Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 9

Krzywizna Gaussa II

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D\widehat{n}(v) \in T_pM$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^3$).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.
Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D\widehat{n}(v) \in T_pM$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^3$).

Dowód:

Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.
Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle (v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle D\widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. $\square$

Dowód:

Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle(v) = \nabla_v\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 2\langle\nabla_v\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 2\langle D\widehat{n}(v),\widehat{n}\rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. $\square$

Dowód:

Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle D\widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. □

Dowód:
Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.
Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle D\widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. $\square$

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L\colon T_pM \to T_pM$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

Lemat

Odwozorowanie Weingartena $L\colon T_pM \to T_pM$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat ??).

□

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L\colon T_pM \to T_pM$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

Lemat

Odwozorowanie Weingartena $L\colon T_pM \to T_pM$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat ??).

□

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L\colon T_pM \to T_pM$ zadane przez

$$L(v) \stackrel{\text{def.}}{=} -D\widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

Lemat

Odwozorowanie Weingartena $L\colon T_pM \to T_pM$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat ??).

□

Uwaga

Chociaż do definicji odwzorowania Weingartena używamy lokalnego układu współrzędnych, jednak przy innym wyborze $x\colon U \to M$, odwzorowanie L może się różnić tylko o znak $\pm$.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Druga forma podstawowa w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w\rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

1. *(Równania Weingartena) Dla $i = 1, 2$ zachodzi*

$$n_i = -L_{1i} x_1 - L_{2i} x_2.$$

2. *Dla indeksów $i, j = 1, 2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe*

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle,$$

gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

1. *(Równania Weingartena) Dla $i = 1, 2$ zachodzi*

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

2. *Dla indeksów $i, j = 1, 2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe*

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle,$$

gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

1. *(Równania Weingartena) Dla $i = 1, 2$ zachodzi*

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

2. *Dla indeksów $i, j = 1, 2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe*

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j\rangle = \langle n, x_{ij}\rangle,$$

gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \overset{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. $\square$

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \overset{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. $\square$

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i}\widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j\rangle \overset{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j\rangle = -\langle n_i, x_j\rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i\rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial\langle n, x_j\rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j\rangle + \langle n, x_{ij}\rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \overset{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :
Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat ?? cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). $\square$

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :
Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat ?? cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :

Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat ?? cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). $\square$

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :

Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat ?? cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :
Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat ?? cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). $\square$

Uwaga

Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej $\{x_1, x_2\}$ nie będzie ortonormalna w punkcie p, wtedy najczęściej $L_{ij}(p)$ nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu ??).

Uwaga

Wiedząc, że macierz (l_{ij}) jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

Uwaga

Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej $\{x_1, x_2\}$ nie będzie ortonormalna w punkcie p, wtedy najczęściej $L_{ij}(p)$ nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu ??).

Uwaga

Wiedząc, że macierz (l_{ij}) jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K\colon M \to \mathbb{R}$, $H\colon M \to \mathbb{R}$ nastepująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K\colon M \to \mathbb{R}$, $H\colon M \to \mathbb{R}$ nastepująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K\colon M \to \mathbb{R}$, $H\colon M \to \mathbb{R}$ nastepująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad\qquad H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Lemat

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej T_pM.

Dowód:

Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2, \operatorname{tr} L(p) = k_1 + k_2.$$

cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat ??). $\square$

Lemat

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej T_pM.

Dowód:

Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2, \operatorname{tr} L(p) = k_1 + k_2.$$

cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat ??). $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \qquad H(p) = \frac{g_{11} l_{22} - 2 g_{12} l_{12} + g_{22} l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})} \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22} l_{11} - g_{21} l_1 2 & * \\ * & -g_{12} l_{21} + g_{11} l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11} l_{22} - 2 g_{12} l_{12} + g_{22} l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22} l_{11} - g_{21} l_1 2 & * \\ * & -g_{12} l_{21} + g_{11} l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Podsumowanie

Aby obliczyć krzywizny (średnią i Gaussa) powierzchni potrzebujemy następujące wielkości:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle, \qquad g_{12} = g_{21} = \langle x_1, x_2 \rangle, \qquad g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle,$$

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

$$l_{11} = \langle n_1, x_1 \rangle, \qquad l_{12} = l_{21} = \langle n_2, x_1 \rangle, \qquad l_{22} = \langle n_2, x_2 \rangle,$$

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \qquad H(p) = \frac{g_{11} l_{22} - 2 g_{12} l_{12} + g_{22} l_{11}}{2 \det(g_{ij})}.$$

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Oznaczmy przez $\overline{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt}.$$

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.
Oznaczmy przez $\overline{p} = x^{-1}(p)$.
Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds\, dt} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt}.$$

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Oznaczmy przez $\overline{p} = x^{-1}(p)$.
Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt} =$$

$$= \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt}.$$

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty $a_V, b_V \in x^{-1}(V)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V)),$$

$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty $a_V, b_V \in x^{-1}(V)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V)),$$

$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Zauważmy, że skoro $V \to \{p\}$, więc $a_V \to \overline{p}$ oraz $b_V \to \overline{p}$.

Mamy więc

$$\lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V \to \{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ = \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \big(-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)\big) \times \big(-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)\big) = \\ = (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Zauważmy, że skoro $V \to \{p\}$, więc $a_V \to \overline{p}$ oraz $b_V \to \overline{p}$. Mamy więc

$$\lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V\to\{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ = \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \big(-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)\big) \times \big(-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)\big) = \\ = (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Zauważmy, że skoro $V \to \{p\}$, więc $a_V \to \overline{p}$ oraz $b_V \to \overline{p}$. Mamy więc

$$\lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V\to\{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ = \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \big(-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)\big) \times \big(-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)\big) = \\ = (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p})\times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p)\left\langle x_1(\overline{p})\times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p})\times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\|x_1\times x_2\|^2 = \pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V\to\{p\}}\frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p})\times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p)\left\langle x_1(\overline{p})\times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p})\times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\|x_1\times x_2\|^2 = \pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V\to\{p\}}\frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \|x_1 \times x_2\|^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p)\left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \|x_1 \times x_2\|^2 = \pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \|x_1 \times x_2\|^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$