Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

# Elementarna Geometria Różniczkowa

21 maja 2013

Niezmiennil krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Definicje Krzywe regularne

## Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny Wektor binormalny Trójnóg Freneta

## Niezmienniki krzywych

Krzywizna Torsja Wzory Freneta Wzory ogólne

## Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrót Twierdzenie klasyfikacyjne



### Elementarna Geometria Różniczkowa

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wykład 1

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ Definicje
Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Definicje

Krzywe rej

Wektory związane

Niezmienni krzywych

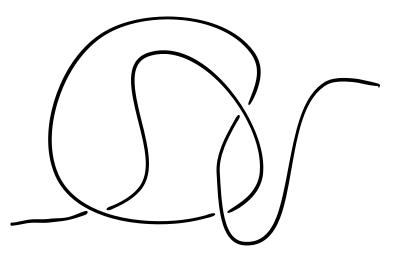
## Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Definicje

Krzywe regularr

wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych



 $\triangleright$  Krzywa gładka, lub po prostu krzywa w  $\mathbb{R}^3$  to

$$\alpha$$
: $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ 

▶ Dla każdego  $t \in (a, b)$  wektor styczny (lub wektor

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)),$$

**prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie  $t_0 \in (a, b)$ 

#### Definicie

**Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w  $\mathbb{R}^3$  to odwzorowanie gładkie

$$\alpha$$
:( $a$ ,  $b$ )  $\rightarrow \mathbb{R}^3$ ;

▶ Dla każdego t ∈ (a, b) wektor styczny (lub wektor prędkości) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

gdzie  $\alpha_i(t)$ , są poszczególnymi współrzędnymi funkcji  $\alpha$ ;

▶ **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie  $t_0 \in (a, b)$  to po prostu długość wektora  $\alpha'(t_0)$ , oznaczana jako  $\|\alpha'(t_0)\|$ ;

#### Krzywe w R3

#### Definicje

Krzywe reg

Wektory związane : krzywą

> Niezmienniki krzywych

# ► Krzywa gładka, lub po prostu krzywa w ℝ³ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha$$
:  $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ ;

▶ Dla każdego t ∈ (a, b) wektor styczny (lub wektor prędkości) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

gdzie  $\alpha_i(t)$ , są poszczególnymi współrzędnymi funkcji  $\alpha$ ;

▶ **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie  $t_0 \in (a, b)$  to po prostu długość wektora  $\alpha'(t_0)$ , oznaczana jako  $\|\alpha'(t_0)\|$ ;

#### Krzywe w R<sup>3</sup>

#### Definicje

Krzywe regularn

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

**Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w  $\mathbb{R}^3$  to odwzorowanie gładkie

$$\alpha$$
:  $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ ;

▶ Dla każdego t ∈ (a, b) wektor styczny (lub wektor prędkości) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)),$$

gdzie  $\alpha_i(t)$ , są poszczególnymi współrzędnymi funkcji  $\alpha$ ;

▶ **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie  $t_0 \in (a, b)$  to po prostu długość wektora  $\alpha'(t_0)$ , oznaczana jako  $\|\alpha'(t_0)\|$ ;

#### Krzywe w R

#### Definicje

Krzywe regu

Wektory związane z krzywą

Niezmiennił krzywych

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Krzywa (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ightharpoonup Zauważmy, że jeśli  $|\alpha'(t)| = 1$  dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$
.

#### Definicie

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Krzywa (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

ightharpoonup Zauważmy, że jeśli  $|\alpha'(t)| = 1$  dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$

#### Definicie

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

ightharpoonup Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego  $t\in(a,b)$  zachodzi

$$\|\alpha'(t)\|=1.$$

ightharpoonup Zauważmy, że jeśli  $|\alpha'(t)|=1$  dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Krzywe w R<sup>3</sup>

#### Definicje

Krzywe reg

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

► Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego  $t \in (a, b)$  zachodzi

$$\|\alpha'(t)\|=1.$$

ightharpoonup Zauważmy, że jeśli  $|\alpha'(t)|=1$  dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a$$
.

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Krzywe w R

#### Definicie

Krzywe regularr

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Rozważmy krzywą  $\alpha(t)=(\cos t,\sin t,t^2)$ . Wtedy wektor prędkości wynosi

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t),$$

zatem prędkość to  $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$ , tak więc krzywa nie jest unormowana. Długość tej krzywej na odcinku od 0 do  $2\pi$  wynosi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{4} \left( 2t\sqrt{1+4t^2} + \sinh^{-1}(2t) \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{\sinh^{-1}(4\pi)}{4} \simeq 40.4097.$$

Krzywe w R<sup>3</sup>

#### Definicje

Krzywe regularn

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

## Definicja

Niech  $\alpha$ : $(c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie gładką krzywą, oraz niech h: $(a, b) \rightarrow (c, d)$  będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie  $\alpha$  i h,

$$\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h : (a, b) \stackrel{h}{\to} (c, d) \stackrel{\alpha}{\to} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej  $\alpha$  przez dyfeomorfizm h.

#### Krzywe w 🏻 R3

Definicje

#### Krzywe regularne

Wektory związane krzywą

#### Niezmiennik krzywych

## Definicja

Niech  $\alpha$ : $(c,d) \to \mathbb{R}^3$  będzie gładką krzywą, oraz niech h: $(a,b) \to (c,d)$  będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie  $\alpha$  i h,

$$\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h: (a, b) \stackrel{h}{\to} (c, d) \stackrel{\alpha}{\to} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej  $\alpha$  przez dyfeomorfizm h.

#### Krzywe w $\mathbb{R}^3$

efinicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

$$h(t)=2t+1,$$

zaś  $\alpha$ : (1, 5)  $\rightarrow \mathbb{R}^3$  jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja  $\alpha$  przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

Krzywe w R<sup>3</sup>

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane :

Niezmiennik krzywych

$$h(t)=2t+1,$$

zaś  $\alpha$ : (1, 5)  $\rightarrow \mathbb{R}^3$  jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja  $\alpha$  przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

Krzywe w R<sup>3</sup>

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane :

Niezmiennik krzywych

$$h(t)=2t+1,$$

zaś  $\alpha$ :(1,5)  $\to \mathbb{R}^3$  jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja  $\alpha$  przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

Krzywe w R<sup>2</sup>

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywa

Niezmienniki krzywych

## **Twierdzenie**

Niech  $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

$$q(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

## Dowód:

Wybierzmy  $t_0 \in (a, b)$ . Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja *q* jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności  $\alpha$ ).

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

## Dowód:

Wybierzmy  $t_0 \in (a, b)$ . Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja *q* jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności  $\alpha$ ).

