Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba¹

2013

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

(rzywe w R³

Wektory związane z krzywą

> Niezmienniki krzywych

wierdzenie dasyfikacyjne dla crzywych

¹Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl 📑 🔻 🔊 🤉 🗞

Wykład 1

Krzywe w \mathbb{R}^3

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Definicj

Krzywe regularn

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Definicj

Krzywe regularn

Wektory związane z krzywa

Niezmiennik krzywych

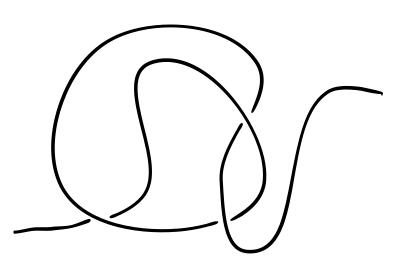
Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Krzywe w \mathbb{R}^3 Definicje Krzywe regularne

Wektory związane z krzywa

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Definicje

Krzywe regularr

krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

► Krzywa gładka, lub po prostu krzywa w R³ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha$$
:(a , b) $\rightarrow \mathbb{R}^3$;

▶ Dla każdego t ∈ (a, b) wektor styczny (lub wektor prędkości) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α

▶ **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicje

Definicia

Krzywa gładka, lub po prostu **krzywa** w \mathbb{R}^3 to odwzorowanie gładkie

$$\alpha$$
:(a , b) $\rightarrow \mathbb{R}^3$;

▶ Dla każdego $t \in (a, b)$ wektor styczny (lub wektor

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

prędkość, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$

Definicia

Krzywa gładka, lub po prostu **krzywa** w \mathbb{R}^3 to odwzorowanie gładkie

$\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$:

▶ Dla każdego $t \in (a, b)$ wektor styczny (lub wektor **predkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α ;

prędkość, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$

Krzywa gładka, lub po prostu **krzywa** w \mathbb{R}^3 to odwzorowanie gładkie

$$\alpha$$
: $(a, b) \to \mathbb{R}^3$;

▶ Dla każdego $t \in (a, b)$ wektor styczny (lub wektor **predkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α ;

prędkość, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|;$

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

ightharpoonup Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$
.

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Definicje

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy

$$|\alpha'(t)|| = 1.$$

ightharpoonup Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$
.

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Definicje

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

ightharpoonup Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$
.

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

► Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$
.

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też łukową.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Definicje

Rozważmy krzywa $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Wtedy wektor prędkości wynosi

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t),$$

zatem prędkość to $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$, tak więc krzywa nie jest unormowana. Długość tej krzywej na odcinku od 0 do 2π wynosi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{4} \left(2t\sqrt{1+4t^2} + \sinh^{-1}(2t) \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{\sinh^{-1}(4\pi)}{4} \simeq 40.4097.$$

Definicja

Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0,0,0)$ dla wszystkich $t \in (a,b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$.

$$\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h : (a, b) \stackrel{h}{\to} (c, d) \stackrel{\alpha}{\to} \mathbb{R}^3$$

Definicja

Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0,0,0)$ dla wszystkich $t \in (a,b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$.

Definicja

Niech α : $(c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą, oraz niech h: $(a,b) \to (c,d)$ będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie α i h,

$$\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h: (a, b) \stackrel{h}{\to} (c, d) \stackrel{\alpha}{\to} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej α przez dyfeomorfizm h.

$$h(t)=2t+1,$$

zaś α : (1, 5) $\rightarrow \mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Przykład

Niech funkcja $h:(0,2) \to (1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t)=2t+1,$$

zaś α :(1,5) $\to \mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Przykład

Niech funkcja $h:(0,2) \to (1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t)=2t+1,$$

zaś α :(1,5) $\to \mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Twierdzenie

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

$$q(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

Twierdzenie

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0 \in (a, b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja *q* jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Twierdzenie

Niech α : $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0 \in (a, b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja *q* jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Zatem $q:(a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c,d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q:(a,b)\to(c,d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{g'(t)}$$

krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Zatem $q:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c,d)\in\mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

 $q:(a,b)\to(c,d)$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną. Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcje gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}$$

krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Zatem $q:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c,d)\in\mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

 $q:(a,b)\to(c,d)$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną. Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że *h* jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}$$

Niezmienni! crzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Zatem $q:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c,d)\in\mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q:(a,b)\to(c,d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

$$\|\overline{\alpha}'(t)\| = \|\alpha(h(t))'\| = \left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}h'(t)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\|}{\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|} = 1 \quad \Box$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Definicj

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$ jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\|\overline{\alpha}'(t)\| = \|\alpha(h(t))'\| = \left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}h'(t)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\|}{\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|} = 1 \quad \Box$$

