

# Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba<sup>1</sup>

2013

## Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola  
wektorowego

Definicja geodezyjnych

## Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

# Wykład 11

## Geodezyjne I

## Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Definicja geodezyjnych

## Geodezyjne II

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria hiperboliczna

Powierzchnie o stałej krzywiźnie

## Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola  
wektorowego

Definicja geodezyjnych

## Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Geodezyjne I

### Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola  
wektorowego

Definicja geodezyjnych

## Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

- (1)** każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;
- (2)** odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;
- (3)** kiedy podróżujemy wzdłuż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

- (1)** każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;
- (2)** odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;
- (3)** kiedy podróżujemy wzdłuż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Geodezyjne na powierzchniach to pewne analogi linii prostych na płaszczyźnie. Linie proste mają trzy ważne własności:

- (1)** każde dwa punkty łączy dokładnie jedna prosta;
- (2)** odcinek tej prostej zawarty między punktami jest najkrótszą drogą między nimi;
- (3)** kiedy podróżujemy wzdłuż prostej “nie skręcamy w prawo bądź w lewo”.

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Chociaż proste na płaszczyźnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład  $S^2$ :

- ▶ Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej “długości geograficznej” jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- ▶ Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- ▶ Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

## Geodezyjne I

### Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola  
wektorowego

Definicja geodezyjnych

## Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Chociaż proste na płaszczyźnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład  $S^2$ :

- ▶ Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej “długości geograficznej” jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- ▶ Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- ▶ Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

Chociaż proste na płaszczyźnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład  $S^2$ :

- ▶ Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej “długości geograficznej” jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- ▶ Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- ▶ Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

Chociaż proste na płaszczyźnie spełniają równocześnie te trzy warunki, dla ogólnej powierzchni może nie być to możliwe. Rozważmy przykład  $S^2$ :

- ▶ Najkrótszą drogą łączącą dwa punkty o tej samej “długości geograficznej” jest droga wzdłuż tego południka, czyli tzw. okręgu wielkiego. Z symetrii sfery wynika, że każde dwa punkty na sferze leżą na pewnym okręgu wielkim.
- ▶ Dwa punkty dzielą okrąg wielki na dwie (najczęściej nierówne) części, więc nie każdy fragment okręgu jest najkrótszą drogą.
- ▶ Między biegunem północnym i południowym istnieje nieskończenie wiele południków równej długości, więc każdy z nich może być uważany za najkrótszą drogę między biegunami.

## Geodezyjne I

### Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola  
wektorowego

Definicja geodezyjnych

## Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Chociaż najmniej intuicyjną, wybierzemy własność **(3)** jako definicję. Oto najważniejszy powód naszej decyzji:

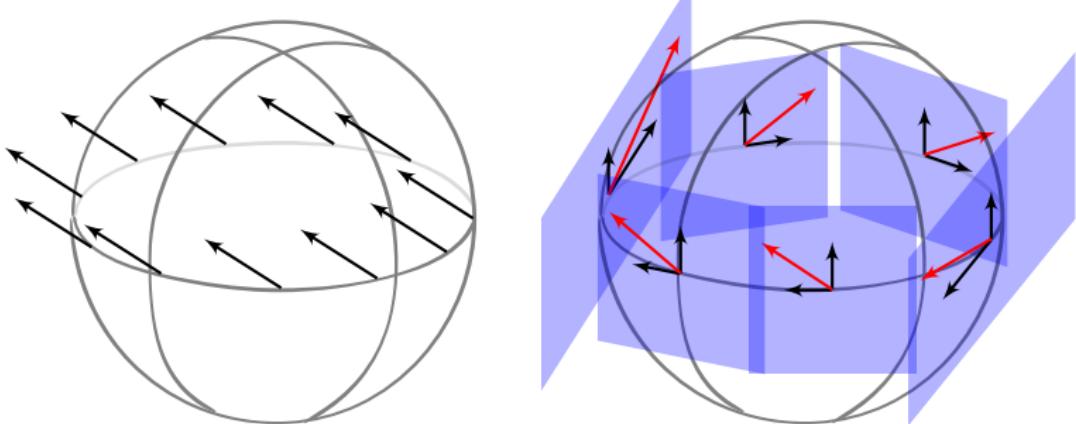
*“Nie krzywienie się” jest własnością lokalną, natomiast  
własności jedyności **(1)** i najkrótszej drogi **(2)** są  
globalne, i odwołują się do kształtu całej powierzchni.*

### Pochodna kowariantna

## Pochodna kierunkowa pola wektorowego

## Definicja geodezyjnych

Ale jak uogólnić (czy też doprecyzować) własność (3) dla dowolnej powierzchni? Wykorzystamy ideę równoległego transportu wektora wzdłuż krzywej. Postrzeganie równoległości tak na prawdę zależy od położenia obserwatora.



Które wektory są wzajemnie równoległe?

## Uwaga

*Równoległość wektorów w różnych przestrzeniach stycznych do powierzchni  $M$  oznacza **proporcjonalność współczynników ich przedstawienia w standardowej bazie obu przestrzeni stycznych.***

# Przypomnienie

Elementarna  
Geometria  
Różniczkowa

Opracowanie:  
Marek Kaluba

## Definicja

**Gładkie pole wektorowe** na  $M$  to odwzorowanie gładkie

$$F: M \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Gładkie pole wektorowe nazywamy **stycznym** jeśli  
 $F(p) \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$  dla wszystkich  $p \in M$ .

## Definicja

Pochodna kierunkowa pola wektorowego  $F$  w kierunku wektora  $v \in T_p M$  jest zdefiniowana naturalnie jako

$$\nabla_v F \stackrel{\text{def.}}{=} (\nabla_v F_1, \nabla_v F_2, \nabla_v F_3)$$

gdzie  $F_i$  są funkcjami współrzędnymi pola  $F$ .

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

# Przypomnienie

Elementarna  
Geometria  
Różniczkowa

Opracowanie:  
Marek Kaluba

## Definicja

**Gładkie pole wektorowe** na  $M$  to odwzorowanie gładkie

$$F: M \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Gładkie pole wektorowe nazywamy **stycznym** jeśli  
 $F(p) \in T_p M \subset \mathbb{R}^3$  dla wszystkich  $p \in M$ .

## Definicja

**Pochodna kierunkowa pola wektorowego**  $F$  w kierunku wektora  $v \in T_p M$  jest zdefiniowana naturalnie jako

$$\nabla_v F \stackrel{\text{def.}}{=} (\nabla_v F_1, \nabla_v F_2, \nabla_v F_3)$$

gdzie  $F_i$  są funkcjami współrzędnymi pola  $F$ .

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Przykład

Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\hat{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na  $M$ . Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena (z odpowiednim znakiem).

## Lemat

*Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji, tj. liniowość ze względu na dodawanie wektorów i pól wektorowych, jednorodność, oraz reguła Leibniza:*

$$\nabla_v(FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G,$$

czyli w każdym punkcie  $p$  mamy

$$\nabla_v \langle F, G \rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p) \rangle + \langle F(p), \nabla_v G \rangle.$$

Elementarna  
Geometria  
Różniczkowa

Opracowanie:  
Marek Kaluba

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pól  
wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Przykład

Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\hat{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na  $M$ . Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena (z odpowiednim znakiem).

## Lemat

*Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji, tj. liniowość ze względu na dodawanie wektorów i pól wektorowych, jednorodność, oraz reguła Leibniza:*

$$\nabla_v(FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G,$$

czyli w każdym punkcie  $p$  mamy

$$\nabla_v \langle F, G \rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p) \rangle + \langle F(p), \nabla_v G \rangle.$$

Elementarna  
Geometria  
Różniczkowa

Opracowanie:  
Marek Kaluba

## Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pól wektorowego

Definicja geodezyjnych

## Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie



## Przykład

Zauważmy, że wektor normalny jako odwzorowanie

$$\hat{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

jest tak naprawdę gładkim polem wektorowym na  $M$ . Jego pochodną kierunkową jest... odwzorowanie Weingartena (z odpowiednim znakiem).

## Lemat

*Dla pochodnych kierunkowych pól wektorowych zachodzą takie same własności jak dla pochodnych kierunkowych funkcji, tj. liniowość ze względu na dodawanie wektorów i pól wektorowych, jednorodność, oraz reguła Leibniza:*

$$\nabla_v(FG) = G\nabla_v F + F\nabla_v G,$$

czyli w każdym punkcie  $p$  mamy

$$\nabla_v \langle F, G \rangle(p) = \langle \nabla_v F, G(p) \rangle + \langle F(p), \nabla_v G \rangle.$$

Rozważmy styczne pole wektorowe  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Niech  $p \in M$  i  $v \in T_p M$ .

Oczywiście nie ma powodu, aby wektor  $\nabla_v Z$  należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?). Spróbujemy “naprawić” tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie  $\nabla_v Z$  na  $T_p M$ .

### Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie stycznym polem wektorowym. Niech  $p \in M$  oraz  $v \in T_p(M)$ . **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\hat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_p M}(\nabla_v Z),$$

gdzie  $\Pi_W$  oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń  $W$ .

Rozważmy styczne pole wektorowe  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Niech  $p \in M$  i  $v \in T_p M$ .

Oczywiście nie ma powodu, aby wektor  $\nabla_v Z$  należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?).

Spróbujemy “naprawić” tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie  $\nabla_v Z$  na  $T_p M$ .

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie stycznym polem wektorowym. Niech  $p \in M$  oraz  $v \in T_p(M)$ . **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\hat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_p M}(\nabla_v Z),$$

gdzie  $\Pi_W$  oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń  $W$ .

Rozważmy styczne pole wektorowe  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Niech  $p \in M$  i  $v \in T_p M$ .

Oczywiście nie ma powodu, aby wektor  $\nabla_v Z$  należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?). Spróbujemy “naprawić” tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie  $\nabla_v Z$  na  $T_p M$ .

### Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie stycznym polem wektorowym. Niech  $p \in M$  oraz  $v \in T_p(M)$ . **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\hat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_p M}(\nabla_v Z),$$

gdzie  $\Pi_W$  oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń  $W$ .

Rozważmy styczne pole wektorowe  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Niech  $p \in M$  i  $v \in T_p M$ .

Oczywiście nie ma powodu, aby wektor  $\nabla_v Z$  należał do przestrzeni stycznej (dlaczego nie było tego problemu gdy rozważaliśmy pochodną odwzorowania Weingartena?). Spróbujemy “naprawić” tę sytuację w brutalny sposób: rzutując ortogonalnie  $\nabla_v Z$  na  $T_p M$ .

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie stycznym polem wektorowym. Niech  $p \in M$  oraz  $v \in T_p(M)$ . **Pochodną kowariantną** definiujemy jako

$$\hat{\nabla}_v(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_p M}(\nabla_v Z),$$

gdzie  $\Pi_W$  oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń  $W$ .

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $Y, Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będą stycznymi polami wektorowymi. Niech  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  będzie gładką funkcją,  $p \in M$  punktem na  $M$ ,  $v, w \in T_p(M)$  wektorami z przestrzeni stycznej i wreszcie  $a, b \in \mathbb{R}$  liczbami rzeczywistymi. Wtedy

- ▶ *Odwzorowanie*

$$\widehat{\nabla}_{(\cdot)} Z: T_p M \rightarrow T_p M$$

zadana przez  $v \mapsto \widehat{\nabla}_v Z$  jest odwzorowaniem liniowym.

- ▶  $\widehat{\nabla}_v(Y + Z) = \widehat{\nabla}_v Y + \widehat{\nabla}_v Z$ .
- ▶  $\widehat{\nabla}_v f Z = (\widehat{\nabla}_v f) Z(p) + f(p) (\widehat{\nabla}_v Z)$ .
- ▶  $\widehat{\nabla}_v \langle Y, Z \rangle = \langle \widehat{\nabla}_v Y, Z(p) \rangle + \langle Y(p), \widehat{\nabla}_v Z \rangle$

## Dowód:

Dowody tych własności są analogiczne jak własności pochodnej kierunkowej (wystarczy skorzystać z liniowości rzutowania na podprzestrzeń).

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią, oraz niech  $Y, Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będą stycznymi polami wektorowymi. Niech  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  będzie gładką funkcją,  $p \in M$  punktem na  $M$ ,  $v, w \in T_p(M)$  wektorami z przestrzeni stycznej i wreszcie  $a, b \in \mathbb{R}$  liczbami rzeczywistymi. Wtedy

- ▶ Odwzorowanie

$$\widehat{\nabla}_{(\cdot)} Z: T_p M \rightarrow T_p M$$

zadana przez  $v \mapsto \widehat{\nabla}_v Z$  jest odwzorowaniem liniowym.

- ▶  $\widehat{\nabla}_v(Y + Z) = \widehat{\nabla}_v Y + \widehat{\nabla}_v Z$ .
- ▶  $\widehat{\nabla}_v f Z = (\widehat{\nabla}_v f) Z(p) + f(p)(\widehat{\nabla}_v Z)$ .
- ▶  $\widehat{\nabla}_v \langle Y, Z \rangle = \langle \widehat{\nabla}_v Y, Z(p) \rangle + \langle Y(p), \widehat{\nabla}_v Z \rangle$

## Dowód:

Dowody tych własności są analogiczne jak własności pochodnej kierunkowej (wystarczy skorzystać z liniowości rzutowania na podprzestrzeń).

Niech  $\alpha: (a, b) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  będzie krzywą na powierzchni i niech  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie gładkim polem wektorowym wzdłuż  $\alpha$ . Oznaczmy

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_{\alpha(t)} M} \left( \frac{d(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \right) = \widehat{\nabla}_{\alpha'(t)} Z$$

## Uwaga

Zauważmy, że styczne pole wektorowe  $\alpha'$  do krzywej  $\alpha \subset M$  jest w postaci  $Z \circ \alpha$ .

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Niech  $\alpha: (a, b) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  będzie krzywą na powierzchni i niech  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie gładkim polem wektorowym wzdłuż  $\alpha$ . Oznaczmy

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \Pi_{T_{\alpha(t)} M} \left( \frac{d(Z \circ \alpha)}{dt}(t) \right) = \widehat{\nabla}_{\alpha'(t)} Z$$

## Uwaga

Zauważmy, że styczne pole wektorowe  $\alpha'$  do krzywej  $\alpha \subset M$  jest w postaci  $Z \circ \alpha$ .

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą  $\gamma$  nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na  $M$  jeśli wektory  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$  wzdłuż krzywej  $\gamma$  pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  takie, że  $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$ , oraz

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \gamma)(t)}{dt} = \Pi_{T_{\gamma(t)}M} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \widehat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

## Uwaga

W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu  $\gamma(t)$ .

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą  $\gamma$  nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na  $M$  jeśli wektory  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$  wzdłuż krzywej  $\gamma$  pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  takie, że  $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$ , oraz

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \gamma)(t)}{dt} = \Pi_{T_{\alpha(t)}M} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \widehat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

## Uwaga

W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu  $\gamma(t)$ .

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie krzywą na tej powierzchni. Krzywą  $\gamma$  nazywamy **krzywą geodezyjną**, lub po prostu **geodezyjną** na  $M$  jeśli wektory  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$  wzdłuż krzywej  $\gamma$  pozostają względem siebie równoległe, tj. jeśli istnieje pole wektorowe  $Z: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  takie, że  $Z \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$ , oraz

$$\frac{\widehat{D}(Z \circ \gamma)(t)}{dt} = \Pi_{T_{\alpha(t)}M} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \widehat{\nabla}_{\gamma'(t)} Z = 0.$$

## Uwaga

W powyższej definicji wystarczy, żeby to pole wektorowe istniało w pewnym otoczeniu każdego punktu  $\gamma(t)$ .

## Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Założymy, że krzywa  $\gamma$  jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja  $\tau_\gamma \equiv 0$  oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez  $T_\gamma$  i  $N_\gamma$ ). Wobec tego pochodna pola stycznego  $\gamma'$  wzduż  $\gamma$  będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem  $\gamma(t) = vt + w$  dla pewnych  $v, w \in \mathbb{R}^2$ .

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

## Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Założmy, że krzywa  $\gamma$  jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja  $\tau_\gamma \equiv 0$  oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez  $T_\gamma$  i  $N_\gamma$ ). Wobec tego pochodna pola stycznego  $\gamma'$  wzduż  $\gamma$  będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem  $\gamma(t) = vt + w$  dla pewnych  $v, w \in \mathbb{R}^2$ .

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

## Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Założmy, że krzywa  $\gamma$  jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja  $\tau_\gamma \equiv 0$  oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez  $T_\gamma$  i  $N_\gamma$ ). Wobec tego pochodna pola stycznego  $\gamma'$  wzduż  $\gamma$  będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem  $\gamma(t) = vt + w$  dla pewnych  $v, w \in \mathbb{R}^2$ .

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

## Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Założymy, że krzywa  $\gamma$  jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja  $\tau_\gamma \equiv 0$  oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez  $T_\gamma$  i  $N_\gamma$ ). Wobec tego pochodna pola stycznego  $\gamma'$  wzduż  $\gamma$  będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem  $\gamma(t) = vt + w$  dla pewnych  $v, w \in \mathbb{R}^2$ .

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Przykład

Pokażemy, że proste i tylko proste spełniają ten warunek na płaszczyźnie. Założymy, że krzywa  $\gamma$  jest geodezyjną i leży na płaszczyźnie. Wtedy oczywiście torsja  $\tau_\gamma \equiv 0$  oraz wektor binormalny jest stały, więc krzywa leży w płaszczyźnie ściśle stycznej (rozpiętej przez  $T_\gamma$  i  $N_\gamma$ ). Wobec tego pochodna pola stycznego  $\gamma'$  wzduż  $\gamma$  będzie równa

$$0 = \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} = \Pi_{\langle T_\gamma, N_\gamma \rangle} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}.$$

Zatem  $\gamma(t) = vt + w$  dla pewnych  $v, w \in \mathbb{R}^2$ .

Z drugiej strony każda prosta na płaszczyźnie ma taką parametryzację, więc spełnione jest powyższe równanie.

