

Elementarna Geometria Różniczkowa

15 lutego 2013

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe,
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe,
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 5

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

- ▶ Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte tego punktu $V \subset M$ oraz gładka bijekcja $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$. Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy **regularną** jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$.
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

- ▶ Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte tego punktu $V \subset M$ oraz gładka bijekcja $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$. Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy **regularną** jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$.
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

- ▶ Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte tego punktu $V \subset M$ oraz gładka bijekcja $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$. Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy **regularną** jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$.
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

- ▶ Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje otoczenie otwarte tego punktu $V \subset M$ oraz gładka bijekcja $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$. Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy **regularną** jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$.
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

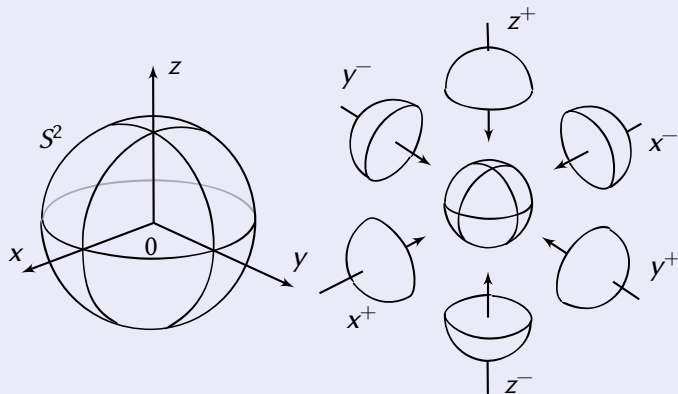
Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Jednostkowa sfera, tj. powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ jest przykładem powierzchni regularnej.

Lokalnym układem współrzędnych jest np.

$x^\pm(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$ jak na następującym rysunku



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomicie funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

***UWAGA! Zakładamy, że wszystkie powierzchnie które
będzie my rozważać dalej są regularne i łukowo spójne.***

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ i $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Wtedy złożenie

$$y^{-1} \circ x: x^{-1}(x(U) \cap y(V)) \rightarrow y^{-1}(x(U) \cap y(V))$$

nazywamy **funkcją zmiany układu współrzędnych** i oznaczamy $\Phi_{x,y}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

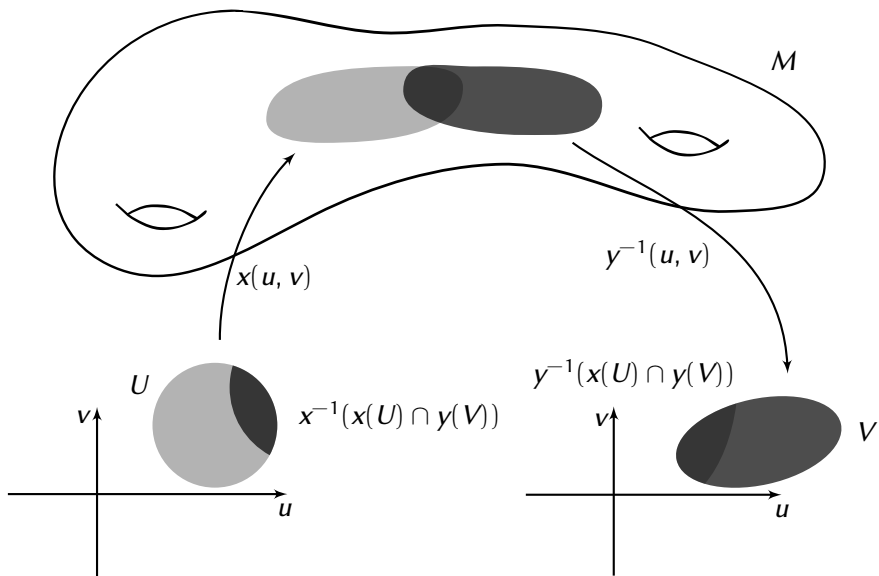
Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne



Dowód:

Dowód:

- 1) Ponieważ x jest injekcją, więc jest bijekcją na swój obraz. Ponieważ x jest funkcją gładką, oraz na zbiorze U rząd jej pochodnej jest równy 2 (z definicji lokalnego układu współrzędnych), więc korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej na zbiorze $x(U)$ istnieje do x gładka funkcja odwrotna, zatem x jest dyfeomorfizmem.
- 2) Ponieważ złożenie dwóch dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem, wystarczy sprawdzić, że jest spełniona własność lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$.

Dowód:

- 1) Ponieważ x jest injekcją, więc jest bijekcją na swój obraz. Ponieważ x jest funkcją gładką, oraz na zbiorze U rząd jej pochodnej jest równy 2 (z definicji lokalnego układu współrzędnych), więc korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej na zbiorze $x(U)$ istnieje do x gładka funkcja odwrotna, zatem x jest dyfeomorfizmem.
- 2) Ponieważ złożenie dwóch dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem, wystarczy sprawdzić, że jest spełniona własność lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$.

Dowód:

- 1) Ponieważ x jest injekcją, więc jest bijekcją na swój obraz. Ponieważ x jest funkcją gładką, oraz na zbiorze U rząd jej pochodnej jest równy 2 (z definicji lokalnego układu współrzędnych), więc korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej na zbiorze $x(U)$ istnieje do x gładka funkcja odwrotna, zatem x jest dyfeomorfizmem.
- 2) Ponieważ złożenie dwóch dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem, wystarczy sprawdzić, że jest spełniona własność lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$.

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

Ponieważ \mathbf{x} jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.

Ostatnia teza ($\Phi_{\mathbf{x},y} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
\end{aligned}$$

Ponieważ \mathbf{x} jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.

Ostatnia teza ($\Phi_{\mathbf{x},y} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomie funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

Ponieważ \mathbf{x} jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.

Ostatnia teza ($\Phi_{\mathbf{x},y} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
\end{aligned}$$

Ponieważ \mathbf{x} jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.

Ostatnia teza ($\Phi_{\mathbf{x},y} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

Ponieważ \mathbf{x} jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.

Ostatnia teza ($\Phi_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
\end{aligned}$$

Ponieważ \mathbf{x} jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.

Ostatnia teza ($\Phi_{\mathbf{x},y} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem. Odwzorowanie f nazywamy gładkim jeśli dla każdego punktu $p \in M$ i dla każdego lokalnego układu współrzędnych $x: U \rightarrow M$ takiego, że $p \in x(U)$ funkcja

$$f \circ x: U \xrightarrow{x} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

jest gładka jako funkcja z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R} .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}: x^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}: x^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}: x^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie $M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Mówimy, że f jest **dyfeomorfizmem powierzchni** jeśli f jest gładką bijekcją, której odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech

$$f: M \rightarrow N$$

będzie odwzorowaniem ciągłym. f jest odwzorowaniem gładkim (a więc gładkim jako odwzorowanie $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje wokół niego lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ oraz istnieje lokalny układ współrzędnych $y: V \rightarrow N$ wokół $f(p) \in N$ takie, że złożenie

$$y^{-1} \circ f \circ x: U \rightarrow V$$

jest gładkie jako odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (tam, gdzie to złożenie ma sens).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

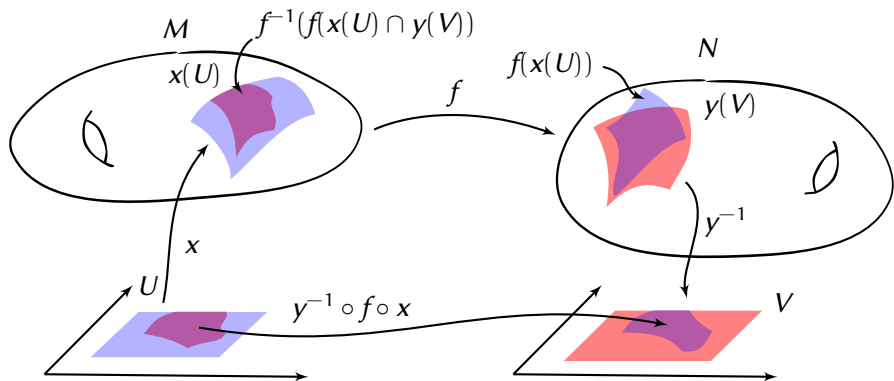
Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne



Dowód:

Aby złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ będzie miało sens musimy założyć, że ograniczymy się do zbioru otwartego $f(x(U)) \cap y(V) \neq \emptyset$. Dla wygody oznaczmy $A \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1}(y^{-1}(y(V)))$.

