ضرب j در اولی، به دست می‌آوریم

$$\frac{d\zeta}{dt} = -j\omega_c \zeta + \frac{qE_0}{m} e^{\pm j\omega t} \quad (110.7)$$

که در آن $\omega_c = qB_0/mc$ فرکانس سیکلوترون (یا لارمور) است. حل معادله همگن مربوطه برابر است با:

$$\zeta(t) = Ae^{j\omega t} \quad (111.7)$$

که در آن A یک مقدار ثابت مختلط دلخواه است. معادله (111.7) حرکت را در غیاب میدان الکتریکی، زمانی که سرعت در جهت عقربه‌های ساعت با فرکانس ω_c

در صفحه ζ می‌چرخد، توصیف می‌کند. سپس یک انتگرال خاص از معادله ناهمگن را بصورت زیر جستجو می‌کنیم

$$\zeta = \zeta_0 e^{\pm j\omega t}$$

و با جایگزینی مستقیم پیدا می‌کنیم

$$\zeta_0 = j \frac{qE_0}{m(\omega_c \pm \omega)} \quad (112.7)$$

در این صورت جواب کلی رابطه (110.7) برابر است با

$$\zeta(t) = Ae^{j\omega t} + j \frac{qE_0}{m(\omega_c \pm \omega)} e^{\pm j\omega t} \quad (113.7)$$

با فرض $\omega > \omega_c$ فقط در صورتی که میدان در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد، تشدید را در $\omega = \omega_c$ مشاهده می‌کنیم. در این حالت میدان الکتریکی ذره را در جهت حرکت "طبیعی" خود شتاب می‌دهد.

- ب: در رزونانس ($\omega = \omega_c$)، برای حل غیر تناوبی جواب را بصورت زیر جستجو می‌کنیم

$$\zeta(t) = \zeta_R(t) e^{j\omega t} \quad (114.7)$$

که با جایگزینی در رابطه (110.7) می‌دهد

$$\left(\frac{d\zeta_R}{dt} \right) e^{j\omega t} + j\omega \zeta_R e^{j\omega t} = j\omega_c \zeta_R e^{j\omega t} + \frac{qE_0}{m} e^{j\omega t} \quad (115.7)$$

و چون $\omega_c = \omega$

$$\left(\frac{d\zeta_R}{dt} \right) = \frac{qE_0}{m} \quad (116.7)$$

جواب معادله (116.7) برابر است با:

$$\zeta_R(t) = \zeta(0) + \frac{qE_0}{m} t \quad (117.7)$$

که می‌دهد

$$\zeta(t) = \left[\zeta(0) + \frac{qE_0}{m} t \right] e^{j\omega t} \quad (118.7)$$

مسیر یک مارپیچ است که سرعت شعاعی آن به صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد.

- ج: با معرفی نیروی ویسکوز $f_v = m\gamma v$ معادله زیر را برای ζ بدست می‌آوریم

$$\frac{d\zeta}{dt} = j\omega_c \zeta - \gamma \zeta + \frac{qE_0}{m} e^{j\omega t} \quad (119.7)$$

جواب به شکل (113.7) است که $\omega_c + j\gamma$ جایگزین شده است.

$$\zeta = j \frac{qE_0}{m(\omega_c - \omega + j\gamma)} e^{j\omega t} + Ae^{j\omega t - \gamma t} \quad (120.7)$$

که در آن جمله دوم دچار یک میرائی نمایی می‌شود و هر اطلاعاتی از شرایط اولیه پس از یک فاز گذرا از بین می‌رود، در حالی که بخش تناوبی جواب در تشدید، به دلیل وجود $j\gamma$ - در مخرج، واگرا نمی‌شود. بنابراین، جواب حالت ماندگار در رزونانس برابر است با :

$$\zeta_R = \frac{qE_0}{m\gamma} e^{j\omega t} \quad (121.7)$$

میانگین توان تلف شده، میانگین زمانی توان تلف شده لحظه‌ای در یک دوره تناوبی است

$$P = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (122.7)$$

مولفه‌های سرعت ذرات در حالت ماندگار عبارتند از:

$$\begin{aligned} v_x &= Re(\zeta) = \frac{qE_{\circ}\gamma}{m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} \cos \omega t - \frac{qE_{\circ}(\omega_c - \omega)}{m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} \sin \omega t \\ v_y &= Im(\zeta) = -\frac{qE_{\circ}\gamma}{m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} \sin \omega t - \frac{qE_{\circ}(\omega_c - \omega)}{m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} \cos \omega t \end{aligned} \quad (123.7)$$

بنابراین، با وارد کردن رابطه (123.7) و روابط زیر

$$E_x = E_{\circ} \cos \omega t, \quad E_y = -E_{\circ} \sin \omega t, \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2, \quad \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0 \quad (124.7)$$

در رابطه (122.7)، توان تلف شده میانگین را بدست می‌آوریم

$$P = \frac{q^2 E_{\circ}^2 \gamma}{m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} \quad (125.7)$$

در رزونانس داریم

$$P = \frac{q^2 E_{\circ}^2}{m\gamma} \quad (126.7)$$

۱۰.۷ تشدید سیکلوترون (۲)

• الف: معادله حرکت بقرار زیر است

$$\frac{dv_x}{dt} = +\omega_c v_y + \frac{qE_{\circ}}{m} \cos \omega t, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \quad (127.7)$$

که در آن $\omega_c = qB_{\circ}/m$ است. با مشتق‌گیری از رابطه (127.7) نسبت به زمان و جایگزینی مقدار v_x و v_y از رابطه (127.7)، دو معادله بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= +\omega_c \frac{dv_y}{dt} - \frac{qE_{\circ}\omega}{m} \sin \omega t = -\omega_c^2 v_x - \frac{qE_{\circ}\omega}{m} \sin \omega t \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} &= -\omega_c \frac{dv_x}{dt} = -\omega_c^2 v_y - \frac{qE_{\circ}\omega_c}{m} \cos \omega t \end{aligned} \quad (128.7)$$

که هر کدام از آنها سرعت یک نوسانگر هارمونیکی اجرائی را توصیف می‌کند. جواب‌های حالت ماندگار عبارتند از:

$$v_x = \frac{qE_{\circ}\omega}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} \sin \omega t, \quad v_y = \frac{qE_{\circ}\omega_c}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} \cos \omega t \quad (129.7)$$

اگر در فرکانس $|\omega_c| = \omega$ مستقل از علامت q و B_{\circ} ، تشدید مشاهده می‌کنیم، با توجه به مسئله ۹.۷، که در آن یک میدان الکتریکی دوار فرض شده است، در اینجا یک رزونانس همیشه یافت می‌شود زیرا میدان الکتریکی نوسان خطی را می‌توان بهدو میدان با چرخش مخالف با دامنه یکسان تجزیه کرد، که یکی از آنها رزونانس را تحریک می‌کند.

• ب: در حضور نیروی اصطکاک $\mathbf{f} = -m\gamma\mathbf{v}$ معادلات حرکت خواهند بود:

$$\frac{dv_x}{dt} = +\omega_c v_y - \gamma v_x + \frac{qE_0}{m} \cos \omega t, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x - \gamma v_y \quad (130.7)$$

و با روش بند الف قابل جداسازی نیست). مشابه مسئله ۹.۷، کمیت مختلط $\zeta = v_x + jv_y$ را معرفی می‌کنیم و معادله واحدی را بدست می‌آوریم.

$$\frac{d\zeta}{dt} = j\omega_c \zeta - \gamma \zeta + \frac{qE_0}{2m} (e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \quad (131.7)$$

که در آن از فرمول اویلر برای کسینوس استفاده کرده‌ایم. بر خلاف مسئله ۹.۷ اکنون به دنبال جواب حالت ماندگاری به شکل زیر هستیم.

$$\zeta = Ae^{+j\omega t} + Be^{-j\omega t} \quad (132.7)$$

که در آن A و B دو ثابت مختلط هستند که باید تعیین شوند. با جایگزینی مستقیم در رابطه (131.7) داریم

$$j\omega A e^{+j\omega t} - j\omega B e^{-j\omega t} = -(\gamma - j\omega_c) A e^{+j\omega t} - (\gamma - j\omega_c) B e^{-j\omega t} + \frac{qE_0}{2m} (e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})$$

که به ترتیب به دو معادله نسبت به جملات چرخش در جهت عقربه‌های ساعت و خلاف جهت عقربه‌های ساعت در صفحه مختلط قابل تفکیک است.

$$j\omega A = -(\gamma - j\omega_c) A + \frac{qE_0}{2m}, \quad -j\omega B = -(\gamma - j\omega_c) B + \frac{qE_0}{2m} \quad (133.7)$$

و از حل آن A و B بدست می‌آید:

$$A = \frac{qE_0}{2m[-j(\omega_c - \omega) + \gamma]} = \frac{qE_0 \gamma}{2m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} + j \frac{qE_0(\omega_c - \omega)}{2m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} \\ B = \frac{qE_0}{2m[-j(\omega_c + \omega) + \gamma]} = \frac{qE_0 \gamma}{2m[(\omega_c + \omega)^2 + \gamma^2]} + j \frac{qE_0(\omega_c + \omega)}{2m[(\omega_c + \omega)^2 + \gamma^2]} \quad (134.7)$$

که از آن مولفه‌های سرعت حالت ساکن ذره را بدست می‌آوریم

$$v_x = [Re(A) + Re(B)] \cos \omega t + [Im(A) - Im(B)] \sin \omega t \quad (135.7) \\ v_y = [Im(A) + Im(B)] \cos \omega t - [Re(A) - Re(B)] \sin \omega t$$

میانگین توان جذب شده برابر است با:

$$P = \langle q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle qv_x E_x \rangle = q[Re(A) + Re(B)] E_0 \frac{1}{2} \\ = \frac{q^2 E_0 \gamma}{4m[(\omega_c - \omega)^2 + \gamma^2]} + \frac{q^2 E_0 \gamma}{4m[(\omega_c + \omega)^2 + \gamma^2]} \quad (136.7)$$

از آنجایی که $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$ ، $E_x = E_0 \cos \omega t$ ، $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ است بنابراین، دوباره، یک رزونانس را در $|\omega_c - \omega| = q/\gamma$ مستقل از علامت‌های q و B مشاهده می‌کنیم. با فرض $\omega_c \ll \gamma$ توان جذب شده در تشدييد برابر است با:

$$P_{max} \approx \frac{q^2 E_0^2}{4m\gamma} \quad (137.7)$$

۱۱.۷ بسته موج شبیه گاوسی

باید تبدیل معکوس را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} f(x) &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-L^2(k-k_0)^2} e^{-jk\phi(k)} e^{-jkx} dk \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-L^2(k-k_0)^2 - j\phi_0 - j\phi'_0(k-k_0) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{j}{2}\phi''_0(k-k_0)^2 - j(k-k_0)x - jk_0x \right] dk \end{aligned} \quad (138.7)$$

که در آن، برای اختصار، به جای $(x-vt)$ ، x ، ϕ_0 ، ϕ'_0 را به جای $\phi'(k_0)$ ، $\phi(k_0)$ ، ϕ''_0 نوشتیم. با استفاده از رابطه (۱.۷) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(x) &\approx Ae^{-jk_0x-j\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-L^2(k-k_0)^2 \left(1 + j\frac{\phi''_0}{2L^2} \right) - j(k-k_0)x + \phi'_0 \right] \\ &= C \exp \left[-\frac{(x-\phi'_0)^2}{4L^2(1+j\phi''_0/2L^2)} \right] \end{aligned} \quad (139.7)$$

که در آن C یک مقدار ثابت است و مقدار آن برای اهداف ما مرتبط نیست. با جایگزینی

$$\frac{1}{1+j\phi''_0(2L^2)} = \frac{1-j\phi''_0(2L^2)}{1+\phi''_0^2(4L^4)} \quad (140.7)$$

ما شکل بسته موج را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$f(x-vt) = C \exp \left\{ -\frac{(x-vt+\phi'_0)^2 [1-j\phi''_0/(2L^2)]}{L^2 [1+\phi''_0^2/(4L^4)]} \right\} \quad (141.7)$$

بنابراین می‌بینیم که بسته از حالت کاملاً گاوسی گسترده‌تر است، زیرا $L^2[1+\phi''_0^2/(4L^4)] > 1$ است. علاوه بر این، مرکز بسته از $(x-vt)$ به $(x-\phi'_0)$ منتقل می‌شود و یک مدولاسیون غیر تناوبی (غیرهارمونیکی) به دلیل ضریب $(-j\phi''_0/2L^2)$ در صورت توان است.

۱۲.۷ بسته موج و خط انتقال با پاشندگی ضعیف

• الف: اگر $v = b$ باشد پاشندگی وجود ندارد. در این شرایط سیگنال با سرعت v منتشر می‌شود و شکل خود را حفظ می‌کند:

$$f(x-vt) = Ae^{j(\omega_0(t-x/v))} e^{-(t-x/v)^2/\tau^2} \quad (142.7)$$

• ب: سرعت فاز و سرعت گروه طبق تعریف،

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = v(1+bk), \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v(1+2bk) \quad (143.7)$$

می‌توانیم v_ϕ و v_g را به عنوان توابع ω با وارونه کردن (۱۷.۷) نوشت و برای $k = k(\omega)$ به دست آوریم.

$$k = \sqrt{\frac{1}{(2b)^2} + \frac{\omega}{bv}} - \frac{1}{2b} \quad (144.7)$$

$$\text{سپس عبارت جذر را تا مرتبه دوم } \omega/v \text{ بسط داده و به دست می‌آوریم}$$

$$k \approx \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2 b}{v^2} \quad (145.7)$$

همین نتیجه را می‌توان با یک رویه تکراری، با وارد کردن مقدار مرتبه اول برای $k = \omega/v$ در برآخت سمت راست رابطه (147.7) به دست آورد. بنابراین، سرعت فاز و گروهی تا مرتبه اول با استفاده از رابطه (143.7) خواهد بود

$$v_{\phi.} \approx v + b\omega., \quad v_{g.} \approx v + 2b\omega. \quad (146.7)$$

- ج: اوج (قله) سیگنال با سرعت گروهی منتشر می‌شود، بنابراین $t_x = x/v_{g.}$ پهنای طیف بسته موج ممکن است به صورت $\Delta\omega \approx 1/\tau$ تخمین زده شود، که مربوط به بسط سرعت انتشار مولفه‌های فوریه آن است.

$$\Delta v \approx v \left(\frac{2b}{v} \Delta\omega \right) \approx \frac{2b}{\tau} \quad (147.7)$$

بنابراین بسط بسته موج در زمان و مکان را می‌توان به صورت زیر تخمین زد

$$\Delta t \approx \frac{\partial t_x}{\partial v_g} \Delta v = t_x \frac{\Delta v}{v_g}, \quad \Delta x \approx v_g \Delta t = \frac{2bx}{v_g \tau} \quad (148.7)$$

- ۵: ثابت انتشار را تقریب می‌زنیم

$$k(\omega) \approx k. + k.(\omega - \omega.) + \frac{1}{\tau} k'' (\omega - \omega.)^2 \quad (149.7)$$

که در آن

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega.} \approx \frac{1}{v} - 2 \frac{\omega.b}{v^2} \approx \frac{1}{v_g}, \quad k'' = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega.} \approx -2 \frac{b}{v^2} \quad (150.7)$$

$$\text{طیف بسته موج (یعنی تبدیل فوریه آن) برابر است با} \\ \tilde{f}(\omega) = \sqrt{\pi\tau} A e^{-[\omega - \omega.]^2 \tau^2 / 4} \quad (151.7)$$

از آنجایی که فقط به رفتار تابع علاقه مندیم، ثابت‌های تناسب انتگرالی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x, t) &\sim \int \exp \left[-jk(\omega)x + j\omega t - \frac{(\omega - \omega.)^2 \tau^2}{4} \right] d\omega \\ &\sim \int \exp \left[-jk.x - jk.\omega x (\omega - \omega.) - j \frac{k''x}{\tau} (\omega - \omega.)^2 - \frac{(\omega - \omega.)^2 \tau^2}{4} \right] d\omega \\ &\sim \exp(-jk.x + j\omega.t) \int \exp \left[j(t - k.x)\omega' + \left(-\frac{\tau^2}{4} - j \frac{k''x}{\tau} \right) \omega'^2 \right] d\omega' \\ &\sim \exp \left[-jk.x + j\omega.t - \frac{(t - k.x)^2}{\tau^2 + 2jk''x} \right] \end{aligned} \quad (152.7)$$

ضریبی که پوش بسته موج را توصیف می‌کند (با توجه اینکه $k. = 1/v_g$) برابر است با:

$$\begin{aligned} \exp \left[-\frac{(t - k.x)^2}{\tau^2 + 2jk''x} \right] &= \exp \left[-(t - x/v_g)^2 \frac{\tau^2 - 2jk''x}{\tau^2 + (2k''x)^2} \right] \\ &= \exp \left\{ -(t - x/v_g)^2 \frac{1 - 2jk''x/\tau^2}{\tau^2 [1 + (2k''x/\tau)^2]} \right\} \end{aligned} \quad (153.7)$$

عرض زمانی بسته موج در طول انتشار بصورت زیر افزایش می‌یابد

$$\Delta t(x) = \tau \sqrt{1 + \left(\frac{2k''_o x}{\tau}\right)^2} \quad (154.7)$$

فصل ۸

معادلات ماکسول و قوانین بقاء

عنایین. معادلات ماکسول. قوانین بقاء: انرژی، تکانه و تکانه زاویه‌ای میدان الکترومغناطیسی.

قضیه پواین‌تینگ. فشار تابشی.

معادلات پایه در این فصل:

(توجه: واحدهای گاووسی cgs در این فصل بکار می‌رود در غیر این صورت مشخص می‌شود)

معادلات ماکسول

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.8)$$

قضیه (پواین‌تینگ) بقاء انرژی

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (5.8)$$

که در آن

$$u = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (6.8)$$

چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی است و

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (7.8)$$

بردار پواین‌تینگ است.
قضیه بقاء گشتاور (مومنتوم):

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T} = - \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) \quad (8.8)$$

که در آن

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (9.8)$$

چگالی گشتاور میدان الکترومغناطیسی و \mathbf{T} تانسور تنش ماسکسول با مولفه‌های

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \delta_{ij} - E_i E_j - B_i B_j \right] \quad (10.8)$$

بنابراین، $\nabla \cdot \mathbf{T}$ یک بردار با مولفه‌های زیر است

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \sum_{j=1}^{j=3} \partial_j T_{ij} \quad (11.8)$$

چگالی گشتاور زاویه‌ای یک میدان الکترومغناطیسی

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{S}}{c} \quad (12.8)$$

۱.۸ بردار پواین‌تینگ در سیم اهمی

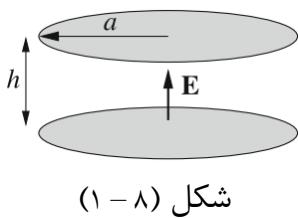
چگالی جریان ثابت و یکنواخت توزیع شده $\sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}$ در داخل یک سیم مستقیم بینهایت به‌شعاع a و رسانایی (هدایت) σ جریان دارد.

• الف: بردار پواین‌تینگ $\mathbf{S} = (c/4\pi) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ را محاسبه کنید و در مورد بقای انرژی در سیم بحث کنید.

• ب: بردار پواین‌تینگ در قضیه پواین‌تینگ فقط از طریق دیورژانس (واگرایی) آن رخ می‌دهد، زیرا این قضیه فقط مسلتم آن است که شار بردار پواین‌تینگ از طریق هر سطح بسته، عبور خالص انرژی الکترومغناطیسی را توصیف می‌کند. نشان دهید که در نتیجه، $\phi \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}' = \phi \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$ که در آن ϕ پتانسیل الکترواستاتیکی است، نیز انتخاب مناسبی برای \mathbf{S} است (راهنمایی: جایگزین $\nabla \phi$ در معادله (۷.۸) و دستکاری نتایج آن).

۲.۸ بردار پواین‌تینگ در خازن

خازن مسطحی متشکل از دو صفحه مدور موازی به‌شعاع a در فاصله $a \ll h$ از یکدیگر است. میدان الکتریکی داخل خازن به‌آرامی نسبت به‌زمان تغییر می‌کند، برای مثال $E = E_0 t / \tau$ ، $\mathbf{E} = E(t) \hat{\mathbf{z}}$ را فرض کنید. اثرات مرزی ناچیز است (شکل ۸-۱).



- الف: میدان مغناطیسی B داخل خازن را محاسبه کنید.
- ب: بردار پواین‌تینگ $\mathbf{B} = (c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{S}$ را محاسبه کنید و نشان دهید که شار S از هر سطحی که خازن را در بر می‌گیرد برابر است با تغییرات زمانی انرژی مرتبط با میدان الکترومغناطیسی.
- ج: نشان دهید که بردار پواین‌تینگ جایگزین برابر است با:

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{4\pi} \phi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13.8)$$

که در آن ϕ پتانسیل الکتریکی است ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$). بررسی کنید که همچنین شار S' از طریق سطح بسته (ب) برابر است با تغییر انرژی در حجم داخل سطح [راهنمائی: مانند (ب) مسئله ۸.۱ ادامه دهید].

۳.۸ قضیه پواین‌تینگ در یک سیم‌لوله

یک جریان وابسته به زمان، $I = I(t) = I_0 \cdot t/\tau$ ، از سیم پیچ‌های یک سیم‌لوله استوانه‌ای بطول بی‌نهایت می‌گذرد. سیم‌لوله دارای شعاع a و n دور در واحد طول است.

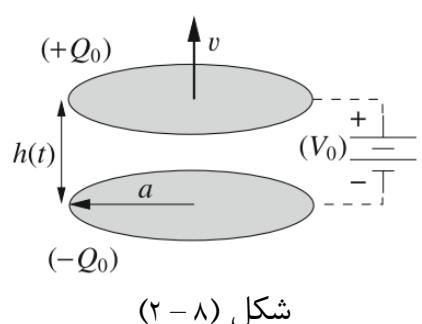
- الف: میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی B و E را در داخل سیم‌لوله پیدا کنید.

• ب:

قانون بقاء انرژی (قضیه پوین‌تینگ) را برای یک سطح استوانه‌ای داخلی بسته، هم محور با سیم‌لوله بررسی کنید.

- ج: اکنون قضیه پوین‌تینگ را برای یک سطح استوانه‌ای هم محور خارجی تأیید کنید (به‌یاد داشته باشید که $\mathbf{B} = 0$ در خارج از یک سیم‌لوله بی‌نهایت است).

۴.۸ بردار پواین‌تینگ در یک خازن با صفحه‌های متحرک



خازن مسطحی متشکل از دو صفحه فلزی مدور به شعاع a موازی با یکدیگر است. یک صفحه در حالت استراحت نگه داشته می‌شود در حالی که دیگری با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، به‌طوری که فاصله بین صفحات موردنی $h = h(t) = h_0 + vt$ باشد. در ادامه فقط موردی را در نظر می‌گیریم که در آن $a \ll h \ll h_0$ در هر زمان t ، به‌طوری که اثرات مرزی ناچیز باشد. همچنین فرض می‌کنیم که v به اندازه کافی کوچک است تا از اعتبار تقریب جریان بسته موج شبه گاووسی ۷.۱۱ به‌آرامی متغیر اطمینان حاصل شود. (شکل ۲ - ۸).

با در نظر گرفتن هر دو مورد صفحه‌های ایزوله الکتریکی با بارهای مخالف $\pm Q$ و مورد صفحه‌هایی که از طریق یک منبع ولتاژ متصل شده‌اند افت پتانسیل الکتریکی V را بین آنها ثابت نگه می‌دارد، محاسبه کنید.

- الف: نیروی F مورد نیاز برای ثابت نگه داشتن σ
- ب: نرخ تغییر انرژی الکترواستاتیک U
- ج: میدان مغناطیسی بین صفحه‌ها،
- د: بردار پواین‌تینگ S و شار آن از طریق یک سطح استوانه‌ای شکل که خازن را محصور کرده و هم محور است؛ از این نتیجه آخر برای بحث در مورد حفظ انرژی در سیستم استفاده کنید.

۵.۸ فشار تابشی روی یک آینه کامل

یک آینه کامل به عنوان محیطی تعریف می‌شود که درون آن $E = 0$ و $B = 0$ است. بنابراین، یک موج الکترومغناطیسی نمی‌تواند به سطح آینه نفوذ کند و توسط آن منعکس می‌شود.

فشار تابشی P_{rad} را پیدا کنید، یعنی نیروی متوسط سیکل در واحد سطح اعمال شده توسط یک موج مسطح بر سطح یک آینه صاف کامل، به صورت تابعی از شدت I موج توسط هر یک از سه روش زیر:

- الف: بازتاب یک بسته موج مربعی با مدت زمان دلخواه، اما متناهی را در نظر بگیرید. P_{rad} را از تفاوت بین تکانه کل بسته موج تابشی و تکانه بسته موج منعکس شده تعیین کنید.
- ب: نیروی وارد بر آینه را مستقیماً با دانستن میدان‌های الکترومغناطیسی و چگالی بار و جریان روی سطح آینه محاسبه کنید.
- ج: فشار تابشی P_{rad} را از تansور تنش ماکسول تعیین کنید.

۶.۸ پرتو گاووسی

در اپتیک، پرتو گاووسی از تابش الکترومغناطیسی تک رنگ است که شکل‌های دامنه میدان مغناطیسی و الکتریکی عرضی آن با تابع گاووسی ارائه می‌شود. پرتوهای گاووسی مهم هستند زیرا آنها تقریب بسیار خوبی از تابش ساطع شده توسط بیشتر منابع لیزر هستند. در اینجا یک پرتو گاووسی قطبی خطی را در نظر می‌گیریم که در امتداد محور z منتشر می‌شود و نمای عرضی آن حول چنین محوری متقارن است. مبدأ سیستم‌های مختصات به گونه‌ای انتخاب می‌شود که پرتو در صفحه $z = 0$ دارای حداقل عرض باشد.

فرض می‌کنیم که نزدیک به صفحه $z = 0$ ، مولفه عرضی میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0(r) \cos(kz - \omega t) = E_0 e^{-r^2/r_0^2} \cos(kz - \omega t) \\ B_y &= B_0(r) \cos(kz - \omega t) = B_0 e^{-r^2/r_0^2} \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (14.8)$$

که در آن $r_0 = \omega/c$ و $k = \sqrt{x^2 + y^2}$ است. پارامتر r_0 بنام کمر پرتو نامیده می‌شود.

- الف:** نشان دهید که علاوه بر مولفه‌های عرضی (14.8)، مولفه طولی E_z و B_z باشد وجود داشته باشند و بیان آنها را بیان کنید.

- ب:** بردار پواین‌تینگ S و میانگین آن را در یک دوره تناوب $\langle S \rangle$ محاسبه کنید، که نشان می‌دهد کدام مولفه در حال ناپدید شدن هستند.

- ج:** بررسی کنید که میدان‌های (14.8) معادله موج در خلاء را برآورده نمی‌کنند، بنابراین همانطور که در بالا ذکر شد آنها فقط یک عبارت تقریبی هستند. توضیح دهید که در کدام محدوده z ، بسته به مقدار kr_0 ، عبارات تقریبی دقیق هستند.

۷.۸ شدت و تکانه زاویه‌ای یک پرتو نور

یک پرتو نور تک رنگ قطبی دایره‌ای با فرکانس ω در امتداد جهت z منتشر می‌شود. پرتو دارای عرض محدود در صفحه عمود بر z است. فرض می‌کنیم که در ناحیه‌ای از فضا، نزدیک به "کمر" (یعنی به صفحه‌ای که پرتو حداقل عرض دارد)، مولفه عرضی میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان تقریباً به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} E_x &= +E_0(r) \cos(kz - \omega t) & E_y &= -E_0(r) \sin(kz - \omega t) \\ B_x &= +E_0(r) \sin(kz - \omega t) & B_y &= +E_0(r) \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (15.8)$$

که در آن $r_0 = \omega/c$ و $k = \sqrt{x^2 + y^2}$ تابعی حقیقی و معلوم است.

- الف:** شدت $I = I(r)$ را بنویسید که به صورت "جریان انرژی در امتداد z " تعریف شده است، یعنی $\dot{S}_z = S_z = S \cdot \hat{z}$ که در آن S بردار پواین‌تینگ است.

- ب:** نشان دهید که علاوه بر مولفه عرضی میدان‌ها، مولفه طولی (E_z, B_z) نیز باید وجود داشته باشند و آنها را بیان کنید.

- ج:** مولفه‌های S_x و S_y بردار S را محاسبه کرده و در مورد نتیجه بحث کنید.

- د:** نشان دهید که چگالی تکانه زاویه‌ای (13.8) پرتو را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$l_z = ll_z(r) = -\frac{r}{2c\omega} dr I \quad (16.8)$$

و کمیت زیر را

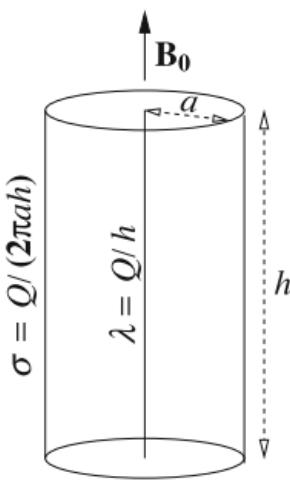
$$L_z = \int_0^\infty l_z(r) 2\pi r dr \quad (17.8)$$

به صورت تابعی از توان کل پرتو $W = \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr$ محاسبه کرد.

۸.۸ پارادوکس فاینمن حل شد

سیستم در شکل (۳-۸) توسط یک سطح استوانه‌ای نارسانا به ارتفاع h و شعاع a تشکیل شده است، که بر روی آن یک بار خالص Q به طور یکنواخت با چگالی سطح $\sigma = Q/(2\pi ah)$ توزیع شده است، و یک سیم با همان طول در امتداد محور استوانه قرار دارد. و دارای بار $-Q$ - با چگالی خطی یکنواخت $\lambda = -Q/h$ توزیع شده، به طوری که سیستم به طور کلی خنثی است. سطح استوانه‌ای آزاد است که حول محور خود بدون اصطکاک بچرخد و دارای گشتاور اینرسی I در واحد طول است. سیستم در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی B_{ext} ، موازی با محور سیستم در حالت سکون است. فرض کنید که اثرات مرزی را می‌توان نادیده گرفت.

با شروع در زمان $t = 0$ میدان مغناطیسی خارجی از مقدار اولیه B_0 به صفر در زمان $t_f \gg a/c$ بر اساس برخی قانون زمانی $B_{ext} = B_{ext}(t)$ کاهش می‌یابد.



شکل (۳-۸)

الف: در ابتدا با فرض اینکه میدان ایجاد شده توسط حرکت بارها روی استوانه ناچیز است، سرعت زاویه‌ای $\omega = \dot{\theta}(t)$ استوانه را به صورت تابعی از زمان در طول میرائی B_{ext} ، و تکانه زاویه‌ای مکانیکی مربوطه L_c استوانه محاسبه کنید.

ب: اکنون میدان ایجاد شده توسط بارهای چرخشی را در نظر بگیرید و چگونگی تغییر نتایج **الف** را محاسبه کنید.

ج: سازگار با معادلات (۹.۸-۸.۸)، تکانه زاویه‌ای یک توزیع معین از میدان‌های الکترومغناطیسی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$\mathbf{L}_{EM} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} d^3r \quad (18.8)$$

که در آن $\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/4\pi$ چگالی تکانه الکترومغناطیسی است. از معادله (۱۸.۸) برای بررسی کل بقای تکانه زاویه‌ای سیستم استفاده کنید، (بنابراین "پارادوکس" همانطور که در مسئله ۶-۶ ذکر شده حل می‌شود).

٩.٨ تک قطبی مغناطیسی

فرض کنید که یک آزمایش شواهدی مبنی بر وجود "تک قطبی‌های مغناطیسی"، یعنی ذرات نقطه مانند با بار مغناطیسی خالص q_m ارائه می‌دهد، به طوری که میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط چنین باری برابر است با:

$$\mathbf{B}_m = \alpha \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (19.8)$$

در حالی که در حضور یک میدان مغناطیسی "خارجی" \mathbf{B}_{ext} ، نیروی وارد بر ذره \mathbf{f} است. بنابراین، برای مثال، نیروی برهمنکش بین دو ذره با بارهای مغناطیسی $q_m \mathbf{B}_{ext}$ و q_{m2} خواهد بود:

$$\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} = \alpha \frac{q_{m1} q_{m2}}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad \mathbf{f}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} \quad (20.8)$$

که در آن r_{12} بردار فاصله توجیهی از بار ۱ به بار ۲ است. همچنین فرض می‌کنیم که پایستگی بار مغناطیسی کل برقرار است.

- **الف:** عبارات ضریب α و ابعاد بار مغناطیسی q_m را با توجه به بار الکتریکی q_e در هر دو واحد SI و گاوی تعیین کنید. (راهنمایی: ممکن است فرض کنید که میدان ایجاد شده توسط دو بار مغناطیسی $+q_m$ و $-q_m$ ، که با فاصله h از هم جدا شده‌اند، معادل میدان یک دوقطبی مغناطیسی $\mathbf{m} = q_m \mathbf{h}$ در فواصل $|h| \gg r$ است.
- **ب:** معادلات ماکسول را کامل کنید تا حضور تک قطبی‌های مغناطیسی را بحساب آورد.

- **ج:** اکنون یک پرتو تک قطبی مغناطیسی به شعاع a ، چگالی یکنواخت و طول بی‌نهایت را در نظر بگیرید. چگالی عددی ذرات پرتو n و همه ذرات دارای بار مغناطیسی یکسان q_m و سرعت برابر با v هستند. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تولید شده توسط پرتو را پیدا کنید.

حل مسائل فصل ۸

ح: معادلات ماکسول و قوانین بقاء

۱.۸ بردار پواین‌تینگ در سیم اهمی

- الف: بعلت تقارن، میدان مغناطیسی سمت(آزمودتال) و فقط وابسته به مختصات شعاعی r است. با اعمال قانون آمپر برای مسیر دایره‌ای به شعاع $a < r$ در اطراف محور سیم بدست می‌آید

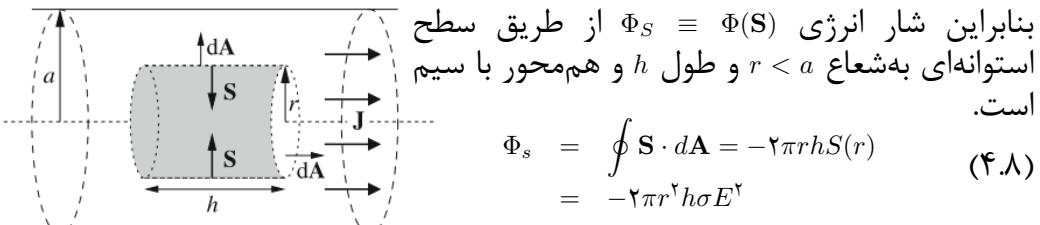
$$2\pi r B = \frac{4\pi}{c} (\pi r^2 J) \quad (1.8)$$

که منجر به

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} r \sigma E \hat{\phi} \quad (2.8)$$

که در آن $\hat{\phi}$ بردار واحد سمت است. بنابراین، بردار پواین‌تینگ در فاصله r از محور برابر است با

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -r \frac{\sigma}{2} E^2 \quad (3.8)$$



که در آن dA بردار عنصر سطح استوانه است.

شکل (ح-۱-۸)

انرژی به سمت داخل جریان می‌یابد و به طور کامل به گرمایش ژول در داخل حجم استوانه تلف می‌شود، این را که می‌توانیم با محاسبه بررسی کنیم

$$W = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \pi r^2 h JE = \pi r^2 h \sigma E^2 \quad (5.8)$$

که در آن انتگرال در حجم استوانه انجام می‌شود. تساوی $W = -\Phi_S$ قضیه پوینتینگ را برآورده می‌کند زیرا هیچ تغییر زمانی انرژی EM وجود ندارد.

توجه داشته باشید که در تقریب یک سیم بی‌نهایت طویل، میدان الکتریکی برای $r > a$ نیز یکنواخت است (در مورد سیم محدود به طول $2h \gg a$ ، این تقریب خوبی در ناحیه مرکزی برای $r \ll h$ است، مسئله ۴.۹)، در حالی که میدان مغناطیسی در این تقریب، $B = 2\pi Ja^3/rc$ برای $r > a$ به‌طوری که شار انرژی مستقل از r است و همچنان برابر است با منهای کل توان تلف شده:

$$\Phi_S = -2\pi rhS(r) = -\pi a^3 h \sigma E^3 \quad (6.8)$$

• ب: باید نشان دهیم که $\nabla \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{S}') = 0$ ، یعنی $\mathbf{S} - \mathbf{S}' = \nabla \times \mathbf{f}$ که در آن \mathbf{f} تابع بردار از مختصات است. اجازه دهید $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ را در رابطه (۶.۸) جایگزین کنیم

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{c}{4\pi} \nabla \varphi \times \mathbf{B} \quad (7.8)$$

اکنون از اتحاد برداری

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{B}) = \nabla \varphi \times \mathbf{B} + \varphi \times \mathbf{B} = \nabla \varphi \times \mathbf{B} + \varphi \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) \quad (8.8)$$

بدست می‌آوریم

$$\nabla \varphi \times \mathbf{B} = \nabla \times (\varphi \mathbf{B}) - \varphi \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \right) \quad (9.8)$$

که می‌توان در رابطه (۷.۸) جایگزین کرد، و منجر به

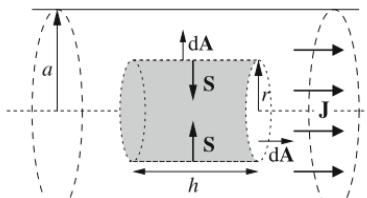
$$\mathbf{S} = \varphi \mathbf{J} - \frac{c}{4\pi} \nabla \times (\varphi \mathbf{B}) \quad (10.8)$$

بنابراین، آزادیم بردار پوینتینگ را مجددًا تعریف کنیم:

$$\mathbf{S}' = \varphi \mathbf{J} \quad (11.8)$$

زیرا

$$\mathbf{S} - \mathbf{S}' = \nabla \times \left(-\frac{c}{4\pi} \varphi \mathbf{B} \right) \quad (12.8)$$



شکل (۲-۸)

می‌توانیم با محاسبه شار آن در همان سطح استوانه‌ای مانند بالا نشان دهیم که \mathbf{S}' معادل \mathbf{S} است. از آنجایی که \mathbf{S}' موازی با محور سیم است، تنها دو سطح قاعده به‌شار \mathbf{S}' کمک می‌کنند.

$$\begin{aligned} \Phi_{S'} &= \pi a^3 [-S(z) + S(z+h)] \\ &= \pi a^3 J [\varphi(z+h) - \varphi(z)] \end{aligned} \quad (13.8)$$

چون $-Ez = \varphi$ ، در نهایت بدست می‌آوریم

$$\Phi_{S'} = \pi a^3 [-S(z) + S(z+h)] = -\pi a^3 h JE \quad (14.8)$$

که دوباره منفی کل توان تلف شده را می‌دهد.

۲.۸ بردار پواین‌تینگ در خازن

- الف: میدان مغناطیسی دارای تقارن سمت (ازیموتال) است، یعنی $\mathbf{B} = B(r)\hat{\phi}$ است، می‌توان آن را از معادله $c\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ محاسبه کرد، که با فرض ما، منجر به

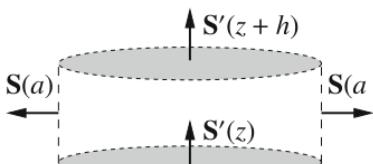
$$B(r) = \frac{r}{\gamma c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{r}{\gamma c \tau} E. \quad (15.8)$$

- ب: بردار پواین‌تینگ \mathbf{S} مربوطه خواهد بود

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E \hat{\mathbf{z}} \times (B \hat{\phi}) = -\frac{r}{\lambda\pi} \left(E \frac{\partial E}{\partial t} \right) (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\phi}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{\lambda\pi} \right) \mathbf{r} \quad (16.8)$$

ما شار \mathbf{S} را از طریق کوچکترین سطح بسته استوانه‌ای که خازن را در بر می‌گیرد، شکل (ح-۸-۳)، محاسبه می‌کنیم. از آنجایی که \mathbf{S} شعاعی است، فقط سطح جانبی استوانه به شار کمک می‌کند و داریم

$$\Phi(\mathbf{S}) = -2\pi ah S(a) = -\pi a^2 h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{\lambda\pi} \right) \quad (17.8)$$



کمیت $(E^2 + B^2)/8\pi$ چگالی انرژی مربوط به میدان است، و از آنجایی که در این مورد \mathbf{B} به زمان بستگی ندارد، چگالی انرژی Φ کل داخل خازن نیز می‌باشد. بنابراین، $\Phi(\mathbf{S})$ برابر است با منهای مشتق زمانی انرژی ذخیره شده در خازن. برای وابستگی کلی $E_z(t)$

به زمان، \mathbf{B} نیز وابسته به زمان است، و شار \mathbf{S} برابر است با در تقریب جریان تغییر آرام مشتق مرتبه اول زمانی انرژی الکترواستاتیک.

- ج: پتانسیل الکتریکی $E_z = -Ez = -\nabla \varphi$ است. با جایگزینی $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ در (۱۵.۸) بدست می‌آوریم

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (-\nabla \varphi \times \mathbf{B}) = -\frac{c}{4\pi} [\nabla \times (\varphi \mathbf{B} - \varphi \nabla \times \mathbf{B})] \quad (18.8)$$

بنابراین، بردار

$$\mathbf{S}' = \frac{c}{4\pi} \varphi \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \varphi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{S} + \frac{c}{4\pi} \nabla \times (\varphi \mathbf{B}) \quad (19.8)$$

برابر با \mathbf{S} به اضافه کرل یک تابع برداری است و بنابراین یکی دیگر از بردارهای پواین‌تینگ مناسب است. از آنجایی که \mathbf{S}' عمود بر صفحات خازن است، شار آن از طریق سطح بسته استوانه‌ای شکل (ح-۸-۳) است.

$$\Phi(\mathbf{S}') = \pi a^2 [S'(z+h) - S'(z)] = -\pi a^2 h \left(\frac{E \frac{\partial E}{\partial t}}{4\pi} \right) = -\pi a^2 h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{\lambda\pi} \right) \quad (20.8)$$

که با رابطه (۱۷.۸) مطابقت دارد.

۳.۸ قضیه پواین‌تینگ در یک سیم‌لوله

- الف: یک دستگاه مختصات استوانه‌ای با محور z در امتداد محور سیم‌لوله (سلونوئید) می‌گیریم. در داخل یک سیم‌لوله بینهایت، میدان مغناطیسی یکنواخت و برابر است با $B = B\hat{z} = (4\pi/c)nI\hat{z}$. طبق قانون القای فارادی، نرخ تغییر $B(t)$ با $\frac{\partial B}{\partial t} = I(t)$ وابستگی زمانی دارد. یک میدان الکتریکی E مرتبط با نیروی الکتروموتور القایی ایجاد می‌کند. به دلیل تقارن، خطوط میدان E دایره‌های هم‌محور با سیم‌لوله هستند، یعنی $E = E(r)\hat{\phi}$ داریم. با اعمال قانون فارادی روی دایره‌ای به شعاع $a < r$ ، هم‌محور با سیم‌لوله، داریم

$$2\pi rE(r) = -\pi r^2 \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = -\pi r^2 \frac{4\pi nI_0}{c^2 \tau} \quad (21.8)$$

از آن $E(r) = -2\pi nI_0 r / (c^2 \tau)$ بدست می‌آید.

- ب: بردار پواین‌تینگ در داخل سیم‌لوله ($r < a$) خواهد بود

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{2\pi(nI_0)^2 rt}{(c\tau)^2} (\hat{\phi} \times \hat{z}) = -\frac{2\pi(nI_0)^2 t}{(c\tau)^2} \mathbf{r} \quad (22.8)$$

بنابراین، شار $S = S(r)$ از طریق سطح یک استوانه بسته به شعاع r و ارتفاع h فقط از طریق سطح جانبی غیر صفر است و داریم

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi rh \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\left(\frac{2\pi nI_0}{c\tau}\right)^2 ht \quad (23.8)$$

انرژی مغناطیسی محصور شده توسط سطح استوانه برابر است با:

$$U_M = u_M V = \frac{B^2}{8\pi} \pi r^2 h = 2\pi^2 r^2 h \left(\frac{nI_0 t}{c\tau}\right)^2 \quad (24.8)$$

که در آن V حجم استوانه است، بنابراین

$$\frac{dU_M}{dt} = 4\pi^2 r^2 ht \left(\frac{nI_0}{c\tau}\right)^2 - \Phi(\mathbf{S}) \quad (25.8)$$

با توجه به قضیه پواین‌تینگ، چون میدان الکتریکی نسبت به زمان ثابت است، و برای $r < a$ ، یعنی در داخل سیم‌لوله، $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ است.

- ج: در خارج از سیم‌لوله ($r > a$) میدان مغناطیسی $B = 0$ است. به همین ترتیب، $S = 0$ و $\Phi(\mathbf{S}) = 0$ هستند. نرخ تغییر انرژی مغناطیسی توسط رابطه (۲۵.۸) با $r = a$ و باید با انتگرال حجمی $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ برابر باشد، که کاری است که توسط میدان القایی روی جریان جاری در سیم پیچ‌ها انجام می‌شود (توجه داشته باشید که این با میدان الکتریکی که جریان را هدایت می‌کند و باعث گرم شدن ژول در سیم پیچ‌ها می‌شود، متفاوت است، به مسئله ۱۸.۱۳ مراجعه کنید). در این نمایش، جریان بر روی سطح $r = a$ توزیع می‌شود، بنابراین $J d^3 r$ با $nIdS = nIad\phi dz$ در انتگرال

جاگزین و E در $r = a$ محاسبه می‌شود. بدین ترتیب بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3 r &= \int_S nIE(a) dS = -2\pi ah \left(nI_0 \frac{t}{\tau}\right) \left(\frac{2\pi nI_0 a}{c^2 \tau}\right) \\ &= -4\pi a^2 ht \left(nI_0 \frac{t}{\tau}\right)^2 = -\frac{dU_M}{dt} \Big|_{r=R} \end{aligned} \quad (26.8)$$

۴.۸ بردار پواین‌تینگ در یک خازن با صفحه‌های متحرک

- الف: از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) استفاده می‌کنیم که محور z در امتداد محور تقارن خازن و مبدأ روی صفحه ثابت قرار دارد. بنابراین، در محدوده تقریبی ما، میدان الکتریکی یکنواخت و موازی با z در داخل خازن است که ظرفیت آن برابر است با:

$$C = \frac{\pi a^2}{4\pi h(t)} = \frac{a^2}{4(h_0 + vt)} \quad (27.8)$$

در مورد صفحات ایزوله بار ثابت و برابر Q_0 است، در حالی که ولتاژ بین صفحات V و میدان الکتریکی E بین صفحات به ترتیب،

$$V = \frac{Q_0}{C} = Q_0 \frac{4(h_0 + vt)}{a^2}, \quad E = \frac{V}{h} = \frac{4Q_0}{a^2} \quad (28.8)$$

در حالت ولتاژ ثابت بین صفحات، $V = V_0$ ، بار Q خازن و میدان الکتریکی E به ترتیب هستند.

$$Q = CV_0 = V_0 \frac{a^2}{4(h_0 + vt)}, \quad E = \frac{V_0}{h_0 + vt} \quad (29.8)$$

در مورد بار ثابت، نیروی الکترواستاتیک بین صفحات F_{es} نیز ثابت و برابر است با

$$F_{es} = -Q \frac{E}{2} = -\frac{2Q_0^2}{a^2} \quad (30.8)$$

در حالی که در حالت ولتاژ ثابت داریم

$$F_{es} = -Q \frac{E}{2} = -V_0 \frac{a^2}{\lambda(h_0 + vt)^2} \quad (31.8)$$

در هر دو حالت، علائم منفی به این معنی است که نیرو جاذب است. در هر دو مورد، نیروی خارجی اعمال شده F_{mech} باید نیروی الکترواستاتیک را خنثی کند، یعنی باید $F_{mech} = -F_{es}$ داشته باشیم تا صفحات با سرعت ثابت حرکت کنند.

- ب: انرژی الکترواستاتیک را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (32.8)$$

به طوری که در بار ثابت داریم

$$U = Q_0^2 \frac{2(h_0 + vt)}{a^2}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{2vQ_0^2}{a^2} > 0 \quad (33.8)$$

در حالی که در ولتاژ ثابت داریم

$$U = V_0^2 \frac{a^2}{\lambda(h_0 + vt)^2}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{a^2 v V_0^2}{\lambda(h_0 + vt)^3} < 0 \quad (34.8)$$

- ج: در بار ثابت، میدان الکتریکی $E = E_0 \hat{z}$ نیز ثابت است، با $E_0 = Q_0 / (\pi a^2)$ ، بنابراین چگالی جریان جابجایی $J_D = \frac{\partial E}{\partial t}$ صفر است. همچنین چگالی جریان رسانایی J_C بین صفحات صفر است (در واقع یک جریان هدایتی در صفحه متحرک وجود دارد که در زیر به این نقطه باز خواهیم گشت)، به طوری که میدان مغناطیسی B بین صفحات نیز صفر است.

در ولتاژ ثابت، میدان الکتریکی $E = \hat{z}V_0/h(t) = \hat{z}V_0/(h_0 + vt)$ است، که دلالت بر وجود یک جریان جابجایی در امتداد \hat{z} دارد. میدان مغناطیسی را می‌توان با در نظر گرفتن انتگرال مسیر B بر روی محیطی به شعاع $r < a$ هم محور با صفحات، و قرار گرفتن بین صفحات، محاسبه کرد که برابر با شار جریان جابجایی از دایره محصور شده است. با توجه به تقارن استوانه‌ای سیستم، تنها مولفه غیر صفر B ازیموتال، $B = B(r, t)\hat{\phi}$ است و محاسبه مسیر آن انتگرال خطی بر روی دایره شعاع r مربوط به میدانی است که برای $B = B(r, t)$ داریم.

$$2\pi rB = -\frac{\pi r^2}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\pi r^2}{c} \frac{V_0 v}{(h_0 + vt)^2} \quad (35.8)$$

بنابراین

$$B = -\frac{r}{2c} \frac{V_0 v}{(h_0 + vt)^2} \quad (36.8)$$

- ۵: در بار ثابت $B = B(r, t)$ داریم و بردار پواین‌تینگ $S = (c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ نیز صفر است. در این مورد، رابطه (۳۰.۸) و رابطه (۳۳.۸) می‌گویند که میزان کار انجام شده در برابر W_{mech} الکتریکی

$$W_{mech} = \mathbf{F}_{mech} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{F}_{es} \cdot \mathbf{v} = \frac{2Q_0 v}{a^2} \quad (37.8)$$

که برابر با نرخ تغییر انرژی الکترواستاتیک dU/dt است. طبق قضیه پوین‌تینگ، این نرخ کار نیز باید برابر با منهای انتگرال $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ در کل فضا باشد. این را در پایان این پاسخ تأیید می‌کنیم.

- در ولتاژ ثابت، بردار پوین‌تینگ شعاعی $S = S\hat{r}$ است، و طبق رابطه (۲۹.۸) و رابطه (۳۶.۸)، داریم

$$S = -\frac{c}{4\pi} E_z B_\phi = \frac{V_0 vr}{4\pi(h_0 + vt)^2} \quad (38.8)$$

با ارزیابی شار S از طریق حداقل سطح بسته که خازن را در بر می‌گیرد، سطح جانبی $2\pi a(h_0 + vt)$ ، به دست می‌آوریم.

$$\Phi_S = 2\pi a(h_0 + vt) \frac{V_0 va}{4\pi(h_0 + vt)^2} - \frac{a^2 V_0 v}{4(h_0 + vt)^2} \quad (39.8)$$

از طریق روابط (۳۴.۸) و (۳۱.۸) می‌توانیم ثابت کنیم که

$$-\Phi_S = \frac{dU}{dt} + Fv \quad (40.8)$$

همچنین توجه داشته باشید که در این حالت، Φ_S برابر با توان جذب شده توسط منبع ولتاژ است. در واقع جریان عبوری از مدار برابر است با

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{a^2 v}{4(h_0 + vt)^2} V_0 \quad (41.8)$$

که در آن اولین رابطه (۲۹.۸) را وارد کرده که مربوط به جذب توان توسط منبع است

$$W = -V_0 I = \frac{a^2 v}{4(h_0 + vt)^2} V_0^2 = \Phi_S \quad (42.8)$$

تاکنون از بحث در مورد نقش جریان هدایتی در گردش در صفحات خودداری کرده‌ایم آبیت زیر نیاز به آشنایی با توزیع‌های $\delta(x)$ و $\Theta(x)$ دارد، که در آن $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ تعريف می‌شود؛ توجه کنید که $d\Theta(x)/dx = \delta(x)$. اجازه دهید حالت بار ثابت را در نظر بگیریم. از آنجایی که صفحه بالایی دارای بار Q است که در سطح $z = -h_0 + vt$ توزیع شده و با سرعت v حرکت می‌کند، در واقع چگالی جریان وجود دارد.

$$\mathbf{J}_C = \frac{Q}{\pi a^2} \mathbf{v} \delta(z - h_0 - vt) \quad (43.8)$$

از سوی دیگر، میدان الکتریکی بین صفحات ممکن است به صورت زیر نوشته شود

$$\mathbf{E} = -\frac{4Q}{a^2} [\Theta(z) - \Theta(z - h_0 - vt)] \hat{\mathbf{z}} \quad (44.8)$$

که در آن $\Theta(z)$ تابع پله واحد هویسايد است که با $\Theta(z) = 1$ برای $z > 0$ و 0 برای $z < 0$ تعريف شده است. این عبارت این واقعیت را در نظر می‌گیرد که در هر زمان، میدان فقط در ناحیه $z < vt$ وجود دارد، بنابراین در واقع یک میدان وابسته به زمان است. از آنجایی که $d\Theta(z)/dz = \delta(z)$ ، جریان جابجایی برابر است با:

$$\mathbf{J}_D = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4Q}{a^2 c} v \delta(z - h_0 - vt) \hat{\mathbf{z}} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_C \quad (45.8)$$

به طوری که عبارت منبع میدان مغناطیسی $(4\pi/c)\mathbf{J}_C + \mathbf{J}_D$ صفر باشد. همچنین به دنبال آن است

$$\mathbf{J}_C \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial E^z}{\partial t} \quad (46.8)$$

که اصل بقاء انرژی را تضمین می‌کند، زیرا کار انجام شده روی جریان برابر با نرخ تغییر انرژی الکترواستاتیک است. در جزئیات، داریم

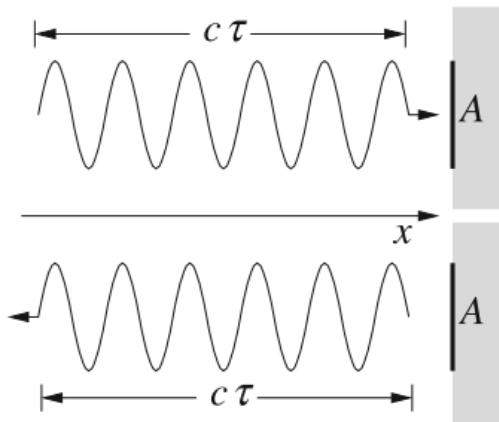
$$\frac{\partial E^z}{\partial t} = (4\pi\sigma_{up}) \frac{\partial}{\partial t} \Theta(z - h_0 - vt) = -v \left(\frac{4Q}{a^2} \right)^z \delta(z - h_0 - vt) \quad (47.8)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \mathbf{J}_C \cdot \mathbf{E} d^3r &= \frac{v(4\pi\sigma)^z}{8\pi} \int \delta(z - h_0 - vt) d^3r \\ &= 2\pi^2 a^2 \sigma^z v = \frac{2vQ^z}{a^2} = \frac{dU}{dt} \end{aligned} \quad (48.8)$$

۵.۸ فشار تابشی روی یک آینه کامل

الف: ابتدا مورد عمود بر هم را در نظر می‌گیریم و یک دستگاه مرجع دکارتی را با محور x عمود بر سطح آینه انتخاب می‌کنیم. بسته موج صفحه تابشی دارای زمان طی τ (با $2\pi/\omega \gg \tau$ ، دوره لیزر) است که مربوط به طول $c\tau$ است و در امتداد \hat{x} منتشر می‌شود. می‌خواهیم محاسبه کنیم که در طول بازتاب کل بسته موج چقدر تکانه به ناحیه A از سطح آینه منتقل می‌کند. تکانه منتقل شده در واحد زمان و مساحت، فشاری است که توسط تابش وارد می‌شود.



شکل (ح-۸)

چگالی تکانه میدان الکترومغناطیسی S/c است که $S = cE \times B / 4\pi$ بودار پوینتینگ است. بنابراین کل تکانه تحويل داده شده توسط بسته موج تابشی در ناحیه A برابر است با:

$$\mathbf{p}_i = \left\langle \frac{\mathbf{S}_i}{c} \right\rangle c\tau A = \hat{\mathbf{x}} \frac{I}{c} \tau A \quad (49.8)$$

که در آن برآکت‌های زاویه میانگین را در یک دوره تناوب نشان می‌دهند، \mathbf{S}_i بودار پوینتینگ بسته تابشی است و $I = |\langle S_i \rangle|$ شدت پالس تابشی (میانگین شار انرژی در واحد زمان و مساحت)، که مطابق قضیه پایستگی (بقاء) انرژی پوینتینگ است.

بسته موج منعکس شده یک تکانه کل را در ناحیه A حمل می‌کند،

$$\mathbf{p}_r = \left\langle \frac{\mathbf{S}_r}{c} \right\rangle c\tau A = -\hat{\mathbf{x}} \frac{I}{c} \tau A \quad (50.8)$$

که در آن $\mathbf{S}_r = -\mathbf{S}_i$ بودار پوینتینگ بسته بازتاب شده است. تکانه (مومنتوم) انتقال یافته به‌آینه در سطح A در طول بازه زمانی τ است بنابراین

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_r = |\Delta \mathbf{p}| \hat{\mathbf{x}} \quad (51.8)$$

و فشار مربوطه برابر است با:

$$p_{rad} = \frac{|\Delta \mathbf{p}|}{\tau A} = 2 \frac{I}{c} \quad (52.8)$$

با استفاده از یک استدلال اکتشافی مشابه، یافتن فشار تابش برای تابش مایل در زاویه θ نسبت به نرمال (خط عمود بر) سطح آینه کاملاً ساده است. در واقع، در این حالت تکانه انتقال یافته به‌آینه در امتداد نرمال برابر است با:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_r = 2\hat{\mathbf{x}} \frac{I}{c} c\tau A \cos \theta = 2\hat{\mathbf{x}} \frac{I}{c} \tau A \cos \theta \quad (53.8)$$

و سطح تابش اکنون $A / \cos \theta$ است. بنابراین

$$p_{rad} = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_r| \frac{\cos \theta}{\tau A} = 2 \frac{I}{c} \cos^2 \theta \quad (54.8)$$

- ب: نیروی مکانیکی روی یک سیستم بسته از بارها، جریان‌ها و میدان‌ها با انتگرال زیر در حجم سیستم داده می‌شود.

$$\mathbf{F}_{mech} = \frac{d\mathbf{P}_{mech}}{dt} = \int_V \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) d^3r \quad (55.8)$$

از این به بعد، ما فقط مورد تابش عمودی را در نظر می‌گیریم و حالت مایل را به عنوان تمرین بیشتر برای خواننده می‌گذاریم. در مورد حاضر، $\rho = 0$ در همه جا و فقط عبارت مغناطیسی کمک می‌کند. بنابراین، در هندسه صفحه، نیروی میانگین زمانی روی سطح مسطحی با مساحت A خواهد بود

$$\langle F_{mech} \rangle = \int_0^\infty \left\langle \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right\rangle Adx \quad (56.8)$$

و به علت تقارن در امتداد \hat{x} هدایت می‌شود.

جریان در یک آینه کامل روی سطح مرکز می‌شود، که در آنجا میدان مغناطیسی ناپیوسته است. در اینجا فرض می‌کنیم که میدان‌های موج \mathbf{B} و \mathbf{E} به ترتیب با \hat{z} و \hat{y} موازی هستند. فرض کنید $\mathbf{E}_i(x, t) = \hat{y} E_i \cos(kx - \omega t)$ میدان الکتروکمکانیکی تابشی باشد. میدان کل $\mathbf{E}(x, t) = \hat{y} E_i \cos(-kx - \omega t)$ مجموع \mathbf{E}_i و میدان $\mathbf{E}_r(x, t) = -\hat{y} E_i \cos(-kx - \omega t)$ موج بازتاب شده، به طوری که $\mathbf{E}(0, t) = 0$ است. بنابراین مجموع میدان‌ها برای $x < 0$ شکل امواج ایستاده دارند

$$E_y(x, t) = 2E_i \sin(kx) \sin \omega t \quad (57.8)$$

$$B_z(x, t) = 2E_i \cos(kx) \cos \omega t \quad (58.8)$$

نایپیوستگی B_z منجر به جریان سطحی $J_y = K_y \delta(x)$ است.

$$K_y = -\frac{c}{4\pi} [B_z(0^+, t) - B_z(0^-, t)] = \frac{c}{4\pi} B_z(0^-, t) = \frac{c}{2\pi} E_i \cos \omega t \quad (59.8)$$

که در آن از قضیه استوکس و $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ استفاده کردیم. نیرو در واحد سطح، یعنی فشار، با جریان سطح ضرب در مقدار میانگین میدان در سراسر لایه جریان داده می‌شود (آرگومان آن مشابه همان چیزی است که برای محاسبه فشار الکترواستاتیک روی لایه بار سطحی در الکترواستاتیک استفاده می‌شود).)

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \left\langle K_y \frac{1}{4\pi} [B_z(0^+, t) + B_z(0^-, t)] \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \left\langle B_z(0^-, t) \right\rangle \\ &= \frac{c}{4\pi} \left(\frac{1}{2} |E_i|^2 \right) = \frac{I}{c} \end{aligned} \quad (60.8)$$

زیرا $I = (c/4\pi)(|E_i|^2/2)$ و $B_z(0^-, t) = 2E_i \cos \omega t$ است. این معادل محاسبه انتگرال رابطه (56.8) بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} J_y B_z dx &= - \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) B_z dx = - \frac{c}{4\pi} \int_{0^-}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial x} dx \\ &= \frac{c}{4\pi} B_z(0^-, t) \end{aligned} \quad (61.8)$$

که در آن از این واقعیت که $E_y = 0$ برای $x \geq 0$ استفاده کردیم.

- ج: قضیه بقای تکانه (۸.۸) بیان می‌کند که برای یک سیستم بسته از بارها، جریان‌ها و میدان‌های الکترومغناطیسی که توسط یک سطح بسته S محدود شده‌اند، معادله تعادل زیر برقرار است:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_{mech} + \mathbf{p}_{EM})_i = \oint_S \sum_j T_{ij} \hat{n}_j d^*r \quad (۶۲.۸)$$

که T_{ij} تانسور تنش ماکسول است و \hat{n}_j مولفه j بردار واحد رو به بیرون است که به صورت محلی با S نرمال است. بنابراین، انتگرال در سمت راست، بردار $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ از طریق S شار رو به بیرون است. در رابطه (۶۲.۸)، \mathbf{p}_{mech} تکانه مکانیکی سیستم است، در حالی که تکانه مربوط به میدان الکترومغناطیسی برابر است با:

$$\mathbf{p}_{EM} = \int_V \mathbf{g} d^*r \quad (۶۳.۸)$$

که در آن $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ چگالی تکانه (۹.۸) است، و انتگرال بر روی حجم محدود شده S محاسبه می‌شود.

در این حالت، سطح جلویی A آینه را می‌گیریم و با افزودن سطحی که به عمق آینه گسترش می‌یابد، آن را می‌بندیم. آینه، جایی که میدان‌ها صفر هستند. بنابراین، مقدار تکانه الکترومغناطیسی که به آینه می‌تابد (و به تکانه مکانیکی تبدیل می‌شود) توسط انتگرال زیر داده می‌شود.

$$\int_A \sum_j T_{ij} \hat{n}_j d^*r = A T_{ij} (\circ^-, t) \hat{n}_j \quad (۶۴.۸)$$

فشار تشعشع روی آینه، جریان تکانه میانگین زمان در واحد سطح است.

$$P_{rad} = \left\langle \sum_j T_{ij} (\circ^-, t) \hat{n}_j \right\rangle = - \left\langle T_{11} (\circ^-, t) \right\rangle \quad (۶۵.۸)$$

زیرا، در این حالت، $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ است. بنابراین در واقع باید فقط $T_{11} (\circ, t)$ را محاسبه کنیم:

$$T_{11} (\circ, t) - \frac{1}{\lambda \pi} = B_z^* (\circ^-, t) \quad (۶۶.۸)$$

فشار تشعشع به این ترتیب است

$$P_{rad} = -\langle T_{11} (\circ, t) \rangle = \frac{1}{\lambda \pi} \left\langle B_z^* (\circ^-, t) \right\rangle = \frac{1}{4\pi} |E_i|^2 = \frac{2I}{c} \quad (۶۷.۸)$$

۶.۸ بردار پواین‌تینگ برای پرتو نور گاووسی

- الف: واگرایی (دیورژانس) میدان الکتریکی در خلاء صفر است. با این هندسه، این

بدان معنی است چون $E_y = 0$ را فرض کرده‌ایم، داریم

$$\circ = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (۶۸.۸)$$

از رابطه (۶۸.۸) و رابطه (۱۴.۸) بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\gamma E_x e^{-r^*/r^*} \cos(kz - \omega t) \quad (۶۹.۸)$$

که در آن دیورژانس در نقطه کلی (x, y, z) محاسبه می‌شود و از $r^2 = x^2 + y^2$ استفاده کرده‌ایم. با انتگرال‌کری نسبت به z داریم

$$E_z = -E_0 \frac{2x}{kr_0^2} e^{-r^2/r_0^2} \sin(kz - \omega t) \quad (70.8)$$

به‌طور مشابه، برای مولفه طولی B به‌دست می‌آوریم

$$B_z = -B_0 \frac{2y}{kr_0^2} e^{-r^2/r_0^2} \sin(kz - \omega t) \quad (71.8)$$

اجازه دهید بررسی کنیم که آیا این میدان‌ها با معادلات ماکسول سازگار هستند یا خیر. ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا $\frac{\partial E_z}{\partial t} = c(\nabla \times \mathbf{B})_z = c \frac{\partial B_y}{\partial x}$ برقرار است یا خیر. داریم

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -B_0 \frac{2x}{r_0^2} e^{-r^2/r_0^2} \cos(kz - \omega t) \quad (72.8)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -E_0 \frac{2x}{r_0^2} e^{-r^2/r_0^2} \cos(kz - \omega t) \quad (73.8)$$

که به‌معنای $B_0 = (\omega/kc)E_0 = E_0$ است. به‌طور مشابه می‌توانیم بررسی کنیم که $\frac{\partial B_z}{\partial t} = -c(\nabla \times \mathbf{E})_z$

• ب: بردار پواین‌تینگ برابر است با

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} (\hat{x} E_z B_y - \hat{y} E_x B_z + \hat{z} E_x B_y) \quad (74.8)$$

و مولفه‌های میانگین در طول یک دوره تناوب خواهند بود

$$\left\langle S_x \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{2x}{kr_0^2} E_0^2 e^{-r^2/r_0^2} \langle \sin(kz - \omega t) \cos(kz - \omega t) \rangle = 0 \quad (75.8)$$

$$\left\langle S_y \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{2y}{kr_0^2} E_0^2 e^{-r^2/r_0^2} \langle \cos(kz - \omega t) \sin(kz - \omega t) \rangle = 0 \quad (76.8)$$

$$\left\langle S_z \right\rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2 e^{-r^2/r_0^2} \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2 e^{-r^2/r_0^2} \quad (77.8)$$

بنابراین، می‌توانیم شدت محلی و توان کل پرتو را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$I(r) = \langle S_z \rangle, \quad P = \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr \quad (78.8)$$

• ج: داریم

$$\nabla^2 E_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_x}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \left[\frac{4}{r^2} \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) - k^2 \right] E_x \quad (79.8)$$

(جدول آ-۱ را برای عملگر لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای مشاهده کنید؛ توجه کنید که در اینجا میدان‌ها مستقل از ϕ هستند). ما به راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که $\nabla^2 E_x + \omega^2/c^2 \neq 0$ ؛ شرایط «اضافی» از مرتبه $2/(kr_0)$ است. بنابراین انتظار داریم که عبارات تقریبی برای میدان‌ها تا زمانی که $r \gg 1/k = \lambda/2\pi$ است، دقیق باشد، یعنی اگر پرتو بسیار گسترده‌تر از یک طول موج باشد.

