

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Elementarna Geometria Różniczkowa

21 maja 2013

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 5

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s, t) \in U$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s, t) \in U$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

- ▶ Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$.
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

- ▶ Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$.
- ▶ Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

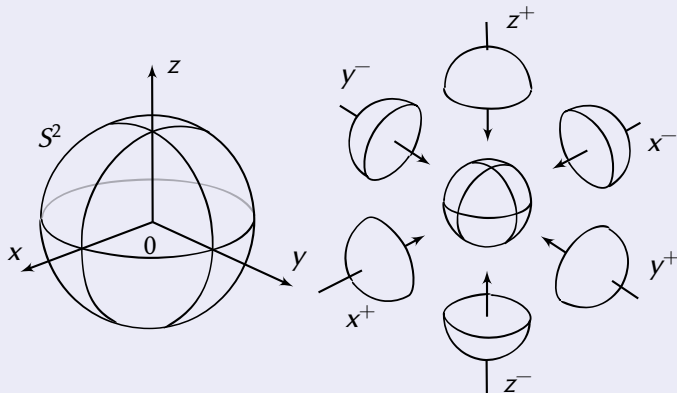
Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Jednostkowa sfera, tj. powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ jest przykładem powierzchni regularnej.

Lokalnym układem współrzędnych jest np.

$x^\pm(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$ jak na następującym rysunku



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

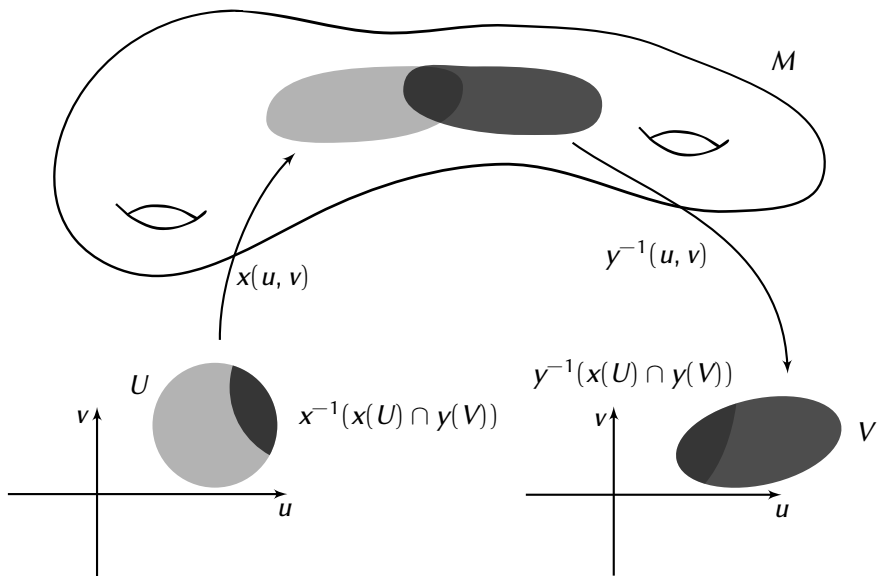
UWAGA! Zakładamy, że wszystkie powierzchnie które będziemy my rozważać dalej są gładkie i łukowo spójne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ i $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Wtedy złożenie

$$\Phi_{x,y} \stackrel{\text{def.}}{=} y^{-1} \circ x: x^{-1}(x(U) \cap y(V)) \rightarrow y^{-1}(x(U) \cap y(V))$$

nazywamy **funkcją zmiany układu współrzędnych**.



Dowód:

- 1)
 - ▶ x – iniekcja, więc jest bijekcją na obraz.
 - ▶ rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
 - ▶ z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne
- 2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

► $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)

► $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza $(\Phi_{x,y} = f)$ wynika z definicji funkcji przejścia.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

► $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)

► $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza $(\Phi_{x,y} = f)$ wynika z definicji funkcji przejścia.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
 &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
 \end{aligned}$$

► $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)

► $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \neq 0$ (Jacobian funkcji f).

Wreszcie teza $(\Phi_{x,y} = f)$ wynika z definicji funkcji przejścia.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
 &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
 \end{aligned}$$

► $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)

► $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \neq 0$ (Jacobian funkcji f).

Wreszcie teza $(\Phi_{x,y} = f)$ wynika z definicji funkcji przejścia.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
\end{aligned}$$

► $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)

► $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \neq 0$ (Jacobian funkcji f).

Wreszcie teza $(\Phi_{x,y} = f)$ wynika z definicji funkcji przejścia.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
 &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
 \end{aligned}$$

- ▶ $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- ▶ $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza $(\Phi_{x,y} = f)$ wynika z definicji funkcji przejścia.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(\mathbf{x} \circ f)}{\partial t} &= \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\
 &= \frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \right) = \\
 &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right)
 \end{aligned}$$

- ▶ $\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f_2} \right) \neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
 - ▶ $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial s} \right) \neq 0$ (Jakobian funkcji f).
- Wreszcie teza $(\Phi_{x,y} = f)$ wynika z definicji funkcji przejścia.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Gładkość funkcji na powierzchni

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją. Funkcję f nazywamy gładką jeśli dla każdego punktu $p \in M$ i dla każdego lokalnego układu współrzędnych $x: U \rightarrow M$ takiego, że $p \in x(U)$ funkcja

$$f \circ x: U \xrightarrow{x} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

jest gładka jako funkcja z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R} .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}: x^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}: x^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- ▶ Jeśli $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- ▶ Załóżmy że $x: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}: x^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

- $$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Funkcja $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Gładkość odwzorowania między powierzchniami

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

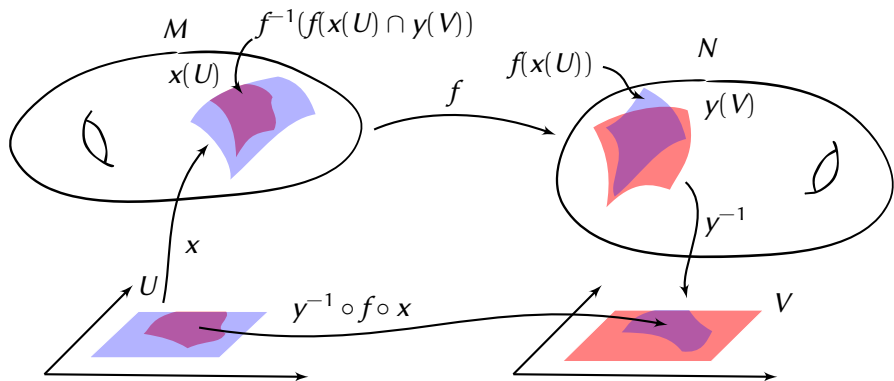
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

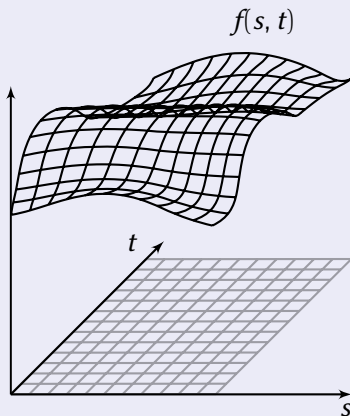
Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie $M \rightarrow N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Mówimy, że f jest **dyfeomorfizmem powierzchni** jeśli f jest gładką bijekcją, której odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.



