UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Maruša Valant

Vrednotenje opcij na valutnih trgih

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir
Somentor: asist. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2017

Kazalo

Vrednotenje opcij na valutnih trgih

Povzetek

Zaradi povezanosti mednarodnih trgov se veliko trguje z valutami. Valutne opcije omogočajo posameznikom ali podjetjem zavarovati svoje prihodke v tujini pred neugodnim gibanjem deviznega tečaja. V delu diplomskega seminarja so najprej predstavljeni dejavniki, ki vplivajo na spremembe deviznih tečajev in, obratno, vpliv sprememb le teh na gospodarstvo. Sledi predstavitev valutnih opcij, njihova primerjava s terminskimi posli in opcijske strategije s katerimi lahko omejimo tveganje. Nato je izpeljan Garman-Kohlhagnov model za valutne opcije, ki temelji na bolj znanem Black-Scholesovem modelu, uvedeni so grški parametri, ter opisane različne metode za ocenjevanje nestanovitnosti. Naloga se zaključi s slabostmi opisanega modela in njegovimi izboljšavami.

Option pricing on foreign exchange market

Abstract

Trading with currencies is common because of the connectivity of international markets. Currency options are one of the ways for market participants to hedge against adverse movement in exchange rates. The thesis first describes factors that influence exchange rates and, conversely, how changes in the exchange rate affect the economy. Then follows the description of currency options, their comparison with futures, and option strategies for reducing risk. After this we derive Garman-Kohlhagen model, which is based on the well-known Black-Scholes model. We introduce the Greeks, and we discuss the various methods for the estimation of volatility. The thesis concludes with the disadvantages of the described model and its possible improvements.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20, 60J65.

Ključne besede: Brownovo gibanje, devizni tečaj, Grki, nestanovitnost, vrednotenje opcij.

Keywords: Brownian motion, exchange rate, Greeks, volatility, currency option pricing.

1. Interakcije med deviznim tečajem ter gospodarstvom/tržnimi udeleženci

Devizni tečaj [domača/tuja valuta] je cena enote tujega denarja izražena v domači valuti. Ključno vlogo ima pri ravni trgovanja posamezne države s tujo, zato je eden od pomembnejših kazalcev stanja gospodarstva posamezne države.

Primer 1.1. Na dan 8. 4. 2017 znaša devizni tečaj [€/$]: 0.944235 €/$. To pomeni, da moramo za 1$ plačati 0.944235 €.

V nadeljevanju se osredotočimo izključno na obravnavan dejavnik, za vse ostale dejavnike naj velja načelo *ceteris paribus.*

1.1. **Dejavniki, ki vplivajo na devizni tečaj.** Eden izmed ključnih deležnikov na trgu, ki vplivajo na devizni tečaj je centralna banka, ki z monetarno politiko uravnava količino denarja v obtoku. Z restriktivno monetarno politiko domače cetralne banke, torej z zmanjšanjem količine domačega denarja v obtoku, se zvišajo domače obreste mere in zniža stopnja inflacije doma, kar povzroči nižje povpraševanje po tuji valuti. Domača valuta apreciira oziroma tuja valuta depreciira, torej devizni tečaj [domača/tuja valuta] pade. Ekspanzivna monetarna politika povzroči ravno obratno, torej apreciacijo deviznega tečaja.

Poleg centralne banke na devizni tečaj vpliva tudi država s fiskalno politiko, carinami in kvotami. Če tuja država prakticira ekspanzivno fiskalno politko, se pravi zniža davke in poveča državne izdatke, se povpraševanje po tujem denarju poveča, tuje obrestne mere narastejo in devizni tečaj [domača/tuja valuta] apreciira. Apreciiacijo deviznega tečaja lahko tuja država povzroči tudi z omejevanjem uvoza blaga, saj se s tem poveča povpraševanje po domačem blagu.

Naslednji izmed dejavnikov je sprememba stopnje inflacije, ki pa na devizni tečaj deluje z zamikom. Če centralna banka poveča količino denarja v obtoku to povzroči višjo stopnjo inflacije. Če je stopnja inflacije doma relativno višja kot v tujini, postanejo domači proizvodi manj konkurenčni napram tujim. To po eni strani povzroči višje domače povpraševanje po tujem blagu, kar poveča izvoz iz tujine domov in višjo ponudbo domače valute na deviznem trgu. Po drugi strani pa se zmanjša tuje povpraševanje po domačem blagu, posledično se zmanjša izvoz iz domače države v tujo in povpraševanje po domači valuti. Ta dva učinka povzročita zvišanje deviznega tečaja [domača/tuja valuta].

Na devizni tečaj vpliva poleg že naštetih dejavnikov tudi raven dohodka ter produktivnost. Višji dohodek doma poveča domače povpraševanje po tujem blagu, pri čemer ostane tuje povpraševanje po domačem blagu nespremenjeno. Torej domača valuta depreciira. Višja produktivnost doma pa na dolgi rok povzroči apreciacijo valute.

Na devizni tečaj lahko vplivajo tudi udeleženci na trgu s pričakovanji in preferencami. Udeleženci na trgu predvidevajo prihodnje stanje gospodarstva na podlagi informacij in se obnašajo v skladu z njimi, še preden pride do pričakovane spremembe. Na primer, če se poveča količina denarja v obtoku, udeleženci pričakujejo višjo stopnjo inflacije. Ker želijo prehiteti pričakovano spremembo, začnejo prodajati valuto in s tem povzročijo depreciacijo te valute še preden pride do inflacije. Depreciacijo valute pa lahko potrošniki povzročijo tudi z višjim povpraševanjem po uvozu.

1.2. **Ekonomski/gospodarski vplivi sprememb deviznega tečaja.** Nižji devizni tečaj [domača/tuja valuta] povzroči podražitev izvoza na tuj trg in pocenitev uvoza iz tujega trga, višji devizni tečaj pa povzroči cenejši izvoz na tuj trg in dražji uvoz na domač trg.

Poglejmo primer ameriškega in evropskega trga. Če evro depreciira se ameriškim potrošnikom zdijo evropske dobrine cenejše, stroški proizvodnje pa ostanejo enaki. Se pravi, da je efektivna cena na ameriškem trgu padla, kar povzroči povečanje povpraševanja po evropskih dobrinah. Evropska podjetja, ki izvažajo, lahko v tem primeru znižajo ceno in povečajo izvoz ali pa ohranijo enako ceno in realizirajo višje dobičke. Po drugi strani ima depreciacija evra negativen vpliv na podjetja, ki uvažajo proizvode iz ameriškega trga, saj imajo v tem primeru višje stroške in zato realizirajo nižje dobičke. Na dolgi rok lahko depreciacija zmanjša spodbudo izvoznikov za znižanje stroškov in povečanje produktivnosti, saj omogoča lahek način za zvišanje dobičkov.

Apreciacija evra ima ravno obraten učinek. Se pravi, da podraži izvoz na ameriški trg in poceni uvoz iz ameriškega trga. Podjetja, ki izvažajo na ameriški trg imajo nižje dobičke zaradi nižjega povpraševanja po evropskih dobrinah. Uvoznikom iz ameriškega trga pa se znižajo stroški, saj je uvoženi material v tem primeru cenejši. Apreciacija evra ima spodbuden učinek na zmanjšanje stroškov, ker povzroči izgubo konkurenčnosti evropskih ponudnikov glede na ameriške. Po drugi strani pa to lahko vodi do višje brezposelnosti, saj lahko nižanje stroškov pripelje do zapiranja obratov in selitev podjetij v tujino, kjer so stroški proizvodnje nižji. Apreciacija evra vpliva tudi na evropske potrošnike ameriških dobrin, saj se ameriške dobrine zaradi apreciacije evra pocenijo, s tem pa se poveča njihova kupna moč.

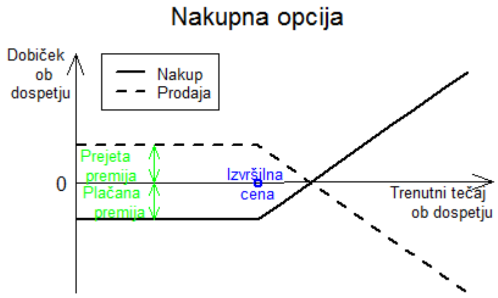
Kako močan vpliv ima sprememba deviznega tečaja je odvisno od elastičnosti povpraševanja in od ekonomske rasti v tujih državah. V primeru elastičnih dobrin in depreciacije evra imamo visoko spremembo v zvišanju povpraševanja ameriških potrošnikov po evropskih dobrinah. Kljub depreciaciji evra pa v primeru, da se ameriško gospodarstvo sooča z recesijo, ostane ameriško povpraševanje po evropskih dobrinah nizko kljub nizki ceni.

