Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1] Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 1

Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Krzywe w $\mathbb{R}^3$

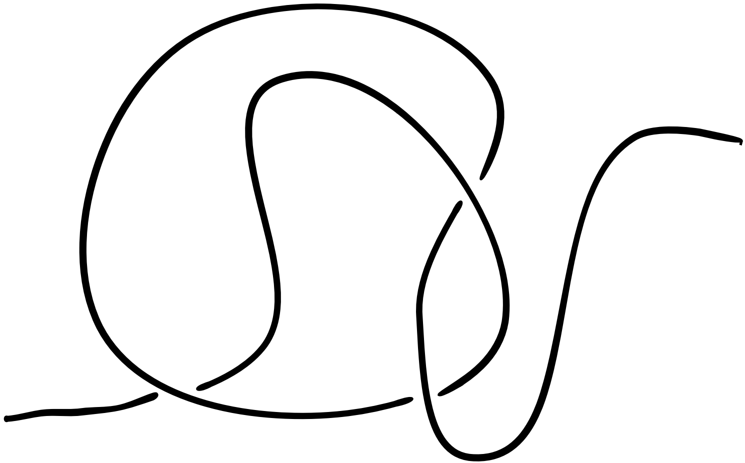
Definicje

Krzywe regularne

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych



Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

  gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;
- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;

- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;

- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- **Krzywa gładka**, lub po prostu **krzywa** w $\mathbb{R}^3$ to odwzorowanie gładkie

$$\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3;$$

- Dla każdego $t \in (a, b)$ **wektor styczny** (lub **wektor prędkości**) w punkcie t określamy jako

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)),$$

  gdzie $\alpha_i(t)$, są poszczególnymi współrzędnymi funkcji α;
- **prędkość**, lub **prędkość skalarna** w punkcie $t_0 \in (a, b)$ to po prostu długość wektora $\alpha'(t_0)$, oznaczana jako $\|\alpha'(t_0)\|$;

Definicja

- Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Definicja

- Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Definicja

- Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha)\overset{\text{def.}}{=}\int_a^b\|\alpha'(t)\|dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t\in(a,b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\|=1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)|=1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha)=b-a.$$

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Definicja

- Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. **Długość** α definiujemy jako całkę

$$L(\alpha) \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- Krzywą (lub ściślej: parametryzację krzywej) nazywamy unormowaną gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi

$$\|\alpha'(t)\| = 1.$$

- Zauważmy, że jeśli $|\alpha'(t)| = 1$ dla wszystkich t, wówczas

$$L(\alpha) = b - a.$$

Z tego powodu taką krzywą (parametryzację krzywej) nazywamy też **łukową**.

Przykład

Rozważmy krzywą $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Wtedy wektor prędkości wynosi

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t),$$

zatem prędkość to $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$, tak więc krzywa nie jest unormowana. Długość tej krzywej na odcinku od 0 do 2π wynosi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \sinh^{-1}(2t)\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{\sinh^{-1}(4\pi)}{4} \simeq 40.4097.$$

Definicja

Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0,0,0)$ dla wszystkich $t \in (a,b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$.

Definicja

Niech $\alpha\colon(c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą, oraz niech $h\colon(a,b) \to (c,d)$ będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie α i h,

$$\overline{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \circ h\colon(a,b) \xrightarrow{h} (c,d) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej α przez dyfeomorfizm h.

Definicja

Gładką krzywą $\alpha(t)$ nazywamy **regularną** (lub **naturalną**) jeśli $\alpha'(t) \neq (0,0,0)$ dla wszystkich $t \in (a,b)$. Jest to równoważne ze stwierdzeniem $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$.

Definicja

Niech $\alpha\colon (c,d) \to \mathbb{R}^3$ będzie gładką krzywą, oraz niech $h\colon (a,b) \to (c,d)$ będzie pewnym dyfeomorfizmem. Krzywą powstałą przez złożenie α i h,

$$\overline{\alpha} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \circ h\colon (a,b) \xrightarrow{h} (c,d) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$$

nazywamy **reparametryzacją** krzywej α przez dyfeomorfizm h.

