Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1] Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 11

Geodezyjne I

Geodezyjne I

- Idea
- Pochodna kowariantna
- Definicja geodezyjnych

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

(1) każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;

(2) odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;

(3) kiedy podróżujemy wzdłuż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

(1) każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;

(2) odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;

(3) kiedy podróżujemy wzdłuż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

(1) każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;

(2) odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;

(3) kiedy podróżujemy wzdłuż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Chociaż proste na płaszczyśnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład S^2:

- Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej "długości geograficznej" jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

Chociaż proste na płaszczyśnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład S^2:

- Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej "długości geograficznej" jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

Chociaż proste na płaszczyśnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład S^2:

- Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej "długości geograficznej" jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

Chociaż proste na płaszczyśnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład S^2:

- Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej "długości geograficznej" jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

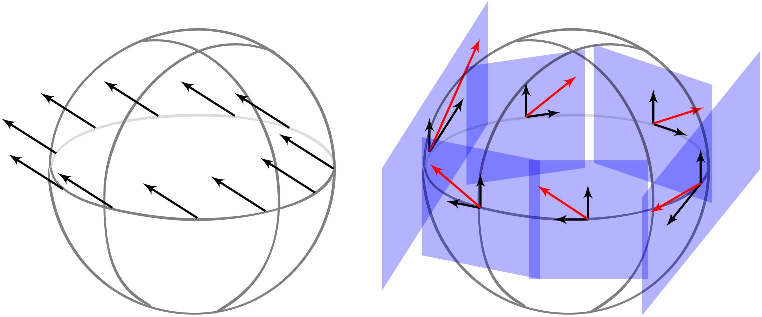
Chociaż najmniej intuicyjną, wybierzemy własność **(3)** jako definicję. Oto najważniejszy powód naszej decyzji:

> *“Nie krzywienie się” jest własnością lokalną, natomiast własności jedyności* ***(1)*** *i najkrótszej drogi* ***(2)*** *są globalne, i odwołują się do kształtu całej powierzchni.*

Ale jak uogólnić (czy też doprecyzować) własność **(3)** dla dowolnej powierzchni? Wykorzystamy ideę równoległego transportu wektora wzdłuż krzywej. Postrzeganie równoległości tak na prawdę zależy od położenia obserwatora.

Które wektory są wzajemnie równoległe?

Ale jak uogólnić (czy też doprecyzować) własność **(3)** dla dowolnej powierzchni? Wykorzystamy ideę równoległego transportu wektora wzdłuż krzywej. Postrzeganie równoległości tak na prawdę zależy od położenia obserwatora.



Które wektory są wzajemnie równoległe?

Uwaga

Równoległość wektorów w różnych przestrzeniach stycznych do powierzchni M oznacza ***proporcjonalność współczynników*** *ich przedstawienia w standardowej bazie obu przestrzeni stycznych.*

Przypomnienie

Definicja

Gładkie pole wektorowe na M to odwzorowanie gładkie

$$F: M \to \mathbb{R}^3.$$

Gładkie pole wektorowe nazywamy **stycznym** jeśli $F(p) \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$ dla wszystkich $p \in M$.

Definicja

Pochodna kierunkowa pola wektorowego F w kierunku wektora $v \in T_pM$ jest zdefiniowana naturalnie jako

$$\nabla_v F \stackrel{\text{def.}}{=} (\nabla_v F_1, \nabla_v F_2, \nabla_v F_3)$$

gdzie F_i są funkcjami współrzędnymi pola F.

Przypomnienie

Definicja

Gładkie pole wektorowe na M to odwzorowanie gładkie

$$F\colon M \to \mathbb{R}^3.$$

Gładkie pole wektorowe nazywamy **stycznym** jeśli $F(p) \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$ dla wszystkich $p \in M$.

Definicja

Pochodna kierunkowa pola wektorowego F w kierunku wektora $v \in T_pM$ jest zdefiniowana naturalnie jako

$$\nabla_v F \stackrel{\text{def.}}{=} (\nabla_v F_1, \nabla_v F_2, \nabla_v F_3)$$

gdzie F_i są funkcjami współrzędnymi pola F.

Przykład

Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\widehat{n} : M \to \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na M. Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena (z odpowiednim znakiem).

