Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 14

Geometria hiperboliczna

W ujęciu tradycyjnym, nazywanym geometrią syntetyczną, geometria euklidesowa przedstawiana jest jako system aksjomatyczny, w którym wszystkie twierdzenia muszą wynikać z aksjomatów, czyli zdań przyjmowanych z góry jako prawdziwe.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair: Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai: Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π.
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π.

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π.
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π.

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π.
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π.

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π.
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π.

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π.
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π.

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π.
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π.

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

Definicja

Płaszczyzną hiperboliczną nazywamy dowolny zbiór $\mathcal{P}$ wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniający *pierwsze cztery* aksjomaty Euklidesa, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat** o równoległych:

5'. Dla pewnej prostej $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ i pewnego punktu $M \in \mathcal{P}$ nieleżącego na $\mathcal{D}$ istnieją co najmniej dwie różne proste Δ_1, Δ_2 przechodzące przez M i rozłączne z $\mathcal{D}$.

Uwaga

Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia ***geometrii absolutnej****), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.*

Definicja

Płaszczyzną hiperboliczną nazywamy dowolny zbiór $\mathcal{P}$ wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniający *pierwsze cztery* aksjomaty Euklidesa, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat** o równoległych:

5'. Dla pewnej prostej $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ i pewnego punktu $M \in \mathcal{P}$ nieleżącego na $\mathcal{D}$ istnieją co najmniej dwie różne proste Δ_1, Δ_2 przechodzące przez M i rozłączne z $\mathcal{D}$.

Uwaga

*Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia **geometrii absolutnej**), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.*

Definicja

Płaszczyzną hiperboliczną nazywamy dowolny zbiór $\mathcal{P}$ wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniający *pierwsze cztery* aksjomaty Euklidesa, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat** o równoległych:

5'. Dla pewnej prostej $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ i pewnego punktu $M \in \mathcal{P}$ nieleżącego na $\mathcal{D}$ istnieją co najmniej dwie różne proste Δ_1, Δ_2 przechodzące przez M i rozłączne z $\mathcal{D}$.

Uwaga

Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia ***geometrii absolutnej****), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.*

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górnej półpłaszczyźnie.

Definicja

Górną półpłaszczyzną lub **półpłaszczyzną Poincarégo** nazywamy zbiór

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

Prostą hiperboliczną w $\mathcal{H}$ nazywamy każdy podzbiór $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ określony równaniem postaci:

$$x = x_0, \qquad \text{albo} \qquad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

gdzie x_0 i $r > 0$ są dowolnymi stałymi.

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górnej półpłaszczyźnie.

Definicja

Górną półpłaszczyzną lub **półpłaszczyzną Poincarégo** nazywamy zbiór

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

Prostą hiperboliczną w $\mathcal{H}$ nazywamy każdy podzbiór $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ określony równaniem postaci:

$$x = x_0, \qquad \text{albo} \qquad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

gdzie x_0 i $r > 0$ są dowolnymi stałymi.

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górnej półpłaszczyźnie.

Definicja

Górną półpłaszczyzną lub **półpłaszczyzną Poincarégo** nazywamy zbiór

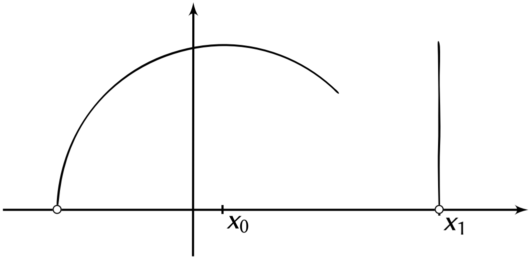
$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

Prostą hiperboliczną w $\mathcal{H}$ nazywamy każdy podzbiór $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ określony równaniem postaci:

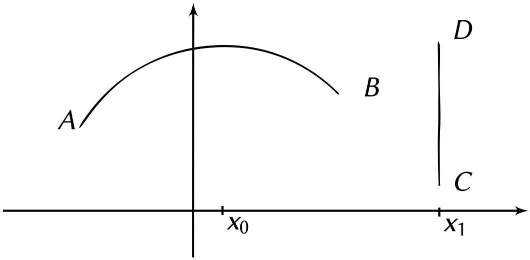
$$x = x_0, \qquad \text{albo} \qquad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

gdzie x_0 i $r > 0$ są dowolnymi stałymi.

Proste hiperboliczne na półpłaszczyźnie Poincarégo są to półproste otwarte na górnej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ mające początki na osi x i prostopadłe do tej osi albo półokręgi otwarte oparte na osi x.



Półproste hiperboliczne.



Odcinki hiperboliczne.