Przykład

Niech funkcja $h:(0,2) \to (1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t) = 2t + 1,$$

zaś $\alpha:(1,5) \to \mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2 + 3, t - 7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2 + 4t + 4, 2t - 6, \sin 2t + 1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Przykład

Niech funkcja $h\colon(0,2)\to(1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t) = 2t + 1,$$

zaś $\alpha\colon(1,5)\to\mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t) = (t^2+3, t-7, \sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t) = (4t^2+4t+4, 2t-6, \sin 2t+1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Przykład

Niech funkcja $h\colon(0,2)\to(1,5)$ będzie zdefinionana jako

$$h(t)=2t+1,$$

zaś $\alpha\colon(1,5)\to\mathbb{R}^3$ jako

$$\alpha(t)=(t^2+3,t-7,\sin t).$$

Wówczas reparametryzacja α przez h jest zdana wzorem

$$\overline{\alpha}(t)=(4t^2+4t+4,2t-6,\sin 2t+1).$$

Krzywe te jednak mają dokładnie ten sam kształt (wykres) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0\in(a,b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t)=\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(u)\|\,du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t)=\|\alpha'(t)\|>0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Twierdzenie

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0 \in (a,b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\,du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Twierdzenie

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wówczas istnieje reparametryzacja krzywej α przez dyfeomorfizm h będąca krzywą unormowaną.

Dowód:

Wybierzmy $t_0 \in (a,b)$. Następnie zdefiniujmy

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du.$$

Na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego funkcja q jest gładka, oraz jej pochodna jest równa

$$q'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

i ściśle większa od 0 (na mocy założenia o regularności α).

Zatem $q\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q\colon (a, b) \to (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h\colon (c, d) \to (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Zatem $q\colon(a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c,d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q\colon(a,b) \to (c,d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h\colon(c,d) \to (a,b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Zatem $q\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q\colon (a, b) \to (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h\colon (c, d) \to (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną. Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Zatem $q\colon(a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc jest różnowartościowa. Obraz funkcji q to pewien odcinek otwarty $(c, d) \in \mathbb{R}$ (jak wyglądają jego końce?), więc możemy powiedzieć, że

$$q\colon(a, b) \to (c, d)$$

jest gładką bijekcją. Niech

$$h\colon(c, d) \to (a, b)$$

będzie funkcją do niej odwrotną.Z analizy matematycznej wynika (wskazać odpowiednie twierdzenia!), że h jest funkcją gładką, oraz zachodzi

$$h'(t) = \frac{1}{q'(t)}.$$

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\overline{\alpha} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$ jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\|\overline{\alpha}'(t)\| = \|\alpha(h(t))'\| = \left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} h'(t)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\|\frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)}\right\|}{\left\|\frac{d\alpha(t)}{dt}\right\|} = 1 \quad \square$$

Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\overline{\alpha} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \circ h$ jest reparametryzacją o szukanej własności:

$$\|\overline{\alpha}'(t)\| = \|\alpha(h(t))'\| = \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} h'(t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\| \frac{1}{|q'(t)|} = \frac{\left\| \frac{d\alpha(h(t))}{dh(t)} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|} = 1 \quad \square$$

Przykład

(Lewa) Linia śrubowa lub helisa (lewoskrętna) to krzywa $\alpha\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2}du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Przykład

(Lewa) Linia śrubowa lub helisa (lewoskrętna) to krzywa $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2} t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

Przykład

(Lewa) Linia śrubowa lub helisa (lewoskrętna) to krzywa $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Rozważmy jej szczególną postać dla $a = b = 1$. Wtedy jej prędkość jest równa $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Wybierzmy $t_0 = 0$. Wówczas

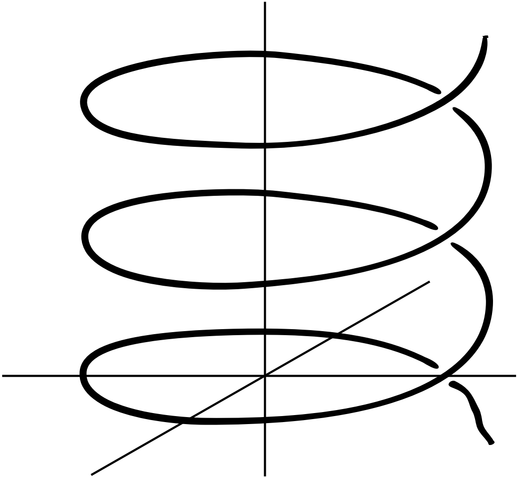
$$q(t) = \int_0^t \sqrt{2}du = \sqrt{2}t,$$

a więc

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zatem parametryzacja unormowana tej krzywej jest równa

$$\overline{\alpha}(t) = (\alpha \circ h)(t) = \left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$



Lemat

Niech $\alpha: (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *oraz* $\overline{\alpha}: (c, d) \to \mathbb{R}^3$ *będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm*

$$h: (a, b) \to (c, d),$$

że $\overline{\alpha}$ *jest reparametryzacją krzywej* α *przez* h*.*

Dowód:

Niech $h(t)$ oznacza złożenie

$$\alpha^{-1} \circ \overline{\alpha}(t)$$

($\alpha^{-1}: \alpha(a, b) \to \mathbb{R}$ istnieje ponieważ α jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym. □

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ oraz $\overline{\alpha}\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ będą krzywymi różnowartościowymi o tym samym obrazie. Wówczas istnieje taki dyfeomorfizm

$$h\colon(a,b)\to(c,d),$$

że $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją krzywej α przez h.