Lemat

Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji, tj. liniowość ze względu na dodawanie wektorów i pól wektorowych, jednorodność, oraz reguła Leibniza:

$$\nabla_v(FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G,$$

czyli w każdym punkcie p mamy

$$\nabla_v\langle F, G\rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p)\rangle + \langle F(p), \nabla_v G\rangle.$$

Przykład

Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\widehat{n}: M \to \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na M. Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena (z odpowiednim znakiem).

Lemat

Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji, tj. liniowość ze względu na dodawanie wektorów i pól wektorowych, jednorodność, oraz reguła Leibniza:

$$\nabla_v(FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G,$$

czyli w każdym punkcie p mamy

$$\nabla_v\langle F, G\rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p)\rangle + \langle F(p), \nabla_v G\rangle.$$

Przykład

Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\widehat{n}: M \to \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na M. Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena (z odpowiednim znakiem).

Lemat

Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji, tj. liniowość ze względu na dodawanie wektorów i pól wektorowych, jednorodność, oraz reguła Leibniza:

$$\nabla_v(FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G,$$

czyli w każdym punkcie p mamy

$$\nabla_v\langle F, G\rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p)\rangle + \langle F(p), \nabla_v G\rangle.$$

Rozważmy styczne pole wektorowe $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$. Niech $p \in M$ i $v \in T_pM$.

Oczywiście nie ma powodu, aby wektor $\nabla_v Z$ należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?).

Spróbujemy "naprawić" tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie $\nabla_v Z$ na T_pM.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ będzie stycznym polem wektorowym. Niech $p \in M$ oraz $v \in T_p(M)$. **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\widehat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_pM}\left(\nabla_v Z\right),$$

gdzie Π_W oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń W.

Rozważmy styczne pole wektorowe $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$. Niech $p \in M$ i $v \in T_pM$.

Oczywiście nie ma powodu, aby wektor $\nabla_v Z$ należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?).

Spróbujemy "naprawić" tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie $\nabla_v Z$ na T_pM.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ będzie stycznym polem wektorowym. Niech $p \in M$ oraz $v \in T_p(M)$. **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\widehat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_pM}\left(\nabla_v Z\right),$$

gdzie Π_W oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń W.

Rozważmy styczne pole wektorowe $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$. Niech $p \in M$ i $v \in T_pM$.
Oczywiście nie ma powodu, aby wektor $\nabla_v Z$ należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?).
Spróbujemy "naprawić" tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie $\nabla_v Z$ na T_pM.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ będzie stycznym polem wektorowym. Niech $p \in M$ oraz $v \in T_p(M)$. **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\widehat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_pM}\left(\nabla_v Z\right),$$

gdzie Π_W oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń W.

Rozważmy styczne pole wektorowe $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$. Niech $p \in M$ i $v \in T_pM$.
Oczywiście nie ma powodu, aby wektor $\nabla_v Z$ należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?).
Spróbujemy "naprawić" tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie $\nabla_v Z$ na T_pM.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ będzie stycznym polem wektorowym. Niech $p \in M$ oraz $v \in T_p(M)$. **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\widehat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_pM}\left(\nabla_v Z\right),$$

gdzie Π_W oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń W.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Y, Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ będą stycznymi polami wektorowymi. Niech $f\colon M \to \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją, $p \in M$ punktem na M, $v, w \in T_p(M)$ wektorami z przestrzeni stycznej i wreszcie $a, b \in \mathbb{R}$ liczbami rzeczywistymi. Wtedy

- *Odwzorowanie*

$$\widehat{\nabla}_{(\cdot)} Z\colon T_pM \to T_pM$$

  zadana przez $v \mapsto \widehat{\nabla}_v Z$ jest odwzorowaniem liniowym.
- $\widehat{\nabla}_v(Y+Z) = \widehat{\nabla}_v Y + \widehat{\nabla}_v Z.$
- $\widehat{\nabla}_v fZ = (\widehat{\nabla}_v f) Z(p) + f(p)(\widehat{\nabla}_v Z).$
- $\widehat{\nabla}_v \langle Y, Z\rangle = \langle \widehat{\nabla}_v Y, Z(p)\rangle + \langle Y(p), \widehat{\nabla}_v Z\rangle$

Dowód:

Dowody tych własności są analogiczne jak własności pochodnej kierunkowej (wystarczy skorzystać z liniowości rzutowania na podprzestrzeń).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Y, Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ będą stycznymi polami wektorowymi. Niech $f\colon M \to \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją, $p \in M$ punktem na M, $v, w \in T_p(M)$ wektorami z przestrzeni stycznej i wreszcie $a, b \in \mathbb{R}$ liczbami rzeczywistymi. Wtedy

