Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1] Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 10

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- Symbole Christoffela
- Theorema Egregium
- Twierdzenie klasyfikujące

Symbole Christoffela

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij}.

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnych układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma^1_{ij}x_1 + \Gamma^2_{ij}x_2 + l_{ij}n. \tag{10.1}$$

Symbole Christoffela

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij}.

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnych układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma^1_{ij}x_1 + \Gamma^2_{ij}x_2 + l_{ij}n. \tag{10.1}$$

Uwaga

*Ponieważ funkcje Γ_{ij}^{k} zwane **symbolami Christoffela** nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich **definicję** (z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).*

Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}, \qquad \text{dla } k = 1, 2.$$

Uwaga

Ponieważ funkcje Γ_{ij}^{k} *zwane* ***symbolami Christoffela*** *nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich* ***definicję*** *(z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).*
Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$*, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:*

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}, \quad dla\ k = 1, 2.$$

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned}
\langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\
\langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\
\langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij}
\end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. $\square$

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$
$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$
$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. $\square$

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned}
\langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\
\langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\
\langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij}
\end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. □

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned}
\langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\
\langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\
\langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij}
\end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. □

Lemat

Niech $M \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Dla wszystkich $i, j = 1, 2$ zachodzi

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle .$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$
$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle .$$

Dowód:
Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$
$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle \end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle .$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle \end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle .$$

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k. □

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k. □

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k. □

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k. □

Twierdzenie

Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

- *Równanie Gaussa:*

$$l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

- *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2} \right) = 0$$

Twierdzenie

Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

- *Równanie Gaussa:*

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

- *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2}\right) = 0$$

Twierdzenie

Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

- *Równanie Gaussa:*

$$l_{11}l_{22}-l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial\Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial\Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

- *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2}\right) = 0$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.
Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:
Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.
Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:
Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^{1} x_1 + \Gamma_{ij}^{2} x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^{1} x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^{2} x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.
Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:
Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
x_{ijk} = {} & \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} = \\
= {} & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.
\end{aligned}
$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
x_{ijk} = \; & \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} = \\
= \; & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = \; A x_1 + B x_2 + C n.
\end{aligned}
$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^2 x_1 + \Gamma_{1k}^2 x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} +$$

$$+ \frac{\partial_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^1 x_1 + \Gamma_{2k}^2 x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} +$$

$$+ \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 +$$

$$+ \left[\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} +$$

$$+ \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} +$$

$$+ \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 +$$

$$+ \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
x_{ijk} = \; & \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^2 x_1 + \Gamma_{1k}^2 x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^1 x_1 + \Gamma_{2k}^2 x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} = \\
= \; & \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.
\end{aligned}
$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^2 x_1 + \Gamma_{1k}^2 x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} +$$

$$+ \frac{\partial_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^1 x_1 + \Gamma_{2k}^2 x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} +$$

$$+ \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 +$$

$$+ \left[\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.$$

Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
x_{ikj} = & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^1_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{1j}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^2_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{2j}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ik} l_{1j} + \Gamma^2_{ik} l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}\right] n = \\
= & A' x_1 + B' x_2 + C' n.
\end{aligned}
$$

Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_{ikj} = & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^1_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{1j}\right] x_1 + \\ & + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^2_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{2j}\right] x_2 + \\ & + \left[\Gamma^1_{ik}l_{1j} + \Gamma^2_{ik}l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}\right] n = \\ = & A'x_1 + B'x_2 + C'n. \end{aligned}$$

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}\right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} =$$

$$= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. □

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}\right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} =$$

$$= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. □

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}\right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} =$$
$$= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. □

Zadanie

Udowodnić Równanie Gaussa.

Podpowiedź: należy porównać współczynniki A, A', oraz B, B'. Następnie podstawić $(i = 2, j = 1, k = 2)$.

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N. Niech $f\colon M \to N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat ??, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22}), oraz ich pochodnych.

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N. Niech $f\colon M \to N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat ??, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22}), oraz ich pochodnych.

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N. Niech $f\colon M \to N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat **??**, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22}), oraz ich pochodnych.

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Dowód:

Niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Dowód:

Niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^{1} \\ \Gamma_{ij}^{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemu szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemu szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f\colon M \to N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f\colon M \to N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Przykład

Niech

$$\begin{aligned} M =& \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\}, \\ N =& \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\}, \end{aligned}$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f \colon M \to N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

Przykład

Niech

$$M = \{y(u,v) = (u\sin v, u\cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi,\pi)\},$$
$$N = \{x(u,v) = (v\sin u, v\cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi,\pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f\colon M \to N$ jako

$$f(y(u,v)) \overset{\text{def.}}{=} x(v,u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u,v))) = K(x(v,u)) = \frac{-1}{(1+u^2)^2} = K(y(u,v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u,v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u,v) = 1$.

Przykład

Niech

$$
\begin{aligned}
M =& \{y(u,v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},\\
N =& \{x(u,v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},
\end{aligned}
$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f : M \to N$ jako

$$
f(y(u,v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v,u).
$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$
K(f(y(u,v))) = K(x(v,u)) = \frac{-1}{(1+u^2)^2} = K(y(u,v)).
$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u,v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u,v) = 1$.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$, oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma^k_{ij} \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ^k_{ij} tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$, oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ_{ij}^k tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ_{ij}^k tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- (g_{ij}) *tworzą pierwszą formę podstawową,*
- (l_{ij}) *tworzą drugą formę podstawową,*
- Γ_{ij}^k *tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma^k_{ij} \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ^k_{ij} tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- (g_{ij}) *tworzą pierwszą formę podstawową,*
- (l_{ij}) *tworzą drugą formę podstawową,*
- Γ_{ij}^k *tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.