Dowód:

Niech $h(t)$ oznacza złożenie

$$\alpha^{-1}\circ\overline{\alpha}(t)$$

($\alpha^{-1}\colon\alpha(a,b)\to\mathbb{R}$ istnieje ponieważ α jest różnowartościowa). Dokładne sprawdzenie że jest to szukana reparametryzacja jest zadaniem domowym. $\square$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą gładką. Jeśli* $\overline{\alpha}\colon (c, d) \to \mathbb{R}^3$ *jest jej reparametryzacją, wówczas*

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α, zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon (c, d) \to (a, b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t) \geqslant 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a \qquad \text{i} \qquad h(d) = b.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Jeśli $\overline{\alpha}\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ jest jej reparametryzacją, wówczas

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:

Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α, zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon(c,d)\to(a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha\circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t)\geqslant 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c)=a \qquad \text{i} \qquad h(d)=b.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą gładką. Jeśli* $\overline{\alpha}\colon (c,d) \to \mathbb{R}^3$ *jest jej reparametryzacją, wówczas*

$$L(\overline{\alpha}) = L(\alpha).$$

Dowód:
Ponieważ $\overline{\alpha}$ jest reparametryzacją α, zatem z definicji, istnieje taki dyfeomorfizm $h\colon (c,d) \to (a,b)$, że

$$\overline{\alpha} = \alpha \circ h.$$

Ponieważ h jest dyfeomorfizmem, więc jego pochodna nie może zmieniać znaku. Możemy bez straty ogólności przyjąć, że $h'(t) \geqslant 0$ (tj. h jest funkcją niemalejącą), oraz

$$h(c) = a \qquad \text{i} \qquad h(d) = b.$$

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\, ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\, ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\, ds =$$
$$= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\| h'(s)\, ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\, dt =$$
$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = L(\alpha).$$

□

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\, ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\, ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\, ds =$$

$$= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\| h'(s)\, ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = L(\alpha).$$

□

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\, ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$L(\overline{\alpha}) = \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\, ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\, ds =$$

$$= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\| h'(s)\, ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = L(\alpha).$$

$\square$

Stosując podstawienie $t = h(s)$ i $dt = h'(s)\,ds$ otrzymujemy następującą równość:

$$
\begin{aligned}
L(\overline{\alpha}) &= \int_c^d \|\overline{\alpha}'(s)\|\,ds = \int_c^d \|\alpha'(h(s))h'(s)\|\,ds = \\
&= \int_c^d \|\alpha'(h(s))\|h'(s)\,ds = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(t)\|\,dt = \\
&= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt = L(\alpha).
\end{aligned}
$$

$\square$

Wykład 2

Wektory związane z krzywą

Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Wektory związane z krzywą

- Wektor styczny i normalny
- Wektor binormalny
- Trójnóg Freneta

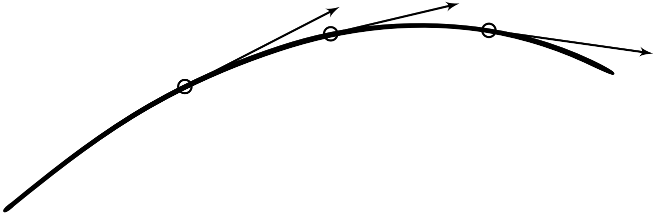
Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Definicja

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie regularną krzywą gładką. Definiujemy **jednostkowy wektor styczny** do krzywej α w punkcie t jako

$$T_\alpha(t) = T(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$



Zadanie

Niech $v(t)$ i $w(t)$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$, zależnymi od zmiennej t. Sprawdzić, że zachodzi **wzór Leibniza** na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$\langle v(t), w(t)\rangle' = \langle v(t)', w(t)\rangle + \langle v(t), w(t)'\rangle.$$

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

□

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \| T(t) \| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \| T(t) \|' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

