Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 12

Geodezyjne II

Geodezyjne II

Twierdzenie

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech $\gamma\colon (a, b) \to x(U) \subset M$ będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez

$$g \overset{def.}{=} x^{-1} \circ \gamma\colon (a, b) \to U \subset \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (g_1(t), g_2(t))$$

i niech g_1, g_2 będą funkcjami współrzędnych $g(t)$. Pochodna kowariantna krzywej γ wyraża się jako

$$\frac{\widehat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \left(g_k''(t) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

Twierdzenie

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech $\gamma\colon (a, b) \to x(U) \subset M$ będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez

$$g \stackrel{def.}{=} x^{-1} \circ \gamma\colon (a, b) \to U \subset \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (g_1(t), g_2(t))$$

i niech g_1, g_2 będą funkcjami współrzędnych $g(t)$. Pochodna kowariantna krzywej γ wyraża się jako

$$\frac{\widehat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \left(g_k''(t) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

Twierdzenie

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Niech $\gamma\colon (a, b) \to x(U) \subset M$ będzie krzywą gładką. Oznaczmy przez

$$\begin{aligned} g \overset{def.}{=} x^{-1} \circ \gamma\colon (a, b) &\to U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (g_1(t), g_2(t)) \end{aligned}$$

i niech g_1, g_2 będą funkcjami współrzędnych $g(t)$. Pochodna kowariantna krzywej γ wyraża się jako

$$\frac{\widehat{D}\gamma'}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \left(g_k''(t) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(g(t)) g_i'(t) g_j'(t) \right) x_k(g(t)).$$

Wniosek (Równania geodezyjnych)

Krzywa γ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy te współczynniki są zerowe, tj. spełnione są następujące równania:

$$\begin{cases} g_1'' + \Gamma_{11}^1 (g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^1 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^1 (g_2')^2 = 0 \\ g_2'' + \Gamma_{11}^2 (g_1')^2 + 2\Gamma_{12}^2 g_1' g_2' + \Gamma_{22}^2 (g_2')^2 = 0 \end{cases}$$

Dowód twierdzenia i wniosku jest długi i dosyć techniczny, więc na wykładzie go pominiemy. Skupimy się natomiast na przykładzie powierzchni obrotowej.

Wniosek (Równania geodezyjnych)

Krzywa γ jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy te współczynniki są zerowe, tj. spełnione są następujące równania:

$$\begin{cases} g_1'' + \Gamma^1_{11}(g_1')^2 + 2\Gamma^1_{12}g_1'g_2' + \Gamma^1_{22}(g_2')^2 = 0 \\ g_2'' + \Gamma^2_{11}(g_1')^2 + 2\Gamma^2_{12}g_1'g_2' + \Gamma^2_{22}(g_2')^2 = 0 \end{cases}$$

Dowód twierdzenia i wniosku jest długi i dosyć techniczny, więc na wykładzie go pominiemy. Skupimy się natomiast na przykładzie powierzchni obrotowej.

Przykład: powierzchnia obrotowa

Wniosek

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos(\vartheta), \alpha_2(t)\sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ jest unormowana. Wtedy

1. *Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni M może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.*
2. *Okrąg na powierzchni M prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.*

Przykład: powierzchnia obrotowa

Wniosek

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos(\vartheta), \alpha_2(t)\sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ jest unormowana. Wtedy

1. *Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni M może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.*
2. *Okrąg na powierzchni M prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.*

