

Elementarna Geometria Różniczkowa

21 maja 2013

Spis treści

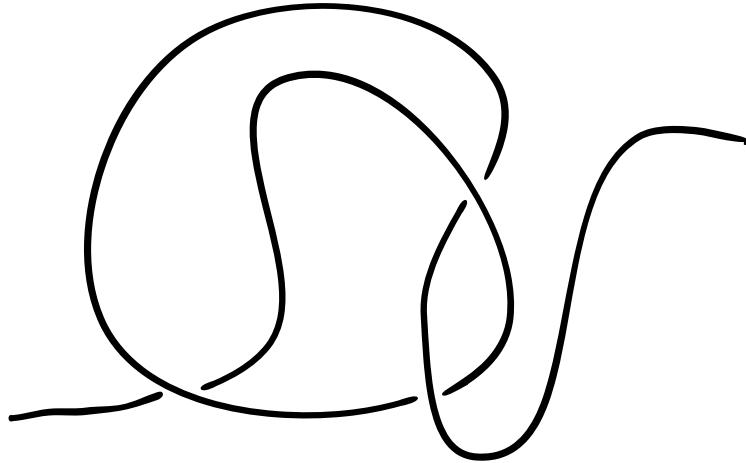
Spis treści	1
1 Krzywe w \mathbb{R}^3	5
1.1 Definicje	5
1.2 Krzywe regularne	6
2 Wektory związane z krzywą	11
2.1 Wektor styczny i normalny	11
2.2 Wektor binormalny	13
2.3 Trójnógi Freneta	14
3 Niezmienniki krzywych	15
3.1 Krzywizna	15
3.2 Torsja	18
3.3 Wzory Freneta	19
3.4 Wzory ogólne	21
4 Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych	23
4.1 Translacja i obrót	23
4.2 Twierdzenie klasyfikacyjne	24
5 Powierzchnie w \mathbb{R}^3	29
5.1 Podstawowe definicje	29
5.2 Przykłady powierzchni	35

6 Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa	41
6.1 Przestrzeń styczna	41
6.2 Wektor normalny	44
6.3 Powtórka z algebry liniowej I	44
6.4 I forma podstawowa	45
7 Pochodne kierunkowe. Izometria.	49
7.1 Pochodne kierunkowe	49
7.2 Izometria	51
8 Krzywizna Gaussa I	57
8.1 Odwzorowanie Gaussa	57
8.2 Krzywizna Gaussa - Idea	57
8.3 Pole powierzchni	61
8.4 Powtórka z algebry liniowej II	62
9 Krzywizna Gaussa II	67
9.1 Odwzorowanie Weingartena	67
9.2 Druga forma podstawowa	68
9.3 Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia	70
9.4 Agitacja na rzecz zgodności definicji	71
10 Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne	75
10.1 Symbole Christoffela	75
10.2 Theorema Egregium	79
10.3 Twierdzenie klasyfikujące	81
11 Geodezyjne I	83
11.1 Idea	83
11.2 Pochodna kowariantna	84
11.3 Definicja geodezyjnych	87
12 Geodezyjne II	91
12.1 Równania geodezyjnych	91
12.2 Istnienie i jedyność	96
13 Twierdzenie Gaussa-Bonneta	101
13.1 Odwzorowanie wykładnicze	101
13.2 Triangulacje	105

13.3 Twierdzenie Gaussa-Bonneta	106
14 Geometria hiperboliczna	109
14.1 Aksjomaty Euklidesa	109
14.2 Definicja płaszczyzny hiperbolicznej I	110
14.3 Model Poincarégo	111
14.4 Geometria elementarna na półpłaszczyźnie Poincarégo .	111
14.5 Symetrie hiperboliczne	114
15 Powierzchnie o stałej krzywiźnie	117
15.1 Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo	117
15.2 Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo	118
15.3 Metryka hiperboliczna	120
15.4 Izometrie płaszczyzny Poincarégo	121
15.5 Torusy o stałej krzywiźnie	124

1

Krzywe w \mathbb{R}^3



1.1 Definicje

Definicja 1.1. · Krzywa gładka, lub po prostu krzywa w \mathbb{R}^3 to odwzorowanie gładkie

$$\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α ;

- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja 1.2. · Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t , wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

@@@ Oprea \rightarrow najkrótsza droga w \mathbb{R}^3 to prosta. @@@

Przykład. Rozważmy krzywą $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Wtedy wektor prędkości wynosi

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t),$$

zatem prędkość to $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$, tak więc krzywa nie jest unormowana. Długość tej krzywej na odcinku od 0 do 2π wynosi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4t^2} dt &= \frac{1}{4} \left(2t\sqrt{1 + 4t^2} + \sinh^{-1}(2t) \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \pi\sqrt{1 + 16\pi^2} + \frac{\sinh^{-1}(4\pi)}{4} \simeq 40.4097. \end{aligned}$$

1.2 Krzywe regularne

Definicja 1.3. Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0, 0, 0)$ dla wszystkich $t \in (a, b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$.

Definicja 1.4. Niech $\alpha: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą, oraz niech $h: (a, b) \rightarrow (c, d)$ będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie α i h ,

$$\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h: (a, b) \xrightarrow{h} (c, d) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej α przez dyfeomorfizm h .

Przykład. Niech funkcja $h: (0, 2) \rightarrow (1, 5)$ będzie zdefiniowana jako

$$h(t) = 2t + 1,$$

zaś $\alpha: (1, 5) \rightarrow \mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\bar{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Twierdzenie 1.5. *Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będący krzywą unormowaną.*

Dowód: Wybierzmy $t_0 \in (a, b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Zatem $q: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnicowalna. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q: (a, b) \rightarrow (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h: (c, d) \rightarrow (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną. Z analizy matematycznej wynika (wskaźać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$ jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\begin{aligned}\|\bar{\alpha}'(t)\| &= \|\alpha(h(t))'\| = \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} h'(t) \right\| = \\ &= \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|} = 1 \quad \square\end{aligned}$$

Przykład. (Lewa) Linia śrubowa lub helisa lewoskrętna to krzywa $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

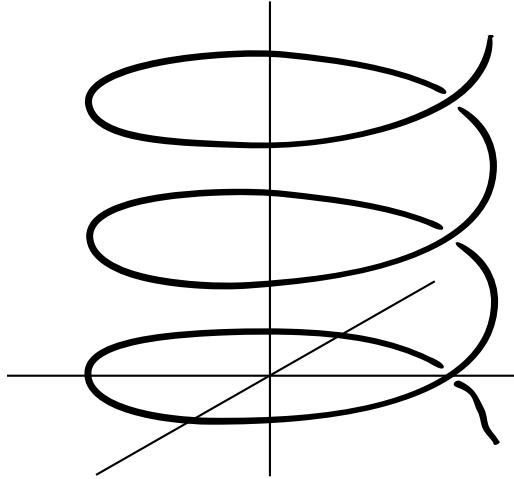
$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\bar{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$



Lemat 1.6. *Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz $\bar{\alpha}: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm*

$$h: (a, b) \rightarrow (c, d),$$

że $\bar{\alpha}$ jest reparametryzacją krzywej α przez h .

Dowód: Niech $h(t)$ oznacza złożenie

$$\alpha^{-1} \circ \bar{\alpha}(t)$$

$(\alpha^{-1}: \alpha(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ istnieje ponieważ α jest różnowartościowa). Drukadne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym. \square

Lemat 1.7. *Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Jeśli $\bar{\alpha}: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest jej reparametryzacją, wówczas*

$$L(\bar{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód: Ponieważ $\bar{\alpha}$ jest reparametryzacją α , zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h: (c, d) \rightarrow (a, b)$, że

$$\bar{\alpha} = \alpha \circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t) \geq 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a \quad \text{i} \quad h(d) = b.$$

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s) ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$\begin{aligned} L(\bar{\alpha}) &= \int_c^d \|\bar{\alpha}'(s)\| ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds = \\ &= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\| h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha). \end{aligned}$$

\square

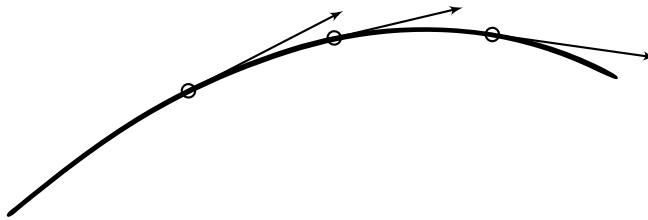
2

Wektory związane z krzywą

2.1 Wektor styczny i normalny

Definicja 2.1. Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie regularną krzywą gładką. Definiujemy **jednostkowy wektor styczny** do krzywej α w punkcie t jako

$$T_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$



Zadanie. Niech $v(t)$ i $w(t)$ będą dowolnymi wektorami w \mathbb{R}^3 , zależnymi od zmiennej t . Sprawdzić, że zachodzi **wzór Leibniza** na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v(t)', w(t) \rangle + \langle v(t), w(t)' \rangle.$$

Lemat 2.2. Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód: Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

□

Definicja 2.3. Założmy, że $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α .

Lemat 2.4. *Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego $t \in (a, b)$:*

1. $\|T'(t)\| \neq 0$,
2. wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,
3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, gdzie \times oznacza iloczyn wektorowy.

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Założmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i za- uważmy, że $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha'_1 \alpha''_1 + \alpha'_2 \alpha''_2 + \alpha'_3 \alpha''_3)}{2\sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)} \right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0) \rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} &= \\ \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} &= \\ \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.

Założmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)} \right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

□

2.2 Wektor binormalny

Jeśli dla wszystkich $t \in (a, b)$ z dziedziny krzywa spełnia jeden z powyższych warunków, mamy zdefiniowane w każdym jej punkcie dwa niezależne liniowo (w \mathbb{R}^3) wektory. W dodatku są one prostopadłe o długości jednostkowej. Zatem mamy wyznaczony w sposób jednoznaczny kierunek ortogonalny do nich jako prostopadły do płaszczyzny ściśle stycznej (czyli do obu wektorów $T(t)$ i $N(t)$).

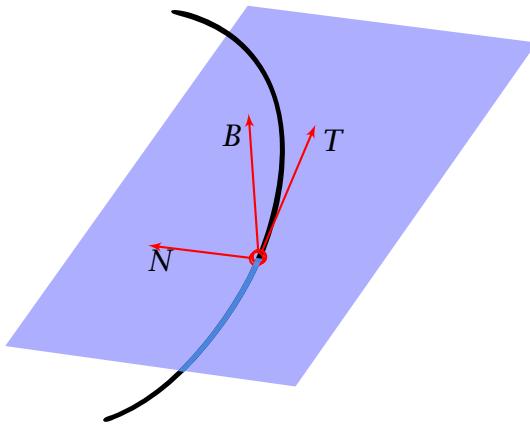
Definicja 2.5. Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ takiego, że $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \stackrel{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory $N(t)$ i $B(t)$ nazywamy **płaszczyzną normalną**, lub **płaszczyzną prostopadłą** do krzywej.

2.3 Trójnóg Freneta

Definicja 2.6. Układ ortonormalny $\{T(t), N(t), B(t)\}$ nazywać będziemy **trójnogiem** (lub **reperem**) Freneta.



Uwaga. 1. Jedyny wybór jaki dokonaliśmy podczas definiowania trójnoga Freneta to kierunek (tj. znak) wektora binormalnego.

2. Definicja $B(t)$ jest uzależniona od tego, że obraz krzywej umieszczony jest w przestrzeni \mathbb{R}^3 . W wymiarach wyższych jest wiele możliwych wyborów wektora prostopadłego do dwóch danych (innymi słowy: nie ma iloczynu wektorowego)

3

Niezmienniki krzywych

Często możemy zauważać, że krzywa w jednym punkcie „krzywi” się bardziej, niż innym. Typowym przykładem może być wykres funkcji $f(x) = x^2$ i porównanie jego zachowania się w pobliżu punktu $(0, 0)$ z punktem powiedzmy $(3, 9)$. Chcemy tę intuicyjną różnicę wyrazić w sposób ścisły.

Jeśli przyjmiemy, że prosta się nie „krzywi”, wtedy nasza domniemana definicja *krzywizny* powinna określać w każdym punkcie jak bardzo nasza krzywa $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lokalnie, tj. w małym otoczeniu każdego punktu) różni się właśnie od prostej. Tak więc krzywizna będzie będzie pewną funkcją (gładką) $\kappa: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ która będzie przyjmować dla $t_0 \in (a, b)$ wartość 0 jeśli tylko wykres krzywej w małym otoczeniu t_0 będzie linią prostą.

Rozważmy wektor prędkości dla krzywej α . Im szybciej zmienia on kierunek, tym bardziej nasza krzywa wydaje się „krzywić”. Zatem definicja krzywizny powinna być związana z wektorem pochodnych wektora prędkości. Oczywiście natychmiast pojawia się problem zależności takich definicji od parametryzacji. Jeśli weźmiemy reparametryzację krzywej α która przebiega obraz szybciej, wtedy niejako z *definicji* okaże się że kierunek wektora stycznego zmienia się szybciej. Aby obejść tę trudność zaczniemy od krzywizny dla krzywych unormowanych.

3.1 Krzywizna

Krzywizna krzywej unormowanej

Definicja 3.1. Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie (regularną) krzywą unormowaną. Dla każdego $t \in (a, b)$ **krzywiznę** definiujemy jako funkcję $\kappa: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\kappa(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$$

Zauważmy, że krzywizna jest zawsze nieujemna, $\kappa(t) \geq 0$.



Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja 3.2. Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h: (c, d) \rightarrow (a, b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Taka definicja rodzi natychmiast pytanie o jednoznaczność definicji krzywizny, ponieważ potencjalnie różne reparametryzacje unormowane mogą prowadzić do różnych funkcji krzywizny. Mamy jednak następujący lemat.

Lemat 3.3. Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną i niech $\alpha \circ h_1$ oraz $\alpha \circ h_2$ będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie $h_1: (c_1, d_1) \rightarrow (a, b)$, oraz $h_2: (c_2, d_2) \rightarrow (a, b)$ są dyfeomorfizmami. Jeśli κ_1 i κ_2 oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio $\alpha \circ h_1$ oraz $\alpha \circ h_2$, wtedy

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t)) = \kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich $t \in (a, b)$.

Wniosek. Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

Dowód: Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1: (c_1, d_1) \rightarrow (c_2, d_2)$$

jest równe

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_2(h_2^{-1}[h_1(t)]))\|} = \\ &= \pm h_2[(h_2^{-1} \circ h_1)(t)]. \end{aligned}$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' [h_1(t)] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} (h_2^{-1} \circ h_1)(t) &= \pm t + C \\ h_1(t) &= h_2(\pm t + C) \\ h_2^{-1}(t) &= h_1^{-1}(\pm t) + C. \end{aligned}$$

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

□

Uwaga. Na razie pokazaliśmy, że dla wybranej parametryzacji α krzywizna nie zależy od reparametryzacji unormowanej. Chcemy jednak pokazać coś więcej, mianowicie, że krzywizna jest funkcją zależną tylko od punktów w obrazie krzywej i w ogóle nie zależy od wyboru parametryzacji. Zostanie to wykazane pod koniec tego wykładu.

Lemat 3.4. Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód: Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Założmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$\begin{aligned} T(t) &= \int T'(t) dt = \left(\int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) = \\ &= \left(\int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.} \end{aligned}$$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Założmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. □

3.2 Torsja

Definicja 3.5. Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz założmy, że dla wszystkich $t \in (a, b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Uwaga. • Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).

- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, jednak torsja może mieć wartości ujemne.

Uwaga. Dla wygody od teraz będziemy opuszczać argument t jeśli nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności.

3.3 Wzory Freneta

Twierdzenie 3.6 (Wzory Freneta). Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N \quad (3.1)$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \quad (3.2)$$

$$B' = -\tau N \quad (3.3)$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Dowód: Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N .

Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N . Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B ,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$). Wyliczenie a rozpoczniemy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $\alpha = \langle N', T \rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B \rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B \rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Podobnie B' jest prostopadły do B , $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = \alpha T + bN.$$

Musimy więc policzyć $\alpha = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie α rozpoczęmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ .

□

Lemat 3.7. *Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Następujące warunki są równoważne.*

1. *Zbiór $\alpha(a, b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. $\tau \equiv 0$.

Uwaga. Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ścisłe styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B . Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α .

Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

Funkcja ta mierzy długość rzutu wektora binormalnego na wektor wyznaczony przez naszą krzywą (bez straty ogólności możemy założyć, że $\alpha(p) = (0, 0, 0)$.)

Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

Obliczmy

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} (\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle) = \\ &= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0. \end{aligned}$$

Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

□

3.4 Wzory ogólne

Lemat 3.8. *Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Dowód: Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. \square

Uwaga. Powyższy lemat pozwala liczyć trójnog Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w \mathbb{R}^3) i nie zależą od parametryzacji.

4

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

4.1 Translacja i obrót

Lemat 4.1. *Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną.*

- *Translacja krzywej α , tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α .*
- *Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortogonalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \stackrel{\text{def.}}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α .

Uwaga. *Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.*

Mnożenie przez taką macierz A oznacza obrót wokół środka układu współrzędnych, symetrię względem płaszczyzny, lub kombinację tych dwóch. Grupa $O(3)$ to tzw. grupa symetrii \mathbb{R}^3 i jej bazę stanowią macierze obrotów o dowolny kąt wokół każdej z osi, oraz macierz symetrii względem (dowolnie wybranej) płaszczyzny zawierającej punkt $(0, 0, 0)$.