مشخص است که یک پرتو با عرض محدود در واقع دچار پراش می‌شود. عرض یک پرتو گاوسی پس از یک فاصله معمولی دو برابر می‌شود که طول ریلی $r_R = kr^\circ$ نامیده می‌شود. این با زاویه روزنے مطابقت دارد

$$\theta_d \approx \frac{r^\circ}{z_R} = \frac{1}{kr^\circ} \approx \frac{\lambda}{r}. \quad (80.8)$$

شاید جالب باشد که توجه کنید که این نتیجه ممکن است از مقادیر مولفه‌های میدان طولی به دست آمده در بند (الف) استنباط شود. در واقع، پرتو ممکن است به عنوان یک برهم نهی (جمع اثرها) خطی از امواج صفحه‌ای با فرکانس یکسان اما بردار موج‌های متفاوت به دست آید. برای موج صفحه‌ای، میدان الکتریکی و $E_z/E_y \sim 2/(kr^\circ)$ عمود هستند. بنابراین، نسبت معمولی $(E_z/E_y \sim 2/(kr^\circ))$ نیز با یک مقدار معمولی $(k_x/k_z \sim 2/(kr^\circ))$ مطابقت دارد، که باید گسترش زاویه‌ای معمول طیف بردار موج، از این‌رو زاویه پخش پرتو را تعیین کند.

۷.۸ شدت و تکانه زاویه‌ای یک پرتو نور

• الف: ابتدا، نمادهای کوتاه $E'_\circ = \frac{\partial E_\circ(r)}{\partial r}$ و $S = \sin(kz - \omega t)$ ، $C = \cos(kz - \omega t)$ را که در سراسر حل مسئله از آنها استفاده خواهیم کرد، تعریف می‌کنیم. برای شدت پرتو داریم

$$\begin{aligned} I(r) &\equiv S_z = \frac{c}{4\pi} (E_x B_y - E_y B_x) = \frac{c}{4\pi} E'_\circ(r) [CC - (-SS)] \\ &= \frac{c}{4\pi} E'_\circ(r) [C^2 + S^2] = \frac{c}{4\pi} E'_\circ(r) \end{aligned} \quad (81.8)$$

• ب: واگرایی (دیورزانس) میدان‌ها در خلاء باید صفر باشد. برای میدان الکتریکی داریم

$$\circ = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (82.8)$$

بنابراین

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

و انتگرال گیری نسبت به z می‌دهد

$$E_z = -\frac{1}{kr} E'_\circ(r) [xS + yC] \quad (83.8)$$

و شبیه این برای B_z داریم

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{x}{rc} E'_\circ(r) [xC - yS]$$

$$B_z = +\frac{1}{kr c} E'_\circ(r) [xC - yS] \quad (84.8)$$

• ج: مولفه‌های x و y بردار پواین‌تینگ خواهند بود:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{c}{\gamma\pi}(E_y B_z - E_z B_y) \\ &= \frac{c}{\gamma\pi} \left\{ (-E_\circ S) \left[\frac{E'_\circ}{krc} (xC - yS) \right] - \left[-\frac{E'_\circ}{krc} (xS + yC) \right] \frac{1}{c} E_\circ C \right\} \quad (85.8) \\ &= \frac{c}{\gamma\pi} \frac{E_\circ E'_\circ}{kr} (-xSC + yS^\circ + xSC + yC^\circ) = \frac{c}{\gamma\pi} E_\circ E'_\circ \frac{y}{kr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{c}{\gamma\pi}(E_z B_x - E_x B_z) \\ &= \frac{c}{\gamma\pi} \left\{ \left[-\frac{E'_\circ}{kr} (xS + yC) \right] \frac{1}{c} E_\circ S - (E_\circ C) \left[\frac{E'_\circ}{krc} (xC - yS) \right] \right\} \quad (86.8) \\ &= \frac{c}{\gamma\pi} \frac{E_\circ E'_\circ}{kr} (-xS^\circ - yCS - xC^+ yCS) = \frac{c}{\gamma\pi} E_\circ E'_\circ \frac{x}{kr} \end{aligned}$$

چون داریم

$$\frac{c}{\gamma\pi} E_\circ(r) E'_\circ(r) = \frac{c}{\lambda\pi} \frac{\partial E_\circ(r)}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial I(r)}{\partial r} \quad (87.8)$$

بردار پواین‌تینگ را می‌توان نوشت

$$\mathbf{S} = \left(\frac{y}{\gamma kr} \frac{\partial I(r)}{\partial r}, -\frac{x}{\gamma kr} \frac{\partial I(r)}{\partial r}, I(r) \right) \quad (88.8)$$

با فرض یک پرتو گاوی است، $S_{x,y} \propto S_z/(kr_\circ) \propto \theta_d S_z$ داریم، و $E_\circ(r) \propto e^{-r^\circ/r_\circ}$ با زاویه پراش رابطه (80.8) است.

• د: داریم

$$\begin{aligned} l_z &= \frac{1}{c^\circ} (xS_y - yS_x) = \frac{-x\omega - y^\circ}{\gamma ktc^\circ} \frac{\partial I(r)}{\partial r} = \frac{r}{\gamma kc^\circ} \frac{\partial I(r)}{\partial r} \\ &= -\frac{r}{\gamma c\omega} \frac{\partial I(r)}{\partial r} \end{aligned} \quad (89.8)$$

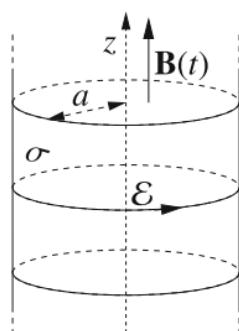
ما نهایتاً با انتگرال‌گیری عبارت فوق توسط جزء به جزء، تکانه زاویه‌ای کل را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} L_z &= \int_0^\infty l_z(r) \gamma\pi r dr = - \int_0^\infty \frac{r}{\gamma c\omega} \frac{\partial I(r)}{\partial r} \gamma\pi r dr \\ &= \frac{1}{c\omega} \int_0^\infty I(r) \gamma\pi r dr = \frac{W}{c\omega} \end{aligned} \quad (90.8)$$

۸.۸ پارادوکس فاینمن حل شد

• الف: از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با محور استوانه به عنوان محور z استفاده می‌کنیم. میدان الکتریکی القایی \mathbf{E}_{ind} دارای تقارن ازیموتال است، یعنی $\mathbf{E}_{ind} = E_\phi(r, t)\phi$ و می‌توان از قانون فارادی با معادل کردن انتگرال خطی آن بر روی محیط شعاع r با مشتق زمانی شار میدان مغناطیسی در دایره بدست آورد:

$$E_\phi = -\frac{r}{\gamma c} \frac{\partial B_{ext}}{\partial t} \quad (91.8)$$



شکل (۵-۸)

(ما تقریب جریان آهسته متغیر را فرض کردیم که اعتبار آن با شرط $t_f \gg a/c$ تضمین می‌شود).
بر روی یک عنصر سطحی بینهایت کوچک از سطح استوانه $dS = ad\phi dz$ میدان الکتریکی القایی نیرویی اعمال می‌کند برابر با:

$$df = \phi df = \phi \sigma E_\phi(r = a) dS = -\phi \sigma \frac{a}{2c} \frac{\partial B_{ext}}{\partial t} dS \quad (۹۲.۸)$$

که در آن $\sigma = Q/(2\pi a)$ چگالی بار سطحی است. گشتاور مکانیکی مربوطه $d\tau = \hat{z} adf$ است. با انتگرال گیری در کل سطح استوانه، گشتاور کل را بدست می‌آوریم

$$\tau = -\frac{\pi a^3 h \sigma}{c} \frac{\partial B_{ext}(t)}{\partial t} \quad (۹۳.۸)$$

معادله حرکت برای چرخش استوانه برابر است با:

$$\mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} = \tau = -\frac{\pi a^3 h \sigma}{c} \frac{\partial B_{ext}(t)}{\partial t} \quad (۹۴.۸)$$

با حل آن (مشتق زمان کل زمانی که برای $B_{ext}(t)$ اعمال می‌شود، به طور بی‌اهمیت معادل مشتق جزئی است)

$$\omega(t) = -\frac{\pi a^3 h}{\mathcal{I}_c} \sigma [B_{ext}(t) - B_{ext}(0)] = -\frac{a^3 Q}{2\mathcal{I}_c} [B_{ext}(t) - B_{ext}(0)] \quad (۹۵.۸)$$

تکانه زاویه‌ای $L_c(t) = \mathcal{I}\omega(t)$ است. مقادیر نهایی فقط به مقدار اولیه $B_{ext}(t)$ بستگی دارد و نه به شکل زمانی آن،

$$\omega(t_f) = -\frac{\pi a^3}{\mathcal{I}_c} Q B. \quad (۹۶.۸)$$

- ب: چرخش استوانه باردار منجر به جریان سطحی K در $r = a$ می‌شود، $K = \sigma v = \sigma a \omega \hat{\phi}$

این جریان یک میدان مغناطیسی یکنواخت را در داخل استوانه طویل ایجاد می‌کند (معادل یک سیم‌لوله که در آن $nI = K$ است).

$$B_{ind} = \frac{4\pi}{c} K \hat{z} = \frac{4\pi}{c} \sigma a \omega \quad (۹۸.۸)$$

اکنون مانند بند (الف) ادامه می‌دهیم اما میدان القایی B_{ind} را به میدان خارجی B_{ext} اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} &= \tau = -\frac{\pi a^3 h \sigma}{c} \frac{\partial}{\partial t} [B_{ext}(t) - B_{ind}(t)] \\ &= -\frac{a^3 Q}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left[B_{ext}(t) + \frac{4\pi}{c} \sigma a \omega \right] \\ &= -\frac{a^3 Q}{2c} \frac{\partial B_{ext}(t)}{\partial t} - \frac{a^3 Q^2}{hc} \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \quad (۹۹.۸)$$

که آنرا می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathcal{I}' \frac{d\omega}{dt} = \tau = -\frac{\pi a^3 h \sigma}{c} \frac{\partial B_{ext}(t)}{\partial t} \quad (۱۰۰.۸)$$

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I} + \frac{a^2 Q^2}{hc^2} \quad (101.8)$$

معادله (100.8) با رابطه (94.8) یکسان است، اما برای جایگزینی $\mathcal{I}' \rightarrow \mathcal{I}$ است، بهاین معنی که اثرات میدان مغناطیسی ناشی از چرخش \mathbf{B}_{ind} معادل یک اینرسی اضافی استوانه است. سرعت نهایی می‌شود

$$\omega'(t_f) = -\frac{a^2}{2\mathcal{I}'c} Q \mathbf{B}. \quad (102.8)$$

توجه داشته باشید که میدان مغناطیسی کل در داخل استوانه در $t = t_f$ ناپدید نمی‌شود و برابر با میدان القایی است.

$$\mathbf{B}_{tot}(t_f) = \mathbf{B}_{ind}(t_f) = \frac{4\pi}{c} \sigma a \omega'(t_f) \quad (103.8)$$

- ج: برای یک میدان مغناطیسی $B_z \hat{\mathbf{z}} = B$ و یک پیکربندی با تقارن استوانه‌ای، چگالی تکانه زاویه‌ای الکترومغناطیسی (8.8) می‌شود.

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{g} = -\frac{1}{4\pi} r E_r B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (104.8)$$

سهم میدان الکتریکی القایی E_ϕ در حاصل ضرب برداری از بین می‌رود. با این حال، تکانه زاویه‌ای بهدلیل میدان الکترواستاتیک شعاعی داخل استوانه صفر نیست، که بهراحتی از قضیه گاوس پیدا می‌شود:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{r} = -\frac{2Q}{hr} & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \quad (105.8)$$

بنابراین، $\circ \neq 1$ در داخل استوانه ($a < r$) است. کل تکانه زاویه‌ای الکترومغناطیسی بهاین ترتیب است

$$\mathbf{L}_{EM} = \frac{1}{4\pi} B_z \int_0^a r \frac{2\lambda}{r} 2\pi r h dr = \frac{1}{2} B_z \lambda h a^2 \hat{\mathbf{z}} = \frac{Qa^2}{2} \mathbf{B} \quad (106.8)$$

توجه داشته باشید که \mathbf{B} نشان دهنده کل میدان داخل استوانه است و معادله \mathbf{L}_{EM} در هر زمان معتبر است. اکنون، رابطه (95.8) را می‌توان (با استفاده از میدان کل) بازنویسی کرد

$$\mathcal{I}\omega(t) + \frac{a^2 Q}{2c} \mathbf{B}_{ext}(t) = \frac{a^2 Q}{2c} \mathbf{B}_{ext}(\circ) \quad (107.8)$$

که معادل است

$$\mathbf{L}_c(t) + \mathbf{L}_{EM}(t) = \mathbf{L}_{EM}(\circ) \quad (108.8)$$

بنابراین نشان می‌دهد که حرکت زاویه‌ای کل سیستم حفظ شده، زیرا $\circ = (\circ)$ است. بنابراین "پارادوکس" شامل نادیده گرفتن این است که یک میدان الکترومغناطیسی ایستا می‌تواند دارای یک تکانه زاویه‌ای محدود باشد. ملاحظات مشابهی برای مسئله وجود دارد که در آن، با این حال، محاسبه تکانه زاویه‌ای الکترومغناطیسی دشوارتر است.^۱

^۱ توضیح حاضر درباره "پارادوکس" فایمن از جی. بلچر و کی. مک دونالد (http://cosmology.princeton.edu/~ mcdonald/examples/feynman_cylinder.pdf) گرفته شده است که بیشتر جنبه‌های ظریف این مسئله را مورد بحث قرار می‌دهند.

۹.۸ تک قطبی مغناطیسی

- الف: یک دوقطبی مغناطیسی m را با قرار دادن دو بار مغناطیسی (تک قطبی مغناطیسی) $+q_m$ و $-q_m$ در فاصله h از یکدیگر قرار داده، به طوری که $m = q_m h$ است. میدان مغناطیسی در فواصل $r \gg h$ را می‌توان از رابطه (۱۹.۸) با استفاده از همان تقریب‌هایی که برای میدان یک دوقطبی الکتریکی بدست می‌آید، محاسبه کرد.

$$\mathbf{B}_{dip} = \alpha \frac{(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \quad (109.8)$$

از سوی دیگر، میدان یک دوقطبی مغناطیسی معمولی $\mathbf{m} = IS$ ، متشکل از یک حلقه دایره‌ای کوچک از سطح S که جریان I را حمل می‌کند، با سر S به گونه‌ای است که I را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌بیند.

$$\mathbf{B}_{dip} = k_m \frac{(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \quad (110.8)$$

با مقایسه فرمول‌ها، $\alpha = k_m$ ، $\alpha = \mu_0 / 4\pi = 1 / 4\pi\epsilon_0 c^2$ ، یعنی $\alpha = 1/c$ در واحدهای SI و در واحدهای گاووسی بدست می‌آوریم.

نیروی مغناطیسی روی یک بار الکتریکی q_e ، که با سرعت v در حضور میدان مغناطیسی \mathbf{B} حرکت می‌کند، $\mathbf{f}_L = q_e b_m \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ است. نیروی وارد شده توسط یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} بر یک تک قطب مغناطیسی بار q_m برابر $\mathbf{f}_m = q_m \mathbf{B}$ است. بنابراین ابعاد فیزیکی بار مغناطیسی q_m بقرار زیر هستند:

$$[q_m] = [q_e b_m v] = \begin{cases} [q_e v], & SI \\ [q_e] & \text{گاووسی} \end{cases} \quad (111.8)$$

یعنی همان ابعاد فیزیکی بار الکتریکی در واحدهای گاووسی و ابعاد بار الکتریکی ضربدر سرعت در واحدهای SI.

- ب: در قیاس با معادله $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_e \rho_e$ ، که در آن چگالی حجمی بار الکتریکی است، معادله ماکسول $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi k_m \rho_m \begin{cases} \mu_0 \rho_m & SI \\ \frac{4\pi}{c} \rho_m & \text{گاووسی} \end{cases} \quad (112.8)$$

که در آن ρ_m چگالی حجمی بار مغناطیسی است. معادله (۱۱۲.۸) را می‌توان با مشاهده اول این که در حضور بارهای مغناطیسی، قانون گاوس برای میدان مغناطیسی بصورت زیر است، اثبات کرد.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k_m Q_m = 4\pi k_m \int \rho_m d^3x \quad (113.8)$$

که در آن شار B از طریق هر سطح بسته محاسبه می‌شود و Q_m بار مغناطیسی خالص داخل سطح است، سپس قضیه واگرایی (دیورژانس‌ها) اعمال می‌شود.

اصل بقای بار مغناطیسی با معادله پیوستگی بیان می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad (114.8)$$

معادله ماکسول برای $\nabla \times \mathbf{E}$ (که قانون القای فارادی را توصیف می‌کند) باید برای در نظر گرفتن چگالی جریان مغناطیسی با نوشتند بصورت زیر کامل شود.

$$\nabla \times \mathbf{E} = \eta \mathbf{J}_m - b_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (115.8)$$

ثابت η را می‌توان تعیین کرد، برای مثال، با اعمال عملگر واگرایی در هر دو طرف معادله، با توجه به این که دیورژانس کرل هر یک میدان برداری همیشه صفر است،

داریم

$$\circ = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \eta \nabla \cdot \mathbf{J}_m - b_m \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla \cdot \mathbf{J}_m - 4\pi k_m \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad (116.8)$$

از اینجا $\eta = -4\pi k_m$ حاصل می‌شود. بنابراین داریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = -4\pi k_m \mathbf{J}_m - b_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \begin{cases} -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & SI \\ -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_m - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{گاوی} \end{cases} \quad (117.8)$$

- ج: ما یک قاب مرجع استوانه‌ای (r, ϕ, z) را انتخاب می‌کنیم که محور z منطبق بر محور پرتو باشد. بهدلیل تقارن استوانه‌ای توزیع بار مغناطیسی، تنها مولفه غیر صفر میدان مغناطیسی B_r است. اعمال قانون گاووس بر روی یک سطح استوانه‌ای هم محور با پرتو به دست می‌آوریم

$$B_r = \begin{cases} 4\pi k_m n q_m r & r \leq a \\ \frac{4\pi k_m n q_m a}{r} & r \geq a \end{cases} \quad (118.8)$$

میدان الکتریکی E سیم‌لوله است و می‌توان آن را با اعمال قضیه کلوین-استوکس در مسیر دایره‌ای به شعاع r هم محور با پرتو به دست آورد.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E_\phi = \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} -\pi r^2 4\pi k_m n q_m v & r \leq a \\ -\pi r^2 4\pi k_m n q_m \frac{a}{r} v & r \geq a \end{cases} \quad (119.8)$$

که در نهایت منجر به

$$E_\phi = \begin{cases} 4\pi k_m n q_m v r & r \leq a \\ \frac{4\pi k_m n q_m v a}{r} & r \geq a \end{cases} \quad (120.8)$$

بنابراین، برای جائی که $r \leq a$ است، داریم:

$$E_\phi = \begin{cases} \frac{\mu_0 n q_m v r}{r}, & SI \\ \frac{4\pi n q_m v r}{c}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (121.8)$$

فصل ۹

تبدیل نسبیتی میدان‌ها

عنوانین. کوواریانس نسبیتی معادلات ماکسول. چهار بردار در الکترومغناطیس: چهار جریان، چهار پتانسیل. چهار تانسور الکترومغناطیسی. تبدیلات لورنتس در میدان‌ها. معادلات پایه برای این فصل: رابطه چهار جریان و چهار پتانسیل با چگالی و پتانسیل در فضای سه بعدی

$$J_\mu \equiv (\rho_c, \mathbf{J}), \quad A_\mu = (\phi, \mathbf{A}). \quad (1.9)$$

تبدیلهای لورنتس یک $K_\mu = (K_0, \mathbf{K})$ چهار بردار از دستگاه S به دستگاه S' که با سرعت نسبی $v = \beta c$ نسبت به S حرکت می‌کند:

$$K'_0 = \gamma(k_0 - \beta \cdot \mathbf{K}), \quad K'_{\parallel} = \gamma(K_{\parallel} - \beta k_0), \quad \mathbf{K}'_{\perp} = \mathbf{K}_{\perp} \quad (2.9)$$

که در آن زیرنویس‌های " \parallel " و " \perp " به ترتیب جهات موازی و عمود بر β را نشان می‌دهند و $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ است. روابط سه بعدی فشرده برای تبدیل میدان‌های الکترومغناطیسی بقرار زیر هستند:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \beta \times \mathbf{B}), \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \beta \times \mathbf{E}) \quad (3.9)$$

یا، بطور معادل

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta(\beta \cdot \mathbf{B}) \quad (5.9)$$

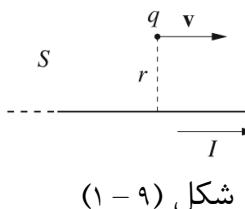
نیروی "نیوتونی" سه بعدی به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$F'_{\parallel} = F_{\parallel} - \frac{V\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{\perp}/c^2}{1 - V\mathbf{v}_{\parallel}/c^2}, \quad F'_{\perp} = \frac{\mathbf{F}_{\perp}}{\gamma(1 - V\mathbf{v}_{\parallel}/c^2)} \quad (6.9)$$

که در آن V سرعت تقویت، v_{\parallel} و v_{\perp} مولفه‌های سرعت ذره به ترتیب موازی و عمود بر V هستند. در دستگاه S داریم $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ و در دستگاه S' داریم $\mathbf{F}' = dp'/dt$

۱.۹ میدان‌های سیم حامل جریان

در دستگاه آزمایشگاهی S ، یک جریان ثابت I در یک سیم بطول بینهایت جریان دارد. سیم قادر چگالی بار خالص است. یک بار آزمایشی q با سرعت v موازی با جریان در فاصله r از سیم، همانطور که در شکل (۱-۹) نشان داده شده، حرکت می‌کند.

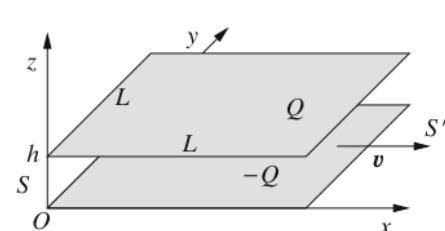


الف: نیروی \mathbf{F} وارد بر q را در دستگاه آزمایشگاهی پیدا کنید. سپس با اعمال تبدیل لورنتس مناسب، نیروی \mathbf{F} وارد بر بار را در دستگاه مرجع S' که بار در حال سکون است، ارزیابی کنید. چه چیزی را می‌توان در میدان‌های الکترومغناطیسی در S' از رابطه \mathbf{F}' استنباط کرد؟

ب: از تبدیل‌های لورنتس برای بدست آوردن بار و چگالی جریان سیم در S' و میدان‌های الکترومغناطیسی مربوطه استفاده کنید. پتانسیل‌های اسکالار و برداری را در S' محاسبه کنید. نتایج را با آنچه از قوانین تبدیل مستقیم برای حوزه الکترومغناطیسی به دست آمده مقایسه کنید.

ج: پاسخ موارد **الف** و **ب** نشان می‌دهد که در S' یک چگالی بار خالص روی سیم وجود دارد. این نتیجه را با محاسبه چگالی خطی الکترون‌ها (جریان با سرعت v_e در S) و یون‌ها (در حالت سکون در S) در S' از طریق تبدیل‌های لورنتس برای سرعت و طول بازیابی کنید. (این آخرین نکته مطابق با چیزی است که توسط E.M. Purcell در مرجع [۱] ارائه شده است).

۲.۹ میدان‌های یک خازن مسطح



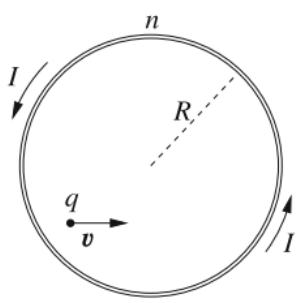
شکل (۲-۹)

در دستگاه آزمایشگاهی S ، یک خازن مسطح دارای صفحه‌های مربعی موازی با مساحت $A = L^2$ است که در فاصله $L \ll h$ از یکدیگر قرار دارند، به طوری که اثرات مزدوج را می‌توان ناقص فرض کرد. صفحه‌ای دارای بارهای الکتریکی $\pm Q$ هستند که به طور یکنواخت بر روی سطوح آنها توزیع شده است، به ترتیب با چگالی بار سطحی $\pm \sigma = \pm Q/A$ (شکل ۲-۹).

در یک دستگاه مرجع S' در حال حرکت نسبت به S با سرعت $v = c$ موازی با صفحات خازن، محاسبه کنید:

- الف: میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در ناحیه بین صفحات؛
- ب: منابع میدان‌ها؛
- ج: نیرو در واحد سطح و کل نیروی وارد بر هر صفحه، مقایسه نتایج با مقدار مربوطه در S .

۳.۹ میدان‌های یک سیم‌لوله



شکل (۳-۹)

در دستگاه آزمایشگاهی S یک جریان ثابت I در یک سیم‌لوله بطول بی‌نهایت به شاعع R و n دور در واحد طول جریان دارد. همانطور که در شکل (۳-۹) نشان داده شده است در یک لحظه معین $t = ۰$ یک ذره آزمایشی بار q در داخل سیم‌لوله قرار دارد، با سرعت v عمود بر محور سیم‌لوله.

- الف: میدان‌های الکترومغناطیسی و نیروی وارد بر ذره را

هم در S و هم در دستگاه S' که ذره فوراً در حال سکون است ($v' = ۰$) بیابید.

- ب: با فرض $1 \ll v/c$ منابع میدان‌ها در S' را تا مرتبه اول در v/c محاسبه کنید.

۴.۹ چهار پتانسیل یک موج مسطح

یک موج مسطح تک رنگ را در نظر بگیرید که در خلاء در امتداد محور x دستگاه آزمایشگاهی دکارتی S ، به صورت خطی در امتداد \hat{y} و فرکانس ω قطبیده شده است، منتشر می‌شود.

- الف: نشان دهید که میدان الکتریکی $E = E(x, t)$ و میدان مغناطیسی $B = B(x, t)$ موج را می‌توان از چهار پتانسیل مناسب (ϕ, A_y, A_μ) به دست آورد. حال همان موج مشاهده شده در دستگاه S' را در نظر بگیرید که با سرعت $v = v\hat{y}$ نسبت به S حرکت می‌کند.

- ب: فرکانس ω' و بردار موج k' موج را در S' محاسبه کنید. میدان الکتریکی $E' = E'(r', t')$ و میدان مغناطیسی $B' = B'(r', t')$ را در S' به صورت توابعی از E در دستگاه S محاسبه کنید.

- ج: بررسی کنید که موج به صورت خطی در S قطبیده شده است و نشان دهید که E' و B' را می‌توان از (A'_μ, A'_μ) با چهار پتانسیل به دست آورد که در آن $A' = A'(r', t')$ است.

- د: چهار پتانسیل \bar{A}'_μ بدست آمده از A_μ را از طریق تبدیل لورنتس پیدا کنید. بررسی کنید که E' و B' را می‌توان از \bar{A}'_μ نیز به دست آورد

- نشان دهید که A_μ و A'_μ با تبدیل معیار^۱ بهم مرتبط هستند.

۵.۹ نیروی وارد بر یک تک قطبی مغناطیسی

فرض کنید که یک آزمایش شواهدی مبنی بر وجود تک قطبی های مغناطیسی ارائه کرده است، یعنی ذرات نقطه مانندی که در حضور یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} ، تحت یک نیرو قرار می گیرند.

$$\mathbf{F}_m = q_m \mathbf{B} \quad (7.9)$$

که در آن q_m بار مغناطیسی تک قطبی است. فرض می کنیم که این ذرات بار الکتریکی ندارند.

- الف: نشان دهید که نیروی وارد شده توسط میدان الکتریکی \mathbf{E} بر تک قطبی که در دستگاه آزمایشگاهی با سرعت v حرکت می کند، برابر است با:

$$\mathbf{F}_c = -q_m \frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{E} \quad (8.9)$$

• ب: "نیروی لورنتس" روی یک تک قطبی مغناطیسی حاصل جمع (7.9) و (8.9) است. از این عبارت برای مطالعه حرکت تک قطبی مغناطیسی به جرم m در یک میدان الکتریکی \mathbf{E} یا در میدان های عمود بر \mathbf{E} و \mathbf{B} استفاده کنید، جایی که میدان ها هر دو ثابت و یکنواخت هستند، و $E > B$ است. برای سادگی، یک حرکت غیر نسبیتی را در نظر بگیرید. نتایج را با نتایج مسئله ۵-۴، قسمت الف مقایسه کنید.

۶.۹ بازتاب از یک آینه متحرک

یک موج الکترومغناطیسی با فرکانس ω و دامنه میدان الکتریکی E_i ، که به صورت خطی در امتداد محور y قطبی شده است، به طور عمود بر هادی کامل که سطح مرزی آن در صفحه yz قرار دارد، برخورد می کند. هادی کامل مانند یک آینه کامل رفتار می کند، یعنی $(x > 0)$ در داخل ماده $\epsilon = \epsilon_0$ و $\mu = \mu_0$ داریم.

- الف: میدان موج بازتاب شده و میدان الکترومغناطیسی کل را محاسبه کنید. اکنون آینه نسبت به دستگاه آزمایشگاهی S با سرعت ثابت $\hat{x}v = v$ موازی با محور x در حرکت است.

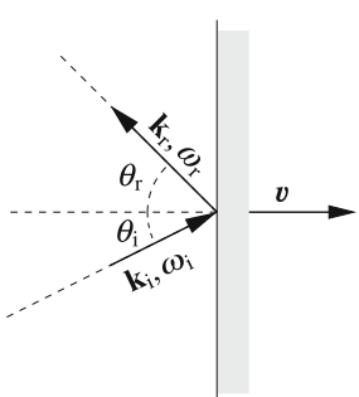
- ب: فرکانسها و میدان های تابشی و امواج بازتاب شده را در دستگاه S' ، جایی که آینه در حال استراحت است، بیابید.

- ج: فرکانس و میدان های موج بازتاب شده را در دستگاه S پیدا کنید.

- د: در مورد پیوستگی میدان ها در سطح آینه متحرک بحث کنید.

^۱Gauge Transformation

۷.۹ برخورد مايل روی آينه متحرك



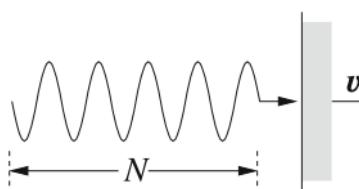
شكل (۴ - ۹)

در دستگاه آزمایشگاهی S ، یک آینه کاملاً منعکس کننده با سرعت ثابت v و عمود بر سطح خود حرکت می‌کند. در S ، بردار موج \mathbf{k}_i یک موج الکترومغناطیسی تابشی، تحت زاویه θ_i با خط عمود بر سطح آینه ایجاد می‌کند (شکل ۴ - ۹). موج تابشی دارای فرکانس ω_i است. پیدا کنید:

- الف: فرکانس ω'_r موج تابشی، زاویه تابش θ'_r ، و زاویه بازتاب θ'_i در دستگاه S' ، جایی که آینه در حال استراحت است.

- ب: فرکانس ω_r موج بازتاب شده و زاویه بازتاب θ_r در دستگاه S . اگر $\cos \theta_i \geq v/c$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۸.۹ تغيير شكل پالس توسيط آينه متحرك



شكل (۵ - ۹)

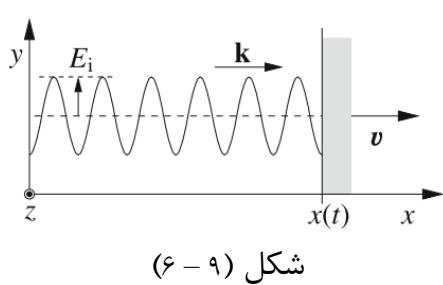
در دستگاه آزمایشگاهی S یک بسته موج مربعی الکترومغناطیسی با دامنه E_i داریم که شامل N نوسان کامل فرکانس ω_i ، بنابراین مدت زمان $\tau_i = 2\pi N/\omega_i$ است. فرض کنید که $1 \gg N$ ، به طوری که بسته "شبه تک رنگ" است. بسته موج به طور عمود بر یک آینه کاملاً برخورد می‌کند. در دستگاه آزمایشگاه، خود آینه با سرعت ثابت v عمود بر سطح خود حرکت می‌کند (شکل ۹ - ۹).

- الف: شکل، مدت و دامنه بسته موج منعکس شده را تعیین کنید.

- ب: مجموع انرژی‌های بسته‌های موج تابشی و منعکس شده را مقایسه کنید و مقدار کار مکانیکی W انجام شده توسيط آينه را در مرحله انعکاس تعیين کنید (همه كميتها را در واحد سطح در نظر بگيريد).

- ج: نشان دهيد که W انتگرال در طول زمان و حجم $E \cdot J$ برابر با قضيه پواينتنگ است.

۹.۹ شرایط مرزی روی آینه متحرک



سطح بازتابنده یک آینه کامل موازی با صفحه yz یک دستگاه مرجع دکارتی آزمایشگاهی S است. آینه با سرعت ثابت v به موازات محور x حرکت می‌کند (شکل ۹-۶). یک موج تک رنگ صفحه‌ای با فرکانس ω_i دامنه E_i و بردار موج $\mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{x}}\omega_i/c$ که به صورت خطی در امتداد محور y قطبی شده، به آینه برخورد می‌کند.

- **الف:** نشان دهید که در دستگاه آزمایشگاهی S هر دو میدان کل (یعنی تابشی + بازتاب) \mathbf{E} و \mathbf{B} در سطح آینه با $x = x(t)$ ناپیوسته هستند و روی صفحه قرار دارند.
- **ب:** میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان از پتانسیل برداری $\mathbf{A}(x, t)$ به دست آورد. نشان دهید که شرایط مرزی برای میدان‌های الکترومغناطیسی در سطح آینه معادل شرایط زیر است.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}[x(t), t] = \circ \quad (9.9)$$

و بیان می‌کند که مقدار پتانسیل برداری در دستگاه آزمایشگاهی در سطح ثابت (یعنی مستقل از زمان) است.

- **ج:** در نتیجه معادله (۹.۹)، می‌توانیم $\mathbf{A}[x(t), t] \equiv \circ$ را فرض کنیم. از این شرط مرزی برای به دست آوردن فرکانس (ω_r) و دامنه (E_r) موج منعکس شده در دستگاه آزمایشگاهی استفاده کنید.

مرجع:

1. E.M. Purcell, *Electricity and Magnetism* (Berkeley Physics Course—Vol. 2, Section 5.9), 2nd edn. (McGraw-Hill Book Company, New York, 1984)

حل مسائل فصل ۹

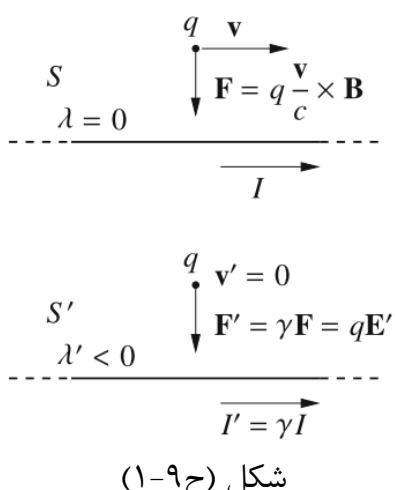
ح: تبدیل نسبیتی میدان‌ها

۱.۹ میدان‌های سیم حامل جریان

• الف: در دستگاه مرجع S سیم یک میدان مغناطیسی ازیموتال (سمتی) $\mathbf{B} = B_\phi(r)\hat{\phi}$ تولید می‌کند. در مختصات استوانه‌ای $B_\phi = B_\phi(r) = (2I/rc)$ داریم. نیروی لورنتس بر بار q برابر است با:

$$\mathbf{F} = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} F_r = \hat{\mathbf{r}} q B_\phi(r) \frac{v}{c} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{2qIv}{rc} \quad (1.9)$$

دستگاه S' با سرعت v نسبت به S حرکت می‌کند. با اعمال تبدیل‌های لورنتس، در S' نیروی وارد بر q برابر $\beta = v/c$ ، $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ است (که $\mathbf{F}' = \hat{\mathbf{r}} F'_r = \hat{\mathbf{r}} \gamma F_r$ با $|v|$ است، شکل (ح-۹)). از آنجایی که q در S' در حال سکون است، نیروی \mathbf{F}' فقط بهدلیل میدان الکتریکی \mathbf{E}' است، با $\mathbf{E}' = \hat{\mathbf{r}} E_r = \hat{\mathbf{r}} F'_r/q$. این مربوط به تبدیل $\mathbf{E}'_\perp = \hat{\mathbf{r}} E_r = -\hat{\mathbf{r}} \gamma \beta B_\phi$ یا به‌شکل برداری، $\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\beta \times \mathbf{B})$ (۲.۹)



که در آن زیرنویس " \perp " به‌جهت عمود بر v اشاره دارد. در حد $|v| \ll c$ (که $\mathbf{E}_\perp \approx \beta \times \mathbf{B}$ ($\mathbf{F} = \mathbf{F}'$)) را دریافت می‌کنیم که تا مرتبه اول در $\beta = v/c$ صحیح است و ممکن است تبدیل "گالیله" میدان نامیده شود. میدان الکتریکی

$$E'_r = -\gamma \beta B_\phi(r') = -2\gamma \beta I / (r' c) \quad (3.9)$$

توسط چگالی بار خطی یکنواخت $\lambda' = -\beta \gamma I/c$ ، همانطور که می‌توان به‌راحتی با استفاده از قانون گاووس تأیید کرد، روی سیم ایجاد می‌شود. بنابراین سیم در S' بار

منفی دارد.^۱

از آنجایی که نیرو در S کاملاً مغناطیسی و در S' کاملاً الکتریکی است، در این مرحله نمی‌توانیم چیز زیادی در مورد میدان مغناطیسی در S بگوییم.^۲

- ب: می‌دانیم که $J = \rho c, J = \lambda$ یک چهار برداری است. سطح مقطع W سیم برای تقویت لورنتس در امتداد محور سیم ثابت است، بنابراین چگالی بار خطی $\lambda = W\rho$ و جریان الکتریکی $I = WJ$ مانند ρ و J تبدیل می‌شوند. بنابراین چگالی بار خطی سیم در S' برابر است با:

$$\lambda' = \gamma \left(\lambda - \beta \frac{I}{c} \right) = -\gamma \beta \frac{I}{c} \quad (4.9)$$

که طبق قانون گاوس، میدان الکتریکی شعاعی $E'_r = 2\lambda'/r$ را مطابق با نتیجه بند (الف) ایجاد می‌کند. همچنین شدت جریان را در S' به دست می‌آوریم،

$$I' = \gamma(I - \beta c \lambda) = \gamma I \quad (5.9)$$

که میدان مغناطیسی $B'_\phi = 2I'/(r'c) = \gamma B_\phi$ را ایجاد می‌کند.

همین نتایج را می‌توان از طریق تبدیل چهار پتانسیل (A, φ) به دست آورد. در S بدیهی است $\varphi = 0$ داریم، زیرا شارژ خالص وجود ندارد، در حالی که پتانسیل برداری A معادله زیر را برآورده می‌کند.

$$\nabla^2 A = -\frac{4\pi}{c} J \quad (6.9)$$

بنابراین، A موازی با سیم است و تنها مولفه غیر صفر آن A_z است که از معادله قابل محاسبه است.

$$\nabla^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} I \delta(r) \quad (7.9)$$

این از نظر ریاضی با معادله پواسون برای پتانسیل الکترواستاتیک یک سیم باردار یکنواخت یکسان است، بنابراین جواب خواهد بود:

$$A_z = -\frac{2I}{c} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (8.9)$$

که در آن a یک مقدار ثابت دلخواه است. بررسی اینکه $B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$ آسان است.

پتانسیل اسکالر در S' برابر است با

$$\varphi' = \gamma(\varphi - \beta A_z) = -\gamma \beta A_z = \frac{2\gamma \beta I}{c} \ln \left(\frac{r}{a} \right) = -2\lambda' \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (9.9)$$

^۱ بهطور کلی، تبدیل کامل $[E' = t(r', t'), B' = \mathbf{r}(r', t')]$ است، که در آن $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r', t')$ و $\mathbf{E}' = \mathbf{E}[r'(r', t')] = \gamma \beta \times \mathbf{B}[r'(r', t')]$ است. با توجه به تبدیل لورنتس مختصات. از آنجایی که در مختصات استوانه‌ای B_ϕ فقط به r بستگی دارد، و برای مختصات در صفحه عرضی نسبت به سرعت تقویتی $r'_\perp = \mathbf{r}_\perp$ در مورد فعلی تبدیل جزوی $r' = r$ را داریم. ^۲ ممکن است بهنظر برسد که قانون بقای بار در تبدیل S به S' نقض شده است. در واقع، این نتیجه ماهیت تا حدودی «آسیب شناختی» جریان‌هایی است که در یک حلقه بسته نمی‌شوند، مانند مورد سیم بی‌نهایت. در واقع، بهبیان دقیق، سیم حامل جریان نامتناهی یک سیستم ثابت نیست، زیرا بارهایی با علامت مخالف در دو «نهایی» سیم، یعنی در $z = \pm\infty$ جمع می‌شوند. اگر جریان‌های «بازگشت» را برای بستن حلقه در S معرفی کنیم، به عنوان مثال، اگر سیم را رسانای داخلی کابل کواکسیال فرض کنیم، یا اگر سیم دوم حامل جریان $-I$ را در فاصله‌ای اضافه کنیم، متوجه می‌شویم که جریان‌های برگشتی به صورت چگالی بار مخالف در S' ظاهر می‌شوند، همانطور که بقای بار لازم است.

که در آن $\lambda' = -\beta\gamma I/c$ است. میدان الکتریکی از $E' = -\nabla\varphi'$ محاسبه می‌شود و همان نتیجه بند (الف) را به دست می‌آوریم. برای پتانسیل برداری در S' ، به طور بی‌اهمیت $A'_z = \gamma(A_z - \beta\varphi) = \gamma B_\phi = \gamma B'_\phi$ دریافت می‌کنیم.

این نتایج با فرمول‌های صریح برای تبدیل میدان الکترومغناطیسی رابطه (۳.۹)، که در مورد ما منجر به $B' = \gamma\beta \times B$ و $E' = \gamma\beta \times E$ می‌شود، مطابقت دارد.

• ج: اجازه دهید ابتدا چگالی بار خطی هر دو یون ($\lambda_i = Zen_i W$) و الکترون‌ها ($\lambda_e = -en_e W$) در S را در نظر بگیریم، که در آن و به ترتیب چگالی حجم یون و الکترون نزدیک است. زیرا هیچ بار خالصی روی سیم در S وجود ندارد، $\lambda_i = -\lambda_e$ داریم.

اجازه دهید چگالی بار λ'_i و λ'_e در S' را از سینماتیک نسبیتی محاسبه کنیم. در S' یک قطعه سیم به طول ΔL حامل بار یونی $\lambda_i \Delta L$ است. در S ، این قطعه همان بار در S دارد (بار یک تغییر ناپذیر لورنتس است)، اما طول آن تحت انقباض لورنتس قرار می‌گیرد، $\Delta L' = \Delta L/\gamma$. بنابراین ما چگالی بار بیشتری داریم $\lambda'_i = \Delta Q/\Delta L' = \gamma_i$. این یک نتیجه کاملاً کلی است: در چارچوبی که سیال با سرعت حرکت می‌کند، سیال چگالی بیشتری (با ضریب γ) نسبت به دستگاه ساکن خود دارد.

از سوی دیگر، الکترون‌ها در S ساکن نیستند: آنها در طول سیم با سرعت $v_e < c$ حرکت می‌کنند به طوری که $I = -en_e v_e W = \lambda_e v_e = -\lambda_i v_e$. بنابراین، چگالی آنها قبلًا با ضریب $\gamma_e = 1/\sqrt{1 - v_e^2/c^2}$ بیشتر از چگالی λ_e در دستگاه بقیه الکترون‌ها است: ما λ_e/γ_e داریم. در S' ، الکترون‌ها با سرعت v'_e حرکت می‌کنند

$$v'_e = \frac{v_e - v}{1 - v_e v/c} \quad (10.9)$$

با توجه به تبدیلات لورنتس بنابراین، چگالی الکترون در S' برابر است با:

$$\lambda'_e = \gamma'_e \lambda_{e\circ} = \frac{\gamma'_e}{\gamma_e} \lambda_e \quad (11.9)$$

که در آن $\gamma'_e = 1/\sqrt{1 - v'_e^2/c^2}$ است. رابطه برای γ' را می‌توان بصورت ساده عبارت جبری زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \gamma'_e &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_e - v)^2}{c^2(1 - \frac{v_e v}{c})^2}}} = \sqrt{\frac{(1 - \frac{v_e v}{c})^2}{(1 - \frac{v_e v}{c})^2 - \frac{(v_e - v)^2}{c^2}}} \\ &= \left(1 - \frac{v_e v}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{v_e v}{c} + \frac{v_e^2 v^2}{c^2} - \frac{v_e^2}{c^2} + 2\frac{v_e v}{c} - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \left(1 - \frac{v_e v}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \\ &= \left(1 - \frac{v_e v}{c}\right) \gamma_e \gamma \end{aligned} \quad (12.9)$$

بنابراین برای چگالی بار کل در S' بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\lambda'_e &= \lambda'_i + \lambda'_e = \lambda'_i \left(\gamma - \frac{\gamma'_e}{\gamma_e} \right) = \lambda_i \gamma \left(1 - 1 + \frac{v_e v}{c^2} \right) = \lambda_i \gamma \frac{v_e v}{c^2} \\ &= -\gamma v \frac{I}{c^2}\end{aligned}\quad (13.9)$$

همانطور که قبلًا بر اساس تبدیل های لورنتس برای نیروها، چگالی بار و جریان و میدان های الکترومغناطیسی یافت شد.

شاید جالب باشد اشاره کنیم که موضوعی در رابطه با بقاء بار در دستگاه S وجود دارد. سیم از نظر الکتریکی خنثی است، بنابراین چگالی بار یون و الکترون آن در صورت قطع شدن از هر منبع ولتاژ یا جریان و در غیاب میدان های خارجی دقیقاً برابر و مخالف است. حال فرض کنید که جریان ثابتی را از سیم عبور می‌دهیم و الکترون های هادی را با سرعتی در امتداد محور سیم در حرکت نگه می‌داریم. اگر سیم همچنان از نظر الکتریکی خنثی باشد، همانطور که فرض کردیم، مقادیر مطلق چگالی بار یون ها و الکترون ها همچنان باید برابر و مخالف باشند. با این حال، در حالی که چگالی بار یون ها در حالت سکون تغییر نکرده است، چگالی بار الکترون های متحرک با یک عامل γ تحت "افراش نسبیتی" قرار می‌گیرد. اگر چگالی بار کل تغییر نکند (سیم باید هنوز خنثی باشد)، باید تعدادی الکترون از سیم خارج شده باشند.^۳ می‌توانیم توضیح دهیم که الکترون های از دست رفته کجا رفته اند تنها با یادآوری اینکه سیم "باز" نیست، بلکه باید، با شرایط مرزی خاص و نحوه بسته شدن مدار، بخشی از یک حلقه جریان بسته باشد.

۲.۹ میدان های یک خازن مسطح

• الف: یک سیستم مختصات دکارتی با محور y عمود بر صفحات انتخاب می‌کنیم، به طوری که صفحه پایینی در $y = 0$ و صفحه بالایی در $y = h$ و محور x موازی با v ، به طوری که $v = \beta c \hat{x}$ باشد. تنها مولفه غیر صفر میدان الکترومغناطیسی در S برابر $E_y = 4\pi\sigma$ است. با اعمال تبدیل لورنتس، میدان های S' را پیدا می‌کنیم.

$$E'_y = \gamma E_y = 4\pi\gamma\sigma, \quad B'_z = -\beta\gamma E_y = -4\pi\beta\gamma\sigma \quad (14.9)$$

• ب: در S' میدان الکتریکی E'_y توسط چگالی بار سطحی $\pm\sigma' = \pm E'_y / 4\pi = \pm\gamma\sigma$ روی صفحات خازن ایجاد می‌شود. به طور مشابه، میدان مغناطیسی B'_z توسط دو چگالی جریان سطحی $\pm K' = \pm K'_x \hat{x} / (4\pi) = -\beta\gamma\sigma c$ با $K'_x = cB'_z / (4\pi)$ ایجاد می‌شود که روی دو صفحه خازن جریان دارد.

این نتایج با تبدیل لورنتس چهار بردار مطابقت دارد

$$K_\mu = (c\sigma, \mathbf{K}) \quad (15.9)$$

^۳البته، این اثر برای رسانایی معمولی در فلزات، که برای آن ها سرعت های الکترون معمولی در حد 10^{-1} cm/s است، بسیار ناچیز است. از سوی دیگر، این موضوع برای هیدرودینامیک نسبیتی بسیار مهم است، به عنوان مثال، برای میدان هایی که سیالات با سرعت های نزدیک به سیال حرکت می‌کنند.

می‌توانیم بررسی کنیم که K_μ در واقع یک چهار بردار است، با تصور دو حجم چهار چگالی جریان ($J_\mu = (c\rho, \pm J)$) که روی دو لایه نازک، $\delta/2 < |y| < \delta/2$ و $|hy| < \delta/2$ در اطراف صفحات خازن، به‌طوری که $J_\delta = \rho\delta$ و $\sigma = J_\delta$ ، توزیع شده‌اند. از آنجایی که δ برای تبدیل‌هایی با سرعت موازی با J ثابت است، بنابراین $K_\mu \equiv J_\mu \delta$ نیز به‌صورت چهار بردار تبدیل می‌شود:

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta K_x/c) = \gamma\sigma, \quad K'_x = \gamma(K_x - \beta c\sigma) = -\beta\gamma\sigma c \quad (16.9)$$

- ج: در S یک نیروی عمود بر واحد سطح $p = \sigma E_y/2 = 2\pi\sigma^2$ روی سطوح داخلی صفحات وجود دارد، به‌طوری که صفحات یکدیگر را جذب می‌کنند. در S' نیروی بر واحد سطح به‌ترتیب مجموع دو جمله ماهیت الکترواستاتیک و مغناطیسی است.

$$p' = \frac{1}{2}\sigma'E'_y + \frac{1}{2}K'_x B'_z = 2\pi\sigma^2\gamma^2 - 2\pi\sigma^2\beta^2\gamma^2 = 2\pi\sigma^2\gamma^2(1 - \beta^2) = 2\pi\sigma^2 = p \quad (17.9)$$

$$\text{عدم تغییر } p \text{ نیز از عبارت معادل ثابت می‌شود}$$

$$p' = \frac{1}{\lambda\pi}E'_y - \frac{1}{\lambda\pi}B'_z = \frac{1}{\lambda\pi}(\mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2) \quad (18.9)$$

که یک تغییر ناپذیری لورنتس است.

در S نیروی کل $F = pA$ است. در S' به‌دلیل انقباض طول‌های لورنتس، $A' = F' = p'A' = pA/\gamma = F/\gamma = (L/\gamma)L = A/\gamma$

۳.۹ میدان‌های یک سیم‌لوله

• الف: یک دستگاه مرجع دکارتی را انتخاب می‌کنیم که محور سیم‌لوله به‌عنوان محور z ، و محور x به‌گونه‌ای باشد که $\hat{\mathbf{x}} = v_x \hat{\mathbf{x}}$. علاوه بر این، همچنین باید از یک دستگاه مرجع استوانه‌ای استفاده کنیم که محور z را با دستگاه دکارتی و با مختصات آزیموتال ϕ به‌اشتراک می‌گذارد، طوری که صفحه $\phi = 0$ با صفحه xz منطبق باشد. در S میدان مغناطیسی داخل سیم‌لوله طولی و یکنواخت، $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ ، با $B = 4\pi nI/c$ است و نیروی وارد بر $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c = q\beta B\hat{\mathbf{y}}$ است.

در دستگاه S' بار q در حال سکون است، بنابراین نیروی وارد بر آن باید فقط به‌دلیل میدان الکتریکی است. با توجه به‌تبدیل‌های لورنتس میدان‌هایی که داریم عبارتند از:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x = 0 & B'_x &= B_x = 0 \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) = -\gamma\beta B & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) = 0 \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) = 0 & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) = \gamma B \end{aligned} \quad (19.9)$$

و نیروی وارد بر بار q خواهد بود $\mathbf{F}' = qE'_y \hat{\mathbf{y}} = q\gamma\beta B_z \hat{\mathbf{y}} = \gamma\mathbf{F}$

• ب: از آنجایی که $\beta \ll 1$ را فرض می‌کنیم، در β تا مرتبه اول $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ داریم، و می‌توانیم انقباض نسبیتی طول را نادیده بگیریم. بنابراین

سطح مقطع سیم‌لوله در S' دایره‌ای می‌ماند تا در حدود تقریب ما باشد. میدان الکتریکی خارج از سیم‌لوله صفر است (در ادامه به این نکته می‌پردازیم)، بنابراین مولفه میدان الکتریکی عمود بر سطح سیم‌لوله ناپیوسته است، که دلالت بر وجود چگالی بار سطحی σ' دارد. از قضیه گاووس داریم:

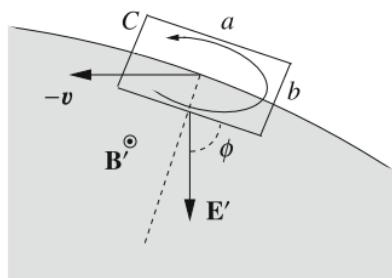
$$\sigma' = \frac{E'_\perp}{\frac{4\pi}{c}} = \frac{E'_y}{\frac{4\pi}{c}} \sin \phi = -\beta \frac{B}{\frac{4\pi}{c}} \sin \phi = -\beta n \frac{I}{c} \sin \phi \quad (20.9)$$

که علامت \perp به معنی عمود بر سطح سیم‌پیچ‌های سیم‌لوله است.

این نتیجه با قوانین تبدیل برای $K_\mu = c\sigma, K = 4\pi I$ چهار بردار مطابقت دارد، که در آن K چگالی جریان سطحی روی دیوارهای سیم‌لوله است (مسئله ۲.۹). در دستگاه S داریم $K = nI\hat{\phi} = nI(\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi)$ و در S' داریم:

$$\sigma' = \gamma \left(\sigma - \beta \frac{K_x}{c} \right) \approx -\beta \frac{K_x}{c} = \beta n \frac{I}{c} \sin \phi \quad (21.9)$$

همانطور که در حل مسئله ۱۱.۳ دیده می‌شود، چگالی بار سطحی که به صورت $\sin\phi$ در سطح جانبی یک استوانه بی نهایت تغییر می‌کند، یک میدان الکترواستاتیکی یکنواخت در داخل سیلندر ایجاد می‌کند. اما در آنجا ما همچنین دیدیم که چگالی بار سطحی یک میدان "دوقطبی" دو بعدی در خارج از سیلندر ایجاد می‌کند. این ممکن است در تضاد با این واقعیت به نظر برسد که از آنجایی که میدان الکترومغناطیسی خارجی در دستگاه S صفر است، باید در S' نیز صفر باشد.



اما فقط میدان‌های ساکن در S وجود ندارد، زیرا حرکت عرضی سیم‌لوله (سلونوئید) یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان ایجاد می‌کند، که بهنوبه خود مربوط به یک میدان الکتریکی ناپایستار (غیرکنسرواتیو) و با شرایط مرزی متفاوت از حالت استاتیکی است. با ذکر این نکته شروع می‌کنیم که میدان الکتریکی یکنواخت (و غیر صفر) در داخل سیم‌لوله و صفر در خارج، پایستار نیست.

شکل (۲-۹)

اجازه دهید یک مسیر مستطیلی C با اضلاع a و b که از سیم‌پیچ سیم‌لوله عبور می‌کند، مانند شکل (۲-۹)، انتخاب کنیم. مسیر C در S' ساکن است، در حالی که سیم‌لوله با سرعت $-v$ به سمت چپ حرکت می‌کند. در $t = 0$ ضلع بالای طول a مماس با سیم‌پیچ در نقطه مرکزی آن است و a به اندازه کافی کوچک است تا قوس سیم‌پیچ محصور به خوبی با یک قطعه خط مستقیم تقریب زده شود. ضمناً هم $b \ll a$ داریم. میدان E' پایستار نیست زیرا انتگرال خط E' در امتداد C ازین نمی‌رود:

$$\oint_C E' \cdot d\mathbf{l} = E'_\parallel a - E'_y a \cos \phi \quad (22.9)$$

این با این واقعیت سازگار است که شار B' از طریق مستطیل محصور شده توسط مسیر C وابسته به زمان است. قوس سیم‌پیچ محصور شده توسط مستطیل به سمت ضلع پایینی به طول a با سرعت $v \cos \phi$ حرکت می‌کند و شار B' از طریق مستطیل

برابر است با:

$$\Phi_C(\mathbf{B}') = \int_C \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S} = B' a [b - (v \cos \phi) t] \quad (23.9)$$

که مربوط به انتگرال خطی است و

$$-\frac{1}{c} \frac{d\Phi_C(\mathbf{B}')}{dt} = \frac{v}{c} B' a \cos \phi = E'_y a \cos \phi \quad (24.9)$$

که با رابطه (۲۲.۹) سازگار است.

۴.۹ چهار پتانسیل یک موج مسطح

• الف: میدان‌های یک موج مسطح را می‌توان بصورت مختلط نوشت:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} E_{\circ} e^{j(\omega t - kx)}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} B_{\circ} e^{j(\omega t - kx)} \quad (25.9)$$

با $E_{\circ} = B_{\circ}$. بردار پتانسیل $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{y}} A_{\circ} e^{j(\omega t - kx)}$ میدان الکتریکی را در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ و میدان مغناطیسی را در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ تولید می‌کند:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (26.9)$$

در غیاب بارهای الکتریکی $\varphi = 0$ است، و از رابطه (۲۶.۹) داریم

$$A_{\circ} = \frac{jc}{\omega} E_{\circ}, \quad A_{\circ} = \frac{j}{k} B_{\circ} \quad (27.9)$$

که معادل هستند زیرا $k_c = kc = \omega$. پتانسیل برداری $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{y}} A_{\circ} e^{j(\omega t - kx)}$ بدیهی است که معادله موج در خلاء را برآورده می‌کند، و همچنین به شرایط مقیاس لورنتس^۴ احترام می‌گذارد.

• ب: تبدیل‌های لورنتس از S به S' نتیجه $\omega' = \gamma \omega$ (اثر داپلر عرضی) و $k'_x = k_x = k$ را بهما می‌دهند. مولفه‌های غیر صفر میدان‌های S' عبارتند از $k'_y = -\omega' v / c^2 = -\gamma \beta k_x$ و $B'_z = \gamma B_z$, $E'_y = E_y E'_x = \gamma \beta B_z$ است بنویسیم $\mathbf{E}' = (\hat{\mathbf{x}} \gamma \beta + \hat{\mathbf{y}}) E_{\circ} e^{j(\omega' t' - k'_x x - k'_y y)}$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \gamma B_{\circ} e^{j(\omega' t' - k'_x x - k'_y y)}$ (28.9)

قطبیش خطی است و در امتداد بردار واحد $\epsilon = \beta \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} / \gamma$ هدایت می‌شود.

• ج: با فرض $\varphi' = 0$ در S' خواهیم داشت

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}' \quad (29.9)$$

که هر دو راضی هستند اگر انتخاب کنیم:

$$\mathbf{A}' = -\frac{c}{\omega'} \mathbf{E}' = \left(\beta \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \frac{1}{\gamma} \right) A_{\circ} e^{j(\omega' t' - k'_x x - k'_y y)} \quad (30.9)$$

که در آن $\omega' = \gamma \omega$

^۴Lorenz gauge condition

- ۵: تبدیل لورنتس از S به S' برای چهار پتانسیل $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A}) = (\circ, \circ, A_y, \circ)$ می‌دهد

$$\bar{A}'_\mu = (-\gamma\beta A_y, \circ, \gamma A_y, \circ) \equiv (\bar{\varphi}', \circ, \bar{A}'_y, \circ) \quad (31.9)$$

میدان‌های بدست آمده از این چهار پتانسیل بقرار زیر هستند:

$$\bar{E}'_x = -\frac{\partial' \bar{\varphi}'}{\partial' x} = jk'_x \bar{\varphi}' = -jkc\gamma\beta A_y = \gamma\beta(-j\omega A_y) = \gamma\beta E_y = E'_x, \quad (32.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}'_y &= -\frac{1}{c} \frac{\partial' \bar{A}'_y}{\partial' t} - \frac{\partial' \bar{\varphi}'}{\partial' y} = -j \frac{\omega'}{c} \bar{A}'_y + jk'_y \bar{\varphi}' = -j \left(\gamma \frac{\omega}{c} \right) \gamma A_y + j(-\gamma\beta k)(-\gamma\beta c) A_y \\ &- j \frac{\omega}{c} \gamma^*(1 - \beta^*) A_y = E_y = E'_y \end{aligned} \quad (33.9)$$

$$\bar{B}'_z = \frac{\partial' \bar{\varphi}'}{\partial' x} = jk'_x \bar{\varphi}' = -jkc\gamma\beta A_y = \gamma\beta(-j\omega A'_y) = -jk'_x \bar{A}'_y = -jk\gamma A_y = \gamma B_z = B'_z \quad (34.9)$$

که با نتایج بند (ج) سازگار است.

- ۵: عبارات (\circ, \mathbf{A}') و $\bar{A}'_\mu = (\bar{\varphi}', \bar{\mathbf{A}}')$ دو گزینه ممکن برای چهار پتانسیل هستند. بنابراین آنها باید حداقلرا با یک تبدیل مقیاس^۵ متفاوت باشند، یعنی باید یک تابع اسکالر $f = f(x', t')$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\mathbf{A}' = \bar{\mathbf{A}}' + \nabla' f, \quad \varphi' = \bar{\varphi}' - \frac{1}{c} \frac{\partial' f}{\partial' t} \quad (35.9)$$

$$\begin{aligned} \text{چون } \varphi' &= \circ \text{ است بدست می‌آوریم, } \frac{\partial' f}{\partial' t} = \bar{\varphi}' \text{, یعنی} \\ f &= \frac{c}{\omega'} \bar{\varphi}' = \frac{jc}{\omega'} \gamma\beta A_y \end{aligned} \quad (36.9)$$

اکنون چون

$$\nabla' f = -(\hat{\mathbf{x}} jk'_x + \hat{\mathbf{y}} jk'_y) f = \hat{\mathbf{x}}\beta - \hat{\mathbf{y}}\gamma\beta^* A_y \quad (37.9)$$

همچنین داریم

$$\bar{\mathbf{A}}' + \nabla' f = [\hat{\mathbf{x}}\beta + \hat{\mathbf{y}}(\gamma - \gamma\beta^*)] A_y = \left(\hat{\mathbf{x}}\beta + \hat{\mathbf{y}} \frac{1}{\gamma} \right) A_y = \mathbf{A}' \quad (38.9)$$

۵.۹ نیروی وارد بر یک تک قطبی مغناطیسی

- الف: در دستگاه مرجع S' ، جایی که تک قطبی مغناطیسی در حال سکون است $(v' = \circ)$ ، و میدان مغناطیسی برابر است با

$$\mathbf{B}' = -\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \quad (39.9)$$

بنابراین نیروی وارد بر تک قطبی $\mathbf{F}' = q_m \mathbf{B}'$ است. از طرف دیگر باید

داشته باشیم، زیرا \mathbf{F} عمود بر \mathbf{v} است، بنابراین در دستگاه آزمایشگاهی S داریم

$$\mathbf{F} = \frac{q_m}{\gamma} \mathbf{B}' = -q_m \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \quad (40.9)$$

که رابطه (۸.۹) اثبات می‌شود.

^۵Gauge Transformation

• ب: معادله حرکت برای یک تک قطبی مغناطیسی در حضور میدان الکتریکی $E = \hat{z}E$ یکنواخت است. به تنها یابی با معادله حرکت در یک بار الکتریکی در حضور میدان مغناطیسی $B = \hat{z}B$ ، پس از جایگزینی $-q_mE - qB$ با معادل است. جواب یک حرکت هلیکوئیدی با سرعت رانش ثابت موازی با E ، و سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_m = \hat{z}q_mE/mc$ است. (توجه کنید که برای یک تک قطبی مغناطیسی، بردار سرعت زاویه‌ای موازی با E است، در حالی که در مورد بار الکتریکی ضد موازی با B است).

در مورد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی متقطع، شرط $E > B$ تضمین می‌کند که یک دستگاه مرجع S' وجود دارد که در آن میدان مغناطیسی از بین میرود. در واقع، گرفتن تقویت لورنتس با $\beta = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/E^2$ داریم

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) = \gamma \left(\mathbf{B} + \frac{E^2 \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E}}{E^2} \right) = 0. \quad (41.9)$$

از آنجایی که $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$. بنابراین، در دستگاه تقویت فقط در میدان الکتریکی وجود دارد

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) = \gamma \left(\mathbf{E} - \frac{B^2}{E^2} \mathbf{E} \right) = \frac{\mathbf{E}}{\gamma} \quad (42.9)$$

چون $\gamma = 1/\sqrt{1 - B^2/E^2}$ است. بنابراین حرکت در S' یک مدار دایره‌ای با فرکانس زاویه‌ای $(q_mE/\gamma c) = \omega'$ است. با تبدیل مجدد به دستگاه آزمایشگاهی S ، سرعت رانش $-c\beta$ را اضافه می‌کنیم، و مسیر در S یک سیکلونید است.

٦.٩ بازتاب از یک آینه متحرک

• الف: به عنوان یک پیش فرض، میدان الکترومغناطیسی کل را به صورت مجموع میدان‌های موج تابشی و میدان‌های یک موج بازتابی با فرکانس و قطبش یکسان، اما جهت مخالف می‌نویسیم.

$$\mathbf{E}(x, t) = \hat{y}E_y(x, t), \quad \mathbf{B}(x, t) = \hat{z}B_z(x, t) \quad (43.9)$$

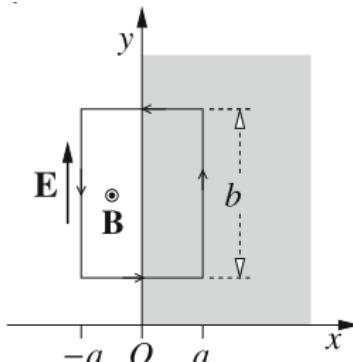
$$E_y(x, t) = Re(E_i e^{j(\omega t - kx)} + E_r e^{j(\omega t + kx)}) \quad (44.9)$$

$$B_z(x, t) = Re(E_i e^{j(\omega t - kx)} - E_r e^{j(\omega t + kx)}) \quad (45.9)$$

دامنه موج بازتابی E_r باید با شرایط مرزی در سطح آینه $x = 0$ تعیین شود. ممکن است قبلًا بدانیم که مؤلفه میدان الکتریکی موازی با سطح مرزی بین دو رسانه در سراسر سطح پیوسته است، یعنی $E_{||}^{(+)} = E_{||}^{(-)}$. با این حال، در اینجا ترجیح می‌دهیم این نتیجه را با جزئیات به دست آوریم، زیرا این به بحث در مورد انعکاس در سطح آینه متحرک کمک می‌کند، که در ادامه به بررسی آن خواهیم پرداخت. محاسبه انتگرال خطی E روی یک حلقه مستطیلی بسته شکل (ح ۳-۹) در سراسر

مرز، نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= [E_y(a, t) - E_y(-a, t)]b \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{b}{c} \int_{-a}^a \frac{\partial B_z}{\partial t} dx \\ &= \frac{-j\omega b}{c} \int_{-a}^a B_z dx = \frac{-j\omega}{c} \bar{B}_z ab \end{aligned} \quad (45.9)$$



شکل (ح-۹)

که در آن \bar{B}_z مقدار متوسط B_z در بازه $(-a, a)$ است.
اگر B_z محدود باشد، "راست ترین RHS" رابطه (45.9) در حد \circ از بین میروند و $E_y(\circ^+, t) = E_y(\circ^-, t)$ است.

