Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 5

Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s,t) \in U$.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie (funkcję wektorową)

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **gładkim**, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe (dowolnego rzędu) x istnieją oraz są odwzorowaniami ciągłymi.

Definicja

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie gładkie

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3$$

nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** jeśli jest injekcją, oraz

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) \neq 0$$

dla wszystkich $(s,t) \in U$.

Definicja

- Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x \colon U \to V \subset \mathbb{R}^3$.
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha \colon [0, 1] \to M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie” (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

Definicja

- Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to V \subset \mathbb{R}^3$.
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha\colon [0, 1] \to M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie" (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

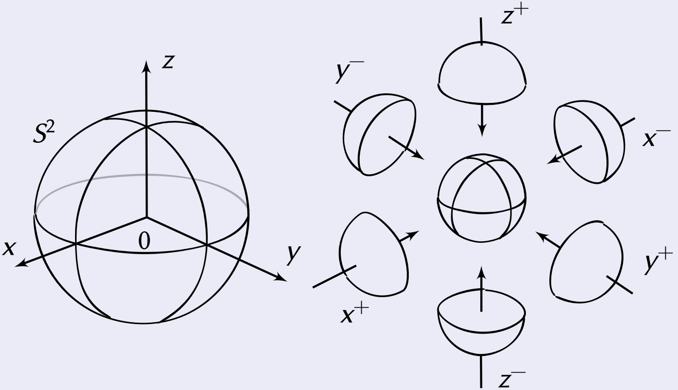
Definicja

- Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią gładką**, jeśli wokół każdego punktu p istnieje lokalny układ współrzędnych $x \colon U \to V \subset \mathbb{R}^3$.
- Powierzchnię gładką M nazywamy łukowo spójną, jeśli dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in M$ istnieje krzywa $\alpha \colon [0, 1] \to M$ taka, że $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$.

Potocznie mówimy, że przestrzeń jest powierzchnią gładką jeśli „lokalnie" (tj. w małym otoczeniu każdego punktu) wygląda jak fragment płaszczyzny.

Przykład

Jednostkowa sfera, tj. powierzchnia o równaniu $x^2 + y^2 + x^2 = 1$ jest przykładem powierzchni regularnej. Lokalnym układem współrzędnych jest np. $x^{\pm}(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$ jak na następującym rysunku



Uwaga

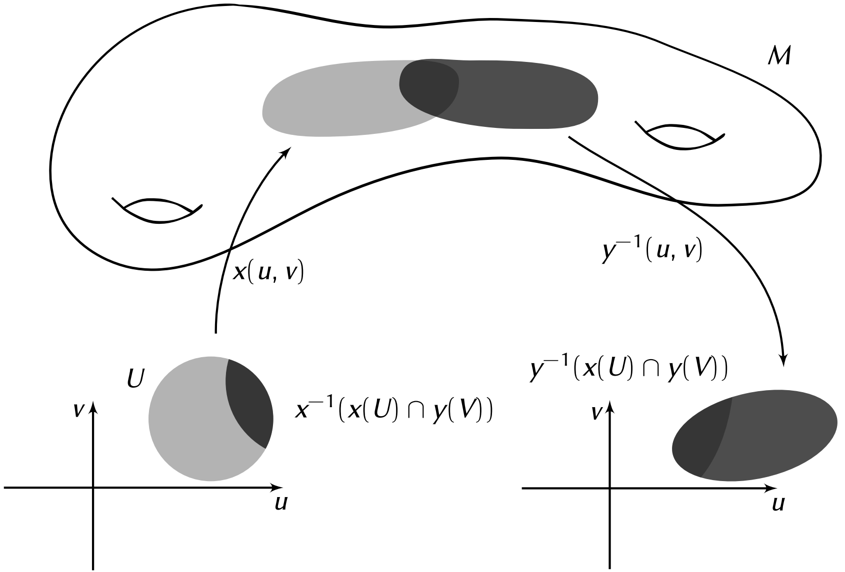
UWAGA! Zakładamy, że wszystkie powierzchnie które będzie my rozważać dalej są gładkie i łukowo spójne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ i $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych wokół punktu $p \in M$. Wtedy złożenie

$$\Phi_{x,y} \overset{\text{def.}}{=} y^{-1} \circ x\colon x^{-1}(x(U) \cap y(V)) \to y^{-1}(x(U) \cap y(V))$$

nazywamy **funkcją zmiany układu współrzędnych**.


