1) a) $T(x[n]) = x[n-n_0]$

(1) Se $|x[n]| \leq B_x < \infty$ então $|x[n+b]| \leq B_x < \infty$, pois o deslocamento não altera as amplitudes do sinal $x[n]$.

Portanto:

$$|T(x[n])| = |x[n-n_0]| \leq B_x$$

Se $B_x = B_y$ então:

$$|T(x[n])| \leq B_y < \infty$$

Logo $T(x[n])$ é estável no sentido BIBO.

(2) $n_0 \geq 0$:

Como $n - n_0 \leq n$, a transformação utiliza uma amostra anterior ou atual, sendo causal.

$n_0 < 0$:

Como $n - n_0 > n$, a transformação utiliza uma amostra futura, sendo, neste caso, não causal.

(3) Dada as constantes reais a e b e as sequências x_1 e x_2.

$$T(a x_1[n] + b x_2[n]) \stackrel{?}{=} a T(x_1[n]) + b T(x_2[n])$$

Substituindo as transformações:

$$(a x_1[n-n_0] + b x_2[n-n_0]) = a(x_1[n-n_0]) + b(x_2[n-n_0])$$

Por respeitar a homogeniedade e aditividade o sistema é linear.

(4) Dado $x[n]$, $T(x[n]) = x[n-n_0] = y[n]$.

Para $x[n-n_1]$, $T(x[n-n_1]) = x[n-n_1-n_0] = y'[n]$

$$y'[n] \stackrel{?}{=} y[n-n_1]$$

$$x[n-n_1-n_0] = x[n-n_1-n_0].$$

Portanto o sistema é invariante no tempo.

(5) O sistema é sem memória para $n_0 = 0$ e com memória caso contrário.

1)b) $T(x[n]) = e^{x[n]}$

(1) Dado que $|x[n]| \leq B_x < \infty$, então $-B_x \leq x[n] \leq B_x$

Como e^x é estritamente positiva e monotonicamente crescente

$$T(-B_x) \leq T(x[n]) \leq T(B_x)$$

$0 < T(-B_x) \leq T(x[n]) \leq T(B_x)$, assumindo $T(B_x) = e^{B_x} = B_y$

$$-B_y < 0 < T(-B_x) \leq T(x[n]) \leq B_y$$

Portanto $|T(x[n])| \leq B_y < \infty$

(2) Como a transformação só faz uso do valor atual da sequência x, o sistema é causal.

(3) Dado uma constante real a e uma sequência x

$$T(a x[n]) \stackrel{?}{=} a\, T(x[n])$$

Substituindo as transformações

$$e^{a x[n]} \neq a\, e^{x[n]}$$

Por não respeitar a homogeneidade a transformação não é linear

(4) Dado $x[n]$, $T(x[n]) = e^{x[n]} = y[n]$

Para $x[n-n_1]$, $T(x[n-n_1]) = e^{x[n-n_1]} = y'[n]$

$$y'[n] \stackrel{?}{=} y[n-n_1] \Rightarrow e^{x[n-n_1]} = e^{x[n-n_1]}$$

Portanto o sistema é invariante no tempo.

(5) A transformação utiliza apenas o valor atual de x, portanto representa um sistema sem memória

1) c) $T(x[n]) = a x[n] + b$

(1) Se $|x[n]| \leq B_x < \infty$ e T é monotonicamente crescente,

$-B_x \leq x[n] \leq B_x$, $T(-B_x) \leq T(x[n]) \leq T(B_x) \therefore |T(x[n])| \leq T(B_x)$

$T(B_x) = B_y = a B_x + b < \infty$.

$|T(x[n]) \leq B_y < \infty$

Portanto T é estável no sentindo BIBO.

(2) O sistema é causal por sua transformação só depender do valor atual da sequência x.

(3) Dado uma constante real c e uma sequência x

$T(c x[n]) \stackrel{?}{=} c\, T(x[n])$

$a(c x[n]) + b \neq c(a x[n] + b)$

O sistema não é linear por não respeitar a homogeneidade.

(4) Dado $x[n]$, $T(x[n]) = a x[n] + b = y[n]$.

Para $x[n-n_0]$, $T(x[n-n_0]) = a x[n-n_0] + b = y'[n]$

$y'[n] \stackrel{?}{=} y[n-n_0]$

$a x[n-n_0] + b = a x[n-n_0] + b$

Logo o sistema é invariante no tempo.