## Uwaga (Bardzo ważna!)

*Sprzecznie z naszą intuicją, bycie krzywą geodezyjną jest własnością **parametryzacji**, a nie samej krzywej na powierzchni. Powyższy przykład udowadnia jedynie, że prosta w postaci parametrycznej jest geodezyjną na płaszczyźnie.*

*Rozważmy teraz krzywą  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  zadaną wzorem*

$$\beta(t) = (t^3, t^3, t^3).$$

*Obraz tej krzywej jest oczywiście prostą, jednak podobne przeliczenia jak powyżej pokazują, że*

$$\frac{\hat{D}\beta'(t)}{dt} = \frac{d\beta'(t)}{dt} = (6t, 6t, 6t) \neq 0.$$

## Uwaga (Bardzo ważna!)

*Sprzecznie z naszą intuicją, bycie krzywą geodezyjną jest własnością **parametryzacji**, a nie samej krzywej na powierzchni. Powyższy przykład udowadnia jedynie, że prosta w postaci parametrycznej jest geodezyjną na płaszczyźnie.*

*Rozważmy teraz krzywą  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  zadaną wzorem*

$$\beta(t) = (t^3, t^3, t^3).$$

*Obraz tej krzywej jest oczywiście prostą, jednak podobne przeliczenia jak powyżej pokazują, że*

$$\frac{\widehat{D}\beta'(t)}{dt} = \frac{d\beta'(t)}{dt} = (6t, 6t, 6t) \neq 0.$$

Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.

Ze względu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik  $S^2$  sparametryzowany jako  $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$  wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{D}\gamma'(t)}{dt} &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \\ &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} ((-\cos(t), -\sin(t), 0)) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}(-\gamma(t)) = 0. \end{aligned}$$

Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.

Ze względu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik  $S^2$  sparametryzowany jako  $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$  wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \widehat{D}\gamma'(t) &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \\ &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} ((-\cos(t), -\sin(t), 0)) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}(-\gamma(t)) = 0. \end{aligned}$$

Pokażemy, że każdy wielki okrąg na jednostkowej sferze  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  jest obrazem pewnej krzywej geodezyjnej.

Ze względu na symetrię sfery wystarczy pokazać, że równik  $S^2$  sparametryzowany jako  $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$  wzorem

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

jest geodezyjną. Styczne pole wektorowe jest równe

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

wobec czego

$$\begin{aligned} \widehat{D}\gamma'(t) &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} \left( \frac{d\gamma'(t)}{dt} \right) = \\ &= \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2} ((-\cos(t), -\sin(t), 0)) = \Pi_{T_{\gamma(t)}S^2}(-\gamma(t)) = 0. \end{aligned}$$

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.*

1. *Krzywa  $\gamma$  ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj.  $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ ).*
2. *Reparametryzacja  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h: (c, d) \rightarrow (a, b) \rightarrow M$  jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy  $h$  jest funkcją afiniczną.*
3. *Jeśli obraz krzywej  $\delta: (c, d) \rightarrow M$  jest zawarty w obrazie krzywej  $\gamma$ ,  $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$ , wtedy  $\delta$  jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.*

## Dowód:

Pomijamy. □

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.*

1. *Krzywa  $\gamma$  ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj.  $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ ).*
2. *Reparametryzacja  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h: (c, d) \rightarrow (a, b) \rightarrow M$  jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy  $h$  jest funkcją afiniczną.*
3. *Jeśli obraz krzywej  $\delta: (c, d) \rightarrow M$  jest zawarty w obrazie krzywej  $\gamma$ ,  $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$ , wtedy  $\delta$  jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.*

## Dowód:

Pomijamy. □

Geodezyjne I

Idea

Pochodna kowariantna

Pochodna kierunkowa pola wektorowego

Definicja geodezyjnych

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.

1. Krzywa  $\gamma$  ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj.  $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ ).
2. Reparametryzacja  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h: (c, d) \rightarrow (a, b) \rightarrow M$  jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy  $h$  jest funkcją afiniczną.
3. Jeśli obraz krzywej  $\delta: (c, d) \rightarrow M$  jest zawarty w obrazie krzywej  $\gamma$ ,  $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$ , wtedy  $\delta$  jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.

## Dowód:

Pomijamy. □

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią i niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  będzie nie-stałą geodezyjną. Wtedy następujące twierdzenia są prawdziwe.

1. Krzywa  $\gamma$  ma stałą (nie-zerową) prędkość (tj.  $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ ).
2. Reparametryzacja  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h: (c, d) \rightarrow (a, b) \rightarrow M$  jest krzywą geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy  $h$  jest funkcją afiniczną.
3. Jeśli obraz krzywej  $\delta: (c, d) \rightarrow M$  jest zawarty w obrazie krzywej  $\gamma$ ,  $\delta(c, d) \subset \gamma(a, b)$ , wtedy  $\delta$  jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy gdy ma stałą prędkość.

## Dowód:

Pomijamy. □

## Wykład 12

### Geodezyjne II

## Geodezyjne I

### Geodezyjne II

Równania geodezyjnych  
Istnienie i jedyność

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria hiperboliczna

Powierzchnie o stałej krzywiźnie

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia  
obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow x(U) \subset M$  będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez

$$\begin{aligned} g &\stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \gamma: (a, b) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (g_1(t), g_2(t)) \end{aligned}$$

i niech  $g_1, g_2$  będą funkcjami współrzędnych  $g(t)$ . Pochodna kowariantna krzywej  $\gamma$  wyraża się jako

$$\hat{\frac{D\gamma'}{dt}} = \sum_{k=1}^2 \left( g_k''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

## Twierdzenie

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow x(U) \subset M$  będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez

$$\begin{aligned} g &\stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \gamma: (a, b) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (g_1(t), g_2(t)) \end{aligned}$$

i niech  $g_1, g_2$  będą funkcjami współrzędnych  $g(t)$ . Pochodna kowariantna krzywej  $\gamma$  wyraża się jako

$$\hat{\frac{D}{dt}}\gamma' = \sum_{k=1}^2 \left( g_k''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

## Twierdzenie

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech  $\gamma: (a, b) \rightarrow x(U) \subset M$  będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez

$$\begin{aligned} g &\stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \gamma: (a, b) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (g_1(t), g_2(t)) \end{aligned}$$

i niech  $g_1, g_2$  będą funkcjami współrzędnych  $g(t)$ . Pochodna kowariantna krzywej  $\gamma$  wyraża się jako

$$\frac{\hat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left( g_k''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

## Wniosek (Równania geodezyjnych)

*Krzywa  $\gamma$  jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy te współczynniki są zerowe, tj. spełnione są następujące równania:*

$$\begin{cases} g_1'' + \Gamma_{11}^1(g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^1 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^1(g_2')^2 = 0 \\ g_2'' + \Gamma_{11}^2(g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^2 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^2(g_2')^2 = 0 \end{cases}$$

Dowód twierdzenia i wniosku jest długi i dosyć techniczny, więc na wykładzie go pominiemy. Skupimy się natomiast na przykładzie powierzchni obrotowej.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Wniosek (Równania geodezyjnych)

*Krzywa  $\gamma$  jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy te współczynniki są zerowe, tj. spełnione są następujące równania:*

$$\begin{cases} g_1'' + \Gamma_{11}^1(g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^1 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^1(g_2')^2 = 0 \\ g_2'' + \Gamma_{11}^2(g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^2 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^2(g_2')^2 = 0 \end{cases}$$

Dowód twierdzenia i wniosku jest długi i dosyć techniczny, więc na wykładzie go pominiemy. Skupimy się natomiast na przykładzie powierzchni obrotowej.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

# Przykład: powierzchnia obrotowa

## Wniosek

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos(\vartheta), \alpha_2(t) \sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu  $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$  jest unormowana. Wtedy

1. Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni  $M$  może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.
2. Okrąg na powierzchni  $M$  prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.

[Geodezyjne I](#)[Geodezyjne II](#)[Równania geodezyjnych](#)[Przykład: powierzchnia obrotowa](#)[Istnienie i jedność](#)[Twierdzenie Gaussa-Bonneta](#)[Geometria hiperboliczna](#)[Powierzchnie o stałej krzywiźnie](#)

# Przykład: powierzchnia obrotowa

## Wniosek

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos(\vartheta), \alpha_2(t) \sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu  $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$  jest unormowana. Wtedy

1. Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni  $M$  może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.
2. Okrąg na powierzchni  $M$  prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.

[Geodezyjne I](#)[Geodezyjne II](#)[Równania geodezyjnych](#)[Przykład: powierzchnia obrotowa](#)[Istnienie i jedność](#)[Twierdzenie Gaussa-Bonneta](#)[Geometria hiperboliczna](#)[Powierzchnie o stałej krzywiźnie](#)

# Przykład: powierzchnia obrotowa

## Wniosek

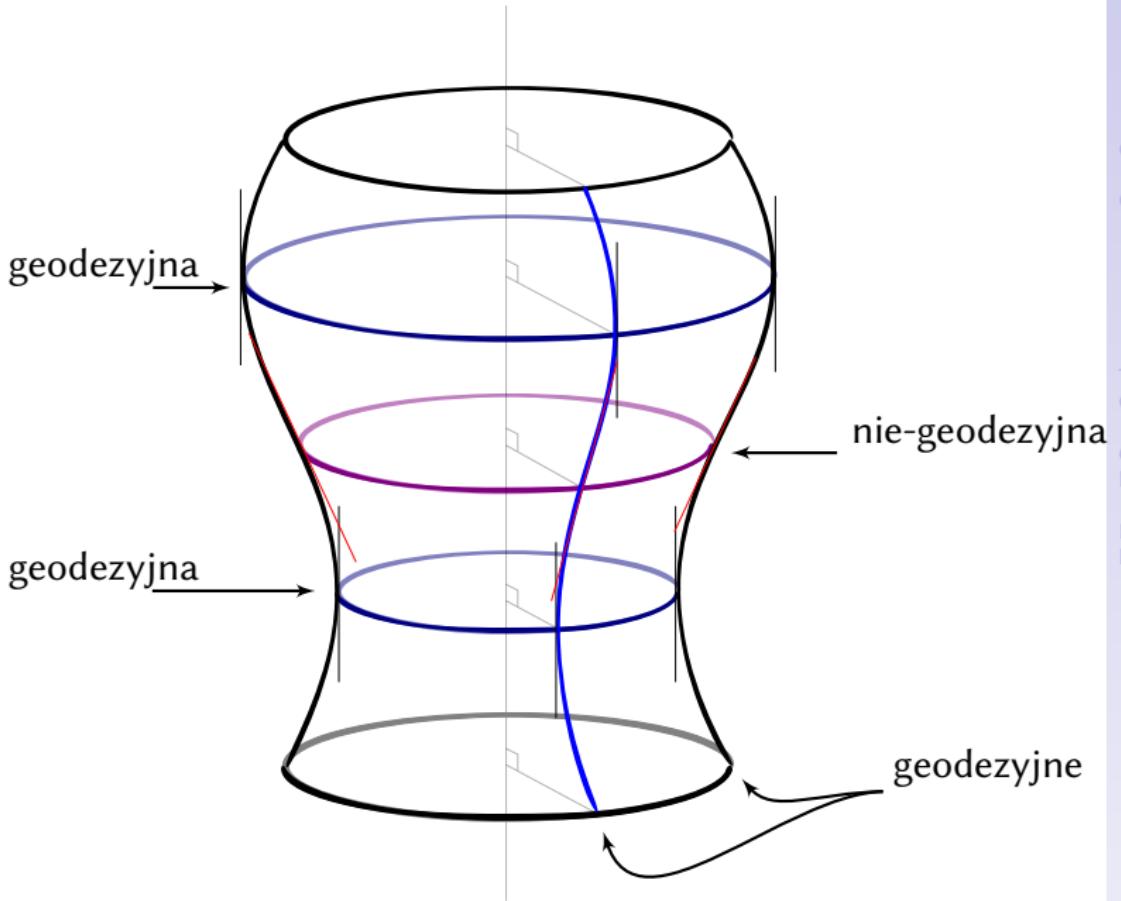
Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos(\vartheta), \alpha_2(t) \sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu  $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$  jest unormowana. Wtedy

1. Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni  $M$  może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.
2. Okrąg na powierzchni  $M$  prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.

[Geodezyjne I](#)[Geodezyjne II](#)[Równania geodezyjnych](#)[Przykład: powierzchnia obrotowa](#)[Istnienie i jedność](#)[Twierdzenie Gaussa-Bonneta](#)[Geometria hiperboliczna](#)[Powierzchnie o stałej krzywiźnie](#)



# Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- ▶ Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t, \vartheta) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \cos \vartheta, \alpha'_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_2(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \sin \vartheta, \alpha_2(t) \cos \vartheta)$$

- ▶ Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t, \vartheta) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t) \cos \vartheta, \alpha''_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_{12}(t, \vartheta) = x_{21}(t, \vartheta) = (0, -\alpha'_2(t) \sin \vartheta, \alpha'_2(t) \cos \vartheta)$$

$$x_{22}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \cos \vartheta, -\alpha_2(t) \sin \vartheta).$$

- ▶ Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- ▶ Zauważmy, teraz że  $x_1$  i  $x_2$  są prostopadłe, więc żeby obliczyć np.  $\Gamma_{12}^2$  wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarne) przez  $x_2$  a wynik podzielić przez  $\|x_2\|^2$ .

# Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- ▶ Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t, \vartheta) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \cos \vartheta, \alpha'_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_2(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \sin \vartheta, \alpha_2(t) \cos \vartheta)$$

- ▶ Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t, \vartheta) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t) \cos \vartheta, \alpha''_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_{12}(t, \vartheta) = x_{21}(t, \vartheta) = (0, -\alpha'_2(t) \sin \vartheta, \alpha'_2(t) \cos \vartheta)$$

$$x_{22}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \cos \vartheta, -\alpha_2(t) \sin \vartheta).$$

- ▶ Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- ▶ Zauważmy, teraz że  $x_1$  i  $x_2$  są prostopadłe, więc żeby obliczyć np.  $\Gamma_{12}^2$  wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarne) przez  $x_2$  a wynik podzielić przez  $\|x_2\|^2$ .

# Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- ▶ Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t, \vartheta) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \cos \vartheta, \alpha'_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_2(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \sin \vartheta, \alpha_2(t) \cos \vartheta)$$

- ▶ Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t, \vartheta) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t) \cos \vartheta, \alpha''_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_{12}(t, \vartheta) = x_{21}(t, \vartheta) = (0, -\alpha'_2(t) \sin \vartheta, \alpha'_2(t) \cos \vartheta)$$

$$x_{22}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \cos \vartheta, -\alpha_2(t) \sin \vartheta).$$

- ▶ Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- ▶ Zauważmy, teraz że  $x_1$  i  $x_2$  są prostopadłe, więc żeby obliczyć np.  $\Gamma_{12}^2$  wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez  $x_2$  a wynik podzielić przez  $\|x_2\|^2$ .

## Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- ▶ Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t, \vartheta) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \cos \vartheta, \alpha'_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_2(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \sin \vartheta, \alpha_2(t) \cos \vartheta)$$

- ▶ Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t, \vartheta) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t) \cos \vartheta, \alpha''_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_{12}(t, \vartheta) = x_{21}(t, \vartheta) = (0, -\alpha'_2(t) \sin \vartheta, \alpha'_2(t) \cos \vartheta)$$

$$x_{22}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \cos \vartheta, -\alpha_2(t) \sin \vartheta).$$

- ▶ Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- ▶ Zauważmy, teraz że  $x_1$  i  $x_2$  są prostopadłe, więc żeby obliczyć np.  $\Gamma_{12}^2$  wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez  $x_2$  a wynik podzielić przez  $\|x_2\|^2$ .

## Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- ▶ Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t, \vartheta) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t) \cos \vartheta, \alpha'_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_2(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \sin \vartheta, \alpha_2(t) \cos \vartheta)$$

- ▶ Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t, \vartheta) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t) \cos \vartheta, \alpha''_2(t) \sin \vartheta)$$

$$x_{12}(t, \vartheta) = x_{21}(t, \vartheta) = (0, -\alpha'_2(t) \sin \vartheta, \alpha'_2(t) \cos \vartheta)$$

$$x_{22}(t, \vartheta) = (0, -\alpha_2(t) \cos \vartheta, -\alpha_2(t) \sin \vartheta).$$

- ▶ Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- ▶ Zauważmy, teraz że  $x_1$  i  $x_2$  są prostopadłe, więc żeby obliczyć np.  $\Gamma_{12}^2$  wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez  $x_2$  a wynik podzielić przez  $\|x_2\|^2$ .

- ▶ Sprawdzić, że w tym przypadku  $\Gamma_{22}^1 = -\alpha_1\alpha_1'$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$  zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- ▶ Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha_1'(g_2')^2 = 0$$

$$g_2'' + 2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- ▶ Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako  $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$  dla pewnej stałej  $\vartheta_0$  ( $\vartheta$  to kąt obrotu). Zatem  $g_1(t) = t$  i  $g_2(t) = \vartheta_0$ .
- ▶ Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

- ▶ Sprawdzić, że w tym przypadku  $\Gamma_{22}^1 = -\alpha_1\alpha_1'$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$  zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- ▶ Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha_1'(g_2')^2 = 0$$

$$g_2'' + 2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- ▶ Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako  $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$  dla pewnej stałej  $\vartheta_0$  ( $\vartheta$  to kąt obrotu). Zatem  $g_1(t) = t$  i  $g_2(t) = \vartheta_0$ .
- ▶ Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

- ▶ Sprawdzić, że w tym przypadku  $\Gamma_{22}^1 = -\alpha_1\alpha_1'$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$  zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- ▶ Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha_1'(g_2')^2 = 0$$

$$g_2'' + 2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- ▶ Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako  $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$  dla pewnej stałej  $\vartheta_0$  ( $\vartheta$  to kąt obrotu). Zatem  $g_1(t) = t$  i  $g_2(t) = \vartheta_0$ .
- ▶ Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

- ▶ Sprawdzić, że w tym przypadku  $\Gamma_{22}^1 = -\alpha_1\alpha'_1$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1}$  zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- ▶ Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha'_1(g_2')^2 = 0$$

$$g_2'' + 2\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- ▶ Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako  $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$  dla pewnej stałej  $\vartheta_0$  ( $\vartheta$  to kąt obrotu). Zatem  $g_1(t) = t$  i  $g_2(t) = \vartheta_0$ .
- ▶ Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

## Dowód drugiej części, implikacja ( $\Rightarrow$ ).

- ▶ Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez  $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$  ( $t_0$  stałe), więc  $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$ .
- ▶ Prędkość krzywej  $\beta$  wynosi  $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$ . Jeśli  $\beta$  jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli  $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const.}$
- ▶ Mamy  $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$  (sprawdzić!), więc  $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$ .
- ▶ Z założenia  $\beta$  musi spełniać równania geodezyjnych, więc  $\alpha_2\alpha_2' = 0$ .
- ▶ Ponieważ możemy założyć, że  $\alpha_1(t_0) \neq 0$ , więc  $\alpha_1'(t_0) = 0$ .
- ▶ Wyprowadzić stąd wniosek, że w  $t_0$  wektor styczny do  $\alpha$  jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja ( $\Rightarrow$ ).

