

Relasi Rekurensi Sederhana dan Solusinya

Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2021-2022

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Maret 2022

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

- 1 *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
- 2 *Discrete Mathematics with Applications* , Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
- 3 *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
- 4 *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
- 5 *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke [<pleasedontspam@telkomuniversity.ac.id>](mailto:pleasedontspam@telkomuniversity.ac.id).

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 6 Challenging Problem
- 7 Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoefisien Konstan

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 6 Challenging Problem
- 7 Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoefisien Konstan

Struktur rekursif merupakan struktur natural dalam *computer science*.

GNU: GNU's not Unix

```
GNU 0.3 (hurdle) (tty1)
```



```
This is the superunprivileged.org Hurd LiveCD.  
Welcome.
```

```
Use 'login USER' to login, or 'help' for more information about logging in.  
Try logging in as the 'guest', or the 'tutorial' user. The passwords are  
the same as the usernames.  
After logging in, use 'info guide' to learn more about how to use the Hurd.  
login> _
```

Gambar diambil dari Wikipedia.

Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekspresi matematika didefinisikan secara *rekursif* bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat:

Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekspresi matematika didefinisikan secara rekursif bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat: 0 dan 1
- String biner dengan panjang 2 yang memenuhi syarat:

Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekspresi matematika didefinisikan secara rekursif bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat: 0 dan 1
- String biner dengan panjang 2 yang memenuhi syarat: 01, 10, dan 11.
- String biner dengan panjang 3 yang memenuhi syarat:

Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekspresi matematika didefinisikan secara *rekursif* bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat: 0 dan 1
- String biner dengan panjang 2 yang memenuhi syarat: 01, 10, dan 11.
- String biner dengan panjang 3 yang memenuhi syarat: 010, 011, 101, 110, dan 111.

Berapa banyak string biner dengan panjang n yang memenuhi syarat tersebut?

Contoh

Dalam suatu sistem suatu pesan selalu berukuran n kB dengan n adalah bilangan bulat non negatif. Pesan dikirim menggunakan sebuah array yang panjangnya didefinisikan sebagai berikut:

- jika ukuran pesan 0 kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang 1,
- jika ukuran pesan 1 kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang 2,
- jika ukuran pesan n kB dengan $n > 1$, maka panjang array yang diperlukan adalah panjang array untuk pesan $n - 1$ kB ditambah panjang array untuk pesan $n - 2$ kB.

Tentukan formulasi matematis untuk menentukan panjang array yang diperlukan dalam pengiriman pesan n kB.

Contoh

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga 7% pertahun. Jika selama 20 tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi**
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 6 Challenging Problem
- 7 Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoefisien Konstan

Beberapa Definisi Penting

Definisi (Relasi Rekurensi)

Relasi rekurensi (*recurrence relation*) untuk sebuah barisan (x_n) adalah **suatu persamaan (rumus atau formula)** yang menyatakan **hubungan suku x_n dengan satu atau lebih suku pendahulunya** (yaitu x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) dalam barisan itu untuk setiap $n \geq n_0$, untuk suatu $n_0 \geq 1$.

Definisi (Solusi Relasi Rekurensi)

Suatu barisan (x_n) disebut sebagai **suatu solusi** dari suatu relasi rekurensi jika **semua suku pada barisan tersebut** memenuhi relasi rekurensi yang ditinjau.

Definisi (Syarat Awal Relasi Rekurensi)

Suku (atau suku-suku) pendahulu dari suku x_n pada suatu relasi rekurensi, yaitu suku (atau suku-suku) x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , disebut sebagai **syarat awal (*initial condition*)** dari relasi rekurensi tersebut.

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ➊ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 =$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 =$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
- ❹ x_5 dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan x_0 dan x_1 sebagai berikut:

$$x_5 =$$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
- ❹ x_5 dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan x_0 dan x_1 sebagai berikut:

$$x_5 = x_4 - x_3 =$$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
- ❹ x_5 dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan x_0 dan x_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= \end{aligned}$$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
- ❹ x_5 dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan x_0 dan x_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = \end{aligned}$$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
- ❹ x_5 dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan x_0 dan x_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = (x_2 - x_1) - 2x_2 + x_1 \\ &= \end{aligned}$$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
- ❹ x_5 dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan x_0 dan x_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = (x_2 - x_1) - 2x_2 + x_1 \\ &= -x_2 = \end{aligned}$$

Contoh

Misalkan (x_n) adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (1)$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari x_2 dan x_5 .