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t,$$

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla a = b = 1. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t)=\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla a = b = 1. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t,$$

a więc

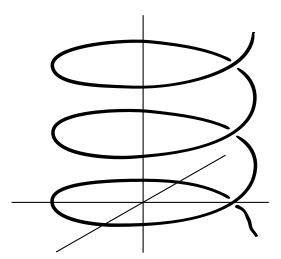
$$h(t)=\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Definicj

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych *Niech* α : $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ *oraz* $\overline{\alpha}$: $(c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ *będą krzywymi* różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm

$$h:(a,b)\to(c,d),$$

 $\dot{z}e \overline{\alpha}$ jest reparametryzacją krzywej α przez h.

$$\alpha^{-1} \circ \overline{\alpha}(t)$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Lemat

Niech α : $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ *oraz* $\overline{\alpha}$: $(c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ *będą krzywymi* różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm

$$h:(a,b)\to(c,d),$$

że $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją krzywej α przez h.

Dowod.

Niech h(t) oznacza złożenie

$$\alpha^{-1} \circ \overline{\alpha}(t)$$

 $(\alpha^{-1}: \alpha(a, b) \to \mathbb{R}$ istnieje ponieważ α jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym.

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α , zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h:(c,d)\to(a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t) \ge 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a$$
 i $h(d) = b$.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R³

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Lemat

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Jeśli $\overline{\alpha}:(c,d)\to\mathbb{R}^3$ jest jej reparametryzacją, wówczas

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α , zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h:(c,d) \to (a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h$$
.

$$h(c) = a$$
 i $h(d) = b$

Lemat

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Jeśli $\overline{\alpha}:(c,d)\to\mathbb{R}^3$ jest jej reparametryzacją, wówczas

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α , zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h:(c,d) \to (a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h$$
.

Ponieważ *h* jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t) \ge 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a$$
 i $h(d) = b$.

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Stosując podstawienie
$$t = h(s)$$
 i $dt = h'(s) ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).$$

krzywą

Niezmienniki krzywych

Stosując podstawienie
$$t = h(s)$$
 i $dt = h'(s) ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).$$

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Stosując podstawienie t = h(s) i dt = h'(s) ds otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_{c}^{b} \|\alpha'(t)\| dt =$$

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Stosując podstawienie
$$t = h(s)$$
 i $dt = h'(s) ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| \, ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| \, ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) \, ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| \, dt = L(\alpha).$$

Wykład 2

Wektory związane z krzywą

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Irzywe w R

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normaln

Wektor binormali

Trójnóg Freneta

Niezmienniki krzywych

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą Wektor styczny i normalny Wektor binormalny Trójnóg Freneta

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

(rzywe w R³

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Wektor binormair

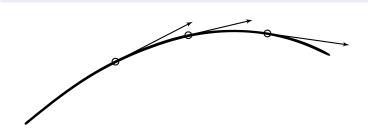
Trójnóg Freneta

Niezmienniki krzywych

Definicja

Niech $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie regularną krzywą gładką. Definiujemy **jednostkowy wektor styczny** do krzywej α w punkcie t jako

$$T_{\alpha}(t) = T(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w ℝ³

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Vektor binormalny

Trójnóg Freneta

Niezmienni krzywych

Wektor binormalny

Trojnog Frenet

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Zadanie

Niech v(t) i w(t) będą dowolnymi wektorami w \mathbb{R}^3 , zależnymi od zmiennej t. Sprawdzić, że zachodzi **wzór Leibniza** na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v(t)', w(t) \rangle + \langle v(t), w(t)' \rangle.$$

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że T(t) jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Vektor binormalny

Niezmienniki krzywych



Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że T(t) jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

ektor binormalny

Niezmienniki



Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że T(t) jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

ektor binormalny/

Irojnog Freneta

Niezmienniki krzywych

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że T(t) jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Vektor binormalny

Trójnóg Freneta

Niezmienniki krzywych

Definicja

Załóżmy, że α : $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli T(t) oraz N(t) są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Definicja

Załóżmy, że α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a,b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy jednostkowy wektor normalny jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli T(t) oraz N(t) są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

vektor binormain

rrojnog r renera

Twierdzenie

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Definicja

Załóżmy, że α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a,b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli T(t) oraz N(t) są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy płaszczyzną ściśle styczną.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α .

wektor binormainy

Irojnog Frenet

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Lemat

- 1. $||T'(t)|| \neq 0$
- 2. wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne
- 3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, gdzie \times oznacza iloczyn wektorowy

wektor binormainy

krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Lemat

- 1. $||T'(t)|| \neq 0$,
- 2. wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,
- 3. lpha'(t) imes lpha''(t)
 eq 0, gdzie imes oznacza iloczyn wektorowy

wektor binormainy

Trojnog Frene

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Lemat

- 1. $||T'(t)|| \neq 0$,
- 2. wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,
- 3. $\alpha'(t) imes \alpha''(t)
 eq 0$, gdzie imes oznacza iloczyn wektorowy

- 1. $||T'(t)|| \neq 0$,
- 2. wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,
- 3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, gdzie × oznacza iloczyn wektorowy.