Uwaga. *Grupa składająca się ze wszystkich obrotów oraz translacji przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^3 jest tzw. grupą Liego $E(3)$. Jest to grupa izometrii (poznamy to pojęcie w następnej części wykładu) przestrzeni euklidesowej. Intuicyjnie mamy trzy "stopnie swobody" pochodzące od obrotu i kolejne trzy od translacji o wektor, więc grupa $E(3)$ powinna być "6-wymiarowa".*

Uwaga. *Te dwie operacje definiują nam relację równoważności pomiędzy wykresami krzywych w \mathbb{R}^3 . Krzywą α uznajemy za równoważną*

krzywej β , jeśli wykres β można otrzymać przez zastosowanie odpowiednich translacji, obrotów i symetrii do wykresu α .

4.2 Twierdzenie klasyfikacyjne

Twierdzenie 4.2 (Klasyfikacyjne). *Niech $\kappa, \tau: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będą gładkimi funkcjami, oraz niech $\kappa(t) > 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*

$$\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

że jej krzywizna κ_α i torsja τ_α są tożsamościowo równe funkcjom κ oraz τ .

- *Jeśli*

$$\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

jest drugą taką krzywą, to krzywą β można uzyskać z α stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Szkic dowodu: Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedna krzywa unormowana $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Szukamy zatem dziewięciu funkcji $u_1(t), \dots, u_9(t)$ które będą tworzyć wektory $T_\alpha(t)$, $N_\alpha(t)$ i $B_\alpha(t)$ dla domniemanej krzywej α . Oczywiście jeśli taka krzywa ma w ogóle istnieć, funkcje te muszą spełniać odpo-

wiedzie równania, wynikające ze wzorów Freneta. Poniższy układ jest konsekwencją dokładnie tego faktu.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} u'_1(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u'_2(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u'_3(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned} \right\} &\text{ dla } "T' = \kappa N", \\ \left. \begin{aligned} u'_7(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u'_8(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u'_9(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned} \right\} &\text{ dla } "B' = -\tau N", \\ \left. \begin{aligned} u'_4(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u'_5(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u'_6(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned} \right\} &\text{ dla } "N' = -\kappa T + \tau B". \\ \begin{aligned} u_1(p) &= 1 & u_4(p) &= 0 & u_7(p) &= 0 \\ u_2(p) &= 0 & u_5(p) &= 1 & u_8(p) &= 0 \\ u_3(p) &= 0 & u_6(p) &= 0 & u_9(p) &= 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.3 (Picarda, o istnieniu i jedyności rozwiązania równania różniczkowego). *Niech $(a, b) \subset \mathbb{R}$, oraz niech $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Ustalmy liczbę $t_0 \in (a, b)$ i punkt $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ która spełnia*

$$\begin{aligned} \alpha(t_0) &= v_0, \quad \text{oraz} \\ \alpha'(t) &= A(t)\alpha(t) \quad \text{dla wszystkich } t \in (a, b). \end{aligned}$$

Zadanie. Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać α , A , t_0 i v_0).

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.1)$$

Zadanie. Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji $p'_{i,j}(t)$ z funkcjami $\{p_{i,j}(t)\}$ oraz $\kappa(t)$ i $\tau(t)$.

$$\begin{aligned} p'_{1,1}(t) &= (\langle X_1(t), X_1(t) \rangle)' = \\ &= \underbrace{\langle X'_1(t), X_1(t) \rangle}_{=\kappa(t)X_2(t)} + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)} \rangle = \\ &= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t). \end{aligned}$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada jednoznaczne rozwiązańe na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t .

Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s) \, ds.$$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) &= \kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) = \kappa(t)X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)|B_\alpha(t) &= \tau(t)X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

□

5

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Definicja 5.1. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja 5.2. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s, t) \in U$.

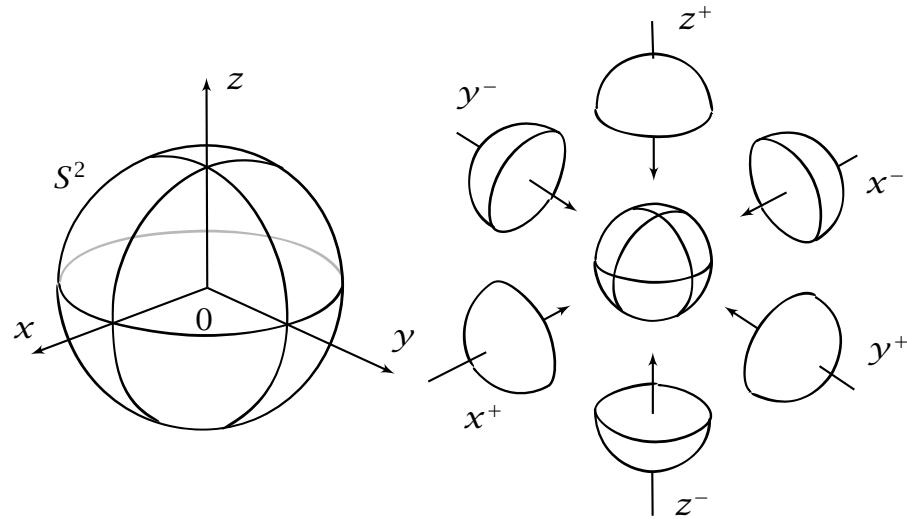
5.1 Podstawowe definicje

Definicja 5.3. Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$.

- Powierzchnię gładką M nazywamy **łukowo spójną**, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).

Przykład. Jednostkowa sfera, tj. powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ jest przykładem powierzchni regularnej. Lokalnym układem współrzędnych jest np. $x^\pm(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$ jak na następującym rysunku

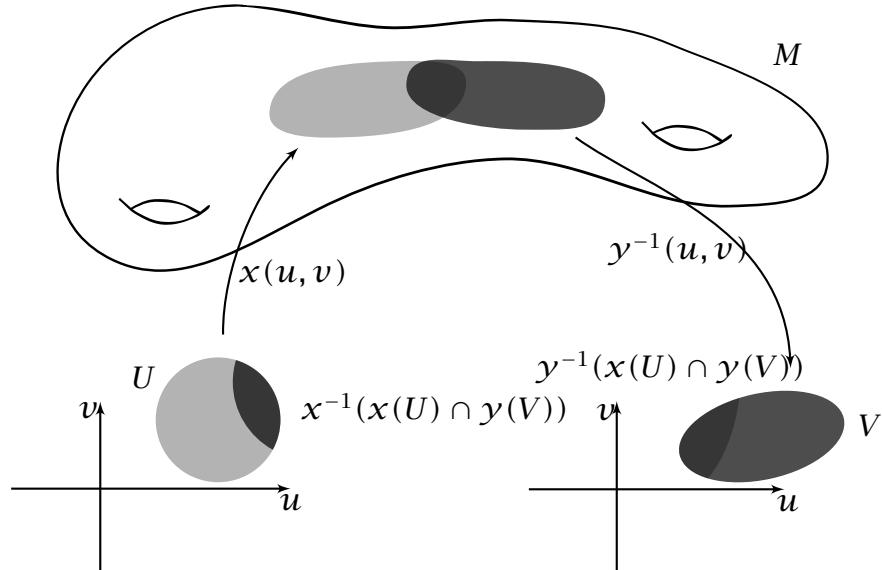


Uwaga. UWAGA! Zakładamy, że wszystkie powierzchnie które będą dalej rozważać są gładkie i łukowo spójne.

Definicja 5.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ i $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Wtedy złożenie

$$\Phi_{x,y} \stackrel{\text{def.}}{=} y^{-1} \circ x: x^{-1}(x(U) \cap y(V)) \rightarrow y^{-1}(x(U) \cap y(V))$$

nazywamy **funkcją zmiany układu współrzędnych**.



Lemat 5.5. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Wówczas:*

1. *Jeśli $x: U \rightarrow M$ jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz $x(U)$.*
2. *Niech $V \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $f: V \rightarrow U$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy*

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ f: V \rightarrow M$$

jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych $\Phi_{y,x}$.

Dowód:

- 1) Ponieważ x jest injekcją, więc jest bijekcją na swój obraz. Ponieważ x jest odwzorowaniem gładkim, oraz na zbiorze U rząd jego pochodnej jest równy 2 (z definicji lokalnego układu współrzędnych), więc korzystając z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym na zbiorze $x(U)$ istnieje do x gładkie odwzorowanie odwrotne, zatem x jest dyfeomorfizmem.
- 2) Ponieważ złożenie dwóch dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem, wystarczy sprawdzić, że jest spełniona własność lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$.

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

Ponieważ x jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem,

więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.

Ostatnia teza ($\Phi_{x,y} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.

□

Gładkość funkcji na powierzchni

Definicja 5.6. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją. Funkcję f nazywamy gładką jeśli dla każdego punktu $p \in M$ i dla każdego lokalnego układu współrzędnych $x: U \rightarrow M$ takiego, że $p \in x(u)$ funkcja

$$f \circ x: U \xrightarrow{x} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

jest gładka jako funkcja z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R} .

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Założymy że $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}: x^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Przykład. • Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Uwaga. Definicja 5.6 naturalnie uogólnia się na odwzorowania gładkie $M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Gładkość odwzorowania między powierzchniami

Definicja 5.7. Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie $M \rightarrow N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Mówimy, że f jest **dyfeomorfizmem powierzchni** jeśli f jest gładką bijekcją, której odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.

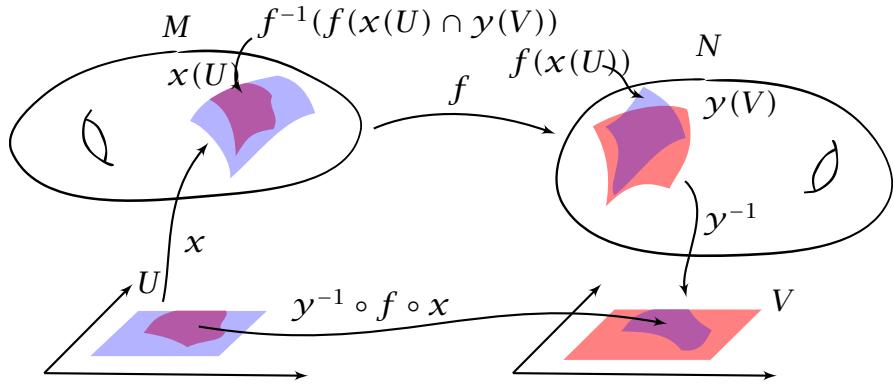
Lemat 5.8. Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech

$$f: M \rightarrow N$$

będzie odwzorowaniem ciągłym. f jest odwzorowaniem gładkim (a więc gładkim jako odwzorowanie $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje wokół niego lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ oraz istnieje lokalny układ współrzędnych $y: V \rightarrow N$ wokół $f(p) \in N$ takie, że złożenie

$$y^{-1} \circ f \circ x: U \rightarrow V$$

jest gładkie jako odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (tam, gdzie to złożenie ma sens).



Dowód:

Aby złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ będzie miało sens musimy założyć, że ograniczymy się do zbioru otwartego $f(x(U)) \cap y(V) \neq \emptyset$. Dla wygody oznaczmy $A \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1}(y^{-1}(y(V)))$.

Założmy, że odwzorowanie $f: M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^3$ jest gładkie. Ponieważ x i y są dyfeomorfizmami na swój obraz, więc i ich funkcje odwrotne są gładkie. Zatem złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ jest również gładkie.

Założmy, że $y^{-1} \circ f \circ x$ jest odwzorowaniem gładkim z $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$. Możemy je złożyć wcześniej z $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$, oraz później z $y: V \rightarrow y(V)$ otrzymując:

$$M \supset x(U) \xrightarrow[\text{id}_{x(U)}]{x^{-1}} U \xrightarrow{x} x(U) \xrightarrow{f} y(V) \xrightarrow[\text{id}_{y(V)}]{y^{-1}} V \xrightarrow{y} y(V) \subset N.$$

□

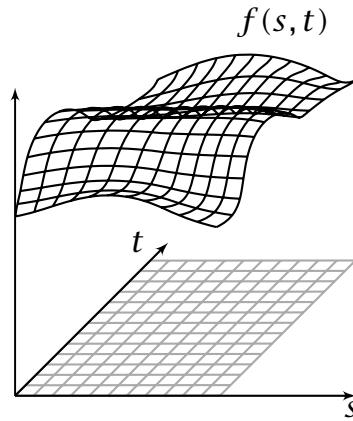
Uwaga. Przypomnijmy, że powierzchnię zdefiniowaliśmy jako zbiór **zanurzony** w \mathbb{R}^3 który lokalnie przypomina \mathbb{R}^2 . Powyższy lemat pozwala nam definiować powierzchnie (i ogólniej: rozmaistości n -wymiarowe), oraz funkcje na nich określone nie uciekając się do zanurzenia w odpowiednio wysoko wymiarowej przestrzeni Euklidesowej. Nie jest wtedy oczywiste, że każdą rozmaistość da się dla pewnego n w przestrzeni \mathbb{R}^n zanurzyć. Udowodnione jest jednak twierdzenie Whitneya o zanurzeniu mówiące, że każdą rozmaistość n -wymiarową można zanurzyć w przestrzeń euklidesową odpowiednio dużego wymiaru (wystarczy \mathbb{R}^{2n+1}).

5.2 Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Definicja 5.9. Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$. Powierzchnię $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią Monge'a** jeśli jej parametryzacja jest wykresem funkcji f :

$$x(s, t) = (s, t, f(s, t)).$$

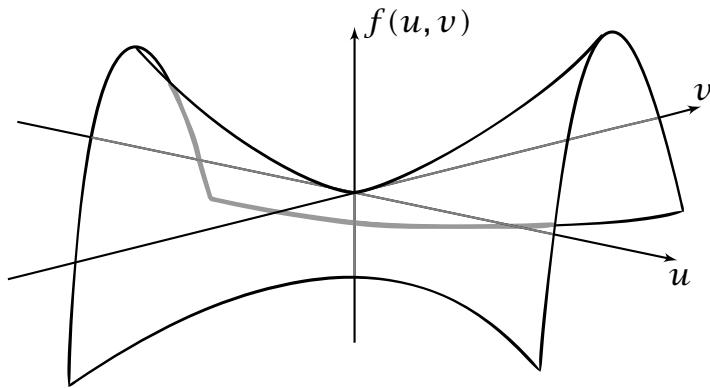


Uwaga. Parametryzacja Monge'a spełnia naszą definicję powierzchni (Definicja 5.3), ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \end{bmatrix} = \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), -\frac{\partial f}{\partial t}(s, t), 1 \right) \neq 0. \end{aligned}$$

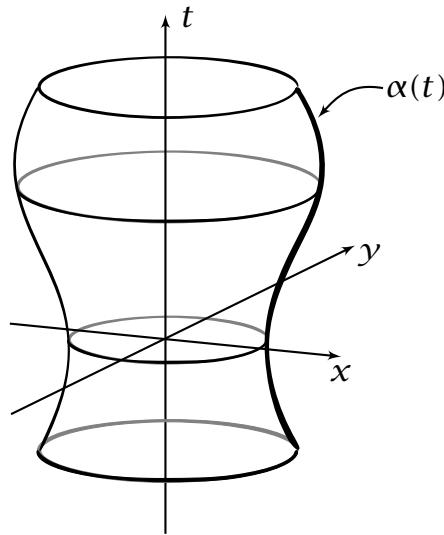
Przykład. • Paraboloida ($x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$)

• Powierzchnia siodłowa ($x(u, v) = (u, v, uv)$)



Powierzchnie obrotowe

Definicja 5.10. Powierzchnia obrotowa powstaje poprzez obrócenie krzywej $\alpha(t)$ wokół pewnej ustalonej prostej l . Postać ogólna to $x(t, \phi) = \alpha \cdot \text{Rot}_l(\phi)$, gdzie $\text{Rot}_l(\phi)$ to macierz 3×3 obrotu o kąt ϕ wokół prostej l .



Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z :

$$\text{Rot}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi Ox otrzymamy

$$x(t, \phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos \phi - \alpha_3(t) \sin \phi, \alpha_2(t) \sin \phi + \alpha_3(t) \cos \phi)$$

Uwaga. Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- krzywa była bez samoprzecięć, oraz
- oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.

Zadanie. Opisać co się "psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

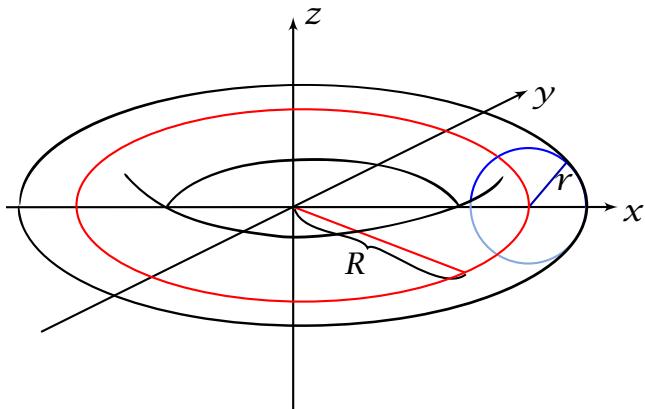
Przykład. • Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z :

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = (-\cos t \sin \phi, \cos t \cos \phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład. • Torus – obrót okręgu $\alpha(t) = (R + r \cos t, 0, r \sin t)$ wokół osi z :

$$x(t, \phi) = ((R + r \cos t) \cos \phi, (R + r \cos t) \sin \phi, r \sin t).$$

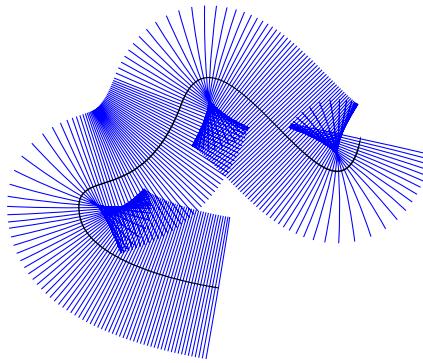


Powierzchnie prostokreślne

Definicja 5.11. Powierzchnią prostokreślną nazywamy powierzchnię o parametryzacji

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

gdzie α i β są krzywymi w przestrzeni \mathbb{R}^3 . α nazywa się potocznie kierownicą, β - ruletą.



