Elementarna Geometria Różniczkowa
Krzywizna powierzchni

Opracowanie: Marek Kaluba*

2013

Spis treści

*Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

5

Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Definicja 5.1. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja 5.2. Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s,t) \in U$.

5.1 Podstawowe definicje

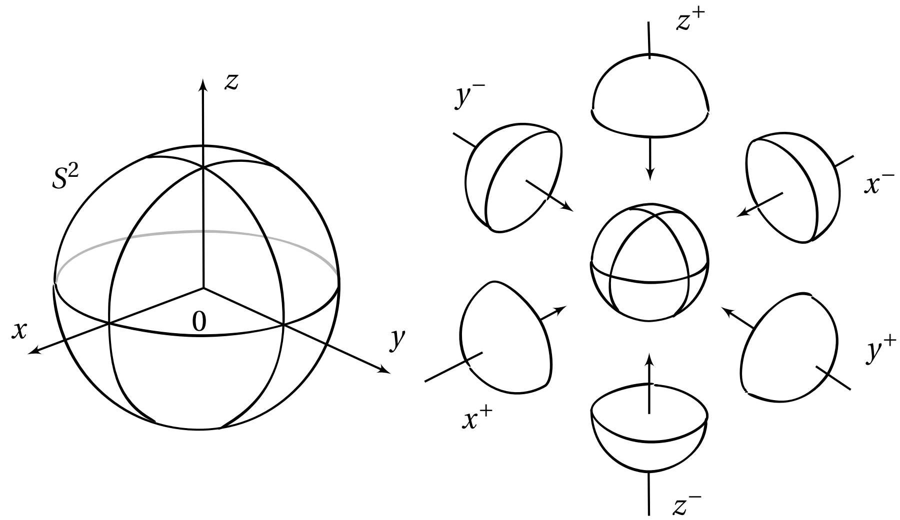
Definicja 5.3.

- Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x \colon U \to V \subset \mathbb{R}^3$.

- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha \colon [0,1] \to M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie" (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny (patrz część 1 Lematu 5.5).

Przykład. Jednostkowa sfera, tj. powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 + x^2 = 1$ jest przykładem powierzchni regularnej. Lokalnym układem współrzędnych jest np. $x^{\pm}(u,v) = (\pm\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$ jak na następującym rysunku

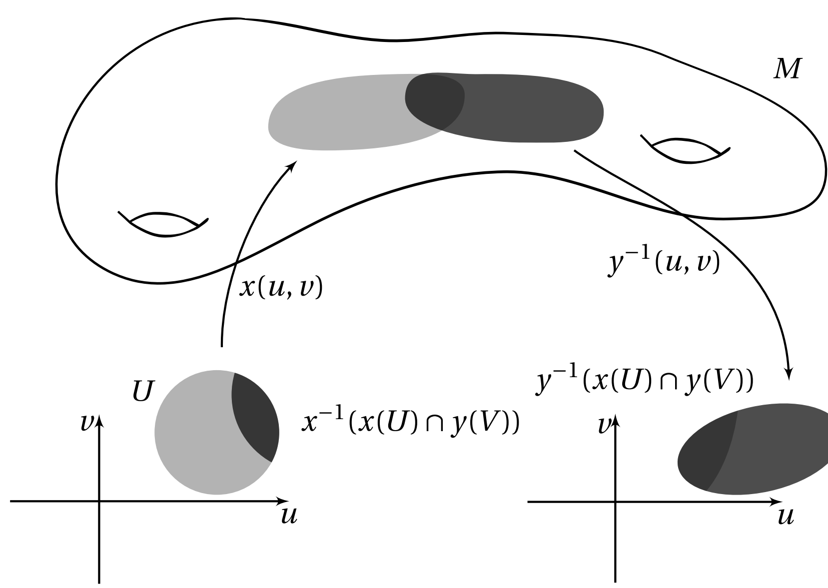


Uwaga. ***UWAGA! Zakładamy, że wszystkie powierzchnie które będzie my rozważać dalej są gładkie i łukowo spójne.***

Definicja 5.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ i $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Wtedy złożenie

$$\Phi_{x,y} \stackrel{\text{def.}}{=} y^{-1} \circ x\colon x^{-1}(x(U) \cap y(V)) \to y^{-1}(x(U) \cap y(V))$$

nazywamy **funkcją zmiany układu współrzędnych**.



Lemat 5.5. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Wówczas:*

1. *Jeśli $x\colon U \to M$ jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz $x(U)$.*

2. *Niech $V \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $f\colon V \to U$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy*
$$y \overset{def.}{=} x \circ f\colon V \to M$$
jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych $\Phi_{y,x}$.

Dowód:

1) Ponieważ x jest injekcją, więc jest bijekcją na swój obraz. Ponieważ x jest odwzorowaniem gładkim, oraz na zbiorze U rząd jego pochodnej jest równy 2 (z definicji lokalnego układu współrzędnych), więc korzystając z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym na zbiorze $x(U)$ istnieje do x gładkie odwzorowanie odwrotne, zatem x jest dyfeomorfizmem.

2) Ponieważ złożenie dwóch dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem, wystarczy sprawdzić, że jest spełniona własność lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$.

Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s} \times \frac{\partial(x\circ f)}{\partial t} &= \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2} \times \frac{\partial x}{\partial f_1}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1} \times \frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)
\end{aligned}$$

Ponieważ x jest lokalnym układem współrzędnych, więc z definicji pierwszy czynnik jest niezerowy. Ponieważ f jest dyfeomorfizmem, więc drugi czynnik (wyznacznik macierzy Jacobiego dla f) jest różny od zera.
Ostatnia teza ($\Phi_{x,y} = f$) wynika z definicji funkcji przejścia pomiędzy układami współrzędnych.

□

Gładkość funkcji na powierzchni

Definicja 5.6. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f \colon M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Funkcję f nazywamy gładką jeśli dla każdego punktu $p \in M$ i dla każdego lokalnego układu współrzędnych $x \colon U \to M$ takiego, że $p \in x(u)$ funkcja

$$f \circ x \colon U \xrightarrow{x} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

jest gładka jako funkcja z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M \colon M \to \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Załóżmy że $x \colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f \colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako
$$F = f \circ x^{-1} \colon x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$
gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Przykład.

- Funkcja $f \colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$
Rozważmy funkcję $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1} \colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Uwaga. *Definicja 5.6 naturalnie uogólnia się na odwzorowania gładkie* $M \to \mathbb{R}^n$.

Gładkość odwzorowania między powierzchniami

Definicja 5.7. Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie $M \to N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Mówimy, że f jest **dyfeomorfizmem powierzchni** jeśli f jest gładką bijekcją, której odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.