Założmy, że odwzorowanie $f: M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^3$ jest gładkie.

Ponieważ x i y są dyfeomorfizmami na swój obraz, więc i ich funkcje odwrotne są gładkie. Zatem złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ jest również gładkie.

Założmy, że $y^{-1} \circ f \circ x$ jest odwzorowaniem gładkim z $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$. Możemy je złożyć wcześniej z $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$, oraz później z $y: V \rightarrow y(V)$ otrzymując:

$$M \supset x(U) \underbrace{\xrightarrow{x^{-1}} U \xrightarrow{x}}_{\text{id}_{x(U)}} x(U) \xrightarrow{f} y(V) \underbrace{\xrightarrow{y^{-1}} V \xrightarrow{y}}_{\text{id}_{y(V)}} y(V) \subset N.$$

□

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Aby złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ będzie miało sens musimy założyć, że ograniczymy się do zbioru otwartego $f(x(U)) \cap y(V) \neq \emptyset$. Dla wygody oznaczmy $A \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1}(y^{-1}(y(V)))$.

Założmy, że odwzorowanie $f: M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^3$ jest gładkie.

Ponieważ x i y są dyfeomorfizmami na swój obraz, więc i ich funkcje odwrotne są gładkie. Zatem złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ jest również gładkie.

Założmy, że $y^{-1} \circ f \circ x$ jest odwzorowaniem gładkim z $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$. Możemy je złożyć wcześniej z $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$, oraz później z $y: V \rightarrow y(V)$ otrzymując:

$$M \supset x(U) \underbrace{\xrightarrow{x^{-1}} U \xrightarrow{x}}_{\text{id}_{x(U)}} x(U) \xrightarrow{f} y(V) \underbrace{\xrightarrow{y^{-1}} V \xrightarrow{y}}_{\text{id}_{y(V)}} y(V) \subset N.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Aby złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ będzie miało sens musimy założyć, że ograniczymy się do zbioru otwartego $f(x(U)) \cap y(V) \neq \emptyset$. Dla wygody oznaczmy $A \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1}(y^{-1}(y(V)))$.

Założmy, że odwzorowanie $f: M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^3$ jest gładkie.

Ponieważ x i y są dyfeomorfizmami na swój obraz, więc i ich funkcje odwrotne są gładkie. Zatem złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ jest również gładkie.

Założmy, że $y^{-1} \circ f \circ x$ jest odwzorowaniem gładkim z $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$. Możemy je złożyć wcześniej z $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$, oraz później z $y: V \rightarrow y(V)$ otrzymując:

$$M \supset x(U) \xrightarrow{x^{-1}} \underbrace{U \xrightarrow{x} x(U)}_{\text{id}_{x(U)}} \xrightarrow{f} y(V) \xrightarrow{y^{-1}} \underbrace{V \xrightarrow{y} y(V)}_{\text{id}_{y(V)}} \subset N.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Aby złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ będzie miało sens musimy założyć, że ograniczymy się do zbioru otwartego $f(x(U)) \cap y(V) \neq \emptyset$. Dla wygody oznaczmy $A \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1}(y^{-1}(y(V)))$.

Założmy, że odwzorowanie $f: M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^3$ jest gładkie.

Ponieważ x i y są dyfeomorfizmami na swój obraz, więc i ich funkcje odwrotne są gładkie. Zatem złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ jest również gładkie.

Założmy, że $y^{-1} \circ f \circ x$ jest odwzorowaniem gładkim z $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$. Możemy je złożyć wcześniej z $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$, oraz później z $y: V \rightarrow y(V)$ otrzymując:

$$M \supset x(U) \underbrace{\xrightarrow{x^{-1}} U \xrightarrow{x}}_{\text{id}_{x(U)}} x(U) \xrightarrow{f} y(V) \underbrace{\xrightarrow{y^{-1}} V \xrightarrow{y}}_{\text{id}_{y(V)}} y(V) \subset N.$$

□

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

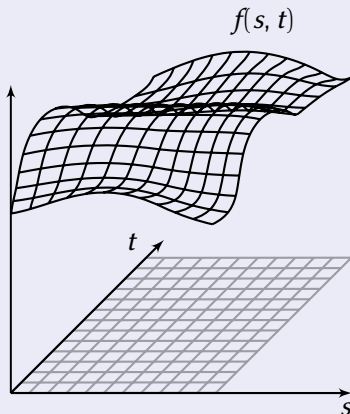
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$. Powierzchnię $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią Monge'a** jeśli jej parametryzacja jest wykresem funkcji f :

$$x(s, t) = (s, t, f(s, t)).$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Parametryzacja Monge'a spełnia naszą definicję powierzchni (Definicja 5.3), ponieważ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(s, t) &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \end{bmatrix} = \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), -\frac{\partial f}{\partial t}(s, t), 1 \right) \neq 0.\end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

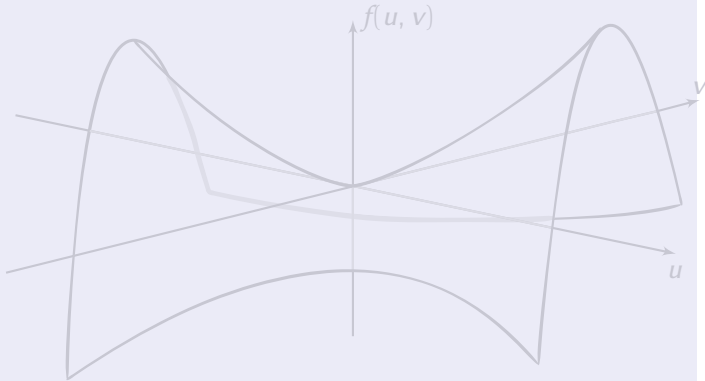
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- ▶ Paraboloida
- ▶ Powierzchnia siodłowa



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

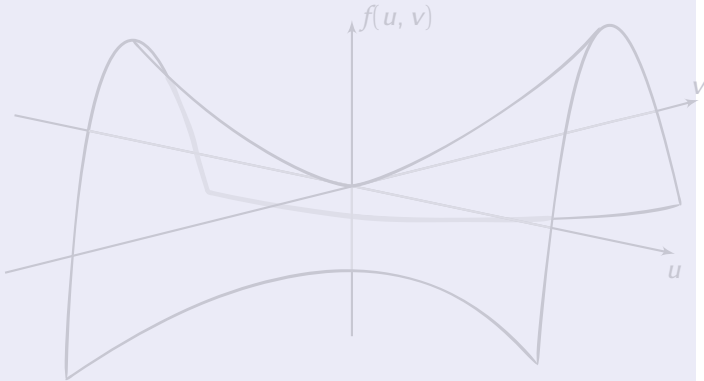
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- ▶ Paraboloida
- ▶ Powierzchnia siodłowa