برای یک آینه کامل باید $E_y(\circ^+, t) = E_y(\circ^-, t)$ داشته باشیم و شرط مرزی نیز بیانگر این است که $E_y(\circ^-, t) = 0$ است و بنابراین همچنین به دست می‌آوریم.

$$E_y(\circ, t) = (E_i + E_r)e^{j\omega t} = \circ, \quad E_r = -E_i \quad (46.9)$$

$$\text{میدان الکتریکی کل برای } x < \circ \text{ بنابراین موج ساکن است} \\ E_y = E_i(e^{j(\omega t-kx)} - e^{j(\omega t+kx)}) = -j2E_y \sin(kx)e^{j\omega t} \quad (47.9)$$

با گره‌هایی در $\sin(kx) = 0$ و حداکثر دامنه $2E_i$ است. با یادآوری اینکه $c = k/\omega$ میدان مغناطیسی موج برابر است با

$$B_z = 2E_i \cos(kx)e^{j\omega t} \quad (48.9)$$

بنابراین، B_z در سطح $x = \circ$ ناپیوسته است. این به معنای وجود چگالی جریان سطحی $K = \hat{y}K_y(t)$ در $x = \circ$ مربوط به چگالی جریان حجمی $J = K\delta(x)$ است. با محاسبه انتگرال خط $B_z = \hat{y}K_y(t)\delta(x)$ بر روی یک مسیر بسته که از سطح آینه عبور می‌کند، شرایط مرزی را پیدا می‌کنیم.

$$B_z(\circ^+, t) - B_z(\circ^-, t) = \frac{4\pi}{c} K_y(t) \quad (49.9)$$

و چگالی جریان سطحی در سطح یک آینه کامل برابر است با:

$$K_y(t) = -\frac{4\pi}{c} B_z(\circ^-, t) = -\frac{cE_i}{2\pi} e^{j\omega t} \quad (50.9)$$

- ب: فرض کنید $v = c/\beta$ (در این قسمت v و در نتیجه β ممکن است مثبت یا منفی باشد و بستگی به آن دارد که موج و سرعت آینه بترتیب موازی یا ضدموازی باشند). میدانیم که $(\omega/c, \mathbf{k})$ چهار بردار و \mathbf{k} موازی با \mathbf{v} است. بنابراین فرکانس موج تابشی در دستگاه S' برابر است با

$$\omega'_i = \gamma(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = \gamma\omega(1 - \beta) \quad (51.9)$$

که در آن $k = \omega/c$ بکار رفته است. مقدار بردار موج تابشی در S' برابر است. اگر $v < 0$ باشد، خواهیم داشت ($\omega'_i < \omega$) تبدیلات لورنتس دامنه‌های زیر را برای میدان‌ها در S' می‌دهد:

$$E'_{iy} = \gamma(E_{iy} - \beta B_{iz}) = \gamma(1 - \beta)E_i \quad (52.9)$$

$$B'_{iz} = \gamma(B_{iz} - \beta E_{iy}) = \gamma(1 - \beta)E_i \quad (53.9)$$

زیرا $E_{iy} = B_{iz}$ در دستگاه S' موج بازتاب دارای فرکانس $\omega'_r = \omega'_i$ و دامنه میدان $B'_{rz} = B'_{iz}$ است. $E'_{ry} = -E'_{iy}$

- ج: فرکانس ω_r موج منعکس شده در دستگاه آزمایشگاهی S را می‌توان با اعمال تبدیل معکوس از S' به S محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} \omega_r &= \gamma(\omega'_r + \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{v}) = \gamma(\omega'_r + k_r v) = \gamma\omega'_r(1 - \beta) = \omega\gamma^2(1 - \beta)^2 \\ &= \omega \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \end{aligned} \quad (54.9)$$

دامنه میدان الکتریکی و مغناطیسی موج منعکس شده در S' برابر $E'_r = -E'_i$ است. بنابراین در S داریم $B'_r = B'_i = \gamma(1 - \beta)E_i$ و $-\gamma(1 - \beta)E_i$

$$E_{ry} = \gamma(E'_{ry} + \beta B'_{rz}) = -\gamma(1 - \beta)E'_i = -\gamma^2(1 - \beta)^2 E_i = -\frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_i \quad (55.9)$$

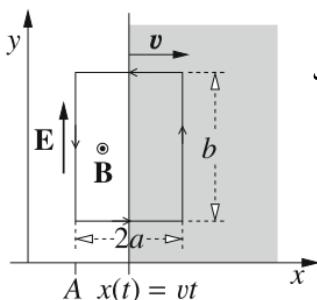
$$B_{rz} = \gamma(B'_{rz} + \beta E'_{ry}) = \gamma(1 - \beta)E'_i = \gamma^2(1 - \beta)^2 E_i = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_i \quad (56.9)$$

اگر $\beta < 0$ داریم $|E_r| > |E_i|$: در S موج منعکس شده دارای دامنه بالاتری نسبت به موج تابشی است.

- د: عبارات کامل برای میدان‌ها در S عبارتند از:

$$E_y(x, t) = E_i e^{j(\omega t - kx)} - \frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_i e^{j(\omega t + kx)} \quad (57.9)$$

$$B_z(x, t) = E_i e^{j(\omega t - kx)} + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_i e^{j(\omega t + kx)} \quad (58.9)$$



بنابراین، E_y نیز یک مقدار محدود در سطح آینه $x(t) = vt$ دارد و بنابراین ناپیوسته است:

$$E_y[x(t), t] = \frac{2\beta}{1 + \beta} E_i e^{j\omega t(1 - \beta)} \quad (59.9)$$

$$B_z[x(t), t] = \frac{2}{1 + \beta} E_i e^{j\omega t(1 - \beta)} \quad (60.9)$$

شکل (۴-۹)

این را می‌توان با در نظر گرفتن مجدد انتگرال خطی میدان الکتریکی E در امتداد

یک مسیر مستطیلی بسته با اضلاع $2a$ و b در حالت ساکن در S مشاهده کرد. فرض می‌کنیم که سمت چپ عمودی مسیر روی خط $x = A$ است، که در زمان t سطح آینه دو طرف افقی را، مانند شکل (ح ۴-۹)، قطع می‌کند و $\lambda \ll a$ ، که در آن طول موج در S است. بنابراین شار میدان مغناطیسی از طریق مسیر مستطیلی در زمان t برابر است با:

$$\Phi(t) \approx B_z[x(t), t][x(t) - A]b = B_z[x(t), t](vt - A)b \quad (61.9)$$

در نتیجه

$$-\frac{1}{c} \frac{d\Phi(t)}{dt} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [B_z[x(t), t](vt - A)b + B_z[x(t), t]vb] \quad (62.9)$$

در حد $a \rightarrow vt$ ، اولین عبارت سمت راست حذف می‌شود، و داریم

$$-\frac{1}{c} \frac{d\Phi(t)}{dt} \approx -\frac{1}{c} B_z[x(t), t]vb = -B_z[x(t), t]\beta b \quad (63.9)$$

از سوی دیگر، انتگرال خطی E در امتداد مسیر مستطیلی بسته شکل (ح ۴-۹) برابر است با:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_y[x(t), t]b = -\frac{\gamma\beta}{1+\beta} b E_i e^{j\omega t(1-\beta)} = -B_z[x(t), t]\beta b \quad (64.9)$$

۷.۹ برخورد مایل روی آینه متحرک

الف: یک دستگاه مرجع دکارتی S را انتخاب می‌کنیم که در آن v موازی با محور x است، سطح آینه روی صفحه yz و بردار موج \mathbf{k}_i موج تابشی در صفحه xy قرار دارد. تبدیل‌های لورنتس به دستگاه S' می‌دهند

$$k'_{ix} = \gamma \left(k_{ix} - \omega \frac{v}{c} \right) = \gamma \frac{\omega}{c} (\cos \theta_i - \beta) \quad (65.9)$$

$$k'_{iy} = k_{iy} \quad (66.9)$$

$$\omega'_i = \gamma(\omega_i - k_x v) = \gamma\omega_i(1 - \beta \cos \theta_i) \quad (67.9)$$

$$\tan \theta'_i = \frac{k'_{iy}}{k'_{ix}} = \frac{k_{ix} \tan \theta_i}{\gamma(\omega_i/c)(\cos \theta_i - \beta)} = \frac{k_{ix} \sin \theta_i}{\gamma k_{ix}(\cos \theta_i - \beta)} = \frac{\sin \theta_i}{\gamma(\cos \theta_i - \beta)} \quad (68.9)$$

که در آن، طبق معمول، $\theta'_r = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ و $\beta = v/c$ است. در S' ، زاویه بازتاب θ'_r برابر با زاویه تابشی θ'_i است، بنابراین

$$k'_{rx} = -k'_{ix}, \quad k'_{ry} = k'_{iy}, \quad \omega'_r = \omega'_i \quad (69.9)$$

ب: با انجام تبدیل‌های لورنتس به دستگاه آزمایشگاهی S به دست می‌وریم

$$k_{rx} = k_{ry} \quad (70.9)$$

$$\begin{aligned} k_{rx} &= \gamma \left(k'_{rx} + \omega' \frac{v}{c} \right) - \gamma \left[k_{ix}(1 + \beta^2) - 2\omega_i \frac{\beta}{c} \right] \\ &= -2\gamma \frac{\omega}{c} [(1 + \beta^2) \cos \theta_i - 2\beta] \end{aligned} \quad (71.9)$$

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + k'_{rx}v) = \gamma^{\frac{1}{2}} [\omega(1 + \beta^2) - 2k_{ix}v] = \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{\omega}{c} (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_i) \quad (72.9)$$

که از آنها

$$\tan \theta_r \equiv -\frac{k_{ry}}{k_{rx}} = \frac{\sin \theta_i}{\gamma^{\frac{1}{2}} [2\beta - (1 + \beta^2) \cos \theta_i]} \quad (73.9)$$

برای $\cos \theta_i = v/c = \beta$ ، مخرج "راست‌ترین سمت راست" (68.9) صفر است و زاویه تابشی θ'_i در S' یک زاویه قائم است. این بدان معناست که در S' ، موج تابشی به موازات سطح آینه بدون برخورد با آینه منتشر می‌شود و هیچ بازتابی رخ نمی‌دهد. برای زوایای تابشی به گونه‌ای که $\cos \theta_i > \beta$ ، همه فرمول‌های بالا بی‌معنی هستند، زیرا به $k'_{ix} < 0$ دلالت می‌کنند، یعنی موج در طرف دیگر آینه برخورد می‌کند.

۸.۹ تغییر شکل پالس توسط آینه متحرک

الف: تعداد نوسانات در بسته موج یک متغیر نسبیتی است و تبدیلات لورنتس در میدان‌های الکترومغناطیسی خطی هستند. بنابراین، در دستگاه مرجع S' ، جایی که آینه در حالت سکون است، بسته موج تابشی همچنان مرربع است و شامل همان تعداد نوسان است. از طرف دیگر، همانطور که قبلاً در مسئله ۶.۹ مشاهده شد، فرکانس ω'_i و دامنه E'_i عبارتند از:

$$\omega'_i = \gamma(1 - \beta)\omega_i, \quad E'_i = \gamma(1 - \beta)E_i \quad (74.9)$$

که در آن $v/c = \beta$ است. در S' ، بسته بازتاب شده دارای همان شکل، مدت و فرکانس بسته تابشی است، اما دامنه و جهت مخالف دارد.

$$E'_r = -E'_i, \quad \omega'_r = \omega'_i, \quad \tau'_r = \tau'_i = N \frac{2\pi}{\omega'_i} = N \frac{2\pi}{\gamma(1 - \beta)\omega_i} = \frac{\tau_i}{\gamma(1 - \beta)} \quad (75.9)$$

تبدیل مجدد به S (مسئله ۶.۹) داریم

$$E_r = -\frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_i, \quad \omega_r = \gamma(1 - \beta)\omega'_r = \gamma^{\frac{1}{2}}(1 - \beta^2)\omega_i = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}\omega_i \quad (76.9)$$

مدت زمان بسته موج منعکس شده به‌این ترتیب است

$$\tau_r = N \frac{2\pi}{\omega_r} = N \frac{2\pi}{\omega} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \tau_i \quad (77.9)$$

اگر $\beta > 0$ باشد، به عنوان مثال، اگر سرعت آینه موازی با جهت انتشار بسته باشد، بسته منعکس شده مدت زمان بیشتری نسبت به بسته تابشی دارد، در حالی که اگر سرعت آینه ضد موازی باشد، بسته بازتاب شده کوتاه‌تر است.

ب: انرژی در واحد سطح هر بسته با شدت I ضربدر مدت آن τ داده می‌شود. شدت مناسب با مجدور دامنه میدان الکتریکی است، بنابراین رابطه بین شدت منعکس شده و شدت تابشی برابر است با:

$$I_r = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{2}} I_i \quad (78.9)$$

و رابطه بین انرژی‌ها در واحد سطح کل بسته‌های منعکس شده و تابشی برابر است با:

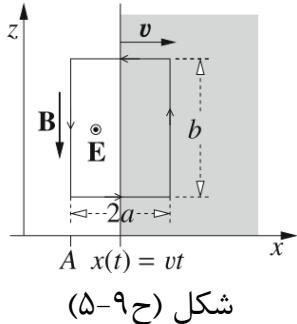
$$U_r = I_r \tau_r = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 I_i \frac{1+\beta}{1-\beta} \tau_i = \frac{1-\beta}{1+\beta} I_i \tau_i = \frac{1-\beta}{1+\beta} U_i \quad (79.9)$$

می‌بینیم که $U_r \neq U_i$ ، بنابراین مقداری کار در واحد سطح برای حفظ حرکت آینه با سرعت ثابت لازم است، یعنی

$$W = U_r - U_i = -\frac{2\beta}{1+\beta} U_i \quad (80.9)$$

بنابراین یک آینه با β ، یعنی حرکت در جهت مخالف بسته موج تابشی، مقداری انرژی را به بسته منتقل می‌کند.

- ج: به عنوان اولین مرحله، توزیع چگالی جریان J را تعیین می‌کنیم. از آنجایی که تمام فیلدها در داخل آینه خالی هستند، یعنی، برای $x > x(t) = vt$ ، جریان باید روی سطح آینه، $\mathbf{J}(x, t) = \mathbf{K}(t)\delta(x - vt)$ باشد.



شکل (۵-۹)

می‌توانیم جریان سطح و چگالی جریان سطح $\mathbf{K}(t)$ روی سطح آینه را با در نظر گرفتن میدان‌های نزدیک به سطح محاسبه کنیم. با محاسبه انتگرال خطی B بر روی یک مسیر مستطیلی بسته ثابت در S ، اضلاع b موازی با B و سطح آینه، و $2a$ عمود بر و عبور از سطح آینه، شکل (۵-۹)، بدست می‌آوریم

$$\oint_{\text{مسیر}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \Phi(\mathbf{J}) + \frac{1}{c} \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \quad (81.9)$$

که در آن (\mathbf{J}) و (\mathbf{E}) شارهایی از سطح هستند که به ترتیب توسط مسیر J_v و E محدود شده‌اند. در حد $a \rightarrow 0$ و $A \rightarrow vt$ داریم

$$\oint_{\text{مسیر}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \approx B(vt)b, \quad \Phi(\mathbf{J}) = K(t)b \quad (82.9)$$

$$\frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} [E(vt)(vt - A)b + E(vt)bv] \approx E(vt)bv \quad (83.9)$$

از اطلاعات E و B در سطح آینه (مسئله ۶.۹) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{c}{4\pi} \left[B(vt) - \frac{v}{c} E(vt) \right] = \frac{c}{4\pi} (1-\beta) \frac{2E_i}{1+\beta} e^{j\omega t(1-\beta)} \\ &= \frac{cE_i}{4\pi} (1-\beta) e^{j\omega t(1-\beta)} \end{aligned} \quad (84.9)$$

بنابراین، K و E هم فاز هستند. برای محاسبه کل کار مکانیکی در واحد سطح روی آینه، ابتدا به مقادیر واقعی برمی‌گردیم.

$$K(t) = \frac{cE_i}{4\pi} (1-\beta) \cos[(1-\beta)\omega t] \quad (85.9)$$

$$E(vt) = \frac{2\beta}{1+\beta} E_i \cos[(1-\beta)\omega t] \quad (86.9)$$

و انتگرال را روی عمق آینه محاسبه می‌کنیم

$$\int_{vt}^{\infty} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dx = \frac{1}{\gamma} K(t) E(vt) = \frac{cE_i^{\gamma}}{2\pi} \frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta} \cos[(1-\beta)\omega t] \quad (87.9)$$

ما ضریب $1/2$ را برای محاسبه ناپیوستگی E در $x = vt$ وارد کردہ‌ایم (مسئله ۱۲.۲). معادله (۸۷.۹) توان مکانیکی در واحد سطح اعمال شده بر روی آینه را نشان می‌دهد. برای یافتن کار مکانیکی، (۸۷.۹) باید در بازه زمانی $K(t) \neq 0$ ، یعنی برای زمان مورد نیاز بسته موج برای انعکاس کامل، انتگرال گیری شود. اگر جلوی بسته موج در $t = 0$ به آینه برسد، انتهای بسته در $t = \tau/(1-\beta)$ آینه را ترک می‌کند، که با مدت زمان پالس τ متفاوت است، زیرا آینه حرکت می‌کند در حالی که قطار موج در حال حرکت است. بنابراین ما به انتگرال زیر نیاز داریم

$$\int_0^{\tau/(1-\beta)} \cos^{\gamma}[(1-\beta)\omega t] dt = \frac{1}{\omega(1-\beta)} \int_0^{\omega\tau} \cos^{\gamma} x dx = \frac{\pi N}{(1-\beta)\omega} \quad (88.9)$$

چون $2\pi N = 2\pi\omega\tau$ و انتگرال $\cos^{\gamma} x$ در یک دوره مساوی π است. بدین ترتیب بدست می‌آوریم

$$W = \int \frac{1}{\gamma} K(t) E(vt) dt = \frac{cE_i^{\gamma}}{2\pi} \frac{\beta(1-\beta)}{1+\beta} \frac{\pi N}{(1-\beta)\omega} = \frac{cE_i^{\gamma}}{4\pi} \frac{\beta}{1+\beta} \tau \quad (89.9)$$

$$= 2I_i \tau \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{2\beta}{1+\beta} U_i \quad (90.9)$$

که با رابطه (۸۰.۹) سازگار است.

کار W تقسیم بر زمان بازتاب، توان مکانیکی در واحد سطح را می‌دهد

$$\mathcal{P} = W \frac{1-\beta}{\tau} = \frac{2\beta(1-\beta)}{1+\beta} I_i = \frac{2(1-\beta)}{1+\beta} I_i \frac{v}{c} \quad (91.9)$$

که باید برابر با فشار وارد شده بر آینه متحرک ضربر سرعت آن v باشد. بنابراین به‌این نتیجه می‌رسیم که فشار تابش بر روی یک آینه متحرک برابر است با:

$$P_{rad} = \frac{\mathcal{P}}{v} = \frac{2I_i}{c} \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (92.9)$$

این نتیجه را می‌تواند به روش‌های مختلف نیز به‌دست آورد (مسائل ۷.۱۳ و ۸.۱۳)

۹.۹ شرایط مرزی روی آینه متحرک

الف: می‌توانیم فرض کنیم که موج به صورت خطی در امتداد y ، بدون از دست دادن کلیت، قطبی شده است. مبدأ دستگاه S' را انتخاب می‌کنیم، جایی که آینه در حالت سکون است، به‌طوری که سطح آینه در صفحه $x' = 0$ باشد. در S' مجموع میدان‌ها در سطح آینه بترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_s(t') &= \hat{\mathbf{y}}' E'_s(t') \equiv 0 \\ \mathbf{B}'_s(t') &= \hat{\mathbf{z}}' B'_s(t') e^{j\omega'_s t'} = -\hat{\mathbf{z}}' \mathcal{E}'_s e^{j\omega'_s t'} \end{aligned} \quad (93.9)$$

که در آن
(۹۴.۹)

$$E'_i = \gamma(1 - \beta)E_i, \quad \omega'_i = \gamma(1 - \beta)\omega_i$$

همانطور که در مسئله ۶.۹ مشاهده می‌شود، دامنه و فرکانس موج تابشی در S' است. توجه کنید که \mathbf{E}' در $x' = 0$ پیوسته است، در حالی که \mathbf{B}' اینطور نیست. با تبدیل دامنه‌های میدان در سطح آینه به S به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E_s &= \gamma(E'_i + \beta B'_s) = \gamma\beta B'_s = -2\gamma^2\beta(1 - \beta)E_i \\ B_s &= \gamma(B'_s + \beta E'_i) = \gamma B'_s = -2\gamma^2(1 - \beta)E_i \end{aligned} \quad (۹۵.۹)$$

که در آن $\beta = v/c$ و $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. بنابراین، به طور کلی، در S هر دو میدان $E_s \neq 0$ و $B_s \neq 0$ را داریم، در حالی که میدان‌ها در داخل آینه صفر هستند.

- ب: میدان‌های الکترومغناطیسی با پتانسیل برداری مرتبط هستند

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۹۶.۹)$$

بنابراین، تنها مولفه غیر صفر پتانسیل برداری A_y است و داریم

$$E_s = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}, \quad B_s = \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad (۹۷.۹)$$

مشتق کل \mathbf{A} موجود در رابطه (۹.۹) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{x=x(t)} = \left. \frac{\partial A_y}{\partial t} + v \frac{\partial A_y}{\partial x} \right|_{x=x(t)} = cE_s - vB_s = c(E_s - \beta B_s) = 0 \quad (۹۸.۹)$$

مطابق رابطه (۹۵.۹). بنابراین معادلات (۹۳.۹) و (۹۵.۹) دلالت بر $\mathbf{A} = 0$ در سطح آینه در S دارند.

- ج: پتانسیل بردار کل در S مجموع پتانسیل‌های بردار تابشی و امواج منعکس شده است.

$$\mathbf{A}(x, t) = \hat{\mathbf{y}} \left[A_i e^{j(\omega_i t - k_i x)} + A_r e^{j(\omega_r t + k_r x)} \right] = \hat{\mathbf{y}} \left[A_i e^{jk_i(ct-x)} + A_r e^{jk_r(ct+x)} \right] \quad (۹۹.۹)$$

که در آن $k_r = \omega_r/c$ ، $k_i = \omega_i/c$ ، $A_i = -jcE_i/\omega_i$
 $= A_y(vt, t) = A_i e^{jk_i(c-v)t} + A_r e^{jk_r(c+v)t}$ (۱۰۰.۹)

این معادله برآورده می‌شود اگر

$$A_r = -A_i, \quad \frac{k_r}{k_i} = \frac{\omega_r}{\omega_i} = \frac{c-v}{c+v} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (۱۰۱.۹)$$

برای میدان الکتریکی کل بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = -j \frac{\omega_i}{c} A_i e^{j(\omega_i t - k_i x)} + j \frac{\omega_r}{c} A_r e^{j(\omega_r t + k_r x)} \\ &= E_i e^{j(\omega_i t - k_i x)} - \frac{1-\beta}{1+\beta} E_i e^{j(\omega_r t + k_r x)} \end{aligned} \quad (۱۰۲.۹)$$

فصل ۱۰

تابش و پراکندگی

عناوین. میدان تابشی^۱. بسط چندقطبی. تابش دوقطبی الکتریکی. تابش دوقطبی مغناطیسی.

معادلات پایه این فصل:
میدان‌های منطقه تابشی یک منبع نقطه‌مانند در $r = 0$ که دارای دوقطبی الکتریکی است: $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(t_{ret}) \times \hat{\mathbf{r}}] \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} \quad (1.10)$$

که در آن $t_{ret} = t - r/c$ است.
قدرت تابش لحظه‌ای از منبع دوقطبی الکتریکی و توزیع زاویه‌ای آن خواهد بود:

$$P_{rad} = \frac{2}{3c^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2, \quad \frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{3P_{rad}}{4\pi} \sin^2 \theta \quad (2.10)$$

که در آن θ زاویه بین \mathbf{p} و \mathbf{r} و زاویه بسیار کوچک حجمی $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ است.
روابط مشابه برای میدان‌ها و توان یک دوقطبی مغناطیسی $\mathbf{m}(t)$ خواهد بود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{[\ddot{\mathbf{m}}(t_{ret}) \times \hat{\mathbf{r}}]}{rc^2}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} \quad (3.10)$$

$$P_{rad} = \frac{2}{3c^2} |\ddot{\mathbf{m}}|^2, \quad \frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{3P_{rad}}{4\pi} \sin^2 \theta \quad (4.10)$$

۱.۱۰ تابش سیکلوترون

یک الکترون در صفحه xy در حضور یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ حرکت می‌کند. سرعت اولیه $v_0 \ll c$ است، به طوری که حرکت غیر نسبیتی و الکترون

^۱Radiation Field

در مدار دایره‌ای به شعاع $r_L = v_0/\omega_L$ و فرکانس $\omega_L = eB_0/m_e c$ (فرکانس لارمور) حرکت می‌کند.

• الف: تشعشع ساطع شده توسط الکترون را در تقریب دوقطبی توصیف کنید و فرکانس، قطبش آن برای تشعشع مشاهده شده در امتداد محور z و در امتداد جهتی که در صفحه xy قرار دارد، و کل توان تابش شده P_{rad} را توصیف کنید. در مورد اعتبار تقریب دوقطبی بحث کنید.

• ب: الکترون به تدریج انرژی خود را به دلیل تابش ساطع شده از دست می‌دهد. از معادله $P_{rad} = -dU/dt$ استفاده کنید، که در آن U انرژی کل الکترون است، تا نشان دهید که الکترون در واقع به سمت "مرکز" مدار خود مارپیچی می‌شود. ثابت زمانی τ اتلاف انرژی را با فرض $\omega_L \gg \tau$ محاسبه کرده و یک تخمین عددی ارائه دهید.

• ج: اگر نیروی لورنتس $B = -(e/c)v \times \mathbf{B}$ را به عنوان تنها نیروی وارد بر الکترون در نظر بگیریم، حرکت مارپیچی نمی‌تواند رخ دهد. نشان دهید که با افروزن نیروی اصطکاک f_{fr} متناسب با سرعت الکترون می‌توان یک حرکت مارپیچی را به دست آورد.

۲.۱۰ فروپاشی اتمی

در مدل کلاسیک برای اتم هیدروژن، یک الکترون در مدار دایره‌ای به شعاع a_0 به دور پروتون حرکت می‌کند.

• الف: فرکانس ω تابش ساطع شده توسط الکترون در حال گردش و توان تابش ساطع شده هر دو را به صورت تابعی از a_0 محاسبه کنید.

• ب: از نتایج حالت الف استفاده کرده نشان دهید که به طور کلاسیک، الکترون روی هسته فرو می‌ریزد، و زمان میراثی را با فرض $10^{-8} \times 0.53 = 0.53$ سانتی‌متر پیدا کنید. (شعاع بور^۲، در واقع از ملاحظات کوانتموی به دست می‌آید).

۳.۱۰ میرایی تابشی الکترون مقید بالاستیک

حرکت یک الکترون کلاسیک و مقید به الاستیک در غیاب میدان‌های خارجی توسط معادله زیر توصیف می‌شود.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \eta \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0 \mathbf{r} = 0 \quad (5.10)$$

که در آن بردار \mathbf{r} فاصله الکترون از موقعیت تعادل آن، η ضریب اصطکاک، و ω_0 فرکانس زاویه‌ای میرا نشده است. فرض می‌کنیم که در زمان $t = 0$ الکترون در $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ با سرعت اولیه صفر قرار دارد.

^۲Bohr radius

- الف: به عنوان اولین گام، جواب معادله (۵.۱۰) را با فرض $\eta = \eta$ پیدا کنید، و میانگین دوره‌ای توان تابش P_{rad} گسیل شده را به دلیل شتاب الکترون محاسبه کنید.
- ب: با فرض کاهش دامنه نوسان به دلیل از دست دادن انرژی تابشی، زمان میرائی τ را با استفاده از نتیجه حالت (الف) برای توان گسیل شده P_{rad} تخمین بزنید. تعیین کنید که در چه شرایطی τ بسیار بیشتر از یک دوره نوسان است.
- اکنون $\eta \neq \eta$ را با $\omega = \omega$ در معادله (۵.۱۰) فرض کنید. در موارد زیر، مقادیر مرتبه (η/ω) یا بالاتر را نادیده بگیرید.
- ج: حرکت الکترون را توصیف کنید و مقدار η را که میرایی تابشی را باز تولید می‌کند، به صورت پسینی^۳ تعیین کنید.

۴.۱۰ تابش ساطع شده از بارهای در حال گردش

دو بار نقطه‌ای یکسان q با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در مدار دایره‌ای $x^3 + y^3 = R^3$ در صفحه $z = 0$ یک دستگاه مرجع دکارتی می‌چرخند.

- الف: کلی ترین مسیر را برای بارها در مختصات قطبی $\phi_i = \phi_i(t)$ ، $r_i = r_i(t)$ و $x_i = x_i(t)$ ، $y_i = y_i(t)$ (که $i = 1, 2$) بتوسیله بزرگی دارد و بار را بر چسب گذاری می‌کند) و گشتاور دوقطبی الکتریکی سیستم را محاسبه کنید.
- ب: تابش دوقطبی ساطع شده توسط سیستم دو بار را مشخص کنید، در مورد اینکه چگونه توان به شرایط اولیه بستگی دارد و قطبش تابش ساطع شده در امتداد جهت‌های \hat{x} و \hat{y} را مشخص کنید.
- ج: در موردی که بارها با سرعت زاویه‌ای مخالف در مدار هستند به سؤالات الف و ب پاسخ دهید.
- د: اکنون سیستمی از سه بار یکسان در مدار دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای یکسان را در نظر بگیرید. شرایط اولیه را بیابید که توان تابش یا صفر یا حداقل آن را دارد.
- ه: تعیین کنید که آیا گشتاور دوقطبی مغناطیسی سهمی در تابش دارد یا خیر، برای هر یک از موارد مشخص شده در بالا.

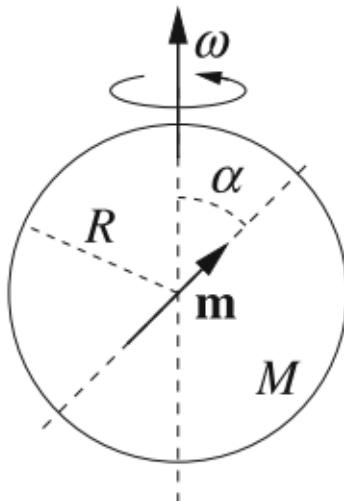
۵.۱۰ سرعت چرخش پایین و میدان مغناطیسی یک تپ اختر

تپ اختر (پولسار)^۴ یک ستاره نوترونی با جرم $M \approx 1.4M_\odot$ (که در آن $M_\odot \approx 2.8 \times 10^{33} \text{ گرم}$) است. ستاره با سرعت زاویه‌ای $R \approx 10 \text{ km} = 10^6 \text{ cm}$

^۳Posteriori

^۴Pulsar

ω می‌چرخد و دارای گشتاور مغناطیسی m است که به طور کلی با محور چرخش موازی نیست. [۱]



شکل (۱ - ۱۰)

- الف: تابش ساطع شده توسط تپ اختر را تشریح کنید و کل توان تشعشع شده را بیابید، با این فرض که زاویه بین گشتاور مغناطیسی و محور چرخش α (شکل ۱ - ۱۰) است.

- ب: "نرخ چرخش" (ثابت میرایی چرخش) تپ اختر را پیدا کنید، با این فرض که اتلاف انرژی فقط به دلیل تابش است.

- ج: توضیح دهید که چگونه با معلوم بودن جرم، شعاع، دوره چرخش T و مشتق زمانی dT/dt تپ اختر می‌توان میدان مغناطیسی را در سطح تپ اختر تخمین زد. تقریب عددی بر اساس نتایج مشاهدات [۳] ارائه دهید که $T = 7.476551 \pm 3s$ و $\dot{T} = (2.8 \pm 1.4) \times 10^{-11} \approx 10^{-3}s$ در سال را محاسبه کنید. (برای سادگی فرض کنید که m عمود است).

۶.۱۰ آنتن دوقطبی خمیده

یک آنتن دوقطبی از دو عنصر هادی یکسان، معمولاً دو میله فلزی، هر یک به طول a و مقاومت R تشکیل شده است. جریان محرک بین دو نیمه آنتن اعمال می‌شود، به طوری که جریان همانطور که در شکل (۱ - ۲) الف نشان داده شده، جریان می‌یابد. برای یک آنتن "کوتاه" ($a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$) توزیع جریان را می‌توان تقریباً به صورت زیر مشخص کرد [۲].

$$I = I(z, t) = Re \left[I_0 \left(1 - \frac{|z|}{a} \right) e^{j\omega t} \right] \quad (6.10)$$

وابستگی دامنه نوسان جریان به z مانند شکل (۱ - ۳) است. مطلوب است:

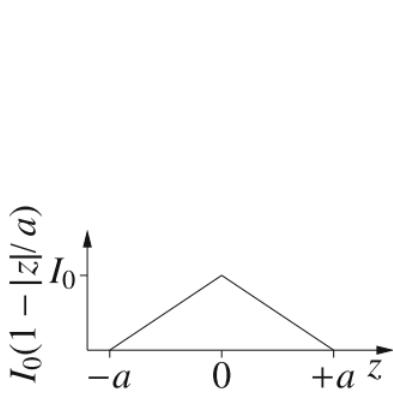
- الف: میانگین دوره تلف شده P_{diss} :

- ب: چگالی بار خطی q_l روی میله‌های آنتن، و گشتاور دوقطبی الکتریکی آنتن p :

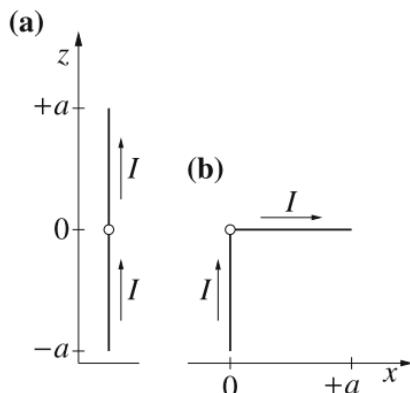
- ج: توان تابشی میانگین دوره P_{rad} و نسبت P_{rad}/P_{diss} :

- د: جهاتی را پیدا کنید که هیچ تابشی در آنها مشاهده نمی‌شود؛

حال فرض کنید که میله بالایی آنتن دوقطبی 90° خم شده، به طوری که موازی با محور x شکل (۱۰-۲)-ب، بدون اینکه جریان یا چگالی بار در هیچ نقطه‌ای از دو میله مختلف شود، است.



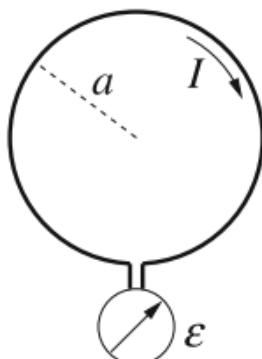
شکل (۳-۱۰)



شکل (۲-۱۰)

- دوباره به سؤالات الف، ب و ج برای آنتن خم شده پاسخ دهید و به تفاوت با آنتن مستقیم اشاره کنید.

۷.۱۰ آنتن گیرنده حلقوی



شکل (۴-۱۰)

یک آنتن حلقوی گیرنده یک سیم پیچ دایره‌ای به شعاع a و مقاومت R است. دامنه سیگنال دریافتی متناسب با جریان القا شده در آنتن توسط یک موج الکترومغناطیسی ورودی است (شکل ۴-۱۰).

- الف: فرض کنید که سیگنال ورودی یک موج تک رنگ و خطی قطبی شده با طول موج $\lambda \gg a$ و دامنه میدان الکتریکی E است. نحوه جهت‌گیری آنتن را با توجه به بردار موج k و قطبیش برای تشخیص حداکثر سیگنال پیدا کنید و دامنه سیگنال را محاسبه کنید.

- ب: در یک آنتن خطی گیرنده سیگنال تقریباً متناسب با $E_{\parallel} l$ است، جایی که E_{\parallel} مولفه میدان الکتریکی موج موازی با آنتن است و l طول آنتن است. تلویزیون‌های قابل حمل قدیمی دارای آنتن خطی و دایره‌ای بودند، ابعاد معمولی آن $50 \approx 50$ سانتی‌متر و $l/2 \approx a$ بود. کدام آنتن برای تشخیص امواج الکترومغناطیسی با طول موج λ در محدوده $10^3 - 10^2$ سانتی‌متر مناسب‌تر است؟

- ج: توان P_{rad} پراکنده شده توسط آنتن و نسبت P_{rad}/P_{diss} را محاسبه کنید که در آن توان P_{diss} تلف شده در آنتن توسط گرمایش ژول است.

۸.۱۰ پراکندگی امواج توسط ذره قطبی شده

یک موج الکترومغناطیسی به ذره‌ای برخورد می‌کند و ذره گشتوار دوقطبی الکتریکی $\alpha E = p$ را می‌گیرد. در اینجا E میدان الکتریکی موج در موقعیت ذره است. فرض کنید اندازه ذره بسیار کوچکتر از طول موج ورودی است.

- الف: قطبش امواج پراکنده را به صورت تابعی از قطبش موج ورودی و زاویه بین جهت مشاهده و انتشار بیابید.
- ب: اگر تابش ورودی غیرقطبی باشد، در مورد قطبش تابش پراکنده چه می‌توان گفت؟

۹.۱۰ اثرات قطبش بر پراکندگی تامسون

یک الکترون در میدان یک موج مسطح با قطبش بیضی و فرکانس ω است که در امتداد محور z یک دستگاه مرجع دکارتی منتشر می‌شود. میدان الکتریکی موج را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E} = E_0 [\hat{x} \cos \theta \cos(kz - \omega t) + \hat{y} \sin \theta \sin(kz - \omega t)] \quad (7.10)$$

که در آن θ یک عدد حقیقی ثابت با $\pi/2 \leq \theta \leq 0$ است. به طوری که قطبش خطی در امتداد محور x برای $\theta = 0$ ، قطبش خطی در امتداد محور y برای $\theta = \pi/2$ و قطبش دایره‌ای برای $\theta = \pi/4$ ، نادیده گرفتن اثرات نیروی مغناطیسی $c \times B/e$ است.

- الف: پراکندگی تشعشع الکترون را با تعیین فرکانس و پلاریزاسیون در امتداد هر محور (x, y, z) مشخص کنید و جهتی را بیابید که در آن امتداد، تابش به صورت قطبش دایره‌ای است.

- ب: توان پراکنده کل (متوسط دوره) را محاسبه کنید و در مورد وابستگی آن به θ بحث کنید.

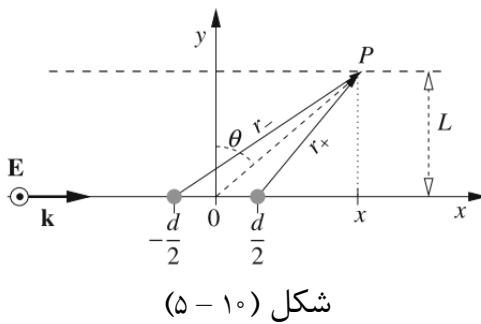
حال اثر نیروی مغناطیسی را بر فرآیند پراکندگی در نظر بگیرید.

- ج: عبارت $c \times B/e$ را با محاسبه میدان B از معادله (۷.۱۰) و با استفاده از نتیجه حالت الف برای v محاسبه کنید. جهت و فرکانس نیروی مغناطیسی و وابستگی آن به θ را نیز مورد بحث قرار دهید.

- د: بحث کنید که چگونه پراکندگی موج تابشی متوسط نیروی مغناطیسی با مشخص کردن اینکه کدام فرکانس‌های جدید مشاهده می‌شود، در کدام جهت و با کدام قطبش و تغییر توان پراکنده اصلاح می‌شود.

۱۰.۱۰ پراکندگی و تداخل

یک موج صفحه تک رنگ در امتداد محور x یک سیستم مختصات دکارتی منتشر می‌شود. موج به صورت خطی در جهت \hat{z} قطبی شده و دارای طول موج λ است. دو پراکنده نقطه مانند یکسان بر روی محور x به ترتیب در $x = \pm d/2$ قرار (شکل ۱۰-۵) می‌گیرند. گشتاور دوقطبی هر پراکنده کننده است که $E = \alpha E_0$ میدان الکتریکی موج ورودی در موقعیت پراکنده کننده است. شدت I_s از تابش پراکنده شده در صفحه $y = L$ ، با $L \gg d$ و $L \gg \lambda$ اندازه‌گیری می‌شود.

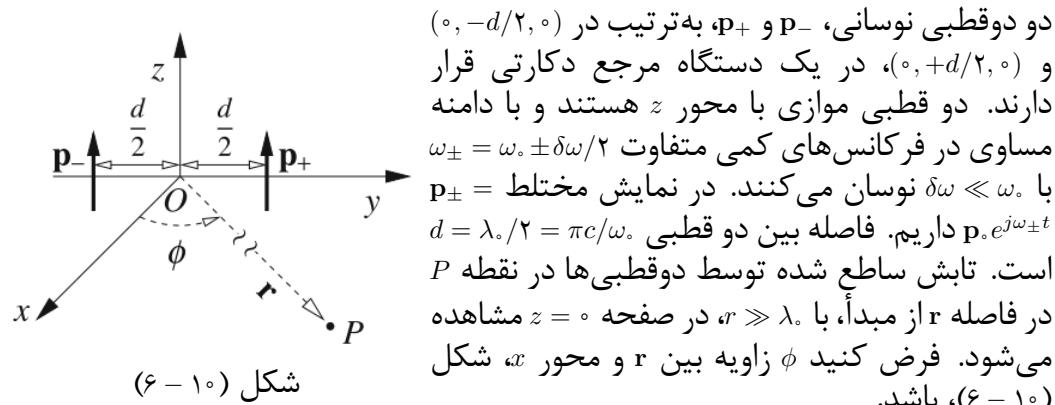


شکل (۱۰-۵)

- الف: تفاوت فاز $\Delta\phi$ بین دو موج پراکنده شده را در یک نقطه کلی $P \equiv (x, L, 0)$ با L ثابت به صورت تابعی از زاویه مشاهده $\theta = \arctan(x/L)$ همانطور که در شکل (۱۰-۵) نشان داده شده، محاسبه کنید.

- ب: توزیع شدت پراکنده شده $I_s = I_s(\theta)$ را به صورت تابعی از kx مطالعه کنید، جایی که k بردار موج ورودی است. تعیین کنید که برای کدام مقادیر حاشیه‌های تداخل kd ظاهر می‌شود.

۱۱.۱۰ ضربان‌های نوری و "اثر فانوس دریایی"



دو دوقطبی نوسانی، p_- و p_+ ، به ترتیب در $(0, -d/2, 0)$ و $(0, +d/2, 0)$ در یک دستگاه مرجع دکارتی قرار دارند. دو قطبی موازی با محور z هستند و با دامنه $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \delta\omega/2$ مساوی در فرکانس‌های کمی متفاوت ϕ نوسان می‌کنند. در نمایش مختلط $p_{\pm} = p_0 e^{j\omega_{\pm} t}$ داریم. فاصله بین دو قطبی $d = \lambda_0/2 = \pi c/\omega_0$ است. تابش ساطع شده توسط دوقطبی‌ها در نقطه P در فاصله r از مبدأ، با $\lambda_0 \gg r \gg \lambda$ در صفحه $z = 0$ مشاهده می‌شود. فرض کنید ϕ زاویه بین r و محور x شکل (۱۰-۶)، باشد.

- الف: جهت میدان الکتریکی در P و واستگی آن به ϕ و ω_{\pm} تا مرتبه اول در ω_0/ω را تعیین کنید.

شدت موج در P توسط دو آشکارساز با وضوح زمانی متفاوت اندازه‌گیری می‌شود: $2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\delta\omega$ آشکارساز اول شار "لحظه‌ای" در یک بازه Δt به طوری که

است، به طور متوسط اندازه‌گیری می‌کند. در حالی که آشکارساز دوم میانگینی بیش از $2\pi/\delta\omega \gg \Delta t'$ دارد.

- ب: وابستگی به زاویه ϕ و زمان t شارهای اندازه گیری شده با دو آشکارساز را تعیین کنید.
- ج: اگر نقطه مشاهده در صفحه $x = 0$ قرار گیرد، نتایج فوق چگونه تغییر می‌کند؟

۱۲.۱۰ نیروی اصطکاک تشعشعی

یک بار نقطه‌ای ثابت‌دار تشعشع می‌کند. با در نظر گرفتن قطعیت الکترونی که حرکت تناوبی (غیرنسبیتی برای سادگی) را در یک میدان خارجی نوسانی انجام می‌دهد، مقدار محدودی انرژی از الکترون به صورت تابشی خارج می‌شود، اما به طور متوسط میدان خارجی هیچ کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین، برای به حساب آوردن انرژی از دست رفته به صورت تابشی، لازم است نیروی نیوتون-لورنتس را با افزودن یک عبارت جدید "اصطکاک" F_{rad} اصلاح کنیم تا کار مکانیکی انجام شده توسط F_{rad} برابر با انرژی تابشی شود. بنابراین برای الکtron می‌نویسیم

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) + \mathbf{F}_{rad} \quad (8.10)$$

و با شروع از شرط به دنبال جمله مناسب برای \mathbf{F}_{rad} مبگردیم

$$\int_t^{t+T} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v}(t) dt = - \int_t^{t+T} P_{rad}(t) dt \quad (9.10)$$

که در آن T دوره تناوب حرکت الکترون و $P_{rad}(t)$ توان تابشی لحظه‌ای است که با رابطه لارمور به دست می‌آید.

$$P_{rad}(t) = \frac{2e^2}{3c^2} \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|^2 \quad (10.10)$$

- الف: با جایگزینی مستقیم عبارت برای \mathbf{F}_{rad} نشان دهید که

$$\mathbf{F}_{rad} = m_e \tau \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} \quad (11.10)$$

در (۹.۱۰)، معادله تایید شده، و رابطه‌ای برای ثابت τ با تخمین مقدار عددی آن بیابید.

- ب: جواب حالت پایدار معادله (۸.۱۰)، که در آن \mathbf{F}_{rad} است با رابطه (۱۱.۱۰) داده می‌شود، برای یک الکترون در یک میدان الکتریکی یکنواخت و نوسانی را تعیین کنید.

$$\mathbf{E}(t) = Re \left(e \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \right) \quad (12.10)$$

نتیجه را با آنچه که با استفاده از مدل کلاسیک ساده یک الکترون تحت یک نیروی اصطکاک به دست می‌آید مقایسه کنید

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} - m_e \eta \mathbf{v} \quad (13.10)$$

مراجع:

1. C. Bernardini, C. Guaraldo, *Fisica del Nucleo* (Editori Riuniti, Roma, 1982)
2. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, § 9.2 and 9.4, 3rd edn. (Wiley, New York, London, Sydney, 1998)
3. C. Kouveliotou et al., An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft γ -ray repeater SGR1806-20. *Nature* **393**, 235–237 (1998)

حل مسائل فصل ۱۰

ح: تابش و پراکندگی

۱.۱۰ تابش سیکلotron

- الف: گشتاور دوقطبی الکتریکی $p = -er$ در صفحه xy با فرکانس ω_L می‌چرخد که فرکانس تابش ساطع شده نیز می‌باشد. تقریب دوقطبی در صورتی معتبر است که ابعاد منبع تابشی بسیار کوچکتر از طول موج گسیل شده λ باشد. در اینجا این با شرط $2r_L = 2v/\omega_L \ll \lambda = 2\pi c/\omega_L$ مطابقت دارد که همیشه برای سرعت‌های غیر نسبیتی صادق است.

دوقطبی چرخان را می‌توان به صورت $p = p_0(\hat{x} \cos \omega_L t + \hat{y} \sin \omega_L t)$ نوشت. برای میدان الکتریکی تابشی دوقطبی مشاهده شده در جهت بردار واحد $\hat{n} = -(p \times E) / (p \times \hat{n})$ داریم. اگر $\hat{n} = \hat{z}$ (قطبی شدن دایره‌ای)؛ اگر $\hat{n} = \hat{x}$ یا $\hat{n} = \hat{y}$ (قطبی شدن خطی) داریم.

از آنجایی که $\hat{r} = \hat{v} \times \omega_L$ (که $\hat{v} = \hat{z} \omega_L$) می‌توان تابش شده را به صورت نوشت

$$P_{rad} = \frac{2}{3} \frac{|e\hat{r}|^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^2 \omega_L^2}{c^3} \quad (1.10)$$

- ب: فرض می‌کنیم که اتلاف انرژی ناشی از تابش به اندازه‌ای کوچک است که باعث ایجاد تغییر در شعاع مدار $\Delta r_c \ll r_c$ در طول یک دوره تناوب واحد شود، به طوری که در طول یک دوره تناوب واحد، حرکت همچنان تقریباً دایره‌ای است. بنابراین، بزرگی سرعت الکترون $v(t) = v$ را می‌توان به صورت $v \approx \omega_L r$ نوشت، که در آن شعاع مدار در زمان t است. انرژی الکترون برابر است با:

$$U = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e \omega_L^2 r^2}{2} \quad (2.10)$$

$$\text{و معادله برای افت انرژی، } dU/dt = -P_{rad} \quad \text{خواهد بود}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_e \omega_L^2 r^2}{2} \right) = -\frac{2}{3c^2} (e^2 \omega_L^2 r^2) = -\frac{2r_e m_e \omega_L^2}{3c} r^2 \quad (3.10)$$

که در آن $r_e = e^2/(m_e c^2)$ شعاع الکترون کلاسیک است. با جایگزینی رابطه

$$dr/dt = -\frac{2r_c \omega_L^2}{3c} r \equiv -\frac{r}{\tau} \quad \text{با} \quad \tau = \frac{3c}{2r_c \omega_L^2} = \frac{3m_e c^3}{2e^2 \omega_L^2} \quad (4.10)$$

که جواب آن

$$r(t) = r(0)e^{-t/\tau} \quad (5.10)$$

و مسیر حرکت الکترون یک مارپیچ با زمان میرایی τ است. با وارد کردن عبارات r_e و ω_L داریم

$$\tau = \frac{3m_e^3 c^5}{2e^4 B_0^2} = \frac{5/2 \times 10^5}{B_0^2} \quad (6.10)$$

$$\text{که در آن میدان مغناطیسی } B_0 \text{ در } G \text{ میگوید که}$$

$$\frac{3m_e^3 c^5}{2e^4 B_0^2} \gg \frac{m_e c}{e B_0} \quad \text{یا} \quad B_0 \ll \frac{3m_e^3 c^4}{2e^3} = 9.2 \times 10^{13} G \quad (7.10)$$

شرط $\tau \gg \omega_L^{-1}$ در G است. شرط $B_0 \ll \frac{3m_e^3 c^4}{2e^3}$ میگوید که در آن میدان مغناطیسی B_0 در G است. شرط $\tau \gg \omega_L^{-1}$ تأیید شده است: چنین میدان‌های بالایی را فقط می‌توان در ستاره‌های نوترونی یافت! (مسئله ۵.۱۰)

• ج: نیروی اصطکاک $f_{fr} = m_e \eta v$ را وارد معادله حرکت کرده و به دست می‌آوریم

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 - m_e \eta \mathbf{v} \quad (8.10)$$

این مربوط به دو معادله تزویجی زیر برای مولفه‌های x و y سرعت الکترون است

$$\dot{v}_x = -\omega_L v_y - \eta v_x, \quad \dot{v}_y = \omega_L v_x - \eta v_y \quad (9.10)$$

یک روش زیبا برای حل این معادلات ترکیب مختصات x و y الکترون در یک متغیر مختلط $R = x + jy$ و مولفه‌های سرعت در متغیر مختلط $V = v_x + jv_y$ است. بنابراین

دو معادله (۹.۱۰) در یک معادله مختلط ترکیب می‌شوند

$$\dot{V} = (j\omega_L - \eta)V, \quad \text{حل آن} \quad V = V(0)e^{j\omega_L t - \eta t} = v_0 e^{j\omega_L t - \eta t} \quad (10.10)$$

برای موقعیت الکترون داریم

$$R = \int V dt + C = \frac{v_0}{j\omega_L - \eta} e^{j\omega_L t - \eta t} + C = -\frac{(\eta + j\omega_L)v_0}{\omega_L^2 + \eta^2} e^{j\omega_L t - \eta t} + C \quad (11.10)$$

که در آن C یک ثابت مختلط بسته به انتخاب ما از مبدأ مختصات است. ما

را انتخاب می‌کنیم و رابطه (۱۱.۱۰) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$R = -\frac{v_0}{\sqrt{\omega_L^2 + \eta^2}} (\cos \phi + j \sin \phi) e^{j\omega_L t - \eta t} = -\frac{v_0}{\sqrt{\omega_L^2 + \eta^2}} e^{j\omega_L t - \eta t} \quad (12.10)$$

که در آن

$$\cos \phi = \frac{\eta}{\sqrt{\omega_L^2 + \eta^2}}, \quad \sin \phi = \frac{\omega_L}{\sqrt{\omega_L^2 + \eta^2}}, \quad \phi = \arctan \left(\frac{\omega_L}{\eta} \right) \quad (13.10)$$

برگردیم به مقادیر واقعی که داریم

$$v_x = Re(V) = v_0 e^{-\eta t} \cos \omega_L t \quad (14.10)$$

$$v_y = Im(V) = v_0 e^{-\eta t} \sin \omega_L t \quad (15.10)$$

$$x = Re(R) = -\frac{v_0}{\sqrt{\omega_L^2 + \eta^2}} e^{-\eta t} \cos(\omega_L t + \phi) \quad (16.10)$$

$$y = Im(R) = -\frac{v_0}{\sqrt{\omega_L^2 + \eta^2}} e^{-\eta t} \sin(\omega_L t + \phi) \quad (17.10)$$

بنابراین، سرعت با فرکانس ω_L می‌چرخد، در حالی که قدر مطلق آن به صورت نمایی

$$|v(t)| = v_0 e^{-\eta t} \text{ کاهش می‌یابد. برای شاعع مسیری که داریم}$$

$$r(t) = |R(t)| = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_L^2 + \eta^2}} e^{-\eta t} \quad (18.10)$$

بنابراین، با انتخاب $\eta = 1/\tau$ حرکت با نیروی اصطکاک معادل حرکت با افت توان تابشی است، و

$$\mathbf{f}_{fr} \cdot \mathbf{v} = -m_e \eta v^2 = -\frac{m_e v^2}{\tau} = -m_e v^2 \frac{2e^2 \omega_L^2}{3m_e c^3} = -\frac{2e^2 v^2 \omega_L^2}{3c^3} = -P_{rad} \quad (19.10)$$

یک اشکال این روش این است که ضریب اصطکاک اعمال شده در اینجا کلی نیست. اما به نیروی وارد بر الکترون (در این مورد، از طریق وابستگی به ω_L) وابسته است. برای یک رویکرد کلی تر به اصطکاک تشعشعی، مسئله ۱۲.۱۰ را مشاهده کنید.

۲.۱۰ فروپاشی اتمی

الف: الکترونی که یک مدار دایره‌ای با شاعع a_\circ (شعاع بور) به دور پروتون را توصیف می‌کند، مطابق با یک دوقطبی الکتریکی ضد چرخش $p(t)$ با مقدار $p_0 = ea_\circ$ است. سرعت زاویه‌ای مدار ω را می‌توان با در نظر گرفتن اینکه شتاب مرکزگرا به دلیل نیروی کولمب است محاسبه کرد.

$$\omega^2 a_\circ = \frac{1}{m_e} \frac{e^2}{a_\circ^2} \quad (20.10)$$

که از آن بدست می‌آوریم

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{m_e a_\circ^2}} = 4.1 \times 10^{16} \text{ rad/s} \quad (21.10)$$

در واقع، قوی‌ترین انتشار از اتم هیدروژن در فرکانسی کوچک‌تر به اندازه یک مرتبه بزرگی آن رخ می‌دهد.

از آنجایی که p عمود بر ω است، داریم $\omega \times (p \times \omega) = (p \times \omega) \times \dot{p} = \omega^2 p_0$ (همان نتیجه را می‌توان با در نظر گرفتن دوقطبی چرخان به عنوان برهم نهی دو دوقطبی عمود بر نوسان به دست آورد). بنابراین قدرت تابش شده برابر است با:

$$P_{rad} = \frac{2}{3c^3} |\dot{p}|^3 = \frac{2}{3} \frac{\omega^2 e^2 a_\circ^3}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_e^2 c}{a_\circ^4} \quad (22.10)$$

که در آن r_e شعاع الکترون کلاسیک است.

- ب: فرض می‌کنیم که به دلیل گسیل تابشی، الکترون انرژی خود را مطابق $dU/dt = P_{rad}$ از دست می‌دهد، که در آن $U = K + V$ انرژی کل الکترون است، K و V به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل هستند. اگر انرژی از دست رفته در هر دوره نسبت به انرژی کل کوچک باشد، ممکن است فرض کنیم که الکترون مدار در طول یک دوره تقریباً دایره‌ای است، با شعاع $r = r(t)$ به آرامی با زمان بصورت $\dot{r}/r \ll \omega$ کاهش می‌یابد.

از آنجایی که سرعت $v = rw$ است، انرژی کل را می‌توان تابعی از a نوشت:

$$U = K + V = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r} \quad (23.10)$$

بنابراین

$$\frac{dU}{dt} \approx -\frac{e^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} \quad (24.10)$$

چون

$$P_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_e^2 c}{r^4} \quad (25.10)$$

معادله $dU/dt = -P_{rad}$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 r_e^2 c}{r^4} \Rightarrow r^2 \frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} r_e^2 c \Rightarrow \frac{1}{3} \frac{dr^3}{dt} = \frac{4}{3} r_e^2 c \quad (26.10)$$

و با فرض $r(0) = a_0$ ، حل آن خواهد بود

$$r^3 = a_0^3 - 4r_e^2 ct \quad (27.10)$$

زمان مورد نیاز الکترون برای سقوط روی هسته خواهد بود:

$$\tau = \frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{4r_e^2 c} = 1/6 \times 10^{-11} s \quad (28.10)$$

این یک نتیجه شناخته شده است که نشان می‌دهد اتم کلاسیک "کپلری" پایدار نیست. با این حال، جالب است که توجه کنیم که مقدار τ از همان مرتبه بزرگی طول عمر اولین حالت برانگیخته است، یعنی زمانی که در آن حالت برانگیخته به حالت پایه با تابش فرو می‌پاشد.

۳.۱۰ میرائی تابشی الکترون مقید الاستیک

- الف: جواب رابطه (۵.۱۰) با شرایط اولیه داده شده و $\theta = \eta$ برابر است با:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_0 \cos \omega_0 t \quad (29.10)$$

میانگین توان تابشی مربوطه در تقریب دوقطبی خواهد بود

$$P_{rad} = \frac{2}{3c^3} \langle -e |\ddot{\mathbf{r}}|^2 \rangle = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{e^2}{3c^3} \omega_0^4 s_0^2 \quad (30.10)$$

توان تششعی با هزینه انرژی الکترون نوسانی ساطع می‌شود. بنابراین، انرژی مکانیکی کل الکترون باید در زمان کاهش می‌یابد، و حل هارمونیک نوسان‌ساز معادله

(۲۹.۱۰) نمی‌تواند دقیق باشد. با فرض اینکه انرژی نوسانگر بسیار آهسته میرا می‌شود، یعنی با ثابت میرائی $\omega_0 \ll \tau$ ، می‌توانیم رابطه (۲۹.۱۰) را به صورت تقریبی در نظر بگیریم.

$$\mathbf{r} \approx s(t) \cos \omega_0 t \quad (31.10)$$

که در آن $s(t)$ یک تابع کاهشی از زمان است که باید تعیین شود. در نتیجه، باید s را با $s(t)$ نیز در معادله (۳۰.۱۰) برای میانگین توان تابشی واقعی جایگزین کنیم.

- ب: در زمان، انرژی کل الکترون در حال نوسان $U(t) = m_e \omega_0^2 s^2(t)$ است. ثابت میرائی زمانی τ به صورت زیر تعریف شده است

$$\tau = \frac{U(t)}{P_{rad}(t)} = \frac{3m_e c^3}{2e^2 \omega_0^2} = \frac{3c}{2r_e \omega_0} \quad (32.10)$$

و بنابراین مستقل t است. از آنجایی که شعاع الکترون کلاسیک $r_e \approx 2.82 \times 10^{-15} m$ است، شرط $2\pi/\omega_0 > \tau$ منجر به

$$\omega_0 < \frac{3c}{4\pi r_e} \approx 3 \times 10^{12} rad/s \quad (33.10)$$

برای مقایسه، با تخمین ω_0 به عنوان فرکانس خط انتشار $1S \rightarrow 2P Lyman-alpha$ اتم هیدروژن، $\omega_0 \approx 3 \times 10^{16} rad/s$ داریم.

- ج: ما به دنبال راه حلی به شکل $\mathbf{r} = Re(\mathbf{s}_0 e^{j\omega t})$ با ω مختلط هستیم. با جایگزینی آن در (۵.۱۰)، معادله مشخصه زیر را خواهیم داشت:

$$\omega^2 - j\eta\omega + \omega_0^2 = 0 \quad (34.10)$$

که جواب آن برابر است با

$$\omega = j\frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\eta^2}{4}} \approx j\frac{\eta}{2} \pm \pm\omega. \quad (35.10)$$

که در آن از جمله مرتبه $(\eta/\omega_0)^2$ و بالاتر صرف نظر کردہایم. بنابراین، راه حل تقریبی برای موقعیت الکترون برابر است با:

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{s}_0 e^{-\eta t/2} \cos \omega_0 t \quad (36.10)$$

در واقع، این تقریب به جای صفر، سرعت اولیه $\dot{\mathbf{r}} = -\eta \mathbf{s}_0 / 2$ را می‌دهد. با این حال، اگر $\omega_0 \ll \eta$ باشد، می‌توان از این اختلاف چشم پوشی کرد. حداکثر سرعتی که الکترون به دست می‌آورد $v_{max} \approx \omega_0 s_0 / 2 \ll \omega_0 s_0$ است.

انرژی کل الکترون وابسته به زمان و توان تابشی متوسط عبارتند از:

$$U(t) \approx \frac{m_e}{2} \omega_0^2 S_0^2 e^{-\eta t}, \quad \text{و} \quad P_{rad} \approx \frac{e^2}{3c} \omega_0^2 s_0^2 e^{-\eta t} \quad (37.10)$$

و شرط $dU/dt = -P_{rad}$ منجر به

$$\eta = \frac{2r_e \omega_0}{3c} = \frac{1}{\tau} \quad (38.10)$$

۴.۱۰ تابش ساطع شده از بارهای در حال گردش

- الف: اجازه دهید با \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 بردارهای مکانی دو بار را نسبت به مرکز مدار دایره‌ای مشترک آنها نشان دهیم. در مختصات قطبی داریم

$$\mathbf{r}_1 \equiv [R, \phi_1(t)], \quad \mathbf{r}_2 \equiv [R, \phi_2(t)] \quad (۴۹.۱۰)$$

با تعریف $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ و انتخاب مبدأ زمان مناسب، معادلات حرکت در مختصات قطبی عبارتند از

$$\mathbf{r}_1 \equiv \left(R, \omega t - \frac{\Delta\phi}{2} \right), \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_2 \equiv \left(R, \omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad (۴۰.۱۰)$$

در مختصات دکارتی داریم

$$\mathbf{r}_1 \equiv [x_1(t), y_1(t)], \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_2 \equiv [x_2(t), y_2(t)] \quad (۴۱.۱۰)$$

که در آن بترتیب؛

$$x_1(t) = R \cos \left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2} \right), \quad y_1(t) = R \sin \left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad (۴۲.۱۰)$$

$$x_2(t) = R \cos \left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right), \quad y_2(t) = R \sin \left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad (۴۳.۱۰)$$

گشتاور دو قطبی سیستم برابر $\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ با مولفه‌ئی در مختصات دکارتی

$$p_x = qR \left[\cos \left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2} \right) + \cos \left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \right] = 2qR \cos \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \cos \omega t \quad (۴۴.۱۰)$$

$$p_y = qR \left[\sin \left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2} \right) + \sin \left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \right] = 2qR \cos \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \sin \omega t \quad (۴۵.۱۰)$$

یعنی \mathbf{p} دارای مقدار ثابت $p = 2qR \cos(\Delta\phi/2)$ است و در صفحه $z = 0$ با فرکانس زاویه‌ای ω می‌چرخد.

- ب: در تقریب دوقطبی، میدان الکتریکی تابشی ساطع شده در امتداد جهت بردار واحد $\hat{\mathbf{n}}$ با بردار زیر موازی است.

$$(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p}_{\perp} \quad (۴۶.۱۰)$$

$$\begin{aligned} \text{چون برای یک دوقطبی چرخان در صفحه } z = 0 \\ (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} \text{ موازی با } \hat{\mathbf{y}} \text{ و } \hat{\mathbf{y}} \text{ موازی با } \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (۴۷.۱۰)$$

است، قطبش تشعشع مشاهده شده در جهت $(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}})$ خطی و در جهت $(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}})$ است. برای تشعشع مشاهد شده در جهت $\hat{\mathbf{z}}$

$$(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{z}}) \times \hat{\mathbf{z}} \text{ موازی با } \mathbf{p} \quad (۴۸.۱۰)$$

و قطبش مشاهده شده دوران است.

توان تشعشع کل برابر است با

$$p_{rad} = \frac{2}{\pi c^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{4q^2 R^2 \omega^4}{\pi c^2} \cos^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \quad (۴۹.۱۰)$$

که بدیهی است هنگامی که $\Delta\phi = \pi$ (بارها در انتهای مخالف یک قطر چرخان هستند) ناپدید می‌شود، و بیشینه (حداکثر) برای $\Delta\phi = 0$ (بارهای مفروض) دارد.

- ج: در این حالت بارها در هر نیم چرخش بهیکدیگر اضافه می‌شوند. مختصات و مبدأ زمان را طوری انتخاب می‌کنیم که بارها در $t = 0$ روی هم قرار گیرند و $(R, 0)$ داشته باشیم. بنابراین مسیرها را می‌توان بهصورت زیر در مختصات قطبی نوشت

$$r_1 = r_2 = R, \quad \phi_1(t) = \omega t, \quad \phi_2(t) = -\omega t \quad (50.10)$$

و بصورت زیر در مختصات دکارتی.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R \cos \omega t, & y_1(t) &= R \sin \omega t \\ x_2(t) &= R \cos \omega t, & y_2(t) &= -R \sin \omega t \end{aligned} \quad (51.10)$$

بنابراین گشتاور دوقطبی کل $\mathbf{p} = (2qR \cos \omega t)\hat{\mathbf{x}}$ است. هیچ تشعشعی در امتداد ساطع نمی‌شود، در حالی که تابش ساطع شده در امتداد سایر جهات بهصورت خطی قطبی شده است. میانگین کل توان تابش شده برابر است با:

$$p_{rad} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{4q^2 R^3 \omega^4}{3c^3} \quad (52.10)$$

- د: با انتخاب مناسب مبدأ زمانی می‌توان معادلات حرکت سه بار را بهصورت زیر در مختصات قطبی

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 = r_3 = R, & \phi_1(t) &= \omega t \\ \phi_2(t) &= \omega t + \Delta\phi_2, & \phi_3(t) &= \omega t + \Delta\phi_3 \end{aligned} \quad (53.10)$$

و در مختصات دکارتی بصورت زیر نوشت.

$$x_i = R \cos \phi_i(t), \quad y_i = R \sin \phi_i(t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (54.10)$$

اگر سه بار در رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع در حال چرخش باشند ($\Delta\phi_2 = \Delta\phi_3 = 2\pi/3$) - گشتاور دوقطبی الکتریکی ازین می‌رود، و حداکثر مقدار خود را زمانی که سه بار روی هم قرار می‌گیرند ($\Delta\phi_2 = \Delta\phi_3 = 0$) خواهد داشت.

- ه: گشتاور دوقطبی مغناطیسی برای بار نقطه‌ای q ، که با سرعت زاویه‌ای ω در مداری دایره‌ای بهشعاع R حرکت می‌کند، بهاین صورت تعریف می‌شود.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} d^3x = \frac{qR^3\omega}{2c} \quad (55.10)$$

و ثابت است (توجه کنید که m متناسب با تکانه زاویه‌ای بار در مدار است). بنابراین دوقطبی مغناطیسی بهتشعشع کمک نمی‌کند، زیرا میدان‌های تابشی با m متناسب هستند.

این مسئله توضیح می‌دهد که چرا یک سیم‌پیچ دایره‌ای که دارای جریان ثابتی است تابش نمی‌کند، اگرچه ممکن است جریان را بهعنوان بارهایی که در مدارهای دایره‌ای حرکت می‌کنند در نظر بگیریم و در نتیجه در معرض شتاب قرار گیرد.

۵.۱۰ سرعت چرخش پائین و میدان مغناطیسی یک تپ اختر

- الف: با توجه به زاویه غیر صفر α بین گشتاور مغناطیسی و محور چرخش تپ اختر، مولفه m عمود بر ω با فرکانس ω می چرخد. بنابراین تپ اختر تابش دوقطبی مغناطیسی با فرکانس ω ساطع می کند. توان کل است

$$P = \frac{2}{3c^3} |\mathbf{m}_\perp|^2 = \frac{2}{3} \frac{m_\perp^2 \omega^4}{c^3} \quad (56.10)$$

که در آن $m_\perp = m \sin \alpha$ است.

