

Elementarna Geometria Różniczkowa Geodezyjne i Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Opracowanie: Marek Kaluba*

2013

Spis treści

11 Geodezyjne I	77
11.1 Idea	77
11.2 Pochodna kowariantna	78
11.3 Definicja geodezyjnych	81
12 Geodezyjne II	85
12.1 Równania geodezyjnych	85
12.2 Istnienie i jedyność	90
13 Twierdzenie Gaussa-Bonneta	95
13.1 Odwzorowanie wykładnicze	95
13.2 Triangulacje	99
13.3 Twierdzenie Gaussa-Bonneta	100

*Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Geodezyjne I

11.1 Idea

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

- (1) każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;
- (2) odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;
- (3) kiedy podróżujemy wzdłuż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Chociaż proste na płaszczyźnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład S^2 :

- Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej “długości geograficznej” jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

Jak widzimy nawet przy najprostszej powierzchni jaką jest sfera, konfrontacja intuicji “najkrótszej drogi” z własnościami okręgów wielkich sprawia, że nie możemy zakładać równoczesnego spełnienia wszystkich trzech własności.

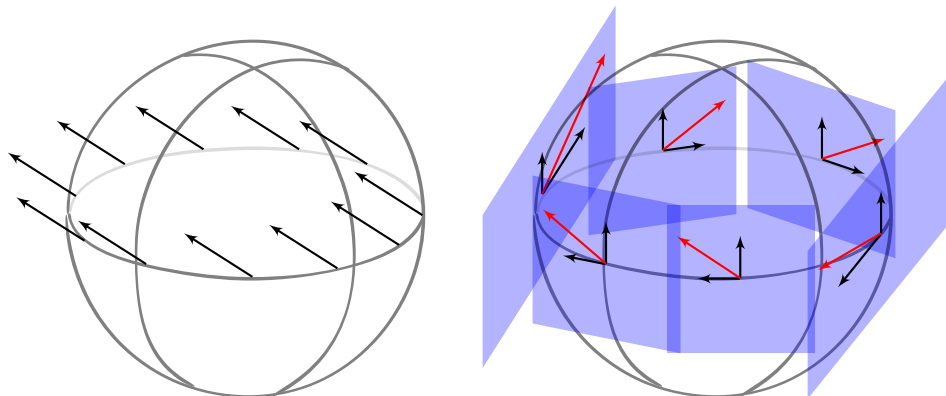
Chociaż najmniej intuicyjną, wybierzemy własność (3) jako definicję. Oto najważniejszy powód naszej decyzji:

“Nie krzywienie się” jest własnością *lokalną*, natomiast własności jedyności (1) i najkrótszej drogi (2) są *globalne*, i odwołują się do kształtu całej powierzchni.

Z naszego punktu widzenia na powierzchnię (poprzez lokalne układy współrzędnych), własności lokalne, które można sprawdzać w otoczeniu każdego punktu z osobna są znacznie bardziej przystępne (obliczeniowo), niż te, które wymagają brania pod uwagę związków pomiędzy punktami (być może) bardzo dalekimi.

11.2 Pochodna kowariantna

Ale jak uogólnić (czy też doprecyzować) własność (3) dla dowolnej powierzchni? Wykorzystamy ideę równoległego transportu wektora wzdłuż krzywej. Postrzeganie równoległości tak na prawdę zależy od położenia obserwatora.



Które wektory są wzajemnie równoległe?

Niech $\alpha(t) \subset M$ będzie krzywą na powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$. Z punktu widzenia obserwatora w \mathbb{R}^3 równoległe wektory wzdłuż krzywej będą miały *proporcjonalne współrzędne w \mathbb{R}^3* (tj. będą tworzyć pole wektorowe wzdłuż α skierowane wzdłuż jednej prostej w \mathbb{R}^3). Z punktu widzenia obserwatora na powierzchni, poruszającego się wzdłuż krzywej, równoległe będą te wektory, które będą miały *proporcjonalne współrzędne w bazie $\{x_1, x_2\}$ w przestrzeniach stycznych $T_{\alpha(t)}M$ dla wszystkich t* .

Uwaga. Równoległość wektorów w różnych przestrzeniach stycznych do powierzchni M oznacza **proporcjonalność współczynników** ich przedstawienia w standardowej bazie obu przestrzeni stycznych.

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Przypomnijmy materiał którym zajmowaliśmy się podczas badania własności izometrii.

Przypomnienie

Definicja 11.1. Gładkie pole wektorowe na M to odwzorowanie gładkie

$$F: M \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Gładkie pole wektorowe nazywamy **stycznym** jeśli $F(p) \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ dla wszystkich $p \in M$.

Definicja 11.2. Pochodna kierunkowa pola wektorowego F w kierunku wektora $v \in T_p M$ jest zdefiniowana naturalnie jako

$$\nabla_v F \stackrel{\text{def.}}{=} (\nabla_v F_1, \nabla_v F_2, \nabla_v F_3)$$

gdzie F_i są funkcjami współrzędnymi pola F .