Perhatikan bahwa:

- ❶ Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan (x_n) .
- ❷ $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
- ❸ Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
- ❹ x_5 dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan x_0 dan x_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = (x_2 - x_1) - 2x_2 + x_1 \\ &= -x_2 = -(x_1 - x_0) = -2. \end{aligned}$$

Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

Contoh

Periksa apakah barisan (x_n) berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (2)$$

bila

① $x_n = 3n$

② $x_n = 2^n$

③ $x_n = 5.$

Solusi:

① Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} =$

Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

Contoh

Periksa apakah barisan (x_n) berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (2)$$

bila

① $x_n = 3n$

② $x_n = 2^n$

③ $x_n = 5.$

Solusi:

① Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} =$

Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

Contoh

Periksa apakah barisan (x_n) berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (2)$$

bila

① $x_n = 3n$

② $x_n = 2^n$

③ $x_n = 5.$

Solusi:

① Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} =$$

Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

Contoh

Periksa apakah barisan (x_n) berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (2)$$

bila

① $x_n = 3n$

② $x_n = 2^n$

③ $x_n = 5.$

Solusi:

① Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2) \\ &= \end{aligned}$$

Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

Contoh

Periksa apakah barisan (x_n) berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (2)$$

bila

$$① \quad x_n = 3n$$

$$② \quad x_n = 2^n$$

$$③ \quad x_n = 5.$$

Solusi:

① Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2) \\ &= 3n = x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **terpenuhi**.

Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

Contoh

Periksa apakah barisan (x_n) berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (2)$$

bila

$$① \quad x_n = 3n$$

$$② \quad x_n = 2^n$$

$$③ \quad x_n = 5.$$

Solusi:

① Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2) \\ &= 3n = x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (3n)$ adalah sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

2 Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} =$

2 Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} =$

❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} =$$

❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} = 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} =$$

❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **tidak terpenuhi**.

- ❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **tidak terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

- ❸ Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} =$

- ❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **tidak terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

- ❸ Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} =$

- ❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **tidak terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

- ❸ Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} =$$

- ❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **tidak terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

- ❸ Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 5 - 5 \\ &= \end{aligned}$$

- ❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **tidak terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

- ❸ Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 5 - 5 \\ &= 5 = x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **terpenuhi**.

- ❷ Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2(2^{n-1}) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **tidak terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

- ❸ Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 5 - 5 \\ &= 5 = x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) **terpenuhi**. Akibatnya barisan $(x_n) = (5)$ adalah sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

Permasalahan

Mengapa solusi dari relasi rekurensi (2) tidak tunggal (ada lebih dari satu)?

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi**
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 6 Challenging Problem
- 7 Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoefisien Konstan

Masalah Investasi

Permasalahan

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga 7% pertahun. Jika selama 20 tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, **tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.**

Solusi: misalkan jumlah uang nasabah mula-mula adalah x_0 dan jumlah uang setelah n tahun adalah x_n . Dengan demikian terdapat barisan x_n yang memenuhi relasi rekurensi berikut

$$x_n =$$

Masalah Investasi

Permasalahan

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga 7% pertahun. Jika selama 20 tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, **tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.**

Solusi: misalkan jumlah uang nasabah mula-mula adalah x_0 dan jumlah uang setelah n tahun adalah x_n . Dengan demikian terdapat barisan x_n yang memenuhi relasi rekurensi berikut

$$x_n = x_{n-1} + 0.07x_{n-1}, \text{ untuk } n \geq 1, \text{ yang setara dengan}$$

$$x_n =$$

Masalah Investasi

Permasalahan

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga 7% pertahun. Jika selama 20 tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, **tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.**

Solusi: misalkan jumlah uang nasabah mula-mula adalah x_0 dan jumlah uang setelah n tahun adalah x_n . Dengan demikian terdapat barisan x_n yang memenuhi relasi rekurensi berikut

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 0.07x_{n-1}, \text{ untuk } n \geq 1, \text{ yang setara dengan} \\ x_n &= 1.07x_{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Oleh karena itu

$$x_1 =$$

Oleh karena itu

$$x_1 = 1.07x_0$$

$$x_2 =$$

Oleh karena itu

$$x_1 = 1.07x_0$$

$$x_2 = 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0$$

$$x_3 =$$

Oleh karena itu

$$x_1 = 1.07x_0$$

$$x_2 = 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0$$

$$x_3 = 1.07x_2 = (1.07)^3 x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n =$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}x_1 &= 1.07x_0 \\x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0 \\x_3 &= 1.07x_2 = (1.07)^3 x_0 \\&\vdots \\x_n &= 1.07x_{n-1} = (1.07)^n x_0,\end{aligned}$$

untuk $n = 20$, diperoleh $x_{20} =$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1.07x_0 \\
 x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0 \\
 x_3 &= 1.07x_2 = (1.07)^3 x_0 \\
 &\vdots \\
 x_n &= 1.07x_{n-1} = (1.07)^n x_0,
 \end{aligned}$$

untuk $n = 20$, diperoleh $x_{20} = (1.07)^{20} x_0$, sehingga rasio peningkatan aset dari deposito tersebut adalah

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1.07x_0 \\
 x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0 \\
 x_3 &= 1.07x_2 = (1.07)^3 x_0 \\
 &\vdots \\
 x_n &= 1.07x_{n-1} = (1.07)^n x_0,
 \end{aligned}$$

untuk $n = 20$, diperoleh $x_{20} = (1.07)^{20} x_0$, sehingga rasio peningkatan aset dari deposito tersebut adalah $\frac{x_{20}}{x_0} = (1.07)^{20}$.

