

5) A região de convergência para $H(z)$ é externa ao polo mais externo, nesse contexto existem duas posições relevantes para os zeros complexos conjugados: internas à RDC ou externas à RDC. Quando os zeros estão internos a região só existe uma região possível para $H_i(z)$, pois essa é a única que possui interseção com a região de $H(z)$

RDC $H(z)$: $|z| > |p_{\text{ext}}|$, onde p_{ext} é o polo mais externo

Para $|z| < |p_{\text{ext}}|$; ($|z|$ representa o módulo dos zeros)

RDC $H_i(z)$: $|z| > |z_1|$ ou $|z| < |z_1| \rightarrow$ Inválida

↳ Região válida

Para $|z| > |p_{\text{ext}}$, ou seja, interno à RDC de $H(z)$:

RDC $H_i(z)$: $|z| > |z_1|$, a inversa continua causal e estável é válida.

$|z| < |z_1|$, o sistema deixa de ser causal e estável mas ainda tem interseção, por

O sistema inverso de $H(z)$ pode ser simultaneamente causal e estável.

2)

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

$$\sum \{y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1]\} = \sum \{x[n]\}$$

$$Y(z)z^{-1} - \frac{5}{2}Y(z) + Y(z)z^+ = X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{z^{-1} - \frac{5}{2}z^0 + z^1}}{z(z^2 - \frac{5}{2}z^1 + 1)} = \frac{1}{z(z^2 - \frac{5}{2}z^1 + 1)}$$

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \begin{cases} \frac{A}{(z - z^{-1}\frac{1}{2})} & |z| < \frac{1}{2} \\ \frac{B}{(z - 2z^{-1})} & |z| < 2 \\ \frac{C}{z} & |z| > 2 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{-\frac{2}{3}}{(z - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{\frac{2}{3}}{(z - 2z^{-1})}$$

 $h[n] =$ P/ $|z| < \frac{1}{2}, (|z| < 1/2 \wedge |z| < 2)$:

$$h[n] = -\frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \right) + \frac{2}{3} \left((-2^n) u[n-1] \right) = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - (2)^n \right) u[-n-1]$$

P/ $\frac{1}{2} < |z| < 2$:

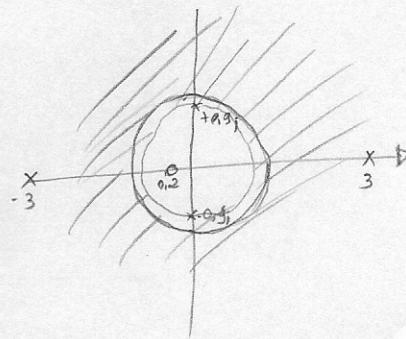
$$h[n] = -\frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right) + \frac{2}{3} \left((-2^n) u[-n-1] \right) = -\frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (2)^n u[n-1] \right)$$

P/ $|z| > 2$:

$$h[n] = -\frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right) + \frac{2}{3} \left((2^n) u[n] \right) = -\frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - (2)^n \right) u[n]$$

3)

$$H(z) = \frac{(1+0,2z^{-1})(1-9z^{-2})}{(1+0,81z^{-2})}$$



a) Pelo sistema ser causal, sua região de convergência é externa ao polo mais extremo e como os polos possuem módulo menor que 1 a RDC contém a circunferência unitária e portanto é estável.

b)

$$H(z) = \frac{(1+0,2z^{-1})(1+3z^{-1})(1-3z^{-1})}{(1+0,81z^{-2})}$$

$$1-9z^{-2} = 0 \Rightarrow z^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{z^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} \\ z = \pm 3$$

$$H(z) = \frac{-9(1+0,2z^{-1})(z^{-1}+\frac{1}{3})(z^{-1}-\frac{1}{3})}{1+0,81z^{-2}} \cdot \frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$H(z) = \underbrace{-9(1+0,2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}_{1+0,81z^{-2}} \cdot \underbrace{\frac{(z^{-1}+\frac{1}{3})(z^{-1}-\frac{1}{3})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}}_{H_{ap}(z)}$$

4)

$$H(z) = \frac{(1-3z^{-1})(1-\gamma_4 z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})} = \frac{-3(1-\gamma_4 z^{-1})(z^{-1}-\gamma_3)}{-\frac{4}{3}(1-\frac{3}{4}z^{-1})(z^{-1}-\frac{3}{4}\gamma_1)}$$

$$H(z) = \underbrace{\frac{9}{4}}_{H_{min}(z)} \cdot \frac{(1-\gamma_4 z^{-1})(z^{-1}-\gamma_3)}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(z^{-1}-\frac{3}{4}\gamma_1)} \cdot \frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\gamma_3 z^{-1})} \cdot \frac{(1-\frac{3}{4}\gamma_1 z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}\gamma_1 z^{-1})}$$

