## Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba<sup>1</sup>

2013

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa

rzywizna Gaussi

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl 📜 🔻 🔊 🤉 🗈

## Wykład 5

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

#### Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

,

Przykłady powierzchi

rarametryzacja wonge a

Towicizeiiiic obrotow

Powierzchnie prostokresii

Poziomice funk

Wektory styczne i normalne. I forma

Pochodne kierunkowe

(rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

# Powierzchnie w R<sup>3</sup> Podstawowe definicje Przykłady powierzchni

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa I

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

#### Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Podstawowe definicji

Przykłady powierzchr

r urumen yzueju monge

i owierzennie prostokresii

Poziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x: U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) *x* istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

## Definicja

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x: U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \neq 0$$

dla wszystkich  $(s, t) \in U$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

#### Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

roustawowe definicje

Przykłady powierzchr

Parametryzacja Monge'a

rowierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokresi

oziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ochodne erunkowe. ometria

. . .

Vernauirana Causaa II

Arzywizna Gaussa II

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x: U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

## Definicja

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym. Odw<br/>zorowanie gładkie

$$x: U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \neq 0$$

dla wszystkich  $(s, t) \in U$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

#### Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

rowierzchnie prostokres

ziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ochodne erunkowe.

(rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

- Podzbiór  $M \subset \mathbb{R}^3$  nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych  $x: U \to V \subset \mathbb{R}^3$ .
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów  $x, y \in M$  istnieje krzywa  $\alpha:[0,1] \to M$  taka, że  $\alpha(0) = x$  i  $\alpha(1) = y$ .

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli "lokalnie" (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

rowierzennie prostokresine

Poziomice funkcji

Vektory styczne

normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

- ▶ Podzbiór  $M \subset \mathbb{R}^3$  nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu *p* istnieje lokalny układ współrzędnych  $x: U \to V \subset \mathbb{R}^3$ .
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów  $x, y \in M$  istnieje krzywa  $\alpha:[0,1] \to M$  taka, że  $\alpha(0) = x$  i  $\alpha(1) = y$ .

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli "lokalnie" (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge'a

TOWICIZCHINE PROJECTION

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

- ▶ Podzbiór  $M \subset \mathbb{R}^3$  nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych  $x: U \to V \subset \mathbb{R}^3$ .
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów  $x, y \in M$  istnieje krzywa  $\alpha:[0,1] \to M$  taka, że  $\alpha(0) = x$  i  $\alpha(1) = y$ .

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli "lokalnie" (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w K

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchi

Parametryzacja Monge'a

rowierzchnie prostokresini

Poziomice funkcj

/ektory styczne

normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe Izometria.

Crzywizna Gaussa

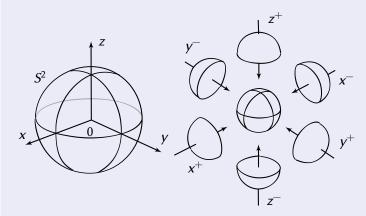
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

## Przykład

Jednostkowa sfera, tj. powierzchnia o równaniu  $x^2 + y^2 + x^2 = 1$  jest przykładem powierzchni regularnej. Lokalnym układem współrzędnych jest np.

$$x^{\pm}(u,v)=(\pm\sqrt{1-u^2-v^2},u,v)$$
 jak na następującym rysunku



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzch

arametryzacja Monge'a

Danieralaria acceptatoria

Poziomice funkcii

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

## Uwaga

UWAGA! Zakładamy, że wszystkie powierzchnie które będzie my rozważać dalej są gładkie i łukowo spójne.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicje

Przykłady powierzi

r arametr yzacja monge a

Powierzchnie prostokresine

Poziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  i  $y: V \to M$  będą lokalnymi układami współrzędnych wokół punktu  $p \in M$ . Wtedy złożenie

$$\Phi_{x,y} \stackrel{\text{def.}}{=} y^{-1} \circ x : x^{-1}(x(U) \cap y(V)) \to y^{-1}(x(U) \cap y(V))$$

nazywamy funkcją zmiany układu współrzędnych.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powiera

Parametryzacja Monge'a

r owierzennie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkc

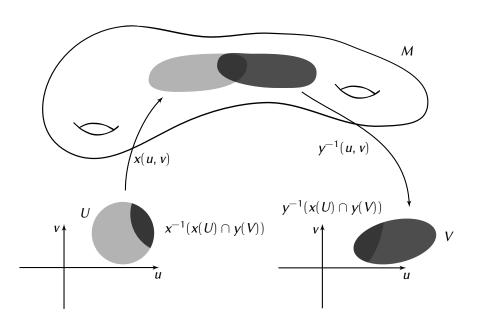
Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie



### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Wówczas:

- 1. Jeśli  $x: U \to M$  jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz x(U).
- 2. Niech  $V \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym i niech  $f: V \to U$  będzie dyfeomorfizmem. Wtedy

$$y \stackrel{def.}{=} x \circ f: V \to N$$

jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych  $\Phi_{V,x}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge'a

owierzeinne obrotowe

Powierzchnie prostokresine

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Wówczas:

- 1. Jeśli  $x: U \to M$  jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz x(U).
- 2. Niech  $V \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym i niech  $f: V \to U$  będzie dyfeomorfizmem. Wtedy

$$y \stackrel{def.}{=} x \circ f: V \to M$$

jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych  $\Phi_{v,x}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchr

Parametryzacja Monge'a

Danisanahais assatslasila

ziomice funkcji

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

- - rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzednych)
  - ▶ z twierdzenia o funkcji uwikłanej na x(U) istnieje  $x^{-1}$  gładkie odwzorowanie odwrotne.
- 2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układ współrzędnych dla  $y = x \circ f$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

## Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge a

TOWICIZCHIIIC ODIOIOWC

Powierzchnie prostokresine

Poziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

- 1) ► x injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
  - rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzednych)
  - ▶ z twierdzenia o funkcji uwikłanej na x(U) istnieje  $x^{-1}$  gładkie odwzorowanie odwrotne,
- 2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla  $y = x \circ f$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

## Podstawowe definicje

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge a

D--1---1-- 6--1--11

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie

- 1) x injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
  - ► rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
  - ▶ z twierdzenia o funkcji uwikłanej na x(U) istnieje  $x^{-1}$  gładkie odwzorowanie odwrotne,
- 2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla  $y = x \circ f$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

## Podstawowe definicje

Przykłady powierz

Parametryzacja Monge'a

TOWICIZCHING ODIOLOWC

Powierzchnie prostokresin

Poziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

- 1) ► x injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
  - ► rząd pochodnej *x* na *U* jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
  - ▶ z twierdzenia o funkcji uwikłanej na x(U) istnieje  $x^{-1}$  gładkie odwzorowanie odwrotne,
- 2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla  $y = x \circ f$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

### Podstawowe definicje

Przykłady powier.

Parametryzacja Monge'a

Poziomice funkc

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ochodne ierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

- 1) x injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
  - rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
  - ▶ z twierdzenia o funkcji uwikłanej na x(U) istnieje  $x^{-1}$  gładkie odwzorowanie odwrotne,
- 2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla  $y = x \circ f$

Elementarna Geometria Różniczkowa

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzc

Parametryzacja Monge'a

,

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ochodne ierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

$$\frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- ightharpoons  $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} imes \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) 
  eq 0$  (lokalny układ współrzędnych)
- ▶  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \neq 0$  (Jakobian funkcji f). Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{split} \frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \end{split}$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \neq 0$  (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \neq 0$  (Jakobian funkcji f). Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji funk przejścia.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

TOWICIZCHINE ODIOLOWE

Poziomice funkcji

normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{split} \frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \end{split}$$

$$ightharpoons$$
  $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} imes \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) 
eq 0$  (lokalny układ współrzędnych)

▶ 
$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \neq 0$$
 (Jakobian funkcji  $f$ ). Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji funkci przejścia.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzo

Parametryzacja Monge'a

Desired Sectori

Poziomice funkcj

normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{split} \frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \end{split}$$

$$ightharpoons$$
  $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} imes \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) 
eq 0$  (lokalny układ współrzędnych)

▶ 
$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \neq 0$$
 (Jakobian funkcji  $f$ ). Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji funkci przejścia.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierze

Parametryzacja Monge'a

B 1 1 1 1 1 1 1

r owierzeinne prostokresin

oziomice funkc

normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{split} \frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \end{split}$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \neq 0$  (lokalny układ współrzędnych)
- ▶  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \neq 0$  (Jakobian funkcji f). Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji funkci przejścia.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierz

Parametryzacja Monge'a

rowierzennie prostokresine

oziomice funkc

normalne. I forma podstawowa

Pochodne cierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{split} \frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \end{split}$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \neq 0$  (lokalny układ współrzędnych)
- ►  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \neq 0$  (Jakobian funkcji f). Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji

Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji funkcj przejścia. Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierz

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie prostokresin

Poziomice funk

normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe. zometria.

> > rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{split} \frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \end{split}$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) \neq 0$  (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \neq 0$  (Jakobian funkcji f). Wreszcie teza ( $\Phi_{x,y} = f$ ) wynika z definicji funkcji przejścia.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powier.

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie prostokreślne

'oziomice funkc

normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

## Gładkość funkcji na powierzchni

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $f: M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Funkcję f nazywamy gładką jeśli dla każdego punktu  $p \in M$  i dla każdego lokalnego układu współrzędnych  $x: U \to M$  takiego, że  $p \in x(u)$  funkcja

$$f \circ x: U \stackrel{x}{\to} M \stackrel{f}{\to} \mathbb{R}$$

jest gładka jako funkcja z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

#### Podstawowe definicje

## W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli  $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  jest gładka, wtedy jej obcięcie  $F|_M: M \to \mathbb{R}$  bedzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że  $x: U \to M \subset \mathbb{R}^3$  jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli  $f: U \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} \colon x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R}$$

gdzie  $x^{-1}(U) \subset M$ . Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Elementarna Geometria Różniczkowa

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierz

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie prostokresine

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

## W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli  $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  jest gładka, wtedy jej obcięcie  $F|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$  będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że  $x: U \to M \subset \mathbb{R}^3$  jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli  $f: U \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} \colon x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie  $x^{-1}(U) \subset M$ . Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchr

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie prostokreslne

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

## W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli  $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  jest gładka, wtedy jej obcięcie  $F|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$  będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że  $x: U \to M \subset \mathbb{R}^3$  jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli  $f: U \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} : x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie  $x^{-1}(U) \subset M$ . Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge'a

rowierzennie prostokresir

oziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

## Przykład

Funkcja  $f: S^2 \to \mathbb{R}$  zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

## jest funkcją gładką.

▶ Niech *M* będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t)$$
.

Wtedy  $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$  i stąd  $f \circ x^{-1}: M \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzc

Demonstrum de A4-

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślni

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

## Przykład

▶ Funkcja  $f: S^2 \to \mathbb{R}$  zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

▶ Niech *M* będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję  $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t)$$

Wtedy  $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$  i stąd  $f \circ x^{-1}: M \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

oziomice funkcii

oziomice funkc

normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Funkcja  $f: S^2 \to \mathbb{R}$  zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

▶ Niech *M* będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję  $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy  $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$  i stąd  $f \circ x^{-1}: M \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

r owierzennie prostokres

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

▶ Niech *M* będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję  $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t)$$
.

Wtedy  $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$  i stąd  $f \circ x^{-1}: M \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

r-owierzennie prostokresi

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

## Gładkość odwzorowania między powierzchniami

## Definicja

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą powierzchniami gładkimi i niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie  $M \to N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . Mówimy, że f jest **dyfeomorfizmem powierzchni** jeśli f jest gładką bijekcją, której odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzchr

Parametryzacja Monge'

Powierzchnie obrotowe

rowierzennie prostokres

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

## Lemat

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą powierzchniami gładkimi i niech

$$f:M\to N$$

będzie odwzorowaniem ciągłym. f jest odwzorowaniem gładkim (a więc gładkim jako odwzorowanie  $f: M \to \mathbb{R}^3$ ) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje wokół niego lokalny układ współrzędnych  $x: U \to M$  oraz istnieje lokalny układ współrzędnych  $y: V \to N$  wokół  $f(p) \in N$  takie, że złożenie

$$y^{-1} \circ f \circ x: U \to V$$

jest gładkie jako odwzorowanie  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  (tam, gdzie to złożenie ma sens).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

#### Podstawowe definicje

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge a

owierzennie prostokiesnie

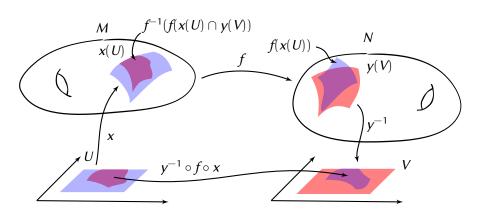
ziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

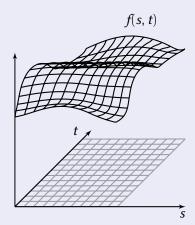
Krzywizna Gaussa

rzywizna Gaussa II



Niech  $f: U \to \mathbb{R}$  będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Powierzchnię  $M \subset \mathbb{R}^3$  nazywamy **powierzchnią Monge'a** jeśli jej parametryzacja jest wykresem funkcji f:

$$x(s, t) = (s, t, f(s, t)).$$



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

rodstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie prostokreśli

Poziomice funk

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Parametryzacja Monge'a spełnia naszą definicję powierzchni (Definicja 5.3), ponieważ

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \end{bmatrix} = \\ = \left( -\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), -\frac{\partial x}{\partial t}(s,t), 1 \right) \neq 0.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

r oustawowe definite

Przykłady powierzchi

Parametryzacja Monge'a

vierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

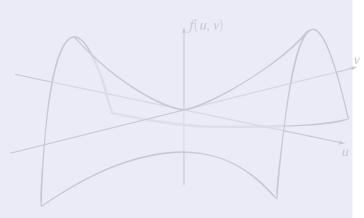
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

- Paraboloida  $(x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- ▶ Powierzchnia siodłowa (x(u, v) = (u, v, uv))



Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe defini

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge'a

wierzchnie obrotowe

------

Poziomice funk

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

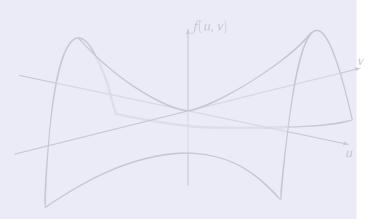
> Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorems Egregium

- Paraboloida  $(x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- Powierzchnia siodłowa (x(u, v) = (u, v, uv))



Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge'a

wierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreśli

roziomice funk

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

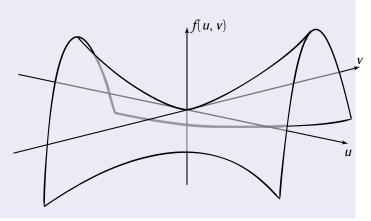
> Pochodne kierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Kizywiziia Gaussa II

- Paraboloida  $(x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- Powierzchnia siodłowa (x(u, v) = (u, v, uv))



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

owierzchnie obrotow

Powierzchnie prostokreśln

Poziomice funk

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne cierunkowe.

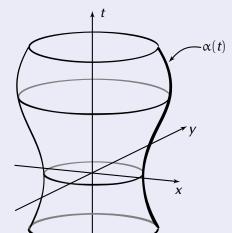
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

**Powierzchnia obrotowa** powstaje poprzez obrócenie krzywej  $\alpha(t)$  wokół pewnej ustalonej prostej l. Postać ogólna to

$$x(t, \phi) = \alpha(t) \cdot Rot_l(\phi),$$

gdzie  $Rot_l(\phi)$  to macierz 3 × 3 obrotu o kąt  $\phi$  wokoł prostej l.



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicje

Przykłady powierzch

arametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

. . . . . .

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ochodne ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Twierdzenie klasyfikacyjne Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych *x*, *y*, *z*:

$$Rot_{x}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_{y}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_{z}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu  $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$  wokół osi OX otrzymamy

$$x(t, \phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos \phi - \alpha_3(t) \sin \phi, \alpha_2(t) \sin \phi + \alpha_3(t) \cos \phi$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w K

Podstawowe definicji

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

#### Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych *x*, *y*, *z*:

$$Rot_{x}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_{y}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_{z}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu  $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$  wokół osi OX otrzymamy

$$x(t, \phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos \phi - \alpha_3(t) \sin \phi, \alpha_2(t) \sin \phi + \alpha_3(t) \cos \phi)$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicje

Przykłady powierzci

Parametryzacja Monge'a

#### Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcj

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Crzywizna Gaussa II

# Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- krzywa była bez samoprzecięć, oraz
- oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie

### 7adanie

Opisać co się "psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

i oustawowe demincje

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

rowierzchnie prostokresine

'oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- krzywa była bez samoprzecięć, oraz
- oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie

### Zadanie

Opisać co się "psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

r oustawowe definiteje

Przykłady powierzchi

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

ziomice funkcii

ektory styczne

normalne. I forma

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- krzywa była bez samoprzecięć, oraz
- oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.

### Zadanie

Opisać co się "psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Przykłady powierzo

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

ziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- krzywa była bez samoprzecięć, oraz
- oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.

### **Zadanie**

Opisać co się "psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Przykłady powierzci

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

ziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ochodne ierunkowe.