2. Valutne opcije

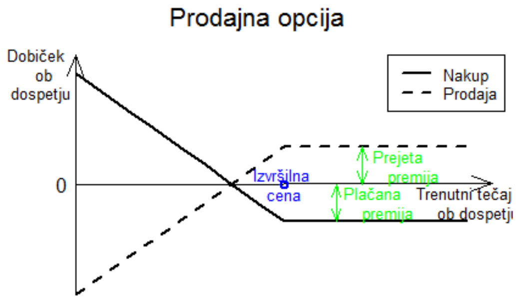
Evropska valutna opcija je izvedeni finančni instrument, ki daje kupcu pravico in ne obveznost odločiti se, ali bo kupil oziroma prodal določeno količino neke valute po vnaprej dogovorjeni ceni in na točno določen dan v prihodnosti. Glede na to ali daje opcija dolgi strani pravico do nakupa ali prodaje osnovnega premoženja ločimo nakupne in prodajne opcije.

Kupec za opcijo ob sklenitvi pogodbe plača premijo, ob dospetju pa opcijo izvrši ali pusti da zapade. Opcijo izvrši v primeru, da se mu to izplača. To pomeni, da bo kupec v primeru nakupne opcije za nakup tuje valute opcijo izvršil le, če bo razlika med trenutnim deviznim tečajem [domača/tuja valuta] ob dospetju in dogovorjenim pozitivna.

V primeru prodajne opcije za prodajo domače valute, bo kupec opcijo izvršil, če bo razlika med dogovorjenim deviznim tečajem in trenutnim tečajem ob zapadlosti pozitivna.



SLIKA 1. Dobičk nakupne opcije



SLIKA 2. Dobiček prodajne opcije

Z nakupno opcijo se torej zavarujemo pred naraščanjem deviznega tečaja [domača/tuja valuta], s prodajno pa pred padanjem. Nakupna in prodajna valutna opcija sta simetrični. Prodajna opcija za prodajo domače valute za tujo po menjalnem tečaju K, je ekvivalentna nakupni opciji za nakup tuje valute za domačo po menjalnem tečaju $\frac{1}{K}$.

Poleg evropskih valutnih opcij poznamo še ameriške, ki se od evropskih razlikujejo po tem, da jih lahko izvršimo kadarkoli do časa dospetja.

Valutne opcije so uporabne v primeru, da kupujemo ali izvažamo blago ali storitev iz/v območje s tujo valuto in se datum sklenitve posla in rok plačila razlikujeta, ter v primeru, da imamo kredit v tuji valuti. Valutna opcija torej omogoča podjetjem zaščito prihodkov v tujini pred neugodnim gibanjem deviznega tečaja. Kupec opcije je že vnaprej seznanjen z največjo možno izgubo, plačano premijo. Poleg zavarovanj podjetij pa opcije omogočajo tudi izkoriščanje ugodnega gibanja deviznega tečaja.

3. Forex trg

Trgovanje z valutnimi opcijami se izvaja na svetovnem trgu Forex. To je OTC trg oziroma prosti trg in je stičišče ponudbe in povpraševanja po posameznih valutah. Je trg brez osrednje fizične lokacije. Udeleženci na njem med seboj komunicirajo preko spleta (on-line) ali telefonov.

Z valutami lahko trgujemo preko promptnih transakcij, terminskih poslov, zamenjav in opcij, katerih osnovno premoženje so valute. Najpogostejša so trgovanja z ameriškim dolarjem, japonskim jenom in evrom. Pri določanju globalnih menjalnih tečajev ima Forex pomembno vlogo, saj je najlikvidnejši, najdinamičnejši in največji valutni trg. Dnevno se na njem trguje z več kot 5 bilijoni dolarjev.

Trgovanje poteka 24 ur dnevno 5 dni v tednu, in sicer od nedelje od 22. ure dalje do zaprtja trga v petek ob 23. uri. Udeleženci na trgu določijo ceno, po kateri bodo prodali/kupili valuto ali vrednostni papir, ki je lahko za vsako stranko različna. Trguje se večinoma z vzvodi, kar udeležencem omogoča višje dobičke prav tako pa tudi višje izgube. Vsak udeleženec na trgu je izpostavljen tveganju, da nasprotna stran ne bo izpolnila svojih obveznosti.

Udeleženci na forex trgu so komercialne banke, centralne banke, tvegani skladi, podjetja, investitorji in špekulanti. Večina trgovanja z valutami poteka na medbančnem trgu, kjer banke kupujejo in prodajajo devize za svoje stranke. Z razliko med višjo prodajno in nižjo nakupno ceno valute si ustvarjajo dobiček. Za razliko od komercialnih bank, centralne banke na forex trgu s kupovanje in prodajo deviz vplivajo na devizni tečaj, z namenom stabilizacije in povečanja konkurenčnosti domačega gospodarstva. Podjetja izvajajo aktivnosti na forex trgu z namenom zmanjšanja valutnega tveganja v primeru transakcij v tuji valuti. Namen investitorjev in špekulantov na trgu pa je predvsem dobiček zaradi gibanja deviznih tečajev.

4. Razlike med terminskimi posli in opcijami

Terminski posel o deviznem tečaju je zavezujoč dogovor med dolgo in kratko stranjo o nakupu ali prodaji določene količine točno določene tuje valute po danes določenem tečaju in z rokom izvršitve na določen dan v prihodnosti.

Pri terminskem poslu nobena izmed strani nima denarnih tokov ob sklenitvi pogodbe, ob zapadlosti pa imata obe strani obveznosti. Pri opciji pa kupec ob sklenitvi plača prodajalcu premijo, s katero si pridobi pravico in ne obveznosti, da opcijo izvrši. Prodajalec pa je dolžan v primeru, da kupec opcijo izvrši, ob dospetju izvesti menjavo po dogovorjenem menjalnem tečaju.

Nominalna vrednost nakupnega terminskega posla v domači valuti na enoto tuje nominale je za kupca enaka

$$D(T) - K,$$

obratno za prodajalca, za katerega je vrednost enaka

$$K - D(T),$$

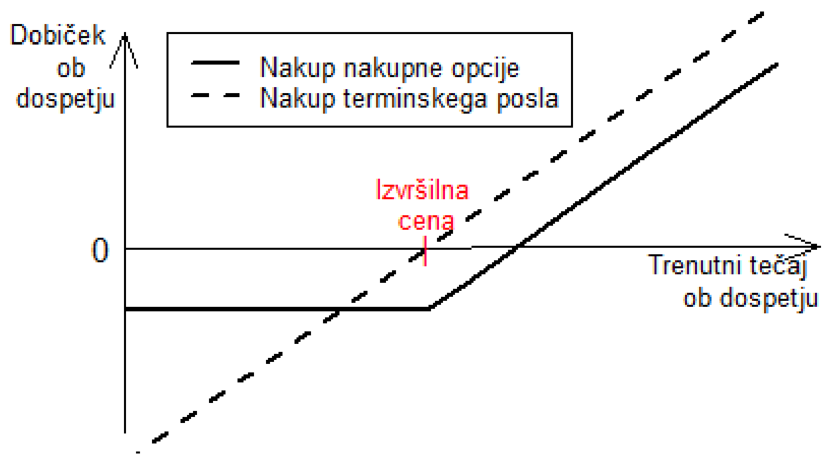
kjer je K dogovorjeni menjalni tečaj, $D(T)$ pa tržni menjalni tečaj ob dospetju.

Vrednost nakupne opcije v domači valuti na enoto tuje nominale je za kupca enaka

$$\max\{D(T) - K, 0\},$$

se pravi razliki med trenutnim deviznim tečajem ob dospelosti in dogovorjenim tečajem, če opcijo izvrši oziroma nič, če pusti, da opcija zapade. Za prodajalca pa je enaka

$$\min\{K - D(T), 0\}.$$



Slika 3. Primerjava denarnega toka pri nakupnem terminskem poslu in nakupni opciji

Iz grafa lahko vidimo, da imajo terminski posli simetričen vzorec denarnega toka, opcije pa asimetričen.

Vrednost prodajnega terminskega posla v domači valuti na enoto tuje nominale je za kupca enaka $K - D(T)$,vrednost prodajne opcije pa $max\{K - D(T), 0\}$, za prodajalca pa ravno obratno.

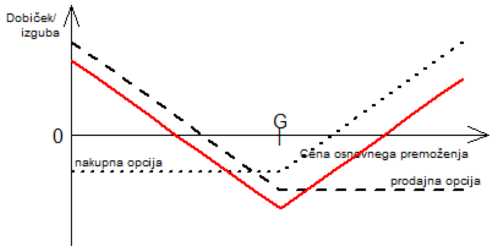
5. Opcijske strategije

Opcije lahko kombiniramo z drugimi opcijami in z osnovnim premoženjem ter tako oblikujemo različne strategije. Z njimi lahko investitor oblikuje strategijo, ki najbolj ustreza njegovim napovedim glede trga v prihodnje in njegovemu nagnenju k tveganju. Če so pričakovanja investitorja glede trga pravilne, si s strategijo zagotovi dobiček. V primeru, da so napačne, pa si lahko s strategijo zagotovi v naprej znano in majhno izgubo. V nadeljevanju sledi opis opcijskih strategij za splošno osnovno premoženje.