Krzywe w R<sup>3</sup>

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

$$q:(a,b)\to(c,d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną. Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{a'(t)}$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Detinicje

Krzywe regularne

Wektory związane krzywą

Niezmiennik krzywych

$$q:(a,b)\to(c,d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{g'(t)}$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane krzywa

Niezmiennik krzywych

$$q:(a,b)\to(c,d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

**będzie funkcją do niej odwrotną.** Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że *h* jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{g'(t)}$$

Krzywe w R<sup>3</sup>

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Zatem  $q:(a,b)\to\mathbb{R}$  jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty  $(c,d)\in\mathbb{R}$  (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q:(a,b)\to(c,d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h:(c,d)\to(a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że  $\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$  jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\begin{aligned} |\overline{\alpha}'(t)|| &= \|\alpha(h(t))'\| = \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} h'(t) \right\| = \\ &= \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|} = 1 \quad \Box \end{aligned}$$

krzywą

krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że  $\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$  jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\begin{split} \|\overline{\alpha}'(t)\| &= \|\alpha(h(t))'\| = \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} h'(t) \right\| = \\ &= \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|} = 1 \quad \Box \end{split}$$

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla a = b = 1. Wtedy jej prędkość jest równa  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$ . Wybierzmy  $t_0 = 0$ . Wówczas

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t)=\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

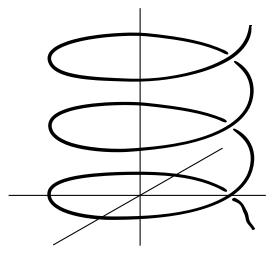


Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmiennil krzywych



Niech  $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$  oraz  $\overline{\alpha}:(c,d)\to\mathbb{R}^3$  będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm

$$h:(a,b)\to(c,d),$$

że  $\overline{\alpha}$  jest reparametryzacją krzywej  $\alpha$  przez h.

## Dowód:

Niech h(t) oznacza złożenie

$$\alpha^{-1} \circ \overline{\alpha}(t)$$

 $(\alpha^{-1}: \alpha(a, b) \to \mathbb{R}^3$  istnieje ponieważ  $\alpha$  jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym.

#### Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Definicje

## Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

#### Niezmiennik krzywych

Niech  $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$  oraz  $\overline{\alpha}:(c,d)\to\mathbb{R}^3$  będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm

$$h:(a,b)\to(c,d),$$

że  $\overline{\alpha}$  jest reparametryzacją krzywej  $\alpha$  przez h.

## Dowód:

Niech h(t) oznacza złożenie

$$\alpha^{-1} \circ \overline{\alpha}(t)$$

 $(\alpha^{-1}: \alpha(a, b) \to \mathbb{R}^3$  istnieje ponieważ  $\alpha$  jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacją jest zadaniem domowym.

#### Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Definicje

#### Krzywe regularne

wektory związane z krzywą

#### Niezmiennik krzywych

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h$$

$$h(c) = a$$
 i  $h(d) = b$ .

Flementarna Geometria Różniczkowa

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

## Dowód:

Ponieważ  $\overline{\alpha}$  jest reparametryzacją  $\alpha$ , zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm  $h:(c,d) \to (a,b)$ , że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h$$
.

$$h(c) = a$$
 i  $h(d) = b$ .



Niech  $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$  będzie krzywą gładką. Jeśli  $\overline{\alpha}:(c,d)\to\mathbb{R}^3$ jest jej reparametryzacją, wówczas

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

## Dowód:

Ponieważ  $\overline{\alpha}$  jest reparametryzacją  $\alpha$ , zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm  $h:(c,d) \to (a,b)$ , że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h$$
.

Ponieważ *h* jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że  $h'(t) \ge 0$  (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a$$
 i  $h(d) = b$ .

Różniczkowa



$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha)$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

krzywych

Wektory związane z krzywą

Niezmiennił krzywych

Stosując podstawienie 
$$t = h(s)$$
 i  $dt = h'(s) ds$  otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_{c}^{b} \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).$$

Niezmiennil krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Stosując podstawienie t = h(s) i dt = h'(s) ds otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).$$

Wektory związane z krzywą

Niezmiennil krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Stosując podstawienie t = h(s) i dt = h'(s) ds otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_{c}^{d} \|\overline{\alpha}'(s)\| ds = \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))h'(s)\| ds =$$

$$= \int_{c}^{d} \|\alpha'(h(s))\|h'(s) ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).$$

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

Krzywe w R

#### Wektory związane z krzywą

ektor styczny i norma

frojnog rrenet

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

# Wykład 2

Wektory związane z krzywą

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą Wektor styczny i normalny Wektor binormalny Trójnóg Freneta

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

#### Krzywe w R³

#### Wektory związane z krzywą

rektor styczny i norma

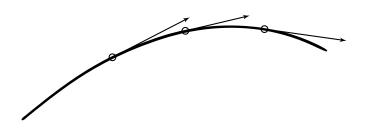
WERTON DITIONS

rrojnog rreneta

liezmienniki rzywych

Definiujemy **jednostkowy wektor styczny** do krzywej  $\alpha$  w punkcie t jako

$$T_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$



#### Flementarna Geometria Różniczkowa

Wektor styczny i normalny

Irojnog Freneta

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Zadanie

Niech v(t) i w(t) będą dowolnymi wektorami w  $\mathbb{R}^3$ , zależnymi od zmiennej t. Sprawdzić, że zachodzi **wzór Leibniza** na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$\langle v(t), w(t) \rangle' = \langle v(t)', w(t) \rangle + \langle v(t), w(t)' \rangle.$$

# Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

Wektor styczny i normalny

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

## Dowód:

Zauważmy, że T(t) jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

Wektor styczny i normalny

Niech  $\alpha(t)$  będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

## Dowód:

Zauważmy, że T(t) jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

## Lemat

Niech  $\alpha(t)$  będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

## Dowód:

Zauważmy, że T(t) jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = ||T(t)|| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = ||T(t)||' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Wektor styczny i normalny

Załóżmy, że  $\alpha$ :  $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  jest krzywą regularną. Dla każdego  $t \in (a,b)$  dla którego  $\|T'(t)\| \neq 0$  definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli T(t) oraz N(t) są dobrze określone (tj.  $T'(t) \neq 0$ ), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związ krzywą

Wektor styczny i normalny

...,.....

krzywych

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli T(t) oraz N(t) są dobrze określone (tj.  $T'(t) \neq 0$ ), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

KIZYWE W IX

krzywą

Wektor styczny i normalny

...,....

krzywych

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli T(t) oraz N(t) są dobrze określone (tj.  $T'(t) \neq 0$ ), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą  $\alpha$ .

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

krzywą

Wektor styczny i normalny

rrojnog rreneta

krzywych

Wektor binormals

Trojnog Freneta

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Lemat

- 1.  $||T'(t)|| \neq 0$
- 2. wektory  $\alpha'(t)$  oraz  $\alpha''(t)$  są liniowo niezależne,
- 3.  $\alpha'(t) imes \alpha''(t) 
  eq 0$ , gdzie imes oznacza iloczyn wektorowy

Irojnog Freneta

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Lemat

- 1.  $||T'(t)|| \neq 0$ ,
- 2. wektory  $\alpha'(t)$  oraz  $\alpha''(t)$  są liniowo niezależne,
- 3.  $\alpha'(t) imes \alpha''(t) 
  eq 0$ , gdzie imes oznacza iloczyn wektorowy

Irojnog Freneta

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Lemat

- 1.  $||T'(t)|| \neq 0$ ,
- 2. wektory  $\alpha'(t)$  oraz  $\alpha''(t)$  są liniowo niezależne,
- 3.  $\alpha'(t) imes \alpha''(t) 
  eq 0$ , gdzie imes oznacza iloczyn wektorowy

## Lemat

- 1.  $||T'(t)|| \neq 0$ ,
- 2. wektory  $\alpha'(t)$  oraz  $\alpha''(t)$  są liniowo niezależne,
- 3.  $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$ , gdzie × oznacza iloczyn wektorowy.