Zometra.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

► Sfera – obrót okręgu  $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$  wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-\cos t \sin \phi, \cos t \cos \phi, \sin t)$$

► Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe

Przykłady powierzchn

Parametryzacja Monge'a

#### Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie

► Sfera – obrót okręgu  $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$  wokół osi z:

$$(0,\cos t,\sin t)\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\\=(-\cos t\sin\varphi,\cos t\cos\varphi,\sin t).$$

Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

ziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Sfera – obrót okręgu  $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$  wokół osi z:

$$(0,\cos t,\sin t)\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\\=(-\cos t\sin\varphi,\cos t\cos\varphi,\sin t).$$

► Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

i oustawowe den

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

ozioiiiice runkcj

normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

. .

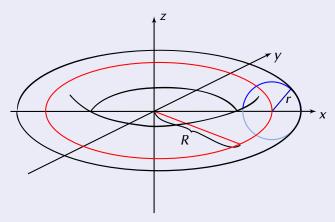
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

► Torus – obrót okręgu  $\alpha(t) = (R + r\cos t, 0, r\sin t)$  wokół osi z:

$$x(t,\phi) = ((R + r\cos t)\cos\phi, (R + r\cos t)\sin\phi, r\sin t).$$



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicj

Przykłady powierzchr

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślni

oziomice funkc

wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

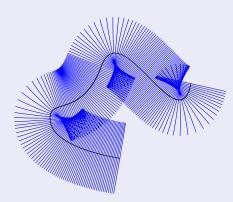
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

**Powierzchnią prostokreślną** nazywamy powierzchnię o parametryzacji

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są krzywymi w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .  $\alpha$  nazywa się potocznie kierownicą,  $\beta$  - ruletą.



#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

r oustawowe definic

r rzykiady powierzchni

wierzchnie obrot----

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcii

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa I

Zauważmy, że dla ustalonego  $s_0$  (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- ► Walec, Stożek
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- ► Katenoida(!).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

r oustawowe dem

Przykłady powierz

Parametryzacja Monge'a

wierzchnie obrotow

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Zauważmy, że dla ustalonego  $s_0$  (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- ► Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- ► Katenoida(!).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge a

vierzchnie obrotow

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Zauważmy, że dla ustalonego  $s_0$  (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- ▶ Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ► Katenoida(!).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Przykłady powierzc

Parametryzacja Monge a

vierzchnie obrotow

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Zauważmy, że dla ustalonego  $s_0$  (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- ► Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- ► Katenoida(!).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

i ousiawowe dem

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge a

wierzchnie obrotow

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ochodne ierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Zauważmy, że dla ustalonego  $s_0$  (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- ► Katenoida(!).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Tousiawowe dem

Przykłady powierz

Parametryzacja Monge a

wierzchnie obrotow

Powierzchnie prostokreślne

oziomice funkcji

Vektory styczne i ormalne. I forma

Pochodne Pochodne

erunkowe. ometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

# Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

 $F: V \to \mathbb{R}$ 

### będzie gładką funkcją.

▶ Punkt p ∈ V nazywamy punktem krytycznym funkcji F ieśli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0$$

Liczbę  $a \in \mathbb{R}$  nazywamy wartością krytyczną odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru  $F^{-1}(a)$  leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

i oustawowe definit

Przykłady powierzc

Parametryzacja Monge'a

i owierzciiille obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

#### Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe. Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $V \subset \mathbb{R}^3$  będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

▶ Punkt p ∈ V nazywamy punktem krytycznym funkcji F jeśli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$

Liczbę  $a \in \mathbb{R}$  nazywamy wartością krytyczną odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru  $F^{-1}(a)$  leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

roustawowe definic

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

TOWICIZCHINIC ODTOLOWC

Powierzchnie prostokreślne

#### Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

Niech  $V \subset \mathbb{R}^3$  będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

▶ Punkt p ∈ V nazywamy punktem krytycznym funkcji F jeśli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$

▶ Liczbę  $a \in \mathbb{R}$  nazywamy wartością krytyczną odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru  $F^{-1}(a)$  leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Przykłady powierz

rarametryzacja wionge a

rowierzennie obrotowe

Powierzchnie prostokreśln

#### Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ochodne ierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie

Punkt p ∈ V nazywamy punktem regularnym odwzorowania F jeśli dla pewnego i = 1, 2, 3

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0$$

Liczbę  $a \in \mathbb{R}$  nazywamy wartością regularną odwzorowania F jeśli zbiór  $F^{-1}(a)$  składa się tylko z punktów regularnych.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

i oustawowe definicji

Przykłady powierzchr

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślni

#### Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

▶ Punkt  $p \in V$  nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego i = 1, 2, 3

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

Liczbę  $a \in \mathbb{R}$  nazywamy wartością regularną odwzorowania F jeśli zbiór  $F^{-1}(a)$  składa się tylko z punktów regularnych.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

i oustawowe demineje

Przykłady powierzch

Parametryzacja Monge'a

rowierzennie obrotowe

Powierzchnie prostokreśln

#### Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

▶ Punkt  $p \in V$  nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego i = 1, 2, 3

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

▶ Liczbę  $a \in \mathbb{R}$  nazywamy wartością regularną odwzorowania F jeśli zbiór  $F^{-1}(a)$  składa się tylko z punktów regularnych.

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Przykłady powierzo

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie prostokresine

#### Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

### Twierdzenie

Niech  $V \subset \mathbb{R}^3$  będzie zbiorem otwartym, zaś  $F: V \to \mathbb{R}$  funkcją gładką. Jeśli  $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$  jest wartością regularną, wtedy  $F^{-1}(a)$  jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).

### Dowód

Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanei. Pomijamy.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

....

112ykiidy powierzeiiii

owierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

### Twierdzenie

Niech  $V \subset \mathbb{R}^3$  będzie zbiorem otwartym, zaś  $F: V \to \mathbb{R}$  funkcją gładką. Jeśli  $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$  jest wartością regularną, wtedy  $F^{-1}(a)$  jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).

### Dowód:

Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Pomijamy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Parametruracia Mongo

owierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

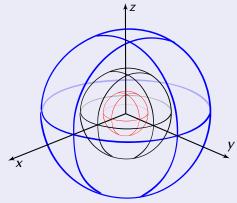
Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz  $f^{-1}(R)$ , gdzie  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ).



- ▶ paraboloida ( $F(x, y, z) = x^2 + y^2 z$ )
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:

$$f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

D 1 1 1 1

Powiorzebnio prostelevile

. . . . . . . .

### Poziomice funkcji

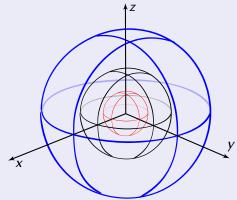
Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz  $f^{-1}(R)$ , gdzie  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ).



- ▶ paraboloida ( $F(x, y, z) = x^2 + y^2 z$ )
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:

$$f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicji

Przykłady powierzchni

, , , , ,

Powierzchnie prostokreślni

#### Poziomice funkcji

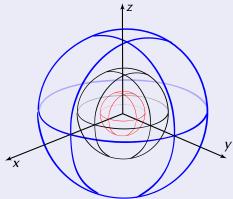
Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz  $f^{-1}(R)$ , gdzie  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ).



- ▶ paraboloida ( $F(x, y, z) = x^2 + y^2 z$ )
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:  $f(x) = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{k^2} \frac{z^2}{z^2}.$

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Podstawowe definicj

Przykłady powierzchni

i aramen yzacja monge a

Danisan-laria accesalacida

Poziomice funkcji

#### Poziomice funkc

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

# Wykład 6

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor n

Powtórka z algebry liniowej I

I forma poo

cierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa

Theorema Egregium Twierdzenie

### Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa Przestrzeń styczna Wektor normalny Powtórka z algebry liniowej I I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa I

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczn

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej I

I forma pods

ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa

(rzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie

$$x(s_0,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$
.

Podobnie dla dowolnego to mamy krzywa

$$x(\cdot, t_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
.

Krzywe te leżą na naszej powierzchni, a wektory styczne do tych krzywych będą grały bardzo ważną rolę w dalszych rozważaniach.

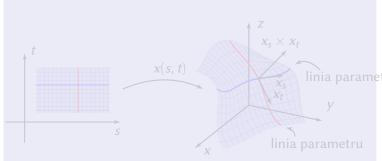
Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Przestrzeń styczna

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt  $p = x(s_0, t_0)$  wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0)\big|_{s=s_0}, \qquad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t)\big|_{t=t_0}.$$



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstav

Pochodne kierunkowe

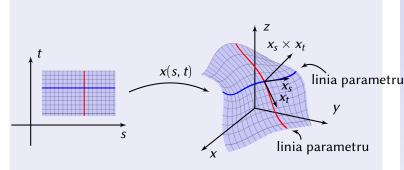
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt  $p = x(s_0, t_0)$  wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0)\big|_{s=s_0},$$

$$x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t)\big|_{t=t_0}.$$



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor nor

Powtórka z algebry liniowej

I forma podstawov

Pochodne kierunkowe Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

### Definicja

Niech  $\alpha_v \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$  będzie krzywą gładką. Załóżmy, że  $\alpha_v(0) = p$ , oraz  $\alpha_v'(0) = v$ . Ustalmy punkt  $p \in M$  i rozważmy wszystkie tego typu krzywe  $\alpha_v$ . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy  $T_pM$ .

### Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

▶ Jeśli  $v \in T_pM$ , wtedy również av  $\in T_pM$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ . Wynika to z reparametryzacji

 $\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at)$ 

▶ Addytywność (jeśli v,  $w \in T_pM$ , wówczas  $av + bw \in T_pM$ ) wynika z dowodu następnego lematu.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej

I forma podstawowa

cierunkowe. zometria.

zywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

▶ Jeśli  $v \in T_pM$ , wtedy również  $av \in T_pM$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ . Wynika to z reparametryzacji

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at)$$

Addytywność (jeśli v,  $w \in T_pM$ , wówczas  $av + bw \in T_pM$ ) wynika z dowodu następnego lematu.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej

forma podstawow

kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

▶ Jeśli  $v \in T_pM$ , wtedy również a $v \in T_pM$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ . Wynika to z reparametryzacji

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

Addytywność (jeśli v,  $w \in T_pM$ , wówczas  $av + bw \in T_pM$ ) wynika z dowodu następnego lematu.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawow

kierunkowe. Izometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

▶ Jeśli  $v \in T_pM$ , wtedy również av  $\in T_pM$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ . Wynika to z reparametryzacji

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

► Addytywność (jeśli v,  $w \in T_pM$ , wówczas  $av + bw \in T_pM$ ) wynika z dowodu następnego lematu.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej

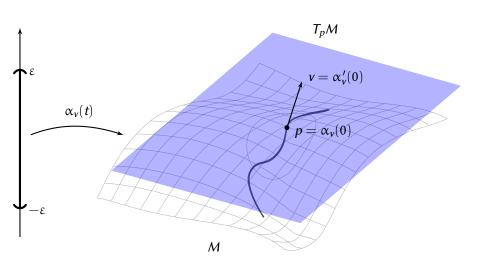
I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Grzywizna Gaussa



### Lemat

# Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x: U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

- 1. Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory  $\{x_s(p), x_t(p)\}$ , styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.
- 2. Niech  $p \in x(U)$ ,  $p = x(s_0, t_0)$  będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi

 $\dim T_p M = 2$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor non

Powtórka z algebry liniowej I

Pochodne

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

### Lemat

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym i niech  $x: U \to \mathbb{R}^3$  będzie lokalnym układem współrzędnych.

- 1. Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory  $\{x_s(p), x_t(p)\}$ , styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.
- 2. Niech  $p \in x(U)$ ,  $p = x(s_0, t_0)$  będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi

 $\dim T_p M = 2.$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor nor

Powtórka z algebry liniowej I

i forma podstaw

Pochodne kierunkowe Izometria.

rzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

### Lemat

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie zbiorem otwartym i niech  $x: U \to \mathbb{R}^3$  będzie lokalnym układem współrzędnych.

- 1. Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory  $\{x_s(p), x_t(p)\}$ , styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.
- 2. Niech  $p \in x(U)$ ,  $p = x(s_0, t_0)$  będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi

dim 
$$T_p M = 2$$
.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor nom

Powtórka z algebry liniowej I

Pochodne

Izometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech  $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$  oznacza podprzestrzeń liniową w  $\mathbb{R}^3$  rozpiętą przez wektory  $x_s$  i  $x_t$ . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej  $T_pM$  można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech  $v \in T_pM$ . Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha_v$ :  $(-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$  taka, że  $\alpha_v(0) = p$ ,  $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$ . Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech  $\beta_1,\beta_2:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$  będą funkcjami współrzędnych  $\beta$ . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_{\nu}(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_{\nu}(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norma

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa II

### Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech  $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$  oznacza podprzestrzeń liniową w  $\mathbb{R}^3$  rozpiętą przez wektory  $x_s$  i  $x_t$ . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej  $T_pM$  można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech  $v \in T_pM$ . Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha_v$ :  $(-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$  taka, że  $\alpha_v(0) = p$ ,  $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$ . Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech  $\beta_1,\beta_2{:}(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$  będą funkcjami współrzędnych  $\beta$ . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_{\nu}(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_{\nu}(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norn

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa

(rzywizna Gaussa II

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech  $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$  oznacza podprzestrzeń liniową w  $\mathbb{R}^3$  rozpiętą przez wektory  $x_s$  i  $x_t$ . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej  $T_pM$  można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech  $v \in T_pM$ . Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$  taka, że  $\alpha_v(0) = p$ ,  $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$ . Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech  $\beta_1,\beta_2:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$  będą funkcjami współrzędnych  $\beta$ . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_{\nu}(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_{\nu}(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norn

Powtórka z algebry liniowej

I forma podst

ometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa II

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech  $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$  oznacza podprzestrzeń liniową w  $\mathbb{R}^3$  rozpiętą przez wektory  $x_s$  i  $x_t$ . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej  $T_pM$  można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech  $v \in T_pM$ . Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$  taka, że  $\alpha_v(0) = p$ ,  $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$ .

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech  $\beta_1,\beta_2$ : $(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$  będą funkcjami współrzędnych  $\beta$ . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_{\nu}(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_{\nu}(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

I forma pods

zometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa II

Niech  $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$  oznacza podprzestrzeń liniową w  $\mathbb{R}^3$  rozpiętą przez wektory  $x_s$  i  $x_t$ . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej  $T_pM$  można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech  $v\in T_pM$ . Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha_v\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to M\subset \mathbb{R}^3$  taka, że  $\alpha_v(0)=p,\,\alpha_v'(0)=v\in T_pM$ . Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_{\nu} {:} (-\epsilon, \epsilon) \to \textit{U} \subset \mathbb{R}^2$$

i niech  $\beta_1,\beta_2:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$  będą funkcjami współrzędnych  $\beta$ . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_{v}(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{id_{x(U)}} \circ \alpha_{v}(t) = x(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

I forma pods

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa II

Niech  $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$  oznacza podprzestrzeń liniową w  $\mathbb{R}^3$  rozpiętą przez wektory  $x_s$  i  $x_t$ . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej  $T_pM$  można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech  $v \in T_pM$ . Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$  taka, że  $\alpha_v(0) = p$ ,  $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$ . Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_{\nu} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech  $\beta_1,\beta_2:(-\epsilon,\epsilon)\to\mathbb{R}$  będą funkcjami współrzędnych  $\beta.$  Wtedy równość funkcji

$$\alpha_{\nu}(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{id_{x(U)}} \circ \alpha_{\nu}(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norn

Powtórka z algebry liniowej I

l forma podsta

zometria.

Krzywizna Gaussa I

Irzywizna Gaussa II

$$\begin{aligned} v &= \alpha_{\nu}'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)\big)'\big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_{1}}(s_{0}, t_{0})\beta_{1}'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_{2}}(s_{0}, t_{0})\beta_{2}'(t)\big|_{t=0} = \\ &= \beta_{1}'(0)x_{s}(s_{0}) + \beta_{2}'(0)x_{t}(t_{0}), \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie  $\{x_s, x_t\}$ . Teraz przypuśćmy, że  $v = ax_s + bx_t$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że x(0,0) = p (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  przez  $\alpha(t) = x(at, bt)$ . Proste przeliczenie pokazuje, że  $\alpha(0) = p$  i

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor non

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{split} v &= \alpha_{v}'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)\big)'\big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_{1}}(s_{0}, t_{0})\beta_{1}'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_{2}}(s_{0}, t_{0})\beta_{2}'(t)\big|_{t=0} = \\ &= \beta_{1}'(0)x_{s}(s_{0}) + \beta_{2}'(0)x_{t}(t_{0}), \end{split}$$

co daje szukany rozkład v w bazie  $\{x_s, x_t\}$ . Teraz przypuśćmy, że  $v = ax_s + bx_t$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Be straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że x(0,0) = p (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  przez  $\alpha(t) = x(at, bt)$ . Proste przeliczenie pokazuje, że  $\alpha(0) = p$  i  $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$ , czyli v należy do  $T_pM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor non

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{aligned} v &= \alpha_{v}'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)\big)'\big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_{1}}(s_{0}, t_{0})\beta_{1}'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_{2}}(s_{0}, t_{0})\beta_{2}'(t)\big|_{t=0} = \\ &= \beta_{1}'(0)x_{s}(s_{0}) + \beta_{2}'(0)x_{t}(t_{0}), \end{aligned}$$

### co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$ .

Teraz przypuśćmy, że  $v=ax_s+bx_t$  dla pewnych  $a,b\in\mathbb{R}$ . Be straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że x(0,0)=p (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą  $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to x(U)$  przez  $\alpha(t)=x(at,bt)$ . Proste przeliczenie pokazuje, że  $\alpha(0)=p$  i  $\alpha'(0)=ax_s+bx_t=v$ , czyli v należy do  $T_pM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor non

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{aligned} v &= \alpha_{v}'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)\big)'\big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_{1}}(s_{0}, t_{0})\beta_{1}'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_{2}}(s_{0}, t_{0})\beta_{2}'(t)\big|_{t=0} = \\ &= \beta_{1}'(0)x_{s}(s_{0}) + \beta_{2}'(0)x_{t}(t_{0}), \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie  $\{x_s, x_t\}$ .