□

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t)\rangle = 0.$$

Dowód:

Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t)\rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t)\rangle + \langle T(t), T'(t)\rangle = 2\langle T(t), T'(t)\rangle.$$

□

Lemat

Niech $\alpha(t)$ będzie unormowaną krzywą regularną. Wówczas dla każdego t zachodzi

$$\langle T(t), T'(t) \rangle = 0.$$

Dowód:
Zauważmy, że $T(t)$ jest funkcją gładką. Mamy

$$1 = \|T(t)\| = \langle T(t), T(t) \rangle,$$

a więc korzystając powyższego wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$0 = \|T(t)\|' = \langle T'(t), T(t) \rangle + \langle T(t), T'(t) \rangle = 2\langle T(t), T'(t) \rangle.$$

$\square$

Definicja

Załóżmy, że $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t\in(a,b)$ dla którego $\|T'(t)\|\neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t)\stackrel{\text{def.}}{=}\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t)\neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Definicja

Załóżmy, że $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a,b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Definicja

Załóżmy, że $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ jest krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ dla którego $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor normalny** jako

$$N(t) \overset{\text{def.}}{=} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Jeśli $T(t)$ oraz $N(t)$ są dobrze określone (tj. $T'(t) \neq 0$), płaszczyznę rozpiętą przez te dwa wektory nazywamy **płaszczyzną ściśle styczną**.

Płaszczyzna ściśle styczna jest w pewnym sensie płaszczyzną najlepiej przybliżającą naszą krzywą, tak jak prosta styczna jest prostą która najlepiej przybliża krzywą α.

Lemat

Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego* $t \in (a, b)$*:*

1. $\|T'(t)\| \neq 0$,
2. *wektory* $\alpha'(t)$ *oraz* $\alpha''(t)$ *są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, *gdzie* $\times$ *oznacza iloczyn wektorowy.*

Lemat

Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego* $t \in (a, b)$*:*

1. $\|T'(t)\| \neq 0$,
2. *wektory* $\alpha'(t)$ *oraz* $\alpha''(t)$ *są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, *gdzie* $\times$ *oznacza iloczyn wektorowy.*

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego* $t\in(a,b)$*:*

1. $\|T'(t)\|\neq 0$,
2. *wektory* $\alpha'(t)$ *oraz* $\alpha''(t)$ *są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t)\times\alpha''(t)\neq 0$, *gdzie* $\times$ *oznacza iloczyn wektorowy.*

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Następujące warunki są równoważne dla każdego* $t \in (a,b)$*:*

1. $\|T'(t)\| \neq 0$,
2. *wektory* $\alpha'(t)$ *oraz* $\alpha''(t)$ *są liniowo niezależne,*
3. $\alpha'(t) \times \alpha''(t) \neq 0$, *gdzie* $\times$ *oznacza iloczyn wektorowy.*

Szkic dowodu:

- Implikacje ($2 \Leftrightarrow 3$) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja ($1 \Rightarrow 2$). Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje (2 $\Leftrightarrow$ 3) wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja (1 $\Rightarrow$ 2). Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Szkic dowodu:

- Implikacje $(2 \Leftrightarrow 3)$ wynikają z definicji i własności iloczynu wektorowego.
- Implikacja $(1 \Rightarrow 2)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne, tj. $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ dla pewnego $k \in \mathbb{R}$. Pokażemy (bezpośrednim rachunkiem), że wówczas $T(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$ i zauważmy, że $v = \sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}$, więc

$$v' = \frac{2(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'' + \alpha_3'\alpha_3'')}{2\sqrt{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_3')^2}} = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{v}.$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle\alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0,0,0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle \alpha'(t_0), k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0, 0, 0).$$

Mamy wtedy:

$$T'(t_0) = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)},$$

więc przy podstawieniu $\alpha''(t_0) = k\alpha'(t_0)$ otrzymujemy

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)\frac{\langle\alpha'(t_0),k\alpha'(t_0)\rangle}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)v(t_0) - k\alpha'(t_0)\frac{v(t_0)^2}{v(t_0)}}{v^2(t_0)} =$$

$$\frac{k\alpha'(t_0)(v(t_0) - v(t_0))}{v^2(t_0)} = (0,0,0).$$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.
Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

□

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$. Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \overset{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

□

- Podobnie udowodnimy implikację $(2 \Rightarrow 1)$.
  Załóżmy, że istnieje t_0 dla którego $\|T'(t_0)\| = 0$. Wtedy sam $T'(t_0)$ jest wektorem zerowym. Oznaczmy $v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \|\alpha'(t)\|$. Mamy wtedy

$$0 = T'(t)\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{\alpha'(t_0)}{v(t_0)}\right)' = \frac{\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0)}{v^2(t_0)}.$$

  Zatem $\alpha''(t_0)v(t_0) - \alpha'(t_0)v'(t_0) = 0$, więc albo oba współczynniki (tj. $v(t_0)$ i $v'(t_0)$) są zerowe, albo wektory $\alpha'(t_0)$ i $\alpha''(t_0)$ są liniowo zależne. Z regularności krzywej wiemy, że może zachodzić tylko druga sytuacja.

