1) a)

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$R(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n]\, e^{-jwn}$$

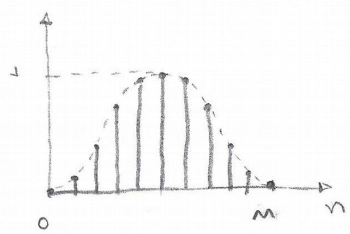
$$= \sum_{n=0}^{M} e^{-jwn} = e^{jw} \sum_{n=0}^{M} e^{-n} = e^{jw} \sum_{n=0}^{M} (e^{-1})^{n}$$

$$= e^{jw} \left(\frac{1-(e^{-1})^{M+1}}{1-(e^{-1})} \right)$$

$$R(e^{jw}) = e^{jw} \cdot \left(\frac{e - e^{-M}}{e - 1} \right)$$

b)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$



$$w[n] = r[n]\left(\frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right]\right) = r[n]\left(\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{e^{\frac{j2\pi n}{M}} + e^{\frac{-j2\pi n}{M}}}{2}\right)\right]\right)$$

$$= r[n]\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{\frac{j2\pi n}{M}}}{4} + \frac{e^{\frac{-j2\pi n}{M}}}{4}\right)$$

$$\mathcal{F}\{w[n]\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} r[n] - \frac{e^{\frac{j2\pi n}{M}}}{4} r[n] + \frac{e^{\frac{-j2\pi n}{M}}}{4} r[n]\right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} r[n]\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{e^{\frac{j2\pi n}{M}}}{4} r[n]\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{e^{\frac{-j2\pi n}{M}}}{4} r[n]\right\}$$

$$= \frac{1}{2} R(e^{jw}) - \frac{1}{4} R\left(e^{j(w - \frac{2\pi}{M})}\right) + \frac{1}{4} R\left(e^{j(w + \frac{2\pi}{M})}\right)$$

2) $y[n] + \frac{1}{a} y[n-1] = x[n-1]$

a) Para $x[n] = \delta[n]$:

$y[n] = 0$, para $n \leq 0$

$y[1] = \delta[0] - \frac{1}{a} y[0] = 1$

$y[2] = \delta[1] - \frac{1}{a} y[1] = \frac{-1}{a}$

$y[3] = -\frac{1}{a} \cdot y[2] = \frac{1}{a^2}$

$y[n] = \left(\frac{-1}{a}\right)^{n-1} u[n-1]$

$h[n] = \left(\frac{-1}{a}\right)^{n-1} u[n-1]$

b) Para o sistema ser estável $h[n]$ deve ser absolutamente somável:

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - 1/a}$; para $a > 0$.

3) a)

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j0n} = \sum_{n=-3}^{7} x[n]$$

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = 6$$

b) $$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\pi n} = \sum_{n=-3}^{7} x[n] (-1)^n$$

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 2$$

c) $\angle X(e^{j\omega})$:

$x[n] = x'[n-2]$

$x'[n] = x'[-n]$, ou seja $x'[n]$ é par, portanto $X'(e^{j\omega})$ é real.

$x'[n-2] \longleftrightarrow X'(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$

portanto $\angle(X'(e^{j\omega})e^{-j2\omega}) = -2\omega$

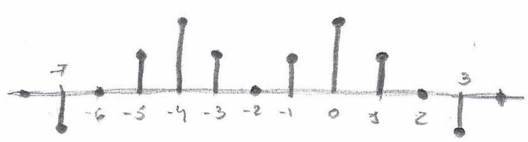
Logo $\angle X(e^{j\omega}) = -2\omega$

d)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\,d\omega = \sum_{n=-3}^{7}x[n]\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega n}\,d\omega$$

$$= \sum_{n=-3}^{7} x[n]\left(\frac{e^{-j\omega n}}{-jn}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \sum_{n=-3}^{7}x[n]\left(\frac{e^{-j\pi n}-e^{j\pi n}}{-jn}\right) = 0$$