Teraz przypuśćmy, że  $v = ax_s + bx_t$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że x(0,0) = p (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  przez  $\alpha(t) = x(at, bt)$ . Proste przeliczenie pokazuje, że  $\alpha(0) = p$  i  $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$ , czyli v należy do  $T_pM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor nor

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{aligned} v &= \alpha_{v}'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)\big)'\big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_{1}}(s_{0}, t_{0})\beta_{1}'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_{2}}(s_{0}, t_{0})\beta_{2}'(t)\big|_{t=0} = \\ &= \beta_{1}'(0)x_{s}(s_{0}) + \beta_{2}'(0)x_{t}(t_{0}), \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie  $\{x_s, x_t\}$ . Teraz przypuśćmy, że  $v = ax_s + bx_t$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że x(0,0) = p (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  przez  $\alpha(t) = x(at, bt)$ . Proste przeliczenie pokazuje, że  $\alpha(0) = p$  i  $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$ , czyli v należy do  $T_pM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej I

l forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{aligned} v &= \alpha_{v}'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)\big)'\big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_{1}}(s_{0}, t_{0})\beta_{1}'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_{2}}(s_{0}, t_{0})\beta_{2}'(t)\big|_{t=0} = \\ &= \beta_{1}'(0)x_{s}(s_{0}) + \beta_{2}'(0)x_{t}(t_{0}), \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie  $\{x_s, x_t\}$ . Teraz przypuśćmy, że  $v = ax_s + bx_t$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że x(0,0) = p (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  przez  $\alpha(t) = x(at, bt)$ . Proste przeliczenie pokazuje, że  $\alpha(0) = p$  i  $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$ , czyli v należy do  $T_pM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

# Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Krzywizna Gaussa II

$$\begin{aligned} v &= \alpha_{v}'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_{1}(t), \beta_{2}(t)\big)'\big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_{1}}(s_{0}, t_{0})\beta_{1}'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_{2}}(s_{0}, t_{0})\beta_{2}'(t)\big|_{t=0} = \\ &= \beta_{1}'(0)x_{s}(s_{0}) + \beta_{2}'(0)x_{t}(t_{0}), \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie  $\{x_s, x_t\}$ . Teraz przypuśćmy, że  $v = ax_s + bx_t$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że x(0,0) = p (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  przez  $\alpha(t) = x(at, bt)$ . Proste przeliczenie pokazuje, że  $\alpha(0) = p$  i  $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$ , czyli v należy do  $T_pM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

#### Przestrzeń styczna

Wektor no

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Izometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Zauważmy, że przestrzeń styczna nie ma ustalonej w kanoniczny sposób bazy. Wektory  $x_s$  i  $x_t$  ją rozpinające zależą od wybranego lokalnego układu współrzędnych. Natomiast niezależna od tego wyboru jest cała przestrzeń styczna, a więc i jej ortogonalne dopełnienie, które nazywać będziemy kierunkiem normalnym.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej l

I forma podstawow

kierunkow Izometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

### Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech

$$x: U \longrightarrow M$$
  
 $(s_0, t_0) \longmapsto p \in M$ 

będzie lokalnym układem współrzędnych. Wektor normalny w p definiujemy jako

$$N(p) \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|} (s_0, t_0),$$

gdzie  $x_s$  i  $x_t$  wektorami stycznymi do linii parametru przechodzących przez punkt p.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowei |

I forms nodetswaws

Pochodne kierunkowe. zometria.

Crzywizna Gaussa I

. Irzywizna Gaussa II

heorema Egregium i wierdzenie

Twierdzenie klasyfikacyjne

$$N:M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

punktów na powierzchni M. Jest to tzw. odwzorowanie Gaussa do którego wrócimy później.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Wektor normalny

# Powtórka z algebry liniowej I

### Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Forma dwuliniowa na V to odwzorowanie

$$F: V \times V \to \mathbb{R}$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

$$F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$$

$$F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$$

dla wszystkich wektorów v, w,  $z \in V$  oraz wszystkich liczb rzeczywistych a,  $b \in \mathbb{R}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma nodstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria

rzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa II

# Powtórka z algebry liniowej I

### Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{R}$ . **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F: V \times V \to \mathbb{R}$$
.

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

$$F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$$

$$F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$$

dla wszystkich wektorów v, w,  $z \in V$  oraz wszystkich liczb rzeczywistych a,  $b \in \mathbb{R}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma nodstawowa

Pochodne kierunkowe.

Vernavirna Caussa

2y wiziia Gaussa i

Irzywizna Gaussa II

### Definicja

# Formę dwuliniową B nazywamy symetryczną jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich  $v, w \in V$ .

### Definicja

Niech  $\{v_1, \ldots, v_n\}$  będzie bazą przestrzeni V, oraz niech B będzie formą dwuliniową na V. Macierz fromy B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy  $B(x, y) = xAy^T$  gdzie  $y^T$  oznacza transpozycję.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

rzestrzeń styczna

### Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich  $v, w \in V$ .

### Definicja

Niech  $\{v_1, \ldots, v_n\}$  będzie bazą przestrzeni V, oraz niech B będzie formą dwuliniową na V. Macierz fromy B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \left[ \begin{array}{ccc} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{array} \right]$$

Przy takiej definicji mamy  $B(x, y) = xAy^T$  gdzie  $y^T$  oznacza transpozycję.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norn

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikacyjne

# Przykład

Standardowy iloczyn skalarny  $\langle x,y\rangle=\sum x_i^2$  jest oczywiście formą dwuliniową. W standardowej bazie przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  jego macierzą jest  $A=\operatorname{Id}$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Przestrzen styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe

rzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

# I forma podstawowa

### Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierchnią i niech  $p \in M$  będzie punktem na niej. Dla powierzchni M definiujemy **pierwszą formę podstawową w punkcie** p jako formę dwuliniową

$$I_p: T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$
  
 $(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$ 

gdzie  $\langle\cdot,\cdot\rangle$  jest standardowym iloczynem skalarnym w  $\mathbb{R}^3$ . Oznaczamy ją symbolem  $I_p$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norr

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

# Definicja

**Pierwsza forma podstawowa** powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}\stackrel{\mathsf{def.}}{=}\{I_{p}\}_{p\in\mathcal{M}}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać  $x_1$  i  $x_2$  zamiast  $x_s$  i  $x_t$ . Niech  $x(s_0, t_0) = p$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor non

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe Izometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

### Definicja

**Pierwsza forma podstawowa** powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{M}}\stackrel{\mathrm{def.}}{=} \{I_{p}\}_{p\in\mathcal{M}}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać  $x_1$  i  $x_2$  zamiast  $x_s$  i  $x_t$ . Niech  $x(s_0, t_0) = p$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

rzestrzeń styczna

Wektor norn

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe Izometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru  $2 \times 2$ . Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie  $\{x_1, x_2\}$ , w punkcie p ma postać

$$I_p = \left[ \begin{array}{ccc} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{array} \right]$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

rzestrzeń styczna

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie  $\{x_1, x_2\}$ , w punkcie p ma postać

$$I_p = \left[ \begin{array}{ccc} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{array} \right]$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

#### I forma podstawowa

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie  $\{x_1, x_2\}$ , w punkcie p ma postać

$$I_p = \left[ \begin{array}{ccc} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{array} \right]$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

I forma podstawowa

Niech  $x: U \to \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t)=(s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$
  $x_2(s, t) = (0, 1, s)$ 

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norr

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $x: U \to \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t)=(s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$
  $x_2(s, t) = (0, 1, s).$ 

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $x: U \to \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t)=(s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$
  $x_2(s, t) = (0, 1, s).$ 

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Niech  $x: U \to \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t)=(s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$
  $x_2(s, t) = (0, 1, s).$ 

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

# Elementy macierzy $I_p$ nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x: U \rightarrow M$

# Uwaga

- Ponieważ  $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$ , więc  $I_p$  jest formą symetryczną  $(g_{12} = g_{21})$ .
- Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowienio) g<sub>11</sub>, g<sub>12</sub> i g<sub>22</sub>.

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczr

Wektor nor

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Elementy macierzy  $I_p$  nazywamy współczynnikami metrycznymi lokalnego układu współrzędnych  $x: U \to M$ 

# Uwaga

- ▶ Ponieważ  $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$ , więc  $I_p$  jest formą symetryczną  $(g_{12} = g_{21})$ .
- Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowienio) g<sub>11</sub>, g<sub>12</sub> i g<sub>22</sub>.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Elementy macierzy  $I_p$  nazywamy współczynnikami metrycznymi lokalnego układu współrzędnych  $x: U \to M$ 

# Uwaga

- ▶ Ponieważ  $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$ , więc  $I_p$  jest formą symetryczną  $(g_{12} = g_{21})$ .
- ► Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowienio) g<sub>11</sub>, g<sub>12</sub> i g<sub>22</sub>.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

zierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

Elementy macierzy  $I_p$  nazywamy współczynnikami metrycznymi lokalnego układu współrzędnych  $x: U \to M$ 

# Uwaga

- ▶ Ponieważ  $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$ , więc  $I_p$  jest formą symetryczną  $(g_{12} = g_{21})$ .
- Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowienio) g<sub>11</sub>, g<sub>12</sub> i g<sub>22</sub>.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

#### Dowód:

Niech  $\varphi$  będzie kątem między  $x_1$  i  $x_2$ . Wtedy

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,$$

i lemat wynika z definicji *N*.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Irzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

#### Dowód:

Niech  $\varphi$  będzie kątem między  $x_1$  i  $x_2$ . Wtedy

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,$$

i lemat wynika z definicji *N*.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norma

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

#### Dowód:

Niech  $\varphi$  będzie kątem między  $x_1$  i  $x_2$ . Wtedy

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,$$

i lemat wynika z definicji *N*.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor norma

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

#### Dowód:

Niech  $\varphi$  będzie kątem między  $x_1$  i  $x_2$ . Wtedy

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,$$

i lemat wynika z definicji N.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczn

Wektor norm

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

#### Dowód:

Niech  $\varphi$  będzie kątem między  $x_1$  i  $x_2$ . Wtedy

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) =$$

$$= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,$$

i lemat wynika z definicji N.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Przestrzen styczna

Wektor normal

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$ ,  $y: V \to M$  będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że  $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$ . Niech  $(g_{ij})$ , [odpowiednio  $(\overline{g}_{ij})$ ] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez  $J_{\Phi}$  oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych  $\Phi_{x,y}$  wtedy  $(\overline{g}_{ij})$  wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_{\Phi}^{-1})^T (g_{ij}) J_{\Phi}^{-1}$$

**Dowód:**Pomijamy

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej

I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

*Niech*  $M \subset \mathbb{R}^3$  *będzie gładką powierzchnią i niech*  $x: U \to M$ ,  $y: V \to M$  będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że  $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$ . Niech  $(g_{ii})$ , [odpowiednio  $(\overline{g_{ii}})$ ] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y].

$$(\overline{g_{ij}}\circ\Phi_{x,y})=(J_{\Phi}^{-1})^T(g_{ij})J_{\Phi}^{-1}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

I forma podstawowa

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$ ,  $y: V \to M$  będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że  $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$ . Niech  $(g_{ij})$ , [odpowiednio  $(\overline{g_{ij}})$ ] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez  $J_{\Phi}$  oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych  $\Phi_{x,y}$  wtedy  $(\overline{g_{ij}})$  wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}}\circ\Phi_{x,y})=(J_{\Phi}^{-1})^T(g_{ij})J_{\Phi}^{-1}$$

**Dowód:** Pomijamy Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej

#### I forma podstawowa

ochodne ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

# Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \to M$ , $y: V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$ . Niech $(g_{ij})$ , [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$ ] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez $J_{\Phi}$ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_{\Phi}^{-1})^T (g_{ij}) J_{\Phi}^{-1}$$

**Dowód:** Pomijamy Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne normalne. I form podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej

#### I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

# Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \to M$ , $y: V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$ . Niech $(g_{ij})$ , [odpowiednio $(\overline{g}_{ij})$ ] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez $J_{\Phi}$ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g}_{ij})$ wyrażają

$$(\overline{g_{ij}}\circ\Phi_{x,y})=(J_\Phi^{-1})^T(g_{ij})J_\Phi^{-1}$$

#### Dowód:

Pomijamy.

się następującymi wzorami

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczn normalne. I forr podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

#### I forma podstawowa

rocnoane kierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie

#### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość krzywej  $\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \to M$  na powierzchni jest równą

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{a}^{b} \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_{1}(t), \alpha'_{2}(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_{0}^{b} \sqrt{(\alpha_{1}')^{2} g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_{1}' \alpha_{2}' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_{2}')^{2} g_{22}(\alpha(t))} dt$$

#### Dowód

Ćwiczenie. Zauważyć, że  $(x \circ \alpha)(t)$  jest zwykłą krzywą w  $\mathbb{R}^3$ . Wektor prędkości jest równy  $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$ . Znaleźć jego długość,

Geometria Różniczkowa Opracowanie: Marek Kaluba

Flementarna

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

przestrzeń styczna

Wektor normalny

I forma podstawowa

ometria.

rzywizna Gaussa II

Krzywizna Gaussa I

Theorema Egregium Twierdzenie

#### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość krzywej

 $\overline{\alpha} \stackrel{\textit{def.}}{=} x \circ \alpha : \mathbb{R} \to M$  na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{a}^{b} \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_{1}(t), \alpha'_{2}(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_{a}^{b} \sqrt{(\alpha_{1}')^{2} g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_{1}' \alpha_{2}' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_{2}')^{2} g_{22}(\alpha(t))} dt$$

#### Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że  $(x \circ \alpha)(t)$  jest zwykłą krzywą w  $\mathbb{R}^3$ . Wektor prędkości jest równy  $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$ . Znaleźć jego długość,  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

ometria.

rzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa I

#### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość krzywej  $\overline{\alpha} \stackrel{def.}{=} x \circ \alpha : \mathbb{R} \to M$  na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{a}^{b} \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_{1}(t), \alpha'_{2}(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_{a}^{b} \sqrt{(\alpha_{1}')^{2} g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_{1}' \alpha_{2}' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_{2}')^{2} g_{22}(\alpha(t))} dt$$

#### Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że  $(x \circ \alpha)(t)$  jest zwykłą krzywą w  $\mathbb{R}^3$ . Wektor prędkości jest równy  $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$ . Znaleźć jego długość,  $\bullet = \bullet \bullet \bullet \bullet$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa I

#### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość krzywej  $\overline{\alpha} \stackrel{def.}{=} x \circ \alpha : \mathbb{R} \to M$  na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{a}^{b} \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_{1}(t), \alpha'_{2}(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_{a}^{b} \sqrt{(\alpha_{1}')^{2} g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_{1}' \alpha_{2}' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_{2}')^{2} g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

#### Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że  $(x \circ \alpha)(t)$  jest zwykłą krzywą w  $\mathbb{R}^3$ . Wektor prędkości jest równy  $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$ . Znaleźć jego długość,  $\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej l

I forma podstawowa

ometria.

Irzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa I

#### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość krzywej  $\overline{\alpha} \stackrel{def.}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \to M$  na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{a}^{b} \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_{1}(t), \alpha'_{2}(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_{a}^{b} \sqrt{(\alpha_{1}')^{2} g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_{1}' \alpha_{2}' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_{2}')^{2} g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

#### Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że  $(x \circ \alpha)(t)$  jest zwykłą krzywą w  $\mathbb{R}^3$ . Wektor prędkości jest równy  $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$ . Znaleźć jego długość,

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I I forma podstawowa

ometria.

rzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa II

# Wykład 7

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

ometria

rzywizna Gaussa I

naviana Caussa

Pochodne kierunkowe. Izometria. Pochodne kierunkowe Izometria

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Pochodne kierunkowe Izometria.

Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$  taka że  $\alpha(0)=p$  oraz  $\alpha'(0)=v$ . Oczywiście złożenie  $f\circ\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

# Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji **f w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_{\mathbf{v}} f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0)$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

zometria

Krzywizna Gaussa I

zvwizna Gaussa

normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

zywizna Gauss

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M\subset\mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p\in M$  będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką  $f\colon M\to\mathbb{R}$  oraz wektor  $v\in T_pM$  z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$  taka że  $\alpha(0)=p$  oraz  $\alpha'(0)=v$ . Oczywiście złożenie  $f\circ\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

# Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji **f w kierunku wektora** *v* jako

$$\nabla_{v} f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

zywizna Gauss

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M\subset\mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p\in M$  będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką  $f:M\to\mathbb{R}$  oraz wektor  $v\in T_pM$  z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$  taka że  $\alpha(0)=p$  oraz  $\alpha'(0)=v$ . Oczywiście złożenie  $f\circ\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

# Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji **f w kierunku wektora** *v* jako

$$\nabla_{\nu} f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometri

Krzywizna Gaussa I

zywizna Gauss

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M\subset\mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p\in M$  będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką  $f\colon M\to\mathbb{R}$  oraz wektor  $v\in T_pM$  z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa  $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$  taka że  $\alpha(0)=p$  oraz  $\alpha'(0)=v$ . Oczywiście złożenie  $f\circ\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

# Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_{\nu} f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

# Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej $\alpha$ , tj. jeśli $\beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p \text{ oraz } \beta'(0) = v \text{ wtedy}$

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

#### Dowód:

- Niech  $x: U \to M$  lokalny układ współrzędnych wokół
- ightharpoonup Załóżmy, że  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(u)$ , oraz  $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$ .
- ightharpoonup Z założenia mamy  $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ .

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Pachadae kierunkowe

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

### Dowód:

- ▶ Niech  $x: U \rightarrow M$  lokalny układ współrzędnych wokół  $p \in M$ .
- ightharpoonup Załóżmy, że  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(u)$ , oraz  $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$ .
- ightharpoonup Z założenia mamy  $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Pachadae kierunkowe

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej  $\alpha$ , tj. jeśli  $\beta$ : $(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  jest drugą krzywą o tej własności, że  $\beta(0) = p$  oraz  $\beta'(0) = v$  wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

### Dowód:

- Niech x: U → M − lokalny układ współrzędnych wokół p ∈ M.
- ▶ Załóżmy, że  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(u)$ , oraz  $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$ .
- ► Z założenia mamy  $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ .

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej  $\alpha$ , tj. jeśli  $\beta$ : $(-\epsilon,\epsilon) \rightarrow M$  jest drugą krzywą o tej własności, że  $\beta(0) = p$  oraz  $\beta'(0) = v$  wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

#### Dowód:

- Niech x: U → M − lokalny układ współrzędnych wokół p ∈ M.
- ▶ Załóżmy, że  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(u)$ , oraz  $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$ .
- ► Z założenia mamy  $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ .

Mamy wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = [(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)]'(0) =$$

$$= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p = (x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v = (x^{-1} \circ \beta)'(0)} =$$

$$= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$$

gdzie *J* oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometr

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gau:

Mamy wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = [(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)]'(0) =$$

$$= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p = (x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v = (x^{-1} \circ \beta)'(0)} =$$

$$= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$$

gdzie *J* oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Pochodne kierunkowe

Izometri

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\left(x^{-1}\circ\alpha\right)'\!(0)=\left(x^{-1}\circ\beta\right)'\!(0).$$

Mamy wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = [(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)]'(0) =$$

$$= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p = (x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v = (x^{-1} \circ \beta)'(0)} =$$

$$= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$$

gdzie *J* oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych czastkowych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometri

Krzywizna Gaussa I

. Irzywizna Gaus

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$(x^{-1}\circ\alpha)'(0)=(x^{-1}\circ\beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{split} (f \circ \alpha)'(0) &= \left[ (f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha) \right]'(0) = \\ &= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p = (x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v = (x^{-1} \circ \beta)'(0)} = \\ &= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0), \end{split}$$

gdzie *J* oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $f, g: M \to \mathbb{R}$ beda funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów  $p \in M$ , wektorów v,  $w \in T_pM$  z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych a,  $b \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\nabla_{v}(fg) = g\nabla_{v}f + f\nabla_{v}g$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

$$\nabla_{av+bw} f = a \nabla_v f + b \nabla_w f$$

$$\nabla_{v}(af + bg) = a\nabla_{v}f + b\nabla_{v}(g)$$

$$\nabla_{v}(fg) = g\nabla_{v}f + f\nabla_{v}g$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

$$\nabla_{av+bw} f = a \nabla_v f + b \nabla_w f$$

$$\nabla_{\nu}(af + bg) = a\nabla_{\nu}f + b\nabla_{\nu}(g)$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

## Lemat

*Niech M*  $\subset \mathbb{R}^3$  *będzie powierzchnią gładką i niech f, g:M*  $\to \mathbb{R}$ beda funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów  $p \in M$ , wektorów v,  $w \in T_pM$  z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych a,  $b \in \mathbb{R}$  zachodzi

- $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_{\mathbf{v}}(af + bg) = a\nabla_{\mathbf{v}}f + b\nabla_{\mathbf{v}}(g)$
- $\nabla_{v}(fg) = g\nabla_{v}f + f\nabla_{v}g$

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $f, g: M \to \mathbb{R}$  będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów  $p \in M$ , wektorów  $v, w \in T_pM$  z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych  $a, b \in \mathbb{R}$  zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a \nabla_v f + b \nabla_w f$
- $\nabla_{v}(af + bg) = a\nabla_{v}f + b\nabla_{v}(g)$

## Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że  $\nabla$  jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

$$3(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} = v + w.$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

## Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech  $v = (v_1, v_2)$  oraz  $w = (w_1, w_2)$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że x(0, 0) = p. Zdefiniujmy

$$\alpha_{v}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t)$$
  $\alpha_{w}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t)$ 

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna  $\beta$  w t = 0 jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} = v + w.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

ywizna Gaussa

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech  $v = (v_1, v_2)$  oraz  $w = (w_1, w_2)$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że x(0,0) = p. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t)$$
  $\alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t)$ 

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} = v + w.$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech  $v = (v_1, v_2)$  oraz  $w = (w_1, w_2)$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że x(0,0) = p. Zdefiniujmy

$$\alpha_{v}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_{w}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} = v + w.$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech  $v = (v_1, v_2)$  oraz  $w = (w_1, w_2)$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że x(0,0) = p. Zdefiniujmy

$$\alpha_{v}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_{w}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna  $\beta$  w t = 0 jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_{\nu}(0)} = v + w.$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

## Wtedy

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) =$$

$$= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Pochodne kierunkowe

Krzywizna Caussa I

Theorema Egregium i Twierdzenie

## Wtedv

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) =$$

$$= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

## Wtedv

$$\nabla_{av+bw}f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1x_1 + v_2x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1x_1 + w_2x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) =$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{split} \nabla_{av+bw} f &= (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} = \\ &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\ &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\ &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f. \end{split}$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

# Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $f: M \to \mathbb{R}^3$  będzie odwzorowaniem gładkim (tj. polem wektorowym). **Pochodną** f w punkcie  $p \in M$  definiujemy jako

$$Df_p: T_pM \to R^3$$
  
 $v \mapsto \nabla_v f = (\nabla_v f_1, \nabla_v f_2, \nabla_v f_3).$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

derunkowe. zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Theorema Egregium i Twierdzenie klasvfikacvine

Elementarna Geometria Różniczkowa Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą powierzchniami gładkimi,  $p \in M$ punktem, oraz niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego  $v \in T_pM$  mamy  $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$  oraz

$$Df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

$$Df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

## Dowód:

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

# Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_pM$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ oraz

$$Df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

## Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że  $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Izometria.

Pochodne kierunkowe

#### Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $v \in T_p M$ . Wtedy istnieje taka krzywa  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ , że  $\alpha(0) = p$  oraz  $\alpha'(0) = v$ . Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz  $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ . Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy  $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$ , czyli  $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ .

Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $v \in T_p M$ . Wtedy istnieje taka krzywa  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ , że  $\alpha(0) = p$  oraz  $\alpha'(0) = v$ . Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz  $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ . Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy  $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$ , czyli  $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ .

Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $v \in T_p M$ . Wtedy istnieje taka krzywa  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ , że  $\alpha(0) = p$  oraz  $\alpha'(0) = v$ . Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz  $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$ . Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy  $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$ , czyli  $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ .

## Przykład

# Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

# (Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)

Dla  $p=(0,0)\in\mathbb{R}^2$  mamy f(p)=(1,0,0). Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy  $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$  i niech  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$  będzie zadana przez  $\alpha(t) = (at, bt)$ . Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p$$
,  $\alpha'(0) = v$ , oraz  $f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt)$ .

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)' \big|_{t=0} =$$
  
=  $(-a \sin at, a \cos at, b) \big|_{t=0} = (0, a, b)$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

#### Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla  $p=(0,0)\in\mathbb{R}^2$  mamy f(p)=(1,0,0). Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy  $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$  i niech  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$  będzie zadana przez  $\alpha(t) = (at, bt)$ . Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p$$
,  $\alpha'(0) = v$ , oraz  $f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt)$ .

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)' \big|_{t=0} =$$
  
=  $(-a \sin at, a \cos at, b) \big|_{t=0} = (0, a, b)$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

### Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla  $p=(0,0)\in\mathbb{R}^2$  mamy f(p)=(1,0,0). Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy  $v=(a,b)\in T_p\mathbb{R}^2$  i niech  $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to \mathbb{R}^2$  będzie zadana przez  $\alpha(t)=(at,bt)$ . Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p$$
,  $\alpha'(0) = v$ , oraz  $f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt)$ .

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)' \big|_{t=0} =$$
  
=  $(-a \sin at, a \cos at, b) \big|_{t=0} = (0, a, b)$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

r ochoune kierui

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla  $p=(0,0)\in\mathbb{R}^2$  mamy f(p)=(1,0,0). Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy  $v=(a,b)\in T_p\mathbb{R}^2$  i niech  $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to \mathbb{R}^2$  będzie zadana przez  $\alpha(t)=(at,bt)$ . Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p$$
,  $\alpha'(0) = v$ , oraz  $f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt)$ .

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)' \big|_{t=0} =$$
  
=  $(-a \sin at, a \cos at, b) \big|_{t=0} = (0, a, b).$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

erunkowe. ometria.

Pochodne kierun

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne ► Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest dyfeomorfizmem,

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

► Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

## Definicja

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą gładkimi powierzchniami i niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem gładkim.

Mówimy, że f jest izometrią jeśli f jest dyfeomorfizmem, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmienniczna ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich  $p \in M$  i wszystkich  $v, w \in T_p(M)$ .

▶ Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje jego otoczenie otwarte  $U \subset M$  takie, że  $f(U) \subset N$  jest zbiorem otwartym (w N), oraz  $f|_{U}: U \to f(U)$  jest izometrią.

## Definicja

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą gładkimi powierzchniami i niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem gładkim.

Mówimy, że f jest izometrią jeśli f jest dyfeomorfizmem, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmienniczna ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich  $p \in M$  i wszystkich  $v, w \in T_p(M)$ .

▶ Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje jego otoczenie otwarte  $U \subset M$  takie, że  $f(U) \subset N$  jest zbiorem otwartym (w N), oraz  $f|_{U}: U \to f(U)$  jest izometrią.

# Uwaga

Warto zauważyć, że izometria od lokalnej izometrii różni się tylko i wyłącznie tym, że lokalna izometria nie musi być dyfeomorfizmem całych przestrzeni. Jest to niewielka, lecz jak zobaczymy ważna różnica.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

normalne. I forma podstawowa

ochodne zierunkowe. zometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

heorema Egregium i wierdzenie

## Lemat

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą gładkimi powierzchniami i niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą gładkimi powierzchniami i niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

- 1. f jest lokalna izometria.

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

zometria.

Pochodne kierunkowe

## Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M, N \subset \mathbb{R}^3$  będą gładkimi powierzchniami i niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

- 1. f jest lokalną izometrią.
- 2. Równość  $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$  zachodzi dla wszystkich  $p \in M$  oraz  $v, w \in T_pM$ .
- Dla każdego p ∈ M istnieje lokalny układ współrzędnych x: U → M wokół p taki, że f ∘ x: U → N jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g<sub>ij</sub> jak x.
- 4. Dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje takie jego otoczenie otwarte  $A \subset M$ , że jeśli  $\alpha$ : $(a, b) \rightarrow A$  jest gładką krzywą, to długość  $\alpha \subset M$  jest taka sama jak długość  $f \circ \alpha \subset N$ .

Niech M,  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą gładkimi powierzchniami i niech  $f: M \to N$  będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

- f jest lokalna izometria.
- 2. Równość  $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$  zachodzi dla wszystkich  $p \in M$  oraz  $v, w \in T_pM$ .
- 3. Dla każdego  $p \in M$  istnieje lokalny układ współrzędnych  $x: U \to M$  wokół p taki, że  $f \circ x: U \to N$  jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g<sub>ii</sub> jak x.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

- f jest lokalna izometria.
- 2. Równość  $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$  zachodzi dla wszystkich  $p \in M$  oraz  $v, w \in T_pM$ .
- 3. Dla każdego  $p \in M$  istnieje lokalny układ współrzędnych  $x: U \to M$  wokół p taki, że  $f \circ x: U \to N$  jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g<sub>ii</sub> jak x.
- 4. Dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje takie jego otoczenie otwarte  $A \subset M$ , że jeśli  $\alpha:(a,b) \to A$  jest gładką krzywą, to długość  $\alpha \subset M$  jest taka sama jak długość  $f \circ \alpha \subset N$ .

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ .

(2) ⇒ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia f ∘ x ma rang 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że f ∘ x na pewnym otoczeniu V ⊂ U jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Niech {e₁, e₂} będzie standardową bazą w ℝ². Niech q ∈ x(U) oraz niech q̄ = x⁻¹(q). Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z (-arepsilon,arepsilon) o x(U) dla odpowiednio. małego arepsilon.

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Pokażemy, że pochodna złożenia  $f \circ x$  ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że  $f \circ x$  na pewnym otoczeniu  $V \subset U$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech  $\{e_1, e_2\}$  będzie standardową bazą w  $\mathbb{R}^2$ . Niech  $q \in x(U)$  oraz niech  $\overline{q} = x^{-1}(q)$ . Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \quad i = 1, 2$$

działające z  $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  dla odpowiednio małego  $\varepsilon$ .

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Pokażemy, że pochodna złożenia  $f \circ x$  ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że  $f \circ x$  na pewnym otoczeniu  $V \subset U$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech  $\{e_1, e_2\}$  będzie standardową bazą w  $\mathbb{R}^2$ . Niech  $q \in x(U)$  oraz niech  $\overline{q} = x^{-1}(q)$ . Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \quad i = 1, 2$$

działające z  $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  dla odpowiednio małego  $\varepsilon$ .

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Pokażemy, że pochodna złożenia  $f \circ x$  ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że  $f \circ x$  na pewnym otoczeniu  $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Niech  $\{e_1, e_2\}$  będzie standardową bazą w  $\mathbb{R}^2$ . Niech  $q \in x(U)$  oraz niech  $\overline{q} = x^{-1}(q)$ .

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \quad i = 1, 2$$

**Flementarna** Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Pokażemy, że pochodna złożenia  $f \circ x$  ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że  $f \circ x$  na pewnym otoczeniu  $V \subset U$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Niech  $\{e_1, e_2\}$  będzie standardową bazą w  $\mathbb{R}^2$ . Niech  $q \in x(U)$  oraz niech  $\overline{q} = x^{-1}(q)$ . Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z  $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$  dla odpowiednio małego  $\varepsilon$ .

$$\alpha_{q,i}(0) = q,$$
  $\alpha'_{q,i}(0) = x_i,$ 

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f\circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f\circ \alpha_{q,i})'(0) = (f\circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych  $x_i$  oraz  $(f \circ x)_i$  są wzięte dla  $\overline{q} \subset U$ . Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i)$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich i, j = 1, 2.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma

ierunkowe. zometria.

Izometria

\_\_\_\_\_

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f\circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f\circ \alpha_{q,i})'(0) = (f\circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych  $x_i$  oraz  $(f \circ x)_i$  są wzięte dla  $\overline{q} \subset U$ . Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f\circ x)_i=(f\circ \alpha_{q,i})'(0)=\nabla_{x_i}f=Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich i, j = 1, 2.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma

ierunkowe. zometria.

Izometria

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Caussa II

Krzywizna Gaussa II

Twierdzenie klasyfikacyjne natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q),$$
  $(f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$ 

gdzie wartości pochodnych  $x_i$  oraz  $(f \circ x)_i$  są wzięte dla  $\overline{q} \subset U$ . Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich i, j = 1, 2.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Vektory styczne i ormalne. I forma

cometria. Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

- ▶ Zatem  $||(f \circ x)_i|| = ||x_i||$  i kat między  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  jest taki sam jak między  $x_1$  i  $x_2$ .
- ▶ Stąd  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  są liniowo niezależne (na odp. małym  $V \subset U$ ).
- ► Zatem  $f \circ x: V \to N$  jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne  $f \circ x$  są takie same jak samego x (powyższa równość).

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

#### Izometria

Krzywizna Gaussa I

Irzywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

## $\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$

- ▶ Zatem  $||(f \circ x)_i|| = ||x_i||$  i kąt między  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  jest taki sam jak między  $x_1$  i  $x_2$ .
- ► Stąd  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  są liniowo niezależne (na odp. małym  $V \subset U$ ).
- ► Zatem  $f \circ x: V \to N$  jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne f ∘ x są takie same jak samego x (powyższa równość).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

- ▶ Zatem  $||(f \circ x)_i|| = ||x_i||$  i kąt między  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  jest taki sam jak między  $x_1$  i  $x_2$ .
- ► Stąd  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  są liniowo niezależne (na odp. małym  $V \subset U$ ).
- ► Zatem  $f \circ x$ :  $V \rightarrow N$  jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne f ∘ x są takie same jak samego x (powyższa równość).

