Elementarna Geometria Różniczkowa
Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Opracowanie: Marek Kaluba*

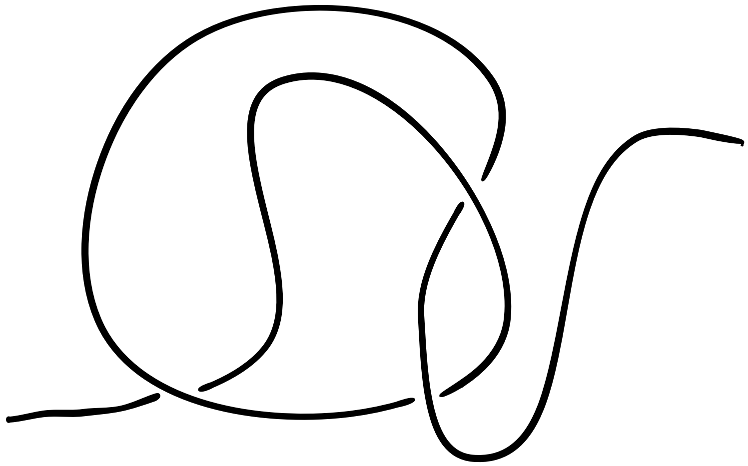
2013

Spis treści

* Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

1

Krzywe w $\mathbb{R}^3$



1.1 Definicje

Definicja 1.1.

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie
$$\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3;$$
- Dla każdego $t \in (a,b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako
$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$
gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;
- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a,b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja 1.2.

- Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę
$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a,b)$ zachodzi
$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$
- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas
$$L(\alpha) = b - a.$$
Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Przykład. Rozważmy krzywą $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Wtedy wektor prędkości wynosi
$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t),$$
zatem prędkość to $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$, tak więc krzywa nie jest unormowana. Długość tej krzywej na odcinku od 0 do 2π wynosi
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \sinh^{-1}(2t)\right)\Big|_0^{2\pi} =$$
$$= \pi\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{\sinh^{-1}(4\pi)}{4} \simeq 40.4097.$$

1.2 Krzywe regularne

Definicja 1.3. Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0,0,0)$ dla wszystkich $t \in (a,b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$.

Definicja 1.4. Niech $\alpha\colon (c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą, oraz niech $h\colon (a,b) \to (c,d)$ będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie α i h,
$$\overline{\alpha} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \circ h\colon (a,b) \xrightarrow{h} (c,d) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$$
nazywamy **reparametryzacją** krzywej α przez dyfeomorfizm h.

Przykład. Niech funkcja $h\colon (0,2) \to (1,5)$ będzie zdefinionana jako
$$h(t) = 2t + 1,$$

zaś $\alpha\colon (1,5)\to\mathbb{R}^3$ jako
$$\alpha(t)=(t^2+3,t-7,\sin t).$$
Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem
$$\overline{\alpha}(t)=(4t^2+4t+4,2t-6,\sin 2t+1).$$
Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 1.5. *Niech $\alpha\colon (a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.*

Dowód: Wybierzmy $t_0\in(a,b)$. Następnie zdefiniujmy
$$q(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(u)\|\,du.$$
Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa
$$q'(t)=\|\alpha'(t)\|>0$$
i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).
Zatem $q\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c,d)\in\mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że
$$q\colon (a,b)\to(c,d)$$
jest gładką bijekcją. Niech
$$h\colon (c,d)\to(a,b)$$
będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi
$$h'(t)=\frac{1}{q'(t)}.$$

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\overline{\alpha}\overset{\text{def.}}{=}\alpha\circ h$ jest reparametryzacją o szukanej własności:
$$\|\overline{\alpha}'(t)\|=\left\|\alpha(h(t))'\right\|=\left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}h'(t)\right\|=$$
$$=\left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\|\frac{1}{|q'(t)|}=\frac{\left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\|}{\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|}=1\quad\square$$

Przykład. (Lewa) Linia śrubowa lub helisa lewoskrętna to krzywa $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