Definicja

Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$. Powierzchnię $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią Monge'a** jeśli jej parametryzacja jest wykresem funkcji f :

$$x(s, t) = (s, t, f(s, t)).$$



Uwaga

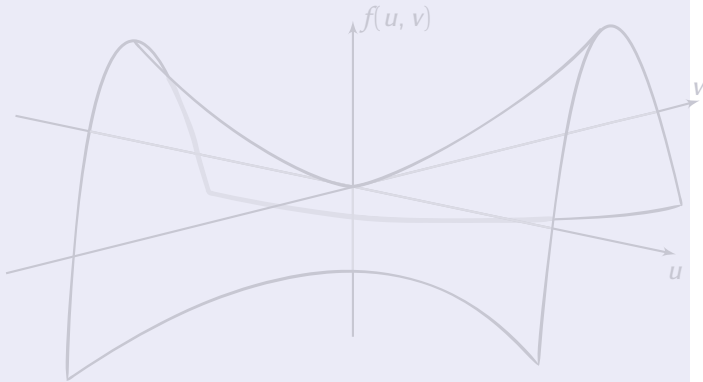
Parametryzacja Monge'a spełnia naszą definicję powierzchni (Definicja 5.3), ponieważ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(s, t) &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \end{bmatrix} = \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial s}(s, t), -\frac{\partial f}{\partial t}(s, t), 1 \right) \neq 0.\end{aligned}$$

[Powierzchnie w \$\mathbb{R}^3\$](#) [Podstawowe definicje](#)[Przykłady powierzchni](#)[Parametryzacja Monge'a](#)[Powierzchnie obrotowe](#)[Powierzchnie prostokątne](#)[Poziomice funkcji](#)[Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa](#)[Pochodne kierunkowe. Izometria.](#)[Krzywizna Gaussa I](#)[Krzywizna Gaussa II](#)[Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne](#)

Przykład

- ▶ Paraboloida ($x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$)
- ▶ Powierzchnia siodłowa ($x(u, v) = (u, v, uv)$)



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

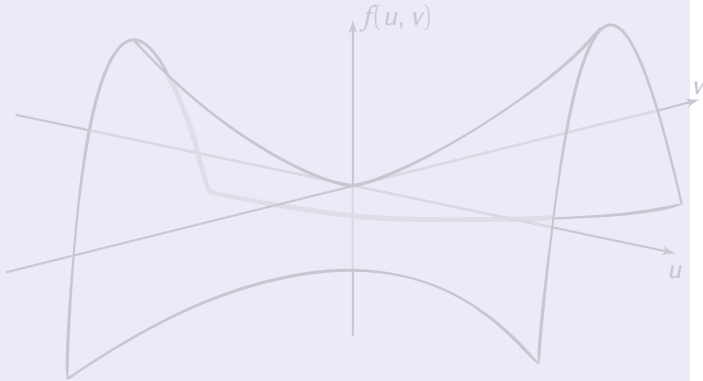
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- ▶ Paraboloida ($x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$)
- ▶ Powierzchnia siodłowa ($x(u, v) = (u, v, uv)$)



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

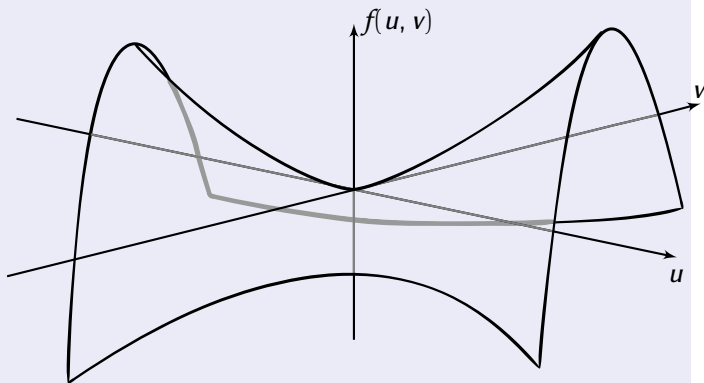
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- ▶ Paraboloida ($x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$)
- ▶ Powierzchnia siodłowa ($x(u, v) = (u, v, uv)$)



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

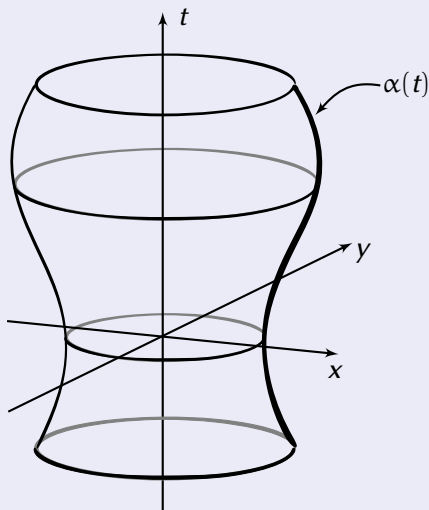
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Powierzchnia obrotowa powstaje poprzez obrócenie krzywej $\alpha(t)$ wokół pewnej ustalonej prostej l . Postać ogólna to $x(t, \phi) = \alpha \cdot Rot_l(\phi)$, gdzie $Rot_l(\phi)$ to macierz 3×3 obrotu o kąt ϕ wokół prostej l .



Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z :

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi Ox otrzymamy

$$x(t, \phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos \phi - \alpha_3(t) \sin \phi, \alpha_2(t) \sin \phi + \alpha_3(t) \cos \phi)$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z :

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi Ox otrzymamy

$$x(t, \phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t) \cos \phi - \alpha_3(t) \sin \phi, \alpha_2(t) \sin \phi + \alpha_3(t) \cos \phi)$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- ▶ *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- ▶ *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje” w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Przykład

- ▶ Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$\begin{aligned} (0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \\ &= (-\cos t \sin \phi, \cos t \cos \phi, \sin t). \end{aligned}$$

- ▶ Hiperboloida jednowłokowa (katenuida)

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = (-\cos t \sin \phi, \cos t \cos \phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednowłokowa (katenuida)

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$\begin{aligned} (0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \\ &= (-\cos t \sin \phi, \cos t \cos \phi, \sin t). \end{aligned}$$

- Hiperboloida jednowłokowa (katenuida)

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

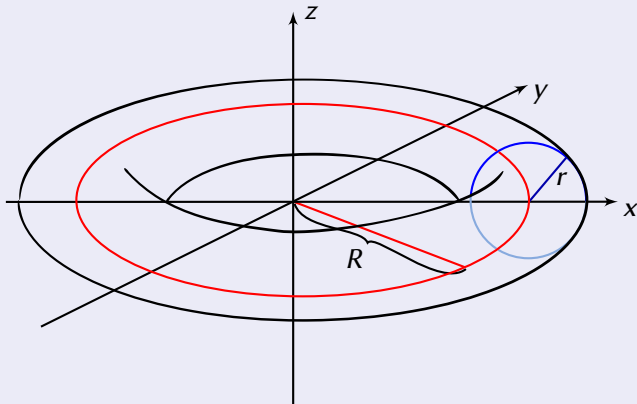
Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

- Torus – obrót okręgu $\alpha(t) = (R + r \cos t, 0, r \sin t)$ wokół osi z:

$$x(t, \phi) = ((R + r \cos t) \cos \phi, (R + r \cos t) \sin \phi, r \sin t).$$

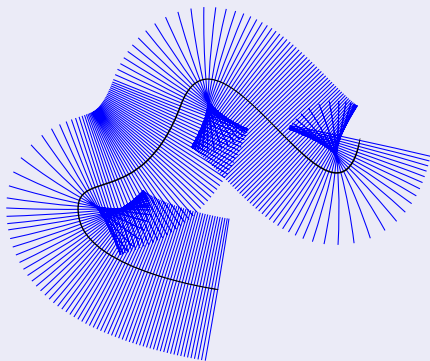


Definicja

Powierzchnią prostokreślną nazywamy powierzchnię o parametryzacji

$$x(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

gdzie α i β są krzywymi w przestrzeni \mathbb{R}^3 . α nazywa się potocznie kierownicą, β - ruletą.



Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- ▶ **Walec, Stożek**
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ▶ Katenoida.

Powierzchnie prostokątne

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która “składa się” z prostych.

- ▶ Walec, Stożek
- ▶ Powierzchnia śrubowa
- ▶ Powierzchnia siodłowa
- ▶ Katenoida.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- ▶ Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p) \right) = 0.$$

- ▶ Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokreślne

Poziomice funkcji

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- ▶ Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p) \right) = 0.$$

- ▶ Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F: V \rightarrow \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- ▶ Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p) \right) = 0.$$

- ▶ Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

- ▶ Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

- ▶ Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

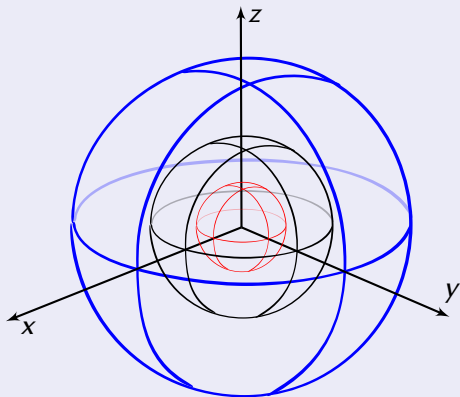
Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- ▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- ▶ paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- ▶ hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:
 $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

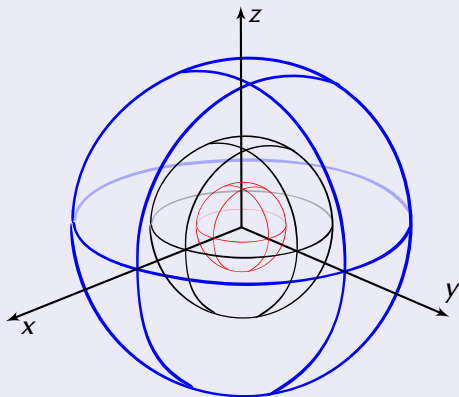
Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

- ▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- ▶ paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- ▶ hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:
 $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

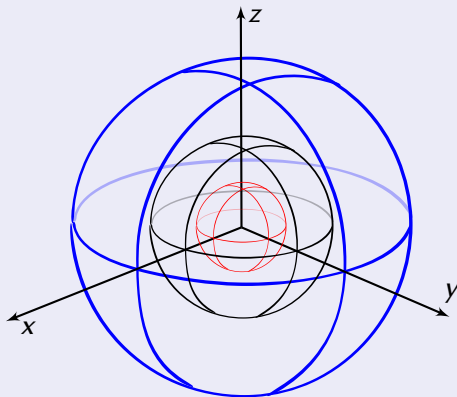
Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- ▶ elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- ▶ paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- ▶ hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa:
 $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Podstawowe definicje

Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Powierzchnie obrotowe

Powierzchnie prostokątne

Poziome funkcje

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 6

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Na każdej powierzchni mamy naturalnie dane dwie rodziny krzywych. Dla każdego ustalonego $s_0 \in \mathbb{R}$ możemy rozpatrywać krzywą

$$x(s_0, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Podobnie dla dowolnego t_0 mamy krzywą

$$x(\cdot, t_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Krzywe te leżą na naszej powierzchni, a wektory styczne do tych krzywych będą grały bardzo ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

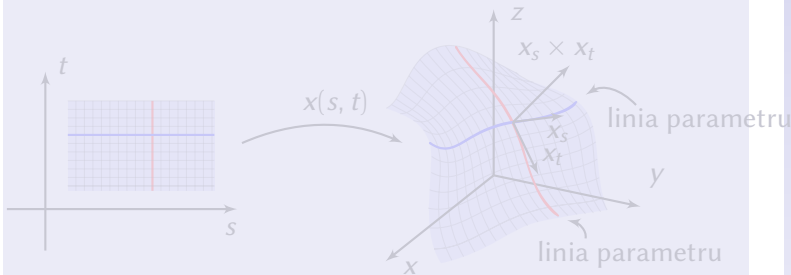
Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczmy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0) \Big|_{s=s_0}, \quad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t) \Big|_{t=t_0}.$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