- ب: انرژی مکانیکی $U = I\omega^2/2$ است که $I = 2MR^2/5 \approx 1/1 \times 10^{43} g cm^2$ ممان اینرسی تپ اختر، با فرض توزیع جرم یکنواخت بر حجم کره ای به شعاع R است. با فرض اینکه اتلاف انرژی تنها به دلیل انتشار تشعشع باشد، می توانیم بنویسیم.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{I\omega^2}{2} \right) = I\omega\dot{\omega} = -P \quad (57.10)$$

و با جایگزینی در رابطه (56.10) داریم

$$I\omega\dot{\omega} = -\frac{2}{3} \frac{m_\perp^2 \omega^4}{c^3} \implies \frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{2m_\perp^2}{3Ic^3} \quad (58.10)$$

با انتگرال گیری نسبت به زمان از 0 تا t خواهیم داشت

$$\frac{1}{2\omega^2(t)} - \frac{1}{2\omega^2(0)} = \frac{2m_\perp^2}{3Ic^3} t \quad (59.10)$$

بنابراین

$$\omega(t) = \frac{\omega(0)}{\sqrt{1 + \frac{t}{\tau}}}, \quad \text{که در آن} \quad \tau = \frac{3Ic^3}{4m_\perp^2 \omega^2(0)} \quad (60.10)$$

- ج: می توانیم $\dot{\omega}/\omega^3 = T\dot{T}/4\pi^2$ بصورت $T = 2\pi/\omega$ را بازنویسی کنیم، که در آن دوره چرخش تپ اختر است، و $\dot{T} = -2\pi\dot{\omega}/\omega^2$. بنابراین می توانیم گشتاور دوقطبی مغناطیسی $m = m_\perp$ تپ اختر را به صورت تابعی از پارامترهای اندازه گیری تجربی از (58.10) بدست آوریم:

$$m = \sqrt{\frac{3Ic^3}{8\pi^2} T\dot{T}} \approx 2/3 \times 10^{36} \sqrt{T\dot{T}} erg/G \quad (61.10)$$

- که در آن T بر حسب ثانیه است. میدان مغناطیسی بلا فاصله خارج از سطح تپ اختر میدان یک دوقطبی مغناطیسی است که در مرکز تپ اختر قرار دارد:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \quad (62.10)$$

- و ازاینرو $B_{max} = 2m/R^3$ است. بنابراین رابطه عملی زیر را بدست می آوریم

$$B_{max} \approx 6/6 \times 10^{21} \sqrt{T\dot{T}} G \quad (63.10)$$

- جایگزینی مقادیر آزمایشی برای T و \dot{T} خواهیم داشت

$$B_{max} \approx (9/6 \pm 0/25) \times 10^{19} G \quad (64.10)$$

۶.۱۰ آنتن دوقطبی خمیده

- الف: اگر آنتن را به یک سری مقاومت بینهایت کوچک، هر کدام با طول dz و مقاومت $dR = (R/a)dz$ تقسیم کنیم، می‌توانیم توان اتلاف شده را به صورت زیر بنویسیم.

$$P_{diss} = \int \langle I^z \rangle dR = \int_{-a}^{+a} \frac{I^z}{2} \left(1 - \frac{|z|}{a} \right)^2 \frac{R}{a} dz = \frac{I^z R}{3} \quad (65.10)$$

- ب: چگالی بار خطی روی آنتن q_l را می‌توان از معادله پیوستگی $\frac{\partial q_l}{\partial t} = \frac{\partial I^z}{\partial z}$ به دست آورد.

$$q_l = \mp \frac{j I^z}{a \omega} e^{j \omega t} \quad (66.10)$$

که در آن علامت $+$ و $-$ بترتیب برای $z > 0$ و $z < 0$ اعمال می‌شود. چگالی بار خطی در هر نیمه آنتن یکنواخت (مستقل از z) است. به دلیل تقارن، تنها مولفه موجود

دوقطبی الکتریکی p در امتداد z است و بصورت زیر داده می‌شود

$$p_z = \int_{-a}^{+a} z q_l dz = 2 \int_0^a -\frac{j I^z}{a \omega} e^{j \omega t} z dz = -\frac{j I^z a}{\omega} e^{j \omega t} \quad (67.10)$$

- ج: میانگین توان تابشی، در تقریب دوقطبی، برابر است با

$$P_{rad} = \frac{1}{3c^3} \langle |\ddot{p}_z|^2 \rangle = \frac{I^z a^2 \omega^2}{6c^3} = \frac{2\pi^2 a^2 I^z}{3c \lambda^2} \quad (68.10)$$

که در آن $\lambda = 2\pi c / \omega$ طول موج تابش است. بدین ترتیب

$$\frac{P_{rad}}{P_{diss}} = \frac{2\pi^2 a^2}{c \lambda^2 R} \quad (69.10)$$

که در آن به یاد می‌آوریم که R دارای ابعاد معکوس سرعت در واحدهای گاوی است.

- د: توزیع زاویه‌ای توان تابشی متناسب با $\sin^2 \theta$ است که θ زاویه بین جهت مشاهده و p است. بنابراین شدت تابش ساطع شده در امتداد محور z صفر و بیشینه برای مشاهده در صفحه xy است.

- ه: آنتن خم شده دارای چگالی بار خطی $\mp(j I^z / a) e^{j \omega t}$ به ترتیب در بازوهای افقی و عمودی خود است. بنابراین ممان دوقطبی الکتریکی دارای دو مولفه است.

$$p_x = \int_0^a -\frac{j I^z}{a \omega} e^{j \omega t} x dx = \frac{-j I^z a}{2 \omega} e^{j \omega t} \quad (70.10)$$

$$p_y = - \int_0^a \frac{j I^z}{a \omega} e^{j \omega t} z dz = \frac{-j I^z a}{2 \omega} e^{j \omega t} \quad (71.10)$$

از آنجایی که مولفه‌ها بر یکدیگر عمود هستند، توان تابشی متوسط تناوب را می‌توان به صورت مجموع توان‌های هر دوقطبی محاسبه کرد:

$$P_{rad} = \frac{1}{3c^3} \langle |\ddot{p}_x|^2 + |\ddot{p}_z|^2 \rangle = \frac{1}{12c^3} (I^z \omega a)^2 \quad (72.10)$$

که نصف مقدار آنتن خطی است، در حالی که توان تلف شده P_{diss} تغییر نمی‌کند.

دوقطبی الکتریکی آنتن خم شده در امتداد جهت مورب قرار دارد که در نتیجه با جهت شدت ساطع شده صفر مطابقت دارد. شدت در صفحه عمود بر دوقطبی حداکثر است.

۷.۱۰ آنتن گیرنده حلقوی

- الف: یک دستگاه مرجع دکارتی را انتخاب می‌کنیم به طوری که موج در جهت z منشر و میدان الکتریکی آن E در امتداد محور x و میدان مغناطیسی B آن در امتداد محور y است. جریان \mathcal{I} که در آنتن می‌گذرد $\mathcal{I} = \mathcal{E}_{circ}/R$ است که $\mathcal{E}_{circ} = -(1/c)d\Phi(B)/dt$ نیروی محرکه الکتریکی است و $\Phi(B)$ شار B از دایره‌ای است که توسط آنتن مشخص شده است. از آنجایی که $a \gg \lambda$ فرض کردیم، B عملأ در کل سطح دایره یکنواخت است، و $\hat{n} \cdot \mathbf{B} \approx \pi a^2 B \cos \omega t$ ، که در آن \hat{n} بردار واحد عمود بر سطح دایره است. بنابراین آنتن دایره‌ای باید روی صفحه xz قرار گیرد تا $\Phi(B)$ را به حداقل برساند. با انتخاب مناسب مبدأ زمانی، میدان مغناطیسی روی سطح دایره را می‌توان به صورت $B \approx \hat{y} B_0 \cos \omega t$ نوشت، و

$$\mathcal{E}_{circ} = \pi a^2 \frac{\omega}{c} E_0 \sin(\omega t) \quad (73.10)$$

چون در واحدهای گاوی $B_0 = E_0$ است.

- ب: نیروی الکتروموتور روی یک آنتن خطی موازی با محور x عملأ است که در آن l طول آنتن و ϕ زاویه فاز است. بنابراین، نسبت نیروی حرکتی متوسط آنتن دایره‌ای به نیروی حرکتی متوسط آنتن خطی برابر است با

$$\frac{\langle \mathcal{E}_{circ} \rangle}{\langle \mathcal{E}_{lin} \rangle} \approx \frac{\langle \mathcal{E}_{circ} \rangle}{E_0 l} = \frac{\pi a^2 \omega}{l_c} = 2\pi^2 \frac{a^2}{l \lambda} \quad (74.10)$$

در محدوده $10^2 cm < \lambda < 10^3 cm$ و با فرض $50 cm \approx l \approx 25 cm$ ، این نسبت بین $2/5$ و $2/25$ متغیر است. آنتن دایره‌ای برای طول موج‌های کوتاه‌تر راحت‌تر است.

- ج: تشعشع از آنتن دایره‌ای تحت تاثیر جمله دوقطبی مغناطیسی است. ممان دوقطبی آنتن برابر است با:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \mathcal{I} \pi a^2 \hat{n} \quad (75.10)$$

که در آن \mathcal{I} جریانی است که در آنتن به دلیل نیروی الکتروموتور القا شده توسط موج تابشی در گردش است. توان تابشی میانگین زمانی مربوطه خواهد بود:

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \frac{2}{3c^3} \langle |\vec{m}|^2 \rangle = \frac{2}{3c^5} (\pi a^2)^2 \omega^4 \langle \mathcal{I}^2 \rangle \\ &= \frac{(\pi a^2)^4 \omega^6}{3c^7 R^2} E_0^2 \end{aligned} \quad (76.10)$$

در واحدهای گاوی، شدت موج ورودی $I = c E_0^2 / 4\pi$ است و رابطه (76.10) بصورت زیر قابل بازنويسي است.

$$P_{rad} = \frac{4\pi (\pi a^2)^4 \omega^6}{3c^7 R^2} I = \frac{2(2\pi)^4 (\pi a^2)^4}{3c^7 R^2 \lambda^6} I \quad (77.10)$$

که ضریب I

$$\sigma_{scatt} = \frac{2(2\pi)^4(\pi a^2)^4}{3c^4 R^4 \lambda^6} \quad (78.10)$$

که ابعاد یک سطح را دارد (R دارای ابعاد سرعت مغناطیسی بر حسب واحد گاوی است) و برابر سطح مقطع پراکندگی تشعشعی برای آنتن دایره‌ای، در تقریب دوقطبی مغناطیسی است.

توان متوسط زمانی تلف شده توسط گرمایش ژول $P_{diss} = RI^2$ است، به طوری که

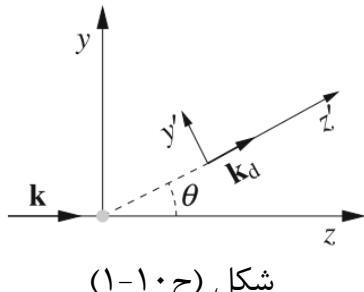
$$\frac{P_{rad}}{P_{diss}} = \frac{2}{3c^5 R} (\pi a^2)^2 \omega^4 = \frac{2(2\pi)^4 (\pi a^2)^2}{3R c \lambda^4} \quad (79.10)$$

۸.۱۰ قطبش امواج پراکنده

- الف: یک دستگاه مرجع دکارتی را انتخاب می‌کنیم که مبدأ آن روی ذره پراکنده کننده قرار دارد و محور z موازی با بردار موج \mathbf{k} موج تابشی است. برای داشتن تقارن چرخشی کامل حول محور z راحت‌تر است فرض کنیم که موج تابشی به صورت دایره‌ای قطبی شده است. بنابراین میدان الکتریکی موج ورودی را می‌توان نوشت

$$\mathbf{E}_i = E_i (\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) e^{j(\omega t - kz)} \quad (80.10)$$

بنابراین گشتاور پراکنده کننده برابر $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_i = \alpha E_i (\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) e^{j(\omega t - kz)}$ است.



به دلیل تقارن دورانی مسئله حول محور z کافی است تابش پراکنده را با بردار موج \mathbf{k}_d که در صفحه yz قرار دارد و زاویه θ را با محور z تشکیل می‌دهد، همانطور که در شکل (۱-۱۰) نشان داده شده، در نظر بگیریم. بدون در نظر گرفتن ضریب تناسب وابسته به α و θ ، میدان الکتریکی \mathbf{E}_d پراکنده تابشی را می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d &\propto -(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} \\ &\propto -[(\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) \times \hat{\mathbf{n}}] \times \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (81.10)$$

گه در آن $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ بردار واحدی موازی با \mathbf{k}_d است. اکنون بیاد آورید که

$$(\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) \times \hat{\mathbf{n}} = (\pm j \cos \theta - \sin \theta, \sin \theta) \quad (82.10)$$

$$[(\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) \times \hat{\mathbf{n}}] \times \hat{\mathbf{n}} = (-1, \mp j \cos \theta, \pm j \sin \theta \cos \theta) \quad (83.10)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\mathbf{E}_d \propto (1, \pm j \cos \theta, \mp j \sin \theta \cos \theta) \quad (84.10)$$

از آنجایی که یک ناظر قطبش تابش پراکندگی را با توجه به جهت \hat{n} اندازه‌گیری می‌کند، مولفه‌های میدان را در سیستم مختصات چرخشی (x', y', z') محاسبه می‌کنیم که با زاویه θ حول x می‌چرخد. محور، به طوری که $x' = x$ و $z' = z$ در امتداد \hat{n} باشد:

$$E'_{dx} = E_{dx} \propto 1 \quad (85.10)$$

$$\begin{aligned} E'_{dy} &= E_{dy} \cos \theta - E_{dz} \sin \theta \pm I_i \cos^r \theta \pm j \sin^r \theta \cos \theta \\ &= \pm j \cos \theta (\cos^r \theta + \sin^r \theta) = \pm j \cos \theta \end{aligned} \quad (86.10)$$

$$E'_{dz} = E_{dy} \sin \theta + E_{dz} \cos \theta \propto \pm j \sin \theta \cos^r \theta \mp j \sin \theta \cos^r \theta = 0 \quad (87.10)$$

آخرین برابری، بررسی عرضی بودن میدان تابشی است. بدین ترتیب بدست می‌آوریم

$$\mathbf{E}_d \propto \hat{x}' \pm j \cos \theta \hat{y}' \quad (88.10)$$

که وابستگی قطبش را به زاویه پراکندگی θ نشان می‌دهد. علاوه بر این، توزیع زاویه‌ای یا توان تابش شده توسط رابطه زیر است

$$\frac{dP_{scatt}}{d\Omega} \propto |\mathbf{E}_d|^2 \propto 1 + \cos^2 \theta \quad (89.10)$$

• ب: تابش بیشتر منابع (نور خورشید یک مثال معمولی است) معمولاً ناهمدوس (نامنسجم) است. این بدان معنی است که جهت فاز و میدان الکتریکی آن به طور تصادفی در فواصل زمانی نه بیشتر از دوره نوسان تغییر می‌کند. بنابراین، تابش به طور موثر در مشاهده مستقیم غیرقطبی است، به این معنا که اندازه‌گیری قطبش قطعی به دلیل تغییرات سریع آن ممکن نیست. با این حال، رابطه (۸۸.۱۰) نشان می‌دهد که، مستقل از قطبش منبع، تابش پراکنده شده در ($\cos \theta = 0$) 90° همیشه به صورت خطی قطبی شده است (در جهت عمود بر هر دو بردار موج نور ورودی و جهت مشاهده). از این‌رو، تابش ناهمدوس که تحت پراکندگی قرار گرفته است (مانند نور آبی از آسمان) تمایل به قطبی شدن دارد، حتی اگر تابش منبع اولیه (در این مورد خورشید) غیرقطبی باشد. بنابراین، اندازه‌گیری قطبش می‌تواند به تعیین موقعیت خورشید در یک روز ابری کمک کند.

۹.۱۰ اثرات قطبش بر پراکندگی تامسون

• الف: معادله (۷.۱۰) به دو معادله زیر برای مولفه‌های سرعت الکترون، v_x و v_y منجر می‌شود.

$$m_e \dot{v}_x = -eE_0 \cos \theta \cos(\omega t - kz), \quad m_e \dot{v}_y = eE_0 \sin \theta \sin(\omega t - kz) \quad (90.10)$$

که در آن m_e جرم الکترون است. ما به دنبال راه حل حالت ماندگار بصورت زیر هستیم

$$v_x = V_{ex} \sin(kz - \omega t), \quad v_y = V_{ey} \cos(kz - \omega t) \quad (91.10)$$

با $V_{\circ x}$ و $V_{\circ y}$ دو ثابت حقیقی تعیین می‌شود. با جایگزینی در (۹۰.۱۰) به دست می‌آوریم

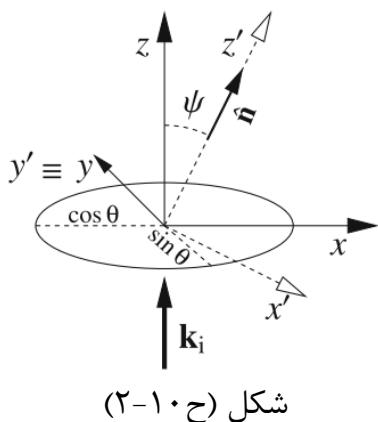
$$V_{\circ x} = \frac{eE_{\circ} \cos \theta}{m_e \omega}, \quad V_{\circ y} = -\frac{eE_{\circ} \sin \theta}{m_e \omega} \quad (92.10)$$

دومین مشتق گشتاور دوقطبی الکترون نسبت به زمان برابر است با:

$$\ddot{\mathbf{p}} = -e\dot{\mathbf{v}} = \frac{e^2 E_{\circ}}{m_e} [\hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta \sin(kz - \omega t)] \quad (93.10)$$

و الکترون با فرکانس ω تابش می‌کند. قطبش برای تشعشع پراکندگی در جهت عمومی جهت بردار واحد $\hat{\mathbf{n}}$ موازی با تابش گشتاور دوقطبی بر روی صفحه عمود بر $\hat{\mathbf{n}}$ است، یعنی $\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{p}}_{\perp}$. بنابراین، قطبش خطی موازی با $\hat{\mathbf{y}}$ را برای تابش ساطع شده در امتداد $\hat{\mathbf{x}}$ و قطبش خطی موازی با $\hat{\mathbf{x}}$ برای تابش گسیل شده در امتداد $\hat{\mathbf{y}}$ ، و قطبش بیضوی را برای تابش منتشر شده در امتداد $\hat{\mathbf{z}}$ مشاهده می‌کنیم.

اگر $\pi/4 < \theta < \pi/2$ ، به طوری که $\sin \theta < \cos \theta$ ، بردار واحد جهت مشاهده $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \psi, 0, \cos \psi)$ را انتخاب کنیم که در صفحه xz قرار دارد و زاویه ψ را با محور z همانطور که در شکل (ح-۱۰) نشان داده است، که در آن \mathbf{k}_i بردار موج تابشی است. اکنون یک دستگاه مرجع دکارتی x', y', z' را با $y' \equiv y$, $x' \equiv x$, $z' \equiv z$ در امتداد $\hat{\mathbf{n}}$ انتخاب کرده، به طوری که تابش پراکندگی مورد نظر در امتداد z' منتشر می‌شود.



شکل (ح-۱۰)

اگر بر روی صفحه $x'y'$ یک بیضی واقع در صفحه xy از نیم محورهای موازی با x و y $\sin \theta$ متعامد انجام دهیم، یک بیضی از نیم محورهای $\cos \theta \cos \psi$ در امتداد x' و $\sin \theta \cos \psi$ در امتداد y' به دست می‌آوریم. بنابراین اگر $\cos \psi = \sin \theta$ یعنی $\cos \psi = \tan \theta$ ، قطبش دایره‌ای را مشاهده می‌کنیم. به طور مشابه، اگر $\pi/2 < \theta < \pi/4$ ، به طوری که در آن $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ را انتخاب کنیم که در صفحه yz قرار دارد، اگر $\cos \psi = \cot \theta$ یعنی $\cos \psi = \sin \theta \cos \theta$ ، قطبش دایره‌ای را مشاهده می‌کنیم.

• ب: میانگین کل توان پراکندگی برابر است با:

$$P = \frac{2}{3c^3} \langle |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \rangle = \frac{2e^4}{3m_e^2 c^3} \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle \quad (94.10)$$

که در آن

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle = \frac{1}{2} E_{\circ}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} E_{\circ}^2 \quad (95.10)$$

بنابراین، مجموع توان پراکندگی مستقل از θ است و می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$P = \frac{e^4 E_{\circ}^2}{3m_e^2 c^3} = \frac{c E_{\circ}^2}{3} r_e^2 = \frac{4\pi}{3} r_e^2 I \quad (96.10)$$

که در آن

$$r_e = \frac{e^{\imath}}{m_e c^2}, \quad \text{و} \quad I = \frac{c E_0^{\imath}}{4\pi}$$

به ترتیب شعاع الکترون کلاسیک و شدت موج تابشی هستند.

- ج: میدان مغناطیسی موج برابر است با

$$\mathbf{B} = E_0 [\hat{x} \sin \theta \sin(kz - \omega t) + \hat{y} \cos \theta \cos(kz - \omega t)] \quad (97.10)$$

تنها مولفه موجود $\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ در جهت \hat{z} است و نیروی مغناطیسی روی الکترون را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z = -\frac{e}{c} (v_x B_y - v_y B_x) \\ &= -\frac{e^{\imath} E_0^{\imath}}{2cm_e \omega} (\cos^{\imath} \theta - \sin^{\imath} \theta) \sin(2kz - 2\omega t) \end{aligned} \quad (98.10)$$

این کمیت برای $\theta = \pi/4$ ، $\cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، زمانی که $\omega = \pi/4$ ، یعنی برای قطبش دایره‌ای از بین می‌رود.

د: نیروی مغناطیسی F_z نوسانات دوقطبی را در امتداد محور z با فرکانس 2ω هدایت می‌کند. بنابراین، علاوه بر فرکانس تابش پراکندگی ω که در بند (الف) و (ب) بحث شد، فرکانس تابش پراکندگی 2ω را نیز مشاهده می‌کنیم که به صورت زاویه‌ای $\psi = \sin^{-1} \theta$ حول محور z توزیع شده است. از آنجایی که دوقطبی با نوسان 2ω عمود بر دوقطبی است که در ω نوسان می‌کند، می‌توانیم به سادگی توانهای پراکندگی مربوطه را اضافه کنیم. اکنون می‌خواهیم توان ساطع شده در فرکانس 2ω را محاسبه کنیم.

معادله حرکت الکترون در امتداد محور z است $\ddot{v}_z = \cos 2\theta - \sin 2\theta = \cos 2\theta$ (معادله حرکت الکترون در امتداد محور z با فرکانس 2ω هدایت می‌دهیم)

$$m_e \ddot{v}_z = F_z = -\frac{e^{\imath} E_0^{\imath}}{2cm_e \omega} \cos 2\theta \sin(2kz - 2\omega t) \quad (99.10)$$

$$\begin{aligned} \text{یک بار دیگر، به دنبال جواب حالت ماندگار هستیم} \\ v_z = V_0 z \cos(2kz - 2\omega t) \end{aligned} \quad (100.10)$$

که در آن $V_0 z$ ثابت است. با جایگزینی در رابطه (99.10) بدست می‌آوریم

$$V_0 z = -\frac{e^{\imath} E_0^{\imath}}{4cm_e^2 \omega^2} \cos(2\theta) \quad (101.10)$$

$$v_z = -\frac{e^{\imath} E_0^{\imath}}{4cm_e^2 \omega^2} \cos(2\theta) \cos(2kz - 2\omega t) \quad (102.10)$$

توان متوسط کل ساطع شده با دوقطبی که با فرکانس 2ω نوسان می‌کند برابر است با:

$$\begin{aligned} P_{2\omega} &= \frac{2}{3c^3} \langle |\mathbf{p}_{2\omega}|^2 \rangle = \frac{2}{3c^3} \langle |ev_z|^2 \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{12c^5 m_e^2 \omega^2} \cos^2(2\theta) \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 E_0^2}{4c^5 m_e^2 \omega^2} \cos^2(2\theta) r_e^2 I \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{V_0^2 z^2}{c} \cos^2(2\theta) r_e^2 I \end{aligned} \quad (103.10)$$

۱۰.۱۰ پراکندگی و تداخل

- الف: با انتخاب مناسب مبدأ زمانی، میدان الکتریکی موج صفحه تابشی در $x = \pm d/2$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_i \left(\pm \frac{d}{2}, t \right) = E_0 e^{j(\omega t \pm kd/2)} \quad (10.4.10)$$

و اختلاف فاز بین دو پراکندگی برابر است با:

$$\phi_+ - \phi_- = kd \quad (10.5.10)$$

همانطور که در شکل (۵.۱۰) نشان داده شده است با r_{\pm} مسیرهای نوری بین نقطه مشاهده P و پراکندگی‌های واقع در $(\pm d/2, 0, 0)$ نشان می‌دهیم. تفاوت بین دو مسیر نوری خواهد بود

$$\Delta r = (r_+ - r_-) \approx -d \sin \theta \quad (10.6.10)$$

که در آن θ زاویه بین محور y و خطی است که مبدأ را به P ، همانطور که در شکل (۵.۱۰) نشان داده شده، می‌پیوندد. تقریب برای $L \gg d$ معتبر است. اختلاف فاز بین دو موج پراکنده در P با ترکیب (۱۰.۵.۱۰) و (۱۰.۶.۱۰) به دست می‌آید.

$$\Delta \phi = kd(1 - \sin \theta) \quad (10.7.10)$$

- ب: اگر تفاوت بین قدر میدان‌های پراکنده شده \mathbf{E}_+ و \mathbf{E}_- در P را نادیده بگیریم، میدان موج پراکنده شده در $(\pm d/2, 0, 0)$ است، شدت کل I_s پراکندگی در P متناسب است با

$$I_s \propto |\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-|^2 \propto |\mathbf{E}_+|^2 e^{-jkd(1-\sin \theta)/2} + e^{jkd(1-\sin \theta)/2} \propto \frac{1}{r^2} \cos^2 \left[\frac{kd}{2} (1 - \sin \theta) \right] \quad (10.8.10)$$

$$I_s \propto \frac{\cos^2 \theta}{L^2} \cos^2 \left[\frac{kd}{2} (1 - \sin \theta) \right] \quad (10.9.10)$$

آرگومان \cos^2 دوم که در (۱۰.۹.۱۰) ظاهر می‌شود را با $u = (kd/2)(1 - \sin \theta)$ نشان می‌دهیم. برای $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ متغیر u به طور پیوسته و یکنواخت از kd تا 0 تغییر می‌کند. اگر $1 \ll kd \ll 1$ (یعنی اگر $\lambda/2\pi \ll d \ll \lambda/2$) در این صورت $I_s(\theta) \sim \cos^2 \theta \cos^2 u \approx 1$ تابع u صفر ندارد، گویی یک پراکنده کننده منفرد وجود دارد. اگر $kd < \pi/2$ تابع u باشد، حاشیه‌های تداخلی مشاهده نمی‌شود.

$$\frac{\pi}{2} < \frac{kd}{2} < (n+1)\frac{\pi}{2}$$

با n یک عدد صحیح و $1 \leq n$ تابع $u = \cos^2 \theta$ صفر دارد، و یکی n کمینه شدت پراکندگی و $1 + n$ بیشینه را مشاهده می‌کند زیرا θ از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ متغیر است. شدت بیشینه مدوله شده توسط تابع $\cos^2 \theta$ برابر است.

۱۱.۱۰ ضربان‌های نوری و "اثر فانوس دریائی"

• الف: در صفحه $z = 0$ میدان‌های الکتریکی E_{\pm} ساطع شده از دو دوقطبی با \hat{z} (عمود بر صفحه) موازی هستند و دامنه آنها مستقل از ϕ است. از آنجایی که برای هر دوقطبی $E_{\pm} \propto \omega_{\pm}^{\circ} p$ ، دامنه‌های میدان $E_+ \approx E_- \approx \delta\omega/\omega$ هستند، تا مرتبه اول در با یکدیگر برابرند. تفاوت بین مسیرهای نوری از دو دوقطبی به P برابر است. که اختلاف فازی از $\phi \approx d \sin \theta = (\pi c/\omega_0) \sin \theta$ را ایجاد می‌کند. میدان کل ممکن است به‌این صورت نوشته شود

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos[(\omega_0 + \delta\omega)t + \pi \sin \theta/2] + E_0 \cos[(\omega_0 - \delta\omega)t - \pi \sin \theta/2] \\ &= 2E_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\delta\omega t + \pi \sin \theta) \end{aligned} \quad (110.10)$$

• ب: شار انرژی الکترومغناطیسی در ناحیه تابش توسط بردار پوینتینگ S داده می‌شود که متناسب با مدول مربع میدان الکتریکی است. بدین ترتیب

$$S \propto 4 \cos^2(\omega_0 t) \cos^2(\delta\omega t + \pi \sin \theta) \quad (111.10)$$

با استفاده از آشکارساز "سریع" یا "آنی"، تنها ضریب $\cos^2(\omega_0 t)$ به‌طور میانگین محاسبه می‌شود و سیگنال اندازه‌گیری شده متناسب با

$$\langle S \rangle \propto 2 \cos^2(\delta\omega t) + \pi \sin \theta \quad \text{زیرا} \quad \langle \cos^2(\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{2} \quad (112.10)$$

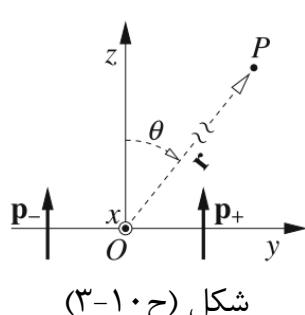
در زمان t جهت حداکثر شدت شار توسط شرایط زیر تعیین می‌شود

$$\delta\omega t + \pi \sin \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad (113.10)$$

به این معنی که جهت حداکثر شار ϕ_{max} در صفحه $z = 0$ می‌چرخد، مشابه با پرتو فانوس دریائی، با توجه به

$$\phi_{max}(t) = \arcsin\left(-\frac{\delta\omega}{\pi}t\right) \quad (114.10)$$

اگر شار الکترومغناطیسی با آشکارساز «آهسته» اندازه‌گیری شود، یعنی میانگین در زمان‌های طولانی‌تر از $2\pi/\delta\omega$ ، هر دو عبارت $\cos^2(\omega_0 t)$ به $1/2$ در نظر گرفته می‌شوند، و شار کل مجموع دو شار مستقل از دو دوقطبی است.



شکل (۱۰-۳)

اکنون نقطه مشاهده P در صفحه $z = 0$ در فاصله r از مبدأ قرار دارد، مانند شکل (۱۰-۳). زاویه بین محور z و θr است. در تقریب ما، شدت دو میدان الکتریکی E_+ و E_- در P برابر و متناسب با $\sin \theta$ است. بنابراین دو شدت جداگانه به θ وابسته هستند، در حالی که آنها مستقل از ϕ در صفحه $z = 0$ هستند. دامنه بردار پوینتینگ متناسب است با

$$S \propto 2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega_0 t) \cos^2(\delta\omega t + \pi \sin \theta) \quad (115.10)$$

بنابراین آشکارساز "سریع" هنوز چرخش جهت حداکثر انتشار را اندازه‌گیری می‌کند، اما شدت توسط یک عامل $\sin^2 \theta$ مدوله می‌شود.

۱۲.۱۰ نیروی اصطکاک تشعشعی

• الف: برای F_{rad} رابطه (۹.۱۰) در (۱۱.۱۰) جایگزین می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \mathbf{F}_{rad}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt &= m_e \tau \int_t^{t+T} \frac{d^2 \mathbf{v}(t)}{dt^2} \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= m_e \tau \left[\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) \right]_t^{t+T} - m_e \tau \int_t^{t+T} \left| \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \right|^2 dt \end{aligned} \quad (۱۱۶.۱۰)$$

که در خط دوم از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده کردایم. جمله اول حذف می‌شود زیرا حرکت تناوبی (دوره‌ای) است:

$$\left[\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) \right]_t^{t+T} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{v}^2(t+T) - \frac{d}{dt} \mathbf{v}^2(t) \right] = 0 \quad (۱۱۷.۱۰)$$

از اینرو بدست می‌آوریم

$$\int_t^{t+T} \mathbf{F}_{rad}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt = -m_e \tau \int_t^{t+T} \left| \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \right|^2 dt \quad (۱۱۸.۱۰)$$

با جایگزینی فرمول لارمور (۱۰.۱۰) در سمت راست (۹.۱۰) به دست می‌آوریم.

$$-\int_0^t P_{rad}(t') dt' = \int_0^t \frac{2e^2}{3c^3} \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right|^2 dt' \quad (۱۱۹.۱۰)$$

و اگر مقدار زیر را انتخاب کنیم، رابطه (۹.۱۰) اثبات می‌شود

$$\tau = \frac{2e^2}{3m_e c^3} \quad (۱۲۰.۱۰)$$

به غیر از عامل $2/3$ ، τ زمان مورد نیاز نور برای طی مسافتی برابر با شعاع الکترون کلاسیک $r_e = 2.82 \times 10^{-13} s$ سانتی‌متر، و $\sim 10^{-23}$ داریم.

• ب: پس از جایگزینی (۱۲.۱۰) در (۸.۱۰)، یک جواب حالت ماندگار به‌شکل $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{j\omega t}$ را جستجو و پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{j e \mathbf{E}_0}{m_e \omega (1 - j \omega \tau)} \quad (۱۲۱.۱۰)$$

به طور مشابه، جواب حالت ماندگار رابطه (۱۳.۱۰) برابر است با:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{j e \mathbf{E}_0}{m_e \omega (1 - j \frac{\eta}{\omega})} \quad (۱۲۲.۱۰)$$

اگر $\omega \tau = \eta$ را انتخاب کنیم دو جواب یکسان هستند. همین نتیجه را می‌توان با مقایسه مستقیم F_{rad} با نیروی اصطکاک $-m_e \eta \mathbf{v}$ بدست آورد.

معادله (۸.۱۰) نشان دهنده اولین تلاش برای استخراج عبارتی برای نیروی "اصطکاک تابشی" یا "واکنش تشعشعی" است که عمیقاً به واکنش برگشتی الکترون بر روی

در واقع لرومی ندارد که حرکت تناوبی باشد، کافی است $d\mathbf{v}(t) dt$ در لحظه‌های اولیه و پایانی بازه زمانی در نظر گرفته شده حذف شود.

خود مربوط می‌شود، زیرا الکترون با میدان الکتریکی که تولید می‌کند برهم کنش دارد. با این حال رابطه (۸.۱۰) بهدو دلیل نامطلوب در نظر گرفته می‌شود: (۱) مرتبه معادله حرکت را افزایش می‌دهد، و در نتیجه، یک شرط اولیه دیگر برای شتاب لازم است؛ و (۲) غیرفیزیکی است. جواب‌ها در غیاب یک میدان خارجی، مانند $a = a_0 e^{t/\tau}$ با $a(t) = a_0 e^{t/\tau}$. این مسئله سابقه‌ای طولانی دارد و هنوز باز است. بحث‌های اضافی را می‌توان در کتاب‌های درسی و ادبیات، همچنین در آثار بسیار اخیر مربوط به الکترون‌های بسیار نسبیتی در میدان‌های لیزری فوق‌شدید (که اثر اصطکاک تشعشعی برای آنها مهم می‌شود) یافت.

فصل ۱۱

امواج الکترومغناطیسی در مواد

عناوین. معادله موج در مواد پیوسته. مدل کلاسیک الکترون، الکترون‌های مقید و آزاد. وابستگی فرکانسی هدایت $\sigma(\omega)$ و گذردهی الکتریکی $\epsilon(\omega)$ برای میدان‌های هارمونیکی. رابطه بین $\sigma(\omega)$ و $\epsilon(\omega)$. امواج طولی و عرضی. ضریب شکست (انکسار). انتشار امواج تک رنگ در ماده. روابط پاشندگی. انتقال و بازتاب موج صفحه‌ای در مرز مشترک: قانون اسنل، روابط فرنل، انعکاس کلی، زاویه بروستر. مواد غیرهمسانگرد.

معادلات پایه در این فصل:

معادله موج برای میدان الکتریکی:

$$\nabla^{\text{v}} \mathbf{E} - \frac{1}{c^{\text{v}}} \frac{\partial^{\text{v}} \mathbf{E}}{\partial t^{\text{v}}} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c^{\text{v}}} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c^{\text{v}}} \frac{\partial^{\text{v}} \mathbf{P}}{\partial t^{\text{v}}} \quad (1.11)$$

(توجه کنید که $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$)

تعریف $\epsilon(\omega)$ برای میدان‌های هارمونیکی

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma(\omega) \tilde{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \chi(\omega) \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.11)$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega), \quad \chi(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{j\omega} \quad (\omega \neq 0) \quad (3.11)$$

رابطه پاشندگی در یک محیط و ضریب شکست $n(\omega)$

$$\frac{k^{\text{v}} c^{\text{v}}}{\omega^{\text{v}}} = \epsilon(\omega) = n^{\text{v}}(\omega) \quad (4.11)$$

۱.۱۱ انتشار موج در یک هادی در فرکانس‌های بالا و پائین

در یک روش کلاسیک، یک فلز دارای الکترون‌های رسانا در واحد حجم است که معادلات حرکت آن در حضور یک میدان الکتریکی خارجی $E(r, t)$ برابر است با:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - m_e \eta \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (5.11)$$

که در آن e و m_e به ترتیب بار و جرم الکترون هستند و η توصیف کننده ثابت اصطکاک است.

- **الف:** رسانایی پیچیده فلز، $\sigma = \sigma(\omega)$ را به صورت تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω میدان الکتریکی، و مقادیر ω که σ برای آنها کاملاً حقیقی یا کاملاً موهم است، تعیین کنید. این حدود را برای یک هادی خوب، که رسانایی DC آن (یعنی رسانایی آن برای میدان‌های استاتیکی) مقادیری از مرتبه $\sigma_{DC} \sim 5 \times 10^{17} s^{-1}$ دارد، بحث کنید. اکنون یک موج الکترومغناطیسی صفحه‌ای تک رنگ را در نظر بگیرید که به صورت خطی در امتداد محور y قطبی شده و درجهت مثبت در امتداد محور x یک سیستم مختصات دکارتی حرکت می‌کند. موج بر روی رسانایی برخورد می‌کند که نیم فضای $x > 0$ را پر می‌کند، در حالی که در نیم فضای $x < 0$ خلاء داریم.
- **ب:** هر دو حالت ω را کاملاً حقیقی و کاملاً موهم در نظر بگیرید و محدوده فرکانسی را که در آن موج در داخل فلز محو می‌شود، تعیین کنید.
- **ج:** شار انرژی الکترومغناطیسی میانگین زمانی را از سطح فلز پیدا کنید و نشان دهید که برابر با مقدار انرژی تلف شده در داخل فلز است.

۲.۱۱ چگالی انرژی در یک گاز الکترونی آزاد

یک موج الکترومغناطیسی مسطح، تک رنگ و عرضی در محیطی منتشر می‌شود که در واحد حجم، الکترون‌های آزاد n_e دارد. الکترون‌ها با اصطکاک ناچیز حرکت می‌کنند. محاسبه کنید:

- **الف:** رابطه پاشندگی موج، سرعت فاز (v_ϕ) و گروه (v_g)، و رابطه بین دامنه‌های میدان الکتریکی (E_z) و مغناطیسی (B_z).
- **ب:** چگالی انرژی موج الکترومغناطیسی u_{EM} (میانگین در یک دوره نوسانی) به صورت تابعی از E_z .
- **ج:** چگالی انرژی جنبشی u_K (میانگین در یک دوره نوسان)، که به صورت $= n_e m_e v^2 / 2$ تعریف شده است، که در آن v سرعت نوسان الکترون و چگالی انرژی کل است. $u = u_{EM} + u_K$

- ۵: فرض کنید که محیط نیم فضای $x > 0$ را پر می‌کند، در حالی که در نیمه فضای $x < 0$ خلاء داریم. یک موج الکترومغناطیسی در امتداد محور x منتشر و وارد محیط می‌شود. فرض کنید که هم v_g و هم v_ϕ مقادیر حقیقی هستند. از نتایج فوق برای تأیید بقای شار انرژی که با رابطه زیر بیان شده است استفاده کنید

$$c(u_i - u_r) = v_g u_t \quad (6.11)$$

که در آن u_i و u_r به ترتیب کل چگالی انرژی برای امواج منعکس شده و امواج ارسالی هستند.

۳.۱۱ امواج طولی

یک موج صفحه‌ای تک رنگ طولی را در نظر بگیرید که در یک محیط در امتداد محور x یک دستگاه مرجع دکارتی منتشر می‌شود. "طولی" به‌این معنی است که میدان الکتریکی E موج با بردار موج k موازی است. فرض کنید که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج بترتیب

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t) = \hat{\mathbf{x}} E_0 e^{j(\omega t - kx)}, \quad \mathbf{B} \equiv 0. \quad (7.11)$$

هستند و خاصیت نوری محیط با وابستگی گذردگی به فرکانس با $\epsilon_r(\omega)$ توصیف می‌شود.

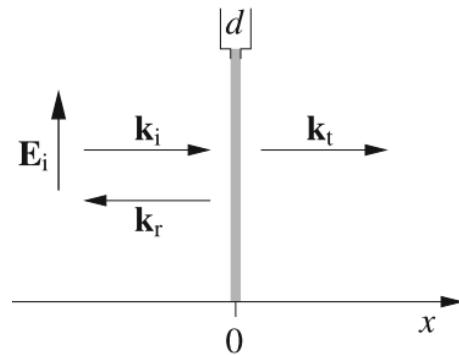
- الف: نشان دهید که فرکانس‌های ممکن برای موج (۷.۱۱) با صفرهای گذردگی دیالکتریک، $\epsilon_r(\omega) = 0$ مطابقت دارد.

- ب: بار و چگالی جریان را در محیط با حضور میدان‌های موج (۷.۱۱) بیابید.

- ج: با فرض اینکه خواص نوری محیط توسط n_e الکترون‌های کلاسیک در واحد حجم تعیین و با نیروی کشسانی $r^{-m_e \omega}$ به‌اتم‌ها متصل می‌شوند، $\epsilon_r(\omega)$ و رابطه پاشندگی موج طولی را تعیین کنید.

۴.۱۱ انتقال و بازتاب توسط یک فویل نازک رسانا

یک موج صفحه‌ای با فرکانس $\omega = 2\pi c/\lambda$ در بروز معمولی به‌یک ورقه فلزی نازک با ضخامت $\lambda \ll d$ بخورد می‌کند. در حد یک فویل بی‌نهایت نازک، چگالی الکترون حجمی در فضا را می‌توان به صورت $n_v(x) = n_e d \delta(x)$ تقریب زد، که در آن n_e چگالی الکترون حجمی در هادی است، به‌طوری که $n_e d$ چگالی الکترون‌های سطحی فویل و $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک است. به‌طور مشابه، چگالی جریان حجمی در فضا را می‌توان به صورت $J(xt) = K(t) \delta(x)$ تقریب زد، که در آن $K(t)$ چگالی جریان سطحی روی فویل است.



شکل (۱۱ - ۱)

• الف: روابط زیر را برای مولفه‌های میدان موازی با سطح فویل ثابت کنید

$$E_{\parallel}(^{\circ+}) - E_{\parallel}(^{\circ-}) = 0, \quad B_{\parallel}(^{\circ+}) - B_{\parallel}(^{\circ-}) = \frac{4\pi}{c}K \quad (۸.۱۱)$$

• ب: میدان الکترومغناطیسی را در کل فضا به صورت تابعی از رسانایی فویل σ ، با ω ، به طور کلی، یک کمیت اسکالر مختلط محاسبه کنید. وابستگی خطی چگالی جریان J به میدان الکتریکی E را با استفاده از نماد مختلط $J = Re(\tilde{J}e^{j\omega t})$ فرض کنید.

• ج: اکنون از معادله کلاسیک حرکت برای الکترون‌های فلز استفاده کنید

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \eta \mathbf{v} \quad (۹.۱۱)$$

که در آن η یک ثابت میرایی است، برای به دست آوردن عبارت σ و توان جذب شده متوسط به ترتیب در حدوده $\omega \gg v \gg \omega$ محاسبه کنید.

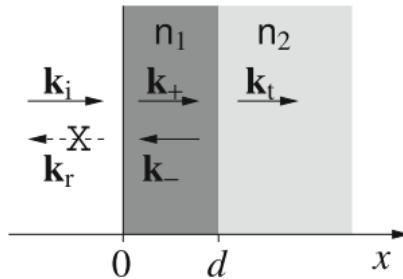
• د: برای اثبات اینکه شار انرژی الکترومغناطیسی به داخل فویل برابر با توان جذب شده است، پایستگی (بقاء) انرژی را برای سیستم تأیید کنید.

۵.۱۱ پوشش ضد انعکاس

یک موج الکترومغناطیسی مسطح تک رنگ با فرکانس زاویه‌ای ω در خلاء ($x < 0$) در امتداد جهت x یک سیستم مختصات دکارتی حرکت می‌کند. در صفحه $x = 0$ موج به طور عمومی به محیط مرکب نیمه نامتناهی بخورد می‌کند. محیط شامل اولین لایه، بین صفحات $x = 0$ و $x = d$ ، با ضریب شکست حقیقی n_1 ، و به دنبال آن یک لایه نیمه نامتناهی با ضریب شکست حقیقی n_2 که نیمه فضای $x > d$ را پر می‌کند، همانطور که در شکل نشان داده شده است.

می‌خواهیم شرایط n_1 و d را تعیین کنیم تا موج تابشی کل ارسال شود، به طوری که هیچ موج بازتابی در ناحیه خلاء وجود نداشته باشد. به صورت زیر عمل کنید

- الف: جواب کلی برای موج EM را در هر ناحیه از فضا بنویسید.



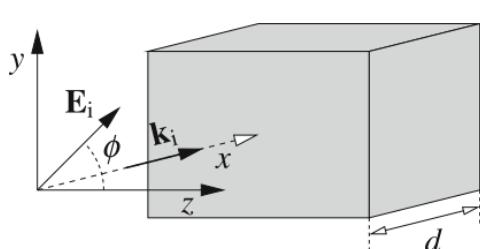
شکل (۱۱ - ۲)

- ب: روابط بین دامنه‌های میدان‌های EM را در هر ناحیه در شرایط مرزی بنویسید.

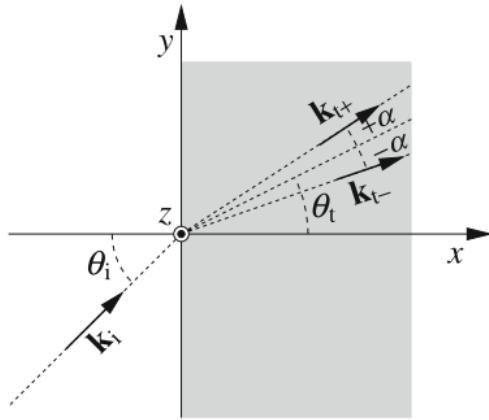
- ج: با تعیین رابطه بین n_2 و d از حالت (ب) برای عدم بازتاب لازم، مقادیر n_1 و d را وقتی است بدست آورید.

- د: اگر $n_2 \neq 1$ باشد، پاسخ حالت (ج) چگونه تغییر می‌کند؟

۶.۱۱ دوشکستی و صفحه موج



شکل (۱۱ - ۴)



شکل (۱۱ - ۳)

ضریب شکست کریستال‌های ناهمسانگرد به جهت انتشار و قطبش موج الکترومغناطیسی تابشی بستگی دارد. یک دستگاه مرجع دکارتی را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که صفحه $x = 0$ محیط مورد بررسی را از خلاء جدا می‌کند. همانطور که در شکل (۳ - ۱۱) نشان داده شده است، بردار موج موج تابشی، \mathbf{k}_i ، در صفحه xy قرار دارد و با محور x زاویه θ_i دارد. در این مسئله، ماده‌ای را در نظر می‌گیریم که ضریب شکست آن دارای مقادیر n_s برای موجی است که عمود بر صفحه تابش قطبی شده است (قطبیش S ، az senkrecht لغت آلمانی)، بمعنى عمود بر گرفته شده است) و n_p برای امواجی که میدان الکتریکی آنها در صفحه xy قرار دارد (قطبیش P ، az لغت موازی parallel اخذ شده است). در اینجا، هر دو n_p و n_s حقیقی و مثبت با $n_p > n_s$ فرض می‌شوند. البته بحث با حالت مخالف، $n_s > n_p$ ساده است.

- الف: فرض کنید که موج ورودی به صورت y قطبی شده خطی است و میدان الکتریکی آن با محور z زاویه $\psi = \pi/4$ تشکیل می‌دهد، به‌طوری که قطبش آن

مخلوطی از قطبش‌های S و P است. پرتو تابشی بهدو پرتو شکست در زوایای مختلف، $\theta_{t\pm} = \theta_{t\pm\alpha}$ تقسیم می‌شود، همانطور که در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده است، که در آن k_{t+} مربوط به S و k_{t-} به قطبش P است. نشان دهید که چگونه می‌توان مقادیر n_s و n_p را از اندازه‌گیری‌های θ_t و α بدست آورد. فرض کنید $\delta n/\bar{n} \ll 1$ باشد، $n_- = \bar{n} - \delta n$ و $n_p = \bar{n} + \delta n$ نگه دارید.

- ب: حال تابش عمودی را فرض کنید ($\theta_i = 0$)، و میدان الکتریکی موج ورودی به صورت خطی قطبی شده، $E_i = E_0 \hat{z}$ با محور $\psi = \pi/4$ تشکیل می‌دهد، مانند شکل (۱۱-۴). ضخامت کریستال $\lambda \gg d$ است. مقادیر d را بیابید تا نوری که از کریستال خارج می‌شود یا به صورت دایره‌ای یا خطی قطبی شده باشد، اما با توجه به قطبش نور تابشی به اندازه $\pi/2$ بچرخد. از تفاوت بین ضرایب بازتاب برای قطبش‌های S و P صرفنظر کنید.

۷.۱۱ شکست مضاعف مغناطیسی و اثر فاراده

یک موج الکترومغناطیسی مسطح با فرکانس ω در محیطی در حضور یک میدان مغناطیسی ثابت $B_0 = B_0 \hat{z}$ حرکت می‌کند، که در آن \hat{z} بردار واحد \hat{z} یک دستگاه مرجع دکارتی است. بسیار قوی‌تر از میدان مغناطیسی موج است. جهت انتشار موج نیز موازی با \hat{z} است. این محیط حاوی الکترون‌های مقید به n_e در واحد حجم است که از معادلات حرکتی کلاسیک تعیت می‌کند

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) - m_e \omega_0^2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (10.11)$$

که در آن m_e و e به ترتیب جرم و بار الکترون هستند.

- الف: با محاسبه ضریب شکست برای قطبش دایره‌ای، چه چیزی را راستگرد، نشان دهید که انتشار موج به قطبش آن بستگی دارد.

- ب: اکنون انتشار یک موج قطبی شده خطی را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در $z = 0$ فرض کنید که توسط $\mathbf{E}_i(z = 0, t) = \hat{x} E_i e^{j\omega t}$ و یک میدان مغناطیسی نسبتاً ضعیف به دست می‌آید، به طوری که $\omega_c \gg \omega$ و شرایط مرتبه بالاتر از ω_c/ω ممکن است چشم پوشی شود. میدان الکتریکی را در موقعیت $z = l$ پیدا کنید، که نشان می‌دهد قطبش چرخیده است (اثر فاراده).

۸.۱۱ امواج ویسلر

رعد و برق سیگنال‌های الکترومغناطیسی عرضی را تحریک می‌کند که در یونوسفر، عمدتاً در جهت موازی با خطوط میدان مغناطیسی زمین منتشر می‌شوند.

- الف: نشان دهید که در یک محدوده فرکانسی که باید تعیین شود، و بسته به قطبش موج، رابطه پاشندگی برای چنین سیگنال‌هایی به‌شکل زیر دارد.

$$\omega = \alpha k^2 \quad (11.11)$$

که در آن مقدار α ثابتی است که به چگالی الکترون آزاد n_e و میدان مغناطیسی B (هر دو از نظر سادگی یکنواخت فرض می‌شوند) بستگی دارد. با دانستن اینکه مقادیر معمولی $n_e \approx 10^5 \text{ cm}^{-3}$ و $B \approx 0.5 \text{ G}$ هستند، یک تخمین عددی برای محدوده فرکانس ارائه دهید.

- ب: سرعت گروه و فاز ناشی از رابطه (11.11) را به صورت تابعی از ω تعیین کنید و آنها را با c مقایسه کنید.

- ج: فرض کنید که رعد و برق به صورت محلی پالسی را تحریک می‌کند که دارای طیف فرکانسی است که از مقدار ω_1 تا $\omega_2 = 2\omega_1$ در محدوده فرکانس تعیین شده در حالت (الف) امتداد دارد. با فرض "کوتاه" بودن پالس (به معنایی که پسینی مشخص می‌شود)، طول پالس را پس از انتشار در مسافت $L \approx 10^4$ کیلومتر تخمین بزنید. سعی کنید توضیح دهید که چرا به‌این سیگنال‌ها سوت (ویسلر) می‌گویند. (برای انتشار امواج الکترومغناطیسی در طول یک میدان مغناطیسی به مرجع [۱]، بخش ۷.۶ و مسئله ۱۱.۷ مراجعه کنید).

۹.۱۱ انتشار موج در "زوج" پلاسما

پلاسما "جفت" توسط الکترون‌ها و پوزیترون‌هایی با چگالی برابر n تشکیل شده است (از بین رفتن جفت نادیده گرفته می‌شود).

- الف: در غیاب میدان‌های خارجی، رابطه پاشندگی امواج الکترومغناطیسی عرضی را پیدا کنید و فرکانس‌های قطع و/یا تشدید را در صورت وجود تعیین کنید.
- ب: رابطه پاشندگی را مانند (الف) پیدا کنید و در مورد امواجی که در امتداد یک میدان مغناطیسی ساکن خارجی B منتشر می‌شوند بحث کنید (همچنین به مسئله ۱۱.۷ مراجعه کنید).

۱۰.۱۱ امواج سطحی

یک محیط همگن، نیم فضای $x < 0$ یکدستگاه مرجع دکارتی را پر می‌کند، در حالی که خلاء برای $x > 0$ داریم. گذردهی دیالکتریک محیط، $(\epsilon) = \epsilon_0$ ، مقادیر حقیقی را در محدوده فرکانس مورد نظر فرض می‌کند. یک موج الکترومغناطیسی تک رنگ در

امتداد جهت ω موازی با رابط بین محیط و خلاء منتشر می‌شود. در داخل محیط، میدان مغناطیسی موج فقط دارای مولفه z بصورت زیر است

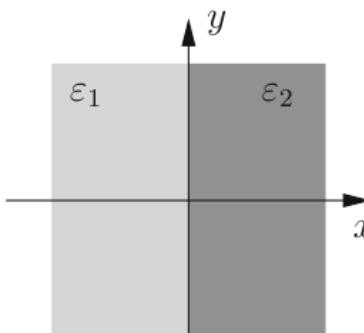
$$B_z = B_0 e^{-qx} \cos(ky - \omega t) = Re(B_0 e^{-qx} e^{j(\omega t - ky)}) \quad (12.11)$$

که در آن q یک کمیت حقیقی و مثبت است.

• **الف:** با استفاده از معادله موج برای B در داخل محیط دیالکتریک، یک رابطه بین k و ω پیدا کنید.

• **ب:** میدان الکتریکی E را در داخل محیط بنویسید.

• **ج:** بردار پواین‌تینگ S را محاسبه کرده و جهت عبور انرژی الکترومغناطیسی با میانگین زمانی را مشخص کنید.



شکل (۱۱ - ۵)

حال دو محیط همگن متفاوت از گذرهای دیالکتریک ϵ_1 و ϵ_2 را در نظر بگیرید که به ترتیب نیم فضاهای $x < 0$ و $x > 0$ را پر می‌کنند. یک موج الکترومغناطیسی قطبی خطی در امتداد محور y در مرز مشترک $x = 0$ با میدان مغناطیسی زیر منتشر می‌شود،

$$\mathbf{B} = Re[\hat{\mathbf{z}} B_z e^{j(\omega t - ky)}] \quad (13.11)$$

که در آن

$$B_z(x) = \begin{cases} B_1 e^{+q_1 x} & x < 0 \\ B_2 e^{+q_2 x} & x > 0 \end{cases} \quad (14.11)$$

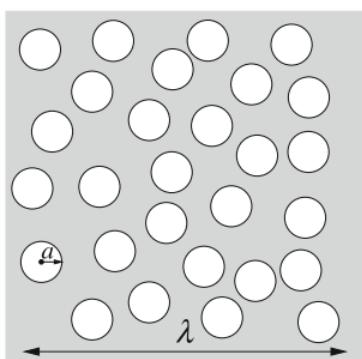
• **د:** با استفاده از شرایط مرزی برای B_z در سطح $x = 0$ رابطه بین B_1 و B_2 را پیدا کنید.

• **ه:** با استفاده از پیوستگی E_y در سطح $x = 0$ ، رابطه بین q_1 و q_2 را بیابید. نشان دهید که ϵ_1 و ϵ_2 باید علامت مخالف داشته تا $q_{1,2}$ داشته باشند، یعنی میدان‌های برای $|x| \rightarrow \infty$ از بین روند.

• **و:** از نتایج موارد **(الف)** و **(ه)** رابطه پاشندگی $\omega(k) = \omega$ را به صورت تابعی از ϵ_1 و ϵ_2 بدست آورید، که نشان می‌دهد که انتشار موج به $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0$ نیاز دارد.

• **ز:** اگر محیط ۱ خلاء باشد، ($\epsilon_1 = 1$)، چگونه باید محیط ۲ و فرکانس موج را انتخاب کرد تا شرایط موجود مورد **(و)** را برآورده کند؟

۱۱.۱۱ رزونانس می و یک "فراماده پلاسمونیک"



شکل (۱۱ - ۶)

یک موج صفحه تک رنگ با فرکانس ω به یک کره کوچک به شعاع $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ برخورد می‌کند. کره از ماده‌ای ساخته شده که دیالکتریک آن $\epsilon = \epsilon(\omega)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\eta} \quad (15.11)$$

که در آن، با توجه به مدل الکترون مقید الاستیک، فرکانس پلاسمما، ω_p فرکانس رزونانس الکترون‌های مقید و η ثابت میرایی است.

• الف: میدان القایی و قطبش را در داخل کره پیدا کنید و در مورد هر رفتار تشیدی کننده بحث کنید. (راهنمایی: نگاهی به مسئله ۳.۴ بیندازید)

• ب: فرض کنید که موج الکترومغناطیسی در داخل ماده‌ای منتشر می‌شود که در آن n_s نانوکره فلزی ($\omega_r = 0$) در واحد حجم وجود دارد، با $1 \gg \lambda/a \gg n_s \lambda^3$. قطبش ماکروسکوپی ماده را بیابید و در مورد انتشار موج به صورت تابعی از فرکانس ω بحث کنید.

مرجع:

1. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, § 9.2 and 9.4, 3rd edn. (Wiley, New York, London, Sydney, 1998)

حل مسائل فصل ۱۱

ح: امواج الکترومغناطیسی در مواد

۱.۱۱ انتشار موج در یک هادی در فرکانس‌های بالا و پائین

- الف: ما رسانایی فلز را با جستجوی جواب حالت ماندگار به‌شکل مختلط، $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} e^{j\omega t}$ از (۵.۱۱) در حضور یک میدان الکتریکی نوسانی $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$ تعیین می‌کنیم. در این صورت داریم

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{je}{m_e(\omega - j\eta)} \quad (1.11)$$

چگالی جریان مربوطه

$$\tilde{\mathbf{J}} = -en_e \tilde{\mathbf{v}} \frac{-je^* n_e}{m_e(\omega - j\eta)} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{-j\omega_p^*}{4\pi(\omega - j\eta)} \tilde{\mathbf{E}} \equiv \sigma(\omega) \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.11)$$

که در آن ω_p فرکانس پلاسمایی فلز است. در محدوده فرکانس‌های بالا $\omega \gg \omega_p$ و فرکانس‌های پایین $\omega \ll \omega_p$ داریم

$$\sigma(\omega) \approx \begin{cases} \frac{-j\omega_p^*}{4\pi\omega} & \omega \gg \omega_p \\ \frac{\omega_p^*}{4\pi\omega} & \omega \ll \omega_p \end{cases} \quad (3.11)$$

بنابراین هدایت DC، $\sigma_{DC} = \sigma(0) = \omega_p^*/4\pi\eta$ است. در یک فلز، معمولاً $\omega_p \sim 10^{16} s^{-1}$ داریم، زیرا $n_e \sim 10^{22} cm^{-3}$ و $\eta \sim 10^{13} s^{-1}$. بنابراین این یک تقریب بسیار خوب است که فرض کنیم σ برای فرکانس‌های نوری کاملاً موهومی است، یعنی برای فرکانس‌های نوری، یعنی برای $10^{15} s^{-1}$ ، و برای امواج مایکروویو و طول موج‌های بلندتر کاملاً حقیقی و برابر با σ_{DC} (یعنی مستقل از فرکانس) است.

- ب: با فرض امواج تک رنگ و صفحه‌ای، در غیاب منابع در $x = +\infty$ ، میدان الکتریکی موج برای $\circ > x$ را می‌توان به صورت (با نماد مختلط) زیر نوشت.

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_t e^{j(\omega t - kx)} \quad (4.11)$$

که در آن بردار موج k با رابطه پاشندگی کلی (۴.۱۱) در محیطی که ضریب شکست $n = n(\omega)$ یا به طور معادل، گذردهی الکتریکی $\epsilon = \epsilon(\omega) = n^2$ مشخص است، تعیین می‌شود. برای موج تابشی با دامنه \mathbf{E}_i ، میدان الکتریکی در سطح با رابطه فرنل به دست می‌آید.

$$\mathbf{E}_t = \frac{2}{1+n} \mathbf{E}_i \quad (5.11)$$

گذردهی (ϵ) به رسانایی مختلط محیط با (۳.۱۱) مربوط ارائه می‌شود. با جایگزینی (۳.۱۱) برای $\sigma(\omega)$ ، اگر $\eta \approx \epsilon \approx 1 - \omega_p^2/\omega^2$ داریم، و k حقیقی است، به طوری که موج در حال انتشار است. برای $\circ < k$ ، یعنی برای $\omega > \omega_p$ با $-jkx = -|k|x = -x/l_p$ ، موج محو شونده^۱ است:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_t e^{x/l_p} e^{j\omega t} \quad (6.11)$$

(جواب $e^{x/p}$ به عنوان غیر فیزیکی نادیده گرفته شده زیرا برای $x \rightarrow \infty$ واگرا است). برای یک فلز، شرط $\omega_p < \omega$ نشان می‌دهد که فلز برای فرکانس‌هایی در محدوده نوری منعکس می‌شود، در حالی که برای فرکانس‌های فرابنفش شفاف می‌شود. اگر $\eta \ll \omega$ آن را نیز داریم $\eta \ll \sigma_{DC}$ ، به طوری که $\epsilon \approx -j4\pi\sigma_{DC}/\omega$ یک عدد موهومی است. در این حالت، از آنجایی که $k = \pm(1-j)/c$ با $l_c = \sqrt{\omega\sigma_{DC}/2c}$ جواب محو شونده است.

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_t e^{-x/l_c} e^{j\omega t} \quad (7.11)$$

- ج: شار خالص انرژی از طریق سطح با میانگین زمانی مولفه x بردار پوینتینگ $\mathbf{S} = (c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ در $x = \circ$ بدست می‌آید. میدان مغناطیسی موج را از رابطه $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}$ بدست می‌آوریم. بنابراین دامنه‌های میدان مختلط برای $\circ \geq x$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{E}_y = E_t e^{-jk_n x} \quad \tilde{B}_z = n E_t e^{-jk_n x} \quad (8.11)$$

که در آن $k_n = \omega/c$ است. بنابراین لازم است محاسبه کنیم:

$$\langle S_x(\circ) \rangle = \frac{1}{4} \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re}[\tilde{E}_y(\circ) \tilde{B}_z^*(\circ)] = \frac{c}{\Lambda\pi} |E_t|^2 \operatorname{Re}(n) \quad (9.11)$$

در حد $\eta \gg \omega$ کاملاً موهومی است، همانطور که در بالا پیدا کردیم، و $\langle S_x(\circ) \rangle = 0$ است. هیچ انرژی در فلز تلف نمی‌شود (به راحتی می‌توان نشان داد که ضریب انعکاس به دست آمده از فرمول فرنل دارای مدول واحد است، یعنی تمام انرژی تابشی، منعکس می‌شود). در حد $\eta \gg \omega$ بدست می‌آوریم:

$$\langle S_x(\circ) \rangle = \frac{c}{\Lambda\pi} |E_t|^2 \sqrt{\frac{2\pi\sigma_{DC}}{\omega}} \approx \frac{c}{16\pi} |E_t|^2 \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma_{DC}}} \quad (10.11)$$

^۱Evanescence

که در آن در عبارت اخیر $(2\pi\sigma_D C/\omega) |n|^2 \approx |E_t|^2$ در نظر گرفته شده است.

انرژی تلف شده در واحد حجم برابر است با:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma \tilde{E}_y \tilde{E}_y^*) = \frac{c}{\lambda\pi} |E_t|^2 \operatorname{Re}(\sigma e^{-jk_n n_x} e^{jk_n n_x}) \\ &= \frac{|E_t|^2}{2} \operatorname{Re}(\sigma) \exp[-2k_n \operatorname{Im}(n)x] \end{aligned} \quad (11.11)$$

اگر σ موهومی باشد، مطابق با آنچه در بالا بدست آورده شد، اتفاف وجود ندارد. در حالت $\eta \ll \omega$ کل انرژی تلف شده در واحد سطح توسط انتگرال زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle &= \frac{|E_t|^2}{2} \frac{\sigma_{DC}}{2k_n \operatorname{Im}(n)} = \frac{|E_t|^2}{2} \frac{\sigma_{DC}}{2\omega_c \sqrt{2\pi\sigma_{DC}/\omega}} \\ &= \frac{c}{\lambda\pi} |E_t|^2 \sqrt{\frac{2\pi\sigma_{DC}}{\omega}} \end{aligned} \quad (12.11)$$

که برابر است با شار انرژی الکترومغناطیسی رابطه (10.11).

۲.۱۱ چگالی انرژی در یگ گاز الکترونی آزاد

الف: ما از نمایش مختلط برای همه میدان‌ها، $A(x, t) = \operatorname{Re}(\tilde{A} e^{j(\omega t - kx)})$ ، استفاده می‌کنیم، که در آن A میدان در نظر گرفته شده است. برای میدان الکتریکی موج $E = \tilde{E}$ داریم که را می‌توان به صورت یک کمیت حقیقی در نظر گرفت. معادله حرکت یک الکترون، با چشم‌پوشی از جمله مغناطیسی غیرخطی، برابر است با:

$$m_e \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} = m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} \quad (13.11)$$

که دارای جواب حالت ماندگار برای سرعت و موقعیت الکترون است

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{je}{m_e \omega} \mathbf{E}_0, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{e}{m_e \omega^2} \mathbf{E}_0. \quad (14.11)$$

چگالی قطبش برابر است با:

$$\tilde{\mathbf{P}} = -en_e \tilde{\mathbf{r}} = -\frac{n_e e^2}{m_e \omega^2} \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{E}_0 \equiv \chi(\omega) \mathbf{E}_0. \quad (15.11)$$

گذردهی دیالکتریک مربوط به محیط

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (16.11)$$

با استفاده از رابطه (14.11)، رابطه پاشندگی بصورت زیر بدست می‌آید

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon(\omega)} = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (17.11)$$

سرعت‌های فاز و گروهی عبارتند از

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (18.11)$$

به طوری که هر دو v_ϕ و v_g اگر $v_\phi v_g = c^2$ و $\omega > \omega_p$ حقيقی هستند. در نهايٰت با استفاده از معادله $E_0 = (v_\phi/c)B_0 - jk c \tilde{\mathbf{E}}$ یعنی $c\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ را بدست می‌آوریم.

• ب: از تعریف چگالی انرژی الکترومغناطیسی

$$\begin{aligned} u_{EM} &= \left\langle \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}^* + \mathbf{B}^*) \right\rangle = \frac{1}{16\pi} (E_0^* + B_0^*) = \frac{1}{16\pi} E_0^* \left(1 + \frac{c^2}{v_\phi^2} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi} E_0^* \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (19.11)$$

• ج: از تعریف چگالی انرژی جنبشی

$$\begin{aligned} u_K &= \left\langle n_e \frac{m_e}{2} v^2 \right\rangle = n_e \frac{m_e}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{e E_0^*}{m_e \omega} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{n_e e^2}{m_e \omega^2} E_0^* \\ &= \frac{1}{16\pi} E_0^* \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (20.11)$$

بنابراین

$$u = u_{EM} + u_K = \frac{1}{4\pi} E_0^* \quad (21.11)$$

که مستقل از n_e است.

• د: در حالت رابطه (۲۰.۱۱)، می‌توانیم بنویسیم

$$v_g E_t^* = c(E_0^* - E_r^*) \quad (22.11)$$

با استفاده از رابطه فرنل بصورت تابعی از سرعت فاز $v_\phi = c/n$ با $n = \sqrt{\epsilon_r}$ بدست می‌آوریم

$$E_r = \frac{v_\phi - c}{v_\phi + c} E_0, \quad E_t = \frac{2v_\phi}{v_\phi + c} E_0. \quad (23.11)$$

که منجر به

$$4v_g v_\phi^* = 4c^2 v_\phi \quad (24.11)$$

که معادل $v_g v_\phi = c^2$ است.