## Szkic dowodu:

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności
- ▶ Implikacja (1  $\Rightarrow$  2). Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego

$$v^{\,\prime} = \frac{2(\alpha_1^{\prime}\alpha_1^{\prime\prime} + \alpha_2^{\prime}\alpha_2^{\prime\prime} + \alpha_3^{\prime}\alpha_3^{\prime\prime})}{2\sqrt{(\alpha_1^{\prime})^2 + (\alpha_2^{\prime})^2 + (\alpha_3^{\prime})^2}} = \frac{\langle \alpha^{\prime}, \alpha^{\prime\prime} \rangle}{v}$$

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Szkic dowodu:

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja  $(1\Rightarrow 2)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne, tj.  $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{R}$ . Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas  $T(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$  i zauważmy, że  $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$ , więc

$$v^{\,\prime} = \frac{2(\alpha_1^{\prime}\alpha_1^{\prime\prime} + \alpha_2^{\prime}\alpha_2^{\prime\prime} + \alpha_3^{\prime}\alpha_3^{\prime\prime})}{2\sqrt{(\alpha_1^{\prime})^2 + (\alpha_2^{\prime})^2 + (\alpha_3^{\prime})^2}} = \frac{\langle \alpha^{\prime}, \alpha^{\prime\prime} \rangle}{v}$$

rrojnog rreneta

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

## Szkic dowodu:

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja  $(1 \Rightarrow 2)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne, tj.  $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{R}$ . Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas  $T(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$  i zauważmy, że  $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$ , więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}$$

Implikacja  $(1 \Rightarrow 2)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne, tj.  $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{R}$ . Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas  $T(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $\nu(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$  i zauważmy, że  $\nu = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$ , więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}$$

#### Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Wektory związane z krzywą

#### Wektor styczny i normalny

WEREOF DIFFORME

mojnog menera

krzywych

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja  $(1\Rightarrow 2)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne, tj.  $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{R}$ . Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas  $T(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$  i zauważmy, że  $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$ , więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

wektor binormai

trojnog rreneta

krzywych

- ► Implikacje (2 ⇔ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja  $(1\Rightarrow 2)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne, tj.  $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{R}$ . Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas  $T(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$  i zauważmy, że  $v = \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 + (\alpha'_3)^2}$ , więc

$$v^{\,\prime} = \frac{2(\alpha_1^{\prime}\alpha_1^{\prime\prime} + \alpha_2^{\prime}\alpha_2^{\prime\prime} + \alpha_3^{\prime}\alpha_3^{\prime\prime})}{2\sqrt{(\alpha_1^{\prime})^2 + (\alpha_2^{\prime})^2 + (\alpha_3^{\prime})^2}} = \frac{\langle \alpha^{\prime}, \alpha^{\prime\prime} \rangle}{v}.$$

#### Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Wektory związane z krzywą

#### Wektor styczny i normalny

WERTON DITTOTTION

Irojnog Freneta

krzywych

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Walstor binormalny

Trójnóg Freneta

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Wektor binorn

Irojnog Freneta

Niezmienniki rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związ krzvwa

Wektor styczny i normalny

Wektor binorn

Irojnog Frenet

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Wektor binorn

Trojnog Frenet

krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)},$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} = \frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

# ▶ Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$ .

Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego  $\|T'(t_0)\|=0$ . Wtedy sam  $T'(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\mathrm{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ . Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem  $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$ , więc albo oba współczynniki (tj.  $v(t_0)$  i  $v'(t_0)$ ) są zerowe, albo wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

Krzywe w R³

krzywa

#### Wektor styczny i normalny

Wektor binormaln

riojilog rielieta

rzywych

$$(\alpha'(t_0))' = \alpha''(t_0)v'$$

 $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ . Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}$$

Zatem  $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$ , więc albo oba współczynniki (tj.  $v(t_0)$  i  $v'(t_0)$ ) są zerowe, albo wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

Krzywe w R<sup>3</sup>

krzywą

Wektor styczny i normalny

Wektor binormaln

rrojnog rreneta

rzywych

wektor binorma

rrojnog rreneti

rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Podobnie udowodnimy implikację  $(2 \Rightarrow 1)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego  $||T'(t_0)|| = 0$ . Wtedy sam  $T'(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} ||\alpha'(t)||$ . Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem  $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$ , więc albo oba współczynniki (tj.  $v(t_0)$  i  $v'(t_0)$ ) są zerowe, albo wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

WEREOF DIFFORME

rrojnog rreneta

rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Podobnie udowodnimy implikację  $(2 \Rightarrow 1)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego  $||T'(t_0)|| = 0$ . Wtedy sam  $T'(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} ||\alpha'(t)||$ . Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem  $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$ , więc albo oba współczynniki (tj.  $v(t_0)$  i  $v'(t_0)$ ) są zerowe, albo wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

WERTON DINORING

rrojnog rrenen

rzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Podobnie udowodnimy implikację  $(2 \Rightarrow 1)$ . Załóżmy, że istnieje  $t_0$  dla którego  $||T'(t_0)|| = 0$ . Wtedy sam  $T'(t_0)$  jest wektorem zerowym. Oznaczmy  $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} ||\alpha'(t)||$ . Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{\nu(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)\nu(t_0) - \alpha'(t_0)\nu'(t_0)}{\nu^2(t_0)}.$$

Zatem  $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$ , więc albo oba współczynniki (tj.  $v(t_0)$  i  $v'(t_0)$ ) są zerowe, albo wektory  $\alpha'(t_0)$  i  $\alpha''(t_0)$  są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

## Wektor binormalny

Trojnog Freneta

krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

# Definicja

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną. Dla każdego  $t \in (a,b)$  takiego, że  $\|T'(t)\| \neq 0$  definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \stackrel{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory N(t) i B(t) nazywamy płaszczyzną normalną, lub płaszczyzą prostopadłą dokrzywej.

## Wektor binormalny

Trójnóg Freneta

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

# Definicja

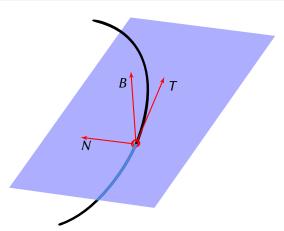
Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną. Dla każdego  $t \in (a,b)$  takiego, że  $\|T'(t)\| \neq 0$  definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \stackrel{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory N(t) i B(t) nazywamy płaszczyzną normalną, lub płaszczyzą prostopadłą do krzywej.

### Definicja

Układ ortonormalny  $\{T(t), N(t), B(t)\}$  nazywać będziemy **trójnogiem** (lub **reperem**) Freneta.