M
$x(u, v)$
$y^{-1}(u, v)$
U
$x^{-1}(x(U) \cap y(V))$
$y^{-1}(x(U) \cap y(V))$
V
v
u
v
u

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Wówczas:

1. *Jeśli $x\colon U \to M$ jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz $x(U)$.*
2. *Niech $V \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $f\colon V \to U$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy*

$$y \stackrel{def.}{=} x \circ f\colon V \to M$$

jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych $\Phi_{y,x}$.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką. Wówczas:

1. *Jeśli $x\colon U \to M$ jest lokalnym układem współrzędnych wtedy x jest dyfeomorfizmem U na obraz $x(U)$.*
2. *Niech $V \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $f\colon V \to U$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy*

$$y \overset{def.}{=} x \circ f\colon V \to M$$

jest lokalnym układem współrzędnych i f jest funkcją zmiany układu współrzędnych $\Phi_{y,x}$.

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1) ▸ x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
   ▸ rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
   ▸ z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Dowód:

1)
- x – injekcja, więc jest bijekcją na obraz.
- rząd pochodnej x na U jest równy 2 (z def. lokalnego układu współrzędnych)
- z twierdzenia o funkcji uwikłanej – na $x(U)$ istnieje x^{-1} – gładkie odwzorowanie odwrotne,

2) wystarczy sprawdzić dla lokalnego układu współrzędnych dla $y = x \circ f$

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t} =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

□

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

□

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

Mamy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=\\
&=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)
\end{aligned}
$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).
  Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

□

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

  Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

Mamy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=\\
&=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=\\
&=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)
\end{aligned}
$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

$\square$

Mamy

$$\frac{\partial(x\circ f)}{\partial s}\times\frac{\partial(x\circ f)}{\partial t}=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)=$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\times\frac{\partial x}{\partial f_1}\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)$$

- $\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\times\frac{\partial x}{\partial f_2}\right)\neq 0$ (lokalny układ współrzędnych)
- $\left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t}-\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)\neq 0$ (Jakobian funkcji f).

Wreszcie teza ($\Phi_{x,y}=f$) wynika z definicji funkcji przejścia.

$\square$

Gładkość funkcji na powierzchni

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f\colon M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Funkcję f nazywamy gładką jeśli dla każdego punktu $p \in M$ i dla każdego lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$ takiego, że $p \in x(u)$ funkcja

$$f \circ x\colon U \xrightarrow{x} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

jest gładka jako funkcja z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M : M \to \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Załóżmy że $x : U \to M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f : U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} : x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M\colon M \to \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Załóżmy że $x\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1}\colon x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

W praktyce są dwie metody na definiowanie funkcji określonej na powierzchni.

- Jeśli $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest gładka, wtedy jej obcięcie $F|_M\colon M \to \mathbb{R}$ będzie również gładkie.
- Załóżmy że $x\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$ jest lokalnym układem współrzędnych. Jeśli $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, to funkcję na powierzchni M możemy określić jako

$$F = f \circ x^{-1} : x^{-1}(U) \to U \to \mathbb{R},$$

gdzie $x^{-1}(U) \subset M$. Jest to funkcja gładka jako złożenie dwóch funkcji gładkich.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s,t) = (s,t,s^2+t^2).$$
Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s,t) \mapsto \sin(s+t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a,b,c) = \sin(a+b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

jest funkcją gładką.

- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,

$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$

Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$

Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Przykład

- Funkcja $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem
$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$
jest funkcją gładką.
- Niech M będzie zadana jako powierzchnia paraboloidy,
$$x(s, t) = (s, t, s^2 + t^2).$$
Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$(s, t) \mapsto \sin(s + t).$$
Wtedy $f \circ x^{-1}(a, b, c) = \sin(a + b)$ i stąd $f \circ x^{-1}\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na powierzchni paraboloidy.

Gładkość odwzorowania między powierzchniami

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest **odwzorowaniem gładkim** jeśli jest gładkie jako odwzorowanie $M \to N \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Mówimy, że f jest **dyfeomorfizmem powierzchni** jeśli f jest gładką bijekcją, której odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.

Lemat

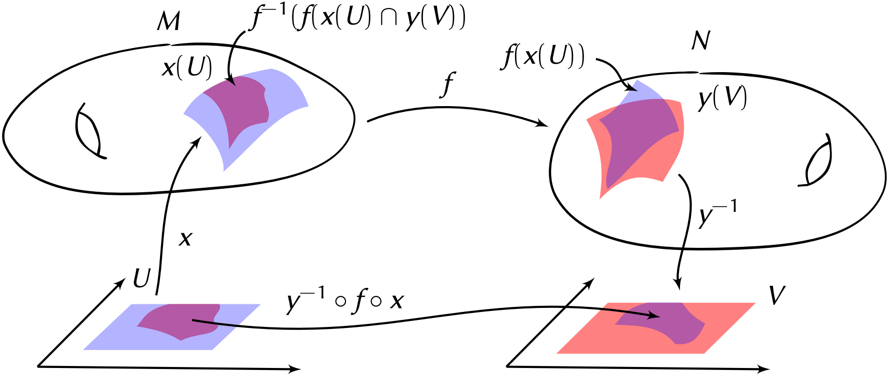
Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ *będą powierzchniami gładkimi i niech*