۳.۱۱ امواج طولی

• الف: با فرض $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ، از معادلات ماکسول بدست می‌آوریم

$$\circ = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} (4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \frac{1}{c} (4\pi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = \frac{1}{c} \frac{\partial (4\pi \mathbf{P} + \mathbf{E})}{\partial t} \quad (25.11)$$

که در آن \mathbf{P} چگالی پلازماسیون محیط و \mathbf{J} جریان پلازماسیون مرتبط است. با فرض داشتن وابستگی هارمونیکی $e^{j\omega t}$ ~ همه میدان‌ها، $\mathbf{E} = \chi(\omega) \mathbf{E}$ با $\chi = [\epsilon_r(\omega) - 1]/(4\pi)$ داریم. اکنون با استفاده از (۲۰.۱۱) می‌توانیم بنویسیم

$$\circ = j\omega (4\pi \mathbf{P} + \mathbf{E}) = j\omega \{[\epsilon_r(\omega) - 1] \mathbf{E} + \mathbf{E}\} = j\omega \epsilon_r(\omega) \mathbf{E} \quad (26.11)$$

بدین معنی که $\epsilon_r(\omega) = 0$ است.

• ب: بار کل و چگالی جریان در محیط را می‌توان با استفاده از معادلات زیر از \mathbf{E} بدست آورد

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (27.11)$$

که تلویحاً بیانگر معادله پیوستگی $\nabla \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot J$ است. برای E که از رابطه (۲۸.۱۱) داده می‌شود، بدست می‌آوریم

$$\rho = \frac{-jk}{4\pi} E_0 e^{j(\omega t - kx)}, \quad J = \hat{x} \frac{-j\omega}{4\pi} E_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (28.11)$$

• ج: با فرض حرکت الکترون‌ها با اصطکاک ناچیز، معادله حرکت تک الکترون برابر است با:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \mathbf{r} - e \mathbf{E} \quad (29.11)$$

که در آن m_e جرم الکtron و r فاصله الکtron از موقعیت تعادلش است. برای یک میدان تک رنگ $E = E_0 e^{j\omega t}$ جواب ساکن برابر است با

$$\mathbf{r} = \frac{e \mathbf{E}}{m_e (\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (30.11)$$

چگالی پلاریزاسیون محیط خواهد بود

$$\mathbf{P} = -en_e \mathbf{r} = -\frac{n_e e^2}{m_e (\omega^2 - \omega_0^2)} \mathbf{E} \equiv \chi(\omega) \mathbf{E} \quad (31.11)$$

که در آن \mathbb{D} تعداد الکترون‌ها در واحد حجم است و

$$\chi(\omega) = -\frac{n_e e^2}{m_e (\omega^2 - \omega_0^2)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (32.11)$$

پذیرندگی دیالکتریک ϵ محیط است و $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$ فرکانس پلاسمایی آن است. گذردهی دیالکتریک بدین ترتیب است

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (33.11)$$

و شرط موج طولی $\epsilon_r(\omega) = 1$ منجر به

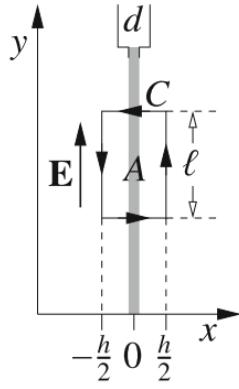
$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2} \quad (34.11)$$

توجه به این نکته مهم است که بردار موج k با این معادله تعیین نمی‌شود. ممکن است هر مقداری داشته باشد، و بنابراین سرعت فاز ممکن است دلخواه باشد (کمتر یا بیشتر از بندج). امواج طولی در فیزیک ماده متراکم پلاریتون نیز نامیده می‌شود. در یک محیط الکtron آزاد که در آن $\omega = \omega_p$ (یک فلز ساده، یک گاز یونیزه شده یا یک پلاسم)، ما $\omega_p = \omega$ داریم. در این حالت امواج را امواج پلاسمائی یا پلاسمون نامند.

۴.۱۱ انتقال و بازتاب توسط یک فویل نازک رسانا

• الف: از آنجایی که مسئله تعیین ضریب انتقال و انعکاس خطی است و محیط همسانگرد است، انتخاب قطبش دلخواه است. برای مثال و تعریف، قطبش خطی را با میدان الکتریکی E موج ورودی موازی با محور y و مغناطیسی B موازی با محور z ، فرض می‌کنیم.

^۱ Dielectric Susceptibility



شکل (ج-۱۱)

قضیه استوکس را روی یک مسیر مستطیلی بسته C ، که با سطح A محدود است، اعمال می‌کنیم: یک بار برای E و یک بار برای B . در هر دو مورد، قاعده مسیر از $x = -h/2$ تا $x = +h/2$ گسترش می‌یابد، در حالی که ارتفاع، طول l ، موازی با محور y برای میدان الکتریکی E ، و با محور z برای میدان مغناطیسی B ، همانطور که در شکل (ج-۱۱) نشان داده شده است. برای میدان الکتریکی، داریم.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \left[E \left(+\frac{h}{2} \right) - E \left(-\frac{h}{2} \right) \right] l = -\frac{j\omega}{c} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{j\omega}{c} \bar{B} lh \quad (۳۵.۱۱)$$

که در آن \bar{B} دامنه B در نقطه‌ای از سطح A ، بر اساس قضیه مقدار میانگین است. از آنجایی که B محدود است، در حد $h \rightarrow 0$ داریم و اولین مورد از رابطه (۳۶.۱۱) ثابت می‌شود. برای میدان مغناطیسی داریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \left[B \left(+\frac{h}{2} \right) - B \left(-\frac{h}{2} \right) \right] l = \int_A \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + j\frac{\omega}{c} \mathbf{E} \right) \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_A \frac{4\pi}{c} K \delta(x) dx dz + \int_c \frac{j\omega}{c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \frac{4\pi}{c} l \bar{K} + \frac{j\omega}{c} \bar{E} lh \end{aligned} \quad (۳۶.۱۱)$$

که در آن، در خط دوم، \mathbf{J} را با $K \delta(x)$ جایگزین کردیم، و در خط سوم، \bar{K} مقداری است که توسط K در قسمتی از طول l در نظر گرفته شده است. از آنجایی که مجدداً \bar{E} محدود است، حاصلضرب $0 \rightarrow h$ به صورت $0 \rightarrow h$ و دومی از رابطه (۳۶.۱۱) ثابت می‌شود.

- ب: کلی ترین عبارت برای میدان، مجموع تابش و موج بازتاب برای $x < 0$ و موج ارسالی فقط برای $x > 0$ است:

$$E(x, t) = \begin{cases} E_i e^{j(\omega t - kx)} + E_r e^{j(\omega t + kx)} \\ E_t e^{j(\omega t - kx)} \end{cases} \quad (۳۷.۱۱)$$

دامنهای E_t و E_r باید به عنوان توابع E_i و سایر پارامترها، با اعمال (۳۷.۱۱) به عنوان شرایط مرزی تعیین شوند. با توجه به اینکه $K = \sigma d E(0) = \sigma d E_t$ و $c \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}$ داریم،

$$E_t - E_i - E_r = 0, \quad E_t - E_i + E_r = -\frac{4\pi \sigma d}{c} E_t \quad (۳۸.۱۱)$$

به طوری که با نوشتن $2\pi\sigma d/c = \eta$ به صورت مختصر، داریم

$$E_r = \frac{\eta}{1 + \eta} E_i, \quad E_t = \frac{1}{1 + \eta} E_i \quad (۳۹.۱۱)$$

- ج: در حد $\omega \gg \eta$ رسانایی با $\sigma = n_e e^2 / m_e \eta$ داده می‌شود و یک عدد حقیقی است (رسانای اهمی). توان مکانیکی P میانگین تناوبی $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ است که روی حجم فویل

انتگرال‌گیری شده است، بنابراین (در واحد سطح) بدست می‌آوریم.

$$P = \frac{1}{2} |E(\circ)|^2 d = \frac{1}{2} \frac{\sigma d}{(1+\eta)^2} E_i^2 = \frac{c}{4\pi} \frac{\eta}{(1+\eta)^2} E_i^2 \quad (40.11)$$

(توجه کنید که E_i را می‌توان به صورت یک مقدار حقیقی در نظر گرفت).

در حد $\omega \ll \eta$ رسانایی $\epsilon_r \omega / 4\pi c = -j\omega_p^2 / m_e \omega = -jn_e e^2 / m_e \omega$ است و بنابراین موهومی است، و مربوط به گذردهی الکتریکی حقیقی $\omega_p^2 / \omega = 1 - \epsilon_r$ است. بر این اساس، J و E فاز مخالف دارند، و همانطور که می‌توان مستقیماً اثبات کرد $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ است.

- ۵: شار انرژی از طریق فویل از تفاوت بین مقادیر شار پواین‌تینگ در دو سطح به دست می‌آید (در اینجا برای سادگی میدان‌های حقیقی را در نظر می‌گیریم).

$$S(\circ^+) - S(\circ^-) = \frac{c}{4\pi} [E(\circ^+)B(\circ^+) - E(\circ^-)B(\circ^-)] \quad (41.11)$$

با اعمال شرایط مرزی می‌توان نوشت

$$E(\circ^+)B(\circ^+) - E(\circ^-)B(\circ^-) = E(\circ)[B(\circ^+) - B(\circ^-)] = -E(\circ) \frac{4\pi}{c} J d \quad (42.11)$$

بنابراین

$$S(\circ^+) - S(\circ^-) = -JE(\circ)d = -KE(\circ) \quad (43.11)$$

به عنوان مثال، شار انرژی از طریق فویل برابر با توان مکانیکی تلف شده در فویل است (همه مقادیر در واحد سطح تعریف شده‌اند).

از طرف دیگر، ممکن است شار انرژی را مستقیماً محاسبه کرده و آن را با توان مکانیکی مقایسه کنیم. برای بردار پواین‌تینگ با میانگین تناوبی در دو سطح داریم

$$\langle S(\circ^+) \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle E(\circ^+) \rangle = \frac{c}{2\pi} |E_t|^2 = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{|1+\eta|^2} E_i^2 \quad (44.11)$$

$$\begin{aligned} \langle S(\circ^-) \rangle &= \epsilon_r c^2 \langle E(\circ^-)B(\circ^-) \rangle = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [(E_i + E_r)(E_i^* + E_r^*)] \\ &= \frac{c}{2\pi} \frac{1}{|1+\eta|^2} \operatorname{Re} (2\eta^* + 1) E_i^2 \end{aligned} \quad (45.11)$$

اگر $\omega \ll \eta$ ، آنگاه η کاملاً موهومی و $S(\circ^-) = S(\circ^+)$ است: هیچ شار انرژی خالص در داخل فویل وجود ندارد، و همواره توان مکانیکی از بین می‌رود.

اگر $\omega \gg \eta$ ، آنگاه η حقیقی است و شار خالص انرژی برابر است با:

$$\langle S(\circ^+) \rangle - \langle S(\circ^-) \rangle = \frac{2\pi}{c} \frac{1 - (2\eta + 1)}{(1+\eta)^2} E_i^2 = -\frac{c}{4\pi} \frac{\eta}{(1+\eta)^2} E_i^2 \quad (46.11)$$

که برابر است با منهای توان جذب شده رابطه (40.11).

۵.۱۱ پوشش ضد انعکاس

- الف: در غیاب منابع در $x = +\infty$ جواب کلی را می‌توان به صورت زیر (با حذف وابستگی زمانی رایج $(e^{j\omega t})$) نوشت:

$$E = \begin{cases} E_i e^{-jkx} + E_r e^{jkx} & (x < 0) \\ E_+ e^{-jn_1 kx} + E_- e^{jn_1 kx} & (0 < x < d) \\ E_t e^{-jn_1 kx} & (x > d) \end{cases} \quad (47.11)$$

که در آن $E_i, k = \omega/c$ دامنه موج منعکس شده در $x = 0$ و E_+ دامنه امواج منتشر شده در امتداد $+x$ و $-x$ ، به ترتیب، در $x < 0$ لایه، و E_t دامنه موج منتشر شده در امتداد $+x$ در نیم فضای $x > d$ است. زیرنویس‌های میدان‌های الکتریکی E در (۴۷.۱۱) با زیرنویس‌های بردارهای موج \mathbf{k} در شکل (۲.۱۱) مطابقت دارند.

- ب: شرایط تطبیق مستلزم آن است که میدان الکتریکی و مشتق آن نسبت به x (که متناسب با میدان مغناطیسی است) در صفحات $x = 0$ و $x = d$ پیوسته باشند. بدین ترتیب بدست می‌آوریم

$$E_i + E_r = E_+ + E_- \quad (48.11)$$

$$E_i - E_r = n_1(E_+ - E_-) \quad (49.11)$$

$$E_+ e^{-jn_1 kd} + E_- e^{jn_1 kd} = E_t e^{-jn_1 kd} \quad (50.11)$$

$$n_1(E_+ e^{-jn_1 kd} - E_- e^{jn_1 kd}) = n_2 E_t e^{-jn_1 kd} \quad (51.11)$$

- ج: از آنجایی که نیاز داریم هیچ موج بازتابی در خلاء وجود نداشته باشد، E_r باید صفر باشد. با قرار دادن $E_r = 0$ در روابط (۴۸.۱۱) - (۵۱.۱۱)، دومی را می‌توان به عنوان یک سیستم خطی همگن در E_+, E_i, E_t و E_- در نظر گرفت. چنین سیستمی تنها در صورتی جواب‌های غیر ضروری دارد که دترمینان آن صفر باشد، یعنی اگر

$$e^{-jn_1 kd} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} \quad (52.11)$$

در مورد لایه‌ای با ضخامت d با خلاء در دو طرف، $n_1 = n_2$ و سمت راست (۵۲.۱۱) برابر با واحد است، بنابراین $e^{-jn_1 kd} = 1$. این به معنای $2m\pi = 2n_1 kd$ با m هر عدد صحیح است. بنابراین، هنگامی که ضخامت لایه $d = m\lambda/2n_1$ (از $k = 2\pi/\lambda$) باشد، موج بازتابی وجود ندارد، یعنی زمانی که "عمق نوری" nd برابر با یک عدد نیم صحیح طول موج باشد.

- د: در حالت کلی، سمت چپ (۵۲.۱۱) عدد مختلطی با مدول یک است، در حالی که سمت راست همیشه عدد حقیقی است اگر $n_1 \neq n_2$ و همانطور که ما فرض کردیم حقیقی باشند. بنابراین، تنها در صورتی جواب داریم که $e^{-jn_1 kd} = \pm 1$. حالت مورد $n_1 = n_2$ است که در بالا در انتهای بند (ج) در نظر گرفته شده

$$\text{است. در حالت دوم } e^{-j\gamma n_1 kd} = -1 \quad \text{شرط را داریم}$$

$$2n_1 kd = (2m+1)\pi, \quad \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} = -1 \quad (53.11)$$

معادله دوم دلالت بر $n_2 = \sqrt{n_1}$ دارد. ضخامت لایه باید باشد:

$$d = (2m+1) \frac{\lambda}{4n_1} \quad (54.11)$$

دوباره با m هر عدد صحیح. کوچکترین ضخامت ممکن ($d = \lambda/(4n_1)$ ، مربوط به $m = 0$) است. این نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب مواد و ضخامت لایه، می‌توانیم یک پوشش "ضد انعکاس" روی یک عنصر نوری تولید کنیم (مانند یک پنجره یا عدسی) که نمی‌خواهیم هیچ بازتابی از آن رخ دهد.

۶.۱۱ دو شکستی و صفحه موج

الف: موج تابشی را می‌توان به صورت برهم نهی دو موج با پلاریزاسیون P و S در نظر گرفت، یعنی یکی دارای میدان الکتریکی در صفحه xy و دیگری موازی با z است. تفاوت بین ضرایب شکست برای قطبش P و S ، n_s و n_p ، منشأ دو زاویه انكسار متفاوت $\theta_{t,p}$ و $\theta_{t,s}$ را مطابق قانون استل می‌دهد. با این فرضیات، زوایای شکست عبارتند از:

$$\sin \theta_{t,p} = \frac{\sin \theta_i}{n_p} = \sin(\theta_t - \alpha), \quad \sin \theta_{t,s} = \frac{\sin \theta_i}{n_s} = \sin(\theta_t + \alpha) \quad (55.11)$$

$$\text{در حد } 1 \ll \alpha \text{ می‌توانیم } \cos \alpha \approx \alpha \text{ و } \sin \alpha \approx \alpha \text{ را تقریب زده و خواهیم داشت}$$

$$\sin(\theta_t \pm \alpha) = \sin \theta_t \cos \alpha \pm \cos \theta_t \sin \alpha \approx \sin \theta_t \pm \alpha \cos \theta_t \quad (56.11)$$

ضرایب شکست به ترتیب $n_s = \bar{n} - \delta n$ و $n_p = \bar{n} + \delta n$ با $\delta n \ll \bar{n}$ هستند. برای قطبش

$$\text{تا مرتبه اول در } \frac{\delta n}{\bar{n}} \text{ داریم،}$$

$$\sin \theta_t - \alpha \cos \theta_t = \frac{\sin \theta_t}{\bar{n} + \delta n} \approx \frac{\sin \theta_t}{\bar{n}} \left(1 - \frac{\delta n}{\bar{n}} \right) \quad (57.11)$$

$$\text{و به طور مشابه، برای قطبش } S \text{ داریم}$$

$$\sin \theta_{t,s} \approx \frac{\sin \theta_i}{\bar{n}} \left(1 - \frac{\delta n}{\bar{n}} \right) \quad (58.11)$$

نتایج بالا منجر به

$$\bar{n} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}, \quad \text{و} \quad \alpha = 2 \frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_t} \frac{\delta n}{\bar{n}} = 2\delta n \frac{\sin^2 \theta_t}{\cos \theta_t \sin \theta_i} \quad (59.11)$$

ب: برای داشتن نور پلاریزه دایره‌ای در خروجی، مولفه‌های پلاریزه P و S باید دارای اختلاف فاز $\delta\phi = \pi/2$ باشند. ضرایب برای نور قطبش دایره‌ای به‌این ترتیب است

$$\delta\phi = k \cdot 2\delta n d = \frac{4\pi \delta n d}{\lambda} \stackrel{\circ}{=} \frac{\pi}{2} \quad (60.11)$$

یعنی $\delta\phi = \lambda/(8\delta n)$. به‌این صفحه یک چهارم موج می‌گویند. اگر در عوض $\delta\phi = \pi/4$ باشد، یک تغییر نسبی علامت بین دو مولفه وجود دارد که منجر به چرخش قطبش $\pi/2$ می‌شود. این یک صفحه نیم‌موج می‌نماید.

٧.١١ شکست مضاعف مغناطیسی و اثر فاراده

- الف: با نادیده گرفتن اثر میدان مغناطیسی موج، بسیار کوچکتر از میدان خارجی B_0 ، معادله حرکت برای الکترون‌ها

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} = -e \mathbf{E} - e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_0 - m_e \omega_0^2 \quad (61.11)$$

میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی قطبی شده دایره‌ای را می‌توان با نمادهای مختلط نوشت:

$$\mathbf{E}_{\pm} = E(\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) e^{j(\omega t - kz)} \quad (62.11)$$

که در آن علائم مثبت و منفی به ترتیب با قطبش‌های دایره‌ای چپگرد (در جهت عقربه‌های ساعت) و راستگرد (در خلاف جهت عقربه‌های ساعت) مطابقت دارد. ما به دنبال حواب‌های رابطه (٦١.١١) بصورت زیر هستیم

$$\mathbf{r}_{\pm} = r_{\pm}(\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) e^{j(\omega t - kz)} \quad \mathbf{v}_{\pm} = v_{\pm}(\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) e^{j(\omega t - kz)} \quad (63.11)$$

$$\begin{aligned} &\text{که در آن } v_{\pm} = j\omega r_{\pm} \text{ است. ضرب برداری } \mathbf{v}_{\pm} \times \mathbf{B}_0 \text{ برابر است با} \\ &\mathbf{v}_{\pm} \times \mathbf{B}_0 = v_{\pm} B_0 (\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) \times \hat{\mathbf{z}} = v_{\pm} B_0 (-\hat{\mathbf{y}} \pm j\hat{\mathbf{x}}) = \pm j v_{\pm} B_0 (\hat{\mathbf{x}} \pm j\hat{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (64.11)$$

$$\begin{aligned} &\text{بنابراین رابطه (٦١.١١) منجر به معادله‌ای برای } \mathbf{r}_{\pm} \text{ می‌شود} \\ &(\omega_0^2 - \omega^2) r_{\pm} = -\frac{e}{m_e} E \mp j e \frac{v_{\pm}}{m_e c} B_0 = -\frac{e}{m_e} E \mp \omega \omega_c r_{\pm} \end{aligned} \quad (65.11)$$

$$\begin{aligned} &\text{که در آن } \omega_c = eB_0/m_ec \text{ فرکانس سیکلوترون است. جواب برای } r_{\pm} \text{ برابر است با:} \\ &r_{\pm} = \frac{eE}{m_e(\omega^2 - \omega_0^2 \mp \omega \omega_c)} \end{aligned} \quad (66.11)$$

بنابراین، یک قطبش متفاوت از محیط \mathbf{p}_{\pm} ، و یک پذیرندگی دی‌الکتریک مربوطه اختلاف χ_{\pm} ، برای هر حالت قطبش دایره‌ای موج الکترومغناطیس داریم.

$$\mathbf{p}_{\pm} = -en_e \mathbf{r}_{\pm} \equiv \chi_{\pm} \mathbf{E}_{\pm} \quad (67.11)$$

به‌نوبه خود، این دو ثابت دی‌الکتریک مختلف $\epsilon_{\pm} = 1 + 4\pi\chi_{\pm}$ می‌دهد.

$$\epsilon_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 \mp \omega \omega_c} \quad (68.11)$$

که در آن $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}$ فرکانس پلاسمای محیط است. انتشار موج نیاز به $\omega > \omega_{co\pm}$ که در آن دو فرکانس قطع $\omega_{co\pm}$ به قطبش موج بستگی دارد.

$$\omega_{co\pm} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2 + \frac{\omega_c^2}{4}} \pm \frac{\omega_c}{2} \quad (69.11)$$

بنابراین محیط مغناطیسی دوشکستی است. برای امواج فرکانس در محدوده $\omega_{co+} < \omega < \omega_{co-}$ تنها یک حالت قطبش دایره‌ای می‌تواند در محیط منتشر شود، در حالی که یک موج محوشونده برای قطبش مخالف داریم. دو فرکانس تشدید $\omega_{res\pm}$ که با $\chi(\omega_{res\pm}) \rightarrow \infty$ تعریف می‌شوند، همچنین به قطبش بستگی دارند:

$$\omega_{res\pm} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}} \pm \frac{\omega_c}{2} \quad (70.11)$$

توجه داشته باشید که در حالت $\omega = \omega_c$ به عنوان مثال، برای یک محیط الکترون آزاد مغناطیسی شده، یک تشدید منفرد در ω_c تنها برای یک قطبش دایره ای وجود دارد، (مسئله ۹.۷).

دانش گذردهی (یا به طور معادل، ضریب شکست) برای دو حالت مستقل قطبش دایره‌ای برای مطالعه انتشار یک موج عرضی قطبشی دلخواه کافی است، زیرا موج دوم را می‌توان همیشه به صورت برهم نهی خطی دایره‌ای بیان کرد. حالت‌های قطبی شده توجه داشته باشید که اگر برای جواب‌های قطبی شده خطی جستجو می‌کردیم، مخلوطی از بردارهای پلاریزاسیون را پیدا می‌کردیم که در امتداد \hat{x} و \hat{y} هستند، یعنی گذردهی به جای عدد، یک ماتریس بود. می‌توان نشان داد که چنین ماتریسی می‌تواند، با حالت‌های قطبی دایره‌ای به عنوان بردارهای ویژه و معادله (۶۸.۱۱) به عنوان مقادیر ویژه، قطعی باشد

- ب: موج قطبی شده خطی را می‌توان به صورت برهم نهی دو حالت قطبش دایره‌ای در نظر گرفت، به طوری که در $z = z_c$ میدان الکتریکی موج را می‌توان نوشت.

$$\mathbf{E}(z = z_c, t) = \hat{x} E e^{j\omega t} = \frac{E}{2} [(\hat{x} + j\hat{y}) + (\hat{x} - j\hat{y})] e^{j\omega t} \quad (71.11)$$

دو مولفه دایره‌ای قطبی شده با سرعت‌های فازی متفاوتی $v_{\pm} = c/n_{\pm}$ که در آن $n_{\pm} = \sqrt{\epsilon_{\pm}}$ ضریب شکست مرتبط با هر حالت قطبش است، حرکت می‌کنند. در $z = l$ ، میدان الکتریکی موج برابر است با

$$\mathbf{E}(z = l, t) = \frac{E}{2} [(\hat{x} + j\hat{y}) e^{-jk_{\pm}l} + (\hat{x} - j\hat{y}) e^{jk_{\pm}l}] e^{j\omega t} \quad (72.11)$$

که در آن $k_{\pm} = \omega/v_{\pm} = (\omega/c)n_{\pm}$ است. با تقریب مرتبه اول در ω_c/ω می‌توانیم بنویسیم $n_{\pm} = n(\omega_c = \omega_c^0) \approx n_0 \pm \delta n$ که در آن $\omega_c^0 \approx n_0 \pm \delta n$ است و

$$\delta n = \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{2n_0(\omega^2 - \omega_c^2)^2} \quad (73.11)$$

بنابراین، بردارهای موج برای دو قطبشی را می‌توان بصورت $k_{\pm} \approx k_0 \pm \delta k$ نوشت، که در آن $k_0 = (\omega/c)n_0$ است. میدان الکتریکی در $z = l$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z = l, t) &= \frac{E}{2} [(\hat{x} + j\hat{y}) e^{-j\delta kl} + (\hat{x} - j\hat{y}) e^{j\delta kl}] e^{j(\omega t - k_0 l)} \\ &\propto \hat{x} \cos(\delta kl) - \hat{y} \sin(\delta kl) \end{aligned} \quad (74.11)$$

بنابراین، قطبش با زاویه $\phi = \delta k$ ، متناسب با شدت میدان مغناطیسی، چرخیده است.

۸.۱۱ امواج ویسلر

- الف: گذردهی دیالکتریک گاز الکترون آزاد مغناطیسی شده برای امواج قطبش عرضی، در طول میدان مغناطیسی منتشر می‌شود (مسئله ۷.۱۱)

$$\epsilon = \epsilon_{\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)} \quad (75.11)$$

که در آن $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}$ فرکانس پلاسمای محیط، $\omega_c = eB_0 / m_e c$ فرکانس سیکلوترون (لامور)، و علامت مثبت یا منفی به ترتیب نمایشگر راستگرد و چپگردن بودن قطبش دایره‌ای است. از آنجائی که، بطور کلی، رابطه پاشندگی برابر $\omega^2 = c^2 k^2 / \epsilon(\omega)$ ، رابطه (۱۱.۱۱) است، بدین معنا است که $\epsilon = c^2 / \alpha \omega$ می‌باشد. برای $\omega \ll \omega_p$ و $\omega \ll \omega_c$ رابطه (۷۵.۱۱) بصورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\epsilon_{\pm} \approx \pm \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c} \quad (۷۶.۱۱)$$

انتشار موج مستلزم $\epsilon > 0$ است. بنابراین، فقط امواج با قطبش چپگرد می‌توانند در حضور رابطه پاشندگی معادله (۱۱.۱۱) با $\alpha = c^2 \omega_c / \omega_p^2$ منتشر شوند.

فرض کنید مقادیر n_e و B_0 که در کتب داده می‌شود برابر $10^6 s^{-1}$ و $5/6$ هستند و $\omega_p \approx 10^5 s^{-1}$ باشد. فرکانس معمول برای رابطه (۷۶.۱۱) $\approx 10^5 s^{-1}$ است.

- ب: ابتدا، توجه کنید که، بطور کلی، رابطه (۱۱.۱۱) می‌گوید که $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2\alpha k = 2\omega/k = 2v_p h i$. بنابراین، سرعت فاز به صورت زیر به فرکانس وابسته است:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\alpha \omega} = \sqrt{\frac{\omega_c \omega}{\omega_p^2}} c \ll c \quad (۷۷.۱۱)$$

با زاء $\omega = 10^5$ برای مقادیر بالا ω_p و ω_c سرعت فاز $v_\phi \approx 0.03c$ بدست می‌آید.

- ج: با دامنه طیفی از ω_1 تا ω_2 ، مولفه‌های فرکانس با سرعت‌هایی با ضریب ۲ متفاوت حرکت می‌کنند، به طوری که بسته موج تولید شده توسط رعد و برق پخش می‌شود و طول آن در طول انتشار آن افزایش می‌یابد. فرکانس‌های بالاتر سریع‌تر حرکت می‌کنند و بنابراین ناظر زودتر از فرکانس‌های کندرتر دریافت می‌کنند. منشأ نام "ویسلر" (سوت زدن) از اینجاست.

برای تخمین گستردگی بسته موج از مسافت $L = 10^9$ سانتی متر، فرض می‌کنیم که مرکز بسته موج با سرعت گروهی $v_g \approx 0.06c$ حرکت می‌کند تا رسیدن به فاصله L پس از یک زمان $\tau = L/v_g = 0.5s$ ثانیه فرکانس‌های "نهائی" ω_1 و ω_2 دارای سرعت‌های گروهی به ترتیب $v_1 \approx 0.04c$ و $v_2 \approx 0.08c$ خواهند بود و مدت زمان پالس ممکن است تقریباً به صورت تفاوت $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2 = L/v_1 - L/v_2 \approx (0.083 - 0.042)s = 0.041s$ باشد، تخمین زده شود. این تخمین تقریبی تغییر شکل بسته موج را به دلیل پاشندگی قوی نادیده می‌گیرد.

۹.۱۱ انتشار موج در "زوج" پلاسما

در واقع، محاسبه رابطه پاشندگی در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی B ، ابتدا راحت است، سپس، پاسخ به بند (الف) به سادگی به عنوان یک حالت خاص با $B = B_0 \hat{z}$ به دست می‌آید. فرض می‌کنیم B_0 است و یک موج به صورت خطی در امتداد \hat{x} در یک دستگاه مرجع دکارتی xyz قطبی شده است. معادلات دیفرانسیل برای سرعت پوزیترون،

و الکترون، v_+ و v_- به ترتیب عبارتند از

$$\frac{dv_{x\pm}}{dt} = \pm \frac{e}{m_e c} (E_x + v_{y\pm} B_\circ) \quad \frac{dv_{y\pm}}{dt} = \mp \frac{e}{m_e c} (v_{x\pm} B_\circ) \quad (78.11)$$

که در اینجا $v_{z\pm} = 0$ فرض کرده‌ایم. با مشتق‌گیری از قسمت اول رابطه (78.11) یکبار دیگر نسبت به زمان، و جایگزینی رابطه دوم (78.11) برای $dv_{y\pm}/dt$ بدست می‌آوریم

$$\frac{d^2 v_{x\pm}}{dt^2} = \pm j\omega \frac{e}{m_e} E_x \pm \frac{eB_\circ}{m_e c} \frac{dv_{y\pm}}{dt} = \pm j\omega \frac{e}{m_e} E_x + \omega_c^2 v_{x\pm} \quad (79.11)$$

که در آن $E_x = E_\circ e^{j\omega t}$ فرکانس سیکلوترون است. با جایگزینی $\omega_c = \sqrt{eB_\circ/m_e c}$ خواهیم داشت

$$v_{x\pm} = \pm j\omega \frac{e}{m_e (\omega_c^2 - \omega^2)} E_\circ \quad (80.11)$$

شبیه همین راه برای $v_{y\pm}$ داریم

$$v_{y\pm} = \pm \frac{eB_\circ}{m_e} v_{x\mp} = j\omega \frac{e}{m} E_\circ \quad (81.11)$$

که برای هر دو الکترون و پوزیترون مقدار یکسانی دارد. بنابراین مولفه‌های چگالی جریان عبارتند از:

$$\begin{aligned} J_x &= n_\circ e (v_{x+} - v_{x-}) = \frac{2jn_\circ e^2}{m_e (\omega_c^2 - \omega^2)} E_\circ \\ J_y &= n_\circ e (v_{x+} - v_{x-}) = 0 \end{aligned} \quad (82.11)$$

گذردهی دی الکتریک زوج پلاسماء ($\epsilon(\omega)$) از تعاریف معمول $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = j\omega \chi \mathbf{E}$ به دست می‌آید:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (83.11)$$

همین نتیجه را می‌توان برای قطبش دایره‌ای، هم برای امواج چپگرد و هم برای امواج راستگرد، به دست آورد، که تأیید می‌کند که انکسار مضاعف ناشی از مغناطیسی در یک زوج پلاسما وجود ندارد. این با حالت محیطی که فقط حاوی الکترون‌های آزاد که در مسئله ۷.۱۱ در نظر گرفته شده متفاوت است.

برای بند (الف)، که در آن $B_\circ = \omega_c$ را تنظیم می‌کنیم، فرکانس قطع را در $\omega = 2\omega_p$ بدست می‌آوریم.

برای بند (ب)، رزونانسی در $\omega_c = \omega$ وجود دارد، در حالی که انتشار موج برای فرکانس‌های محدوده $\sqrt{\omega_c^2 + 2\omega_p^2} < \omega < \omega_c$ ممنوع است.

۱۰.۱۱ امواج سطحی

۰ الف: در یک محیط دی الکتریک که با $\epsilon(\omega) = \epsilon$ توصیف می‌شود، میدان الکترومغناطیسی تک رنگ با فرکانس ω معادله هلمولتز را برآورده می‌کند. بنابراین برای میدان مغناطیسی داریم

$$\left(\nabla^2 + \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) B_z = 0 \quad (84.11)$$

با جایگزینی رابطه (۱۲.۱۱) برای B_z در معادله هلمولتز، خواهیم داشت

$$q^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon = 0 \quad (۸۵.۱۱)$$

- ب: از معادله $c\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ و تعریف ϵ (برای امواج تکرنگ در نماد مختلط) $c\nabla \times \mathbf{B} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$ با جایگزینی رابطه (۱۲.۱۱) برای \mathbf{B} خواهیم داشت

$$j\omega\epsilon\mathbf{E} = (\hat{x}\frac{\partial}{\partial y} - \hat{y}\frac{\partial}{\partial x})B_z c = (-jk\hat{x} - q\hat{y})B_z c \quad (۸۶.۱۱)$$

که از اینجا میدان الکتریکی بدست می‌آید:

$$\mathbf{E} = -(k\hat{x} - jq\hat{y})\frac{c}{\omega\epsilon} B_z \quad (۸۷.۱۱)$$

- ج: از تعریف $S = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/(4\pi)$ بدست می‌آوریم که S دارای دو مولفه در امتداد x و y است، و خواهد بود

$$S_x = \frac{c}{4\pi} E_y B_z = \frac{qcB_z^0}{4\pi\epsilon\omega} e^{jqx} \cos(ky - \omega t) \sin(ky - \omega t) \quad (۸۸.۱۱)$$

$$S_y = -\frac{c}{4\pi} E_x B_z = \frac{k c B_z^0}{4\pi\epsilon\omega} e^{jqx} \cos^2(ky - \omega t) \quad (۸۹.۱۱)$$

با این حال، به طور میانگین در طول یک دوره نوسان، $\langle S_x \rangle = 0$ را به دست می‌آوریم، بنابراین شار انرژی خالص فقط در جهت y است، زیرا $\langle S_y \rangle \neq 0$.

- د: مولفه مماسی میدان مغناطیسی در سطح مشترک بین دو رسانه باید پیوسته باشد. بنابراین، از $B_1 = B_2$ $B_z(0^+) = B_z(0^-)$ بدست می‌آوریم.

- ه: همچنین مولفه مماسی الکتریکی باید در سطح مشترک پیوسته باشد، بنابراین $E_y(0^-) = E_y(0^+)$. با استفاده از نتایج بند (ب) و بند (د) به دست می‌آوریم

$$\frac{q_1}{\epsilon_1} = -\frac{q_2}{\epsilon_2} \quad (۹۰.۱۱)$$

از آنجایی که هم $q_1 > 0$ و هم $\epsilon_1 > 0$ باید دارای علائم مخالف باشند.

- و: با استفاده از رابطه $(q_1/\epsilon_1)^2 = (q_2/\epsilon_2)^2$ و نتیجه بند (الف) بدست می‌آوریم

$$\epsilon_2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \right) = \epsilon_1 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 \right) \quad (۹۱.۱۱)$$

که از آن رابطه زیر بدست می‌آید

$$\omega^2 = k^2 c^2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_1 \epsilon_2} = k^2 c^2 \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{\epsilon_2 \epsilon_1} \quad (۹۲.۱۱)$$

از آنجایی که موج فقط در صورتی می‌تواند منتشر شود که $k^2 > 0$ و $\epsilon_1 \epsilon_2 < 0$ باشد، شرط اضافی $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0$ را نتیجه می‌گیریم.

- ز: از آنجایی که $-\epsilon_1 < \epsilon_2$ باید برقرار باشد، ممکن است یک فلز، یا یک گاز الکترون آزاد یا یک پلاسمای ایده‌آل را انتخاب کنیم...، که برای آن $\omega_p^2/\omega^2 < 1$ و فرکانس به‌گونه‌ای باشد که $\omega < \omega_p/\sqrt{2}$.

مودهای الکترومغناطیسی که در بالا توضیح داده شد، امواج سطحی هستند (که پلاسمون‌های سطحی نیز نامیده می‌شوند). این امواج در امتداد سطح یک رسانا منتشر و در جهت عمود بر هم حذف می‌شوند، به طوری که انرژی الکترومغناطیسی در یک لایه باریک، نازک‌تر از طول موج در خلاء، محدود می‌شود. امواج سطحی سنک بنای پلاسمونیک هستند، رشتہای که جهت توسعه دستگاه‌های نوری و الکترونیکی در مقیاس نانومتریک است.

۱۱.۱۱ رزونانس می و یک "فراماده پلاسمونیک"

• الف: میدان تابشی را می‌توان با نمادهای مختلط به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (93.11)$$

از آنجایی که $\lambda \ll a$ ، با فرض قرار گرفتن مرکز کره در $x = 0$ ، میدان الکتریکی را می‌توان نسبت به حجم کره یکنواخت در نظر گرفت. بنابراین $\mathbf{E}_i \approx \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}$ است. حال یک مختصات کروی سیستم (r, θ, ϕ) با مبدأ در مرکز کره و جهت اوج آنرا موازی با \mathbf{E}_i در سطح کره، $a = r$ را معرفی می‌کنیم. شرایط مرزی معمول را در سطح مشترک بین دو رسانه داریم

$$E_{\perp}(a^+, \theta) - E_{\perp}(a^-, \theta) = 4\pi\sigma(\theta), \quad E_{\parallel}(a^+, \theta) - E_{\parallel}(a^-, \theta) = 0. \quad (94.11)$$

که در آن $\sigma(\theta)$ چگالی بار سطحی روی کره، مستقل از ϕ در تقریب ما است. بنابراین مسئله مشابه حالت یک کره دی‌الکتریک در یک میدان خارجی یکنواخت ثابت که در مسئله ۴.۳ بررسی شده است. می‌توانیم نتایج میدان داخلی و قطبش را در مورد یک میدان نوسانی به صورت زیر گسترش دهیم.

$$\mathbf{E}_{int} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\epsilon_r(\omega) + 2}, \quad \mathbf{P} = \chi \mathbf{E}_{int} = \frac{3\epsilon_r(\omega) - 1}{4\pi(\epsilon_r(\omega) + 2)} \mathbf{E}_0. \quad (95.11)$$

تفاوت با مورد الکترواستاتیک این است که اکنون ϵ_r به فرکانس بستگی دارد و لزوماً مثبت و بزرگ‌تر از یک نیست، به طوری که میدان داخلی \mathbf{E}_{int} می‌تواند بزرگ‌تر از میدان کاربردی خارجی \mathbf{E}_0 باشد. زمانی که قسمت حقیقی مخرج صفر می‌شود، رزونانس ظاهر می‌شود. با تنظیم $\eta = \omega_p / \omega$ برای سادگی، شرط رزونانس برابر است با:

$$\epsilon_r(\omega) + 2 = 3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = 0. \quad (96.11)$$

که نتیجه میدهد

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_p^2}{3} \quad (97.11)$$

معنای فیزیکی رزونانس به ویژه برای $\omega = \omega_0$ واضح است، به عنوان مثال، برای یک کره فلزی (نانو) در یک میدان با فرکانس بالا (نوری). در این حالت فرکانس رزونانس برابر است با:

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}} \quad (98.11)$$

این فرکانس طبیعی جمعی "نوسانات می" کره الکترونی است که در مسئله ۵.۱ مورد بررسی قرار گرفته است، که به صورت پلاسمون سطحی پایین ترین مرتبه کره نیز شناخته می‌شود. بنابراین رزونانس با تحریک این حالت نوسانی مطابقت دارد.

- ب: پلاریزاسیون ماکروسکوپی با گشتاور دوقطبی هر نانوکره، $\mathbf{P}_{sphere} = PV$ ، با $V = (4\pi/3)a^3$ حجم کره، ضربدر تعداد نانوکره در واحد حجم n_s ، به دست می‌آید:

$$\mathbf{P}_{macro} = n_s \mathbf{P}_{sphere} = -\frac{3n_s V \omega_p^3}{3\omega^2 - \omega_p^2} \mathbf{E}_0. \quad (99.11)$$

این معادلتابع دیالکتریک ماکروسکوپی است

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{3n_s V \omega_p^3}{3\omega^2 - \omega_p^2} \quad (100.11)$$

انتشار امواج مستلزم این است که ϵ_r مثبت باشد، یعنی؛

$$\omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}, \quad \omega > \frac{\omega_p}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 3n_s V} \quad (101.11)$$

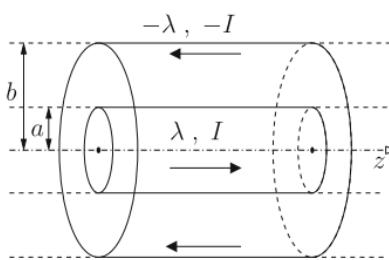
این یک مثال ساده از یک "فراماده" مصنوعی است، که در آن خواص پلاسمونیکی نانوساختارهای سازنده مواد، پاسخ نوری را تعیین می‌کنند.

فصل ۱۲

خطوط ارتباط، موجبرها، محفظه‌های رزونانسی

عنایین. انتشار هدایت شده امواج الکترومغناطیسی. خطوط ارتباط، مود TEM. موجبرها، مودهای TE و TM. محفظه‌های رزونانسی و فرکانس‌های گسته.

۱.۱۲ کابل هم محور



شکل (۱۲ - ۱)

یک کابل کواکسیال (هم محور) از دو هادی و طول بی‌نهایت تشکیل شده است: استوانه‌ای به شعاع a و یک پوسته استوانه‌ای بیرونی به شعاع داخلی $b > a$ است. به طور کلی، اگر بار در واحد طول λ بر روی هادی داخلی وجود داشته باشد، بار مخالف $-I$ در هادی خارجی وجود دارد. به طور مشابه، اگر یک جریان کلی I از هادی داخلی عبور کند، جریان "بازگشت" مخالف $-I$ در هادی خارجی عبور می‌کند.

ما از یک سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با محور z استفاده کرده و در ابتدا فرض می‌کنیم که ناحیه $b < r < a$ توسط یک محیط عایق با گذردهی الکتریک $\epsilon = \epsilon_0$ و نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = \mu_0$ پُر شده است.

- **الف:** ظرفیت و خودالقائی (اندوکتانس) در واحد طول کابل را محاسبه کنید.
- **ب:** انتشار یک سیگنال جریان $I(z, t)$ و یک سیگنال شارژ خطی مرتبط $\lambda(z, t)$ را در طول کابل با به خاطر سپردن نتایج مسئله ۴.۷ توصیف کنید که چگونه $I(z, t)$ و $\lambda(z, t)$ به یکدیگر مربوط هستند؟
- **ج:** برای $I(z, t)$ و $\lambda(z, t)$ داده شده، میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B در فضای بین رساناه را، با این فرض که E و B هر دو عرضی هستند، یعنی عمود بر جهت انتشار، بدست آورید. (چنین شکل میدان را مود TEM می‌نماید).

- ۰ د: اگر یک کابل نیمه بینهایت با یک منبع ایده‌آل در نظر بگیرید که ولتاژ $V(t)$ را بین هادی‌های داخلی و خارجی در انتهای کابل، (به اندازه کافی از انتهای کابل فاصله دارد، به طوری که ممکن است از اثرات مرزی چشم‌بوشی کنیم)، اعمال می‌کنیم. نشان دهید که کار انجام شده توسط ژنراتور برابر با شار بردار پواین‌تینگ از طریق کابل است.

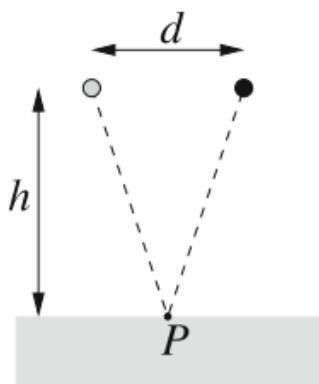
- ۰ ه: اگر محیط بین هادی‌های داخلی و خارجی دارای مقادیر حقیقی و مثبت برای ϵ و μ ، اما متفاوت از واحد باشد، پاسخ‌های قبلی چگونه تغییر می‌کنند؟

۲.۱۲ خطوط انتقال توان الکتریکی

یک سیم مستقیم نازک و بینهایت در امتداد محور z یک سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) را در نظر بگیرید. سیم در محیطی با گذردگی الکتریکی نسبی $\epsilon_r = 1$ و نفوذپذیری مغناطیسی نسبی $\mu_r = 1$ قرار دارد. فرض کنید یک جریان $I = I(z, t)$ در سیم، بصورت زیر باشد:

$$I = I(z, t) = I_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (2.12)$$

- ۰ الف: چگالی بار خطی $\lambda = \lambda(z, t)$ روی سیم را محاسبه کنید.



شکل (۲ - ۱۲)

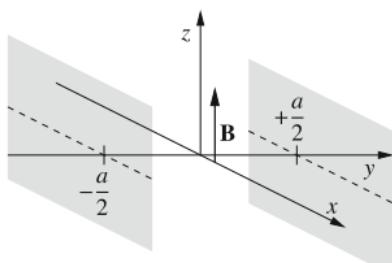
- ۰ ب: فرض کنید که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی فقط دارای مولفه‌های شعاعی و سمت (ازیموتال) خود هستند.

$$\begin{aligned} E_\phi &= E_z = 0, & E_r &= E_r(r) e^{j(\omega t - kz)}, \\ B_r &= E_z = 0, & B_\phi &= B_\phi(r) e^{j(\omega t - kz)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

میدان‌های E_r و B_ϕ را به صورت توابعی از I_0 و ω محاسبه کنید و از معادلات ماکسول برای ارزیابی سرعت فاز سیگنال $v_\phi = \omega/k$ استفاده کنید.

- ۰ ج: یک خط انتقال فشار قوی شامل دو سیم موازی مستقیم، در فاصله ثابت $d = 5$ متر و ارتفاع معمولی از روی زمین $h = 3$ متر است. دو سیم دارای شدت جریان مخالف $\pm I(z, t)$ هستند که توسط (۲.۱۲) داده شده، که معمولاً $I_0 = 10^3 A$ و $\omega = 2\pi \times 50 s^{-1}$ است. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در صفحه تقارن بین دو سیم و قدر آنها را روی زمین محاسبه کنید.

۳.۱۲ مودهای TEM و TM در یک موجبر "باز"



شکل (۳ - ۱۲)

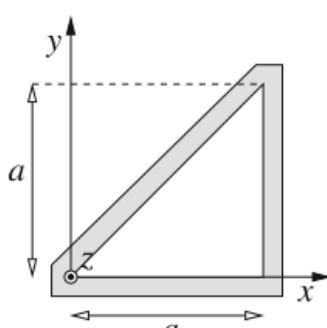
یک موجبر "باز" شامل دو صفحه موازی و کاملاً رساناً است که امواج بین آنها منتشر می‌شوند. اجازه دهید یک دستگاه مختصات دکارتی (x, y, z) را انتخاب کنیم که دو صفحه رساناً به ترتیب در $y = \pm a/2$ ، شکل (۳ - ۱۲)، باشند. یک موج الکترومغناطیسی با فرکانس ω در موجبر در امتداد \hat{z} منتشر می‌شود. میدان مغناطیسی موج در امتداد \hat{z} هدایت شده و بصورت زیر است:

$$B_z(x, y, t) = B_0 \cos(k_y y) e^{j\omega t - k_x x} \quad (3.12)$$

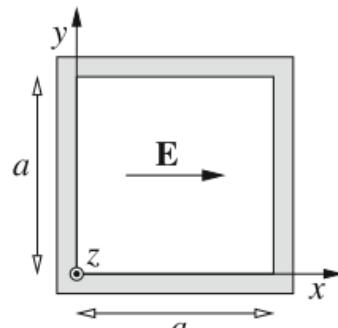
- الف: روابط بین ω و k_x را بدست آورید.
- ب: میدان الکتریکی $E = E(x, y, t)$ را پیدا کنید.
- ج: چگونگی تعیین مقادیر ممکن برای k_y توسط شرایط مرزی E را بیابید و در مورد وجود فرکانس‌های قطع بحث کنید.
- د: شار انرژی را در امتداد جهت انتشار x پیدا کنید و نشان دهید که با سرعت گروهی موج متناسب است.

۴.۱۲ موجبرهای مربعی و مثلثی

همانطور که در شکل (۴ - ۱۲) نشان داده شده است، یک موجبر دارای دیوارهای رساناً کامل با مقطع مربعی از بضع a است. دستگاه مختصات دکارتی (xyz) را انتخاب می‌کنیم که در آن قسمت داخلی موجبر توسط چهار صفحه $x = 0$ و $y = 0$ و $x = a$ و $y = a$ محدود شده است. انتشار موجی با فرکانس ω را در امتداد \hat{z} در نظر بگیرید، که میدان الکتریکی آن $E_{(xyzt)}$ عمود بر \hat{z} (مود TE) است. فرض کنید که میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نوشت:



شکل (۵ - ۱۲)



شکل (۴ - ۱۲)

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{E}}(x, y) e^{j\omega t - k_z z} \quad (4.12)$$

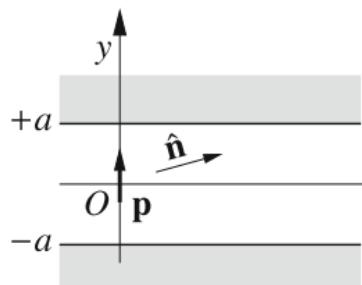
که در آن $\tilde{\mathbf{E}}(x, y)$ فقط تابع x و y است.

- الف: فرض کنید که \mathbf{E} موازی با \hat{x} است، یعنی $\mathbf{E} = \hat{x} E_x$ ، و کمترین مقدار ω را که مود TE می‌تواند در موجبر پخش شود و روابط مربوطه را برای میدان الکتریکی و مغناطیسی تعیین کنید.

- ب: کمترین فرکانس و میدان‌های الکترومغناطیسی را برای یک موجبر مشخص کنید که با صفحات رسانا $y = x$ ، $y = -x$ و $y = 0$ ، که سطح مقطع آن مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه نشان داده شده در شکل (۱۲ - ۵) است، تعیین کنید.

۵.۱۲ مودهای موجبر به عنوان یک اثر تداخلی

یک دوقطبی الکتریکی $p\hat{y}$ در مبدأ یک دستگاه مختصات دکارتی (x, y, z) بین دو صفحه بینهایت و کاملاً رسانا که به ترتیب در $y = \pm a$ قرار دارند، شکل (۱۲ - ۶)، نصب شده است.



شکل (۱۲ - ۶)

- الف: با استفاده از روش تصاویر، پتانسیل الکترواستاتیک بین دو صفحه رسانا را بیابید.
حال فرض کنید که دوقطبی نوسانی است، در نماد مختلط $\mathbf{p} = p_0 e^{j\omega t}$ و تابش ساطع شده را در ناحیه بین دو صفحه رسانا، در فواصل زیاد از دوقطبی، در نظر بگیرید، یعنی با هر دو $|x| \gg \lambda$ و $|x| \gg a$

- ب: پیدا کنید در کدام جهت \hat{n} در صفحه $z = 0$ ، تداخل سازنده بین امواج ساطع شده توسط دوقطبی و تصاویر آن و محدودیت‌های مربوطه در مقادیر ممکن فرکانس نوسان ω را مشاهده می‌کنیم.

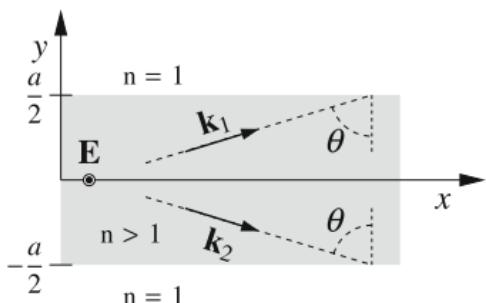
حال دو نوع موج را در نظر بگیرید که به ترتیب "۰" و "۱" نامگذاری شده‌اند و بین دو صفحه هادی با بردارهای موج $k_{0,1}$ در صفحه $z = 0$ منتشر می‌شوند. فرض کنید که تنها مولفه غیر صفر میدان مغناطیسی هر دو موج موازی با \hat{z} (امواج TM) است و میدان‌های مغناطیسی بصورت زیر هستند:

$$\mathbf{B}_0 = \hat{z} B_0 e^{j\omega t - k_{0,x} x}, \quad \mathbf{B}_1 = \hat{z} B_1 e^{j\omega t - k_{1,x} x} \quad (5.12)$$

- ج: رابطه بین مولفه بردار موج و ω را برای هر دو موج پیدا کنید.
- د: عبارات میدان‌های الکتریکی $\mathbf{E}_{0,1}$ از امواج مربوط به میدان‌های مغناطیسی روابط را پیدا کنید.

- ۵: ثابت کنید (یا در صورت لزوم اعمال کنید) که برای عبارات موجود در (۵) مؤلفه E موازی با صفحات در روی سطح آنها ازین رفته، و محدودیت‌های مربوط به \mathbf{k} . چه رابطه‌ای با مراتب تداخل یافته شده در مورد (۶) وجود دارد؟

۶.۱۲ انتشار در فیبر نوری



شکل (۶-۱۲)

شکل (۶-۱۲) یک مدل ساده برای یک فیبر نوری را نشان می‌دهد. در یک ذستگاه مرجع دکارتی (x, y, z) فضای بین صفحه‌های $y = \pm a/2$ توسط ماده‌ای با ضریب شکست حقیقی و مثبت $n > 1$ (در محدوده فرکانس مورد نظر) پوشیده شود، در حالی که در ناحیه $y < -a/2$ و $y > a/2$ خلاء ($n = 1$) داریم. یک موج الکترومغناطیسی تک رنگ با فرکانس ω به موازات \hat{x} در داخل فیبر منتشر می‌شود.

فرض می‌کنیم که تنها مؤلفه غیرصفر میدان الکتریکی E موج موازی با z (یعنی عمود بر صفحه شکل) است. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که موج برهم نهی دو موج صفحه با بردارهای موج $(k_1, -k_y, 0) \equiv k(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$ و $k_2 \equiv (k_x, -k_y, 0) \equiv k(\sin \theta, \cos \theta, 0)$ که در آن θ زاویه تابش در شکل است. در نمادهای مختلط داریم،

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{y}} E_z(x, y, t) = \hat{\mathbf{y}} (E_1 e^{j\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + E_2 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}) \\ &= \hat{\mathbf{y}} (E_1 e^{j(\omega t + k_x x + k_y y)} + E_2 e^{j(\omega t + k_x x - k_y y)}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

- **الف:** رابطه بین k و ω و محدوده θ را که موج بدون اتلاف انرژی در سطوح مرزی در $y = \pm a/2$ منتشر می‌شود، پیدا کنید.

- **ب:** ضریب بازتاب دامنه $r = E_r/E_i$ نسبت دامنه موج منعکس شده به دامنه موج تابشی است، در سطحی که دو رسانه را از هم جدا می‌کند. در مورد بازتاب کلی، $r = e^{-j\delta}$ با δ عدد حقیقی است. نشان دهید که، در این حالت، داریم:

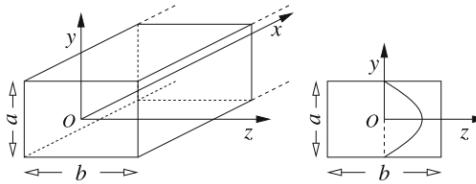
$$k_y a + \delta = m\pi \quad \text{با} \quad m \in N \quad (7.12)$$

- معادله فرکانس‌های قطع فیبر را بنویسید. مقادیر k_y را به‌طور صرایح در حد $\theta \rightarrow \pi/2$ ، $n \sin \theta \gg 1$ پیدا کنید.

- **ج:** اگر E در صفحه xy باشد، نتایج چگونه تغییر می‌کنند؟

۷.۱۲ انتشار موج در یک موجبر پُر شده

یک موجبر با مقطع مستطیل شکل و دیوارهای رسانا است. یک دستگاه مرجع دکارتی را انتخاب می‌کنیم که در آن امواج به موازات محور x ها منتشر شوند و دیوارهای رسانا بر روی سطوح $z = \pm a/2$ و $y = \pm a/2$ قرار گیرند (شکل ۸-۱۲). موجبر به طور یکنواخت با محیطی با ضریب شکست $n = n(\omega)$ پُر شده است.



شکل (۸-۱۲)

• الف: انتشار مود TE فرکانس ω را در نظر بگیرید که میدان الکتریکی آن $E = E_z(y) e^{j(t-kx)}$ است. عبارت کلی $E_z(y) = \omega(k) e^{j(t-kx)}$ و رابطه پاشندگی $\omega(k)$ را پیدا کنید. فرکانس‌های قطع را برای مود خاصی که در آن محیط پرکننده گازی از الکترون‌های آزاد است، یعنی یک پلاسمما، با فرکانس پلاسمما ω_p تعیین کنید. در این مورد برای ضریب شکست داریم: $n(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$.

• ب: حال فرض کنید که محیط فقط ناحیه $x > 0$ موجبر را پر می‌کند. یک موج تک رنگ با کمترین فرکانس که می‌تواند در هر دو ناحیه منتشر شود ($x < 0$ و $x > 0$) از $x = -\infty$ موجبر حرکت می‌کند. دامنه امواج منعکس شده و ارسالی را در مرز $x = 0$ پیدا کنید.

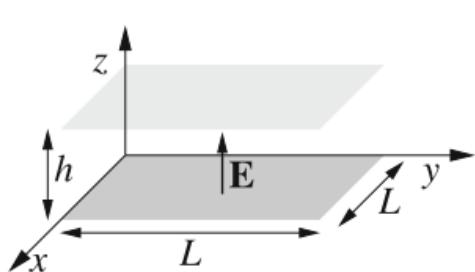
۸.۱۲ رزونانس شومان

سیستمی توسط زمین و یونوسفر را می‌توان به عنوان یک حفره تشدید در نظر گرفت. حفره با دو سطح کروی متحدم‌المرکز رسانا مشخص می‌شود: سطح زمین (شعاع $R_{\oplus} \approx 6400$ کیلومتر) و تا مرز پایینی یونوسفر، که در ارتفاع $h \approx 100$ کیلومتری بالاتر قرار دارد، همانطور که در شکل (۹-۱۲) نشان داده شده است، در داخل این «حفره» امواج الکترومغناطیسی با فرکانس‌های خاص تشکیل می‌شود که رزونانس‌های شومان نامیده می‌شوند.

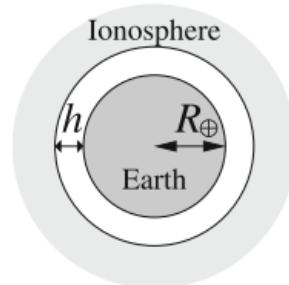
می‌خواهیم فرکانس معمولی ω این تشدیدها را تخمین بزنیم، با این فرض که هم زمین و هم یونوسفر رسانای کاملی هستند و بنابراین امواج الکترومغناطیسی در محدوده فرکانس تشدید کاملاً منعکس می‌کنند.

به منظور اجتناب از پیچیدگی‌های ریاضی به دلیل هندسه کروی مسئله، یک مدل ساده و مسطح را انتخاب می‌کنیم که شامل یک موازی الاضلاع مستطیلی با دو ضلع مربع، رسانای ضلع L و ارتفاع h است. در یک دستگاه مرجع دکارتی، ضلع چهار گوش روی سطح زمین در صفحه $z = 0$ قرار دارد، در حالی که ضلع دیگر بر روی سطح پایین یونوسفر روی صفحه $z = h$ قرار دارد، (شکل ۱۲-۱۰). ما $L = 2\pi R_{\oplus}$ را انتخاب کردیم، و برای باز تولید هندسه کروی، شرایط مرزی تناوبی را بر روی سطح جانبی موازی الاضلاع

تحمیل می‌کنیم.



شکل (۱۰ - ۱۲)



شکل (۹ - ۱۲)

$$\mathbf{E}(0, y, z, t) = \mathbf{E}(L, y, z, t), \quad \mathbf{E}(x, 0, z, t) = \mathbf{E}(x, L, z, t) \quad (8.12)$$

که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی موج است، و شرایط یکسانی برای میدان مغناطیسی موج در نظر گرفته شده است. ما $\epsilon_r = 1$ و $\mu_r = 1$ را در قسمت داخلی محفظه خود فرض کرده و علاوه بر این، یک مود TE با میدان الکتریکی بصورت زیر فرض می‌کنیم

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} E_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (9.12)$$

- الف: مقادیر ممکن k_x , k_y , ω را پیدا کرده و تخمین عددی ω و طول موج مربوطه را برای کمترین فرکانس مود ارائه دهید.
- ب: رسانایی فرکانس پایین آب دریا $m^{-1} \approx 4\pi^2 \sigma / 4\Omega$ است. بحث کنید که آیا تقریب سطح اقیانوس‌ها به عنوان یک هادی کامل در فرکانس رزونانس‌های شومان معقول است یا خیر.

حل مسائل فصل ۱۲

ح: خطوط ارتباط، موجبرها، محفظه‌های رزونانسی

۱.۱۲ کابل هم محور

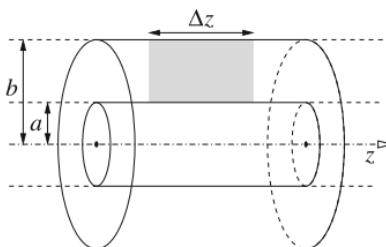
• الف: از آنجایی که ظرفیت با فرض اینکه شرایط استاتیکی و اثرات مرزی برای یک سیم "بی نهایت" ناچیز، تعریف شده است، ظرفیت خازن در واحد طول کابل، C را مانند یک خازن استوانه‌ای با فرض ثابت بودن چگالی بار در زمان و توزیع یکنواخت، محاسبه می‌کنیم. به دلایل تقارن، میدان الکترواستاتیک بین دو هادی شعاعی و مستقل از z و ϕ است و به راحتی از قانون گاووس به دست می‌آید.

$$\mathbf{E} = \frac{2\lambda}{r} \hat{\mathbf{r}}, \quad a < r < b \quad (1.12)$$

بنابراین، افت پتانسیل بین دو هادی برابر است با:

$$V = - \int_a^b E_r(r) dr = -2\lambda \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (2.12)$$

$$C = \frac{\lambda}{|V|} = \frac{1}{2 \ln(b/a)} \quad (3.12)$$



به طور مشابه، جریان ثابت I که به طور یکنواخت روی هادی داخلی توزیع می‌شود، یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند

$$\mathbf{B} = B_\phi(r) \hat{\phi} = \frac{\gamma I}{cr} \hat{\phi} \quad (4.12)$$

شکل (۱ - ۱۲)

اندوکتانس (ضریب خودالقائی) در واحد طول کابل را می‌توان با محاسبه شار B از طریق یک مستطیل با عرض Δz ، که روی صفحه ای حاوی محور z قرار دارد و از $r = a$ تا $r = b$ امتداد دارد، همانطور که در شکل (۱۲-۱) مشخص شده است، به دست آورد. شار برابر است با:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_a^b B_\phi(r) \Delta z dr = \frac{2r}{c} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Delta z \quad (۱۲)$$

اندوکتانس \mathcal{L} مربوط به واحد طول:

$$\mathcal{L} = \frac{\Phi(\mathbf{B})}{I c \Delta z} = \frac{2}{c} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۱۲)$$

همین نتیجه را می‌توان با محاسبه انرژی مغناطیسی در بخشی از کابل به طول Δz و اندوکتانس $\Delta z \mathcal{L}$ به دست آورد.

$$\frac{1}{2} \Delta z \mathcal{L} I^2 = \Delta z \int_a^b \frac{B^2}{8\pi} 2\pi r dr = \frac{I^2}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Delta z \quad (۷.۱۲)$$

• ب: کابل کواکسیال یک سیستم پیوسته با ظرفیت و اندوکتانس محدود در واحد طول است، بنابراین از مسئله ۴.۷ میدانیم که یک سیگنال جریان در طول سیم مطابق با معادله موج (۴۹.۷) با سرعت زیر منتشر می‌شود.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}} = c \quad (۸.۱۲)$$

بنابراین راه حل کلی برای سیگنال جریان منتشر شونده $I(z, t) = I(z - vt)$ است و انتشار بدون پاشندگی اتفاق می‌افتد. سیگنال بار مرتبط $(z, t)^\lambda$ با معادله پیوستگی به $I(z, t)$ مربوط می‌شود.

$$\frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial I(z, t)}{\partial t} = -I'(z - ct) \quad (۹.۱۲)$$

که در آن I' مشتق I نسبت به آرگومان است. چون $\frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial t} = -c\lambda'(z - ct)$ است، خواهیم داشت

$$\lambda(z, t) = \lambda(z - ct) = \frac{1}{c} I(z - ct) \quad (۱۰.۱۲)$$

• ج: میدان الکتریکی عرضی $\mathbf{E} = E_r(r, z, t)\hat{r}$ با اعمال قانون گاوس بر روی یک سطح استوانه‌ای به شعاع $a < r < b$ ، ارتفاع بینهایت کوچک Δz و کابل هم محور، $E_r = 2\lambda(z, t)/r$ را پیدا می‌کنیم. باز هم به دلایل تقارن، میدان مغناطیسی عرضی باید ازیموتال، $\mathbf{B} = B_\phi(r, z, t)\hat{\phi}$ باشد. با اعمال قانون استوکس بر روی دایره‌ای به شعاع $a < r < b$ ، کابل هم محور، $B_\phi = 2I(z, t)/rc$ را بدست می‌آوریم. جریان جابجایی به شار از طریق دایره کمک نمی‌کند، زیرا \mathbf{E} شعاعی است. بنابراین، میدان‌های استاتیک وابستگی یکسانی به λ و I دارند، تنها تفاوت این است که در اینجا هر دو $\lambda = \lambda(z, t)$ و $I = I(z, t)$ به z و t بستگی دارند. توجه داشته باشید که این ویژگی عجیب و غریب از پیکربندی TEM است که اجازه می‌دهد تا از ظرفیت خازنی و اندوکتانس محاسبه شده برای میدان‌های استاتیک برای به دست آوردن سرعت انتشار سیگنال‌های الکترومغناطیسی در طول کابل استفاده شود، نتیجه‌ای که برای هر خط انتقال در مود TEM نیز صادق است.

می‌توانیم بررسی کنیم که میدان‌های بالا جوابی برای معادلات ماکسول با اثبات زیر هستند:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial E_r}{\partial z} \hat{\phi} = \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda(z-ct)}{\partial z} \hat{\phi} \\ &= \frac{2}{rc} I'(z-ct) \hat{\phi} = -\frac{2}{rc} \frac{\partial I(z-ct)}{\partial t} \hat{\phi} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\quad (11.12)$$

- ۵: منبع در $z = 0$ باید کار $W(t)$ را انجام دهد تا جریان را بین هادی‌های داخلی و خارجی هدایت شود.

$$W(t) = V(0, t)I(0, t) = -2c\lambda'(0, t) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (12.12)$$

شار محلی انرژی در هر نقطه (r, ϕ, z) با $a < r < b$ و $z > 0$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(r, z, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \frac{c}{4\pi} \frac{2\lambda(z-ct)}{r} \frac{2I(z-ct)}{rc} \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{c}{\pi r^2} \lambda'(z-ct)\end{aligned}\quad (13.12)$$

و کل شار انرژی مربوطه در z

$$\Phi(z, t) = \int_a^b S_z 2\pi r dr = 2c\lambda'(z-ct) \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -W(z-ct) \quad (14.12)$$

این نشان میدهد که عبور انرژی بوسیله منبع برقرار شده است.

- ۶: مقادیر میدان‌ها و ظرفیت خازنی و اندوکتانس در واحد طول، در حضور مقادیر عمومی ϵ و μ عبارتند از:

$$E_r = \frac{\lambda}{er}, \quad B_\phi = \frac{2\mu I}{rc} \quad (15.12)$$

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon}{2 \ln(b/a)}, \quad \mathcal{L} = \frac{2}{c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (16.12)$$

سرعت موج مربوطه $v = c/\sqrt{\mu\epsilon} < c$. با این حال، به‌طور کلی، ϵ و μ هر دو می‌توانند به‌فرکانس بستگی داشته باشند، و کابل به‌یک خط انتقال پاشنده با سرعت فاز $v_\phi(\omega) = c/\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$ تبدیل می‌شود.