Masalah Panjang Array

Permasalahan

Dalam suatu sistem suatu pesan selalu berukuran n kB dengan n adalah bilangan bulat non negatif. Pesan dikirim menggunakan sebuah array yang panjangnya didefinisikan sebagai berikut:

- jika ukuran pesan 0 kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang 1.
- jika ukuran pesan 1 kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang 2.
- jika ukuran pesan n kB dengan $n > 1$, maka panjang array yang diperlukan adalah panjang array untuk pesan $n - 1$ kB ditambah panjang array untuk pesan $n - 2$ kB.

Tentukan formulasi matematis untuk menentukan panjang array yang diperlukan dalam pengiriman pesan n kB. Kemudian dari formulasi yang diperoleh, tentukan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan sebesar 6 kB.

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 = 2, \text{ dan } L_n =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 = 2, \text{ dan } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2.$$

Akibatnya kita memiliki

$$L_2 =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 = 2, \text{ dan } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2.$$

Akibatnya kita memiliki

$$L_2 = L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3$$

$$L_3 =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 = 2, \text{ dan } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2.$$

Akibatnya kita memiliki

$$L_2 = L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3$$

$$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5$$

$$L_4 =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 = 2, \text{ dan } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2.$$

Akibatnya kita memiliki

$$L_2 = L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3$$

$$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5$$

$$L_4 = L_3 + L_2 = 5 + 3 = 8$$

$$L_5 =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 = 2, \text{ dan } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2.$$

Akibatnya kita memiliki

$$L_2 = L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3$$

$$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5$$

$$L_4 = L_3 + L_2 = 5 + 3 = 8$$

$$L_5 = L_4 + L_3 = 8 + 5 = 13$$

$$L_6 =$$

Solusi: misalkan L_n menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran n kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1, L_1 = 2, \text{ dan } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2.$$

Akibatnya kita memiliki

$$L_2 = L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3$$

$$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5$$

$$L_4 = L_3 + L_2 = 5 + 3 = 8$$

$$L_5 = L_4 + L_3 = 8 + 5 = 13$$

$$L_6 = L_5 + L_4 = 13 + 8 = 21.$$

Jadi diperlukan array sepanjang 21 untuk mengirimkan pesan sebesar 6 kB.

Permasalahan

Apakah terdapat suatu formulasi eksplisit untuk menentukan L_n ?

Masalah String Biner

Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang **tidak memuat dua angka 0 secara berurutan**. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat:

Masalah String Biner

Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang **tidak memuat dua angka 0 secara berurutan**. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat: 0 dan 1
- String biner dengan panjang 2 yang memenuhi syarat:

Masalah String Biner

Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang **tidak memuat dua angka 0 secara berurutan**. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat: 0 dan 1
- String biner dengan panjang 2 yang memenuhi syarat: 01, 10, dan 11.
- String biner dengan panjang 3 yang memenuhi syarat:

Masalah String Biner

Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka 0 atau 1) dengan panjang n yang **tidak memuat dua angka 0 secara berurutan**. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang 1 yang memenuhi syarat: 0 dan 1
- String biner dengan panjang 2 yang memenuhi syarat: 01, 10, dan 11.
- String biner dengan panjang 3 yang memenuhi syarat: 010, 011, 101, 110, dan 111.

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
 - ➊ Barisan biner yang diakhiri oleh angka 1 (berbentuk $XX \dots XX1$).

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
 - 1 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 1 (berbentuk $XX \dots XX1$).
 - 2 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 0 (berbentuk $XX \dots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan dan diakhiri dengan angka 1

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
 - 1 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 1 (berbentuk $XX \dots XX1$).
 - 2 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 0 (berbentuk $XX \dots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan dan diakhiri dengan angka 1 sama dengan

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
 - 1 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 1 (berbentuk $XX \dots XX1$).
 - 2 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 0 (berbentuk $XX \dots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan dan diakhiri dengan angka 1 sama dengan banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 1$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
 - 1 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 1 (berbentuk $XX \dots XX1$).
 - 2 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 0 (berbentuk $XX \dots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan dan diakhiri dengan angka 1 sama dengan
 banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 1$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
 Mengapa?

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
 - 1 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 1 (berbentuk $XX \dots XX1$).
 - 2 Barisan biner yang diakhiri oleh angka 0 (berbentuk $XX \dots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan dan diakhiri dengan angka 1 sama dengan banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 1$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Mengapa?

$\underbrace{XXX \dots XXX}_\alpha 1$

Solusi Masalah String Biner

- Misalkan a_n adalah banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
 - Barisan biner yang diakhiri oleh angka 1 (berbentuk $XX \dots XX1$).
 - Barisan biner yang diakhiri oleh angka 0 (berbentuk $XX \dots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan dan diakhiri dengan angka 1 sama dengan banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 1$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Mengapa?

$\underbrace{XXX \dots XXX}_\alpha 1$

α : barisan biner apapun yang tidak memuat dua angka 0 berurutan dengan panjang $n - 1$.

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).
Mengapa? (silakan dijawab)

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).
Mengapa? (silakan dijawab)
Oleh karena itu

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).

Mengapa? (silakan dijawab)

Oleh karena itu

banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0**

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).

Mengapa? (silakan dijawab)

Oleh karena itu

banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** sama dengan

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).

Mengapa? (silakan dijawab)

Oleh karena itu

banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0**

sama dengan

banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 2$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).

