# 1 Introduction

Le modèle de Black-Scholes (du nom de Fischer Black et Myron Scholes) d'évaluation d'option est un modèle utilisé en mathématiques financières afin d'estimer en théorie la valeur d'une option financière, du type option européenne. En pratique, le prix des options étant généralement cotés et connus, ce modèle est alors principalement utilisé dans les salles de marché pour extraire la volatilité implicite d'un sous-jacent sur le marché.

**Definition 1.** *Une option est un contrat financier donnant le droit d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent (action, obligation, matière première..etc.) pendant (ou à) une certaine période $T$ à un prix convenu fixé, appelé prix d'exercice $K$*

Les options sont des produits dits « dérivés » car leur valeur dépend (dérive) de celle de l'actif (ou produit), qualifié de « sous-jacent », sur lequel elles portent. Ces sous-jacents peuvent être des produits physiques (matières premières), des instruments financiers (actions, obligations, taux d'intérêt, cours de change) ou encore des indices boursiers, climatiques. Autre caractéristique des options : ce sont des contrats négociables dont la réalisation finale dépend de l'évolution des conditions de marché (caractère optionnel) et dont le paiement, en cas de réalisation, intervient à une date future. Il existe différents options sur le marché parmi lesquelles on peut citer option option européenne (le moment d'exercer est fixé à l'instant T), l'option américaine (on peut l'exercer à n'importe quel avant sa maturité) option russe (pas de maturité),moment asiatique, option digitale...etc. Dans ce document pédagogique, on s'intéressera uniquement aux option européenne.

# 2 Hypothèses

Le modèle de blac-schole se repose sur un certain nombre d'hypothèses :

- Le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité constante et une dérive constante.
- Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.
- Il est possible d'effectuer des ventes à découvert.
- Il n'y a pas de coûts de transactions.
- Il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant.
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles.
- Le temps est continue.

Bien que très discutables et idéalistes, ces hypothèses peuvent être vérifiés pendant un certain lap de temps très cours. On considère un portefeuille constitué de deux actifs, un actif risqué (par un exemple une action d'une entreprise) et un actif non risqué (par exemple une obligation libellé en monnaie domestique d'un Etat qui émet sa propre monnaie)

Notons $B_t$ la valeur à l'instant t l'actif sans risque rémunéré aux taux constant $r$.

$$B_t = B_0 \exp(rt) \tag{2.0.1}$$

Notons $S_t$ la valeur de l'actif risqué à l'instant $t$ dont la valeur est régie par la dynamique suivante:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.0.2}$$

# 3 Équation

L'équation différentielle vérifiée dans le cadre du modèle de Black-Scholes peut être obtenue par différentes méthodes parmi lesquelles on peut citer la stratégie de couverture ou de réplication.

## 3.1 Stratégie réplication

On souhaite déterminer la stratégie autofinancée $(\eta_t, \delta_t)$ qui permet de répliquer le call européen $C$ de prix d'exercice $K$ et de maturité $T$.

Soit un portefeuille autofinancé $\pi_t$ constitué de $\eta_t$ de l'actif non risqué $B_t$ et $\delta_t$ de l'actif risqué $S_t$. La valeur du portefeuille est donc à tout instant $t$ :

$$\pi_t = \eta_t B_t + \delta_t S_t \tag{3.1.1}$$

Par cette équation on a :

$$d\pi_t = d\eta_t B_t + d\delta_t S_t + \eta_t dB_t + \delta_t dS_t$$

Comme le portefeuille est autofinancé (par construction) la seule variation provient des actifs et non leur quantité donc $d\eta_t = 0$ et $\delta_t = 0$ d'où

$$d\pi_t = \eta_t dB_t + \delta_t dS_t$$

Comme $B_t = B_0 \exp{(rt)}$ alors on a : $dB_t = rB_t dt$, en remplacant $dB_t$ par sa valeur on a :

$$d\pi_t = \eta_t(rB_t dt) + \delta_t dS_t == r(\eta_t B_t)dt + \delta_t dS_t = r(\pi_t - \delta_t S_t)dt + \delta_t dS_t$$