5.1. **Strategija razkorak (angl. straddle).** Kupimo nakupno in prodajno opcijo z isto izvršilno ceno G in enakim dospetjem T (angl. long straddle). Dobiček strategije brez upoštevanja plačanih premij je enak:

	donos nakupne	donos prodajne	skupni donos
$S(T) \leq G$	0	$G - S(T)$	$G - S(T)$
$S(T) > G$	$S(T) - G$	0	$S(T) - G$

Torej če se ob dospetju cena osnovnega premoženja $S(T)$ prbližuje G imamo izgubo, če pa sta daleč narazen imamo dobiček. Strategija je primerna, če pričakujemo velika gibanja cen osnovnega premoženja in ne vemo ali bo gibanje šlo navzgor ali navzdol. Torej menimo, da trg podcenjuje nestanovitnost.



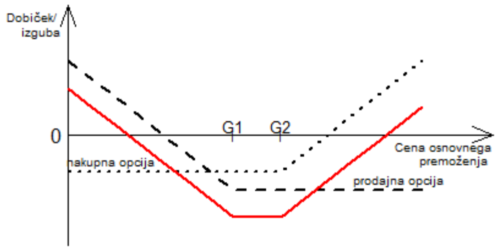
Slika 4. Vrednost strategije razkorak ob dospetju

Poznamo tudi enako strategijo, kjer prodamo obe vrsti opcij po enaki izvršilni ceni in z enakim dospetjem (angl. short straddle). To uporabimo, če pričakujemo, da bo cena osnovnega premoženja ostala enaka/podobna trenutni.

5.2. **Strategija dušenje (angl. strangle).** Kupimo evropsko prodajno opcijo z izvršilno ceno G_1 in nakupno opcijo z G_2, $G_1 < G_2$, z enakim dospetjem T. Strategija je primerna, če pričakujemo velike spremebe v ceni osnovnega premoženja in ne vemo, v katero smer bo šlo gibanje. V primerjavi z razkorakom se mora v tem primeru cena bolj spremeniti. Tveganje nastane, če cena ostane enaka. Bolj kot sta G_2 in G_1 narazen manjše je tveganje in priti mora do večjih sprememb v gibanju cene, da imamo dobiček.

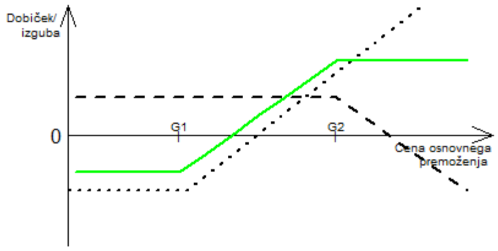
Prodajalec razkoraka in dušenja ima neomejeno potencialno izgubo. Proda pa ju v primeru, da ne pričakuje večjih spremeb v ceni. Izplačilo ob dospetju strategije je enako:

Cena ob zapadlosti	donos prodajne	donos nakupne	donos ob zapadlosti
$S(T) \geq K_2$	0	$S(T) - G_2$	$S(T) - G_2$
$G_1 < S(T) < G_2$	0	0	0
$S(T) \leq G_1$	$G_1 - S(T)$	0	$G_1 - S(T)$



Slika 5. Vrednost strategije dušenje ob dospetju

5.3. **Bikov korak (angl. bull spread).** Je kombinacija nakupa nakupne opcije z izvršilno ceno G_1 in prodajo nakupne opcije z G_2, $G_1 < G_2$, z enakim dospetjem. S tako strategijo omejimo tveganje navzgor in navzdol.



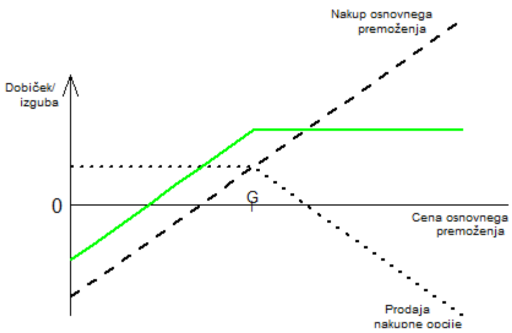
Slika 6. Vrednost strategije bikov korak ob dospetju

Izplačilo ob dospetju strategije bikov korak je enako:

Cena ob zapadlosti	donos nakupa	donos prodaje	donos ob zapadlosti
$S(T) \geq G_2$	$S(T) - G_1$	$-(S(T) - G_2)$	$G_2 - G_1$
$G_1 < S(T) < G_2$	$S(T) - G_1$	0	$S(T) - G_1$
$S(T) \leq G_1$	0	0	0

Bikov korak je cenejši kot strategija z eno samo opcijo, saj nakup opcije delno financiramo s premijo, ki jo prejmemo od prodaje nakupne opcije. Premija, ki jo prejmemo od prodaje je nižja kot plačana premija za nakup, saj ima prodana nakupna opcija višjo izvršilno ceno. Nižja plačana premija ima slabost, da si s to strategijo omejimo maksimalen dobiček.

5.4. **Zaščitna nakupna opcija (angl. covered call write).** Kupimo osnovno premoženje (valuto) in prodamo nakupno opcijo na to valuto. Če valuta apreciira in je nakupna opcija izvršena valuto samo predamo kupcu nakupne opcije. Če pa valuta depreciira pa zmanjšamo našo izgubo s prejeto premijo nakupne opcije.



Slika 7. Vrednost zaščitne opcije ob dospetju

6. Garman-Kohlhagenov model

Z Garman-Kohlhagenovim modelom med drugim vrednotimo evropske valutne opcije, se pravi opcije, ki jih lahko izvršimo le na dan dospetja in katerih osnovno premoženje je devizni tečaj. Model temelji na Black-Scholesovem modelu za vrednotenje opcij na delnice. Ker netvegana obrestna mera ni enaka v vseh valutnih območjih se v Garman-Kohlhagnevem modelu pojavita dve različni obrestni meri, domača in tuja.

6.1. **Predpostavke modela.**

- Devizni tečaj sledi eksponentnem Brownovem gibanju s tendenco.
- Domača in tuja obrestna mera sta znani, konstantni in netvegani.
- Nestanovitnost je konstantna.
- Opcija se lahko izvrši le na dan dospetja.
- Ni davkov, transakcijskih stroškov, provizij.
- Trgovanje se izvaja v zveznem času.
- Velja pariteta obrestnih mer.
- Ni arbitražnih priložnosti.

6.2. **Brownovo gibanje.** Vrednost deviznega tečaja se skozi čas naključno spreminja. Gibanje njegove vrednosti lahko modeliramo z Brownovim gibanjem, ki je primer slučajnega procesa. Za napovedovanje gibanja vrednosti v prihodnje je relevantna samo trenutna vrednost deviznega tečaja (markovska lastnost).
Brownovo gibanje je proces v zveznem času. Poglejmo si, kako ga dobimo kot limito slučajnih sprehodov v diskretnem času.

Definirajmo $\{B(t) : t \in \mathbb{N}_0\}$ kot slučajen sprehod po celih številih $B(t) \equiv \sum_{j=1}^{t} b_j$, kjer b_j zavzame vrednosti $+1$ ali -1 z enakima verjetnostma. Opazimo, da je $E[b_j] \equiv 0$ in $Var[b_j] \equiv 1$. Iz tega sledi, da je $E[B(t)] \equiv 0$ in $Var[B(t)] \equiv E[B(t)^2] - E[B(t)]^2 \equiv t$, $t \geq 1$. $E[B(t)^2]$ nam vrne ravno kvadrat povprečne oddaljenosti od izhodišča sorazmeren s številom korakov oz. s časom. Po centralnem limitnem izreku velja

$$\frac{B(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t\to\infty} N(0,1) \text{ v porazdelitvi.} \tag{1}$$

Če zmanjšamo časovni korak na $\frac{1}{k}$, $k > 1$, kjer se na vsakem koraku lahko premaknemo za $\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ z enakima verjetnostma, med koraki pa smo konstantni, dobimo proces

$$B_k(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^{\lfloor tk \rfloor} b_j, \quad t \in [0,\infty). \tag{2}$$

Velja $E[B_k(t)] \equiv 0$ in $Var[B_k(t)] \equiv \frac{\lfloor tk \rfloor}{k} \xrightarrow{k\to\infty} t$. Po centralnem limitnem izreku dobimo

$$B_k(t) \equiv \sqrt{t}(\frac{1}{\sqrt{kt}} \sum_{j=1}^{\lfloor tk \rfloor} b_j) \xrightarrow{k\to\infty} N(0,t) \text{ v porazdelitvi.} \tag{3}$$

Po Donskerjevem invariančnem principu dobimo zvezni proces

$$\lim_{k\to\infty}\{B_k(t); t\geq 0\}\equiv\{B(t); t\geq 0\}\ \text{v porazdelitvi,}$$

kjer je $B(t)$ Brownovo gibanje.

Definicija 6.1. Slučajni proces na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ $B\equiv\{B(t), t\geq 0\}$ je standardno Brownovo gibanje, če velja:

- $B(0)\equiv 0$ (s.g.),
- B ima neodvisne in stacionarne prirastke,
- za $0\leq s<t$ je $B(t)-B(s)\sim N(0, t-s)$,
- poti procesa B so zvezne (z verjetnostjo 1).

