

# Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba<sup>1</sup>

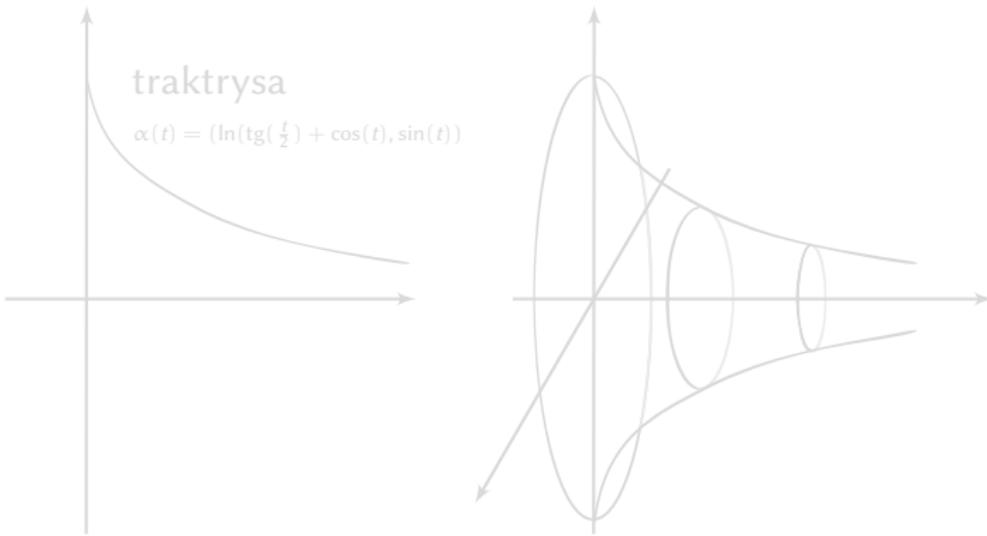
2013

## Wykład 15

### Powierzchnie o stałej krzywiźnie

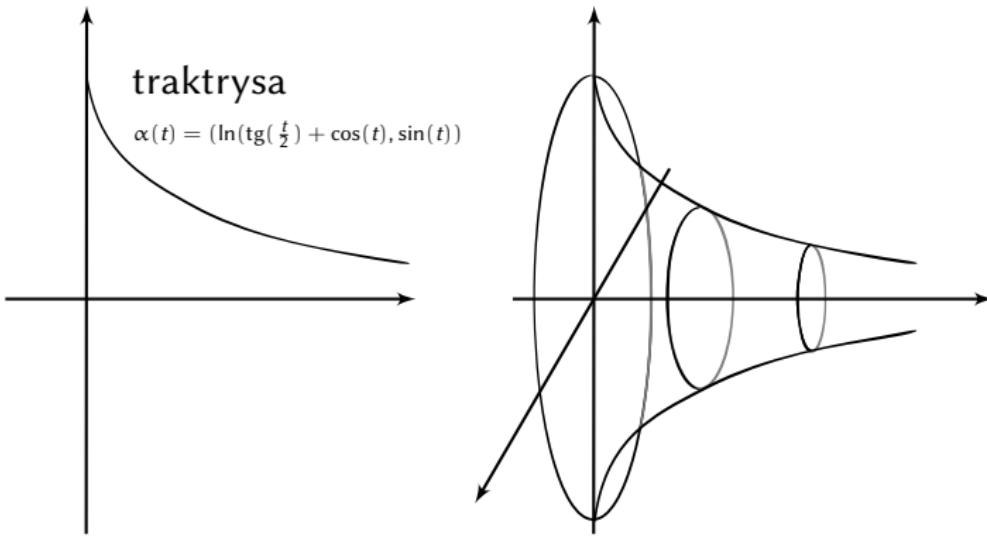
# Geometria hiperboliczna

Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrysy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej  $-1$ , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.

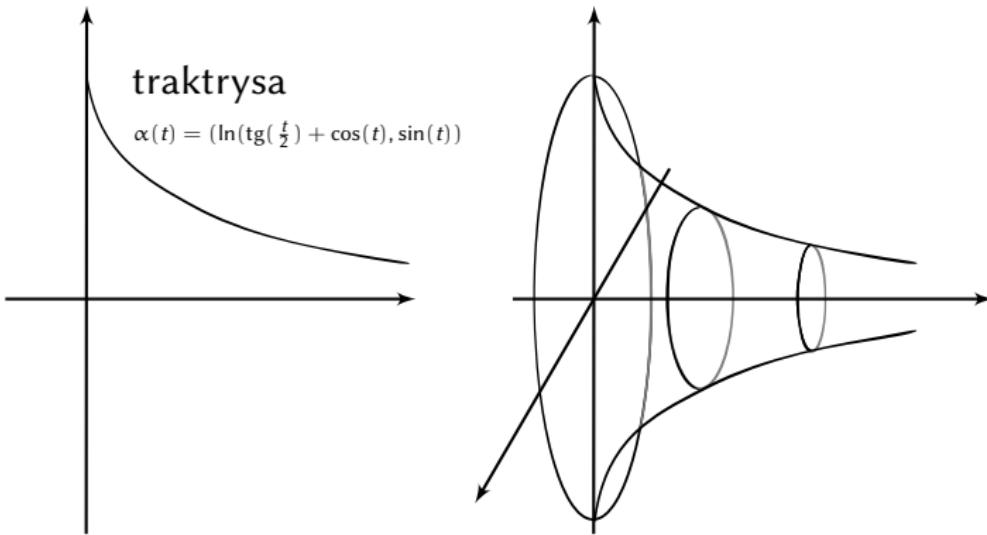


W roku 1901 D. Hilbert udowodnił, że zamknięta powierzchnia o ujemnej i stałej krzywiźnie nie może być zanurzona (gładko!) w  $\mathbb{R}^3$ .

Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrysy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej  $-1$ , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.



Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrysy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej  $-1$ , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.



W roku 1901 D. Hilbert udowodnił, że zamknięta powierzchnia o ujemnej i stałej krzywiźnie nie może być zanurzona (gładko!) w  $\mathbb{R}^3$ .

