

ای نسخی نامه الهی که تویی  
ای آنسه‌ی حال شاهی که تویی  
بیرون ز تونیست آنچه د عالم هست  
از خود بطلب هر آنچه خواهی که تویی





۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مقدمه ای پر اصول و نظریه اساسی

# فانو آپلیک

نویسنده:

Ulrich Hohenester

ترجمه

دکتر محمد صادق ابریشمیان

استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

## ۱۰. پیشگفتار (نویسنده)

نانو اپتیک رویکرد تحقیقاتی اپتیک و علم نانو را ترکیب می‌کند. از طریق نور، اطلاعاتی در مورد دنیای اطراف خود به دست می‌آوریم، و کنترل نور، ستون فقرات بسیاری از کاربردهای نوری، مانند ارتباطات مبتنی بر تارنوری یا برداشت انرژی نور را تشکیل می‌دهد. از سوی دیگر، علم نانو با ساخت و کنترل ماده در مقیاس اتمی سر و کار دارد و انقلاب دیجیتالی را هدایت کرده که زندگی روزمره ما را به‌طور غیرقابل برگشتنی شکل داده است. به عنوان مثال، در قالب رایانه یا تلفن همراه. انتظار می‌رود ترکیبی از این زمینه بهترین‌های دو جهان را گرد هم آورد. با این حال، اپتیک و علم نانو به‌راحتی با هم جمع نمی‌شوند. حدپراش حکم می‌کند که نور نمی‌تواند به حجم‌هایی با ابعاد کوچک‌تر از طول موج فشرده شود، که در حد میکرومتر هستند تا نانومتر، و برعکس در میکروسکوپ نوری تنها اجسامی که از هم دورتر از طول موج نور هستند، از نظر فاصله‌ای قابل تشخیص هستند.

نانو اپتیک با دستکاری نور در مقیاس‌های طولی قابل مقایسه یا کوچکتر از طول موج نور، در حالت ایده‌آل تا مقیاس نانومتر سر و کار دارد. در دهه‌های گذشته، دانشمندان موفق شده‌اند طرح‌هایی ابداع کنند تا اپتیک‌ها را به‌سمت نانو تبدیل کنند. به عنوان مثال، میکروسکوپ محلی سازی و موچین‌های نوری جوایز نوبل سال ۲۰۱۴ و ۲۰۱۸ را برای دستکاری نور در منطقه آستانه حد پراش دریافت کرده‌اند. برای غلبه بر محدودیت، می‌توان نور را در مقیاس نانو جمع‌آوری کرد، به عنوان مثال، در میکروسکوپ روش نوری میدان نزدیک، یا در میدان نور پلاسمونیک به نوسانات بار الکترون در سطح نانوساختارهای فلزی متصل شد و بدین وسیله نور را به حجم‌های زیر طول موج کشیده است.

این کتاب مقدمه‌ای بر نانو اپتیک و پلاسمونیک ارائه می‌دهد. این بر اساس مجموعه سخنرانی‌هایی است که من طی چندین سال در دانشگاه گراتس و جاهای دیگر تدریس کرده‌ام. تمرکز اصلی من بر روی اصول اولیه و ابزارهای نظری مورد نیاز در نانو اپتیک است، در حالی که کاربردها فقط به صورت مثالی مورد بحث قرار می‌گیرند. از این نظر، انتظار می‌رود که کتاب با اکثر کتاب‌های درسی مربوطه متفاوت باشد. من ارجاع به ادبیات تحقیق کنونی را تا حدی پراکنده نگه داشته‌ام، اما سعی کرده‌ام تا حد امکان به سیاری از مقالات مروری عالی برای اطلاعات بیشتر اشاره کنم. من همچنین سعی کرده‌ام بحث را مستقل نگه دارم و در صورت امکان از استفاده از عبارت «می‌توان آن را نشان داد» یا معادل آن خودداری کردم. این ارائه را بسیار طولانی تر از آنچه در ابتدا فکر می‌کردم طولانی کرده است، اما امیدوارم خواندن کتاب را آسان کند.

کتاب به دو بخش تقسیم شده است. مورد اول به نانو اپتیک کلاسیک می‌پردازد، که در آن کلاسیک را می‌توان هم بر حسب الکترودینامیک کلاسیک و هم بر حسب کلاسیک متعارف و موضوعی، درک شود. بخش دوم نانو اپتیک را به قلمرو کوانتموی می‌آورد. من تلاش زیادی کرده‌ام که ارائه تا حد امکان سرگرم کننده باشد، اما با خواندن نسخه نهایی متوجه شدم که تا حدودی فنی و شلوغ شده است - از این بابت عذرخواهی می‌کنم. مثل همیشه روش طبیعی خواندن کتاب از ابتدا تا انتهای است و اصولاً این رویکرد سنتی اشکالی ندارد. با این حال، از آنجایی که من خودم به ندرت به این دستور پایبند هستم، توصیه خاصی برای استفاده از کتاب ارائه نمی‌کنم: از هر کجا که جالب به نظر می‌رسد شروع به خواندن کنید و در صورت نیاز به اصول

## ۱۰. پیشگفتار (نویسنده)

اولیه بازگردید.

بسیاری از همکاران و دانشجویان بهمن کمک کردن تا کتاب را به شکل امروزی برسانم. آنها به طور جداگانه تشکر می‌شوند. من صمیمانه امیدوارم که این کتاب هم برای محققان با تجربه که به دنبال اطلاعات منتخب هستند و هم برای مبتدیان و علاقهمندانی که اولین بار به موضوع نگاه می‌کنند، مفید باشد. برای کل حوزه نانو اپتیک، امیدوارم آینده‌اش مثل گذشته‌اش روشن و درخشنان باشد.

اولریش هوهنستر

گراتس، اتریش، ژوئن ۲۰۱۹

## ۲۰. پیشگفتار (مترجم)

وقتی در پنجاه سال پیش در دانشگاه درس مخابرات میخواندیم، ارتباطات در باند مایکرویو انجام میشد و بحث لیزر و مدولاتورهای لیزر در آزمایشگاه بود. در سال ۱۹۷۷ که در دانشگاه کالیفرنیا ایروانین بودم، با یک تکه فیبر و مدولاتورهای الکترواکوستیکی تصویر دانشجویان را در فاصله یک و نیم متری بروی صفحه تلویزیون ارسال و نمایش میدادم. تلفات فیبر نوری در آن موقع زیاد بود و سرعت پردازش زیاد جالب نبود. اما علم روز بروز با سرعت پیش میرود و ما نیز مجبوریم خود و دانشجویان آینده را با علم روز آشنا و افق‌های آینده را برایشان روشن کنیم. درس نانو اپتیک نیز از دروسی است که دانشجویان رشته مخابرات باید با آن آشنا شوند. از آنجا که در این زمینه کتاب نانو اپتیک در میان کتب دانشگاهی ما خالی بود بخش اول کتاب

Nano and Quantum Optics  
An Introduction to Basic Principles and Theory

تحت عنوان

### مقدمه‌ای بر اصول و نظریه اساسی نانو اپتیک

ترجمه شد و امیدوارم مورد استفاده دانشجویان قرار گیرد. و از خداوند متعال شاکرم که به من توفیق ترجمه و تدوین این کتاب را داد. ضمناً امیدوارم اساتید ارجمند بخش‌های بعدی همین کتاب تحت عنوان ”نانو کوانتم“ که شامل بخش‌های ۱۲-۱۸ است، را ترجمه کنند. از تمام دوستان و دانشجویان تقاضا دارم اشتباهاتی که در ترجمه و یا اصطلاحات بکار رفته مشاهده میکنند اینجانب را مطلع کنند که بزودی اصلاح و در دسترس همه قرار گیرد.

محمد صادق ابریشمیان  
آذرماه ۱۴۰۰

## فهرست مطالب

۱۰	پیشگفتار (نویسنده)
۲۰	پیشگفتار (مترجم)
<b>نانو اپتیک چیست؟</b>	
۷	۱.۱ معادله موج
۷	۱.۱.۱ امواج فضای یک بعدی
۷	۲.۱.۱ امواج فضای سه بعدی
۱۱	۲.۱ امواج محسوبوند
۱۴	۲.۱.۲ قلمرو نانو اپتیک
۱۸	۳.۱ خلاصه‌ای از فصل‌های ۲-۱۱ کتاب
۲۱	۱.۳.۱
<b>مختصری از معادلات ماکسول</b>	
۲۵	۱.۲ مفهوم میدان
۲۵	۱.۱.۲ عملگر $\nabla$
۲۸	۲.۱.۲ قضیه هلم‌هولتز
۳۱	۳.۱.۲ قضیه گوس و استوکس
۳۲	۲.۲ معادلات ماکسول
۳۳	۱.۲.۲ پتانسیل‌های الکترومغناطیسی
۳۵	۳.۲ معادلات ماکسول در ماده
۳۷	۱.۳.۲ مواد خطی
۴۰	۲.۳.۲ شرایط مرزی
۴۱	۴.۲ میدان‌های هارمونیک زمانی
۴۳	۱.۴.۲ امواج سینوسی
۴۴	۵.۲ میدان‌های طولی و عرضی
<b>نمایش طیف زاویه‌ای</b>	
۵۱	۱.۳ تبدیل فوریه میدان‌ها
۵۱	۲.۳ نمایش میدان‌دور
۵۵	۳.۳ تصویر میدان و کانونی کردن
۵۷	

۶۰	تقریب موازی محور و پرتوهای گوسی	۴.۳
۶۳	میدان‌های بشدت کانونی پرتو لیزر	۵.۳
۶۶	جزئیات تبدیل تصویربرداری و کانونی کردن	۶.۳
۶۶	کانونی کردن میدان‌های دور	۱.۶.۳
۷۰	تصویربرداری میدان‌های دور	۲.۶.۳
<b>قارن و نیروها</b>		
۷۷	۱.۴ نیروهای نوری	۴
۷۷	۱.۱.۴ تقریب دوقطبی	۱.۴
۷۸	۲.۱.۴ نور هندسی	۱.۴
۸۲	۳.۱.۴ موچین نوری	۱.۴
۸۵	۲.۴ معادله پیوستگی	۱.۴
۸۵	۳.۴ قضیه پواین‌تینگ	۱.۴
۸۷	۴.۴ سطح مقطع‌های نوری	۱.۴
۸۹	۵.۴ اصل بقاء مومنتوم	۱.۴
۹۱	۶.۴ مومنتوم زاویه‌ای نوری	۱.۴
<b>تابع گرین</b>		
۹۹	۱.۵ تابع گرین چیست؟	۵
۹۹	۲.۵ تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز	۵
۱۰۱	۱.۲.۵ نمایش شکل معادله هلم‌هولتز	۵
۱۰۲	۲.۲.۵ تابع گرین در مقابل جواب اصلی	۵
۱۰۵	۳.۵ تابع گرین برای معادله موج	۵
۱۰۶	۱.۲.۵ ناحیه میدان دور	۵
۱۰۷	۲.۳.۵ رابطه نماینده برای معادله موج	۵
۱۰۹	۴.۵ قضیه نوری	۵
۱۱۱	۵.۵ جزئیات رابطه نماینده معادله موج	۵
<b>حد پراش و فراتراز آن</b>		
۱۱۷	۱.۶ تصویربرداری یک تک دوقطبی	۶
۱۱۷	۲.۶ حد پراش نور	۶
۱۲۳	۳.۶ میکروسکوپ نوری میدان نزدیک روبشی	۶
۱۲۸	۱.۳.۶ مدل بیت-بووکامپ	۶
۱۲۹	۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی	۶
۱۳۲	۱.۴.۶ دقت موقعیت	۶
۱۳۲	۲.۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی با عکس فعال	۶
۱۳۴	۳.۴.۶ میکروسکوپ تخلیه تحریک شده	۶

۱۴۱	<b>خواص مواد</b>	<b>۷</b>
۱۴۳	مدل درود-لورتنس و مدل درود	۱.۷
۱۴۹	از الکترومغناطیس میکروسکوپی تا ماکروسکوپی	۲.۷
۱۵۱	غیرمحلى بودن در زمان	۳.۷
۱۵۵	۱. بازنگری قضيه پواين-تينگ	۱.۳.۷
۱۵۷	۲. رابطه کرامر-کرونیک	۲.۳.۷
۱۶۰	قضيه همپاسخی در اپتیک	۴.۷
۱۶۳	<b>محیط‌های لایه لایه</b>	<b>۸</b>
۱۶۳	پلاسمون‌های سطحی	۱.۸
۱۷۰	ساختمان کرتشمن و اتو	۱.۱.۸
۱۷۴	پلاسمون‌های گرافن	۲.۸
۱۷۵	روش ماتریس انتقال	۳.۸
۱۷۶	ضرایب فرنل	۱.۳.۸
۱۷۹	ماتریس‌های انتقال	۲.۳.۸
۱۸۳	بازنگری پلاسمون‌های سطحی	۳.۳.۸
۱۸۹	شکست منفی	۴.۸
۱۹۲	عدسی وسلago	۱.۴.۸
۱۹۳	عدسی کامل	۲.۴.۸
۱۹۵	تابع گرین برای محیط‌های لایه لایه	۵.۸
۱۹۸	منبع واقع در بالاترین لایه	۱.۵.۸
۲۰۰	تصویربرداری با یک عدسی ناقص وسلago	۲.۵.۸
۲۰۱	حد میدان-دور	۳.۵.۸
۲۰۵	منبع واقع در داخل لایه	۴.۵.۸
۲۰۹	<b>پلاسمون‌های ذره‌ای</b>	<b>۹</b>
۲۰۹	حد شبهاستاتیک	۱.۹
۲۱۱	کره‌ها، بیضوی‌گون‌ها در حد شبهاستاتیک	۲.۹
۲۱۱	نظریه شبهاستاتیک می	۱.۲.۹
۲۱۷	نظریه می-گانس	۲.۲.۹
۲۱۸	سطح مقطع نوری	۳.۲.۹
۲۲۱	روش انگرال مرزی برای حد شبهاستاتیک	۳.۹
۲۲۷	مودهای ویژه پلاسمونیک	۱.۳.۹
۲۲۳	تزویچ ذرات	۲.۳.۹
۲۲۷	نگاشت همدیس	۴.۹
۲۳۹	چند نمونه منتخب	۱.۴.۹
۲۴۰	جزئیات نگاشت همدیس	۲.۴.۹
۲۴۲	استوانه‌های مماسی	۳.۴.۹
۲۴۵	نظریه می	۵.۹

۲۴۹ .....	روش انتگرال مرزی برای معادله موج ..... ۶.۹
۲۵۱ .....	مودهای ویژه برای معادلات ماکسول کامل ..... ۱.۶.۹
۲۵۲ .....	جزئیات تجزیه مود شبه استاتیک ..... ۷.۹
۲۵۲ .....	تحلیل مود اویانگ و ایزاکسون ..... ۱.۷.۹
۲۵۴ .....	تجزیه مود ویژه تابع گرین ..... ۲.۷.۹
۲۵۹ .....	<b>۱۰ چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها</b>
۲۵۹ .....	۱.۱.۰ نرخ فروپاشی تابشگر کوانتمی ..... ۱.۱.۰
۲۶۴ .....	۱.۱.۱۰ چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها ..... ۱.۱.۱۰
۲۶۶ .....	۲.۱.۰ تابشگر کوانتمی در محیط فوتونیک ..... ۲.۱.۰
۲۶۶ .....	۱.۲.۰ تابشگر کوانتمی بالای تیغه فلزی ..... ۱.۲.۰
۲۶۷ .....	۲.۲.۱۰ تقریب شبه استاتیک ..... ۲.۲.۱۰
۲۷۰ .....	۳.۲.۱۰ نظریه می ..... ۳.۲.۱۰
۲۷۴ .....	۳.۱.۰ افزونگی سطحی پراکنده‌گی رامان ..... ۳.۱.۰
۲۷۹ .....	۴.۱.۰ انتقال انرژی تشید فورستر ..... ۴.۱.۰
۲۸۱ .....	۵.۱.۰ طیف سنجی تلفات انرژی الکترون ..... ۵.۱.۰
۲۸۵ .....	۱.۵.۱۰ میدان حاصل از الکترون‌های سریع ..... ۱.۵.۱۰
۲۸۷ .....	۲.۵.۱۰ تجزیه به تلفات حجیم و سطحی ..... ۲.۵.۱۰
۲۸۹ .....	۳.۵.۱۰ رابطه EELS از طریق دایادیک گرین ..... ۳.۵.۱۰
۲۹۲ .....	۴.۵.۱۰ حد شبه استاتیک ..... ۴.۵.۱۰
۲۹۷ .....	<b>۱۱ روش‌های محاسباتی در نانو اپتیک</b>
۲۹۷ .....	۱.۱.۱۱ شبیه‌سازی تفاضل محدود در حوزه زمان ..... ۱.۱.۱۱
۳۰۰ .....	۱.۱.۱۱ جادوگری روش (FDTD) ..... ۱.۱.۱۱
۳۰۲ .....	۲.۱.۱۱ حالت دو بُعدی ..... ۲.۱.۱۱
۳۰۴ .....	۳.۱.۱۱ پایداری و پاشندگی ..... ۳.۱.۱۱
۳۰۶ .....	۴.۱.۱۱ لایه‌های تطبیق کامل ..... ۴.۱.۱۱
۳۰۹ .....	۵.۱.۱۱ خواص مواد ..... ۵.۱.۱۱
۳۱۰ .....	۲.۱.۱۱ روش اجزای مرزی ..... ۲.۱.۱۱
۳۱۵ .....	۳.۱.۱۱ روش گالرکین ..... ۳.۱.۱۱
۳۱۵ .....	۱.۳.۱۱ ایده بزرگ روش گالرکین ..... ۱.۳.۱۱
۳۱۷ .....	۲.۳.۱۱ شبکه بدون ساختار ..... ۲.۳.۱۱
۳۲۰ .....	۴.۱.۱۱ روش اجزای مرزی با رویکرد گالرکین ..... ۴.۱.۱۱
۳۲۰ .....	۱.۴.۱۱ توابع پایه راویارت-توماس ..... ۱.۴.۱۱
۳۲۲ .....	۲.۴.۱۱ طرح گالرکین برای معادلات ماکسول کامل ..... ۲.۴.۱۱
۳۲۴ .....	۵.۱.۱۱ روش اجزای محدود ..... ۵.۱.۱۱
۳۲۵ .....	۱.۵.۱۱ روش اجزای محدود در حوزه فرکانس ..... ۱.۵.۱۱
۳۲۷ .....	۲.۵.۱۱ عناصر ندلک Nedelec ..... ۲.۵.۱۱
۳۳۰ .....	۳.۵.۱۱ ناپیوستگی طرح گالرکین ..... ۳.۵.۱۱

۴۳۳ . . . . .	جزئیات روش اجرای مرزی پتانسیل	۴.۵.۱۱
<b>آ آنالیز مختلط</b>		
۴۴۱ . . . . .	قضیه کوشی	۵۰.
۴۴۲ . . . . .	قضیه باقیمانده	۶۰.
<b>ب تابع گرین طیفی</b>		
۴۴۵ . . . . .	ب.۱ تجزیه طیفی تابع گرین اسکالار . . . . .	
۴۴۵ . . . . .	ب.۲ نمایش طیفی تابع گرین دیادیک . . . . .	
۴۴۸ . . . . .	ب.۳ مسیر انتگرال گیری سامرفلد . . . . .	
۴۵۰ . . . . .		
<b>پ معادله موج کروی</b>		
۴۵۷ . . . . .	پ.۱ چند جمله‌ای لوزاندر . . . . .	
۴۵۸ . . . . .	پ.۲ هارمونیک‌های کروی . . . . .	
۴۶۰ . . . . .	پ.۳ توابع بسل و هنکل کروی . . . . .	
۴۶۲ . . . . .		
<b>ت هارمونیک‌های کروی برداری</b>		
۴۶۷ . . . . .	ت.۱ هارمونیک‌های کروی برداری . . . . .	
۴۶۹ . . . . .	ت.۲ روابط متعامد . . . . .	
۴۷۰ . . . . .		
<b>ث نظریه می</b>		
۴۷۵ . . . . .	ث.۱ بسط چندقطبی میدان‌های الکترومغناطیسی . . . . .	
۴۷۷ . . . . .	ث.۲ ضرایب می . . . . .	
۴۸۰ . . . . .	ث.۳ تحریک با موج صفحه‌ای . . . . .	
۴۸۴ . . . . .	ث.۴ تحریک توسط دوقطبی . . . . .	
<b>ج تابع دلتای دیراک</b>		
۴۹۱ . . . . .	ج.۱ تابع دلتای طولی و عرضی . . . . .	
۴۹۲ . . . . .	نمایه . . . . .	
۴۰۶ . . . . .		



## فصل ۱

### نانو اپتیک چیست؟

در این فصل مفاهیم امواج منتشر شونده و محوشونده<sup>۱</sup> را معرفی می‌کنیم. حذف امواج اخیر در اپتیک معمولی مسئول حد پراش نور است، که آن را بر اساس معادله موج اسکالار توضیح خواهیم داد. بحث در چهارچوب معادلات ماکسول در بخش‌های بعدی این کتاب ارائه خواهد شد. با معرفی معادله اسکالار یک بعدی بحث خود را شروع کرده سپس در مورد تعمیم ابعاد بالاتر متمرکز می‌شویم. خیلی از این مفاهیم، برای خوانندگان آشنا است، اما در اینجا برای روشن شدن مطلب تکرار می‌کنیم. وقتی این مراحل را پیمودیم، بر نقش امواج محوشونده و چگونگی زندگی با آن یا بدون آن را در میدان‌های نانو اپتیک متمرکز می‌شویم. و فصل را با خلاصه‌ای مختصر از فصل دوم تا یازدهم که اولین قسمت این کتاب است به پایان می‌بریم.

#### ۱.۱ معادله موج

##### ۱.۱.۱ امواج فضای یک بعدی

موج چیست؟ خوانندگان را تشویق می‌کنم که برای پاسخ به این سوال کمی تأمل کنند تا به یک جواب معقولی برسند. از این گذشته، امواج در فیزیک فراوان هستند؛ از امواج آب و صوت گرفته تا امواج الکترومغناطیسی، که هدف این کتاب است. با این حال، نوضیح اینکه موج واقعاً چیست، بسیار دشوار به نظر میرسد. در کتاب "مقدمه‌ای بر الکترودینامیک" گریفیتز<sup>۲</sup> تعریف زیر آورده شده است [۱]:

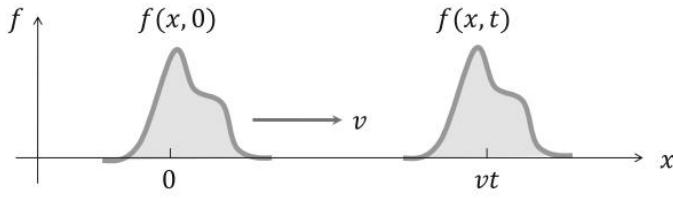
موج اختلال در یک محیط پیوسته است که با یک شکل ثابت و سرعت ثابت منتشر می‌شود.

این تعریف تعداد زیادی سوال مطرح می‌کند (در مورد امواج الکترومغناطیسی، محیط پیوسته چیست؟ محیط پاشنده<sup>۳</sup> چیست؟)، و بعداً تعریفی اصلاح شده، هر چند فنی‌تر ارائه خواهم داد.

<sup>1</sup>Evanescent Waves

<sup>2</sup>Griffiths

<sup>3</sup>Dispersive Media



شکل ۱.۱: موج در فضای یک بعدی. موج  $f(x, t)$  با سرعت ثابت  $v$  بدون تغییر شکل منتشر می‌شود. بعداز گذشت زمان  $t$  مسافت  $vt$  را می‌پیماید.

برای شروع، اجازه دهید تعریف گریفیتز را مد نظر قرار دهیم و امواج را در فضای یک بعدی درنظر گیریم. اختلال موج منتشر شونده در امتداد  $x$  را با  $f(x, t)$  نشان می‌هیم که در آن  $t$  زمان است. شکل (۱.۱) نمودار از انتشار موج را نشان می‌دهد. بعد از مدت  $t$  موج اولیه مسافت  $vt$  جابجا شده است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x, 0) = g(x), \quad f(x, t) = g(x - vt),$$

و نشان می‌دهد که  $f$  یکتابع متغیر ترکیبی  $x, t$  است. همین تحلیل در مورد موجی که به سمت چپ حرکت می‌کند و راه حل کلی، ترکیب موج‌های متحرک چپ و راست است.

$$f(x, t) = g_-(x - vt) + g_+(x + vt) = g_-(u_-) + g_+(u_+), \quad u_{\pm} = x \pm vt.$$

اکنون به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) g_-(u_-) = \left( \frac{\partial u_-}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial u_-}{\partial t} \right) \frac{dg(u_-)}{du_-} = \left( 1 - \frac{v}{v} \right) \frac{dg(u_-)}{du_-} = 0$$

بنابراین، عملگر  $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}$  سمت چپ روی موجی که به سمت راست می‌رود را برابر صفر می‌کند. بهمین نحو، برای موجی که به سمت چپ می‌رود داریم:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) g_+(u_+) = \left( \frac{\partial u_+}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_+}{\partial t} \right) \frac{dg(u_+)}{du_+} = \left( 1 - \frac{v}{v} \right) \frac{dg(u_+)}{du_+} = 0$$

اگر هر دو عملگر را روی تابع موج  $f(x, t)$  اعمال کنیم، امواج چپ و راست رونده را صفر می‌کند و به یک معادله موج اسکالر فضای یک بعدی میرسیم.

### معادله موج اسکالر در فضای یک بعدی

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, t) = 0. \quad (1.1)$$

در ادامه، ساده ترین شکل موج را درنظر می‌گیریم، یک موج سینوسی که آنرا می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (2.1)$$

<sup>۴</sup>Operator

در اینجا  $A$  دامنه،  $k$  عدد موج،  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای، و  $\delta$  یک عامل فاز است. عدد موج و فرکانس زاویه‌ای با طول موج و زمان تناوب نوسان با رابطه زیر بهم مربوط هستند.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

با اینها، در می‌یابیم که موج سینوسی نسبت به  $\lambda$  و  $T$  متناوب است؛

$$\begin{aligned} f(x + \lambda, t) &= A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + 1 \right) - \omega t + \delta \right] = f(x, t) \\ f(x, t + T) &= A \cos \left[ kx - 2\pi \left( \frac{t}{T} + 1 \right) + \delta \right] = f(x, t) \end{aligned}$$

بنظر می‌رسد که می‌توانیم تعریف موج سینوسی خود را بسادگی در صفحه مختلط گسترش دهیم. از رابطه اول شروع می‌کنیم:

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi \quad (3.1)$$

که در آن  $\phi$  آرگومان فاز است. موج سینوسی را بصورت زیر بیان می‌کنیم:

$$f(x, t) = \operatorname{Re} \left[ A e^{j(\omega t - kx)} e^{j\delta} \right] = \operatorname{Re} \left[ \tilde{A} e^{j(\omega t - kx)} \right], \quad \tilde{A} = A e^{j\delta}$$

در رابطه آخر، دامنه مختلط  $\tilde{A}$  را معرفی کردیم. این حاصل ضرب  $A$  در عامل فاز  $e^{j\delta}$  است. بنظر می‌رسد که استفاده از امواج مختلط و اعمال عملگر قسمت حقیقی (به منظور بدست آوردن بخش معنی‌دار فیزیکی) آنقدر مفید است که دیگر در سراسر کتاب به صراحت اعمال بخش حقیقی را نشان نمی‌دهیم.

### موج سینوسی در فضای یک بعدی

$$f(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} \quad (4.1)$$

در آخر با گرفتن قسمت حقیقی از  $\operatorname{Re}\{ \dots \}$  به نتیجه می‌رسیم.

علامت سرکج را از روی دامنه  $\tilde{A}$  بر میداریم و این به بعد همیشه  $A$  را مختلط در نظر می‌گیریم. برای روشن شدن این نکته دوباره تاکید می‌کنیم: امواج فیزیکی همواره حقیقی هستند، نماد مختلط صرفاً بمنظور ساده شدن است و تلویحًا فرض می‌کنیم که موج "حقیقی" با گرفتن مقدار حقیقی از رابطه مختلط بدست می‌آید.

تا کنون موج سینوسی را بر حسب عدد موج  $k$  و فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  توصیف کردیم. در این روش چون  $f(x, t)$  تابع مستقلی نسبت به  $x$  و  $t$  نیست و تابع متغیر تکی  $x \mp vt$  است،  $\omega$  و  $k$  با یکدیگر از طریق رابطه‌ای که به رابطه پاشندگی<sup>۵</sup> معروف است بهم مربوط هستند. رابطه را می‌توان با وارد کردن موج سینوسی در معادله موج اسکالر (۱.۱) بدست آورد.

<sup>۵</sup>Dispersion Relation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A e^{j(\omega t - kx)} = - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) A e^{j(\omega t - kx)}$$

برای تکمیل معادله موج بازاء مقادیر دلخواه  $x$  و  $t$  عبارت داخل پرانتز باید صفر شود. بنابراین رابطه پاشندگی را برای موج اسکالر بدست می‌آوریم.

### رابطه پاشندگی برای معادله موج (یک بعدی)

$$\omega(k) = vk \quad (5.1)$$

در اینجا  $\omega(k)$  فرکانس زاویه‌ای که تابع عدد موج  $k$  و  $v$  سرعت انتشار موج است. در ادامه نشان میدهیم که هر موج را می‌توان به موج سینوسی تجزیه و رابطه پاشندگی خواص انتشار امواج را تعیین کرد.

### تبديل فوريه

یکی از قضایای مهم در ریاضیات می‌گوید که هر تابع (که رفتار مناسبی داشته باشد) می‌توان به شبه امواج سینوسی از طریق رابطه زیر تجزیه کرد

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jkx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} \quad (6.1)$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jkx} f(x) dx. \quad (6.2)$$

که در آن  $\tilde{f}(k)$  تبدیل فوریه  $f(x)$  نامیده می‌شود. نکته مهم معادله (6.1) این است که هر دو  $f(x)$  و  $\tilde{f}(k)$  اطلاعات یکسانی دارند. بنابراین، اگر تابع  $f(x)$  معلوم باشد، می‌توانیم فوراً  $\tilde{f}(k)$  را محاسبه کنیم و بر عکس. توجه کنید که عامل  $1/(2\pi)$  در انتگرال‌گیری روی  $k$  را می‌توان به انتگرال‌گیری روی  $x$  انتقال داد یا هر دو آنها را برای تقارن در  $\sqrt{2\pi}/1$  ضرب کرد. در این کتاب ما تعریف بالا را بکار برد و بندرت انرا تغییر می‌دهیم.

### انتشار موج

فرض کنید که موج  $f(x, 0)$  در لحظه صفر داده شده است و می‌خواهیم شکل آن در زمان بعد محاسبه کنیم. این را می‌توان بسادگی هنگام استفاده موج سینوسی و تبدیل فوریه انجام داد. در زمان صفر  $f(x, 0)$  را از طریق رابطه (6.1) به موج سینوسی تجزیه می‌کنیم. همچنانکه زمان جلو می‌رود، هر موج سینوسی بر طبق رابطه (4-۱) خواهیم داشت:

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j[kx - \omega(k)t]} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} \quad (7.1)$$

با این رابطه پاشندگی (۵.۱) برای معادله موج اسکالر می‌توانیم انتگرال را به صراحت انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk(x-vt)} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} = f(x - vt, 0),$$

این با بحث اولیه که امواج بدون تغییر شکل خود منتشر می‌شوند، توافق دارد.

### پاشندگی

اجازه دهد لحظه‌ای مکث کنیم و موضوع پیچیده رابطه پاشندگی را در نظر گیریم. در قسمت‌های بعدی این کتاب، وقتی در باره محیط پاشنده بحث می‌کنیم، با چنین تغییراتی روبرو می‌شویم. در اصل می‌توانیم هنوز هم از رابطه (۵.۱) برای انتشار امواج استفاده کنیم، اما اکنون محاسبه انتگرال، بعلت تابع اصلاح شده  $\omega(k)$  خیلی پیچیده است. بعنوان مثال، تابع  $\tilde{f}(k)$  یک تابع گوسی در اطراف  $k_0$  با عرض  $\sigma_0^{-1}$  در نظر می‌گیریم. بازاء عرض کوچکی تابع در اطراف  $k_0$  قله بزرگی دارد، و می‌توانیم  $\omega(k)$  را بر حسب سری تیلور در اطراف  $k_0$  تقریب زنیم.

$$\omega(k) \approx \omega_0 + v_g(k - k_0) + \frac{\beta}{2}(k - k_0)^2, \quad v_g = \left[ \frac{d\omega}{dk} \right]_{k_0}, \quad \beta = \left[ \frac{d^2\omega}{dk^2} \right]_{k_0}$$

در اینجا  $v_g$  سرعت گروهی، و  $\beta$  پارامتر پاشندگی است. همان طوری که در تمرین (۵.۱) بصراحت مشخص شده، انتگرال معادله (۵.۱) را می‌توان برای رابطه گوسی بصورت تحلیلی و رابطه پاشندگی را تقریبی حل کرد، بدست می‌آید:

$$f(x, t) = \sigma^{-\frac{1}{2}}(t) e^{j(\omega t - k_0 x)} \exp \left[ -\frac{(x - v_g t)^2}{2\sigma^2(t)} \right], \quad \sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 - j\beta t} \quad (۸.۱)$$

بنابراین، بسته‌موج گوسی با سرعت گروهی  $v_g$  منتشر می‌شود، اما بعلت  $\beta$  شکل خود را حفظ نمی‌کند و در طی حرکت عریضتر شده که با  $\sigma(t)$  توصیف می‌شود. در بقیه این فصل، بیش از حد نگران محیط پاشنده نخواهیم بود. با این حال، این بحث مختصراً اینجا اضافه کردیم تا تاکید کنیم که بیشتر تحلیل ما نه تنها در کاربرد انتشار امواج در فضای آزاد و محیط غیرپاشنده است، بلکه می‌تواند براحتی در موقعیت‌های پیچیده‌تر گسترش یابد.

### ۲.۱.۱ امواج فضای سه بعدی

راستی وقتی از فضای یک بعدی به فضای سه بعدی می‌رویم، اوضاع چگونه تغییر می‌کند؟ اصولاً تغییر چندان زیادی نمی‌کند. بجای رابطه (۵.۱) داریم:

معادله موج اسکالر برای فضای سه بعدی

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (۹.۱)$$

که در آن  $f(\mathbf{r}, t)$  تابع موج اسکالر وابسته به  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  و  $\nabla^2$  عملگر معمولی لاپلاس است:

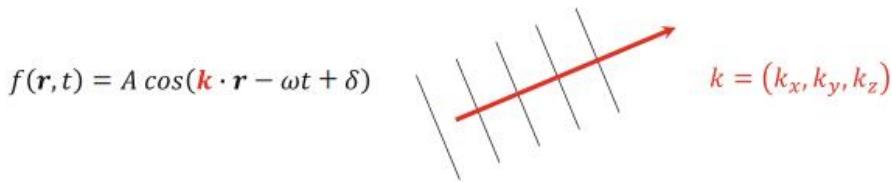
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

مانند تجزیه به امواج سینوسی رابطه (۴.۱)، امواج صفحه‌ای را معرفی می‌کنیم:

### موج صفحه‌ای در فضای سه بعدی

$$f(\mathbf{r}, t) = A e^{j(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (10.1)$$

که در آن  $A$  دامنه،  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$  بردار موج است که دارای طول  $k = 2\pi/\lambda$  است که از طول موج  $\lambda$  تعیین و در جهت انتشار موج است (شکل ۲.۱). با این امواج صفحه‌ای می‌توانیم، شبیه به رابطه (۶.۱) تبدیل فوریه سه بعدی را تکمیل کنیم:



شکل ۲.۱: موج صفحه‌ای در فضای سه بعدی. بردار موج  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$  دارای طول عدد موج  $k = 2\pi/\lambda$  و جهت انتشار  $\hat{\mathbf{n}}$  و خط عمود بر صفحه‌ها با فاز ثابت  $\mathbf{k}$  است.

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (11.1)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (11.1b)$$

سرانجام، با وارد کردن امواج صفحه‌ای در معادله موج اسکالر، خواهیم داشت:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0$$

در اصل، جواب‌های مثبت و منفی برای  $\omega$  بدست می‌آوریم. در هر حال، فقط جواب مثبت را نگه میداریم و دلیل آن در فصل پنجم، وقتی جواب‌های معادله موج را بر حسب امواج کروی داخل شونده یا خارج شونده بحث می‌کنیم، روشن می‌شود. فقط آن یکی که مربوط به فرکانس‌های مثبت و نیاز علیت را برآورده می‌کند باید حفظ شود. از این‌رو برای رابطه پاشندگی موج در فضای سه بعدی را بدست می‌آوریم.

### رابطه پاشندگی برای معادله موج در فضای سه بعدی

$$\omega(k) = v|\mathbf{k}| = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (12.1)$$

تاكيد می‌کنيم که رابطه پاشنده‌گي مستقيماً از معادله موج اسکالر بست می‌آيد، و هیچ تقریبی بکار برده نمی‌شود. بهمین دلیل، رابطه پاشنده‌گی باید همیشه برآورده شود- محکم و بدون قابل بحث. وقتی در مورد امواج محو شونده بحث می‌کنیم، به‌این موضوع باز خواهیم گشت. چند نکته دیگر ممکن است وجود داشته باشد.

### خطی بودن

اولاً، معادله موج خطی است یعنی اگر  $f_1$  و  $f_2$  دو جواب معادله موج باشند، در آن صورت جمع  $f_1 + f_2$  نیز جواب معادله موج خواهد بود. تبدیل فوريه معادله (۱۱.۱) حالت خاص اين است، که موج را به‌امواج صفحه‌ای ساده ویژه‌ای تجزیه کردیم. اگر بدانیم چگونه یک موج صفحه‌ای ساده زمان را در بر می‌گیرد، می‌توانیم تکامل زمان موج پیچیده را با تجزیه به‌اینگونه موج صفحه‌ای بحث کنیم. همان‌طور که در قضیه فوريه بیان شد، این همیشه بکار می‌رود، زیرا امواج صفحه‌ای مجموعه پایه کاملی را تشکیل می‌دهند.

### میدان‌های هارمونیک زمانی

در خیلی از موارد دوست داریم موج با یک تک فرکانس  $\omega$  نوسان کند. می‌توانیم جواب را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(\mathbf{r}, t) = e^{j\omega t} f(\mathbf{r}) \quad (13.1)$$

که برای سادگی نمادین همان علامت را برای  $f(\mathbf{r}, t)$  و  $f(\mathbf{r})$  نگه می‌داریم. شکل بالا محدودتر از چیزی است که به‌نظر می‌رسد زیرا همیشه می‌توان موج را به‌اجزای هارمونیکی (با استفاده از تبدیل فوريه) تجزیه کرد، و بنابراین کافی است تا میدان‌های هارمونیک زمانی را صرفاً به‌صورت معادله (۱۳.۱) بررسی کنیم. هر گونه شکل موج پیچیده‌تری را می‌توان از جمع این امواج ساده ایجاد کرد.

### معادله موج

اگر رابطه (۱۳.۱) را در معادله موج (۹.۱) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(\nabla^2 + k^2) f(\mathbf{r}) = 0$$

که در آن جمله زمانی  $e^{j\omega t}$  را حذف کرده‌ایم. درابتداي اين فصل، قول دادیم که تعریف کلی ترى برای معادله موج ارائه دهیم. در واقع، می‌توانیم یک موج را به‌صورت جواب کلی معادله موج تعریف کنیم:

$$(\nabla^2 + n^2(\omega)k^2) f(\mathbf{r}) = 0 \quad (\tilde{14}.1)$$

که در آن  $(\omega)^n$  ضریب شکست و تابع فرکانس است. ازینرو شکل بالا برای محیط پاشنده نیز بکار برده می‌شود. می‌توانیم یک قدم جلوتر رفته و امواج را بصورت حل معادله موج ناهمنگ

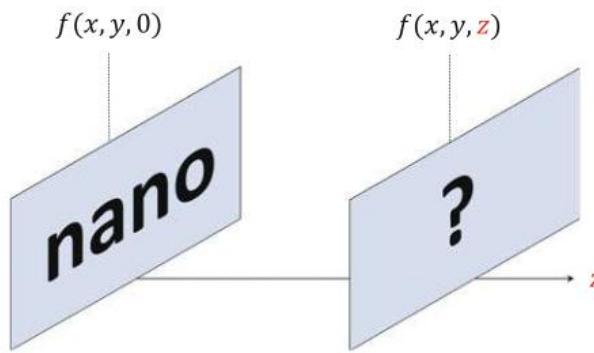
تعريف کنیم:

$$(\nabla^2 + n^2(\mathbf{r}, \omega)k^2) f(\mathbf{r}) = 0 \quad (14.1)$$

که در آن ضریب شکست بستگی به مختصات مکانی و فرکانسی دارد. این تعاریف به اندازه آنچه گرفیتیز<sup>۶</sup> ارائه می‌دهد آموزنده نیستند، اما هنگامی که با حل معادله (۱۴.۱) سروکار داریم، برای مراجعه به "امواج" یا "شبہ امواج" راحت‌تر هستند.

## ۲.۱ امواج محوشونده

اکنون آماده‌ایم با واقعیت روبرو شویم. وضعیتی که در نظر داریم، در شکل (۳.۱) نشان داده شده است.



شکل ۳.۱: فرض کنید میدان  $f(x, y, 0)$  را در  $z = 0$  میدانیم، در اینجا حروف "نانو" است. هنگام انتشار در فاصله  $z$  میدان چگونه تکمیل می‌شود؟

فرض کنید میدان اسکالر  $f(x, y, 0)$  را در موقعیت  $z = 0$  می‌دانیم. در اینجا حروف "نانو" است. و فرض کنید که میدان با تک فرکانس  $\omega$  نوسان می‌کند. در ادامه سوال‌های زیر را مطرح می‌کنیم:

■ هنگام انتشار در فاصله  $z$  میدان چگونه تکمیل می‌شود؟

■ چگونه می‌توانیم میدان  $f(x, y, z)$  را در موقعیت  $z$  محاسبه کنیم؟

در اصل، با ابزارهایی که در بخش قبل تدارک دیدیم، می‌توانیم موقعیت را خیلی ساده تجزیه و تحلیل کنیم.

### تجزیه موج صفحه‌ای

با تجزیه میدان اولیه  $f(x, y, 0)$  بر اساس موج صفحه‌ای با استفاده از

$$f(x, y, 0) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(k_x x + k_y y)} \tilde{f}(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

شروع می‌کنیم.

<sup>۶</sup>Griffiths

## انتشار موج

هنکام دور شدن  $z = 0$  می‌توان یک ابزار کلی را ایجاد کرد.

$$f(x, y, z) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y dk_z$$

با این حال، باید محدودیت معادله موج را نیز تکمیل کرده و ازاینرو نمی‌توان  $\omega$  و  $k_x, k_y, k_z$  را بطور مستقل انتخاب کنیم. بنابراین می‌توانیم یک متغیر، مثلاً  $k_z$ ، را بر حسب سایر متغیرها بیان کنیم:

$$f(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-j [k_x x + k_y y + k_z (k_x, k_y) z]\} \tilde{f}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (15.1)$$

بطوری که بصراحت وابستگی  $k_z$  را به  $k_x, k_y$  نشان داده‌ایم. برای این رابطه مشاهده می‌شود که برای  $z > 0$  هر موج صفحه‌ای یک فاز اضافی کسب می‌کند.

$$\tilde{f}(k_x, k_y) \xrightarrow[z>0]{} e^{-jk_z z} \tilde{f}(k_x, k_y)$$

در اینجا یک نقطه مشکل‌ساز پدید می‌آید. استفاده از رابطه پاشندگی (۳.۱)، مولفه  $k_z$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad k = \frac{\omega}{v} \quad (16.1)$$

علامت مثبت یا منفی باید برای انتشار موج در جهت منفی یا مثبت  $z$  انتخاب شود. اکنون می‌توانیم دو حالت را از هم تمیز دهیم. برای  $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$  مولفه  $z$  بردار موج

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (\text{موج منتشر شونده}) \quad (17.1)$$

حقیقی و مربوط به انتشار موج عمودی است. در هر حال، برای  $k_x^2 + k_y^2 \geq k^2$  خواهیم داشت:

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \pm j \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} \equiv \pm j k \quad (\text{موج محو شونده}) \quad (18.1)$$

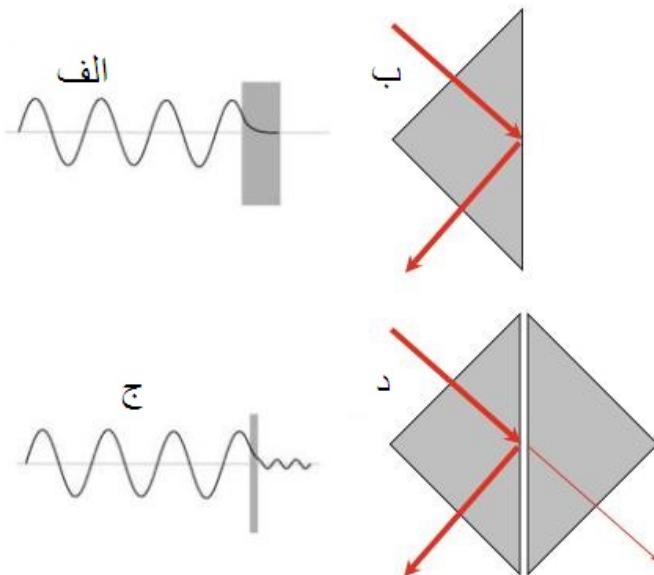
که مربوط به بردار موج موهومی است! خوانندگان آشنا با مفهوم امواج محو شونده<sup>۴</sup> از این یافته بیش از حد شگفت‌زده نخواهند شد. به حال، کسانی که با این مفهوم آشنا نیستند، باید وقت صرف کنند تا به دقت بررسی کنند که آیا تا اینجا همه کارها را به درستی انجام داده‌ایم یا چیز مهمی را از دست داده‌ایم. در هر صورت، تنها دو موضوع در استخراج امواج محو شونده؛ یکی تجزیه موج صفحه‌ای بر اساس قضیه فوریه است (که بهتر است آنرا زیر سؤال نبریم) و دیگری رابطه پاشندگی است که عمیقاً در معادله موج ریشه دارد (که اساس تجزیه و تحلیل کل کار ما را تشکیل میدهد). بنابراین واضح است که با امواج محو شونده مشکلی نداریم و آنها در اینجا ماندگار هستند.

برای درک چگونه این امواج محو شونده منتشر می‌شوند، عدد موج موهومی را در معادله موج می‌گذاریم و خواهیم داشت:

<sup>۴</sup>Evanescence Waves

$$\exp[-j(k_x + k_y y \pm jkz)] = \exp[-j(k_x + k_y y \mp kz)]$$

بنابراین، امواج محوشونده هنگام دور شدن از  $z$  بطور نمائی رشد کرده یا میرا می‌شوند. از نظر مفهوم فیزیکی، فقط امواج میراشونده را برای  $z > 0$  جمله  $e^{-kz}$  و برای  $z < 0$  جمله  $e^{kz}$  را نگه می‌داریم. در مکانیک کوانتموی امواج محوشونده بهتر شناخته شده‌اند. شکل (۴.۱)-الف یک ذره مکانیک کوانتم را نشان می‌دهد که بیک سد پتانسیل برخورد می‌کند. اگر انرژی جنبشی ذره کمتر از ارتفاع سد باشد، بازتاب می‌شود. در هر حال، بخشی از موج داخل سد نفوذ کرده که در آنجا دامنه‌اش بطور نمائی میرا می‌شود. این شبیه امواج محوشونده برای معادله موج اسکالار است. اگر عرض سد پتانسیل کاهش یابد، شکل (۴.۱)-ج، ذره می‌تواند از درون سد تونل زده و دوباره بهموج منتشر شونده تبدیل شود.



شکل ۴.۱: (الف) انتقال ذره مکانیک کوانتمی در یک سد پتانسیل. ذره بدرون سد تونل زده و بازتاب می‌شود. (ج) وقتی عرض سد کاهش می‌یابد، تابع موج بدرون سد نفوذ کرده و ذره مکانیک کوانتمی می‌تواند از درون ناحیه ممنوعه کلاسیک تونل بزند. (ب) موج کلاسیک شبیه تونل زنی کوانتمی است. موج نور از درون منشور عبور کرده و تحت شرایط بازتاب کلی منعکس می‌شود. موج در ناحیه کلاسیک ممنوعه در سمت منشور-هوا "تونل" میزند، و موج تغییر فاز کوچکی بدست آورده که معمولاً به تغییر فاز گوس-هانچن معروف است. (د) هنگامی که یک منشور دومی به نزدیکی منشور اولی آورده شود، اگر فاصله نسبت به طول موج قابل مقایسه باشد، نور می‌تواند از درون فاصله هوازی "تونل" بزند و در داخل منشور دومی بهموج منتشر شونده تبدیل شود.

تونل زنی یک پدیده کلی موج است و نه تنها در مکانیک کوانتم بلکه در الکترودینامیک نیز قابل مشاهده است. شکل (۴.۱)-ج یک منشور را نشان میدهد که یک پرتو نور تحت شرایط بازتاب کلی منعکس می‌شود. شبیه این وضع در شکل (۴.۱)-الف نشان داده شده است؛ بازتاب سریع نیست بلکه بخشی از میدان نور بدرون هوازی سمت منشور نفوذ کرده و بطور نمائی میرا

می‌شود (موج محوشونده). این پدیده را می‌توان بعنوان تغییر فاز گوس-هانچن<sup>۴</sup> که یک موج بازتاب شده در مقایسه با موج بازتاب شده ناگهانی دچار می‌شود مشاهده کرد<sup>۵</sup>. وقتی یک منشور دومی، شکل (۴.۱)-۵، به‌نزدیکی منشور اولی آورده شود، اگر فاصله نسبت به طول موج قابل مقایسه باشد، نور می‌تواند از درون فاصله هوایی "تونل" بزند و در داخل منشور دومی به‌موج منتشر شونده تبدیل شود.

### انتشار موج اسکالر ( $z > 0$ )

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{k^2 > k_x^2 + k_y^2} e^{-j(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})} \tilde{f}(k_x, k_y) dk_x dk_y \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{k^2 < k_x^2 + k_y^2} e^{-j(k_x x + k_y y - \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_z^2})} \tilde{f}(k_x, k_y) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (19.1)$$

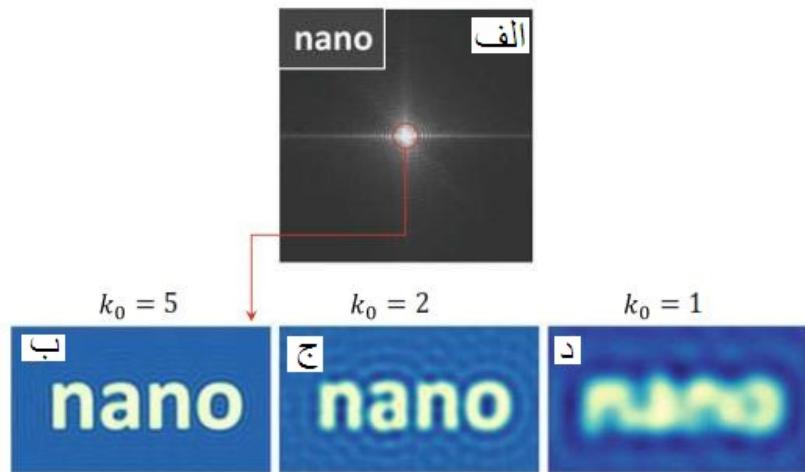
با وجودی که مثال‌های بالا کاربردهای محدودی دارند، امواج محوشونده نقش خیلی مهمی در فهم محدودیت تفکیک نور دارند. به‌جزیه موج صفحه‌ای فبلی خود معادله (۱۵.۱) بر می‌گردیم، و میدان‌های مقدادر بزرگ  $z$  زیر را در نظر می‌گیریم.

در اینجا جمله‌های خط اول و دوم بترتیب مربوط به امواج منتشر شونده و محوشونده هستند. امواج محوشونده بطور نمائی میرا می‌شوند و در نزدیکی  $z = 0$  وجود دارند. هرچه بیشتر از این صفحه دور می‌شویم، امواج محوشونده بیشتر بطور نمائی میرا می‌شوند. در بخش‌های بعدی کتاب نشان خواهیم داد که امواج محوشونده همواره به‌ماده قید و بند می‌شوند. شکل (۵.۱) تاثیر میرائی امواج محوشونده را نشان میدهد. شکل (۵.۱)-الف تبدیل فوریه تصویر تشکیل شده توسط حروف "نانو" را در داخل نشان می‌دهد. برای مثال، وقتی بخشی از فضای  $k$ - حذف می‌شود، از طریق میرائی امواج محوشونده، تبدیل فوریه معکوس یکتابع اصلاح شده می‌دهد. شکل (۵.۱)-ب تابع بازسازی شده از مولفه‌های فوریه واقع در داخل دایره (۵.۱)-الف را نشان می‌دهد، و (۵.۱)-(ج و د) تصاویری را با کاهش بیشتر محتوای فضای  $k$  بیان می‌دارد. از این تصاویر واضح است که مولفه‌های عددموج بزرک  $\tilde{f}(k_x, k_y)$  اطلاعات وضوح بالاتری را حمل می‌کنند. هر قدر این امواج بیشتر از موج منتشر شده  $f(x, y, z)$  حذف شوند، کار بیشتر تار شده و همه جزئیات پاک می‌شوند.

اکنون در موقعیتی هستیم که از نظر کیفی حدپراش نور را بحث کنیم. همانطور که در شکل (۶.۱) نشان داده شده است، فقط بردارموج با مدول کوچک کافی مربوط به امواج منتشر شونده هستند، در حالی که مولفه‌های با عدد موج بزرگ، که وضوح مکانی بالائی را حمل می‌کنند، مربوط به امواج محوشونده هستند که وقتی از صفحه  $z = 0$  دور می‌شوند بطور نمائی میرا می‌شوند. اگر فرض کنیم که وضوح مکانی  $\Delta$  تقریباً با بزرگترین عددموج موجود  $k_{max}$  بدست می‌آید، خواهیم داشت

$$\Delta \approx \frac{2\pi}{k_{max}}$$

<sup>۴</sup>Goos-Hänchen



شکل ۵.۱: وابستگی تفکیک روی پارامتر قطع  $k_0$ . (الف) تبدیل فوریه حروف "نانو". دایره قرمز عدد موج  $k_x^2 + k_y^2 \leq k_0^2$  را گزارش می‌کند. (ب-د) تبدیل فوریه معکوس برای پارامترهای قطع مختلف، با  $k_0 = 1$  در واحد دلخواه.

بزرگترین عدد موج مربوط بهمود منتشر شونده را می‌توان از رابطه پاشندگی بدست آورد:

$$\sup(k_x^2 + k_y^2) = k_{max} = \frac{\omega}{v}$$

از ترکیب این دو معادله، بهترین وضوح را می‌توان از مود منتشر شونده بدست آورد.

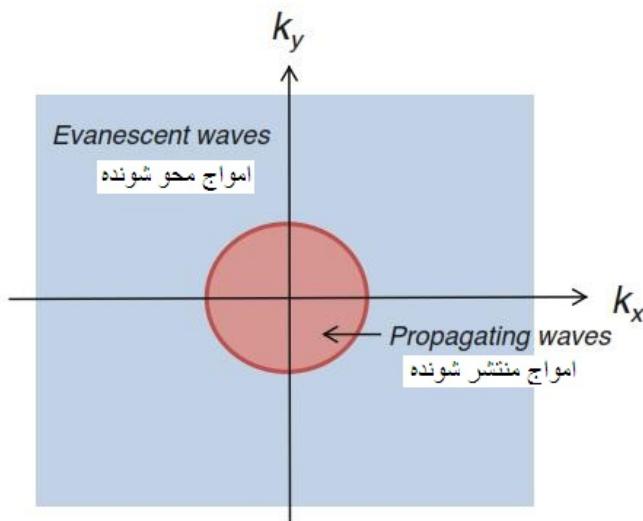
حد پراش معادله موج اسکالار (تقریبی)

$$\Delta \approx \frac{2\pi v}{\omega} = \lambda \quad (۲۰.۱)$$

بنابراین، تفکیک مکانی تقریباً با طول موج  $\lambda$  (که از فرکانس  $\omega$  بدست می‌آید) داده می‌شود. در بخش‌های بعدی این کتاب ما تحلیل دقیق‌تری برای حد پراش نور ارائه خواهیم داد و نشان می‌دهیم که برابر  $\frac{\lambda}{2} \approx \Delta$  است. با این حال، مشاهده این که این تحلیل ساده برآورده معقولی ارائه می‌دهد، خوشحال کننده است. به طور خلاصه، تمام اطلاعات وضوح بالای یک موج بوسیله مولفه‌های موج محسوسونده حمل می‌شوند، که بطور نمائی در فواصل دور میرا شده و هیچ روشی نمی‌تواند آنها بازگرداند.

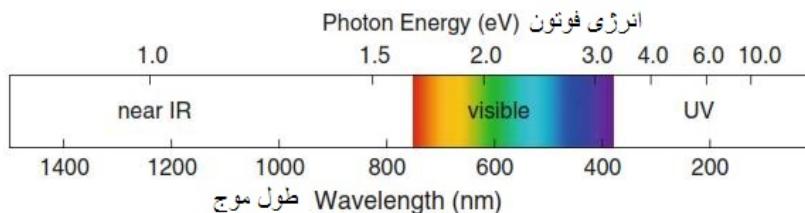
### ۳.۱ قلمرو نانو اپتیک

شکل (۲۰.۱) طول موج (زیر محور) و انرژی فوتون (بالای محور) را برای قسمت فروسرخ نزدیک، نور مرئی، و فرابنفش طیف الکترومغناطیسی را نشان میدهد. ناحیه نور مرئی بین ۳۸۰ – ۷۵۰ نانومتر قرار دارد و بهمین ترتیب حد پراش در حالت میکرومتر بجای نانومتر است. بنابراین،



شکل ۶.۱: حد پراش نور. فقط بخش داخلی فضای بردار موج مربوط بهموج منتشر شونده است. مولفه‌های بزرگتر، اطلاعات محتوای جزئیات  $f(x, y)$  حمل می‌کنند، مربوط بهاموج محوشونده هستند و وقتی از صفحه  $z = 0$  دور می‌شوند بطور نمایی میرا می‌شوند. خیلی دور تر از این صفحه فقط امواج منتشر شونده باقی می‌ماند و در بازسازی تصویر نوری تمام وضوح ازبین میرود.

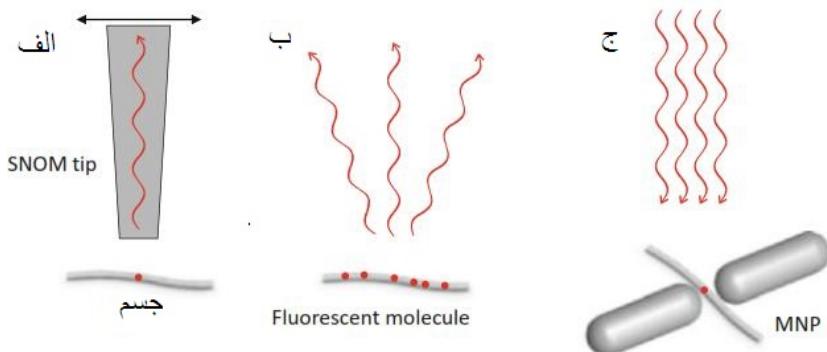
اپتیک و علم نانو به طور طبیعی باهم ترکیب نمی‌شوند! نانو اپتیک علمی است که سعی می‌کند اپتیک را با وجود محدودیتها بسوی مقیاس نانو سوق دهد.



شکل ۷.۱: طول موج (زیر محور) و انرژی فوتون (بالای محور) برای قسمت فروسرخ نزدیک (3000 – 770 نانومتر)، نور مرئی (750 – 380 نانومتر) و فرابنفش (380 – 10 نانومتر)

ابتداء و از همه مهم‌تر، باید بدانیم که حد پراش بر اساس قوانین بنیادین فیزیک است، و از همه مهم‌تر رابطه پاشندگی است که در معادله موج بنیادی بطور ژرف ریشه دارد. از رابطه پاشندگی متوجه شدیم که دو نوع موج وجود دارد، امواج منتشر شونده و دیگری محو شونده که میرائی امواج اخیر مسئول از دست دادن وضوح است. با استفاده از اپتیک معمولی نمی‌توان اجسامی را که نسبت به یکدیگر از طول موج  $\lambda$  نزدیکتر هستند را از هم تفکیک کرد، و بر عکس نمی‌توانیم نور را بر نقاطی که ابعاد آنها کوچکتر از  $\lambda$  هستند متمرکز و کانونی کنیم. برای غلبه بر حد پراش نور، بسختی می‌توان بر قوانین اساسی فیزیک رقابت کرد، بنابراین باید قوانین بازی را تغییر دهیم. نانو اپتیک چندین راه حل موفق ارائه کرده است که در این کتاب به تفصیل مورد

بحث قرار می‌گیرد. شکل (۸.۱) سه نمونه را نشان می‌دهد.



شکل ۸.۱: سه نمونه از چگونه سامانه‌های اپتیکی در مقیاس نانو کار می‌کنند. (الف) در میکروسکوپ میدان نزدیک پویشی (SNOM) یک فیبر نوری به نزدیک جسم نانوئی آورده می‌شود. از طریق تزویج میدان‌های نزدیک امواج محوشوندگی جسم به فیبر نوری، آن به فوتون‌های منتشر شونده تبدیل و می‌توان در انتهای دیگر فیبر آشکار شوند. با پویش مورب بر روی نمونه جسم نانوئی، می‌توان اطلاعاتی درباره میدان نزدیک با وضوح نانومتری بدست آورد. (ب) در میکروسکوپ محلی‌سازی ملکول‌های مهتابی به جسام نانوئی که مورد بررسی هستند متصل می‌شوند. در میدان دور می‌توان محل این مولکول‌ها را با وضوح مکانی نانومتری اندازه‌گیری کرد و از این‌رو غیر مستقیم اطلاعاتی با وضوح مکانی زیاد در باره اجسام نانوئی مورد تحقیق بدست آورد. (ج) در پلاسمونیک یک یا چند نانو ذرات فلزی به عنوان نانو آنتن عمل کرده به‌طوری که تابش میدان دور را به میدان‌های محوشونده تبدیل کرده و اجزاء می‌دهد نور در مقیاس نانو تحويل داده شود.

### اپتیک میدان نزدیک

در میکروسکوپ نوری میدان نزدیک پویشی (SNOM)<sup>۹</sup> یک فیبر نوری در مجاورت یک جسم نانوئی (شکل ۸.۱-الف) آورده می‌شود. از طریق نوک فیبر نوری، میدان‌های نزدیک محوشونده جسم نانوئی می‌تواند به فوتون‌های منتشر شونده تبدیل شوند. این فوتون‌ها توسط سر دیگر فیبر آشکار می‌شود. با پویش مورب<sup>۱۰</sup> بر روی نمونه جسم نانوئی، می‌توان اطلاعاتی درباره میدان نزدیک با وضوح نانومتری بدست آورد.

### میکروسکوپ محلی‌سازی

در حالی که در اپتیک معمولی هیچ اطلاعاتی در باره سامانه مورد مطالعه در دسترس نیست، در میکروسکوپ محلی‌سازی<sup>۱۱</sup> اشیاء مورد مطالعه (معمولًاً سامانه‌های بیولوژیکی مانند سلول‌ها) با مولکول‌های مهتابی تزئین شده‌اند. در سامانه‌های اپتیکی میدان دور مرسوم، موقعیت مولکول‌های مهتابی شده را می‌توان با وضوح نانومتری اندازه‌گیری کرد، مشروط بر آنکه مولکول‌های

<sup>۹</sup>Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

<sup>۱۰</sup>Raster-Scanning

<sup>۱۱</sup>Localization Microscopy

فعال نوری از طول موج نور فاصله بیشتری داشته باشند، تا بشما این امکان را دهد که تصاویر نوری از اجسام نانوئی را با وضوح نانو متری بدست آورید. جایزه نوبل شیمی میکروسکوپ محلی سازی در سال ۲۰۱۴ اهدا شده است.

### پلاسمونیک

در پلاسمونیک‌ها از نوسانات بار الکترون همدوس در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک، که به پلاسمون‌های سطحی یا پلاسمون‌های ذره‌ای معروف هستند، برای تبدیل تابش میدان دور به پلاسمون بهره‌برداری می‌شود. این پلاسمون‌ها همراه با امواج محوشوندگی موضعی قوی، اجازه می‌دهد تا نور را در مقیاس نانو منتقل کند. بهمین منوال، یک گسیل‌کننده کوانتمومی که در نزدیکی یک نانو ذره پلاسمونی قراردارد، می‌توان ذره را به عنوان نانو آنتن استفاده کرد تا نور را بطور موثری ساطح کند. این اصل، اساس فناوری افزایش سطحی فلورسانس<sup>۱۲</sup> یا افزایش سطحی پراکندگی رامان<sup>۱۳</sup> است.

## ۱.۳.۱ خلاصه‌ای از فصل‌های ۲-۱۱ کتاب

این کتاب مقدمه‌ای بر مفاهیم نظری در نانو اپتیک و پلاسمونیک است. فصل‌های ۲-۱۱ بخش اول کتاب را تشکیل می‌دهند و با استفاده از چار چوب الکترودینامیک کلاسیک، به مفاهیم می‌پردازد، در حالی که فصل‌های ۱۲-۱۸ جنبه‌های کوانتمومی را دربر می‌گیرد. بطور خلاصه، مطالب فصل‌هایی که قسمت اول را تشکیل می‌دهند به شرح زیر خلاصه می‌شود.

**فصل دوم:** مختصری از معادلات ماکسول با ارائه خلاصه‌ای کوتاه از نظریه الکترودینامیک ماکسول شروع می‌کنیم. خوانندگانی که قبلًا با موضوع آشنائی دارند می‌توانند به راحتی از این فصل چشم‌پوشی کنند.

**فصل سوم:** نمایش طیف زاویه‌ای این فصل ابزارهای موردنیاز برای توصیف نظری تصویر برداری نوری را ارائه می‌دهد. نحوه محاسبه میدان‌های دور نوری و نحوه توصیف نظری عمکرد عدسی‌های تجمیع و تصویربرداری را نشان خواهیم داد.

**فصل چهارم:** تقارن و نیروها در اینجا تقارن در معادلات ماکسول بهویژه اصل بقاء مومنتوم (تکانه)، نیروهای نوری، اصل بقاء انرژی، سطح مقطع نوری و مومنتوم زاویه‌ای مداری<sup>۱۴</sup> را بررسی می‌کنیم. هم‌چنین در مورد اصول کار موج‌چین‌های نوری<sup>۱۵</sup> بحث می‌کنیم. نصف جایزه نوبل فیزیک ۲۰۱۸ برای آنها اهدا شده است.

**فصل پنجم:** توابع گرین این فصل مقدمه‌ای بر مفاهیم گرین ارائه می‌دهد که در زمینه نانو اپتیک اهمیت فوق العاده‌ای برخوردار است. تابع گرین را برای معادلات موج هلム‌هولتز و معادلات موج برداری استخراج کرده و روابط مربوطه را بدست می‌آوریم.

**فصل ششم:** حد پراش و فراتر از آن در اینجا بحث کاملی درباره حد پراش نور ارائه داده و نحوه غلبه بر حد پراش را با استفاده از میکروسکوپ نوری میدان نزدیک<sup>۱۶</sup> و میکروسکوپ

<sup>۱۲</sup>surface-enhanced fluorescence

<sup>۱۳</sup>surface-enhanced Raman scattering (SERS)

<sup>۱۴</sup>Orbital Angular Momentum (OAM)

<sup>۱۵</sup>Optical Tweezers

<sup>۱۶</sup>Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

محلی سازی<sup>۱۷</sup> که جایزه نوبل شیمی ۲۰۱۴ برای آن اهدا شد، نشان می‌دهیم.

**فصل هفتم:** خواص مواد این فصل پایان بخش مربوط به میدان‌های نوری را مشخص می‌کند. مدل‌های عمومی برای پاسخ مواد، از آن جمله مدل درود<sup>۱۸</sup> و درود-لورنتس<sup>۱۹</sup> را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که چگونه از طریق میانگین‌گیری مناسب روی خواص ماکروسکوپی معادلات ماکسول می‌توان آنها بدست آورد.

**فصل هشتم:** محیط‌های لایه‌ای ساده‌ترین سامانه هایبرید که معادلات ماکسول را با مواد درگیر می‌کند، محیط‌های طبقه‌ای هستند که از چیدمان لایه‌های مسطح مواد مختلف تشکیل شده است. نشان می‌دهیم که نوع جدیدی از تحریک در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک که به آن پلاسمون اطلاق می‌شود وجود دارد و چگونه اینها و تحریک‌های مربوطه را می‌توان برای کاربردهای متعددی طراحی و بهره‌برداری کرد، بحث می‌کنیم.

**فصل نهم:** پلاسمون‌های ذره‌ای پلاسمون‌های سطحی در ناحیه محدود ("ذرات") باعث ایجاد پلاسمون‌های ذره‌ای می‌شوند که شدید از خود نشان داده و همراه با میدان نزدیک محلی قوی ظاهر می‌شود. ما ناحیه ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که مدل‌های تحلیلی برای آنها موجود است و طرح‌های نوصیف کلی برای اشکال پیچیده‌تر ذرات را توسعه خواهیم داد.

**فصل دهم:** چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها از طریق ترکیب نانو درات پلاسمونی با گسیل‌کننده‌های کوانتمویی امکان تغییر کامل خواص موری ساطع کننده‌ها وجود دارد. با افزایش سطحی فلورسانس و پراکنده‌گی رامان<sup>۲۰</sup> آشنا شده، و اصول اساسی طیف‌سننجی اتلاف انرژی الکترون<sup>۲۱</sup> را مورد بحث قرار می‌دهیم.

**فصل یازدهم:** روش‌های محاسباتی نانو اپتیک فصل پایانی قسمت اول به روش‌های محاسباتی در نانو اپتیک و فوتونیک می‌پردازد، از آن جمله روش شبیه سازی تفاضلات محدود در حوزه زمان<sup>۲۲</sup>، روش عنصر مرزی<sup>۲۳</sup> و روش اجزاء محدود<sup>۲۴</sup> را می‌توان نام برد.

## تمرینات

- تمرین ۱ عدد مختلط مزدوج آنرا  $z = x + jy$  و مختلط مزدوج  $z^* = x - jy$  در نظر گیرید. بخش حقیقی  $Re(z)$  و بخش مجازی  $Im(z)$  را بر حسب  $z$  و  $z^*$  بیان کنید.

- تمرین ۲ ثابت کنید که موج ساکن  $f(x, t) = A \sin(kz) \cos(kvt)$  در معادله موج صدق می‌کند، و آن را به صورت مجموع موج‌هایی که به‌چپ و راست حرکت می‌کنند بیان کنید.

- تمرین ۳ جواب معادله موج یک بعدی (۱.۱) را از طریق جداسازی متغیرها،  $f(x, t) = \phi(x)\psi(t)$  بدست آورید.

<sup>۱۷</sup>Localization Microscopy

<sup>۱۸</sup>Drude

<sup>۱۹</sup>Drude-Lorentz

<sup>۲۰</sup>Surface Enhanced Fluorescence and Raman Scatterings (SERS)

<sup>۲۱</sup>Electron Energy Loss Spectroscopy (EELS)

<sup>۲۲</sup>Finite Difference Time Domain (FDTD)

<sup>۲۳</sup>Boundary Element Method (BEM)

<sup>۲۴</sup>Finite Element Method (FEM)

• تمرین ۴ بسته موج گوسی زیر را درنظر گیرید:

$$f(x, 0) = A \exp \left[ -jk_0x + \frac{x^2}{2\sigma^2} \right]$$

تبديل فوريه آنرا محاسبه کرده و با استفاده از رابطه (۷.۱) موج را در لحظه  $t$  بدست آورید.  
انتگرال گوسی زیر ممکن است مفید باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

• تمرین ۵ همان تمرین (۴.۱) است، اما رابطه پاشندگی بصورت زیر است:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k - k_0) + \frac{\beta}{2}(k - k_0)^2.$$

نتایج نهائی را تفسیر کنند:

۱. موج چگونه در زمان انتشار می‌یابد؟

۲. عرض بسته موج چگونه بر حسب زمان تغییر می‌کند؟

• تمرین ۶ نقطه  $x = 0$  دو محیط را از هم جدا می‌کند:

- برای  $x < 0$  سرعت موج  $v_1$  است و

- برای  $x > 0$  سرعت موج  $v_2$  است.

یک موج از دست چپ به سطح مشترک وارد می‌شود. بخشی از موج بازتاب شده و بخش دیگر انتقال می‌یابد،

$$x < 0 : \quad f(x, t) = e^{j(\omega t - k_1 x)} + R e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$x > 0 : \quad f(x, t) = T e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

که در آن  $R$  و  $T$  ضریب بازتاب و انتقال هستند.

۱. با استفاده از رابطه پاشندگی  $k_1$  و  $k_2$  را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید تابع و مشتق آن در  $x = 0$  پیوسته است.  $R, T$  را محاسبه کنید.

• تمرین ۷ مانند تمرین ۶ است اما دو بعدی. یک موج مورب با عدد موج  $k_y$  (با  $k_y < \omega/v_1$ ) در نظر گیرید.

$$x < 0 : \quad f(x, y, t) = e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_y y)} + R e^{j(\omega t + k_{1x}x - k_y y)}$$

$$x > 0 : \quad f(x, y, t) = T e^{j(\omega t - k_{2x}x - k_y y)}$$

۱. این تابع چه نوع جوابی را توصیف می‌کند؟

۲. با استفاده از رابطه پاشندگی  $k_{1x}$  و  $k_{2x}$  را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید که تابع و مشتق آن در جهت  $x$  در  $x = 0$  پیوسته است.  $R, T$  را محاسبه کنید.

۴. بحث کنید که تحت چه شرایطی جواب برای  $x > 0$  دارای مشخصه محوشده است.

- ۵. تمرین ۸ امروزه در ساخت تراشه‌های کامپیوتر از فوتون‌های با انرژی حدود  $10eV$  استفاده می‌شود. با استفاده از حد پراش نور، کوچکترین اندازه ساختاری که می‌توان بدست آورد را برآورد کرده و آنرا با طول گذرگاه واقعی<sup>۱۵</sup> در حدود  $15nm$  مقایسه کنید.

---

<sup>۱۵</sup> Actual Gate Lengths

## فصل ۲

# مختصری از معادلات ماکسول

در این کتاب فرض می‌کنیم که خوانندگان از قبل با مفاهیم اساسی الکترودینامیک آشنا هستند. کتاب‌های درسی زیادی در این زمینه یافت می‌شود و به طور کلی همه آنها به عنوان یک نقطه شروع مناسب و کافی خواهند بود. "الکترودینامیک کلاسیک" جکسون [۲] بطور حتم یکی از جامع‌ترین در میان کتب درسی است. کتاب مورد علاقه من برای آموزش "مقدمه‌ای بر الکترودینامیک" اثر گریفیتس [۱] است، و خوانندگان که با این کتاب آشنا هستند احتماً در اینجا برخی نمادها آن را تشخیص داده‌اند. در ادامه، ایده‌های اساسی الکترودینامیک را، بدون آنکه بیش از حد به جزئیات پردازیم، خلاصه می‌کنیم

### ۱.۲ مفهوم میدان

الکترواستاتیک را می‌توان از طریق قانون کولمب بطور اختصار توضیح داد که چگونه یک ذره با بار  $q_1$  که در موقعیت  $r_1$  است توسط ذره دومی به بار  $q_2$  در موقعیت  $r_2$  جذب یا دفع می‌شود.

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.2)$$

در اینجا  $\epsilon_0$  گذردهی الکتریکی خلاء است که بدلیل دستگاه آحاد  $SI$  ظاهر می‌شود.  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  فاصله برداری بین دو بار، و  $\hat{\mathbf{r}}_{12}$  بردار واحد در امتداد  $\mathbf{r}_{12}$  است. اجازه دهید چند نکته مهم در باره قانون کولمب (۱.۲) تاکید کنم.

**تقارن** قانون کولمب فقط بستگی به فاصله **نسبی** بردار  $\mathbf{r}_{12}$  دارد. به همین این دلیل، همگنی فضا (هیچ نقطه‌ای از فضا نسبت به نقطه دیگر متمایز نمی‌شود) و همسانگری فضا (هیچ جهتی در فضا نسبت به مکان دیگر متمایز نیست) اهمیت دارد. در فصل چهارم، وقتی در مورد تقارن میدان‌های الکترومغناطیسی بحث می‌کنیم، به این نکته باز می‌گردیم. هم‌چنین متوجه می‌شویم که وابستگی  $1/r^2$  قانون کولمب تنها وابستگی فاصله‌ای است که با فوتون‌های بدون جرم به عنوان حامل نیروی میدان سازگار است [۳]. **جمع اثرها** وقتی دو یا چند ذره باردار وجود دارد،

می‌توان کل نیرو را از جمع نیروهای مربوطه به‌آسانی محاسبه کرد:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^n \frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1j} \quad (2.2)$$

این اصل بعنوان، **اصل جمع اثرها یا اصل برهم‌نهی** معروف است که به صورت تجربی با بالاترین درجه دقت آزمایش شده است [۲]. نقش مهمی در نظریه الکترومغناطیس ایفا می‌کند.

**توزیع بار** در بسیاری از موارد نمی‌خواهیم با ذرات نقطه‌ای برخورد کنیم، از این‌رو توزیع بار پیوسته  $\rho(r)$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنید تعداد زیادی ذرات در داخل عنصر حجم  $\Delta V_i$  وجود داشته و فقط میدان‌های بقدر کافی دور در مقیاس طولی مطلوب ما باشد. در این صورت می‌توان ذرات را در دسته‌های کوچک  $\Delta q_i$  تقسیم کرده و آنها را به توزیع بار  $\rho(r)$  از طریق رابطه زیر ارتباط دهیم:

$$\Delta q_i \approx \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$$

هرچند حد  $0 \rightarrow \Delta V$  برای ذرات نقطه مانند بی‌معنی است، اما همچنان می‌توانیم توزیع بار پیوسته  $\rho(r)$  را معرفی کنیم، و انتظار می‌رود به صورت تابعی هموار از  $r$  تغییر کند (برای بحث بیشتر برای این چنین روش میانگین‌گیری به فصل هفتم مراجعه کنید) و بجای معادله (۲.۲) از رابطه زیر بدست آید

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_1 \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}_1 d^3 r' \quad (3.2)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{R}}_1$  بردار واحد که در جهت  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1$  است. از روابط (۲.۲) و (۳.۲) مشاهده می‌شود که می‌توان بار  $q_1$  را از جمع یا انتگرال بیرون کشید. این را می‌توان انجام داد زیرا اصل جمع اثرها (یا اصل برهم‌نهی) اجازه می‌دهد نیروی‌های چندگانه را به دو نیروی متقابلاً دوگانه جدا کرد. در زمینه الکترواستاتیک معرفی میدان الکتریکی  $\mathbf{E}(r)$  بصورت زیر کار راحت‌تر می‌شود.

### میدان الکتریکی توزیع بار

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{R}}_1 d^3 r' \quad (4.2)$$

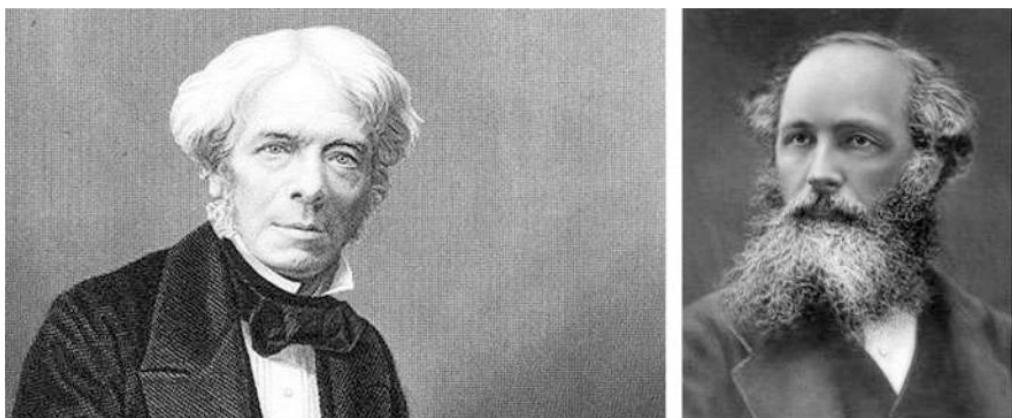
که در آن  $\hat{\mathbf{R}}_1$  بردار واحد در جهت  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1$  است. میدان  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  یکتابع بردار است که به‌هر نقطه فضائی یک بردار اختصاص می‌دهد. نیروی وارد بر بار  $q_1$  در موقعیت  $\mathbf{r}_1$  را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

بنابراین میدان الکتریکی  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  نیروی وارد بر واحد بار در موقعیت  $\mathbf{r}$  است.

تا اینجا میدان الکتریکی بصورت یک دستگاه کاملاً کمکی ظاهر شده است. آن پاسخ این سوال را در اختیار ما قرار می‌دهد که اگر ذره‌ای در آنجا وجود داشته باشد، نیروی وارد بر آن چگونه خواهد بود. با این حال، هیچ چیز مابع نمی‌شود که یک قدم جلوتر برویم و یک حس فیریکی به  $E(r)$  بدهیم. در حقیقت، موفقیت فوق العاده نظریه الکترومغناطیس، شناسائی میدان‌های الکترومغناطیسی به عنوان مرکز اهداف نظریه است. به طوری که در باقیمانده این فصل بحث خواهیم کرد، میدان‌های الکترومغناطیسی دارای توانائی هستند که نه فقط توسط توزیع بار و جریان که بعنوان منبع عمل می‌کنند محاسبه شوند، بلکه توسط خود میدان‌های الکترومغناطیسی نیز تعیین می‌شوند. به این ترتیب میدان‌ها می‌توانند از منابع جدا شده و به طور مستقل در فضا منتشر شوند.

قبل از آنکه مجموعه کامل معادلات ماکسول را در بخش ۲-۲ ارائه دهیم، باید یک قدم به عقب برگردیم و در مورد نظریه میدان‌های برداری قدری تأمل کنیم. در واقع، هدف مرکزی در الکترودینامیک میدان الکتریکی برداری  $E(r, t)$  و میدان مغناطیسی برداری  $B(r, t)$  هستند که به مختصات فضای زمان بستگی دارند. معادلات ماکسول تحوه تغییر این میدان‌ها در فضای زمان را بیان می‌کنند و جواب‌ها باید بوسیله شرایط مرزی مناسب تهیه شوند. تغییرات مکانی به بهترین وجه بوسیله عملگر موسوم به نابلا<sup>۱</sup> “ $\nabla$ ” توصیف می‌شود، که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم.



شکل ۱.۲: دو نفر از بنیانگذاران الکترودینامیک. مایکل فاراده (سمت چپ، ۱۸۰۷-۱۸۶۷) اولین کسی است که ”خطوط نیرو“ را به عنوان سنگ بنای الکترودینامیک تصور کرد، اما او مهارت ریاضی برای بیان نظریه ریاضی سخت را نداشت. این کار توسط جمز کلرک ماکسول (سمت راست، ۱۸۳۱-۱۸۷۹) انجام شد که اولین معادلات را که اکنون بنام او نامگذاری شده است، نوشت.

<sup>۱</sup> Nabla “ $\nabla$ ”

**خطوط نیروی فاراده** مفهوم میدان در ابتدا توسط مایکل فاراده، یک آزمایشگر مبتکر با مهارت محدود ریاضی، مطرح شد که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است. در مقاله‌ای از باسیل ماهون<sup>۱</sup>[۳]، که به مناسبت صد و پنجمین سالگرد معادله ماکسول در مجله نیچر فوتونیکس<sup>۲</sup> چاپ شد و کاملاً ارزش خواندن دارد، نویسنده توضیح می‌دهد که چگونه "خطوط نیرو" همانطور که فارادی آنها را نامید، از زمان خود جلوتر بودند.

افکار فاراده کاملاً متفاوت از افکار دیگران بود. نظر کلی دانشمندان هنوز این بود که نیروهای الکتریکی و مغناطیسی ناشی از جسم مادی است که از راه دور بر یکدیگر تاثیر می‌گذارند و فضای مداخله کننده فقط نقش غیرفعالی ایفا می‌کند. ستاره شناش سلطنت، سر جورج بیدل ایری، وقتی برای جمعی صحبت میکرد، او خطوط نیرو فاراده را "مبهم و متغیر" توصیف کرد. می‌توان این دیدگاه را درک کرد. اثر در فاصله رابطه‌های دقیقی ارائه می‌دهد در حالی که فاراده هیچ کدام را ارائه نکرد. در حالی که فاراده را بعنوان یک آزمایشگر فوق العاده احترام می‌گذاشتند، دانشمندان تصویر می‌کردند که او مشکل نظریه دارد، زیرا ریاضی نمی‌داند. فاراده با آگاهی از چنین دیدگاهی، هنگام انتشار افکار خود در مورد خطوط نیرو احتیاط میکرد. تنها یک بار، در سال ۱۸۴۶، او به گمانهزنی روی آورد. یکی از همکارانش، چالز ویتسون، قرار بود در موسسه سلطنتی در مورد یکی از اختراقات خود صحبت کند، اما در آخرین لحظه ترسید. فاراده تصمیم گرفت خودش سخنرانی کند، اما قبل از پایان ساعت اختصاصی، چیزهایی که برای گفتن در مورد موضوع اصلی وجود داشت، وقت تمام شد. در خارج صحن، اجازه داد تا افکار خصوصی خود فرار کنند و به ناظران طرح کلی حیرت انگیزی از نظریه الکترومغناطیسی نور را ارائه داد. او تمام فضا را پر شده با خطوط الکتریکی و مغناطیسی تصویر میکرد که وقتی مختل شوند، نوسان کرده و امواج انرژی در طول با سرعتی سریع ولی محدود ارسال می‌شود. وی اظهار داشت، نور احتمالاً یکی از تجلیات این "نوسانات پرتو" است. اکنون می‌دانیم که آن به حقیقت نزدیک است، اما اکثر دانشمندان نوسانات پرتو فاراده را یک خیال پوچ می‌پنداشتند. حتی حامیان وی نیز خجالت زده شده و فاراده پشیمان شد که حامیان را از دست داده است. او همتایان خود را پشت سر گذاشته بود ولی فردی چهل سال از او جوانتر، با قابلیتی برابر و استعدادی کامل پیدا شد تا عظمت واقعی فاراده را آشکار کند. آن مرد جیمز کلراک ماکسول بود.

<sup>۱</sup>Basil Mahon

<sup>۲</sup>Nature Photonics

## ۱.۱.۲ عملگر $\nabla$

گرادیان<sup>۲</sup>.

تابع اسکالر  $f(x, y, z)$  که بستگی به تمام سه مختصات مکانی دارد را در نظر گیرید. مشتق کل  $f$  می‌شود:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\mathbf{l} \quad (۶.۲)$$

ما تغییرات جزئی موقعیت را بصورت زیر

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz$$

<sup>۲</sup>شیب

و عملگر نابلا را بصورت زیر معرفی کردیم:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.2)$$

برای معنادار بودن،  $\nabla$ ، باید روی تابعی مانند  $f(\mathbf{r})$  در رابطه (۶.۲) عمل کند. اگر معادله (۶.۲) را بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$df = |\nabla f| |d\mathbf{l}| \cos \theta$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین  $\nabla f$  و  $d\mathbf{l}$  است. مشاهده می‌کنیم که  $df$  وقتی بیشترین است که هر دو بردار موازی باشند این بازاء  $0 = \theta$  حاصل می‌شود. عبارت دیگر، اگر در همان جهت  $\nabla f$  حرکت کنیم، تغییر کلی  $df$  کمینه می‌شود. بنابراین،  $\nabla f$  که معمولاً "گرادیان"  $f$  نامیده می‌شود، در جهتی است که تابع  $f(\mathbf{r})$  بیشترین تغییرات را دارد. دیورژانس<sup>۳</sup>. عملگر نابلا نیز می‌تواند روی تابع برداری  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  بصورت ضرب داخلی  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$  که به آن دیورژانش اطلاق می‌شود یا بصورت ضرب خارجی  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$  که به آن کرل گفته می‌شود عمل کند. بیانیه ابتداء دیورژانس را بحث کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial F_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial F_z(\mathbf{r})}{\partial z} \quad (8.2)$$

برای دریافت بینشی از مفهوم فیزیکی دیورژانس، مشتق‌ها را با تفاضل‌های محدود تقریبی نشانداده و برای سادگی فرض می‌کنیم که  $F$  به  $z$  بستگی نداشته باشد، در این صورت:

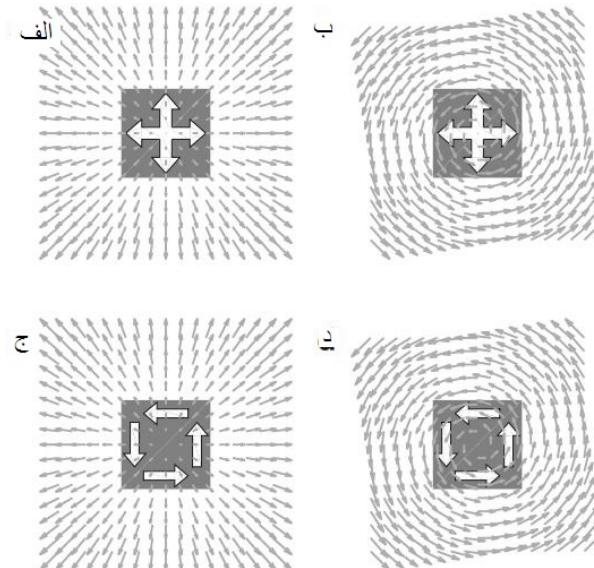
$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \approx \frac{F_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y) - F_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y)}{\Delta x} + \frac{F_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}) - F_y(x, y - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} \quad (9.2)$$

می‌توانیم این معادله را از نظر شکلی بصورت زیر نمایش دهیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \approx (\Delta x)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} + (\Delta y)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \equiv \begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \end{array} .$$

بردار سمت راست، مولفه برداری  $F_x$  را در موقعیت  $x + \Delta/2$  و بردار سمت چپ، مولفه  $-F_x$  را در موقعیت  $x - \Delta/2$  و بهمین تفسیر برای جهت بالا و پائین است. با اعمال علامت  $\begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \end{array}$  در یک میدان برداری، می‌توان دیورژانس را بدست آورد. هنگامی که در باره  $\mathbf{F}$  یک سیال فکر می‌کنیم، دیورژانس اطلاعاتی در باره منبع چشممه یا چاهک سیال بما میدهد.  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  به این معنی است که سیال به سادگی از طریق عنصر مربع داده شده جاری می‌شود، اما مقداری که وارد می‌شود همان قدر هم خارج می‌شود. در حالی که  $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$  به این معنی است که مقداری که وارد می‌شود بیش از آن است که خارج می‌شود. شکل (۲.۲) مثال‌هایی از میدان‌های منبع

<sup>۳</sup> واگرایی



شکل ۲.۲: کاربردهای (الف و ب) دیورژانس و (ج و د) کرل میدان‌های برداری. (الف)  $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$  برای منبع نقطه‌ای، (ب)  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  برای میدان کرل، (ج)  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  برای منبع نقطه‌ای و (د)  $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$  برای میدان کرل.

نقطه مانند و میدان‌های کرل را نشان می‌دهد کرل<sup>۴</sup>. سرانجام ضرب خارجی  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$  را بحث می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{x} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (10.2)$$

با استفاده از تفاضل محدود، مولفه  $z$  کرل را بدست می‌آوریم

$$(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}))_z \approx \frac{F_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y) - F_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y)}{\Delta x} - \frac{F_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}) - F_x(x, y - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} \quad (11.2)$$

شبیه نمادی که برای دیورژانس در نظر گرفتیم، برای کرل به صورت زیر است:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_z \approx (\Delta x)^{-1} \left\{ \uparrow + \downarrow \right\} + (\Delta y)^{-1} \left\{ \leftarrow + \rightarrow \right\} \equiv \leftarrow \uparrow,$$

که به طور نمادین نحوه جمع بندی مشارکت میدان‌ها را برای بدست آوردن کرل یک میدان برداری توضیح می‌دهد. از این نمایش گرافیکی، می‌توان دریافت که این عملگر چگونه کار بردار "کرل" را در یک نقطه مورد نظر ارزیابی می‌کند. از نظر سیالات، کرل را می‌توان به صورت گردابی تفسیر کرد که در آن شخص در یک سفر رفت و برگشت، انرژی از دست میدهد، یا بدست می‌آورد. شکل (۲.۲)-ج، د نمونه‌هایی از میدان‌های منبع و کرل را نشان می‌دهد.

در فصل یازدهم، وقتی در مورد روش تفاضل محدود در حوزه زمان<sup>۴</sup> (FDTD) بحث می‌کنیم، به اینگونه تقریب‌های تفاضل محدود برمی‌گردیم.

### ۲.۱.۲ قضیه هلم‌هولتز

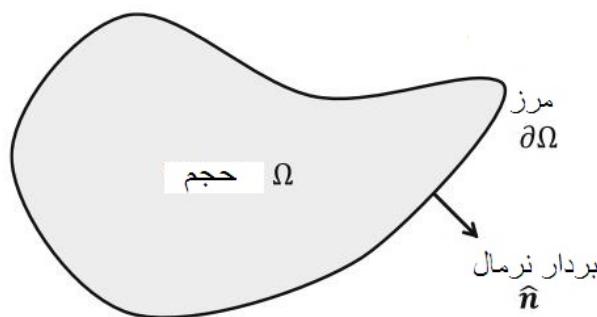
معمولًاً با مسائلی مواجه می‌شویم که بدنال میدان برداری  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  در یک حجم معین  $\Omega$  هستیم. در سراسر این کتاب مرز حجم را با نماد  $\partial\Omega$  نشان می‌دهیم. مرز  $\partial\Omega$  می‌تواند از چندین قسمت متصل نشده تشکیل شود، و غالباً حجم  $\Omega$  کل فضا را پُر می‌کند بهطوری که ممکن است  $\partial\Omega$  بسمت بی‌نهایت کشیده شود. به‌شکل (۳.۲) مراجعه کنید. با این وجود، یک مرز همیشه وجود دارد و باید مراقب رفتار  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  در مرزها بود. یک قضیه مهم در تحلیل برداری وجود دارد که چنین بیان می‌کند:

#### قضیه هلم‌هولتز

تابع برداری  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  بطور یکتا و منحصر بفرد بر اساس دانسته مقادیر زیر تعیین می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) \in \partial\Omega \quad \text{در مرز}$$

در زیر معادلات ماکسول را با توجه به قضیه هلم‌هولتز تفسیر می‌کنیم. در بسیاری از موارد، شرایط مرزی به صراحت بیان نمی‌شوند، بلکه به‌نحوی که در جواب ایجاد می‌شود، مانند امواج خارج شونده در بی‌نهایت یا میدان‌های الکتریکی که در بی‌نهایت صفر هستند.



شکل ۳.۲: حجم و مرزها. در حل معادلات ماکسول اغلب با اجسام دی‌الکتریک یا فلز سر و کار داریم. ناحیه داده از فضا (حجم) را با  $\Omega$  و مرز حجم را با  $\partial\Omega$  و بردار عمود بر مرز که بسمت بیرون از حجم است را با  $\hat{n}$  مشخص می‌کنیم.

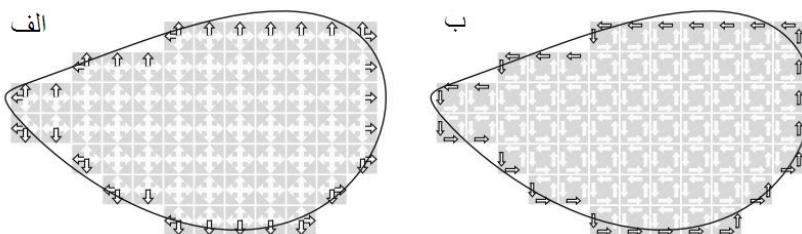
<sup>۴</sup>Fnite Difference Time Domain (FDTD)

### ۳.۱.۲ قضیه گوس و استوکس

اغلب با دو قضیه انتگرالی استفاده می‌کنیم. نخست **قضیه گوس** است:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) d^3 r = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (12.2)$$

که می‌گوید انتگرال  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  روی حجم  $\Omega$  برابر با جریان (جهت‌دار) میدان برداری از مرز  $\partial\Omega$  حجم است. در اینجا  $d\mathbf{S} = \hat{n}dS$  که در آن  $\hat{n}$  بردار خارج شونده عمود بر سطح و  $dS$  نمایشگر عنصر سطح بسیار کوچکی است. شکل (۴.۲)-الف تفسیر گرافیکی این قضیه را بر حسب نمودارهای برداری که قبلاً معرفی شد نشان می‌دهد. از آنجا که دیورژانس سنجش اختلاف خالص بین جریان داخل و خارج شونده از عنصر مربع شکل داده شده است، شار داخل و خارج شونده دو عنصر مجاور دقیقاً یکدیگر را حذف می‌کنند، و فقط ناپدید نشده‌ها در مرز باقی می‌مانند.



شکل ۴.۲: نایش گرافیکی (الف) قضیه گوس و (ب) قضیه استوکس. در قضیه گوس  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$  در یک حجم انتگرال‌گیری می‌شود که در آن  $\mathbf{F}$  از عنصر حجم بهمجاور خود جریان می‌یابد و شارهای داخل و خارج بهاستثنای شرایط مرزی یکدیگر را جبران می‌کنند. و بهطور مشابه، هنگام انتگرال‌گیری کرل روی یک مرز باز، کرل عناصر مجاور بهاستثنای عناصر مرزی که مجاور ندارند یکدیگر را حذف می‌کنند.

دومین قضیه **قضیه استوکس** است.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (13.2)$$

که می‌گوید انتگرال‌گیری کرل یکتابع بردار روی سطح  $S$  برابر انتگرال‌گیری خطی  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  در امتداد مرز  $\partial S$  سطح است. شکل (۴.۲)-ب تفسیر گرافیکی این قضیه را بر حسب نمودارهای برداری که قبلاً معرفی شد، نشان می‌دهد. مشارکت کرلدر لبه‌های عناصر مجاور، مانند یکدیگر را حذف می‌کنند و فقط آنها که در حذف مشارکت ندارند و روی مرز سطح هستند باقی می‌مانند.

در کدام جهت عمود بر سطح  $d\mathbf{S} = \hat{n}dS$  است؟ و در کدام جهت  $d\mathbf{l}$  است؟ در حالت قضیه گوس،  $\hat{n}$  بسوی خارج از حجم است. اگر کسی بخواهد مرز را بطريق دیگر تعریف کند، و ما در قسمتهای بعدی کتاب این کار را انجام می‌دهیم، باید در این مورد مراقب باشیم. شیوه همین، جهت  $d\mathbf{S}$  مشخص می‌کند که چرخش  $d\mathbf{l}$  بر طبق قاعده دست راست است، یعنی اگر کسی با انگشت شست دست راست بسمت بالا باشد (در جهت  $\hat{n}$  باشد)، انگشتان دیگر در جهت  $d\mathbf{l}$  خواهند بود.

## ۲.۲ معادلات ماکسول

در الکترودینامیک با میدان‌های الکتریکی  $E(r, t)$  و مغناطیسی  $B(r, t)$  وابسته به زمان سروکار داریم. نیروی وارد بر بار  $q$  در موقعیت  $r$  که با سرعت  $v$  حرکت می‌کند را می‌توان از رابطه نیروی لورنتس محاسبه کرد:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(r, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(r, t)] \quad (14.2)$$

میدان‌های الکترومغناطیسی خودشان بوسیله توزیع بار  $\rho(r, t)$  و جریان  $(r, t) J$  تولید می‌شوند. پویائی این میدان‌ها بوسیله معادلات ماکسول تعیین می‌شود که اساس نظریه الکترودینامیک را تشکیل می‌دهد.

### معادلات ماکسول

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{قانون گوس} \quad (15.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{بی نام} \quad (15.2\text{ب})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{قانون فاراده} \quad (15.2\text{ج})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{قانون آمپر} \quad (15.2\text{د})$$

که در آن  $\mu_0$  نفوذپذیری خلاء است. چندین روش برای "خواندن" معادلات ماکسول وجود دارد. اولین آن بر حسب قضیه هلم‌هولتز شروع می‌شود که می‌گوید وقتی دیورژانس و کرل همراه شرایط مرزی مشخص باشد، تابع برداری تعیین می‌شود. در این روش، قانون گوس و فاراده میدان الکتریکی  $E(r, t)$  را تعیین می‌کند، در حالی که معادله دوم (بی نام) و قانون آمپر میدان مغناطیسی  $B(r, t)$  را تعیین می‌کند. علاوه بر این می‌بایست شرایط مرزی مناسب را نیز مشخص کنیم. معادلات ماکسول را می‌توان بصورت زیر تفسیر کرد

**قانون گوس.** چشمی یا چاهک میدان‌های الکتریکی بوسیله توزیع بار داده می‌شود. بی نام. بار مغناطیسی وجود ندارد.

**قانون فاراده.** میدان مغناطیسی متغیر با زمان کرل میدان الکتریکی تولید می‌کند. این معادله به قانون القاء نیز خوانده می‌شود و در مدارات الکتریکی نیروی محرکه الکتریکی تولید می‌کند که اهمیت فوق العاده‌ای در موتورها و ژنراتورها دارد.

**قانون آمپر.** میدان کرل مغناطیسی یا از طریق جریان الکتریکی یا از طریق میدان الکتریکی متغیر با زمان تولید می‌شود. واژه اخیر برای اولین بار توسط ماکسول معرفی شد و معمولاً به عنوان "جریان جابجائی ماکسول" نامیده می‌شود.

### گسترش معادلات ماکسول

ماکسول معادلات "خود" را بهاین صورت معروف امروزی (۱۵.۲) ننوشته است، اما از معادلات پیچیده‌تری، که هم میدان‌های الکترومغناطیسی و هم پتانسیل‌ها را به عنوان مقادیر اساسی حفظ می‌کرد، استفاده کرد. بهمین دلیل، در ابتدا مورد استقبال جامعه قرار نگرفت و بیست سال دیگر طول کشید تا این که هویساید، با تابع پله واحد معروف "خود" آنرا به شکل امروزی به جامعه فیزیک معرفی کرد [۲].

تا زمان مرگ ماکسول، در سال ۱۸۷۹، و چند سال پس از آن، هیچ‌کس نظریه او را درک نکرد. مانند یک نمایشگاه در یک محفظه شیشه‌ای نشسته بود، برخی آن را تحسین می‌کردند اما دور از دسترس بود. مردی که آنرا در دسترس قرار داده او یک اپراتور تلگراف خودآموخته به نام الیور هویساید بود. در سال ۱۸۸۵ او نظریه را به صورتی که اکنون چهار معادله ماکسول بیان می‌کنیم خلاصه کرد.

هویساید با استفاده از سامانه جدید تحلیل برداری، که در آن بردارها سه بعدی با حروف نمایش داده می‌شوند، و پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی در پس زمینه قرار دارند، کارها را بسیار ساده کرد. هنگامی که هنریش هرتز در سال ۱۸۸۸ امواج الکترومغناطیسی را کشف کرد، باعث افزایش علاقه به الکترومغناطیس شد و مردم نه به بیان اصلی نظریه ماکسول، بلکه به نسخه جمع و جور هویساید روی آوردند.

بمنظور درک چگونگی بیرون آمدن امواج الکترومغناطیسی از نظریه ماکسول، تحولات زیر را نظر می‌گیریم:

- توزیع جریان متغیر با زمان  $(\mathbf{r}, t) \mathbf{J}$  که بر طبق قانون آمپر، (۱۵.۲)-د، است منجر به
- میدان مغناطیسی متغیر با زمان  $(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}$  می‌شود. بر طبق قانون فاراده، رابطه (۱۵.۲)-ج، این باعث
- میدان الکتریکی متغیر با زمان  $(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}$  می‌شود که بصورت جریان جابجایی در رابطه (۱۵.۲)-د عمل کرده و منجر به
- میدان مغناطیسی متغیر با زمان  $(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}$  می‌شود و این ادامه دارد.

از طریق معادلات کرل تزویجی، میدان‌ها می‌توانند از منبع دور و جدا شده منتشر شوند. یک محاسبه رسمی‌تر از امواج الکترومغناطیسی، حل معادلات ماکسول در فضای آزاد با در نظر گرفتن  $\mathbf{J} = 0$  و همچنین گرفتن کرل از دو طرف قانون فاراده است:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B},$$

در اینجا از اتحادهای برداری معمولی برای توابع برداری، (تمرین ۶-۲)، استفاده کرده و جای مشتق زمانی و مکانی را در سمت چپ عوض کرده‌ایم. در عدم وجود هر گونه منبع،  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  و  $\mathbf{J} = 0$  هستند، و از این‌رو همراه با قانون آمپر معادله موج زیر را خواهیم داشت:

$$\left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (16.2)$$

شبیه همین رابطه را می‌توان برای میدان مغناطیسی، (تمرین ۲-۸)، بدست آورد. از رابطه بالا مشاهده می‌شود که امواج الکترومغناطیسی با سرعت سیر نور منتشر می‌شوند که می‌توان به صورت زیر آنرا بیان کرد:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

در بخش ۲-۴ با جزئیات بیشتری به امواج الکترومغناطیسی بر می‌گردیم. تشعشع کیهانی مثال مورد علاقه من قدرت پیش‌بینی معادله ماکسول، تابش اشعه کیهانی است که حدود ۴۰۰۰۰۰ سال پس از انفجار عظیم ایجاد شد، هنگامی که دمای پلاسمای اولیه به اندازه کافی سرد شده بود که اتم‌ها تشکیل شوند و تابش از پلاسمای آزاد شوند. از آن زمان به بعد طبق قوانین معادلات ماکسول، این تابش آزاده منتشر شده است، اگرچه فرکانس تابش به دلیل گسترش جهان کاهش یافته و امروزه بیشینه توزیع در ناحیه ریزموچ<sup>۶</sup> است. بنظرم جالب است که قوانین فیزیک حتی در میلیاردها سال به خوبی اجرا شده‌اند و معادلات ماکسول چقدر خوب پویائی امواج الکترومغناطیسی را توصیف می‌کند. اگرچه معمولاً این موققت را مسلم می‌دانیم، اما فکر می‌کنم که گاهی اوقات باید از این ابزارهای قدرتمندی که برای توصیف طبیعت در دست داریم بیشتر سپاسگزار باشیم.

## ۱.۲.۲ پتانسیل‌های الکترومغناطیسی

پتانسیل‌های الکترومغناطیسی نقش مهمی در الکترودینامیک ایفا می‌کنند [۱، ۲]، اما در زمینه نانو اپتیک اهمیت کمتری دارند. همان‌طور که در فصل پنجم بحث خواهیم کرد، در نانو اپتیک معمولاً اجسام مختلف با توابعی موسوم به تابع گرین، که بسیاری از مزایای پتانسیل‌های الکترومغناطیسی را بر عهده دارند، معرفی می‌شود. با این وجود، در چند جا، که در اپتیک کوانتومی بسیار قابل توجه است، بر مفهوم پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تکیه می‌کنیم.

با "مطالعه" معادلات ماکسول به گونه‌ای شروع می‌کنیم که در بخش بعدی، از نظر معادلات همگن و ناهمگن، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. ناهمگنی در معادلات ماکسول توزیع بار و جریان خارجی است. ایده پشت پتانسیل‌های الکترودینامیکی معرفی مقادیر جدید است، پتانسیل اسکالر  $V(\mathbf{r}, t)$  و برداری  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که معادلات همگن ماکسول را بطور خوکار برآورده کنند. معادلاتی که این پتانسیل‌ها را تعیین می‌کنند، سپس بوسیله معادلات ماکسول ناهمگن تهیه می‌شوند.

با  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  شروع می‌کنیم. اکنون می‌توانیم  $\mathbf{B}$  را به بردار پتانسیل  $\mathbf{A}$  از طریق رابطه زیر مربوط سازیم:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (17.2)$$

با این انتخاب مطمئن می‌شویم که میدان مغناطیسی چشم‌های (منبع) یا چاهک ندارد زیرا دیورژانس کرل یک میدان  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  همواره صفر است. برای سایر معادله همگن، قانون فاراده، داریم:

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \times \nabla V = 0$$

<sup>۶</sup>Microwave

در اینجا رابطه داخل پرانتر را با  $\nabla V$  - جایگزین کرده‌ایم زیرا کرل گرادیان بطور خودکار صفر است.  $V$  پتانسیل اسکالر است. علامت منفی بطور قراردادی از الکترواستاتیک انتخاب شده است که در آنجا پتانسیل را بکار انجام شده بوسیله بار در میدان الکتریکی می‌توان مربوط کرد [۲]. بنابراین میتوانیم میدان الکتریکی را بر حسب پتانسیل اسکالر و برداری بیان کنیم و بر عکس.

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۱۸.۲)$$

با این روابط بین  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  و پتانسیل‌های  $V$ ,  $\mathbf{A}$  معادلات ماکسول همگن نمی‌توانند بطور منحصر به فرد تعریف شوند اما میتوانیم چیز معلومی را به آنها اضافه کنیم بدون آنکه تغییری در  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  حاصل شود. فرض کنید  $(\mathbf{r}, t) \lambda$  یک تابع دلخواه اسکالر است. در این صورت می‌توانیم  $V$  و  $\mathbf{A}$  را بصورت زیر اصلاح کنیم:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda, \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (۱۹.۲)$$

به طوری که از طریق محاسبات مستقیم بسادگی می‌توان اثبات کرد، هر دو  $V$  و  $\mathbf{A}$  و همین‌طور  $V'$  و  $\mathbf{A}'$  منجر به میدان‌های الکترومغناطیسی یکسان  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  می‌شوند. ما از روابط (۱۹.۲) که به تبدیلات معیاری <sup>۴</sup> موسومند، در چند لحظه بعد استفاده خواهیم کرد.

تعیین معادله برای  $V$  و  $\mathbf{A}$  با قرار دادن روابط  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  بر حسب پتانسیل‌های الکترومغناطیسی در معادلات ماکسول غیرهمگن یعنی قانون گوس (۱۵.۲)-الف و قانون آمپر (۱۵.۲)-د بدست می‌آید. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= -\nabla^2 V - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (۲۰.۲)$$

همانطور که به درستی توسط گریفیتز [۱] اشاره شده است، این مجموعه معادلات زشتی است و ممکن است در مورد دلیل معرفی پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تعجب کنید. خوشبختانه، یک راه ساده برای بروز رفت وجود دارد و می‌توانیم با شرطی موسوم به معیار لورنس را معرفی کرده تا دو معادله  $V$  و  $\mathbf{A}$  جدا شوند. اغلب در ادبیات سر در گمی وجود دارد که آیا این تبدیل باشد به Loren(t)<sup>z</sup> با یا بدون  $t$  نسبت داده شود، اما اخیراً به نظر میرسد که باید به درستی "شرط لورنس" <sup>۵</sup> را پس از مختار خود لودویک لورنس <sup>۶</sup> نامید. می‌توانیم شرط اضافی معیار لورنس را بر پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تحمیل کنیم (همچنین به تمرین ۲-۹ مراجعه کنید).

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (۲۱.۲)$$

<sup>۴</sup>Gauge Transformations

<sup>۵</sup>Lorenz condition

<sup>۶</sup>Ludwig Lorenz

به منظور جدا کردن معادلات برای  $V$  و  $A$ ، و مجموعه معادلات زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \left( \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (22.2)$$

بنابراین، در معیار لورنس هر دو  $V$  و  $\mathbf{A}$  از معادلات موج پیروی می‌کنند. در فصل پنجم به حل معادلات بر می‌گردیم، معیار مشهور دیگری مانند معیار یا تبدیل کولمب وجود دارد که در قسمت‌های بعدی این کتاب در زمینه کوانتیزه کردن معادلات ماکسول مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۳.۲ معادلات ماکسول در ماده

مطالعه خود را با معادلات ماکسول بر حسب معادلات همگن و ناهمگن ادامه می‌دهیم. ظاهراً، ناهمگنی بار  $\rho$  و توزیع بار  $\mathbf{J}$  و سیله‌ای برای نحوه ارتباط جهان مادی با میدان‌های الکترومغناطیسی است. در واقع، یکی از دلایل اصلی این که چرا اپتیک و نانو اپتیک در سال‌های اخیر چنین پیشرفت فوق العاده داشته‌اند، پیشرفت در علوم نانو است. این امر بارهای الکتریکی جدید و منابع جریان را ایجاد کرده است که امکان کنترل بی‌سابقه اثرباره ماده و نور را فراهم کند. اگر فقط بخش الکترومغناطیسی معادلات ماکسول بود، احتمالاً میدان الکترودینامیک به‌یک رشتہ کاملاً خسته کننده تبدیل می‌شد.

هنگام برخورد با معادلات ماکسول در ماده، مناسب است که بار و توزیع جریان را به قسمت‌های خارجی، که از خارج قابل کنترل هستند، تقسیم کرده و مشارکت ناشی از قطبی شدگی<sup>۱۰</sup> و مغناطیس شوندگی<sup>۱۱</sup> را القاء می‌کند. دومی را معمولاً نمی‌توان به‌آسانی کنترل کرد، اما در صورت وجود قطبیش‌ها و مغناطیس شوندگی میکروسکوپی که در ماده القاء می‌شود، بهنچار بر میدان‌های عمل خواهد کرد. شکل (۵.۲) طرح مختصراً از اصل زیربنای این جداسازی را ارائه می‌دهد. تفکیک مشارکت خارجی و القائی همیشه کاملاً روشن نیست، و کاهی اوقات آزادی انتخاب "خارجی" و "القائی" وجود دارد.

در ادامه، بعلت رابطه نزدیک توزیع بار و جریان، **قطبیش**  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  را به عنوان گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم و مغناطیس شوندگی  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  را به عنوان گشتاور دوقطبی مغناطیسی در واحد حجم معرفی می‌کنیم. این مقادیر پاسخ مواد را در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی نشان می‌دهند، و باید نسخه‌ای از نحوه ارتباط آنها با میدان‌های الکترومغناطیسی ارائه دهیم. با استفاده از  $\mathbf{P}$  و  $\mathbf{M}$  می‌توانیم توزیع بار و جریان را با بار آزاد و مقید بر طبق [۱، ۲] جداسازی کنیم.

<sup>10</sup> Polarizations

<sup>11</sup> Magnetizations



شکل ۵.۲: نمودار معادلات ماکسول در ماده. منابع بار الکتریکی و جریان به مشارکت خارجی و القائی تفکیک می‌شوند.  $\mathbf{J}_{ext}$ ,  $\rho_{ext}$ ,  $\mathbf{J}_{ind}$ ,  $\rho_{ind}$  را می‌توان بطور خارجی کنترل کرد و بعنوان منابع برای معادلات ماکسول عمل می‌کنند. علاوه بر این، میدان‌های الکترومغناطیسی  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  قطبش  $P$  و مغناطیس شوندگی  $M$  را القاء می‌کنند که بعنوان مشارکت القائی  $\rho_{ind}$  و  $\mathbf{J}_{ind}$  در معادلات ماکسول عمل می‌کنند.

### بار القائی و خارجی و توزیع جریان

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{ext} + \rho_{ind} = \rho_{ext} - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_{ind} = \mathbf{J}_{ext} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\end{aligned}\quad (23.2)$$

این فرآیند جدا سازی بطور مبسوط در فصل هفتم بحث خواهد شد. استراتژی بعدی که باید دنبال شود، توسعه نظریه‌ای است که فقط به منابع خارجی وابسته است و حذف منابع مقید که از خارج قابل کنترل نیستند. ابتدا توزیع بار معادله (۲۳.۲) را وارد قانون گوس می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{ext} - \nabla \cdot \mathbf{P} \implies \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{ext}$$

رابطه داخل پرانتر معمولاً جابجایی دی الکتریک خوانده می‌شود.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (24.2)$$

توزیع جریان رابطه (۲۴.۲) را در قانون آمپر کرده و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_{ext} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

رابطه داخل پرانتر معمولاً میدان مغناطیسی خوانده می‌شود.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (25.2)$$

**میدان مغناطیسی** خوانندگان هوشیار ممکن است متوجه شده باشند که من قبل  $\mathbf{B}$  زا نیز به عنوان "میدان مغناطیسی" نشان داده ام و در واقع در این مورد ادبیات دچار سردگمی می‌شود. جدول ۱.۲ راحت‌ترین نمادها را برای مقادیر مختلف که در الکترودینامیک در ماده ظاهر می‌شوند، خلاصه شده است.

جدول ۱.۲: فهرست کمیات مختلف در معادلات ماکسول برای مواد

نام	نماد	معادله ماکسول
میدان الکتریکی القای مغناطیسی گذردهی خلاء نفوذپذیری خلاء	$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ $\epsilon_0$ $\mu_0$	فضای آزاد
قطبشن الکتریکی مغناطیس شوندگی جابجایی عایقی میدان مغناطیسی	$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	ماده
پذیرندگی الکتریکی $\chi_e$ پذیرندگی مغناطیسی $\chi_m$ گذردهی الکتریکی $\epsilon$ نفوذپذیری مغناطیسی $\mu$	$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	مواد خطی

برای "القای مغناطیسی" نماد  $\mathbf{B}$  و برای "میدان مغناطیسی" برای  $\mathbf{H}$ . در طول این کتاب از اصطلاحات مناسب شناخته شده استفاده خواهیم کرد ولی اغلب  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  میدان مغناطیسی می‌نامم، اما معنای دقیق آن باید همیشه از متن مشخص شود.  
با این تعاریف جدید، می‌توانیم معادلات ماکسول را در ماده بصورت زیر بیان کنیم:

## معادلات ماکسول در ماده

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} \quad \text{قانون گوس} \quad (۱۲۶.۲)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{بی نام} \quad (۱۲۶.۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{قانون فاراده} \quad (۱۲۶.۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{قانون آمپر} \quad (۱۲۶.۲)$$

توجه کنید که معادلات همگن همواره ثابت می‌مانند، و فقط در مواد ناهمگن باید اصلاح شوند زیرا منع را به مشارکت جملات خارجی و القای تجزیه می‌کنیم.  
روابط ساختاری معادلات (۱۲۶.۲)-(الف-د) یک مجموعه بسته‌ای از معادلات را تشکیل نمی‌دهند، اما باید بوسیله روابط ساختاری تکمیل شوند:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}),$$

که  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$  را به میدان‌های واقعی  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  مربوط می‌سازند. این را می‌توان بوسیله استفاده از توصیف میکروسکوپی یا پدیده‌شناسی<sup>۱۲</sup> قطبش و مغناطیس شوندگی یا بوسیله مواد خطی انجام داد. میدان‌های واقعی در مقابل کمکی. میدان‌های "واقعی" در الکترودینامیک  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  هستند. جابجایی عایقی  $\mathbf{D}$  و میدان مغناطیسی  $\mathbf{H}$  که وقتی با معادلات ماکسول در ماده سروکار داریم مفید هستند. متاسفانه، برخی ابهامات تاریخی در مورد نقش  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{H}$  وجود دارد که در بخش بعدی بیشتر مشخص می‌شود. در نتیجه، کار با میدان‌های الکترومغناطیسی  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  راحت‌تر است، زیرا عبارت‌ها متقارن‌تر می‌شوند. در این کتاب از هر دو توصیف بر حسب  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{H}$  استفاده می‌کنیم، با این حال، خواندن کان باید در پس ذهن خود میدان‌های واقعی ناشی از ذرات باردار، همواره با  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  احساس می‌شوند.

### ۱.۳.۲ مواد خطی

برای دسته وسیعی از مواد می‌توانیم رابطه خطی بین پاسخ مواد و میدان‌های خارجی را فرض کنیم. بطور دقیق‌تر داریم:

#### مواد خطی

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (27.2)$$

در اینجا  $\chi_e$  و  $\chi_m$  بترتیب پذیرندگی الکتریکی و مغناطیسی هستند. قطبش . بیانید ابتدا رابطه قطبش را بحث کنیم. چیزی که دوست دارم گفتگو کنم، انگیزه فیزیکی قوی برای ارتباط  $\mathbf{P}$  با میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  است. نخست بیاد آوریم که  $\mathbf{D}$  یک میدان کمکی است که صرفاً توسط توزیع بار خارجی  $\rho_{ext}$  ایجاد می‌شود. اگر باشتباه  $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{D}$  (رابطه اشتباه) را فرض کرده بودیم، قطبش در موقعیت مفروض فقط ناشی از میدان خارجی خواهد بود. اما در حقیقت، میدان واقعی  $\mathbf{E}$  مجموع میدان خارجی و میدان قطبش است، که توسط کل جسم قطبیده مورد بررسی، مطابق با انتخاب معادله (۲۷.۲) تولید می‌شود. مغناطیس شوندگی . شرایط برای مغناطیس شوندگی متفاوت است، که فقط توسط جریان‌های آزاد حاکم بر  $\mathbf{H}$  ایجاد می‌شود. این امر بطور مستقیم به‌سر در گمی که قبل‌آشارة شد در مورد نقش مناسب  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{H}$  اشاره می‌کند. خوشبختانه اوضاع آنقدرها هم که به‌نظر می‌رسد بد نیست. برای همه مواد مورد مطالعه، مغناطیس بسیار کوچک است و به‌همین دلیل خطای حاصل از  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$  در مقایسه با انتخاب درست  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B}$  (رابطه اشتباه) معمولاً ناچیز است. اکنون می‌توانیم رابطه بین  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{D}$  برقرار کنیم.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (28.2)$$

<sup>۱۲</sup> Phenomenological

که در آن گذردهی الکتریکی  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$  را تعریف می‌کنیم و بهمین نحو، خواهیم داشت:

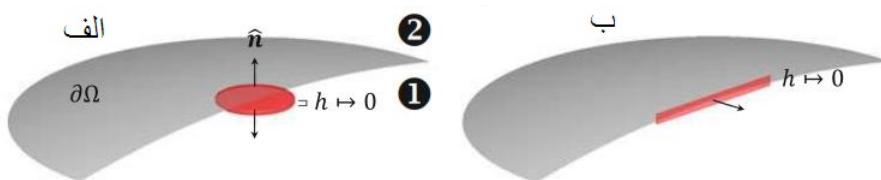
$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (۲۹.۲)$$

که در آن نفوذپذیری مغناطیسی  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$  را تعریف می‌کنیم. در مورد مواد ناهمسانگرد هر دو  $\epsilon$  و  $\mu$  به مقادیر تانسوری تبدیل می‌شوند، اما چنین موادی را در نظر نخواهیم گرفت مگر اینکه بطور متفاوت بیان کنیم. در نهایت، معادلات ماکسول برای یک محیط خطی می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} &= \rho_{ext}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \epsilon \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} &= \mathbf{J}_{ext} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (۳۰.۲)$$

### ۲.۳.۲ شرایط مرزی

در الکترودینامیک و نانو اپتیک اغلب با مشکلاتی مواجه می‌شویم که اجسام متشکل از مواد مختلف با مرزهای تیزی از هم جدا شده‌اند. از معادلات ماکسول در مواد، معادله (۲۶.۲) می‌توانیم شرایط مرزی از میدان‌های بالا و پائین مرزمشترک بدست آوریم. در ادامه، نماد ۱ یک بردار واحد است که عمود بر سطح مشترک است و از محیط پائین به بالا نشان می‌دهد. در تحلیل باید در مورد لایه‌های احتمالی بارهای سطحی یا جریان‌هایی که مستقیماً در رابطه‌ها هستند دقیق کنیم. در ادامه قضایای انتگرالی استفاده شده در بخش ۳.۱.۲ را بشرح زیر در نظر می‌گیریم: **قضیه گوس**. برای معادلات ماکسول که اختلاف میدان‌های الکترومغناطیسی را مشخص می‌کند، روی



شکل ۲.۶: انتگرال گیری حجم و سطح برای بدست آوردن شرایط مرزی در معادلات ماکسول. **الف** معادله دیورزانس را روی یک قوطی کوچک بهارتفاع ۰ →  $h$  انتگرال گرفته و سپس انتگرال‌ها را از طریق قضیه گوس به انتگرال مرزی تبدیل می‌کنیم.  $\hat{n}$  عمود بر سطح خارجی مرز  $\partial\Omega$  است که محیط بالائی ۲ را از محیط پائینی ۱ جدا می‌کند. **ب** معادله کرل را روی سطح کوچگی بهارتفاع ۰ →  $h$  انتگرال گیری کرده، و انتگرال‌ها را از طریق قضیه استوکس به انتگرال خطی تبدیل می‌کنیم.

یک استوانه بسیار نازک  $\Omega$  بهارتفاع ۰ →  $h$ ، انتگرال گیری می‌کنیم، فرض می‌شود که رویه بالای دیسک دقیقاً بالای سطح مشترک و رویه پائین آن دقیقاً زیر سطح مشترک، شکل (۶.۲)، باشد. با استفاده از قضیه گوس، انتگرال حجم را به انتگرال مرزی تبدیل می‌کنیم، جائی که سهم بدن کناری استوانه در حد  $0 \rightarrow h$  صفر می‌شود.

**قضیه استوکس**. برای معادلات ماکسول که کرل میدان‌های الکترومغناطیسی را تعریف می‌کند، بر

روی یک مستطیل بسیار نازک  $\delta S_h$  بهارتفاع  $0 \rightarrow h$  انتگرال گیری می‌کنیم. از قضیه استوکس برای تبدیل انتگرال مرزی به انتگرال خطی استفاده می‌کنیم که در آنجا فقط موازی با سطح مشترک در حد  $0 \rightarrow h$  مشارکت می‌کنند. برای هردو حالت استوانه و مستطیل، فرض می‌کنیم که اندازه‌ها بقدر کافی کوچک هستند که می‌توانیم بخوبی میدان‌ها و منابع درون ناحیه انتگرال را با مقادیر ثابت تقریب بزنیم. بیائید با قانون گوس رابطه (۲۶.۲)-الف شروع کنیم. با توجه به توضیح شکل بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\delta \Omega_h} \nabla \cdot \mathbf{D} d^3 r &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\delta \Omega_h} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta S = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\delta \Omega_h} \rho_{ext} d^3 r = \sigma_{ext} \delta S \end{aligned}$$

در اینجا  $\sigma_{ext}$  نمانگر بار سطحی ممکن که در سطح مشترک توزیع شده است و زیرناماد ۱ و ۲ نمانگر نواحی زیر و بالا سطح مشترک است. توجه کنید که  $\mathbf{D}_1$  منفی است زیرا عمود بر سطح  $\hat{\mathbf{n}}$  در جهت پائین است. از این رابطه و با استفاده از تحلیل مشابه برای  $\mathbf{B} \cdot \nabla$ ، به اولین شرایط مرزی میرسیم:

### اولین مجموعه شرایط مرزی

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_{ext}, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (31.2)$$

سپس قانون فاراده را در نظر می‌گیریم و روی یک مستطیل کوچک انتگرال گیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\delta S_h} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\delta S_h} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\delta S_h} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\delta S_h} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \end{aligned}$$

در آخرین مرحله استفاده می‌کنیم که شار میدان مغناطیسی از طریق یک مستطیل در حد  $0 \rightarrow h$  صفر می‌شود شبیه تحلیلی که برای قانون آمپر برقرار است (۲۶.۲)-الف، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \delta \mathbf{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{J}_{ext} \delta S_h$$

در اینجا باید در مورد توزیع جریان سطحی  $\mathbf{K}_{ext}$  مراقب باشیم که ممکن است در حد  $0 \rightarrow h$  صفر نشود. سرانجام این دومین شرایط مرزی را تدارک می‌نماید.

### دومین مجموعه شرایط مرزی

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_{ext}. \quad (32.2)$$

در بیشتر حالت‌های مورد علاقه، در این کتاب با توزیع بار آزاد یا جریان سروکار نداریم. شرایط مرزی معادلات ماکسول در سطح مشترک بین دو محیط را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد:

- مولفه‌های قائم  $D, B$  پیوسته است.
- مولفه‌های موازی  $E, H$  پیوسته است.

## ۴.۲ میدان‌های هارمونیک زمانی

به ویژه برای مواد خطی، غالباً وقتی با تحریک نور تک فرکانس  $\omega$  سروکار داریم، و بهدلیل خطی بودن واکنش مواد، سامانه پس از گذراي اوليه با همان فرکانس  $\omega$  نوسان می‌کند. در اینجا نماد فصل مقدمه دنبال کرده و میدان‌های الکترومغناطیسی را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{j\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = e^{j\omega t} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (33.2)$$

جا دارد چند کلمه احتیاطی بیان کنیم؛ اولاً، میدان‌های الکترومغناطیسی واقعی، البته مقادیر حقیقی هستند. هر وقت طالب این میدان‌های حقیقی هستیم، باید قسمت حقیقی رابطه‌های مربوط را بدست آوریم. ثانیاً از نماد مشابه برای  $\mathbf{E}(r, t)$  و  $\mathbf{B}(r, t)$  استفاده می‌کنیم. به طور کلی، این نباید باعث سرددگمی‌های زیاد شود زیرا همیشه بهوضوح بیان می‌کنیم که آیا در حوزه زمان کار می‌کنیم یا از میدان‌های هارمونیک زمانی استفاده می‌کنیم. برای میدان‌های هارمونیک زمانی و پاسخ مواد خطی، معادلات ماکسول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

### معادلات ماکسول

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} &= \rho, & \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} &= \mathbf{J} + j\omega \epsilon \mathbf{E} \end{aligned} \quad (34.2)$$

به صراحة نشان نداده‌ایم که  $\rho$  و  $\mathbf{J}$  مربوط به بار و توزیع جریان خارجی هستند و از این زمان به بعد هر وقت وابستگی در متن معلوم باشد این حذف خواهد شد.  
ضرب میدان‌های هارمونیک زمانی بعضی وقت‌ها به محاسبه میانگین زمانی دو عبارت که با فرکانس  $\omega$  نوسان می‌کنند، نیاز داریم.

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re} (f e^{j\omega t}) \operatorname{Re} (g e^{j\omega t}) dt$$

کدر آن  $T = 2\pi/\omega$  است. نمونه معمولی بردار پوینتینگ<sup>۱۳</sup> است که مقدار متوسط انرژی را محاسبه می‌کند. این را با جزئیات بیشتر در فصل چهارم بحث خواهیم کرد. بسط بخش حقیقی به صورت زیر خواهد بود:

<sup>۱۳</sup>Poynting

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{4T} \int_0^T (f e^{j\omega t} + f^* e^{-j\omega t}) (g e^{j\omega t} + g^* e^{-j\omega t}) dt$$

بعداً خواهیم دید که جملاتی که بصورت  $e^{\pm 2j\omega t}$  نوسان می‌کنند وقتی انتگرال گیری در یک تناوب انجام می‌دهیم، صفر می‌شوند. فقط جملات زیر باقی می‌مانند:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{4} \langle (fg^* + f^* g) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(fg^*). \quad (35.2)$$

## ۱.۴.۲ امواج سینوسی

هر میدان الکتریکی را می‌توان بصورت امواج صفحه‌ای توسط تبدیل فوریه بسط داد:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{E}_k \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \quad (36.2)$$

در اینجا  $\mathbf{k}$  نمایشگر بردار موج و  $\mathbf{E}_k$  مولفه فوریه است. برای میدان مغناطیسی نیز به همین روش بدست می‌آید. سپس یک موج تک سینوسی در نظر گیرید

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_k e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_k e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (37.2)$$

اگر مطلوب ما انتشار میدان پیچیده‌تری باشد، همیشه می‌توانیم میدان را با استفاده از معادله (۳۶.۲)، به امواج صفحه‌ای که هر مولفه بطور جداگانه منتشر می‌شوند، تجزیه کرده و سرانجام نتایج را جمع کنیم. کار عملگر  $\nabla$  برای موج صفحه‌ای  $-jk \rightarrow \nabla$  می‌شود، به تمرین ۲-۱۰ مراجعه کنید. بنابراین در غیاب منابع  $\rho = J = 0$  معادلات ماکسول به صورت زیر خواهد بود:

### معادلات ماکسول برای موج صفحه‌ای

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k &= 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{E}_k &= \omega \mathbf{B}_k \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_k &= 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{B}_k &= -\omega \mu \epsilon \mathbf{E}_k \end{aligned} \quad (38.2)$$

چند نکته مهم را می‌توان مشتقیماً از این معادلات استنباط کرد. اولاً، امواج الکترومغناطیسی امواج عرض هستند که  $\mathbf{E}_k$  و  $\mathbf{B}_k$  بر بردار موج  $\mathbf{k}$  عمود هستند، و بطوری که مشاهد می‌شود  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_k = 0$  است. ثانیاً،  $\mathbf{E}_k$  و  $\mathbf{B}_k$  یک دستگاه متعامد دست راست را تشکیل می‌دهند. سرانجام

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_k = -k^2 \mathbf{E}_k = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B}_k = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E}_k$$

با استفاده از معادله موج همراه با رابطه پاشندگی <sup>۱۴</sup> داریم

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (۳۹.۲)$$

می‌توانیم این رابطه را همراه قانون فاراده بکار برد

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_k = \omega\mu\mathbf{H}_k$$

تا رابطه بین  $\mathbf{E}_k$  و  $\mathbf{H}_k$  را بدست آوریم:

$$Z\mathbf{H}_k = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_k \quad (۴۰.۲)$$

در اینجا امپدانس زیر را معرفی می‌کنیم:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (۴۱.۲)$$

که بما اجازه میدهد از طریق رابطه (۴۱.۲) میدان الکتریکی  $\mathbf{E}_k$  بر حسب میدان مغناطیسی  $\mathbf{H}_k$  بهم مربوط کنیم و برعکس.

**میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی عرضی** این بخش را با بحث مختصری از میدان الکتریکی عرضی  $TE$  و میدان مغناطیسی عرضی  $TM$  که در بخش بعدی این کتاب مهم خواهد بود، به پایان بردهیم. فرض کنید که  $\hat{\mathbf{n}}$  یک بردار عمود بر سطح مشترک باشد. در این صورت می‌توانیم میدان‌های الکترومغناطیسی را به مولفه‌های عمودی (عرضی) و موازی  $\hat{\mathbf{n}}$  تجزیه کنیم،

$$\mathbf{E}_k = [\mathbf{E}_k - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_k)] + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_k) = \mathbf{E}_k^{TE} + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_k) \quad (۴۲.۲)$$

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{H}_k - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_k)] + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_k) = \mathbf{H}_k^{TM} + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_k)$$

سپس از معادله (۴۰.۲) برای بیان مولفه عمودی  $\mathbf{H}_k$  بر حسب مولفه موازی  $\mathbf{E}_k$  استفاده می‌کنیم،

$$Z\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_k = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_k \underset{c.p.}{=} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_k \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_k^{TE} \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_k^{TE}.$$

در رابطه بالا، از تبدیل دوری <sup>۱۵</sup> (c.p.) در ضرب سه‌گانه استفاده کردیم. بنابراین این به تجزیه میدان‌های الکترومغناطیسی به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= \mathbf{E}_k^{TE} - \hat{\mathbf{n}} \left( \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}_k^{TM} \right) Z \\ \mathbf{H}_k &= \mathbf{H}_k^{TM} + \hat{\mathbf{n}} \left( \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_k^{TE} \right) Z^{-1} \end{aligned} \quad (۴۳.۲)$$

نکته خوب در مورد این تجزیه، این است که معمولاً هنگام استفاده از میدان‌های الکتریکی عرضی  $\mathbf{E}_k^{TE}$  و میدان‌های مغناطیسی عرضی  $\mathbf{H}_k^{TM}$ ، مثلاً وقتی شرایط مرزی را در سطح مشترک دو محیط بکار می‌بریم، آسان‌تر است. رابطه (۴۳.۲) نشان می‌دهد که هر میدان را می‌توان بطور منحصر بفرد به مولفه‌های  $TE$  و  $TM$  تجزیه کرد.

<sup>۱۴</sup>Dispersion

<sup>۱۵</sup>Cyclic Permutation (c.p.)

## ۵.۲ میدانهای طولی و عرضی

این فصل را با بحث مختصری در مورد میدانهای طولی و عرضی به پایان می‌بریم. نقطه شروع قضیه هلم‌هولتز است که در بخش ۲.۱.۲ معرفی شد. آن می‌گوید که هر میدان برداری را با دانستن دیورژانس و کرل آن، همراه با شرایط مرزی مناسب مشخص می‌شود. در روح این قضیه، هر تابع برداری مانند  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  را می‌توان به بخش طولی و عرضی تجزیه کرد.

### تجزیه $\mathbf{F}$ به دو بخش طولی و عرضی

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^L(\mathbf{r}) + \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) \quad (44.2)$$

که در آن  $\mathbf{F}^L$  و  $\mathbf{F}^\perp$  بر طبق روابط زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}^L(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}), & \nabla \times \mathbf{F}^L(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) &= 0, & \nabla \times \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) &= \mathbf{g}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (45.2)$$

در اینجا  $f(\mathbf{r})$  و  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  توابع اسکالر و برداری دلخواه هستند. بخش طولی دیورژانس آن صفر نیست و بخش عرضی آن کرل صفر نیست. تجزیه بالا بویزه برای امواج سینوسی به صورت معادله (۳۷.۲) خیلی شفاف خواهد بود. بخش طولی (نسبت به بردار موج  $\mathbf{k}$ ) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_k^L = \hat{\mathbf{k}} F_k^L = \hat{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{F}) = \mathbb{P}_k^L \cdot \mathbf{F}_k$$

که در انتهای رابطه، ماتریس تصویری را تعریف کردیم:

□

$$(\mathbb{P}_k^L)_{ij} = \hat{k}_i \hat{k}_j$$

تابع برداری  $\mathbf{F}_k$  را می‌توان تحت رابطه زیر به قسمتهای طولی و عرضی تجزیه کرد

$$\mathbf{F}_k = (\mathbb{P}_k^L) \cdot \mathbf{F}_k + (\mathbb{I} + \mathbb{P}_k^L) \cdot \mathbf{F}_k = (\mathbb{P}_k^L) \cdot \mathbf{F}_k + (\mathbb{P}_k^\perp) \cdot \mathbf{F}_k \quad (46.2)$$

در اینجا  $\mathbb{I}$  ماتریس واحد است و در انتهای رابطه ماتریس تصویری روی بخش عرضی تعریف کردیم. از معادله (۴۵.۲) می‌توانیم بخش طولی را بدست آوریم:

$$ik F_k^L = f_k \quad (47.2)$$

بهمین نحو، بخش عرضی را بدست می‌آوریم:

$$-jk \mathbf{k} \times \mathbf{F}_k^\perp = \mathbf{g}_k \implies -jk \mathbf{F}_k^\perp = -\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{g}_k \quad (48.2)$$

بنابراین، روش تفکیک در رابطه (۴۴.۲) یک بردار به بخش‌های طولی و عرضی این است که آنرا با استفاده از تبدیل فوریه، به مولفه‌های سینوسی تجزیه کرده، ماتریس‌های تصویری را اعمال نموده، و سرانجام برای نیل به تفکیک مطلوب عکس تبدیل فوریه انجام دهیم.

## معادلات ماکسول

با توجه به بحث بالا، می‌توانیم معادلات ماکسول (۳۴.۲) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} -jk\mathbf{k} \cdot \epsilon \mathbf{E}_k^L &= \rho_k, & \mathbf{k} \times \mathbf{E}^\perp &= \omega \mathbf{B}_k \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_k^L &= 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{B}_k^\perp &= j\mu \mathbf{J}_k - \omega \mu \epsilon \mathbf{E}_k \end{aligned} \quad (۴۹.۲)$$

هر زمان که در متن لازم باشد، مشخصه طولی و عرضی را نشان داده‌ایم.  $\rho_k$  و  $\mathbf{J}_k$  بترتیب تبدیل فوریه بار و توزیع جریان هستند. بدینهی است که مولفه طولی  $\mathbf{B}_k^L$  صفر و میدان مغناطیسی کاملاً عرض است. با استفاده از رابطه (۴۷.۲)، از قانون گوش بدست می‌آوریم:

$$E_k^L = j \frac{\rho_k}{\epsilon k} \quad (۵۰.۲)$$

معادله پیوستگی توزیع بار را به مولفه توزیع جریان طولی مربوط میدارد:

$$\omega \rho_k = k J_k^L \implies J_k^L = \frac{\omega \rho_k}{k} = -j \omega \epsilon E_k^L.$$

بنابراین، قانون آمپر (۴۹.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_k^\perp = j \mu \mathbf{J}_k^\perp - \omega \mu \epsilon \mathbf{E}_k^\perp \quad (۵۱.۲)$$

چون مولفه‌های طولی  $J_k^L$  و  $E_k^L$  یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین مشاهده می‌شود که در رابطه (۴۹.۲) دو معادله دیورژانس مشخص کننده مولفه‌های طولی  $\mathbf{E}_k$  و  $\mathbf{B}_k$  است، در حالی که معادله‌های کرل مولفه‌های عرضی میدان الکترومغناطیسی را بهم مربوط می‌کند.

## پتانسیل‌های الکترومغناطیسی

مفهوم میدان‌های طولی و عرضی را نیز می‌توان بر پتانسیل‌های الکترومغناطیسی  $V$  و  $A$  که در بخش ۱.۲.۲ معرفی شد اعمال کرد. واضح است که میدان مغناطیسی از مولفه عرضی  $A_k$  بدست می‌آید:

$$\mathbf{B}_k^\perp = -j \mathbf{k} \times \mathbf{A}_k^\perp \quad (۵۲.۲)$$

میدان الکتریکی دارای هر دو مولفه طولی و عرضی است:

$$E_k^L = jkV_k - j\omega A_k^L, \quad \mathbf{E}_k^\perp = -j\omega \mathbf{A}_k^\perp \quad (۵۳.۲)$$

تبديلات معياري<sup>۱۶</sup> که بصورت رابطه (۱۹.۲) ارائه شد، در اين صورت مولفه عرضي  $A_k^\perp$  را بى تاثير رها کنيد و فقط بصورت زير اصلاح کنيد

$$\mathbf{A}_k^{L'} = \mathbf{A}_k^L - j\mathbf{k}\lambda_k, \quad V'_k = V_k - j\omega\lambda_k$$

## تمرینات

قبل از شروع تمرینات، می خواهم يك مطلب تبلیغاتی شخصی در باره نمادهای مولفه اضافه کنم و آن تانسور لوی-سیویتا<sup>۱۷</sup> است. هر دو مفهوم برای ارزیابی عبارت های پیچیده بسیار مفید هستند.

ضرب داخلی ضرب داخلی را می توان برحسب شکل  $a \cdot b = a_i b_i$  انوشت.  
قرارداد جمع انيشتمن<sup>۱۸</sup> قرارداد جمع انيشتمن میگويد، باید روی انديس هائی (شاخص ها) که دوبار در يك رابطه، مثل  $i$  در رابطه ضرب داخلی، ظاهر می شوند جمع انجام گيرد.  
ضرب خارجي ضرب خارجي را می توان بصورت  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$  (a  $\times$  b)<sub>i</sub> بیان کرد. در اينجا تانسور لوی-سیویتا يا بطور اختصار تانسور  $\epsilon$  است.  
تانسور لوی-سیویتا تانسور لوی-سیویتا يا بهاختصار تانسور  $\epsilon$ ، يك تانسور کاملاً غيرمتقارن است که بصورت زير تعریف می شود:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{برای تبدیل دوری زوج } \epsilon_{123}, \epsilon_{312}, \epsilon_{231} \\ -1 & \text{برای تبدیل دوری فرد } \epsilon_{213}, \epsilon_{321}, \epsilon_{132} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۵۴.۲)$$

از رابطه بالا واضح است که می توان به طور چرخه ای شاخص ها را تغيير داد، و وقتی دو شاخص را عوض می کنیم، علامت آن تغيير می کند، برای مثال  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ . مهمترین رابطه برای تانسور لوی-سیویتا رابطه زير است:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad (۵۵.۲)$$

بیشما تاكيد می کنم که اين رابطه را بخاطر بسپاريد زيرا می تواند بشما کمک کند تا بيشتر عباراتی را که در اين کتاب با آن مواجه می شويد، بسازيد.

• تمرین ۱ با استفاده از تانسور لوی-سیویتا عبارات زير را محاسبه کنيد:

$$(a \times (b \times c)) - (a \times b) \times c$$

(ب)  $-(a \times b) \times c$ . نشان دهيد که جواب با شکل (الف) تفاوت دارد.

• تمرین ۲ با استفاده از تانسور لوی-سیویتا رابطه زير را اثبات کنيد:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c).$$

<sup>۱۶</sup>Gauge transformations

<sup>۱۷</sup>Levi-Civita tensor

<sup>۱۸</sup>Einstein's Sum Convention

• تمرین ۳ با استفاده از تعریف رابطه (۴۵.۲) ثابت کنید  $\epsilon_{imn}\epsilon_{jmn} = 2\delta_{ij}$

• تمرین ۴ برای دوتابع برداری  $F(r)$  و  $G(r)$  رابطه زیر را اثبات کنید

$$\nabla \cdot F \times G = (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot (\nabla \times G)$$

راهنمائی: قاعده ضرب را برای عملگر  $\nabla$  که روی دوتابع برداری از طرف راست اثر می‌کند بکار بردید. در عبارت بالا و در خیلی از قسمت‌های این کتاب از پرانتز برای مشخص کردن عملگر  $\nabla$  که فقط روی عبارت اثر می‌کند استفاده خواهیم کرد.

• تمرین ۵ با استفاده از تعریف رابطه (۵۴.۲) بحث کنید که چرا  $\nabla \cdot \nabla \times F(r) = 0$  است.

• تمرین ۶ ثابت کنید که  $\nabla \times \nabla \times F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$  برای هرتابع برداری مانند  $F(r)$  صادق است.

• تمرین ۷ عملگر دیورژانس  $\nabla \cdot$  را روی دوطرف قانون آمپر، (۱۵.۲)-د بکار برد و رابطه پیوستگی  $J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  را استخراج کنید. برای این کار لازم است از یکی دیگر از معادله ماکسول استفاده کنید. این کدام معادله است؟

• تمرین ۸ عملگر کرل  $\nabla \times$  را روی دوطرف قانون آمپر، (۱۵.۲)-د بکار برد و معادله موج برای  $B$  را با استفاده از  $J = 0$  بدست آورید. برای این منظور نیاز به استفاده از قانون فاراده را دارید.

• تمرین ۹ ثابت کنید که با استفاده از شرط معیار لورنس در رابطه (۲۱.۲)، معادله موج برای پتانسیل‌های الکترومغناطیسی بدست می‌آید. به معادله (۲۲.۲) رجوع کنید.

• تمرین ۱۰ برای موج صفحه‌ای  $E(r) = E_0 e^{-jk \cdot r}$  که در آن بردارهای  $E_0$  و  $k$  ثابت هستند،  $\nabla \cdot E$  و  $\nabla \times E$  را محاسبه کنید. سپس بحث کنید که چرا برای موج صفحه‌ای می‌توانیم از  $\nabla \rightarrow -jk$  استفاده کنیم.

• تمرین ۱۱ در یک لحظه معین از زمان، مثلاً  $t = 0$ ، میدان الکتریکی یک موج که در امتداد  $z$ -ها منتشر می‌شود را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\hat{x}E_x(z) + \hat{y}E_y(z) = Re [E_0 \hat{e} e^{-j k z}]$$

که در آن  $E_0$  دامنه (فرض کنید حقیقی است) و  $\hat{e}$  بردار قطبش موج است. مولفه‌های  $E_y(z)$  و  $E_x(z)$  را برای بردارهای قطبش زیر محاسبه کنید:

$$\hat{e} = \hat{x} -$$

$$- \hat{y} \quad \text{ب}-$$

$$\hat{e} = \hat{x} + j\hat{y} \quad \text{ج}-$$

$$- \hat{y} \quad \text{د}-$$

که در آن  $\theta$  یک زاویه حقیقی است.

- تمرین ۱۲ با استفاده از موج تمرین یازدهم، مولفه‌های میدان مغناطیسی  $B_y(z)$  و  $B_x(z)$  را بدست آورید. با استفاده از قانون فاراده  $E$  را به  $B$  مربوط سازید. برای بردارهای مختلف قطبش، میدان  $(z)$   $B$  چگونه بنظر می‌رسد؟
- تمرین ۱۳ موج  $E(r) = E_0 \hat{y} e^{-jk \cdot r}$  را که در آن بردار موج مختلط بصورت  $\mathbf{k} = k_x \hat{x} - jk_z \hat{z}$  است در نظر گیرید. اینگونه امواج را موج محوشونده<sup>۱۹</sup> می‌نامند که در جهت  $x$  بطور نمائی با  $z > 0$  تضعیف می‌شود. بخش حقیقی  $E(r)$  را محاسبه کرده و در باره خواص قطبش آن بحث کنید.

---

<sup>۱۹</sup>Evanescent Wave

## فصل ۳

### نمایش طیف زاویه‌ای

وضعیتی که در این فصل در نظر خواهیم گرفت، در شکل (۱.۳) نشان داده شده است و می‌توان آن را به شرح زیر خلاصه کرد. فرض کنید میدان الکتریکی را در صفحه معین  $z = 0$  می‌شناسیم،

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0(x, y)$$

اکنون سولات زیر را مطرح می‌کنیم. وقتی از صفحه دور می‌شویم، میدان  $\mathbf{E}(x, y, z)$  چگونه تکامل می‌یابد؟ میدان  $\mathbf{E}(r)$  در فواصل دور چگونه رفتار می‌کند؟ و وقتی میدان‌های دور را از طریق یک عدسی یا یک سامانه عدسی متمرکز و کانونی می‌کنیم، چه اتفاق می‌افتد؟ برای پاسخ به این سوال‌ها، چند مفهوم جدید را معرفی می‌کنیم که نقش مهمی در زمینه نانو‌آپتیک ایفا می‌کنند.

**نمایش طیف زاویه‌ای**. در نمایش طیف زاویه‌ای میدان  $\mathbf{E}_0(x, y)$  را به مولفه‌های فوریه  $\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y)$  تجزیه می‌کنیم. سپس این مولفه‌ها را می‌توان با افزودن فازهای مناسب به راحتی از  $z = 0$  منتشر کرد.

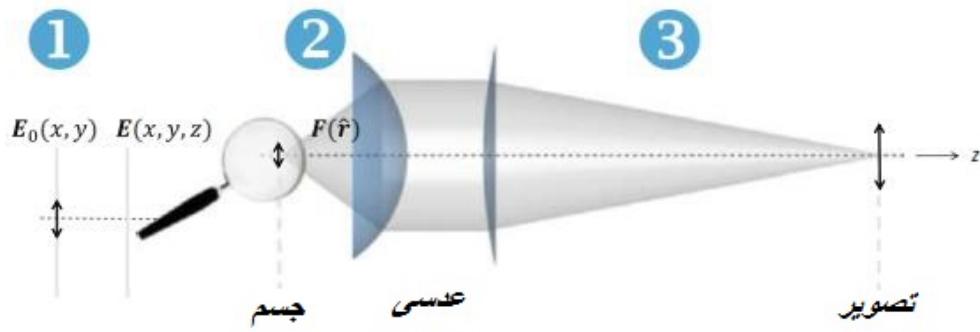
**نمایش میدان دور** برای محاسبه میدان‌های الکترومغناطیسی خیلی دور از صفحه  $z = 0$ ، مفهوم تقریب ثابت بودن فاز را معرفی می‌کنیم. در می‌یابیم که میدان‌های دور منتشر شونده خیلی نزدیک به  $\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y)$  مربوط می‌شوند.

**کانونی کردن میدان‌ها** در آزمایش‌های کانونی کردن میدان بمنظور بازیابی تصویر توزیع میدان اولیه  $\mathbf{E}_0(x, y)$ ، این کار توسط عدسی‌های نوری انجام می‌شود. در نانو‌آپتیک نظری می‌توان تبدیلی برای میدان‌های دور انجام داد تا عملکرد عدسی را تقلید کند.

#### ۱.۳ تبدیل فوریه میدان‌ها

فرض کنید که توزیع میدان الکتریکی  $\mathbf{E}_0(x, y)$  را در صفحه  $z = 0$  می‌دانیم. می‌توانیم تبدیل فوریه زیر را تعریف کنیم:

$$\tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) = (2\pi)^{-2} \int e^{j(k_x x + k_y y)} \mathbf{E}_0(x, y) dx dy \quad (1.3)$$



شکل ۱.۳: ترسیم نماییس طیف زاویه‌ای و تصویرسازی برای یک جسم که در کانون عدسی  $z = 0$  قرار دارد. در این فصل نشان خواهیم داد که (۱) چگونه میدان‌های  $E(x, y, z)$  را با استفاده از نمایش طیف زاویه‌ای می‌توانند دور از جسم منتشر شوند. (۲) چگونه میدان‌های دور  $F(\hat{r})$  خیلی دور از جسم را محاسبه کرد، و (۳) چگونه تصویر یک جسم را با استفاده سامانه‌ای از عدسی‌ها که بر حسب کره‌های مرجع گوسی تعریف می‌شوند بدست آورد. در انتقال میدان‌های نزدیک به مناطق دور، هم امواج محو شونده که مسئول حد پراش نور هستند و در فصل ششم بحث می‌شوند، از توزیع میدان حذف می‌شوند.

که میدان‌ها را بهمولفه بردار موج‌شان تجزیه می‌کند. بدیهی است که از طریق عکس تبدیل فوریه

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \int e^{-j(k_x x + k_y y)} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) dx dy \quad (2.3)$$

می‌توانیم دوباره میدان‌های اولیه را بدست آوریم. وقتی از  $\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0(x, y)$  دور می‌شویم، هر مولفه فوریه مقداری فاز بدست می‌آورد.

$$e^{-jk_z z} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y)$$

که در آن  $k_z$  را می‌توان از مقدار  $k$  که از فرکانس نور و رابطه پاشندگی<sup>۱</sup> داده می‌شود، بدست آورد:

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (3.3)$$

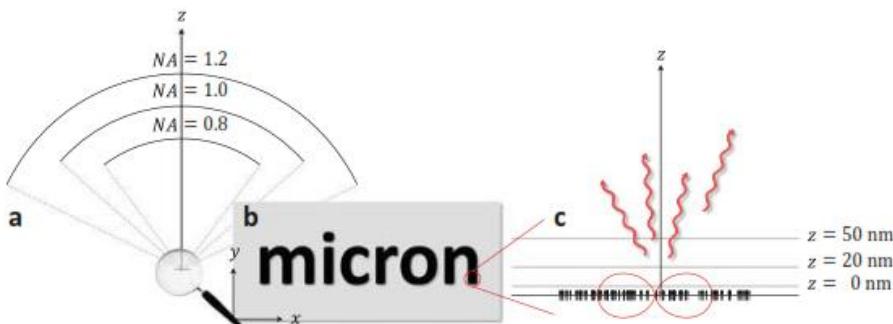
علامت مثبت و منفی را باید از از انتشار موج در جهت مثبت یا منفی  $z$  تعیین کرد. برای  $k^2 < k_x^2 + k_y^2$  عدد موج موهومی مربوط به میدان محو شوندگی بدست می‌آوریم و علامت بطریقی تعیین شود که موج با دور شدن از  $z = 0$  میرا شود. بنابراین، برای نیم فضای با  $z > 0$  بر طبق رابطه (۱۹.۱) برای معادله موج اسکالر، نمایش طیف زاویه‌ای زیرا را بدست می‌آوریم

<sup>۱</sup>Dispersion

نمایش طیف زاویه‌ای ( $z > 0$ )

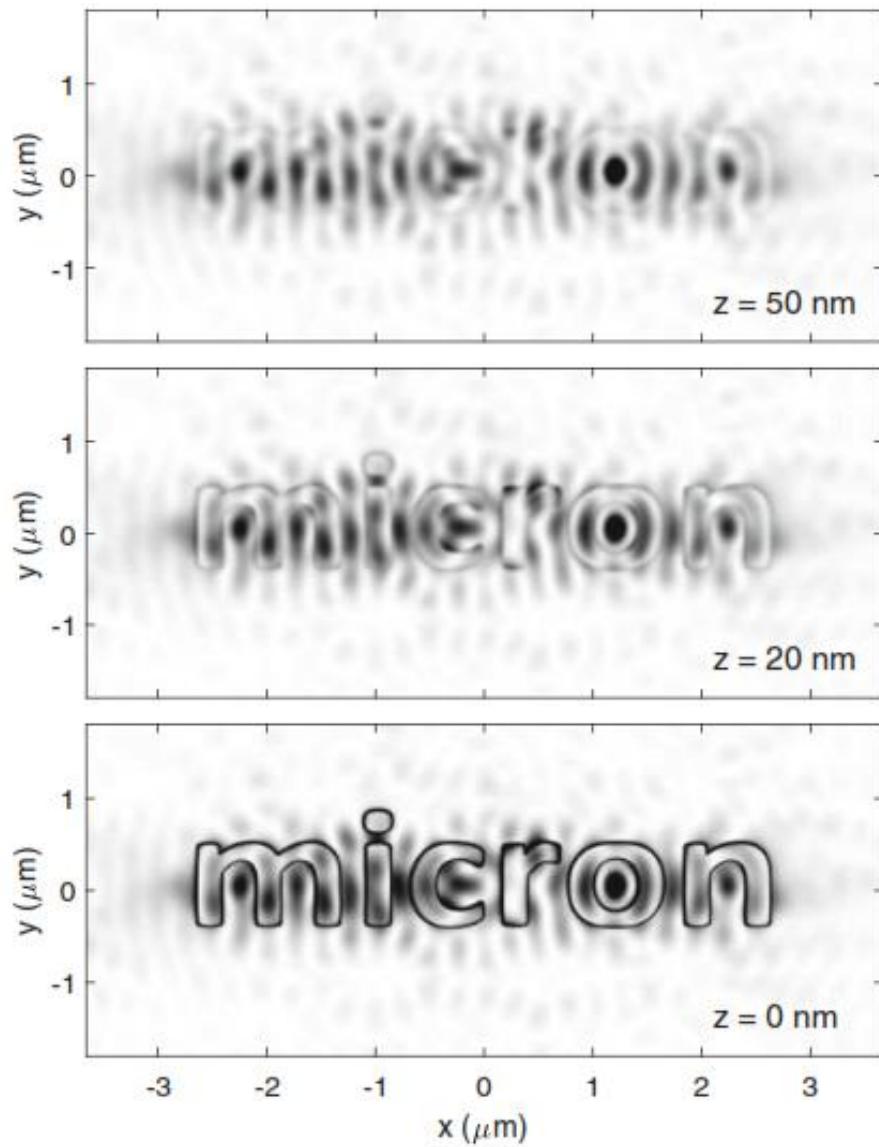
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) = & \int_{k^2 > k_x^2 + k_y^2} e^{-j(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) dk_x dk_y \\ & + \int_{k^2 < k_x^2 + k_y^2} e^{-j(k_x x + k_y y - \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} z)} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (4.3)$$

عبارت‌های خط اول و دوم بترتیب مربوط به امواج منتشر شونده و محو شونده هستند. از رابطه (۴.۳) می‌توان دریافت که برای محاسبه میدان‌های دور از یک صفحه مفروض، باید ابتدا  $\mathbf{E}(x, y, 0)$  را به مولفه‌های فوریه تجزیه کرد، و سپس هر مولفه فوریه، وقتی از صفحه  $z = 0$  دور می‌شوند، براحتی فاز یا میرائی نمائی بدست آورند. بدیهی است که هر قدر از صفحه  $z = 0$  دورتر شویم، میدان‌های محو شونده بیشتر میرا شده و فقط موج منتشر شونده بازه طول انتشار  $z$  طویل باقی می‌ماند.



شکل ۲.۳: شمای نمایش طیف زاویه‌ای و تصویر میدان‌های ساطع شده از یک جسم "میکرون". (الف) جسم در مبداء، در مرکز شیشه ذره‌بین. قوس‌ها طیف وسیعی از مولفه‌های بردار موج را نشان میدهند که توسط عدسی‌ها با روزنه‌های عدی مختلف  $NA$  گرفته شده است. ضمناً بهشکل (۶.۲) نیز مراجعه کنید. (ب) جسم شامل دوقطبی‌های متراکم است که در امتداد جهت  $z$  همسو شده‌اند، بهبخش (ج) مراجعه کنید که حرف "میکرون" را تشکیل داده است. (ج) نمای نزدیک از ورق دوقطبی و لایه‌هایی که میدان‌ها در شکل (۶.۲) نشان داده شده است. گلبرگ قرمزالگوی انتشار دور یک دوقطبی را نمایش می‌دهد.

به عنوان یک مثل نمایشی، وضعیت نشان داده در شکل (۲.۳) را بررسی می‌کنیم. آن شامل مجموعه‌ای از دوقطبی‌های متراکم است که در امتداد جهت  $z$  همسو شده‌اند و حرف "میکرون" را تشکیل می‌دهند. همان طور که در شکل (۳.۳) نشان داده شده است، تصویر در هنگام دور شدن از ورق دوقطبی‌ها، هم در اثر از دادن امواج محو شونده و هم در عدم تمرکز، تار می‌شود.



شکل ۳.۳: محاسبه نمایش طیف زاویه‌ای معادله (۴.۳). برای توزیع میدان اولیه  $E_0(x, y)$  حرف "میکرون" که با دو قطبی‌ها نوسانی در طول موج  $620\text{ nm}$  پر شده و در امتداد محور  $z$  است در نظر می‌گیریم. این در شکل (۲.۲) نشان داده شده است.  $(y, E_0(x, y))$  مربوط به میدان‌های ده نانو متر بالای لایه دوقطبی است. وقتی از این صفحه دور می‌شویم، (مثلًا به داخل نگاه کنید)، بویژه بعلت میرائی میدان‌های محو شونده و بعلت عدم کانونی کردن، میدان تار است. در بخش ۳.۳ نشان خواهیم داد که تصویر میدان را می‌توان از توزیع میدان دور با استفاده از سامانه عدسی‌ها بدست آورد.

## ۲.۳ نمایش میدان-دور

برای انتشار در فواصل دور، میدان‌های الکتریکی معادله (۴.۲) امواج خارج شونده هستند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \xrightarrow[kr \gg 1]{} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.3)$$

که بوسیله دامنه میدان دور مدلوله شده‌اند.