Wektor binormalny

Trojnog Frenet

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1\Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0)=k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k\in\mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t)\stackrel{\text{def.}}{=}\|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v=\sqrt{(\alpha'_1)^2+(\alpha'_2)^2+(\alpha'_3)^2}$, więc

$$v^{\,\prime} = \frac{2(\alpha_1^{\prime}\alpha_1^{\prime\prime} + \alpha_2^{\prime}\alpha_2^{\prime\prime} + \alpha_3^{\prime}\alpha_3^{\prime\prime})}{2\sqrt{(\alpha_1^{\prime})^2 + (\alpha_2^{\prime})^2 + (\alpha_3^{\prime})^2}} = \frac{\langle \alpha^{\prime}, \alpha^{\prime\prime} \rangle}{v}$$

Wektor binormaln

Niezmienni

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1\Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}$$

wektor binormainy

Niezmienni

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}$$

/ektor binormalny

krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1\Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0)=k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k\in\mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t)\stackrel{\text{def.}}{=}\|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v=\sqrt{(\alpha_1')^2+(\alpha_2')^2+(\alpha_3')^2}$, więc
 - $v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}$

Niezmiennik

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1\Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}$$

Wektor binormalny

Niezmiennik

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1\Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$, więc

$$v^{\,\prime} = \frac{2(\alpha_1^{\prime}\alpha_1^{\prime\prime} + \alpha_2^{\prime}\alpha_2^{\prime\prime} + \alpha_3^{\prime}\alpha_3^{\prime\prime})}{2\sqrt{(\alpha_1^{\prime})^2 + (\alpha_2^{\prime})^2 + (\alpha_3^{\prime})^2}} = \frac{\langle \alpha^{\prime}, \alpha^{\prime\prime} \rangle}{v}.$$

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Wektor styczny i normalny

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0)=k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w 🏻 R

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

'ektor binormalny

Trójnóg Frenet

Niezmiennil krzywych

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $lpha''(t_0)=klpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

'ektor binormalny

Irojnog Freneta

Niezmienniki krzywych

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $lpha''(t_0)=klpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Vektor binormalny

Trojnog Freneta

Niezmienniki krzywych

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Wektor binormalny

rrojnog rreneta

Niezmienniki krzywych

▶ Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.

Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $||T'(t_0)|| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} ||\alpha'(t)||$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0)-\alpha'(t_0)v'(t_0)=0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

/ektor binormalny róinóg Freneta

Niezmiennik krzywych

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Wektor binormalny

...,....

krzywych

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0)-\alpha'(t_0)v'(t_0)=0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Wektor binormalny

frojnog rreneta

krzywych

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzvwe w R3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Vektor binormalny

Irojnog Freneta

krzywych

 $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0)-\alpha'(t_0)v'(t_0)=0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Wektor binormalny

Trójnóg Freneta

krzywych

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

Wektor binormalny

KI:----:

Twierdzenie

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Definicja

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a,b)$ takiego, że $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \stackrel{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory N(t) i B(t) nazywamy płaszczyzną normalną, lub płaszczyzą prostopadłą do krzywej.

Wektor styczny i normalny

Wektor binormalny

riojilog rielie

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Definicja

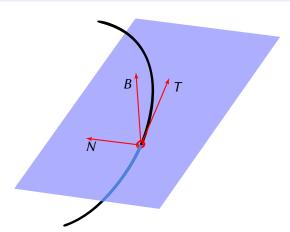
Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a,b)$ takiego, że $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \stackrel{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory N(t) i B(t) nazywamy **płaszczyzną normalną**, lub **płaszczyzą prostopadłą** do krzywej.

Definicja

Układ ortonormalny $\{T(t), N(t), B(t)\}$ nazywać będziemy **trójnogiem** (lub **reperem**) Freneta.



Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normaln

Wektor binormaln

Trójnóg Freneta

Niezmiennil krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Wykład 3

Niezmienniki krzywych

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

rzywe w K

krzywą

Niezmienniki krzywych

,

Iorsja

Wzory Freneta

/zorv ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Krzywizna Torsja Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

(rzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywa

Niezmienniki krzywych

KIZYWII

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Krzywizna krzywej unormowanej

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsia

Wanni Ero

zory ogólne/

.: _

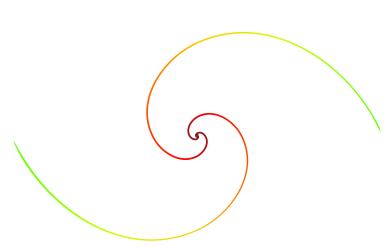
Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Definicja

Niech α : $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie (regularną) krzywą unormowaną. Dla każdego $t \in (a, b)$ **krzywiznę** definiujemy jako funkcję κ : $(a, b) \to \mathbb{R}$

$$\kappa(t) \stackrel{\text{def.}}{=} ||T'(t)|| = ||\alpha''(t)||$$

Zauważmy, że krzywizna jest zawsze nieujemna, $\kappa(t) \geqslant 0$.