- ▶ Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez  $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$  ( $t_0$  stałe), więc  $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$ .
- ▶ Prędkość krzywej  $\beta$  wynosi  $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$ . Jeśli  $\beta$  jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli  $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const.}$
- ▶ Mamy  $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$  (sprawdzić!), więc  $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$ .
- ▶ Z założenia  $\beta$  musi spełniać równania geodezyjnych, więc  $\alpha_2\alpha_2' = 0$ .
- ▶ Ponieważ możemy założyć, że  $\alpha_1(t_0) \neq 0$ , więc  $\alpha_1'(t_0) = 0$ .
- ▶ Wyprowadzić stąd wniosek, że w  $t_0$  wektor styczny do  $\alpha$  jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja ( $\Rightarrow$ ).

- ▶ Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez  $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$  ( $t_0$  stałe), więc  $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$ .
- ▶ Prędkość krzywej  $\beta$  wynosi  $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$ . Jeśli  $\beta$  jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli  $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const.}$
- ▶ Mamy  $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$  (sprawdzić!), więc  $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$ .
- ▶ Z założenia  $\beta$  musi spełniać równania geodezyjnych, więc  $\alpha_2\alpha_2' = 0$ .
- ▶ Ponieważ możemy założyć, że  $\alpha_1(t_0) \neq 0$ , więc  $\alpha_1'(t_0) = 0$ .
- ▶ Wyprowadzić stąd wniosek, że w  $t_0$  wektor styczny do  $\alpha$  jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja ( $\Rightarrow$ ).

- ▶ Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez  $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$  ( $t_0$  stałe), więc  $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$ .
- ▶ Prędkość krzywej  $\beta$  wynosi  $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$ . Jeśli  $\beta$  jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli  $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const.}$
- ▶ Mamy  $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$  (sprawdzić!), więc  $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$ .
- ▶ Z założenia  $\beta$  musi spełniać równania geodezyjnych, więc  $\alpha_2\alpha_2' = 0$ .
- ▶ Ponieważ możemy założyć, że  $\alpha_1(t_0) \neq 0$ , więc  $\alpha_1'(t_0) = 0$ .
- ▶ Wyprowadzić stąd wniosek, że w  $t_0$  wektor styczny do  $\alpha$  jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja ( $\Rightarrow$ ).

- ▶ Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez  $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$  ( $t_0$  stałe), więc  $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$ .
- ▶ Prędkość krzywej  $\beta$  wynosi  $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$ . Jeśli  $\beta$  jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli  $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const.}$
- ▶ Mamy  $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$  (sprawdzić!), więc  $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$ .
- ▶ Z założenia  $\beta$  musi spełniać równania geodezyjnych, więc  $\alpha_2\alpha_2' = 0$ .
- ▶ Ponieważ możemy założyć, że  $\alpha_1(t_0) \neq 0$ , więc  $\alpha_1'(t_0) = 0$ .
- ▶ Wyprowadzić stąd wniosek, że w  $t_0$  wektor styczny do  $\alpha$  jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja ( $\Rightarrow$ ).

- ▶ Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez  $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$  ( $t_0$  stałe), więc  $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$ .
- ▶ Prędkość krzywej  $\beta$  wynosi  $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$ . Jeśli  $\beta$  jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli  $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const.}$
- ▶ Mamy  $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$  (sprawdzić!), więc  $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$ .
- ▶ Z założenia  $\beta$  musi spełniać równania geodezyjnych, więc  $\alpha_2\alpha_2' = 0$ .
- ▶ Ponieważ możemy założyć, że  $\alpha_1(t_0) \neq 0$ , więc  $\alpha_1'(t_0) = 0$ .
- ▶ Wyprowadzić stąd wniosek, że w  $t_0$  wektor styczny do  $\alpha$  jest równoległy do osi obrotu.

## Dowód drugiej części, implikacja ( $\Leftarrow$ ).

- ▶ Jeśli dla  $t_0$  wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy  $\alpha'_1(t_0) = 0$ .
- ▶ Mamy również  $g_1'' = 0$  (dlaczego?) i  $\beta$  spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- ▶ Twierdzimy, że jeśli wybierzemy  $\vartheta(s) = s$ , wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).



### Uwaga

*Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Dowód drugiej części, implikacja ( $\Leftarrow$ ).

- ▶ Jeśli dla  $t_0$  wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy  $\alpha'_1(t_0) = 0$ .
- ▶ Mamy również  $g_1'' = 0$  (dlaczego?) i  $\beta$  spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- ▶ Twierdzimy, że jeśli wybierzemy  $\vartheta(s) = s$ , wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).



### Uwaga

*Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.*

Dowód drugiej części, implikacja ( $\Leftarrow$ ).

- ▶ Jeśli dla  $t_0$  wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy  $\alpha'_1(t_0) = 0$ .
- ▶ Mamy również  $g_1'' = 0$  (dlaczego?) i  $\beta$  spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- ▶ Twierdzimy, że jeśli wybierzemy  $\vartheta(s) = s$ , wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).



### Uwaga

*Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Dowód drugiej części, implikacja ( $\Leftarrow$ ).

- ▶ Jeśli dla  $t_0$  wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy  $\alpha'_1(t_0) = 0$ .
- ▶ Mamy również  $g_1'' = 0$  (dlaczego?) i  $\beta$  spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- ▶ Twierdzimy, że jeśli wybierzemy  $\vartheta(s) = s$ , wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).



### Uwaga

*Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonnata

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Wniosek

*Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy  $\alpha$  może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.*

### Dowód:

Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku). □

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie trudniejszy.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Wniosek

*Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy  $\alpha$  może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.*

## Dowód:

Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku). □

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie trudniejszy.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Wniosek

*Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy  $\alpha$  może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.*

### Dowód:

Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku). □

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie bardziej skomplikowany.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jednoznaczność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

# Istnienie i jedyność geodezyjnych

## Przykład

Rozważmy  $M = \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ . Geodezyjne na każdym podzbiorze płaszczyzny są liniami prostymi (dlaczego?), więc nie istnieje nawet jedna krzywa geodezyjna w  $M$  łącząca punkty  $(1, 0)$  i  $(-1, 0)$ .

Następujące twierdzenie pokazuje, że istnienie takich “dziur” w powierzchni jest jednak jedyną przeszkodą do istnienia geodezyjnych.

# Istnienie i jedyność geodezyjnych

## Przykład

Rozważmy  $M = \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ . Geodezyjne na każdym podzbiorze płaszczyzny są liniami prostymi (dlaczego?), więc nie istnieje nawet jedna krzywa geodezyjna w  $M$  łącząca punkty  $(1, 0)$  i  $(-1, 0)$ .

Następujące twierdzenie pokazuje, że istnienie takich “dziur” w powierzchni jest jednak jedyną przeszkodą do istnienia geodezyjnych.

## Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $M$  jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów  $a, b \in M$  istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących  $a$  i  $b$ .*

- ▶ Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni  $M$ .
- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$ , oraz wektor  $v \in T_p M$ .
- ▶ Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez  $v$  kierunku i przechodzącej przez  $p$ .
- ▶ Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $M$  jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów  $a, b \in M$  istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących  $a$  i  $b$ .*

- ▶ Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni  $M$ .
- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$ , oraz wektor  $v \in T_p M$ .
- ▶ Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez  $v$  kierunku i przechodzącej przez  $p$ .
- ▶ Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $M$  jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów  $a, b \in M$  istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących  $a$  i  $b$ .*

- ▶ Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni  $M$ .
- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$ , oraz wektor  $v \in T_p M$ .
- ▶ Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez  $v$  kierunku i przechodzącej przez  $p$ .
- ▶ Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $M$  jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów  $a, b \in M$  istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących  $a$  i  $b$ .*

- ▶ Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni  $M$ .
- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$ , oraz wektor  $v \in T_p M$ .
- ▶ Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez  $v$  kierunku i przechodzącej przez  $p$ .
- ▶ Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $M$  jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów  $a, b \in M$  istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących  $a$  i  $b$ .*

- ▶ Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni  $M$ .
- ▶ Ustalmy punkt  $p \in M$ , oraz wektor  $v \in T_p M$ .
- ▶ Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez  $v$  kierunku i przechodzącej przez  $p$ .
- ▶ Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką.

- ▶ Dla każdego punktu  $p \in M$  i wektora  $v \in T_p M$  stycznego w tym punkcie istnieje:  $\varepsilon > 0$ , oraz taka krzywa geodezyjna

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M,$$

że  $\gamma(0) = p$  oraz  $\gamma'(0) = v$ .

- ▶ Krzywa  $\gamma$  jest jedyną taką krzywą w następującym sensie: Jeśli dla pewnej  $\delta > 0$  istnieje krzywa geodezyjna  $\tilde{\gamma}: (-\delta, \delta) \rightarrow M$  o tej własności, że  $\delta(0) = p$  i  $\delta'(0) = v$ , wtedy istnieje mniejsze otoczenie  $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$  na którym  $\gamma$  i  $\tilde{\gamma}$  są sobie równe. (za  $(-\zeta, \zeta)$  można przyjąć  $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$ )

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką.

- ▶ Dla każdego punktu  $p \in M$  i wektora  $v \in T_p M$  stycznego w tym punkcie istnieje:  $\varepsilon > 0$ , oraz taka krzywa geodezyjna

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M,$$

że  $\gamma(0) = p$  oraz  $\gamma'(0) = v$ .

- ▶ Krzywa  $\gamma$  jest jedną taką krzywą w następującym sensie: Jeśli dla pewnej  $\delta > 0$  istnieje krzywa geodezyjna  $\tilde{\gamma}: (-\delta, \delta) \rightarrow M$  o tej własności, że  $\delta(0) = p$  i  $\delta'(0) = v$ , wtedy istnieje mniejsze otoczenie  $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$  na którym  $\gamma$  i  $\tilde{\gamma}$  są sobie równe. (za  $(-\zeta, \zeta)$  można przyjąć  $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$ )

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką.

- ▶ Dla każdego punktu  $p \in M$  i wektora  $v \in T_p M$  stycznego w tym punkcie istnieje:  $\varepsilon > 0$ , oraz taka krzywa geodezyjna

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M,$$

że  $\gamma(0) = p$  oraz  $\gamma'(0) = v$ .

- ▶ Krzywa  $\gamma$  jest jedną taką krzywą w następującym sensie: Jeśli dla pewnej  $\delta > 0$  istnieje krzywa geodezyjna  $\tilde{\gamma}: (-\delta, \delta) \rightarrow M$  o tej własności, że  $\delta(0) = p$  i  $\delta'(0) = v$ , wtedy istnieje mniejsze otoczenie  $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$  na którym  $\gamma$  i  $\tilde{\gamma}$  są sobie równe. (za  $(-\zeta, \zeta)$  można przyjąć  $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$ )

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Uwaga

*Klasy równoważności funkcji równych na pewnym otoczeniu punktu  $p$  nazywa się czasami kiełkami funkcji w punkcie  $p$ . Zatem powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja między zbiorami: kiełków geodezyjnych w punkcie  $p$  oraz wektorów stycznych  $v \in T_p M$ .*

## Dowód:

Niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ . Skorzystamy z twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Uwaga

*Klasy równoważności funkcji równych na pewnym otoczeniu punktu  $p$  nazywa się czasami kiełkami funkcji w punkcie  $p$ . Zatem powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja między zbiorami: kiełków geodezyjnych w punkcie  $p$  oraz wektorów stycznych  $v \in T_p M$ .*

## Dowód:

Niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych wokół  $p \in M$ . Skorzystamy z twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Równania geodezyjnych są równaniami rzędu drugiego, ale jeśli wprowadzimy dodatkowe zmienne  $h_1 = g'_1$  i  $h_2 = g'_2$  możemy je zapisać jako układ równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} g'_1 = h_1 \\ g'_2 = h_2 \\ h'_1 = -\Gamma_{11}^1 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^1 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^1 h_2^2 \\ h'_2 = -\Gamma_{11}^2 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^2 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^2 h_2^2 \end{cases} \quad (12.1)$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia  
obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Równania geodezyjnych są równaniami rzędu drugiego, ale jeśli wprowadzimy dodatkowe zmienne  $h_1 = g'_1$  i  $h_2 = g'_2$  możemy je zapisać jako układ równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} g'_1 = h_1 \\ g'_2 = h_2 \\ h'_1 = -\Gamma_{11}^1 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^1 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^1 h_2^2 \\ h'_2 = -\Gamma_{11}^2 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^2 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^2 h_2^2 \end{cases} \quad (12.1)$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia  
obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Zamiast myśleć o tych równaniach jako o układzie, rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ h'_1(t) \\ h'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ -\Gamma_{11}^1(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^1(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^1(g(t))h_2^2(t) \\ -\Gamma_{11}^2(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^2(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^2(g(t))h_2^2(t) \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

gdzie  $(p_1, p_2)$  to współrzędne punktu  $x^{-1}(p)$ , zaś  $(v_1, v_2)$  to współczynniki wektora  $v$  w standardowej bazie  $\{x_1, x_2\}$ .

Zamiast myśleć o tych równaniach jako o układzie, rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ h'_1(t) \\ h'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ -\Gamma_{11}^1(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^1(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^1(g(t))h_2^2(t) \\ -\Gamma_{11}^2(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma_{12}^2(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma_{22}^2(g(t))h_2^2(t) \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

gdzie  $(p_1, p_2)$  to współrzędne punktu  $x^{-1}(p)$ , zaś  $(v_1, v_2)$  to współczynniki wektora  $v$  w standardowej bazie  $\{x_1, x_2\}$ .

## Twierdzenie (Picard-Lindelöf-Lipschitz-Cauchy-...)

*Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym i niech  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie funkcją gładką. Ponadto ustalmy punkt  $v_0 \in U$ . Istnieje  $\varepsilon > 0$ , oraz taka gładka funkcja  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , że  $\alpha(0) = v_0$ , oraz*

$$\alpha'(t) = F(\alpha(t)),$$

*dla wszystkich  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .*

*Co więcej, jeśli  $\tilde{\alpha}: (-\delta, \delta) \rightarrow U$  jest drugą taką funkcją spełniającą te własności, wtedy  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$  dla wszystkich  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$ .*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie (Picard-Lindelöf-Lipschitz-Cauchy-...)

*Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie zbiorem otwartym i niech  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie funkcją gładką. Ponadto ustalmy punkt  $v_0 \in U$ . Istnieje  $\varepsilon > 0$ , oraz taka gładka funkcja  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , że  $\alpha(0) = v_0$ , oraz*

$$\alpha'(t) = F(\alpha(t)),$$

*dla wszystkich  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .*

*Co więcej, jeśli  $\tilde{\alpha}: (-\delta, \delta) \rightarrow U$  jest drugą taką funkcją spełniającą te własności, wtedy  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$  dla wszystkich  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$ .*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedność

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Stosując to twierdzenie do naszej sytuacji widzimy, że istnieje krzywa  $G: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}^2$  (rozumiane jako  $U \times T_p M$ ),

$$G(t) = (k_1(t), k_2(t), l_1(t), l_2(t))$$

spełniająca nasz układ równań (12.1). Z konstrukcji tego układu wynika, że krzywa  $\gamma(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(k_1(t), k_2(t))$  jest szukaną geodezyjną przechodzącą przez punkt  $p \in M$ , oraz  $\gamma'(0) = v$ . Jedyność tej krzywej wynika z drugiej części zacytowanego powyżej twierdzenia. □

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Stosując to twierdzenie do naszej sytuacji widzimy, że istnieje krzywa  $G: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \times \mathbb{R}^2$  (rozumiane jako  $U \times T_p M$ ),

$$G(t) = (k_1(t), k_2(t), l_1(t), l_2(t))$$

spełniająca nasz układ równań (12.1). Z konstrukcji tego układu wynika, że krzywa  $\gamma(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(k_1(t), k_2(t))$  jest szukaną geodezyjną przechodzącą przez punkt  $p \in M$ , oraz  $\gamma'(0) = v$ . Jedyność tej krzywej wynika z drugiej części zacytowanego powyżej twierdzenia.  $\square$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Równania geodezyjnych

Przykład: powierzchnia obrotowa

Istnienie i jedyność

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

# Wykład 13

## Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geodezyjne I

Geodezyjne II

**Twierdzenie Gaussa-Bonneta**

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria hiperboliczna

Powierzchnie o stałej krzywiźnie

Geodezyjne I

Geodezyjne II

**Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta**

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu.

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką,  $p \in M$  punktem na niej, i niech  $v \in T_p M$  będzie wektorem stycznym do  $M$  w  $p$ .

- ▶ Liczbę  $\rho_v$  definiujemy jako

$$\rho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

( $\rho_v$  to maksymalna długość geodezyjnej na  $M$  jaką możemy poprowadzić przez  $p$  w kierunku  $v$ )

- ▶ Zbiór  $E_p \subset T_p M$  definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{ v \in T_p M : \rho_v > 1 \}$$

( $E_p$  to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu.

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką,  $p \in M$  punktem na niej, i niech  $v \in T_p M$  będzie wektorem stycznym do  $M$  w  $p$ .

- ▶ Liczbę  $\rho_v$  definiujemy jako

$$\rho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R}: \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

( $\rho_v$  to maksymalna długość geodezyjnej na  $M$  jaką możemy poprowadzić przez  $p$  w kierunku  $v$ )

- ▶ Zbiór  $E_p \subset T_p M$  definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{v \in T_p M: \rho_v > 1\}$$

( $E_p$  to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

Większość twierdzeń w tym wykładzie będziemy podawać bez dowodu.

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką,  $p \in M$  punktem na niej, i niech  $v \in T_p M$  będzie wektorem stycznym do  $M$  w  $p$ .

- ▶ Liczbę  $\rho_v$  definiujemy jako

$$\rho_v \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ r \in \mathbb{R}: \begin{array}{l} \text{istnieje geodezyjna } \gamma: (-r, r) \rightarrow M \\ \text{spełniająca: } \gamma(0) = p, \text{ oraz } \gamma'(0) = v. \end{array} \right\}.$$

( $\rho_v$  to maksymalna długość geodezyjnej na  $M$  jaką możemy poprowadzić przez  $p$  w kierunku  $v$ )

- ▶ Zbiór  $E_p \subset T_p M$  definiujemy jako

$$E_p \stackrel{\text{def.}}{=} \{ v \in T_p M: \rho_v > 1 \}$$

( $E_p$  to zbiór kierunków w których można poprowadzić geodezyjną dłuższą niż 1)

## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonna

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonna

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonna

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonna

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Uwaga

- ▶ W definicji  $E_p$  zamiast 1 mogliśmy wybrać jakąkolwiek dodatnią liczbę rzeczywistą.
- ▶ W przypadku płaszczyzny czy sfery widzimy, że dla każdego  $v$  w przestrzeni stycznej

$$\rho_v = \infty,$$

więc w szczególności dla sfery mamy  $E_p = T_p S^2$ .