### Elementarna Geometria Różniczkowa

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Wektor styczny i normalny

wektor binormal

Trójnóg Freneta

Niezmienniki krzywych

### Elementarna Geometria Różniczkowa

Krzywe w ℝ³

Wektory związane z krzywą

### Niezmienniki krzywych

Krzyw

1013ju

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

# Wykład 3

# Niezmienniki krzywych

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Krzywizna Torsja Wzory Freneta Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

irzywe w R3

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Krzywizn

Iorsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Torsja

Wzory Frene

Wzory ogóln

Twierdzenie dasyfikacyjne dla

### Definicja

Niech  $\alpha$ :  $(a, b) \to \mathbb{R}^3$  będzie (regularną) krzywą unormowaną. Dla każdego  $t \in (a, b)$  **krzywiznę** definiujemy jako funkcję  $\kappa$ :  $(a, b) \to \mathbb{R}$ 

$$\kappa(t) \stackrel{\text{def.}}{=} ||T'(t)|| = ||\alpha''(t)||$$

Zauważmy, że krzywizna jest zawsze nieujemna,  $\kappa(t) \geqslant 0$ .

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

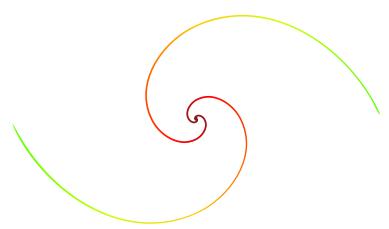
Niezmienn krzywych

Krzywizna

forsja

Vzory Freneta

Wzory ogólne



Zmiana koloru w zależności od krzywizny

### Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

$$\kappa_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_{\beta}(h^{-1}(t))$$

#### Krzywizna

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

### Definicja

Niech  $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną, oraz niech  $\beta = \alpha \circ h: (c, d) \to \mathbb{R}^3$  będzie jej reparametryzacją unormowaną ( $h:(c,d) \rightarrow (a,b)$ ). Wówczas

$$\kappa_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_{\beta}(h^{-1}(t))$$

# Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

### Definicja

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną, oraz niech  $\beta = \alpha \circ h$ : $(c,d) \to \mathbb{R}^3$  będzie jej reparametryzacją unormowaną (h: $(c,d) \to (a,b))$ . Wówczas

$$\kappa_{\alpha}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_{\beta}(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną i niech  $\alpha \circ h_1$  oraz  $\alpha \circ h_2$  będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie  $h_1$ : $(c_1,d_1) \to (a,b)$ , oraz  $h_2$ : $(c_2,d_2) \to (a,b)$  są dyfeomorfizmami. Jeśli  $\kappa_1$  i  $\kappa_2$  oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio  $\alpha \circ h_1$  oraz  $\alpha \circ h_2$ , wtedy

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t)) = \kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich t ∈ (a, b).

### Wniosek

Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

crzywych

Krzywizna

...

Vzorv ogólne

wzory ogoine

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną i niech  $\alpha \circ h_1$  oraz  $\alpha \circ h_2$  będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie  $h_1$ : $(c_1,d_1) \to (a,b)$ , oraz  $h_2$ : $(c_2,d_2) \to (a,b)$  są dyfeomorfizmami. Jeśli  $\kappa_1$  i  $\kappa_2$  oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio  $\alpha \circ h_1$  oraz  $\alpha \circ h_2$ , wtedy

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t)) = \kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

*dla wszystkich*  $t \in (a, b)$ .

### Wniosek

Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

#### Krzywe w R<sup>3</sup>

wektory związane i krzywą

Krzywyci

Krzywizna

...

Vzory ogólne

### Dowód:

$$h_2^{-1} \circ h_1: (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|.$$

Krzywizna

### Dowód:

Najpierw pokażemy, że  $h_1$  i  $h_2$  (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C,$$

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|$$

Najpierw pokażemy, że  $h_1$  i  $h_2$  (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej  $C \in \mathbb{R}$ .

Dla obu indeksów i = 1, 2 i wszystkich  $t \in (c_i, d_i)$  mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

krzywą

krzywych

Krzywizna

Iorsja

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla Najpierw pokażemy, że  $h_1$  i  $h_2$  (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej  $C \in \mathbb{R}$ .

Dla obu indeksów i = 1, 2 i wszystkich  $t \in (c_i, d_i)$  mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|.$$

### (rzywe w $\mathbb{R}^3$

krzywą

krzywycł

#### Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

$$h_{1}'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' [h_1(t)] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
  

$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
  

$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

krzywych

#### Krzywizna

Torsja

Vzory Freneta

Wzory ogólne

$$h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' [h_1(t)] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm i$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

krzywych

#### Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Zatem dla wszystkich  $t \in (c_1, d_1)$  zachodzi

$$h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' \left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$

$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$

$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

krzywych

#### Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

$$h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' \left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

krzywych

#### Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

$$h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)' \left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$

$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$

$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

krzywych

#### Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

$$h'_{1}(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{1}(t))\|} = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_{2}(h_{2}^{-1}[h_{1}(t)]))\|} = \\ = \pm h_{2}[(h_{2}^{-1} \circ h_{1})(t)].$$

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = (h_2^{-1})' \left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$(h_2^{-1} \circ h_1)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

crzywych

#### Krzywizna

Iorsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

orsja

Vzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

### Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również  $\kappa_1(t)=\kappa_2(\pm t+C)$ . Podstawiając teraz  $t=h_1^{-1}(s)$  otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s))$$

orsja

/zory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Podstawiając przedostatnią równość do  $\alpha$  mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również  $\kappa_1(t)=\kappa_2(\pm t+C)$ . Podstawiając teraz  $t=h_1^{-1}(s)$  otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

### Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również  $\kappa_1(t)=\kappa_2(\pm t+C)$ . Podstawiając teraz  $t=h_1^{-1}(s)$  otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

*Niech*  $\alpha$ : $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  *będzie krzywą regularną. Wektor* normalny do  $\alpha$  jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  jest prostą.

Krzywizna

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0)$$

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left( \int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left( \int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

Krzywizna

*Niech*  $\alpha$ : $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  *będzie krzywą regularną. Wektor* 

normalny do  $\alpha$  jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  jest prostą.

### Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywa unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do  $\alpha$  jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left( \int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left( \int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

. - .

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną. Wektor normalny do  $\alpha$  jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  jest prostą.

### Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $\alpha$  jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do  $\alpha$  jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left( \int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left( \int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

### Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $\alpha$  jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do  $\alpha$  jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t) dt = \left( \int T'_1(t) dt, \int T'_2(t) dt, \int T'_3(t) dt \right) =$$

$$= \left( \int 0 dt, \int 0 dt, \int 0 dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.}$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

krzywyc

Krzywizna

013)4

Wzory ogólne

### Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $\alpha$  jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do  $\alpha$  jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$\begin{split} T(t) &= \int T'(t) \ dt = \left( \int T_1'(t) \ dt, \int T_2'(t) \ dt, \int T_3'(t) \ dt \right) = \\ &= \left( \int 0 \ dt, \int 0 \ dt, \int 0 \ dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const.} \end{split}$$

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

crzywych

Krzywizna

---,--

Wzory ogólne

### Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w$$
,

gdzie  $v, w \in \mathbb{R}^3$  są ustalonymi wektorami, czyli  $\alpha$  jest prostą.

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|}$$

$$\alpha(t) = vt + w$$

gdzie  $v, w \in \mathbb{R}^3$  są ustalonymi wektorami, czyli  $\alpha$  jest prostą. Załóżmy teraz, że  $\alpha$  jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej)  $\alpha(t) = vt + w$ , gdzie  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Wtedy oczawiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|}$$

zatem T'(t) = 0 więc automatycznie N(t) = 0.