۲.۱۲ خطوط انتقال توان الکتریکی

- الف: معادله پیوستگی $\lambda = \lambda_0 e^{j(\omega t - kz)}$ است. با نوشتن λ به شکل $\lambda = \lambda_0 \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$ به‌دست می‌آوریم

$$j\omega \lambda_0 = jkI_0, \quad \text{یا} \quad \lambda_0 = \frac{k}{\omega} I_0 = \frac{I_0}{v_\phi} \quad (17.12)$$

که در آن v_ϕ سرعت فاز سیگنال است.

مسائل الکترومغناطیس

- ب: میدان الکتریکی E را می‌توان با اعمال قانون گاووس بر روی یک سطح استوانه‌ای هم محور با سیم محاسبه کرد.

$$E_r(r, z, t) = \frac{2\lambda(z, t)}{r} \quad (18.12)$$

میدان مغناطیسی B را می‌توان از معادله $c\nabla \times B = 4\pi J + \frac{\partial E}{\partial t}$ به دست آورد. اگر دایره‌ای با شعاع r هم محور با سیم انتخاب و قضیه استوکس را اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$\oint B \cdot dI = \frac{1}{c} \int (4\pi J + \frac{\partial E}{\partial t}) \cdot dS \quad (19.12)$$

جمله $\frac{\partial E}{\partial t}$ شعاعی است و بنابراین در شار سمت راست شرکتی ندارد، از این‌رو

$$2\pi r B_\phi = 4\pi \frac{I}{c}, \quad \text{و} \quad B_\phi(r, z, t) = \frac{\gamma I(z, t)}{rc} \quad (20.12)$$

معادلات برای $B_\phi(r, \phi, z)$ و $E_r(r, \phi, z)$ به ترتیب شکلی مشابه در حالت استاتیک سیم با چگالی بار و جریان ثابت و یکنواخت دارند. ما هم داریم $|E_r|/|B_\phi| = c/v_\phi$. اینها ویژگی‌های معمول مود TEM (الکترومغناطیسی عرضی) برای خطوط انتقال است. معادله ماسکول می‌دهد $c \frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t}$ که منجر به

$$-jk\lambda_0 = -j\omega \frac{I_0}{c^2} \quad \rightarrow \quad k \frac{I_0}{v_\phi} = \omega \frac{I_0}{c^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{\omega}{c^2} \quad \rightarrow \quad v_\phi = c \quad (21.12)$$

که در آن از رابطه (17.12) و $k = \omega/v_\phi$ استفاده کردیم.

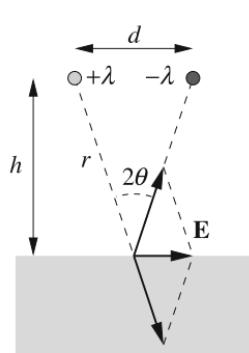
در دستگاه آحد SI داریم

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}, \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \frac{|E_r|}{|B_\phi|} = \frac{c^2}{v_\phi} \quad (22.12)$$

- ج: خطی را در صفحه میانی در فاصله h از صفحه حاوی دو سیم، مانند شکل‌های ۲-۱۲ و ۳-۱۲، در نظر بگیرید. فاصله خط از هر سیم $r = \sqrt{h^2 + d^2/4}$ است.

میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تولید شده توسط دو سیم به طور خلاصه چنین است:

$$\mathbf{E} = 2\hat{x} \frac{I_0}{rc} \sin \theta e^{j\omega t} \quad (23.12)$$



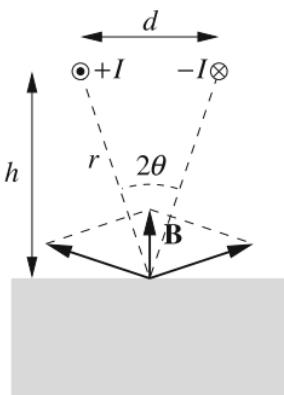
$$\mathbf{B} = 2\hat{y} \frac{I_0}{rc} \sin \theta e^{j\omega t} \quad (24.12)$$

که در آن \hat{x} و \hat{y} بردارهای واحد موازی با صفحه شامل سیم‌ها هستند.

از آنجائی که $\sin \theta = d/(2r)$ است، خواهیم داشت

$$|E_x| = |B_y| = \frac{\gamma I_0 d}{r^2 c} \quad (25.12)$$

شکل (۲-۱۲)



و رابطه مربوطه در دستگاه آحاد SI عبارتند از

$$|E_x| = |B_y|c = \frac{I \cdot d}{2\pi c \epsilon_0 r^2} = \frac{\nu_0 I d c}{2\pi r^2} \quad (26.12)$$

بنابراین

$$|B_y| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 5}{2\pi \times (30^2 + g^2/2^2)} T \approx 10^{-6} T \quad (27.12)$$

$$|E_x| \approx 3 \times 10^2 V/m \quad (28.12)$$

شکل (۳ - ۱۲)

برای مقایسه، میانگین میدان مغناطیسی در سطح زمین $10^{-5} T \sim 5 \times 10^{-5} T$ در حالی که میدان الکتریکی $10^2 \times 1/5 \sim 10^2 T$ ولت بر متر است. اثرات غربالگری احتمالی توسط سطح زمین نادیده گرفته شده است.

۳.۱۲ مودهای TEM و TM در یک موجبر "باز"

• الف: با جایگزینی رابطه (۳.۱۲) در معادله موج B

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) B_z = 0 \quad (29.12)$$

و با یادآوری اینکه $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ ، رابطه زیر را بین k_x و k_y و ω بدست می‌آوریم.

$$k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (30.12)$$

• ب: میدان الکتریکی موج را می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B} = c(\hat{x} \frac{\partial}{\partial y} - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x}) B_z \quad (31.12)$$

$$j\omega \mathbf{E} = c B_z [-\hat{x} k_y \sin(k_y y) - \hat{y} k_x \cos(k_y y)] e^{j(\omega t - k_x x)}$$

که منجر به روابط زیر می‌شود

$$E_x = j \frac{k_y c}{\omega} B_z \sin(k_y y) e^{j(\omega t - k_x x)} \quad (32.12)$$

$$E_x = \frac{k_x c}{\omega} B_z \cos(k_y y) e^{j(\omega t - k_x x)} \quad (33.12)$$

• ج: مولفه موازی $E_{||}$ میدان الکتریکی E باید در مرزی با یک سطح کاملاً رساناً صفر شود، بنابراین باید $E_x(y = \pm a/2) = 0$ داشته باشیم. این نشان می‌دهد که با جایگزینی در رابطه (۳۰.۱۲) به دست می‌آوریم

$$\omega^2 = k_x^2 c^2 + \left(\frac{\pi c}{a} \right)^2 (2m)^2 \quad (34.12)$$

مود $m = 0$ مربوط به $E_x = 0$ و $E_y = 0$ و $B_z = 0$ مستقل از y است. بنابراین، میدان‌ها در هر مقطع از موجبر موازی با صفحه yz یکنواخت هستند و ما $\omega = k_x c$ داریم. این مود $m = 1$ دارای فرکانس زیر است

$$\omega = \sqrt{k_x^2 c^2 + \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2} > \frac{\pi c}{a} \equiv \omega_{co} \quad (35.12)$$

که در آن $\omega_{co} \equiv 2\pi c/a$ فرکانس قطع است.

• ۵: شار انرژی توسط بردار پواین‌تینگ به موازات صفحه $z = 0$ داده می‌شود.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} (E_y B_z \hat{x} - E_x B_z \hat{y}) \quad (36.12)$$

با میانگین‌گیری یک زمان تناوب کامل، $\langle S_y \rangle = 0$ را پیدا می‌کنیم، یعنی هیچ شار انرژی خالص در امتداد y وجود ندارد. میانگین S_x را در یک دوره تناوب بدست می‌آوریم

$$\langle S_x \rangle = \frac{c}{\lambda\pi} \frac{k_x}{\omega} B_0 \cos(k_y y) \quad (37.12)$$

سرعت گروهی موج برابر است با

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{k_x c}{\sqrt{k_x^2 c^2 + \omega_{co}^2}} = \frac{k_x c}{\omega} \quad (38.12)$$

بنابراین نیز می‌توان نوشت

$$\langle S_x \rangle = v_g \frac{B_0}{\lambda\pi} \cos(k_y y) \quad (39.12)$$

۴.۱۲ موجبرهای مربعی و مثلثی

• الف: میدان الکتریکی باید معادله موج در خلاء را برآورده کند

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (40.12)$$

و با جایگزینی رابطه (۴.۱۲) برای \mathbf{E} ، معادله هلمولتز مستقل از زمان را برای تنها مولفه غیر صفر میدان الکتریکی، \tilde{E}_x ، به دست می‌آوریم.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_x = 0 \quad (41.12)$$

در خلاء نیز باید $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ داشته باشیم، اگر فرض کنیم که \tilde{E}_x مستقل از x باشد، این شرط به طور خودکار برآورده می‌شود، $\tilde{E}_x = \tilde{E}_x(y)$ و رابطه (۴۱.۱۲) به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_x(y) = 0 \quad (42.12)$$

با توجه به شرایط مرزی، مولفه موازی \mathbf{E} باید در دیوارهای کاملاً بازتابنده موجبر $y = 0$ و $y = a$ صفر باشد. این شرط برقرار است اگر فرض کنیم:

$$\tilde{E}_x(y) = E_{x0} \sin(k_y y), \quad \text{با} \quad k_y = n \frac{\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (43.12)$$

که در آن $E_{\circ x}$ یک دامنه دلخواه و ثابت است. میدان الکتریکی موج قطبی شده در جهت \hat{x} را می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_x(y) e^{j(\omega t - k_z z)} = \hat{\mathbf{x}} \tilde{E}_{\circ x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (44.12)$$

جایگزینی رابطه (۴۲.۱۲) در (۴۳.۱۲) منجر به رابطه زیر می‌شود

$$\left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{\circ x} = 0 \quad (45.12)$$

بدون در نظر گرفتن مورد بی‌اهمیت $E_{\circ x} = 0$ ، تنها در صورتی صادق است که

$$k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{یا} \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - n^2 \frac{\pi^2}{a^2}} \quad (46.12)$$

موج فقط وقتی می‌تواند انتشار یابد که باید داشته باشیم

$$\omega > n \frac{\pi c}{a} \quad (47.12)$$

فرکانس قطع ω_a کمترین مقدار ω است که در آن انتشار موج رخ می‌دهد. از آنجایی که باید $n \geq 1$ داشته باشیم، $\omega_a = \pi c/a$. اگر فرکانسی را انتخاب کنیم که $\omega < \pi c/a$ باشد، فقط مود $n = 1$ می‌تواند در موجبر منتشر شود.

در موجبر سطح مقطع مربعی، شرایط برای موج TE قطبی شده \hat{y} با تعویض نقشهای x و y در تمام فرمول‌های بالا به دست می‌آید و میدان الکتریکی برابر است با

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_{\circ y} \sin(k_x x) e^{j(\omega t - k_z z)} = \hat{\mathbf{y}} E_{\circ y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (48.12)$$

با $E_{\circ y}$ دامنه دلخواه، $m = 1, 2, 3, \dots$ و همان رابطه پاشندگی بین ω و k_z در بالا. مودهای با $m = n$ منحط^۱ هستند و همان بردار موج k_z را به اشتراک می‌گذارند.

به طور کلی، یک موج TE تک رنگ که در موجبر منتشر می‌شود، برهم نهی دو قطبش است. میدان الکتریکی آن خواهد بود:

$$\mathbf{E} = \left[\hat{\mathbf{x}} E_{\circ x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \hat{\mathbf{y}} E_{\circ y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right] e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (49.12)$$

• ب: در مورد موجبر مثلثی، مولفه موازی میدان الکتریکی باید در سه صفحه $x = 0$ و $y = x$ صفر باشد. میدانی بصورت رابطه (۴۹.۱۲) از قبل شرایط مرزی را در صفحات $x = 0$ و $y = x$ برآورده می‌کند. شرط اضافی در صفحه $y = x$ برای این موجبر منطبق است که در آن $\hat{\mathbf{n}} = (\sqrt{2}, 1, 1, 0)/\sqrt{2}$ بردار واحد عمود بر صفحه $y = x$ است. بدین ترتیب

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{h} = E_{\circ x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - E_{\circ y} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = 0 \quad (50.12)$$

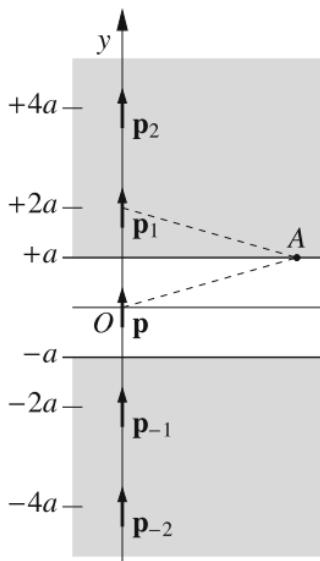
که اگر $E_{\circ y} = E_{\circ x} \equiv E$ بروآورده شود، در نهایت به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E} = E \left[\hat{\mathbf{x}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \hat{\mathbf{y}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (51.12)$$

^۱Degenerate Mode

۵.۱۲ مودهای موجبر به عنوان یک اثر تداخلی

- الف: پتانسیل الکترواستاتیک φ باید روی دو صفحه رسانا در $y = \pm a$ صفر باشد، و میدان های الکتریکی در $y = -a^+$ و $y = a^-$ باید بر سطوح آنها عمود باشد (موازی با \hat{y}). دوقطبی واقعی p که در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد، بنابراین، ما به یک دوقطبی تصویری برابر با p بالا، واقع در $(0, 2a, 0)$ که با p_1 در شکل (۴-۱۲) داریم تا این شرایط را نقطه عمومی A در صفحه $y = +a$ در تصویر انجام دهیم.



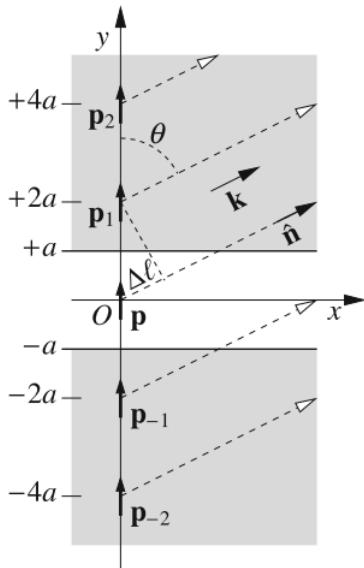
شکل (۴-۱۲)

به طور مشابه، دوقطبی واقعی نیاز به یک تصویر دوقطبی بیشتر دارد که در $(0, -2a, 0)$ قرار دارد که با p_{-1} در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است تا شرایط را در صفحه رسانای $y = -a$ برآورده کند. اما اکنون سه دوقطبی p_1 و p_{-1} با هم پتانسیلی برابر با صفر در هر دو صفحه ایجاد نمی‌کنند. می‌توانیم پتانسیل p را با افزودن یک دوقطبی تصویر جدید برابر با p بالا، متقاضن به p_{-1} در $(0, 4a, 0)$ ، که با p_2 نشان داده می‌شود، دوباره تنظیم کنیم. اما این نیاز به افزودن یک دوقطبی تصویر بیشتر p_{-2} و غیره دارد. بنابراین، راه حل دقیق به دو مجموعه نامتناهی از دوقطبی‌های تصویر مساوی، p_n و p_{-n} ، با $n = 1, 2, 3, \dots$ نیاز دارد که به ترتیب در $(0, 2na, 0)$ و $(0, -2na, 0)$ قرار دارند. پتانسیل الکترواستاتیک حاصل بین صفحات محدود است زیرا برای مقادیر زیاد، سهم $\pm a$ همین دوقطبی p_n متناسب است.

- ب: برای تحقق شرایط مرزی، تمام دوقطبی‌های تصویر باید در فاز با دوقطبی واقعی نوسان کنند. تابش ساطع شده از هر دوقطبی را در جهت $\hat{n} \equiv (\sin \theta, \cos \theta, 0)$ در صفحه $z = 0$ با بردار موج $k = (\omega/c)\hat{n}$ در نظر بگیرید. در ادامه بردارهای موجی را در صفحه $z = 0$ در نظر می‌گیریم، اما به دلیل تقارن دورانی مسئله، در مورد بردار موج‌هایی که در هر صفحه‌ای حاوی محور قرار دارند، اعمال می‌شود. تفاوت مسیر نوری بین امواج ساطع شده توسط دو دوقطبی همسایه (واقعی یا تصاویر) $\Delta l = 2a \cos \theta$ است، همانطور که در شکل (۴-۱۲) برای مورد دوقطبی واقعی p_1 تصویر p_2 نشان داده شده است. این مربوط به اختلاف فاز $\Delta\phi = k\Delta l$ است و شرط تداخل سازنده است

$$k\Delta l = \frac{2\omega a}{c} \cos \theta = 2\pi m, \quad \theta = \arccos \left(m \frac{\pi c}{\omega a} \right) \quad (52.12)$$

با $m = 0, 1, 2, \dots$ با توجه به تقارن آینه‌ای سیستم برای انعکاس در صفحه $z = 0$ واقع، ضد تقارن، زیرا همه دوقطبی‌ها توسط انعکاس وارونه می‌شوند)، اگر یک زاویه θ رابطه (۵۳.۱۲) برای تداخل سازنده ارضاء کند، $\theta = \pi - \pi$ نیز چنین است.



شکل (ح-۱۲)

به عبارت دیگر، در فاصله زیاد از دوقطبی نوسانی، هر مرتبه تداخل $m > 0$ به ترتیب مربوط به برهم نهی دو موج با بردار موج $\mathbf{k}_\pm \equiv (\sin \theta, \pm \cos \theta, 0) \omega/c$ است. شرط $m = 0$ مربوط به $\theta = \pi/2$ است و امواج در امتداد محور x حرکت می‌کنند. برای $m > 0$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega}{c} \sin \theta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{\omega a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2} \end{aligned} \quad (53.12)$$

فقط در صورتی حقيقی است که $\omega > m\pi c/a$. بنابراین، با توجه به فرکانس ω فقط مودهای با $m < \omega a / (\pi c)$ را مشاهده می‌کنیم. اگر $\omega < m\pi c/a$ مربوط به طول موج $\lambda > 2a$ باشد، فقط مود $m = 0$ می‌تواند منتشر شود.

- ج: هر دو میدان مغناطیسی باید در معادله موج صدق کنند.

$$\left(c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}_i = \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}_i = 0, \quad i = 0, 1 \quad (54.12)$$

که از آن بردارهای موج که بترتیب با k_0 و k_1 نمایش داده می‌شوند، بدست می‌آید

$$k_{0x} c^2 = \omega^2, \quad k_{1x}^2 c^2 + k_{1y}^2 c^2 = \omega^2 \quad (55.12)$$

۵ •

فرض کنید میدان الکتریکی بصورت $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$ ، که در آن $\tilde{\mathbf{E}}$ فقط تابع مختصات است، معادله ماکسول در خلاء $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B}$ میدهد

$$j\omega \mathbf{E} = c \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (56.12)$$

برای موج نوع "خواهیم" داشت

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{y}} \frac{k_{0x} c}{\omega} B_0 e^{j(\omega t - k_{0x} x)} = \hat{\mathbf{y}} B_0 e^{j(\omega t - k_{0x} x)} \quad (57.12)$$

برای موج نوع "۱" خواهیم داشت

$$\mathbf{E}_1 = \frac{c}{j\omega} B_1 [\hat{\mathbf{y}} k_{1x} \cos(k_{1y} y) + \hat{\mathbf{x}} k_{1y} \sin(k_{1y} y)] e^{j(\omega t - k_{1x} x)} \quad (58.12)$$

۵: موج نوع "۰" دارای سه بردار \mathbf{E} ، \mathbf{B} و \mathbf{k} عمود بر یکدیگر است، به طور مشابه به یک موج صفحه در فضای آزاد (حالت TEM). علاوه بر این، \mathbf{E}_0 بر دو سطح رسانا عمود است و به طور خودکار شرایط مرزی را برآورده می‌کند. بنابراین، فرکانس ω و بردار موج $\mathbf{k}_0 = \hat{\mathbf{x}} k_{0x}$ با $k_{0x} = \omega/c$ تحت هیچ محدودیتی نیستند.

از سوی دیگر، میدان الکتریکی موج نوع "۱" علاوه بر مولفه عرضی E_y ، دارای یک مولفه موازی با دو سطح رسانا است (مود به جای TEM، TM است). شرایط مرزی

در $y = \pm a$ ایجاد می‌کند که $E_x(y = \pm a) = 0$ باشد. بنابراین باید $\sin(\pm k_y a) = 0$ باشد. داشته باشیم که منجر به $k_y = m\pi/a$

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(m\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (59.12)$$

مود m تنها در صورتی می‌تواند منتشر شود که k_x مربوطه واقعی باشد و فرکانس قطع کمتری $\omega_{co}(m) = 2\pi mc/a$ داشته باشد.

مقایسه با بند (ب) نشان می‌دهد که موج نوع \circ (مود TEM) با ترتیب تداخل \circ مطابقت دارد، در حالی که امواج نوع 1 (مودهای TM) با ترتیب تداخل بزرگتر از صفر مطابقت دارند. در واقع، به طور دقیق‌تر، ما به دو قطبی‌های منفرد، بلکه به «لایه‌های دوقطبی» نیاز نداریم که موازی با محور z پخش شوند تا امواجی با میدان‌های مستقل از z تولید کنیم. اگر دوقطبی واقعی بند (الف) و (ب) موازی، و نه عمودی، با صفحات رسانا باشد، شرایط مرزی مختلف به جای مود TE منجر به TM می‌شود [۱].

۶.۱۲ انتشار در فیبر نوری

الف: میدان الکتریکی (۶.۱۲) مربوط به مجموع دو موج صفحه‌ای با فرکانس یکسان و بردارهای موج متفاوت k_1 و k_2 است که در محیط منتشر می‌شوند. برای هر دو موج، رابطه پاشندگی $\omega = kc/n$ است، که در آن $n = n(\omega)$ ضریب شکست محیط است. هر دو موج در زاویه θ به سطح خلاء-محیط برخورد می‌کنند و طبق قانون اسنل شرط بازتاب کامل برابر است با:

$$\sin \theta > \frac{1}{n} \quad (60.12)$$

ب: بازتاب‌های داخلی در صفحات $y = \pm a/2$ موج نوع 1 را به موجی از نوع 2 تبدیل می‌کند و بالعکس. بنابراین دامنه میدان دو موج در سطح مشترک با ضریب بازتاب دامنه r مرتبط است.

$$\begin{aligned} E_2(x, y = +a/2, t) &= rE_1(x, y = +a/2, t) \\ E_1(x, y = -a/2, t) &= rE_2(x, y = -a/2, t) \end{aligned} \quad (61.12)$$

برای انعکاس کلی، هیچ انتقال انرژی از طریق صفحات $y = \pm a/2$ وجود ندارد. بنابراین دامنه‌های تابشی و میدان‌های بازتابی باید برابر باشند اما برای تغییر فاز. برای قطبش S (E) موازی با سطح مشترک، مانند مورد (ما) r مطابق معادلات فرنل نوشته می‌شود؛

$$r = \frac{n \cos \theta - j \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta + j \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}} \quad (62.12)$$

و اگر $|r| < 1$ باشد، جذر آن حقیقی و $1 = |r|$ است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$r = e^{j\delta} = \cos \delta + j \sin \delta, \quad \tan \frac{\delta}{2} = -\frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta} \quad (63.12)$$

با جایگزینی $r = e^{j\delta}$ در معادله (۶۱.۱۲) شرایط زیر را در صفحه $y = \pm a/2$ بدست می‌آوریم:

$$E_1 e^{jk_y a/2} = E_1 e^{-jk_y a/2}, \quad E_2 e^{jk_y a/2} = E_2 e^{jk_y a/2} e^{-j\delta} \quad (64.12)$$

با محاسبه دترمینان دستگاه معادلات همگن برای E_1 و E_2 شرط زیر را بدست می‌آوریم

$$1 = e^{-2j(k_y a + \delta)} \quad (65.12)$$

و وقتی صحیح است که
 $2k_y a + 2\delta = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (66.12)$

رابطه ضمنی فرکانس‌های مجاز را میدهد

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 - k_y^2 > 0. \quad (67.12)$$

اگر $n \sin \theta \gg 1$ باشد، در این صورت $\theta \approx \pi/2$ و اگر $\theta \approx -\pi/2$ باشد، خواهیم داشت

$$k_y \rightarrow (m+1) \frac{\pi}{a} \quad (68.12)$$

• ج: تمام نتایج فوق برای قطبش P نیز معتبر هستند، که در آن میدان الکتریکی موج در صفحه xy قرار دارد. فقط رابطه (۶۲.۱۲) باید با رابطه زیر عوض شود

$$r_{||} = e^{-j\delta_{||}} = \frac{-n^2 \cos \theta + j \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta + j \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad (69.12)$$

که مربوط به وابستگی مختلف r و δ به θ است.

۷.۱۲ انتشار موج در یک موجبر پُر شده

• الف: میدان الکتریکی E یک موج EM تک رنگ با فرکانس ω که در محیطی با ضریب شکست $n = n(\omega)$ منتشر می‌شود معادله هلم‌ Holtz را برآورده می‌کند.

$$\left(\nabla^2 + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) E = 0. \quad (70.12)$$

مود TE با $E = \hat{z} E_z(y) e^{j(\omega t - kx)}$ در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z(y) = 0. \quad (71.12)$$

که جواب کلی آن به شکل $E_z(y) = A \cos(qy) + B \sin(qy)$ با A و B دو ثابت دلخواه هستند. میدان الکتریکی موازی با دیوارهای رسانا در $y = \pm a/2$ ، شرایط مرزی است، که از آن به دست می‌آوریم.

$$E_z(y) = E_0 \begin{cases} \cos(q_n y), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin(q_n y), & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad q_n = n \frac{\pi}{a} \quad (72.12)$$

و رابطه (۷۱.۱۲) می شود

$$q_n^2 + k^2 - n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (73.12)$$

موج فقط در صورتی می تواند منتشر شود که k حقيقی باشد، يعني اگر $\omega > q_n c \equiv \omega_n$ باشد.

در مورد پلاسمای

$$q_n^2 + k^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = 0 \quad (74.12)$$

و فرکانس قطع برابر است با

$$\omega'_n = \sqrt{q_n^2 c^2 + \omega_p^2} \quad (75.12)$$

• ب: موج تابشی باید در مود $n=1$ باشد و میدان الکتریکی آن برابر است با

$$\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{z}} E_0 \cos(q_1 y) e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad (76.12)$$

که در آن $k_1 = \sqrt{\omega^2/c^2 - q_1^2}$ است. میدان الکتریکی کل مجموع میدان تابشی E_i و میدان بازتاب شده E_r برای $x < 0$ است، در حالی که فقط میدان انتقالی E_t در ناحیه $x > 0$ وجود دارد. شرایط مرزی در $(E_{iz} + E_{rz})|_{x=0} = E_{tz}|_{x=0}$ ، بنابراین همه امواج باید وابستگی یکسانی به t و y داشته باشند. بنابراین، کل میدان باید باشد

$$E_z = \begin{cases} (E_0 e^{-jk_1 x} + E_r e^{jk_1 x}) \cos(q_1 y) e^{j\omega t}, & x < 0 \\ E_t \cos(q_1 y) e^{j(\omega t - k_1 x)}, & x > 0 \end{cases} \quad (77.12)$$

که در آن $k_t = \sqrt{n(\omega)\omega^2/c^2 - q_1^2}$ است. شرط مرزی روی میدان الکتریکی میدهد

$$E_t - 0 + E_r = E_t \quad (78.12)$$

علاوه، میدان مغناطیسی باید در $x = 0$ نیز پیوسته باشد. از $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}$ خواهیم داشت

$$B_x = \frac{\pi c}{j\omega a} \times \begin{cases} (E_0 e^{-jk_1 x} + E_r e^{jk_1 x}) \sin(q_1 y) e^{j\omega t}, & x < 0 \\ E_t \sin(q_1 y) e^{j(\omega t - k_1 x)}, & x > 0 \end{cases} \quad (79.12)$$

$$B_y = -\frac{c}{\omega} \times \begin{cases} k (E_0 e^{-jk_1 x} - E_r e^{jk_1 x}) \cos(q_1 y) e^{j\omega t}, & x < 0 \\ k_t E_t \cos(q_1 y) e^{j(\omega t - k_1 x)}, & x > 0 \end{cases} \quad (80.12)$$

متوجه می شویم که پیوستگی B_x با شرط $E_0 + E_r = E_t$ تضمین می شود، در حالی که پیوستگی B_y میدهد:

$$k_1(E_t - 0 - E_r) = k_t E_t \quad (81.12)$$

در نهایت به دست می آوریم

$$E_r = \frac{k_1 - k_t}{k_1 + k_t} E_0, \quad E_t = \frac{2k_1}{k_1 + k_t} E_0 \quad (82.12)$$

که با روابط فرنل برای قطبش S یکسان هستند. در واقع، میدان موج تابشی رابطه (۷۶.۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \hat{\mathbf{z}} E_0 \cos(\omega t - k_1 x) = \hat{\mathbf{z}} \frac{E_0}{2} (e^{-jq_1 y} + e^{jq_1 y}) e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t - q_1 y - k_1 x)} + \hat{\mathbf{z}} \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t + q_1 y - k_1 x)} \end{aligned} \quad (۸۳.۱۲)$$

که برهمنهی دو موج صفحه‌ای که درجهت z با دامنه مساوی و بردارهای موجی اما در مولفه y مخالف $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}}k_1 \pm \hat{\mathbf{y}}q_1$ با مقدار مساوی است. بنابراین هر دو موج مسطح با یک زاویه برخورد $\theta = \arctan(q_1/k_1)$ به مرز مشترک خلاء و محیط برخورد می‌کنند.

۸.۱۲ رزونانس شومان

- الف: با جایگزینی میدان الکتریکی (۹.۱۲) با شرایط مرزی تناوبی (۸.۱۲) به دست می‌آوریم.

$$e^{-jk_x L} = 1, \quad e^{-jk_y L} = 1 \quad (۸۴.۱۲)$$

پس از حل آن

$$k_x = m \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n \frac{2\pi}{L}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (۸۵.۱۲)$$

که در آن m و n مجاز نیستند به طور همزمان صفر باشند و $L = 2\pi R_\oplus$. از آنجایی که معادلات موج به ما $\omega^2 = k^2 c^2$ می‌دهد، داریم

$$\omega^2 = \left(\frac{c}{R_\oplus} \right)^2 (m^2 + n^2) \quad (۸۶.۱۲)$$

کمترین فرکانس مربوط به $1 = m = n = 0$ است و مقدار آن برابر است،

$$\nu_{min} = \frac{\omega_{min}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{c}{2\pi R_\oplus} \approx 7.5 s^{-1} \quad (۸۷.۱۲)$$

که مربوط به طول موج $\lambda_{max} = 2\pi R_\oplus \approx 40000 km$ است. مقدار مشاهده شده تجربی $\nu_{min} \approx 8 s^{-1}$ است.

- ب: یک هادی اهمی را می‌توان در فرکانس ω کاملاً منعکس کننده در نظر گرفت اگر رسانایی آن $\sigma(\omega)$ که حقیقی فرض شود، شرط $\sigma(\omega) \gg \omega/4\pi k_e$ است. از نظر که در آن $k_e = 1/\epsilon_0$ در واحدهای گاوی، و $(4\pi\epsilon_0)/1 = 1/m^2$ در واحدهای SI است. از نظر تحلیلی، شرایط مطابق با جریان هدایت J بسیار بزرگتر از جریان جابجایی ماسکول است. از آنجایی که $J = \sigma E$ و $E = 8.854 \times 10^{-12} V/m$ است، آب دریا را می‌توان به عنوان یک رسانای کامل در محدوده فرکانس رزونانس‌های شومان در نظر گرفت. در واحدهای گاوی، رسانایی فرکانس پایین آب دریا $\sigma \approx 4 \times 10^{10} S/m$ است.

بحث در مورد رزونانس‌های شومان بر اساس یک هندسه کروی "واقعی" را می‌توان در مرجع [۲]، بخش ۹.۸ و مسئله ۷.۸ یافت. با این وجود، رویکرد ساده شده ما این نکته اساسی را آشکار می‌کند که طول مشخصه L سیستم، که حداقل طول موج ایستاده ($L \approx \lambda$) را تعیین می‌کند، محیط زمین است، نه ارتفاع یونوسفر بالای سطح زمین.

مراجع:

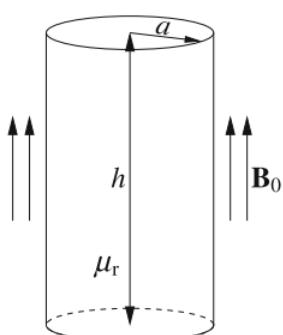
1. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA 2006. Volume II, Section 24-8
2. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, § 9.2 and 9.4, 3rd edn. (Wiley, New York, London, Sydney, 1998)

فصل ۱۳

مسائل اضافی

۱.۱۳ استوانه قطبی شده الکتریکی و مغناطیسی

اجازه دهید استوانه‌ای با نفوذپذیری مغناطیسی نسبی μ_r را در نظر بگیریم که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 موازی با محور استوانه قرار دارد، و مسئله مشابه یک استوانه با گذردهی الکتریکی نسبی ϵ_r واقع در یک میدان الکتریکی یکنواخت E_0 موازی با محور استوانه در نظر می‌گیریم. در هر دو مورد استوانه دارای شعاع a و ارتفاع h است.



شکل (۱ - ۱۳)

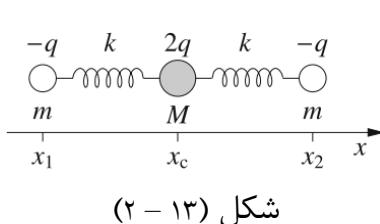
- الف: ابتدا استوانه‌های "طویل" را با $a \gg h$ در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی B_i و میدان الکتریکی E_i را به ترتیب در داخل استوانه‌ها، بدون توجه به اثرات مرزی، محاسبه کنید.

- ب: اکنون میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی داخلی را در مورد استوانه‌های "مسطح"، $a \gg h$ ، محاسبه کنید. در این حالت نیز اثرات مرزی را چشم‌پوشی کنید.

- ج: میدان‌های حالت (الف) را مرتبه دقت بالاتر، یعنی با در نظر گرفتن اثرات مرزی در کمترین مرتبه غیر صفر h/a ، محاسبه کنید.

- د: میدان‌های حالت (ب) را با کمترین مرتبه غیر صفر بر حسب h/a محاسبه کنید.

۲.۱۳ نوسان‌های مولکول سه اتمی



یک مولکول خطی متقارن سه اتمی، مانند CO_2 می‌تواند به صورت یک جرم نقطه مرکزی M ، با بار $2q$ ، و دو جرم نقطه‌ای یکسان m ، هر کدام از بار q ، که وقتی مولکول در حال سکون است، به صورت متقارن در اطراف M ، قرار می‌گیرند، (شکل ۲ - ۱۳)، طرحواره شود.

در مورد ارتعاشات طولی با دامنه کوچک، برهمنکش بین سه جرم (شامل نیروهای الکترواستاتیک) را می‌توان به صورت دو فنر یکسان، هر کدام به طول سکون l و ثابت الاستیک k ، مانند شکل، توصیف کرد.

فرض کنید x_1 و x_2 موقعیت دو جرم جانبی و x_c موقعیت جرم مرکزی باشد. می‌خواهیم ارتعاش‌های طولی مولکول را در چارچوب مرجع مرکز جرم آن، که با شرایط زیر تعریف شده است، مطالعه کنیم.

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + M x_c}{2m + M} = 0. \quad (2.13)$$

هنگامی که مولکول در حالت استراحت (ساکن) است، داریم

$$x_1 - l = -l, \quad x_c = 0, \quad x_2 = l \quad (2.13)$$

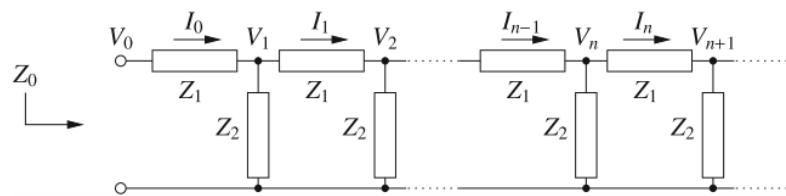
• الف: مودهای نوسان طولی طبیعی مولکول و فرکانس‌های آنها را بدست آورید.

• ب: این مولکول تشعشع می‌کند زیرا توده‌های باردار در اطراف موقعیت‌های تعادلی خود در نوسان هستند. اگر عبارت دوقطبی الکتریکی غالب باشد، فرکانس تنها یکی از مودهای عادی در طیف تابش ساطع شده مشاهده می‌شود. دلیل آن را توضیح دهید و فرکانس مشاهده شده را محاسبه کنید.

• ج: فرض کنید که در ابتدا، مولکول با قرار دادن جرم‌ها در $x_1 = -l + d$ ، $x_2 = l + d$ ، $x_c = 0$ "تحریک" شود، به طوری که $x_{cm} = 0$ سپس، در $t = 0$ ، سه جرم به طور همزمان آزاد شوند. توان تابش شده در $t > 0$ را پیدا کنید.

۳.۱۳ امپدانس یک شبکه نردنیانی بی‌نهایت

نردنیانی (نیمه) بی‌نهایت شکل (۳ - ۱۳) را در نظر بگیرید که در آن هر بخش دارای یک امپدانس (یکسان) "افقی" $Z_1 = Z_2(\omega)$ و یک امپدانس "عمودی"



شکل (۳ - ۱۲)

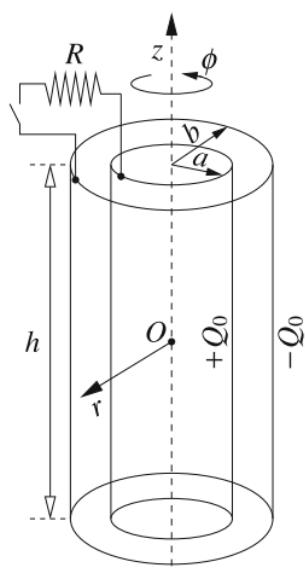
- الف: امپدانس ورودی Z_0 شبکه نیمه بینهایت را محاسبه کنید. چگونه می‌توان یک شبکه حقیقی و متناهی را پس از N بخش خاتمه داد، به‌طوری که امپدانس آن نیز مقدار Z_0 را داشته باشد؟

- ب: فرض کنید V_n ولتاژ گره n باشد. رابطه بین V_n و V_{n+1} را پیدا کنید و از آن، وابستگی V_n به n و به ولتاژ ورودی V_0 را پیدا کنید. در مورد نتیجه یک شبکه کاملاً مقاومتی بحث کنید ($Z_2 = R_2$, $Z_1 = R_1$).

حال یک شبکه LC را در حضور سیگنال ورودی $V_0(t) = V_0 e^{j\omega t}$ با $Z_1 = j\omega L$ و $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$ در نظر بگیرید.

- ج: محدوده فرکانسی که در آن سیگنال‌ها می‌توانند در شبکه منتشر شوند را پیدا کنید. نشان دهید که فرکانس قطعی ω_{co} وجود دارد، به‌طوری که اگر $\omega > \omega_{co}$ باشد سیگنال میرا می‌شود. ضریب میرایی را محاسبه کنید.

- د: در مورد یک شبکه CL با $Z_1 = j\omega L$ و $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$ بحث کنید.



شکل (۴ - ۱۲)

۴.۱۳ تخلیه یک خازن استوانه‌ای

یک خازن استوانه‌ای دارای شعاع داخلی a ، شعاع خارجی $b > a$ و ارتفاع $h \gg b$ است. برای $t = 0$ ، دو صفحه استوانه‌ای به ترتیب بار $\pm Q$ دارند و قطع می‌شوند. در لحظه $t = 0$ صفحه‌ها از طریق یک مقاومت R مانند شکل (۴-۱۳) متصل می‌شوند. فرض می‌کنیم که در طول تخلیه، (۱) تقریب جریان تغییر آرام برقرار است (۲) چگالی بار سطحی روی صفحه‌ها یکنواخت می‌ماند، (۳) می‌توانیم اثرات مدار خارجی و مقاومت صفحه‌ها را نادیده بگیریم، (۴) سایر موارد اثرات مرزی ناچیز است. از یک دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) با محور خازن به عنوان محور z و مبدأ در مرکز خازن استفاده می‌کنیم.

- **الف:** جریان $I = I(z, t)$ را که روی صفحه‌ها می‌گذرد و میدان مغناطیسی $B_\phi = \hat{\phi}B_\phi(r, z, t)$ که در داخل خازن تولید می‌شود را برای $|z| \ll h/2$ محاسبه کنید.
- **ب:** بردار پواین‌تینگ S را برای $|z| \ll h/2$ محاسبه کرده، و بررسی کنید که شار آن از طریق یک سطح استوانه‌ای هم محور به خازن برابر است با تغییرات زمانی انرژی الکترواستاتیک داخل سطح.
- **ج:** در مورد اعتبار تقریب جریان آهسته متغیر و فرض توزیع بار یکنواخت روی صفحات بحث کنید.

۵.۱۳ میدان‌های ایجاد شده توسط منابع متناوب سطحی

میدان‌های الکترومغناطیسی و پتانسیل‌های تولید شده توسط سه بار سطحی و/یا چگالی جریان که در صفحه $y = 0$ یک دستگاه مختصات دکارتی قرار دارند، را محاسبه کنید.

- **الف:** چگالی بار سطحی ساکن $\sigma = \sigma_0 \cos kx$.
- **ب:** چگالی جریان سطحی ثابت $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{z}}K_0 \cos kx$.
- **ج:** چگالی جریان سطحی وابسته به زمان $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{z}}K_0 e^{j\omega t} \cos kx$ ، در مورد اینکه کدام مقادیر ω (برای k ثابت) میدان‌ها منتشر می‌شوند، بحث کنید.
- **د:** در مورد (ج)، توان میانگین زمانی و مکانی تلف شده در واحد سطح در صفحه $y = 0$ را محاسبه کنید.

$$W = \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{+\pi/k} \langle \mathbf{K}(x, t) \cdot \mathbf{E}(x, y = 0, t) \rangle dx \quad (۳.۱۳)$$

و برای کدام مقادیر ω مقدار W است. نتیجه را با توجه به یافته‌های مورد (ج) بحث کنید.

۶.۱۳ شار انرژی و تکانه نزدیک به یک آینه کامل

یک موج الکترومغناطیسی صفحه‌ای را در نظر بگیرید که در امتداد محور x های در دستگاه مختصات دکارتی، با فرکانس ω و قطبش بیضی، با میدان الکتریکی زیر منتشر می‌شود.

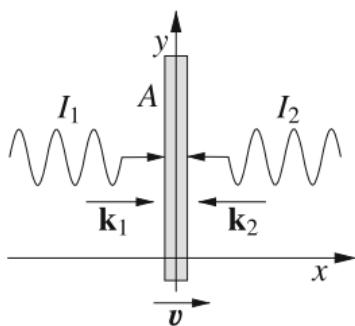
$$\mathbf{E}_i = \frac{E_0}{\sqrt{1+\epsilon^2}} [\hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - kx) + \hat{\mathbf{z}} \sin(\omega t - kx)] \quad (4.13)$$

که در آن $\omega/c = k$ و ϵ یک پارامتر حقیقی است، $1 < \epsilon < \infty$ ، که خروج از مرکز بیضی قطبش را مشخص می‌کند. ضریب نرمال‌سازی $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ ^۱ طوری انتخاب شده است که شدت موج برای هر مقدار ϵ برابر $I = cE^2/8\pi$ باشد. موج بر سطح آینه‌ای کامل که در $x = 0$ قرار دارد، برخورد می‌کند.

• **الف:** بردار پواین‌تینگ $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, t)$ را در جلوی آینه، از جمله سهم موج بازتاب شده، را محاسبه کنید. مقدار ϵ برای $\mathbf{S} = 0$ را در همه جا و زاویه متناظر بین کل میدان الکتریکی (\mathbf{E}) و مغناطیسی (\mathbf{B}) را پیدا کنید.

• **ب:** نیروی بر واحد سطح روی آینه $F_x = T_{xx}$ را بدست آورید که در آن $T_{xx} = T_{11}(x = 0^-)$ مولفه (11) تansور تنش در $x = 0^-$ است. نشان دهید که به‌طور کلی، هر دو مولفه ثابت و نوسانی است و فرکانس دومی را پیدا کنید. برای کدام مقدار از مولفه نوسانی وجود ندارد؟

۷.۱۳ خنک کننده لیزری آینه



شکل (۵ - ۱۳)

یک آینه مسطح دارای سطح A ، ضخامت محدود، جرم M است و دو سطح متضاد آن کاملاً منعکس کننده هستند. در $t = 0$ ، آینه بر روی صفحه $x = 0$ دستگاه مختصات دکارتی، مانند شکل (۵ - ۱۳) قرار دارد. دو موج الکترومغناطیسی صفحه با شدت بهتری I_1 و I_2 ، بطور عمودی بر روی دو سطح برخورد می‌کنند.

• **الف:** کل نیروی وارد بر آینه و جهت شتاب آن را در صورت $I_2 > I_1$ پیدا کنید. حال فرض کنید دو موج دارای شدت‌های مساوی $I_1 = I_2 = I$ هستند و آینه با سرعت $v = \hat{x}v$ حرکت می‌کند.

• **ب:** نیروی وارد بر آینه را در دستگاهی که آینه در آن ساکن است، محاسبه کنید.

^۱Normalization Factor

- ج: در مورد حرکت آینه تحت تأثیر نیروی موجود در مورد (ب)، در حد $c \ll v$ بحث کنید.

۸.۱۳ فشار تابشی روی یک فویل نازک

یک موج الکترومغناطیسی با فرکانس ω که در امتداد محور x دستگاه مختصات دکارتی حرکت می‌کند، و به طور عمودی به یک ورقه بسیار نازک به ضخامت d و سطح A برخورد می‌کند (مسئله ۴.۱۱، بهویژه شکل ۱۱-۱ را مشاهده کنید). فویل هادی کامل در محدوده فرکانسی ω است. همانطور که در حل مسئله ۴.۱۱ نشان داده شده است، ضرایب انتقال (مختلط) و انعکاس فویل عبارتند از:

$$\eta = -j \frac{\omega_p d}{2\omega c}, \quad t = \frac{1}{1+\eta}, \quad r = \frac{\eta}{1+\eta} \quad (8.13)$$

و ω_p فرکانس پلاسمایی فویل است.

- الف: نشان دهید که فشار تشعشع بر روی فویل نازک برابر است با:

$$P_{rad} = \frac{2RI}{c} \quad (8.13)$$

که در آن I شدت موج و $R \equiv |r|^2$ است.

- ب: حال فرض کنید که فویل با سرعت $v = \beta c \hat{x}$ در دستگاه آزمایشگاهی حرکت می‌کند. با فرض $\alpha = R$ (یک فویل کاملاً منعکس کننده)، نیروی وارد بر فویل را محاسبه کنید.

- ج: اگر $\alpha < 1$ پاسخ (ب) چگونه تغییر می‌کند؟

۹.۱۳ پراکندگی تامسون در حضور میدان مغناطیسی

در یک دستگاه مرجع دکارتی، یک الکترون در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت $B_0 = \hat{z}B_0$ و یک موج الکترومغناطیسی صفحه‌ای تک رنگ در امتداد \hat{x} حرکت می‌کند و میدان الکتریکی موج بصورت زیر منتشر می‌شود.

$$\mathbf{E}(z, t) = \hat{y} E_i e^{j(\omega t - kz)} \quad (7.13)$$

با $E_i \ll B_0$.

- الف: حرکت الکترون را در شرایط پایدار، بدون توجه به اصطکاک و اثر میدان مغناطیسی موج شرح دهید.

- ب: توان تابش شده توسط الکترون را محاسبه کنید. در مورد وابستگی طیف گسیل شده به ω و توزیع زاویه‌ای تابش ساطع شده در حدود $\omega_c \ll \omega \ll \omega_e$ بحث کنید، که در آن $\omega_e = eB_0/m_e$ فرکانس سیکلوترون الکترون در حضور B_0 است.

۱۰.۱۳ تابش موج ساز قوی

در یک دستگاه مرجع آزمایشگاهی دکارتی $S \equiv (x, y, z)$ یک میدان مغناطیسی ساکن \mathbf{B} داریم. در ناحیه خاصی از فضا، بدون بار و جریان، میدان مغناطیسی مستقل از z است و مولفه y و z آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$B_y = b(y) \cos(kx), \quad B_z \equiv 0. \quad (8.13)$$

که در آن $b(y)$ یک تابع زوج از y است. این میدان توسط منابع واقع در خارج از منطقه مورد نظر، در مقادیر محدود $|y|$ ایجاد می‌شود.

- الف: نشان دهید که در منطقه مورد علاقه، باید داشته باشیم:

$$B_y = B_0 \cos(kx) \cosh(ky) \quad (9.13)$$

و عبارت B_x را تعیین کنید.

حال فرض کنید در دستگاه آزمایشگاهی S ، یک الکترون با سرعت اولیه $v_0 = \hat{x}v$ وارد ناحیه میدان مغناطیسی شود.

ب: حرکت الکترون در دستگاه S' را که با سرعت v نسبت به دستگاه آزمایشگاهی S حرکت می‌کند، توصیف کنید و تابش ساطع شده را مورد بحث قرار دهید. (حرکت الکترون را غیر نسبیتی فرض کنید و فقط جمله خطی را در معادله حرکت نگه دارید).

ج: فرکانس تابش ساطع شده در جهت موازی و ضد موازی با v را، همانطور که در S مشاهده شد، تعیین کنید. شدت تابش در کدام جهت در S' صفر است؟

۱۱.۱۳ گشتاور الکترومغناطیسی در یک کره رسانا

یک موج الکترومغناطیسی تک رنگ، با قطبش دایره‌ای، طول موج $\lambda = 2\pi c/\omega$ و دامنه E_a به یک کره فلزی کوچک به شعاع $a \ll \lambda$ برخورد می‌کند. فرض می‌کنیم که ω به اندازه کافی کم است تا بتوان فلز را به عنوان یک رسانای اهمی با رسانایی σ مستقل از فرکانس در نظر گرفت.

- الف: گشتاور دوقطبی القا شده بر روی کره را محاسبه کنید.
- ب: نشان دهید که موج الکترومغناطیسی گشتاوری روی کره اعمال می‌کند.

۱۲.۱۳ امواج سطحی در یک فویل نازک

یک فویل هادی بسیار نازک بین صفحه‌های $-l$ و $+l$ یک دستگاه مختصات دکارتی قرار دارد. یک موج سطحی در امتداد دو طرف فویل، در جهت y منتشر می‌شود.

میدان‌های موج سطحی فقط دارای مولفه‌های غیرصفر زیر هستند: E_x , E_y , و B_z که همگی مستقل از z هستند. می‌دانیم که مولفه میدان الکتریکی موازی با جهت انتشار است.

$$E_y(x, y, t) = E_0 e^{-q|x|} e^{j(\omega t - ky)} \quad (10.13)$$

که در آن فرکانس ω طوری است که $l = 2\pi c/\omega \gg 1$ است. در این شرایط، فویل را می‌توان، با تقریب خوب، به عنوان برهمنهی بار سطحی $K(y, z, t)$ و یک جریان سطحی $\sigma(y, z, t)$ ، که همگی روی سطح $x = 0$ قرار دارند، در نظر گرفت. با شروع از معادله (10.13) و معادلات ماسکول در خلاء، محاسبه کنید:

- **الف:** مولفه میدان E_x و B_z ، که برابری آنها را با توجه به \star ، و جریان سطح $K(y, z, t)$ مشخص می‌کند.

- **ب:** بردار پواین‌تینگ و شار میانگین زمانی انرژی الکترومغناطیسی مرتبط با موج سطحی،

- **ج:** روابط بین q و ω

حال فرض کنید که در محدوده فرکانس مربوطه، رابطه بین چگالی جریان J و میدان الکتریکی E در فویل را می‌توان (برای میدان‌های هارمونیکی) به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{J} = -j \frac{\omega_p}{4\pi} \frac{\omega^*}{\omega} \mathbf{E} \quad (11.13)$$

که در آن ω_p فرکانس پلاسمایی فویل است. معادله (11.13) یک هادی ایده‌آل را در رژیم فرکانس بالا مشخص می‌کند (مسئله ۱۱.۱۱)

- **د:** با استفاده از (11.13) و شرایط مرزی برای میدان‌های یک فویل نازک که در مسئله ۴.۱۱ بحث شد، یک رابطه اضافی بین q و ω بدست آورید.

- **ه:** با ترکیب نتایج موارد (د) و (ه) رابطه پاشندگی $\omega(k) = \omega$ را پیدا کرده و حدود اعتبار آن را مورد بحث قرار دهید.

۱۳.۱۳ اثر فیزو

یک موج الکترومغناطیسی صفحه با فرکانس ω و بردار موج $\mathbf{k} = \hat{x}k$ در یک محیط همگن منتشر می‌شود، در حالی که خود محیط با سرعت $\hat{x}u = u$ (در نتیجه موازی با \mathbf{k}) در دستگاه آزمایشگاهی حرکت می‌کند. ضریب شکست محیط حقیقی و مثبت، $n > 0$ ، در دستگاه ساکن محیط است. فرض کنید $c \ll u$ و به سؤالات زیر پاسخ داده و تمام نتایج را تا مرتبه اول در $\beta = u/c = \beta$ محاسبه کنید.

ابتدا یک محیط غیر پاشنده با n مستقل از فرکانس فرض کنید.

- الف: سرعت فاز موج، v_ϕ ، را در دستگاه آزمایشگاهی محاسبه کنید.
حال فرض کنید که محیط پاشنده است، با n بسته به فرکانس طبق قانون شناخته شده $n = n(\omega)$ ، که در دستگاه ساکن تعریف شده است.
- ب: در این مورد سرعت فاز را در دستگاه آزمایشگاهی محاسبه کرده و اکنون نشان دهید:

$$v_\phi \approx \frac{c}{n(\omega)} + \beta c \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)} + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} \right) + O(\beta^2) \quad (12.13)$$

راهنمایی: از اثر داپلر مرتبه اول برای ارزیابی رابطه بین فرکانس در دستگاه آزمایشگاهی و فرکانس مشاهده شده در دستگاه ساکن محیط استفاده کنید.

- ج: از رابطه (12.13) و سرعت فاز تا مرتبه اول به β بستگی ندارد استفاده کرده و نشان دهید محیط حاوی الکترون‌های آزاد و با اصطکاک ناچیز حرکت می‌کنند (یک فلز ساده یا یک پلاسمای ایده‌آل) [1].

۱۴.۱۳ تبدیل لورنتس برای امواج طولی

یک موج طولی با میدان‌های زیر در دستگاه آزمایشگاهی (دکارتی) S را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t) = \hat{\mathbf{x}} E_0 e^{j(\omega t - kx)}, \quad \mathbf{B} \equiv 0. \quad (13.13)$$

در مسئله (۳.۱۱) نشان دادیم که سرعت فاز این موج، $v_\phi = \omega_L/k_L$ نامشخص است و می‌تواند مقادیر دلخواه داشته باشد.
فرکانس، بردار موج و میدان‌های موج را در دستگاه S' که با سرعت v نسبت به S حرکت می‌کند، برای سه حالت زیر بدست آورید:

• الف: $v_\phi < c$ با $\mathbf{v} = v_\phi \hat{\mathbf{x}}$

• ب: $v_\phi > c$ با $\mathbf{v} = (c/v_\phi) \hat{\mathbf{x}}$

• ج: $V < c$ با $\mathbf{v} = V \hat{\mathbf{y}}$

۱۵.۱۳ تبدیل لورنتس برای کابل انتقال

یک کابل انتقال را می‌توان به صورت یک سیم هادی مستقیم بینهایت در نظر گرفت. یک سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) را با محور z در امتداد سیم انتخاب می‌کنیم. یک سیگنال بار و جریان تک رنگ، با فرکانس ω با جریان کل I و چگالی بار خطی λ با نماد مختلط، در امتداد کابل منتشر می‌شود

$$I = I(z, t) = I_0 e^{j(\omega t - kz)}, \quad \lambda = \lambda(z, t) = \lambda_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (14.13)$$

کابل در یک محیط یکنواخت با گذردهی دیالکتریک حقیقی $\epsilon > 1$ و نفوذپذیری مغناطیسی $\mu = 1$ در ناحیه فرکانس مورد نظر قرار دارد.

• الف: رابطه بین I و λ را پیدا کنید.

• ب: میدان‌های الکتریکی $E(r, z, t)$ و مغناطیسی $B(r, z, t)$ را در این محیط، و با فرض اینکه آنها در حالت TEM هستند، محاسبه کنید. به عنوان مثال،

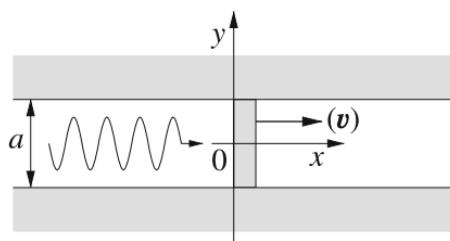
$$E(r, z, t) = E(r)e^{j(\omega t - kz)} \quad B(r, z, t) = B(r)e^{j(\omega t - kz)} \quad (15.13)$$

با $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ و $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$. رابطه پاشندگی بین فرکانس ω و بردار موج k را محاسبه کنید.

• ج: نشان دهید که میدان‌ها و منابع آنها مستقل از زمان در یک دستگاه مرجع S' هستند و با سرعت فاز $\hat{\mathbf{z}}v_{\phi} = \hat{\mathbf{z}}(\omega/k)$ نسبت به دستگاه آزمایشگاهی S که سیم در آن ساکن است، حرکت می‌کند. نشان دهید که در S' ، $\mathbf{E}' = 0$ و $I' = 0$ داریم، در حالی که $\lambda' \neq \lambda$ و $B' \neq B$ هستند. این نتیجه به ظاهر شگفت‌انگیز را توضیح دهد.

۱۶.۱۳ موجبر با انتهای متحرک

دو سطح صاف هادی که به ترتیب در $y = \pm a/2$ قرار دارند، یک موجبر را تشکیل می‌دهند. همانطور که در شکل (۱۳ - ۶) نشان داده شده است موجبر در $x = 0$ توسط یک دیوار کاملاً رساناً خاتمه می‌یابد. انتشار یک موج تک رنگ TE_1 را در امتداد محور x در نظر بگیرید. میدان الکتریکی موج فقط مولفه z را دارد. در نمادگذاری مختلف، $E_z(x, y, t) = E_z(y)e^{j(\omega t - kx)}$ را داریم، که در آن ω و k با رابطه پاشندگی مود TE_1 مرتبط هستند.



شکل (۱۳ - ۶)

• الف: میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی کل داخل موجبر را پیدا کنید. حال فرض کنید که انتهای موجبر با سرعت ثابت $v = v\hat{x}$ حرکت کند.

• ب: با فرض $v < kc^2/\omega$ ، فرکانس ω_r و بردار موج k_r موج بازتاب شده را تعیین کنید. بررسی کنید که ω_r و k_r با رابطه پاشندگی مود TE_1 مرتبط هستند.

• ج: در حالت $v > kc^2/\omega$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۱۷.۱۳ موج الکترومغناطیسی قوی "نسبیتی"

یک موج الکترومغناطیسی با قطبش دایره‌ای را در نظر گیرید که موازی با محور z یک دستگاه مرجع دکارتی منتشر می‌شود. میدان‌های موج عبارتند از:

$$\mathbf{E} = E_0 [\hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t - kz)] \quad (16.13)$$

$$\mathbf{B} = B_0 [\hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - kz) - \hat{\mathbf{x}} \sin(\omega t - kz)] \quad (17.13)$$

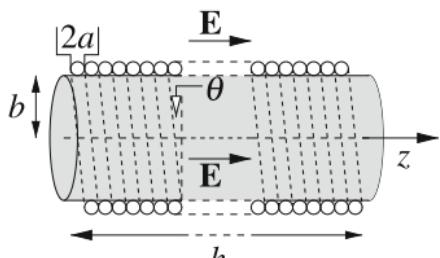
فرض کنید که میدان بهاندازه کافی قوی است که الکترون‌ها با سرعت‌های نسبیتی نه‌چندان کوچکتر از c در نوسان هستند. معادله نسبیتی صحیح حرکت یک الکترون در حضور موج شدید برابر است با:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (18.13)$$

که در آن $\mathbf{p} = m_e \gamma \mathbf{v}$ و $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/(m_e c)^2}$ است. می‌خواهیم انتشار چنین موج "نسبیتی" را در محیطی با الکترون‌های آزاد مطالعه کنیم (یون‌ها در حالت استراحت در نظر گرفته می‌شوند).

- الف: نشان دهید که خودسازگار است که فرض کنیم حرکت الکترون در صفحه xy رخ می‌دهد. این کار را در دو مرحله انجام دهید. ابتدا فرض می‌کنیم که در لحظه $t = 0$ ، مولفه z تکانه الکترون‌ها $P_z = 0$ صفر است. سپس معادلات حرکت را در شرایط حالت ماندگار حل کنید و سازگاری فرض پسینی را بررسی کنید.
- ب: نشان دهید که ضریب لورنتس γ مستقل از زمان است و رابطه آن را بیان کنید.
- ج: ضریب شکست محیطی با چگالی الکترون آزاد n_e را محاسبه کنید.
- د: رابطه پاشندگی و فرکانس قطع را برای موج الکترومغناطیسی پیدا کنید، نتیجه را با حالت "غیر نسبیتی" دامنه‌های میدان کم مقایسه کنید.

۱۸.۱۳ جریان الکتریکی در یک سیم‌لوله



شکل (۷-۱۳)

سیم‌لوله (سولونوئید) با پیچاندن یک سیم رسانای نازک به شعاع a و هدایت σ در اطراف یک استوانه نارسانا به شعاع $a \gg b$ و ارتفاع $b \gg h$ ساخته می‌شود. بنابراین سیم‌لوله دارای گام زیر است:

$$\theta = \arctan \left(\frac{a}{\pi b} \right) \ll 1 \quad (19.13)$$

مسائل الکترومغناطیس

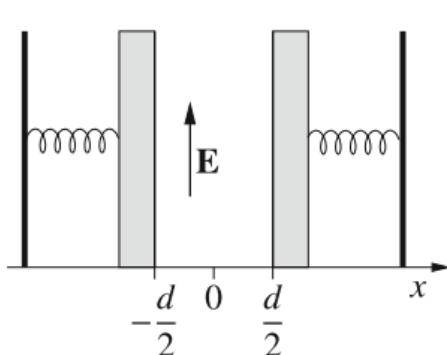
از آنجایی که سیم در جهت \hat{z} با یک پای به طول $2a$ در هر پیچ به طول $2\pi b$ حرکت می‌کند. سیم‌لوله در یک میدان الکتریکی یکنواخت خارجی $E = E\hat{z}$ قرار دارد.

• **الف:** میدان مغناطیسی B را در داخل ($r < b$) و خارج ($r > b$) سیم‌لوله، بدون توجه به اثرات مرزی ارزیابی کنید.

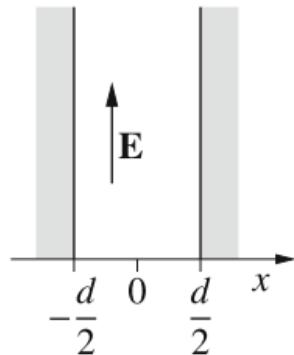
• **ب:** شار بردار پواین‌تینگ $S = cE \times B / 4\pi$ را از طریق یک سطح استوانه‌ای خارجی و هم محور به سیم‌لوله محاسبه کنید و مقدار آن را با توان تلف شده توسط گرمایش ژول مقایسه کنید.

۱۹.۱۳ حفره اپتومکانیکی

یک حفره یک بعدی داریم که توسط دو سطح صاف رسانا که به ترتیب در $x = \pm d/2$ قرار دارند (شکل ۱۳-۸) محدود شده است. میدان الکترومغناطیسی داخل حفره دارای فرکانس ω حداکثر دامنه میدان الکتریکی E و به صورت خطی موازی با دیوارها قطبی شده است.



شکل (۹ - ۱۳)



شکل (۸ - ۱۳)

• **الف:** مقادیر ممکن برای ω را بدست آورده و شکل کلی میدان الکترومغناطیسی را بنویسید.

• **ب:** انرژی الکترومغناطیسی در واحد سطح U را در داخل حفره محاسبه کنید.

• **ج:** فشار تشعشع P بر روی دیوارها را به صورت تابعی از E و نسبت U/P را محاسبه کنید.

• **د:** حال فرض کنید که دو دیوار حفره مربع‌های متناهی هستند که هر کدام دارای جرم M و سطح $S \gg d^2$ (شکل ۹ - ۱۳) هستند. هر دیوار حفره توسط یک فنر با ثابت هوک K به یک دیوار ثابت خارجی متصل می‌شود. با چشم‌پوشی از اثرات مرزی، رابطه بین فرکانس و دامنه مودهای الکترومغناطیسی حفره را محاسبه کنید.

۲۰.۱۳ فشار تشعشع بر یک محیط جاذب

در یک دستگاه مرجع دکارتی مناسب، خلاء در نیمفضای $x < 0$ داریم، در حالی که نیمفضای $x > 0$ با محیطی با ضریب شکست مختلط با $n_2 > n_1 \gg 1$ پُر شده است.

$$n = n_1 - jn_2 \quad (20.13)$$

یک موج صفحه تک رنگ با فرکانس ω و شدت I_i ، که در جهت x مثبت منتشر می‌شود، در صفحه $x = 0$ فرود می‌آید. محاسبه کنید:

- الف: نشان دهید که توان جذب شده توسط محیط، $W_{abs} = (1 - R)I_i$ ، برابر $W_{abs} = (1 - R)|r|^2$ است ($R = |r|$ و r ضریب دامنه معمولی برای موج بازتابی است که در روابط فرنل تعریف شده است);

- ب: ثابت کنید فشار روی محیط $P_{rad} = (1 + R)I_i/c$ ، برابر است.

۲۱.۱۳ پراکندگی از یک کره هادی کامل

در یک دستگاه مرجع دکارتی (x, y, z) یک موج الکترومغناطیسی مسطح تک رنگ با قطبش خطی دارای میدان الکتریکی زیر بوده

$$\mathbf{E}(x, t) = \hat{\mathbf{y}} E_0 \cos(\omega t - kx), \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (21.13)$$

و به یک کره فلزی به شعاع $a \ll \lambda = 2\pi/k$ که در مبدادستگاه مرجع قرار دارد برخورد می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم که کره در فرکانس موج "کاملاً رساناً" است، به‌طوری که میدان الکتریکی کل را می‌توان در کل حجم کره صفر فرض کرد.

- الف: توان پراکنده شده توسط کره را در تقریب دوقطبی الکتریکی و سطح مقطع پراکندگی^۲ مربوطه را بدست آورید.

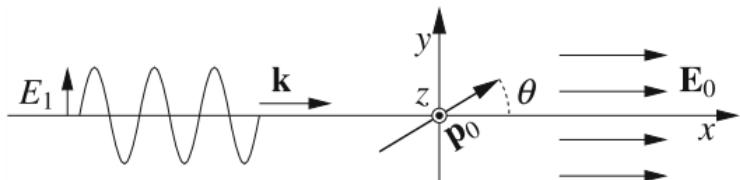
- ب: با فرض اینکه کره نیز کاملاً دیامغناطیسی است ($B = 0$ در داخل کره)، سهم عبارت دوقطبی مغناطیسی را در سطح مقطع پراکندگی بدست آورید.

۲۲.۱۳ تشعشع و پراکندگی از یک مولکول خطی

یک مدل ساده برای یک مولکول خطی قطبی، بدون توجه به ارتعاشات، یک روتور چلبیک بعدی است که به یک گشتاور دوقطبی الکتریکی p مرتبط است. مولکول دارای گشتاور اینرسی I نسبت به هر محور چرخشی است که از مرکز آن و عمود بر مولکول عبور می‌کند. اجازه دهید یک مولکول خطی قطبی را در نظر بگیریم که در یک میدان

^۲Scattering Cross Section

الکتریکی یکنواخت و ثابت E_0 موازی با محور x یک دستگاه مختصات دکارتی قرار دارد (قسمت سمت راست شکل ۱۳ - ۱۰).



شکل (۱۳ - ۱۰)

الف: موقعیت‌های تعادلی مولکول را پیدا کرده و در مورد حرکت زمانی که مولکول در زمان $t = 0$ کمی از موقعیت تعادل پایدار خود جابجا شده است بحث کنید.

ب: تابش ساطع شده توسط مولکول در طول نوسان‌های دامنه کوچک را شرح دهید و زمان میرایی چنین نوسانی را تخمین بزنید.

حال فرض کنید که یک موج صفحه‌ای تک رنگ، با قطبش خطی در امتداد محور y ، با فرکانس ω و دامنه میدان الکتریکی E_1 ، در امتداد محور x در حال انتشار است. همچنین فرض کنید که طول مولکول d ، بسیار کوچکتر از طول موج است، $d \ll \lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$.

ج: حرکت مولکول را در این شرایط توصیف کنید.