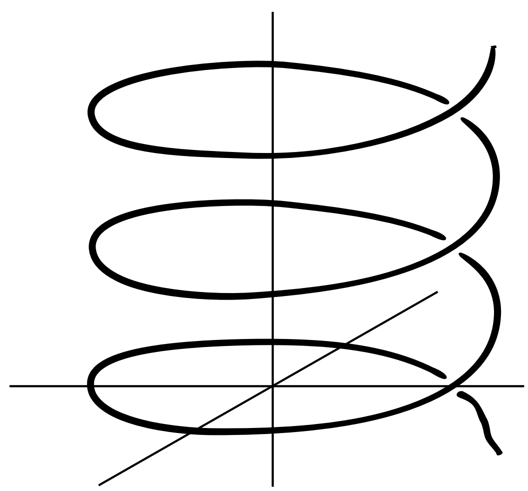
$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2}du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$



Lemat 1.6. *Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ oraz $\overline{\alpha}\colon (c,d) \to \mathbb{R}^3$ będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm*

$$h\colon (a,b) \to (c,d),$$

że $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją krzywej α przez h.

Dowód: Niech $h(t)$ oznacza złożenie

$$\alpha^{-1} \circ \overline{\alpha}(t)$$

($\alpha^{-1}\colon \alpha(a,b) \to \mathbb{R}$ istnieje ponieważ α jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym. □

Lemat 1.7. *Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Jeśli $\overline{\alpha}\colon (c,d) \to \mathbb{R}^3$ jest jej reparametryzacją, wówczas*

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód: Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α, zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon (c,d) \to (a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t) \geqslant 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a \qquad \text{i} \qquad h(d) = b.$$

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\,ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$\begin{aligned} L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\,ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\,ds = \\ = \int_c^d \|\alpha'(h(s))\|h'(s)\,ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\,dt = \\ = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = L(\alpha). \end{aligned}$$

□

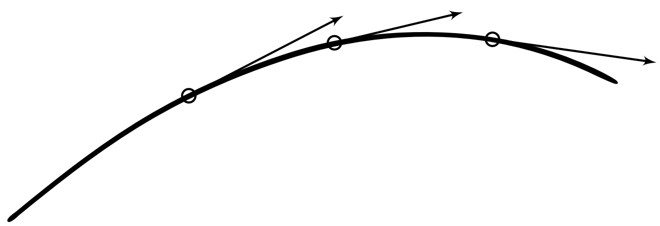
2

Wektory związane z krzywą

2.1 Wektor styczny i normalny

Definicja 2.1. Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie regularną krzywą gładką. Definiujemy **jednostkowy wektor styczny** do krzywej α w punkcie t jako

$$T_\alpha(t) = T(t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$



Zadanie. Niech $v(t)$ i $w(t)$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$, zależnymi od zmiennej t. Sprawdzić, że zachodzi **wzór Leibniza** na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$\langle v(t), w(t)\rangle' = \langle v(t)', w(t)\rangle + \langle v(t), w(t)'\rangle.$$

Lemat 2.2. *Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi*

$$\langle T(t), T'(t)\rangle = 0.$$

Dowód: Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t)\rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t)\rangle + \langle T(t), T'(t)\rangle = 2\langle T(t), T'(t)\rangle.$$

□

Definicja 2.3. Załóżmy, że $\alpha\colon (a,b)\to\mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t\in(a,b)$ dla którego $\|T'(t)\|\neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t)\overset{\text{def.}}{=}\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t)\neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Lemat 2.4. *Niech $\alpha\colon (a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego $t\in(a,b)$:*

1. $\|T'(t)\|\neq 0$,
2. *wektory $\alpha'(t)$ oraz $\alpha''(t)$ są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t)\times\alpha''(t)\neq 0$*, gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.*

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2\Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1\Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0)=k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k\in\mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t)\overset{\text{def.}}{=}\|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v=\sqrt{(\alpha_1')^2+(\alpha_2')^2+(\alpha_3')^2}$, więc

$$v'=\frac{2(\alpha_1'\alpha_1''+\alpha_2'\alpha_2''+\alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2+(\alpha_2')^2+(\alpha_3')^2}}=\frac{\langle\alpha',\alpha''\rangle}{v}.$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0)=\left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)'=\frac{\alpha''(t_0)v(t_0)-\alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle\alpha'(t_0),k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$
$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$
$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0,0,0).$$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.

  Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

  $$0 = T'(t)\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

  Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

□

2.2 Wektor binormalny

Jeśli dla wszystkich $t \in (a,b)$ z dziedziny krzywa spełnia jeden z powyższych warunków, mamy zdefiniowane w każdym jej punkcie dwa niezależne liniowo (w $\mathbb{R}^3$) wektory. W dodatku są one prostopadłe o długości jednostkowej. Zatem mamy wyznaczony w sposób jednoznaczny kierunek ortogonalny do nich jako prostopadły do płaszczyzny ściśle stycznej (czyli do obu wektorów $T(t)$ i $N(t)$).