Zmiana koloru w zależności od krzywizny

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

rzywe w R3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wanny Eronoto

Vzorv ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

---, -5----

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h$: $(c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną (h: $(c,d) \to (a,b)$). Wówczas

$$\kappa_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_{\beta}(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Krzywizna

Wzory Fren

Wzory ogólne

wierdzenie

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h$: $(c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną (h: $(c,d) \to (a,b))$. Wówczas

$$\kappa_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_{\beta}(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Krzywizna

Wzory Frene

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h$: $(c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną (h: $(c,d) \to (a,b))$. Wówczas

$$\kappa_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_{\beta}(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Lemat

Niech α : $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną i niech $\alpha \circ h_1$ oraz $\alpha \circ h_2$ będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie $h_1:(c_1, d_1) \to (a, b)$, oraz $h_2:(c_2, d_2) \to (a, b)$ są dyfeomorfizmami. Jeśli κ_1 i κ_2 oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio $\alpha \circ h_1$ oraz $\alpha \circ h_2$, wtedy

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t)) = \kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich $t \in (a, b)$.

Krzywizna

Iorsja

,

zory ogoine

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Lemat

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną i niech $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$ będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie $h_1:(c_1,d_1)\to(a,b)$, oraz $h_2:(c_2,d_2)\to(a,b)$ są dyfeomorfizmami. Jeśli κ_1 i κ_2 oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$, wtedy

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t)) = \kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich t ∈ (a, b).

Wniosek

Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

Torsja

...

Vzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1: (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$

Dla obu indeksów i = 1, 2 i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1: (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1: (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|$$

Różniczkowa

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Dla obu indeksów i = 1, 2 i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|.$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory Frene

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

$$h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)]$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' [h_1(t)] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm i$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

> Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\|} = \\ &= \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right]. \end{aligned}$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' [h_1(t)] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm \frac{h_1'(t)}{h_1'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm \frac{h_1'(t)}{h_1'(h_1^{-1} \circ h_1(t)} = \frac{h_1'(t)}{h_1'(h_1^{-1} \circ h_1(t)$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

> Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory Fre

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

 $h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' [h_1(t)] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

 $(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$ $h_1(t) = h_2(\pm t + C)$ $h_2^{-1}(t) = h_2^{-1}(\pm t) + C$

> Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

........

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

$$\begin{split} h_1'(t) &= \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\|} = \\ &= \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right]. \end{split}$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' \left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

> Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

wzory rieneta

wierdzenie

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' \left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

 $h'_1(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_2(h_2^{-1}[h_1(t)]))\|} =$ $=\pm h_2 [(h_2^{-1} \circ h_1)(t)].$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' \left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Krzywizna

Torsja

Vanne Fra

zory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t)=\kappa_2(\pm t+C)$. Podstawiając teraz $t=h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s))$$

Krzywizna

Forsja

/zory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t)=\kappa_2(\pm t+C)$. Podstawiając teraz $t=h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

Krzywizna

Torsja

11/mmm - Em

/zory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t)=\kappa_2(\pm t+C)$. Podstawiając teraz $t=h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

Lemat

Niech α : $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Wektor* normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0)$$

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left(\int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left(\int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

Lemat

Niech α : $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Wektor* normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywa unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left(\int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left(\int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

Marek Kaluba

Krzywizna

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywa unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left(\int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left(\int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

prostą.

Dowód:

Krzywizna

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left(\int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left(\int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor

normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywa

unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

 $\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$

Opracowanie:

Marek Kaluba

Krzywizna

Lemat

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywa unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left(\int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left(\int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą.

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|}$$

Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

tory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|}$$

zatem T'(t) = 0 więc automatycznie N(t) = 0.

Elementarna

Krzywizna

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|}$$

Krzywizna

Torsja

7201 y 1 1 CHC10

zory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\nu}{\|\nu\|},$$

zatem T'(t) = 0 więc automatycznie N(t) = 0.

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy,

że dla wszystkich $t \in (a, b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. Torsję krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$au(\mathit{t}) \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \langle \mathit{B}'(\mathit{t}), \mathit{N}(\mathit{t}) \rangle.$$

- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Torsia

Torsia

Definicja

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a, b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. Torsję krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Uwaga

- Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).
- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy

Torsia

Definicja

Niech $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a, b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. Torsję krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Uwaga

- Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).
- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy $|\tau(t)| = ||B'(t)||$, jednak torsja może mieć wartości ujemne.