$\square$

Definicja

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t\in(a,b)$ takiego, że $\|T'(t)\|\neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t)\overset{\text{def.}}{=}T(t)\times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory $N(t)$ i $B(t)$ nazywamy **płaszczyzną normalną**, lub **płaszczyzą prostopadłą** do krzywej.

Definicja

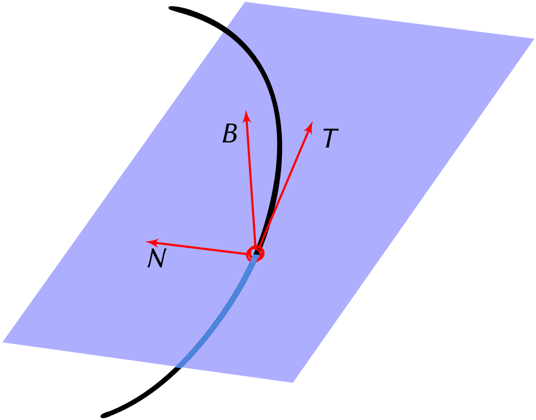
Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Dla każdego $t \in (a, b)$ takiego, że $\|T'(t)\| \neq 0$ definiujemy **jednostkowy wektor binormalny** jako

$$B(t) \stackrel{\text{def.}}{=} T(t) \times N(t).$$

Płaszczyznę rozpiętą przez wektory $N(t)$ i $B(t)$ nazywamy **płaszczyzną normalną**, lub **płaszczyzą prostopadłą** do krzywej.

Definicja

Układ ortonormalny $\{T(t), N(t), B(t)\}$ nazywać będziemy **trójnogiem** (lub **reperem**) Freneta.



Wykład 3

Niezmienniki krzywych

Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych
- Krzywizna
- Torsja
- Wzory Freneta
- Wzory ogólne

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

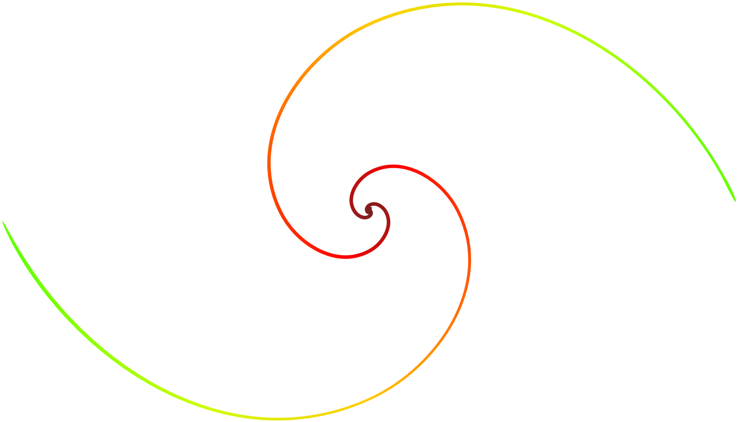
Krzywizna krzywej unormowanej

Definicja

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie (regularną) krzywą unormowaną. Dla każdego $t\in(a,b)$ **krzywiznę** definiujemy jako funkcję $\kappa\colon(a,b)\to\mathbb{R}$

$$\kappa(t)\stackrel{\text{def.}}{=}\|T'(t)\|=\|\alpha''(t)\|$$

Zauważmy, że krzywizna jest zawsze nieujemna, $\kappa(t)\geqslant 0$.



Zmiana koloru w zależności od krzywizny

Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech $\alpha\colon(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h\colon(c, d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h\colon(c, d) \to (a, b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta=\alpha\circ h\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h\colon(c,d)\to(a,b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t)\overset{\text{def.}}{=}\kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h\colon (c, d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h\colon (c, d) \to (a, b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną i niech* $\alpha\circ h_1$ *oraz* $\alpha\circ h_2$ *będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie* $h_1\colon(c_1,d_1)\to(a,b)$*, oraz* $h_2\colon(c_2,d_2)\to(a,b)$ *są dyfeomorfizmami. Jeśli* κ_1 *i* κ_2 *oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio* $\alpha\circ h_1$ *oraz* $\alpha\circ h_2$*, wtedy*

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t))=\kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich $t\in(a,b)$.