D'autre part on sait que $\pi_t$ est fonction suffisamment continue de $t$ et $S_t$, alors on peut y appliquer le Lemme d'Ito :

$$d\pi_t = \left(\frac{\partial \pi_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 \pi_t}{\partial^2 S_t}\right) dt + \frac{\partial \pi_t}{\partial S_t} dS_t$$

Par identification avec l'équation obtenue par le lemme d'Ito on :

$$r\left(\pi_t - \delta_t S_t\right) dt = \left(\frac{\partial \pi_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 \pi_t^2}{\partial^2 S_t}\right) dt$$

$$\delta_t = \frac{\partial \pi_t}{\partial S_t}$$

En remplaçant $\delta_t$ par sa valeur, on obtient :

$$r\left(\pi_t - \frac{\partial \pi_t}{\partial S_t} S_t\right) = \left(\frac{\partial \pi_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 \pi_t}{\partial^2 S_t}\right)$$

D'où l'égalité :

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial t} + r S_t \frac{\partial \pi_t}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 \pi_t}{\partial^2 S_t} - r\pi_t = 0$$

Comme le porte-feuille $\pi_t$ réplique le call alors en absence d'opportunité d'arbitrage $\pi_t = C_t \ \forall t < T$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C(t,S_t)}{\partial t} + rS\dfrac{\partial C(t,S_t)}{\partial S} + \dfrac{1}{2}S^2\sigma^2\dfrac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial S^2} = rC(t,S_t) \\ C(T,S_T) = \max(S_T - K) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

## 3.2 Stratégie de couverture

On souhaite déterminer une stratégie de couverture sur un call européen de prix d'exercice K et de maturité T.

Soit $\pi_t$, le portefeuille de couverture autofinancé constitué d'un call européen $C_t$ et d'une quantité $\delta_t$ d'un actif risqué $S_t$.

$$\pi_t = C_t + \delta_t S_t$$

En cherchant la variation de cette portefeuille autofinancée nous avons :

$d\pi_t = dC_t + d\delta_t S_t + \delta_t dS_t = dC_t + \delta_t dS_t$.

car le portefeuille étant autofinancé on a $d\delta_t S_t = 0$

D'autre part on sait que le call étant une fonction suffisamment continue de $t$ et de $S_t$, on peut lui appliquer le lemme d'Ito on :

$$dC_t = \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial^2 S_t}\right) dt + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t$$

En remplaçant $dC_t$ par sa valeur, on :

$$\begin{aligned} d\pi_t &= \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial^2 S_t}\right) dt + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t + \delta_t dS_t \\ &= \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial^2 S_t}\right) dt + \left(\frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \delta_t\right) dS_t \end{aligned}$$

Comme on veut couvrir notre portefeuille, on peut supprimer le risque en posant $\left(\frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \delta_t\right) = 0 \implies \delta_t = -\frac{\partial C_t}{\partial S_t}$

Ainsi on a :

$$d\pi_t = \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial^2 S_t}\right) dt$$

D'autre part le portefeuille étant sans risque, et en absence d'opportunité d'arbitrage, le taux du rendement du portefeuille doit être le taux sans risque.