- *Odwzorowanie*

$$\widehat{\nabla}_{(\cdot)} Z\colon T_p M \to T_p M$$

  zadana przez $v \mapsto \widehat{\nabla}_v Z$ jest odwzorowaniem liniowym.
- $\widehat{\nabla}_v (Y + Z) = \widehat{\nabla}_v Y + \widehat{\nabla}_v Z.$
- $\widehat{\nabla}_v fZ = (\widehat{\nabla}_v f) Z(p) + f(p)(\widehat{\nabla}_v Z).$
- $\widehat{\nabla}_v \langle Y, Z \rangle = \langle \widehat{\nabla}_v Y, Z(p) \rangle + \langle Y(p), \widehat{\nabla}_v Z \rangle$

Dowód:

Dowody tych własności są analogiczne jak własności pochodnej kierunkowej (wystarczy skorzystać z liniowości rzutowania na podprzestrzeń).

Niech $\alpha\colon(a,b)\to M\subset\mathbb{R}^3$ będzie krzywą na powierzchni i niech $Z\colon M\to\mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym wzdłuż α. Oznaczmy

$$\frac{\widehat{D}(Z\circ\alpha)}{dt}(t)\overset{\text{def.}}{=}\Pi_{T_{\alpha(t)}M}\left(\frac{d(Z\circ\alpha)}{dt}(t)\right)=\widehat{\nabla}_{\alpha'(t)}Z$$

Uwaga

Zauważmy, że styczne pole wektorowe α' do krzywej $\alpha\subset M$ jest w postaci $Z\circ\alpha$.

Niech $\alpha\colon (a, b) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą na powierzchni i niech $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym wzdłuż α. Oznaczmy

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_{\alpha(t)}M}\left(\frac{d(Z \circ \alpha)}{dt}(t)\right) = \widehat{\nabla}_{\alpha'(t)} Z$$

Uwaga

Zauważmy, że styczne pole wektorowe α' do krzywej $\alpha \subset M$ jest w postaci $Z \circ \alpha$.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $\gamma : (a, b) \to M$ będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą γ nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na M jeśli wektory $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ wzdłuż krzywej γ pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe $Z : M \to \mathbb{R}^3$ takie, że $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$, oraz

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \gamma)(t)}{dt} = \Pi_{T_{\alpha(t)}M}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \widehat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

Uwaga

W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu $\gamma(t)$.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $\gamma\colon (a, b) \to M$ będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą γ nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na M jeśli wektory $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ wzdłuż krzywej γ pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ takie, że $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$, oraz

$$\frac{\widehat{D}\left(Z \circ \gamma\right)(t)}{dt} = \Pi_{T_{\alpha(t)}M}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \widehat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

Uwaga

W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu $\gamma(t)$.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $\gamma\colon(a,b) \to M$ będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą γ nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na M jeśli wektory $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ wzdłuż krzywej γ pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe $Z\colon M \to \mathbb{R}^3$ takie, że $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$, oraz

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \gamma)(t)}{dt} = \Pi_{T_{\alpha(t)}M}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \widehat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

Uwaga

W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu $\gamma(t)$.

Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Załóżmy, że krzywa γ jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja $\tau_\gamma \equiv 0$ oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez T_γ i N_γ). Wobec tego pochodna pola stycznego γ' wzdłuż γ będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem $\gamma(t) = vt + w$ dla pewnych $v, w \in \mathbb{R}^2$.
Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Załóżmy, że krzywa γ jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja $\tau_\gamma \equiv 0$ oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez T_γ i N_γ). Wobec tego pochodna pola stycznego γ' wzdłuż γ będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma\rangle}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem $\gamma(t) = vt + w$ dla pewnych $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Załóżmy, że krzywa γ jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja $\tau_\gamma \equiv 0$ oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez T_γ i N_γ). Wobec tego pochodna pola stycznego γ' wzdłuż γ będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem $\gamma(t) = vt + w$ dla pewnych $v, w \in \mathbb{R}^2$.
Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Załóżmy, że krzywa γ jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja $\tau_\gamma \equiv 0$ oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez T_γ i N_γ). Wobec tego pochodna pola stycznego γ' wzdłuż γ będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem $\gamma(t) = vt + w$ dla pewnych $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Załóżmy, że krzywa γ jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja $\tau_\gamma \equiv 0$ oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez T_γ i N_γ). Wobec tego pochodna pola stycznego γ' wzdłuż γ będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem $\gamma(t) = vt + w$ dla pewnych $v, w \in \mathbb{R}^2$.
Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Uwaga (Bardzo ważna!)

