

# Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba<sup>1</sup>

2013

---

<sup>1</sup>Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, [kalmar@amu.edu.pl](mailto:kalmar@amu.edu.pl)

# Wykład 13

## Twierdzenie Gaussa-Bonneta

## Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu.

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką,  $p \in M$  punktem na niej, i niech  $v \in T_p M$  będzie wektorem stycznym do  $M$  w  $p$ .

- Liczbę  $\rho_v$  definiujemy jako

$$\rho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R}: \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

( $\rho_v$  to maksymalna długość geodezyjnej na  $M$  jaką możemy poprowadzić przez  $p$  w kierunku  $v$ )

- Zbiór  $E_p \subset T_p M$  definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{ v \in T_p M: \rho_v > 1 \}$$

( $E_p$  to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu.

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką,  $p \in M$  punktem na niej, i niech  $v \in T_p M$  będzie wektorem stycznym do  $M$  w  $p$ .

- Liczbę  $\rho_v$  definiujemy jako

$$\rho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R}: \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

( $\rho_v$  to maksymalna długość geodezyjnej na  $M$  jaką możemy poprowadzić przez  $p$  w kierunku  $v$ )

- Zbiór  $E_p \subset T_p M$  definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{ v \in T_p M : \rho_v > 1 \}$$

( $E_p$  to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu.

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką,  $p \in M$  punktem na niej, i niech  $v \in T_p M$  będzie wektorem stycznym do  $M$  w  $p$ .

- Liczbę  $\rho_v$  definiujemy jako

$$\rho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R}: \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

( $\rho_v$  to maksymalna długość geodezyjnej na  $M$  jaką możemy poprowadzić przez  $p$  w kierunku  $v$ )

- Zbiór  $E_p \subset T_p M$  definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{ v \in T_p M: \rho_v > 1 \}$$

( $E_p$  to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).

## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).



## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).

## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.

- ▶ Jeśli  $v \in E_p$  i  $s \in \mathbb{R}$ , wtedy  $sv$  należy do  $E_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-\rho_v < s < \rho_v.$$

(jeśli  $v$  należy do  $E_p$ , wówczas należy cały odcinek łączący  $-\rho_v v$  z  $\rho_v v$ )

- ▶ Jeśli  $u \in T_p M$  jest wektorem jednostkowym, wtedy

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\rho_v < s < \rho_v\}.$$

## Dowód:

Ćwiczenie na zrozumienie definicji  $\rho_v$  i  $E_p$ .



## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.

- ▶ Jeśli  $v \in E_p$  i  $s \in \mathbb{R}$ , wtedy  $sv$  należy do  $E_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-\rho_v < s < \rho_v.$$

(jeśli  $v$  należy do  $E_p$ , wówczas należy cały odcinek łączący  $-\rho_v v$  z  $\rho_v v$ )

- ▶ Jeśli  $u \in T_p M$  jest wektorem jednostkowym, wtedy

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\rho_v < s < \rho_v\}.$$

## Dowód:

Ćwiczenie na zrozumienie definicji  $\rho_v$  i  $E_p$ .



## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.

- ▶ Jeśli  $v \in E_p$  i  $s \in \mathbb{R}$ , wtedy  $sv$  należy do  $E_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-\rho_v < s < \rho_v.$$

(jeśli  $v$  należy do  $E_p$ , wówczas należy cały odcinek łączący  $-\rho_v v$  z  $\rho_v v$ )

- ▶ Jeśli  $u \in T_p M$  jest wektorem jednostkowym, wtedy

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\rho_v < s < \rho_v\}.$$

## Dowód:

Ćwiczenie na zrozumienie definicji  $\rho_v$  i  $E_p$ .



Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $\mathcal{O} = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $\mathcal{O} = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

### Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $\mathcal{O} = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:*

- ▶ *otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,*
- ▶ *promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi*

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$



Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $\mathcal{O} = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:*

- ▶ *otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,*
- ▶ *promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi*

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $\mathcal{O} = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $\mathcal{O} = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$



## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ . Dla każdego  $v \in E_p \subset T_p M$  niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma_v'(0) = v$ . **Odwzorowanie wykładnicze**  $\exp_p: E_p \rightarrow M$  jest zdefiniowane wzorem

$$\exp_p(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma_v(1).$$

## Uwaga

*Odwzorowanie wykładnicze jest dobrze określone, ponieważ wszystkie geodezyjne które mają dziedzinę większą niż  $(-1, 1)$  mają tę samą wartość dla  $t = 1$  (dlaczego?).*

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ . Dla każdego  $v \in E_p \subset T_p M$  niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . **Odwzorowanie wykładnicze**  $\exp_p: E_p \rightarrow M$  jest zdefiniowane wzorem

$$\exp_p(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma_v(1).$$

## Uwaga

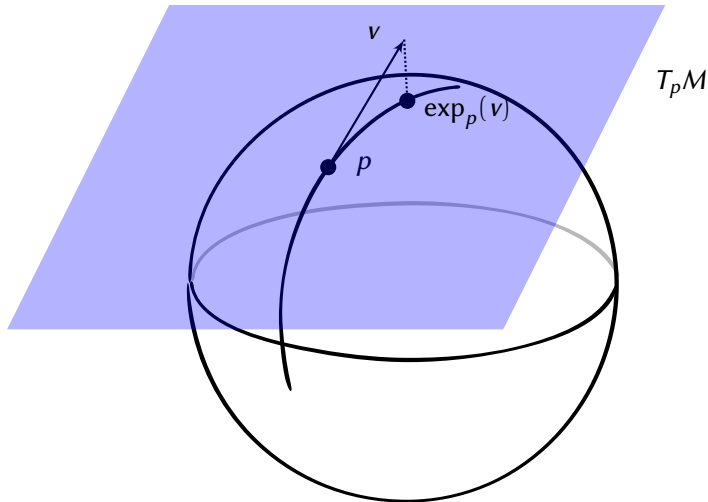
*Odwzorowanie wykładnicze jest dobrze określone, ponieważ wszystkie geodezyjne które mają dziedzinę większą niż  $(-1, 1)$  mają tę samą wartość dla  $t = 1$  (dlaczego?).*

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta



## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Niech ponadto  $v \in E_p$  będzie wektorem stycznym do  $M$ . Wtedy krzywa  $\zeta: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  zdefiniowana przez

$$\zeta(s) = \exp_p(sv)$$

jest geodezyjną spełniającą  $\zeta(0) = p$  oraz  $\zeta'(0) = v$ . Jej długość na odcinku od  $p$  do  $\exp_p(v)$  jest równa  $\|v\|$ .

## Dowód:

Niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą:  $\gamma_v(0) = p$ , oraz  $\gamma_v'(0) = v$ . Ustalmy  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$  i zdefiniujmy  $\tilde{\gamma}: (-\rho_v/s, \rho_v/s) \rightarrow M$  jako

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(st).$$



## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Niech ponadto  $v \in E_p$  będzie wektorem stycznym do  $M$ . Wtedy krzywa  $\zeta: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  zdefiniowana przez

$$\zeta(s) = \exp_p(sv)$$

jest geodezyjną spełniającą  $\zeta(0) = p$  oraz  $\zeta'(0) = v$ . Jej długość na odcinku od  $p$  do  $\exp_p(v)$  jest równa  $\|v\|$ .

## Dowód:

Niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą:  $\gamma_v(0) = p$ , oraz  $\gamma_v'(0) = v$ . Ustalmy  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$  i zdefiniujemy  $\tilde{\gamma}: (-\rho_v/s, \rho_v/s) \rightarrow M$  jako

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(st).$$

Ponieważ funkcja  $t \rightarrow st$  jest liniowa, więc z charakterystyki parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat ??) wynika, że  $\tilde{\gamma}$  jest również geodezyjną. Oczywiście  $\tilde{\gamma}(0) = p$  i  $\tilde{\gamma}'(0) = sv$ .

Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$ . Zatem  $\zeta \equiv \gamma_v$  jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jednoznaczności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|$$

dla wszystkich  $s$ . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|v\| \int_0^1 ds = \|v\|.$$



Ponieważ funkcja  $t \rightarrow st$  jest liniowa, więc z charakterystyki parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat ??) wynika, że  $\tilde{\gamma}$  jest również geodezyjną. Oczywiście  $\tilde{\gamma}(0) = p$  i  $\tilde{\gamma}'(0) = sv$ . Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$ . Zatem  $\zeta \equiv \gamma_v$  jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jedności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma_v'(0)\| = \|v\|$$

dla wszystkich  $s$ . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|v\| \int_0^1 ds = \|v\|.$$



Ponieważ funkcja  $t \rightarrow st$  jest liniowa, więc z charakterystyki parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat ??) wynika, że  $\tilde{\gamma}$  jest również geodezyjną. Oczywiście  $\tilde{\gamma}(0) = p$  i  $\tilde{\gamma}'(0) = sv$ . Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$ . Zatem  $\zeta \equiv \gamma_v$  jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jedności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|$$

dla wszystkich  $s$ . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|v\| \int_0^1 ds = \|v\|.$$















## Uwaga

*Widzimy, że  $\exp_p: D(T_p M, \delta_p) \rightarrow M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Nietrudno sprawdzić, że jest to przykład lokalnego układu współrzędnych na  $M$  ( $D(T_p M, \delta) \cong D^2 \subset \mathbb{R}^2$ ).*

## Wniosek

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem na niej. Ustalmy  $0 < \varepsilon < \delta$ . Wtedy istnieje  $V \subset M$  – otwarte otoczenie punktu  $p$ , które posiada następujące własności:*

- ▶  *$V \subset \exp_q(D(T_q M, \varepsilon))$  dla wszystkich  $q \in V$ .*
- ▶ *każde dwa punkty w  $V$  można połączyć krzywą geodezyjną o długości mniejszej niż  $\varepsilon$ .*

## Uwaga

*Płaszczyzna ma tę własność, że wokół każdego punktu istnieje wypukłe otoczenie otwarte, tj. otoczenie w którym każde dwa punkty można połączyć odcinkiem geodezyjnej (czyli odcinkiem prostej). Tę własność nazywamy **wypukłością geodezyjną** i (co nie jest do końca oczywiste) posiada ją każda powierzchnia.*

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, i niech  $x, y, z \in M$  będą różnymi punktami. Podzbiór  $T \subset M$  nazywamy **trójkątem geodezyjnym** o wierzchołkach  $x, y, z$  i oznaczamy  $\Delta xyz$  jeśli  $T$  jest homeomorficzny z dyskiem jednostkowym  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , oraz brzeg  $T$  oznaczany jako  $\partial T$  składa się z trzech krzywych geodezyjnych  $\overline{xy}$ ,  $\overline{yz}$ ,  $\overline{xz}$  (o końcach w  $x, y, z$ ). Te geodezyjne nazywamy **krawędziami** trójkąta geodezyjnego  $\Delta xyz$ .