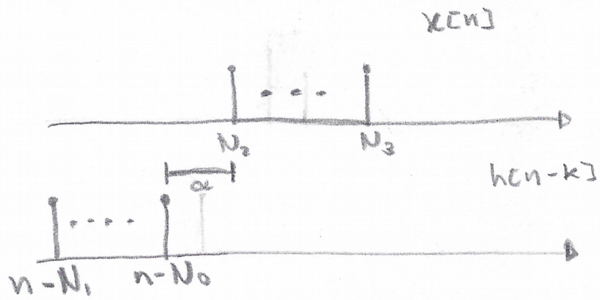
(5) O sistema não possui memória pois sua transformação não depende de amostras futuras ou passadas.

2) a)

$$h[n] = \begin{cases} h[n] \neq 0, & N_0 \leq n \leq N_1 \\ h[n] = 0, & c.c. \end{cases}$$

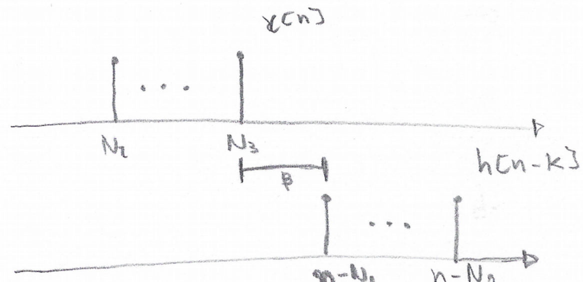
$$x[n] = \begin{cases} x[n] \neq 0, & N_2 \leq n \leq N_3 \\ x[n] = 0, & c.c. \end{cases}$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \begin{cases} y[n] \neq 0, & N_4 \leq n \leq N_5 \\ y[n] = 0, & c.c. \end{cases}$$



Quando ocorre a convolução, a sequência $h[n]$ é revertida no tempo e desloca por n amostras. Dessa forma, o primeiro n que resulta num somatório não nulo, N_4, ocorre quando $n - N_0 = N_2$, portanto:

$N_4 = N_2 + N_0$.



Para um $n > N_4$, o último ponto de interseção, N_5, se dá quando $n - N_1 = N_3$, portanto:

$N_5 = N_3 + N_1$

b) Utilizando a propriedade da largura o comprimento de $y[n]$, L é dado por:

$L = N + M - 1$.

Lathi, pg261 2ed, 2007

Em função de N_4 e N_5:

$L = N_5 - N_4 + 1$

3) $x[n] = u[n]$

$h[n] = a^{-n} u[-n] \quad , \quad 0 < a < 1$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\, a^{k-n}\, u[k-n] =$$

$$= a^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\, a^{k}\, u[k-n]$$

$$u[k-n] = \begin{cases} 0, & k-n < 0 \Rightarrow k < n \\ 1, & k-n \geq 0 \Rightarrow k \geq n \end{cases}$$

$$= a^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} u[k]\, a^{k}$$

$n \geq 0$:

$$y[n] = a^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} a^{k} = a^{-n} \cdot \left(\frac{a^{n}}{1-a} \right) = \frac{1}{1-a}$$

$n < 0$:

$$y[n] = a^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} u[k]\, a^{k} \quad ; \quad u[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

$$= a^{-n} \left[\sum_{k=n}^{-1} \cancel{u[k]}^{\,0}\, a^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{u[k]}^{\,1}\, a^{k} \right] = a^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a^{k}$$

$$y[n] = a^{-n} \cdot \left(\frac{1}{1-a} \right) = \frac{a^{-n}}{1-a}$$

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & n \geq 0 \\ \frac{a^{-n}}{1-a}, & n < 0 \end{cases}$$

4) a) $x[n] = e^{\frac{j\pi n}{\sqrt{2}}}$, $\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$x[n] = x[n+N]$

$e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N}$

Para igualdade ser verdadeira

$\omega_0 N = 2\pi$

$N = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 2\sqrt{2}$

Logo $x[n]$ não é periódica

b) $x[n] = R\{e^{\frac{j\pi n}{12}}\} = \cos\left(\frac{j\pi n}{12}\right)$; $\omega_0 = \frac{\pi}{12}$

$x[n] = x[n+N]$

$\cos(j\omega_0 n) = \cos(j\omega_0 n + j\omega_0 N)$

Necessário que

$\omega_0 N = 2\pi \Rightarrow N = 24$

c) $x[n] = \frac{sen\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{\pi n}$

$x[n] = x[n+N]$

$\frac{sen\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{\pi n} = \frac{sen\left(\frac{(n+N)\pi}{5}\right)}{\pi(n+N)} = \frac{sen\left(\frac{n\pi}{5} + \frac{N\pi}{5}\right)}{\pi n + \pi N}$

Este resultado só é verdade para $N=0$ ou $N=-2n$.