- ▶ Oczywiście  $E_p \neq \emptyset$ , ponieważ środek układu współrzędnych zawsze należy do  $E_p$  (jako geodezyjna stała).

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonna

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonna

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.

- Jeżeli  $v \in E_p$  i  $s \in \mathbb{R}$ , wtedy  $sv$  należy do  $E_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-\rho_v < s < \rho_v.$$

(jeśli  $v$  należy do  $E_p$ , wówczas należy cały odcinek łączący  $-\rho_v v$  z  $\rho_v v$ )

- Jeżeli  $u \in T_p M$  jest wektorem jednostkowym, wtedy

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\rho_v < s < \rho_v\}.$$

## Dowód:

Ćwiczenie na zrozumienie definicji  $\rho_v$  i  $E_p$ . □

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.*

- *Jeśli  $v \in E_p$  i  $s \in \mathbb{R}$ , wtedy  $sv$  należy do  $E_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$-\rho_v < s < \rho_v.$$

*(jeśli  $v$  należy do  $E_p$ , wówczas należy cały odcinek łączący  $-\rho_v v$  z  $\rho_v v$ )*

- *Jeśli  $u \in T_p M$  jest wektorem jednostkowym, wtedy*

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\rho_v < s < \rho_v\}.$$

## Dowód:

Ćwiczenie na zrozumienie definicji  $\rho_v$  i  $E_p$ . □

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Wtedy zachodzą następujące twierdzenia.

- Jeżeli  $v \in E_p$  i  $s \in \mathbb{R}$ , wtedy  $sv$  należy do  $E_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-\rho_v < s < \rho_v.$$

(jeśli  $v$  należy do  $E_p$ , wówczas należy cały odcinek łączący  $-\rho_v v$  z  $\rho_v v$ )

- Jeżeli  $u \in T_p M$  jest wektorem jednostkowym, wtedy

$$E_p \cap \{su : s \in \mathbb{R}\} = \{su : -\rho_v < s < \rho_v\}.$$

## Dowód:

Ćwiczenie na zrozumienie definicji  $\rho_v$  i  $E_p$ . □

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $\mathcal{O} = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:*

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $0 = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:*

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $0 = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $0 = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:*

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $0 = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:*

- ▶ *otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,*
- ▶ *promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi*

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

Chociaż nie jest to oczywiste  $E_p$  zawiera kulę otwartą o odpowiednio małym promieniu.

Niech  $D(T_q M, \delta)$  oznacza kulę zawartą w przestrzeni  $T_q M$  o środku w punkcie  $0 = (0, 0)$  i promieniu  $\delta$ .

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Istnieją:*

- ▶ otoczenie otwarte  $W \subset M$  zawierające  $p$ ,
- ▶ promień  $\delta$  (zależny od punktu  $p$ ) takie, że dla każdego  $q \in W$  zachodzi

$$D(T_q M, \delta) \subset E_q.$$

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ . Dla każdego  $v \in E_p \subset T_p M$  niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą  $\gamma_v(0) = p, \gamma'_v(0) = v$ . **Odwzorowanie wykładnicze**  $\exp_p: E_p \rightarrow M$  jest zdefiniowane wzorem

$$\exp_p(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma_v(1).$$

## Uwaga

*Odwzorowanie wykładnicze jest dobrze określone, ponieważ wszystkie geodezyjne które mają dziedzinę większą niż  $(-1, 1)$  mają tę samą wartość dla  $t = 1$  (dlaczego?).*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ . Dla każdego  $v \in E_p \subset T_p M$  niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . **Odwzorowanie wykładnicze**  $\exp_p: E_p \rightarrow M$  jest zdefiniowane wzorem

$$\exp_p(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma_v(1).$$

## Uwaga

*Odwzorowanie wykładnicze jest dobrze określone, ponieważ wszystkie geodezyjne które mają dziedzinę większą niż  $(-1, 1)$  mają tę samą wartość dla  $t = 1$  (dlaczego?).*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ . Dla każdego  $v \in E_p \subset T_p M$  niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . **Odwzorowanie wykładnicze**  $\exp_p: E_p \rightarrow M$  jest zdefiniowane wzorem

$$\exp_p(v) \stackrel{\text{def.}}{=} \gamma_v(1).$$

## Uwaga

*Odwzorowanie wykładnicze jest dobrze określone, ponieważ wszystkie geodezyjne które mają dziedzinę większą niż  $(-1, 1)$  mają tę samą wartość dla  $t = 1$  (dlaczego?).*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

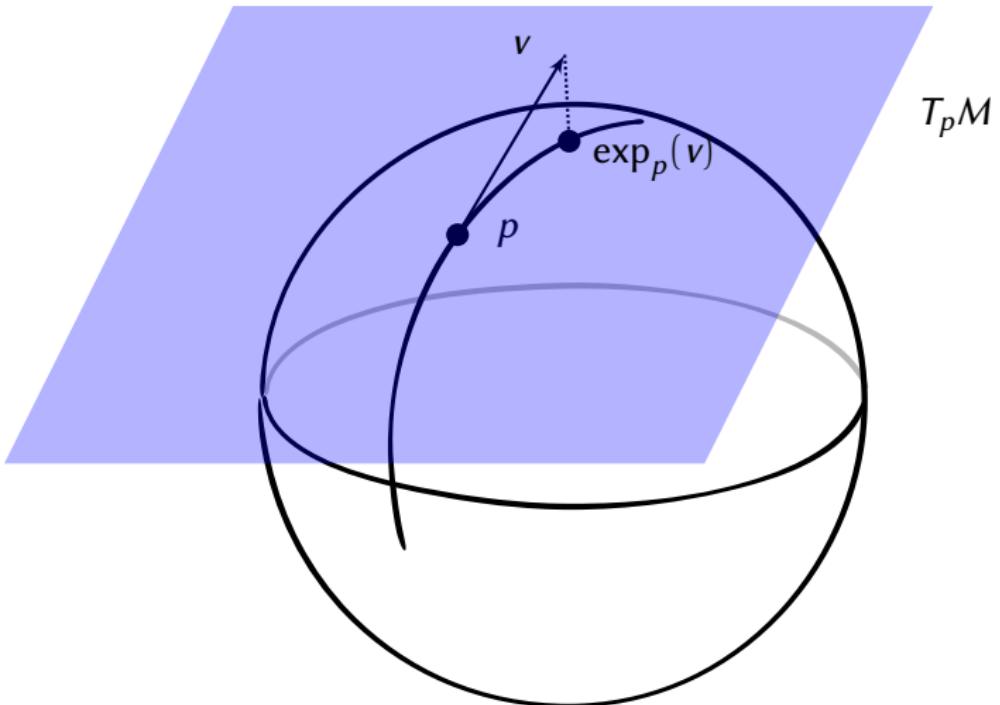
Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnie



## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Niech ponadto  $v \in E_p$  będzie wektorem stycznym do  $M$ . Wtedy krzywa  $\zeta: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  zdefiniowana przez

$$\zeta(s) = \exp_p(sv)$$

jest geodezyjną spełniającą  $\zeta(0) = p$  oraz  $\zeta'(0) = v$ . Jej długość na odcinku od  $p$  do  $\exp_p(v)$  jest równa  $\|v\|$ .

### Dowód:

Niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą:  $\gamma_v(0) = p$ , oraz  $\gamma'_v(0) = v$ . Ustalmy  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$  i zdefiniujmy  $\tilde{\gamma}: (-\rho_v/s, \rho_v/s) \rightarrow M$  jako

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(st).$$

## Lemat

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem. Niech ponadto  $v \in E_p$  będzie wektorem stycznym do  $M$ . Wtedy krzywa  $\zeta: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  zdefiniowana przez

$$\zeta(s) = \exp_p(sv)$$

jest geodezyjną spełniającą  $\zeta(0) = p$  oraz  $\zeta'(0) = v$ . Jej długość na odcinku od  $p$  do  $\exp_p(v)$  jest równa  $\|v\|$ .

### Dowód:

Niech  $\gamma_v: (-\rho_v, \rho_v) \rightarrow M$  będzie geodezyjną spełniającą:  $\gamma_v(0) = p$ , oraz  $\gamma'_v(0) = v$ . Ustalmy  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$  i zdefiniujmy  $\tilde{\gamma}: (-\rho_v/s, \rho_v/s) \rightarrow M$  jako

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(st).$$

Ponieważ funkcja  $t \rightarrow st$  jest liniowa, więc z charakteryzacji parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat 11.7) wynika, że  $\tilde{\gamma}$  jest również geodezyjną. Oczywiście  $\tilde{\gamma}(0) = p$  i  $\tilde{\gamma}'(0) = sv$ .

Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$ . Zatem  $\zeta \equiv \gamma_v$  jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jedyności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|$$

dla wszystkich  $s$ . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|v\| \int_0^1 ds = \|v\|.$$



Ponieważ funkcja  $t \rightarrow st$  jest liniowa, więc z charakteryzacji parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat 11.7) wynika, że  $\tilde{\gamma}$  jest również geodezyjną. Oczywiście  $\tilde{\gamma}(0) = p$  i  $\tilde{\gamma}'(0) = sv$ .

Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$ . Zatem  $\zeta \equiv \gamma_v$  jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jedyności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|$$

dla wszystkich  $s$ . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|v\| \int_0^1 ds = \|v\|.$$



Ponieważ funkcja  $t \rightarrow st$  jest liniowa, więc z charakteryzacji parametryzacji krzywych geodezyjnych (lemat 11.7) wynika, że  $\tilde{\gamma}$  jest również geodezyjną. Oczywiście  $\tilde{\gamma}(0) = p$  i  $\tilde{\gamma}'(0) = sv$ .

Mamy teraz:

$$\zeta(s) = \exp_p(sv) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(s)$$

dla wszystkich  $s \in (-\rho_v, \rho_v)$ . Zatem  $\zeta \equiv \gamma_v$  jest geodezyjną (korzystamy tutaj z jedyności!).

Przypomnijmy, że geodezyjne mają stałą prędkość, więc

$$\|\zeta'(s)\| = \|\zeta'(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|$$

dla wszystkich  $s$ . Zatem długość geodezyjnej można policzyć jako

$$\int_0^1 \|\zeta'(s)\| ds = \|v\| \int_0^1 ds = \|v\|.$$



Przypomnijmy, że przez  $D(T_p M, \delta)$  oznaczamy dysk o środku w punkcie  $(0, 0) \in T_p M$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ .*

*Istnieje wtedy taka  $\delta > 0$ , że*

- ▶ *zbiór  $\exp_p(D(T_p M, \delta))$  jest otwarty w  $M$ , oraz*
- ▶ *odwzorowanie wykładnicze*

$$\exp_p|_{D(T_p M, \delta_p)}$$

*ograniczone do zbioru  $D(T_p M, \delta_p)$  jest difeomorfizmem na swój obraz.*

Przypomnijmy, że przez  $D(T_p M, \delta)$  oznaczamy dysk o środku w punkcie  $(0, 0) \in T_p M$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ .*

*Istnieje wtedy taka  $\delta > 0$ , że*

- ▶ zbiór  $\exp_p(D(T_p M, \delta))$  jest otwarty w  $M$ , oraz
- ▶ odwzorowanie wykładnicze

$$\exp_p|_{D(T_p M, \delta_p)}$$

*ograniczone do zbioru  $D(T_p M, \delta_p)$  jest difeomorfizmem na swój obraz.*

Przypomnijmy, że przez  $D(T_p M, \delta)$  oznaczamy dysk o środku w punkcie  $(0, 0) \in T_p M$  i promieniu  $\delta$ .

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$ .*

*Istnieje wtedy taka  $\delta > 0$ , że*

- ▶ zbiór  $\exp_p(D(T_p M, \delta))$  jest otwarty w  $M$ , oraz
- ▶ odwzorowanie wykładnicze

$$\exp_p|_{D(T_p M, \delta_p)}$$

*ograniczone do zbioru  $D(T_p M, \delta_p)$  jest difeomorfizmem na swój obraz.*

## Uwaga

*Widzimy, że  $\exp_p: D(T_p M, \delta_p) \rightarrow M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Nietrudno sprawdzić, że jest to przykład lokalnego układu współrzędnych na  $M$  ( $D(T_p M, \delta) \cong D^2 \subset \mathbb{R}^2$ ).*

## Wniosek

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem na niej. Ustalmy  $0 < \varepsilon < \delta$ . Wtedy istnieje  $V \subset M$  – otwarte otoczenie punktu  $p$ , które posiada następujące własności:*

- ▶  $V \subset \exp_q(D(T_q M, \varepsilon))$  dla wszystkich  $q \in V$ .
- ▶ *każde dwa punkty w  $V$  można połączyć krzywą geodezyjną o długości mniejszej niż  $\varepsilon$ .*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Uwaga

*Widzimy, że  $\exp_p: D(T_p M, \delta_p) \rightarrow M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Nietrudno sprawdzić, że jest to przykład lokalnego układu współrzędnych na  $M$  ( $D(T_p M, \delta) \cong D^2 \subset \mathbb{R}^2$ ).*

## Wniosek

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem na niej. Ustalmy  $0 < \varepsilon < \delta$ . Wtedy istnieje  $V \subset M$  – otwarte otoczenie punktu  $p$ , które posiada następujące własności:*

- ▶  $V \subset \exp_q(D(T_q M, \varepsilon))$  dla wszystkich  $q \in V$ .
- ▶ *każde dwa punkty w  $V$  można połączyć krzywą geodezyjną o długości mniejszej niż  $\varepsilon$ .*

## Uwaga

Widzimy, że  $\exp_p: D(T_p M, \delta_p) \rightarrow M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Nietrudno sprawdzić, że jest to przykład lokalnego układu współrzędnych na  $M$  ( $D(T_p M, \delta) \cong D^2 \subset \mathbb{R}^2$ ).

## Wniosek

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $p \in M$  będzie punktem na niej. Ustalmy  $0 < \varepsilon < \delta$ . Wtedy istnieje  $V \subset M$  – otwarte otoczenie punktu  $p$ , które posiada następujące własności:

- ▶  $V \subset \exp_q(D(T_q M, \varepsilon))$  dla wszystkich  $q \in V$ .
- ▶ każde dwa punkty w  $V$  można połączyć krzywą geodezyjną o długości mniejszej niż  $\varepsilon$ .

## Uwaga

*Płaszczyzna ma tę własność, że wokół każdego punktu istnieje wypukłe otoczenie otwarте, tj. otoczenie w którym każde dwa punkty można połączyć odcinkiem geodezyjnej (czyli odcinkiem prostej). Tę własność nazywamy **wypukłością geodezyjną** i (co nie jest do końca oczywiste) posiada ją każda powierzchnia.*

# Triangulacja

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, i niech  $x, y, z \in M$  będą różnymi punktami. Podzbiór  $T \subset M$  nazywamy **trójkątem geodezyjnym** o wierzchołkach  $x, y, z$  i oznaczamy  $\Delta xyz$  jeśli  $T$  jest homeomorficzny z dyskiem jednostkowym  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , oraz brzeg  $T$  oznaczany jako  $\partial T$  składa się z trzech krzywych geodezyjnych  $\overline{xy}, \overline{yz}, \overline{xz}$  (o końcach w  $x, y, z$ ). Te geodezyjne nazywamy **krawędziami** trójkąta geodezyjnego  $\Delta xyz$ .

# Triangulacja

## Definicja

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką, i niech  $x, y, z \in M$  będą różnymi punktami. Podzbiór  $T \subset M$  nazywamy **trójkątem geodezyjnym** o wierzchołkach  $x, y, z$  i oznaczamy  $\triangle xyz$  jeśli  $T$  jest homeomorficzny z dyskiem jednostkowym  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , oraz brzeg  $T$  oznaczany jako  $\partial T$  składa się z trzech krzywych geodezyjnych  $\overline{xy}, \overline{yz}, \overline{xz}$  (o końcach w  $x, y, z$ ). Te geodezyjne nazywamy **krawędziami** trójkąta geodezyjnego  $\triangle xyz$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Założymy, że dla wszystkie trójkąty w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\bar{x}\bar{y}\}$ , gdzie  $\bar{x}\bar{y}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Założymy, że dla wszystkie trójkąty w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$ , gdzie  $\overline{xy}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Założymy, że dla wszystkie trójkąty w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$ , gdzie  $\overline{xy}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiznie

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie (skończoną) rodziną trójkątów geodezyjnych na  $M$ . Założymy, że dla wszystkie trójkąty w  $\mathcal{T}$  są różne i każdy punkt  $x \in M$  należy do pewnego trójkąta z  $\mathcal{T}$ . Rodzinę  $\mathcal{T}$  nazywamy **triangulacją** powierzchni  $M$  jeśli dla dowolnych dwóch trójkątów  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  mamy

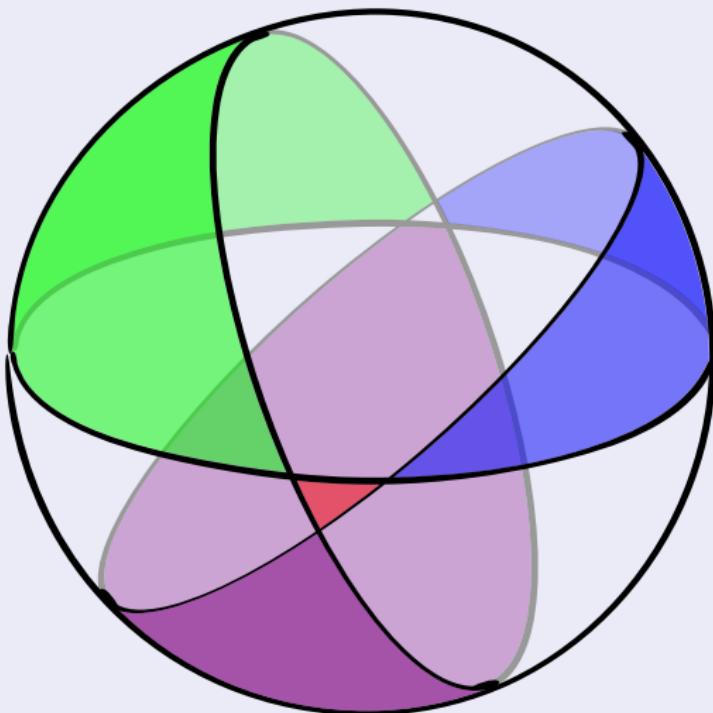
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{x\}$  i  $x$  jest ich wspólnym wierzchołkiem, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \{\overline{xy}\}$ , gdzie  $\overline{xy}$  jest ich wspólną krawędzią, lub
- ▶  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

## Lemat

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje triangulacja geodezyjna  $\mathcal{T}$  zwartej powierzchni  $M \subset \mathbb{R}^3$  w której każdy trójkąt geodezyjny ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .

## Przykład

Triangulacja geodezyjna sfery  $S^2$ .



Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiznie

## Twierdzenie (Lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $\triangle xyz$  jest trójkątem geodezyjnym na  $M$  zawartym w obrazie  $\exp_x(D(T_x M, \delta_x))$ , wtedy*

$$\int_{\triangle xyz} K dA = \angle x + \angle y + \angle z - \pi.$$

### Uwaga

*Zapis  $dA$  oznacza całkowanie względem formy powierzchni, którą używaliśmy podczas badania intuicyjnej definicji krzywizny Gaussa. Można inaczej zapisać  $dA = \det(g_{ij}) ds dt$ , wtedy należałoby wybrać lokalny układ współrzędnych i całkować po przeciwbrazie  $x^{-1}(\triangle xyz)$ .*

## Twierdzenie (Lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta)

Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką. Jeśli  $\triangle xyz$  jest trójkątem geodezyjnym na  $M$  zawartym w obrazie  $\exp_x(D(T_x M, \delta_x))$ , wtedy

$$\int_{\triangle xyz} K dA = \angle x + \angle y + \angle z - \pi.$$

### Uwaga

Zapis  $dA$  oznacza całkowanie względem formy powierzchni, którą używaliśmy podczas badania intuicyjnej definicji krzywizny Gaussa. Można inaczej zapisać  $dA = \det(g_{ij}) ds dt$ , wtedy należałoby wybrać lokalny układ współrzędnych i całkować po przeciwbrazie  $x^{-1}(\triangle xyz)$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją zwartej powierzchni  $M$ . Niech  $F_{\mathcal{T}}$  oznacza liczbę trójkątów w  $\mathcal{T}$ ,  $E_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich *różnych* krawędzi, zaś  $V_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich (*różnych*) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni  $M$ .

## Uwaga

Charakterystyka Eulera **nie zależy** od wyboru triangulacji, więc zamiast  $\chi^{\mathcal{T}}M$  będziemy pisać  $\chi(M)$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją zwartej powierzchni  $M$ . Niech  $F_{\mathcal{T}}$  oznacza liczbę trójkątów w  $\mathcal{T}$ ,  $E_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich *różnych* krawędzi, zaś  $V_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich (*różnych*) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni  $M$ .

## Uwaga

Charakterystyka Eulera *nie zależy od wyboru triangulacji*, więc zamiast  $\chi^{\mathcal{T}}M$  będziemy pisać  $\chi(M)$ .

## Definicja

Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją zwartej powierzchni  $M$ . Niech  $F_{\mathcal{T}}$  oznacza liczbę trójkątów w  $\mathcal{T}$ ,  $E_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich *różnych* krawędzi, zaś  $V_{\mathcal{T}}$  – liczbę ich (*różnych*) wierzchołków. Liczbę całkowitą

$$\chi^{\mathcal{T}}(M) \stackrel{\text{def.}}{=} V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}$$

nazywamy **charakterystyką Eulera** powierzchni  $M$ .

## Uwaga

Charakterystyka Eulera **nie zależy** od wyboru triangulacji, więc zamiast  $\chi^{\mathcal{T}}M$  będziemy pisać  $\chi(M)$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładowicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Twierdzenie (Twierdzenie Gaussa-Bonneta)

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie zwartą powierzchnią. Wtedy*

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M).$$

## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiznie

## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Dowód z wykorzystaniem lokalnego twierdzenia G-B:

- ▶ Ponieważ  $M$  jest zwarta, więc istnieje taka  $\delta_M$ , że odwzorowanie wykładnicze  $\exp_p: D_{\delta_M}^2 \rightarrow M$  w każdym punkcie  $p \in M$  jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
- ▶ Niech  $\mathcal{T}$  będzie triangulacją geodezyjną powierzchni  $M$ . Możemy założyć, że każdy trójkąt  $T \in \mathcal{T}$  jest zawarty w obrazie pewnego odwzorowania wykładniczego  $\exp_q$ .
- ▶ Zatem do każdego trójkąta  $T \in \mathcal{T}$  (i każdego jego wierzchołka) możemy zastosować lokalne twierdzenie Gaussa-Bonneta.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Odwzorowanie wykładnicze

Triangulacje

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.  
Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .  
(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.  
Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .  
(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.  
Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .  
(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Niech  $T \in \mathcal{T}$  będzie trójkątem i niech  $v$  będzie wierzchołkiem.  
Oznaczmy przez  $\angle(T, v)$  kąt w  $T$  przy wierzchołku  $v$ .  
(Przyjmujemy, że jeśli  $v \notin T$ , wtedy  $\angle(T, v) = 0$ ). Wtedy

$$\begin{aligned}\int_M K dA &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T K dA = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[ \left( \sum_{v \in T} \angle(T, v) \right) - \pi \right] =\end{aligned}$$

na mocy lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta.

$$\begin{aligned}&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{v \in T} \angle(T, v) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \pi = \\ &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

Ponieważ suma kątów wokół każdego wierzchołka jest równa  $2\pi$  mamy

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \in T} \sum_{T \in \mathcal{T}} \angle(T, v) - \pi F_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in T} 2\pi - \pi F_{\mathcal{T}} = \\ &= 2\pi V_{\mathcal{T}} - \pi F_{\mathcal{T}} = \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że każda krawędź należy dokładnie do dwóch trójkątów. Ponieważ każdy trójkąt ma trzy krawędzie mamy następującą równość

$$3F_{\mathcal{T}} = 2E_{\mathcal{T}}.$$

Stosując to do poprzedniego wyniku mamy

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \pi(2V_{\mathcal{T}} - F_{\mathcal{T}}) = \pi(2V_{\mathcal{T}} - 3F_{\mathcal{T}} + 2F_{\mathcal{T}}) = \\ &= 2\pi(V_{\mathcal{T}} - E_{\mathcal{T}} + F_{\mathcal{T}}) = 2\pi\chi(M). \end{aligned}$$

## Wykład 14

# Geometria hiperboliczna

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na półpłaszczyźnie Poincarégo

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej krzywiźnie

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półpłaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

[Geodezyjne I](#)

[Geodezyjne II](#)

[Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta](#)

[Geometria  
hiperboliczna](#)

[Aksjomaty Euklidesa](#)

[Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I](#)

[Model Poincarégo](#)

[Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo](#)

[Aksjomat hiperboliczny](#)

[Aksjomat Pascha](#)

[Symetrie hiperboliczne](#)

[Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie](#)

W ujęciu tradycyjnym, nazywanym geometrią syntetyczną, geometria euklidesowa przedstawiana jest jako system aksjomatyczny, w którym wszystkie twierdzenia muszą wynikać z aksjomatów, czyli zdań przyjmowanych z góry jako prawdziwe.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

**Playfair** Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

**W. Bolyai** Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

**Playfair** Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

**W. Bolyai** Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

**Playfair** Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

**W. Bolyai** Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

**Playfair** Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

**W. Bolyai** Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

**Playfair** Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

**W. Bolyai** Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

**Playfair** Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

**W. Bolyai** Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

**J. Wallis** Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej  $\pi$ .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

**Aksjomat trójkąta** Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi  $\pi$ .

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półpłaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

**J. Wallis** Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej  $\pi$ .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

**Aksjomat trójkąta** Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi  $\pi$ .

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

**J. Wallis** Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej  $\pi$ .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

**Aksjomat trójkąta** Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi  $\pi$ .

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

**J. Wallis** Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej  $\pi$ .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

**Aksjomat trójkąta** Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi  $\pi$ .

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półplaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

**J. Wallis** Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej  $\pi$ .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

**Aksjomat trójkąta** Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi  $\pi$ .

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

**J. Wallis** Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej  $\pi$ .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

**Aksjomat trójkąta** Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi  $\pi$ .

Jaki wniosek można wyprowadzić z aksjomatu trójkąta i twierdzenia Gaussa-Bonneta?

## Definicja

**Płaszczyzną hiperboliczną** nazywamy dowolny zbiór  $\mathcal{P}$  wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniający *pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa*, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat o równoległych**:

- 5'. Dla pewnej prostej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  i pewnego punktu  $M \in \mathcal{P}$  nieleżącego na  $\mathcal{D}$  istnieją co najmniej dwie różne proste  $\Delta_1, \Delta_2$  przechodzące przez  $M$  i rozłączne z  $\mathcal{D}$ .

## Uwaga

Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia **geometrii absolutnej**), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.

## Definicja

**Płaszczyzną hiperboliczną** nazywamy dowolny zbiór  $\mathcal{P}$  wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniający *pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa*, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat o równoległych**:

- 5'. Dla pewnej prostej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  i pewnego punktu  $M \in \mathcal{P}$  nieleżącego na  $\mathcal{D}$  istnieją co najmniej dwie różne proste  $\Delta_1, \Delta_2$  przechodzące przez  $M$  i rozłączne z  $\mathcal{D}$ .

## Uwaga

Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia *geometrii absolutnej*), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.

## Definicja

**Płaszczyzną hiperboliczną** nazywamy dowolny zbiór  $\mathcal{P}$  wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniający *pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa*, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat o równoległych**:

- 5'. Dla pewnej prostej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  i pewnego punktu  $M \in \mathcal{P}$  nieleżącego na  $\mathcal{D}$  istnieją co najmniej dwie różne proste  $\Delta_1, \Delta_2$  przechodzące przez  $M$  i rozłączne z  $\mathcal{D}$ .

## Uwaga

Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia **geometrii absolutnej**), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górnjej półpłaszczyźnie.

### Definicja

Górna półpłaszczyzną lub półpłaszczyzną Poincarégo nazywamy zbiór

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

Prostą hiperboliczną w  $\mathcal{H}$  nazywamy każdy podzbiór  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  określony równaniem postaci:

$$x = x_0, \quad \text{albo} \quad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

gdzie  $x_0$  i  $r > 0$  są dowolnymi stałymi.

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górnej półpłaszczyźnie.

## Definicja

**Górna półpłaszczyzną lub półpłaszczyzną Poincarégo** nazywamy zbiór

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

Prostą hiperboliczną w  $\mathcal{H}$  nazywamy każdy podzbiór  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  określony równaniem postaci:

$$x = x_0, \quad \text{albo} \quad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

gdzie  $x_0$  i  $r > 0$  są dowolnymi stałymi.

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górnej półpłaszczyźnie.

## Definicja

**Górna półpłaszczyzną lub półpłaszczyzną Poincarégo** nazywamy zbiór

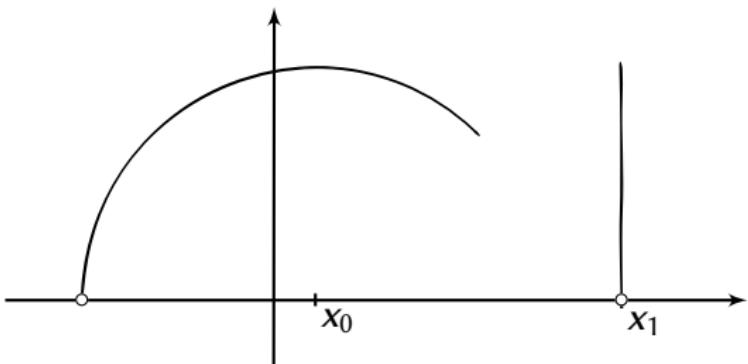
$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

**Prostą hiperboliczną** w  $\mathcal{H}$  nazywamy każdy podzbiór  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  określony równaniem postaci:

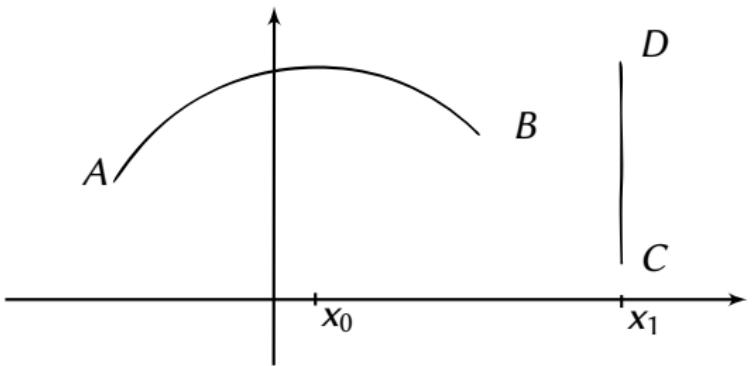
$$x = x_0, \quad \text{albo} \quad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

gdzie  $x_0$  i  $r > 0$  są dowolnymi stałymi.

Proste hiperboliczne na półpłaszczyźnie Poincarégo są to półproste otwarte na górnej płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  mające początki na osi  $x$  i prostopadłe do tej osi albo półokręgi otwarte oparte na osi  $x$ .



## Półproste hiperboliczne.



## Odcinki hiperboliczne.

## Definicja

Rozważmy funkcję  $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  która dla prostej hiperbolicznej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 = r^2 \right\}. \end{cases}$$

Każda prosta hiperboliczna  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  o równaniu  $f_{\mathcal{D}}(x, y) = 0$  dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\begin{aligned} &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \quad \text{oraz} \\ &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0\}, \end{aligned}$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Będziemy nazywać każdy z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi**.

## Definicja

Rozważmy funkcję  $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  która dla prostej hiperbolicznej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \begin{array}{l} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 = r^2 \end{array} \right\}. \end{cases}$$

Każda prosta hiperboliczna  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  o równaniu  $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\begin{aligned} &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \quad \text{oraz} \\ &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0\}, \end{aligned}$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Będziemy nazywać każdy z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi**.

## Definicja

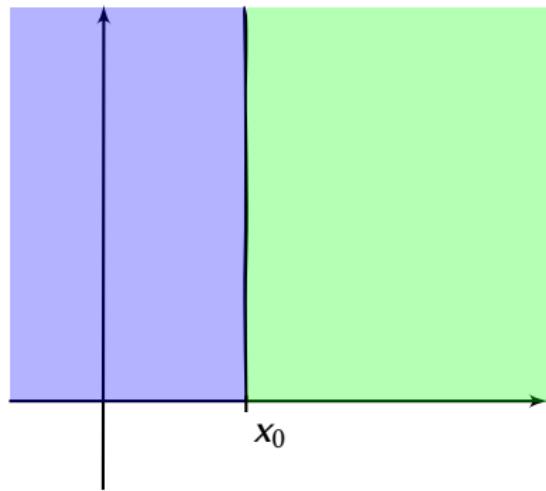
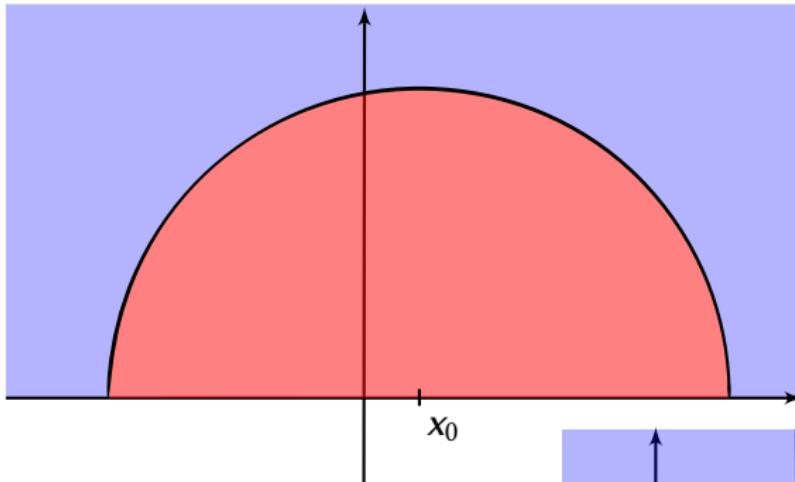
Rozważmy funkcję  $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  która dla prostej hiperbolicznej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \begin{array}{l} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 = r^2 \end{array} \right\}. \end{cases}$$

Każda prosta hiperboliczna  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  o równaniu  $f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\begin{aligned} &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \quad \text{oraz} \\ &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0\}, \end{aligned}$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Będziemy nazywać każdy z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi**.

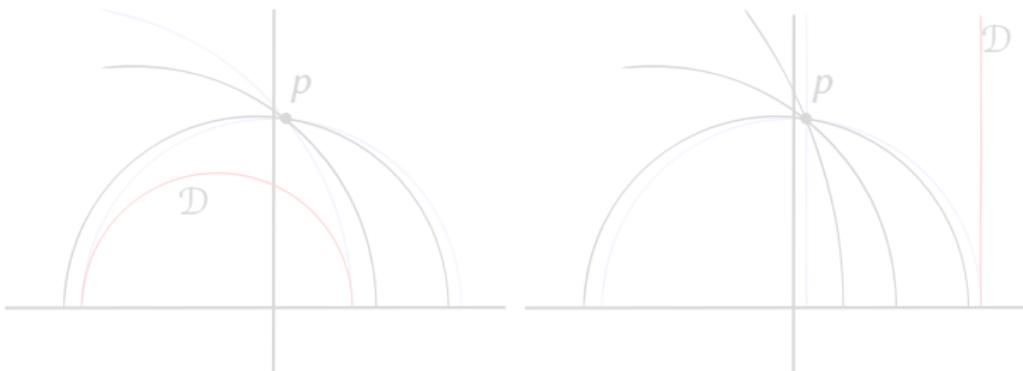


## Twierdzenie

*Niech  $\mathcal{D}$  będzie prostą hiperbową na półpłaszczyźnie Poincarégo niech  $p \notin \mathcal{D}$  będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończenie wiele prostych w  $\mathcal{H}$  przechodzących przez punkt  $p$  i rozłącznych z  $\mathcal{D}$ .*

### Dowód:

Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysunków.