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{k_x^+ k_y^2 \leq k^2} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (6.3)$$

در عبارت بالا، از امواج محو شونده چشم پوشی کرده‌ایم. معادله (۶.۳) شبیه به یک انتگرال ناجور است که برای  $\rightarrow \infty$  شروع به نوسان کرده و باید در محاسبه آن دقت کنیم. خوبشخтанه، تقریب فاز ثابت [۲، ۴]، دستوالعمل برای برخورد با اینگونه انتگرال‌ها را تدارک می‌کند. می‌توان نشان داد که مشارکت اصلی در این انتگرال از آن نواحی می‌آید که تابع در نما کمترین تغییرات را دارد. این بنام نقاط ثابت موسوم و وابسه به‌اکسترمم تابع در نما است. دور از این اکسترمم، نوسان‌های شدت نمائی منجر به تداخل مخرب می‌شود و مشارکت در انتگرال صفر می‌شود. در ادامه، روش تقریب فاز ثابت را بطور مختصر معرفی می‌کنیم.  
تقریب فاز ثابت به عنوان قدم اول، انتگرال یک بعدی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$I \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \int_a^b e^{j\lambda g(u)} f(u) du$$

این انتگرال بیشتر در اطراف اکسترمم  $(u_0)$  مشارکت دارد [۴]. برای سادگی، فرض می‌کنیم که  $(u_0)$  دارای یک اکسترمم در  $u_0$  در محدوده انتگرال دارد. سپس  $(g)$  را بر حسب سری تیلور در اطراف  $u_0$  بسط داد و فرض می‌کنیم که تغییرات  $(f)$  در آنجام آرام است بطوریکه می‌توانیم تقریب زیر را بنویسیم:

$$I \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda[g(u_0) + \frac{1}{2}g''(u_0)(u-u_0)^2]} du = \left[ \frac{2\pi}{\lambda|g''(u_0)|} \right]^{\frac{1}{2}} f(u_0) e^{j\lambda g(u_0) \pm j\frac{\pi}{4}}$$

علامت بالا و پائین مثبت و منفی در عبارت آخر بر طبق علامت  $(u_0)$  است. برای محاسبه این انتگرال آنرا کرانه‌های انتگرال را به بینهایت برد که این تقریب خوبی است زیرا زیرانتگرال فقط در اطراف اکسترمم قرار دارد و در غیر این صورت بعلت تداخل غیر سازنده صفر است. ضمناً از خواص انتگرال فرنل<sup>۲</sup> استفاده کردیم. شبیه همین روش را می‌توان برای انتگرال دو بعدی بکار برد:

$$I \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \int e^{j\lambda g(u,v)} f(u,v) dudv.$$

در اینجا نیز فرض می‌کنیم که انتگرال گیری  $(v)$  دارای یک اکسترمم در ناحیه  $(u_0, v_0)$  و  $(v)$  دارای  $(u)$  می‌توان در حوالی این نقطه بسط داد:

$$g(u,v) \approx g(u_0, v_0) + \frac{1}{2}g_{uu}(u-u_0)^2 + \frac{1}{2}g_{vv}(v-v_0)^2 + g_{uv}(u-u_0)(v-v_0),$$

<sup>۲</sup>Stationary Phase Approximation

<sup>۳</sup>Fresnel integrals;  $\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

که مشتقات جزئی  $g$  در نقطه  $(u_0, v_0)$  محاسبه می‌شود. سپس یک محور اصلی را برای چرخانیدن محورهای  $u$  و  $v$  انجام داده به طوری که سامانه مختصات چرخشی، انتگرال دوگانه را به انتگرال یک بعدی تبدیل کند، بنابراین می‌توانیم بر طبق رابطه زیر انتگرال گری را محاسبه کنیم.

$$I \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \pm \frac{2\pi j}{\lambda\sqrt{\Delta}} f(u_0, v_0) e^{j\lambda g(u_0, v_0)}, \quad \Delta = g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2 \quad (7.3)$$

فرض کردیم که نقطه ثابت یک اکسترمم با  $\Delta > 0$  است و علامت عبارت بالا باید با توجه به علامت  $g_{uu} + g_{vv}$  (مریوط به بیشینه یا کمینه) انتخاب شود. جدا از عامل نرمالیزه کردن،  $\Delta$  خمیدگی گوس  $g$  در نقطه ثابت است. سپس تقریب فاز ثابت را در معادله (6.۲) بکار می‌بریم. ضمناً  $r$  را بجای  $\lambda$  قبلی استفاده می‌کنیم.تابع  $g$  خواهد شد:

$$g(k_x, k_y) = k_x \hat{r}_x + k_y \hat{r}_y k_z(k_x, k_y) \hat{r}_z$$

در اینجا بردار واحد  $(\hat{r}_x, \hat{r}_y, \hat{r}_z)$  را معرفی می‌کنیم. توجه کنید که از طریق رابطه پاشندگی (6.۲)،  $k_z$  بستگی به  $k_x$  و  $k_y$  دارد. برای پیدا کردن اکسترمم  $g$  مشتقات جزئی را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial g}{\partial k_x} = \hat{r}_x - \frac{k_x}{k_z} \hat{r}_z = 0 \implies \frac{\hat{r}_x}{k_x} = \frac{\hat{r}_z}{k_z} \\ g_y &= \frac{\partial g}{\partial k_y} = \hat{r}_y - \frac{k_y}{k_z} \hat{r}_z = 0 \implies \frac{\hat{r}_y}{k_y} = \frac{\hat{r}_z}{k_z} \end{aligned}$$

واضح است که، در اکسترمم  $r$  و  $k$  موازی هستند، بطوریکه ممکن است تا کنون حدس زده باشید، از  $\theta = r k \cos \theta$  بازاء  $\theta = 0$  بیشینه است. از آنجا که مقدار  $k$  در فرکانس نوری ثابت است، می‌توانیم اکسترمم را در  $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{r}}$  قرار دهیم. محاسبه مشتق دوم در نقطه ساکن را ادامه می‌دهیم:

$$g_{xx} = -\frac{\hat{r}_x^2 + \hat{r}_z^2}{k \hat{r}_z^2}, \quad g_{yy} = -\frac{\hat{r}_y^2 + \hat{r}_z^2}{k \hat{r}_z^2}, \quad g_{xy} = -\frac{\hat{r}_x \hat{r}_y}{k \hat{r}_z^2}$$

بنابراین، همراه با رابطه (7.3)، به عبارت نهائی خود برای ظامنه میدان دور میدان‌های الکترومغناطیسی هدایت می‌شویم.

### نمایش میدان دور

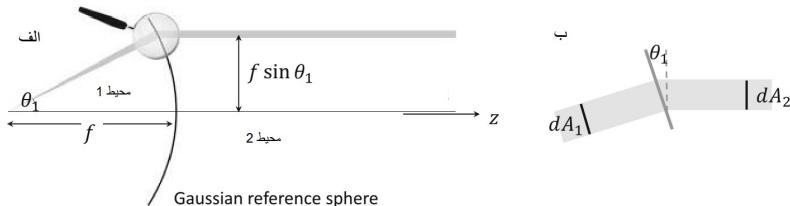
$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = 2\pi j k \hat{r}_z \tilde{\mathbf{E}}_0(k \hat{r}_x, k \hat{r}_y) \quad (8.3)$$

این عبارت کاملاً قابل توجه است. اولاً، با وجود مشتقات نسبتاً پیچیده آن، نتیجه ساده‌ای را بیان می‌کند که میدان الکتریکی منتشر شده در یک جهت معین را می‌توان توسط یک مولفه تکی فوریه تعیین کرد. سایر تمام مولفه‌ها در ناحیه میدان دور تداخل غیر سازنده دارند. ثانیاً، نشان می‌دهد که طبیعت می‌تواند خودش تبدیل فوریه انجام دهد! بطوری که بعداً بحث خواهیم

کرد، آنچه باید در تصویر برداری نوری انجام داد این است که از عدسی‌ها یا سایر وسائل نوری برای ترکیب صحیح مولفه‌های فوریه که در جهت‌های مختلف منتشر می‌شوند استفاده کرده تا تصویری از توزیع میدان اولیه  $E_0(x, y)$  بدست آورد. آنچه در حال حاضر باید روش باشد، در این پردازش تمام امواج محو شونده از بین رفته که محدودیت اساسی برای وضوح تصویر نوری فراهم می‌کند.

### ۳.۳ تصویر میدان و کانونی کردن

مرحله نهائی در تحلیل ما تصویر برداری است جائی که باید مولفه میدان دور را بهدرستی کنار هم قرار داد تا تصویری از میدان‌های جسم  $E_0(x, y)$  بدست آورد. می‌توان کوشش کرد با محاسبه نوری موج کامل را برای تبدیل کامل میدان‌های دور توسط وسائل عدسی بکار برد، با این حال چنین رویکردی بسیار دشوار است و در بیشتر موارد عملی مفید نخواهد بود. یکی از روش‌های جایگزین توسط ریچارد و ولف<sup>۴</sup> پیشنهاد شده است [۴.۲] و بر این فرض است که جسم دارای ویژگی‌های تصویری آپلاناتیک<sup>۵</sup> کاملی همانطور که در شکل (۴.۱) نشان داده شده است. فرض می‌کنیم جسمی که تابش میدان  $E_0(x, y)$  از آن ساطع می‌شود در کانون  $f$  عدسی اول



شکل ۴.۳: در رویکرد نظری خود، عدسی‌ها را از طریق (الف) کره‌های مرجع گوسی توصیف می‌کنیم. اشعه‌ای از کانون بیرون می‌آید و از کره گوسی می‌گذرد، سپس به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که موازی محور نوری منتشر می‌شود. بر عکس، یک پرتو موازی به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که به‌سمت کانون منتشر می‌شود. (ب) هنگام عبور از کره مرجع، سطح باریکه در طول جهت انتشار تغییر کرده، بنحوی که شدت باریکه حفظ می‌شود.

قرار دارد و ابعاد جسم بسیار کوچکتر از  $f$  است. تصویر برداری با استفاده از فرضیات زیر انجام می‌شود:

نور هندسی با میدان‌های نوری ( $\hat{r}$ ) شروع می‌کنیم و با استفاده از قوانین نور هندسی، این میدان‌ها را در امتداد اشعه از طریق سامانه نوری ردیابی می‌کنیم. برای مسائل مورد علاقه خود، از وضعیتی که موسوم به‌سینوسی است، استفاده می‌کنیم و عدسی آپلاناتیک را از طریق یک کره بشعاع  $f$  که به‌کره مرجع گوسی<sup>۶</sup> معروف است، مدل می‌کنیم. اشعه‌ای که از کانون بیرون می‌آید و از کره گوسی می‌گذرد، سپس به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که موازی محور نوری منتشر می‌شود. بر عکس، یک پرتو موازی به‌اشعه‌ای تبدیل می‌شود که به‌سمت کانون منتشر می‌شود.

<sup>۴</sup>Richards and Wolf

<sup>۵</sup>Aplanatic

<sup>۶</sup>Gaussian reference sphere

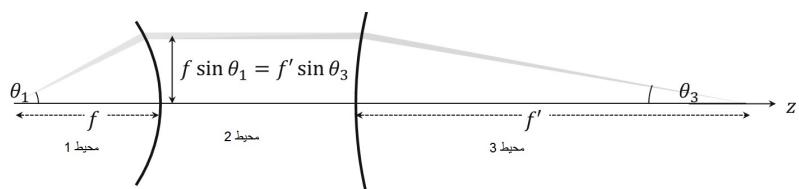
قانون شدت جریان انرژی در طول هر پرتو باید حفظ شود. مقدار میانگین زمانی جریان انرژی را می‌توان از بردار پواین‌تینگ  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  محاسبه کرد، که بطور مبسوط در فصل چهارم بحث خواهد شد، و می‌توان توان ارسالی توسط پرتو را از رابطه زیر بدست آورد:

$$dP = \frac{1}{2} Z^{-1} |\mathbf{E}|^2 dA \quad (9.3)$$

که در آن  $Z$  امپدانس رابطه (۴۱.۲) و  $dA$  جزء سطح مقطع عمود بر انتشار پرتو است. برای انتقال پرتو از جسم به طرف عدسی که در شکل (۴.۳) نشان داده شده است، سپس از سطوح‌های بین دو محیط را از طریق  $\cos \theta_1 = dA_2/dA_1$  و دامنه میدان الکتریکی را از رابطه زیر بهم مربوط می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} Z_1^{-1} |\mathbf{E}_1|^2 dA_1 = \frac{1}{2} Z_2^{-1} |\mathbf{E}_2|^2 \cos \theta_1 dA_2$$

انتقال. در فصل مشترک بین دو محیط، مانند بین محیط جسم و شیشه عدسی، فقط بخشی از



شکل ۵.۳: تصویربرداری از طریق عدسی‌های آپلانتاتیک. یک جسم که در کانون اولین عدسی (محیط ۱) قرار دارد از طریق یک کره مرتع گوسی با شعاع  $f$  توصیف می‌شود. بعداز عبور از کره مرتع، پرتو در درون عدسی (محیط ۲) بموازات محور نوری  $\hat{z}$  منتشر می‌شود. بعداز عبور از کره مرتع گوسی به شعاع پرتو بسوی کانون (محیط ۳) هدایت می‌شود.

نور منتقل و بقیه بازتاب می‌شود. بازتاب و انتقال از فصل مشترک مسطح را د فصل هشتم بررسی خواهیم کرد. در آنجا میدان‌های الکتریکی ورودی را با توجه به معادله (۳۴.۲) به مولفه‌های  $TE$  و  $TM$  تجزیه خواهیم کرد:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{TE} + \mathbf{E}^{TM}$$

که در آن  $\mathbf{E}^{TE}$  مولفه موازی فصل مشترک و  $\mathbf{E}^{TM}$  باقی مانده است. در این صورت میدان انتقال یافته بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{E}_{trans} = T^{TE} \mathbf{E}^{TE} + T^{TM} \mathbf{E}^{TM}$$

که در آن  $T^{TE}$  و  $T^{TM}$  ضرایب عبور هستند. در ادامه اینگونه ضرایب را که ممکن است برای عدسی‌هایی با پوشش ضد بازتاب تقریب زده باشند، مشخص نمی‌کنیم. شکل (۵.۳) چیدمان را برای تصویربرداری میدان، که شامل مجموعه‌ای عدسی با فاصله کانونی  $f$  و یک عدسی تصویری با فاصله کانونی  $f' \gg f$  است، نشان میدهد. تعیین معادله کار برای اینگونه تصویربرداری بطور کلی الهام بخش نیست و برای خوانندگان علاقمند بخش ۶.۳ ارائه شده است. به طور خلاصه،

برای تبدیل تصویربرداری از میدان‌های دور ورودی  $\mathbf{F}_1(\theta, \phi)$  به میدان‌های تصویر  $\mathbf{E}_3(\rho, \phi, z)$  عبارت زیر است.

### تصویربرداری میدان‌های دور $\mathbf{F}_1(\theta, \phi)$ توسط عدسی‌های آپلاناتیک

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(\rho, \phi, z) &= \sqrt{\frac{n_1}{n_3}} \frac{-jk_3 e^{-j(k_1 f - k_3 f')}}{2\pi} \frac{f}{f'} \int_0^{\theta_{max}} \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &\times \int_0^{2\pi} d\phi \mathbb{R}^{im} \cdot \mathbf{F}_1(\theta, \phi) e^{jk_3 \cos \theta_3 z} e^{-jk_1 (\frac{\rho}{M}) \sin \theta \cos(\phi - \varphi)} \end{aligned} \quad (10.3)$$

مفهوم اصطلاحات مختلف آن به قرار زیر است:

- دستگاه مختصات.** در سمت جسم (محیط ۱) از مختصات کروی  $(\theta, \phi)$  و در سمت تصویر (محیط ۳) مختصات استوانه‌ای  $(\rho, \phi, z)$  با  $z = 0$  مربوط به صفحه کانونی استفاده می‌کنیم.
- محیط.** ضریب شکست  $n_1$  و عدد موج  $k_1$  برای ناحیه جسم و  $n_3$  و  $k_3$  برای ناحیه تصویر است و برای عدسی‌ها در اینجا مهم نیست.
- ماتریس تبدیل.** جهت بردار میدان الکتریکی هنگام عبور از کره‌های مرجع گوسی که با تبدیل  $\mathbb{R}^{im}$  توصیف می‌شود به صراحت با معادله (۳۴.۳) ارائه شده است. در اصل، این ماتریس ضرایب انتقال را نیز شامل می‌شود، اگر چه عموماً آنرا برابر یک قرار می‌دهیم.
- خواص عدسی‌ها.** شاعع کره‌های مرجع در سمت جسم و تصویر بترتیب  $f$  و  $f'$  است که در شکل (۱۰.۲) نشان داده شده است. ضریب بزرگنمائی را بصورت زیر معرفی می‌کنیم

$$M = \frac{n_1}{n_3} \frac{f'}{f} \quad \text{ضریب بزرگنمائی} \quad (11.3)$$

و فرض می‌کنیم که  $f \gg f'$  تا برابطه (۱۰.۳) بررسیم. زاویه  $\theta_{max}$  بیشینه زاویه پذیرش عدسی در سمت جسم است. به نظر می‌رسد بهتر است که زاویه قطع را به روزنه عددی <sup>۵</sup> که عددی بدون دیمانسیون است، مرتبط کنیم:

$$NA = n \sin \theta_{max} \quad \text{روزنه عددی} \quad (12.3)$$

هر چه  $NA$  بالاتر باشد وضوح فضایی بهتر است. در عبارت بالا  $\theta_{max}$  تعیین می‌کند که چه مقدار از فضای  $k$ -توسط عدسی گرفته شده است و ضریب شکست  $n$  محیط خارج از عدسی، طول موج موثر نور در محیط را کنترل می‌کند.

<sup>۵</sup>Numerical aperture

شکل (۶.۳) مثال حروف "میکرون" را نشان می‌دهد که قبلاً در شکل (۳.۳) مورد بحث قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که وضوح با افزایش مقدار  $NA$  افزایش می‌یابد، زیرا بخش بیشتری از فضای- $k$  برای بازسازی تصویر در دسترس قرار می‌گیرد. در همه موارد، مولفه‌های محوشدگی در فرآیند تصویربرداری از بین می‌روند. در فصل ششم، هنگامی که توابع گسترش نقطه و حد پراش نور را بحث می‌کنیم، به این نقطه بر می‌گردیم.

کانونی کردن میدان. عبارت مشابه معادله (۱۰.۳) را می‌توان برای کانونی کردن میدان بدست آورد. وضعیتی که در فکر خود داریم در شکل (۷.۳)، پرتو میدان الکتریکی  $\mathbf{E}_{inc}(\rho, \phi)$  که موازی محور نوری منتشر شده، بیک کرده مرجع کوشی با فاصله کانونی  $f$  برخورد کرده و کانونی می‌شود را نشان می‌دهد. میدان‌های کانونی  $\mathbf{E}(\rho, \phi, z)$  را می‌توان به میدان وارد  $\mathbf{E}_{inc}$  از طریق رابطه زیر مربوط کرد:

$$\mathbf{E}_{inc}(\rho, \phi)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \phi, z) &= \frac{j k f e^{jkf}}{2\pi} \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \int_0^{\theta_{max}} \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &\times \int_0^{2\pi} d\phi \mathbb{R}^{foc} \cdot \mathbf{E}(f \sin \theta, \phi) e^{j k z \cos \theta} e^{-j k \rho \sin \theta \cos(\phi - \varphi)}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

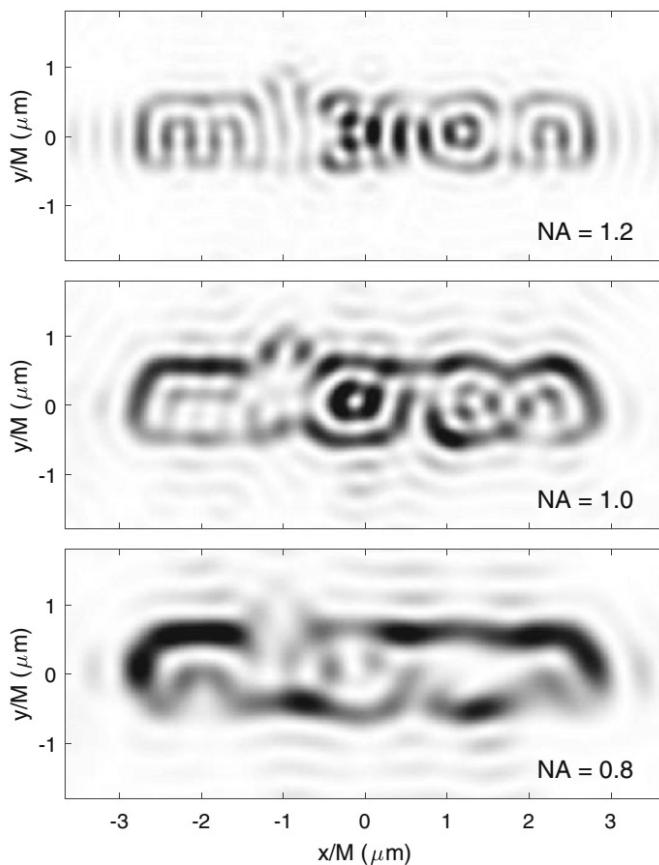
استخراج عبارت بالا در بخش ۶.۳ بطور مفصل آورده شده است. از مختصات استوانه‌ای  $(\rho, \varphi, z)$  برای سمت کانونی  $z = 0$  که مربوط به صفحه کانونی است استفاده کردیم. ضرایب شکست  $n_{inc}$  و  $n$  به ترتیب برای عدسی و محیط سمت کانون و  $k = nk_0$  با  $k_0$  عدد موج فضای آزاد است. ماتریس تبدیل برای میدان‌های الکتریکی که بطور صراحت در معادله (۲۷.۳) بیان شده است. عبارت بالا، هنگامی که میدان‌های کانونی پرتوهای لیزر را بررسی می‌کنیم، استفاده خواهد شد.

### ۴.۳ تقریب موازی محور و پرتوهای گوسی

در خیلی از حالت‌های مور علاقه، نور در جهت خاصی مثل  $z$  منتشر و به آرامی فقط در جهت عرضی پخش می‌شود. یک مثال معروف، انتشار پرتو لیزر است که در بخش بعدی در زمینه کانونی کردن فشرده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه فرض می‌کنیم  $k_x, k_y \ll k$  که تحریزه و تحلیل ما را بطور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند. بویژه، تقریب موازی محور<sup>۱</sup> را به کار خواهیم برد.

$$k_z = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \approx -\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \quad (14.3)$$

<sup>۱</sup>Paraxial Approximation



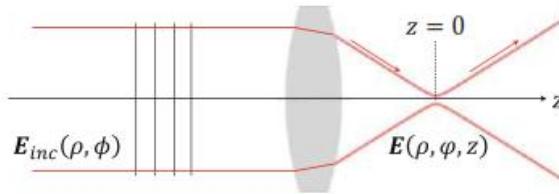
شکل ۱۵.۳: تصویربرداری میدان دور جسم "میکرون" که در شکل (۱۵.۲) نشان داده شده است. در اینجا از رابطه (۱۰.۳) برای محاسبه میدان‌های صفحه کانونی با  $n_3 = 1$ ,  $n_1 = 1.33$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  بازاء روزنے عددی مختلف استفاده کرده‌ایم. برای مقادیر بزرگ  $NA$  بخش بزرگتری از فضای- $k$  نمونه بردار شده و واضح فضائی افزایش یافته است.

علاوه بر این پرتو لیزر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \quad (15.3)$$

که در آن  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{E}}$  دامنه و بردار قطبش  $\hat{\mathbf{E}}$  را شامل می‌شود. در عبارت بالا  $w_0$  شعاع کمربند پرتو است. تبدیل فوریه توزیع میدان در  $z = 0$  را می‌توان بطور تحلیلی محاسبه کرد:

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2} - j(k_x x + k_y y)} dx dy = \mathbf{E}_0 \frac{w_0^2}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(k_x^2 + k_y^2)}$$

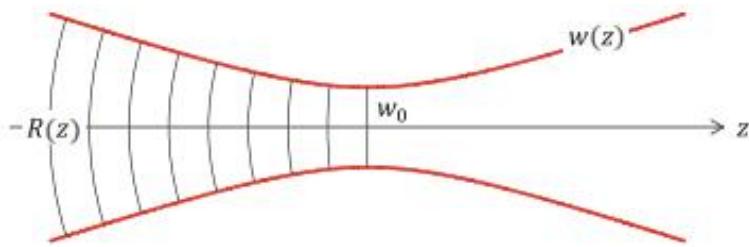


شکل ۷.۳: کانونی کردن میدان‌های ورودی. یک میدان ورودی با میدان الکتریکی  $E_{inc}$  از سمت چپ بر یک عدسی مت مرکز کننده می‌تابد و کانونی می‌شود. معادله (۱۳.۳) چگونگی محاسبه میدان  $(\rho, \phi, z)$  روی سمت کانون تشریح می‌کند.

که در آن از انتگرال گوس بهره‌برداری کرده‌ایم. با انتخاب پوش گوسی، نمایش طیف زاویه‌ای معادله (۴.۳) می‌شود:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0 \frac{w_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}w_0^2(x^2+y^2)} e^{-j[k_x x + k_y y + \left(k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}\right)z]} dk_x dk_y \quad (16.3)$$

که می‌توان آنرا بطور تحلیلی حل کرد. استخراج مفصل در تمرین ۵.۳ ترسیم شده است و به نظر می‌رسد که پارامترهای جدید  $z_0 = \frac{1}{2}kw_0^2$  را که در مختصات قطبی  $\rho$  و  $z$  معرفی کردیم، راحت‌تر است. سپس مشخصات میدان الکتریکی یک پرتو گوسی را بدست می‌آوریم.



شکل ۸.۳: شکل پرتو گوسی که از رابطه (۱۶.۳) محاسبه شده است. خطوط قرمز کمربند  $w(z)$  پرتو و خطوط سیاه شعاع انحنای  $R(z)$  برای مقادیر معلوم  $z$  است.

### میدان الکتریکی شکل پرتو گوسی

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left[ -\frac{\rho^2}{w^2(z)} \left( 1 + \frac{z}{z_0} \right) - jkz \right] \quad (17.3)$$

شعاع پرتو  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2}$  است. شکل (۸.۳) شمای میدان الکتریکی را نشان میدهد. در اصل، عبارت بالا را می‌توان حتی بصورت واضح‌تری عنوان کرد، برای مثال به بخش ۳.۳ مرجع [۶.۳] یا تمرین ۶.۳ مراجعه کنید، اما در اینجا جزئیات را حذف کرده‌ایم. چند نکته هست که ذکر آن در باره رابطه (۱۷.۳) ارزشمند است:

- پرتوهای گوسی جواب‌های مناسب برای معادلات ماکسول نیستند. زیرا تقریب موازی محور آنها شامل مولفه‌های امواج طولی نیز هستند.
- کانونی کردن قوی پرتو، مربوط به مقادیر کوچک  $w_0$  است، در نتیجه منجر به عدم تمرکز سریع میدان‌ها می‌شود.
- با توجه به پرتوهای بدون تمرکز، پرتو گوسی یک تغییر فاز را نشان می‌دهد، که معمولاً به عنوان تغییر فاز گوی<sup>۹</sup> نشان داده می‌شود.

### مودهای لیزر

پرتوهای گوسی اغلب به عنوان تقریبی عالی برای مودهای لیزر هستند که می‌توانند در فواصل دور بدون پاشندگی قابل توجه در جهت عرضی منتشر شوند. برای مودهای لیزری مرتبه بالاتر اغلب بین مودهای عرضی مختلف تمایز قائل می‌شوند. **مودهای هرمیت-گوسی**. این مودها معمولاً از لیزرهای با کاواک مستطیلی و آینه‌های انتهائی بیرون می‌آیند. مودها با  $m$  و  $n$  گره<sup>۱۰</sup> در جهت  $x$  و  $y$  می‌توانند از مود اصلی معادله (۱۶.۳) بطبقه رابطه زیر تولید شوند:

$$E_{mn}^H(x, y, z) = w_0^{m+n} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} E(x, y, z). \quad (18.3)$$

از زیاری مشتق‌ها را می‌توان با توجه به این نکته ساده کرد که چندجمله‌ای‌های حاصل از  $x$  و  $y$  دقیقاً چندجمله‌ای هرمیت هستند. شکل (۹.۳) چند شکل میدان انتخاب شده را نشان می‌دهد. **مودهای لاغور-گوس** این مودها بطور معمول از لیزرهای با کاواک دایره‌ای و آینه‌های انتهائی خارج می‌شود. آنها را می‌توان به شیوه مشابه از رابطه زیر بدست آورد

$$E_{mn}^L(x, y, z) = k^n w_0^{2n+m} e^{-j k z} \left( \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \partial^n \partial z^n e^{j k z} E(x, y, z). \quad (19.3)$$

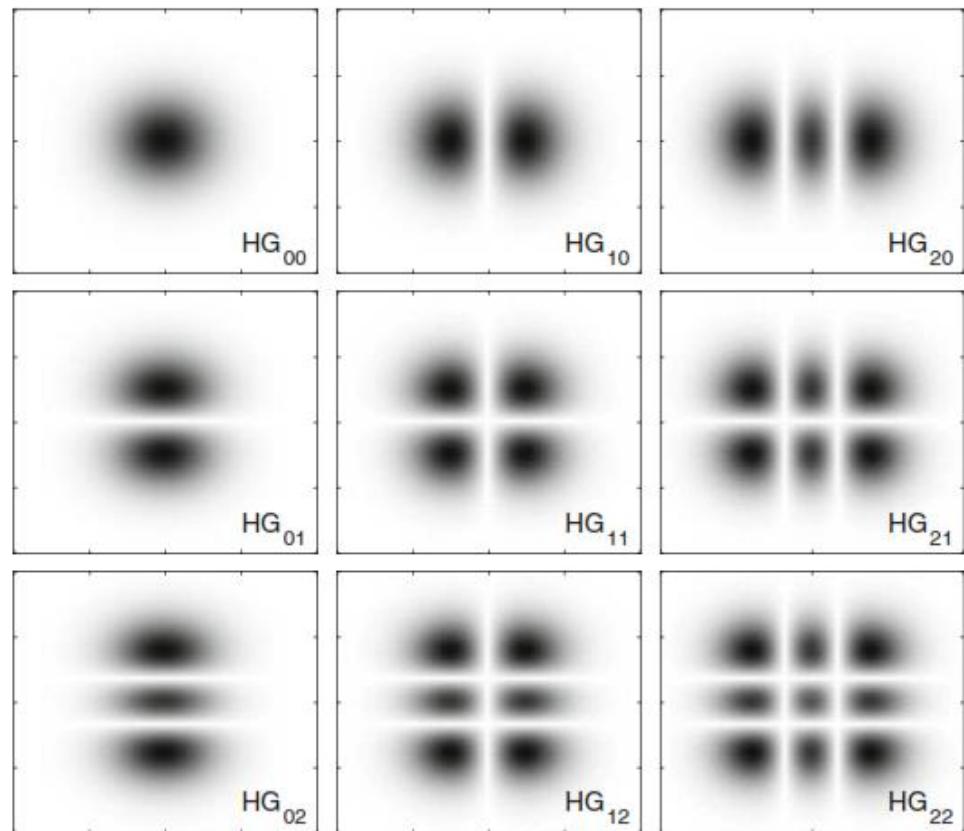
### ۵.۳ میدان‌های بشدت کانونی پرتو لیزر

سرانجام پرتو هرمیت-گوسی و لاغور-گوسی بشدت کانونی را از درون یک عدسی با روزنه عددی بالا در نظر می‌گیریم. با نمایش طیف زاویه‌ای میدان‌های کانونی که توسط رابطه (۱۲.۳) داده می‌شود شروع کرده و چند تقریب را معرفی می‌کنیم:

- تابش میدان دور بر کره مرجع گوسی بوسیله مود لیزر  $E(x, y, z = 0)$  تقریب زده می‌شود که تقریبی عالی است زیرا پاشندگی پرتو لیزر در جهت عرضی معمولاً بسیار کوچک است.
- ضریب انتقال عدسی تقریباً یک است.
- برای پرتو لیزر بردار قطبش را در نظر می‌گیریم.

<sup>۹</sup>Gouy phase shift

<sup>۱۰</sup>Node



شکل ۹.۳: چند نمونه انتخابی از پرتو هرمیت-گوسی، رابطه (۱۸.۳). مقادیر قدرمطلق میدان‌های الکتریکی در صفحه  $z = 0$  ترسیم شده است.

میدان لیزر ارسالی را مستقیماً پس از عبور از کره مرجع گوسی درنظر گیرید:

$$\mathbf{E}_{inc}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \cos^{1/2} \theta E_{mn}^H(f \sin \theta, \phi, 0) \mathbb{R}^{foc} \cdot \epsilon$$

که در آن  $n_{inc}$  و  $n$  بترتیب ضرایب شکست سمت لیزر وارد و نقطه کانونی، و  $f$  فاصله کانونی عدسی است.  $\mathbb{R}^{foc}$  ماتریس تبدیل رابطه (۲۷.۳) است که میدان ورودی را در کره مرجع منتشر می‌شود و  $\rho = f \sin \theta$  مختصات استوانه‌ای پرتو لیزر ورودی را با مختصات کروی برای کره مرجع مربوط می‌کند. در این صورت میدان‌های کانونی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

### میدان‌های بشدت کانونی پرتو لیزر

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \phi, z) &= \frac{j k f e^{j k f}}{2\pi} \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \int_0^{\theta_{max}} \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &\times \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{E}_{inc}(\theta, \phi) e^{j k z \cos \theta} e^{-j k \rho \sin \theta \cos(\phi - \varphi)}. \end{aligned} \quad (20.3)$$

اجازه دهید بطور خلاصه محاسبه این گونه انتگرال‌ها را در مثال مود اصلی با موج واردہ با بردار قطبیش  $\hat{\mathbf{x}}$  بحث کنیم،

$$\mathbf{E}_{00}^H = E_0 e^{-f^2 \sin^2 \theta / w_0^2} \hat{\mathbf{x}}$$

امحاسبه رابطه (20.3) بقرار زیر است.

- بردار قطبیش در مختصات دکارتی بیان شده است.

- از اتحادهای مثلثاتی برای جملات  $\mathbb{R}^{foc}$  که بصورت  $\cos n\phi$  و  $\sin n\phi$  ناشی شوند استفاده شده است. به رابطه (27.3) مراجعه کنید.

- انتگرال‌ها در زاویه سمت را می‌توان با استفاده از اتحادهای زیر انجام داد.

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{c} \sin n\phi \\ \cos n\phi \end{array} \right\} e^{jx \cos(\phi - \varphi)} d\phi = 2\pi j^n J_n(x) \left\{ \begin{array}{c} \sin n\phi \\ \cos n\phi \end{array} \right\} \quad (21.3)$$

که در آن  $J_n(x)$  تابع بسل مرتبه  $n$  است.

- سایر انتگرال‌های باقیمانده یک بعدی نسبت به  $\theta$  را بروش عددی حل می‌کنیم

با بیان بردار قطبیش، در مختصات دکارتی شروع کرده و برای بدست آوردن  $t^\rho = t^\phi = 1$  از اتحادهای مثلثاتی تمرین ۴.۳ استفاده می‌کنیم.

$$\mathbb{R}^{foc} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta) - (1 - \cos \theta) \cos 2\phi \\ -(1 - \cos \theta) \sin 2\phi \\ -2 \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

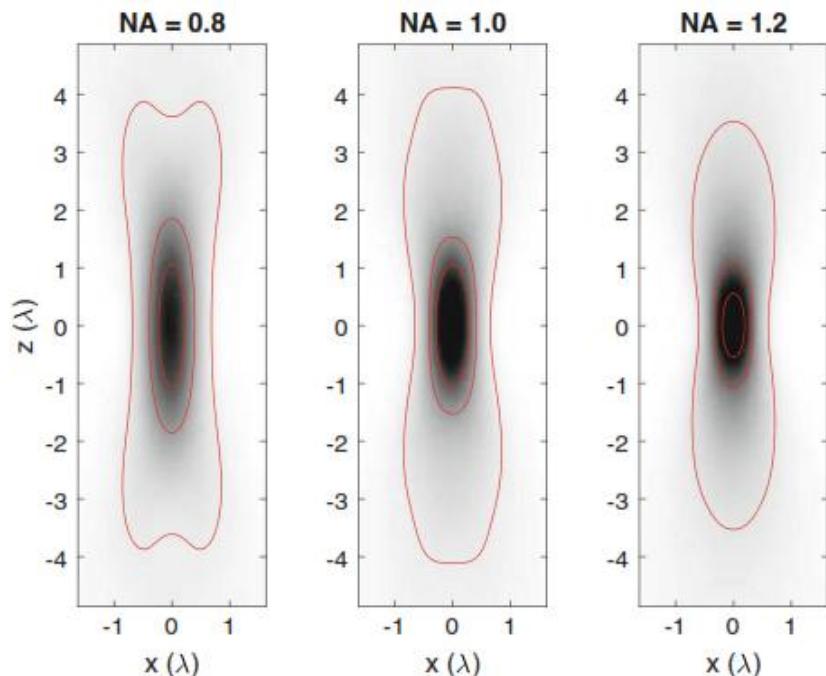
در آخر تابع زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{I}_m(g(\theta)) = j^n \int_0^{\theta_{max}} e^{-f^2 \sin^2 \theta / w_0^2} e^{-j k z \cos \theta} J_n(k \rho \sin \theta) g(\theta) \sin \theta \cos^{1/2} \theta d\theta \quad (22.3)$$

بنابراین، میدان مود اصلی لیزر که بهشدت کانونی شده است را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = -j k f e^{j k f} \sqrt{\frac{n_{inc}}{n_{foc}}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_0(1 + \cos \theta) - \mathcal{I}_2(1 - \cos \theta) \cos 2\phi \\ -\mathcal{I}_2(1 - \cos \theta) \sin 2\phi \\ -\mathcal{I}_1(\sin \theta) \cos \phi \end{pmatrix} \quad (23.3)$$

که محاسبه آن مستلزم محاسبه عددی سه انتگرال  $\mathcal{I}_0$ ,  $\mathcal{I}_1$  و  $\mathcal{I}_2$  است. شکل (۱۰.۳) نمودار شدت محاسبه شده را از رابطه (۲۳.۳) برای  $NA$ ‌های مختلف نشان می‌دهد. بطوریکه مشاهده می‌شود، با افزایش وزنه عددی، میدان‌ها بشدت متراکز شده، اما وقتی از  $z = 0$  دور می‌شود سریع‌تر واگرا می‌شود. در فصل بعد به نقاط بشدت کانونی شده لیزر در زمینه تله نوری<sup>۱۱</sup> باز می‌گردیم.



شکل ۱۰.۳: کانونی کردن مود لیزر  $E_{00}^H$  بازه مقادیر مختلف  $NA$  که از رابطه (۲۳.۳) محاسبه شده است. کانتورها را بازه ۱۰، ۱۵، ۸۰ درصد شدت بیشینه همراه با شکل شدت در صفحه  $xz$  گزارش می‌کنیم. از طول موج  $\lambda_0 = 620 nm$  با ضریب شکست محیط ۱.۳۳ استفاده شده است.

## ۶.۳ جزئیات تبدیل تصویربرداری و کانونی کردن

در این بخش جزئیات استخراج معادلات (۱۰.۳) و (۱۳.۳) که تصویر برداری و کانونی کردن میدان را توصیف می‌کند ارائه می‌کنیم.

### ۱.۶.۳ کانونی کردن میدان‌های دور

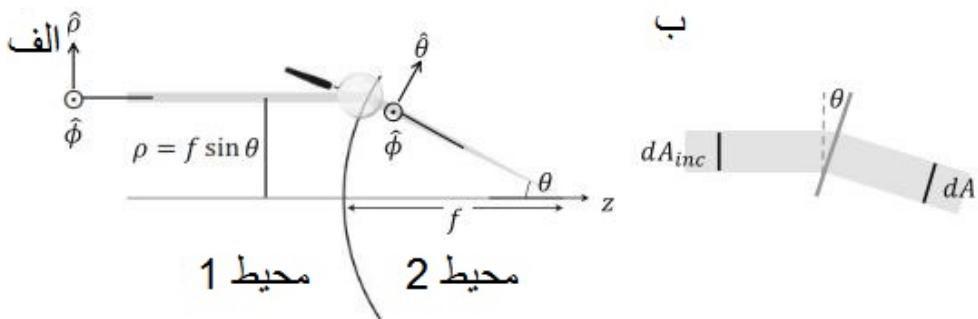
بحث خود را با حالت کانونی کردن شروع می‌کنیم. چیدمانی که در نظر خواهیم گرفت در شکل (۱۱.۳) نشان داده شده و شامل میدان‌های دور وارد بر کره مرجع گوسی است که آنها

<sup>۱۱</sup>Optical Trapping

بسوی کانون هدایت می‌شوند. برای دو محیط امپدانس، ضریب شکست و دستگاه مختصات زیر را استفاده می‌کنیم.

$\rho, \phi, z$	محیط ۱	$n_{inc}, Z_{inc}$
$r, \theta, \phi$	محیط ۲	$n, Z$

نکته مهم، مختصات سمت در هر دو دستگاه منطبق هستند. این به این دلیل است که هر دو



شکل ۱۱.۳:

دستگاه محور  $z$  را به عنوان محور نوری شریک هستند. با در نظر گرفتن تبدیل هنگام رفتن از عدسی به سمت کانون شروع می‌کنیم. نمای دقیق در شکل (۱۱.۳) نمایش داده شده است. ابتدا متوجه می‌شویم که مقطع عرضی دو محیط طبق  $\cos \theta = dA_{inc}/dA$  بهم مربوط هستند. بنابراین، از قانون توان معادله (۹.۳) بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2} Z_{inc}^{-1} |\mathbf{E}_{inc}|^2 dA = \frac{1}{2} Z^{-1} |\mathbf{E}|^2 \frac{dA}{\cos \theta}$$

اشعه ارسالی دارای دامنه زیر است:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \cos^{1/2} \theta |\mathbf{E}_{inc}| \quad (۲۴.۳)$$

که در آن نفوذپذیری را  $\mu_0$  فرض کرده و امپدانس را بر حسب ضریب شکست بیان می‌کنیم. در مرحله بعد، میدان‌های طرف عدسی (محیط ۱) را به مولفه شعاعی و سمت تجزیه می‌کنیم:

$$\mathbf{E}_{inc} = (\hat{\rho} \cdot \mathbf{E}_{inc}) \hat{\rho} + (\hat{\phi} \cdot \mathbf{E}_{inc}) \hat{\phi} = E_{inc}^\rho \hat{\rho} + E_{inc}^\phi \hat{\phi}$$

مولفه  $z$  صفر است زیرا امواج الکترومغناطیسی عرضی هستند. همانطور که در شکل (۱۱.۳) مشاهده می‌شود، وقتی از کره مرجع گوسی عبور می‌کند مولفه‌های سمت بیک دیگر تبدیل می‌شوند در حالی که مولفه  $\hat{\rho}$  به  $\hat{\theta}$  تبدیل می‌شود. برای این انتقال مولفه  $\hat{\phi}$  دارای مشخصه  $TE$  است در حالی که مولفه  $\hat{\rho}$  دارای مشخصه  $TM$  است. با جمع کردن تمام نتایج میدان‌های الکتریکی تبدیل شده زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \cos^{1/2} \theta \left( t^\rho E_{inc}^\rho \hat{\theta} + t^\phi E_{inc}^\phi \hat{\phi} \right) \quad (۲۵.۳)$$

که در آن  $t^\rho$  و  $t^\phi$  ضرایب انتقال برای  $TE$  و  $TM$  استفاده کردیم. در محاسبات خود همواره این ضرایب را با یک تقریب می‌زنیم

### ماتریس تبدیل

به نظر می‌رسد انجام کارهای اضافی در این مرحله راحت است. بطور خاص، بدنال ماتریس تبدیل  $\mathbb{R}^{foc}$  هستیم که بما اجازه میدهد معادله (۲۵.۳) زا بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \cos^{1/2} \theta \mathbb{R}^{foc} \cdot \mathbf{E}_{inc}.$$

با کار روی یک بردار، ماتریس  $\mathbb{R}^{foc}$  کارهای زیر را انجام می‌دهد:

- بردار را روی پایه اولین دستگاه مرجع تصویر می‌کند.

- ضرایب انتقال  $TE$  و  $TM$  را اضافه می‌کند، و

- بردار را دوباره در پایه دستگاه مرجع دوم بسط می‌دهد

برای ارائه مفید ماتریس تبدیل، باید دو دستگاه مختصات را بهم مربوط کنیم. در این حالت زوایای سمت یکسان هستند، در حالی که برای مختصات دیگر از  $\rho = f \sin \theta$  استفاده می‌کنیم. ماتریس تبدیلی که خواص بالا را داشته باشد می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\mathbb{R}^{foc} = t^\rho \left( \hat{\theta} \cdot \hat{\rho}^T \right) + t^\phi \left( \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}^T \right),$$

که در آن  $T$  نشانده ترانهاده (ترانسپوزه)<sup>۱۲</sup> جمله قبلی است. برای محاسبه صریح ماتریس، بردارهای واحد مختلف را در مختصات دکارتی بیان می‌کنیم. برای مشاهده جزئیات به تمرین ۳.۳ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\theta} &= \cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (26.3)$$

سپس بلافضله به ماتریس تبدیل عدسی کانونی می‌رسیم که میدان‌ها را قبل و بعد از عبور از کره مرجع گوسی از طریق رابطه زیر بهم مربوط می‌کند.

$$\mathbb{R}^{foc} = \begin{pmatrix} t^\rho \cos^2 \phi \cos \theta + t^\phi \sin^2 \phi & \frac{1}{2}(t^\rho \cos \theta - t^\phi) \sin 2\phi & 0 \\ \frac{1}{2}(t^\rho \cos \theta - t^\phi) \sin 2\phi & t^\rho \sin^2 \phi \cos \theta + t^\phi \cos^2 \phi & 0 \\ -t^\rho \cos \phi \sin \theta & -t^\rho \sin \phi \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (27.3)$$

چگونه میدان‌های کانونی را محاسبه کنیم. فرض کنید که میدان دور  $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$  بعداز عبور از کره مرجع گوسی به شعاع کانونی  $f$  می‌شناسیم. در ادامه نحوه محاسبه میدان‌ها در موقعیت طرف کانون (محیط ۲) را نشان می‌دهیم. نقطه شروع معادله (۲۴.۳) است که میدان‌های الکتریکی را به مولفه‌های فوریه از طریق رابطه زیر بهم مربوط می‌کند.

<sup>۱۲</sup>Transpose

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int_{k_x^2 + k_y^2 < k_{max}^2} e^{-j(k_x x + k_y y - k_z z)} \tilde{\mathbf{E}}_0(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

که در آن  $k_{max}$  عدد موج قطع است که بوسیله زاویه بازکننده عدسی تعیین می‌شود. توجه کنید که در نما برای جمله  $k_z z$  علامت منفی انتخاب کردیم زیرا اکنون در مقایسه با نمایش طیف زاویه‌ای رابطه (۲۴.۳) انتشار معکوس شده است، یعنی از کره مرجع گوسی بسوی کانون است. در مرحله بعد از معادله (۲۸.۳) استفاده می‌کنیم که میدان‌های دور را به مولفه‌های فوریه مرتبط می‌کند،

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}} = 2\pi j k_z \tilde{\mathbf{E}}_0(k \hat{r}_x, k \hat{r}_y))$$

این را عبارت را می‌توانیم ترکیب کنیم:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{-j}{2\pi} \int_{k_x^2 + k_y^2 < k_{max}^2} e^{-j(k_x x + k_y y - k_z z)} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}) \frac{1}{k_z} dk_x dk_y \quad (۲۸.۳)$$

برای ادامه کار، دو تغییر مختصات را انجام می‌دهیم. برای انتگرال‌گیری فضای- $k$ - مختصات کروی را معرفی می‌کنیم:

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = k \sin \theta \sin \phi, \quad k_z = k \cos \theta$$

انتگرال‌گیری دو بعدی  $dk_x dk_y$  را باید با استفاده از ژاکوبین تبدیل کرد:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial \theta} & \frac{\partial k_x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial k_y}{\partial \theta} & \frac{\partial k_y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cos \theta \cos \phi & -k \sin \theta \sin \phi \\ k \cos \theta \sin \phi & k \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} = k^2 \sin \theta \cos \theta$$

بنابراین، برای موقعیت کانون، به مختصات استوانه‌ای روی می‌آوریم؛  $(x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \varphi, z)$ . با این تغییر، می‌توانیم جمله نمائی (۲۸.۳) را بصورت زیر بیان کنیم:

$$k_x x + k_y y = k \sin \theta \cos \phi \rho \cos \varphi + k \sin \theta \sin \phi \rho \sin \varphi = k \rho \sin \theta \cos(\phi - \varphi)$$

این تبدیل مختصات بما اجازه می‌دهد تا رابطه (۲۸.۳) بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{-jk}{2\pi} \int_0^{\theta_{max}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{F}(\theta, \phi) e^{jkz \cos \theta} e^{-jk\rho \sin \theta \cos(\phi - \varphi)} \quad (۲۹.۳)$$

که در آن  $\theta_{max}$  زاویه بازکننده عدسی است. مرحله آخر ارتباط میدان‌های دور ورودی و پس از عبور از کره مرجع گوسی از طریق ماتریس تبدیل (۲۷.۳) است:

$$\left( \frac{e^{-jkf}}{f} \right) \mathbf{F}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \sqrt{\cos \theta} \mathbb{R}^{foc} \cdot \mathbf{E}_{inc}(f \sin \theta, \phi)$$

با وارد کردن این میدان دور در رابطه (۲۹.۳) در این صورت ما را به عبارت نهائی (۱۳.۳)، که میدان ورودی  $\mathbf{E}_{inc}$  را به میدان کانونی مربوط می‌کند، می‌رساند.

### ۲.۶.۳ تصویربرداری میدان‌های دور

اکنون به مشکل پیچیده‌تر تصویربرداری از میدان دور (شکل ۵.۲) توسط دو عدسی باز می‌گردیم. ماشین آلاتی که مجهز برای کانونی کردن میدان است بسیار شبیه به هم هستند. برای سه محیط ضریب شکست، امپدانس و دستگاه مختصات زیر استفاده می‌شوند:

$\rho_1, \theta_1, \phi$	مختصات کروی	محیط ۱
$\rho_2, \phi, z_2$	مختصات استوانه‌ای	محیط ۲
$\rho_3, \theta_3, \phi$	مختصات کروی	محیط ۳

در آنجا دوباره زوایای سمت در تمام دستگاه‌های مرجع منطبق هستند. سپس اشعه را از طریق دستگاه عدسی‌ها ردیابی می‌کنیم.

- **شیئی به عدسی** برای انتقال اشعه از جسم بطرف عدسی، سطح مقطع عرضی را در دو محیط از طریق  $\cos \theta_1 = dA_2/dA_1$  بهم مربوط می‌کنیم. بنابراین از رابطه توان (۹.۲) داریم:

$$\frac{1}{2} Z_1^{-1} |\mathbf{E}_1|^2 dA_1 = \frac{1}{2} Z_2^{-1} |\mathbf{E}_2|^2 \cos \theta_1 dA_1$$

اشعه ارسالی به محیط دوم دارای مقدار زیر است.

$$|\mathbf{E}_2| = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos^{-1/2} \theta_1 \mathbf{E}_1, \quad (30.3)$$

که در آن دوباره تمام نفوذپذیری‌ها را  $\mu_0$  در نظر گرفته و امپدانس‌ها را بر حسب ضرایب شکسا بیان می‌کنیم. وقتی از کره مرجع گوسی می‌گذریم، مولفه‌های سمت به یکدیگر تبدیل می‌شوند. در آنجا مولفه  $\hat{\theta}_1$  به مولفه  $\hat{\theta}_2$  تبدیل می‌شود. با قراردادن تمام نتایج پیش‌هم، میدان الکتریکی در ناحیه عدسی را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}_2 = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos^{-1/2} \theta_1 \tilde{t} \left( E_1^\theta \hat{\rho}_2 + E_1^\phi \hat{\phi} \right) \quad (31.3)$$

ضرایب  $\tilde{t}$  برای عبور میدان الکتریکی عرضی از فصل مشترک است.

- **عدسی به تصویر** برای انتقال عدسی به تصویر بهمان شیوه‌ای که در بخش ۳.۳ بحث شد عمل می‌کنیم، و خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}_3 = \sqrt{\frac{n_2}{n_3}} \cos^{-1/2} \theta_3 \left( t^\rho E_2^\rho \hat{\theta}_3 + t^\phi E_2^\phi \hat{\phi} \right). \quad (32.3)$$

- **شیی به تصویر** دو معادله بالا را می‌توان با هم ترکیب کرد تا میدان‌های روی جسم و تصویر را بر طبق رابطه زیر بهم مربوط کرد:

$$\mathbf{E}_3 = \sqrt{\frac{n_1}{n_3}} \sqrt{\frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_1}} \left( t^\theta E_1^\theta \hat{\theta}_3 + t^\phi E_1^\phi \hat{\phi} \right). \quad (33.3)$$

که در آن  $t^\theta$  و  $t^\phi$  ضرایب انتقال برای کل ساختار است.

شبیه با حالت کانونی کردن، اکنون می‌توانیم یک ماتریس تبدیل برای دستگاه تصویربرداری معرفی کنیم:

$$\mathbb{R}^{im} = t^\theta \left( \hat{\theta}_3 \cdot \hat{\theta}_1^T \right) + t^\phi \left( \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}^T \right)$$

که میدان‌های دو طرف دستگاه تصویربرداری را طبق رابطه زیر بهم مربوط می‌کند.

$$\mathbf{E}_3 = \sqrt{\frac{n_1}{n_3}} \sqrt{\frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_1}} \mathbb{R}^{im} \cdot \mathbf{E}_1.$$

گاهی اوقات می‌توان انتگرال‌گیری را بر روی مختصات سمت به صورت تحلیلی انجام داد، به شرطی که انتگرال از شکل  $\sin n\phi, \cos n\phi$  باشد. اما شامل مربع یا حاصل‌ضربی از توابع مثلثاتی نباشد. پس از چند دستکاری ساده، که در تمرین ۴.۳ ترسیم شده است، ماتریس تبدیل را برای عدسی‌های تصویربرداری بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{xx}^{im} &= \frac{1}{2} \left\{ (\tilde{t}^\theta \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \tilde{t}^\phi) + (\tilde{t}^\theta \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \tilde{t}^\phi) \cos 2\phi \right\} \\ \mathcal{R}_{xy}^{im} &= \frac{1}{2} (\tilde{t}^\theta \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \tilde{t}^\phi) \sin 2\phi \\ \mathcal{R}_{xz}^{im} &= -\tilde{t}^\theta \cos \phi \sin \theta_1 \cos \theta_3 \\ \mathcal{R}_{yx}^{im} &= \frac{1}{2} (\tilde{t}^\theta \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \tilde{t}^\phi) \sin 2\phi \\ \mathcal{R}_{yy}^{im} &= \frac{1}{2} \left\{ (\tilde{t}^\theta \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \tilde{t}^\phi) - (\tilde{t}^\theta \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \tilde{t}^\phi) \cos 2\phi \right\} \quad (۳۴.۳) \\ \mathcal{R}_{yz}^{im} &= -\tilde{t}^\theta \sin \phi \sin \theta_1 \cos \theta_3 \\ \mathcal{R}_{zx}^{im} &= -\tilde{t}^\theta \cos \phi \cos \theta_1 \cos \theta_3 \\ \mathcal{R}_{zy}^{im} &= -\tilde{t}^\theta \sin \phi \cos \theta_1 \sin \theta_3 \\ \mathcal{R}_{zz}^{im} &= -\tilde{t}^\theta \sin \theta_1 \sin \theta_3 \end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم کل پردازش تصویربرداری را کنار هم قرار دهیم. نقطه شروع توسط معادله (۳۹) داده شده است که می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_3(\rho_3, \varphi_3, z) &= \frac{-jk_3}{2\pi} \times \int_0^{\theta_{3,max}} \sin \theta_3 d\theta_3 \\ &\times \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{F}_3(\theta_3, \phi) e^{jk_3 \cos \theta_3 z} e^{-jk_3 \rho_3 \sin \theta_3 \cos(\phi - \varphi_3)}.\end{aligned}$$

در اینجا  $\mathbf{F}_3$  میدان دور در طرف تصویر است. برای انجام این معادله، باید میدان‌های دور را بر حسب  $\theta_1$  نه  $\theta_3$  بیان کنیم. همانطور که در شکل (۵.۳) مشاهده می‌شود، فاصله اشعه مزدوج از محور نوری در سمت جسم و تصویر یکسان است و بدست می‌آید:

$$f \sin \theta_1 = f' \sin \theta_3 \quad (35.3)$$

با گرفتن مشتق از دو طرف رابطه خواهیم داشت:

$$f \cos \theta_1 d\theta_1 = f' \cos \theta_3 d\theta_3 \implies d\theta_3 = \frac{f \cos \theta_1}{f' \cos \theta_3} d\theta_1 \xrightarrow{f' \gg f} \frac{f}{f'} \cos \theta_1 d\theta_1$$

در عبارت آخر، از تقریب  $\cos \theta_3 \approx 1$  استفاده شده است که معمولاً برای  $f' \gg f$  صادق است. عبارت در در تابع نمائی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$k_3 \rho_3 \sin \theta_3 = \left( \frac{n_3}{n_1} k_1 \rho_3 \right) \left( \frac{f}{f'} \sin \theta_3 \right) = k_1 \frac{\rho}{M} \sin \theta_1$$

که در آن ضریب بزرگنمائی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$M = \frac{n_1}{n_3} \frac{f'}{f}$$

دامنه میدان‌های دور را می‌توان از طریق رابطه زیر بهم مرتبط ساخت:

$$\left( \frac{e^{-jk_3 f'}}{f'} \right) \mathbf{F}_3 \approx \sqrt{\frac{n_1}{n_3}} \cos^{-1/2} \theta_1 \mathbb{R}^{im} \cdot \left( \frac{e^{-jk_1 f}}{f} \right) \mathbf{F}_1(\theta_1, \phi),$$

که در آن از تقریب  $\cos \theta_3 \approx 1$  استفاده شده است. سرانجام تمام آنها را پیش هم قرار داده تا به رابطه (۱۰.۳) برای نگاشت از میدان‌های دور در سمت جسم به میدان‌های کانونی سمت تصویر، میرسیم.

شبیه سازی تصویربرداری در کامپیوترا رابطه بدست آمده در این فصل برای تصویربرداری عبارت بسیار مفیدی برای محاسبه میدان تصویر  $\mathbf{E}^{im}$  وقتی میدان جسم  $\mathbf{E}^{obj}$  در صفحه  $z = 0$  معلوم باشد، است. در ادامه فرض می‌کنیم که میدان‌های الکتریکی در موقعیت شبکه مستطیلی، همان طور که معمولاً برای محاسبات عددی صادق است، ارائه می‌شود.

$$\text{میدان تصویر در موقعیت } (Mx_i, My_i) \quad \mathbf{E}_i^{im}$$

$$\text{میدان جسم در موقعیت } (x_i, y_i) \quad \mathbf{E}_i^{obj}$$

در اینجا  $M$  بزرگنمائی دستگاه عدسی است. در این صورت رابطه تصویربرداری معادله (۱۰.۳) نگاشت خطی بین دو میدان را بر طبق رابطه زیر تدارک می‌نماید

$$E_{i\alpha}^{im} = T_{i\alpha,j\beta} E_{j\beta}^{obj} \quad (36.3)$$

که در آن  $\alpha, \beta$  نمایشگر مختصات دکارتی است که از قرارداد جمع اనیشتون استفاده شده است. ممکن است کسی دوست داشته باشد تا میدان‌های تصویر را با استفاده از عبارت بالا محاسبه کند، و در واقع این کار را در قسمت‌های بعدی کتاب انجام خواهیم داد. با این حال، اگر کسی از معادله (۳۶.۳) مستقیماً برای تصویربرداری تعداد بسیار زیاد  $n$  موقعیت، مثلًا در حدود یک میلیون، استفاده کند، تقریباً مطابق با وضعیت نشان داده شده در شکل (۸.۳)، متوجه می‌شوید که نگاشت محاسباتی بسیار کند می‌شود. دلیل این امر این است که تبدیل بالا شامل ضرب ماتریس است و بنابراین به  $n^2$  عملیات نیاز دارد، یا به‌اصطلاح علوم کامپیوتر الگوریتم دارای  $\mathcal{O}(n^2)$  پیچیدگی است.

خوبی‌بختانه رویکرد متفاوتی با  $\mathcal{O}(n)$  پیچیدگی وجود دارد. این مبتنی بر تبدیل فوریه سریع<sup>۱۳</sup> FFT است، یک الگوریتم قابل توجه است که مجله محاسبات در علوم و مهندسی IEEE جزء ده آلگوریتم برتر قرن بیستم کنجانیده شده است [۴]. این الگوریتم اجزه می‌دهد تا تبدیل فوریه را با  $\mathcal{O}(n \log n)$  پیچیدگی انجام شود که برای ضرب ماتریس بطور قابل توجهی سریعتر از  $\mathcal{O}(n^2)$  است. از آنجا که تبدیل تصویر برداری ریشه عمیق در تبدیل فوریه دارد، در ادامه تصویربرداری را مجددًا مرور کرده و نحوه انجام  $\mathcal{O}(n)$  عملیات را نشان خواهیم داد. اصل آن بر اساس روابط زیر است:

$$\mathbf{E}_i^{obj} \xrightarrow[FFT]{} \tilde{\mathbf{E}}_i \longrightarrow \dots \xrightarrow[FFT^{-1}]{} \mathbf{E}_i^{im}.$$

با میدان‌های جسم که به فضای عددموج تبدیل می‌شوند شروع می‌کنیم. بعداً با تعدادی عملیات روی مولفه‌های فوریه عمل کرده تا کارائی دستگاه عدسی را، فبل از اینکه به میدان‌های واقعی  $\mathbf{E}_i^{im}$  باز گردیم، شبیه سازی کنیم. تبدیلات مختلف این الگوریتم را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- **تبدیل فوریه** این آلگوریتم با تبدیل فوریه سریع میدان‌های جسم شروع می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{E}}_i \alpha^{obj} = \mathcal{F}\{\mathbf{E}^{obj}\}$$

نکته ظرفی وجود دارد که چگونه می‌توان عددموج گستته FFT را به فضای عددموج پیوسته تحت تحلیل  $k_i$  مرتبط کرد و خوانندگان علاقمند را برای بحث کامل به ادبیات تخصصی ارجاع می‌دهیم [۴].

- **میدان‌های دور طرف جسم** تبدیل فوریه میدان‌ها را می‌توان با دامنه میدان‌های دور با استفاده از رابطه (۸.۳) مربوط کرد، و خواهیم داشت

$$\mathbf{F}_{i\alpha} = 2\pi j k_{z,i} \theta_{step} (k_{max} - |\mathbf{k}_i|) \tilde{\mathbf{E}}_{i\alpha}^{obj}$$

که در آن  $k_{max} = n_1 k_0 \sin \theta_{max} = N A k_0 \theta_{step}$  و در اینجا  $\theta_{step}$  تابع پله واحد هویسايد است.

- **عدسی‌ها** میدان‌هایی که باید از طریق دستگاه عدسی با استفاده از نور هندسی و قانون شدت منتشر شوند، به رابطه (۳۳.۲) رجوع کنید،

$$\left( \frac{e^{-jk'f'}}{f'} \right) \mathbf{F}_{i\alpha}^{im} \approx \left( \frac{e^{-jkf}}{f} \right) \sqrt{\frac{n}{n'}} \cos^{-1/2} \theta_i \left( \tilde{t}_i^\theta F_i^\theta \hat{\rho}_{i\alpha} + \tilde{t}_i^\phi F_i^\phi \hat{\phi}_{i\alpha} \right).$$

مشارکت‌های متفاوت این رابطه دارای معانی زیر است:

<sup>۱۳</sup>Fast Fourier Transform (FFT)

- از  $k$  و  $n$  برای طرف جسم و از  $k'$  و  $n'$  برای طرف تصویر استفاده می‌کنیم.
- بردارهای واحد  $\hat{\theta}_i = \cos \phi_i \hat{x} + \sin \phi_i \hat{y}$  طرف جسم تعریف می‌شوند (به تمرین ۸.۳ مراجعه کنید).
- تصویر بردارهای میدان دور روی بردارهای واحد  $F_i^\theta, F_i^\phi$ .

• **میدان‌های سمت تصویر** مولفه‌های فوریه در طرف تصویر را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\tilde{E}_{i\alpha}^{im} = \frac{-j}{2\pi k'} F_{i\alpha}^{im}$$

که در آن از تقریب  $k' \approx k'_{i,z}$  با توجه به تقریب موازی محور استفاده شده است.

- **تبديل فوریه معکوس** سرانجام، میدان‌های تصویر را از طریق عکس تبدیل فوریه سریع بدست می‌آوریم:

$$\tilde{E}_{i\alpha}^{im} = \frac{1}{M^2} \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\mathbf{E}}^{im}\},$$

که در آن  $M$  ضریب بزرگنمائی تعریف شده در رابطه (۱۱.۲) است. عامل پیشین بدین علت است که در عبارت تبدیل میدان‌های دور به میدان‌های تصویر، معادله (۲۸.۲)، باید  $dk_x dk_y dk'_x dk'_y$  را به مربوط کنیم تا با قیاس کامل با استخراج عبارت تصویر برداری معادله (۱۰.۳)، از تبدیل معکوس فوریه استفاده کنیم.

## تمرینات

این کتاب به همراه مجموعه‌ای از فایل‌های متلب<sup>۱۴</sup> ارائه می‌شود که از آنها به عنوان جعبه ابزار NANOPT Toolbox (مخفف کلمه "نانو اپتیک") یاد می‌کنیم و می‌توانید آنها را در صفحه وب<sup>۱۵</sup> ناشر یا صفحه وب نویسنده در دانشگاه گراتس<sup>۱۶</sup> بارگیری کنید. جعبه ابزار همراه با شرح شیوه نصب و استفاده از آن ارائه می‌شود. کُد<sup>۱۷</sup> تا حد امکان ساده و ابتدائی است و تمرکز اصلی نمایش نحوه اجرای روش‌های خاصی را که در این کتاب مورد بحث قرار گرفته به صورت عددی پیاده‌سازی کرد. چندین تمرین کتاب در جعبه ابزار اجرا می‌شود و معمولاً به فایل‌های خاصی اشاره می‌کنیم که باید توسط خواننده اصلاح شوند.

- **تمرین ۱** با استفاده از فایل جعبه ابزار نانو اپتیک demomicron01.m، شکل (۳.۳) را بدست آورید. برای تحقیق نکات زیر، کد اصلی را اصلاح کنید:

۱. اگر دو قطبی‌ها در جهت  $x$ ‌ها باشند، چه اتفاق می‌افتد؟ میدان‌ها را در همان صفحه مانند شکل (۳.۲) محاسبه کنید.
۲. اگر اندازه حروف با ضریب ده افزایش یابد، چه اتفاق می‌افتد؟

- **تمرین ۲** با استفاده از فایل جعبه ابزار نانو اپتیک demomicron02.m، شکل (۶.۳) را بدست آورید. برای تحقیق نکات زیر، کد اصلی را اصلاح کنید:

<sup>۱۴</sup>MATLAB

<sup>۱۵</sup>Webpage

<sup>۱۶</sup>University of Graz

<sup>۱۷</sup>Code

۱. اگر دو قطبی‌ها در جهت  $x$  باشند، چه اتفاق می‌افتد؟ همان مقدار  $NA$  شکل (۳) استفاده کنید.

۲. اگر اندازه حروف با ضریب ده افزایش یابد، چه اتفاق می‌افتد؟

۳. در مقداردهی اولیه نمایش طیف زاویه‌ای میدان‌ها را با  $0 \leq k_x \leq k_z$  تا صفر تنظیم کنید.  
این تصویر چگونه تغییر می‌کند؟ نتیجه را تفسیر کنید.

• تمرین ۳ در مختصات کروی  $(\rho, \phi, \theta)$ ، از بردار  $\mathbf{r}$  شروع کرده و روابط زیر را محاسبه کنید.

$$\rho = \frac{d\mathbf{r}}{d\rho}, \quad \phi = \frac{d\mathbf{r}}{d\phi}, \quad \theta = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}.$$

هر بردار را بر نورم خودش تقسیم کرده و بردارهای واحد را محاسبه کرده و نتیجه را با رابطه (۲۶.۳) مقایسه کنید.

• تمرین ۴ با استفاده از نتایج تمرین ۳.۳ ماتریس تبدیل  $\mathbb{R}^{loc}$  رابطه (۲۷.۳) را بدست آورید. می‌توانید از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده کنید.

$$\sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi, \quad \cos^2 \phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi), \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi).$$

• تمرین ۵ شکل میدان الکتریکی رابطه (۱۶.۳) را برای پرتو گوسی بدست آورید. برای این کار از انتگرال گوسی تمرین ۴.۱ استفاده کنید.

• تمرین ۶ ثابت کنید که شکل میدان الکتریکی برای پرتو گوسی رابطه (۱۷.۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left[ -\frac{\rho^2}{w^2(z)} \left( -jkz - \eta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right) \right]$$

که شاعع شکل موج  $\eta(z) = \arctan(z/z_0)$  و تصحیح فاز  $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$  است.

• تمرین ۷ با استفاده از فایل جعبه ابزار نانو اپتیک demomicron04.m و demomicron02.m میدان‌های کانونی شده شکل (۱۰.۳) را تحقیق کنید.

۱. وقتی مقدار  $NA$  تغییر کند چه اتفاق می‌افتد؟

۲. وقتی مرتبه مودهای لیزر تغییر کند چه اتفاق می‌افتد؟

۳. از نظر عددی نشان دهید که شدت نور لیزر کانونی شده در صفحه  $xy$  به  $z$  بستگی ندارد. این نتیجه را تفسیر کنید.

• تمرین ۸ ثابت کنید که برای ماتریس تبدیل برای تصویر و برای  $f'$ ، مولفه  $\hat{\theta}$  در سمت جسم به مولفه  $\hat{m}$  در سمت تصویر، تبدیل می‌شود. آن از رابطه (۳۴.۳) با قرار دادن  $\cos \theta_3 \approx 1$  و  $\sin \theta_3 \approx 0$  بدست می‌آید.



## فصل ۴

### تقارن و نیروها

بدون امی نوتر<sup>۱</sup> و قضیه مشهور او کجا بودیم؟ او به علم فیزیک با مرتبط کردن تقارن به قوانین بقاء و بر عکس، یک اصل راهبردی ضروری داده است.

در این فصل مفاهیم قضیه نیتر<sup>۲</sup> را برای معادلات ماکسول مورد بحث قرار می‌دهیم. در فضای آزاد، مومنتوم، مومنتوم زاویه‌ای، و انرژی امواج الکترومغناطیسی مقادیر حفظ شده<sup>۳</sup> هستند. در حضور ماده می‌توان از این حقیقت که الکترودینامیک یک نظریه میدان است، بهره برد. فرض کنید تمام مواد مورد بررسی در حجم معین  $\Omega$  قرار دارند. با تعیین شار مومنتوم، مومنتوم زاویه‌ای یا انرژی از طریق مرز  $\partial\Omega$  که حجم را محصور می‌کند، بلافاصله می‌توانیم اندازه مقادیر انتقال یافته از نور به ماده و یا بر عکس را بدست آوریم. تحلیلی که در این فصل ارائه شده است مستقیماً بر معادلات ماکسول استوار است و این مزیت را دارد که رویکرد ما را ساده کرده اما این عیب را دارد که اتصال آن به تقارن در مقایسه با سایر طرح‌ها، به ویژه آنها که بر اساس توابع لاکرانژ<sup>۴</sup> هستند، کمتر آشکار است.

#### ۱.۴ نیروهای نوری

یک فوتون مومنتوم  $\hbar k$  را حمل می‌کند. برای نوری با طول موج  $nm$  ۶۰۰ تقریباً داریم:

$$\hbar k \approx 10^{-34} \frac{2\pi}{600 \times 10^{-9}} \approx 10^{-27} mkg s^{-1} \quad (1.4)$$

هرگاه نور توسط جسم دیالکتریک پراکنده<sup>۵</sup> یا پراش<sup>۶</sup> شود، بخشی از مومنتوم فوتون از نور به ماده منتقل می‌شود. در حالی که نیروهای نور نقش مهمی در اجام ماکروسکوپی ندارند، می‌توانند تاثیر قابل توجهی بر اجسام نانو و کوچک داشته باشند. نیروهای معمولی تولید شده توسط پرتو لیزر بشدت کانونی شده می‌توانند در محدوده فمتو تا پیکو نیوتن باشند، که برای

<sup>۱</sup>Emmy Noether

<sup>۲</sup>Noether's theorem

<sup>۳</sup>Conserved Quantities

<sup>۴</sup>Lagrange functions

<sup>۵</sup>Scattered

<sup>۶</sup>Diffracted

بهدام انداختن ذرات با وسائل نوری کاملاً کافی است. در دو دهه گذشته موچین نوری<sup>۷</sup> برای بهدام انداختن و دستکاری ذرات میکروسکوپی پدیدار شده است. بعداً در مورد چند کاربرد انتخابی بحث خواهیم کرد، اما خوانندگان علاقمند را بر کسب جزئیات بیشتر به مراجع [۱۰، ۹] ارجاع می‌دهیم.

اصول اساسی تله نوری<sup>۸</sup> را می‌توان بر اساس معادلات ماکسول و تقارن‌های زیرین آن به خوبی درک کرد. در این فصل نیروهای نوری را در سه چهارچوب مختلف شرح خواهیم داد.

- **تقریب دوقطبی** برای ذرات خیلی کوچکتر از طول موج می‌توان از تقریب دوقطبی استفاده کرده و ذرات قطبی شده را در حضور میدان‌های نوری قوی به عنوان یک دوقطبی نقطه‌ای توصیف کرد. برای جزئیات بیشتر به بخش ۱.۱.۴ مراجعه کنید.

- **نور هندسی** برای ذرات خیلی بزرگ‌تر از طول موج می‌توان از چهارچوب نور هندسی استفاده کرد که شبیه حالت کانونی کردن نور است که در فصل قبلی بحث شد. برای جزئیات به بخش ۴.۱.۲ مراجعه کنید.

- **نور موجی** برای ذرات با اندازه متوسط باید از معادلات کامل ماکسول استفاده کرد. همان‌طور که در بخش ۵.۴ بحث خواهد شد، نیروها را می‌توان از تانسور تنش<sup>۹</sup> ماکسول بدست آورد.

### ۱.۱.۴ تقریب دوقطبی

ابتدا یک ذره قطبی شده با اندازه بسیار کوچکتر از طول موج نور را در نظر بگیرید. بعداً مشخص می‌کنیم که چگونه این ذره قطبی می‌شود، در حال حاضر کافی است فرض کنیم که دارای مقداری گشتاور دو قطبی p است. به عنوان یک مدل کلی، دو قطبی را با دو ذره با بار q<sup>±</sup> توصیف می‌کنیم که توسط بردار فاصله s از هم جدا شده‌اند (شکل ۱.۴). گشتاور دو قطبی p = qs است و مختصات مرکز جرم را با r نشان می‌دهیم. با ایت کار، بارها، مختصات و سرعت دو ذره تشکیل دهنده دوقطبی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$q_1 = -q, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}$$

$$q_2 = +q, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{s}}$$

نیروی الکترومغناطیسی و بین اتمی f که بر روی دو ذره اثر می‌کند خواهد بود:

$$\mathbf{F}_1 = -q [\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_1)] + \mathbf{f}_{12}$$

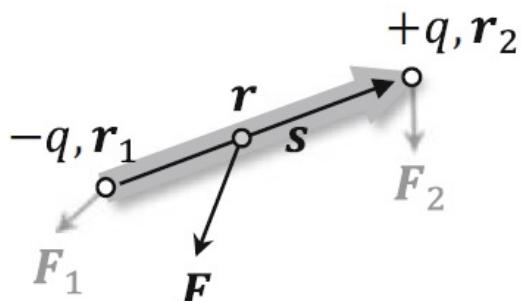
$$\mathbf{F}_2 = +q [\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_2)] + \mathbf{f}_{21}$$

برای دوقطبی‌های به اندازه کافی کوچک می‌توان میدان الکتریکی را در اطراف مرکز جرم r

<sup>۷</sup>Optical tweezers

<sup>۸</sup>Optical Trapping

<sup>۹</sup>Maxwell stress tensor



شکل ۱.۴: نیروی واردہ بر دو قطبی. دو قطبی دو بار  $\pm q$  است که در موقعیت  $r_{1,2}$  قرار دارد. فاصله نسبی بردار  $s$  و مرکز جرم مختصات  $r$  است.

بسط داد.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} \pm \frac{1}{2}\mathbf{s}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial r_k} s_k = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

با عبارتی مشابه برای میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  بدست می‌آید. برای محاسبه کل نیروی وارد بر دو قطبی، متوجه می‌شویم که نیروهای بین‌اتمی به صفر می‌رسند،  $f_{12} + f_{21} = 0$ ، در حالی که مجموع نیروهای الکترومغناطیسی برابر است با:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -q \left[ \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \left( \dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}} \right) \times \left( \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right) \right] \\ &\quad + q \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \left( \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}} \right) \times \left( \mathbf{B} + \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right) \right]. \end{aligned}$$

در اینجا و در ادامه وابستگی  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  به  $\mathbf{r}$  را حذف می‌کنیم و عبارت بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{B} + \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

جمله دوم را می‌توان بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{B} + \mathbf{p} \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r_k} \dot{r}_k + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{B} - \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

از  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  که بطور ضمنی به مختصات  $\mathbf{r}$  دو قطبی بستگی دارد استفاده و قانون فاراده را وارد کرده تا به عبارت آخر رسیدیم. در ادامه فرض می‌کنیم که تغییرات میدان‌ها نسبت به خود میدان‌ها کوچک است و حرکت دوقطبی در مقیاس زمانی نوسان میدان ناچیز است.

$$|(\dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla) \mathbf{B}| \ll B, \quad |\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}| \ll \left| \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|.$$

بنابراین از آخرین جمله رابطه (2.4) و همین طور  $(\nabla \cdot \dot{\mathbf{r}})$  صرفنظر می‌کنیم. با این کار خواهیم داشت:

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{d}{dt} \mathbf{p} \times \mathbf{B}.$$

وقتی میدان‌های هارمونیک زمانی و میانگین‌گیری روی یک تناوب نوسانی را در نظر می‌گیریم، جمله مشتق زمانی صفر می‌شود. نیروی وارد بر دوقطبی  $\mathbf{p}$  در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی ناهمگن می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود (به تمرین ۱.۴ مراجعه کنید).

### نیروی نوری بر دوقطبی

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{2} Re \left\{ \sum_k p_k \nabla E_k^*(\mathbf{r}) \right\} \quad (۳.۴)$$

برای سادگی از قرارداد جمع اనیشن اشتفاده نکردیم، اما به طور صریح مجموع  $k$  را در مختصات دکارتی نشان دادیم.  
سپس ذره قابل قطبی شدن که در حضور میدان الکتریکی گشتاور دوقطبی بدست می‌آورد را در نظر گرفتیم:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (۴.۴)$$

در اینجا  $\alpha$  قطبی شدگی ذره است. در بخش بعد این کتاب نشان خواهیم داد که چگونه این کمیت را می‌توان برای ذرات دیالکتریک یا فلز محاسبه کرد، اما برای حال حاضر فرض می‌کنیم که  $\alpha$  معلوم است. با قرار دادن رابطه (۴.۴) در رابطه (۳.۴) و بطور صریح بخش حقیقی عبارت خواهیم داشت:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\alpha'}{4} (E_k \nabla E_k^* + E_k^* \nabla E_k) + \frac{-j\alpha''}{4} (E_k \nabla E_k^* - E_k^* \nabla E_k)$$

اولین جمله را می‌توان بازنویسی کرد:

$$\nabla E_k^* E_k = 2 \nabla \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle$$

که در اینجا از علامت  $\langle \dots \rangle$  برای میانگین‌گیری میدان‌های هارمونیک زمانی استفاده کردہ‌ایم (۳۵.۲). برای جمله دوم از تمرین ۲.۴ استفاده کردیم:

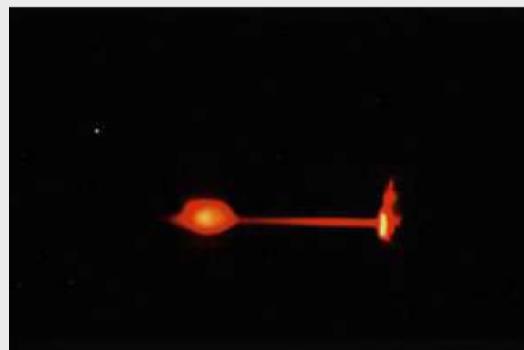
$$E_k \nabla E_k^* - E_k^* \nabla E_k = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}^*) - \mathbf{E}^* \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*). \quad (۵.۴)$$

همراه با قانون فاراده  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$  به عبارت نهائی برای نیرو نوری واردہ بر یک دوقطبی میرسیم

### نیروی نوری بر ذرات قابل قطبی شدن

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\alpha'}{2} \nabla \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle + \omega \alpha'' \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle + \frac{-j\alpha''}{4} \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*) \quad (۶.۴)$$

### ملاس نوری



بنیانگذار حوزه تله نوری آرتور اشکین<sup>۱</sup> است. استفان چو<sup>۲</sup>، که در سال ۱۹۹۷ بهدلیل "توسعه روش‌های خنک سازی و بهدام انداختن اتم‌ها با نور لیزر" جایزه نوبل را دریافت کرد و از ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۳ در دولت پرزیدنت اوباما وزیر انرژی ایالات متحده بود، اولین بحث خود را با اشکین در مورد چگونگی بهدام انداختن اتم‌های خنثی با استفاده از نور بهیاد می‌آورد<sup>[۱۲]</sup>.

در حین گفتگو با آرت اشکین، همسایه اداری در هولمدل، من درباره رویای او برای بهدام انداختن اتم‌ها با نور آموختم. او شنونده‌ای بسیار علاقمند پیدا کرده و شروع به‌شرح مقالات تجدید چاپ شده خود کرد.

یکی از مشکلات اصلی خنک کردن اتم‌ها به‌اندازه کافی کوچک بود به‌گونه‌ای که نیروهای نوری برای نگه داشتن آنها در یک تله نوری کافی باشد، که با فناوری که امروزه تحت عنوان خنک کننده لیزری شناخته می‌شود، به‌آن دست یافتند. پس از انجام این کار، می‌توانید اتم‌های بهدام افتداد را با چشم غیر مسلح در داخل محفظه خلاء مشاهده کنید.

اولین علائم اتم‌های محدود شده در ملاس نوری ثابت شد که زمان افزونگی چندین ده میلی ثانیه است، اما اندکی بعد مدت زمان ذخیرسازی زا بیش از یک مرتبه افزایش دادیم. بطور شکفت انگیزی، یک هفته پس از دستیابی به ملاس<sup>۳</sup>، با چشمان خود داخل قوطی خلاء را بجای لوله چندبرابر کننده نوری<sup>۴</sup> ملاحظه کنیم. هنکامی که در نهایت این کار انجام شد، با مشاهده تصویر بالا پاداش خود را گرفتیم.

اندکی پس از اعلام جایزه نوبل فیزیک ۱۹۹۷، آرتور اشکین در مصاحبه‌ای ابراز خوشحالی برای برنده این جایزه کرد و پیش بینی کرد که تله نوری منجر بهدو جایزه نوبل دیگر، یعنی جایزه "تراکم بوز-اینشتین(BEC)"<sup>۵</sup> و اتم لیزر شود. و امیدوارم کارهای بزرگی که زیست شناسان با موچین نوری انجام می‌دهند با پاداش دیگری پاداش بگیرند." اشگین راست می‌گفت. جایزه (BEC) در سال ۲۰۰۱ دنبال شد، برای دومین جایزه تا سال ۲۰۱۸ طول کشید تا زمانی که اشکین آن را برای "موچین نوری و کاربرد آنها در سامانه‌های بیولوژیکی" دریافت کرد. در آن زمان او ۹۶ ساله و مسن ترین برنده تاریخ بود.

شكل بالا از مرجع [۱۲]<sup>۶</sup> گرفته شده است.

<sup>۱</sup>Arthur Ashkin

<sup>۲</sup>Stephen Chu

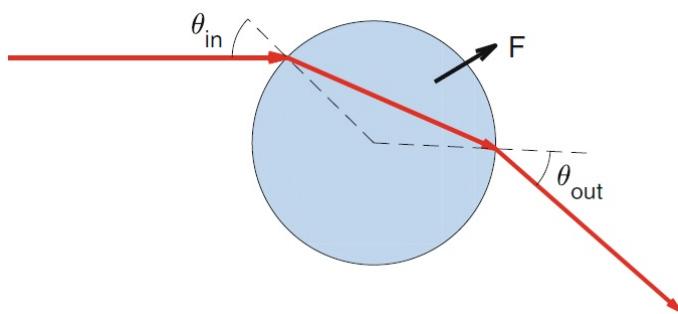
<sup>۳</sup>Optical Molasses

<sup>۴</sup>Photomultiplier tube

<sup>۵</sup>Bose-Einstein condensation (BECs)

## ۲.۱.۴ نور هندسی

برای ذراتی که به طور قابل توجهی بزرگتر از طول موج هستند، می‌توان از روش نور هندسی استفاده کرد. برای مثال، شکل (۲.۴) اساس نور هندسی در یک کره دی الکتریک نشان می‌دهد. تحلیل ما دقیقاً ادامه بحث بخش ۳.۳ برای ردیابی در سامانه‌های عدسی نوری است. محاسبه نیروها از طریق تحلیل ردیابی ساده اشue است که می‌توان آنرا به مراحل زیر تقسیم کرد:



شکل ۲.۴: ردیابی اشue درون کره دی الکتریک. پرتو از سمت چپ به کره دی الکتریک برخورد کرده و هنگام عبور از آن پراشیده می‌شود. از طریق تغییر جهت پرتو (در اینجا به سمت پائین)، نیروئی بر کره (در اینجا به سمت بالا) اثر می‌کند. برای مدل سازی واقع‌بینانه‌تر، می‌توان ضرایب بازتاب و انتقال فرنل را برای ورود و خروج اشue در مرز کره در نظر گرفت.

- اشue فرض می‌کنیم که در یک مود لیزر مفروض از طریق یک عدسی با روزنے عددی بزرگ، بشدت کانونی می‌شود و شرح پرتو خود را قبل عدسی کانونی شروع می‌کنیم. در اینجا میدان‌ها در جهت  $z$  منتشر شده و توان کل بستگی به  $I(x, y)$  دارد.

$$P = \int I(x, y) dx dy \approx \sum_i P_i(x_i, y_i). \quad (7.4)$$

میدان‌های نور وارد را با نمایش پرتوهایی با توان  $P_i$  به مختصات  $x_i, y_i$  تقریب می‌زنیم.

- عدسی کانونی در عدسی کانونی، پرتو به سمت کانون شکسته می‌شود. هنگام عبور از کره مرجع گوسی، میدان‌های وارد بر طبق رابطه (۳۲.۳) تبدیل می‌شوند.

- انتقال و بازتاب وقتی یک پرتو از مرز یک کره دی الکتریک می‌گذرد، که در نزدیکی کانون عدسی قرار دارد، بخشی از آن بازتاب شده و بخشی منتقل می‌شود. بطور کلی، می‌توانیم احتمال بازتاب و انتقال برای فصل مشترک مسطح را با استفاده از ضرایب فرنل که در بخش ۸.۳.۱ بحث شد، محاسبه کنیم. قدرت ورودی باید حفظ شود،

$$P_i = P_r + P_t, \quad (8.4)$$

که در آن  $P_r$  و  $P_t$  بترتیب توان بازتاب و عبوری هستند. علاوه براین، از قانون اسنل برای محاسبه زاویه‌ها نسبت به خط عمود بر کره بسمت بیرون استفاده می‌کنیم

$$\theta_i = \theta_r, \quad n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t. \quad (9.4)$$

در اینجا  $n_i$  و  $n_t$  بترتیب ضریب شکست محیط اطراف و کره دیالکتریک هستند.

- بازتاب داخلی هر پرتوی که وارد کره دیالکتریک می‌شود، در نقطه خروجی پرتو یا منتقل شده یا بازتاب می‌شود. انتقال و بازتاب را می‌توان بهمان شیوه‌ای که در بالا بحث شد، محاسبه کرد. به طور کلی، باید تصمیم گرفت که آیا بازتاب‌های متعدد داخلی را در نظر بگیریم یا خیر، اگر جواب مثبت است چند تا از آنها را باید در نظر بگیریم.
- انتقال مومنتوم برای هر بازتاب و انتقال پرتو در مرز کره، مومنتوم بین نور و ذره رد و بدل می‌شود. نیروی وارد بر ذره را می‌توان از تغییر مومنتوم محاسبه کرد (همچنین به بحث بخش ۴.۵ مراجعه کنید).

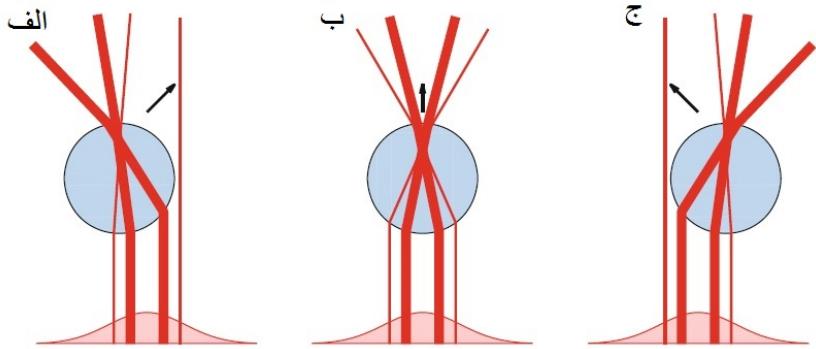
$$\mathbf{F}_{pat} = \frac{n_i P_i}{c} \hat{\mathbf{k}}_i - \frac{n_t P_t}{c} \hat{\mathbf{k}}_t \quad (10.4)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{k}}$  جهت انتشار برای پرتوهای مختلف است. نیروی تک تک پرتوها را می‌توان برای بدست آوردن کل نیروی وارد بر ذره جمع کرد، و یا می‌توان از مولفه نیروی هر کدام برای محاسبه گشتوار وارد بر ذره استفاده کرد.

#### • تصویربرداری

پرتوهای خروجی را می‌توان با یک عدسی دوم جمع آوری کرد تا اطلاعاتی در مورد موقعیت کره بدست آورد. تصویربرداری درست مانند با بحث قبل انجام می‌شود.

شکل (۳.۴) موقعیت یک کره در میدان نوری ناهمگن را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم که در محله اول تمام پرتوهای نور بسمت بالا منشر می‌شوند، و مطلوب ما نیروهای عرضی در جهت  $x$  است. شکل (۳.۴)-الف، وقتی کره در سمت چپ نسبت به بیشینه توزیع میدان نور قرار دارد، نور بسمت چپ پراکنده می‌شود. بر طبق قانون کنش-واکنش نیوتون، نیروی در جهت مثبت  $x$  بر کره وارد شده که آنرا بهناحیه شدت میدان بیشینه به عقب میراند. به طور مشابه، شکل (۳.۴)-ب، یک کره در مرکز هیپ نیروی خالصی را در جهت عرضی احساس نمی‌کند، و شکل (۳.۴)-ج کره در سمت راست بیشینه دوباره به منطقه بیشینه شدت میدان عقب رانده می‌شود.



شکل ۳.۴: کره دی الکتریک در پیک میدان ناهمگن نوری. (الف) هنگامی که کره در سمت چپ بیشینه توزیع میدان قرار دارد، نور عمده‌ای در سمت چپ پراکنده می‌شود. بر اساس قانون سوم نیوتون، کنش-واکنش، نیروئی بر کره اعمال می‌شود که آن را بطرف بیشینه رانده می‌شود. (ب) وقتی کره در مرکز میدان نور ناهمگن هست، نیروی خالص در جهت عرضی وجود ندارد. (ج) کره در سمت راست بیشینه ذوبار بسمت بیشینه رانده می‌شود.

### اولین تله نوری

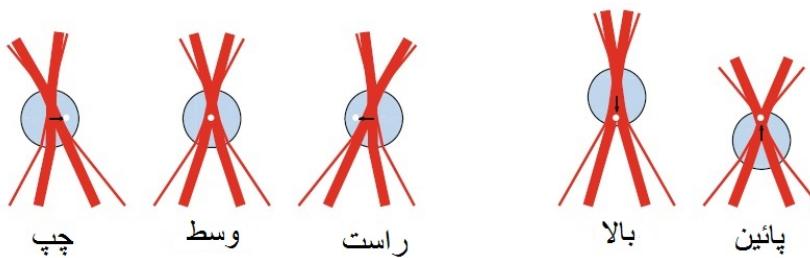
اندکی پس از اعلام جایزه نوبل ۱۹۹۷ به استیون چو، کلود-کوهن تانودجی، و ویلیام فیلیپس "برای توسعه روش‌های خنک سازی و بهدام انداختن اتم‌ها با نور لیزری"، آرتو اشکین در مصاحبه‌ای با آزمایشگاه‌های بل نیوز در مورد کشف خود صحبت کرد. تله‌های نوری، که او بیش از ۲۰ سال بعد جایزه نوبل فیزیک ۲۰۱۸ را دریافت کرد.

من مدتها به فشار تابش علاقه داشتم. حتی در کلمبیا، زمانی که من برای میلمن مگاوات مگنترون می‌ساختم، به این فکر می‌کردم "با این قدرت می‌توانی چه کار کنی؟ شاید بتوان به چیزهای کوچک فشار آوردد...." بنابراین برای خودم یک میکروفون گرفتم و پالس‌های روی آن گذاشت. این زمانی بود که من هنوز سال دوم بودم. من صدای شنیدم و گفتم: "آه، من اثرات فشار تابش را می‌بینم" معلوم است، میدانید، من مطمئن نیستم که آیا این اثرات را مشاهده کرده‌ام یا نه، به‌هر حال، من این مسئله را هشدار دادم. و وقتی به یک کنفرانس رفتم، آن را به‌یاد آوردم و مردی بود که آزمایش لیزر و ذرات کوچک را در حفره لیزر انجام داده بود، او دید که ذرات در حفره می‌مانند و به جلو وعقب حرکت می‌کنند و کارهای دیوانه واری انجام می‌دهد. او آنها را دونده و گولزن<sup>۱</sup> نامید. مردم مجذوب این موضوع شدند. من این صحبت را شنیدم و او در آن زمان گفت: "ما فکر می‌کنیم که فشار تابشی باشد."

وقتی به خانه آمدم، محاسبه‌ای انجام دادم و متوجه شدم، با توجه به اندازه پرتو و ذرات، نمی‌تواند فشار تابشی باشد. به احتمال زیاد، من فکر کردم، این است که ذرات گرم شده‌اند و این منجر به رفتار دیوانه واری شده است. این باعث شد دوباره به فشار تابش فکر کنم. تصمیم گرفتم فشار تابش را ببینم. محاسبه کردم که مقدار آن در یک کره کوچک شفاف چقدر خواهد بود. این کار را برای من آغاز کرد. کاری که من انجام دادم این بود که یک پرتو را بر روی کره‌های کوچک آب کانونی می‌کردم و آنها را در کنار هم فشار می‌دادم و به طرز مرموزی در دیوار اطلاعک دستگاه جمع می‌شدند. من سعی کردم این را در کنم و با استفاده از نمودارهای ساده پرتو آن را فهمیدم.

سپس، دیوار شیشه‌ای را با پرتو مخالف دیگری جایگزین کردم تا ذرات را فقط با نور در جای خود نگه دارد. من تلاش کردم و آن انجام شد. این اولین تله نوری بود. این یک کشف بسیار مهم بود. این منجر به دریافت جایزه نوبل استیو شد و به اعتقاد من، این دو جایزه نوبل دیگر را در پی خواهد داشت.

<sup>۱</sup>Runners and Bouncers



شکل ۴.۴: بهدام انداختن کره دیالکتریک در سه بعد فضایی. کره در کانون یک پرتو لیزر به اندازه کافی قوی قرار دارد. هر وقت از نقطه مرکزی خارج می‌شود (نقطه با رنگ سفید نشان داده شده)، نور به صورت نامتقارن پراکنده می‌شود و نیروئی بر کره اثر کرده که آن را به منطقه بیشینه شدت نور بار می‌گرداند.

### ۳.۱.۴ موچین نوری

اصل فوق را می‌توان برای بهدام انداختن ذرات در هر سه بعد فضایی تعمیم داد. اصل اساسی در شکل (۴.۴) نشان داده شده است، جایی که یک کره دیالکتریک ادر بیشینه ناحیه یک پرتو لیزر بشدت کانونی واقع شده است. هر وقت که کره از کانون خارج می‌شود، نور اعمال شده از طریق نور پراکنده آن را به عقب می‌راند. توجه داشته باشید که برای کره‌های به‌اندازه کافی بزرگ، موقعیت تعادل مربوط به یک مرکز کره کمی جابجا شده است، به‌طوری که نیروی خالص نور پراکنده مجموعاً صفر شود.

موچین نوری در گذشته مورد توجه زیادی در علوم زیستی قرار گرفته است. بویژه با پیشرفت سریع لیزر و استفاده از مدولاتورهای خاص نوری، امروزه می‌توان پتانسیل‌های تله نوری مجتمع را تولید کرده، با یک یا چند کمینه که می‌توانند جابجایی، چرخش، و تغییر شکل مورد دلخواه را انجام داد. برای بحث مفصل، خوانندگان علاقمند را به مطالعه مراجع [۹، ۱۱، ۱۳]، توصیه می‌کنیم.

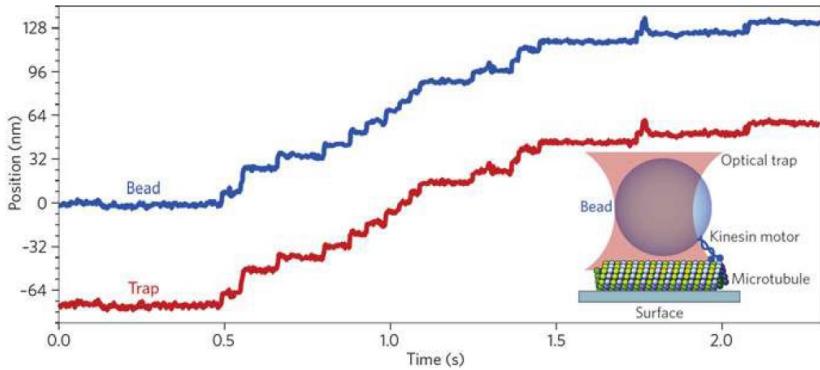
شکل (۵.۴) یکی از چندین نمونه زیبا برای بهدام انداختن نور را نشان می‌دهد [۱۳]. یک کره دیالکتریک به یک موتور کینسین <sup>۱۰</sup> متصل شده است که در امتداد یک ریز لوله <sup>۱۱</sup> حرکت می‌کند. با قرار دادن کره در یک تله نوری و پیروی از موقعیت آن، اطلاعاتی در مورد جزئیات انتشار موتور مولکول زیستی به دست می‌آید. همچنین می‌توان با بیرون کشیدن کره دیالکتریک از طریق جابجایی حداقل دام، نیرویی به سامانه وارد کرد. خطوط آبی و قرمز در تصویر انتشار در غیاب وجود چنین بار را گزارش می‌دهند.

## ۲.۴ معادله پیوستگی

یک مثال اولیه برای قوانین بقاء در فیزیک توسط معادله پیوستگی ارائه می‌شود، که در ادامه به آن می‌پردازیم زیرا به عنوان نقشه‌ای برای سایر قوانین بقاء عمل می‌کند. از قانون آمپر شروع می‌کنیم، از دو طرف معادله (۱۵.۲)-دیورژانس می‌گیریم.

<sup>۱۰</sup> Kinesin Motor

<sup>۱۱</sup> Microtubule



شکل ۴.۵: کاربردهای بیولوژیکی موچین‌های نوری در پله‌موتور کینسین و تا شدن RNA. ثبت حرکت برای یک تک موتور کینسین تحت شرایط force-clamped، با نمایش گام‌های گستته هشت نانومتری (مسیر آبی) هنگام حرکت در امتداد ریزلوله. موقعیت تله تحت کنترل کامپیوتر برای حفظ فاصله ثابت در پشت مهره مشاهده می‌شود، در نتیجه بار چند پیکونیوتون را در جهتی که مانع حرکت می‌شود تحمل می‌کند (مسیر قرمز). شکل و زیر نویس از مرجع [۱۳] گرفته شده است.

$$\nabla \cdot \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

توجه کنید که عبارت صفر است زیرا دیورژانس کرل یک میدان برداری همواره صفر است. همراه با قانون گوس  $\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_0 = \rho$  به رابطه پیوستگی میرسیم:

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (11.4)$$

برای درک بهتر این عبارت، خوب است که از هر دو طرف این رابطه در حجم مفروض  $\Omega$  انتگرال گیری کرده و از قضیه گوس برای طرف چپ رابطه استفاده کنیم،

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d^3r = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J} d^3r = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

بنابراین به شکل انتگرالی معادله (11.4) میرسیم که می‌گوید:

$$\frac{dQ_{\Omega}}{dt} = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.4)$$

که در آن  $Q_{\Omega}$  بار داخل حجم  $\Omega$  است. مفاهیم این معادله را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

- اصل بقاء بار (جهانی) اگر حجم را به بینهایت  $\rightarrow \Omega$  ببریم جمله دست راست صفر می‌شود و متوجه می‌شویم که این بار حفظ شده است.

- اصل بقاء بار (محلی) با این حال، معادله پیوستگی بقاء بار جهانی نیست بلکه هنوز هم می‌تواند به معنای نانودی بار در جائی از فضا و بلا فاصله در جائی دیگر تولید شده باشد. چنین عمل و حشتناکی از راه دور توسط معادله (۱۲.۴) ممنوع است که می‌گوید هر زمان که بار در یک حجم تغییر کند، (سمت چپ معادله)، باید از طریق چگالی جریان محلی  $J$  به داخل یا خارج از حجم منتقل شود، (سمت راست معادله).

به همین دلیل، الکترودینامیک را گاهی اوقات "نظریه میدان محلی" می‌نامند. در اینجا "محلی" بدین معنی است که همه مقادیر، مانند میدان یا بار، به صورت محلی تغییر می‌کنند و باید به طریقی به موقعیت دیگر منتقل شوند. این باعث می‌شود این رویکرد با نظریه نسبیت سازگار باشد، که می‌گوید هیچ اطلاعاتی نمی‌تواند سریعتر از سرعت نور منتشر شود. معادلات (۱۱.۴) و (۱۲.۴) به عنوان نقشه‌ای برای سایر قوانین بقاء خدمت می‌کنند.

### ۳.۴ قضیه پواین تینگ

در ادامه انتقال انرژی را در یک ماده خطی و بدون تلفات مطالعه خواهیم کرد. این بدین معنا نیست که این محدودیتها باید در همه جا در فضا اعمال شود، اما باید در حجمی باشد که به صراحت در انتقال شرح خواهیم داد. مواد خطی و با اتفاق در فصل هفتم بررسی خواهد شد. تحلیل خود را با یک بار نقطه‌ای شروع می‌کنیم که با سرعت  $v$  در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی حرکت می‌کند. کار (بی‌نهایت کوچک) انجام شده توسط میدان‌های روی بار در انتشار مسافت  $dt$  را می‌توان بصورت عبارت زیر بیان کرد:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt.$$

میدان‌های مغناطیسی را برای انجام کار بکار نبردیم زیرا نیروی  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  عمود بر  $\mathbf{v} dt$  است. در این صورت داریم:

$$\frac{dW}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \implies \frac{dW}{dt} = \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, d^3r \quad (13.4)$$

که نتیجه خود را برای یک بار به یک توزیع بار تعمیم داده‌ایم. برای جزئیات میانگین‌گیری به فصل هفتم مراجعه کنید. سپس توزیع جریان را از طریق قانون آمپر (۳۰.۲) برای میدان‌های الکترومغناطیسی بیان می‌کنیم

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\Omega} \left( \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \, d^3r$$

جمله دوم را می‌توان ساده کرد

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right),$$

و در جمله اول اتحاد بکار می‌بریم (به تمرین ۳.۴ مراجعه کنید).

$$\nabla \cdot \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}.$$

با کناره‌هم گذاشتن نتایج، خواهیم داشت:

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) \right] d^3r$$

در جمله اول داخل پرانتز از قانون فاراده برای بیان  $\mathbf{E} \times \nabla$  بر حسب  $\mathbf{B}$  استفاده می‌کنیم و سرانجام پس از چند باز آرائی قضیه پواین‌تینگ به صورت انتگرالی زیر بدست می‌آید:

### شکل انتگرالی قضیه پواین‌تینگ

$$\frac{dW}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) d^3r = - \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \quad (14.4)$$

از قضیه گوس برای تغییر انتگرال روی جمله دیورژانس به انتگرال مرز استفاده می‌کنیم. این عبارت را می‌توان شبیه رابطه پیوستگی (۱۲.۴) تفسیر کرد. جملات سمت چپ برای تغییرات انرژی مکانیکی  $dW/dt$  ذخیره شده در منبع و برای انرژی الکترومغناطیسی ذخیره شده در میدان‌ها به حساب می‌آیند. زیر انتگرال را می‌توان به عنوان چگالی انرژی الکترومغناطیسی  $u_{em}$  تفسیر کرد.

$$u_{em} = \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (15.4)$$

جمله سمت راست، عبور انرژی از طریق مرز را توصیف می‌کند، در حالی که چگالی شار انرژی را معمولاً بردار پواین‌تینگ می‌نامند.

### بردار پواین‌تینگ

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (16.4)$$

این شکل بقاء انرژی دو باره با نظریه میدان محلی سازگاری دارد. هرگاه انرژی در ناحیه مفروضی از فضا تغییر کند، باید از طریق امواج الکترومغناطیسی یا سایر انرژی مکانیکی که با  $dW/dt$  توصیف می‌شوند، انتقال یابند.

**موج صفحه‌ای** برای یک موج صفحه‌ای می‌توانیم نتایج بخش ۴.۲ را برای امواج صفحه‌ای هارمونیک زمانی استفاده کنیم. با توجه به  $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}} = Z\mathbf{H}$  برای میانگین گیری زمانی بردار پواین‌تینگ داریم:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} Z^{-1} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{k}} \quad (17.4)$$

برای رسیدن به عبارت آخر از  $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$  استفاده شده است. این نتیجه در فصل قبل در معادله (۹.۳) برای عبور توان پرتوها در زمینه کانونی کردن میدان بکار برده شده است. می‌توانیم جلوتر

رفته و چگالی انرژی رابطه (۱۵.۴) میدان‌های مغناطیسی را با استفاده از  $E \times Z^{-1}\hat{k}$  جایگزین کرده و میانگین زمانی عبور انرژی را بدست آوریم:

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} Re \left( \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{\mu}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right) = \frac{\epsilon}{2} |E|^2 . \quad (18.4)$$

بنابراین معادله (۱۷.۴) را می‌توان به شکل بهتری نوشت:

$$\langle S \rangle = \langle u_{em} \rangle \frac{c}{n} \hat{k} . \quad (19.4)$$

این نشان می‌دهد که برای موج صفحه‌ای، بردار پواین‌تینگ فقط چگالی انرژی موج است که با سرعت نور در جهت  $\hat{k}$  در محیط منتقل می‌شود. در اینجا  $n$  ضریب شکست است.

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$$

**امواج محو شونده** یک میدان الکتریکی بصورت زیر ( $z > 0$ ) در نظر گیرید.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e^{-jk\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{y}} E_0, \quad \mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} - jk \hat{\mathbf{z}}$$

این موج در جهت  $\hat{y}$  قطبی شده، در جهت  $x$  ها منشر و دارای مشخصه محو شوندگی در امتداد  $z$ ‌ها، جائی که میدان بطور نمائی میرا می‌شود. برای میدان مغناطیسی خواهیم داشت:

$$Zk\mathbf{H}(k_x \hat{x} - jk \hat{z}) \times e^{-jk\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{y}} E_0 = (k_x \hat{\mathbf{z}} - jk \hat{\mathbf{x}}) e^{-jk\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} E_0$$

با این رابطه، میانگین زمانی بردار پواین‌تینگ برابر است با:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2Zk} Re \{ \hat{\mathbf{y}} \times (k_x \hat{\mathbf{z}} - jk \hat{\mathbf{x}}) \} |E_0|^2 = \frac{1}{2} Z^{-1} |E_0|^2 k_x \hat{x} . \quad (20.4)$$

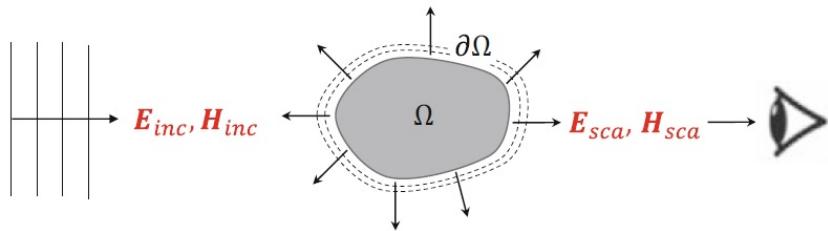
قابل توجه است که هیچ انرژی در جهت  $z$ ‌ها انتقال نمی‌یابد زیرا قسمت حقیقی میانگین گیری برابر صفر است بنابراین در امواج محو شونده انرژی انتقال پیدا نمی‌کند.

## ۴.۴ سطح مقطع‌های نوری

قضیه پواین‌تینگ نقش مهمی در محاسبه سطح مقطع نوری دارد. تصوری که در ذهن خود داریم در شکل (۴.۴) ترسیم شده است و شامل برخورد یک موج صفحه‌ای به یک ذره است. بخشی از انرژی توسط ذره پراکنده یا جذب می‌شود. در ادامه مرز  $\partial\Omega$  که ذره را دربر گرفته است را در نظر گرفته، و عبور انرژی بدرون مرز یا خارج از آنرا ارزیابی می‌کنیم. به نظر میرسد که بهتر است میدان‌های الکترومغناطیسی را به یک بخش ورودی وابسته به موج صفحه‌ای محرک و بخش دیگر پراکنده‌گی که وابسته به پاسخ ذره است از یکدیگر جدا کرد.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{sca} \quad (21.4)$$

اکنون به آسانی می‌توان دریافت که توان جذب شده مربوط به عبور انرژی  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  میدان‌های کل بدرون مرز  $\partial\Omega$  است، در حالی که توان پراکنده مربوط به  $\mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{sca}$  از مناطق پراکنده خارج از



شکل ۶.۴: شمای سطح مقطع نوری. ذرهای که در محیطی قرار دارد و با یک موج صفحه‌ای با میدان‌های  $\mathbf{H}_{inc}$  و  $\mathbf{E}_{inc}$  تحریک می‌شود. پاسخ ذره توسط  $\mathbf{E}_{sca}$  و  $\mathbf{H}_{sca}$  توصیف می‌شود. با محاسبه عبور انرژی به داخل و خارج از مرز  $\partial\Omega$ ، سطح مقطع نوری را بدست می‌آوریم. تضعیف میدان‌ها در جهت موج وارد، نماد چشم سمت راست، مربوط به سطح مقطع انقراضی است که مجموع جذب و پراکندگی است.

مرز است. برای میدان‌های هارمونیک زمانی و با میانگین‌گیری در یک دوره تناوب، توان جذب و پراکنده شده را پیدا می‌کنیم.

### توان جذب و پراکندگی

$$P_{abs} = -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \quad (۲۲.۴)$$

$$P_{sca} = -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{sca}^*) \cdot d\mathbf{S}. \quad (۲۲.۴)$$

یک علامت منفی در تعریف  $P_{abs}$  انتخاب کردیم تا عبارت مثبت شود. توجه داشته باشید که تعاریف بالا برای تحریک‌های که امواج صفحه‌ای نیستند، مثل پرتوهای لیزر بشدت کانونی شده، صادق است.

برای امواج صفحه‌ای می‌توانیم توان جذب یا پراکنده شده را بهشت میدان‌های وارد  $I_{inc}$  مربوط کنیم:

$$I_{inc} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{inc} \times \mathbf{H}_{inc}^*) = \frac{1}{2} Z^{-1} |\mathbf{E}_{inc}|^2, \quad (۲۳.۴)$$

که دارای دیمانسیون توان بر سطح است، و قبلًا در رابطه (۱۷.۴) محاسبه شد. سپس می‌توانیم سطح مقطع نوری را به صورت نسبت بین توان جذب یا پراکنده  $P$  و  $I_{inc}$  تعریف کنیم.

$$\sigma_{abs} = P_{abs}/I_{inc}, \quad \sigma_{sca} = P_{sca}/I_{inc}. \quad (۲۴.۴)$$

دیمانسیون سطح مقطع بر حسب واحد سطح است. اغلب جمع سطح مقطع پراکندگی و جذب را سطح مقطع انقراضی می‌نامند. در آزمایش می‌توان با قرار دادن یک آشکارساز نوری که در جهت انتشار  $\hat{\mathbf{k}}$  در پشت پراکنده کننده قرار دارد اندازه‌گیری کرد و معلوم کرد که چه مقدار از

توان ورودی کاهش یافته است. ظاهراً، هر چیزی که از موج جهت وارد پراکنده یا جذب شده باشد، در اندازه‌گیری این کاهش مشارکت دارد. به نظر می‌رسد که از لحاظ نظری نیز یک روش ساده برای محاسبه سطح مقطع انقراضی وجود دارد. از تعاریف جذب و پراکنده‌گی امواج در معادله (۲۲.۴) شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P_{ext} &= \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} Re(-\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{sca}^*) \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} Re(\mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{inc}^* + \mathbf{E}_{inc} \times \mathbf{H}_{sca}^*) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

جائی که ما استفاده کردیم، انتگرال شار انرژی میدان‌های ورودی در کل مرز صفر است (برای موج صفحه‌ای، شار ورودی باید برابر شار خروجی باشد). برای تحریک موج صفحه‌ای با دامنه  $E_0$ ، و بردار قطبش  $\epsilon_0$  و بردار موج  $\hat{\mathbf{k}}_0$ ، میدان الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 e^{-j\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{r}} \epsilon_0, \quad Z\mathbf{H}_{inc} = E_0 e^{-j\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{k}}_0 \times \epsilon_0$$

در این صورت توان انقراضی خواهد شد:

$$P_{ext} = -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} Re \left[ E_0^* e^{j\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{r}} \left( Z^{-1} \mathbf{E}_{sca} \times (\hat{\mathbf{k}}_0 \times \epsilon_0) + \epsilon_0^* \times \mathbf{H}_{sca} \right) \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (25.4)$$

این عبارت را می‌توان به میدان‌های دور پراکنده شده مربوط کرد:

$$\mathbf{E}_{sca}(\mathbf{r}) \xrightarrow[kr \rightarrow \infty]{} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (26.4)$$

بطوری که در فصل بعد در بخش ۴.۵ نشان خواهیم داد، توان انقراضی رابطه (۲۵.۴) را می‌توان بر حسب دامنه میدان دور از طریق رابطه زیر بیان کرد؛

### توان انقراض

$$P_{ext} = \frac{2\pi}{k} Z^{-1} Re \left[ E_0^* \epsilon_0^* \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0) \right] \quad (27.4)$$

این عبارت به عنوان **قضیه نوری نیز شناخه می‌شود**. به طور مشابه در مورد آزمایش، هر جا که انقراض از تضعیف موج در امتداد جهت انتشار حاصل می‌شود، قدرت انقراض را می‌توان از میدان دور پراکنده در جهت انتشار موج  $\hat{\mathbf{k}}_0$  محاسبه کرد.

## ۵.۴ اصل بقاء مومنتوم

در ادامه نحوه انتقال مومنتوم توسط امواج الکترومغناطیسی و انتقال آن به حرکت مکانیکی را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. این قبلاً در ابتدای این فصل برای ذرات کوچک و بزرگ در مطلب

موچین نوری مورد بحث قرار گرفته است. مطلوب ما از قضیه پواین‌تینگ پیروی می‌کند، اما کمی پیچیده‌تر است. نیروئی که توسط میدان‌های الکترومغناطیسی بر روی یک ذره نقطه مانند اثر می‌کند توسط نیروی لورنس داده می‌شود.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

می‌توانیم نیرو را برای توزیع بار الکتریکی تعمیم داده، و تغییر مومنتوم مکانیکی  $\mathbf{P}$  را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3 r = \int_{\Omega} \mathbf{f} d^3 r, \quad (28.4)$$

که در اینجا چگالی نیرو  $\mathbf{f}$  را معرفی کردیم. بطوری که برای دستیابی قضیه پواین‌تینگ، جملات منبع  $\rho$ ،  $\mathbf{J}$  را به میدان‌های الکترومغناطیسی با استفاده از معادلات ماسکول ناهمنگ مربوط کردیم،

$$\mathbf{f} = (\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E}) + \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \quad (29.4)$$

با

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

می‌توانیم جمله آخر سمت راست معادله (29.4) را بازنویسی کنیم، بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = & + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3 r = \int_{\Omega} [\epsilon \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \epsilon \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ & + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu} \mathbf{B} (\nabla \times \mathbf{B})] d^3 r \end{aligned} \quad (30.4)$$

جمله  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  که همواره صفر است را اضافه کرده تا رابطه‌ای متقارن بین  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  ساخته شود. جمله دوم سمت چپ را می‌توان به کل مومنتوم الکترومغناطیسی  $\mathbf{P}_{em}$  در حجم  $\Omega$  اختصاص داد،

$$\mathbf{P}_{em} = \int_{\Omega} \epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3 r = \int_{\Omega} \mu \epsilon \mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3 r. \quad (31.4)$$

سپس جمله سمت راست معادله (30.4) را به انتگرال مرزی تبدیل می‌کنیم. با مقایسه با قضیه پواین‌تینگ، که چگالی انرژی الکترومغناطیسی  $u_{em}$  با بردار پواین‌تینگ  $\mathbf{S}$  مربوط می‌کند، نشان میدهد که چگالی مومنتوم باید بجای برداری، تانسوری باشد. در ادامه یک نماد مولفه‌ای همراه با قرارداد جمع اనیشتون برای شاخص‌هایی که دو بار ظاهر می‌شوند را اتخاذ می‌کنیم. مولفه‌های میدان الکتریکی در داخل برآکت معادله (30.4) را می‌توان با استفاده از تانسور لوی-سیویتا معادله (54.2) بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
 & E_i \partial_j E_j - \epsilon_{ijk} E_j \epsilon_{klm} \partial_l E_m \\
 &= E_i \partial_j E_j - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \partial_l E_m \\
 &= E_i \partial_j E_j + (E_j \partial_j E_i - E_j \partial_i E_j) = \partial_j E_i E_j - \frac{1}{2} \partial_i E_j E_j.
 \end{aligned}$$

بنابراین بدست می‌آید

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = \partial_j \left[ E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k E_k \right],$$

و عبارت مربوط به  $\mathbf{B}$  خواهیم داشت. اکنون تعریف تانسور متقارن آسان است:

$$T_{ij} = \epsilon E_i E_j + \frac{1}{\mu} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \epsilon E_k E_k + \frac{1}{\mu} B_k B_k \right) \quad (32.4)$$

این عبارت وقتی بر حسب  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  بازنویسی شود تا ما را به صورت نهائی تانسور تنش ماقسول برساند، بهتر بنظر میرسد:

### تانسور تنش ماقسول

$$T_{ij} = \epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad (33.4)$$

این چگونگی انتقال و تبدیل مومنتوم را با میدان‌های الکترومغناطیسی توضیح می‌دهد. با استفاده از تانسور تنش <sup>۱۲</sup> می‌توانیم رابطه <sup>(۳۰.۴)</sup> را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P} + \mathbf{P}_{em}) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbb{T} d^3 r = \oint_{\partial\Omega} \mathbb{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (34.4)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{n}}$  عمود بر سطح مرز است. بنابراین، هرگاه مومنتوم مکانیکی یا الکترومغناطیسی در حجم مفروضی تغییر کند، باید به صورت میدان‌های الکترومغناطیسی به خارج منتقل شود. کمیتی که برای انتقال مومنتوم به حساب می‌آید دقیقاً تانسور تنش ماقسول است.

### مشاجره ابراهام-مینکوفسکی

مجادله ابراهام-مینکوفسکی <sup>۱۳</sup>، که گاهی اوقات از آن نام برده می‌شود، حداقل یک داستان عجیب و غریب است. این مسئله مربوط به مومنتوم حمل شده توسط انتشار یک فوتون در محیطی با ضریب شکست  $n$  است، اما، برای روشن شدن این نکته از اول، مجادله هیچ جنبه کوانتومی را شامل نمی‌شود و همچنین در تحلیل صرفاً بر اساس الکترودینامیک کلاسیک ظاهر می‌شود. اولین مشارکت در این موضوع توسط هرمان مینکوفسکی <sup>(۱۹۰۸)</sup> و ماکس آبراهام

<sup>۱۲</sup> در سراسر این کتاب تانسورها را با  $\mathbb{T}$  نشان می‌دهیم. مولفه‌های اینگونه تانسورها  $(\mathbb{T})_{ij} = T_{ij}$  هستند.

<sup>۱۳</sup> Abraham-Minkowski

(۱۹۰۹) انجام شد، برای جزئیات بیشتر در مورد تاریخ و همچنین برای شرح جامع موضوع، خوانندگان را به مرجع [۱۴] ارجاع می‌دهیم. در حالی که ابراهام نتیجه گرفت که حرکت فوتون باید به صورت زیر باشد:

$$P_{photon} = \frac{\hbar k_0}{n} \quad \text{مومنتوم ابراهام}$$

که در آن  $k_0$  عدد موج نور در خلاء و  $n$  ضریب شکست محیط است. مینکوفسکی نتیجه گرفت که آن باید به صورت زیر باشد:

$$P_{photon} = n\hbar k_0 \quad \text{مومنتوم مینکوفسکی}$$

در نگاه اول این یک شوخي بد به نظر می‌رسد، و ممکن است فکر کنید که یک آزمایش ساده باید به نفع یکی از این تعاریف باشد. در واقع، آزمایشات قطعی بسیاری به نفع تعریف ابراهام وجود دارد. متأسفانه تعداد مساوی آزمایشاتی وجود دارد که به نظر می‌رسد از تعریف مینکوفسکی پشتیبانی می‌کند. بنابراین بدیهی است که در اینجا اتفاق ناخواهایندی در حال رخ دادن است. امروزه اجماع وجود دارد که بحث یا معضل توسط بارتنت<sup>۱۴</sup> حل شده است [۱۵] و به موضوعی مربوط می‌شود که در فصل سیزدهم بیشتر در مورد آن بحث خواهیم کرد؛ یعنی تمایز بین مومنتوم جنبشی<sup>۱۶</sup> و مومنتوم متعارف<sup>۱۷</sup>. اولین مورد فقط مربوط به مومنتوم نور است. دومی مومنتوم در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی است. تعریف ابراهام مربوط به مومنتوم جنبشی است، در حالی که شکل مینکوفسکی به معنای متعارف است. با این وجود، این سوال که در تفسیر کدام آزمایش باید از کدام شکل استفاده شود، همچنان مشکل است. در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم، اما امیدواریم هر خواننده‌ای که در آینده از این مشکل عبور کند، از سابقه طولانی تاریخ و همچنین مشکلات احتمالی در تصمیم‌گیری برای تعریف آبراهام یا مینکوفسکی آگاه باشد.

## نیروهای نوری و گشتاورها

تانسور تنش ماکسول را می‌توان برای محاسبه نیروهای نوری و گشتاور برای ذرات با شکل و اندازه دلخواه استفاده کرد. به طور کلی، به موقعیت‌هایی علاقه داریم که ذره توسط میدان‌های نوری که با فرکانس  $\omega$  در حال نوسان هستند، تابیده شود و نیروها آنقدر ضعیف هستند که قبل از حرکت ذره به جای دیگر، چندین بار میدان نوسان دارد. در این شرایط فرض بر میدان‌های هارمونیک زمانی و متوسط نیروهای خالص در یک زمان تنابوب  $T$  است. میانگین نیروی الکترومغناطیسی

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}_{em}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\mathbf{P}_{em}}{dt} dt = 0$$

برای میدان‌های هارمونیک زمانی صفر می‌شود و در اینجا  $\mathbf{P}_{em}$  مومنتوم الکترومغناطیسی است که در رابطه (۳۱.۴) تعریف شد. تانسور تنش ماکسول را می‌توان در یک دوره تنابوب

<sup>۱۴</sup>Barnett

<sup>۱۵</sup>Kinetic Momentum

<sup>۱۶</sup>Canonical Momentum

میانگین‌گیری کرد که اکنون برای قضیه پواین‌تینگ و موج صفحه‌ای بحث شد، و داریم:

$$\langle T_{ij} \rangle = \frac{1}{2} Re \left[ \epsilon E_i E_j^* + \mu H_i H_j^* - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon E_k E_k^* + \mu H_k H_k^*) \right] \quad (35.4)$$

اکنون می‌توانیم نیروی عمل کننده بر ذره که با مرز  $\partial\Omega$  احاطه شده است، محاسبه کنیم. برای ذرات با مرزهای تیز، حتی می‌توانیم سطح ذرات را خودمان بگیریم. مومنتوم خالص به داخل یا خارج این مرز، نیرو یا گشتاور وارد شده به ذره را می‌دهد؛

### نیروی نوری و گشتاور برای میدان‌های هارمونیک زمانی

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \oint_{\partial\Omega} \langle \mathbb{T} \rangle \cdot d\mathbf{S} \quad (36.4)$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \langle \mathbb{T} \rangle \cdot d\mathbf{S} \quad (36.4b)$$

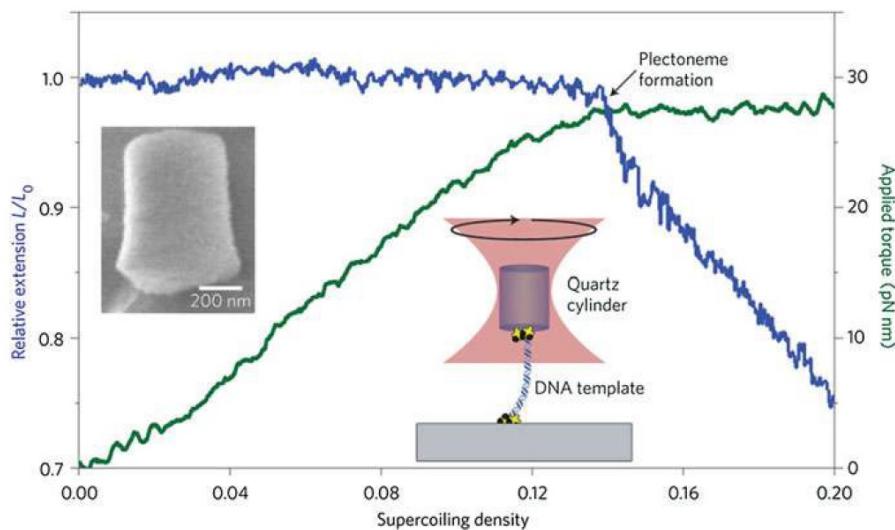
بنابراین، هنگامی که میدان‌های الکترومغناطیسی برای مشکل مورد مطالعه شناخته شدند، می‌توان فوراً نیروهای نوری و گشتاورها را با استفاده از عبارت‌های بالا محاسبه کرد. در فصل‌های بعدی نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان معادلات ماکسول را برای ذرات با مرزهای تیز حل کرد، در این صورت می‌توانیم از معادلات فوق برای محاسبه فوری نیرو یا گشتاور اعمال شده توسط میدان‌های الکترومغناطیسی بر ذره استفاده کنیم. معادلات (36.4) عبارتهای کلی میدان‌ها و گشتاورهایی هستند که بر روی ذرات با اندازه دلخواه عمل می‌کنند، برای ذرات بسیار کوچکتر یا بزرگتر از طول موج نور می‌توانیم مجدداً از تقریب‌های ساده‌تر دوقطبی یا رדיابی پرتو که قبلاً بحث شد استفاده کنیم.

## ۶.۴ مومنتوم زاویه‌ای نوری

علاوه بر مومنتوم خطی، نور می‌تواند مومنتوم زاویه‌ای را نیز حمل کند. همانطور که از طریق بردار قطبش (غیر عادی)  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \pm \epsilon \hat{\mathbf{z}}$  توضیح داده شده است، ساده‌ترین شکل، نور با قطبش دایره‌ای است. به عنوان مثال، شکل (A.4) نشان می‌دهد که یک رشته DNA در یک طرف به یک بستر و در طرف دیگر به یک استوانه کوارتز متصل شده است. با قرار دادن سامانه در داخل یک تله نوری و استفاده از نور با قطبش دایره‌ای، می‌توان مومنتوم زاویه‌ای را از نور به استوانه کوارتز منتقل کرد و رشته DNA را به سمت بالا برد. از طریق اندازه‌گیری موقعیت استوانه، اطلاعات مفصل در مورد گشتاور اعمال شده و فشرده سازی رشته DNA به دست می‌آید.

شکل (A.4) ایجاد یک پرتو نور را نشان می‌دهد که مومنتوم زاویه‌ای مداری<sup>۱۷</sup> (OAM) را حمل می‌کند [۱۶، ۱۷]. یک پرتو نور کانونی شده از یک مارپیچ دی‌الکتریک عبور می‌کند که ارتفاع آن به زاویه سمت (آزیموتال) بستگی دارد، به‌طوری که پس از عبور، یک مومنتوم زاویه‌ای

<sup>۱۷</sup>Orbital Angular Momentum (OAM)



شکل ۷.۴: ورودی، سمت چپ: میکروگراف الکترونی روبشی از یک استوانه کوارتز نانو ساخته شده است. ورودی، راست: شمای چینش آزمایشی، که در آن یک مولکول DNA در یک سر به استوانه و در طرف دیگر به یک سطح شیشه‌ای متصل می‌شود. در اینجا، DNA با نیروی ۳ pN بازیگردانی شده و با سرعت ثابت ۰.۵ دور در ثانیه می‌پیچد. امتداد نسبی DNA (اثر آبی) و گشتاور اعمال شده (اثر سیز) به عنوان تابعی از چگالی ابرصفحه ترسیم شده است که نشان دهنده میزان پیچش معرفی شده است. هنگامی که چگالی ابرپیچشی در حدود ۰.۱۴ است، DNA پیچ خورده تحت گذار فازی از حالت پیچ خورده به حالت پلکتونی قرار می‌گیرد، که توسط فلات در گشتاور اعمال شده و کاهش یکنواختی در امتداد نسبی نشان داده می‌شود. شکل و زیرنویس برگرفته از مرجع [۱۲] است.

مداری به دست می‌آورد. روش‌های دیگری برای ایجاد نور با (OAM) وجود دارد، برای مثال، با استفاده از هولوگرام. برای پرتوهای گوس-لاگر که در فصل قبل بحث شد، دامنه میدان الکتریکی را می‌توان به صورت [۱۳] بیان کرد.

$$E(\rho, \phi, z = 0) = E_0 [e^{-jl\phi}] \tanh\left(\frac{\rho}{w_v}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \quad (37.4)$$

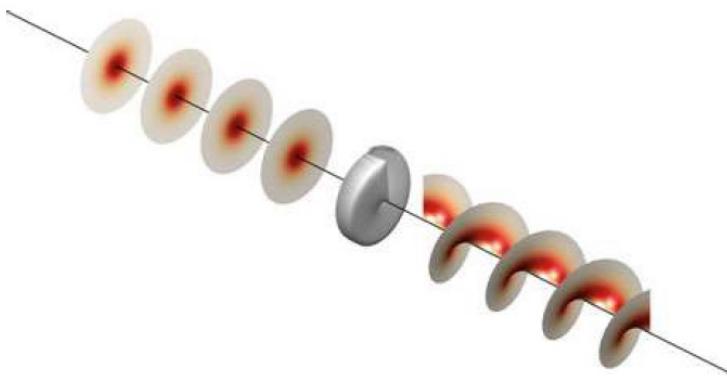
که در آن  $E_0$  بیشینه دامنه را مشخص می‌کند،  $w_0$  دور کمر پوش کوسی است،  $l$  یک عدد صحیح است که بار توبولوژی (یا عدد کوانتم (OAM)) نامیده می‌شود، و  $w_v$  اندازه هسته گرداب <sup>۱۸</sup> است. سهم مهم در بحث ما عبارت  $e^{-jl\phi}$  در داخل برآکت است که مومنتوم زاویه‌ای مداری را در بر می‌گیرد. شکل شدت  $|E|^2$  با هسته گرداب سیاه <sup>۱۹</sup> داده می‌شود، به دلیل کل تداخل مخرب در مبداء که  $\phi$  تعریف نشده است.

- **تمرین ۱** ثابت کنید که  $(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E})$  را می‌توان به صورت رابطه (۳.۴) بازنویسی کرد.

- **تمرین ۲** رابطه (۲.۴) در امتداد خطوط بحث شده در کتاب بدست آورید.

<sup>۱۸</sup>Vortex core size

<sup>۱۹</sup>Dark vortex core



شکل ۸.۴: ایجاد یک پرتو نور با مومنتوم زاویه‌ای مداری. یک پرتو کانونی شده با قطبش خطی یا دایره‌ای از سمت چپ به یک صفحه فاز برخورد می‌کند که از دیالکتریک ساخته شده و به‌شکل ماربیچ است و ارتفاع آن با افزایش زاویه سمت افزایش می‌یابد. وقتی از این دستگاه عبور می‌کند، نور یک زاویه تاخیر وابسته به فاز را به دست آورده و پس از عبور، نور یک مومنتوم زاویه‌ای مداری را حمل می‌کند.

• **تمرین ۳** ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

• **تمرین ۴** موقعیتی را در نظر گیرید که یک پرتو لیزر با توان صد میلی وات بر روی سطح مربع طول موج  $\lambda^2$  کانونی می‌شود.

- **الف** شدت میدان در نقطه کانونی را برآورد کنید. طول موج نور را  $500\text{ nm}$  در نظر گرفته و فرض کنید که توزیع میدان همگن است.

- **ب** تعداد فوتون‌های عبوری از سطح مربع  $\lambda^2$  در ثانیه را محاسبه کنید.

- **ج** فرض کنید که هر فوتون، مومنتوم  $\hbar k$  را انتقال میدهد. نیروی اعمال شده بوسیله کل شار فوتون ورودی را تخمین بزنید.

• **تمرین ۵** با استفاده از جعبه‌ابزار NANOPT فایل `demofocus01.m`، میدان الکتریکی مولد لیزر هرمیت-گوس بشدت کانونی شده را محاسبه کنید.

- **الف** شدت میدان بر حسب ولت بر متر را برای یک لیزر صد میلی وات محاسبه کنید.

- **ب** میدان مغناطیسی را از قانون فاراده و استفاده از معادله (۱۰.۲)، تقریب تفاضل محدود برای کرل، محاسبه کنید.

- **ج** مولفه  $z$  بردار پواین‌تینگ محاسبه کرده و آنرا روی صفحه  $xy$  انتگرال‌گیری کنید. ثابت کنید وقتی میدان‌ها خارج از کانون  $0 = z$  هستند، شار تغییر نمی‌کند.

• **تمرین ۶** قطبی‌شدگی<sup>۲۰</sup> یک کره کوچک دیالکتریک از رابطه زیر بدست می‌آید:

<sup>۲۰</sup> Polarizability

$$\alpha = 4\pi\epsilon_2 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) a^3$$

که در آن  $a$  شعاع کره و  $\epsilon_1, \epsilon_2$  بترتیب گذردهی الکتریکی داخل و خارج کره است. یک کره شیشه‌ای ( $n_1 = 1.5$ ) در آب ( $n = 1.33$ ) قرار دارد و قطر کره صد نانومتر است. با استفاده از تمرین ۵.۴ نیروی دوقطبی رابطه (۶.۴) که بر کره شیشه‌ای در نقطه کانونی و خارج از آن وارد می‌شود را محاسبه کنید. این نیرو را بر حسب پیگو نیوتون بیان کنید.

- تمرین ۷ مانند تمرین ۶.۴ اما برای کره طلا با گذردهی  $j = 3.6j - 2.5$  در طول موج  $nm = 500$  و قطر  $nm = 50$  است. ضمناً پراکندگی و نیروی گرادیان قطبش را محاسبه کنید.

#### • تمرین ۸ کار مکانیکی رابطه (۱۴.۴) بشكل زیر

$$W = \int_{\Omega} u_{mech} d^3r,$$

با چگالی انرژی مکانیکی  $u_{mech}$  را، به صورت قضیه پواین‌تینگ دیفرانسیلی مانند رابطه پیوستگی (۱۱.۴) بنویسید.

- تمرین ۹ یک موج صفحه‌ای با بردار قطبش مختلط  $\epsilon' = \epsilon_j - \epsilon'$  در نظر گیرید. چگالی انرژی و بردار پواین‌تینگ را مانند رابطه (۱۹.۴) محاسبه کنید.

- تمرین ۱۰ یک موج صفحه‌ای با قطبش خطی درنظر گیرید. از طریق یک محاسبات صریح، ثابت کنید که کل شار بردار پواین‌تینگ که از درون مرزهای یک کره عبور می‌کند صفر است.

- تمرین ۱۱ تانسور تنش ماکسول رابطه (۳۳.۴) را برای یک موج صفحه‌ای با قطبش دلخواه محاسبه کنید. نتیجه خود را بر حسب مومنتوم و مومنتوم زاویه‌ای حمل شده توسط موج را تفسیر کنید.

- تمرین ۱۲ با استفاده از قطبی شدگی تمرین ۶.۶، و یک ذره دی‌الکتریک به گذردهی حقیقی  $\epsilon'_1 = \epsilon_1$  که با میدان هارمونیک زمانی  $E_0$  تحریک می‌شود در نظر گیرید.

- الف گشتاور دوقطبی القائی کره را محاسبه کنید.

- ب میدان‌های یک دو قطبی را با استفاده از الکترواستاتیک محاسبه کنید. این نتایج برای یک دوقطبی نوسانی در ناحیه میدان نزدیک نیز صادق است.

- ج در ناحیه میدان نزدیک تانسور تنش ماکسول را محاسبه کنید.

## فصل ۵

# تابع گرین

تابع گرین راهی ساده و زیبا برای حل معادلات دیفرانسیل مانند معادله موج در الکترودینامیک است و نقش مهمی در نانو نوری ایفاء می‌کند. در این فصل با معرفی مفاهیم اساسی تابع گرین برای معادله اسکالار ساده شده شروع می‌کنیم و سپس در مورد راه حل‌های معادلات کامل ماسکول تعمق می‌نمائیم.

### ۱.۵ تابع گرین چیست؟

یک معادله دیفرانسیل خطی اما در غیراین صورت نامشخص برای تابع  $f(\mathbf{r})$  در نظر گیرید.

$$L(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

که در آن  $L(\mathbf{r})$  یک عملگر دیفرانسیلی از قبیل  $\nabla^2$  برای معادله پوآسون یا  $\nabla^2 + k^2$  برای معادله هلم‌هولتز، و  $Q$  جمله منبع خارجی است. در اصل  $L$  نیز می‌تواند یک عملگر غیرمحلى شامل انتگرال گیری روی یک فضا باشد، اگر چه در ادامه به‌شکل ساده‌تری که در معادله (۱.۵) داده شده است می‌پردازیم. برای حل معادله دیفرانسیل بالا، تابع گرین  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم

#### تعریف تابع گرین

$$L(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.5)$$

با شرایط مرزی مناسب.

که تابع  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  پاسخ سامانه به منبع نقطه‌ای واقع در  $\mathbf{r}_0$  است که با تابع دلتای دیراگ  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  مشخص می‌شود (به پیوست و مراجعه کنید). نکته مهم این که تابع گرین قبلًا در شرایط مرزی مناسب برای امواج منتشر شده در بی‌نهایت معادله هلم‌هولتز که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد، درست شده است.

### گرین و تابع گرین

قبل از اینکه وارد عملکرد تابع گرین شویم، لازم است تا چندی در بار شخصی که این تابع را تدوین کرد و چند سال پیش مقاله‌ای در مجله فیزیک امروز [۱۹] آنرا "تابع گرین آقای گرین" نامید، اعتبار دهیم. در آنجا نویسنده بحث می‌کند که تا آنجا که معلوم است جورج گرین هیچ‌گونه تحصیلات ریاضی نداشته، بلکه پنج سال در نانوائی پدرش کار کرده و سپس به‌هاو آموزش داده شد تا در برج آسیابی که پدرش نزدیک ناتینگهام ساخته بود کار کند. در آن زمان خیابان‌های ناتینگهام محل مطمئن و سالمی برای قدم زدن بعد از تاریکی هوا نبود، بنابراین گرین روزها و شب‌های زیادی را در کارخانه آسیاب گذراند. احتمالاً در این زمان بود که او اولین اثر خود را در مورد "داستان کاربرد تحلیل ریاضی نظریه الکتریسته و مغناطیس" نوشت و آنرا برای یکی از مجلات آموزشی معروف [۱۹] که گرین جرأت ارسال آنرا نداشت فرستاد:

اما گرین، بدون داشتن صلاحیت و بدون ارتباط با نهاد علمی، احساس می‌کرد که ارسال مقاله خود به مجله جسورانه خواهد بود. بنابراین او هزینه چاپ مقاله خود را در ناتینگهام پرداخت. روش احتمالی رویکرد وی به انتشار در پیشگفتاری آشکار است. وی در آنجا ابراز امیدواری کرد: "دشواری این موضوع ریاضیدانان را وادار می‌کند تا این اثر را با کمال میل بخوانند، بهویژه هنگامی که به آنها اطلاع داده شود که این اثر توسط یک مرد جوان نوشته شده است، که موظف به کسب اطلاعات کمی است که در اختیار دارد." در چنین فواصل زمانی و با استفاده از این ابزارها، مانند دیگر تلاشهای ضروری که فرصتهای کمی برای بهبود [...] ....

هدف اصلی گرین از انتشار این بود که آثار او را مورد توجه ریاضیدانان در بریتانیا و خارج از کشور قرار گیرد. با این حال، به‌نظر می‌رسد که به‌جز یک استثنای پاسخ کمی یا هیچ پاسخی وجود نداشت. این باید بسیار مأیوس کننده باشد.

گرچه در توافق با او خوش شناس نبود، گار گرین احتمالاً کشف نشده باقی ماند. امروزه توابع گرین در زمینه فیزیک فراوان هستند و یکی از ابزارهای اصلی برای حل معادلات دیفرانسیل تبدیل شده است.

نکته جالب در باره  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  این است که اجازه می‌دهد بلافاصله جواب معادله (۱.۵) را به صورت زیر بنویسند

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (3.5)$$

با اعمال از سمت چپ معادله دیفرانسیل  $L(\mathbf{r})$  می‌دهد:

$$L(\mathbf{r}) \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d^3 r' = - \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d^3 r' = -Q(\mathbf{r})$$

که نشان می‌دهد رابطه (۱.۵) دقیقاً برآورده شده است. تابع  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  برای شرایط مرزی مناسب قبل از ساخته شده، همچنین تابع  $f(\mathbf{r})$  شرایط مرزی مناسب را بهارث می‌برد. آنچه باید انجام شود محاسبه توابع گرین مربوطه برای عملکردهای دیفرانسیل خاص  $L(\mathbf{r})$  است. همانطور که در زیر نشان خواهیم داد، این کار اغلب ساده‌تر از چیزی است که در نگاه اول به‌نظر می‌رسد. این بخش را با تأکید بر اینکه رویکرد تابع گرین به دلیل خطی بودن عملکر-

$L(\mathbf{r})$  کار می‌کند، بهنتیجه میرسانیم. تابع  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  پاسخ منبع یک نقطه را توصیف می‌کند، و با استفاده از جمع اثر در معادله (۳.۵) و پیدا کردن پاسخها برای همه منابع  $Q(\mathbf{r})$ ، می‌توانیم جواب کامل  $f(\mathbf{r})$  را بدست آوریم.

## ۲.۵ تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز

بهعنوان مثال اول، معادله هلم‌هولتز را در نظر گیرید

$$(\nabla^2 + k^2)f(\mathbf{r}) = -Q(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

که در آن  $k$  عدد موج است. با دستورالعمل بخش قبل، در جستجوی جواب تابع گرین هستیم

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.5)$$

برای یک محیط بدون مرز همگن، تابع گرین فقط می‌تواند بستگی به مسافت  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  از قبیل  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g(|\mathbf{r}, \mathbf{r}'|)$  داشته باشد. بنابراین، برای  $r \neq 0$  خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + k^2 g = 0$$

که در آن عملگر لاپلاس را در مختصات کروی بیان کرده و از همه مشتق‌ها نسبت به زاویه‌ها بعلت تقارن چشم‌پوشی کردیم. همان طور که می‌توان براحتی از طریق محاسبه صریح ثابت کرد، جواب معادله بالا امواج کروی خارج و وارد شونده هستند.

$$g(r) = C \frac{e^{-jkr}}{r} + D \frac{e^{+jkr}}{r} \quad (6.5)$$

در اینجا  $C$  و  $D$  پارامترهایی هستند که از شرایط مرزی برای  $g(r)$  بدست می‌آیند. از آنجا که به جواب‌هایی که علیت را حفظ می‌کنن علاقه‌مند هستیم، فقط جواب‌های که به اصطلاح جواب‌های تاخیری<sup>۱</sup> می‌نامند [۲] شامل موج خارج شونده را نگه میداریم یعنی  $D = 0$  قرار می‌دهیم. پارامتر  $C$  را می‌توان با انتگرال‌گیری رابطه (۵.۵) روی کره کوچکی بشعاع  $a$  و حجم  $\Omega_a$  که مرکز مختصات را در بر می‌گیرد تعیین کرد.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega_a} \nabla \cdot \nabla \frac{Ce^{-jkr}}{r} d^3r + k^2 \int_{\Omega_a} \frac{Ce^{-jkr}}{r} d^3r \right) = -1$$

در سمت راست یک حجم بینهایت کوچک استفاده کردیم و براین استدلال که تابع دلتا دیراک در انتگرال‌گیری، حجم صفر شود، یک عدد می‌دهد. جمله دوم در داخل پرانتر سمت چپ مختصات کروی را با  $d^3r = 4\pi r^2 dr$  معرفی کرده و فوراً مشاهده می‌کنیم که وقتی  $a \rightarrow 0$  میل تبدیل می‌کنیم:

<sup>۱</sup>Retarded Solutions

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \oint \nabla \left( \frac{Ce^{-jkr}}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{a \rightarrow 0} \oint \frac{d}{dr} \left( \frac{Ce^{-jkr}}{r} \right) ds \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} 4\pi a^2 \frac{d}{da} \left( \frac{Ce^{-jka}}{a} \right) = -4\pi \end{aligned}$$

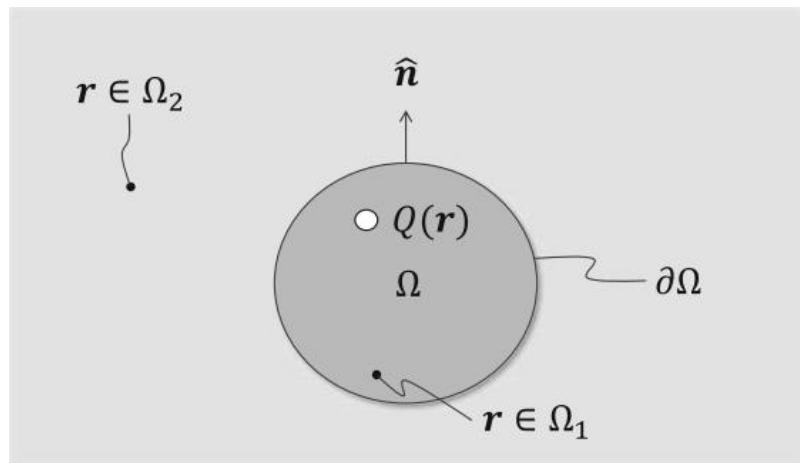
در اینجا از انتگرال گیری سطح که  $d\mathbf{S}$  عمود بر سطح کره و بسوج خارج است استفاده می‌کنیم. بنابراین، از رابطه بالا  $C = 1/(4\pi)$  را بدست می‌آوریم.تابع گرین برای معادله موج اسکالر و یک محیط همگن بدون مرز با موج خارج شونده بسوی بی‌نهایت بقرار زیر خواهد بود:

### تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{Ce^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.5)$$

## ۱.۲.۵ نمایش شکل معادله هلم‌هولتز

تابع گرین را می‌توان برای بدست آوردن روابط بسیار مفید که به عنوان رابطه نماینده از آن یاد می‌کنند، و ما در بخش‌های بعدی این کتاب استفاده خواهیم کرد، بکار برد. موقعیتی که در ذهن داریم در شکل (۱.۵) نشان داده شده است و شامل حجم  $\Omega$  با مرز تیز  $\partial\Omega$  تشکیل شده است. ساده‌تر است که داخل و خارج حجم  $\Omega$  را جداگانه در نظر گیریم.



شکل ۱.۵: شمای نمایش رابطه. حجم  $\Omega$  را با مرز  $\partial\Omega$  در نظر می‌گیریم.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  و  $\Omega_1$  داخل و خارج حجم مشخص می‌کنیم.  $\hat{\mathbf{n}}$  عمود بر سطح بسوی خارج حجم  $\Omega$  است. برای نمایش رابطه موقعیتی را در نظر می‌گیریم که  $r$  داخل یا خارج حجم  $\Omega$  باشد.  $Q(r)$  منبع است که در داخل حجم  $\Omega_1$  قرار دارد.

- ناحیه داخل حجم  $\Omega$  را با اندیس یک، ازینرو عددموج و تابع گرین  $\Omega_1$  را بترتیب با  $k_1$  و  $G_1$  مشخص می‌کنیم.

- ناحیه خارج از حجم  $\Omega$  را با اندیس دو، از اینرو عددموج و تابع گرین  $\Omega_2$  را بترتیب با  $k_2$  و  $G_2$  مشخص می‌کنیم.
- با ناحیه داخلی شروع می‌کنیم و رابطه (۴.۵) را در  $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  و رابطه (۵.۵) را در  $f(\mathbf{r})$  ضرب می‌کنیم. با جابجایی  $\mathbf{r}' \leftrightarrow \mathbf{r}$  خواهیم داشت:

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\nabla'^2 + k^2) f(\mathbf{r}') = -G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') \quad (۸.۵)$$

$$f(\mathbf{r}') (\nabla'^2 + k^2) G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (۸.۶)$$

این معادله‌ها را در حجم  $\Omega_1$  انتگرال‌گیری می‌کنیم. با معرفی یک میدان وارد که با توزیع منبع واقع در  $\Omega_1$  تولید شده است، معرفی می‌کنیم:

$$f_1^{inc}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_1} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (۹.۵)$$

این‌گونه میدان‌ها می‌توانند جواب معادله هلم‌هولتز در یک محیط همگن با عددموج  $k_1$  در غیاب مرز اضافی باشند. این رابطه نماینده را در چند لحظه دیگر بدست می‌آوریم، بشرط آنکه میدان اصلاح شده در حضور این‌گونه مرزها باشد. وقتی از رابطه (۸.۵) روی حجم  $\Omega_1$  انتگرال‌گیری می‌کنیم باید در باره آخرین جمله رابطه (۸.۵)-ب مواظب باشیم که وقتی  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{r}'$  در حجم‌های مختلف قرار داشته باشند. سپس دو رابطه (۸.۵) را از هم کم کرده و روی حجم  $\Omega_1$  انتگرال‌گیری می‌کنیم، و خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{r} \in \Omega_1 : & f(\mathbf{r}) \\ \mathbf{r} \in \Omega_2 : & 0 \end{array} \right\} = \int_{\Omega_1} (G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}') \nabla'^2 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) d^3 r' + f_1^{inc}$$

اکنون می‌توانیم قضیه گرین را برای دو تابع  $(\mathbf{r}, \phi)$  و  $(\mathbf{r}, \psi)$  بکار ببریم [۲] (به تمرین ۱.۵ مراجعه کنید).

$$\int_{\Omega_1} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3 r = \oint_{\partial \Omega_1} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS. \quad (۱۰.۵)$$

در اینجا مرز حجم  $\Omega$  و  $\hat{n}$  بردار عمود بر سطح بطرف حجم  $\Omega_1$  است. ضمناً مشتق عمودی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla \psi \quad (۱۱.۵)$$

با استفاده از قضیه گرین برای  $f(\mathbf{r})$  به رابطه نماینده زیر می‌رسیم.

### نمایش رابطه‌ای برای انتگرال‌گیری روی $\Omega_1$

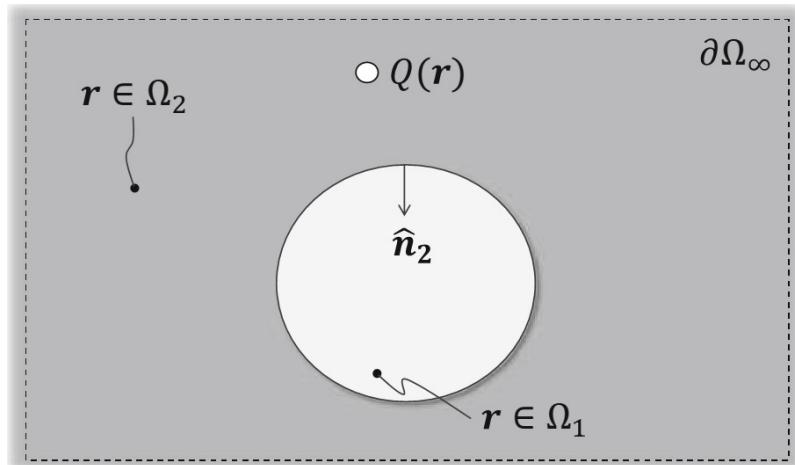
$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{r} \in \Omega_1 : & f(\mathbf{r}) \\ \mathbf{r} \in \Omega_2 : & 0 \end{array} \right\} = f_1^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial \Omega} \left[ G_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial f(\mathbf{s}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial n'} f(\mathbf{s}') \right] dS'. \quad (۱۲.۵)$$

می‌توان آن را به شرح زیر تفسیر کرد: اگر مقادیر تابع  $f(s')$  و مشتق طبیعی  $\partial f(s')/\partial n'$  را در یک ناحیه محدود مشخص بدانیم می‌توانیم مقدار تابع  $f(r)$  را در هر جای دیگر در ناحیه داخلی بدست آوریم. از این به بعد موقعیت‌ها را در کنار مرز با ناماد  $s$  نشان میدهیم.

عبارت مشابه (۱۲.۵) را می‌توان برای ناحیه خارج از  $\Omega_2$  نیز بدست آورد. با روشی مشابه مربوط به داخل، میدان‌های ورودی مربوط به منابع در  $\Omega_2$  را معرفی کرده و از این‌رو در موقعیت  $r$  توسط  $G_2$  و نه  $G_1$  منتشر می‌شوند.

$$f_2^{inc}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_2} G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (13.5)$$

توجه کنید اینگونه میدانها که در غیاب مرز وجود دارند جواب معادله هلم‌هولتز هستند. در مقایسه با حالت داخلی، دو نکته را باید با دقت بیشتری در نظر گرفت. اول، شرایط مرزی اضافی  $\partial\Omega_\infty$  در خارج از حجم است، شکل (۲.۵)، که در اکثر موارد مطلوب می‌تواند بسمت بی‌نهایت میل کند. از آنجا که تابع گرین در شرایط مرزی در فواصل دور تدوین شده است، در باره هلم‌هولتز میدان‌های خروجی معادله (۷.۵)، مجبور نیستیم بطور صریح این مرز را بحساب آوریم. دوم، عمود بر سطح  $\hat{\mathbf{n}}$  بسوی داخل حجم  $\Omega_1$  است. به شکل (۲.۵) مراجعه و مخالف  $\hat{\mathbf{n}}$



شکل ۲.۵: شماتی برای رابطه نماینده و انتگرال‌گیری روی  $\Omega_2$ . هنگامی که انتگرال‌گیری روی  $\Omega_2$  است، دو اختلاف نسبت به وضعیت شکل (۱.۵) وجود دارد. اول، یک مرز نیز در بینهایت  $\partial\Omega_\infty$  وجود دارد (خط نقطه چین). در اکثر موارد علاقه، شرایط مرزی در بینهایت بدرستی در جواب تابع گرین تدارک دیده شده است. به عنوان مثال، استفاده از میدان‌های خارج و وارد شونده هستند. دوم، عمود بر سطح  $\hat{\mathbf{n}}_2$  بسوی داخل حجم  $\Omega_1$  است. در بیشتر موارد علاقه، در تحلیل‌های خود فقط عمود بر سطح  $\hat{\mathbf{n}}$  حجم  $\Omega$  بکار می‌بریم که در آن  $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}_1$  است.  $Q$  منبعی است که در  $\Omega_2$  قرار دارد.

را مشاهده کنید. به نظر میرسد که ساده‌تر است فقط  $\hat{\mathbf{n}}$  را نگه داشته و علامت منفی در رابطه نماینده ارائه شود. بنابراین خواهیم داشت:

### نمایش رابطه‌ای برای انتگرال‌گیری روی $\Omega_2$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r} \in \Omega_1 : \quad 0 \\ \mathbf{r} \in \Omega_2 : \quad f(\mathbf{r}) \end{array} \right\} = f_2^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} \left[ G_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \frac{\partial f(\mathbf{s}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial n'} f(\mathbf{s}') \right] dS'. \quad (14.5)$$

هر دو رابطه نماینده یادآور طیف زاویه‌ای معرفی شده در فصل سوم هستند، جائی که میدان‌های الکترومغناطیسی در صفحه  $z=0$  را به میدان‌های محو شدگی و میدان‌های دور شونده از صفحه مربوط کردیم. آنها نیز در تعدادی از زمینه‌های مختلف مانند زیر مفید هستند:

- مسئله دیریشله در مقابل نیومن در اصل، معادلات (۱۲.۵) و (۱۴.۵) بهما این امکان را می‌دهد که تابع  $f$  را بر حسب مشتق عمودی و بر عکس بیان کنیم. هنگامی که  $\mathbf{r}$  بطرف مرز میل می‌کند، رابطه‌ای که تابع و مشتق سطحی را بهم مرتبط می‌کند بدست می‌آوریم. بنابراین، دانستن مقدار تابع در مرز (مسئله دیریشله) یا مشتق سطحی (مسئله نیومن) کافی است.
- مسئله انتقال برای اجسام با مواد همگن  $k_1$  و  $k_2$ ، می‌توانیم از رابطه نماینده در محدوده داخل و خارج با توابع گرین مقادیر تابع و مشتق‌های عمودی مرز را با شرایط مرزی مناسب استفاده کنیم. در فصل نهم بهاین موضوع بازمی‌گردیم:

$$f(\mathbf{r}) = f_j^{inc}(\mathbf{r}) + \tau_j \oint_{\partial\Omega} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \left( \frac{\partial f(\mathbf{s}')}{\partial n'} \right) - \left( \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial n'} \right) f(\mathbf{s}') \right] dS'. \quad (15.5)$$

که در آن  $\mathbf{r} \in \Omega_j$  و از نماد  $\tau_{1,2} = \pm 1$  برای تغییر عمود بر سطح در حالت جواب خارجی بکار بردیم. معادله‌های باقیمانده با صفر در سمت چپ را می‌توان گاهی اوقات برای دستگاری‌های بیشتر برای رابطه نماینده استفاده کرد.

## ۲.۲.۵ تابع گرین در مقابل جواب اصلی

در فیزیک از توابع گرین در زمینه‌های مختلف استفاده می‌شود که بعضی وقت‌ها باعث سردرگمی می‌شود. ابتدا منبع  $Q(\mathbf{r})$  را که در فضای نامحدود واقع شده است در نظر می‌گیریم. سپس مانند آنچه در قسمت قبل بحث شد، می‌توانیم جواب را مستقیماً از تابع گرین  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  محاسبه کنیم.

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d^3 r'$$

با این حال، برای یک محیط فوتونی متشکل از منابع  $(\mathbf{r}) Q$  همراه نانو ذرات دی‌الکتریک یا فلز اضافی، مانند شکل (۲.۵)، باید به معادله (۱۵.۵) یا شکلی معادل برای در نظر گرفتن شرایط مرزی اضافی که باید در محدوده نانو ذرات انجام شود. در این مورد، تابع گرین معادله (۷.۵) برای یک محیط نامحدود دیگر کافی نیست تا بطور منحصر بفرد جواب  $f(\mathbf{r})$  را تعیین کرد. در اصل، می‌توانیم یک تابع گرین "کلی"  $G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  جدید برای اینگونه شرایط مرزی صلاح شده در نظر گیریم، که جواب و منابع را بهم مربوط کند:

$$f(\mathbf{r}) = \int G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d^3 r'$$

فرض کنید ماشینی در اختیار داریم که اجازه میدهد معادله دیفرانسیل با منابع دلخواه  $Q(\mathbf{r})$  را حل کنیم. در باره اینگونه روش راه حلها در فصل نهم روی ذرات پلاسمون‌ها بیشتر یاد خواهیم گرفت. سپس منابع نقطه‌ای مانند،  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r})$ ، را معرفی کرده تا مقدارتابع  $f_\delta$  و مشتق‌ها را در مزد استفاده از ماشینی که بحث خواهد شد محاسبه و از رابطه (۱۵.۵) تابع گرین کلی  $f_\delta(\mathbf{r}) = G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  را بدست آوریم. با ساخت، تابع گرین کلی سپس پاسخ مناسب جواب منبع نقطه مانند حاصل شده و بوسیله اصل جمع اثرها می‌توانیم از طریق انتگرال گیری روی تمام منابع نقطه مانند، پاسخ کل را بدست آوریم.

ادبیات ریاضی اصطلاحات دقیق‌تری را اتخاذ کرده است که جواب محیط نامحدود  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  را جواب اصلی میداند و عبارت تابع گرین را بطور کلی برای  $G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  محفوظ میدارد. بنابراین تابع گرین همواره برای شرایط مرزی مربوط به مسئله مورد تحقیق مناسب است. در اینجا اصطلاح اضافی اتخاذ نمی‌کنیم اما هر زمان که لازم باشد یک کلمه احتیاط را اضافه می‌کنیم.