Uwaga. Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa

- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida.

Poziomice funkcji

Definicja 5.12. Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją. Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli

$$\operatorname{rank} DF(p) = 0.$$

Uwaga: W naszym przypadku oznacza to, że wszystkie pochodne cząstkowe są równe 0.

Uwaga 2: W przypadku wyżej-wymiarowym, dla odwzorowania $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ warunek $\operatorname{rank} DF(p) = 0$ powinien być zastąpiony przez:

$\operatorname{rank} DF(p)$ jest mniejszy od maksymalnego, tj. $DF(p) < \max(m, n)$.

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja 5.13.

Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli

$$\operatorname{rank} DF(p) = 1.$$

Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Uwaga: W naszym przypadku oznacza to, że przynajmniej jedna z pochodnych cząstkowych odwzorowania F jest różna od 0 w tym punkcie.

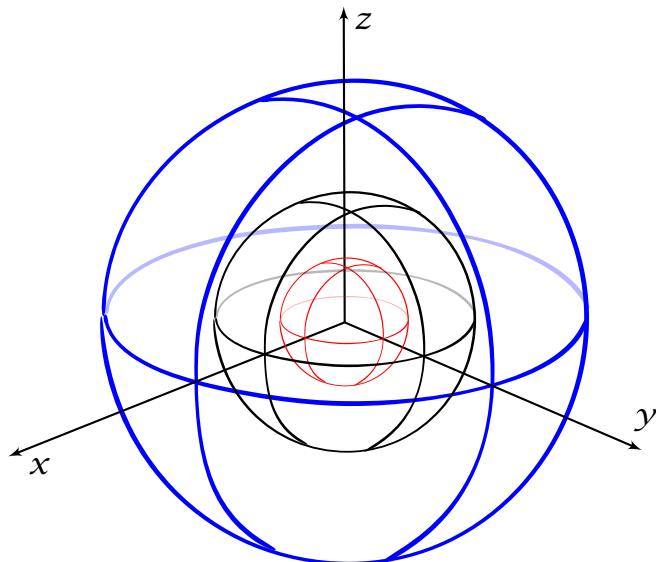
Uwaga 2: Warunek $\operatorname{rank} DF(p) = 1$ w definicji punktu regularnego tak naprawdę oznacza: rzad tak duży jak tylko jest to możliwe. Jeśli funkcja F będzie miała wartości w \mathbb{R}^n definicję trzeba będzie odpowiednio zmodyfikować.

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Twierdzenie 5.14. *Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, zaś $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją gładką. Jeśli $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$ jest wartością regularną, wtedy $F^{-1}(a)$ jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).*

Dowód: Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Pomijamy. \square

Przykład. • elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$).

6

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

6.1 Przestrzeń styczna

Uwaga. Na każdej powierzchni mamy naturalnie dane dwie rodziny krzywych. Dla każdego ustalonego $s_0 \in \mathbb{R}$ możemy rozpatrywać krzywą

$$x(s_0, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

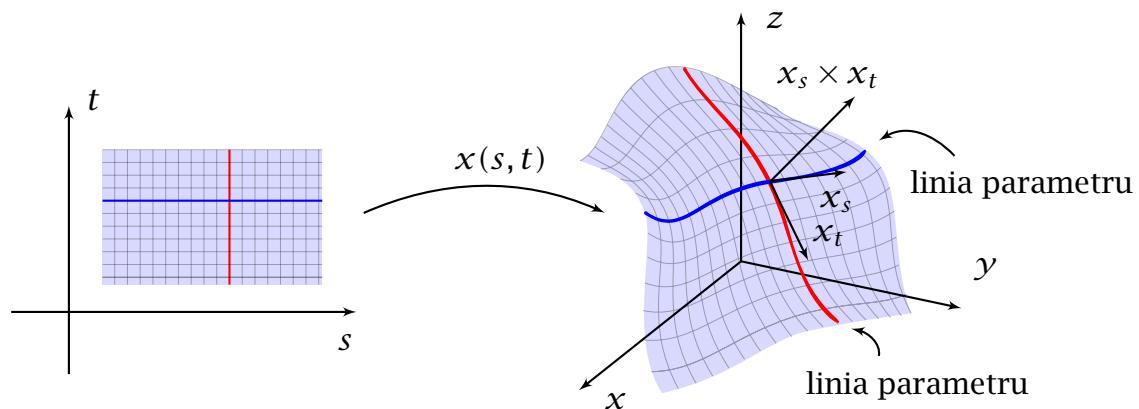
Podobnie dla dowolnego t_0 mamy krzywą

$$x(\cdot, t_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Krzywe te leżą na naszej powierzchni, a wektory styczne do tych krzywych będą grały bardzo ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Definicja 6.1. Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0) \Big|_{s=s_0}, \quad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t) \Big|_{t=t_0}.$$



Niech $p \in M$ będzie punktem na powierzchni M . Możemy rozważyć wszystkie krzywe gładkie przechodzące przez ten punkt i leżące (lokalnie) na powierzchni. Intuicja podpowiada nam, że ponieważ wektory styczne dobrze przybliżają (lokalnie) krzywe, więc zbiór wszystkich wektorów tego typu powinien dobrze przybliżać powierzchnię wokół punktu p . Te intuicje możemy sformalizować w następującej definicji.

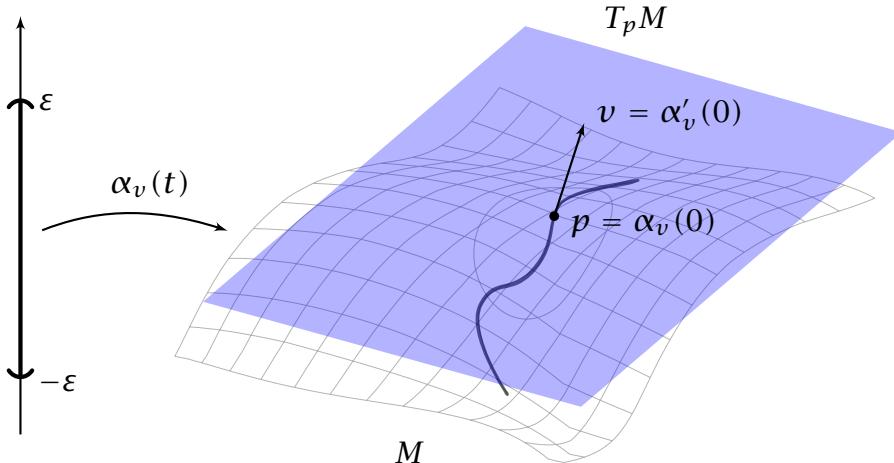
Definicja 6.2. Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Założymy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga. Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.



Lemat 6.3. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p .

2. Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi

$$\dim T_p M = 2.$$

Dowód: Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $\nu \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_{\nu}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_{\nu}(0) = p$, $\alpha'_{\nu}(0) = \nu \in T_p M$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_{\nu}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_{\nu}(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_{\nu}(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

$$\begin{aligned} \nu &= \alpha'_{\nu}(t) \big|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))' \big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0) \beta'_1(t) \big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0) \beta'_2(t) \big|_{t=0} = \\ &= \beta'_1(0) x_s(s_0) + \beta'_2(0) x_t(t_0), \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład ν w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $\nu = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = \nu$, czyli ν należy do $T_p M$. \square

6.2 Wektor normalny

Uwaga. Zauważmy, że przestrzeń styczna nie ma ustalonej w kanoniczny sposób bazy. Wektory x_s i x_t ją rozpinające zależą od wybranego lokalnego układu współrzędnych. Natomiast niezależna od tego wyboru jest cała przestrzeń styczna, a więc i jej ortogonalne dopełnienie, które nazywać będziemy kierunkiem normalnym.

Definicja 6.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech

$$\begin{aligned} x: U &\longrightarrow M \\ (s_0, t_0) &\longmapsto p \in M \end{aligned}$$

będzie lokalnym układem współrzędnych. **Wektor normalny w p** definiujemy jako

$$N(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|}(s_0, t_0),$$

gdzie x_s i x_t wektorami stycznymi do linii parametru przechodzących przez punkt p .

Uwaga. Ponieważ wektor normalny ma długość 1, więc koniec każdego wektora normalnego $N(p)$ leży na powierzchni sfery dwuwymiarowej $N(M) \subset S^2$. Zatem N może być traktowany jako **odwzorowanie między powierzchniami**

$$N: M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

punktów na powierzchni M . Jest to tzw. **odwzorowanie Gaussa** do którego wróćmy później.

6.3 Powtórka z algebry liniowej I

Powtórka z algebry liniowej I

Definicja 6.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} . **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Definicja 6.6. Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja 6.7. Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V , oraz niech B będzie formą dwuliniową na V . **Macierz fromy** B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xA^T y^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Przykład. Standardowy iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle = \sum x_i^2$ jest oczywiście formą dwuliniową. W standardowej bazie przestrzeni \mathbb{R}^n jego macierzą jest $A = \text{Id}$.

6.4 I forma podstawowa

I forma podstawowa

Definicja 6.8. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Dla powierzchni M definiujemy **pierwszą formę podstawową w punkcie** p jako formę dwuliniową

$$\begin{aligned} I_p: T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w \mathbb{R}^3 . Oznaczamy ją symbolem I_p .

Definicja 6.9. Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$I_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p \in M}.$$

Uwaga. Postać macierzowa pierwszej formy podstawowej zależy w istotny sposób od zanurzenia powierzchni w \mathbb{R}^3 (czyli od wyboru lokalnego układu współrzędnych $x: U \rightarrow M$).

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t . Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Uwaga. W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2 . Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, w punkcie p ma postać

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardej bazie przestrzeni stycznej.

Przykład. Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t) \quad x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s, t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Definicja 6.10. Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x: U \rightarrow M$

Uwaga. • Ponieważ iloczyn skalarny w \mathbb{R}^n jest formą symetryczną, więc I_p jest również formą symetryczną, zatem każdym punkcie mamy $g_{12} = g_{21}$.

- Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowiednio) g_{11}, g_{12} i g_{22} .

Lemat 6.11. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód: Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □ Ostatni lemat w tym wypadku pokazuje jak zmieniają się współczynniki metryczne podczas przejścia do innego układu współrzędnych. Jak można się domyślać, będzie to związane z Jakobianem funkcji przejścia (podobnie jak na analizie podczas zmiany układu współrzędnych np. z ortogonalnego na sferyczny).

Lemat 6.12. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$, $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Założmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}) , [odpowiednio (\bar{g}_{ij})] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczamy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy (\bar{g}_{ij}) wyrażają się następującymi wzorami

$$(\bar{g}_{ij}) \circ \Phi_{x,y} = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód: Pomijamy. □ Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat 6.13. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa*

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Dowód: Ćwiczenie. Zauważyc, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w \mathbb{R}^3 . Wektor prędkości jest równy $x_1 \alpha'_1 + x_2 \alpha'_2$. Znaleźć jego długość. \square

7

Pochodne kierunkowe. Izometria.

7.1 Pochodne kierunkowe

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Założmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja 7.1. Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w **kierunku wektora v** jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Lemat 7.2. *Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy*

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód: Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Możemy wybrać tak małe ε , że obrazy $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$ i $\beta(-\varepsilon, \varepsilon)$ będą już zawarte w $x(U)$. Z definicji przestrzeni stycznej, wektory styczne do tych krzywych w 0 można wyrazić jako kombinacje liniowe wektorów x_1 i x_2 .

Co więcej, z równości $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ wynika, że współczynniki tych kombinacji są sobie równe w punkcie p .

Zatem również

$$(x^{-1} \circ \alpha)'(0) = (x^{-1} \circ \beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= \left[(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha) \right]'(0) = \\ &= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p=(x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1} \circ \beta)'(0)} = \\ &= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0), \end{aligned}$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). \square

Lemat 7.3. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi*

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v (af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v (g)$
- $\nabla_v (fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga. Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor). Trzecia własność to tzw. reguła Leibniza, co może być wyrażone inaczej przez powiedzenie, że ∇ jest różniczkowaniem algebry funkcji gładkich na M . Nie będzie nas to jednak w dalszej części wykładu zajmowało.

Dowód: Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność. Idea dowodu jest blisko związana z tą użytą w drugiej części dowodu lematu 6.3.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \quad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t) \big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \nabla_{av+bw} f &= (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\
 &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\
 &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &= a \nabla_v f + b \nabla_w f.
 \end{aligned}$$

□

7.2 Izometria

Definicja 7.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem gładkim (tj. polem wektorowym). **Pochodną** f w punkcie $p \in M$ definiujemy jako

$$\begin{aligned}
 Df_p: T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 v &\mapsto \nabla_v f = (\nabla_v f_1, \nabla_v f_2, \nabla_v f_3).
 \end{aligned}$$

Chociaż definicja wygląda na powtóżenie definicji pochodnej kierunkowej, sama różnica w napisach

$$\nabla_v f(p) \quad \text{vs.} \quad Df_p(v)$$

zmienia nasz punkt widzenia. Przy definicji pochodnej kierunkowej, wektor v uważaliśmy za stały, a zmiennymi były funkcje (lub pola wektorowe). W pochodnej funkcji f na powierzchni mamy na myśli ustaloną funkcję której zmienność badamy we wszystkich (stycznych) kierunkach v .

Lemat 7.5. Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_p M$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$ oraz

$$Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód: Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

Niech $v \in T_p M$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

jest krzywą na powierzchni N , oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$. \square

Przykład. Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Wybierzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)'|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b)|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Definicja 7.6. Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmieniczna ze względu na f , i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f|_U: U \rightarrow f(U)$ jest izometrią.

Uwaga. Powyższą równość można zapisać

$$\langle v, w \rangle = \langle Df_p(v), Df_p(w) \rangle,$$

co daje użyteczne kryterium sprawdzania, czy f jest izometrią.

Warto zauważyć, że izometria od lokalnej izometrii różni się tylko i wyłącznie tym, że lokalna izometria nie musi być dyfeomorfizmem całych przestrzeni. Jest to niewielka, lecz jak zobaczymy ważna różnica.

Lemat 7.7. Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. f jest lokalną izometrią.
2. Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_p M$.
3. Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p taki, że $f \circ x: U \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x .
4. Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha: (a, b) \rightarrow A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.

Dowód: Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) \Rightarrow (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \quad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \quad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\bar{q} \subset U$. Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założenia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Z powyższego równania wynika, że $\|(f \circ x)_i\| = \|x_i\|$, oraz kąt między $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2 . Zatem z liniowej niezależności x_1 i x_2 wynika liniowa niezależność $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$, czyli rank $(f \circ x) = 2$ na odpowiednio pomniejszonym zbiorze $V \subset U$ (tak by $\alpha_{q,i}$ były dobrze określone). Wreszcie z twierdzenia o funkcji uwiązanego wynika, że $f \circ x: V \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych. Równość współczynników metrycznych wynika natychmiast z powyższej równości. \square

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluza $x: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w \mathbb{R}^2 , oraz $f \circ x: U \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku \mathbb{R}^2 musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

8

Krzywizna Gaussa I

8.1 Odwzorowanie Gaussa

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lub $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja 8.1. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\hat{n}: x(U) \rightarrow S^2$ zadane wzorem

$$\hat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

$$\text{gdzie } n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}.$$

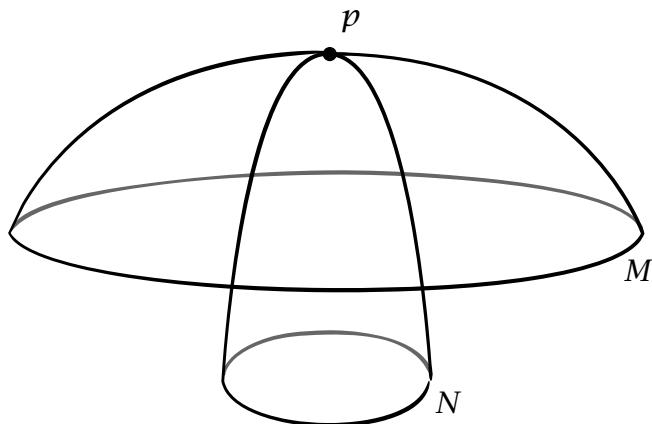
- Uwaga.**
- Zauważmy, że dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, więc (jednostkowy) wektor normalny może się różnić co najwyżej o czynnik (-1) w stosunku do wyjściowego. Nie będzie to jednak zmieniać w istotny sposób dalszych obliczeń. Możemy przyjąć, że jeśli powierzchnia jest zamknięta, to wybieramy kierunek “zewnętrzny”.
 - Odwzorowanie Gaussa z całą pewnością zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w \mathbb{R}^3 i może się zmienić, gdy zaczniemy tę powierzchnię deformować.

8.2 Krzywizna Gaussa – Idea

Chcemy zdefiniować krzywiznę powierzchni, więc szukamy funkcji $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, która będzie spełniać następujące własności:

1. $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;

3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna zniknąć;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.



Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- Kiedy punkt p należy do zbioru V , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pół powierzchni**

$$\frac{A(\hat{n}(V)), \hat{n}(V) \subset S^2}{A(V), V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_G(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)}.$$

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\hat{n}(V)$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa “odwraca” obszar V ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Przykład. Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i niech

$$x(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

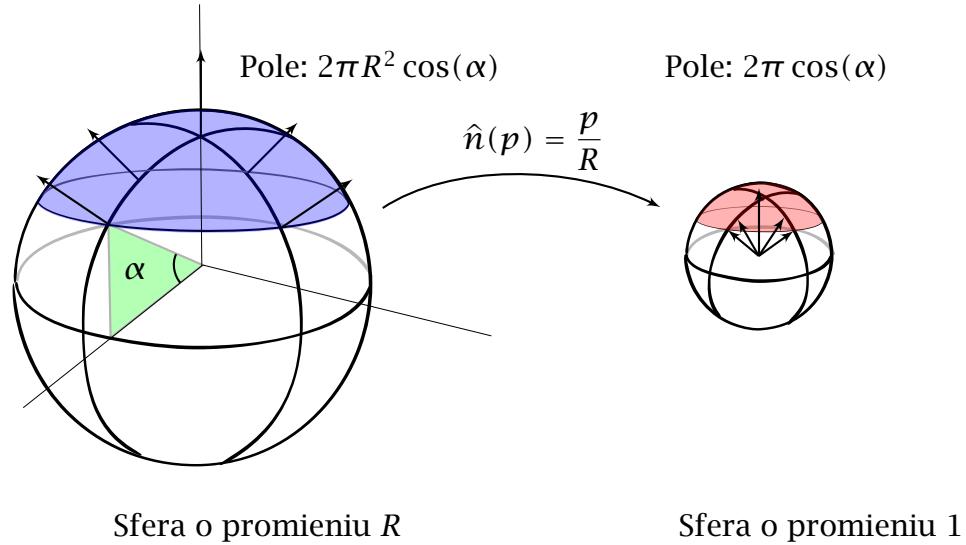
$$\begin{aligned} x_\phi &= R(-\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, 0), \\ x_\psi &= R(-\cos \phi \sin \psi, -\sin \phi \sin \psi, \cos \psi), \end{aligned}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskażujący na zewnątrz, wtedy

$$\hat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

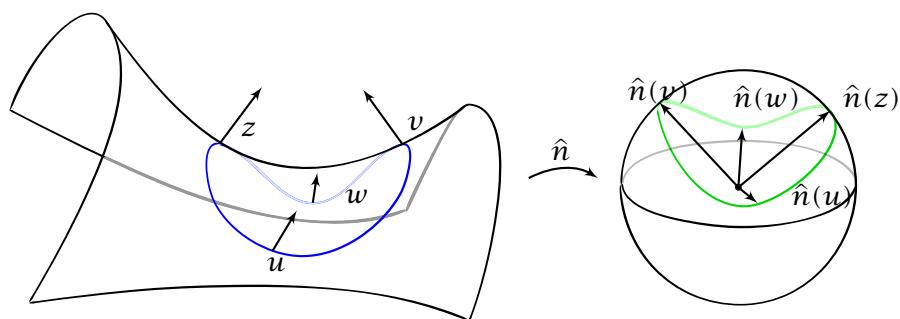
dla całej sfery.

Widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa zmiejsza obszar o czynnik $\frac{1}{R^2}$ i nie ma żadnych problemów z definicją.



$$K_G(p) = \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} = \frac{2\pi \cos(\alpha)}{2\pi R^2 \cos(\alpha)} = \frac{1}{R^2}.$$

Przykład. Rozważmy powierzchnię siodłową $x(u, v) = (x, y, xy)$. Rozważmy niewielki okrąg S na płaszczyźnie $z = 0$ i środku w $(0, 0)$, wtedy jego obraz $x(S)$ leży na powierzchni siodłowej. Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze), jednak jeśli obiegamy okrąg S w lewo, wówczas kierunek na $\hat{n}(x(S))$ ulega odwróceniu. Zatem chcielibyśmy nadać znak ujemny $A(\hat{n}(V)) < 0$ gdzie V jest obszarem ograniczonym przez $x(S)$.



8.3 Pole powierzchni

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja 8.2. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2 , który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Lemat 8.3. Założmy, że $S \subset x(U) \cap y(V)$ dla dwóch lokalnych układów współrzędnych x, y na M . Niech (g_{ij}) , [odpowiednio (\bar{g}_{ij})] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Wtedy

$$\iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt = \iint_{y^{-1}(S)} \sqrt{|\det(\bar{g}_{ij})|} \, ds \, dt.$$

Dowód pomijamy.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| \, ds \, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\hat{n}(V)$ jako

$$A(\hat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| \, ds \, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Oczywiście używając odpowiednio zaawansowanego aparatu matematycznego można pokazać, że krzywizna (wg. definicji Gaussa) faktycznie nie zależy od wyboru zstępujących otoczeń V , ale my spróbujemy przedstawić bardziej współczesne podejście, które okaże się równoważne definicji Gaussa.

8.4 Powtórka z algebry liniowej II

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W .

Definicja 8.4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $F: W \rightarrow W$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

Przykład. Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standarowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Przykład. Odwzorowanie $\mathcal{B}_F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) &= \langle F(v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, (w_1, w_2) \right\rangle = \\ &= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2), (w_1, w_2) \rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2w_2. \end{aligned}$$

Ustalmy bazę przestrzeni W . Wtedy odwzorowanie F i odwzorowanie indukowane \mathcal{B}_F mogą być reprezentowane przez odpowiednie macierze. Następujący lemat przedstawia związki zachodzące między tymi macierzami.

Lemat 8.5. *Niech $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.*

- Oznaczmy przez \mathbf{G} macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.
- Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy \mathbf{A} w powyższej bazie.
- Niech \mathbf{M} oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t \mathbf{G}$.

Przykład. Niech F będzie tak jak z poprzedniego przykładu. Na $W = \mathbb{R}^2$ wybierzmy standardową bazę $\{e_1, e_2\}$. Naturalny iloczyn skalarny na \mathbb{R}^2 ma w tej bazie macierz $\mathbf{G} = \text{Id}$. Zatem macierzą odwzorowania B_F jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t \cdot \text{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \text{Id},$$

zatem

$$B_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \text{Id} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Lemat 8.6. Niech W będzie przestrzenią wektorową i \mathcal{B} formą dwuliniową na W .

- \mathcal{B} jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania \mathcal{B} w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.
- Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:
 1. macierz \mathbf{A} odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W ,
 2. forma dwuliniowa B_F indukowana przez F jest symetryczna.

Uwaga. Symetryczność formy \mathcal{B} oznacza, że spełniona jest równość

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

Jeśli macierz \mathbf{A} odwzorowania F jest symetryczna, wtedy $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Ponadto, jeśli jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać na W taką bazę w której macierz \mathbf{G} iloczynu skalarnego na W jest macierzą identycznościową. Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G} w = w^t (\mathbf{A}^t)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Lemat 8.7. Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Założmy, że macierz \mathbf{A} formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W . Wtedy

- F ma rzeczywiste wartości własne k_i .
- wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- Macierz \mathbf{A} odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny \mathbf{A} :

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a - t & b \\ b & c - t \end{bmatrix} = t^2 - (a + c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne \mathbf{A}).

Przykład. Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standarowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \text{tr } \mathbf{A}$.

Zadanie. Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

9

Krzywizna Gaussa II

9.1 Odwzorowanie Weingartena

Lemat 9.1. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D \hat{n}(v) \in T_p M$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w \mathbb{R}^3).

Dowód: Wektor normalny $\hat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$. (Uwaga: poza tym obszarem zapis \langle , \rangle nie ma sensu!)

Wtedy

$$0 = D \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2 \langle \nabla_v \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2 \langle D \hat{n}(v), \hat{n} \rangle,$$

więc $D \hat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do \hat{n} , zatem musi należeć do $T_p M$. \square

Definicja 9.2. Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L: T_p M \rightarrow T_p M$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D \hat{n}(v) = -\nabla_v \hat{n}.$$

Lemat 9.3. Odwzorowanie Weingartena $L: T_p M \rightarrow T_p M$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód: Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). \square

Uwaga. Chociaż do definicji odwzorowania Weingartena używamy lokalnego układu współrzędnych, jednak przy innym wyborze $x: U \rightarrow M$, odwzorowanie L może się różnić tylko o znak \pm .

9.2 Druga forma podstawowa

Definicja 9.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\Pi_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L , tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej $T_p M$.

Uwaga. Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Uwaga (Oznaczenie). Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek. Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Następujący lemat pokazuje sposób na łatwe policzenie współczynników drugiej formy podstawowej l_{ij} .

Lemat 9.5. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

1. (Równania Weingartena) Dla $i = 1, 2$ zachodzi

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

2. Dla indeksów $i, j = 1, 2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle,$$

gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmiennych i -tej i j -tej).

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\hat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \hat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \Pi(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. \square

Lemat 9.6. • *Druga forma podstawowa Π jest symetryczna.*

- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej.*

Dowód: Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej Π). \square

Uwaga. *Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej $\{x_1, x_2\}$ nie będzie ortonormalna w punkcie p , wtedy najczęściej $L_{ij}(p)$ nie będzie macierzą symetryczną. (ogólnie: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu 8.6).*

Uwaga. *Wiedząc, że macierz (l_{ij}) jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej*

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

9.3 Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Jak pamiętamy intuicyjna definicja krzywizny wokół punktu p kazała nam porównywać pole na powierzchni z polem zakreślonym przez wektor normalny. Ponieważ odwzorowanie Weingartena charakteryzuje lokalne zmiany wektora normalnego, może się nadawać do definicji krzywizny.

Niezmiennikami numerycznymi macierzy 2×2 są wyznacznik i ślad. Co więcej, są to niezmienniki odpowiadające danej macierzy odwzorowania liniowego (tj. są te same dla macierzy sprzężonych), dlatego właśnie je użyjemy w poniższych definicjach.

Krzywizna powierzchni

Definicja 9.7. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$K(p) = \det L(p) \quad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Lemat 9.8. *Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej $T_p M$.*

Dowód: Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2, \operatorname{tr} L(p) = k_1 + k_2.$$

cytowanego w powtórkę z algebry liniowej II (Lemat 8.7). \square

Lemat 9.9. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.*

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Dowód: Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (\mathcal{g}_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((\mathcal{g}_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(\mathcal{g}_{ij})}.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(\mathcal{g}_{ij})} \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{g}_{22} & -\mathcal{g}_{21} \\ -\mathcal{g}_{12} & \mathcal{g}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \det(\mathcal{g}_{ij})} \begin{bmatrix} \mathcal{g}_{22}l_{11} - \mathcal{g}_{21}l_{12} & * \\ * & -\mathcal{g}_{12}l_{21} + \mathcal{g}_{11}l_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Podsumowanie

Podsumowanie

Aby obliczyć krzywizny (średnią i Gaussa) powierzchni potrzebujemy następujące wielkości:

$$\mathcal{g}_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle, \quad \mathcal{g}_{12} = \mathcal{g}_{21} = \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \mathcal{g}_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle,$$

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(\mathcal{g}_{ij})}},$$

$$l_{11} = \langle n_1, x_1 \rangle, \quad l_{12} = \langle n_2, x_1 \rangle, \quad l_{22} = \langle n_2, x_2 \rangle,$$

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(\mathcal{g}_{ij})}, \quad H(p) = \frac{\mathcal{g}_{11}l_{22} - 2\mathcal{g}_{12}l_{12} + \mathcal{g}_{22}l_{11}}{2 \det(\mathcal{g}_{ij})}.$$

9.4 Agitacja na rzecz zgodności definicji

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Nie podaliśmy precyzyjnej definicji orginalnej krzywizny Gaussa, więc trudno mówić o dowodzie równoważności naszej (precyzyjnej) definicji. Niemniej jednak postaramy się zmotywować tę równoważność. Jak

zwykle niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Oznaczmy przez $\bar{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{aligned} K_G(p) &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt} = \\ &= \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt}. \end{aligned}$$

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty $a_V, b_V \in x^{-1}(V)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\begin{aligned} \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt &= |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V)), \\ \iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt &= \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)). \end{aligned}$$

Zauważmy, że skoro $V \rightarrow \{p\}$, więc $a_V \rightarrow \bar{p}$ oraz $b_V \rightarrow \bar{p}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} &= \lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ &= \frac{|\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\bar{p}))|}}. \end{aligned}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (- (L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (- (L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) = \\ &= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2) \end{aligned}$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\begin{aligned}\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle &= \pm K(p) \left\langle x_1(\bar{p}) \times x_2(\bar{p}), \frac{x_1(\bar{p}) \times x_2(\bar{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} \right\rangle = \\ &= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} ||x_1 \times x_2||^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))},\end{aligned}$$

zatem ostatecznie

$$K_G(p) = \lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\bar{p}))}} = \pm K(p).$$

10

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

10.1 Symbole Christoffela

Symbole Christoffela

Przypomnijmy, że wzory Frené dla krzywych wyrażały pochodne wektorów T , N i B w bazie $\{T, N, B\}$ (a więc pochodne wektorów z bazy wyrażamy w tej samej bazie). Udowodnimy teraz analogiczne twierdzenia dla powierzchni. Szukamy więc formuł, które wyraziłyby pochodne cząstkowe wektorów x_1 , x_2 i n w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Znamy już dwa takie wzory, są nimi równania Weingartena wyrażające $n_i(u_1, u_2) = \frac{\partial n}{\partial u_i}$ jako kombinacje wektorów x_1 i x_2 . Dla przypomnienia:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Poniżej używamy naszej konwencji na oznaczanie drugich pochodnych cząstkowych x jako x_{ij} ,

$$x_{ij}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x_i(u_1, u_2)}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 x(u_1, u_2)}{\partial u_j \partial u_i}.$$

Oczywiście jak niemal wszystko co do tej pory dowodziliśmy o powierzchniach, ostateczna forma tych formuł będzie zależeć od wyboru lokalnego układu współrzędnych.

Twierdzenie 10.1 (Formuła Gaussa). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnymi układem współrzędnych. Wtedy*

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n. \quad (10.1)$$

Uwaga. Ponieważ funkcje Γ_{ij}^k zwane **symbolami Christoffela** nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich **definicję** (z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).

Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \text{dla } k = 1, 2.$$

Dowód Formuły Gaussa: Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\begin{aligned}\langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\ \langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\ \langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij}\end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffella. \square

Lemat 10.2. *Niech $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Dla wszystkich $i, j = 1, 2$ zachodzi*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Dowód: Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij} :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle\end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . \square

Twierdzenie 10.3. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.*

• *Równanie Gaussa:*

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

• *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) &= 0 \\ \frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2}) &= 0 \end{aligned}$$

Chociaż na pierwszy rzut oka te równania są zupełnie nieczytelne, ich pochodzenie sprowadza się do twierdzenia Schwarza: pochodne cząstkowe mieszane muszą być równe niezależnie od kolejności różniczkowania, tj.

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Ponadto dowód wykorzystywało jedynie fakt, że równość wektorów w tej samej bazie pociąga równość współczynników, więc nie jest koniecznie trudny.

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i formuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$\begin{aligned}
 x_{ijk} &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^2 x_1 + \Gamma_{2k}^2 x_2 + l_{1k} n \right)}_{x_{1k}} + \\
 &\quad + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 \underbrace{\left(\Gamma_{1k}^1 x_1 + \Gamma_{2k}^1 x_2 + l_{2k} n \right)}_{x_{2k}} + \\
 &\quad + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2 \right)}_{n_k} = \\
 &= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{1k} \right] x_1 + \\
 &\quad + \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^1 - l_{ij} L_{2k} \right] x_2 + \\
 &\quad + \left[\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} \right] n = A x_1 + B x_2 + C n.
 \end{aligned}$$

Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_{ikj} &= \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^1}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1 \Gamma_{1j}^1 + \Gamma_{ik}^2 \Gamma_{2j}^2 - l_{ik} L_{1j} \right] x_1 + \\ &\quad + \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^2}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^1 \Gamma_{1j}^2 + \Gamma_{ik}^2 \Gamma_{2j}^1 - l_{ik} L_{2j} \right] x_2 + \\ &\quad + \left[\Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} \right] n = \\ &= A' x_1 + B' x_2 + C' n. \end{aligned}$$

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \quad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + (\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} &= \\ = \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) &= 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie podstawiając ($i = 1, j = 2, k = 1$) [odpowiednio: ($i = 2, j = 2, k = 1$)] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. \square

Zadanie. Udowodnić formułę Gaussa. Podpowiedź: należy porównać współczynniki A, A' , oraz B, B' . Następnie podstawić ($i = 2, j = 1, k = 2$).

10.2 Theorema Eggregium

Twierdzenie 10.4 (Theorema Eggregium Gaussa). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N . Niech $f: M \rightarrow N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy*

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22}), oraz ich pochodnych.

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22} i ich pochodnych. (Uwaga: jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemy szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). \square

Zadanie. Prześledzić dowód Theorema Egredium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga. Twierdzenie odwrotne do Theorema Egredium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f: M \rightarrow N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Przykład. Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f: M \rightarrow N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

10.3 Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie 10.5 (Twierdzenie klasyfikacyjne). *Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Założymy, że*

- istnieją cztery funkcje $g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g_{11} > 0, \quad \text{oraz} \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0,$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$;

- istnieją cztery funkcje $l_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$l_{ij} = l_{ji};$$

- osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanych przez

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

dla wszystkich $i, j, k = 1, 2$, spełnia następujące trzy równania:

$$\begin{aligned}
 l_{11}l_{22} - l_{12}^2 &= \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right] \\
 \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) &= 0 \\
 \frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2}) &= 0
 \end{aligned}$$

wtedy:

Dla każdego punktu $p \in U$ istnieje jego otwarte otoczenie $V \subset U$ oraz lokalny układ współrzędnych $x: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dla którego funkcje g_{ij} i l_{ij} tworzą odpowiednio pierwszą i drugą formę podstawową. Każde takie dwa lokalne układy współrzędnych różnią się od siebie o translację i obrót przestrzeni \mathbb{R}^3 .