Przykład. Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\hat{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na M . Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena (z odpowiednim znakiem).

Lemat 11.3. Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji,

- $\nabla_{av+bw} F = a\nabla_v F + b\nabla_w F$
- $\nabla_v(aF + bG) = a\nabla_v F + b\nabla_v G$
- $\nabla_v(FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G$

czyli w każdym punkcie p mamy

$$\nabla_v \langle F, G \rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p) \rangle + \langle F(p), \nabla_v G \rangle.$$

Rozważmy styczne pole wektorowe $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Niech $p \in M$ i $v \in T_p M$. Oczywiście nie ma powodu, aby wektor $\nabla_v Z$ należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?). Spróbujemy “naprawić” tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie $\nabla_v Z$ na $T_p M$.

Definicja 11.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie stycznym polem wektorowym. Niech $p \in M$ oraz $v \in T_p(M)$. **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\hat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_p M}(\nabla_v Z),$$

gdzie Π_W oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń W .

Lemat 11.5. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Y, Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą stycznymi polami wektorowymi. Niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją, $p \in M$ punktem na M , $v, w \in T_p(M)$ wektorami z przestrzeni stycznej i wreszcie $a, b \in \mathbb{R}$ liczbami rzeczywistymi. Wtedy

- *Odwzorowanie*

$$\hat{\nabla}_{(\cdot)} Z: T_p M \rightarrow T_p M$$

zadana przez $v \mapsto \hat{\nabla}_v Z$ jest odwzorowaniem liniowym.

- $\hat{\nabla}_v(Y + Z) = \hat{\nabla}_v Y + \hat{\nabla}_v Z$.
- $\hat{\nabla}_v f Z = (\hat{\nabla}_v f) Z(p) + f(p)(\hat{\nabla}_v Z)$.
- $\hat{\nabla}_v \langle Y, Z \rangle = \langle \hat{\nabla}_v Y, Z(p) \rangle + \langle Y(p), \hat{\nabla}_v Z \rangle$

Dowód:

Dowody tych własności są analogiczne jak własności pochodnej kierunkowej (lemat ??). Wystarczy skorzystać z liniowości rzutowania ortogonalnego na podprzestrzeń.

□

Zanim wprowadzimy definicję geodezyjnej potrzebujemy jeszcze jednego oznaczenia. Będą nas interesowały styczne pola wektorowe wzdłuż krzywych, więc mając daną parametryzację krzywej będzie można bardzo prosto policzyć pochodną kowariantną.

Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą na powierzchni i niech $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym wzdłuż α . Oznaczmy

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_{\alpha(t)}M} \left(\frac{d(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \right) = \widehat{\nabla}_{\alpha'(t)} Z$$

Uwaga. Zauważmy, że styczne pole wektorowe α' do krzywej $\alpha \subset M$ jest w postaci $Z \circ \alpha$. Będzie tak za każdym razem, kiedy pole wektorowe wzdłuż krzywej γ (jak np. pole wektorów stycznych γ') jest zadane jako wektor zależny od zmiennej t (musimy tylko zadbać, by pole było wystarczająco gładkie).

11.3 Definicja geodezyjnych

Teraz korzystając z języka pochodnych kowariantnych możemy wypowiedzieć co to znaczy, że krzywa “nie skręca w prawo bądź w lewo”.

Definicja 11.6. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą γ nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na M jeśli wektory $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ wzdłuż krzywej γ pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$, oraz

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \gamma)}{dt}(t) = \Pi_{T_{\alpha(t)}M} \left(\frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \widehat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

Uwaga. W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu $\gamma(t)$.

Zanalizujemy dwa proste przypadki – płaszczyznę i sferę.

Przykład. Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Załóżmy, że krzywa γ jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja $\tau_\gamma \equiv 0$ oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez T_γ i N_γ). Wobec tego pochodna pola stycznego γ' wzdłuż γ będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle} \left(\frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem $\gamma(t) = vt + w$ dla pewnych $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Uwaga (Bardzo ważna!). *Sprzecznie z naszą intuicją, bycie krzywą geodezyjną jest własnością **parametryzacji**, a nie samej krzywej na powierzchni. Powyższy przykład udowadnia jedynie, że prosta w postaci parametrycznej jest geodezyjną na płaszczyźnie.*

Rozważmy teraz krzywą $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ zadaną wzorem

$$\beta(t) = (t^3, t^3, t^3).$$

Obraz tej krzywej jest oczywiście prostą, jednak podobne przeliczenia jak powyżej pokazują, że

$$\frac{\widehat{D}\beta'(t)}{dt} = \frac{d\beta'(t)}{dt} = (6t, 6t, 6t) \neq 0.$$

Przykład. Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.