#### irzywe w R3

Wektory związane z krzywą

krzywych

#### Krzywizna

Torsja

Vzory Freneta

Vzory ogólne

### Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w$$
,

gdzie  $v, w \in \mathbb{R}^3$  są ustalonymi wektorami, czyli  $\alpha$  jest prostą. Załóżmy teraz, że  $\alpha$  jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej)  $\alpha(t) = vt + w$ , gdzie  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Wtedy

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|}$$

## Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w$$

gdzie  $v, w \in \mathbb{R}^3$  są ustalonymi wektorami, czyli  $\alpha$  jest prostą. Załóżmy teraz, że  $\alpha$  jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej)  $\alpha(t) = vt + w$ , gdzie  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\nu}{\|\nu\|},$$

zatem T'(t) = 0 więc automatycznie N(t) = 0.

$$\tau(t) \stackrel{{\sf def.}}{=} \langle {\it B}'(t), {\it N}(t) \rangle.$$

### Uwaga

- Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).
- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy
  - $|\tau(t)| = ||B'(t)||$ , jednak torsja może mieć wartości ujemne.

#### Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Wektory związane z krzywą

rzywych

,

Torsja

zory Freneta

Wzory ogólne

Niech  $\alpha$ :  $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich  $t \in (a,b)$  zachodzi  $N(t) \neq 0$ . **Torsję** krzywej  $\alpha$  w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{{\sf def.}}{=} \langle {\it B}'(t), {\it N}(t) \rangle.$$

### Uwaga

- Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).
- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy  $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$ , jednak torsja może mieć wartości ujemne

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

crzywycn

Torsja

.

Wzory ogólne

Niech  $\alpha$ :  $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich  $t \in (a,b)$  zachodzi  $N(t) \neq 0$ . **Torsję** krzywej  $\alpha$  w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{{
m def.}}{=} \langle \mathit{B}'(t), \mathit{N}(t) \rangle.$$

### Uwaga

- Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).
- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy  $|\tau(t)| = ||B'(t)||$ , jednak torsja może mieć wartości ujemne

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

krzywą

azywyci

Torsja

V-------

Wzory ogólne

$$\tau(t) \stackrel{{\sf def.}}{=} \langle {\it B}'(t), {\it N}(t) \rangle.$$

### Uwaga

- Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).
- Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy  $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$ , jednak torsja może mieć wartości ujemne.

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

krzywą

crzywycr

Torsja

....,..

Wzory ogólne

## Elementarna Geometria Różniczkowa

rzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

, , ,

...., ......

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogóln

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

# Uwaga

Dla wygody od teraz będziemy opuszczać argument t jeśli nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności.

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj.  $N(t) \neq 0$  dla wszystkich  $t \in (a,b)$ ). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

crzywych

rzywizna

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Niech  $\alpha$ :  $(a, b) \to \mathbb{R}^3$  będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj.  $N(t) \neq 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ ). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

crzywych

rzywizna

Wzorv Freneta

Wzory ogólne

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

$$N' = aT + bB.$$

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji  $\kappa$  i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N'jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa}$$

Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy  $a = \langle N', T \rangle$  (odpowiednio  $b = \langle N', B \rangle$ ).

Wyliczenie a rozpocznijmy od równości  $0 = \langle N, T \rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa}$$

zatem  $a=\langle N',T\rangle=-\kappa$ . Ponieważ  $\langle N,B\rangle=0$ , w podobny sposób możemy stwierdzić, że  $\langle N',B\rangle=-\tau$ . Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

krzywą

rzywych

Crzywizna

Wzory Freneta

Wzory ogólne

wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy  $a=\langle N',T\rangle$  (odpowiednio  $b=\langle N',B\rangle$ ). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości  $0=\langle N,T\rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa}$$

zatem  $a=\langle N',T\rangle=-\kappa$ . Ponieważ  $\langle N,B\rangle=0$ , w podobny sposób możemy stwierdzić, że  $\langle N',B\rangle=-\tau$ . Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

wektory związane z krzywą

rzywycn

KIZY WIZIIA

Wzory Freneta

Wzory ogólne

wektorów T i B.

przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc N' musi być kombinacją liniową

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy  $a=\langle N',T\rangle$  (odpowiednio  $b=\langle N',B\rangle$ ). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości  $0=\langle N,T\rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem  $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$ . Ponieważ  $\langle N, B \rangle = 0$ , w podobny sposób możemy stwierdzić, że  $\langle N', B \rangle = -\tau$ . Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

wektory związane z krzywą

rzywycn

\_ \_

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, wiec N'jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy  $a = \langle N', T \rangle$  (odpowiednio  $b = \langle N', B \rangle$ ). Wyliczenie *a* rozpocznijmy od równości  $0 = \langle N, T \rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

 $0 = \langle \textit{N}', \textit{T} \rangle + \langle \textit{N}, \textit{T}' \rangle = \langle \textit{N}', \textit{T} \rangle + \underbrace{\langle \textit{N}, \kappa \textit{N} \rangle}_{},$ 

zatem  $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$ . Ponieważ  $\langle N, B \rangle = 0$ , w podobny

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji  $\kappa$  i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N'jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B.

$$N' = aT + bB$$
.

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy  $a = \langle N', T \rangle$  (odpowiednio  $b = \langle N', B \rangle$ ). Wyliczenie *a* rozpocznijmy od równości  $0 = \langle N, T \rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem  $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$ . Ponieważ  $\langle N, B \rangle = 0$ , w podobny sposób możemy stwierdzić, że  $\langle N', B \rangle = -\tau$ . Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Podobnie B' jest prostopadły do B,  $\langle B, B' \rangle = 0$ , więc

$$B' = aT + bN$$
.

Musimy więc policzyć  $a=\langle B',T\rangle$  i  $b=\langle B',N\rangle$ . Wyliczenie a rozpocznijmy od równości:  $0=\langle B,T\rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle$$

Tak więc B' jest współliniowy z Ni równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

crzywych

Torsia

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Podobnie B' jest prostopadły do B,  $\langle B, B' \rangle = 0$ , więc

$$B' = aT + bN$$
.

Musimy więc policzyć  $a=\langle B',T\rangle$  i  $b=\langle B',N\rangle$ . Wyliczenie a rozpocznijmy od równości:  $0=\langle B,T\rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji  $\tau$ .

$$B' = aT + bN$$
.

Musimy więc policzyć  $a=\langle B',T\rangle$  i  $b=\langle B',N\rangle$ . Wyliczenie a rozpocznijmy od równości:  $0=\langle B,T\rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji  $\tau$ .

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

rzywych

Krzywizna

Wzorv Freneta

Wzory ogólne

Podobnie B' jest prostopadły do B,  $\langle B, B' \rangle = 0$ , więc

$$B' = aT + bN$$
.

Musimy więc policzyć  $a=\langle B',T\rangle$  i  $b=\langle B',N\rangle$ . Wyliczenie a rozpocznijmy od równości:  $0=\langle B,T\rangle$ . Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle \textit{B}', \textit{T} \rangle + \langle \textit{B}, \textit{T}' \rangle = \langle \textit{B}', \textit{T} \rangle + \langle \textit{B}, \kappa \textit{N} \rangle = \langle \textit{B}', \textit{T} \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji  $\tau$ .

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą unormowaną oraz niech  $N(t) \neq 0$  dla każdego  $t \in (a,b)$ . Następujące warunki są równoważne.