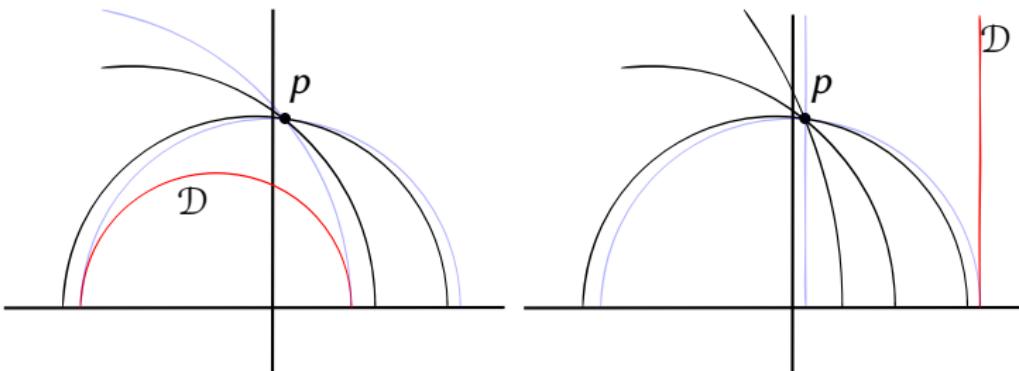
Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą  $D$  w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**.

## Twierdzenie

Niech  $\mathcal{D}$  będzie prostą hiperbową na półpłaszczyźnie Poincarégo niech  $p \notin \mathcal{D}$  będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończenie wiele prostych w  $\mathcal{H}$  przechodzących przez punkt  $p$  i rozłącznych z  $\mathcal{D}$ .

### Dowód:

Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysункów.



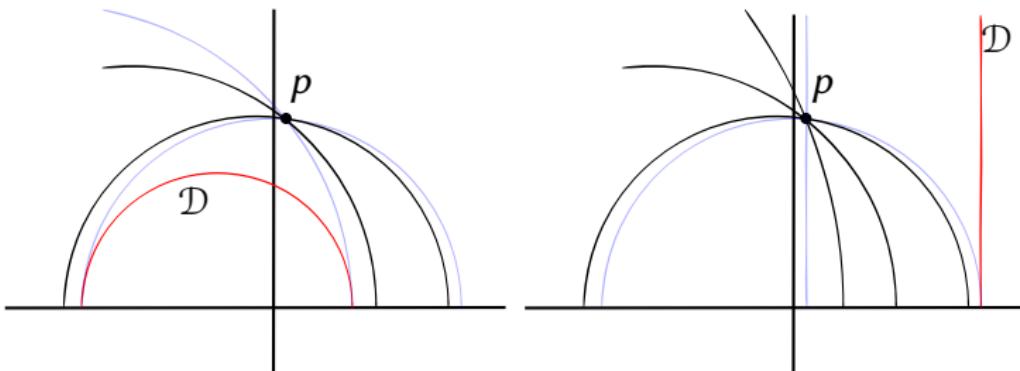
Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą  $D$  w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**.

## Twierdzenie

Niech  $\mathcal{D}$  będzie prostą hiperbowiczną na półpłaszczyźnie Poincarégo niech  $p \notin \mathcal{D}$  będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończenie wiele prostych w  $\mathcal{H}$  przechodzących przez punkt  $p$  i rozłącznych z  $\mathcal{D}$ .

### Dowód:

Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysункów.



Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą  $D$  w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**.

## Lemat

Jeśli  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  są dwoma różnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo, to dla dowolnej prostej hiperbolicznej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  zachodzi równoważność:

$$(\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset) \iff (f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leq 0).$$

## Twierdzenie (Aksjomat Pascha)

Jeśli  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,  $C = (x_3, y_3)$  są dowolnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo nieleżącymi na jednej prostej hiperbolicznej oraz pewna prosta hiperboliczna  $\mathcal{D}$  przecina jeden z odcinków hiperbolicznych  $[AB]$ ,  $[BC]$  lub  $[CA]$ , to przecina ona jeszcze co najmniej jeden z nich.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półpłaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperboliczna

Aksjomaty Euklidesa

Definicja płaszczyzny  
hiperbolicznej I

Model Poincarégo

Geometria elementarna na  
półpłaszczyźnie Poincarégo

Aksjomat hiperboliczny

Aksjomat Pascha

Symetrie hiperboliczne

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

## Lemat

Jeśli  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  są dwoma różnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo, to dla dowolnej prostej hiperbolicznej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  zachodzi równoważność:

$$(\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset) \iff (f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leq 0).$$

## Twierdzenie (Aksjomat Pascha)

Jeśli  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,  $C = (x_3, y_3)$  są dowolnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo nieleżącymi na jednej prostej hiperbolicznej oraz pewna prosta hiperboliczna  $\mathcal{D}$  przecina jeden z odcinków hiperbolicznych  $[AB]$ ,  $[BC]$  lub  $[CA]$ , to przecina ona jeszcze co najmniej jeden z nich.

## Dowód:

Przypuśćmy, że  $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset$  oraz  $\mathcal{D} \cap [BC] = \emptyset$  i  $\mathcal{D} \cap [CA] = \emptyset$ . Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leq 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) > 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) > 0.$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez  $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$  otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. □

## Dowód:

Przypuśćmy, że  $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset$  oraz  $\mathcal{D} \cap [BC] = \emptyset$  i  $\mathcal{D} \cap [CA] = \emptyset$ . Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leq 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) > 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) > 0.$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez  $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$  otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. □

## Dowód:

Przypuśćmy, że  $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset$  oraz  $\mathcal{D} \cap [BC] = \emptyset$  i  $\mathcal{D} \cap [CA] = \emptyset$ . Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leq 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) > 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) > 0.$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez  $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$  otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. □

## Dowód:

Przypuśćmy, że  $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset$  oraz  $\mathcal{D} \cap [BC] = \emptyset$  i  $\mathcal{D} \cap [CA] = \emptyset$ . Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leq 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) > 0,$$

$$f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) > 0.$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez  $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$  otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. □

Z każdą prostą hiperbową można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

## Definicja

**Symetrią hiperbową** względem prostej hiperbowej  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  nazywamy:

- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $x = x_0$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **symetrii osiowej** względem prostej w  $\mathbb{R}^2$  o równaniu  $x = x_0$ , lub
- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **inwersji** względem okręgu w  $\mathbb{R}^2$  mającego równanie  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ .

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperbową można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

## Definicja

**Symetrią hiperbową** względem prostej hiperbowej

$\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  nazywamy:

- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $x = x_0$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **symetrii osiowej** względem prostej w  $\mathbb{R}^2$  o równaniu  $x = x_0$ , lub
- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **inwersji** względem okręgu w  $\mathbb{R}^2$  mającego równanie  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ .

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperbową można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

## Definicja

**Symetrią hiperbową** względem prostej hiperbowej

$\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  nazywamy:

- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $x = x_0$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **symetrii osiowej** względem prostej w  $\mathbb{R}^2$  o równaniu  $x = x_0$ , lub
- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **inwersji** względem okręgu w  $\mathbb{R}^2$  mającego równanie  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ .

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperbową można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

## Definicja

**Symetrią hiperbową** względem prostej hiperbowej

$\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  nazywamy:

- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $x = x_0$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **symetrii osiowej** względem prostej w  $\mathbb{R}^2$  o równaniu  $x = x_0$ , lub
- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **inwersji** względem okręgu w  $\mathbb{R}^2$  mającego równanie  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ .

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są izometriami półpłaszczyzny Poincarégo.

Z każdą prostą hiperbową można stowarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

## Definicja

**Symetrią hiperbową** względem prostej hiperbowej

$\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  nazywamy:

- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $x = x_0$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **symetrii osiowej** względem prostej w  $\mathbb{R}^2$  o równaniu  $x = x_0$ , lub
- jeśli  $\mathcal{D}$  dana jest równaniem  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ : obcięcie do  $\mathcal{H}$  **inwersji** względem okręgu w  $\mathbb{R}^2$  mającego równanie  $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$ .

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

## Wykład 15

# Powierzchnie o stałej krzywiźnie

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

Geometria hiperboliczna

**Powierzchnie o stałej krzywiźnie**

Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Opracowanie:  
Marek Kaluba

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

**Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie**

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrysy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej  $-1$ , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.

## Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie:  
Marek Kaluba

## Powierzchnie o stałej krzywiźnie

## Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo

## Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo

## Metryka hiperboliczna

## Izometrie płaszczyzny Poincarégo

## Torusy o stałej krzywiźnie

### Torus genus $g$

## Flaski torus w $\mathbb{R}^3$

Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrysy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej  $-1$ , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.

## Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie:  
Marek Kaluba

## Powierzchnie o stałej krzywiźnie

## Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo

## Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo

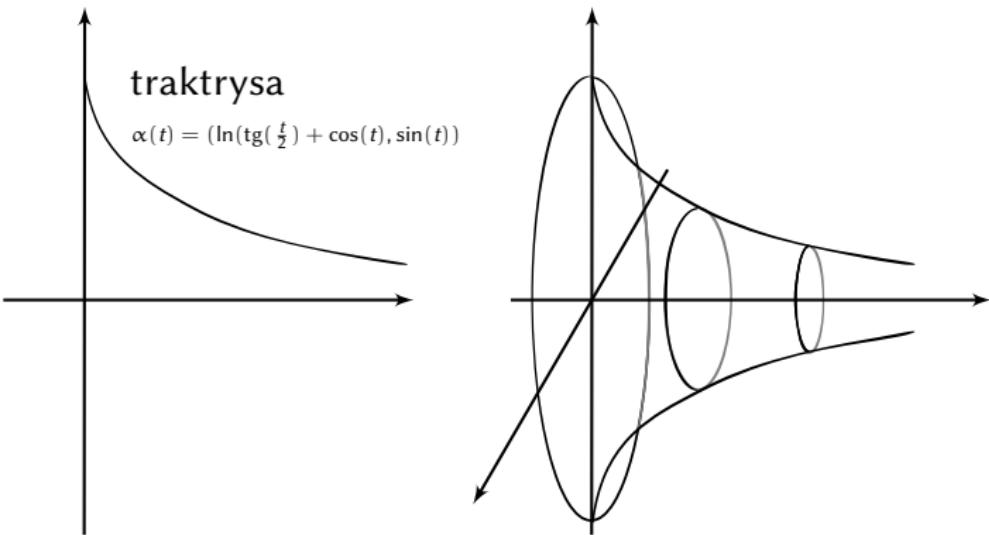
## Metryka hiperboliczna

## Izometrie płaszczyzny Poincarégo

## Torusy o stałej krzywiżnie

### Torus genus $g$

## Płaski torus w $\mathbb{R}^3$



Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrysy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej  $-1$ , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.

## Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie:  
Marek Kaluba

## Powierzchnie o stałej krzywiźnie

## Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo

## Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo

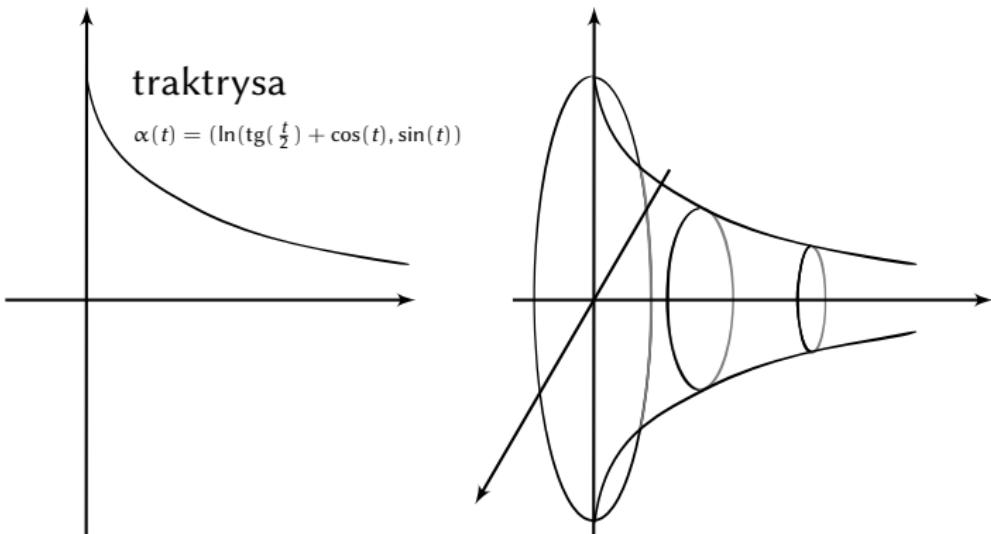
## Metryka hiperboliczna

## Izometrie płaszczyzny Poincarégo

## Torusy o stałej krzywiźnie

### Torus genus $g$

## Płaski torus w $\mathbb{R}^3$



W roku 1901 D. Hilbert udowodnił, że zamknięta powierzchnia o ujemnej i stałej krzywiźnie nie może być zanurzona (gładko!) w  $\mathbb{R}^3$ .

## Definicja

Płaszczyznę hiperboliczną  $\mathcal{H}$  definiujemy jako półpłaszczyznę

$$\mathcal{H} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\},$$

wyposażoną w pierwszą formę podstawową

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{I(u, v)\}_{(u, v) \in \mathcal{H}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{bmatrix} \right\}$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat ??) możemy znaleźć symbole Christoffella:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v}$$

Teraz używając jawniej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą  $-1$ . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż  $\pi$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiznieGeometria różniczkowa  
plaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiznie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat ??) możemy znaleźć symbole Christoffella:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v}$$

Teraz używając jawniej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą  $-1$ . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż  $\pi$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiznieGeometria różniczkowa  
płaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiznie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat ??) możemy znaleźć symbole Christoffella:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v}$$

Teraz używając jawniej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą  $-1$ . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż  $\pi$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiznieGeometria różniczkowa  
płaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiznie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnieGeometria różniczkowa  
płaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$ 

Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  będzie geodezyjną w  $\mathcal{H}$ .  
Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$u''(t) - \frac{2}{v(t)} u'(t)v'(t) = 0$$

$$v''(t) + \frac{1}{v(t)} ((u'(t))^2 - (v'(t))^2) = 0.$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest  $u(t) = \text{const}$ , przez co  
otrzymujemy półproste prostopadłe do osi  $OX$ .

### Zadanie

Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację  
 $v(t) = C_1 e^{C_2 t}$ .

Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  będzie geodezyjną w  $\mathcal{H}$ .  
Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$u''(t) - \frac{2}{v(t)} u'(t)v'(t) = 0$$

$$v''(t) + \frac{1}{v(t)} ((u'(t))^2 - (v'(t))^2) = 0.$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest  $u(t) = \text{const}$ , przez co  
otrzymujemy półproste prostopadłe do osi  $OX$ .

### Zadanie

Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację  
 $v(t) = C_1 e^{C_2 t}$ .

Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  będzie geodezyjną w  $\mathcal{H}$ . Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$u''(t) - \frac{2}{v(t)} u'(t)v'(t) = 0$$

$$v''(t) + \frac{1}{v(t)} ((u'(t))^2 - (v'(t))^2) = 0.$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest  $u(t) = \text{const}$ , przez co otrzymujemy półproste prostopadłe do osi  $OX$ .

## Zadanie

Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację  
 $v(t) = C_1 e^{C_2 t}$ .

Przyjmijmy teraz, że  $u(t) \neq \text{const}$ , zatem  $u'(t) \neq 0$  i spróbujmy wyznaczyć  $v$  jako funkcję  $u(t)$ . Mamy

$$\frac{d[v(u(t))]}{dt} = \frac{d[v(u(t))]}{du(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad \text{więc} \quad \frac{v'(u(t))}{u'(t)} = \frac{dv(u(t))}{du(t)}$$

gdzie notację primową rezerwujemy dla pochodnej po  $t$ .

Stosując teraz regułę łańcuchową otrzymujemy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \frac{d^2[v(u)]}{du^2} &= \frac{d}{du} \left( \frac{v'(u)}{u'} \right) = \\ &= \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'}. \end{aligned}$$

Przyjmijmy teraz, że  $u(t) \neq \text{const}$ , zatem  $u'(t) \neq 0$  i spróbujmy wyznaczyć  $v$  jako funkcję  $u(t)$ . Mamy

$$\frac{d[v(u(t))]}{dt} = \frac{d[v(u(t))]}{du(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad \text{więc} \quad \frac{v'(u(t))}{u'(t)} = \frac{dv(u(t))}{du(t)}$$

gdzie notację primową rezerwujemy dla pochodnej po  $t$ .  
Stosując teraz regułę łańcuchową otrzymujemy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \frac{d^2[v(u)]}{du^2} &= \frac{d}{du} \left( \frac{v'(u)}{u'} \right) = \\ &= \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'}. \end{aligned}$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} = \\ = \frac{1}{(u')^3} \left[ u' \left( \frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left( \frac{2}{v} u' v' \right) \right],$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} \left[ ((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2 \right] = \\ = -\frac{1}{v} \left[ 1 + \left( \frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left( 1 + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right).$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\begin{aligned} \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} &= \\ &= \frac{1}{(u')^3} \left[ u' \left( \frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left( \frac{2}{v} u' v' \right) \right], \end{aligned}$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$\begin{aligned} &= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} \left[ ((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{v} \left[ 1 + \left( \frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left( 1 + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\begin{aligned} \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} &= \\ &= \frac{1}{(u')^3} \left[ u' \left( \frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left( \frac{2}{v} u' v' \right) \right], \end{aligned}$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$\begin{aligned} &= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} \left[ ((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{v} \left[ 1 + \left( \frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left( 1 + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Zatem

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} = -1 - \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2;$$

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left( v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1,$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1 u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyć (pamiętając, że  $v > 0$ ) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor  $[C, 0]$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Zatem

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} = -1 - \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2;$$

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left( v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1,$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1 u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyć (pamiętając, że  $v > 0$ ) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor  $[C, 0]$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Zatem

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} = -1 - \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2;$$

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left( v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1,$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1 u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyć (pamiętając, że  $v > 0$ ) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor  $[C, 0]$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Uwaga

*Jeśli pierwsze współrzędne punktów  $P$  i  $Q$  są równe, to geodezyjną je łączącą jest zwykła prosta. Jeśli pierwsze współrzędne nie są równe, wtedy istnieje dokładnie jeden okrąg o środku na osi  $OX$  na którym leżą oba punkty. W każdym przypadku widzimy, że na płaszczyźnie hiperbolicznej każde dwa punkty  $P$  i  $Q$  łączy dokładnie jedna krzywa geodezyjna.*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Uwaga

*Jeśli pierwsze współrzędne punktów  $P$  i  $Q$  są równe, to geodezyjną je łączącą jest zwykła prosta. Jeśli pierwsze współrzędne nie są równe, wtedy istnieje dokładnie jeden okrąg o środku na osi  $OX$  na którym leżą oba punkty. W każdym przypadku widzimy, że na płaszczyźnie hiperbowej każdej dwa punkty  $P$  i  $Q$  łączy dokładnie jedna krzywa geodezyjna.*

Obliczymy teraz długość geodezyjnej na powierzchni hiperbolicznej,  $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$  łączącej punkty  $P$  i  $Q$ .