$$f : M \to N$$

będzie odwzorowaniem ciągłym. f *jest odwzorowaniem gładkim (a więc gładkim jako odwzorowanie* $f : M \to \mathbb{R}^3$*) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu* $p \in M$ *istnieje wokół niego lokalny układ współrzędnych* $x : U \to M$ *oraz istnieje lokalny układ współrzędnych* $y : V \to N$ *wokół* $f(p) \in N$ *takie, że złożenie*

$$y^{-1} \circ f \circ x : U \to V$$

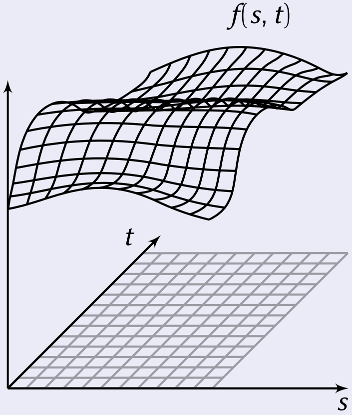
jest gładkie jako odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *(tam, gdzie to złożenie ma sens).*


$f^{-1}(f(x(U) \cap y(V))$
M
$x(U)$
f
$f(x(U))$
N
$y(V)$
y^{-1}
x
U
$y^{-1} \circ f \circ x$
V

Definicja

Niech $f\colon U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$. Powierzchnię $M \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchnią Monge'a** jeśli jej parametryzacja jest wykresem funkcji f:

$$x(s,t) = (s, t, f(s,t)).$$



Uwaga

Parametryzacja Monge'a spełnia naszą definicję powierzchni (Definicja 5.3), ponieważ

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \end{bmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), -\frac{\partial x}{\partial t}(s,t), 1 \right) \neq 0.$$

Przykład

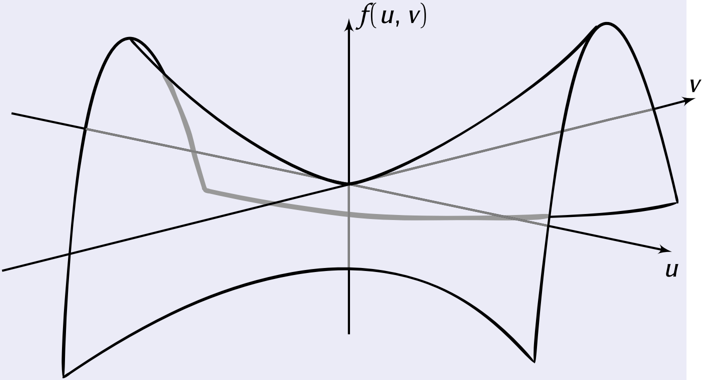
- Paraboloida ($x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$)
- Powierzchnia siodłowa ($x(u, v) = (u, v, uv)$)

Przykład

- Paraboloida $(x(u,v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- Powierzchnia siodłowa $(x(u,v) = (u, v, uv))$

Przykład

- Paraboloida $(x(u,v) = (u, v, u^2 + v^2))$
- Powierzchnia siodłowa $(x(u,v) = (u, v, uv))$

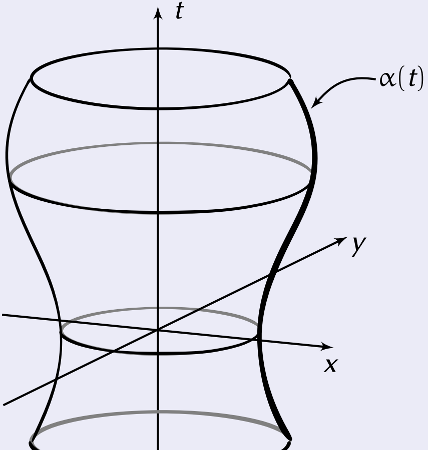


Definicja

Powierzchnia obrotowa powstaje poprzez obrócenie krzywej $\alpha(t)$ wokół pewnej ustalonej prostej l. Postać ogólna to

$$x(t,\phi) = \alpha(t) \cdot Rot_l(\phi),$$

gdzie $Rot_l(\phi)$ to macierz 3×3 obrotu o kąt ϕ wokoł prostej l.



Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z:

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi OX otrzymamy

$$x(t,\phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos\phi - \alpha_3(t)\sin\phi, \alpha_2(t)\sin\phi + \alpha_3(t)\cos\phi)$$

Najczęściej używane macierze obrotu to obroty wokół osi współrzędnych x, y, z:

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku obrotu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ wokół osi OX otrzymamy

$$x(t,\phi) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)\cos\phi - \alpha_3(t)\sin\phi, \alpha_2(t)\sin\phi + \alpha_3(t)\cos\phi)$$

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Uwaga

Aby powierzchnia w ten sposób uzyskana była gładka musimy dodatkowo wymagać, aby

- *krzywa była bez samoprzecięć, oraz*
- *oś obrotu nie przecinała naszej krzywej w żadnym punkcie.*

Zadanie

Opisać co się “psuje" w definicji kiedy zachodzi jedna bądź druga okoliczność.

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\cos t \sin\phi, \cos t \cos\phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\cos t \sin\phi, \cos t \cos\phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład

- Sfera – obrót okręgu $\alpha(t) = (0, \cos t, \sin t)$ wokół osi z:

$$(0, \cos t, \sin t) \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

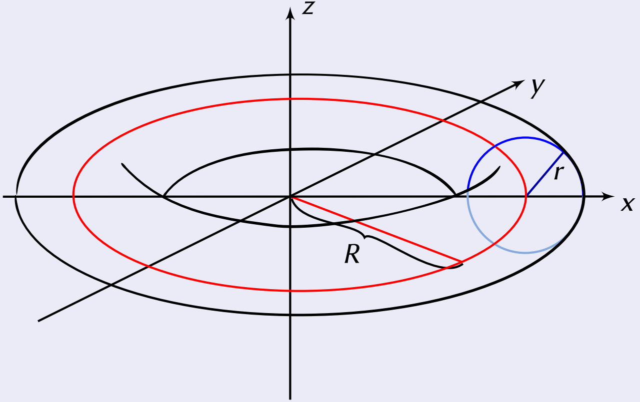
$$= (-\cos t \sin\phi, \cos t \cos\phi, \sin t).$$

- Hiperboloida jednopowłokowa (katenoida)

Przykład

- Torus – obrót okręgu $\alpha(t) = (R + r\cos t, 0, r\sin t)$ wokół osi z:

$$x(t, \phi) = ((R + r\cos t)\cos\phi, (R + r\cos t)\sin\phi, r\sin t) .$$

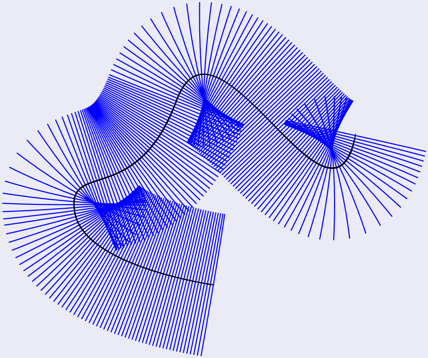


Definicja

Powierzchnią prostokreślną nazywamy powierzchnię o parametryzacji

$$x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s),$$

gdzie α i β są krzywymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. α nazywa się potocznie kierownicą, β - ruletą.



Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida(!).

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida(!).

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida(!).

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida(!).

Uwaga

Zauważmy, że dla ustalonego s_0 (czyli linia parametru dla zmiennej t) parametryzacja powyżej redukuje się do równania parametrycznego prostej. Powierzchnia prostokreślna to więc powierzchnia która "składa się" z prostych.

- Walec, Stożek
- Powierzchnia śrubowa
- Powierzchnia siodłowa
- Katenoida(!).

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F\colon V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$
- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F \colon V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$
- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, oraz niech

$$F\colon V \to \mathbb{R}$$

będzie gładką funkcją.

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji F jeśli
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F}{\partial x_2}(p), \frac{\partial F}{\partial x_3}(p)\right) = 0.$$
- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością krytyczną** odwzorowania F jeśli wewnątrz zbioru $F^{-1}(a)$ leży przynajmniej jeden punkt krytyczny.

Definicja

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Definicja

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Definicja

- Punkt $p \in V$ nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania F jeśli dla pewnego $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \neq 0.$$

- Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością regularną** odwzorowania F jeśli zbiór $F^{-1}(a)$ składa się tylko z punktów regularnych.

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem otwartym, zaś $F\colon V \to \mathbb{R}$ funkcją gładką. Jeśli $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$ jest wartością regularną, wtedy $F^{-1}(a)$ jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).