Lastnosti Brownovega gibanja so:

- lastnost Markova, ki nam pove, da je pogojna porazdelitev $B(T)$ glede na informacije do $t<T$ odvisna samo od B(t),
- proces je martingal, v posebnem ima konstantno upanje: $E[B(T)|B(t)]\equiv B(t)\ s.g.$ za $t<T$,
- če razdelimo interval [0,t] na n delov z delilnimi točkami $t_i\equiv\frac{it}{n}$, potem $\sum\limits_{j=1}^{n}(B(t_j)-B(t_{j-1}))^2$ konvergira skoraj gotovo proti t,
- prirastek $B(t_i)-B(t_{i-1})$ na intervalu $[t_{i-1}, t_i]$ je normalno porazdeljen z upanjem enakim 0 in varianco enako t_i-t_{i-1}.

Definicija 6.2. Brownovo gibanje s tendenco je definirano kot proces

$$X(t)\equiv\mu t+\sigma B(t), \tag{4}$$

kjer je parameter $\mu\in\mathbb{R}$ tendenca in $\sigma\in\mathbb{R}_+$ standardni odklon.

Velja $X(t)\sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ in prirastki $X(t)-X(s)$ so normalno porazdeljeni z upanjem $\mu(t-s)$ in varianco $\sigma^2(t-s)$. Zapis Brownovega gibanja s tendenco v diferencialni obliki je enak

$$dX(t)\equiv\mu dt+\sigma dB(t). \tag{5}$$

6.3. **Itov proces.** Itov proces je enak Brownovemu gibanju s tendenco, le da μ in σ nista konstanti ampak funkciji odvisni od X in t. Lahko ga zapišemo kot vsoto Lebesgueovega in stohastičnega integrala

$$X(t)\equiv X(0)+\int_0^t a(X_s, s)ds+\int_0^t b(X_s, s)dB(s) \tag{6}$$

ali pa v diferencialni obliki

$$dX(t)\equiv a(X_t, t)dt+b(X_t, t)dB(t). \tag{7}$$

Izrek 6.3 (Itova lema)**.** *Naj bo X(t) Itov proces dan z* $dX(t)\equiv a(X_t, t)dt+b(X_t, t)dB(t)$ *in naj bo* $G(t, x)\in C^2$ *(tj. dvakrat zvezno odvedljiva funkcija). Potem je tudi* $G(t, X(t))$ *Itov proces in*

$$dG\equiv\frac{\partial G}{\partial t}(t, X(t))dt+\frac{\partial G}{\partial x}(t, X(t))dX(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t, X(t))\cdot(dX(t))^2, \tag{8}$$

kjer upoštevamo Itovo multiplikacijsko pravilo, ki pravi da je $dt\cdot dt\equiv dt\cdot dB(t)\equiv dB(t)\cdot dt\equiv 0$ *in* $dB(t)\cdot dB(t)\equiv dt$. □

Če v Itovo lemo vstavimo Itov proces dobimo

$$dG \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdB(t). \tag{9}$$

S predpostavko, da vrednost osnovnega premoženja sledi Brownovemu gibanju s tendenco zgrešimo ključni vidik gibanja vrednosti, saj s tem zanemarimo, da je gibanje odvisno od cene osnovnega premoženja. Ker je devizni tečaj vedno pozitiven ga ne moremo modelirati z Brownovim gibanjem s tendenco, zato vpeljemo geometrijsko Brownovo gibanje.

Definicija 6.4. Geometrijsko Brownovo gibanje je definirano kot proces $X(t)$, ki zadošča:

$$dX(t) \equiv \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t). \tag{10}$$

Geometrijsko Brownovo gibanje je osnovna predpostavka Black-Scholesovega modela.

6.4. **Proces gibanja deviznega tečaja.** Proces deviznega tečaja $D(t)$ predstavlja ceno za enoto tuje valute ob času t izraženo v domači valuti. Devizni tečaj modeliramo z geometrijskim Brownovim gibanjem na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, ki zadošča stohastični diferencialni enačbi

$$\frac{dD(t)}{D(t)} \equiv \mu dt + \sigma dB(t), \quad D(t) > 0. \tag{11}$$

Naj bo $G(t,x) \equiv \ln(x)$. Iz Itove leme sledi

$$\begin{aligned} d[\ln D(t)] &\equiv 0 + \frac{1}{D(t)}D(t)[\mu dt + \sigma dB(t)] - \frac{1}{2}\frac{1}{D(t)^2}[\sigma^2 D(t)^2 dt] \\ &\equiv \mu dt + \sigma dB(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &\equiv (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB(t), \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) \equiv 0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) \equiv \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x) \equiv -\frac{1}{x^2}$ in $(dD(t))^2 \equiv \sigma^2 D(t)^2 dt$. Z integriranjem enačbe v mejah od 0 do t dobimo

$$\ln(D(t)) - \ln(D(0)) \equiv (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t), \tag{12}$$

kar je ekvivalentno

$$D(t) \equiv D(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}. \tag{13}$$

Ena izmed predpostavk modela je, da ne dopušča arbitražnih priložnosti. Prvi osnovni izrek vrednotenja premoženja nam pove, da temu pogoju zadostimo natanko tedaj, ko obstaja do tveganja nevtralna verjetnostna mera (ekvivalentna martinglska verjetnost glede na netvegan vrednostni papir) na $D(t)$.

Definicija 6.5. Verjetnostna mera $\tilde{P} : \mathscr{F} \to [0,1]$ je za domačo valuto ekvivalentna martingalska verjetnostna mera natanko tedaj, ko sta P in $\tilde{P}$ ekvivalentni in je za osnovno premoženje diskontirani vrednostni proces martingal glede na $\tilde{P}$. □

Velja, da je $(D(t)e^{(r_f-r_d)t})_{t\in[0,\infty)}$ martingal pod mero $\tilde{P}$. Po Itovi lemi sledi $\mu \equiv -(r_f - r_d) \equiv r_d - r_f$ in lahko vzamemo martingalsko verjetnostno mero P za $\tilde{P}$.

Definicija 6.6. Do tveganja nevtralna cena ob času $t = 0$ portfelja Π je enaka upanju (pod ekvivalentno martingalsko mero) diskontirane vrednosti portfelja ob času $t = T$, pri čemer za diskontiranje uporabimo netvegano obrestno mero.

$$C_0(\Pi) \equiv e^{-rT} E[C_T(\Pi)]$$

Definicija 6.7. Naj bo $(X(t) : t \geq 0)$ zvezen lokalni martingal glede na filtracijo $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Kvadratična variacija X je prilagojen, zvezen, nepadajoč proces $\{< X >_t: t \geq 0\}$ tak, da je$X_t- < X >_t$ zvezen lokalni martingal.

Izrek 6.8 (Girsanov). *Naj bo $\tilde{B}$ Brownovo gibanje pod mero $\tilde{P}$ in X zvezen lokalni martingal z $X_0 \equiv 0$. Če je $\mathcal{E}(X) \equiv e^{X-\frac{1}{2}<X>}$ martingal, potem je za vsak $T \in [0, \infty)$ definirana verjetnostna mera na $\mathscr{F}_T : Q_T = \mathcal{E}(X)_T \cdot \tilde{P}|_{\mathscr{F}_T}$ ekvivalentna meri $\tilde{P}|_{\mathscr{F}_T}$ in proces $B \equiv \tilde{B}- < \tilde{B}, X >$ je Brownovo gibanje pod Q_T na intervalu $[0, T]$.* □

Po Girsanovem izreku obstaja martingalska verjetnostna mera $\tilde{P}$ ekvivalentna meri P tako, da je

$$\frac{dD(t)}{D(t)} \equiv (r_d - r_f)dt + \sigma d\tilde{B}(t)$$

za Brownovo gibanje $\tilde{B}$ pod martingalsko mero $\tilde{P}$.

6.5. **Izpeljava premije za nakupno valutno opcijo.** Iz prejšnjih poglavij že vemo, da gibanje deviznega tečaja opišemo z

$$D(T) \equiv D(0)e^{(r_d-r_f-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\tilde{B}(T)}$$

in da je vrednost valutne nakupne opcije v domači valuti na enoto tuje nominale ob dospelosti enaka

$$C_T \equiv \max\{D(T) - K, 0\}.$$

Cena nakupne opcije v domači valuti na enoto tuje nominale ob času $t \equiv 0$ je torej enaka

$$\begin{aligned}
C_0 &\equiv E_{\tilde{P}}[e^{-r_dT}C_T] \equiv e^{-r_dT}E_{\tilde{P}}[\max(D(0)e^{(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\tilde{B}(T)} - K, 0)] \\
&\equiv e^{-r_dT}\int_{-\infty}^{\infty} \max(D(0)e^{(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma x} - K, 0)\cdot e^{-\frac{x^2}{2T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}dx \\
&\equiv e^{-r_dT}\int_{y}^{\infty} (D(0)e^{(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma x} - K)e^{-\frac{x^2}{2T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}dx \\
&\equiv e^{-r_dT}(D(0)e^{(r_d-r_f)T}\Phi(\frac{-y+T\sigma}{\sqrt{T}}) - K\Phi(-\frac{y}{\sqrt{T}})) \\
&\equiv D(0)e^{-r_fT}\Phi(\frac{-y+T\sigma}{\sqrt{T}}) - Ke^{-r_dT}\Phi(\frac{-y}{\sqrt{T}}),
\end{aligned}$$

kjer je $y \equiv \frac{1}{\sigma}(ln\frac{K}{D(0)} - (r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T)$ in Φ kumulativna porazdelitvena funkcija standardizirane normalne porazdelitve.

