Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 8

Krzywizna Gaussa I

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja ??), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(lub $\mathbb{R}^2 \to S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset R^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\widehat{n}\colon x(U) \to S^2$ zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \overset{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \dfrac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja ??), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(lub $\mathbb{R}^2 \to S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset R^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\widehat{n}\colon x(U) \to S^2$ zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \dfrac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja ??), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(lub $\mathbb{R}^2 \to S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset R^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\widehat{n}\colon x(U) \to S^2$ zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \dfrac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Uwaga

- *Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).*
- *Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w $\mathbb{R}^3$ (od lokalnego układu współrzędnych).*

Uwaga

- *Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).*
- *Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w $\mathbb{R}^3$ (od lokalnego układu współrzędnych).*

Uwaga

- *Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).*
- *Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w $\mathbb{R}^3$ (od lokalnego układu współrzędnych).*

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K : M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

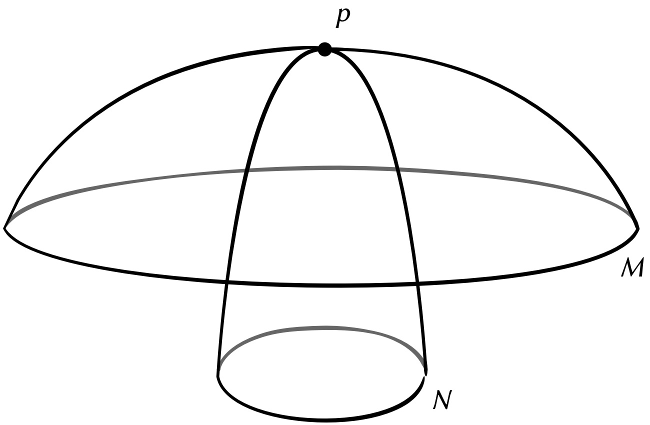
1. $K\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K \colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.



p
M
N

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x \colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \overset{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_G(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\overrightarrow{V \to p}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\overrightarrow{V \to p}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \overset{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa “odwraca” obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0,0,0)$ i niech

$$x(\phi,\psi) = (R\cos\phi\cos\psi, R\sin\phi\cos\psi, R\sin\psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$\begin{aligned} x_\phi &= R(-\sin\phi\cos\psi, \cos\phi\cos\psi, 0), \\ x_\psi &= R(-\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi\sin\psi, \cos\psi), \end{aligned}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\widehat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0,0,0)$ i niech

$$x(\phi,\psi) = (R\cos\phi\cos\psi, R\sin\phi\cos\psi, R\sin\psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

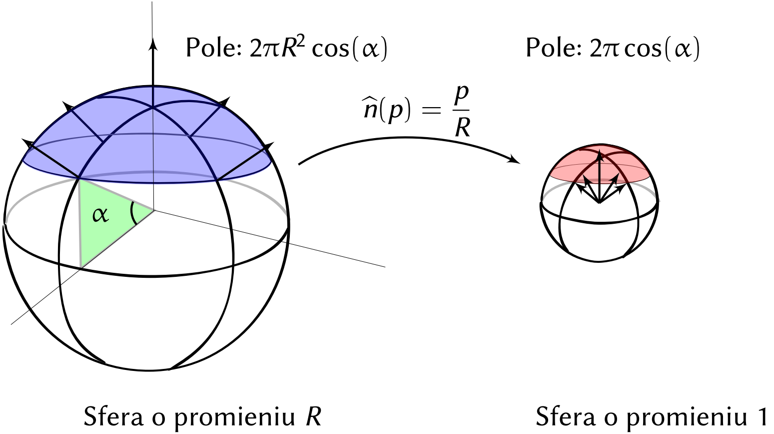
$$\begin{aligned} x_\phi &= R(-\sin\phi\cos\psi, \cos\phi\cos\psi, 0), \\ x_\psi &= R(-\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi\sin\psi, \cos\psi), \end{aligned}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\widehat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa zmiejsza obszar o czynnik $\frac{1}{R^2}$ i nie ma żadnych problemów z definicją.

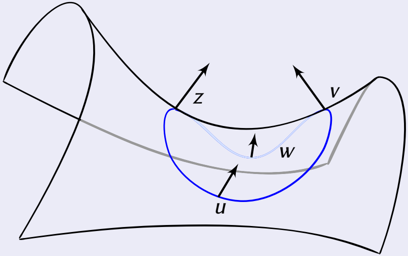


$$K_{\mathcal{G}}(p) = \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{2\pi\cos(\alpha)}{2\pi R^2\cos(\alpha)} = \frac{1}{R^2}.$$

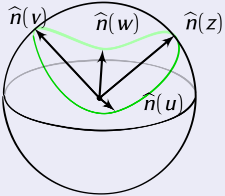
Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