Dowód:

Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Pomijamy. $\square$

Twierdzenie

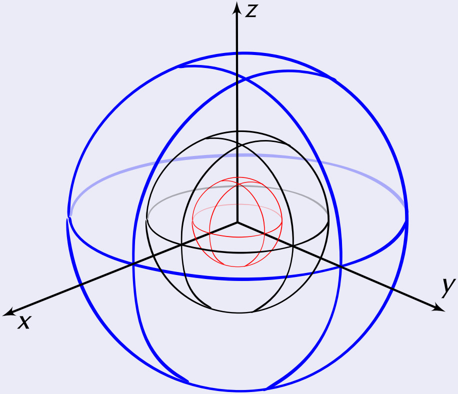
Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ *będzie zbiorem otwartym, zaś* $F\colon V \to \mathbb{R}$ *funkcją gładką. Jeśli* $a \in F(V) \subset \mathbb{R}$ *jest wartością regularną, wtedy* $F^{-1}(a)$ *jest powierzchnią gładką (o ile jest to zbiór niepusty).*

Dowód:

Dowód jest dosyć techniczny i wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Pomijamy. $\square$

Przykład

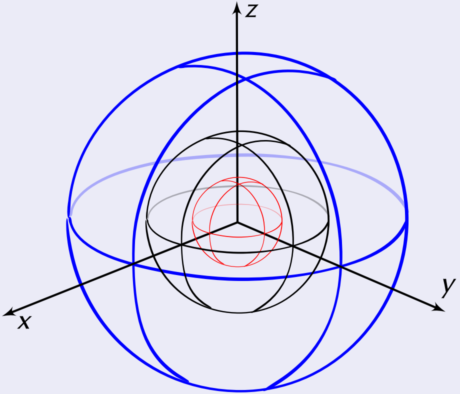
- elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida ($F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$)
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

Przykład

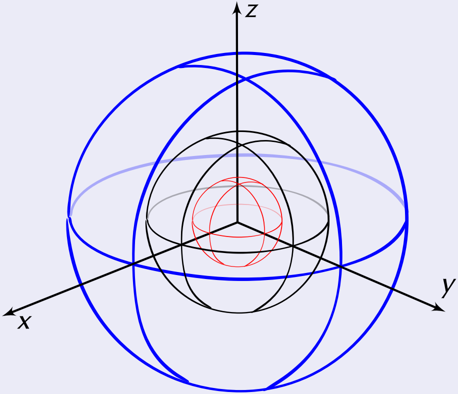
- elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida ($F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$)
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

Przykład

- elipsoida (w szczególności sfera o promieniu R jako przeciwobraz $f^{-1}(R)$, gdzie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$).



- paraboloida ($F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$)
- hiperboloida (jedno i dwu-powłokowa: $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

Wykład 6

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

- Przestrzeń styczna
- Wektor normalny
- Powtórka z algebry liniowej I
- I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Uwaga

Na każdej powierzchni mamy naturalnie dane dwie rodziny krzywych . Dla każdego ustalonego $s_0 \in \mathbb{R}$ możemy rozpatrywać krzywą

$$x(s_0, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Podobnie dla dowolnego t_0 mamy krzywą

$$x(\cdot, t_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Krzywe te leżą na naszej powierzchni, a wektory styczne do tych krzywych będą grały bardzo ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Definicja

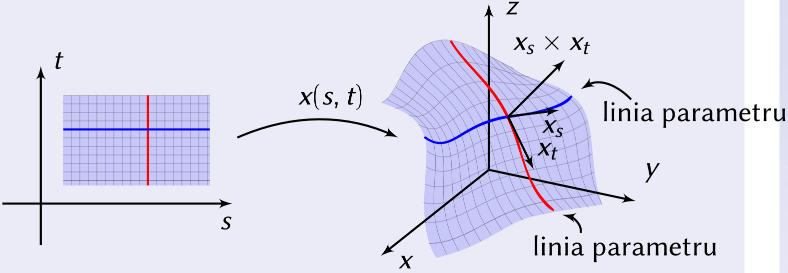
Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0)\Big|_{s=s_0}, \qquad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t)\Big|_{t=t_0}.$$

Definicja

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0)\Big|_{s=s_0}, \qquad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t)\Big|_{t=t_0}.$$



Definicja

Niech $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha_v'(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v \in T_pM$, wtedy również $av \in T_pM$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v, w \in T_pM$, wówczas $av + bw \in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Definicja

Niech $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha_v'(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v \in T_pM$, wtedy również $av \in T_pM$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v, w \in T_pM$, wówczas $av + bw \in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Definicja

Niech $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha_v'(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v \in T_pM$, wtedy również $av \in T_pM$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v, w \in T_pM$, wówczas $av + bw \in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Definicja