- Zbiór α(a, b) (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym.
- 3.  $\tau \equiv 0$

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.

Krzywe w R³

Wektory związane z krzywą

krzywycł

Krzywizna

Wzorv Freneta

Wzory ogólne

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą unormowaną oraz niech  $N(t) \neq 0$  dla każdego  $t \in (a,b)$ . Następujące warunki są równoważne.

- 1. Zbiór  $\alpha(a, b)$  (tj. wykres  $\alpha$ ) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym
- 3.  $\tau \equiv 0$ .

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.

Krzywe w R<sup>3</sup>

krzywą

Krzywyci

Krzywizna

torsja

Wzory Freneta

Wzory ogolne

- 1. Zbiór  $\alpha(a, b)$  (tj. wykres  $\alpha$ ) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym.
- 3.  $\tau \equiv 0$ .

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

krzywyci

Krzywizna

ioisja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą unormowaną oraz niech  $N(t) \neq 0$  dla każdego  $t \in (a,b)$ . Następujące warunki są równoważne.

- 1. Zbiór  $\alpha(a, b)$  (tj. wykres  $\alpha$ ) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym.
- 3.  $\tau \equiv 0$ .

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.

Krzywe w R<sup>3</sup>

krzywą

krzywych

Krzywizna

torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Niech  $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$  będzie krzywą unormowaną oraz niech  $N(t) \neq 0$  dla każdego  $t \in (a,b)$ . Następujące warunki są równoważne.

- 1. Zbiór  $\alpha(a, b)$  (tj. wykres  $\alpha$ ) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.
- 2. B jest wektorem stałym.
- 3.  $\tau \equiv 0$ .

# Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.

Krzywe w K

krzywą

krzywych

10127 01211

Wzory Freneta

...

Wzory ogólne

## Dowód:

$$B' = -\tau N$$

## Dowód:

1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle

$$B' = -\tau N$$

1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej

$$B' = -\tau N$$

# 1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?),więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie

2 ⇔ 3 wynika ze wzoru Freneta (3.3):

zmienia ani zwrotu ani długości.

$$B' = -\tau N$$

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

krzywyci

Krzywizna

Wzorv Freneta

Wzory ogólne

## Dowód:

- 1 ⇒ 2 Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.
- $2 \Leftrightarrow 3$  wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Krzywizna

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

# 2 ⇒ 1 Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny $\alpha$ .

Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

Krzywizna

Wzorv Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

- $2 \Rightarrow 1$  Niech  $p \in (a, b)$  będzie punktem z dziedziny  $\alpha$ .
  - Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

10129 111211

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

- $2 \Rightarrow 1$  Niech  $p \in (a, b)$  będzie punktem z dziedziny  $\alpha$ .
  - Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

10129 111211

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

- $2 \Rightarrow 1$  Niech  $p \in (a, b)$  będzie punktem z dziedziny  $\alpha$ .
  - Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

Torrio

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

- $2 \Rightarrow 1$  Niech  $p \in (a, b)$  będzie punktem z dziedziny  $\alpha$ .
  - Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

$$f'(t) = \frac{d}{dt} (\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0$$

➤ Zatem f jest funkcją stalą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0. irzywe w R3

Wektory związane z krzywą

rzywych

Krzywizna

Wzorv Freneta

Wzory ogólne

TOLY WILLI

Wzorv Freneta

Wzory ogólni

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} (\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0.$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0

crzywych

,

Wzorv Freneta

Wzory ogólni

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left( \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle \right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0.$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0

$$f'(t) = \frac{d}{dt} (\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stary}} = 0.$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0

rzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

krzywyci

,

Wzorv Freneta

Wzory ogólne

Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \left( \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle \right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest staly}} = 0.$$

▶ Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy t = p otrzymamy f(p) = 0, więc f jest tożsamościowo równa 0.

rzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

rzywych

Wzory Freneta

Wzory ogólne

# Niech $\alpha$ : $(a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$ ). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$
 (3.8)

#### Krzywe w R<sup>3</sup>

### Wektory związane z krzywą

## krzywych

### Krzywizna

Wzory Frenets

#### Wzory ogólne

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

#### Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane z krzywą

## krzywych

Krzywizna

Wzorv Freneta

#### Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

#### Krzywe w K

Wektory związane z krzywą

## crzywych

#### Crzywizna

#### ---,--

#### Wzory ogólne

#### Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

#### Krzywe w IK

Wektory związane z krzywą

## crzywych

#### rzywizna

## Wzory ogólne

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$
 (3.8)

#### Krzywe w K

wektory związane z krzywą

## crzywych

Crzywizna

. .

#### Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T$$
 (3.6)

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$
 (3.8)

#### Krzywe w K

#### wektory związane z krzywą

## crzywych

#### rzywizna

#### .

#### Wzory ogólne

#### Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla

## Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że  $\alpha$  jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go iako ćwiczenie.

## Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B,  $\kappa$  i  $\tau$  są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w  $\mathbb{R}^3$ ) i nie zależą od parametryzacji.

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że  $\alpha$  jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwolując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że Τ, Ν, Β, κ i τ są funkcjami tylko i wylącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w ℝ³) i nie zależą od parametryzacji.

#### (rzywe w $\mathbb{R}^3$

Wektory związane z krzywą

krzywych

crzywizna

013)11

...

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że  $\alpha$  jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie.

## Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B,  $\kappa$  i  $\tau$  są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w  $\mathbb{R}^3$ ) i nie zależą od parametryzacji.

Krzywe w R<sup>3</sup>

krzywą

krzywych

Crzywizna

orsja

. ..

Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

### Elementarna Geometria Różniczkowa

(rzywe w R<sup>.</sup>

Wektory związane z krzywą

Niezmiennil krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

# Wykład 4

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

#### Elementarna Geometria Różniczkowa

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych Translacja i obrót Twierdzenie klasyfikacyjne Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iranslacja i obrot

- ► Translacja krzywej α, tj. krzywa β = α + q, gdzie q ∈  $\mathbb{R}^3$
- Niech  $A \in O(3)$  będzie macierzą  $3 \times 3$  o współczynnikach

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot \alpha$$

## Translacja i obrót

- ► Translacja krzywej α, tj. krzywa β = α + q, gdzie  $q ∈ ℝ^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsje jak  $\alpha$ .
- Niech  $A \in O(3)$  będzie macierzą  $3 \times 3$  o współczynnikach

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot o$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Translacja i obrót

*Niech*  $\alpha$ :(a, b)  $\rightarrow \mathbb{R}^3$  *będzie krzywą regularną.* 

- ► Translacja krzywej  $\alpha$ , tj. krzywa  $\beta = \alpha + q$ , gdzie  $q \in \mathbb{R}^3$  jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak  $\alpha$ .
- ▶ Niech  $A \in O(3)$  będzie macierzą  $3 \times 3$  o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku  $\pm 1$  oraz ortogonalnych kolumnach. Krzywa

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

wierdzenie dasyfikacyjne dla crzywych

Translacja i obrót

*Niech*  $\alpha$ :(a, b)  $\rightarrow \mathbb{R}^3$  *będzie krzywą regularną.* 

- ► Translacja krzywej  $\alpha$ , tj. krzywa  $\beta = \alpha + q$ , gdzie  $q \in \mathbb{R}^3$  jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak  $\alpha$ .
- ▶ Niech  $A \in O(3)$  będzie macierzą  $3 \times 3$  o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku  $\pm 1$  oraz ortogonalnych kolumnach. Krzywa

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

## Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Krzywe w R<sup>3</sup>

Wektory związane : krzywą

Niezmienniki krzywych

wierdzenie dasyfikacyjne dla crzywych

Translacja i obrót

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Mnożenie przez taką macierz A oznacza obrót wokół środka układu współrzędnych, symetrię względem płaszczyzny, lub kombinację tych dwóch. Grupa O(3) to tzw. grupa symetrii  $\mathbb{R}^3$  i jej bazę stanowią macierze obrotów o dowolny kąt wokół każdej z osi, oraz macierz symetrii względem (dowolnie wybranej) płaszczyzny zawierającej punkt (0,0,0).