Entretanto N deve ser uma constante inteira, portanto $x[n]$ não é periódico

5) $x[n] = \cos(\pi n)$

$h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2} u[n]$

$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\pi k) \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-k-2} \underbrace{u[n-k]}$ $\to$ $u[n-k] = \begin{cases} 0, & k > n \\ 1, & k \leq n \end{cases}$

$= \sum_{k=-\infty}^{n} \cos(\pi k) \underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-k-2}}$ $\to$ $\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-k-2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n} \left(\frac{-1}{2}\right)^{-k} \left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$

$= 4\left(\frac{-1}{2}\right)^{n} \sum_{k=-\infty}^{n} \underbrace{\cos(\pi k) \left(\frac{-1}{2}\right)^{-k}}$ $\to$ $\cos(\pi k) = \begin{cases} 1, & k \bmod 2 = 0 \\ -1, & k \bmod 2 = 1 \end{cases}$

$= 2^2 (-2)^{-n} \sum_{k=-\infty}^{n} (-1)^k (-2)^k$, para k par, o produto é positivo e o modulo é 2^k, o mesmo ocorre p/ k impar

$= 2^2 (-2)^{-n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} 2^k}$ $\to$ $\sum_{k=-\infty}^{n} 2^k = 2^{n+1}$

$= 2^2 \underbrace{(-2)^{-n}} \cdot 2^{n+1}$ $\to$ $(-2)^{-n} = (-1)^{-n} (2)^{-n}$

$= (-1)^{-n} \cdot 2^2 \cdot 2^{-n} \cdot 2^{n+1} = (-1)^{-n} 2^3$

$y[n] = 2^3 \cdot (-1)^{-n}$

6) a) O sistema total se mantém linear pois o produto por $u[n]$ não altera a relação entre $v[n]$ e $x[n]$. Porém, o sistema total não é invariante no tempo, já que o produto por $u[n]$ "trunca" valores de $v[n]$, podendo alterar o sinal para $n<0$.

b) O sistema inicial não é causal devido a $h[n]$ possuir valores diferentes de zero para $n<0$. Quando o produto de $v[n]$ e $u[n]$ é calculado, o cálculo dos valores ainda depende amostras futuras de $x[n]$, portanto, o sistema total se mantém não causal.

c) Por $h[n]$ ser absolutamente somável:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \frac{4^{11}}{3} < \infty$$

o sistema inicial é estável no sentido BIBO e portanto gera um sinal $v[n]$ que é limitado por B_v. O efeito de $u[n]$ em $v[n]$ é de remover amostras para $n<0$, e mantém as amostras com mesma amplitude para $n \geq 0$, tornando $y[n]$ limitado por B_v. Dessa forma o sistema total é estável no sentido BIBO.

7) a)

```python
def deamostras(x, factor):
    return [x[i] for i in range(len(x)) if i % factor == 0]
```

b)

Na figura 1 temos o plot da sequência x[n] de -50 à 50, onde podemos ver que é uma sequência periódica de período 16 que alterna o sinal.

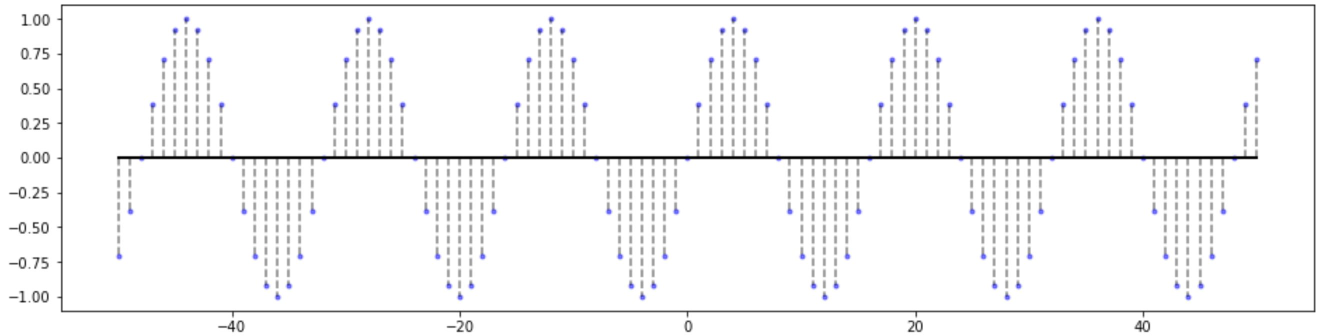


Figura 1: Plot x[n] = sen(0.125 π n)