Uwaga

Dla wygody od teraz będziemy opuszczać argument t jeśli nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

(rzywe w R³

Wektory związane z krzywą

crzywych

Torsja

Wzory Fre

/zory ogólne

Twierdzenie (Wzory Freneta)

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> liezmienniki rzvovek

Krzywizn

Torsja

Wzory Freneta

zory ogólne

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N$$
 (3.1)

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

krzywą

liezmienniki

Krzywizn

Torsja

Wzory Freneta

zory ogólne

$$N' = aT + bB$$
.

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a=\langle N',T\rangle$ (odpowiednio $b=\langle N',B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0=\langle N,T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a=\langle N',T\rangle=-\kappa$. Ponieważ $\langle N,B\rangle=0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N',B\rangle=-\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

rzywych

ICI Z Y W IZII

orsja

Wzory Freneta

Nzory ogolne

wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa}$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$).

Wyliczenie *a* rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa}$$

zatem $a=\langle N',T\rangle=-\kappa$. Ponieważ $\langle N,B\rangle=0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N',B\rangle=-\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> liezmienniki rzywych

CILY WILL

Iorsja

Wzory Freneta

vzory ogoine

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a=\langle N',T\rangle$ (odpowiednio $b=\langle N',B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0=\langle N,T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a=\langle N',T\rangle=-\kappa$. Ponieważ $\langle N,B\rangle=0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N',B\rangle=-\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

irzywe w R°

Wektory związane z krzywą

> viezmienni crzywych

...,

Iorsja

Wzory Freneta

vzory ogoine

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor *T* (odpowiednio *B*) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$). Wyliczenie *a* rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, wiec N'jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$). Wyliczenie *a* rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B \rangle = 0$, w podobny

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$). Wyliczenie *a* rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B \rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B \rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

$$B' = aT + bN$$
.

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle$$

Flementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

ICI LY WIL

1013ju

Wzory Freneta

zory ogolne/

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

B' = aT + bN.

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0=\langle B',T
angle + \langle B,T'
angle = \langle B',T
angle + \langle B,\kappa N
angle = \langle B',T
angle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z Ni równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

Wzory Freneta

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

strony otrzymujemy

B' = aT + bN

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie

 $0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$

4 D > 4 P > 4 E > 4 E > 9 Q P

_ '

Wzory Freneta

/zory ogólne

. .

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

B' = aT + bN.

Musimy więc policzyć $a=\langle B',T\rangle$ i $b=\langle B',N\rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0=\langle B,T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle \textit{B}', \textit{T} \rangle + \langle \textit{B}, \textit{T}' \rangle = \langle \textit{B}', \textit{T} \rangle + \langle \textit{B}, \kappa \textit{N} \rangle = \langle \textit{B}', \textit{T} \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ .

- 1. Zbiór $\alpha(a, b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewne płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym
- 3. $\tau \equiv 0$.

równoważne.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaska**.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> Niezmienniki krzywych

....,

Torsja

Wzory Freneta

zory ogólne/

Niech α : $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Następujące warunki są równoważne.

- 1. Zbiór $\alpha(a,b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

- 1. Zbiór $\alpha(a,b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym.

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy krzywa

Opracowanie: Marek Kaluba

Elementarna Geometria

Niezmienniki krzywych

KI ZY WIZI

Torsja

Wzory ogólno

rzory ogoine

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

1. Zbiór $\alpha(a, b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

Niech α : $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Następujące warunki są

- 2. B jest wektorem stałym.
- 2. B jest wektorem statym
- 3. $\tau \equiv 0$.

równoważne.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.

Wzory Freneta

Lemat

Niech α : $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Następujące warunki są równoważne.

- 1. Zbiór $\alpha(a,b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym.
- 3. $\tau \equiv 0$.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy krzywą płaską.

_ .

ioisja

Wzory Freneta

zory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Dowód:

1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

2 ⇔ 3 wynika ze wzoru Freneta (3.3)

$$B' = -\tau \Lambda$$

Krzywizni

Iorsja

Wzory Freneta

Vzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Dowód:

1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

2 ⇔ 3 wynika ze wzoru Freneta (3.3)

$$B' = -\tau \Lambda$$

, T---i-

Wzory Freneta

Vzory ogólne

zory ogolne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Dowód:

- 1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.
- 2 ⇔ 3 wynika ze wzoru Freneta (3.3)

$$B' = -\tau N$$

Wzory Freneta

Dowód:

1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$$B' = -\tau N$$

Wzory Freneta

Dowód:

- 1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.
- $2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Niezmienniki krzywych

- ·

Wzory Freneta

zory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

2 ⇒ 1 Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α .

Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle$$

Przy założeniu, że B(t) = B jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt α(p).