### ۳.۵ تابع گرین برای معادله موج

معادله موج زیر را برای میدان الکتریکی هارمونیک زمانی در نظر گیرید:

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu\epsilon \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (16.5)$$

که در آن  $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$  است. در اصل می‌توانیم تابع گرین شبیه معادله هلم‌هولتز تعریف کنیم، اما در اینجا قدر متفاوت خواهد بود. ابتدا متوجه می‌شویم که میدان الکتریکی در حوزه فرکانس می‌تواند به  $V$  و  $\mathbf{A}$  از طریق  $\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega\mathbf{A}$  مرتبط باشد. ضمناً شرط معیار لورنتس  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon V$  را می‌توانیم برای بدست آوردن معادله هلم‌هولتز برای بردار پتانسیل استفاده کنیم.

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu\epsilon \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

بدیهی است که می‌توانیم تابع گرینی که در رابطه (۱۷.۵) برای معادله هلم‌هولتز تعریف کرده بودیم، برای  $\mathbf{A}$  بصورت زیر استفاده کنیم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (17.5)$$

اکنون می‌توانیم شرط معیار لورنتس را برای محاسبه پتانسیل اسکالار بکار ببریم:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})}{j\omega\mu\epsilon} = \frac{j\omega\mu}{k^2} \nabla \cdot \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

که در آن  $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$  است. میدان الکتریکی را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$E_i(\mathbf{r}) = -j\omega A_i(\mathbf{r}) - \partial_i V(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int \left( \delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_j(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (18.5)$$

که در آن  $\partial_i$  نماد مشتق نسبت به  $i$  ایم مولفه دستگاه دکارتی است و قرارداد انسشن را برای  $j$  فرض می‌کنیم. اکنون ساده‌تر است که تابع گرین دیادیک را معرفی کنیم:

### تابع گرین دیادیک

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{k^2} \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (19.5)$$

و میدان الکتریکی و جریان را از طریق رابطه زیر بهم مربوط سازیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (20.5)$$

در اینجا  $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  را باید بدین گونه تفسیر کرد که برای منبع  $J_j(\mathbf{r}')$  در جهت  $j$  میدان الکتریکی  $E_i(\mathbf{r})$  را در جهت  $i$  بما می‌دهد. گاهی اوقات از علامت ماتریس فشرده نیز استفاده می‌کنیم.

$$\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \mathbb{I} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

که در اینجا بطور صریح فرض می‌کنیم که  $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$  است. ماتریس  $\bar{G}$  را اغلب بنام تابع گرین دیادیک یا بطور خلاصه دیادیک گرین می‌نامند و نقش مهمی در میدان‌های نانو اپتیک ایفا می‌کند. شبیه معادله موج برای میدان الکتریکی، رابطه (16.5)، تابع گرین  $\bar{G}$  در معادله زیر صدق می‌کند، (به تمرین ۶.۵ مراجعه کنید).

$$-\nabla \times \nabla \times \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbb{I} \quad (21.5)$$

برای کامل کردن مطلب، نشان میدهیم که چگونه میدان مغناطیسی را می‌توان بر اساس تابع گرین دیادیک بیان کرد. قانون فاراده بر میدان‌های هارمونیک زمانی می‌گوید:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$$

با گرفتن کرل از دو طرف معادله (20.5) خواهیم داشت:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (22.5)$$

### ۱.۳.۵ ناحیه میدان دور

در بسیاری از موارد، دوست داریم تا میدان‌های دور از منبع جریان را داشته باشیم. در اصل، می‌توانیم ناحیه میدان‌های دور تابع گرین را داشته باشیم. با این حال، در اینجا تا حدودی متفاوت عمل کرده و از معادله (17.5) که توزیع جریان را به بردار پتانسیل مربوط می‌کند، شروع می‌کنیم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

در ادامه، فرض می‌کنیم که  $r' \gg r$  است بقسمی که می‌توان از تقریب استفاده کرد:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta + \left( \frac{r'}{r} \right)^2} \approx r \left( 1 - \frac{r'}{r} \cos \theta \right) = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

در اینجا  $\theta$  زاویه بین  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{r}'$  است و ضمناً فقط کمترین بسط سری تیلور رادیکال را انتخاب کردیم. بنابراین با توجه به ناحیه  $r' \gg r$  خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg r']{} \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \mu \int e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

و میدان مغناطیسی در ناحیه میدان دور را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \longrightarrow -\frac{jk}{\mu} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}$$

جائی بسیار دور از منبع ب舵وری که میدان‌های الکترومغناطیسی خارج شونده بشکل امواج صفحه‌ای بوده و در جهت  $\hat{\mathbf{r}}$  منتشر می‌شوند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg r']{} \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) (-jk\hat{\mathbf{r}}) \times \int e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (23.5)$$

سرانجام می‌توانیم از معادله (۴۰.۲) برای مربوط کردن میدان الکتریکی و مغناطیسی در ناحیه دور، به همراه  $Z = -jkZ = -j\omega\mu$  که در آن  $Z$  امپدانس است، برای بیان میدان الکتریکی استفاده کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg r']{} \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) (j\omega\mu) \int e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d^3 r' \quad (24.5)$$

بر طبق ناحیه میدان دور برای میدان الکتریکی رابطه (۵.۳)، می‌توانیم دامنه موج کروی را بیرون آورده و رابطه بالا را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg r']{} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) (j\omega\mu) \int \frac{e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{4\pi} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) J_j(\mathbf{r}') d^3 r'$$

جائی که بصراحت ضرب خارجی را در انگرال بکار بردیم. با مقایسه رابطه بین میدان الکتریکی و توزیع جریان رابطه (۲۰.۵)، این اجازه را خواهیم داشت که محدوده میدان دور تابع گرین دیاکریک را به صورت زیر بنویسیم

### تابع گرین دیاکریک در ناحیه میدان دور

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \xrightarrow[r \gg r']{} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \frac{e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{4\pi} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j). \quad (25.5)$$

### ۲.۳.۵ رابطه نماینده برای معادله موج

برای وضعیتی که در شکل (۱.۵) و (۲.۵) نشان داده شده است، می‌توانیم درست شبیه معادله هلم‌هولتز، یک رابطه نماینده که میدان الکتریکی  $E_j(r)$  را در یک نقطه از فضا به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مماسی در مرز  $\delta\Omega$  مرتبط می‌کند، بدست آوریم:

#### رابطه نماینده برای معادلات ماکسول

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) - \tau_j \oint_{\delta\Omega} \\ &\times \left\{ -j\omega\mu\bar{G}_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{s}') - [\nabla' \times \bar{G}_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}')] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{s}') \right\} dS' \end{aligned} \quad (26.5)$$

در اینجا  $r \in \Omega_j$  ممکن است در داخل یا خارج از حجم  $\Omega$  باشد و علامت  $\tau_{1,2} = \pm 1$  مطابق آن انتخاب شود. جزئیات مربوط به نحوه بدست آوردن آن در بخش ۵.۵ آورده شده است. در عبارت بالا، میدان‌های تابشی که توسط جریان منبع در  $\Omega_j$  تولید می‌شود را به صورت زیر معرفی کردیم:

$$\mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_{\Omega_j} \bar{G}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (27.5)$$

معادله (۲۶.۵) یک رابطه کاملاً قابل توجه است که می‌گوید با دانستن میدان‌های مماسی الکتریکی و مغناطیسی در مرزهای یک حجم، می‌توان میدان‌های الکترومغناطیسی را در هر جای دیگر محاسبه کرد.

### ۴.۵ قضیه نوری

در این بخش قضیه نوری بخش ۴.۴ را اثبات می‌کنیم، برای اثبات دو مرحله پیش می‌رویم. ابتدا حد میدان دور را برای رابطه نماینده (۲۶.۵) محاسبه می‌کنیم. سپس این عبارت را با  $P_{ext}$  رابطه (۲۵.۴) مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که این دو رابطه می‌توانند به یکدیگر مرتبط باشند.

#### حد میدان دور رابطه نماینده

از رابطه بین میدان الکتریکی و تابع گرین دیدیک (۲۰.۵)، در می‌یابیم که جمله اول در برآکت رابطه نماینده را می‌توان بعنوان میدان الکتریکی برای منبع  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$  تفسیر کرد. بهمین نحو، با مقایسه رابطه (۲۲.۵) نشان می‌دهد که جمله دوم میدان مغناطیسی به منبع  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$  مربوط می‌شود. بنابراین، می‌توانیم بطور مستقیم از محدوده میدان دور برای میدان‌های الکترومغناطیسی روابط (۲۳.۵) و (۲۴.۵) استفاده کرده و حد میدان دور رابطه نماینده خارج از

حجم  $\Omega$  را بدست آوریم.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\xrightarrow[r \gg r']{} \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) \\ &+ \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \oint_{\delta\Omega} e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \left\{ j\omega\mu\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] - jk\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right\} dS' \end{aligned} \quad (28.5)$$

برای ساده‌تر کردن مقایسه با توان انقراضی، اکنون فرض می‌کنیم که محدوده میدان دور، موج خارج شونده در جهت  $\hat{\mathbf{k}}$  منتشر می‌شود، و هر دو طرف معادله را در  $\epsilon^*$  ضرب می‌کنیم. جمله با میدان مغناطیسی مماسی را می‌توان با استفاده از

$$\epsilon_0^* \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 \times (\hat{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{u}) = \epsilon_0^* \cdot [\hat{\mathbf{k}}_0 (\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}] = -\epsilon_0^* \cdot \mathbf{u},$$

ساده کرد که در آن  $\epsilon_0^* \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 = 0$  استفاده کرده و  $\mathbf{u}$  یک بردار دلخواه است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \epsilon_0^* \cdot \mathbf{E}(r\hat{\mathbf{k}}_0) &\xrightarrow[r \gg r']{} \epsilon_0^* \cdot \mathbf{E}_{inc}(r\hat{\mathbf{k}}_0) \\ &+ \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) (-j\omega\mu) \oint_{\delta\Omega} e^{j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}'} \epsilon_0^* \cdot \left\{ \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') + Z^{-1}\hat{\mathbf{k}}_0 \times [\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \right\} dS' \end{aligned} \quad (29.5)$$

که در آن  $-jk = -j\omega\mu Z^{-1}$  است. با توجه به استخراج سطح مقطع نوری، میدان الکتریکی را  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}$  بدو میدان تابشی و پراکندگی و شبیه به آن برای میدان مغناطیسی تجزیه می‌کنیم. بطوری که در تمرین ۹.۵ بحث شده است، می‌توانیم کرانه انتگرال (۲۹.۵) را با میدان‌های پراکندگی عوض کنیم. بنابراین، برای دامنه میدان دور رابطه (۲۶.۴) رابطه نهائی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \epsilon_0^* \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0) &= \frac{-jkZ}{4\pi} \oint_{\delta\Omega} \\ &e^{j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}'} \epsilon_0^* \cdot \left\{ \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}_{sca}(\mathbf{r}') + Z^{-1}\hat{\mathbf{k}}_0 \times [\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}_{sca}(\mathbf{r}')] \right\} dS' \end{aligned} \quad (30.5)$$

### توان انقراضی

در ادامه توان انقراضی رابطه (۲۵.۴) را بررسی می‌کنیم:

$$P_{ext} = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{Re} \left\{ E_0^* e^{j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} [\mathbf{H}_{sca}(\mathbf{r}) \times \epsilon_0^* + Z^{-1} (\hat{\mathbf{k}}_0 \times \epsilon_0^*) \times \mathbf{E}_{sca}(\mathbf{r})] \right\} \cdot d\mathbf{S}$$

که برای راحتی جای دو جمله را در داخل آکولاد و همین طور ضرب خارجی را عوض کرده‌ایم. جمله آخر در داخل آکولاد را می‌توان با تبدیل دوری برای ضرب خارجی از طریق رابطه زیر ساده کرد:

$$(\hat{\mathbf{k}}_0 \times \epsilon_0^*) \cdot (\mathbf{E}_{sca} \times \hat{\mathbf{n}}) = \epsilon_0^* \cdot [\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{E}_{sca}) - \mathbf{E}_{sca}(\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})] = \epsilon_0^* \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{sca})$$

بنابراین، در نهایت به رابطه زیر میرسیم:

$$P_{ext} = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \operatorname{Re} \left\{ E_0^* e^{j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \epsilon_0^* \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{sca} + Z^{-1} \hat{\mathbf{k}}_0 \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{sca})] \right\} dS \quad (31.5)$$

مقایسه با رابطه (۳۰.۵) نشان می‌دهد که  $P_{ext}$  را می‌توان با دامنه میدان دور بربطق

$$P_{ext} = \operatorname{Re} \left[ \frac{2\pi}{-jkZ} E_0 \epsilon_0^* \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0) \right] = \frac{2\pi}{k} Z^{-1} \operatorname{Im} \left[ E_0 \epsilon_0^* \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0) \right],$$

مطابق با رابطه (۲۷.۴) بهم مربوط کرد. این اثبات قضیه نوری را تکمیل می‌کند.

## ۵.۵ جزئیات رابطه نماینده معادله موج

در این بخش نحوه دستیابی به رابطه نماینده معادله ماکسول (۲۶.۵) را نشان می‌دهیم. نحوه دستیابی رابطه نماینده دقیقاً از کتاب چو [۲۰] پیروی می‌کند. با معادله میدان الکتریکی شروع، و سمت راست را با تابع گرین دیادیک ضرب می‌کنیم.

$$[-\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = j\omega\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

برای سهولت بعدی، معادله موج را برای موقعیت پریم دار  $\mathbf{r}'$  بجای بدون پریم نوشتیم. به طور مشابه، معادله موج را برای تابع گرین دیادیک از سمت چپ در  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ضرب می‌کنیم،

$$-\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \nabla' \times \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

سپس دو معادله را روی  $\mathbf{r}'$  انتگرال‌گیری کرده و از هم کم می‌کنیم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \left\{ [-\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \nabla' \times \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right\} d^3 r'$$

$$= -\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{r}'$  در یک حجم قرار دارند. جمله داخل برکت حاوی کرل را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$-\nabla' \cdot \left\{ [\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times [\nabla' \times \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \right\}. \quad (32.5)$$

برای اثبات این، در رابطه (۳۲.۵) از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}).$$

برای سهولت وابستگی  $\mathbf{E}$  و  $\bar{G}$  به  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{r}'$  را حذف می‌کنیم و اثبات بصورت زیر تکمیل می‌شود.

$$-\left\{ \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{E} - (\nabla' \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla' \times \bar{G}) + (\nabla' \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla' \times \bar{G}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla' \times \nabla' \times \bar{G}) \right\}$$

سپس این عبارت اصلاح شده را برای جمله داخل برآکت کرل دار داخل انتگرال حجمی استفاده کرده و قضیه گوس را برای انتگرال مرزی بکار می‌بریم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) \\ &\quad - \oint_{\partial\Omega} \left\{ [\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times [\nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' \end{aligned} \quad (۳۳.۵)$$

که در اینجا بطور صریح عمود بر سطح  $\hat{\mathbf{n}}'$  روی مرز را مشخص کردہ‌ایم. معادله (۳۳.۵) اولین با توسط استرانتون و چو<sup>۲۱</sup> بدست آورده شد و معادلات مربوط با شکل بالا بنام این مولفان نامیده می‌شود. اولین جمله در برآکت کرل دار را می‌توان با انجام تبدیل دوری ضرب سه‌گانه و استفاده از قانون فاراده برای کرل  $\mathbf{E}$  ساده کرد.

$$[\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}' = -j\omega\mu\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

در جمله دوم تبدیل دوری ضرب سه‌گانه انجام می‌دهیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times [\nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

با وارد کردن این عبارت‌ها در معادله (۳۲.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) \\ &\quad - \oint_{\partial\Omega} \left\{ -j\omega\mu\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \right\} dS' \end{aligned}$$

سرانجام از تانسور متقارن  $\bar{\bar{G}}$  (به بخش ۴.۷ مراجعه کنید) برای تغییر ترتیب بین دو جمله در ضرب‌های اسکالر استفاده می‌کنیم. با هم

$$[\nabla' \times G(\mathbf{r}', \mathbf{r})]_{ij} = [\nabla' \times G(\mathbf{r}', \mathbf{r})]\mathbb{I}]_{ij} = -[\nabla' \times G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]_{ji}$$

از آنجائی که کرل گرادیان همواره صفر است، سرانجام به رابطه نمایس (۲۶.۵) میرسیم که برای کامل شدن مطلب دوباره آنرا تکرار می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) \\ &\quad - \tau_j \oint_{\partial\Omega} \left\{ -j\omega\mu\bar{\bar{G}}_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}(\mathbf{s}') - [\nabla' \times \bar{\bar{G}}_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}')] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}(\mathbf{s}') \right\} dS' \end{aligned}$$

در اینجا علامت  $\pm 1$  در جلو انتگرال را برای انتخاب عمود بر سطح که نقطه در داخل یا خارج حجم باشد معرفی کردیم. این نقطه بطور مفصل در محتوای معادله (۱۴.۵) بحث شده است.

<sup>۲۱</sup>Stratton and Chu

### پتانسیل‌های تک لایه و دو لایه

رابطه نماینده را می‌توان به صورت فشرده‌تر نوشت. در زیر میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی را با نماد اختصاری  $\mathbf{U}_H = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$  و  $\mathbf{U}_E = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$  معرفی می‌کنیم.

- **تک لایه** با اولین عبارت داخل برآکت برای چیزی که بنام عملگر انتگرالی تعریف می‌کنیم (و اندیس میدان الکتریکی را برای  $\mathbf{u}$  حذف می‌کنیم) شروع می‌کنیم.

$$[\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \left[ \left( \mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \right] \cdot \mathbf{u}(\mathbf{s}') dS'$$

برای جمله دوم از  $\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$(\nabla G) \cdot \mathbf{u} = -(\nabla' G) \cdot \mathbf{u} = G \nabla' \cdot \mathbf{u} - \nabla' \cdot (G \mathbf{u})$$

استفاده می‌کنیم. جمله آخر را می‌توان با نوع دو بعدی قانون گوس<sup>۳</sup> (۱۲.۲)، برای یک مرز به انتگرال خطی که برای مرز بسته صفر می‌شود، تبدیل کرد. بنابراین به رابطه زیر می‌رسیم:

$$[\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}') + \frac{1}{k^2} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \nabla' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{s}') \right] dS'. \quad (۳۴.۵)$$

در ادبیات ریاضی معمولاً از  $\mathbb{S}$  به دلایل رسمی به عنوان عملگر انتگرالی **تک لایه** یاد می‌شود.

- **دو لایه** برای جمله دوم در داخل برآکت معادله (۲۶.۵) با رابطه زیر شروع می‌کنیم

$$\nabla' \times \left( \mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \times \left( \mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \times \mathbb{I} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

در مرحله آخر از کرل گرادیان که همواره صفر است استفاده می‌کنیم. بنابراین، سرانجام به انتگرال زیر می‌رسیم

$$[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \nabla' \times \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \mathbf{u}(\mathbf{s}') dS' = - \oint_{\delta\Omega} \nabla \times G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}') dS' \quad (۳۵.۵)$$

در آن نماد  $\mathbb{D}$  معرفی کردیم که در ادبیات ریاضی به آن معمولاً به عنوان عملگر انتگرالی **دو لایه** می‌نامند.

رابطه بین عملگرهای با محاسبه کرل پتانسیل تک لایه در معادله (۳۵.۵)، به رابطه زیر می‌رسیم

$$\nabla \times [\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \oint_{\delta\Omega} \nabla \times G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}') dS' = -[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r})$$

---

<sup>۳</sup>در زمینه هندسه دیفرانسیلی قضیه‌ای بنام استوکس-کارتون وجود دارد که می‌توان از قانون گوس، استوکس و گرین بدست آورد. این چهارچوب اجازه میدهد تا این قوانین را در بعد دلخواه و فضای منحنی عمومیت دهیم. برای مثال نوع قانون گوس دو بعدی برای مرز منحنی است که ما در این فصل بدون اثبات استفاده کردیم

در جمله دوم عملگرد کرل گرادیان که همواره صفر است را استفاده کردیم. به همین نحو، با محاسبه کرل پتانسیل دو لایه در رابطه (۳۵.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\nabla \times [\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}) &= -\oint_{\delta\Omega} \nabla \times \nabla \times G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}') dS' \\ &= -\oint_{\delta\Omega} \{\nabla [\nabla \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}')] - \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}')\} dS' \\ &= -k^2 [\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}),\end{aligned}$$

که در آنجا تعریف معادله تابع گرین اسکالر (۵.۵) را برای بازنویسی جمله دوم داخل برآخت بکار بردیم. بنابراین، رابطه بین عملگر انتگرالی تک لایه و دو لایه را بدست آوردهیم:

$$\nabla \times [\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = -[\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}), \quad \nabla \times [\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = -k^2 [\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) \quad (36.5)$$

با استفاده از رابطه نماینده میدان الکتریکی همراه با قانون فاراده  $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} - g\omega\mu\mathbf{H}$ ، می‌توانیم رابطه (۲۶.۵) را بازنویسی کرده و عبارت مربوط به میدان مغناطیسی بصورت فشرده زیر بیان کنیم

## رابطه نماینده برای معادلات ماکسول II

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) - \tau_j \{-j\omega\mu[\mathbb{S}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}](\mathbf{r}) - [\mathbb{D}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}](\mathbf{r})\} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_j^{inc}(\mathbf{r}) - \tau_j \{j\omega\epsilon[\mathbb{S}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}](\mathbf{r}) - [\mathbb{D}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}](\mathbf{r})\}\end{aligned} \quad (37.5)$$

در اینجا  $j = 1, 2$  را باید برای  $\mathbf{r} \in \Omega_{1,2}$  همراه با  $\tau_{1,2} = \pm 1$  بکار برد و عملگر انتگرالی  $\mathbb{S}$  و  $\mathbb{D}$  را در معادلات (۳۴.۵) و (۳۵.۵) تعریف کردیم. میدان‌های الکترومغناطیسی  $\mathbf{H}_j^{inc}(\mathbf{r})$  و  $\mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r})$  بوسیله منابع جریان واقع در حجم  $\Omega_j$  تولید شده است. بعداً در فصل نهم به روابط نماینده، هنگامی که روش انتگرال مرزی را بحث می‌کنیم، برمی‌گردیم.

## تمرینات

- تمرین ۱ قضیه گرین را اثبات کنید:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3 r = \oint_{\delta\Omega} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

و نشان دهید که جمله داخل پرانتزاها را می‌توان بصورت  $(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \nabla$  نوشت و با استفاده از قضیه گوس (۱۲.۲) انتگرال حجم را به انتگرال مرز تبدیل کنید.

- تمرین ۲ تابع گرین پیشرفته را برای معادله هلم‌هولتز بدست آورید. از رابطه (۶.۵) شروع کرده و فقط جمله دوم را همراه موج کروی تابشی نگه دارید. این را برای تعیین  $D$  تکرار کنید

- تمرین ۳ در داخل  $\mathbf{r} \in \Omega_2$  جواب معادله هلمهولتز برای میدان‌های تابشی و پراکنده تجزیه کنید.

$$f(\mathbf{r}) = f_{inc}(\mathbf{r}) + f_{sca}(\mathbf{r})$$

نشان دهید که در سمت راست رابطه نماینده (۱۴.۵)، می‌توانیم بجای میدان‌های کل نیز میدان‌های پراکنده استفاده کنیم. برای این منظور، به رابطه اضافی (۱۲.۵) برای  $\mathbf{r} \in \Omega_2$  نیاز دارید

- تمرین ۴ تابع گرین برای معادله هلمهولتز

$$g(R) = \frac{e^{\pm jkR}}{4\pi R}$$

را با استفاده از تبدیل فوریه به همراه رابطه پاشندگی  $\omega = kc$  به حوزه زمان تبدیل کنید. نتایج را برای تاخیر یافته (با علامت مثبت) و تابع گرین پیشرفت (با علامت منفی) مقایسه کرده و تفسیر کنید.

- تمرین ۵ تابع گرین را برای معادله هلمهولتز یک بعدی بدست آورید

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) G(x) = -\delta(x)$$

نشان دهید که با انتگرال‌گیری این معادله روی ناحیه کوچکی در اطراف مبداء مختصات می‌توان شرایط مرزی زیر را بدست آورد:

$$G(0^+) = G(0^-), \quad \left. \frac{dG}{dx} \right|_{0^+} - \left. \frac{dG}{dx} \right|_{0^-} = -1,$$

که در آن  $0^\pm$  نمایشگر موقعیت بسیار کوچک کمتر یا بیشتر صفر است. برای بدست آوردن تابع گرین تاخیر یافته، جواب مربوط به موج خارج شونده در بینهایت را انتخاب کنید.

- تمرین ۶ تعریف معادله (۲۱.۵) را برای تابع گرین اثبات کنید. این معادله را به صورت زیر بازنویسی کرده

$$-(\epsilon_{ikl}\partial_k)(\epsilon_{lmn}\partial_m)G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

و  $G$  را با استفاده از (۱۹.۵) بیان کنید.

- تمرین ۷ نشان دهید که تابع گرین دایادیک (دایادیک رابطه  $\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ) را می‌توان به صورت مرجع [۶] (رابطه ۸.۵۵) نوشت.

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[ \left( \delta_{ij} - \hat{R}_i \hat{R}_j \right) - j \left( \frac{\delta_{ij} - 3\hat{R}_i \hat{R}_j}{kR} \right) - \left( \frac{\delta_{ij} - 3\hat{R}_i \hat{R}_j}{k^2 R^2} \right) \right] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

که در آن  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$  و بردار واحد  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'/R$  است.

- تمرین ۸ با استفاده از نتیجه تمرین ۷.۵ نشان دهید که میدان الکتریکی بصورت زیر است

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu_0 \omega^2 \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, 0) \cdot \mathbf{p}$$

و در آن  $\mathbf{p}$  دوقطبی الکتریکی که در مبداء قرار دارد را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{-jkr}}{r} + [3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] \left( \frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) e^{-jkr} \right\}$$

- تمرین ۹ نشان دهید که در معادله (۲۹.۵) می‌توانیم میدان‌های کل را توسط میدان‌های پراکندگی عوض کنیم. مشارکت میدان‌های تابشی را درنظر گیرید

$$\oint_{\delta\Omega} e^{j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \epsilon_0^* \cdot \left\{ \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{E}_{inc}) + \hat{\mathbf{k}}_0 \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{inc}) \right\} dS$$

که در آن  $\mathbf{E}_{inc} = E_0 \epsilon_0^* e^{j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$  است. با استفاده از  $\mathbf{k}_0 \cdot \epsilon_0^* = 0$  روی جملات داخل براکت کار کنید و نشان دهید که تنها جمله باقی مانده متناسب با  $\oint_{\delta\Omega} dS = 0$  است.

- تمرین ۱۰ رابطه نماینده (۲۶.۵) را برای معادله موج با استفاده از حجم  $\Omega$  اما موقعیت  $\mathbf{r} \notin \Omega$  بدست آورید. می‌توانید از بحث مربوط به معادله هلم‌هولتز کمک بگیرید. از نتیجه استفاده کرده و نشان دهید که

$$\oint_{\delta\Omega} \left\{ -j\omega\mu \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}_{inc}(\mathbf{s}') - \left[ \nabla' \times \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{s}') \right\} dS' = 0$$

است.

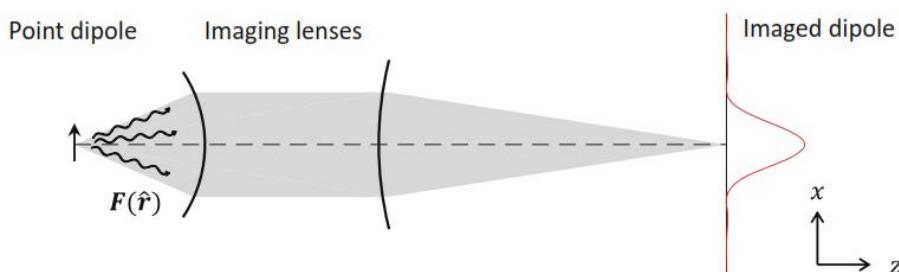
## فصل ۶

# حد پراش و فراتر از آن

اکنون همه مواد لازم را برای بحث در باره حد پراش نور در دست داریم. در این فصل تجزیه و تحلیل تصویربرداری از یک دوقطبی نوسانی را شروع کرده و سپس در مورد مفاهیم حد پراش برای میکروسکوپ نوری معمولی را تعمق می‌کنیم. در ادامه میکروسکوپ رویش نوری میدان نزدیک<sup>۱</sup> فناوری که امکان تصویربرداری میدان نزدیک را فراهم می‌کند و همچنین میکروسکوپ محلی‌سازی نوری<sup>۲</sup> که برای آن جایزه نوبل<sup>۳۰</sup> اهدا شد، بحث می‌کنیم.

### ۱.۶ تصویربرداری یک تک دوقطبی

با در نظر گرفتن یک دوقطبی که در موقعیت  $r_0$  قرار دارد و از طریق یک دستگاه عدسی تصویربرداری می‌شود، با استفاده از فناوری‌های پیشرفته که در فصل سوم توصیف شد، شروع می‌کنیم. برای میدان‌های دور تابش دوقطبی از تابع گرین که در فصل گذشته معرفی شد استفاده می‌کنیم. در مجموع، رویکرد را می‌توان به مراحل زیر تقسیم کرد (شکل ۱.۶):



شکل ۱.۶: تصویربرداری از یک دوقطبی نقطه‌ای. یک دوقطبی نقطه‌ای در کانون یک عدسی (از طریق کره مرجع گویی ترسیم شده، شکل ۴.۳) قرار دارد و میدان‌های دور ( $r$ ) ساطع شده از دوقطبی را جمع‌آوری می‌کند. عدسی دوم تصویری با نقطه حد پراش ناشی از حذف میدان‌های محو شونده تولید می‌کند. در ابتدای این فصل فرآیند تصویربرداری را بطور نظری نشان می‌دهیم.

<sup>۱</sup>Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

<sup>۲</sup>Optical localization microscopy

- محاسبه توزیع جریان یک دوقطبی،

• محاسبه میدان‌های دور دوقطبی با استفاده از رابطه (۲۴.۵)،

• میدان‌های دور عبارت تصویربرداری رابطه (۱۰.۳) را ارائه میدهیم و

• برای روزنہ عددی کوچک تمام انتگرال‌ها را به صورت تحلیلی انجام می‌دهیم.

کار اولیه، توزیع جریان یک دوقطبی نوسانی است که طول آن بسیار کوچکتر از هر مقیاسی طولی است که مسئله مورد مطالعه دارد و بنابراین می‌توان نوشت

### توزیع جریان یک دوقطبی نقطه‌ای واقع در $r_0$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = j\omega \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.6)$$

در اینجا  $r_0$  موقعیت دوقطبی،  $\mathbf{p}$  گشتاور دوقطبی، و  $\omega$  فرکانس نوسان است.  
اثبات رابطه (۱.۶) : برای محاسبه توزیع جریان دوقطبی، از رابطه زیر شروع می‌کنیم.

$$\nabla \cdot x\mathbf{J} = \partial_i x J_i = \delta_{i1} J_i + x \nabla \cdot \mathbf{J}$$

عبارت آخر را می‌توان به توزیع بار الکتریکی توسط رابطه پیوستگی برای میدان‌های هارمونیک زمانی مربوط کرد

$$-j\omega \rho = \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

سپس از  $J_1$  روی یک حجم کوچک که دوقطبی در آن قرار دارد، انتگرال‌گیری می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\int_{\Omega} J_1(\mathbf{r}) d^3 r = \oint_{\partial\Omega} x \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + j\omega \int_{\Omega} x \rho(\mathbf{r}) d^3 r = j\omega p_1$$

همین نتیجه را می‌توان با توزیع جریان که در رابطه (۱.۶) است بدست آورد و اثبات تکمیل می‌شود. برای بدست آوردن عبارت بالا، از توزیع جریان در مرز  $\partial\Omega$  صفر است، استفاده کرده‌ایم زیرا  $\mathbf{J}$  در داخل  $\Omega$  تعریف شده است و گشتاور دوقطبی تولید کرده است

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3 r \quad (2.6)$$

میدان دور الکتریکی این توزیع را می‌توان با استفاده از رابطه (۲۴.۵) محاسبه کرد، و خواهیم داشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg r_0]{} - \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \omega^2 \mu e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0} [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] = \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$$

همراه با

$$-\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{p}_{\perp}$$

سپس دامنه میدان دور را بدست می‌آوریم

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon} (e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0}) \mathbf{p}_{\perp} \quad (3.6)$$

در مرحله بعد رابطه (۳.۶) برای بیان تصویربرداری معادله (۱۰.۳) ارائه و در اینجا برای روشن شدن مطلب آنرا تکرار می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3(\rho, \phi, z) &= \sqrt{\frac{n_1}{n_3}} \frac{-jk_3 e^{-j(k_1 f - k_3 f')}}{2\pi} \frac{f}{f'} \int_0^{\theta_{max}} \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &\times \int_0^{2\pi} d\phi \bar{\bar{R}}^{im} \cdot \mathbf{F}_1(\theta, \phi) e^{jk_3 \cos \theta_3 z} e^{-jk_1(\frac{\rho}{M}) \sin \theta \cos(\phi - \varphi)}. \end{aligned}$$

که در آن  $\mathbf{F}_1$  دامنه میدان دور دوقطبی،  $\mathbf{E}_3$  میدان تصویر، و برای کانون سمت تصویر و جسم  $f$  و  $f'$  و ضریب شکستها  $n_1$  و  $n_3$  و عدموجها  $k_1$  و  $k_3$  را بکار می‌بریم. شکل (۵.۳) را که بحث آن در بخش ۳.۳ داده شد را ملاحظه کنید. محاسبه زیر را می‌توان به صورت نماد زیر خلاصه کرد

$$\bar{\bar{R}}^{im} \cdot \mathbf{p}_{\perp} = \bar{\bar{R}}^{im} \cdot \mathbf{p},$$

چون تبدیل ماتریس فقط روی جهت عرضی  $\hat{\mathbf{r}}$  است. ضمناً فرض می‌کنیم  $f' \gg f$  است بطوری که  $\sin \theta_3 \approx 0$ ،  $\cos \theta_3 \approx 1$

$$\cos \theta_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \sin^2 \theta_1} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \sin^2 \theta_1$$

برای دوقطبی در مبدأ  $\mathbf{r}_0 = 0$  و بطور افقی بسوی محور نوری است، سپس از معادله (۳۴.۳) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}^{im} \cdot \hat{\mathbf{x}} &= R_{xx}^{im} \hat{\mathbf{x}} + R_{yx}^{im} \hat{\mathbf{y}} + R_{zx}^{im} \hat{\mathbf{z}} \\ &\approx \frac{1}{2} \{(\cos \theta + 1) + (\cos \theta - 1) \cos 2\phi\} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} (\cos \theta - 1) \sin 2\phi \hat{\mathbf{y}} \\ \bar{\bar{R}}^{im} \cdot \hat{\mathbf{y}} &= R_{xy}^{im} \hat{\mathbf{x}} + R_{yy}^{im} \hat{\mathbf{y}} + R_{zy}^{im} \hat{\mathbf{z}} \\ &\approx \frac{1}{2} (\cos \theta - 1) \sin 2\phi \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \{(\cos \theta + 1) - (\cos \theta - 1) \cos 2\phi\} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

که در اینجا  $t = t^\theta = t^\phi$  را قرار دادیم. بهمین نحو، برای دوقطبی که بطور عمودی بسوی محور نوری است خواهیم داشت

$$\bar{\bar{R}}^{im} \cdot \hat{\mathbf{z}} = R_{xz}^{im} \hat{\mathbf{x}} + R_{yz}^{im} \hat{\mathbf{y}} + R_{zz}^{im} \hat{\mathbf{z}} \approx -\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$$

بعداً معادله ۲۱.۳ را برای حل انتگرال‌ها در زوایای سمت بطور تحلیلی در اختیار می‌گیریم و انتگرال‌گیری را برای زوایای قطبی معرفی می‌کنیم

$$\tilde{\mathcal{I}}_n = (-j)^n \int_0^{\theta_{max}} e^{jk_3 z \left[ 1 - \left( \frac{f}{f'} \right)^2 \sin^2 \theta \right]} J_n(k_1 \frac{\rho}{M} \sin \theta) g(\theta) \sin \theta \cos^{1/2} \theta d\theta \quad (4.6)$$

با کnar هم کذاشتمن همه نتایج بالا، به‌سمت میدان‌های الکتریکی  $\mathbf{E}_{\hat{p}}$  روی سمت تصویر هدایت می‌شویم که توسط دوقطبی نوسانی در کانون مجموعه عدسی قرار گرفته و در امتداد  $\hat{p}$  است، تولید می‌شود.

### تصویربرداری میدان‌های دوقطبی

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\hat{x}}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{2} A \left\{ \tilde{\mathcal{I}}_0(1 + \cos \theta) \hat{x} - \tilde{\mathcal{I}}_2(1 - \cos \theta)(\cos 2\varphi \hat{x} + \sin 2\varphi \hat{y}) \right\} \\ \mathbf{E}_{\hat{y}}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{2} A \left\{ \tilde{\mathcal{I}}_0(1 + \cos \theta) \hat{y} - \tilde{\mathcal{I}}_2(1 - \cos \theta)(\sin 2\varphi \hat{x} - \cos 2\varphi \hat{y}) \right\} \\ \mathbf{E}_{\hat{z}}(\rho, \varphi, z) &= -A \tilde{\mathcal{I}}_1(\sin \theta)(\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

در اینجا ضریب  $A$  را معرفی کردیم که جدا از فاز بی‌همیت  $\psi$  داریم

$$A = e^{-j\psi} \frac{\sqrt{n_1 n_3}}{4\pi\epsilon_0} k_0^3 p \left( \frac{f}{f'} \right)$$

برای روزنه عددی کوچک می‌توانیم تقریب  $\cos \theta \approx 1$  و  $\sin \theta \approx \theta$  را بکار ببریم. این حد مربوط به تقریب موازی محور<sup>۴</sup> است. انتگرال‌گیری روی توابع بسل را می‌توان بازاء  $z = 0$  بطور تحلیلی حل کرد:

$$\int u^{\nu+1} J_\nu(u) du = u^{\nu+1} J_{\nu+1}(u).$$

با معرفی شعاع بدون بعد،

$$\tilde{\rho} = \frac{nk_0 \theta_{max} \rho}{M} = \frac{NA}{M} k_0 \rho \quad (6.6)$$

که در آن  $NA$  روزنه عددی است، بدست می‌آید

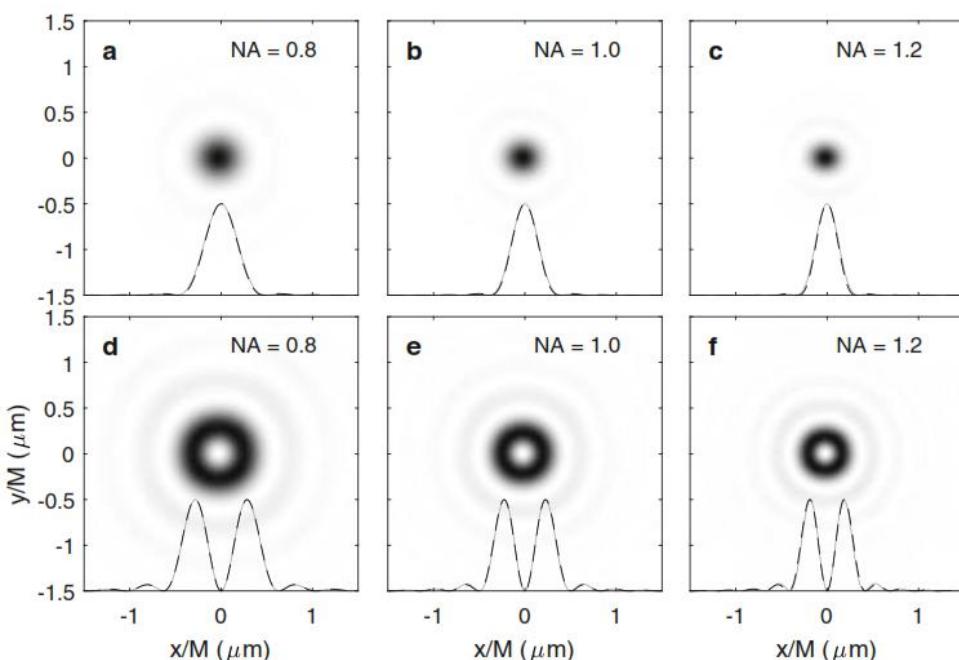
$$\int_0^{\theta_{max}} \theta^{\nu+1} J_\nu(k_1 \theta \rho / M) d\theta = \left( \frac{M}{k_1 \rho} \right)^{\nu+2} \int_0^\rho u^{\nu+1} J_\nu(u) du = \theta_{max}^{\nu+2} \frac{J_{\nu+1}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}}$$

بنابراین، میدان‌های تصویر دوقطبی را در تقریب موازی محور بدست می‌آید.

<sup>۴</sup>Paraxial Approximation

### تصویربرداری میدان‌های دوقطبی در تقریب موازی محور

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\hat{x}}(\rho, \varphi, 0) &\approx A\theta_{max}^2 \left[ \frac{J_1(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \right] \hat{x} \\ \mathbf{E}_{\hat{y}}(\rho, \varphi, 0) &\approx A\theta_{max}^2 \left[ \frac{J_1(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \right] \hat{y} \\ \mathbf{E}_{\hat{z}}(\rho, \varphi, 0) &\approx -A\theta_{max}^3 \left[ \frac{J_2(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \right] (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) \end{aligned} \quad (7.6)$$



شکل ۷.۶: تصویربرداری دوقطبی نقطه‌ای که توسط رابطه (۵.۶) محاسبه شده است. ردیف‌های بالا و پائین شدت میدان‌های را دوقطبی که به ترتیب در جهت  $x$  و  $z$  توجیه شده و دارای مقادیر مختلف  $NA$  هستند. در پائین تصاویر، برش‌هایی را در شدت (خط پُر) نشان می‌دهیم و آنها را با نتایج تقریبی محوزی محور (خط چین، تقریباً غیرقابل تشخیص) مقایسه می‌کنیم.

شکل (۷.۶) نمودار شدت دوقطبی بسوی (a – c) عمودی و (d – e) موازی محور نوری  $\hat{z}$  را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که دوقطبی نقطه‌ای با ویژگی گسترده‌تر با عرض قابل مقایسه با طول موج نور تصویر می‌شود. به نظر میرسد راحت‌تر است کمیات زیر را معرفی کنیم:

- **تابع گرین** در مقایسه با تابع گرین دیادیک که در رابطه (۱۹.۵) معرفی شد، تابع گرین گسترش نقطه‌ای  $\bar{\bar{G}}_{PSF}$  را معرفی می‌کنیم

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = \omega^2 \mu \bar{\bar{G}}_{PSF}(\rho, \varphi, z) \cdot \mathbf{p}, \quad (8.6)$$

که میدان‌های تصویر را در موقعیت  $(\rho, \varphi, z)$  برای دوقطبی نقطه‌ای که در مبدأ قرار دارد می‌دهد. با مقایسه با رابطه (۵.۶) اجازه می‌دهد تاتابع گرین را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\bar{\bar{G}}_{PSF} = \frac{1}{2} \omega^2 \mu A \begin{pmatrix} \tilde{I}_0 - \tilde{I}_2 \cos 2\varphi & -\tilde{I}_2 \sin 2\varphi & -2\tilde{I}_1 \cos \varphi \\ -\tilde{I}_2 \sin 2\varphi & \tilde{I}_0 + \tilde{I}_2 \cos 2\varphi & -2\tilde{I}_1 \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

در اینجا آرگومان‌های توابع  $\tilde{I}_n$  را حذف کردہ‌ایم. همچنین، توانستیم تقریب موازی محور را در رابطه (۷.۶) استفاده کنیم.

• **تابع گسترش نقطه تصویر  $I(\rho, \varphi, z)$**  یک واحد دوقطبی با شدت میدان زیر داده می‌شود:

$$I(\rho, \varphi, z) = \left| \bar{\bar{G}}_{PSF}(\rho, \varphi, z) \cdot \mathbf{p} \right|^2,$$

که در آن همه عوامل ثابت را کنار گذاشته‌ایم. فرض کنید گشتاور دوقطبی ثابت نیست بلکه به‌طور تصادفی، همان‌طوری که در مورد مولکولهای محلول اتفاق می‌افتد، مچرخد. در این صورت می‌توانیم جهت‌های مختلف دوقطبی را با استفاده از روش میانگین‌گیری محاسبه کنیم.

$$I(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi} \oint \left| \bar{\bar{G}}_{PSF}(\rho, \varphi, z) \cdot \mathbf{p} \right|^2 d\Omega = \frac{2}{3} (|\tilde{I}_0|^2 + |\tilde{I}_2|^2 + 2|\tilde{I}_1|^2)$$

در اینجا  $\hat{\mathbf{p}}$  گشتاور دوقطبی واحد و ...<sup>۴</sup> نمایشگر انتگرال‌گیری روی تمام جهات دوقطبی است. گاهی اوقات انسان  $\langle I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$  را با تابع گسترش نقطه‌ای (برای یک گسیل کننده دوقطبی با توجیه تصادفی) که توضیح می‌دهد چگونه تصویر دوقطبی واقع در  $\mathbf{r}_0$  در پردازش تصویر گسترش می‌باید، وابسته می‌کند. در صورت وجود چندین دوقطبی، باید از معادله (۸.۶) اصل جمع اثرهای میدان‌های الکتریکی، استفاده کرده سپس تصویر را از مدول مربع میدان الکتریکی کل بدست آوریم. اگر تداخل میدان نادیده گرفته شود، و جهت دوقطبی تصادفی باشد، می‌توان تابع گسترش نقطه‌ای  $\langle I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$  را با موقعیت دوقطبی مرتبط<sup>۵</sup> ساخت.

• **دیسک ایری<sup>۶</sup>** تابع بسل در رابطه (۷.۶) را برای یک دوقطبی که در امتداد جهت  $x$  یا  $y$  قرار دار در نظر گیرید. اولین صفر  $J_1(x_0) = 0$  تابع بسل تقریباً  $\approx 3.83 x_0 \approx 3.83$  است. شعاع  $r_{Airy}$  که در آن توزیع میدان الکتریکی صفر می‌شود را شعاع ایری می‌نامند،

$$\left( \frac{NA}{M} \right) \frac{2\pi r_{Airy}}{\lambda} \approx 3.83 \implies r_{Airy} \approx 0.61 \frac{M\lambda}{NA} \quad (10.6)$$

دیسکی که با شعاع  $r_{Airy}$  باشد را بنام دیسک ایری اطلاق می‌کنند.

<sup>۴</sup>Convolute

<sup>۵</sup>Airy Disk

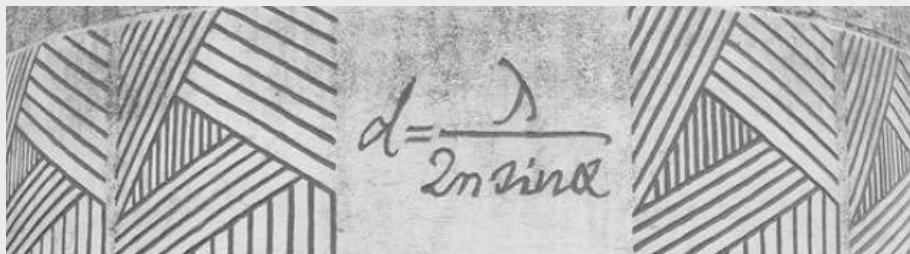
## ۲.۶ حد پراش نور

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم به حد پراش<sup>۶</sup> نور بپردازیم. اولین مطالعه دقیق این موضوع احتمالاً از آن ارنست آبه<sup>۷</sup> [۲۲] است، که از یک تحلیل نیمه کمی برای بدست آوردن حد پراش معروف خود استفاده کرد و بیان کرد که دو جسم دارای حداقل فاصله قابل تفکیک هستند.

### حد پراش آبه

$$d = \frac{\lambda}{2NA} = \frac{\lambda}{2n \sin \theta_{max}} \quad (11.6)$$

### ارنست آبه



هنگام نوشتن آخرین فصل‌های این کتاب، در بهار ۲۰۱۹ از شهر جنا Jena آلمان بازدید کردم. پس از مدتی کار بر روی جنبه‌های مختلف نانوپتیک و حد پراش نور، از بنای یادبود آبه (در بالا نشان داده شده) که تقریباً ویژگی مذهبی دارد دیدن کردم.

زمانی که آبه برای کار در کارل زایس Carl Zeiss برای بهبود روند تولید ابزارهای نوری، که در آن زمان تا حد زیادی بر اساس سعی و خطا بود، استخدام شد، استاد دانشگاه جنا بود. او زمان زیادی را به توصیف نظری ابزارهای نوری و تصویربرداری نوری اختصاص داد، حد پراش اساسی نور را بدست آورد، در میان بسیاری از موارد عبارت روزنه عددی را معرفی کرد و میکروسکوپ نوری را به علم مهندسی آورد. در سالهای بعد او وظایف سازمان در شرکت زایس را بر عهده گرفت و به طور جدی نگران بهبود شرایط کار و زندگی کارکنان بود: او ۸ ساعت کار روزانه را معرفی کرد، یک صندوق بازنیستگی و مرخصی ایجاد کرد و از تحصیلات عالی کارگران در امور فرهنگی و سیاسی حمایت کرد.

من شگفت زده بودم که شرکت زایس چقدر شکوفایی شهر را شکل داده است و همچنان به درک خود از شهروندان کمک می‌کند. دیدن چنین شکل فشرده‌ای که چگونه یک ایده علمی می‌تواند در چیزی بسیار بزرگتر گسترش یابد و زندگی هزاران نفر را تحت تأثیر قرار دهد، یک تجربه فوق العاده مثبت است.

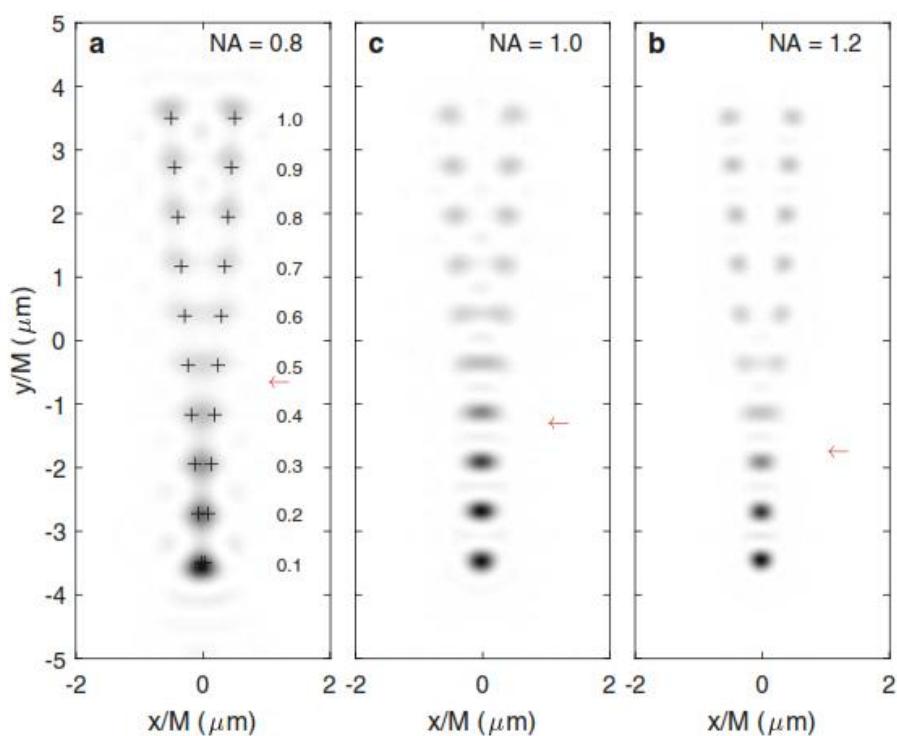
<sup>۶</sup>Diffraction Limit

<sup>۷</sup>Ernst Abbe

برای بدست آوردن رابطه اخیر، از تعریف رابطه (۱۲.۳) برای روزنہ عددی استفاده کردیم. این همان عبارتی است که در یابود آبه در جنا حک شده است. گاهی اوقات از برآورد براساس شاعع ایری استفاده می‌شود.

$$d = 0.61 \frac{\lambda}{NA} \quad (12.6)$$

مهم است که بدانیم در حالی نعرف فاصله قابل تفکیک کمینه قدری دلخواه است، خود حد پراش یک امر اساسی است و بوسیله حذف تمام امواج محوشونده از تصویر حاصل می‌شود.



شکل ۳.۶: تصویر دو دوقطبی که با فاصله چند میکرومتر از هم قرار دارند در بخش (الف) گزارش شده است. دو دوقطبی در امتداد محور  $x$  هستند. همان پارامترهای شکل (۲.۶) را استفاده کردیم. پیکان‌ها نمایشگر فاصله جدا از هم  $0.61\lambda/NA$  مربوط به حد پراش نور است.

شکل (۳.۶) تصویر دو دوقطبی نقطه‌ای که با فاصله‌ای در حدود طول موج از هم قرار دارند را نشان می‌دهد. در بخش (الف) مقادیر داده شده است. دوقطبی‌ها در امتداد محور  $x$  بوده و بازاء مقادیر  $NA$  مختلف عدسی مجموعه مقایسه شده‌اند. نتایج مربوط به دوقطبی‌های در امتداد محور  $x$  در شکل (۴.۶) نشان داده شده است. بدون وارد شدن بیش از حد به جزئیات، واضح است که حد پراش حد پائین‌تر اساسی برای واضح است، اما حتی وقتی دوقطبی نقطه مانند امواج ساطع می‌کنند با فاصله‌ای بیش از کمترین فاصله قابل تفکیک قرار دارند، به سختی می‌توان تعداد و جهت دقیق این تصاویر را از تصاویر تمیز داد. در یک گزارش جامع و کامل

از این موضوع را می‌توان در کتاب نووتونی و هخت<sup>۴۶</sup> [۶] جائی که نویسندهایان همه مسائل زیر را مورد بحث قرار داده‌اند و در اینجا فقط به‌طور مختصر به‌آنها می‌پردازیم:

- **وضوح محوری** تا کنون فقط وضوح مورد بحث در باره اجسامی میسر بود که در صفحه  $z$  واقع شده بودند. متأسفانه وضوح در جهت  $z$ , که به‌وضوح محوری معروف است، بسیار بدتر است. ابتدا میدان‌های تصویر معادله (۵۶) را برای  $0 = \rho$  در نظر گیرید. وقتی  $J_0(0) = 1$  و  $J_{1,2}(0) = 0$  داریم، فقط انتگرال  $\tilde{I}_0$  با صفر متفاوت است. برای سادگی، در اینجا انتگرال را در حد موازی محور با  $\cos \theta \approx 1$  و  $\sin \theta \approx \theta$  محاسبه می‌کنیم، و خواهیم داشت

$$\tilde{I}_0(1 + \cos \theta) \approx \int_0^{\theta_{max}} e^{jk_3[1 - \frac{\eta}{2}\theta^2]} 2\theta d\theta = \frac{-2j}{k_3 z \eta} e^{jk_3[1 - \frac{\eta}{2}\theta^2]} \Big|_0^{\theta_{max}}$$

که در آن از اختصار  $(f/f')^2 = \eta$  استفاده کردیم. از اینجا میدان دوقطبی که در امتداد محور  $x$  یا  $y$  هستند را بدست می‌آوریم

$$|\mathbf{E}_{\hat{x}}(\rho = 0, z)|^2 \approx \frac{A^2}{4} \left( \frac{NA^2}{2n_1^2} \right)^2 \left[ \frac{\sin \bar{z}}{\bar{z}} \right]^2, \quad \bar{z} = \frac{k_0 NA^2}{4n_3 M^2} z \quad (13.6)$$

می‌توانیم مختصات  $z$  نرمالیزه را بشکل  $z/z = \bar{z}$  بازنویسی کنیم، که در آن  $\Delta z$  به عنوان عمق میدان نشان داده می‌شود و می‌تواند مستقیماً از معادله (۱۳.۶) بدست آید. برای پارامترهای یک میکروسکوپ معمولی وضوح محوری با ضریب صد از ضریب شعاعی کوچکتر است. (مرجع [۶] رابطه ۱۷.۴).

- **تابع گسترش نقطه تحریک**<sup>۹</sup> وضوح محوری ضعیف یک مشکل مهم برای میکروسکوپ اجسام سه بعدی است. یک راه برای بهبود وضوح این است که نه کل نمونه بلکه فقط برخی نقاط انتخاب شده را روشن کرد. با روشن خط به خط<sup>۱۰</sup> این نقاط نمونه، می‌توان تصویری کامل از نمونه را البته با وضوح بهتر بدست آورد. یک روش کمی برای افزایش وضوح با توابع گسترش نقطه‌ای PSF<sup>۱۱</sup> که قبل از معادله (۸.۶) معرفی شده است و بعد از این هم بحث می‌شود، ارائه می‌شود. آشکارسازی تابع گسترش نقطه‌ای نحوه یک منبع نقطه‌ای که بوسیله سامانه تصویربرداری گسترش می‌یابد توضیح می‌دهد. به‌طور مشابه، می‌توانیم یک PSF تحریک را معرفی کرده بطوری که روشنایی نور را روی نقطه انتخاب شده‌ای متوجه کنیم. سپس مجموع تابع گسترش نقطه‌ای تقریباً حاصل ضرب این PSF‌ها است.

$$(آشکارسازی PSF) \times (PSF) \approx (\text{کل PSF}) \times (\text{تحریک PSF})$$

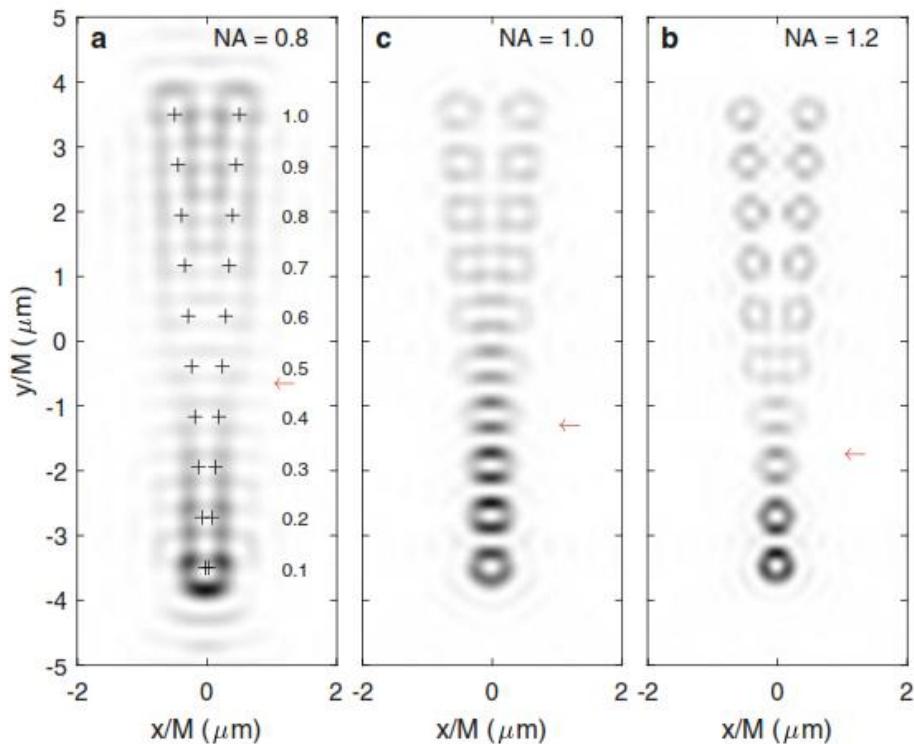
به‌طور کلی، باید چگونگی تولید نور، ایجاد روشنایی و تشخیص مشخص شود. برای مثال، از طریق فرایند پراکندگی همدوس یا ناهمدوس و افزارهای پیشرفته در این فصل

<sup>۸</sup>Novotny and Hecht

<sup>۹</sup>Excitation Point Spread Function

<sup>۱۰</sup>Raster-Scanning

<sup>۱۱</sup>Point Spread Functions (PSF)

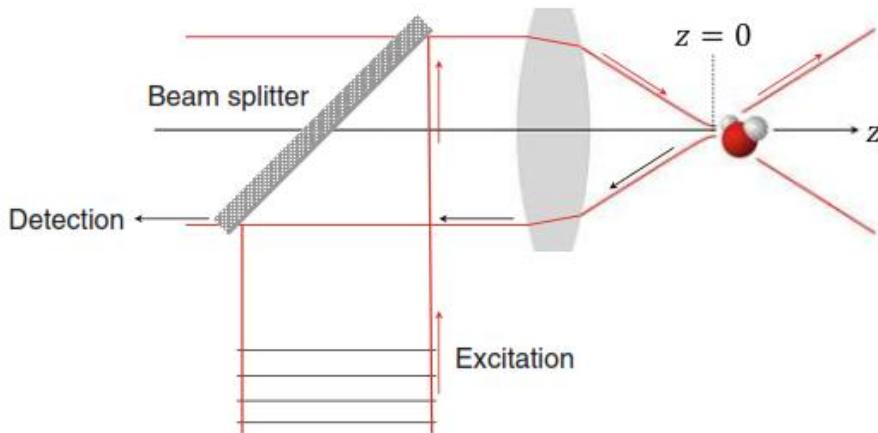


شکل ۴.۶: همان مطالب شکل (۳.۶) اما دوقطبی در امتداد محور  $z$  ها است.

و همین طور در بخش‌های بعدی این کتاب بطور کلی امکان فرایند روشنائی، تشخیص را بطور ژرف و مبسوط بحث می‌کند. با این حال، در بیشتر موارد مطلوب، حاصل ضرب PSF‌ها جواب تقریبی عالی فراهم می‌کند. برای درک اصل حاصل ضرب داریم، فرض کنید که هر دو تابع گوسی با عرض  $\sigma_{det}$  و  $\sigma_{exc}$  هستند. سپس برای حاصل ضرب داریم  $\sigma_{tot} = 1/\sigma_{tot} = 1/\sigma_{exc} + 1/\sigma_{det}$  بنابراین عرض کل

- **میکروسکوپ هم‌کانونی (کانفوکال)** میکروسکوپ هم‌کانونی یک روش رایج برای ترکیب محوری است. دوم، احتمالاً از مهمترین مزیت این است که از طریق تحریک گزینشی، نورهای سرگردان به شدت حذف می‌شوند.

اصل اساسی همانند چینش شکل (۵.۶) برای تشخیص یک جسم که در کانون یک مجموعه عدسی با روزنه عددی بالا است قرار دارد. با این حال، یک آینه نیمه شفاف در ناحیه بین عدسی‌های جمع‌آوری کننده و تصویر برداری، شکل (۵.۶)، تعبیه گشته بطوری که نمونه در نقطه کانونی اولین عدسی تحریک شده است. این فرآیند تحریک را می‌توان بطور کامل شبیه به کانونی کردن توضیح داد. بهبخش ۱.۶.۳ مراجعت کنید. از آنجا که آینه اضافی نیمه‌شفاف است، تحلیل فرایند تشخیص در بحث قبلی عملأ تغییر نمی‌کند، اما شدت نور توسط اینه کاهش می‌یابد. میکروسکوپ هم‌کانونی وضوح محوری



شکل ۵.۶: شمای یک میکروسکوپ همکانونی. نمونه (در اینجا یک مولکول) از طریق عدسی کانونی تحریک می‌شود. نور تابشی بوسیله مقسم پرتو که بین عدسی کانونی و عدسی تصویر قرار دارد، (سمت چپ نشان داده نشده) هدایت می‌شود. از طریق همین چینش نور پراکننده از نمونه شدست شبیه سامانه تصویربرداری که در شکل (۵.۳) نشان داده شده است، اشکار می‌شود.

را افزایش می‌دهد، اما نیاز به رویش خط به خط نقاط تحریک و تشخیص روی نمونه دارد.

- **میکروسکوپ چند فوتونی** همچنین می‌توان با استفاده از فرایندهای چند کانونی، به عنوان مثال، در تحریک مولکول‌هایی که باید تشخیص داده شوند، وضوح را در میکروسکوپ نوری افزایش داد. همانطور که قبل برای PSF‌های تحریک و تشخیص گوسی بحث شد، حاصل ضرب چنین توابع عرض کمتری دارد. به طور مشابه، در جذب چندفوتونی می‌توان نقطه تحریک موثر برای فرایند چندفوتونی را کاهش داد. فرایندهای چند فوتونی مزایای بیشتری دارد که تحریک و تشخیص در طول موج‌های مختلف رخ می‌دهد، و به شما امکان می‌دهد پراکندگی پس زمینه را به طور چشمگیری حذف کرد.

قبل از بستن بخش حد پراش نوری، سوال‌های زیر را مطرح می‌کنیم: آیا می‌توانیم وضوح میکروسکوپ نوری را بهبود بخشیم؟ اگر جواب مثبت است، چگونه؟ همانطور که در بالا اشاره شد، تعریف وضوح قابل دستیابی قدری دلخواه است و بستگی به مقدار مورد نظر ما دارد. با این حال، فیزیک نهفته در حد پراش نور عمیق است و بر حذف میدان‌های محو شونده از تصویر بنا شده است. از آنجائی که این میدان‌های محو شونده از وضوح مکانی بالائی برخوردارند، چیزی که در فرایند تصویربرداری از بین میروند بازگردانیدن آن با وسائل تصویربرداری پیچیده امکان‌پذیر نخواهد بود. با این حال، در دهه‌های گذشته دو استراتژی پیدیدار شده است که دستیابی به وضوح مکانی بهتر از حد پیش‌بینی شده توسط پراش را کمک می‌کند. هر دو آنها را در زیر به طور مختصر مورد بحث قرار می‌دهیم:

- **میکروسکوپ میدان نزدیک** اولین مورد میکروسکوپ میدان نزدیک یا میکروسکوپ میدان نزدیک نوری روبشی (SNOM)<sup>۱۲</sup> است. ایده اصلی این است که به طور مستقیم

<sup>۱۲</sup> Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

میدان‌های نزدیک نوری را اندازه‌گیری می‌کند. معمولاً این امر با استفاده از تار (فیبر) نوری مخروطی با روکش فلزی نازک حاصل می‌شود به‌طوری که نور می‌تواند از طریق نوک بداخل یا خارج تونل بزند. گاهی اوقات انتهای آنرا از نوک تار پوشش شده جدا کرد تا یک روزنه کوچکی با قطر در حدود ده‌ها نانومتر ساخته شود، اما این خیلی مورد نیاز نیست، زیرا نور می‌تواند از لایه‌های نازک فلزی عبور کند. با نزدیک کردن این تار نوری به‌نمونه، میدان‌های نزدیک کاوشگر<sup>۱۳</sup> به‌نوک تار نوری نزدیک شده و به‌فوتوнаهای منتشر شونده تبدیل می‌شوند و می‌توانند در انتهای دیگر تار نوری آشکار شوند. با روبش خط به‌خط نوک تار روی نمونه، یک تصویر نوری از نمونه مورد بررسی بدست می‌آید. علاوه براین حالت که بنام آشکار ساز مودی معروف است، مودهای (SNOM) عملیاتی دیگری وجود دارد که در قسمت آینده بحث خواهد شد.

- **میکروسکوپ محلی سازی** رویکرد دیگر ماهیت کاملاً متفاوتی دارد و بر اساس مفهوم پیش‌آگاهی در باره سامانه<sup>۱۴</sup> بنا شده است. قبلاً، براساس این فرض که اصلاً هیچ پیش‌آگاهی نداریم، حد پراش نور را بدست آورдیم. به‌همین دلیل، دوقطبی باید با فاصله بحرانی از هم جدا شوند تا به‌عنوان موجودیت جداگانه قابل مشاهده باشند. در میکروسکوپ هم‌کانونی، پیش‌آگاهی خود را در مورد سامانه بین معنا که نور از کدام نقطه ساطع می‌شود، (از طریق تحریک خاص) افزایش داده‌ایم. در زمینه میکروسکوپ محلی سازی، که بعضی وقتها به‌عنوان نانوسکوپی نیز نامیده می‌شود، یک سامانه مورد مطالعه را با مولکول‌های فلورسانس تزئین می‌کند. بطوری که در بخش ۴.۶ بحث خواهیم کرد، می‌توان موقعیت تک تک مولکول‌ها را با دقت مکانی نانومتری اندازه‌گیری کرد. به‌این ترتیب، شخص مستقیماً اجسام را اندازه‌گیری نمی‌کند، بلکه بطور غیر مستقیم از طریق مولکول‌های چسبیده به جسم آنرا انجام می‌دهد. نانوسکوپی مبتنی بر پیش‌آگاهی در مورد سامانه است، یعنی این واقعیت که مولکول‌های فلورسانس به‌آن متصل شده‌اند، بنابراین امکان دستیابی به‌وضوح مکانی نانومتری را فراهم می‌کند.

### ۳.۶ میکروسکوپ نوری میدان نزدیک روبشی

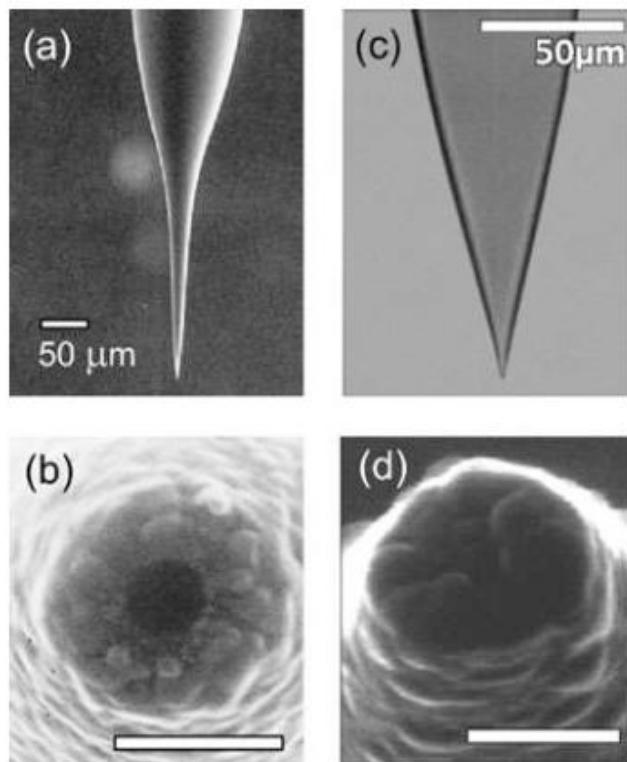
میکروسکوپ نوری میدان نزدیک روبشی (SNOM) یک فناوری براساس میکروسکوپ کاوشگر روبشی است. یک تار نوری با یک لایه فلز، شکل (۶.۶)، پوشش داده شده است. هنگامی که نوک (SNOM) به‌مجاورت کاوشگر مورد مطالعه آورده شود، میدان‌های نزدیک محوشونده<sup>۱۵</sup> به‌فوتوهای منتشر شونده تبدیل شده که می‌توان در انتهای تار نوری آشکار شود. گاهی اوقات با حک کردن یک روزنه کوچک در نوک، می‌توان نور را افزایش داد. علاوه بر این که مود تشخیص نامیده می‌شود، مود روشنائی نیز وجود دارد، که در آنجا نور از طریق نوک تار نوری خاموش شده و نمونه در نقطه‌ای زیر طول موج روشن و نور پراکنده شده کاوشگر در میدان دور آشکار می‌شود؛ در مود روشنائی-آشکارسازی هر دو نور برای روشنائی و آشکارسازی از درون تار نوری عبور می‌کند. در ادامه بطور مختصر دو مدل ساده برای تشریح (SNOM)، مدل مدل

<sup>۱۳</sup>Probe

<sup>۱۴</sup>Preknowledge about the system

<sup>۱۵</sup>evanescent nearfields

بیت-بوکامپ<sup>۱۶</sup> و مدل ساده‌تر دوقطبی را مورد بحث قرار می‌دهیم. برای بحث بیشتر در باره کاوشگرهای نوری میدان-نزدیک، به مراجع [۱۷، ۲۴] ارجاع داده می‌شود.



شکل ۶.۶: پویشگر روزنه‌ای با پوشش آلمینیوم (a, b) و شکل میکروسکوپ حکاکی (c,d):(a,c) میکروسکوپ الکترون روبشی (SEM) و تصویر نوری. این تصاویر از مرجع [۲۰] گرفته شده است.

### ۱.۳.۶ مدل بیت-بوکامپ

مدل بیت-بوکامپ<sup>۱۷</sup> توصیف تحلیلی برای میدان‌های نزدیک موج صفحه‌ای که به سوراخ مدور کوچکی در صفحه رسانا برخورد می‌کند، ارائه می‌دهد و بدلیل سادگی برای مدل‌سازی (SNOM) بطور گسترده استفاده می‌شود. این مسئله نخست توسط بیت<sup>[۲۵]</sup> حل شد و متناسفانه شرایط مرزی در لبه‌های سوراخ را بدروستی درنظر نگرفته بود. این خطا توسط بوکامپ<sup>[۲۶]</sup> تصحیح شد و مدل اکنون بهنام هردو آنها نامگذاری شده است. استخراج معادلات کار در دستگاه مختصات نسبتاً عجیب و غریب، یعنی مختصات کروی گون پخ<sup>۱۸</sup> انجام می‌شود و با توجه به این که بیت-یکی از بر جسته‌ترین فیزیکدان‌های قرن بیستم و برنده جایزه نوبل- از ابتدا همه چیز را بدروستی در نظر نگرفت، در اینجا فقط نتایج نهائی را بدون تکرار محاسبات قدری خسته کننده، می‌آوریم. خوانندگان علاقمند به مقاله واضح و دقیق بوکامپ ارجاع داده می‌شود<sup>[۲۶]</sup>.

در این مسئله یک موج صفحه‌ای با قطبش در امتداد محور  $\hat{x}$ ‌ها که در جهت  $\hat{z}$ ‌ها منتشر می‌شود، در نظر گیرید. میدان الکتریکی بصورت  $E(r) = \hat{x}e^{-jkz}$  است که در  $z = 0$  به یک صفحه

<sup>۱۶</sup>Bethe-Bouwkamp Model

<sup>۱۷</sup>Bethe-Bouwkamp Model

<sup>۱۸</sup>Oblate Spheroidal Coordinates

رسانا که در آن سوراخ مدوری به شعاع  $a$  تعبیه شده بخورد می‌کند. برای حل این مسئله از دستگاه مختصات کروی کون پنج استفاده شده و می‌توان حسب مختصات  $(\mu, \nu, \phi)$  یا  $(u, v, \phi)$  را طریق روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط کرد:

$$\begin{aligned} x &= a \cosh \mu \cos \nu \cos \phi = a \sqrt{(1-u^2)(1+v^2)} \cos \phi \\ y &= a \cosh \mu \cos \nu \sin \phi = a \sqrt{(1-u^2)(1+v^2)} \sin \phi \\ z &= a \sinh \mu \sin \nu = a u v, \end{aligned} \quad (14.6)$$

که در آن  $u = \sin \nu$  و  $v = \sinh \mu$  است. تبدیل معکوس از دستگاه  $(\mu, \nu, \phi)$  به مختصات دکارتی از طریق روابط زیر بدست می‌آید

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \\ \nu \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left[ \cosh^{-1} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + jz}{a} \right) \right]$$

و  $\phi = \tan^{-1}(y/x)$  است. میدان‌های آنسوی  $0 < z < \text{توسط بووکامپ}$  با استفاده از  $(u, v)$  به صورت زیر بیان شده است:

$$\begin{aligned} E_x &= -jku + \frac{2jkau}{\pi} \left\{ 1 + v \tan^{-1} v + \frac{1}{3} \frac{1}{u^2 + v^2} + \frac{x^2 - y^2}{3a^2(u^2 + v^2)(1 + v^2)^2} \right\} \\ E_y &= \frac{4jkxyu}{3\pi a(u^2 + v^2)(1 + v^2)^2} \\ E_z &= \frac{4jkxv}{3\pi(u^2 + v^2)(1 + v^2)^2}, \end{aligned} \quad (15.6)$$

و عبارتی شبیه این برای میدان‌های مغناطیسی است. شکل (۷.۶) شدت میدان‌های نزدیک پشت روزنه را نشان می‌دهد. به طوری که مشاهده می‌شود میدان‌ها بشدت محلی شده و هنگام دور شدن از سوراخ سریع میرا می‌شوند.

مدل ساده‌تری با توصیف دوقطبی‌های موثر برای SNOM وجود دارد که نور ساطح شده (یا جمع آوری سده) توسط نوک را سبیه سازی می‌کند. دوقطبی‌های موثر الکتریکی و مغناطیسی  $E_0$  دارد [۲۰] و  $\mathbf{P}_{eff}$  و  $\mathbf{m}_{eff}$  بستگی به روزنه با شعاع  $a$  و شدت میدان الکتریکی  $\mathbf{E}_0$  دارد

$$\mathbf{P}_{eff} = \mp \frac{4}{3} \epsilon a^3 (\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{z}}) \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{m}_{eff} = \mp \frac{8}{3} a^3 [\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{z}})], \quad (16.6)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{z}}$  بردار واحد عمود بر سطح روزنه (و بسوی خارج از تار نوری) است. علامت منفی و مثبت در جلوی عبارت‌ها بترتیب برای مود آشکارسازی و روشنائی اشاره دارد. این دوقطبی‌ها امکان مدل‌سازی در عین حال دقیق SNOM را فراهم می‌کند. برای توصیف واقع‌بینانه، معمولاً به حل کننده‌های ماکسول<sup>۱۹</sup> که در بخش یازدهم بطور مبسوط بحث خواهیم کرد، انجام می‌شود.

<sup>۱۹</sup>Computational Maxwell's Solvers

### مواجهه اریک بتزیگ با SNOM



اریک بتزیگ Eric Betzig، یکی از قهرمان‌های روزهای اولیه *SNOM* است، که تاریخ مقاله مشهور وی را در زمینه حالت‌های تحریک محلی در چاههای کوانتموم بیاد می‌آورد [۲۷].

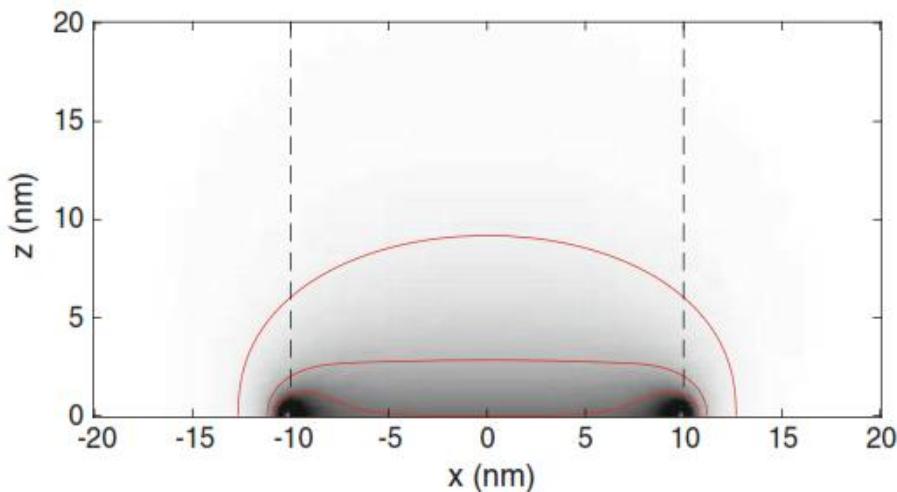
برای آخرین خوشحالی من با میدان نزدیک، هارالد Harald و من کاوشگر میدان نزدیک خود را روی میکروسکوپ تونل زنی با دمای پایین قرار دادیم تا ساختارهای چاه کوانتمومی را که اساس لیزرهای نیمه هادی هستند، مانند ساختارهای نشانگر لیزری، مطالعه کنیم. با استفاده از دستگاه اپتیک حد پراش استاندارد، طیف آنها شبیه یک گسیل تپه صاف است، اما شاهد یک سری دیوانه‌وار از خطوط بسیار تیز بودیم. حجم کاوشگر آنقدر کوچک بود که نور را فقط می‌تواند در جای گستته خاصی گسیل کند. و طول موج آن نور به ضخامت موضعی چاه کوانتموم بسیار حساس بود، بنابراین آنها در رنگ‌های مختلف می‌درخشیدند، به این معنی که می‌توانیم آنها را به صورت جداگانه مطالعه کنیم.

بتزیگ Betzig در سال ۲۰۱۴ جایزه نوبل شیمی را به دلیل موضوعی متفاوت، یعنی میکروسکوپ محلی‌سازی دریافت کرد، بنابراین بازتاب او در زمینه *SNOM* (به بخش پایین مراجعه کنید) ممکن است بسیار بحرانی باشد. با این حال، خواندن خاطرات یک برنده نوبل که در کتابشناسی صفحه اصلی جایزه نوبل ارائه شده، جالب است، و در نهایت به او اجازه داد علم را برای چند سال ترک کند.

آن یک مقاله خیره کننده بود، اما در آن زمان من خسته شده بودم. اگرچه میدان نزدیک ثابت شده است که یک ابزار ارزشمند برای مشخصه مواد و مطالعه برهمکنش نور و ماده در مقیاس نانو است، اما هدف اصلی من ساخت یک میکروسکوپ نوری بود که بتوان با وضوح میکروسکوپ الکترونی سلول‌های زنده را مشاهد کرد. اما میدان نزدیک فقط روی نمونه‌های مسطح کار می‌کرد و متناسفانه چیزی که می‌خواستید ببینید به سطح نزدیک بود. اگر ۲۰ نانومتر دورتر باشید، وضوح قابل توجهی را از دست می‌دهید. می‌دانستم که یک سلول کمی بیش از تقریباً ۲۰ نانومتر است، بنابراین این اتفاق نمی‌افتد.

در همین حال، مسئله پخش و همه‌گیر شده بود. در آن زمان صدها نفر در باره میدان نزدیک فعالیت می‌کردند، و بیشتر آنها چرند می‌گفتند. آنها خود را با تصاویری که دارای ظاهری فربینده اما ساختگی بودند، فریب می‌دادند و کسی نمی‌خواست آنها را بشنود. من احساس کردم که هر نتیجه خوبی که برای اثبات صد مقاله ناپسند تهیه شود، اتلاف وقت مردم و پول مالیات دهندگان است [...] بنابراین انصراف دادم.

تصویر گرفته شده از اریک بتزیگ، ”سخنرانی نوبل: تک مولکول‌ها، سلول‌ها و اپتیک فوق وضوح“ ۲۰۱۵.



شکل ۷.۶: شدت میدان نزدیک از مدل بیت-بووکامپ، رابطه (۱۵.۶)، محاسبه شده است. موج صفحه‌ای با دامنه میدان الکتریکی واحد و با قطبش در امتداد  $\hat{x}$ ها در جهت  $\hat{z}$ ها منتشر می‌شود. در نقطه  $z = 0$  بیک صفحه رسانا که در آن سوراخ دوری پشعاع  $a$  تعییه شده می‌تابد. در شکل شدت میدان عبوری از سوراخ را نشان می‌دهد. خط چین محل سوراخ را معلوم میدارد و خطوط پررنگ شدت میدان را بصورت کانتور مشخص می‌کند. در این محاسبات  $a = 10$  نانومتر و  $\lambda = 620$  نانومتر است.

## ۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی

میکروسکوپ محلی یا فوق وضوح جایزه نوبل شیمی ۲۰۱۴ را دریافت کرد و انقلابی در میکروسکوپ نوری در علوم زیستی ایجاد کرده است. این محصول با نام‌های مختلف مانند میکروسکوپ فعال‌سازی عکس (PALM) <sup>۲۰</sup> [۲۸] یا FPALM <sup>۲۱</sup> [۲۹]، میکروسکوپ بازسازی تصادفی (STORM) <sup>۲۲</sup> [۳۰]، یا میکروسکوپ تخلیه تحریک شده (STED) <sup>۲۳</sup> [۳۱] تجاری سازی شده است. در ادامه، اصول اساسی پشت این فرآیندها را به طور مختصر بدون آنکه وارد جزئیات شویم، بحث می‌کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر خوانندگان علاقمند به ادبیات غنی مراجع این زمینه، به عنوان مثال <sup>۲۴</sup> [۳۲]، مراجعه کنند.

### ۱.۴.۶ دقیق موقعیت

فرض کنید می‌دانیم که انتشار از یک ساطع کننده تک کوانتم ناشی می‌شود. چقدر می‌توانیم ساطع کننده را محلی‌سازی کنیم؟ برای سادگی، فرض می‌کنیم، همان طور که معمولاً برای مولکول‌های محلول صادق است، جهت گسیل کننده دوقطبی تصادفی است، به گونه‌ای که الگوی

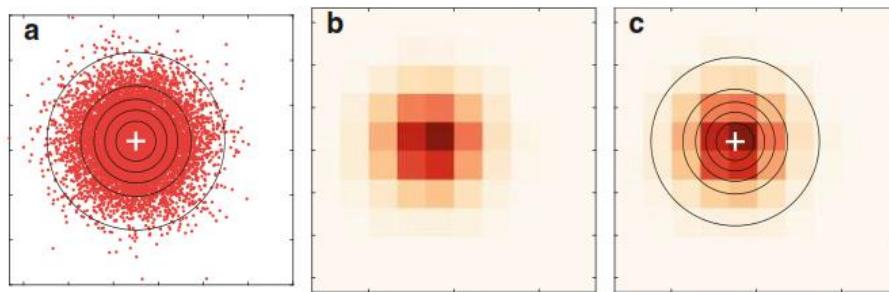
<sup>۲۰</sup> Fluorescence PhotoActivation Localization Microscopy (FPALM)

<sup>۲۱</sup> Photoactivated Localization Microscopy (PALM)

<sup>۲۲</sup> Stochastic Optical Reconstruction Microscopy (STORM)

<sup>۲۳</sup> STimulated Emission Depletion (STED) microscopy

انتشار دارای یک گلبرگ<sup>۲۴</sup> مرکزی است و می‌توان آن را با میانگین آماری روی میدان‌های داده شده در (۵.۶) یا (۶.۶) توصیف کرد. در اصل، طرح شرح داده شده در زیر نیز می‌تواند به راحتی با شرایطی که جهت دوقطبی ثابت است تطبیق داده شود و برای مثال در مورد مولکول‌های بی‌حرکت در لایه پلیمر صدق می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم که عمق  $\sigma$  دوقطبی معلوم است و در مورد نحوه انجام این کار در زیر توضیح خواهیم داد.



شکل ۸.۶: محلی‌سازی ساطع کننده یک دو قطبی (الف) یک نقطه چکان دوقطبی که در موقعیت مشخص شده توسط علامت متقاطع قرار دارد، فوتون ساطع می‌کند. تصویر دوقطبی به دلیل تابع گسترش نقطه‌ای گستردگی می‌شود. (ب) تصویر انتشار دوقطبی برای تشخیص از طریق دوربین CCD. (ج) مرکزی انتشار توسط حداقل مربع با برآش توزیع گوسی یا بصورت پالایش شده‌تر، که می‌تواند با دقت انجام شود و عمدتاً به نسبت سیگنال به نویز بستگی دارد.

شکل (۸.۶)-الف الگوی انتشار یک تک دو قطبی واقع در علامت متقاطع را نشان می‌دهد. نقاط مختلف مربوط به نقاط آشکارسازی تک فوتون است و گسترش توزیع کلی بدلیل تابع گسترش نقطه‌ای است که قبلاً بحث شده است. در آزمایش‌های معمولی با دوربین CCD<sup>۲۵</sup>، وضوح تصویر بر اساس پیکسل‌های آشکارساز تنظیم می‌شود که به صورت شماتیک در صفحه (ب) نشان داده شده است. بنابراین چقدر می‌توان موقعیت ساطع کننده دوقطبی را از این تصویر پیکسلی تعیین کرد؟ پاسخ تا حدی شگفت‌آور است: در اصل با دقت دلخواه، تنها محدودیت بدلیل نسبت سیگنال به نویز است که به تعداد فوتون‌های آشکار شده بستگی دارد.

برای بدست آوردن موقعیت دوقطبی، فرض می‌کنیم که الگوی ساطع شده روی آشکارساز مربوط به تابع گسترش نقطه‌ای  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  است که ممکن است علاوه بر این برخی تغییرات را نیز شامل شود، برای مثال برای سیگنال پس زمینه یا اندازه پیکسل  $a$  آشکارساز تصویر باشد. فرض کنید که  $N$  فوتون کل را اندازه‌گیری کرده‌ایم و یک هیستوگرام داریم که تعداد  $n_i$  فوتون‌های اندازه‌گیری شده در موقعیت پیکسل  $i$  را محاسبه می‌کند. در این صورت می‌توانیم حداقل مربع (یا روش مشابهی) را انجام دهیم تا بهترین موقعیت دوقطبی  $\mathbf{r}_0$  را بدست آوریم

$$\sum_i |n_i - f(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_0)|^2 \longrightarrow \text{Min.}$$

اگر  $f$  شامل پارامترهای اضافی مانند سیگنال پس زمینه ناشناخته باشد، می‌توان آنها را با گمترين مربع برآش داد. می‌توان نشان داد که دقت محلی‌سازی  $\sigma$  برای چنین برآش [۳۲]

<sup>۲۴</sup>Lobe

<sup>۲۵</sup>Charge-Coupled Device (CCD)

برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{PSF}^2 + a^2/12}{N}\right) \left(\frac{16}{9} + \frac{8\pi\sigma_{PSF}^2 b^2}{a^2 N}\right)} \quad (17.6)$$

که در آن  $N$  تعداد فوتون‌های جمع شده،  $a$  اندازه پیکسل آشکارساز تصویر،  $b^2$  میانگین سیگنال پس زمینه، و  $\sigma_{PSF}$  انحراف معیارتابع گسترش نقطه‌ای است. اندازه بهینه پیکسل  $a$  بستگی به تعداد فوتون مورد انتظار و نویز پس زمینه دارد، اما در بیشتر موارد مطلوب، اندازه پیکسل باید تقریباً برابر با انحراف معیارتابع گشرش نقطه‌ای باشد. مهمترین مشاهده در معادله (۱۷.۶) مقیاس  $\sigma$  با  $N^{-1/2}$  است، بنابراین در صورت مقادیر بزرگ  $N$  می‌توان بطور دلخواه کوچک کرد. این اساس میکروسکوپ محلی‌سازی را تشکیل می‌دهد.

## ۲.۴.۶ میکروسکوپ محلی‌سازی با عکس فعال

برای اینکه محلی‌سازی دوقطبی برای میکروسکوپ مفید باشد، به‌چند دستورالعمل اضافی نیاز داریم: باید بتوانیم (۱) مولکول‌های فلورسانس را به‌نمونه مورد علاقه خود متصل کنیم، (۲) چند مولکول را در صورت نیاز به‌منظور محلی‌سازی روشن کنیم، (۳) و هنگامی که محلی‌سازی شدند آنها را خاموش کنیم.

خوبی‌بختانه دو کار اول در اواسط دهه ۱۹۹۰ توسط شیمی‌دانها حل شده بود. مارتین چلفی<sup>۲۶</sup> و دیگران پروتئین‌های فلورسانست سبز (GFPs)<sup>۲۷</sup> را برای میکروسکوپ نوری سلول‌ها کشف کرده بودند. او به‌همراه دو همکار خود جایزه نوبل شیمی سال ۲۰۰۸ را دریافت کردند:

[...] کشف اولیه GFP و یک سری پیشرفت‌های مهم که منجر به‌استفاده از آن به‌عنوان یک ابزار برچسب زنی در علوم زیستی شده است. با استفاده از فناوری DNA، محققان اکنون می‌توانند GFP را به‌سایر پروتئین‌های جالب اما غیر قابل مشاهده متصل کنند. این نشانگر درخشنان به‌آنها امکان می‌دهد حرکات، موقعیت‌ها و فعل و افعالات پروتئین‌های برچسب‌زده را تماشا کنند.

اریک بتزیگ<sup>۲۸</sup> در زندگینامه نوبل خود لحظه‌ای را به‌یاد می‌آورد که در سال ۲۰۰۲ از این تحولات مطلع شد.

من دوباره شروع به‌خواندن ادبیات علمی کردم و به‌سرعت با مقاله مارتین چلفی در مورد پروتئین فلورسانست سبز روبرو شدم، که او در سال ۱۹۹۴ هنگام خروج از بیل<sup>۲۹</sup> منتشر کرده بود. این برای من مانند وحی مذهبی بود. بخشی از آنچه تصویربرداری با میدان نزدیک را بسیار دشوار می‌کرد این بود که برچسب‌زدن پروتئین‌ها به‌اندازه کافی مترکم بدون قرار دادن فلوروفور<sup>۳۰</sup> بر روی یک مشت کار بیهوده دشوار بود. در اینجا راهی برای برچسب‌زدن با ۱۰۰

<sup>۲۶</sup>Martin Chalfie

<sup>۲۷</sup>Green Fluorescent Proteins (GFPs)

<sup>۲۸</sup>Eric Betzig

<sup>۲۹</sup>Bell

<sup>۳۰</sup>A fluorophore (or fluorochrome, similarly to a chromophore) is a fluorescent chemical compound that can re-emit light upon light excitation.

ویژگی وجود دارد، و شما می‌توانید آن را در یک سلول زنده انجام دهید. نمی‌توانستم باور کنم که چقدر جالب بود. من نمی‌خواستم به میکروسکوپ برگردم، اما هنگامی که با GFP آشنا شدم، احساس کردم که مجبورم.

در حالی که مولکول‌های فلورسانس سیز امکان اتصال به محل خاص را می‌دهند، هنوز باید به موضوع روشن و خاموش شدن این مولکول‌ها پرداخت. خوب‌بختانه این وظایف را می‌توان به‌شرح زیر حل کرد:

- تحریک عکس کنترل حالت فلورسانست مولکولها در هنگام استفاده از مولکولهای قابل عکسبرداری امکان پذیر است. در فعالسازی نوری یک مولکول پس از روشنایی در طول موج مشخص از حالت خاموش تاریک نوری به حالت روشن روشنایی نوری تبدیل می‌شود. سایر مولکول‌ها دارای تغییر عکس هستند، این تغییر حالت برگشت پذیر بین حالت روشن و خاموش پس از روشنایی در دو طول موج متفاوت است.

- سفید کردن حتی اگر مولکول‌ها را نتوان به صورت کنترل شده خاموش کرد، به‌دلیل سفید شدن عکس، پس از مدتی کوتاه از نظر نوری غیر فعال می‌شوند. هر زمان که یک مولکول از نظر نوری برانگیخته شود، احتمال کمی وجود دارد که دچار تغییر شکل شده و از نظر نوری غیرفعال شود. به‌طور معمول، مولکولها قبل از سفید شدن و غیرفعال شدن نوری تعداد معینی فوتون، مثلاً یک میلیون، از خود ساطع می‌کنند.

با این کنترل بر حالت‌های اتصال و روشن/خاموش مولکولهای فلورسانس، شماتیک میکروسکوپ محلی‌سازی را می‌توان به‌شرح زیر درک کرد (شکل ۹.۶). در ابتدا، نمونه با مولکول‌های فلورسانس تزئینی شوند که همه در حالت خاموش هستند. پالس فعال ضعیف، چند مولکول را به حالت روشن می‌برد، جایی که با استفاده از طرح محلی‌سازی که قبلاً توضیح داده شد، محلی‌سازی می‌شوند. پس از مدتی آنها سفید می‌شوند و همه مولکول‌ها دوباره در حالت خاموش قرار دارند. تسلسل فعال‌سازی، محلی‌سازی و سفید شدن بارها تکرار می‌شود، تا زمانی که تصویری از جسم مورد بررسی دریافت شود. اولین میکروسکوپ محلی‌سازی عکس فعال شده<sup>۳۱</sup> (PALM) پس از مشخص شدن نحوه عملکرد آن ساخته شد. اریک بتزیگ به‌یاد می‌آورد:

من و هارالد<sup>۳۲</sup> اولین میکروسکوپ PALM را در اتاق نشیمن او در لا ژولا<sup>۳۳</sup> ساختیم. هر دو بیکار بودیم، اما هارالد برخی از تجهیزات خود را از بل تهییه کرده بود. آن را از ذخیره خارج کردیم و هر کدام مبلغ ۲۵۰۰۰ دلار برای تأمین سایر موارد مورد نیاز خود قرار دادیم. سخت کار کردیم و در ماه سپتامبر همه قطعات را برای بازسازی میکروسکوپ در اتاق تاریک آزمایشگاه جنیفر<sup>۳۴</sup> ارسال کردیم. اولین باری که لغزشی پوشیده از مولکول‌ها را در میکروسکوپ قرار دادیم و نور فعال کننده نور را روشن کردیم، اولین زیرمجموعه ظاهر شد و می‌دانستیم که آن را داریم.

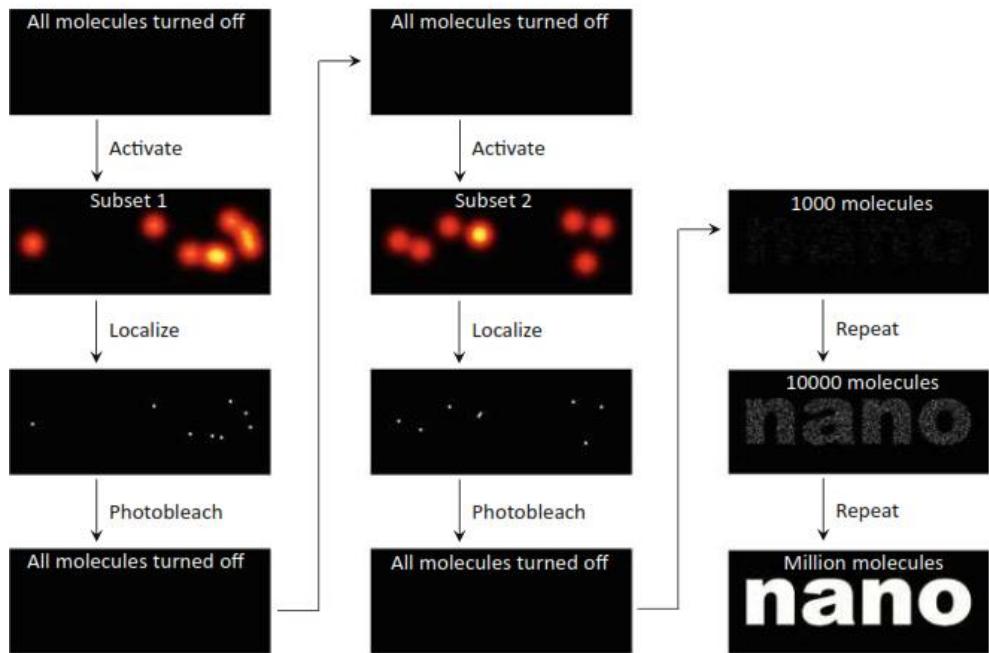
از آن زمان این زمینه رونق یافته و میکروسکوپ محلی‌سازی به یک بازیگر کلیدی در زمینه علوم زیستی تبدیل شده است. تصاویر سه بعدی را می‌توان با استفاده از لنزهای استوانه‌ای

<sup>۳۱</sup>Photo-Activated Localization Microscope (PALM)

<sup>۳۲</sup>Harald

<sup>۳۳</sup>La Jolla

<sup>۳۴</sup>Jennifer's lab



شکل ۹.۶: اصول میکروسکوپ محلی‌سازی. با خاموش کردن تمام مولکول‌های متصل به نمونه شروع می‌کنیم. یک پالس فعال ضعیف باعث روشن شدن چند مولکول می‌شود که قبل از سفید شدن محلی‌سازی شده‌اند. این روش بارها تکرار می‌شود تا زمانی که تصویری از نمونه مورد بررسی دریافت کنیم، در اینجا حروف "نانو" را تشکیل می‌دهند. فرض می‌کنیم که حروف متراکم با ساطع کننده‌های دوقطبی، شبیه به چینش نشان داده شده در شکل‌ها (۲.۳) و (۳.۳) هستند.

برای تولید صفحه‌های نوری و روشن کردن مولکولها در صفحه‌های خاصی از نمونه به دست آورد. به طور کلی، بین وضوح بالا و روبش سریع، یک مبادله وجود دارد، و در حالی که امروزه مشاهده سلولهای زنده با وضوح زیر پراش بلادرنگ<sup>۳۵</sup> امکان پذیر است، میکروسکوپ جزئیات ریز سلول‌ها عموماً به زمان مشاهده طولانی‌تر و نمونه‌های بی‌حرکت نیاز دارد.

### ۳.۴.۶ میکروسکوپ تخلیه تحریک شده

میکروسکوپ تخلیه تحریک شده (STED)<sup>۳۶</sup> یک روش میکروسکوپی محلی‌سازی متفاوت است که در اواسط ۱۹۹۰ توسط استفان هل<sup>۳۷</sup> و همکاران توسعه یافت. او به همراه اریک بتزیگ<sup>۳۸</sup> و ویلیام مورنر<sup>۳۹</sup> جایزه نوبل ۲۰۱۴ را به دلیل "فراتر از محدودیت‌های میکروسکوپ نوری" دریافت کردند. همانطور که در زندگینامه نوبل وی توضیح داده شده، وی در پایان نامه دکتری خود به این موضوع علاقه مند بود، اما در ابتدا اوضاع خیلی خوب پیش نمی‌رفت.

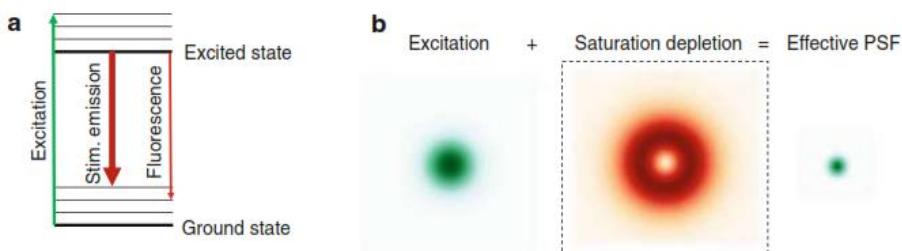
<sup>۳۵</sup>Real Time

<sup>۳۶</sup>STimulated Depletion (STED) microscopy

<sup>۳۷</sup>Stefan Hell

<sup>۳۸</sup>Eric Betzig

<sup>۳۹</sup>William Moerner



شکل ۱۰.۶: اصول تخلیه تحریک شده (STED). (الف) یک مولکول فلورسانس تا حالت برانگیخته الکترونیکی و ارتعاشی تحریک می‌شود و سپس تا زمانی که به سطح ارتعاشی برسد، آرامش ارتعاشی را تجربه می‌کند. برای چند نانو ثانیه، قبل از گسیل فوتون و آرامش دوباره به سطح الکترونیکی و ارتعاشی باقی می‌ماند. اگر در طول این مدت انتظار، یک پالس تخلیه قوی دیگر روشن شود، مولکول تحت گسیل تحریک شده (با افزودن فوتون به پالس تخلیه) قرار گرفته و به حالت اولیه باز می‌گردد. (ب) با ترکیب یک پالس تحریک گوسی با یک پالس تخلیه شبیه پیراشکی، نقطه تحریک موثر را می‌توان بسیار کوچک کرد.

شایعه این بود که تلاش‌های من مانند تمام تلاش‌های دیگر میدان دور "فوق وضوح" نوری قبل به پایان می‌رسد، یعنی به عنوان یک کنجدکاوی دانشگاهی. [...] احساس کردم که به سادگی تغییر نحوه کانونی کردن نور یا چیدمان مجدد عدسی‌ها، مسائل را بطور اساسی تغییر نخواهد داد. تنها راه انجام این کار یا از طریق برخی از جلوه‌های کوانتم نوری یا-آنچه بیشتر امیدوار کننده به نظر می‌رسید- از طریق حالت‌های مولکول‌های قابل تصویربرداری است. مولکول‌هایی که حالت آنها به‌آسانی قابل اجرا با فلورسانست بودند که خوب‌بختانه در علوم زیستی نیز مورد توجه قرار گرفتند.

صبح روز شنبه در پاییز ۱۹۹۳ من کتاب "نظریه کوانتمی نور" کتاب رودنی لودون<sup>۴۰</sup> را به‌امید یافتن چیزی مناسب مروء می‌کردم. چند هفتۀ قبل تصویر می‌کردم اگر مولکول‌های فلورسانست دوباره از حالت برانگیخته با استفاده از پرتوهای کمی جابجا شوند، چه اتفاقی می‌افتد. وقتی چشم من به‌فصلی در مورد گسیل تحریک شده توجه کرد، برایم روشن شد: چرا مولکولها را تحریک می‌کنم، چرا آنها را تحریک نکنم، یعنی آنها را بدون فلورسانست نگه دارم تا آنها را از همسایگان خود جدا شوند. این فکرمرا بوجود آورد و بلاfaciale کتاب فریتز شوفر<sup>۴۱</sup> در مورد لیزرهای رنگی را بررسی کردم تا بینم در مورد گسیل تحریک شده فلوروفورها مانند رودامین‌ها چه چیزی گزارش شده است. ارزیابی سریع نشان داد که وضوح تصویر حداقل ۳۰-۳۵ نانومتر را می‌توان در صفحه کانونی به‌دست آورد، یعنی ۸-۶ بار فراتر از حد پراش. شگفت‌انگیز بود. همچنین فوراً مشخص شد که وضوح قابل دستیابی فقط به‌شدت نمونه بستگی دارد و در اصل نامحدود است.

اصل اساسی در شکل ۱۰.۶ نشان داده شده است و شامل ایجاد یک نقطه تحریک است که بسیار کوچکتر از حد پراش نور است. تصویر (الف) نمودار معمولی جابلونسکی<sup>۴۲</sup> از سطوح مولکولی را گزارش می‌دهد. این مولکول به عنوان یک سیستم با دو حالت الکترونیکی، یک

<sup>۴۰</sup> Rodney Loudon's book

<sup>۴۱</sup> Fritz Schäfer's book

<sup>۴۲</sup> Jablonski diagram

حالت پایه<sup>۴۳</sup> و برانگیخته، همراه با یک سری تحریکات ارتعاشی مدل شده است. فرض کنید که مولکول در ابتدا در حالت اولیه خود قرار دارد. سپس یک پالس تحریک مولکول را به حالت برانگیخته الکترونیکی و ارتعاشی ارتقا می‌دهد و در آنجا آرامش می‌یابد تا سرانجام در حالت ویبرونیک حالت الکترونیکی برانگیخته قرار گیرد. به طور معمول، قبل از انتشار فوتون، چند نانو ثانیه در آنجا می‌ماند، که می‌تواند به عنوان فلورسانس تشخیص داده شود. اگر در این مدت انتظار، یک پالس تخلیه قوی و قوی دوم اعمال شود، مولکول در یک فرایند گسیل تحریک شده به حالت پایه الکترونیکی آورده شده و یک فوتون به پالس تخلیه اضافه می‌شود. STED تحریک مولکولی و برانگیختگی به شرح زیر استفاده می‌کند:

- پالس تحریک اولین پالس تحریک مولکول‌ها را، همانطور که در شکل (۱۰.۶)-الف نشان داده شده است، تحریک می‌کند. نور تحریک از طریق اپتیک های میدان دور روی نمونه کانونی می‌شود، بنابراین گسترش آن به ترتیب طول موج نور است.

- پالس تخلیه دومین پالس تخلیه، مولکول‌ها را به حالت اولیه باز می‌گرداند و حالت مولکولی برانگیخته را از بین می‌برد. پالس تخلیه دارای شکل دونات (پیراشکی) است، که می‌توان آن را با صفحه‌های فاز مشابه بحث قبلی در مورد حرکت زاویه‌ای نوری در بخش ۴.۶ بدست آورد، و معمولاً بسیار قوی تر از پالس تحریک است. بنابراین تمام مولکول‌ها را به استثنای ناحیه مرکز تخلیه می‌کند. این ترکیب تحریک و تخلیه امکان ایجاد نقاط تحریک (PSF های تحریک) را می‌دهد که بسیار کوچکتر از طول موج نور هستند. در نهایت، فلورسانس مولکول‌های تکمیل نشده به عنوان سیگنال اندازه‌گیری می‌شوند.

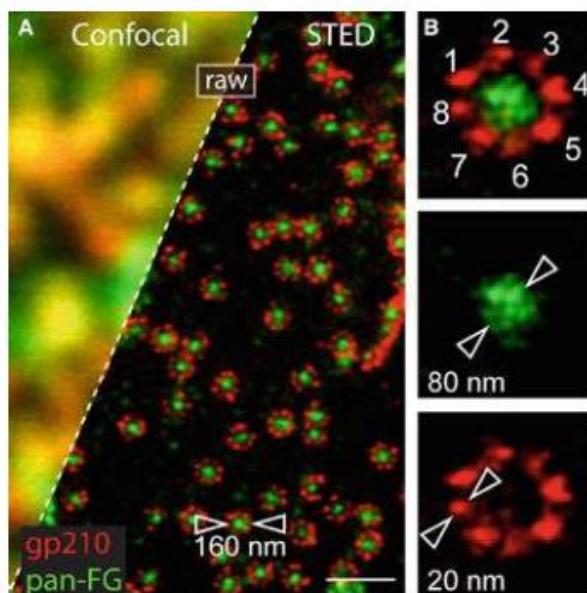
یکی از تفاوت‌های اصلی بین PALM یا STORM و STED این است که در طرح‌های قبلی مولکول‌ها به طور تصادفی تحریک می‌شوند، در حالی که در مورد دوم به صورت کنترل شده است. در STED باید نقطه تحریک روی نمونه را شبیه به میکروسکوپ کانفوکال (هم‌کانونی) معمولی روش کرد. شکل (۱۱.۶) مقایسه بین نتایج به دست آمده با میکروسکوپ کانفوکال و STED را نشان می‌دهد.

### آیا میکروسکوپ محلی سلزی می‌تواند حد پراش را شکست دهد؟

این فصل به حد پراش نور پرداخته است، بنابراین شاید منصفانه باشد که بپرسیم آیا این حد بنیادی است یا می‌توان بر آن غلبه کرد. من شخصاً تمایل دارم که ماهیت اساسی را انتخاب کنم، اما شایعات می‌گویند که متخصص‌های واجد شرایط معتقدند که میکروسکوپ محلی سازی حد پراش را شکست داده است. بنابراین احتمالاً باید سؤوال را برای بحث باز نگه دارم.

بخشی از این بحث از آنجا ناشی می‌شود که به نظر می‌رسد هیچ تعریف منحصر به‌فردی از حد پراش وجود ندارد و پاسخ بستگی به نحوه تعریف دقیق آن دارد. بحث در مورد چیزی که به تعاریف بستگی دارد معمولاً بیش از حد مفید نیست. با این حال، بدون مشخص شدن بیش از حد، من درک می‌کنم که حد پراش مربوط به از بین رفتن امواج محوشونده از تصویر است، و این اطلاعات از دست رفته هرگز قابل بازیابی نیست. بنابراین بدون هیچ‌گونه آگاهی در مورد سیستم تحت نظرات، بنابراین ناگزیر باید به حد پراش یا چیزی مشابه دست یابیم.

<sup>۴۳</sup>Ground State



شکل ۱.۶: نانوسکوپی فلورسانس مجموعه پروتئینی با میکروسکوپ STED فشرده نزدیک به مادون قرمز با پالس نانو ثانیه‌ای مقایسه با میکروسکوپ هم‌کانونی. (الف) STED زیر واحدهای دارای برچسب ایمنی را در NPC دوزیستان نشان می‌دهد. قطر حلقه هشت ضلعی  $gp210$  ۱۶۰ نانومتر است. نوار مقیاس، ۵۰۰ نانومتر است. (ب) تصویر NPC هر هشت همودیمر با برچسب آنتی بادی با برچسب  $gp210$  را به عنوان ۲۰–۴۰ نانومتر واحد و محلی سازی ۸۰ نانومتر از زیر واحدها در کanal مرکزی را نشان داده می‌شود. شکل و زیرنویس برگرفته از [۳۳] است.

برای "غلبه" بر حد پراش، به داشت بیشتری نیاز است، به عنوان مثال، نور آشکار شده از مولکول‌های فلورسانس متصل به نمونه است. این یک دستاورده بزرگ و حیرت‌انگیز است که می‌توان این مولکول‌ها را به صورت قوی و دقیق محلی سازی کرد. با این حال، به نظر من میکروسکوپ محلی سازی سؤال‌های متفاوتی نسبت به میکروسکوپ معمولی از طبیعت می‌پرسد، و بنابراین من پیشنهاد می‌کنم که میکروسکوپ معمولی و محلی سازی را با یکدیگر مقایسه نکنید.

### تمرینات

- تمرين ۱ میدان الکتریکی یک دوقطبی نوسانی را می‌توان بر حسب تابع گرین دیداریک همراه با (۱.۶) بصورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_0 \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}$$

با تابع گرین متقارن، معادله (۲۵.۵)، میدان دور دوقطبی را محاسبه کنید.

- تمرين ۲ از جعبه ابزار NANOPT از فایل demodip05.m برای محاسبه تصویر (شدت میدان‌های تصویری) دو دوقطبی که در امتداد  $x$  قرار گرفته و به فاصله  $d$  از هم هستند استفاده کنید. برای مقادیر مختلف  $NA$  فاصله‌ای که دوقطبی را در تصویر می‌توان تشخیص داد، پیدا کنید و با معادله (۱۲.۶) مقایسه کنید.

- تمرین ۳ از جعبه ابزار NANOPT از فایل demodip06.m برای محاسبه تصویر  $I_{12}$  دو دوقطبی که در امتداد  $x$  قرار گرفته و به فاصله  $d$  از هم هستند، استفاده کنید. تصاویر  $I_1$  و  $I_2$  را برای هر دوقطبی جداگانه محاسبه کرده و مجموع  $I_1 + I_2$  را رسم کنید. آیا  $I_{12}$  تفاوت دارند؟ و اگر جواب مثبت است، چرا؟
- تمرین ۴ از همان فایل تمرین قبلی برای بررسی وضعیت دوقطبی‌ها در یک صفحه  $z = 0$  نیستند، استفاده کرده، اما یک دوقطبی از آن دور می‌شود. این چگونه بر تصویر تأثیر می‌گذارد؟
- تمرین ۵ وضعیت دو دوقطبی را در نظر گیرید که جهت آنها ثابت نیست اما به طور تصادفی با زمان تغییر می‌کند. در مورد چگونگی طیف‌ها هنگامی که سیگنال در یک فاصله زمانی طولانی میانگین‌گیری می‌شود، بحث کنید.

## فصل ۷

### خواص مواد

الکترودینامیک از طریق بار آزاد  $\mu$  و توزیع جریان  $J$  و همچنین از طریق خاصیت گذردهی الکتریکی<sup>۱</sup>  $\epsilon$  و نفوذپذیری مغناطیسی<sup>۲</sup>  $\mu$  لاقل برای مواد خطی با دنیای مواد ارتباط برقرار می‌کند. با ظهور علم نانو، فناوری نانو، زمینه نانو اپتیک تقویت شدیدی داشته، زیرا کنترل دقیق منابع و خواص مواد، امکانات بی‌نظیری را برای کاربردهای اپتیک جدید ارائه می‌دهد. می‌توان اذعان کرد که موفقیت نظریه الکترودینامیک در ماده بهاین دلیل است که حداقل برای مواد خطی، تمام جزئیات میکروسکوپی را می‌توان در دو مقدار  $\epsilon$  و  $\mu$  پنهان کرد. در اصل، مهم نیست که چگونه آنها را بدست می‌آوریم، چه از طریق مدل‌های پدیدارشناسی<sup>۳</sup>، چه از طریق نظریه میکروسکوپی و خواه از طریق تجربی،

$$\left. \begin{array}{l} \text{مدل پدیدارشناسی} \\ \text{نظریه میکروسکوپی} \\ \text{سنجدش تجربی} \end{array} \right\} \text{معادلات ماکسول} \rightarrow \mu, \epsilon.$$

تنها چیزی که اهمیت دارد این است که مقادیری را در دست داریم، و هنگامی که آنها وجود دارند، می‌توانیم آنها را در معادلات ماکسول وارد و مسائل مورد علاقه خود را با استفاده از یکی از روش‌های زیادی که در طول قرن‌ها توسعه پیدا کرده و تا حدی در این کتاب آنها مورد بحث قرار گرفته است، حل کنیم. از این نظر، تفکیک دنیای مادی و الکترومغناطیس از طریق "پیوند" $\epsilon$  و  $\mu$  یک راه حل بسیار زیبائی است.

هنوز، گاهی اوقات دوست داریم در مورد این کمیات بیشتر بدانیم. در این فصل چند مدل پدیدارشناسی برای  $\epsilon$  و  $\mu$  معرفی کرده و ویژگی‌های کلی این کمیات مهم را مورد بحث قرار داده و بطور خاص، متوجه خواهیم شد که در ترازهای مختلف پیچیدگی وجود دارد که بطور مختصر درمثال گذردهی  $\epsilon$  بحث خواهیم کرد.

- مقدار ثابت اغلب کافی است یک مقدار ثابت برای  $\epsilon$  فرض کنیم. مثلاً شیشه یا آب فقط پراکندگی متوسطی را در محدوده فرکانس نوری نشان می‌دهند و اغلب (اما نه همیشه)

<sup>۱</sup>Permittivities

<sup>۲</sup>Permeabilities

<sup>۳</sup>Phenomenological

با مقادیر ثابت تقریب‌زده می‌شوند. در این کتاب معمولاً در فرکانس‌های نوری از  $n = 1.5$  برای شیشه و  $n = 1.33$  برای آب استفاده می‌کنیم.

• **غیر محلی بودن در زمان<sup>۴</sup>** در بسیاری از موارد، مواد پویائی ذاتی<sup>۵</sup> دارند و باید در نظر گرفته شوند. برای مثال چگونه رزونانس مواد با میدان‌های الکتریکی که روی سیستم عمل می‌کنند، تحریک می‌شوند. این را می‌توان از طریق رابطه بین جابجایی دی‌الکتریک  $D(r, t)$  و میدان الکتریکی  $E(r, t)$  که غیر محلی در زمان است توصیف کرد؛

$$D(r, t) = \int_0^{\infty} \epsilon(r, \tau) E(r, t - \tau) d\tau \quad (1.7)$$

توجه کنید که این عبارت علیت را حفظ می‌کند زیرا فقط میدان‌های قبلی روی پاسخ مواد در لحظه  $t$  اثر دارند. در بخش ۲.۳.۷ بحث می‌کنیم که بدین علت قسمت‌های حقیقی و موهومی  $\epsilon$  بیکدیگر مربوط می‌شوند.

• **غیر محلی بودن در مکان<sup>۶</sup>** در اصل، پاسخ نوری نیز می‌تواند غیر محلی در مکان باشد؛

$$D(r, t) = \int_0^{\infty} \int \epsilon(r - r', \tau) E(r', t - \tau) d^3r' d\tau. \quad (2.7)$$

نمونه‌هایی از آنها فلزات هستند که قطبش می‌تواند در نقطه مثل  $r'$  تولید شده و از طریق الکترون‌های هدایت به موقعیت دیگر  $r$  جایی که بر پاسخ موثر است، انتقال یابد. برای فلزات معمولی محدوده غیر محلی کمتر از یک نانومتر است و بنابراین اغلب می‌تواند با یک واکنش محلی تقریب‌زده شود. با این وجود، سالهاست به‌چنین اثرات غیر محلی علاقه‌مند شده‌اند.

• **ناهمسانگردی** در مواد ناهمسانگرد که میدان الکتریکی  $E$  در امتداد یک جهت معینی توجیه شده است، می‌تواند باعث ایجاد قطبش در جهت متفاوت شود. در این صورت پاسخ ماده را باید بر حسب تانسور  $\bar{\epsilon}$  توصیف کرد.

$$D = \bar{\epsilon} \cdot E, \quad (3.7)$$

همراه با کانولوشن اضافی در زمان یا مکان، همانطور که در بالا بحث شد، توصیف کرد. در این کتاب عموماً به بررسی بیشتر این گونه مواد نمی‌پردازیم، زیرا می‌خواهیم در حد امکان نماد را ساده نگه داریم. و ضمناً به‌این دلیل بسیاری از مواد را می‌توان به‌خوبی با توابع ایزوتروپیک  $\bar{I} = \bar{\epsilon} \cdot E$  توصیف کرد.

به‌طور کلی، همه نتایج فوق برای نفوذپذیری  $\square$  نیز صادق است. با این حال، برای فرکانس‌های نوری معمولاً می‌توان  $\mu_0 \approx \mu$  را برای تقریباً تمام مواد شناخته شده در نظر گرفت. اما فراماده استثناء هستند، اینها آرایه‌هایی از نانوساختارهای ساخته دست بشر هستند که در آنها خواص

<sup>۴</sup>Nonlocality in Time

<sup>۵</sup>Intrinsic dynamics

<sup>۶</sup>Nonlocality in Space

دیالکتریکی و مغناطیسی به طور کامل قابل تنظیم است. در ادامه به طور مختصر درباره چنین مواد توضیح خواهیم داد.

## ۱.۷ مدل درود-لورنتس و مدل درود

مدل درود-لورنتس یکی از ساده‌ترین طرح‌ها بر توصیفتابع دیالکتریک است. این بر اساس مدل نوسان‌کنندگی هارمونیکی که می‌تواند در قالب دو ذره با بار مختلف متصل به یک فنر مدل سازی کرد و سیستم توسط یک میدان الکتریکی خارجی  $E(t)$  تحریک شود. بدون مشخص کردن جزئیات، فرض کنید که تغییر مکان  $x(t)$  سبب به تولید دوقطبی  $p(t) = ex(t)$  شود. با نوشتن معادلات نیوتون برای حرکت نوسانی شروع کرده و خواهیم داشت

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2x - m\gamma\dot{x} + eE(t) \quad (4.7)$$

در اینجا  $m$  و  $e$  بترتیب جرم و بار نوسان‌ساز،  $\omega_0$  فرکانس تشدید، و  $\gamma$  ثابت میرایی است. فرض کنید تغییرات زمانی میدان الکتریکی هارمونیکی بصورت زیر باشد

$$E = E_0e^{j\omega t}$$

بعداز مرحله اول، سیستم با همان فرکانس  $\omega$  نوسان می‌کند. در این صورت معادله (۴.۷) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$-\omega x = -\omega_0^2x - j\gamma\omega x = \frac{eE_0}{m}$$

که در اینجا از طرفین جمله نمائی را جذف کرده‌ایم. تغییر مکان را می‌توان نوشت:

$$x = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega} E_0 \quad (5.7)$$

این وابستگی تشدید معمولی برای یک نوسان‌ساز هارمونیکی است. وقتی فرکانس  $\omega$  به فرکانس تشدید  $\omega_0$  می‌رسد، دامنه بزرگترین می‌شود. در تشدید، دامنه توسط ثابت میرایی  $\gamma$  و دامنه میدان تحریک تنظیم می‌شود.

از عبارت بالا می‌توانیم گشتاور دوقطبی  $P = nex$  و بنوبه خود قطبش  $P = nex = ex$  را با ضرب چگالی نوسان‌کننده‌ها  $n$  محاسبه کنیم (با خاطر آورید که قطبش چگالی دوقطبی‌ها است). بنابراین خواهیم داشت

$$P = nex = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega} E_0 = \epsilon_0 \chi_e E_0$$

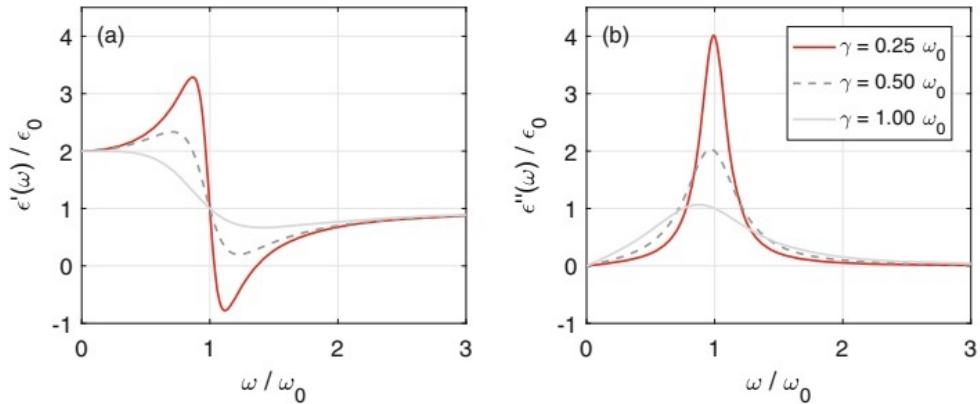
که در آن بصراحت رابطه بین  $P$  و پذیرندگی الکتریکی  $\chi_e$  را می‌توان نوشت. با استفاده از  $\epsilon_0 = \epsilon_0(1 + \chi_e)$  سرانجام گذردهی را برای نوسان‌کننده هارمونیکی با چگالی  $n$  بدست می‌آوریم:

<sup>۷</sup>Electric Susceptibility

### گذردگی مدل درود-لورنتس

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega} \right) \quad (6.7)$$

شکل (۱.۷) یک مثال معمولی برای تابع دیالکتریک درود-لورنتس را نشان می‌دهد. قسمت موهومی مربوط به تلفات در اطراف فرکانس تشیدید  $\omega_0$  به اوج می‌رسد، و آن جایی است که ارتفاع و عرض قله با ثابت میرایی  $\gamma$  کنترل می‌شود. قسمت حقیقی رفتار تشیدید معمولی را در حدود  $\omega_0$  نشان می‌دهد و برای فرکانس‌های کوچک که نوسان‌ساز میدان تحریک را دنبال می‌کند، بیک نزدیک می‌شود و برای فرکانس‌های بزرگ که نوسان‌ساز لختی دارد که نمی‌تواند نوسان‌های سریع میدان خارجی را دنبال کند به صفر نزدیک می‌شود.



شکل ۱.۷: رفتار معمولی گذردگی درود-لورنتس برای ثابت میرایی‌های مختلف  $\gamma$  در معادله (۶.۷). (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی  $(\omega)$ . برای ثابت نوسان‌ساز از رابطه  $ne^2/(\epsilon_0 m) = \omega_0^2$  استفاده کرده‌ایم.

با وجود سادگی، در مدل درود-لورنتس یک چیز جادویی وجود دارد. به طور کلی، اکثر تشیدیدهای ماده را می‌توان بر اساس مدل نوسان‌ساز هارمونیکی، حداقل نزدیک به تشیدید توصیف کرد. بدینهی است، نباید اجزای مدل را زیاد جدی گرفت، این یک مدل بسیار کلی است که می‌توان آن را بر اساس چند پارامتر موثر (که از آنالوگ مکانیکی هستند) توصیف کرد. در صورت چندین تشیدید، می‌توان نتیجه معادله (۶.۷) را نیز تعمیم داد. و یک جمع بندی بر روی مشارکت مختلف نوسان‌ساز معرفی کرد.

برای فلزات می‌توانیم بدون هیچ‌گونه نیروی بازگردانی،  $0 \rightarrow \omega_0$  استفاده کنیم. این ما را برای فلزات به رابطه زیر هدایت می‌کند.

### گذردگی درود برای فلزات

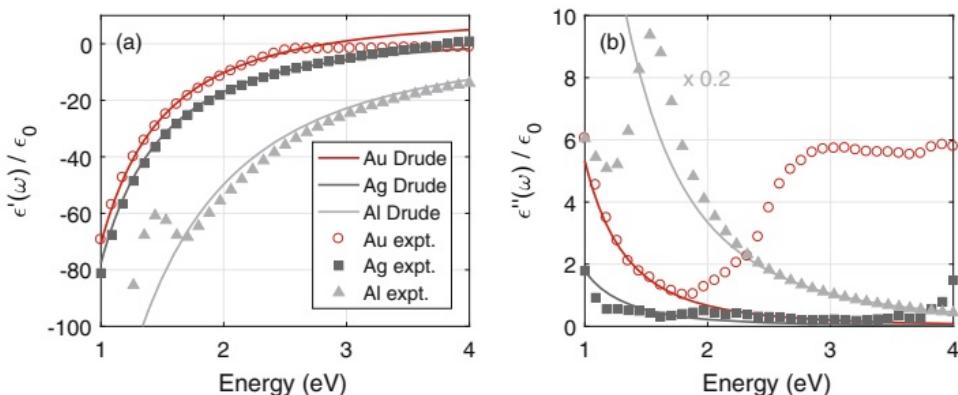
$$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = \kappa_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)} \quad (7.7)$$

که در آن فرکانس پلاسمای  $\omega_p$  را معرفی کردند.

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} \quad (8.7)$$

که این مستقیماً از رابطه (۸.۷) بدست می‌آید. در فرکانس پلاسمای برای  $\kappa_b = 1$  خواهیم داشت  $\approx \epsilon(\omega_p)$  که وابسته به نوسان‌های پلاسمای طولی الکترون‌های هدایتی است.  $\kappa_b$  یک سهم اضافی برای شرکت الکترون‌های مقید بحساب می‌آید.

مقادیر معمول در جدول (۱.۷) آورده شده است و از یک برای آلمینیوم تا حدود ده برابر طلا متغیر است. خطوط برنگ در شکل (۲.۷)، (الف) بخش حقیقی و (ب) بخش موهومی تابع دیالکتریک که برای طلا، نقره و آلمینیوم محاسبه شده است. نمادها داده‌های تجربی را گزارش می‌دهند. در همه موارد، بین مقادیر تابع درود و دادهای تجربی، با استثنای طلا بازه انرژی در بالای  $2eV$  توافق منطقی و خوبی پیدا می‌کنیم. در اینجا داده‌های تجربی میرایی بسیار بزرگتری را نشان می‌دهند.



شکل ۲.۷: (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی تابع دیالکتریک درود برای طلا Au، نقره Ag و آلمینیوم Al و مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی. داده‌های آزمایشگاهی برای طلا و نقره از مرجع [۳۴] و برای آلمینیوم از مرجع [۳۵] گرفته شده است.

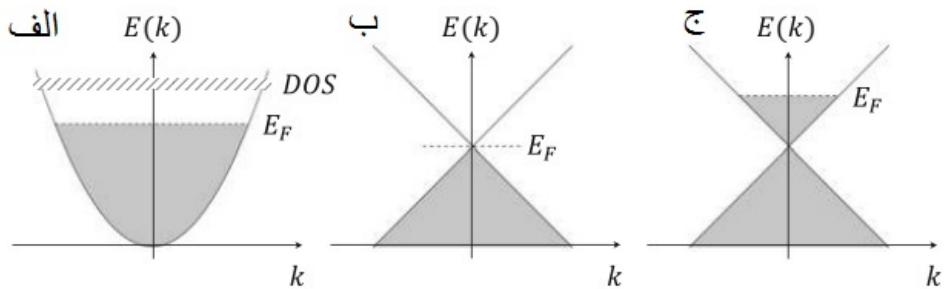
جدول ۱.۷: پارامترهای مدل درود برای چند فلز

$\hbar/\gamma(fs)$	$\hbar\omega_p(eV)$	$\kappa_b$	مواد
۱۰	۱۰	۱۰	طلا
۳۰	۱۰	۳.۳	نقره
۱	۱۵	۱	آلومینیوم

برای درک منشا چنین میرایی، در ادامه جزئیات میکروسکوپی الکترون‌های فلزی را در نظر می‌گیریم. در فیزیک حالت جامد، حالات الکترون بر حسب تابع بلاخ<sup>۸</sup>  $u_{n,k}(r)$  که توسط موج

<sup>۸</sup>Bloch functions

$k$  و ضریب باند  $n$  اداره می شود، [۳۶] توصیف می شود. رابطه بین  $k$  و انرژی الکترونی ( $E_n(k)$ ) که



شکل ۳.۷: نموداری از ساختار باند برای (الف) پاشندگی سهمی، (ب) بدون ناخالصی، (ج) گرافن با ناخالصی. نمودار خط چین نمایشگر انرژی فرمی است. سطوح هاشورخورده در شکلها (الف) نمایشگر چگالی حالتها است که مربوط به تعداد حالت‌های موجود در واحد انرژی و حجم است.

ساختار باند نامیده می شود و خواص الکترونیکی و نوری الکترون‌ها در جامدات را نشان می دهد. برای فلزات ساده، ساختار باند را می توان به خوبی با پاشندگی سهمی تقریب زد:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (۹.۷)$$

که در آن  $m$  جرم الکترون است. توجه کنید که این پاشندگی با الکترون‌های آزاد یکسان است. در فلزات تمام حالت‌ها با انرژی فرمی  $E_F$  پُر شده، شکل (۳.۷)-الف، که با تعداد الکترون‌ها در فلز تعیین می شوند. به دلایلی که در یک لحظه مشخص می شود، همچنین چگالی حالت الکترون ( $g(E)$ ) را که مطابق با حالت‌های الکترون در واحد انرژی و حجم است، معرفی می کنیم.

$$g(E) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \Omega^{-1} \sum_{n,k} \delta [E - E_n(k)]$$

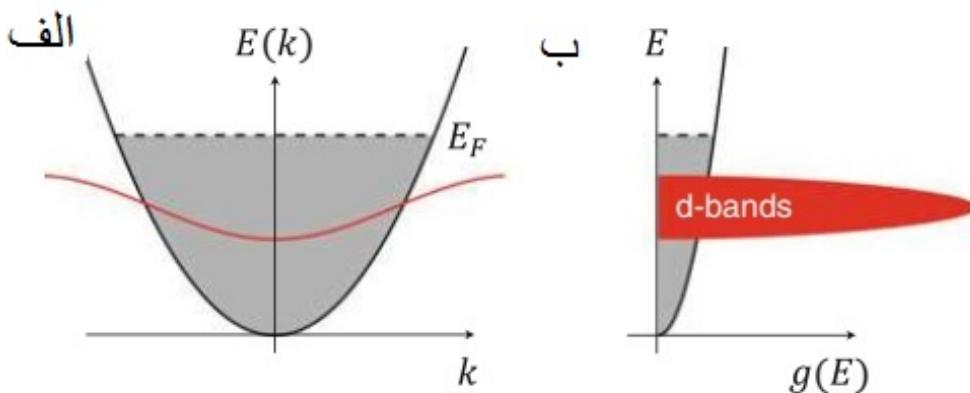
هر جا که راحت باشد، حد ترمودینامیک را با قرار دادن اندازه جامد بسمت بی‌نهایت،  $\infty \rightarrow \Omega$  انجام می دهیم. برای پاشندگی سهمی رابطه (۹.۷) عبارت زیر را بدست می آوریم [۳۶]

$$g(E) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left( E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) d^3 k = \left[ \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \right] \sqrt{E} \quad (۱۰.۷)$$

بنابراین، چگالی حالت‌ها با ریشه دوم <sup>۹</sup> انرژی مقیاس می شوند. شکل (۴.۷) شمایی از ساختار باند و چگالی حالت‌ها گذار فلزاتی از قبیل طلا و نقره را نشان می دهد. علاوه بر باند هدایت مانند الکترون آزاد، باندهای اضافی زیر انرژی فرمی وجود دارد که با الکترون‌های  $d$  قوی موضعی مرتبط است. چگالی حالت‌های این باندهای  $d$  معمولاً بسیار بیشتر از الکترون‌های آزاد است و مسئول دو اثر در تابع دی الکتریک است.

• باند  $d$  غربالگری هنگامی که انرژی فوتون  $\hbar\omega$  کوچکتر از فاصله انرژی بین باندهای  $d$  و انرژی فرمی است، هیچگونه انتقال باند  $d$  نمی تواند القا شود. با این حال، مشابه

<sup>۹</sup>Square Root



شکل ۴.۷: (الف) نمودار ساختار باند  $E(k)$  و (ب) چگالی حالتها  $g(E)$  برای فلزات انتقالی. علاوه بر باند سهموی الکترون‌های هدایت، یک باند اضافی از الکترون‌های  $d$  محلی نیز وجود دارد که در زیر انرژی فرمی واقع شده است. برای انرژی‌هایی  $\omega \hbar$  که الکترون‌ها از این باندهای  $d$  به حالت‌های بالاتر از  $E_F$  ارتقا می‌یابند، بخش موهومی  $(\omega''\epsilon)$  به شدت افزایش می‌یابد.

دیالکتریک‌ها، حالت‌های باند  $d$  را می‌توان قطبی کرد، که منجر به مقادیر نسبتاً بزرگ  $\kappa_b$  برای طلا و نقره در جدول ۱.۷ می‌شود. در مقابل، در آلومینیوم، که یک فلز انتقالی<sup>۱۰</sup> نیست، اتم‌ها فقط یک الکترون واحد در پوسته بیرونی دارند. به همین ترتیب هیچ سهم غربالگری الکترون‌های ممنوع شده وجود ندارد و بنابراین  $\kappa_b = 1$  است.

- باند  $d$  انتقال برای انرژی‌های  $\omega \hbar$  که الکترون‌ها می‌توانند از حالت‌های باند  $d$  به حالت‌های بالاتر از  $E_F$  ارتقاء پیدا کنند، بخش موهومی گذردگی ( $\omega''\epsilon$ ) (که اندازه‌گیری جذب مربوط به چنین انتقال‌ها است) به شدت افزایش می‌یابد. در طلا، انتقال باند  $d$  در انرژی فوتونی بالاتر از  $2eV$  ایجاد می‌شود، همان‌طور که از داده‌های تجربی شکل ۲.۴<sup>۱۱</sup> به‌وضوح مشاهده شود، در حالی که در نقره، باندهای  $d$  از لحاظ انرژی عمیق‌تر از انرژی فرمی واقع شده‌اند و انتقال در انرژی بسیار بالاتر، مثلاً در حدود  $4eV$  است. سرانجام، در آلومینیوم هیچ تغییر مربوطه را مشاهده نمی‌کنیم. با این وجود، یک قله ضعیف در حدود  $1.5eV$  وجود دارد، که با نوع دیگری از انتقال بین باند مرتبط است.

به‌طور خلاصه، مدل درود یک طرح توصیفی مناسب برای بسیاری از فلزات ارائه می‌دهد، اما نباید برای طلا بالای انرژی فوتونی  $2eV$  استفاده شود، جایی که داده‌های واقعی‌تر از آزمایش یا محاسبات نظری دقیق از جمله اثرات ساختار باند ضروری می‌شوند.

## گرافن

گرافن و دیگر مواد دوبعدی که اصطلاحاً آنها را وان در والز<sup>۱۲</sup> می‌نامند اخیراً توجه زیادی را به‌خود جلب کرده‌اند [۳۷]. برای بحث در مورد چشم اندازهای گرافن برای پلاسمونیک و سایر

<sup>۱۰</sup> Transition Metal

<sup>۱۱</sup> Van der Waals

کاربردهای اپتیک به مرجع [۳۸] رجوع شود. اگرچه در اینجا فقط به صورت سطحی به موضوع پلاسمونیک‌های گرافن می‌پردازیم، اما توجه داریم که ساختار باند گرافن نزدیک به انرژی فرمی باندهای الکترون با پاشندگی خطی

$$E_{2D}(k) = \hbar v_F k, \quad (11.7)$$

تشکیل شده بطوری که در شکل (۳.۷) نشان داده شده است. در اینجا  $v_F$  سرعت فرمی است. مواد خالص یک شبیه فلز با چگالی اضمحلال حالت‌های  $E_F$  است و برای فلز شدن سیستم باید با گیت‌های خارجی برای ناخالص استفاده کرد [۳۸]. ما انرژی فرمی گرافن ناخالص شده را با  $\mu$  نشان می‌دهیم.

گرافن ناخالص شده به دلیل ساختار باندی آن را نمی‌توان با یک مدل ساده درود توصیف کرد. در ساده‌ترین رویکرد، گذردهی الکتریکی آن را می‌توان با استفاده از چارچوب لیندهارد [۱۲] [۳۶] محاسبه و قطبش دو بعدی را بدست آورد [۳۹، ۴۰].

$$\begin{aligned} P_{2D}(q, \omega) &= -\frac{g\mu}{2\pi\hbar^2 v_F^2} + \frac{F(q, \omega)}{\hbar^2 v_F^2} \\ &\times \{[G(x_+) + j\pi] - \theta(-x_-) [G(-x_-) + j\pi] \\ &- \theta(x_- + 1) G(x_-)\} \end{aligned} \quad (12.7)$$

که در آن  $q$  عدد موج،  $g = g_s g_v = 4$  تابع پله واحد هویسايد و  $\theta = (\hbar\omega \pm 2\mu)/(\hbar v_F q)$  است. ضمانتاً دو تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$F(q, \omega) = \frac{g}{16\pi} \frac{\hbar v_F^2 q^2}{\sqrt{\omega^2 - v_F^2 q^2}}, \quad G(x) = x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

قطبشن وابسته به فرکانس و عدموج از طریق رابطه زیر به توزیع بار سطحی القائی  $\sigma_{ind}$  مربوط می‌شود.

$$\sigma_{ind}(q, \omega) = P_{2D}(q, \omega) \left[ \frac{e^2}{2\epsilon_0 q} \right] \quad (13.7)$$

که در آن جمله داخل برآکت تبدیل فوریه پتانسیل کولمب دو بعدی است. در حد  $0 \rightarrow q$ ، رابطه (۱۲.۷) را می‌توان بصورت زیر ساده کرد [۴۰، ۳۹]:

$$P_{2D}(q \rightarrow 0, \omega) = \frac{gq^2}{8\pi\hbar\omega} \left[ \frac{2\mu}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2\mu - \hbar\omega}{2\mu + \hbar\omega} \right| + j\frac{\pi}{2} \theta(\hbar\omega - 2\mu) \right] \quad (14.7)$$

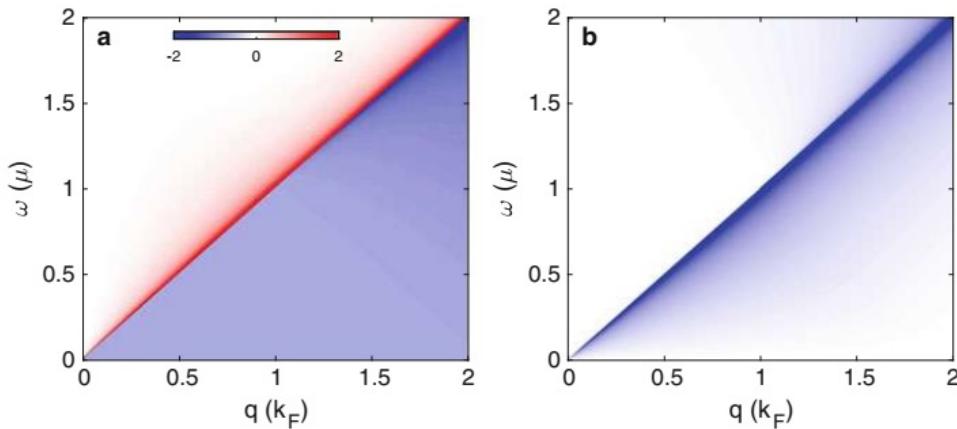
جمله اول در داخل برآکت به انتقال درون باند <sup>۱۴</sup> و دو عبارت دیگر با انتقال بین باند <sup>۱۵</sup> مرتبط است. شکل (۵.۷) قسمت حقیقی و موهومی قطبش را نشان می‌دهد که اطراف  $\omega = 0$  رفتار تشدید را نمایش می‌دهد. هنگام بحث در باره پلاسمون‌های گرافن، در فصل بعد به تابع دی‌الکتریک گرافن باز می‌گردیم.

<sup>۱۲</sup>Lindhard framework

<sup>۱۳</sup>Valley degeneracy

<sup>۱۴</sup>Intraband transitions

<sup>۱۵</sup>interband transitions



شکل ۵.۷: (الف) قسمت حقیقی و (ب) موهومی قطبش (۱۲.۷) گرافن. عدد موج بر حسب واحد انرژی بر حسب واحد انرژی فرمی  $\mu$ ، و قطبش بر حسب واحد  $(\hbar^2 v_F^2)/\mu$  است.

## ۲.۷ از الکترومغناطیس میکروسکوپی تا ماکروسکوپی

الکترودینامیک در ماده متمکی بر مفاهیم قطبی شوندگی و مغناطیس شوندگی است که می‌تواند با چگالی دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی مرتبط باشد. این رویکرد کار می‌کند زیرا مقیاس طول مشخصه امواج الکترومغناطیسی در مرتبه میکرومتر است، احتمالاً چند ده تا صدها نانومتر برای امواج محوشونده<sup>۱۶</sup>، در حالی که مقیاس طول مربوط به ماده در محدوده نانومتر است. به همین دلیل، جزئیات ریز ماده هیچ نقش مهمی در پویایی امواج الکترومغناطیسی ایفا نمی‌کند، که فقط با نوعی حالت میانگین ماده در تعامل هستند.

هیچ تعریف واضحی از چگونگی انجام میانگین بار میکروسکوپی و توزیع جریان وجود ندارد. می‌توان استدلال کرد که این بهاین دلیل است که میانگین‌گیری آنقدر قوی است که بدون در نظر گرفتن عبارت اولیه، همیشه به همان نتیجه مرسیم. از سوی دیگر، کل مسئله میانگین‌گیری کاملاً بی‌ثمر است، زیرا در نهایت باید به معادلات ماکروسکوپی ماکسول ختم شوند. بحث در مورد این موضوع درست کتاب جکسون [۲] را دنبال می‌کند و قصد دارد خواننده را با مفروضات زیربنای چنین میانگین‌گیری آشنا کند، اما همچنین برای افزایش آگاهی، ممکن است در ابعاد کوچک، جائی که توصیف میکروسکوپی صریح ممکن است نیاز باشد، آشنا کند.

تحلیل خود را با معادلات میکروسکوپی ماکسول شروع می‌کنیم،

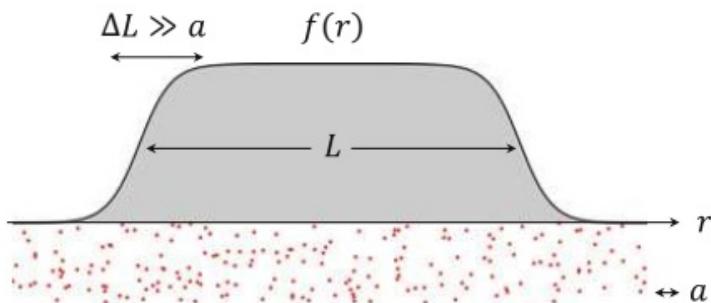
$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (15.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t},$$

که در آن  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$  برای میدان‌های میکروسکوپی استفاده و  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  را برای میانگین‌گیری ذخیره می‌کنیم.  $\rho$  و  $\mathbf{z}$  بار و توزیع جریان میکروسکوپی است که در چارچوب نیمه‌کلاسیک توصیف

<sup>۱۶</sup>Evanescence waves

خواهیم کرد، اگرچه هیچ تفاوت اساسی برای توصیف مکانیک کوانتمی وجود نخواهد داشت.



شکل ۶.۷: تابع میانگین‌گیری  $f(r)$ . عرض  $L$  باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا میانگین تعداد اتم‌ها یا مولکول‌های آنها به قدر کافی بالا باشد (در قسمت پایین شکل با نقاط قرمز نشان داده شده است)، میزان  $\Delta L$  ناحیه‌ای که  $f$  به صفر می‌رسد باید به اندازه کافی بزرگتر از فاصله بین اتمی  $a$  باشد، به طوری که نوسانات اتم تأثیر قابل توجهی بر مقادیر میانگین نداشته باشد. فرض می‌شود که تابع  $f(r)$  به یک نرمالیزه شده است، یعنی  $\int_{-\infty}^{\infty} f(r)d^3r = 1$  است.

میانگین‌گیری مکانی با معروفی یک تابع نمونه برداری  $\langle F(\mathbf{r}, t) \rangle$  انجام می‌شود که به طور متوسط برای یک نقطه منبع  $\mathbf{r}$  در برخی از مناطق کوچک فضایی، به صورت شماتیک در شکل (۶.۷) نشان داده شده است. هر مقدار فیزیکی  $F$  را می‌توان با توجه به روابط زیر میانگین‌گیری کرد:

$$\langle F(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F(\mathbf{r}', t) d^3r' = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, t) f(\tilde{\mathbf{r}}) d^3\tilde{r} \quad (16.7)$$

که در آن از  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  در عبارت آخر بکار برده شده است. جا دارد چند کلمه‌ای در باره تابع نمونه‌برداری گفته شود. نخست، باید بر روی ناحیه  $L^3$  که آنقدر بزرگ، مثلاً  $L \approx 10 \text{ nm}$  گسترش یابد که در حالت جامدات، تعداد کافی اتم، ملکول یا سلول وجود داشته باشد. از طرف دیگر،  $L$  باید به اندازه‌ای کوچک باشد که مقدار متوسط  $F$  در داخل ناحیه قابل توجه تغییر نکند. باز هم برای  $L \approx 10 \text{ nm}$  این باید یک تقریب خوب حتی برای امواج بشدت محوشونده باشد البته با استثنای فواصل زیر نانومتری یا بسیار زیاد نانومتری تیز.

میانگین‌گیری رابطه (۱۶.۷) دارای متوسطی است که مشتق‌های میانگین‌گیری برابر میانگین‌گیری مشتق تابع است:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \langle F(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, t)}{\partial r_i} f(\tilde{\mathbf{r}}) d^3\tilde{r} = \langle \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \rangle$$

شبیه همین عبارت برای مشتق‌های زمانی است. به این دلیل، می‌توانیم فوراً روابطه (۱۵.۷) میانگین‌گیری انجام داده و میدان‌های میانگین  $\langle \mathbf{E} \rangle$  و  $\langle \mathbf{B} \rangle$  را تعریف کنیم، در این

صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\langle \varrho \rangle}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\quad (17.7)$$

برای میانگین‌گیری جمله‌های منبع، روی قانون گوس متمرکز شده و توزیع بار را یک سری بار نقطه‌ای مانند  $q_i$  و دوقطبی‌های  $\mathbf{p}_i$  در نظر می‌گیریم؛

$$\varrho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_i \frac{p_i}{\eta} \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} \eta \hat{\mathbf{p}}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \eta \hat{\mathbf{p}}_i) \right]$$

برای دوقطبی‌ها یک شکل کلی شامل بارهای مخالف  $\pm p_i/\eta$  قرار گرفته‌اند، فرض می‌کنیم و انتهای محاسبه  $0 \rightarrow \eta$  میل می‌دهیم. موقعیت مرکز بارهای و دوقطبی‌ها  $\mathbf{r}_i$  است. بارهای آزاد را می‌توان بلافاصله میانگین‌گیری ارائه داده و خواهیم داشت:

$$\left\langle \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle = \sum_i q_i f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \varrho_{ext}(\mathbf{r}).$$

برای دوقطبی‌ها بصورت زیر میانگین‌گیری انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_i p_i \frac{f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} \eta \hat{\mathbf{p}}_i) - f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \eta \hat{\mathbf{p}}_i)}{\eta} &= - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \\ - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) &= -\nabla \cdot \left\langle \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

که در آن قطبش  $\mathbf{P}$  ماکروسکوپی به عنوان چگالی دوقطبی تعریف شده است. این قانون گاووس برای معادلات ماکسول در ماده، معادله ۲۶.۲، را بهارمغان می‌آورد. روش میانگین برای توزیع جریان مشابه همین است اما درگیری و مشکلات بیشتری دارد و در اینجا ارائه نمی‌شود. به نظر می‌رسد حتی جکسون نیز تا حدی از این بحث ناراحت است، و نوشته است [۲]:

برای تکمیل بحث، باید  $\langle \mathbf{j} \rangle$  را در نظر بگیریم زیرا ماهیت برداری آن و وجود سرعت، مشتق را به مراتب پیچیده‌تر از بحث قبلی  $\langle \varrho \rangle$  می‌کند، حتی اگر اصول جدیدی در آن دخیل نباشد. در اینجا فقط نتایج را ارائه می‌دهیم و جزئیات غم انگیز را برای خوانندگانی که از چنین چالش‌هایی لذت می‌برند و آگذار می‌کنیم.

### ۳.۷ غیر محلی بودن در زمان

در زیر پاسخ دیالکتریکی که غیر محلی در زمان است را در نظر گرفته

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \epsilon(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau$$

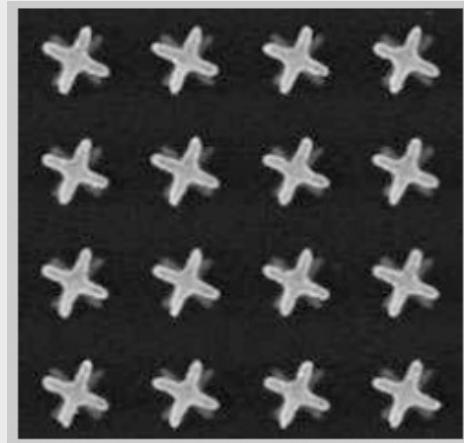
و امکان شبیه این رابطه برای  $B$  و  $H$  که نفوذپذیری  $\mu$  به زمان وابسته است وجود دارد. در ادامه میدان‌های هارمونیک زمانی را در نظر می‌گیریم. قضیه کانولوشن تبدیل فوریه می‌گوید که تبدیل فوریه رابطه بالا را می‌توان به صورت ضرب در فضای فرکانس نوشت

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (18.7)$$

توجه کنید که از یک نماد برای کمیات حوزه زمان و فرکانس استفاده کردیم. به طور کلی، به طور انحصاری در هر یک از این فضاهای کار خواهیم کرد، بنابراین خطر کمی از سردرگمی وجود خواهد داشت. نکته مهم در مورد این رفتار تبدیل‌ها این است که معادلات ماکسول برای میدان‌های هارمونیک زمانی، معادله  $(34.2)$ ، برای گذردهی و نفوذپذیری‌های وابسته به فرکانس تقریباً یکسان به نظر می‌رسند،

## فرامواد

فلزات و سایر مواد مرتبط دارای پاسخ دیکتریک قوی در محدوده فرکانس نوری هستند، اما هیچ ماده طبیعی با پاسخ مغناطیسی قوی قابل مقایسه وجود ندارد. بنابراین در رژیم نوری می‌توان  $\mu = \mu_0$  را برای تقریباً همه مواد تنظیم کرد. دلیل این نابرابری عدم وجود بارهای مغناطیسی است. این مشاهدات چندی پیش توسط جان پندری خلاصه شد [۴۱].



در حالت ایده‌آل می‌خواهیم در مورد مغناطیس با یافتن آنالوگ یک هادی الکتریکی خوب برای مغناطیس پیش برویم؛ متأسفانه چنین چیزی وجود ندارد! با این وجود، می‌توانیم برخی از جایگزین‌ها را پیدا کنیم که به عقیده ما باعث ایجاد اثرات مغناطیسی جالب می‌شود. چرا باید برای ساخت ریزساختار یک ماده برای تولید  $\mu_{eff}$  خاص خود را به دردرس به افکنیم؟ پاسخ این است که اتم‌ها و مولکول‌ها مجموعه‌ای محدود کننده از عنصری هستند که از آنها می‌توان یک ماده مغناطیسی ساخت. این امر به ویژه در فرکانس‌های ردیف گیگاهرتز صادق است که در آن واکنش مغناطیسی بیشتر مواد شروع به دفع می‌کند. آن دسته از مواد، مانند فریتها، که در حد متوسط باقی می‌مانند، اغلب سنگین هستند و ممکن است خواص مکانیکی چندان مطلوبی نداشته باشند. در مقابل، نشان خواهیم داد که مواد ریزساختار را می‌توان با فعالیت مغناطیسی قابل توجهی، اعم از دیامغناطیس و پارامغناطیس، طراحی کرد و در صورت تمایل می‌توان آنها را بسیار سبک ساخت.

### ادامه فرامواد

در دو دهه گذشته تلاش‌های زیادی برای ساخت چنین مصنوعی، بهنام فرامواد انجام شده است. انسان از این واقعیت استفاده می‌کند که می‌توان در رژیم مایکروویو از طریق رزوناتورهای حلقه شکافدار به بک پاسخ قوی دست یافت. این مفهوم را می‌توان به محدوده نوری نیز مربوط کرد، اما باید مراقب بود که ساختارها باید به طور قابل توجهی کوچکتر از طول موج نوری باشند تا، همانطور که در این فصل توضیح داده است، رسانه‌های با پارامترهای موثر به دست آیند. تصویر بالا تصویری از یک ماده فوق با پاسخ کایرال [۴۲] را نشان می‌دهد، یکی از بی‌شمار نمونه‌های زیبا است. فرامواد به یک بازیگر مهم در زمینه نانو اپتیک و پلاسمونیک تبدیل شده‌اند و با افزایش فناوری‌های آماده سازی نمونه، آنها همچنان نقش کلیدی را در این زمینه ایفا خواهند کرد.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \rho_{ext}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \times \mu^{-1}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{J}_{ext}(\mathbf{r}, \omega) + j\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}\quad (۱۹.۷)$$

به همین دلیل، عملأً هر آنچه در فصل‌های قبل در مورد میدان‌های هارمونیک زمانی بحث کرده‌ایم، می‌تواند مستقیماً به پاسخ سیستم وابسته به فرکانس منتقل شود. استثنای در مورد قضیه پواین‌تینگ است که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم و این واقعیت که گذردهی‌ها و نفوذپذیری‌ها بخشی موهومی وابسته به تلفات را به دست می‌آورند. برای امواج منتشر شونده و محسوسونده<sup>۱۷</sup> این امر منجر به میرایی و تضعیف می‌شود.

برای هادی‌ها و فلزات اغلب راحت‌تر است که پاسخ حامل‌های هدایتی را در گذردهی قرار دهیم. در بالا قبلًا دیدیم که چگونه می‌توان این کار را برای یک تابع دی‌الکتریک درود انجام داد. در حالت کلی می‌توان قانون اهم را برای رسانایی وابسته به فرکانس تعمیم داد:

$$\text{رسانایی نوری} \quad (۲۰.۷)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$$

هدایت  $\sigma(\mathbf{r}, \omega)$  را اغلب هدایت نوری می‌نامند که وقتی  $0 \rightarrow \omega$  آن به هدایت استاتیکی  $\sigma_0$  منجر می‌شود. از معادله پیوستگی در حوزه فرکانس داریم:

$$-j\omega \rho = \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} \quad (۲۱.۷)$$

می‌توانیم رابطه‌ای بین  $\rho$  و میدان الکتریکی برقرار کنیم. با قرار دادن این رابطه در قانون گوس خواهیم داشت

<sup>۱۷</sup>Evanescence waves

$$\nabla \cdot \epsilon_b \mathbf{E} = \frac{j}{\omega} \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} \implies \nabla \cdot \left( \epsilon_b - \frac{j\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

که در آن  $\epsilon_b$  نمایشگر گذردگی بارهای مقید است. بهمین نحو، قانون آمپر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon_b \mathbf{E} = j\omega \left( \epsilon_b - \frac{j\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

بنابراین برای هدایت نوری معادله (۲۰.۷) می‌توانیم اثر حامل‌های آزاد را به یک گذردگی وابسته به فرکانس قرار دهیم:

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_b(\mathbf{r}, \omega) - \frac{j\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\omega} \quad (22.7)$$

که در آن  $\epsilon_b$  بخش وابسته به بارهای مقید است.

**بار سطحی.** اجازه دهید یک رابط را در نظر بگیریم، برای مثال، شکل (۶.۲) را ببینید، جایی که مواد فوق دیالکتریک با گذردگی  $\epsilon_2$  است، و مواد پایینی یک فلز با گذردگی  $\epsilon_1$  است که فرم آن توسط معادله (۲۲.۷) نشان داده شده است. در مرحله بعد از شرایط مرزی معادلات ماکسول توزیع بار سطحی در سطح مشترک به دست می‌آید. نقطه شروع ما با  $\rho_{ind} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ ، با  $P_{ind}$  به ترتیب توزیع بار القایی و قطبی شدن است. با ادغام این عبارت در حجم کمی، در قیاس کامل با بخش ۲.۳.۲، پیدا می‌کنیم

$$\sigma_{ind} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = -\left( P_2^\perp - P_1^\perp \right) = -\left( P_2^\perp - [P_{ind}^\perp + P_{ext}^\perp] \right)$$

در عبارت آخر  $\mathbf{P}_2$  را به قطبش القایی یا مقید و خارجی وابسته به حامل‌های آزاد تجزیه کردیم. برای محاسبه قطبش‌های مختلف، می‌نویسیم

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$$

و سرانجام به رابطه زیر میرسیم:

$$\sigma_{ind} = \begin{cases} -(\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2^\perp & \text{بار سطحی در بالای سطح مشترک} \\ \epsilon_1 - \epsilon_0) E_1^\perp & \text{بار سطحی در زیر سطح مشترک} \\ \epsilon_1 - \epsilon_b) E_1^\perp & \text{بار آزاد سطحی در زیر سطح مشترک} \end{cases} \quad (23.7)$$

بارهای قطبش کل در سطح مشترک را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\sigma_{pol} = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2^\perp + (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1^\perp = \epsilon_0 \left( E_2^\perp - E_1^\perp \right) \quad (24.7)$$

چیزی که از آن استفاده کردیم مولفه عمودی جابجایی دیالکتریک است که در فصل مشترک پیوسته است. در بحث پلاسمون‌های سطحی و ذرهای بهاین عبارت برمی‌گردیم.

### ۱.۳.۷ بازنگری قضیه پواین‌تینگ

در این بخش قضیه پواین‌تینگ را برای محیط خطی که قبلاً در بخش ۳.۴ بدست آوردیم، بازنگری می‌کنیم، اما اثر پاشندگی و جذب را نیز در نظر می‌گیریم. بهطور کلی، انتظار داریم دو تغییر عمدۀ با توجه به نتیجه قبلی معادله (۲۶.۴) انجام شود:

- بهدلیل پاشندگی، سرعت انتقال انرژی تغییر می‌کند.

- بهعلت جذب، انتقال و چگالی انرژی در طی انتشار تضعیف می‌شود.

در قیاس کامل با نتیجه‌گیری قبلی قضیه پواین‌تینگ، با توان انجام شده توسط میدان‌های الکترومغناطیسی روی توزیع جریان اما اکنون  $J_{ext}$  مربوط به میدان‌های  $D$ ، و  $H$  شروع می‌کنیم:

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\Omega} \mathbf{J}_{ext} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_{\Omega} \left( \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} d^3r.$$

با استفاده در جمله اول تبدیل

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

خواهیم داشت

$$\frac{dW}{dt} + \int_{\Omega} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3r = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}. \quad (25.7)$$

این قضیه پواین‌تینگ برای معادلات ماکسول مکروسکوپی است. جمله دوم در سمت چپ وابسته به انرژی ذخیره شده در میدان‌های الکترومغناطیسی است، و جمله سمت راست توصیف کننده انتقال انرژی از طریق بردار پواین‌تینگ  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  است.