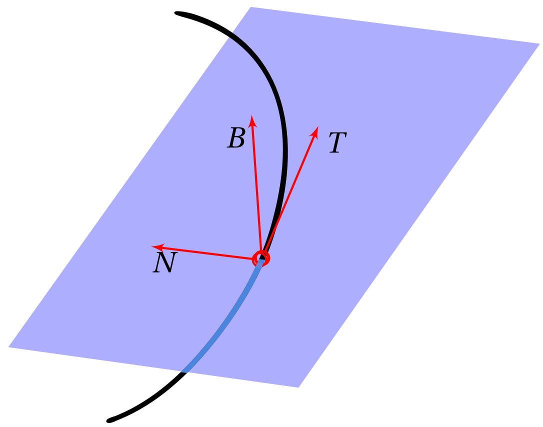
Definicja 2.5. Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a,b)$ takiego, że $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \overset{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory $N(t)$ i $B(t)$ nazywamy **płaszczyzną normalną**, lub **płaszczyzą prostopadłą** do krzywej.

2.3 Trójnóg Freneta

Definicja 2.6. Układ ortonormalny $\{T(t), N(t), B(t)\}$ nazywać będziemy **trójnogiem** (lub **reperem**) Freneta.



Uwaga.

1. *Jedyny wybór jaki dokonaliśmy podczas definiowania trójnogu Freneta to kierunek (tj. znak) wektora binormalnego.*

2. *Definicja $B(t)$ jest uzależniona od tego, że obraz krzywej umieszczony jest w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. W wymiarach wyższych jest wiele możliwych wyborów wektora prostopadłego do dwóch danych (innymi słowy: nie ma iloczynu wektorowego)*

3 Niezmienniki krzywych

Często możemy zauważyć, że krzywa w jednym punkcie „krzywi" się bardziej, niż innym. Typowym przykładem może być wykres funkcji $f(x) = x^2$ i porównanie jego zachowania się w pobliżu punktu $(0,0)$ z punktem powiedzmy $(3,9)$. Chcemy tę intuicyjną różnicę wyrazić w sposób ścisły.

Jeśli przyjmiemy, że prosta się nie „krzywi”, wtedy nasza domniemana definicja *krzywizny* powinna określać w każdym punkcie jak bardzo nasza krzywa $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ (lokalnie, tj. w małym otoczeniu każdego punktu) różni się właśnie od prostej. Tak więc krzywizna będzie będzie pewną funkcją (gładką) $\kappa\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ która będzie przyjmować dla $t_0 \in (a,b)$ wartość 0 jeśli tylko wykres krzywej w małym otoczeniu t_0 będzie linią prostą.

Rozwazmy wektor prędkości dla krzywej α. Im szybciej zmienia on kierunek, tym bardziej nasza krzywa wydaje się „krzywić". Zatem definicja krzywizny powinna być związana z wektorem pochodnych wektora prędkości. Oczywiście natychmias pojawia się problem zależności takich definicji od parametryzacji. Jeśli weźmiemy reparametryzację krzywej α która przebiega obraz szybciej, wtedy niejako *z definicji* okaże się że kierunek wektora stycznego zmienia się szybciej. Aby obejść tę trudność zaczniemy od krzywizny dla krzywych unormowanych.

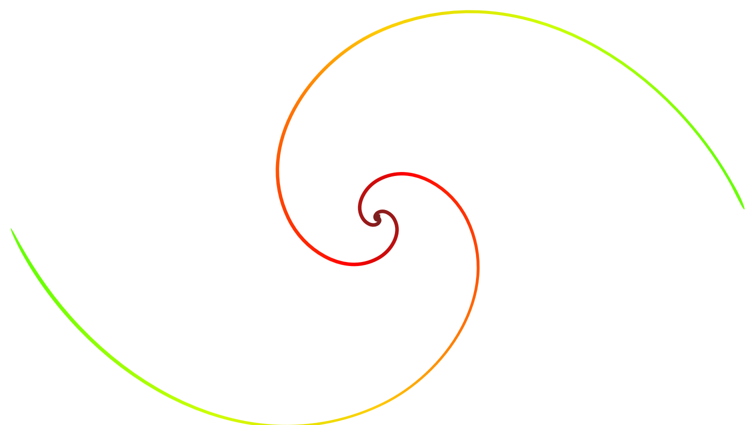
3.1 Krzywizna

Krzywizna krzywej unormowanej

Definicja 3.1. Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie (regularną) krzywą unormowaną. Dla każdego $t \in (a,b)$ **krzywiznę** definiujemy jako funkcję $\kappa\colon (a,b) \to \mathbb{R}$

$$\kappa(t) \overset{\text{def.}}{=} \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$$

Zauważmy, że krzywizna jest zawsze nieujemna, $\kappa(t) \geqslant 0$.