Niech $\alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M\subset\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0)=p$, oraz $\alpha_v'(0)=v$. Ustalmy punkt $p\in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

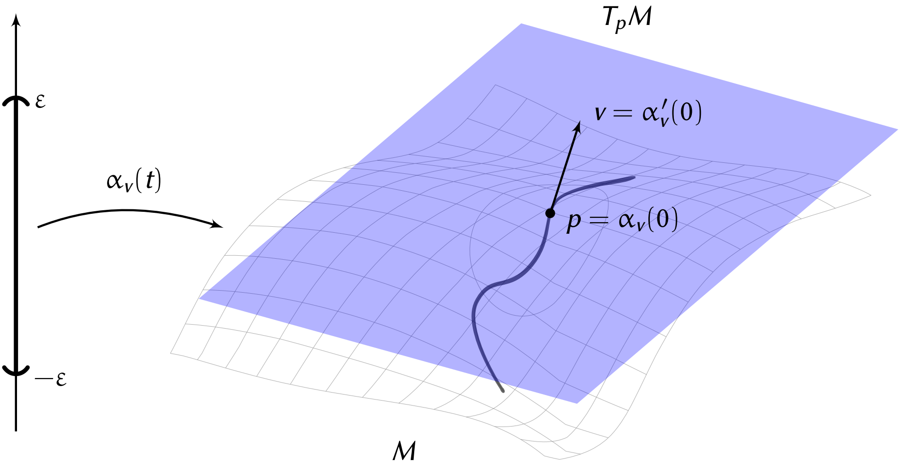
Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v\in T_pM$, wtedy również $av\in T_pM$ dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t)=\alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v,w\in T_pM$, wówczas $av+bw\in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*



T_pM
$v = \alpha_v'(0)$
ε
$\alpha_v(t)$
$p = \alpha_v(0)$
$-\varepsilon$
M

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. *Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.*
2. *Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi*

$$\dim T_pM = 2.$$

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x \colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. *Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.*
2. *Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi*

$$\dim T_pM = 2.$$

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x \colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. *Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.*
2. *Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi*

$$\dim T_pM = 2.$$

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.
Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.
Rozważmy złożenie

$$\beta \overset{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2 \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$. Rozważmy złożenie

$$\beta \overset{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β. Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.
Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \overset{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.

Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.

Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.

Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.
Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.
Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$

$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. $\square$

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$
$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$
$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. $\square$

$$
\begin{aligned}
v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =& \\
= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =& \\
= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),&
\end{aligned}
$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

$$
\begin{aligned}
v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} &= \\
= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} &= \\
= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0)&,
\end{aligned}
$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

$$
\begin{aligned}
v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} &= x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} = \\
&= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),
\end{aligned}
$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. $\square$

$$
\begin{aligned}
v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} &= x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} = \\
&= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} = \\
&= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),
\end{aligned}
$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

Uwaga

Zauważmy, że przestrzeń styczna nie ma ustalonej w kanoniczny sposób bazy. Wektory x_s i x_t ją rozpinające zależą od wybranego lokalnego układu współrzędnych. Natomiast niezależna od tego wyboru jest cała przestrzeń styczna, a więc i jej ortogonalne dopełnienie, które nazywać będziemy kierunkiem normalnym.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech

$$\begin{aligned} x\colon U &\longrightarrow M \\ (s_0, t_0) &\longmapsto p \in M \end{aligned}$$

będzie lokalnym układem współrzędnych. **Wektor normalny w** p definiujemy jako

$$N(p) \overset{\text{def.}}{=} \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|}(s_0, t_0),$$

gdzie x_s i x_t wektorami stycznymi do linii parametru przechodzących przez punkt p.

Uwaga

*Ponieważ wektor normalny ma długość 1, więc koniec każdego wektora normalnego $N(p)$ leży na powierzchni sfery dwuwumiarowej $N(M) \subset S^2$. Zatem N może być traktowany jako **odwzorowanie między powierzchniami***

$$N\colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

*punktów na powierzchni M. Jest to tzw. **odwzorowanie Gaussa** do którego wrócimy później.*

Powtórka z algebry liniowej I

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F \colon V \times V \to \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Powtórka z algebry liniowej I

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F\colon V \times V \to \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, oraz niech B będzie formą dwuliniową na V. **Macierz fromy** B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, oraz niech B będzie formą dwuliniową na V. **Macierz fromy** B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Przykład

Standardowy iloczyn skalarny $\langle x, y\rangle = \sum x_i^2$ jest oczywiście formą dwuliniową. W standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jego macierzą jest $A = \mathrm{Id}$.