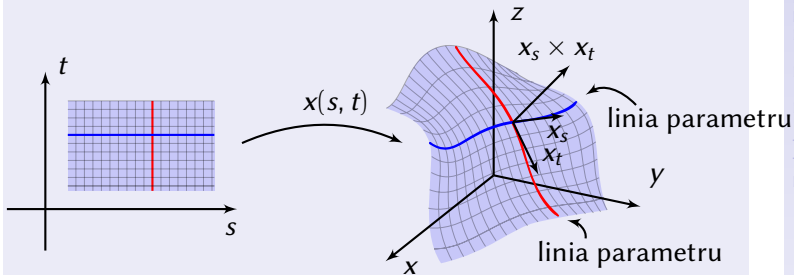
Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczmy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0) \Big|_{s=s_0}, \quad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t) \Big|_{t=t_0}.$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ *Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ *Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ *Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ *Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ *Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ *Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v . Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy $T_p M$.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- ▶ *Jeśli $v \in T_p M$, wtedy również $av \in T_p M$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- ▶ *Addytywność (jeśli $v, w \in T_p M$, wówczas $av + bw \in T_p M$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

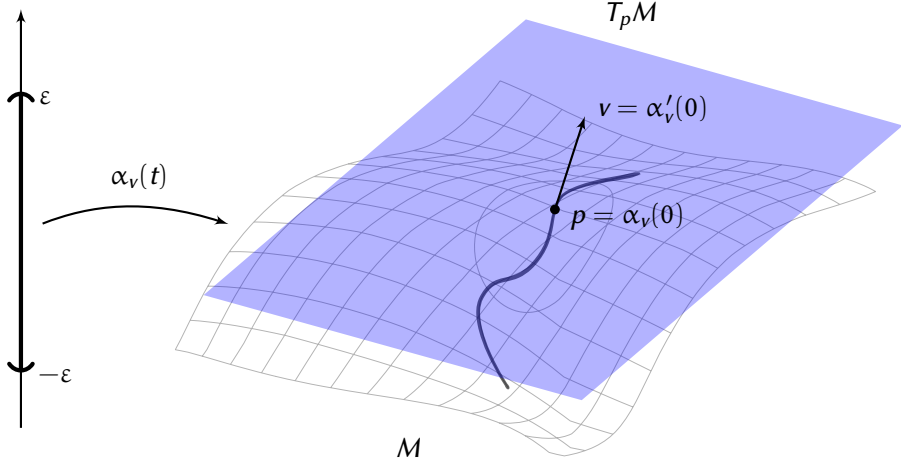
I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne



Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β . Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β .

Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p) \rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w \mathbb{R}^3 rozpiętą przez wektory x_s i x_t . Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej $T_p M$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_p M$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_p M$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β .
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\text{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

$$\begin{aligned}
 v = \alpha'_v(t)|_{t=0} &= x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujemy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . □

$$\begin{aligned}
 v &= \alpha'_v(t)|_{t=0} = x(\beta_1(t), \beta_2(t))'|_{t=0} = \\
 &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)|_{t=0} = \\
 &= \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),
 \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujemy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM . \square

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech

$$\begin{aligned}x: U &\longrightarrow M \\(s_0, t_0) &\longmapsto p \in M\end{aligned}$$

będzie lokalnym układem współrzędnych. **Wektor normalny w p** definiujemy jako

$$N(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|}(s_0, t_0),$$

gdzie x_s i x_t wektorami stycznymi do linii parametru przechodzących przez punkt p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

*Ponieważ wektor normalny ma długość 1, więc koniec każdego wektora normalnego $N(p)$ leży na powierzchni sfery dwuwymiarowej $N(M) \subset S^2$. Zatem N może być traktowany jako **odwzorowanie między powierzchniami***

$$N: M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

*punktów na powierzchni M . Jest to tzw. **odwzorowanie Gaussa** do którego wrócimy później.*

Powtórka z algebry liniowej I

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} . **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- ▶ $F(av + bw, z) = aF(v, z) + bF(w, z)$
- ▶ $F(v, aw + bz) = aF(v, w) + bF(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{R} . **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F: V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- ▶ $F(av + bw, z) = aF(v, z) + bF(w, z)$
- ▶ $F(v, aw + bz) = aF(v, w) + bF(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V , oraz niech B będzie formą dwuliniową na V . **Macierz formy B** w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V , oraz niech B będzie formą dwuliniową na V . **Macierz fromy B** w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Standardowy iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle = \sum x_i^2$ jest oczywiście formą dwuliniową. W standardowej bazie przestrzeni \mathbb{R}^n jego macierzą jest $A = \text{Id}$.

I forma podstawowa

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Dla powierzchni M definiujemy **pierwszą formę podstawową w punkcie p** jako formę dwuliniową

$$\begin{aligned} I_p: T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w \mathbb{R}^3 . Oznaczamy ją symbolem I_p .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathcal{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p \in M}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t . Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Definicja

Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathcal{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p \in M}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t . Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2 . Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, w punkcie p ma postać

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2 . Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, w punkcie p ma postać

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2 . Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, w punkcie p ma postać

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$

$$x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$

$$x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$

$$x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t)$$

$$x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \sin^2 \varphi = \|x_1 \times x_2\|^2, \end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$, $y: V \rightarrow M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}) , [odpowiednio (\bar{g}_{ij})] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczmy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy (\bar{g}_{ij}) wyrażają się następującymi wzorami

$$(\bar{g}_{ij} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. □Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Przestrzeń styczna

Wektor normalny

Powtórka z algebry liniowej I

I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w \mathbb{R}^3 . Wektor prędkości jest równy $x_1 \alpha'_1 + x_2 \alpha'_2$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w \mathbb{R}^3 . Wektor prędkości jest równy $x_1 \alpha'_1 + x_2 \alpha'_2$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w \mathbb{R}^3 . Wektor prędkości jest równy $x_1 \alpha'_1 + x_2 \alpha'_2$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w \mathbb{R}^3 . Wektor prędkości jest równy $x_1 \alpha'_1 + x_2 \alpha'_2$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ na powierzchni jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w \mathbb{R}^3 . Wektor prędkości jest równy $x_1 \alpha'_1 + x_2 \alpha'_2$. Znaleźć jego długość.



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 7

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej.

Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w **kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w **kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w **kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_p M$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f w kierunku wektora v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

- ▶ Niech $x: U \rightarrow M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p \in M$.
- ▶ Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$, oraz $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$.
- ▶ Z założenia mamy $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

- ▶ Niech $x: U \rightarrow M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p \in M$.
- ▶ Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$, oraz $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$.
- ▶ Z założenia mamy $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

- ▶ Niech $x: U \rightarrow M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p \in M$.
- ▶ Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$, oraz $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$.
- ▶ Z założenia mamy $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α , tj. jeśli $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

- ▶ Niech $x: U \rightarrow M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p \in M$.
- ▶ Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$, oraz $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$.
- ▶ Z założenia mamy $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zatem również

$$(x^{-1} \circ \alpha)'(0) = (x^{-1} \circ \beta)'(0).$$

Mamy wtedy

Pochodne kierunkowe

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- ▶ $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_vf + b\nabla_wf$
- ▶ $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_vf + b\nabla_v(g)$
- ▶ $\nabla_v(fg) = g\nabla_vf + f\nabla_vg$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- ▶ $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_vf + b\nabla_wf$
- ▶ $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_vf + b\nabla_v(g)$
- ▶ $\nabla_v(fg) = g\nabla_vf + f\nabla_vg$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- ▶ $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_vf + b\nabla_wf$
- ▶ $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_vf + b\nabla_v(g)$
- ▶ $\nabla_v(fg) = g\nabla_vf + f\nabla_vg$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_p M$ z przestrzeni stycznej w punkcie p , oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- ▶ $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_vf + b\nabla_wf$
- ▶ $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_vf + b\nabla_v(g)$
- ▶ $\nabla_v(fg) = g\nabla_vf + f\nabla_vg$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t) \Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t) \Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t) \Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha'_v(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha'_w(0)} = v + w.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \nabla_{av+bw}f &= (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\
 &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\
 &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &\qquad\qquad\qquad a \nabla_v f + b \nabla_w f.
 \end{aligned}$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \nabla_{av+bw}f &= (f \circ \beta)'(0) = \left. \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \right|_{t=0} = \\
 &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\
 &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\
 &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &\qquad\qquad\qquad a \nabla_v f + b \nabla_w f.
 \end{aligned}$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \nabla_{av+bw}f &= (f \circ \beta)'(0) = \left. \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \right|_{t=0} = \\
 &= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) = \\
 &= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha'_v(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha'_w(0) = \\
 &= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = \\
 &\qquad\qquad\qquad a \nabla_v f + b \nabla_w f.
 \end{aligned}$$



Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe
Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem gładkim (tj. polem wektorowym).

Pochodną f w punkcie $p \in M$ definiujemy jako

$$\begin{aligned} Df_p: T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto \nabla_v f = (\nabla_v f_1, \nabla_v f_2, \nabla_v f_3). \end{aligned}$$

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_p M$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$ oraz

$$Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_p M$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$ oraz

$$Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_p M$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$ oraz

$$Df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $v \in T_p M$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$,
że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

jest krzywą na powierzchni N , oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z
definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy
 $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Niech $v \in T_p M$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$,
że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

jest krzywą na powierzchni N , oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z
definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy
 $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Niech $v \in T_p M$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$,
że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

jest krzywą na powierzchni N , oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z
definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy
 $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)} N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)} N$. □

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)

Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R})\{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Wybierzmy $v = (a, b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)' \big|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b) \big|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)

Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Wybierzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)'|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b)|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)

Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) \{ (1, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

Wyberzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)' \big|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b) \big|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)

Dla $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1, 0, 0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Wyberzmy $v = (a, b) \in T_p \mathbb{R}^2$ i niech $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \nabla_v f = (f \circ \alpha)'|_{t=0} = \\ &= (-a \sin at, a \cos at, b)|_{t=0} = (0, a, b). \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- ▶ Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f , i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- ▶ Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f|_U: U \rightarrow f(U)$ jest izometrią.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- ▶ Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f , i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- ▶ Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f|_U: U \rightarrow f(U)$ jest izometrią.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f , i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f|_U: U \rightarrow f(U)$ jest izometrią.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Warto zauważyć, że izometria od lokalnej izometrii różni się tylko i wyłącznie tym, że lokalna izometria nie musi być dyfeomorfizmem całych przestrzeni. Jest to niewielka, lecz jak zobaczymy ważna różnica.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. f jest lokalną izometrią.
2. Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.
3. Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p taki, że $f \circ x: U \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x .
4. Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha: (a, b) \rightarrow A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. f jest lokalną izometrią.
2. Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_p M$.
3. Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p taki, że $f \circ x: U \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x .
4. Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha: (a, b) \rightarrow A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) \Rightarrow (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 .

Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$.

Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) \Rightarrow (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujemy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) \Rightarrow (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 .

Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$.

Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) \Rightarrow (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 .

Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$.

Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) \Rightarrow (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$.

Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) \Rightarrow (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w \mathbb{R}^2 . Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\bar{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\bar{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dla odpowiednio małego ε .

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \quad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \quad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\bar{q} \in U$.

Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założenia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \quad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \quad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\bar{q} \subset U$.
Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założenia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \quad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \quad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\bar{q} \subset U$.
Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założenia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

- ▶ Zatem $\|(f \circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2 .
- ▶ Stąd $(f \circ x)_1$ i $(f \circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V \subset U$).
- ▶ Zatem $f \circ x: V \rightarrow N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- ▶ Współczynniki metryczne $f \circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).



Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w \mathbb{R}^2 , oraz $f \circ x: U \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$.

Wtedy inkluzja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w \mathbb{R}^2 , oraz $f \circ x: U \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w \mathbb{R}^2 , oraz $f \circ x: U \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku \mathbb{R}^2 musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku \mathbb{R}^2 musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku \mathbb{R}^2 musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 8

Krzywizna Gaussa I

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lub $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$).

Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

Odwzorowaniem Gaussa nazywamy odwzorowanie $\hat{n}: x(U) \rightarrow S^2$ zadane wzorem

$$\hat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lub $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

Odwzorowaniem Gaussa nazywamy odwzorowanie $\hat{n}: x(U) \rightarrow S^2$ zadane wzorem

$$\hat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

- ▶ Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v).
Przyjmujemy że wybieramy kierunek “zewnątrzny” (o ile ma to sens).
- ▶ Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w \mathbb{R}^3 (od lokalnego układu współrzędnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

- ▶ Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v).
Przyjmujemy że wybieramy kierunek “zewnątrzny” (o ile ma to sens).
- ▶ Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w \mathbb{R}^3 (od lokalnego układu współrzędnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

- ▶ Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v).
Przyjmujemy że wybieramy kierunek “zewnątrzny” (o ile ma to sens).
- ▶ Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w \mathbb{R}^3 (od lokalnego układu współrzędnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

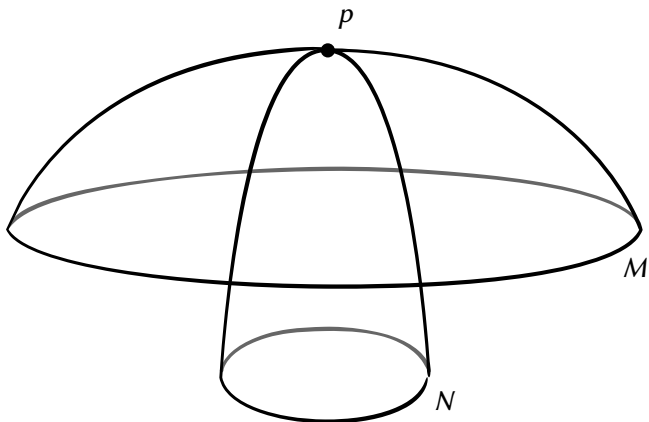
Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne



Spróbujemy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru V , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(V) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\hat{n}(V)), \hat{n}(V) \subset S^2}{A(V), V \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_G(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{V \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru V , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(V) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\hat{n}(V)), \hat{n}(V) \subset S^2}{A(V), V \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_G(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{V \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru V , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(V) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\hat{n}(V)), \hat{n}(V) \subset S^2}{A(V), V \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_G(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{V \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru V , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(V) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\hat{n}(V)), \hat{n}(V) \subset S^2}{A(V), V \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_G(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{V \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- ▶ Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x: U \rightarrow M$ wokół p .
- ▶ Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p .
- ▶ Kiedy punkt p należy do zbioru V , wtedy $\hat{n}(p)$ należy do zbioru $\hat{n}(V) \subset S^2$,
- ▶ zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\hat{n}(V)), \hat{n}(V) \subset S^2}{A(V), V \subset M};$$

- ▶ Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_G(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{V \rightarrow p} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\hat{n}(V)$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa “odwraca” obszar V ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\hat{n}(V)$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa “odwraca” obszar V ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\hat{n}(V)$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa “odwraca” obszar V ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V ? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\hat{n}(V)$ kiedy \hat{n} nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odzworowanie Gaussa “odwraca” obszar V ? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i niech

$$x(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$x_\phi = R(-\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, 0),$$

$$x_\psi = R(-\cos \phi \sin \psi, -\sin \phi \sin \psi, \cos \psi),$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\hat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i niech

$$\mathbf{x}(\phi, \psi) = (R \cos \phi \cos \psi, R \sin \phi \cos \psi, R \sin \psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$\mathbf{x}_\phi = R(-\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, 0),$$

$$\mathbf{x}_\psi = R(-\cos \phi \sin \psi, -\sin \phi \sin \psi, \cos \psi),$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny \mathbf{n} wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\widehat{\mathbf{n}}(p) = \frac{\mathbf{x}_\phi \times \mathbf{x}_\psi}{\|\mathbf{x}_\phi \times \mathbf{x}_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

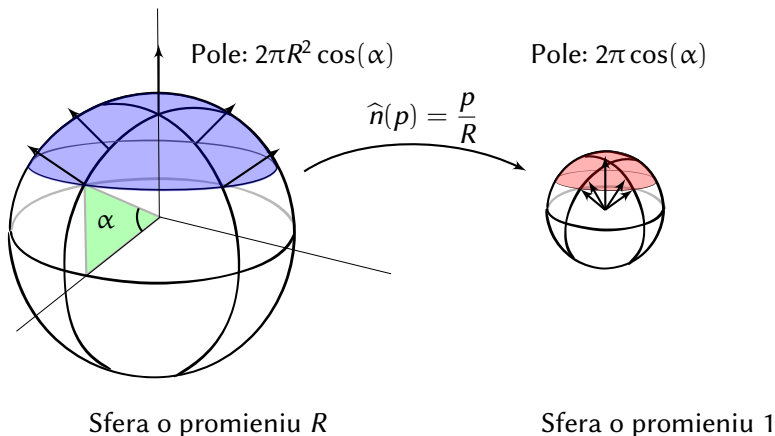
Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa zmniejsza obszar o czynnik $\frac{1}{R^2}$ i nie ma żadnych problemów z definicją.

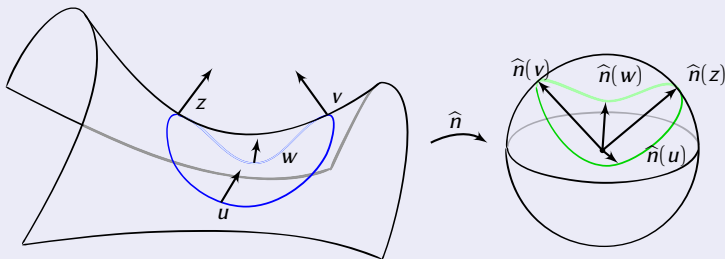


$$K_g(p) = \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} = \frac{2\pi \cos(\alpha)}{2\pi R^2 \cos(\alpha)} = \frac{1}{R^2}.$$

Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

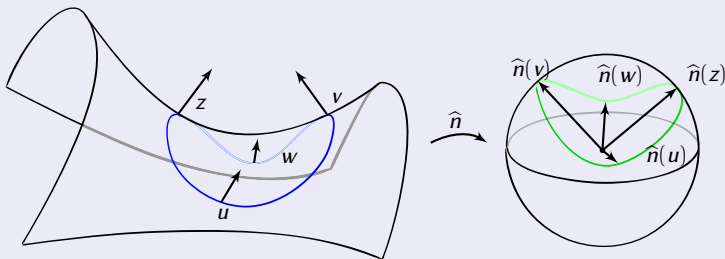
- ▶ Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- ▶ Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\hat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- ▶ Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\hat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

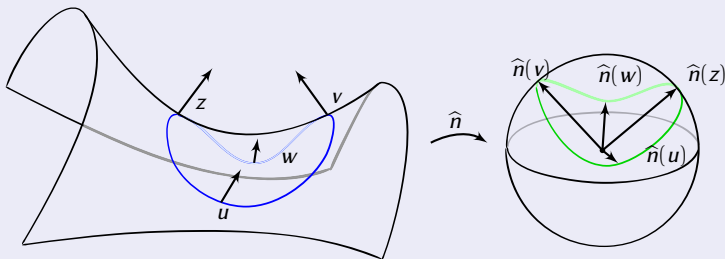
- ▶ Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- ▶ Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\hat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- ▶ Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\hat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