Zmiana koloru w zależności od krzywizny

Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja 3.2. Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha\circ h\colon (c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h\colon (c,d) \to (a,b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Taka definicja rodzi natychmiast pytanie o jednoznaczność definicji krzywizny, ponieważ potencjalnie różne reparametryzacje unormowane mogą prowadzić do różnych funkcji krzywizny. Mamy jednak następujący lemat.

Lemat 3.3. *Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną i niech $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$ będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie $h_1\colon (c_1,d_1) \to (a,b)$, oraz $h_2\colon (c_2,d_2) \to (a,b)$ są dyfeomorfizmami. Jeśli κ_1 i κ_2 oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$, wtedy*

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t)) = \kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich $t \in (a,b)$.

Wniosek. *Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.*

Dowód: Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 \colon (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.
Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) \quad = \quad \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} \quad = \quad \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}[h_1(t)]\right)\right)\right\|} \quad = \quad \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) &= \pm\, t + C \\ h_1(t) &= h_2(\pm t + C) \\ h_2^{-1}(t) &= h_1^{-1}(\pm t) + C. \end{aligned}$$

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

$\square$

Uwaga. *Na razie pokazaliśmy, że dla wybranej parametryzacji α krzywizna nie zależy od reparametryzacji unormowanej.*
Chcemy jednak pokazać coś więcej, mianowicie, że krzywizna jest funkcją zależną tylko od punktów w obrazie krzywej i w ogóle nie zależy od wyboru parametryzacji. Zostanie to wykazane pod koniec tego wykładu.

Lemat 3.4. *Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.*

Dowód: Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) =$$
$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const}.$$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. □

3.2 Torsja

Definicja 3.5. Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a,b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \overset{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Uwaga.
- *Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).*
- *Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, jednak torsja może mieć wartości ujemne.*

Uwaga. *Dla wygody od teraz będziemy opuszczać argument t jeśli nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności.*

3.3 Wzory Freneta

Twierdzenie 3.6 (Wzory Freneta)**.** *Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.*

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$
$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$
$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Dowód: Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.
Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B'\rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T\rangle$ i $b = \langle B', N\rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle = \langle B', T\rangle + \langle B, \kappa N\rangle = \langle B', T\rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

□

Lemat 3.7. *Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$. Następujące warunki są równoważne.*

1. *Zbiór $\alpha(a,b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. *$\tau \equiv 0$.*

Uwага. *Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy* ***krzywą płaską****.*

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?),więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a,b)$ będzie punktem z dziedziny α.

Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle.$$

> Funkcja ta mierzy długość rzutu wektora binormalnego na wektor wyznaczony przez naszą krzywą (bez straty ogólności możemy założyć, że $\alpha(p) = (0,0,0)$.)
>
> Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

Obliczmy

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\big(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\big) = \\ &= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0. \end{aligned}$$

Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

□

3.4 Wzory ogólne

Lemat 3.8. *Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha'''\rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Dowód: Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. □

Uwaga. *Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ*

i τ *są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w* $\mathbb{R}^3$*) i nie zależą od parametryzacji.*

4

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

4.1 Translacja i obrót

Lemat 4.1. *Niech* $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną.*

- *Translacja krzywej* α, *tj. krzywa* $\beta = \alpha + q$, *gdzie* $q \in \mathbb{R}^3$ *jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak* α.

- *Niech* $A \in O(3)$ *będzie macierzą* 3×3 *o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku* ± 1 *oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A \cdot \alpha$$

  ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga. *Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.*

Mnożenie przez taką macierz A oznacza obrót wokół środka układu współrzędnych, symetrię względem płaszczyzny, lub kombinację tych dwóch. Grupa $O(3)$ to tzw. grupa symetrii $\mathbb{R}^3$ i jej bazę stanowią macierze obrotów o dowolny kąt wokół każdej z osi, oraz macierz symetrii względem (dowolnie wybranej) płaszczyzny zawierającej punkt $(0,0,0)$.