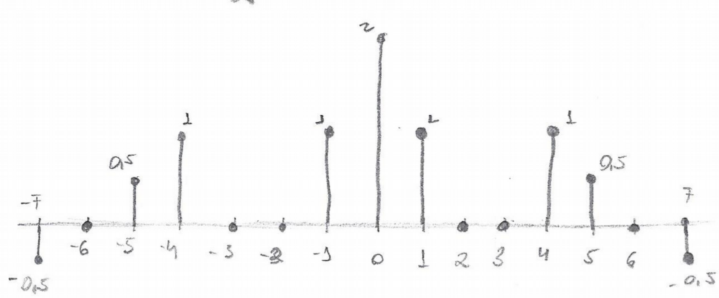
e) $\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{-j\omega})\} = x[-n]$



f) Como $Re\{X(e^{j\omega})\} \longleftrightarrow x_e[n]$

(Componente simétrica conjugada de $x[n]$).

e $x_e[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x^*[-n]]$



4) Pela tabela de transformadas obtemos que a transformada de x[n] é:

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-0.7e^{j\omega}}$$

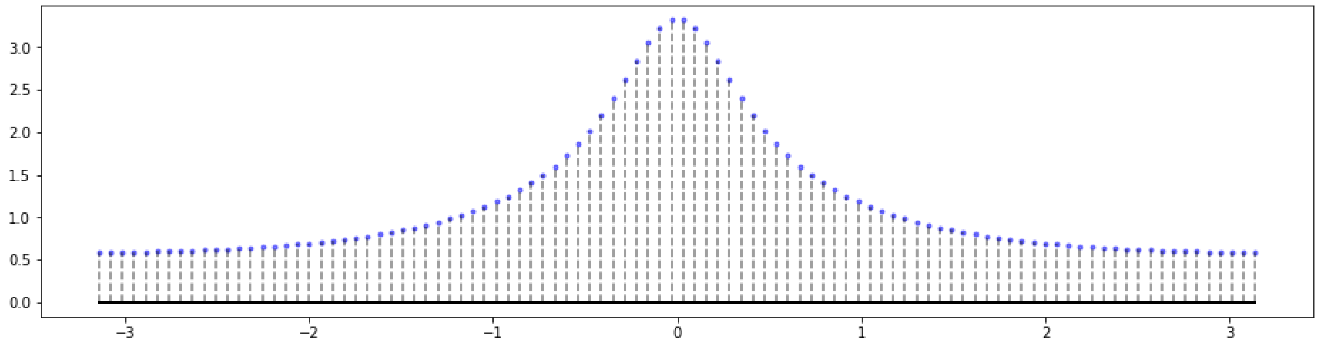


Figura 1: Gráfico de Amplitude da transformada de x[n]

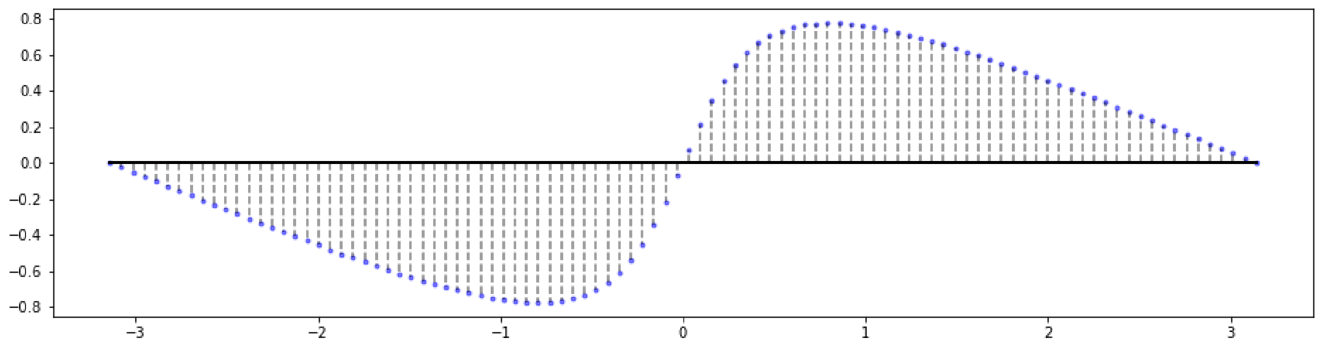


Figura 2: Gráfico de Fase da transformada de x[n]