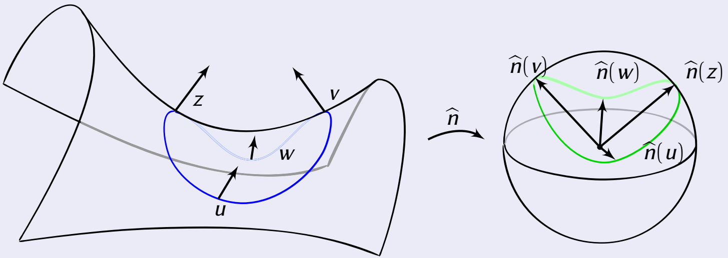
$\xrightarrow{\widehat{n}}$



Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

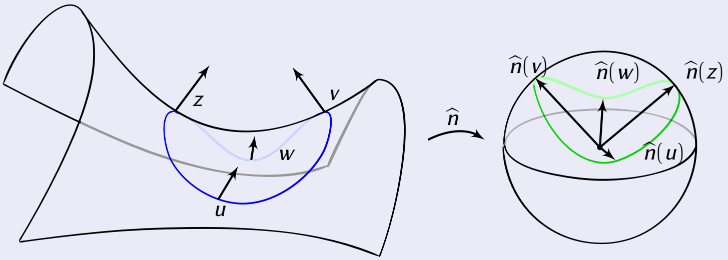
- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

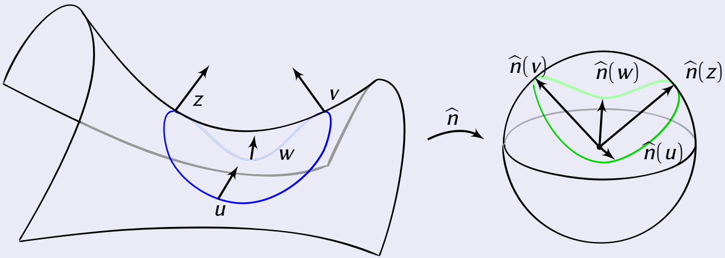
- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u,v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2, który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2, który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \overset{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2, który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Lemat

Załóżmy, że $S \subset x(U) \cap y(V)$ *dla dwóch lokalnych układów współrzędnych* x, y *na* M. *Niech* (g_{ij}), *[odpowiednio* $(\overline{g_{ij}})$*] oznacza macierz współczynników metrycznych dla* x *[odpowiednio* y*]. Wtedy*

$$\iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt = \iint_{y^{-1}(S)} \sqrt{|\det(\overline{g_{ij}})|}\, ds\, dt.$$

Dowód pomijamy.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n\rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n\rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.
To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n\rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n\rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.
To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n\rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n\rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.
To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle\, ,\, \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W.

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon W \to W$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon W \times W \to \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w\rangle.$$

Przykład

Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle\, , \,\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W.

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon W \to W$.
Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon W \times W \to \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w\rangle.$$

Przykład

Niech $F\colon\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle\,,\,\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W.

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon W \to W$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon W \times W \to \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w\rangle .$$

Przykład

Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Przykład

Odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_F((v_1, v_2),(w_1, w_2)) &= \langle F(v_1, v_2),(w_1, w_2)\rangle = \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},(w_1, w_2)\right\rangle = \\
&= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2),(w_1, w_2)\rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2 w_2.
\end{aligned}$$

Przykład

Odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = \langle F(v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, (w_1, w_2) \right\rangle =$$

$$= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2), (w_1, w_2)\rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2 w_2.$$

Lemat

Niech $(W, \langle\,,\,\rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- *Oznaczmy przez $\mathbf{G}$ macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $\mathbf{A}$ w powyższej bazie.*
- *Niech $\mathbf{M}$ oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Lemat

Niech $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ *będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.*

- *Oznaczmy przez* $\mathbf{G}$ *macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech* $F\colon W \to W$ *będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy* $\mathbf{A}$ *w powyższej bazie.*
- *Niech* $\mathbf{M}$ *oznacza macierz odwzorowania* B_F *indukowanego przez* F *(znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$*.*

Lemat

Niech $(W, \langle\, , \rangle)$ *będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.*

- *Oznaczmy przez* $\mathbf{G}$ *macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech* $F \colon W \to W$ *będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy* $\mathbf{A}$ *w powyższej bazie.*
- *Niech* $\mathbf{M}$ *oznacza macierz odwzorowania* B_F *indukowanego przez* F *(znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Lemat

Niech $(W, \langle\, , \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- *Oznaczmy przez $\mathbf{G}$ macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $\mathbf{A}$ w powyższej bazie.*
- *Niech $\mathbf{M}$ oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Lemat

Niech $(W, \langle\,,\,\rangle)$ *będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.*

- *Oznaczmy przez* $\mathbf{G}$ *macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech* $F\colon W \to W$ *będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy* $\mathbf{A}$ *w powyższej bazie.*
- *Niech* $\mathbf{M}$ *oznacza macierz odwzorowania* B_F *indukowanego przez* F *(znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Przykład

Niech F będzie tak jak z poprzedniego przykładu. Na $W = \mathbb{R}^2$ wybierzmy standardową bazę $\{e_1, e_2\}$. Naturalny iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$ ma w tej bazie macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$. Zatem macierzą odwzorowania $\mathcal{B}_F$ jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t \cdot \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id},$$

zatem

$$\mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F \colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F \colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
    1. *macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
    2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli $\mathbf{A}$ jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G} w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli $\mathbf{A}$ jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza
$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$
- Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$
- Jeśli $\mathbf{A}$ jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem
$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli $\mathbf{A}$ jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G} w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \textit{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \textit{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \textit{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \textit{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{A}$:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne $\mathbf{A}$).

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{A}$:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a - t & b \\ b & c - t \end{bmatrix} = t^2 - (a + c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne $\mathbf{A}$).

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{A}$:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne $\mathbf{A}$).

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)