11

Geodezyjne I

11.1 Idea

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

- (1) każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;
- (2) odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;
- (3) kiedy podróżujemy wzduż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Chociaż proste na płaszczyźnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład S^2 :

- Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej “długości geograficznej” jest droga wzduż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończonie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

Jak widzimy nawet przy najprostszej powierzchni jaką jest sfera, konfrontacja intuicji “najkrótszej drogi” z własnościami okręgów wielkich sprawia, że nie możemy zakładać równoczesnego spełnienia wszystkich trzech własności.

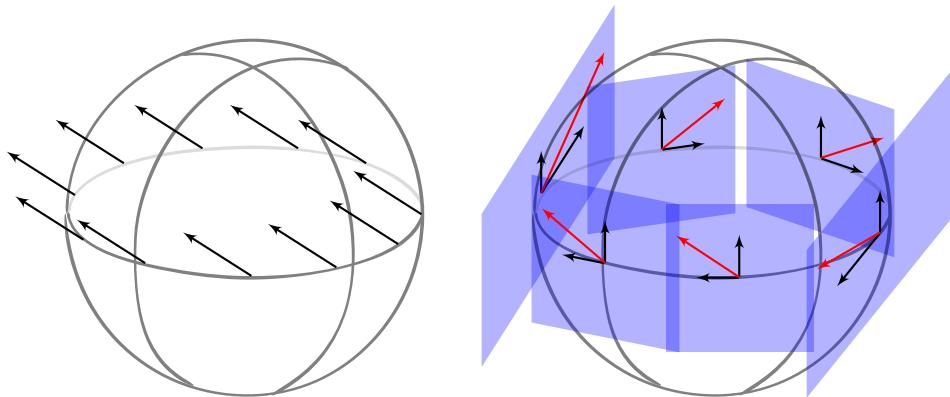
Chociaż najmniej intuicyjną, wybierzemy własność (3) jako definicję. Oto najważniejszy powód naszej decyzji:

“Nie krzywienie się” jest właściwością *lokalną*, natomiast właściwości jedyności (1) i najkrótszej drogi (2) są *globalne*, i odwołują się do kształtu całej powierzchni.

Z naszego punktu widzenia na powierzchnię (poprzez lokalne układy współrzędnych), właściwości lokalne, które można sprawdzać w otoczeniu każdego punktu z osobna są znaczenie bardziej przystępne (obliczeniowo), niż te, które wymagają brania pod uwagę związków pomiędzy punktami (być może) bardzo dalekimi.

11.2 Pochodna kowariantna

Ale jak uogólnić (czy też doprecyzować) właściwość (3) dla dowolnej powierzchni? Wykorzystamy ideę równoległego transportu wektora wzduż krzywej. Postrzeganie równoległości tak na prawdę zależy od położenia obserwatora.



Które wektory są wzajemnie równoległe?

Niech $\alpha(t) \subset M$ będzie krzywą na powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$. Z punktu widzenia obserwatora w \mathbb{R}^3 równoległe wektory wzduż krzywej będą miały te same współrzędne w \mathbb{R}^3 (tj. będą tworzyć *stałe* pole wektorowe wzduż α). Z punktu widzenia obserwatora na powierzchni, poruszającego się wzduż krzywej, równoległe będą te wektory, które będą miały *proporcjonalne współrzędne* w bazie $\{x_1, x_2\}$ w przestrzeniach stycznych $T_{\alpha(t)}M$ dla wszystkich t .

Uwaga. Równoległość wektorów w różnych przestrzeniach stycznych do powierzchni M oznacza **proporcjonalność współczynników ich przedstawienia w standardowej bazie obu przestrzeni stycznych**.

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Przypomnijmy materiał którym zajmowaliśmy się podczas badania własności izometrii.

Przypomnienie

Definicja 11.1. **Gładkie pole wektorowe** na M to odwzorowanie gładkie

$$F: M \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Gładkie pole wektorowe nazywamy **stycznym** jeśli $F(p) \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$ dla wszystkich $p \in M$.

Definicja 11.2. **Pochodna kierunkowa pola wektorowego** F w kierunku wektora $v \in T_p M$ jest zdefiniowana naturalnie jako

$$\nabla_v F \stackrel{\text{def.}}{=} (\nabla_v F_1, \nabla_v F_2, \nabla_v F_3)$$

gdzie F_i są funkcjami współrzędnymi pola F .

Przykład. Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\hat{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na M . Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena.

Lemat 11.3. *Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji,*

- $\nabla_{av+bw} F = a\nabla_v F + b\nabla_w F$
- $\nabla_v (aF + bG) = a\nabla_v F + b\nabla_v G$
- $\nabla_v (FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G$

Co więcej mamy

$$\nabla_v \langle F, G \rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p) \rangle + \langle F(p), \nabla_v G \rangle.$$

Rozważmy styczne pole wektorowe $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Niech $p \in M$ i $v \in T_p M$.

Oczywiście nie ma powodu, aby wektor $\nabla_v Z$ należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?). Spróbowajmy “naprawić” tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie $\nabla_v Z$ na $T_p M$.

Definicja 11.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie stycznym polem wektorowym. Niech $p \in M$ oraz $v \in T_p(M)$. **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\hat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_p M}(\nabla_v Z),$$

gdzie Π_W oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń W .

Lemat 11.5. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $Y, Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą stycznymi polami wektorowymi. Niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie lądką funkcją, $p \in M$ punktem na M , $v, w \in T_p(M)$ wektorami z przestrzeni stycznej i wreszcie $a, b \in \mathbb{R}$ liczbami rzeczywistymi. Wtedy

- *Odwzorowanie*

$$\hat{\nabla}_{(\cdot)} Z: T_p M \rightarrow T_p M$$

zadana przez $v \mapsto \hat{\nabla}_v Z$ jest odwzorowaniem liniowym.

- $\hat{\nabla}_v(Y + Z) = \hat{\nabla}_v Y + \hat{\nabla}_v Z$.
- $\hat{\nabla}_v f Z = (\hat{\nabla}_v f)Z(p) + f(p)(\hat{\nabla}_v Z)$.
- $\hat{\nabla}_v \langle Y, Z \rangle = \langle \hat{\nabla}_v Y, Z(p) \rangle + \langle Y(p), \hat{\nabla}_v Z \rangle$

Dowód:

Dowody tych własności są analogiczne jak własności pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). Wystarczy skorzystać z liniowości rzutowania ortogonalnego na podprzestrzeń.

□ Zanim wprowadzimy definicję geodezyjnej potrzebujemy jeszcze jednego oznaczenia. Będą

nas interesowały styczne pola wektorowe wzdłuż krzywych, więc mając daną parametryzację krzywej będzie można bardzo prosto policzyć pochodną kowariantną.

Niech $\alpha: (a, b) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą na powierzchni i niech $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym wzdłuż α . Oznaczmy

$$\frac{\hat{D}(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_{\alpha(t)}M} \left(\frac{d(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \right) = \hat{\nabla}_{\alpha'(t)} Z$$

Uwaga. Zauważmy, że styczne pole wektorowe α' do krzywej $\alpha \subset M$ jest w postaci $Z \circ \alpha$.

11.3 Definicja geodezyjnych

Teraz korzystając z języka pochodnych kowariantnych możemy wy- powiedzieć co to znaczy, że krzywa “nie skręca w prawo bądź w lewo”.

Definicja 11.6. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą γ nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na M jeśli wektory $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ wzdłuż krzywej γ pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$, oraz

$$\frac{\hat{D}(Z \circ \gamma)(t)}{dt} = \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left(\frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \hat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

Uwaga. W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu $\gamma(t)$.

Zanalizujmy dwa proste przypadki – płaszczyznę i sferę.

Przykład. Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Założmy, że krzywa γ jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja $\tau_{\gamma} \equiv 0$ oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez T_{γ} i N_{γ}). Wobec tego pochodna pola stycznego γ' wzdłuż γ będzie równa

$$0 = \frac{\hat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_{\gamma}, N_{\gamma} \rangle} \left(\frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem $\gamma(t) = vt + w$ dla pewnych $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Uwaga (Bardzo ważna!). *Sprzecznie z naszą intuicją, bycie krzywą geodezyjną jest własnością parametryzacji, a nie samej krzywej na powierzchni. Powyższy przykład udowadnia jedynie, że prosta w postaci parametrycznej jest geodezyjną na płaszczyźnie.*

Rozważmy teraz krzywą $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ zadaną wzorem

$$\beta(t) = (t^3, t^3, 0).$$

Obraz tej krzywej jest oczywiście prosta, jednak podobne przeliczenia jak powyżej pokazują, że

$$\frac{\hat{D}\beta'(t)}{dt} = \frac{d\beta'(t)}{dt} = (6t, 6t, 0) \neq 0.$$

Przykład. Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.

Ze względu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik S^2 sparametryzowany jako $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$ wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \frac{\hat{D}\gamma'(t)}{dt} &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} \left(\frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} ((-\cos(t), -\sin(t), 0)) = \\ &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} (-\gamma(t)) = 0, \end{aligned}$$

ponieważ sfera ma tę własność, że przestrzeń styczna w każdym punkcie jest prostopadła do prostej wyznaczonej przez ten punkt i środek sfery.

Następujący lemat pokazuje związki pomiędzy geodezyjnymi a ich reparametryzacjami.

Lemat 11.7. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią i niech $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.*

1. *Krzywa γ ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj. $||\gamma'(t)|| = c \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$).*
2. *Reparametryzacja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h: (c, d) \rightarrow (a, b) \rightarrow M$ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy h jest funkcją aficzną.*
3. *Jeśli obraz krzywej $\delta: (c, d) \rightarrow M$ jest zawarty w obrazie krzywej γ , $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$, wtedy δ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.*

Dowód: Dowody pierwszych dwóch punktów są łatwe (można potraktować je jako ćwiczenia na zrozumienie definicji geodezyjnej). Dowód trzeciego jest bardziej wymagający.

Pomijamy. □

12

Geodezyjne II

12.1 Równania geodezyjnych

Dotychczas nie używaliśmy jeszcze lokalnych układów współrzędnych do analizy geodezyjnych. W następującym lemacie pokażemy, że warunek z definicji krzywej geodezyjnej lokalnie wyraża się jako układ równań różniczkowych. Będziemy mogli wtedy użyć ogólnych twierdzeń o rozwiązaniach tych układów, aby dać pewne warunki przy których geodezyjne istnieją i są jednoznaczne.

Twierdzenie 12.1 (Równania geodezyjnych). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech $\gamma: (a, b) \rightarrow x(U) \subset M$ będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez*

$$\begin{aligned} g &\stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \gamma: (a, b) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (g_1(t), g_2(t)) \end{aligned}$$

i niech g_1, g_2 będą funkcjami współrzędnych $g(t)$. Pochodna kowariantna krzywej γ wyraża się jako

$$\frac{\hat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(g_k''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

Stąd wynika, że γ jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy te współczynniki są zerowe, tj. spełnione są następujące równania:

$$\begin{cases} g_1'' + \Gamma_{11}^1(g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^1 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^1(g_2')^2 = 0 \\ g_2'' + \Gamma_{11}^2(g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^2 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^2(g_2')^2 = 0 \end{cases}$$

Dowód jest dosyć techniczny, jednak polega tylko na bezpośrednim przeliczeniu powyższej pochodnej kowariantnej. Można go potraktować jako ćwiczenie na zrozumienie definicji pochodnej pola wektorowego. Dla ułatwienia orientacji wszystkie krzywe $\mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy literami łacińskimi, zaś krzywe $\mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ - greckimi.

Dowód:

Musimy wyrazić równość $\frac{\hat{D}\gamma'}{dt} = 0$ w terminach lokalnego układu współrzędnych. Zauważmy, że pole wektorów stycznych do γ wyraża się w bazie $\{x_1, x_2\}$ następująco:

$$\gamma'(t) = (x \circ g)'(t) = x_1(g(t))g'_1(t) + x_2(g(t))g'_2(t).$$

- Spróbujmy policzyć bezpośrednio pochodną stycznego pola wektorowego.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{D}\gamma'}{dt} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{D}}{dt} [g'_i(t)x_i(g(t))] = \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{dg'_i(t)}{dt} x_i(g(t)) + g'_i(t) \frac{\hat{D}(x_i \circ g)}{dt}(t) \right) \quad (12.1) \end{aligned}$$

- Aby kontynuować musimy zbadać krzywą $x_i \circ g = (x_i \circ x^{-1}) \circ \gamma$ i policzyć jej pochodną kowariantną. W poniższych rachunkach będziemy pomijać argumenty funkcji, należy zatem pamiętać, że wszystko dzieje się w punkcie $g(t)$.
- Mamy następującą równość:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{D}(x_i \circ g)}{dt}(t) &= \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left(\frac{d((x_i \circ x^{-1}) \circ \gamma)}{dt}(t) \right) = \\ &= \hat{\nabla}_{\gamma'(t)} (x_i \circ x^{-1}) = \hat{\nabla}_{[x_1(g(t))g'_1(t) + x_2(g(t))g'_2(t)]} x_i = \\ &= g'_1(t) \hat{\nabla}_{x_1(g(t))} (x_i \circ x^{-1}) + g'_2(t) \hat{\nabla}_{x_2(g(t))} (x_i \circ x^{-1}). \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tutaj z liniowości pochodnej kowariantnej.

- Niech $\alpha^1: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ będzie krzywą zadaną wzorem

$$\alpha^1(s) \stackrel{\text{def.}}{=} (s + g_1(t), g_2(t)).$$

Podobnie można zdefiniować α^2 . Wtedy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{x_1(g(t))} (x_i \circ x^{-1}) &= \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left(\frac{d(x_i \circ x^{-1} \circ x \circ \alpha^j)}{ds} \Big|_{s=0} \right) = \\ &= \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left(\frac{d(x_i \circ \alpha^j)}{ds} \Big|_{s=0} \right) = \Pi_{T_{\gamma(t)}M} x_{ij}(g(t)) \end{aligned}$$

- Skorzystajmy teraz z formuła Gaussa wyrażającej x_{ij} jako odpowiednią kombinację liniową:

$$\begin{aligned} g'_1(t)\Pi_{T_{y(t)}M}(x_{1i}(g(t))) + g'_2(t)\Pi_{T_{y(t)}M}(x_{2i}(g(t))) &= \\ &= c'_1(t) \left(\Gamma_{1i}^1(g(t))x_1(g(t)) + \Gamma_{1i}^2(g(t))x_2(g(t)) \right) + \\ &\quad + c'_2(t) \left(\Gamma_{2i}^1(g(t))x_1(g(t)) + \Gamma_{2i}^2(g(t))x_2(g(t)) \right) \end{aligned}$$

- Grupując odpowiednie wyrazy możemy tę równość zapisać

$$\frac{\hat{D}(x_i \circ g)}{dt}(t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k(g(t))g'_j(t)x_k(g(t)).$$

- Wstawiając uzyskaną równość do równania 12.1 powyżej otrzymujemy

$$\frac{\hat{D}y'}{dt} = \sum_{i=1}^2 \left(g''_i(t)x_i(g(t)) + g'_i(t) \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ji}^k(g(t))g'_j(t)x_k(g(t)) \right)$$

- Ponownie zmieniając kolejność sumowania i grupując otrzymujemy

$$\frac{\hat{D}y'}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(g''_k(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(g(t))g'_i(t)g'_j(t) \right) x_k(g(t)),$$

co kończy dowód.

□

Przykład: powierzchnia obrotowa

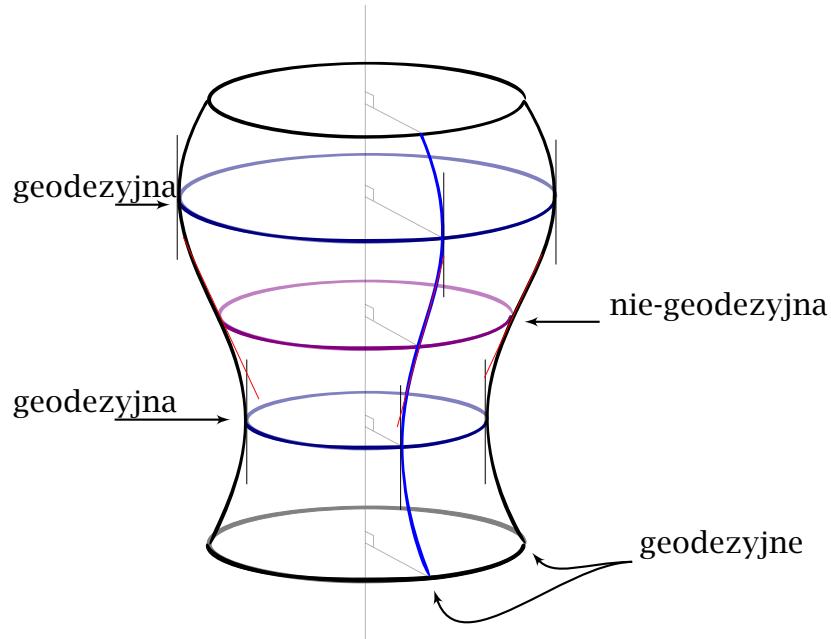
Przykład: powierzchnia obrotowa

Wniosek. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos(\vartheta), \alpha_2(t) \sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ jest unormowana. Wtedy

1. Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni M może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.
2. Okrąg na powierzchni M prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.



Przedstawimy jedynie szkic rozumowania, dopracowanie szczegółów pozostawiając jako zadanie domowe.