Na figura 2 temos o plot da sequência y[n], e podemos observar que y também é periódica, entretanto de período 4. Isso mostra que ao decimar um sinal periódico pode-se obter um sinal periódico. A sequência manteve sua alternância e ainda seria possível reconstruir o sinal original.

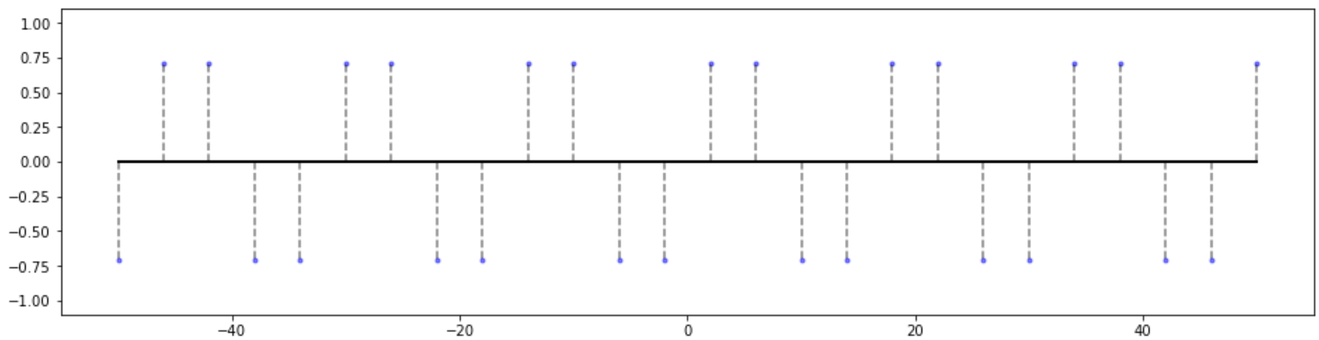


Figura 2: Plot y[n]

c)

Na figura 3 tem-se o plot de x[n] que é uma sequência periódica de período 4 e também é alternada, como uma seno, entretanto só possui valores 0, -1 e 1, sendo menor a semelhança com a seno contínua.

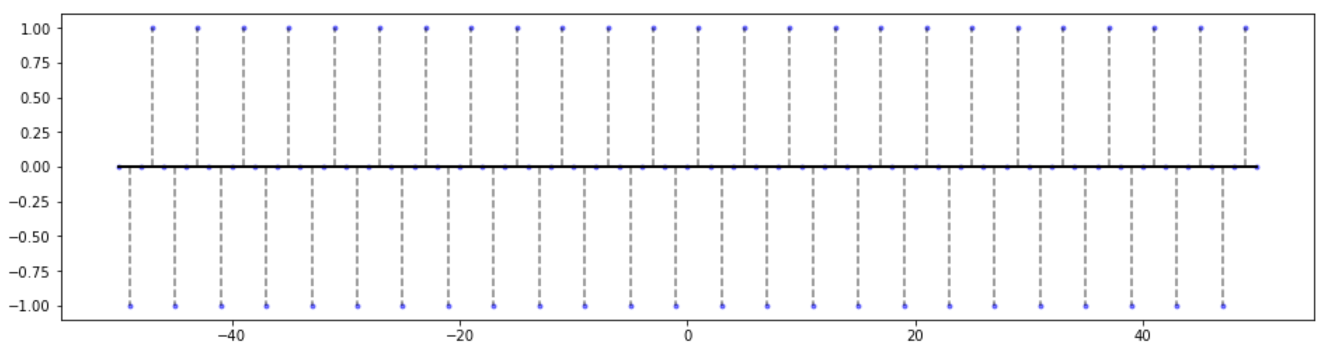


Figura 3: Plot x[n] = sen(0.125 π n)

Na figura 4 tem-se o plot de y[n], está é uma sequência nula que não traz informação nenhuma do sinal original. Esse fenômeno mostra que o processo de decimação pode alterar o sinal de maneira irreversível e ocultar a real natureza do sinal original.