Wniosek

Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną i niech* $\alpha\circ h_1$ *oraz* $\alpha\circ h_2$ *będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie* $h_1\colon(c_1,d_1)\to(a,b)$, *oraz* $h_2\colon(c_2,d_2)\to(a,b)$ *są dyfeomorfizmami. Jeśli* κ_1 *i* κ_2 *oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio* $\alpha\circ h_1$ *oraz* $\alpha\circ h_2$, *wtedy*

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t))=\kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich $t\in(a,b)$.

Wniosek

Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.
Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\||h_i'(t)|.$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 \colon (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 \colon (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.
Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} =$$

$$= \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C$$

$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$

$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C$$

$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$

$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C$$

$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$

$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) &= \pm t + C \\ h_1(t) &= h_2(\pm t + C) \\ h_2^{-1}(t) &= h_1^{-1}(\pm t) + C. \end{aligned}$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) &= \pm t + C \\ h_1(t) &= h_2(\pm t + C) \\ h_2^{-1}(t) &= h_1^{-1}(\pm t) + C. \end{aligned}$$

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

$\square$

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

□

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

$\square$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) =$$
$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \mathrm{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) =$$
$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) = $$
$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \mathrm{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) =$$

$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \mathrm{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) =$$
$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \mathrm{const}.$$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą.

Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. $\square$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. $\square$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą.
Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. □

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. $\square$

Definicja

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a,b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Uwaga

- *Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).*
- *Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy* $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, *jednak torsja może mieć wartości ujemne.*

Definicja

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a, b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \overset{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle .$$

Uwaga

- *Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).*
- *Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, jednak torsja może mieć wartości ujemne.*

Definicja

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a, b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \overset{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Uwaga

- *Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).*
- *Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy* $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, *jednak torsja może mieć wartości ujemne.*

Uwaga

Dla wygody od teraz będziemy opuszczać argument t jeśli nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności.

Twierdzenie (Wzory Freneta)

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Twierdzenie (Wzory Freneta)

Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a, b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$
\begin{aligned}
T' &= \kappa N && (3.1)\\
N' &= -\kappa T + \tau B && (3.2)\\
B' &= -\tau N && (3.3)
\end{aligned}
$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$
\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}
$$

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.

Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B \rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B \rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$).
Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$.
Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$).
Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$.
Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$).
Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$.
Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$).
Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$.
Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

$\square$

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

$\square$

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

$\square$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t)\neq 0$ dla każdego $t\in(a,b)$. Następujące warunki są równoważne.

1. *Zbiór $\alpha(a,b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. *$\tau\equiv 0$.*

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy ***krzywą płaską****.*

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą unormowaną oraz niech* $N(t)\neq 0$ *dla każdego* $t\in(a,b)$. *Następujące warunki są równoważne.*

1. *Zbiór* $\alpha(a,b)$ *(tj. wykres* α*) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. $\tau\equiv 0$.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy ***krzywą płaską****.*

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą unormowaną oraz niech* $N(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a,b)$. *Następujące warunki są równoważne.*

1. *Zbiór* $\alpha(a,b)$ *(tj. wykres* α*) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. B *jest wektorem stałym.*
3. $\tau \equiv 0$.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy ***krzywą płaską****.*

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą unormowaną oraz niech* $N(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a,b)$. *Następujące warunki są równoważne.*

1. *Zbiór* $\alpha(a,b)$ *(tj. wykres* α*) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. $\tau \equiv 0$.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy ***krzywą płaską****.*

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą unormowaną oraz niech* $N(t)\neq 0$ *dla każdego* $t\in(a,b)$*. Następujące warunki są równoważne.*

1. *Zbiór* $\alpha(a,b)$ *(tj. wykres* α*) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. $\tau\equiv 0$.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy ***krzywą płaską****.*

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

2 $\Rightarrow$ 1 Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

2 ⇒ 1 Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0. $\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$
$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną różną od prostej (tj.* $N(t)\neq 0$ *dla każdego* $t\in(a,b)$*). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B\times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle\alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t)\neq 0$ dla każdego $t\in(a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T=\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B=\frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N=B\times T \tag{3.6}$$

$$\kappa=\frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau=\frac{\langle\alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną różną od prostej (tj.* $N(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a, b)$*). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną różną od prostej (tj.* $N(t)\neq 0$ *dla każdego* $t\in(a,b)$*). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T=\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B=\frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N=B\times T \tag{3.6}$$

$$\kappa=\frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau=\frac{\langle\alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną różną od prostej (tj.* $N(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a, b)$*). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną różną od prostej (tj.* $N(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a,b)$*). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w $\mathbb{R}^3$) i nie zależą od parametryzacji.