Niezmienniki krzywych

Krzywizni

Wzory Freneta

zory ogólne/

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

- 2 ⇒ 1 Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α .
 - Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

Przy założeniu, że B(t) = B jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

Niezmienniki krzywych

Krzywizn

Wzory Freneta

Vzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

- 2 ⇒ 1 Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α .
 - Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

Przy założeniu, że B(t) = B jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt α(p).

Krzywizi

Wzory Freneta

. .

vierdzenie

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

- 2 ⇒ 1 Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α .
 - Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

Przy założeniu, że B(t) = B jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt α(p).

Krzywizn

Iorsja

Wzory Freneta

Vzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} (\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0$$

Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0

Krzywizi

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} (\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0

14127 111211

ioisja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle \right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0.$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0.

Krzywiz

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle \right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stary}} = 0.$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0

Niezmienniki krzywych

Krzywiz

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle \right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0.$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0.

Lemat (Wzory ogólne)

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej $(tj.\ N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> iezmienniki rzywych

Vzory Frenet

Wzory ogólne

Lemat (Wzory ogólne)

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

rzywych

,

rsja

zory i reneta

Wzory ogólne

Lemat (Wzory ogólne)

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej $(tj.\ N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> liezmienniki rzywych

12y W12110

rsja

Wzory ogólne

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$
 (3.8)

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R³

Wektory związane z krzywą

> iezmienniki rzywych

12y W12110

rsja

201 y 1 Terretu

Wzory ogólne

Niech α : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$
 (3.8)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> iezmienniki rzywych

rzywizna

rsja

zory Freneta

Wzory ogólne

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$
 (3.8)

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R

Wektory związane z krzywą

> iezmienniki zvwych

rzywizna

rsja

zory Freneta/

Wzory ogólne

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w \mathbb{R}^3) i nie zależa od parametryzacji.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

XIZY WIZIIG

orsja

zory Frene

Wzory ogólne

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w \mathbb{R}^3) i nie zależą od parametryzacji

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

krzywych

rzywizna

orsja

Wzory ogólne

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w \mathbb{R}^3) i nie zależą od parametryzacji.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R

Wektory związane z krzywą

krzywych

Krzywizi

Torsja

. ..

Wzory ogólne

Wykład 4

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

irzywe w R3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Franslacja i obrót

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych Translacja i obrót Twierdzenie klasyfikacyjne Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R³

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ranslacja i obrót

- ► Translacja krzywej α, tj. krzywa β = α + q, gdzie q ∈ \mathbb{R}^3
- Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot o$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Translacja i obrót

- ► Translacja krzywej α , tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsje jak α .
- Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot o$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Translacja i obrót

- ► Translacja krzywej α , tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α .
- ▶ Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

rzywych

wierdzenie dasyfikacyjne dla crzywych

Translacja i obrót

- *Niech* α :(a, b) $\rightarrow \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną.*
 - ► Translacja krzywej α , tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsje jak α .
 - Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α .

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Translacja i obrót

Mnożenie przez taką macierz A oznacza obrót wokół środka układu współrzędnych, symetrię względem płaszczyzny, lub kombinację tych dwóch. Grupa O(3) to tzw. grupa symetrii \mathbb{R}^3 i jej bazę stanowią macierze obrotów o dowolny kąt wokół każdej z osi, oraz macierz symetrii względem (dowolnie wybranej) płaszczyzny zawierającej punkt (0,0,0).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrót

Elementarna Geometria Różniczkowa Opracowanie:

Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

krzywych

wierdzenie dasyfikacyjne dla crzywych

Translacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Te dwie operacje definiują nam relację równoważności pomiędzy wykresami krzywych w \mathbb{R}^3 . Krzywą α uznajemy za równoważną krzywej β , jeśli wykres β można otrzymać przez zastosowanie odpowiednich translacji, obrotów i symetrii do wykresu α .

Istnieje taka krzywa gładka

$$\alpha$$
: $(a,b) \to \mathbb{R}^3$,

że jej krzywizna κ_{α} i torsja τ_{α} są tożsamościowo równe funkcjom κ oraz τ .

► Jeśli

$$\beta:(a,b)\to\mathbb{R}^3$$

jest drugą taką krzywą, to krzywą β można uzyskać z α stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Istnieje taka krzywa gładka

$$\alpha$$
: $(a, b) \to \mathbb{R}^3$,

że jej krzywizna κ_{α} i torsja τ_{α} są tożsamościowo równe funkcjom κ oraz τ .

► Jeśli

$$\beta:(a,b)\to\mathbb{R}^3$$

jest drugą taką krzywą, to krzywą β można uzyskać z α stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> Niezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Istnieje taka krzywa gładka

$$\alpha$$
: $(a, b) \to \mathbb{R}^3$,

że jej krzywizna κ_{α} i torsja τ_{α} są tożsamościowo równe funkcjom κ oraz τ .