## Definicja

Płaszczyznę hiperboliczną  $\mathcal{H}$  definiujemy jako półpłaszczyznę

$$\mathcal{H} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\},$$

wyposażoną w pierwszą formę podstawową

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{I(u, v)\}_{(u, v) \in \mathcal{H}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{bmatrix} \right\}$$

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat ??) możemy znaleźć symbole Christoffella:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v}$$

Teraz używając jawniej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą  $-1$ . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż  $\pi$ .

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat ??) możemy znaleźć symbole Christoffella:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v}$$

Teraz używając jawniej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą  $-1$ . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż  $\pi$ .

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat ??) możemy znaleźć symbole Christoffella:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v}$$

Teraz używając jawniej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą  $-1$ . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż  $\pi$ .

Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  będzie geodezyjną w  $\mathcal{H}$ .  
Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$u''(t) - \frac{2}{v(t)} u'(t)v'(t) = 0$$

$$v''(t) + \frac{1}{v(t)} ((u'(t))^2 - (v'(t))^2) = 0.$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest  $u(t) = \text{const}$ , przez co otrzymujemy półproste prostopadłe do osi  $OX$ .

### Zadanie

Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację  
 $v(t) = C_1 e^{C_2 t}$ .

Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  będzie geodezyjną w  $\mathcal{H}$ .  
Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$u''(t) - \frac{2}{v(t)} u'(t)v'(t) = 0$$

$$v''(t) + \frac{1}{v(t)} ((u'(t))^2 - (v'(t))^2) = 0.$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest  $u(t) = \text{const}$ , przez co  
otrzymujemy półproste prostopadłe do osi  $OX$ .

### Zadanie

Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację  
 $v(t) = C_1 e^{C_2 t}$ .

Niech  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  będzie geodezyjną w  $\mathcal{H}$ .  
Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$u''(t) - \frac{2}{v(t)} u'(t)v'(t) = 0$$

$$v''(t) + \frac{1}{v(t)} ((u'(t))^2 - (v'(t))^2) = 0.$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest  $u(t) = \text{const}$ , przez co otrzymujemy półproste prostopadłe do osi  $OX$ .

### Zadanie

Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację  
 $v(t) = C_1 e^{C_2 t}$ .

Przyjmijmy teraz, że  $u(t) \neq \text{const}$ , zatem  $u'(t) \neq 0$  i spróbujmy wyznaczyć  $v$  jako funkcję  $u(t)$ . Mamy

$$\frac{d[v(u(t))]}{dt} = \frac{d[v(u(t))]}{du(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad \text{więc} \quad \frac{v'(u(t))}{u'(t)} = \frac{dv(u(t))}{du(t)}$$

gdzie notację primową rezerwujemy dla pochodnej po  $t$ .

Stosując teraz regułę łańcuchową otrzymujemy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \frac{d^2[v(u)]}{du^2} &= \frac{d}{du} \left( \frac{v'(u)}{u'} \right) = \\ &= \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'}. \end{aligned}$$

Przyjmijmy teraz, że  $u(t) \neq \text{const}$ , zatem  $u'(t) \neq 0$  i spróbujmy wyznaczyć  $v$  jako funkcję  $u(t)$ . Mamy

$$\frac{d[v(u(t))]}{dt} = \frac{d[v(u(t))]}{du(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad \text{więc} \quad \frac{v'(u(t))}{u'(t)} = \frac{dv(u(t))}{du(t)}$$

gdzie notację primową rezerwujemy dla pochodnej po  $t$ .  
Stosując teraz regułę łańcuchową otrzymujemy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \frac{d^2[v(u)]}{du^2} &= \frac{d}{du} \left( \frac{v'(u)}{u'} \right) = \\ &= \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'}. \end{aligned}$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} =$$
$$= \frac{1}{(u')^3} \left[ u' \left( \frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left( \frac{2}{v} u' v' \right) \right],$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} [((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2] =$$
$$= -\frac{1}{v} \left[ 1 + \left( \frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left( 1 + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right).$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\begin{aligned} \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} &= \\ &= \frac{1}{(u')^3} \left[ u' \left( \frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left( \frac{2}{v} u' v' \right) \right], \end{aligned}$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$\begin{aligned} &= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} \left[ ((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{v} \left[ 1 + \left( \frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left( 1 + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\begin{aligned} \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} &= \\ &= \frac{1}{(u')^3} \left[ u' \left( \frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left( \frac{2}{v} u' v' \right) \right], \end{aligned}$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$\begin{aligned} &= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} \left[ ((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{v} \left[ 1 + \left( \frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left( 1 + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Zatem

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} = -1 - \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2;$$

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left( v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1,$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1 u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyć (pamiętając, że  $v > 0$ ) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor  $[C, 0]$ .

Zatem

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} = -1 - \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2;$$

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left( v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1,$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1 u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyć (pamiętając, że  $v > 0$ ) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor  $[C, 0]$ .

Zatem

$$v \frac{d^2v(u)}{du^2} = -1 - \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2;$$

$$v \frac{d^2v(u)}{du^2} + \left( \frac{dv(u)}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left( v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1,$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyć (pamiętając, że  $v > 0$ ) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor  $[C, 0]$ .

## Uwaga

*Jeśli pierwsze współrzędne punktów  $P$  i  $Q$  są równe, to geodezyjną je łączącą jest zwykła prosta. Jeśli pierwsze współrzędne nie są równe, wtedy istnieje dokładnie jeden okrąg o środku na osi  $OX$  na którym leżą oba punkty. W każdym przypadku widzimy, że na płaszczyźnie hiperbolicznej każde dwa punkty  $P$  i  $Q$  łączy dokładnie jedna krzywa geodezyjna.*

## Uwaga

*Jeśli pierwsze współrzędne punktów  $P$  i  $Q$  są równe, to geodezyjną je łączącą jest zwykła prosta. Jeśli pierwsze współrzędne nie są równe, wtedy istnieje dokładnie jeden okrąg o środku na osi  $OX$  na którym leżą oba punkty. W każdym przypadku widzimy, że na płaszczyźnie hiperbolicznej każde dwa punkty  $P$  i  $Q$  łączy dokładnie jedna krzywa geodezyjna.*

Obliczymy teraz długość geodezyjnej na powierzchni hiperbolicznej,  $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$  łączącej punkty  $P$  i  $Q$ .

