Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 7

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Pochodne kierunkowe

Izometria

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej.

Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f\colon M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \overset{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f: M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f\colon M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \overset{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0)=p$ oraz $\beta'(0)=v$ wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0)=(f\circ\beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x\colon U\to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p\in M$.
- Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0)=v=\beta'(0)$.

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0) = (f\circ\beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x\colon U\to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p\in M$.
- Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$.

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x : U \to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p \in M$.
- Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$.

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0)=p$ oraz $\beta'(0)=v$ wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0)=(f\circ\beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x\colon U\to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p\in M$.
- Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0)=v=\beta'(0)$.

Zatem również

$$(x^{-1}\circ\alpha)'(0) = (x^{-1}\circ\beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}(f\circ\alpha)'(0) &= \left[(f\circ x)\circ(x^{-1}\circ\alpha)\right]'(0) = \\ &= J(f\circ x)\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)}\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)} = \\ &= J(f\circ x)(x^{-1}\circ\beta(0))(x^{-1}\circ\beta)'(0) = (f\circ\beta)'(0),\end{aligned}$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). □

Zatem również

$$(x^{-1} \circ \alpha)'(0) = (x^{-1} \circ \beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = \left[(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)\right]'(0) =$$

$$= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)} =$$

$$= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0),$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). □

Zatem również

$$\left(x^{-1}\circ\alpha\right)'(0)=\left(x^{-1}\circ\beta\right)'(0).$$

Mamy wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0)=\left[(f\circ x)\circ(x^{-1}\circ\alpha)\right]'(0)=$$
$$=J(f\circ x)\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)}\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)}=$$
$$=J(f\circ x)(x^{-1}\circ\beta(0))(x^{-1}\circ\beta)'(0)=(f\circ\beta)'(0),$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). $\square$

Zatem również

$$\left(x^{-1}\circ\alpha\right)'(0)=\left(x^{-1}\circ\beta\right)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}(f\circ\alpha)'(0)&=\left[(f\circ x)\circ(x^{-1}\circ\alpha)\right]'(0)=\\&=J(f\circ x)\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)}\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)}=\\&=J(f\circ x)(x^{-1}\circ\beta(0))(x^{-1}\circ\beta)'(0)=(f\circ\beta)'(0),\end{aligned}$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów v, $w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych a, $b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów v, $w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych a, $b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \overset{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \overset{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \overset{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.
Udowodnimy teraz pierwszą własność.
Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:
Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.
Udowodnimy teraz pierwszą własność.
Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Wtedy

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha_v'(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha_w'(0) =$$

$$= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f.$$

$\square$

Wtedy

$$\nabla_{av+bw}f = (f\circ\beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial\beta(t)}\beta'(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= a\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial\beta(0)}(v_1x_1+v_2x_2) + b\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial\beta(0)}(w_1x_1+w_2x_2) =$$

$$= a\frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial\alpha_v(0)}\alpha_v'(0) + b\frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial\alpha_w(0)}\alpha_w'(0) =$$

$$= a(f\circ\alpha_v)'(t)\Big|_{t=0} + b(f\circ\alpha_w)'(t)\Big|_{t=0} = a\nabla_v f + b\nabla_w f.$$

$\square$

Wtedy

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha_v'(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha_w'(0) =$$

$$= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f.$$

□

Wtedy

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha_v'(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha_w'(0) =$$

$$= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f.$$

$\square$

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem gładkim (tj. polem wektorowym). **Pochodną** f w punkcie $p \in M$ definiujemy jako

$$\begin{aligned} Df_p\colon T_pM &\to R^3 \\ v &\mapsto \nabla_v f = \left(\nabla_v f_1, \nabla_v f_2, \nabla_v f_3\right). \end{aligned}$$

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_pM$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ oraz

$$Df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_pM$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ oraz

$$Df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_pM$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ oraz

$$Df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

Niech $v \in T_pM$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, że $\alpha(0)=p$ oraz $\alpha'(0)=v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v)=\nabla_v f=(f\circ\alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f\circ\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz $(f\circ\alpha)(0)=f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f\circ\alpha)'(0)\in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v)\in T_{f(p)}N$. $\square$

Niech $v \in T_pM$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$. □

Niech $v \in T_pM$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$. $\square$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)

Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = \\ = (-a \sin at, a \cos at, b)\big|_{t=0} = (0, a, b).$$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = \\ = (-a \sin at, a \cos at, b)\big|_{t=0} = (0, a, b).$$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = \\ = (-a\sin at, a\cos at, b)\big|_{t=0} = (0,a,b).$$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = \\ = (-a \sin at, a \cos at, b)\big|_{t=0} = (0, a, b).$$

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f \colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}\big(Df_p(v), Df_p(w)\big),$$

  dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.
- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f\big|_U \colon U \to f(U)$ jest izometrią.

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmienniczna ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.
- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f\big|_U\colon U \to f(U)$ jest izometrią.

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmienniczna ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f\big|_U\colon U \to f(U)$ jest izometrią.

Uwaga

Warto zauważyć, że izometria od lokalnej izometrii różni się tylko i wyłącznie tym, że lokalna izometria nie musi być dyfeomorfizmem całych przestrzeni. Jest to niewielka, lecz jak zobaczymy ważna różnica.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f: M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x: U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x: U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha: (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f \colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x \colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x \colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha \colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$.
Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$.
Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$.
Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$.
Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$.
Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$.
Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \qquad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\overline{q} \subset U$. Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \qquad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\overline{q} \subset U$. Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \qquad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\overline{q} \subset U$. Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_i \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_j\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V\subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_i\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V \subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_j\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V\subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_j\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V\subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).
Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x\colon U \to \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$, oraz $f \circ x\colon U \to S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią). Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x\colon U \to \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$, oraz $f \circ x\colon U \to S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią). Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x\colon U \to \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$, oraz $f \circ x\colon U \to S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathbb{R}^2$ musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathbb{R}^2$ musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathbb{R}^2$ musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.