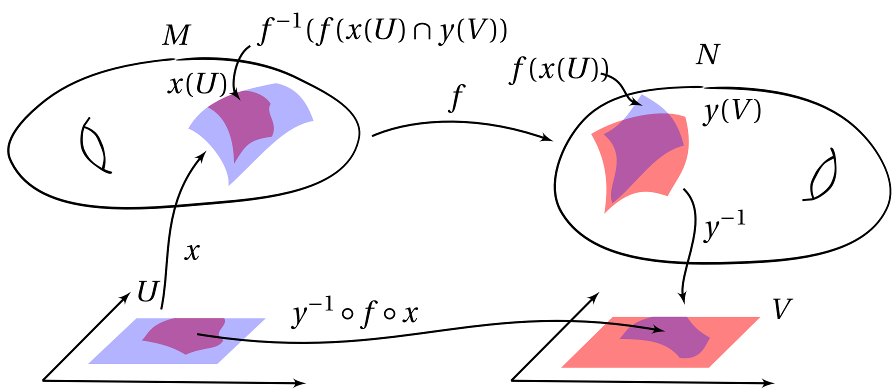
Lemat 5.8. *Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech*

$$f\colon M \to N$$

będzie odwzorowaniem ciągłym. f jest odwzorowaniem gładkim (a więc gładkim jako odwzorowanie $f\colon M \to \mathbb{R}^3$) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje wokół niego lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ oraz istnieje lokalny układ współrzędnych $y\colon V \to N$ wokół $f(p) \in N$ takie, że złożenie

$$y^{-1} \circ f \circ x\colon U \to V$$

jest gładkie jako odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (tam, gdzie to złożenie ma sens).



Dowód:

Aby złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ będzie miało sens musimy założyć, że ograniczymy się do zbioru otwartego $f(x(U)) \cap y(v) \neq \emptyset$. Dla wygody oznaczmy $A \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1}(y^{-1}(y(v)))$. Załóżmy, że odwzorowanie $f\colon M \to N \subset \mathbb{R}^3$ jest gładkie. Ponieważ x i y są dyfeomorfizmami na swój obraz, więc i ich funkcje odwrotne są gładkie. Zatem złożenie $y^{-1} \circ f \circ x$ jest również gładkie.

Załóżmy, że $y^{-1} \circ f \circ x$ jest odwzorowaniem gładkim z $\mathbb{R}^2 \supset U \to V \subset \mathbb{R}^2$. Możemy je złożyć wcześniej z $x^{-1}\colon x(U) \to U$, oraz później z $y\colon V \to y(V)$ otrzymując:

$$M \supset x(U) \underbrace{\xrightarrow{x^{-1}} U \xrightarrow{x}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} x(U) \xrightarrow{f} y(V) \underbrace{\xrightarrow{y^{-1}} V \xrightarrow{y}}_{\mathrm{id}_{y(V)}} y(V) \subset N.$$

□

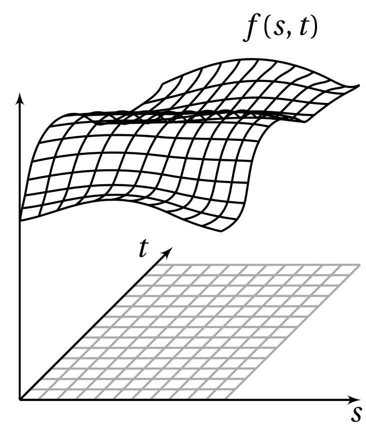
Uwага. *Przypomnijmy, że powierzchnię zdefiniowaliśmy jako zbiór* ***zanurzony*** *w $\mathbb{R}^3$ który lokalnie przypomina $\mathbb{R}^2$. Powyższy lemat pozwala nam definiować powierzchnie (i ogólniej: rozmaitości n-wymiarowe), oraz funkcje na nich określone nie uciekając się do zanurzenia w odpowiednio wysoko wymiarowej przestrzeni Euklidesowej. Nie jest wtedy oczywiste, że każdą rozmaitość da się dla pewnego n w przestrzeń $\mathbb{R}^n$ zanurzyć. Udowodnione jest jednak twierdzenie Whitneya o zanurzaniu mówiące, że każdą rozmaitość n-wymiarową można zanurzyć w przestrzeń euklidesową odpowiednio dużego wymiaru (wystarczy $\mathbb{R}^{2n+1}$).*

5.2 Przykłady powierzchni

Parametryzacja Monge'a

Definicja 5.9. Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$. Powierzchnię $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią Monge'a** jeśli jej parametryzacja jest wykresem funkcji f:

$$x(s,t) = (s, t, f(s,t)).$$



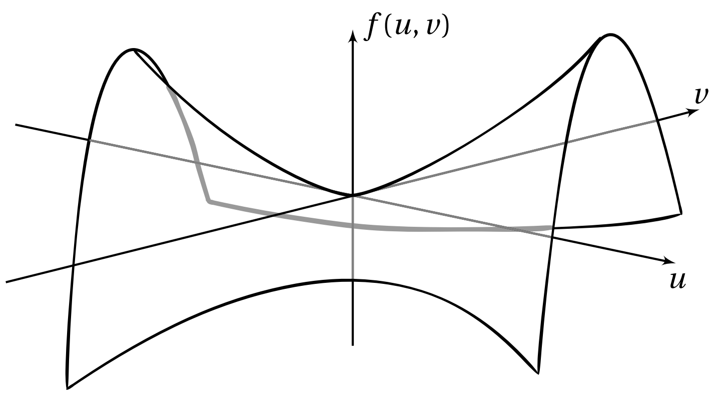
Uwaga. *Parametryzacja Monge'a spełnia naszą definicję powierzchni (Definicja 5.3), ponieważ*

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \end{bmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), -\frac{\partial x}{\partial t}(s,t), 1 \right) \neq 0.$$

Przykład.

- Paraboloida $(x(u,v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- Powierzchnia siodłowa $(x(u,v) = (u, v, uv))$

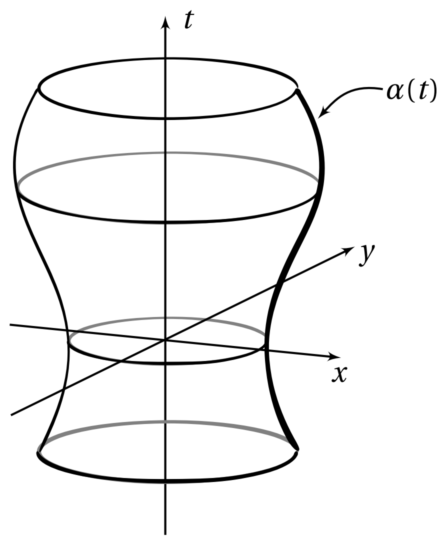


Powierzchnie obrotowe

Definicja 5.10. **Powierzchnia obrotowa** powstaje poprzez obrócenie krzywej $\alpha(t)$ wokół pewnej ustalonej prostej l. Postać ogólna to

$$x(t,\phi) = \alpha(t) \cdot Rot_l(\phi),$$

gdzie $Rot_l(\phi)$ to macierz 3×3 obrotu o kąt ϕ wokoł prostej l.



Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z:

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi Ox otrzymamy

$$x(t,\phi) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos\phi - \alpha_3(t)\sin\phi, \alpha_2(t)\sin\phi + \alpha_3(t)\cos\phi\big)$$

Uwaga. *Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby*

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie. Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Przykład. • Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

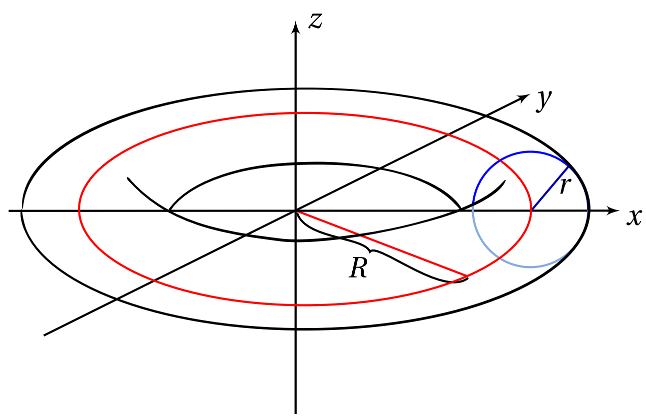
$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\cos t \sin\phi, \cos t \cos\phi, \sin t).$$

• Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład. • Torus – obrót okręgu $\alpha(t) = (R + r\cos t, 0, r\sin t)$ wokół osi z:

$$x(t,\phi) = \big((R + r\cos t)\cos\phi, (R + r\cos t)\sin\phi, r\sin t\big).$$

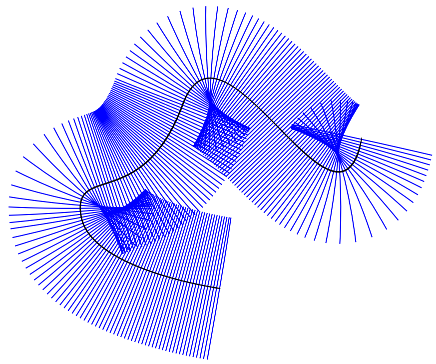


Powierzchnie prostokreślne

Definicja 5.11. Powierzchnią prostokreślną nazywamy powierzchnię o parametryzacji

$$x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

gdzie α i β są krzywymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. α nazywa się potocznie kierownicą, β - ruletą.



Uwaga. *Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.*

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida.

Poziomice funkcji

Definicja 5.12. Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F\colon V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją. Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli

$$\operatorname{rank} DF(p) = 0.$$

Uwaga: W naszym przypadku oznacza to, że wszystkie pochodne cząstkowe są równe 0.

Uwaga 2: W przypadku wyżej-wymiarowym, dla odwzorowania $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ warunek $\operatorname{rank} DF(p) = 0$ powinien być zastąpiony przez:

$$\operatorname{rank} DF(p) \text{ jest mniejszy od maksymalnego, tj. } DF(p) < \max(m, n).$$

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja 5.13.

Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli

$$\operatorname{rank} DF(p) = 1.$$

Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Uwaga: W naszym przypadku oznacza to, że przynajmniej jedna z pochodnych cząstkowych odwzorowania F jest różna od 0 w tym punkcie.

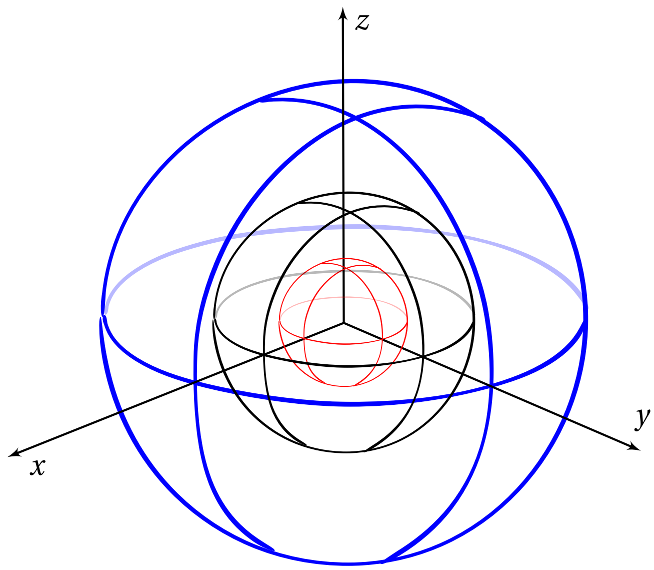
Uwaga 2: Warunek rank $DF(p) = 1$ w definicji punktu regularnego tak naprawdę oznacza: rząd tak duży jak tylko jest to możliwe. Jeśli funkcja F będzie miała wartości w $\mathbb{R}^n$ definicję trzeba będzie odpowiednio zmodyfikować.

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Twierdzenie 5.14. *Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, zaś $F\colon V \to \mathbb{R}$ funkcją gładką. Jeśli $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$ jest wartością regularną, wtedy $F^{-1}(a)$ jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).*

Dowód: Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Pomijamy. □

Przykład. • elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida $(F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z)$
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

6

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

6.1 Przestrzeń styczna

Uwaga. *Na każdej powierzchni mamy naturalnie dane dwie rodziny krzywych . Dla każdego ustalonego $s_0 \in \mathbb{R}$ możemy rozpatrywać krzywą*

$$x(s_0, \cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

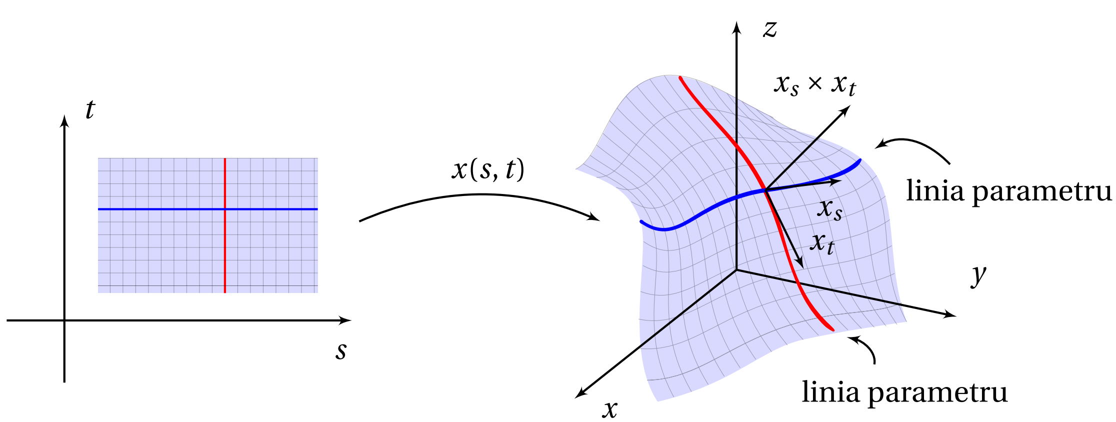
Podobnie dla dowolnego t_0 mamy krzywą

$$x(\cdot, t_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Krzywe te leżą na naszej powierzchni, a wektory styczne do tych krzywych będą grały bardzo ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Definicja 6.1. Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0)\Big|_{s=s_0}, \qquad x_t(p) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t)\Big|_{t=t_0}.$$