Szkic Dowodu: Dowód pierwszej części:

- Mamy

$$x_1(t, \vartheta) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \cos \vartheta, \alpha'_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_2(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \sin \vartheta, \alpha_2(t) \cos \vartheta)$$

- Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t, \vartheta) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t) \cos \vartheta, \alpha''_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_{12}(t, \vartheta) = x_{21}(t, \vartheta) = (0, -\alpha'_2(t) \sin \vartheta, \alpha'_2(t) \cos \vartheta)$$

$$x_{22}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \cos \vartheta, -\alpha_2(t) \sin \vartheta).$$

- Z definicji symboli Christofffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- Zauważmy, teraz że x_1 i x_2 są prostopadłe, więc żeby obliczyć np. Γ_{12}^2 wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarne) przez x_2 a wynik podzielić przez $\|x_2\|^2$. Gdyby wektory standardowej bazy nie były prostopadłe, musielibyśmy rozwiązać odpowiedni układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
- Sprawdzić, że w tym przypadku $\Gamma_{22}^1 = -\alpha_1 \alpha'_1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1}$ zaś pozostałe symbole Christofffela są równe 0 (przeliczyć).
- Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$\begin{aligned} g_1'' - \alpha_1 \alpha'_1 (g_2')^2 &= 0 \\ g_2'' + 2 \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} g_1' g_2' &= 0 \end{aligned}$$

- Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$ dla pewnej stałej φ_0 (o s myślimy jako o promieniu, ϑ to kąt obrotu). Zatem $g_1(t) = t$ i $g_2(t) = \vartheta_0$.
- Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

Dowód drugiej części, implikacja (\Rightarrow).

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjna, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const.}$
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2 \alpha'_2 = 0$.

- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha'_1(t_0) = 0$.
- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja (\Leftarrow).

- Jeśli dla t_0 wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy $\alpha'_1(t_0) = 0$.
- Mamy również $g''_1 = 0$ (dlaczego?) i β spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- Twierdzimy, że jeśli wybierzemy $\vartheta(s) = s$, wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).

□

Uwaga. Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.

Wniosek. Niech $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy α może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.

Dowód: Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku). □

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie trudniejszy.

12.2 Istnienie i jedyność

Czy dwa dowolne punkty na płaszczyźnie mogą zostać połączone geodezyjną? Gdyby tak było wtedy krzywe geodezyjne spełniałyby analogiczny postulat do punktu (1) z wykładu 12 (istnieje prosta łącząca dwa dowolne punkty). Oczywiście przykład sfery pokazuje, że nie możemy liczyć na jedyność takich geodezyjnych, więc może istnieje przynajmniej jedna?

Istnienie i jedyność geodezyjnych

Przykład. Rozważmy $M = \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. Geodezyjne na każdym podzbiorze płaszczyzny są liniami prostymi (dlaczego?), więc nie istnieje nawet jedna krzywa geodezyjna w M łącząca punkty $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

Następujące twierdzenie pokazuje, że istnienie takich “dziur” w powierzchni jest jednak jedyną przeszkodą do istnienia geodezyjnych.

Twierdzenie 12.2 (Rinowa-Hopfa). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli M jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in M$ istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących a i b .*

Zamiast szukać krzywych geodezyjnych łączących dwa punkty na powierzchni M (co wymagałoby globalnego spojrzenia na nią) spróbujmy ustalić punkt $p \in M$, wybrać wektor $v \in T_p M$, a następnie szukać geodezyjnej w wyznaczonym przez v kierunku. Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną gładką krzywą. Okazuje się jednak, że zawsze wśród krzywych odpowiadających v znajdziemy geodezyjną.

Twierdzenie 12.3. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką.*

- *Dla każdego punktu $p \in M$ i wektora $v \in T_p M$ stycznego w tym punkcie istnieją: $\varepsilon > 0$, oraz taka krzywa geodezyjna*

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M,$$

że $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(0) = v$.

- *Krzywa γ jest jedyną taką krzywą w następującym sensie:*

Jeśli dla pewnej $\delta > 0$ istnieje krzywa geodezyjna $\tilde{\gamma}: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ o tej własności, że $\tilde{\gamma}(0) = p$ i $\tilde{\gamma}'(0) = v$, wtedy istnieje mniejsze otoczenie $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$ na którym γ i $\tilde{\gamma}$ są sobie równe. (za $(-\zeta, \zeta)$ można przyjąć $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$)

Uwaga. *O klasach równoważności funkcji równych na pewnym otoczeniu punktu p mówi się, że są to kiełki funkcji w punkcie p . Zatem powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja między zbiorami kiełków geodezyjnych w punkcie p oraz wektorów stycznych $v \in T_p M$.*

Dowód: Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Skorzystamy z twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Równania geodezyjne są równaniami rzędu drugiego, ale jeśli wprowadzimy dodatkowe zmienne $h_1 = g'_1$ i $h_2 = g'_2$ możemy je zapisać jako układ równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} g'_1 = h_1 \\ g'_2 = h_2 \\ h'_1 = -\Gamma_{11}^1 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^1 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^1 h_2^2 \\ h'_2 = -\Gamma_{11}^2 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^2 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^2 h_2^2 \end{cases} \quad (12.2)$$

Zamiast myśleć o tych równaniach jako o układzie, rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ h'_1(t) \\ h'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ -\Gamma_{11}^1(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^1(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^1(g(t))h_2^2(t) \\ -\Gamma_{11}^2(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^2(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^2(g(t))h_2^2(t) \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym $\begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$,

gdzie (p_1, p_2) to współrzędne punktu $x^{-1}(p)$, zaś (v_1, v_2) to współczynniki wektora v w standardowej bazie $\{x_1, x_2\}$.

Przypomnijmy teraz twierdzenie dotyczące istnienia i jednoznaczności równań. Wyniki zawarte w tym twierdzeniu są przypisywane Picardowi, Lindelöfowi, Lipschitzowi i Cauchyemu.

Twierdzenie 12.4 (Picard-Lindelöf-Lipschitz-Cauchy...). *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie funkcją gładką. Ponadto ustalmy punkt $v_0 \in U$. Istnieje $\varepsilon > 0$, oraz taka gładka funkcja $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, że $\alpha(0) = v_0$, oraz*

$$\alpha'(t) = F(\alpha(t)),$$

dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Co więcej, jeśli $\tilde{\alpha}: (-\delta, \delta) \rightarrow U$ jest drugą taką funkcją spełniającą te własności, wtedy $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$ dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$.

Stosując to twierdzenie do naszej sytuacji widzimy, że istnieje krzywa $G: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}^2$ (rozumiane jako $U \times T_p M$),

$$G(t) = (k_1(t), k_2(t), l_1(t), l_2(t))$$

spełniająca nasz układ równań (12.2). Z konstrukcji tego układu wynika, że krzywa $\gamma(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(k_1(t), k_2(t))$ jest szukaną geodezyjną przechodzącą przez punkt $p \in M$, oraz $\gamma'(0) = \nu$. Jedyność tej krzywej wynika z drugiej części zacytowanego powyżej twierdzenia. \square

13

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

13.1 Odwzorowanie wykładowicze

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu. Widzieliśmy, że wokół każdego punktu na powierzchni istnieją otoczenia na których geodezyjne są jednoznaczne (tj. istnieją kiełki geodezyjnych). Użyjemy tego faktu w następującej definicji:

Definicja 13.1. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, $p \in M$ punktem na niej, i niech $v \in T_p M$ będzie wektorem stycznym do M w p .

- Liczbę ϱ_v definiujemy jako

$$\varrho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R}: \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

(ϱ_v to maksymalna długość geodezyjnej na M jaką możemy poprowadzić przez p w kierunku v)

- Zbiór $E_p \subset T_p M$ definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{v \in T_p M: \varrho_v > 1\}$$

(E_p to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

Uwaga. • W definicji E_p zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.

- W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego v w przestrzeni stycznej

$$\varrho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy $E_p = T_p S^2$.

- Oczywiście $E_p \neq \emptyset$, ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do E_p (jako geodezyjna stała).

Lemat 13.2. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.*

- *Jeśli $v \in E_p$ i $s \in \mathbb{R}$, wtedy sv należy do E_p wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$-\varrho_v < s < \varrho_v.$$

(jeśli v należy do E_p , wówczas należy cały odcinek łączący $-\varrho_v v$ z $\varrho_v v$)

- *Jeśli $u \in T_p M$ jest wektorem jednostkowym, wtedy*

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\varrho_v < s < \varrho_v\}.$$

Dowód: Ćwiczenie na zrozumienie definicji ϱ_v i E_p . \square

Na podstawie powyższego lematu nie możemy wnioskować, czy zbiór E_p jest otwarty w $T_p M$, ani czy ma niepuste wnętrze. Wiemy natomiast, że wraz z każdym wektorem v zawiera on cały odcinek od $-v$ do v . Chociaż nie jest to oczywiste E_p zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech $D(T_q M, \delta)$ oznacza kulę zawartą w przestrzeni $T_q M$ o środku w punkcie $\mathcal{O} = (0, 0)$ i promieniu δ .

Lemat 13.3. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem. Istnieją:*

- *otoczenie otwarте $W \subset M$ zawierające p ,*
- *promień δ (zależny od punktu p) takie, że*

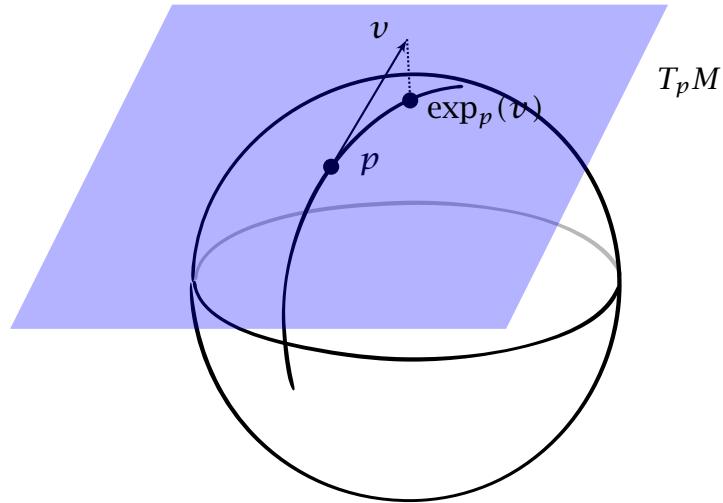
dla każdego $q \in W$ zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Definicja 13.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$. Dla każdego $v \in E_p \subset T_p M$ niech $\gamma_v : (-\varrho_v, \varrho_v) \rightarrow M$ będzie geodezyjną spełniającą $\gamma_v(0) = p$, $\gamma'_v(0) = v$. **Odwzorowanie wykładnicze** $\exp_p : E_p \rightarrow M$ jest zdefiniowane wzorem

$$\exp_p(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma_v(1).$$

Uwaga. Odwzorowanie wykładnicze jest dobrze określone, ponieważ wszystkie geodezyjne które mają dziedzinę większą niż $(-1, 1)$ mają tę samą wartość dla $t = 1$ (dlaczego?).



Następny lemat powie nam, że geodezyjne na powierzchni M przechodzące przez punkt p są obrazami prostych przechodzących przez środek $T_p M$ przy odwzorowaniu wykładniczym.

Lemat 13.5. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem. Niech ponadto $v \in E_p$ będzie wektorem stycznym do M . Wtedy krzywa $\zeta: (-\varrho_v, \varrho_v) \rightarrow M$ zdefiniowana przez

$$\zeta(s) = \exp_p(sv)$$

jest geodezyjną spełniającą $\zeta(0) = p$ oraz $\zeta'(0) = v$. Jej długość na odcinku od p do $\exp_p(v)$ jest równa $\|v\|$.

Dowód: Niech $\gamma_v: (-\varrho_v, \varrho_v) \rightarrow M$ będzie geodezyjną spełniającą: $\gamma_v(0) = p$, oraz $\gamma'_v(0) = v$. Ustalmy $s \in (-\varrho_v, \varrho_v)$ i zdefiniujmy $\tilde{\gamma}: (-\varrho_v/s, \varrho_v/s) \rightarrow M$ jako

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(st).$$

Ponieważ funkcja $t \rightarrow st$ jest liniowa, więc z charakteryzacji parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat 11.7) wynika, że $\tilde{\gamma}$ jest również geodezyjną. Oczywiście $\tilde{\gamma}(0) = p$ i $\tilde{\gamma}'(0) = sv$.

Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich $s \in (-\varrho_v, \varrho_v)$. Zatem $\zeta \equiv \gamma_v$ jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jedyności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|\nu\|$$

dla wszystkich s . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|\nu\| \int_0^1 ds = \|\nu\|.$$

□

Widzieliśmy już na przykładzie sfery, że odwzorowanie wykładnicze nie jest injekcją. W każdym punkcie $p \in S^2$ sfery mamy $E_p = T_p S^2$, jednak proste na płaszczyźnie odwzorowywane na okręgi wielkie na sferze muszą się w pewnym momencie na siebie “nawiązać”. Powinniśmy jednak zauważać, że jeśli ograniczymy się do odpowiednio małego dysku w $T_p S^2$, jego obraz przy odwzorowaniu wykładniczym nie powinien wykraczać poza hemisferę zawierającą punkt p . Jest to fakt znacznie ogólniejszy.

Przypomnijmy, że przez $D(T_p M, \delta)$ oznaczamy dysk o środku w punkcie $\mathcal{O} = (0, 0) \in T_p M$ i promieniu δ .

Lemat 13.6. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$. Istnieje wtedy taka $\delta > 0$, że*

- zbiór $\exp_p(D(T_p M, \delta))$ jest otwarty w M , oraz
- odwzorowanie wykładnicze

$$\exp_p|_{D(T_p M, \delta_p)}$$

ograniczone do zbioru $D(T_p M, \delta_p)$ jest difeomorfizmem na swój obraz.

Jeśli M jest powierzchnią zamkniętą (tj. zowątą i bez brzegu), wtedy korzystając ze zwartości można wykazać, że istnieje jedna uniwersalna stała δ_M zależna tylko od M , którą można podstawić w miejsce δ (zależną od punktu) w powyższych stwierdzeniach.

Uwaga. Widzimy, że $\exp_p: D(T_p M, \delta_p) \rightarrow M$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Nietrudno sprawdzić, że jest to przykład lokalnego układu współrzędnych na M ($D(T_p M, \delta) \cong D^2 \subset \mathbb{R}^2$).

Wniosek. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Ustalmy $0 < \varepsilon < \delta$. Wtedy istnieje $V \subset M$ - otwarte otoczenie punktu p , które posiada następujące własności:

- $V \subset \exp_q(D(T_q M, \varepsilon))$ dla wszystkich $q \in V$.
- każde dwa punkty w V można połączyć krzywą geodezyjną o długości mniejszej niż ε .

Uwaga. Płaszczyzna ma tę własność, że wokół każdego punktu istnieje wypukłe otoczenie otwarte, tj. otoczenie w którym każde dwa punkty można połączyć odcinkiem geodezyjnym (czyli odcinkiem prostej). Tę własność nazywamy **wypukłością geodezyjną** i (co nie jest do końca oczywiste) posiada ją każda powierzchnia.

13.2 Triangulacje

Triangulacja

Definicja 13.7. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, i niech $x, y, z \in M$ będą różnymi punktami. Podzbiór $T \subset M$ nazywamy **trójkątem geodezyjnym** o wierzchołkach x, y, z i oznaczamy $\triangle xyz$ jeśli T jest homeomorficzny z dyskiem jednostkowym $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, oraz brzeg T oznaczany jako ∂T składa się z trzech krzywych geodezyjnych $\overline{xy}, \overline{yz}, \overline{zx}$ (o końcach w x, y, z). Te geodezyjne nazywamy **krawędziami** trójkąta geodezyjnego $\triangle xyz$.

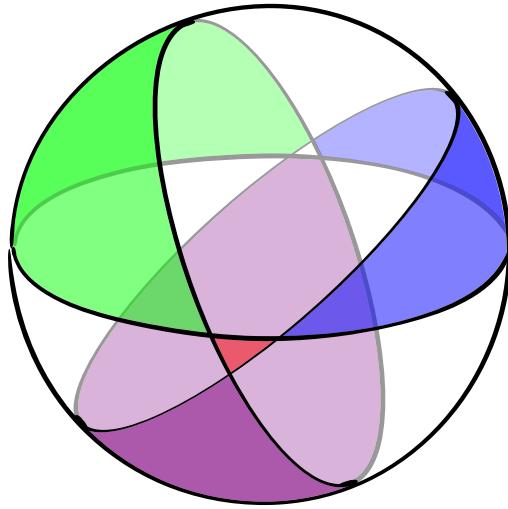
Definicja 13.8. Niech \mathcal{T} będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na M . Założymy, że dla wszystkie trójkąty w \mathcal{T} są różne i każdy punkt $x \in M$ należy do pewnego trójkąta z \mathcal{T} . Rodzinę \mathcal{T} nazywamy **triangulacją** powierzchni M jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ mamy

- $T_1 \cap T_2 = \{x\}$ i x jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$, gdzie \overline{xy} jest ich wspólną krawędzią, lub

$$\cdot \quad T_1 \cap T_2 = \emptyset.$$

Lemat 13.9. *Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje triangulacja geodezyjna \mathcal{T} zwartej powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od ε .*

Przykład. Triangulacja geodezyjna sfery S^2 .



13.3 Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Twierdzenie 13.10 (Lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli $\triangle xyz$ jest trójkątem geodezyjnym na M zawartym w obrazie $\exp_x(D(T_x M, \delta_x))$, wtedy*

$$\int_{\triangle xyz} K \, dA = \measuredangle x + \measuredangle y + \measuredangle z - \pi.$$

Uwaga. *Zapis dA oznacza całkowanie względem formy powierzchni którą używaliśmy podczas badania intuicyjnej definicji krzywizny Gaussa. Można inaczej zapisać $dA = \det |g_{ij}| \, ds dt$, wtedy należałoby wybrać lokalny układ współrzędnych i całkować po przeciobrazie $x^{-1}(\triangle xyz)$. patrz definicja pola powierzchni 8.2.*

Zauważmy, że chociaż do bezpośredniego policzenia całki z krzywizny będziemy musieli wybrać pewien lokalny układ współrzędnych, wynik

nie będzie od tego wyboru zależny. Mówiąc inaczej – krzywizna całkowita trójkąta geodezyjnego zależy tylko od powierzchni, a nie od sposobu umieszczenia w przestrzeni Euklidesowej.