Uwaga. *Grupa składająca się ze wszystkich obrotów oraz translacji przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^3$ *jest tzw. grupą Liego* $E(3)$. *Jest to grupa izometrii (poznamy to pojęcie w następnej części wykładu) przestrzeni euklidesowej . Intuicyjnie mamy trzy "stopnie swobody" pochodzące od obrotu i kolejne trzy od translacji o wektor, więc grupa* $E(3)$ *powinna być „6-wymiarowa".*

Uwaga. *Te dwie operacje definiują nam relację równoważności pomiędzy wykresami krzywych w* $\mathbb{R}^3$. *Krzywą* α *uznajemy za równoważną krzywej* β, *jeśli wykres* β *można otrzymać przez zastosowanie odpowiednich translacji, obrotów i symetrii do wykresu* α.

4.2 Twierdzenie klasyfikacyjne

Twierdzenie 4.2 (Klasyfikacyjne)**.** *Niech* $\kappa,\tau\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ *będą gładkimi funkcjami, oraz niech* $\kappa(t)>0$ *dla wszystkich* $t\in(a,b)$*. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*
$$\alpha\colon (a,b)\to\mathbb{R}^3,$$
że jej krzywizna κ_α *i torsja* τ_α *są tożsamościowo równe funkcjom* κ *oraz* τ.
- *Jeśli*
$$\beta\colon (a,b)\to\mathbb{R}^3$$
jest drugą taką krzywą, to krzywą β *można uzyskać z* α *stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Szkic dowodu: Niech $p\in(a,b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha\colon (a,b)\to\mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad N_\alpha(p)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad B_\alpha(p)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).
Szukamy zatem dziewięciu funkcji $u_1(t),\dots,u_9(t)$ które będą tworzyć wektory $T_\alpha(t)$, $N_\alpha(t)$ i $B_\alpha(t)$ dla domniemanej krzywej α. Oczywiście jeśli taka krzywa ma w ogóle istnieć, funkcje te muszą spełniać odpowiednie równania, wynikające ze wzorów Freneta. Poniższy układ jest konsekwencją dokładnie tego faktu.

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t)&=\kappa(t)u_4(t)\\ u_2'(t)&=\kappa(t)u_5(t)\\ u_3'(t)&=\kappa(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla “}T'=\kappa N\text{”},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t)&=\tau(t)u_4(t)\\ u_8'(t)&=\tau(t)u_5(t)\\ u_9'(t)&=\tau(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla “}B'=-\tau N\text{”},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{dla "}N' = -\kappa T + \tau B\text{".}$$

$$\begin{array}{lll} u_1(p) = 1 & u_4(p) = 0 & u_7(p) = 0 \\ u_2(p) = 0 & u_5(p) = 1 & u_8(p) = 0 \\ u_3(p) = 0 & u_6(p) = 0 & u_9(p) = 1 \end{array}$$

Twierdzenie 4.3 (Picarda, o istnieniu i jedyności rozwiązania równania różniczkowego)**.** *Niech* $(a,b) \subset \mathbb{R}$*, oraz niech* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$*. Ustalmy liczbę* $t_0 \in (a,b)$ *i punkt* $v_0 \in \mathbb{R}^n$*. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka* $\omega\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ *która spełnia*

$$\begin{aligned} &\omega(t_0) = v_0, \quad \textit{oraz} \\ &\omega'(t) = A(t)\omega(t) \quad \textit{dla wszystkich } t \in (a,b). \end{aligned}$$

Zadanie. Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać ω, A, t_0 i v_0).

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \qquad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T,N,B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję. Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a,b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t)\rangle, \qquad i,j = 1,2,3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Zadanie. Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji $p'_{i,j}(t)$ z funkcjami $\{p_{i,j}(t)\}$ oraz $\kappa(t)$ i $\tau(t)$.

Przykład.

$$\begin{aligned} p'_{1,1}(t) &= (\langle X_1(t), X_1(t)\rangle)' = \\ &= \underbrace{\langle X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}, X_1(t)\rangle + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t)\rangle}_{=\kappa(t)X_2(t)} = \\ &= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t). \end{aligned}$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t. Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) &= \kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) = \kappa(t)X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)|B_\alpha(t) &= \tau(t)X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.
Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

$\square$