Običajno enačbo zapišemo v obliki

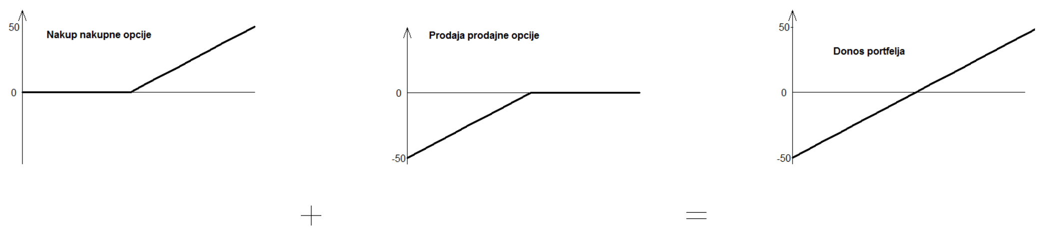
$$C_0 \equiv D(0)e^{-r_f T}\Phi(d_1) - Ke^{-r_d T}\Phi(d_2), \tag{14}$$

kjer je $d_1 \equiv \frac{ln\frac{D(0)}{K}+(r_d-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ in $d_2 \equiv \frac{ln\frac{D(0)}{K}+(r_d-r_f-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

6.6. **Pariteta nakupne in prodajne opcije.** Najprej jo opišemo za osnovno premoženje s ceno S, ko imamo samo eno valuto z obrestno mero r. Predstavljajmo si, da kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno G in dospelostjo T in prodamo evropsko prodajno opcijo z enako izvršilno ceno in enako dospelostjo z istim osnovnim premoženjem. Donos takega portfelja ob času T je enak

$$\max(S(T) - G, 0) - \max(G - S(T), 0) \equiv S(T) - G,$$

kjer je $S(T)$ vrednost osnovnega premoženja ob času T.



SLIKA 8. Prikaz paritete nakupne in prodajne opcije

Enak donos dobimo z dolgo pozicijo osnovnega premoženja in kratko pozicijo denarja. Ti denarni tokovi so neodvisni od bodočega obnašanja osnovnega premoženja in so ob času t enaki

$$c_t - p_t \equiv S(t) - Ge^{-r(T-t)},$$

kjer sta c_t cena nakupne opcije in p_t cena prodajne opcije ob času t

Portfelj	današnja vrednost (čas t)	vrednost ob času T
nakupna opcija	c_t	$\max(S(T) - G, 0)$
- prodajna opcija	$-p_t$	$-\max(G - S(T), 0)$
- osnovno premoženje	$-S(t)$	$-S(T)$
denar	$Ge^{-r(T-t)}$	G
SKUPAJ	$c_t - p_t - S(t) + Ge^{-r(T-t)}$	0

TABELA 1. Denarni tokovi v varovalnem portfelju

Izrek 6.9 (Pariteta nakupne in prodajne opcije). *Naj bo C_t vrednost v domači valuti na enoto tuje nominale evropske nakupne valutne opcije za nakup tuje valute z izvršilnim tečajem K in dospelostjo T. Naj bo P_t vrednost evropske prodajne valutne opcije na isto valuto z enako izvršilno ceno in dospelostjo. Naj bo vrednost deviznega tečaja ob dospelosti $D(T)$ in naj bosta r_d in r_f domača in tuja netvegana obrestna mera. Če na trgu ni arbitraže in je zadoščeno tem predpostavkam, potem na enoto tuje nominale velja*

$$P_t + D(t)e^{-r_f(T-t)} \equiv C_t + Ke^{-r_d(T-t)} \tag{15}$$

Če bi bila premija prodajne opcije nižja kot jo predlaga partiteta evropske nakupne in prodajne opcije potem lahko najdemo arbitražno strategijo. Naša strategija v tem primeru bi bila, da

- kupimo prodajno opcijo,
- prodamo nakupno opcijo,
- kupimo valuto, ki nastopa v opciji.

Nakupe financiramo s prodajo nakupne opcije in z izposojo denarja po obrestni meri r_d. Tujo valuto, ki smo jo kupili lahko naložimo na bančni račun in zaslužimo po obrestni meri r_f. Neodvisno od gibanja deviznega tečaja do dospelosti bomo imeli dobiček.

- Če je $D(T) \equiv K$, se pravi vrednosti obeh opcij sta enaki 0, potem lahko tujo valuto zamenjamo na trgu za domačo in ta količina bo presegala količino, ki jo zahtevamo za odplačilo dolga.
- Če tuja valuta apreciira ($D(T) > K$) bomo imeli izgubo iz nakupne opcije, prodajno opcijo pa bomo pustili da zapade. Tujo valuto bomo zamenjali za domačo na trgu in prejeta količina bo presegla količino zahtevano za odplačilo dolga in izgubo od nakupne opcije.
- Če tuja valuta depreciira ($D(T) < K$) potem imamo profit iz izvršitve prodajne opcije in zamenjave tuje valute v domačo, ki preseže količino zahtevano za odplačilo dolga.

Tudi v primeru, da bi bila premija prodajne opcije višja, kot jo predlaga pariteta evropske nakupne in prodajne opcije bi bila možna arbitraža. Strategija v tem primeru bi bila ravno obratna od prejšnje.

6.7. **Izpeljava premije za prodajno valutno opcijo.** Ker je ena izmed predpostavk modela, da na trgu ni arbitraže, lahko premijo za prodajno valutno opcijo v domači valuti na enak devizni tečaj, z enakim dospetjem na enoto tuje nominale določimo kar iz paritete evropske nakupne in prodajne opcije.

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv C_0 - D(0)e^{-r_fT} + Ke^{-r_dT} \\ &\equiv D(0)e^{-r_fT}\Phi(d_1) - Ke^{-r_dT}\Phi(d_2) - D(0)e^{-r_fT} + Ke^{-r_dT} \\ &\equiv D(0)e^{-r_fT}(\Phi(d_1) - 1) + Ke^{-r_dT}(1 - \Phi(d_2)) \\ &\equiv Ke^{-r_dT}(\Phi(-d_2)) - D(0)e^{-r_fT}(\Phi(-d_1)), \end{aligned} \tag{16}$$

kjer smo upoštevali $\Phi(-x) \equiv 1 - \Phi(x)$, in je

$$d_1 \equiv \frac{ln\frac{D(0)}{K} + (r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 \equiv \frac{ln\frac{D(0)}{K} + (r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \equiv d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

6.8. **Vidik tujega investitorja.** $D_f(t) \equiv \frac{1}{D(t)} \equiv (D(t))^{-1}$ predstavlja ceno v tuji valuti za enoto domače valute ob času t. Z uporabo Itove fomule na $(D(t))^{-1}$, kjer vzamemo $g(t,x) \equiv x^{-1}$ dobimo

$$
\begin{aligned}
d[(D(t))^{-1}] &\equiv \frac{\partial g}{\partial t}(t,D(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,D(t))dD(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,D(t))(dD(t))^2 \\
&\equiv 0 - \frac{1}{D(t)^2}D(t)[(r_d - r_f)dt + \sigma d\tilde{B}(t)] + \frac{1}{2}\frac{2}{D(t)^3}[\sigma^2 D(t)^2 dt] \\
&\equiv -\frac{1}{D(t)}[(r_d - r_f)dt + \sigma d\tilde{B}(t)] + \frac{1}{D(t)}[\sigma^2 dt] \\
&\equiv D(t)^{-1}[(\sigma^2 - r_d + r_f)dt - \sigma d\tilde{B}(t)],
\end{aligned} \tag{17}
$$

kjer smo upoštevali $\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) \equiv 0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) \equiv -\frac{1}{x^2}$ in $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x) \equiv \frac{2}{x^3}$.

Ker vemo, da je $D_f(t) \equiv D(t)^{-1}$ dobimo

$$dD_f(t) \equiv D_f(t)((\sigma^2 + r_f - r_d)dt - \sigma d\tilde{B}(t)), \quad D^f(t) > 0, \tag{18}$$

kjer je $\tilde{B}$ Brownovo gibanje pod domačo martingalsko mero $\tilde{P}$.