$d\pi_t = r\pi_t dt = r(C_t + \delta_t S_t) = r(C_t - \frac{\partial C_t}{\partial S_t})S_t = \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial^2 S_t}\right) dt$

d'où l'équation

$$\left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial^2 S_t}\right) + rS_t\frac{\partial C_t}{\partial S_t} - rC_t = 0$$

Ainsi notre call vérifie l'équation suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial C(t,S_t)}{\partial t} + rS\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial S} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2\frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial S^2} = rC(t,S_t) \\ C(T,S_T) = \max(S_T - K) \end{cases}$$

# 4 Résolution

Pour résoudre analytiquement cette équation différentielle d'ordre 2 non linéaire, il existe deux méthodes. La première méthode consiste à procéder à un changement de variable de telle sorte à la ramener à une équation différentielle classique dont la solution est connue qui est l'équation de la chaleur. La deuxième méthode consiste à utiliser le théorème de Feyman Kac que nous allons présenter. Ainsi En absence d'opportunité d'arbitrage, l'existance d'un taux sans risque implique que le marché est complet et dans un marché complet, la valeur actualisée de tout portefeuille autofinancée est martingale.

Sous la probabilité risque neutre $Q$ on a :

$$C(t) = E_Q\left[e^{-r(T-t)}\max(S_T - K)\right]$$

$$C(t) = E_Q\left[\max(S_T e^{-r(T-t)} - Ke^{-r(T-t)})\right]$$

Par lemme d'Ito appliqué (2.0.2) sous $Q$,

$$S_T = S_0 e^{\left[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T\right]}$$

d'autre part on sait aussi que $W_T = \sqrt{T}N(0,1)$ avec N(.) la loi normale centrée réduite. Ansi

$S_T = S_0 \exp\left[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}N(.)\right]$

En remplaçant $S_T$ par sa valeur on a :

$$\begin{aligned} C(0) &= e^{-rT} E_Q \left[\max(S_T - K, 0)\right] \\ &= e^{-rT} E_Q \left[\max(S_0 e^{\left[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} N(.)\right]} - K, 0)\right] \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

On sait que la fonction de densité de la loi normale est $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$

$$\begin{aligned} C(0) &= e^{-rT} E_Q \left[\max(S_T - K, 0)\right] \\ &= e^{-rT} E_Q \left[\max(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} N(.)} - K, 0)\right] \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\max(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} y} - K, 0) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2}\right] \end{aligned} \tag{4.0.2}$$

On s'intéresse au cas où $S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} y} - K > 0$ car dans le cas contraire, la valeur de l'integrale est 0

$S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} y} - K > 0 \implies y > -\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$

Posons $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$

$$\begin{aligned} C(0) &= e^{-rT} \int_{-d_2}^{+\infty} \left[S_0 e^{\left((r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} y\right)} - K\right] \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= e^{-rT} \int_{-d_2}^{+\infty} \left[S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2}\right] dy - e^{-rT} K \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= e^{-rT} \int_{-d_2}^{+\infty} \left[S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} y - \frac{1}{2}y^2} \frac{1}{2\pi}\right] dy - e^{-rT} K N(d_2) \\ &= e^{-rT} \int_{-d_2}^{+\infty} \left[S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T - \frac{1}{2}(y^2 - 2\sigma\sqrt{T} y)} \frac{1}{2\pi}\right] dy - e^{-rT} K N(d_2) \\ &= e^{-rT} \int_{-d_2}^{+\infty} \left[S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T - \frac{1}{2}\left((y-\sigma\sqrt{T})^2 - \sigma^2 T\right)} \frac{1}{2\pi}\right] dy - e^{-rT} K N(d_2) \\ &= e^{-rT} \int_{-d_2}^{+\infty} \left[S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T} e^{-\frac{1}{2}((y-\sigma\sqrt{T})^2} \frac{1}{2\pi}\right] dy - e^{-rT} K N(d_2) \end{aligned}$$

On procède à un changement de variable pour avoir la densité de la loi normale centrée reduite.