Ze względu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik S^2 sparametryzowany jako $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$ wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} \left(\frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} ((-\cos(t), -\sin(t), 0)) = \\ &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} (-\gamma(t)) = 0, \end{aligned}$$

ponieważ sfera ma tę własność, że przestrzeń styczna w każdym punkcie jest prostopadła do prostej wyznaczonej przez ten punkt i środek sfery.

Następujący lemat pokazuje związki pomiędzy geodezyjnymi a ich reparametryzacjami.

Lemat 11.7. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią i niech $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.*

1. Krzywa γ ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj. $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$).
2. Reparametryzacja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h: (c, d) \rightarrow (a, b) \rightarrow M$ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy h jest funkcją afiniczną.
3. Jeśli obraz krzywej $\delta: (c, d) \rightarrow M$ jest zawarty w obrazie krzywej γ , $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$, wtedy δ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.

Dowód: Dowody pierwszych dwóch punktów są łatwe (można potraktować je jako ćwiczenia na zrozumienie definicji geodezyjnej). Dowód trzeciego jest bardziej wymagający.

Pomijamy. □

Geodezyjne II

12.1 Równania geodezyjnych

Dotychczas nie używaliśmy jeszcze lokalnych układów współrzędnych do analizy geodezyjnych. W następującym lemacie pokażemy, że warunek z definicji krzywej geodezyjnej lokalnie wyraża się jako układ równań różniczkowych. Będziemy mogli wtedy użyć ogólnych twierdzeń o rozwiązaniach tych układów, aby dać pewne warunki przy których geodezyjne istnieją i są jednoznaczne.

Twierdzenie 12.1 (Równania geodezyjnych). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech $\gamma: (a, b) \rightarrow x(U) \subset M$ będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez*

$$g \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \gamma: (a, b) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (g_1(t), g_2(t))$$

i niech g_1, g_2 będą funkcjami współrzędnych $g(t)$. Pochodna kowariantna krzywej γ wyraża się jako

$$\frac{\widehat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(g_k''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

Stąd wynika, że γ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy te współczynniki są zerowe, tj. spełnione są następujące równania:

$$\begin{cases} g_1'' + \Gamma_{11}^1(g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^1 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^1 (g_2')^2 = 0 \\ g_2'' + \Gamma_{11}^2 (g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^2 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^2 (g_2')^2 = 0 \end{cases}$$

Dowód jest dosyć techniczny, jednak polega tylko na bezpośrednim przeliczeniu powyższej pochodnej kowariantnej. Można go potraktować jako ćwiczenie na zrozumienie definicji pochodnej pola wektorowego. Dla ułatwienia orientacji wszystkie krzywe $\mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy literami łacińskimi, zaś krzywe $\mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ – greckimi.

Dowód:

Musimy wyrazić równość $\frac{\hat{D}\gamma'}{dt} = 0$ w terminach lokalnego układu współrzędnych. Zauważmy, że pole wektorów stycznych do γ wyraża się w bazie $\{x_1, x_2\}$ następująco:

$$\gamma'(t) = (x \circ g)'(t) = x_1(g(t))g'_1(t) + x_2(g(t))g'_2(t).$$

- Spróbujmy policzyć bezpośrednio pochodną stycznego pola wektorowego.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{D}\gamma'}{dt} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{D}}{dt} [g'_i(t)x_i(g(t))] = \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{dg'_i(t)}{dt} x_i(g(t)) + g'_i(t) \frac{\hat{D}(x_i \circ g)}{dt}(t) \right) \quad (12.1) \end{aligned}$$

- Aby kontynuować musimy zbadać krzywą $x_i \circ g = (x_i \circ x^{-1}) \circ \gamma$ i policzyć jej pochodną kowariantną. W poniższych rachunkach będziemy pomijać argumenty funkcji, należy zatem pamiętać, że wszystko dzieje się w punkcie $g(t)$.
- Mamy następującą równość:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{D}(x_i \circ g)}{dt}(t) &= \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left(\frac{d((x_i \circ x^{-1}) \circ \gamma)}{dt}(t) \right) = \\ &= \hat{\nabla}_{\gamma'(t)} (x_i \circ x^{-1}) = \hat{\nabla}_{[x_1(g(t))g'_1(t) + x_2(g(t))g'_2(t)]} (x_i \circ x^{-1}) = \\ &= g'_1(t) \hat{\nabla}_{x_1(g(t))} (x_i \circ x^{-1}) + g'_2(t) \hat{\nabla}_{x_2(g(t))} (x_i \circ x^{-1}). \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tutaj z liniowości pochodnej kowariantnej.