Dla przypomnienia:

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość obrazu krzywej  $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  jest równa*

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

*co można bezpośrednio zapisać:*

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Obliczymy teraz długość geodezyjnej na powierzchni hiperbolicznej,  $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$  łączącej punkty  $P$  i  $Q$ .

Dla przypomnienia:

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość obrazu krzywej  $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  jest równa*

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

*co można bezpośrednio zapisać:*

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Obliczymy teraz długość geodezyjnej na powierzchni hiperbolicznej,  $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$  łączącej punkty  $P$  i  $Q$ .

Dla przypomnienia:

### Lemat

*Niech  $M \subset \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią gładką i niech  $x: U \rightarrow M$  będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$ . Wtedy długość obrazu krzywej  $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  jest równa*

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

*co można bezpośrednio zapisać:*

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej  $u = u_0$ , tj.  $P = (u_0, a)$  i  $Q = (u_0, b)$ . Wtedy przy parametryzacji  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$  otrzymujemy:

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli  $P$  zbliża się do osi  $OX$  jego odległość od ustalonego  $Q$  dąży do  $\infty$ .

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- ▶ Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej  $u = u_0$ , tj.  $P = (u_0, a)$  i  $Q = (u_0, b)$ . Wtedy przy parametryzacji  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$  otrzymujemy:

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli  $P$  zbliża się do osi  $OX$  jego odległość od ustalonego  $Q$  dąży do  $\infty$ .

Rozważmy teraz dwa przypadki:

- ▶ Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej  $u = u_0$ , tj.  $P = (u_0, a)$  i  $Q = (u_0, b)$ . Wtedy przy parametryzacji  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$  otrzymujemy:

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{t^2} (\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli  $P$  zbliża się do osi  $OX$  jego odległość od ustalonego  $Q$  dąży do  $\infty$ .

- Niech teraz geodezyjna łącząca punkty  $P$  i  $Q$  będzie łukiem okręgu  $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$  i niech  $\varphi$  i  $\psi$  będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| = \\ &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|_{\varphi}^{\psi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right| \end{aligned}$$

- ▶ Niech teraz geodezyjna łącząca punkty  $P$  i  $Q$  będzie łukiem okręgu  $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$  i niech  $\varphi$  i  $\psi$  będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

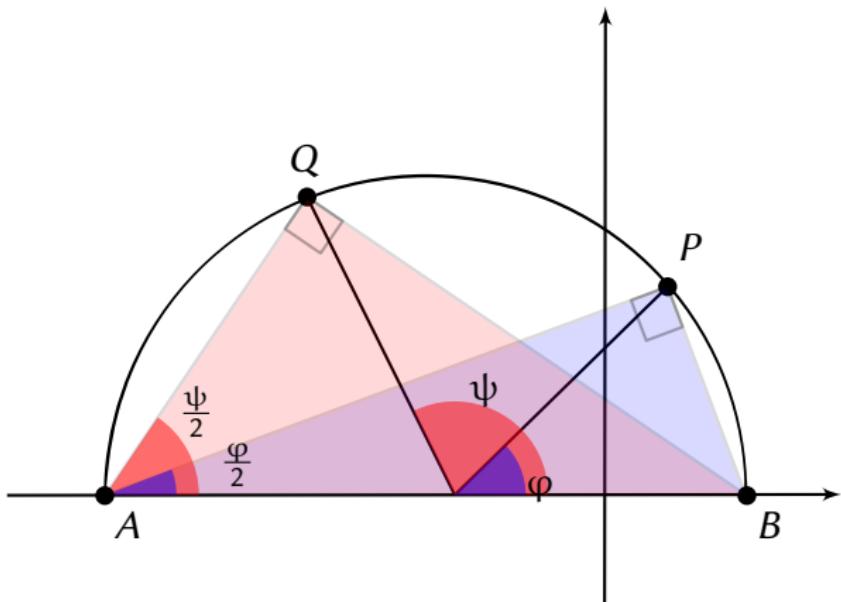
$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| = \\ &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|_{\varphi}^{\psi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right| \end{aligned}$$

- Niech teraz geodezyjna łącząca punkty  $P$  i  $Q$  będzie łukiem okręgu  $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$  i niech  $\varphi$  i  $\psi$  będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) =$$

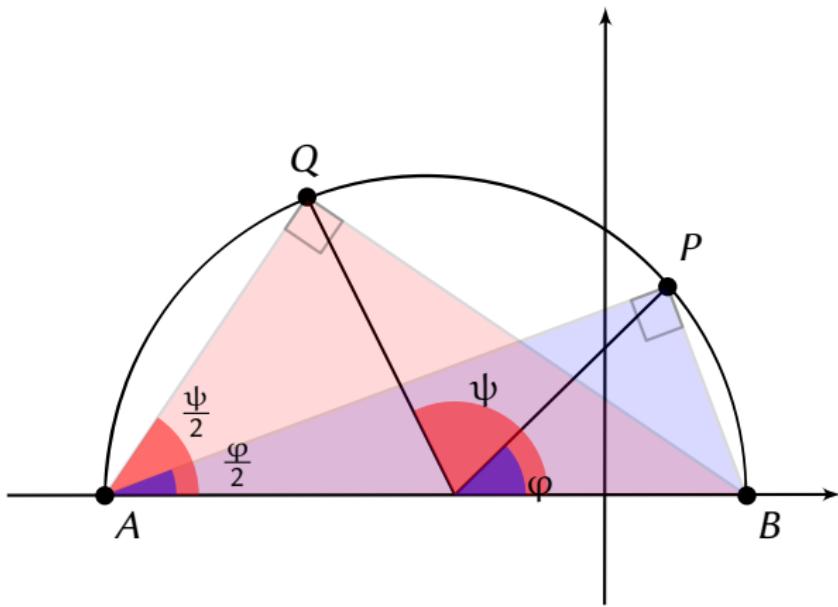
$$\begin{aligned} &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| = \\ &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|_{\varphi}^{\psi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right| \end{aligned}$$



Analizując powyższy rysunek łatwo dostrzec, że ten iloraz jest równy

$$d_H(P, Q) = \left| \ln \frac{\tg \frac{\psi}{2}}{\tg \frac{\varphi}{2}} \right| = \left| \ln \left( \frac{d_E(A, P)}{d_E(B, P)} \Big/ \frac{d_E(A, Q)}{d_E(B, Q)} \right) \right|$$

gdzie  $d_E$  oznacza zwykłą odległość euklidesową



Analizując powyższy rysunek łatwo dostrzec, że ten iloraz jest równy

$$d_H(P, Q) = \left| \ln \frac{\tan \frac{\Psi}{2}}{\tan \frac{\varphi}{2}} \right| = \left| \ln \left( \frac{d_E(A, P)}{d_E(B, P)} \Big/ \frac{d_E(A, Q)}{d_E(B, Q)} \right) \right|$$

gdzie  $d_E$  oznacza zwykłą odległość euklidesową.

# Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Rozważmy  $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

jako podzbiór płaszczyzny zespolonej utożsamiając punkt  $(u, v)$  z liczbą  $u + iv$ .

## Definicja

Niech  $a, b, c, d$  będą takimi liczbami rzeczywistymi, że  $ad - bc = 1$ . Zdefiniujmy odpowiadającą im **specjalną transformację Möbiusa** jako funkcję  $T_{c,d}^{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zadaną wzorem

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}.$$

# Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Rozważmy  $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

jako podzbiór płaszczyzny zespolonej utożsamiając punkt  $(u, v)$  z liczbą  $u + iv$ .

## Definicja

Niech  $a, b, c, d$  będą takimi liczbami rzeczywistymi, że  $ad - bc = 1$ . Zdefiniujmy odpowiadającą im **specjalną transformację Möbiusa** jako funkcję  $T_{c,d}^{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zadaną wzorem

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}.$$

## Twierdzenie

*Niech*

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

*będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy*

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

*więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.*

- ▶ *Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.*

## Twierdzenie

*Niech*

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

*będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy*

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

*więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.*

- ▶ *Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.*

## Twierdzenie

Niech

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- ▶ Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

## Twierdzenie

Niech

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}$$

będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- ▶  $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  jest bijekcją.
- ▶ składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- ▶ Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

## Uwaga

*Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

## Uwaga

Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

## Uwaga

Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

## Uwaga

Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę  $PGL(2, \mathbb{R})$ . Jest to iloraz grupy liniowej  $GL(2, \mathbb{R})$  przez podgrupę normalną  $H = \{I, -I\}$ . Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie  $\det = 1$  są oznaczane  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

### Dowód:

Niech  $z = u + iv$  oraz niech  $T(z) = x + iy$ . Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć  $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$  w punkcie  $T(z) = x + iy$ .

$$\begin{aligned}T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \dots = \\&= \frac{(ac(u^2+v^2)+u+bd)}{|cz+d|^2} + i \frac{v}{|cz+d|^2} = x+iy.\end{aligned}$$

Zatem  $y = \frac{v}{|cz+d|^2}$ . Traktując  $T(z)$  jako funkcję jednego argumentu możemy łatwo policzyć jej pochodną:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+d)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

$$\begin{aligned}T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \dots = \\&= \frac{(ac(u^2+v^2)+u+bd)}{|cz+d|^2} + i \frac{v}{|cz+d|^2} = x+iy.\end{aligned}$$

Zatem  $y = \frac{v}{|cz+d|^2}$ . Traktując  $T(z)$  jako funkcję jednego argumentu możemy łatwo policzyć jej pochodną:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{a(cz+d) - c(az+d)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze  $T_u$ .

Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz+d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12}\end{aligned}$$



Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12}\end{aligned}$$

□

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( -\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12}\end{aligned}$$

□

## Zadanie

Pokazać, że specjalne transformacje Möbiusa przenoszą geodezyjne na geodezyjne.

Podpowiedź: Pokazać, że następujące macierze generują grupę  $PSL(2, \mathbb{R})$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Następnie zinterpretować geometrycznie działanie poszczególnych macierzy.

## Zadanie

Pokazać, że specjalne transformacje Möbiusa przenoszą geodezyjne na geodezyjne.

**Podpowiedź:** Pokazać, że następujące macierze generują grupę  $PSL(2, \mathbb{R})$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Następnie zinterpretować geometrycznie działanie poszczególnych macierzy.

# Torusy o stałej krzywiźnie

## Zadanie

Jak wyglądają geodezyjne na torusie? Wskazać przykład triangulacji (najlepiej geodezyjnej) na torusie. Sprawdzić, że charakterystyka Eulera torusa jest równa 0.

Z twierdzenia Gaussa-Bonneta wynika, że jeśli  $M$  jest homeomorficzna z torusem  $T^2$  wtedy jej całkowita krzywizna musi być równa  $2\pi\chi(T^2) = 0$ .

# Torusy o stałej krzywiźnie

## Zadanie

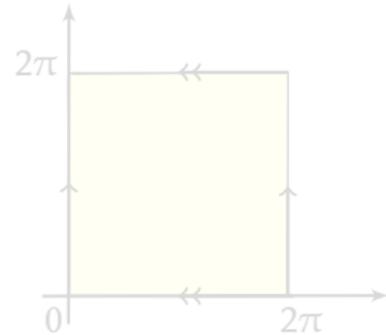
Jak wyglądają geodezyjne na torusie? Wskazać przykład triangulacji (najlepiej geodezyjnej) na torusie. Sprawdzić, że charakterystyka Eulera torusa jest równa 0.

Z twierdzenia Gaussa-Bonneta wynika, że jeśli  $M$  jest homeomorficzna z torusem  $T^2$  wtedy jej całkowita krzywizna musi być równa  $2\pi\chi(T^2) = 0$ .

Jak przekonamy się za chwilę nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  (tj. o stałej krzywiźnie równej 0).

Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie  $T^2$  w przestrzeń  $\mathbb{R}^4$ . Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z  $S^1 \times S^1$ .

Rozważmy kwadrat  $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Niech  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie określone wzorem



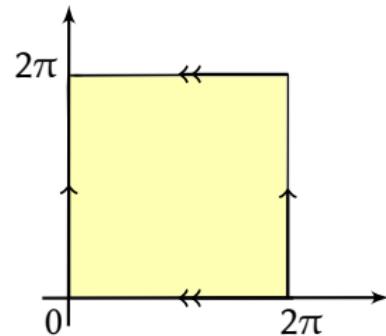
$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

Zauważmy, że funkcje cos i sin we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Jak przekonamy się za chwilę nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  (tj. o stałej krzywiźnie równej 0).

Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie  $T^2$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z  $S^1 \times S^1$ .

Rozważmy kwadrat  $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Niech  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie określone wzorem



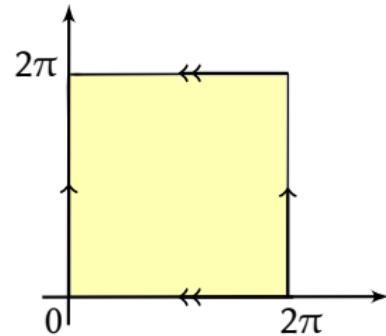
$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

Zauważmy, że funkcje cos i sin we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Jak przekonamy się za chwilę nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  (tj. o stałej krzywiźnie równej 0).

Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie  $T^2$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z  $S^1 \times S^1$ .

Rozważmy kwadrat  $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Niech  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie określone wzorem



$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$

Zauważmy, że funkcje cos i sin we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Niezrażeni faktem, że tym razem  $x_1$  i  $x_2$  mają po 4 współrzędne możemy policzyć współczynniki metryczne:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 = 1$$

$$g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2 = 1,$$

zatem nasz torus zanurzony w  $\mathbb{R}^4$  jest faktycznie lokalnie izometryczny z płaszczyzną (więc płaski).

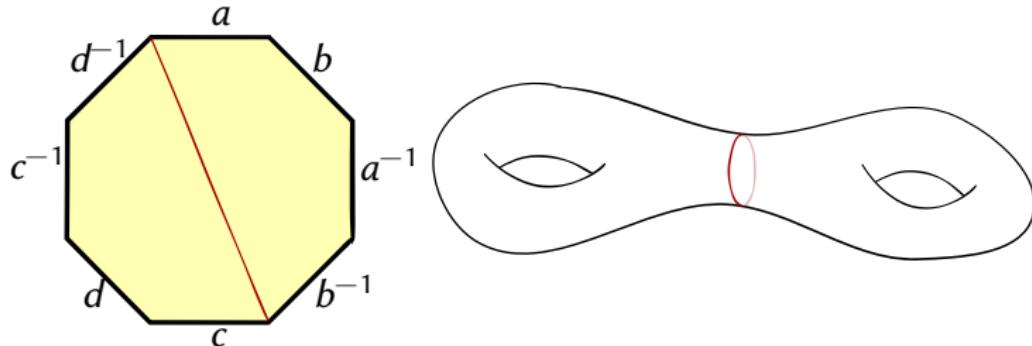
Niezrażeni faktem, że tym razem  $x_1$  i  $x_2$  mają po 4 współrzędne możemy policzyć współczynniki metryczne:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 = 1$$

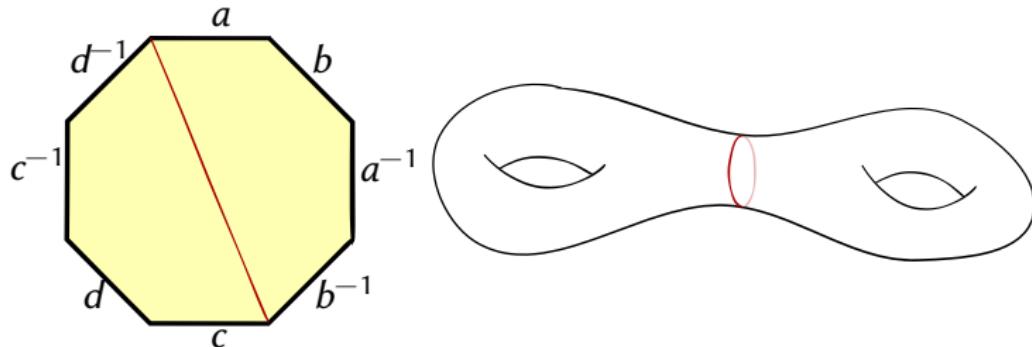
$$g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2 = 1,$$

zatem nasz torus zanurzony w  $\mathbb{R}^4$  jest faktycznie lokalnie izometryczny z płaszczyzną (więc płaski).



Jeśli utożsamimy opisane krawędzie 8-kąta zgodnie z przypisaną im orientacją, wtedy otrzymamy podwójny torus po prawej stronie. Można pokazać (sprawdzić!), że charakterystyka Eulera podwójnego torusa wynosi  $-2$  (ogólniej: dla torusa genusu  $g$  to  $2 - 2g$ ).



Jeśli utożsamimy opisane krawędzie 8-kąta zgodnie z przypisaną im orientacją, wtedy otrzymamy podwójny torus po prawej stronie. Można pokazać (sprawdzić!), że charakterystyka Eulera podwójnego torusa wynosi  $-2$  (ogólniej: dla torusa genusu  $g$  to  $2 - 2g$ ).

Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywiznę całkowitą równą  $-4\pi g$  więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej krzywiźnie ujemnej, równej  $-1$* . Wystarczy znaleźć **foremny**  $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej  $2\pi$** . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywiźnie indukowanej z  $\mathcal{H}$  ( $= -1$ ).

### Uwaga

*Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ( $= 2\pi$ ) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spółujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)*

Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywiznę całkowitą równą  $-4\pi g$  więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej* krzywiznie ujemnej, równej  $-1$ . Wystarczy znaleźć **foremny**  $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej**  $2\pi$ . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywiznie indukowanej z  $\mathcal{H}$  ( $= -1$ ).