Definicja

Rozważmy funkcję $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ która dla prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - x_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathcal{H} : x = x_0\}, \\ (\mathbf{x} - x_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathcal{H} : \\ (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right\}. \end{cases}$$

Każda prosta hiperboliczna $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ o równaniu $f_{\mathcal{D}}(x, y) = 0$ dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\{(x, y) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(x, y) \leqslant 0\} \quad \text{oraz}$$
$$\{(x, y) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(x, y) \geqslant 0\},$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Będziemy nazywać każdy z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi**.

Definicja

Rozważmy funkcję $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ która dla prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - x_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathcal{H} : x = x_0\}, \\ (\mathbf{x} - x_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathcal{H} : \\ (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right\} \end{cases}.$$

Każda prosta hiperboliczna $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ o równaniu $f_{\mathcal{D}}(x, y) = 0$ dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\{(x, y) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(x, y) \leqslant 0\} \quad \text{oraz}$$
$$\{(x, y) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(x, y) \geqslant 0\},$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Będziemy nazywać każdy z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi**.

Definicja

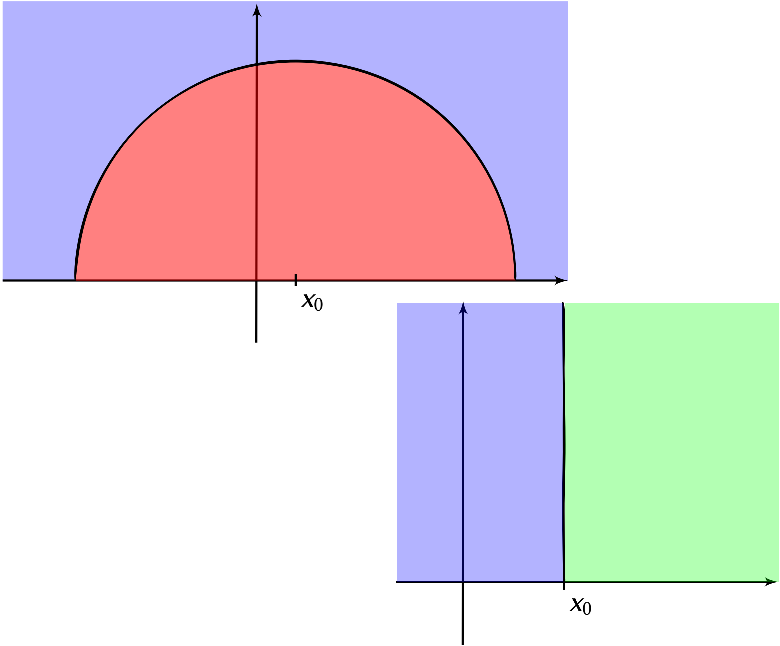
Rozważmy funkcję $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ która dla prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - x_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathcal{H} : x = x_0\}, \\ (\mathbf{x} - x_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathcal{H} : \\ (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right\}. \end{cases}$$

Każda prosta hiperboliczna $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ o równaniu $f_{\mathcal{D}}(x, y) = 0$ dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\{(x, y) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(x, y) \leqslant 0\} \quad \text{oraz}$$
$$\{(x, y) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(x, y) \geqslant 0\},$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Będziemy nazywać każdy z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi**.


x_0
x_0

Twierdzenie

Niech $\mathcal{D}$ będzie prostą hiperboliczną na półpłaszczyźnie Poincarégo niech $p \notin \mathcal{D}$ będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończenie wiele prostych w $\mathcal{H}$ przechodzących przez punkt p i rozłącznych z D.

Dowód:

Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysunków.

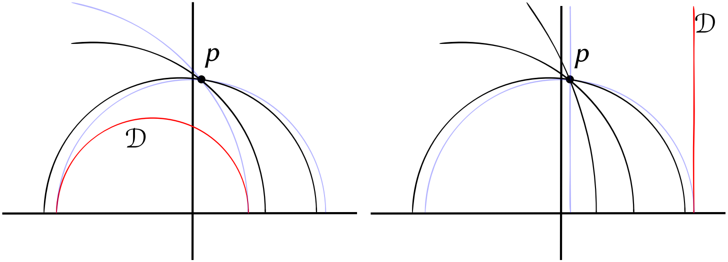
Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą D w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**.

Twierdzenie

Niech $\mathcal{D}$ będzie prostą hiperboliczną na półpłaszczyźnie Poincarégo niech $p \notin \mathcal{D}$ będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończenie wiele prostych w $\mathcal{H}$ przechodzących przez punkt p i rozłącznych z D.

Dowód:

Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysunków.



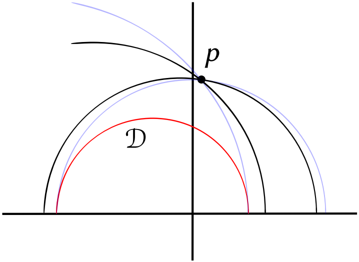
Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą D w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**.