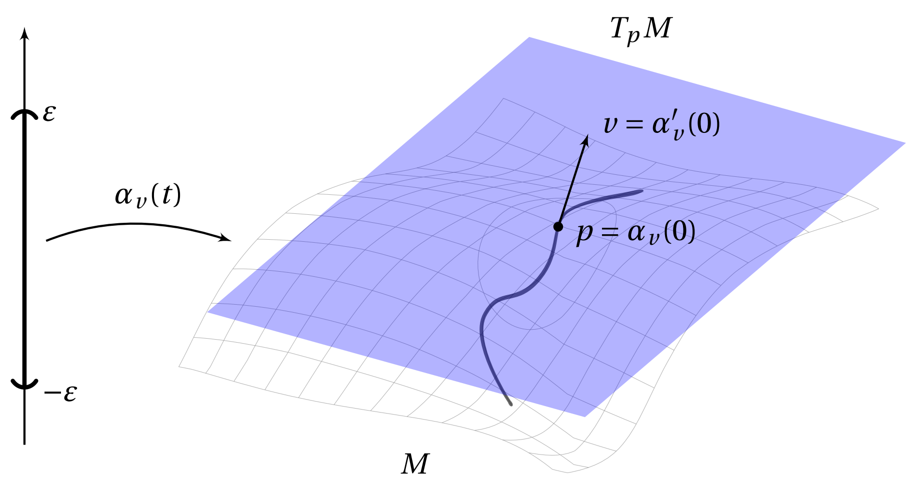


Niech $p \in M$ będzie punktem na powierzchni M. Możemy rozważyć wszystkie krzywe gładkie przechodzące prze ten punkt i leżące (lokalnie) na powierzchni. Intuicja podpowiada nam, że ponieważ wektory styczne dobrze przybliżają (lokalnie) krzywe, więc zbiór wszystkich wektorów tego typu powinien dobrze przybliżać powierzchnię wokół punktu p. Te intuicje możemy sformalizować w następującej definicji.

Definicja 6.2. Niech $\alpha_v \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha'_v(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

Uwaga. *Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.*

- *Jeśli $v \in T_pM$, wtedy również $av \in T_pM$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*
$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$
- *Addytywność (jeśli $v, w \in T_pM$, wówczas $av + bw \in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*



Lemat 6.3. *Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x \colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.*

1. *Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.*

2. *Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi*

$$\dim T_p M = 2.$$

Dowód: Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.
Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha'_v(0) = v \in T_pM$. Rozważmy złożenie

$$\beta \overset{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β. Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

$$\begin{aligned} v = \alpha'_v(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} &= \\ = \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta'_1(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta'_2(t)\big|_{t=0} &= \\ = \beta'_1(0)x_s(s_0) + \beta'_2(0)x_t(t_0),& \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

6.2 Wektor normalny

Uwaga. *Zauważmy, że przestrzeń styczna nie ma ustalonej w kanoniczny sposób bazy. Wektory x_s i x_t ją rozpinające zależą od wybranego lokalnego układu współrzędnych. Natomiast niezależna od tego wyboru jest cała przestrzeń* *styczna, a więc i jej ortogonalne dopełnienie, które nazywać będziemy kierunkiem normalnym.*

Definicja 6.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech

$$\begin{aligned} x\colon U &\longrightarrow M \\ (s_0, t_0) &\longmapsto p \in M \end{aligned}$$

będzie lokalnym układem współrzędnych. **Wektor normalny w** p definiujemy jako

$$N(p) \overset{\text{def.}}{=} \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|}(s_0, t_0),$$

gdzie x_s i x_t wektorami stycznymi do linii parametru przechodzących przez punkt p.

Uwaga. *Ponieważ wektor normalny ma długość* 1*, więc koniec każdego wektora normalnego* $N(p)$ *leży na powierzchni sfery dwuwumiarowej* $N(M) \subset S^2$*. Zatem* N *może być traktowany jako* ***odwzorowanie między powierzchniami***

$$N\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

punktów na powierzchni M*. Jest to tzw.* ***odwzorowanie Gaussa*** *do którego wrócimy później.*

6.3 Powtórka z algebry liniowej I

Powtórka z algebry liniowej I

Definicja 6.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F\colon V \times V \to \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Definicja 6.6. Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja 6.7. Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, oraz niech B będzie formą dwuliniową na V. **Macierz fromy** B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Przykład. Standardowy iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle = \sum x_i^2$ jest oczywiście formą dwuliniową. W standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jego macierzą jest $A = \mathrm{Id}$.

6.4 I forma podstawowa

I forma podstawowa

Definicja 6.8. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Dla powierzchni M definiujemy **pierwszą formę podstawową w punkcie** p jako formę dwuliniową

$$\begin{aligned} I_p \colon T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$. Oznaczamy ją symbolem I_p.

Definicja 6.9. **Pierwsza forma podstawowa** powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathscr{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p \in M}.$$

Uwaga. *Postać macierzowa pierwszej formy podstawowa zależy w istotny sposób od zanurzenia powierzchni w* $\mathbb{R}^3$ *(czyli od wyboru lokalnego układu współrzędnych* $x\colon U \to M$*).*

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t. Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Uwaga. *W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru* 2×2. *Przy tak przyjętych oznaczeniach niech*

$$g_{ij}(s_0, t_0) \overset{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0)\rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$*, w punkcie* p *ma postać*

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Przykład. Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t) \qquad\qquad x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & st \\ st & 1 + s^2 \end{bmatrix}$$

Definicja 6.10. Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga.

- *Ponieważ iloczyn skalarny w* $\mathbb{R}^n$ *jest formą symetryczną, więc* I_p *jest również formą symetryczną, zatem każdym punkcie mamy* $g_{12} = g_{21}$.
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń* E, F *i* G *na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Lemat 6.11. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy*

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód: Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 &= \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. □

Ostatni lemat w tym wykładzie pokazuje jak zmieniają się współczynniki metryczne podczas przejścia do innego układu współrzędnych. Jak można się domyślać, będzie to związane z Jakobianem funkcji przejścia (podobnie jak na analizie podczas zmiany układu współrzędnych np. z ortogonalnego na sferyczny).