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

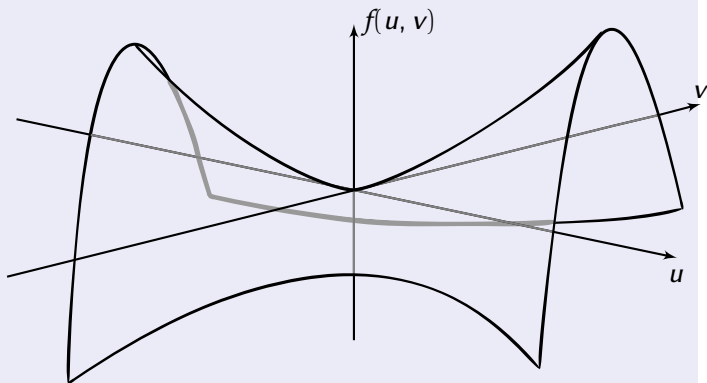
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- ▶ Paraboloida
- ▶ Powierzchnia siodłowa



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

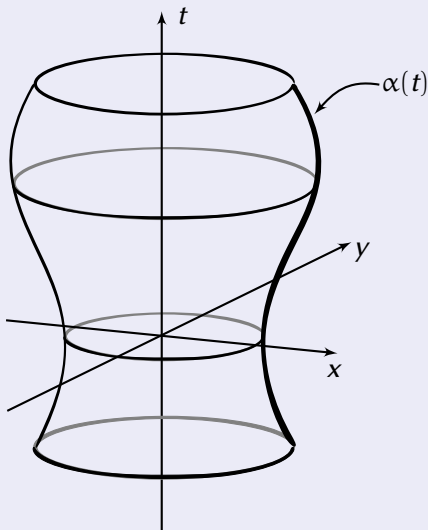
Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powierzchnia obrotowa powstaje poprzez obrócenie krzywej $\alpha(t)$ wokół pewnej ustalonej prostej.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była regularna musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była regularna musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była regularna musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była regularna musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne



-
- A 3D coordinate system with axes labeled x , y , and z . The z -axis is vertical, the x -axis is horizontal to the right, and the y -axis points towards the upper right. Two concentric ellipses are centered at the origin in the xy -plane: an outer black ellipse and an inner red ellipse. A blue circular arc is drawn on the right side of the red ellipse, centered at the origin. A line segment labeled r connects the origin to the center of the blue arc. A bracket labeled R indicates the distance from the origin to the red ellipse along the x -axis.

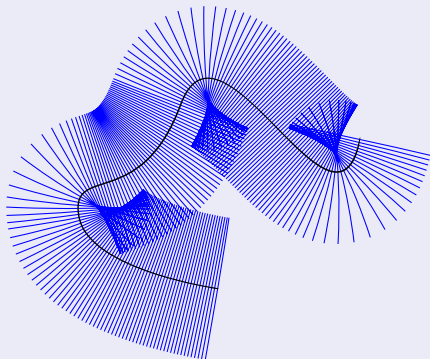
-
- A 3D coordinate system with axes labeled x , y , and z . The z -axis is vertical, the x -axis is horizontal to the right, and the y -axis points towards the upper right. Two concentric ellipses are centered at the origin in the xy -plane: an outer black ellipse and an inner red ellipse. A blue circle is drawn on the right side of the red ellipse, tangent to it at a point. A line segment labeled r connects the origin to the point of tangency. A bracket labeled R indicates the distance from the origin to the rightmost point of the red ellipse.

- Hiperboloida jednowłokowa (katenoida)

Powierzchnią prostokreślną nazywamy powierzchnię o parametryzacji

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

gdzie α i β są krzywymi w przestrzeni \mathbb{R}^3 . α nazywa się potocznie kierownicą, β - ruletą.



Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- ▶ Walec, Stożek
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ▶ Katenoida.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- ▶ Walec, Stożek
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ▶ Katenoida.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- ▶ Walec, Stożek
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ▶ Katenoida.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- ▶ Walec, Stożek
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ▶ Katenoida.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- ▶ Walec, Stożek
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ▶ Katenoida.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją. Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** odwzorowania F jeśli

$$\text{rank } DF(p) = 0.$$

- ▶ W naszym przypadku oznacza to, że wszystkie pochodne cząstkowe są równe 0.
- ▶ Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomie funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją. Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** odwzorowania F jeśli

$$\text{rank } DF(p) = 0.$$

- ▶ W naszym przypadku oznacza to, że wszystkie pochodne cząstkowe są równe 0.
- ▶ Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomie funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją. Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** odwzorowania F jeśli

$$\text{rank } DF(p) = 0.$$

- ▶ W naszym przypadku oznacza to, że wszystkie pochodne cząstkowe są równe 0.
- ▶ Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomie funkcje

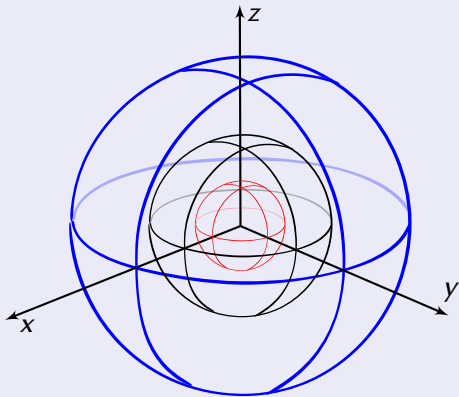
Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

- ▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- ▶ paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- ▶ hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:
 $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

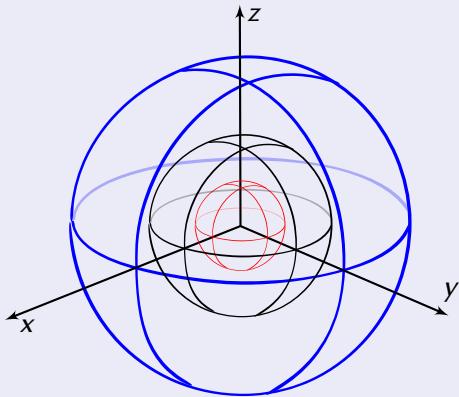
Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

- ▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- ▶ paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- ▶ hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:
 $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

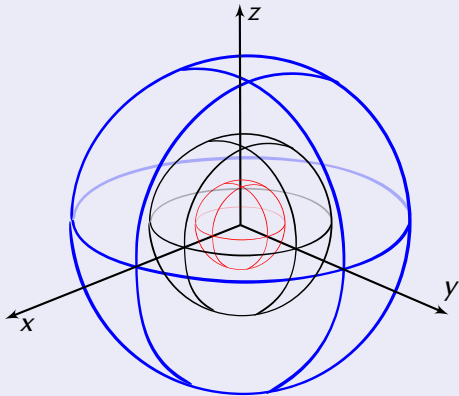
Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

- ▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- ▶ paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- ▶ hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:
 $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 6

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Na każdej powierzchni mamy naturalnie dane dwie rodziny krzywych. Dla każdego ustalonego $s_0 \in \mathbb{R}$ możemy rozpatrywać krzywą

$$x(s_0, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Podobnie dla dowolnego t_0 mamy krzywą

$$x(\cdot, t_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Krzywe te leżą na naszej powierzchni, a wektory styczne do tych krzywych będą grały bardzo ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

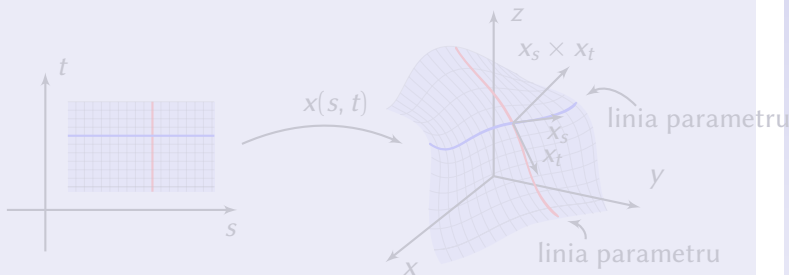
Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0) \Big|_{s=s_0}, \quad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t) \Big|_{t=t_0}.$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