قضیه پواین‌تینگ برای محیط‌های خطی اکنون این نتیجه را برای یک محیط خطی با توابع پاسخ که در زمان غیرمحلي هستند، اختصاص می‌دهیم. تجزیه فوریه میدان‌های الکترومغناطیسی را انجام می‌دهیم،

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega + c.c.,$$

که در آن  $c.c.$  نماد مزدوج مختلط <sup>۱۸</sup> جمله پیشین است. برای رسیدن به عبارت دوم، از  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega)$  استفاده کردہایم، که می‌توان بطور مستقیم با گرفتن مزدوج مختلط انTEGRAL فوریه اثبات کرد. ضرب دو تابع را می‌توان بصورت زیر بسط داد.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega') \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{j(\omega - \omega')t} d\omega d\omega' + c.c. . \quad (26.7)$$

در ادامه فرض می‌کنیم که  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  از نظر طیفی دارای توزیع باریکی (مربوط به پالس عریضی) که در اطراف  $\omega_0$  است قرار داشته باشد. بطور کلی، معادله (۲۶.۷) باید با جمله  $e^{\pm j(\omega - \omega')t}$

<sup>۱۸</sup>Complex Conjugate

که در دوره تناوب  $2\pi/\omega_0$  دارای میانگین صفر است، و برای ساده شدن از آن چشم پوشی می‌کنیم، نوسان کند. با اولین جمله داخل پرانتز رابطه (۲۵.۷) شروع می‌کنیم،

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \int_0^\infty \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega') \cdot [j\omega\epsilon(\omega)] \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{j(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'. \quad (27.7)$$

برای طیف باریک پالس، می‌توانیم جمله داخل برآکت را بصورت زیر تقریب بزنیم

$$\int_0^\infty \left\{ jg_0 e^{j(\omega-\omega')t} \mathbf{E}^*(\omega') \cdot \mathbf{E}(\omega) + jg_0^* e^{-j(\omega-\omega')t} \mathbf{E}(\omega') \cdot \mathbf{E}^*(\omega) \right\} d\omega d\omega'. \quad (28.7)$$

بطوری که بعداً نشان خواهیم داد،  $g_0$  ناشی از تلفات جذب و  $g_1$  تصحیح پاشندگی است. اول جمله  $g_0$  را در نظر گیرید. انتگرال رابطه (۲۷.۷) خواهد شد:

$$\int_0^\infty \left\{ jg_0 e^{j(\omega-\omega')t} \mathbf{E}^*(\omega') \cdot \mathbf{E}(\omega) - jg_0^* e^{j(\omega-\omega')t} \mathbf{E}(\omega') \cdot \mathbf{E}^*(\omega) \right\} d\omega d\omega'$$

که در آن وابستگی به  $\mathbf{r}$  را در میدان الکتریکی حذف کردیم. با تغییر  $\omega' \leftrightarrow \omega$  خواهیم داشت:

$$2g_0'' \int_0^\infty \mathbf{E}^*(\omega') \cdot \mathbf{E}(\omega) e^{j(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' = g_0'' \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}(t).$$

برای جمله  $g_1$  فقط بخش حقیقی را، که مسئول پاشندگی است، در نظر می‌گیریم. بخش موهومی  $g_1$  تصحیح جزئی عبارت جذب رابطه بالا است. در این صورت داریم  $jg_1' \int_0^\infty \mathbf{E}^*(\omega') \cdot \mathbf{E}(\omega) e^{j(\omega-\omega')t} [(\omega - \omega_0) - (\omega' - \omega_0)] d\omega d\omega'$ ,

و با تغییر  $\omega' \leftrightarrow \omega$  به جمله دوم میرسیم. این را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$g_1' \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \mathbf{E}^*(\omega') \cdot \mathbf{E}(\omega) e^{j(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' = \frac{1}{2} g_1' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}(t).$$

شبیه همین روش را می‌توان برای میدان مغناطیسی در رابطه (۲۵.۷) انجام داد.

با کنار هم گذاشتن همه نتایج، سرانجام به قضیه پواین‌تینگ برای محیط‌های پاشنده و جذب می‌رسیم:

### قضیه پواین‌تینگ شامل جذب و پاشندگی

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &+ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{d\omega\epsilon'(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \left[ \frac{d\omega\mu'(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) d^3r \\ &= - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \omega_0 (\epsilon''(\omega_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu''(\omega_0) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) d^3r \end{aligned} \quad (29.7)$$

در رابطه بالا  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  و  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  رابطه وابسته به زمان هستند که فرض کردیم دارای طیف باریکی در اطراف فرکانس  $\omega_0$  باشند. جملات سمت چپ و راست را می‌توان چنین تفسیر کرد:

- اولین جمله سمت چپ توان انجام شده توسط منابع خارجی.

- دومین جمله سمت چپ چگالی انرژی موثر ذخیره شده در میدان‌های الکترومغناطیسی و در قطبش و مغناطیس شوندگی ماده. در رابطه بالا اثرات پاشندگی در نظر گرفته شده اما در رابطه (۱۴.۴) برای مقادیر  $\epsilon, \mu$  ثابت فرض شده است.
- اولین جمله سمت راست انتقال انرژی توسط بردار پواین‌تینگ.
- دومین جمله سمت راست تلفات ماده با بخش موهومی  $\epsilon'', \mu''$  توصیف می‌شود.

### ۲.۳.۷ رابطه کرامرز-کرونیک

برای پاسخ غیرمحلى در زمان، جابجائي دىالكتريك به ميدان الکترومغناطیسي بصورت زير مربوط می‌شود.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} \chi_e(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \right\} .$$

نکته مهم در مورد این عبارت این است که فقط میدان‌های در گذشته به پاسخ سیستم مشارکت می‌کنند و بنابراین علیت برآورده می‌شود. همانطور که در این بخش بحث خواهیم کرد، در نتیجه این امر، یک رابطه سخت بین بخش‌های حقیقی و موهومی گذردهی وجود دارد، آن را رابطه کرامرز-کرونیگ<sup>۱۹</sup> می‌نامند، و با دانستن قسمت حقیقی می‌توان بخش موهومی را بدست آورده، و بالعکس. استخراج رابطه کاملاً کلی است و تنها عناصر مورد نیاز علیت و خطی بودن پاسخ سیستم است.  
از تبدیل فوريه رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 + \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} \chi_e(\tau) d\tau \quad (30.7)$$

که از این پس وابستگی  $\chi_e$  به  $\omega$  را حذف می‌کنیم. با گرفتن مزدوج مختلط از این، می‌توان بین فرکانس‌های مثبت و منفی رابطه برقرار کرد

$$\epsilon^*(\omega)/\epsilon_0 = \epsilon(-\omega^*)/\epsilon_0 \quad (31.7)$$

که در آن فرکانس‌های مختلط را به دلایلی در نظر گرفته‌ایم تا چندی دیگر روش خواهد شد. در ادامه، به یک قضیه مهم از تحلیل مختلط بنام قضیه گوشی نیاز داریم، و به طور مختصر در پیوست (الف) بحث خواهیم کرد. آن می‌گوید که انتگرال‌گیری در صفحه مختلط در امتداد کانتور بسته  $C$ ، صفر است. در ادامه قضیه گوشی را برایتابع پاسخ اعمال می‌کنیم.

$$\chi_e(z) = \int_0^{\infty} e^{-jz\tau} \chi_e(\tau) d\tau$$

که در آن  $z$  را فرکانس مختلط در نظر می‌گیریم. وقتی  $\chi_e(\omega)$  برای فرکانس‌های حقیقی وجود دارد، چیز مهمی اتفاق نمی‌افتد وقتی فرکانس‌ها را در صفحه مختلط بالائی  $0 > z''$  بسط دهیم. برای تابع نمائی می‌توان نوشت:

<sup>۱۹</sup>Kramers-Kronig relation

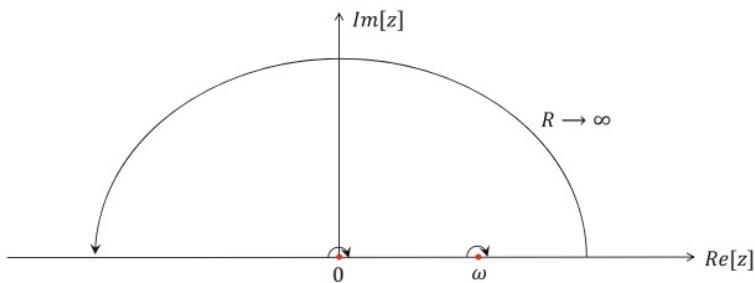
$$e^{-j(z'_- j z'') \tau} = e^{-j z' \tau} e^{-z'' \tau}.$$

همیشه به دلیل حدود انتگرال گیری  $0 < \tau < \infty$  داریم (علیت پاسخ در اینجا مطرح نمی‌شود)، تنها چیزی که اتفاق می‌افتد این است که در صفحه مختلط بالا، مقدار تابع به طور نمایی کاهش می‌یابد. به همین دلیل،  $\chi_e(z)$  در نیمه صفحه مختلط بالائی تحلیلی است. بنابراین می‌توانیم قضیه کوشی را در عبارت زیر بکار ببریم:

$$\oint_C \frac{\chi_e(z)}{z - \omega} dz = 0 \quad (32.7)$$

انتگرال گیری روی مسیر  $C$  در صفحه مختلط در شکل (۷.۷) نشان داده شده است. دو نقطه در طول مسیر باید به عنوان حالت خاص در نظر گرفت:

- برای  $z = \omega$  مخرج رابطه (۳۲.۷) صفر می‌شود،
- برای  $z \rightarrow 0$  گذردهی فلزات  $\epsilon(z) \approx \epsilon_0 - j\sigma_0/z$  می‌تواند یک قطب داشته باشد.



شکل ۷.۷: مسیر انتگرال گیری مختلط برای رابطه کرامرز-کرونیک

بطوری که در شکل می‌توان مشاهده کرد، اطراف این نقاط خاص می‌توانیم حول یک نیم‌دایره کوچک در بالای نیم‌صفحه حرکت کنیم. نیم‌دایره اطراف  $z = \omega$  را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$z = \omega + r e^{j\phi}$$

که در آن  $\phi$  از  $\pi$  تا صفر تغییر می‌کند و در انتهای محاسبات  $0 \rightarrow r$  فرض کنید. اکنون فرض کنید که  $\chi_e(z)$  در اطراف  $z = \omega$  خیلی سریع تغییر نمی‌کند و از این‌رو از انتگرال بیرون کشیده می‌شود،

$$\chi_e(\omega) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{j r e^{j\phi} d\phi}{\omega + r e^{j\phi} - \omega} = j \chi_e(\omega) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 d\phi = -j\pi \chi_e(\omega)$$

در اینجا از  $dz = r e^{j\phi} d\phi$  استفاده کرده‌ایم. همین شیوه را می‌توان برای قطب  $z = 0$  بکار برد. ضمناً توجه کنید که نیم‌دایره بزرگ در بالای صفحه مختلط بعلت جمله  $e^{-z''\tau}$  صفر می‌شود و می‌توانیم رابطه (۳۲.۷) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_e(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega} - j\pi \left[ \chi_e(\omega) + \frac{j\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} \right] = 0$$

انتگرال سمت راست مقدار اصلی انتگرال است که (بینهایت کوچک است) ناحیه‌های اطراف نقاط بحرانی  $\omega' = \omega = 0$  از انتگرال گیری خارج شده‌اند. به پیوست (و) مراجعه کنید. بنابراین، خواهیم داشت

$$\chi_e(\omega) = -\frac{j\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} + \frac{j}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_e(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega} - \omega} d\tilde{\omega}. \quad (۳۳.۷)$$

با گرفتن مقدار حقیقی از دو طرف این رابطه، می‌توانیم رابطه بین  $\chi'_e(\omega)$  در طرف چپ و  $\chi''_e(\omega)$  در طرف راست را بدست آوریم. با استفاده از تابع دی‌الکتریک بجای پذیرندگی، و مربوط کردن فرکانس‌های مثبت با منفی  $(\omega)^*$  با استفاده از رابطه (۳۱.۷) سرانجام به رابطه کرامرز-کرونیگ میرسیم:

### رابطه کرامرز-کرونیک

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\omega} \epsilon''(\omega)}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} \quad (\sim ۴.۷)$$

$$\epsilon''(\omega) = \frac{\sigma_0}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon'(\tilde{\omega}) - \epsilon_0}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2} d\tilde{\omega} \quad (۴.۷b)$$

رابطه کرامرز-کرونیگ نشان میدهد که بخش حقیقی و موهومی  $\epsilon$  بهم مربوط هستند. بنابراین اگر  $(\omega)^*$  را در تمام محدوده فرکانسی داشته باشیم، مثلاً با اندازه‌گیری جذب، می‌توانیم بلاعده بخش حقیقی آنرا محاسبه کنیم. برای شرایط عملی، محدوده فرکانس مربوطه اغلب به طرز شگفت‌انگیز بزرگ است، و معمولاً هنگام استفاده از این رابطه باید مواظب بود.

معادله (۴.۷) نیز محدودیت‌هایی را در توابع پاسخ قرار می‌دهد. فرض کنید یک فهرست برای گذردهی  $(\omega)^*$  داریم که باید دارای تغییرات زیادی از  $(\omega)^*$  در محدوده فرکانس معین باشد، اما تلفات کمی در آنجا وجود دارد. در اصل، رابطه کرامرز-کرونیگ فقط بیان می‌کند که پاشندگی قوی باید با تلفات همراه باشد، که احتمالاً می‌تواند در محدوده فرکانس دیگری قرار گیرد. با این حال، در بسیاری از موارد پاشندگی ناشی از تشدیدهای میکروسکوپی است، مانند مدل درود-لورنتس در بخش ۱.۷ توضیح داده شده است، و اغلب باید برای پاشندگی، هزینه جذب در همان محدوده فرکانس پرداخت. این نیز یک اشکال عمده در طراحی مواد فوق است که در آن تغییرات فراوانی زیاد  $(\omega)^*$  و  $(\omega)^*\mu$  با تلفات قبل توجهی در برخی فرکانس‌های اطراف همراه است.

## ۴.۷ قضیه همپاسخی در اپتیک

در اپتیک قضیه مهمی وجود دارد که بنام قضیه همپاسخی<sup>۲۰</sup> معروف است و می‌توان از رابطه تقارن گرین دایادیک آنرا بدست آورد. فرض کنید که

- $J_1$  توزیع جریانی است که میدان‌های  $E_1$  و  $H_1$  را تولید می‌کند.

- $J_2$  توزیع جریانی است که میدان‌های  $E_2$  و  $H_2$  را تولید می‌کند.

در این صورت، می‌توانیم قضیه همپاسخی (لورنتس) را بدست آوریم.

### قضیه همپاسخی نوری

$$\int \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \, d^3r = \int \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \, d^3r. \quad (35.7)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که انتگرال کل فضا را در بر می‌گیرد. این قضیه میگوید که رابطه بین توزیع جریان نوسانی و میدان الکتریکی حاصل از آن این است که اگر جای جریان‌ها در آن قرار گرفته‌اند را عوض کنیم، در اندازه گیری میدان‌ها، تغییری ایجاد نمی‌شود.

برای اثبات قضیه، موادی با گذردهی  $\bar{\epsilon}$  و نفوذپذیری  $\bar{\mu}$  که ناهمسانگرد و وابسته به فرکانس هستند در نظر می‌گیریم. معادلات کل ماقسول را می‌نویسیم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$$

که در آن برای سهولت وابستگی به فرکانس و مکان پارامترها را مشخص نمی‌کنیم. سپس اتحادهای برداری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}).$$

با اعمال این اتحاد برای  $E_1$ ,  $H_1$  و  $E_2$ ,  $H_2$  و استفاده از معادلات ماقسول برای جملات کل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) &= -j\omega \mathbf{H}_2 \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_1 - j\omega \mathbf{E}_1 \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \\ \nabla \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) &= -j\omega \mathbf{H}_1 \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}_2 - j\omega \mathbf{E}_2 \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 \end{aligned} \quad (36.7)$$

سپس این دو معادله را از هم کم می‌کنیم. برای جملات سمت راست بدست می‌آید

$$\mathbf{E}_1 \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_1)_i \epsilon_{ij} (\mathbf{E}_2)_j - (\mathbf{E}_2)_i \epsilon_{ij} (\mathbf{E}_1)_j$$

و شبیه این عبارت هم برای میدان مغناطیسی بدست می‌آید. بدیهی است که برای گذردهی اسکالر  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^*$  دو جمله هر یک را حذف می‌کنند. در حالت کلی می‌توان نشان داد که  $\bar{\epsilon}$  و  $\bar{\mu}$ ، وقتی سیستم مورد بررسی تقارن معکوس زمانی نمایش می‌دهند، باید تانسورهای باید متقابن

<sup>۲۰</sup> Reciprocity Theorem

باشدند [۴۳]. در حالتی که چنین تقارنی شکسته می‌شود، آن وقتی است که میدان مغناطیسی استاتیک اعمال می‌شود. در اینجا اینچنین موردی مطلوب ما نیست و فرض می‌کنیم که  $\epsilon$  و  $\mu$  تانسورهای متقارنی هستند که دو جمله عبارت بالا یکدیگر را حذف می‌کنند. در این صورت، تفاصل دو رابطه در معادله (۳۶.۷) و انتگرال‌گیری روی تمام فضا می‌دهد:

$$\int (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{E}_1) d^3r = \oint (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{S} \quad (37.7)$$

برای درک اینکه چرا عبارت سمت راست از میروود، توجه داشته باشید که میدان‌های الکترومغناطیسی دور از منابع جریان و امواج خارج شونده هستند. بر طبق معادله (۴۰.۲)، می‌توانیم میدان‌های الکترومغناطیسی ناحیه دور را از طریق  $ZH = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}$  بهم مربوط سازیم و می‌توان براحتی نشان داد دو جمله سمت راست رابطه (۳۷.۷) یکدیگر را حذف می‌کنند. این اثبات قضیه هم‌پاسخی رابطه (۳۵.۷) را تکمیل می‌کند.

ارتباط میدان‌های الکتریکی با منابع جریان از طریق گرین دایادیک رابطه (۲۰.۵) خواهیم داشت؛

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') = \mathbf{J}_2(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) .$$

بنابراین، بلافاصله از قضیه هم‌پاسخی رابطه تقارن را بدست می‌آوریم:

### رابطه تقارن برای تابع گرین دایادیک

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{ji}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (38.7)$$

### تمرینات

- **تمرین ۱** برای گذردهی درود-لورنتس رابطه (۶.۷)، فرکانس‌هایی که  $(\omega'')^2 = |\epsilon(\omega)|^2$  بیشینه می‌شوند را محاسبه کنید. از مدل نوسان‌ساز هارمونیکی برای استدلال اینکه چرا بیشینه‌ها در فرکانس‌های مختلف هستند استفاده کنید.
- **تمرین ۲** تابع تلفات  $Im[-1/\epsilon(\omega)]$  را برای تابع دیالکتریک درود محاسبه کرده و تابع را برای نقره و طلا با استفاده از پارامترهای جدول (۱.۷) رسم کنید. در باره موقعیت بیشینه تابع تلفات که بستگی به  $\kappa_b$  و فرکانس پلاسمای  $\omega_p$  دارند بحث کنید.
- **تمرین ۳** گذردهی درود-لورنتس رابطه (۶.۷) را با تشدييد تيز  $\omega_0 \ll \gamma$  درنظر گيريد. كجا سرعت گروهي  $v_g$  کميشه می‌شود؟ چگونه بسته موج طيف باريک (بعثت تلفات مواد) در طي انتشار تعسيف می‌شود؟
- **تمرین ۴** چگالي حالت‌های داده شده در معادله (۱۰.۷) را محاسبه کنید. وقتی انتگرال‌گیری فضای  $k$  سه بعدی را با انتگرال‌گیری فضای دو بعدی در مورد گاز الکترونی که الکترون‌ها

می‌توانند فقط در فضای دو بعدی حرکت کنند، عوض کنیم، چه اتفاق می‌افتد بحث کنید.  
برای ارزیابی انتگرال‌ها، مختصات کروی را سه بعدی و مختصات استوانه‌ای را دو بعدی  
معرفی کنید.

- تمرین ۵ یکتابع دیالکتریک درنظر گیرید که بخش موهومی آن بصورت زیر باشد:

$$\epsilon''(\omega) = \frac{\pi K}{2\omega_0} \delta(\omega - \omega_0),$$

که در آن  $K$  مقداری ثابت و  $\omega_0$  یک فرکانس پاسخ است. با استفاده از رابطه کرامز-کرونیگ بخش حقیقی  $(\omega')\epsilon$  مربوطه را محاسبه کنید.

• تمرین ۶ از گذردهی رابطه (۶.۷) درود-لورنتس شروع کرده و تبدیل فوریه انجام داده تا  
تابع پاسخ زمانی بدست آید. انتگرال فوریه را وقتی از انتگرال گیری مختلط که در پیوست  
الف و استخراج رابطه کرامز-کرونیگ، بحث شده است استفاده کنید، بسیار ساده محاسبه  
می‌شود

• تمرین ۷ از طریق محاسبه صریح نشان دهید که رابطه کرامز-کرونیگ برای گذردهی  
دروド رابطه (۷.۷) صادق است

• تمرین ۸ نشان دهید که سمت راست معادله (۳۷.۷) در میدان‌های دور صفر می‌شود و  
در آنجا میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از طریق  $E = \hat{r} \times H$  بهم مربوط می‌شوند.

• تمرین ۹ از طریق محاسبه صریح ثابت کنید که تابع گرین دیادیک (۱۹.۵) در رابطه  
تقارن معادله (۳۸.۷) صدق می‌کند.

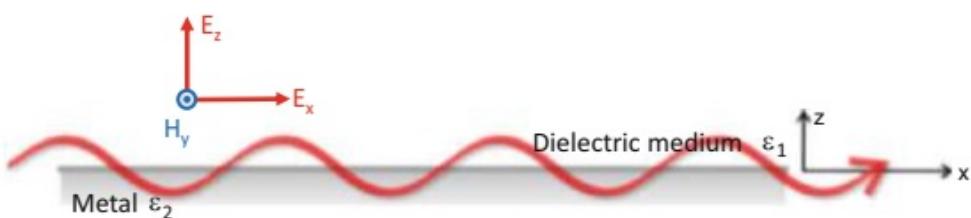
## فصل ۸

### محیط‌های لایه لایه

ساده‌ترین سیستم‌های (نانو) برای ترکیب معادلات ماکسول با مواد، لایه‌های مسطح هستند که در مورد لایه‌های مختلف مواد، به راحتی به عنوان **محیط‌های لایه لایه<sup>۱</sup>** نشان داده می‌شوند. همانطور که در این فصل نشان خواهیم داد، علی‌رغم ساده بودن هندسی، فیزیک سیستم‌های مسطح به طرز شگفت‌آوری غنی است. با بحث در مورد یک رابط واحد بین فلز و دی‌الکتریک شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نوع جدیدی از تحریک‌ها، به نام پلاسمون‌های سطحی، رابط بین دو محیط وجود دارد. سپس به توسعه یک طرح توصیف کلی برای محیط‌های لایه‌لایه با استفاده از رویکرد ماتریس انتقال ادامه داده و در نهایت در محاسبه توابع گرین برای محیط‌های لایه‌لایه‌ای تعمق می‌کنیم.

#### ۱.۸ پلاسمون‌های سطحی

سطح مشترک بین دو محیط در شکل (۱.۸) نشان داده شده است. بالای سطح دی‌الکتریک با گذردهی  $\epsilon_1 > 0$ ، پائین سطح فلز با گذردهی منفی  $\epsilon_2 < 0$  است. برای سهولت، در ادامه از بخش موهومی  $\epsilon_2$  صرفنظر کرده و مفاهیم مواد تلفاتی را در پایان بحث می‌کنیم. نفوذپذیری مغناطیسی در هر دو مواد را  $\mu_0$  قرار می‌دهیم.



شکل ۱.۸: نمودار یک موج که در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک بستری شده و در امتداد جهت  $x$  منتشر می‌شود. برای مود مغناطیسی عرضی ( $TM$ ) میدان مغناطیسی موازی سطح مشترک است.

فرض کنید که یک موج الکترومغناطیسی با بردار موج  $\mathbf{k}_1 = (k_x, 0, -k_{1z})$  در جهت منفی

<sup>۱</sup>Stratified Media

$\hat{z}$  منتشر شده و به سطح مشترک برخورد می‌کند. چون میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی پیوسته هستند، مولفه موازی  $k_x$  بردار موج باید در سطح مشترک پایسته<sup>۲</sup> شود. مولفه  $\hat{z}$  بردار موج در فلز از رابطه پاشندگی<sup>۳</sup> بدست می‌آید:

$$k_x^2 + k_{2z}^2 = \epsilon_2 \mu_0 \omega^2 \quad (1.8)$$

چون  $\epsilon_2 < 0$  است، سمت راست معادله منفی است و بلا فاصله داریم  $0 < k_{2z}^2$ ، که فقط می‌تواند برای بردار موج موهومی  $k_{2z}$  صدق کند. به عبارت دیگر، داخل فلز موج نمی‌تواند منتشر شود اما دارای یک مشخصه محسوسنده<sup>۴</sup> با دامنه‌ای است که بطور نمائی با دور شدن از سطح مشترک میرا می‌شود. در نتیجه، موج برخورد کننده از ناحیه دیالکتریک روی فلز، با کمی تلفات بعلت تلفات اهمی ناشی از میرائی نمائی میدان‌های داخل فلز، بازتاب می‌شود. در بخش ۳.۳.۸ در باره این بازتاب بیشتر بحث خواهیم کرد.

از این تحلیل به نظر می‌رسد که سطح مشترک دیالکتریک-فلز یک چیز خسته کننده است. خوشبختانه این قضاوت عجولانه درست نیست. بعداً نشان خواهیم داد که نوع جدیدی از موج در سطح مشترک فلز-دیالکتریک به نام پلاسمون‌های سطحی<sup>۵</sup> وجود دارد، که به سطح مشترک متصل شده‌اند و باید بصورت خاص نوری تحریک شوند. در حقیقت، می‌توانیم دو نوع مود هدایت شده را مشخص کنیم، یعنی:

$$\begin{array}{ll} \text{میدان مغناطیسی عرضی} & \mathbf{H} = H_y \hat{\mathbf{y}} \\ \text{موازی با سطح مشترک} & \mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}} \\ \text{میدان الکتریکی عرضی} & : \\ \text{موازی با سطح مشترک} & : \end{array} \quad (TM) \quad (TE)$$

ابتدا مودهای  $TM$  را مورد بحث قرار می‌دهیم و بعداً نشان خواهیم داد که هیچ مود  $TE$  در سطح مشترک‌های فلز-دیالکتریک وجود ندارد. برای میدان‌های مغناطیسی بالا و پائین سطح مشترک، رابطه زیر را ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} H_{1y} &= h_1 e^{-jk_x x} e^{-k_{1z} z} = h_1 e^{-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, & \mathbf{k}_1 &= (k_x, 0, -jk_{1z}) \\ H_{2y} &= h_2 e^{-jk_x x} e^{k_{2z} z} = h_2 e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}, & \mathbf{k}_2 &= (k_x, 0, -jk_{2z}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

ضمناً سطح مشترک در موقعیت  $z = 0$  قرار دارد. در اینجا  $k_{iz} = (k_x^2 - \epsilon_i \mu_0 \omega^2)^{\frac{1}{2}}$  و علامت‌های موجود در نمای  $e^{\pm k_{iz} z}$  به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که میدان‌ها بطور نمائی در بالا و پائین محی میرا شوند. میدان الکتریکی را می‌توان از قانون آمپر محاسبه کرد و منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{\epsilon_1 \omega} H_{1y} \hat{\mathbf{y}} \times (k_x \hat{\mathbf{x}} - jk_{1z} \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{\epsilon_1 \omega} H_{1y} (-jk_{1z} \hat{\mathbf{x}} - k_x \hat{\mathbf{z}}) \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\epsilon_2 \omega} H_{2y} \hat{\mathbf{y}} \times (k_x \hat{\mathbf{x}} - jk_{2z} \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{\epsilon_2 \omega} H_{2y} (-jk_{2z} \hat{\mathbf{x}} - k_x \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

<sup>۲</sup>Conserved

<sup>۳</sup>Dispersion Relation

<sup>۴</sup>Evanescence Character

<sup>۵</sup>Surface Plasmons

سپس شرایط مرزی پیوستگی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مماسی را اعمال می‌کنیم و از رابطه (۴.۸) و (۳.۸) بدست می‌آید:

$$H_{1y}|_{z=0} = H_{2y}|_{z=0} \implies h_1 = h_2$$

$$E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} \implies h_1 \frac{k_{1z}}{\epsilon_1} = -h_2 \frac{k_{2z}}{\epsilon_2}$$

از عبارت برای پیوستگی میدان‌های الکتریکی مماسی خواهیم داشت:

$$\frac{k_{1z}}{k_{2z}} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (4.8)$$

برای این که این عبارت برای مقادیر حقیقی و مثبت  $k$  صادق باشد، در می‌یابیم که علامت‌های تابع دی‌الکتریک بالا و پائین سطح مشترک باید مختلف باشند. این منجر به شرط‌های زیر می‌شود:

### اولین شرط پلاسمون سطحی

$$\epsilon_1(\omega)\epsilon_2(\omega) < 0 \quad (5.8)$$

برای انتخاب مواد دی‌الکتریک ( $\epsilon_1 > 0$ ) و فلز ( $\epsilon_2 < 0$ ) بالا و پائین سطح مشترک معادله (۵.۸) بطور خودکار برآورده می‌شود. سپس دو طرف رابطه (۴.۸) را مربع کرده و جمله‌های  $k_{1z}^2$  و  $k_{2z}^2$  را با استفاده از رابطه پاشندگی (۱.۸) بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} = \frac{k_x^2 - \epsilon_1 \mu_0 \omega^2}{k_x^2 - \epsilon_2 \mu_0 \omega^2}$$

از حل برای  $k_x$  می‌دهد؛

$$k_x = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_2}{\epsilon_0 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}} k_0 \quad (6.8)$$

که در آن  $k_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \omega$  عدد موج فضای آزاد است. برای آنکه عدد موج حقيقی  $k_x$  داشته باشیم، باید نابرابری زیر برقرار باشد:

### دومین شرط پلاسمون سطحی

$$-\epsilon_2(\omega) > \epsilon_1(\omega). \quad (7.8)$$

به عبارت دیگر، تابع دی‌الکتریک فلز  $\epsilon_2$  باید خیلی منفی‌تر از ماده دی‌الکتریک  $\epsilon_1$  باشد. برای فلزات معمولی با تابع دی‌الکتریک شبیه درود این شرایط را می‌توان به راحتی برآورده کرد.

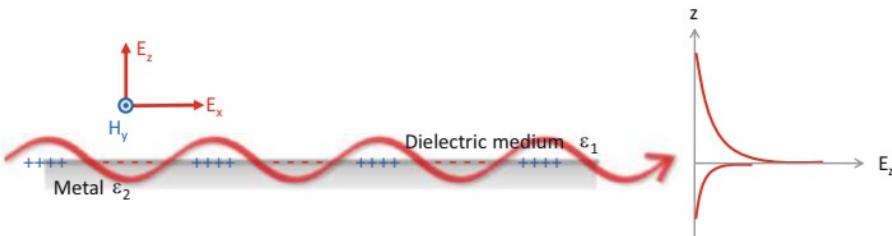
این نوع جدید تحریک معمولاً پلاسمون‌های سطحی نامیده می‌شوند و امواج منتشر شونده در سطح مشترک هم‌افزائی<sup>۶</sup> می‌شوند. ماهیت فیزیکی این امواج با تعدادی ویژگی مهم مشخص می‌شود.

- بارهای سطحی بارهای سطحی القائی در سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک را می‌توان از رابطه (۲۴.۷) محاسبه کرد،

$$\sigma = \epsilon_0(E_{1z} - E_{2z})|_{z=0} = \frac{k_x}{\omega} \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right) h_1 e^{-jk_x x} \quad (۸.۸)$$

ظاهرًاً، موج با نوسان چگالی بار همدوس<sup>۷</sup> در سطح مشترک، همانطور که در شکل (۲.۸) نشان داده شده است، همراه است. مشابه پلاسمون‌های انبوه<sup>۸</sup>، بارهای جدا شده منجر به بازگرداندن نیروهایی می‌شوند که نوسان پلاسمون سطحی را هدایت می‌کنند.

- میدان‌های محوشونده بدلیل مشخصه هم‌افزائی مودها، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی دارای مشخصه محوشوندگی  $e^{-k_{iz}|z|}$  هستند و بطور نمائی دور از سطح مشترک میرا می‌شوند که در سمت راست شکل (۲.۸) نشان داده شده است.



شکل ۲.۸: پلاسمون‌های سطحی امواج الکترومغناطیسی هستند که در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک منتشر می‌شوند. آنها همراه نوسان چگالی بار همدوس در سطح مشترک هستند. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی دارای مشخصه محوشوندگی بوده و بدور از سطح مشترک بطور نمائی میرا می‌شوند.

- قطبش از رابطه (۳.۸) مشاهده می‌شود که امواج دارای قطبش بیضی با بردار قطبش  $-jk_{iz}\hat{x} - k_x\hat{z}$  هستند.

- انتقال انرژی بردار پواین‌تینگ میانگین برای پلاسمون سطح در محیط دی‌الکتریک را می‌توان از روابط (۲.۸) و (۳.۸) محاسبه کرد

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) = \frac{h_1^2}{2\epsilon_1\omega} e^{-2k_{1z}z} \operatorname{Re}(-jk_{1z}\hat{z} + k_x\hat{x}) = \frac{h_1^2 k_x \hat{x}}{2\epsilon_1\omega} \quad (۹.۸)$$

در توافق با مباحث قبلی، متوجه می‌شویم که امواج محوشونده، انرژی را در جهت  $z$  حمل نمی‌کنند.

<sup>۶</sup>Confined

<sup>۷</sup>Coherent

<sup>۸</sup>Bulk plasmons

- تلفات‌ها تلفات‌ها در فلزات را می‌توان از طریق بخش موہومی گذردۀی  $\epsilon_2'' > 0$  توصیف کرد. وقتی برای بدست آوردن روابط بالا برای پلاسمون‌های سطحی اقدام می‌کردیم، متوجه شدیم که علاوه‌چیزی برای مختلط  $\epsilon_2'' - j\epsilon_2' = \epsilon_2$  تغییر نکرده است. تنها اختلاف این است که یک قسمت موہومی بدست می‌آورد و در صورت کوچک بودن تلفات می‌توان آنرا بصورت زیر بیان کرد:

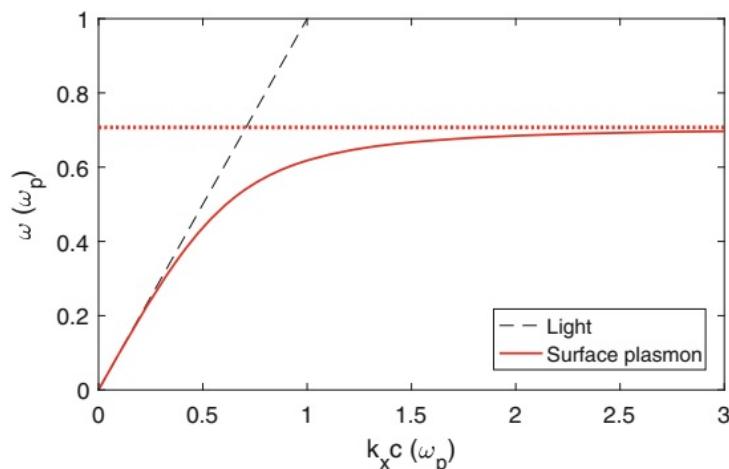
$$k_x = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2'}{\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2')}} k_0 \left[ 1 - \frac{j}{2} \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2'} \right) \frac{\epsilon_2''}{\epsilon_2'} + \mathcal{O}(\epsilon''^2) \right] \quad (10.8)$$

این منجر به میرائی انتشار پلاسمون‌ها می‌شود

$$e^{-j(k'_x - jk''_x)x} = e^{-k''x} e^{-jk'x} = (\text{نوسان}) \times (\text{میرا شونده})$$

- همچنین  $k_{2z}$  یک بخش موہومی کوچک بدست می‌آورد. در نتیجه، بردار پواین‌تینک رابطه (۹.۸) یک مولفه در جهت  $z$  خواهد داشت که وابسته به عبور انرژی الکترومغناطیسی در فلز است که بصورت تلفات اهمی یا حرارت تبدیل می‌شود.

- پاشندگی برای تابع دیالکتریک درود و  $\epsilon_1$  پاشندگی پلاسمون رابطه (۶.۸) را می‌توان



شکل ۳.۸: پاشندگی برای پلاسمون‌های سطحی. بطوری که از رابطه (۶.۸) با استفاده از تابع دیالکتریک درود  $\epsilon_1 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  و  $\epsilon_2(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  محاسبه شده است. مقدار مجانب  $\omega/\sqrt{2}\omega_p$  با نقطه چین قرمز و پاشندگی نور  $\omega = ck$  با خط چین سیاه مشخص شده است.

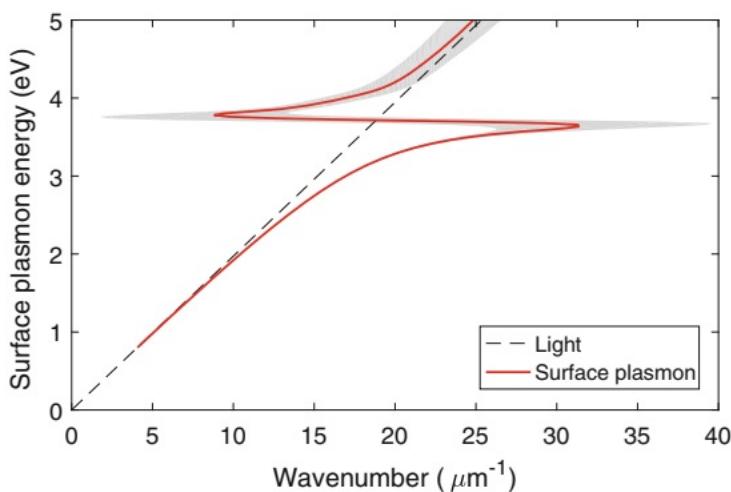
بصورت زیر معکوس کرد:

$$k_x = \sqrt{\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \frac{\omega}{c}} \implies \omega = \sqrt{\frac{\omega_p^2 + 2k_x^2 c^2 - \sqrt{\omega_p^4 + 4k_x^4 c^4}}{2}} \quad (11.8)$$

علامت ریشه‌های مربع به‌گونه‌ای انتخاب شده است که  $\omega$  سرتاسر مثبت و  $0 \rightarrow \omega$  برای  $k_x \rightarrow 0$  است. شکل (۳.۸) پاشندگی  $\omega(k_x)$  پلاسمون‌های سطحی را نشان می‌دهد. خط چین سیاه نمایشگر خط نور  $\omega = ck$  و خط نقطه چین قرمز مقدار مجانب را نشان می‌دهد.

$$\omega \xrightarrow[k_x \rightarrow \infty]{} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \quad (12.8)$$

که به‌آسانی می‌توان با جستجو در اولین عبارت معادله (۱۱.۸) برای صفرهای مخرج  $2 - \omega_p^2/\omega^2$  بدست آورد.



شکل ۴.۸: همانند شکل (۳.۸) اما برای تابع دیالکتریک نقره که از آزمایش گرفته شده است [۳۴]. ناحیه سایه‌دار خاکستری نشان دهنده گسترش  $k'_x \pm \frac{1}{2}k''_x$  مربوط به تلفات پلاسمون است. برای انرژی‌های بالا مثلًا ۳.۵ eV، پلاسمون‌های بهشت میرا شده و پاشندگی بهعقب خم می‌شود.

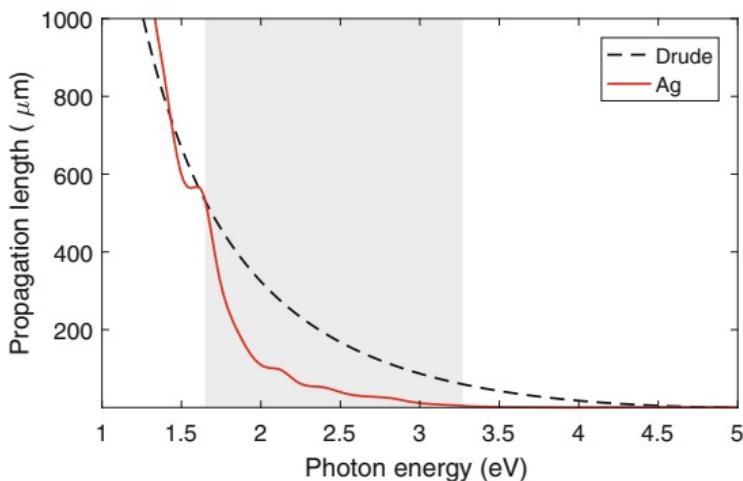
در کل، خط نور بالای پاشندگی پلاسمون سطح است و دو منحنی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. این به‌این دلیل است که سرعت پلاسمون سطحی در مقایسه با سرعت نور گُند بوده و آن بعلت ویژگی ترکیب نور-ماده پلاسمون سطحی که در آن میدان‌های محسوب‌شونده به‌فلز فرو می‌روند و نوسان‌های بار سطحی همدوس را هدایت می‌کنند است.

شکل (۴.۸) پاشندگی پلاسمون سطحی را برای تابع دیالکتریک نقره واقعی نشان می‌دهد. نتایج مشابه توصیف ساده‌تر درود است، اما فرکانس‌های پلاسمون اکنون بخشی موهومی مرتبط با تلفات اهمی را به‌دست می‌آورند. برای انرژی‌های فوتونی بزرگ این تلفات آنقدر زیاد است که پاشندگی بهعقب خم می‌شود.

- افزونگی نور با توجه به‌ویژگی ماده-نور ترکیبی، طول موج پلاسمون‌های سطحی می‌تواند به‌طور قابل توجهی کوتاه‌تر از طول موج فضای آزاد نور باشد. این باعث می‌شود که نور در حجم زیر طول موج افزون<sup>۹</sup> شود.

<sup>۹</sup>Confinement

- طول انتشار شکل (۵.۸) طول انتشار  $Im(k_x)^{-1}$ <sup>۱۰</sup> که بوسیله میرائی پلاسمون سطحی حادث می‌شود را نشان می‌دهد. بطور کلی، نمونه‌ای از علاقمندان به پلاسمون‌های سطحی با تضعیف کم، مثلاً پلاسمون‌های سطحی برای نقره با انرژی زیر  $3.5\text{ eV}$ ، که می‌تواند در مسافت طولانی بدون میرائی خیلی زیاد منتشر شود.



شکل ۵.۸: طول انتشار  $Im(k_x)^{-1}$  برای پلاسمون‌های سطحی در نقره با استفاده از تابع دیالکتریک درود (خط چین) و تابع دیالکتریک اخذ شده از آزمایش [۴۴] (خط پُرنک). سطح خاکستری نمایشگر ناحیه نور مرئی است. بطور کلی، نمونه‌ای از علاقمندان به پلاسمون‌های سطحی با طول انتشار بقدر کافی طویل.

در مقاله "انتظار از پلاسمونیک"<sup>۱۱</sup> [۴۴]، که در سال ۲۰۰۷ در مجله علوم امریکا<sup>۱۲</sup> چاپ شد و امروزه برای کل زمینه تحقیقاتی بنام پلاسمونیک تأثیرگذار است، هری اتواتر<sup>۱۳</sup> طبیعت فیزیک پلاسمون‌های سطحی را بهزیبایی توصیف کرده و تعدادی از کاربردهای احتمالی را پیش بینی کرده است.

در دهه ۱۹۸۰ محققان به طور آزمایشی تأیید کردند که هدایت امواج نوری در سطح بین فلز و دیالکتریک (یک ماده غیر رسانا مانند هوا یا شیشه) می‌تواند، در شرایط مناسب، یک تعامل تشدید بین امواج و الکترون‌های متحرک در سطح فلز القاء کند. (در یک فلز رسانا، الکترون‌ها بهشت بهاتهم یا مولکول‌های متصل نیستند). به عبارت دیگر، نوسان الکترون‌ها در سطح با نوسان میدان الکترومغناطیسی خارج از فلز مطابقت دارد. نتیجه تولید پلاسمون‌های سطحی است - امواج چگالی الکترون‌هایی که در امتداد سطح مشترک منتشر می‌شوند مانند کنگره‌هایی که پس از پرتاب سنگ به آب در سطح برکه پخش می‌شوند.

طی دهه گذشته محققان دریافته‌اند که با طراحی خلاقانه سطح مشترک فلز-دیالکتریک می‌توانند پلاسمون‌های سطحی با فرکانس مشابه امواج الکترومغناطیسی خارج اما طول موج

<sup>۱۰</sup> Propagation Length

<sup>۱۱</sup> Scientific American

<sup>۱۲</sup> Harry Atwater

بسیار کوتاه‌تر تولید کنند. این پدیده می‌تواند به پلاسمون‌ها اجازه دهد تا در امتداد سیم‌های مقیاس نانو به‌نام اتصالات متقابل حرکت کرده و اطلاعات را از قسمتی از ریزپردازنده به‌قسمت دیگر منتقل کنند. اتصالات پلاسمونی یک مزیت بزرگ برای طراحان تراشه خواهد بود، زیرا آنها توانسته‌اند ترانزیستورهای کوچک‌تر و سریع‌تر را توسعه دهنند، اما در ساختن مدارهای الکترونیکی کوچک که بتوانند داده‌ها را به سرعت در تراشه منتقل کنند، مشکل داشته‌اند.

یا همانطور که هری اتواتر در یک جمله بیان کرده است [۴۵]:

پلاسمونیک به‌فotonیک این توانایی را داده است که به‌مقیاس نانو برود.

در بخش‌های بعدی این کتاب، کاربردهای بیشتری را مورد بررسی قرار خواهیم داد. تحلیل پلاسمون‌های سطحی با بحث در مورد مود  $TE$  به‌پایان می‌رسد. با همان قضیه رابطه (۲.۸)، اما برای میدان‌های الکتریکی، شروع می‌کنیم. با تکرار همان شیوه کاملاً مشابه (تمرین ۸.۳) از پیوستگی میدان‌های مماسی الکتریکی و مغناطیسی در سطح مشترک، شرط  $e_2 = e_1$  و  $e_1 k_{1z} = -e_2 k_{2z}$  بدست می‌آید، که می‌توانند با رابطه زیر ترکیب شوند:

$$e_1(k_{1z} + k_{2z}) = 0 \quad (13.8)$$

ظاهرأً، این عبارت برای مقادیر مثبت  $k_{1z}$  و  $k_{2z}$  صادق نیست. بنابراین، تنها راه حل ممکن است، یعنی هیچ حالت  $TE$  در یک سطح مشترک فلزی-دی‌الکتریک وجود ندارد.  $e_1 = e_2 = 0$

### ۱۱.۸ ساختار کرتشمون و اتو

در بخش قبل بحث کردیم که در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک، نوع جدیدی از تحریکات وجود دارد، که بنام پلاسمون سطحی معروف است، و با تحریک بار سطحی همدوس مقید به میدان‌های نوری مرتبط است. با این حال، همچنین مشاهده کردہ‌ایم که این پلاسمون‌های سطحی را نمی‌توان مستقیماً با وسایل نوری برانگیخت، یا همانطور که هری اتواتر با دقت بیان کرده است، فقط در شرایط مناسب می‌تواند تحریک شود. برای درک اینکه این شرایط مناسب چیست، ابتدا اصل بقاء انرژی و مومنتوم را در یک فرآیند تحریک نوری تجزیه و تحلیل می‌کنیم. نور حامل انرژی و مومنتوم است. در ادامه از یک زیان فوتونی استفاده می‌کنیم که در آن فوتون انرژی  $\hbar\omega$  و مومنتوم  $\hbar\mathbf{k}$  را حمل می‌کند، اما استدلال ما برای توصیف الکترو-مغناطیسی کلاسیک کاملاً خوب عمل می‌کند. نور را با فرکانس زاویه‌ای  $\theta$  نوسان کرده و در محیطی با ثابت دی‌الکتریک  $\epsilon_1$  که به سطح فلز واقع در  $z=0$  برخورد می‌کند، منتشر می‌شود. مومنتومی که بوسیله فوتون حمل می‌شود برابر است با:

$$\hbar\mathbf{k} = [\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}] \frac{\hbar k_0}{n_1} \quad (14.8)$$

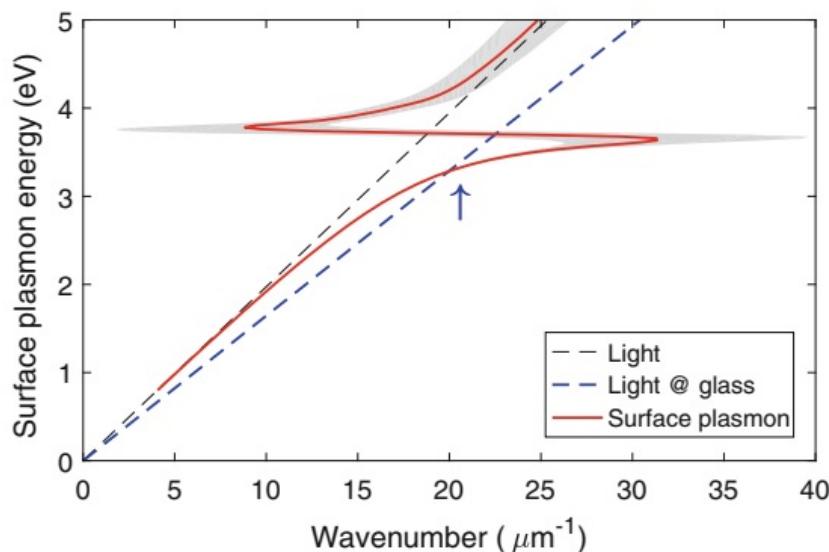
که در آن  $\theta$  زاویه نور تابشی نسبت به محور  $z$ ،  $\frac{\omega}{c} = k_0$  و  $n_1$  ضریب شکست محیط دی‌الکتریک است. برای تحریک پلاسمون‌های سطحی کمیات زیر باید حفظ<sup>۱۳</sup> شوند:

- انرژی  $\hbar\omega$

<sup>۱۳</sup>Conserved

- مومنتوم موازی  $\hbar k_x = (\hbar k_0/n_1) \sin \theta$

توجه داشته باشید که برای ساختار تیغه‌ای<sup>۱۴</sup>، تقارن انتقالی در امتداد  $z$  شکسته شده و بر اساس قضیه نیتر<sup>۱۵</sup> مومنتوم در امتداد  $z$  حفظ نمی‌شود. در اینجا مسئله تحریک نور پلاسمون‌های



شکل ۸.۶: اصول تحریک نوری پلاسمون‌های سطحی. پاشندگی پلاسمون سطحی مانند شکل (۴.۸) است، اما خط نور برای انتشار نور از طریق مواد دیالکتریک مانند شیشه، مورب است. در نتیجه، پاشندگی پلاسمون سطحی و پاشندگی نور در شیشه در نقطه‌ای که با پیکان مشخص شده است، در جایی که تحریک پلاسمون سطحی از طریق نور امکان پذیر است، یکدیگر را قطع می‌کنند.

سطحی مطرح می‌شود: خط نور، که در شکل (۶.۸) با خط تیره سیاه نشان داده شده است، هرگر از پاشندگی پلاسمون سطحی عدول نمی‌کند (از خم شدن به عقب در فوتون با انرژی بالا را در نظر نمی‌گیریم). این بدان علت است که پلاسمون‌های سطحی نسبت به انتشار آزاد نور، به عنوان تاثیر مشخصه ترکیب ماده-نور، گند می‌شوند. به همین دلیل، حتی برای زاویه تابش مایل برابر با  $1 = \sin \theta$  مومنتوم نمی‌توان همزمان حفظ شوند. برخورد نور به سطح دیالکتریک-فلز بازتاب شده اما نمی‌تواند پلاسمون‌های سطحی را تحریک کند.

بنابراین باید یک ترفند برای تحریک نوری پلاسمون‌های سطحی انجام دهیم. اصل اساسی در شکل (۶.۸) ترسیم شده و متکی بر گند کردن نور ورودی با استفاده از ساختار هندسی که چند لحظه دیگر بحث می‌کنیم. در نتیجه این کاهش سرعت، تابش نور مایل اکنون از پاشندگی پلاسمون سطحی عبور کرده و پلاسمون سطحی راه اندازی می‌شود که در شکل (۶.۸) با پیکان مشخص است. با تغییر فرکانس  $\omega$  و زاویه  $\theta$  نور ورودی می‌توان کل پاشندگی پلاسمون سطحی را ترسیم کرد. مسئله‌ای که باید در ادامه به آن بپردازیم این است که چگونه می‌توان نور ورودی را بدون تأثیر قابل توجهی بر پاشندگی پلاسمون سطحی کاهش داد، که بر طبق معادله (۶.۸)،

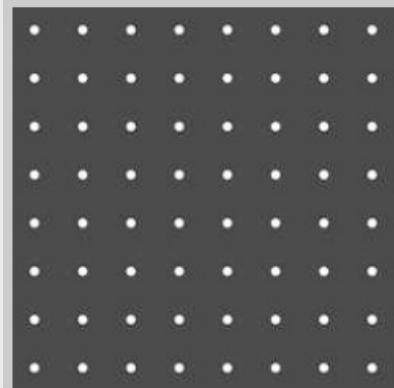
<sup>۱۴</sup>Slab Structure

<sup>۱۵</sup>Noether's theorem

بستگی بهر دو  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  داشته باشد. بهمین دلیل، نمی‌توان بهسادگی میزان  $\epsilon_1$  را افزایش داد زیرا این امر باعث کاهش سرعت ورودی و هم انتشار پلاسمون‌های سطحی بهمان شیوه می‌شود. دو ساختار هندسی توسط اتو<sup>۱۶</sup> [۴۶] و کرتشنمن<sup>۱۷</sup> [۴۷] پیشنهاد شد که اجازه حل این مسئله را می‌دهد.

## انتقال غیرعادی

در سال ۱۹۹۸ توماس ابسن Thomas Ebbesen و همکاران مقاله‌ای تحت عنوان "انتقال نوری غیرعادی از طریق آرایه‌های حفره‌ای با زیر طول موج" [۴۸] منتشر کردند که مورد توجه زیادی قرار گرفت و اغلب به عنوان مقاله اصلی در زمینه پلاسمونیک‌ها در نظر گرفته می‌شود. نویسندهای یک فیلم نقره ای نازک ۲۰۰ نانومتر تهیه و آرایه‌ای تناوبی از حفره‌های زیر طول موج با قطر ۱۵۰ نانومتر در آن ایجاد کردند. هنگام روشن کردن آرایه با نور، برای مقادیر خاص طول موج و زاویه انتشار، افزایش چشمگیر شدت نور منتقل شده را مشاهده کردند. در مقاله نویسندهای [۴۸] می‌نویسند:



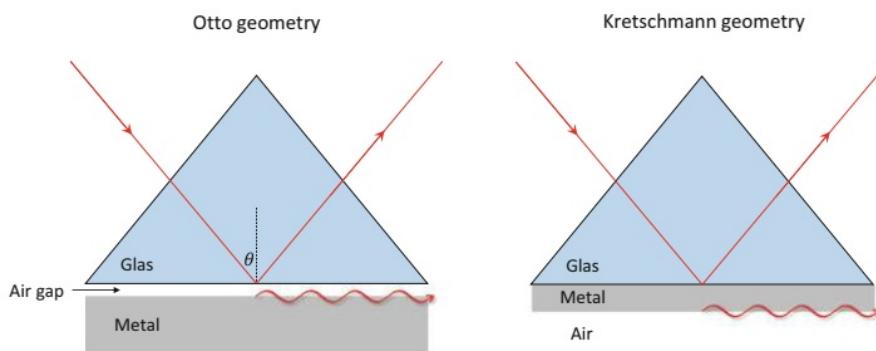
به‌طور خاص، قله‌های تیز در انتقال در طول موج‌های بزرگی ده برابر قطر استوانه‌ها مشاهده می‌شود. در این بیشینه‌ها، بازده انتقال می‌تواند از یک فراتر رود (هنگامی که به سطح حفره‌ها نرمالیزه شود)، که مقادیر بزرگی بیشتر از پیش‌بینی توسط تئوری روزنے استاندارد است. آزمایش‌های ما شواهدی را ارائه می‌دهد که نشان دهنده این خواص نوری غیرعادی به‌دلیل تزویج نور با پلاسمون‌ها- تحریک الکترونیکی- در سطح فیلم فلزی با الگوی تناوبی است.

به‌طور خلاصه، علت این افزایش شدید انتقال این است که آرایه‌های تناوبی حفره‌ها تقارن انتقالی لایه نقره را می‌شکند و یک مومنتوم  $G = 2/a$  را با ثابت شبکه  $a$  از آرایه تدارک می‌نماید. بنابراین، هنگامی که نور به سطح مشترک هوا و نقره برخورد می‌کند، می‌تواند این مومنتوم اضافی  $G$  را افزایش داده و تحریک پلاسمون سطحی در سطح فلز راهاندازی کند. برای فیلم‌های بسیار نازک، پلاسمون از یک طرف فیلم نقره به‌طرف دیگر، جایی که دوباره به‌نور تبدیل می‌شود، تونل می‌زند.

اهمیت این آزمایش نشان دادن این است که خواص نوری فلزات را می‌توان به‌طور کامل در دستگاه‌های نانوساختار طراحی کرد. این امر زمینه تحقیقاتی در مورد پلاسمونیک‌ها را ایجاد کرده است، جایی که پلاسمون‌های سطحی اسب گاری بوده که توسط نانوساختار طراحی و کنترل می‌شوند.

<sup>۱۶</sup>Otto

<sup>۱۷</sup>Kretschmann



شکل ۷.۸: پیکربندی اتو و کرتشمن برای تحریک نوری پلاسمون‌های سطحی. در ساختار هندسی اتو، نور از طریق منشور منتشر می‌شود و با زاویه  $\theta$  در سطح مشترک شیشه-هوای برخورد می‌کند و در آن بازتاب داخلی کلی وجود دارد. هنگامی که تیغه فلزی در نزدیکی این سطح مشترک قرار گیرد، میدان‌های محو شونده نور تابشی و بازتاب می‌توانند پلاسمون‌های سطحی را که در سطح بین فلز و هوای منتشر می‌شوند، تحریک کنند. در ساختار هندسی کرتشمن، یک لایه فلزی با ضخامت چند ده نانومتر در بالای منشور قرار می‌گیرد و میدان‌های محو شونده نور بازتاب شده از لایه نفوذ کرده و پلاسمون‌های سطحی را در سطح مشترک فلز و هوای تحریک می‌کند.

### ساختار هندسی اتو

در ساختار هندسی اتو، نور از طریق منشور منتشر شده و با زاویه  $\theta$  روی سطح مشترک شیشه-هوای برخورد می‌کند و در آنجا بازتاب داخلی کلی ایجاد می‌شود. سمت چپ شکل (۷.۸) زا مشاهده کنید. هنگامی که یک تیغه فلزی<sup>۱۸</sup> در نزدیکی این سطح مشترک قرار گیرد، میدان‌های محو شونده نور تابشی و بازتاب می‌توانند پلاسمون‌های سطحی را تحریک کرده از این رو در سطح مشترک بین فلز و هوای منتشر می‌شوند.

### ساختار هندسی کرتشمن

در ساختار هندسی کرتشمن یک لایه فلزی با ضخامت چند ده نانومتر در بالای منشور قرار داده می‌شود. نور تابشی از طرف منشور به فلز بازتاب شده، اما از طریق میدان‌های محو شونده در پلاسمون‌های سطح فلز می‌توانند در سطح مشترک فلز و هوای تحریک شوند. این ساختار هندسی را می‌توان به‌آسانی در آزمایش درک کرد، اما باید اطمینان حاصل کرد که فیلم فلزی به اندازه کافی نازک است به‌طوری که میدان‌های محو شونده هنوز در بخش مجاور فیلم فلزی به‌اندازه کافی بزرگ هستند.

برای توصیف این ساختارهای هندسی در چارچوب معادلات ماکسول، در ادامه یک طرح راه حل عمومی برای محیط‌های لایه لایه‌ای، که به روش ماتریس انتقال موسوم است معرفی می‌کنیم. با استفاده از این روش‌کرد، ساختار هندسی کرتشمن را تجزیه و تحلیل کرده و اصل کار سنسورهای پلاسمونی را که از چنین ساختاری استفاده می‌کنند، را مورد بحث قرار می‌دهیم.

<sup>۱۸</sup>Metal Slab

## ۲.۸ پلاسمون‌های گرافن

در فصل قبل به طور مختصر به خواص نوری گرافن ناخالص شده<sup>۱۹</sup> پرداخته‌ایم. سپس تحلیل پلاسمون‌های سطحی خود را با مورد گاز الکترونی دو بعدی با پاشندگی ساختار نواری خطی، معادله (۱۱.۷) بررسی کردیم. فرض کنید که یک ورق گرافن بر روی یک بستر با گذرهای  $\epsilon_2$  قرار داده شده است، و مواد بالای ورق دارای یک گذرهای  $\epsilon_1$  است. شبیه با قسمت قبل، معادله (۲.۸) ایجاد می‌کنیم. با این حال، باید شرایط مرزی را در  $z = 0$  اصلاح کرده تا با سطحی و توزیع جریان الکترون‌های ناخالصی در گرافن را در نظر بگیریم.

- **بار سطحی** از معادله (۱۳.۷)، که توزیع بار سطحی ناشی از  $\sigma$  را به پتانسیل خارجی مربوط می‌کند، می‌توانیم  $\sigma$  را بر حسب پتانسیل  $V = jk_x E_x$  که مربوط به انتشار مود  $TM$  است، بیان کنیم:

$$\sigma(k_x, \omega) = P_{2D}(k_x, \omega) \left[ \frac{-j\epsilon^2 E_x}{k_x} \right]. \quad (15.8)$$

- **جریان سطحی** رابطه پیوستگی (۱۱.۴) بار سطحی  $\sigma$  را به جریان سطحی  $K$  مربوط می‌کند؛

$$\sigma\omega = k_x K_x \implies K_x(k_x, \omega) = \left[ \frac{-j\omega\epsilon^2 P_{2D}(k_x, \omega)}{k_x^2} \right] E_x = \sigma_{2D} E_x \quad (16.8)$$

که در آن هدایت نوری  $\sigma_{2D}$  را معرفی کرده‌ایم.  
از پیوستگی میدان الکتریکی مماسی بر طبق بحث قبلی داریم:

$$E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} \implies h_1 \frac{k_{1z}}{\epsilon_1} = -h_2 \frac{k_{2z}}{\epsilon_2}$$

برای تضییق میدان‌های مغناطیسی مماسی باید توزیع جریان سطحی اضافی  $K_x$  در نظر گیریم، و خواهیم داشت:

$$[H_{1y} - H_{2y}]_{z=0} = -K_x|_{z=0} \implies h_1 - h_2 = -\sigma_{2D} \frac{1}{2} \left( h_1 \frac{-jk_{1z}}{\epsilon_1 \omega} + h_2 \frac{jk_{2z}}{\epsilon_2 \omega} \right).$$

عبارت آخر را می‌توان بصورت زیر بازنوسی کرد:

$$h_1 \frac{k_{1z}}{\epsilon_1} \left( \frac{\epsilon_1}{k_{1z}} - \frac{j\sigma_{2D}}{2\omega} \right) = h_2 \frac{k_{2z}}{\epsilon_2} \left( \frac{\epsilon_2}{k_{2z}} - \frac{j\sigma_{2D}}{2\omega} \right)$$

همراه با شرایط مرزی برای میدان الکتریکی مماسی به شرط پلاسمون سطحی برای پلاسمون‌های گرافن میرسیم [۴۹].

<sup>۱۹</sup>Doped Graphene

## شرط پلاسمون سطحی برای پلاسمون‌های گرافن

$$\frac{P_{2D}(k_x, \omega)}{-j\omega} = \frac{\epsilon_1}{k_{1z}} + \frac{\epsilon_2}{k_{2z}} \quad (17.8)$$

در ساده‌ترین شکل، برای هدایت نوری حد  $k_x \rightarrow 0$  را گرفته و در معادله (۱۴.۷) فقط درون‌باند در نظر می‌گیریم؛

$$\sigma_{2D}(k_x \rightarrow 0, \omega) = \frac{-j\omega e^2}{k_x^2} P_{2D}(k_x \rightarrow 0, \omega) \approx \frac{-j\omega e^2}{k_x^2} \left[ \frac{gk_x^2 \mu}{4\pi(\hbar\omega)^2} \right] = -j \frac{ge^2 \mu}{4\pi \hbar^2 \omega}$$

در حد بدون تاخیر<sup>۲۰</sup>  $c \rightarrow \infty$  می‌توانیم در معادله (۱۷.۸) عوض کنیم؛

$$k_{iz} = \sqrt{k_x^2 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2}} \approx k_x$$

با این عمل، پاشندگی پلاسمون را خواهیم داشت؛

$$\hbar \approx \sqrt{\frac{ge^2 \mu}{4\pi} \frac{k_x}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (18.8)$$

بر خلاف پلاسمون‌های سطحی فلزی که وابستگی خطی برای عددموچ کوچک دارند، متناسب با ریشه دوم عددموچ است.

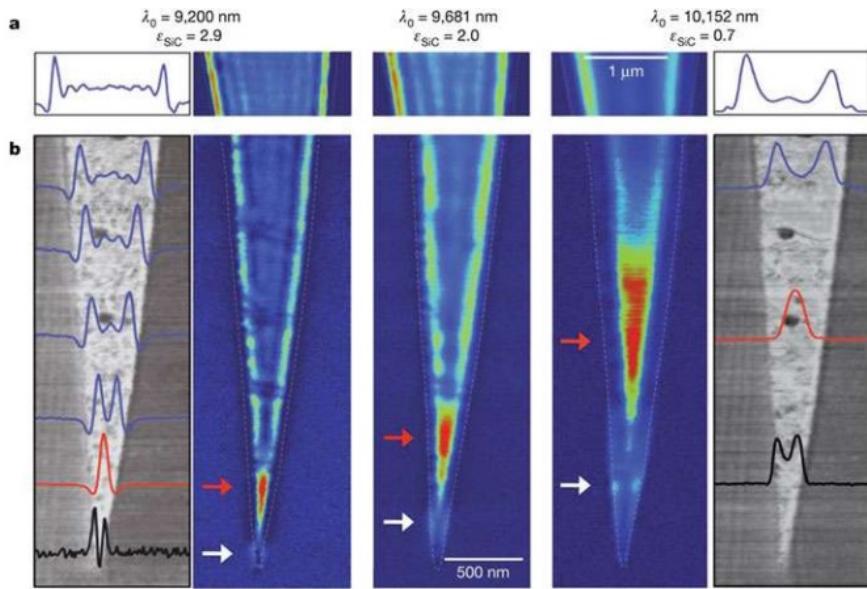
در سال ۲۰۱۲ دو مقاله پشت سر هم در مجله طبیعت<sup>۲۱</sup> چاپ شد [۵۰، ۵۱] که اولین مشاهده پلاسمون‌های گرافن را گزارش کرد. شکل (۸.۸) طیف‌های نوری را برای نانو نوارهای گرافن با میکروسکوپ نوری میدان نزدیک رویشی در حالت مادون قرمز اندازه‌گیری شده است را نشان می‌دهد. بخش‌های مختلف، طیف‌های گرفته شده در طول موج‌های مختلف را بیان می‌کنند و بیشینه شدت را در طول موج برای مودهای پلاسمون افزونگی نشان می‌دهند (همچنین روش در بخش‌های بیرونی را مشاهده کنید). با شروع این مقالات مهم، پلاسمونیک گرافن به یک زمینه تحقیقاتی زنده و داغ تبدیل شده است.

## ۳.۸ روش ماتریس انتقال

روش ماتریس انتقال یک طرح کلی حل معادلات ماکسول برای محیط‌های لایه‌لایه است. ابتدا بازتاب و انتقال میدان‌های الکترومغناطیسی را در یک سطح مشترک مسطح بحث کرده و سپس حل معادلات ماکسول برای یک سیستم لایه‌ای عمق می‌کنیم.

<sup>۲۰</sup> Non-retarded

<sup>۲۱</sup> Nature



شکل ۸.۸: تصاویر نوری میدان نزدیک با طول موجهای تصویربرداری ( $\lambda_0$ ) از ۹۲۰۰ نانومتر (چپ)، ۹۶۸۱ نانومتر (وسط) و ۱۰۱۵۲ نانومتر (راست)، به ترتیب، با ثابت‌های دی‌الکتریک SiC ۲.۹، ۲.۰ و ۰.۷ مطابقت دارد. (الف) تصاویری از نوار گرافن با عرض تقریباً یک میکرومتر، که واپس‌تگی شدید بفضلله حاشیه دارد و در نتیجه طول موج پلاسمون را به طول موج تحریک نشان می‌دهد. (ب) تصاویری از نوار گرافن مورب؛ هر دو نوار روی بستر 6H-SiC قرار دارند. توپوگرافی (که توسط میکروسکوپ نیروی اتمی به دست آمده است) در مقیاس خاکستری در سمت چپ و راست ترین بخش نشان داده شده و با خطوط تیره در بخش مرکزی و رنگی مشخص شده است. تصویر و زیرنویس برگرفته از مرجع [۵۰] است.

### ۱.۳.۸ ضرایب فرnel

با قانون فارデه برای میدان‌های هارمونیک زمانی  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$  شروع می‌کنیم. با گرفتن کرل از هر دو طرف این معادله و استفاده از قانون آمپر همراه جریان جابجایی ماکسول، خواهیم داشت؛

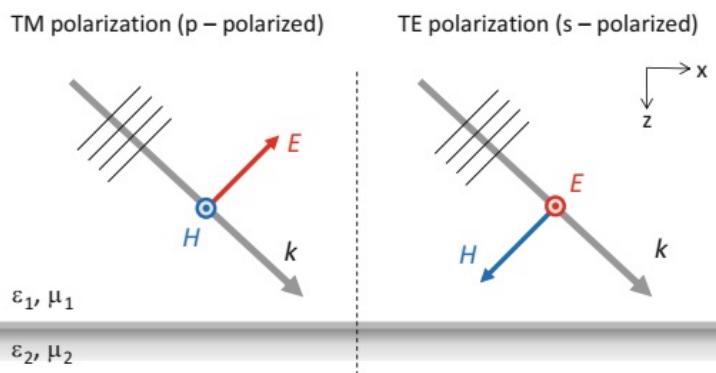
$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega(\nabla \times \mathbf{H}) = -j\omega(j\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (۱۹.۸)$$

که در اینجا و در ادامه ما محیط را بدون بار یا توزیع جریان  $\mathbf{J} = 0$  در نظر می‌گیریم. از رابطه (۱۹.۸) و با گرفتن کرل از قانون آمپر به معادلات امواج برای میدان‌های الکترومغناطیسی می‌رسیم؛

$$\begin{aligned} \mu \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} &= 0 \\ \epsilon \nabla \times \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (۲۰.۸)$$

این دو معادله موج یک دوگانگی را از خود نشان می‌دهند و با جایگزینی در یکی  $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$  و  $\epsilon \leftrightarrow \mu$  به دیگری می‌رسیم [۲۰]. این دوگانگی از نظر فیزیکی عمیق نیست و یک تقارن اساسی را

منعکس نمی‌کند، در واقع جایگزین‌های دیگری می‌توان یافت که یک معادله را به معادله دیگر تبدیل می‌کند. با این حال، چنین جایگزینی را در زیر مفید می‌دانیم. چینش شکل (۹.۸) را در نظر گرفته که در آن یک موج صفحه‌ای به سطح مشترک دو ماده با  $\epsilon_1, \mu_1$  و  $\epsilon_2, \mu_2$  برخورد می‌کند. می‌توانیم دو وضعیت برای قطبش از هم تمیز دهیم.



شکل ۹.۸: تحریک  $TM$  در مقابل  $TE$ . یک موج صفحه‌ای با عدد موج  $k$  بر سطح مشترک بین دو ماده با گذردهی  $\epsilon_{1,2}$  و نفوذپذیری  $\mu_{1,2}$  برخورد می‌کند. وقتی بردار میدان مغناطیسی  $H$  موازی سطح مشترک باشد، موج مغناطیسی عرضی (قطبیش  $TM$  یا  $p$ ) است. هنگامی که بردار میدان الکترومغناطیسی  $E$  موازی سطح مشترک باشد، موج الکترومغناطیسی عرضی (قطبیش  $TE$  یا  $s$ ) است. توجه داشته باشید که نمادهای جایگزین قطبیش‌های  $s$  و  $p$ ، بطور گستردگی در ادبیات امواج استفاده می‌شود، اما در این کتاب مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. در زبان آلمانی (عمود بر) و (موازی با)، مربوط به جهت میدان‌های الکترومغناطیسی نسبت به صفحه‌ای که توسط سطح مشترک و موج ورودی در شکل بالا ترسیم شده است.

- میدان الکترومغناطیسی عرضی  $TE$  در این حالت بردار میدان الکترومغناطیسی  $E$  موازی سطح مشترک است، یا به عبارت دیگر، نسبت به محور تقارن (دراینجا  $z$ ) عرضی است.

- میدان مغناطیسی عرضی  $TM$  در این حالت بردار میدان مغناطیسی  $H$  موازی سطح مشترک است. در معادله (۴۳.۲) نشان داده شده است که موج کلی را می‌توان همواره به دو مولفه  $TE$  و  $TM$  تجزیه کرد.

ابتدا قطبیش  $TE$  را در نظر می‌گیریم، و نتایج قطبیش  $TM$  بطور مستقیم از اصل دوگانگی ناشی می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که جهت انتشار موج در صفحه  $xz$  و بردار میدان الکترومغناطیسی در امتداد محور  $y$  است، به طوری که  $E = E_y \hat{y}$ . از قانون گوس داریم؛

$$\nabla \cdot \epsilon(z) \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon(z) E_y = 0 \implies \epsilon(z) \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0,$$

که در آن از یک محیط لایه‌لایه (۲۲)  $\epsilon(z)$  که فقط به مختصات  $z$  بستگی دارد، استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که  $E_y$  بستگی به  $y$  ندارد. با استفاده از این و کار روی مشتق‌های ویژه روی معادله

(۲۰.۸)، خواهیم داشت؛

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu(z) \frac{\partial}{\partial z} \mu^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu \epsilon \right) E_y = 0 \quad (21.8)$$

در معادله بالا از  $x$  و  $z$  فاکتور می‌گیریم. برای موج صفحه‌ای تابشی، می‌توانیم از قضیه  $E_y = e_y(z) e^{\pm j k_x x}$  استفاده کنیم، این به رابطه زیر منجر خواهد شد؛

$$\left( \mu(z) \frac{\partial}{\partial z} \mu^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu \epsilon - k_x^2 \right) e_y(z) = 0 \quad (22.8)$$

در سطح مشترک بین دو ماده مولفه موازی میدان الکتریکی پیوسته  $e_{1y}(z) = e_{2y}(z)$  است. برای شرط دوم باید میدان مغناطیسی را از قانون فاراده محاسبه کنیم؛

$$-j\omega\mu\mathbf{H} = \nabla \times (e^{\pm j k_x x} e_y(z) \hat{\mathbf{y}}) = \left( -\frac{de_y(z)}{dz} \hat{\mathbf{x}} \pm j k_x e_y(z) \hat{\mathbf{z}} \right) e^{\pm j k_x x}$$

با استفاده از مولفه مماسی میدان مغناطیسی که در سطح مشترک پیوسته است، به دو شرط‌های مرزی برای امواج  $TE$  بقرار زیر میرسیم؛

$$e_{1y} = e_{2y}, \quad \mu_1^{-1} \frac{de_{1y}}{dz} = \mu_2^{-1} \frac{de_{2y}}{dz} \quad (23.8)$$

برای نیل به ضرایب فرنل<sup>۲۳</sup> بقیه کارها سرراست است. مولفه‌های میدان تابشی، انتقالی و بازتاب را در نظر می‌گیریم؛

$$e_{1y}(z) = e_0 (e^{-jk_{1z}z} + R^{TE} e^{jk_{1z}z}), \quad k_{1z} = \sqrt{\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 - k_x^2} \quad (24.8)$$

$$e_{2y}(z) = e_0 (e^{jk_{2z}z} + T^{TE} e^{-jk_{2z}z}), \quad k_{2z} = \sqrt{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 - k_x^2}$$

که در آن  $R^{TE}$  و  $T^{TE}$  ضرایب بازتاب و انتقال است که نشان میدهد چقدر از دامنه امواج بازتاب و انتقال یافته است، و  $k_{1z}$  مولفه‌های  $z$  عددموج در دو محیط است. توجه کنید که بعلت شرایط مرزی ماسکول مولفه موازی بردارموج  $k_x$  در سطح مشترک پیوسته است. با قرار دادن رابطه (۲۴.۸) در شرایط مرزی رابطه (۲۳.۸)، ( $z = 0$ ) خواهیم داشت؛

$$1 + R^{TE} = T^{TE}, \quad \frac{k_{1z}}{\mu_1} (1 - R^{TE}) = \frac{k_{2z}}{\mu_2} T^{TE} \quad (25.8)$$

که سرانجام منجر به ضرایب بازتاب و انتقال فرنل خواهد شد:

## ضرایب فرنل

$$R^{TE} = \frac{\mu_2 k_{1z} - \mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}}, \quad T^{TE} = \frac{2\mu_2 k_{1z}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}} \quad (26.8)$$

$$R^{TM} = \frac{\epsilon_2 k_{1z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}}, \quad T^{TM} = \frac{2\epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}} \frac{Z_2}{Z_1}$$

<sup>۲۳</sup>Fresnel coefficients

روابط برای قطبش  $TM$  را می‌توان با محاسبه صریح از اصل دوگانگی بدست آورد. در حالت دوم باید ضرایب را برای میدان مغناطیسی بدست آورد. برای رسیدن به ضرایب که با میدان‌های الکتریکی در سطح مشترک بجای میدان مغناطیسی تطبیق باشد، باید  $T^{TM}$  را در نسبت امپدانس‌های رابطه (۴۱.۲) ضرب کرد، همان‌طور که ما در رابطه (۲۶.۸) انجام داده‌ایم. در شکل بالا، ضرایب فرنل دارای خواص زیر هستند:

- شرایط مرزی برای هر ساختاری، شرایط مرزی معادلات ماکسول در سطح مشترک صادق است.
- بقاء انرژی انرژی تابشی، بازتاب، و انتقالی امواج بقاء انرژی حفظ می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۷.۴) برای بردار پواین‌تینگ میانگین زمانی برای مولفه  $z$  داریم

$$\frac{1}{2}Z_1^{-1}\frac{k_{1z}}{k_1} - \frac{1}{2}Z_1^{-1}|R|^2\frac{k_{1z}}{k_1} = \frac{1}{2}Z_2^{-1}|T|^2\frac{k_{2z}}{k_2},$$

که در آن جملات سمت چپ مربوط به شار انرژی امواج بترتیب تابشی و بازتاب، و جمله سمت راست مربوط به موج انتقال یافته است. عبارت بالا برای هرئو قطبش  $TE$  و  $TM$  صادق است. از  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  بقاء شار انرژی را داریم؛

$$|R|^2 + |T|^2 \left( \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z}} \right) = 1 \quad (۲۷.۸)$$

- قطب‌ها مخرج ضرایب فرنل  $TM$  وقتی صفر می‌شود که

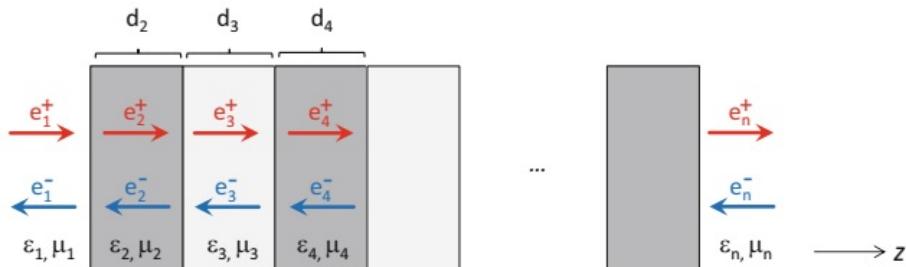
$$\frac{k_{1z}}{k_{2z}} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

و همین عبارت برای قطبش  $TE$  است. معادله بالا با رابطه (۴.۸) که برای پلاسمون‌های سطحی بدست آمد یکسان است. بنابراین، قطب‌های ضرایب بازتاب اطلاعاتی در باره مودهای ویژه <sup>۱۴</sup> افرونگی در سطح مشترک را تدارک می‌کند. استدلال برای این امر این است که امواج بازتاب و انتقالی بترتیب با  $e_0T$  و  $e_0R$  معلوم می‌شوند که در آن  $e_0$  دامنه میدان تابشی است. وقتی  $R, T \rightarrow \infty$  امواج بازتابی و انتقالی حتی برای  $e_0 \rightarrow 0$  نیز وجود دارند که می‌توان بر حسب نوسان‌های مودهای ویژه در غیاب تحریک خارجی تفسیر کرد.

### ۲.۳.۸ ماتریس‌های انتقال

اکنون به محیط‌های لایه‌لایه که در شکل (۱۰.۸) نشان داده شده است، بر می‌گردیم. اجازه دهید یک بردار با دو مولفه معرفی کنیم که در آن مولفه  $e_m^+$  و  $e_m^-$  نمایشگر میدان‌های منتشر شده در محیط  $m$  بترتیب در جهت مثبت و منفی محور  $z$  ها است. برای سهولت، در ادامه اندیس  $u$  را برای مولفه میدان الکتریکی و همین طور اندیس بالاتریس  $TE$  را برای ضرایب فرنل حذف می‌کنیم. بیانید اولین سطح مشترک را در نظر گیریم. میدان در محیط ۱ برابر  $e_1^+ + e_1^-$  و میدان

<sup>۱۴</sup>Eigenmodes



شکل ۱۰.۸: طرحواره روش ماتریس انتقال. یک موج صفحه‌ای به سیستمی مت Shank از لایه‌های مختلف به ضخامت  $d_m$  برخورد می‌کند. هر یک از لایه‌ها دارای گذردهی  $\epsilon_m$  و نفوذپذیری  $\mu_m$  هستند. در روش ماتریس انتقال، موج از طریق سیستم لایه‌ای منتشر می‌شود. در هر سطح مشترک، میدان‌ها را با استفاده از شرایط مرزی معادلات ماکسول تطبیق داده و از انتشار موج آزاد در لایه‌ها استفاده می‌کنیم.

در محیط ۲ برابر  $e_2^+ + e_2^-$  است. با قرار دادن این میدان‌ها در شرط مرزی رابطه (۲۳.۸) خواهیم داشت:

$$e_1^+ + e_1^- = e_2^+ + e_2^-, \quad \frac{k_{1z}}{\mu_1} (e_1^+ - e_1^-) = \frac{k_{2z}}{\mu_2} (e_2^+ - e_2^-)$$

معادله اول را در  $k_{1z}/\mu_1$  ضرب و با اضافه و کم کردن دومی بهنتیجه زیر میرسیم:

$$T_{12}e_1^+ = e_2^+ + R_{12}e_2^-, \quad T_{12}e_1^- = R_{12}e_2^+ + e_2^- \quad (۲۸.۸)$$

در اینجا به صراحت وابستگی ضرایب فرنل به اندیس‌های محیط را نشان داده‌ایم. بنابراین می‌توانیم مولفه‌های میدان را در دو طرف سطح مشترک از طریق یک معادله ماتریسی بهم مربوط کنیم

$$\begin{pmatrix} e_1^+ \\ e_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & R_{12} \\ R_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^+ \\ e_2^- \end{pmatrix} \quad (۲۹.۸)$$

سپس ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\bar{M}_{m-1,m} = \frac{1}{T_{m-1,m}} \begin{pmatrix} 1 & R_{m-1,m} \\ R_{m-1,m} & 1 \end{pmatrix} \quad (۳۰.۸)$$

که نشان می‌دهد چگونه میدانها در روی سطح مشترک از طریق شرایط مرزی معادله‌های ماکسول بهم مربوط می‌شوند. در یک سیستم چند لایه، باید فاز اضافی  $e^{\pm jk_{mz}d_m}$  لازم توسط میدانها را وقتی از درون لایه  $m$  به ضخامت  $d_m$  منتشر می‌شوند، در نظر گیریم. این کار را می‌توان با معرفی ماتریس انتشار  $\bar{P}_m$  انجام داد.

$$\bar{P}_m = \begin{pmatrix} e^{jk_{mz}d_m} & 0 \\ 0 & e^{-jk_{mz}d_m} \end{pmatrix} \quad (۳۱.۸)$$

علامت توابع نمائی در ماتریس انتشار ناشی از این حقیقت است که میدان‌ها سمت راست ماتریس به مقادیر  $z$  بزرگ مربوط می‌شوند. سرانجام ماتریس‌های انتشار و سطح مشترک را می‌توانیم بصورت زیر ترکیب کنیم؛

$$\begin{pmatrix} e_1^+ \\ e_1^- \end{pmatrix} = \bar{\bar{M}}_{1,n} \begin{pmatrix} e_n^+ \\ e_n^- \end{pmatrix}$$

در اینجا ماتریس انتقال  $\bar{\bar{M}}^{tot}$  که موج از درون سیستم لایه لایه منتشر می‌شود را معرفی می‌کنیم؛

### ماتریس انتقال

$$\bar{\bar{M}}_{1,n}^{tot} = \bar{\bar{M}}_{1,2} \cdot \prod_{m=2}^{n-1} \bar{\bar{P}}_m \cdot \bar{\bar{M}}_{m,m+1}. \quad (32.8)$$

مفهوم ماتریس‌های انتقال به طرز شگفت انگیزی قدرتمند است، با این حال نسبتاً ساده است زیرا فقط باید ضرب ماتریس‌های  $2 \times 2$  را انجام دهیم.

تشریح امواج منتشر شونده در امتداد جهت  $+z$  موج  $e_1^+ = e_0 e^{-jk_1 z}$  که در جهت مثبت  $z$ ها منتشر می‌شود در نظر گیرید. هنگامی که موج به پائین ترین سطح مشترک برخورد می‌کند، بخشی از موج بازتاب شده و بخش دیگر انتقال می‌یابد،

$$e_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{R}_{1,n} \end{pmatrix} = e_0 \begin{pmatrix} [M_{1,n}^{tot}]_{11} & [M_{1,n}^{tot}]_{12} \\ [M_{1,n}^{tot}]_{21} & [M_{1,n}^{tot}]_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1,n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33.8)$$

در اینجا  $[M_{1,n}^{tot}]_{ij}$  نماشگر عناصر ماتریس ماتریس انتقال کل است. ضرایب  $\tilde{R}$  و  $\tilde{T}$  ضرایب بازتاب و انتقال کل است که خواص بازتاب و انتقال را در کل محیط لایه لایه در بر می‌گیرد و برخلاف ضرایب فرنل [بدون تیلد ( $\sim$ )] است که فقط برای تطبیق میدان‌ها در یک سطح مشترک است. در عبارت بالا از این نکته استفاده کردیم که برای موج تابشی که در امتداد  $+z$  منتشر می‌شود، مولفه  $e_n^-$  که در امتداد  $-z$  منتشر می‌شود باید صفر باشد. می‌توانیم ضرایب کلی را حل کرده و بدست آوریم؛

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1,n} &= [M_{1,n}^{tot}]_{11}^{-1} \\ \tilde{R}_{1,n} &= [M_{1,n}^{tot}]_{21} [M_{1,n}^{tot}]_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (34.8)$$

وقتی بصراحت امواج بازتاب و انتقالی را محاسبه می‌کنیم، باید در مورد ضریب فاز اضافی مواطبه باشیم. فرض کنید  $z_1$  و  $z_n$  نمایشگر بترتیب موقعیت اولین و آخرین سطح مشترک باشد، و یک میدان بصورت زیر در نظر گیرید؛

$$e_1^+(z) = e_0 e^{-jk_1 z} \implies e_1^+(z_1) = e_0 e^{-jk_1 z_1}$$

با استفاده از ضرایب بازتاب و انتقال کل، مولفه‌های میدان بازتاب و انتقالی خواهد بود؛

$$\begin{aligned} z < z_1 \quad \dots \quad e_1^- &= e_0 \tilde{R}_{1,n} \exp[jk_{1z}(z - z_1)] \\ z > z_n \quad \dots \quad e_n^+ &= e_0 \tilde{T}_{1,n} \exp[-j(k_{nz}z + k_{1z}z_1)]. \end{aligned} \quad (35.8)$$

توجه کنید که شبیه این روش می‌توانیم میدان‌ها را در هر جای دیگر داخل محیط لایه‌لایه محاسبه کنیم.

**تشریح امواج منتشر شونده در امتداد جهت  $-z$**  می‌توانیم همان ماتریس انتقال  $\tilde{M}$  را برای موج  $e_0 e^{jk_{nz}z}$  که در جهت  $-z$  منتشر می‌شود استفاده کنیم. ضرایب بازتاب و انتقال کل را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد؛

$$e_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{T}_{n,1} \end{pmatrix} = e_0 \begin{pmatrix} [M_{1,n}^{tot}]_{11} & [M_{1,n}^{tot}]_{12} \\ [M_{1,n}^{tot}]_{21} & [M_{1,n}^{tot}]_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{R}_{n,1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که در مقایسه با معادله ۳۳.۸ می‌نماید  $\tilde{R}_{n,1}$  و  $\tilde{T}_{n,1}$  عوض کرده‌ایم تا تاکید کنیم که موج تابشی در محیط  $n$  بجای محیط ۱ منتشر می‌شود. از حل آن ضرایب بازتاب و انتقال کل بدست می‌آید؛

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,1} &= -[M_{1,n}^{tot}]_{11}^{-1} [M_{1,n}^{tot}]_{12} \\ \tilde{T}_{n,1} &= [M_{1,n}^{tot}]_{22} - [M_{1,n}^{tot}]_{11}^{-1} [M_{1,n}^{tot}]_{12} \end{aligned} \quad (36.8)$$

برای میدان تابشی بصورت زیر  
 $e_n^-(z) = e_0 e^{jk_{nz}z} \implies e_n^-(z_n) = e_0 e^{jk_{nz}z_n}$   
 مولفه میدان بازتابی و انتقالی خواهد بود؛

$$\begin{aligned} z > z_n \quad \dots \quad e_n^+ &= e_0 \tilde{R}_{n,1} \exp[-j(k_{nz}z + k_{1z}z_n)] \\ z < z_1 \quad \dots \quad e_1^- &= e_0 \tilde{T}_{n,1} \exp[j(k_{1z}z + k_{nz}z_n)]. \end{aligned} \quad (37.8)$$

### ضریب بازتاب و انتقال یک تیغه

به عنوان یک مثال تشریحی، یک سیستم شامل سه محیط که محیط‌های بیرونی آن ۱ و ۳ و نیمه-بینهایت و محیط داخلی دارای ضخامت محدود  $d_2$  است در نظر گیرید. از ترکیب ماتریس انتقال و انتشار خواهیم داشت؛

$$\begin{pmatrix} e_1^+ \\ e_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & R_{12} \\ R_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{-j\phi_2} \end{pmatrix} \frac{1}{T_{23}} \begin{pmatrix} 1 & R_{23} \\ R_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3^+ \\ e_3^- \end{pmatrix}$$

که در آن  $\phi_2 = k_{2z}d_2$  فاز وابسته به انتشار درون تیغه است. عناصر ماتریس انتقال را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد؛

$$\bar{M}_{1,3}^{tot} = \frac{1}{T_{12}T_{23}} \begin{pmatrix} e^{j\phi_2} + R_{12}R_{23}e^{-j\phi_2} & e^{j\phi_2}R_{23} + R_{12}e^{-j\phi_2} \\ e^{j\phi_2}R_{12} + R_{23}e^{-j\phi_2} & e^{j\phi_2}R_{12}R_{23} + e^{-j\phi_2} \end{pmatrix}$$

از این رابطه و معادله (۳۴.۸) می‌توانیم ضرایب بازتاب و انتقال کلی را بدست آوریم؛

### ضرایب بازتاب و انتقال کلی برای یک تیغه

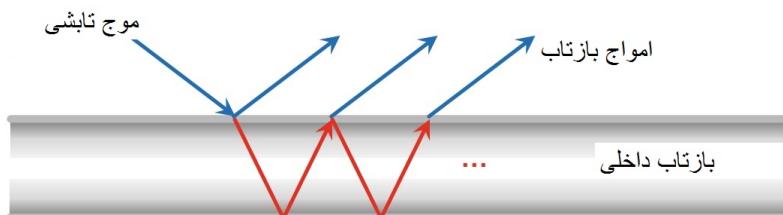
$$\tilde{R}_{1,3} = R_{12} + \frac{T_{12}R_{23}T_{21}e^{-j2\phi_2}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-j2\phi_2}}, \quad \tilde{T}_{1,3} = \frac{T_{12}T_{23}e^{-j\phi_2}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-j2\phi_2}} \quad (۳۸.۸)$$

در مخرج  $-R_{21} = R_{12}$  را جایگزین کرده‌ایم که از رابطه (۲۶.۸) پیروی می‌کند. برای بدست آوردن بینش فیزیکی مخرج در  $\tilde{R}_{1,3}$  را به یک سری هندسی بسط می‌دهیم؛

$$\tilde{R}_{1,3} = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-j2\phi_2}$$

$$+ T_{12}R_{23}(R_{21}R_{23})T_{21}e^{-j4\phi_2} + T_{12}R_{23}(R_{21}R_{23})^2T_{21}e^{j6\phi_2} + \dots$$

این اجزه می‌دهد تا تفسیری به طور شفاف که به صورت شماتیک در شکل (۱۱.۸) داشته باشیم. جمله اول  $R_{12}$  نشان می‌دهد که موج ورودی بطور مستقیم از سطح مشترک بالا بازتاب شده است. مشارکت‌های باقی‌مانده سپس بازتاب‌های داخلی متعدد را شامل می‌شود، برای مثال، جمله دوم  $T_{12}R_{23}T_{21}$  یک بازتاب در سطح مشترک پائین‌تر را نشان می‌دهد، همانطور که از فاز انتشار  $e^{-j2\phi_2}$  نیز مشهود است.

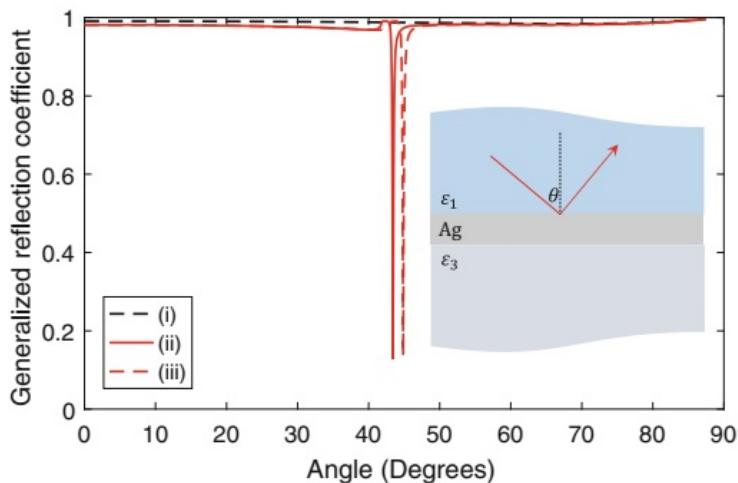


شکل ۱۱.۸: نمایش شماتیک ضرایب بازتاب کلی یک تیغه. موج ورودی بازتاب یا انتقال می‌یابد و موج انتقال یافته می‌تواند چندین بازتاب داخلی داشته باشد که در سطح بالائی احتمال انتقال آن وجود دارد. در شکل امواج انتقال یافته از سطح مشترک پایینی را نشان نداده‌ایم.

### ۳.۳.۸ بازنگری پلاسمون‌های سطحی

با استفاده از روش ماتریس انتقال، اکنون می‌توانیم ضرایب بازتاب و انتقال کلی را برای محیط‌های لایه لایه به راحتی محاسبه کنیم. خط تیره سیاه نشان داده شده با (i) در شکل (۱۲.۸)، ضریب

بازتاب سطح مشترک یک تک شیشه- طلا را نشان می‌دهد. همانطور که قبلاً در بخش ۱.۱.۸ بحث شد، روابط پاشندگی فوتون‌ها و پلاسمون‌های سطحی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و در نتیجه هیچ پلاسمونی سطحی را نمی‌توان مستقیماً توسط نور راه اندازی کرد: ضریب بازتاب  $R^{TM}$  برای همه زوایای ورودی به یک نزدیک است و تنها تلفات کمی به نفوذ میدان جزء و تلفات اهمی در فلز نسبت داده می‌شود. همه چیز برای ساختار هندسی کرتشمن به‌طور قابل توجهی تغییر



شکل ۱۲.۸: ضریب بازتاب کل  $|\tilde{R}^{TM}|$  برای (الف) تیغه نیمه-بی‌نهایت و (ب، ج) ساختار لایه‌لایه. برای نمایش شماتیک به قسمت داخلی مراجعه کنید. در شبیه‌سازی‌هایی که از طول موج فضای آزاد  $\lambda = 620 nm$  برای نور تابشی استفاده می‌کنیم، مربوط به انرژی فوتونی  $eV = 2$ ، تابع دی‌الکتریک نقره که از آزمایش‌های نوری گرفته شده است [۳۴]، ضریب شکست  $n_1 = 1.5$  (شیشه) برای محیط بالای لایه که ساختار از طریق آن تحریک می‌شود و ضریب شکست  $n_1 = 1$  برای محیط زیر لایه. (الف) برای یک سطح مشترک هیچ پلاسمون سطحی نمی‌تواند تحریک شود. (ب) برای ساختار تیغه‌ای (ضخامت  $d = 50 nm$ )، پلاسمون‌های سطحی با زاویه خاصی تابیده می‌شوند، جایی که انرژی و مومنتوم فوتونتابشی و پلاسمون سطحی در سطح مشترک با هم منطبق هستند. (ج) شبیه‌سازی که در آن نفوذ  $\epsilon_3$  کمترین افزایش می‌باشد. به دلیل میدان‌های محو شونده قوی محلی پلاسمون سطحی، انرژی پلاسمون نسبت به تغییرات محیط دی‌الکتریک محلی بسیار حساس است.

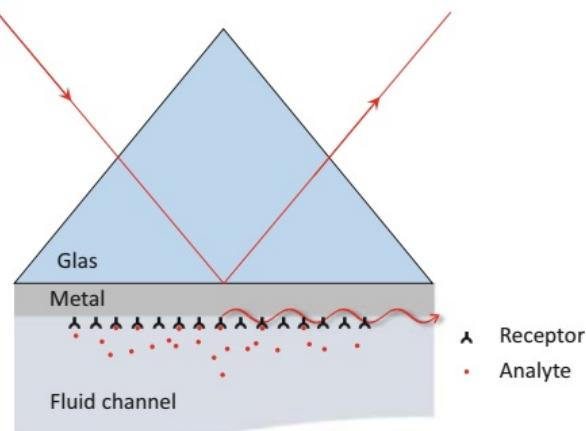
می‌کند، به خط قرمز جامد نشان داده شده برای (ب) در شکل (۱۲.۸) مراجعه کنید. برای زاویه ۴۳ درجه، انرژی و مومنتوم نور تابشی (از طریق محیط شیشه‌ای بالائی) با پلاسمون سطحی در سطح مشترک نقره پایین مطابقت دارد و یک پلاسمون سطحی راه اندازی می‌شود. این را می‌توان به‌وضوح به عنوان یک افت شدید ضریب بازتاب کلی مشاهده کرد که در آن عملان تمام انرژی نور تابشی به پلاسمون‌های سطحی منتقل می‌شود. از آنجا که میدان‌های پلاسمون‌های سطحی به‌شدت افزون هستند، پاشندگی آنها به‌طور حساس به تغییرات محیط دی‌الکتریک محلی بستگی دارد. برای یک تیغه نیمه بی‌نهایت پاشندگی پلاسمون توسط معادله (۶.۸) داده می‌شود.

$$k_x = k_1 \sin \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_0 (\epsilon_2 + \epsilon_3)}} k_0$$

که در آن  $\epsilon_2$  و  $\epsilon_3$  بترتیب گذردهی فلز و مواد دی‌الکتریک زیر فلز است و ما مومنتوم نور تابشی را در پائین‌آمدن بازتاب بصورت  $k_1 \sin \theta$  بیان کرده‌ایم. هنگامی که گذردهی دی‌الکتریک بمقدار کمی  $\epsilon_3 + \delta\epsilon_3$  تغییر می‌کند، زاویه پائین‌آمدن بازتاب نیز کمی  $\delta\theta$  تغییر می‌کند. خطی کردن عبارت بالا می‌دهد

$$k_1 [\sin \theta + \cos \theta \delta\theta] \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_0 (\epsilon_2 + \epsilon_3)}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_3} \frac{\delta\epsilon_3}{\epsilon_3} \right] k_0$$

بنابراین، میزان کمترین تقریب تغییر  $\delta\theta$  خواهد شد؛



شکل ۱۳.۸: شماتیک حسگر پلاسمون سطحی بر اساس پیکربندی کرتشمن. سطح فلز با گیرنده‌ها فعال می‌شود. پس از اتصال، گذردهی محیط پایینی کمی تغییر می‌کند و باعث ایجاد تغییر در پاشندگی پلاسمون سطحی می‌شود که می‌تواند به صورت نوری آشکارسازی شود.

$$\delta\theta \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_3} \frac{\delta\epsilon_3}{\epsilon_3} \tan \theta \quad (۳۹.۸)$$

خط چین قرمز (ج) در شکل (۱۲.۸) ضریب بازتاب برای چینشی که گذردهی پائین‌ترین محیط پنج درصد افزایش یافته است را نشان می‌دهد. این تغییر باعث تغییر قابل توجهی در زاویه  $\theta$  می‌شود که پلاسمون سطحی در آن راهاندازی می‌شود و حساسیت قوی پلاسمون‌های سطحی را نسبت به تغییرات محیط دی‌الکتریک محلی نشان می‌دهد. این حساسیت بهدلیل شدت محلی سازی مشخصه محوشوندگی میدان‌های پلاسمون سطحی است، که به‌طور قابل توجهی تحت تأثیر تغییرات دی‌الکتریک در مجاورت سطح فلز قرار می‌گیرد.

**حسگرهای پلاسمون سطحی** این حساسیت سطحی را می‌توان برای حسگرهای (زیستی) پلاسمون سطحی، که کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی پیدا کرده‌اند، به عنوان مثال برای آزمایش‌های بالینی بارداری، استفاده کرد [۴۶، ۵۲]. اصل اساسی در شکل (۱۲.۸) نشان داده شده است: سطح فلزی پایین با گیرنده‌هایی که می‌توانند پارامترهای خاص مواد (آنالیت) را برای تشخیص متصل کنند، فعال می‌شود. محیط پایینی به‌یک کانال مایع متصل است که مقداری مایع مانند آب را منتقل می‌کند. اگر هیچ آنالیتی در سیال وجود نداشته باشد، هیچ چیزی به گیرنده‌ها متصل نمی‌شود و افت بازتاب ساختار هندسی

کرتشمن بدون تغییر باقی می‌ماند. از طرف دیگر، در صورت وجود آنالیت‌ها، می‌توانند به‌گیرنده‌ها متصل شوند، و باعث تغییر کمی  $\delta$  در محیط دی‌الکتریک می‌شوند (ضریب شکست آنالیت‌ها معمولاً تا حدودی با مایع متفاوت است)، و باعث تغییر  $\delta\theta$  افت ضریب بازتاب شده، که از طریق یک آشکارسازی نوری مشاهده می‌شود. حساسیت‌های معمولی سنسورها بر اساس پلاسمون‌های سطحی برای  $\delta\theta$  در مرتبه میلی درجه است.

### تزویج پلاسمون‌های سطحی

در ابتدای این فصل در مورد پلاسمون‌های سطحی برای سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک بحث کردیم. با روش ماتریس انتقال، در حال حاضر در موقعیتی هستیم که پاشندگی پلاسمون سطحی و همچنین برای سیستم‌های پیچیده‌تر، مانند فیلم فلزی در حالت ساختار هندسی کرتشمن را محاسبه کنیم. در ادامه کمی مفصل‌تر در مورد نحوه اتصال این دو رویکرد بحث خواهیم کرد. برای روشن شدن همه چیز از ابتدا: ماتریس انتقال یک راه حل دقیق برای معادله ماکسول ارائه می‌دهد، بنابراین مجبور نیستیم آن را بهبود بخشیم. با این حال، برای یافتن تفسیر عینی برای این نتایج دقیق راحتر خواهد بود.

با درنظر گرفتن سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک که در شکل (۴.۸) نشان داده شده است، یک تیغه فلزی با گذردهی  $\epsilon_2$  و ضخامت  $d$  که در یک محیط دی‌الکتریک با گذردهی  $\epsilon_1$  قرار گرفته است را در نظر می‌گیریم. بهدلیل تقارن، جواب‌ها نسبت به  $z$  توابع زوج یا فرد هستند. همانطور که در تمرین ۶.۸ توضیح داده شده است، می‌توان شرایط پلاسمون سطحی اصلاح شده برای تیغه فلزی را بدست آورد:

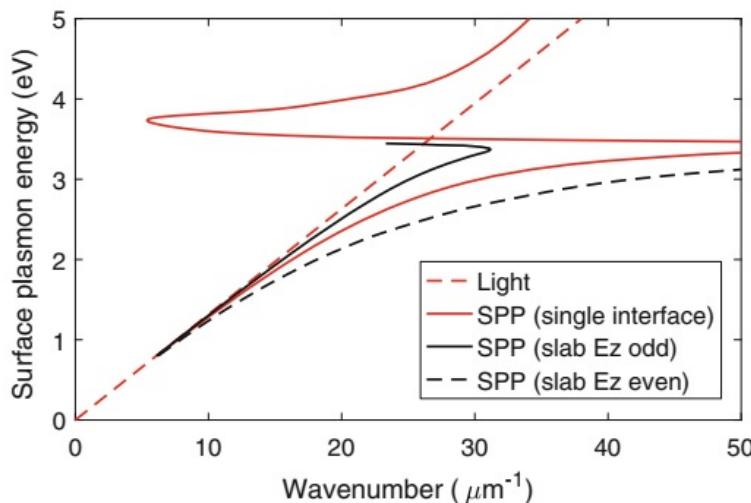
$$\tanh\left(\frac{k_{2z}d}{2}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{k_{1z}\epsilon_2}{k_{2z}\epsilon_1}\right) & \text{برای } H_y \text{ زوج و } E_z \text{ فرد} \\ -\left(\frac{k_{2z}\epsilon_1}{k_{1z}\epsilon_2}\right) & \text{برای } H_y \text{ فرد و } E_z \text{ زوج} \end{cases} \quad (40.8)$$

و آنرا باید بطور عددی حل کرد. (۱۴.۸) پاشندگی را برای یک فیلم نقره بضخامت ۳۰ نانو متر نشان می‌دهد. بطوری که می‌توان مشاهده کرد، فرکانس‌های مودهای زوج و فرد از هم جدا شده که می‌توان بر حسب تزویج بین مودهای افزونگی سطح مشترک بالا و پائین تیغه فلزی درک کرد. هنگامی که ضخامت فیلم افزایش یابد، برای ۸۰ نانو متر به شکل (۱۵.۸) مراجعه کنید، تزویج کاهش یافته و مودهای جدا شده بطور قابل ملاحظه‌ای کوچک می‌شوند.

برای درک کیفی این رفتار، ساده‌ترین مدل را بر اساس دو نوسان‌ساز تزویج شده معروفی می‌کنیم که می‌تواند با پلاسمون‌های سطحی در دو طرف تیغه فلزی که با همان مومنتوم موازی  $\hbar k_x$  (که یک مقدار محافظت شده برای هندسه تیغه است) منتشر شوند، وابسته باشد. با معادلات حرکت نیوتون شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_a}{dt^2} + \gamma \frac{dx_a}{dt} + \omega_a^2 x_a &= gx_b + f_0 e^{j\omega t} \\ \frac{d^2x_b}{dt^2} + \gamma \frac{dx_b}{dt} + \omega_b^2 x_b &= gx_a \end{aligned}$$

دامنه نوسان‌ها را با  $x_a, x_b$  و فرکانس‌های  $\omega_a, \omega_b$  نشان داده و  $\gamma$  ثابت میرأی است.



شکل ۱۴.۸: پاشندگی پلاسمون سطحی برای فیلم نقره بضمخت ۳۰ نانومتر در بستر یک دیالکتریک به گذردهی  $\epsilon_1 = 2.25$ . خط تیره نمایشگر خط نور، خط قرمز پاشندگی پلاسمون سطحی برای یک سطح مشترک است. خطوط سیاه نمایشگر پاشندگی‌های پلاسمون سطحی برای تیغه فلزی است که از رابطه (۴۰.۸) محاسبه شده است.

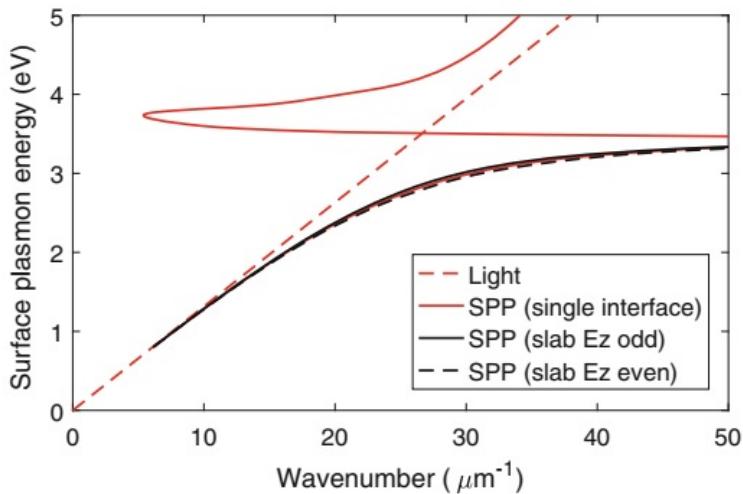
ضمناً ثابت تزویج بین دو نوسان کننده‌ها را با  $g$  و همین طور جمله راهانداز نوسان کننده را  $a$ ، و با فرکانس  $\omega$  و دامنه  $f_0$  معرفی کرده‌ایم. با اعمال راهانداز خارجی، دو نوسان کننده بعداز مراحل اولیه با همان فرکانس  $\omega$  بعنوان تحریک خارجی شروع به نوسان می‌کنند. بردار دامنه مخلط زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{pmatrix} = e^{j\omega t} \begin{pmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{x}_b \end{pmatrix}$$

که در آن مانند معمول فرض می‌کنیم که با گرفتن قسمت حقیقی از  $x_a, x_b$  بصراحت جابجایی فیزیکی بدست می‌آید. با وارد کردن این بردار در معادلات حرکت نیوتون و حذف عوامل نمائی رایج، به معادله زیر میرسیم:

$$\begin{pmatrix} \omega_a^2 - \omega^2 + j\gamma\omega & -g \\ -g & \omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{x}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41.8)$$

برای حل این معادله، می‌توانیم مودهای ویژه سیستم را جستجو کرده یا مستقیماً معادله ماتریس را حل کنیم. در ادامه روش دوم را انتخاب می‌کنیم و پس از محاسبه‌های ساده دامنه‌های یک سیستم نوسان‌ساز تزویجی که بطور هارمونیکی راهاندازی شده را بدست می‌آوریم؛



شکل ۱۵.۸: همان زیر نویس شکل (۱۴.۸) اما برای فیلم نقره بضمانت ۸۰ نانو متر.

### نوسانگرهای تزویجی با راهاندازی هارمونیکی

$$\bar{x}_a = \left[ \frac{\omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}{(\omega_a^2 - \omega^2 + j\gamma\omega)(\omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega) - g^2} \right] f_0 \quad (۴۲.۸)$$

$$\bar{x}_b = \left[ \frac{g}{(\omega_a^2 - \omega^2 + j\gamma\omega)(\omega_b^2 - \omega^2 + j\gamma\omega) - g^2} \right] f_0$$

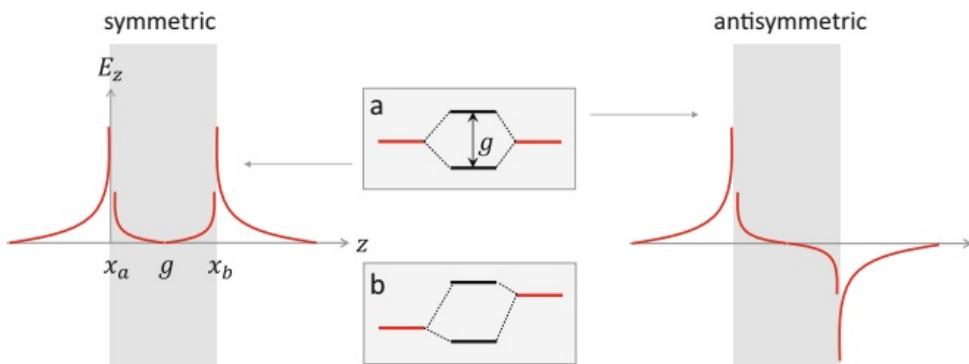
سپس سیستم پلاسمون تزویجی را بر حسب این مدل نوسان‌ساز ساده تحلیل می‌کنیم. شکل (۱۶.۸) نمای شماتیک سیستم را نشان می‌دهد. ابتدا وضعیتی را در نظر می‌گیریم که هر دو پلاسمون سطحی دارای فرکانس یکسانی  $\omega_a = \omega_b$  هستند، و مربوط به حالتی است که گذردهی مواد بالا و پایین فیلم فلزی  $\epsilon_1 = \epsilon_3$  یکسان است. در این حالت، مودهای ویژه ماتریس در معادله (۴۱.۸) متقارن و نامتقارن جمع مودهای پلاسمون سطحی هستند. فرکانس‌های ویژه را می‌توان برای  $\gamma \gg \omega_0 \gg g$  به صورت زیر محاسبه کرد :

$$\omega_{\pm} \approx \omega_0 + j \frac{\gamma\omega_0}{2} \pm \frac{g}{2}$$

آنها توسط ثابت تزویج  $g$  تقسیم می‌شوند و همان میرائی نوسان‌سازهای فرد را دارند. مود متقارن، که فرکانس آن کاهش می‌یابد، گاهی اوقات مود اتصال<sup>۲۵</sup> و مود نامتقارن مود ضد اتصال<sup>۲۶</sup> نامیده می‌شود. برای فیلم‌های فلزی به اندازه کافی ضخیم، تزویج  $g$  معمولاً بسیار کوچکتر از  $\gamma$  است.

<sup>۲۵</sup>Bonding

<sup>۲۶</sup>Anti-bonding



شکل ۱۶.۸: شماتیک پلاسمون‌های سطحی تزویجی. دو پلاسمون سطحی به‌سطح مشترک‌های یک تیغه فلزی افرون شده، که توسط نوسانگرهای هارمونیکی  $x_a$  و  $x_b$  که از طریق میدان‌های محو شونده پلاسمون سطحی تزویج شده، مدل سازی شده است. این کار با تزویج ثابت  $w$  توصیف می‌شود. (الف) برای انرژی‌های مساوی مودهای سیستم تزویج شده که شامل مودهای متفاوت و نامتقارن است، بصورت شماتیک در سمت چپ و راست، با یک جدا سازی انرژی  $w$  نشان داده شده است. (ب) برای انرژی‌های پلاسمون نامساوی، تقسیم مود کاهش یافته، و مشخصه مودویژه تحت تأثیر خواص نوسان‌سازهای بدون تزوج  $x_a$  و  $x_b$  هستند.

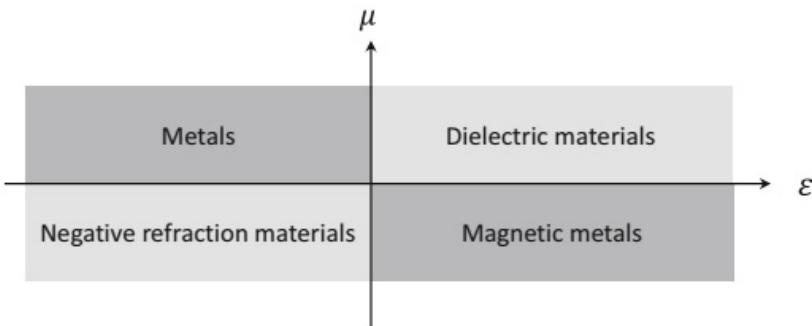
در اصل، تحلیل مشابه برای نوسان‌سازهای با فرکانس‌های مختلف نیز صادق است، برای مثال، ساختار هندسی معمولی کرتشمن با پاشندگی‌های مختلف پلاسمون سطحی در دو سطح مشترک تیغه، همانطور که در شکل (۱۶.۸)-ب نشان داده شده است. سپس نور تابشی نوسان‌ساز  $a$  را راهاندازی کرده و تحریک از طریق تزویج به‌نوسان‌ساز  $b$  منتقل می‌شود. این یک طرح تفسیری ساده اما مناسب برای تزویج پلاسمون سطحی در سیستم‌های لایه فلزی ارائه می‌کند.

## ۴.۸ شکست منفی

در این فصل مشاهده کردیم که حتی یک سیستم ساده مانند سطح مشترک فلز-دی‌الکتریک، فیزیک جالبی را به‌نمایش می‌گذارد. ممکن است تعجب کنید که آیا ممکن است اثرات مشابهی برای ترکیب‌های دیگر مواد، به‌ویژه سیستم‌هایی با پاسخ مغناطیسی  $(\omega)\mu$  بزرگ در محدوده نوری وجود داشته باشد. همانطور که در فصل قبل بحث کردیم، چنین موادی در طبیعت وجود ندارند بلکه می‌توانند به‌صورت مصنوعی تولید شوند. فرض کنید که می‌توانیم مواد فوق با مقادیر  $(\omega)\epsilon$ ،  $(\omega)\mu$  دلخواه، همانطور که در شکل (۱۷.۸) نشان داده شده است، تولید کنیم. چه انتظاری می‌توانیم داشته باشیم؟

- این وضع مربوط به‌دی‌الکتریک‌های معمولی است، گرچه نوع معمولی  $\mu \approx \mu_0$  وجود دارد. از رابطه پاشندگی داریم:

$$k^2 = \epsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2 \implies \omega = \frac{kc}{n(\omega)}, \quad n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}{\mu_0\epsilon_0}} \quad (۴۳.۸)$$



شکل ۱۷.۸: طبقه‌بندی مواد با توجه به گذردهی  $\epsilon$  و نفوذپذیری  $\mu$ .

بنابراین سرعت نور با ضریب شکست ( $n$ ) در محیط نسبت به فضای آزاد تغییر می‌کند، که باعث شکست امواج صفحه‌ای (یا اشعه در مورد اپتیک هندسی) در سطح مشترک بین مواد با مقادیر مختلف ( $\omega$ ) می‌شود.

- $\epsilon < 0, \mu < 0$  این وضع بفلزات مربوط می‌شود. از رابطه پاشندگی  $\omega^2 \mu \epsilon = k_x^2 + k_z^2$  مشاهده می‌کنیم که فقط امواج محوشونده<sup>۲۷</sup> با عدد موج موهومی در فلزات وجود دارد. بدین دلیل، نور در سطح مشترک بین دیالکتریک و فلز بازتاب می‌شود. علاوه بر این، نوع جدیدی از تحریک در چنین سطح مشترک‌ها وجود دارد، که قبلاً در باره پلاسمون‌های سطحی بحث شد.
- $\epsilon < 0, \mu < 0$  این وضعیت مربوط بفلزات مغناطیسی است. با توجه به اصل دوگانگی، خواص فیزیکی مشابه فلزات معمولی است؛ با این حال، نقش میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی عوض می‌شود. باز هم نور نمی‌تواند در داخل فلز مغناطیسی انتشار یابد، و پلاسمون‌های سطحی (اکنون با ویژگی  $TE$ ) در سطح مشترک بین دیالکتریک و فلز مغناطیسی وجود دارد.
- $\epsilon < 0, \mu < 0$  در ابتدا به نظر می‌رسد این مورد خیلی جالبی نیست. با ارائه این پارامترهای ماده در رابطه پاشندگی، نتیجه مشابهی مانند معادله (۴۳.۸) با ضریب شکست زیر به دست می‌آوریم.

$$n = \pm \sqrt{\frac{-|\epsilon|(-|\mu|)}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

که مانند حالت  $\epsilon > 0, \mu > 0$  به نظر میرسد. با این حال، همانطور که قبلاً در معادله ذکر شد، باید در مورد علامت ریشه دوم دقت کنیم. معمولاً کسی در مورد علامت زحمت نمی‌کشد، آن را مثبت انتخاب می‌کنند و در واقع این برای دیالکتریک‌های معمولی صحیح است. با این حال، برای  $\epsilon < 0, \mu < 0$  باید علامت منفی را انتخاب کرد، همانطور

<sup>۲۷</sup>Evanescence Waves

که چند لحظه دیگر نشان می‌دهیم، اینگونه مواد را بنام مواد با ضریب شکست منفی می‌نامند.

بنابراین چگونه می‌توانیم بگیریم که کدام علامت باید برای ضریب شکست انتخاب کنیم؟ مانند همیشه در الکترودینامیک، پاسخ توسط معادلات ماکسول ارائه شده است. معادلات کرل بدون جمله منبع خارجی و برای امواج صفحه‌ای با معادله (۳۸.۲) داده شده است.

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\epsilon\omega\mathbf{E}.$$

از این فوراً می‌توان دریافت که

- برای مواد با  $\mu > 0, \epsilon > 0$  بردارهای  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  یک دستگاه مختصات متعامد دست  $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}}$  راست می‌سازند، در حالی که
- برای مواد با  $\mu < 0, \epsilon < 0$  بردارهای  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  یک دستگاه مختصات دست چپ  $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{E}} = -\hat{\mathbf{H}}$  می‌سازند.

در ادامه، وضعیتی در نظر می‌گیریم که در شکل (۹.۸) نشان داده شده است، در آنجا یک موج صفحه‌ای به سطح مشترک بین مواد با ضریب شکست‌های منفی و مثبت برخورد می‌کند. خیلی ویژه، فرض می‌کنیم که

• پارامترهای  $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \mu_1$  برای ماده نیم-فضای  $z < 0$  است.

• پارامترهای  $\epsilon_0 = -\epsilon_2 = -\mu_2$  برای ماده نیم-فضای  $z > 0$  است.

حالی تابشی یک موج صفحه‌ای با مشخصه  $TM$  را مورد بحث قرار می‌دهیم. برای موج بردار و میدان‌هایی که مواد ضریب شکست مثبت دارند، داریم

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = -Z_0 \hat{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{H}_1 = \frac{Z_0 H_y}{k} \begin{pmatrix} k_z \\ 0 \\ -k_x \end{pmatrix}$$

که در آن  $Z_0$  امپدانس فضای آزاد است. برای آنکه میدان‌های مواد با ضریب شکست منفی را بدست آوریم، شرایط مرزی معادلات ماکسول را با پیوستگی میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی و مولفه عمودی جابجایی دیالکتریک بکار می‌بریم. این می‌دهد

$$E_{1x} = E_{2x}, \quad \epsilon_0 E_{1z} = -\epsilon_0 E_{2z}, \quad H_{1y} = H_{2y}$$

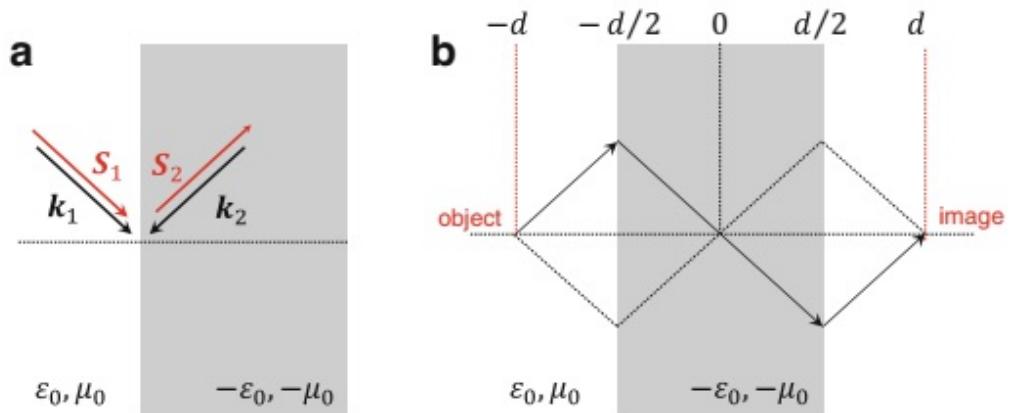
بنابراین، هنگامی از مواد با ضریب شکست مثبت به منفی تبدیل می‌کنیم، خواهیم داشت؛

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{1x} \\ 0 \\ -E_{1z} \end{pmatrix} = \frac{Z_0 H_y}{k} \begin{pmatrix} k_z \\ 0 \\ k_x \end{pmatrix}. \quad (۴۴.۸)$$

اکنون می‌توانیم از این حقیقت استفاده کنیم که در مواد با ضریب شکست منفی بردارهای  $k, E, H$  یک دستگاه مختصات دست چپ را تشکیل می‌دهند؛

$$\mathbf{k}_2 = -k \hat{\mathbf{E}}_2 \times \hat{\mathbf{H}}_2 = \begin{pmatrix} k_z \\ 0 \\ k_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_z \end{pmatrix}. \quad (45.8)$$

بنابراین، مولفه موازی بردار موج حفظ شده اما مولفه  $z$  در جهت مخالف خواهد بود. به عبارت دیگر، سرعت فاز در هر دو مواد بسوی سطح مشترک خواهد بود! این یک وضع بسیار نامعمول است که ما قبلًا تحت عنوان "شکست منفی" از آن یاد کردیم. به شکل (۱۸.۸) برای نمایش گرافیکی مراجعه کنید. همچنین می‌توانیم بردارهای پواین‌تینگ را در هر دو ماده محاسبه کنیم



شکل ۱۸.۸ :

که نشان می‌دهد انرژی به طور پیوسته در جهت مثبت  $z$ ‌ها جریان می‌یابد و تنها سرعت فاز است که جهت آن مخالف جهت جریان انرژی در مواد با ضریب شکست منفی است.

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 = \frac{Z_0 H_y^2}{2k} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 = \frac{Z_0 H_y^2}{2k} \begin{pmatrix} -k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix},$$

## ۱.۴.۸ عدسی وسلاگو

مواد با ضریب شکست منفی اولین بار توسط وسلاگو<sup>۲۸</sup> در سال ۱۹۶۴ مورد توجه قرار گرفت [۵۳]، و چیزی شبیه یک کنجکاوی نظری باقی ماند. وسلاگو همچنین متوجه شد که یک تیغه از مواد با ضریب شکست منفی می‌تواند به عنوان یک عدسی عمل کند (شکل ۱۸.۸). منبع نقطه‌ای را در موقعیت  $z = -d$  در مقابل یک تیغه با ضخامت  $d$  در نظر بگیرید. با رדיابی اشعه‌های ساطع شده از جسم به راحتی مشاهده می‌شود که آنها در طرف دیگر تیغه در موقعیت آینه  $z = d$  دوباره

<sup>۲۸</sup>Veselago

کانونی می‌شوند. به طور کلی، آن یک عدسی بیش از حد مفید نیست ولی همراه با تعدادی از ویژگی‌های بسیار دیدنی است.

- عدسی وسلاگو احنا ندارد،
- محور نوری ندارد،
- بزرگنمائی ندارد،
- نمی‌تواند پرتوهای موازی نور را کانونی کند.

#### ۲.۴.۸ عدسی کامل

عدسی وسلاگو در سکوت باقی ماند، گرچه گاهی مورد توجه قرار می‌گرفت، اما در سال ۲۰۰۰ هنگامی که جان پندری<sup>۲۹</sup> انتقال میدانهای محوشونده را در عدسی وسلاگو تحلیل کرد و متوجه شد که "شکست منفی یک عدسی کامل می‌سازد"<sup>۳۰</sup> [[۵۴]]. من مطالعه این نشریه را قویاً توصیه می‌کنم زیرا به عنوان مثال نحوه نگارش زیبای یک مقاله تحقیقاتی عالی نشان می‌دهد. در بند اویل پندری می‌گوید:

عدسی‌های نوری قرن‌ها یکی از ابزارهای اصلی دانشمندان بوده‌اند. عملکرد آنها بر اساس اپتیک کلاسیک به‌خوبی قابل درک است: سطوح منحنی به‌دلیل تغییر ضربی شکست نور را متمرکز می‌کنند. به‌همان اندازه محدودیت‌های آنها توسط اپتیک موج تعیین می‌شود: هیچ عدسی نمی‌تواند نور را روی ناحیه‌ای کوچکتر از مربع طول موج،<sup>۲</sup> کانونی کند. چه چیز جدیدی برای گفتن وجود دارد به جز اینکه عدسی را کاملاً صیقل دهید و دی‌الکتریک کمی بهتر اختراع کنید؟ در این مقاله می‌خواهم محدودیت سنتی در عملکرد عدسی را به‌چالش بکشم و یک نوع از "ابر عدسیها" را عنوان کرده و یک طرح عملی برای اجرای چنین عدسی را پیشنهاد کنیم.

برای درک اینکه چرا عدسی وسلاگو یک "ابر عدسی" است، اکنون تمرکز موج را با استفاده از روش ماتریس انتقال که قبلاً مدون کرده بودیم، تجزیه و تحلیل می‌کنیم. یک تیغه به‌ضخامت  $d$  و پر از مواد با شکست منفی را که در خلا واقع شده است در نظر می‌گیریم. فرض کنید یک موج محوشونده<sup>۳۱</sup> با عدد موج زیر

$$k_{1z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} = -j\sqrt{k_x^2 - k_0^2} \equiv -jk_0$$

روی اولین سطح مشترک می‌تابد. ما از  $\epsilon_0 - \epsilon$  و فرض  $\mu_0 - \mu$  برای موج محوشونده استفاده می‌کنیم. در داخل مواد شکست منفی، داریم

$$k_{2z} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_x^2} = -j\sqrt{k_x^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \equiv -jk$$

<sup>۲۹</sup>John Pendry

<sup>۳۰</sup>Evanescence Wave

و در انتهای محاسبات  $\epsilon_0 \rightarrow -\epsilon$  و  $\mu_0 \rightarrow -\mu$  را قرار خواهیم داد. توجه کنید که تمام اندیس‌های مواد را حذف کرده‌ایم. از رابطه (۳۸.۸) استفاده کرده و بدست می‌آوریم؛

$$\tilde{T}_{13} = \lim_{\epsilon \rightarrow -\epsilon_0} \lim_{\mu \rightarrow -\mu_0} \frac{\left(\frac{2\mu k_0}{\mu k_0 + \mu_0 k}\right) \left(\frac{2\mu_0 k}{\mu_0 k + \mu k_0}\right) e^{-kd}}{1 + \left(\frac{\mu k_0 - \mu_0 k}{\mu k_0 + \mu_0 k}\right) \left(\frac{\mu_0 k - \mu k_0}{\mu_0 k + \mu k_0}\right) e^{-2kd}}. \quad (46.8)$$

توجه کنید که آرگومان تابع نمائی بهنحوی انتخاب شده است که امواج محوشونده بطور مطلوبی در بازتابهای پی در پی میرا شوند. این را می‌توانید از بسط مخرج بصورت سری هندسی که قبلًا مشابه آن در حالت انتشار امواج شرح داده شده است، مشاهده کنید.

بعداً با توجه به حد  $\epsilon_0 \rightarrow -\epsilon$  و  $\mu_0 \rightarrow -\mu$  خواهیم داشت  $k \rightarrow k_0$  و ضرایب انتقال و بازتاب فرنل بعلت صفر شدن  $\mu k + \mu_0 k'$  در مخرج، واگرا می‌شود. به همین دلیل، می‌توانیم در مخرج معادله (۴۶.۸) عامل ثابت ۱ را چشم پوشی کنیم. بنابراین، برای ضریب انتقال کلی یک تیغه پُر از مواد شکست منفی خواهیم داشت؛

### ضرایب انتقال کلی برای عدسی کامل

$$\tilde{T}_{13} = \lim_{\epsilon \rightarrow -\epsilon_0} \lim_{\mu \rightarrow -\mu_0} \frac{4\mu\mu_0 k_0 k}{(\mu k_0 - \mu_0 k)(\mu_0 k - \mu k_0)} e^{kd} = e^{k_0 d} \quad (47.8)$$

به عبارت دیگر، عدسی وسلاگو امواج محوشونده را تقویت می‌کند! حتی آنها را به حدی تقویت می‌کند که در موقعیت تصویر دامنه امواج محوشونده دقیقاً برابر با موقعیت جسم است. این در واقع یک نتیجه غیرمنتظره و چشمگیر است. پندتی در مقاله اصلی خود نتیجه می‌گیرد:

بنابراین، اگرچه محاسبه‌های علیٰ را کاملاً دقیق انجام داده‌ایم، اما نتیجه نهایی این است که محیط امواج محوشونده را تقویت می‌کند. از این‌رو نتیجه می‌گیریم که با استفاده از این عدسی جدید، هردو امواج منتشر شونده و محوشونده دروضوح تصویر شرکت می‌کنند. بنابراین هیچ مانع فیزیکی برای بازسازی کامل تصویر فراتر از محدودیت‌های عملی روزنه و کامل بودن سطح عدسی وجود ندارد.

در تصویربرداری کامل توسط عدسی کامل، جادویی وجود دارد، و اگر کسی با دقت محاسبه نظری انجام دهد، منتهی به معادله (۴۷.۸) شده و مشخص نیست که سحر در کجا و چرا اتفاق می‌افتد. عدسی وسلاگو کاری را انجام می‌دهد که انتظارش را نداشتند، یعنی تقویت امواج محوشونده. یک مدل تفسیری شهودی برای عدسی وسلاگو وجود دارد که در مرجع [۵۵] ارائه شده است، و به درک بخشی از این سحر کمک می‌کند. در این مقاله نویسنده‌گان با بحث در باره مودهای افزونگی در سطح مشترک بین ماده ضریب شکست مثبت و منفی، مشابه تحلیل پلاسمون‌های سطحی ابتدای این فصل، شروع می‌کنند. به‌نظر می‌رسد که سطح مشترک از هر دو مود  $TE$  و  $TM$  پشتیبانی می‌کند، که در صورت وجود پارامترهای مواد ایده‌آل، میرا نمی‌شوند. بنابراین می‌توانیم دوباره از مدل نوسان‌ساز تزویجی معادله (۴۲.۸) استفاده کنیم، اما اکنون باید موقعیتی را در نظر بگیریم که تزویج بر میرایی غالب است. اولین نوسان‌ساز  $x$  مربوط

به مود افزونگی در سطح مشترک  $d/2$  – است که توسط میدان‌های محوشونده جسم راهاندازی می‌شود. در تشدييد، عملاً تمام تحریک بهنوسان‌ساز تزویج شده  $x_b$  منتقل می‌شود، تمرين  $10.8$  را ملاحظه کنید، که شروع بهنوسان شدید می‌کند. جادوی پیشنهادی، اما به طور کامل توسط مدل توضیح داده نشده است این است که مود افزونگی در سطح مشترک  $d/2$  (مربوط به  $x_b$ ) به گونه‌ای تحریک می‌شود که میدان محوشونده آن به مقداری در موقعیت تصویر میرا می‌شود که دقیقاً مطابق با آن مقدار در موقعیت جسم است.

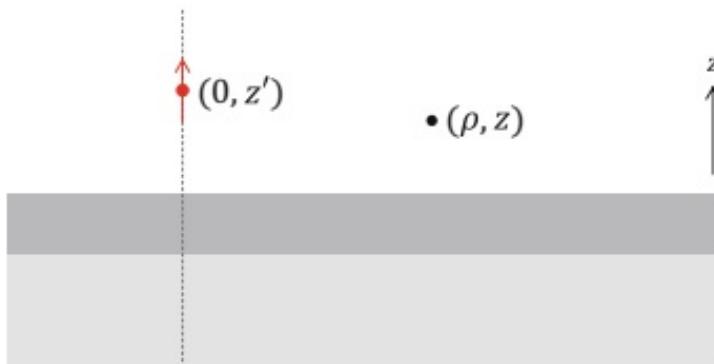
با توجه به روابط کرامرز-کرونیگ معادله (۳۴.۷) بدیهی است که پارامترهای مواد  $\epsilon_0$  و  $\mu$  – در تمام محدوده فرکانسی قابل دستیابی نیست، اما باید با تلفات در فرکانس‌های دیگر همراه باشد. در حال حاضر نیز هیچ ماده یا فراموادی وجود ندارد که نشان دهنده تحقق قابل ملاحظه مواد با ضریب شکست منفی در رژیم نوری باشد. به همین دلایل، عدسی‌های کامل توجه بسیاری را به خود جلب کرده است، اما کاربردها تا کنون کمیاب مانده است. در بخش ۲.۵.۸ در مورد استراتژی‌های تقریبی برای اجرای عدسی کامل در آزمایش را بحث خواهیم کرد.

## ۵.۸ تابع گرین برای محیط‌های لایه لایه

ما این فصل را با بحث درباره شیوه محاسبه تابع گرین برای یک محیط لایه لایه به پایان می‌بریم. با انجام این کار، ابتدا متوجه می‌شویم که تابع گرین دیدیک  $\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  میدان الکتریکی که در موقعیت  $\mathbf{r}$  می‌دهد، توسط یک دوقطبی نوسانی که در موقعیت  $\mathbf{r}'$  تولید می‌شود (شکل ۱۹.۸) است.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} .$$

عبارت بالا برای یک محیط بدون مرز وقتی تابع گرین (۱۹.۵) استفاده می‌کنیم صحیح است.



شکل ۱۹.۸: دوقطبی بالای محیط لایه لایه. یک دوقطبی در موقعیت  $(0, z')$  بالای یک محیط لایه لایه قرار دارد و میدان بازتابی در موقعیت  $(\rho, z)$  محاسبه می‌شود.

برای میدان الکتریکی در یک محیط لایه لایه، باید یک جمله اضافی بازتابی به بخش تابع گرین

معرفی کنیم.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu \left[ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{G}}_{redfl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \mathbf{p} \quad (48.8)$$

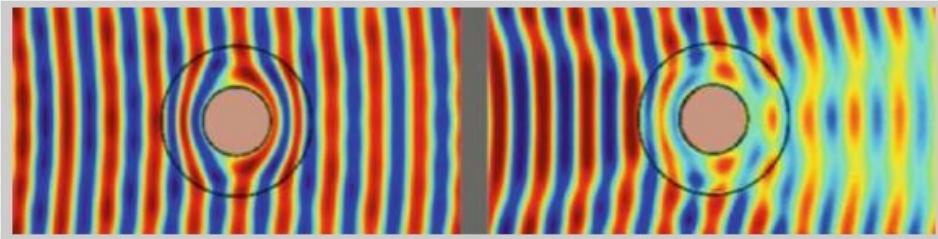
و باید بنحوی انتخاب شود که شرایط مرزی معادلات ماکسول را در سطح مشترک محیط لایه لایه ارضاء کند. در نتیجه، محاسبه تابع گرین بازتابی بسادگی شامل مراحل زیر است.

**تجزیه موج صفحه‌ای** تجزیه تابع گرین دیادیک  $\bar{\bar{G}}$  به امواج صفحه‌ای برای یک محیط بدون مرز.

**ضرایب فرنل** در این تجزیه هر یک از موج صفحه‌ای تابشی از سطح مشترک‌های محیط لایه لایه بازتاب و انتقال یافته و از ضرایب بازتاب و انتقال کل استفاده بعمل می‌آید.

**انتگرال گیری** سرانجام روی تمام امواج بازتابی و انتقالی انتگرال گیری کرده تا تابع گرین بازتاب شده بدست آید.

## پنهان‌سازی نوری



در سال ۲۰۰۶ دو مقاله پشت سر هم در مجله (علمی) ساینس ظاهر شد که سوال شده بود با فراموادی با گذردهی و نفوذپذیری  $(\bar{\epsilon}, \bar{\mu})(\mathbf{r}, \omega)$  چه باید کرد تا بتوان به تولید دلخواه رسید [۵۶، ۵۷]. در واقع، آنها از زاویه‌ای متفاوت به مسئله پرداختند و پرسیدند: معادلات ماکسول در فضای خمیده چگونه به نظر می‌رسد؟ به نظر می‌رسد که آنها با فضای غیر خمیده یکسانند به شرطی که  $(\bar{\epsilon}, \bar{\mu})(\mathbf{r}, \omega)$  از حالت عادی خارج شود به طوری که عوامل ناشی از تبدیل سیستم مختصات را شامل شود. بنابراین، با طراحی  $(\bar{\epsilon}, \bar{\mu})(\mathbf{r}, \omega)$  می‌توان اثرات فضای منحنی را تقلید کرد. در چکیده [۵۶] نویسنده‌گان می‌نویسند:

با استفاده از آزادی طراحی که فرامواد ارائه می‌دهند، نشان می‌دهیم که چگونه میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان به دلخواه تغییر مسیر داد و یک استراتژی طراحی را پیشنهاد می‌کنیم. میدان‌های حفظ شده - میدان جابجایی الکتریکی D، میدان القاء مغناطیسی B و بردار پواین‌تینگ S - همگی به شیوه سازگار جابجا شده‌اند. یک تصویر ساده از پنهان‌سازی حجم ناخواسته فضا برای حذف کامل میدان‌های الکترومغناطیسی ارائه شده است. کار ما طراحی عدسی‌های عجیب و غریب و پنهان‌سازی اجسام از میدان‌های الکترومغناطیسی ارتباط دارد.

پنهان‌سازی یک جسم مدت کوتاهی پس از طرح نظری در آزمایشی با استفاده از تابش مایکروویو نشان داده شد، زیرا ساختن فرامواد برای چنین طول موجی به طور قابل توجهی آسان‌تر است [۵۸]. شکل بالا نشان می‌دهد که چگونه یک موج صفحه‌ای در شبیه‌سازی با پارامترهای ایده‌آل مواد (شکل سمت چپ) و در آزمایش مایکروویو (شکل سمت راست) به‌اطراف یک جسم هدایت می‌شود. این نشان می‌دهد که در واقع امکان کنترل میدان‌های الکترومغناطیسی و هدایت آنها به‌اطراف اجسام وجود دارد. این موضوع در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است، اما تولید فرامواد با کیفیت بالا یکی از چالش‌های اصلی در این زمینه باقی مانده است.

تصویر از دیوید آر اسمیت گرفته شده است.

از نظر فنی، مراحل مختلف خیلی دشوار است. نقطه شروع تجزیه موج صفحه‌ای تابع گرین در پیوست (ب) آمده است.

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^3 k_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \left( \frac{k_m^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 - k_m^2} \right) d^3 k,$$

که در آن  $k_m$  عددموج محيطي است که منبع (دوقطبی) در آن قرار دارد. بهنظر می‌رسد ساده‌تر است که یک بخش موهمی کوچک  $j\eta$  را به عددموج  $k_m$  اضافه کنيم و اجازه دهيم در پایان محاسبه به  $0 \rightarrow \eta$  نزديک شود. سپس انتگرال گيري  $k_z$  را می‌توان با استفاده از رياضي آناليز مختلط بهصورت تحليلي انجام داد و در انتگرال گيري باقی‌مانده بر روی مولفه موج موازي، می‌توان مختصات قطبی را معرفی کرده و بهصورت تحليلي در زاويه سمت انتگرال گيري کرد. رابطه نهايی معادله (ب۹) انتگرال فقط روی مولفه بردار موج شعاعي  $k_\rho$  انجام می‌شود، که بيان می‌كند:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{\hat{z}_i \hat{z}_j}{k_m^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{j}{4\pi} \\ &\times \int_0^\infty \frac{e^{-jk_{mz}|z-z'|}}{k_{mz}} \left\{ \langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_m^\pm) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_m^\pm) \rangle + \langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_m^\pm) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_m^\pm) \rangle \right\} k_\rho dk_\rho \end{aligned} \quad (۴۹.۸)$$

در اينجا  $\epsilon^{TE}$  و  $\epsilon^{TM}$  بردارهای قطبش بترتیب با مشخصه  $TE$  و  $TM$  هستند، و برآكت نمایشگر ميانگين روی زاويه سمت است. به (ب۸) برای شكل صريح اين جمله‌ها مراجعه کنيد. علامت  $k_{mz}^\pm = \pm k_{mz}$  برای مثبت  $z' > z$  و منفي بغير از آن است. در رابطه بالا؛

- در داخل محيط با عدد موج  $k_m$  صادر است و معادله‌اي برای تابع گرين ديدايك تعریف می‌کند. به رابطه (۲۱.۵) مراجعه کييد.

- اما در شرایط مرزی ماکسول در سطح مشترك‌های محيط لایه لایه صدق نمی‌کند.

برای بحساب آوردن شرایط مرزی، يك تابع گرين بازتابی  $\bar{\bar{G}}_{refl}$  که شامل جواب معادله همگن باشد، معرفی می‌کنیم.

### ۱.۵.۸ منبع واقع در بالاترین لایه

ابتدا وضعیتی را که در شکل (۱۹.۸) نشان داده شده، جایی که هم منبع و هم نقطه مشاهده  $z$  و  $z'$  در بالای سطح مشترك محيط لایه لایه قرار دارند، را بحث می‌کنیم. بالاترین محيط را با  $n$  و موقعیت سطح مشترك را با  $z_n$  مشخص می‌گنیم. عبارت نمایی در معادله (۴۹.۸) برابر است با

$$\exp(-jk_{nz}|z - z'|) = \begin{cases} \exp[-jk_{nz}(z - z')] & z > z' \quad \text{برای} \\ & \\ \exp[+jk_{nz}(z - z')] & z < z' \quad \text{برای} \end{cases}$$

که مربوط به يك موج بالارونده برای  $z' > z$  و يك موج پائين‌رونده برای  $z' < z$  است. برای محاسبه مناسب شرایط مرزی در  $z_n$ ، تابع گرين کل را معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned}
G_{ij}^{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\hat{z}_i \hat{z}_j}{k_n^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
&- \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k_{nz}} \left\{ \langle \left[ e^{-jk_{nz}|z-z'|} \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_n^\pm) + A_n^{TE} e^{k_{nz}z} \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_n^+) \right] \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_n^\pm) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \left[ e^{-jk_{nz}|z-z'|} \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_n^\pm) + A_n^{TM} e^{k_{nz}z} \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_n^+) \right] \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^\pm) \rangle \right\} k_\rho dk_\rho
\end{aligned}$$

دلیل جمع کردن دو موج بالارونده با مشخصه  $TE$  و  $TM$  بقرار زیر است.

- **میدان الکتریکی** تابع گرین دیادیک میدان الکتریکی در موقعیت  $\mathbf{r}$  میدهد، و میدان الکتریکی باید شرط مرزی ماسکول را در  $z = z_n$  ارضاء کند. بدین دلیل میدان بازتابی را برای محور بدون پریم  $z$  و نه به پریم دار اضافه کردیم.

- **جواب همگن** جملات اضافی امواج صفحه‌ای جواب معادله موج همگن هستند. به همین دلیل، تابع گرین کل هنوز معادله تعریفی را با یک منبع دلتا در  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  برآورده می‌کند.
- **شرایط مرزی** ضرایب  $A_n^{TE}$ ،  $A_n^{TM}$  باید به گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط مرزی معادلات ماسکول در بالاترین سطح مشترک را ارضاء کنند.

برای تطبیق میدان‌ها در  $z = z_n$  عموماً  $z' < z$  داریم و عبارت نمایی  $e^{-jk_{nz}(z-z')}$  مربوط به یک موج پایین‌رونده است. جدا از ثابت عادی سازی (نماییزه)، میدان الکتریکی  $TE$  در محیط  $n$  کمی بالاتر از سطح مشترک (اما زیر موقعیت منبع) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$e_n(z) = e^{+jk_{nz}(z-z')} + A_n^{TE} e^{-jk_{nz}z}.$$

برای محاسبه ضریب مجمل  $A_n^{TE}$  میدانیم که میدان بازتابی بالارونده می‌تواند از طریق ضریب بازتاب عمومی  $\tilde{R}$  روش ماتریس انتقال، به میدان تابشی پائین‌رونده مربوط شود، معادله (۳۶.۸) را ملاحظه کنید،

$$e_n^+ = \tilde{R}_{n,1}^{TE} e_n^- \implies [A_n^{TE} e^{-jk_{nz}z_n}] = \tilde{R}_{n,1}^{TE} [e^{+jk_{nz}(z-z')}]$$

این اجزه می‌دهد که موج بازتابی را بصورت زیر بیان کنیم؛

$$A_n^{TE} e^{-jk_{nz}z} = \tilde{R}_{n,1}^{TE} e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)} \quad (۵۰.۸)$$

شبیه همین روش را می‌توان برای میدان‌های  $TM$  انجام داد. جمع بندی دو مشارکت، به بخش تابع گرین بازتابی برای محیط لایه لایه میرسیم؛

### تابع گرین بازتابی برای $z$ ، $z'$ بالای محیط لایه لایه

$$\begin{aligned}
G_{ij}^{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)}}{k_{nz}} \\
&\times \left\{ \tilde{R}_{n,1}^{TE} \langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_n^+) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_n^\pm) \rangle + \tilde{R}_{n,1}^{TM} \langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_n^+) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^\pm) \rangle \right\} k_\rho dk_\rho
\end{aligned} \quad (۵۱.۸)$$

که در آن علامت مثبت  $k_{nz}^{\pm}$  برای  $z'$  و علامت منفی برای  $z$  انتخاب می‌شود. عبارت بالا ضرایب بازتابی کل روش ماتریس انتقال ضربدر (میانگین‌گیری زاویه) بردار قطبش مشخصه  $TE$  و  $TM$  که بطور صریح در پیوست (ب-۸) داده شده است، ترکیب می‌کند. بطوری که در پیوست (ب) بحث شده است، می‌توان با خیال راحت مسیر انتگرال‌گیری  $k_\rho$  را از محور افقی به صفحه مختلط تغییر داده از این نظر که عموماً برای محاسبه کارآمد تابع گرین بازتابی مورد نیاز است.

شكل‌بندی فوق باید کمی دستکاری کرد تا تابع گرین گرین دیدیک را برای منبع واقع در بالاترین محیط و نقطه مشاهده واقع در داخل یا زیر محیط لایه لایه محاسبه شود. در اینجا فقط مورد دوم را بحث خواهیم کرد و طرح محاسبه منابع کلی و نقاط مشاهده را در پایان این فصل ترسیم می‌کنیم. موج پائین‌رونده در پایین‌ترین محیط می‌تواند مربوط به میدان "تابشی" بالاترین محیط باشد؛

$$e^- = \tilde{T}_{n,1} e_n^- \implies A_1 e^{jk_{1z} z_1} = \tilde{T}_{n,1} [e^{-jk_{nz}(z' - z_n)}]$$

بنابراین، تابع گرین دیدیک برای نقاط منبع و مشاهده  $z'$  بالا و پائین محیط لایه لایه را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

$$\begin{aligned} G_{ij}^{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-jk_{1z}(z_1 - z) - jk_{nz}(z' - z_n)}}{k_{nz}} \\ &\times \left\{ \tilde{T}_{n,1}^{TE} \langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1^-) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_n^-) \rangle + \tilde{T}_{n,1}^{TM} \langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1^-) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^-) \rangle \right\} k_\rho dk_\rho \end{aligned} \quad (۵۲.۸)$$

توجه کنید که در لایه‌های دور از نقطه منبع، تابع گرین کل فقط شامل قسمت بازتابی است. برای نشان دادن اینکه این شکل در واقع صحیح است، کافی است که خود را متقااعد کنیم

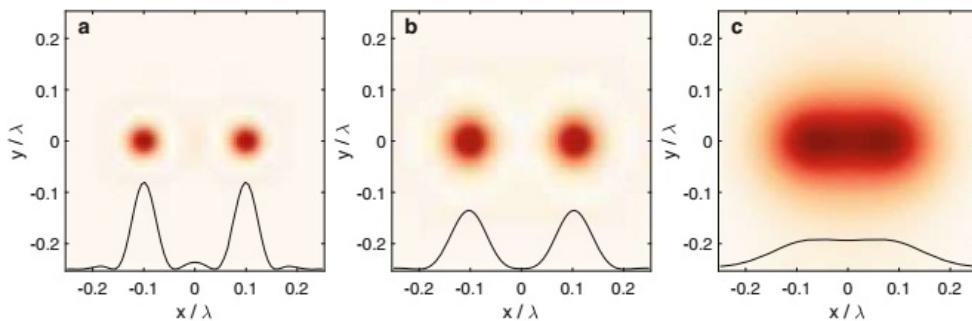
- این عبارت معادله موج همگن را برای  $z$  در پایین‌ترین محیط (زیرا امواج صفحه‌ای جواب معادله موج همگن هستند) ارضاء می‌کند و
  - شرایط مرزی معادلات ماکسول در پایین‌ترین سطح مشترک (توسط ساخت) ارضاء می‌شود.
- در اصل، با انتشار میدان‌ها از طریق محیط‌های لایه لایه، با استفاده از روش ماتریس انتقال که قبلًا بحث شد، می‌توان میدان‌ها را در تمام لایه‌های دیگر محاسبه کرد.

## ۲.۵.۸ تصویربرداری با یک عدسی ناقص و سلاگو

با توابع گرین بازتابی اکنون در موقعیتی هستیم که تصویربرداری از طریق عدسی ناقص و سلاگو را شبیه‌سازی کنیم. در واقع، قبلًا در کار اصلی پندری [۵۴] پیشنهاد شده بود که برای آزمایش اثبات عدسی کامل واقعی، یک تیغه نقره معمولی با  $\mu_0 = \mu = \mu_0$  جایگزین کرده و در فرکانسی کار کند که گذردهی به  $\epsilon_0 = -\mu$  برسد. اولین آزمایش توسط فنگ [۳۱] و همکارانش گزارش شد [۵۹]. شکل (۲۰.۸) تصویربرداری با چنین ابعادسی ناقص را نشان می‌دهد، شکل (الف) یک ماده ضریب شکست منفی با تلفات کوچک، (ب) یک تیغه فلزی با تلفات قوی‌تر و نفوذپذیری  $\mu_0$ .

<sup>۳۱</sup>Fang

و (ج) بدون تیغه. بهوضوح مشاهده می‌کنید که حتی تیغه فلزی ناقص منجر به تصویربرداری نسبتاً خوبی از دو نقطه‌ای می‌شود.



شکل ۲۰.۸: تصویربرداری از دو نقطه‌ای نقطه‌ای که در امتداد محور  $z$  ها بفاصله  $80$  نانومتر از یکدیگر قرار گرفته و یک تیغه فلزی شامل (الف) ضریب شکست منفی با تلفات کم  $j$   $\mu : \mu_0 = -1$   $\epsilon : \epsilon_0 = -1 - 0.01j$  (ب) فلز با  $\mu : \mu_0 = 1$   $\epsilon : \epsilon_0 = -1 - 0.1j$  و (ج) خلاء بضمخت  $40$  نانومتر و جسم و تصویر در  $20$  نانومتر دور از تیغه قرار دارند. ترسیمی از عدسی وسلاگو در شکل (۱۸.۸)، و طول موج نور  $400$  نانومتر است.

### ۳.۵.۸ حد میدان-دور

فرض کنید یک دوقطبی در بالای یک محیط لایه لایه قرار دارد، شکل (۱۹.۸)، و مطلوب ما تابش میدان دور است. از معادله (۵۱.۸) و (۵۲.۸) مشاهده می‌کنیم که توابع گرین بازتابی شامل انتگرال‌های بصورت زیر است؛

$$\mathcal{T}_1 = \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)} \langle \dots \rangle k_\rho dk_\rho$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty e^{-jk_{1z}(z_1-z)-jk_{nz}(z'-z_n)} \langle \dots \rangle k_\rho dk_\rho$$

که در آن  $\mathcal{T}_{1,2}$  برای نقطه مشاهده  $z$  واقع در بالا یا پائین محیط لایه لایه است. ابتدا میانگین‌گیری روی زاویه سمت انجام نمی‌دهیم، که به معادله پیوست (ب-۶) مراجعه و بعداز آن بحث، انتگرال‌ها را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم؛

$$\mathcal{T}_1 = \frac{-j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-jk_x(x-x')-jk_y(y-y')} e^{-jk_{nz}(z+z'-2z_n)} [\dots] dk_x dk_y$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{-j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-jk_x(x-x')-jk_y(y-y')} e^{-jk_{1z}(z_1-z)-jk_{nz}(z'-z_n)} [\dots] dk_x dk_y$$

در حال حاضر به دنبال حد میدان-دور این روابط هستیم که در آن  $(x, y, z) = r$  در تابع نمائی بسیار بزرگ می‌شود. محاسبه این انتگرال مشابه بحث قبلی در فصل سوم، نمایش میدان-دور امواج الکترومغناطیسی، که از تقریب فاز ثابت برای بدست آوردن آن استفاده شده است؛

$$\frac{-j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\dots) dk_x dk_y \xrightarrow{kr \gg 1} \frac{-j}{8\pi^2} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) [2\pi j k_z (\dots)]_{\mathbf{k}=k\hat{\mathbf{r}}} .$$

در اینجا جمله داخل براکت را باید برای بردار موج  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{r}}$  محاسبه کرد. با این، برای انتگرال اولی خواهیم داشت؛

$$\mathcal{T}_1 \longrightarrow \left( \frac{e^{-jk_n r}}{4\pi r} \right) \left[ e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-2jk_z(z'-z_n)} k_z (\dots) \right]_{\mathbf{k}=k_n\hat{\mathbf{r}}} . \quad (53.8)$$

دومینتابع نمایی برای فاز در براکت‌ها، از طریق انتشار موج از منبع نقطه‌ای  $z'$  به سطح مشترک بالائی  $z_n$  محیط لایه لایه و پشت آن بدست می‌آید. برای انتگرالی که نقطه مشاهده  $z$  زیر محیط لایه لایه قرار دارد، بدست می‌آوریم؛

$$\mathcal{T}_2 \longrightarrow \left( \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} \right) \left[ e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} e^{-j\psi k_z (\dots)} \right]_{\mathbf{k}=k_1\hat{\mathbf{r}}} . \quad (54.8)$$

در اینجا  $(\mathcal{T}_2) = k_1 z(z' - z_1) + k_{nz}(z' - z_n) = \psi$  یک فاز معمولاً بی‌ربط است. برای بدست آوردن عبارات نهایی برای میدان‌های دور توابع گرین بازتابی، بردارهای  $\epsilon^{TE}$  و  $\epsilon^{TM}$  را ساده می‌کنیم.

- $z$  بالای محیط لایه لایه هنگامی که  $z$  در بالای محیط لایه لایه قرار دارد، می‌توانیم بردار موج  $k_n$  را در مختصات کروی، جایی که زاویه‌ها توسط جهت انتشار میدان‌های دور الکترومغناطیسی نشان داده می‌شوند، بیان کنیم. سپس از معادله پیوست (ب-۵) خواهیم داشت؛

$$\epsilon^{TE}(\mathbf{k}_n^+) = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\phi}, \quad \epsilon^{TM}(\mathbf{k}_n^+) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \hat{\theta}$$

که در آن  $\hat{\phi}$  و  $\hat{\theta}$  بردارهای واحد در جهت بترتیب زوایای سمت و قطبی است. توجه کنید که در نیم-فضا بالا  $k_n = \mathbf{k}_n^+$  همواره بسوی بالا است.

- $z$  پائین محیط لایه لایه هنگامی که  $z$  زیر محیط لایه لایه است، می‌توانیم  $k_1$  را در مختصات کروی بسط داده و در می‌یابیم که دوباره می‌توانیم  $\epsilon^{TM}(\mathbf{k}_n^-)$  و  $\epsilon^{TE}(\mathbf{k}_n^-)$  را بر حسب  $\hat{\phi}$  و  $\hat{\theta}$  بیان کنیم. توجه کنید که در نیم-فضای پائینی  $k_1 = \mathbf{k}_1^-$  همواره بسوی پائین است. ضمناً نه بردارهای زیر نیاز داریم؛

$$\epsilon^{TM}(\mathbf{k}_n^-) = k_n^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \cos \phi \sin \theta \\ k_1 \sin \phi \sin \theta \\ -k_{nz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = k_n^{-1} \begin{pmatrix} k_{nz} \cos \phi \\ k_{nz} \sin \phi \\ -k_1 \sin \theta \end{pmatrix}$$

که مختصات کروی را در محیط پائین به بردار موج محیط بالا، جائی که منبع قرار دارد، مربوط میدارد.  $k_{nz}$  مولفه  $z$  بردار موج است که باید از رابطه پاشندگی محاسبه کرد.