Lemat 6.12. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U)\cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami*

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód: Pomijamy. □

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat 6.13. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa*

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\big(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\big)}\,dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{\left(\alpha_1'\right)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + \left(\alpha_2'\right)^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód: Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość. $\square$

7

Pochodne kierunkowe. Izometria.

7.1 Pochodne kierunkowe

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f\colon M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja 7.1. Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \overset{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Lemat 7.2. *Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy*

$$\big(f \circ \alpha\big)'(0) = \big(f \circ \beta\big)'(0).$$

Dowód: Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Możemy wybrać tak małe ε, że obrazy $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)$ i $\beta(-\varepsilon,\varepsilon)$ będą już zawarte w $x(U)$. Z definicji przestrzeni stycznej, wektory styczne do tych krzywych w 0 można wyrazić jako kombinacje liniowe wektorów x_1 i x_2.
Co więcej, z równości $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$ wynika, że współczynniki tych kombinacji są sobie równe w punkcie p.
Zatem również

$$\big(x^{-1} \circ \alpha\big)'(0) = \big(x^{-1} \circ \beta\big)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(0) &= \big[(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)\big]'(0) = \\ &= J(f \circ x)\, \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)}\, \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)} = \\ &= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0),\end{aligned}$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych).
□

Lemat 7.3. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi*

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga. *Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor). Trzecia własność to tzw. reguła Leibnitza, co może być wyrażone inaczej przez powiedzenie, że ∇ jest różniczkowaniem algebry funkcji gładkich na M. Nie będzie nas to jednak w dalszej części wykładu zajmowało.*

Dowód: Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji. Udowodnimy teraz pierwszą własność. Idea dowodu jest blisko związana z tą użytą w drugiej części dowodu lematu 6.3.
Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \overset{\text{def.}}{=} x(av_1t, av_2t) \qquad\qquad \alpha_w(t) \overset{\text{def.}}{=} x(bw_1t, bw_2t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \overset{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1x_1 + v_2x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1x_1 + w_2x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\nabla_{av+bw} f = \left(f \circ \beta\right)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)}\beta'(t)\Big|_{t=0} &= \\
= a\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)}(v_1x_1 + v_2x_2) + b\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)}(w_1x_1 + w_2x_2) &= \\
= a\frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)}\alpha_v'(0) + b\frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)}\alpha_w'(0) &= \\
= a\left(f \circ \alpha_v\right)'(t)\Big|_{t=0} + b\left(f \circ \alpha_w\right)'(t)\Big|_{t=0} &= a\nabla_v f + b\nabla_w f.
\end{aligned}$$

□

7.2 Izometria

Definicja 7.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem gładkim (tj. polem wektorowym). **Pochodną** f w punkcie $p \in M$ definiujemy jako

$$\begin{aligned} Df_p\colon T_pM &\to R^3 \\ v &\mapsto \nabla_v f = \left(\nabla_v f_1, \nabla_v f_2, \nabla_v f_3\right). \end{aligned}$$

Chociaż definicja wygląda na powtórzenie definicji pochodnej kierunkowej, sama różnica w napisach

$$\nabla_v f(p) \qquad \text{vs.} \qquad Df_p(v)$$

zmienia nasz punkt widzenia. Przy definicji pochodnej kierunkowej, wektor v uważaliśmy za stały, a zmiennnymi były funkcje (lub pola wektorowe). W pochodnej funkcji f na powierzchni mamy na myśli ustaloną funkcję której zmienność badamy we wszystkich (stycznych) kierunkach v.

Lemat 7.5. *Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_pM$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ oraz*

$$Df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód: Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.
Niech $v \in T_pM$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$. $\square$

Przykład. Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z)\colon\ y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \qquad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = (-a\sin at, a\cos at, b)\big|_{t=0} = (0,a,b).$$

Definicja 7.6. Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f, i.e.

  $$I_p(v,w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

  dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f\big|_U\colon U \to f(U)$ jest izometrią.

Uwaga. *Powyższą równość można zapisać*

$$\langle v, w\rangle = \langle Df_p(v), Df_p(w)\rangle,$$

co daje użyteczne kryterium sprawdzania, czy f jest izometrią.
Warto zauważyć, że izometria od lokalnej izometrii różni się tylko i wyłącznie tym, że lokalna izometria nie musi być dyfeomorfizmem całych przestrzeni. Jest to niewielka, lecz jak zobaczymy ważna różnica.

Lemat 7.7. *Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.*

1. *f jest lokalną izometrią.*

2. *Równość $I_p(v,w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*

3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*

4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a,b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Dowód: Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.
Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3)**:** Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \quad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \qquad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\overline{q} \subset U$. Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_i\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.
Z powyższego równania wynika, że $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$, oraz kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2. Zatem z liniowej niezależności x_1 i x_2 wynika liniowa niezależność $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$, czyli rank $(f\circ x) = 2$ na odpowiednio pomniejszonym zbiorze $V\subset U$ (tak by $\alpha_{q,i}$) były dobrze określone). Wreszcie z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych. Równość współczynników metrycznych wynika natychmiast z powyższej równości. □
Pokażemy teraz, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2\to S^1\times\mathbb{R}$ określona przez

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).
Niech $p = (p_1, p_2)\in\mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1-\pi, p_1+\pi)\times\mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x\colon U\to\mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$, oraz $f\circ x\colon U\to S^1\times\mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f\circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f\circ x)_2 = (0,0,1),$$

więc

$$(f\circ x)_1\times(f\circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0,0,0)$$

czyli $f\circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.
Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f\circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathbb{R}^2$ musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1\times\mathbb{R}$.

8

Krzywizna Gaussa I

8.1 Odwzorowanie Gaussa

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(lub $\mathbb{R}^2 \to S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni.* Stąd następująca definicja:

Definicja 8.1. Niech $M \subset R^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\widehat{n}\colon x(U) \to S^2$ zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \dfrac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Uwaga.

- *Zauważmy, że dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, więc (jednostkowy) wektor normalny może się różnić co najwyżej o czynnik* (-1) *w stosunku do wyjściowego. Nie będzie to jednak zmieniać w istotny sposób dalszych obliczeń. Możemy przyjąć, że jeśli powierzchnia jest zamknięta, to wybieramy kierunek "zewnętrzny".*

- *Odwzorowanie Gaussa z całą pewnością zależy od tego w jaki sposób powierzchnia* M *jest umieszczona w* $\mathbb{R}^3$ *i może się zmienić, gdy zaczniemy tę powierzchnię deformować.*

8.2 Krzywizna Gaussa – Idea

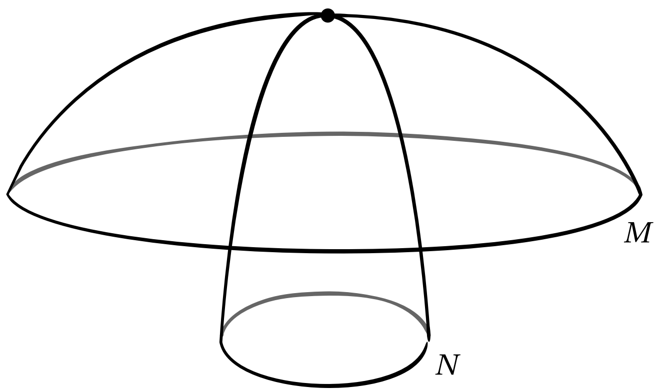
Chcemy zdefiniować krzywiznę powierzchni, więc szukamy funkcji $K\colon M \to \mathbb{R}$, która będzie spełniać następujące własności:

1. $K\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;

2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;

3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;

4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.



Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.

- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.

- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,

- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathscr{G}}(p) \overset{\text{def.}}{=} \varinjlim_{V \to p} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\hat{n}(V)$ kiedy $\hat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\hat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Przykład. Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0,0,0)$ i niech

$$x(\phi,\psi) = (R\cos\phi\cos\psi, R\sin\phi\cos\psi, R\sin\psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

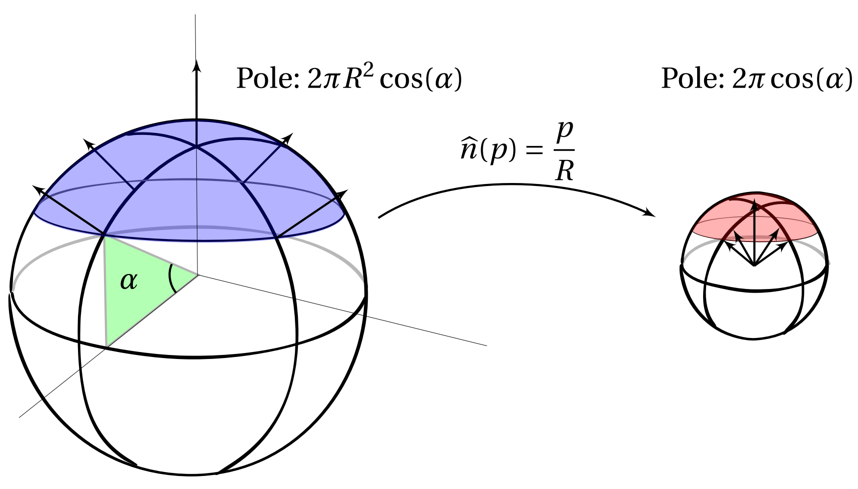
$$\begin{aligned} x_\phi =& R(-\sin\phi\cos\psi, \cos\phi\cos\psi, 0), \\ x_\psi =& R(-\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi\sin\psi, \cos\psi), \end{aligned}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\hat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa zmiejsza obszar o czynnik $\frac{1}{R^2}$ i nie ma żadnych problemów z definicją.

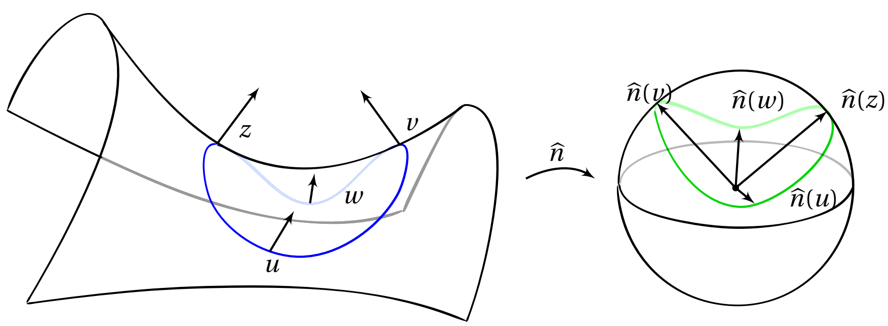


Sfera o promieniu R

Sfera o promieniu 1

$$K_{\mathscr{G}}(p) = \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{2\pi\cos(\alpha)}{2\pi R^2\cos(\alpha)} = \frac{1}{R^2}.$$

Przykład. Rozważmy powierzchnię siodłową $x(u,v) = (x, y, xy)$. Rozważmy niewielki okrąg S na płaszczyźnie $z = 0$ i środku w $(0,0)$, wtedy jego obraz $x(S)$ leży na powierzchni siodłowej. Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze), jednak jeśli obiegamy okrąg S w lewo, wówczas kierunek na $\widehat{n}(x(S))$ ulega odwróceniu.Zatem chcielibyśmy nadać znak ujemny$A(\widehat{n}(V)) < 0$ gdzie V jest obszarem ograniczonym przez $x(S)$.



8.3 Pole powierzchni

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja 8.2. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \overset{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2, który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Lemat 8.3. *Załóżmy, że $S \subset x(U) \cap y(V)$ dla dwóch lokalnych układów współrzędnych x, y na M. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Wtedy*

$$\iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\,ds\,dt = \iint_{y^{-1}(S)} \sqrt{|\det(\overline{g_{ij}})|}\,ds\,dt.$$

Dowód pomijamy.
Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n\rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n\rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle|\,ds\,dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle|\,ds\,dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.
To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.
Oczywiście używając odpowiednio zaawansowanego aparatu matematycznego można pokazać, że krzywizna (wg. definicji Gaussa) faktycznie nie zależy od wyboru zstępujących otoczeń V, ale my spróbujemy przedstawić bardziej współczesne podejście, które okaże się równoważne definicji Gaussa.

8.4 Powtórka z algebry liniowej II

Powtórka z algebry liniowej II
Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle , \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W.

Definicja 8.4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon W \to W$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie $\mathscr{B}_F\colon W \times W \to \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathscr{B}_F(v, w) = \langle F(v), w\rangle.$$

Przykład. Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Przykład. Odwzorowanie $\mathscr{B}_F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) &= \langle F(v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, (w_1, w_2) \right\rangle = \\ &= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2), (w_1, w_2)\rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2 w_2.\end{aligned}$$

Ustalmy bazę przestrzeni W. Wtedy odwzorowanie F i odwzorowanie indukowane B_F mogą być reprezentowane przez odpowiednie macierze. Następujący lemat przedstawia związki zachodzące między tymi macierzami.