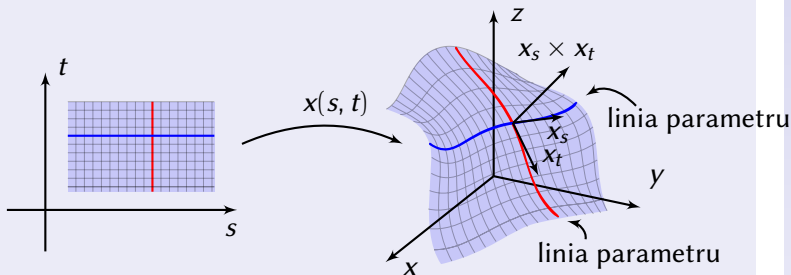
Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0) \Big|_{s=s_0}, \quad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t) \Big|_{t=t_0}.$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ *Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ *Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ *Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ *Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ *Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ *Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

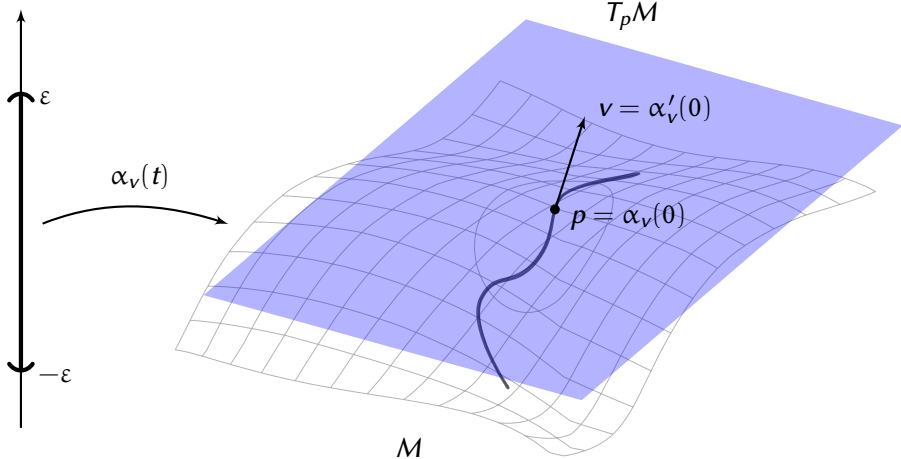
I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne



Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p .
2. Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi

$$\dim T_p M = 2.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p .
2. Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi

$$\dim T_p M = 2.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p .
2. Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi

$$\dim T_p M = 2.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β .

Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_x(U)} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 v = \alpha'_v(t)|_{t=0} &= x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujemy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 v = \alpha'_v(t)|_{t=0} &= x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujemy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech

$$\begin{aligned} x: U &\longrightarrow M \\ (s_0, t_0) &\longmapsto p \in M \end{aligned}$$

będzie lokalnym układem współrzędnych. **Wektor normalny w p** definiujemy jako

$$N(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|},$$

gdzie x_s i x_t wektorami stycznymi do linii parametru przechodzących przez punkt p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

*Ponieważ wektor normalny ma długość 1, więc koniec każdego wektora normalnego $N(p)$ leży na powierzchni sfery dwuwymiarowej $N(M) \subset S^2$. Zatem N może być traktowany jako **funkcja między powierzchniami***

$$N:M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

*punktów na powierzchni M . Jest to tzw. **odwzorowanie Gaussa** do którego wrócimy później.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} . **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- ▶ $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- ▶ $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} . **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- ▶ $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- ▶ $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V , oraz niech B będzie formą dwuliniową na V . **Macierz formy** B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Standardowy iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle = \sum x_i^2$ jest oczywiście formą dwuliniową. W standardowej bazie przestrzeni \mathbb{R}^n jego macierzą jest $A = \text{Id}$.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Dla powierzchni M definiujemy **pierwszą formę podstawową w punkcie p** jako formę dwuliniową

$$\begin{aligned} I_p: T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w \mathbb{R}^3 . Oznaczamy ją symbolem I_p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathcal{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p \in M}.$$

Uwaga

Postać macierzowa pierwszej formy podstawowa zależy w istotny sposób od zanurzenia powierzchni w \mathbb{R}^3 (czyli od wyboru lokalnego układu współrzędnych $x: U \rightarrow M$).

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t . Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2 . Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, w punkcie p ma postać

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2 . Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, w punkcie p ma postać

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

[Powierzchnie w \$\mathbb{R}^3\$](#) [Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa](#)[Przestrzeń styczna](#)[Wektor normalny](#)[Powtórka z algebry liniowej I](#)[I forma podstawowa](#)[Pochodne kierunkowe. Izometria.](#)[Krzywizna Gaussa I](#)[Krzywizna Gaussa II](#)[Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne](#)

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$

$$x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$

$$x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t) \qquad x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t) \qquad x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$, $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}) , [odpowiednio (\bar{g}_{ij})] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y].

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_{\Phi}^{-1})^T (g_{ij}) J_{\Phi}^{-1}$$

Dowód:
Pomijamy.

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$, $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}) , [odpowiednio (\overline{g}_{ij})] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczmy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy (\overline{g}_{ij}) wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g}_{ij} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:
Pomijamy.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$, $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}) , [odpowiednio (\overline{g}_{ij})] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczmy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy (\overline{g}_{ij}) wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g}_{ij} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:
Pomijamy.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))}.$$

Dowód:
Ćwiczenie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))}.$$

Dowód:
Ćwiczenie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne



Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))}.$$

Dowód:
Ćwiczenie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

**Pochodne
kierunkowe.
Izometria.**

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 7

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej.

Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w **kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Możemy wybrać tak małe ε , że obrazy $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$ i $\beta(-\varepsilon, \varepsilon)$ będą już zawarte w $x(U)$. Z definicji przestrzeni stycznej, wektory styczne do tych krzywych w 0 można wyrazić jako kombinacje liniowe wektorów x_1 i x_2 . Co więcej, z równości $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ wynika, że współczynniki tych kombinacji są sobie równe w punkcie p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Możemy wybrać tak małe ε , że obrazy $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$ i $\beta(-\varepsilon, \varepsilon)$ będą już zawarte w $x(U)$. Z definicji przestrzeni stycznej, wektory styczne do tych krzywych w 0 można wyrazić jako kombinacje liniowe wektorów x_1 i x_2 . Co więcej, z równości $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ wynika, że współczynniki tych kombinacji są sobie równe w punkcie p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Możemy wybrać tak małe ε , że obrazy $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$ i $\beta(-\varepsilon, \varepsilon)$ będą już zawarte w $x(U)$. Z definicji przestrzeni stycznej, wektory styczne do tych krzywych w 0 można wyrazić jako kombinacje liniowe wektorów x_1 i x_2 .

Co więcej, z równości $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ wynika, że współczynniki tych kombinacji są sobie równe w punkcie p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Możemy wybrać tak małe ε , że obrazy $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$ i $\beta(-\varepsilon, \varepsilon)$ będą już zawarte w $x(U)$. Z definicji przestrzeni stycznej, wektory styczne do tych krzywych w 0 można wyrazić jako kombinacje liniowe wektorów x_1 i x_2 . Co więcej, z równości $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ wynika, że współczynniki tych kombinacji są sobie równe w punkcie p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zatem również

$$(x^{-1} \circ \alpha)'(0) = (x^{-1} \circ \beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(0) &= [(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)]'(0) = \\&= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p=(x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1} \circ \beta)'(0)} = \\&= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0),\end{aligned}$$

Pochodne kierunkowe

Zatem również

$$(\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)'(0) = (\mathbf{x}^{-1} \circ \beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(0) &= [(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)]'(0) = \\ &= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p=(x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1} \circ \beta)'(0)} = \\ &= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0),\end{aligned}$$

gdzie J oznacza jacobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). □

Pochodne kierunkowe

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- ▶ $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- ▶ $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- ▶ $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- ▶ $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_vf + b\nabla_wf$
- ▶ $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_vf + b\nabla_v(g)$
- ▶ $\nabla_v(fg) = g\nabla_vf + f\nabla_vg$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- ▶ $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_vf + b\nabla_wf$
- ▶ $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_vf + b\nabla_v(g)$
- ▶ $\nabla_v(fg) = g\nabla_vf + f\nabla_vg$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujemy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \quad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujemy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t) \Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujemy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujemy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t) \Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wtedy

$$\begin{aligned}\nabla_{av+bw}f &= (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} = \\ &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\ &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\ &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = \\ &\qquad\qquad\qquad a \nabla_v f + b \nabla_w f.\end{aligned}$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \nabla_{av+bw}f &= (f \circ \beta)'(0) = \left. \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \right|_{t=0} = \\
 &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\
 &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\
 &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &\qquad\qquad\qquad a \nabla_v f + b \nabla_w f.
 \end{aligned}$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \nabla_{av+bw}f &= (f \circ \beta)'(0) = \left. \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \right|_{t=0} = \\
 &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\
 &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\
 &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &\qquad\qquad\qquad a \nabla_v f + b \nabla_w f.
 \end{aligned}$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem gładkim (tj. polem wektorowym).