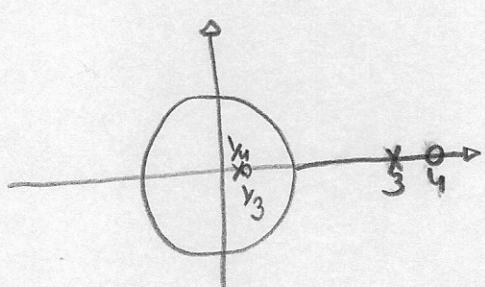
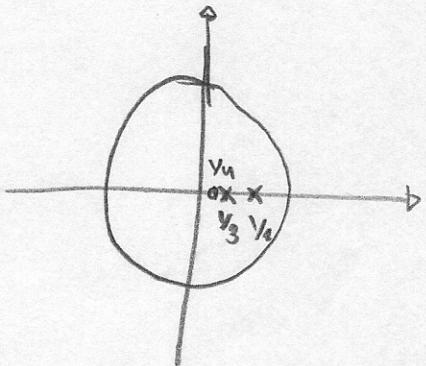
$$H(z) = \underbrace{\frac{9}{4}}_{H_{min}(z)} \cdot \frac{(1-\gamma_4 z^{-1})(1-\gamma_3 z^{-1})}{(1-3\gamma_4 z^{-1})(1-3\gamma_4 z^{-1})} \cdot \underbrace{\frac{(z^{-1}-\gamma_3)(1-3\gamma_4 z^{-1})}{(1-\gamma_3 z^{-1})(z^{-1}-3\gamma_1)}}_{H_{ap}(z)}$$

5)

$$H(z) = \frac{(z^{-1} - y_4)}{(1 - \frac{y_1}{2}z^{-1})(z^{-1} - \frac{y_3}{2})}$$

$$H(z) = \frac{(z^{-1} - y_4)}{(1 - \frac{y_1}{2}z^{-1})(z^{-1} - y_3)} \cdot \frac{(1 - y_3 z^{-1})}{(1 - y_3 z^{-1})} \cdot \frac{(1 - y_4 z^{-1})}{(1 - y_4 z^{-1})}$$

$$H(z) = \underbrace{\frac{(1 - y_4 z^{-1})}{(1 - y_1 z^{-1})(1 - y_3 z^{-1})}}_{\leftarrow H_{mm}(z)} \cdot \underbrace{\frac{(z^{-1} - y_4)(1 - y_3 z^{-1})}{(1 - y_4 z^{-1})(z^{-1} - y_3)}}_{\leftarrow H_{op}(z)}$$



6)

$$H(z) = \frac{(1 - e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/3}z^{-1})(1 + j,1765z^{-1})}{(1 - 0,9e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0,9e^{-j\pi/3}z^{-1})(1 + 0,85z^{-1})}$$

a) $H(z) = \frac{(1 - z^{-1}(e^{j\pi/3} + e^{-j\pi/3}) + z^2)(1 + j,1765z^{-1})}{(1 - 0,9z^{-1}(e^{j\pi/3} + e^{-j\pi/3}) + z^2)(1 + 0,85z^{-1})}$; $e^{j\pi/3} + e^{-j\pi/3} = 2 \cos(\pi/3) = 1$

$$= \frac{(1 - z^{-1} + z^2)(1 + j,1765z^{-1})}{(1 - 0,9z^{-1} + z^2)(1 + 0,85z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1} + z^2 + 1,1765z^{-1} - 1,1765z^{-2} + j,1765z^{-3}}{1 - 0,9z^{-1} + z^2 + 0,85z^{-1} - 0,765z^{-2} + 0,85z^{-3}}$$

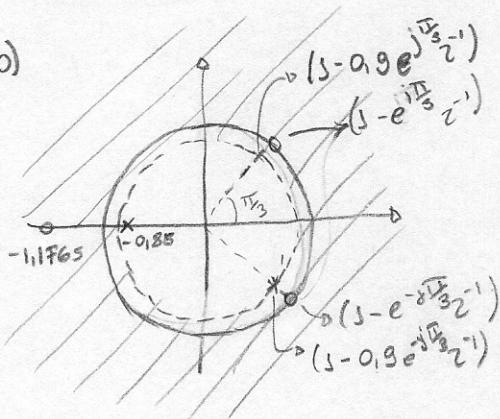
$$H(z) = \frac{1 + 0,1765z^{-1} - 0,1765z^{-2} + j,1765z^{-3}}{1 - 0,05z^{-1} + 0,235z^{-2} + 0,85z^{-3}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)(1 - 0,05z^{-1} + 0,235z^{-2} + 0,85z^{-3}) = X(z)(1 + 0,1765z^{-1} - 0,1765z^{-2} + j,1765z^{-3})$$