Przykład: powierzchnia obrotowa

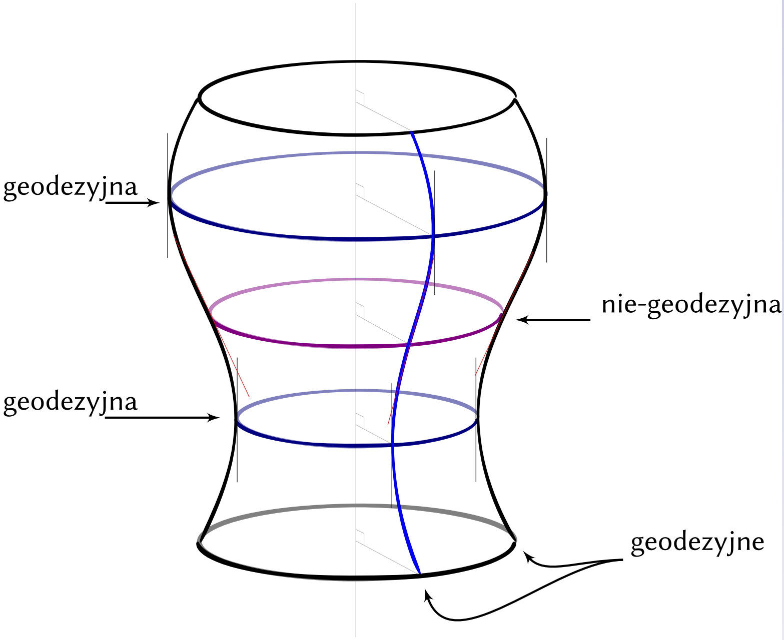
Wniosek

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią obrotową z lokalnym układem współrzędnych

$$x(t, \vartheta) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos(\vartheta), \alpha_2(t)\sin(\vartheta)),$$

oraz załóżmy, że krzywa profilu $x(t, 0) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ jest unormowana. Wtedy

1. *Każda krzywa profilu (południk) na powierzchni M może być sparametryzowana jako krzywa geodezyjna.*
2. *Okrąg na powierzchni M prostopadły do osi obrotu (równoleżnik) może być sparametryzowany jako krzywa geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy wektor styczny do krzywej profilu w punkcie przecięcia z z tym równoleżnikiem jest równoległy do osi obrotu.*


geodezyjna
nie-geodezyjna
geodezyjna
geodezyjne

Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t,\vartheta) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\cos\vartheta, \alpha_2'(t)\sin\vartheta)$$
$$x_2(t,\vartheta) = (0, -\alpha_2(t)\sin\vartheta, \alpha_2(t)\cos\vartheta)$$

- Drugie pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} x_{11}(t,\vartheta) &= (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)\cos\vartheta, \alpha_2''(t)\sin\vartheta) \\ x_{12}(t,\vartheta) = x_{21}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2'(t)\sin\vartheta, \alpha_2'(t)\cos\vartheta) \\ x_{22}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2(t)\cos\vartheta, -\alpha_2(t)\sin\vartheta). \end{aligned}$$

- Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- Zauważmy, teraz że x_1 i x_2 są prostopadłe, więc żeby obliczyć np. Γ_{12}^2 wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez x_2 a wynik podzielić przez $\|x_2\|^2$.

Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$x_1(t,\vartheta) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\cos\vartheta, \alpha_2'(t)\sin\vartheta)$$
$$x_2(t,\vartheta) = (0, -\alpha_2(t)\sin\vartheta, \alpha_2(t)\cos\vartheta)$$

- Drugie pochodne cząstkowe:

$$x_{11}(t,\vartheta) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)\cos\vartheta, \alpha_2''(t)\sin\vartheta)$$
$$x_{12}(t,\vartheta) = x_{21}(t,\vartheta) = (0, -\alpha_2'(t)\sin\vartheta, \alpha_2'(t)\cos\vartheta)$$
$$x_{22}(t,\vartheta) = (0, -\alpha_2(t)\cos\vartheta, -\alpha_2(t)\sin\vartheta).$$

- Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- Zauważmy, teraz że x_1 i x_2 są prostopadłe, więc żeby obliczyć np. Γ_{12}^2 wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez x_2 a wynik podzielić przez $\|x_2\|^2$.

Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$
\begin{aligned}
x_1(t,\vartheta) &= (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\cos\vartheta, \alpha_2'(t)\sin\vartheta) \\
x_2(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2(t)\sin\vartheta, \alpha_2(t)\cos\vartheta)
\end{aligned}
$$

- Drugie pochodne cząstkowe:

$$
\begin{aligned}
x_{11}(t,\vartheta) &= (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)\cos\vartheta, \alpha_2''(t)\sin\vartheta) \\
x_{12}(t,\vartheta) = x_{21}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2'(t)\sin\vartheta, \alpha_2'(t)\cos\vartheta) \\
x_{22}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2(t)\cos\vartheta, -\alpha_2(t)\sin\vartheta).
\end{aligned}
$$

- Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- Zauważmy, teraz że x_1 i x_2 są prostopadłe, więc żeby obliczyć np. Γ_{12}^2 wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez x_2 a wynik podzielić przez $\|x_2\|^2$.

Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} x_1(t,\vartheta) &= (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\cos\vartheta, \alpha_2'(t)\sin\vartheta) \\ x_2(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2(t)\sin\vartheta, \alpha_2(t)\cos\vartheta) \end{aligned}$$

- Drugie pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} x_{11}(t,\vartheta) &= (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)\cos\vartheta, \alpha_2''(t)\sin\vartheta) \\ x_{12}(t,\vartheta) = x_{21}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2'(t)\sin\vartheta, \alpha_2'(t)\cos\vartheta) \\ x_{22}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2(t)\cos\vartheta, -\alpha_2(t)\sin\vartheta). \end{aligned}$$

- Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + l_{12} n.$$

- Zauważmy, teraz że x_1 i x_2 są prostopadłe, więc żeby obliczyć np. Γ_{12}^2 wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez x_2 a wynik podzielić przez $\|x_2\|^2$.

Szkic Dowodu:

Dowód pierwszej części:

- Pierwsze pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} x_1(t,\vartheta) &= (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\cos\vartheta, \alpha_2'(t)\sin\vartheta) \\ x_2(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2(t)\sin\vartheta, \alpha_2(t)\cos\vartheta) \end{aligned}$$

- Drugie pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} x_{11}(t,\vartheta) &= (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)\cos\vartheta, \alpha_2''(t)\sin\vartheta) \\ x_{12}(t,\vartheta) = x_{21}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2'(t)\sin\vartheta, \alpha_2'(t)\cos\vartheta) \\ x_{22}(t,\vartheta) &= (0, -\alpha_2(t)\cos\vartheta, -\alpha_2(t)\sin\vartheta). \end{aligned}$$

- Z definicji symboli Christoffela mamy np.

$$x_{12} = \Gamma^1_{12}x_1 + \Gamma^2_{12}x_2 + l_{12}n.$$

- Zauważmy, teraz że x_1 i x_2 są prostopadłe, więc żeby obliczyć np. Γ^2_{12} wystarczy pomnożyć powyższą równość (skalarnie) przez x_2 a wynik podzielić przez $\|x_2\|^2$.

- Sprawdzić, że w tym przypadku $\Gamma^1_{22} = -\alpha_1\alpha_1'$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$ zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha_1'(g_2')^2 = 0$$
$$g_2'' + 2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$ dla pewnej stałej ϑ_0 (ϑ to kąt obrotu). Zatem $g_1(t) = t$ i $g_2(t) = \vartheta_0$.
- Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

- Sprawdzić, że w tym przypadku $\Gamma^1_{22} = -\alpha_1\alpha_1'$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$ zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha_1'(g_2')^2 = 0$$
$$g_2'' + 2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$ dla pewnej stałej ϑ_0 (ϑ to kąt obrotu). Zatem $g_1(t) = t$ i $g_2(t) = \vartheta_0$.
- Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

- Sprawdzić, że w tym przypadku $\Gamma^1_{22} = -\alpha_1\alpha_1'$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$ zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha_1'(g_2')^2 = 0$$

$$g_2'' + 2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$ dla pewnej stałej ϑ_0 (ϑ to kąt obrotu). Zatem $g_1(t) = t$ i $g_2(t) = \vartheta_0$.
- Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

- Sprawdzić, że w tym przypadku $\Gamma^1_{22} = -\alpha_1\alpha_1'$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$ zaś pozostałe symbole Christoffela są równe 0 (przeliczyć).
- Lokalne równania geodezyjnych mają więc postać

$$g_1'' - \alpha_1\alpha_1'(g_2')^2 = 0$$
$$g_2'' + 2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}g_1'g_2' = 0$$

- Południk powierzchni obrotowej może być sparametryzowany jako $\beta(t) = x(t, \vartheta_0)$ dla pewnej stałej ϑ_0 (ϑ to kąt obrotu). Zatem $g_1(t) = t$ i $g_2(t) = \vartheta_0$.
- Przy takich funkcjach współrzędnych powyższe równania są spełnione (przeliczyć).

Dowód drugiej części, implikacja $(\Rightarrow)$.

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const}$.
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2 \alpha_2' = 0$.
- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja ($\Rightarrow$).

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const}$.
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2 \alpha_2' = 0$.
- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja $(\Rightarrow)$.

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \mathrm{const}$.
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2\alpha_2' = 0$.
- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja $(\Rightarrow)$.

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \mathrm{const}$.
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2 \alpha_2' = 0$.
- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja $(\Rightarrow)$.

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)| \|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const}$.
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2 \alpha_2' = 0$.
- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja $(\Rightarrow)$.