- Niech $a^1: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ będzie krzywą zadaną wzorem

$$a^1(s) \stackrel{\text{def.}}{=} (s + g_1(t), g_2(t)).$$

Podobnie można zdefiniować a^2 . Wtedy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{x_1(g(t))} (x_i \circ x^{-1}) &= \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left(\frac{d(x_i \circ x^{-1} \circ x \circ a^j)}{ds} \Big|_{s=0} \right) = \\ &= \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left(\frac{d(x_i \circ a^j)}{ds} \Big|_{s=0} \right) = \Pi_{T_{\gamma(t)}M} x_{ij}(g(t)) \end{aligned}$$

- Skorzystajmy teraz z formuła Gaussy wyrażającej x_{ij} jako odpowiednią kombinację liniową:

$$\begin{aligned} g'_1(t)\Pi_{T_{\gamma(t)}M}(x_{1i}(g(t))) + g'_2(t)\Pi_{T_{\gamma(t)}M}(x_{2i}(g(t))) = \\ = c'_1(t)(\Gamma_{1i}^1(g(t))x_1(g(t)) + \Gamma_{1i}^2(g(t))x_2(g(t))) + \\ + c'_2(t)(\Gamma_{2i}^1(g(t))x_1(g(t)) + \Gamma_{2i}^2(g(t))x_2(g(t))) \end{aligned}$$

- Grupując odpowiednie wyrazy możemy tę równość zapisać

$$\frac{\widehat{D}(x_i \circ g)}{dt}(t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k(g(t)) g'_j(t) x_k(g(t)).$$

- Wstawiając uzyskaną równość do równania 12.1 powyżej otrzymujemy

$$\frac{\widehat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{i=1}^2 \left(g''_i(t) x_i(g(t)) + g'_i(t) \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k(g(t)) g'_j(t) x_k(g(t)) \right)$$

- Ponownie zmieniając kolejność sumowania i grupując otrzymujemy

$$\frac{\widehat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(g''_k(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(g(t)) g'_i(t) g'_j(t) \right) x_k(g(t)),$$

co kończy dowód.

□

Przykład: powierzchnia obrotowa

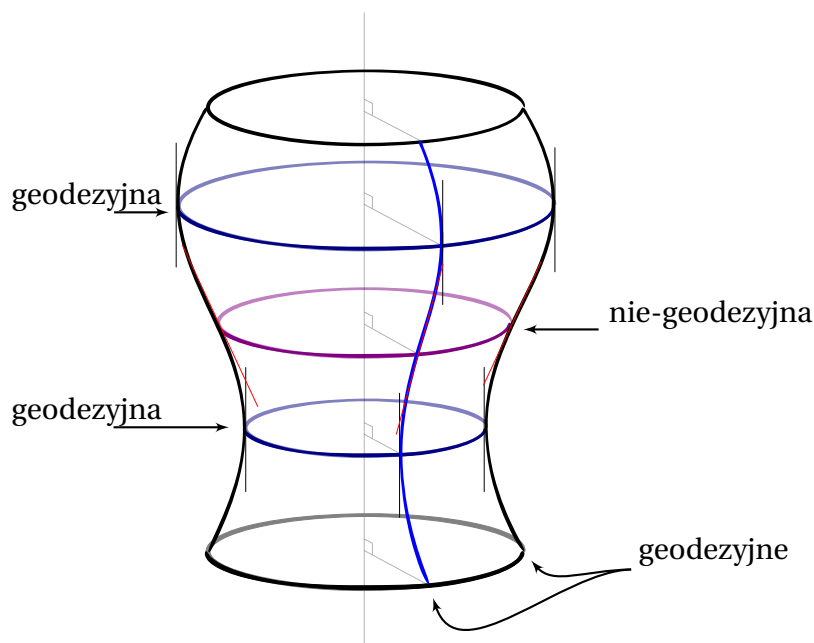
Przykład: powierzchnia obrotowa

Wniosek. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos(\vartheta), \alpha_2(t) \sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ jest unormowana. Wtedy

1. Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni M może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.
2. Okrąg na powierzchni M prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.



Przedstawimy jedynie szkic rozumowania, dopracowanie szczegółów pozostawiając jako zadanie domowe.

Szkic Dowodu: Dowód pierwszej części:

- Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t, \vartheta) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t) \cos \vartheta, \alpha_2'(t) \sin \vartheta)$$

$$x_2(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \sin \vartheta, \alpha_2(t) \cos \vartheta)$$

- Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t, \vartheta) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t) \cos \vartheta, \alpha_2''(t) \sin \vartheta)$$

$$x_{12}(t, \vartheta) = x_{21}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2'(t) \sin \vartheta, \alpha_2'(t) \cos \vartheta)$$

$$x_{22}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \cos \vartheta, -\alpha_2(t) \sin \vartheta).$$

- Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- Zauważmy, teraz że x_1 i x_2 są prostopadłe, więc żeby obliczyć np. Γ_{12}^2 wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez x_2 a wynik podzielić przez $\|x_2\|^2$. Gdyby wektory standardowej bazy nie były prostopadłe, musielibyśmy rozwiązać odpowiedni układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
- Sprawdzić, że w tym przypadku $\Gamma_{22}^1 = -\alpha_1 \alpha'_1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1}$ zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$\begin{aligned} g_1'' - \alpha_1 \alpha'_1 (g_2')^2 &= 0 \\ g_2'' + 2 \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} g_1' g_2' &= 0 \end{aligned}$$

- Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$ dla pewnej stałej φ_0 (o s myślimy jako o promieniu, ϑ to kąt obrotu). Zatem $g_1(t) = t$ i $g_2(t) = \vartheta_0$.
- Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

Dowód drugiej części, implikacja (\Rightarrow).