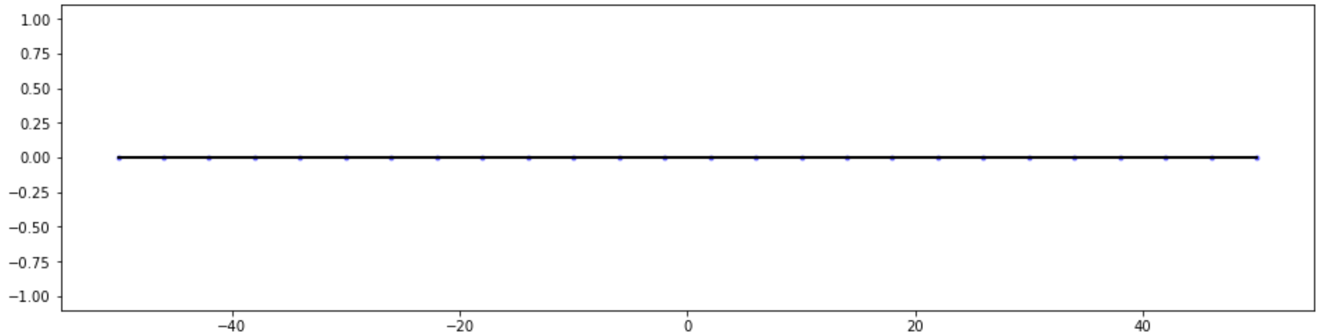


Figura 4: Plot y[n]

8)

Abaixo o plot das sequências x[n] e y[n].

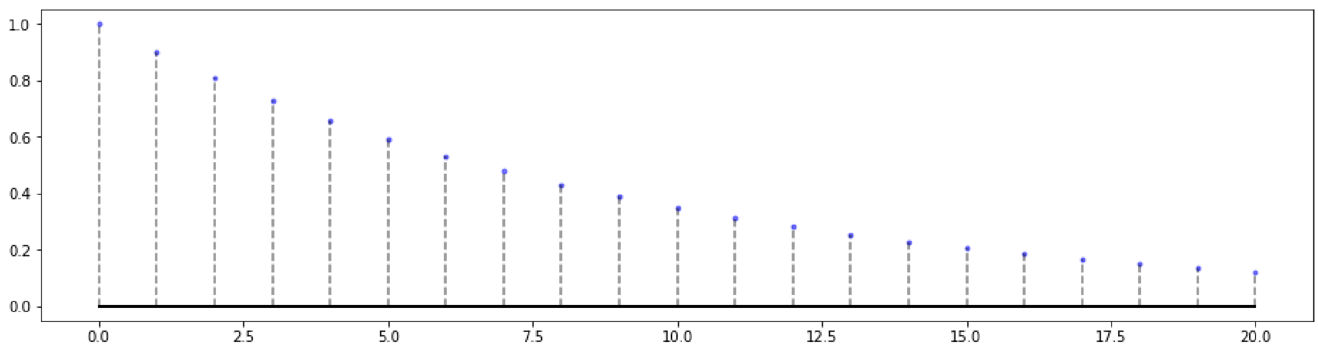


Figura 5: Plot x[n]

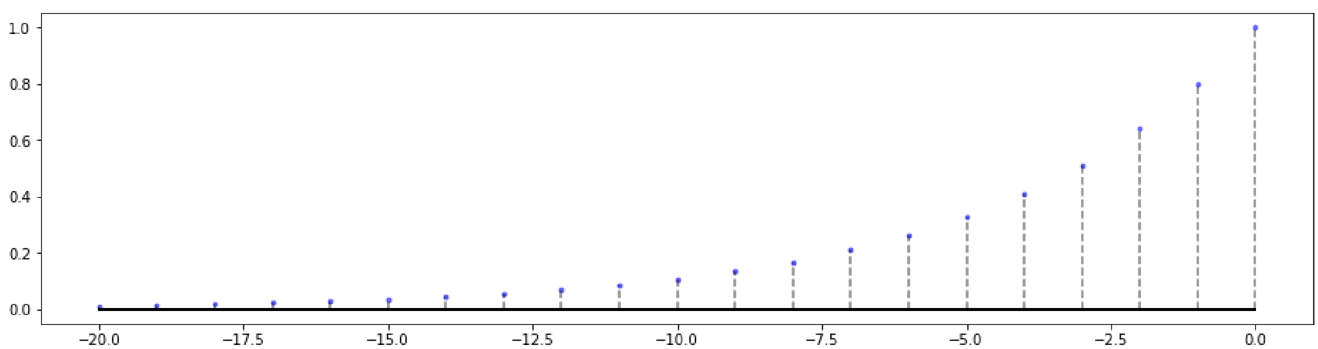


Figura 6: Plot y[n]