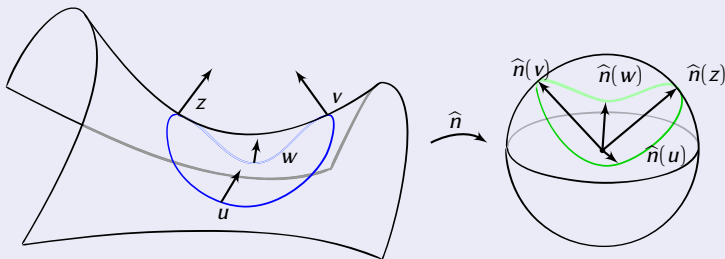
- ▶ Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- ▶ Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\hat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- ▶ Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\hat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

- ▶ Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- ▶ Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- ▶ Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\hat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- ▶ Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\hat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2 , który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2 , który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, ds \, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2 , który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\hat{n}(V)$ jako

$$A(\hat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\hat{n}(V)$ jako

$$A(\hat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy teraz, że

$$\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle = \langle \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \mathbf{n} \rangle| ds dt,$$

gdzie $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ są pochodnymi cząstkowymi \mathbf{n} po zmiennych odpowiednio s i t .

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech \langle , \rangle będzie iloczynem skalarnym na W .

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F: W \rightarrow W$.

Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

Przykład

Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W .

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F: W \rightarrow W$.

Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

Przykład

Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech \langle , \rangle będzie iloczynem skalarnym na W .

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F: W \rightarrow W$.

Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

Przykład

Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Odwzorowanie $\mathcal{B}_F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) &= \langle F(v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, (w_1, w_2) \right\rangle = \\ &= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2), (w_1, w_2) \rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2w_2.\end{aligned}$$

Przykład

Odwzorowanie $\mathcal{B}_F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) &= \langle F(v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, (w_1, w_2) \right\rangle = \\ &= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2), (w_1, w_2) \rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2w_2.\end{aligned}$$

Lemat

Niech $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez \mathbf{G} macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy \mathbf{A} w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech \mathbf{M} oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t \mathbf{G}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez \mathbf{G} macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy \mathbf{A} w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech \mathbf{M} oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t \mathbf{G}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- ▶ *Oznaczmy przez \mathbf{G} macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- ▶ *Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy \mathbf{A} w powyższej bazie.*
- ▶ *Niech \mathbf{M} oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t \mathbf{G}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech F będzie tak jak z poprzedniego przykładu. Na $W = \mathbb{R}^2$ wybierzmy standardową bazę $\{e_1, e_2\}$. Naturalny iloczyn skalarny na \mathbb{R}^2 ma w tej bazie macierz $\mathbf{G} = \text{Id}$. Zatem macierzą odwzorowania \mathcal{B}_F jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t \cdot \text{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \text{Id},$$

zatem

$$\mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \text{Id} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i \mathcal{B} formą dwuliniową na W .

- ▶ \mathcal{B} jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania \mathcal{B} w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.
- ▶ Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:
 1. macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W ,
 2. forma dwuliniowa \mathcal{B}_F indukowana przez F jest symetryczna.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- Symetryczność formy \mathcal{B} oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz A odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$A = A^t.$$

- Jeśli jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $G = Id$ (macierz iloczynu skalarnego na W).

- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = vA^t \cdot Gw = w^t (A^t)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- Symetryczność formy \mathcal{B} oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz \mathbf{A} odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \text{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).

- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t (\mathbf{A}^t)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- Symetryczność formy \mathcal{B} oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz \mathbf{A} odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \text{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).

- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t (\mathbf{A}^t)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz \mathbf{A} formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W . Wtedy

- ▶ F ma rzeczywiste wartości własne k_j .
- ▶ wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.
- ▶ Macierz A odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \text{tr } \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Lemat

Niech $F: W \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz \mathbf{A} formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W . Wtedy

- ▶ *F ma rzeczywiste wartości własne k_i .*
- ▶ *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- ▶ *Macierz \mathbf{A} odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \quad \text{oraz} \quad \text{tr } \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny \mathbf{A} :

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne \mathbf{A}).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny \mathbf{A} :

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne \mathbf{A}).

[Powierzchnie w \$\mathbb{R}^3\$](#) [Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa](#)[Pochodne kierunkowe. Izometria.](#)[Krzywizna Gaussa I](#)[Odwzorowanie Gaussa](#)[Krzywizna Gaussa – Idea](#)[Pole powierzchni](#)[Powtórka z algebry liniowej II](#)[Krzywizna Gaussa II](#)[Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne](#)

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny \mathbf{A} :

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne \mathbf{A}).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- ▶ $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- ▶ $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- ▶ $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- ▶ $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- ▶ $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- ▶ $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- ▶ $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- ▶ $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- ▶ $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- ▶ $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- ▶ $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- ▶ $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odzworowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Odwzorowanie Gaussa

Krzywizna Gaussa – Idea

Pole powierzchni

Powtórka z algebry liniowej II

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicji

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Wykład 9

Krzywizna Gaussa II

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicji

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D\hat{n}(v) \in T_p M$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w \mathbb{R}^3).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D\hat{n}(v) \in T_p M$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w \mathbb{R}^3).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Wektor normalny $\hat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle D\hat{n}(v), \hat{n} \rangle,$$

więc $D\hat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do \hat{n} , zatem musi należeć do $T_p M$. □

Dowód:

Wektor normalny $\hat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \hat{n}, \hat{n} \rangle = 2\langle D\hat{n}(v), \hat{n} \rangle,$$

wiec $D\hat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do \hat{n} , zatem musi należeć do $T_p M$. □

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L: T_p M \rightarrow T_p M$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\hat{n}(v) = -\nabla_v \hat{n}.$$

Lemat

Odwzorowanie Weingartena $L: T_p M \rightarrow T_p M$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L: T_p M \rightarrow T_p M$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\hat{n}(v) = -\nabla_v \hat{n}.$$

Lemat

Odwzorowanie Weingartena $L: T_p M \rightarrow T_p M$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L: T_p M \rightarrow T_p M$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\hat{n}(v) = -\nabla_v \hat{n}.$$

Lemat

Odwzorowanie Weingartena $L: T_p M \rightarrow T_p M$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicji

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Uwaga

Chociaż do definicji odwzorowania Weingartena używamy lokalnego układu współrzędnych, jednak przy innym wyborze $x: U \rightarrow M$, odwzorowanie L może się różnić tylko o znak \pm .