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const}$.
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2 \alpha'_2 = 0$.
- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha'_1(t_0) = 0$.

- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja (\Leftarrow).

- Jeśli dla t_0 wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy $\alpha'_1(t_0) = 0$.
- Mamy również $g''_1 = 0$ (dlaczego?) i β spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- Twierdzimy, że jeśli wybierzemy $\vartheta(s) = s$, wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).

□

Uwaga. Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.

Wniosek. Niech $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy α może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.

Dowód: Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku).

□

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie trudniejszy.

12.2 Istnienie i jedyność

Czy dwa dowolne punkty na płaszczyźnie mogą zostać połączone geodezyjną? Gdyby tak było wtedy krzywe geodezyjne spełniałyby analogiczny postulat do punktu (I) z wykładu 12 (istnieje prosta łącząca dwa dowolne punkty). Oczywiście przykład sfery pokazuje, że nie możemy liczyć na jedyność takich geodezyjnych, więc może istnieje przynajmniej jedna?

Istnienie i jedyność geodezyjnych

Przykład. Rozważmy $M = \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. Geodezyjne na każdym podzbiorze płaskizny są liniami prostymi (dlaczego?), więc nie istnieje nawet jedna krzywa geodezyjna w M łącząca punkty $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

Następujące twierdzenie pokazuje, że istnienie takich “dziur” w powierzchni jest jednak jedyną przeszkodą do istnienia geodezyjnych.

Twierdzenie 12.2 (Rinowa-Hopfa). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli M jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in M$ istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących a i b .*

Zamiast szukać krzywych geodezyjnych łączących dwa punkty na powierzchni M (co wymagałoby globalnego spojrzenia na nią) spróbujmy ustalić punkt $p \in M$, wybrać wektor $v \in T_p M$, a następnie szukać geodezyjnej w wyznaczonym przez v kierunku. Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną gładką krzywą. Okazuje się jednak, że zawsze wśród krzywych odpowiadających v znajdziemy geodezyjną.

Twierdzenie 12.3. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką.*

- *Dla każdego punktu $p \in M$ i wektora $v \in T_p M$ stycznego w tym punkcie istnieje: $\varepsilon > 0$, oraz taka krzywa geodezyjna*

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M,$$

że $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(t) = v$.

- *Krzywa γ jest jedyną taką krzywą w następującym sensie:*

Jeśli dla pewnej $\delta > 0$ istnieje krzywa geodezyjna $\tilde{\gamma}: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ o tej własności, że $\tilde{\gamma}(0) = p$ i $\tilde{\gamma}'(0) = v$, wtedy istnieje mniejsze otoczenie $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$ na którym γ i $\tilde{\gamma}$ są sobie równe. (za $(-\zeta, \zeta)$ można przyjąć $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$)

Uwaga. *Klasy równoważności funkcji równych na pewnym otoczeniu punktu p nazywa się czasami kielkami funkcji w punkcie p . Zatem powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja między zbiorami: kielków geodezyjnych w punkcie p oraz wektorów stycznych $v \in T_p M$.*

Dowód: Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Skorzystamy z twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Równania geodezyjnych są równaniami rzędu drugiego, ale jeśli wprowadzimy dodatkowe zmienne $h_1 = g'_1$ i $h_2 = g'_2$ możemy je zapisać jako układ równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} g'_1 = h_1 \\ g'_2 = h_2 \\ h'_1 = -\Gamma_{11}^1 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^1 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^1 h_2^2 \\ h'_2 = -\Gamma_{11}^2 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^2 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^2 h_2^2 \end{cases} \quad (12.2)$$

Zamiast myśleć o tych równaniach jako o układzie, rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ h'_1(t) \\ h'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ -\Gamma_{11}^1(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^1(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^1(g(t))h_2^2(t) \\ -\Gamma_{11}^2(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^2(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^2(g(t))h_2^2(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{z warunkiem początkowym} \quad \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

gdzie (p_1, p_2) to współrzędne punktu $x^{-1}(p)$, zaś (v_1, v_2) to współczynniki wektora v w standardowej bazie $\{x_1, x_2\}$.

Przypomnijmy teraz twierdzenie dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań. Wyniki zawarte w tym twierdzeniu są przypisywane Picardowi, Lindelöfowi, Lipschitzowi i Cauchyemu.