Em seguida os plots da autocorrelção de x e da correlação cruzada de x e y. Na figura 7 vemos que o instante em que existe maior autocorrelação de x é para n = 0. Pode-se notar também que a correlação descresce com o aumento do |n| até |n| = 20, apartir daqui a autocorrelação é nula, já que não existe intersecção de x[k] e x[n+k].

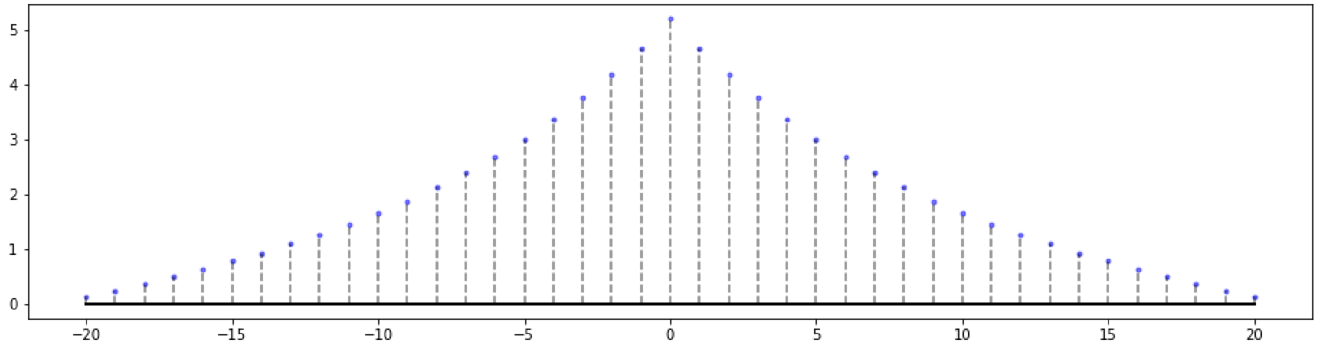


Figura 7: Plot autocorrelação de x

Na figura 8 temos a correlação cruzada de x e y. Podemos extrair as informações do instante de maior correlação, n = 4, e que só existe correlação para n > 0.

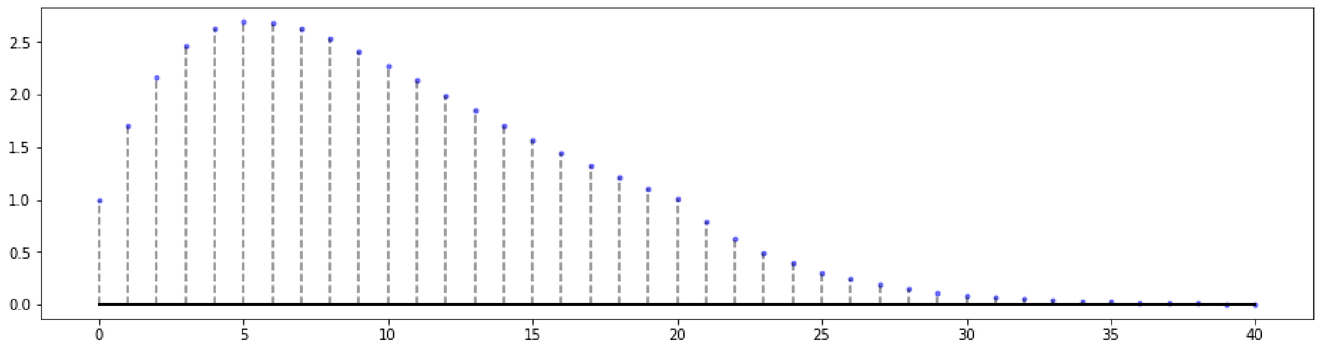


Figura 8: Plot correlação cruzada de x e y

Por fim podemos obter os valores de n para os quais a correlação cruzada não é nula analogamente ao método utilizado na convolução apenas realizando substituições de variáveis.