I forma podstawowa

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Dla powierzchni M definiujemy **pierwszą formę podstawową w punkcie** p jako formę dwuliniową

$$\begin{aligned} I_p \colon T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$. Oznaczamy ją symbolem I_p.

Definicja

Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathcal{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p \in M}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t. Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Definicja

Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathcal{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p\in M}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t. Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2. *Przy tak przyjętych oznaczeniach niech*

$$g_{ij}(s_0, t_0) \overset{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, *w punkcie p ma postać*

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2*. Przy tak przyjętych oznaczeniach niech*

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$*, w punkcie* p *ma postać*

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2*. Przy tak przyjętych oznaczeniach niech*

$$g_{ij}(s_0, t_0) \overset{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$*, w punkcie* p *ma postać*

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Przykład

Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t) = (s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s,t) = (1,0,t) \qquad x_2(s,t) = (0,1,s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s,t) = (1, 0, t) \qquad x_2(s,t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s,t) = (1, 0, t) \qquad x_2(s,t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s,t) = (1, 0, t) \qquad x_2(s,t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x \colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* $(g_{12} = g_{21})$.
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń* E, F *i* G *na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* ($g_{12} = g_{21}$).
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* $(g_{12} = g_{21})$.
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* $(g_{12} = g_{21})$.
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń* E, F *i* G *na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}
\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 &= \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\
&= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\
&= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1 - \cos^2\varphi) = \\
&= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,
\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 =$$
$$= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi =$$
$$= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1 - \cos^2\varphi) =$$
$$= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,$$

i lemat wynika z definicji N. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y].

Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. $\square$

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)} \left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \stackrel{def.}{=} x \circ \alpha \colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}\,dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\,dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość. □

Wykład 7

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f\colon M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f\colon M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f\colon M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Załóżmy, że mamy daną funkcję gładką $f\colon M \to \mathbb{R}$ oraz wektor $v \in T_pM$ z przestrzeni stycznej. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Oczywiście złożenie $f \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, możemy więc rozważać jej pochodną.

Definicja

Przy oznaczeniach jak powyżej definiujemy **pochodną kierunkową** funkcji f **w kierunku wektora** v jako

$$\nabla_v f \stackrel{\text{def.}}{=} (f \circ \alpha)'(0).$$

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0) = p$ oraz $\beta'(0) = v$ wtedy

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x : U \to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p \in M$.
- Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0) = v = \beta'(0)$.

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0)=p$ oraz $\beta'(0)=v$ wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0)=(f\circ\beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x\colon U\to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p\in M$.
- Założmy, że $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0)=v=\beta'(0)$.

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0)=p$ oraz $\beta'(0)=v$ wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0)=(f\circ\beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x\colon U\to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p\in M$.
- Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0)=v=\beta'(0)$.

Lemat

Definicja pochodnej kierunkowej nie zależy od wyboru krzywej α, tj. jeśli $\beta\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ jest drugą krzywą o tej własności, że $\beta(0)=p$ oraz $\beta'(0)=v$ wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0)=(f\circ\beta)'(0).$$

Dowód:

- Niech $x\colon U\to M$ – lokalny układ współrzędnych wokół $p\in M$.
- Załóżmy, że $\alpha(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(u)$, oraz $\beta(-\varepsilon,\varepsilon)\subset x(U)$.
- Z założenia mamy $\alpha'(0)=v=\beta'(0)$.

Zatem również

$$(x^{-1}\circ\alpha)'(0)=(x^{-1}\circ\beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}(f\circ\alpha)'(0)&=\left[(f\circ x)\circ(x^{-1}\circ\alpha)\right]'(0)=\\&=J(f\circ x)\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)}\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)}=\\&=J(f\circ x)(x^{-1}\circ\beta(0))(x^{-1}\circ\beta)'(0)=(f\circ\beta)'(0),\end{aligned}$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). □

Zatem również

$$\left(x^{-1}\circ\alpha\right)'(0)=\left(x^{-1}\circ\beta\right)'(0).$$

Mamy wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0)=\left[(f\circ x)\circ(x^{-1}\circ\alpha)\right]'(0)=$$
$$=J(f\circ x)\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)}\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)}=$$
$$=J(f\circ x)(x^{-1}\circ\beta(0))(x^{-1}\circ\beta)'(0)=(f\circ\beta)'(0),$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). $\square$

Zatem również

$$(x^{-1}\circ\alpha)'(0) = (x^{-1}\circ\beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$(f\circ\alpha)'(0) = \left[(f\circ x)\circ(x^{-1}\circ\alpha)\right]'(0) =$$
$$= J(f\circ x)\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha(0))}_{=p=(x^{-1}\circ\beta)(0)}\underbrace{(x^{-1}\circ\alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1}\circ\beta)'(0)} =$$
$$= J(f\circ x)(x^{-1}\circ\beta(0))(x^{-1}\circ\beta)'(0) = (f\circ\beta)'(0),$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). □

