Elementarna Geometria Różniczkowa

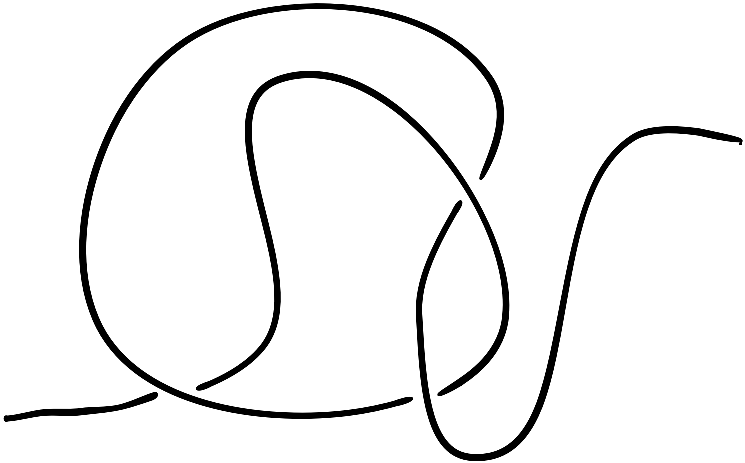
Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 1

Krzywe w $\mathbb{R}^3$



Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t\in(a,b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t)=(\alpha_1'(t),\alpha_2'(t),\alpha_3'(t)),$$

  gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;
- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0\in(a,b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

  gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;
- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;

- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;

- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- Niech $\alpha \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

  Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Definicja

- Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

  Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Definicja

- Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a,b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Definicja

- Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a,b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

  Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Przykład

Rozważmy krzywą $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Wtedy wektor prędkości wynosi

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t),$$

zatem prędkość to $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$, tak więc krzywa nie jest unormowana. Długość tej krzywej na odcinku od 0 do 2π wynosi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \sinh^{-1}(2t)\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{\sinh^{-1}(4\pi)}{4} \simeq 40.4097.$$

Definicja

Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0, 0, 0)$ dla wszystkich $t \in (a, b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$.

Definicja

Niech $\alpha\colon(c, d) \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą, oraz niech $h\colon(a, b) \to (c, d)$ będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie α i h,

$$\overline{\alpha} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \circ h\colon(a, b) \xrightarrow{h} (c, d) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej α przez dyfeomorfizm h.

Definicja

Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0,0,0)$ dla wszystkich $t \in (a,b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$.

Definicja

Niech $\alpha\colon(c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą, oraz niech $h\colon(a,b) \to (c,d)$ będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie α i h,

$$\overline{\alpha} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \circ h\colon(a,b) \xrightarrow{h} (c,d) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej α przez dyfeomorfizm h.

Przykład

Niech funkcja $h\colon (0,2) \to (1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t) = 2t + 1,$$

zaś $\alpha\colon (1,5) \to \mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Przykład

Niech funkcja $h\colon(0,2)\to(1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t)=2t+1,$$

zaś $\alpha\colon(1,5)\to\mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t)=(t^2+3,\,t-7,\,\sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t)=(4t^2+4t+4,\,2t-6,\,\sin 2t+1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Przykład

Niech funkcja $h\colon (0,2) \to (1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t) = 2t + 1,$$

zaś $\alpha\colon (1,5) \to \mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0 \in (a, b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Twierdzenie

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0\in(a,b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(u)\|\,du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t)=\|\alpha'(t)\|>0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Twierdzenie

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0 \in (a,b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Zatem $q\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q\colon (a, b) \to (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h\colon (c, d) \to (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Zatem $q \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q \colon (a, b) \to (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h \colon (c, d) \to (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Zatem $q\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q\colon (a, b) \to (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h\colon (c, d) \to (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną. Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Zatem $q\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q\colon (a, b) \to (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h\colon (c, d) \to (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$ jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\|\overline{\alpha}'(t)\| = \|\alpha(h(t))'\| = \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} h'(t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|} = 1 \quad \square$$

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\overline{\alpha} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$ jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\|\overline{\alpha}'(t)\| = \|\alpha(h(t))'\| = \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} h'(t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|} = 1 \quad \square$$

Przykład

(Lewa) Linia śrubowa lub helisa (lewoskrętna) to krzywa $\alpha\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2}du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Przykład

(Lewa) Linia śrubowa lub helisa (lewoskrętna) to krzywa $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2}du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Przykład

(Lewa) Linia śrubowa lub helisa (lewoskrętna) to krzywa $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

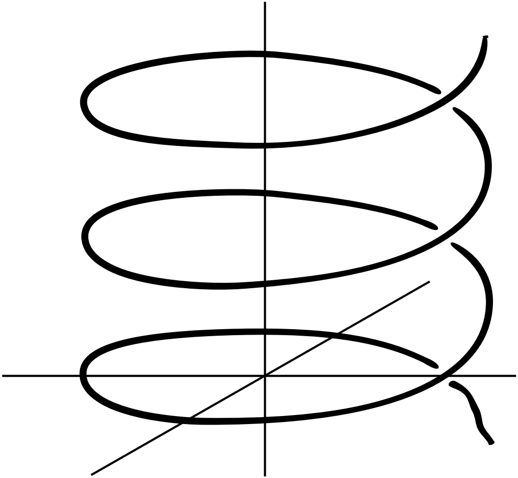
$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2} t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$



Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *oraz* $\overline{\alpha}\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ *będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm*

$$h\colon(a,b)\to(c,d),$$

że $\overline{\alpha}$ *jest reparametryzacją krzywej* α *przez* h*.*

Dowód:

Niech $h(t)$ oznacza złożenie

$$\alpha^{-1}\circ\overline{\alpha}(t)$$

($\alpha^{-1}\colon\alpha(a,b)\to\mathbb{R}$ istnieje ponieważ α jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym. $\square$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *oraz* $\overline{\alpha}\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ *będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm*

$$h\colon(a,b)\to(c,d),$$

że $\overline{\alpha}$ *jest reparametryzacją krzywej* α *przez* h*.*

Dowód:

Niech $h(t)$ oznacza złożenie

$$\alpha^{-1}\circ\overline{\alpha}(t)$$

($\alpha^{-1}\colon\alpha(a,b)\to\mathbb{R}$ istnieje ponieważ α jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym. $\square$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Jeśli $\overline{\alpha}\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ jest jej reparametryzacją, wówczas

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α, zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon(c,d)\to(a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha\circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t)\geqslant 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a \qquad \text{i} \qquad h(d) = b.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą gładką. Jeśli* $\overline{\alpha}\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ *jest jej reparametryzacją, wówczas*

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α, zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon(c,d)\to(a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha\circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t)\geqslant 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a \qquad \text{i} \qquad h(d) = b.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą gładką. Jeśli* $\overline{\alpha}\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ *jest jej reparametryzacją, wówczas*

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α, zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon(c,d)\to(a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha\circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t)\geqslant 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a \qquad \text{i} \qquad h(d) = b.$$

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\,ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$
\begin{aligned}
L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\,ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\,ds = \\
= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\|h'(s)\,ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\,dt = \\
= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = L(\alpha).
\end{aligned}
$$

$\square$

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\,ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\,ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\,ds =$$

$$= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\|h'(s)\,ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\,dt =$$

$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = L(\alpha).$$

□

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\,ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\,ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\,ds =$$
$$= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\| h'(s)\,ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\,dt =$$
$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = L(\alpha).$$

$\square$

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\,ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\,ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\,ds =$$

$$= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\| h'(s)\,ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\,dt =$$

$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = L(\alpha).$$

$\square$