Lemat 8.5. *Niech $(W, \langle\, ,\rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.*

- *Oznaczmy przez* $\mathbf{G}$ *macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy* $\mathbf{A}$ *w powyższej bazie.*
- *Niech* $\mathbf{M}$ *oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Przykład. Niech F będzie tak jak z poprzedniego przykładu. Na $W = \mathbb{R}^2$ wybierzmy standardową bazę $\{e_1, e_2\}$. Naturalny iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$ ma w tej bazie macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$. Zatem macierzą odwzorowania $\mathscr{B}_F$ jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t \cdot \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id},$$

zatem

$$\mathscr{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Lemat 8.6. *Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathscr{B}$ formą dwuliniową na W.*

- *$\mathscr{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathscr{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
    1. *macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
    2. *forma dwuliniowa $\mathscr{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Uwaga. *Symetryczność formy $\mathscr{B}$ oznacza, że spełniona jest równość*

$$\mathscr{B}(v,w) = \mathscr{B}(w,v).$$

Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Ponadto, jeśli jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać na W taką bazę w której macierz $\mathbf{G}$ iloczynu skalarnego na W jest macierzą identycznościową. Zatem

$$\mathscr{B}_F(v,w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathscr{B}_F(w,v).$$

Lemat 8.7. *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy*

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{A}$:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne $\mathbf{A}$).

Przykład. Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Zadanie. Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

9

Krzywizna Gaussa II

9.1 Odwzorowanie Weingartena

Lemat 9.1. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.*
Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D\,\widehat{n}(v) \in T_p M$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^3$).

Dowód: Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$. (Uwaga: poza tym obszarem zapis $\langle\, , \rangle$ nie ma sensu!)
Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n}\rangle(v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n}\rangle = 2\langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n}\rangle = 2\langle D\,\widehat{n}(v), \widehat{n}\rangle,$$

więc $D\,\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do $T_p M$. □

Definicja 9.2. Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L\colon T_p M \to T_p M$ zadane przez

$$L(v) \overset{\text{def.}}{=} -D\,\widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

Lemat 9.3. *Odwozorowanie Weingartena $L\colon T_p M \to T_p M$ jest odwzorowaniem liniowym.*

Dowód: Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). □

Uwaga. *Chociaż do definicji odwzorowania Weingartena używamy lokalnego układu współrzędnych, jednak przy innym wyborze $x\colon U \to M$, odwzorowanie L może się różnić tylko o znak $\pm$.*

9.2 Druga forma podstawowa

Definicja 9.4. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga. *Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.*

Uwaga (Oznaczenie)**.** *Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez*

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek. *Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy*

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Następujący lemat pokazuje sposób na łatwe policzenie współczynników drugiej formy podstawowej l_{ij}.

Lemat 9.5. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.*

1. *(Równania Weingartena) Dla $i = 1,2$ zachodzi*

$$n_i = -L_{1i} x_1 - L_{2i} x_2.$$

2. *Dla indeksów $i, j = 1,2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe*

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle,$$

   gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmiennych i-tej i j-tej).

Dowód:

(**1.**) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n}\circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i}\widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(**2.**) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j\rangle \overset{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j\rangle = -\langle n_i, x_j\rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i\rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial\langle n, x_j\rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j\rangle + \langle n, x_{ij}\rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Lemat 9.6.
- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód : Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij}\rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

Uwaga. *Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej $\{x_1, x_2\}$ nie będzie ortonormalna w punkcie p, wtedy najczęściej $L_{ij}(p)$ nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu 8.6).*

Uwaga. *Wiedząc, że macierz (l_{ij}) jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej*

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

9.3 Krzywizna Gaussa oraz krzywizna średnia

Jak pamiętamy intuicyjna definicja krzywizny wokół punktu p kazała nam porównywać pole na powierzchni z polem zakreślonym przez wektor normalny. Ponieważ odwzorowanie Weingartena charakteryzuje lokalne zmiany wektora normalnego, może się nadawać do definicji krzywizny.
Niezmiennikami numerycznymi macierzy 2×2 są wyznacznik i ślad. Co więcej, są to niezmienniki odpowiadajacego danej macierzy odwzorowania liniowego (tj. są te same dla macierzy sprzężonych), dlatego właśnie je użyjemy w poniższych definicjach.

Krzywizna powierzchni

Definicja 9.7. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K\colon M \to \mathbb{R}$, $H\colon M \to \mathbb{R}$ nastepująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad\qquad H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Lemat 9.8. *Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej T_pM.*

Dowód: Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2, \operatorname{tr} L(p) = k_1 + k_2.$$

cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat 8.7). □

Lemat 9.9. *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.*

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód: Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

□

Podsumowanie

Podsumowanie
Aby obliczyć krzywizny (średnią i Gaussa) powierzchni potrzebujemy następujące wielkości:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1\rangle, \qquad g_{12} = g_{21} = \langle x_1, x_2\rangle, \qquad g_{22} = \langle x_2, x_2\rangle,$$

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{||x_1 \times x_2||} = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

$$l_{11} = \langle n_1, x_1\rangle, \qquad l_{12} = \langle n_2, x_1\rangle, \qquad l_{22} = \langle n_2, x_2\rangle,$$

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}.$$

9.4 Agitacja na rzecz zgodności definicji

Agitacja na rzecz zgodności definicji
Nie podaliśmy precyzyjnej definicji orginalnej krzywizny Gaussa, więc trudno mówić o dowodzie równoważności naszej (precyzyjnej) definicji. Niemniej jednak postaramy się zmotywować tę równoważność. Jak zwykle niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Oznaczmy przez $\overline{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathscr{G}}(p) = \lim_{T\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\,dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\,dt} = $$

$$= \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\,dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\,dt}.$$

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty $a_V, b_V \in x^{-1}(V)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\,dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V)),$$

$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\,dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Zauważmy, że skoro $V \to \{p\}$, więc $a_V \to \overline{p}$ oraz $b_V \to \overline{p}$. Mamy więc

$$\lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V\to\{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} =$$

$$= \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \big(-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)\big) \times \big(-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)\big) =$$

$$= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).
Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} ||x_1 \times x_2||^2 = \pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathscr{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

10

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

10.1 Symbole Christoffela

Symbole Christoffela
Przypomnijmy, że wzory Frené dla krzywych wyrażały pochodne wektorów T, N i B w bazie $\{T, N, B\}$ (a więc pochodne wektorów z bazy wyrażamy w tej samej bazie). Udowodnimy teraz analogiczne twierdzenia dla powierzchni. Szukamy więc formuł, które wyraziłyby pochodne cząstkowe wektorów x_1, x_2 i n w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Znamy już dwa takie wzory, są nimi równania Weingartena wyrażające $n_i(u_1, u_2) = \frac{\partial n}{\partial u_i}$ jako kombinacje wektorów x_1 i x_2. Dla przypomnienia:

$$n_i = -L_{1i} x_1 - L_{2i} x_2.$$

Poniżej używamy naszej konwencji na oznaczanie drugich pochodnych cząstkowych x jako x_{ij},

$$x_{ij}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x_i(u_1, u_2)}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 x(u_1, u_2)}{\partial u_j \partial u_i}.$$

Oczywiście jak niemal wszystko co do tej pory dowodziliśmy o powierzchniach, ostateczna forma tych formuł będzie zależeć od wyboru lokalnego układu współrzędnych.