Dinamiko deviznega tečaja z vidika tujega investitorja pod domačo martingalsko mero $\tilde{P}$ torej opišemo z

$$D_f(t) \equiv D_f(0)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 + r_f - r_d)t - \sigma\tilde{B}(t)},\ D^f(0) > 0. \tag{19}$$

To dobimo iz Itove formule z $g(t,x) \equiv \ln(x)$. Cilj je skonstruirati model brez arbitraže z vidika tujega investitorja zato potrebujemo ekvivaletno martingalsko mero Q na tujem trgu. Ker sedaj želimo trgovati z domačo valuto mora biti njena vrednost v tuji valuti martingal pod mero Q:

$$\tilde{D}_f(t) := e^{(r_d - r_f)t}D_f(t). \tag{20}$$

Ko v to enačbo vstavimo (22) dobimo

$$\tilde{D}_f(t) \equiv D_f(0)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma\tilde{B}(t)} \tag{21}$$

ali ekvivalentno

$$d\tilde{D}_f(t) \equiv \tilde{D}_f(t)(\sigma^2 dt - \sigma d\tilde{B}(t)). \tag{22}$$

Po Girsanovem obstaja tuja martingalska mera Q ekvivalentna domači martingalski meri $\tilde{P}(\sim P)$ tako, da je

$$D_f(t) \equiv D_f(0)e^{(r_f - r_d - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\tilde{\tilde{B}}(t)} \tag{23}$$

za Brownovo gibanje $\tilde{\tilde{B}}$ pod martingalsko mero Q.

6.9. **Upravljanje s tveganjem.** Finančna institucija, ki proda opcijo na prostem trgu, se sooča s problemom upravljanja s tveganjem. Grški parametri so pomembna mera tveganja in nam povedo potencialni dobiček oziroma izgubo opcijskih strategij. Pokažejo nam vpliv sprememb posameznih parametrov, ki določajo premijo opcije v Garman-Kohlhagnovem modelu. Pomembno je, da jih poznamo, saj se tako lahko zavarujemo pred tveganjem. V nadeljevanju sledi predstavitev grških parametrov na enoto tuje nominale.

- **Delta Δ:**
Iščemo tak Δ, da vrednost portfelja ne bo odvisna od gibanja osnovnega premoženja. Pove nam koliko enot osnovnega premoženja bi morali držati za vsako prodano opcijo, da bi ustvarili netvegan portfelj. Občutljivost cene opcije glede na ceno delnice dobimo z
$$\Delta \equiv \frac{\partial C}{\partial S},$$
kjer je S cena osnovnega premoženja in C cena nakupne opcije. Δ portfelja sestavljenega iz več opcij dobimo z vsoto delt posameznih pozicij. Ker Δ ni konstantna, trgovčeva pozicija ostane delta nevtralna samo za kratek čas. Se pravi, da mora delto prilagajati periodično.
Dolgo pozicijo nakupne in prodajne opcije delta zavarujemo v Garman-Kohlhagnovem modelu s kratko pozicijo
$$\Delta(nakupne) \equiv e^{-r_f T}\Phi(d_1) \text{ in } \Delta(prodajne) \equiv e^{-r_f T}\Phi(d_1) - 1$$
tuje valute. Kratko pozicijo opcij pa zavarujemo z dolgo pozicijo istih vrednosti. Stremimo k delta nevrtalnemu portfelju, se pravi, k popolnoma zavarovanem portfelju.
- **Theta Θ:**
Meri občutljivost vrednosti opcije glede na čas
$$\Theta \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$
V smislu Garman-Kohlhagnovega modela velja
$$\Theta(nakupne) \equiv -\frac{S(0)\Phi'(d_1)\sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} - r_d K e^{-r_d T}\Phi(d_2) + r_f S(0)\Phi(d_1)e^{-r_f T}$$
in
$$\Theta(prodajne) \equiv -\frac{S(0)\Phi'(d_1)\sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} + r_d K e^{-r_d T}\Phi(-d_2) - r_f S(0)\Phi(-d_1)e^{-r_f T},$$
kjer $\Phi(-d_2) \equiv 1 - \Phi(d_2)$ in $\Phi'(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- **Gama Γ:**
Gama meri občutljivost delte na osnovno premoženje v smislu koliko oziroma kako pogosto moramo prilagajati portfelj, da ostanemo v delta nevtralni poziciji. Ker so stroški ohranjanja delta nevtralne pozicije lahko veliki, želimo minimizirati prilagajanje portfelja. To lahko dosežemo z nakupom ali prodajo več opcij. Gamo dobimo z
$$\Gamma \equiv \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2},$$
kjer je Π portfelj. Majhna Γ pomeni, da se delta počasi spreminja, visoko negativna ali visoko pozitivna Γ pa nam pove, da je delta zelo občutljiva na ceno osnovnega premoženja. V smislu Garman-Kohlhagnovega modela je
$$\Gamma \equiv \frac{\Phi'(d_1)e^{-r_f T}}{S(0)\sigma\sqrt{T}},$$
kjer je $\Phi'(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- **Vega ϑ:**
  Vega meri nihanje cene opcije glede na nestanovitnost osnovnega premoženja
  $$\vartheta \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}.$$
  Sprememba nestanovitnosti ima relativno majhen vpliv na vrednost portfelja, če je ϑ bizu 0. Če pa je ϑ visoko pozitivna ali visoko negativna pa je vrednost portfelja zelo občutljiva že na majhne spremembe nestanovitnosti osnovnega premoženja. Vega iz Garman-Kohlhagnovega modela je enaka
  $$\vartheta \equiv S(0)\sqrt{T}\Phi'(d_1)e^{-r_f T}.$$

- **Rho ρ:**
  Meri spremembo vrednosti portfelja glede na spremembo obrestne mere
  $$\rho \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$
  V Garman-Kohlhagnovem modelu je ρ glede na domačo obrestno mero enak
  $$\rho(nakupne) \equiv Te^{-r_d T} K\Phi(d_2)$$
  in
  $$\rho(prodajne) \equiv -Te^{-r_d T} K\Phi(-d_2).$$
  Rho glede na tujo obrestno mero pa
  $$\rho(nakupne) \equiv -Te^{-r_f T} S(0)\Phi(d_1)$$
  in
  $$\rho(prodajne) \equiv Te^{-r_f T} S(0)\Phi(-d_1).$$

V praksi udeleženci na trgu z opcijami stremijo k vsaj blizu delta nevtralnim portfeljem. Vsak dan ob koncu dneva prilagodijo portfelj tako, da ostane delta nevtralen. Pozorni so tudi na gamo in vego vendar ju ne upravljajo dnevno, saj imata običajno majhen vpliv. Razlog da sta majhni je, da prodamo opcijo, ki je na meji (angl. at-the-money), zato je velika verjetnost, da se bo do dospetja spremenila dovolj, da se bo splačala (angl. in-the-money) ali da se ne bo splačala (angl. out-of-the-money).

Primer 6.10 (Delta-gama zaščita)**.** Obravnavamo zavarovanje pozicije prodajalca evropske nakupne valutne opcije. Cilj je skonstruirati portfelj, kjer sta tako gama kot delta blizu 0. Recimo, da prodamo 1000 enot ($z \equiv -1000$) valutne opcije, kjer je osnovno premoženje enota ameriškega dolarja in dospetje $T = 90$ dni. Za konstrukcijo željenega portfelja potrebujemo dodatno opcijo na isto valuto, recimo z dospetjem $T = 60$ dni. Za obe opciji naj velja: $K \equiv 1,08\$/€$, $D(0) \equiv 1,06\$/€$, $r_d \equiv 8\%$, $r_f \equiv 6\%$ in $\sigma \equiv 20\%$.

opcija	dospetje	cena opcije	izvršilni tečaj	Δ	Γ
prodana	$\frac{90}{365}$	0,0348 €	1,08\$/€	0,4578	3,7193
dodatna	$\frac{60}{365}$	0,0267 €	1,08\$/€	0,4363	4,5448

Želimo določiti pozicijo v dodatni opciji ($\hat{z}$), količino tuje valute, ki jo moramo držati (x) in pozicijo v domači valuti (y) tako, da zadostimo:

$$\Delta_{portfelja} \equiv x - 1000\Delta + \hat{z}\Delta \equiv 0,$$

$$\Gamma_{portfelja} \equiv -1000\Gamma + \hat{z}\Gamma \equiv 0$$

$$\Pi \equiv xD(0) + y - 1000C_0 + \hat{z}\hat{C}_0 \equiv 0,$$

kjer je Π vrednost portfelja.

Sledi, da če želimo delta-gama zavarovan portfelj moramo imeti dolgo pozicijo v $100,75\$$ in 818,36 enotah dodatne opcije, ter kratko pozicijo v $93,85$€.