سرانجام می‌توانیم حد میدان-دور بازتابی ( $z < 0$ ) و انتقالی ( $z > 0$ ) تابع گرین را بصورت زیر بیان کنیم:

$$\begin{aligned} G_{ij}^{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\rightarrow \left( \frac{e^{-jk_n r}}{4\pi r} \right) \left[ e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} e^{-j2k_z(z' - z_n)} \left( \tilde{R}_{n,1}^{TE} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j + \tilde{R}_{n,1}^{TM} \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \right) \right]_{\mathbf{k}=k_n \hat{\mathbf{r}}} \\ G_{ij}^{trans}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\rightarrow \left( \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} \right) \left[ e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} e^{-j\psi} \frac{k_{1z}}{k_{nz}} \left( \tilde{T}_{n,1}^{TE} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j + \tilde{T}_{n,1}^{TM} \hat{\theta}_i \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_n^-) \right) \right]_{\mathbf{k}=k_1 \hat{\mathbf{r}}} \end{aligned} \quad (55.8)$$

زوایای  $\theta, \phi$  جهت انتشار میدان‌های دور الکترومغناطیسی را میدهند و ما تابع گرین در محیط پائین را به عنوان انتقالی می‌نامیم.  
سپس یک دوقطبی با گشتاور  $\mathbf{P}$  در موقعیت  $\mathbf{r}_0$  بالای محیط لایه لایه در نظر گیرید. با توجه به معادله (۳.۶)، میدان‌های دور دو قطبی نوسانی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{F}^{dip}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n} (e^{jk_n \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0}) [p_\phi \hat{\phi} + p_\theta \hat{\theta}]$$

که در آن  $\mathbf{p} \cdot \hat{\phi} = \hat{\theta} \cdot \mathbf{p}$  است. به طور مشابه، از معادله (۵۵.۸) دامنه میدان-دور را برای تابش نیم‌فضا بالائی بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{F}^{refl}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n} (e^{jk_n \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0}) \left[ e^{-2jk_{nz}(z_0 - z_n)} \left( \tilde{R}_{n,1}^{TE} p_\phi \hat{\phi} + \tilde{R}_{n,1}^{TM} p_\theta \hat{\theta} \right) \right]$$

اجازه دهید جمع دو مشارکت بصورت زیر را بیان کنیم:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n} (e^{jk_n \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0}) [\mathcal{P}_\phi \hat{\phi} + \mathcal{P}_\theta \hat{\theta}]$$

که در آن  $\mathcal{P}_\phi$  و  $\mathcal{P}_\theta$  را می‌توان بطور مستقیم از معادله بالا دریافت کرد. در میدان-دور توان تابشی در جهت  $\hat{\mathbf{r}}$  از رابطه (۱۷.۴) بدست می‌آید:

$$r^2 \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} Z^{-1} |\mathbf{F}|^2 \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \left( \frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n} \right)^2 [|\mathcal{P}_\phi|^2 + |\mathcal{P}_\theta|^2] \hat{\mathbf{r}}$$

بنابراین، برای یک دوقطبی واقع در بالای یک محیط لایه لایه، توان تابشی در جهت  $\hat{\mathbf{r}}$  بدرون نیم‌فضای بالا را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

توان تابشی توسط دوقطبی بالای محیط لایه لایه ( $z > 0$ )

$$\begin{aligned} r^2 \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_n} \right)^2 \\ &\times \left( \left| 1 + e^{-2jk_{nx}(z_0 - z_n)} \tilde{R}_{n,1}^{TE} \right|^2 p_\phi^2 + \left| 1 + e^{-2jk_{nx}(z_0 - z_n)} \tilde{R}_{n,1}^{TM} \right|^2 p_\theta^2 \right) \end{aligned} \quad (56.8)$$

می‌توانیم به طور مشابه برای تابش به نیم-فضای پایین ادامه دهیم. دامنه میدان-دور موج ارسال شده را می‌توان بصورت زیر بیان کرد؛

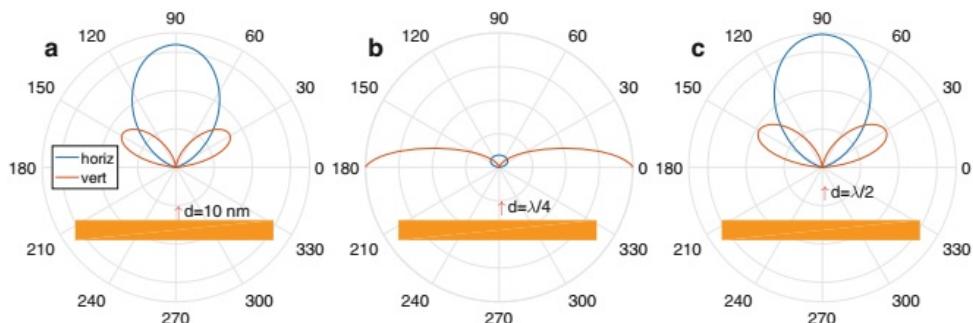
$$\mathbf{F}^{trans}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k_1^2}{4\pi\epsilon_1} (e^{jk_1\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0}) \left[ e^{-j\psi} \frac{k_{1z}}{k_{nz}} \left( \tilde{T}_{n,1}^{TE} p_\phi \hat{\phi} + \tilde{T}_{n,1}^{TM} p_\theta \hat{\theta} \right) \right]$$

که در آن رابطه  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^{TM} = \epsilon^{TM}(\mathbf{k}_n^-)$  معرفی کرده‌ایم. توجه کنید که وقتی موقعیت دوقطبی و نقطه مشاهده در لایه‌های مختلف هستند، باید فقط موج ارسالی را در نظر گرفته و شرکت مستقیم خود دوقطبی وجود ندارد. بنابراین، در نیم-فضای پائینی توان تابش شده توسط دوقطبی در جهت  $\hat{\mathbf{r}}$  بصورت زیر بیان می‌شود؛

توان تابشی توسط دوقطبی بالای محیط لایه لایه ( $z < 0$ )

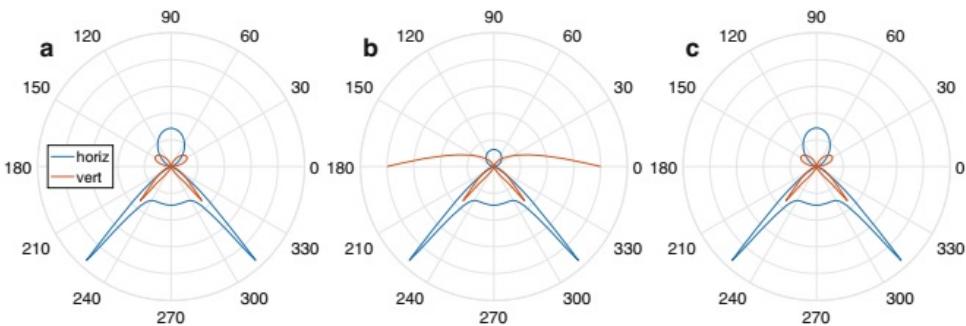
$$r^2 \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{k_n^2}{4\pi\epsilon_1} \right)^2 \left| \frac{k_{1z}}{k_{nz}} \right|^2 \left( \left| \tilde{T}_{n,1}^{TE} p_\phi \right|^2 + \left| \tilde{T}_{n,1}^{TM} p_\theta \right|^2 \right) \quad (57.8)$$

شکل (۲۱.۸) الگوی توان تابشی یک دوقطبی نوسانی را نشان میدهد. فاصله دوقطبی از سطح را (الف) ده نانومتر، (ب)  $\lambda/4$ ، (ج)  $\lambda/2$  با طول موج  $\lambda = 600 nm$  انتخاب می‌کنیم. جهت دوقطبی موازی و عمود بر سطح مشترک است. بطوری که از شکل می‌توان مشاهده کرد، الگوی تابشی بستگی شدید به  $z_0$  دارد که می‌تواند ناشی از تداخل بین انتشار مستقیم موج و موج بازتابی در معادله (۵۶.۸) باشد. شکل (۲۲.۸) توان تابشی برای یک بستر شیشه‌ای را با استفاده از پارامترهای شبیه‌سازی مشابه شکل (۲۱.۸) نشان می‌دهد. بطوری که مشاهده می‌کنید،



شکل ۲۱.۸: الگوی تابشی دوقطبی واقع در بالای سطح طلا. بخش‌های مختلف شکل فاصله  $z_0$  دوقطبی از سطح را بیان می‌کند. (الف) ده نانومتر، (ب)  $\lambda/4$  و (ج)  $\lambda/2$  با طول موج  $600 nm$  نانومتر. گذردهی محیط بالا را  $\epsilon_0$  و برای گذردهی طلا از مرجع [۳۴] گرفته شده است. الگوی‌های تابشی از معادله (۵۶.۸) استفاده شده است.

بیشتر تابش به زیرلایه شیشه می‌رود. زاویه‌ای که در آن انتشار در محیط زیر به حداقل می‌رسد مربوط به زاویه بازتاب داخلی کلی برای سطح مشترک هوای-شیشه است. بحث جامع‌تر خواص انتشار دوقطبی واقع در بالای یک بستر یا انواع دیگر محیط‌های لایه لایه و اثراتی مانند "نور



شکل ۲۲.۸: مانند شکل (۲۱.۸) است با این تفاوت که زیرلایه شیشه است. بخش‌های مختلف شکل فاصله  $z_0$  دوقطبی از سطح را بیان می‌کند. (الف) ده نانومتر، (ب)  $\lambda/4$  و (ج)  $\lambda/2$  با طول موج ۶۰۰ نانومتر. گزندرهی محیط بالا را  $\epsilon_0$  و برای گزندرهی شیشه ۱.۵ انتخاب شده است.

ممنوعه<sup>۳۲</sup> در مرجع [۴] آمده است.

#### ۴.۵.۸ منبع واقع در داخل لایه

سرانجام وضعیتی را در نظر می‌گیریم که نقطه منبع  $z'$  در داخل لایه و نقطه مشاهده در لایه  $m$  قرار دارد. با استفاده از استدلال مشابه برای منبع بالای محیط لایه لایه، می‌توانیم تابع گرین بازتابی را به صورت زیر بیان کنیم؛

$$\begin{aligned}
 G_{ij}^{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k_{mz}} \\
 &\times \left\{ \langle [A_m^{TE} e^{-jk_{mz}z} \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_m^+) + B_m^{TE} e^{jk_{mz}z} \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_m^-)] \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_l^\pm) \rangle \right. \\
 &+ \left. \langle [A_m^{TM} e^{-jk_{mz}z} \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_m^+) + B_m^{TM} e^{jk_{mz}z} \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_m^-)] \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_l^\pm) \rangle \right\} k_\rho dk_\rho
 \end{aligned} \quad (۵۸.۸)$$

تابع گرین کل با اضافه کردن  $\bar{G}$  محیط بدون محدوده در لایه فقط  $l$  بدست می‌آید. در این صورت، تابع گرین کل در معادله موج غیرهمگن در لایه  $l$  و معادله موج همگن در هر جای دیگر صدق می‌کند. باید برای محاسبه ضرایب  $A_m, B_m$  برای امواج بالارونده و پائین‌رونده بنحوی باشد که شرایط مرزی معادلات ماکسول در تمام سطح مشترک‌ها ارضاء کند. فرض کنید  $z_l^+, z_l^-$  بترتیب نمایشگر موقعیت سطح مشترک‌های بالا و پائین لایه  $l$  باشد. در لایه  $l$  برای امواج  $TE$  داریم؛

$$e_l(z) = e^{-jk_{lz}|z-z'|} + A_l^{TE} e^{-jk_{lz}z} + B_l^{TE} e^{jk_{lz}z}$$

برای  $z' < z$  اولین جمله  $e^{-jk_{lz}(z-z')}$  مربوط به موج پائین‌رونده است. بنابراین میدان‌های مربوط به سطح مشترک پائینی  $l$  در موقعیت  $z_l^-$  برابر است با؛

<sup>۳۲</sup>Forbidden Light

$$e_l^+ = \tilde{R}_{l,1}^{TE} e_l^- \implies \left[ A_l^{TE} e^{-jk_{lz} z_l^-} \right] = \tilde{R}_{l,1}^{TE} \left[ e^{-jk_{lz}(z' - z_l^-)} + B_l^{TE} e^{jk_{lz} z_l^-} \right]$$

برای  $z' > z$  اولین جمله  $e^{-jk_{lz}(z - z')}$  مربوط بهموج بالارونده است. بنابراین میدان‌های سطح مشترک بالائی محیط  $l$  در موقعیت  $z_l^+$  برابر است با؛

$$e_l^- = \tilde{R}_{l,1}^{TE} e_l^+ \implies \left[ B_l^{TE} e^{-jk_{lz} z_l^+} \right] = \tilde{R}_{l,1}^{TE} \left[ e^{-jk_{lz}(z_l^+ - z')} + A_l^{TE} e^{jk_{lz} z_l^+} \right]$$

از این دو عبارت می‌توانیم  $A_l^{TE}, B_l^{TE}$  را محاسبه کنیم و بهنوبه خود میدان‌ها را در لایه‌های مختلف محیط لایه لایه منتشر کرد. برای میدان‌های  $TM$  نیز می‌توان از روش مشابه استفاده کرد.

ساختار تیغه به عنوان مثال، در اینجا موقعیتی در نظر می‌گیریم که دوقطبی منبع در داخل یک تیغه قرار دارد. برای این ساختار هندسی، می‌توانیم در عبارت بالا ضرایب بازتابی کل را با ضرایب فرنل عوض کنیم. فرض کنید که سطح مشترک‌ها در موقعیت صفر و  $d$  قرار دارند، بنابراین داریم؛

$$R_{21}^{TE} \left[ e^{-jk_z(z' - z)} + B_2^{TE} e^{jk_z z} \right]_{z=0} = [A_2^{TE} e^{-jk_z z}]_{z=0}$$

$$R_{23}^{TE} \left[ e^{-jk_z(z - z')} + A_2^{TE} e^{-jk_z z} \right]_{z=d} = [B_2^{TE} e^{jk_z z}]_{z=d}$$

که ضرایب بازتابی فرنل  $R_{21}^{TE}$  و  $R_{23}^{TE}$  برای سطح مشترک‌های  $z = 0$  و  $d$  است. عبارتی شبیه به این می‌توان برای مودهای  $TM$  بدست آورد. اکنون می‌توانیم جواب دامنه موج‌های مجھول را بدست آوریم؛

$$\begin{aligned} A_2^{TE} &= \frac{e^{-jk_z d} R_{21}^{TE}}{1 - e^{-2jk_z d} R_{21}^{TE} R_{23}^{TE}} \left[ e^{-jk_z(z-d)} + e^{-jk_z(d-z')} R_{23}^{TE} \right] \\ B_2^{TE} &= \frac{e^{-jk_z d} R_{23}^{TE}}{1 - e^{-2jk_z d} R_{21}^{TE} R_{23}^{TE}} \left[ e^{-jk_z(d-z')} + e^{-jk_z(d+z')} R_{21}^{TE} \right] \end{aligned} \quad (59.8)$$

با بسط مخرج به یک سری هندسی، نمایشی از امواج بر حسب بازتاب‌های متعدد در داخل تیغه، مانند شکل (۱۱.۸) بدست آوریم. سرانجام این ضرایب برای محاسبه تابع گرین بازتابی ناحیه داخل تیغه وارد معادله (۵۸.۸) شود.

## تمرینات

- تمرين ۱ برای مختلط پلاسمون‌های سطحی مقادیر  $k_{1z}$  و  $k_{2z}$  را در نظر گیرید. بردارهای پواین‌تینگ میانگین  $S_1$  و  $S_2$  را محاسبه کرده و نتیجه را تفسیر کنید. در چه جهتی انرژی انتقال می‌یابد؟
- تمرين ۲ مقادیر جانب  $\infty \rightarrow k_x$  پاشندگی پلاسمون را از رابطه (۵.۸) با تعیین مقدار  $\omega$  جائی که بخش حقیقی مخرج زیر ریشه دوم مخرج صفر می‌شود، محاسبه کنید.

- تمرین ۳ سطح مشترک بین دو ماده با گذردهی‌های  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  و نفوذپذیری‌های  $\mu_0$  در نظر گیرید. اکنون پلاسمون‌های سطحی برای مود  $TE = E_y \hat{y}$  با  $TE$  بست آورید. نشان دهید که اینچنین امواجی وجود ندارند.

- تمرین ۴ تابع دیالکتریک درود را برای نقره بصورت زیر

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)} \right)$$

با پارامترهای  $k_b = 3.3$   $eV$   $\hbar\omega_p = 9 eV$   $\hbar\gamma = 0.022 eV$  است. از پاشندگی پلاسمون  $(\omega)$  استفاده کرده و طول موج  $\lambda = 2\pi/k_x'$  و طول انتشار  $\delta = 2\pi/k_x'' = 2\pi/\epsilon_0$  برای چند انرژی فوتون در محدوده  $0.5$   $eV$  تا  $3 eV$  محاسبه کنید.

- تمرین ۵ از جعبه ابزار NONOPT فایل demostrat1.m را برای شبیه‌سازی تحریک پلاسمون سطحی در ساختار هندسی کرتشمن استفاده کنید.

- (الف) گذردهی پائین‌ترین محیط را تغییر داده و زاویه پائین‌آمدن پلاسمون در طیف بازتاب را محاسبه کنید. تغییر گذردهی را بر حسب تغییر زاویه رسم کنید.
- (ب) همان مطالب بخش الف اما یک لایه اضافی به ضخامت  $20$  نانومتر روی سطح فلز قرار دهید. گذردهی فقط این لایه را تغییر داده و گذردهی نیم-فضا بالائی را  $\epsilon_0$  قرار دهید.

- تمرین ۶ یک تیغه فلزی به ضخامت  $d$  و گذردهی  $\epsilon_1$  که روی ماده زیرلایه  $\epsilon_2$  است در نظر گیرید. برای مودهای  $TM$  می‌توانیم میدان‌های مغناطیسی را بصورت زیر در نظر گیریم

$$\mathbf{H}(z) = \hat{y} e^{-jk_x x} \begin{cases} h_1 e^{-k_1 z} & z > +\frac{d}{2} \\ h_2 (e^{k_2 z} \pm e^{-k_2 z}) & -\frac{d}{2} < z < +\frac{d}{2} \\ \pm h_1 e^{+k_1 z} & z < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{برای} \\ \text{برای} \\ \text{برای} \end{array}$$

جائی که استفاده کردیم، به دلیل تقارن جوابها باید توابع فرد یا زوج  $z$  باشند.

- (الف) تحلیل پلاسمون‌های سطحی را برای فرض بالا تکرار کرده و نشان دهید که اینگونه مودها وجود دارند.
- (ب) نشان دهید که برای مقادیر طول  $L$  پاشندگی این مودها با آنچه در یک سطح مشترک است مطابقت دارد. پاشندگی پلاسمون سطحی اصلاح شده اکنون از رابطه  $(40.8)$  بدست می‌آید.

- (ج) مشخصه فرد و زوج را برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بحث کنید.
- (د) کدامیک از مودها انرژی بیشتری دارند، زوج یا فرد؟ نتایج را با استفاده از استدلال‌های ساده ارائه دهید.

- تمرین ۷ دو محیط با گذردهی‌های  $\epsilon_1, \epsilon_2$  و نفوذپذیری  $\mu_0$  را در نظر گیرید. برای امواج با قطبش  $TM$  زاویه بروستر را تعیین کنید که دامنه موج بازتاب شده حذف می‌شود.

این زاویه برای  $n_2$  چقدر است:  $n_1 = 1.5$  ؟ فرض کنید که نوری با قطبش دلخواه بهاین سطح مشترک برخورد کند. موج بازتابی چه قطبشی دارد؟

• تمرین ۸ بازتاب و انتقال را در یک سطح مشترک با  $n_1 > n_2$  در نظر گیرید. زاویه‌ای را که در آن بازتاب داخلی کلی رخ می‌دهد، پیدا کنید، این زمانی است که عدد موج  $k_z$  در محیط دوم کاملاً موهومی می‌شود.

• تمرین ۹ برای عدسی‌های کامل ضریب بازتاب کل را محاسبه کرده و نشان دهید که  $\tilde{R}_{13} = 0$  است.

• تمرین ۱۰ به عنوان یک مدل ساده برای عدسی کامل، از معادله (۴۲.۸) برای دامنه دو نوسان‌ساز هارمونیکی شروع کنید. یکی از آنها توسط یک میدان خارجی تحریک می‌شود، و جابجایی‌های  $\bar{x}_a$  و  $\bar{x}_b$  را برای  $\omega_a = \omega_b = \omega$  و  $\gamma_a = \gamma_b \approx 0$  محاسبه کنید. می‌توانید از مرجع [۵۵] استفاده کنید.

• تمرین ۱۱ جسمی به فاصله  $\delta$  از یک عدسی وسل‌اگو با ضخامت  $d$  قرار دارد.

- الف در چه فاصله‌ای از عدسی تصویر در طرف دیگر تشکیل می‌شود؟
- ب میدان‌های محوشونده را از طریق عدسی رديابی کرده و نشان دهید که در موقعیت جسم و تصویر برابر هستند.

• تمرین ۱۲ از جعبه ابزار NANOPT فایل demostrat05.m را برای الگوی تابشی یک دوقطبی بالای یک زیرلايه فلزی استفاده کنید. الگوی تابشی را برای فاصله‌های مختلف از بستر بررسی کرده و نتیجه را تفسیر کنید.

• تمرین ۱۳ از جعبه ابزار NANOPT فایل demostrat05.m را برای الگوی تابشی یک دوقطبی بالای یک زیرلايه فلزی استفاده کنید. زیرلايه فلزی را با یک فیلم نازک فلزی (از ضخامت‌های ۲۰، ۵۰، و ۱۰۰ نانومتر استفاده کنید) که بالای زیرلايه شیشه است عوض کنید. ضخامت فیلم فلزی را تغییر داده و نتایج را با لایه نیم فضای فلزی مقایسه کنید.

## فصل ۹

# پلاسمون‌های ذره‌ای

در فصل آخر پلاسمون‌های سطحی را بحث کردیم. این نوسان‌های همدوس بار در سطح مشترک بین فلز و دی‌الکتریک است که می‌تواند تحریک نوری شده، و در امتداد سطح مشترک منتشر شود. آنها همراه با میدان‌های الکترومغناطیسی محسوب شونده هستند که هنگام دور شدن از سطح مشترک بطور نمائی میرا می‌شوند. در این فصل نانوذرات فلزی تعییه شده در دی‌الکتریک را تجزیه و تحلیل کرده و نشان می‌دهیم که تحریک مربوطه در آنجا وجود دارد، و آنها را به عنوان پلاسمون‌های ذره نشان می‌دهیم. بحث خود را با نانوذرات بسیار کوچکتر از طول موج نور، جایی که تقریب شبه استاتیک می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، آغاز می‌کنیم و نتایج را بعداً برای ذرات بزرگ‌تر تعمیم می‌دهیم.

### ۱.۹ حد شبه‌استاتیک

معادله موج را برای پتانسیل اسکالر در نظر گیرید، رابطه (۲۲.۲)،

$$(\nabla^2 + k^2)V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

که آنرا برای میدان‌های هارمونیک زمانی با توجه به  $\omega = k\sqrt{\mu\epsilon}$  نوشته‌ایم. قبل این رابطه را برای شرط لورنتس بدست آورده‌ایم

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\epsilon V(\mathbf{r}) = -jk\sqrt{\mu\epsilon}V(\mathbf{r})$$

برای درک ماهیت شبه استاتیک، نکات زیر را فرض می‌کنیم:

- نانوذرات بسیار کوچکتر از طول موج نور هستند. اجازه دهد  $L$  مقیاس طول مشخصه نانوذرات باشد، که به‌طور معمول چند ده نانومتر، و  $\lambda$  طول موج نور، معمولاً در مرتبه میکرومتر است.
- عملگر لاپلاس  $\nabla^2$  احناء تابعی که روی آن عمل می‌کند است. اکنون فرض می‌کنیم که میدان‌های الکترومغناطیسی و پتانسیل با مقیاس طول  $L$  بنحوی تغییر می‌کند که تخمین زیر برقرار باشد:

$$|\nabla^2 V| \sim \frac{1}{L^2} |V| \gg |k^2 V| \sim \frac{1}{\lambda^2} |V|$$

به همین دلایل، می‌توانیم در معادله موج برای  $V(\mathbf{r})$  عبارت  $k^2$  را نادیده بگیریم و به معادله الکترواستاتیک پوآسون برسیم. کلمه "شبه" در تقریب شبه‌استاتیک به‌این واقعیت اشاره دارد که در تطبیق میدان‌های الکتریکی در ابعاد ذرات، گذردگی وابسته به فرکانس  $(\mathbf{r}, \omega)$  را حفظ می‌کنیم.

### تقریب شبه‌استاتیک

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)} \quad (1.9)$$

علاوه بر این، گذردگی وابسته به فرکانس  $(\omega)$  را در محاسبه شرایط مرزی در نظر می‌گیریم

از شرط معیار لورنتس داریم

$$L|\nabla \cdot \mathbf{A}| \sim |\mathbf{A}| \sim L - j\sqrt{\mu\epsilon}kV(\mathbf{r}) \sim \frac{L}{\lambda c}|V| \ll \frac{1}{c}|V|$$

بنابراین، پتانسیل برداری خیلی کوچک‌تر از پتانسیل اسکالر است و تقریباً می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. در مجموع، مشخص می‌شود که تقریب شبه‌استاتیک برای نانوذرات کوچک، کوچک‌تر از  $50-100$  نانومتر، بسیار خوب عمل می‌کند. جواب معادله پواسون به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر از معادله موج است و می‌توان بلاfaciale از آن بعنوان ابزار کامل توسعه یافته برای الکترواستاتیک استفاده کرد. در کل پتانسیل اسکالر و میدان الکتریکی را از طریق رابطه زیر بهم مربوط می‌کنیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

در مورد پراکندگی<sup>۱</sup> نور توسط نانوذرات کوچک که تقریب شبه‌استاتیک برای آنها استفاده می‌شود، باید مراقب باشید:

- از آنجا که طول موج نور بسیار بزرگ‌تر از اندازه نانوذرات است، این ذره توسط یک میدان الکتریکی ثابت در فضا اما متغیر زمانی تحریک می‌شود. برای میدان‌های هارمونیک زمانی، پتانسیل مربوطه برابر است با:

$$V(\mathbf{r}) = -E_0 \epsilon_0 \cdot \mathbf{r}, \quad (3.9)$$

که در آن  $E_0$  دامنه میدان الکتریکی و  $\epsilon_0$  قطبش نور است.

<sup>۱</sup>Scattering

- برای پراکندگی، جذب<sup>۲</sup> و انقراض<sup>۳</sup> نور باید به معادلات کامل ماکسول متولّش شویم. این کار را با محاسبه گشتاور دوقطبی القایی نانوذره و محاسبه میدان‌های دور دوقطبی نوسانی انجام می‌دهیم.

این بخش را با بیان شرایط مرزی (b.c.) پتانسیل الکترواستاتیک در سطح مشترک بین دو ماده با گذردهی  $(\omega \epsilon_1)$  و  $(\omega \epsilon_2)$  به پایان می‌بریم. پیوستگی میدان الکتریکی مماسی از طریق پیوستگی پتانسیل در مرز بدست می‌آید؛

$$V(\mathbf{r} - o^- \hat{\mathbf{n}})|_{\partial\Omega} = V(\mathbf{r} - o^+ \hat{\mathbf{n}})|_{\partial\Omega} \quad (۴.۹)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{n}}$  بردار عمود بر مرز است که از داخل به خارج است و  $o^+$  یک مقدار بی نهایت کوچک است. بنابراین، اگر مشتق را در جهت موازی با مرز قرار دهیم، برای بدست آوردن  $E$ ، مقادیر یکسانی را در هر دو طرف بدست می‌آوریم. برای شرط مرزی دوم فرض می‌کنیم که هیچ‌گونه بار سطحی آزاد در مرز وجود ندارد، و بنابراین از پیوستگی جابجایی دیالکتریک در جهت عمود بر مرز شرایط زیر حاصل می‌شود.

$$\epsilon_1(\omega) \frac{\partial V(\mathbf{r} - o^- \hat{\mathbf{n}})}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \epsilon_2(\omega) \frac{\partial V(\mathbf{r} - o^+ \hat{\mathbf{n}})}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} \quad \text{دومین شرط مرزی} \quad (۴.۹)$$

که در آن  $\frac{\partial}{\partial n}$  مشتق در جهت عمود بر سطح بسوی خارج است.

## ۲.۹ کره‌ها، بیضوی‌گون‌ها در حد شبه‌استاتیک

در این بخش پراکندگی نور از کره‌های کوچک و بیضوی شکل را در نظر می‌گیریم. جواب‌های کره را "جواب‌های می"<sup>۴</sup> در تقریب شبه‌استاتیک و جواب‌های بیضوی‌گون را "جواب‌های می-گانس"<sup>۵</sup> می‌نامیم. هر دوی آنها از مختصات ویژه، کروی برای مورد می و بیضوی‌گون<sup>۶</sup> برای مورد می-گانس استفاده کرده، تا شرایط مرزی را در قالب ساده‌ای بیان شده و در نتیجه بتوان از آنها به صورت تحلیلی استفاده کرد. متأسفانه، چنین رویکردی را نمی‌توان به شکل هندسی ذرات دلخواه تعیین داد، و در بخش‌های بعدی این فصل به طرح‌های مختلف محاسبه متولّش می‌شویم.

### ۱.۲.۹ نظریه شبه‌استاتیک می

در ادامه یک کره که توسط نوری با میدان الکتریکی معادله (۳.۹) روشن شده و قطبش آن در امتداد  $\hat{\mathbf{z}}$  است در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۹)؛

$$V(\mathbf{r}) = -E_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{r} = -E_0 r \cos \theta$$

در ادامه مختصات کروی را معرفی و از جوابهایی که بستگی به زاویه سمت  $\phi$  ندارند استفاده

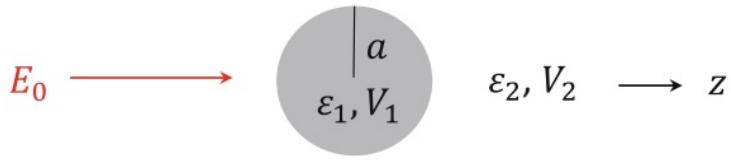
<sup>۲</sup>Absorption

<sup>۳</sup>Extinction

<sup>۴</sup>Mie

<sup>۵</sup>Mie -Gans

<sup>۶</sup>Ellipsoidal



شکل ۱.۹: شماتیک نظریه شباهستاتیک می. کره دیکتریک یا فلزی به شعاع  $a$  و گذردهی  $\epsilon_1$  در محیطی با گذردهی  $\epsilon_2$  تعابیه شده است. میدان الکتریکی خارجی بینرگی  $E_0$  در جهت  $z$  اعمال شده و یک گشتاور دوقطبی در کره القاء می‌شود. جواب‌های  $V_1, V_2$  معادله لاپلاس با ضرایبی از تطبیق پتانسیل‌ها و مشتق‌های سطحی آنها در مرز کره تعیین می‌شوند.

می‌کنیم. معادله لاپلاس در مختصات کروی بصورت زیر است:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rV(r, \theta)] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \right] = 0. \quad (5.9)$$

می‌توان نشان داد که جواب حاصل مشارکت دو عامل است که بترتیب بستگی به  $r$  و  $\theta$  دارد و بصورت زیر است [۲].

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (6.9)$$

که در آن  $A_l, B_l$  ضرایب مجهولی هستند که از شرایط مرزی بدست می‌ایند.  $P_l$  چند جمله‌ای لوزاندر <sup>۴</sup> است که بطور مفصل در پیوست (ج) بحث شده است. با استفاده از رابطه (۶.۹) اکنون به مسئله تحریک نانو کره‌ای به شعاع  $a$  می‌پردازیم. ابتدا جواب‌های داخل و خارج کره را بصورت زیر می‌نویسیم :

$$V(r, \theta) = \begin{cases} V_1(r, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta) & \text{برای } r \leq a \\ V_2(r, \theta) = \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) - E_0 r \cos \theta & \text{برای } r > a \end{cases}$$

که در آن اندیس یک و دو دال بر جواب‌های داخل و خارج کره است. از آنجا که  $V$  داخل کره باید در مرکز مختصات معین باشد، (تمام ضرایب  $B_l$  را صفر قرار دادیم) در حالی که برای میدان‌های خارج از کره لازم است برای فواصل دور داشته باشیم،  $V \rightarrow -E_0 r \cos \theta$  (یعنی تمام ضرایب  $A_l$  را صفر قرار دادیم). اکنون از تعریف چند جمله‌ای لوزاندر و محاسبه شرایط مرزی، مشاهده می‌کنیم که

$$-E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

از رابطه پیوستگی پتانسل در مرز کره داریم؛

$$(V_1 - V_2)_{r=a} = 0 \implies \begin{cases} A_l a^l = \frac{B_l}{a^{l+1}} & l \neq 1 \quad \text{برای} \\ A_1 a = \frac{B_1}{a^2} - E_0 a & l = 1 \quad \text{برای} \end{cases}$$

<sup>۴</sup>Legendre polynomials

به طور مشابه، از پیوستگی جابجایی دیالکتریک در جهت شعاعی به دست می‌آورید؛

$$(\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} - \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r})_{r=a} = 0 \implies \begin{cases} \epsilon_1 A_l a^{l-1} = -\epsilon_2 \frac{(l+1)B_l}{a^{l+2}} & l \neq 1 \\ \epsilon_1 A_1 = -\epsilon_2 (2 \frac{B_1}{a^3} + E_0) & l = 1 \end{cases}$$

معادلات بازاء  $l \neq 1$  می‌تواند فقط بازاء  $0$  برای جمیع مقادیر  $l$  صادق باشد. برای  $l = 1$  خواهیم داشت:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} -\left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) E_0 r \cos \theta & r \leq a \\ \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) \frac{a^3}{r^2} E_0 \cos \theta - E_0 r \cos \theta & r > a \end{cases}$$

میدان‌های الکتریکی داخل کرده را می‌توان با گرفتن مشتق از پتانسیل اسکالار محاسبه کرد. با توجه به  $z = r \cos \theta$  داریم؛

$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) E_0 \hat{\mathbf{z}}$$

در مورد میدان خارج از کرده متوجه می‌شویم که قسمت القا شده به‌شکل یک پتانسیل دوقطبی است؛

$$V_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

در این صورت گشتاور دوقطبی کرده با تحریک نور خواهد بود.

### گشتاور دوقطبی کرده تحریک شده نوری

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) a^3 E_0 \hat{\mathbf{z}}$$

تا اینجا هیچ چیز بیش از حد هیجان انگیز نبوده است. معادله (۷.۹) معمولاً در درس الکترواستاتیک مبتدی بدست می‌آید و اگرچه بدست آوردن آن ما را مجبور می‌کند که با معادله لاپلاس در مختصات کروی تماس برقرار کنیم، اکثر خوانندگان با نتیجه نهایی آشنا خواهند بود. به طور مشابه، یافتن یک میدان ثابت در داخل کرده و میدان دوقطبی القایی در خارج آن مشهور است. با این حال، چیز خاصی در باره معادله (۷.۹) وجود دارد. برای مشاهده این موضوع، در ادامه مطالبی جداگانه برای نانوکره‌های دیالکتریک و فلزی بحث می‌کنیم.

### کرده دیالکتریک

یک کرده دیالکتریک با  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  درنظر گیرید. از رابطه (۸.۹) ملاحظه می‌شود که میدان الکتریکی داخل کرده به‌دلیل میدان قطبشی ناشی از داخل کرده، که میدان خارجی را غربال

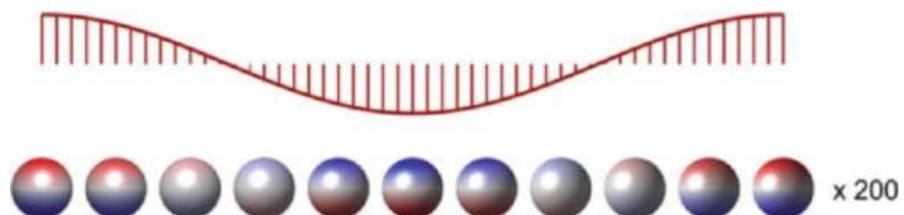
می‌کند، کوچکتر از خارج است. برای بدست آوردن بارهای قطبشی، ابتدا مولفه عمودی میدان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم؛

$$E^\perp = -\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} E_1^\perp = \left(\frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) E_0 \cos \theta & r = a^- \\ E_2^\perp = \left(\frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) E_0 \cos \theta & r = a^+ \end{cases} \quad (10.9)$$

که در آن  $a^\mp$  موقعیت‌های بینهایت کوچک در داخل یا خارج از کره را نشان می‌دهد. سپس بار قطبشی  $\sigma_{pol}$  را با استفاده از معادله (۲۴.۷) به دست می‌آوریم.

$$\sigma_{pol}(\theta) = -\epsilon_0(E_2^\perp - E_1^\perp) = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) E_0 \cos \theta \quad (11.9)$$

بار  $\sigma_{pol}$  یک میدان الکتریکی که در خلاف جهت میدان اعمالی است تولید می‌کند. وقتی این منظره را در حوزه زمان درنظر می‌گیریم، شکل (۲.۹)، مشاهده می‌کنیم که چگالی بارهای قطبشی هم‌فاز با میدان الکتریکی اعمالی نوسان کرده، در نتیجه میدان خارجی را در هر لحظه از زمان غربال می‌کند.



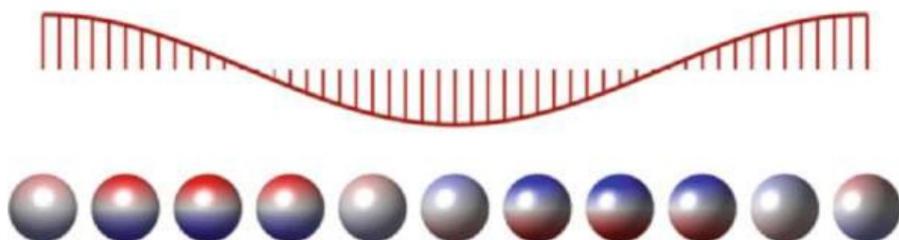
شکل ۲.۹: نوسان‌های بار قطبشی در سطح یک کره دی‌الکتریک با  $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$  و  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ . بار هم فاز با میدان تحریک نوسان کرده، که در بالای شکل نشان داده شده است. ضریب مقیاس ۲۰۰ نسبت به نوسان بار یک نانو کره فلزی است که در شکل (۳.۹) نشان داده شده است.

## کره فلزی

برای کره فلزی با تابع دی‌الکتریک  $(\omega_1 \epsilon)$  وقتی فرکانس کوچکتر از فرکانس پلاسمای منفی می‌شود. به بحث بخش ۱.۷ مراجعه کنید. در نتیجه، مخرج در معادله (۷.۹) می‌تواند در فرکانس خاص  $\omega_{SP}$  بسیار کوچک شود و بدست می‌آید

$$\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right) \gg 1 \quad \epsilon_1(\omega_{SP}) + 2\epsilon_2 \approx 0 \quad (12.9)$$

در نتیجه، گشتاور دوقطبی القائی رابطه (۹.۹) بسیار بزرگ می‌شود. تنها دلیل اینکه در  $\omega_{SP}$  معین می‌ماند تلفات فلزی است که از طریق  $(\omega_{SP})''_1 \epsilon$  شرح داده شده است. مهم است بدانیم که برای تابع دی‌الکتریک درود  $(\omega_1 \epsilon)$  کل ناحیه منفی را زیر فرکانس پلاسمای دربر می‌گیرد.



شکل ۳.۹: مانند شکل (۲.۹) اما برای نانو کره فلزی با پارامترهای مواد برای نقره. بارهای سطحی با ضریب  $200$  برابر بزرگتر از دیالکتریک نشان داده شده در (۲.۹) است. و دارای اختلاف فاز  $90^\circ$  در تشید است.

$$-\infty < \epsilon'_1(\omega) \leq 0 \quad 0 < \omega \leq \omega_p \quad \text{برای}$$

بنابراین، شرایط رزونانس معادله (۱۲.۹) حتماً در فرکانسی انجام خواهد شد. برای درک بهتر ماهیت این رزونانس‌های بنام پلاسمون سطحی (SP)، در زیر برای داخل کره تابع دیالکتریک درود را در نظر می‌گیریم

$$\epsilon_1(\omega)/\epsilon_0 = k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)}$$

که در آن  $k_b$  پاسخ دیالکتریک الکترونهای ظرفیت در فلز است. اکنون شرایط تشید خواهد شد؛

$$\epsilon_0 \left( k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega_{SP}^2} \right) + 2\epsilon_2 \approx 0 \quad (13.9)$$

بنابراین فرکانس پلاسمون یک کره فلزی را می‌توان از طریق گذردهی درود توصیف کرد.

### تشید پلاسمون سطحی کره

$$\omega_{SP} \approx \frac{\omega_p}{\sqrt{k_b + 2\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}} = \beta\omega_p . \quad (14.9)$$

که در اینجا  $\beta$  عدد بدون بعد است که فرکانس پلاسمون سطحی را نسبت به فرکانس پلاسما  $\omega_p$  می‌دهد. برای یک گاز الکترون-آزاد با  $k_b = 1$  و گذردهی پس زمینه  $\epsilon_2 = \epsilon_0$  خواهیم داشت؛

$$\beta = \frac{\omega_{SP}}{\omega_p} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مدل نوسانگر اگر فرض کنیم که تلفات در فلز بقدر کافی کوچک باشد،  $\omega_{SP} \ll \gamma$ ، می‌توانیم نزدیک به  $\omega_{SP}$  تابع دیالکتریک درود را بصورت زیر تقریب بزنیم؛

$$\frac{\epsilon_1(\omega)}{\epsilon_0} \approx k_b - \frac{\omega_p^2}{\omega_{SP}^2} \left[ 1 + \frac{\Delta\omega^2}{\omega_{SP}^2} - \frac{\gamma}{\omega_{SP}} \right]^{-1} \approx \frac{\epsilon_1(\omega_{SP})}{\epsilon_0} + \frac{\omega_p^2 \Delta\omega^2}{\omega_{SP}^4} - j \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega_{SP}^3}$$

که در آن  $\omega^2 = \omega_{SP}^2 - \Delta\omega^2$  و جمله داخل براکت را بر حسب سری تیلور بسط می‌دهیم. بعداً گشتاور دوقطبی القائی (۹.۹) را محاسبه می‌کنیم. صورت کسر را می‌توان بصورت زیر تقریب زد

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) - 3\epsilon_2 \approx -3\epsilon_2$$

که جمله داخل پرانتز در فرکانس تشیدد صفر می‌شود. گشتاور دوقطبی را می‌توان بهصورت زیر نوشت

$$\mathbf{p} \approx \frac{4\pi\epsilon_2^2}{\epsilon_0} \left( \frac{3\beta^2\omega_{SP}^2}{\omega_{SP}^2 - \omega^2 + j\gamma\omega_{SP}} \right) a^3 E_0 \hat{\mathbf{z}}. \quad (15.9)$$

جمله داخل پرانتز بطور مستقیم به جمله تشیدد نوسانگر هارمونیکی تحریک مربوط می‌شود که قبلاً در رابطه (۵.۷) برای گذردهی درود-لورنتس بدست آورده شد.

**بارهای سطحی** برخلاف کره دیالکتریک، بارهای سطحی ناشی از حاملهای آزاد و مقید است. در ادامه، فرض کنید  $k_b = 1$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0$  و حالت کلی تمرین ۲.۹ را درنظر گیرید. بار سطحی اکنون در کل ناشی از حاملهای آزاد است و از رابطه (۱۱.۹) در فرکانس تشیدد  $\omega_{SP} = \omega$  بدست می‌آوریم؛

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \right) E_0 \cos \theta \approx 3j\epsilon_0 \frac{\omega_{SP}}{\gamma} E_0 \cos \theta \quad (16.9)$$

از این رابطه واضح است که فقط عبارت میرایی  $\gamma$  بارهای سطحی را معین نگه می‌دارد، اما در غیر این صورت رابطه می‌تواند بسیار بزرگ شود. پلاسمون‌های سطحی محلی می‌توانند با تشیدد نانوذرات فلزی همراه باشند که در آن توزیع بار سطحی به طور همدوس در مرز بین فلز و دیالکتریک نوسان می‌کند. وضعیت مشابه پلاسمون‌های سطحی است که در فصل قبل در نظر گرفته شد. با این حال، به دلیل افزونگی سطح کره، فرکانس تشیدد گسسته‌ای را، بجای پیوستگی مودها، به دست می‌آوریم.

رفتار پلاسمون‌های سطحی محلی در شکل (۳.۹) نشان داده شده است. یک میدان نوری خارجی حامل‌ها را در مرز ذرات جدا می‌کند. علاوه بر میدان نور تحریک، اکنون نیروهای بازسازی نیز به دلیل حامل‌های جدا شده وجود دارد. بنابراین، اگر کره با فرکانس تشیدد  $\omega_{SP}$  تحریک شود، یک نوسان با دامنه زیاد ایجاد می‌شود، جایی که در حالت ساکن انرژی جذب شده توسط میدان نور برابر با انرژی تلف شده توسط اتلاف فلز است (همچنین به تمرین ۱.۹ مراجعه کنید). توجه داشته باشید که در معادله (۱۶.۹) بار سطحی  $\sigma$  کاملاً موهومی است و اختلاف فاز بین میدان تحریک و قطبش کره ۹۰ درجه، که مطابق با رفتار تشیدد یک نوسانگر هارمونیکی تحریک شده است.

**پلاسمون‌های ذره‌ای** پلاسمون‌های سطحی محلی با نام‌های مختلف شناخته می‌شوند، گاهی اوقات با مکمل "پلاریتون" ترکیب می‌شوند تا بر ماهیت ترکیبی مواد و تحریک‌های الکتروودینامیکی تأکید شود. در ادامه اصطلاح "پلاسمون‌های ذره‌ای" را برای هر نوع تحریک پلاسمون سطحی ذره‌ای با اندازه معین به کار می‌بریم. در ادامه فرکانس‌های تشدید و افزونگی<sup>۱۰</sup> میدان را که می‌توان از طریق شکل و اندازه نانوذرات تنظیم کرد، بیشتر بحث خواهیم کرد. این یک بستر انعطاف‌پذیر و همه کاره برای محدود کردن میدان‌های الکتروومغناطیسی در مقیاس نانو ارائه می‌دهد، که می‌تواند برای کاربردهای متعدد مورد استفاده قرار گیرد.

**معادلات ماکسول** بین روابط مظلوم برآمده از معادلات ماکسول و فیزیک تشدید بسیار غنی حاکم بر پلاسمون‌های ذره‌ای، مغایرت وجود دارد. در نگاه اول ممکن است تا حدودی غیرمنتظره بهنظر برسد که باید برای تفسیر نتایج نظریه ماکسول کارهای بیشتری انجام داد تا فیزیک عمیق‌تر آنرا کشف کرد. با این حال، بهاین دلیل که معادلات ماکسول شامل همه اجزای لازم برای توصیف پلاسمون‌های ذره‌ای است و فقط باید نتایج جدیدی را برای کشف آنچه در داخل آنها پنهان شده، بررسی کرد.

### ۲.۲.۹ نظریه می-گانس

نوع دوم ساختار هندسی برای مسئله الکترواستاتیک که می‌وانیم بطور تحلیلی حل کنیم، بیضوی‌گون‌ها<sup>۹</sup> هستند. نیممحورها را با  $a_k$  نشان داده و فرض می‌کنیم که

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3$$

باشد. در کتاب درسی عالی بورن و هافمن<sup>۱۰</sup> [۶۰] نویسنده‌گان بحث خود را چنین شروع می‌کنند:

مختصات طبیعی، هرچند ناآشنا و بدون ویژگی‌های ناخوشابند آنها، رابطه برای گشتاور دوقطبی ذره بیضوی‌گون ناشی از یک میدان الکترواستاتیک یکنواخت، مختصات بیضوی‌گون است.

خوانندگان علاقه مند به جزئیات چنین دستگاه‌های مختصات عجیب و غریب به کتاب ذکر شده در بالا ارجاع داده می‌شوند، در ادامه نتایج نهایی را به سادگی بیان می‌کنم. بهنظر می‌رسد که گشتاور دوقطبی را می‌توان به شکلی شبیه معادله (۹.۹) بیان کرد. برای نانوذرات کروی، و برای قطبش نور در امتداد یکی از محورهای اصلی<sup>k</sup> نتیجه می‌شود که

**گشتاور دوقطبی بیضوی‌گون با تحریک نوری**

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_2 \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{3\epsilon_2 + 3L_k(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \right) a_1 a_2 a_3 E_0 \hat{\mathbf{e}}_k \quad (17.9)$$

<sup>۱۰</sup>Enhancement

<sup>۹</sup>Ellipsoid

<sup>۱۰</sup>Bohren and Huffman

در اینجا عوامل دی‌پلاریزاسیون را معرفی کرده‌ایم

$$L_k = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dq}{(a_k^2 + q^2) \sqrt{(a_1^2 + q^2)(a_2^2 + q^2)(a_3^2 + q^2)}},$$

که در رابطه  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$  صدق می‌کند. برای کره  $\frac{1}{3}$  و رابطه (۱۷.۹) بهمان نتیجه قبلی تقلیل می‌یابد. برای بیضوی‌گون کشیده<sup>۱۱</sup> با  $a_1 \geq a_2 = a_3 = a_\perp$  می‌توانیم انتگرال بالا بطور تحلیلی حل کرده و عامل دی‌پلاریزاسیون در امتداد محور را بدست آوریم؛

$$L_1 = \frac{1 - e^2}{e^2} \left( -1 + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right), \quad e^2 = 1 - \frac{a_\perp^2}{a_1^2}$$

شبیه به کره، می‌توانیم فرکانس‌های تشدید پلاسمون سطحی  $\omega_{SP}$  را با جستجوی صفرهای مخرج رابطه (۱۷.۹) محاسبه کنیم،

$$3\epsilon_2 + 3L_k[\epsilon'_1(\omega_{SP}) - \epsilon_2] = 0. \quad (۱۸.۹)$$

کل بحث در مورد رفتار تشدید تحریک پلاسمون ذرات در کره‌ها در مورد ذرات بیضوی‌گون نیز صادق است، با این حال، به دلیل عوامل دی‌پلاریزاسیون  $L_k$ ، وسیله دیگری برای کنترل فرکانس تشدید با انتخاب ساختار هندسی‌های مختلف نانوذرات داریم. قبل از اینکه این نکته را با جزئیات بیشتری نشان دهیم، روابطی برای سطح مقطع نوری در حالت شباهستاتیک بدست می‌آوریم.

### ۳.۲.۹ سطح مقطع نوری

یک دوقطبی ناشی از میدان نور خارجی  $\mathbf{E}_{inc}$  در نظر می‌گیریم؛

$$\mathbf{p} = \bar{\alpha}(\omega) \cdot \mathbf{E}_{inc} = 4\pi\epsilon\bar{\alpha}_{vol}(\omega) \cdot \mathbf{E}_{inc} \quad (۱۹.۹)$$

که در آن  $\bar{\alpha}$  تانسور قطبی شوندگی<sup>۱۲</sup> ذره است. در دستگاه آحاد  $SI$  قطبی شوندگی دارای واحد  $Cm^2V^{-1}$ ، و اغلب خیلی راحت‌تر است که ضریب  $4\pi\epsilon$  که در آن  $\epsilon$  گذردهی محیط بستر است، بیرون کشیده تا قطبی شوندگی  $\alpha_{vol}$  که دیمانسیون حجم دارد را بدست آوریم. بدیهی است که قطبی شوندگی رابطه (۱۹.۹) برای کره (با  $\bar{\alpha} = \alpha\mathbb{I}$ )، برای بیضوی‌گون (با  $\bar{\alpha}$  که یک ماتریس قطری است)، و همین‌طور سایر ساختارهای هندسی ذرات بکار می‌رود. از میدان‌های دور یک دوقطبی نوسانی که در رابطه (۳.۶) داده شده است، شروع می‌کنیم؛

$$\mathbf{E}_{sca} \xrightarrow[kr \gg 1]{} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \frac{k^2}{4\pi\epsilon} \mathbf{p}_\perp$$

$$\mathbf{H}_{sca} \xrightarrow[kr \gg 1]{} Z^{-1} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \frac{k^2}{4\pi\epsilon} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_\perp$$

که در آن میدان‌ها در جهت  $\hat{\mathbf{r}}$  و  $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})$  منتشر می‌شوند. الگون این میدان‌های دور را در توان پراکندگی رابطه (۲۲.۴) قرار می‌دهیم؛

<sup>۱۱</sup>Prolate Ellipsoid

<sup>۱۲</sup>Polarizability

$$P_{sca} = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} Re(\mathbf{E}_{sca} \times \mathbf{H}_{sca}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS$$

در ادامه برای مرز یک کره واقع در منطقه میدان-دور در نظر می‌گیریم. با وارد کردن میدان‌های دور در این رابطه خواهیم داشت؛

$$P_{sca} = \frac{1}{2} Z^{-1} \left( \frac{k^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \oint Re [\mathbf{p}_\perp \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_\perp^*)] \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega$$

که در آن  $dS = r^2 d\Omega$  و  $d\Omega = r^2 d\theta d\phi$  نمایشگر یک جزء سطح کوچک روی سمت و زاویه قطبی است. با تبدیل دوری ضرب سه‌گانه به رابطه زیر میرسیم؛

$$Re [\mathbf{p}_\perp \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_\perp^*)] \cdot \hat{\mathbf{r}} = |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_\perp|^2 = |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}|^2$$

با قرار دادن همه این نتایج بدست می‌آید؛

$$P_{sca} = Z^{-1} \frac{k^4}{32\pi^2\epsilon^2} \int |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}|^2 d\Omega \quad (۲۰.۹)$$

این انتگرال‌گیری را می‌توان با انتخاب دستگاه مختصاتی که  $\mathbf{p}$  در جهت  $\hat{\mathbf{z}}$  است، انجام داد،

$$\int |\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi p^2 \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} p^2$$

برای رسیدن به عبارت نهائی، میدان یک نور تابشی بصورت  $E_0 \epsilon_0$  با شدت  $I_{inc} = \frac{1}{2} Z^{-1} |E_0|^2$  در نظر می‌گیریم. هنگامی که توان پراکنده شده بر  $I_{inc}$  تقسیم کنیم، به رابطه نهائی برای سطح مقطع پراکنده یک ذره قطبی‌شونده میرسیم؛

### سطح مقطع پراکنده‌ی ذره قابل قطبی‌شوندگی

$$C_{sca} = \frac{k^4}{6\pi\epsilon^2} |\bar{\alpha} \epsilon_0|^2 = \frac{8\pi}{3} k^4 |\bar{\alpha} \epsilon_0|^2 \quad (۲۱.۹)$$

برای سطح مقطع انقاراضی<sup>۱۳</sup> از قضیه نوری رابطه (۲۷.۴) شروع می‌کنیم،

$$P_{ext} = \frac{2\pi}{k} Z^{-1} Im [E_0^* \epsilon_0^* \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_0)] = \frac{2\pi}{k} Z^{-1} \frac{k^2}{4\pi\epsilon} Im [|E_0|^2 \epsilon_0^* \cdot \bar{\alpha} \cdot \epsilon_0]$$

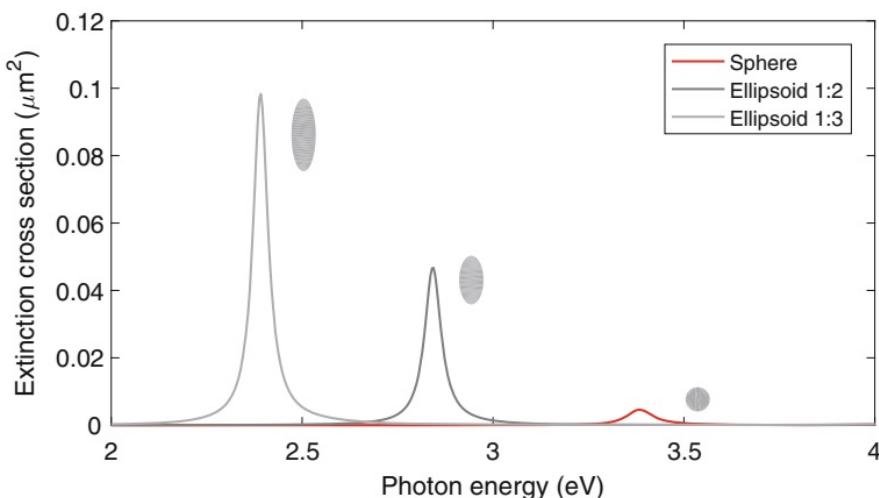
در این صورت با تقسیم بر  $I_{inc}$  سطح مقطع انقاراضی بدست می‌آید

### سطح مقطع انقاراضی ذره قابل قطبی‌شوندگی

$$C_{ext} = \frac{k}{\epsilon} Im [\epsilon_0^* \cdot \bar{\alpha} \cdot \epsilon_0] = 4\pi k Im [\epsilon_0^* \cdot \bar{\alpha}_{vol} \cdot \epsilon_0] \quad (۲۲.۹)$$

<sup>۱۳</sup>Extinction Cross Section

در ادامه از نتایج فوق برای محاسبه طیف‌های نوری برای نانوکره‌های فلزی و بیضوی گون استفاده می‌کنیم. شکل‌های (۴.۹) و (۵.۹) به ترتیب سطح مقطع انقراضی را برای نانوکره‌های نقره و طلا و نانو بیضوی گون‌ها نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که با افزایش نسبت محوری، مودهای پلاسمون به انرژی‌های پایین‌تر منتقل و تشديدها واضح‌تر می‌شوند. در همه شکل‌ها قطبش نور در امتداد محور بلند  $z$  بیضوی گون، طولانی می‌شود. ضمناً تشديد پلاسمون اضافی وابسته به نوسان‌های بار در جهت  $x$  و  $y$  وجود دارد، اما فرکانس‌های تشديد آنها بطور قابل توجهی به نسبت محوری<sup>۱۴</sup> بستگی ندارد، همانطور که از عوامل دی‌پلاریزاسیون  $L_k$  برای بیضوی گون مشاهده می‌شود.



شکل ۴.۹: سطح مقطع‌های انقراضی برای کره نقره و بیضوی گون با نسبت محورهای مختلف. از  $a_1 = a_2 = 20 \text{ nm}$  استفاده می‌کنیم و  $a_3 = 20 \text{ eV}$  را تغییر می‌دهیم. مقطع انقراضی برای تحریک موج صفحه و قطبی شدن در امتداد محور بزرگ محاسبه می‌شود،تابع دی‌الکتریک نقره از مرجع [۳۴]<sup>۱۴</sup> گرفته شده است. برای ضریب شکست محیط تستر از  $n_2 = 1.33$  استفاده می‌کنیم.

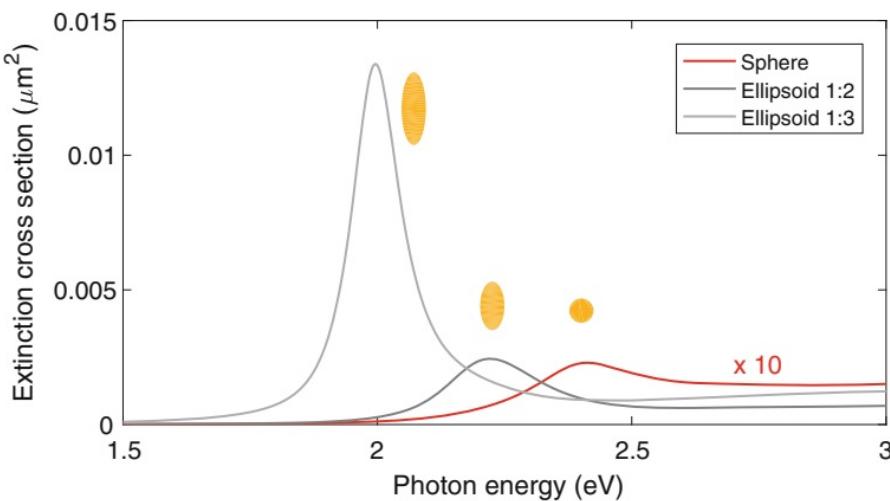
با مقایسه نانوذرات نقره و طلا، مشاهده می‌کنیم که فرکانس‌های پلاسمون، به دلیل وجود بخش موهومی بزرگ تابع دی‌الکتریک طلا، بسیار شدید میرا می‌شوند. به ویژه برای تشديدهای بالاتر از  $2 \text{ eV}$  طیف‌ها با تلفات مربوط به  $(\omega_1''/\epsilon_1'')$  حاکم می‌شوند. شکل (۶.۹) موقعیت‌های اوج تشديد بیضوی گون‌ها با نسبت محورهای مختلف را ب همراه بيشينه مقدار  $C_{ext}$  (مربوط به اندازه نقطاط) نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که برای نقره و طلاقله‌های منحنی پلاسمون با افزایش نسبت محوری به انرژی‌های کوچکتر انتقال می‌یابد.

در نهایت، در شکل (۷.۹) افزونگی<sup>۱۵</sup> میدان را برای بیضوی گون با نسبت محوری مختلف و برای قطبش نور در امتداد  $z$  نشان می‌دهد. با افزایش نسبت محوری، افزونگی میدان به طور چشمگیری زیاد می‌شود. این به دلیل تحديد<sup>۱۶</sup> میدان در تیز شدید شکل نانوساختارها و همچنین به دلیل میرایی کمتر برای تشديد در انرژی‌های پایین‌تر است. به علت اثر اخیر،

<sup>۱۴</sup>Axial Ratio

<sup>۱۵</sup>Enhancement

<sup>۱۶</sup>Confinement



شکل ۵.۹: همانند شکل (۴.۹) اما برای طلا. مقادیر کره برای دید بهتر ۱۰ برابر می‌شود. توجه داشته باشید که در مقایسه با نقره، سطح مقطع به علت میرایی بیشتر طلا که ناشی از بخش موهومنی بزرگتر آن است، بسیار کوچکتر می‌شود.

پلاسمون‌ها می‌توانند، همانطور که قبلاً در رابطه (۱۵.۹) برای مدل توسان ساز ساده بحث شد، قوی‌تر تحریک شوند. در واقع، این ترکیب تشیدهای برجسته و افرونگی میدان‌های قوی است که نانوذرات پلاسمونی را برای کاربردهای مختلف بسیار جالب می‌کند.

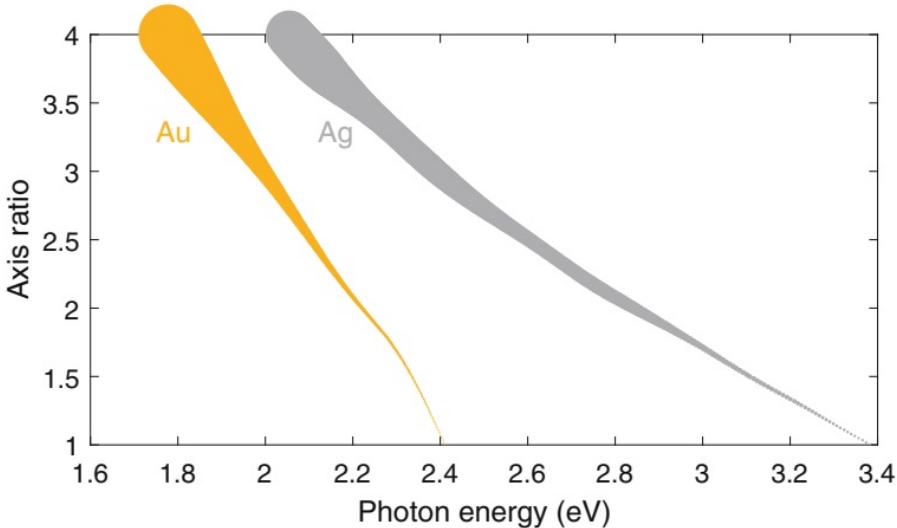
### ۳.۹ روش انتگرال مرزی برای حد شبه‌استاتیک

وقتی شکل نانوذرات نه کروی است و نه بیضوی‌گون، عموماً باید از روش‌های عددی استفاده کرد. در ادامه به رویکرد روش انتگرال مرزی، که از آن تعدادی نتیجه‌گیری مهم می‌توان گرفت، می‌پردازیم. اجرای عددی آن در فصل یازدهم بحث می‌شود.

برای جواب عمومی معادله پوآسون، از تابع گرین استفاده می‌کنیم. تابع گرین شبه‌استاتیک، معادله هلم‌هولتز را، با قرار دادن  $0 \rightarrow k$  در رابطه (۵.۸) دنبال می‌کند و خواهیم داشت:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۲۳.۹)$$

برای محاسبه پتانسیل القائی برای پتانسیل خارجی مفروض  $V_{inc}$ ، می‌توانیم از رابطه (۱۵.۵) شروع کرده و  $\mathbf{r}$  را به مرز نزدیک کنیم. این رویکرد برای حل معادلات کامل ماکسول (بدون تقریب شبه‌استاتیک) در ادامه بیشتر دنبال خواهد شد. با این حال، برای حالت شبه‌استاتیک می‌توانیم یک روش ساده تر را بر اساس توزیع بار سطحی  $\sigma$  معرفی کنیم، که ماهیت فیزیکی پلاسمون‌های ذره‌ای را در بر می‌گیرد. با نوشتن کل پتانسیل داخل و خارج ذره بصورت زیر



شکل ۶.۹: موقعیت رزونانس نانوبیضویگونهای طلا و نقره برای نسبت‌های محوری مختلف. موقعیت دایره‌های پُر شده برای هر نسبت محوری به انرژی فوتون که در آن  $C_{ext}$  بزرگترین است، اندازه‌ها با مقادیر  $C_{ext}$  مطابقت دارد. برای دید بهتر، مقادیر برای طلا، ۵ برابر شده است.

### شروع می‌کنیم

$$V(\mathbf{r}) = V_{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \sigma(\mathbf{s}') dS' \quad (24.9)$$

که در آن انتگرال روی مرز ذره گسترش می‌یابد. پتانسیل  $V_{inc}$  دوباره وابسته به منبع خارجی یا موج تابشی است. از اینجا به بعد موقعیت‌های واقع شده در خارج و در مرز را بترتیب با  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{s}$  نشان می‌دهیم. با اعمال عملگر لaplas بر دو طرف معادله فوق، خواهیم داشت:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \nabla^2 V_{inc}(\mathbf{r}) - \oint_{\partial\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}') \sigma(\mathbf{s}') dS' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad \mathbf{r} \notin \partial\Omega \quad \text{برای}$$

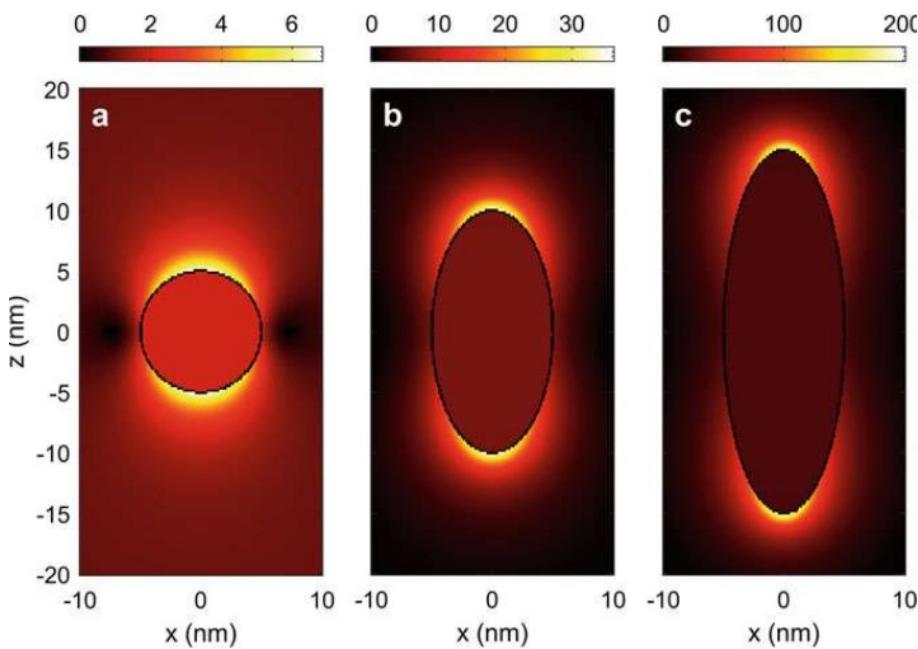
برای بدست آوردن این نتیجه، از تعریف معادله برای تابع گرین شباهستاتیک استفاده کردیم؛

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (25.9)$$

و فرض کردہ‌ایم که  $\nabla^2 V_{inc}$  توزیع بار داخل حجم مورد نظر را می‌دهد. برای میدان نور تابشی این جمله می‌تواند غایب باشد و به معادله پواسون میرسیم. با ساخت و ساز، رابطه (۲۴.۹) معادله پواسون را ارضا می‌کند و با توجه به تعریف تابع گرین، در شرایط مرزی مناسب میدان‌های میرا در بینهایت ساخته شده است. توزیع بار  $\sigma(s)$  بار مجهول سطحی بنحوی که شرایط مرزی معادله (۴.۹) در مرز ذرات را ارضا کند، سپس محاسبه می‌شود.

رهیافت دیریشله<sup>۱۴</sup>. با محاسبه پتانسیل در مرز بطریقی که با نزدیک شدن  $s \rightarrow r$  به مرز از داخل یا خارج شروع می‌کنیم؛

<sup>۱۷</sup>Dirichlet Trace



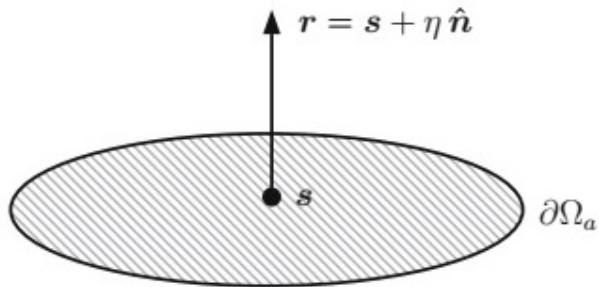
شکل ۷.۹: افزونگی شدت برای کره و بیضوی گون نقره. افزونگی میدان‌های نزدیک  $|E(r)|^2$  در انرژی‌های تشدید از شکل (۶.۹) برای (الف) کره، (ب)  $a_1 : a_3 = 1 : 3$ ، و (ج)  $a_1 : a_3 = 2 : 1$  و برای قطبش نور در جهت  $\hat{z}$  گرفته شده است. نوارهای رنگی در بازه مربوط به عوامل افزونگی در بالای شکل‌ها گزارش شده است.

$$V(\mathbf{s}^\pm) = V_{inc}(\mathbf{s}^\pm) + \lim_{\eta \rightarrow 0} \oint_{\partial\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{s}') dS'}{4\pi |\mathbf{s} \pm \eta \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{s}'|}$$

در ادبیات ریاضی این روش محدود کننده به عنوان رد دیریکلت شناخته می‌شود. محدودیت را می‌توان بدون مشکل برای  $V_{inc}$  انجام داد. برای دوره دوم باید به دلیل وابستگیتابع گرین به  $1/r$  بیشتر مراقب باشیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، انتگرال گیری در یک منطقه مرزی کوچک برای به دست آوردن نتایج خوب ضروری است. ما یک سیستم مختصات را انتخاب کردیم که  $s$  در صفحه  $xy$  قرار دارد و  $z$  در طول محور  $z$  به این نقطه نزدیک می‌شود، شکل (۸.۹). برای منطقه مرزی کوچک یک دیسک با شعاع  $a$  را در نظر می‌گیریم که در صفحه  $xy$  قرار دارد. سپس، عبارت مربوط به تابع گرین را می‌توان به صورت زیر بیان کرد؛

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \oint_{\partial\Omega_a} \frac{\sigma(\mathbf{s}') dS'}{4\pi |\mathbf{s} \pm \eta \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{s}'|} \approx \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{s}) \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} = \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{s}) a \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0 .$$

ما فرض کرده‌ایم که  $(\sigma)$  (ها) به آرامی در داخل دیسک تغییر می‌کنند، به طوری که می‌توان با مقدار آن در موقعیت مرکزی  $s$  تقریب زد و از انتگرال خارج کرد. علاوه بر این، انتگرال در مختصات قطبی ارزیابی شده است. عبارت بالا نشان می‌دهد که اثر دیریکله را می‌توان با خیال راحت انجام داد، و فرد مستقل از اینکه از بیرون یا



شکل ۸.۹: شماتیک رهیافت دیریشله و نیومن. نقطه مشاهده در  $s + \eta \hat{n}$  قرار دارد، و از هر طرف داخل یا خارج با انجام حد  $\eta \rightarrow 0$  به مرز نزدیک می‌شویم. کمیت مطلوب انتگرال‌گیری روی یک مرز دیسک کوچک  $\partial\Omega_a$  است.

داخل به مرز نزدیک شود، همان مقدار را به دست می‌آورد.  
رهیافت نیومن<sup>۱۸</sup>. سپس همان تحلیل را برای رابطه زیر اعمال می‌کنیم؛

$$\frac{\partial V(s^\pm)}{\partial n} = \frac{\partial V_{inc}(s^\pm)}{\partial n} - \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{n} \cdot \oint_{\partial\Omega} \frac{s \pm \eta \hat{n} - s'}{4\pi |s \pm \eta \hat{n} - s'|^3} \sigma(s') dS'$$

این روش حدگیری بنام رهیافت نیومن معروف است. جمله دوم در سمت راست را قبلاً در مشتق قائم با توجه به  $r$  محاسبه کردہ‌ایم. حد مشارکت تابشی را می‌توان با خیال راحت انجام داد. با معرفی مختصات قطبی برای جمله دوم خواهیم داشت؛

$$\mp \frac{1}{2} \sigma(s) \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^a \frac{\eta \rho d\rho}{(\rho^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{1}{2} \sigma(s) \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ -\frac{\eta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}} \right]_0^a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \mp \frac{1}{2} \sigma(s)$$

که در آن علامت مثبت یا منفی را باید برای روش مرزی از طرف داخل یا خارج بکار برد. همچنین  $(s - s') \cdot \hat{n} = 0$  که برای دیسک کوچک مسطح شکل (۸.۹) استفاده کردہ‌ایم. از این بحث متوجه می‌شویم که اثر نیومن بسته به اینکه از بیرون یا داخل به مرز نزدیک می‌شویم نتایج متفاوتی می‌دهد.

در حال حاضر همه مواد لازم را برای محاسبه شرایط مرزی در  $\partial\Omega$  در اختیار داریم. به دلیل خواص رهیافت دیریشله، پیوستگی پتانسیل به طور خودکار برآورده می‌شود؛

$$V(s^+) = V(s^-)$$

برای دومین نوع شرایط مرزی، (۴.۹)-ب، باید مشتق پتانسیل را محاسبه کنیم؛

$$\frac{\partial V(s^\pm)}{\partial n} = \frac{\partial V_{inc}(s)}{\partial n} \mp \frac{1}{2} \sigma(s) + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(s, s')}{\partial n} \sigma(s') dS' \quad (۲۶.۹)$$

از پیوستگی جابجایی دیکتریک، سپس بعداز چند عملیات ریاضی ساده، بدست می‌آوریم؛

<sup>۱۸</sup>Neumann Trace

### معادله انتگرالی مرزی شبه‌استاتیک

$$\Lambda(\omega)\sigma(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{s}, \mathbf{s}')}{\partial n} \sigma(\mathbf{s}') dS' = -\frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s})}{\partial n}. \quad (27.9)$$

در اینجا کمیت زیر را معرفی کردہ‌ایم

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega)}{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2(\omega)}$$

رابطه (27.9) یک معادله انتگرالی است که اجزه می‌دهد توزیع بار  $\sigma$  که از بیرون تحریک شده است را محاسبه کنیم. پس از محاسبه  $\sigma$ ، پتانسیل را بدست می‌آوریم و بهنوبه خود میدان‌های الکتریکی را در سایر نقاط با استفاده از معادله (24.9) محاسبه می‌کنیم. معادله (27.9) به دلایل متعدد عبارت بسیار جالبی است.

- **دستیابی ساده نخست**، اشتاقاق آن نسبتاً ساده است و هدف مرکزی پلاسمونیک‌ها هسته آن، یعنی در توزیع بار سطحی، قرار دارد. بهمین دلیل نتایج را می‌توان کاملاً شهودی<sup>۱۹</sup> تفسیر کرد.

- **محاسبات ساده معادله** (27.9) را می‌توان به راحتی، همانطور که در بخش ۲.۱۱ به صراحت نشان خواهیم داد، برای استفاده عددی پیاده سازی کرد.

- **مودهای ویژه**<sup>۲۰</sup> احتمالاً جذاب‌ترین نکته این است که معادله انتگرالی مرزی را می‌توان با معرفی مودهای ویژه هندسی حل کرد که اجزه می‌دهد هندسه را از خواص مواد جدا کنیم. با معرفی

$$F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{\partial G(\mathbf{s}, \mathbf{s}')}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{s} - \mathbf{s}'|} \right)$$

برای مشتق سطحیتابع گرین شروع می‌کنیم. متأسفانه  $F$  فقط برای شکل‌های هندسی خاص مانند کره متقارن است و به طور کلی باید در تجزیه و تحلیل مودهای ویژه دقت کرد. برای مودهای راست و چپ  $F$  تابع  $u_k(\mathbf{s})$  و  $\tilde{u}_k(\mathbf{s})$  بترتیب جستجو می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شوند؛

### مودهای ویژه پلاسمونیک (حد شبه‌استاتیک)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') u_k(\mathbf{s}') dS' &= \lambda_k u_k(\mathbf{s}) \\ \oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}') F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') dS' &= \lambda_k \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (28.9)$$

<sup>۱۹</sup>Intuitively

<sup>۲۰</sup>Eigenmodes

آنها مقادیر ویژه  $\lambda_k$  دارند و مجموعه کاملی با رابطه متعامد زیر را تشکیل می‌دهند؛

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}) u(\mathbf{s}) dS = \delta_{kk'}, \quad (29.9)$$

هانطور که در بخش ۷.۹ با جزئیات بیشتری مورد بحث قرار خواهد گرفت. در آنجا نیز نشان خواهیم داد که می‌توان از رابطه تقارن زیر

$$\oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1) F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}') dS_1 = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s}', \mathbf{s}_1) F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}'') dS_1 = 0 \quad (30.9)$$

برای اثبات این که مقادیر ویژه همواره حقيقی و  $u_k$ ،  $\tilde{u}_k$  برطبق رابطه زیر بهم مربوط هستند استفاده کرد.

$$\tilde{u}_k(\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s}, \mathbf{s}') u_k(\mathbf{s}') dS' \quad (31.9)$$

نکته مهم در باره  $u_k$ ،  $\tilde{u}_k$  این است که خواص آنها فقط به‌شکل هندسه نانو ذرات بستگی دارد، در حالی که تمام خواص مواد در  $(\omega)$  ثبت شده است. وقتی مودهای ویژه  $u_k$ ،  $\tilde{u}_k$ ، برای مثال از طریف محاسبات عددی، محاسبه شد، می‌توانیم بارهای سطحی را برای برخی اختلال خارجی  $V_{inc}$ <sup>۲۲</sup> برحسب این مودهای ویژه بسط دهیم:

$$\sigma(\mathbf{s}) = \sum_k C_k u_k(\mathbf{s})$$

با وارد کردن این عبارت در معادله انتگرالی (۲۷.۹) و استفاده از این حقیقت که  $u_k$  یک مود ویژه  $F$  است، به‌رابطه زیر می‌رسیم؛

$$\oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \sum_{k'} [\Lambda(\omega) + \lambda_{k'}] C'_k u'_k(\mathbf{s}) dS = - \oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s})}{\partial n} dS$$

که در آن هر دو طرف معادله را در  $\tilde{u}_k$  ضرب کرده و آنها را در مرز ذرات انتگرال‌گیری کرده‌ایم. با استفاده از متعامد بود مودهای ویژه، می‌توانیم فوراً ضرایب بسط را محاسبه کرده و به‌جواب مود ویژه معادله انتگرالی مرزی شباهستاتیک بصورت زیر برسیم؛

$$\sigma(\mathbf{s}) = - \sum_k (\Lambda(\omega) + \lambda_k)^{-1} \left[ \oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}) \frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s}')}{\partial n'} dS' \right] u_k(\mathbf{s}) \quad (32.9)$$

این رابطه به‌ویژه برای بسیاری از کاربردها مفید است و اجازه می‌دهد تا معادله انتگرالی مرزی را بر حسب محاسبه انتگرال‌های ساده حل کنیم.

• **تابع گرین**<sup>۲۳</sup> همانطور که در بخش ۷.۹ بیشتر توضیح داده شده است، تابع گرین کل برای یک نانوذره پلاسمونی در حد شباهستاتیک می‌تواند به‌صورت زیر بیان کرد؛

<sup>۲۱</sup>Eigenvalues

<sup>۲۲</sup>External Perturbation

<sup>۲۳</sup>Green's Function

### بسط مودویژه تابع گرین کلی

$$G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \sum_k V_k(\mathbf{r}) \left[ \frac{\lambda_k \pm \frac{1}{2}}{\Lambda(\omega) + \lambda_k} \right] V_k(\mathbf{r}') \quad (33.9)$$

علامت مثبت یا منفی باید برای بسته به‌اینکه آیا  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  در خارج یا داخل ذره قرار دارد انتخاب شود و ما پتانسیل‌های ویژه<sup>۲۴</sup> را معرفی کردیم؛

$$V_k(\mathbf{r}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_k(\mathbf{s}') dS' \quad (34.9)$$

پاسخ به توزیع بار خارجی  $(\mathbf{r})\rho$  را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

$$V(\mathbf{r}) = \epsilon_2^{-1} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

در آن فرض می‌شود که  $\mathbf{r}$  در خارج ذره واقع شده و ازاین‌رو باید علامت مثبت را در معادله (33.9) در نظر گرفت.

- **نظریه اختلال**<sup>۲۵</sup> همانطور که در زیر برای ذرات تزویجی نشان داده شده است، تحلیل مود ویژه را می‌توان به‌آسانی شبیه به مکانیک کوانتومی بصورت نظریه اختلال ارائه کرد.

### ۱.۳.۹ مودهای ویژه پلاسمونیک

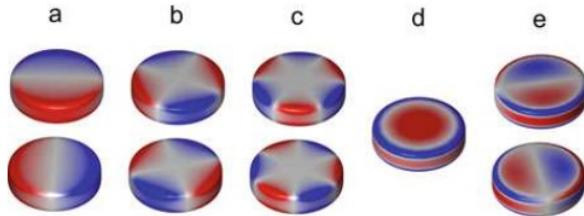
شکل (9.9) مودهای ویژه پلاسمونی را برای مثال یک نانوذیسک نشان می‌دهد. مودهای کمترین مقدار ویژه دارای مشخصه (الف) دو قطبی، (ب) چهارقطبی و (ج) شش قطبی هستند. در اینجا بارهای سطحی در لبه‌های ذرات متمرکز می‌شوند. علاوه بر این، مودهای (د و ۵) محدود به سطوح صاف، جایی که بار سطحی در جهت شعاعی نوسان می‌کند، وجود دارد. توجه داشته باشید که در آزمایش‌های نوری فقط مود دوقطبی می‌تواند تحریک شود، در حالی که همه مودهای دیگر هیچ گشتاور دوقطبی خالص ندارند و بنابراین از نظر نوری تاریک می‌مانند<sup>[۶۳]</sup>. در ادامه نحوه تعیین فرکانس تشدید<sub>ω</sub><sup>k</sup> برای یک مقدار ویژه  $\lambda_k$  را مورد بحث قرار می‌دهیم. از معادله (32.9) مشاهده می‌کنیم که توزیع بار سطحی  $\sigma$  وقتی بزرگ‌تر می‌شود که مخرج تشدید به صفر برسد،

$$\Lambda'(\omega_k) + \lambda_k = 0 .$$

همانطور که قبلاً برای کره‌ها بحث شد، این بخش موهومی  $(\omega)\Lambda''$  است که  $\sigma$  را در تشدید معین نگه می‌دارد. دوباره تأکید می‌کنیم که در عبارت بالا  $(\omega)\Lambda$  فقط به خواص مواد بستگی

<sup>۲۴</sup>Eigenpotentials

<sup>۲۵</sup>Perturbation Theory



شکل ۹.۹: چند مود ویژه انتخابی برای نانودیسک‌ها. (الف) دوقطبی، (ب) چهارقطبی، و (ج) مود ششقطبی با کمترین انرژی، که همگی تبهگن دوگانه هشتند و گرهایی در جهت سمت دارند. مودهای تحریک شده بالاتر علاوه بر این مودهای (د و ۵) گرهایی در جهت شعاعی دارند.

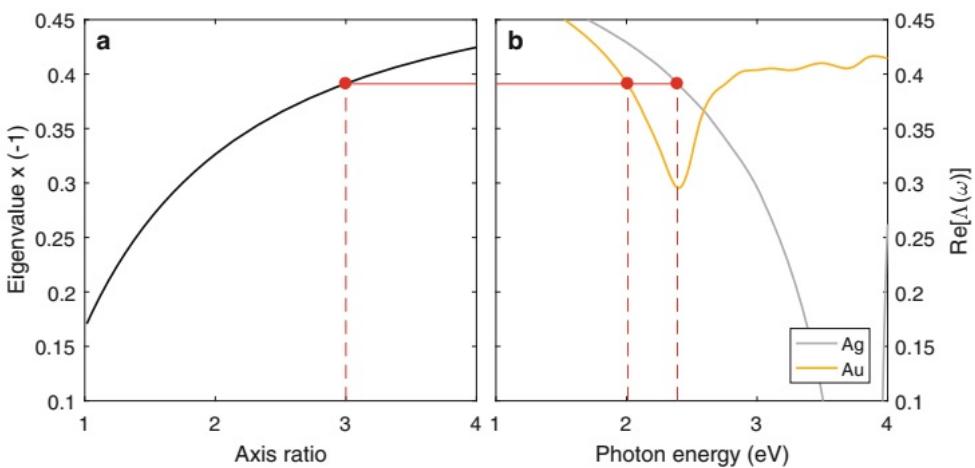
دارد، در حالی که  $\lambda$  فقط به‌هندرسه نانوذرات بستگی دارد. شکل (۱۰.۹) نحوه تعیین فرکانس تشیدید  $\omega_k$  را برای بیضوی گون نقره یا طلا نشان می‌دهد. عکس (الف) مقادیر ویژه برای نسبت‌های محوری مختلف، (منفی) مقدار ویژه  $\lambda_1$  مود دوقطبی را گزارش می‌کند. علاوه بر این، مودهای دیگر مانند مودهای چهارقطبی و شش قطبی وجود دارد که در اینجا به آنها نمی‌پردازیم. شکل (ب) برای  $\omega$  و نقره و طلا و برای فرکانس‌های مختلف  $\omega$  را نشان می‌دهد. در تشیدید مقادیر برای  $\lambda_1 - \lambda'$  و  $(\omega - \omega')$ ، همانطور که در شکل خطوط قرمز برای نسبت محور ۱:۳ ترسیم شده است، باید برابر یکدیگر باشند. در اینجا تشیدید به ترتیب در حدود  $2eV$  برای طلا و  $2.4eV$  برای نقره است (همچنین به شکل‌های (۴.۹) و (۵.۹) مراجعه کنید). از این ساختار، علاوه بر این مشاهده می‌کنیم که برای تشیدیدهای طلا فقط برای نسبت‌های بزرگ به اندازه کافی وجود دارد که در آن انرژی فوتون زیر  $2eV$  باقی می‌ماند. برای انرژی‌های فوتونی بزرگتر، تلفات شدید طلا منجر به میرایی قابل توجه تشیدید پلاسمونی می‌شود که به‌نوبه خود در طیف‌های نوری به‌شدت گسترش می‌یابد. برای مثال، قله ضعیف شکل (۵.۹) را برای کره مشاهده کنید. مودهای پلاسمونی بطور مفصل در مراجع [۶۵، ۶۲] مطالعه شده است و در ادامه برخی نتایج که در آنجا نشان داده شده است بمنظور درک شهودی مقادیر ویژه گزارش می‌شود. نقطه شروع اولین اتحاد گرین برای دوتابع دلخواه  $\phi$  و  $\psi$  بصورت زیر است [۲]

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3 r = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

سپس با قرار دادن  $\phi = V_k$  و  $\psi = V_{k'}$  با پتانسیل‌های ویژه معادله (۳۴.۹) و استفاده از  $E_k = -\nabla^2 V_k$  (بدور از مرز) به رابطه زیر میرسیم

$$E_k \cdot E_{k'} d^3 r = \tau_{1,2} \oint_{\partial \Omega} V_k \left[ \frac{\partial V_{k'}}{\partial n} \right]_{1,2} dS \quad (35.9)$$

مشتق سطح پتانسیل در سمت راست بعنوان رهیافت نیومن تفسیر شده جائی که موقعیت از داخل یا خارج، همان‌طور که فبلًا برای رابطه بخش ۱.۲.۵ توضیح داده شد، بهم تزدیک و عامل  $\tau_{1,2} = \pm 1$  باعث تغییر عمود بر سطح برای  $\Omega_2$  می‌شود. از تعریف مودهای ویژه، رابطه (۲۸.۹)، و استفاده از عبارتی شبیه به (۲۶.۹) برای محاسبه مستق سطح پتانسیل‌های ویژه، انتگرال سمت



شکل ۲۹.۹: روش تعیین فرکانس‌های تشدید برای مقدار ویژه  $\lambda_k$ . شکل (الف) مقادیر ویژه  $\lambda_1$  کمترین مود پرانرژی برای بیضوی گون‌ها با نسبت محورهای مختلف را ارائه می‌کند. برای نسبت محور خاص، در اینجا سه شرط تشدید  $\lambda_1 + \Lambda'(\omega) = 0$  است. شکل (ب) قسمت حقیقی  $\Lambda'(\omega)$  برای نقره و طلا همراه با  $n_2 = 1.33$  را نشان می‌دهد. نقطه تقاطع  $\lambda_1$  و  $\Lambda'(\omega)$  موقعیت‌های تشدید را نشان می‌دهند. برای طلا، تشدید واضح فقط برای نسبت‌های محوری بزرگ‌تر، بدلیل میرایی بین باند قوی بالای  $2 \text{ eV}$  وجود دارد.

راست را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\pm \oint_{\partial\Omega} V_k \left[ \pm \frac{1}{2} u_{k'}(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') u_{k'}(\mathbf{s}') dS' \right] dS = \left( \frac{1}{2} \pm \lambda_k \right) \delta_{kk'} .$$

برای رسیدن به عبارت آخری، از تعریف مود ویژه رابطه (۲۸.۹) همراه با رابطه تعامل استفاده کرده‌ایم؛

$$\oint_{\partial\Omega} u_k(\mathbf{s}) G(\mathbf{s}, \mathbf{s}') u_{k'}(\mathbf{s}') dS' \delta_{kk'} ,$$

که از معادلات (۲۹.۹) و (۳۱.۹) برآمده است. بنابراین خواهیم داشت:

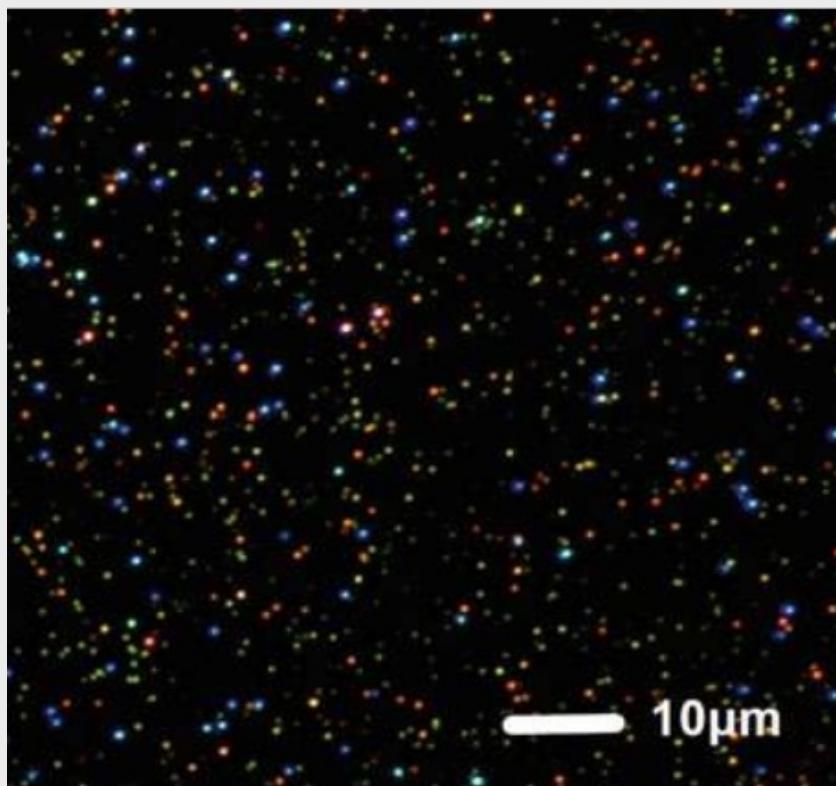
$$\oint_{\partial\Omega_{1,2}} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k'} d^3r = \left( \frac{1}{2} \pm \lambda_k \right) \delta_{kk'} .$$

عبارت دیگر، میدان‌های مودهای ویژه بر یکدیگر، در هردو طرف داخل و خارج  $\Omega_{1,2}$  متعامد هستند. با جمع و تفیریک کردن عبارتهای برای  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  به رابطه زیر میرسیم؛

### رابطه بین مقادیر ویژه و انرژی‌های الکترواستاتیک

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \frac{W_k^1 - W_k^2}{W_k^1 + W_k^2}, \quad W_k^{1,2} = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial\Omega_{1,2}} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_k d^3r . \quad (36.9)$$

## رنگهای پلاسمونیک



بسته به شکل و اندازه نانوذرات فلزی، تشدید پلاسمون‌ها می‌تواند در حالت نور مرئی یا مادون قرمز باشد. تصویر بالا یک تصویر میکروسکوپی میدان تاریک را نشان می‌دهد که در آن نانوذرات فلزی روی یک لایه شیشه‌ای قرار گرفته‌اند و از زیر با زاویه بازتاب داخلی کامل روشن شده است. فقط در موقعیت‌های نانوذرات نور پراکنده و رنگها به فرکانس‌های تشدید شکل هندسی‌های مختلف بستگی دارد. اثرهای رنگی مشابهی نیز از پنجره‌های رنگ آمیزی شده در کلیساها و قرون وسطی، جایی که نانوذرات فلزی در یک ماتریس شیشه‌ای تعییه شده‌اند و رنگ‌های روشن و براق را ایجاد می‌کنند، مشاهده می‌شوند. از آنجا که ذرات فلزی بر خلاف رنگ آمیزی با پراکنده‌گی نور تخریب نمی‌شوند، رنگ‌ها در طول زمان تغییر نمی‌کنند.

پلاسمون‌ها از این تشدیدها که وابسته به نوسانهای بار الکترونی همدوس در سطح مشترک بین نانوذره فلزی و بستر دیالکتریک، همراه با میدان‌های قوی محوشونده استفاده می‌کنند. با هدایت تشدید پلاسمون‌های ذره، می‌توان شدت میدان بالا را در حجم‌هایی با ابعاد نانومتر ارائه داد. این اصل ساده پلاسمونیک‌ها برای تحدید نور در مقیاس نانو برای بسیاری از کاربردها مانند حسگرها، برداشت نور<sup>۱</sup> یا درمان سرطان نویدبخش است [۴۴، ۶۴].

تصویر با اجازه از کارستان سانیچسن<sup>۲</sup> گرفته شده است.

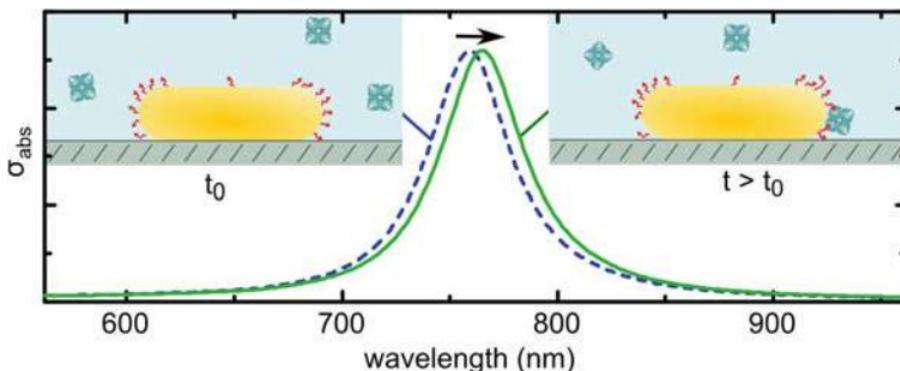
<sup>۱</sup>Light harvesting  
Carsten Sönichsen

در اینجا  $W_k^{1,2}$  انرژی‌های الکترواستاتیک توزیع بار سطحی ( $u_k(s)$ ) بترتیب داخل و خارج ذره هستند. این امر امکان تفسیر ساده مقادیر ویژه بر حسب نرژی‌های الکترواستاتیک برای توزیع بار سطحی مود ویژه را فراهم می‌آورد.

- **حد الکترواستاتیک** در محدوده الکترواستاتیک، همه میدان‌ها از فلز، مربوط به  $W^1 = 0$  دور می‌شوند. این مربوط به مقدار ویژه  $\lambda_0 = -1/2$  است که به فرکانس تشید ۰  $\rightarrow \omega$  انتقال می‌یابد. توزیع بار سطحی، مشابه یک مرز فلزی بار دار شده، دارای بار خالص است و معمولاً نمی‌توان آن را از نظر نوری تحریک کرد.

- **مودهای دیپلار** برای تحریک دوقطبی در کره‌ها و بیضوی‌گون‌ها یک میدان الکتریکی ثابت در داخل ذره وجود دارد، شکل (۶.۹). با افزایش نسبت ابعاد، قسمت‌های مثبت و منفی توزیع بار به دو انتهای مخالف بیضوی‌گون رانده می‌شوند. در نتیجه، توزیع میدان  $W_2$  در خارج از ذره در مقایسه با  $W_1$  افزایش یافته و مقادیر ویژه به مقادیر کمتر منتقل شده و منجر به تغییر رنگ تشید پلاسمون به سمت قرمز می‌شود (شکل ۶.۹).

- **اعداد تحریک بالا** سرانجام، برای اعداد تحریک بالا، مودهای ویژه پلاسمون، مشابه پلاسمون‌های سطحی با طول موج کوتاه، تعداد زیادی گره دارند. در نتیجه، میدان‌های الکتریکی محکم به مرز ذرات محدود شده و بهمان اندازه به ذرات داخل و خارج گسترش می‌یابد. برای  $W^1 \approx W^2$ ، مقدار ویژه پلاسمون سپس به صفر می‌رسد.



شکل ۱۱.۹: اصول کار حسگر بر اساس (بیو) پلاسمون. یک نانوذره فلزی با گیرنده‌ها فعال می‌شود. پس از اتصال آنالیتها در یک کانال سیال، محیط دیالکتریک تغییر می‌کند و تشید پلاسمون کمی تغییر می‌کند (خطوط تیره و جامد را برای طیفها مقایسه کنید). این تغییر را می‌توان به صورت نوری آشکار کرد، گاهی اوقات حساسیت در سطح تک مولکول است. تصویر از مرجع [۶.۹] گرفته شده است.

### حسگرهای پلاسمونی

شبیه به پلاسمون‌های سطحی، انتقال تشید پلاسمون بر تغییرات محیط دیالکتریک را می‌توان برای حسگرهای پلاسمون (بیو) با حساسیت فوق العاده بالا استفاده کرد. در شکل (۱۱.۹) اصول کار ترسیم شده است و شامل یک نانوذره پلاسمونی با گیرنده‌هایی است که فقط می‌توانند

آنالیتهای خاص را متصل کنند. هنگامی که باید شناسایی شود به گیرنده متصل می‌شود، محیط دیالکتریک چار تغییر کوچکی می‌شود که می‌تواند به عنوان یک تغییر کوچک (کوچک) در موقعیت تشدید پلاسمون مشاهده شود. در مقایسه با پلاسمونهای سطحی در سطوح فلزی مسطح، پلاسمونهای ذرهای دارای محدوده میدان بسیار تنگتری هستند که عموماً آشکارسازهای مبتنی بر نانوذرات را بسیار حساس می‌کند. حتی در برخی موارد تشخیص اتصال تک مولکول‌ها ممکن می‌شود.

بطور کلی، حساسیت  $S$  یک حسگر را می‌توان بصورت تغییر فرکانس تشدید  $d\omega_{res}$  بر تغییر کوچک ضریب شکست محیط  $dn_2$  تعریف کرد<sup>۴۷</sup>.

$$\text{برای آشکارسازی تغییر جزئی مناسب } \omega_{res} \text{ قله پلاسمون باید بقدر کافی باریک باشد. فرض کنید که } \Gamma \text{ نمایشگر عرض قله پلاسمون باشد. می‌توانیم معیار شایستگی FOM }^{۴۸} \text{ را بصورت} \\ \text{نسبت بین } S_\omega \text{ و } \Gamma \text{ تعریف کنیم:}$$

$$S_\omega = \left( \frac{d\omega_{res}}{dn_2} \right).$$

$$\text{می‌توانیم این کمیت را از مخرج تشدید } \Lambda(\omega) + \lambda_{dip} \text{ در تشدید دوقطبی برآورد کنیم. با خطی} \\ \text{کردن این عبارت نزدیک به تشدید می‌دهد:}$$

$$\text{FOM} = S_\omega : \Gamma = \frac{1}{\Gamma} \left( \frac{d\omega_{res}}{dn_2} \right).$$

اکنون از این که جمله داخل برآکت فقط علامت عوض می‌شود، بطوري که فوراً از تعریف  $\Lambda$  مشاهده می‌شود، برای بدست آوردن تغییر فرکانس تشدید از  $0 = Re[\Lambda + \lambda_{dip}]$ ، استفاده می‌کنیم:

$$\Lambda(\omega) \approx \Lambda_{res} + \left[ \frac{\delta \Lambda}{\delta \epsilon_1} \right] \left( \frac{\delta \epsilon_1}{\delta \omega} \right) \delta \omega + \left[ \frac{\delta \Lambda}{\delta \epsilon_2} \right] \delta \epsilon_2$$

$$\delta \omega \approx \left( \frac{\delta \epsilon'_1}{\delta \omega} \right)^{-1} \delta \epsilon_2$$

اگر فرض کنیم که عرض قله پلاسمون تقریباً به بخش موهمی تابع دیالکتریک فلز بستگی دارد،  $\epsilon''_1 \propto \Gamma$ ، خواهیم داشت

$$\text{FOM} \propto \left( \epsilon''_1 \frac{\delta \epsilon'_1}{\delta \omega} \right)^{-1}$$

نکته مهم این است که عبارت فقط به خواص مواد  $\epsilon'_1, \epsilon''_1$  فلز در تشدید پلاسمون ذرات بستگی دارد. این برای میرایی کوچک و در نقطه کاری که  $\epsilon'_1$  بشدت به فرکانس بستگی دارد، بیشترین است. با تنظیم شکل هندسی ذرات، می‌توان فرکانس تشدید و بهنوبه خود معیار شایستگی حسگرهای پلاسمونی را تنظیم کرد.

<sup>۴۷</sup>Figure Of Merit; (FOM)

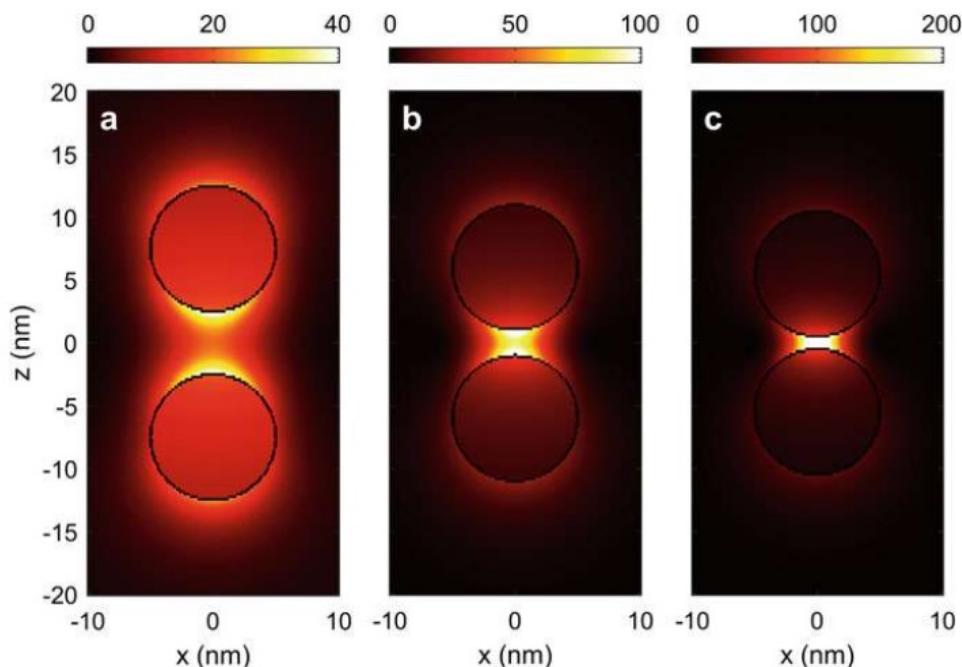
### ۲.۳.۹ تزویج ذرات

یک رویکرد موفق برای افروزنگی میدان نانوذرات پلاسمونیک تزویج بین ذرات است. شکل (۹.۱۲) وضعیتی را نشان می‌دهد که دو نانوکره به‌یکدیگر نزدیک شده و توسط یک موج صفحه‌ای با بردار قطبش جهت محور تقارن تحریک می‌شوند. همانطور که از شکل مشخص است، شدت میدان در فرکانس تشديد پلاسمون مربوط به ساختار تزویج شده هنگامی که ذرات به‌یکدیگر نزدیک می‌شوند، افزایش می‌یابد. در ادامه چنین تزویج بین ذره‌ای را در چارچوب مودهای ویژه تحلیل می‌کنیم.

معادله مقدار ویژه ذرات تزویجی بقرار زیر است؛

$$\oint_{\partial\Omega} F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') U_k(\mathbf{s}') dS' = \Lambda_k U_k(\mathbf{s}) \quad (37.9)$$

جایی که انتگرال بر مرازهای هر دو ذره گسترش می‌یابد، در زیر به عنوان چپ ( $L$ ) و راست ( $R$ ) نشان می‌دهیم. در اینجا  $U_k(\mathbf{s})$  مودهای ویژه با انرژی ویژه  $\Lambda_k$  هستند. در ادامه، مودهای مذکور را با  $u_n^L$  و  $u_m^R$  و انرژی‌های ویژه مربوطه را با  $\lambda_m^L$  و  $\lambda_n^R$  نشان داده و از مودهای  $u_n^R$  و  $u_m^L$  که یک مجموعه کامل تشکیل می‌دهد، استفاده می‌کنیم. به همین دلیل، معادله مقادیر ویژه برای ذرات تزویجی می‌تواند بر حسب مودهای ویژه ذرات بدون تزویج بسط داده شود.



شکل ۱۲.۹: افروزنگی شدت برای کره‌های نقره‌ای تزویجی بقطر ده نانومتر. افروزنگی میدان نزدیک  $|E(r)|^2$  در انرژی تشديد برای فاصله بین **الف** پنج نانومتر، **ب** دو نانومتر، و **ج** یک نانومتر و نور در جهت  $\hat{z}$  قطبی شده است. نوار رنگی با توجه به محدوده عامل افروزنگی در بالای عکس‌ها گزارش شده است.

معادله مقدار ویژه برای ذرات تزویجی با بسط مودهای ویژه ذرات تزویجی از

### طریق مودهای ویژه ذرات بدون تزویج شروع می‌کنیم

$$U_k(\mathbf{s}) = \begin{cases} \sum_m C_{m,k}^L u_m^L(\mathbf{s}) & \text{برای } \mathbf{s} \in \partial\Omega^L \\ \sum_n C_{n,k}^R u_n^R(\mathbf{s}) & \text{برای } \mathbf{s} \in \partial\Omega^R \end{cases}$$

در اینجا  $C_{n,k}^R$  و  $C_{m,k}^L$  ضرایب بسط هستند که باید بدست آورده سپس این عبارت را به معادله (۳۷.۹) وارد می‌کنیم. معادله را از سمت چپ در مودهای ویژه الحقیقی<sup>۲۷</sup> ضرب کرده و خواهیم داشت؛

$$\lambda_m^L C_{m,k}^L + \sum_{n'} C_{n',k}^R \oint \tilde{u}_m^L(\mathbf{s}_L) F(\mathbf{s}_L, \mathbf{s}_R) u_{n'}^R(\mathbf{s}_R) dS_L dS_R = \Lambda_k C_{m,k}^L \quad (۳۸.۹)$$

$$\lambda_n^R C_{m,k}^R + \sum_{m'} C_{m',k}^R \oint \tilde{u}_n^R(\mathbf{s}_R) F(\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_L) u_{m'}^L(\mathbf{s}_L) dS_L dS_R = \Lambda_k C_{n,k}^R$$

از عبارات مقادیر ویژه معادله (۲۸.۹) استفاده کرده تا انتگرال‌های مرزی را با  $F(\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_R)$ ،  $F(\mathbf{s}_L, \mathbf{s}_L)$  به مقادیر ویژه  $\lambda^R$  و  $\lambda^L$  مربوط سازیم. برای انتگرال‌های مرزی باقی مانده، نماد زیر را معرفی می‌کنیم؛

$$\mathcal{F}_{mn} = \oint \tilde{u}_m^L(\mathbf{s}_L) F(\mathbf{s}_L, \mathbf{s}_R) u_n^R(\mathbf{s}_R) dS_L dS_R \quad (۳۹.۹)$$

بطوری که در تمرین ۱۰.۹ بحث شده است، انتگرال یک مقدار حقیقی است و دارای خاصیت تقارن  $\mathcal{F}_{mn} = \mathcal{F}_{nm}$  است. با استفاده از اولین اتحاد گرین، می‌توانیم این عبارت را در امتداد همان خط قبلی خود برای بدست آوردن معادله (۳۵.۹) به میدان‌های الکتریکی  $\mathbf{E}_n^R = -\nabla V_n^R$  و  $\mathbf{E}_m^L = -\nabla V_m^L$  مربوط کنیم. خواهیم داشت؛

$$\int_{\Omega_2} \mathbf{E}_m^L \cdot \mathbf{E}_n^R d^3r = - \sum_{j=L,R} \oint_{\partial\Omega^j} V_m^L(\mathbf{s}_j) \left[ \frac{\partial V_n^R(\mathbf{s}_j)}{\partial n} \right] dS_j = -2\mathcal{F}_{mn}$$

که نشان می‌دهد عناصر ماتریس  $\mathcal{F}_{mn}$  را می‌توان بر حسب انرژی برهم کنش الکترواستاتیک بین توزیع بار سطحی وابسته به مودهای ویژه هر ذره مربوط کنیم. ماتریس  $\bar{\mathcal{F}}$  را برای تشکیل عناصر این ماتریس و همچنین ماتریس‌های  $\bar{\lambda}^R$  و  $\bar{\lambda}^L$  مقادیر ویژه تک ذره در قطر ماتریس معرفی می‌کنیم. برای بسط ضرایب، همراه با ماتریس‌های  $\bar{C}^L$  و  $\bar{C}^R$  معادله (۳۹.۹) را به شکل فشرده بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}^L & \bar{\mathcal{F}} \\ \bar{\mathcal{F}} & \bar{\lambda}^R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{C}^L \\ \bar{C}^R \end{pmatrix} = (\bar{C}^L \quad \bar{C}^R) \cdot \bar{\Lambda} \quad (۴۰.۹)$$

بنابراین، با قطعی نمودن اولین ماتریس سمت چپ، می‌توانیم با استفاده از مودهای هر ذره به عنوان توابع پایه، انرژی ویژه  $\Lambda$  و تابع ویژه ذرات تزویجی را محاسبه کنیم.

<sup>۲۷</sup> Adjoint Eigenmodes

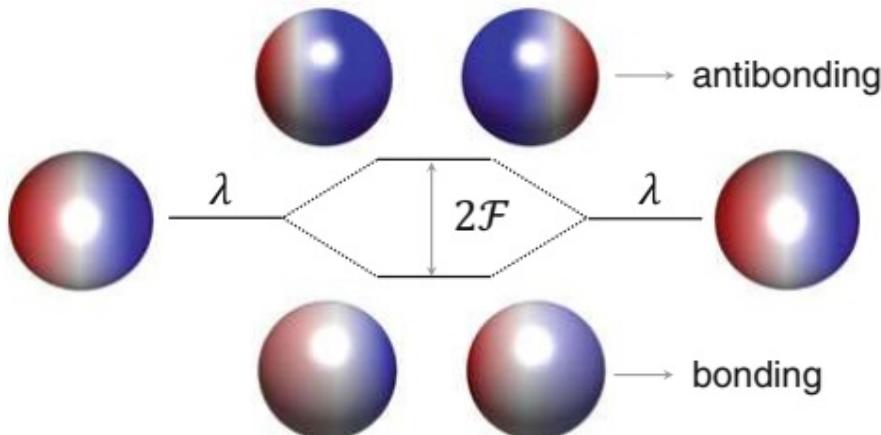
به عنوان یک مثال ساده، دو ذره یکسان مانند کره را که در شکل (۱۲.۹) نشان داده شده است، انتخاب کرده و برای هر ذره یک مود  $u_{L,R}$  با انرژی ویژه  $\lambda$  در نظر می‌گیریم. معادله ماتریسی (۴۰.۹) بصورت زیر تقلیل می‌یابد؛

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} = (C_L \quad C_R) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

که در آن  $\mathcal{F}$  برای برهمنش بین دو ذره بحساب می‌آید. بنابراین، مودهای ویژه ذره تزویجی را می‌توان به مودهای مقید و نامقید<sup>۲۸</sup>،  $C_L = \pm C_R$ ، وابسته کرده و مقادیر ویژه مربوطه خواهد بود؛

### مقادیر ویژه ذرات تزویجی

$$\Lambda_{1,2} = \lambda \pm \mathcal{F} \quad (41.9)$$



شکل ۱۳.۹: طرح کلی تزویج بین دو نانوذره پلاسمونی. تشیدید دوقطبی هر ذره (مقدار ویژه  $\lambda$ ) از طریق  $\mathcal{F}$  بهم تزویج و به یک مقید (گشتاور دوقطبی موازی) و نامقید (گشتاور دوقطبی غیرموازی) تقسیم می‌شوند.

طرح کلی این مورد در شکل (۱۳.۹) نشان داده شده است. دو مود دوقطبی کره‌های مجزا تزویج شده و مقید (جهت‌گیری موازی → گشتاور دوقطبی) و نامقید (جهت‌گیری ← گشتاور دوقطبی غیرموازی<sup>۲۹</sup>) را تشکیل می‌دهند. فقط پیکربندی مقید دارای گشتاور دوقطبی خالص است و میتوانند از نظر نوری تحریک شوند. برای این پیکربندی، بارهای در ناحیه فاصله

<sup>۲۸</sup>Bonding and Anti-bonding modes

<sup>۲۹</sup>Anti-parallel

دو کره علامت‌های متفاوتی دارند، بنابراین میدان بسیار قوی در این فاصله، همانطور که قبل از در شکل (۱۲.۹) نشان داده شد، بوجود می‌آید.

شکل (۱۴.۹) مقادیر ویژه کمترین نانوکره‌های تزویجی را بر حسب تابعی از فاصله بین دو کره نشان می‌دهد. بطوری که از جواب دقیق می‌توان مشاهده کرد (خطوط قرمز)، مقادیر ویژه کمترین برای مود مقید  $\lambda_1, \lambda_2$  است، وقتی کره‌ها به یکدیگر نزدیک می‌شوند، کوچکتر شده و از این‌رو تشید پلاسمون بسمت قرمز انتقال می‌یابد. علاوه براین، مودهای دیگری وابسته به گشتاور دوقطبی که در جهت عمود بر محور تقارن  $\lambda_1, \lambda_2$  و پیکربندی نامقید  $\mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}, \mathcal{F}_{22}$  هستند، به خوبی با نتایج دقیق، می‌توان مشاهده کرد. مقدار ویژه تقریبی محاسبه شده از معادله (۴۱.۹) به خوبی با نتایج دقیق، حداقل برای فاصله‌های به اندازه کافی بزرگ، سازگار است. برای فواصل کوچک بین ذرات، دیگر تنها در نظر گرفتن مودهای دوقطبی کافی نیست. هنگامی که علاوه بر مودهای دوقطبی با مقدار ویژه  $\lambda_1, \lambda_2$  مودهای چهارقطبی با  $\lambda_1, \lambda_2$  (همه آنها موازی با محور تقارن)، ماتریس برهمنش معادله (۴۰.۹) را شامل می‌شود.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ 0 & \lambda_2 & \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{22} \\ \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} & \lambda_1 & 0 \\ \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{22} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

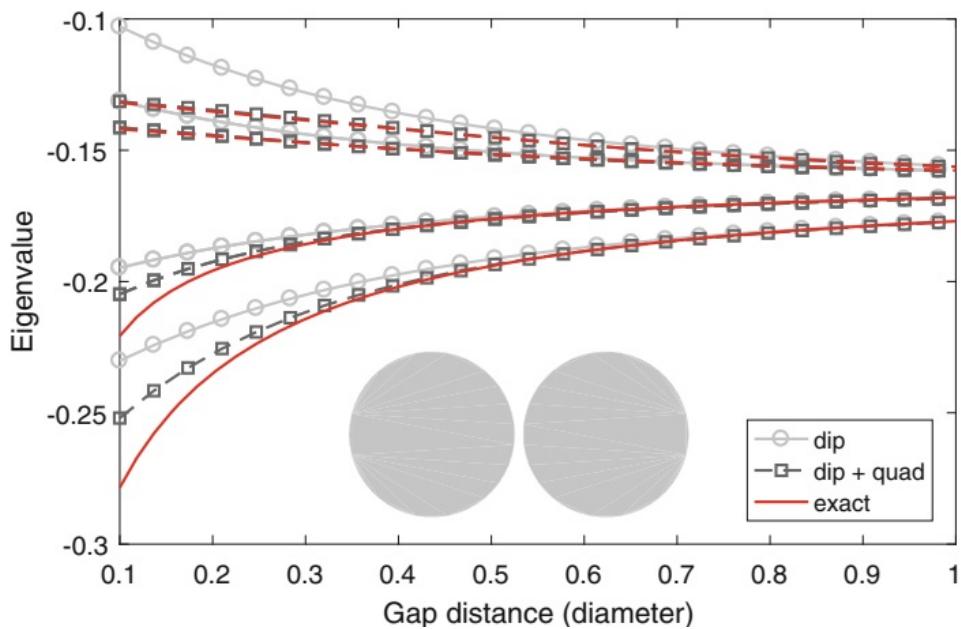
که در آن  $\mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}$  برهمنش بین مودهای دوقطبی و چهارقطبی اصلی و  $\mathcal{F}_{12}$  تزویج متقابل دوقطبی-چهارقطبی هستند. ماتریس فوق را می‌توان قطری کرد و بدست می‌آوریم

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\lambda_1^- + \lambda_2^-) \pm \sqrt{(\lambda_1^- + \lambda_2^-)^2 + 4\mathcal{F}_{12}^2} \right] \quad (۴۲.۹)$$

$$\Lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left[ (\lambda_1^+ + \lambda_2^+) \pm \sqrt{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)^2 + 4\mathcal{F}_{12}^2} \right]$$

که در آن  $\lambda_1^\pm = \lambda_1 + \mathcal{F}_{11}$  و  $\lambda_2^\pm = \lambda_2 + \mathcal{F}_{22}$  است.

با بیان کلمات، مودهای مقید و نامقید به صورت تأثیر  $\mathcal{F}_{12}$  از یکدیگر دورتر می‌شوند. مربع‌های شکل (۱۴.۹) نتایج مربوطه را نشان می‌دهند. در واقع، سازگاری با نتایج دقیق بسیار بهتر از مورد دوقطبی معادله (۴۱.۹) است. مخلوط کردن مودهای دوقطبی و چهارقطبی را می‌توان در توزیع بار نشان داده شده در شکل (۱۳.۹) برای مودهای مقید و نامقید، که در آن توزیع با توجه به کره‌های جدا نشده تغییر می‌کند، مشاهده کرد: در پیکربندی مقید، بار بیشتری در منطقه شکاف، که منجر به افزایش میدان‌های شکاف و تغییر رنگ تشید پلاسمون مربوطه می‌شود، در حالی که در پیکربندی نامقید بار از منطقه شکاف بیرون رانده می‌شود. هنگامی که فاصله بین کره‌ها در شکل (۱۴.۹) بیشتر کاهش می‌یابد، مقادیر ویژه دقیق و تقریبی دوباره شروع به انحراف کرده، که نشان دهنده سهم قابل توجهی از مودهای چندقطبی بیشتر است. مدل‌های هیریداسیون نانوذرات پلاسمونی پیچیده‌تر در مقالات مطالعه شده است، به عنوان مثال [۶۸].



شکل ۱۴.۹: مقادیر ویژه (خط قرمز) و تقریبی (نمادها) برای کره‌های تزویجی و فاصله‌های مختلف دو کره. نتایج دایره‌ها براساس نظریه اختلال که فقط شامل مودهای دوقطبی تک کرده است. نتایج مربع‌ها شامل مودهای دوقطبی و چهارقطبی است.

## ۴.۹ نگاشت همدیس

اُپتیک تبدیلی<sup>۳۰</sup> و نگاشت همدیس<sup>۳۱</sup> موضوعات سرگرم کننده‌ای هستند که به دست آوردن راه حل‌های تحلیلی برای هندسه نانوذرات در جایی که انتظار نمی‌رود چنین راه حل‌هایی وجود داشته باشد، امکان پذیر کرده است. نگاشت همدیس که سابقه‌ای در الکترواستاتیک و مکانیک سیالات دارد، توسط جان پندری و همکاران<sup>[۶۹]</sup> به زمینه پلاسمونیک آورده شد. برای کارهای مرتبط قبلی نیز به<sup>[۷۰]</sup> مراجعه کنید. در اینجا ساده‌ترین شکل آنرا که فرض برآورد تقریبی شباهستاتیک همراه با نانوساختارهایی است که بی‌نهایت در امتداد  $z$  (هندسه نانوسیم) گسترش یافته‌اند، فرض می‌کنیم، به‌طوری که پتانسیل مقیاس  $V(x, y)$  را می‌توان از معادله دو بعدی لaplas بدست آورد.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

برای حفظ مشخصه دو بعدی مسئله،  $V_{inc}$  پتانسیل ورودی باید به  $z$  بستگی داشته باشد. به همین نحو، در صورت توزیع بار، معادله لاپلاس باید با معادله پواسون جایگزین شود، بنابراین فرض می‌کنیم که توزیع شامل بارهای خطی است که در طول  $z$  مستقر شده‌اند. در اینجا ترفند جادویی اُپتیک تبدیلی و نگاشت همدیس آورده شده است: در اینگونه مسائل

<sup>۳۰</sup> Transformation optics

<sup>۳۱</sup> Conformal Mapping

دو بعد می‌توانیم با تحلیل مختلط<sup>۳۲</sup> که به‌طور خلاصه در پیوست الف آورده شده، عنوان ابزاری قدرتمند استفاده کنیم. اجازه دهید متغیر مختلط  $z = x + jy$  را معرفی کنیم. هر تابعی مانند  $f(z)$  را می‌توان به‌دو بخش حقیقی و موهومی مطابق زیر تجزیه کرد.

$$f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

در ادامه مطلوب ما در توابع تحلیلی است که در آن توابع را می‌توان بر حسب سری تیلور در اطراف نقطه  $z_0$  بسط داده و در حد  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  تابع  $f(z_0)$ ، صرفنظر از آنکه چگونه به  $z_0$  نزدیک می‌شویم، بما می‌دهد. توابع تحلیلی<sup>۳۳</sup> صاف و بطور معین قابل مشتق گیری است. ضمناً تابع را با یک قطب مانند  $z/1$  در نظر می‌گیریم که  $f(z)$  در همه جا بجز  $z = 0$  تحلیلی است. بطوری که در پیوست الف نشان داده شده است، هر تابع تحلیلی را می‌توان از معادله‌های کوشی-ریمان (الف-۲) بدست آورد که بخش‌های حقیقی و موهومی از طریق روابط زیر بهم مربوط هستند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (43.9)$$

به‌عنوان پیامد مستقیم این تحلیل،  $u, v$  توابع هارمونیکی هستند. این توابع در معادله لاپلاس دو بعدی صدق می‌کنند. در واقع داریم؛

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

با همین روش می‌توان نشان داد که  $v$  یک تابع هارمونیکی است. در ادامه چند ویژگی قابل توجه از توابع تحلیلی، که بعداً در این بخش ثابت خواهیم کرد، را بیان می‌کنیم. اگر تبدیل مختصات  $(z) = g(z')$  را انجام دهیم، در این صورت تابع زیر

$$u'(x', y') = u(x'(x, y), y'(x, y)) \quad (44.9)$$

نیز یک تابع هارمونیکی است. یک ویژگی هندسی مهم تغییر مختصات با توابع تحلیلی  $(z)$  این است که آنها زاویه‌ها را حفظ می‌کنند و بنابراین یک نگاشت همدیس را تعریف می‌کنند. این نتایج مهم زیر را دارد. فرض کنید که

- تابع  $V(x, y)$  جواب معادله لاپلاس یا پوآسون است،

- برای مقدار مفروض  $V$  در مرز  $\partial D$  ناحیه  $D$  دو بعدی

- و (یا) مشتق قائم مفروض  $\frac{\partial V}{\partial n}$  در مرز  $\partial D$

در این صورت پتانسیل تبدیل شده نیز

$$V'(x', y') = V(x'(x, y), y'(x, y))$$

جواب معادله لاپلاس یا پوآسون است. با توجه به حفظ زوایا (به‌طور خاص، به‌دلیل اینکه سطوح خارجی  $\hat{n}$ ، عمود بر مرز باقی می‌مانند)، راه حل جدید شرایط مرزی یکسانی را برای مرز تغییر

<sup>۳۲</sup>Complex Analysis

<sup>۳۳</sup>Analytic functions

یافته  $\partial D'$  برآورده می‌کند. در زمینه پلاسمونیک از این ارتباط نزدیک بین جواب‌ها می‌توان به‌شرح زیر استفاده کرد.

- ساختار مرجع اجازه دهید  $D$  یک حوزه دو بعدی از یک ساختار سیم مانند با پسوند  $V(x, y)$  حل معادله لاپلاس یا پواسون را که دارای شرایط مرزی مناسب معادله (۴.۹) است، نشان می‌دهیم. در مرز  $\partial D$

- ساختار تبدیلی اجازه دهید  $y' = y'(x, y)$   $x' = x'(x, y)$  تبدیل مختصاتی است که زوایا را حفظ می‌کند. در این صورت  $V'(x', y')$  نیز جواب معادله لاپلاس یا پواسون است که با ساخت، شرایط مرزی مناسب معادله (۴.۹) را برآورده می‌کند. در مرز تبدیل شده  $\partial D'$ .

در واقع، این یافته کاملاً قابل توجه است. کافی است معادله لاپلاس یا پواسون را یکبار برای یک ساختار واحد با مرز  $\partial D$  حل کنید، تعداد بیشماری راه حل برای مرزهای تبدیل شده  $\partial D'$  سپس بلافاصله از طریق تغییرات مختصات ساده دنبال می‌شود.

### ۱.۴.۹ چند نمونه منتخب

قبل از اینکه به جزئیات ریاضی نگاشت همدیس و مفاهیم آن در حل معادله لاپلاس بازگردیم، ارائه چند مثال منتخب احتمالاً آموزنده است تا ایده‌ای از آنچه این رویکرد می‌تواند انجام دهد ارائه دهیم. در ادامه نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم

$$z' = g(z) = \frac{1}{z^*} \quad (45.9)$$

که آن وارونگی صفحه مختلط را تعریف می‌کند. و در بخش‌های حقیقی و موهومی بیان می‌شود، از اینرو داریم؛ (توجه داشته باشید که بدون مزدوچ مختلط در مخرج، مختصات  $y$  به سادگی علامت منفی می‌گیرد)

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

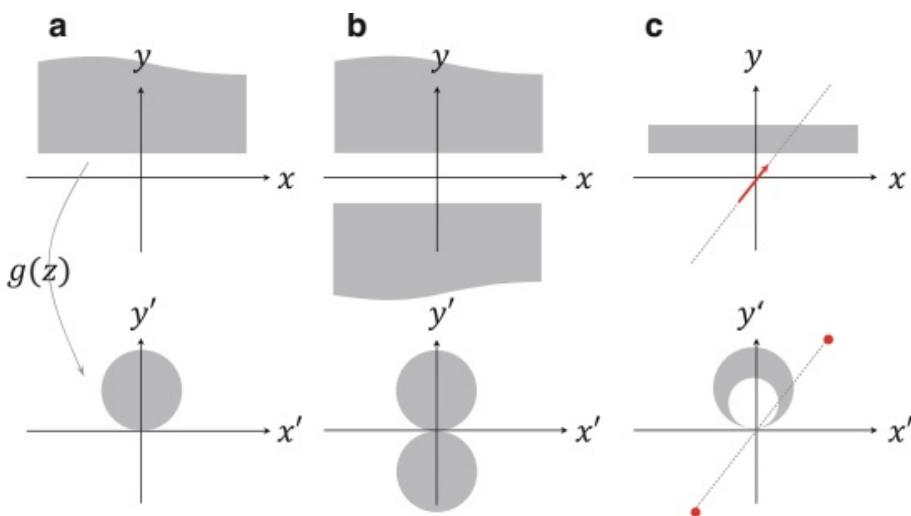
صفحه مختلط یک خط مستقیم بموازات محور حقیقی در نظر گیرید؛

$$z(t) = y_0 \left( \tan t + j \right) \quad (\tilde{46.9})$$

که در آن  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$  پارامتر مقدار حقیقی بنحوی است که  $x(t)$  تمام مقادیر را پوشش می‌دهد. با این فوراً خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} x'(t) &= y_0^{-1} \frac{\tan t}{\tan^2 t + 1} = \frac{\sin t \cos t}{y_0} = \frac{\sin 2t}{2y_0} \\ y'(t) &= y_0^{-1} \frac{1}{\tan^2 t + 1} = \frac{\cos^2 t}{y_0} = \frac{1 + \cos 2t}{2y_0} \end{aligned} \quad (46.9b)$$

عبارت دیگر، یک خط مستقیم با پارامتر  $jy_0$  به یک دایره بشعاع  $(2y_0)/j$  تبدیل می‌شود. شکل (۱۵.۹) نمونه‌هایی از اینگونه نگاشت را نشان می‌دهد. شکل (الف) نشان می‌دهد که چگونه یک تیغه نیمه نامتناهی پُر از مواد دی‌کتریک به یک استوانه نگاشت می‌شود. به همین ترتیب، دو تیغه (ب) بهدو استوانه مماسی نگاشت می‌شوند. این ساختار بسیار قابل توجه است زیرا حاوی یک نقطه منحصر به‌فرد است، زیرا نقطه تماس دو استوانه، مطالعه آن با مدل‌های غیرتحلیلی بسیار دشوار است. در نهایت، شکل (ج) نگاشت یک تیغه به یک استوانه هلالی شکل را نشان می‌دهد. مرجع [۶۹] یک دستگاه برداشت نور پلاسمونیک<sup>۳۴</sup> را پیشنهاد می‌کند.



شکل ۱۵.۹: نگاشت همدیس وارونگی صفحه مختلف. (الف) نیم-فضای نیمه نامتناهی بر روی یک استوانه نگاشته شده است. (ب) دو نیم-فضای که با یک شکاف بر روی دو استوانه "مماسی" نگاشته شده است. (ج) یک تیغه بر روی یک استوانه هلالی شکل نگاشته شده است. در این شکل‌ها همچنین تبدیل منبع خارجی، که در اینجا یک دوقطبی، بهدو بار واقع در بینهایت نگاشته شده، را نشان می‌دهیم. میدان الکتریکی مربوطه یک میدان ثابت است که در امتداد جهت دوقطبی قرار دارد.

ما همچنین نگاشت تحریک، جایی که یک دوقطبی در مبدأ (چارچوب اصلی) بهدو بار در بینهایت (چارچوب تبدیل شده) نگاشت می‌شود، را نشان میدهیم. میدان مربوطه ثابت بوده، شبیه تحریک یک موج صفحه‌ای در حد شباهت‌تایک، با یک میدان الکتریکی ثابت در امتداد جهت دوقطبی است. بهروشی معکوس، می‌توانیم از دو بار در بینهایت در چارچوب اصلی برای شبیه سازی تحریک یک دوقطبی نوسانی در چارچوب تبدیل شده، استفاده کنیم.

## ۲۴.۹ جزئیات نگاشت همدیس

قبل از ارائه نتایج برای ساختارهای نشان‌داده شده، در شکل (۱۵.۹)، اثبات‌هایی که معادله لاپلاس تحت نگاشت همدیس معتبر باقی می‌ماند و این نگاشت زاویه‌ها را حفظ می‌کند، را ترسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم که  $(z)g$  نگاشت یک به یک است، به‌این معنی که یک تبدیل

<sup>۳۴</sup>Plasmonic Light-Harvesting Device

معکوس وجود دارد. این حتماً برای مثال وارونگی صفحه مختلط که در معادله (۴۵.۹) داده شده، صادق است. از معادله (۴۴.۹) مربوط به توابع  $u, v$  با مختصات اولیه و بدون پریم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'}$$

با ادامه در امتداد همان خطوط خواهیم داشت؛

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x'} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial x'} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial y}{\partial y'} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial y'} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial y'} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial y'} \right)^2$$

با استفاده از معادلات کوشی-ریمان<sup>۳۵</sup>

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial y'}, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = -\frac{\partial x}{\partial y'}$$

برای تابع مختلط  $z = x + jy$  در این صورت میدهد:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial y'} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (۴۷.۹)$$

بنابراین، هر جا  $u$  جواب معادله لاپلاس باشد،  $u'$  نیز هست. برای اینکه نشان دهیم در نگاشت همدیس زوایا حفظ می‌شوند، بصورت زیر عمل می‌کنیم؛

- فاز و زاویه گرادیان با معرفی فاز یا آرگومان عدد مختلط شروع می‌کنیم؛

$$\ln \left( re^{j\theta} \right) = \ln r + j\theta \implies \theta = \arg z = \operatorname{Im}(\ln z).$$

منحنی  $z(t)$  که به پارامتر  $t$  بستگی دارد را در نظر گیرید. مشتق نسبت به پارامتر  $t$  را با  $\dot{z}(t)$  نشان می‌دهیم و آن مماس بر منحنی را میدهد. زاویه گرادیان این مماس در این صورت می‌دهد؛

$$\theta = \arg [\dot{z}(t)]$$

- تقاطع منحنی‌ها سپس دو منحنی  $z_1(t)$  و  $z_2(t)$  که فرض می‌شود در نقطه  $z_1(t_1) = z_2(t_2)$  یکدیگر را قطع می‌کنند، معرفی می‌کنیم. برای هر مقدار  $t$  می‌توانیم یک مماس بر منحنی تعریف کنیم. زاویه بین دو منحنی در نقطه تقاطع را می‌توان بصورت زیر بیان کرد؛

<sup>۳۵</sup>Cauchy–Riemann equations

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arg[\dot{z}_2(t_2)] = -\arg[\dot{z}_1(t_1)]$$

- نگاشت همدیس پس از نگاشت همدیس، منحنی  $z(t) = g[z(t)]$  تبدیل می‌شود. با استفاده از قانون زنجیره‌ای، در این صورت خواهیم داشت؛

$$\dot{z}(t) = \frac{dz'}{dt} = \frac{dg}{dz} \frac{dz}{dt} = g'(z(t)) \dot{z}(t)$$

برای زاویه بین منحنی‌های تبدیل شده، بدست می‌آید؛

$$\theta' = \operatorname{Im} \left\{ \ln [g'(z) \dot{z}_2(t_2)] \right\} - \operatorname{Im} \left\{ \ln [g'(z) \dot{z}_1(t_1)] \right\} = \arg \dot{z}_2 - \arg \dot{z}_1$$

بنابراین، اگرچه زاویه‌های بردار مماسی  $\dot{z}_{1,2}(t)$  در هنگام نگاشت تغییر می‌کنند، اما زاویه نسبی بین منحنی‌ها یکسان باقی می‌ماند. این همان چیزی است که قبلاً آن را حفظ زوایا نامیده‌ایم.

مهمنتر از همه برای زمینه پلاسمونیک، جهت  $\hat{n}$  عمود بر مرز مفروض ذرات  $\partial D$  به جهت جدیدی  $n'$  نگاشته می‌شود که دوباره عمود بر مرز تبدیل شده  $\partial D'$  است. این نتیجه مهمی دارد که پتانسیل  $V(x, y)$  در مرز  $\partial D$  شرایط مرزی دیریشله و نیومن معادله (۴.۹) را برآورده می‌کند که پتانسیل  $V'(x', y')$  نگاشته شده شرایط مرزی را در  $\partial D'$  نیز برآورده می‌کند.

### ۳.۴.۹ استوانه‌های مماسی

در اینجا سرگرمی به پایان می‌رسد و کار واقعی شروع می‌شود. در زیر استوانه‌های مماسی<sup>۳۶</sup> را که با یک میدان الکتریکی ثابت در امتداد جهت  $y$  اعمال شده است، شکل (۱۵.۹)-ب، در نظر می‌گیریم. مطلوب خاص ما پتانسیل در نقطه تماش خواهد بود.

- تحریک دوقطبی رابطه ابتدائی ما پتانسیلی تولید شده توسط یک دوقطبی واقع در مبدأ مختصات و در جهت  $\hat{y}$  است؛

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dz = \frac{1}{2\pi\epsilon_b} \frac{y}{r^2}$$

که انتگرال‌گیری بر روی تمام محور  $z$  است. در اینجا  $\epsilon_b$  گذردهی محیط بستر دوقطبی است. از آنجا که این دوقطبی در شکاف ناحیه دو تیغه فلزی است، شکل (۱۵.۹)-ب، می‌توانیم معادله پواسون را از طریق تبدیل فوریه در امتداد  $x$  ها حل کنیم. تبدیل فوریه پتانسیل نسبت به  $x$  خواهد بود؛

$$\tilde{V}_{dip}(x, y) = \frac{1}{2\pi\epsilon_b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j k x} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2\epsilon_b} \operatorname{sgn}(y) e^{-|ky|} \quad (48.9)$$

<sup>۳۶</sup>Kissing Cylinders

- معادله پوآسون برای نیم-فضای بینهایت پتانسیل القائی جواب معادله لاپلاس بصورت زیر است:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) e^{-j k x} e^{\pm y} = 0$$

چون  $V_{dip}$  در معادله (۴۸.۹) تابع فردی نسبت به  $y$  است، پتانسیل القائی باید تابع فردی باشد. با این اطلاعات، می‌توانیم رابطه پتانسیل القائی برای ( $y > 0$ ) بصورت زیر بنویسیم؛

$$\tilde{V}_{ind}(k, y) = \begin{cases} a(k) e^{-j k x} \sinh(|k|y) & \text{برای } y < \delta/2 \\ b(k) e^{-j k x} e^{|k|(y-\delta/2)} & \text{برای } y > \delta/2 \end{cases}$$

که در آن  $\delta/2 < y < \delta/2 - \delta$  – مربوط بهناحیه شکاف بین دو نیم فضای نیمه بینهایت است که با موادی گزده‌هی  $\epsilon$ ، شکل (۱۵.۹)-ب، پُر شده است. برای  $y > \delta/2$  تابع پتانسیلی انتخاب کرده‌ایم که بطور نمائی با دور شدن از سطح مشترک کاهاش می‌یابد. ضرایب  $a(k), b(k)$  را باید از شرایط مرزی سطح مشترک لایه  $y = \delta/2$  بدست آورد. از پیوستگی پتانسیل و مشتق قائم جایجایی دیالکتریک، معادله (۴.۹)، خواهیم داشت؛

$$\frac{1}{2} \epsilon_b^{-1} e^{-\frac{1}{2}|k|\delta} + a(k) \sinh(\frac{1}{2}|k|\delta) = b(k)$$

$$-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|k|\delta} + \epsilon_b a(k) \cosh(\frac{1}{2}|k|\delta) = -\epsilon b(k)$$

در این صورت از حل آن برای  $a(k)$  می‌دهد؛

$$a(k) = -\frac{1}{\epsilon_b} \frac{e^\alpha}{e^{|k|\delta} - e^\alpha}, \quad e^\alpha = \frac{\epsilon - \epsilon_b}{\epsilon + \epsilon_b}$$

پتانسیل القائی را می‌توان از عکس تبدیل فوریه بدست آورد و در مرجع (معادله پنجم [۷۱]) آمده است؛

$$V_{ind}(x, y) = -\frac{1}{\epsilon_b} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^\alpha}{e^{|k|\delta} - e^\alpha} \right] e^{-j k x} \sinh(|k|y) \frac{dk}{2\pi} \quad (۴۹.۹)$$

- راه حل تقریبی انتگرال در مراجع [۷۱، ۷۲] برخی از اطلاعات در مورد نحوه حل تقریبی این انتگرال با استفاده از انتگرال گیری مختلط ارائه شده است. برای  $\epsilon' < -\epsilon_b$  انتگرال تحت تاثیر قطب در  $|k|\delta = \alpha$  نزدیک به محور حقیقی است، اگرچه در اصل قطب‌ها و شاخه‌های دیگری نیز وجود دارند که منجر به اصلاحاتی مانند امواج خزندۀ [۷۸] می‌شود [۷۱]. برای  $x > 0$  می‌توانیم مسیر انتگرال گیری در معادله (۴۹.۹) را اضافه کنیم. یک نیم دایره با شعاع  $R$  در صفحه مختلط بالائی، شکل (ب-۱)، جایی که  $R$  در پایان

<sup>۷۷</sup>Poles and Branch

<sup>۷۸</sup>Creeping Waves

محاسبه بهبینهایت می‌رود. سپس، یا شکل مجذوبی  $e^{-|k|\delta}$  اصطلاح در پرانتر منجر بهمیرایی نمایی انتگرال می‌شود (توجه داشته باشید که  $y$  به مقادیر کوچکتر از  $2/\delta$  محدود می‌شود، بنابراین سهم  $\sinh$  همیشه کوچکتر است) بنابراین، با استفاده از قضیه باقی مانده‌ها، از معادله (۴۹.۹) پیدا می‌کنیم.

$$V_{ind}(x, y) = \int_C f(x, y; k) dk \approx -j2\pi \lim_{k \rightarrow k_0} (k - k_0) f(x, y; k)$$

با قطب در  $k_0 = \alpha/\delta$ . این می‌دهد؛

$$V_{ind}(x, y) \approx \frac{j}{\delta \epsilon_b} e^{-jk_0 x} \sinh(k_0 y). \quad (50.9)$$

• نگاشت همدیس اکنون این عبارت را بهنگاشت همدیس ارائه می‌کنیم. از رابطه (۴۶.۹) در می‌باییم که  $\delta = a^{-1}$  معکوس شعاع استوانه  $a$  و موقعیت  $(x', y') = a(\sin \theta, 1 + \cos \theta)$  در محیط استوانه اصلی از  $(x, y) = \frac{1}{2}a^{-1}(\tan \frac{\theta}{2}, 1)$  تبدیل شده است.

با جمع آوری نتایج، پتانسیل القائی استوانه‌های مماسی برای یک میدان الکتریکی ثابت در طول محور تقارن می‌رسیم؛

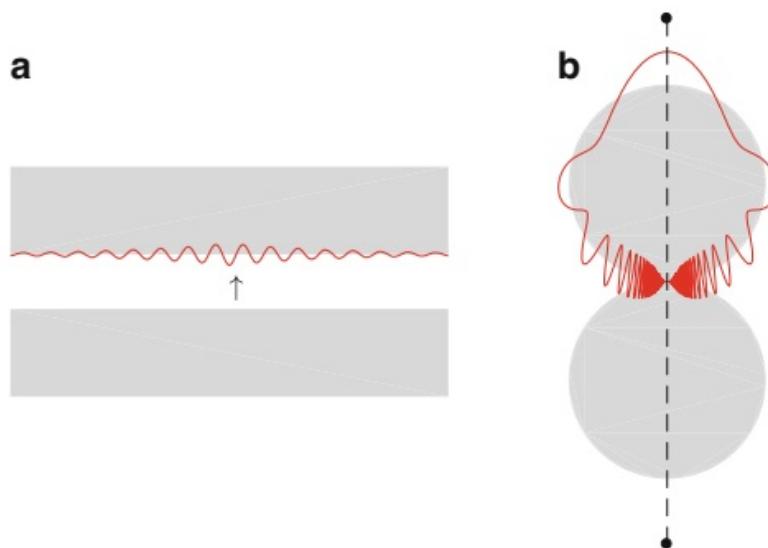
### پتانسیل استوانه‌های مماسی (تحریک موج صفحه‌ای)

$$V_{ind}(a, \theta) \approx \frac{ja}{\epsilon_b} \exp \left[ -j\alpha \tan \frac{\theta}{2} \right] \sinh \alpha \quad (51.9)$$

شکل (۱۶.۹) پتانسیل را برای (الف) تحریک دوقطبی ساختار تیغه، معادله (۵۰.۹)، نشان می‌دهد، و (ب) ساختار استوانه مماسی نگاشته شده، معادله (۵۱.۹)، جائی که دوقطبی نوسانی روی تحریک موج صفحه‌ای با میدان الکتریکی ثابت در امتداد  $y$  نگاشته شده است. در (الف) پلاسمون سطحی شاخه‌های دوقطبی نوسانی که در امتداد سطح مشترک فلز منتشر شده و انرژی بعلت تلفات فلز از بین میروند.

در ساختار نگاشته شده، میدان الکتریکی ثابت پلاسمون‌های ذره‌ای را به سمت انتشار نقطه تماس، جائی که سرعت آنها کاهش می‌یابد، میراند. میرایی نمایی دامنه نزدیک به نقطه تماس توسط قسمت کوچک موهومی  $\alpha$  ناشی می‌شود. در مرجع [۷۲] نویسنده‌گان خواص نوری استوانه‌های مماسی را بحث کرده و برای سطح مقطع انقراضی نتیجه شگفت آور ساده  $C_{ext} \propto Re(\ln \alpha)$  را بدست آورده‌اند. طول موج نوسان پلاسمون هنگام نزدیک شدن به نقطه تماس، بطور فزاینده‌ای کوتاه می‌شود. استوانه‌ها به علت گند شدن آدیاباتیک، نمی‌توانند به عنوان یک تشديد کننده عمل کنند. در نتیجه،  $C_{ext}$  هیچ ویژگی تشديد از خود نشان نمی‌دهد.

تبديلات نوری و نگاشت همدیس، برای تحلیل نقاط منحصر بهفرد که در آن قدرت پیش بینی روش‌های عددی زیر سوال می‌رود، فناوری‌های قدرتمندی هستند. از سوی دیگر، در مجاورت چنین نقاط منحصر بهفرد طول موج پلاسمون به طور فزاینده‌ای کوتاه می‌شود و قدرت میدان بسیار بالا می‌رود، از این‌رو صحت سنجی الکترودینامیک کلاسیک و گذردهی‌های محلی زیر



شکل ۱۶.۹: رسم پتانسیل (قسمت حقيقی) برای استوانه‌های مماسی. (الف) دوقطبی در حال نوسان، پلاسمون‌های سطحی را که در امتداد سطح مشترک ساختار تیغه انتشار می‌باید، بهدلیل تلفات اهمی فلز در قسمت موهومی گذردهی<sup>۳۹</sup>، میرا شده و رانده می‌شوند. (ب) پس از نگاشت همدیس از طریق وارونگی صفحه مختلط، ساختار تیغه بهدو استوانه مماسی نگاشته می‌شود. امواج در بینهایت بهمدا، جایی که میرایی نمایی بهدلیل<sup>۴۰</sup> است، نگاشته می‌شوند. برای درک بهتر، فقط نوسان پلاسمون‌های ذرات بالائی نشان می‌دهیم.

سوال می‌رود. بهمین دلیل، در نظر گرفتن، مجاور نقاط منحصر بهفرد، مانند توابع دیالکتریک غیرمحالی یا تونل زنی کوانتومی<sup>[۷۳]</sup>، ممکن است مهم باشد. این موارد در بخش‌های بعدی کتاب بحث می‌شود.

## ۵.۹ نظریه می

معادلات ماکسول (بدون تقریب شباهستاتیک) را فقط برای چند ساختار هندسی محدود می‌تواند به صورت تحلیلی حل کرد. مهمترین مثال احتمالاً نظریه می<sup>۳۹</sup> است<sup>[۷۴]</sup>، که راه حل‌هایی برای پراکندگی نور بصورت ذرات کروی به اندازه دلخواه ارائه می‌دهد. نظریه می ضیافتی از توابع خاص، از جمله هارمونیک‌های کروی و توابع بسل و هنکل<sup>۴۰</sup> کروی، و خوانندگانی که با چنین توابع آشنا نیستند، ممکن است این روش را غیر قابل بررسی و گیج کننده بدانند. با این حال، نتایج نهایی به طرز شگفت آوری ساده و کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. در ادامه اجزای اساسی نظریه می را ترسیم می‌کنیم و نتایج اصلی آن را ارائه می‌دهیم، جزئیات استخراج روابط برای خواننده علاقه‌مند در پیوست(۵) خلاصه می‌شود.

موقعیتی که در نظر داریم در شکل ۱۷.۹ نشان داده شده است و شامل یک نانوذره کروی

<sup>۳۹</sup>Mie Theory

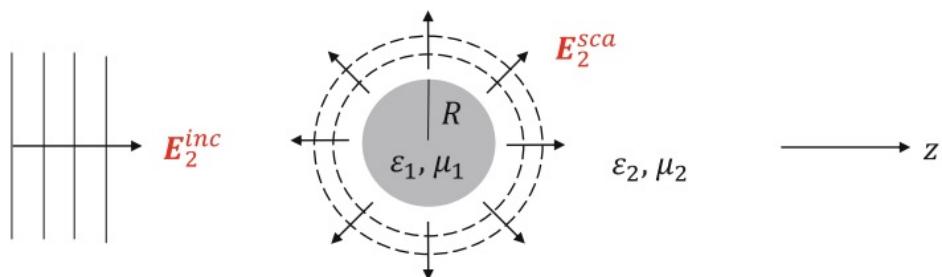
<sup>۴۰</sup>Bessel and Hankel functions

به شعاع  $R$  گذردهی  $\epsilon_1$  و نفوذپذیری  $\mu_1$  که در محیطی با خواص مواد  $\epsilon_2, \mu_2$  تعبیه شده است. کره توسط یک موج صفحه تابشی با میدان الکتریکی  $E_2^{inc}$  تحریک و واکنش نانوذره توسط میدان‌های پراکنده  $E_1^{sca}, E_2^{sca}$  در داخل و خارج از کره توصیف می‌شود. در این صورت راه حل می‌باشد میدان‌های الکترومغناطیسی داخل و خارج کره بصورت امواج کروی بوده، که حل معادله موج هستند، که با استفاده از شرایط مرزی معادلات ماکسول و تطبیق میدانها در مرز کره، بدست می‌آیند. میدان‌های الکتریکی عرضی با استفاده از معادله از معادله (۴-۵) بسط داده می‌شود؛

$$\mathbf{E}_1^{sca}(\mathbf{r}) = Z_1 \sum_{l,m} \left[ d_{lm} j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{j}{k_1} c_{lm} \nabla \times j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

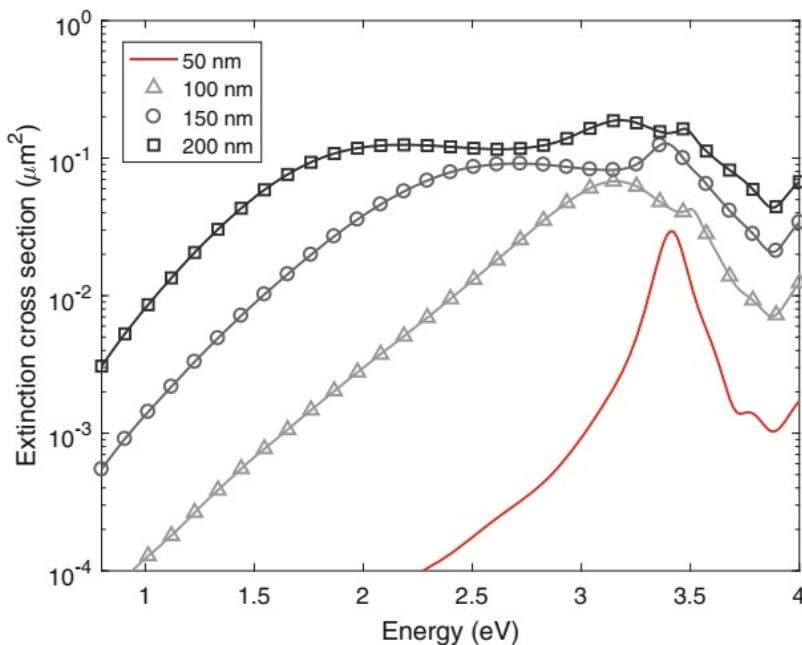
$$\mathbf{E}_2^{sca}(\mathbf{r}) = Z_2 \sum_{l,m} \left[ b_{lm} h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{j}{k_2} a_{lm} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

که در آن  $k$  و  $Z$  بترتیب عدد موج و امپدانس هستند. جملاتی که در این معادله بکار برده شده بقرار زیر هستند؛



شکل ۱۷.۹: شماتیک مسئله می‌یک ذره کروی به شعاع  $R$  و خواص مواد  $\mu_1, \epsilon_1$  که در محیطی با  $\mu_2, \epsilon_2$  واقع شده است. ذره توسط موج صفحه‌ای با میدان الکتریکی  $E_2^{inc}$  تحریک و واکنش کره با میدان‌های پراکنده  $E_1^{sca}$  و  $E_2^{sca}$  به ترتیب در داخل و خارج ذره کروی توصیف می‌شوند.

- ضرایب برای میدان‌های الکترومغناطیسی داخل کره هستند.  $c_{lm}, d_{lm}$
- ضرایب برای میدان‌های الکترومغناطیسی خارج کره هستند. این ضرایب باید از شرایط مرزی معادلات ماکسول تعیین شوند.  $a_{lm}, b_{lm}$
- توابع  $j_l(k_1 r)$  که از حل معادله موج کروی، معادله (ج-۲۵)، بدست می‌آیند. این توابع در مبداء مختصات معین هستند و از این‌رو در داخل کره استفاده می‌شوند.
- توابع هنکل نوع دوم مرتبه  $l$  این امواج کروی دور شونده از کره هستند و از این‌رو در خارج از کره از آنها استفاده می‌شوند.  $h_l^{(2)}(k_2 r)$
- هارمونیک‌های کروی برداری معادله (د-۸) هستند که همراه با  $\nabla \times \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)$  پایه کاملی برای بخش زاویه‌ای توابع برداری عرضی تدارک می‌کنند.



شکل ۱۸.۹: سطح مقطع انقراضی برای نانوسفرهای نقره و برای قطرهای مختلف کره، که توسط نظریه می از معادله (۵۲.۹) محاسبه شده است.تابع دیالکتریک نقره از [۳۴] گرفته شده و گذردهی محیط بستر  $\epsilon_0$  است.

در ادامه جزئیات محاسبه واقعی و تا حدودی فنی را حذف می‌کنیم، برای جزئیات به پیوست(۵) مراجعه کنید و در آنجا نتایج نهایی را به سادگی بیان می‌کند. به نظر می‌رسد راحت‌تر باشد که توابع بسل-ریکاتی<sup>۴۱</sup> را معرفی کنیم (معادله ۱۱-۵):

$$\psi_l(x) = x j_l(x), \quad \xi_l(x) x h_l(x)$$

که مشتق آنها  $\psi'_l(x) = x j_l'(x) x h_l(x)$  هستند. ضرایب می که مشخص کننده میدان‌های الکترومغناطیسی خارج از کره هستند را می‌توان بصورت زیر بیان کرد (معادله ۲۲-۵):

### ضرایب می

$$a_l = \frac{Z_2 \psi_l(x_1) \psi'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1)] \psi_l(x_2)}{Z_2 \psi_l(x_1) \xi'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1)] \xi_l(x_2)} \quad (52.9)$$

$$b_l = \frac{Z_2 \psi'_l(x_1) \psi_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1)] \psi'_l(x_2)}{Z_2 \psi'_l(x_1) \xi_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1)] \xi'_l(x_2)}$$

با عبارات مشابه برای ضرایب  $c_l, d_l$  می‌توان میدان‌های داخل کره را مشخص کرد. در اینجا  $x_{1,2} = k_{1,2} R$  را معرفی کرده‌ایم. با استفاده از این ضرایب می‌توان سطح مقطع پراکندگی و

<sup>۴۱</sup>Riccati-Bessel

انفرضی را برای تحریک موج صفحه‌ای به صورت معادله زیر بیان کرد. (معادلات ۵ و ۶-۲۶):

### سطح مقطع پراکندگی و انفرضی برای کره

$$C_{sca} = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_l (2l+1) \left( |a_l|^2 + |b_l|^2 \right) \quad (۵۳.۹)$$

$$C_{ext} = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_l (2l+1) Re[a_l + b_l]$$

نکته مهم در مورد (۵۳.۹) این است که یک عبارت نسبتاً ساده است که امکان محاسبه سطح مقطع نوری را به شیوه‌ای بسیار کارآمد می‌دهد. شکل (۱۸.۹) طیف انفرض نوری را برای نانوکره‌های نقره با قطرهای مختلف نشان می‌دهد. برای کوچکترین کره با قطر ۵۰ نانومتر (خط قرمز) طیف‌ها بسیار شبیه به حالت شبه استاتیکی هستند، (شکل ۴.۹). تعدادی از ویژگی‌ها را می‌توان در شکل مشاهده کرد:

- انتقال به قرمز با افزایش اندازه نانوذره، قله دوقطبی به سمت قرمز انتقال می‌یابد. در یک تصویر کیفی، نیروی الکتریکی وارد بر توزیع بار سطحی پلاسمون‌های ذرات به عنوان اثر سرعت محدود نور، گند می‌شود. اگر ساده لوحانه پلاسمون ذره را بصورت یک نوسان‌ساز مکانیکی به تصویر بکشیم، تاخیر می‌تواند با کاهش یافتن ثابت فنر همراه باشد که در نتیجه منجر به انتقال فرکانس تشدید بسوی قرمز می‌شود.

- میرائی تابشی با افزایش اندازه، قله‌ها در نتیجه میرایی تابشی، گسترش می‌یابند. این بدان علت است که دوقطبی بزرگ نور را بسیار کارآمدتر ساطع می‌کند. برای بزرگترین کره، تشدید دوقطبی آنقدر وسیع می‌شود که حتی تشخیص آن نیز دشوار است.

- نقض قوانین انتخاب در نهایت، با افزایش اندازه، قوانین انتخاب نوری معمول (که در حد شباهستاتیک به دست می‌آیند) کاهش یافته و قله‌های جدیدی در طیف ظاهر می‌شوند. آنها را می‌توان به چهار قطبی و سایر مودهای چند قطبی مربوط کرد.

ویژگی‌های بالا دارای ماهیت عمومی هستند و برای سایر ساختارهای هندسی نانوذرات نیز قابل مشاهده است. به طور کلی، برای سیستم‌های حجیم، مانند کره یا مکعب، تقریب شباهستاتیکی برای ابعاد نانوذرات کوچکتر از مثلاً ۵۰ نانومتر به خوبی کار می‌کند. برای ساختارهای مسطح یا طویل، تقریب شباهستاتیکی تا ابعاد حدود ۱۰۰ نانومتر معتبر باقی می‌ماند. برای ساختارهای بزرگتر با شکل‌های متفاوت از کره، هیچ راه حل تحلیلی در دسترس نیست، و معمولاً باید به روش‌های شبیه‌سازی عددی متوجه شد. به عنوان اولین قدم برای این منظور، در ادامه روش انتگرال مرزی را برای معادلات ماکسول معرفی می‌کنیم. شرح مبسوط روش‌های عددی در نانو اپتیک، در فصل یازدهم ارائه خواهد شد.

## ۶.۹ روش انتگرال مرزی برای معادله موج

برای معادلات کامل ماکسول نیز می‌توان یک روش انتگرال مرزی به منظور محاسبه میدان‌های الکترومغناطیسی ذرات با اندازه و شکل دلخواه بدست آورد. با این حال، خیلی پیچیده‌تر از شبه‌استاتیک است.

نقطه شروع معادله (۲۶.۵) است که میدان‌های الکترومغناطیسی  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  در کل حجم را به میدان‌های (مماسی)  $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}$  در مرز مربوط می‌کند. در ادامه، یک روش محدود کننده  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$  انجام داده و از شرایط مرزی معادلات ماکسول استفاده می‌کنیم تا عبارتی را بدست آوریم که بتوان میدان‌های الکترومغناطیسی در مرز را برای میدان‌های ورودی  $\mathbf{E}_{inc}$ ,  $\mathbf{H}_{inc}$  محاسبه کرد. از آنجا که فقط به میدان‌های مماسی علاقه داریم، هر دو طرف معادله (۲۶.۵) را در عمود بر سطح  $\hat{\mathbf{n}}$  ضرب خارجی انجام می‌دهیم، و

$$\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ -j\omega\mu \left[ \mathbb{S}\mathbf{u}_H \right](\mathbf{r}) - \left[ \mathbb{D}\mathbf{u}_E \right](\mathbf{r}) \right\} \quad (54.9)$$

$$\mathbf{u}_H(\mathbf{s}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ +j\omega\epsilon \left[ \mathbb{S}\mathbf{u}_E \right](\mathbf{r}) - \left[ \mathbb{D}\mathbf{u}_H \right](\mathbf{r}) \right\}$$

به میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی  $\mathbf{u}_H = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$  و  $\mathbf{u}_E = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$  میرسیم.

- تک لایه با پتانسیل تک لایه معادله (۳۴.۵) شروع می‌کنیم؛

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{S}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}} \times \oint_{\partial\Omega} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}') + \frac{1}{k^2} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \cdot \nabla' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{s}') \right] dS'$$

که در آن جمله اول را می‌توان مشابه روش دیریشله در رویکرد شبه‌استاتیک تحلیل کرد و جمله دوم فقط مشتق‌های مماسی را شامل می‌شود که بدون توجه به نزدیک شدن به مرز از خارج، یا داخل مقدار یکسانی می‌دهد. بنابراین، مقدار پتانسیل تک لایه به جهت روش محدود کننده بستگی ندارد.

- دو لایه برای پتانسیل دو لایه خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}) &= - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}} \times \oint_{\partial\Omega} \nabla \times G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}(\mathbf{r}') dS' \\ &= - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \oint_{\partial\Omega} \left\{ \nabla \left[ \hat{\mathbf{n}} \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}') \right] - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial n} \mathbf{u}(\mathbf{s}') \right\} dS' \end{aligned}$$

که در آن که ضرب خارجی را ساده کرده‌ایم. جمله اول در داخل براکت برای  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$  صفر می‌شود زیرا برای میدان بردار مماسی  $\mathbf{u}$  داریم  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = 0$ . محاسبه جمله دوم نیز مانند بحث قبلی برای حالت شبه‌استاتیک است، از اینرو داریم

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}} \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \tau_j \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{s}) + \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{D}\mathbf{u}](\mathbf{s})$$

که در آن علامت مثبت یا منفی در  $\tau_{1,2} = \pm 1$  برای وقتی از داخل یا خارج به مرز نزدیک می‌شویم است.