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w $\mathbb{R}^3$) i nie zależą od parametryzacji.

Dowód:
Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w $\mathbb{R}^3$) i nie zależą od parametryzacji.

Wykład 4

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Wektory związane z krzywą

Niezmienniki krzywych

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

- Translacja i obrót
- Twierdzenie klasyfikacyjne

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną.

- *Translacja krzywej α, tj. krzywa $\beta=\alpha+q$, gdzie $q\in\mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.*
- *Niech $A\in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A\cdot\alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Lemat

Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną.

- *Translacja krzywej α, tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.*
- *Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną.

- *Translacja krzywej α, tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.*
- *Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną.

- *Translacja krzywej α, tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.*
- *Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \stackrel{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Mnożenie przez taką macierz A oznacza obrót wokół środka układu współrzędnych, symetrię względem płaszczyzny, lub kombinację tych dwóch. Grupa $O(3)$ to tzw. grupa symetrii $\mathbb{R}^3$ i jej bazę stanowią macierze obrotów o dowolny kąt wokół każdej z osi, oraz macierz symetrii względem (dowolnie wybranej) płaszczyzny zawierającej punkt $(0, 0, 0)$.

Uwaga

Te dwie operacje definiują nam relację równoważności pomiędzy wykresami krzywych w $\mathbb{R}^3$. Krzywą α uznajemy za równoważną krzywej β, jeśli wykres β można otrzymać przez zastosowanie odpowiednich translacji, obrotów i symetrii do wykresu α.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

Niech $\kappa, \tau \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *będą gładkimi funkcjami, oraz niech* $\kappa(t) > 0$ *dla wszystkich* $t \in (a, b)$*. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*

$$\alpha \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3,$$

że jej krzywizna κ_α *i torsja* τ_α *są tożsamościowo równe funkcjom* κ *oraz* τ.

- *Jeśli*

$$\beta \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

jest drugą taką krzywą, to krzywą β *można uzyskać z* α *stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

Niech $\kappa, \tau : (a, b) \to \mathbb{R}$ *będą gładkimi funkcjami, oraz niech* $\kappa(t) > 0$ *dla wszystkich* $t \in (a, b)$*. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*

$$\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3,$$

  że jej krzywizna κ_α *i torsja* τ_α *są tożsamościowo równe funkcjom* κ *oraz* τ*.*

- *Jeśli*

$$\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

  jest drugą taką krzywą, to krzywą β *można uzyskać z* α *stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*.*

Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

Niech $\kappa, \tau : (a, b) \to \mathbb{R}$ *będą gładkimi funkcjami, oraz niech* $\kappa(t) > 0$ *dla wszystkich* $t \in (a, b)$. *Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*

$$\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3,$$

  że jej krzywizna κ_α *i torsja* τ_α *są tożsamościowo równe funkcjom* κ *oraz* τ.
- *Jeśli*

$$\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

  jest drugą taką krzywą, to krzywą β *można uzyskać z* α *stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha\colon(a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla "}T' = \kappa N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla "}B' = -\tau N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla "}N' = -\kappa T + \tau B\text{"}.$$

$$\begin{aligned} u_1(p) &= 1 & u_4(p) &= 0 & u_7(p) &= 0 \\ u_2(p) &= 0 & u_5(p) &= 1 & u_8(p) &= 0 \\ u_3(p) &= 0 & u_6(p) &= 0 & u_9(p) &= 1 \end{aligned}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla “}T' = \kappa N\text{”},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla “}B' = -\tau N\text{”},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{dla “}N' = -\kappa T + \tau B\text{”}.$$

$$\begin{array}{lll} u_1(p) = 1 & u_4(p) = 0 & u_7(p) = 0 \\ u_2(p) = 0 & u_5(p) = 1 & u_8(p) = 0 \\ u_3(p) = 0 & u_6(p) = 0 & u_9(p) = 1 \end{array}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t)\\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t)\\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla "}T' = \kappa N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t)\\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t)\\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla "}B' = -\tau N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t)\\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t)\\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla "}N' = -\kappa T + \tau B\text{"}.$$