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

## $\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$

- ▶ Zatem  $||(f \circ x)_i|| = ||x_i||$  i kąt między  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  jest taki sam jak między  $x_1$  i  $x_2$ .
- ► Stąd  $(f \circ x)_1$  i  $(f \circ x)_2$  są liniowo niezależne (na odp. małym  $V \subset U$ ).
- ► Zatem  $f \circ x$ :  $V \rightarrow N$  jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne f ∘ x są takie same jak samego x (powyższa równość).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> erunkowe. ometria.

Pochodne kierunkow

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

## Przykład

## Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

## jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech  $p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$  oraz niech  $U=(p_1-\pi,p_1+\pi)\times\mathbb{R}$ . Wtedy inkluzja  $x\colon U\to\mathbb{R}^2$  jest lokalnym układem współrzędnych w  $\mathbb{R}^2$ , oraz  $f\circ x\colon U\to S^1\times\mathbb{R}$  jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0)$$
 oraz  $(f \circ x)_2 = (0, 0, 1)$ 

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli  $f \circ x$  jest lokalnym układem współrzędnych

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Pochodne kierunkowe

#### Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią). Niech  $p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$  oraz niech  $U=(p_1-\pi,p_1+\pi)\times\mathbb{R}$ . Wtedy inkluzja  $x\colon U\to\mathbb{R}^2$  jest lokalnym układem współrzędnych w  $\mathbb{R}^2$ , oraz  $f\circ x\colon U\to S^1\times\mathbb{R}$  jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0)$$
 oraz  $(f \circ x)_2 = (0, 0, 1)$ 

wię

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli  $f \circ x$  jest lokalnym układem współrzędnych.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

rochodne kierunk

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasvfikacvine

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią). Niech  $p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$  oraz niech  $U=(p_1-\pi,p_1+\pi)\times\mathbb{R}.$  Wtedy inkluzja  $x\colon U\to\mathbb{R}^2$  jest lokalnym układem współrzędnych w  $\mathbb{R}^2$ , oraz  $f\circ x\colon U\to S^1\times\mathbb{R}$  jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0)$$
 oraz  $(f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$ 

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli  $f \circ x$  jest lokalnym układem współrzędnych.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Izometria

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

## Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak  $f \circ x$  skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku  $\mathbb{R}^2$  musiałoby być dyfeomorficzne z  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Pochodne kierunkowe

#### Izometria

Krzywizna Gaussa I

ranniana Causaa

heorema Egregium i wierdzenie lasyfikacyjne

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i  $f \circ x$  skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i  $f \circ x$  skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku  $\mathbb{R}^2$  musiałoby być dyfeomorficzne z  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Izometria

## Wykład 8

Krzywizna Gaussa I

Elementarna Geometria Różniczkowa

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

## Krzywizna Gaussa I

łwzorowanie Gaus

Krzywizna Gaussa – Ide:

le powierzchni

rtárka z algebry linio

ywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie

## Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Wektory styczne i normalne. I forma podstawow

Pochodne kierunkowe. Izometria.

## Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa Krzywizna Gaussa – Idea Pole powierzchni Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

### Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussa

e powierzchni

ne powierzenin

wtórka z algebry liniow

wizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie Jasyfikacyjne Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

## Definicja

Niech  $M \subset R^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie  $\widehat{n}: x(U) \to S^2$  zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie 
$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$$
.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

#### Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa - Idea

ie powierzchni

tórka z algebry liniow

ywizna Gaussa

zy wiziia Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie lasyfikacyjne Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako  $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$ , definicja 6.4), jest on raczej funkcją z  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$  (lub  $\mathbb{R}^2 \to S^2$ ). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie  $\widehat{n}: x(U) \to S^2$  zadane wzorem

 $\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$ 

 $gdzie n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

owierzchnie w R<sup>3</sup>

normalne. I for podstawowa

ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

#### Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

powierzchni

torka z argeory mnowej

wizna Gaussa

y wiziia Gaassa i

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

## Definicja

Niech  $M \subset R^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie  $\widehat{n}: x(U) \to S^2$  zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

$$gdzie n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne normalne. I forma nodstawowa

ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

.....i..... C....... 14.

e powierzennii

vtorka z algebry lini

ywizna Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie Jasyfikacyjne

## Uwaga

- ▶ Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc ±n, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).
- ▶ Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w  $\mathbb{R}^3$  (od lokalnego układu współrzędnych).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> cierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

#### Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

wtórka z algebry liniow

rzywizna Gaus:

Theorema Egregium i Twierdzenie

## Uwaga

- ▶ Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc ±n, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).
- Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w R³ (od lokalnego układu współrzędnych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

#### Odwzorowanie Gaussa

le nowierzchni

tórka z algebry liniow

zvwizna Gauss

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie

## Uwaga

- ▶ Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc ±n, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).
- ► Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w R³ (od lokalnego układu współrzędnych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

tierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – idea

tórka z algebry liniow

ywizna Gauss

neorema Egregium i vierdzenie

# Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji *K* o następujących własnościach:

## 1. $K:M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;

- krzywizna K(p) jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
- jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
- 4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być mniejsza niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie,  $K_M(p) < K_N(q)$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

le powierzchni

owtórka z algebry liniov

zvwizna Gaussa

rzywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

# Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji *K* o następujących własnościach:

- 1.  $K:M \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką;
- 2. krzywizna K(p) jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
- jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
- 4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być mniejsza niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie,  $K_M(p) < K_N(q)$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

## Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

trzywizna Gaussa

zorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

e powierzchni

wtórka z algebry linic

zvwizna Gaussa

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie

- 1.  $K:M \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką;
- 2. krzywizna K(p) jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
- jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
- 4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być mniejsza niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie,  $K_M(p) < K_N(q)$ .

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. zometria.

(rzywizna Gaussa

zorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

e powierzchni

wtórka z algebry liniow

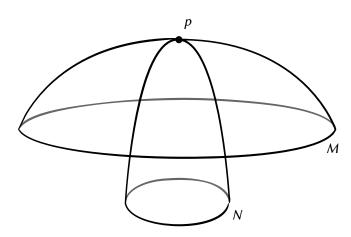
ywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie

- 1.  $K: M \to \mathbb{R}$  jest funkcją gładką;
- 2. krzywizna K(p) jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
- 3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
- 4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być mniejsza niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie,  $K_M(p) < K_N(q)$ .

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywizna Gaussa - Idea



### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

le powierzchni

...........

\_\_\_\_\_C-----

ywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

# Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$  i lokalny układ współrzędnych  $x: U \rightarrow M$  wokół p.
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte  $V \subset x(U)$  zawierające punkt p.
- ► Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy  $\widehat{n}(p)$  należy do zbioru  $\widehat{n}(V) \subset S^2$ ,
- zbadajmy więc stosunek pól powierzchni

$$\frac{A(\widehat{n}(V)), \ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V), \ V \subset M}$$

Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

owtórka z algebry liniow

ywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie dasyfikacyine

# Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$  i lokalny układ współrzędnych  $x: U \rightarrow M$  wokół p.
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte  $V \subset x(U)$  zawierające punkt p.
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy  $\widehat{n}(p)$  należy do zbioru  $\widehat{n}(V) \subset S^2$ ,
- zbadajmy więc stosunek pól powierzchni

$$\frac{A(\widehat{n}(V)), \ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V), \ V \subset M}$$

Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

(rzywizna Gaussa

zorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

owtórka z algebry liniov

ywizna Gaussa

Theorema Egregium
Twierdzenie

# Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$  i lokalny układ współrzędnych  $x: U \rightarrow M$  wokół p.
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte  $V \subset x(U)$  zawierające punkt p.
- ► Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy  $\widehat{n}(p)$  należy do zbioru  $\widehat{n}(V) \subset S^2$ ,
- zbadajmy więc stosunek pól powierzchni

$$\frac{A(\widehat{n}(V)), \ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V), \ V \subset M}$$

Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

(rzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

uutárka a alaabay lii

wizna Gaussa

heorema Egregium

i neorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

# Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$  i lokalny układ współrzędnych  $x: U \rightarrow M$  wokół p.
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte  $V \subset x(U)$  zawierające punkt p.
- ► Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy  $\widehat{n}(p)$  należy do zbioru  $\widehat{n}(V) \subset S^2$ ,
- zbadajmy więc stosunek pól powierzchni

$$\frac{A(\widehat{n}(V)), \ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V), \ V \subset M};$$

Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

ometria.

rzywizna Gaussa

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa - Idea

ole powierzchni

· ·

wtórka z algebry liniow

ywizna Gaussa

## Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$  i lokalny układ współrzędnych  $x: U \rightarrow M$  wokół p.
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte  $V \subset x(U)$  zawierające punkt p.
- ► Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy  $\widehat{n}(p)$  należy do zbioru  $\widehat{n}(V) \subset S^2$ ,
- zbadajmy więc stosunek pól powierzchni

$$\frac{A(\widehat{n}(V)), \ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V), \ V \subset M};$$

Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

zywizna Gaussa

vzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa - Idea

ole powierzchni

.

wtórka z algebry liniow

ywizna Gaussa

- Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
- 2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez  $\widehat{n}(V)$  kiedy  $\widehat{n}$  nie jest injekcją?
- 3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole  $A(\widehat{n}(V))$  ze znakiem ujemnym?

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

cierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa - Idea

ole powierzchni

owtórka z algebry liniov

rzywizna Gauss:

izywiziia Gaussa

- 1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń *V*? Jak to formalnie zdefiniować?
- 2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez  $\widehat{n}(V)$  kiedy  $\widehat{n}$  nie jest injekcją?
- 3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole  $A(\widehat{n}(V))$  ze znakiem ujemnym?

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

bie powierzchni

owtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

- 1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń *V*? Jak to formalnie zdefiniować?
- 2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez  $\widehat{n}(V)$  kiedy  $\widehat{n}$  nie jest injekcją?
- 3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole  $A(\widehat{n}(V))$  ze znakiem ujemnym?

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

le powierzchni

le powierzchni

owtórka z algebry liniowej

ywizna Gaussa

- 1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń *V*? Jak to formalnie zdefiniować?
- 2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez  $\widehat{n}(V)$  kiedy  $\widehat{n}$  nie jest injekcją?
- 3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole  $A(\widehat{n}(V))$  ze znakiem ujemnym?

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

le powierzchni

ie powierzchni

vtórka z algebry liniowej

ywizna Gaussa

### Przykład

Niech  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie (0,0,0) i niech

$$x(\phi, \psi) = (R\cos\phi\cos\psi, R\sin\phi\cos\psi, R\sin\psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$\begin{split} x_{\varphi} &= R(-\sin\varphi\cos\psi,\cos\varphi\cos\psi,0), \\ x_{\psi} &= R(-\cos\varphi\sin\psi,-\sin\varphi\sin\psi,\cos\psi), \end{split}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny *n* wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\widehat{n}(p) = \frac{x_{\Phi} \times x_{\Psi}}{\|x_{\Phi} \times x_{\Psi}\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

krzywizna Gaussa

zorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

le powierzchni

uztárka z algabru lim

y wiziia Gaussa

Niech 
$$S^2 \subset \mathbb{R}^3$$
 oznacza sferę o promieniu  $R$  i środku w punkcie  $(0,0,0)$  i niech

$$x(\phi, \psi) = (R\cos\phi\cos\psi, R\sin\phi\cos\psi, R\sin\psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$\begin{aligned} x_{\varphi} &= R(-\sin\varphi\cos\psi,\cos\varphi\cos\psi,0), \\ x_{\psi} &= R(-\cos\varphi\sin\psi,-\sin\varphi\sin\psi,\cos\psi), \end{aligned}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny *n* wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\widehat{n}(p) = \frac{x_{\Phi} \times x_{\Psi}}{\|x_{\Phi} \times x_{\Psi}\|} = \frac{p}{R}$$

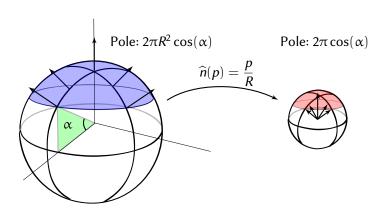
dla całej sfery.

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywizna Gaussa - Idea

Widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa zmiejsza obszar o czynnik  $\frac{1}{D2}$  i nie ma żadnych problemów z definicją.



Sfera o promieniu *R* 

Sfera o promieniu 1

·

$$K_{\mathfrak{G}}(p) = \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{2\pi\cos(\alpha)}{2\pi R^2\cos(\alpha)} = \frac{1}{R^2}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma

lzometria.

rzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

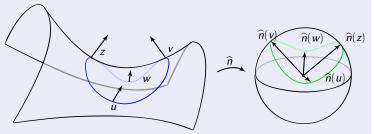
Powtórka z algebry lir

zywizna Gaussa I

### Przykład

Niech x(u, v) = (x, y, xy) (powierzchnia siodłowa).

- Nozważmy okrąg  $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$ , oraz jego obraz x(S) leżący na powierzchni siodłowej.
- Dobcięcie odwzorowania Gaussa do x(S) jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub x(S)) w lewo, okrąg  $\widehat{n}(x(S))$  jest obiegany w prawo.
- ▶ Zatem chcemy nadać znak ujemny polu  $A(\widehat{n}(V))$  gdzie V jest ograniczony przez x(S).



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

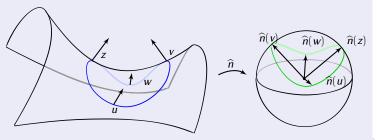
ole powierzchni

owtórka z algebry linic

zywizna Gauss

Niech x(u, v) = (x, y, xy) (powierzchnia siodłowa).

- ► Rozważmy okrąg  $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$ , oraz jego obraz x(S) leżący na powierzchni siodłowej.
- ▶ Obcięcie odwzorowania Gaussa do x(S) jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub x(S)) w lewo, okrąg  $\widehat{n}(x(S))$  jest obiegany w prawo.
- ▶ Zatem chcemy nadać znak ujemny polu  $A(\widehat{n}(V))$  gdzie V jest ograniczony przez x(S).



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

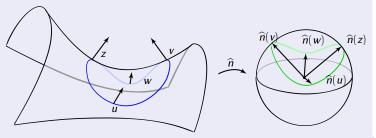
ole powierzchni

owtórka z algebry li

zywizna Gaussa

Niech x(u, v) = (x, y, xy) (powierzchnia siodłowa).

- ► Rozważmy okrąg  $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$ , oraz jego obraz x(S) leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do x(S) jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub x(S)) w lewo, okrąg  $\widehat{n}(x(S))$  jest obiegany w prawo.
- ▶ Zatem chcemy nadać znak ujemny polu  $A(\widehat{n}(V))$  gdzie V jest ograniczony przez x(S).



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

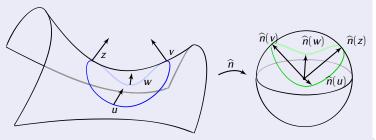
ole powierzchni

owtórka z algebry

zywizna Gaussa

Niech x(u, v) = (x, y, xy) (powierzchnia siodłowa).

- ► Rozważmy okrąg  $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$ , oraz jego obraz x(S) leżący na powierzchni siodłowej.
- ▶ Obcięcie odwzorowania Gaussa do x(S) jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub x(S)) w lewo, okrąg  $\widehat{n}(x(S))$  jest obiegany w prawo.
- ► Zatem chcemy nadać znak ujemny polu  $A(\widehat{n}(V))$  gdzie V jest ograniczony przez x(S).



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

le powierzchni

wtórka z algebry

zywizna Gauss

# Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

#### Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru**  $S \subset x(U)$  wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt$$

Motywacją geometryczną jest to, że  $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$  jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez  $x_1$  i  $x_2$ , który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussa

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej

zywizna Gauss

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru**  $S \subset x(U)$  wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że  $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$  jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez  $x_1$  i  $x_2$ , który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ierunkowe. cometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

zywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

owtórka z algebry liniowe

ywizna Gaussa

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru**  $S \subset x(U)$  wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że  $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$  jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez  $x_1$  i  $x_2$ , który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> erunkowe. ometria.

rzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Idea

#### Pole powierzchni

wtórka z algebry liniow

ywizna Gauss

*Załóżmy*, że  $S \subset x(U) \cap y(V)$  dla dwóch lokalnych układów współrzędnych x, y na M. Niech  $(g_{ij})$ ,  $[odpowiednio (\overline{g_{ij}})]$ oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Wtedy

$$\iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt = \iint_{y^{-1}(S)} \sqrt{|\det(\overline{g_{ij}})|} ds dt.$$

Dowód pomijamy.

## Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole  $\widehat{n}(V)$  jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt$$

gdzie  $n_1$ ,  $n_2$  są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń *V*) pozostaje.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rvwizna Gaussa – Idea

#### Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej

ywizna Gauss

## Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole  $\widehat{n}(V)$  jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt$$

gdzie  $n_1$ ,  $n_2$  są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń *V*) pozostaje.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

#### Pole powierzchni

owtórka z algebry liniov

ywizna Gauss

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole  $\widehat{n}(\mathit{V})$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt,$$

gdzie  $n_1$ ,  $n_2$  są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Pole powierzchni

owtórka z algebry linio

wizna Gauss

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole  $\widehat{n}(V)$  jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt,$$

gdzie  $n_1$ ,  $n_2$  są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Pole powierzchni

owtórka z algebry linio

wizna Gauss

## Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech  $\langle \; , \; \rangle$  będzie iloczynem skalarnym na W.

## Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe  $F: W \rightarrow W$ .

Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie  $\mathcal{B}_F \colon W \times W \to \mathbb{R}$  zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

## Przykład

Niech  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

dwzorowanie Gaussa

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gauss

## Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech  $\langle \; , \; \rangle$  będzie iloczynem skalarnym na W.

## Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe  $F: W \rightarrow W$ .

Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie  $\mathcal{B}_F : W \times W \to \mathbb{R}$  zadane przez

$$\mathcal{B}_{F}(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

## Przykład

Niech  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2)$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gauss

rzywizna Gaussa – I

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

rywizna Gauss

## Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech  $\langle \; , \; \rangle$  będzie iloczynem skalarnym na W.

## Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe  $F: W \rightarrow W$ .

Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie  $\mathcal{B}_F \colon W \times W \to \mathbb{R}$  zadane przez

$$\mathcal{B}_{F}(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

## Przykład

Niech  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa ywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussi

#### Przykład

Odwzorowanie  $\mathcal{B}_F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  indukowane przez F jest równo

$$\mathcal{B}_{F}((v_{1}, v_{2}), (w_{1}, w_{2})) = \langle F(v_{1}, v_{2}), (w_{1}, w_{2}) \rangle =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \end{bmatrix}, (w_{1}, w_{2}) \right\rangle =$$

$$= \langle (v_{1} + 2v_{2}, -v_{2}), (w_{1}, w_{2}) \rangle = (v_{1} + 2v_{2})w_{1} - v_{2}w_{2}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

lwzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – I

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

, neorema Egregium

### Przykład

Odwzorowanie  $\mathfrak{B}_F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  indukowane przez F jest równe

$$\mathcal{B}_{F}((v_{1}, v_{2}), (w_{1}, w_{2})) = \langle F(v_{1}, v_{2}), (w_{1}, w_{2}) \rangle =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \end{bmatrix}, (w_{1}, w_{2}) \right\rangle =$$

$$= \langle (v_{1} + 2v_{2}, -v_{2}), (w_{1}, w_{2}) \rangle = (v_{1} + 2v_{2})w_{1} - v_{2}w_{2}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zvovizna Caussa

zywizna Gauss

neorema Egregium i vierdzenie

# Niech $(W, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.
- Niech F: W → W będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.
- ► Niech M oznacza macierz odwzorowania B<sub>F</sub> indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).

Wtedy  $M = A^tG$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussa

ole powierzchni

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gauss

Niech  $(W, \langle , \rangle)$  będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.
- Niech F: W → W będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.
- ▶ Niech M oznacza macierz odwzorowania B<sub>F</sub> indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).

Wtedy  $M = A^tG$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Id

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gauss

izywiziia Gaussi

Niech  $(W, \langle , \rangle)$  będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.
- Niech F: W → W będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.
- Niech M oznacza macierz odwzorowania B<sub>F</sub> indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).

Wtedy  $M = A^tG$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa

vzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Id

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gauss

Niech  $(W, \langle , \rangle)$  będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.
- Niech  $F: W \rightarrow W$  będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.
- ► Niech **M** oznacza macierz odwzorowania B<sub>F</sub> indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).

Wtedy  $M = A^tG$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powtórka z algebry liniowei II

Niech  $(W, \langle , \rangle)$  będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- Oznaczmy przez G macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.
- Niech  $F: W \rightarrow W$  będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy A w powyższej bazie.
- ► Niech **M** oznacza macierz odwzorowania B<sub>F</sub> indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).

Wtedv  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t \mathbf{G}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powtórka z algebry liniowei II

Niech F będzie tak jak z poprzedniego przykładu. Na  $W = \mathbb{R}^2$ wybierzmy standardową bazę  $\{e_1, e_2\}$ . Naturalny iloczyn skalarny na  $\mathbb{R}^2$  ma w tej bazie macierz  $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ . Zatem macierzą odwzorowania  $\mathcal{B}_F$  jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t \cdot Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot Id,$$

zatem

$$\mathcal{B}_{F}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \operatorname{Id} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powtórka z algebry liniowei II

## Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathbb B$ formą dwuliniową na W.

- B jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania B w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.
- Niech F: W → W będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:
  - macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,
  - 2. forma dwuliniowa  $\mathbb{B}_F$  indukowana przez F jesi symetryczna.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

cometria.

Krzywizna Gaussa

wzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

Niech W będzie przestrzenią wektorową i  $\mathbb B$  formą dwuliniową na W.

- ▶ B jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania B w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.
- Niech F: W → W będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:
  - macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej

    hazie ortopormalnej przestrzeni W
    - 2. forma dwuliniowa B<sub>F</sub> indukowana przez F jest

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Krzywizna Gaussa

dwzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Idea

le powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

Niech W będzie przestrzenią wektorową i  ${\mathbb B}$  formą dwuliniową na W.

- ▶ B jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania B w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.
- Niech F: W → W będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:
  - 1. macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,
  - 2. forma dwuliniowa  $\mathfrak{B}_F$  indukowana przez F jes symetryczna.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. ometria.

Krzywizna Gaussa

lwzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Id

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

eorema Egregium i vierdzenie

Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech W będzie przestrzenią wektorową i B formą dwuliniową na W.

- ▶ B jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania B w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.
- Niech F: W → W będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:
  - 1. macierz **A** odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,
  - forma dwuliniowa B<sub>F</sub> indukowana przez F jest symetryczna.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. cometria.

(rzywizna Gaussa I

dwzorowanie Gaussa

(rzywizna Gaussa – Io

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gauss

### Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i B formą dwuliniową na W.

- ▶ B jest forma symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania B w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.
- Niech  $F: W \to W$  będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:
  - 1. macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,
  - 2. forma dwuliniowa  $\mathfrak{B}_F$  indukowana przez F jest symetryczna.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powtórka z algebry liniowei II

$$\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathcal{B}(\mathbf{w},\mathbf{v}).$$

$$A = A^t$$
.

- ▶ Jeśli A jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz G = Id (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_{F}(v, w) = v\mathbf{A}^{t} \cdot \mathbf{G}w = w^{t} (\mathbf{A}^{t})^{t} v^{t} = \mathcal{B}_{F}(w, v).$$

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

-1-----

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie

$$\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathcal{B}(\mathbf{w},\mathbf{v}).$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$$

- ▶ Jeśli A jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz G = Id (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t (\mathbf{A}^t)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

ywizna Gaussa – Ide

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie

$$\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathcal{B}(\mathbf{w},\mathbf{v}).$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$$

- ▶ Jeśli A jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz G = Id (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t (\mathbf{A}^t)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

zywizna Gaussa – I

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

ywizna Gaussa

neorema Egregium i vierdzenie

$$\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathcal{B}(\mathbf{w},\mathbf{v}).$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$$

- Jeśli A jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz G = Id (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t (\mathbf{A}^t)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

zywizna Gaussa – Id

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie

### Lemat

Niech  $F: W \rightarrow W$  będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz **A** formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- F ma rzeczywiste wartości własne k<sub>i</sub>.
- Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i} k_{i}$$
 oraz  $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i} k_{i}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powtórka z algebry liniowei II

- F ma rzeczywiste wartości własne k<sub>i</sub>.
- wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i} k_{i}$$
 oraz  $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i} k_{i}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

zwizna Gaussa – Ide:

le powierzchni

oie powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

zy wiziia Gaassa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- F ma rzeczywiste wartości własne k<sub>i</sub>.
- wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i} k_{i} \quad oraz \quad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i} k_{i}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powtórka z algebry liniowei II

- F ma rzeczywiste wartości własne k<sub>i</sub>.
- wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i} k_{i}$$
 oraz  $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i} k_{i}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. cometria.

Krzywizna Gaussa I

wzorowanie Gaussa

wizna Gaussa – Idaa

le powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

zywizna Gaussa

neorema Egregium

# Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right].$$

Wielomian charakterystyczny A:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną  $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ , więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne **A**).

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

#### Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussa

wizna Gaussa – Idaa

le powierzchni

#### Powtórka z algebry liniowei II

vwizna Gaussa

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right].$$

Wielomian charakterystyczny A:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną  $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ , więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne **A**).

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

#### Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussi

wizna Caucca – Idaa

le powierzchni

#### Powtórka z algebry liniowej II

vwizna Gaussa

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie dasyfikacyine

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right].$$

Wielomian charakterystyczny A:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną  $\Delta=(a-c)^2+4b^2$ , więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne **A**).

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussi

nuizna Gaussa – Ide

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

ywizna Gauss

heorema Egregium i wierdzenie

Niech  $W = \mathbb{R}^2$  i niech  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

## Mamy wtedy

$$f_A(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$$

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
, oraz  $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

$$k_1k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$$
, oraz  $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

#### Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

#### Powtórka z algebry liniowej II

ywizna Gaussa

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

Niech  $W = \mathbb{R}^2$  i niech  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

## Mamy wtedy

$$f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t-1 = t^2-t-1$$

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
, oraz  $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

$$k_1k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}, \text{ oraz } k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

#### Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

ywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowei II

rywizna Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie

Niech  $W = \mathbb{R}^2$  i niech  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

Mamy wtedy

$$f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t-1 = t^2-t-1$$

• 
$$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
, oraz  $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

► 
$$k_1k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$$
, oraz  $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

zorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

.

Powtórka z algebry liniowej II

ywizna Gaussa

eorema Egregium

Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $W = \mathbb{R}^2$  i niech  $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

Mamy wtedy

$$f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t-1 = t^2-t-1$$

• 
$$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
, oraz  $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

$$k_1k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$$
, oraz  $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

vzorowanie Gaussa

zywizna Gaussa – Idea

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

ywizna Gaussa

orema Egregium

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

### Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ochodne ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

dwzorowanie Gaussa

rzywizna Gaussa – I

ole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

wizna Gaussa

orema Egregium i

Twierdzenie klasyfikacyjne

## Wykład 9

Krzywizna Gaussa II

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

## Krzywizna Gaussa II

-----

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodnośc definicii

Theorema Egregium Twierdzenie

### Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Wektory styczne i normalne. I forma podstawow

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

### Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena Druga forma podstawowa Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

## Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

ruga forma podstawow

rzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodn

Theorema Egregium Twierdzenie

### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

Dla każdego wektora  $v \in T_p(M)$  pochodna kierunkowa

$$D\widehat{n}(v) \in T_pM$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w  $\mathbb{R}^3$ ).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> tierunkowe. zometria.

(rzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa

#### Odwzorowanie Weingartena

Yeura forma nodetawawa

· G

rzywizna Gaussa oraz rzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ . Dla każdego wektora  $v \in T_p(M)$  pochodna kierunkowa

$$D\widehat{n}(v) \in T_pM$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w  $\mathbb{R}^3$ ).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa

rzywizna Gaussa

Odwzorowanie Weingartena

ruga forma podstawowa

ruga torma podstawow

krzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasvfikacvine

Flementarna Geometria Różniczkowa Opracowanie: Marek Kaluba

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2 \langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2 \langle D \widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle,$$

### Dowód:

Wektor normalny  $\widehat{n}(p)$  ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać  $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$  wewnątrz x(U).

Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2 \langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2 \langle D \widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle$$

więc  $D\widehat{n}(v)$  jest zawsze prostopadły do  $\widehat{n}$ , zatem musi należeć do  $T_nM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

lzometria.

rzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussi

#### Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawo

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium Twierdzenie

### Dowód:

Wektor normalny  $\widehat{n}(p)$  ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać  $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$  wewnątrz x(U). Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{\mathbf{n}}, \widehat{\mathbf{n}} \rangle(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} \langle \widehat{\mathbf{n}}, \widehat{\mathbf{n}} \rangle = 2 \langle \nabla_{\mathbf{v}} \widehat{\mathbf{n}}, \widehat{\mathbf{n}} \rangle = 2 \langle D \, \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{n}} \rangle,$$

więc  $D\widehat{n}(v)$  jest zawsze prostopadły do  $\widehat{n}$ , zatem musi należeć do  $T_nM$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Izometria.

rzywizna Gaussa

rzywizna Gaussi

#### Odwzorowanie Weingartena

Druga forma nodstawo

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności

Theorema Egregium i Twierdzenie Wektor normalny  $\hat{n}(p)$  ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać  $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$  wewnątrz x(U).

Wtedv

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle(v) = \nabla_{v}\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle \nabla_{v} \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle D \widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle,$$

wiec  $D\hat{n}(v)$  jest zawsze prostopadły do  $\hat{n}$ , zatem musi należeć do  $T_{p}M$ .

**Flementarna** Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

#### Odwzorowanie Weingartena

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie  $L: T_pM \to T_pM$  zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D \widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

### Lemat

Odwozorowanie Weingartena L:  $T_pM \rightarrow T_pM$  jest odwzorowaniem liniowym.

### Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3).

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

zy wizna oddosa i

-, ...-...

### Odwzorowanie Weingartena

Oruga forma podstawov

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodnośc definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie  $L: T_pM \to T_pM$  zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D \widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

### Lemat

Odwozorowanie Weingartena L:  $T_pM \rightarrow T_pM$  jest odwzorowaniem liniowym.

### Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

Zywiziia Gaussa i

zywizna Gaussa

Odwzorowanie Weingartena

ruga forma podstawow

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie  $L: T_pM \to T_pM$  zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D \widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

### Lemat

Odwozorowanie Weingartena L:  $T_pM \rightarrow T_pM$  jest odwzorowaniem liniowym.

### Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Ly Willia Gaassa .

zy wiziia Gaussa

Odwzorowanie Weingartena

ruga forma podstawow

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie

## Uwaga

Chociaż do definicji odwzorowania Weingartena używamy lokalnego układu współrzędnych, jednak przy innym wyborze  $x: U \to M$ , odwzorowanie L może się różnić tylko o znak  $\pm$ .

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ochodne iierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaus

#### Odwzorowanie Weingartena

..... 6-----

rzywizna Gaussa oraz

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

**Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe  $II_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$  indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej  $T_p M$ .

## Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

12y wiziia Gaussa

,

dwzorowanie weingartena

#### Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ . **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe  $II_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$  indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej  $T_pM$ .

## Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

zy wiziia Gaussa

y wiziia Gaussa

wzorowanie Weingartena

#### Druga forma podstawowa

(rzywizna Gaussa oraz

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicii

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ . **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe  $II_p: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$  indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej  $T_pM$ .

## Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

cierunkowe. zometria.

Zy WiZiid Gadssa

y wiziia Gaussa

vzorowanie Weingartena

#### Druga forma podstawowa

Crzywizna Gaussa oraz

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej  $T_pM$ .

## Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

\_, ...\_.

y wiziia Gaussa

vzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

- · ·

krzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodnośc definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasvfikacvine

## Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej  $x_1, x_2$ ) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$
  $(l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$ 

### Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t(g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

zy wiziia Gaussa i

, ......

dwzorowanie Weingartena

#### Druga forma podstawowa

Vernauiran Causea araz

krzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

## Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej  $x_1, x_2$ ) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$
  $(l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$ 

### Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t(g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

erunkowe. ometria.

zywizna Gaussa

y wiziia Gaussa ii

awzorowanie weingartena

Druga forma podstawowa

rzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodn

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

### Lemat

# Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x: U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$ .

1. (Równania Weingartena) Dla i = 1, 2 zachodz

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

2. Dla indeksów i, j = 1, 2, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle$$

gdzie  $x_{ij}$  jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

cometria.

rzywizna Gaussa

\_\_\_\_\_

dwzorowanie Weingartena

#### Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

1. (Równania Weingartena) Dla i = 1, 2 zachodzi

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

2. Dla indeksów i, j = 1, 2, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle$$

gdzie  $x_{ij}$  jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

mormalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa

Ly Willia Gadissa II

wzorowanie weingartena

### Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $x: U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

**1.** (Równania Weingartena) Dla i = 1, 2 zachodzi

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

**2.** Dla indeksów i, j = 1, 2, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle$$
,

gdzie  $x_{ij}$  jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Druga forma podstawowa

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial (\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i} x_1 - L_{2i} x_2,$$

gdzie  $x = x(u_1, u_2)$  ( $u_i$  są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \Pi(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że  $\langle n, x_i \rangle = 0$ . Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle$$

skąd natychmiast wynika druga równość.

Elementarna Geometria Różniczkowa Opracowanie:

Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

rzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodi

Theorema Egregium i Twierdzenie

lwierdzenie klasyfikacyjne

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie  $x = x(u_1, u_2)$  ( $u_i$  są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \Pi(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość \* wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że  $\langle n, x_i \rangle = 0$ . Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Druga forma podstawowa

### Krzywizna Gaussa oraz

krzywizna średnia

Agitacja na rzecz zgodn definicji

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie  $x = x(u_1, u_2)$  ( $u_i$  są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \Pi(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość \* wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że  $\langle n, x_i \rangle = 0$ . Mam

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle$$

skąd natychmiast wynika druga równość

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

12yWIZIIa Gaussa

y wiziid Oddoba i

dwzorowanie Weingartena

# Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodnoś definicii



(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie  $x = x(u_1, u_2)$  ( $u_i$  są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = II(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość \* wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że  $\langle n, x_i \rangle = 0$ . Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle$$

skąd natychmiast wynika druga równość

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

zometria.

zywizna Gaussa i

ywiziia Gaussa i

vzorowanie Weingartena

# Druga forma podstawowa

krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

rousumowami

Agitacja na rzecz zgodr

Theorema Egregium Twierdzenie

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie  $x = x(u_1, u_2)$  ( $u_i$  są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = II(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość \* wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że  $\langle n, x_i \rangle = 0$ . Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość.