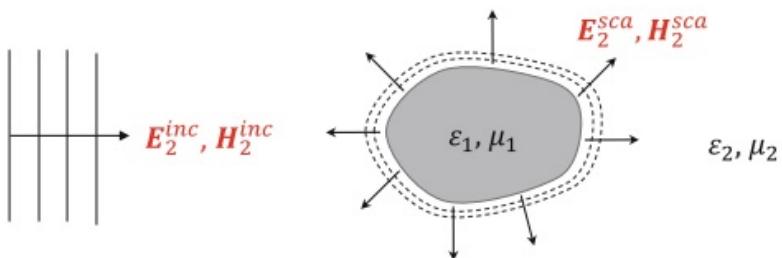
با کنار هم قرار دادن همه نتایج، از معادله (۵۴.۹) مجموعه معادلات زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ -j\omega\mu \left[ \mathbb{S}\mathbf{u}_H \right](\mathbf{s}) - \left[ \mathbb{D}\mathbf{u}_E \right](\mathbf{s}) \right\} \\ \frac{1}{2}\mathbf{u}_H(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i^{inc}(\mathbf{s}) - \tau_i \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ +j\omega\epsilon \left[ \mathbb{S}\mathbf{u}_E \right](\mathbf{s}) - \left[ \mathbb{D}\mathbf{u}_H \right](\mathbf{s}) \right\} \end{aligned} \quad (۵۵.۹)$$

اکنون همه مواد لازم برای بسته‌بندی کردن یک روش انتگرال مرزی برای حل معادله ماکسول را در اختیار داریم. موقعیتی که در ذهن داریم در شکل (۱۹.۹) نشان داده شده است و شامل یک یا چند نانوذره است که در معرض برخی تحریک‌های تابشی، به عنوان مثال، یک موج صفحه‌ای هستند. کمیت‌های اساسی روش انتگرال مرزی، میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی

$$\mathbf{u}_E = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{u}_H = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$$

که در مرز ذره پیوسته هستند. همچنین فرض می‌کنیم که تحریک ذره فقط از طریق ناحیه بیرونی است، به طوری که  $\mathbf{E}_1^{inc}$  و  $\mathbf{H}_1^{inc}$  هر دو صفر هستند. با این، از معادله (۵۵.۹)، معادلات



شکل ۱۹.۹: شماتیک روش انتگرال مرزی. یک یا چند نانوذره توسط برخی میدان‌های تابشی تحریک می‌شوند، به عنوان مثال، میدان‌های تحریک ممکن است موج صفحه‌ای باشند. پاسخ سیستم توسط میدان‌های الکترومغناطیسی پراکنده  $\mathbf{E}_{1,2}^{sca}$  و  $\mathbf{H}_{1,2}^{sca}$  در داخل و خارج نانوذره توصیف می‌شوند. در روش انتگرال مرزی، میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی  $\mathbf{H}$  در مرز ذرات  $\partial\Omega$  در مراتب ذرات  $\partial\Omega$  شناخته شدند، می‌توان میدان‌ها را در هر جای دیگر با استفاده از روابط مربوطه محاسبه کرد. در شکل  $\epsilon_1, \mu_1$  پارامترهای مواد نانوذره و  $\epsilon_2, \mu_2$  پارامترهای مواد محیط بستر را نشان می‌دهند.

داخل ذره را بدست می‌آوریم؛

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) &= j\omega\mu_1 \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \mathbb{S}_1 \mathbf{u}_H \right](\mathbf{s}) + \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \mathbb{D}_1 \mathbf{u}_E \right](\mathbf{s}) \\ \frac{1}{2}\mathbf{u}_H(\mathbf{s}) &= -j\omega\epsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \mathbb{S}_1 \mathbf{u}_E \right](\mathbf{s}) + \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \mathbb{D}_1 \mathbf{u}_H \right](\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (۵۶.۹)$$

که در آن  $\mathbb{S}_{1,2}$  و  $\mathbb{D}_{1,2}$  عملکردهای انتگرالی تابع گرین برای عده‌های موج  $k_{1,2}$  هستند. بهمین

نحو، معادلات خارج ذره را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{u}_E(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{s}) - j\omega\mu_2\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{S}_2\mathbf{u}_H](\mathbf{s}) - \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{D}_2\mathbf{u}_E](\mathbf{s}) \\ \frac{1}{2}\mathbf{u}_H(\mathbf{s}) &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{s}) + j\omega\epsilon_2\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{S}_2\mathbf{u}_E](\mathbf{s}) - \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbb{D}_2\mathbf{u}_H](\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (۵۷.۹)$$

از این دو مجموعه معادلات (۵۶.۹) و (۵۷.۹) باید دو معادله برای محاسبه مجھولات  $\mathbf{u}_{E,H}$  بازه میدان‌های تابشی  $\mathbf{E}^{inc}$  و  $\mathbf{H}^{inc}$  استخراج کنیم. در مقالات و کتب این زمینه، تعداد بی‌شماری از ترکیب‌های مختلف این معادلات، یا روابطی که با کمی اصلاحات از معادلات از معادلات موج ماکسول به دست آمده‌اند، وجود دارد. رویکردها اغلب بر اساس معادلات انتخاب شده، مانند معادلات انتگرالی میدان الکتریکی (EFIE)، معادلات انتگرالی میدان مغناطیسی (MFIE)،<sup>۴۲</sup> یا معادلات انتگرالی میدان ترکیبی (CFIE)<sup>۴۳</sup> نامگذاری می‌شوند و علاقه‌مندان را به مطالب تخصصی ارجاع می‌دهیم. در اینجا یک نوع را معرفی می‌کنیم که از تفریق دو مجموعه معادله حاصل می‌شود. این معادلات انتگرالی مرزی برای معادلات ماکسول است.

### معادله انتگرال مرزی برای معادلات ماکسول

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbb{D}_1\mathbf{u}_E + \mathbb{D}_2\mathbf{u}_E) + \hat{\mathbf{n}} \times (j\omega\mu_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_H] + j\omega\mu_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_H]) &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{s}) \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbb{D}_1\mathbf{u}_H + \mathbb{D}_2\mathbf{u}_H) - \hat{\mathbf{n}} \times (j\omega\epsilon_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_H] + j\omega\epsilon_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_E]) &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (۵۸.۹)$$

که به عنوان روابط پاجیو-میلر-چنگ-هارینگتون-وو-تسای<sup>۴۴</sup> شناخته می‌شوند [۷۷، ۷۵]. معادله (۵۸.۹) دو معادله انتگرالی برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مماسی مجھول تعریف می‌شوند. هنگامی که این میدان‌ها محاسبه شدند، می‌توانیم فوراً میدان‌ها را در هر جای دیگری با استفاده از روابط مربوطه محاسبه کنیم. در فصلیازدهم نحوه حل معادله عملگر بالا را با استفاده از روش عددی گالرکین<sup>۴۵</sup> نشان خواهیم داد.

## ۱.۶.۹ مودهای ویژه برای معادلات ماکسول کامل

در اصل، می‌توانیم مودهای ویژه را برای حل معادلات کامل ماکسول محاسبه کنیم، اما به نظر می‌رسد که اوضاع بسیار پیچیده است. اجازه دهید معادله (۵۸.۹) را به صورت فشرده زیر بازنویسی کنیم.

$$\mathbb{A}(\omega)[\mathbf{u}] = f^{inc}$$

<sup>۴۲</sup>Electric Field Integral Equations (EFIE)

<sup>۴۳</sup>Magnetic Field Integral Equations (MFIE)

<sup>۴۴</sup>Combined Field Integral Equations (CFIE)

<sup>۴۵</sup>Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai

<sup>۴۶</sup>Galerkin

که در آن  $\mathbb{A}(\omega)$  عملگر انتگرال برای مسئله انتقال است،  $u$  بردار جواب مشکل از میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی است، و  $f^{inc}$  ناهمگنی مربوط به میدان‌های تابشی است. در مقابل معادله (۲۷.۹) برای روش انتگرال مرزی شبه‌استاتیکی، و نمی‌توان  $\mathbb{A}(\omega)$  را به ساختار هندسی و بخش مواد جدا کرد. علاوه بر این،  $(\omega)\mathbb{A}$  نه متقارن است و نه هرمیتی<sup>۴۷</sup>. بنابراین، در تحلیل مود ویژه معادلات ماکسول، به دنبال مودهای ویژه برای فرکانس تشدید مفروض  $\omega$

$$\mathbb{A}(\omega)[\mathbf{u}_k] = \lambda_k \mathbf{u}_k$$

و مودهای الحاقی<sup>۴۸</sup>  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  می‌گردیم. با این حال، این رویکرد دارای این عیب است که تجزیه مود ویژه باید برای هر فرکانس  $\omega$  به طور جداگانه انجام شود. از طرف دیگر، می‌توان مودهای به اصطلاح شبه‌طبیعی [۷۸، ۷۹] مربوط به فرکانس‌های ویژه  $\omega_k$  را محاسبه کرد؛

$$\mathbb{A}(\omega_k)[\mathbf{u}_k] = 0$$

قسمت حقیقی فرکانس تشدید را می‌دهد و قسمت موهومی مربوط به طول عمر مود است. این مودها چندین ویژگی جالب مودهای ویژه روش شبه‌استاتیک را دارند، اما اغلب کاربرد آنها محدود است. در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم و علاقه مندان را برای جزئیات بیشتر به مطالعه ارجاع می‌دهیم [۷۹، ۷۸].

## ۷.۹ جزئیات تجزیه مود شبه‌استاتیک

در این بخش جزئیات بیشتری را برای رویکرد مود ویژه در حد شبه‌استاتیک ارائه داده و تجزیه مود ویژه معادله (۳۳.۹) را برای تابع گرین شبه‌استاتیک نشان می‌دهیم.

### ۱.۷.۹ تحلیل مود اویانگ و ایزاکسون

از کار اصلی اویانگ و ایزاکسون<sup>۴۹</sup> [۴۰] شروع کرده و خواص اساسی تجزیه مود ویژه (۴۰.۹) را اثبات می‌کنیم. ابتدا عملگر انتگرالی  $\mathbb{G}$  را با خواص زیر

$$[\mathbb{G}f](\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s}, \mathbf{s}') f(\mathbf{s}') dS'$$

$$[f\mathbb{G}](\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} f(\mathbf{s}') G(\mathbf{s}', \mathbf{s}) dS'$$

و عملگر مربوط به  $\mathbb{F}$  را برای مشتق سطح تابع گرین معرفی می‌کنیم. نکته مهم، عملگر ترکیبی زیر

$$[\mathbb{G}\mathbb{F}](\mathbf{s}, \mathbf{s}') = [\mathbb{G}\mathbb{F}](\mathbf{s}', \mathbf{s}) \quad (۵۹.۹)$$

<sup>۴۷</sup>Hermitian

<sup>۴۸</sup>Adjoint Modes

<sup>۴۹</sup>Ouyang and Isaacson

نسبت به  $s, s'$  متقارن است. این را می‌توان با محاسبه اتحاد گرین زیر

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3 r = \oint_{\partial\Omega} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

برای  $\phi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  و  $\psi(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}'', \mathbf{r})$  اثبات کرد. با استفاده از تعریف تابع گرین، (۲۵.۹)، و با فرض این که هر دو  $\mathbf{r}', \mathbf{r}''$  در خارج (یا داخل) ذره هستند، می‌توانیم سمت چپ را برابر صفر قرار دهیم. در این صورت داریم:

$$\oint_{\partial\Omega} \left[ G(\mathbf{r}', \mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{s}, \mathbf{r}'')}{\partial n} - G(\mathbf{r}'', \mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{s}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (60.9)$$

در ادامه اجازه می‌دهیم به سطح  $\mathbf{r}', \mathbf{r}''$  از بیرون یا از داخل، درست شبیه با بحث قبلی روش نیومن، نزدیک شویم. هر دو روش حد  $\pm \frac{1}{2}$  را می‌دهند که یکدیگر را در جمله تفاضل حذف می‌کنند بنابراین به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\oint_{\partial\Omega} \left[ G(\mathbf{s}', \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, \mathbf{s}'') - G(\mathbf{s}'', \mathbf{s}) F(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \right] dS = 0 \quad (61.9)$$

این ثابت می‌کند که  $\mathbb{G}\mathbb{F}$  یک عملگر متقارن است. همچنین عملگر  $\mathbb{G}$  متقارن است و می‌توان آن را بصورت قطری زیر نوشت

$$\mathbb{G} = \mathbb{Q}^T \Lambda \mathbb{Q} = (\Lambda^{1/2} \mathbb{Q})^T (\Lambda^{1/2} \mathbb{Q}) = \mathbb{U}^T \mathbb{U} \quad (62.9)$$

که در آن  $\mathbb{Q}$  عملگر حقیقی و  $\Lambda$  قطری است. در تساوی آخری از این استفاده کردیم که  $\mathbb{G}$  قطعی مثبت<sup>۵۰</sup> است و بنابراین مقادیر ویژه بزرگتر از صفر هستند. اکنون می‌توانیم عملگر متقارن دیگری بسازیم:

$$\mathbb{D} = (\mathbb{U}^{-1})^T \mathbb{G}\mathbb{F}\mathbb{U}^{-1} = (\mathbb{U}^{-1})^T \mathbb{U}^T \mathbb{U}\mathbb{F}\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}\mathbb{F}\mathbb{U}^{-1}$$

که دارای مقادیر ویژه حقیقی است و توابع ویژه یک مجموعه عملگر کامل را تشکیل می‌دهند. بنابراین،

$$[\mathbb{D}x_k](\mathbf{s}) = \lambda_k x_k(\mathbf{s}) \implies [\mathbb{F}\mathbb{U}^{-1}x_k](\mathbf{s}) = \lambda_k [\mathbb{U}^{-1}x_k](\mathbf{s})$$

$$[x_k \mathbb{D}](\mathbf{s}) = \lambda_k x_k(\mathbf{s}) \implies [x_k \mathbb{U}\mathbb{F}](\mathbf{s}) = \lambda_k [x_k \mathbb{U}](\mathbf{s})$$

و مودهای ویژه  $u_k$  از معادله (۲۸.۹) با  $x_k$  از طریق روابط زیر مربوط هستند:

$$u_k(\mathbf{s}) = [\mathbb{U}^{-1}x_k](\mathbf{s}) \quad (63.9)$$

$$\tilde{u}_k(\mathbf{s}) = [x_k \mathbb{U}](\mathbf{s})$$

<sup>۵۰</sup> Positive Definite

از این عبارت می‌توان براحتی نشان داد که  $u_k, \tilde{u}_k$  متعامدند که اثبات ما را برای خواص مودهای ویژه که قبلًا بیان کردیم تکمیل می‌کند. با استفاده از معادله (۶۳.۹) می‌توانیم رابطه تعاملد زیر را ثابت کنیم (تمرین ۹-۹)؛

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{u_k(\mathbf{s})u_{k'}(\mathbf{s}')}{4\pi|\mathbf{s}-\mathbf{s}'|} = \delta_{kk'} \quad (64.9)$$

مقایسه با رابطه تعاملد معادله (۲۹.۹) در این صورت اجازه می‌دهد که  $\tilde{u}_k(\mathbf{s})$  به  $u_k(\mathbf{s})$  از طریق رابطه زیر بهم مربوط سازیم؛

$$\tilde{u}_k(\mathbf{s}) = \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{s}, \mathbf{s}') u_k(\mathbf{s}') dS' \quad (65.9)$$

### ۲.۷.۹ تجزیه مود ویژه تابع گرین

معادله نماینده (۲۴.۹) را در نظر گیرید؛

$$V(\mathbf{r}) = V_{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \left\{ - \sum_k u_k(\mathbf{s}') (\Lambda(\omega + \lambda_k))^{-1} \left[ \oint_{\partial\Omega} \tilde{u}_k(\mathbf{s}'') \frac{\partial V_{inc}(\mathbf{s}'')}{\partial n''} dS'' \right] \right\} dS' \quad (66.9)$$

که در آن جواب مود ویژه معادله (۳۲.۹) را قرار دادیم. فرض می‌کنیم که پتانسیل خارجی توسط توزیع بار  $\rho(\mathbf{r})$  تولید شده است؛

$$V_{inc}(\mathbf{r}) = \epsilon_2^{-1} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

همانطور که در فصل پنجم بحث شد، برای توابع گرین، در مورد بالا  $G$  فقط شرایط مرزی را در بینهایت به حساب می‌آورد، و بنابراین باید به جای تابع گرین یک راه حل اساسی نامیده شود (اگرچه در اینجا به اصطلاحات معمول تابع گرین که در فیزیک استفاده می‌شود پایبند می‌مانیم). با این حال، معادله (۶۶.۹) پیشنهاد می‌کند که تابع گرین کل برای معادلات ماکسول در حد شباهستاتیک معرفی شود؛

#### نمایش مود ویژه تابع گرین کلی

$$G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - \sum_k \left[ \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') u_k(\mathbf{s}') dS' \right] (\Lambda(\omega) + \lambda_k)^{-1} \times \left[ \tilde{u}_k(\mathbf{s}'') \frac{\partial G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0)}{\partial n''} dS'' \right] \quad (67.9)$$

این اجازه می‌دهد تا جواب توزیع بار خارجی را به‌شکل معمول بنویسیم:

$$V(\mathbf{r}) = \epsilon_2^{-1} \int G_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r'$$

می‌توانیم این عبارت را به‌شکل متقارن‌تری بازنویسی کنیم. آخرین جمله داخل براکت معادله (۶۷.۹) را می‌توان بین  $(\mathbf{s}, u_k)$  و  $(\mathbf{s}', \tilde{u}_k)$  همراه با معادله (۶۵.۹) بصورت زیر بیان کرد.

$$\oint_{\partial\Omega} \left[ u_k(\mathbf{s}_1) G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}'') \right] \frac{\partial G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0)}{\partial n''} dS'' dS_1$$

از رابطه تقارن روش اویانگ-ایزاکسون<sup>۵۱</sup> معادله (۶۰.۹)، بدست می‌آوریم:

$$\oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}'') \frac{\partial G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0)}{\partial n} dS'' = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0) dS''$$

که در آن علاوه بر این باید حد  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{s}_1$  را در دو طرف معادله انجام دهیم. در حالی که این کار را می‌توان با خیال راحت در سمت چپ انجام داد، محدودیت در سمت راست باید مشابه روش نیومن انجام شود، و برابطه زیر میرسیم:

$$\lim_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{s}_1} \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0) dS'' = \pm \frac{1}{2} G(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_0)$$

$$+ \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0) dS''$$

علامت بستگی به‌این دارد که  $\mathbf{r}_1$  از بیرون یا از داخل به‌مرز نزدیک شود. با استفاده از این واقعیت که  $(\mathbf{s}, u_k)$  یک تابع ویژه از مشتق سطحی تابع گرین است، خواهیم داشت:

$$\oint_{\partial\Omega} u_k(\mathbf{s}_1) \frac{\partial G(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}'')}{\partial n''} G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0) dS'' dS_1 = \lambda_k \oint_{\partial\Omega} u_k(\mathbf{s}'') G(\mathbf{s}'', \mathbf{r}_0) dS''$$

با کنار هم گذاشتن همه نتایج به‌عبارت نهایی برای تابع گرین شباهستاتیکی می‌رسیم که بر حسب توابع ویژه رابطه (۳۳.۹) گسترش یافته است. برای بحث دقیق‌تر مودهای ویژه و بسط تابع گرین بر حسب این مودها به مرجع [۶۲]<sup>۵۲</sup> رجوع کنید.

## تمرینات

- تمرین ۱ یک ذره پلاسمون را بصورت یک نوسانگر با فرکانس  $\omega_0$  و میرائی  $\gamma$  مدل کنید;
  - الف: جواب را برای تحریک نوسان هارمونیکی محاسبه کنید.
  - ب: جواب را برای نوسان آزاد محاسبه کنید.
  - ج: فرض کنید که در لحظه صفر میدان خارجی  $E_0 e^{j\omega t}$  اعمال می‌شود. جواب را بصورت مجموع جواب‌های همگن (نوسان آزاد) و خاص (نوسان تحریک) بنویسید. در مورد چگونگی نزدیک شدن به نوسان حالت ماندگار<sup>۵۳</sup> بحث کنید.

<sup>۵۱</sup>Ouyang–Isaacson

<sup>۵۲</sup>Steady State

- ۵: نشان دهید که در حالت ماندگار، کار انجام شده بوسیله میدان خارجی برابر با توان تلف شده است.
- ۵: فرکانس‌های تحریکی را که در آن (۱) دامنه و (۲) توان جذب شده بیشترین است را بدست آورید.
- تمرین ۲ در قیاس با معادله (۱۶.۹) توزیع بار سطحی  $\sigma(\theta)$  را برای یک نانو کره فلزی با تابع دیالکتریک درود، معادله (۷.۷)، و با جدا کردن  $\sigma(\theta)$  به توزیع بار آزاد و مقید، با استفاده از رابطه (۲۳.۷)، محاسبه کنید.
- تمرین ۳ برای پتانسیل شباهستاتیکی در داخل و خارج کره از معادله (۶.۹) شروع کنید. در امتداد خطوطی که برای نظریه می‌شباهستاتیک بحث شد، فقط ضرایب  $A_l(B_l)$  را در داخل (خارج) کره در نظر گیرید.
- الف: مدهای تشديد مربوط به جواب‌ها را در غیاب تحریک خارجی با توجه به شرایط مرزی جستجو کنید. از تابع دیالکتریک درود معادله (۷.۷) استفاده کرده و نشان دهید که این مدها فقط برای فرکانس‌های مختلف  $\omega$  وجود دارند. در مورد معنای فیزیکی مدهای مختلف بحث کنید.
- ب: فرکانس  $\omega$  را بر حسب سری تیلور برای مقادیر کوچک جمله میرایی درود  $\gamma$  بسط داده و فرکانس مود حاصل را با فرکانس تشديد پلاسمون سطحی رابطه (۱۴.۹) مقایسه کنید.
- ج: مدهای تشديد را نيز برای گذردهی درود-لورنتر معادله (۶.۷) محاسبه کنید.
- تمرین ۴ معادلات ماقسول را در حد شباهستاتیک برای یک کره پوشش داده شده با هسته (شعاع  $a$ ، گذردهی  $\epsilon_1$ ) و یک لایه پوششی (ضخامت  $\delta$ ، گذردهی  $\epsilon_2$ ، که در یک محیط زمینه با گذردهی  $\epsilon_3$  تعییه شده است، حل کنید. فرض کنید یک میدان الکتریکی در امتداد جهت  $z$  اعمال می‌شود. در امتداد همان خطوطی که برای حوزه مورد بحث در بخش ۹.۲.۱، یک راه حل برای جواب در سه ناحیه بنویسید و ضرایب مجھول را از شرایط مرزی معادلات ماقسول تعیین کنید.
- تمرین ۵ سطح مقطع پراکندگی و انقراضی را برای یک کره کوچک در حد شباهستاتیک محاسبه کنید. برای تابع دیالکتریک درود فرکانس‌هایی که سطح مقطع بیشینه است محاسبه کنید. نتیجه را با استفاده از نتیجه تمرین ۱-(۵) تفسیر کنید.
- تمرین ۶ ضریب دیپلاریزاسیون  $L_k$  از نظریه می-گانس را به مقدار ویژه  $\lambda_k$  روش انتگرال مرزی مرتبط کنید.
- تمرین ۷ از جعبه ابزار NANOPT فایل demobem04.m و demobem03.m را برای محاسبه و رسم مقادیر ویژه  $\lambda_k$  و مدهای ویژه  $u_k(s)$  بیضوی‌گون که از روش اجزاء محدود مرزی که در فصل یازدهم شرح داده می‌شود استفاده کنید.
- الف: مقادیر ویژه عددی را با عبارت تحلیلی نظریه می-گانس مقایسه کنید.

- ب: مودهای ویژه را رسم کرده و بر حسب مودهای دوقطبی و چندقطبی تفسیر کنید.
- ج: بیضوی گون کشیده و پخ را بررسی کنید. چه تفاوت‌هایی دارند؟ چه شباهت‌هایی دارند؟
- د: نتایج مودهای ویژه بیضوی گون پخ با دیسک که در شکل (۹.۹) نشان داده شده را مقایسه کنید. آیا می‌توانید همه مودها را شناسایی کنید؟
- تمرین ۸ میدان الکتریکی در جهت عمود بر مرز ذره را می‌توان از  $E_{\perp} = \partial_n V$ , با  $\nabla \cdot \hat{n} = \partial_n$  بدست آورد. با شروع از معادله انگرال مرزی رابطه (۲۷.۹)، چگونه میدان القائی  $E_{\perp}$  را بر حسب توزیع بار سطحی  $\sigma$  می‌توان بیان کرد.
- تمرین ۹ از مودهای ویژه اوینگ و ایزاکسون معادله (۶۲.۹) استفاده کرده و تعامد رابطه (۶۴.۹) را اثبات کنید.  
راهنمائی: از رابطه تعامد برای  $x_k$  شروع کرده و  $x_k$  را به  $u_k$  مربوط کنید.
- تمرین ۱۰ ثابت کنید برای  $F_{mn}$  که در معادله (۳۹.۹) تعریف شد، رابطه تقارن  $= F_{nm}$  برقرار است. از تعریف رابطه (۶۵.۹) برای توابع ویژه الحاقی شروع کرده و از خواص تقارن رابطه (۶۱.۹) استفاده کنید.
- تمرین ۱۱ از جعبه ابزار NANOPT فایل‌های demobem05.m و demobem06.m که مقادیر ویژه  $\lambda_k$  و مودهای ویژه  $u_k(s)$  کره‌های تزویجی یا بیضوی گون محاسبه و رسم می‌کند، استفاده کنید.
- الف: از حالت کره‌های تزویجی شروع کرده و مودهای ویژه را رسم کنید. مودها را از کمترین مقدار ویژه  $\lambda_k$  بر حسب مودهای مقید و نامقید با استفاده از توابع پایه مودهای تک کرده تفسیر کنید.
- ب: آیا اثر تزویج برای کره‌ها بیشتر است یا بیضوی‌کون‌ها؟ وابستگی به فاصله را تفسیر کرده و یک تفسیر ارائه دهید.
- تمرین ۱۲ از رابطه (۲۴.۷) برای محاسبه توزیع بار سطحی در استوانه‌های مماسی، رابطه (۵۱.۹)، استفاده کنید.
- تمرین ۱۳ از سطح مقطع پراکندگی و انقراضی نظریه می، رابطه (۵۳.۹)، شروع کرده و حد  $1 \ll kR$  را با استفاده از معادله (ج-۲۸) انجام دهید.
- الف: ثابت کنید که در کمترین مرتبه تقریب می‌توان نظریه می شباهستاتیک را بدست آورد.
- ب: اصلاحات مرتبه پیشو <sup>۵۳</sup> را برای سطح مقطع پراکندگی بدست آورید.
- تمرین ۱۴ از جعبه ابزار NANOPT فایل demobem01.m را استفاده کنید.

<sup>۵۳</sup>Leading-Order Corrections

- الف: طیف پراکندگی و انفراپسی را برای قطر کره در محدوده  $50$  نانومتر تا یک میکرومتر با استفاده از کره‌های طلا و نقره بررسی کنید.
  - ب: کمینه مقدار قطع  $l_{max}$  مرتبه‌های زاویه‌ای برای کوچکترین و بزرگترین کره که برای بدست آوردن نتایج همگرا مورد نیاز است، بررسی کنید.
  - ج: با استفاده از فایل demobem03.m الگوی انتشار را برای شعاعها و فرکانس‌های انتخابی بررسی و نتایج را تفسیر کنید.
  - د: طیف پراکندگی و الگوهای انتشار را برای یک کره دیالکتریک با  $n_1 = 1.5$  بررسی کنید.
- تمرین ۱۵ از جعبه ابزار NANOPT فایل demobem01.m را برای تحریک نوری یک نانوکره فلزی استفاده کنید. جهت انتشار نور تحریک در جهت  $z$ ها، و نور پراکنده در جهت  $x$ ها با استفاده از تصویربرداری عدسی‌ها، فصل سوم، مشاهده می‌شود. اثر قطبش خطی و دایره‌ای نور تحریک را روی تصویر تحقیق کرده و نتیجه را تفسیر کنید. اگر مایل باشید، می‌توانید از مرجع [۱] استفاده کنید.

## فصل ۱۰

# چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها

در این فصل تزویج تابشگرهای کوانتمویی و سایر کاوشگرهای محلی بهنانوذرات پلاسمونی را بررسی می‌کنیم. راحت‌تر خواهد بود که مفهوم چگالی محلی فوتونیک **حالت‌ها** (LDOS)<sup>۱</sup> که معیاری از برای سنجش کارآمدی یک نوسانگر بنحوی که انرژی را به محیط خود منتقل می‌کند، معرفی کنیم. در بخش‌های بعدی فصل، طیفسنجی رامان تقویت‌شده سطحی (SERS)<sup>۲</sup> و طیفسنجی اتلاف انرژی الکترون (EELS)<sup>۳</sup>، که نقش مهمی در زمینه‌های نانو اپتیک و پلاسمونیک دارند، بحث خواهیم کرد. این فصل بسیاری از مفاهیم معرفی شده در فصل‌های قبلی، از جمله توابع گرین، محیط‌های طبقه بندی شده و پلاسمون‌های ذرات را ترکیب می‌کند. تحلیل بر اساس چارچوب الکترودینامیک کلاسیک خواهد بود، اما در بخش‌های بعدی این کتاب نشان خواهیم داد که نتایج فقط باید برای اثرات کوانتمویی مختصری تطبیق داده شوند.

## ۱.۱۰ نرخ فروپاشی تابشگر کوانتمویی

با در نظر گرفتن توان تلف شده توسط یک دوقطبی نوسانی، که احتمالاً نزدیک به یک نانوذره پلاسمونیک یا در برخی از محیط‌های فوتونیک غیر ضروری قرار دارد، شروع می‌کنیم. همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد، کار کاملاً کلی است و تنها فرضی که در مورد محیط فوتونیک داریم این است که پاسخ آن خطی است. توان انجام شده توسط یک توزیع جریان  $J$  در مقابل میدان‌های الکترومغناطیسی قبلاً در معادله (۱۳.۴) بدست آمده است. می‌توان نوشت:

$$\frac{dW}{dt} = - \int \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3 r$$

که در آن  $E$  میدان الکتریکی است. علامت منفی نسبت به رابطه (۱۳.۴) به این دلیل است که بدنیال توانی هستیم که توسط توزیع جریان در مقابل میدان الکتریکی (و نه توسط میدان الکتریکی روی توزیع جریان) انجام می‌شود. فرض می‌کنیم که دوقطبی با فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  نوسان کرده و برای توان تلف شده به‌طور میانگین در یک دوره نوسان بدست می‌آید.

<sup>۱</sup>Photonic Local Density of States (LDOS)

<sup>۲</sup>Surface-Enhanced Raman Spectroscopy (SERS)

<sup>۳</sup>electron energy loss spectroscopy (EELS)

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{2} \int Re \{ \mathbf{J}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \} d^3r = \frac{1}{2} Re \left\{ \left( j\omega \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \right\}$$

در آخرین عبارت از معادله ۱.۶ برای ربط دادن توزیع جریان به گشتاور دوقطبی  $\mathbf{p}$  تابشگر کوانتمویی، استفاده کرده‌ایم. آنچه در ادامه می‌آید ترفندهای است که تقریباً بیش از آن زیباست که واقعیت داشته باشد. می‌توانیم از تابع گرین دایادیک برای ارتباط میدان الکتریکی به منبع میدان، یعنی خود تابشگر کوانتمویی، استفاده کنیم. از معادله ۲۰.۵ داریم؛

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r' = \omega^2 \mu \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}$$

در اینجا  $\bar{\bar{G}}_{tot}$  تابع گرین است که شامل بخش فضای آزاد و همین طور حالت بخش بازتاب شده محیط فوتونیک غیرضروری<sup>۴</sup> است.

$$\bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (۲.۱۰)$$

با کنار هم گذاشتن همه نتایج، به توان میانگین-زمانی تلف شده توسط یک دوقطبی می‌رسیم.

### توان میانگین تلف شده توسط تابش دوقطبی

$$P = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^3}{2c^2\epsilon} Im \left\{ \mathbf{p}^* \cdot \bar{\bar{G}}_{tot}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \mathbf{p} \right\} \quad (۲.۱۰)$$

این یک نتیجه کاملاً قابل توجه است که نشان می‌دهد توان تلف شده را می‌توان از تابع گرین دایادیک و گشتاور دوقطبی به تنهایی محاسبه کرد. بخش موهومی  $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}$  مولفه خارج از فاز<sup>۵</sup> بین دوقطبی نوسانی و میدان ایجاد شده توسط دوقطبی را محاسبه می‌کند. همانطور که در ادامه بحث خواهیم کرد، به طور کلی فقط بخشی از توان اتلاف شده توسط دوقطبی تابش می‌شود، بخش دیگر معمولاً به محیط فوتونیک، جایی که به عنوان مثال از طریق تلفات اهمی به گرما تبدیل می‌شود، منتقل می‌شود. می‌توانیم از معادله (۲.۱۰) تعدادی عبارات مفید را بدست آوریم.

• **فضای آزاد** برای محاسبه توان تابشی توسط دوقطبی نوسانی در فضای آزاد، فرض می‌کنیم که دوقطبی در جهت ها است. سپس از رابطه صریح برای تابع گرین دایادیک

<sup>۴</sup>Non-trivial

<sup>۵</sup>Out-of-phase

که در تمرین ۷.۵ داده شده، جواب را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} Im \{G_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} &= Im \left\{ \left[ 1 - \hat{R}_z^2 - j \left( \frac{1 - \hat{R}_z^2}{kR} \right) - \left( \frac{1 - 3\hat{R}_z^2}{k^2 R^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \times \frac{1}{4\pi R} \left( 1 - jkR - \frac{1}{2} k^2 R^2 + \frac{j}{6} k^3 R^3 + \dots \right) \Big\} \quad (3.10) \\ &= \frac{k}{6\pi} + \mathcal{O}(kR). \end{aligned}$$

در اینجا  $\mathbf{r}'$  وتابع نمائی  $R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  را بر حسب سری تیلور بسط داده‌ایم. اکنون می‌توانیم حد  $R \rightarrow 0$  را انجام داده و خواهیم داشت

$$P_0 = \frac{\omega^3 p^2}{2c^2 \epsilon} \left( \frac{k}{6\pi} \right) = \frac{\mu \omega^4 p^2}{12\pi c} \quad (4.10)$$

مقایسه با رابطه (۲۰.۹) برای توان پراکندگی دوقطبی نوسانی

$$P_{sca} = Z^{-1} \frac{k^4}{32\pi^2 \epsilon^2} \left( \frac{8\pi}{3} p^2 \right) = \frac{\mu \omega^4 p^2}{12\pi c}$$

نشان می‌دهد که جواب‌ها یکسان هستند.

- **افزونگی فوتونیک** از تجزیه معادله (۱۱۰) برای تابع گرین می‌توان افزونگی توان تلف شده را به صورت زیر بیان کرد؛

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{6\pi}{k} Im \left\{ \hat{\mathbf{p}}^* \cdot \bar{G}_{refl}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \hat{\mathbf{p}} \right\}. \quad (5.10)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{p}}$  بردار واحد گشتاور دوقطبی است. بطوریکه در زیر نشان خواهیم داد، در همین حالت این عامل افزونگی می‌تواند نیز کوچکتر از یک مربوط به جلوگیری از توان تلف شده باشد.

- **توان تابشی** به طور کلی، تنها بخشی از توان تلف شده به تابش تبدیل، در حالی که بقیه در محیط فوتونیک جذب و مانند تلفات اهمی نانوذرات پلاسمونیک، در نهایت به گرما تبدیل می‌شود. برای محاسبه توان پراکنده می‌توانیم از معادله (۲۲.۴) استفاده کنیم که  $P_{sca}$  حاصل از قضیه پواین‌تینگ را با استفاده از میدان‌های الکترومغناطیسی در مرز  $\partial\Omega$  که دوقطبی و همچنین تمام ذرات مربوطه محیط فوتونی را در بر می‌گیرد، محاسبه کرد. در صورت لزوم، می‌توان  $\partial\Omega$  را نیز به سمت بی‌نهایت انتقال داد.

- **نرخ فروپاشی** یک تابشگر کوانتومی را در نظر گیرید که فوتون‌هایی با انرژی  $\hbar\omega$  ساطع می‌کند. اگرچه بدست آوردن روابط بالا کاملاً مبتنی بر استدلال‌های کلاسیک بوده است، می‌توانیم نرخ فروپاشی  $\Gamma$  را از طریق رابطه زیر محاسبه کنیم.

$$\Gamma = \frac{P}{\hbar\omega} \quad (6.10)$$

منطق پشت این عبارت به شرح زیر است:  $P$  انرژی تلف شده در واحد زمان را نشان می‌دهد. با توجه به مکانیک کوانتم، این سیستم فقط می‌تواند فوتون‌هایی با کوانتم از  $\omega$  منتشر کند. به همین دلیل، انتظار می‌رود که عبارت بالا، احتمال فروپاشی در واحد زمان، به‌اصطلاح نرخ فروپاشی را بدهد، و در واقع در بخش‌های بعدی این کتاب نشان خواهیم داد که یک رویکرد کوانتمی کامل همان نتیجه را می‌دهد.

به عنوان مثال خاص، در اینجا از معادله (۴.۱۰) برای محاسبه نرخ پراکندگی تابش کوانتمی در فضای آزاد را استفاده می‌کنیم.

$$\Gamma_0 = \left( \frac{\mu\omega^4 p^2}{12\pi c} \right) \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{\mu\omega^3}{3\pi\hbar c} \left( \frac{p}{2} \right)^2 \quad (7.10)$$

همین نتیجه را می‌توان از عملیات مکانیک کوانتمی کامل به دست آورد و معمولاً به آن نرخ فروپاشی ویگنر-وایسکوپف<sup>۶</sup> می‌گویند. یک نکته ظریف در مورد گشتاور دوقطبی وجود دارد که البته فقط ماهیت فنی دارد. در الکترودینامیک کلاسیک گشتاور دوقطبی وابسته به زمان معمولاً از رابطه زیر به دست می‌آید؛

$$\mathbf{p}(t) = \text{Re} \{ e^{j\omega t} \mathbf{p} \} = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} \mathbf{p} + c.c.)$$

در حالی که در مکانیک کوانتم  $\mathbf{p}$  معمولاً به لحظه گذار دوقطبی از حالت پایه به حالت تحریک اشاره دارد. برای توصیف کوانتمی کامل به بخش ۱۵.۴ مراجعه کنید. در این صورت، همانطور که در عبارت سمت راست معادله (۷.۱۰) نشان دادیم، امید ریاضی<sup>۷</sup> عملگر دوقطبی با ضریب  $1/2$  با نتیجه کلاسیک متفاوت است. در هر صورت، می‌توانیم با خیال راحت از

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{P}{P_0}$$

برای محاسبه تابش کوانتمی افزونگی نرخ فروپاشی در یک محیط مفروض فوتونیک نسبت به نرخ فروپاشی فضای آزاد، استفاده کنیم. در زیر همچنین از طول عمر  $\tau_0 = 1/\Gamma_0 = 1/\Omega_{cav}$  برای دوقطبی نوسانی در فضای آزاد و  $\tau = 1/\Gamma$  برای دوقطبی واقع در یک محیط متفاوت فوتونیک استفاده خواهیم کرد.

- ضریب پُرسنل در زمینه الکترودینامیک کوانتمی، بیان افزونگی نرخ فروپاشی تابشی بر حسب فاکتور پُرسنل<sup>۸</sup> بسیار راحت است [۴.۲]. افزونگی معمولاً به فروپاشی یک تابشگر کوانتمی در یک کاواک<sup>۹</sup>، جایی که نور به عنوان مثال با استفاده از دو آینه به حجم  $\Omega_{cav}$  تحدید<sup>۱۰</sup> می‌شود، مربوط است. نور بین آینه‌ها به جلو و عقب منتشر شده تا از طریق تلفات از کاواک خارج شود. معمولاً عامل کیفیت  $\omega/Q = \delta\omega/\omega$  که زمان صرف شده توسط

<sup>۶</sup>Wigner-Weisskopf

<sup>۷</sup>Expectation Value

<sup>۸</sup>Purcell Factor

<sup>۹</sup>Cavity

<sup>۱۰</sup>confined

نور در کاواک بحساب می‌آید، را تعریف می‌کنند. با پارامترهای کاواک  $\Omega_{cav}$  و  $Q$  ضریب پورسل بصورت زیر بیان می‌شود [۸۲]؛

$$F = \frac{3}{4\pi^2} \left( \frac{\lambda}{n} \right)^3 \left( \frac{Q}{\Omega_{cav}} \right) \quad (8.10)$$

که در آن  $\lambda/n$  طول موج موثر نور در کاواک است. از این نتیجه می‌گیریم که برهمکنش نور-ماده را می‌توان با کوچکتر کردن حجم یا با افزایش زمان صرف شده توسط نور در کاواک افزایش داد. گرچه تعریف  $\Omega_{cav}$  برای نانوذرات پلاسمونی دشوار است، اما مشخص می‌شود که ضریب کیفیت معمولاً پایین است (بهدلیل تلفات اهمی زیاد فلزات)، از طرف دیگر حجم مود مؤثر می‌تواند بسیار کم باشد. بهاین دلایل، فاکتورهای افروزنگی پُرسنل بسیار زیادی را می‌توان برای نانوذرات پلاسمونیک به دست آورد.

- قطبیش پذیری موثر این ممکن است مکان مناسبی برای پرداختن به یک نکته ظریف در مورد انتخاب مناسب قطبیش پذیری موثر باشد. در فصل قبل معادله (۱۹.۹) را برای بیان گشتاور دوقطبی القایی یک ذره کوچک قطبیش پذیر به دست آوردیم.

$$\mathbf{p} = \bar{\alpha}(\omega) \cdot \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0) .$$

در اینجا  $\bar{\alpha}$  تانسور قطبیش پذیری و  $\mathbf{E}_{inc}$  میدان الکتریکی تابشی برای قطبی کردن ذره است. همانطور که در مرجع [۸۳] اشاره شده است، دوقطبی القایی دچار میرایی تابشی می‌شود که باید آنرا بحساب آورد. به راحتی می‌توانیم این کار را با استفاده از سهم مرتبه اصلی  $\{G_{zz}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)\}$  که قبلًا برای نرخ فروپاشی فضای آزاد به دست آورده بودیم، بصورت زیر ارائه دهیم؛

$$\mathbf{p} = \bar{\alpha}(\omega) \cdot \left[ \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0) + \omega^2 \mu \left( \frac{-jk}{6\pi} \right) \bar{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right] .$$

جمله اول داخل براکت، میدان خارجی است، جمله دوم میدان تولید شده توسط خود ذره قطبیش پذیر است. معادله بالا را می‌توان برای  $\mathbf{p}$  حل کرد و خواهیم داشت؛

$$\mathbf{p} = \left( \mathbb{I} - \frac{-jk^3}{6\pi\epsilon} \bar{\alpha} \right)^{-1} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0) = \bar{\alpha}_{eff} \cdot \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_0) . \quad (9.10)$$

وقتی ذره قطبیش پذیر در یک محیط فوتونیک غیر ضروری قرار گیرد، می‌توانیم تلفات اضافی که با ضریب افزونگی پُرسنل  $P_0 : P$  در قطبیش پذیری موثر تعریف شده است، در نظر گیریم.

$$\bar{\alpha}_{eff} = \left( \mathbb{I} - \frac{-jk^3}{6\pi\epsilon} \left[ \frac{P}{P_0} \right] \bar{\alpha} \right)^{-1} \cdot \bar{\alpha}$$

در اصل، تانسور قطبیش پذیری موثر  $\bar{\alpha}_{eff}$  باید برای تمام سطح مقطع‌های نوری که در فصل قبل بدست آمده، استفاده شود. برای ذرات کوچک جمله کوچک تصحیح معمولاً کوچک است و می‌توان با خیال راحت از آن صرف نظر کرد. با این حال، برای ذرات بزرگتر

جمله میرایی اضافی می‌تواند منجر به بمبود قابل توجهی در مقایسه با جواب‌های معادلات ماسکول شود.

### ۱.۱.۱۰ چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها

عنوان این فصل «چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها» است، بنابراین باید معنای آن را روشن کنیم. چگالی حالت‌ها (DOS)<sup>۱۱</sup> یک مفهوم مفید است که معمولاً در فیزیک حالت جامد، جایی که معمولاً به تعداد حالت‌های الکترونیکی در هر انرژی و در واحد حجم اشاره دارد، معرفی می‌شود. اجازه دهید  $E$  سطوح انرژی الکترونیکی برخی از سیستم‌های حالت جامد، مانند الکترون‌های آزاد در یک فلز را نشان دهد. سپس، چگالی حالت‌های  $D(E)$  به صورت [۳۶] زیر تعریف می‌شود.

$$D(E) = \frac{1}{\Omega} \sum_i \delta(E - E_i),$$

که در آن  $\Omega$  حجم سیستم است و  $i$  وضعیت‌های مختلف را برچسب گذاری می‌کند. برای یک سیستم معین،  $D(E)$  معمولاً از یک سری قله‌های تیز دلتا مانند تشکیل شده است، در حالی که در حد ترمودینامیکی  $\Omega \rightarrow \infty$  چگالی حالت‌ها به یکتابع پیوسته تبدیل می‌شود. می‌توانیم سعی کنیم مفهوم مشابه با سیستم‌های فوتونیک اتخاذ کنیم. یک تعریف مفید از چگالی فوتونیک حالت‌ها چنین است:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}s} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}s}), \quad (10.10)$$

که در  $k$  عدد موج حالت‌های فوتون و  $\mathbf{k}$  قطبش‌های مختلف است. در رابطه بالا فرض می‌کنیم که میدان‌های الکترومغناطیسی در حجم  $\Omega$ ، مثلاً در یک محفظه‌ای از آینه‌ها، محدود شده‌اند. در حد  $\Omega \rightarrow \infty$  می‌توانیم جمع  $k$  را با انتگرال عوض کنیم؛

$$\rho(\omega) \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} \frac{2}{\Omega} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int \delta(\omega - ck) d^3k = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^\infty \delta(\omega - ck) 4\pi k^2 dk \quad (11.10)$$

که در آن ضریب دو را برای درجه آزادی قطبش (پلاریزاسیون) اضافه کرده‌ایم و ضریب اضافی  $(2\pi)^3/(3\Omega)$  به دلیل جایگزینی جمع با انتگرال است [۳۶]. با انجام انتگرال گیری، در نهایت چگالی فوتونیک فضای آزاد حالت‌ها را به دست می‌آوریم؛

#### چگالی فوتونیک فضای آزاد حالت‌ها

$$\rho^0(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (12.10)$$

یک بالا نویس صفر اضافه کرده‌ایم تا نشان دهیم که نتیجه به یک محیط فوتونیک فضای آزاد اشاره دارد. برای محیط‌های فوتونیکی مختلف، به عنوان مثال، در حضور نانوذرات یا محیط‌های

<sup>۱۱</sup>Density of States (DOS)

لایه لایه، معرفی یک چگالی محلی از حالت‌ها که می‌تواند به تابع دیادیک گرین مربوط باشد، راحت است. متأسفانه تعریف این تحت نام چگالی محلی حالت‌ها منحصر به‌فرد نیست و در ادبیات تعاریف مختلفی وجود دارد. طبق مرجع [۱۴]، چگالی محلی حالت‌های تصویر شده در جهت  $\hat{p}$  را معرفی می‌کنیم؛

### چگالی محلی فوتونیک حالت‌ها تصویر شده در امتداد $\hat{p}$

$$\rho_{\hat{p}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{6\omega}{\pi c^2} \operatorname{Im} \left\{ \hat{\mathbf{p}}^* \cdot \bar{G}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{p}} \right\} \quad (13.10)$$

همراه با رابطه (13.10) بدست می‌آید؛

$$\rho_z^0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{6\omega}{\pi c^2} \operatorname{Im} \{ G_{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \} = \frac{6\omega}{\pi c^2} \frac{\omega}{6\pi c} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3},$$

که با چگالی حالت‌های  $(\omega)^0 \rho$  رابطه (12.10) در فضای آزاد سازگاری و مطابقت دارد. اگر میانگین‌گیری روی تمام زوایا (برای جزئیان به‌تمرین ۱.۱۰ مراجعه کنید)، میانگین چگالی محلی حالت‌ها را خواهیم داشت؛

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \left\langle \rho_{\hat{p}}(\mathbf{r}, \omega) \right\rangle_{\hat{p}} = \frac{2\omega}{\pi c^2} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{tr} \left[ \bar{G}_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \right] \right\} \quad (14.10)$$

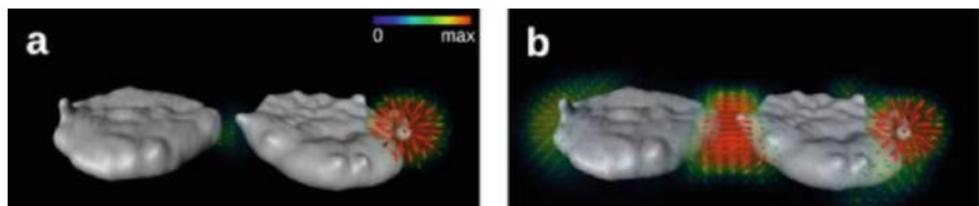
که در آن  $\operatorname{tr}$  ردگیری روی دیادیک گرین است یعنی این جمع عناصر قطری است. نرخ فروپاشی تابشگر کوانتموی را می‌توان به چگالی فوتونیک حالت‌ها از طریق رابطه زیر مربوط کرد؛

$$\Gamma_{tot} = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{\omega}{3\hbar\epsilon} \left( \frac{p}{2} \right)^2 \rho_{\hat{p}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (15.10)$$

بر طبق بحث نرخ فروپاشی ویگنر-وایسکوپف معادله (7.10)، عبارت داخل پرانتز با امید ریاضی مکانیک کوانتموی عملگر دوقطبی مطابقت دارد. به‌طور مشابه، اگر برای دوقطبی نوسانی میانگین‌گیری کنیم، نرخ فروپاشی میانگین زاویه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\left\langle \Gamma_{tot} \right\rangle_{\hat{p}} = \frac{\omega}{\hbar\epsilon} \left( \frac{p}{2} \right)^2 \rho(\mathbf{r}, \omega) \quad (16.10)$$

شکل (1.10) LDOS فوتونیک یک دایمر از دو نانوذره نقره را نشان می‌دهد که از آزمایش‌های طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون استخراج شده است. در اینجا مطلوب ما نحوه به‌دست آوردن داده‌ها نیست، بلکه از نتایج فقط برای بحث در مورد اینکه چرا مفهوم LDOS فوتونیک اغلب بسیار مفید است استفاده می‌کنیم. در شکل، رنگ شابلون‌ها با افزونگی LDOS فوتونیک و جهت دوقطبی‌های نوسانی با بزرگترین مقادیر  $\rho_{\hat{p}}(\mathbf{r}, \omega)$  مطابقت دارد. شکل (الف) یک مود پلاسمون را نشان می‌دهد که در یک برآمدگی روی ذره سمت راست محدود شده است. افزونگی میدان نزدیک قوی این ویژگی تیز، منجر به افزونگی قوی LDOS می‌شود. به‌عبارت دیگر، یک دوقطبی نوسانی که در نزدیکی این ویژگی قرار دارد، بسیار سریعتر از فضای آزاد فروپاشی می‌کند.



شکل ۱.۱۰: LDOS فوتونیک که از میکروسکوپ الکترونی برای دو نانوذره پلاسمونیک تزویجی و دو مود پلاسمونی مختلف به دست آمده است [۱۵]. شکل (الف) مودی را نشان می‌دهد که در یک برامدگی روی ذره سمت راست محدود شده است، شکل (ب) مود دوقطبی پیوند را نشان می‌دهد که در آن گشتاورهای دوقطبی روی ذرات جداگانه به موازات یکدیگر جهت‌گیری می‌کنند. رنگ شابلون‌ها با افرونگی LDOS فوتونیک و جهت دوقطبی‌های نوسانی با بزرگترین مقادیر ( $r, \omega$ ) مطابقت دارد. شکل از مرجع [۱۵] گرفته شده است.

جهت‌گیری شابلون‌ها نزدیک به نانوذره تقریباً با جهت‌های میدان الکتریکی مطابقت دارد. به طور مشابه، در شکل (ب) یک مود دوقطبی پیوند را نشان می‌دهیم که در آن گشتاورهای دوقطبی تک تک نانوذرات به موازات یکدیگر جهت‌گیری می‌کنند. با این پیکربندی، یک افزونگی فوی LDOS را در ناحیه شکاف بین دو ذره مشاهده می‌کنیم، که مشابه بحث در مورد ذرات تزویجی در فصل نهم است. به عنوان آخرین نکته، توجه کنید که به طور کلی یک سهم مغناطیسی نیز در LDOS وجود دارد، همانطور که با جزئیات بیشتر در مرجع [۱۶] آمده است.

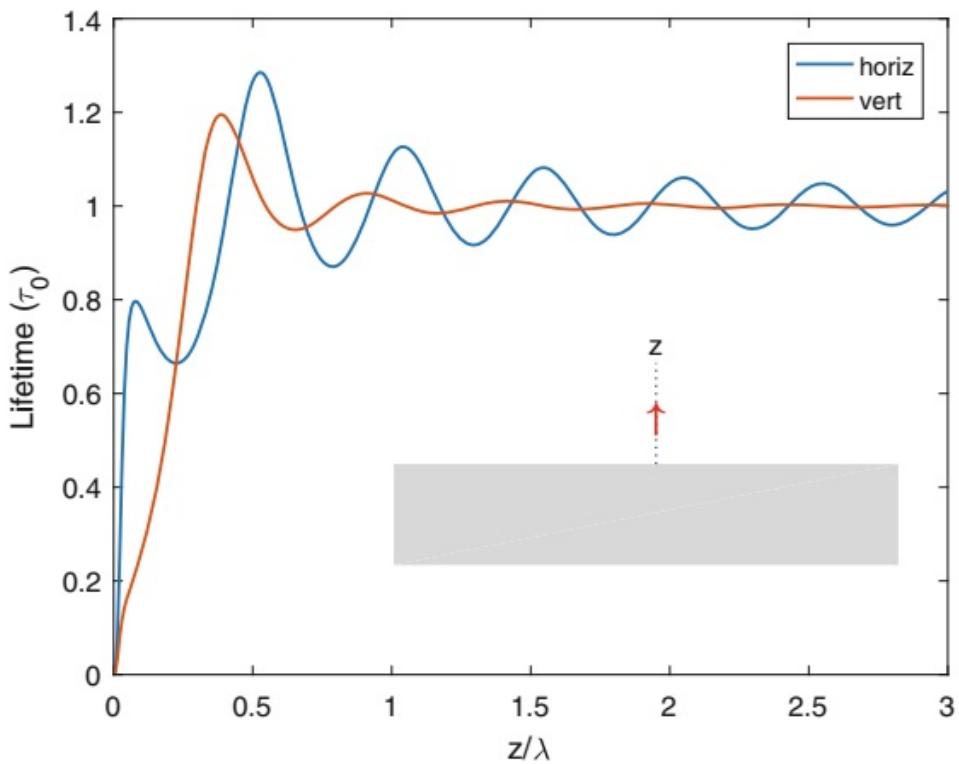
## ۲.۱۰ تابشگر کوانتومی در محیط فوتونیک

با ابزارهای که در فصل‌های آخر مدون شد، می‌توانیم LDOS فوتونیک را برای تعدادی چینش مختلف محاسبه کنیم. در ادامه با محیط‌های لایه شروع کرده و سپس نانوذرات پلاسمونیک را برای چند ساختار هندسی مورد نظر بررسی می‌کنیم.

### ۱.۲.۱۰ تابشگر کوانتومی بالای تیغه فلزی

ابتدا وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن یک دوقطبی در بالای یک لایه فلزی، همانطور که به صورت شماتیک در قسمت داخلی شکل (۲.۱۰) نشان داده شده، قرار دارد. معادله (۵.۱۰) برای افزونگی توان تلف شده توسط دوقطبی را می‌توان فوراً با تابع گرین بازتابی معادله (۵.۸) برای یک محیط لایه لایه، ترکیب کرد. شکل (۲.۱۰) افزونگی یا کاهش طول عمر حاصل  $\tau_0$  را برای دوقطبی واقع در بالای یک لایه نقره نشان می‌دهد. نزدیک به سطح مشترک  $\tau$  به طور چشمگیری کاهش می‌یابد.

در اینجا دوقطبی با پلاسمون‌های سطحی تیغه نقره، جایی که انرژی از طریق تلفات اهمی به گرما تبدیل می‌شود، تزویج صورت می‌گیرد. هر قدر فاصله دوقطبی-فلز بزرگ‌تر باشد، به دلیل کاهش تزویج میدان نزدیک به پلاسمون‌ها، طول عمر افزایش می‌یابد، و قدرت تلف شده عمدتاً به دلیل تشعشعات ساطع شده است. برای فواصل قابل مقایسه با طول موج تشعشعات ساطع شده، نوسان‌های  $\tau$  را مشاهده می‌کنیم که با واکنش سازنده و مخرب میدان‌های بازتابی در



شکل ۲.۱۰: کاهش و افزونگی طول عمر برای دوقطبی واقع در بالای یک تیغه نقره، با فاصله دوقطبی  $z$ . هنگامی که به سطح نقره نزدیک می‌شوید، نوسان‌های طول عمر را مشاهده می‌کنید که به واکنش سازنده و مخرب میدان‌های بازتابی روی دوقطبی نوسانی نسبت داده می‌شود. نزدیک به سطح فلز طول عمر به طور چشمگیری کاهش می‌یابد زیرا دوقطبی پلاسمون‌های سطحی را پرتاب می‌کند و انرژی خود را از دست می‌دهد. در محاسبه از  $400 = \lambda$  نانومتر و تابع دیالکتریک نقره که در [۳۴] آمده، استفاده شده است.

دوقطبی نوسانی مربوط است. این اثرات اولین بار توسط درسھیگ [۱۲] نشان داده شد و به تفصیل در مرجع [۳۵] بحث شده است.

## ۲.۲.۱۰ تقریب شبه استاتیک

به عنوان مثال دوم، یک تابشگر کوانتموی را در تعامل با نانوذرات پلاسمونی، که در تقریب شبه استاتیکی توضیح داده شده‌اند، در نظر می‌گیریم. ابتدا عبارت قدرت تلف شده یک دوقطبی نوسانی را در تقریب شبه استاتیکی بدست می‌آوریم. در قیاس کامل با بحث قبلی، از کار انجام شده توسط دوقطبی در مقابل میدان الکتریکی شروع می‌کنیم

$$P = P_0 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left( -j\omega \mathbf{p}^* \right) \cdot \left[ -\nabla V_{refl}(\mathbf{r}_0) \right] \right\} .$$

<sup>۱۲</sup>Drexhage

که در آن  $P_0$  توان تابشی توسط دوقطبی در فضای آزاد است و که قبلاً در (۴.۱۰) محاسبه شد، و  $V_{refl}(\mathbf{r}_0)$  پتانسیل بازتابی نانو ذرات در موقعیت  $\mathbf{r}_0$  دوقطبی است. سپس ازتابع گرین معادله (۲۳.۹) برای بیان  $V_{refl}$  بر حسب توزیع باز دوقطبی استفاده می‌کنیم؛

$$V_{refl}(\mathbf{r}) = \epsilon^{-1} \int_{\Omega} G_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = \int_{\Omega} G_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{-j\omega\epsilon} \right] d^3 r'$$

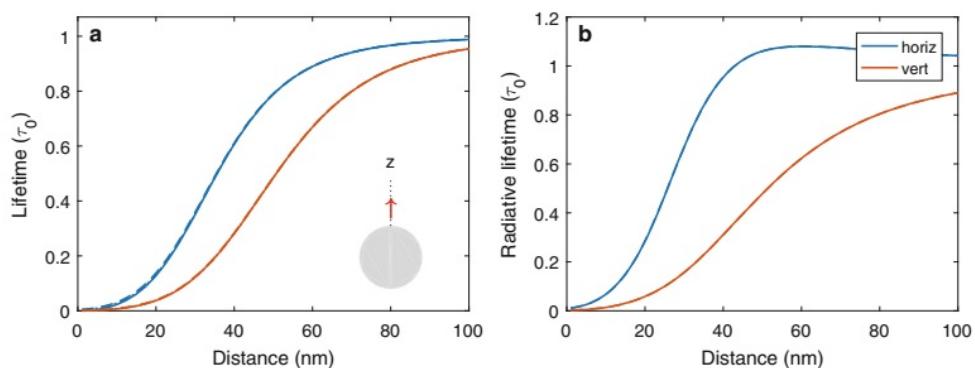
در اینجا  $\Omega$  حجمی است که دوقطبی را در بر می‌گیرد و در آخرین عبارت از معادله پیوستگی برای ارتباط توزیع بار و جریان استفاده کردایم. در مرحله بعد انتگرال گیری را با قسمت بندی کردن  $\nabla' \cdot (\mathbf{G}\mathbf{J}) = (\nabla' G) \cdot \mathbf{J} + G(\nabla \cdot \mathbf{J})$  به تابع گرین بیاوریم. با استفاده از  $\nabla \cdot \mathbf{J} = j/\omega\epsilon$  حواهیم داشت؛

$$V_{refl}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\omega\epsilon} \oint_{\partial\Omega} G_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{J}(\mathbf{s}') \cdot dS' - \frac{j}{\omega\epsilon} \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r'$$

جمله اول با استفاده از قضیه گرین رابطه (۱۲.۲) به انتگرال مرزی تبدیل کردایم. چگالی جریان  $\mathbf{J}$  برای مرز واقع در خارج توزیع بار دوقطبی صفر است، و جمله اول بدین طریق حذف می‌شود. با مربوط کردن  $\mathbf{J}$  به گشتاور دوقطبی  $\mathbf{p}$  با رابطه (۱.۶) به رابطه زیر میرسیم؛

$$P = P_0 - \frac{\omega}{2\epsilon} \text{Im} \left\{ \left( \mathbf{p}^* \cdot \nabla \right) \left( \mathbf{p} \cdot \nabla' \right) G_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0}$$

با معرفی مود ویژه تجزیه معادله (۳۳.۹) را برای تابع گرین بازتابی ادامه می‌دهیم؛



شکل ۳.۱۰: کاهش طول عمر برای یک دوقطبی نوسانی که نزدیک به یک نانوکره نقره قرار دارد، همانطور که در تقریب شباهستاتیکی در طول موج تشدید دوقطبی ۳۵۵ نانومتر محاسبه می‌شود. شکل (الف) طول عمر کل برای دوقطبی افقی در امتداد  $x$  و دوقطبی عمودی در امتداد  $z$ . خطوط توپر نتایج شبیه‌سازی را در جایی که همه حالتهای ویژه در نظر گرفته می‌شوند نشان می‌دهد، خطوط چین‌دار (نقشه‌دار) نتایج شبیه‌سازی را نشان می‌دهند که در آن فقط مودهای دوقطبی (دو قطبی و چهار قطبی) در نظر گرفته می‌شوند. شکل (ب) همانند (الف) اما برای طول عمر تابش. در هر دو شکل، فاصله از نانوکره اندازه‌گیری می‌شود. از تابع دیالکتریک نقره [۳۴]، ثابت دیالکتریک یک برای محیط بستر، و شاعع کره ۵۰ نانومتر، استفاده می‌کنیم.

$$G_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \sum_k V_k(\mathbf{r}) \frac{\lambda_k + \frac{1}{2}}{\Lambda(\omega) + \lambda_k} V_k(\mathbf{r}') ,$$

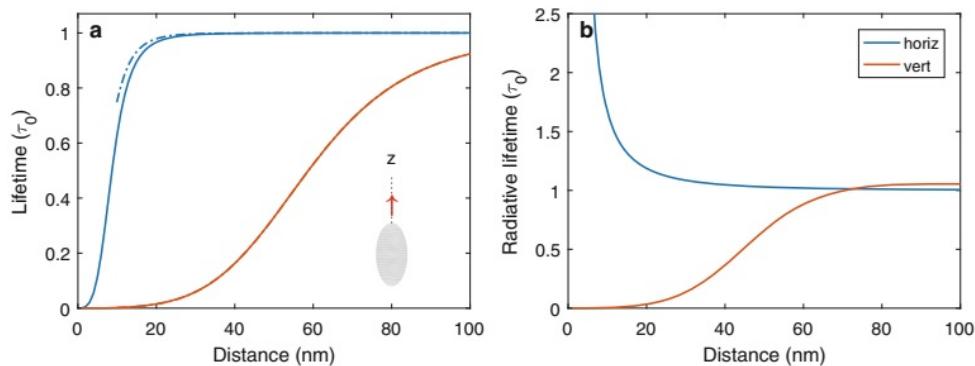
که در آن  $V_k(\mathbf{r})$  پتانسیل مربوط بهمود ویژه  $\lambda_k$  است که دارای مقدار ویژه  $\lambda_k$  است، و  $\Lambda(\omega)$  تابعی است که دارای گذردگی وابسته به فرکانس نانوذره و محیط جاسازی است. با این تجزیه، به توان متوسط تلف شده توسط یک تابشگر دوقطبی در تقریب شباهستاتیکی می‌رسیم؛

### توان میانگین تلف شده توسط تابشگر دوقطبی (شباهستاتیک)

$$P = P_0 + \frac{\omega}{2\epsilon} \sum_k \text{Im} \left\{ \frac{\lambda_k + \frac{1}{2}}{\Lambda(\omega) + \lambda_k} \right\} \left| \mathbf{p} \cdot \nabla V_k(\mathbf{r}) \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}^2 \quad (17.10)$$

شکل (۳.۱۰)-الف کاهش طول عمر  $\tau$  را برای یک دوقطبی واقع در بالای نانوکره نقره، همانطور که از معادله (۱۷.۱۰) محاسبه شده، نشان می‌دهد. خیلی دور از کره،  $\tau$  به طول عمر فضای آزاد  $\tau_0$  نزدیک می‌شود. با کاهش فاصله دوقطبی بهمودهای بیشتری تزویج شده که منجر به افت  $\tau$  می‌شود. خطوط خط چین (نقشه چین) نتایج را برای شبیه‌سازی نشان می‌دهند که در آن فقط مودهای دوقطبی (دوقطبی و چهارقطبی) در نظر گرفته می‌شود. توافق با نتایج شبیه‌سازی کامل (خطوط جامد) شامل همه مودها در فاصله زیاد دوقطبی-کره بسیار خوب است، اما برای فواصل کوچکتر که در آن دوقطبی شروع به تزویج مودهای چند قطبی بالاتر می‌کند بدتر می‌شود. شکل (ب) افزونگی طول عمر تابشی  $\tau_0 : \tau$  را نشان می‌دهد که از گشتاور دوقطبی کل (دوقطبی بهاضافه نانوذرات پلاسمونیک) همراه با معادله (۲۰.۹) برای توان پراکنده یک دوقطبی نوسانی، محاسبه می‌شود. در اینجا کاهش (یا افزایش) طول عمر بستگی به جهت دوقطبی دارد. در تشیدید، دوقطبی با جهت‌گیری در امتداد  $z$  قوی‌ترین مود دوقطبی پلاسمون را در امتداد  $z$  تزویج کرده، و گشتاور دوقطبی آن با دوقطبی محرک خارج از فاز است. بنابراین سهم دو گشتاور دوقطبی در فرآیند انتشار جمع شده و سیستم تزویجی نور را به طور موثرتری ساطع می‌کند. در مقابل، دوقطبی افقی در امتداد  $x$  باعث ایجاد دوقطبی آینه‌ای شده که در جهت مخالف نسبت به دوقطبی محرک است. در نتیجه، تابش ساطع شده به دلیل کاهش گشتاور دوقطبی کل کوچکتر می‌شود و  $\tau$  حتی اندکی از مقدار فضای آزاد  $\tau_0$  فراتر می‌رود.

رفتار مشابهی در شکل (۴.۱۰) برای یک بیضی نقره‌ای با نسبت محوری  $1:2$  مشاهده شده است، که در آن بیشتر نتایج را می‌توان در امتداد خطوط مشابه برای نانوکره تفسیر کرد. واضح ترین تفاوت افزایش شدید طول عمر تابشی برای فواصل کوچک است که به دلیل فرکانس‌های تشیدید متفاوت مودهای دوقطبی پلاسمونیک جهت‌گیری در امتداد  $z$  و  $x$ ،  $y$  است. به دلیل تقارن، دوقطبی افقی فقط می‌تواند مودهای پلاسمون  $xy$  را تحریک کند، که در مقایسه با حالت  $z$  انرژی بالاتری دارند، و بنابراین دوقطبی نسبت بهمودهای پلاسمونی که با آنها تزویج می‌شود، تشیدید ندارد. در نتیجه، توزیع بار سطحی القایی را می‌توان به طور موثر بر حسب یک دوقطبی آینه‌ای توصیف کرد که گشتاور دوقطبی کل را کاهش می‌دهد و منجر به کاهش پراکنده‌ی و طول عمر تابشی بیشتر می‌شود.



شکل ۴.۱۰: مانند شکل (۳.۱۰) اما برای یک بیضی با نسبت محور ۲:۱، محور بزرگ ۵۰ نانومتر و طول موج تشدید دوقطبی ۴۰۰ نانومتر است.

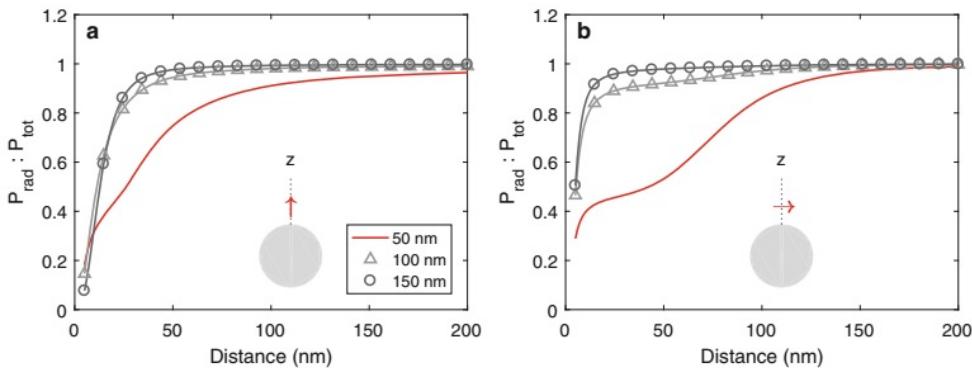
### ۳.۲.۱۰ نظریه می

توان‌های تابشی  $P_{rad}$  و کل تلف شده  $P_{tot}$  را می‌توان به صورت تحلیلی در نظریه می محاسبه کرد. در اینجا بدست آوردن نتایج را حذف می‌کنیم، در پیوست ۵ شرح مفصلی ارائه می‌کنیم. معادلات (۵-۳۷) و (۵-۳۸) توان تابش شده توسط یک دوقطبی نوسانی واقع در مجاورت یک کره فلزی (یا دیالکتریک) را نشان می‌دهند. و معادلات (۵-۴۱) و (۵-۴۲) کل توان تلف شده را می‌دهند. به طور کلی، این دو عبارت متفاوت هستند، زیرا دوقطبی نوسانی با مودهای پلاسمونیک تزویج می‌شود که قدرت را از طریق تشعشع یا از طریق تلفات اهمی تلف می‌کنند. شکل (۵.۱۰) نسبت توان تابشی و کل تلف شده  $P_{rad} : P_{tot}$  که بازده کوانتمومی نامیده می‌شود، برای یک دوقطبی واقع در بالای یک نانوکره نقره، همانطور که در داخل شکل نشان داده شده است، را نشان می‌دهد. از همان پارامترهایی که برای طیف‌های انفرضی و قبلًا در شکل (۱۸.۹) نشان داده شده بود، استفاده می‌کنیم و قطر کره‌ها و فاصله دو قطبی-کره مختلف را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌شود که دور از کره عملًا تمام توان، تشعشع شده و فقط نزدیک به کره تلفات غیرتابشی شروع به غالب شدن می‌کنند.

آزمایش زیبایی توسط گروه نووتني<sup>۱۳</sup> [۱۴] وجود دارد که سیستم مولکول-نانوکره تزویجی را به شیوه‌ای شبیه به کتاب درسی بررسی می‌کند. در این آزمایش، یک نانوکره طلا به یک فیبر (تار نوری) متصل می‌شود و فیبر به صورت شطرنجی روی یک لایه نازک که مولکول‌های رنگ در آن تعبیه شده است، روبش می‌شود. به این ترتیب، بررسی تجربی سیستمی که قبلًا در نظریه می تحلیل کردیم امکان پذیر می‌شود. قبل از تعمق در مورد نتایج نشان داده شده در شکل (۶.۱۰)، ابتدا وضعیت یک دوقطبی نوسانی در فضای آزاد را مورد بحث قرار می‌دهیم. به جای توان‌های تابشی و تلف شده کل، استفاده از مفاهیم نرخ‌های تابشی و فروپاشی کل را، جایی که معادله (۶.۱۰) ارتباط بین این مقادیر را فراهم می‌کند، ساده‌تر میدانیم.

• نرخ فروپاشی تابشی یک مولکول تحریک شده در فضای آزاد با گسیل یک فوتون میرا می‌شود. نرخ فروپاشی مربوطه، که این تعداد فروپاشی در واحد زمان را  $\Gamma_{rad}^0$  نشان

<sup>۱۳</sup>Novotny group



شکل ۱۸.۹: بازده کوانتمی برای دوقطبی واقع در بالای نقره، همانطور که از نظریه می محاسبه شده است. از پارامترهای مشابه در شکل (۱۸.۹) استفاده می کنیم و توان تابشی و پراکنده کل پراد و پتوت را در تشیددهای دوقطبی ( $50\text{ nm}$ ،  $100\text{ nm}$  و  $150\text{ nm}$ ) محاسبه می کنیم. شکل های (الف) و (ب) نتایج را به ترتیب برای جهت گیری دوقطبی عمودی و افقی نشان میدهد.

می دهیم . بالانویس صفر برای یادآوری فروپاشی فضای آزاد است.

- نرخ فروپاشی مولکولی علاوه بر فروپاشی تابشی، معمولاً تعدادی کanal فروپاشی داخلی و مولکولی وجود دارد که از طریق آنها مولکول با نرخ  $\Gamma_{mol}$  بدون گسیل فوتون تجزیه می شود. به طور معمول، انرژی تحریک بهارتعاشات مولکولی و در نهایت گرما منتقل می شود.

- بازده کوانتمی نسبت بین فروپاشی فضای آزاد و نرخ فروپاشی کل را بازده کوانتمی می گویند.

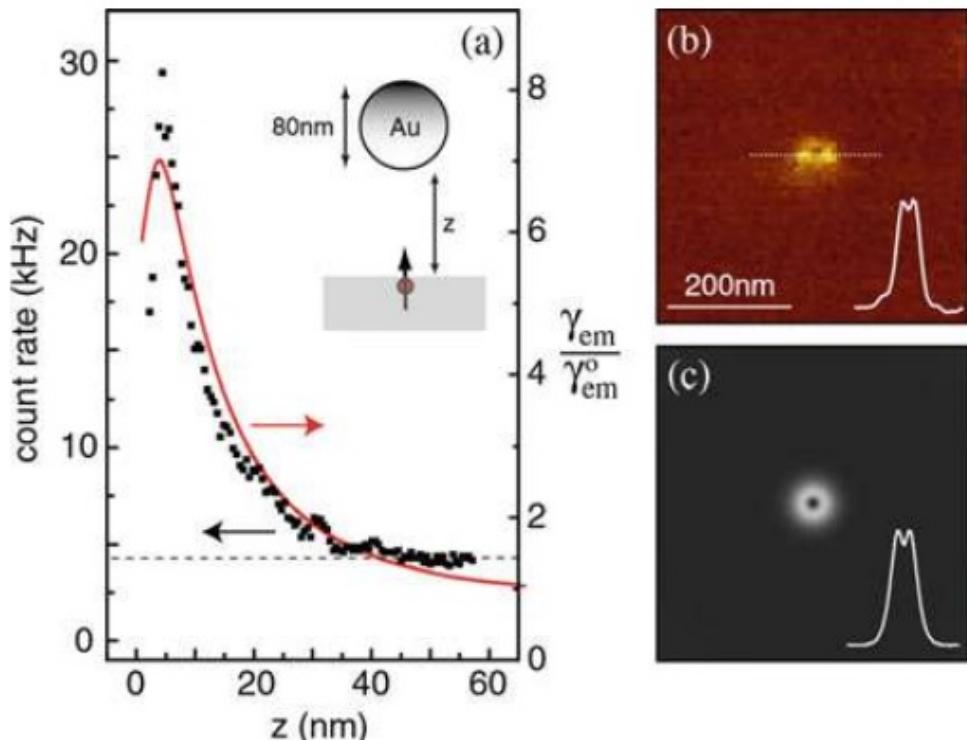
$$QY^0 = \frac{\Gamma_{rad}^0}{\Gamma_{mol} + \Gamma_{rad}^0} \quad (18.10)$$

بازده کوانتمی این احتمال را که مولکول تحریک شده با گسیل یک فوتون و نه از طریق فروپاشی داخلی تجزیه می شود، نشان می دهد. برای مولکول های معمولی، این بازده کوانتمی می تواند نسبتاً کوچک باشد، مثلاً حدود  $10\%$  درصد یا گاهی حتی کمتر.

- سفید کنندگی مولکول های معمولی با احتمال مشخصی سفید<sup>۱۴</sup> می شوند. به طور کلی منطقی است که فرض کنیم یک مولکول به طور متوسط یک میلیون فوتون، قبل از اینکه دچار تغییر ساختاری شود و از نظر نوری غیرفعال شود، ساطع می کند. به همین دلیل، آزمایش های نوری با مولکول ها اغلب فقط برای مدت معینی، معمولاً از ثانیه تا دقیقه انجام می شود. سفید شدن را می توان با قرار دادن مولکول ها در ماتریس و کار در دماهای پایین بهشت حذف کرد. تابشگرهای کوانتمی دیگری مانند نقاط کوانتمی وجود دارند که بازده کوانتمی بسیار بالاتری دارند و در تناوب زمانی بسیار طولانی تری پایدار می مانند.

حالت بعدی را در نظر گیرید که یک مولکول در نزدیکی یک نانوذره پلاسمونیک قرار می گیرد.

<sup>۱۴</sup>Bleach



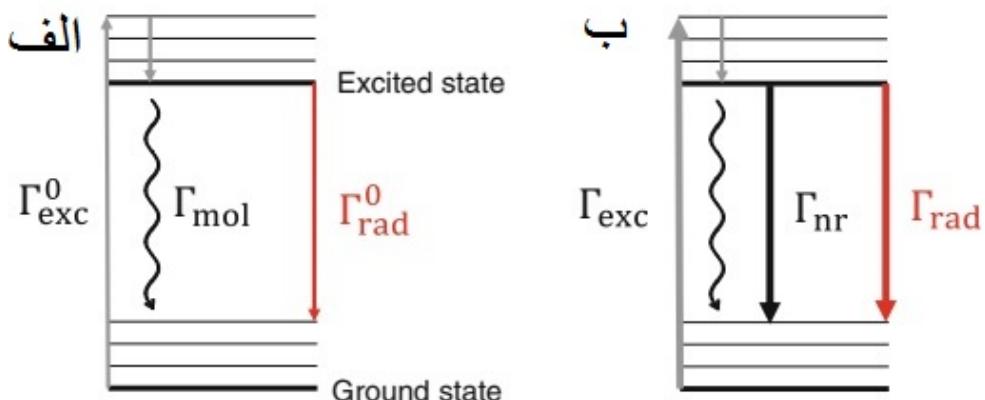
شکل ۶.۱۰: فلورسانس اندازه‌گیری شده یک سیستم همدوس متشکل از یک دوقطبی (مولکول رنگ) و نانوذره طلا [۸۴]. (الف) با کاهش فاصله دوقطبی-کره، انتشار ابتدا افزایش می‌یابد، زیرا به دلیل تزویج مولکول-نانوذره بزرگ‌تر، و در فواصل کوچک، به دلیل افزونگی فروپاشی غیرتابشی و تلفات اهمی، خاموش می‌شود. (ب) الگوی انتشار تجربی و (ج) شبیه سازی شده برای روش نانوذره طلا روی مولکول. شکل از مرجع [۸۴] گرفته شده است.

با تغییر محیط فوتونیک، کanal فروپاشی مولکولی داخلی معمولاً بی‌تأثیر می‌ماند، اما ویژگی‌های زیر تغییر می‌کنند (شکل ۶.۱۰):

- **فروپاشی تابشی مولکول-نانوذره تزویجی معمولاً دارای نرخ فروپاشی تابشی افزایش یافته  $\Gamma_{rad}$  است،** شکل (۳.۱۰) و (۴.۱۰) مراجعه کنید، اگرچه در برخی موارد کاهش نیز مشاهده می‌شود.

- **فروپاشی غیرتابشی علاوه بر فروپاشی تابشی، نانوذره پلاسمونیک نیز می‌تواند از طریق تلفات اهمی تجزیه شود.** فروپاشی غیرتابشی حاصل از طریق نرخ  $\Gamma_{nr} = \Gamma_{tot} - \Gamma_{rad}$  توصیف می‌شود، که در آن نرخ کل فروپاشی است که از کل توان تلف شده معادله (۲.۱۰) محاسبه می‌شود.

- **بازده کوانتومی** با این اصلاحات نرخ، بازده کوانتومی سیستم دوقطبی-نانوذره تزویجی



شکل ۷.۱۰: نمودار جاپلۇنسکى مولکول تحریک نوری. (الف) مولکول در فضای آزاد.  $\Gamma_{exc}^0$  نرخ تحریک مولکول است که معمولاً به سطح ویبرونیک تحریک شده حالت تحریک می‌رسد. پس از آرامش سریع ارتعاشی، در حالت پایه ارتعاشی حالت مولکولی تحریک، از طریق آرامش داخلی ( $\Gamma_{mol}$ ) یا با گسیل یک فوتون ( $\Gamma_{rad}^0$ ) تجزیه می‌شود. (ب) برای یک مولکول تزویجی به یک نانوذره پلاسمونیک، سرعت فروپاشی تحریک و تشعشع تغییر می‌کند. علاوه بر این، یک کانال فروپاشی غیر تابشی باز می‌شود که در آن مولکول با انتقال انرژی خود به نانوذره پلاسمونیک تجزیه می‌شود، جایی که از طریق تلفات اهمی به گرما تبدیل می‌شود.

خواهد بود:

$$QY = \frac{\Gamma_{rad}}{(\Gamma_{mol} + \Gamma_{nr}) + \Gamma_{rad}} \quad (19.10)$$

اصلاح نسبت به مقدار فضای آزاد  $QY^0$  واضح نیست و به جزئیات تغییر نرخ بستگی دارد. در غیاب آرامش داخلی، بازده کوانتموی همیشه کاهش می‌یابد، زیرا از طریق تزویج به نانوذره پلاسمونیک یک کانال فروپاشی غیر تابشی ( $\Gamma_{nr}$ ) باز می‌شود. برای مولکول‌هایی با مقدار  $QY^0$  کوچک، بازده کوانتموی معمولاً در حضور یک نانوذره پلاسمونی افزایش می‌یابد، حداقل برای مولکول‌هایی که به اندازه کافی دور از ذره هستند که در آن فروپاشی تابشی بر ذره غیر تابشی غالب است.

- **نرخ فلورسانس** علاوه بر این، همچنین نرخ تحریک  $\Gamma_{exc}$  در حضور یک نانوذره پلاسمونی تغییر می‌کند، شکل (۷.۱۰). نرخ فلورسانس یا معادل آن تعداد فوتون‌های تابشی شده در واحد زمان، سپس بر اساس  $QY \times \Gamma_{exc}$  تغییر می‌کند یا با بیان کلمات:

$$(نرخ کوانتموی) \times (نرخ انقراضی) = (نرخ فلورسانس)$$

تغییر خالص شدت فلورسانس به جزئیات نرخ‌های مختلف بستگی دارد. بطوری که در شکل (۶.۱۰) مشاهده می‌شود، با کاهش فاصله مولکول-نانوکره، ابتدا شدت فلورسانس افزایش می‌یابد، زیرا فروپاشی تابشی اغلب رخ میدهد و بر فروپاشی مولکولی داخلی برتری دارد، و تنها برای کوچک‌ترین فواصل، فلورسانس به دلیل افزایش  $\Gamma_{nr}$  خاموش می‌شود. در

اینجا مولکول عمدتاً مودهای پلاسمون چند قطبی را تحریک می‌کند، که از طریق تلفات اهمی، همانطور که قبل در شکل (۵.۱۰) نشان داده شده، تجزیه می‌شوند،

### ۳.۱۰ افزونگی سطحی پراکندگی رامان

پراکندگی رامان<sup>۱۵</sup> و افزونگی سطحی پراکندگی رامان (SERS)<sup>۱۶</sup> فرآیندهای کوانتمی واقعی هستند. با این حال، همانطور که در این بخش انجام خواهیم داد، می‌توان با استفاده از یک رویکرد کلاسیک چیزهای زیادی در مورد این فرآیندها آموخت. توصیف کوانتمی معمولاً دشوارتر است، به عنوان مثال، مرجع [۱۹]، اما با استثنای عوامل جمعیت حرارتی از دست رفته در یک رویکرد کلاسیک، منجر به نتایج مشابهی می‌شود. یک نوسان‌کننده را در نظر گیرید که توسط یک میدان الکتریکی خارجی  $\mathbf{E}_L \cos(\omega_L t)$  تحریک می‌شود؛

$$\mathbf{p}(t) = \left[ \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \cos(\Omega_{vib} t) \right] \cdot \left( \mathbf{E}_L \cos(\omega_L t) \right) \quad (۲۰.۱۰)$$

که در آن  $\mathbf{p}(t)$  گشتاور دوقطبی وابسته به زمان نوسان‌کننده است. ما قطبش را به یک جمله مستقل از زمان  $\bar{\alpha}_0$  و یک جمله نوسانی  $\bar{\alpha}_1 \cos(\Omega_{vib} t)$  با فرکانس لرزش  $\omega_L \ll \Omega_{vib}$  که خیلی کوچکتر از  $\omega_L$  میدان خارجی است تجزیه کردیم. برای مثال، این مدل مربوط به مولکولی است که قطبش آن با لرزش مولکولی مدوله شده است. اگر اکنون فقط جمله متناسب با  $\bar{\alpha}_1$  را در نظر گیریم، خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= \bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{E}_L \cos(\omega_L t) \cos(\Omega_{vib} t) \\ &= \bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{E}_L \frac{1}{2} \left\{ \cos[(\omega_L + \Omega_{vib})t] + \cos[(\omega_L - \Omega_{vib})t] \right\} \end{aligned}$$

بنابراین، نوسان کننده نه فقط با فرکانس تحریک نوسان  $\omega_L$  می‌کند (بوسیله جمله متناسب با  $\bar{\alpha}_0$  که ما اینجا در نظر نگرفتیم، توصیف می‌شود) بلکه در فرکانس‌های مدولاسیونی که بنام فرکانس‌های رامان خوانده می‌شوند، نیز نوسان می‌کنند.

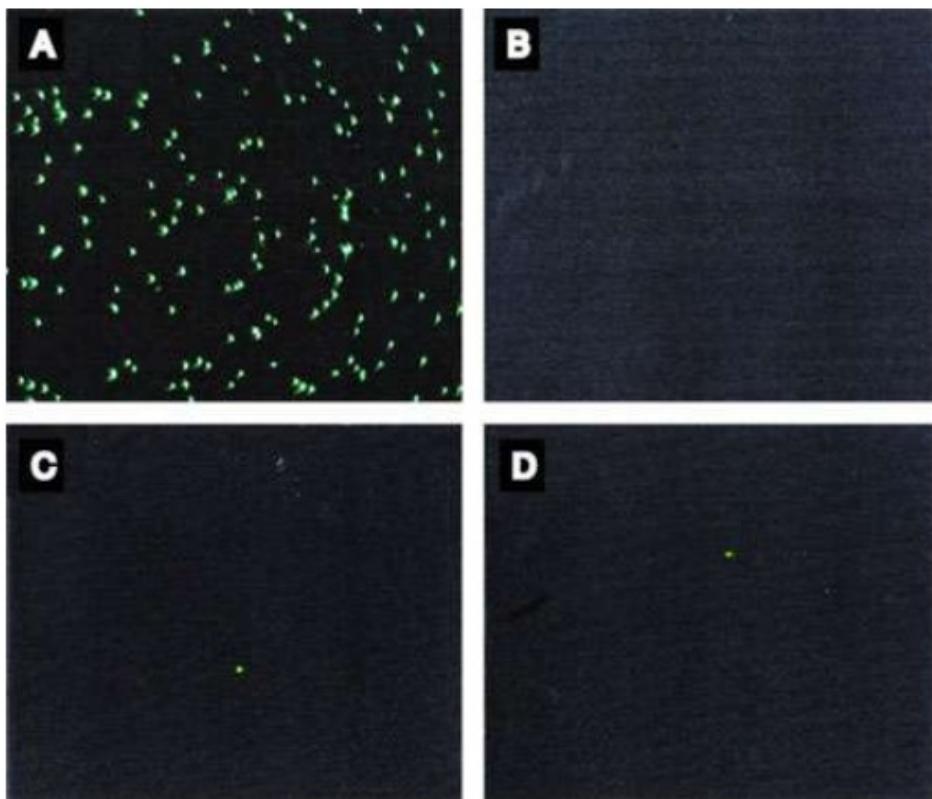
#### فرکانس‌های رامان

$$\omega_R^\pm = \omega_L \pm \Omega_{vib} \quad (۲۱.۱۰)$$

در فصل آخر سطح مقطع پراکندگی را برای یک ذره قطبش پذیر، رابطه (۲۱.۹) بدست آوردیم. از اینرو می‌توانیم این نتیجه را مستقیماً برای بخش سطح مقطع رامان (کلاسیک) بصورت

<sup>۱۵</sup>Raman Scattering

<sup>۱۶</sup>Surface-Enhanced Raman Scattering (SERS)



شکل ۸.۱۰: نانوذرات منفرد نقره با تحریک موج محو شونده تصویربرداری شده‌اند. بازتاب داخلی کلی پرتو لیزر در رابط شیشه-مایع برای کاهش پس‌زمینه پراکنده‌گی لیزر استفاده شده است. (الف) عکس فیلتر نشده که نور لیزر پراکنده را از تمام ذرات ثبیت شده روی سطح پوشش داده شده با پلی‌لیزین نشان می‌دهد. (ب) عکس‌های فیلتر شده گرفته شده از یک نمونه کلوئیدی نقره خالی. (ج) و (د) عکس‌های فیلتر شده گرفته شده از نمونه کلوئیدی نقره که با چند مولکول ناخالص شده است، حداقل یک ذره پراکنده رامان را نشان می‌دهد. شکل از مرجع [۹۰] گرفته شده است.

زیر استفاده کنیم؛

$$C_R = \frac{k^4}{6\pi\epsilon^2} \left| \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 \cdot \epsilon_L \right|^2, \quad (22.10)$$

که در آن  $k$  عدد موج نور تابشی (فرض می‌کنیم  $\omega_R \pm \approx \omega_L$  ب نحوی که  $k$  عدد موج میدان تحریک باشد)،  $\epsilon$  گذردهی محیط بستر و  $\epsilon_L$  قطبش موج میدان تحریک است. در حقیقت، توصیف مکانیک کوانتومی خیلی شبیه همین نتیجه را میدهد، در هر حال، شدت نور پراکنده برای فرکانس استوکس  $\omega_R^-$ <sup>۱۷</sup> و فرکانس ضد استوکس  $\omega_R^+$  بطور کلی متفاوت است.

<sup>۱۷</sup> Stokes frequency

اثر رامان به صورت تئوری توسط آدولف اسمکال<sup>۱۸</sup> در سال ۱۹۲۳ پیش‌بینی شد و ۵ سال بعد توسط فیزیکدان هندی چاندراساخارا و نکاتا رامان<sup>۱۹</sup> به صورت تجربی مشاهده شد. از آن زمان استفاده گسترده‌ای پیدا کرده است زیرا امکان تشخیص فرکانس‌های ارتعاشی را می‌دهد، که به عنوان اثر انگشت برای مولکول‌های خاص عمل می‌کنند، اما نه در محدوده فرکانس مادون قرمز بلکه در رژیم فرکانس نوری. در سال ۱۹۷۴ گروه فلیشمن<sup>۲۰</sup> مشاهده سیگنال‌های قوی رامان را از یک لایه مولکول که بر روی الکترودهای فلزی زبر شده الکتروشیمیابی رسوب کرده بود گزارش کردند<sup>۲۱</sup>. این مقاله به عنوان اولین مشاهده SERS در نظر گرفته می‌شود. گام مهم دیگر، کار نی و ایموری<sup>۲۲</sup> است که سیگنال‌های SERS را از مولکول‌های منفرد، همانطور که در شکل (۸.۱۰) نشان داده شده است، مشاهده کردند. نویسندهای در چکیده مقاله خود می‌نویسند:

آشکارسازی نوری و طیفسنجی تک مولکول‌ها و نانوذرات منفرد در دمای اتاق با استفاده از افزونگی سطحی پراکنده‌ی رامان به دست آمده است. تک تک نانوذرات کلوئیدی نقره از یک جمعیت ناهمگن بزرگ برای خواص ویژه وابسته به اندازه غربالگری شدن و سپس برای تقویت علائم طیفسنجی مولکول‌های جذب شده استفاده شدند. برای تک مولکول‌های رودامین ۶G جذب شده روی نانوذرات انتخابی، فاکتورهای تقویت ذاتی رامان در حد  $10^{14}$  تا  $10^{15}$  بود، که بسیار بزرگ‌تر از مقادیر میانگین مجموعه مشتق شده از اندازه‌گیری‌های معمولی بود. این پیشرفت عظیم منجر به سیگنال‌های رامان ارتعاشی می‌شود که شدیدتر و پایدارتر از فلورسانس تک مولکولی هستند.

گرچه افزونگی SERS تا ۱۵ مرتبه تا حدودی مشکوک باقی مانده است، اما کارهای بعدی متعدد فاکتورهای افزایش بسیار بزرگی را تایید کرده است. در ادامه، پراکنده‌ی رامان را در حضور یک محیط فوتونی اصلاح شده تحلیل می‌کنیم. همانطور که نشان خواهیم داد، اصلاح بر روی (۱) فرآیند تحریک نوسانگر و همچنین (۲) خواص انتشار نوسانگر تأثیر می‌گذارد. ترکیب این دو اثر منجر به پیشرفت‌های عظیم سیگنال‌های SERS مطابق با مشاهدات تجربی می‌شود.

**• افزونگی گسیل** با اصلاح فرآیند گسیل شروع می‌کنیم. از معادله (۸.۱۰) مشاهده می‌کنیم که میدان الکتریکی یک دوقطبی نوسانی در حضور یک محیط فوتونی اصلاح شده را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu\omega^2 \left[ \bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{dip}) + \bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{dip}) \right] \cdot \mathbf{p}$$

که در آن  $\bar{\bar{G}}$  برای انتشار نوسانگر در فضای آزاد و  $\bar{\bar{G}}_{refl}$  برای اصلاحات مربوطه، مثلاً یک نانوذره پلاسمونیک نزدیک آن است. در اینجا  $\mathbf{r}_{dip}$  محل دوقطبی تحریک است. دور از دوقطبی و نانوذرات پلاسمونیک، میدان‌های الکترومغناطیسی امواج خارج شونده به صورت زیر هستند.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \gg r_{dip}} \mu\omega^2 \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \left[ \bar{f}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}) + \bar{f}_{refl}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}) \right] \cdot \mathbf{p}$$

<sup>۱۸</sup>Adolf Smekal

<sup>۱۹</sup>Chandrasekhara Venkata Raman

<sup>۲۰</sup>Fleischmann

<sup>۲۱</sup>Nie and Emory

در اینجا  $\bar{f}$  و  $\bar{f}_{refl}$  به ترتیت صورت مجانبی فضای آزاد تابع گرین بازتابی هستند. بخش فضای آزاد را می‌توان از معادله (۲۵.۵) بصورت زیر نوشت؛

$$f_{ij}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}) = \frac{e^{jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{dip}}}{2\pi} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) \quad (23.10)$$

و آن در حدود یک است. در مقابل، افزونگ  $\bar{f}_{refl}$ ، که می‌تواند از تابع گرین بازتابی در محدوده میدان دور بدست آید، می‌تواند در حضور نانوذرات پلاسمونیک، با ضریب افزونگی در حدود صدها مرتبه بزرگ شود. دامنه میدان دور نور ساطع شده از دوقطبی نوسانی در فرکانس‌های رامان را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \mu\omega^2 \left[ \bar{f}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}; \omega_R^\pm) + \bar{f}_{refl}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}; \omega_R^\pm) \right] \cdot \mathbf{p}_1, \quad (24.10)$$

که برای روشن شدن مطلب فرکانس‌های رامان را که نور ساطع می‌کند با  $\omega_R^\pm$  نشان دادیم.

- افزونگی تحریک علاوه بر افزونگی فرآیند گسیل، میدان تحریک نوسانگر نیز اصلاح می‌شود. بجای (۲۰.۱۰) خواهیم داشت؛

$$\mathbf{p}(t) = \left[ \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \cos(\Omega_{vib} t) \right] \cdot \left( \mathbf{E}_L(\mathbf{r}_{dip}, t) + \mathbf{E}_{refl}(\mathbf{r}_{dip}, t) \right),$$

که در آن  $\mathbf{E}_{refl}(\mathbf{r}_{dip}, t)$  بخش بازتابی میدان تحریک در موقعیت دوقطبی است. در مرحله بعد می‌توانیم از  $\bar{f}_{refl}$  دامنه میدان دور تابع گرین بازتابی را برای بیان این افزونگی فرآیند تحریک استفاده کنیم. به عنوان مرحله مقدماتی، فرض می‌کنیم که میدان ورودی  $\mathbf{E}_L$  توسط یک دوقطبی نوسانی دیگر با گشتاور  $\mathbf{p}_L$  که در موقعیت  $\mathbf{r}$  دورتر از دوقطبی و نانوذره پلاسمونیک قرار دارد، تولید می‌شود. سپس میدان الکتریکی در  $\mathbf{r}_{dip}$  را می‌توان به صورت معمول بیان کرد؛

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_{dip}) = \mu\omega^2 \left[ \bar{G}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r}) + \bar{G}_{refl}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{p}_L$$

از رابطه تقارن معادله (۳۸.۷) برای دایادیک گرین که با استفاده از قضیه هم‌پاسخی اپتیک به دست آورده‌ایم، می‌توانیم توابع گرین را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\bar{G}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r}) = \bar{G}^T(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{dip}) \xrightarrow[r \gg r_{dip}]{} \mu\omega^2 \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \bar{f}(\mathbf{r}_{dip}, \mathbf{r})$$

که در آن  $T$  بالا نویس نشان دهنده ترانهاده ۲۲ ماتریس است. یک رابطه را نیز می‌توان برای  $\bar{G}_{refl}$  به دست آورد. سپس یک موج صفحه تابشی با دامنه  $\mathbf{E}_L$  را در نظر می‌گیریم که در امتداد جهت  $\hat{\mathbf{k}}$  منتشر می‌شود. با استفاده از شکل مجانبی معادله (۲۳.۱۰) برای

<sup>۲۲</sup>Transpose

تابع گرین فضای آزاد، می‌توانیم به راحتی نشان دهیم که میدان تابشی را می‌توان به صورت  
بیان کرد؛

$$\mathbf{E}_L e^{-j\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}_{dip}} = \bar{\bar{f}}^T(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}) \cdot 4\pi \mathbf{E}_L$$

بنابراین، کل میدان تحریک در موقعیت دوقطبی را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$\mathbf{E}_{tot}(\mathbf{r}_{dip}) = \left[ \bar{\bar{f}}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}; \omega_L) + \bar{\bar{f}}_{refl}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}; \omega_L) \right]^T \cdot 4\pi \mathbf{E}_L \quad (25.10)$$

با کنار هم قرار دادن معادلات (۲۴.۱۰) و (۲۵.۱۰) برای افزونگی فرآیندهای پراکندگی و  
تحریک، دامنه میدان دور فرآیند رامان پراکنده شده را بدست می‌آوریم.

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \mu\omega^2 \left[ \bar{\bar{f}}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}; \omega_R^\pm) + \bar{\bar{f}}_{refl}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}; \omega_R^\pm) \right] \cdot \bar{\alpha}_1$$

$$\cdot \left[ \bar{\bar{f}}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}; \omega_L) + \bar{\bar{f}}_{refl}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}; \omega_L) \right]^T \cdot 4\pi \mathbf{E}_L$$

ما در نهایت از معادله (۱۷.۴)، که  $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$  را به بردار پواین‌تینگ در ناحیه میدان دور مربوط  
می‌کند استفاده و بر شدت  $I_{inc} = \frac{1}{2}Z^{-1}|\mathbf{E}_L|^2$  میدان تحریک تقسیم و در تمام زوایا  
انتگرال‌گیری می‌کنیم تا سطح مقطع برای افزونگی سطحی پراکندگی رامان بدست آید؛

### سطح مقطع برای افزونگی سطحی پراکندگی رامان (SERS)

$$C_{SERS} = \oint \left| 2\pi\mu\omega^2 \left[ \bar{\bar{f}}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}) + \bar{\bar{f}}_{refl}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{dip}) \right] \cdot \bar{\alpha}_1 \right. \\ \cdot \left. \left[ \bar{\bar{f}}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}) + \bar{\bar{f}}_{refl}(-\hat{\mathbf{k}}_L, \mathbf{r}_{dip}) \right]^T \cdot \epsilon_L \right|^2 d\Omega. \quad (26.10)$$

برای  $\omega_L \ll \Omega_{vib}$ ، وابستگی فرکانسی دامنه‌های میدان دور را حذف کرده‌ایم، تا بتوانیم  
همه را در فرکانس تحریک  $\omega_L$  ارزیابی کنیم. در جمله اول عبارت در براکت‌ها برای  
افزونگی فرآیند پراکندگی به حساب می‌آید، در حالی که در جمله دوم عبارت در براکت‌ها  
برای افزونگی فرآیند تحریک به حساب می‌آید. در مجموع مقیاس سطح مقطع رامان با  
توان چهارم ضریب افزونگی است؛

$$C_{SERS} \propto |f_{refl}|^4 \quad (27.10)$$

بنابراین، برای ضریب‌های افزونگی میدان  $|f_{refl}|$  از مرتبه صدها، برای افزونگی SERS  
می‌تواند در حد میلیاردان باشد. ممکن است تعجب کنید که آیا می‌توان ضرایب افزونگی  
مشابهی را برای یک نوسانگر تشید که در فرکانس تحریک  $\omega_L$  منتشر می‌کند نیز بدست  
آورد. با تکرار همان تحلیلی که ارائه شد، در واقع یک افزونگی مشابه را بازیابی می‌کنیم.

با این حال، در این مورد، ما علاوه بر این باید نوری را که مستقیماً از نانوذره پلاسمونی ساطع می‌شود، که در همان فرکانس پراکنده می‌شود و شدت بسیار بالاتری دارد، در نظر گیریم. از اینرو انتشار دوقطبی تشدید را کاملاً می‌پوشاند. بنابراین، جادوی SERS این است که نوسانگر تحریک شده به عنوان یک مدولاتور فرکانس عمل می‌کند و نور رامان پراکنده را بطور طیفی از میدان‌های تحریک جدا می‌کند.

سطح مقطع برای افزونگی سطحی پراکنده‌گی رامان SERS پلاسمونیک‌ها را با حساسیت شیمیایی ترکیب کرده که امکان شناسایی مولکول‌ها را از طریق طیف‌های رامان خاص آنها فراهم می‌کند. این یک زمینه تحقیقاتی غنی و بین‌رشته‌ای را با بسیاری از پیشرفت‌های هیجان‌انگیز، مانند پراکنده‌گی رامان پیشرفته (TERS) باز کرده است. در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم، بلکه خوانندگان علاقه‌مند را به مطالب مربوطه، مثلاً [۹۲، ۸۹]، ارجاع می‌دهیم.

## ۴.۱۰ انتقال انرژی تشدید فورستر

انتقال انرژی تشدید فورستر (FRET)<sup>۲۳</sup> فرآیندی است که در آن یک مولکول اهدا کننده<sup>۲۴</sup> واقع در موقعیت  $r_D$  انرژی را از طریق تزویج دوقطبی غیر تابشی به یک مولکول گیرنده<sup>۲۵</sup> مجاور واقع در موقعیت  $r_A$  منتقل می‌کند. چنین فرآیندهایی نقش مهمی در فتوسنتز دارند و اولین بار توسط فورستر<sup>[۹۳]</sup> مورد مطالعه قرار گرفتند. در اینجا (FRET) را در یک چارچوب کلاسیک مورد بحث قرار می‌دهیم. کار انجام شده توسط مولکول اهدا کننده بر روی گیرنده را می‌توان از طریق رابطه زیر بیان کرد (به بحث ابتدای این فصل نیز مراجعه کنید)؛

$$P_{D \rightarrow A} = \frac{1}{2} \int \text{Re} \left\{ \mathbf{J}_A^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_D(\mathbf{r}) \right\} d^3r = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left\{ \mathbf{p}_A^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A) \right\} .$$

در اینجا  $\mathbf{p}_A$  گشتاور دوقطبی مولکول گیرنده است. به‌طور کلی، هنگامی که انرژی از اهدا کننده به گیرنده منتقل می‌شود، فرآیند معکوس به‌دلیل قضیه متقابل اپتیک آغاز می‌شود. با این حال، در مختلط‌های (FRET)، تحریک در مولکول گیرنده عموماً از آرامش درون مولکولی سریع رنج می‌برد و بدین وسیله آن را به‌طور موثر از کanal (FRET) بین مولکولی حذف می‌کند. در اینجا چنین آرامشی را به صراحت در نظر نمی‌گیریم، بلکه به‌جای آن، هر گونه واکنشی را که از سوی گیرنده بر روی اهدا کننده انجام می‌شود، کنار می‌گذاریم. فرض کنید که گشتاور دوقطبی گیرنده  $\mathbf{p}_A$  توسط گیرنده قطبش پذیری  $\bar{\alpha}_A$  از طریق رابطه زیر القا شود.

$$\mathbf{p}_A = \bar{\alpha}_A \cdot \mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A) = \left[ \sum_a \mathbf{n} \alpha_a \mathbf{n}_a^T \right] \cdot t \mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A)$$

در آخرین عبارت، یک تبدیل محور اصلی برای قطبش پذیری انجام داده‌ایم، و فرض می‌کنیم که بردارهای ویژه  $\mathbf{n}_a$  را می‌توان حقیقی انتخاب کرد. بنابراین، قدرت از اهدا کننده به گیرنده را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

<sup>۲۳</sup>Förster Resonance Energy Transfer (FRET)

<sup>۲۴</sup>Donor

<sup>۲۵</sup>Acceptor Molecule

$$P_{D \rightarrow A} = \frac{\omega}{2} \sum_a \alpha''_a \left| \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{E}_D(\mathbf{r}_A) \right|^2.$$

در نهایت از تابع گرین دیا دیک استفاده می کنیم تا میدان الکتریکی اهدا کننده را به منبع میدان، یعنی دوقطبی اهدا کننده، مربوط کنیم. با این کار، برای قدرتی که اهدا کننده بر روی گیرنده انجام می دهد، عبارت زیر را بدست می آوریم؛

### توان انجام شده توسط اهدا کننده بر روی گیرنده

$$P_{D \rightarrow A} = \frac{\mu^2 P_D^2 \omega^5}{2} \sum_a \alpha''_a \left| \mathbf{n}_a \cdot \bar{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_D) \cdot \mathbf{n}_D \right|^2. \quad (28.10)$$

ساده کردن بیشتر این عبارت راحت است. ابتدا فرض می کنیم که جهت گیری مولکول گیرنده تصادفی هستند و میانگین گیری نسبت به جهت گیری مولکول برابر است با:

$$\frac{1}{4\pi} \oint \left| \hat{\mathbf{r}} \cdot E \hat{\mathbf{z}} \right|^2 d\Omega = \frac{1}{2} |E|^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} |E|^2$$

در اینجا بدون از دست دادن کلیت فرض کردیم که میدان الکتریکی اهدا کننده در جهت  $\hat{z}$  است. با چنین فرضی مشابه می توانیم میانگین گشتاور دوقطبی اهدا کننده را به دست آوریم؛

$$P_{D \rightarrow A} = \frac{\mu^2 P_D^2 \bar{\alpha}''_a \omega^5}{6} \operatorname{tr} \left\{ \left| \bar{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_D) \right|^2 \right\}, \quad (29.10)$$

که در آن  $(\bar{\alpha}'') = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\bar{\alpha}'')$  قسمت موهومی تانسور قطبش پذیری متوسط است. بعداً این عبارت را به خواص گسیل اهدا کننده، بهویژه قدرت پراکنده شده آن، و خواص جذب گیرنده، بهویژه قدرت انقراضی آن، مربوط کنیم. از معادله (۴.۱۰) قدرت ساطع شده توسط اهدا کننده را پیدا می کنیم

$$P_D = \frac{\mu \omega^4 p_D^2}{12\pi c}$$

از معادله (۲۲.۹) توان جذب گیرنده با جهت گرایی تصادفی به دست می آوریم

$$C_{abs} = \mu \omega c \bar{\alpha}''_A.$$

حداقل زمانی که قطبش پذیری موثر معادله (۹.۱۰) را معرفی نمی کنیم، از برابری سطح مقطع انقراضی با سطح مقطع جذب در حد شباه استاتیک، استفاده کردیم. در کنار هم قرار دادن نتایج آنها به رابطه زیر می رسیم

$$\frac{P_{D \rightarrow A}}{P_D} = 2\pi C_{abs}(\omega) \operatorname{tr} \left\{ \left| \bar{G}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_D) \right|^2 \right\}. \quad (30.10)$$

اگر فرض کنیم که اهدا کننده نه تنها در یک فرکانس منفرد منتشر می‌کند، بلکه دارای شکل خطی غیرمعمول  $f_D(\omega)$  است که احتمالاً به دلیل برخی باندهای کناری لرزشی یا ساختار سطح مولکولی پیچیده‌تر، می‌توان این عبارت را بازنویسی کرد. به طور مشابه، جذب گیرنده نیز می‌تواند پهن باند باشد، بنابراین مجبوریم یک انتگرال روی فرکانس معرفی کنیم. سپس نرخ FRET به همپوشانی بین گسیل اهدا کننده و جذب گیرنده نیز بستگی دارد. برای بحث مفصل‌تر، به عنوان مثال، به مرجع [۶] مراجعه کنید.

برای دوقطبی‌هایی که در فضای آزاد و نزدیک به یکدیگر قرار دارند، می‌توانیم ازتابع فضای آزاد استفاده کنیم که در تمرین ۷.۵ کار شده است، جایی که عبارت اصلی برای جداسازی‌های کوچک  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_D$  می‌شود.

$$G_{ij}(\mathbf{r}_D, \mathbf{r}_A) \approx \frac{3\hat{R}_i\hat{R}_j - \delta_{ij}}{4\pi k^2 R^3} .$$

با این کار به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\frac{P_{D \rightarrow A}}{P_D} \approx \left[ \frac{R_0}{R} \right]^6 \quad (31.10)$$

که در آن  $R$  فاصله اهدا کننده-گیرنده و  $R_0$  شعاع فورستر است که معمولاً در حد چند نانومتر است. به دلیل این وابستگی شدید به فاصله، احتمال FRET معمولاً برای فواصل کوچکتر از  $R_0$  بسیار زیاد است و سپس به شدت کاهش می‌یابد.

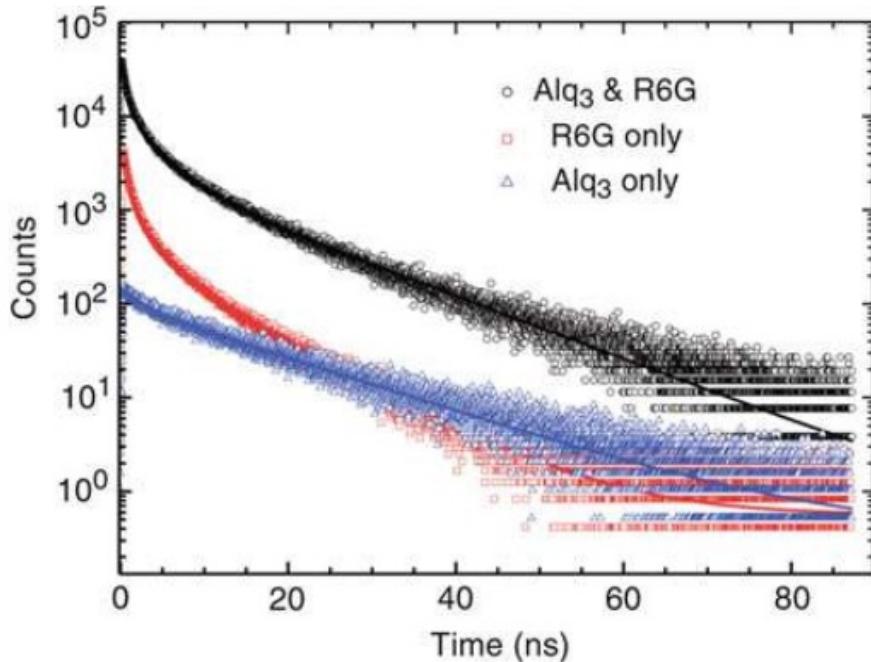
هنگام قرار دادن مجتمع اهدا کننده-گیرنده در محیطی متفاوت، رقابت با انتقال بسیار کارآمد FRET در فواصل کوچکتر از  $R_0$  شعاع فورستر دشوار است. با این حال، در حضور نانوذرات پلاسمونیک، زمانی که اهدا کننده و گیرنده هر دو به میدان‌های نزدیک پلاسمونیک تزویج می‌شوند، انتقال می‌تواند در فواصل زیاد اتفاق بیفتد [۹۵]. شکل (۹.۱۰) آزمایشی از گروه بارنز<sup>۲۶</sup>، انتقال انرژی را روی یک لایه نقره ۱۲۰ نانومتری نشان می‌دهد [۹۶]. هنگامی که فقط مولکول‌های اهدا کننده در بالای لایه نقره قرار می‌گیرند، فلورسانس فروپاشی تقریباً تک نمایی را نشان می‌دهد. بر عکس، نمونه با مولکول‌های گیرنده یک مشخصه فروپاشی متفاوت با منحنی فروپاشی چند نمایی را نشان می‌دهد. هنگامی که مولکول‌های اهدا کننده و گیرنده هر دو در دو طرف فیلم قرار می‌گیرند، فروپاشی فلورسانس فقط یادآور فروپاشی گیرنده است، بنابراین انتقال تحریک کارآمد از اهدا کننده به گیرنده را نشان می‌دهد.

## ۵.۱۰ طیف سنجی تلفات انرژی الکترون

طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون (EELS)<sup>۲۷</sup> یک فناوری مبتنی بر میکروسکوپ الکترونی است که امکان اندازه‌گیری میدان‌های نانوذرات پلاسمونیک با وضوح مکانی نانومتری و انرژی ۵ – ۵  $600meV$  را می‌دهد. اصل اساسی در شکل (۱۰.۱۰) نشان داده شده است. یک الکترون سریع با انرژی جنبشی در محدوده  $300keV$  –  $50$  که مربوط به سرعت الکترونی بین  $0.4$  تا  $0.7$  برابر سرعت نور است، از کنار نانوذره فلزی یا از درون آن عبور می‌کند. با احتمال معینی یک پلاسمون

<sup>۲۶</sup>Barnes group

<sup>۲۷</sup>Electron Energy Loss Spectroscopy (EELS)

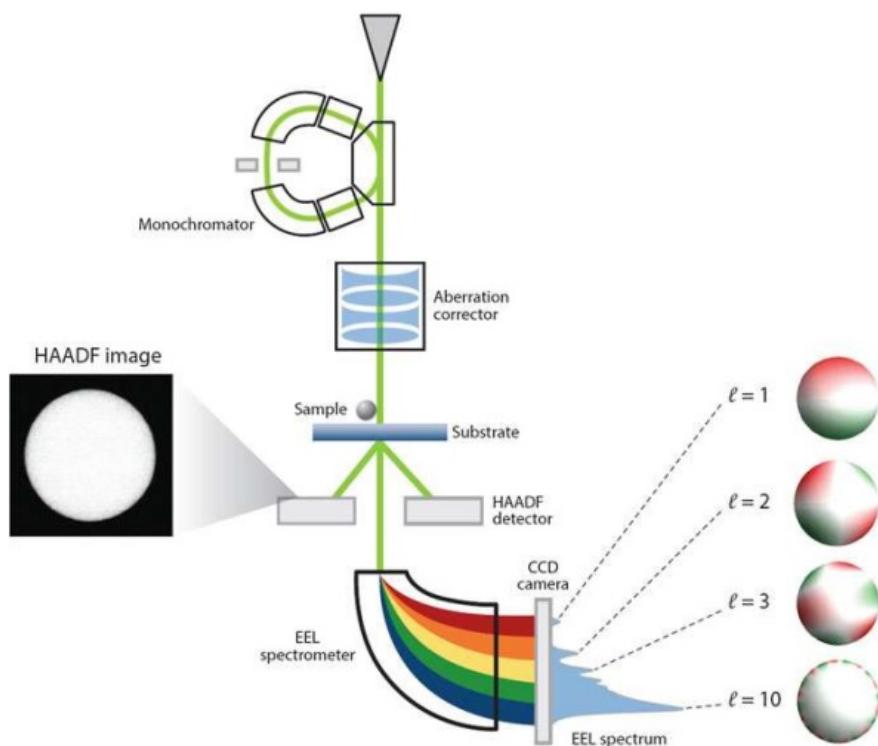


شکل ۹.۱۰: انتقال انرژی تشدید فورستر در یک فیلم نقره با ضخامت ۱۲۰ نانومتر [۹۴]. مولکول‌های رنگ دهنده Alq<sub>3</sub> در یک طرف فیلم، مولکول‌های رنگ گیرنده رودامین (R6G) ۶G در طرف مقابل قرار می‌گیرند. نمونه متشکل از مولکول‌های اهدافکننده قرار گرفته در بالای لایه نقره، یک فروپاشی فلورسانس تقریباً تک نمایی را نشان می‌دهد. نمونه متشکل از مولکول‌های گیرنده در بالای فیلم نقره، ویژگی فروپاشی متفاوت با منحنی فروپاشی چند نمایی را نشان می‌دهد. هنگامی که هر دو مولکول در طرف مقابل فیلم قرار می‌گیرند، فروپاشی فلورسانس تنها یادآور فروپاشی گیرنده است، بنابراین انتقال تحريك کارآمد از اهدا کننده به گیرنده را نشان می‌دهد. شکل از مرجع [۹۴] گرفته شده است.

ذره‌ای را تحريك کرده و در نتیجه بخش کوچکی از انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. با تجزیه و تحلیل طیفی تلفات انرژی می‌توان طیف پلاسمونیک را ترسیم کرد، و آن جایی است که قوانین انتخاب نوری معمول برای کاوشگر الکترونی اعمال نمی‌شود و بنابراین می‌توان به کل طیف دسترسی داشت. علاوه بر این، با روش شطرونجی پرتو بر روی نمونه، اطلاعات مکانی دقیقی در مورد میدان‌های پلاسمونیک به دست می‌آید.

طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون (EELS) یک سنت طولانی در زمینه پلاسمونیک دارد. در واقع، اولین مشاهده پلاسمون‌های سطحی با استفاده از (EELS) [۹۷] انجام شد. اگرچه از آن زمان تاکنون این میدان کم و بیش فعال باقی مانده است، اما پیشرفت‌های بیشتر امکان ۲۰۰۷ حاصل شد، زمانی که دو گروه به طور مستقل نشان دادند که با پیشرفت‌های بیشتر امکان نقشه‌برداری از میدان‌های نانوذرات پلاسمونیک با وضوح نانومتری وجود دارد [۹۹، ۹۸]. این مقالات آغاز عصر جدیدی را نشان می‌دهد که در آن (EELS) بدیک فناوری اندازه‌گیری بسیار دقیق و همه کاره برای میدان‌های نزدیک پلاسمونیک تبدیل شده است. شرح مفصلی برای تحولات اخیر را می‌توان در چندین مقاله موروث یافت [۱۰۰، ۱۰۱].

توصیف نظری مناسب (EELS) نیازمند یک چارچوب مکانیکی کوانتومی کامل است. با این



شکل ۱۰.۱۰: چینش طیف‌سنجی اتلاف انرژی الکترون (EELS)، تکنیکی مبتنی بر میکروسکوپ الکترونی [۹۶]. یک الکtron سریع با سرعتی در حدود نیمی از سرعت نور از یک کنار نانوذره فلزی گذشته یا از درون آن عبور و با احتمال معینی یک پلاسمون ذره را تحریک می‌کند. با تحلیل طیفی اتلاف انرژی الکترون و روش شطرونی پرتو الکترونی بر روی نمونه، اطلاعاتی در باره خواص طیفی و مکانی مودهای پلاسمون به دست می‌آید. (EELS) وضوح فضایی زیر نانومتری و وضوح طیفی ۱۰۱۰۰meV میکروسکوپ الکترونی را ترکیب می‌کند. (شکل با اجازه از دیوید جی. ماسیلو)

حال، با ترکیب نظریه الکترومغناطیسی کلاسیک با یکی از جنبه‌های فیزیک کوانتمومی، یعنی ماهیت ذره‌ای آن که حکم می‌کند الکترون می‌تواند انرژی را تنها در کسری از  $\hbar\omega$  از دست بددهد، امکان می‌دهد یک رابطه نیمه کلاسیک را بدست آوریم که اساس یک نظریه (EELS) قابل دوام را نشان می‌دهد. در ادامه فرض می‌کنیم که الکترون سریع در جهت  $\hat{z}$  با سرعت  $v$  منتشر می‌شود. مسیر حرکت را می‌توان از طریق رابطه زیر

$$\mathbf{r}_e(t) = \mathbf{R}_0 + \hat{\mathbf{z}}vt, \quad (32.10)$$

با پارامتر اثر  $(x_0, y_0) = \mathbf{R}_0$ ، عنوان کرد. در اینجا و در ادامه فرض می‌کنیم که اتلاف انرژی الکترون ریز مسیر الکترون را به طور قابل توجهی تغییر نمی‌دهد. در زیر میدان‌های الکترومغناطیسی تولید شده توسط توزیع جریان  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  الکترون سریع را محاسبه خواهیم کرد، اما فعلًا فرض می‌کنیم که پاسخ الکترومغناطیسی  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  پلاسمونیک نانوذره، (به عنوان مثال، با استفاده از روش انتگرال مرزی بخش ۹.۶)، در دسترس است. سپس کار انجام شده

توسط الکترون در برابر میدان الکتریکی توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$dW = -q \left( \mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t), t] + \mathbf{v} \times \mathbf{B}[\mathbf{r}_e(t), t] \right) \cdot \mathbf{v} dt = -q \mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t), t] \cdot \mathbf{v} dt ,$$

که در آن  $q = -e$  بار و  $v\hat{\mathbf{z}} = v$  سرعت الکترون است. از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که میدان‌های مغناطیسی نمی‌توانند مستقیماً کار را انجام دهند زیرا  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$  کل کار انجام شده توسط الکترون در مقابل میدان‌های الکترومغناطیسی مربوط به اتلاف انرژی  $\Delta E$  الکترون سریع است و از طریق انتگرال‌گیری تمام مسیر الکترون به دست می‌آید.

$$\Delta E = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t), t] dt .$$

اتلاف انرژی را می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه میدان الکتریکی به‌اجزای فرکانس‌های مختلف تجزیه کرد. اراینرو خواهیم داشت؛

$$\Delta E = \frac{e}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} e^{j\omega t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t), \omega] d\omega \right\} dt , \quad (33.10)$$

که در آن از  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  استفاده کرده‌ایم که برای هرتابع با ارزش واقعی  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  صادق است. در این مرحله باید از رویکرد کاملاً کلاسیک منحرف شویم و برخی از جنبه‌های کوانتمومی را معرفی کنیم.

- **رویکرد کلاسیک** در یک رویکرد کاملاً کلاسیک، اتلاف انرژی  $\Delta E$  یک عدد صرف است که با جمع کردن تلفات انرژی تک تک مودهای مختلف پلاسمون به دست می‌آید. با این حال،  $\Delta E$  حاوی هیچ اطلاعات طیف سنجی نیست.

- **رویکرد کوانتمومی** در رویکرد کوانتمومی، یک الکترون فقط می‌تواند انرژی خود را در کسری از  $\hbar\omega$  از دست بدهد. بنابراین، با تجزیه و تحلیل طیفی اتلاف انرژی یک الکترون، احتمال این که الکترون مقدار معینی انرژی را از دست داده یا هیچ انرژی از دست نداده است را بدست می‌آوریم.

- **رویکرد نیمه کلاسیک** مشابه بحث قبلی در باره رابطه بین توان تلف شده یک دوقطبی نوسانی و نرخ فروپاشی مربوطه، معادله (6.10)، می‌توانیم از یک توصیف نیمه کلاسیک استفاده کرده و اتلاف انرژی  $\Delta E$  به احتمال اتلاف  $\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega)$  را از طریق رابطه زیر مرتبط کنیم.

$$\Delta E = \int_0^{\infty} \hbar\omega \mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega) d\omega \quad (34.10)$$

دلیل پشت این عبارت ماهیت ذره‌ای فوق‌الذکر مکانیک کوانتمومی است که حکم می‌کند الکترون می‌تواند انرژی را فقط در کسری از  $\hbar\omega$  از دست دهد.

با ترکیب معادلات (33.10) و (34.10) سپس احتمال اتلاف انرژی الکترون را بدست می‌آوریم

### احتمال اتلاف انرژی الکترون

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega) = \frac{e}{\pi \hbar \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t), \omega] \right\} dt . \quad (35.10)$$

این عبارت نقطه شروعی را برای استخراج معادله کاری احتمال از دادن انرژی الکترون تشکیل می‌دهد. در ادامه، ابتدا میدان‌های الکتروومغناطیسی یک الکtron سریع را محاسبه می‌کنیم و سپس از تابع گرین بازتابشده برای ارتباط میدان الکتریکی با منبع جریان الکترون سریع استفاده می‌کنیم.

#### ۱.۵.۱۰ میدان حاصل از الکترون‌های سریع

توزیع بار یک الکترون سریع که در طول مسیر معادله (۳۲.۱۰) منتشر می‌شود، توسط رابطه زیر است؛

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -e\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\delta(z - vt) , \quad (36.10)$$

که در آن  $\mathbf{R} = (x, y)$  مختصات درون صفحه الکترون هستند. توزیع جریان مربوطه  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = v\rho(\mathbf{r}, t)$  است. برای محاسبه میدان‌های الکتریکی مربوط به این توزیع در یک محیط نامحدود (بعداً حضور نانوذرات پلاسمونیک را توضیح خواهیم داد)، معادله ماکسول را به فضای فرکانس و عدموج تبدیل می‌کنیم. ابتدا تبدیل فوریه را در حوزه زمان محاسبه می‌کنیم؛

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \int e^{-j\omega t} \rho(\mathbf{r}, t) dt = -\frac{e}{v}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)e^{-jqz} \quad (37.10)$$

که در آن عدموج  $q = \omega/v$  را معرفی کرده‌ایم. در این صورت همچنان به محاسبه تبدیل فوریه مکانی ادامه می‌دهیم؛

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{e}{v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) e^{-jqz} d^3 r = -\frac{2\pi e}{v} e^{-jk \cdot \mathbf{R}_0} \delta(k_z - q) .$$

رای بدست آوردن میدان الکتریکی، این نتیجه را با تابع گرین دایadic در فضای هم‌پاسخ<sup>۲۸</sup> ترکیب می‌کنیم (به جمله داخل پرانتر زیر مراجعه کنید)، همانطور که در بخش پیوست ب-۲ به دست آمده است، خواهیم داشت؛

$$E_i(\mathbf{k}, \omega) = -j\omega\mu \left( -\frac{1}{k_1^2} \frac{k_i k_j - k_1^2 \delta_{ij}}{k^2 - k_1^2} \right) \left[ -\frac{2\pi e}{v} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_0} \delta(k_z - q) \right] v \delta j z$$

که در آن  $k_1$  عدموج درون محیطی است که الکترون در آن در حال انتشار است. سپس موازی و عمود بر جهت انتشار الکترون را در فضای واقعی محاسبه می‌کنیم.

<sup>۲۸</sup>Reciprocal Space

• **مولفه‌های موازی از طریق تبدیل فوریه معکوس میدان الکتریکی را در فضای واقعی بدست می‌آوریم**

$$E_z(\mathbf{r}, \omega) = \left( \frac{-j\omega\mu e}{4\pi^2 k_1^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_0)} \left( \frac{k_z^2 - k_1^2}{k^2 - k_1^2} \right) \delta(k_z - q) d^3 k. \quad (38.10)$$

برای ساده‌سازی این عبارت ابتدا معرفی می‌کنیم

$$q^2 - k_1^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - v^2 \mu \epsilon) = q^2 \gamma_{\epsilon}^{-2}, \quad \gamma_{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 \epsilon \mu_0}} \quad (39.10)$$

در اینجا و در ادامه، نفوذ پذیری را روی  $\mu_0$  قرار می‌دهیم. با معرفی مختصات قطبی انتگرال بالا به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-j(qz + k_{\rho} \rho \cos \phi)} \frac{\gamma_{\epsilon}^{-2} q^2}{k_{\rho}^2 + \gamma_{\epsilon}^{-2} q^2} d\phi k_{\rho} dk_{\rho}$$

$$= 2\pi \gamma_{\epsilon}^{-2} q^2 e^{-jqz} \int_0^{\infty} \frac{J_0(k_{\rho} \rho)}{k_{\rho}^2 + \gamma_{\epsilon}^{-2} q^2} k_{\rho} dk_{\rho} = 2\pi \gamma_{\epsilon}^{-2} q^2 \left[ e^{-jqz} K_0 \left( \frac{q\rho}{\gamma_{\epsilon}} \right) \right]$$

که در آن  $K_0$  توابع بسل اصلاح شده مرتبه صفر است

• **مولفه‌های عمودی به‌طور مشابه، برای مولفه عمودی  $E_x$  خواهیم داشت؛**

$$E_x(\mathbf{r}, \omega) = \left( \frac{-j\omega\mu e}{4\pi^2 k_1^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_0)} \left( \frac{k_x K_z}{k^2 - k_1^2} \right) \delta(k_z - q) d^3 k.$$

انتگرال روی دست راست را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد؛

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-j(qz + k_{\rho} \rho \cos \phi)} \frac{q k_{\rho} \cos \phi}{k_{\rho}^2 + \gamma_{\epsilon}^{-2} q^2} d\phi k_{\rho} dk_{\rho}$$

$$= -2\pi j q e^{-jqz} \int_0^{\infty} \frac{J_1(k_{\rho} \rho)}{k_{\rho}^2 + \gamma_{\epsilon}^{-2} q^2} k_{\rho} dk_{\rho} = -2\pi j \gamma_{\epsilon}^{-1} q^2 \left[ e^{-jqz} K_1 \left( \frac{q\rho}{\gamma_{\epsilon}} \right) \right]$$

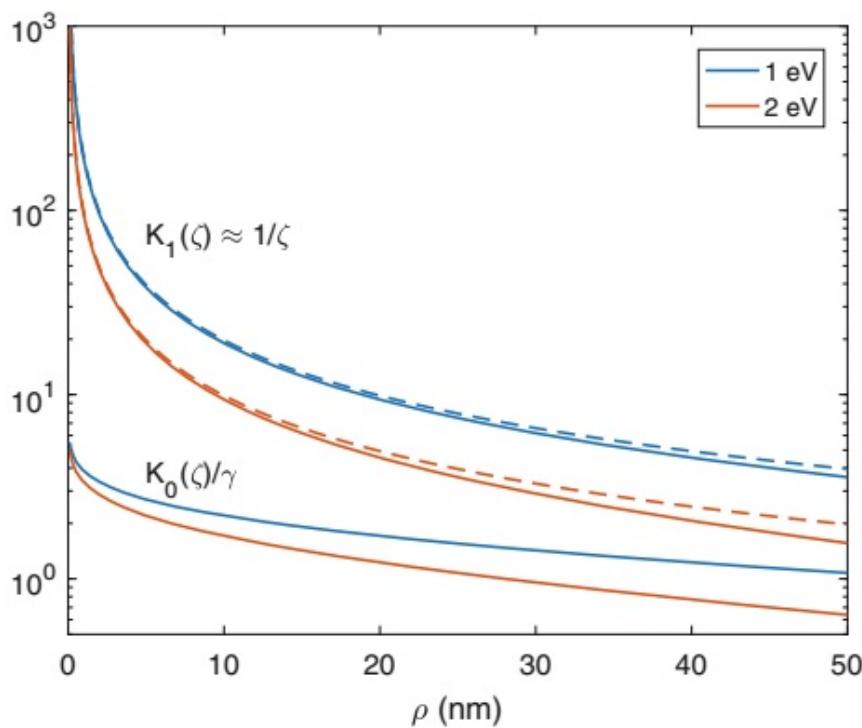
که در آن  $K_1$  تابع بسل اصلاح شده مرتبه صفر است.

با ترکیب نتایج فوق، برای میدان الکتریکی مرتبط با الکترون سریع رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

### میدان الکتریکی الکترون سریع

$$\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}, \omega) = \left( \frac{e\omega}{2\pi v^2 \gamma_{\epsilon}} \right) e^{-jqz} \left[ \frac{-j}{\gamma_{\epsilon}} K_0 \left( \frac{q\rho}{\gamma_{\epsilon}} \right) \hat{\mathbf{z}} - K_1 \left( \frac{q\rho}{\gamma_{\epsilon}} \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} \right] \quad (40.10)$$

جایی که  $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = \rho$  را معرفی کرده‌ایم. شکل (11.10) مولفه‌های  $z$  و شعاعی میدان الکتریکی را نشان می‌دهد که با معادله (40.10) داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مولفه شعاعی بسیار بزرگ‌تر از مولفه  $z$  است. برای فوائل شعاعی به اندازه کافی کوچک  $\rho$ ، جزء شعاعی وابستگی  $1/\rho$  را نشان می‌دهد که یادآور میدان الکتریکی تولید شده توسط یک سیم باردار است. در فوائل زیاد میدان الکتریکی به‌صورت نمائی میرا می‌شود.



شکل ۱۱.۱: اجزای میدان الکتریکی معادله (۴۰.۱۰) در جهت  $\hat{z}$  و شعاعی ( $K_0$ ) و برای دو انرژی از دست دادن انتخاب شده. از مخفف  $q\rho/\gamma_\epsilon = \xi$  استفاده می‌کنیم. خطوط چین وابستگی  $1/\rho$  را برای میدان الکتریکی شعاعی یک سیم باردار نشان میدهد، که به خوبی با  $K_1$  در فواصل بسیار کوچک مطابقت دارد.

### ۲.۵.۱۰ تجزیه به تلفات حجمی و سطحی

اکنون شروع به تجزیه و تحلیل مشارکت تلفات الکترون سریع می‌کنیم. به طور کلی، باید مراقب بود که الکترونی که در محیطی با اتفاف با  $> 0$  منشر می‌شود، حتی بدون پلاسمون ذره‌ای تحریک شونده نیز دچار تلفات شود. این تلفات را می‌توان با محاسبه معادله (۳۵.۱۰) برای احتمال تلفات انرژی الکترون از طریق استفاده از میدان الکتریکی معادله (۳۸.۱۰) برای الکترون سریع، همراه با  $R = R_0$  برای بدست آوردن میدان الکتریکی در موقعیت الکترون، ارزیابی کرد.

$$\mathcal{P}_{bulk}(\omega) = \frac{e}{\pi\hbar\omega} \int_0^L \text{Re} \left\{ \left( \frac{-j\omega\mu e}{2\pi k_1^2} \right) \int_0^{q_{max}} \left( \frac{q^2\gamma_\epsilon^{-2}}{k_\rho^2 + q^2\gamma_\epsilon^{-2}} \right) k_\rho dK_\rho \right\} dz$$

در عبارت بالا، انتگرال‌گیری روی  $t$  را با یک انتگرال روی  $z = vt$  جایگزین کرده‌ایم، و فقط در فاصله انتشار محدود  $L$  را در نظر می‌گیریم. این وضعیت مطابق با آزمایش‌های معمولی EELS است که در آن الکترون از یک نانوذره فلزی با اندازه محدود عبور می‌کند. علاوه بر این، حد بالایی انتگرال‌گیری روی  $k_\rho$  را با یک پارامتر قطع  $q_{max}$  که به‌زاویه جمع نیم‌روزنہ  $\phi_{out}$  در خارج از طیف سنج میکروسکوپ مرتبط است، شبیه به روزنہ عددی معادله (۱۲.۳) در اپتیک،

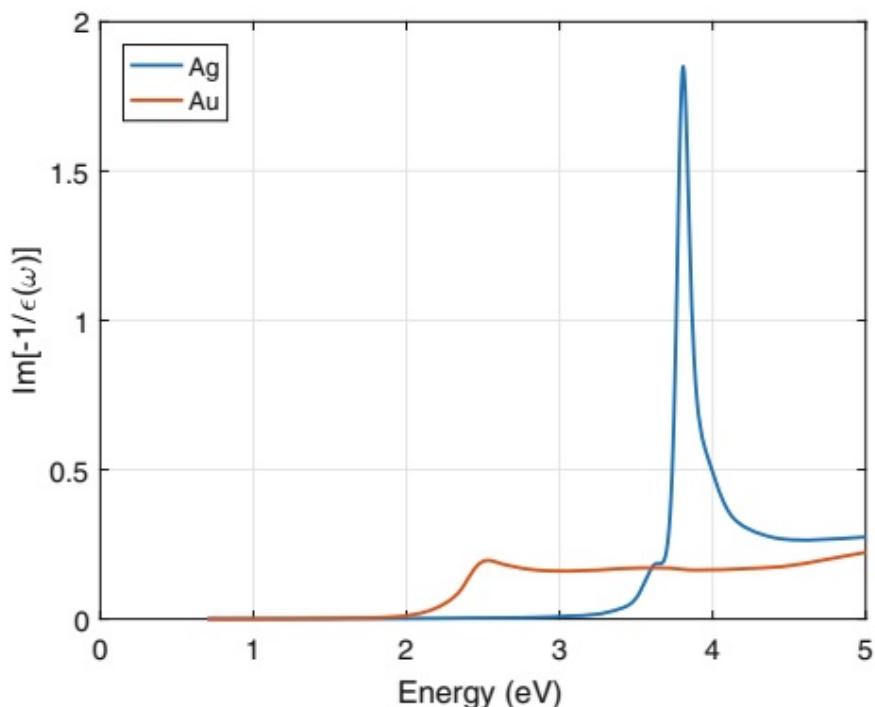
جایگزین کرده‌ایم. مقادیر معمولی  $\phi_{out}$  در حدود چندین ده‌ها میلی رادیان هستند [۱۰۰]. انجام انTEGRAL گیری بالا در نهایت ما را به رابطه تلفات حجیم<sup>۲۹</sup> می‌رساند

### تلفات حجیم

$$\mathcal{P}_{bulk}(\omega) = \frac{e^2 L}{4\pi^2 \hbar v^2} Im \left\{ \left( \frac{v^2}{c^2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \ln \left[ \frac{q_{max}^2 \gamma_\epsilon^2}{q^2} + 1 \right] \right\}. \quad (41.10)$$

در حد غیرتاخیر یافته<sup>۳۰</sup>  $c \rightarrow \infty$  این عبارت به رابطه زیر تقلیل می‌یابد:

$$\mathcal{P}_{bulk}^{NR}(\omega) = \frac{e^2 L}{4\pi^2 \hbar v^2} Im \left\{ -\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)} \right\} \ln \left[ \frac{q_{max}^2}{q^2} + 1 \right]. \quad (42.10)$$



شکل ۱۲.۱۰: تابع اتلاف  $Im[-1/\epsilon(\omega)]$  به ترتیب برای نقره (Ag) و طلا (Au) است. برای تابع دیالکتریک در مرجع [۳۴] جدول‌بندی شده است. برای نقره، تابع از دست دادن تحت سلطه یک تک قله مربوط به تحریک پلاسمون حجیم است، برای طلا، یک توزیع گسترده بالای  $2eV$  مربوط به جذب باند  $d$  مشاهده می‌شود.

<sup>۲۹</sup>Bulk Losses

<sup>۳۰</sup>Nonretarded limit

در مورد تابع دیالکتریک نوع درود  $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/[\omega(\omega - j\gamma)]$  که در آن  $\omega_p$  و  $\gamma$  فرکانس‌های پلاسمای و برخورد گاز الکترون آزاد هستند را استفاده می‌کنیم. تابع تلفات را می‌توان به صورت تحلیلی محاسبه کرد و از این‌رو رابطه زیر را به دست می‌آوریم؛

$$\text{Im} \left\{ -\frac{\epsilon_0}{\epsilon(\omega)} \right\} = \frac{2\omega\gamma\omega_p^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}$$

ین عبارت مربوط به یک قله لورنتسی در فرکانس پلاسمای  $\omega_p \approx \omega$  است که با فرکانس برخورد  $\gamma$  گسترش می‌یابد. برای توابع دیالکتریک واقعی‌تر، مانند آنهایی که از آزمایش‌های نوری استخراج شده‌اند [۳۴]، ما اشکال مشابهی را می‌یابیم که عملاً هیچ تلفات حجیمی در رژیم کم انرژی مربوط به پلاسمون‌های ذرات ندارند، و یک قله مشخص در انرژی پلاسمون حجیم، به شکل (۱۲.۱۰). همانطور که قبلا در فصل هفتم بحث شد، در مورد طلا، یک توزیع گستردۀ بالای  $eV^2$  مرتبط با جذب باند  $d$  مشاهده می‌شود.

برای الکترونی که در یک محیط فوتونیک پیچیده‌تر منتشر می‌شود، از جمله یک یا چند نانوذرۀ پلاسمونی، اتلاف انرژی را می‌توان به مشارکت‌های زیر تقسیم کرد:

- **تلفات حجیم** برای هر ماده با اتلاف که الکترون از طریق آن منتشر می‌شود، یک سهم عمدۀ  $\mathcal{P}_{bulk}$  دارد که به طول انتشار  $L$  و خواص ماده کدگذاری شده در  $(\omega)$  بستگی دارد.
- **اثر بگرنزوونگ** تلفات عمدۀ برای یک محیط نامحدود محاسبه شده است. به طور کلی، هنگامی که الکترون در یک حجم محدود منتشر می‌شود، انتظار داریم که اصلاحات نزدیک به مرزهای حجم ظاهر شوند، به عنوان مثال، با غربالگری کمتر موثر نزدیک به سطح مشترک است. این تغییرات منجر به اثر بگرنزوونگ<sup>۳۱</sup> (به آلمانی؛ محدودیت می‌گویند) می‌شود.
- **تلفات سطحی** علاوه بر این، برای نانوذرۀ پلاسمونیک یا دیالکتریک، کانال‌های تلفات دیگری وجود دارد که الکترون سریع پلاسمون سطحی یا نوع دیگری از تحریک‌های سطحی را تحریک می‌کند. در بسیاری از موارد، شخص بیشتر به‌این سهم از دست دادن علاقه مند است، زیرا آنها به طور خاص به‌هندسه نانوذرۀ نانوذرۀ بستگی دارند.

### ۳.۵.۱۰ رابطه EELS از طریق دایادیک گرین

در ادامه، روابطی را ارائه می‌دهیم که مشارکت‌های اولیه و سطحی را در یک پایه به حساب می‌آورد. از معادله (۳۵.۱۰) شروع می‌کنیم و میدان الکتریکی را با توزیع جریان الکترون سریع با استفاده از تابع گرین دایادیک مرتبط کنید.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{bulk}(\mathbf{R}_0, \omega) &= \frac{e}{\pi\hbar\omega} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ e^{jq(z-z')} \hat{\mathbf{z}} \cdot \left[ -j\omega\mu_0 \bar{G}(\mathbf{R}_0, z, \mathbf{R}_0, z') \cdot (-e\hat{\mathbf{z}}) \right] \right\} dz dz' \end{aligned}$$

در تابع گرین به صراحت وابستگی به مولفه‌های موازی و عمود بر (با توجه به جهت انتشار الکترون)  $z$  و  $\mathbf{R}_0$  را نشان داده‌ایم. پیش فاکتور را می‌توان با توجه به رابطه زیر ساده کرد؛

<sup>۳۱</sup>Begrenzung Effect

$$\frac{e^2 \mu_0 \epsilon_0}{\pi \hbar \epsilon_0} = \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{4}{c} = \frac{4\alpha}{c}$$

که در آن عبارت داخل پرانتز ثابت ساختار ظریف  $1/137 \approx \alpha$  است. ما در نهایت تابع گرین را به یک فضای آزاد قسمت  $\bar{\bar{G}}$  و یک قسمت بازتابیده  $\bar{\bar{G}}_{refl}$  تجزیه می‌کنیم که اثرات بگرنزونگ و سطح را به حساب می‌آورد. سپس، با کنار هم قرار دادن همه نتایج، به احتمال اتلاف انرژی کل می‌رسیم که بر حسب تابع گرین بازتابی بیان می‌شود.

### احتمال تلفات انرژی الکترون (رابطه تابع گرین)

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega)$$

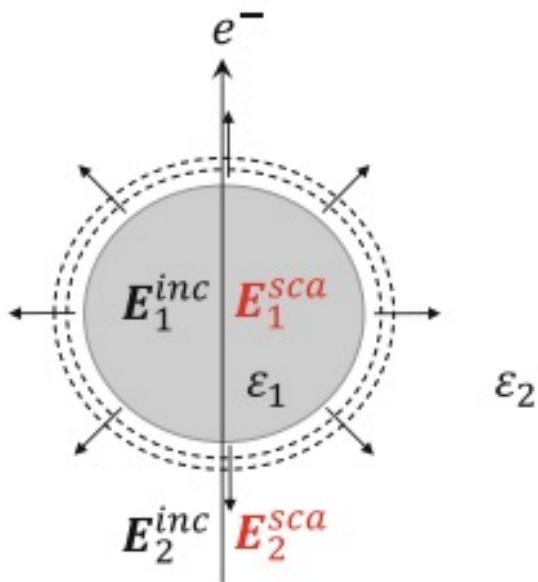
$$= \frac{4\alpha}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \left\{ e^{jq(z-z')} \hat{\mathbf{z}} \cdot \bar{\bar{G}}_{refl}(\mathbf{R}_0, z, \mathbf{R}_0, z') \cdot \hat{\mathbf{z}} \right\} dz dz' + \mathcal{P}_{bulk}(\omega). \quad (43.10)$$

اجازه دهید لحظه‌ای در اینجا توقف کنیم و آنچه را که تاکنون انجام شده است به یاد بیاوریم. مشکلی که در نظر می‌گیریم شامل یک الکترون سریع است که از کنار یک نانوذره فلزی یا دی‌الکتریک (هندسه دور) می‌گذرد یا از درون آن نفوذ می‌کند، همانطور که به صورت شماتیک در شکل (۱۳.۱۰) نشان داده شده است، و بخش کوچکی از انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. برای محاسبه احتمال اتلاف انرژی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- **رابطه تلفات نیمه‌کلاسیک** عبارت شروع ما عبارت نیمه کلاسیک معادله (۳۵.۱۰) است، که تجزیه فرکانس توان انجام شده توسط الکترون را در برابر میدان‌های الکتریکی فعال بر روی الکترون نشان می‌دهد. این میدان‌ها توسط خود الکترون القا می‌شوند. جنبه کوانتومی رابطه نیمه کلاسیک این است که الکترون می‌تواند انرژی خود را فقط در کسری از  $\hbar$  از دست بدهد. تمام اجزای دیگر این نظریه کاملاً کلاسیک هستند.

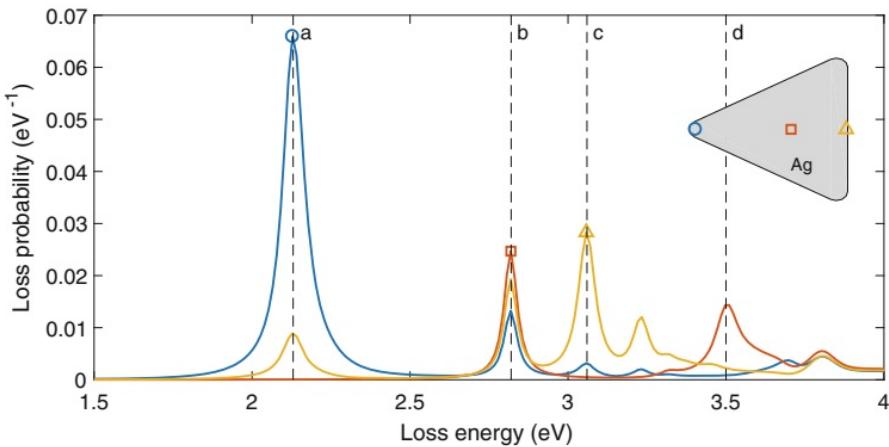
- **میدان‌های تابشی** بسته به اینکه الکترون در داخل یا خارج از نانوذره مورد بررسی منشر شود، میدان‌های "وروی" الکترون برای یک محیط نامحدود پر از گذردهی  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  محاسبه می‌شوند. این میدان‌ها معادلات ماکسول را در داخل دو رسانه، شامل بار و منابع جریان الکترون سریع، اما نه شرایط مرزی در مرز ذره  $\partial\Omega$  را برآورده می‌کنند.

- **میدان‌های پراکنده** برای توضیح شرایط مرزی در  $\partial\Omega$ ، فیلدهای «پراکنده»  $\mathbf{E}_{1,2}^{sca}, \mathbf{H}_{1,2}^{sca}$  را نیز معرفی می‌کنیم، برای مثال، با استفاده از رویکرد روش انتگرال مرزی معرفی شده در بخش ۹.۶. این میدان‌ها جواب معادلات ماکسول بدون عبارت منبع هستند. بنابراین، با ترکیب میدان‌های تابشی و پراکنده، معادلات ماکسول در داخل محیط برآورده می‌شود و همچنین شرایط مرزی در  $\partial\Omega$  به درستی محاسبه می‌شود. به همین دلیل  $\mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}$  و  $\mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{sca}$  راه حل‌های مناسب مشکل مورد مطالعه هستند.



شکل ۱۳.۱۰: شماتیک‌های محاسبه احتمال EELS یک الکترون سریع از نانوکره پلاسمونیک عبور می‌کند. میدان‌های "تابشی" الکترون  $E_{1,2}^{inc}$  در داخل و خارج کره هستند، معادله (۴۰.۱۰). میدان‌های "پراکنده"  $E_{1,2}^{sca}$  هستند و اثرات بگرنزونگ و سطحی را به‌خود اختصاص می‌دهند. اتلاف انرژی الکترون با ارزیابی کار انجام شده توسط الکترون در برابر میدان‌های الکتریکی در طول کل مسیر الکترون به‌دست می‌آید، معادله (۳۵.۱۰). میدان‌های دور الکترومغناطیسی پراکنده را می‌توان به‌عنوان یک نورتابی اندازه‌گیری کرد

- **تلفات مرزی و حجیم اگرچه جداسازی به‌میدان‌های ورودی و پراکنده تا حدودی مصنوعی است، اما به‌نظر می‌رسد که تقسیم تلفات در معادله (۳۵.۱۰) راحت باشد به‌تلفات حجیم ناشی از  $E_{inc}$  و تلفات مرزی ناشی از  $E_{sca}$ . موارد اخیر را می‌توان بیشتر به‌تلفات بگرنزونگ و سطحی تفکیک کرد، اما این جدایی در رویکردی که در پیش گرفته‌ایم تا حدودی نامشخص است.**
- **غیر محلی بودن همانطور که به‌وضوح در معادله (۴۴.۱۰) مشاهده می‌شود، از دست دادن انرژی الکترونیک فرآیند غیر محلی است که در آن الکترون ابتدا در موقعیت  $z$  یک پلاسمون ذره‌ای یا نوع دیگری از تحریک سطحی را القا می‌کند و میدان‌های القایی در موقعیت  $z$  بر روی الکترون عمل می‌کنند. این غیر محلی واقعی تفسیر EELS را بر حسب یک LDOS فوتونی یا برخی کمیت‌های مرتبط پیچیده می‌کند.**
- **روشنائی کاتدی در نهایت، با ارزیابی میدان‌های پراکنده دور از ذره، یا به‌طور معادل انرژی الکترومغناطیسی که توسط بردار پواین‌تینگ از طریق مرزی که همه ذرات را احاطه کرده است، منتقل می‌شود، می‌توانیم به‌نام احتمال کاتدلومینسانس را محاسبه کنیم [۱۰۰، ۱۰۱]. چنین لومینسانسی اطلاعات تکمیلی در مورد خواص نوری نانوذرات پلاسمونیک یا دی‌الکتریک ارائه می‌دهد.**



شکل ۱۴.۱۰: طیف EELS برای یک نانومثُلث نقره با طول پایه تقریباً ۸۰ نانومتر و ارتفاع ۱۰ نانومتر، و برای سه موقعیت مختلف پرتو الکترونی، در قسمت داخلی نشان داده شده است. در شبیه‌سازی‌های خود از توابع دیالکتریک استخراج شده از آزمایش‌های نوری استفاده می‌کنیم [۳۴]. خطوط نقطه چین موقعیت‌های پر انرژی تشید پلاسمون را گزارش می‌دهند که در آن نقشه‌های EELS فضایی شکل ۱۰(۱۵) محاسبه شده است.

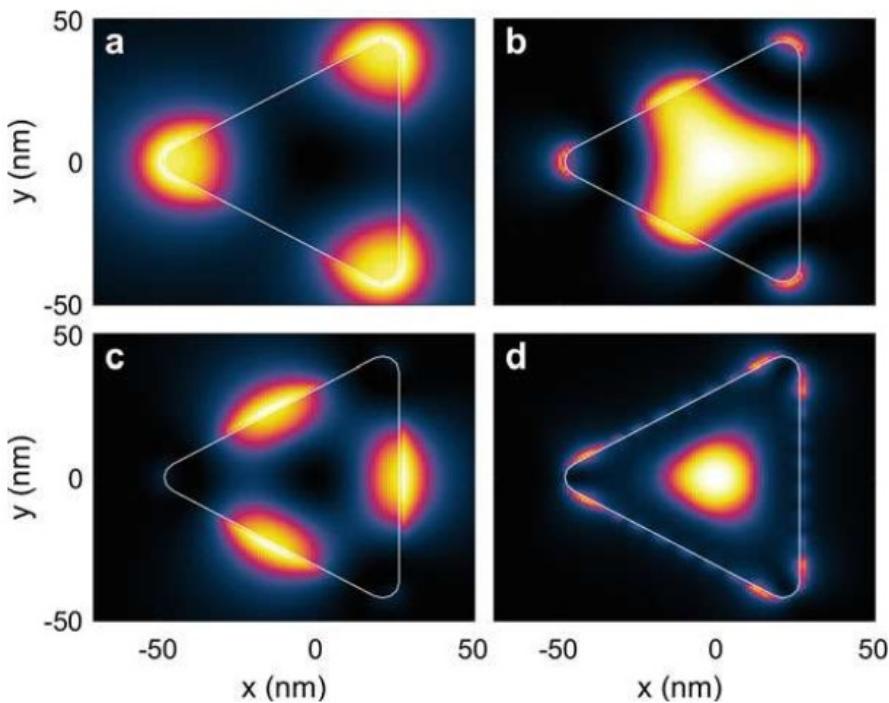
شکل (۱۴.۱۰) طیف‌های EELS شبیه سازی شده را برای یک نانومثُلث نقره با طول پایه تقریباً ۸۰ نانومتر و ارتفاع ۱۰ نانومتر نشان می‌دهد. حداقل چهار قله برجسته را مشاهده می‌کنیم که با (a-d) (برچسب گذاری شده‌اند)، علاوه بر اوج پلاسمون حجیم در اطراف ۳.۸eV (همچنین بهشکل (۱۲.۱۰) مراجعه کنید). در شکل (۱۵.۱۰) نقشه‌های EELS را در انرژی‌های تشید نشان می‌دهیم. آنها با روشن شطرنجی پرتو الکترونی روی نمونه بدست می‌آیند و به خوبی با نقشه‌های تجربی گزارش شده در مقاله اولیه مطابقت دارند [۹۹]. مودهای مشاهده شده را می‌توان به (الف) دوقطبی و (ب، ج) چندقطبی نسبت داد حالت‌های پلاسمون محدود به لبه‌های نانوذرات، و همچنین (د) مودهای صورت محدود به سطوح مثلث بالا و پایین. بدون پرداختن به جزئیات، مثال بالا به خوبی توانایی EELS را برای ترسیم مودهای پلاسمون ذرات با پrecision فضایی در محدوده نانومتر و وضوح طیفی معمولاً در محدوده 100meV نشان می‌دهد.

#### ۴.۵.۱۰ حد شبیه استاتیک

ما این بخش را با بحث در مورد EELS در تقریب شبیه استاتیک به پایان می‌بریم. این امر به ویژه بهما امکان می‌دهد تا با مودهای ویژه پلاسمونیک که در فصل قبل با جزئیات مورد بحث قرار گرفت، تماس برقرار کنیم. نقطه شروع معادله (۳۵.۱۰) است. برای احتمال اتلاف انرژی

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega) = -\frac{1}{\pi\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \mathbf{J}^*(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \right\} d^3r + \mathcal{P}_{bulk},$$

که در آن از  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{r}, \omega)$  با توزیع بار معادله (۳۷.۱۰) استفاده کردہ‌ایم. همچنین میدان الکتریکی را به یک بخش القایی یا "پراکنده" و یک بخش "ورودی" که در جذب حجیم سهیم



شکل ۱۵.۱۰: نقشه‌های EELS مکانی برای همان نانومولت همانپر که در شکل (۱۴.۱۰) در تشدید پلاسمون نشان داده شده با خطوط چین نشان داده است. مودها را می‌توان به (الف) دوقطبی، (ب، ج) شش قطبی، و (د) مودهای تنفسی، همانپر که در متن توضیح داده شد، اختصاص داد.

شده است، جدا کرده‌ایم. در تقریب شبه استاتیکی،  $\mathcal{P}_{bulk}$  باید با معادله (۴۲.۱۰) جایگزین شود، و علاوه بر این، میدان الکتریکی القایی را به یک پتانسیل از طریق  $\mathbf{E}_{ind} = -\nabla V_{ind}$  مرتبط می‌کنیم. در مرحله بعد از اتحاد برداری زیر استفاده می‌کنیم ؛

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}^* V_{ind}) = (\nabla \cdot (\mathbf{J}^*)) V_{ind} + \mathbf{J}^* \cdot \nabla V_{ind} ,$$

که در آن، با انتگرال‌گیری در کل فضا و استفاده از قضیه دیورژانس، عبارت سمت چپ حذف می‌شود زیرا  $V_{ind}$  در بی‌نهایت به صفر نزدیک می‌شود. همراه با معادله پیوستگی  $\mathbf{J} \cdot \nabla \omega \rho = \nabla \cdot \mathbf{J}$  رابطه زیر را پیدا می‌کنیم؛

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega) = -\frac{1}{\pi \hbar} \int Im \left\{ \rho^*(\mathbf{r}, \omega) V_{ind}(\mathbf{r}, \omega) \right\} d^3 r + \mathcal{P}_{bulk} . \quad (۴۴.۱۰)$$

### احتمال تلفات انرژی الکترون (حد شبیه استاتیک)

$$\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \omega) = \frac{e^2}{\pi \hbar v^2 \epsilon_0} \sum_k \operatorname{Im} \left\{ \frac{\lambda_k + \frac{1}{2}}{\Lambda(\omega) + \lambda_k} \right\} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j q z} V_k(\mathbf{R}_0, z) dz \right|^2. \quad (45.10)$$

این عبارت یک تجزیه کاملاً شفاف ازتابع تلفات به توابع شکل خط و توانائی نوسانگر را ارائه می دهد. این عبارت در برآکتهای شکل پیچشی خطوط لورنتسی را در فرکانس های تشید Re[\Lambda(\omega) + \lambda\_k] ≈ 0 می دهد، و انتگرال ضربی را می دهد که چگونگی یک مود ویژه مفروض می تواند توسط پرتو الکترونی تحریک شود را توصیف می کند.

### تمرینات

• **تمرین ۱** برای یک گشتاور دوقطبی مقدار حقیقی  $P$  از معادله (۱۳.۱۰) شروع کرده و ثابت کنید که میانگین تمام جهت‌گیری‌های دوقطبی با جایگزینی تابع گرین دایایدیک با  $\frac{1}{3} tr \bar{G}$  مطابقت دارد.

• **تمرین ۲** از جعبه ابزار NANOPT فایل demostrat03.m استفاده کرده و طول عمر یک دوقطبی که بالای یک زیرلایه طلا واقع شده است را محاسبه کنید.

- الف اگر بستر فلزی با یک لایه فلزی نازک (ضخامت‌های بین ۱۰ تا ۱۰۰ نانومتر) در بالای یک بستر شیشه‌ای جایگزین شود، چه اتفاقی می‌افتد.

- ب برنامه را طوری تغییر دهید که طول عمر برای یک فاصله دوقطبی ثابت اما برای فرکانس‌های انتقال متفاوت محاسبه شود. هنگام تغییر ضخامت لایه فلزی چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا می‌توانید مودهای پلاسمون سطحی تزویجی را برای یک تیغه که در شکل‌ها (۱۴.۸) و (۱۵.۸) نشان داده شده است شناسایی کنید.

• **تمرین ۳** از جعبه ابزار NANOPT فایل demodipm02.m استفاده کرده و نرخ فروپاشی یک دوقطبی واقع در بالای یک کره طلا در نظریه می را محاسبه کنید. بررسی کنید که اگر قطر کره را در محدوده ۵۰ تا ۵۰۰ نانومتر تغییر دهنده، چه اتفاقی می‌افتد و حداقل مقدار قطع کمینه  $l_{max}$  را برای مرتبه‌های زاویه‌ای مورد نیاز برای به دست آوردن نتایج همگرائی تعیین کنید.