Definicja 13.11. Niech \mathcal{T} będzie triangulacją zwartej powierzchni M . Niech $F_{\mathcal{T}}$ oznacza liczbę trójkątów w \mathcal{T} , $E_{\mathcal{T}}$ – liczbę ich *różnych* krawędzi, zaś $V_{\mathcal{T}}$ – liczbę ich (*różnych*) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni M .

Uwaga. Charakterystyka Eulera *nie zależy od wyboru triangulacji*, więc zamiast $\chi^{\mathcal{T}} M$ będziemy pisać $\chi(M)$. Co więcej triangulacja nie musi być geodezyjna. Charakterystyka Eulera jest bardzo ważnym niezmiennikiem topologicznym (tj. dwie homeomorficzne powierzchnie muszą mieć tę samą charakterystykę Eulera), a nawet ogólniej homotopijnym. W szczególności służy ona do klasyfikacji z dokładnością do homeomorfizmu zwartych powierzchni bez brzegu.

Twierdzenie 13.12 (Twierdzenie Gaussa-Bonneta). *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie zwartą powierzchnią. Wtedy*

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M).$$

Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

Ponieważ M jest zwarta, więc istnieje taka δ_M , że odwzorowanie wykładowicze $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$ w każdym punkcie $p \in M$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech \mathcal{T} będzie triangulacją geodezyjną powierzchni M . Możemy założyć, że każdy trójkąt $T \in \mathcal{T}$ jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładowicze \exp_q .

Zatem do każdego trójkąta $T \in \mathcal{T}$ (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

Niech $T \in \mathcal{T}$ będzie trójkątem i niech v będzie wierzchołkiem. Oznaczmy przez $\alpha(T, v)$ kąt w T przy wierzchołku v . (Przyjmujemy, że jeśli $v \notin T$, wtedy $\alpha(T, v) = 0$). Wtedy

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą

równość

$$3F_T = 2E_T.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_T - F_T) = \pi(2V_T - 3F_T + 2F_T) = \\ &= 2\pi(V_T - E_T + F_T) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

□

14

Geometria hiperboliczna

W ujęciu tradycyjnym, nazywanym geometrią syntetyczną, geometria euklidesowa przedstawiana jest jako system aksjomatyczny, w którym wszystkie twierdzenia muszą wynikać z aksjomatów, czyli zdań przyjmowanych z góry jako prawdziwe.

14.1 Aksjomaty Euklidesa

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Ponieważ piąty postulat wzbudzał wiele podejrzliwości (już chociażby przez swoją długość) każdy szanujący się matematyk w pomiędzy V-XVIIw. musiał podjąć się próby udowodnienia go jako twierdzenia wynikającego z pozostałych czterech. W XIXw. okazało się jednak, że piąty postulat jest niezależny od pozostałych czterech i na tej podstawie zostały sformułowane różne geometrie: system aksjomatyczny przyjmujący piąty postulat nazywamy **geometrią euklidesową**, zaś system przyjmujący *zaprzeczenie* piątego postulatu nazywany jest obecnie **geometrią hiperboliczną**.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π .

Zwłaszcza to ostatnie stwierdzenie powinno nas zaciekać w kontekście niedawno rozważanego lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta. Wnioskiem z niego będzie zerowa krzywizna całej powierzchni będącej modelem geometrii euklidesowej (tj. na której postulaty Euklidesa są spełnione).

14.2 Definicja płaszczyzny hiperbolicznej I

W sposób aksjomatyczny płaszczyznę hiperboliczną można zdefiniować analogicznie jak płaszczyznę euklidesową.

Definicja 14.1. Płaszczyzną hiperboliczną nazywamy dowolny zbiór \mathcal{P} wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniający *pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa*, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat** o równoległych:

- 5'. Dla pewnej prostej $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ i pewnego punktu $M \in \mathcal{P}$ nieleżącego na \mathcal{D} istnieją co najmniej dwie różne proste Δ_1, Δ_2 przechodzące przez M i rozłączne z \mathcal{D} .

Uwaga. *Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia **geometrii absolutnej**), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.*

Układ aksjomatyczny ma sens tylko w takiej sytuacji, gdy jest niesprzeczny. W następnym paragrafie zbudujemy model arytmetyczny płaszczyzny hiperbolicznej, analogiczny do modelu kartezjańskiego płaszczyzny euklidesowej.

14.3 Model Poincarégo

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górną półplaszczyźnie.

Definicja 14.2. Górną półplaszczyzną lub półplaszczyzną Poincarégo nazywamy zbiór

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

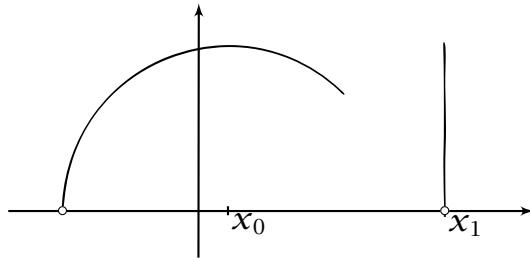
Prostą hiperboliczną \mathcal{H} nazywamy każdy podzbiór $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ określony równaniem postaci:

$$x = x_0, \quad \text{albo} \quad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

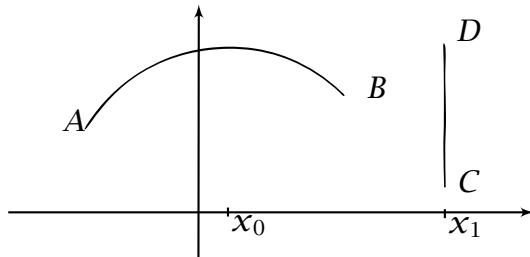
gdzie x_0 i $r > 0$ są dowolnymi stałymi.

14.4 Geometria elementarna na półplaszczyźnie Poincarégo

Proste hiperboliczne na półplaszczyźnie Poincarégo są to półproste otwarte na górną półplaszczyźnie \mathbb{R}^2 mające początki na osi x i prostopadłe do tej osi albo półokręgi otwarte oparte na osi x .



Półproste hiperboliczne.



Odcinki hiperboliczne.

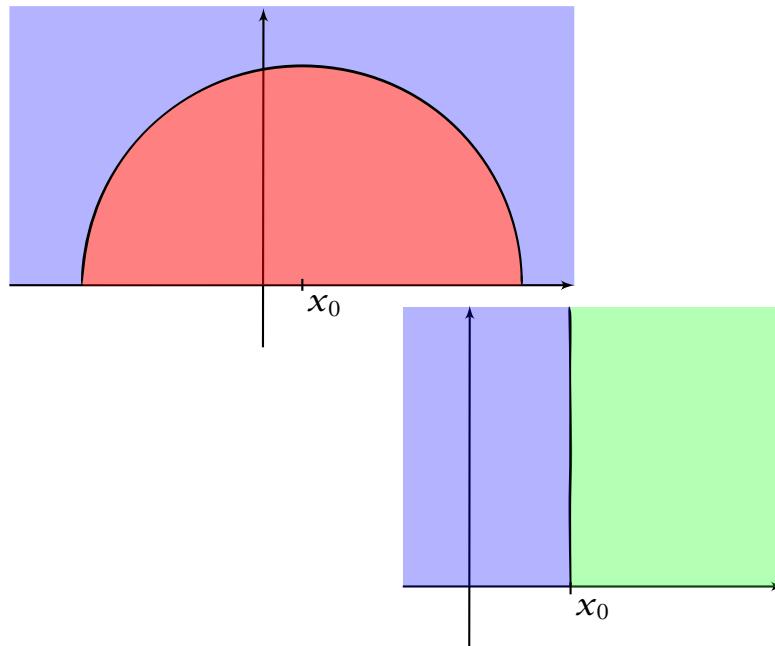
Definicja 14.3. Rozważmy funkcję $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ która dla prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \begin{array}{l} (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right\}. \end{cases}$$

Każda prosta hiperboliczna $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ o równaniu $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \quad \text{oraz} \\ & \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0\}, \end{aligned}$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Naturalną rzeczą jest więc nazwanie każdego z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi** ograniczonymi przez \mathcal{D} .

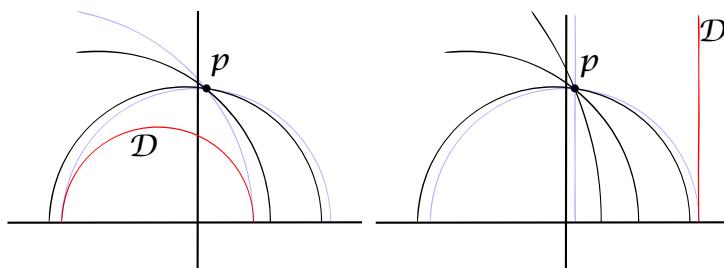


Aksjomat hiperboliczny

Łatwo podać przykład wskazujący, że na półpłaszczyźnie Poincarégo obowiązuje hiperboliczny aksjomat o równoległych. Jest pradziwe nawet bardziej ogólne twierdzenie:

Twierdzenie 14.4. *Niech \mathcal{D} będzie prostą hiperboliczną na półpłaszczyźnie Poincarégo niech $p \notin \mathcal{D}$ będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończenie wiele prostych w \mathcal{H} przechodzących przez punkt p i rozłącznych z \mathcal{D} .*

Dowód: Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysункów.



Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą D w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**. \square

Aksjomat Pascha

Lemat 14.5. *Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ są dwoma różnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo, to dla dowolnej prostej hiperbolicznej $D \subset \mathcal{H}$ zachodzi równoważność:*

$$(D \cap [AB] \neq \emptyset) \iff (f_D(x_1, y_1) \cdot f_D(x_2, y_2) \leq 0).$$

Twierdzenie 14.6 (Aksjomat Pascha). *Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ są dowolnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo nieleżącymi na jednej prostej hiperbolicznej oraz pewna prosta hiperboliczna D przecina jeden z odcinków hiperbolicznych $[AB]$, $[BC]$ lub $[CA]$, to przecina ona jeszcze co najmniej jeden z nich.*

Dowód: Przypuśćmy, że $D \cap [AB] \neq \emptyset$ oraz $D \cap [BC] = \emptyset$ i $D \cap [CA] = \emptyset$. Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$\begin{aligned} f_D(x_1, y_1) \cdot f_D(x_2, y_2) &\leq 0, \\ f_D(x_2, y_2) \cdot f_D(x_3, y_3) &> 0, \\ f_D(x_3, y_3) \cdot f_D(x_1, y_1) &> 0. \end{aligned}$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_D(x_1, y_1) \cdot f_D(x_2, y_2) \cdot (f_D(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez $(f_D(x_3, y_3))^2$ otrzymujemy

$$f_D(x_1, y_1) \cdot f_D(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. \square

14.5 Symetrie hiperboliczne

Z każdą prostą hiperboliczną można stwarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

Definicja 14.7. **Symetrią hiperboliczną** względem prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ nazywamy:

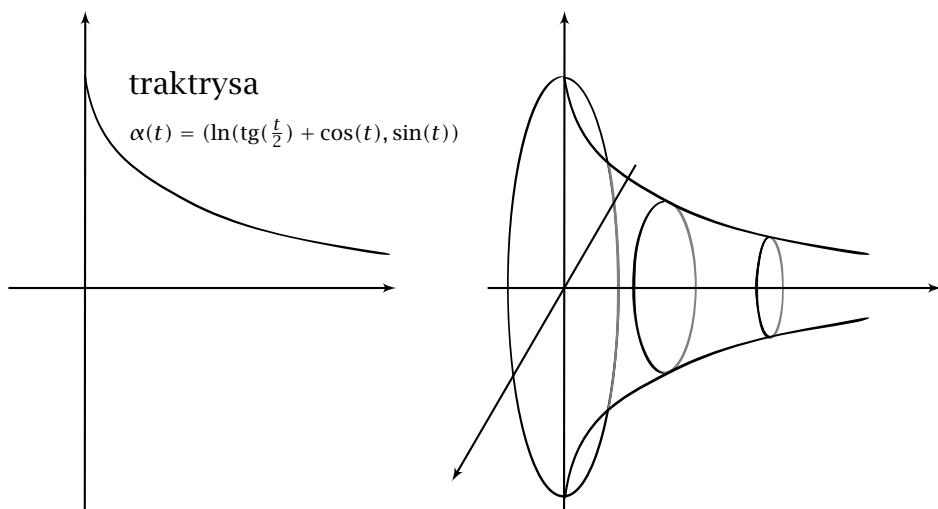
- jeśli \mathcal{D} dana jest równaniem $x = x_0$: obcięcie do \mathcal{H} **symetrii osiowej** względem prostej w \mathbb{R}^2 o równaniu $x = x_0$, lub
- jeśli \mathcal{D} dana jest równaniem $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$: obcięcie do \mathcal{H} **inwersji** względem okręgu w \mathbb{R}^2 mającego równanie $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

15

Powierzchnie o stałej krzywiźnie

Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrisy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej -1 , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.



W roku 1901 D. Hilbert udowodnił, że zamknięta powierzchnia o ujemnej i stałej krzywiźnie nie może być zanurzona (gładko!) w \mathbb{R}^3 . Wspomnialiśmy jednak wcześniej (przy definicji powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$), że powierzchnia może funkcjonować jako abstrakcyjny twór bez konkretnego zanurzenia. Co więcej, aby policzyć symbole Christoffela, krzywiznę, oraz wyznaczyć geodezyjne wystarczy, że będziemy jej znać pierwszą formę podstawową.

15.1 Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo

Definicja 15.1. Płaszczyznę hiperboliczną \mathcal{H} definiujemy jako półpłaszczyzne

$$\mathcal{H} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\},$$

wyposażoną w pierwszą formę podstawową

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{I(u, v)\}_{(u, v) \in \mathcal{H}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{bmatrix} \right\}$$

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat 10.2) możemy znaleźć symbole Christoffella:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0 & \Gamma_{11}^2 &= \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0 & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v} \end{aligned}$$

Teraz używając jawniej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą -1 . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż π .

15.2 Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo

Kiedy zdefiniowaliśmy “proste hiperboliczne” naszą motywacją były oczywiście proste na płaszczyźnie wyznaczające najkrótsze drogi pomiędzy punktami. Pokażemy teraz, że te “proste hiperboliczne” są właśnie geodezyjnymi na płaszczyźnie hiperbolicznej.

Niech $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ będzie geodezyjną w \mathcal{H} . Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$\begin{aligned} u''(t) - \frac{2}{v(t)}u'(t)v'(t) &= 0 \\ v''(t) + \frac{1}{v(t)}\left((u'(t))^2 - (v'(t))^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest $u(t) = \text{const}$, przez co otrzymujemy półproste prostopadłe do osi OX .

Zadanie. Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację

$$v(t) = C_1 e^{C_2 t}.$$

Przyjmijmy teraz, że $u(t) \neq \text{const}$, zatem $u'(t) \neq 0$ i spróbujmy wyznaczyć v jako funkcję $u(t)$. Mamy

$$\frac{d[v(u(t))]}{dt} = \frac{d[v(u(t))]}{du(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad \text{więc} \quad \frac{v'(u(t))}{u'(t)} = \frac{dv(u(t))}{du(t)}$$

gdzie notację primową rezerwujemy dla pochodnej po t . Stosując teraz regułę łańcuchową otrzymujemy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \frac{d^2[v(u)]}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{v'(u)}{u'} \right) = \\ &= \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'}. \end{aligned}$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\begin{aligned} \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} &= \\ &= \frac{1}{(u')^3} \left[u' \left(\frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left(\frac{2}{v} u' v' \right) \right], \end{aligned}$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$\begin{aligned} &= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} \left[((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{v} \left[1 + \left(\frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left(1 + \left(\frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} v \frac{d^2v(u)}{du^2} &= -1 - \left(\frac{dv(u)}{du} \right)^2; \\ v \frac{d^2v(u)}{du^2} + \left(\frac{dv(u)}{du} \right)^2 &= \frac{d}{du} \left(v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1, \end{aligned}$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1 u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyc (pamiętając, że $v > 0$) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor $[C, 0]$.

Uwaga. Jeśli pierwsze współrzędne punktów P i Q są równe, to geodezyjną je łączącą jest zwykła prosta. Jeśli pierwsze współrzędne nie są równe, wtedy istnieje dokładnie jeden okrąg o środku na osi OX na którym leżą oba punkty. W każdym przypadku widzimy, że na płaszczyźnie hiperbolicznej każde dwa punkty P i Q łączy dokładnie jedna krzywa geodezyjna.

15.3 Metryka hiperboliczna

Obliczymy teraz długość geodezyjnej na powierzchni hiperbolicznej, $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$ łączącej punkty P i Q .

Przypomnijmy wcześniej lemat wiążący długość krzywej na powierzchni z pierwszą formą podstawową:

Lemat 15.2. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość obrazu krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej $u = u_0$, tj. $P = (u_0, a)$ i $Q = (u_0, b)$. Wtedy przy parametryzacji $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$ otrzymujemy:

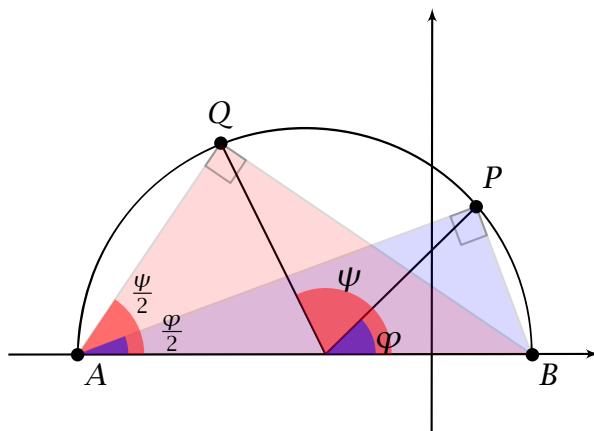
$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{t^2} \underbrace{(\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \frac{1}{t^2} \underbrace{(\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli P zbliża się do osi OX jego odległość od ustalonego Q dąży do ∞ .