6.10. **Black-Scholesova diferencialna enačba.** Ena izmed prepostavk modela je, da gibanje vrednosti osnovnega premoženja opišemo z enačbo $dS(t) \equiv S(t)\mu dt + S(t)\sigma dB(t)$. Radi bi določili df funkcije $f : (S(t), t) \to \mathbb{R}$. Po Newtonovi metodi dobimo

$$df \equiv (\bigtriangledown f, dx) \equiv \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial t}dt \equiv (\frac{\partial f}{\partial S}S(t)\mu + \frac{\partial f}{\partial t})dt + \frac{\partial f}{\partial S}S(t)\sigma dB(t).$$

Želimo vključiti še en višji red, saj iz Itovega multiplikacijskega pravila vemo, da je $(dB(t))^2 \equiv dt$. Zanima nas $\frac{1}{2}(dx, \bigtriangledown^2 f dx)$. Z upoštevanjem kvadratične variacije opazimo, da je $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}S(t)^2\sigma^2 dt$. Dobimo Itovo formulo:

$$df \equiv (\frac{\partial f}{\partial S}S(t)\mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}S(t)^2\sigma^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}S(t)\sigma dB(t).$$

Opazimo, da je $dB(t)$ edini slučajni izraz v enačbi. Če nam uspe poiskati tak portfelj, ki odpravi ta slučajen izraz, potem vemo, da mora biti donos takega portfelja enak netvegani obrestni meri r oziroma enak donosu kratkoročnega netveganega vrednostnega papirja. Od prej vemo, da nam delta pove, koliko osnovnega premoženja moramo držati, da dobimo portfelj, ki ni odvisen od gibanja vrednosti osnovnega premoženja. Zato bo naš portflej Π enak:

kratka pozicija	opcija
dolga pozicija	Δ osnovnega premoženja

Za majhno spremembo časa dt je profit oziroma izguba takega portfelja enaka

$$d\Pi \equiv -df + \frac{\partial f}{\partial S}dS(t).$$

Če vstavimo df, ki smo ga dobili iz Itove leme dobimo

$$d\Pi \equiv (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2)dt.$$

S tem smo eliminirali $dB(t)$ iz enačbe, torej smo dobili netvegan portfelj. Predpostavka, da ne dopuščamo arbitražnih priložnosti nam pove, da mora biti donos enak netvegani obrestni meri r. Dobimo

$$\begin{aligned} d\Pi &\equiv r\Pi dt \\ (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2)dt &\equiv r(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S)dt \\ (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2 + r\frac{\partial f}{\partial S}S)dt &\equiv rfdt \qquad (24) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2 + r\frac{\partial f}{\partial S}S &\equiv rf. \end{aligned}$$

Če skontruiramo portfelj Π tak, da so vrednsti Π in f enake pod vsakim pogojem in da je Π strategija samofinanciranja lahko zamenjamo f s Π. Torej vrednost portfelja zadošča Black-Scholesovi diferencialni enačbi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \equiv r\Pi.$$

Z upoštevanjem $\Theta \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial t}$, $\Delta \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial S}$ in $\Gamma \equiv \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$ dobimo

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \equiv r\Pi.$$

Izpeljana enačba ima lastnost da je trg poln, kar v našem primeru pomeni, da je tveganje opcije lahko (teoretično) popolnoma zavarovano z osnovnim premoženjem. Se pravi, da ni nestanovitnostnega tveganja pri premiji, ki bi ga morali oceniti.

V primeru valutnih opcij je izpeljava enaka. V portfelju držimo tujo valuto, od katere prejmemo obresti po obrestni meri r_f. Vrednost takega porftelja je za majhno spremembo časa enaka

$$d\Pi \equiv \Delta(dS(t) + d(\text{donos od tuje valute})) - df.$$

Sledi

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + (r_d - r_f)S\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \equiv r_d \Pi.$$

7. Nestanovitnost

Nestanovitnost oziroma volatilnost meri tveganost donosov osnovnega premoženja in je edina spremenljivka v enačbi za vrednotenje opcij, ki ni podana v opcijski pogodbi oziroma je ni možno spremljati na trgu. Definirana je kot standardni odklon logaritemskih donosov osnovnega premoženja v enem letu. Pove nam pričakovan razpon nihanj cene osnovnega premoženja, vendar ne poda smeri nihanja.

7.1. Zgodovinska nestanovitnost.

Pri zgodovinski nestanovitnosti ocenimo σ iz zgodovinskih podatkov, kjer uporabimo najnovejše podatke, ki jih imamo na voljo. Za oceno zgodovinske nestanovitnosti potrebujemo $n+1$ opazovanj (število dni, tednov, mesecev), S_i ceno delnice na koncu i-tega intervala, kjer je $i \equiv 0, 1, 2, \ldots, n$ in T dolžina časovnega intervala v letih. Naj bo

$$u_i \equiv \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}}) \quad za \quad i \equiv 1, 2, \ldots, n \tag{25}$$

donosnost osnovnega premoženja v zveznem času. Ocena standardnega odklona u_i je dana z:

$$s \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2},$$

kjer z $\bar{u}$ označimo povprečje u_i: $\bar{u} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$. Ker je standarni odklon u_i enak $\sigma\sqrt{T}$ sledi, da σ lahko ocenimo z $\hat{\sigma} \equiv \frac{s}{\sqrt{T}}$, saj je s ocena $\sigma\sqrt{T}$.

To ni najboljša ocena, saj temelji na preteklosti, v modelu pa si želimo oceno za prihodnost zato je večkrat v uporabi implicitna nestanovitnost.

7.2. Implicitna nestanovitnost.

Oceno implicitne volatilnosti dobimo tako, da enačimo teoretično ceno opcije, ki jo dobimo iz modela s ceno na trgu, kjer je edini neznani parameter v enačbi σ. Zaradi paritete nakupne in prodajne opcije, sta implictini nestanovitnosti nakupne in prodajne opcije enaki.

Implicitno nestanovitnost računamo z numeričnimi metodami, kot sta bisekcija in Newton-Raphsonova metoda. Izkaže se, da za opcije na meji dobro deluje tudi kvadratična metoda, ki je relativno lahka. Uporabimo enačbo za vrednotenje opcij iz Garman-Kohlhagenovega modela. Naj bo

$$a \equiv d_1^2 - d_2^2 \equiv 2(\ln(\frac{D(0)}{K} + (r_d - r_f)T).$$

Z aproksimacijo normalne porazdelitvene funkcije

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2^2 2!} - \ldots) dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \ldots) \Rightarrow \Phi(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

lahko enačbo za vrednotenje nakupne opcije zapišemo kot

$$\begin{aligned}
(26)\quad C_0 &\approx D(0)e^{-r_f T}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_1) - Ke^{-r_d T}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_2) \\
\Rightarrow\ d_2 &\equiv \underbrace{\frac{D(0)}{K} e^{(r_d - r_f)T}}_{\text{m}} d_1 + \underbrace{\frac{\sqrt{2\pi}}{Ke^{-r_d T}} [\frac{1}{2}(D(0)e^{-r_f T} - Ke^{-r_d T}) - C_0]}_{\text{n}} \\
\Rightarrow\ d_2 &\equiv m \cdot d_1 + n
\end{aligned}$$

Če poznamo $C_0, D(0), K, r_d, r_f$ in T zlahka izračunamo m in n. Iz zgornje enačbe sledi $a \equiv d_1^2 - d_2^2 \equiv d_1^2 - (md_1 + n)^2 \equiv d_1^2(1 - m^2) - d_1(2mn) - n^2$. Dobimo kvadratno enačbo

$$(27)\qquad d_1^2 \underbrace{(1 - m^2)}_{\beta} - d_1 \underbrace{(2mn)}_{\psi} - \underbrace{n^2 - a}_{\alpha} \equiv 0.$$

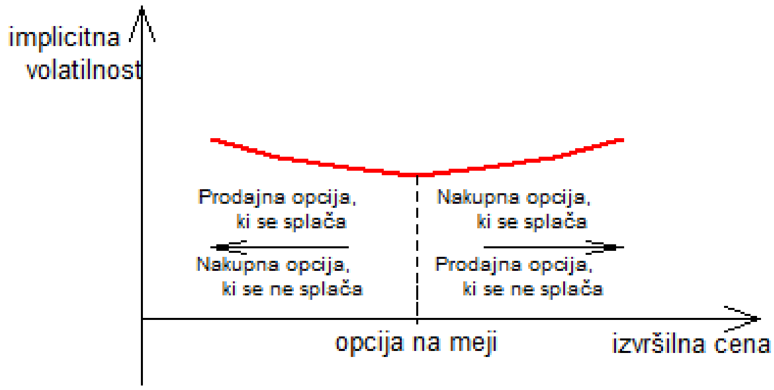
Rešitev kvadratne enačbe nam vrne

$$(28)\qquad d_1 \equiv \frac{-\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\beta\alpha}}{2\beta}; \quad (\psi^2 - 4\alpha\beta \geq 0)$$

$$(29)\qquad \begin{gathered} d_2 = md_1 + n \quad \text{in} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \\ md_1 + n = d_1 - \sigma\sqrt{T} \Rightarrow \sigma = \frac{d_1(1 - m) - n}{\sqrt{T}} \end{gathered}$$

Metoda je hitra in relativno dobro oceni implicitno nestanovitnost za opcije na meji ali blizu te vrednosti ($D(0)e^{-r_f T} = Ke^{-r_d T}$), zato je uporabna predvsem za valutne opcije, saj se devizni tečaj hitro spreminja. Če imamo opcijo, ki se zelo splača ali zelo ne splača, pa je metoda koristna zato, ker lahko njeno oceno, ki je zelo blizu točne, uporabimo za začetno vrednost v Newton-Raphsonovi metodi. V Newton-Raphsonovi metodi je zelo pomembna začetna ocena, saj je bistvena za konvergenco metode proti rešitvi.