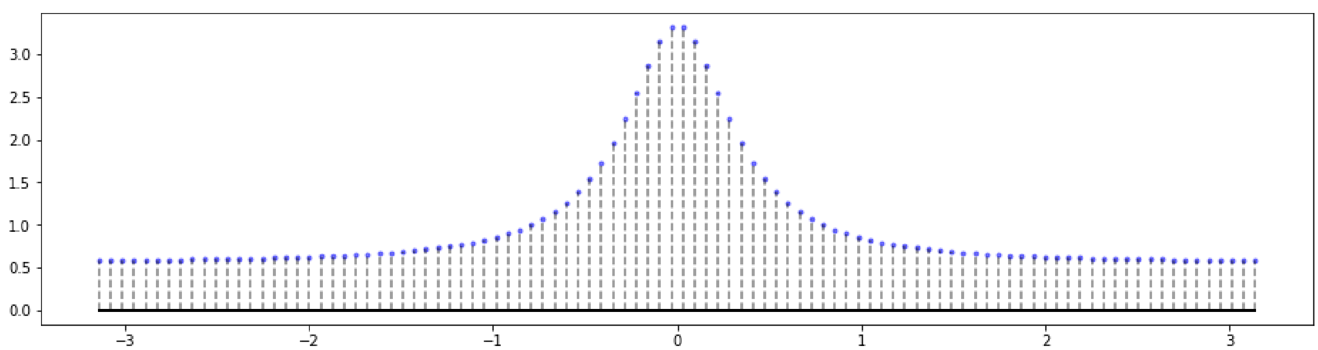


Figura 3: Gráfico da parte real da transformada de x[n]

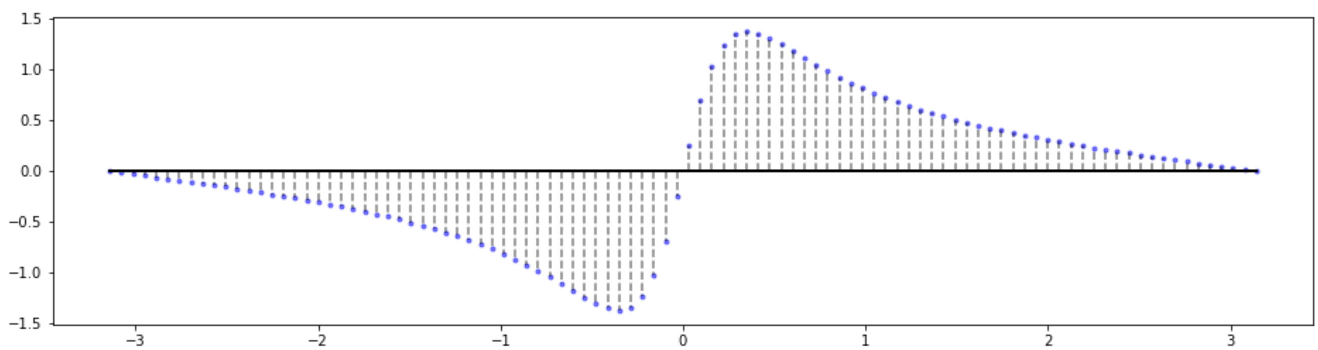


Figura 4: Gráfico da parte imaginária da transformada de x[n]

Podemos ver que a amplitude da transformada é um sinal par, simétrico em torno da origem, enquanto a fase é um sinal ímpar. Pode-se observar semelhança entre a parte imaginária e fase e entre a parte real e a amplitude. Algo esperado por se tratar de uma transformada de um sinal real, x[n].

5)

```
def dtft_approx(x, n, w):
    return np.matmul(x, np.exp((np.pi/M) * (np.outer(n, k)) * -1j))
```

Figura 5: Função para aproximação da Transformada de Fourier de tempo discreto

Na Figura 5 temos a implementação da equação matricial para uma aproximação da Transformada de Fourier de tempo discreto em Python utilizando NumPy. A partir do uso dessa função foi calculado a transformada pedida para ω variando de -2π à 2π. Para isso o vetor k foi definido com M amostras de -M/2 à M/2 e multiplicado por um fator de escala de 4, dessa forma o equação é válida para -2π à 2π. Assim podemos ver a periodicidade da transformada.