- Niech teraz geodezyjna łącząca punkty P i Q będzie łukiem okręgu $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$ i niech φ i ψ będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| =$$

$$= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \tg \frac{t}{2} \Big|_{\varphi}^{\psi} \right| = \left| \ln \frac{\tg \frac{\psi}{2}}{\tg \frac{\varphi}{2}} \right|$$



Analizując powyższy rysunek łatwo dostrzec, że ten iloraz jest równy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \left| \ln \frac{\tg \frac{\psi}{2}}{\tg \frac{\varphi}{2}} \right| = \left| \ln \left(\frac{d_{\mathcal{E}}(A, P)}{d_{\mathcal{E}}(B, P)} \Big/ \frac{d_{\mathcal{E}}(A, Q)}{d_{\mathcal{E}}(B, Q)} \right) \right|$$

gdzie $d_{\mathcal{E}}$ oznacza zwykłą odległość euklidesową.

15.4 Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Przypomnijmy, że grupa izometrii danej powierzchni M składała się ze wszystkich dyfeomorfizmów $f: M \rightarrow M$ które zachowują pierwszą formę podstawową. Podczas dowodu twierdzenia klasyfikacyjnego dla krzywych mieliśmy do czynienia z działaniem grupy $E(3)$. Jak łatwo zauważać grupa izometrii sfery S^2 jest równa dokładnie $SO(3)$.

Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Teraz zajmiemy się grupą izometrii płaszczyzny hiperbolicznej.

Rozważmy $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$,

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

jako podzbiór płaszczyzny zespolonej utożsamiając punkt (u, v) z liczbą $u + iv$.

Definicja 15.3. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $ad - bc = 1$. Zdefiniujmy odpowiadającą im **specjalną transformację Möbiusa** jako funkcję $T_{c,d}^{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zadaną wzorem

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}.$$

Twierdzenie 15.4. Niech $T_{c,d}^{a,b}(z)$ będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ jest bijekcją.
- składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

Uwaga. Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę $PGL(2, \mathbb{R})$. Jest to iloraz grupy liniowej $GL(2, \mathbb{R})$ przez podgrupę normalną $H = \{I, -I\}$. Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie $\det = 1$ są oznaczane $PSL(2, \mathbb{R})$.

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste po-zostawiamy jako zadania.

Dowód:

Niech $z = u + iv$ oraz niech $T(z) = x + iy$. Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$ i $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$ w punkcie $T(z) = x + iy$.

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \dots = \\ &= \frac{(ac(u^2 + v^2) + u + bd)}{|cz + d|^2} + i \frac{v}{|cz + d|^2} = x + iy. \end{aligned}$$

Zatem $y = \frac{v}{|cz + d|^2}$. Traktując $T(z)$ jako funkcję jednego argumentu możemy łatwo policzyć jej pochodną:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\begin{aligned} \frac{dT(z)}{dz} &= \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u \\ \frac{dT(z)}{dz} &= -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v \end{aligned}$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze T_u . Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz + d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \left(-\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12} \end{aligned}$$

□

Zadanie. Pokazać, że specjalne transformacje Möbiusa przenoszą geodezyjne na geodezyjne.

Podpowiedź: Pokazać, że następujące macierze generują grupę $PSL(2, \mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Następnie zinterpretować geometrycznie działanie poszczególnych macierzy.

15.5 Torusy o stałej krzywiźnie

Widzieliśmy wcześniej, że Twierdzenie Gaussa-Bonneta ujawnia głębokie związki między całkowitą krzywizną powierzchni a jej własnościami topologiczno-kombinatorycznymi (charakterystyka Eulera). W szczególności wynika z niego, że gładkie zanurzenie sfery w przestrzeń euklidesową musi mieć całkowitą krzywiznę dokładnie taką samą jak standardowa (okrągła) sfera (czyli 4π).

Torusy o stałej krzywiźnie

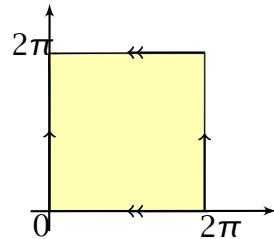
Zadanie. Jak wyglądają geodezyjne na torusie? Wskazać przykład triangulacji (najlepiej geodezyjnej) na torusie. Sprawdzić, że charakterystyka Eulera torusa jest równa 0.

Zatem (ponownie na podstawie twierdzenia Gaussa-Bonneta) jeśli powierzchnia M jest homeomorficzna z torusem T^2 , wtedy jej całkowita krzywizna musi być równa $2\pi\chi(T^2) = 0$.

Oczywiście nie istnieje gładkie zanurzenie *plaskiego* torusa w \mathbb{R}^3 (tj. o stałej krzywiźnie równej 0) (pokażemy to później). Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie T^2 w przestrzeń \mathbb{R}^4 ! Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z $S^1 \times S^1$. Wtedy sposób zanurzenia na 4 współrzędne jest narzucający się.

Rozważmy kwadrat $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie określone wzorem

$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$



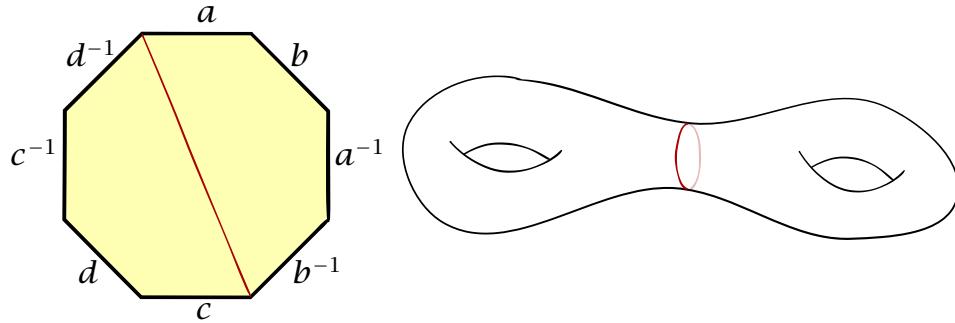
Zauważmy, że funkcje \cos i \sin we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Niezrażeni faktem, że tym razem x_1 i x_2 mają po 4 współrzędne możemy policzyć współczynniki metryczne:

$$\begin{aligned}g_{11} &= \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 = 1 \\g_{12} &= \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \\g_{22} &= \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2 = 1,\end{aligned}$$

zatem nasz torus zanurzony w \mathbb{R}^4 jest faktycznie lokalnie izometryczny z płaszczyzną (więc płaski).

Torus genusu g

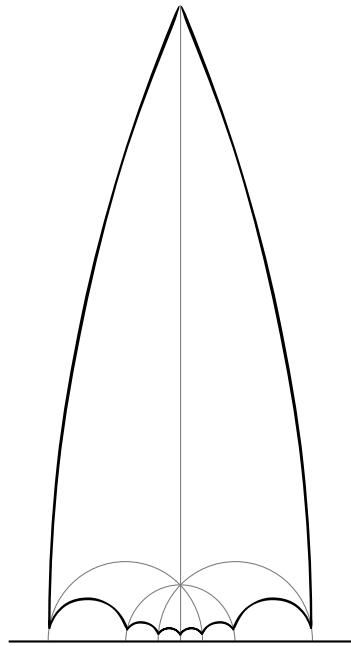


Jeśli utożsamimy opisane krawędzie 8-kąta zgodnie z przypisaną im orientacją, wtedy otrzymamy podwójny torus po prawej stronie. Można pokazać (sprawdzić!), że charakterystyka Eulera podwójnego torusa wynosi -2 (ogólniej: dla torusa genusu g to $2 - 2g$).

Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywięnię całkowitą równą $-4\pi g$ więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej* krzywięnie ujemnej, równej -1 . Wystarczy znaleźć **foremny** $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej** 2π . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywięniu indukowanym z \mathcal{H} ($= -1$).

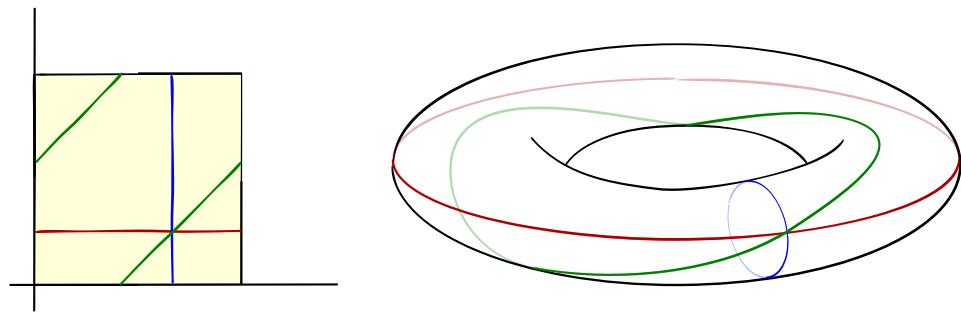
Uwaga. *Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ($= 2\pi$) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spółujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej*

otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)



Płaski torus w \mathbb{R}^3

Standardowe zanurzenie torusa w przestrzeń \mathbb{R}^3 (jako powierzchni obrotowej) nie jest izometrią. Aby się o tym przekonać, wystarczy spojrzeć na linie parametru u i v aby zobaczyć, że ich obrazy (tj. południki i równoleżniki) są różnej długości.

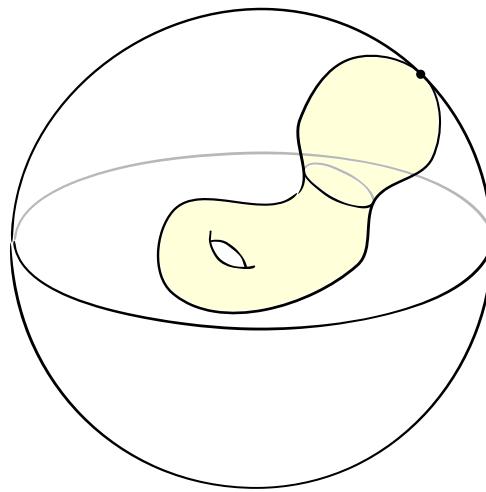


To oczywiście nie dowodzi, że płaskie zanurzenie torusa w \mathbb{R}^3 nie istnieje.

Twierdzenie 15.5. *Nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w \mathbb{R}^3 które zachowuje odległości. W szczególności żadne zanurzenie płaskiego torusa w \mathbb{R}^3 nie jest lokalną izometrią.*

Dowód:

Założymy przez moment, że takie zanurzenie istnieje. Ponieważ torus jest zwarty, więc obraz jego zanurzenia będzie również zbiorem zwartym, więc ograniczonym. Niech K_R oznacza kulę o promieniu R , która zawiera w sobie obraz tego zanurzenia. Możemy tak wybrać środek tej kuli oraz promień R , żeby torus i sfera (będąca brzegiem kuli) stały się wewnętrznie styczne.



W punkcie styczności oczywiście współczynniki metryczne są takie same, więc krzywizny tych powierzchni muszą być takie same. Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ krzywizna torusa miała być $\equiv 0$ zaś krzywizna sfery jest $\equiv \frac{1}{R} > 0$. \square

Uwaga. *W ostatniej części tego wykładu zawiesimy jak dotąd zawsze obowiązujące założenie o gładkości wszystkich odwzorowań.*

Twierdzenie 15.6 (J. Nash (1954), M. Gromov (1986), M. Günther (1990)). *Niech M będzie powierzchnią klasy C^k ($3 \leq k \leq \infty$). Istnieje wówczas $n \geq 5$ oraz zanurzenie klasy C^k*

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

które jest izometrią na swój obraz.

Twierdzenie 15.7 (J. Nash (1954), N. Kuiper (1955)). *Niech M będzie powierzchnią i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie gładkim zanurzeniem dla pewnego $n \geq 3$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zanurzenie*

$$f_\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

takie, że

- f_ε jest klasy C^1 ,
- f_ε jest izometrią, oraz
- f_ε przybliża zanurzenie f z dowolną dokładnością: dla wszystkich $x \in M$

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ krzywizna Gaussa dla powierzchni klasy C^1 nie jest zdefiniowana. Wobec tego izometryczność definiujemy następującą własnością:

$$T^M(u, v) = \langle Df_\varepsilon(u), Df_\varepsilon(v) \rangle.$$

Postaramy się zobrazować teraz to zanurzenie klasy C^1 torusa w \mathbb{R}^3 .

Rysunki płaskiego zanurzenia torusa w \mathbb{R}^3 pochodzą z pracy: Borrelli, Vincent and Jabrane, Saïd and Lazarus, Francis and Thibert, Boris, *Flat tori in three-dimensional space and convex integration*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 2012

Zaczynamy od standardowego zanurzenia torusa jako powierzchni obrotowej



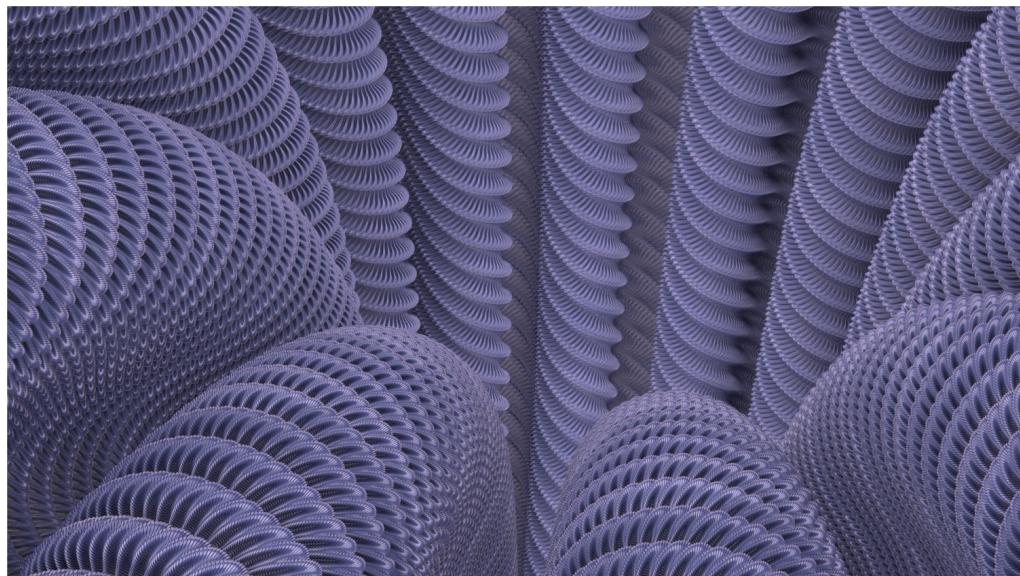
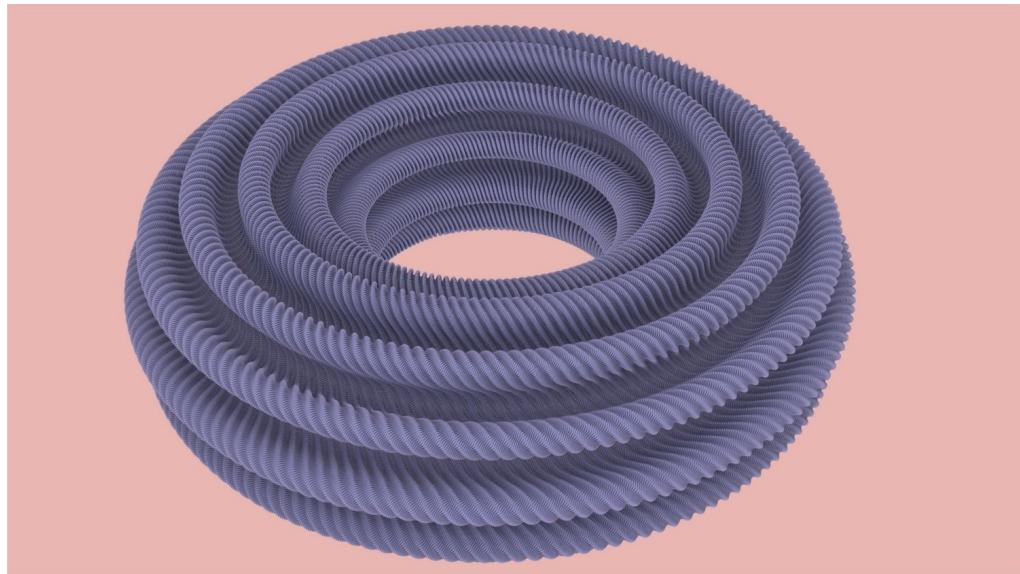
Ponieważ południki są znacznie krótsze niż równoleżniki, wprowadzamy zaburzenia wzdłuż równoleżników (falowanie).



Teraz południki są faktycznie dłuższe, ale równoleżniki są (były) różnej długości, więc wprowadzamy drugi poziom falowania (mniejsza amplituda, a większa częstotliwość), aby wyrównać te różnice.



itd...



- Chociaż wszystkie kroki można wykonać w klasie C^2 , proces ten kontynuujemy w nieskończoność, więc ostateczne zanurzenie jako granica tych odwzorowań może być tylko klasy C^1 .
- Jednocześnie na rysunku poniżej widzimy, że południki i równoleżniki uzyskały tę samą długość.