Pochodną f w punkcie $p \in M$ definiujemy jako

$$\begin{aligned} Df_p: T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto \nabla_v f \end{aligned}$$

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie gładką funkcją. Wtedy dla każdego $v \in T_p M$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$ oraz

$$Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie gładką funkcją. Wtedy dla każdego $v \in T_p M$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$ oraz

$$Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie gładką funkcją. Wtedy dla każdego $v \in T_p M$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$ oraz

$$Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $v \in T_p M$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

jest krzywą na powierzchni N , oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $v \in T_p M$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$,
że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

jest krzywą na powierzchni N , oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z
definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy
 $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Niech $v \in T_p M$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$,
że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

jest krzywą na powierzchni N , oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z
definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy
 $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija arkusz papieru na walec.)

Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że $T_p \mathbb{R}^2$ jest płaszczyzną $x - y$, zaś $T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R})$ jest płaszczyzną $y - z$. Wybierzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)'|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b)|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija arkusz papieru na walec.)
Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że $T_p \mathbb{R}^2$ jest płaszczyzną $x - y$, zaś $T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R})$ jest płaszczyzną $y - z$.
Wyberzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie
zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)'|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b)|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija arkusz papieru na walec.)
Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że $T_p \mathbb{R}^2$ jest płaszczyzną $x - y$, zaś $T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R})$ jest płaszczyzną $y - z$.
Wyberzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)'|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b)|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija arkusz papieru na walec.)
Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że $T_p \mathbb{R}^2$ jest płaszczyzną $x-y$, zaś $T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R})$ jest płaszczyzną $y-z$.
Wyberzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)' \Big|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b) \Big|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie funkcją gładką.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f , i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f|_U: U \rightarrow f(U)$ jest izometrią.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie funkcją gładką.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f , i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f|_U: U \rightarrow f(U)$ jest izometrią.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie funkcją gładką.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f , i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f|_U: U \rightarrow f(U)$ jest izometrią.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Warto zauważyć, że izometria od lokalnej izometrii różni się tylko i wyłącznie tym, że lokalna izometria nie musi być dyfeomorfizmem całych przestrzeni. Jest to niewielka, lecz jak zobaczymy ważna różnica.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie funkcją gładką. Następujące warunki są równoważne.

1. f jest lokalną izometrią.
2. Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_p M$.
3. Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p taki, że $f \circ x: U \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x .
4. Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha: (a, b) \rightarrow A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie funkcją gładką. Następujące warunki są równoważne.

1. f jest lokalną izometrią.
2. Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_p M$.
3. Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p taki, że $f \circ x: U \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x .
4. Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha: (a, b) \rightarrow A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

(2) \Rightarrow (3). Niech $p \in M$ oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół p . Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej będzie wynikać, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujemy krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

(2) \Rightarrow (3). Niech $p \in M$ oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół p . Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej będzie wynikać, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujemy krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

(2) \Rightarrow (3). Niech $p \in M$ oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół p . Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej będzie wynikać, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujemy krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

(2) \Rightarrow (3). Niech $p \in M$ oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół p . Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej będzie wynikać, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujemy krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \quad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \quad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\bar{q} \subset U$.

Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założenia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \quad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \quad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\bar{q} \subset U$.
Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założenia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \quad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \quad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\bar{q} \subset U$.
Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założenia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

Z powyższego równania wynika, że $\|(f \circ x)_i\| = \|x_i\|$, oraz kąt między $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2 . Zatem z liniowej niezależności x_1 i x_2 wynika liniowa niezależność $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$, czyli $\text{rank}(f \circ x) = 2$ na odpowiednio pomniejszonym zbiorze $V \subset U$ (tak by $\alpha_{q,i}$ były dobrze określone). Wreszcie z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x: V \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych. Równość współczynników metrycznych wynika natychmiast z powyższej równości. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

Z powyższego równania wynika, że $\|(f \circ x)_i\| = \|x_i\|$, oraz kąt między $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2 . Zatem z liniowej niezależności x_1 i x_2 wynika liniowa niezależność $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$, czyli $\text{rank}(f \circ x) = 2$ na odpowiednio pomniejszonym zbiorze $V \subset U$ (tak by $\alpha_{q,i}$ były dobrze określone). Wreszcie z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x: V \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych. Równość współczynników metrycznych wynika natychmiast z powyższej równości. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w \mathbb{R}^2 , oraz $f \circ x: U \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$.

Wtedy inkluzja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w \mathbb{R}^2 , oraz $f \circ x: U \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$.

Wtedy inkluzja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w \mathbb{R}^2 , oraz $f \circ x: U \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku \mathbb{R}^2 musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku \mathbb{R}^2 musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku \mathbb{R}^2 musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe,
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe,
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 8

Krzywizna Gaussa I

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lub $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$).

Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

Odwzorowaniem Gaussa nazywamy funkcję $\hat{n}: x(U) \rightarrow S^2$ zadaną wzorem

$$\hat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lub $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

Odwzorowaniem Gaussa nazywamy funkcję $\hat{n}: x(U) \rightarrow S^2$ zadaną wzorem

$$\hat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lub $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

Odwzorowaniem Gaussa nazywamy funkcję $\hat{n}: x(U) \rightarrow S^2$ zadaną wzorem

$$\hat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

- ▶ *Zauważmy, że dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, więc (jednostkowy) wektor normalny może się różnić co najwyżej o czynnik (-1) w stosunku do wyjściowego. Nie będzie to jednak zmieniać w istotny sposób dalszych obliczeń. Możemy przyjąć, że jeśli powierzchnia jest zamknięta, to wybieramy kierunek “zewnątrzny”.*
- ▶ *Odwzorowanie Gaussa z całą pewnością zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w \mathbb{R}^3 i może się zmienić, gdy zaczniemy tę powierzchnię deformować.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Chcemy zdefiniować krzywiznę powierzchni, więc szukamy funkcji $K:M \rightarrow \mathbb{R}^3$, która będzie spełniać następujące własności:

1. $K:M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnych układów współrzędnych, zależy tylko od powierzchni samej w sobie;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Chcemy zdefiniować krzywiznę powierzchni, więc szukamy funkcji $K:M \rightarrow \mathbb{R}^3$, która będzie spełniać następujące własności:

1. $K:M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnych układów współrzędnych, zależy tylko od powierzchni samej w sobie;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Chcemy zdefiniować krzywiznę powierzchni, więc szukamy funkcji $K:M \rightarrow \mathbb{R}^3$, która będzie spełniać następujące własności:

1. $K:M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnych układów współrzędnych, zależy tylko od powierzchni samej w sobie;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna zniknąć;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniej* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Chcemy zdefiniować krzywiznę powierzchni, więc szukamy funkcji $K:M \rightarrow \mathbb{R}^3$, która będzie spełniać następujące własności:

1. $K:M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnych układów współrzędnych, zależy tylko od powierzchni samej w sobie;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna zniknąć;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

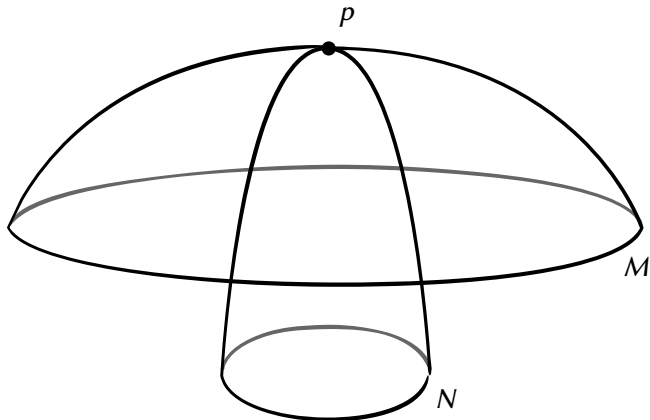
Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne



Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $T \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru T , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(T) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek pól

$$\frac{A(\hat{n}(T)) \subset S^2}{A(T) \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{T \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $T \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru T , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(T) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek pól

$$\frac{A(\hat{n}(T)) \subset S^2}{A(T) \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{T \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $T \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru T , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(T) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek pól

$$\frac{A(\hat{n}(T)) \subset S^2}{A(T) \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{T \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $T \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru T , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(T) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek pól

$$\frac{A(\hat{n}(T)) \subset S^2}{A(T) \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{T \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe,
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń T ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Co to jest $A(\hat{n}(T))$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odzworowanie Gaussa “odwraca” obszar T ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(T))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń T ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Co to jest $A(\hat{n}(T))$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa “odwraca” obszar T ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(T))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń T ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Co to jest $A(\hat{n}(T))$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odzworowanie Gaussa “odwraca” obszar T ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(T))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń T ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Co to jest $A(\hat{n}(T))$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odzworowanie Gaussa “odwraca” obszar T ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(T))$ ze znakiem ujemnym?

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i niech

$$x(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$x_\phi = R(-\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, 0),$$

$$x_\psi = R(-\cos \phi \sin \psi, -\sin \phi \sin \psi, \cos \psi),$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\hat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i niech

$$x(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$x_\phi = R(-\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, 0),$$

$$x_\psi = R(-\cos \phi \sin \psi, -\sin \phi \sin \psi, \cos \psi),$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\hat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

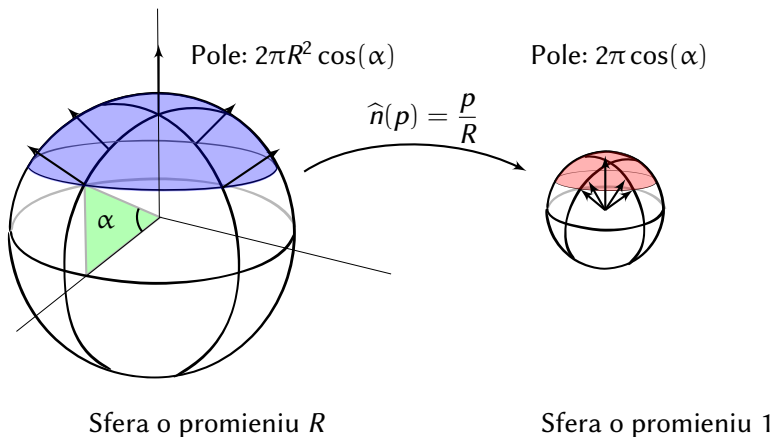
Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa zmniejsza obszar o czynnik $\frac{1}{R}$ i nie ma żadnych problemów z definicją.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

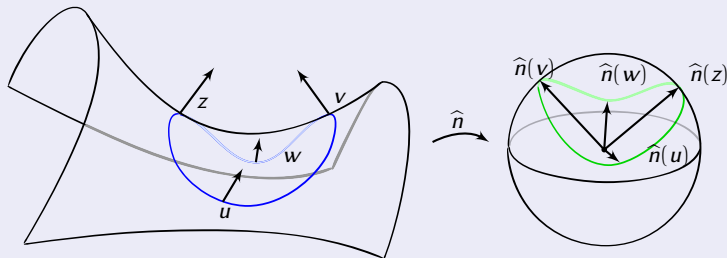
Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy powierzchnię siodłową $x(u, v) = (x, y, xy)$.

Rozważmy niewielki okrąg S na płaszczyźnie $z = 0$ i środka w $(0, 0)$, wtedy jego obraz $x(S)$ leży na powierzchni siodłowej.

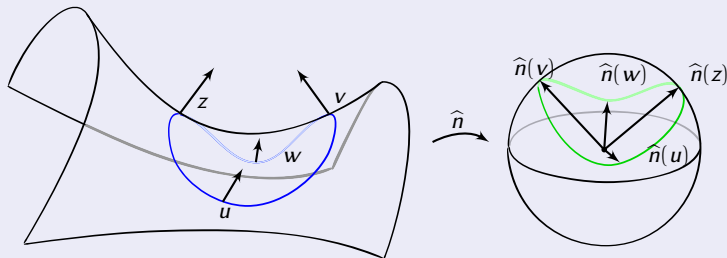
Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze), jednak jeśli obiegamy okrąg S w lewo, wówczas kierunek na $\hat{n}(x(S))$ ulega odwróceniu. Zatem chcielibyśmy nadać znak ujemny $A(\hat{n}(T)) < 0$ gdzie T jest obszarem ograniczonym przez $x(S)$.



Przykład

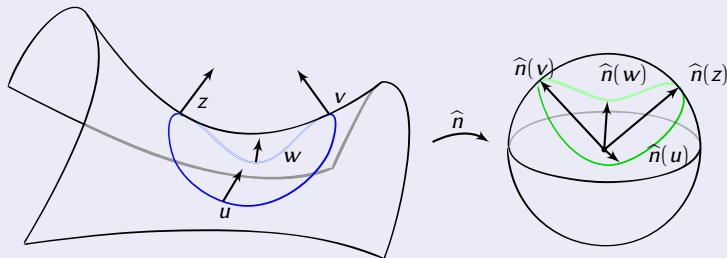
Rozważmy powierzchnię siodłową $x(u, v) = (x, y, xy)$.

Rozważmy niewielki okrąg S na płaszczyźnie $z = 0$ i środka w $(0, 0)$, wtedy jego obraz $x(S)$ leży na powierzchni siodłowej. Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze), jednak jeśli obiegamy okrąg S w lewo, wówczas kierunek na $\hat{n}(x(S))$ ulega odwróceniu. Zatem chcielibyśmy nadać znak ujemny $A(\hat{n}(T)) < 0$ gdzie T jest obszarem ograniczonym przez $x(S)$.



Przykład

Rozważmy powierzchnię siodłową $x(u, v) = (x, y, xy)$.
Rozważmy niewielki okrąg S na płaszczyźnie $z = 0$ i środka w $(0, 0)$, wtedy jego obraz $x(S)$ leży na powierzchni siodłowej.
Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze), jednak jeśli obiegamy okrąg S w lewo, wówczas kierunek na $\hat{n}(x(S))$ ulega odwróceniu. Zatem chcielibyśmy nadać znak ujemny $A(\hat{n}(T)) < 0$ gdzie T jest obszarem ograniczonym przez $x(S)$.



Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Pole podzbioru $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{\det(g_{ij})} ds dt$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Pole podzbioru $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{\det(g_{ij})} ds dt$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Założmy, że $S \subset x(U) \cap y(V)$ dla dwóch lokalnych układów współrzędnych x, y na M . Niech (g_{ij}) , [odpowiednio (\bar{g}_{ij})] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Wtedy

$$\iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{\det(g_{ij})} ds dt = \iint_{y^{-1}(S)} \sqrt{\det(\bar{g}_{ij})} ds dt.$$

Dowód tego lematu pozostawiamy jako ćwiczenie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

zatem mamy

$$A(T) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(T)$ jako

$$A(\widehat{n}(T)) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń T) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

zatem mamy

$$A(T) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(T)$ jako

$$A(\widehat{n}(T)) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń T) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

zatem mamy

$$A(T) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(T)$ jako

$$A(\widehat{n}(T)) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń T) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

zatem mamy

$$A(T) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(T)$ jako

$$A(\widehat{n}(T)) = \iint_{x^{-1}(T)} \langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń T) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powtórka z algebry liniowej II

Elementarna
Geometria
Różniczkowa

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na V .

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F: V \rightarrow V$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $B_F: V \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez

$$B_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na V .

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F: V \rightarrow V$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $B_F: V \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez

$$B_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech M oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $M = A^t G$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech M oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $M = A^t G$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech M oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $M = A^t G$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech M oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $M = A^t G$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech M oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $M = A^t G$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech V będzie przestrzenią wektorową.

- ▶ *Niech B będzie formą dwuliniową na V . Wtedy B jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz B w dowolnej bazie V jest macierzą symetryczną.*
- ▶ *Niech $F: V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
 1. *F jest odwzorowaniem samo-sprzężonym,*
 2. *macierz F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni V ,*
 3. *indukowana przez F forma dwuliniowa jest symetryczna.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech V będzie przestrzenią wektorową.

- ▶ *Niech B będzie formą dwuliniową na V . Wtedy B jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz B w dowolnej bazie V jest macierzą symetryczną.*
- ▶ *Niech $F: V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
 1. *F jest odwzorowaniem samo-sprzężonym,*
 2. *macierz F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni V ,*
 3. *indukowana przez F forma dwuliniowa jest symetryczna.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $F: V \rightarrow V$ będzie liniowym odwzorowaniem. Załóżmy, że F jest samosprężone, wtedy

- ▶ F ma rzeczywiste wartości własne k_i .*
- ▶ wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- ▶ Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det A = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \text{tr } A = \sum_i k_i.$$

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

Lemat

Niech $F: V \rightarrow V$ będzie liniowym odwzorowaniem. Załóżmy, że F jest samosprężone, wtedy

- ▶ F ma rzeczywiste wartości własne k_j .
- ▶ wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- ▶ Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det A = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \text{tr } A = \sum_i k_i.$$

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

Lemat

Niech $F: V \rightarrow V$ będzie liniowym odwzorowaniem. Załóżmy, że F jest samosprężone, wtedy

- ▶ F ma rzeczywiste wartości własne k_j .
- ▶ wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- ▶ Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det A = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \text{tr } A = \sum_i k_i.$$

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

Lemat

Niech $F: V \rightarrow V$ będzie liniowym odwzorowaniem. Załóżmy, że F jest samosprężone, wtedy

- ▶ F ma rzeczywiste wartości własne k_j .
- ▶ wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- ▶ Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det A = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \text{tr } A = \sum_i k_i.$$

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

Lemat

Niech $F: V \rightarrow V$ będzie liniowym odwzorowaniem. Załóżmy, że F jest samosprężone, wtedy

- ▶ F ma rzeczywiste wartości własne k_j .
- ▶ wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- ▶ Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det A = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \text{tr } A = \sum_i k_i.$$

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

Wykład 9

Krzywizna Gaussa II

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe,
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicji

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicji

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Wektor normalny $\hat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle D\hat{n}(v), \hat{n} \rangle,$$

więc $D\hat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do \hat{n} , zatem musi należeć do $T_p M$. □

Dowód:

Wektor normalny $\hat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle D\hat{n}(v), \hat{n} \rangle,$$

więc $D\hat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do \hat{n} , zatem musi należeć do $T_p M$. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicjiTheorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Wektor normalny $\hat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle D\hat{n}(v), \hat{n} \rangle,$$

wiec $D\hat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do \hat{n} , zatem musi należeć do $T_p M$. □

Dowód:

Wektor normalny $\hat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle D\hat{n}(v), \hat{n} \rangle,$$

wiec $D\hat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do \hat{n} , zatem musi należeć do $T_p M$. □

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L: T_p M \rightarrow T_p M$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\hat{n}(v) = -\nabla_v \hat{n}.$$

Lemat

Odwzorowanie Weingartena $L: T_p M \rightarrow T_p M$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z własności pochodnej kierunkowej (lemat 7.3).

□

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L: T_p M \rightarrow T_p M$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\hat{n}(v) = -\nabla_v \hat{n}.$$

Lemat

Odwzorowanie Weingartena $L: T_p M \rightarrow T_p M$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z własności pochodnej kierunkowej (lemat 7.3).



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicji

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Chociaż do definicji odwzorowania Weingartena używamy lokalnego układu współrzędnych, jednak przy innym wyborze $x: U \rightarrow M$, odwzorowanie L może się różnić tylko o znak \pm .

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\Pi_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L , tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej $T_p M$.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\Pi_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L , tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej $T_p M$.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in x(U)$.

$$n_j = -L_{1j}x_1 - L_{2j}x_2.$$

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle,$$

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\hat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \hat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \text{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle^* = -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2. (równość * wynika z dowodu pierwszej części.) Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Agitacja na rzecz zgodności definicji

skąd natychmiast wynika druga równość.

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Agitacja na rzecz zgodności definicji

skąd natychmiast wynika druga równość.

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\hat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \hat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \text{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle^* = -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2. (równość * wynika z dowodu pierwszej części.) Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

- ▶ *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- ▶ *Odwzorowanie Weingartena L jest samosprężone.*

Dowód:

Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z poprzedniego lematu i równości $x_{12} = x_{21}$. Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z samosprężeniem odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II).



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

- ▶ *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- ▶ *Odwzorowanie Weingartena L jest samosprężone.*

Dowód:

Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z poprzedniego lematu i równości $x_{12} = x_{21}$. Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z samosprężeniem odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II).



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

- ▶ *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- ▶ *Odwzorowanie Weingartena L jest samosprężone.*

Dowód:

Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z poprzedniego lematu i równości $x_{12} = x_{21}$. Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z samosprężeniem odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II).



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej $\{x_1, x_2\}$ nie będzie ortonormalna w punkcie p , wtedy najczęściej $L_{ij}(p)$ nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu 8.6).

Uwaga

Wiedząc, że l_{ij} jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niezmiennikami numerycznymi macierzy 2×2 są wyznacznik i ślad. Co więcej, są to niezmienniki odpowiadające danej macierzy odwzorowania liniowego (tj. są te same dla macierzy sprzężonych), dlatego właśnie je użyjemy w poniższych definicjach.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujemy dwie funkcje skalarne $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niezmiennikami numerycznymi macierzy 2×2 są wyznacznik i ślad. Co więcej, są to niezmienniki odpowiadające danej macierzy odwzorowania liniowego (tj. są te same dla macierzy sprzężonych), dlatego właśnie je użyjemy w poniższych definicjach.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujemy dwie funkcje skalarne $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niezmiennikami numerycznymi macierzy 2×2 są wyznacznik i ślad. Co więcej, są to niezmienniki odpowiadające danej macierzy odwzorowania liniowego (tj. są te same dla macierzy sprzężonych), dlatego właśnie je użyjemy w poniższych definicjach.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujemy dwie funkcje skalarne $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej $T_p M$.