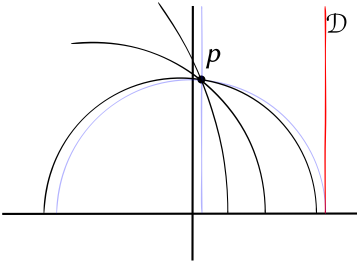
Twierdzenie

Niech $\mathcal{D}$ będzie prostą hiperboliczną na półpłaszczyźnie Poincarégo niech $p \notin \mathcal{D}$ będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończenie wiele prostych w $\mathcal{H}$ przechodzących przez punkt p i rozłącznych z D.

Dowód:

Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysunków.





Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą D w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**.

Lemat

Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ są dwoma różnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo, to dla dowolnej prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zachodzi równoważność:

$$(\mathcal{D} \cap [AB] \neq \varnothing) \iff (f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leqslant 0)\,.$$

Twierdzenie (Aksjomat Pascha)

Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ są dowolnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo nieleżącymi na jednej prostej hiperbolicznej oraz pewna prosta hiperboliczna $\mathcal{D}$ przecina jeden z odcinków hiperbolicznych $[AB]$, $[BC]$ lub $[CA]$, to przecina ona jeszcze co najmniej jeden z nich.

Lemat

Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ są dwoma różnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo, to dla dowolnej prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zachodzi równoważność:

$$(\mathcal{D} \cap [AB] \neq \varnothing) \iff (f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leqslant 0) .$$

Twierdzenie (Aksjomat Pascha)

Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ są dowolnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo nieleżącymi na jednej prostej hiperbolicznej oraz pewna prosta hiperboliczna $\mathcal{D}$ przecina jeden z odcinków hiperbolicznych $[AB]$, $[BC]$ lub $[CA]$, to przecina ona jeszcze co najmniej jeden z nich.

Dowód:

Przypuśćmy, że $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \varnothing$ oraz $\mathcal{D} \cap [BC] = \varnothing$ i $\mathcal{D} \cap [CA] = \varnothing$. Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leqslant 0,$$
$$f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) > 0,$$
$$f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) > 0.$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$ otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. $\square$

Dowód:

Przypuśćmy, że $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \varnothing$ oraz $\mathcal{D} \cap [BC] = \varnothing$ i $\mathcal{D} \cap [CA] = \varnothing$. Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leqslant 0,$$
$$f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) > 0,$$
$$f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) > 0.$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$ otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. □

Dowód:

Przypuśćmy, że $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \varnothing$ oraz $\mathcal{D} \cap [BC] = \varnothing$ i $\mathcal{D} \cap [CA] = \varnothing$. Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) &\leqslant 0, \\ f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) &> 0, \\ f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) &> 0. \end{aligned}$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$ otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. □

Dowód:

Przypuśćmy, że $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \varnothing$ oraz $\mathcal{D} \cap [BC] = \varnothing$ i $\mathcal{D} \cap [CA] = \varnothing$. Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leqslant 0,$$
$$f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) > 0,$$
$$f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) > 0.$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$ otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. $\square$

Z każdą prostą hiperboliczną można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

Definicja

Symetrią hiperboliczną względem prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ nazywamy:

- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $x = x_0$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **symetrii osiowej** względem prostej w $\mathbb{R}^2$ o równaniu $x = x_0$, lub
- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **inwersji** względem okręgu w $\mathbb{R}^2$ mającego równanie $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperboliczną można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

Definicja

Symetrią hiperboliczną względem prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ nazywamy:

- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $x = x_0$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **symetrii osiowej** względem prostej w $\mathbb{R}^2$ o równaniu $x = x_0$, lub
- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **inwersji** względem okręgu w $\mathbb{R}^2$ mającego równanie $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperboliczną można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

Definicja

Symetrią hiperboliczną względem prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ nazywamy:

- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $x = x_0$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **symetrii osiowej** względem prostej w $\mathbb{R}^2$ o równaniu $x = x_0$, lub
- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **inwersji** względem okręgu w $\mathbb{R}^2$ mającego równanie $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperboliczną można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

Definicja

Symetrią hiperboliczną względem prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ nazywamy:

- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $x = x_0$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **symetrii osiowej** względem prostej w $\mathbb{R}^2$ o równaniu $x = x_0$, lub
- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **inwersji** względem okręgu w $\mathbb{R}^2$ mającego równanie $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperboliczną można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

Definicja

Symetrią hiperboliczną względem prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ nazywamy:

- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $x = x_0$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **symetrii osiowej** względem prostej w $\mathbb{R}^2$ o równaniu $x = x_0$, lub
- jeśli $\mathcal{D}$ dana jest równaniem $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$: obcięcie do $\mathcal{H}$ **inwersji** względem okręgu w $\mathbb{R}^2$ mającego równanie $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.