د: توان پراکنده شده توسط مولکول و سطح مقطع پراکندگی آن را محاسبه کنید.

۲۳.۱۳ نیروی کششی تشعشع

حرکت کلاسیک یک ذره با بار q و جرم m تحت اعمال همزمان میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B ، با این معادله توصیف می‌شود.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) - \eta \mathbf{v} \quad (22.13)$$

که در آن η ضریب میرایی است.

با توجه به یک دستگاه مرجع دکارتی (x, y, z) ، حرکت ذره را در حضور یک موج الکترومغناطیسی صفحه‌ای تک رنگ که در امتداد محور x منتشر می‌شود، در نظر بگیرید. موج با قطبش خطی در امتداد y با دامنه میدان الکتریکی E_0 ، دارای فرکانس ω و بردار موج $\mathbf{k} = \hat{x}\omega/c$ است. سرعت ذره را بسیار کوچکتر از c فرض کنید، بهطوری که، بهصورت تقریب مرتبه اول، می‌توانیم از عبارت $\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ صرف نظر کنیم.

الف: معادله (۲۲.۱۳) را در شرایط حالت ماندگار^۳ حل کنید.

^۳Steady-State Conditions

- ب: توان متوسط جذب شده P_{abs} توسط ذره، یعنی کار انجام شده توسط نیروی الکترومغناطیسی در طول یک دوره نوسان، را محاسبه کنید.
- ج: توان متوسط P_{rad} تابش شده توسط ذره را محاسبه کنید و یک عبارت برای ضریب میرایی η بدست آورید با این فرض که تمام توان جذب شده مجدداً به صورت تابش ($P_{rad} = P_{abs}$) گسیل می‌شود.
- د: اکنون از نتیجه مورد ب برای ارزیابی اثر جمله $v \times B/c$ استفاده کنید. نیروی متوسط در امتداد x ، که ذره را در جهت انتشار موج شتاب می‌دهد، برابر است با:

$$F_x = \left\langle q \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right\rangle \quad (23.13)$$

مقدار F_x و نسبت P_{abs}/F_x را محاسبه کنید.

- ه: فرض کنید به جای یک ذره نقطه‌ای، یک کره کوچک به شعاع a داریم، به طوری که $1 \ll ka \ll 1$ ذره (به علاوه یک پس زمینه خنثی کننده) است. نیروی وارد بر کره و شتاب مربوطه را به صورت تابعی از N بدست آورید (از هر گونه اثر جمعی مانند غربال کردن الکترومغناطیسی در داخل کره چشم پوشی کنید).

مرجع:

1. I. Lerche, On a curiosity arising from Fizeau's experiment. *Am. J. Phys.* 43, 910 (1975)

حل مسائل فصل ۱۳

ح: مسائل اضافی

۱.۱۳ استوانه قطبی شده الکتریکی و مغناطیسی

- الف: استوانه‌های بلند در "حالت مغناطیسی"، مولفه موازی میدان کمکی، $H = B/[(\mu_0)\mu_r]$ (در اینجا و موارد زیر، پرانترها به این معنی است که μ_r فقط در واحدهای SI ظاهر می‌شود، نه در واحدهای گاووسی) در سطح جانبی استوانه پیوسته است. بنابراین میدان مغناطیسی داخل استوانه، $E_i = \mu_r B$. برابر است با:
- $$E_i = \mu_r B. \quad (1.13)$$

شرط مرزی برای میدان الکتریکی این است که مولفه موازی E باید در سطح جانبی پیوسته باشد، بنابراین برای میدان داخلی داریم.

$$E_i = E. \quad (2.13)$$

این نتایج با قیاس بین معادلات E در الکترواستاتیک و H در مغناطیس استاتیک و در غیاب جریان‌های آزاد، یعنی $\nabla \times E = 0$ و $\nabla \times H = 0$ مطابقت دارند.

- ب: استوانه‌های تخت در "حالت مغناطیسی"، مولفه عمودی B در قاعده‌ها پیوسته است، بنابراین داریم

$$B_i = B. \quad (3.13)$$

در "حالت الکتریکی"، مولفه عمود بردار کمکی D باید در سطح مشترک پیوسته باشد، بنابراین میدان داخلی برابر است با

$$D_i = \frac{1}{\epsilon_r} E. \quad (4.13)$$

این نتایج با قیاس بین معادلات برای B و برای الکترواستاتیک D و در غیاب بارهای آزاد، یعنی $\nabla \cdot B = 0$ و $\nabla \cdot D = 0$ مطابقت دارد.

- ج: اجازه دهدید رابطه (۲.۱۳) را به عنوان راه حل مرتبه صفر برای حالت استوانه دیالکتریک "بلند" فرض کنیم. طبق رابطه (۱.۳) استوانه، قطبش الکتریکی یکنواختی به دست می‌آورد

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi k_e} \mathbf{E}_i = \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi k_e} \mathbf{E}_{\circ} \quad (۵.۱۳)$$

که مربوط به دو چگالی بار سطحی مقید $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \pm P$ در قاعده‌های استوانه است. هنگام محاسبه میدان در مرکز استوانه، با توجه به شرایط $h \ll a$ ، بارهای مقید در دو قاعده را می‌توان با دو بار نقطه‌ای $\pm Q$ تقریب زد:

$$Q = \pi a^2 p = \frac{a^2(\epsilon_r - 1)}{4k_e} E_{\circ} = \begin{cases} \pi a^2 \epsilon_{\circ} (\epsilon_r - 1) E_{\circ}, & SI \\ \frac{a^2(\epsilon_r - 1)}{4} \epsilon_r E_{\circ}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۶.۱۳)$$

که در مکان $z/h = \pm 1/2$ قرار دارند. بنابراین، در مرکز استوانه، ما دارای میدان اضافی زیر خواهیم بود

$$E_b \approx -2k_e \frac{Q}{(h/2)^2} = -2(\epsilon_r - 1) E_{\circ} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \quad (۷.۱۳)$$

که مربوط به تصحیح درجه دوم است. میدان الکتریکی تا درجه دوم بر حسب (a/h) برابر است با

$$\mathbf{E}_i^{(2)} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_{\circ} \left[1 - 2(\epsilon_r - 1) \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right] \quad (۸.۱۳)$$

در "مورد مغناطیسی" مربوطه، شباهت معمولی بین \mathbf{H} و \mathbf{E} منجر به اصلاح مرتبه دوم در میدان کمکی \mathbf{H}_i در مرکز استوانه می‌شود.

$$\mathbf{H}_b = -2(\mu_r - 1) \mathbf{H}_{\circ} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \quad (۹.۱۳)$$

که در آن $H_{\circ} = B_{\circ}/(\mu_{\circ})$. به دلیل تشابه معمولی بین \mathbf{H} و \mathbf{E} ، اصلاح \mathbf{H} در مرکز استوانه را می‌توان به دلیل وجود بارهای مغناطیسی معادل ساختگی $Q_m = \pi a^2 M$ در دو قاعده استوانه تفسیر کرد. چگالی بار مغناطیسی ساختگی $\sigma_m = \pm M$ در دو قاعده به مغناطیسی شوندگی $M = \chi_m H_{\circ}$ مرتبط است، که در آن χ_m با رابطه (۲۲.۵) بر حسب μ_r داده می‌شود. هر بار مغناطیسی منشا یک میدان کمکی است.

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{Q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, & SI \\ \frac{1}{c} \frac{Q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, & \text{گاوی} \end{cases} \quad (۱۰.۱۳)$$

با یادآوری اینکه، در واحدهای SI $B = \mu_{\circ}(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ است، برای میدان مغناطیسی در مرکز استوانه به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{B} = \mu_{\circ}(\mathbf{H}_{\circ} + \mathbf{M}) + \mu_{\circ} \mathbf{H}_b = \mu_r \mathbf{H}_{\circ} + \mu_{\circ} \mathbf{H}_b \equiv \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_{\circ} \quad (۱۱.۱۳)$$

و تقریب درجه دوم مربوطه خواهد بود

$$\mathbf{H}_b = -2(\mu_r - 1) \mathbf{H}_{\circ} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \quad (۱۲.۱۳)$$

در واحدهای گاوی $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ داریم، تصحیح مرتبه دوم مانند رابطه (۱۲.۱۳) باقی می‌ماند.

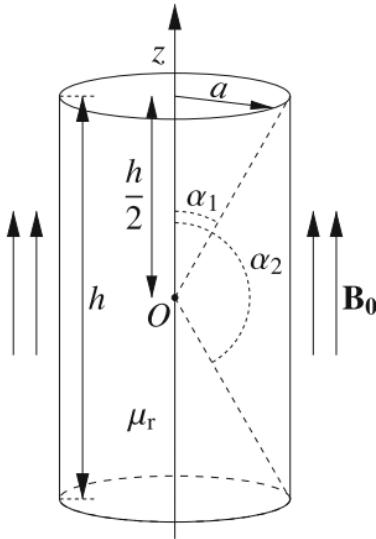
توجه داشته باشید که نوشتن رابطه زیر اشتباه است

$$\mathbf{B}_b = (\mu_0) \mu_r \mathbf{H}_b \quad \text{اشتباه!} \quad (13.13)$$

همانطور که نوشتن رابطه زیر بجای رابطه (۷.۱۳) اشتباه است

$$E_b \approx -\frac{k_e}{\epsilon_r} \frac{Q}{(h/2)^2} = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} E_0 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad \text{اشتباه!} \quad (14.13)$$

زیرا میدان‌های تولید شده توسط بارهای پلاریزاسیون را در نظر می‌گیریم، و جایگزینی ϵ_r به معنای دوبار در نظر گرفتن اثرات قطبش محیط است.



شکل (ح ۱-۱۳)

از طرف دیگر، می‌توانیم به‌یاد بیاوریم که تقریب مرتبه صفر مغناطیسی شوندگی استوانه برابر است با:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_i = \chi_m \frac{\mathbf{B}_i}{(\mu_0) \mu_r} = \chi_m \frac{\mathbf{B}_0}{(\mu_0)} \quad (15.13)$$

دوباره، μ_0 فقط در واحدهای SI ظاهر می‌شود. مغناطیسی شوندگی به‌چگالی جریان مغناطیسی سطح استوانه معادل یک سیم‌لوله محدود به ارتفاع h و شعاع a است که حاصلضرب nI برابر با K_m است.

$$\mathbf{K}_m = \frac{\chi_m}{b_m} \frac{\mathbf{B}_0}{(\mu_0)} \hat{\phi} \quad (16.13)$$

که در آن $\hat{\phi}$ بردار واحد ازیموتال مختصات استوانه‌ای با محور استوانه به عنوان محور طولی است. بنابراین، استوانه معادل یک سیم‌لوله محدود به ارتفاع h و شعاع a است که حاصلضرب nI برابر با K_m است.

میدان مغناطیسی یک سیم‌لوله محدود روی محور آن برابر است با:

$$\begin{aligned} B_M &= 2\pi k_m n I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = 2\pi k_m K_m (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \\ &= 2\pi k_m \frac{\chi_m}{b_m} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = (\mu_r - 1) \frac{B_0}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (17.13)$$

که در آن زوایای α_1 و α_2 در شکل (ح ۱-۱۳) نشان داده شده است. در مرکز سیم‌لوله داریم:

$$\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2 = \frac{h/2}{\sqrt{a^2 + (h/2)^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{h}\right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad (18.13)$$

بنابراین

$$B_M \approx (\mu_r - 1) B_0 \left[1 - 2 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \right] \quad (19.13)$$

کل میدان در مرکز استوانه برابر با میدان خارجی B_0 به‌اضافه میدان ناشی از مغناطیسی شوندگی استوانه است.

$$\begin{aligned} B(\circ) &= B_0 + B_M = \mu_r B_0 - 2\mu_r B_0 \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 2B_0 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \\ &= \mu_r B_0 - 2(\mu_r - 1) B_0 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \end{aligned} \quad (20.13)$$

که با رابطه (۱۹.۱۳) سازگار است.

تصحیح میدان در مرکز استوانه مسطح مغناطیسی را می‌توان به دلیل یک حلقه دایره‌ای به شعاع a که جریان الکتریکی $I_s = K_m h$ را حمل می‌کند محاسبه کرد:

$$B_b = \frac{2\pi k_m I_s}{a} = 2\pi k_m K_m \frac{h}{a} = 2\pi \frac{k_m}{b_m} M \frac{h}{a} \quad (21.13)$$

در مرتبه صفر داریم

$$\mathbf{H}_i \approx \frac{\mathbf{B}_o}{(\mu_o) \mu_r} \quad \text{بنابراین} \quad \mathbf{M} \approx \chi_m \frac{\mathbf{B}_o}{(\mu_o) \mu_r} \quad (22.13)$$

و بدست می‌آوریم

$$B_b = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r} \frac{a}{h} B_o \quad (23.13)$$

میدان کمکی H با رابطه (۱۹.۵) داده می‌شود، بنابراین تا مرتبه دوم داریم

$$H_i + H_b = \frac{B_o + B_b}{(\mu_o) \mu_r} = \begin{cases} \frac{B_o + B_b}{\mu_o} - M = H_i + \frac{B_o}{\mu_o} & SI \\ B_o + B_b - 4\pi M = H_i + B_b & \text{گاووسی} \end{cases} \quad (24.13)$$

بنابراین داریم

$$H_b = \frac{B_b}{(\mu_o)} = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r} \frac{a}{h} H_o \quad (25.13)$$

به دلیل تشابه رسمی بین H و E ، برای استوانه دیالکتریک صاف داریم.

$$E_b = \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \frac{a}{h} E_o \quad (26.13)$$

۲.۱۳ نوسان‌های ملکول سه اتمی

الف: معادلات حرکت برای دو جرم جانبی عبارتند از

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_c + l), \quad m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_c - l) \quad (27.13)$$

از رابطه (۱.۱۳) موقعیت مرکز جرم را بدست می‌آوریم

$$x_c = -\frac{m}{M}(x_1 + x_2) \quad (28.13)$$

که پس از تقسیم بر m و جایگزینی رابطه (۲۷.۱۳)، به یک دستگاه معادله حرکت که فقط شامل x_1 و x_2 است منتهی می‌شود.

$$\ddot{x}_1 = -k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) x_1 - \frac{k}{M} x_2 - \frac{k}{m} l \quad (29.13)$$

$$\ddot{x}_2 = -k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) x_2 - \frac{k}{M} x_1 + \frac{k}{m} l \quad (30.13)$$

با جمع و تفریق این معادلات خواهیم داشت

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) (x_1 + x_2) = -k \frac{M_{tot}}{mM} (x_1 + x_2) \quad (31.13)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m} (x_1 - x_2 + 2l) \quad (32.13)$$

که در آن $M_{tot} = M + 2m$ جرم کلی ملکول است. بنابراین، با معرفی متغیر جدید:

$$x_+ = x_1 + x_2, \quad \text{و} \quad x_- = x_1 - x_2 + 2l \quad (33.13)$$

معادلات زیر را برای مودهای طولی عمودی ملکول بدست می‌آوریم

$$\ddot{x}_\pm = -\omega_\pm^2 x_\pm, \quad \text{که در آن} \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{kM_{tot}}{mM}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (34.13)$$

فرکانس ω_+ مربوط به حرکت ضد متقارن (!) جرم‌ها است: در حالی که جرم‌های جانبی، به عنوان مثال، به همان میزان به سمت راست حرکت می‌کنند، جرم مرکزی به سمت چپ حرکت می‌کند، و بالعکس، به طوری که $x_{cm} = 0$ است. فرکانس ω_- مربوط به یک حرکت متقارن است: جرم‌های جانبی نوسان‌های مخالف هم را انجام می‌دهند، در حالی که جرم مرکزی حرکت نمی‌کند.

- ب: گشتاور دوقطبی الکتریکی مولکول موازی با محور مولکولی است و مقدار آن برابر است با

$$p = -qx_1 + 2qx_c - qx_2 = -q \left(1 + \frac{2m}{M} \right) (x_1 + x_2) = -q \frac{M_{tot}}{M} x_+ \quad (35.13)$$

بنابراین، دوقطبی در حالت ضد متقارن در فرکانس ω_+ نوسان می‌کند. ممان دوقطبی زمانی که مولکول در حالت متقارن نوسان می‌کند صفر است و تابش در فرکانس ω_- فقط به دلیل چهار قطبی است که ضعیف‌تر از گسیل دوقطبی است.

- ج: شرایط اولیه برای x_+

$$x_+(0) = x_1(0) + x_2(0) = d_1 + d_2, \quad x'_+(0) = 0 \quad (36.13)$$

بنابراین برای $t > 0$

$$x_+(t) = (d_1 + d_2) \cos \omega_+ t \quad (37.13)$$

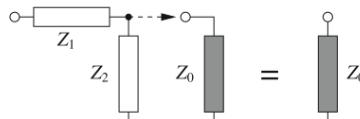
مود متقارن نیز تحریک می‌شود، اما به تابش دوقطبی کمک نمی‌کند. توان تابش لحظه‌ای برابر است با

$$p = \frac{2}{3c^3} |\ddot{p}|^2 = \frac{2q^2}{3c^3} \left(\frac{M_{tot}}{M} \right)^2 \omega_+^2 (d_1 + d_2)^2 \cos^2 \omega_+ t \quad (38.13)$$

۳.۱۳ امپدانس یک شبکه نردبانی بینهایت

- الف: شبکه بینهایت ما دنباله‌ای از بخش‌های یکسان است. همانطور که برای مسئله (۱۰.۴) انجام دادیم، توجه می‌کنیم که افروden یک بخش L بیشتر در سمت چپ شکل (۳.۱۳)، امپدانس شبکه نردبان را تغییر نمی‌دهد.

بنابراین باید داشته باشیم (شکل ح ۱۳-۲).



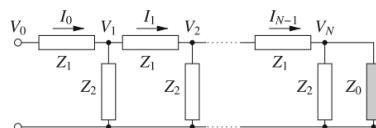
شکل (ح ۱۳)

$$Z_0 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0} \quad (۳۹.۱۳)$$

که از آن $Z_0 = Z_1 Z_2 - Z_1 Z_2$ حاصل می‌شود. جواب این معادله برابر است با

$$Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} \quad (۴۰.۱۳)$$

را حل دیگر معادله درجه دوم کnar گذاشته شده است زیرا در مورد امپدانس‌های واقعی و مثبت (مورد کاملاً مقاومتی مسئله ۴.۱۰) یک مقدار منفی غیرفیزیکی می‌دهد. بنابراین، یک نردنban محدود از بخش N که با امپدانس Z_0 به پایان می‌رسد، همانطور که در شکل (ح ۱۳-۳) نشان داده شده است، معادل نردنban بی‌نهایت است.



شکل (ح ۱۳)

- ب: در شکل (۳.۱۳)، جریان I_n از طریق امپدانس Z_1 بخش $(n+1)-امین$ جریان دارد، بنابراین، افت ولتاژ در سراسر امپدانس، $V_n - V_{n+1}$ باید در Z_1 برابر باشد. از سوی دیگر، $I_n Z_1$ ورودی به شبکه نیمه‌نامتناهی است که از گره n شروع می‌شود، بنابراین باید $I_n = V_n / Z_0$ داشته باشیم. این دو شرط می‌دهد

$$V_n - V_{n+1} = \frac{V_n}{Z_0} Z_1 \quad (۴۱.۱۳)$$

به طوری که نسبت ولتاژهای گره‌های مجاور را بدست می‌آوریم

$$\alpha \equiv \frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{Z_1}{Z_0} \quad (۴۲.۱۳)$$

- اگر $V_0(t) = V_0 e^{j\omega t}$ ولتاژ ورودی باشد، $V_n = \alpha^n V_0 e^{j\omega t}$ در گره n داریم. برای یک شبکه کاملاً مقاومتی داریم

$$Z_0 \equiv R_0 = \frac{R_1}{2} + \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + R_1 R_2} \quad (۴۳.۱۳)$$

- که یک عدد حقیقی و $\alpha = 1 - R_1 / R_0 < 1$ است. در هر گره متولای سیگنال توسط یک عامل α میرا می‌شود.

- ج: برای شبکه LC داریم

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{j\omega L}{\gamma} + \sqrt{-\frac{\omega^2 L^2}{4} + \frac{j\omega L}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{\gamma} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{4LC}{4LC - \omega^2 L^2}} + \frac{j\omega L}{\gamma} = \frac{L}{\gamma} \sqrt{\frac{4}{LC} - \omega^2} + \frac{j\omega L}{\gamma} \\ &= \frac{L}{\gamma} \left(\sqrt{\omega_{co}^2 - \omega^2} + j\omega \right) \end{aligned} \quad (۴۴.۱۳)$$

که در آن $\omega_c \equiv 2/\sqrt{LC}$ است. بنابراین

$$\alpha = 1 - \frac{Z_1}{Z_0} = 1 - \frac{j\omega L}{L(\sqrt{\omega_{co}^2 - \omega^2} + j\omega)} = \frac{\sqrt{\omega_{co}^2 - \omega^2} - j\omega}{\sqrt{\omega_{co}^2 - \omega^2} + j\omega} \quad (45.13)$$

اگر $\omega < \omega_{co}$ باشد، ریشه دوم حقیقی و α نسبت دو عدد مختلط با مزدوج خودش است، ازاینرو $1 = |\alpha|$ ، و می‌توان نوشت با

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_{co}^2 - \omega^2}} \quad (46.13)$$

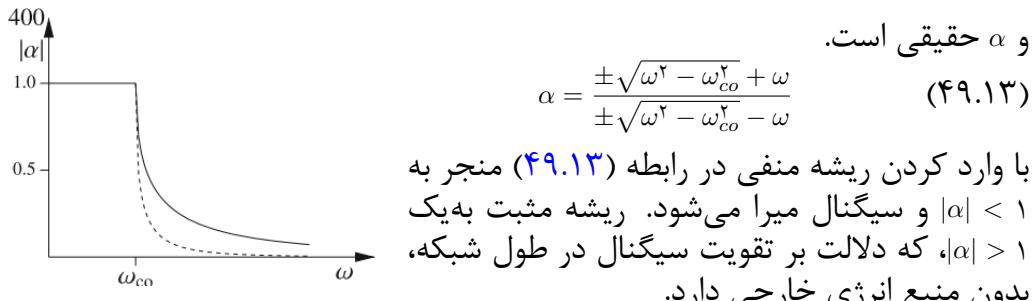
بنابراین ولتاژ در گره n برابر $V_n = V_0 e^{j(\omega t - n\phi)}$ است و سیگنال در طول شبکه بدون میرایی منتشر می‌شود. معادله بالا نیز رابطه پاشندگی را نشان می‌دهد

$$\omega = \omega_{co} \left| \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right| \quad (47.13)$$

این مشابه رابطه پاشندگی (۴۲.۷) است که در مسئله ۴.۷، زمانی که ϕ را جایگزین ka می‌کنیم، بدست می‌آید.

اگر $\omega > \omega_{co}$ باشد، Z_0 یک عدد کاملاً موهوم است،

$$Z_0 = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_{co}^2} \quad (48.13)$$



$$\alpha = \frac{\pm \sqrt{\omega^2 - \omega_{co}^2} + \omega}{\pm \sqrt{\omega^2 - \omega_{co}^2} - \omega} \quad (49.13)$$

با وارد کردن ریشه منفی در رابطه (۴۹.۱۳) منجر به $1 < |\alpha|$ و سیگنال میرا می‌شود. ریشه مثبت به یک $1 > |\alpha|$ که دلالت بر تقویت سیگنال در طول شبکه، بدون منبع انرژی خارجی دارد.

شکل (ح-۱۳)

بنابراین شبکه LC به عنوان یک فیلتر پایین گذر عمل می‌کند، زیرا سیگنال‌ها در فرکانس‌های $\omega > \omega_{co}$ توسط یک عامل $|\alpha|^N$ بعد از N گره ضعیف می‌شوند. وابستگی انتقال شبکه به فرکانس به یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل نزدیک می‌شود، که برای آن انتقال برای $\omega > \omega_{co}$ در تعداد زیادی از بخش‌هایی مدار N ، صفر است. شکل (ح-۱۳-۴) ($|\alpha|$ خط جامد) و $|\alpha|^2$ (خط چین) به صورت تابعی از فرکانس سیگنال ω را نشان می‌دهد.

- د: برای شبکه CL (مسئله ۵.۷) به طور مشابه با بند (ج) برای شبکه LC ادامه می‌دهیم و بدست می‌آوریم

$$Z_0 = \frac{1}{j\omega C} + \sqrt{-\frac{1}{4\omega^2 C^2} + \frac{\omega L}{\omega C}} = \frac{1}{\omega C} \left[\sqrt{\frac{1}{\omega_{co}^2} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{j}{\omega}} \right] \quad (50.13)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega_{co}^{-2} - \omega^{-2}} + j/\omega}{\sqrt{\omega_{co}^{-2} - \omega^{-2}} - j/\omega} \quad (51.13)$$

انتشار بدون میرا برای $1 = |\alpha|$ ، یعنی وقتی $\omega > \omega_{co}$ داریم. برای $\omega < \omega_{co}$ سیگنال‌ها میرا می‌شوند و شبکه به عنوان یک فیلتر بالا گذر عمل می‌کند.

۴.۱۳ تخلیه یک خازن استوانه‌ای

الف: در اینجا از مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) به دلایل تقارن، استفاده می‌کنیم. با فرض $b \gg h$ ، میدان الکتریکی بین صفحات خازن شعاعی است و به راحتی از قانون گاووس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_r = E_r(r) = \frac{2Q_0}{hr} \quad \text{واحد گاووسی} \quad (52.13)$$

اختلاف پتانسیل V دو سر صفحات برابر است با:

$$V = \left| \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right| = \frac{2Q_0}{h} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2Q_0}{h} \ln(b/a) \quad (53.13)$$

و ظرفیت خازن استوانه‌ای ما برابر است با:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{h}{2 \ln(b/a)} \quad (54.13)$$

انرژی الکترواستاتیکی اولیه برابر $U_{es} = Q_0^2 / 2C$ است.

پس از اتصال صفحات از طریق مقاومت در τ ، سیستم یک مدار RC است و شارژ خازن در زمان t برابر است با:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC = \frac{Rh}{2 \ln(b/a)} \quad (55.13)$$

با فرض اینکه چگالی بار روی صفحات در طول تخلیه یکنواخت می‌ماند، قدر مطلق بار هر صفحه $z = 0$ بین پایین آن، و هر صفحه ارتفاع $z < h$ (به شکل ۴.۱۳-۵۵) برای مورد داخلی مراجعه کنید) شکل (۴.۱۳) برابر است با:

$$\Delta Q(z, t) = Q(t) \frac{z}{h} \quad (56.13)$$

میرائی بار به معنای جریانی است که بر روی هر صفحه، در امتداد جهت \hat{z} جریان می‌یابد. فرض کنید $I_a(z, t)$ و $I_b(z, t)$ به ترتیب جریان‌های صفحه داخلی و خارجی باشند که می‌توان از معادله پیوستگی بدست آورده: برای صفحه داخلی

$$I_a(z, t) = -\frac{d[\Delta Q(z, t)]}{dt} = \frac{Q(t)}{\tau} \frac{z}{h} = \frac{Q_0}{\tau} \frac{z}{h} e^{-t/\tau} \quad (57.13)$$

از آنجایی که، به فرض چگالی بار یکنواخت، بار روی صفحه بیرونی $\Delta Q(z, t)$ باشد، در این صورت $I_b(z, t) = -I_a(z, t)$

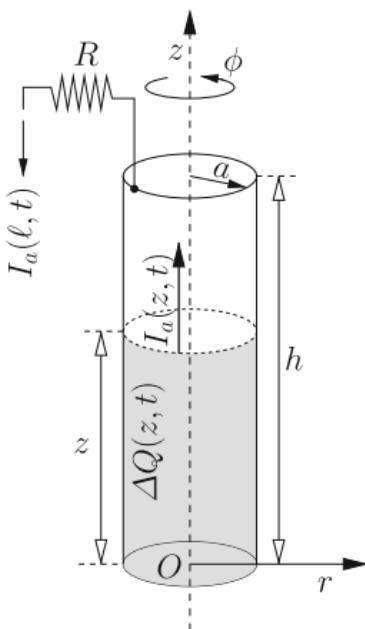
می‌توانیم \mathbf{B} را در منطقه $a < r < b$ از معادله ماسکول محاسبه کنیم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (58.13)$$

تنها مؤلفه غیر صفر J در امتداد z و تنها مؤلفه غیر صفر E در امتداد r است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}} \frac{2Q(t)}{hr} \quad (59.13)$$

در حالی که \mathbf{B} به دلیل تقارن مسئله، باید مستقل از ϕ باشد. بنابراین، با توجه به مؤلفه‌های کرل در مختصات استوانه‌ای جدول (۱-۱) پیوست، داریم.



شکل (ح-۱۳)

$$(\nabla \times \mathbf{B})_r = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (60.13)$$

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} J_z$$

و می‌بینیم که تنها مولفه غیر صفر B_ϕ است که می‌تواند از هر یک از آنها (۶۰.۱۳) محاسبه شود. ما رابطه دومی از (۶۰.۱۳) را انتخاب می‌کنیم و قضیه استوکس را روی دایره C با شعاع $a < r < b$ هم محور با خازن و در ارتفاع $z < h < z + \Delta z$ اعمال می‌کنیم.

$$\oint_C \mathbf{B}(r, z, t) \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_\phi(r, z, t) = \frac{4\pi}{c} I_a(z, t) \quad (61.13)$$

$$B_\phi(r, z, t) = \frac{1}{c} \frac{I_a(z, t)}{r} = \frac{1}{ch\tau} Q_\circ e^{-t/\tau} \quad (62.13)$$

- ب : بردار پواین‌تینگ برابر است با:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{z} \frac{Q_\circ}{\pi h^2 \tau} \frac{z}{r^2} e^{-t/\tau}, \quad a < r < b \quad (63.13)$$

و اگر $r < a$ یا $r > b$ باشد، $\mathbf{S} = 0$ است. بنابراین، شار S که از درون صفحه‌ای عمود بر z در ارتفاع $z < h < z + \Delta z$ می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi_S(z, t) = \frac{z Q_\circ}{\pi h^2 \tau} e^{-t/\tau} \int_a^b \frac{1}{r^2} 2\pi r dr = \frac{2 Q_\circ z \ln(b/a)}{h^2 \tau} e^{-t/\tau} \quad (64.13)$$

انرژی الکترواستاتیک مربوط به حجم بین قاعده خازن ($z = 0$) و ارتفاع z در زمان t برابر است با:

$$\Delta U_{es}(z, t) = \frac{z}{h} \frac{Q_\circ(t)}{2C} = \frac{z}{h} \frac{Q_\circ e^{-t/\tau}}{2C} = \frac{z}{h} \frac{Q_\circ \ln(b/a)}{h} e^{-t/\tau} \quad (65.13)$$

زیرا میدان الکتریکی به z بستگی ندارد. بنابراین داریم

$$\frac{d[\Delta U_{es}(z, t)]}{dt} = -\frac{2\Delta U_{es}(z, t)}{\tau} = -\Phi_S(z, t) \quad (66.13)$$

- ج: مفروضات جریان‌های متغیر آهسته و چگالی بار یکنواخت ارتباط نزدیکی با هم دارند. در واقع، خازن را می‌توان به عنوان بخشی از یک کابل کواکسیال مشاهده کرد که در طول آن سیگنال‌های بار و جریان در مود TEM با سرعت c منتشر می‌شوند. در این شرایط، چگالی بار را می‌توان یکنواخت فرض کرد اگر انتشار سیگنال‌ها با توجه به مدت زمان تخلیه "آنی" به عنوان مثال، اگر زمان انتشار $\tau \ll h/c$ باشد، این معادل با فرض این است که طول موج‌های متناظر با طیف فرکانس سیگنال بسیار

بزرگتر از h هستند، به طوری که می‌توان میدان را در امتداد z یکنواخت در نظر گرفت.

با بررسی اینکه میدان الکتریکی \mathbf{E}_1 که توسط القای مغناطیسی ایجاد می‌شود، بسیار کوچکتر از میدان الکترواستاتیک \mathbf{E} است، می‌توانیم از معادله ماکسول به همین نتیجه برسیم.

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (67.13)$$

که در آن تنها مولفه غیر صفر \mathbf{B}_ϕ است، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{1r}}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{2}{ch\tau^2} \frac{z}{r} Q_0 e^{-t/\tau} \\ E_{1r} &= \frac{Q_0}{c^2 h \tau^2} \frac{z}{r} e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{c\tau} \right)^2 E_{or} \end{aligned} \quad (68.13)$$

که در آن E_{or} از رابطه دوم (۵۹.۱۳) است. بنابراین اگر $c\tau \ll h$ باشد است.

۵.۱۳ میدان‌های ایجاد شده توسط منابع متناوب سطحی

الف: در این مورد میدان‌ها و پتانسیل الکترواستاتیک هستند. پتانسیل $\varphi = \varphi(x, y)$ جواب معادله لاپلاس دو بعدی است.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 0 \quad \text{برای } y \neq 0. \quad (69.13)$$

و به دلیل تقارن منبع، باید تابعی زوجی از y باشد. سعی می‌کنیم با روش جداسازی متغیرها راه حل پیدا کنیم، به عنوان مثال، ما به دنبال جوابی به شکل $\varphi = X(x)Y(y)$ هستیم، که در آن X فقط به x و Y فقط به y بستگی دارد. معادله (۶۹.۱۳) می‌شود

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0. \quad (70.13)$$

که در آن نماد پریم دوگانه نشان دهنده مشتق دوم هستند. با تقسیم بر (y) بدست می‌آوریم

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (71.13)$$

که باید برای هر x, y برقرار باشد، به این معنی که هر دو طرف معادله باید با مقداری ثابت برابر باشند، که برای راحتی، آن را با α^2 نشان می‌دهیم.

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha^2 \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 \quad (72.13)$$

بنابراین جواب‌های آن عبارتند از

$$Y(y) = A_y e^{+\alpha y} + B_y e^{-\alpha y}, \quad X(x) = A_x e^{-j\alpha x} + B_x e^{+j\alpha x} \quad (73.13)$$

که در آن A_x, A_y, B_x و B_y ثابت‌هایی هستند که باید تعیین شوند. با حذف کردن جواب‌هایی که برای $|y| \rightarrow \infty$ به بی‌نهایت می‌رود، و با وابستگی x به $\alpha = k$ دلالت بر دارد، به دست می‌آوریم

$$\varphi = \varphi_0 e^{-k|y|} \cos(kx) \quad (74.13)$$

که در آن φ ثابتی است که باید تعیین شود. مولفه‌های غیر صفر میدان الکتریکی عبارتند از

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\varphi_0 e^{-k|y|} \sin(kx) \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{sgn}(y)k\varphi_0 e^{-k|y|} \cos(kx) \end{aligned} \quad (75.13)$$

مولفه E_x در صفحه $y = 0$ ، همانطور که انتظار می‌رود، پیوسته است، زیرا $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. می‌توانیم با استفاده از قانون گاووس، رابطه بین E_y در $y = 0$ و چگالی بار سطحی را به دست آوریم.

$$E_y(x, y = 0^+) - E_y(x, y = 0^-) = 4\pi\sigma(x) \quad (76.13)$$

که از آن مقدار φ به دست می‌آوریم، یعنی $\varphi_0 = 2\pi\sigma_0/k$ ، و در نهایت

$$\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{k} e^{-k|y|} \cos(kx) \quad (77.13)$$

• ب: در اینجا میدان‌های مغناطیسی استاتیکی داریم. با توجه به تشابه بین معادلات پواسون برای پتانسیل برداری $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$ و برای پتانسیل اسکالر $\nabla^2 A = -4\pi J/c$ ، می‌توانیم از (77.13) برای به دست آوردن پتانسیل برداری \mathbf{A} استفاده کنیم.

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} A_0 e^{-k|y|} \cos(kx), \quad A_0 = \frac{2\pi K_0}{kc} \quad (78.13)$$

مولفه‌های غیر صفر میدان مغناطیسی عبارتند از

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\text{sgn}(y)kA_0 e^{-k|y|} \cos(kx) = -\text{sgn}(y)\frac{2\pi K_0}{c} e^{-k|y|} \cos(kx) \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} = kA_0 e^{-k|y|} \sin(kx) = \frac{2\pi K_0}{c} e^{-k|y|} \sin(kx) \end{aligned} \quad (79.13)$$

بنابراین، B_y در $y = 0$ ، همانطور که از $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ انتظار می‌رود پیوسته است. علاوه بر این داریم

$$B_x(x, y = 0^+) - B_x(x, y = 0^-) = -\frac{4\pi}{c} K_0 \cos(kx) \quad (80.13)$$

که با قانون آمپر سازگار است.

• ج: از آنجایی که $\sigma = 0$ ، پتانسیل اسکالر $\varphi = 0$ نیز صفر است. معادله موج ناهمگن برای پتانسیل برداری \mathbf{A} ، با شرایط لورنتس،

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{4\pi}{c} \delta(y) K_0 e^{j\omega t} \cos(kx) \quad (81.13)$$

به عنوان یک حدس خوب، به دنبال جوابی بصورت زیر هستیم

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} A_0 e^{-q|y| + j\omega t} \cos(kx) \quad (82.13)$$

که برای $y \neq 0$ منجر به

$$\left(-k^2 + q^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{A} = 0 \quad \text{یا} \quad q^2 = k^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (83.13)$$

بنابراین، اگر $\omega < kc$ حقيقی است و \mathbf{A} به صورت نمایی با $|y|$ میرا می‌شود. اگر $\omega > kc$ موهمی است و امواج \mathbf{A} متناسب با $e^{j(\omega t - |q||y|)}$ منتشر می‌شوند. اگر از

رابطه در از $-h < y < h$ انتگرال گیری کنیم، بدست می‌آوریم

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{+h} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) dy = -\hat{\mathbf{z}} \frac{4\pi}{c} K_0 e^{j\omega t} \cos(kx) \quad (84.13)$$

اکنون، هر دو $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$ در $y = 0$ پیوسته هستند و در حد $h \rightarrow \infty$ به انتگرال کمک نمی‌کنند. بنابراین، سمت چپ (84.13) برابر است با:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^{+h} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} dy &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right]_{-h}^{+h} = -\hat{\mathbf{z}} A_0 q \cos(kx) \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\operatorname{sgn}(y) e^{-q|y|+j\omega t} \right]_{-h}^{+h} \\ &= -\hat{\mathbf{z}} A_0 e^{j\omega t} q \cos(kx) \end{aligned} \quad (85.13)$$

که باید برابر با سمت راست (84.13) باشد که منجر به

$$A_0 = \frac{2\pi}{qc} K_0. \quad (86.13)$$

که در حد استاتیک $\omega \rightarrow 0$ ، $q \rightarrow k$ برابر رابطه (78.13) است.

مولفه‌های غیر صفر میدان مغناطیسی عبارتند از:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{(y)}{c} K_0 e^{-q|y|+j\omega t} \cos(kx) \\ &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\pi k}{qc} K_0 e^{-q|y|+j\omega t} \sin(kx) \end{aligned} \quad (87.13)$$

که در حد استاتیک $\omega \rightarrow 0$ ، $q \rightarrow k$ برابر رابطه (79.13) است. میدان الکتریکی از

به دست می‌آید و تنها مولفه غیر صفر آن برابر است با:

$$E_z = \frac{g\omega \pi K_0}{qc} e^{-q|y|+j\omega t} \cos(kx) \quad (88.13)$$

۵: در این کتاب، با توجه بهتابع $f = f(x, t)$ ، میانگین زمانی آن را با براکت‌های زاویه‌ای، و میانگین مکانی آن را با یک خط بالای آن به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\langle f \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f dt, \quad \bar{f} = \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{+\pi/k} f dx \quad (89.13)$$

بنابراین میانگین توان تلف شده در واحد زمان را می‌نویسیم و سطح را در صفحه $y = 0$ به صورت زیر یکسان‌سازی می‌کنیم

$$\langle \overline{KzE_z} \rangle = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[K_0 \left(\frac{-2\pi j\omega}{qc} K_0 \right)^* \right] \overline{\cos(kx)} = \frac{\pi\omega}{4c} |K_0|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{j}{q} \right) \quad (90.13)$$

اگر q حقيقی باشد، $\langle \overline{KzE_z} \rangle = 0$ داریم، که میدان‌ها برای $|y| \rightarrow \infty$ محو شونده^۱ هستند. هیچ شار انرژی از صفحه $y = 0$ بیرون نمی‌رود و کار انجام شده توسط

^۱Evanescence

جريان‌ها به طور متوسط صفر است. عبارت دیگر q موهومی است و داریم

$$\langle \overline{KzE_z} \rangle = -\frac{\pi\omega|K_0|^2}{2|q|c} \quad (91.13)$$

که برابر با منهای شار انرژی الکترومغناطیسی خارج شونده از صفحه $y = 0$ است.
در واقع، بردار پواین‌تینگ میانگین شده برابر است با:

$$\begin{aligned} \langle \overline{S_y} \rangle &= \frac{c}{4\pi} \langle \overline{E_z B_x} \rangle = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{-j\omega \pi K_0}{2qc} \left(\operatorname{sgn}(y) q^* \frac{\pi K_0^*}{q^* c} \right) \right] \overline{\cos(kx)} \\ &= \operatorname{sgn}(y) \frac{\pi\omega|K_0|^2}{4|q|c} \end{aligned} \quad (92.13)$$

که در آن از $|q|$ (برای q موهومی) استفاده کردیم. بنابراین، شار انرژی خارج از صفحه $y = 0$ برابر $-\langle \overline{S_y} \rangle = -\langle \overline{KzE_z} \rangle$ است.

۶.۱۳ شار انرژی و تکانه نزدیک به یک آینه کامل

الف: مجموع میدان الکتریکی جلوی آینه مجموع میدان‌های امواج تابشی (E_i) و امواج بازتابی (E_r) است که دارای دامنه و فرکانس یکسان، اما قطبش‌ها و بردار موج‌های مخالف هستند.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{y}} E_\epsilon [\cos(kx - \omega t) - \cos(-kx - \omega t)] \\ &\quad - \hat{\mathbf{z}} \epsilon E_\epsilon [\sin(kx - \omega t) - \sin(-kx - \omega t)] \\ &= \hat{\mathbf{y}} E_\epsilon [\cos(kx) \cos(\omega t) + \sin(kx) \sin(\omega t) - \cos(kx) \cos(\omega t) + \sin(kx) \sin(\omega t)] \\ &\quad - \hat{\mathbf{z}} \epsilon E_\epsilon [\sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t) + \sin(kx) \cos(\omega t) + \cos(kx) \sin(\omega t)] \\ &= \hat{\mathbf{y}} 2E_\epsilon \sin(kx) \sin(\omega t) - \hat{\mathbf{z}} 2\epsilon E_\epsilon \sin(kx) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (93.13)$$

که در آن $E_\epsilon \equiv E_0 / \sqrt{1 + \epsilon^2}$ است. می‌توانیم میدان مغناطیسی را از معادله ماکسول بدست آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} c \frac{\partial E_z}{\partial x} - \hat{\mathbf{z}} c \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ &= -\hat{\mathbf{y}} 2\epsilon E_\epsilon c k \cos(kx) \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{z}} 2\epsilon E_\epsilon c k \cos(kx) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (94.13)$$

بعد از انتگرال‌گیری در dt بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\hat{\mathbf{y}} 2\epsilon E_\epsilon \frac{ck}{\omega} \cos(kx) \sin(\omega t) - \hat{\mathbf{z}} 2\epsilon E_\epsilon \frac{ck}{\omega} \cos(kx) \cos(\omega t) \\ &= -\hat{\mathbf{y}} 2\epsilon E_\epsilon \cos(kx) \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{z}} 2\epsilon E_\epsilon \cos(kx) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (95.13)$$

مسائل الکترومغناطیس

که در آن از $k = \omega/c$ استفاده کردیم. بردار پواین‌تینگ برابر است با:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \frac{c}{4\pi} (E_y B_z - E_z B_y) \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \frac{cE_\epsilon^\gamma}{\pi} [\sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t) - \epsilon^\gamma \sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t)] \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \frac{cE_\epsilon^\gamma}{\pi} \sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t) (1 - \epsilon^\gamma) \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \frac{c}{4\pi} E_\epsilon^\gamma (1 - \epsilon^\gamma) \sin(2kx) \sin(2\omega t)
 \end{aligned} \tag{۹۶.۱۳}$$

بنابراین $\mathbf{S} = 1 - \epsilon$ مربوط به قطبش دایره‌ای است. در چنین حالتی، \mathbf{E} موازی با \mathbf{B} است. به طور کلی، همچنین وقتی $\langle \mathbf{S} \rangle \neq 0$ است، $\langle \mathbf{S} \rangle$ داریم، و جریان انرژی خالص وجود ندارد.

• ب: از تعریف T_{ij} متوجه می‌شویم

$$\begin{aligned}
 F_x &= T_{xx} = \frac{1}{\lambda\pi} \mathbf{B}^\gamma (\circ^-) = \frac{1}{4\pi} E_\epsilon^\gamma (\cos^\gamma \omega t + \epsilon^\gamma \sin^\gamma \omega t) \\
 &= \frac{2I}{c} \left[1 + \frac{1 - \epsilon^\gamma}{1 + \epsilon^\gamma} \cos 2\omega t \right]
 \end{aligned} \tag{۹۷.۱۳}$$

مولفه نوسانی (2ω) برای قطبش دایره‌ای حذف می‌شود. میانگین F_x فشار تشعشع روی آینه است (مسئله ۸.۹) که به قطبش بستگی ندارد.

۷.۱۳ خنک کننده لیزری آینه

• الف: یک موج مسطح با شدت I فشار تشعشعی $2I/c$ را روی سطح کاملاً بازتابنده اعمال می‌کند. بنابراین کل نیروی وارد بر آینه که در امتداد محور x شکل ۵.۱۳ هدایت می‌شود، برابر است با

$$F = \frac{2A}{c} (I_1 - I_2) \tag{۹۸.۱۳}$$

اگر $I_1 > I_2$ باشد، داریم $F > 0$.

• ب: دامنه‌های میدان‌های الکتریکی دو موج، در دستگاه تکیه آینه S' ، عبارتند از:

$$E'_1 = \gamma(E_1 - \beta B_1) = \gamma(1 - \beta)E_1 = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} E_1 \tag{۹۹.۱۳}$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 + \beta B_2) = \gamma(1 + \beta)E_2 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} E_2 \tag{۱۰۰.۱۳}$$

که در آن در آحاد گوسی $E_2 = B_2$, $E_1 = B_1$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$ است. شدت موج مسطح برابر $I = (c/4\pi)|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = cE^2/4\pi$ است، بنابراین داریم

$$I'_1 = \frac{1-\beta}{1+\beta} I_1, \quad I'_2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} I_2 \quad (10.1.13)$$

از آنجائی که فرض کردیم $I_1 = I_2$, نیروی کل برابر است با

$$F' = \frac{2A}{c}(I'_1 - I'_2) = \frac{2A(1-\beta)^2 - (1+\beta)^2}{c(1-\beta)} = -8A\beta\gamma^2 \frac{I}{c} \quad (10.2.13)$$

- ج: از پاسخ بهبند (ب) $F' < 0$ داریم، جهت نیرو مخالف جهت v است. در حد $c \ll v$ نیروی موجود در دستگاه آزمایشگاهی برابر با نیروی دستگاه آینه است، و داریم

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{F}' \approx -8A \frac{I^\circ}{c^3} \mathbf{v} \quad (10.3.13)$$

که یک نیروی چسبناک (ویسکوز) است. تحت تأثیر این نیرو، سرعت آینه در زمان بهصورت نمائی کاهش می‌یابد

$$v(t) = v^\circ e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{Mc^3}{\lambda A I} \quad (10.4.13)$$

این اثر شباهت‌هایی با تکنیک‌های "خنک کننده لیزری" دارد که برای خنک کردن اتم‌ها تا دمای $10^{-6} K$ استفاده می‌شود. به عنوان مثال، خنک کننده داپلر و خنک کننده سیزیف^۲ از جمله این موارد هستند. خنک شدن یک آینه ماکروسکوپی توسط فشار تابش نیز برای کاربردهای احتمالی در آزمایش‌های تداخل‌سنجدی نوری با دقت بسیار بالا، به عنوان مثال، برای تشخیص امواج گرانشی، مورد مطالعه قرار گرفته است.

۸.۱۳ فشار تابشی روی یک فویل نازک

- الف: حل این مشکل با سه روش مختلف آموزنده است. برای تعریف مسئله، یک موج تابشی با قطبش خطی، با میدان الکتریکی $\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{y}} E_i e^{j(\omega t - k_i x)}$, که $k_i = \omega/c$ در نظر می‌گیریم؛ تعمیم به قطبش دلخواه نیز ساده است.

روش اول (ابتکاری): موج صفحه تابشی را یک پالس مربعی با مدت زمان دلخواه اما محدود τ و در نتیجه طول $c\tau$ فرض می‌کنیم. تکانه بسته موج که به سطح A فویل برخورد می‌کند، بدون توجه به اثرات مرزی برابر است با:

$$\mathbf{p}_i = \frac{\langle \mathbf{S}_i \rangle}{c^2} c\tau A = \hat{\mathbf{x}} \frac{\langle |\mathbf{E}_i|^2 \rangle}{4\pi c} \tau A = \hat{\mathbf{x}} \frac{E_i^2}{\lambda\pi c} \tau A = \hat{\mathbf{x}} \frac{I}{c} \tau A \quad (10.5.13)$$

که در آن $I = \langle |\mathbf{S}_i| \rangle = c \langle |\mathbf{E}_i|^2 \rangle / (4\pi) = cE_i^2/(8\pi)$ شدت موج تابشی است. بسته‌های موج تابشی و بازتابی دارای تکانه‌ها به ترتیب

$$\mathbf{p}_r = \frac{\langle \mathbf{S}_i \rangle}{c^2} c\tau A = -\hat{\mathbf{x}} R \frac{\langle |\mathbf{E}_i|^2 \rangle}{\lambda\pi c} \tau A = -\hat{\mathbf{x}} R \frac{I}{c} \tau A \quad (10.6.13)$$

^۲Sisyphus cooling

$$\mathbf{p}_t = \frac{\langle \mathbf{S}_t \rangle}{c} c\tau A = +\hat{\mathbf{x}} T \frac{\langle |\mathbf{E}_i|^2 \rangle}{\lambda\pi c} \tau A = +\hat{\mathbf{x}} T \frac{I}{c} \tau A \quad (107.13)$$

که در آن $T = |t|^2$, $R = |r|^2$ و بعلت اصل بقاء انرژی $R + T = 1$ است. مقدار تکانه انتقال یافته از بسته موج تابشی به فویل برابر است با

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_i - (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_t) \quad (108.13)$$

در نتیجه فشاری که فویل را به سمت مقادیر x مثبت سوق می‌دهد (زیرا $\Delta \mathbf{p} > 0$) است

$$P_{rad} = \frac{|\Delta \mathbf{p}|}{\tau A} = [1 - (-R + T)] \frac{I}{c} = 2R \frac{I}{c} \quad (109.13)$$

روش دوم: میانگین نیروی وارد بر فویل را به موازات $\hat{\mathbf{x}}$ مستقیماً به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \int_0^d \langle \mathbf{J} \times \mathbf{B} \rangle Adx \quad (110.13)$$

که در آن سطح سمت چپ فویل را در $x = d$ و سطح سمت راست را در $x = 0$ فرض کرده‌ایم. برای ضخامت بسیار کوچک d می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} A \int_0^d \langle \mathbf{J} \times \mathbf{B} \rangle dx &= \frac{1}{\gamma} Ad \langle J(t)[B^{(0+)} + B^{(0-)}] \rangle \\ &= -\frac{Ac}{\lambda\pi} \langle [B^{(0+)} - B^{(0-)}] \rangle \end{aligned} \quad (111.13)$$

که در آن $J(t) = -[B^{(0+)} - B^{(0-)}] c / (4\pi d)$ جایگزین کرده‌ایم. از آنجائی که $|B^{(0-)}| = |E_i - E_r| = |(1-r)E_i|$ و $B^{(0+)} = |E_t| = |tE_i|$ وارد بر فویل را بنویسیم

$$P_{rad} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{A} = -\frac{E_i}{16\pi c} (|t|^2 - |1-r|^2) = \frac{I}{\gamma c} (|t|^2 - |1-r|^2) \quad (112.13)$$

با معرفی $\alpha = j\omega_p/(2\omega_c)$ در رابطه (5.13)، به طوری که $t = r e^{j\alpha}$ داریم

$$t = \frac{1}{1+j\alpha}, \quad T = |t|^2 = \frac{1}{1+\alpha^2} \quad (113.13)$$

$$r = -\frac{j\alpha}{1+j\alpha}, \quad R = |r|^2 = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad (114.13)$$

$$|1-r|^2 = \frac{1+5\alpha^2+4\alpha^4}{(1+\alpha^2)^2}, \quad |t|^2 - |1-r|^2 = -\frac{4\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad (115.13)$$

$$P_{rad} = \frac{I}{\gamma c^2} \frac{4\alpha^2}{1+\alpha^2} = 2R \frac{I}{c} \quad (116.13)$$

روش سوم: ما جریان تکانه EM را مستقیماً با استفاده از تansور تنش ماکسول T_{ij} محاسبه می‌کنیم. قضیه بقای تکانه EM بیان می‌کند که

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \oint_S T_{ij} n_j dS \quad (117.13)$$

(جمع بر شاخص مکرر دلالت دارد)، که در آن \hat{n} بردار واحد نرمال به سطح S است که ورق نازک را در بر می‌گیرد، و \square تکانه کل (EM و مکانیکی) فویل است. از آنجایی که در حالت ثابت سهم EM ثابت است، RHS رابطه (۱۱۷.۱۳) برابر است با تغییر تکانه مکانیکی، یعنی نیرو.

با در نظر گرفتن اینکه میدان الکتریکی فقط مولفه E_y و میدان مغناطیسی فقط مولفه B_z دارد و $\mp\hat{x} = \hat{n}$ در سمت چپ ($x = \circ^+$) و راست ($x = \circ^-$) به ترتیب تنها مولفه مرتبط T_{xx} , T_{ij} است و

$$\frac{dp_x}{dt} = [T_{xx}(\circ^+) - T_{xx}(\circ^-)]A \quad (۱۱۸.۱۳)$$

برای $T_{xx}(\circ^+)$ و $T_{xx}(\circ^-)$ داریم

$$\begin{aligned} T_{xx}(\circ^+) &= -\frac{1}{\lambda\pi} \langle E^\gamma(\circ^+) + B^\gamma(\circ^+) \rangle = -\frac{1}{\lambda\pi} \langle |E_t|^\gamma(\circ^+) \rangle \\ &= -T \frac{E_i^\gamma}{\lambda\pi} \\ T_{xx}(\circ^-) &= -\frac{1}{\lambda\pi} \langle E^\gamma(\circ^-) + B^\gamma(\circ^-) \rangle = -\frac{\langle E_i^\gamma \rangle}{\lambda\pi} [|(\lambda+r)|^\gamma + |(\lambda-r)|^\gamma] \\ &= -\frac{E_i^\gamma}{\lambda\pi} (\lambda + |r|^\gamma + rr^* + \lambda + |r|^\gamma - rr^*) \\ &= -(\lambda + R) \frac{E_i^\gamma}{\lambda\pi} \end{aligned} \quad (۱۱۹.۱۳)$$

بنابراین

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{E_i^\gamma}{\lambda\pi} (-T + \lambda + R) A = 2R \frac{I}{c} A \quad (۱۲۰.۱۳)$$

که دوباره رابطه (۶.۱۳) بدست می‌آید.

- ب: از تبدیل لورنتس میدان‌ها، شدت موج تابشی را در دستگاه S' ، جایی که فویل ساکن است، به دست می‌آوریم.

$$I' = \frac{1-\beta}{1+\beta} I \quad (۱۲۱.۱۳)$$

و نیروی وارد بر فویل در $S' = 2AI'/c$ است. از آنجایی که برای نیروی موازی γ داریم، در کادر آزمایشگاهی S می‌توانیم بنویسیم

$$F = F' = 2 \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{I}{c} A \quad (۱۲۲.۱۳)$$

- ج: فشار تابش باید در یک ضریب $R = R(\omega')$ در دستگاه S' ضرب شود، جایی که فرکанс $\omega' = (\lambda - \beta)/(\lambda + \beta)\omega$ است. بدین ترتیب

$$F = 2 \frac{1-\beta}{1+\beta} R(\omega') \frac{I}{c} A, \quad \omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \omega \quad (۱۲۳.۱۳)$$

٩.١٣ پراکندگی تامسون در حضور میدان مغناطیسی

- الف: میدان‌ها را با نماد مختلط می‌نویسیم. در این مفروضات، معادله حرکت الکترون خواهد بود

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_0 \right) \quad (124.13)$$

که در آن e و m_e به ترتیب بار و جرم الکترون هستند. جوابها قبلًا در مسئله ١٠.٧ محاسبه شده و برابر است با:

$$v_x = \frac{\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2} \frac{e}{m_e} E_i e^{j\omega t}, \quad v_y = \frac{j\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2} \frac{e}{m_e} E_i e^{j\omega t} \quad (125.13)$$

و $v_z = 0$ است.

- ب: توان تابشی میانگین زمانی برابر است با:

$$\langle P \rangle = \frac{e^4}{3m_e^2 c^3} |E_i|^2 \frac{\omega}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2} (\omega_c^2 + \omega^2) \quad (126.13)$$

که در رزونانس سیکلولترون $\omega_c = \omega$ بیشینه است. در حد فرکانس پایین $1 \ll \omega/\omega_c$ داریم، در حالی که در حد فرکانس بالا $1 \gg \omega/\omega_c$ توان مستقل از فرکانس است (طیف "سفید").

مدار الکترون بیضوی است، در نتیجه توزیع زاویه‌ای و قطبی تابش پراکنده مشابه آنچه برای یک الکtron در حضور یک موج قطبی بیضوی یافت می‌شود است. در غیاب میدان‌های مغناطیسی خارجی، همانطور که در مسئله ٩.١٠ بحث شد. طبق رابطه (١٢٥.١٣) $v_x/v_y = j\omega_c/\omega$ داریم. در حد $\omega \ll \omega_c$ داریم $\langle |v_x| \rangle \gg \langle |v_y| \rangle$ بنابراین، محور اصلی مدار بیضوی الکترون موازی با \hat{x} است و قوی‌ترین شدت تابش در صفحه yz مشاهده می‌شود. در حد مقابل، $\omega \gg \omega_c$ داریم $\langle |v_y| \rangle \gg \langle |v_x| \rangle$ ، محور اصلی مدار موازی با \hat{y} است و قوی‌ترین شدت تابش در صفحه xz مشاهده می‌شود.

١٠.١٣ تابش موج‌ساز قوی

- الف: طبق معادله ماکسول $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ است، باید داشته باشیم

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) \cos(kx) \quad (127.13)$$

که بعد از انتگرال‌گیری در dx منجر به

$$B_x = \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right) \frac{\sin(kx)}{k} \quad (128.13)$$

که در آن ثابت انتگرال‌گیری را صفر کرده‌ایم. در شرایط ایستا و در صورت عدم وجود جریان الکتریکی، $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ داریم، بنابراین باید نیز داشته باشیم.

$$0 = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -kb(y) \sin(kx) + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right) \frac{\sin(kx)}{k} \quad (129.13)$$

که با تقسیم بر $\sin(kx)$ به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$\left(\frac{\partial^2 b(y)}{\partial y^2} \right) = k^2 b(y) \quad (130.13)$$

که جواب زوج رابطه (130.13) خواهد بود

$$b(y) = B_0 \cosh(ky) \quad (131.13)$$

که در آن B_0 یک مقدار ثابت است که باید تعیین شود. بنابراین دو مولفه غیر صفر عبارتند از

$$B_x = -B_0 \sin(kx) \sinh(ky), \quad B_y = B_0 \cos(kx) \cosh(ky) \quad (132.13)$$

و روی محور z جائی که $x = 0$ و $y = 0$ است داریم

$$B(0, 0, z) = \hat{y} B_0. \quad (133.13)$$

- ب: تبدیل‌های لورنتس از دستگاه آزمایشگاهی S به S' برای میدان‌های S' به دست می‌آید

$$B'_x = B_x[x(x', t'), y'] = -B_0 \sinh(ky') \sin[k\gamma(x' + vt')] \quad (134.13)$$

$$B'_y = \gamma B_y[x(x', t'), y'] = \gamma B_0 \cosh(ky') \cos[k\gamma(x' + vt')] \quad (135.13)$$

$$E'_z = \gamma v B_y[x(x', t'), y'] = \gamma v B_0 \cosh(ky') \cos[k\gamma(x' + vt')] \quad (136.13)$$

که در آن $y' = y/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. از آنجایی که افزایش γ موافق با محور x است، داریم.

بدون در نظر گرفتن نیروی مغناطیسی در S' ، الکترون در امتداد \hat{z} نیروی میدان الکتریکی $E' = E'_z(0, 0, t) = \gamma v B_0 \cos(\omega t)$ ، که در آن $\omega' = k\gamma v$ نوسان می‌کند. بنابراین، در S' ، پراکندگی تامسون را مشاهده می‌کنیم، و الکترون تابش دوقطبی الکتریکی با فرکانس ω' را ساطع می‌کند.

- ج: با تبدیل به S ، فرکانس تابش ساطع شده در جهت جلو (+) و عقب (-) است.

$$\omega_{\pm} = \gamma(1 \pm \beta)\omega' = \gamma(1 \pm \beta)k\gamma v = ke\gamma^2\beta(1 \pm \beta) \quad (137.13)$$

که در آن $\beta = v/c$ است.

در S' ، الکترون در جهت نوسان خود، یعنی در امتداد \hat{x} تابش ساطع نمی‌کند. این مربوط به دو بردار موج "ممنوعه" $(0, 0, \omega'/c)$ و $\mathbf{k}' \equiv (0, 0, -\omega'/c)$ است. با تبدیل برگشتی به S به دست می‌آوریم

$$k_x = \gamma \left(k'_x \pm \frac{\omega'}{c} \beta \right) = \pm \gamma \beta \frac{\omega'}{c}, \quad k_y = 0, \quad k_z = k'_z = \frac{\omega'}{c} \quad (138.13)$$

بنابراین، در S ، هیچ تابشی در زوایای $\theta \pm \theta$ در صفحه xz نداریم، به طوری که

$$\tan \theta = \frac{k_z}{k_x} = \frac{1}{\gamma \beta} \quad (139.13)$$

«تابش موج‌ساز» که توسط الکترون‌های پاراپلزی تزریق می‌شود که در طول یک میدان مغناطیسی مدوله شده به طور دوره‌ای تزریق می‌شوند، ساطع می‌شود، اساس لیزرهای الکترون آزاد است که تابش همدوس در محدوده فرکانس اشعه ایکس ساطع می‌کنند.

۱۱.۱۳ گشتاور الکترومغناطیسی در یک کره رسانا

الف: میدان الکتریکی موج را می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 [\hat{\mathbf{x}} \cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{y}} \sin(kz - \omega t)] \\ &= \operatorname{Re}[E_0 (\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}}) e^{j(\omega t - kz)}] \end{aligned} \quad (140.13)$$

جایی که $\omega = \omega/c = 2\pi/\lambda \cdot k$. از آنجایی که $a \ll \lambda$ می‌توان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج را نسبت به حجم کره یکنواخت در نظر گرفت و از اثرات القای مغناطیسی چشم‌پوشی کرد. بنابراین، کره را می‌توان در یک میدان الکتریکی دوار یکنواخت در نظر گرفت

$$\mathbf{E}_0 = \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{E}}_0 e^{j\omega t}) \quad \text{که در آن} \quad \tilde{\mathbf{E}}_0 = E_0 (\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}}) \quad (141.13)$$

در حضور میدان‌های نوسانی، گذردهی الکتریکی مختلط یک محیط با رسانایی حقیقی σ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 - j \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (142.13)$$

بنابراین، این مسئله مشابه مسئله ۴.۳ است، که در آن یک کره دیالکتریک را در یک میدان الکتریکی خارجی یکنواخت در نظر گرفتیم. میدان الکتریکی داخلی و گشتاور دوقطبی کره عبارتند از

$$\tilde{\mathbf{E}}_{int} = \frac{3}{\tilde{\epsilon} + 2} \tilde{\mathbf{E}}_0 = \frac{3\tilde{\mathbf{E}}_0}{3 - 4\pi j\sigma/\omega} = \frac{3j\omega t_d}{1 + 3j\omega t_d} \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (143.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}} &= \mathbf{PV} = \chi \tilde{\mathbf{E}}_{int} V = \frac{3V \tilde{\epsilon} - 1}{4\pi \tilde{\epsilon} + 2} = \frac{3V}{4\pi} \frac{-4\pi j\sigma/\omega}{3 - 4\pi j\sigma/\omega} \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ &= \frac{3V}{4\pi} \frac{-4\pi j\sigma}{3\omega - 4\pi j\sigma} \tilde{\mathbf{E}}_0 = \frac{3V}{4\pi} \frac{-j/t_d}{3\omega - j/t_d} \tilde{\mathbf{E}}_0 = \frac{3V}{4\pi} \frac{-j}{3\omega t_d - j} \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ &= \frac{3V}{4\pi} \frac{1 - 3j\omega t_d}{(3\omega t_d)^2 + 1} \tilde{\mathbf{E}}_0. \end{aligned} \quad (144.13)$$

که در آن $V = 4\pi a^3/3$ حجم کره و $t_d = 1/(4\pi\sigma)$ است. با نوشتن صورت مختلط بر حسب مدول و زاویه، خواهیم داشت

$$1 - 3j\omega t_d = \sqrt{1 + (3\omega t_d)^2} e^{-j\phi}, \quad \text{که در آن} \quad \phi = \arctan(3\omega t_d) \quad (145.13)$$

و جایگزین در رابطه (۱۴۴.۱۳) بدهست می‌آوریم

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{3V}{4\pi} \frac{\tilde{\mathbf{E}}_0}{\sqrt{1 + (3\omega t_d)^2}} e^{-j\phi} \quad (146.13)$$

و برای کمیت حقیقی

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= Re \left[\frac{3V}{4\pi} \frac{E_0}{\sqrt{1 + (3\omega t_d)^2}} (\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}}) e^{j(\omega t - \phi)} \right] \\ &= \frac{3V}{4\pi} \frac{E_0}{\sqrt{1 + (3\omega t_d)^2}} [\hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - \phi) + \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t - \phi)] \end{aligned} \quad (147.13)$$

بنابراین ممان دوقطبی کره با تاخیر فاز ϕ نسبت به میدان الکتریکی موج می‌چرخد.

- ب: گشتاوری که روی یک دوقطبی الکتریکی \mathbf{p} در حضور میدان الکتریکی \mathbf{E} اثر می‌کند $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ است. در این مورد، زاویه بین \mathbf{p} و \mathbf{E} در زمان ثابت و برابر با ϕ است، بنابراین گشتاور برابر است با:

$$\tau = \hat{\mathbf{z}} |\mathbf{p}| |\mathbf{E}_0| \sin \phi = \hat{\mathbf{z}} \frac{3V}{4\pi} \frac{E_0}{\sqrt{1 + (3\omega t_d)^2}} \sin \phi \quad (148.13)$$

همین نتیجه را می‌توان با محاسبه به دست آورد

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{4} Re (\tilde{\mathbf{p}} \times \tilde{\mathbf{E}}^*) = Re \left[\frac{3V}{8\pi} \frac{E_0 e^{-j\phi}}{\sqrt{1 + (3\omega t_d)^2}} (\hat{\mathbf{x}} - j\hat{\mathbf{y}}) \times (\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}}) \right] \\ &= Re \left[\frac{3V}{8\pi} \frac{E_0 (\cos \phi - j \sin \phi)}{\sqrt{1 + (3\omega t_d)^2}} (2j\hat{\mathbf{z}}) \right] = \hat{\mathbf{z}} \frac{3V}{8\pi} \frac{E_0}{\sqrt{1 + (3\omega t_d)^2}} \sin \phi \end{aligned} \quad (149.13)$$

۱۲.۱۳ امواج سطحی در یک فویل نازک

- الف: به عنوان یک حدس علمی، ما به دنبال راه حل هایی برای مقادیر مجهول E_x و E_z به صورت زیر هستیم.

$$E_x(x, y, t) = \tilde{E}_x(x) e^{j(\omega t - ky)}, \quad B_z(x, y, t) = \tilde{B}_z(x) e^{j(\omega t - ky)} \quad (150.13)$$

که در آن $\tilde{E}_x(x)$ و $\tilde{B}_z(x)$ توابع مختلطی هستند که باید تعیین شوند. با توجه به رابطه (۱۰.۱۳)، تقارن (زوج) E_y برای بازتاب در سطح $x = 0$ است. از آنجایی که در خلاء $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial x} = jk E_0 e^{-q|x|} \quad (151.13)$$

که بعد از انتگرال‌گیری در dx منجر می‌شود به

$$\tilde{E}_x = \text{sgn}(x) \frac{-jk}{q} E_0 e^{-q|x|} = \begin{cases} \frac{jk}{q} E_0 e^{qx}, & x < 0 \\ \frac{-jk}{q} E_0 e^{-qx}, & x > 0 \end{cases} \quad (152.13)$$

بنابراین، مولفه E_x برای بازتاب در سطح $x = 0$ ضد تقارن (تقارن فرد) است. از آنجایی که میدان‌ها مستقل از z هستند، معادله ماکسول $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ به رابطه زیر تقلیل می‌یابد:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \text{sgn} x \left(\frac{k}{q} - q \right) E_0 e^{-q|x|} e^{j(\omega t - ky)} \quad (153.13)$$

مسائل الکترومغناطیس

که پس از انتگرال‌گیری در dt و تقسیم بر $-e^{j(\omega t - ky)}/c$ ، منجر به

$$\tilde{B}_z = \text{sgn}(x) \frac{-jc}{q\omega} (q^* - k^*) E_0 e^{-q|x|} \quad (154.13)$$

که \tilde{E}_x و \tilde{B}_z تابع فردی نسبت به x هستند.