▶ Jeśli

$$\beta:(a,b)\to\mathbb{R}^3$$

jest drugą taką krzywą, to krzywą β można uzyskać z α stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R³

Wektory związane z krzywą

> Niezmiennik Krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Franslacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana α : $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$lpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz}$$
 $\Gamma_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha:(a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$lpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz}$$
 $lpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_{lpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{lpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

liezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha:(a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$lpha(p)=egin{pmatrix} 0 \ 0 \ 0 \end{pmatrix}, \qquad ext{oraz}$$
 $T_lpha(p)=egin{pmatrix} 1 \ 0 \ 0 \end{pmatrix}, \qquad N_lpha(p)=egin{pmatrix} 0 \ 1 \ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_lpha(p)=egin{pmatrix} 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t) \, u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t) \, u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t) \, u_6(t) \end{aligned} \right\} \, \mathrm{dIa} \,\, "T' &= \kappa N", \\ u_3'(t) &= \kappa(t) \, u_6(t) \end{aligned} \\ u_7'(t) &= \tau(t) \, u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t) \, u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} \right\} \, \mathrm{dIa} \,\, "B' &= -\tau N", \\ u_9'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} \\ u_4'(t) &= -\kappa(t) \, u_1(t) + \tau(t) \, u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t) \, u_2(t) + \tau(t) \, u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t) \, u_3(t) + \tau(t) \, u_9(t) \end{aligned} \right\} \, \mathrm{dIa} \,\, "N' &= -\kappa T + \tau B \\ u_6'(t) &= -\kappa(t) \, u_3(t) + \tau(t) \, u_9(t) \end{aligned}$$

$$u_1(p) &= 1 \qquad u_4(p) &= 0 \qquad u_7(p) &= 0 \\ u_2(p) &= 0 \qquad u_5(p) &= 1 \qquad u_8(p) &= 0 \\ u_3(p) &= 0 \qquad u_9(p) &= 1 \end{aligned}$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$u'_{1}(t) = \kappa(t)u_{4}(t)$$

$$u'_{2}(t) = \kappa(t)u_{5}(t)$$

$$u'_{3}(t) = \kappa(t)u_{6}(t)$$

$$u'_{7}(t) = \tau(t)u_{4}(t)$$

$$u'_{8}(t) = \tau(t)u_{5}(t)$$

$$u'_{9}(t) = \tau(t)u_{6}(t)$$

$$u'_{4}(t) = -\kappa(t)u_{1}(t) + \tau(t)u_{7}(t)$$

$$u'_{5}(t) = -\kappa(t)u_{2}(t) + \tau(t)u_{8}(t)$$

$$u'_{6}(t) = -\kappa(t)u_{3}(t) + \tau(t)u_{9}(t)$$

$$u_{1}(p) = 1$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{3}(p) = 0$$

$$u_{6}(p) = 0$$

$$u''_{7}(p) = 0$$

$$u_{1}(p) = 1$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{3}(p) = 0$$

$$u_{4}(p) = 0$$

$$u_{1}(p) = 1$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{3}(p) = 0$$

$$u_{4}(p) = 0$$

$$u_{5}(p) = 1$$

$$u_{1}(p) = 1$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{3}(p) = 0$$

$$u_{4}(p) = 0$$

$$u_{5}(p) = 1$$

$$u_{1}(p) = 1$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> liezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t) u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t) u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t) u_6(t) \end{aligned} \right\} \ \mathrm{dla} \ "T' &= \kappa \mathcal{N}", \\ u_3'(t) &= \kappa(t) u_6(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t) u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t) u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t) u_6(t) \end{aligned} \right\} \ \mathrm{dla} \ "B' &= -\tau \mathcal{N}",$$

$$u'_{4}(t) = -\kappa(t)u_{1}(t) + \tau(t)u_{7}(t)$$

$$u'_{5}(t) = -\kappa(t)u_{2}(t) + \tau(t)u_{8}(t)$$

$$u'_{6}(t) = -\kappa(t)u_{3}(t) + \tau(t)u_{9}(t)$$

$$u_{1}(p) = 1 \qquad u_{4}(p) = 0 \qquad u_{7}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0 \qquad u_{5}(p) = 1 \qquad u_{8}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0 \qquad u_{6}(p) = 0 \qquad u_{9}(p) = 1$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R³