Mengapa? (silakan dijawab)

Oleh karena itu

banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0**

sama dengan

banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 2$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Mengapa?

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).

Mengapa? (silakan dijawab)

Oleh karena itu

banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0**

sama dengan

banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 2$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Mengapa?

$\underbrace{XXX \dots XXX}_{\beta} 10$

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0** harus memiliki angka 1 pada digit ke $n - 1$ (dihitung dari kiri).

Mengapa? (silakan dijawab)

Oleh karena itu

banyaknya barisan biner dengan panjang n yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan **dan diakhiri dengan angka 0**

sama dengan

banyaknya barisan biner dengan panjang $n - 2$ yang tidak memuat dua angka 0 secara berurutan.

Mengapa?

$\underbrace{XXX \dots XXX}_{\beta} 10$

β : barisan biner apapun yang tidak memuat dua angka 0 berurutan dengan panjang $n - 2$.

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n =$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat adalah

$$a_5 =$$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat adalah

$$a_5 = a_4 + a_3 =$$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat adalah

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 = (a_3 + a_2) + a_3 = 2a_3 + a_2 \\ &= \end{aligned}$$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat adalah

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 = (a_3 + a_2) + a_3 = 2a_3 + a_2 \\ &= 2(a_2 + a_1) + a_2 = 3a_2 + 2a_1 = 3(3) + 2(2) = 13. \end{aligned}$$

Hal ini juga dapat dihitung secara bertahap sebagai berikut:

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang 5 yang memenuhi syarat adalah

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 = (a_3 + a_2) + a_3 = 2a_3 + a_2 \\ &= 2(a_2 + a_1) + a_2 = 3a_2 + 2a_1 = 3(3) + 2(2) = 13. \end{aligned}$$

Hal ini juga dapat dihitung secara bertahap sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13. \end{aligned}$$

Permasalahan

Apakah terdapat suatu formulasi eksplisit untuk menentukan a_n ?

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoeffisien Konstan**
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoeffisien Konstan
- 6 Challenging Problem
- 7 Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoeffisien Konstan

Relasi Rekurensi Linier

Definisi

Relasi rekurensi linier dengan koefisien konstan berderajat k ($k \in \mathbb{N}$) untuk sebuah barisan bilangan real $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ adalah persamaan

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} = f(n), \text{ untuk } k \leq n, \quad (4)$$

dengan $f(n)$ adalah suatu fungsi, a_0, a_1, \dots, a_k adalah $k+1$ buah bilangan real, $a_k \neq 0$.

Jika $f(n) = 0$, maka relasi rekurensi

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_kx_{n-k} = 0, \text{ untuk } k \leq n, \quad (5)$$

disebut sebagai **relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan**. Jika $f(n) \neq 0$, maka (4) disebut sebagai **relasi rekurensi linier tak homogen dengan koefisien konstan**. Selanjutnya nilai $x_n = c_n$ untuk $0 \leq n < k$ disebut sebagai syarat awal untuk (4) atau (5).

Perhatikan bahwa jika suatu relasi rekurensi linier homogen berderajat k dengan koefisien konstan dapat berbentuk

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}$$

dan suatu relasi rekurensi linier tak homogen dengan koefisien konstan dapat berbentuk

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} + f(n),$$

untuk suatu fungsi f yang bukan berupa fungsi nol.

Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

- ➊ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
- ➋ $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi

Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

- ➊ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi **linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan**.
- ➋ $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi **linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan**.
- ➌ $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi

Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

- ❶ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
- ❷ $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan.
- ❸ $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi tak linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
- ❹ $x_n = nx_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi

Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

- ➊ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
- ➋ $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan.
- ➌ $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi tak linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
- ➍ $x_n = nx_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien tak konstan.
- ➎ $3x_n = \frac{1}{n}x_{n-1} + x_{n-2}^n + x_{n-3} + n!$ merupakan relasi rekurensi

Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

- ➊ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
- ➋ $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan.
- ➌ $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi tak linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
- ➍ $x_n = nx_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien tak konstan.
- ➎ $3x_n = \frac{1}{n}x_{n-1} + x_{n-2}^n + x_{n-3} + n!$ merupakan relasi rekurensi tak linier tak homogen berderajat tiga dengan koefisien tak konstan.

Catatan

Definisi linieritas pada relasi rekurensi ini serupa dengan linieritas persamaan linier pada perkuliahan Matriks dan Ruang Vektor.

Polinom Karakteristik

Definisi

Misalkan

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = f(n) \quad (6)$$

merupakan suatu relasi rekurensi linier sebagaimana dijelaskan dalam sebelumnya, polinom

$$p(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k$$

disebut sebagai polinom karakteristik dari rekurensi linier (6). Persamaan $p(\lambda) = 0$ disebut sebagai persamaan karakteristik. Bilangan r yang memenuhi $p(r) = 0$ dikatakan sebagai **akar karakteristik**. Kemudian banyaknya kemunculan dari suatu akar karakteristik dinamakan dengan **multiplisitas** dari akar tersebut.