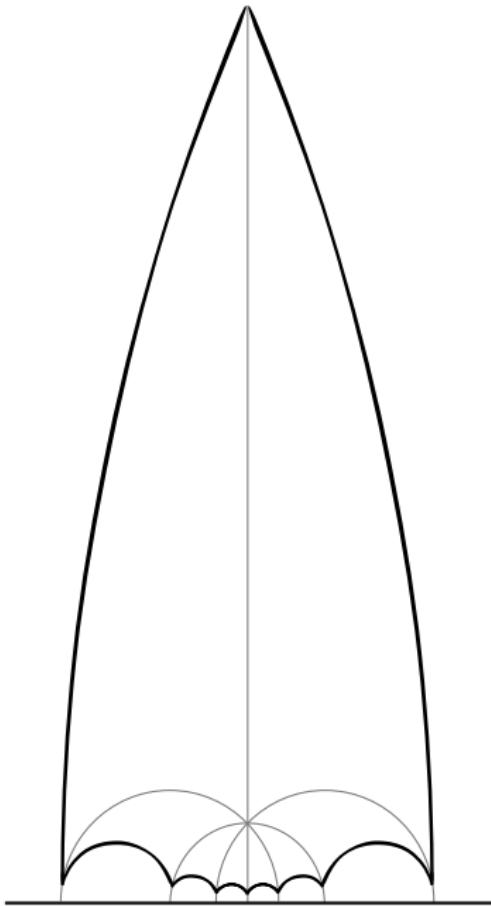
### Uwaga

*Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ( $= 2\pi$ ) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spółujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)*

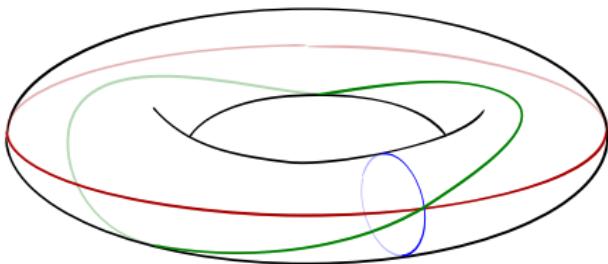
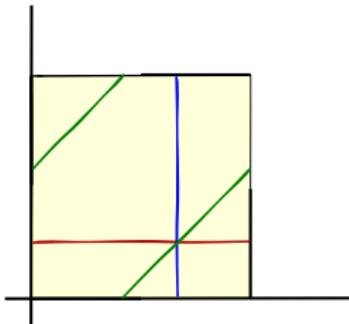
Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywiznę całkowitą równą  $-4\pi g$  więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej* krzywiznie ujemnej, równej  $-1$ . Wystarczy znaleźć **foremny**  $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej**  $2\pi$ . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywiznie indukowanej z  $\mathcal{H}$  ( $= -1$ ).

### Uwaga

*Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ( $= 2\pi$ ) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spółujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)*



Standardowe zanurzenie torusa w przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  (jako powierzchni obrotowej) nie jest izometrią. Aby się o tym przekonać, wystarczy spojrzeć na linie parametru  $u$  i  $v$  aby zobaczyć, że ich obrazy (tj. południki i równoleżniki) są różnej długości.



## Twierdzenie

*Nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  które zachowuje odległości. W szczególności żadne zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  nie jest lokalną izometrią.*

### Dowód:

Założymy przez moment, że takie zanurzenie istnieje.

Ponieważ torus jest zwarty, więc obraz jego zanurzenia będzie również zbiorem zwartym, więc ograniczonym. Niech  $K_R$  oznacza kulę o promieniu  $R$ , która zawiera w sobie obraz tego zanurzenia. Możemy tak wybrać środek tej kuli oraz promień  $R$ , żeby torus i sfera (będąca brzegiem kuli) stały się wewnętrznie styczne.

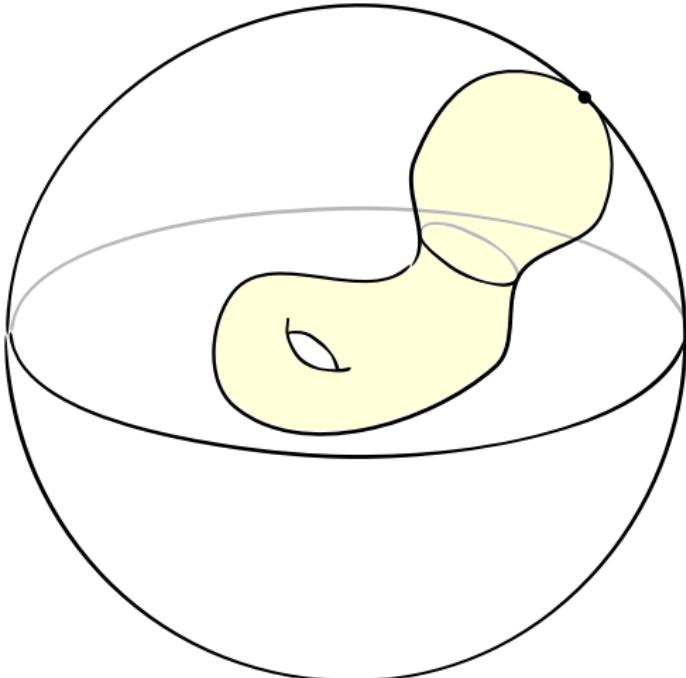
## Twierdzenie

*Nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  które zachowuje odległości. W szczególności żadne zanurzenie płaskiego torusa w  $\mathbb{R}^3$  nie jest lokalną izometrią.*

### Dowód:

Założymy przez moment, że takie zanurzenie istnieje.

Ponieważ torus jest zwarty, więc obraz jego zanurzenia będzie również zbiorem zwartym, więc ograniczonym. Niech  $K_R$  oznacza kulę o promieniu  $R$ , która zawiera w sobie obraz tego zanurzenia. Możemy tak wybrać środek tej kuli oraz promień  $R$ , żeby torus i sfera (będąca brzegiem kuli) stały się wewnętrznie styczne.



W punkcie styczności oczywiście współczynniki metryczne są takie same, więc krzywizny tych powierzchni muszą być takie same. Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ krzywizna torusa miała być  $\equiv 0$  zaś krzywizna sfery jest  $\equiv \frac{1}{R} > 0$ .  $\square$

## Uwaga

*W ostatniej części tego wykładu zawiemy jak dotąd zawsze obowiązujące założenie o gładkości ( $C^\infty$ ) wszystkich odwzorowań.*

## Twierdzenie (J. Nash (1954), M. Gromov (1986), M. Günther(1990))

*Niech  $M$  będzie powierzchnią klasy  $C^k$  ( $3 \leq k \leq \infty$ ). Istnieje wówczas  $n \geq 5$  oraz zanurzenie klasy  $C^k$*

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*które jest izometrią na swój obraz.*

## Twierdzenie (J. Nash (1954), N. Kuiper (1955))

*Niech  $M$  będzie powierzchnią i niech  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie gładkim zanurzeniem dla pewnego  $n \geq 3$ . Wtedy dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zanurzenie*

$$f_\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*takie, że*

- ▶  $f_\varepsilon$  jest klasy  $C^1$ ,
- ▶  $f_\varepsilon$  jest izometrią, oraz
- ▶  $f_\varepsilon$  przybliża zanurzenie  $f$  z dowolną dokładnością: dla wszystkich  $x \in M$

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

## Uwaga

*Powyzsze twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ krzywizna Gaussa dla powierzchni klasy  $C^1$  nie jest zdefiniowana. Wobec tego izometryczność definiujemy następującą własnością:*

$$\mathcal{I}^M(u, v) = \langle Df_\varepsilon(u), Df_\varepsilon(v) \rangle.$$

Postaramy się zobrazować teraz to zanurzenie klasy  $C^1$  torusa w  $\mathbb{R}^3$ .