می‌توانیم چگالی بار سطحی $\sigma(y, t)$ و چگالی جریان سطحی $K(y, t)$ را از شرایط مرزی در صفحه $x = 0$ بدست آوریم. شکل (۶-۱۳) جریان سطح K و میدان مغناطیسی نزدیک به فویل را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \sigma(y, t) &= \frac{1}{4\pi} [E_x(x = 0^+, y, t) - E_x(x = 0^-, y, t)] \\ &= -j \frac{2k}{q} E_0 e^{j(\omega t - ky)} \end{aligned} \quad (155.13)$$

$$\begin{aligned} K_y(y, t) &= -\frac{c}{4\pi} [B_z(x = 0^+, y, t) - B_z(x = 0^-, y, t)] \\ &= j \frac{c}{4\pi q \omega} (q^* - k^*) E_0 e^{j(\omega t - ky)} \end{aligned} \quad (156.13)$$

شکل (۶-۱۳)

در حالی که مولفه z بردار K صفر است زیرا وجود آن به معنای مولفه y غیر صفر از B است.

• ب: میانگین زمانی بردار پواین‌تینگ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{c}{4\pi} \left[\hat{x} \operatorname{Re} (\tilde{\mathbf{E}}_y \tilde{\mathbf{B}}_z^*) - \hat{y} \operatorname{Re} (\tilde{\mathbf{E}}_x \tilde{\mathbf{B}}_z^*) \right] \quad (157.13)$$

که در آن

$$\tilde{E}_y \tilde{B}_z^* = \text{sgn}(x) \frac{jc}{q\omega} (q^* - k^*) |E_0|^2 e^{-q|x|} \quad (158.13)$$

$$\tilde{E}_x \tilde{B}_z^* = \frac{kc}{q^* \omega} (q^* - k^*) |E_0|^2 e^{-q|x|} \quad (159.13)$$

بنابراین $\langle S_x \rangle = \tilde{E}_y \tilde{B}_z^*$ را بدست می‌آوریم زیرا، کاملاً موهومی است و شار انرژی فقط در جهت \hat{y} است:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = -\hat{y} \frac{kc}{4\pi q^* \omega} (q^* - k^*) |E_0|^2 e^{-q|x|} \quad (160.13)$$

• ج: از معادله هلمن‌هولتز، بدست می‌آوریم

$$q^* - k^* + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (161.13)$$

• د: از رابطه (۱۵۶.۱۳) در حدود تقریب خودمان می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{K}}{l} = \hat{y} j \frac{c^*}{2\pi ql\omega} (q^* - k^*) E_0 e^{j(\omega t - ky)} \quad (162.13)$$

و با ترکیب با رابطه (۱۱.۱۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} j \frac{c^*}{2\pi ql\omega} (q^* - k^*) E_0 e^{j(\omega t - ky)} &= -j 4\pi \frac{\omega_p}{\omega} E_0 e^{j(\omega t - ky)} \\ q^* - k^* &= -4\pi \frac{\omega_p}{\omega} ql \end{aligned} \quad (163.13)$$

که در آن $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/M_e}$ فرکانس پلاسمایی مواد فویل است. حاصل ضرب $2n_e l$ که در عبارت $\omega_p^2 l = 4\pi n_e l e^2$ ظاهر می‌شود، چگالی عدد سطحی الکترون‌ها در فویل است که پارامتر مربوطه در این مسئله است.

۵: با مقایسه رابطه (۱۶۱.۱۳) و (۱۶۳.۱۳) بدست می‌آوریم

$$\omega^2 = 8\pi^2 \omega_p^2 ql = \Omega q c \quad \Omega = \frac{8\pi^2 \omega_p^2 l}{c} \quad (164.13)$$

از حل معادله (۱۶۱.۱۳) برای q خواهیم داشت

$$cq^2 + \Omega q - k^2 c = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\sqrt{\Omega^2 + (2kc)^2} - \Omega}{2c} \quad (165.13)$$

که در آن علامت ریشه طوری انتخاب شده است که طبق شرایط مرزی و مطابق با (۱۰.۱۳)، $q > 0$ داشته باشیم. در نهایت، رابطه پاشندگی را بدست می‌آوریم:

$$\omega^2 = c^2 k^2 - c^2 q^2 = \frac{1}{4} [\Omega \sqrt{\Omega^2 + (2kc)^2} - \Omega^2 - (2kc)^2] \quad (166.13)$$

۱۳.۱۳ اثر فیزو

۱. الف: در دستگاه ساکن محیط، S' ، $\omega'/k' = c/n$ داریم. تبدیل لورنتس از دستگاه

$$\text{آزمایشگاهی } S \text{ به } S' \text{ منجر به} \\ \omega' = \gamma(\omega - uk) \approx (\omega - uk), \quad k' = \gamma \left(k - \frac{u\omega}{c^2} \right) \approx \left(k - \frac{u\omega}{c^2} \right) \quad (167.13)$$

چون تا مرتبه اول در $\beta = u/c$ مقدار $1 \approx \gamma$ است. از تقسیم دو معادله در کنار هم به دست می‌آوریم

$$\frac{c}{n} = \frac{\omega'}{k'} \approx \frac{\omega - uk}{k - u\omega/c^2} = \frac{v_\phi - u}{1 - v_\phi u/c^2} \quad (168.13)$$

که در مرحله آخر، صورت و مخرج را بر k تقسیم کرده و سرعت فاز را در دستگاه

آزمایشگاهی جایگزین می‌کنیم، $v_\phi = \omega/k$. با ضرب اولین و آخرین جمله در -1

$$\frac{c}{n} - u \frac{v_\phi}{cn} = v_\phi - u \Rightarrow v_\phi \left(1 + \frac{u}{cn} \right) = \frac{c}{n} - u \Rightarrow v_\phi = \frac{c(c + nu)}{cn + u} \quad (169.13)$$

$$\Rightarrow v_\phi = c \frac{1 + n\beta}{n + \beta} \approx c \left(\frac{1}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2} \beta \right)$$

که در مرحله آخر، تقریباً کسر چند جمله‌ای تیلور درجه اول آن را در β داریم. سرعت فاز در دستگاه آزمایشگاهی S این است

$$v_\phi = \frac{c}{n} + u \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \quad (170.13)$$

این آزمایش در سال ۱۸۵۱ با انتشار نور در آب جاری به موازات سرعت آب انجام شد. فیزوانتظار داشت که سرعت فازی برابر با سرعت فاز نور در آب، c/n ، به اضافه سرعت جریان آب، u ، یعنی $v_\phi = c/n + u$ است. این توضیح رضایت بخش تنها ۵۴ سال بعد، در سال ۱۹۰۵ (۱۷۰.۱۳) سازگار بود. این زمانی که اینشتین نظریه نسبیت خود را منتشر کرد، تحقیق یافت.

مسائل الکترومغناطیس

- ب: معادله (۱۷۰.۱۳) تصحیح مرتبه اول نسبت به $v_\phi = u/c$ در $\beta = n(\omega)/n(\omega')$ را برای یک محیط غیر پاشنده در نظر می‌گیرد. اگر محیط بر اساس قانون شناخته شده $n = n(\omega)$ پاشنده باشد، باید این را نیز در نظر بگیریم که فرکانس ω' مشاهده شده در دستگاه ساکن محیط با فرکانس تابش ω در دستگاه آزمایشگاهی متفاوت است. می‌خواهیم با تصحیح مرتبه اول (۱۷۰.۱۳) را در $\Delta\omega = \omega' - \omega$ محاسبه کنیم. ما باید فقط عبارت اول سمت راست (۱۷۰.۱۳) را تصحیح کنیم، زیرا عبارت دوم قبلًا مرتبه اول است و اصلاح آن مرتبه دوم خواهد بود. اثر داپلر مرتبه اول بهما می‌دهد

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx -\omega \frac{n(\omega)u}{c} \quad (171.13)$$

از آنجایی که سرعت نور در محیط $c/n(\omega)$ است، محیط از منبع نور دور می‌شود. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \frac{c}{n(\omega')} &= \frac{c}{n(\omega)} + \Delta\omega \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{c}{n(\omega)} \right) \\ &= \frac{c}{n(\omega)} + \left(-\omega \frac{n(\omega)u}{c} \right) \left[-\frac{c}{n^2(\omega)} \frac{\partial n(\omega)}{\partial\omega} \right] \\ &= \frac{c}{n(\omega)} + \omega \frac{u}{n(\omega)} \frac{\partial n(\omega)}{\partial\omega} \end{aligned} \quad (172.13)$$

و عبارت مرتبه اول برای سرعت فاز در مورد محیط پاشنده برابر است با:

$$v_\phi(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} + u \left[1 + \frac{1}{n^2(\omega)} + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{\partial n(\omega)}{\partial\omega} \right] + O(u^2) \quad (173.13)$$

- ج: ضریب شکست محیط الکترون آزاد $\omega_p = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ است که ω_p فرکانس پلاسم است. بنابراین در داخل برآکتهای مربع (۱۷۳.۱۳) داریم.

$$1 - \frac{1}{n^2(\omega)} = -\frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (174.13)$$

و

$$\frac{\omega}{n(\omega)} \frac{\partial n(\omega)}{\partial\omega} = \frac{\omega}{(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}} \frac{\omega}{(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{3/2}} \frac{\omega^3}{\omega^3} = \frac{\omega_p^3}{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (175.13)$$

به طوری که دو تصحیح مرتبه اول به $v_\phi(\omega)$ حذف می‌شوند و سرعت فاز مستقل از سرعت جریان محیط تا مرتبه دوم در β است.

۱۴.۱۳ تبدیل لورنتس برای امواج طولی

- الف: تبدیل‌های لورنتس برای فرکانس موج و بردار موج، در مورد افزایش^۴ در امتداد \hat{x} عبارتند از:

$$\omega'_L = \gamma(\omega_L - V k_L), \quad k'_L = \gamma \left(k_L - \frac{V \omega_L}{c^2} \right) \quad (176.13)$$

که در آن $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ است. در حالت خاص جائی که سرعت افزایش برابر سرعت فاز است، $V = v_\phi = \omega_L/k_L$ داریم و میدان‌ها در S' مستقل از زمان

⁴Boost

(استاتیک) هستند. بعلاوه، بیاد آورید که $k_L = \omega_L/v_\phi$ است، و داریم

$$\begin{aligned} k'_L &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_\phi^2/c^2}} \left(\frac{\omega_L}{v_\phi} - \frac{v_\phi \omega_L}{c^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_\phi^2/c^2}} \frac{\omega_L}{v_\phi} \left(1 - \frac{v_\phi^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{\omega_L}{v_\phi} \sqrt{1 - v_\phi^2/c^2} = \frac{k_L}{\gamma} \end{aligned} \quad (177.13)$$

اگر S' با سرعت $\hat{\mathbf{x}}V = \hat{\mathbf{x}}v_\phi$ نسبت به S حرکت کند، میدان‌های در S' از رابطه

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(x) = \hat{\mathbf{x}}E_\circ e^{-jk'_L x'} \quad (178.13)$$

یعنی \mathbf{E}' در زمان ثابت است. چگالی بار و جریان در S' را می‌توان با تبدیل لورنتس یا مستقیماً از معادلات زیر به دست آورد.

$$\rho' = \frac{1}{4\pi} \nabla' \cdot \mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E'_x}{\partial x'} \quad \text{و} \quad 4\pi \mathbf{J}' + \frac{\partial' \mathbf{E}'}{\partial' t} = \mathbf{0} \quad (179.13)$$

که منجر به

$$\rho' = \frac{-jk'_L}{4\pi} E_\circ e^{-jk'_L x'}, \quad \mathbf{J}' = \mathbf{0} \quad (180.13)$$

- ب: تبدیل‌های لورنتس برای حالت $V = c^2/v_\phi = c^2 k_L/\omega_L$ و $v_\phi > c$ به مقادیر زیر برای k'_L و ω'_L منجر می‌شوند.

$$\begin{aligned} k'_L &= \gamma \left(k_L - \frac{V\omega_L}{c^2} \right) = \mathbf{0} \\ \omega'_L &= \gamma \left(\omega_L - \frac{k'_L c^2}{\omega} \right) = \gamma \omega_L \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{\omega_L}{\gamma} \end{aligned} \quad (181.13)$$

که نشان می‌دهد که میدان‌ها در فضا با سرعت فاز بی‌نهایت منتشر می‌شوند و با فاز یکنواخت در فرکانس ω'_L نوسان می‌کنند. میدان‌ها عبارتند از:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(t') = \hat{\mathbf{x}}e^{jk'_L t'} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0} \quad (182.13)$$

یعنی، \mathbf{E}' در فضا یکنواخت است. ضمناً بدست می‌آوریم $\mathbf{J}' = \mathbf{J}/\gamma$ و $\rho' = \rho/\gamma$.

- ج: تبدیل‌های لورنتس بردار موج و فرکانس برای افزایش در امتداد محور y عبارتند از:

$$\begin{aligned} k'_{Lx} &= k_{Lx} = k'_L \\ k'_{Ly} &= \gamma \left(k_{Ly} - \frac{V\omega_L}{c^2} \right) = -\gamma \frac{V\omega_L}{c^2} \\ \omega'_L &= \gamma (\omega_L - V k_{Ly}) = \gamma \omega_L \end{aligned} \quad (183.13)$$

همه میدان‌ها و جریان‌ها از طریق یک ضریب $e^{j(\omega'_L t' - k'_{Lx} x' - k'_{Ly} y')}$ به فضا و زمان بستگی دارند، بنابراین، جهت انتشار یک زاویه با محور x' تشکیل می‌دهد.

$$\theta' = \arctan(k'_{Ly}/k'_{Lx}) = -\arctan(\gamma V v_\phi / c^2) \quad (184.13)$$

موج دارای دامنه میدان‌های زیر است:

$$E'_x = \gamma \left(E_x + \frac{V}{c} B_z \right) = \gamma E \quad (185.13)$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{V}{c} E_x \right) - \gamma \frac{V}{c} E_z \quad (186.13)$$

تمام سایر مولفه‌های میدان دیگر صفر هستند. بنابراین، در یک دستگاه که به صورت عرضی در جهت انتشار حرکت می‌کند، موج دیگر صرفاً طولی و الکترواستاتیک نیست.

۱۵.۱۳ تبدیل لورنتس برای کابل انتقال

الف: معادله پیوستگی برای چگالی بار خطی $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial z}$ نوشته شده است. با وارد کردن عبارت λ و I در رابطه (۱۴.۱۳) به دست می‌آوریم

$$j\omega \lambda_0 = jkI_0, \implies I_0 = \frac{\omega}{k}\lambda_0 = v_\phi \lambda_0 \quad (187.13)$$

ب: رابطه پاشندگی برابر است با:

$$\omega = v_\phi k = \frac{c}{n}k = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}k \quad (188.13)$$

با

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad k = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon}}{c} \quad (189.13)$$

میدان الکتریکی را می‌توان با اعمال قانون گاووس بر روی یک سطح استوانهای هم محور با سیم، به شعاع r و ارتفاع h محاسبه کرد. از آنجایی که میدان عرضی است و در اطراف سیم تقارن استوانهای داریم، تنها مولفه غیر صفر E_r برابر E_r است.

$$\mathbf{E}(r, z, t) = \hat{\mathbf{r}} \frac{2\lambda}{\epsilon r} = \hat{\mathbf{r}} E_r(r) e^{j(\omega t - kz)}, \quad E_r(r) = \frac{2\lambda}{\epsilon r} \quad (190.13)$$

میدان مغناطیسی را می‌توان با اعمال قضیه استوکس بر روی دایره‌ای به شعاع r هم محور با سیم، محاسبه کرد. به دلیل تقارن، تنها مؤلفه غیر صفر B_ϕ ، مؤلفه‌ای ازیموتال است.

$$\mathbf{B}(r, z, t) = \hat{\phi} \frac{2I}{rc} = \hat{\phi} B_\phi(r) e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{که در آن} \quad B_\phi(r) = \frac{2I_0}{rc} = \frac{2\omega\lambda_0}{krc} \quad (191.13)$$

$$B_\phi(r) = \frac{\epsilon\omega}{kc} E_r(r) = \frac{\epsilon v_\phi}{c} E_r(r) = \frac{c}{v_\phi} E_r(r) \quad (192.13)$$

ج: فرکانس موج ω' در دستگاه S' ، که با سرعت فاز $\hat{\mathbf{z}} v_\phi$ نسبت به دستگاه آزمایشگاهی S حرکت می‌کند، برابر است با:

$$\omega' = \gamma(\omega - v_\phi k) = 0 \quad (193.13)$$

که در آن از تقریب دوم رابطه (۱۸۹.۱۳) استفاده کرده‌ایم. بنابراین میدان‌ها در S' ثابت هستند. برای افزایش لورنتس ^۵ داریم

$$\beta = \hat{\mathbf{z}} \frac{v_\phi}{c} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\epsilon}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}} \quad (194.13)$$

^۵Lorentz boost

و بردار موج k' در S' را می‌توان نوشت

$$k' = \gamma \left(k - \frac{v_\phi \omega}{c} \right) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}} \left(\frac{\omega \sqrt{\epsilon}}{c} - \frac{\omega}{c \sqrt{\epsilon}} \right) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon - 1} \quad (195.13)$$

بنابراین وابستگی (z', t') (در واقع فقط z' وابستگی) کمیت‌های فیزیکی در S' از طریق یک عامل $e^{-jk'z'}$ خواهد بود. دامنه چگالی بار خطی در S' برابر است با:

$$\lambda'_\circ = \gamma \left(\lambda_\circ - \frac{v_\phi}{c} I_\circ \right) = \gamma \left(\lambda_\circ - \frac{v_\phi}{c} \lambda_\circ \right) = \gamma \left(\frac{1}{\gamma} \right) \lambda_\circ = \frac{\lambda_\circ}{\gamma} \quad (196.13)$$

دامنه جریان در S' برابر است با:

$$I'_\circ = \gamma (I_\circ - v_\phi \lambda_\circ) = 0 \quad (197.13)$$

تبديل دامنه میدان‌ها بر طبق رابطه (۳.۹) داریم

$$E'_r = \gamma (E_r - \beta B_\phi) = \gamma \left(E_r - \frac{v_\phi}{c} \frac{c}{v_\phi} E_r \right) = 0 \quad (198.13)$$

$$B'_\phi = \gamma \left(B_\phi - \frac{v_\phi}{c} E_r \right) = \gamma \left(B_\phi - \frac{v_\phi}{c} \frac{v_\phi}{c} B_\phi \right) = \frac{B_\phi}{\gamma} \quad (199.13)$$

شاید تعجب آور بهنظر برسد که در S' ، $E'_r = 0$ و $\lambda' \neq 0$ داریم، در حالی که $I' = 0$ و $B'_\phi \neq 0$ داریم. دلیل آن این است که باید بارهای پلاریزاسیون محیط در تماس با سیم، $\lambda_p(z, t)$ ، وجود یک جریان قطبی، $\mathbf{J}_p(r, z, t)$ و تبدیلات لورنتس آنها را نیز در نظر بگیریم. در دستگاه آزمایشگاهی S باید $\lambda(z, t) + \lambda_p(z, t) = \lambda(z, t)/\epsilon$ داشته باشیم، بنابراین

$$\lambda_p(z, t) = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \lambda_\circ e^{j(\omega t - kz)} = \frac{\lambda_\circ}{\gamma^2} e^{j(\omega t - kz)} = \lambda_\circ^{(p)} e^{j(\omega t - kz)} \quad (200.13)$$

که در آن $\lambda_\circ^{(p)} = -\lambda_\circ/\gamma^2$ است. میدان الکتریکی رابطه (۱۹۰.۱۳) قطبش محیط را تولید می‌کند

$$\mathbf{P}(z, r, t) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_r(r) e^{j(\omega t - kz)} = \hat{\mathbf{r}} P_r(r) e^{j(\omega t - kz)} \quad (201.13)$$

که در آن

$$P_r(r) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{2\lambda_\circ}{\epsilon r} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{\lambda_\circ}{2\pi r} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\lambda_\circ}{2\pi r} \quad (202.13)$$

$$\text{قطبش وابسته به زمان به چگالی جریان پلاریزاسیون مربوط است} \\ \mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \hat{\mathbf{r}} j\omega P_r(r) e^{j(\omega t - kz)} = \hat{\mathbf{r}} J_r(r) e^{j(\omega t - kz)} \quad (203.13)$$

که در آن

$$J_r(r) = j\omega P_r(r) = \frac{j\omega}{\gamma^2} \frac{\lambda_\circ}{2\pi r} \quad (204.13)$$

بنابراین، \mathbf{J}_p در S شعاعی است. مطابق با اولین رابطه (۱.۹)، یک چهار جریان قطبی داریم

$$J_\mu^{(p)}(r, z, t) = [c\rho_\circ^{(p)}(r), \hat{\mathbf{r}} J_r(r)] e^{j(\omega t - kz)} \quad (205.13)$$

که در آن برای مثال

$$\rho_{\circ}^{(p)}(r) = \begin{cases} \frac{\lambda_{\circ}^{(p)}}{\pi r_{\circ}^2}, & \text{اگر } r < r_{\circ} \\ 0, & \text{اگر } r > r_{\circ} \end{cases} \quad \text{لذا} \quad \lambda_{\circ}^{(p)} = \int_{\circ}^{\infty} \rho_{\circ}^{(p)}(r) 2\pi r dr \quad (206.13)$$

و مطلوب ما حد $\rightarrow r_{\circ}$ است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$J_{\mu}^{(p)}(r, z, t) = G_{\mu}(r) e^{j(\omega t - kz)} \quad G_{\mu} = [c \rho_{\circ}^{(p)}(r), \hat{\mathbf{r}} J_r(r)] \quad (207.13)$$

چهار بردار G_{μ} مطابق (1.9) تبدیل می‌شود، بنابراین در S' داریم

$$G'_{\circ} = \gamma(G_{\circ} - \beta \cdot \mathbf{G}) = \gamma G_{\circ} \quad (208.13)$$

از آنجایی که مولفه فضایی G_{μ} که شعاعی است بر β عمود است. دامنه چگالی بار پلاریزاسیون خطی در S' برابر است با:

$$\lambda_{\circ}^{(p)'} = \gamma \int_{\circ}^{\infty} \frac{G_{\circ}}{c} 2\pi r dr = \gamma \lambda_{\circ}^{(p)} = -\gamma \frac{\lambda_{\circ}}{\gamma^2} = -\frac{\lambda_{\circ}}{\gamma} \quad (209.13)$$

که رابطه (196.13) را حذف کرده، بنابراین $E' = 0$ داریم. مولفه شعاعی J_p به میدان

$$G'_{\parallel} = \gamma(G_{\parallel} - \beta G_{\circ}) = -\gamma \beta G_{\circ} = -\gamma \beta \rho_{\circ}^{(p)}(r) c \quad (210.13)$$

که مربوط به جریان پلاریزاسیون در دامنه S' است

$$I_{\circ}^{(p)'} = \int_{\circ}^{\infty} G'_{\parallel} 2\pi r' dr' = -\gamma v_{\phi} \lambda_{\circ}^{(p)} = \gamma v_{\phi} \frac{\lambda_{\circ}}{\gamma^2} = \frac{I_{\circ}}{\gamma} \quad (211.13)$$

که با رابطه (199.13) سازگار است.

۱۶.۱۳ موجبر با انتهای متحرک

الف: میدان الکتریکی TE_1 باشد، بنابراین باید روی آنها و به شکل $\mathbf{E}(x, y, t) = \hat{\mathbf{z}} E_{\circ} \cos(\pi y/a) f(x, t)$ صفر شود. رابطه پاشندگی برابر است با

$$\omega^2 = \omega_{co}^2 + k^2 c^2, \quad \text{که در آن} \quad \omega_{co} = \frac{\pi c}{a} \quad (212.13)$$

فرکانس قطع موجبر است. در موجبر با انتهای بسته ما، میدان الکتریکی سراسری برهم نهی میدان‌های موج تابشی و بازتابی باید در روی دیوار انتهائی $x = 0$ صفر

شود. بنابراین، موج تابشی و بازتابی دارای دامنه‌های مساوی هستند

$$\mathbf{E}(x, y, t) = \hat{\mathbf{z}} E_{\circ} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(kx) e^{j\omega t} \quad (213.13)$$

که در آن فاز به گونه‌ای انتخاب شده است که $\mathbf{E}(0, y, t) = 0$. میدان مغناطیسی را

می‌توان از رابطه $\mathbf{B} = -c \nabla \times \mathbf{E}$ با مولفه‌های زیر به دست آورد.

$$B_x = \frac{jc}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{j\pi c}{\omega a} E_{\circ} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(kx) e^{j\omega t} \quad (214.13)$$

$$B_y = -\frac{jc}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{kc}{\omega} E_{\circ} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kx) e^{j\omega t} \quad (215.13)$$

توجه کنید که $B_x(0, y, t) = 0$ بطوری که لازم است.

- ب: در دستگاه S' که در آن انتهای موجبر در حالت سکون است ($v' = 0$ ، موج تابشی دارای فرکانس و بردار موج زیر است:

$$\omega'_i = \gamma(\omega - \beta kc), \quad k'_i = \gamma(k - \beta\omega/c) \quad (216.13)$$

که در آن $\beta = v/c$ است. از آنجایی که $\beta < kc/\omega$ را فرض کردیم، $k'_i > 0$ داریم (توجه کنید که $\omega'_i > 0$ بهر حال زیرا $k < \omega/c$) است. در S' موج منعکس شده دارای فرکانس و بردار موج زیر است

$$\omega'_r = \omega'_i, \quad k'_r = -k'_i \quad (217.13)$$

با تبدیل مجدد به دستگاه آزمایشگاهی S بدست می‌آوریم

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + \beta k'_r c) = \gamma[(1 + \beta)c\omega - 2\beta kc] \quad (218.13)$$

$$k_r = \gamma \left(-k + \beta \frac{\omega}{c} \right) = \gamma \left[-(1 + \beta)c\omega + 2\beta \frac{\omega}{c} \right] \quad (219.13)$$

به عنوان یک بررسی، در حد $a \rightarrow \infty$ داریم $\omega \rightarrow \omega/c$ و رابطه (۵۴.۹) مسئله ۶.۹ را برای فرکانس منعکس شده توسط یک آینه متحرک به دست می‌آوریم. با برخی عملیات جبری خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \omega_r - c^2 k_r^2 &= \gamma^2 \left\{ [(1 + \beta)c\omega - 2\beta kc]^2 - c^2 \left[-(1 + \beta)c\omega + 2\beta \frac{\omega}{c} \right]^2 \right\} \\ &= \gamma^2 [(1 + \beta)c\omega - 2\beta kc + (1 + \beta)c\omega - 2\beta\omega] \times \\ &\quad \times [(1 + \beta)c\omega - 2\beta kc - (1 + \beta)c\omega + 2\beta\omega] \\ &= \gamma^2 [(1 + \beta)c\omega + (1 + \beta)c\omega] [(1 + \beta)c\omega + (1 + \beta)c\omega] \\ &= (\omega + kc)(\omega + kc) = \omega^2 - k^2 c^2 \end{aligned} \quad (220.13)$$

- ج: اگر $v > kc/\omega$ در دستگاه S' داشته باشیم $k'_i < 0$ ، در این صورت موج تابشی به موازات \hat{x} - منتشر می‌شود و نمی‌تواند به انتهای موجبر برسد. در این شرایط هیچ موج بازتابی وجود ندارد. این شرط معادل $v > v_g$ ، سرعت گروه در موجبر است.

۱۷.۱۳ موج الکترومغناطیسی قوی "نسبیتی"

- الف: معادلات حرکت p_x ، p_y و p_z در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی موج عبارتند از

$$\frac{dp_x}{dt} = -eE_x + \frac{e}{c}v_z B_y \quad (221.13)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -eE_y + \frac{e}{c}v_z B_x \quad (222.13)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{e}{c}v_x B_y + \frac{e}{c}v_y B_z \quad (223.13)$$

به طور کلی سهم مغناطیسی ناچیز نیست، زیرا v_z لزوماً بسیار کوچکتر از c نیست. با این حال، اگر $v_z = 0$ را فرض کنیم، نیروی مغناطیسی حذف می‌شود. در این شرایط حل معادلات (۲۲۱.۱۳) و (۲۲۲.۱۳) عبارتند از

$$\frac{dp_x}{dt} = -eE_0 \cos \omega t, \quad \frac{dp_y}{dt} = -E_0 \sin \omega t \quad (۲۲۴.۱۳)$$

$$p_x = -\frac{eE_0}{\omega} \sin \omega t, \quad p_y = +\frac{eE_0}{\omega} \cos \omega t \quad (۲۲۵.۱۳)$$

با وارد کردن این جوابها در رابطه (۲۲۳.۱۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} &= \frac{e}{m_e \gamma} (-p_x B_y + p_y B_x) = \\ &= \frac{e}{m_e \gamma} \frac{e E_0}{\omega c} (\sin \omega t \cos \omega t + \cos \omega t \sin \omega t) = 0 \end{aligned} \quad (۲۲۶.۱۳)$$

به طوری که p_z در زمان ثابت است. یا با فرض $v_z = 0$ به عنوان شرایط اولیه یا با تغییر مناسب دستگاه مرجع، $v_z = 0$ یک فرض خودسازگار است.

• ب: از آنجائی که $\mathbf{p}^{\ddagger} = p_x^{\ddagger} + p_y^{\ddagger} = (eE_0/\omega)^{\ddagger}$ نسبت به زمان ثابت است، ضریب لورنتس $\gamma = \sqrt{1 + p^{\ddagger}/(m_e c)^{\ddagger}} = \sqrt{1 + [eE_0/\omega c]^{\ddagger}}$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dr} = m_e \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} = \gamma m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (۲۲۷.۱۳)$$

اگر $m_e \rightarrow \gamma m_e$ را جایگزین کنیم، معادلات حرکت مانند حالت غیر نسبیتی هستند. رفتار نسبیتی را می‌توان با نسبت دادن یک "جرم موثر" γm_e ، وابسته به شدت موج، به الکترون به دست آورد.

• ج: بر این اساس، ضریب شکست برای حالت نسبیتی را می‌توان به سادگی با جایگزین کردن $m_e \rightarrow \gamma m_e$ در عبارت غیر نسبیتی به دست آورد، به طوری که

$$\omega_p = (4\pi n_e e^2/m_e) \rightarrow \omega_p / \sqrt{\gamma} \quad (۲۲۸.۱۳)$$

• د: رابطه پاشندگی مربوط به $n^{(2)}(\omega)$ در معادله (۲۲۸.۱۳) برابر است با:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma} \quad (۲۲۹.۱۳)$$

فرکانس قطع $\omega_{co} = \omega_p / \sqrt{\gamma}$ است و به دامنه موج بستگی دارد. از آنجایی که $1 > \gamma > \omega_p / \omega$ باشد، مات باشد، پلاسمای نسبت به موجی با شدت کم که برای آن $\omega > \omega_p$ باشد، مات باشد. اما $\omega_p / \omega > 1$ برای موجی با شدت بالا با همان فرکانس شفاف باشد.

با این حال باید تاکید کرد که مفهوم ضریب شکست وابسته به شدت موج سزاوار توجه است. آنچه در بالا مورد بحث قرار گرفتیم فقط یک مورد خاص از "شفافیت القایی نسبیتی" است که در یک موج صاف، تک رنگ و بینهایت اعمال می‌شود. در مورد یک پرتو نور واقعی، با مدت زمان و امتداد محدود، بخش‌های مختلف پرتو می‌توانند دامنه‌های متفاوتی داشته باشند و بنابراین می‌توانند سرعت‌های فاز

متفاوتی داشته باشند که منجر به پاشندگی غیرخطی^۶ پیچیده‌ای می‌شود. با این حال، (۲۲۹.۱۳) می‌تواند به بحث کیفی برخی از اثرات غیرخطی مهم مشاهده شده برای یک موج قوی نسبیتی کمک کند. یک مثال مهم انتشار یک پرتو قوی با عرض محدود است که برای آن ضریب شکست مؤثر در مرزها (جایی که شدت کمتر و ۷ کوچکتر است) بیشتر از محور پرتو است. این می‌تواند پراش را جبران کند، مشابه آنچه در یک فیبر نوری رخ می‌دهد (مسئله ۱۲۶)، و می‌تواند باعث تمرکز روی خود شود.

۱۸.۱۳ جریان الکتریکی در یک سیم‌لوله

۰ الف: این مسئله از این سوال سرچشمه می‌گیرد: "آیا میدان الکتریکی در یک سیم‌لوله (سولونوئید) می‌تواند خطوط میدان دایره‌ای داشته باشد، همانطور که به نظر می‌سد برای حرکت جریان در هر پیچ سیم پیچ لازم است؟" بدیهی است که پاسخ در شرایط ایستاخیر است، زیرا $E \times \nabla \times E$ باید صفر باشد. اما یک میدان یکنواخت برای هدایت جریان کافی است، زیرا سیم پیچ یک سیم‌لوله واقعی از حلقه‌های دایره‌ای منفرد عمود بر محور تشکیل نمی‌شود (در این مورد، هر حلقه به منبع جریان خود نیاز دارد!) سیم پیچی یک سیم پیچ واقعی، سیم‌لوله در واقع یک مارپیچ با گام کوچک اما غیر صفر است. جریان توسط مولفه E به موازات سیم، برابر با (با فرض $E = E\hat{z}$) هدایت می‌شود.

$$E_{||} = E \sin \theta \approx E \frac{a}{\pi b} \quad (۲۳۰.۱۳)$$

مولفه عمودی E_{\perp} توسط میدان‌های الکترواستاتیکی که توسط توزیع بار سطحی سیم ایجاد و مشابه با مسئله ۱۱.۳ جبران می‌شود. بنابراین، چگالی و شدت جریان در سیم عبارتند از

$$J = \sigma E_{||} \approx \sigma E \frac{a}{\pi b}, \quad I = J \pi a^2 \approx \frac{\sigma a^3}{b} E \quad (۲۳۱.۱۳)$$

با نادیده گرفتن اثرات مرزی، جریان یک میدان یکنواخت $\mathbf{B}^{(int)} = \hat{z} B_z$ ایجاد می‌کند، با

$$B_z = \frac{4\pi n I}{c} = \frac{4\pi I}{2ac} \approx \frac{2\pi a^2 \sigma}{bc} E \quad (۲۳۲.۱۳)$$

در داخل سیم‌لوله، زیرا $a = 1/(2a)$ تعداد دور در واحد طول است. میدان خارج از سیم‌لوله، $\mathbf{B}^{(ext)}$ ، توسط جریان کل I که به موازات \hat{z} جریان می‌یابد، ایجاد می‌شود. بنابراین در ناحیه مرکزی خارجی $B_{\phi} = \hat{\phi} B_{\phi}$ است، با

$$B_{\phi} \approx \frac{2I}{cr} = \frac{2\pi J a^2}{cr} \approx \frac{2\sigma a^3}{bcr} E, \quad b < r \ll h, \quad |z| \ll h \quad (۲۳۳.۱۳)$$

که در آن مبدأ z در مرکز سیم‌لوله قرار دارد.

در برخی موارد، اثرات غیرخطی می‌توانند پاشندگی شکل‌های بسته موجی خاص را جبران کنند، این جواب‌های ویژه می‌توانند بدون تغییر شکل پوششی خود منتشر شوند و به عنوان سالیتون شناخته می‌شوند.

مسائل الکترومغناطیس

- ب: در ناحیه مرکزی خارجی $E_z \ll h$ ، $b < r \ll h$ و B_ϕ به بردار پواین‌تینگ مربوط هستند.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{c}{4\pi} E_z B_\phi = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\sigma a^3}{2\pi br} E^z \quad (234.13)$$

با یک شار ورودی از سطح جانبی یک استوانه کواکسیال به طول l

$$\Phi_{in} = 2\pi rl \frac{\sigma a^3}{2\pi br} E^z = \frac{\sigma a^3 l}{b} E^z \quad (235.13)$$

توان تلف شده توسط گرمایش ژول در یک بخش سیم‌لوله به طول l از ضرب توان تلف شده در یک دور به دست می‌آید.

$$W_{turn} = I^z R = \left(\frac{\sigma a^3}{b} \right)^z \frac{2\pi b}{\pi a^3 \sigma} = \frac{2\sigma a^4}{b} E^z \quad (236.13)$$

با تعداد دور $l/(2a)$

$$W(l) = \frac{2\sigma a^4}{b} E^z \frac{l}{2a} = \frac{\sigma a^3 l}{b} E^z \quad (237.13)$$

که با قضیه پواین‌تینگ سازگاری دارد.

۱۹.۱۳ حفره اپتومکانیکی

- الف: در ادامه، نماد برداری میدان‌های الکتریکی را حذف می‌کنیم، زیرا نتایج مستقل از قطبش هستند. بیان کلی میدان الکتریکی یک موج صفحه تک رنگ که در امتداد محور منتشر می‌شود، در نمادهای مختلف،

$$E(x, t) = E(x) e^{j\omega t} = (E_1 e^{-jkx} + E_2 e^{jkx}) e^{j\omega t} \quad (238.13)$$

که در آن $k = \omega/c$ است. شرایط مرزی در دو دیوار هادی کامل $E(\pm d/2) = 0$ است، بنابراین باید داشته باشیم

$$E_1 e^{-jkd/2} + E_2 e^{jkd/2} = 0 \quad E_1 e^{jkd/2} + E_2 e^{-jkd/2} = 0 \quad (239.13)$$

این دستگاه دو معادله دارای جواب‌های بی‌اهمیت برای E_1 و E_2 هستند اگر دترمینان آن صفر شود

$$e^{-jkd} - e^{jkd} = -2j \sin(kd) = 0 \quad (240.13)$$

که از آن بدست می‌آوریم

$$kd = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \omega = kc = n \frac{\pi c}{d} \quad (241.13)$$

$$E_2 = -E_1 e^{-jn\pi} = (-1)^{n+1} E_1 \quad (242.13)$$

بنابراین، میدان الکتریکی مود n ام برابر است با

$$E_n(x) = \frac{E_1}{2} \left[e^{-jn\pi x/d} + (-1)^{n+1} e^{jn\pi x/d} \right] \quad (243.13)$$

میدان مغناطیسی را می‌توان از رابطه $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ بدست آورد

$$B_n(x) = \frac{E_1}{2} \left[e^{-jn\pi x/d} - (-1)^{n+1} e^{jn\pi x/d} \right] \quad (244.13)$$

- ب: بنابراین میدان برهم نهی دو موج تک رنگ صفحه با فرکانس ω و دامنه $E_0/2$ است که در جهت مخالف منتشر می‌شوند. بنابراین فشار تشعشع بر روی هر دیوار بازتابنده فشاری است که توسط یک موج معمولی تابشی باشد $I = c|E_0/2|^2/8\pi$ ، در مسئله ۸.۵ محاسبه شد.

$$P = \frac{2I}{c} = \frac{|E_0|^2}{16\pi} \quad (245.13)$$

- ج: انرژی در واحد سطح داخل حفره مستقل از زمان است و می‌توان آن را محاسبه کرد

$$U = \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) dx \quad (246.13)$$

داریم

$$|\mathbf{E}|^2 = \frac{|E_0|^2}{2} \left[1 + (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) \right] \quad (247.13)$$

$$|\mathbf{B}|^2 = \frac{|E_0|^2}{2} \left[1 - (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) \right] \quad (248.13)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x ، میانگین‌های نوسانی هر دو عبارت به صفر می‌رسد، و در نهایت داریم

$$U = \frac{|E_0|^2 d}{16\pi} \pi = Pd \quad (249.13)$$

- د: در تعادل مکانیکی، نیروی ناشی از فشار تشعشعی بر روی دیوارها باید نیروی پس‌کش فنرها را متعادل کند. با فرض اینکه هر دیوار با δ از موقعیت تعادل خود در غیاب میدان‌ها جابه جا شود، داریم

$$PS = K\delta = M\Omega^2 \delta \quad (250.13)$$

که در آن $\Omega = \sqrt{K/M}$ فرکانس نوسان آزاد دیوارهای است. بنابراین

$$\frac{M\Omega^2 \delta}{S} = P \frac{|E_0|^2}{16\pi} \quad (251.13)$$

$$\alpha = \frac{S}{16\pi M\Omega^2} = \frac{S}{16\pi K} \quad (252.13)$$

طول حفره اکنون $d + 2\delta$ است و شرایط تشديد آن برابر است با:

$$d + 2\delta = n \frac{\lambda_n}{2} = n \frac{\pi c}{\omega_n}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (253.13)$$

که در آن فرکانس‌های مود عبارتند از:

$$\omega_n = \frac{\pi c}{\lambda_n} = \frac{n\pi c}{d + 2\alpha|E_0|^2} \quad (254.13)$$

این یک مثال کلاسیک ساده از یک حفره تشديد است که در آن فرکانس و دامنه موج به یکدیگر (و به طول حفره) بستگی دارد، پیوند به دلیل اثرات فشار تشعشع است. بهاین حفره اپتومکانیکی [۲] می‌گویند.

۲۰.۱۳ فشار تابشی بر یک محیط جاذب

الف: فرض می‌کنیم موج تابشی به صورت خطی مواری با $\hat{\mathbf{y}}$ برای قطعیت قطبی شده باشد (تعیین به یک قطبش متفاوت ساده است). بنابراین میدان الکتریکی موج $\mathbf{E}(x, t) = \hat{\mathbf{y}} E_y(x, t)$ است، با

$$E_y(x, t) = \begin{cases} Re(E_i e^{j(\omega t - kx)} + E_r e^{j(\omega t + kx)}) & (x < 0) \\ Re(E_t e^{j(\omega t - kx)}), & (x > 0) \end{cases} \quad (255.13)$$

که در آن $E_i = \sqrt{\lambda\pi I_i/c}$ و

$$E_r = \frac{1-n}{1+n} E_i, \quad E_t = \frac{2}{1+n} E_i \quad (256.13)$$

(رابطه فرنل در تابش عمودی). میدان مغناطیسی موج را می‌توان از $\mathbf{B}(x, t) = \hat{\mathbf{z}} B_z(x, t)$ داریم، با به دست آورده، ضمناً

$$B_z(x, t) = \begin{cases} Re(E_i e^{j(\omega t - kx)} - E_r e^{j(\omega t + kx)}) & (x < 0) \\ Re(n E_t e^{j(\omega t - kx)}), & (x > 0) \end{cases} \quad (257.13)$$

این میدان برای $x > 0$ بطور نمائی میرا می‌شود، زیرا

$$E_t e^{-jk(n_1 - jn_2)x} e^{j\omega t} = E_t e^{j(\omega t - k_1 x)} e^{-kn_2 x} \quad (258.13)$$

که عمق میرائی برابر $k n_2 = \lambda/(2\pi n_2) \gg \lambda/n_1$ است و در آن طول موج در خلاء است.

مقدار متوسط دوره بردار پواین‌تینگ در صفحه $x = 0$ شار انرژی الکترومغناطیسی ورودی به محیط را نشان می‌دهد. از آنجایی که میدان با افزایش x میرا می‌شود، هیچ شار خالص انرژی برای $x \rightarrow \infty$ وجود ندارد و تمام انرژی وارد شده به محیط در نهایت جذب می‌شود. با استفاده از (255.13) و (257.13) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle S_x(0^+) \rangle &= \left\langle \frac{c}{4\pi} E_y(0^+, t) B_z(0^+, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} Re(E_t n^* E_t^*) = \frac{c}{8\pi} |E_t|^2 Re(n^*) \\ &= \frac{c}{8\pi} n_1 |E_t|^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{4}{|1+n|^2} |E_i|^2 = \frac{4n_1}{|1+n|^2} I_i \equiv AI_i \end{aligned} \quad (259.13)$$

ضریب بازتاب $R = |E_r/E_i|^2 = |1-n|^2/|1+n|^2$ ، بنابراین

$$1 - R = 1 - \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 = \frac{2(n+n^*)}{|1+n|^2} = \frac{4Re(n)}{|1+n|^2} = \frac{4n_1}{|1+n|^2} = A \quad (260.13)$$

ب: فشار روی محیط، شار تکانه الکترومغناطیسی از سطح $x = 0$ است. چنین شاری در شرایط فعلی توسط $P_{rad} = -T_{xx}(x = 0)$ داده می‌شود که در آن T_{ij} تانسور تنش ماکسول است (مسئله ۵.۸). از آنجا که

$$T_{xx}(0, t) = T_{11}(0, t) = -\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^*(0, t) + \mathbf{B}^*(0, t)) \quad (261.13)$$

بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\langle T_{11}(\circ, t) \rangle &= -\frac{1}{16\pi} |E_t|^2 (1 + |n|^2) = -\frac{1}{4\pi} |E_i|^2 \frac{1 + |n|^2}{|1 + n|^2} = \frac{1}{4\pi} |E_i|^2 \frac{|1 + n|^2 - 2Re(n)}{|1 + n|^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi} |E_i|^2 \left(2 - \frac{4n_1}{|1 + n|^2} \right) = -\frac{I_i}{c} (1 + R) \equiv -P_{rad}\end{aligned}\quad (262.13)$$

همین نتیجه را می‌توان با محاسبه میانگین کل نیروی وارد شده به محیط توسط میدان الکترومغناطیسی در واحد سطح نیز به دست آورد.

$$P_{EM} = \int_0^\infty \langle (J \times B_x) dx \quad (263.13)$$

چون جمله الکتریکی هیچ کمکی نمی‌کند. چگالی جریان J در داخل محیط را می‌توان از معادله $J = \frac{1}{4\pi} (c\nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t})$ بدست آورد.

$$\begin{aligned}J_y &= Re \left(\frac{jkc n}{4\pi} \frac{n}{c} E_t e^{j(\omega t + knx)} - \frac{j\omega}{4\pi} E_t e^{j(\omega t + knx)} \right) \\ &= Re \left(-\frac{j\omega}{4\pi} (1 - n^2) E_t e^{j(\omega t + knx)} \right)\end{aligned}\quad (264.13)$$

راه دیگری برای به دست آوردن این نتیجه، یادآوری رابطه بین رسانایی و گذردگی دی الکتریک برای میدان‌های مختلط است، به عنوان مثال،

$$\sigma(\omega) = \frac{j\omega}{4\pi} [\epsilon_r(\omega) - 1] = \frac{j\omega}{4\pi} [n^2(\omega) - 1] \quad (265.13)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\langle J_y B_z \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{4\pi} Re \left\{ \left[-j(1 - n^2) E_t e^{j(kn_1 - n_2)x} \right] \left[n^* E_t^* e^{-j(kn_1 - n_2)x} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} |E_t|^2 Re [-j(1 - n^2)n^*] e^{-2n_2 x}\end{aligned}\quad (266.13)$$

اکنون

$$\begin{aligned}Re [-j(1 - n^2)n^*] &= Re [(1 - n_1^2 + n_2^2 + 2jn_1 n_2)(n_2 - jn_1)] = n_2 (1 + n_1^2 + n_2^2) \\ &= n_2 (1 + |n|^2)\end{aligned}\quad (267.13)$$

بنابراین، با جایگزینی در رابطه (263.13) و مقایسه با رابطه (262.13) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}P_{EM} &= \int_0^\infty \langle J_y B_z \rangle dx = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} |E_t|^2 n_2 (1 + |n|^2) \int_0^\infty e^{-2n_2 x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} |E_i|^2 \frac{1 + |n|^2}{1 - |n|^2} n_2 \frac{1}{2n_2} = P_{rad}\end{aligned}\quad (268.13)$$

۲۱.۱۳ پراکندگی از کره هادی کامل

الف: از آنجایی که شعاع کره، a ، بسیار کوچکتر از طول موج تابش، λ است، می‌توانیم میدان الکتریکی موج تابشی را در کل حجم کره یکنواخت در نظر بگیریم. همانطور که در مسائل ۱.۱ و ۱.۲ نشان داده شده است، "دربای الکترونی" با مقدار δ نسبت

به شبکه یونی جابجا می شود تا کل میدان الکتریکی برابر با صفر در داخل کره بماند.
طبق رابطه (۲۶۹) داریم

$$\delta = -\hat{\mathbf{y}} \frac{3}{4\pi\rho} E_{\circ} \cos(\omega t) \quad (269.13)$$

که در آن ρ چگالی بار حجمی شبکه یونی است. قطبش حجمی P مربوطه به آن

$$\mathbf{P} = -\rho\delta = \hat{\mathbf{y}} \frac{3}{4\pi} E_{\circ} \cos(\omega t) \quad (270.13)$$

و گشتاور کل کره فلزی خواهد بود
 $\mathbf{P} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P} = \mathbf{E}_{\circ} a^3 = \hat{\mathbf{y}} a^3 E_{\circ} \cos(\omega t) \quad (271.13)$

بنابراین میانگین توان پراکنده شده برابر است با:

$$W_{scatt}^{(el)} = \frac{1}{3c^3} |\vec{P}|^2 = \frac{\omega^4 a^6}{3c^3} E_{\circ}^2 \quad (272.13)$$

شدت موج تابشی $I = (c/8\pi) E_{\circ}^2$ است، بنابراین برای سطح مقطع پراکندگی بدست می آوریم.

$$\sigma_{scatt}^{(el)} = \frac{W_{scatt}^{(el)}}{I} = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4 a^6}{c^4} = 128\pi^4 (\pi a^2) \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \quad (273.13)$$

• ب: به دلیل شرط $\lambda \ll a$ ، همچنین میدان مغناطیسی موج می توانیم داخل کره را یکنواخت در نظر بگیریم

$$\mathbf{B}(t) = \hat{\mathbf{z}} B_{\circ} \cos(\omega t) = \hat{\mathbf{z}} E_{\circ} \cos(\omega t) \quad (274.13)$$

مشابه آنچه در بالا برای پلاریزاسیون الکتریکی دیده شد، کره باید مغناطیسی یکنواخت M را نیز به دست آورد تا بتواند میدان مغناطیسی موج را در داخل خود خنثی کند. همانطور که توسط (۲۷۵) مسئله (۵-۱۰) نشان داده شده است، باید داشته باشیم

$$\mathbf{M}(t) = -\hat{\mathbf{z}} \frac{3}{\lambda\pi} B_{\circ} \cos(\omega t) = -\hat{\mathbf{z}} \frac{3}{\lambda\pi} E_{\circ} \cos(\omega t) \quad (275.13)$$

و گشتاور دوقطبی مغناطیسی کره
 $\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \mathbf{M} = -\hat{\mathbf{z}} \frac{a^3}{2} E_{\circ} \cos(\omega t) \quad (276.13)$

بنابراین توان پراکنده شده توسط دوقطبی مغناطیسی یک چهارم دوقطبی الکتریکی است:

$$W_{scatt}^{(magn)} = \frac{1}{3c^3} |\vec{m}|^2 = \frac{\omega^4 a^6}{12c^3} E_{\circ}^2 \quad (277.13)$$

بنابراین، سطح مقطع کل فقط $1/5$ برابر مقدار ناشی از دوقطبی الکتریکی است:

$$\sigma_{scatt}^{(el,magn)} = 128\pi^4 (\pi a^2) \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \quad (278.13)$$

بحث در مورد اینکه چگونه عبارت دوقطبی مغناطیسی به توزیع زاویه‌ای پراکندگی تابش کمک می کند را می توان در مرجع [۳] یافت.

۲۲.۱۳ تشعشع و پراکندگی از مولکول خطی

الف: در زمان اولیه $t = 0$ مرکز جرم مولکول را در مبدا سیستم مختصات دکارتی در حالت سکون فرض می‌کنیم. مرکز جرم در حالت سکون باقی می‌ماند، زیرا نیروی خالص وارد بر مولکول صفر است. با این حال، میدان E_0 یک گشتاور $\tau_0 = p_0 \times E_0$ می‌داند. معادله حرکت $\tau = I\ddot{\theta}$ یا است

$$I\ddot{\theta} = -p_0 E_0 \sin \theta \quad (279.13)$$

که در آن $\theta(t) = \theta_0$ زاویه بین p_0 و محور x است. انرژی پتانسیل مولکول برابر است با:

$$V(\theta) = -p_0 \cdot E_0 + C = -p_0 E_0 \cos \theta + C \quad (280.13)$$

که در آن C یک ثابت دلخواه است. مولکول دارای دو موقعیت تعادلی بهترتبی در $\theta = 0^\circ$ (پایدار) و $\theta = \pi^\circ$ (نیپایدار) است. برای نوسانات کوچک در اطراف موقعیت تعادل پایدار، می‌توانیم $\theta \approx \sin \theta$ را تقریبی کنیم، و (279.13) به معادله نوسانگر هارمونیکی تبدیل می‌شود.

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{p_0 E_0}{I} \theta \equiv -\omega_0^2 \theta \quad \text{که در آن } \omega_0^2 = \frac{E_0 p_0}{I} \quad (281.13)$$

بنابراین، اگر مولکول در حالت سکون در یک زاویه اولیه کوچک θ_0 شروع شود، $\theta(t) \approx \theta_0 \cos \omega_0 t$ داریم. انرژی پتانسیل مولکول را می‌توان به صورت زیر تقریبی تخمین زد

$$V(\theta) \approx -p_0 E_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + C = -p_0 E_0 \theta^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \theta^2 \quad (282.13)$$

که در آن $C = p_0 E_0$ را انتخاب کرده‌ایم تا $V(\theta) = 0$ داشته باشیم. انرژی جنبشی مولکول برابر است با

$$K(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (283.13)$$

ب: در سیستم مختصات ما گشتاور دوقطبی لحظه‌ای دارای مولفه‌های زیر است

$$p_x = p_0 \cos \theta \approx p_0, \quad p_y = p_0 \sin \theta \approx p_0 \theta \cos(\omega_0 t) \quad (284.13)$$

به طوری که، برای نوسانات کوچک، تابش ساطع شده توسط مولکول معادل تابش یک دوقطبی الکتریکی موازی با \hat{y} و فرکانس ω_0 است. تابش به صورت خطی قطبی شده، و توزیع زاویه‌ای توان ساطع شده $\sim \cos^2 \alpha$ ، که زاویه مشاهده نسبت به E_0 است. بنابراین، توان تابشی در واحد زاویه حجمی در صفحه xz حداقل است و در جهت \hat{y} حذف می‌شود. میانگین زمان کل توان ساطع شده برابر است با:

$$P_{rad} = \frac{1}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{3c^3} \omega_0^2 p_0^2 \theta_0^2 \quad (285.13)$$

فرض می‌کنیم که زمان میرائی بسیار بیشتر از دوره نوسان است، بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\theta(t) \approx \theta_s(t) \cos \omega_0 t \quad (286.13)$$

با $\theta_s(t) = \theta_0 e^{j\omega_s t}$ و $\theta_s(0) = \theta_0$ در زمان به قدری آهسته میرا می‌شود که عملاً در یک نوسان منفرد ثابت است. در این شرایط می‌توان انرژی کل مولکول را در طول یک دوره نوسان تکی نوشت

$$U(t) = K(\dot{\theta}) + V(\theta) \approx \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega_0^2 \theta_s^2(t) \quad (287.13)$$

نرخ افت انرژی ناشی از گسیل تابش برابر است با

$$\frac{dU(t)}{dt} = \omega_0^2 \mathcal{I} \theta_s \frac{d\theta_s}{dt} = -P_{rad}(\theta_s) \quad (288.13)$$

که از آن بدست می‌آوریم

$$\frac{d\theta_s}{dt} = -\frac{1}{3c^3} \frac{\omega_0^2 p_0^2}{\mathcal{I}} \theta_s \quad (289.13)$$

بنابراین دامنه نوسان بطورت نمائی میرا می‌شود

$$\theta_s(t) = \theta_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{با} \quad \tau = \frac{3\mathcal{I}c^3}{\omega_0^2 p_0^2} \quad (290.13)$$

• ج: از آنجایی که $k d \ll 1$ است، میدان الکتریکی موج را می‌توان روی مولکول یکنواخت در نظر گرفت و می‌توانیم $E_0 e^{j\omega t} \approx E_0 e^{j\omega t}$ در نماد مختلط بنویسیم. گشتاور اعمال شده توسط موج $E_0 \times p_0 = p_0$ است. معادله کامل حرکت برای مولکول به این ترتیب است

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -p_0 E_0 \sin \theta - p_0 E_0 \cos \theta e^{j\omega t} \quad (291.13)$$

که در حد نوسانات کوچک ($\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$) می‌شود

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - \omega_0^2 e^{j\omega t}, \quad \text{با} \quad \omega_1^2 = \frac{E_0 p_0}{\mathcal{I}} \omega_0^2 \frac{E_0}{E_0} \quad (292.13)$$

جواب کلی (292.13) مجموع جواب همگن در نظر گرفته شده در بند (الف) است، که نوسانات آزاد را توصیف می‌کند، و جواب خاص از معادله کامل است. جواب خاص را می‌توان به شکل $\theta_f(t) = \theta_f e^{j\omega t}$ یافت که با (292.13) جایگزین شود.

$$\theta_f = \frac{\omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (293.13)$$

برای سادگی، از وجود احتمالی اصطکاک در (281.13) چشم پوشی کردیم. با این حال، در اصل یک جمله اصطکاک مانند $\dot{\theta}/\ddot{\theta}$ باید به دلیل اتلاف انرژی توسط تابش ظاهر شود. در حضور موج صفحه‌ای، جمله اصطکاک فقط نزدیک به روزونانس $\omega = \omega_0$ است، زیرا $\omega \ll \omega_0$.

• د: پس از یک زمان گذرا از مرتبه τ نوسان‌های اولیه ممکن در ω_0 می‌شوند و مولکول به حالت ماندگار می‌رسد که در فرکانس ω نوسان می‌کند. با فرض، همانند بند (ب)، نوسان‌های با دامنه کوچک، یک مولفه دوقطبی نوسانی $p_y \approx p_0 \theta_f e^{j\omega t}$ داریم. قدرت پراکندگی برابر است با

$$P_{scatt} = \frac{1}{3c^3} |\ddot{p}_y|^2 = \frac{p_0^2}{3c^3} \frac{\omega^4 \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \frac{p_0^4 E_0^2}{3\mathcal{I}c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (294.13)$$

شدت موج $I = (c/4\pi)E_0^2$ است، بنابراین سطح مقطع پراکندگی برابر است با

$$\sigma_{scatt} = \frac{P_{scatt}}{I} = \frac{4\pi p_0^4}{3\mathcal{I}^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (295.13)$$

تخمین مرتبه‌ای مقدار برای یک مولکول ساده مانند H_2 را می‌توان با توجه به اینکه $(p_0^4/\mathcal{I}^2 c^4) \sim ed$ و $m \sim m_p$ با $\mathcal{I} \sim md$ و $p_0 \sim ed$ جرم هسته‌ها انجام داد، به طوری که $\sim (e^2/m_p c^2)$ است.

۲۳.۱۳ نیروی کششی تشعشع

• الف: میدان الکتریکی موج بصورت نمایه مختلط هست

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} Re(E_0 e^{j(\omega t - kx)}) \quad (296.13)$$

با صرفنظر کردن از میدان مغناطیسی، ذره در جهت $\hat{\mathbf{y}}$ بدون تغییر مختصات x و z نوسان می‌کند. بنابراین، با فرض اینکه ذره در ابتدا در مبدأ سیستم دکارتی قرار داشته باشد، و به دنبال راه حلی به شکل $\mathbf{v} = Re(v_0 e^{j\omega t})$ با جایگزینی در (۲۲.۱۳) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{y}} \frac{-jq}{m(\omega - jv)} E_0 \quad (297.13)$$

• ب: توان تولید شده توسط نیروی الکترومغناطیسی $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ است. بدین ترتیب

$$P_{abs} = \langle q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle = \frac{q}{2} Re(E_0 v_0^*) = \frac{q^2}{2m} \frac{v}{\omega^2 + v^2} |E_0|^2 \quad (298.13)$$

• ج: گشتاور دوقطبی الکتریکی ذره $\mathbf{p} = qr$ است. با استفاده از رابطه لامور^۴ برای

$$P_{rad} = \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{\mathbf{p}}^2 \rangle = \frac{2q^2}{3c^3} \langle \ddot{\mathbf{r}}^2 \rangle = \frac{q^4}{3m^2 c^3} \frac{\omega^2}{\omega^2 + v^2} |E_0|^2 \quad (299.13)$$

با فرض $P_{rad} = P_{abs}$ خواهیم داشت

$$v = \frac{2q^2 \omega^2}{3mc^3} \quad (300.13)$$

• د: باید محاسبه کنیم

$$F_x = \left\langle \frac{q}{c} v_y B_z \right\rangle \quad (301.13)$$

جایی که برای v_y از نتیجه (۰) استفاده می‌کنیم، در حالی که دامنه میدان مغناطیسی $B_0 = E_0$ است. بنابراین ما داریم

$$F_x = \frac{q}{c} Re(v_0 E_0^*) = \frac{P_{abs}}{c} \quad (302.13)$$

بنابراین، نسبت بین انرژی و تکانه جذب شده توسط ذره از میدان الکترومغناطیسی برابر c است.

^۴Larmor's formula

- ۵: تابش از یک خوشه کوچکتر از یک طول موج همدوس است و بنابراین به اندازه $N^{\frac{1}{2}}$ مقیاس می‌شود، همچنین نیروی کل نیز تغییر می‌کند. جرم خوشه به صورت $N^{\frac{1}{2}}$ مقیاس می‌شود، بنابراین مقیاس شتاب به صورت $\frac{N}{N^{\frac{1}{2}}} = N^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد. به عبارت دیگر، خوشه‌ای از تعداد زیادی ذرات ممکن است بسیار موثرتر از یک ذره شتاب بگیرد؛ هر چه تعداد ذرات بیشتر باشد (در محدوده تقریب ما)، شتاب قوی‌تر است. این اساس مفهوم شتاب "همدوس" با استفاده از امواج الکترومغناطیسی است که توسط V.I. Veksler [۴] رابطه‌بندی شده است.

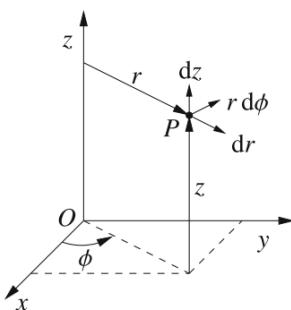
مراجع:

1. P.F. Cohadon, A. Heidmann, M. Pinard, Cooling of a mirror by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3174 (1999)
2. en.wikipedia.org/wiki/Cavityoptomechanics
3. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, § 9.2 and 9.4, 3rd edn. (Wiley, New York, London, Sydney, 1998)
4. V.I. Veksler, Sov. J. Atomic Energy **2**, 525–528 (1957)

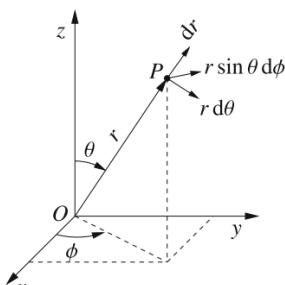
پیوست آ

چند رابطه و بردار مفید

آ. ۱۰. گرادیان، کرل ، دیورژانس و لاپلاسین



شکل (آ-۱)



شکل (آ-۲)

معادلات برداری مستقل از سیستم مختصات مورد استفاده هستند. مختصات دکارتی اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرند زیرا زمانی که مسئله دارای تقارن خاصی نباشد راحت‌ترین آنهاست. با این حال، در مورد تقارن‌های خاص، محاسبات را می‌توان تا حد زیادی با انتخاب مناسب سیستم مختصات تسهیل کرد. به‌غیر از مختصات بیضوی، که فقط در مسئله ۲-۱۴ استفاده شده است، تنها دو سیستم خاص مورد استفاده در این کتاب مختصات استوانه‌ای و کروی هستند.

یک سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) یک موقعیت نقطه را با فاصله r از محور مرجع (طولی) انتخابی z ، زاویه ϕ که r با صفحه مرجع انتخابی $\phi = 0$ حاوی محور z تشکیل می‌دهد، مشخص می‌کند. فاصله ثابت یا منفی از صفحه مرجع انتخابی عمود بر محور. مبدأ نقطه‌ای است که r و z صفر هستند، برای $r = 0$ مقدار ϕ نامربوط است. شکل (آ-۱) یک سیستم مختصات استوانه‌ای را نشان می‌دهد که بر روی یک سیستم دکارتی که منشا یکسانی دارد، با محورهای z دو سیستم روی هم قرار گرفته‌اند، صفحه xz مربوط به صفحه $\phi = 0$ سیستم استوانه‌ای است. روابط تبدیلی زیر را داریم

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z \quad (\text{آ.} ۱)$$

عناصر خطوط متعامد $dr, r d\phi, dz$ و $rd\phi$ هستند و عنصر حجم بی‌نهایت کوچک است.

در سیستم مختصات کروی (r, θ, ϕ) موقعیت یک نقطه را با فاصله شعاعی r از یک

جدول آ.۱: گرadiان، کرل ، دیورژانس و لaplاسین در دستگاه استوانه‌ای و کروی

مختصات استوانه‌ای	مختصات کروی
مولفه‌های گرادیان V	مولفه‌های گرادیان V
$\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial V}{\partial r}$	$\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial V}{\partial r}$
$\hat{\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta}$	$\hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}$
$\hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$	$\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial V}{\partial z}$
مولفه‌های کرل \mathbf{A}	مولفه‌های کرل \mathbf{A}
$\hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(A_\phi \sin \theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \right]$	$\hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right)$
$\hat{\theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right]$	$\hat{\phi} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right)$
$\hat{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$	$\hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right]$
دیورژانس بردار \mathbf{A}	دیورژانس بردار \mathbf{A}
$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
لaplاسین تابع اسکالر V	لaplاسین تابع اسکالر V
$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

مبدأ ثابت، یک زاویه قطبی θ اندازه‌گیری شده از یک جهت اوج ثابت، و زاویه آزمیوت ϕ تصویر متعامد r در یک نقطه مشخص می‌کند. صفحه مرجع که از مبدأ می‌گذرد و متعامد به نقطه اوج است که از یک جهت مرجع ثابت در آن صفحه اندازه‌گیری می‌شود. شکل (آ-۲) یک سیستم مختصات کروی را نشان می‌دهد که روی یک سیستم دکارتی که منشاء یکسانی دارد، با محور z روی محور اوج قرار گرفته است، و صفحه xz مربوط به صفحه $\phi = 90^\circ$ در سیستم کروی است. روابط تبدیلی زیر را داریم

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (۲.۱)$$

عناصر خطوط متعامد dr ، $r d\theta$ و $r \sin \theta d\phi$ هستند، و عنصر حجم بینهایت کوچک است (جدول آ.۱).

آ. اتحادهای برداری

کمیت‌های A , B و C بردارها یا توابع برداری مختصات هستند، f و g توابع اسکالر مختصات هستند.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (۳.\ddot{۱})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (۴.\ddot{۱})$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (۵.\ddot{۱})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \quad (۶.\ddot{۱})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A} \quad (۷.\ddot{۱})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (۸.\ddot{۱})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (۹.\ddot{۱})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (۱۰.\ddot{۱})$$

$$\nabla^r \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (۱۱.\ddot{۱})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^r \mathbf{A} \quad (۱۲.\ddot{۱})$$

نمايه

- آزمایش تولمن و استوارت، ۱۱۵
آشفتگی فاز، ۲۲۰
افزايش، ۴۰۵، ۴۱۰
افزايش لورنتس، ۴۱۲
بار مقيد سطح، ۹۴
بردار پتانسیل، ۱۳۶
بيضى گون کشیده، ۸۲
تبديل معيار، ۲۷۶
تقريب ميدان ميانگين، ۸۵
تپ اختر، ۲۹۷
تك قطبي مغناطيسي، ۱۳۵
ثبت آوو گادرو، ۵۵
جابجايي الکтриكي، ۸۴
حالت ماندگار، ۳۸۴
خنك کننده سيزيف، ۴۰۱
سطح مقطع پراکندگي، ۳۸۳
شعاع بور، ۲۹۶
ضريب نرمال سازی، ۳۷۵
عادی سازی (نرماليزه)، ۶۶
عمق نفوذ، ۱۹۱
- قطبش الکтриكي، ۸۳
لامور، ۴۲۵
محو شونده، ۳۹۸، ۲۳۴، ۲۳۳
مدل درود، ۱۱۵، ۱۱۳
مقیاس لورنتس، ۲۸۵
مقید، ۱۳۷
موتور همپولار، ۱۷۳
مودهای منحص، ۳۶۳
می، ۴۰، ۳۱
ميدان تابشی، ۲۹۵