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

① $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$

② $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$

③ $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$

④ $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

$$① \quad x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

$$② \quad x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$$

$$③ \quad x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$$

$$④ \quad x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$$

Solusi:

- ① Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

$$① \quad x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

$$② \quad x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$$

$$③ \quad x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$$

$$④ \quad x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$$

Solusi:

- ① Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

$$① \quad x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

$$② \quad x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$$

$$③ \quad x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$$

$$④ \quad x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$$

Solusi:

① Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

② Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

$$① \quad x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$$

$$② \quad x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$$

$$③ \quad x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$$

$$④ \quad x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$$

Solusi:

① Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

② Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

- ① $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
- ② $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
- ③ $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
- ④ $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

- ① Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
- ② Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
- ③ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

- ❶ $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
- ❷ $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
- ❸ $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
- ❹ $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

- ❶ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
- ❷ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
- ❸ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

- ❶ $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
- ❷ $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
- ❸ $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
- ❹ $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

- ❶ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
- ❷ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
- ❸ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.
- ❹ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

- ❶ $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
- ❷ $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
- ❸ $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
- ❹ $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

- ❶ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
- ❷ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
- ❸ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.
- ❹ Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$.

Solusi Relasi Rekurensi Orde Dua (Akar Berbeda)

Teorema (Solusi relasi rekurensi order dua (akar berbeda))

Misalkan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dan persamaan $\lambda^2 - c_1\lambda - c_2 = 0$ memiliki dua akar berbeda r_1 dan r_2 , maka semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2}$$

berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n, n \in \mathbb{N}_0,$$

untuk suatu konstanta A dan B .

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau}$$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n =$$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A = 3$ dan $B =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A = 3$ dan $B = -1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A = 3$ dan $B = -1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

$$x_n = 3 \cdot 2^n - 1(-1)^n.$$

Solusi Relasi Rekurensi Orde Dua (Akar Kembar)

Teorema (Solusi relasi rekurensi order dua (akar kembar))

Misalkan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dengan $c_2 \neq 0$ dan persamaan $\lambda^2 - c_1\lambda - c_2 = 0$ memiliki akar kembar r_0 , maka semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2}$$

berbentuk

$$x_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

untuk suatu konstanta A dan B .

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n =$$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 = 3A + 3B = 6$. Oleh karena itu diperoleh

A

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 = 3A + 3B = 6$. Oleh karena itu diperoleh $A = B = 1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (8)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 = 3A + 3B = 6$. Oleh karena itu diperoleh $A = B = 1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

$$x_n = (1 + n)3^n.$$

Suplemen: Solusi Rekurensi Orde k (Akar Berbeda)

Teorema (Solusi relasi rekurensi order k (akar berbeda))

Misalkan $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ dan persamaan

$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

memiliki k buah akar r_1, r_2, \dots, r_k yang berbeda, maka solusi relasi rekurensi

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$$

berbentuk

$$x_n = A_1r_1^n + A_2r_2^n + \dots + A_kr_k^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

untuk suatu konstanta A_1, A_2, \dots, A_k .

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \quad (9)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \quad (9)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau}$$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \quad (9)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \quad (9)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, dan $r_3 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (9) adalah

$$x_n =$$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \quad (9)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, dan $r_3 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (9) adalah

$$x_n = A_1 1^n + A_2 2^n + A_3 3^n,$$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$$

$$② \quad x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$$

$$③ \quad x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$$

akibatnya didapatkan $A_1 =$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$$

$$② \quad x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$$

$$③ \quad x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$$

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 =$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$$

$$② \quad x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$$

$$③ \quad x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$$

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, dan $A_3 =$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$$

$$② \quad x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$$

$$③ \quad x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$$

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, dan $A_3 = 2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$$

$$② \quad x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$$

$$③ \quad x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$$

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, dan $A_3 = 2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

$$x_n = 1^n - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

Suplemen: Solusi Rekurensi Orde k (Akar Duplikat)

Teorema (Solusi relasi rekurensi order k (akar duplikat))

Misalkan $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ dan persamaan

$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

memiliki t akar ($t < n$) berbeda, yaitu r_1, r_2, \dots, r_t , masing-masing dengan multiplisitas m_1, m_2, \dots, m_t ($m_1 + m_2 + \dots + m_t = k$), maka solusi relasi rekurensi

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \dots + c_kx_{n-k}$$

berbentuk

$$\begin{aligned} x_n = & (A_{1,0} + A_{1,1}n + A_{1,2}n^2 + \dots + A_{1,m_1-1}n^{m_1-1}) r_1^n \\ & + (A_{2,0} + A_{2,1}n + A_{2,2}n^2 + \dots + A_{2,m_2-1}n^{m_2-1}) r_2^n \\ & + \dots \\ & + (A_{t,0} + A_{t,1}n + A_{t,2}n^2 + \dots + A_{t,m_t-1}n^{m_t-1}) r_t^n, \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, untuk suatu konstanta $A_{i,,j}$ (dengan $0 \leq i \leq t$ dan $0 \leq j \leq m_i - 1$).