Dla przypomnienia:

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość obrazu krzywej  $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  jest równa*

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

*co można bezpośrednio zapisać:*

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaski Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Obliczymy teraz długość geodezyjnej na powierzchni hiperbolicznej,  $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$  łączącej punkty  $P$  i  $Q$ .

Dla przypomnienia:

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość obrazu krzywej  $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  jest równa*

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

*co można bezpośrednio zapisać:*

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Obliczymy teraz długość geodezyjnej na powierzchni hiperbolicznej,  $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$  łączącej punkty  $P$  i  $Q$ .

Dla przypomnienia:

## Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość obrazu krzywej  $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  jest równa*

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej  $u = u_0$ , tj.  $P = (u_0, a)$  i  $Q = (u_0, b)$ . Wtedy przy parametryzacji  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$  otrzymujemy:

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli  $P$  zbliża się do osi  $OX$  jego odległość od ustalonego  $Q$  dąży do  $\infty$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaskiej Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- ▶ Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej  $u = u_0$ , tj.  $P = (u_0, a)$  i  $Q = (u_0, b)$ . Wtedy przy parametryzacji  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$  otrzymujemy:

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli  $P$  zbliża się do osi  $OX$  jego odległość od ustalonego  $Q$  dąży do  $\infty$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaskiej Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- ▶ Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej  $u = u_0$ , tj.  $P = (u_0, a)$  i  $Q = (u_0, b)$ . Wtedy przy parametryzacji  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$  otrzymujemy:

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli  $P$  zbliża się do osi  $OX$  jego odległość od ustalonego  $Q$  dąży do  $\infty$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

- Niech teraz geodezyjna łącząca punkty  $P$  i  $Q$  będzie łukiem okręgu  $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$  i niech  $\varphi$  i  $\psi$  będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| = \\ &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|_{\varphi}^{\psi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right| \end{aligned}$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaskiej Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

**Metryka hiperboliczna**

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

- Niech teraz geodezyjna łącząca punkty  $P$  i  $Q$  będzie łukiem okręgu  $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$  i niech  $\varphi$  i  $\psi$  będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| = \\ &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|_{\varphi}^{\psi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right| \end{aligned}$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnieGeometria różniczkowa  
plaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

- ▶ Niech teraz geodezyjna łącząca punkty  $P$  i  $Q$  będzie łukiem okręgu  $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$  i niech  $\varphi$  i  $\psi$  będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| \right|_{\varphi}^{\psi} = \left| \ln \frac{\tan \frac{\psi}{2}}{\tan \frac{\varphi}{2}} \right|
 \end{aligned}$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnieGeometria różniczkowa  
plaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Geodezyjne I

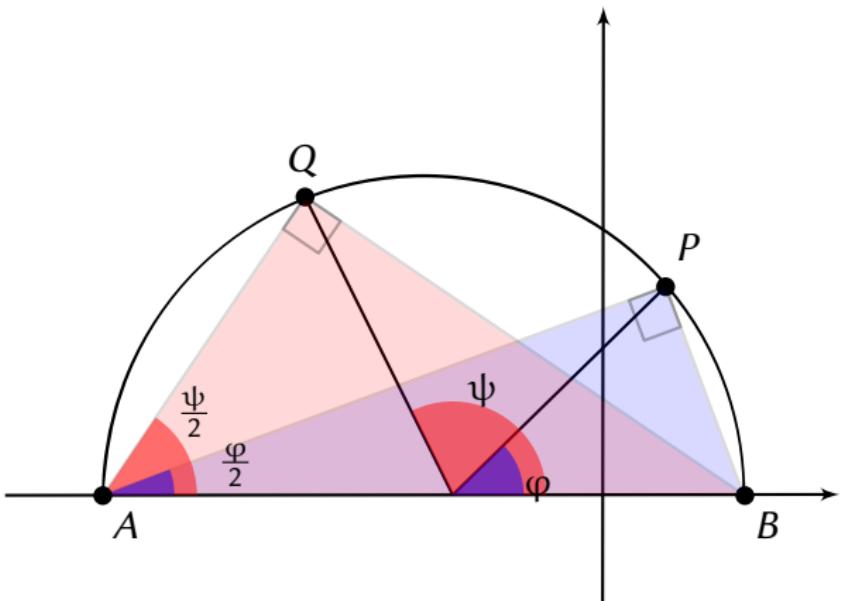
Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnieGeometria różniczkowa  
plaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$ 

Analizując powyższy rysunek łatwo dostrzec, że ten iloraz jest równy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} \right| = \left| \ln \left( \frac{d_{\mathcal{E}}(A, P)}{d_{\mathcal{E}}(B, P)} \Big/ \frac{d_{\mathcal{E}}(A, Q)}{d_{\mathcal{E}}(B, Q)} \right) \right|$$

gdzie  $d_{\mathcal{E}}$  oznacza zwykłą odległość euklidesową

Geodezyjne I

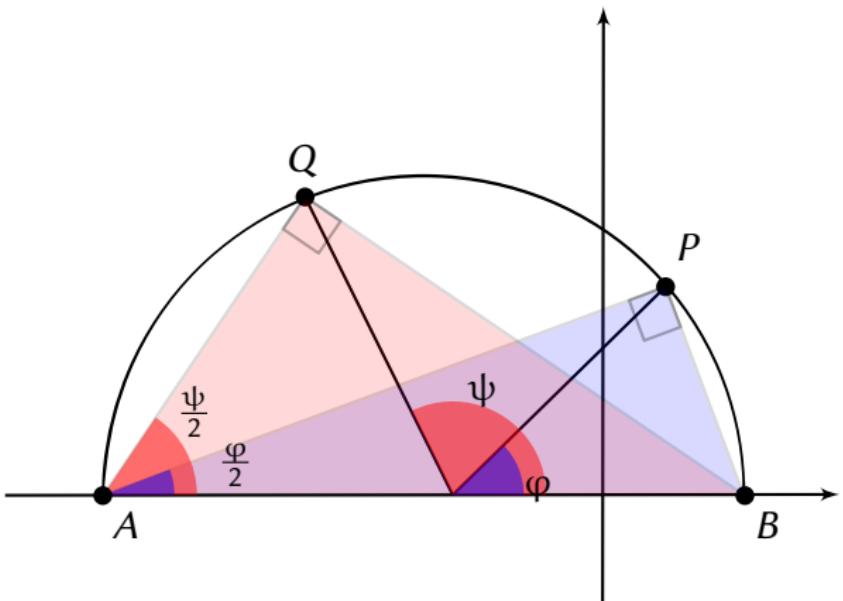
Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnieGeometria różniczkowa  
plaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$ 

Analizując powyższy rysunek łatwo dostrzec, że ten iloraz jest równy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \left| \ln \frac{\tg \frac{\psi}{2}}{\tg \frac{\varphi}{2}} \right| = \left| \ln \left( \frac{d_{\mathcal{E}}(A, P)}{d_{\mathcal{E}}(B, P)} \Big/ \frac{d_{\mathcal{E}}(A, Q)}{d_{\mathcal{E}}(B, Q)} \right) \right|$$

gdzie  $d_{\mathcal{E}}$  oznacza zwykłą odległość euklidesową.

# Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Rozważmy  $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

jako podzbiór płaszczyzny zespolonej utożsamiając punkt  $(u, v)$  z liczbą  $u + iv$ .

## Definicja

Niech  $a, b, c, d$  będą takimi liczbami rzeczywistymi, że  $ad - bc = 1$ . Zdefiniujmy odpowiadającą im **specjalną transformację Möbiusa** jako funkcję  $T_{c,d}^{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zadaną wzorem

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}.$$

# Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Rozważmy  $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

jako podzbiór płaszczyzny zespolonej utożsamiając punkt  $(u, v)$  z liczbą  $u + iv$ .

## Definicja

Niech  $a, b, c, d$  będą takimi liczbami rzeczywistymi, że  $ad - bc = 1$ . Zdefiniujmy odpowiadającą im **specjalną transformację Möbiusa** jako funkcję  $T_{c,d}^{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zadaną wzorem

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}.$$

## Twierdzenie

Niech

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- ▶ Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Twierdzenie

Niech

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- ▶ Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

## Twierdzenie

Niech

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- ▶ Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus g

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Twierdzenie

Niech

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- ▶ Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Uwaga

*Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

## Uwaga

Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

## Uwaga

Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

## Uwaga

Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \dots = \\&= \frac{(ac(u^2+v^2)+u+bd)}{|cz+d|^2} + i \frac{v}{|cz+d|^2} = x+iy.\end{aligned}$$

Zatem  $y = \frac{v}{|cz+d|^2}$ . Traktując  $T(z)$  jako funkcję jednego argumentu możemy łatwo policzyć jej pochodną:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+d)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \dots = \\&= \frac{(ac(u^2+v^2)+u+bd)}{|cz+d|^2} + i \frac{v}{|cz+d|^2} = x+iy.\end{aligned}$$

Zatem  $y = \frac{v}{|cz+d|^2}$ . Traktując  $T(z)$  jako funkcję jednego argumentu możemy łatwo policzyć jej pochodną:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+d)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnieGeometria różniczkowa  
płaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12}\end{aligned}$$



Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12}\end{aligned}$$



Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12}\end{aligned}$$



Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Zadanie

Pokazać, że specjalne transformacje Möbiusa przenoszą geodezyjne na geodezyjne.

Podpowiedź: Pokazać, że następujące macierze generują grupę  $PSL(2, \mathbb{R})$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Następnie zinterpretować geometrycznie działanie poszczególnych macierzy.

## Zadanie

Pokazać, że specjalne transformacje Möbiusa przenoszą geodezyjne na geodezyjne.

**Podpowiedź:** Pokazać, że następujące macierze generują grupę  $PSL(2, \mathbb{R})$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Następnie zinterpretować geometrycznie działanie poszczególnych macierzy.

# Torusy o stałej krzywiźnie

## Zadanie

Jak wyglądają geodezyjne na torusie? Wskazać przykład triangulacji (najlepiej geodezyjnej) na torusie. Sprawdzić, że charakterystyka Eulera torusa jest równa 0.

Z twierdzenia Gaussa-Bonneta wynika, że jeśli  $M$  jest homeomorficzna z torusem  $T^2$  wtedy jej całkowita krzywizna musi być równa  $2\pi\chi(T^2) = 0$ .

# Torusy o stałej krzywiźnie

## Zadanie

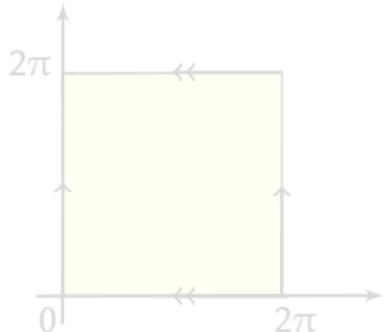
Jak wyglądają geodezyjne na torusie? Wskazać przykład triangulacji (najlepiej geodezyjnej) na torusie. Sprawdzić, że charakterystyka Eulera torusa jest równa 0.

Z twierdzenia Gaussa-Bonneta wynika, że jeśli  $M$  jest homeomorficzna z torusem  $T^2$  wtedy jej całkowita krzywizna musi być równa  $2\pi\chi(T^2) = 0$ .

Jak przekonamy się za chwilę nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  (tj. o stałej krzywiźnie równej 0).

Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie  $T^2$  w przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z  $S^1 \times S^1$ .

Rozważmy kwadrat  $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Niech  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie określone wzorem



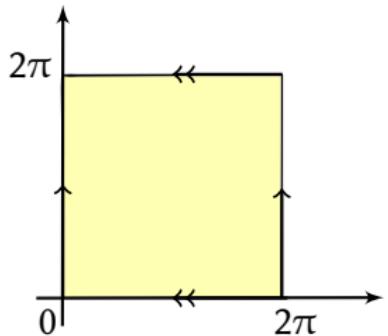
$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

Zauważmy, że funkcje cos i sin we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Jak przekonamy się za chwilę nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  (tj. o stałej krzywiźnie równej 0).

Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie  $T^2$  w przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z  $S^1 \times S^1$ .

Rozważmy kwadrat  $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Niech  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie określone wzorem



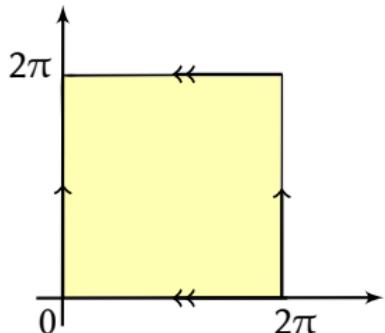
$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

Zauważmy, że funkcje cos i sin we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Jak przekonamy się za chwilę nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  (tj. o stałej krzywiźnie równej 0).

Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie  $T^2$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z  $S^1 \times S^1$ .

Rozważmy kwadrat  $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Niech  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie określone wzorem



$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

Zauważmy, że funkcje  $\cos$  i  $\sin$  we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Niezrażeni faktem, że tym razem  $x_1$  i  $x_2$  mają po 4 współrzędne możemy policzyć współczynniki metryczne:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 = 1$$

$$g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2 = 1,$$

zatem nasz torus zanurzony w  $\mathbb{R}^4$  jest faktycznie lokalnie izometryczny z płaszczyzną (więc płaski).

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Niezrażeni faktem, że tym razem  $x_1$  i  $x_2$  mają po 4 współrzędne możemy policzyć współczynniki metryczne:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 = 1$$

$$g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2 = 1,$$

zatem nasz torus zanurzony w  $\mathbb{R}^4$  jest faktycznie lokalnie izometryczny z płaszczyzną (więc płaski).

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

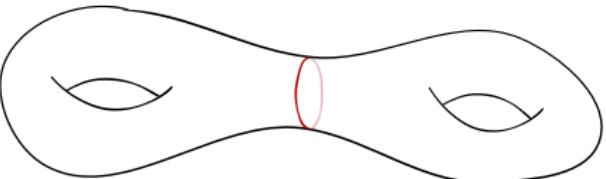
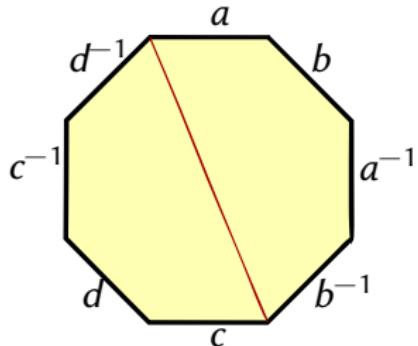
Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$



Jeśli utożsamimy opisane krawędzie 8-kąta zgodnie z przypisaną im orientacją, wtedy otrzymamy podwójny torus po prawej stronie. Można pokazać (sprawdzić!), że charakterystyka Eulera podwójnego torusa wynosi  $-2$  (ogólniej: dla torusa genusu  $g$  to  $2 - 2g$ ).

Geometria różniczkowa  
plaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

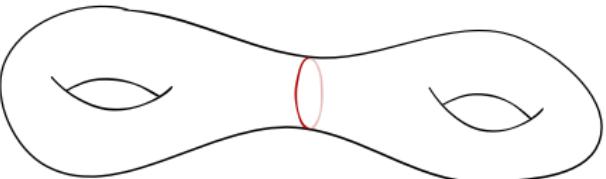
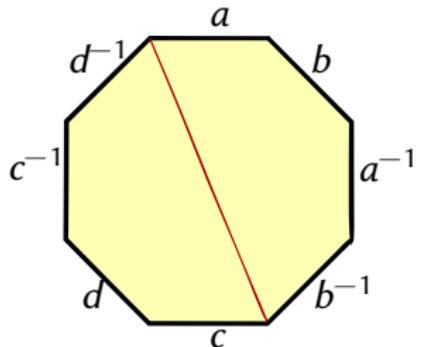
Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Plaski torus w  $\mathbb{R}^3$



Jeśli utożsamimy opisane krawędzie 8-kąta zgodnie z przypisaną im orientacją, wtedy otrzymamy podwójny torus po prawej stronie. Można pokazać (sprawdzić!), że charakterystyka Eulera podwójnego torusa wynosi  $-2$  (ogólniej: dla torusa genusu  $g$  to  $2 - 2g$ ).

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-BonnetaGeometria  
hiperbolicznaPowierzchnie o stałej  
krzywiźnieGeometria różniczkowa  
plaszczyzny PoincarégoGeodezyjne na plaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie plaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$ Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywiznę całkowitą równą  $-4\pi g$  więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej krzywiźnie ujemnej, równej  $-1$* . Wystarczy znaleźć **foremny**  $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej  $2\pi$** . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywiźnie indukowanej z  $\mathcal{H} (= -1)$ .

## Uwaga

*Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ( $= 2\pi$ ) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spółujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)*

Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywiznę całkowitą równą  $-4\pi g$  więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej* krzywiźnie ujemnej, równej  $-1$ . Wystarczy znaleźć **foremny**  $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej**  $2\pi$ . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywiźnie indukowanej z  $\mathcal{H} (= -1)$ .