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

## Uwaga

Te dwie operacje definiują nam relację równoważności pomiędzy wykresami krzywych w  $\mathbb{R}^3$ . Krzywą  $\alpha$  uznajemy za równoważną krzywej  $\beta$ , jeśli wykres  $\beta$  można otrzymać przez zastosowanie odpowiednich translacji, obrotów i symetrii do wykresu  $\alpha$ .

*Niech*  $\kappa, \tau:(a,b) \to \mathbb{R}$  *będą gładkimi funkcjami, oraz niech*  $\kappa(t) > 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ . Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.

Istnieje taka krzywa gładka

$$\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$$
,

Twierdzenie klasyfikacyjne

► leśli

$$\beta:(a,b)\to\mathbb{R}^3$$

Twierdzenie klasyfikacyjne

## Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

*Niech*  $\kappa, \tau:(a,b) \to \mathbb{R}$  *będą gładkimi funkcjami, oraz niech*  $\kappa(t) > 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ . Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.

Istnieje taka krzywa gładka

$$\alpha$$
:  $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ ,

że jej krzywizna  $\kappa_{\alpha}$  i torsja  $\tau_{\alpha}$  są tożsamościowo równe funkcjom  $\kappa$  oraz  $\tau$ .

► leśli

$$\beta:(a,b)\to\mathbb{R}^3$$

## Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

*Niech*  $\kappa, \tau:(a,b) \to \mathbb{R}$  *będą gładkimi funkcjami, oraz niech*  $\kappa(t) > 0$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ . Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.

Istnieje taka krzywa gładka

$$\alpha$$
:  $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ ,

że jej krzywizna  $\kappa_{\alpha}$  i torsja  $\tau_{\alpha}$  są tożsamościowo równe funkcjom  $\kappa$  oraz  $\tau$ .

Jeśli

$$\beta$$
:  $(a, b) \to \mathbb{R}^3$ 

jest drugą taką krzywą, to krzywą β można uzyskać z α stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

## Szkic dowodu:

Niech  $p \in (a, b)$ . Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana  $\alpha:(a, b) \to \mathbb{R}^3$  taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz}$$
 $T_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrót

## Szkic dowodu:

Niech  $p \in (a, b)$ . Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana  $\alpha:(a, b) \to \mathbb{R}^3$  taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz}$$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Translacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

### Szkic dowodu:

Niech  $p \in (a, b)$ . Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana  $\alpha:(a, b) \to \mathbb{R}^3$  taka, że

$$lpha(p) = egin{pmatrix} 0 \ 0 \ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz}$$
 $T_{lpha}(p) = egin{pmatrix} 1 \ 0 \ 0 \end{pmatrix}, \quad N_{lpha}(p) = egin{pmatrix} 0 \ 1 \ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{lpha}(p) = egin{pmatrix} 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}$ 

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

$$u'_{1}(t) = \kappa(t) u_{4}(t)$$

$$u'_{2}(t) = \kappa(t) u_{5}(t)$$

$$u'_{3}(t) = \kappa(t) u_{6}(t)$$

$$u'_{7}(t) = \tau(t) u_{4}(t)$$

$$u'_{8}(t) = \tau(t) u_{5}(t)$$

$$u'_{9}(t) = \tau(t) u_{6}(t)$$

$$u'_{1}(t) = -\kappa(t) u_{1}(t) + \tau(t) u_{7}(t)$$

$$u'_{5}(t) = -\kappa(t) u_{2}(t) + \tau(t) u_{8}(t)$$

$$u'_{6}(t) = -\kappa(t) u_{3}(t) + \tau(t) u_{9}(t)$$

$$u_{1}(p) = 1 \qquad u_{4}(p) = 0 \qquad u_{7}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0 \qquad u_{5}(p) = 1 \qquad u_{8}(p) = 0$$

$$u_{3}(p) = 0 \qquad u_{6}(p) = 0 \qquad u_{9}(p) = 1$$

Elementarna Geometria Różniczkowa

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iranslacja i obrot

$$u'_{1}(t) = \kappa(t)u_{4}(t)$$

$$u'_{2}(t) = \kappa(t)u_{5}(t)$$

$$u'_{3}(t) = \kappa(t)u_{6}(t)$$

$$u'_{7}(t) = \tau(t)u_{4}(t)$$

$$u'_{8}(t) = \tau(t)u_{5}(t)$$

$$u'_{9}(t) = \tau(t)u_{6}(t)$$

$$u'_{4}(t) = -\kappa(t)u_{1}(t) + \tau(t)u_{7}(t)$$

$$u'_{5}(t) = -\kappa(t)u_{2}(t) + \tau(t)u_{8}(t)$$

$$u'_{1}(t) = -\kappa(t)u_{3}(t) + \tau(t)u_{9}(t)$$

$$u_{1}(p) = 1$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{3}(p) = 0$$

$$u_{6}(p) = 0$$

$$u''_{7}(p) = 0$$

$$u_{1}(p) = 1$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0$$

$$u_{3}(p) = 0$$

$$u_{4}(p) = 0$$

$$u_{5}(p) = 1$$

$$u_{1}(p) = 1$$

irzywe w R³

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik crzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Franslacja i obrót

rzywych Translacia i obrót

Twierdzenie klasyfikacyine

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t) u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t) u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t) u_6(t) \end{aligned} \right\} \ \text{dla "} T' &= \kappa \mathcal{N}, \\ u_3'(t) &= \kappa(t) u_6(t) \end{aligned}$$

$$u_7'(t) &= \tau(t) u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t) u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t) u_6(t) \end{aligned} \} \ \text{dla "} B' &= -\tau \mathcal{N},$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$u'_{1}(t) = \kappa(t)u_{4}(t)$$