krzywą

iezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ranslacja i obró

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t) u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t) u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t) u_6(t) \end{aligned} \text{ dla "} T' &= \kappa N", \\ u_3'(t) &= \kappa(t) u_6(t) \end{aligned} \text{ dla "} B' &= -\tau N", \\ u_2'(t) &= \tau(t) u_4(t) \\ u_3'(t) &= \tau(t) u_5(t) \\ u_2'(t) &= \tau(t) u_6(t) \end{aligned} \text{ dla "} B' &= -\tau N", \\ u_2'(t) &= -\kappa(t) u_1(t) + \tau(t) u_7(t) \\ u_3'(t) &= -\kappa(t) u_2(t) + \tau(t) u_8(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t) u_2(t) + \tau(t) u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t) u_3(t) + \tau(t) u_9(t) \end{aligned} \text{ dla "} N' &= -\kappa T + \tau B". \\ u_6'(t) &= -\kappa(t) u_3(t) + \tau(t) u_9(t) \end{aligned}$$

$$u_1(p) &= 1 \qquad u_4(p) &= 0 \qquad u_7(p) &= 0 \\ u_2(p) &= 0 \qquad u_5(p) &= 1 \qquad u_8(p) &= 0 \\ u_3(p) &= 0 \qquad u_6(p) &= 0 \qquad u_9(p) &= 1 \end{aligned}$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R³

Wektory związane z krzywą

> iezmienniki zywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obró



$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t) \, u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t) \, u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t) \, u_6(t) \end{aligned} \right\} \ dla \ "T' &= \kappa N", \\ u_3'(t) &= \kappa(t) \, u_6(t) \end{aligned} dla \ "B' &= -\tau N", \\ u_8'(t) &= \tau(t) \, u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} dla \ "B' &= -\tau N", \\ u_9'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} dla \ "B' &= -\tau N", \\ u_9'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} dla \ "B' &= -\tau N", \\ u_9'(t) &= -\kappa(t) \, u_1(t) + \tau(t) \, u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t) \, u_2(t) + \tau(t) \, u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t) \, u_3(t) + \tau(t) \, u_9(t) \end{aligned} dla \ "N' &= -\kappa T + \tau B". \\ u_1(p) &= 1 \qquad u_4(p) &= 0 \qquad u_7(p) &= 0 \\ u_2(p) &= 0 \qquad u_5(p) &= 1 \qquad u_8(p) &= 0 \\ u_3(p) &= 0 \qquad u_6(p) &= 0 \qquad u_9(p) &= 1 \end{aligned}$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> iezmiennik zywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$\omega(t_0) = v_0$$
, oraz
 $\omega'(t) = A\omega(t)$ dla wszystkich $t \in (a, b)$.

Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać ω , A, t_0 i v_0).

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Niech $(a, b) \subset \mathbb{R}$, oraz niech $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Ustalmy liczbę $t_0 \in (a, b)$ i punkt $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka $\omega:(a, b) \to \mathbb{R}^n$ która spełnia

$$\omega(t_0) = v_0$$
, oraz
 $\omega'(t) = A\omega(t)$ dla wszystkich $t \in (a, b)$.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

krzywych

klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać ω , A, t_0 i v_0).

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1 , X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> liezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} (t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} (t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1 , X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> liezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iransiacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1 , X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> iezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iransiacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym.

Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1 , X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> Niezmiennik crzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iranslacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1 , X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

irzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

> Niezmienniki crzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iranslacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1 , X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

rzvwe w R³

Wektory związane z krzywą

Niezmiennił krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1 , X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

rzywe w R³

Wektory związane z krzywą

> Niezmiennik :rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ansiacja i obrot

$$\begin{aligned} p'_{1,1}(t) &= (\langle X_1(t), X_1(t) \rangle)' = \\ &= \underbrace{\langle X'_1(t)}_{-\kappa(t)X_2(t)}, X_1(t) \rangle + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t)}_{-\kappa(t)X_2(t)} = \\ &= \kappa(t)X_2(t) \end{aligned} = \\ &= \kappa(t)X_2(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t).$$

Opracowanie: Marek Kaluba

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Zadanie

Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji $p'_{i,j}(t)$ z funkcjami $\{p_{i,j}(t)\}$ oraz $\kappa(t)$ i $\tau(t)$.

Przykład

$$\begin{aligned} p_{1,1}'(t) &= (\langle X_1(t), X_1(t) \rangle)' = \\ &= \underbrace{\langle X_1'(t), X_1(t) \rangle}_{=\kappa(t)X_2(t)} + \langle X_1(t), \underbrace{X_1'(t), X_1'(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)} = \\ &= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t). \end{aligned}$$

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t. Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t. Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ınslacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.

Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds$$

Niezmiennil krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrot

Twierdzenie klasyfikacyjne

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t. Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds.$$

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t)$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_{\alpha}(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam Zostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w ℝ³

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t)$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_{\alpha}(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam Zostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^{3}

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_{\alpha}(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam Zostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w ℝ³

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_{\alpha}(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam Zostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w ℝ³

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_{\alpha}(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam Zostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w \mathbb{R}^3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

nslacja i obrót

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_{\alpha}(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba

Krzywe w R3

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót