Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 5

Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x\colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x\colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s,t) \in U$.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s,t) \in U$.

Definicja

- Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to V \subset \mathbb{R}^3$.
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha\colon [0, 1] \to M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie" (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

Definicja

- Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to V \subset \mathbb{R}^3$.
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha\colon [0, 1] \to M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

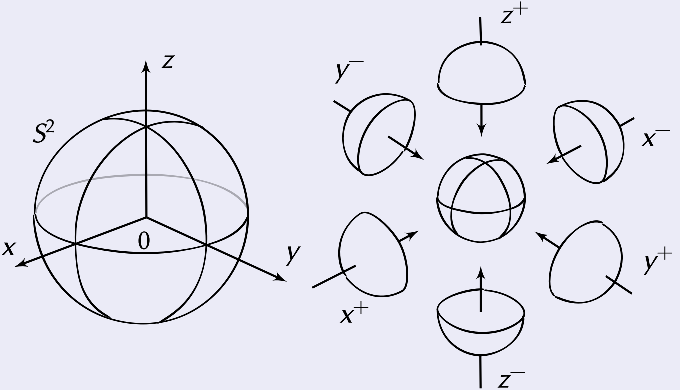
Definicja

- Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to V \subset \mathbb{R}^3$.
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha\colon [0, 1] \to M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

Przykład

Jednostkowa sfera, tj. powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 + x^2 = 1$ jest przykładem powierzchni regularnej. Lokalnym układem współrzędnych jest np. $x^{\pm}(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$ jak na następującym rysunku



Uwaga

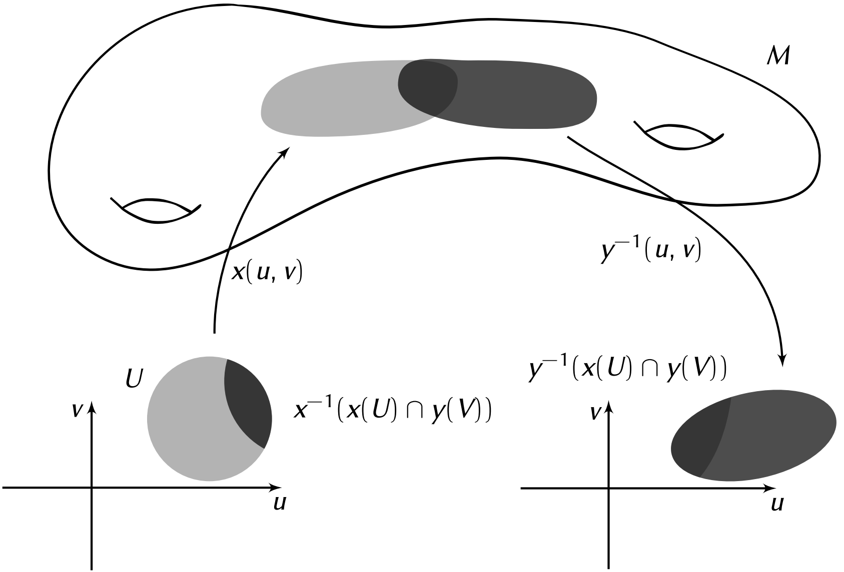
UWAGA! Zakładamy, że wszystkie powierzchnie które będzie my rozważać dalej są gładkie i łukowo spójne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ i $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Wtedy złożenie

$$\Phi_{x,y} \overset{\text{def.}}{=} y^{-1} \circ x \colon x^{-1}(x(U) \cap y(V)) \to y^{-1}(x(U) \cap y(V))$$

nazywamy **funkcją zmiany układu współrzędnych**.



M
$x(u, v)$
$y^{-1}(u, v)$
U
$x^{-1}(x(U) \cap y(V))$
$y^{-1}(x(U) \cap y(V))$
v
u
v
u
V

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Wówczas:

1. *Jeśli $x\colon U \to M$ jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz $x(U)$.*
2. *Niech $V \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $f\colon V \to U$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy*

$$y \overset{def.}{=} x \circ f\colon V \to M$$

jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych $\Phi_{y,x}$.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Wówczas:

1. *Jeśli $x \colon U \to M$ jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz $x(U)$.*
2. *Niech $V \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \colon V \to U$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy*

$$y \overset{def.}{=} x \circ f \colon V \to M$$

jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych $\Phi_{y,x}$.

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1) ▶ x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
   ▶ rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
   ▶ z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

  Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

□

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

  Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

$\square$

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).
  Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

$\square$

Mamy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=\\
&=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)
\end{aligned}
$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).
  Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

□

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

Mamy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=\\
&=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)
\end{aligned}
$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

  Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

$\square$

Gładkość funkcji na powierzchni

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f\colon M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Funkcję f nazywamy gładką jeśli dla każdego punktu $p \in M$ i dla każdego lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$ takiego, że $p \in x(u)$ funkcja

$$f \circ x\colon U \xrightarrow{x} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

jest gładka jako funkcja z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M : M \to \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Załóżmy że $x: U \to M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} : x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M : M \to \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Załóżmy że $x: U \to M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} : x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M : M \to \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Załóżmy że $x: U \to M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} : x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s,t) = (s,t,s^2+t^2).$$
Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s,t) \mapsto \sin(s+t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a,b,c) = \sin(a+b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s,t) = (s, t, s^2+t^2).$$

Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s,t) \mapsto \sin(s+t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a,b,c) = \sin(a+b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$
Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s,t) = (s,t,s^2+t^2).$$
Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s,t) \mapsto \sin(s+t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a,b,c) = \sin(a+b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Gładkość odwzorowania między powierzchniami

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie $M \to N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Mówimy, że f jest **dyfeomorfizmem powierzchni** jeśli f jest gładką bijekcją, której odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.

Lemat

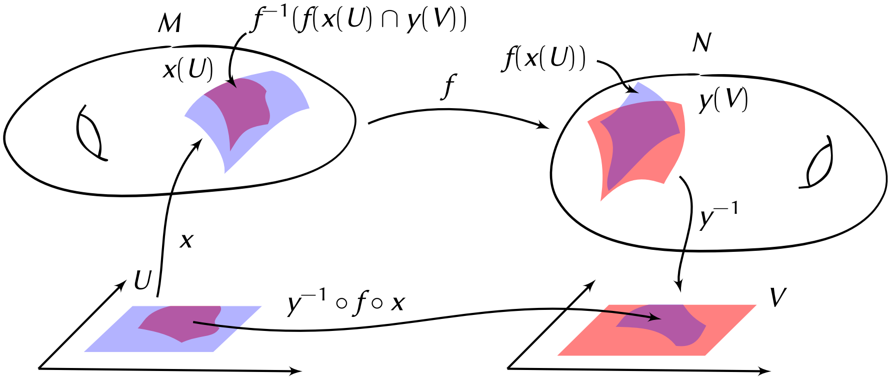
Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech

$$f \colon M \to N$$

będzie odwzorowaniem ciągłym. f jest odwzorowaniem gładkim (a więc gładkim jako odwzorowanie $f \colon M \to \mathbb{R}^3$) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje wokół niego lokalny układ współrzędnych $x \colon U \to M$ oraz istnieje lokalny układ współrzędnych $y \colon V \to N$ wokół $f(p) \in N$ takie, że złożenie

$$y^{-1} \circ f \circ x \colon U \to V$$

jest gładkie jako odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (tam, gdzie to złożenie ma sens).

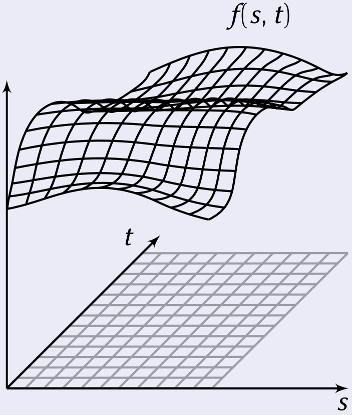


M
$f^{-1}(f(x(U) \cap y(V)))$
$x(U)$
f
$f(x(U))$
N
$y(V)$
y^{-1}
x
U
$y^{-1} \circ f \circ x$
V

Definicja

Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$. Powierzchnię $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią Monge'a** jeśli jej parametryzacja jest wykresem funkcji f:

$$x(s,t) = (s, t, f(s,t)).$$



Uwaga

Parametryzacja Monge'a spełnia naszą definicję powierzchni (Definicja 5.3), ponieważ

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \end{bmatrix} = \\ = \left(-\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), -\frac{\partial x}{\partial t}(s,t), 1\right) \neq 0.$$

Przykład

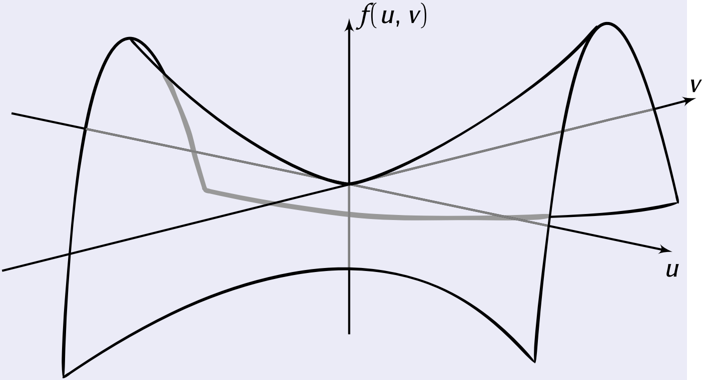
- Paraboloida ($x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$)
- Powierzchnia siodłowa ($x(u, v) = (u, v, uv)$)

Przykład

- Paraboloida $(x(u,v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- Powierzchnia siodłowa $(x(u,v) = (u, v, uv))$

Przykład

- Paraboloida $(x(u,v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- Powierzchnia siodłowa $(x(u,v) = (u, v, uv))$

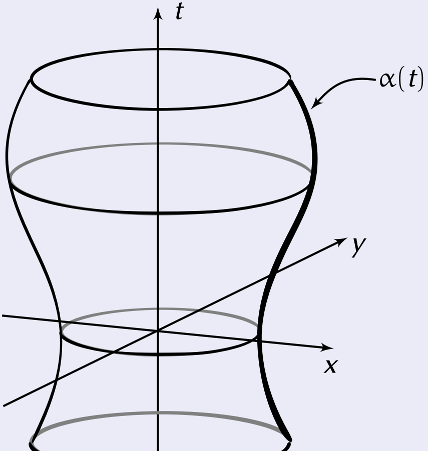


Definicja

Powierzchnia obrotowa powstaje poprzez obrócenie krzywej $\alpha(t)$ wokół pewnej ustalonej prostej l. Postać ogólna to

$$x(t, \phi) = \alpha(t) \cdot Rot_l(\phi),$$

gdzie $Rot_l(\phi)$ to macierz 3×3 obrotu o kąt ϕ wokoł prostej l.



Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z:

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi Ox otrzymamy

$$x(t,\phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos\phi - \alpha_3(t)\sin\phi, \alpha_2(t)\sin\phi + \alpha_3(t)\cos\phi)$$

Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z:

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi Ox otrzymamy

$$x(t, \phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos\phi - \alpha_3(t)\sin\phi, \alpha_2(t)\sin\phi + \alpha_3(t)\cos\phi)$$

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = (-\cos t \sin\phi, \cos t \cos\phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\cos t \sin\phi, \cos t \cos\phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

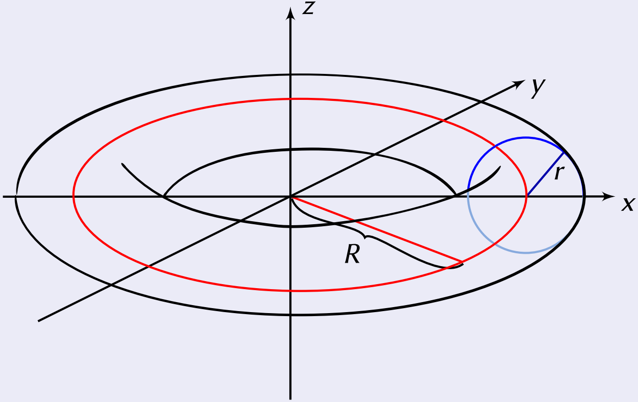
$$= (-\cos t \sin\phi, \cos t \cos\phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład

- Torus – obrót okręgu $\alpha(t) = (R + r\cos t, 0, r\sin t)$ wokół osi z:

$$x(t, \phi) = ((R + r\cos t)\cos\phi, (R + r\cos t)\sin\phi, r\sin t) .$$

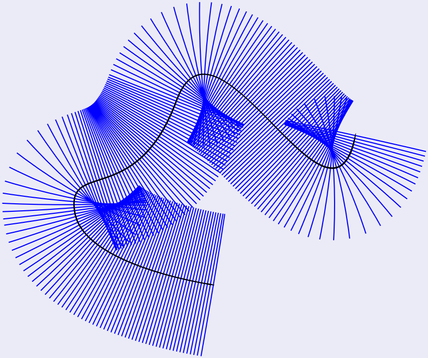


Definicja

Powierzchnią prostokreślną nazywamy powierzchnię o parametryzacji

$$x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

gdzie α i β są krzywymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. α nazywa się potocznie kierownicą, β - ruletą.



Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida.

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida.

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida.

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida.

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida.

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F \colon V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$
- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F\colon V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$
- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F \colon V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$
- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego $i = 1, 2, 3$
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$
- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Definicja

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Definicja

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, zaś $F\colon V \to \mathbb{R}$ funkcją gładką. Jeśli $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$ jest wartością regularną, wtedy $F^{-1}(a)$ jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).

Dowód:

Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Pomijamy. $\square$

Twierdzenie

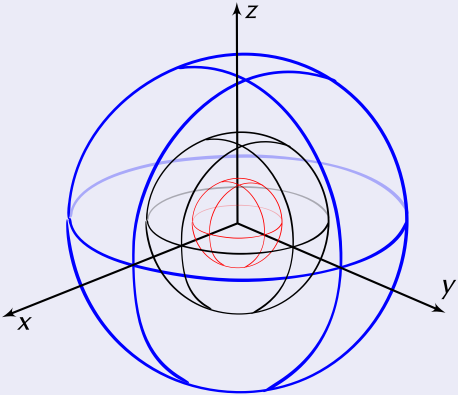
Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, zaś $F\colon V \to \mathbb{R}$ funkcją gładką. Jeśli $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$ jest wartością regularną, wtedy $F^{-1}(a)$ jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).

Dowód:

Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Pomijamy. $\square$

Przykład

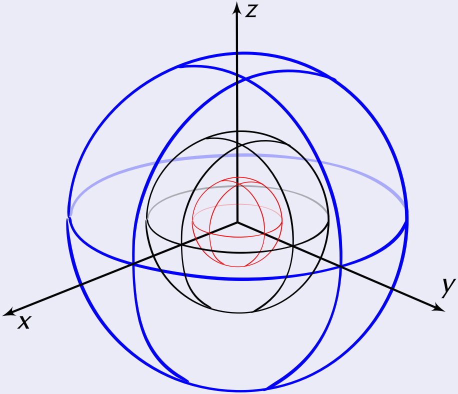
- elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

Przykład

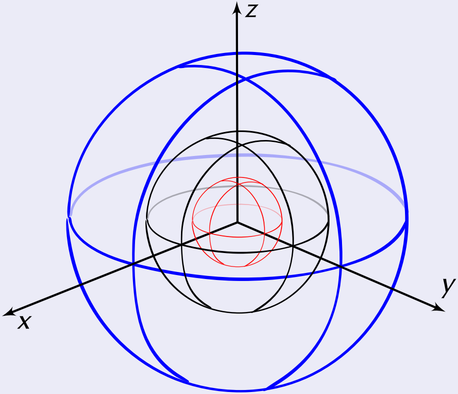
- elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

Przykład

- elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida ($F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$)
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.