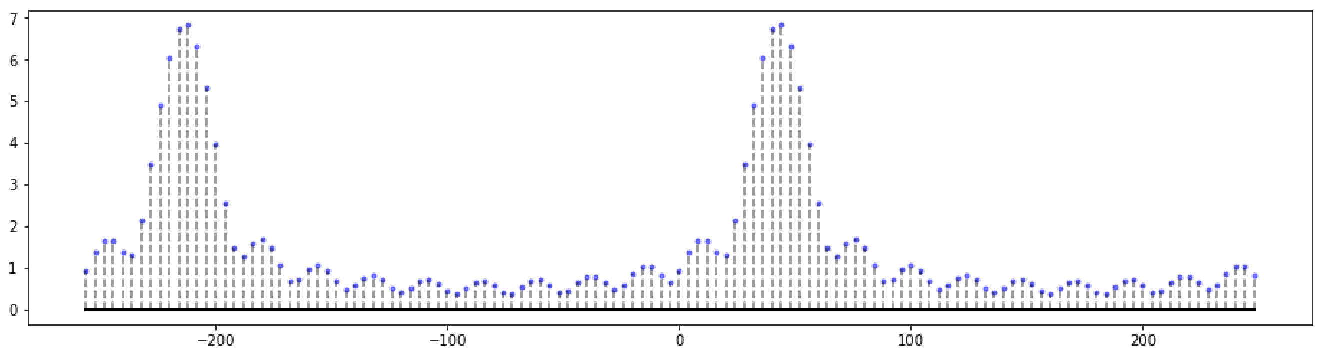


Figura 6: Amplitude da Transformada por aproximação

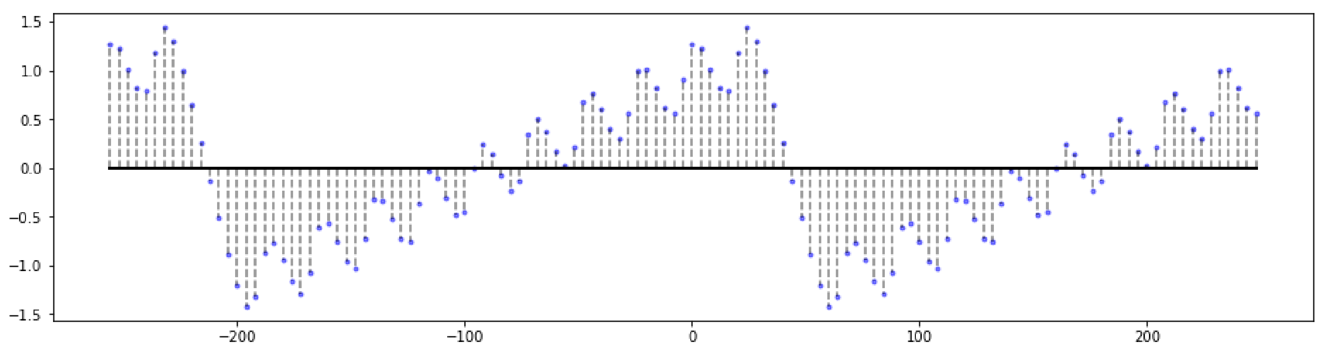


Figura 7: Fase da Transformada por aproximação

Nas Figuras 6 e 7 pode-se ver a natureza periódica da transformada, entretanto essa função não apresenta paridade. Ambas, fase e amplitude, podem ter simetria em torno de qualquer ponto 2πk + π/3, com k pertencente aos números inteiros, dessa forma, recentrando essa transformada em qualquer ponto de simetria a transformada apresentaria amplitude par e fase ímpar. Esse resultado é esperado por existir uma sinal real $x'[n] = 0.9^n$ multiplicado por uma exponencial complexa.