• **تمرین ۴** نشان دهید که معادله (۱۷.۱) برای توان تلف شده توسط ساطع کننده دوقطبی در حد شبیه استاتیک را می‌توان به شکل زیر نوشت؛

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{6\pi}{k^3} \sum_k \operatorname{Im} \left\{ \frac{\lambda_k + \frac{1}{2}}{\Lambda(\omega) + \lambda_k} \right\} \left| \hat{\mathbf{P}} \cdot \nabla V_k(\mathbf{r}) \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}^2.$$

از معادله (۶۴.۹) برای به دست آوردن بعد فیزیکی مودهای ویژه (s) و (u) و اثبات اینکه عبارت دوم در سمت راست بدون بعد است، استفاده کنید.

- تمرین ۵ از جعبه ابزار NANOPT فایل demobem07.m که نرخ فروپاشی یک دوقطبی نوسانی بالای نانوکره را برای فرکانس ثابت و فواصل دوقطبی-کره متفاوت محاسبه می‌کند،(شکل ۳.۱۰) و demobem08.m که نرخ فروپاشی را برای فواصل دوقطبی-کره ثابت و فرکانس‌های نوسانی متفاوت محاسبه می‌کند، استفاده کنید.

- الف برنامه را بهمنظور محاسبه نرخ فروپاشی نشان داده شده در شکل (۳.۱۰) برای یک بیضوی تغییر دهید.
- ب توزیع بار سطحی برای یک دوقطبی افقی و عمودی را برای فاصله ۱۰ نانومتری بین نقطه-کره، ترسیم کنید و نتایج را با هم مقایسه کنید.
- ج برای یک دوقطبی افقی، نرخ پراکندگی کل را به عنوان تابعی از فرکانس انتقال رسم کنید، و فرکانس تشدید را در جایی که نرخ فروپاشی بیشترین است، پیدا کنید. توزیع بار سطحی مربوطه را رسم کنید

- تمرین ۶ از همان فایل‌های تمرین ۵.۱۰ شروع کنید و آنها را برای کره‌های تزویجی بازنویسی کنید. می‌توانید از فایل demobem02.m به عنوان الگو استفاده کنید. برای قطرهای کره ۵۰ نانومتر و فواصل شکافی ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰ نانومتر، فرکانس تشدید دوقطبی را که به صورت عمودی و افقی نسبت به محور تقارن قرار دارد، پیدا کنید و افزایش نرخ فروپاشی کل و تابشی در تشدید را محاسبه کنید.

- تمرین ۷ عبارت  $\mathcal{P}_{EELS}(\mathbf{R}_0, \hbar\omega)$  را که در معادله (۳۴.۱۰) تعریف شده است و احتمال این است که یک الکترون سریع با پارامتر اثر  $R_0$  انرژی  $\hbar\omega$  را از دست بدهد، در نظر گیرید. از میدان‌های القایی یا "پراکنده"  $E_{sca}, H_{sca}$  برای تعریف احتمال روشانی کاتدیک استفاده کنید، این احتمال است که یک فوتون با انرژی  $\hbar\omega$  توسط یک الکترون سریع با پارامتر ضربه  $R_0$  تولید شود. نتیجه نهایی را بر حسب دامنه میدان دور معادله  $F(\hat{\mathbf{r}})$  معادله (۵.۳) بیان کنید.  
راهنمائی: از توان پراکنده شده معادله (۲۲.۴) شروع کنید.

- تمرین ۸ احتمال تلفات حجیم EELS معادله (۴۱.۱۰) را در نظر گیرید. تحت چه شرایطی تلفات برای  $(\omega)^{\epsilon}$  کاملاً حقیقی است؟ برای بحث دقیق تر مسئول تشعشعات چرنکوف برای این تلفات، می‌توانید از مراجع [۲، ۱۰۰] استفاده کنید.

- تمرین ۹ از معادله (۳۴.۹) برای بازنویسی آخرین جمله سمت راست معادله (۴۵.۱۰) بصورت زیر استفاده کنید؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jqz} V_k(\mathbf{r}) dz = \oint_{\partial\Omega} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jqz} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}') dz \right] u_k(\mathbf{s}') dS'$$

برای انجام تحلیلی انتگرال در برآکت‌ها از

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jqz}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = 2K_0(q\rho)$$

استفاده کنید. با این یک عبارتی به دست می‌آید که در آن انتگرال‌گیری فقط بر روی مرز ذره، نه در کل محور  $z$ ‌ها، گسترش می‌یابد

## فصل ۱۱

# روش‌های محاسباتی در نانوآپتیک

در این کتاب عمدتاً با مفاهیم نانوآپتیک و پلاسمونیک با استفاده از طرح‌های حل تحلیلی برای مسائل انتخاب شده سروکار داریم. با این حال، در دهه‌های اخیر روش‌های شبیه‌سازی عددی به روش انتخابی برای مسائل مختلف نانوآپتیک تبدیل شده‌اند. مزایای روش‌های روشنایی عددی این است که همه کاره هستند و امکان مقایسه بسیار نزدیک با آزمایش را فراهم می‌کنند. در این فصل، بدون پرداختن زیاد به جزئیات فنی، به‌طور خلاصه با مشهورترین روش‌های شبیه‌سازی آشنا می‌شویم.

### ۱.۱۱ شبیه‌سازی تفاضل محدود در حوزه زمان

با رویکردی شروع می‌کنیم که احتمالاً می‌تواند به عنوان مادر محاسبات عددی ماکسول، به‌نام شبیه‌سازی تفاضل محدود در حوزه زمان (FDTD)<sup>۱</sup> در نظر گرفته شود. خوانندگان علاقه‌مند به شرح مفصل‌تر، به کتاب‌های درسی دیگری مانند [۱۰۳، ۱۰۲]<sup>۲</sup> ارجاع داده می‌شوند. رویکرد (FDTD) یک طرح شبیه‌سازی عمومی است که برای حل معادلات ماکسول بدون محدودیت خاصی در سیستم مناسب است. اولین بار توسط یی<sup>۳</sup> [۱۰۴] در سال ۱۹۶۶ معرفی شد و تقریباً ۱۰ سال بعد توسط تافلاؤ و برودین<sup>۴</sup> با موفقیت اجرا شد [۱۰۵، ۱۰۶].

بحث خود را در مورد طرح (FDTD) با بیان معادلات کرل بر حسب معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان آغاز می‌کنیم.

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}, \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (1.11)$$

که باید همراه با محدودیت‌های زیر حل شوند؛

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 .$$

<sup>۱</sup>Finite Difference Time Domain (FDTD)

<sup>۲</sup>Yee

<sup>۳</sup>Taflove and Browdin

### سالهای اولیه (FDTD)

در مصاحبه‌ای در مجله *Nature Photonics* در سال ۲۰۱۵، آلن تافلاو، یکی از مخترعان روش (FDTD)، بهیاد می‌آورند که در دهه ۱۹۷۰، زمانی که او پایان نامه دکتری خود را نوشت، تکنیک‌های شبیه‌سازی عددی توجه زیادی را به‌خود جلب نکرد.

[استاد من] برودوین موافقت کرد که این موضوع را برای پایان نامه دکتری خود، گرچه این موضوع در جریان اصلی تحقیقات او نبود، دنبال کنم. در سال ۱۹۷۵، توسعه الگوریتم، کدگذاری و اعتبارسنجی من به‌جایی رسید که یک مدل کامل‌سه بعدی تابش امواج مایکروویو بر چشم انسان می‌توانست پیاده سازی شود. در آن سال نتایج خود را در دو مقاله در مجله

*IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*

منتشر کردم و دکترای خود را گرفتم. اما، مانند مقاله بی *Yee*، کار من بدون استناد باقی ماند.

با این حال، حتی ده سال بعد، شبیه‌سازی‌های (FDTD) هنوز باید روی ابرایانه‌هایی مانند *Cray* معروف در آن زمان انجام می‌شد، اما اغلب توسط جامعه به‌رسمیت شناخته نمی‌شد. تافلاو در مصاحبه چنین قسمتی را به‌یاد می‌آورد:

روش (FDTD) نادیده گرفته شد و حتی گاهی مورد تمسخر قرار گرفت. یکی از این خاطرات که در حافظه من سوخته است، به سال ۱۹۸۶ برمی‌گردد. یک استاد مشهور بین‌المللی در یک جلسه آزاد که برای بررسی آینده الکترومغناطیسی محاسباتی دعوت شده بود، به‌دلیل استفاده من از ابر رایانه‌ها، واقعاً به‌من خنده‌ید. مستقیماً به‌من اشاره کرد و به‌شوخی گفت: «آنجا به تافلاو نگاه کن. صبح که از خواب بیدار می‌شود، زانو می‌زند، سرش را خم می‌کند و می‌گوید: «و حالا بگذار گریه *Cray* کنیم». لال و وحشت زده بودم.

می‌توان نشان داد که اگر شرایط اولیه این محدودیت‌ها را برآورده کند و میدان‌ها مطابق معادلات (۱.۱۱) بهم مربوط باشند، جواب‌ها معادلات دیورژانس را در همه زمان‌ها ارضاء می‌کنند. برای اثبات این موضوع، از دو طرف معادله (۱.۱۱) دیورژانس می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mu \mathbf{H}) = 0$$

که در آن از مشتقات زمان و مکان می‌توانند تغییر کنند استفاده کرده‌ایم، و ضمناً دیورژانس کرل به‌طور خودکار صفر است. همچنین از معادله پیوستگی برای ارتباط  $\mathbf{J} \cdot \nabla$  به مشتق زمانی  $\rho$  استفاده کرده‌ایم. بازنویسی معادله اول بصورت زیر است؛

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} - \rho) = 0$$

مشاهده می‌کنیم که اگر  $\rho = \epsilon \cdot \nabla \cdot \mathbf{E}$  در زمان اولیه برقرار باشد، در زمان‌های بعدی نیز برقرار است زیرا معادلات کرل به‌درستی محدودیت دیورژانس را منتشر می‌کنند. نتیجه‌گیری مشابهی را می‌توان برای میدان مغناطیسی گرفت. بنابراین، کافی است در تکامل زمانی  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  فقط

معادلات کرل را در نظر بگیریم. در ادامه به بررسی معادلات ماکسول در فضای سه، دو و یک بُعدی می‌پردازیم.

• فضای سه بُعدی در فضای سه بُعد معادلات ماکسول را می‌توان به صورت مولفه بیان کرد:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - J_x, & \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y, & \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z, & \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (۲.۱۱)$$

• فضای دو بُعدی در فضای دو بُعد فرض می‌کنیم که  $\epsilon, \mu$ , فقط به  $x, y$  بستگی دارد. در این صورت مجموعه معادلات (۲.۱۱) به دو مجموعه معادله تقسیم می‌شود که آنها را به صورت الکتریکی عرضی (TE) و مغناطیسی عرضی (TM) نشان خواهیم داد:

$$\begin{array}{lll} (TE) \quad \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - J_x & (TM) \quad \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \\ (TE) \quad \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y & (TM) \quad \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (TM) \quad \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z & (TE) \quad \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{array} \quad (۳.۱۱)$$

معادلات TE فقط شامل مولفه‌های  $H_x, H_y$  و  $E_x, E_y$  و معادلات TM شامل مولفه‌های  $H_z$  و  $E_z$  است.

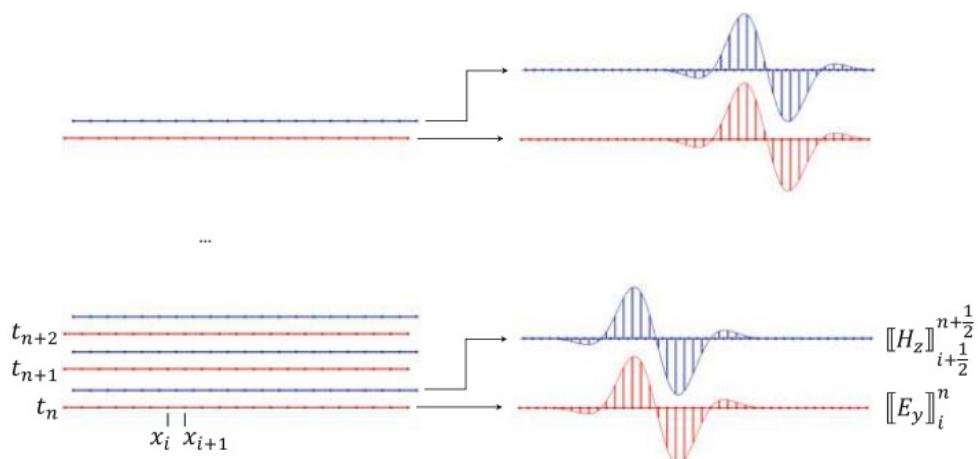
• فضای یک بُعدی در فضای یک بُعد فرض می‌کنیم که  $\epsilon, \mu$  فقط به  $x$  بستگی دارند. در این صورت مجموعه معادلات (۳.۱۱) ساده‌تر می‌شوند؛

$$\begin{array}{lll} \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -J_x & \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ (TE) \quad \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y & (TM) \quad \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (TM) \quad \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - J_z & (TE) \quad \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{array} \quad (۴.۱۱)$$

دو معادله اول از بقیه جدا می‌شوند، معادلات TE فقط شامل مولفه‌های  $E_y, H_z$  و معادلات TM شامل مولفه‌های  $H_y, E_z$  می‌شود.

### ۱.۱.۱۱ جادوگری روش (FDTD)

در روش تفاضل محدود در حوزه زمان، دقیقاً با معادلات ماسول سروکار داریم، اما مشتقات زمانی و مکانی را از طریق تفاضلات محدود تقریب می‌کنیم. جادوگری روش FDTD به دلیل بینش بی [۱۰۴] است که متوجه شد مجموعه معادلات تزویجی برای میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان به طور موثر توسط دو شبکه گام به گام حل کرد. بحث خود را با معادلات TE در حالت یک بعدی (۴.۱۱) شروع می‌کنیم. ابتدا، دو شبکه مکانی پلکانی را معرفی می‌کنیم (شکل ۱۱).



شکل ۱.۱۱: شماتیک FDTD یک بعدی. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در موقعیت‌های گسسته دو شبکه پلکانی داده می‌شوند. با بهروز رسانی مکرر میدان‌های الکترومغناطیسی مطابق با الگوریتم معادله (۹.۱۱)، میدان‌ها در زمان به جلو منتشر می‌شوند.

شبکه مکانی درهم تنیده (فضای یک بعدی)

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= (i + \frac{1}{2})\Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \end{aligned} \tag{۵.۱۱}$$

که نسبت به یکدیگر با نصف شبکه ثابت  $\Delta x$  جایه جا می‌شوند. به طور مشابه، دو شبکه زمان پلکانی را معرفی می‌کنیم؛

### شبکه زمانی درهم تنیده

$$t_n = n\Delta t \quad (6.11)$$

$$t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

که نسبت به یکدیگر نیم گام زمانی  $\Delta t$  جابجا می‌شوند. در ادامه، میدان الکتریکی را در موقعیت‌های شبکه عدد صحیح تقریب می‌کنیم؛

$$\|E_y\|_i^n = E_y(i\Delta x, n\Delta t), \quad (\text{میدان الکتریکی}) \quad (7.11)$$

از نماد  $\|\cdot\|$  برای گسته‌سازی میدان الکترومغناطیسی در روش FDTD استفاده کردہ‌ایم. شبیه همین را نیز برای میدان مغناطیسی در موقعیت نیم عدد صحیح شبکه تقریب می‌کنیم؛

$$\|H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_z([i + \frac{1}{2}]\Delta x, [n + \frac{1}{2}]\Delta t). \quad (8.11)$$

با این شبکه‌های پلکانی و مشتقات در رابطه (4.11) می‌توانیم تقریب را بصورت زیر انجام دهیم؛

### معادلات FDTD در فضای یک بعدی (TE)

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{\|H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \|H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = - \frac{\|E_y\|_{i+1}^n - \|E_y\|_i^n}{\Delta x} \quad (9.11)$$

$$\epsilon_i \frac{\|E_y\|_i^{n+1} - \|E_y\|_i^n}{\Delta t} = - \frac{\|H_z\|_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \|H_z\|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \|J_y\|_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (9.11\text{ب})$$

اگر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی معلوم باشد، این روابط را می‌توان بطور مکرر برای محاسبه میدان‌ها در زمان‌های بعدی استفاده کرد. آلگوریتم حل معادلات ماسکول در حوزه زمان را می‌توان بصورت زیر رتبه‌بندی کرد؛

- میدان مغناطیسی  $\|H_z\|^{1/2}$  در زمان اولیه  $t_{1/2}$  مشخص شود،
- میدان الکتریکی  $\|E_y\|^1$  در زمان اولیه  $t_1$  مشخص شود،
- از معادله (9.11) برای محاسبه میدان مغناطیسی در زمان  $t_{n+\frac{1}{2}}$  استفاده شود،
- از معادله (9.11ب) برای محاسبه میدان الکتریکی در زمان  $t_{n+1}$  استفاده شود،

با تکرار ممتد دو گام آخری، می‌توان میدان‌ها را در زمان منتشر کرد. چیز جالب در مورد FDTD این است که از نظر عملی شفاف، اجرای ساده و از نظر محاسباتی خیلی کارآمد است. اجازه دهید چند نکته هم درباره این طرح محاسبتی اضافه کنیم؛

- دقت: تقریب مشتقات از طریق تفاضل محدود دقیق نیست ولی با خطای با مرتبه  $\Delta x^3$  و  $\Delta t^3$  است. به این دلیل، الگوریتم با دقت مرتبه دوم است.

• پایداری: طرح بروز کردن برای میدان‌های الکترومغناطیسی، که اغلب آنرا طرح پوش **دورباغه‌ای**<sup>۴</sup> می‌نامند، برخی نکات جادوئی پنهان دارد. بطوری که در بخش ۲.۱.۱۱ بحث خواهیم کرد، انتشار زمانی برای مقادیر بقدر کافی کوچک  $\Delta x, \Delta t$  با وجود طرح‌های مختلف تفاضل محدود که اینگونه پایداری را تضمین نمی‌کند، بدون شرط پایدار است [۱۰۲].

• رفتار دیورژانس: معادله (۹.۱۱) محدودیت دیورژانس جواب را حفظ می‌کند. بنابراین، اگر میدان‌های اولیه خواص دیورژانس صحیحی داشته باشند، جواب‌های FDTD در زمان‌های بعدی آنها را دارند [۱۰۲].

• ابعاد بالاتر: بطوری که در زیر بیشتر بحث خواهد شد، طرح FDTD را می‌توان براحتی برای مسائل دو بعدی و سه بعدی تعمیم داد.

• اثرات پلکانی: در روش FDTD، یک نانوذره فلزی یا دیالکتریک بر حسب خواص مکانی  $\epsilon_i, \mu_{i+1/2}$  مدل سازی می‌شوند. چون شبکه بندی دکارتی (چهارگوش) در رویکرد FDTD انجام می‌شود، نانوذره‌های با حجمی با مرزهای پلکانی تقریب زده می‌شوند این تقریب نیز خطاهای اضافی بوجود می‌آورد که گاهی به آنها "خطای پلکانی" اطلاق می‌شود.

شکل (۲.۱۱) نمونه‌ای از انتشار میدان در روش FDTD را نشان می‌دهد. یک پالس میدان الکترومغناطیسی بر یک تیغه که با موادی که گذردهی بالائی دارد برخورد می‌کند. شبیه بحث قبلی ما در فصل هشتم روی محیط‌های لایه لایه، بخشی از میدان در سطح مشترک بازتاب و برخی دیگر منتقل می‌شود. می‌توان اختلاف سرعت داخل و خارج لایه بوضوح مشاهده کرد.

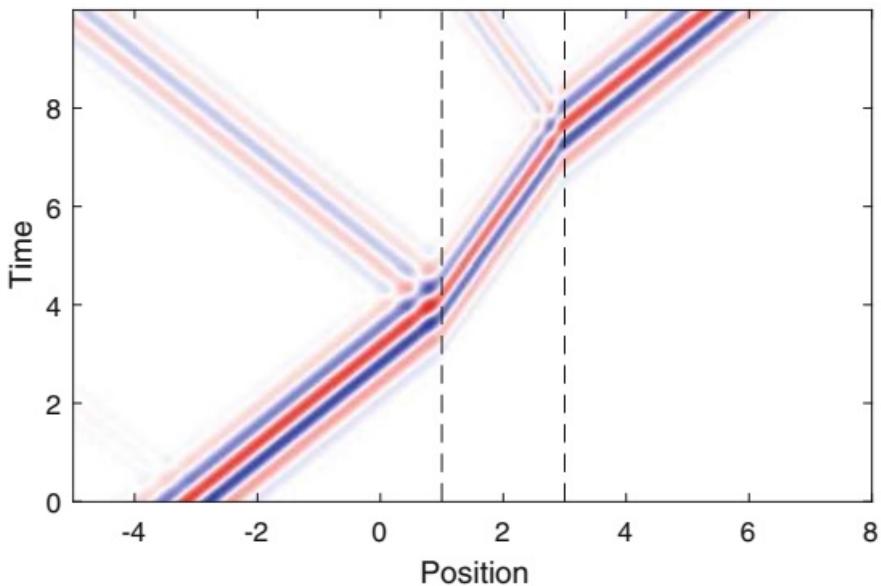
## ۲.۱.۱۱ حالت دو بعدی

رابطه‌بندی FDTD را می‌توان براحتی بهدو و سه بعد مکانی گسترش داد. در اینجا فقط در مورد دو بعدی با قطبش TE بحث می‌کنیم. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در موقعیت‌های شبکه بصورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\|E_x\|_{i+\frac{1}{2},j}^n, \quad \|E_y\|_{i,j+\frac{1}{2}}^n, \quad \|H_z\|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

که در آن  $x$  مختصات  $y$  شبکه دو بعدی را برچسب گذاری می‌کند. برای نمایش گرافیکی شکل (۳.۱۱) را مشاهده کنید. از معادله (۳.۱۱) برای مود TE روابط زیر می‌نویسیم؛

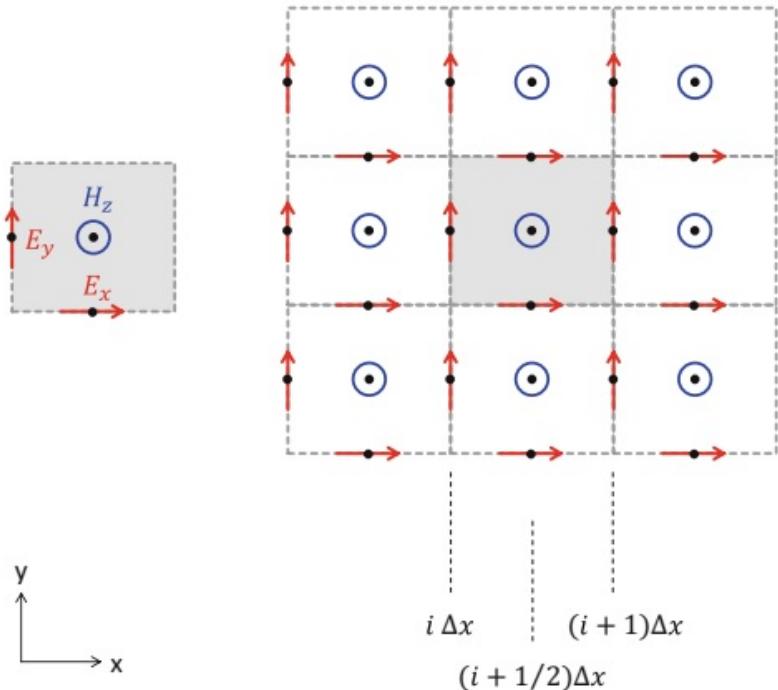
<sup>۴</sup>Leapfrog



شکل ۲.۱۱: مثال برای شبیه سازی یک بعدی FDTD. یک پالس الکترومغناطیسی به تیغه‌ای با ثابت دیکتریک  $\kappa = 3$  برخورد می‌کند. بخشی از میدان در سطح مشترک لایه بازتاب شده و بخشی دیگر منتقل می‌شود. موقعیت‌ها و زمان‌ها در واحدهای بدون بُعد آورده شده است.

$$\begin{aligned}
 \mu_{i+1/2,j+1/2} & \frac{\|H_z\|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \|H_z\|_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} \\
 &= \frac{\|E_y\|_{i,j+1/2}^n - \|E_y\|_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{\|E_x\|_{i+1/2,j}^n - \|E_x\|_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \\
 \epsilon_{i+1/2,j} & \frac{\|E_x\|_{i+1/2,j}^{n+1} - \|E_x\|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} \\
 &= \frac{\|H_z\|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \|H_z\|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \|J_x\|_{i+1/2,j}^{n+1/2} \quad (10.11) \\
 \epsilon_{i,j+1/2} & \frac{\|E_y\|_{i,j+1/2}^{n+1} - \|E_y\|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} \\
 &= \frac{\|H_z\|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \|H_z\|_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \|J_y\|_{i,j+1/2}^{n+1/2}
 \end{aligned}$$

با عبارتی مشابه برای میدان‌های TM نیز می‌توان بدست آورد. بررسی دقیق‌تر معادلات نشان می‌دهد که همه مشتق‌ها را می‌توان با تفاضل‌های محدود مرکزی تقریب زد، جایی که همه میدان‌های مورد نیاز در موقعیت‌های شبکه همسایه به‌طور طبیعی در طرح سلول Yee میدان‌های الکترومغناطیسی گستته شده ظاهر می‌شوند. در ادامه نتایج را برای مسائل دو بُعدی نشان خواهیم داد. سلول‌های Yee را می‌توان برای حالت سه بُعدی، همانطور که به‌طور کامل به عنوان مثال در مراجع [۱۰۲، ۱۰۳] مورد بحث قرار گرفته است، نیز تعریف کرد.



شکل ۳.۱۱: شبکه برای FDTD در فضای دو بعدی برای قطبش TE. مجدداً دو شبکه فضایی پلکانی را برای مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی معرفی می‌کنیم. در سمت چپ شکل یک "سلول واحد" از شبکه دو بعدی Yee را نشان می‌دهیم که به نام سلول Yee نامیده می‌شود. با کار کردن تفاضل محدود معادله (۱۰.۱۱)، متوجه می‌شویم که تمام عبارات منجر به تفاضل‌های مرکزی مرتبه دوم می‌شوند

### ۳.۱.۱۱ پایداری و پاشندگی

در ادامه وضعیت انتشار موج در یک محیط همگن فضای یک بعدی با مقادیر  $\mu, \epsilon$  ثابت را در نظر می‌گیریم. برای ساده‌سازی بیشتر شرایط مرزی تنابوی را فرض می‌کنیم. بنابراین می‌توانیم جواب‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در یک سری فوریه بسط دهیم؛

$$\|H_z\|_{i+1/2}^{n-1/2} = \sum_k e^{-jkx_{i+1/2}} \|\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2}, \quad \|E_y\|_i^n = \sum_k e^{-j k x_i} \|\mathcal{E}_y\|_k^n$$

که در آن ضرایب فوریه  $\|\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2}$  و  $\|\mathcal{E}_y\|_k^n$  هستند. عبارات به روز رسانی معادله (۹.۱۱) برای میدان‌های الکترومغناطیسی بصورت زیر می‌توان نوشت؛

$$\|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2} = \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2} - S(e^{-j\phi/2} - e^{j\phi/2}) \|\mathcal{E}_y\|_k^n$$

$$\|\mathcal{E}_y\|_k^{n+1} = \|\mathcal{E}_y\|_k^n - S(e^{-j\phi/2} - e^{j\phi/2}) \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2}$$

که در آن امپدانس  $Z$ ، فاز  $\phi = k\Delta x$  و ضریب پایداری  $S = c\Delta t/\Delta x$  را معرفی کرده‌ایم که  $c$  سرعت نور در محیط است. مجموعه معادلات فوق را می‌توان به صورت ماتریسی زیر بازنویسی

کرد؛

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -jS \sin \frac{\phi}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & jS \sin \frac{\phi}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^n \end{pmatrix}$$

که می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت؛

$$\begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n+1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j2S \sin \frac{\phi}{2} \\ j2S \sin \frac{\phi}{2} & 1 - 4S^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|Z\mathcal{H}_z\|_k^{n-1/2} \\ \|\mathcal{E}_y\|_k^n \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

ماتریس سمت راست به نام **ماتریس تقویت**<sup>۵</sup> می‌نامند و در هر مرحله زمانی روی بردار میدان الکترومغناطیسی اعمال می‌شود تا میدان‌ها را نسبت به زمان منتشر کنند. با توجه به شرط فون نیومن، مقادیر ویژه این ماتریس باید کوچکتر یا مساوی یک الگوریتم عددی پایدار حاصل می‌شود. با جبر ساده‌ای مقادیر ویژه ماتریس تقویت به دست می‌آید:

$$\lambda_{\pm} = 1 - 2 \left( S \sin \frac{\phi}{2} \right)^2 \pm 2 \sqrt{\left( S \sin \frac{\phi}{2} \right)^4 - \left( S \sin \frac{\phi}{2} \right)^2} \quad (12.11)$$

مقدار مطلق آن برای  $S \leq 1$  برابر یک است. بنابراین، طرح به روز رسانی پرش قورباغه‌ای روش FDTD بدون قید و شرط برای  $S \leq 1$  پایدار است. نتیجه گیری مشابهی برای طرح‌های به روز رسانی با ابعاد بالاتر می‌توان بدست آورد [۱۰۲، ۱۰۳].

با این حال، باید برای طرح ساده انتشار FDTD هزینه‌ای بپردازیم. برای یک موج صفحه، میدان‌های الکترومغناطیسی باید فاز زیر را برای انتشار در بازه زمانی  $\Delta t$  داشته باشند؛

$$e^{j\omega\Delta t} = e^{jkc\Delta t} = 1 + jkc\Delta t - \frac{1}{2}(kc\Delta t)^2 - \frac{j}{6}(kc\Delta t)^3 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

در آخرین برابری، تابع نمائی را برای آرگومان‌های کوچک بسط داده‌ایم. اگر مقادیر ویژه  $\lambda_{\pm}$  را برای آرگومان‌های کوچک از  $k\Delta x$  بسط دهیم؛

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm jkc\Delta t - \frac{1}{2}(kc\Delta t)^2 \mp \frac{j}{24} \left( \frac{1}{S^2} + 3 \right) (kc\Delta t)^3 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

مشاهده می‌کنیم که فقط پایین‌ترین جملات سری با موارد نمایی منطبق است. بنابراین، رابطه پاشندگی  $(k\Delta x)^{\omega}$  طرح به روز رسانی گستته FDTD با پاشندگی  $kc = \omega$  حل دقیق موج متفاوت است. در نتیجه، هنگام شبیه‌سازی انتشار بسته‌های موج در یک محیط همگن، جواب‌های FDTD به دلیل پاشندگی مصنوعی ناشی از گستته‌سازی تفاضل محدود معادلات ماسکول منجر به گسترش و تعریض بسته‌های موج می‌شوند. وضعیت در ابعاد بالاتر که در آن درجه پاشندگی به جهت انتشار موج بستگی دارد، حتی نامطلوب‌تر است [۱۰۲، ۱۰۳].

در نهایت توجه کنید که برای  $S = 1$  یک ترکیب جادویی از مقادیر  $\Delta x, \Delta t$  وجود دارد که در آن پاشندگی کاملاً حذف می‌شود. با این حال، از آنجایی که در شبیه‌سازی‌های FDTD واقعی، ما معمولاً مناطقی با پارامترهای مواد مختلف دارا هستیم که با مقادیر مختلف  $c$  و  $S$  مرتبط است، وجود چنین مرحله زمانی جادویی معمولاً کاربرد عملی کمی دارد.

<sup>۵</sup>Amplification Matrix

### ۴.۱.۱۱ لایه‌های تطبیق کامل

حوزه محاسباتی شبیه‌سازی‌های FDTD باید از نظر اندازه محدود انتخاب شود. بهمین دلیل، باید مراقب رفتار میدان‌های الکترومغناطیسی در مرزهای حوزه بود. بدترین حالت وقتی است که دامنه محدوده بهاندازه کافی بزرگ باشد، میدان‌های الکترومغناطیسی که یا از طریق شرایط اولیه بر روی سیستم نقش می‌بندند یا توسط منابع جریان ایجاد می‌شوند، در داخل حوزه باقی می‌مانند. با این حال، با گذشت زمان، میدانها همیشه به مرزها خواهند رسید. از آنجایی که نقاط شبکه در مرزهای حوزه به نقاط شبکه خارجی متصل نیستند، یک راه حل ساده از معادلات FDTD منجر به بازتاب‌های کاذب در مرزهای حوزه می‌شود و در نتیجه نتایج شبیه‌سازی را خراب می‌کند. در زمینه FDTD چندین روش برای حذف بازتاب‌های کاذب وجود دارد که مهم‌ترین آنها شرایط مرز جذبی (ABCs)<sup>۶</sup> و لایه‌های تطبیق کامل (PMLs)<sup>۷</sup> است. بهویژه موارد اخیر، که در ابتدا توسط برنگر<sup>۸</sup> [۱۰۷] معرفی شدند، یک پیشرفت واقعاً پیشگامانه برای FDTD هستند. همانطور که در زمینه روش ماتریس انتقال بحث شد، موجی را در نظر گیرید که به‌یک تغیه دی‌الکتریک برخورد می‌کند. برای قطبش TM و تابش عمودی ضریب بازتاب فرنل از معادله (۸) می‌شود:

$$R^{TM} = \frac{\epsilon_2 k_1 - \epsilon_1 k_2}{\epsilon_2 k_1 + \epsilon_1 k_2} = \frac{\epsilon_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \omega - \epsilon_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \omega}{\epsilon_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \omega + \epsilon_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \omega} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

که در آن  $k = \sqrt{\mu \epsilon} \omega$  و در مخرج و صورت  $\epsilon_1 \epsilon_2 \omega$  را حذف کرده و نهایت ضرایب بازتاب بر حسب امپدانس‌ها خواهد شد؛

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad (۱۳.۱۱)$$

ایده بزرگ زیربنایی PML‌ها این است که ما حوزه شبیه‌سازی مورد نظر را توسط یک محیط مصنوعی محصور می‌کنیم، (شکل ۴.۱۱)، که گذردهی و نفوذپذیری آن طوری انتخاب شده است که (۱) امپدانس  $Z_1$  محیط داخلی با  $Z_2$  ماده بیرونی مصنوعی، بهمنظور حذف بازتاب‌های عقبی، تطبیق داشته باشد، و (۲) مواد تلفاتی بهمنظور حذف امواج بخارج رونده باشد. مجموعه عظیمی از ادبیات به PML‌ها و تعمیم‌ها و بهبودهای احتمالی اختصاص داده شده است. در ادامه فقط ایده‌های اصلی را بدون پرداختن به جزئیات ترسیم می‌کنیم. خواننده علاقه‌مند به مراجع [۱۰۲، ۱۰۳] مراجعه کنند.

گذردهی و نفوذپذیری زیر را برای ماده PML در نظر می‌گیریم:

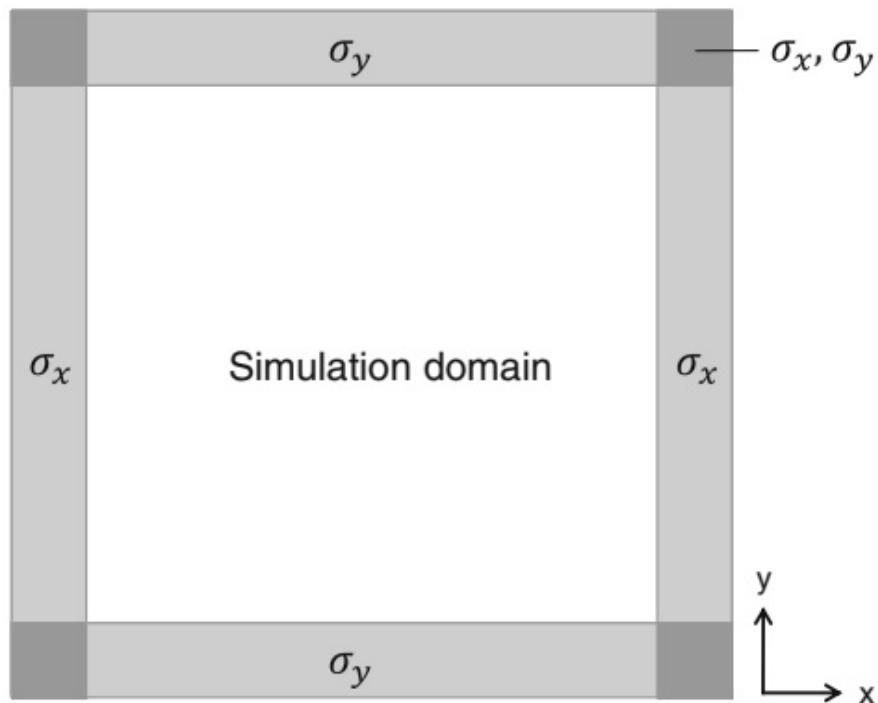
$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega}\right), \quad \mu_2 = \mu_1 \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega}\right) \quad (۱۴.۱۱)$$

بلافاصله مشاهده می‌شود که با این انتخاب،  $Z_1 = Z_2$  حاصل می‌شود و ماده PML تلف کننده است. هنوز یک مشکل باقی مانده است. در بحث بالا، ما برخورد عمودی موج را بر سطح مشترک فرض کردیم، اما برای حالت کلی برخورد مایل، وضعیت پیچیده‌تر است. در ادامه، در

<sup>۶</sup>Absorbing Boundary Conditions (ABCs)

<sup>۷</sup>Perfectly Matched Layers (PMLs)

<sup>۸</sup>Berenger



شکل ۱۴.۱۱: شماتیک برای شبیه‌سازی FDTD در دو بعد فضایی با استفاده از لایه‌های تطبیق کامل. حوزه شبیه‌سازی مورد علاقه توسط لایه‌های تطبیق کامل (PML) با رسانایی  $\sigma_x, \sigma_y$  احاطه شده است و به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که میدان‌های وارد شده از حوزه شبیه سازی (۱) بازتاب نمی‌شوند (تطبیق امپدانس)، و (۲) در مواد (PML) جذب می‌شوند.

مورد موج TM در فضای دو بعدی با  $E_z, H_x$  و  $H_y$  به عنوان متغیرهای پویا بحث می‌کنیم و برای فضای سه بعدی به ادبیات اصلی [۱۰۷] مراجعه کنید. شبیه به معادله (۱۳.۱۱)، معادلات کرل معادلات ماکسول را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{2} J_x, & \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} &= - \left( \frac{\partial E_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial E_{zy}}{\partial y} \right) \\ \epsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} &= - \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{2} J_x, & \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \left( \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial E_{zy}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (۱۵.۱۱)$$

که در آن میدان  $E_z$  را با تقسیم مصنوعی به  $E_{zx}$  و  $E_{zy}$  معرفی کرده‌ایم. از ز آنجائی که مولفه‌های میدان مغناطیسی  $H_y$  و  $H_x$  به مجموع  $E_{zx} + E_{zy}$  تزویج شده‌اند، این تقسیم در این نقطه کاملاً منطقی است. در هر حال، سعی می‌کنیم جملاتی تلفاتی به رابطه (۱۵.۱۱) بصورت

زیر اضافه کنیم؛

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{2} J_x, & \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_y H_x &= - \left( \frac{\partial E_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial E_{zy}}{\partial y} \right) \\ \epsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} &= - \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{2} J_x, & \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_x H_y &= \left( \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial E_{zy}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (۱۶.۱۱)$$

که در آن  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  هدایت هستند. در مرحله بعد وضعیت مصور در شکل (۴.۱۱) را بررسی می‌کنیم که در آن حوزه شبیه سازی دو بعدی مطلوب ما با یک لایه نازک پر از مواد PML احاطه شده است و به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$E_{xz} \text{ پی ام ال چپ و راست با} \iff \sigma_x > 0, \sigma_y = 0$$

$$E_{yz} \text{ پی ام ال بالا و پائین با} \iff \sigma_x = 0, \sigma_y > 0$$

ظاهراً با این انتخاب معادلات ماکسول در داخل PML برآورده نمی‌شود. با این حال، این مشکلی نیست زیرا هدف PML‌ها تنها (۱) حذف بازتاب از مواد PML بسوی حوزه شبیه‌سازی محاسباتی و (۲) میرا کردن میدانها در ماده PML است که از طریق هدایت‌های  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  به دست می‌آید. در گوششها  $\sigma_y = \sigma_x$  را قرار میدهیم تا تمام امواج خروجی از شبیه‌سازی حذف شوند. با افزودن این لایه‌های PML، می‌توانیم شبیه‌سازی‌ها را بسیار کارآمد و بدون هیچ گونه عارضه‌ای در مقایسه با شبیه‌سازی‌های FDTD بدون لایه‌های PML انجام دهیم. تنها استثناء سربار جزئی ناشی از تقسیم  $E_{zx}$  به  $E_{zy}$  است. توجه داشته باشید که حوزه شبیه‌سازی کل هم از حوزه مورد نظر (که دینامیک آن توسط معادلات ماکسول کنترل می‌شود) و هم از ماده مصنوعی PML که دینامیک آن توسط هدایت غیرفیزیکی کنترل می‌شود) تشکیل شده است. همچنین اشاره می‌کنیم که یک رویکرد جایگزین برای حذف بازتاب‌ها در مرزهای حوزه شبیه‌سازی وجود دارد که مبتنی بر پارامترهای مواد  $\bar{\epsilon}$ ،  $\bar{\mu}$  وابسته به فرکانس و ناهمسانگرد است [۱۰۲، ۱۰۳]. همچنین باید مراقب بود زیرا در اکثر پیاده‌سازی‌های PML، لایه‌ها امواج محوشونده<sup>۹</sup> را جذب نمی‌کنند، بنابراین باید حوزه شبیه‌سازی را به اندازه‌ای بزرگ کرد که امواج محوشونده قبل از رسیدن به مرز میرا شوند.

هنگام استفاده از لایه‌های PML در شبیه‌سازی‌های FDTD، یک عارضه اضافی به دلیل نوع گستره‌سازی معادله (۱۶.۱۱) ایجاد می‌شود. در اینجا یک لایه PML با عرض محدود همچنان می‌تواند به بازتابی قابل توجه در مرزهای شبیه‌سازی منجر شود. برای حذف این بازتاب‌ها، اغلب از لایه تابع مکان  $\sigma_x(x)$  و  $\sigma_y(y)$  برای امواج خارج شونده استفاده می‌شود که با مقدار  $\sigma$  کوچک شروع شده و سپس به تدریج افزایش می‌یابد. یک انتخاب معمول بصورت  $\sigma(d) = \sigma_0 d^m$  که در آن فاصله از مرز PML تا حوزه شبیه‌سازی است.  $\sigma_0$  مقداری ثابت که باید به درستی انتخاب شود و  $m$  مقداری بین سه و چهار است. با این رویکرد، بازتاب‌ها در مرزهای شبیه‌سازی می‌توانند به شدت حذف شوند. شکل (۵.۱۱) مثالی از یک موج خروجی را برای شبیه‌سازی (a) بدون و (b) با لایه‌های PML نشان می‌دهد.

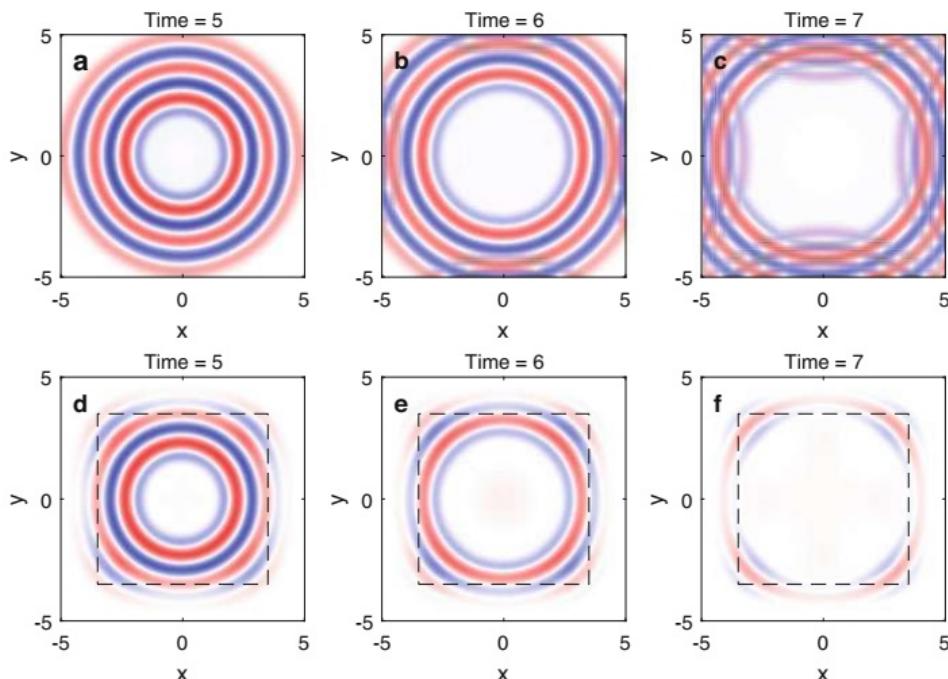
<sup>۹</sup>Evanescence Waves

### ۵.۱.۱۱ خواص مواد

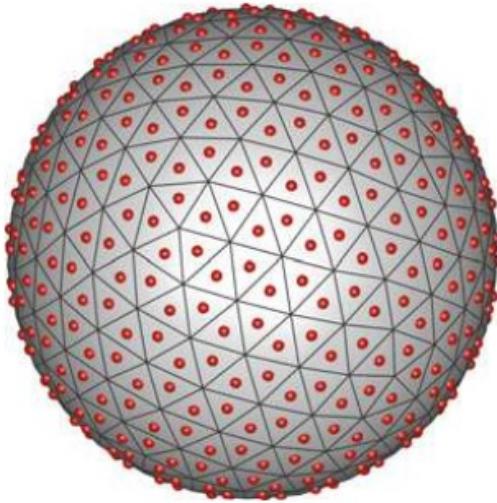
به عنوان یک راه حل اجرائی در حوزه زمان، بکاربردن مواد وابسته به فرکانس در FDTD ساده نیست. برای گذردهی نوع درود-لورنتس، که معمولاً برای توصیف مناسب فلزات کافی است، می‌توانیم به مدل‌های توصیف میکروسکوپی معرفی شده در بخش ۱.۷ تکیه کنیم. به عنوان مثال، در مدل درود-لورنتس از معادله (۴.۷) با تحریک نوسانگر هارمونیکی استفاده می‌کنیم.

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x} + eE(t)$$

که در آن  $m$  و  $e$  بترتیب جرم و بار نوسانگر،  $\omega_0$  فرکانس تشديد، و  $\gamma$  ثابت میرائي هستند. جابجايی نوسانگر به قطبش مواد از طريقي  $P = n ex$  مربوط می‌شود، که در آن  $n$  چگالی نوسانگرها است. مدل فوق را می‌توان به راحتی با ارائه یک گسيته‌سازی مناسب از معادله حرکت نوسانگر در روابط FDTD قرار داد. برای بحث دقیق‌تر در مورد چنین پیاده‌سازی‌ها، و همچنین روش‌های پیشرفته‌تر برای اجرای سایر گذردهی و نفوذپذیری‌های وابسته به فرکانس، خواندن‌گان را به ادبیات [۱۰۲، ۱۰۳] ارجاع می‌دهیم.



شکل ۵.۱۱: عکس‌های لحظه‌ای میدان الکتریکی  $E_z(x, y)$  برای شبیه‌سازی دو بعدی FDTD (پلازماسیون TM) یک موج خروجی (c) (بدون و (d-e) با لایه‌های تطبیق کامل. بدون لایه‌های PML، موج در مرز شبیه‌سازی بازتاب شده و باعث ایجاد اثرات ناپایداری و ناخواسته در شبیه‌سازی می‌شود. با لایه‌های PML، موج خروجی در مواد PML جذب شده و به دلیل تطبیق امپدانس، بازتاب‌های برگشتی به شدت حذف می‌شوند.  $x$  و  $y$  در واحد‌های بدون بعد هستند.



شکل ۶.۱۱: گسسته‌سازی مرز برای (BEM) شبه استاتاتیکی. مرز یک کره با تعدادی از عناصر مرزی، در اینجا مثلث، تقریب می‌شود. در ساده‌ترین شکل آن، توزیع بار سطحی را با بارهای سطحی واقع در مرکز عناصر مرزی تقریب می‌کنیم (نقاط قرمز)، و پتانسیل و مشتق سطح آن را در مرکز اجزاء شکل (روش هم‌مکانی) تطبیق می‌دهیم.

## ۲.۱۱ روش اجزای مرزی

در فصل‌های قبل روش انتگرال مرزی را بتفصیل معرفی کردیم. هنگام بحث درباره نوع گسسته‌سازی آن، بنام **روش اجزای مرزی** (BEM)<sup>۱۰</sup> اشاره شد و بر روی بسیاری از نتایج حاصل قبلی این را بنا خواهیم کرد. سیستم‌هایی که در ذهن داریم در شکل (۶.۱۱) نشان داده شده‌اند و شامل یک ذره فلزی یا دی‌الکتریک با گذردهی<sup>۱</sup> است که در یک محیط پس زمینه با گذردهی<sup>۲</sup> تعبیه شده است. تعریف نشان دادن ذره در داخل و یا خارج با زیرمجموعه‌های ۱ و ۲ در تمام موارد پذیرفته خواهد شد. در تقریب شبه استاتاتیکی می‌توانیم از معادله (۲۷.۹) برای محاسبه بارهای سطحی  $\sigma(s)$  در مرز ذره  $\partial\Omega$  از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$\Lambda(\omega)\sigma(s) + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G(s, s')}{\partial n} \sigma(s') dS' = -\frac{\partial V_{inc}(s)}{\partial n}$$

در اینجا،  $G(s, s') = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$  تابع گرین است که موقعیت‌های  $s$  و  $s'$  را در مرز ذره بهم متصل می‌کند، و  $V_{inc}$  پتانسیل اسکالر ورودی است. تحریک، به عنوان مثال یک موج مسطح یا یک دوقطبی نوسانی. هنگامی که  $\sigma$  شناخته شد، می‌توانیم پتانسیل را در هر جای دیگری با استفاده از معادله (۲۴.۹) محاسبه کنیم. برای اینکه این عبارت برای ارزیابی عددی مناسب باشد، ما مرز ذره را بر حسب عناصر مرزی به اندازه کافی کوچک  $T_i$  گسسته می‌کنیم، همانطور که به صورت شماتیک در شکل (۶.۱۱) نشان داده شده است. این عناصر باید به اندازه‌ای کوچک باشند که تقریب معنی داری از مرز ذره واقعی ارائه کنند، با عناصر کوچک‌تر

<sup>۱۰</sup> Boundary Element Method (BEM)

در لبه‌ها یا گوشه‌های تیز و عناصر بزرگ‌تر در مناطق صاف‌تر ذره. دقت شبکه انتخابی معمولاً با اجرای شبیه‌سازی با تعداد متفاوت عناصر مرزی  $n$  و مقایسه نتایج شبیه‌سازی مربوطه بررسی می‌شود. اگر شبیه‌سازی‌ها نتایج مشابه داشته باشند، می‌گوییم که همگرا هستند و نتایج را حفظ می‌کنند، در غیر این صورت تعداد عناصر مرزی را بیشتر افزایش می‌دهیم و شبیه‌سازی‌ها را دوباره اجرا می‌کنیم. هر عنصر مرزی  $\mathcal{T}_i$  دارای پارامترهای زیر است:

- مرکز شکل  $s_i$
- بردار عمود بر سطح  $n_i$
- سطح عنصر  $A_i$
- توزیع بار روی سطح  $\sigma_i$

در مرحله بعد فرض می‌کنیم که بار سطحی  $\sigma_i = q_i$  در یک عنصر مرزی معین در موقعیت مرکزی  $s_i$  قرار دارد. طرح‌های تقریب دقیق تر در زیر مورد بحث قرار خواهند گرفت. سپس برای مشتق سطح تابع گرین دریافت می‌کنیم

$$\left\| F_{start} \right\|_{ii'} = \left\| \frac{\partial G_{start}}{\partial n} \right\|_{ii'} = -\mathbf{n}_i \cdot \frac{\mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_i}{4\pi|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_i|^3} \quad (17.11)$$

که در آن تقریب شبه استاتیکی  $F_{start}$  را نشان دادیم. در اینجا و در ادامه از علامت گذاری  $\parallel \dots \parallel$  برای بردارها یا ماتریس‌های حاصل از گسسته‌سازی مقادیر در رویکرد BEM استفاده می‌کنیم. سپس معادله انتگرال مرزی را می‌توان بر حسب معادله ماتریسی زیر بیان کرد؛

$$\sum_{i'} \left( \Lambda(\omega) \delta_{ii'} + F_{ii'}^{stat} A_{i'} \right) \sigma'_i = - \left( \frac{\partial V_{inc}}{\partial n} \right)_i ,$$

که جواب آن بارهای سطحی مجھول را در اختیار ما قرار می‌دهد. در تقریب شبه استاتیکی، توزیع بار سطحی از حل معادله زیر ماتریس محاسبه می‌شود.

### روش اجزای مرزی (شبه استاتیک)

$$\left\| \sigma \right\| = - \left\| \Lambda(\omega) \mathbb{I} + \mathcal{F}_{stat} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial V_{inc}}{\partial n} \right\| , \quad (18.11)$$

که در آن ماتریس  $\mathcal{F}_{ii'} = F_{ii'}^{stat} A_{i'}$  را معرفی کرده‌ایم. به‌طور خلاصه، محاسبه توزیع بار سطحی در رویکرد روشن اجزای مرزی شامل مراحل زیر است:

- گسسته کردن مرز ذرات با استفاده از عناصر مرزی با اندازه معین،
- محاسبه مشتق تابع گرین با استفاده از رابطه (17.11)،
- حل معادله ماتریس رابطه (18.11).

این رویکرد به راحتی قابل پیاده سازی است. با این حال، با وجود سادگی، نتایج شگفت آوری دقیقی، همانطور که در چند لحظه دیگر نشان خواهیم داد به دست می دهد. یک نکته اضافی وجود دارد که باید با دقت بیشتری مورد توجه قرار گیرد، که اولین بار توسط فوکس و لیو [۱۰.۸] مورد توجه قرار گرفت و به عناصر قطری  $F_{ii}^{stat}$  مربوط می شود. فرض کنید' نقطه‌ای در مرز ذره  $\partial\Omega$  است و  $r$  نقطه‌ای از مرز  $S$  است که  $\partial\Omega$  را در بر می گیرد. با توجه به قضیه گوس، که میگوید شار میدان الکتریکی که توسط سطح بسته  $S$  خارج می شود، برابر است با بار کل  $Q$  محصور در آن حجم توسط مرز است، و خواهیم داشت:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies - \oint_S \frac{\partial G_{stat}(\mathbf{r}, \mathbf{s}')}{\partial n} dS = 1.$$

اگر از خارج به مرزهای  $\partial\Omega \rightarrow S$  نزدیک شویم، باید مراقب حد  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}$  باشیم که قبلًا برای شرط نیومان در صفحه های قبل بحث کردیم و ضریب اضافی  $(\mathbf{s} - \mathbf{s}')^{-\frac{1}{2}}$  را میدهد. در این صورت به دست می آوریم:

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{stat}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')}{\partial n} dS = -\frac{1}{2}.$$

بنابراین، با گسسته سازی انتگرال مرزی بر حسب عناصر مرزی، به قانون جمع زیر می رسیم.

$$\sum_i F_{ii}^{stat} \mathcal{A}_i = -\frac{1}{2}, \quad (19.11)$$

که این امکان را می دهد عناصر قطر  $F_{ii}^{stat}$  را محاسبه کنیم در حالی که عناصر خارج از قطر را از معادله (۱۷.۱۱) محاسبه کنیم. این قانون جمع برای به دست آوردن نتایج دقیق حتی برای تعداد نسبتاً کمی از عناصر مرزی از اهمیت بالایی برخوردار است. در ادامه به چند نمونه معرف می پردازیم و نمونه های بیشتر را به عنوان تمرین به خواننده علاقه مند و آگذار می کنیم.  
**گشتاور دوقطبی** هنگامی که توزیع بار سطحی در دسترس است، می توانیم گشتاور دوقطبی نانوذره از رابطه زیر محاسبه کنیم؛

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{s}_i (\sigma_i \mathcal{A}_i) \quad (20.11)$$

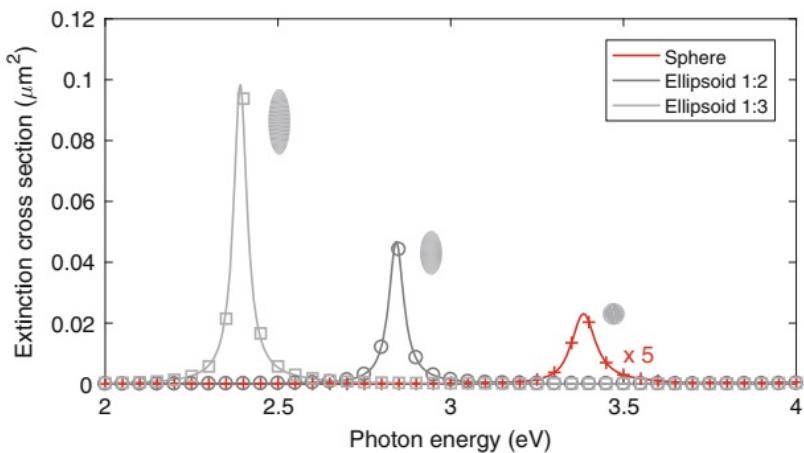
که به نوبه خود اجازه می دهد تا طیف پراکندگی و انقراضی نوری را از روابط (۲۱.۹) و (۲۲.۹) محاسبه کنیم.

**همگرائی** به عنوان نمونه ای، طیف های نوری را برای نانوذرات کروی و بیضوی گون که نتایج تحلیلی را می توان از نظریه می گانز به دست آورد، محاسبه می کنیم. شکل (۷.۱۱) مقایسه بین نتایج عددی (نمادها) و عبارات تحلیلی نظریه می گانز (خطوط پُر) را نشان می دهد. علیرغم تعداد نسبتاً کمی از چند صد عنصر مرزی، توافق در کل بسیار عالی است.

**مودهای ویژه** مقادیر ویژه و مودهای ویژه رویکرد شباهستاتیکی بر اساس معادله (۲۸.۹) را می توان به راحتی در رویکرد BEM از طریق رابطه زیر محاسبه کرد؛

$$\|\mathcal{F}_{stat}\| \cdot \|u_k\| = \lambda \|u_k\| \quad (21.11)$$

<sup>۱۱</sup>Fuchs and Liu



شکل ۷.۱۱: سطح مقطع انقراضی برای نانوکره‌ها و نانوبیضوی‌ها نقره که از معادله (۲۲.۹) محاسبه و مقایسه نتایج BEM (نمادها) با نتایج تحلیلی نظریه شباهستاتیک می‌و گانز-می انجام شده است. از پارامترها و هندسه‌های مواد مشابه در شکل (۴.۹) استفاده می‌کنیم. با وجود تعداد نسبتاً کمی از حدود ۵۰ عنصر مرزی، توافق عالی بین نتایج تحلیلی و عددی مشاهده می‌کنیم.

حل معادله فوق را می‌توان به راحتی با استفاده از روش‌های عددی استاندارد برای مسائل مقداری ویژه، همانطور که توسط اکثر بسته‌های نرم افزاری جبر خطی ارائه شده است، بدست آورد.

### معادلات ماکسول کامل

نوع دیگری از رویکرد BEM که در بالا مورد بحث قرار گرفت وجود دارد، که امکان حل کامل معادلات ماکسول را فراهم می‌کند. این رویکرد توسط گارسیا دو آباجو<sup>۱۲</sup> و همکاران [۱۰.۹] توسعه یافته در جامعه پلاسمونیک‌ها کاربرد گسترده‌ای دارد. با رویکرد میدانی معمول بر اساس معادله (۵۸.۹) که در ادامه بیشتر به آن خواهیم پرداخت متفاوت است و از پتانسیل‌های اسکالار و برداری  $V, A$  به جای میدان‌های الکترومغناطیسی  $E, B$  به عنوان کمیت‌های اساسی استفاده می‌کند. یک جعبه ابزار منبع باز<sup>۱۳</sup> برای اجرای این طرح توسط نویسنده این کتاب تدوین شده است [۱۱۰].

نقطه شروع معادلات هلmholtz معادله (۲۲.۲) است، که برای میدان‌های هارمونیک زمانی بصورت زیر است؛

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 + k_i^2 \right) V_i(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_i} \\ \left( \nabla^2 + k_i^2 \right) \mathbf{A}_i(\mathbf{r}) &= -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

در اینجا  $\omega^2 = \mu_0 \epsilon_i \omega^2$  و  $k_i^2 = 1, 2$  به ترتیب مناطق داخل و خارج نانوذره را نشان می‌دهد که با مرز  $\partial\Omega$  از هم جدا می‌شوند. در اینجا همه نفوذپذیری‌ها را برابر  $\mu_0$  قرار می‌دهیم. معادلات بالا

<sup>۱۲</sup>Garcia de Abajo

<sup>۱۳</sup>Open Source

با استفاده از شرط لورنتس معادله (۲۱.۲) به دست آمده است.

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}_i = -jk_0\kappa_i V_i, \quad (22.11)$$

در اینجا  $\epsilon_0\kappa_i = \epsilon_i$  و  $k_0$  عددموج نور در خلاء است. کار با پتانسیل برداری  $\tilde{\mathbf{A}}_i = c\mathbf{A}_i$  را راحت خواهیم یافت که ابعادی مشابه پتانسیل اسکالر دارد. در اینجا  $c$  سرعت نور در خلاء است. میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان از طریق پتانسیل زیر به دست آورد؛

$$\mathbf{E}_i = -jk_0\tilde{\mathbf{A}}_i - \nabla V_i, \quad c\mathbf{B}_i = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}_i$$

در قیاس با معادله (۲۴.۹) برای پتانسیل اسکالر در رویکرد شباهستاتیک، برای پتانسیل‌های الکترومغناطیسی رابطه‌ای بصورت زیر می‌نویسیم؛

$$\begin{aligned} V_i(\mathbf{r}) &= V_i^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_i(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \sigma_i(\mathbf{s}') dS' \\ \tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{r}) &= \tilde{\mathbf{A}}_i^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_i(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{h}_i(\mathbf{s}') dS' \end{aligned} \quad (23.11)$$

که در آن  $V_i^{inc}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_i^{inc}$  پتانسیل‌های الکترومغناطیسی تحریک تابشی هستند و تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز از طریق معادله (۵.۵) تعریف می‌شود.

$$(\nabla^2 + k_i^2)G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

معادله (۲۳.۱۱) به گونه‌ای است که معادلات هلم‌هولتز در داخل و خارج ذره به طور خودکار برآورده می‌شوند. توزیع‌های بار سطحی  $\sigma_1, \sigma_2$  و جریان  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  را معرفی کرده‌ایم. در مقایسه با رویکرد شباهستاتیکی، توزیع‌های جریان سطحی اخیر باید معرفی شوند و دیگر نمی‌توانیم  $\sigma_1, \sigma_2$  را در داخل و خارج ذرات برابر قرار دهیم. بار سطحی مجهول و توزیع جریان باید به گونه‌ای تعیین شود که شرایط مرزی معادلات ماکسول در مرز ذره  $\partial\Omega$  برآورده شود.

در رویکرد BEM، مجدداً مرز را با عناصر  $T_i$  با اندازه محدود تقریب می‌زنیم و بارهای سطحی  $\|\sigma_i\|$  و جریان‌های  $\|\mathbf{h}_i\|$  را در مرکز عناصر مرزی در نظر می‌گیریم. همانطور که در بخش ۱۱.۶ با جزئیات بیشتر بحث شد، این توزیع‌های بار سطحی و جریان را می‌توان از معادلات کاربردی معادله (۶۶.۱۱) به دست آورد.

$$\begin{aligned} \|\sigma_2\| &= \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Sigma\|^{-1} \cdot \left( \|\tilde{D}^e\| - jk_0\|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \right) \|\Delta\|^{-1} \cdot \|\tilde{\alpha}\| \\ \|\mathbf{h}_2\| &= \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Delta\|^{-1} \cdot \left( \|\tilde{\alpha}\| - jk_0\|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \right) \|\mathcal{G}_2\| \cdot \|\sigma_2\| \end{aligned}$$

همراه با معادله (۵۸.۱۱) برای محاسبه بار سطحی و توزیع جریان  $\|\sigma_1\|$ ,  $\|\mathbf{h}_1\|$  در داخل ذرات به دست آورده. برای تعریف ماتریس‌های مختلف به بخش ۶.۱۱ مراجعه کنید. در مجموع، طرح راه حل به طور قابل توجهی پیچیده‌تر از حالت شباهستاتیکی است، اما همچنان برای گسسته‌سازی مرزها با مثلاً چند هزار عنصر مرزی، از نظر عددی قابل پردازش و کارآمد است.

## ۳.۱۱ روش گالرکین

در بخش قبل یک رویکرد BEM را معرفی کردیم که در آن توزیع بار سطحی  $\sigma_s$  را با تعداد محدودی از مقادیر  $\|\sigma_i\|$  واقع در مرکز  $s_i$  از عناصر مرزی تقریب زدیم. این رویکرد اشکالی ندارد و در واقع توسط بسیاری از محققان در زمینه پلاسمونیک استفاده شده است (و هنوز هم استفاده می‌شود). با این حال، موقعیت‌هایی وجود دارد که فرد دوست دارد بهتر عمل کند، جایی که «بهتر» باید بهدو روشن متفاوت درک شود.

- **درونيابی** اول، ممکن است انتظار داشته باشیم که یک طرح تقریب بهبود یافته بر اساس درونیابی، در ساده ترین شکل درونیابی خطی  $\sigma_s$  در یک عنصر مرزی، نتایج شبیه‌سازی دقیق‌تری را ارائه دهد. یک رویکرد سیستماتیک برای این، طرح گالرکین است که در چند لحظه دیگر مورد بحث قرار می‌گیرد.

- **همگرائی** طرح گالرکین این مزیت اضافی را دارد که می‌توان آن را با دقت بیشتری در زمینه ریاضیات عددی بررسی کرد. اگرچه در اینجا این موضوعات را مورد بحث قرار نخواهیم داد، اما بهطور کلی می‌توان ثابت کرد که انواع خاصی از رویکردهای عناصر مرزی که هنگام پالایش گستته‌سازی مرز همگرا شوند، برخلاف رویکردهای مبتنی بر مرکز که در آن اغلب هیچ نتیجه‌گیری دقیقی نمی‌توان گرفت، تضمین شده است. بهمین دلیل، رویکرد روش اجزای مرزی مبتنی بر میدان، که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد، رویکرد «استاندارد» است که معمولاً در الکترودینامیک محاسباتی استفاده می‌شود.

در ادامه، ابتدا طرح گالرکین را به صورت کلی معرفی کرده و سپس در مورد پیاده سازی آن در چارچوب روش اجزای مرزی تامل می‌کنیم. همان طرح گالرکین را می‌توان برای سایر طرح‌های حل کننده ماکسول بر اساس روش اجزای محدود (FEM)<sup>۱۴</sup> نیز استفاده کرد، همانطور که بعداً در این فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

### ۱.۳.۱۱ ایده بزرگ روش گالرکین

ابتدا معادله زیر را در نظر گیرید؛

$$\int_{\mathcal{D}} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') dV' = b(\mathbf{r}) \quad (۲۴.۱۱)$$

که در آن  $K$  هسته (کرنر)،  $u$  جوابی است که بدنالش هستیم، و  $b$  یک ناهمگنی است.  $\mathbf{r}$  به یک حوزه معین  $\mathcal{D}$  محدود می‌شود که برای رویکرد BEM دو بعدی و برای رویکرد (FEM) سه بعدی است. انتگرال‌گیری روی حوزه  $\mathcal{D}$  با نماد  $dV$  مشخص می‌شود. طرح گالرکین وسیله‌ای برای تبدیل یک معادله عملگر، مانند معادله (۲۴.۱۱)، به یک ماتریس که می‌تواند از طریق ماتریس معکوس حل شود، فراهم می‌کند. ابتدا راه حل  $(\mathbf{r})u$  را با استفاده از توابع پایه  $(\mathbf{r})\phi_n$  محدود شده  $n$  بعدی بسط می‌دهیم،

<sup>۱۴</sup>Finite Element Method (FEM)

### جواب تقریبی

$$u(\mathbf{r}) \approx u^e(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=1}^n \phi_\nu(\mathbf{r}) u_\nu^e \quad (25.11)$$

که در آن  $u^e(\mathbf{r})$  راه حل تقریبی با ضرایب بسط  $u_\nu^e$  است. بالا نویس  $e$  یادآور عناصر محدودی است که در زیر معرفی می‌شوند، که از این توابع پایه پشتیبانی می‌کنند. به دلیل تعداد پایه محدود شده، معادله (۲۴.۱۱) دیگر ارضا نمی‌شود.

$$\int_{\mathcal{D}} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \sum_{\nu'=1}^n \phi_{\nu'}(\mathbf{r}') u_{\nu'}^e \right] dV' - b(\mathbf{r}) = Res, \quad (26.11)$$

اما یک باقیمانده محدود می‌دهد. اکنون به دنبال بهترین بردار جواب ممکن  $u^e$  در فضای تابع محدود شده هستیم. برای این منظور معادله (۲۶.۱۱) را در تابع آزمایشی<sup>۱۵</sup> زیر ضرب می‌کنیم؛

$$\mathcal{W}^e(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=1}^n \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) \mathcal{W}_\nu^e \quad (27.11)$$

در طرح گالرکین برای  $\mathcal{W}^e(\mathbf{r})$  از همان تابع  $\tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) = \phi_\nu(\mathbf{r})$  برای بسط بردار حل تقریبی استفاده می‌کنیم، اما برای عمومیت در اینجا حالت کلی تری را بیان می‌کنیم که تابع بسط و آزمایش هستند. ممکن است متفاوت باشد برای ارائه یک رویکرد محاسباتی مناسب، تعداد توابع بسط و آزمایش باید یکسان باشد. بعد معادله (۲۶.۱۱) را با تابع آزمایشی ضرب و در کل حوزه  $\mathcal{D}$  انتگرال‌گیری می‌کنیم. بدست می‌آید؛

$$\sum_{\nu=1}^n \mathcal{W}^e \left[ \sum_{\nu'=1}^n K_{\nu\nu'} u_{\nu'}^e - b_\nu \right] = \sum_{\nu=1}^n \mathcal{W}^e \int_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) Res \, dV,$$

که در آن نماد اختصاری زیر را معرفی کرده‌ایم؛

$$\begin{aligned} K_{\nu\nu'} &= \iint_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_{\nu'}(\mathbf{r}') dV \, dV' \\ b_\nu &= \int_{\mathcal{D}} \tilde{\phi}_\nu(\mathbf{r}) b(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (28.11)$$

در جواب بهینه مقدار عبارت بالا باید برای تغییرات کوچک  $\delta \mathcal{W}_\nu^e$  تابع آزمایش تغییر کند. ظاهرآ زمانی که عبارت در پرانتز صفر می‌شود، عبارت باقیمانده به حداقل می‌رسد، که می‌توان آن را در نماد برداری صریح و ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{K}}} \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{b} \quad (29.11)$$

<sup>۱۵</sup>Test Function

این معادله را می‌توان از طریق ماتریس معکوس به‌سادگی حل کرد. روش حل یک معادله عملگر با معکوس کردن یک نوع مختصراً شده ماتریس به‌عنوان روش پتروف-گالرکین، روش باقیمانده‌های وزن شده، یا روش ممان شناخته می‌شود. در ادبیات تخصصی اغلب معادله (۱۱) ۲۴) را رابطه بندی قوی<sup>۱۶</sup> می‌نامند، در حالی که بسط بر حسب توابع آزمایشی را، رابطه بندی ضعیف<sup>۱۷</sup> گالرکین اطلاق می‌کنند.

### رابطه‌بندی وردشی

طرح گالرکین را نیز می‌توان به‌عنوان یک مسئله وردشی (تغییراتی) رابطه‌بندی کرد. دوباره از معادله (۲۴.۱۱)، همراه با بسط جواب بر حسب برخی از توابع پایه  $(s, \phi_\nu)$ ، معادله (۲۵.۱۱)، شروع می‌کنیم. با معرفیتابع زیر

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{W}^e(\mathbf{r}) \left[ \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u^e(\mathbf{r}) dV' - b(\mathbf{r}) \right] dV \quad (30.11)$$

راه حل تقریبی را می‌توان با کمینه کردن این تابع با توجه به ضرایب  $\mathcal{W}_i^e$  تابع آزمایشی را به‌دست آورد. این ما را به معادلات زیر هدایت می‌کند؛

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{W}_\nu^e} = \sum_{\nu'=1}^n K_{\nu\nu'} u_{\nu'}^e - b_\nu = 0 \quad (31.11)$$

جایی که  $\nu$  بر تمام درجه‌های آزادی مسئله اعمال می‌شود. در تمرین ۸.۱۱ نشان می‌دهیم که رویکرد ترکیبی رویکرد BEM را می‌توان با استفاده از چنین رویکرد وردشی فرمول‌بندی کرد.

### ۲.۳.۱۱ شبکه بدون ساختار

طرح گالرکین معمولاً با تجزیه ناحیه محاسباتی  $\mathcal{D}$  به‌عنابر  $\mathcal{T}_i$  با اندازه محدود همراه می‌شود،

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}_i \quad (32.11)$$

در روش اجزای مرزی،  $T_i$  معمولاً مثلث و در روش اجزای محدود به‌چهار وجهی نزدیک می‌شود. فرض می‌کنیم که عناصر همسایه یک راس، لبه یا وجه مشترک دارند، اما در غیر این صورت هیچ فرض اضافی در مورد شبکه وجود ندارد. این شبکه به‌عنوان یک شبکه بدون ساختار نشان داده می‌شود، برخلاف شبکه ساختار یافته رویکرد FDTD که در آن هر نقطه شبکه با همسایگان در امتداد تمام جهت‌های دکارتی، دارای یک مکان کاملاً تعریف شده است. برای این شبکه بدون ساختار مقادیر زیر را معرفی می‌کنیم:

- درجه‌های آزادی محلی در هر عنصر  $\mathcal{T}_i$ ، درجه‌های آزادی محلی  $u_{ia}^e$  را معرفی می‌کنیم که جواب را مشخص می‌کند. به‌عنوان مثال، در یک مثلث  $u_{ia}^e$  ممکن است با مقادیر تابع در گوشه‌های مثلث، با  $a = 1, 2, 3$  مرتبط باشد.

<sup>۱۶</sup>Strong Formulation

<sup>۱۷</sup>Weak Formulation

- توابع شکل محلی توابع شکل محلی  $N_{ia}(\mathbf{r})$  را معرفی می‌کنیم که جواب را در داخل  $T_i$  از طریق روابط زیر تقریب می‌کنند؛

$$u^e(\mathbf{r}) = \sum_a N_{ia}^e(\mathbf{r}) u_{ia}^e, \quad \mathbf{r} \in T_i$$

در خارج از عنصر  $T_i$ ، توابع شکل  $N_{ia}(\mathbf{r})$  صفر در نظر گرفته می‌شوند. این ویژگی گاهی اوقات به عنوان "حمایت محلی" نامیده می‌شود. در یک مثلث، توابع شکل ممکن است یک درون‌یابی خطی از گوشش‌های مثلث به داخل مثلث انجام دهند.

- درجه‌های آزادی جهانی به‌طور کلی، محدودیت‌های خاصی را بر جواب تحمیل می‌کنیم، مانند اینکه  $u^e(\mathbf{r})$  هنگام رفتن از یک عنصر  $T_i$  به یک عنصر همسایه پیوسته است. این را می‌توان با به‌اشتراف گذاشتن اطلاعات بین عناصر همسایه شبکه، به عنوان مثال با اختصاص مقادیر یکسان  $u^e$  به‌رئوس مثلث‌های همسایه، به‌دست آورد. بنابراین، تعداد کل درجه‌های آزادی توسط تعداد  $N$  عناصر شبکه (مثلث یا چهار ضلعی) تنظیم نمی‌شود، بلکه در این مثال، تعداد رئوس شبکه تعیین می‌شود. برای توضیح این موضوع، درجه‌های جهانی آزادی  $\|u^e\|_\nu$  را که  $\nu$  از یک تا تعداد کل  $n$  درجه‌های آزادی جهانی را شامل می‌شود، معرفی می‌کنیم.

- ماتریس انتقال ما در نهایت به‌دستور العملی نیاز داریم که چگونه درجه‌های آزادی جهانی  $\|u^e\|_\nu$  را به درجه‌های محلی انتقال دهیم. برای این منظور ماتریس انتقال  $T_{ia,\nu}$  را با خاصیت انتقال زیر معرفی می‌کنیم؛

$$u_{ia}^e = \sum_r T_{ia,\nu} \|u^e\|_\nu$$

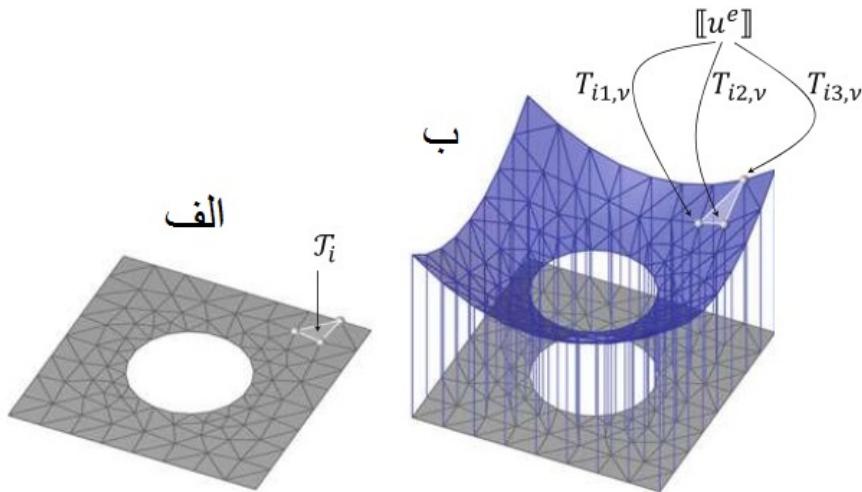
با توضیح شفاهی،  $T$  عناصر درجه‌های جهانی آزادی  $\|u^e\|_\nu$  را می‌گیرد و آنها را به درجه‌های محلی  $u_{ia}^e$  در یک عنصر معین  $T_i$  اختصاص می‌دهد، (شکل ۱۱.۸). به‌طور معمول، ماتریس  $T$  فقط دارای چند عنصر ماتریس است که با صفر متفاوت است و بنابراین ماتریس تُنک<sup>۱۸</sup> است.

اکنون همه مواد لازم برای رابطه‌بندی کردن رویکرد گالرکین برای یک شبکه بدون ساختار و برای توابع شکل با پشتیبانی محلی را در دسترس داریم. جواب را مطابق معادله (۱۱.۲۵) به صورت زیر بسط می‌دهیم.

$$u^2(\mathbf{r}) = \sum_{ia} \sum_\nu N_{ia}^e(\mathbf{r}) \left( T_{ia,\nu} \|u^e\|_\nu \right), \quad (۱۱.۳۳)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر تفسیر کرد: جمله داخل پرانتر درجه‌های آزادی جهانی  $\|u^e\|_\nu$  را به درجه‌های محلی  $u_{ia}^e$  انتقال می‌دهد و توابع شکل  $N_{ia}(\mathbf{r})$  درون‌یابی را در عنصر  $T_i$  انجام می‌دهند. یک رویکرد کاملاً مشابه را می‌توان برای توابع آزمایشی، با توابع شکلی احتمالاً متفاوت  $\tilde{N}_{ia}^e(\mathbf{r})$  دنبال کرد. درج این توابع در عناصر ماتریس معادله (۱۱.۲۸) برای طرح گالرکین، به صورت زیر خواهد بود؛

<sup>۱۸</sup>Sparse Matrix



شکل ۳.۱۱: شماتیک های طرح گالرکین. (الف) ناحیه محاسباتی  $\mathcal{D}$  توسط یک شبکه بدون ساختار متتشکل از عناصر  $T_i$  با اندازه محدود تقریب زده می‌شود. (ب) جواب  $u^e(\mathbf{r})$  با مقادیر  $u_{ia}^e$  در رؤس عناصر و با انجام درون‌یابی (خطی) درون عناصر تقریب زده می‌شود. برای بدست آوردن یکتابع صاف و هموار، همان مقادیر  $u^e$  را به رؤس مشترک عناصر همسایه اختصاص می‌دهیم. این از طریق ماتریس انتقال  $T_{ia,\nu}$  که عناصر بردار جواب جهانی  $\|u^e\|$  را به رؤس عناصر محلی اختصاص می‌دهد، بدست می‌آید.

### عناصر ماتریس برای طرح گالرکین

$$\begin{aligned} \|K\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia} \sum_{i'a'} T_{ia,\nu} \left[ \int_{T_i} \int_{T_{i'}} \tilde{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') N_{i'a'}^e(\mathbf{r}') dV dV' \right] T_{i'a',\nu'} \\ \|b\|_\nu &= \sum_{ia} T_{ia,\nu} \left[ \int_{T_i} \tilde{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) b(\mathbf{r}) dV \right]. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

توجه داشته باشید که این عناصر ماتریس را می‌توان به راحتی محاسبه کرد زیرا انتگرال‌ها فقط روی عناصر  $T_i$  گسترش می‌یابند که در نتیجه پشتیبانی محلی از توابع شکل است. در قیاس کامل با بحث قبلی، یک معادله ماتریسی  $\|K\| \cdot \|u^e\| = \|b\|$  بدست می‌آوریم که دوباره می‌توان آن را از طریق ماتریس معکوس حل کرد.

### راه حل برداری

در الکترودینامیک محاسباتی، مانند میدان‌های الکتریکی مماسی و مغناطیسی در مورد رویکرد BEM، معمولاً باید معادلات توابع برداری را حل کنیم. به طور کلی، این را می‌توان در امتداد خطوط مورد بحث در این بخش انجام داد، اگرچه باید اجزای مختلف جواب برداری را در نظر بگیریم. همانطور که در ادامه با جزئیات بیشتر بحث خواهیم کرد، به نظر می‌رسد که راحت

است که در امتداد خطوط کمی متفاوت پیش برویم و از ابتدا توابع شکل برداری ( $\mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r})$ ) را معرفی کنیم. این مزیت را دارد که می‌توانیم به راحتی محدودیت‌های فیزیکی را بر روی توابع، مانند پیوستگی جریان برداری از یک عنصر به عنصر دیگر در مورد رویکرد BEM، اعمال کنیم. اگرچه این محدودیت‌ها همیشه برای جواب‌های دقیق برآورده می‌شوند، اما در مورد راه حل‌های تقریبی که از رابطه‌بندی ضعیف مسئله نشأت می‌گیرند، ممکن است همه چیز اشتباه پیش برود. به نظر می‌رسد که این برای حذف جواب‌های جعلی<sup>۱۹</sup>، که در ادبیات برای اجرای ساده‌تر طرح گالرکین گزارش شده است، حیاتی است.

## ۴.۱۱ روش اجزای مرزی با رویکرد گالرکین

در این بخش، طرح گالرکین را به روش انتگرال مرزی برای حل معادلات کامل ماکسول اعمال می‌کنیم. به طور کلی، این رویکرد کاملاً پیچیده است و حاوی نکات فنی زیادی است. با این حال، با مطالب توسعه یافته در فصل ۵، ۹ و ۱۱ در موقعیتی هستیم که معادلات کاری را بدون کار اضافی زیاد بدست آوریم. در ادامه، ابتدا در مورد عناصر شکل برداری، به نام توابع پایه راویارت-توماس<sup>۲۰</sup> یا راؤ-ویلتون-گلیسون<sup>۲۱</sup> فکر و سپس اجرای معادلات روش انتگرال مرزی معرفی شده در بخش ۶.۹ را ترسیم می‌کنیم.

### ۱.۴.۱۱ توابع پایه راویارت-توماس

فرض کنید که  $(\mathbf{s})^u$  یک میدان برداری است که در آن همه بردارها مماس بر مرز ذره هستند. این مورد با رویکرد BEM مبتنی بر میدان معادله<sup>۲۲</sup>  $(\Delta u)^u$  مطابقت دارد. همانطور که در بخش ۶.۹ بحث شد. میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی مماسی را می‌توان به ترتیب به عنوان جریان‌های سطحی و مغناطیسی شوندگی‌ها<sup>۲۳</sup> نیز تفسیر کرد.

برای یک مرز ذره گسسته، باید مطمئن شویم که جواب تقریبی<sup>(s)</sup>  $u^e$  شرایط مرزی خاصی را در لبه‌های بین دو مثلث همسایه برآورده می‌کند. فرض کنید  $A = lh$  یک حوزه دو بعدی است که یک یال معین را با طول  $l$  محصور می‌کند، (شکل ۹.۱)، و  $h$  ارتفاع ناحیه‌ای است که اجازه می‌دهیم در انتهایا به صفر نزدیک شود. از نوع دو بُعدی قضیه گوس به دست می‌آوریم:

$$\int_A \nabla \cdot \mathbf{u} dS = \oint_{\partial A} \mathbf{u} \cdot d\eta = 0 \implies [\mathbf{u}(\mathbf{s}^+) - \mathbf{u}(\mathbf{s}^-)] \cdot \boldsymbol{\eta} = 0 \quad (35.11)$$

که در آن  $\boldsymbol{\eta}$  بردار عمود بر لبه است.  $(\mathbf{s}^\pm)$  مقادیر میدان برداری در دو طرف مجاور لبه هستند. معادله<sup>(35.11)</sup> بیان می‌کند که شار (در جهت  $\boldsymbol{\eta}$ ) میدان مماسی  $\mathbf{u}$  خروج از یک مثلث باید با شار ورودی به مثلث همسایه برابر باشد. برای توزیع جریان سطحی معادله<sup>(59.9)</sup> این بدان معنی است که هیچ توزیع بار خطی منفرد در لبه‌ها ایجاد نمی‌شود.

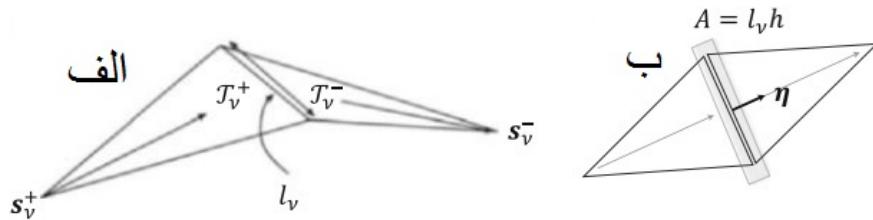
سپس جدول<sup>۲۴</sup> از لبه‌های مثلث منحصر به فرد (بدون در نظر گرفتن جهت) با  $n = 1, 2, \dots, n$  را معرفی می‌کنیم، که در آن  $n$  تعداد کل یال‌ها است. بعلاوه، مثلث‌های واقع

<sup>۱۹</sup>Spurious

<sup>۲۰</sup>Raviart-Thomas

<sup>۲۱</sup>Rao-Wilton-Glisson

<sup>۲۲</sup>Magnetizations



شکل ۹.۱۱: عناصر پایه راویارت-توماس. (الف) هر یال دارای دو مثلث همسایه  $T^+$  و  $T^-$  است که در سمت چپ و راست لبه (جهتدار) قرار دارند. در  $T^+$  توابع شکل از راس  $s_v^+$  نشأت می‌گیرند که در مقابل لبه قرار دارد و به سمت لبه جریان می‌یابد. در  $T^-$  آنها در جهت مخالف جریان دارند. توابع برداری به‌گونه‌ای تعریف می‌شوند که جریان خروجی از مثلث  $T^+$  برابر جریان ورودی مثلث  $T^-$  باشد. (ب) شماتیک برای کاربرد قضیه دو بعدی گوس.  $A$  بازه‌ای است که لبه را با ارتفاع  $0 \rightarrow h$  در بر می‌گیرد و  $\eta$  بردار عمود بر لبه است. برای جزئیات بیشتر به متن مراجعه کنید.

در دو طرف لبه‌ها را با  $T_\nu^\pm$  و راس‌هایی را که در مقابل لبه‌ها قرار گرفته‌اند، با  $s_\nu^\pm$ ، همانطور که به صورت شماتیک در شکل (۹.۱۱) نشان داده شده است، نشان می‌دهیم. با این کار می‌توانیم توابع شکل برداری زیر را تعریف کنیم:

#### توابع پایه رویکرد BEM (گالرکین)

$$\phi(\mathbf{s}) = \begin{cases} N_{\nu+}^e(\mathbf{s}) = \frac{l_\nu}{2A_\nu^+}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_\nu^+) & \text{برای } \mathbf{s} \in T_\nu^+ \\ N_{\nu-}^e(\mathbf{s}) = \frac{l_\nu}{2A_\nu^-}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_\nu^-) & \text{برای } \mathbf{s} \in T_\nu^- \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (36.11)$$

دروں‌یابی از لبه‌های  $\nu$  شبکه به داخل مثلث  $T_\nu^\pm$  واقع در هر دو طرف لبه با استفاده از توابع شکل راویارت-توماس  $N_{\nu^\pm}^e(\mathbf{s})$ .

در اینجا  $l_\nu$  طول یال و  $A_\nu^\pm$  مناطق مثلث هستند. توجه داشته باشید که انتخاب اینکه کدام تابع شکل دارای علامت مثبت یا منفی است دلخواه است، تنها چیزی که اهمیت دارد این است که این دو تابع دارای علائم متفاوت هستند. پیش فاکتورهای توابع شکل به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شار از لبه واحد باشد، همانطور که در تمرین ۹.۱۱ با جزئیات بیشتر بحث شده است، که حفظ شار در لبه‌ها را تضمین می‌کند. اغلب به  $N_{\nu^\pm}^e$  به عنوان عناصر پایه راویارت-توماس یا رائو-ویلتون-گلیسون اشاره می‌شود.

در ادامه توابع پایه راویارت-توماس را در یک مثلث  $T_i$  با  $N_{ia}^e$  نشان می‌دهیم، جایی که  $a$  سه یال مثلث را برچسب‌گذاری می‌کند. فرض می‌کنیم که این توابع دارای جهت شار مطابق

معادله (۳۶.۱) هستند. اکنون می‌توانیم میدان برداری را به‌شکل زیر بسط دهیم؛

$$\mathbf{u}^e(bfs) = \sum_{\nu} \sum_{ia} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \left( T_{ia,\nu} \|u^e\|_{\nu} \right), \quad (37.11)$$

که در آن ضرایب  $\|u^e\|_{\nu}$  جواب  $(\mathbf{s})$  را مشخص می‌کند و  $T_{ia,\nu}$  ماتریس انتقال تعریف شده قبلی از لبه‌های منحصر به‌فرد به‌لبه‌های عنصر محلی است. جمله داخل پرانتز که به‌صورت شفاهی بیان می‌شود، از لبه‌های سراسری به‌لبه‌های مثلث محلی انتقال داده می‌شود. توابع شکل  $\mathbf{N}_{ia}^e$  سپس میدان‌های مماسی را از لبه‌ها به‌داخل مثلث درون‌یابی می‌کند. عناصر ماتریس و ناهمگنی معادله (۲۸.۱) برای هسته (کرنر) گستته شده را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \|K\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia} \sum_{i'a'} T_{ia,\nu} T_{i'a',\nu'} \int_{\mathcal{T}_i} \int_{\mathcal{T}'_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \cdot K(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mathbf{N}_{i'a'}^e(\mathbf{s}') dS dS' \\ \|b\|_{\nu} &= \sum_{ia} T_{ia,\nu} \int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{s}) dS \end{aligned} \quad (38.11)$$

توجه داشته باشید که در روح طرح گالرکین از همان توابع آزمایشی و بسط  $\mathbf{N}_{ia}^e$  استفاده کردۀ‌ایم.

## ۲.۴.۱۱ طرح گالرکین برای معادلات ماقسول کامل

در بخش ۶.۹ یک روش روش انتگرال مرزی مبتنی بر میدان را برای حل معادلات کامل ماقسول استخراج کردیم. بیان اصلی معادله (۵۸.۹) بصورت زیر است؛

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbb{D}_1[\mathbf{u}_E] + \mathbb{D}_2[\mathbf{u}_E]) + \hat{\mathbf{n}} \times (j\omega\mu_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_H] + j\omega\mu_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_H]) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{inc}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbb{D}_1[\mathbf{u}_H] + \mathbb{D}_2[\mathbf{u}_H]) - \hat{\mathbf{n}} \times (j\omega\epsilon_1\mathbb{S}_1[\mathbf{u}_E] + j\omega\epsilon_2\mathbb{S}_2[\mathbf{u}_E]) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc}$$

که در آن  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$  و  $\mathbf{u}_H = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}_E$  میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی را نشان می‌دهد، و عملگرهای انتگرال تک لایه و دو لایه  $\mathbb{S}_i$  و  $\mathbb{D}_i$  از طریق رابطه زیر تعریف می‌شوند؛

$$\begin{aligned} [\mathbb{S}_i \mathbf{u}](\mathbf{s}) &= \oint_{\partial\Omega} \left[ G_i(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mathbf{u}(\mathbf{s}') + \frac{1}{k_i^2} \nabla G_i(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \nabla' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{s}') \right] dS' \\ [\mathbb{D}_i \mathbf{u}](\mathbf{s}) &= \oint_{\partial\Omega} \left[ \nabla' \times G_i(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \right] \mathbf{u}(\mathbf{s}') dS' \end{aligned} \quad (39.11)$$

بخش ۵.۵ را برای بدست آوردن این روابط ملاحظه کنید. برای بدست آوردن یک رابطه ضعیف در طرح گالرکین، معادلات انتگرال مرزی را با توابع آزمایشی  $\mathcal{W}_{E,H}^e(\mathbf{s})$  ضرب و بر روی مرز انتگرال‌گیری می‌کنیم. علاوه بر این از رابطه زیر نیز استفاده می‌کنیم؛

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{W}_{E,H}^e(\mathbf{s}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times [\dots] dS = - \oint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \times \mathcal{W}_{E,H}^e(\mathbf{s}) \cdot [\dots] dS$$

که برای مخلوط کردن حاصل ضرب خارجی با سطح بیرونی نرمال به تابع آزمایشی است. در مرحله بعد، هم میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی  $\mathbf{u}_{E,H}$  و هم توابع آزمایشی  $\mathcal{W}_{E,H}^e \times \hat{\mathbf{n}}$  را بر اساس عناصر توomas-راویارت بسط می‌دهیم. این می‌دهد:

$$\mathbf{u}_{E,H}^e(\mathbf{s}) = \sum_{\nu} \sum_{ia} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \left( T_{ia,\nu} \|u_{E,H}^e\|_{\nu} \right),$$

و یک عبارت مربوط به  $\mathcal{W}_{E,H}^e$  است. پس از گسته‌سازی در طرح گالرکین، ماتریس‌های تک لایه و دو لایه را خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} \|\mathbb{S}_j\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia} \sum_{i'a'} T_{ia,\nu} T_{i'a',\nu'} \oint_{\mathcal{T}_i} \oint_{\mathcal{T}_{i'}} \\ &\times \left\{ \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{N}_{i'a'}^e(\mathbf{s}') - \frac{[\nabla \cdot \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s})][\nabla' \cdot \mathbf{N}_{i'a'}^e(\mathbf{s}')] }{k_j^2} \right\} G_j(\mathbf{s}, \mathbf{s}') dS dS' \\ \|\mathbb{D}_j\|_{\nu\nu'} &= \sum_{ia} \sum_{i'a'} T_{ia,\nu} T_{i'a',\nu'} \oint_{\mathcal{T}_i} \oint_{\mathcal{T}_{i'}} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \cdot [\nabla' G_j(\mathbf{s}, \mathbf{s}')] \times \mathbf{N}_{i'a'}^e(\mathbf{s}') dS dS' \end{aligned} \quad (40.11)$$

که در آن برای  $\mathbb{S}_j$  یک انتگرال گیری جزء به جزء انجام داده‌ایم تا مشتق از تابع گرین را به عنصر پایه راویارت-توomas، با ناهمنگونی‌های زیر بیاوریم.

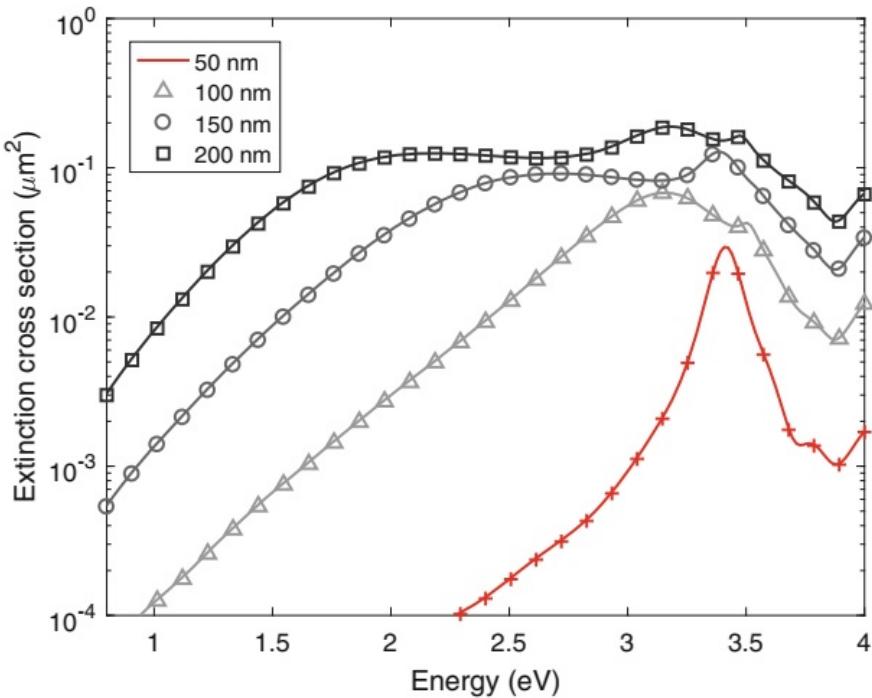
$$\|q_{E,H}^{inc}\|_{\nu} = \sum_{ia} T_{ia,\nu} \oint_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{s}) \end{Bmatrix} dS$$

سپس به معادلات کاری برای رویکرد BEM مبتنی بر میدان می‌رسیم [۱۱۱].

### معادله کار برای میدان پایه BEM (گالرکین)

$$\begin{pmatrix} \|\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2\| & j\omega \|\mu_1 \mathbb{S}_1 + \mu_2 \mathbb{S}_2\| \\ -j\omega \|\epsilon_1 \mathbb{S}_1 + \epsilon_2 \mathbb{S}_2\| & \|\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2\| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|u_E^e\| \\ \|u_H^e\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|q_E^{inc}\| \\ \|q_H^{inc}\| \end{pmatrix} \quad (41.11)$$

پس از عکس کردن معادله ماتریس، بردارهای  $\|u_{E,H}^e\|$  را به دست می‌آوریم که جواب را مشخص می‌کنند. در ارزیابی انتگرال‌ها باید مراقب رفتار واگرایی تابع گرین و مشتق سطحی آن برای  $\mathbf{s}' \rightarrow \mathbf{s}$  باشیم. اگرچه همه انتگرال‌ها به خوبی رفتار می‌کنند، اما باید برای انتگرال گیری‌های روی یک مثلث واحد، و همچنین برای انتگرال گیری‌های روی مثلث‌هایی که یک یال یا راس مشترک دارند، با دقت پیش رفت. این انتگرال‌ها به راحتی با انتگرال گیری تحلیلی [۱۱۲] یا با استفاده از یک ربع عددی کامل، جایی که تبدیل مختصات مناسب اجازه می‌دهد تا مشارکت‌های منفرد را برای انتگرال گیری عددی امکان پذیر کند، حل شوند [۱۱۳، ۱۱۴]. برای جزئیات بیشتر خواننده علاقه‌مند به ادبیات مربوطه مراجعه کنند. نمادهای شکل (۱۰.۱۱) نتایج شبیه سازی سطح مقطع انفراضی را برای نانوکره‌های نقره با اندازه‌های مختلف نشان می‌دهند. میدان‌های



شکل ۱۰.۱۱: شبیه سازی BEM گالرکین برای نانوکره‌های نقره با اندازه‌های مختلف. نتایج عددی (نمادها) را با نتایج تحلیلی نظری می (خطوط جامد) مقایسه، (شکل ۱۰.۱۱)، و تطابق کامل را در سراسر آن پیدا می کنیم. گسسته‌سازی مرزی کره مورد استفاده در شبیه‌سازی در شکل (۶.۱۱) نشان داده شده است.

مماسی بر اساس معادله (۴.۱۱) محاسبه می شوند. برای سطح مقطع انقاراضی بردار پواین‌تینگ را مستقیماً در مرز ذره محاسبه می کنیم. همچنین با نتایج تحلیلی تئوری می (خطوط جامد) مقایسه و تطابق کامل را در سرتاسر منحنی‌ها پیدا می کنیم.

## ۵.۱۱ روش اجزای محدود

روش اجزای محدود (FEM) یک طرح حل کلی برای معادلات ماقسول است و می‌تواند با منابع دلخواه و محیط‌های دی‌الکتریک و مغناطیسی ناهمگن را شامل شود. مشابه روش FDTD، با معادلات کرل شروع می شود، معادله (۱.۱۱)، و آنها را در حوزه زمان یا فرکانس حل می‌کند. بسیاری از ویژگی‌های رویکرد FEM در امتداد خطوط مشابه برای FDTD هستند، به عنوان مثال شرایط مرزی لایه‌های تطبیق کامل است. با این حال، طرح FEM از ابتدا با یک شبکه بدون ساختار شروع می شود که معمولاً از گسسته‌سازی حوزه محاسباتی سه بعدی  $T_i = \Omega$  به چهار وجهی  $T_i$ ، و بنابراین اجازه می‌دهد تا از خطاهای تقریب پلکانی ذاتی FDTD اجتناب شود. علاوه بر این، در FEM می‌توان از توابع پایه با درجه چند جمله‌ای دلخواه استفاده کرد که امکان شبیه‌سازی بسیار دقیق را فراهم می‌کند. ممکن است استدلال شود که FEM همه کاره‌ترین و

دقیق‌ترین رویکرد شبیه‌سازی است که در اینجا در نظر گرفته شده است، اگرچه اجرای آن تا حدودی خواستاری است و نکات فنی زیادی وجود دارد که در بحث مختصر ما به‌آنها پرداخته نخواهد شد.

در ادامه با بحث FEM در حوزه فرکانس شروع می‌کنیم و سپس در مورد انتخاب مناسب عناصر پایه، بهنام عناصر ندلک<sup>۲۳</sup> Nedelec ، فکر می‌کنیم. در نهایت به حل معادلات ماسکول در حوزه زمان در طرح گالرکین ناپیوسته می‌پردازیم.

### ۱.۵.۱۱ روش اجزای محدود در حوزه فرکانس

به‌طور خلاصه، رویکرد FEM اجرای مستقیم طرح گالرکین برای معادلات کامل ماسکول است. با معادلات کرل شروع می‌کنیم و پارامترهای ناهمسانگرد ماده  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{E}$  را برای حالت کلی در نظر می‌گیریم. برای ارسال این معادلات به‌طرح گالرکین، باید عناصر پایه را مشخص کنیم. ساده لوحانه، می‌توانستیم میدان‌های الکترومغناطیسی را به‌رئوس چهار وجهی‌ها اختصاص دهیم و درون‌یابی خطی را درون عناصر انجام دهیم. متأسفانه معلوم می‌شود که این پیاده‌سازی گاهی منجر به‌همگرایی به‌جواب‌های اشتباه یا مودهای جعلی<sup>۲۴</sup> می‌شود [۱۱۵، ۱۱۶]. این شکست به‌عدم اعمال محدودیت میدان‌های بدون واگرایی نسبت داده می‌شود. در مقاله مروری جامع هستیون<sup>۲۵</sup> بحث شده است که استفاده از توابع پایه برداری به‌جای آن سودمند است [۱۱۶].

انگیزه اصلی برای جستجوی توابع پایه برداری، مشاهده این است که شرایط مرزی معادلات ماسکول بردار هستند، یعنی باید به‌دبیال شکل پذیری و مطابقت گسته‌سازی استفاده از توابع پایه برداری طبیعی باشیم. چنین توابع پایه، که اغلب به‌عنوان عناصر نگاشت با کرل شناخته می‌شوند، باید ویژگی‌های اساسی جواب‌های معادلات ماسکول را برآورده کنند، به‌عنوان مثال، پیوستگی مماسی جواب را پشتیبانی کند. این امکان تحمیل پیوستگی مماسی بین عناصر با مواد مختلف و همچنین تحمیل شرایط مرزی به‌روش طبیعی را فراهم می‌کند. علاوه بر این، استفاده از چنین عناصری عدم وجود مودهای جعلی را در طرح‌های اجزای محدود حوزه فرکانس تضمین می‌کند.

یک انتخاب معمول برای توابع پایه برداری، عناصر ندلک (r)  $N_{ia}^e$  هستند که در زیر با جزئیات بیشتر مورد بحث قرار خواهند گرفت. برای بحث بعدی، دانستن ویژگی‌های زیر که برای ساده‌ترین نوع عناصر ندلک اعمال می‌شود، کافی است (عناصر لیه خطی):

- راه حل تقریبی با اتصال مقادیر میدان به‌لبه‌های چهار وجهی که شبکه بدون ساختار را تشکیل می‌دهند به‌دست می‌آید.
- عناصر شکل ندلک (r)  $N_{ia}^e$  جواب را از لبه‌ها به‌داخل چهار وجهی درون‌یابی می‌کنند.
- هنگامی که دو چهار وجهی یک وجه مشترک دارند و مقادیر میدان یکسانی به‌لبه‌های مشترک دو چهار وجهی متصل می‌شوند، تضمین می‌شود که اجزای میدان مماسی در وجه مشترک پیوسته هستند.

<sup>۲۳</sup>Florent Nédélec

<sup>۲۴</sup>Spurious Modes

<sup>۲۵</sup>Hesthaven

از طریق آخرین ویژگی، شرایط مرزی میدان‌های مماسی پیوسته در سطح مشترک بین دو منطقه به طور خودکار برآورده می‌شود. در رویکرد FEM درجه‌های آزادی جهانی با ضرایب میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته به زمان  $(t)$  در لبه‌های چهار وجهی وابسته است. اکنون توابع پایه را معرفی می‌کنیم؛

### معادله پایه برای رویگرد FEM (گالرکین)

$$\phi_\nu(\mathbf{r}) = \sum_{ia} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) T_{ia,\nu}, \quad (42.11)$$

از لبه‌های منحصر به فرد  $\nu$  شبکه به لبه‌های محلی یک چهار وجهی  $T_i$  که حاوی لبه  $\nu$  هستند، انتقال دهید و با استفاده از توابع شکل Nedelec  $\mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r})$  درون‌یابی را انجام دهید.

جواب تقریبی  $\mathbf{E}^e$  بقرار زیر است؛

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{ia} \sum_\nu \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \left( T_{ia} \|u_E^e(t)\| \right), \quad (43.11)$$

با یک عبارت مربوط به میدان مغناطیسی. در اینجا  $\mathbf{N}_{ia}^e$  عناصر ندلک هستند که فرض می‌شود دارای پشتیبانی محلی هستند، به این معنی که آنها در خارج از چهار وجهی  $T_i$  قرار دارند. با توضیح شفاهی، جمله داخل پرانتز درجه‌های آزادی جهانی  $\|u_{E,H}^e(t)\|$  (تعریف شده در لبه‌های منحصر به فرد شبکه) را به لبه‌های عنصر محلی  $T_i$  می‌آورد، جایی که  $T_{ia,\nu}$  ماتریس انتقال است. عناصر پایه  $\mathbf{N}_{ia}^e$  درون هر چهار وجهی درون‌یابی انجام می‌دهند. قرار دادن این در قانون فارادی سپس می‌دهد؛

$$\bar{\mu} \cdot \sum_{a'\nu} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \left( T_{ia',\nu} \|\partial_t u_H^e(t)\|_\nu \right) = - \sum_{a'\nu} \nabla \times \mathbf{N}_{ia'}^e(\mathbf{r}) \left( T_{ia',\nu} \|u_E^e(t)\|_\nu \right),$$

که در آن فرض می‌کنیم که  $\mathbf{r}$  در داخل  $T_i$  قرار دارد. عبارتی مشابه را می‌توان برای قانون آمپر به دست آورد. این عبارات را با توابع آزمایش ضرب کرده

$$\mathbf{W}_{E,H}^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{ia} \sum_\nu \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \left( T_{ia,\nu} \|\mathcal{W}_{E,H}^e(t)\|_\nu \right),$$

و سپس بر روی حجم چهار وجهی‌ها انتگرال‌گیری می‌کنیم. به دلیل پشتیبانی محلی از توابع پایه، فقط باید انتگرال‌هایی را در نظر بگیریم که هر دو تابع شکل در داخل یک چهار وجهی قرار دارند. برای ساده کردن بیان نهایی، ماتریس‌های جرمی<sup>۲۶</sup> را معرفی کرده

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{ia,i'a'}^\epsilon \\ \mathbf{M}_{ia,i'a'}^\mu \end{Bmatrix} = \int_{T_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{\mu} \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{N}_{ia'}^e(\mathbf{r}) d^3 r \quad (44.11)$$

<sup>۲۶</sup>Mass Matrices

و همراه با ماتریس سختی  $S$  و ناهمگنی  $J$ ، از طریق رابطه زیر تعریف می‌کنیم :

$$\begin{aligned} S_{ia,i'a'} &= \int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{N}_{ia'}^e(\mathbf{r}) d^3r \\ J_{ia}(t) &= \int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) d^3r . \end{aligned} \quad (45.11)$$

با این، معادلات کرل ماکسول خواهد شد:

$$\sum_{i,aa'} \sum_{\nu'} T_{ia,\nu} T_{ia',\nu'} \left( \mathbf{M}_{ia,ia'}^\mu \|\partial_t u_H^e(t)\|_{\nu'} + \mathbf{S}_{ia,ia'} \|u_E^e(t)\|_{\nu'} \right) = 0$$

$$\sum_{i,aa'} \sum_{\nu'} T_{ia,\nu} T_{ia',\nu'} \left( \mathbf{M}_{ia,ia'}^\epsilon \|\partial_t u_H^e(t)\|_{\nu'} - \mathbf{S}_{ia,ia'} \|u_H^e(t)\|_{\nu'} \right) = - \sum_{ia} T_{ia,\nu} J_{ia}(t)$$

توابع کار رویکر FEM بطور مستقیم از رابطه زیر بدست می‌آید:

### معادله کار رویکرد FEM

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}^\mu\| \cdot \|\partial_t u_H^e(t)\| + \|\mathbf{S}\| \cdot \|u_E^e(t)\| &= 0 \\ \|\mathbf{M}^\epsilon\| \cdot \|\partial_t u_H^e(t)\| - \|\mathbf{S}\| \cdot \|u_H^e(t)\| &= -\|\mathbf{J}(t)\| , \end{aligned} \quad (46.11)$$

که در آن رابطه زیر را

$$\|A\|_{\nu\nu'} = \sum_{i,aa'} T_{ia,\nu} T_{ia',\nu'} A_{ia,ia'}$$

برای ماتریس‌های جرم و سختی، همراه با  $\|J\|_\nu = \sum_{ia} T_{ia,\nu} J_{ia}$  معرفی می‌کنیم. در حوزه فرکانس عملگر مشتق زمانی باید با  $\omega$  جایگزین شود و ضرایب میدان الکترومغناطیسی را می‌توان از طریق عکس ماتریس به دست آورد. به دلیل پشتیبانی محلی از توابع پایه، ماتریس‌های درون رویکرد FEM <sup>۲۷</sup> هستند، که می‌توانند برای حل سریع و کارآمد معادلات کاری مورد استفاده قرار گیرند.

## ۲.۵.۱۱ عناصر ندلک Nedelec

عناصر پایه طرح FEM معمولاً به عنوان عناصر لبه، عناصر ندلک، شکل‌های ویتنی <sup>۲۸</sup> یا عناصر بردار نگاشت با کرل شناخته می‌شوند <sup>۲۹</sup>-<sup>۳۰</sup>. در ادامه به طور خلاصه ساده‌ترین شکل آن را مورد بحث قرار می‌دهیم، که اجزه می‌دهد یک میدان برداری  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$  را در یک

<sup>۲۷</sup>Sparse

<sup>۲۸</sup>Whitney

چهار وجهی معین نشان دهیم، و برای یک بحث کامل و همچنین برای استخراج عناصر پایه با مراتب بالاتر چند جمله‌ای به‌ادبیات تخصصی مراجعه شود. در یک چهار وجهی  $T$  مفروض، تابع برداری بصورت زیر داده می‌شود ؟

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^6 \mathbf{N}_a^e(\mathbf{r}) u_a^e ,$$

که در آن  $\mathbf{N}_a^e$  عناصر ندیلک و  $u_a^e$  ضرایب میدان برداری تقریبی داده شده در شش یال  $a$  چهار وجهی هستند. دستور تهیه عناصر شکل بهصورت زیر اقدام خواهد شد:

- فرض کنید  $\mathbf{r}_k$  بیانگر چهار راس چهار وجهی باشد.

- ما چهار تابع پایه خطی  $\lambda_k(\mathbf{r}) = a_k + b_kx + c_ky + d_kz$  را معرفی می‌کنیم، که در آن ضرایب به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در یک راس معین یک و در غیر این صورت صفر، مربوط به  $\lambda_k(\mathbf{r}_{k'}) = \delta_{kk'}$  هستند.

- هر یال  $\mathcal{E}_a$  از راس  $\mathbf{r}_{a1}$  به‌راس  $\mathbf{r}_{a2}$  درجهتی هدایت می‌شود که باید یک بار در ابتدا مشخص شود.

با این کار، عناصر ندیلک با کمترین مرتبه تعریف می‌شوند؛

### نگاشت کرل عناصر ندیلک

$$\mathbf{N}_a^e(\mathbf{r}) = [\nabla \lambda_{a1}(\mathbf{r})] \lambda_{a2}(\mathbf{r}) - \lambda_{a1}(\mathbf{r}) [\nabla \lambda_{a2}(\mathbf{r})] \quad (47.11)$$

برای یک میدان برداری معین  $(\mathbf{r}) \mathbf{u}$  ضرایب میدان  $u_a^e$  در لبه‌ها را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد؛

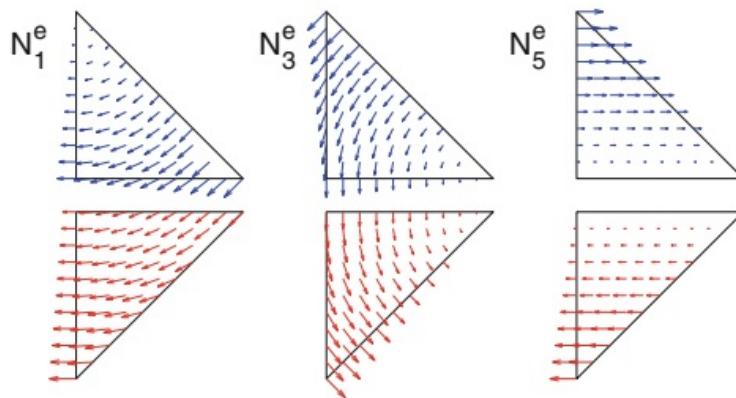
$$u_a^e = \int_{\mathcal{E}_a} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_a ds ,$$

که در آن  $\tau_a$  بردار واحد لبه  $\mathcal{E}_a$  و  $ds$  انتگرال را در امتداد لبه می‌گیرد.

**واحد چهار وجهی** به عنوان نمونه نمایشی، چهار وجهی واحد را با رئوس  $\mathbf{r}_1 = (0, 0, \pm 1)$ ،  $\mathbf{r}_2 = (1, 0, 0)$ ،  $\mathbf{r}_3 = (0, 1, 0)$  و  $\mathbf{r}_4 = (0, 0, 0)$  در نظر می‌گیریم. ضرایب توابع پایه خطی را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد؛

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

این ما را به توابع پایه خطی هدایت می‌کند



شکل ۱۱.۱۱: عناصر پایه ندلک در صفحه  $xz$  برای چهار وجهی واحد که در متن مورد بحث قرار گرفت. عناصر پایه پیوستگی مماسی میدان‌های برداری را تضمین می‌کنند. فقط عناصری را نشان می‌دهیم که در صفحه داده شده صفر نیستند.

$$\lambda_1(\mathbf{r}) = 1 - x - y - z, \quad \lambda_2(\mathbf{r}) = x, \quad \lambda_3(\mathbf{r}) = y, \quad \lambda_4(\mathbf{r}) = \pm z$$

و مشتق آنها خواهد شد:

$$\nabla \lambda_1(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}, \quad \nabla \lambda_2(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}}, \quad \nabla \lambda_3(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}}, \quad \nabla \lambda_4(\mathbf{r}) = \pm \hat{\mathbf{z}},$$

بنابراین، توابع شکل ندلک خواهد شد:

$$N_1^e(\mathbf{r}) = -(1 - y - z)\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{z}}, \quad \dots \quad \text{یال } \mathcal{E}_1 \text{ از } \mathbf{r}_1 \text{ تا } \mathbf{r}_2$$

$$N_2^e(\mathbf{r}) = -y\hat{\mathbf{x}} - (1 - x - z)\hat{\mathbf{y}} - y\hat{\mathbf{z}}, \quad \dots \quad \text{یال } \mathcal{E}_2 \text{ از } \mathbf{r}_1 \text{ تا } \mathbf{r}_3$$

$$N_3^e(\mathbf{r}) = \mp z\hat{\mathbf{x}} \mp z\hat{\mathbf{y}} \mp (1 - x - y)\hat{\mathbf{z}}, \quad \dots \quad \text{یال } \mathcal{E}_3 \text{ از } \mathbf{r}_1 \text{ تا } \mathbf{r}_4$$

$$N_4^e(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}} \quad \dots \quad \text{یال } \mathcal{E}_4 \text{ از } \mathbf{r}_2 \text{ تا } \mathbf{r}_3$$

$$N_5^e(\mathbf{r}) = \pm z\hat{\mathbf{x}} \mp x\hat{\mathbf{z}} \quad \dots \quad \text{یال } \mathcal{E}_5 \text{ از } \mathbf{r}_2 \text{ تا } \mathbf{r}_4$$

$$N_6^e(\mathbf{r}) = \pm z\hat{\mathbf{y}} \mp y\hat{\mathbf{z}} \quad \dots \quad \text{یال } \mathcal{E}_6 \text{ از } \mathbf{r}_3 \text{ تا } \mathbf{r}_4 \quad (48.11)$$

برای نمایش گرافیکی به شکل (۱۱.۱۱) مراجعه کنید. در ادامه دو چهار وجهی را در نظر می‌گیریم که  $\mathbf{r}_4$  در بالا یا پایین صفحه  $xy$  قرار دارد. آنها یک وجه مشترک دارند که توسط رؤس  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  تشکیل شده است. همانطور که می‌توان به راحتی از عناصر ندلک ارائه شده در معادله (۴۸.۱۱) استنباط کرد، مولفه‌های بردار مماسی  $N_a^e$  در صفحه  $z = 0$  برای دو چهار وجهی یکسان هستند، و با فرض در مورد این عناصر پایه نگاشت با کرل موافقت دارد. در اینجا این اثبات را که این برای چهار

وجهی‌های دلخواه نیز صادق است را حذف می‌کنیم

محاسبه  $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N}_a^e \hat{\mathbf{n}}$  برای چهار وجهی زیر صفحه  $xy$  و برای وجهی که در صفحه  $xy$  قرار دارد، را ادامه می‌دهیم. بدینهی است که بردار وجه عمودی که بهسمت بیرون چهار وجهی قرار دارد  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{n}}$  است. ، و از عملیات جبری ساده حاصل می‌شود؛

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N}_1^e = x\hat{\mathbf{x}} - (1-y)\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N}_2^e = (1-x)\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{N}_4^e = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}},$$

که در آن همه ترکیب‌های دیگر در  $z = 0$  صفر می‌دهند.

جالب است که این نتیجه را با عناصر پایه راویارت-توماس از معادله (۴۶.۱۱) مقایسه کنیم. برای رویکرد BEM با استفاده از مثلث واحد در صفحه  $xy$ . جدا از برخی از ثابت‌های نرم‌الیزه که در اینجا به آنها علاقه‌ای نخواهیم داشت، معلوم می‌شود که  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_a^e \hat{\mathbf{n}}$  دقیقاً منطبق بر عناصر راویارت-توماس است که روی صورت با سطح بیرونی نرمال  $\hat{\mathbf{n}}$  داده شده است.

این فقط یک تصادف خوش شانس نیست، و در واقع می‌توان یک قانون ساخت برای عناصر راویارت-توماس ابداع کرد که شباهت زیادی به عناصر ندلک دارد. در نتیجه این رابطه نزدیک بین عناصر پایه ندلک و راویارت-توماس، تزویج موثر شبیه‌سازی‌های BEM و FEM امکان‌پذیر می‌شود. این را می‌توان به آسانی در رابطه‌بندی متغیر رویکرد گالرکین انجام داد، که امکان تعامل هر دو رویکرد را در یک سطح فراهم می‌کند. در اینجا بیشتر در مورد این موضوع تحقیق نمی‌کنیم.

### ۳.۵.۱۱ ناپیوستگی طرح گالرکین

در اصل، معادلات کاری (۴۶.۱۱) رویکرد FEM را می‌توان در حوزه زمان نیز حل کرد. برخلاف رویکرد FDTD، به تفاضل‌های محدود برای گام‌های زمانی ملزم نیستیم، اما می‌توانیم به طرح‌های اصلاح‌شده‌تری مانند رانگ-کوتا<sup>۲۹</sup> متولّش‌شویم. با این حال، هنگام حل معادلات (۴۶.۱۱) در حوزه زمان، از ماتریس‌های جرمی بزرگ، هرچند نُنک  $\|M\|$  رنج می‌بریم که باید در هر مرحله زمانی معکوس شوند. این می‌تواند شبیه‌سازی را بسیار کند کند.

طرح گالرکین ناپیوسته رویکردی است که از عکس چنین ماتریس‌های جرمی جلوگیری می‌کند و امکان شبیه‌سازی FEM در حوزه زمان را سریع و امکان پذیر می‌کند. به عنوان اولین قدم، تعداد درجه‌های آزادی جهانی را بزرگ می‌کنیم و توابع پایه جدأگانه  $(\mathbf{r})_{ia}$  را برای هر چهار وجهی  $T_i$  معرفی می‌کنیم.

توابع پایه رویکر FEM (ناپیوستگی گالرکین)

$$\phi_{ia}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in T_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۴۹.۱۱)$$

توابع شکل ندلک  $(\mathbf{r})_{ia}$  برای یال‌های چهار وجهی  $T_i$

<sup>۲۹</sup>Runge-Kutta

سپس جواب تقریبی  $E^e$  خواهد بود؛

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{ia} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \|u_E^e(t)\|_{ia} , \quad (50.11)$$

که با یک عبارت مربوط به میدان مغناطیسی است. در نگاه اول این ایده خیلی خوبی به نظر نمی‌رسد. اولاً، فضای درجه‌های آزادی جهانی را به میزان قابل توجهی افزایش داده‌ایم. ثانیاً، توابع پایه فقط به صورت محلی تعریف می‌شوند و توابع در عناصر همسایه به طور کلی با یکدیگر ارتباط برقرار نمی‌کنند. بنابراین، دیگر تضمین نمی‌شود که میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی در هنگام عبور از یک چهار وجهی به چهار وجهی همسایه پیوسته باشند. این ناپیوستگی احتمالی نام این رویکرد را به نام طرح گالرکین ناپیوسته داده است. با این حال، با کمی کار اضافی می‌توانیم دوباره پیوستگی را اعمال کنیم. برای نشان دادن این موضوع، معادله (۵۰.۱۱) را وارد قانون فارادی کرده، با توابع آزمایشی  $W_{E,H}^e$  ضرب و سپس روی حجم  $\mathcal{T}_i$  انتگرال گیری می‌کنیم تا در نهایت به رابطه زیر آن میرسیم؛

$$\int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \cdot \sum_{a'} \left[ \bar{\mu} \cdot \mathbf{N}_{ia'}^e(\mathbf{r}) \|\partial_t u_H^e(t)\|_{ia'} + \nabla \times \mathbf{N}_{ia'}^e(\mathbf{r}) \|\partial_t u_E^e(t)\|_{ia'} \right] d^3 r = 0$$

این عبارت شبیه معادلات کاری رویکرد FEM، معادله (۴۶.۱۱) است. بدیهی است که دومین عبارت در برآکتها، عبارت کمل است که از طریق مشتق‌های فضایی به عناصر همسایه تزویج می‌شود. در طرح FEM شرح داده شده در بخش ۱۰.۵.۱۱ این تزویج و پیوستگی میدان‌های الکترومغناطیسی مماسی حاصل از آن (که از معادلات ماقسول به دست می‌آید) را از طریق توابع پایه معادله (۴۲.۱۱) که در چنین پیوستگی از ابتدا ساخته‌ایم، محاسبه کردیم. برای توابع پایه محلی معادله (۴۹.۱۱) ما باید متفاوت پیش برویم. ابتدا انتگرال گیری را با قسمت‌هایی از عبارت دوم در پرانتر انجام می‌دهیم،

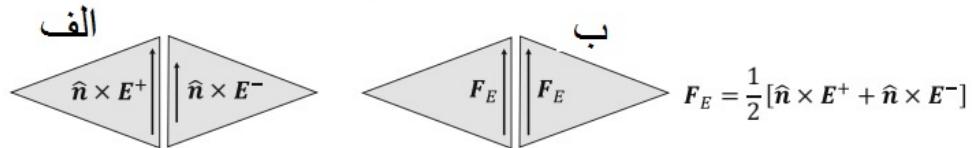
$$\int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e \cdot \nabla \times \mathbf{N}_{ia'}^e d^3 r = \oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e \times \mathbf{N}_{ia'}^e \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{\mathcal{T}_i} \nabla \times \mathbf{N}_{ia}^e \cdot \mathbf{N}_{ia'}^e d^3 r .$$

در اینجا ما عبارت را با  $\nabla \cdot \mathbf{N}_{ia}^e \times \mathbf{N}_{ia'}^e$  با استفاده از قضیه گوس به یک انتگرال مرزی تبدیل کرده‌ایم که  $\hat{\mathbf{n}}$  نرمال بر سطح بیرونی چهار وجهی  $\mathcal{T}_i$  است. با انجام جایگشت دوری<sup>۳۰</sup> در حاصل ضرب سه‌گانه، برای جمله مرزی بدست می‌آوریم؛

$$- \oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \cdot \sum_{a'} \left( \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_{ia'}^e(\mathbf{s}) \|u_E^e(t)\|_{ia'} \right) dS , \quad (51.11)$$

که در آن برای وضوح دوباره ضرایب میدان  $\|u_E^e(t)\|$  را معرفی کرده و بر روی  $a'$  جمع کرده ایم. بنابراین اصطلاح داخل پرانتر را می‌توان به صورت  $\mathbf{E}^e(s, t) \times \hat{\mathbf{n}}$  تفسیر کرد. در اینجا ترفند جادویی طرح گالرکین ناپیوسته می‌آید: به دلیل پیوستگی مماسی میدان‌های الکترومغناطیسی، می‌توانیم سهم میدان مماسی عناصر همسایه را در اصطلاح مرزی با هم ترکیب، در نتیجه این عناصر را تزویج کرده و پیوستگی مولفه‌های میدان مماسی، شکل (۱۲.۱۱)، را مجددًا اعمال کنیم.

<sup>۳۰</sup> Cyclic Permutation



شکل ۱۲.۱۱: شماتیک‌های طرح گالرکین ناپیوسته. (الف) ما با درجه‌های آزادی محلی که برای هر عنصر حجمی به‌طور جداگانه تعریف شده است شروع می‌کنیم. بهمین دلیل، شار مماسی در فصل مشترک بین عناصر همسایه می‌تواند ناپیوسته باشد. (ب) برای اطمینان از پیوستگی مماسی، شارهای محلی را با استفاده از طرح‌های شار مرکزی یا خلاف جهت مخلوط می‌کنیم، در نتیجه عناصر را در ماتریس سختی  $\|S\|$  تزویج کرده اما بلوك ماتریس‌های جرمی  $\|M^\epsilon\|$ ,  $\|M^\mu\|$  (که باید قطری شوند) را ترک می‌کنیم.

اجازه دهید برای لحظه‌ای این سؤال را به تعویق بیندازیم که چگونه عبارت تزویجی را واقعاً انتخاب و برای عبارت داخل پرانتر معادله (۵۱.۱۱) یک جمله شار  $\mathbf{F}(\mathbf{s}, t)$  که فقط به مولفه میدان مماسی بستگی دارد، معرفی کنیم. برای حل دقیق این عبارت باید با شار عناصر همسایه برابر باشد، بنابراین درجه‌هایی از آزادی در انتخاب آن وجود دارد. سپس برای قانون فارادی خواهیم داشت؛

$$\int_{\mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{r}) \cdot [\partial_t \mathbf{H}^e(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \mathbf{E}^e(\mathbf{r}, t)] d^3 r = \oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{F}_E(\mathbf{s}, t) dS .$$

در قیاس با طرح گالرکین که قبلًا مورد بحث قرار گرفت، ماتریس‌های جرم و سختی معادله‌ها (۴۴.۱۱) و (۴۵.۱۱) را معرفی کرده و برای معادلات کرل بدست می‌آوریم؛

$$\sum_{a'} \left( M_{ia, ia'}^\mu \| \partial_t u_H^e(t) \|_{ia'} + S_{ia, ia'} \| \partial_t u_E^e(t) \|_{ia'} \right) = \oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e \cdot \mathbf{F}_E dS$$

$$\sum_{a'} \left( M_{ia, ia'}^\epsilon \| \partial_t u_E^e(t) \|_{ia'} - S_{ia, ia'} \| \partial_t u_H^e(t) \|_{ia'} \right) = \oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e \cdot \mathbf{F}_H dS - \mathbf{J}_{ia}(t) .$$

جمله‌های شار الکتریکی و مغناطیسی در سمت راست معادلات را می‌توان بر اساس همان مبنایی که برای میدان‌های الکترومغناطیسی استفاده می‌شود، بسط داد. این می‌دهد؛

$$\oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e \cdot \mathbf{F}_{E, H} dS = \oint_{\partial \mathcal{T}_i} \mathbf{N}_{ia}^e \cdot \sum_{a'} \mathbf{N}_{ia}^e \| F_{E, H}^e \|_{ia'} dS = \sum_{a'} \mathcal{F}_{ia, ia'} \| F_{E, H}^e \|_{ia'}$$

که در آن  $\mathcal{F}$  یک نماد مختصر برای انتگرال مرزی بر روی توابع پایه ندلک است. در ادامه از  $\|A\|_{ia, ia'} = A_{ia, ia'}$  برای ماتریس‌های طرح گالرکین ناپیوسته استفاده می‌کنیم. سپس معادلات کاری برای رویکرد FEM وابسته به زمان خواهد بود؛

### معادله کار رویکرد FEM (ناپیوستگی گالرکین)

$$\|M^\mu\| \cdot \|\partial_t u_H^e(t)\| + \|S\| \cdot \|u_E^e(t)\| = \|\mathcal{F}\| \cdot \|F_E^e(t)\| \quad (52.11)$$

$$\|M^\epsilon\| \cdot \|\partial_t u_E^e(t)\| - \|S\| \cdot \|u_H^e(t)\| = \|\mathcal{F}\| \cdot \|F_H^e(t)\| - \|J(t)\|$$

هنوز نیاز داریم که ماتریس‌های جرمی را معکوس کنیم، که با این حال، اکنون به‌شکل توده قطری<sup>۳۱</sup> هستند و به‌ماتریس‌های فرعی به‌ترتیب تعداد عناصر پایه ندلک در هر چهار وجهی تقسیم می‌شوند. قطری کردن این زیر ماتریس‌ها سریع است و دیگر یک گلوگاه بزرگ برای حل معادلات FEM وابسته به‌زمان ایجاد نمی‌کند.

در نهایت به‌طور خلاصه در مورد انتخاب مناسب جمله‌های شار  $\mathbf{F}_{E,H}$  توضیح می‌دهیم. فرض کنید  $\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-$  میدان‌های الکترومغناطیسی در چهار وجهی  $\tau_i$  و  $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$  میدان‌های عناصر همسایه را نشان می‌دهد. سپس در رویکرد شار متمرکز تنظیم کردیم؛

$$\mathbf{F}_E(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}^+(\mathbf{s}) + \mathbf{E}^-(\mathbf{s})], \quad \mathbf{F}_H(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}^+(\mathbf{s}) + \mathbf{H}^-(\mathbf{s})]$$

گزینه‌های دیگری مانند طرح موافق جهت شار وجود دارد که برای آن خوانندگان علاقه‌مند را به‌ادبیات تخصصی‌تر ارجاع می‌دهیم [۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۸]. به‌طور کلی، پایداری و همگرایی رویکرد به‌طور قابل توجهی به‌طرح شار انتخاب شده بستگی دارد.

### ۴.۵.۱۱ جزئیات روش اجرای مرزی پتانسیل

در این بخش جزئیاتی را برای به‌دست آوردن معادلات کاری روش اجزای مرزی مبتنی بر پتانسیل ارائه می‌دهیم. از عبارات معادله (۲۳.۱۱) شروع می‌کنیم. برای پتانسیل‌های اسکالر و برداری داریم؛

$$V_j(\mathbf{r}) = V_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \sigma_j(\mathbf{s}') dS' \quad (53.11)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_j(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{h}_j(\mathbf{s}') dS'$$

اگر در دو طرف معادلات مشتق‌های  $\nabla$  را بگیریم، به‌دست می‌آید؛

$$\partial_n V_j(\mathbf{r}) = \partial_n V_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \sigma_j(\mathbf{s}') dS' \quad (54.11)$$

$$\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j(\mathbf{r}) = \partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n G_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{h}_j(\mathbf{s}') dS'$$

سپس حد  $s \rightarrow r$  را در نظر می‌گیریم. این حد را می‌توان با خیال راحت در معادله (۵۳.۱۱) انجام داد که در آن به‌سادگی باید  $r$  را با  $s$  جایگزین کنیم. در معادله (۵۴.۱۱) روش محدود

<sup>۳۱</sup> Block-Diagonal

کردن باید با دقت بیشتری انجام شود، همانطور که قبلاً برای شرط نیومن در صفحه‌های قبل بحث شد، به روابط زیر میرسیم؛

$$\partial_n V_j(\mathbf{s}) = \partial_n V_j^{inc}(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n F_j(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \sigma_j(\mathbf{s}') dS' \pm \frac{1}{2} \sigma_j(\mathbf{s}) \quad (55.11)$$

$$\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j(\mathbf{s}) = \partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}(\mathbf{s}) + \oint_{\partial\Omega} \partial_n F_j(\mathbf{r}, \mathbf{s}') \mathbf{h}_j(\mathbf{s}') dS' \pm \frac{1}{2} \mathbf{h}_j(\mathbf{s})$$

در اینجا علامت بالا یا پایین باید به ترتیب برای پتانسیل‌های ذره در داخل یا خارج انتخاب شود و  $F_j = \partial_n G_j$  مشتق سطحی تابع گرین است. در رویکرد روش اجزای مرزی، مرز را با عناصری با اندازه محدود تقریب می‌زنیم و پتانسیل‌های مرکز را در نظر می‌گیریم. از این عناصر مرزی با این کار پتانسیل معادله (۵۲.۱۱) را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \|V_j\| &= \|V_j^{inc}\| + \|\mathcal{G}_j\| \cdot \|\sigma_j\| \\ \|\tilde{\mathbf{A}}_j\| &= \|\tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}\| + \|\mathcal{G}_j\| \cdot \|\mathbf{h}_j\| \end{aligned} \quad (56.11)$$

که در آن  $\|\mathcal{G}_j\|_{ii'} = \|G_j\|_{ii'} \mathcal{A}_{ii'}$  عناصر ماتریسی تابع گرین گستته است (برای جزئیات به تمرين ۵.۱۱ مراجعه کنید). به طور مشابه، برای مشتقات سطحی معادله (۵۵.۱۱) بدست می‌آوریم؛

$$\begin{aligned} \|\partial_n V_j\| &= \|\partial_n V_j^{inc}\| + \|\mathcal{H}_j\| \cdot \|\sigma_j\| \\ \|\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j\| &= \|\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_j^{inc}\| + \|\mathcal{H}_j\| \cdot \|\mathbf{h}_j\| \end{aligned} \quad (57.11)$$

در اینجا  $\|\mathcal{F}_j\|_{ii'} = \|F_j\|_{ii'} \mathcal{A}_{ii'}$  و  $\|\mathcal{H}_{1,2}\| = \|\mathcal{F}_{1,2}\|_{ii'} = \|\mathcal{F}_{1,2} \pm \frac{1}{2} \mathbb{I}\|$  عناصر ماتریس برای مشتقات سطحی تابع گرین هستند. سپس از شرایط مرزی معادلات ماکسول برای محاسبه بار سطحی مجھول و توزیع جریان استفاده می‌کنیم. در استخراج معادلات کاری، نماد صریح  $\|\cdot\|$  را برای ماتریس‌های گستته در رویکرد BEM حذف می‌کنیم.

- پیوستگی پتانسیل‌ها** ابتدا فرض می‌کنیم که پتانسیل‌های اسکالار و برداری در مرز ذره پیوسته هستند. با این کار تضمین می‌شود که مولفه‌های مماسی  $E$  و جزء عمودی  $B$  نیز پیوسته باشند. از معادله (۵۶.۱۱) دریافت می‌کنیم؛

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 \cdot \sigma_1 &= \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 + \delta V^{inc}, & \delta V^{inc} &= V_2^{inc} - V_1^{inc} \\ \mathcal{G}_1 \cdot \mathbf{h}_1 &= \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc}, & \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc} &= \tilde{\mathbf{A}}_2^{inc} - \tilde{\mathbf{A}}_1^{inc} \end{aligned} \quad (58.11)$$

- پیوستگی جابجایی دیالکتریک** علاوه بر این، مولفه عمودی جابجایی دیالکتریک در مرز ذرات پیوسته است؛

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_i = \epsilon_i \left( -jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_i - \partial_n V_i \right)$$

در این نوع گستته‌سازی، این پیوستگی به معنای (ضریب  $\epsilon_0$  در هر دو طرف معادله را حذف می‌کنیم) بصورت زیر ترجمه می‌شود.

$$\begin{aligned} \kappa_1 \left\{ -jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}_1^{inc} + \mathcal{G}_1 \cdot \mathbf{h}_1) - (\partial_n V_1^{inc} + \mathcal{H}_1 \cdot \sigma_1) \right\} = \\ \kappa_2 \left\{ -jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}_2^{inc} + \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2) - (\partial_n V_2^{inc} + \mathcal{H}_2 \cdot \sigma_2) \right\} \end{aligned} \quad (۵۹.۱۱)$$

• **پیوستگی شرط معیار لورنتس** در نهایت از پیوستگی رابطه زیر را بهره برداری می‌کنیم؛

$$\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_i + jk_0 \kappa_i V_i, \quad (۶۰.۱۱)$$

که می‌توان از شرط معیار لورنتس معادله (۲۲.۱۱) را، همانطور که در تمرین ۶.۱۱ نشان داده شده است، بدست آورد. در شکل گستته‌سازی شده، خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{\mathbf{A}}_1^{inc} + \mathcal{H}_1 \cdot \mathbf{h}_1 + jk_0 \kappa_1 (V_1^{inc} + \mathcal{G}_1 \cdot \sigma_1) \\ = \partial_n \tilde{\mathbf{A}}_2^{inc} + \mathcal{H}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + jk_0 \kappa_2 (V_2^{inc} + \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2) \end{aligned} \quad (۶۱.۱۱)$$

معادلات (۵۸.۱۱)-(۶۱.۱۱) هشت معادله برای مجهولات  $\sigma_j, \mathbf{h}_j$  هستند که می‌توانند به‌شکل بازنویسی شوند.

$$\mathcal{G}_1 \cdot \sigma_1 - \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 = \delta V^{inc} \quad (۶۲.۱۱)$$

$$\mathcal{G}_1 \cdot \mathbf{h}_1 - \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 = \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc} \quad (۶۲.۱۱)$$

$$\kappa_1 \mathcal{H}_1 \cdot \sigma_1 - \kappa_2 \mathcal{H}_2 \cdot \sigma_2 + jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left\{ \kappa_1 \mathcal{G}_1 \cdot \mathbf{h}_1 - \kappa_2 \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 \right\} = D^e \quad (۶۲.۱۱)$$

$$\mathcal{H}_1 \cdot \mathbf{h}_1 - \mathcal{H}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left\{ \kappa_1 \mathcal{G}_1 \cdot \sigma_1 - \kappa_2 \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 \right\} = \alpha, \quad (۶۲.۱۱)$$

با خلاصه سازی؛

$$\begin{aligned} D^e &= (\kappa_2 \partial_n V_2^{inc} - \kappa_1 \partial_n V_1^{inc}) + jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\kappa_2 \tilde{\mathbf{A}}_2^{inc} - \tilde{\mathbf{A}}_1^{inc}) \\ \alpha &= -jk_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\kappa_2 V_2^{inc} - \kappa_1 V_1^{inc}) + (\partial_n \tilde{\mathbf{A}}_2^{inc} - \partial_n \tilde{\mathbf{A}}_1^{inc}) \end{aligned}$$

در ادامه به‌طور خلاصه بحث می‌کنیم که چگونه این مجموعه‌ای از معادلات را می‌توان به‌شیوه‌ای کارآمد حل کرد. ابتدا  $\sigma_1, \mathbf{h}_1$  را با استفاده از دو معادله اول حذف کرده و به‌عبارت زیر کار می‌بریم؛

$$\mathcal{H}_j \cdots = (\mathcal{H}_j \cdot \mathcal{G}_j^{-1}) \cdot \mathcal{G}_j \cdots = \Sigma_j \cdot \mathcal{G}_j \cdots$$

با ماتریس  $\Sigma_j = \mathcal{H}_j \cdot \mathcal{G}_j^{-1}$ . از دو معادله آخر در معادله (۶۲.۱۱) سپس بدست می‌آید؛

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \Sigma_1 \cdot (\mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 + \delta V^{inc}) - \kappa_2 \Sigma_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 \\ & + j k_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left\{ \kappa_1 (\mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc}) - \kappa_2 \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 \right\} = \mathbf{D}^e \quad (63.11) \\ & \Sigma_1 \cdot (\mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc}) - \Sigma_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 \\ & + j k_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left\{ \kappa_1 (\mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 + \delta V^{inc}) - \kappa_2 \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 \right\} = \boldsymbol{\alpha} \quad (63.11b) \end{aligned}$$

در ادامه ماتریس کمکی را معرفی می‌کنیم  
 $\Delta = \Sigma_1 - \Sigma_2$       (64.11)

معادله (63.11b) بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم؛

$$\Delta \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + j k_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \mathcal{G}_2 \sigma_2$$

$$= \boldsymbol{\alpha} - \Sigma_1 \cdot \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc} - j k_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \tilde{V}^{inc} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} .$$

این عبارت برای  $\mathbf{h}_2 \cdot \mathcal{G}_2$  قابل حل است. پس از قرار دادن در معادله (63.11) در آن صورت خواهیم داشت؛

$$\Sigma \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \sigma_2 = \tilde{D}^e - j k_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \Delta^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}} ,$$

که در آن مقادیر کمکی زیر را معرفی کرده‌ایم

$$\begin{aligned} \Sigma &= \kappa_1 \Sigma_1 - \kappa_2 \Sigma_2 + k_0^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & \quad (65.11) \end{aligned}$$

$$\tilde{D}^e = D^e - \kappa_1 \Sigma_1 \cdot \delta V^{inc} - j k_0 \kappa_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{A}}^{inc}$$

معادلات کاری روش اجزای مرزی مبتنی بر پتانسیل را می‌توان در نهایت به‌این صورت

### معادلات کار برای رویکرد BEM براساس پتانسیل

$$\begin{aligned} \|\sigma_2\| &= \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Sigma\|^{-1} \cdot \left( \|\tilde{D}^e\| - j k_0 \|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \|\Delta\|^{-1} \cdot \|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\| \right) \\ & \quad (66.11) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{h}_2\| = \|\mathcal{G}_2\|^{-1} \cdot \|\Delta\|^{-1} \cdot \left( \|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\| - j k_0 \|\hat{\mathbf{n}}\| \cdot (\kappa_1 - \kappa_2) \|\mathcal{G}_2\| \cdot \|\sigma_2\| \right) ,$$

همراه با معادله (58.11)، برای محاسبه بار سطحی و توزیع جریان  $\|\sigma_1\|, \|\mathbf{h}_1\|$  در داخل مرز خلاصه کرد. حل معادلات کار مستلزم چهار عکس ماتریس و دو ضرب ماتریس، همراه با جمع کم‌هزینه محاسباتی ماتریس‌ها و ضرب ماتریس‌ها در بردارها است.

## تمرینات

- تمرين ۱ مقادير ویژه معادله (۱۲.۱۱) را برای ماتریس پایداری رویکرد FDTD با استفاده از مرحله زمانی "جادوبی"  $\Delta t = \Delta x/c$  محاسبه کنید. نشان دهید که برای این انتخاب، پاشندگی عددی در FDTD کاملاً حذف شده است.

- تمرين ۲ یک موج TM را در نظر بگیرید که توسط مولفه  $E_z$  میدان الکتریکی  $E_z$  توصیف شده و به سمت چپ حرکت می‌کند به طوری که

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

که در آن  $v$  سرعت نور در محیط مربوطه است. در چارچوب FDTD، حل این معادله با تفاضل مرکزی برای مختصات مکانی و زمانی تقریب می‌شود، که منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\frac{\|E_z\|_{3/2}^{n+1} - \|E_z\|_{3/2}^n}{\Delta t} = v \frac{\|E_z\|_2^{n+1/2} - \|E_z\|_1^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (۶۷.۱۱)$$

معادله موج را در نقطه مش  $i = 3/2$  درست در داخل مرز ارزیابی کرده‌ایم، جایی که مرز دامنه سمت چپ در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که میدان‌های الکتریکی  $E_z$  فقط برای شاخص‌های زمان و مکان اعداد صحیح تعریف می‌شوند، ما عبارت‌های نیمه صحیح  $E_z$  را از طریق  $\|E_z\|_{3/2} = \frac{1}{2}(\|E_z\|_1 + \|E_z\|_2)$  تقریب می‌زنیم.

- الف نتیجه گستره‌سازی شده معادله موج (۶۷.۱۱) را محاسبه کنید.

- ب معادله را برای مجھول  $\|E_z\|_1^{n+1}$  حل کنید.

اگر میدان الکتریکی مطابق با معادله ب به روزرسانی شود، موجی که به مرز چپ برخورد می‌کند بدون هیچ بازتابی از حوزه شبیه‌سازی خارج می‌شود. این اساس شرایط مرز جذبی <sup>۳۲</sup> [۱۰۲] است.

- تمرين ۳ در داخل FDTD، لایه‌های تطبیق کامل را می‌توان با استفاده از گذردهی ناهمسانگرد  $\bar{\epsilon}$  و نفوذپذیری  $\bar{\mu}$  پیاده‌سازی کرد.

- الف برای بدست آوردن ضرایب فرنل ارائه شده در فصل هشتم را برای رابط بین یک ماده با پارامترهای ماده محلی  $\epsilon_1, \mu_1$  و یک ماده غیر محلی با

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_2^\perp & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^\perp & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^\perp \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_2^\perp & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^\perp \end{pmatrix}$$

ادامه دهید.

---

<sup>۳۲</sup> Absorbing Boundary Conditions (ABC)

- ب در امتداد همان خطوطی که در بخش ۳.۱.۱۱ بحث شد، مقادیر  $\epsilon_2^{\perp}$ ,  $\epsilon_2^z$  و  $\mu_2^z$ ,  $\mu_2^{\perp}$  را به طوری که ضریب بازتاب فرنل برای موج ورودی صفر باشد (تطبیق امپدانس) و موج در محیط ۲ میرا شود، تعیین کنید.

• تمرین ۴ از معادلات (۱.۱۱) کرل معادله شروع و میدان‌ها را به دو میدان‌های تابشی و پراکنده  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{sca}$   $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{sca}$  قسمت تقسیم کنید.

- الف فرض کنید که میدان تابشی  $\mathbf{E}_{inc}$ ,  $\mathbf{H}_{inc}$  جواب معادله موج همگن برای محیط زیرلایه  $\epsilon_b$ ,  $\mu_b$  باشد.

- ب معادلات متحرک را برای میدان‌های پراکنده و مواد ناهمگن  $(\mathbf{r}, \mu(\mathbf{r}), \epsilon(\mathbf{r}))$  بدست آورده و ثابت کنید که میدان‌های تابشی را می‌توان بعنوان توزیع جریان‌های الکتریکی و مغناطیسی در نظر گرفت.

• تمرین ۵ برای عناصر قطری پتانسیل پایه رویکرد BEM مبتنی بر پتانسیل، باید مراقب رفتار تکین<sup>۳۳</sup> تابع گرین معادله (۷.۵) برای  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  بود. فرض کنید  $\mathbf{s}_i$  مرکز شکل یک عنصر مرزی مثلثی  $\mathcal{T}_i$  باشد و با توجه به

$$\|\mathcal{G}_{stat}\|_{ii} = \int_{\mathcal{T}_i} \frac{1}{4\pi|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}'|} dS'$$

و با معرفی مختصات قطبی با مبدأ در  $\mathbf{s}_i$  نشان دهید که انتگرال را می‌توان برای انجام داد. انتگرال شعاعی را به صورت تحلیلی انجام داده و انتگرال یک بعدی را بر روی زاویه قطبی که باید به صورت عددی حل شود بدست آورید.

• تمرین ۶ از پیوستگی مولفه مماسی  $\mathbf{B}$  در یک مرز استفاده کرده و ثابت کنید که

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{A}) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\delta\mathbf{A} = 0$$

که در آن  $\delta\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$  است. چون مشتق مماسی  $\delta\mathbf{A}$  صفر است، اولین جمله سمت راست را می‌توان بصورت  $\nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \delta\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\delta\mathbf{A})$  نوشت. با استفاده شرط معیار لورنتس رابطه (۲۲.۱۱) پیوستگی عبارت داده شده در رابطه (۶۰.۱۱) را بدست آورید.

• تمرین ۷ عناصر ماتریس و ناهمگنی معادله (۳۴.۱۱) را برای طرح گالرکین بدست آورید. برای ماتریس انتقال  $T_{[ia],\nu}$  از یک شاخص ترکیبی  $[ia]$  برای بازنویسی عبارات بر حسب ضرب ماتریس استفاده کنید.

• تمرین ۸ رابطه‌بندی وردشی رویکرد گالرکین را می‌توان برای رابطه‌بندی ترکیبی رویکرد روش اجزای مرزی اعمال کرد. عملکردی برای رویکرد شبه استاتیکی بر اساس معادله (۹.۲۷) بصورت زیر است:

$$\mathcal{S} = \oint_{\partial\Omega} \mathcal{W}^e(\mathbf{s}) \left\{ \oint_{\partial\Omega} [\Lambda(\omega)\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') + F^{stat}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')] u^e(\mathbf{s}') dS' + \frac{\partial V^{inc}(\mathbf{s})}{\partial n} \right\} dS'$$

<sup>۳۳</sup>Singular

برای توابع  $u^e(s)$  جوابی که در یک عنصر مرزی مشخص ثابت و در غیر این صورت صفر هستند و برای توابع آزمایشی توابع دلتای دیراک واقع در مرکز شکل‌ها را انتخاب کنید.

$$\tilde{\varphi}_i(s) = \delta(s - s_i), \quad \varphi_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{برای } s \in \mathcal{T}_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که  $\delta S/\delta W_i^2$  به معادله (۱۸.۱۱) منتهی می‌شود، با این حال، عناصر ماتریس

$$\|\mathcal{F}^{stat}\|_{ii'} = \int_{\mathcal{T}'_i} F^{stat}(s_i, s') dS'$$

بر روی مثلث میانگین گرفته می‌شوند. اینگونه طرح انتگرال‌گیری برای توابع گرین نیز در مراجع [۱۰۹، ۱۱۰] استفاده شده است.

- **تمرین ۹** عناصر پایه راویارت-توماس<sup>۳۴</sup> معادله (۳۶.۱۱) را برای رویکرد BEM در نظر گیرید. از طریق محاسبه صریح نشان دهید که شار  $\eta \cdot \psi$  در لبه بین دو مثلث مجاور حفظ شده است.
- **تمرین ۱۰** عناصر ندلک معادله (۴۸.۱۱) را برای یک چهار وجهی دلخواه به جای یک واحد، بدست آورید. قوانین تبدیلی را ابداع کنید که اجازه دهد توابع پایه یک چهار وجهی واحد را به یک چهار وجهی دلخواه تبدیل کند.

---

<sup>۳۴</sup>Raviart-Thomas



## پیوست آ

### آنالیز مختلط

#### آ.۵.۰. قضیه کوشی

تابع مختلط  $f(z)$  را در نظر بگیرید که در منطقه مفروضی از فضای مختلط تحلیلی است، به این معنی که تابع را می‌توان بر حسب سری تیلور حول هر نقطه  $z_0$  بسط داد، و در همسایگی معینی از  $z_0$ ، بنحوی بهنچه نزدیک می‌شود که مقدار تابع به آن بستگی ندارد،

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

تابع تحلیلی صاف هستند، یعنی کاملاً قابل مشتق‌گیری هستند. آنها این ویژگی قابل توجه را دارند که هر انتگرال‌گیری در صفحه مختلط در امتداد یک مسیر بسته صفر است،

قضیه کوشی

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (1.1)$$

برای اثبات این رابطه ابتدا از  $z = x + jy$  استفاده کرده و تابع را به قسمت‌های حقیقی و موهومی تجزیه می‌کنیم.

$$f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$

سپس مشتق تابع را می‌توان از آن محاسبه کرد؛

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z + \eta) - f(z)}{\eta} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u(x + \eta, y) + jv(x + \eta, y) - u(x, y) - jv(x, y)}{\eta} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

با این حال، برای تابع تحلیلی، می‌توانیم مشتق را در جهت دیگری، مثلاً در امتداد محور موهومی، بگیریم.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z + j\eta) - f(z)}{j\eta} \\ &= -j \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \eta) + jv(x, y + \eta) - u(x, y) - jv(x, y)}{\eta} = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

از آنجایی که تابع تحلیلی فرض می‌شود، هر دو عبارت باید یکسان باشند. با مقایسه این دو منجر به معادلات موسوم به کوشی-ریمان<sup>۱</sup> برای توابع تحلیلی می‌شویم؛

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (۲.\bar{۱})$$

اکنون به معادله (۲.\bar{۱}) برمی‌گردیم و زیر انتگرال  $f = u + jv$  و همچنین دیفرانسیل  $dz = x + jdy$  را به قسمت‌های حقیقی و موهومی آنها تقسیم می‌کنیم؛

$$\oint_C (u + jv)(dx + jdy) = \oint_C (udx - vdy) + j \oint_C (vdx + udy).$$

این عبارات را می‌توان با استفاده از قضیه گرین<sup>۲</sup> بازنویسی کرد.

$$\oint_C (udx + vdy) = \int \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy. \quad (۳.\bar{۱})$$

و برای بخش‌های حقیقی و موهومی بدست می‌آوریم؛

$$\oint_C (udx - vdy) = \int \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

$$\oint_C (vdx + udy) = \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

از معادلات کوشی-ریمان معادله (۲.\bar{۱}) برای ارزیابی انتگرال‌ها به صفر استفاده کردہ‌ایم. این اثبات قضیه کوشی را کامل می‌کند.

## آ.۶.۰.۶ قضیه باقیمانده

یک انتگرال مختلط به صورت زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$\oint_C \left[ \frac{f(z)}{z - z_0} \right] dz = \oint_C g(z) dz. \quad (۴.\bar{۱})$$

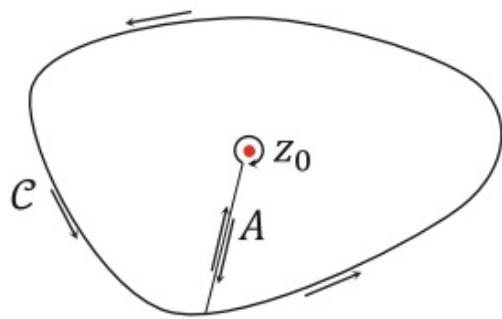
در اینجا  $f(z)$  یک تابع تحلیلی است و  $C$  یک کانتور است که نقطه بحرانی  $z_0$  را در بر می‌گیرد، همانطور که به صورت شماتیک در شکل (۱.\bar{۱}) نشان داده شده است. در تحلیل مختلط نقطه

<sup>۱</sup>Cauchy-Riemann equations

<sup>۲</sup>قضیه گرین را می‌توان از قضیه استوکس معادله (۱۳.۲) با استفاده از  $\mathbf{F} = u(x, y)\hat{x} + v(x, y)\hat{y}$ ,  $d\mathbf{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy$

بدست آورد.

بحرانی  $z_0$  قطب نامیده می‌شود و تابع  $g(z)$  در همه جا به جز در  $z_0$  تحلیلی است. اگنون مسیر انتگرال‌گیری را طوری تغییر شکل می‌دهیم که در امتداد  $A$  به نقطه بحرانی  $z_0$  نزدیک می‌شود، در امتداد دایره‌ای با شعاع  $r \rightarrow 0$  به دور  $z_0$  حرکت می‌کند و در نهایت در امتداد  $A$  به کانتور  $C$  بر می‌گردد. مشارکت در دو مسیر انتگرال‌گیری  $A$ ، یکدیگر را به دلیل جهت‌های انتگرال‌گیری مخالف حذف می‌کنند. در مورد دایره، مختصات قطبی را معرفی می‌کنیم:



شکل آ.۱: شماتیک برای قضیه باقیمانده. یک تابع مختلط  $g(z)$  با یک قطب در  $z_0$  در امتداد یک کانتور  $C$  که نقطه بحرانی  $z_0$  را در بر می‌گیرد انتگرال‌گیری می‌شود.

$$z = z_0 + re^{j\phi}, \quad dz = jre^{j\phi}d\phi .$$

بنابراین، برای انتگرال‌گیری روی مسیر دایره خواهیم داشت؛

$$-\int_0^{2\pi} \left[ \frac{f(z_0 + re^{j\phi})}{(z_0 + re^{j\phi}) - z_0} \right] (jre^{j\phi}d\phi) = -f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{jre^{j\phi}}{jre^{j\phi}} d\phi \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} -2\pi j f(z_0) .$$

تابع  $f(z)$  را از انتگرال خارج کرده‌ایم زیرا فرض می‌شود که در نزدیکی  $z_0$  به آرامی تغییر می‌کند. علامت منفی انتگرال به‌این دلیل است که در جهت عقربه‌های ساعت در اطراف  $z_0$  حرکت می‌کنیم. سپس مسیر انتگرال‌گیری در امتداد  $C$  و دایره کوچک اطراف  $z_0$  را بدست می‌آوریم.

$$\oint_C \left[ \frac{f(z)}{z - z_0} \right] dz = -2\pi j f(z_0) = 0 .$$

عبارت فوق به دلیل معادله (۵.۱) صفر است و این واقعیت که مسیر انتگرال‌گیری ترکیبی اگنون قطب را حذف می‌کند، و بنابراین انتگرال در کل بازه انتگرال‌گیری تحلیلی است. با این، ساده ترین شکل قضیه باقیمانده را پیدا می‌کنیم؛

### قضیه باقیمانده

$$\oint_C \left[ \frac{f(z)}{z - z_0} \right] dz = 2\pi j f(z_0) \quad (5.1)$$

نتیجه بالا را می‌توان به راحتی برای تعداد بیشتری از قطب‌ها تعمیم داد.



## پیوست ب

# تابع گرین طیفی

در این پیوست نحوه تجزیه توابع گرین را به امواج صفحه‌ای نشان می‌دهیم. به نظر می‌رسد که در نظر گرفتن تجزیه با استفاده از عددموج مختلط راحت است، به طوری که تابع گرین به یک تابع با آرگومان‌های مختلط تبدیل می‌شود. برای چنین توابعی یک قضیه مهم تحلیل مختلط، به نام قضیه کوشی، وجود دارد که بیان می‌کند که انتگرال کانتور یک تابع تحلیلی صفر است. این قضیه در پیوست الف ترسیم شده و نقش مهمی در بحث زیر ایفا می‌کند.

### ب.۱ تجزیه طیفی تابع گرین اسکالر

با تجزیه تابع گرین معادله هلم‌هولتز، معادله (۵.۵)، به امواج صفحه‌ای شروع می‌کنیم. معادله مورد نظر خواهد بود؛

$$(\nabla^2 + k_1^2)g(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) ,$$

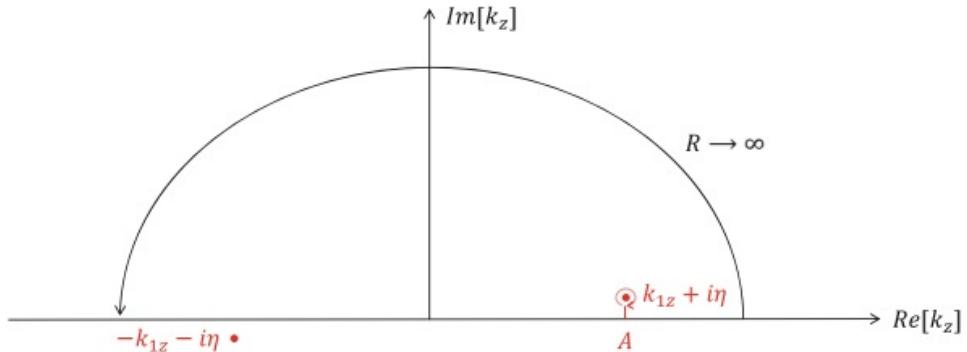
که در آن  $k_1$  یک عددموج است. از زیرنویس روی  $k_1$  برای تشخیص آن از بردار موج  $\mathbf{k}$  تبدیل فوریه برای تابع گرین و تابع دلتای دیراک استفاده می‌کنیم.

$$g(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{g}(\mathbf{k}) d^3k$$

$$\delta(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k$$

با وارد کردن این روابط به معادله تابع گرین خواهیم داشت؛

$$(2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[ (k_1^2 - k^2) \tilde{g}(\mathbf{k}) + 1 \right] d^3k = 0$$



شکل ب.۱: مسیر انتگرال گیری برای تابع گرین در مواد با اتلاف. قطب‌های انتگرال در  $(k_{1z} + j\eta) \pm$  قرار دارند.

