Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 2

Wektory związane z krzywą

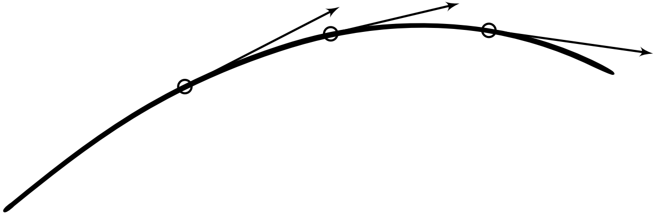
Wektory związane z krzywą

- Wektor styczny i normalny
- Wektor binormalny
- Trójnóg Freneta

Definicja

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie regularną krzywą gładką. Definiujemy **jednostkowy wektor styczny** do krzywej α w punkcie t jako

$$T_\alpha(t)=T(t)\stackrel{\text{def.}}{=}\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$



Zadanie

Niech $v(t)$ i $w(t)$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$, zależnymi od zmiennej t. Sprawdzić, że zachodzi **wzór Leibniza** na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$\langle v(t), w(t)\rangle' = \langle v(t)', w(t)\rangle + \langle v(t), w(t)'\rangle.$$

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t)\rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t)\rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t)\rangle + \langle T(t), T'(t)\rangle = 2\langle T(t), T'(t)\rangle.$$

□

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t)\rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t)\rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t)\rangle + \langle T(t), T'(t)\rangle = 2\langle T(t), T'(t)\rangle.$$

□

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

□

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

$\square$

Definicja

Załóżmy, że $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t\in(a,b)$ dla którego $\|T'(t)\|\neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t)\overset{\text{def.}}{=}\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t)\neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Definicja

Załóżmy, że $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Definicja

Załóżmy, że $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego $t\in(a,b)$:

1. $\|T'(t)\|\neq 0$,
2. *wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t)\times\alpha''(t)\neq 0$, *gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.*

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego $t \in (a,b)$:

1. $\|T'(t)\| \neq 0$,
2. *wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, *gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.*

Lemat

Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego $t \in (a, b)$:

1. $\|T'(t)\| \neq 0$,
2. *wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, *gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.*

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego* $t\in(a,b)$*:*

1. $\|T'(t)\|\neq 0$,
2. *wektory* $\alpha'(t)$ *oraz* $\alpha''(t)$ *są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t)\times\alpha''(t)\neq 0$, *gdzie* $\times$ *oznacza iloczyn wektorowy.*

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje (2 $\Leftrightarrow$ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja (1 $\Rightarrow$ 2). Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle\alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle\alpha'(t_0),k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0,0,0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle\alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0,0,0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle\alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.

Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.
  Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

  Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.
  Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

  Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.
  Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

  Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

Definicja

Niech $\alpha\colon(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ takiego, że $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \overset{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory $N(t)$ i $B(t)$ nazywamy **płaszczyzną normalną**, lub **płaszczyzą prostopadłą** do krzywej.

Definicja

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ takiego, że $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \stackrel{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory $N(t)$ i $B(t)$ nazywamy **płaszczyzną normalną**, lub **płaszczyzą prostopadłą** do krzywej.

Definicja

Układ ortonormalny $\{T(t), N(t), B(t)\}$ nazywać będziemy **trójnogiem** (lub **reperem**) Freneta.