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \quad (10)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \quad (10)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \quad (10)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 = -1$ dengan multiplisitas $m_1 =$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \quad (10)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 = -1$ dengan multiplisitas $m_1 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (10) adalah

$$x_n =$$

Contoh

Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \quad (10)$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 = -1$ dengan multiplisitas $m_1 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (10) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= (A_{1,0} + A_{1,1}n + A_{1,2}n^2) r_1^n \\ &= (A_{1,0} + A_{1,1}n + A_{1,2}n^2) (-1)^n \end{aligned}$$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_{1,0} = 1,$$

$$② \quad x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$$

$$③ \quad x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} =$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_{1,0} = 1,$$

$$② \quad x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$$

$$③ \quad x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$ $A_{1,1} =$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_{1,0} = 1,$$

$$② \quad x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$$

$$③ \quad x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$, $A_{1,1} = 3$, dan $A_{1,2} =$

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_{1,0} = 1,$$

$$② \quad x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$$

$$③ \quad x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$, $A_{1,1} = 3$, dan $A_{1,2} = -2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

tinjau bahwa:

$$① \quad x_0 = A_{1,0} = 1,$$

$$② \quad x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$$

$$③ \quad x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$, $A_{1,1} = 3$, dan $A_{1,2} = -2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

$$x_n = (1 + 3n - 2n^2) (-1)^n.$$

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan**
- 6 Challenging Problem
- 7 Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoefisien Konstan

Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen

Latihan

Berikan solusi umum untuk relasi rekurensi linier berikut:

- ① $w_n = 2w_{n-1}$ untuk setiap $n \geq 2$ dengan $w_0 = 3$. Tuliskan nilai untuk w_{2019} .
- ② $x_n = 4x_{n-2}$ untuk setiap $n \geq 2$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = -1$. Tuliskan nilai untuk x_{2019} .
- ③ $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ untuk setiap $n \geq 2$ dengan $y_0 = 1$ dan $y_1 = 4$. Tuliskan nilai untuk y_{2019} .
- ④ $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ untuk setiap $n \geq 2$ dengan $z_0 = 0$ dan $z_1 = 1$. Tuliskan nilai untuk z_{2019} .

Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah

Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r =$

Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n =$$

Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 =$

Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 = A \cdot 2^0 = A = 3$, akibatnya diperoleh solusi umum

$$w_n =$$

Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 = A \cdot 2^0 = A = 3$, akibatnya diperoleh solusi umum

$$w_n = 3 \cdot 2^n$$

dan nilai dari w_{2019} adalah

$$w_{2019} =$$

Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 = A \cdot 2^0 = A = 3$, akibatnya diperoleh solusi umum

$$w_n = 3 \cdot 2^n$$

dan nilai dari w_{2019} adalah

$$w_{2019} = 3 \cdot 2^{2019}.$$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah
 $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 =$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 =$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n =$$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 =$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 =$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A =$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B =$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n =$$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari x_{2019} adalah

$$x_{2019} =$$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari x_{2019} adalah

$$\begin{aligned} x_{2019} &= \frac{3}{4} (-2)^{2019} + \frac{1}{4} (2)^{2019} \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari x_{2019} adalah

$$\begin{aligned} x_{2019} &= \frac{3}{4} (-2)^{2019} + \frac{1}{4} (2)^{2019} \\ &= -\frac{3}{4} (2^{2019}) + \frac{1}{4} (2^{2019}) \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.

Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari x_{2019} adalah

$$\begin{aligned} x_{2019} &= \frac{3}{4} (-2)^{2019} + \frac{1}{4} (2)^{2019} \\ &= -\frac{3}{4} (2^{2019}) + \frac{1}{4} (2^{2019}) \\ &= \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) (2^{2019}) = -2^{2018}. \end{aligned}$$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 =$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n =$$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 =$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 = A(-1)^0 = 1$ dan $y_1 =$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 = A(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A =$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 = A(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B =$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 = A(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n =$$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 = A(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n = (1 - 5n)(-1)^n$$

dan nilai dari y_{2019} adalah

$$y_{2019} =$$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 = A(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n = (1 - 5n)(-1)^n$$

dan nilai dari y_{2019} adalah

$$\begin{aligned} y_{2019} &= (1 - 5(2019))(-1)^{2019} \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Karena $y_0 = A(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n = (1 - 5n)(-1)^n$$

dan nilai dari y_{2019} adalah

$$\begin{aligned} y_{2019} &= (1 - 5(2019))(-1)^{2019} \\ &= 5(2019) - 1 \\ &= 10094 \end{aligned}$$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah
 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 =$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 =$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n =$$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 =$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 =$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A =$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B =$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B = 1$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$z_n =$$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B = 1$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$z_n = -1 + 2^n$$

dan nilai dari z_{2019} adalah

$$z_{2019} =$$

Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B = 1$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$z_n = -1 + 2^n$$

dan nilai dari z_{2019} adalah

$$z_{2019} = -1 + 2^{2019} = 2^{2019} - 1.$$

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoefisien Konstan
- 6 Challenging Problem**
- 7 Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoefisien Konstan

Challenging Problem

Latihan

Tentukan solusi eksplisit untuk relasi-relasi rekurensi berikut:

- ① $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$,
- ② $a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, dan $a_2 = 2$

Bahasan

- 1 Motivasi
- 2 Definisi Relasi Rekurensi
- 3 Model Permasalahan dengan Relasi Rekurensi
- 4 Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoeffisien Konstan
- 5 Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen Berkoeffisien Konstan
- 6 Challenging Problem
- 7 **Suplemen: Solusi Relasi Rekurensi Linier Tak Homogen Berkoeffisien Konstan**

RR Homogen yang Bersesuaian dengan RR Tak Homogen

Materi terkait solusi untuk relasi rekurensi linier tak homogen berkoefisien konstan akan dipelajari lebih jauh dalam kuliah Desain dan Analisis Algoritma (DAA).

Definisi (RR homogen yang bersesuaian dengan RR tak homogen)

Misalkan

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n), \quad (11)$$

dengan c_i konstan untuk setiap $i \in \{1, \dots, n-k\}$ dan f bukan berupa fungsi nol, maka

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (12)$$

disebut sebagai relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian (atau berkaitan) dengan relasi rekurensi linier tak homogen (11).

Solusi Homogen dan Solusi Partikular

Teorema

Misalkan barisan $(x_n^{(h)})$ adalah solusi umum untuk relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (13)$$

dan $(x_n^{(p)})$ adalah barisan yang memenuhi relasi rekurensi linier tak homogen dengan koefisien konstan

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n), \quad (14)$$

maka **setiap solusi** dari relasi rekurensi linier tak homogen (14) berbentuk barisan

$$(x_n^{(h)} + x_n^{(p)}).$$

Selanjutnya barisan $(x_n^{(p)})$ disebut sebagai solusi partikular/ solusi khusus (*particular solution*) untuk relasi rekurensi linier tak homogen (14) dan $(x_n^{(h)})$ disebut sebagai solusi homogen untuk relasi rekurensi linier homogen (13).

Teorema

Apabila barisan (u_n) adalah sebuah solusi partikular untuk relasi rekurensi linier tak homogen

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_kx_{n-k} = f(n), \quad (15)$$

untuk suatu $k \leq n$, dan barisan (v_n) adalah sebuah solusi partikular untuk relasi rekurensi linier tak homogen

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_kx_{n-k} = g(n), \quad (16)$$

untuk suatu $k \leq n$, maka

$$(w_n) = (u_n + v_n) \quad (17)$$

adalah sebuah solusi partikular untuk relasi rekurensi linier tak homogen

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \cdots + c_kx_{n-k} = f(n) + g(n). \quad (18)$$

Metode Mencari Solusi Partikular

Metode untuk mencari solusi partikular $(x_n^{(p)})$ bergantung pada bentuk fungsi $f(n)$ sebagai berikut.

- 1 Jika $f(n)$ pada relasi rekurensi linier (14) berbentuk polinom

$$f(n) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i,$$

maka solusi partikular $(x_n^{(p)})$ yang bersesuaian juga memiliki bentuk yang serupa, yaitu

$$(x_n^{(p)}) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_k x^k = \sum_{i=0}^k \beta_i x^i. \quad (19)$$

Koefisien-koefisien β_i untuk $i \in \{0, \dots, k\}$ dapat ditentukan dengan mensubstitusikan (19) ke (14).

2 Jika $f(n)$ pada relasi rekurensi linier (14) berbentuk

$$f(n) = d^n \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i,$$

untuk suatu konstanta d , maka solusi partikular $(x_n^{(p)})$ yang bersesuaian juga memiliki bentuk yang serupa, yaitu

$$f(n) = d^n \sum_{i=0}^k \beta_i x. \quad (20)$$

Koefisien-koefisien β_i untuk $i \in \{0, \dots, k\}$ dapat ditentukan dengan mensubstitusikan (20) ke (14).

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) =$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n =$$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan p_n ke (21) diperoleh

$$p_n =$$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan p_n ke (21) diperoleh

$$p_n = 3p_{n-1} + 2n$$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan p_n ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \end{aligned}$$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan p_n ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A - 2)n + (3A - 2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A =$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan p_n ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A - 2)n + (3A - 2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A = -1$ dan $B =$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan p_n ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A - 2)n + (3A - 2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A = -1$ dan $B = -\frac{3}{2}$. Jadi diperoleh solusi partikular $x_n^{(p)} =$

Contoh

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan p_n ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A - 2)n + (3A - 2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A = -1$ dan $B = -\frac{3}{2}$. Jadi diperoleh solusi partikular $x_n^{(p)} = -n - \frac{3}{2}$.

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} =$

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} = C \cdot 3^n$, untuk suatu konstanta C . Akibatnya, menurut teorema sebelumnya, solusi umum dari (21) adalah

$$x_n =$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} = C \cdot 3^n$, untuk suatu konstanta C . Akibatnya, menurut teorema sebelumnya, solusi umum dari (21) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= \end{aligned}$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} = C \cdot 3^n$, untuk suatu konstanta C . Akibatnya, menurut teorema sebelumnya, solusi umum dari (21) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= C \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \quad (22)$$

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \quad (22)$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} =$$

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \quad (22)$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n,$$

untuk suatu konstanta A dan B . Karena (22) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) =$