Rysunki płaskiego zanurzenia torusa w  $\mathbb{R}^3$  pochodzą z pracy:  
Borrelli V., Jabrane S., Lazarus F., and Thibert B., *Flat tori in  
three-dimensional space and convex integration*, Proceedings of the National  
Academy of Sciences, 2012

## Uwaga

*Powyzsze twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ krzywizna Gaussa dla powierzchni klasy  $C^1$  nie jest zdefiniowana. Wobec tego izometryczność definiujemy następującą własnością:*

$$\mathcal{I}^M(u, v) = \langle Df_\varepsilon(u), Df_\varepsilon(v) \rangle.$$

Postaramy się zobrazować teraz to zanurzenie klasy  $C^1$  torusa w  $\mathbb{R}^3$ .

Rysunki płaskiego zanurzenia torusa w  $\mathbb{R}^3$  pochodzą z pracy:  
Borrelli V., Jabrane S., Lazarus F., and Thibert B., *Flat tori in  
three-dimensional space and convex integration*, Proceedings of the National  
Academy of Sciences, 2012

Zaczynamy od standardowego zanurzenia torusa jako powierzchni obrotowej



Ponieważ południki są znacznie krótsze niż równoleżniki, wprowadzamy zaburzenia wzdłuż równoleżników (falowanie).



Zaczynamy od standardowego zanurzenia torusa jako powierzchni obrotowej



Ponieważ południki są znacznie krótsze niż równoleżniki, wprowadzamy zaburzenia wzdłuż równoleżników (falowanie).



Teraz południki są faktycznie dłuższe, ale równoleżniki są (były) różnej długości, więc wprowadzamy drugi poziom falowania (mniejsza amplituda, a większa częstotliwość), aby wyrównać te różnice.