Twierdzenie 10.1 (Formuła Gaussa)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnych układem współrzędnych. Wtedy*

$$x_{ij} = \Gamma^1_{ij} x_1 + \Gamma^2_{ij} x_2 + l_{ij} n. \tag{10.1}$$

Uwaga. *Ponieważ funkcje Γ^k_{ij} zwane **symbolami Christoffela** nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich **definicję** (z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).*
Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \quad \textit{dla } k = 1, 2.$$

Dowód Formuły Gaussa: Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ^k_{ij} oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma^1_{ij} x_1 + \Gamma^2_{ij} x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned}
\langle x_{ij}, x_1\rangle &= \Gamma^1_{ij} g_{11} + \Gamma^2_{ij} g_{12} \\
\langle x_{ij}, x_2\rangle &= \Gamma^1_{ij} g_{21} + \Gamma^2_{ij} g_{22} \\
\langle x_{ij}, n\rangle &= Q_{ij}
\end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n\rangle = \langle x_i, n_j\rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. $\square$

Lemat 10.2. *Niech $M \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Dla wszystkich $i, j = 1,2$ zachodzi*

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Dowód: Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j\rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j\rangle + \langle x_i, x_{jk}\rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle x_{ij}, x_k\rangle + \langle x_i, x_{jk}\rangle \\
\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle x_{ik}, x_j\rangle + \langle x_k, x_{ij}\rangle
\end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k\rangle.$$

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k\rangle = \Gamma^1_{ij} \langle x_1, x_k\rangle + \Gamma^2_{ij} \langle x_2, x_k\rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma^r_{ij} g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma^r_{ij} g_{rk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ^k_{ij}. □

Twierdzenie 10.3. *Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.*

- *Równanie Gaussa:*

$$l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma^r_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma^r_{21}}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma^m_{22} \Gamma^r_{m1} - \Gamma^m_{21} \Gamma^r_{m2} \right) \right].$$

- *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^r_{12} l_{r1} - \Gamma^r_{11} l_{r2} \right) = 0$$
$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^r_{22} l_{r1} - \Gamma^r_{21} l_{r2} \right) = 0$$

Chociaż na pierwszy rzut oka te równania są zupełnie nieczytelne, ich pochodzenie sprowadza się do twierdzenia Schwarza: pochodne cząstkowe mieszane muszą być równe niezależnie od kolejności różniczkowania, tj.

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Ponadto dowód wykorzystywuje jedynie fakt, że równość wektorów w tej samej bazie pociąga równość współczynników, więc nie jest konepcyjnie trudny. Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Dowód: Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma^1_{ij}x_1 + \Gamma^2_{ij}x_2 + l_{ij}n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^1_{ij}}{\partial u_k}x_1 + \Gamma^1_{ij}x_{1k} + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k}x_2 + \Gamma^2_{ij}x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}n + l_{ij}n_k.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$\begin{aligned}
x_{ijk} = {} & \frac{\partial\Gamma^1_{ij}}{\partial u_k}x_1 + \Gamma^1_{ij}\underbrace{\left(\Gamma^2_{1k}x_1 + \Gamma^2_{1k}x_2 + l_{1k}n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k}x_2 + \Gamma^2_{ij}\underbrace{\left(\Gamma^1_{2k}x_1 + \Gamma^2_{2k}x_2 + l_{2k}n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}n + l_{ij}\underbrace{\left(-L_{1k}x_1 - L_{2k}x_2\right)}_{n_k} = \\
= {} & \left[\frac{\partial\Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij}L_{1k}\right]x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial\Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij}L_{2k}\right]x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ij}l_{1k} + \Gamma^2_{ij}l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right]n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.
\end{aligned}$$

Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$\begin{aligned}
x_{ikj} = {} & \left[\frac{\partial\Gamma^1_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^1_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{1j}\right]x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial\Gamma^2_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^2_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{2j}\right]x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ik}l_{1j} + \Gamma^2_{ik}l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}\right]n = \\
= {} & A'x_1 + B'x_2 + C'n.
\end{aligned}$$

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma^1_{ik} l_{1j} + \Gamma^2_{ik} l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma^1_{ij} l_{1k} - \Gamma^1_{ik} l_{1j}\right) + \Gamma^2_{ij} l_{2k} - \Gamma^2_{ik} l_{2j} =$$

$$= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^r_{12} l_{r1} - \Gamma^r_{11} l_{r2}\right) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. □

Zadanie. Udowodnić Równanie Gaussa. Podpowiedź: należy porównać współczynniki A, A', oraz B, B'. Następnie podstawić $(i = 2, j = 1, k = 2)$.

10.2 Theorema Egregium

Twierdzenie 10.4 (Theorema Egregium Gaussa)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N. Niech $f\colon M \to N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy*

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22}), oraz ich pochodnych.

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).
Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial\Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial\Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).
Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemu szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Zadanie. Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga. *Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f\colon M \to N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.*

Przykład. Niech

$$\begin{aligned} M =& \{y(u,v) = (u\sin v, u\cos v, \ln u)\colon\ u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi,\pi)\},\\ N =& \{x(u,v) = (v\sin u, v\cos u, u)\colon\ u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi,\pi)\}, \end{aligned}$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f\colon M \to N$ jako

$$f(y(u,v)) \overset{\text{def.}}{=} x(v,u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K\big(f(y(u,v))\big) = K(x(v,u)) = \frac{-1}{(1+u^2)^2} = K(y(u,v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g^M_{11}(u,v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g^N_{11}(u,v) = 1$.

10.3 Twierdzenie klasyfikujące

Twierdzenie 10.5 (Twierdzenie klasyfikacyjne)**.** *Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że*

- *istnieją cztery funkcje $g_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ spełniające*
$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g_{11} > 0, \quad \textit{oraz} \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0,$$
dla wszystkich $i, j = 1, 2$;
- *istnieją cztery funkcje $l_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ spełniające*
$$l_{ij} = l_{ji};$$
- *osiem funkcji $\Gamma^k_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ zdefiniowanych przez*
$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$
dla wszystkich $i, j, k = 1, 2$, spełnia następujące trzy równania:
$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma^r_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma^r_{21}}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma^m_{22}\Gamma^r_{m1} - \Gamma^m_{21}\Gamma^r_{m2} \right) \right]$$
$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^r_{12} l_{r1} - \Gamma^r_{11} l_{r2} \right) = 0$$
$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^r_{22} l_{r1} - \Gamma^r_{21} l_{r2} \right) = 0$$

wtedy:
Dla każdego punktu $p \in U$ istnieje jego otwarte otoczenie $V \subset U$ oraz lokalny układ współrzędnych $x\colon V \to \mathbb{R}^3$ dla którego funkcje g_{ij} i l_{ij} tworzą odpowiednio pierwszą i drugą formę podstawową. Każde takie dwa lokalne układy współrzędnych różnią się od siebie o translację i obrót przestrzeni $\mathbb{R}^3$.