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Druga forma podstawowa w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\Pi_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L , tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej $T_p M$.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Druga forma podstawowa w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\Pi_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L , tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej $T_p M$.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Druga forma podstawowa w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\Pi_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L , tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej $T_p M$.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Druga forma podstawowa w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\Pi_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L , tj. zadane wzorem

$$\Pi_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej $T_p M$.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t(g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})^t.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

7

Uwaga

Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej $\{x_1, x_2\}$ nie będzie ortonormalna w punkcie p , wtedy najczęściej $L_{ij}(p)$ nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu 8.6).

Uwaga

Wiedząc, że macierz (l_{ij}) jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujemy dwie funkcje skalarne $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujemy dwie funkcje skalarne $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krywizna Gaussa I

Krywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krywizna Gaussa oraz krywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujemy dwie funkcje skalarne $K: M \rightarrow \mathbb{R}$, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})} \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \text{tr} \left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2 \det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_{12} & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Aby obliczyć krzywizny (średnią i Gaussa) powierzchni potrzebujemy następujące wielkości:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle, \quad g_{12} = g_{21} = \langle x_1, x_2 \rangle, \quad g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle,$$

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

$$l_{11} = \langle n_1, x_1 \rangle, \quad l_{12} = \langle n_2, x_1 \rangle, \quad l_{22} = \langle n_2, x_2 \rangle,$$

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2 \det(g_{ij})}.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.
Oznaczmy przez $\bar{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy oryginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{aligned} K_G(p) &= \lim_{T \rightarrow \{\bar{p}\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt} = \\ &= \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt}. \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

Oznaczmy przez $\bar{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy oryginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{aligned}
 K_G(p) &= \lim_{T \rightarrow \{\bar{p}\}} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt} = \\
 &= \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt}.
 \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz
krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności
definicjiTheorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

Oznaczmy przez $\bar{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy oryginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$\begin{aligned} K_G(p) &= \lim_{T \rightarrow \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds dt} = \\ &= \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt}. \end{aligned}$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty $a_V, b_V \in x^{-1}(V)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V)),$$

$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy, że skoro $V \rightarrow \{p\}$, więc $a_V \rightarrow \bar{p}$ oraz $b_V \rightarrow \bar{p}$.

Mamy więc

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} &= \lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ &= \frac{|\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\bar{p}))|}}. \end{aligned}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (- (L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (- (L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) = \\ &= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}) = K(p)(x_1 \times x_2) \end{aligned}$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Zauważmy, że skoro $V \rightarrow \{p\}$, więc $a_V \rightarrow \bar{p}$ oraz $b_V \rightarrow \bar{p}$.

Mamy więc

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{A(\hat{n}(V))}{A(V)} &= \lim_{V \rightarrow \{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ &= \frac{|\langle n_1(\bar{p}) \times n_2(\bar{p}), n(\bar{p}) \rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\bar{p}))|}}. \end{aligned}$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (- (L_{11}x_1 + L_{21}x_2)) \times (- (L_{21}x_1 + L_{22}x_2)) = \\ &= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}) = K(p)(x_1 \times x_2) \end{aligned}$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Odwzorowanie Weingartena

Druga forma podstawowa

Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Podsumowanie

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

**Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne**

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Wykład 10

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

**Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne**

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij} .

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n. \quad (10.1)$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij} .

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n. \quad (10.1)$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Uwaga

Ponieważ funkcje Γ_{ij}^k zwane **symbolami Christoffela** nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich **definicję** (z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).

Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \text{dla } k = 1, 2.$$

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$.
Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$.
Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$.
Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujemy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n :

$$\langle x_{ij}, x_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12}$$

$$\langle x_{ij}, x_2 \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22}$$

$$\langle x_{ij}, n \rangle = Q_{ij}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$.
Pozostałe dwa równania potraktujemy jako własności symboli Christoffela. □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij} :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij} :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial u_k}, \mathbf{x}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{x}_i, \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle + \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{jk} \rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{ij} \rangle\end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle.$$

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbol Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbol Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k . □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbol Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego,
równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3 Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowaPochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujemy ją względem u_k :

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

$$\begin{aligned} x_{ijk} &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 \underbrace{(\Gamma_{1k}^2 x_1 + \Gamma_{1k}^2 x_2 + l_{1k} n)}_{x_{1k}} + \\ &+ \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 \underbrace{(\Gamma_{2k}^1 x_1 + \Gamma_{2k}^2 x_2 + l_{2k} n)}_{x_{2k}} + \\ &+ \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2)}_{n_k} = \\ &= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^2 - l_{ij} L_{1k} \right] x_1 + \\ &+ \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{1k}^2 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{2k}^1 - l_{ij} L_{2k} \right] x_2 + \\ &+ \left[\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} \right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn. \end{aligned}$$

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \quad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + (\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} = \\ = \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie podstawiając ($i = 1, j = 2, k = 1$) [odpowiednio: ($i = 2, j = 2, k = 1$)] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \quad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j} \right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} = \\ = \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie podstawiając ($i = 1, j = 2, k = 1$) [odpowiednio: ($i = 2, j = 2, k = 1$)] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \quad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j} \right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} = \\ = \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie podstawiając ($i = 1, j = 2, k = 1$) [odpowiednio: ($i = 2, j = 2, k = 1$)] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. \square

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i
normalne. I forma
podstawowa

Pochodne
kierunkowe.
Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i
Twierdzenie
klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Zadanie

Udowodnić formułę Gaussa.

Podpowiedź: należy porównać współczynniki A, A' , oraz B, B' . Następnie podstawić ($i = 2, j = 1, k = 2$).

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowiednio K_M i K_N . Niech $f: M \rightarrow N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmiennicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22}), oraz ich pochodnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowiednio K_M i K_N . Niech $f: M \rightarrow N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmiennicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22}), oraz ich pochodnych.

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Dowód:

Niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11} , g_{12} , g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^2 g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemy szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i i j da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemy szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Powierzchnie w \mathbb{R}^3

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Symbole Christoffela

Theorema Egregium

Twierdzenie klasyfikujące

Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f: M \rightarrow N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Przykład

Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f: M \rightarrow N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

Przykład

Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujemy funkcję $f: M \rightarrow N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

Przykład

Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujemy funkcję $f: M \rightarrow N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