Dowód:

Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika (jako iloczynu wartości własnych) i śladu (jako ich sumy) cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat 8.7). \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in x(U)$. Wtedy

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Dowód:

Dowody tych równości wynikają z równości $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$, oraz z własności multiplikatywnych wyznacznika i śladu macierzy. Pozostawiamy je do sprawdzenia jako zadanie domowe. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in x(U)$. Wtedy

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Dowód:

Dowody tych równości wynikają z równości $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$, oraz z własności multiplikatywnych wyznacznika i śladu macierzy. Pozostawiamy je do sprawdzenia jako zadanie domowe. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Aby obliczyć krzywizny (średnią i Gaussa) powierzchni potrzebujemy następujące wielkości:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle, \quad g_{12} = g_{21} = \langle x_1, x_2 \rangle, \quad g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle,$$

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

$$l_{11} = \langle n, x_1 \rangle, \quad l_{12} = \langle n, x_2 \rangle, \quad l_{22} = \langle n, x_2 \rangle,$$

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

Oznaczmy przez $\bar{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy oryginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{aligned} K(p) &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} = \frac{\iint_{x^{-1}(T)} \langle n_1 \times n_2, n \rangle ds dt}{\iint_{x^{-1}(T)} \langle x_1 \times x_2, n \rangle ds dt} = \\ &= \frac{\iint_{x^{-1}(T)} \langle n_1 \times n_2, n \rangle ds dt}{\iint_{x^{-1}(T)} \sqrt{\det(g_{ij})} ds dt}. \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

Oznaczmy przez $\bar{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy oryginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{aligned} K(p) &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} = \frac{\iint_{x^{-1}(T)} \langle n_1 \times n_2, n \rangle ds dt}{\iint_{x^{-1}(T)} \langle x_1 \times x_2, n \rangle ds dt} = \\ &= \frac{\iint_{x^{-1}(T)} \langle n_1 \times n_2, n \rangle ds dt}{\iint_{x^{-1}(T)} \sqrt{\det(g_{ij})} ds dt}. \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

Oznaczmy przez $\bar{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy oryginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{aligned} K(p) &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} = \frac{\iint_{x^{-1}(T)} \langle n_1 \times n_2, n \rangle ds dt}{\iint_{x^{-1}(T)} \langle x_1 \times x_2, n \rangle ds dt} = \\ &= \frac{\iint_{x^{-1}(T)} \langle n_1 \times n_2, n \rangle ds dt}{\iint_{x^{-1}(T)} \sqrt{\det(g_{ij})} ds dt}. \end{aligned}$$

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru T muszą istnieć takie punkty $a_T, b_T \in x^{-1}(T)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(T)} \langle n_1 \times n_2, n \rangle ds dt = \langle n_1(a_T) \times n_2(a_T), n(a_T) \rangle A(x^{-1}(T)),$$

$$\iint_{x^{-1}(T)} \sqrt{\det(g_{ij})} ds dt = \sqrt{\det(g_{ij}(b_T))} A(x^{-1}(T)).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy, że skoro $T \rightarrow \{p\}$, więc $a_T \rightarrow \bar{p}$ oraz $b_T \rightarrow \bar{p}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{\langle n_1(a_T) \times n_2(a_T), n(a_T) \rangle A(x^{-1}(T))}{\sqrt{\det(g_{ij}(b_T))} A(x^{-1}(T))} = \\ &= \frac{\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}}. \end{aligned}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (- (L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (- (L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) = \\ &= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}) = K(p)(x_1 \times x_2). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy, że skoro $T \rightarrow \{p\}$, więc $a_T \rightarrow \bar{p}$ oraz $b_T \rightarrow \bar{p}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{\langle n_1(a_T) \times n_2(a_T), n(a_T) \rangle A(x^{-1}(T))}{\sqrt{\det(g_{ij}(b_T))} A(x^{-1}(T))} = \\ &= \frac{\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}}. \end{aligned}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (- (L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (- (L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) = \\ &= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}) = K(p)(x_1 \times x_2). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy, że skoro $T \rightarrow \{p\}$, więc $a_T \rightarrow \bar{p}$ oraz $b_T \rightarrow \bar{p}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{\langle n_1(a_T) \times n_2(a_T), n(a_T) \rangle A(x^{-1}(T))}{\sqrt{\det(g_{ij}(b_T))} A(x^{-1}(T))} = \\ &= \frac{\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}}. \end{aligned}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (- (L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (- (L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) = \\ &= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}) = K(p)(x_1 \times x_2). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\begin{aligned}\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle &= K(p) \left\langle x_1(\bar{p}) \times x_2(\bar{p}), \frac{x_1(\bar{p}) \times x_2(\bar{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} \right\rangle = \\ &= \frac{K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} \|x_1 \times x_2\|^2 = 4K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))},\end{aligned}$$

zatem ostatecznie

$$\lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} = \frac{K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} = K(p).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz

krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\begin{aligned}\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle &= K(p) \left\langle x_1(\bar{p}) \times x_2(\bar{p}), \frac{x_1(\bar{p}) \times x_2(\bar{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} \right\rangle = \\ &= \frac{K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} \|x_1 \times x_2\|^2 = 4K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))},\end{aligned}$$

zatem ostatecznie

$$\lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(T))}{A(T)} = \frac{K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} = K(p).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz

krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Wykład 10

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe,
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

**Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne**

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij} .

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n. \quad (10.1)$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij} .

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n. \quad (10.1)$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Uwaga

Ponieważ funkcje Γ_{ij}^k zwane **symbolami Christoffela** nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich **definicję** (z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).

Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \text{dla } k = 1, 2.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Uwaga

Ponieważ funkcje Γ_{ij}^k zwane **symbolami Christoffela** nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich **definicję** (z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).

Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \text{dla } k = 1, 2.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij} :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij} :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij} :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij} :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

► *Równanie Gaussa:*

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

► *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2}) = 0$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego,
równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

$$\begin{aligned} x_{ijk} &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 \underbrace{(\Gamma_{1k}^2 x_1 + \Gamma_{1k}^2 x_2 + l_{1k} n)}_{x_{1k}} + \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 \underbrace{(\Gamma_{2k}^1 x_1 + \Gamma_{2k}^2 x_2 + l_{2k} n)}_{x_{2k}} + \\ &+ \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2)}_{n_k} = \\ &= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{1k} \right] x_1 + \\ &+ \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{2k} \right] x_2 + \\ &+ \left[\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} \right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn. \end{aligned}$$

Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_{ikj} &= \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^1}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1 \Gamma_{1j}^1 + \Gamma_{ik}^2 \Gamma_{2j}^2 - l_{ik} L_{1j} \right] x_1 + \\ &+ \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^2}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1 \Gamma_{1j}^2 + \Gamma_{ik}^2 \Gamma_{2j}^2 - l_{ik} L_{2j} \right] x_2 + \\ &+ \left[\Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} \right] n = \\ &= A' x_1 + B' x_2 + C' n. \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne, I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe,
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \quad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + (\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} = \\ = \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium
i Twierdzenie
klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Zadanie

Udowodnić formułę Gaussa.

Podpowiedź: należy porównać współczynniki A, A' , oraz B, B' . Następnie podstawić ($i = 2, j = 1, k = 2$).

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowiednio K_M i K_N . Niech $f: M \rightarrow N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmiennicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22}), oraz ich pochodnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowiednio K_M i K_N . Niech $f: M \rightarrow N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmiennicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22}), oraz ich pochodnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemy szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemy szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f: M \rightarrow N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f: M \rightarrow N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1+u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f: M \rightarrow N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f: M \rightarrow N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym.

Założmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$, oraz

mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższymi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania

Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x: U \rightarrow M$ dla której

- ▶ (g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,
- ▶ (l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,
- ▶ Γ_{ij}^k tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne, I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe, Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym.

Założmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$, oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$)

spełniających z powyższymi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania

Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x: U \rightarrow M$ dla której

- ▶ (g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,
- ▶ (l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,
- ▶ Γ_{ij}^k tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym.

Założmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$, oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższymi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x: U \rightarrow M$ dla której

- ▶ (g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,
- ▶ (l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,
- ▶ Γ_{ij}^k tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