Sprzecznie z naszą intuicją, bycie krzywą geodezyjną jest własnością ***parametryzacji****, a nie samej krzywej na powierzchni. Powyższy przykład udowadnia jedynie, że prosta w postaci parametrycznej jest geodezyjną na płaszczyźnie.*

Rozważmy teraz krzywą $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ *zadaną wzorem*

$$\beta(t) = (t^3, t^3, t^3).$$

Obraz tej krzywej jest oczywiście prostą, jednak podobne przeliczenia jak powyżej pokazują, że

$$\frac{\widehat{D}\beta'(t)}{dt} = \frac{d\beta'(t)}{dt} = (6t, 6t, 6t) \neq 0.$$

Uwaga (Bardzo ważna!)

Sprzecznie z naszą intuicją, bycie krzywą geodezyjną jest własnością ***parametryzacji****, a nie samej krzywej na powierzchni. Powyższy przykład udowadnia jedynie, że prosta w postaci parametrycznej jest geodezyjną na płaszczyźnie.*

Rozważmy teraz krzywą $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ *zadaną wzorem*

$$\beta(t) = (t^3, t^3, t^3).$$

Obraz tej krzywej jest oczywiście prostą, jednak podobne przeliczenia jak powyżej pokazują, że

$$\frac{\widehat{D}\beta'(t)}{dt} = \frac{d\beta'(t)}{dt} = (6t, 6t, 6t) \neq 0.$$

Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.
Ze wzgędu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik S^2 sparametryzowany jako $\gamma\colon(-\pi,\pi) \to S^2$ wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) =$$

$$= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}\left((-\cos(t), -\sin(t), 0)\right) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}(-\gamma(t)) = 0.$$

Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.
Ze wzgędu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik S^2 sparametryzowany jako $\gamma : (-\pi, \pi) \to S^2$ wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) =$$

$$= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}\left((-\cos(t), -\sin(t), 0)\right) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}(-\gamma(t)) = 0.$$

Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.
Ze wzgędu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik S^2 sparametryzowany jako $\gamma\colon(-\pi,\pi) \to S^2$ wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}\left(\frac{d\gamma'(t)}{dt}\right) = \\ = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}\left((-\cos(t), -\sin(t), 0)\right) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}(-\gamma(t)) = 0.$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią i niech $\gamma\colon(a, b) \to M$ będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.

1. *Krzywa γ ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj. $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$ dla wszysktich $t \in (a, b)$.*
2. *Reparametryzacja $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ h\colon(c, d) \to (a, b) \to M$ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy h jest funkcją afiniczną.*
3. *Jeśli obraz krzywej $\delta\colon(c, d) \to M$ jest zawarty w obrazie krzywej γ, $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$, wtedy δ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.*

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią i niech $\gamma\colon (a, b) \to M$ będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.

1. *Krzywa γ ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj. $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$ dla wszysktich $t \in (a, b)$.*
2. *Reparametryzacja $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ h\colon (c, d) \to (a, b) \to M$ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy h jest funkcją afiniczną.*
3. *Jeśli obraz krzywej $\delta\colon (c, d) \to M$ jest zawarty w obrazie krzywej γ, $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$, wtedy δ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.*

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią i niech $\gamma\colon (a, b) \to M$ będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.

1. *Krzywa γ ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj. $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$ dla wszysktich $t \in (a, b)$.*
2. *Reparametryzacja $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ h\colon (c, d) \to (a, b) \to M$ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy h jest funkcją afiniczną.*
3. *Jeśli obraz krzywej $\delta\colon (c, d) \to M$ jest zawarty w obrazie krzywej γ, $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$, wtedy δ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.*

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią i niech $\gamma\colon(a, b) \to M$ będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.

1. *Krzywa γ ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj. $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$ dla wszyskich $t \in (a, b)$.*
2. *Reparametryzacja $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ h\colon(c, d) \to (a, b) \to M$ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy h jest funkcją afiniczną.*
3. *Jeśli obraz krzywej $\delta\colon(c, d) \to M$ jest zawarty w obrazie krzywej γ, $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$, wtedy δ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.*

Dowód:

Pomijamy. $\square$