$$\begin{array}{lll} u_1(p) = 1 & u_4(p) = 0 & u_7(p) = 0\\ u_2(p) = 0 & u_5(p) = 1 & u_8(p) = 0\\ u_3(p) = 0 & u_6(p) = 0 & u_9(p) = 1 \end{array}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t)\\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t)\\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla ``}T' = \kappa N\text{''},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t)\\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t)\\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla ``}B' = -\tau N\text{''},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t)\\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t)\\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t)\end{aligned}\right\}\ \text{dla ``}N' = -\kappa T + \tau B\text{''}.$$

$$\begin{array}{lll} u_1(p) = 1 & u_4(p) = 0 & u_7(p) = 0\\ u_2(p) = 0 & u_5(p) = 1 & u_8(p) = 0\\ u_3(p) = 0 & u_6(p) = 0 & u_9(p) = 1\end{array}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t)\\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t)\\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\text{ dla ``}T' = \kappa N\text{'',}$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t)\\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t)\\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t)\end{aligned}\right\}\text{ dla ``}B' = -\tau N\text{'',}$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t)+\tau(t)u_7(t)\\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t)+\tau(t)u_8(t)\\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t)+\tau(t)u_9(t)\end{aligned}\right\}\text{ dla ``}N' = -\kappa T+\tau B\text{''.}$$

$$\begin{array}{lll} u_1(p)=1 & u_4(p)=0 & u_7(p)=0\\ u_2(p)=0 & u_5(p)=1 & u_8(p)=0\\ u_3(p)=0 & u_6(p)=0 & u_9(p)=1\end{array}$$

Twierdzenie (Picarda, o istnieniu i jedyności rozwiązania równania różniczkowego)

Niech $(a, b) \subset \mathbb{R}$, oraz niech $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Ustalmy liczbę $t_0 \in (a, b)$ i punkt $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka $\omega\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ która spełnia

$$\begin{aligned} \omega(t_0) &= v_0, \quad \textit{oraz} \\ \omega'(t) &= A\omega(t) \quad \textit{dla wszystkich } t \in (a, b). \end{aligned}$$

Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać ω, A, t_0 i v_0).

Twierdzenie (Picarda, o istnieniu i jedyności rozwiązania równania różniczkowego)

Niech $(a, b) \subset \mathbb{R}$, oraz niech $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Ustalmy liczbę $t_0 \in (a, b)$ i punkt $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka $\omega\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ która spełnia

$$\omega(t_0) = v_0, \quad \textit{oraz}$$
$$\omega'(t) = A\omega(t) \quad \textit{dla wszystkich } t \in (a, b).$$

Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie
(podać ω, A, t_0 i v_0).

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t)\rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym.
Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym.
Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Zadanie

Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji $p'_{i,j}(t)$ z funkcjami $\{p_{i,j}(t)\}$ oraz $\kappa(t)$ i $\tau(t)$.

Przykład

$$
\begin{aligned}
p'_{1,1}(t) &= (\langle X_1(t), X_1(t)\rangle)' = \\
&= \langle \underbrace{X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}, X_1(t)\rangle + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}\rangle = \\
&= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t).
\end{aligned}
$$

Zadanie

Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji $p'_{i,j}(t)$ z funkcjami $\{p_{i,j}(t)\}$ oraz $\kappa(t)$ i $\tau(t)$.

Przykład

$$\begin{aligned} p'_{1,1}(t) &= \left(\langle X_1(t), X_1(t)\rangle\right)' = \\ &= \underbrace{\langle X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}, X_1(t)\rangle + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t)\rangle}_{=\kappa(t)X_2(t)} = \\ &= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t). \end{aligned}$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.
Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.
Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.

Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.
Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\alpha'(t) = T_\alpha(t) = X_1(t)$$
$$\alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t)$$
$$|\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) = \tau(t) X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

□

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\alpha'(t) = T_\alpha(t) = X_1(t)$$
$$\alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t)$$
$$|\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) = \tau(t) X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.
Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

□

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\alpha'(t) = T_\alpha(t) = X_1(t)$$
$$\alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t)$$
$$|\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) = \tau(t) X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

□

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) &= \kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) = \kappa(t)X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)|B_\alpha(t) &= \tau(t)X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

$\square$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) &= \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) &= \tau(t) X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

□

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) = T_\alpha(t) &= X_1(t) \\ \alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) &= \kappa(t) X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) &= \tau(t) X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

$\square$