7.3. **Nestanovitnostni nasmešek.** Ker na trgu ne velja predpostavka o konstantni nestanovitnosti, vrednost implicitne nestanovitnosti za opcije z različnimi izvršilnimi cenami in različnimi dospetji ni enaka. Nestanovitnostni nasmešek nam pokaže povezanost med implicitno volatilnostjo in izvršilno ceno (ali delto ali ceno ob dospelosti). Empirični rezulatati kažejo, da lognormalna porazdelitev podcenjuje verjetnost ekstremnih gibanj deviznega tečaja.



Iz grafa vidimo, da nestanovitnost naraste, če vrednost opcije naraste do vrednosti, kjer se opcija splača (angl. in-the-money) oziroma, kjer se opcija ne splača (angl. out-of-the-money). Najnižja pa je, ko je opcija na meji (angl. at-the-money). Nestanovitnostni nasmešek je enak za nakupno in prodajno opcijo z enako izvršilno ceno in enakim časom dospetja zaradi veljavnosti paritete evropske nakupne in prodajne opcije: $P_0 + D(0)e^{-r_f T} \equiv C_0 + Ke^{-r_d T}$. Ker naj na trgu ne bi bilo priložnosti za arbitražo, mora tudi na trgu veljati pariteta nakupne in prodajne opcije, se pravi: $P_0^{trg} + D(0)e^{-r_f T} \equiv C_0^{trg} + Ke^{-r_d T}$, kjer sta C_0^{trg} cena nakupne opcije na trgu in P_0^{trg} cena prodajne opcije na trgu. Iz teh dveh enačb dobimo: $P_0 - P_0^{trg} = C_0 - C_0^{trg}$. Iz tega sledi, da je napaka pri vrednotenju z Black-Scholesovim modelom za ceno nakupne opcije enaka napaki pri vrednotenju prodajne, če imata ti dve opciji enak čas dospetja in enako izvršilno ceno.

Volatilnostni nasmešek implicira verjetnostno porazdelitev osnovnega premoženja, ki ima težji rep in je okoli pričakovane vrednosti višja kot lognormalna porazdelitev. Težji rep pomeni, da pri normalni porazdelitvi se redki dogodki zgodijo vendar so bolj mili v primerjavi s težko repimi porazdelitvami. Predpostavimo, da poznamo cene nakupne opcije za vse možne izvršilne cene K in čase dospelosti T. Ta predpostavka je sicer nerealistična, saj poznamo cene samo za nekatere K in T.

Vrednost nakupne opcije lahko izračunamo z diskontirano vrednostjo pričakovanega donosa

$$
\begin{aligned}
C_t &\equiv e^{-r(T-t)}E[\max(S(T)-K,0)] \\
&\equiv e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \max(S(t)-K,0)f_{S(T)}(s)ds \qquad (30)\\
&\equiv e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (S(t)-K)f_{S(T)}(s)ds,
\end{aligned}
$$

kjer je $f_{S(T)}$ funkcija gostote $S(T)$. Z odvajanjem dobimo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C_t}{\partial K} &\equiv -e^{-r(T-t)}\int_K^\infty f_{S(T)}(s)ds \equiv -e^{-r(T-t)}(1-F_{S(T)}(K)) \\
\frac{\partial^2 C_t}{\partial K^2} &\equiv e^{-r(T-t)}f_{S(T)}(K) \qquad (31)\\
\Rightarrow f_{S(T)}(S) &\equiv e^{r(T-t)}\frac{\partial^2 C_t}{\partial K^2}\bigg|_{K=S},
\end{aligned}
$$

kjer je $F_{S(T)}$ kumulativna porazdelitvena funkcija $S(T)$.

7.4. **Stohastična nestanovitnost.** Nestanovistnost modeliramo kot slučajni proces. To pomeni, da zamenjamo konstantno nestanovitnost geometrijskega Brownovega gibanja s korenom neke funkcije, ki jo ravno tako opišemo z Brownovim gibanjem. Naj to funkcijo označimo s h. Torej

$$dh(t) = \alpha(S,t)dt + \beta(S,t)dB(t).$$

Z upoštevanjem te nestanovitnosti sledi, da gibanje vrednosti osnovnega premoženja opišemo z

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{h(t)}S(t)dB(t).$$

Obstaja več stohastičnih modelov nestanovitnosti, na primer GARCH model.

Pri ocenjevanju nestanovitnosti deviznega tečaja bi morali biti pozorni tudi na vpliv koledarja, zaradi različnega povpraševanja po devizah skozi leto. Na primer v času počitnic in državnih praznikov, ter ob koncu fiskalnega (proračunskega) leta se nestanovitnost na trgu deviz poveča.

8. Pomankljivosti modela

- Black- Scholesov model vrednoti delnice, delnice in devize pa se precej razlikujejo, zato je naivno uporabiti enako metodo vrednotenja.
- Model ne upošteva, da se nekateri devizni tečaji gibljejo znotraj območij določenih s strani centralne banke.
- Podcenjuje vrednosti valutnih opcij napram opaženim, saj podcenjuje verjetnost ekstremnih gibanj.
- Vrednosti sledijo lognormalni porazdelitvi le na kratkem časovnem intervalu, saj le ta ne predpodstavlja ekstremnih gibanj, do katerih lahko pride zaradi politike centralne banke.
- V realnem svetu transakcijski stroški so.
- Nestanovitnost in obrestne mere v realnosti niso konstantne.

9. Izboljšave modela

Model je mogoče izboljšati s predpostavkami o:

- stohastični obrestni meri:
  Obrestno mero modeliramo z $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB(t)$, kjer je B(t) standardno Brownovo gibanje in b, a, σ parametri.
- stohastični nestanovitnosti,
- asimetriji informacij:
  Model predpostavlja, da imajo vsi udeleženci na trgu dostop do istih informacij in vseh informacij do sedanjosti vendar v realnosti ni tako. Udeleženci poznajo le nekatere prejšnje vrednosti na trgu. Ta problem lahko obravnavamo z uporabo Malliavinovih procesov.
- logaritem deviznega tečaja sledi Orenstein-Uhlenbeckovemu procesu (vrača se k povprečni vrednosti).

slovar

Slovar strokovnih izrazov

arbitrage arbitraža
Brownian motion Brownovo gibanje
currency option valutna opcija
drift tendenca
exchange rate devizni tečaj
hedging upravljanje s tveganjem
increment prirastek
quadratic variation kvadratična variacija
random walk naključni sprehod
rebalancing periodično prilagajanje
spot price trenutna cena
stochastic process slučajni proces
strike price izvršilna cena
underlying asset osnovno premoženje

seznam uporabljene literature

Literatura

[1] J. Hull, *Options, futures and other derivates*, Prentice-Hall International, London, 1989.

[2] U. Wystup, *FX options and structured products*, Wiley finance series, J. Wiley & Sons, Chichester, 2008.

[3] J. Simpson, *Currency Options and Volatility*, Goldman Sachs, 2002.

[4] P. Wilmott, *Introduces Quantitative Finance-Second edition*, J. Wiley & Sons Ltd, 2007.

[5] M. Balaban, *Valutno tveganje in vpliv na mednarodno trgovino*, diplomsko delo, Ekonomsko-poslovna fakulteta, Univerza v Mariboru, 2009.

[6] J. Christensen, *Dynamics of exchange rates and pricing of currency derivatives*, magistersko delo, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo, 2013.

[7] M. Cavallaro, *The Forex Market: Who Trades Currency And Why*, [ogled 6. 3. 2017], dostopno na `http://www.investopedia.com/articles/forex/11/who-trades-forex-and-why.asp`.

[8] M. A. J. Bharadia, N. Christofides, G. R. Salkin, *A Quadratic Method for Calculation of Implied Volatility Using the Garman-Kohlhagen Model*, Financial Analysts Journal **1996** (1996) strani od 61 do 64.

[9] J. Simpson, *Chapter 11: Currency options and volatility*, [ogled 18. 3. 2017], dostopno na `www.stern.nyu.edu/~msiegel/chapter11.doc`.

[10] M. Henrard, *Vanilla forex options: Garman-Kohlhagen and risk reversal/strangle*, OpenGamma**2012** (2012) strani od 1 do 4.

[11] K. Sigman, *Notes on Financial Engineering: Introduction to Brownian motion*, [ogled 18. 3. 2016], dostopno na `http://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/FE-Notes-Sigman.html`.

[12] K. Oosterlee, *Black-Scholes and the Smile Problem*, [ogled 18. 2. 2016], dostopno na `http://ta.twi.tudelft.nl/mf/users/oosterle/oosterlee/debacker.pdf`.

[13] M. Avellaneda, *The Greeks and Basic Hedging*, [ogled 20. 3. 2016], dostopno na `https://www.math.nyu.edu/faculty/avellane/DSLecture6.pdf`.

[14] H. Y. Chen, C. F. Lee, W. Shih, *Derivations and Applications of Greek Letters- Review and Integration*, [ogled 20. 3. 2016], dostopno na `centerforpbbefr.rutgers.edu/...D/01-16.../5-4\%20Greek\%20letters.doc`.

[15] E. Turner, *The Black-Scholes model and extensions*, [ogled 20. 3. 2016], dostopno na `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Turner.pdf`.

[16] M. Capinski in T. Zastawniak, *Mathematics for Finance: An introduction to Financial Engineering*, Springer, 2003.