- Równoleżnik na powierzchni obrotowej jest parametryzowany przez $\beta(s) = x(t_0, \vartheta(s))$ (t_0 stałe), więc $g_1''(s) = g_1'(s) = 0$.
- Prędkość krzywej β wynosi $\|\beta'(s)\| = |\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\|$. Jeśli β jest geodezyjną, to ma stałą prędkość, czyli $|\vartheta'(s)|\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \text{const}$.
- Mamy $\|x_2(t_0, \vartheta(s))\| = \alpha_2(t_0)$ (sprawdzić!), więc $|\vartheta'(s)| = c \neq 0$.
- Z założenia β musi spełniać równania geodezyjnych, więc $\alpha_2 \alpha_2' = 0$.
- Ponieważ możemy założyć, że $\alpha_1(t_0) \neq 0$, więc $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Wyprowadzić stąd wniosek, że w t_0 wektor styczny do α jest równoległy do osi obrotu.

Dowód drugiej części, implikacja $(\Leftarrow)$.

- Jeśli dla t_0 wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Mamy również $g_1'' = 0$ (dlaczego?) i β spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- Twierdzimy, że jeśli wybierzemy $\vartheta(s) = s$, wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).

$\square$

Uwaga

Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.

Dowód drugiej części, implikacja ($\Leftarrow$).

- Jeśli dla t_0 wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Mamy również $g_1'' = 0$ (dlaczego?) i β spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- Twierdzimy, że jeśli wybierzemy $\vartheta(s) = s$, wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).

$\square$

Uwaga

Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.

Dowód drugiej części, implikacja $(\Leftarrow)$.

- Jeśli dla t_0 wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Mamy również $g_1'' = 0$ (dlaczego?) i β spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- Twierdzimy, że jeśli wybierzemy $\vartheta(s) = s$, wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).

$\square$

Uwaga

Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.

Dowód drugiej części, implikacja $(\Leftarrow)$.

- Jeśli dla t_0 wektor styczny do krzywej profilu jest równoległy do osi obrotu, wtedy $\alpha_1'(t_0) = 0$.
- Mamy również $g_1'' = 0$ (dlaczego?) i β spełnia pierwsze równanie geodezyjnych.
- Twierdzimy, że jeśli wybierzemy $\vartheta(s) = s$, wtedy będzie spełnione i drugie równanie (sprawdzić!).

$\square$

Uwaga

Powyższy wniosek charakteryzuje jedynie niektóre geodezyjne na powierzchniach obrotowych.

Wniosek

Niech $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy α może byś sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.

Dowód:

Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku). □

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie trudniejszy.

Wniosek

Niech $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy α może byś sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.

Dowód:

Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku). □

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie trudniejszy.

Wniosek

Niech $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą różnowartościową, która nie przecina pewnej prostej. Wtedy α może byś sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni.

Dowód:

Proste ćwiczenie. (Użyć poprzedniego wniosku). $\square$

Okazuje się, że każda gładka krzywa różnowartościowa może być sparametryzowana jako geodezyjna na pewnej powierzchni (bez założenia o pustym przecięciu z pewną prostą), chociaż dowód jest znacznie trudniejszy.

Istnienie i jedyność geodezyjnych

Przykład

Rozważmy $M = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Geodezyjne na każdym podzbiorze płaszczyzny są liniami prostymi (dlaczego?), więc nie istnieje nawet jedna krzywa geodezyjna w M łącząca punkty $(1,0)$ i $(-1,0)$.

Następujące twierdzenie pokazuje, że istnienie takich "dziur" w powierzchni jest jednak jedyną przeszkodą do istnienia geodezyjnych.

Istnienie i jedyność geodezyjnych

Przykład

Rozważmy $M = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Geodezyjne na każdym podzbiorze płaszczyzny są liniami prostymi (dlaczego?), więc nie istnieje nawet jedna krzywa geodezyjna w M łącząca punkty $(1,0)$ i $(-1,0)$.

Następujące twierdzenie pokazuje, że istnienie takich "dziur" w powierzchni jest jednak jedyną przeszkodą do istnienia geodezyjnych.

Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli M jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów $a,b \in M$ istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących a i b.

- Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni M.
- Ustalmy punkt $p \in M$, oraz wektor $v \in T_pM$.
- Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez v kierunku i przechodzącej przez p.
- Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli M jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in M$ istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących a i b.

- Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni M.
- Ustalmy punkt $p \in M$, oraz wektor $v \in T_pM$.
- Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez v kierunku i przechodzącej przez p.
- Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli M jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in M$ istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących a i b.

- Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni M.
- Ustalmy punkt $p \in M$, oraz wektor $v \in T_pM$.
- Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez v kierunku i przechodzącej przez p.
- Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli M jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in M$ istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących a i b.

- Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni M.
- Ustalmy punkt $p \in M$, oraz wektor $v \in T_pM$.
- Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez v kierunku i przechodzącej przez p.
- Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Twierdzenie (Rinowa-Hopfa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Jeśli M jest zupełną przestrzenią metryczną, wtedy dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in M$ istnieje krzywa geodezyjna łącząca te dwa punkty. Co więcej ta geodezyjna ma najmniejszą długość spośród wszystkich krzywych łączących a i b.

- Nie będziemy szukać geodezyjnych łączących punkty na powierzchni M.
- Ustalmy punkt $p \in M$, oraz wektor $v \in T_pM$.
- Szukamy krzywej geodezyjnej w wyznaczonym przez v kierunku i przechodzącej przez p.
- Z definicji wiemy, że taki wektor wyznacza (lokalnie) tylko pewną krzywą gładką.

Twierdzenie

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką.

- *Dla każdego punktu $p \in M$ i wektora $v \in T_pM$ stycznego w tym punkcie istnieją: $\varepsilon > 0$, oraz taka krzywa geodezyjna*

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,$$

  że $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(t) = v$.

- *Krzywa γ jest jedyną taką krzywą w następującym sensie: Jeśli dla pewnej $\delta > 0$ istnieje krzywa geodezyjna $\widetilde{\gamma} : (-\delta, \delta) \to M$ o tej własności, że $\delta(0) = p$ i $\delta'(0) = v$, wtedy istnieje mniejsze otoczenie $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$ na którym γ i $\widetilde{\gamma}$ są sobie równe. (za $(-\zeta, \zeta)$ można przyjąć$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$)*

Twierdzenie

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką.

- *Dla każdego punktu $p \in M$ i wektora $v \in T_pM$ stycznego w tym punkcie istnieją: $\varepsilon > 0$, oraz taka krzywa geodezyjna*

  $$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,$$

  że $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(t) = v$.
- *Krzywa γ jest jedyną taką krzywą w następującym sensie: Jeśli dla pewnej $\delta > 0$ istnieje krzywa geodezyjna $\widetilde{\gamma} : (-\delta, \delta) \to M$ o tej własności, że $\delta(0) = p$ i $\delta'(0) = v$, wtedy istnieje mniejsze otoczenie $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$ na którym γ i $\widetilde{\gamma}$ są sobie równe. (za $(-\zeta, \zeta)$ można przyjąć$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$)*

Twierdzenie

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką.

- *Dla każdego punktu $p \in M$ i wektora $v \in T_pM$ stycznego w tym punkcie istnieją: $\varepsilon > 0$, oraz taka krzywa geodezyjna*

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,$$

że $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(t) = v$.

- *Krzywa γ jest jedyną taką krzywą w następującym sensie: Jeśli dla pewnej $\delta > 0$ istnieje krzywa geodezyjna $\widetilde{\gamma} : (-\delta, \delta) \to M$ o tej własności, że $\delta(0) = p$ i $\delta'(0) = v$, wtedy istnieje mniejsze otoczenie $(-\zeta, \zeta) \subset \mathbb{R}$ na którym γ i $\widetilde{\gamma}$ są sobie równe. (za $(-\zeta, \zeta)$ można przyjąć$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$)*

Uwaga

Klasy równoważności funkcji równych na pewnym otoczeniu punktu p nazywa się czasami kiełkami funkcji w punkcie p. Zatem powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja między zbiorami: kiełków geodezyjnych w punkcie p oraz wektorów stycznych $v \in T_pM$.

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Skorzystamy z twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Uwaga

Klasy równoważności funkcji równych na pewnym otoczeniu punktu p nazywa się czasami kiełkami funkcji w punkcie p. Zatem powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja między zbiorami: kiełków geodezyjnych w punkcie p oraz wektorów stycznych $v \in T_pM$.

