Квантовые вычисления для чайников

Ади Салимгереев

1. Комплексные векторные пространства

В квантовой механике, мы очень часто используем так называемые **комплексные векторные пространства**. Если вы уже знакомы с данной темой, можете пропустить эту главу, но крайне рекомендую быстро по ней пройтись.

1.1. На примере $\mathbb{C}^n$

Самым простым примером комлпексных векторных пространств является множество векторов с фиксированной длинной.

Возьмем к примеру комлпексное векторное пространства с размерностью 3: $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Элементом такого пространства может быть:

$$\begin{bmatrix} 3+2i \\ 3-i \\ 1+2i \end{bmatrix}$$

Мы можем назвать его вектором V.

Будем обозначать i-ый элемент матрицы соотвествующей вектору как V_i. Например $V_2 = 3 - i, V_3 = 1 + 2i$.

Для элементов комплексных векторных пространств существуют операции, например **сложение**. Возьмем два вектора: A и B, которые принадлежат какому-то комплексному векторному пространству $\mathbb{C}^2$:

$$A = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1+2i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тогда, их сумма тоже будет принадлежать комплексному векторному пространству ($A + B \in \mathbb{C}^2$):

$$\begin{bmatrix} 2+i \\ 1+2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+2i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3i \\ 2+2i \end{bmatrix} = C, C \in \mathbb{C}^2$$

Операцию сложения можно записать так:

$$(A + B)_i = A_i + B_i$$

Задание: Сложите два вектора:

$$\begin{bmatrix} 3+13i \\ 39+2i \\ 3+12i \\ 14+2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4+12i \\ 3+15i \\ 4+3i \\ 2+13i \end{bmatrix}$$

Операция сложения обладает некоторыми свойствами. Например, сложение комлпексных чисел коммутативная операция, также как и операция сложения векторов в комплексном векторном пространстве:

$$A + B = B + A$$

Также, операция сложения комплексных векторов ассоциативная, то есть:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Задание: Докажите свойства коммутативности и ассоциативности операции сложения над комплексными векторами.

Также в комплексном векторе пространстве всегда существует так называемый **нулевой вектор**. Для пространства $\mathbb{C}^3$ он бы выглядил так:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для таких векторов всегда справедливо равенство:

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$$

Каждому вектору A соотвествует обратный ему $-A$. Например, возьмем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 + 3i \\ 3 + i \end{bmatrix}$$

Тогда существует обратный к нему вектор $-A$ в $\mathbb{C}^2$, матрица которого будет выглядить так:

$$-A = \begin{bmatrix} -2 - 3i \\ -3 - i \end{bmatrix}$$

Такой, что:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 + 3i \\ 3 + i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 - 3i \\ -3 - i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Понятное дело, что для всех обратных векторов справедливо равенство:

$$A + (-A) = \mathbf{0}$$

Тогда же обратный к данному A вектор $-A$ можно формально обозначить подобным образом:

$$-A_i = (-A)_i$$

Множество $\mathbb{C}^2$ с операцией сложения, обратными векторами и нулевым вектором, где сложение операция коммутативная и ассоциативная формируют так называемую **абелеву или коммутативную группу**.

Теперь возьмем любое обычное комплексное число: $\alpha = 7 - 4i$. Это число назовем **скаляром**. Возьмем вектор в $\mathbb{C}^4$:

$$Z = \begin{bmatrix} 3 + 2i \\ 2 - i \\ 3 + 7i \\ 4 + 2i \end{bmatrix}$$

В нашем комплексном векторном пространстве существует операция **умножения вектора на скаляр**:

$$\alpha \cdot Z = (7 - 4i) \cdot \begin{bmatrix} 3 + 2i \\ 2 - i \\ 3 + 7i \\ 4 + 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7 - 4i) \cdot (3 + 2i) \\ (7 - 4i) \cdot (2 - i) \\ (7 - 4i) \cdot (3 + 7i) \\ (7 - 4i) \cdot (4 + 2i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 - 12i + 14i - 8i^2 \\ 14 - 8i - 7i - 4i^2 \\ 21 - 12i + 49i - 28i^2 \\ 28 - 16i + 14i - 8i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 + 2i \\ 18 - 15i \\ 49 + 37i \\ 36 - 2i \end{bmatrix}$$

Коротко ее можно записать так:

$$(\alpha \cdot A)_i = \alpha \cdot A_i$$

Задание: Умножьте скаляр $2 + 3i$ на вектор $\begin{bmatrix} 3+5i \\ 2i \\ -6i \\ 4+2i \end{bmatrix}$.

Умножение на скаляр также имеет некоторые свойства:
- 1. $1 \cdot A = A$
- 2. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \times \beta) \cdot A$
- 3. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- 4. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Где: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $A, B \in \mathbb{C}^n$

Задание: Докажите последние 2 из приведенных свойств (**3-ье** и **4-ое**).

1.2. Что такое комплексное векторное пространство?

Есть много других примеров комплексных векторных пространств. Но для начала нам необходимо будет расширить наши границы и представить формальное определение комплексного векторного пространства.

Комлпексное векторное пространство - не пустое множество $\mathbb{V}$ с 3 различными операциями:
- Сложение: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$,
- Отрицание: $\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$,
- Скалярное произведение: $\mathbb{C} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$

и **нулевым вектором, $\mathbf{0}$** $\in \mathbb{V}$. Эти операции должны соблюдать некоторые свойства:
- 1. Коммутативность операции сложения: A + B = B + A,
- 2. Ассоциативность операции сложения: (A + B) + C = A + (B + C),
- 3. Существование нейтрального элемента **0** операции сложения: $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$,
- 4. Каждому вектору соотвествует обратный, такой что: $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$
- 5. Унитарность: $1 \cdot A = A$
- 6. Ассоциативность умножения на скаляр $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \times \beta) \cdot A$
- 7. Дистрибутивность операции умножения на скаляр относительно операции сложения векторов: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- 8. Дистрибутивность операции умножения на скаляр относительно операции сложения скаляров: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$