Posons $u = y - \sigma\sqrt{T} \implies du = dy$ et si $y = -d_2 \implies u = -(d_2 + \sigma\sqrt{T}) = -d_1)$

$$
\begin{aligned}
C_0 &= e^{-rT}\int_{-d_2}^{+\infty}\left[S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\frac{1}{2}\sigma^2 T}e^{-\frac{1}{2}((y-\sigma\sqrt{T})^2}\frac{1}{2\pi}\right]dy - e^{-rT}KN(d_2)\\
&= e^{-rT}\int_{-(d_2+\sigma\sqrt{T})}^{+\infty}\left[S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\frac{1}{2}\sigma^2 T}e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{1}{2\pi}\right]du - e^{-rT}KN(d_2)\\
&= e^{-rT}\int_{-(d_2+\sigma\sqrt{T})}^{+\infty}\left[S_0 e^{rT}e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{1}{2\pi}\right]du - e^{-rT}KN(d_2)\\
&= S_0\int_{-(d_2+\sigma\sqrt{T})}^{+\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{1}{2\pi}\right]du - e^{-rT}KN(d_2)\\
&= S_0\int_{-d1}^{+\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{1}{2\pi}\right]du - e^{-rT}KN(d_2)\\
&= S_0 N(d_1) - e^{-rT}KN(d_2)
\end{aligned}
$$

D'où la solution est :

$$
\begin{cases}
C_0 = S_0 N(d_1) - e^{-rT}KN(d_2)\\
d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\\
d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{cases}
\tag{4.0.3}
$$

# 5 Les grecks

En finance, le prix d'une option n'est pas très regardé dans les salles de marchés c'est plutot la sensibilité du prix par rapports à ses differents caracteristiques qui sont importants communement appélé les grecques(delta, gamma, theta, vega, rho etc...) d'une option jouent un rôle crucial en finance et sont utilisées pour évaluer et gérer les risques associés aux positions d'options.

## 5.1 Delta

Le delta d'une option mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du prix du sous-jacent. Il indique combien le prix de l'option changera pour une variation d'une unité dans le prix du sous-jacent, toutes les autres variables étant constantes. Mathématiquement, il est défini comme la dérivée partielle du prix de l'option (V) par rapport au prix du sous-jacent (S), avec toutes les autres variables constantes.

Le delta est généralement compris entre 0 et 1 pour les options d'achat (calls) et entre -1 et 0 pour les options de vente (puts). Le delta d'un call est positif, ce qui signifie que le prix du call augmente lorsque le prix du sous-jacent augmente. En revanche, le delta d'un put est négatif, indiquant que le prix du put diminue lorsque le prix du sous-jacent augmente.

Par la relation 5.5, on a $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ce qui implique que $\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{\partial d_1}{\partial S}$
Par ailleurs on sait aussi que $SN'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_2) = 0$ d'ou la demontration suiv-

ante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial S} &= N(d_1) + S\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_2}{\partial S}N'(d_2)\\ &= N(d_1) + S\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_2)\\ &= N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S}\left[SN'(d_1) - e^{-rT}KN'(d_2)\right]\\ &= N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S}\left[0\right]\\ &= N(d_1)\end{aligned}$$

## 5.2 Rho

Le rho d'une option mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du taux d'intérêt. En d'autres termes, le rho évalue comment le prix de l'option réagit aux changements du taux d'intérêt, toutes les autres variables étant constantes.

Mathématiquement, il est défini comme la dérivée partielle du prix de l'option par rapport au taux d'intérêt (r), avec toutes les autres variables constantes: Le rho est particulièrement pertinent dans le contexte des options, en particulier pour dont le sous-jacent est obligation. La valeur du rho indique comment le prix de l'option peut être influencé par des changements dans les taux d'intérêt. Le rho d'un call etant positif, cela implique que le prix de l'option est une fonction croissante du taux.