Aplicando Z^{-1} :

$$y[n] - 0,05y[n-1] + 0,235y[n-2] + 0,85y[n-3] = x[n] + 0,1765x[n-1] - 0,1765x[n-2] + j,1765x[n-3]$$

b)



A região é externa ao polo mais afastado.

d) i: O sistema é estável já que a RDC contém $|z|=1$. Verdadeiro

ii: Já que o sistema é estável, a resposta ao impulso é absolutamente somável e portanto tende a zero para n grande. Falso

iii: O sistema possui um zero em $e^{j\pi/3}$ e seu conjugado, portanto tem um pole em $\pi/3$ e $-j\pi/3$, operar de pôlo. Falso

iv: O sistema não é de fase mínima já que possui zeros fora da circunferência unitária, mesmo contendo todos os polos internos. Falso

v: Devido ao posicionamento dos zeros o sistema invariável poderá ser causal ou estável de maneira exclusiva. Falso

```
In [1]:
```

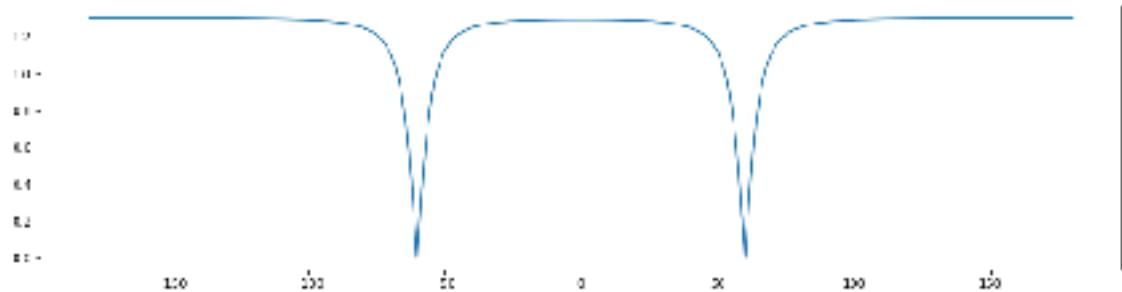
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy import pi, exp as e
j = 1j
```

```
In [2]:
```

```
w = np.linspace(-pi, pi, 361)
H_num = (1 - e(j*(pi/3 - w)))*(1 - e(-j*(pi/3 + w)))*(1 + 1.1765*e(-j*w))
H_dem = (1 - .9*e(j*(pi/3 - w)))*(1 - .9*e(-j*(pi/3 + w)))*(1 + .85*e(-j*w))
H = H_num/H_dem
```

```
In [3]:
```

```
plt.figure(figsize=(16, 4))
plt.plot(np.degrees(w), np.absolute(H))
plt.show()
```



O sistema tem um arranjo de pólos e zeros praticamente recíprocos conjugados. Onde o pólo em $z = -0,85$ é aproximadamente recíproco do zero em $z = -1,1765$ e os pólos complexos teriam seus recíprocos conjugados em $z = 1,1e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$. Essa leve diferença entre os zeros recíprocos conjugados e os zeros presentes no sistema fazem com que ele não tenha magnitude constante e mais, como os zeros estão mais próximos da circunferência unitária, nas frequências $\omega = \pm \frac{\pi}{3}$ eles se tornam dominantes e portanto a magnitude do sistema nessa frequência é zero. Fora das proximidades de $\omega = \pm \frac{\pi}{3}$, a reciprocidade dos pólos e zeros torna a magnitude quase constante.

7) A partir dos gráficos de $x[n]$ e $|X(e^{j\omega})|$ podemos determinar as frequências de cada grupo de oscilações, o primeiro grupo, que tem uma oscilação mediana em relação aos outros e por isso pode ser associado à frequência $0,3\pi$, o segundo grupo apresenta a maior oscilação, logo podemos atribuir a ele o pico em $0,6\pi$. O último grupo, que oscila menos tem seu pico de frequência próximo a $0,5\pi$. Considerando o filtro, seu gráfico de magnitude claramente rejeita a frequência de $0,5\pi$, portanto, esperar-se que o sinal $y[n]$ não contenha uma oscilação como a presente no segundo grupo de $x[n]$.
O gráfico de atros de grupo mostra que frequências próximas à frequência do 3º grupo tem um atroso na saída de até 40 amostras e para frequências em torno de $0,3\pi$ um atroso de até 80 amostras.
O sinal $y[n]$ que atende essas características é $y_2[n]$.