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \quad (22)$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n,$$

untuk suatu konstanta A dan B . Karena (22) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 7^n$, solusi partikular yang dapat dicoba adalah

$$x_n^{(p)} =$$

Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \quad (22)$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n,$$

untuk suatu konstanta A dan B . Karena (22) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 7^n$, solusi partikular yang dapat dicoba adalah

$$x_n^{(p)} = \alpha \cdot 7^n, \text{ untuk suatu konstanta } \alpha.$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\alpha \cdot 7^n = 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

mengalikan kedua ruas dengan 7^2 menghasilkan

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\alpha \cdot 7^n = 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

mengalikan kedua ruas dengan 7^2 menghasilkan

$$49\alpha \cdot 7^n = 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\alpha \cdot 7^n = 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

mengalikan kedua ruas dengan 7^2 menghasilkan

$$49\alpha \cdot 7^n = 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n$$

$$20\alpha \cdot 7^n = 49 \cdot 7^n$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\alpha \cdot 7^n = 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

mengalikan kedua ruas dengan 7^2 menghasilkan

$$49\alpha \cdot 7^n = 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n$$

$$20\alpha \cdot 7^n = 49 \cdot 7^n$$

$$\alpha = \frac{49}{20}.$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} =$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\alpha \cdot 7^n = 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

mengalikan kedua ruas dengan 7^2 menghasilkan

$$49\alpha \cdot 7^n = 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n$$

$$20\alpha \cdot 7^n = 49 \cdot 7^n$$

$$\alpha = \frac{49}{20}.$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} = \frac{49}{20} \cdot 7^n$. Oleh karenanya solusi umum dari (22) adalah

$$x_n =$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\alpha \cdot 7^n = 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

mengalikan kedua ruas dengan 7^2 menghasilkan

$$49\alpha \cdot 7^n = 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n$$

$$20\alpha \cdot 7^n = 49 \cdot 7^n$$

$$\alpha = \frac{49}{20}.$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} = \frac{49}{20} \cdot 7^n$. Oleh karenanya solusi umum dari (22) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\alpha \cdot 7^n = 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n,$$

mengalikan kedua ruas dengan 7^2 menghasilkan

$$49\alpha \cdot 7^n = 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n$$

$$20\alpha \cdot 7^n = 49 \cdot 7^n$$

$$\alpha = \frac{49}{20}.$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} = \frac{49}{20} \cdot 7^n$. Oleh karenanya solusi umum dari (22) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= A \cdot 3^n + B \cdot 2^n + \frac{49}{20} \cdot 7^n. \end{aligned}$$

Teorema Terkait Solusi Partikular

Teorema

Misalkan barisan (x_n) memenuhi relasi rekurensi linier tak homogen

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n), \quad (23)$$

dengan c_i ($i = 1, 2, \dots, k$) bilangan real dan

$$f(n) = (d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_t n^t) s^n,$$

dengan d_i ($i = 1, 2, \dots, k$) dan s bilangan real, maka

- apabila s bukan akar dari persamaan karakteristik relasi rekurensi homogen yang bersesuaian dengan (23) maka terdapat solusi partikular yang berbentuk

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t) s^n,$$

dengan $A_0, \dots, A_t \in \mathbb{R}$.

- 2 apabila s akar dengan multipilisitas m dari persamaan karakteristik relasi rekurensi homogen yang bersesuaian dengan (23) maka terdapat solusi partikular yang berbentuk

$$n^m (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t) s^n,$$

dengan $A_0, \dots, A_t \in \mathbb{R}$.

Latihan

Latihan

Carilah solusi partikular yang mungkin dari relasi rekurensi linier tak homogen

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + f(n), \quad (24)$$

bila

- 1 $f(n) = 3^n$,
- 2 $f(n) = n \cdot 3^n$,
- 3 $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, dan
- 4 $f(n) = (n^2 + 1) \cdot 3^n$.

Relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (24) adalah

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (25)$$

persamaan karakteristiknya adalah

Relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (24) adalah

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (25)$$

persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r = 3$ (multiplisitas 2). Berdasarkan teorema solusi homogen untuk (24) adalah

$$x_n^{(h)} =$$

Relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (24) adalah

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad (25)$$

persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r = 3$ (multiplisitas 2). Berdasarkan teorema solusi homogen untuk (24) adalah

$$x_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 3^n.$$

- ① Untuk $f(n) = 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

- ① Untuk $f(n) = 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
- ② Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

- ➊ Untuk $f(n) = 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
- ➋ Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0 + A_1 n) \cdot 3^n$.
- ➌ Untuk $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, karena 2 bukan akar karakteristik untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

- ➊ Untuk $f(n) = 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
- ➋ Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0 + A_1 n) \cdot 3^n$.
- ➌ Untuk $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, karena 2 bukan akar karakteristik untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2) \cdot 2^n$.
- ➍ Untuk $f(n) = (n^2 + 1) \cdot 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

- ➊ Untuk $f(n) = 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
- ➋ Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0 + A_1 n) \cdot 3^n$.
- ➌ Untuk $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, karena 2 bukan akar karakteristik untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2) \cdot 2^n$.
- ➍ Untuk $f(n) = (n^2 + 1) \cdot 3^n$, karena 3 merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas 2 untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0 + A_1 n + A_2 n^2) \cdot 3^n$.