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Skorzystamy z twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

Równania geodezyjnych są równaniami rzędu drugiego, ale jeśli wprowadzimy dodatkowe zmienne $h_1 = g_1'$ i $h_2 = g_2'$ możemy je zapisać jako układ równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} g_1' = h_1 \\ g_2' = h_2 \\ h_1' = -\Gamma^1_{11} h_1^2 - 2\Gamma^1_{12} h_1 h_2 - \Gamma^1_{22} h_2^2 \\ h_2' = -\Gamma^2_{11} h_1^2 - 2\Gamma^2_{12} h_1 h_2 - \Gamma^2_{22} h_2^2 \end{cases} \tag{12.1}$$

Równania geodezyjnych są równaniami rzędu drugiego, ale jeśli wprowadzimy dodatkowe zmienne $h_1 = g_1'$ i $h_2 = g_2'$ możemy je zapisać jako układ równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} g_1' = h_1 \\ g_2' = h_2 \\ h_1' = -\Gamma_{11}^1 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^1 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^1 h_2^2 \\ h_2' = -\Gamma_{11}^2 h_1^2 - 2\Gamma_{12}^2 h_1 h_2 - \Gamma_{22}^2 h_2^2 \end{cases} \tag{12.1}$$

Zamiast myśleć o tych równaniach jako o układzie, rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ -\Gamma^1_{11}(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma^1_{12}(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma^1_{22}(g(t))h_2^2(t) \\ -\Gamma^2_{11}(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma^2_{12}(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma^2_{22}(g(t))h_2^2(t) \end{pmatrix}$$

z warunkiem początkowym $\begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$,

gdzie (p_1, p_2) to współrzędne punktu $x^{-1}(p)$, zaś (v_1, v_2) to współczynniki wektora v w standardowej bazie $\{x_1, x_2\}$.

Zamiast myśleć o tych równaniach jako o układzie, rozważmy równanie różniczkowe

$$\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ -\Gamma^1_{11}(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma^1_{12}(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma^1_{22}(g(t))h_2^2(t) \\ -\Gamma^2_{11}(g(t))h_1^2(t) - 2\Gamma^2_{12}(g(t))h_1(t)h_2(t) - \Gamma^2_{22}(g(t))h_2^2(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{z warunkiem początkowym} \quad \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

gdzie (p_1, p_2) to współrzędne punktu $x^{-1}(p)$, zaś (v_1, v_2) to współczynniki wektora v w standardowej bazie $\{x_1, x_2\}$.

Twierdzenie (Picard-Lindelöf-Lipschitz-Cauchy-...)

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją gładką. Ponadto ustalmy punkt $v_0 \in U$. Istnieje $\varepsilon > 0$, oraz taka gładka funkcja $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, że $\alpha(0) = v_0$, oraz

$$\alpha'(t) = F(\alpha(t)),$$

dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Co więcej, jeśli $\widetilde{\alpha}\colon(-\delta, \delta) \to U$ jest drugą taką funkcją spełniającą te własności, wtedy $\alpha(t) = \widetilde{\alpha}(t)$ dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$.

Twierdzenie (Picard-Lindelöf-Lipschitz-Cauchy-...)

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją gładką. Ponadto ustalmy punkt $v_0 \in U$. Istnieje $\varepsilon > 0$, oraz taka gładka funkcja $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, że $\alpha(0) = v_0$, oraz

$$\alpha'(t) = F(\alpha(t)),$$

dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Co więcej, jeśli $\widetilde{\alpha}\colon(-\delta, \delta) \to U$ jest drugą taką funkcją spełniającą te własności, wtedy $\alpha(t) = \widetilde{\alpha}(t)$ dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\delta, \delta)$.

Stosując to twierdzenie do naszej sytuacji widzimy, że istnieje krzywa $G\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to U \times \mathbb{R}^2$ (rozumiane jako $U \times T_pM$),

$$G(t) = (k_1(t), k_2(t), l_1(t), l_2(t))$$

spełniająca nasz układ równań (12.1). Z konstrukcji tego układu wynika, że krzywa $\gamma(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(k_1(t), k_2(t))$ jest szukaną geodezyjną przechodzącą przez punkt $p \in M$, oraz $\gamma'(0) = v$. Jedyność tej krzywej wynika z drugiej części zacytowanego powyżej twierdzenia. □

Stosując to twierdzenie do naszej sytuacji widzimy, że istnieje krzywa $G\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to U\times\mathbb{R}^2$ (rozumiane jako $U\times T_pM$),

$$G(t) = \big(k_1(t), k_2(t), l_1(t), l_2(t)\big)$$

spełniająca nasz układ równań (12.1). Z konstrukcji tego układu wynika, że krzywa $\gamma(t) \overset{\text{def.}}{=} x(k_1(t), k_2(t))$ jest szukaną geodezyjną przechodzącą przez punkt $p\in M$, oraz $\gamma'(0) = v$. Jedyność tej krzywej wynika z drugiej części zacytowanego powyżej twierdzenia. $\square$