از آنجایی که معادله باید برای همه مقادیر  $r$  برآورده شود، به  $\tilde{g}(\mathbf{k}) = 1/(k^2 - k_1^2)$  هدایت می‌شویم و بهنوبه خود،

$$g(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 - k_1^2} d^3k. \quad (\text{ب.1})$$

برای مواد تلفاتی با  $\epsilon'' > 0$  داریم؛

$$k_1^2 = \epsilon_1 \mu_1 \omega^2 \longrightarrow \text{Im}\{k_1\} > 0$$

و انتگرال معادله (ب.1) برای همه مقادیر  $k$  بهخوبی تعریف شده است. برای در نظر گرفتن مواد بدون تلفات، (۱) یک جمله تلفاتی کوچک  $j\eta$  را به عدد موج اضافه می‌کنیم، و (۲) اجازه می‌دهیم  $0 \rightarrow \eta$  در پایان محاسبه به صفر نزدیک شود. با این روش اطمینان حاصل می‌کنیم که تبدیل فوریه فقط شامل امواج خارج شونده، مشابه بحث در باره شرایط مرزی توابع گرین فصل پنجم، است. سپس تجزیه تابع گرین را در مختصات دکارتی بازنویسی می‌کنیم<sup>۱</sup>

$$g(x, y, z) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k_z^2 - (k_{1z} + j\eta)^2} dk_x dk_y dk_z,$$

با  $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2}$  برای ارزیابی قسمت  $k_z$  از انتگرال، از قضیه کوشی معادله (آ.۱) استفاده می‌کنیم. اجازه دهید ابتدا مورد  $0 > z$  را در نظر بگیریم. برای یک عدد موج مختلط  $k_z = k'_z + jk''_z$  داریم.

$$e^{j(k'_z + jk''_z)z} = e^{jk'_z z} e^{jk''_z z} \xrightarrow[z \rightarrow \infty]{} 0.$$

بنابراین، همانطور که در شکل (ب.۱) نشان داده شده است، می‌توانیم یک نیم دایره در صفحه  $k_z$  مختلط بالایی را به کانتور انتگرال گیری اضافه کنیم که سهم آن در حد  $R \rightarrow \infty$  صفر می‌شود.

<sup>۱</sup> توجه داشته باشید که اگر  $k_1$  یک قسمت موهومی کوچک و مثبت داشته باشد، در این صورت  $\sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2}$  نیز یک قسمت موهومی کوچک و مثبت دارد.

اگر انتگرال یک تابع تحلیلی باشد، انتگرال کانتور در امتداد محور حقیقی  $k_z$  و پشت در امتداد نیم دایره صفر خواهد بود. با این حال، قطب در  $j\eta + k_{1z}$  باید با احتیاط رفتار شود و مسیر انتگرال گیری را به صورت زیر تغییر شکل می‌دهیم:

- در امتداد خط مشخص شده با  $A$  از محور حقیقی به سمت قطب حرکت می‌کنیم.
- در امتداد یک دایره  $k_z = k_{1z} + j\eta + re^{j\phi}$  در اطراف قطب حرکت می‌کنیم و  $r \rightarrow 0$  را قرار می‌دهیم.
- در نهایت دوباره در امتداد خط  $A$  به محور حقیقی حرکت می‌کنیم.

دو مشارکت در امتداد  $A$  به دلیل جهت‌های انتگرال گیری مخالف یکدیگر را حذف می‌کنند. برای دایره کوچک اطراف قطب (به نام باقیمانده) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \oint \frac{(e^{jk_z z}) dk_z}{(k_z - k_{1z} - j\eta)(k_z + k_{1z} + j\eta)} \\ &= \left( e^{j(k_{1z} + j\eta)z} \right) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{jre^{j\phi} d\phi}{(re^{j\phi})(2k_{1z} + 2j\eta + re^{j\phi})} = -2\pi j \frac{e^{j(k_{1z} + j\eta)z}}{2(k_{1z} + j\eta)}. \end{aligned}$$

که در آن  $\eta \rightarrow 0$  قرار می‌دهیم تا برابطه نهائی بررسیم. تابع گرین خواهد شد:

$$g(x, y, z) = \frac{j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(k_x x + k_y y + k_{1z} |z|)}}{k_{1z}} dk_x dk_y$$

توجه داشته باشید که عبارت فوق را می‌توان برای مقادیر  $z$  منفی نیز استفاده کرد. در این حالت باید مسیر انتگرال گیری را در نیمه پایینی صفحه مختلط بیندیم. با این کار، در نهایت به اتحاد ویل<sup>۲</sup> برای بسط یک موج کروی بر حسب امواج صفحه‌ای هدایت می‌شویم.

### اتحاد ویل

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{-j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(k_x x + k_y y + k_z |z|)}}{k_z} dk_x dk_y \quad (2.2)$$

مؤلفه  $k_z$  بردار موج باید از رابطه پاشندگی  $k_1^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  محاسبه شود، و برای محیط‌های بدون تلفات به طور ضمنی فرض می‌کنیم که یک عبارت تلفات کوچک در  $j\eta + k_z$  وجود دارد. از اتحاد انتگرال برای تابع بسل

$$\int_0^{2\pi} e^{jx \cos \phi} d\phi = 2\pi J_0(x)$$

<sup>۲</sup>Weyl identity

می‌توانیم اتحاد ویل را با معرفی مختصات قطبی  $(\phi, k_\rho)$  برای مختصات  $(k_x, k_y)$  بازنویسی کرده و به اتحاد سامرفلد<sup>۳</sup> بررسیم

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{-j}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_z|z|} dk_\rho . \quad (\text{ب.3})$$

## ب.۲ نمایش طیفی تابع گرین دیدیک

در ادامه نحوه تجزیه دیدیک گرین را به امواج صفحه‌ای نشان می‌دهیم. با استفاده از تعریف دیدیک گرین از معادله (۱۹.۵)، همراه با تجزیه موج صفحه‌ای برای تابع گرین اسکالر معادله (ب.۱)، ما را به رابطه زیر هدایت می‌کند:

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{k_1^2} \right) \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} = \frac{1}{8\pi^3 k_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left( \frac{k_1^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 - k_1^2} \right) d^3 k .$$

قبل از انجام تحلیلی انتگرال‌گیری  $k_z$  با استفاده از روش انتگرال‌گیری مختلط که در بالا بحث شد، توجه می‌کنیم که در حد  $\infty \rightarrow k_z$  جمله داخل پرانتر در سمت راست به  $\hat{z}_i \hat{z}_j$ - تبدیل می‌شود و انتگرال برای  $g_{zz}$  به خوبی رفتار نمی‌کند. بنابراین جمله را جمع و کم می‌کنیم؛

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3 k_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left( \frac{k_1^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 - k_1^2} + \hat{z}_i \hat{z}_j \right) d^3 k - \frac{\hat{z}_i \hat{z}_j}{8\pi^3 k_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k \quad (\text{ب.4})$$

انتگرال دوم  $\mathbf{r}(\mathbf{r}) = \hat{z}_i \hat{z}_j k_1^{-2} \delta$ - را می‌دهد، و انتگرال اول اکنون در حد  $\infty \rightarrow k_z$  به خوبی رفتار می‌کند و می‌تواند با استفاده از انتگرال مختلط همانطور که قبل از مطالب اتحاد ویل، معادله (ب.۲) مورد بحث قرار گرفت، ارزیابی شود. باید حالت‌های زیر را تشخیص دهیم:

- برای  $0 < z < z$  نیم‌دایره در بخش بالا نیم صفحه مختلط را میندیم و باقیمانده را در  $k_{1z}^- = k_{1z} + j\eta$  محاسبه می‌کنیم.
- برای  $z < 0$  نیم‌دایره قسمت پائین صفحه مختلط را میندیم و باقیمانده را در  $-k_{1z} - j\eta$  محاسبه می‌کنیم.

در قطب‌های  $k_{1z}^\pm$  جمله داخل پرانتر معادله (ب.۴) خواهد شد؛

$$k_1^2 \delta_{ij} - k_i k_j + \hat{z}_i \hat{z}_j (k^2 - k_1^2) \longrightarrow k_1^2 \delta_{ij} - k_{1i}^\pm k_{1j}^\pm ,$$

که در آن عدد موج زیر را معرفی کرده‌ایم؛

$$\mathbf{k}_1^\pm = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} \pm k_z \hat{\mathbf{z}}, \quad k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2} + j\eta$$

با هم قرار دادن نتایج به رابطه زیر منجر می‌شود؛

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk_1^\pm \cdot \mathbf{r}} \left( \frac{\delta_{ij} - \hat{k}_{1i}^\pm \hat{k}_{1j}^\pm}{k_{1z}} \right) dk_x dk_y - \frac{\hat{z}_i \hat{z}_j}{k_1^2} \delta(\mathbf{r}) .$$

<sup>۳</sup>Sommerfeld identity

هنگامی که بر روی یک بردار عمل می‌کند، ماتریس  $\delta_{ij} - \hat{k}_{1i}^\pm \hat{k}_{1j}^\pm$  روی جهات عمود بر  $\hat{\mathbf{k}}_1^\pm$  همانطور که برای مثال در بخش ۵.۲ بحث شد تصویر می‌شود.

- تجزیه بصورت مودهای TE و TM به نظر می‌رسد معرفی یک دستگاه سه‌گانه متشکل از  $\hat{\mathbf{k}}_1^\pm$  و بردارهای زیر راحت است:

$$\epsilon^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_1^\pm \times \hat{\mathbf{z}}}{|\hat{\mathbf{k}}_1^\pm \times \hat{\mathbf{z}}|} = \frac{1}{k_\rho} (k_y \hat{\mathbf{x}} - k_x \hat{\mathbf{y}}) \quad (\text{ب.۱۵})$$

$$\epsilon^{TM}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) = \hat{\mathbf{k}}_1^\pm \times \epsilon^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) = \pm \frac{k_{1z}}{k_1 k_\rho} (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}) - \frac{k_\rho}{k_1} \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{ب.۱۶})$$

با  $k_\rho = (k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}$ . هنگام در نظر گرفتن بازتاب‌ها و انتقال‌ها در سطح مشترک محیط‌های لایه لایه، همانطور که در فصل هشتم انجام شد، این تجزیه بسیار مفید است زیرا دو بردار پایه را می‌توان با میدان‌های TE و TM مربوط کرد. بنابراین خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} g_{ij}(\mathbf{r}) &= -\frac{\hat{z}_i \hat{z}_j}{k_1^2} \delta(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\mathbf{k}_1^\pm \cdot \mathbf{r}}}{k_{1z}} \left\{ \epsilon_i^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) \epsilon_j^{TE}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) + \epsilon_i^{TM}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) \epsilon_j^{TM}(\hat{\mathbf{k}}_1^\pm) \right\} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (\text{ب.۱۷})$$

آنچه در ادامه می‌آید، در نظر گرفتن حالت کلی‌تر  $\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_2)$  و یک عبارت مشابه برای میدان‌های TM راحت است، که در آن  $\mathbf{k}_1$  و  $\mathbf{k}_2$  بردارهای موج موازی یکسانی دارند اما می‌توانند از نظر مولفه‌های  $z$  متفاوت باشند. چنین ترکیباتی برای توصیف امواج بازتابی و ارسالی در محیط‌های لایه لایه مورد نیاز است. سپس خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} [\epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_2)] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \cos 2\phi & -\sin 2\phi & 0 \\ -\sin 2\phi & 1 + \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \\ [\epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_2)] &= \frac{1}{k_1 k_2} \\ &\times \begin{bmatrix} k_{1z} k_{2z} (1 + \cos 2\phi) & k_{1z} k_{2z} \sin 2\phi & -2k_{1z} k_\rho \cos \phi \\ k_{1z} k_{2z} \sin 2\phi & k_{1z} k_{2z} (1 - \cos 2\phi) & -k_{1z} k_\rho \sin \phi \\ -2k_\rho k_{2z} \cos \phi & -2k_\rho k_{2z} \sin \phi & 2k_\rho^2 \end{bmatrix}_{ij} \end{aligned} \quad (\text{ب.۱۸})$$

که در آن مختصات قطبی  $(\phi, k_\rho)$  را برای مولفه‌های موازی بردار موج  $(k_x, k_y)$  معرفی کرده‌ایم. تبدیل به مختصات استوانه‌ای  $(\phi, \rho, z)$  برای موقعیت  $r$ ، انتگرال‌گیری بر روی زاویه سمت را

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jk_\rho \rho \cos(\phi - \varphi)} [\dots] d\phi$$

میتوان با استفاده از رابطه (۲۱.۳) بطور تحلیلی انجام داد. باین به رابطه زیر میرسیم

$$\langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_0 + J_2 \cos 2\varphi & J_2 \sin 2\varphi & 0 \\ J_2 \sin 2\varphi & J_0 - J_2 \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij}$$

$$\langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{1}{k_1 k_2} \times \begin{bmatrix} k_{1z} k_{2z} (J_0 - J_2 \cos 2\varphi) & -k_{1z} k_{2z} J_2 \sin 2\varphi & -2j k_{1z} k_\rho J_1 \cos \varphi \\ -k_{1z} k_{2z} \sin 2\varphi & k_{1z} k_{2z} (J_0 + J_2 \cos 2\varphi) & -2j k_{1z} k_\rho J_1 \sin \varphi \\ -2j k_\rho k_{2z} J_1 \cos \varphi & -2j k_\rho k_{2z} J_1 \sin \varphi & 2k_\rho^2 J_0 \end{bmatrix}_{ij}$$

(ب.۸)

که در آن برای سادگی نماد، آرگومان‌های توابع بسل  $J_n(k_\rho \rho)$  را حذف کردہ‌ایم.

با کنار هم گذاشتن همه نتایج، به تجزیه ویل تابع گرین دایادیک می‌رسیم.

### تجزیه ویل تابع گرین دایادیک

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\hat{z}_i \hat{z}_j}{k_1^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$+ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{jk_{1z}|z-z'|}}{k_{1z}} \left\{ \left\langle \epsilon_i^{TE}(\mathbf{k}_1^\pm) \epsilon_j^{TE}(\mathbf{k}_1^\pm) \right\rangle + \left\langle \epsilon_i^{TM}(\mathbf{k}_1^\pm) \epsilon_j^{TM}(\mathbf{k}_1^\pm) \right\rangle \right\} k_\rho dk_\rho$$

(ب.۹)

## ب. ۳ مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد

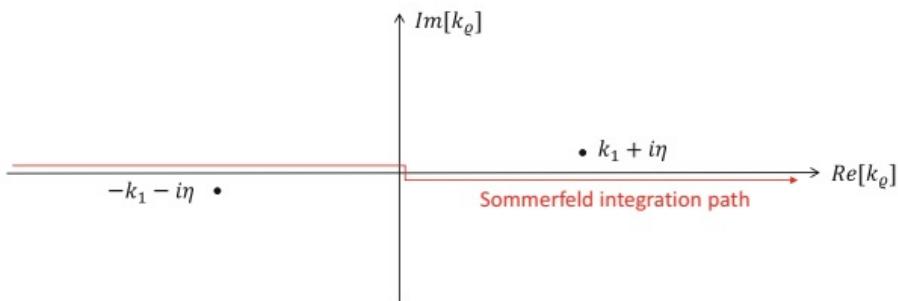
انتگرال معادله (ب.۹) باید تحت این دستورالعمل ارزیابی شود که  $k_{1z} + j\eta$  دارای یک بخش موهومی کوچک است. با این حال، برای محاسبه عددی، که برای محیط‌های لایه نیاز داریم، جایی که در مخرج بسیار کوچک می‌شود، و همچنین برای آرگومان‌های  $k_\rho$  بزرگ که در آن انتگرال بسیار آهسته برای مقادیر کوچک  $|z| - z'$  میرا می‌شود، باید مراقب  $k_\rho = k_1$  بود. همانطور که در ادامه بحث خواهیم کرد، برای جلوگیری از هرگونه مشکل با این محدودیت‌ها می‌توانیم:

- مقدار  $k_\rho$  معادله (ب.۹) به عنوان انتگرال‌گیری کانتور مختلط بیان کنیم،
- و کانتور را تغییر شکل داده تا مسیر انتگرال‌گیری به‌اندازه کافی از تمام نقاط یا مناطق بحرانی دور بماند.

ابتدا از معادله (ب.۹) و از ماتریس‌های معادله (ب.۸) مشاهده می‌کنیم که زیر انتگرال‌ها به شکل  $k_\rho J_2(k_\rho \rho)$  و  $k_\rho J_0(k_\rho \rho)$  با توابعی که فقط به  $k_{1z}$  وابسته هستند ضرب می‌شود. با استفاده از رابطه

$$J_n(x) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)]$$

(ب.۱۰)



شکل ب.۲: مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد برای محاسبه انتگرال رابطه (ب.۱۱) تابع گرین دیدیک.

بین توابع پسل و هنکل، همراه با رابطه زیر

$$H_n^{(1)}(-z) = -e^{-j\pi n} H_n^{(2)}(z)$$

می‌توان بسادگی تشنان داد که معادله (ب.۹) را می‌توان بصورت زیر بیان کرد؛

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\hat{z}_i \hat{z}_j}{k_1^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{j}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jk_1 z |z-z'|}}{k_{1z}} \left\{ J_n \longrightarrow H_n^{(1)} \right\} k_\rho dk_\rho \quad (\text{ب.۱۱})$$

که در آن عبارت در پرانتزهای کرل با عبارت موجود در معادله (ب.۹) یکسان است تنها با این تفاوت که همه توابع پسل با توابع هنکل جایگزین می‌شوند. از شکل مجانبی توابع هنکل

$$H_n^{(1)}(k_\rho \rho) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi(k_\rho \rho)}} e^{j[(k_\rho \rho - \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2}))]} \quad (\text{ب.۱۲})$$

سپس بلافضله مشاهده می‌کنیم که می‌توانیم یک نیم‌دایره در صفحه  $k_\rho$  بالائی، مشابه مسیر انتگرال‌گیری شکل (ب.۱)، که سهم آن در حد  $\infty \rightarrow R$  صفر می‌شود، اضافه کنیم. برای محاسبه معادله (ب.۱۱) به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- مسیر انتگرال‌گیری در معادله (ب.۱۱) با یک کانتور در امتداد محور حقیقی و پشت بر روی یک نیم‌دایره در نیمه بالایی صفحه مختلط جایگزین می‌شود.
- بهدلیل قضیه کوشی، می‌توانیم به تغییر شکل بیشتر مسیر ادامه دهیم، مشروط بر اینکه تمام قطب‌ها را در داخل انتگرال کانتور نگه داریم. همانطور که در ادامه بحث خواهیم کرد، علاوه بر این باید مراقب نقاط انشعاب و برش‌های صفحه مختلط که از توابع چند مقداری مانند جذر سرچشم می‌گیرند، باشیم.

یک مسیر قابل اجرا، مسیر انتگرال‌گیری سامرفلد است که در شکل (ب.۲) نشان داده شده است و برای مقادیر منفی  $k_\rho$  کمی بالاتر از محور  $k_\rho$  حقیقی و برای مقادیر  $k_\rho$  مثبت کمی پایین‌تر از محور  $k_\rho$  حقیقی، در نظر می‌گیریم. در ادامه بهدلایل این انتخاب می‌پردازیم.

## صفحه ریمان و انشعاب و برش‌ها

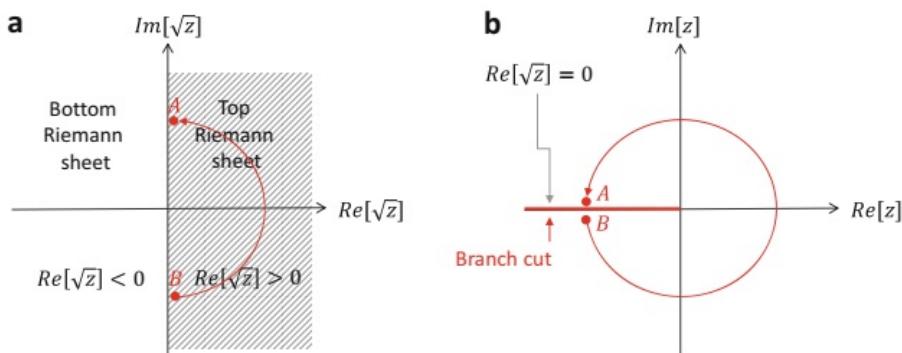
تابع جذر  $f(z) = \sqrt{z}$  را در نظر بگیرید که بهدلیل ابهام علامت جذر، یک تابع دو مقدار است. در صفحه مختلط یک عدد مختلط را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$z = re^{j\phi}$$

که در آن  $r$  مدول و  $\phi$  فاز تابع  $z$  است. بنابراین، جذر به صورت زیر خواهد بود

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{j\frac{\phi}{2}}$$

و  $\sqrt{z}$  یک تابع متناوب با دوره تناوب  $4\pi$  است. فرض کنید که  $\phi$  را در بازه  $(-\pi, \pi)$  تغییر دهیم. در صفحه  $z$  (شکل ب.۳)-ب، از موقعیت  $B$  شروع و سپس در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول یک دایره حرکت می‌کنیم تا در موقعیت  $A$  قرار بگیریم. در (شکل ب.۳)-الف، فضای مختلط  $\sqrt{z}$ ، مسیر مربوطه یک نیم دایره از  $B$  تا  $A$  است که در بخش مقادیر مثبت  $Re\sqrt{z}$  قرار دارد. با افزایش بیشتر، در صفحه  $z$  همان دنباله اعداد مختلط را دریافت می‌کنیم، اما در صفحه  $\sqrt{z}$  اکنون در بخش با مقادیر  $Re\sqrt{z}$  منفی حرکت می‌کنیم. تخصیص دو بخش با صفحه‌های ریمان<sup>۴</sup> بالا و پایین راحت است. برش بین دو صفحه با  $Re\sqrt{z} = 0$  داده می‌شود و به آن برش انشعاب<sup>۵</sup> می‌گویند. از نقطه انشعاب  $z=0$  شروع و به  $\infty \rightarrow z$  ختم می‌شود. هنگام اصلاح یک کانتور انتگرال‌گیری در صفحه مختلط، باید مراقب چنین برش‌های انشعاب باشیم. به طور کلی سعی می‌شود از بریدگی انشعاب اجتناب شود.



شکل ب.۳: صفحه مختلط برای (الف) تابع ریشه مربع  $\sqrt{z}$  و (ب) مقادیر  $z$  مربوطه. نیمه صفحه  $Re\sqrt{z} > 0$  بر روی صفحه ریمان بالایی و نیم صفحه  $Re\sqrt{z} < 0$  بر روی صفحه ریمان پایین نگاشت شده است.

## برش‌های انشعاب برای محیط لایه لایه

اکنون به انتگرال معادله (ب.۱۱) بر می‌گردیم. برنامه ما تغییر شکل مسیر انتگرال‌گیری با شرایطی است که همه قطب‌ها در داخل مسیرهای اصلی و تغییر شکل قرار گرفته‌اند و عبور

<sup>۴</sup>Riemann sheets

<sup>۵</sup>branch cut

از بریدگی انشعاب خودداری می‌کنیم. برای مسیر تغییر شکل یافته مهم است که در سراسر باشد. ابتدا هر دو  $k_1$  و  $k_\rho$  را به بخش‌های حقیقی و موهومی تجزیه می‌کنیم.

$$k_z = \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} = \left[ k'_1{}^2 - k''_1{}^2 + 2jk'_1k''_1 - k'_\rho{}^2 + k''_\rho{}^2 - 2jk'_\rho k''_\rho \right]^{1/2}. \quad (\text{ب.1۳})$$

برای اینکه  $k_z$  حقیقی یا ۰ باشد، لازم است که

$$k'_\rho k''_\rho = k'_1 k''_1 \quad (\text{ب.1۴آ})$$

$$k'_\rho{}^2 - k''_\rho{}^2 \leq k'_1{}^2 - k''_1{}^2. \quad (\text{ب.1۴ب})$$

شکل (ب.۱۴) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان آن مقادیر  $k_\rho$  را در جایی که  $k_z$  حقیقی است، قرار داد. معادله (ب.۱۴آ) هذلولی‌ها را به ترتیب در ربع اول و سوم تعریف می‌کند که به طور مجانبی به محور  $x$  و  $y$  نزدیک می‌شوند، در حالی که معادله (ب.۱۴ب) مقادیر  $k_\rho$  محدود شده توسط هذلولی‌ها را تعریف می‌کند که به طور مجانبی به خطوط  $x = y$  نزدیک می‌شوند. بنابراین، مقادیر واقعی  $k_z$  بر روی شاخه‌های هذلولی که با خط‌چین نشان داده شده‌اند قرار می‌گیرند. شاخه انتگرال‌گیری سامرفلد در اطراف تمام نقاط بحرانی حرکت می‌کند و از

$$k_z = \sqrt{k_1^2 - (|k_\rho| - j\eta)^2}$$

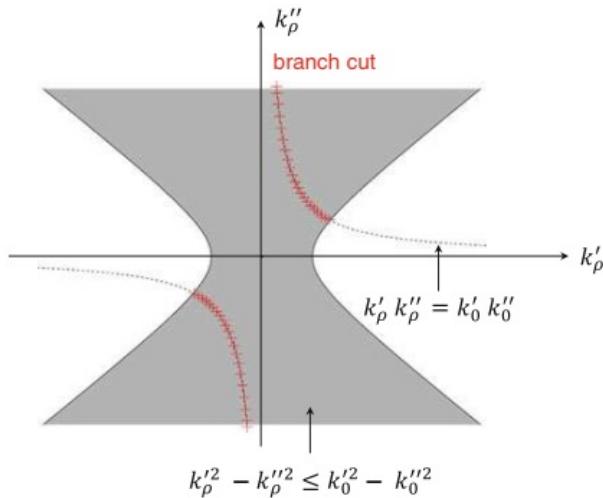
بلافاصله مشاهده می‌کنیم که  $k_z$  یک بخش موهومی مثبت کوچک در سرتاسر آن دارد. برای محیط‌های لایه لایه و محاسبه تابع گرین بازتابی، معادلات (۵۱.۸) و (۵۲.۸)، علاوه بر این باید قطب‌های بازتاب تعمیم یافته و ضرایب انتقال را در نظر بگیریم. این قطب‌ها با مودهای هدایت‌شونده، یا در یکی از لایه‌های محیط لایه لایه یا متصل به سطح مشترک، همانطور که در بخش ۱.۸ بحث شد، برای پلاسمون‌های سطحی، مربوط هستند. همه قطب‌ها دارای یک قسمت موهومی که بزرگتر یا مساوی صفر است، به طوری که امواج شعاعی در معادله (ب.۱۲) به طور مجانبی میرا می‌شوند، هستند. در مورد بخش‌های حقیقی مودهای همه آنها در بازه  $[0k'_{max}]$  قرار دارند، که حداقل تعداد موج مواد تشکیل‌دهنده ساختار لایه است. بحث مفصل تر در مورد قطب‌ها و برش شاخه‌ها را می‌توان در مرجع [۲۰] پیدا کرد.

## انتگرال‌گیری عددی

هنگام محاسبه انتگرال‌های شکل معادله (ب.۱۱) از نظر عددی می‌توانیم مسیر انتگرال‌گیری را در صفحه مختلط تغییر شکل دهیم، مشروط بر اینکه مسیر تغییر شکل یافته از هیچ شاخه‌ای عبور نکند و هیچ قطبی را حذف نکند. حجم وسیعی از ادبیات در مورد این موضوع در دسترس است، و اگر توابع گرین را برای محیط‌های لایه لایه به صورت روزانه محاسبه کنیم، منطقی است که عمیق‌تر در موضوع کاوش می‌کنیم. برخی از فناوری‌ها به عنوان مثال توسط چو<sup>۶</sup> [۲۰] مورد بحث قرار گرفته شده است، مانند روش شبیه دارترین فرود<sup>۷</sup>، اگرچه بحث ارائه شده در آنجا به هیچ وجه جامع نیست.

<sup>۶</sup> Chew

<sup>۷</sup> Method of the Steepest Descent



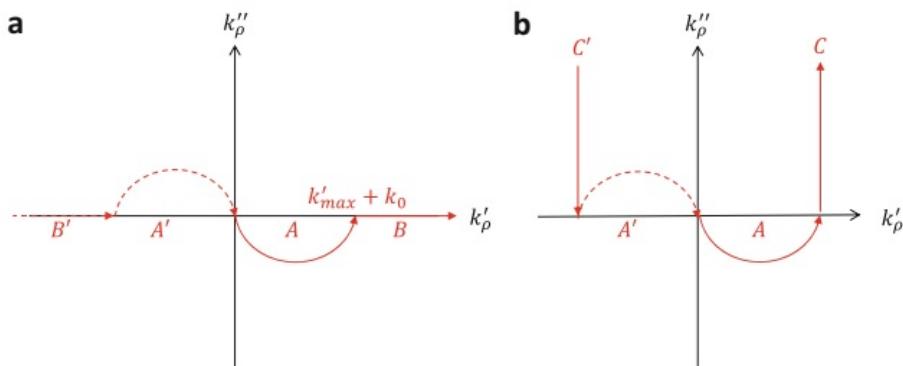
شکل ب.۴: محل قطع شاخه‌ها برای مسیر انتگرال گیری سامرفلد. خط چین آن مقادیر  $k_\rho$  را نشان می‌دهد که در آن قسمت واقعی  $k_z$  صفر است، به معادله مراجعه کنید. (ب.۱۱۴)، ناحیه سایه‌دار خاکستری آن مقادیر  $k_\rho$  را نشان می‌دهد که در آن نابرابری معادله (ب.۱۴) برقرار است. بنابراین خطوط قرمز ضخیم با برش شاخه‌ها مطابقت دارد که در آن هر دو معادله (ب.۱۴) است. برآورده می‌شوند. مسیر انتگرال گیری مختلط را می‌توان تغییر شکل داد به شرطی که از برش شاخه‌ها عبور نکند

در زمینه پلاسمونیک و نانوفوتونیک، پائولوس<sup>۸</sup> و همکارانش [۱۱۹] یک دستورالعمل واضح و ساده از نحوه انتخاب مسیر در صفحه مختلط پیشنهاد کرده‌اند که در جامعه کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است. مسیر انتگرال گیری پیشنهادی در شکل (ب.۵) نشان داده شده است و جهت (الف) به اندازه کافی بزرگ  $|z' - z|$  مقادیر، و جهت (ب) اگر  $|z' - z|$  بطور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از  $\rho$  است. در شکل  $k'_{max}$  حداقل بخش حقیقی عددموج در مواد مختلف محیط لایه است.

- $A, A'$  ابتدا در امتداد یک نیمه بیضی از مبدأ به  $k_0 + k_{max}$  انتگرال گیری می‌کنیم، جایی که  $k_0$  به عنوان حاشیه اینی اضافه شده است. در طول این مسیر به اندازه کافی از محور  $k_\rho$  حقیقی که در آن قطب‌های مواد بدون تلفات قرار دارند دور می‌مانیم. پائولوس و همکاران نسبت محوری  $1/1000 : 1$  را برای نیمه بیضی پیشنهاد می‌کنند، اگرچه در بسیاری از موارد نسبت‌های متوسطتر مانند  $1/10 : 1$  نیز این کار را انجام می‌دهند.

- $B, B'$  وقتی  $|z' - z|$  به اندازه کافی بزرگ است، انتگرال برای مقادیر بزرگ  $k_\rho$ ، بدليل مقادیر  $k_z$  بزرگ و موهومی مربوطه، معادله (ب.۱۳)، به صورت نمائی میرا می‌شود. به همین دلیل در امتداد محور حقیقی از  $k_{max} + k_0$  تا نهایت انتگرال گیری می‌کنیم. توجه داشته باشید که می‌توانیم برای مسیرهای  $A', A$  و  $B', B$ ، توابع هنکل را برای آرگومان‌های مثبت و منفی با استفاده از معادله (ب.۱۰) ترکیب کنیم. برای به دست آوردن تابع بسل، که سپس تنها در مسیرهای  $A$  و  $B$  انتگرال گیری می‌شود

<sup>۸</sup>Paulus



شکل ب.۵: مسیر انتگرال گیری پائولوس و همکاران (ب.۵). ابتدا در صفحه مختلط در امتداد نیم بیضی‌های  $AA'$  از مبدأ تا نقاط  $(k_{max} + k_0)$  روی محور حقیقی انتگرال گیری می‌کنیم، جایی که  $k_{max}$  حد اکثر بخش‌های حقیقی عدد موج در مواد مختلف یک محیط لایه لایه است، و ما عددموج فضای آزاد را به عنوان حاشیه اینمی اضافه کرده‌ایم. (الف) برای مقادیر  $|z' - z|$  به اندازه کافی بزرگ ضریب نمایی را در معادله (ب.۱۱)، منجر به میرایی نمایی برای مقادیر بزرگ  $k_\rho$  و حقیقی (و مقادیر  $k_z$  موهومی بزرگ) می‌شود، و بنابراین در امتداد محور حقیقی انتگرال گیری می‌کنیم،  $B, B'$  را بینند. (ب) برای مقادیر کوچک  $|z' - z|$  مسیر انتگرال گیری را به صفحه مختلط تغییر شکل می‌دهیم، خطوط  $C, C'$  را بینند که در آن تابع هنکل  $H_n^{(1)}$  برای مقادیر موهومی بزرگ، کاهش سریع انتگرال را تضمین می‌کند. توجه داشته باشید که مسیرهای انتگرال گیری  $A, A'$  و  $B, B'$  را می‌توان با استفاده از معادله (ب.۱۰) ترکیب کرد، به‌طوری که مجموع توابع هنکل یک تابع بسل می‌دهد.

وقتی  $|z' - z|$  به‌طور قابل توجهی کوچکتر از  $\rho$  است، مثلاً با ضریب  $de$ ، از شکل مجانبی معادله (ب.۱۲) تابع هنکل برای دستیابی همگرایی سریعتر در طول مسیرهای انتگرال گیری  $C, C'$  استفاده می‌کنیم. می‌توانیم با خیال راحت مسیر انتگرال گیری را به‌این روش تغییر شکل دهیم زیرا تمام قطب‌ها در داخل کانتور انتگرال گیری باقی می‌مانند و هیچ شاخه‌ای قطع نمی‌شود.



## پیوست پ

# معادله موج کروی

در این پیوست نشان میدهیم که چگونه معادله موج زیر را در مختصات کروی حل کنیم.

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r})$$

در اینجا  $k$  عدد موج است. برای انجام این کار، تعدادی توابع خاص را معرفی می‌کنیم، یعنی چند جمله‌ای‌های لزاندر، هارمونیک‌های کروی و توابع بسل و هنکل کروی. هر آنچه در اینجا ارائه شده است را می‌توان با جزئیات بسیار بیشتر در کتاب‌های درسی دیگر پیدا کرد و ما نتایج اصلی را فقط برای کامل بودن ارائه می‌دهیم. بحث ما دقیقاً از کتاب جکسون [۲] پیروی می‌کند و هر زمان که امکان داشته باشد برای تسهیل مقایسه مستقیم به معادلات مربوطه مراجعه خواهیم کرد. در مختصات کروی معادله موج بصورت زیر است؛

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (\text{پ.1})$$

بدلیل تقارن کروی می‌توانیم برای حل از روش جداسازی متغیرها استفاده کنیم؛

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi)$$

با وارد کرد رابطه بالا در معادله (پ.1) و تقسیم بر  $\psi$  و ضرب در  $r^2 \sin^2 \theta$  خواهیم داشت؛

$$\left[ \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + k^2 r^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 \quad (\text{پ.2})$$

این معادله باید برای مقادیر دلخواه  $r, \theta, \phi$  برآورده شود، و فقط در صورتی می‌توان به دست آورده شود که دو عبارت سمت چپ ثابت باشند. در نتیجه

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2 \quad (\text{پ.3})$$

که  $m$  عدد ثابت است. این دارای جواب

$$Q(\phi) = e^{\pm jm\phi} \quad (\text{پ.4})$$

چون تابع  $\psi(r, \theta, \phi)$  باید نسبت به  $\phi$  تناوبی باشد، مشاهده می‌کنیم که  $m$  باید عدد صحیح باشد. سپس معادله (پ.۲) را به صورت زیر می‌نویسیم؛

$$\left[ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 \right] + \left[ \frac{1}{\sin \theta P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0$$

برای انجام این معادله برای مقادیر دلخواه  $r, \theta$  دو عبارت داخل پرانتز باید دوباره ثابت باشند. این ما را به معادلات زیر هدایت می‌کند؛

• **چند جمله‌ای لوزاندر وابسته** برای بخش زاویه قطبی داریم؛

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P(\theta) = 0 \quad (\text{پ.۵})$$

جایی که ثابت به صورت  $(l+1)l$  نوشته شده است. همانطور که در زیر بحث خواهد شد، جواب این معادله توسط چند جمله‌ای‌های لوزاندر  $P_{l,m}(\theta)$  ارائه می‌شوند.

• **توابع بسل کروی** بخش شعاعی بصورت زیر است؛

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (\text{پ.۶})$$

جواب‌های  $R(r) = f_l(kr)$  این معادله ترکیب خطی تابع بسل و هنکل کروی هستند.

ترکیب تابع  $Q(\phi)$  و  $P(\theta)$  بنام هارمونیک‌های کروی  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  خوانده می‌شود، مجموعه کاملی از تابع را برای درجه‌های زاویه‌ای فراهم می‌کند. با این کار، حل معادله موج را می‌توان به صورت ترکیب خطی این جواب‌های اساسی دانست و به شکل معادله  $\{\text{پ.۷}\}$  نوشته.

### جواب معادله موج کروی

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l(kr) Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (\text{پ.۷})$$

که در آن  $l$  و  $m$  بترتیب درجه و مرتبه کروی هستند.

## پ.۱ چند جمله‌ای لوزاندر

با معادله (پ.۵) برای چند جمله‌ای‌های لوزاندر که برای  $m = 0$  جواب بقرار زیر است، شروع می‌کنیم.

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \right] + l(l+1)P_l(x) = 0 \quad (\text{پ.۸})$$

که در آن  $x = \cos \theta$  را معرفی کردایم. در سراسر این قسمت فرض میکنیم که  $\theta \in [0, \pi]$  و  $x \in [-1, 1]$  است، بطوری که میتوانیم همواره علامت مثبت را برای  $\sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$  در نظر گیریم. جواب را میتوان بوسیله سری توانی بصورت زیر نمایش داد  $\{11.3\}$  [۲].

$$P_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

برای اینکه برای همه مقادیر  $x$  معین بماند، سری باید برای مقداری از  $j$  کوتاه و محدود شود که فقط در صورتی میتوان بهآن رسید که  $l$  یک عدد صحیح باشد. با استفاده از این شرط میتوان نشان داد که چندجمله‌ای های لوژاندر  $P_l(x)$  را میتوان بر حسب رابطه‌ای بهنام رودریگز<sup>۱</sup> بیان کرد  $\{16.3\}$  [۲].

### رابطه رودریگز برای چند جمله‌ای لوژاندر

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (پ.۹)$$

چند جمله‌ای های لوژاندر بهگونه‌ای نرمالیزه شده‌اند که  $P_l(1) = 1$  شود. آنها توابع زوج برای مقادیر زوج  $l$  و توابع فرد برای مقادیر  $l$  فرد هستند. بهطور واضح‌تر، چند جمله‌ای اول لوژاندر بقرار زیر است  $\{15.3\}$  [۲].

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 3x^2 - 1, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x). \quad (پ.۱۰)$$

چند جمله‌ای های لوژاندر بر یکدیگر متعامد هستند  $\{21.3\}$  [۲].

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}, \quad (پ.۱۱)$$

و یک مجموعه کامل را تشکیل میدهند، بهطوری که هر تابع در بازه  $x \in [-1, 1]$  را میتوان بر حسب این چند جمله‌ای ها بسط داد. روابط بازگشتی مختلفی، مانند  $\{29.3\}$  [۲] وجود دارد؛

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)P_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \quad (پ.۱۲)$$

$$\frac{dP_l(x)}{dx} - x \frac{dP_l(x)}{dx} - (l+1)P_l(x) = 0$$

که میتوان از آن برای محاسبه عددی چند جمله‌ای های لوژاندر و مشتقهای آنها با معلوم بودن دو مقدار شروع، استفاده کرد.

<sup>۱</sup>Rodrigues' formula

### چند جمله‌ای‌های لوزاندر وابسته

تعریف معادله برای چند جمله‌ای‌های لوزاندر وابسته  $P_{lm}(x)$  بازاء مقادیر دلخواه  $m$  رابطه (پ. ۵) میدهد؛

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l^m(x)}{dx} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0 \quad (\text{پ. ۱۳})$$

برای مقادیر مثبت چند جمله‌ای‌های لوزاندر وابسته را می‌توان از رابطه (۴۹.۳) محاسبه کرد،

چند جمله‌ای لوزاندر وابسته برای  $m > 0$

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (\text{پ. ۱۴})$$

در حالی که چند جمله‌ای‌های لوزاندر برای مقادیر  $m$  منفی از رابطه (۵۱.۳) بdst می‌آید،

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (\text{پ. ۱۵})$$

برای مقادیر ثابت  $m$  چند جمله‌ای‌های لوزاندر یک مجموعه کامل توابع متعامد را تشکیل میدهند (۵۲.۳)؛

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} . \quad (\text{پ. ۱۶})$$

## پ. ۲ هارمونیک‌های کروی

معلوم می‌شود که ترکیب جواب‌های  $P(\theta)$  و  $Q(\phi)$  که بنام هارمونیک‌های کروی موسوم است راحت باشد (۵۳.۳)،

هارمونیک‌های کروی

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{jm\phi} . \quad (\text{پ. ۱۷})$$

گاهی اوقات از نماد دیگری استفاده می‌کنیم؛

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} , \quad (\text{پ. ۱۸})$$

که در آن  $\hat{\mathbf{r}}$  بردار واحد است که بوسیله بترتیب زاویه قطبی  $\theta$  و سمت  $\phi$  تعریف می‌شوند. از رابطه (پ.۱۵) می‌توانیم نشان دهیم که  $\left\{ Y_{lm}^*(\theta, \phi), Y_{l'm'}(\theta, \phi) \right\}$  [۲]، [۴]، [۵۴.۳]، [۵۵.۳]

$$Y_{lm}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \phi) \quad (\text{پ.۱۹})$$

هارمونیک کروی یک مجموعه توابع متعامد را برای زاویا تشکیل میدهند  $\left\{ Y_{lm}^*(\theta, \phi), Y_{l'm'}(\theta, \phi) \right\}$  [۲]، [۴]، [۵۵.۳]

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (\text{پ.۲۰})$$

و رابطه تکمیلی برابر است با  $\left\{ Y_{lm}^*(\theta, \phi), Y_{l'm'}(\theta, \phi) \right\}$  [۲]، [۴]، [۵۶.۳]

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}^*(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') . \quad (\text{پ.۲۱})$$

چند هارمونیک‌های کروی در زیر آورده می‌شود:

$$l = 0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l = 1 \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{j\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \end{cases}$$

$$l = 2 \quad \begin{cases} Y_{22} = \sqrt{\frac{5}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{j2\phi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{j\phi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

برای  $\theta = 0$  داریم:

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \quad (\text{پ.۲۲})$$

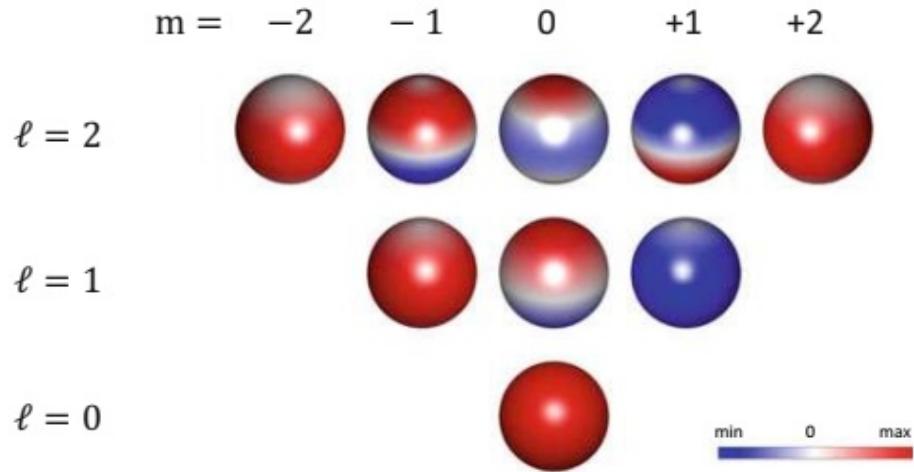
شکل (پ.۱) چند هارمونیک کروی را روی کره واحد نشان می‌دهد.تابع با  $l = 0$  ثابت است

و توابع با  $l = 1$  دارای یک یا دو گره در جهت قطبی یا سمت هستند. گاهی اوقات از تجسم

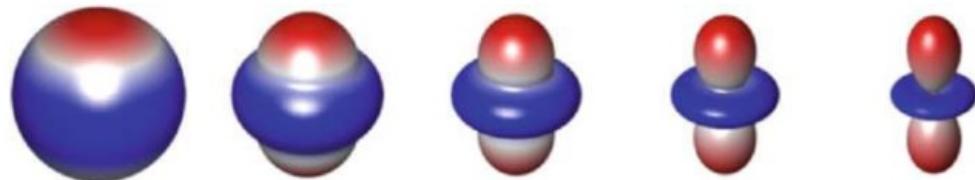
دیگر  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  با تغییر شعاع بر اساس مقدار مطلق هارمونیک‌های کروی، همانطور که در شکل (پ.۲) در مثال  $Y_{20}$  و در شکل (پ.۳)-الف هارمونیک‌های کروی با کمترین درجه نشان داده

شده است، استفاده می‌شود. با گرفتن ترکیبات خطی داریم:

$$\begin{cases} \frac{j}{\sqrt{2}} (Y_{lm} - (-1)^m Y_{l,-m}) & m < 0 \quad \text{برای} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{lm} + (-1)^m Y_{l,-m}) & m > 0 \quad \text{برای} \end{cases} \quad (\text{پ.۲۳})$$



شکل پ.۱: تجسم هارمونیکهای کروی برداری  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  به ترتیب برای درجه‌ها و مرتبه‌های زاویه‌ای برای  $m$  مختلف است. ما  $e^{jm\phi} Y_{lm}(\theta, \phi)$  را روی واحد کرده با استفاده از نوارنگی که در پایین شکل نشان داده می‌شود، رسم می‌کنیم.



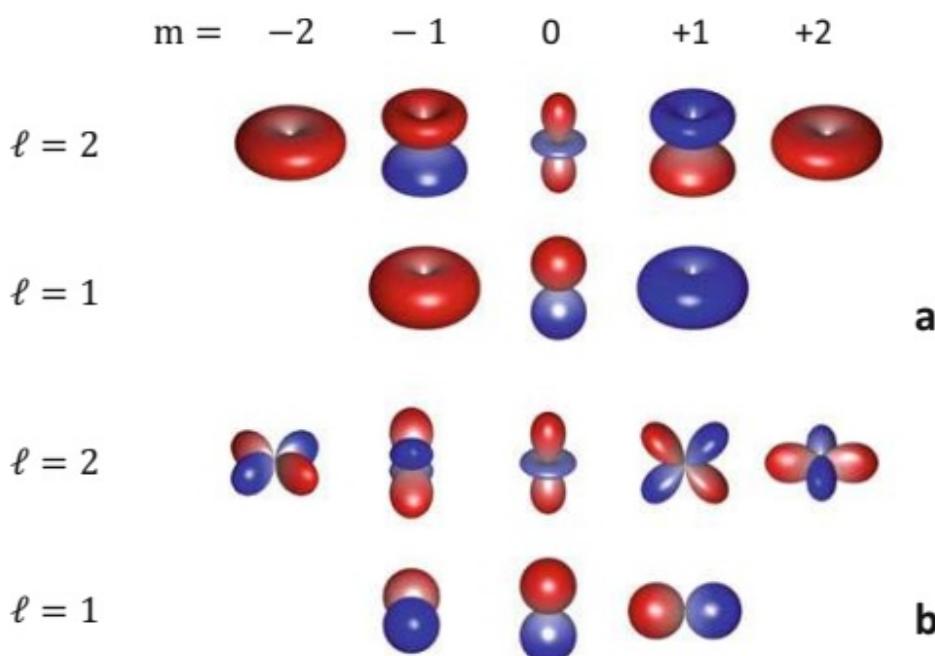
شکل پ.۲: تجسم جایگزین هارمونیکهای کروی برداری برای هر مقدار  $\ell, \theta, \phi$ ، شعاع را از یک به مقدار مطلق  $|Y_{lm}(\theta, \phi)|$  مقیاس می‌کنیم و در نهایت به نمودار سمت راست می‌رسیم.

### پ.۳ توابع بسل و هنکل کروی

در اینجا به قسمت شعاعی معادله موج کروی، (پ.۶)، می‌پردازیم،

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df_l(r)}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(r) = 0 . \quad (\text{پ.۴.۹})$$

جواب‌ها به ترتیب با ترکیب خطی توابع بسل و هنکل کروی  $j_l$  و  $h_l^{(1)}$  به دست می‌آیند  $\{ \}$ ، [۲]، (پ.۸۴.۹)



شکل پ.۳: تجسم (الف) و (ب) نمایش با مقدار حقیقی معادله (پ.۲۳) برای کمترین درجه‌های زاویه‌ای با استفاده از روش تغییر شکل که در شکل (پ.۲) نشان داده شده است.

### جواب بخش شعاعی معادله موج اسکالر

$$f_l(kr) = A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} h_l^{(1)}(kr) \quad (\text{پ.} ۲۵)$$

که در آن  $A_{lm}$  و  $B_{lm}$  ثابت‌های دلخواهی هستند. مرسوم است که توابع بسل و هنکل کروی را بصورت  $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1,2)}(x)$  تعریف کنند که با توابع بسل  $J_l(x), N_l(x)$  طبق روابط زیر بهم مربوط می‌شوند، [۲] :

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ n_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x) \\ h_l^{(1,2)}(x) &= j_l(x) \pm j n_l(x) \end{aligned} \quad (\text{پ.} ۲۶)$$

توابع بسل کروی را می‌توان از رابطه  $\{ [۲] ، (۸۶.۹) \}$  بدست آورد؛

$$j_l(x) = (-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left( \frac{\sin x}{x} \right) \quad (۲۷.پ)$$

$$n_l(x) = -(-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left( \frac{\cos x}{x} \right)$$

جند نمونه از توابع بسل و هنکل در اینجا آورده می‌شود؛

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad j_2(x) = \left( \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x},$$

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{jx}}{x}, \quad h_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{jx}}{x} \left( 1 + \frac{1}{x} \right), \quad h_2^{(1)}(x) = \frac{e^{jx}}{x} \left( 1 + \frac{j3}{x} - \frac{3}{x^2} \right).$$

برای مقادیر کوچک  $x$  می‌توانیم از بسط سری استفاده کنیم  $\{ [۲] ، (۸۸.۹) \}$ ؛

$$j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots \right] \quad (۲۸.پ)$$

$$n_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \left[ 1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots \right]$$

برای آرکومان‌های بزرگ می‌توانیم از بسط مجانبی استفاده کنیم،  $\{ [۲] ، (۸۹.۹) \}$ ؛

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{l\pi}{2} \right) \\ n_l(x) &= -\frac{1}{x} \cos \left( x - \frac{l\pi}{2} \right) \\ h_l^{(1)}(x) &= (-j)^{l+1} \frac{e^{jx}}{x} \end{aligned} \quad (۲۹.پ)$$

از این بسط‌ها می‌توانیم نتایج کلی زیر را در مورد ضرایب  $A_{lm}, B_{lm}$  برای معادله موج کروی در معادله  $(۲۵.پ)$  بدست آوریم.

• **توابع بسل هنگام استفاده از جواب موج کروی در بازه  $r \in [0, r_{max}]$**  باید اطمینان حاصل کنیم که  $f_l(kr)$  در مبدا معین است. بهمین دلیل قرار دادیم:

$$f_l(kr) = A_{lm} j_l(kr) \quad \text{برای } r \in [0, r_{max}]$$

• **توابع هنکل هنگام استفاده از جواب موج کروی در بازه  $r \in [r_{min}, \infty)$**  باید اطمینان حاصل کنیم که برای مقادیر  $kr$  بزرگ  $f_l(kr)$  به یک موج خارج شونده تبدیل می‌شود. بهمین دلیل قرار دادیم<sup>۲</sup> :

---

<sup>۲</sup> خوانندگان محترم توجه کنید که اگر تغییرات زمانی را بصورت  $e^{-i\omega t}$  فرض کنیم که نوسینده این کتاب آنرا بکار برده می‌باشد موج خارج شونده را هنکل نوع اول انتخاب کنیم. اما نظر باینکه ما تغییرات زمانی را برای دانشجویان مهندسی با  $e^{j\omega t}$  تغییر دادیم، از اینرو موج خارج شونده کروی را هنکل نوع دوم قرار دادیم.

$$f_l(kr) = B_{lm} h_l^{(2)}(kr) \quad \text{برای } r \in [r_{min}, \infty)$$

توابع بسل کروی روابط بازگشته زیر را برآورده می‌کنند  $\{[۹۰.۹]\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{2l+1}{x} z_l(x) &= z_{l-1}(x) + z_{l+1}(x) \\ z'_l(x) &= \frac{1}{2l+1} [lz_{l-1} - (l+1)z_{l+1}(x)] \\ \frac{d}{dx} [xz_l(x)] &= xz_{l-1}(x) - lz_l(x) \end{aligned} \quad (۳۰.پ)$$

که در آن  $z_l(x)$  هر یک از توابع  $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1,2)}(x)$  است. از نظر عددی باید برای توابع بسل از  $j_0(x), j_1(x)$  شروع کرد تا توابع بسل مرتبه بالاتر را با استفاده از یک طرح رو به بالا محاسبه کرد، و از  $h_l^{(1)}(x), h_{l-1}^{(1)}(x)$  برای محاسبه توابع هنکل مرتبه پایین در یک طرح رو به پایین شروع کرد. در غیر این صورت یک راه حل تکراری ممکن است برای درجه‌های کروی بزرگ از نظر عددی ناپایدار شود.

در نهایت رابطه‌ای برای تجزیه تابع گرین معادله (۷.۵) بر حسب توابع کروی ارائه میدهیم  $\{[۹۸.۹]\}$ :

### بسط تابع گرین کروی

$$\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -jk \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr_<) h_l^{(2)}(kr_>) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (۳۱.پ)$$

در اینجا  $r_<$  برای مقدار کوچکتر  $r$  از  $r'$  و  $r_>$  برای  $r$  بزرگتر از  $r'$  استفاده شده است.



## پیوست ت

# هارمونیک‌های کروی برداری

در این پیوست حل معادله موج برداری زیر را

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{ت.1})$$

بر حسب توابع پایه طولی و عرضی بحث می‌کنیم. برای مختصات کروی این ما را به نام هارمونیک‌های کروی برداری هدایت می‌کند که در زیر بیشتر معرفی خواهد شد. بحث خود را با یک انحراف شروع کرده و به حل معادله موج در مختصات دکارتی می‌اندیشیم.

### معادله موج در مختصات دکارتی

در بخش ۵.۲ نشان دادیم که هر میدان برداری را می‌توان به قسمت‌های طولی و عرضی آن تجزیه کرد. برای یک موج مسطح با عدد موج  $k$ ، قسمت‌های طولی و عرضی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{F}_k^L = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{F}_k) \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{F}_k^\perp = \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^L$$

برای هندسه‌های خاص مانند محیط‌های لایه لایه می‌توان از معادله (۴۳.۲) برای تجزیه میدان‌های عرضی به مودهای TE و TM استفاده کرد. بنابراین میدان  $\mathbf{F}_k$  را می‌توان توسط بردارهای زیر (غیر نرمالیزه) پوشش داد:

$$\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}).$$

تصویر روی  $k$  مولفه طولی  $\mathbf{F}_k^L$  را می‌دهد، در حالی که تصویر روی دو بردار دیگر، اگر  $\mathbf{F}_k$  نشان دهنده یک میدان الکتریکی و مشخصه TE و TM برای یک میدان مغناطیسی باشد، به ترتیب مولفه‌های عرضی را با مشخصه TE و TM می‌دهد.

### معادله موج برداری

می‌توانیم این روند تجزیه را از منظری کمی متفاوت بررسی کنیم. یک پتانسیل اسکالار  $(\mathbf{r})\psi$  را در نظر گیرید که در معادله هلم‌هولتز صدق می‌کند؛

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0$$

از این چنین پتانسیلی می‌توانیم مجموعه‌ای از توابع برداری زیر را بدست آوریم:

$$\mathbf{L}_\psi = \nabla\psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{M}_\psi(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{N}_\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k}\nabla \times \mathbf{M}_\psi(\mathbf{r}), \quad (\text{ت.} ۲)$$

که در آن  $\mathbf{c}$  یک بردار راهنمایی در بزودی مشخص می‌شود. بر اساس ساخت،  $\mathbf{L}_\psi$  یک تابع برداری طولی است، در حالی که هر دو  $\mathbf{M}_\psi$  و  $\mathbf{N}_\psi$  توابع بردار عرضی هستند، که گاهی اوقات به عنوان توابع بردار سلونوئیدی نامیده می‌شوند، و هر دو در معادله موج صدق می‌کنند. برای اثبات این موضوع،  $\mathbf{M}_\psi$  را در معادله موج وارد کرده و به دست آوریم :

$$\nabla(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})) - \nabla^2(\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})) + k^2\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r}) = 0.$$

جمله اول حذف می‌شود، زیرا دیورژانس کرل یک بردار همیشه صفر است، و بنابراین  $\mathbf{M}_\psi$  در معادله (ت.۱) صدق می‌کند. به همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم که  $\mathbf{N}_\psi$  نیز در معادله موج صدق می‌کند. به راحتی می‌توان ثابت کرد که  $\mathbf{M}_\psi$  و  $\mathbf{N}_\psi$  از طریق روابط زیر با یکدیگر مرتبط هستند:

$$k\mathbf{N}_\psi = \nabla \times \mathbf{M}_\psi, \quad k\mathbf{M}_\psi = \nabla \times \mathbf{N}_\psi$$

بنابراین، اگر  $\mathbf{M}_\psi$  نشان دهنده میدان الکتریکی باشد،  $\mathbf{N}_\psi$  یک میدان مغناطیسی است و بالعکس. از بحث فوق چنین بر می‌آید که هر تابع برداری را می‌توان بر حسب سه تابع اسکالار  $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r}), w(\mathbf{r})$  به صورت زیر بیان کرد.

### تجزیه به توابع پایه طولی و عرضی

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{L}_w(\mathbf{r}) + \mathbf{M}_u(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_v(\mathbf{r}) \quad (\text{ت.} ۳)$$

به طور مشابه، هر تابع بردار عرضی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}) = \mathbf{M}_u(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_v(\mathbf{r}) \quad (\text{ت.} ۴)$$

اگر پتانسیل‌های مولد  $e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r})$  را برای امواج صفحه و بردار راهنما را  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}$  در نظر گیریم، مشاهده می‌کنیم که تابع برداری بصورت زیر می‌شوند.

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}) = j\mathbf{k}e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}) = j\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{N}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k^2}\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}).$$

این به توابع پایه‌ای که در بالا در نظر گرفتیم مربوط می‌شود.

### معادله موج کروی

روشی که اکنون بیان شد را می‌توان برای معادله موج در مختصات کروی (پ. ۷) نیز اعمال کرد.

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} \left[ A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} h_l^{(1)}(kr) \right] Y_{lm}(\theta, \phi)$$

که در آن  $l$  و  $m$  به ترتیب درجه و مرتبه کروی هستند،  $A_{lm}, B_{lm}$  ضرایبی هستند که باید برای مسئله مورد بررسی تعیین شوند،  $j_l, h_l^{(1)}$  به ترتیبتابع بسل و هنکل کروی مرتبه اول و  $Y_{lm}$  هارمونیک‌های کروی هستند. برای بحث مفصل در مورد راه حل و توابع ویژه به پیوست پ مراجعه کنید. اکنون بردار راهنمای روشی  $r = c$  قرار می‌دهیم به طوری که

$$\mathbf{M}_\psi(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{r} f_l(\mathbf{r}) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{ت.5})$$

که در آن  $f_l$  ترکیب خطی توابع بسل و هنکل هستند. در رابطه بالا از  $\nabla \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \nabla$  برای بدست آوردن رابطه زیر استفاده شده است.

$$\mathbf{M}_\psi(\mathbf{r}) = -j \left( \frac{1}{j} \mathbf{r} \times \nabla \right) f_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = -j \hat{\mathbf{L}} f_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{ت.6})$$

در اینجا عملگر مومنتوم زاویه زیر را

$$\hat{\mathbf{L}} = -j \mathbf{r} \times \nabla \quad (\text{ت.7})$$

که در مکانیک کوانتم معروف است (بدون  $\hbar$ ) معرفی کرده‌ایم. این عملگر کاملاً رسمی معرفی شده است و ربطی به اثرات کوانتمی ندارد. با این حال،  $\hat{\mathbf{L}}$  بهما امکان می‌دهد چندین نتیجه را که از مکانیک کوانتمی به خوبی شناخته شده‌اند، اتخاذ کنیم.

## ت.۱ هارمونیک‌های کروی برداری

به این نتیجه میرسیم که معرفی هارمونیک‌های کروی برداری برای تجزیه میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی در مختصات کروی راحت باشد  $\{ [119.9], [120] \}$ .

### هارمونیک‌های کروی برداری

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \hat{\mathbf{L}} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{ت.8})$$

توجه داشته باشید که در ادبیات چندین تعاریف کمی متفاوت از هارمونیک‌های کروی برداری وجود دارد و در اینجا کتاب جکسون  $[2]$  را دنبال می‌کنیم. از مرجع  $[120]$

$$\hat{\mathbf{L}} = j \left( \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (\text{ت.9})$$

سپس می‌توان هارمونیک‌های کروی برداری را بست آورد، که در آن  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\phi}$  به ترتیب بردارهای واحد در جهت قطب و سمت هستند. با این خواهیم داشت؛

$$l = 0 \quad \mathbf{X}_{00} = 0$$

$$\begin{aligned} l = 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_{11} = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} e^{j\phi} (\hat{\theta} + j \cos \theta \hat{\phi}) \\ \mathbf{X}_{10} = j \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \hat{\phi} \end{array} \right. \\ l = 2 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_{22} = -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \sin \theta e^{j2\phi} (\hat{\theta} + j \cos \theta \hat{\phi}) \\ \mathbf{X}_{21} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} e^{j\phi} (\cos \theta \hat{\theta} + j \cos 2\theta \hat{\phi}) \\ \mathbf{X}_{20} = j \sqrt{\frac{5}{32\pi}} \sin 2\theta \hat{\phi} \end{array} \right. \end{aligned}$$

از رابطه (پ. ۱۹) داریم؛

$$\mathbf{X}_{lm}^*(\theta, \phi) = (-1)^{m+1} \mathbf{X}_{l,-m}(\theta, \phi) \quad (ت. ۱۰)$$

با استفاده از ترکیبات خطی معادله (پ. ۲۳) نمایشی با مقدار حقیقی برای هارمونیک‌های کروی برداری به دست می‌آوریم که برای چند درجه و مرتبه زاویه‌ای در شکل (ت. ۱) نشان داده شده است.  $\mathbf{X}_{lm}$  توابع برداری هستند که مماس بر کره واحد بوده و دارای گره‌هایی در جهت قطب و سمت هستند. از معادله (پ. ۲۲) می‌توان نشان داد که

$$\mathbf{X}_{lm}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{16\pi}} \epsilon_{\pm} \delta_{m,\pm 1}, \quad \epsilon_{\pm} = \hat{\mathbf{x}} \pm \hat{\mathbf{y}}. \quad (ت. ۱۱)$$

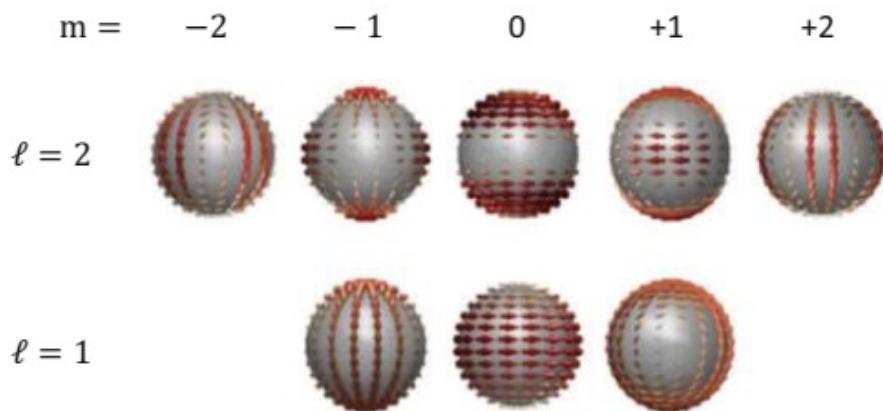
## ت. ۲. روابط متعامد

هارمونیک‌های کروی برداری را می‌توان برای ساخت یک سری توابع پایه کامل برای حل معادله موج در مختصات کروی استفاده کرد. این توابع پایه از سه تابع برداری تشکیل شده است:

### ت. ۱۲. توابع پایه برای معادله موج کروی

$$\hat{\mathbf{r}} h_l(kr) Y_{lm}, \quad g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}, \quad \nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}, \quad (ت. ۱۲)$$

که در آن  $g_l$  و  $h_l$  توابع کروی بسل یا هنکل (یا ترکیب خطی آنها) هستند. اولین تابع برداری، یک میدان برداری طولی را توصیف می‌کند که در تحلیل بعدی نیازی به آن نخواهد بود، در



شکل ت.۱: هارمونیک‌های کروی برداری برای درجه‌های زاویه‌ای مختلف. ترکیبات خطی را تشکیل می‌دهیم و برای  $m \leq 0$  قسمت موهومند  $X_{lm}$  و برای  $m > 0$  قسمت حقیقی را رسم می‌کنیم. اندازه بردارها برابر نورم  $X_{lm}$  است.

حالی که دوتابع دیگر عرضی بوده و همانطور که چندی بعد نشان داده خواهد شد، بر یکدیگر متعامدند. قبل از انجام این کار، جبر تکانه زاویه‌ای (مومنتوم زاویه‌ای) را که عموماً در مکانیک کوانتوم استفاده می‌شود، خلاصه می‌کنیم [۱۲۰]، که بهما اجازه می‌دهد تعدادی از روابط مفید را بسیار ساده بدست آوریم.

### جبر مومنتوم زاویه‌ای

در ادامه عملگر مومنتوم  $\nabla = -j\hat{\pi}$  (بدون  $\hbar$ ) را با مقایسه مکانیک کوانتوم معرفی می‌کنیم و عملگر تکانه زاویه‌ای را به شکل  $\hat{L} = \mathbf{r} \times \hat{\pi}$  می‌نویسیم. با فرض

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$$

هارمونیک‌های کروی را با استفاده از نماد bra-ket مکانیک کوانتوم نشان میدهیم. هارمونیک‌های کروی تابع‌های ویژه  $\hat{L}_z$  و  $\hat{L}^2$  هستند،

$$\hat{L}_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle, \quad \hat{L}^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle \quad (\text{ت.1۳})$$

عموماً معرفی عملگرها مفید هستند [۱۰۲.۹]، [۱۰۴.۹].

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm j \hat{L}_y \quad (\text{ت.1۴})$$

که با اعمال بر روی حالت‌های ویژه تکانه زاویه‌ای، [۱۰۴.۹]،

$$\hat{L}_{\pm} |l, m\rangle = \sqrt{(l \mp 1)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (\text{ت.1۵})$$

با استفاده از

$$\frac{1}{2} \left\{ (\hat{L}_x + j\hat{L}_y)(\hat{x} - j\hat{y}) + (\hat{L}_x - j\hat{L}_y)(\hat{x} + j\hat{y}) \right\} = \hat{L}_x \hat{x} + \hat{L}_y \hat{y}$$

می‌توانیم عملگر تکانه زاویه‌ای را به شکل زیر تجزیه کنیم؛

$$\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_+ \epsilon_+^* + \hat{L}_- \epsilon_-^* \right\} + \hat{L}_z \hat{\mathbf{z}} \quad (ت.۱۶)$$

که در آن  $\hat{x} = \hat{x} \pm j\hat{y} = \epsilon_{\pm}$  است. با این می‌توانیم هارمونیک‌های کروی برداری را بصورت زیر محاسبه کنیم؛

$$\sqrt{l(l+1)} \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left\{ \hat{L}_+ \epsilon_+^* + \hat{L}_- \epsilon_-^* \right\} Y_{lm}(\theta, \phi) + m Y_{lm}(\theta, \phi) \hat{\mathbf{z}}, \quad (ت.۱۷)$$

که در آن جمله اول در سمت راست باید با استفاده از معادله (ت.۱۵) محاسبه شود. از رابطه تبدیل ابتدائی از تعدادی از روابط مفید را بدست آورد [۱۰۵.۹]، [۲]؛

$$\hat{\mathbf{L}} \nabla^2 = \nabla^2 \hat{\mathbf{L}}, \quad \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = j \hat{\mathbf{L}}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \quad (ت.۱۸)$$

### بدست آوردن روابط متعامد

در ادامه نشان می‌دهیم که این سهتابع

$$\langle \theta, \phi | \mathbf{r} | l, m \rangle, \quad \langle \theta, \phi | \hat{\mathbf{L}} | l, m \rangle, \quad \langle \theta, \phi | \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}} | l, m \rangle \quad (ت.۱۹)$$

یک بنای (غیر نرمالیزه) را پوشش می‌دهند. در انجام این کار، از رابطه متعامد معادله (پ.۲۰) برای هارمونیک‌های کروی بهره برداری می‌کنیم؛

$$\begin{aligned} \langle l', m' | l, m \rangle &= \langle l', m' | \left[ \oint | \theta, \phi \rangle \langle \theta, \phi | d\Omega \right] | l, m \rangle \\ &= \oint Y_{l', m'}^*(\theta, \phi) Y_{l, m}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{m'm} \end{aligned}$$

جایی که در خط اول عملگر واحد را برای بیان هارمونیک‌های کروی در مختصات کروی قرار داده‌ایم و از  $d\Omega$  برای انتگرال‌گیری روی کره واحد استفاده کرده‌ایم. با استفاده از اتحادهای زیر

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}}) = \hat{\mathbf{L}} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}}) = 0$$

به راحتی می‌توان با استفاده از خواص عملگرها می‌توان نشان داد که توابع تعریف شده در معادله (ت.۱۹) متعامد با یکدیگر هستند؛

$$\langle l', m' | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{L}} | l, m \rangle = 0$$

$$\langle l', m' | \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}} | l, m \rangle = 0 \quad (ت.۲۰)$$

$$\langle l', m' | \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}} | l, m \rangle = 0$$

بهمین نحو داریم؛

$$\begin{aligned} \langle l', m' | \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} | l, m \rangle &= r^2 \delta_{ll'} \delta_{m'm} \\ \langle l', m' | \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{L}} | l, m \rangle &= l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{m'm} \\ \langle l', m' | (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}}) \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}}) | l, m \rangle &= r^2 l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{m'm} \end{aligned} \quad (\text{ت.21})$$

با استفاده از این روابط رابطه تعامد را بدست می‌آوریم:

### روابط متعماد برای هارمونیک‌های کروی برداری I

$$\oint \mathbf{X}_{l'm'}^*(\theta, \phi) \cdot [g_l(r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)] d\Omega = g_l(r) \delta_{ll'} \delta_{m'm} \quad (\text{ت.22})$$

$$\oint \mathbf{X}_{l'm'}^*(\theta, \phi) \cdot [\nabla \times f_l(r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)] d\Omega = 0 \quad (\text{ت.22 ب})$$

معادله (ت.22) را می‌توان به راحتی از برابری دوم معادله (ت.21) ثابت کرد. برای اثبات رابطه دوم، از تجزیه عملگر موننتوم در تمرین سوم استفاده می‌کنیم تا به رابطه زیر دست یابیم  $\left\{ \text{[2]} \right\}$ ، (۶۰.۱۰)؛

$$\hat{\pi} \times f_l(r) \hat{\mathbf{L}} = -\frac{j}{r^2} \frac{d}{r} [rf_l(r)] \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}} + \frac{f_l(r)}{r^2} \mathbf{r} \hat{L}^2. \quad (\text{ت.23})$$

با استفاده از روابط متعماد (ت.20) خواهیم داشت؛

$$\langle l', m' | \hat{\mathbf{L}} \cdot \left\{ -\frac{j}{r^2} \frac{d}{dr} [rf_l(r)] \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}} + \frac{f_l(r)}{r^2} \mathbf{r} \hat{L}^2 \right\} | l, m \rangle = 0$$

که معادله (ت.22 ب) را ثابت می‌کند. در همین راستا می‌توانیم از روابط متعماد بین حالت‌های پایه معادله (ت.19) استفاده کنیم. برای به دست آوردن مجموعه دوم از روابط متعماد

### روابط متعماد برای هارمونیک‌های کروی برداری II

$$\oint \mathbf{r} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\theta, \phi) \cdot [g_l(r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)] d\Omega = 0 \quad (\text{ت.24})$$

$$\oint \mathbf{r} \times \mathbf{X}_{l'm'}^*(\theta, \phi) \cdot [\nabla \times f_l(r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi)] d\Omega = -j \left[ \frac{d}{dr} rf_l(r) \right] \delta_{ll'} \delta_{m'm} \quad (\text{ت.24 ب})$$

که در زیر در زمینه نظریه می<sup>۱</sup> استفاده خواهد شد. در اصل، می‌توانیم روابط متعامد را برای تابع بردار طولی  $\hat{\mathbf{r}} h_l(kr) Y_{lm}$  در امتداد همان خطوط بدست آوریم. با این حال، اغلب کافی است که فقط توابع بردار عرضی را در نظر بگیریم، و بنابراین روابط متعامد را برای تابع طولی به عنوان تمرین بهخواننده علاقه‌مند و اگذار می‌کنیم.

### تمرینات

- **تمرین ۱** ثابت کنید که  $\mathbf{N}_\psi(\mathbf{r})$  تعریف شده در معادله موج (ت.۱)، در رابطه (ت.۲) صدق می‌کند.
- **تمرین ۲** ثابت کنید که  $\mathbf{N}_\psi$  و  $\mathbf{M}_\psi$  تعریف شده در رابطه (ت.۲) از طریق رابطه  $k\mathbf{M}_\psi = \nabla \times \mathbf{N}_\psi$  بهم مربوط هستند. از تعریف  $k\mathbf{N}_\psi = \nabla \times \mathbf{M}_\psi$  شروع کرده و ثابت کنید که  $\nabla \cdot \mathbf{M}_\psi = 0$  است.
- **تمرین ۳** عملگر مومنتوم  $\nabla \cdot -j\hat{\mathbf{r}} = j\delta_{mn}$  را درنظر گیرید. از رابطه تبدیل  $[r_m, \hat{\pi}_n] = j\delta_{mn}$  استفاده کرده و ثابت کنید که

$$\hat{\pi} = -\frac{j\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}}$$

- **تمرین ۴** از طریق محاسبه دقیق روابط متعامد معادله (ت.۲۴) را بدست آورید.
- **تمرین ۵** بازه  $l = 1$  توابع پایه  $f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}$  را باستفاده از رابطه (ت.۲۳) محاسبه کنید.
- **تمرین ۶** روابط متعامد معادله (ت.۲۴) را اثبات کنید.

---

<sup>۱</sup>Mie

## پیوست ث

### نظریه می

در این پیوست نحوه حل معادلات ماسکسول را برای یک ذره کروی نشان می‌دهیم. این رویکرد معمولاً به افتخار کار اصلی گوستاو می در مورد این موضوع به عنوان "نظریه می" نامیده می شود [۷۴]. تئوری می جشنی از توابع ویژه است، یعنی هارمونیک‌های کروی، هارمونیک‌های کروی برداری، و همچنین توابع کروی بسل و هنکل، و اشتقات آن تا حدودی پیچیده است. با این حال، این یکی از محدود مسائل در الکترودینامیک است که می‌توان آن را به صورت تحلیلی حل کرد و جواب‌های می کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف تحقیقاتی پیدا کرده‌اند، بنابراین ممکن است ارزش آن را داشته باشد که این مسئله را کمی با جزئیات بیشتر بررسی کنیم.

#### ث.۱ بسط چندقطبی میدان‌های الکترومغناطیسی

در پیوست قبل نشان دادیم که هر تابع برداری عرضی را می‌توان بر حسب توابع پایه بسط داد؛

$$\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{r} f_l(kr) Y_{lm}, \quad \mathbf{N}_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} g_l(kr) Y_{lm},$$

که در آن  $f_l$  و  $g_l$  توابع بسل یا هنکل هستند. این دو تابع برداری از طریق روابط زیر بهم مربوط هستند:

$$k\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{N}_f(\mathbf{r}), \quad k\mathbf{N}_f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}_f(\mathbf{r}). \quad (\text{ث.1})$$

در ادامه این تجزیه را برای میدان‌های الکترومغناطیسی اعمال می‌کنیم. جدا از یک پیش فاکتور بی‌اهمیت، تابع برداری  $\mathbf{M}_g$  برای میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{M}_g(\mathbf{r}) = g_l(r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{میدان الکتریکی}) \quad (\text{ث.2})$$

که در آن  $\mathbf{X}_{lm}$  هارمونیک کروی برداری است که در معادله (ث.۱) تعریف شده است. از طریق قانون فارادی،  $\mathbf{M}_g$  به میدان مغناطیسی بصورت زیر مربوط می‌شود:

$$-jkZ\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}_g(\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_g(\mathbf{r})$$

که در آن  $Z$  امپدانس است. به طور مشابه، می‌توانیم تابع برداری  $\mathbf{M}_f$  را برای میدان مغناطیسی به شکل زیر بیان کنیم:

$$Z^{-1}\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = f_l(r)\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{ث.۳}) \quad (\text{میدان مغناطیسی})$$

که به میدان الکتریکی بصورت زیر مربوط می‌شود؛

$$jkZ^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Z^{-1}\nabla \times \mathbf{M}_f(\mathbf{r}) = Z^{-1}k\mathbf{N}_f(\mathbf{r})$$

با کنار هم قرار دادن مولفه‌های میدان الکتریکی  $\mathbf{M}_g(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_f(\mathbf{r})$  و مولفه‌های میدان مغناطیسی  $\mathbf{M}_f(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_g(\mathbf{r})$  به تجزیه میدان‌های الکترومغناطیسی بر حسب هارمونیک‌های کروی برداری می‌رسیم.

### بسط چندقطبی میدان‌های الکترومغناطیسی

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Z \sum_{l,m} \left[ b_{lm} g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{j}{k} a_{lm} \nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right] \quad (\text{ث.۴})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \left[ a_{lm} f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) + \frac{j}{k} b_{lm} \nabla \times g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

این عبارت تجزیه کلی برای میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی را فراهم می‌کند که در آن ضرایب  $b_{lm}$  و  $a_{lm}$  و توابع شعاعی  $f_l$  و  $g_l$  باید برای مسئله مورد مطالعه تعیین شوند.

### ضرایب چندقطبی

فرض کنید میدان‌های الکترومغناطیسی (عرضی)  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  را معلوم و می‌خواهیم ضرایب بسط  $b_{lm}$  و  $a_{lm}$  مربوطه را محاسبه کنیم. نقطه شروع بسط چندقطبی برای میدان الکتریکی معادله (ث.۴) است.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Z \sum_{l,m} \left[ b_{lm} g_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{j}{k} a_{lm} \nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

هر دو طرف را از سمت چپ در  $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0$  ضرب و توجه می‌کنیم که اولین جمله داخل پرانتر صفر شود. عبارت دوم را می‌توان با استفاده از یک جایگشت دوری<sup>۱</sup> در ضرب سه گانه از طریق رابطه زیر ساده کرد؛

$$j\mathbf{r} \cdot \nabla \times f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} = (j\mathbf{r} \times \nabla) \cdot f_l(kr) \mathbf{X}_{lm} = -\hat{\mathbf{L}} \cdot f_l(kr) \mathbf{X}_{lm}$$

بنابراین خواهیم داشت؛

<sup>۱</sup> Cyclic Permutation

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -Z \sum_{l,m} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k} a_{lm} f_l(kr) Y_{l,m}(\theta, \phi),$$

که در آن از تعریف معادله (ت.۸) برای هارمونیک‌های کروی برداری استفاده کرده‌ایم. اگر معادله بالا را با یک هارمونیک کروی با درجه و مرتبه معین ضرب کنیم، می‌توانیم ضرایب چند قطبی بیان شده بر حسب میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی را در تمام زوایا از طریق انتگرال‌گیری بدست آوریم؛

### ضرایب بسط چندقطبی

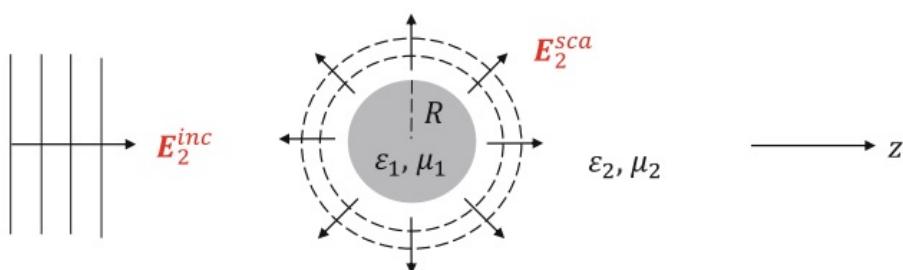
$$a_{lm} f_l(kr) = -\frac{Z^{-1} k}{\sqrt{l(l+1)}} \oint Y_{lm}^*(\theta, \phi) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] d\Omega \quad (\text{ث.۵})$$

$$b_{lm} g_l(kr) = \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} \oint Y_{lm}^*(\theta, \phi) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})] d\Omega$$

عبارت دوم برای  $b_{lm}$  را می‌توان با همان روش از بسط چندقطبی میدان مغناطیسی معادله (ث.۴) بدست آورد.

## ث. ۲. ضرایب می

در مرحله بعد مسئله یک نانوذره کروی با شعاع  $R$  و با خواص مواد همگن  $\mu_1, \epsilon_1$  در داخل کره و  $\mu_2, \epsilon_2$  در خارج از کره را در نظر می‌گیریم، شکل (ث.۱). میدان‌های الکتریکی  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$  و  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  را در داخل و خارج از کره بصورت زیر تجزیه می‌کنیم؛



شکل ث.۱: شماتیک مسئله می. یک ذره کروی با شعاع  $R$  و خواص مواد  $\mu_1, \epsilon_1$  در محیطی با  $\mu_2, \epsilon_2$  قرار دارد. در اینجا ذره توسط یک موج صفحه با میدان تابشی  $E_2^{inc}$  تحریک شده، و پاسخ کره با میدان‌های پراکنده  $E_2^{sca}$  و  $E_1^{sca}$  به ترتیب در خارج و داخل ذره کروی توصیف می‌شود. در نظریه می، این میدان‌های پراکنده بر حسب ضرایب می توصیف می‌شوند.

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1^{sca}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2^{sca}(\mathbf{r})$$

با یک عبارت مربوط به میدان‌های مغناطیسی. در اینجا  $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})$  میدان تابشی است، به عنوان مثال تحریک با یک موج صفحه یا یک دوقطبی نوسانی صورت می‌گیرد، و  $\mathbf{E}_{1,2}^{sca}(\mathbf{r})$  میدان‌های پراکنده‌ای هستند که پاسخ نانوذرات کروی را توصیف می‌کنند. میدان‌های الکترومغناطیسی تابشی را می‌توان بر حسب بسط چندقطبی معادله (ث.۴) بصورت زیر بیان کرد.

$$\mathbf{E}_2^{inc} = Z_2 \sum_{l,m} \left[ b_{lm}^{inc} g_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{j}{k_2} a_{lm}^{inc} \nabla \times f_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right] \quad (\text{ث.۶})$$

$$\mathbf{H}_2^{inc} = \sum_{l,m} \left[ a_{lm}^{inc} f_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) + \frac{j}{k_2} b_{lm}^{inc} \nabla \times g_l(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

که در آن ضرایب  $a_{lm}^{inc}, b_{lm}^{inc}$  و همچنین ترکیب توابع بسل و هنکل کروی  $f_l(k_2 r), g_l(k_2 r)$  باید برای هر نوع تحریک به طور جداگانه، همانطور که در ادامه بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت، تعیین شود.  $Z_2$  به ترتیب عددموج و امپدانس محیط بستر هستند. میدان‌های پراکنده خارج از کره خواهد بود<sup>۲</sup>؛

$$\mathbf{E}_2^{sca} = -Z_2 \sum_{l,m} \left[ b_{lm} h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{j}{k_2} a_{lm} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right] \quad (\text{ث.۷})$$

$$\mathbf{H}_2^{sca} = - \sum_{l,m} \left[ a_{lm} h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) + \frac{j}{k_2} b_{lm} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

در اینجا ما  $f_l, g_l$  را با تابع هنکل کروی  $h_l^{(2)}$  نوع دوم جایگزین کرده ایم، زیرا آنها برای آرگومان‌های بزرگ شرایط مرزی مناسب امواج خروجی را دارند، معادله (پ.۲۹). به طور مشابه، در داخل ذره، تابع بسل کروی  $j_l$  را جایگزین  $f_l, g_l$  می‌کنیم که در مبدأ محدود می‌ماند. این ما را به سمت میدان‌های پراکنده به داخل کره هدایت می‌کند؛

$$\mathbf{E}_1^{sca} = Z_1 \sum_{l,m} \left[ d_{lm} j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{j}{k_1} c_{lm} \nabla \times j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right] \quad (\text{ث.۸})$$

$$\mathbf{H}_1^{sca} = \sum_{l,m} \left[ c_{lm} j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) + \frac{j}{k_1} d_{lm} \nabla \times j_l(k_1 r) \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) \right]$$

برای محاسبه ضرایب مجهول  $a_{lm}, b_{lm}$  در خارج از ذره و  $c_{lm}, d_{lm}$  در داخل ذره است که باید میدان‌های الکترومغناطیسی را در مرز ذره برابر قرار دهیم. این روش تطبیق با این واقعیت تسهیل می‌شود که در بسط چند قطبی معادلات (ث.۶ - ث.۸) میدان‌های الکترومغناطیسی در حال حاضر کاملاً مماسی هستند. بنابراین، شرایط مرزی زیر را بدست می‌آوریم

$$\mathbf{E}_1^{sca} \Big|_{r=R} = \left[ \mathbf{E}_2^{inc} + \mathbf{E}_2^{sca} \right] \Big|_{r=R}, \quad \mathbf{H}_1^{sca} \Big|_{r=R} = \left[ \mathbf{H}_2^{inc} + \mathbf{H}_2^{sca} \right] \Big|_{r=R}$$

<sup>۲</sup>علامت منفی در جلوی جمع برای میدان‌های پراکنده برای راحتی انتخاب می‌شود تا ضرایب می‌مشابه ضرایب بورن و هافمن [۶۰] بدست آید.

ابتدا معادلات فوق را در  $\mathbf{X}_{lm}^*$  ضرب و سپس در تمام زوایا انتگرال گیری کرده و از روابط متعامد معادل (ت. ۲۲) استفاده می‌کنیم. این میدهد؛

$$\frac{Z_1}{Z_2} d_{lm} j_l(k_1 R) = b_{lm}^{inc} g_l(k_2 R) - b_{lm} h_l^{(2)}(k_2 R) \quad (۹.ث)$$

$$c_{lm} j_l(k_1 R) = a_{lm} f_l(k_2 R) - a_{lm} h_l^{(2)}(k_2 R)$$

به طور مشابه، شرایط مرزی را در  $\mathbf{X}_{lm}^*$  ضرب و سپس در تمام زوایا انتگرال گیری کرده و از روابط متعامد معادله (ت. ۲۲) استفاده می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت؛

$$\frac{Z_1}{Z_2} \frac{c_{lm}}{k_1} \left[ \frac{d}{dr} r j_l(k_1 r) \right]_{r=R} = \frac{a_{lm}^{inc}}{k_2} \left[ \frac{d}{dr} r f_l(k_2 r) \right]_{r=R} - \frac{a_{lm}}{k_2} \left[ \frac{d}{dr} r h_l^{(2)}(k_2 r) \right]_{r=R} \quad (۱۰.ث)$$

$$\frac{d_{lm}}{k_1} \left[ \frac{d}{dr} r j_l(k_1 r) \right]_{r=R} = \frac{b_{lm}}{k_2} \left[ \frac{d}{dr} r g_l(k_2 r) \right]_{r=R} - \frac{b_{lm}}{k_2} \left[ \frac{d}{dr} r h_l^{(2)}(k_2 r) \right]_{r=R}$$

در ادامه اختصارات  $x_2 = k_2 R$  و  $x_1 = k_1 R$  و توابع بسل ریکاتی<sup>۴</sup> و مشتق‌های آنها را معرفی می‌کنیم.

### توابع بسل-ریکاتی و مشتق‌های آنها

$$\begin{aligned} \psi_l(x) &= x j_l(x), & \psi'_l(x) &= \frac{d}{dx} [x j_l(x)] \\ \zeta_l(x) &= x h_l^{(2)}(x), & \zeta'_l(x) &= \frac{d}{dx} [x h_l^{(2)}(x)] \end{aligned} \quad (۱۱.ث)$$

به علاوه توابع  $F_l(x) = x f_l(x)$ ,  $G_l(x) = x g_l(x)$  و مشتق‌های آنها را معرفی می‌کنیم. سپس ضرایب می برای میدان‌های کره بیرونی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$a_{lm} = \left[ \frac{Z_2 \psi_l(x_1) F'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) F_l(x_2)}{Z_2 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2)} \right] a_{lm}^{inc} \quad (۱۲.ث)$$

$$b_{lm} = \left[ \frac{Z_2 \psi'_l(x_1) G_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) G'_l(x_2)}{Z_2 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2)} \right] b_{lm}^{inc}$$

به همین منوال، ضرایب میدان داخل کره خواهد بود؛

$$c_{lm} = \frac{k_1}{k_2} \left[ \frac{Z_1 \zeta'_l(x_2) F_l(x_2) - Z_1 \zeta_l(x_2) F'_l(x_2)}{Z_2 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2)} \right] a_{lm}^{inc} \quad (۱۳.ث)$$

$$d_{lm} = \frac{k_1}{k_2} \left[ \frac{Z_1 \psi_l(x_2) G'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_2) G_l(x_2)}{Z_2 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2)} \right] b_{lm}^{inc}$$

بنابراین، حل معادلات ماکسول را می‌توان با چهار ضریب دریافت کرد که به راحتی به عنوان ضرایب می شناخته می‌شوند.

<sup>۴</sup>Riccati-Bessel

### ث. ۳ تحریک با موج صفحه‌ای

فرض کنید که کره توسط یک موج صفحه تابشی، همانطور که در شکل (ث. ۱) نشان داده شده، تحریک شده است. از آنجایی که میدان‌های تابشی کاملاً عرضی هستند،  $\nabla \cdot \mathbf{E}^{inc} = \nabla \cdot \mathbf{H}^{inc} = 0$ ، همچنین پراکنده باید  $0 = \nabla \cdot \mathbf{E}^{sca} = \nabla \cdot \mathbf{H}^{sca}$  باشد. این تنها زمانی حاصل می‌شود که قسمت‌های طولی میدان‌های پراکنده صفر باشند. و بنابراین باید فقط توابع بردار عرضی را در نظر بگیریم.

#### ضریب بسط برای تحریک موج صفحه‌ای

ابتدا نحوه محاسبه ضرایب  $a_{lm}^{inc}, b_{lm}^{inc}$  را برای تحریک موج مسطح نشان می‌دهیم. نقطه شروع معادله (پ. ۳۱) است. برای تجزیه یک موج کروی بر حسب هارمونیک کروی داریم؛

$$\frac{e^{jkR}}{4\pi R} = jk \sum_{lm} j_l(kr_<) h_l^{(2)}(kr_>) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{ث. ۱۴})$$

که در آن  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  و  $r_<$  کوچکتر از  $r'$  و  $r_>$  بزرگتر از  $r'$  است. برای مقادیر بزرگ  $r'$  و  $r \gg r'$  می‌توانیم عبارت سمت چپ رابطه را بصورت زیر بنویسیم؛

$$\frac{e^{jkR}}{4\pi R} \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{jkr'}}{4\pi r'} \right] e^{-jkr' \cdot \mathbf{r}}$$

همانطور که با جزئیات بیشتر در بخش ۱.۳.۵ بحث شده است. (برای مقایسه نتایج باید  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{r}'$  را جایگزین کرد). با استفاده از شکل مجانبی معادله (پ. ۲۹) برای تابع هنکل کروی، با وارد کردن آرگومان‌های بزرگ در معادله (ث. ۱۴) بسط، و با گرفتن مزدوج مختلط در دو طرف معادله به رابطه زیر میرسیم؛

$$e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l,m} j_l^l(kr) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{ث. ۱۵})$$

با  $\mathbf{k} = kr'\hat{\mathbf{r}}$  در ادامه فرض می‌کنیم که موج تابشی در امتداد جهت  $z$  منتشر می‌شود،  $\theta' = 0$ ، و از قضیه جمع برای هارمونیک‌های کروی استفاده می‌کنیم [۲، ۶۲.۳]؛

$$P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}})$$

با این کار به بسط یک موج مسطح بر حسب امواج کروی هدایت می‌شویم؛

#### بسط موج کروی یک موج مسطح $I$

$$e^{j kz} = \sum_l j_l^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l,0}(\theta, \phi) \quad (\text{ث. ۱۶})$$

در ادامه یک موج صفحه‌ای با قطبش دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که در امتداد  $z$  منتشر می‌شود. بردارهای پلاریزاسیون  $\hat{\mathbf{y}} \pm j\hat{\mathbf{x}} = \epsilon_{\pm}$  را برای چرخش  $\pm$  معرفی می‌کنیم. سپس میدان‌های الکترومغناطیسی را می‌توان بهصورت زیر بیان کرد؛

$$\mathbf{E} = \epsilon_{\pm} E_0 e^{j k z}, \quad Z\mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = \mp j \epsilon_{\pm} E_0 e^{j k z}, \quad (17)$$

که در آن  $E_0$  دامنه میدان الکتریکی موج تابشی است. یک موج با قطبش خطی را می‌توان بهصورت ترکیبی از دو حالت چرخشی بیان کرد. سپس بسط چند قطبی میدان‌های الکترومغناطیسی را که با معادله (۱۴) داده شده از هر دو طرف در  $\mathbf{X}_{lm}^*$  ضرب و در تمام زوایا انتگرال‌گیری کرده از روابط تعامل هارمونیک‌های کروی برداری استفاده می‌کنیم.

$$\oint \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\Omega = Z b_{lm}^{\pm} g_l(kr) = \oint \mathbf{X}_{lm}^* \cdot [\epsilon_{\pm} E_0 e^{j k z}] d\Omega \quad (18)$$

$$Z \oint \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) d\Omega = Z a_{lm}^{\pm} f_l(kr) = \oint \mathbf{X}_{lm}^* \cdot [\mp j \epsilon_{\pm} E_0 e^{j k z}] d\Omega.$$

برای محاسبه انتگرال‌ها در سمت راست داریم؛

$$\sqrt{l(l+1)} \epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{X}_{lm} = \hat{\mathbf{L}}_{\mp} Y_{lm}, \quad (19)$$

عملگر  $\hat{\mathbf{L}}_{\pm} = \hat{L}_x \pm j \hat{L}_y$  با معادله (۱۴) معرفی شد. برای محاسبه  $\hat{\mathbf{L}}_{\mp} Y_{lm}$  از رابطه (۱۵) استفاده کرده و خواهیم داشت؛

$$\oint [\epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{X}_{lm}]^* Y_{l0} d\Omega = \sqrt{\frac{(l \pm m)(l \mp m + 1)}{l(l+1)}} \delta_{m \mp 1, 0} = \delta_{m, \pm 1}.$$

بنابراین، اگر بسط موج کروی رابطه (۱۶) را در معادله (۱۸) قرار دهیم، بدست می‌آید؛

$$Z b_{lm}^{\pm} g_l(kr) = j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \delta_{m, \pm 1} j_l(kr), \quad (20)$$

و همچنین  $a_{lm}^{\pm} = \mp j b_{lm}^{\pm}$  با کنار هم گذاشتن همه نتایج، به بسط موج صفحه تابجی با چرخش  $\pm$  هدایت می‌شویم که بر حسب هارمونیک‌های کروی برداری در امتداد جهت  $z$  منتشر می‌شود (۱۰)؛

## بسط موج کروی یک موج مسطح II

$$\mathbf{E} = E_0 \sum_l j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[ j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right] \quad (21)$$

$$Z\mathbf{H} = E_0 \sum_l j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[ \mp j j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} - \frac{j}{k} \nabla \times j_l(kr) \mathbf{X}_{l, \pm 1} \right].$$

## تحریک موج مسطح یک ذره کروی

در مرحله بعد از معادله (ث.۷) استفاده می‌کنیم. برای بیان میدان‌های الکترومغناطیسی پراکنده خارج از نانوذرات فلزی بر حسب ضرایب می، با ضرایب تابشی  $a_{lm}^{inc}, b_{lm}^{inc}$  که از طریق معادله (ث.۲۱) داده شده است. محاسبه میدان‌های داخل کره به عنوان تمرین بهخواننده علاقه‌مند سپرده می‌شود. ابتدا عبارات داخل پرانتر معادله (ث.۱۲) را برای  $F_l(x) = G_l(x) = \psi_l(x)$  بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

### ضرایب می برای تحریک موج مسطح

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{Z_2 \psi_l(x_1) \psi'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) \psi_l(x_2)}{Z_2 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2) - Z_1 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2)} \\ b_l &= \frac{Z_2 \psi'_l(x_1) \psi_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) \psi'_l(x_2)}{Z_2 \psi'_l(x_1) \zeta_l(x_2) - Z_1 \psi_l(x_1) \zeta'_l(x_2)} \end{aligned} \quad (\text{ث.۲۲})$$

که در آن  $\zeta_l, \psi_l$  توابع بسل-ریکاتی داده شده در رابطه (ث.۱۱) و  $k_1, k_2$  عدددهای موج داخل و خارج کره و  $Z_1, Z_2$  امپدانس‌های مربوطه هستند. علاوه بر این از اختصارات  $x_1 = k_1 R, x_2 = k_2 R$  که در آن  $R$  شعاع کره استفاده شده است. با این ضرایب می میدان‌های الکترومغناطیسی خارج کره از رابطه (ث.۷) محاسبه می‌شود و آنها بصورت زیر هستند؛

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^{sca} &= -E_0 \sum_l j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[ b_l h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm \frac{a_l}{k_2} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \\ Z_2 \mathbf{H}_2^{sca} &= -E_0 \sum_l j^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[ \mp j a_l h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{l,\pm 1} - \frac{j b_l}{k_2} \nabla \times h_l^{(2)}(k_2 r) \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{ث.۲۳})$$

### سطح مقطع انقراضی

برای محاسبه سطح مقطع انقراضی، از قضیه نوری معادله (۲۷.۴) برای بیان توان انقراضی شروع می‌کنیم؛

$$P_{ext} = \frac{2\pi}{k_2} Z_2^{-1} \operatorname{Im} \left[ E_0^* \epsilon_\pm^* \cdot \mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}}) \right].$$

در اینجا ( $\hat{\mathbf{z}}$ ) دامنه میدان‌های دور میدان الکتریکی پراکنده شده در جهت  $\hat{\mathbf{z}}$  است. با استفاده از تقارن از رابطه (پ.۲۹) برای توابع هنکل کروی، از رابطه (ث.۲۳) دامنه میدان دور را بدست می‌آوریم؛

$$\mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}}) = \frac{j E_0}{k_2} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[ b_l \mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm \frac{a_l}{k_2} (jk_2 \hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right]$$

دو طرف رابطه بالا را در  $\epsilon_{\pm}^*$  ضرب کرده و خواهیم داشت؛

$$\epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}}) = \frac{jE_0}{k_2} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[ b_l \epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{X}_{l,\pm 1} \pm j a_l \epsilon_{\pm}^* \cdot \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{X}_{l,\pm 1} \right]$$

جمله دوم داخل براکت را با استفاده از جایگشت دوری ضرب سه‌گانه بازنویسی می‌کنیم؛

$$\epsilon_{\pm}^* \cdot \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{X}_{l,\pm 1} = \epsilon_{\pm}^* \times \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{X}_{l,\pm 1} = \mp j \epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{X}_{l,\pm 1} \quad (24.\text{ث})$$

با استفاده از معادله (۲۴.ث) بدست می‌آید؛

$$\epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{F}_2^{sca}(\hat{\mathbf{z}}) = \frac{jE_0}{k_2} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} (a_l + b_l) \left[ \hat{L}_{\pm} \frac{Y_{l\pm 1}}{\sqrt{l(l+1)}} \right],$$

که در آن عبارت داخل پرانتز  $Y_{l0}$  می‌شود و باید برای زوایای مربوط به جهت انتشار موج مسطح تابشی محاسبه شود، در این حالت  $0 = \theta$  است. بنابراین می‌توانیم از  $Y_{l,0}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$  برای بیان توان انقراضی به‌شکل زیر استفاده کنیم؛

$$P_{ext} = \frac{2\pi}{k_2^2} Z_2^{-1} |E_0|^2 \sum_l (2l+1) Re[a_l + b_l] \quad (25.\text{ث})$$

شدت موج مسطح تابشی برابر  $I_{inc} = \frac{1}{2} Z_2^{-1} |\sqrt{2} E_0|^2$  است، که در آن عامل  $\sqrt{2}$  به دلیل بردارهای قطبش  $\hat{\mathbf{x}} \pm \hat{\mathbf{y}}$  که نرمالیزه نشده است. نسبت  $P_{ext} : I_{inc}$  سطح مقطع انقراضی را برای ذره کروی تحریک با موج مسطح می‌دهد.

### سطح مقطع انقراضی (نظریه می)

$$C_{ext} = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_l (2l+1) Re[a_l + b_l] \quad (26.\text{ث})$$

### سطح مقطع پراکندگی

میدان‌های پراکنده در بیرون ذره معادله (۲۷.ث) را در نظر بگیرید. خیلی دور از ذره می‌توانیم از شکل مجانبی معادله (۲۹.پ) برای بیان میدان‌های الکترومغناطیسی از توابع هنکل به صورت زیر استفاده کنیم.

$$\mathbf{H}_2^{sca} \rightarrow \frac{e^{jk_2 r}}{k_2 r} \sum_{l,m} (-j)^{l+1} \left[ a_{l,m} \mathbf{X}_{l,m} + b_{l,m} \hat{\mathbf{k}}_2 \times \mathbf{X}_{l,m} \right] \quad (27.\text{ث})$$

$$\mathbf{E}_2^{sca} \rightarrow Z_2 \mathbf{H}_2^{sca} \times \hat{\mathbf{k}}_2$$

توان متوسط زمانی تابش شده در واحد زاویه فضائی توسط پراکنده‌کننده را می‌توان از بردار پواین‌تینگ  $\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \frac{1}{2} Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$  تصویر در جهت انتشار به دست آورد،

$$\frac{dP_{sca}}{d\Omega} = \frac{1}{2} Re \left[ r^2 \hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{E}_2^{sca} \times \mathbf{H}_2^{sca*} \right] \\ (ث. ۲۸)$$

$$\frac{Z_2}{2k_2^2} \left| \sum_{l,m} (-j)^{l+1} [a_{l,m} \mathbf{X}_{l,m} \times \hat{\mathbf{k}}_2 + b_{l,m} \mathbf{X}_{l,m}] \right|^2.$$

کل توان تابشی را می‌توان با انتگرال گیری این عبارت در تمام زوایا به دست آورد. در انجام این کار، به آسانی مشاهده می‌شود که جمله‌های تداخل به دلیل متعامد بودن هارمونیک‌های کروی برداری شرکت نمی‌کنند، و کل توان تشعشعی فقط یک مجموع ناهمدوس از مشارکت‌های چند قطبی مختلف است.

$$P_{sca} = \frac{Z_2}{2k_2^2} \sum_{l,m} (|a_{l,m}|^2 + |b_{l,m}|^2) \quad (ث. ۲۹)$$

عبارت بالا کلی است و برای هر نوع میدان پراکنده‌ای که به شکل معادله (ث. ۷) نوشته می‌شود قابل استفاده است. برای تحریک موج مسطح ضرایب  $a_{l,m}^{inc}$  و  $b_{l,m}^{inc}$  با معادله (ث. ۲۰) داده می‌شود.

$$P_{sca} = \frac{2\pi}{k_2^2} Z_2^{-1} \sum_{l,m} (2l+1) (|a_{l,m}|^2 + |b_{l,m}|^2)$$

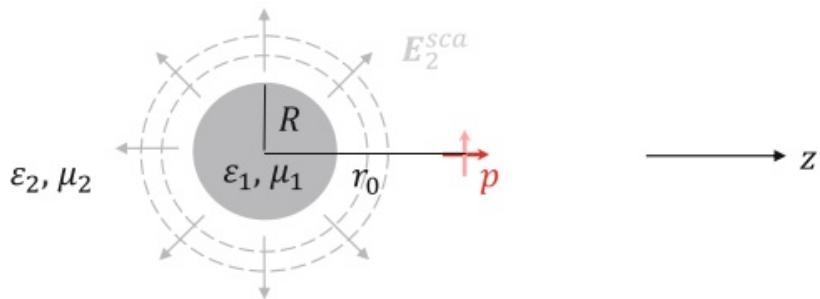
که با ضرایب می‌معادله (ث. ۲۲) است. پس از تقسیم بر شدت موج صفحه تابشی،  $I_{inc}$  سطح مقطع پراکنده‌گی یک نانوذره کروی را که توسط یک موج صفحه تابشی تحریک می‌شود، به دست می‌آید؛

### سطح مقطع پراکنده‌گی (نظریه می)

$$C_{sca} = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_l (2l+1) Re(|a_l|^2 + |b_l|^2) \quad (ث. ۳۰)$$

## ث. ۴ تحریک موج مقطع دوقطبی

در ادامه وضعیت نشان داده شده در شکل (ث. ۲) از یک دوقطبی نوسانی با با گشتاور دوقطبی  $p$  در موقعیت  $r_0$  خارج از یک کره را در نظر می‌گیریم [۱۲۱، ۱۲۲]. میدان الکترومغناطیسی "تابشی"  $\mathbf{E}_2^{inc}$  دارای مولفه عرضی و طولی است که دومی از  $\rho \epsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E}_2^{inc} = \rho$  تعیین می‌شود؛ که در آن  $\rho$  توزیع بار دوقطبی است. برای میدان‌های پراکنده، از  $\rho = (\mathbf{E}_2^{inc} + \mathbf{E}_2^{sca}) \cdot \epsilon \nabla$  متوجه می‌شویم که عرضی هستند زیرا  $\nabla \cdot \mathbf{E}_2^{sca} = 0$  باید در کل فضا برآورده شود. بنابراین کافی است در ادامه مولفه‌های عرضی میدان‌های الکترومغناطیسی را در نظر بگیریم.



شکل ث.۲: شماتیک تحریک توسط یک دوقطبی نانوذرات کروی. یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی  $p$  (جهت آن در امتداد  $\epsilon_{\pm}$  یا  $\hat{z}$ ) در موقعیت  $r_0 \hat{z}$  قرار دارد و با فرکانس  $\omega$  نوسان می‌کند. میدان‌های پراکنده بر روی دوقطبی برگشته و خواص تابشی و غیر تابشی آن را تغییر می‌دهند.

### ضرایب بسط چندقطبی برای منبع جریان

از معادله (ث.۵) برای محاسبه ضرایب بسط چند قطبی بر حسب میدان‌های عرضی  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  شروع می‌کنیم. میدان الکتریکی عرضی را معرفی می‌کنیم

$$\mathbf{E}^{\perp} = \mathbf{E} - \frac{j}{\omega\epsilon} \mathbf{J} \quad (\text{ث.} 31)$$

همراه با معادله پیوستگی  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = j\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{J}$  به راحتی می‌توان نشان داد که با این در واقع  $\nabla \cdot \mathbf{E}^{\perp} = 0$  را به دست می‌آوریم. سپس روابط کرل معادلات ماکسول را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - j\frac{1}{\omega\epsilon}\nabla \times \mathbf{J}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}^{\perp}$$

با اعمال کرل در هر دو طرف معادله و استفاده از  $\nabla \cdot \mathbf{E}^{\perp} = 0$  معادلات موج زیر را بدست می‌آوریم:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}^{\perp} = \frac{j}{\omega\epsilon}\nabla \times \nabla \times \mathbf{J}$$

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

سپس هر دو طرف معادلات را از سمت چپ با  $\mathbf{r}$  ضرب می‌کنیم و از اتحاد برداری کلی  $\mathbf{r} \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) + 2\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) = 0$  استفاده می‌کنیم.

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{\perp} = \frac{1}{\omega\epsilon}\hat{\mathbf{L}} \cdot \nabla \times \mathbf{J}$$

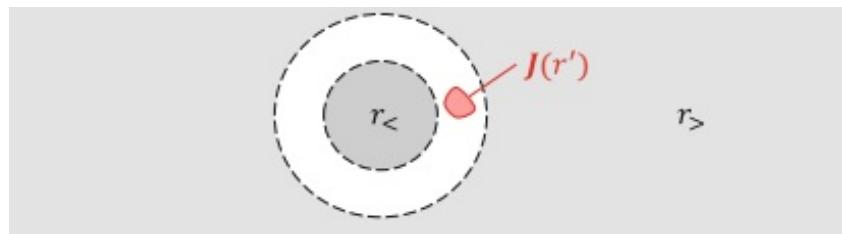
$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = j\hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{J}$$

معادلات موج بالا را می‌توان بوسیله تابع گرین برای معادله هلم‌هولتز حل کرد، (معادله ۷.۵) و خواهیم داشت؛

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\omega\epsilon} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{L}}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{L}}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

سپس تابع گرین را بر حسب هارمونیک‌های کروی با استفاده از معادله (ب. ۳۱) بازنویسی



شکل ث. ۳: بسط چند قطبی برای توزیع جریان  $J(r')$ . فرض می‌کنیم که نقطه  $r$  که در آن میدان‌ها محاسبه می‌شوند یا در داخل کره‌ای با شعاع کوچکتر از همه مقادیر  $r'$  منبع قرار دارد، در شکل ناحیه‌ای را که با  $r < r'$  نشان داده شده، یا در خارج از کره‌ای با شعاع بزرگتر از همه مقادیر  $r'$  قرار دارد که در شکل با  $r > r'$  نشان داده شده است.

می‌کنیم. در انجام این کار، فرض بر این است که توزیع جریان در یک منطقه  $\Omega'$  قرار دارد و برای  $r$  مقداری را انتخاب می‌کنیم که در داخل یا خارج پوسته کره شامل کل منبع قرار دارد، مناطق  $r_{<} < r < r'$  در شکل (ث. ۳) نشان داده شده است. همراه با {۲۰۱۶.۹} داریم؛

$$\oint Y_{lm}(\theta, \phi) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Omega = -jk \begin{Bmatrix} h_l^{(2)}(kr) j_l(kr') \\ j_l(kr) h_l^{(2)}(kr') \end{Bmatrix} Y_{lm}^*(\theta', \phi')$$

که مستقیماً از معادله (ب. ۳۱) پیروی می‌کند، سپس می‌توانیم ضرایب بسط چند قطبی را برای یک منبع جریان دلخواه به صورت زیر {۲۰۱۶.۹} بنویسیم؛

$$a_{lm}^{inc} = \frac{-jk}{\sqrt{l(l+1)}} \int f_l(kr) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \hat{\mathbf{L}} \cdot \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3 r \quad (\text{ث. ۳۲})$$

$$b_{lm}^{inc} = -\frac{k^2}{\sqrt{l(l+1)}} \int f_l(kr) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3 r$$

توجه داشته باشید که در عبارات بالا، متغیر انتگرال گیری را از  $r'$  به  $r$  تغییر داده‌ایم. در ارزیابی ضرایب چند قطبی باید دو مورد زیر را تشخیص دهیم.

- حالت  $r > r'$  هنگامی که نقطه مشاهده خارج از پوسته کره از جمله منبع، مربوط به منطقه  $r < r'$  است، باید از  $f_l(kr) = j_l(kr)$  استفاده کنیم.

- حالت  $r < r'$  هنگامی که نقطه مشاهده در داخل پوسته کره شامل منبع، مربوط به ناحیه  $r < r'$  است، باید از  $f_l(kr) = h_l^{(2)}(kr)$  استفاده کنیم.

### ضرایب بسط چندقطبی برای یک دوقطبی نقطه‌ای

سپس برای توزیع فعلی معادله (۱.۶) را در نظر می‌گیریم. برای یک دوقطبی نقطه‌ای، داریم

$$\mathbf{J} = j\omega \mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

با وارد کردن این توزیع در معادله (۳۲) مشتقاتی ازتابع دلتای دیراک را ارائه می‌دهد که مطابق (۳.ج) معادله محاسبه می‌شوند. با این بهنتایج زیر می‌رسیم؛

$$\int f(\mathbf{r}) [\hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] d^3r = - \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) [\hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{p}f(\mathbf{r})] d^3r$$

$$\int f(\mathbf{r}) [\hat{\mathbf{L}} \cdot \nabla \times \mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] d^3r = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) [\hat{\mathbf{L}} \cdot \nabla \times \mathbf{p}f(\mathbf{r})] d^3r$$

از این نتایج پس از چند دستکاری ساده بهدست می‌آوریم

$$a_{lm}^{inc} = \frac{\omega k}{\sqrt{l(l+1)}} [\hat{\mathbf{L}} \cdot \nabla \times \mathbf{p}f_l(kr) Y_{lm}^*]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$$

$$b_{lm}^{inc} = \frac{-j\omega k^2}{\sqrt{l(l+1)}} [\hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{p}f_l(kr) Y_{lm}^*]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$$

بنابراین، می‌توانیم ضرایب بسط چندقطبی را برای یک دوقطبی نقطه‌ای با گشتاور دوقطبی  $\mathbf{p}$  واقع در موقعیت  $\mathbf{r}_0$  به صورت زیر بیان کنیم  $\{122\}$ ،  $\{16\}$ .

### ضرایب بسط چندقطبی برای دوقطبی نقطه‌ای

$$a_{lm}^{inc} = \frac{j\omega k}{r^2} \left[ \sqrt{l(l+1)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} f_l(kr) Y_{lm}^* - j \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \times [x f_l(x)]'_{x=kr} \mathbf{X}_{l,m}^* \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \quad (۳۳.ث)$$

$$b_{lm}^{inc} = -j\omega k^2 \left[ \mathbf{p} \cdot f_l(kr) \mathbf{X}_{l,m}^* \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$$

در اینجا  $[x f_l(x)]'$  نماد پریم نشان دهنده مشتق نسبت به  $x$  است. در ادامه وضعیتی را در نظر می‌گیریم که دوقطبی در خارج از کره و روی محور  $z$  قرار دارد، به طوری که  $\mathbf{r}_0 = r_0 \hat{\mathbf{z}}$  است و از معادله (۱.۱۱) و (۱.۲۲) استفاده می‌کنیم.

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m,0}, \quad \mathbf{X}_{l,m}(\hat{\mathbf{z}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{16\pi}} \epsilon_{\pm} \delta_{m\pm1}. \quad (۳۴.ث)$$

به طور جداگانه موارد دوقطبی موازی و عمود بر محور  $z$  را بررسی می‌کنیم. برای جهت دوقطبی از معادله (۳۳.ث) بدست می‌آوریم.

$$a_{lm}^{inc} = jp\omega k^2 \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}} \frac{f_l(kr_0)}{kr_0} \delta_{m,0}, \quad b_{lm}^{inc} = 0 \quad (۳۵.ث)$$

مشابه این برای دوقطبی  $p = p\epsilon_{\pm}$  داریم؛

$$a_{lm}^{inc} = \mp jp\omega k^2 \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}} \frac{[xf_l(x)]'_{x=kr_0}}{kr_0} \delta_{m\pm 1} \quad (\text{ث.} ۳۶)$$

$$b_{lm}^{inc} = -jp\omega k^2 \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}} f_l(kr_0) \delta_{m\pm 1}$$

که در آن از  $\epsilon_{\pm} = \pm j\epsilon_{\pm} \hat{z}$  استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشید که بردار  $\epsilon$  نرمالیزه نشده است و باید آن را در محاسبه توان‌های تابشی و تلف شده در نظر بگیریم.

### توان تابشی دوقطبی نوسانی

با صحت سنجی شروع کرده و توان تابشی  $P_0$  دوقطبی نوسانی را به تنهایی محاسبه می‌کنیم. این مسئله را در فصل دهم بررسی شد و معادله (۴.۱۰) برای آن به دست آمد؛

$$p_0 = \frac{\mu\omega^4 p^2}{12\pi c}$$

اکنون از ضریب بسط چند قطبی معادله (ث. ۳۵) استفاده کرده تا نشان دهیم که در نظریه می‌همان نتیجه را می‌دهد. برای بدست آوردن توان پراکنده یک دوقطبی در جهت  $z$ ها از معادله (ث. ۲۹) استفاده می‌کنیم.

$$p_{sca} = \frac{Z}{2k^2} \sum_l |a_l|^2 = \frac{Zp^2\omega^2k^4}{8\pi k^2} \sum_l l(l+1)(2l+1) \left| \frac{j_l(kr_0)}{kr_0} \right|^2$$

توجه داشته باشید که در اینجا و در ادامه زیرنویس ۲ را برای محیط بیرونی حذف می‌کنیم. همانطور که در عبارت بالا، میدان‌های دور از کره را که مربوط به ناحیه  $r > R$  بکار می‌بریم، باید از تابع بسل کروی  $j_l$  در ضریب بسط استفاده کنیم. با تقسیم توان پراکنده بر  $P_0$  و بسط  $j_l$  در یک سری توان برای آرگومان‌های کوچک  $x = kr_0$ ، (پ. ۲۹)، داریم

$$\frac{P_{sca}}{P_0} = \frac{3}{2} \sum_l l(l+1)(2l+1) \left| \frac{x^l}{x(2l+1)!!} + \mathcal{O}(x^{l+1}) \right|^2 \rightarrow 1$$

که در آن آخرین حد مربوط به  $x \rightarrow 0$  است. بنابراین، برای یک دوقطبی که در امتداد  $z$  و در مبدأ قرار دارد، واقعاً نتیجه مناسب را دریافت می‌کنیم. تحلیل مشابهی را می‌توان برای دوقطبی در جهت‌های  $\pm$  نیز اعمال کرد.

### افزونگی توان تابشی

با کنار هم قرار دادن نتایج برای یک دوقطبی نوسانی که در امتداد  $z$  قرار دارد، نتیجه افزونگی <sup>۴</sup> توان تابشی را بدست می‌آوریم [۱۲۱، (۱۸)].

<sup>۴</sup> Enhancement

### افزونگی توان تابشی برای دوقطبی در جهت $\hat{z}$

$$\frac{P_{sca}^z}{P_0} = \frac{3}{2} \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)(2l+1) \left| \frac{j_l(x) + a_l h_l^{(2)}(x)}{x} \right|_{x=kr_0}^2 \quad (37.\text{ث})$$

عبارت  $a_l h_l^{(2)}$  مربوط به میدان‌های دور پراکنده، معادله (۳.۷)، که در آن  $a_l$  ضریب می‌معادله (۳.۲۲) است. وقتی دوقطبی در خارج از کره قرار گرفته، برای محاسبه ضریب بسط از معادله (۳.۳۵) برای جواب  $f_l = h_l^{(2)}$  در ناحیه  $r < r_0$  استفاده کردہ‌ایم. به‌طور مشابه، برای یک دوقطبی نوسانی که در امتداد  $\hat{x} = \hat{x} \pm j\hat{y} = \epsilon \pm \epsilon$  است، برای افزونگی توان تابشی نتیجه می‌گیریم {۱۲۱}،

{۲۰}.

### افزونگی توان تابشی برای دوقطبی در جهت $\epsilon$

$$\frac{P_{sca}^{\pm}}{P_0} = \frac{3}{4} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left\{ \left| j_l(x) + a_l h_l^{(2)}(x) \right|^2 + \left| \frac{\psi'_l(x) + b_l \zeta'_l(x)}{x} \right|^2 \right\}_{x=kr_0} \quad (38.\text{ث})$$

که در آن  $(\zeta(x), \psi(x))$  توابع بسل ریکاتی معادله (۳.۱۱) هستند. توجه کنید که در جلو جمع ضریب  $1/2$  قرار داردیم زیرا بردار دوقطبی  $\pm \epsilon$  نرمالیزه نشده است و همین طور توان  $P_0$  نیز باید در دو ضرب شود.

### افزونگی توان تلف شده

افزونگی برای کل توان تلف شده را می‌توان از رابطه (۳.۱۰) محاسبه کرد؛

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{6\pi}{k} \frac{1}{\mu\omega^2 p^2} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}_0) \right\}, \quad (39.\text{ث})$$

که در آن تابع گرین بازتابی را به میدان الکتریکی پراکنده (القایی) مرتبط کردیم. نقطه شروع معادله (۳.۷) است. برای این میدان پراکنده برابر است با:

$$\mathbf{E}^{sca} = -Z \sum_{l,m} \left[ b_{lm} h_l^{(2)}(kr) \mathbf{X}_{lm} - \frac{j}{k} a_{lm} \nabla \times h_l^{(2)}(kr) \mathbf{X}_{lm} \right]. \quad (40.\text{ث})$$

ابتدا جهت دوقطبی را در امتداد  $\hat{z}$  در نظر گرفته و از رابطه (۳.۲۳) برای جمله داخل برآکت استفاده می‌کنیم؛

$$\left[ b_{lm} h_l^{(2)}(kr) \mathbf{X}_{lm} - \frac{a_{lm}}{kr^2} \left( j \zeta'_l(kr) \mathbf{r} \times \mathbf{X}_{lm} + \sqrt{l(l+1)} h_l^{(2)}(kr) \mathbf{r} Y_{lm} \right) \right].$$

بنابراین، بدست می‌آوریم؛

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}^{sca}(r_0 \hat{\mathbf{z}}) &= Z \sum_{l,m} \sqrt{l(l+1)} a_{lm} \left[ \frac{h_l^{(2)}(kr_0)}{kr_0} \right] Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}}) \\ &= jZp\omega k^2 \sum_l \sqrt{l(l+1)} \sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{4\pi}} a_l \left[ \frac{h_l^{(2)}(kr_0)}{kr_0} \right]^2 \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\end{aligned}$$

که در آن به صراحت در خط دوم رابطه‌های ضریب می و هارمونیک‌های کروی معادله (ث. ۳۴) را نوشته‌ایم. با وارد کردن میدان الکتریکی در معادله (ث. ۳۹) افزونگی توان تلف شده کل را برای یک دوقطبی در جهت  $\hat{\mathbf{z}}$  بدست می‌آوریم { ۱۲۱ } [۱۷].

### افزونگی توان تلف شده برای دوقطبی در جهت $\hat{\mathbf{z}}$

$$\frac{P_{tot}^z}{P_0} = 1 - \frac{3}{2} Re \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)(2l+1) a_l \left[ \frac{h_l^{(2)}(x)}{x} \right]_{x=kr_0}^2 \right\} \quad (\text{ث. ۴۱})$$

بهمین منوال، برای یک دوقطبی که در جهت  $\epsilon_{\pm}$  است، میدان پراکنده بصورت زیر است؛

$$\epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{E}^{sca} = -Z \sum_{l,m} \left[ \left( b_{lm} h_l^{(2)}(kr) \right) \epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{X}_{lm} + \left( \frac{a_{lm}}{kr^2} \zeta'_l(kr) \right) \epsilon_{\pm}^* \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{X}_{lm} \right]$$

و وقتی دوقطبی در موقعیت  $r_0 \hat{\mathbf{z}}$  است، اولین جمله داخل براکت را داریم؛

$$\left( -jp\omega k^2 \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} h_l^{(2)}(kr_0) b_l h_l^{(2)}(kr_0) \right) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m,\pm 1}$$

که در آن از معادله (ث. ۳۶) برای ضرایب بسط  $b_{lm}$  استفاده کردہ‌ایم. برای جمله دوم از معادله (ث. ۲۴) برای ساده سازی ضرب سه گانه استفاده می‌کنیم، و پس از چند دستکاری ساده به دست می‌آید؛

$$\left( \mp jp\omega k^2 \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{\zeta'_l(kr_0)}{kr_0} (-j) a_l \frac{\zeta'_l(kr_0)}{kr_0} \right) \left( \pm j \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \right) \delta_{m,\pm 1}$$

که در آن  $(x)\zeta$  بدل ریکاتی معادله (ث. ۱۱) است. با قرار دادن تمام نتایج سرانجام افزونگی توان تلفاتی کل را برای یک دوقطبی که در جهت  $\epsilon_{\pm}$  است را بدست می‌آوریم؛

### افزونگی توان تلف شده برای دوقطبی در جهت $\epsilon_{\pm}$

$$\frac{P_{tot}^{\pm}}{P_0} = 1 - \frac{3}{4} Re \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) \left( a_l \left[ \frac{\zeta'_l(x)}{x} \right]_{x=kr_0}^2 + b_l \left[ \frac{h_l^{(2)}(x)}{x} \right]_{x=kr_0}^2 \right) \right\} \quad (\text{ث. ۴۲})$$

در اینجا نیز جمله دوم بعلت نرمالیزه نبودن گشتاور دوقطبی  $\epsilon_{\pm}$  در ضریب  $1/2$  ضرب شده است.

## پیوست ج

# تابع دلتای دیراک

تابع دلتای دیراک<sup>۱</sup> بصورت زیر تعریف می‌شود

تابع دلتای دیراک

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta(x-a)f(x)dx = \begin{cases} f(a) & \text{اگر } a \in (x_0, x_1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ج.۱})$$

انتگرال با تابع دلتای دیراک بصورت تعریف چنین بیان می‌شود، که مقدار تابع  $f(a)$  را می‌دهد اگر  $a$  در محدوده انتگرال گیری قرار گیرد و در غیر این صورت صفر است. در واقع، چنین رفتاری را نمی‌توان با یک تابع عادی به دست آورد، بلکه با توابع توزیعی که از طریق برخی روش‌های محدود کننده، مانند توابع زیر تعریف شده است:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\eta}\right) \quad (\text{ج.۲})$$

ضمناً فرض می‌کنیم که تابع  $f(x)$  در معادله (ج.۱) بقدر کافی خوب تعریف شده است. در این حالت مشتق توابع دلتای دیراک را روی یک تابع از طریق رابطه زیر بیان می‌کنیم؛

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[ \frac{d^n}{dx^n} \delta(x-a) \right] dx = (-1)^n \left[ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=a} \quad (\text{ج.۳})$$

یکی دیگر از روابط مفید که از رابطه (ج.۲) بدست می‌اید برابر است با:

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x - xi)}{|g'(xi)|} \quad (\text{ج.۴})$$

<sup>۱</sup>Dirac's Delta Function

که در آن  $g(x)$  فرض می‌شود که دارای نقاط صفر  $x_i$  است بطوری که  $g(x_i) = 0$  و  $g'(x_i) \neq 0$  مشتق تابع  $g$  نسبت به  $x$  است. از این رابطه بلافارسله بدست می‌اید؛

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (ج.5)$$

از تعریف تابع دلتای دیراک نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x \pm j\eta} \right] = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp j\pi\delta(x) \quad (ج.6)$$

که در آن  $\mathcal{P}$  نمایشگر مقدار اصلی گوشی<sup>۲</sup> است.

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \eta^2} \quad (ج.7)$$

وقتی از معادله (ج.6) در زیر انتگرال استفاده می‌کنیم، بیک رابطه مهم میرسیم؛

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a \pm j\eta} dx = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a} dx \mp j\pi f(a) \quad (ج.8)$$

که در آن مقدار اصلی انتگرال را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{a-\eta} \frac{f(x)}{x - a} dx + \int_{a+\eta}^{\infty} \frac{f(x)}{x - a} dx \right] \quad (ج.9)$$

تبديل فوريه تابع دلتای دیراک می‌توان بصورت زير بيان کرد

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j k x} dx \quad (ج.10)$$

تابع دلتای دیراک را می‌توان بردارهای تعریف کرد؛

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z) \quad (ج.11)$$

در سراسر اين کتاب ما از نماد  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  بجای نماد  $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  که بيشتر صحيح است استفاده می‌کنیم.

## ج.۱ تابع دلتای طولی و عرضی

در زمينه توابع برداری، معرفی تابع دلتای عرضی راحت است.

### تابع دلتای عرضی

$$\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \left( \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j \right) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (ج.12)$$

<sup>۲</sup>Cauchy's principal value

که در آن  $\hat{\mathbf{k}}$  بردار واحد  $\mathbf{k}$  است. با اعمال  $\delta^{\perp}$  بر روی یک تابع برداری دلخواه مانند  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  خواهیم داشت؛

$$F_i^{\perp}(\mathbf{r}) = \int \delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_j(\mathbf{r}') d^3 r' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \left( \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j \right) F_j(\mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

هنگام رفتن از عبارت اول بهدوم از تبدیل کانولوشن در فضای حقیقی به ضرب در فضای عدموج استفاده می‌کنیم. بنابراین، تابع دلتا عرضی بر روی جهت‌های عرضی  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  تصویر می‌شود. می‌توانیم معادله (ج. ۱۲) را به شکل کمی متفاوت بازنویسی کنیم. با کار روی دو عبارت داخل پرانتز شروع می‌کنیم،

$$\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \partial_i \partial_j \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{1}{k^2} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \right)$$

انتگرال روی سمت راست تبدیل فوریه پتانسیل کولمب  $(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{-1}$  است. بنابراین، می‌توانیم تابع دلتا عرضی در فضای حقیقی را بصورت زیر بازنویسی کنیم؛

$$\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \partial_i \partial_j \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (\text{ج. ۱۳})$$

این رابطه معرفی تابع دلتای طولی را پیشنهاد می‌کند؛

### تابع دلتای طولی

$$\delta_{ij}^L(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\partial_i \partial_j \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (\text{ج. ۱۴})$$

هنگامی که تابع دلتای طولی بر روی یک تابع برداری اثر می‌کند، خواهیم داشت؛

$$F_i^L(\mathbf{r}) = \partial_i \int \left[ \delta_j' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] F_j(\mathbf{r}') d^3 r' = \partial_i \int \frac{\partial_j' F_j^L(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

که در آن انتگرال‌گیری جزء به جز از  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  به جمله  $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$  انجام دادیم. ضمناً عبارت مرزی اضافی را که از انتگرال‌گیری جزء به جز ناشی می‌شود، نادیده گرفته‌ایم، که فقط برای یک تابع برداری محلی  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  که برای مقادیر بزرگ  $|\mathbf{r}|$  صفر می‌شود، کار می‌کند. بنابراین پیدا می‌کنیم؛

$$\mathbf{F}^L(\mathbf{r}) = -\nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (\text{ج. ۱۵})$$

با توابع دلتای طولی و عرضی بلا فاصله داریم؛

$$\delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \delta_{ij}^L(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

بنابراین، با اعمال  $\delta^{\perp}$  و  $\delta^L$  روی یک تابع برداری مانند  $\mathbf{F}$ ، می‌توان آنرا به بخش‌های طولی و عرضی تجزیه کرد. توجه کنید که اینگونه عملیات در فضا محلی نیست.

تابع گرین که بر تابع برداری عرضی عمل می‌کند. این ضمیمه را با بدست آوردن یک رابطه مفید برای تابع گرین که بر روی یک تابع بردار عرضی عمل می‌کند، نتیجه می‌گیریم. ابتدا عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}') d^3 r' = \int \left[ \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}') d^3 r'$$

که در آن  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  تابع گرین معادله (۷.۵) است، که با عبارت داخل پرانتر در سمت راست آمده است، و  $k$  عددموج است. همراه با معادله (ج.۱۳) به رابطه زیر میرسیم؛

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3 r' + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial'_i \partial'_j \left[ \frac{F_j(\mathbf{r}'')}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right] d^3 r'' d^3 r' = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 ,$$

با  $\mathcal{T}_{1,2}$  که به ترتیب جمله اول و دوم را در سمت چپ نشان می‌دهد. عبارت دوم را می‌توان با همان روش بدست آوردن معادله (ج.۱۵) بازنویسی کرد. و خواهیم داشت؛

$$\mathcal{T}_2 = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \left( \frac{\nabla'' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}'')}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right) d^3 r'' d^3 r'$$

سپس از تعریف معادله برای تابع گرین اسکالر استفاده کرده تا به رابطه زیر میرسیم؛

$$(\nabla'^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \implies G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{k^2} \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] ,$$

که سپس به رابطه زیر میرسیم؛

$$\mathcal{T}_2 = -\frac{1}{k^2} \left[ \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} d^3 r' + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \nabla'^2 \left( \frac{\nabla'' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}'')}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right) d^3 r'' d^3 r' \right]$$

در ترم دوم، انتگرال گیری جزء به جزء را انجام داده‌ایم تا لابلسین<sup>۲</sup>  $\nabla'$  را از تابع گرین به جمله دوم تغییر دهیم، و دوباره از تمام عبارات مرزی چشم پوشی کرده‌ایم. همچنین از مشتقات لابلسین و عملگر نابلا استفاده کرده‌ایم. با

$$\nabla'^2 \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') .$$

می‌توانیم  $\mathcal{T}_2$  را بصورت زیر بنویسیم؛

$$\mathcal{T}_2 = -\frac{1}{k^2} \left[ \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' (\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')) d^3 r' \right]$$

در نهایت انتگرال گیری جزء به جزء در جمله دوم انجام داده تا تابع برداری  $\mathbf{F}$  به تابع گرین اسکالر تغییر دهیم و دوباره همه عبارت‌های مرزی را نادیده می‌گیریم.

با کنار هم قرار دادن همه نتایج، می‌توانیم حاصلضرب تابع گرین اسکالر را با یک تابع بردار عرضی به‌شکل زیر بازنویسی کنیم.

### انتگرال تابع گرین و تابع برداری عرضی

$$\begin{aligned}
 & G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &= \int \left( 1 + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{F}^\perp(\mathbf{r}') d^3 r' - \frac{1}{k^2} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \tag{۱۶.ج}
 \end{aligned}$$

ضرب عملگرهای نابل (۷) در عبارت اول در سمت راست باید به عنوان یک ضرب دایadiک، به‌همان روشهی که قبلاً برای تابع گرین دایadiک (معادله ۱۹.۵) استفاده می‌شد درک شود. توجه داشته باشید که جمله دوم در سمت راست با مولفه طولی تابع برداری،  $\mathbf{F}^L(\mathbf{r})$  متناسب است. معادله (۱۶.ج) به‌ویژه هنگام کار در معیار کولمب<sup>۳</sup>، که در آن پتانسیل کولمب لحظه‌ای و پتانسیل برداری عرضی است، مفید است.

---

<sup>۳</sup>Coulomb gauge



# كتاب نامه

- [1] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, (Pearson, San Francisco, 2008)
- [2] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999)
- [3] B. Mahon, How Maxwell's equations came to light. *Nat. Photonics* 9, 2–4 (2015)
- [4] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [5] B. Richards, E. Wolf, Electromagnetic simulation in optical systems II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 253, 358 (1959)
- [6] L. Novotny, B. Hecht, *Principles of Nano-Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012)
- [7] J. Dongarra, F. Sullivan, Guest editors introduction to the top 10 algorithms. *Comput. Sci. Eng.* 2, 22 (2000)
- [8] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipes in C++: *The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2002)
- [9] P.H. Jones, O.M. Marago, G. Volpe, Optical Tweezers (Cambridge University Press, Cambridge, 2015)
- [10] A. Gennerich (ed.), *Optical Tweezers* (Springer, Berlin, 2017)
- [11] O.M. Marago, P.H. Jones, P.G. Gucciardi, G. Volpe, A.C. Ferrari, Optical trapping and manipulation of nanostructures. *Nat. Nanotechnol.* 8, 807 (2013)
- [12] S. Chu, Nobel lecture: the manipulation of neutral particles. *Rev. Mod. Phys.* 70, 685–706 (1998)
- [13] F.M. Fazal, S.M. Block, Optical tweezers study life under tension. *Nat. Photonics* 5, 318 (2011)

- [14] R.N.C. Pfeifer, T.A. Nieminen, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, Colloquium: momentum of an electromagnetic wave in dielectric media. *Rev. Mod. Phys.* 79, 1197–1216 (2007)
- [15] S.M. Barnett, Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma. *Phys. Rev. Lett.* 104, 070401 (2010)
- [16] A.M. Yao, M.J. Padgett, Orbital angular momentum: origins, behavior, and applications. *Adv.Optics Photonics* 3, 161–204 (2011)
- [17] M.J. Padgett, Orbital angular momentum 25 years on. *Opt. Express* 25, 11265 (2017)
- [18] K.T. Gahagan, G.A. Swartzlander, Simultaneous trapping of low-index and high-index nanoparticles observed with an optical-vortex trap. *J. Opt. Soc. Am. B* 16, 533 (1999)
- [19] L. Challis, F. Sheard, The Green of the Green functions. *Phy. Today* 41 (2003)
- [20] W.C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* (IEEE Press, Piscataway, 1995)
- [21] J.A. Stratton, L.J. Chu, Diffraction theory of electromagnetic waves. *Phys. Rev.* 56, 99–107 (1939)
- [22] E. Abbe, Beiträge zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen Wahrnehmung. *Archiv Mikroskop Anat.* 9, 413 (1873)
- [23] B. Hecht, B. Sick, U.P. Wild, V. Deckert, R. Zenobi, O.J.F. Martin, D.W. Pohl, Scanning nearfield optical microscopy with aperture probes: fundamentals and applications. *J. Chem. Phys.* 112, 7761 (2000)
- [24] M.A. Paesler, P.J. Moyer, *Near-Field Optics: Theory, Instrumentation, and Applications* (Wiley, New York, 1996)
- [25] H.A. Bethe, Theory of diffraction by small holes. *Phys. Rev.* 66, 163 (1944)
- [26] C.J. Bouwkamp, On Bethe's theory of diffraction by small holes. *Philips Res. Rep.* 5, 321 (1950)
- [27] H.F. Hess, E. Betzig, T.D. Harris, L.N. Pfeiffer, K.W. West, Near-field spectroscopy of the quantum constituents of a luminescent system. *Science* 264, 1740 (1994)
- [28] E. Betzig, G.H. Patterson, R. Sougrat, O.W. Lindwasser, S. Olenych, J.S. Bonifacino, M.W. Davidson, J. Lippincott-Schwartz, H.F. Hess, Imaging intracellular fluorescent proteins at nanometer resolution. *Science* 313, 1642–1645 (2006)

- [29] M.J. Rust, M. Bates, X. Zhuang, Sub diffraction-limit imaging by stochastic optical reconstruction microscopy (STORM). *Nat. Methods*3, 793–796 (2006)
- [30] S.W. Hell, J. Wichmann, Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission: stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy. *Op. Lett.*19, 780–782 (1994)
- [31] P. Tinnefeld, C. Eggeling, S.W. Hell (eds.), *Far-Field Optical Nanoscopy* (Springer, Berlin, 2015)
- [32] R.E. Thompson, D.R. Larson, W.W. Webb, Precise nanometer localization analysis for individual fluorescent probes. *Biophys. J.*82, 2775–2783 (2002)
- [33] F. Göttfert, C.A. Wurm, V. Mueller, S. Berning, V.C. Cordes, A. Honigmann, S.W. Hell, Coaligned dual-channel STED nanoscopy and molecular diffusion analysis at 20 nm resolution. *Biophys. J.*105, L01–L03 (2013)
- [34] P.B. Johnson, R.W. Christy, Optical constants of the noble metals. *Phys. Rev. B*6, 4370 (1972)
- [35] E.D. Palik, *Handbook of Optical Constants of Solids*(Academic, San Diego, 1985)
- [36] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid State Physics*(Saunders, Fort Worth, 1976)
- [37] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim, The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*81, 109 (2009)
- [38] F.J. Garcia de Abajo, Graphene plasmonics: challenges and opportunities. *ACS Photonics*1, 135 (2014)
- [39] B. Wunsch, T. Stauber, F. Sols, F. Guinea, Dynamical polarization of graphene at finite doping. *New J. Phys.*8, 318 (2006)
- [40] E.H. Hwang, S. Das Sarma, Dielectric function, screening, and plasmons in 2d graphene. *Phys. Rev. B*75, 205418 (2007)
- [41] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart, Magnetism from conductors, and enhanced non-linear phenomena. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*47, 2075 (1999)
- [42] C.M. Soukoulis, M. Wegener, Past achievements and future challenges in the development of three-dimensional photonic metamaterials. *Nat. Photonics*5, 523 (2011)
- [43] R.J. Potton, Reciprocity in optics. *Rep. Prog. Phys.*67, 717 (2004)
- [44] H. Atwater, The promise of plasmonics. *Sci. Am.*296(4), 56 (2007)

- [45] J. Heber, News feature: surfing the wave. *Nature* 461, 720 (2009)
- [46] A. Otto, Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection. *Z. Phys.* 216(4), 398–410 (1968)
- [47] E. Kretschmann, Die Bestimmung optischer Konstanten von Metallen durch Anregung von Oberflächenplasmaschwingungen. *Z. Phys.* 241, 313 (1971)
- [48] T.W. Ebbesen, H.J. Lezec, H.F. Ghaemi, T. Thio, P.A. Wolff, Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. *Nature* 391, 667–669 (1998)
- [49] S. Xiao, X. Zhu, B.-H. Li, N.A. Mortensen, Graphene-plasmon polaritons: from fundamental properties to potential applications. *Front. Phys.* 11, 117801 (2016).
- [50] J. Chen, M. Badioli, P. Alonso-Gonzalez, S. Thongrattanasiri, F. Huth, J. Osmond, M. Spasenovic, A. Centeno, A. Pesquera, P. Godignon, A. Z. Elorza, N. Camara, F.J. Garcia de Abajo, R. Hillenbrand, F. Koppens, Optical nano-imaging of gate-tunable graphene plasmons. *Nature* 487, 77 (2012)
- [51] Z. Fei, A.S. Rodin, G.O. Andreev, W. Bao, A.S. McLeod, M. Wagner, L.M. Zhang, Z. Zhao, G. Dominguez M. Thiemens, M.M. Fogler, A.H. Castro Neto, C.N. Lau, F. Keilmann, D.N. Basov, Gate-tuning of graphene plasmons revealed by infrared nano-imaging. *Nature* 487, 82 (2012)
- [52] M.A. Cooper, Optical biosensors in drug discovery. *Nat. Rev. Drug Discov.* 1, 515 (2002)
- [53] V.G. Veselago, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Sov. Phys. Uspekhi* 56, 509 (1964)
- [54] J.B. Pendry, Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.* 85, 3966 (2000)
- [55] K.Y. Bliokh, Y.P. Bliokh, V. Freilikher, S. Savel'ev, F. Nori, Colloquium: unusual resonators: plasmonics, metamaterials, and random media. *Rev. Mod. Phys.* 80, 1201–1213 (2008)
- [56] J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith, Controlling electromagnetic fields. *Science* 312, 1780 (2006)
- [57] U. Leonhardt, Optical conformal mapping. *Science* 312, 1777 (2006)
- [58] D. Schurig, J.J. Mock, B.J. Justice, S.A. Cummer, J.B. Pendry, A.F. Starr, D.R. Smith, Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science* 314, 977 (2006)

- [59] N. Fang, H. Lee, C. Sun, X. Zhang, Subdiffraction-limited optical imaging with a silver superlens. *Science* 308, 534 (2005)
- [60] C.F. Bohren, D.R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light* (Wiley, New York, 1983)
- [61] F.J. García de Abajo, J. Aizpurua, Numerical simulation of electron energy loss near inhomogeneous dielectrics. *Phys. Rev. B* 56, 15873 (1997)
- [62] G. Boudarham, M. Kociak, Modal decompositions of the local electromagnetic density of states and spatially resolved electron energy loss probability in terms of geometric modes. *Phys. Rev. B* 85, 245447 (2012)
- [63] F.-P. Schmidt, H. Ditlbacher, U. Hohenester, A. Hohenau, F. Hofer, J.R. Krenn, Dark plasmonic breathing modes in silver nanodisks. *Nano Lett.* 12, 5780 (2012)
- [64] M.I. Stockman, Nanoplasmonics: past, present, and glimpse into future. *Opt. Express* 19, 22029 (2011)
- [65] I.D. Mayergoyz, D.R. Fredkin, Z. Zhang, Electrostatic (plasmon) resonances in nanoparticles. *Phys. Rev. B* 72, 155412 (2005)
- [66] P. Zijlstra, P.M. Paulo, M. Orrit, Optical detection of single non-absorbing molecules using the surface plasmon resonance of a gold nanorod. *Nat. Nanotechnol.* 7, 379 (2012)
- [67] J. Becker, A. Trügler, A. Jakab, U. Hohenester, C. Sönnichsen, The optimal aspect ratio of gold nanorods for plasmonic bio-sensing. *Plasmonics* 5, 161 (2010)
- [68] E. Prodan, C. Radloff, N.J. Halas, P. Nordlander, Hybridization model for the plasmon response of complex nanostructures. *Science* 302, 419 (2003)
- [69] A. Aubry, D. Yuan Lei, A.I. Fernandez-Dominguez, Y. Sonnefraud, S.A. Maier, J.B. Pendry, Plasmonic light-harvesting devices over the whole visible spectrum. *Nano Lett.* 10, 2574 (2010)
- [70] R.C. McPhedran, W.T. Perrins, Electrostatic and optical resonances of cylinder pairs. *Appl. Phys.* 24, 311 (1981)
- [71] A. Aubry, D. Yuan Lei, S.A. Maier, J.B. Pendry, Conformal transformation applied to plasmonics beyond the quasistatic limit. *Phys. Rev. B* 82, 205109 (2010)
- [72] D.Y. Lei, A. Aubry, S.A. Maier, J.B. Pendry, Broadband nano-focusing of light using kissing nanowires. *New. J. Phys.* 12, 093030 (2010)

- [73] W. Zhu, R. Esteban, A.G. Borisov, J.J. Baumberg, P. Nordlander, H.J. Lezec, J. Aizpurua, K.B. Crozier, Quantum mechanical effects in plasmonic structures with subnanometre gaps. *Nat. Commun.* 7, 11495 (2016)
- [74] G. Mie, Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Ann. Phys.* 330, 377 (1908) 654 References
- [75] Y. Chang, R. Harrington, A surface formulation for characteristic modes of material bodies. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 25(6), 789–795 (1977)
- [76] A.J. Poggio, E.K. Miller, Chapter 4: integral equation solutions of three-dimensional scattering problems, in *Computer Techniques for Electromagnetics*, ed. by R. Mittra. International Series of Monographs in Electrical Engineering (Pergamon, 1973), pp. 159–264
- [77] T.K. Wu, L.L. Tsai, Scattering from arbitrarily-shaped lossy dielectric bodies of revolution. *Radio Sci.* 12(5), 709–718 (1977)
- [78] P.T. Leung, S.Y. Liu, K. Young, Completeness and orthogonality of quasinormal modes in leaky optical cavities. *Phys. Rev. A* 49, 3057 (1994)
- [79] C. Sauvan, J.P. Hugonin, I.S. Maksymov, P. Lalanne, Theory of the spontaneous optical emission of nanosize photonic and plasmon resonators. *Phys. Rev. Lett.* 110, 237401 (2013)
- [80] F. Ouyang, M. Isaacson, Surface plasmon excitation of objects with arbitrary shape and dielectric constant. *Philos. Mag. B* 60, 481 (1989)
- [81] J. Petersen, J. Volz, A. Rauschenbeutel, Chiral nanophotonic waveguide interface based on spin-orbit interaction of light. *Science* 346, 67 (2014)
- [82] E.M. Purcell, H.C. Torry, R.V. Pound, Resonance absorption by nuclear magnetic moments in a solid. *Phys. Rev.* 69, 37 (1946)
- [83] R. Carminati, J.J. Greffet, C. Henkel, J.M. Vigoureux, Radiative and non-radiative decay of a single molecule close to a metallic nanoparticle. *Opt. Commun.* 216, 368 (2006)
- [84] P. Anger, P. Bharadwaj, L. Novotny, Enhancement and quenching of single-molecule fluorescence. *Phys. Rev. Lett.* 96, 113002 (2006)
- [85] A. Hörl, G. Haberfehlner, A. Trügler, F. Schmidt, U. Hohenester, G. Kothleitner, Tomographic reconstruction of the photonic environment of plasmonic nanoparticles. *Nat. Commun.* 8, 37 (2017)

- [86] K. Joulain, R. Carminati, J.-P. Mulet, J.-J. Greffet, Definition and measurement of the local density of electromagnetic states close to an interface. *Phys. Rev. B* 68, 245405 (2003)
- [87] K.H. Drexhage, Influence of a dielectric interface on fluorescence decay time. *J. Lumin.* 12, 693 (1970)
- [88] R.R. Chance, A. Prock, R. Silbey, *Molecular Fluorescence and Energy Transfer Near Interface*, vol. 37 (Wiley, New York, 1978).
- [89] E.C. Le Ru, P.G. Etchegoin, *Principles of Surface Enhanced Raman Spectroscopy* (Elsevier, Amsterdam, 2009)
- [90] S. Nie, S.R. Emory, Probing single molecules and single nanoparticles by surface enhanced raman scattering. *Science* 275, 1102 (1997)
- [91] M. Fleischmann, P.J. Hendra, A.J. McQuillan, Raman spectra of pyridine adsorbed at a silver electrode. *Chem. Phys. Lett.* 26, 163 (1974)
- [92] K. Kneipp, M. Moskovits, M. Kneipp (eds.), *Surface Enhanced Raman Scattering* (Springer, Berlin, 2008)
- [93] T. Förster, Energiewanderung und Fluoreszenz. *Naturwissenschaften* 33, 166 (1946)
- [94] P. Andrew, W.L. Barnes, Energy transfer across a metal film mediated by surface plasmon polaritons. *Science* 306, 1002 (2004)
- [95] J.I. Gersten, A. Nitzan, Accelerated energy transfer between molecules near a solid particle. *Chem. Phys. Lett.* 104, 31 (1984)
- [96] C. Cherqui, N. Thakkar, G. Li, J.P. Camden, D.J. Masiello, Characterizing localized surface plasmons using electron energy-loss spectroscopy. *Annu. Rev. Phys. Chem.* 67, 331 (2015)
- [97] C.J. Powell, J.B. Swan, Origin of the characteristic electron energy losses in aluminum. *Phys. Rev.* 115, 869 (1959)
- [98] M. Bosman, V.J. Keast, M. Watanabe, A.I. Maaroof, M.B. Cortie, Mapping surface plasmons at the nanometre scale with an electron beam. *Nanotechnology* 18, 165505 (2007)
- [99] J. Nelayah, M. Kociak, O. Stephan, F.J. García de Abajo, M. Tence, L. Henrard, D. Taverna, I. Pastoriza-Santos, L. M. Liz-Martin, C. Colliex, Mapping surface plasmons on a single metallic nanoparticle. *Nat. Phys.* 3, 348 (2007)

- [100] F.J. García de Abajo, Optical excitations in electron microscopy. *Rev. Mod. Phys.* 82, 209 (2010) References 655
- [101] C. Colliex, M. Kociak, O. Stephan, Electron energy loss spectroscopy imaging of surface plasmons at the nanoscale. *Ultramicroscopy* 162, A1 (2016)
- [102] U.S. Inan, R.A. Marshall, *Numerical Electromagnetics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011)
- [103] A. Taflove, S.C. Hagness, *Computational electrodynamics* (Artech House, Boston, 2005)
- [104] K.S. Yee, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 14, 302 (1966)
- [105] A. Taflove, M.E. Browdin, Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 23, 623 (1975)
- [106] A. Taflove, M.E. Browdin, Computation of the electromagnetic fields and induced temperatures within a model of the microwave-irradiated human eye. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 23, 888 (1975)
- [107] J. Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.* 114, 185 (1994)
- [108] R. Fuchs, S.H. Liu, Sum rule for the polarizability of small particles. *Phys. Rev. B* 14, 5521 (1976)
- [109] F.J. García de Abajo, A. Howie, Retarded field calculation of electron energy loss in inhomogeneous dielectrics. *Phys. Rev. B* 65, 115418 (2002)
- [110] U. Hohenester, A. Trügler, MNPBEM—a Matlab Toolbox for the simulation of plasmonic nanoparticles. *Comp. Phys. Commun.* 183, 370 (2012)
- [111] A.M. Kern, O.J.F. Martin, Surface integral formulation for 3D simulations of plasmonic and high permittivity nanostructures. *J. Opt. Soc. Am. A* 26, 732 (2009)
- [112] P. Arcioni, M. Bressan, L. Perregrini, On the evaluation of the double surface integrals arising in the application of the boundary integral method to 3d problems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 45, 436 (1997)
- [113] D.J. Taylor, Accurate and efficient numerical integration of weakly singular integrals in Galerkin EFIE solutions. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 51, 2543 (2003)

- [114] S. Sarraf, E. Lopez, G. Rios Rodriguez, J. D'Elia, Validation of a Galerkin technique on a boundary integral equation for creeping flow around a torus. *Comp. Appl. Math.* 33, 63 (2014)
- [115] J.S. Hesthaven, T. Warburton, High-order/spectral methods on unstructured grids I. timedomain solution of Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.* 181, 186 (2002)
- [116] J.S. Hesthaven, High-order accurate methods in time-domain computational electromagnetics: a review. *Adv. Imaging Electron Phys.* 127, 59–123 (2003)
- [117] J.C. Nedelec, Mixed finite elements in R3. *Numer. Math.* 35, 315 (1980)
- [118] K. Busch, M. König, J. Niegemann, Discontinuous Galerkin method in nanophotonics. *Laser Photonics Rev.* 5, 773–809 (2011)
- [119] M. Paulus, P. Gay-Balmaz, O.J.F. Martin, Accurate and efficient computation of the Green's tensor for stratified media. *Phys. Rev. E* 62, 5797 (2000)
- [120] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison, Reading, 1994)
- [121] Y.S. Kim, P.T. Leung, T.F. George, Classical decay rates for molecules in the presence of a spherical surface: A complete treatment. *Surf. Sci.* 195, 1 (1988)
- [122] J. Gersten, A. Nitzan, Radiative properties of solvated molecules in dielectric clusters and small particles. *J. Chem. Phys.* 95, 686 (1991)

نمايه

- آپلانتیک، ۵۷

ابراهام-مینکوفسکی، ۹۳

اتحاد سامرفلد، ۳۴۸

اتصال، ۱۸۸

اتو، ۱۷۲

اثر بگرنزونگ، ۲۸۹

اختلال خارجی، ۲۲۶

ارنست آبه، ۱۲۳

اریک بتزیگ، ۱۳۴

افزوونگی، ۱۶۸

امواج خزنده، ۲۴۳

امواج محسوسنده، ۱۵

امی نوتر، ۷۷

امید ریاضی، ۲۶۲

انتقال بین باند، ۱۴۸

انتقال درون باند، ۱۴۸

انتگرال فرنل، ۵۵

انقراض، ۲۱۱

اهدا کننده، ۲۷۹

اویانگ و ایزاکسون، ۲۵۲

اپتیک تبدیلی، ۲۳۷

استفان هل، ۱۳۶

بارنت، ۹۴

برش انشعاب، ۳۵۲

برنگر، ۳۰۶

بسل ریکاتی، ۳۷۹

بسل-ریکاتی، ۲۴۷

بل، ۱۳۴

بورن و هافمن، ۲۱۷

بسل، ۲۴۵

بیضوی گون، ۲۱۷، ۲۱۱

بیضوی گون کشیده، ۲۱۸

تابع آزمایشی، ۳۱۶

تابع بلاف، ۱۴۵

تابع دلتای دیراک، ۳۹۱

تابع گرین، ۲۲۶

تافلاو و برودين، ۲۹۷

تانسور تنش، ۷۸

تبديل دوری، ۴۵

تبديل فوريه سريع، ۷۳

تبديلات معياري، ۴۸

تحديد، ۲۲۰

تحليل مختلط، ۲۳۸

ترانهاده، ۶۸

تفاصل محدود در حوزه زمان، ۲۹۷

تقريب فاز ثابت، ۵۵

تقريب موازي محور، ۶۰

تلفات حجيم، ۲۸۷

تله نوري، ۶۶

توابع تحليلي، ۲۳۸

توابع لاغرانژ، ۷۷

توابع گسترش نقطه‌اي، ۱۲۵

تنك، ۳۲۷

تكين، ۳۳۸

تيغه فلزي، ۱۷۳

جان پندرى، ۱۹۳

جايكت، ۳۷۶

جايكت دورى، ۳۳۱

جذب، ۲۱۱

جعلى، ۲۲۰

جواب تاخيرى، ۱۰۱

حالت ماندگار، ۲۵۵

- لایه‌های تطبیق کامل، ۳۰۶  
 لوزاندر، ۲۱۲  
 لوی-سیویتا، ۴۸  
 ماتریس تقویت، ۳۰۵  
 ماتریس تُنک، ۳۱۸  
 متلب، ۷۴  
 محشونده، ۱۵۳، ۷  
 محشوندگی، ۱۶۴  
 محیط لایه‌لایه، ۱۷۷  
 محیط پاشنده، ۷  
 محیط‌های لایه‌لایه، ۱۶۳  
 مختصات کروی‌گون، ۱۲۹  
 مدل بیت-بوکامپ، ۱۲۹  
 مزدوج مختلط، ۱۵۵  
 معادلات انتگرالی میدان الکتریکی، ۲۵۱  
 معادلات انتگرالی میدان ترکیبی، ۲۵۱  
 معادلات انتگرالی میدان مغناطیسی، ۲۵۱  
 معیار شایستگی، ۲۲۲  
 معیار کولمب، ۳۹۵  
 مغناطیس شوندگی، ۳۲۰، ۳۷  
 مقادیر ویژه، ۲۲۶  
 مقدار اصلی گوشی، ۳۹۲  
 موازی محور، ۱۲۰  
 موتور کینسین، ۸۵  
 موج محشونده، ۱۹۳، ۵۰  
 مودهای الحاقی، ۲۵۲  
 مودهای جعلی، ۳۲۵  
 مودهای ویژه، ۲۲۵، ۱۷۹  
 مودهای ویژه الحاقی، ۲۳۴  
 مولکول گیرنده، ۲۷۹  
 مومنتوم زاویه‌ای مداری، ۹۵، ۲۱  
 موچین نوری، ۷۸، ۲۱  
 می، ۳۷۴، ۲۱۱  
 می-گانس، ۲۱۱  
 میدانهای محشونده، ۱۲۸  
 میکروسکوپ محلی‌سازی، ۲۰  
 میکروسکوپ محلی‌سازی نوری، ۱۱۷  
 حد پراش، ۱۲۳  
 درود، ۲۲  
 درود-لورنتس، ۲۲  
 دیسک ایری، ۱۲۲  
 رائو-ویلتون-گلیسون، ۳۲۰  
 رابطه پاشندگی، ۱۶۴، ۹  
 رانگ-کوتا، ۳۳۰  
 راویارت-توماس، ۳۳۹، ۳۲۰  
 رهیافت دیریشله، ۲۲۲  
 رهیافت نیومن، ۲۲۴  
 روش خط به خط، ۱۲۵  
 رودریگز، ۳۵۹  
 روزنه عددی، ۵۹  
 روش اجزای محدود، ۳۱۵  
 روش اجزای مرزی، ۳۱۰  
 ریز لوله، ۸۵  
 ریزموج، ۳۵  
 ساختار تیغه‌ای، ۱۷۱  
 سطح مقطع انقلابی، ۲۱۹  
 شرایط مرز جذبی، ۳۳۷، ۳۰۶  
 شرط لورنس، ۳۶  
 شهودی، ۲۲۵  
 شکل‌های ویتنی، ۳۲۷  
 شبیب دارترین فرود، ۳۵۳  
 صفحه‌های ریمان، ۳۵۲  
 ضداتصال، ۱۸۸  
 ضرایب فرنل، ۱۷۸  
 ضریب پُرسن، ۲۶۲  
 طول انتشار، ۱۶۹  
 فرکانس استوکس، ۲۷۵  
 فلورونت ندلک، ۳۲۵  
 فنگ، ۴۰۰  
 فورستر، ۲۷۹  
 قضیه نیتر، ۷۷  
 قضیه هم پاسخی، ۱۶۰  
 قطبی شدگی، ۹۷، ۳۷  
 قطبی شوندگی، ۲۱۸

- میکروسکوپ SNOM، ۱۱۷  
 نسبت محوری، ۲۲۰  
 نظریه اختلال، ۲۲۷  
 نظریه می، ۲۴۵  
 نفوذ پذیری مغناطیسی، ۱۴۱  
 نور منوعه، ۲۰۵  
 نووتنی، ۲۷۰  
 نگاشت همدیس، ۲۳۷  
 هرمیتی، ۲۵۲  
 هستیون، ۳۲۵  
 هم پاسخی، ۲۸۵  
 همدوس، ۱۶۶  
 هنکل، ۲۴۵  
 وان در والز، ۱۴۷  
 وسلاگو، ۱۹۲  
 ویگنر-وایسکویف، ۲۶۲  
 پاشندگی، ۴۵، ۵۲  
 پایسته، ۱۶۴  
 پتانسیل‌های ویژه، ۲۲۷  
 پدیدارشناسی، ۱۴۱  
 پذیرندگی الکتریکی، ۱۴۳  
 پراش، ۷۷  
 پراکنده، ۷۷  
 پراکندگی، ۲۱۰  
 پراکندگی رامان، ۲۷۴  
 پرش قورباغه‌ای، ۳۰۲  
 پلاسمون‌های انبوه، ۱۶۶  
 پلاسمون‌های سطحی، ۱۶۴  
 پواین‌تینگ، ۴۳  
 پویائی ذاتی، ۱۴۲  
 پویش مورب، ۲۰  
 چو، ۳۵۳  
 چگالی حالت‌ها، ۲۶۴  
 کاواک، ۲۶۲  
 کرامرز-کرونیگ، ۱۵۷  
 کرتشمن، ۱۷۲  
 کوشی-ریمان، ۳۴۲، ۲۴۱