$$u'_{2}(t) = \kappa(t)u_{5}(t)$$

$$u'_{3}(t) = \kappa(t)u_{6}(t)$$

$$u'_{7}(t) = \tau(t)u_{4}(t)$$

$$u'_{8}(t) = \tau(t)u_{5}(t)$$

$$u'_{9}(t) = \tau(t)u_{6}(t)$$

$$dla "B' = -\tau N",$$

$$u'_{9}(t) = \tau(t)u_{6}(t)$$

$$u'_{4}(t) = -\kappa(t)u_{1}(t) + \tau(t)u_{7}(t)$$

$$u'_{5}(t) = -\kappa(t)u_{2}(t) + \tau(t)u_{8}(t)$$

$$u'_{6}(t) = -\kappa(t)u_{3}(t) + \tau(t)u_{9}(t)$$

$$dla "N' = -\kappa T + \tau B".$$

$$u'_{6}(t) = -\kappa(t)u_{3}(t) + \tau(t)u_{9}(t)$$

$$u_{1}(p) = 1 \qquad u_{4}(p) = 0 \qquad u_{7}(p) = 0$$

$$u_{2}(p) = 0 \qquad u_{5}(p) = 1 \qquad u_{8}(p) = 0$$

$$u_{1}(p) = 1 \qquad u_{2}(p) = 0 \qquad u_{2}(p) = 1$$

Translacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t) \, u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t) \, u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t) \, u_6(t) \end{aligned} \right\} \, dla \,\, "T' &= \kappa N", \\ u_3'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} \\ u_7'(t) &= \tau(t) \, u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t) \, u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} \} \, dla \,\, "B' &= -\tau N", \\ u_9'(t) &= \tau(t) \, u_6(t) \end{aligned} \\ u_4'(t) &= -\kappa(t) \, u_1(t) + \tau(t) \, u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t) \, u_2(t) + \tau(t) \, u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t) \, u_3(t) + \tau(t) \, u_9(t) \end{aligned} \} \, dla \,\, "N' &= -\kappa T + \tau B". \\ u_6'(t) &= -\kappa(t) \, u_3(t) + \tau(t) \, u_9(t) \end{aligned}$$
 
$$u_1(p) = 1 \qquad u_4(p) = 0 \qquad u_7(p) = 0 \\ u_2(p) &= 0 \qquad u_5(p) = 1 \qquad u_8(p) = 0 \\ u_3(p) &= 0 \qquad u_6(p) = 0 \qquad u_9(p) = 1 \end{aligned}$$

# Twierdzenie (Picarda, o istnieniu i jedyności rozwiązania równania różniczkowego)

Niech  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , oraz niech  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ . Ustalmy liczbę  $t_0 \in (a, b)$  i punkt  $v_0 \in \mathbb{R}^n$ . Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka  $\alpha:(a, b) \to \mathbb{R}^n$  która spełnia

$$\alpha(t_0) = v_0$$
, oraz  
 $\alpha'(t) = A(t)\alpha(t)$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ .

## Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać  $\alpha$ , A,  $t_0$  i  $v_0$ ).

Niech  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , oraz niech  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ . Ustalmy liczbę  $t_0 \in (a, b)$  i punkt  $v_0 \in \mathbb{R}^n$ . Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka  $\alpha:(a, b) \to \mathbb{R}^n$  która spełnia

$$\alpha(t_0) = v_0$$
, oraz  
 $\alpha'(t) = A(t)\alpha(t)$  dla wszystkich  $t \in (a, b)$ .

arzywe w R3

krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

anslacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

## Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać  $\alpha$ , A,  $t_0$  i  $v_0$ ).

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywa

Niezmienniki krzywych

krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o  $\{T, N, B\}$  dla krzywej która realizuje  $\kappa$  jako krzywiznę i  $\tau$  jako torsję.

Aby pokazać, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich  $t \in (a, b)$  posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ )

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

 $X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \end{pmatrix} (t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ \dots \end{pmatrix} (t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ \dots \end{pmatrix} (t).$ 

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o  $\{T, N, B\}$  dla krzywej która realizuje  $\kappa$  jako krzywizne i  $\tau$  jako torsję.

Aby pokazać, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich  $t \in (a, b)$  posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle,$$
  $i, j = 1, 2, 3.$ 

Oczywiście mamy (warunek początkowy na  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ )

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

krzywych

klasyfikacyjne dla krzywych



krzywych Twierdzenie

Translacja i obrót

Twierdzenie klasyfikacyjne

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o  $\{T, N, B\}$  dla krzywej która realizuje  $\kappa$  jako krzywiznę i  $\tau$  jako torsję.

Aby pokazać, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich  $t \in (a, b)$  posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle,$$
  $i, j = 1, 2, 3.$ 

Oczywiście mamy (warunek początkowy na  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ )

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

## spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym.

Możemy myśleć o nich jako o  $\{T, N, B\}$  dla krzywej która realizuje  $\kappa$  jako krzywiznę i  $\tau$  jako torsję.

Aby pokazać, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich  $t \in (a, b)$  posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ )

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iranslacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o  $\{T, N, B\}$  dla krzywej która realizuje  $\kappa$  jako krzywiznę i  $\tau$  jako torsję.

Aby pokazać, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich  $t \in (a, b)$  posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ )

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Iranslacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o  $\{T, N, B\}$  dla krzywej która realizuje  $\kappa$  jako krzywiznę i  $\tau$  jako torsję.

Aby pokazać, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich  $t \in (a, b)$  posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ )

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ranslacja i obrot

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o  $\{T, N, B\}$  dla krzywej która realizuje  $\kappa$  jako krzywiznę i  $\tau$  jako torsję.

Aby pokazać, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich  $t \in (a, b)$  posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na  $X_1, X_2$  i  $X_3$ )

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 (4.1)

Krzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmiennik krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Franslacja i obrót

klasyfikacyjne dla krzywych

nansacja i obrot

## Zadanie

Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji  $p'_{i,j}(t)$  z funkcjami  $\{p_{i,j}(t)\}$  oraz  $\kappa(t)$  i  $\tau(t)$ .

## Przykład

$$p'_{1,1}(t) = (\langle X_1(t), X_1(t) \rangle)' =$$

$$= \underbrace{\langle X'_1(t), X_1(t) \rangle}_{=\kappa(t)X_2(t)} + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t), X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)} =$$

$$= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t).$$

## Zadanie

Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji  $p'_{i,j}(t)$  z funkcjami  $\{p_{i,j}(t)\}$  oraz  $\kappa(t)$  i  $\tau(t)$ .

## Przykład

$$p'_{1,1}(t) = (\langle X_1(t), X_1(t) \rangle)' =$$

$$= \underbrace{\langle X'_1(t), X_1(t) \rangle}_{=\kappa(t)X_2(t)} + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t), X'_1(t) \rangle}_{=\kappa(t)X_2(t)} =$$

$$= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t).$$

klasyfikacyjne dla krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji  $p_{i,j}(t)$  wynika, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t. Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds$$

klasyfikacyjne dla krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji  $p_{i,j}(t)$  wynika, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t. Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds$$

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Translacja i obrot

Twierdzenie klasyfikacyjne

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji  $p_{i,j}(t)$  wynika, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.

Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds.$$

klasyfikacyjne dla krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji  $p_{i,j}(t)$  wynika, że  $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$  tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t. Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{p}^{t} X_{1}(s) \ ds.$$

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

(rzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ransiacja i obrot

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

(rzywe w R³

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ITalislacja i obiot

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

(rzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ransiacja i obrot

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

(rzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienni! krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ransiacja i obrot

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w *p*) ten zwrot jest taki sam Zostawiamy to jako zadanie domowe.

(rzywe w  $\mathbb{R}^3$ 

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ransiacja i obrot

$$\alpha'(t) = T_{\alpha}(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_{\alpha}(t)N_{\alpha}(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_{\alpha}(t)|B_{\alpha}(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

Krzywe w R3

Wektory związane z krzywą

Niezmienni krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

ransiacja i obrot