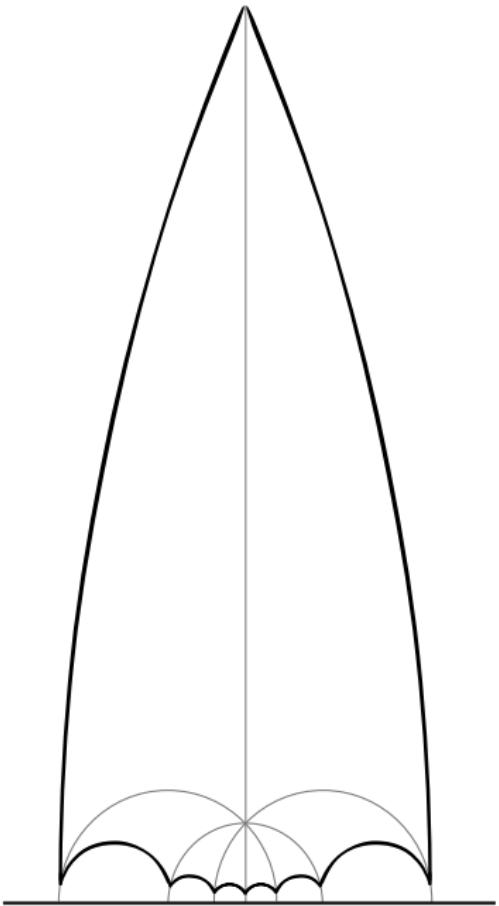
### Uwaga

*Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ( $= 2\pi$ ) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spółujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)*

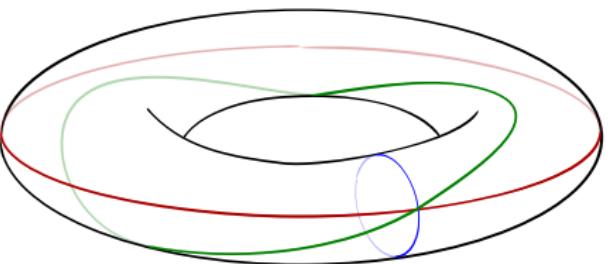
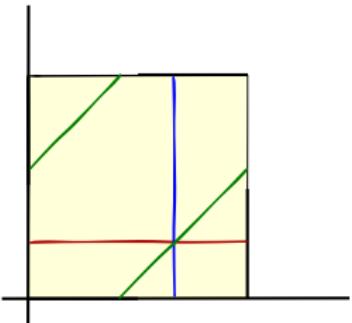
Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywiznę całkowitą równą  $-4\pi g$  więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej* krzywiźnie ujemnej, równej  $-1$ . Wystarczy znaleźć **foremny**  $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej**  $2\pi$ . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywiźnie indukowanej z  $\mathcal{H} (= -1)$ .

## Uwaga

*Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ( $= 2\pi$ ) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spółujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)*



Standardowe zanurzenie torusa w przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  (jako powierzchni obrotowej) nie jest izometrią. Aby się o tym przekonać, wystarczy spojrzeć na linie parametru  $u$  i  $v$  aby zobaczyć, że ich obrazy (tj. południki i równoleżniki) są różnej długości.



## Twierdzenie

*Nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  które zachowuje odległości. W szczególności żadne zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  nie jest lokalną izometrią.*

### Dowód:

Założymy przez moment, że takie zanurzenie istnieje.

Ponieważ torus jest zwarty, więc obraz jego zanurzenia będzie również zbiorem zwartym, więc ograniczonym. Niech  $K_R$  oznacza kulę o promieniu  $R$ , która zawiera w sobie obraz tego zanurzenia. Możemy tak wybrać środek tej kuli oraz promień  $R$ , żeby torus i sfera (będąca brzegiem kuli) stały się wewnętrznie styczne.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Twierdzenie

*Nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  które zachowuje odległości. W szczególności żadne zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  nie jest lokalną izometrią.*

### Dowód:

Założymy przez moment, że takie zanurzenie istnieje.

Ponieważ torus jest zwarty, więc obraz jego zanurzenia będzie również zbiorem zwartym, więc ograniczonym. Niech  $K_R$  oznacza kulę o promieniu  $R$ , która zawiera w sobie obraz tego zanurzenia. Możemy tak wybrać środek tej kuli oraz promień  $R$ , żeby torus i sfera (będąca brzegiem kuli) stały się wewnętrznie styczne.

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

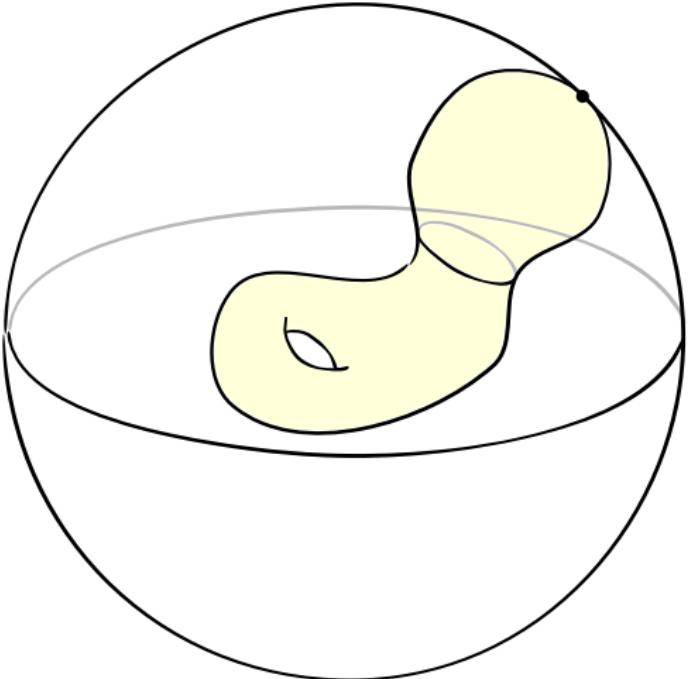
Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$



W punkcie styczności oczywiście współczynniki metryczne są takie same, więc krzywizny tych powierzchni muszą być takie same. Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ krzywizna torusa miała być  $\equiv 0$  zaś krzywizna sfery jest  $\equiv \frac{1}{R} > 0$ .  $\square$

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Uwaga

*W ostatniej części tego wykładu zawiesimy jak dotąd zawsze  
obowiązujące założenie o gładkości ( $C^\infty$ ) wszystkich  
odwzorowań.*

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genusu  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Twierdzenie (J. Nash (1954), M. Gromov (1986), M. Günther(1990))

*Niech  $M$  będzie powierzchnią klasy  $C^k$  ( $3 \leq k \leq \infty$ ). Istnieje wówczas  $n \geq 5$  oraz zanurzenie klasy  $C^k$*

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*które jest izometrią na swój obraz.*

## Twierdzenie (J. Nash (1954), N. Kuiper (1955))

*Niech  $M$  będzie powierzchnią i niech  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie gładkim zanurzeniem dla pewnego  $n \geq 3$ . Wtedy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zanurzenie*

$$f_\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*takie, że*

- ▶  $f_\varepsilon$  jest klasy  $C^1$ ,
- ▶  $f_\varepsilon$  jest izometrią, oraz
- ▶  $f_\varepsilon$  przybliża zanurzenie  $f$  z dowolną dokładnością: dla wszystkich  $x \in M$

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

## Uwaga

*Powyższe twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ krzywizna Gaussa dla powierzchni klasy  $C^1$  nie jest zdefiniowana. Wobec tego izometryczność definiujemy następującą własnością:*

$$\mathcal{I}^M(u, v) = \langle Df_\varepsilon(u), Df_\varepsilon(v) \rangle.$$

Postaramy się zobrazować teraz to zanurzenie klasy  $C^1$  torusa w  $\mathbb{R}^3$ .

Rysunki płaskiego zanurzenia torusa w  $\mathbb{R}^3$  pochodzą z pracy:  
Borrelli V., Jabrane S., Lazarus F., and Thibert B., *Flat tori in three-dimensional space and convex integration*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 2012

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiznie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiznie

Torus genus  $g$

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

## Uwaga

*Powyzsze twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ krzywizna Gaussa dla powierzchni klasy  $C^1$  nie jest zdefiniowana. Wobec tego izometryczność definiujemy następującą własnością:*

$$\mathcal{I}^M(u, v) = \langle Df_\varepsilon(u), Df_\varepsilon(v) \rangle.$$

Postaramy się zobrazować teraz to zanurzenie klasy  $C^1$  torusa w  $\mathbb{R}^3$ .

Rysunki płaskiego zanurzenia torusa w  $\mathbb{R}^3$  pochodzą z pracy:  
Borrelli V., Jabrane S., Lazarus F., and Thibert B., *Flat tori in three-dimensional space and convex integration*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 2012

Geodezyjne I

Geodezyjne II

Twierdzenie  
Gaussa-Bonneta

Geometria  
hiperboliczna

Powierzchnie o stałej  
krzywiźnie

Geometria różniczkowa  
płaszczyzny Poincarégo

Geodezyjne na płaszczyźnie  
Poincarégo

Metryka hiperboliczna

Izometrie płaszczyzny  
Poincarégo

Torusy o stałej krzywiźnie

Torus genus g

Płaski torus w  $\mathbb{R}^3$

Zaczynamy od standardowego zanurzenia torusa jako powierzchni obrotowej



Ponieważ południki są znacznie krótsze niż równoleżniki, wprowadzamy zaburzenia wzdłuż równoleżników (falowanie).



Zaczynamy od standardowego zanurzenia torusa jako powierzchni obrotowej



Ponieważ południki są znacznie krótsze niż równoleżniki, wprowadzamy zaburzenia wzdłuż równoleżników (falowanie).



Teraz południki są faktycznie dłuższe, ale równoleżniki są (były) różnej długości, więc wprowadzamy drugi poziom falowania (mniejsza amplituda, a większa częstotliwość), aby wyrównać te różnice.

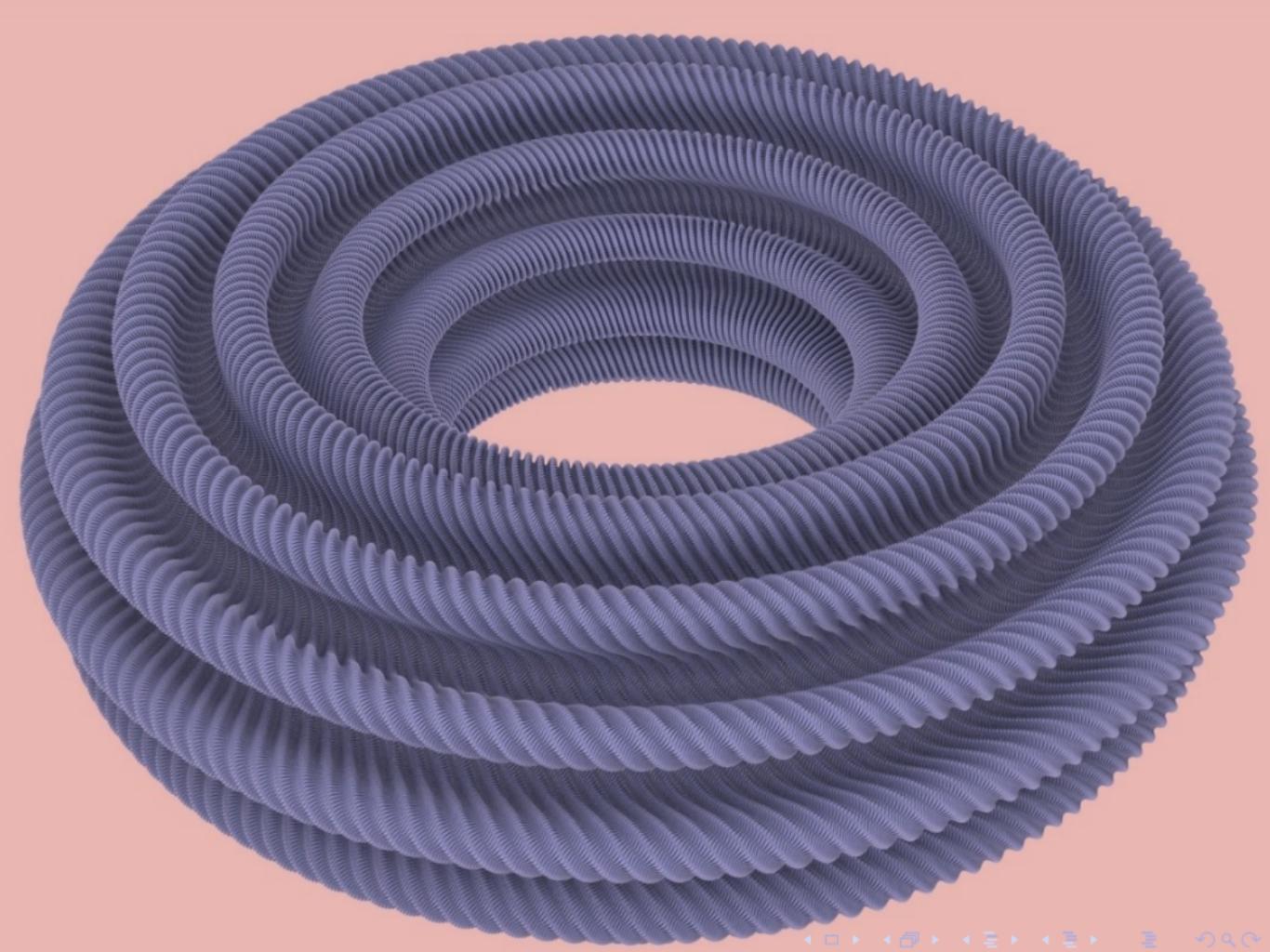


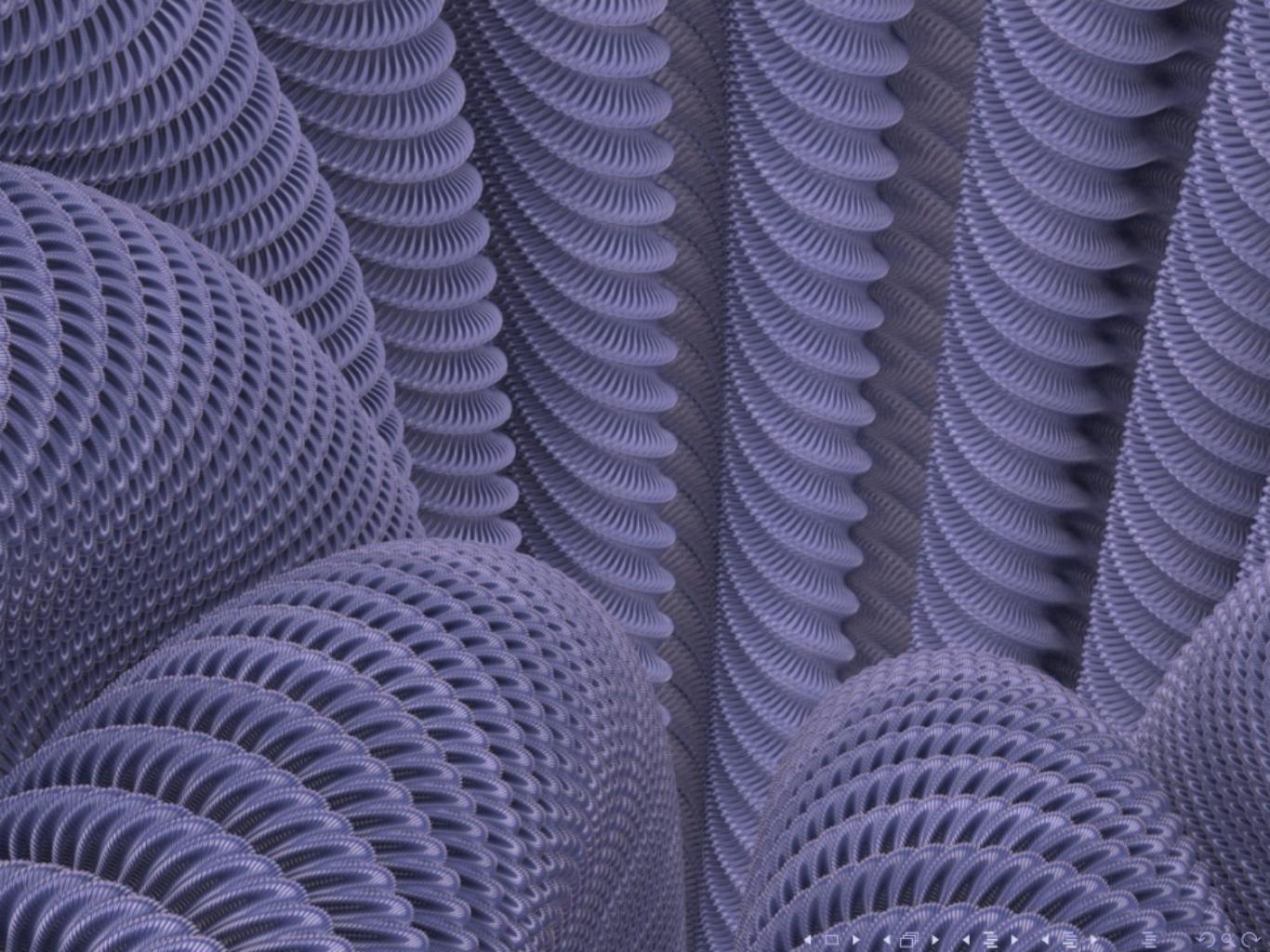
itd...

Teraz południki są faktycznie dłuższe, ale równoleżniki są (były) różnej długości, więc wprowadzamy drugi poziom falowania (mniejsza amplituda, a większa częstotliwość), aby wyrównać te różnice.

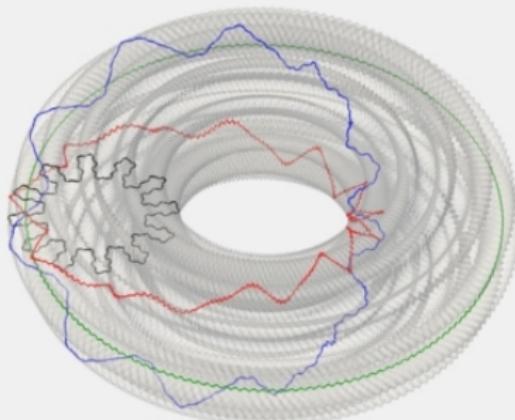
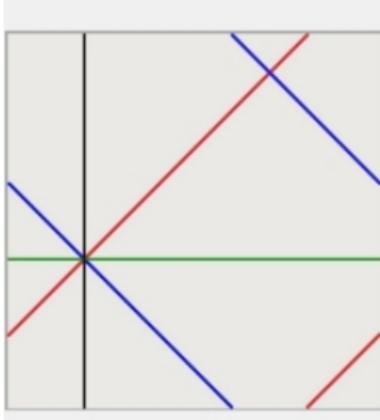


itd...





- ▶ Chociaż wszystkie kroki można wykonać w klasie  $C^2$ , proces ten kontynuujemy w nieskończoność, więc ostateczne zanurzenie jako granica tych odwzorowań może być tylko klasy  $C^1$ .
  - ▶ Jednocześnie na rysunku poniżej widzimy, że południki i równoleżniki uzyskały tę samą długość.



- ▶ Chociaż wszystkie kroki można wykonać w klasie  $C^2$ , proces ten kontynuujemy w nieskończoność, więc ostateczne zanurzenie jako granica tych odwzorowań może być tylko klasy  $C^1$ .
  - ▶ Jednocześnie na rysunku poniżej widzimy, że południki i równoleżniki uzyskały tę samą długość.