Twierdzenie 12.4 (Picard-Lindelöf-Lipschitz-Cauchy-...). *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją gładką. Ponadto ustalmy punkt $v_0 \in U$. Istnieje $\varepsilon > 0$, oraz taka gładka funkcja $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, że $\alpha(0) = v_0$, oraz*

$$\alpha'(t) = F(\alpha(t)),$$

dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Co więcej, jeśli $\tilde{\alpha}: (-\delta, \delta) \rightarrow U$ jest drugą taką funkcją spełniającą te własności, wtedy $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$ dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$.

Stosując to twierdzenie do naszej sytuacji widzimy, że istnieje krzywa $G: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}^2$ (rozumiane jako $U \times T_p M$),

$$G(t) = (k_1(t), k_2(t), l_1(t), l_2(t))$$

spełniająca nasz układ równań (12.2). Z konstrukcji tego układu wynika, że krzywa $\gamma(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(k_1(t), k_2(t))$ jest szukaną geodezyjną przechodzącą przez punkt $p \in M$, oraz $\gamma'(0) = v$. Jedyność tej krzywej wynika z drugiej części zacytowanego powyżej twierdzenia. \square

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

13.1 Odwzorowanie wykładnicze

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu. Wiadzieliśmy, że wokół każdego punktu na powierzchni istnieją otoczenia na których geodezyjne są jednoznaczne (tj. istnieją kielki geodezyjnych). Użyjemy tego faktu w następującej definicji:

Definicja 13.1. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, $p \in M$ punktem na niej, i niech $v \in T_p M$ będzie wektorem stycznym do M w p .

- Liczbę ϱ_v definiujemy jako

$$\varrho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

(ϱ_v to maksymalna długość geodezyjnej na M jaką możemy poprowadzić przez p w kierunku v)

- Zbiór $E_p \subset T_p M$ definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{v \in T_p M : \varrho_v > 1\}$$

(E_p to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

Uwaga. • W definicji E_p zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.

- W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego v w przestrzeni stycznej

$$\varrho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy $E_p = T_p S^2$.

- Oczywiście $E_p \neq \emptyset$, ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do E_p (jako geodezyjna stała).

Lemat 13.2. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.

- Jeśli $v \in E_p$ i $s \in \mathbb{R}$, wtedy sv należy do E_p wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-\varrho_v < s < \varrho_v.$$

(jeśli v należy do E_p , wówczas należy cały odcinek łączący $-\varrho_v v$ z $\varrho_v v$)

- Jeśli $u \in T_p M$ jest wektorem jednostkowym, wtedy

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\varrho_v < s < \varrho_v\}.$$

Dowód: Ćwiczenie na zrozumienie definicji ϱ_v i E_p . □

Na podstawie powyższego lematu nie możemy wnioskować, czy zbiór E_p jest otwarty w $T_p M$, ani czy ma niepuste wnętrze. Wiemy natomiast, że wraz z każdym wektorem v zawiera on cały odcinek od $-v$ do v .

Chociaż nie jest to oczywiste E_p zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech $D(T_q M, \delta)$ oznacza kulę zawartą w przestrzeni $T_q M$ o środku w punkcie $\mathcal{O} = (0, 0)$ i promieniu δ .

Lemat 13.3. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem. Istnieją:

- otoczenie otwarte $W \subset M$ zawierające p ,
- promień δ (zależny od punktu p) takie, że

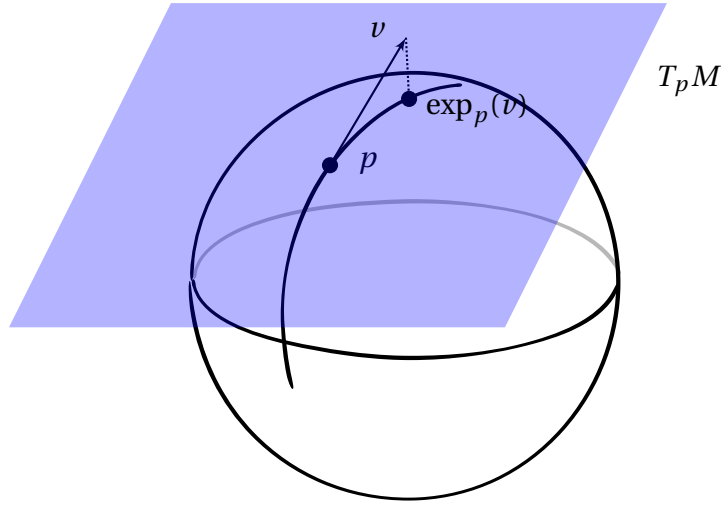
dla każdego $q \in W$ zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Definicja 13.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$. Dla każdego $v \in E_p \subset T_p M$ niech $\gamma_v : (-\varrho_v, \varrho_v) \rightarrow M$ będzie geodezyjną spełniającą $\gamma_v(0) = p$, $\gamma'_v(0) = v$. **Odwzorowanie wykładnicze** $\exp_p : E_p \rightarrow M$ jest zdefiniowane wzorem

$$\exp_p(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma_v(1).$$

Uwaga. Odwzorowanie wykładnicze jest dobrze określone, ponieważ wszystkie geodezyjne które mają dziedzinę większą niż $(-1, 1)$ mają tę samą wartość dla $t = 1$ (dlaczego?).



Następny lemat powie nam, że geodezyjne na powierzchni M przechodzące przez punkt p są obrazami prostych przechodzących przez środek $T_p M$.

Lemat 13.5. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem. Niech ponadto $v \in E_p$ będzie wektorem stycznym do M . Wtedy krzywa $\zeta: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$ zdefiniowana przez

$$\zeta(s) = \exp_p(sv)$$

jest geodezyjną spełniającą $\zeta(0) = p$ oraz $\zeta'(0) = v$. Jej długość na odcinku od p do $\exp_p(v)$ jest równa $\|v\|$.

Dowód: Niech $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$ będzie geodezyjną spełniającą: $\gamma_v(0) = p$, oraz $\gamma'_v(0) = v$. Ustalmy $s \in (-\rho_v, \rho_v)$ i zdefiniujmy $\tilde{\gamma}: (-\rho_v/s, \rho_v/s) \rightarrow M$ jako

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(st).$$

Ponieważ funkcja $t \rightarrow st$ jest liniowa, więc z charakterystyki parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat 11.7) wynika, że $\tilde{\gamma}$ jest również geodezyjną. Oczywiście $\tilde{\gamma}(0) = p$ i $\tilde{\gamma}'(0) = sv$.

Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich $s \in (-\rho_v, \rho_v)$. Zatem $\zeta \equiv \gamma_v$ jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jedności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|$$

dla wszystkich s . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|v\| \int_0^1 ds = \|v\|.$$

□

Widzieliśmy już na przykładzie sfery, że odwzorowanie wykładnicze nie jest injekcją. W każdym punkcie $p \in S^2$ sfery mamy $E_p = T_p S^2$, jednak proste na płaszczyźnie odwzorowywane na okręgi wielkie na sferze muszą się w pewnym momencie na siebie “nawinać”. Powinniśmy jednak zauważyć, że jeśli ograniczymy się do odpowiednio małego dysku w $T_p S^2$, jego obraz przy odwzorowaniu wykładniczym nie powinien wykraczać poza hemisferę zawierającą punkt p . Jest to fakt znacznie ogólniejszy.

Przypomnijmy, że przez $D(T_p M, \delta)$ oznaczamy dysk o środku w punkcie $(0, 0) \in T_p M$ i promieniu δ .

Lemat 13.6. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$. Istnieje wtedy taka $\delta > 0$, że*

- *zbiór $\exp_p(D(T_p M, \delta))$ jest otwarty w M , oraz*
- *odwzorowanie wykładnicze*

$$\exp_p \big|_{D(T_p M, \delta_p)}$$

ograniczone do zbioru $D(T_p M, \delta_p)$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Jeśli M jest powierzchnią zamkniętą (tj. zwartą i bez brzegu), wtedy korzystając ze zwartości można wykazać, że istnieje jedna uniwersalna stała δ_M zależna tylko od M , którą można podstawić w miejsce δ (zależną od punktu) w powyższych stwierdzeniach.

Uwaga. Widzimy, że $\exp_p: D(T_p M, \delta_p) \rightarrow M$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Nietrudno sprawdzić, że jest to przykład lokalnego układu współrzędnych na M ($D(T_p M, \delta) \cong D^2 \subset \mathbb{R}^2$).

Wniosek. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Ustalmy $0 < \varepsilon < \delta$. Wtedy istnieje $V \subset M$ – otwarte otoczenie punktu p , które posiada następujące własności:*

- $V \subset \exp_q(D(T_q M, \varepsilon))$ dla wszystkich $q \in V$.
- każde dwa punkty w V można połączyć krzywą geodezyjną o długości mniejszej niż ε .

Uwaga. Płaszczyzna ma tę własność, że wokół każdego punktu istnieje wypukłe otoczenie otwarte, tj. otoczenie w którym każde dwa punkty można połączyć odcinkiem geodezyjnej (czyli odcinkiem prostej). Tę własność nazywamy **wypukłością geodezyjną** i (co nie jest do końca oczywiste) posiada ją każda powierzchnia.