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, i niech  $x, y, z \in M$  będą różnymi punktami. Podzbiór  $T \subset M$  nazywamy **trójkątem geodezyjnym** o wierzchołkach  $x, y, z$  i oznaczamy  $\Delta xyz$  jeśli  $T$  jest homeomorficzny z dyskiem jednostkowym  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , oraz brzeg  $T$  oznaczany jako  $\partial T$  składa się z trzech krzywych geodezyjnych  $\overline{xy}$ ,  $\overline{yz}$ ,  $\overline{xz}$  (o końcach w  $x, y, z$ ). Te geodezyjne nazywamy **krawędziami** trójkąta geodezyjnego  $\Delta xyz$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Załóżmy, że dla wszystkie trójkąty w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$ , gdzie  $\overline{xy}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

*Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .*

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Załóżmy, że dla wszystkich trójkątów w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$ , gdzie  $\overline{xy}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

*Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .*

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Załóżmy, że dla wszystkich trójkątów w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$ , gdzie  $\overline{xy}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

*Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .*



## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Załóżmy, że dla wszystkich trójkątów w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

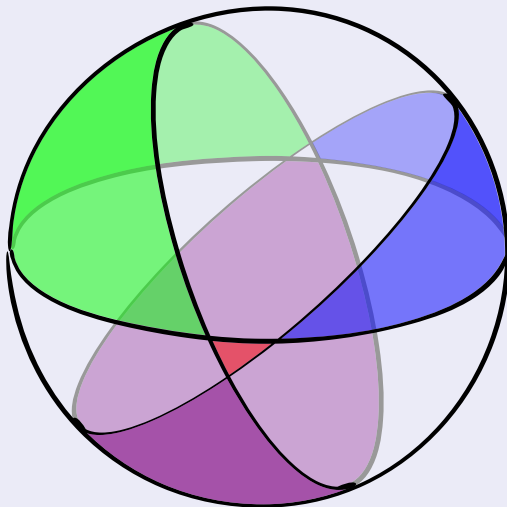
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$ , gdzie  $\overline{xy}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

*Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .*

## Przykład

### Triangulacja geodezyjna sfery $S^2$ .





## Twierdzenie (Lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $\Delta xyz$  jest trójkątem geodezyjnym na  $M$  zawartym w obrazie  $\exp_x(D(T_x M, \delta_x))$ , wtedy

$$\int_{\Delta xyz} K dA = \angle x + \angle y + \angle z - \pi.$$

## Uwaga

Zapis  $dA$  oznacza całkowanie względem formy powierzchni którą używaliśmy podczas badania intuicyjnej definicji krzywizny Gaussa. Można inaczej zapisać  $dA = \det(g_{ij}) dsdt$ , wtedy należałoby wybrać lokalny układ współrzędnych i całkować po przeciwobrazie  $x^{-1}(\Delta xyz)$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją zwartej powierzchni  $M$ . Niech  $F_{\mathcal{T}}$  oznacza liczbę trójkątów w  $\mathcal{T}$ ,  $E_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich *różnych* krawędzi, zaś  $V_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich (*różnych*) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni  $M$ .

## Uwaga

Charakterystyka Eulera **nie zależy** od wyboru triangulacji, więc zamiast  $\chi^{\mathcal{T}} M$  będziemy pisać  $\chi(M)$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją zwartej powierzchni  $M$ . Niech  $F_{\mathcal{T}}$  oznacza liczbę trójkątów w  $\mathcal{T}$ ,  $E_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich *różnych* krawędzi, zaś  $V_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich (*różnych*) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni  $M$ .

## Uwaga

Charakterystyka Eulera *nie zależy* od wyboru triangulacji, więc zamiast  $\chi^{\mathcal{T}} M$  będziemy pisać  $\chi(M)$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją zwartej powierzchni  $M$ . Niech  $F_{\mathcal{T}}$  oznacza liczbę trójkątów w  $\mathcal{T}$ ,  $E_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich *różnych* krawędzi, zaś  $V_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich (*różnych*) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni  $M$ .

## Uwaga

Charakterystyka Eulera **nie zależy** od wyboru triangulacji, więc zamiast  $\chi^{\mathcal{T}} M$  będziemy pisać  $\chi(M)$ .

## Twierdzenie (Twierdzenie Gaussa-Bonneta)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie zwartą powierzchnią. Wtedy*

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M).$$



## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.

Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .

(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.

Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .

(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.

Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .

(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.

Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .

(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$



Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$