Pour la démonstration on part 5.5, on a $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ce qui implique que $\frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\partial d_1}{\partial r}$ On sait aussi que $SN'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_2) = 0$ d'ou la demontration suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial r} &= S\frac{\partial d_1}{\partial r}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_2}{\partial r}N'(d_2) + Te^{-rT}KN(d_2)\\ &= S\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial r}N'(d_2) + Te^{-rT}KN(d_2)\\ &= \frac{\partial d_1}{\partial r}\left[SN'(d_1) - e^{-rT}KN'(d_2)\right] + Te^{-rT}KN(d_2)\\ &= \frac{\partial d_1}{\partial r}\left(0\right) + Te^{-rT}KN(d_2)\\ &= Te^{-rT}KN(d_2)\end{aligned}$$

## 5.3 Vega

Le vega d'une option mesure la sensibilité de son prix à une variation de la volatilité du sous-jacent. En d'autres termes, il évalue comment le prix de l'option réagit à une variation d'un point de pourcentage de la volatilité implicite du sous-jacent. Mathématiquement le est souvent défini comme la dérivée partielle du prix de l'option par rapport à la volatilité en maintenant les autres variables constantes. Comme on le constatera dans la démonstration suivante, le vega est toujours positif, ce qui signifie que, une augmentation de la volatilité implique une augmentation du prix de l'option, et vice versa. Les options sont sensibles aux changements de volatilité, car une augmentation de la volatilité peut augmenter la probabilité que l'option atteigne la monnaie avant l'échéance.

Par la relation 5.5, on a $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ce qui implique que $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T}$ On sait aussi que $SN'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_2) = 0$ d'ou la demontration suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= S\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}N'(d_2) \\
&= S\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}N'(d_1) - e^{-rT}K\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T}\right]N'(d_2) \\
&= S\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}N'(d_2) + e^{-rT}K\sqrt{T}N'(d_2) \\
&= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\left[SN'(d_1) - e^{-rT}KN'(d_2)\right] + e^{-rT}K\sqrt{T}N'(d_2) \\
&= e^{-rT}K\sqrt{T}N'(d_2)
\end{aligned}$$

## 5.4 Theta

Le theta d'une option, également appelée la "décroissance du temps" ou "dépréciation du temps," mesure la sensibilité du prix de l'option à la diminution du temps jusqu'à l'échéance. En d'autres termes, la theta évalue combien la valeur de l'option changera en fonction du passage du temps. Mathemamtiquement c'est la derivée du prix du call $C$ par rapport à son sous-jacent $S$

Par la relation 5.5, on a $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ce qui implique que $\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T}}$ Par ailleurs on sait aussi que $SN'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_2) = 0$ d'où la démontration suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial T} &= S\frac{\partial d_1}{\partial T}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_2}{\partial T}N'(d_2) + re^{-rT}KN(d_2) \\
&= S\frac{\partial d_1}{\partial T}N'(d_1) - e^{-rT}K\left[\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T}}\right]N'(d_2) + re^{-rT}KN(d_2) \\
&= S\frac{\partial d_1}{\partial T}N'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial T}N'(d_1) + \frac{e^{-rT}K\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d_2) + e^{-rT}KN(d_2) \\
&= \frac{\partial d_1}{\partial T}\left[SN'(d_1) - e^{-rT}K\frac{\partial d_1}{\partial T}N'(d_2)\right] + \frac{e^{-rT}K\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d_2) + re^{-rT}KN(d_2) \\
&= \frac{e^{-rT}K\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d_2) + re^{-rT}KN(d_2)
\end{aligned}$$

## 5.5 Gamma

Le gamma d'une option mesure la sensibilité du delta de l'option par rapport au mouvement du prix du sous-jacent. En d'autres termes, elle évalue la variation du delta en réponse à une variation infinitésimale du prix du sous-jacent. Mathématiquement, la gamma $\gamma$ est définie comme la dérivée seconde du prix de l'option $C$ par rapport au prix du sous-jacent $S$. Pour retrouver sa formule, il suffit de deriver le delta par rapport à $S$. D'où :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} = \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial C}{\partial S}\right] = \frac{\partial}{\partial S}\left[N(d_1)\right] = \frac{\partial d_1}{\partial S}N'(d_1) = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}N'(d_1)$$