13.2 Triangulacje

Triangulacja

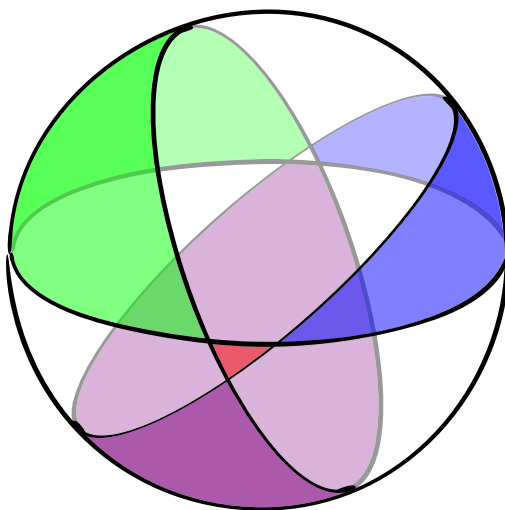
Definicja 13.7. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, i niech $x, y, z \in M$ będą różnymi punktami. Podzbiór $T \subset M$ nazywamy **trójkątem geodezyjnym** o wierzchołkach x, y, z i oznaczamy Δxyz jeśli T jest homeomorficzny z dyskiem jednostkowym $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, oraz brzeg T oznaczany jako ∂T składa się z trzech krzywych geodezyjnych $\overline{xy}, \overline{yz}, \overline{xz}$ (o końcach w x, y, z). Te geodezyjne nazywamy **krawędziami** trójkąta geodezyjnego Δxyz .

Definicja 13.8. Niech \mathcal{T} będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na M . Załóżmy, że dla wszystkie trójkąty w \mathcal{T} są różne i każdy punkt $x \in M$ należy do pewnego trójkąta z \mathcal{T} . Rodzinę \mathcal{T} nazywamy **triangulacją** powierzchni M jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ mamy

- $T_1 \cap T_2 = \{x\}$ i x jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$, gdzie \overline{xy} jest ich wspólną krawędzią, lub
- $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

Lemat 13.9. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje triangulacja geodezyjna \mathcal{T} zwartej powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od ε .

Przykład. Triangulacja geodezyjna sfery S^2 .



13.3 Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Twierdzenie 13.10 (Lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli Δxyz jest trójkątem geodezyjnym na M zawartym w obrazie $\exp_x(D(T_x M, \delta_x))$, wtedy*

$$\int_{\Delta xyz} K dA = \angle x + \angle y + \angle z - \pi.$$

Uwaga. Zapis dA oznacza całkowanie względem formy powierzchni którą używaliśmy podczas badania intuicyjnej definicji krzywizny Gaussa. Można inaczej zapisać $dA = \det(g_{ij}) ds dt$, wtedy należałoby wybrać lokalny układ współrzędnych i całkować po przeciwobrazie $x^{-1}(\Delta xyz)$.¹

Zauważmy, że chociaż do bezpośredniego policzenia całki z krzywizny będziemy musieli wybrać pewien lokalny układ współrzędnych, wynik nie będzie od tego wyboru zależny. Mówiąc inaczej – krzywizna całkowita trójkąta geodezyjnego zależy tylko od powierzchni, a nie od sposobu umieszczenia w przestrzeni Euklidesowej.

Definicja 13.11. Niech \mathcal{T} będzie triangulacją zwartej powierzchni M . Niech $F_{\mathcal{T}}$ oznacza liczbę trójkątów w \mathcal{T} , $E_{\mathcal{T}}$ – liczbę ich różnych krawędzi, zaś $V_{\mathcal{T}}$ –

¹Porównaj z definicją pola powierzchni ??.

liczbę ich (różnych) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni M .

Uwaga. Charakterystyka Eulera **nie zależy** od wyboru triangulacji, więc zamiast $\chi^{\mathcal{T}} M$ będziemy pisać $\chi(M)$. Co więcej triangulacja nie musi być geodezyjna. Charakterystyka Eulera jest bardzo ważnym niezmiennikiem topologicznym (tj. dwie homeomorficzne powierzchnie muszą mieć tę samą charakterystykę Eulera), a nawet ogólniej homotopijnym. W szczególności służy ona do klasyfikacji z dokładnością do homeomorfizmu zwartych powierzchni bez brzegu.

Twierdzenie 13.12 (Twierdzenie Gaussa-Bonneta). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie zwartą powierzchnią. Wtedy*

$$\int_M K dA = 2\pi \chi(M).$$

Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

Ponieważ M jest zwarta, więc istnieje taka δ_M , że odwzorowanie wykładnicze $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$ w każdym punkcie $p \in M$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech \mathcal{T} będzie triangulacją geodezyjną powierzchni M . Możemy założyć, że każdy trójkąt $T \in \mathcal{T}$ jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego \exp_q .

Zatem do każdego trójkąta $T \in \mathcal{T}$ (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

Niech $T \in \mathcal{T}$ będzie trójkątem i niech v będzie wierzchołkiem. Oznaczmy przez $\angle(T, v)$ kąt w T przy wierzchołku v . (Przyjmujemy, że jeśli $v \notin T$, wtedy $\angle(T, v) = 0$). Wtedy

$$\int_M K dA = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\left(\sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right]$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta. Możemy teraz zmienić kolejność sumowania:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\left(\sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] = \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa 2π mamy

$$\sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}).$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

□