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma

zometria.

Zywiziia Gaussa i

zywizna Gaussa

dwzorowanie Weingartena

# Druga forma podstawowa

krzywizna średnia

rousumowam

Agitacja na rzecz zgodr



- Druga forma podstawowa II jest symetryczna.
- Macierz (L<sub>ij</sub>) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej

# Dowód:

Symetryczność macierzy ( $l_{ij}$ ) wynika z równości  $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$  oraz  $x_{12} = x_{21}$ .

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II).

### Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

,

Ouwzorowanie wenigartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

- Druga forma podstawowa II jest symetryczna.
- Macierz (L<sub>ij</sub>) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej

# Dowód:

Symetryczność macierzy  $(l_{ij})$  wynika z równości  $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$  oraz  $x_{12} = x_{21}$ .

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

\_, .....

Ouwzorowanie wenigartena

### Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

- Druga forma podstawowa II jest symetryczna.
- Macierz (L<sub>ij</sub>) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej.

# Dowód:

Symetryczność macierzy  $(l_{ij})$  wynika z równości  $l_{ij} = \langle n, x_{ij} 
angle$ oraz  $x_{12} = x_{21}$ .

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

wzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

#### .

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicii

- Druga forma podstawowa II jest symetryczna.
- Macierz (L<sub>ij</sub>) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej.

# Dowód:

Symetryczność macierzy ( $l_{ij}$ ) wynika z równości  $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$  oraz  $x_{12} = x_{21}$ .

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

> erunkowe. ometria.

rzywizna Gaussa I

ywizna Gaussa

vzorowanie Weingartena

### Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodnośc

- Druga forma podstawowa II jest symetryczna.
- Macierz (L<sub>ij</sub>) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej.

## Dowód:

Symetryczność macierzy ( $l_{ij}$ ) wynika z równości  $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$  oraz  $x_{12} = x_{21}$ .

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

erunkowe. ometria.

rzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

vzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodn

# Uwaga

Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena  $(L_{ij})$  jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej  $\{x_1, x_2\}$  nie będzie ortonormalna w punkcie p, wtedy najczęściej  $L_{ij}(p)$  nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu 8.6).

# Uwaga

Wiedząc, że macierz  $(l_{ij})$  jest symetryczna, możemy przepisac uzyskaną wcześniej równość do prostszej

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

cierunkowe. zometria.

irzy wiziia Gaussa

zywizna Gaussa

lwzorowanie Weingartena

#### Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodno:

# Uwaga

Wiedząc, że macierz  $(l_{ij})$  jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne normalne. I form podstawowa

ochodne erunkowe. ometria.

zywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

wzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

rzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

A -ia--i- --- ----

Agitacja na rzecz zgodności definicji

# Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

# Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne  $K:M \to \mathbb{R}$ ,  $H:M \to \mathbb{R}$  nastepująco

$$K(p) = \det L(p)$$
  $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p)$ 

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> ierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa

zywiziia Gaussa

Odwzorowanie Weingartena

Krzywizna Gaussa oraz

krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

# Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

# Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne  $K:M \to \mathbb{R}$ ,  $H:M \to \mathbb{R}$  nastepująco

$$K(p) = \det L(p)$$
  $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p)$ 

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne cierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa

zywizna Gauss

dwzorowanie Weingartena

Krzywizna Gaussa oraz

krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

# Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

# Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne  $K:M \to \mathbb{R}$ ,  $H:M \to \mathbb{R}$  nastepująco

$$K(p) = \det L(p)$$
  $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$ 

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ochodne ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa

zywizna Gauss

dwzorowanie Weingartena

Krzywizna Gaussa oraz

krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej  $T_pM$ .

# Dowód:

Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2, \text{tr } L(p) = k_1 + k_2$$

cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat 8.7).

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

rzywizna Gaussa

zywizna Gauss

dwzorowanie Weingartena

Oruga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodnośc

definicji

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

### Lemat

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej  $T_pM$ .

# Dowód:

Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2$$
,  $\operatorname{tr} L(p) = k_1 + k_2$ .

cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat 8.7).

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad oraz \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

# Dowód

Przypomnijmy, że  $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$ . Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ii})}$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

dwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodnośc definicji

Theorema Egregium i

Twierdzenie

4 D > 4 D > 4 E > 4 E > E D Q @

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad oraz \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

# Dowód

Przypomnijmy, że  $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$ . Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{2 \det(g_{ii})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

y wiziia Gaussa i

Odwzorowanie Weingartena
Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie

klasyfikacyjne

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad oraz \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

# Dowód:

Przypomnijmy, że  $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$ . Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{2 \det(g_{ii})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

irzywizna Gaussa i

ywizna Gauss

Odwzorowanie Weingartena

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad oraz \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

# Dowód:

Przypomnijmy, że  $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$ . Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

arzywizna Gaussa i

zywizna Gaussi

Odwzorowanie Weingartena

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i

Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, oraz niech  $x: U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in x(U)$ .

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad oraz \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

# Dowód:

Przypomnijmy, że  $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$ . Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ii})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

**Flementarna** Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Theorema Egregium i







# Podsumowanie

Aby obliczyć krzywizny (średnią i Gaussa) powierzchni potrzebujemy następujące wielkości:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle, \qquad g_{12} = g_{21} = \langle x_1, x_2 \rangle, \qquad g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle,$$

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

$$l_{11} = \langle n_1, x_1 \rangle, \qquad l_{12} = l_{21} = \langle n_2, x_1 \rangle, \qquad l_{22} = \langle n_2, x_2 \rangle,$$

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. zometria.

arzy wiziia Gaussa

rzywizna Gaussa

Odwzorowanie Weingartena

ruga forma podstawow

rzywizna Gaussa ora rzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

# Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ . Oznaczmy przez  $\overline{p} = x^{-1}(p)$ .

Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathfrak{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\int \int_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds \, dt}{\int \int_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds \, dt} = \frac{\int \int_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds \, dt}{\int \int_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds \, dt}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

rzywizna Gaussa

zywizna Gaussa

dwzorowanie Weingartena

irzywizna Gaussa oraz

rzywizna średnia

Podsumowan

Agitacja na rzecz zgodności definicji

# Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ . Oznaczmy przez  $\overline{p} = x^{-1}(p)$ .

Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathfrak{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

12y WIZIIa Gaussa

zywizna Gaussa

dwzorowanie Weingartena

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

# Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech  $M\subset\mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią i niech  $x\colon U\to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p\in M$ . Oznaczmy przez  $\overline{p}=x^{-1}(p)$ .

Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{split} K_{\mathfrak{G}}(p) &= \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\int \int_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds \, dt}{\int \int_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds \, dt} = \\ &= \frac{\int \int_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds \, dt}{\int \int_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds \, dt}. \end{split}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa

ywizna Gaussa

dwzorowanie Weingartena

Krzywizna Gaussa oraz

Podeumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V))$$
$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

(rzywizna Gaussa I

ywizna Gaussa

vzorowanie Weingartena

ruga forma podstawowa

rzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty  $a_V$ ,  $b_V \in x^{-1}(V)$ , że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V)),$$

$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa I

ywizna Gaussa

vzorowanie Weingartena

ruga forma podstawow

rzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

$$\lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V \to \{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle | A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego  $(n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2)$  otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \left( -(L_{11}x_1 + L_{21}x_2) \right) \times \left( -(L_{21}x_1 + L_{22}x_2) \right) =$$

$$= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna K(p) zdefiniowana jako  $\det(L_{ij})$ )

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

-, ......

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz crzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Zauważmy, że skoro  $V \to \{p\}$ , więc  $a_V \to \overline{p}$  oraz  $b_V \to \overline{p}$ . Mamy więc

$$\begin{split} \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} &= \lim_{V \to \{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle | A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} | A(x^{-1}(V))} = \\ &= \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle |}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}. \end{split}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego  $(n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2)$  otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = (-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) =$$
  
=  $(x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$ 

(jest to krzywizna K(p) zdefiniowana jako  $\det(L_{ij})$ ).

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

dwzorowanie Weingartena

Oruga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

$$\begin{split} \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} &= \lim_{V \to \{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle | A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} | A(x^{-1}(V))} = \\ &= \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle |}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}. \end{split}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego  $(n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2)$  otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = (-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) =$$
  
=  $(x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$ 

(jest to krzywizna K(p) zdefiniowana jako  $\det(L_{ij})$ ).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

ometria.

rzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa

dwzorowanie Weingartena

Oruga forma podstawow

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

# Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle \mathbf{n}_{1}(\overline{p}) \times \mathbf{n}_{2}(\overline{p}), \mathbf{n}(\overline{p}) \rangle = \pm K(p) \left\langle x_{1}(\overline{p}) \times x_{2}(\overline{p}), \frac{x_{1}(\overline{p}) \times x_{2}(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} ||x_{1} \times x_{2}||^{2} = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathfrak{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p)$$

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

arzywizna Gaussa I

uwzorowanie wenigariena

ruga forma podstawow

rzywizna Gaussa oraz rzywizna średnia

Podsumowani

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_{1}(\overline{p}) \times n_{2}(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle = \pm K(p) \left\langle x_{1}(\overline{p}) \times x_{2}(\overline{p}), \frac{x_{1}(\overline{p}) \times x_{2}(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} ||x_{1} \times x_{2}||^{2} = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathfrak{S}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p)$$

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

*'* 

dwzorowanie Weingartena

uga forma podstawowa

rzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} ||x_1 \times x_2||^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathfrak{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p)$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

izy wiziia Gaussa i

*'* 

dwzorowanie Weingartena

uga forma podstawowa

rzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} ||x_1 \times x_2||^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathfrak{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p)$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Ly WIZIIA Gaassa I

, ......

dwzorowanie Weingartena

ruga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium Twierdzenie Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} ||x_1 \times x_2||^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathfrak{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

zy wiziia Gaussa i

, ......

dwzorowanie Weingartena

ruga forma podstawow

Krzywizna Gaussa oraz Krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie

# Wykład 10

# Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

. . .

wiordzonio klasufikuja

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawow

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne Symbole Christoffela

Theorema Egregium
Twierdzenie klasyfikujące

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

(rzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Th...... ......

Turiardzania klacufikuiace

# Symbole Christoffela

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$$
.

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie  $\{x_1, x_2, n\}$ . Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych  $x_{ii}$ .

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką oraz niech  $x: U \to N$  będzie lokalnych układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^{1} x_1 + \Gamma_{ij}^{2} x_2 + l_{ij} n.$$
 (10.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

zywizna Gaussa I

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie dasyfikacyine

Symbole Christoffela

\_\_\_\_

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$$
.

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie  $\{x_1, x_2, n\}$ . Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych  $x_{ij}$ .

# Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką oraz niech  $x: U \to M$  będzie lokalnych układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^{1} x_{1} + \Gamma_{ij}^{2} x_{2} + l_{ij} n.$$
 (10.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa

rzywizna Gauss:

heorema Egregium i wierdzenie lasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Ponieważ  $x_{ij} = x_{ji}$ , więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$
, dla  $k = 1, 2$ 

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

> erunkowe. ometria.

rzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie

Symbole Christoffela

meorema Egregium

zometria.

rzywizna Gaussa

rzywizna Gaussa

heorema Egregium wierdzenie

Symbole Christoffela

Symbole emisionea

Theorema Egregium

vierdzenie klasyfikujące

# Uwaga

Ponieważ funkcje  $\Gamma_{ij}^k$  zwane **symbolami Christoffela** nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich **definicję** (z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).

Ponieważ  $x_{ij} = x_{ji}$ , więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$
, dla  $k = 1, 2$ .

# **Dowód Formuly Gaussa:**

Ponieważ układ  $\{x_1, x_2, n\}$  tworzy bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc muszą istnieć współczynniki  $\Gamma_{ij}^k$  oraz  $Q_{ij}$  takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory  $x_1$ ,  $x_2$  i n:

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$
$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$
$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że  $Q_{ij}=\langle x_{ij},n\rangle=\langle x_i,n_j\rangle=l_{ij}.$ Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

#### Symbole Christoffela

Theorema Egregiun

## **Dowód Formuly Gaussa:**

Ponieważ układ  $\{x_1, x_2, n\}$  tworzy bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc muszą istnieć współczynniki  $\Gamma_{ij}^k$  oraz  $Q_{ij}$  takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory  $x_1$ ,  $x_2$  i n:

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$
$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$
$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że  $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$ . Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregii

### **Dowód Formuly Gaussa:**

Ponieważ układ  $\{x_1, x_2, n\}$  tworzy bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc muszą istnieć współczynniki  $\Gamma_{ij}^k$  oraz  $Q_{ij}$  takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory  $x_1$ ,  $x_2$  i n:

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$
  
 $\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$   
 $\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$ 

Natychmiast z tego wynika, że  $Q_{ij}=\langle x_{ij},n\rangle=\langle x_i,n_j\rangle=l_{ij}.$ Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa i

zywizna Gaussa

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregiu

$$x_{ij} = \Gamma_{ii}^1 x_1 + \Gamma_{ii}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory  $x_1$ ,  $x_2$  i n:

muszą istnieć współczynniki  $\Gamma_{ii}^k$  oraz  $Q_{ij}$  takie, że

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$
  
 $\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$   
 $\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$ 

Natychmiast z tego wynika, że  $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_i \rangle = l_{ii}$ . Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela.

**Flementarna** Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Symbole Christoffela

Symbole Christoffela

neorema Egregium

wierdzenie klasyfiku

#### Lemat

Niech  $M \to \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Dla wszystkich i, j = 1, 2 zachodzi

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że  $g_{ij} = g_{ji}$ , oraz  $x_{ij} = x_{ji}$ ) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)=\langle x_{ij},x_k\rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa I

Theorema Egregium

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Obliczmy pochodną cząstkową z gii:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)=\langle x_{ij},x_k\rangle.$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

#### Symbole Christoffela



$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że  $g_{ij}=g_{ji}$ , oraz  $x_{ij}=x_{ji}$ ) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)=\langle x_{ij},x_k\rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Izometria.

rzywizna Gaussa I

zywizna Gauss

heorema Egregium i wierdzenie lasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorems Egregium

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że  $g_{ij}=g_{ji}$ , oraz  $x_{ij}=x_{ji}$ ) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_i}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)=\langle x_{ij},x_k\rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

-, .....

zywizna Gauss

heorema Egregium wierdzenie dasyfikacyine

Symbole Christoffela

Theorems Earonium

# Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^{r} g_{rk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_{j}} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_{k}} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

i pomnożyć z lewej strony przez  $(g_{ij})^{-1}$  aby otrzymać szukane przedstawienie  $\Gamma_{ii}^k$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie klasvfikacvine

#### Symbole Christoffela

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^{r} g_{rk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_{j}} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_{k}} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

i pomnożyć z lewej strony przez  $(g_{ij})^{-1}$  aby otrzymać szukane przedstawienie  $\Gamma_{ii}^k$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

azywiziia Gaussa i

rzywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

-

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^{r} g_{rk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_{j}} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_{k}} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\left( \begin{array}{cc} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{array} \right),$$

i pomnożyć z lewej strony przez  $(g_{ij})^{-1}$  aby otrzymać szukane przedstawienie  $\Gamma_{ij}^k$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

izywiziia Gaussa i

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie dasyfikacyine

Symbole Christoffela

\_\_\_\_\_

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^{r} g_{rk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_{j}} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_{k}} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez  $(g_{ij})^{-1}$  aby otrzymać szukane przedstawienie  $\Gamma_{ii}^k$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

-, .....

zywizna Gauss

Fheorema Egregium i Fwierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

# Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

Równanie Gaussa:

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 \left( \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right]$$

Równania Codazziego-Mainardiego:

$$\begin{split} \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left( \Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left( \Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2} \right) &= 0 \end{split}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

rzywizna Gaussa I

rzywizna Gauss:

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

Symbole Christoffela

\_\_\_\_\_

Równanie Gaussa:

$$l_{11}l_{22}-l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 \left( \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Równania Codazziego-Mainardiego:

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left( \Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left( \Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2} \right) = 0$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Zy Wiziia Gaussa i

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie

Symbole Christoffela

Th...... F.....

Równanie Gaussa:

$$l_{11}l_{22}-l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 \left( \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Równania Codazziego-Mainardiego:

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left( \Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left( \Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2} \right) = 0$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma

erunkowe. ometria.

Ly wiziia Gaussa

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

Symbole Christoffela

\_\_\_\_

Twierdzenie klasufikujac

# Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}$$
.

#### Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n_i$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem  $\mathit{u}_k$ :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa

Theorema Egregium Twierdzenie Klasyfikacyjne

#### Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie. Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}$$
.

#### Dowód

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem  $u_k$ 

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

ormalne. I for odstawowa

ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa

zywizna Gaussa

heorema Egregium wierdzenie dasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egre

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie. Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}$$
.

#### Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem  $u_k$ :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} x_{1} + \Gamma_{ij}^{1} x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} x_{2} + \Gamma_{ij}^{2} x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} n + l_{ij} n_{k}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

ormalne. I for odstawowa

ierunkowe. zometria.

zywizna Gaussa I

ywizna Gaussa

heorema Egregium wierdzenie lasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregi

vierdzenie klasyfikują

$$x_{ijk} = x_{ikj}$$
.

#### Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem  $u_k$ :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

ormalne. I foi odstawowa

erunkowe. ometria.

zywizna Gaussa i

zywizna Gaussa

heorema Egregium wierdzenie lasyfikacyjne

#### Symbole Christoffela

Theorema Egregi

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} x_{1} + \Gamma_{ij}^{1} \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^{2} x_{1} + \Gamma_{1k}^{2} x_{2} + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \frac{\partial_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} x_{2} + \Gamma_{ij}^{2} \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^{1} x_{1} + \Gamma_{2k}^{2} x_{2} + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_{1} - L_{2k} x_{2}\right)}_{n_{k}} =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{1} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{1k}\right]}_{n_{k}} x_{1} +$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{2} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{2k}\right]}_{n_{k}} x_{2} +$$

$$+ \underbrace{\left[\Gamma_{ij}^{1} l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}}\right]}_{n_{k}} n = Ax_{1} + Bx_{2} + Cn.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

owierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

/ektory styczne i ormalne. I forma odstawowa

metria.

arzywizna Gaussa i

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

#### Symbole Christoffela

Theorema Egregium

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} x_{1} + \Gamma_{ij}^{1} \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^{2} x_{1} + \Gamma_{1k}^{2} x_{2} + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \underbrace{\frac{\partial^{2}_{ij}}{\partial u_{k}} x_{2} + \Gamma^{2}_{ij} \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^{1} x_{1} + \Gamma_{2k}^{2} x_{2} + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \underbrace{\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_{1} - L_{2k} x_{2}\right)}_{n_{k}} = \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{1} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{1k}\right] x_{1} + \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{2} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{2k}\right] x_{2} + \underbrace{\left[\Gamma_{ij}^{1} l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}}\right] n = Ax_{1} + Bx_{2} + Cn.}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ometria.

Grzywizna Gaussa I

Theorema Egregium i Twierdzenie

#### Symbole Christoffela

Theorema Egregium

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} x_{1} + \Gamma_{ij}^{1} \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^{2} x_{1} + \Gamma_{1k}^{2} x_{2} + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \frac{\partial_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} x_{2} + \Gamma_{ij}^{2} \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^{1} x_{1} + \Gamma_{2k}^{2} x_{2} + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_{1} - L_{2k} x_{2}\right)}_{n_{k}} =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{1} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{1k}\right]}_{n_{k}} x_{1} +$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{2} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{2k}\right]}_{n_{k}} x_{2} +$$

$$+ \underbrace{\left[\Gamma_{ij}^{1} l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}}\right]}_{n_{k}} n = Ax_{1} + Bx_{2} + Cn.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Theorema Egregium

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} x_{1} + \Gamma_{ij}^{1} \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^{2} x_{1} + \Gamma_{1k}^{2} x_{2} + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \frac{\partial_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} x_{2} + \Gamma_{ij}^{2} \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^{1} x_{1} + \Gamma_{2k}^{2} x_{2} + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_{1} - L_{2k} x_{2}\right)}_{n_{k}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{1} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{1k} \end{bmatrix} x_{1} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{2} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{2k} \end{bmatrix} x_{2} + \\ + \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^{1} l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} \end{bmatrix} n = Ax_{1} + Bx_{2} + Cn.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

heorema Egregium wierdzenie lasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Eg

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} x_{1} + \Gamma_{ij}^{1} \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^{2} x_{1} + \Gamma_{1k}^{2} x_{2} + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \frac{\partial_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} x_{2} + \Gamma_{ij}^{2} \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^{1} x_{1} + \Gamma_{2k}^{2} x_{2} + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_{1} - L_{2k} x_{2}\right)}_{n_{k}} =$$

$$= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{1} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{1k}\right] x_{1} + \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{2} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{2k}\right] x_{2} + \left[\Gamma_{ij}^{1} l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}}\right] n = Ax_{1} + Bx_{2} + Cn.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

kierunkowe. Izometria.

. . .

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egreg

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} x_{1} + \Gamma_{ij}^{1} \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^{2} x_{1} + \Gamma_{1k}^{2} x_{2} + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \frac{\partial_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} x_{2} + \Gamma_{ij}^{2} \underbrace{\left(\Gamma_{2k}^{1} x_{1} + \Gamma_{2k}^{2} x_{2} + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_{1} - L_{2k} x_{2}\right)}_{n_{k}} =$$

$$= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{1} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{1k}\right] x_{1} + \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_{k}} + \Gamma_{ij}^{1} \Gamma_{1k}^{2} + \Gamma_{ij}^{2} \Gamma_{2k}^{2} - l_{ij} L_{2k}\right] x_{2} + \left[\Gamma_{ij}^{1} l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}}\right] n = Ax_{1} + Bx_{2} + Cn.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

V/I.

podstawowa

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egreg

# Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$x_{ikj} = \left[ \frac{\partial \Gamma_{ik}^{1}}{\partial u_{j}} + \Gamma_{ik}^{1} \Gamma_{1j}^{1} + \Gamma_{ik}^{2} \Gamma_{2j}^{2} - l_{ik} L_{1j} \right] x_{1} +$$

$$+ \left[ \frac{\partial \Gamma_{ik}^{2}}{\partial u_{j}} + \Gamma_{ik}^{1} \Gamma_{1j}^{2} + \Gamma_{ik}^{2} \Gamma_{2j}^{2} - l_{ik} L_{2j} \right] x_{2} +$$

$$+ \left[ \Gamma_{ik}^{1} l_{1j} + \Gamma_{ik}^{2} l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_{j}} \right] n =$$

$$= A' x_{1} + B' x_{2} + C' n.$$

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gaus:

Theorema Egregium i Twierdzenie dasyfikacyine

Symbole Christoffela

\_\_\_\_

# Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$x_{ikj} = \left[ \frac{\partial \Gamma_{ik}^{1}}{\partial u_{j}} + \Gamma_{ik}^{1} \Gamma_{1j}^{1} + \Gamma_{ik}^{2} \Gamma_{2j}^{2} - l_{ik} L_{1j} \right] x_{1} +$$

$$+ \left[ \frac{\partial \Gamma_{ik}^{2}}{\partial u_{j}} + \Gamma_{ik}^{1} \Gamma_{1j}^{2} + \Gamma_{ik}^{2} \Gamma_{2j}^{2} - l_{ik} L_{2j} \right] x_{2} +$$

$$+ \left[ \Gamma_{ik}^{1} l_{1j} + \Gamma_{ik}^{2} l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_{j}} \right] n =$$

$$= A' x_{1} + B' x_{2} + C' n.$$

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

#### Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

Izometria.

Krzywizna Gaussa I

rzywizna Gaus

Theorema Egregium Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Th....... F......

wiordzonio blasufibuiaco

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma^1_{ij}l_{1k} + \Gamma^2_{ij}l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma^1_{ik}l_{1j} + \Gamma^2_{ik}l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}\right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} = 
= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając (i = 1, j = 2, k = 1) [odpowiednio: (i = 2, j = 2, k = 1)] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

(rzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorems Fareaium

$$\Gamma_{ij}^{1}l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2}l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} = \Gamma_{ik}^{1}l_{1j} + \Gamma_{ik}^{2}l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_{j}}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\begin{split} \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma^1_{ij}l_{1k} - \Gamma^1_{ik}l_{1j}\right) + \Gamma^2_{ij}l_{2k} - \Gamma^2_{ik}l_{2j} = \\ = \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 \left(\Gamma^r_{12}l_{r1} - \Gamma^r_{11}l_{r2}\right) = 0. \end{split}$$

Ostatecznie podstawiając (i = 1, j = 2, k = 1) [odpowiednio: (i = 2, j = 2, k = 1)] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa i

ywizna Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie lasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorems Egregium

$$\Gamma_{ij}^{1}l_{1k} + \Gamma_{ij}^{2}l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_{k}} = \Gamma_{ik}^{1}l_{1j} + \Gamma_{ik}^{2}l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_{j}}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\begin{split} \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}\right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} = \\ &= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0. \end{split}$$

Ostatecznie podstawiając (i=1, j=2, k=1) [odpowiednio: (i=2, j=2, k=1)] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa i

zywizna Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie lasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorems Egregium

### Zadanie

Udowodnić Równanie Gaussa.

Podpowiedź: należy porównać współczynniki A, A', oraz B, B'. Następnie podstawić (i=2, j=1, k=2).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

tierunkowe. zometria.

Krzywizna Gaussa

Krzywizna Gau:

Theorema Egregium i Twierdzenie

Symbole Christoffela

0 0

# Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  oraz  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio  $K_M$  i  $K_N$ . Niech  $f: M \to N$  będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich  $p \in M$ .

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$ ), oraz ich pochodnych.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

(rzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

# Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  oraz  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio  $K_M$  i  $K_N$ . Niech  $f: M \to N$  będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich  $p \in M$ .

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$ ), oraz ich pochodnych.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

cometria.

rzywizna Gaussa

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

## Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  oraz  $N \subset \mathbb{R}^3$  będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio  $K_M$  i  $K_N$ . Niech  $f: M \to N$  będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich  $p \in M$ .

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$ ), oraz ich pochodnych.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

erunkowe. ometria.

zywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie blasufibujące

### Dowód:

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ . Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie  $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy funkcji  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji  $l_{ij}$  w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3)

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 \left( \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Wyraża ono  $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy  $g_{ij}$  oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Izometria.

(rzywizna Gaussa I

rzywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

wierdzenie klasyfiku

#### Dowód:

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ . Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie  $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy funkcji  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji  $l_{ij}$  w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3)

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 \left( \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Wyraża ono  $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy  $g_{ij}$  oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

rzywizna Gaussa i

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie Klasyfikacyine

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

ierdzenie klasyfikuj

Niech  $x: U \to M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ . Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie  $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy funkcji  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji  $l_{ij}$  w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3)

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 \left( \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Wyraża ono  $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy  $g_{ij}$  oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma

kierunkowe. zometria.

ywiziia Gaussa i

zywizna Gauss

heorema Egregium i wierdzenie

ymbole Christoffela

Theorema Egregium

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie  $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy funkcji  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji  $l_{ij}$  w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 \left( \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Wyraża ono  $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  przy pomocy  $g_{ij}$  oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w R<sup>3</sup>

Wektory styczne i normalne. I forma nodstawowa

ierunkowe. zometria.

zywizna Gaussa i

zywizna Gauss

heorema Egregium i wierdzenie Jasyfikacyine

ymbole Christoffela

Theorema Egregium

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemu szukane wyrażenie  $l_{11}l_{22}-l_{12}^2$  w tylko terminach funkcji  $g_{ij}$  (oraz ich pochodnych).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

neorema Egregium

asyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

zometria.

heorema Egregium

Symbole Christoffela

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

wierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemu szukane wyrażenie  $l_{11}l_{22}-l_{12}^2$  w tylko terminach funkcji  $g_{ij}$  (oraz ich pochodnych).

#### Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

### Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania  $f: M \to N$  dla których K(f(p)) = K(p), lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

Krzywizna Gaussa I

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

#### Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

### Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania  $f: M \to N$  dla których K(f(p)) = K(p), lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

ierunkowe. zometria.

rzywizna Gaussa I

zywizna Gaussa

neorema Egregium vierdzenie

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

indenia blandhii

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},\$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},\$$

oraz zdefiniujmy funkcję  $f: M \to N$  jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

$$K(f(y(u,v))) = K(x(v,u)) = \frac{-1}{(1+u^2)^2} = K(y(u,v)).$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Theorema Egregium

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},\$$
  
 $N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},\$ 

oraz zdefiniujmy funkcję  $f: M \to N$  jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Theorema Egregium

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},\$$
  
 $N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},\$ 

oraz zdefiniujmy funkcję  $f: M \to N$  jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak  $g_{11}^M(u,v)=1+\frac{1}{u^2}$  podczas gdy  $g_{11}^N(u,v)=1$ .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

cierunkowe. zometria.

zywizna Gaussa i

zywizna Gaussa

heorema Egregium i wierdzenie

ymbole Christoffela

Theorema Egregium

## Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

# Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym.

Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze  $2 \times 2$  funkcji  $(g_{ij}: U \to \mathbb{R})$  oraz  $(l_{ij}: U \to \mathbb{R})$  spełniających  $\det(g_{ij}) > 0$ ,oraz mamy dane osiem funkcji  $\Gamma_{ij}^k: U \to \mathbb{R}$  (dla i, j, k=1,2) spełniających z powyższmi  $(g_{ij})$  i  $(l_{ij})$  dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia  $x: U \to M$  dla której

- ▶ (g<sub>ij</sub>) tworzą pierwszą formę podstawową,
- (lij) tworzą drugą formę podstawową,
- Γ<sup>k</sup><sub>ij</sub> tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

normalne. I forma podstawowa

zometria.

tily willia Gaassa

rzywizna Gaussi

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

Symbole Christoffela

Theorema Egregiun

# Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze  $2 \times 2$  funkcji  $(g_{ij}: U \to \mathbb{R})$  oraz  $(l_{ij}: U \to \mathbb{R})$  spełniających  $\det(g_{ij}) > 0$ ,oraz mamy dane osiem funkcji  $\Gamma^k_{ij}: U \to \mathbb{R}$  (dla i, j, k = 1, 2) spełniających z powyższmi  $(g_{ij})$  i  $(l_{ij})$  dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia  $x: U \to M$  dla której

- ▶ (g<sub>ij</sub>) tworzą pierwszą formę podstawową,
- (l<sub>ij</sub>) tworzą drugą formę podstawową,
- $ightharpoonup \Gamma_{ij}^k$  tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

zometria.

,

zywizna Gauss

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyine

Symbole Christoffela

Theorema Egregiun

# Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze  $2 \times 2$  funkcji  $(g_{ij}: U \to \mathbb{R})$  oraz  $(l_{ij}: U \to \mathbb{R})$  spełniających  $\det(g_{ij}) > 0$ ,oraz mamy dane osiem funkcji  $\Gamma^k_{ij}: U \to \mathbb{R}$  (dla i, j, k = 1, 2) spełniających z powyższmi  $(g_{ij})$  i  $(l_{ij})$  dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia  $x: U \to M$  dla którei

- ▶ (g<sub>ij</sub>) tworzą pierwszą formę podstawową,
- $lackbox{ } (l_{ij})$  tworzą drugą formę podstawową,
- $ightharpoonup \Gamma_{ij}^k$  tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne i normalne. I forma

erunkowe. ometria.

rzywizna Gaussa

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie

Symbole Christoffela

Theorema Egregiu

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze  $2 \times 2$  funkcji  $(g_{ij}: U \to \mathbb{R})$  oraz  $(l_{ij}: U \to \mathbb{R})$  spełniających  $\det(g_{ij}) > 0$ ,oraz mamy dane osiem funkcji  $\Gamma^k_{ij}: U \to \mathbb{R}$  (dla i, j, k = 1, 2) spełniających z powyższmi  $(g_{ij})$  i  $(l_{ij})$  dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia  $x: U \to M$  dla której

- ▶ (g<sub>ij</sub>) tworzą pierwszą formę podstawową,
- ▶ (*l<sub>ij</sub>*) tworzą drugą formę podstawową,
- $ightharpoonup Γ_{ij}^k$  tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne normalne. I form podstawowa

> erunkowe. ometria.

zywizna Gaussa

Theorema Egregium i Twierdzenie dasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze  $2 \times 2$  funkcji  $(g_{ij}: U \to \mathbb{R})$  oraz  $(l_{ij}: U \to \mathbb{R})$  spełniających  $\det(g_{ij}) > 0$ ,oraz mamy dane osiem funkcji  $\Gamma^k_{ij}: U \to \mathbb{R}$  (dla i, j, k = 1, 2) spełniających z powyższmi  $(g_{ij})$  i  $(l_{ij})$  dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia  $x: U \to M$  dla której

- ▶ (g<sub>ij</sub>) tworzą pierwszą formę podstawową,
- ▶ (*l<sub>ij</sub>*) tworzą drugą formę podstawową,
- Γ<sup>k</sup><sub>ij</sub> tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczne normalne. I form podstawowa

erunkowe. ometria.

Zywiziia Gaussa

zywizna Gaussa

heorema Egregium wierdzenie

lasyfikacyjne

Symbole Christoffela Theorema Egregium

Niech  $U \subset \mathbb{R}^2$  będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze  $2 \times 2$  funkcji  $(g_{ij}: U \to \mathbb{R})$  oraz  $(l_{ij}: U \to \mathbb{R})$  spełniających  $\det(g_{ij}) > 0$ ,oraz mamy dane osiem funkcji  $\Gamma^k_{ij}: U \to \mathbb{R}$  (dla i, j, k = 1, 2) spełniających z powyższmi  $(g_{ij})$  i  $(l_{ij})$  dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia  $x: U \to M$  dla której

- ▶ (g<sub>ij</sub>) tworzą pierwszą formę podstawową,
- ▶ (*l<sub>ij</sub>*) tworzą drugą formę podstawową,
- $ightharpoonup Γ_{ij}^k$  tworzą układ funkcji Christoffela.

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Powierzchnie w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory styczn normalne. I forr podstawowa

> erunkowe. ometria.

izywiziia Gaussa

zywizna Gaussa

heorema Egregium wierdzenie

Symbole Christoffela

neorema Egregium