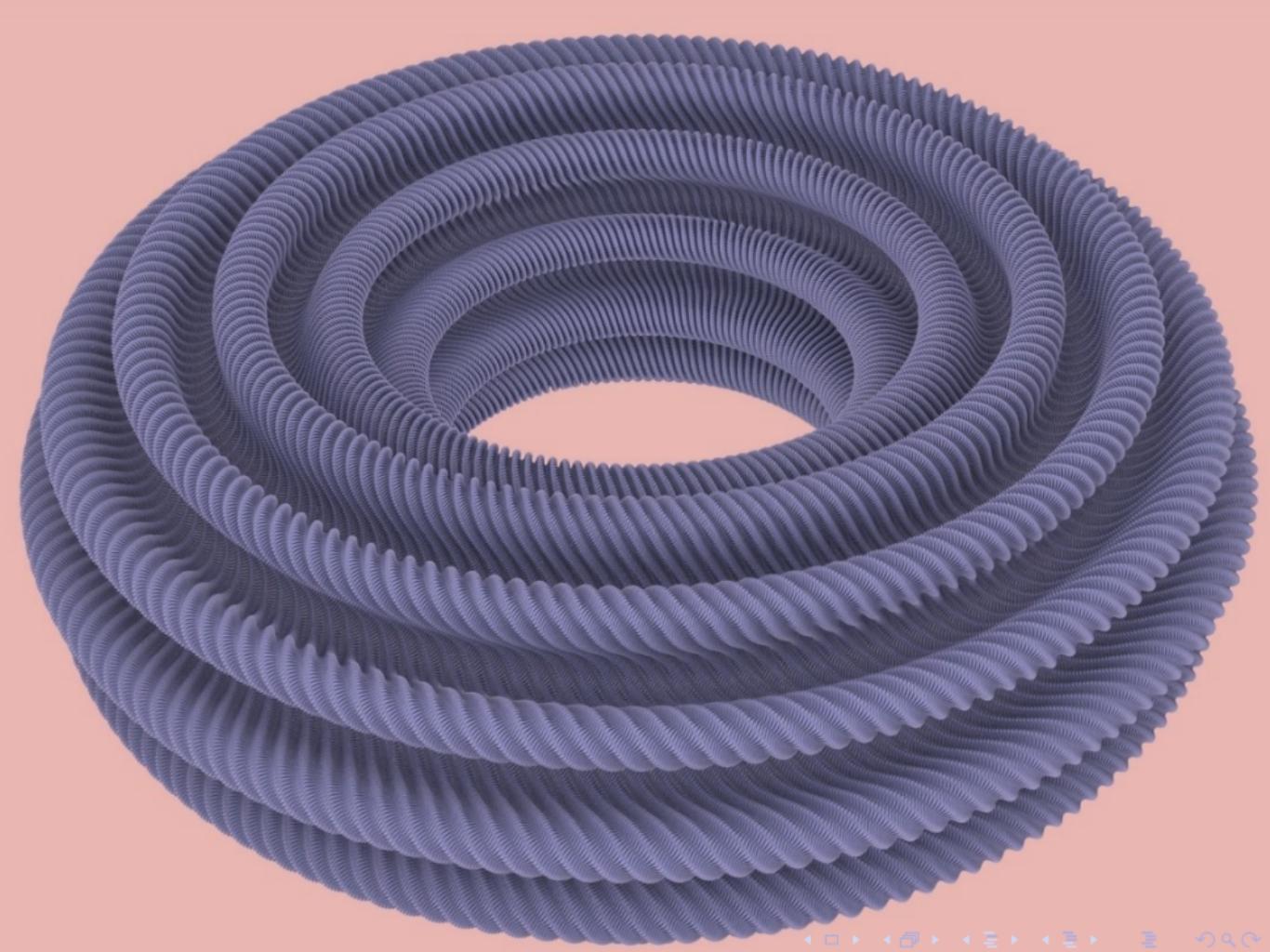


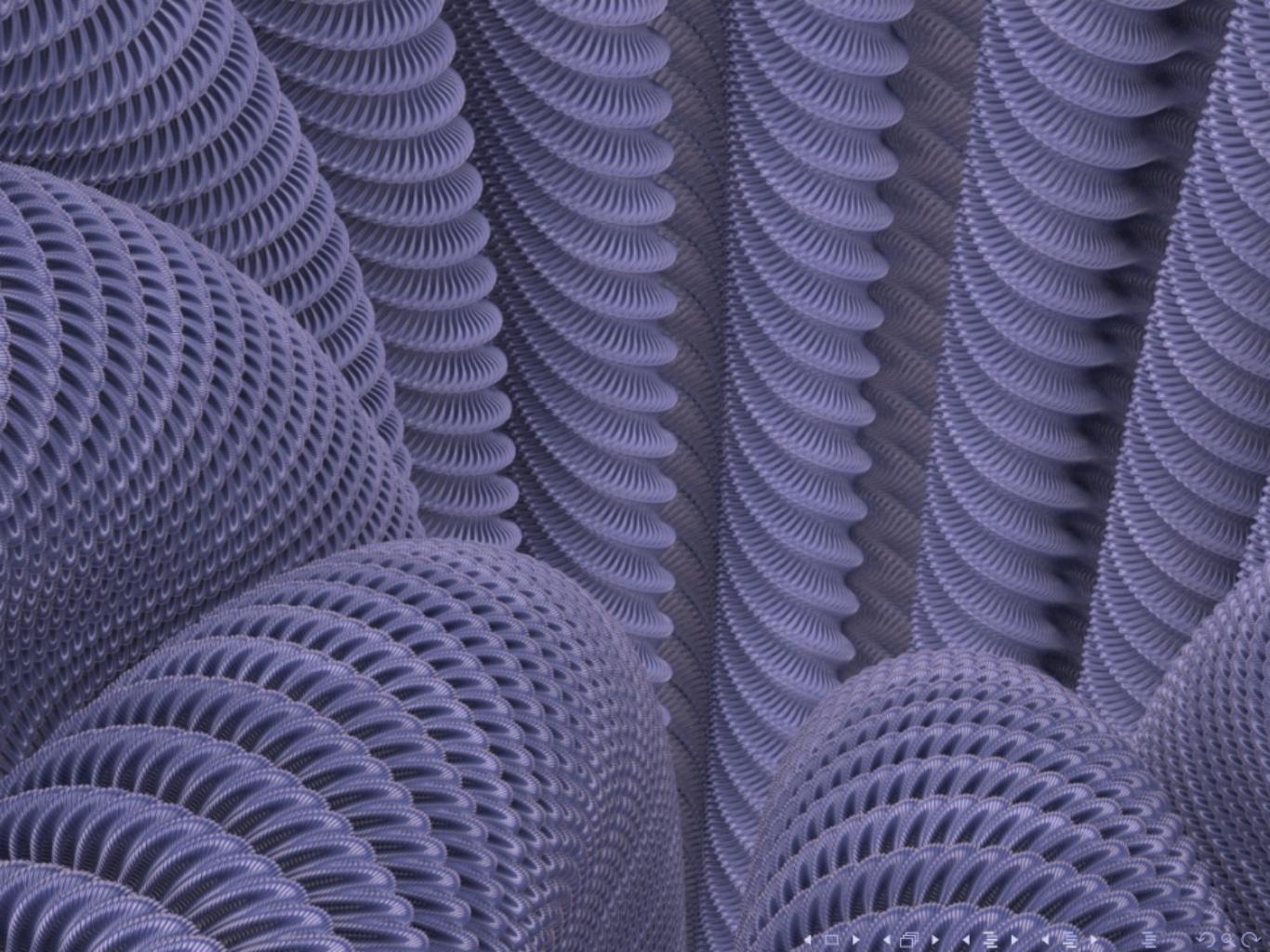
itd...

Teraz południki są faktycznie dłuższe, ale równoleżniki są (były) różnej długości, więc wprowadzamy drugi poziom falowania (mniejsza amplituda, a większa częstotliwość), aby wyrównać te różnice.

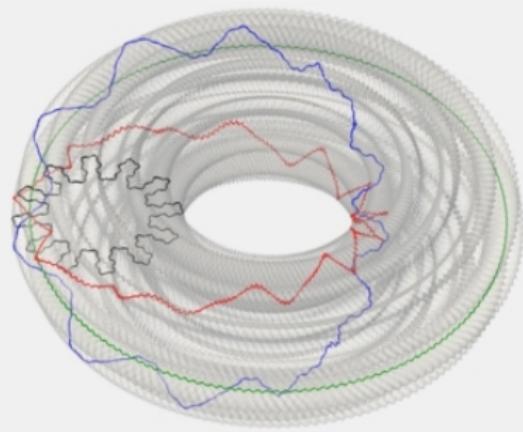
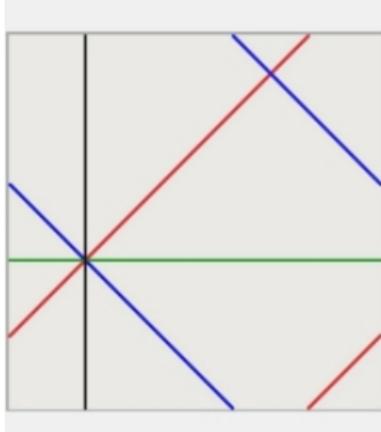


itd...





- ▶ Chociaż wszystkie kroki można wykonać w klasie  $C^2$ , proces ten kontynuujemy w nieskończoność, więc ostateczne zanurzenie jako granica tych odwzorowań może być tylko klasy  $C^1$ .
  - ▶ Jednocześnie na rysunku poniżej widzimy, że południki i równoleżniki uzyskały tę samą długość.



- ▶ Chociaż wszystkie kroki można wykonać w klasie  $C^2$ , proces ten kontynuujemy w nieskończoność, więc ostateczne zanurzenie jako granica tych odwzorowań może być tylko klasy  $C^1$ .
  - ▶ Jednocześnie na rysunku poniżej widzimy, że południki i równoleżniki uzyskały tę samą długość.