Zatem również

$$(x^{-1} \circ \alpha)'(0) = (x^{-1} \circ \beta)'(0).$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
(f \circ \alpha)'(0) &= \left[(f \circ x) \circ (x^{-1} \circ \alpha)\right]'(0) = \\
&= J(f \circ x) \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha(0))}_{=p=(x^{-1} \circ \beta)(0)} \underbrace{(x^{-1} \circ \alpha)'(0)}_{=v=(x^{-1} \circ \beta)'(0)} = \\
&= J(f \circ x)(x^{-1} \circ \beta(0))(x^{-1} \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0),
\end{aligned}$$

gdzie J oznacza jakobian odwzorowania (macierz pochodnych cząstkowych). □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów v, $w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych a, $b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g \colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów $v, w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw} f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi. Dla wszystkich: punktów $p \in M$, wektorów v, $w \in T_pM$ z przestrzeni stycznej w punkcie p, oraz liczb rzeczywistych a, $b \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $\nabla_{av+bw}f = a\nabla_v f + b\nabla_w f$
- $\nabla_v(af + bg) = a\nabla_v f + b\nabla_v(g)$
- $\nabla_v(fg) = g\nabla_v f + f\nabla_v g$

Uwaga

Dwie pierwsze własności mówią, że ∇ jest operatorem liniowym ze względu na argument (funkcję) i kierunek (wektor).

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \overset{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \overset{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \overset{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0, 0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:

Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.

Udowodnimy teraz pierwszą własność.

Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \overset{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \overset{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \overset{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Dowód:
Własność drugą i trzecią pozostawiamy jako (proste) ćwiczenia. Wystarczy w nich skorzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji.
Udowodnimy teraz pierwszą własność.
Niech $v = (v_1, v_2)$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x(0,0) = p$. Zdefiniujmy

$$\alpha_v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(av_1 t, av_2 t) \qquad \alpha_w(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x(bw_1 t, bw_2 t),$$

oraz niech

$$\beta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x((av_1 + bw_1)t, (av_2 + bw_2)t)$$

Wówczas pochodna β w $t = 0$ jest równa

$$\beta'(t)\Big|_{t=0} = \underbrace{a(v_1 x_1 + v_2 x_2)}_{=\alpha_v'(0)} + \underbrace{b(w_1 x_1 + w_2 x_2)}_{=\alpha_w'(0)} = v + w.$$

Wtedy

$$\nabla_{av+bw}f = (f\circ\beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial\beta(t)}\beta'(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= a\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial\beta(0)}(v_1x_1+v_2x_2) + b\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial\beta(0)}(w_1x_1+w_2x_2) =$$

$$= a\frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial\alpha_v(0)}\alpha_v'(0) + b\frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial\alpha_w(0)}\alpha_w'(0) =$$

$$= a(f\circ\alpha_v)'(t)\Big|_{t=0} + b(f\circ\alpha_w)'(t)\Big|_{t=0} = a\nabla_v f + b\nabla_w f.$$

□

Wtedy

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= a\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)}(v_1 x_1 + v_2 x_2) + b\frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)}(w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a\frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)}\alpha_v'(0) + b\frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)}\alpha_w'(0) =$$

$$= a(f \circ \alpha_v)'(t)\Big|_{t=0} + b(f \circ \alpha_w)'(t)\Big|_{t=0} = a\nabla_v f + b\nabla_w f. \qquad \square$$

Wtedy

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha_v'(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha_w'(0) =$$

$$= a (f \circ \alpha_v)'(t) \Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t) \Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f.$$

$\square$

Wtedy

$$\nabla_{av+bw} f = (f \circ \beta)'(0) = \frac{\partial f(\beta(t))}{\partial \beta(t)} \beta'(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= a \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (v_1 x_1 + v_2 x_2) + b \frac{\partial f(\beta(0))}{\partial \beta(0)} (w_1 x_1 + w_2 x_2) =$$

$$= a \frac{\partial f(\alpha_v(0))}{\partial \alpha_v(0)} \alpha_v'(0) + b \frac{\partial f(\alpha_w(0))}{\partial \alpha_w(0)} \alpha_w'(0) =$$

$$= a (f \circ \alpha_v)'(t)\Big|_{t=0} + b (f \circ \alpha_w)'(t)\Big|_{t=0} = a \nabla_v f + b \nabla_w f.$$

□

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $f : M \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem gładkim (tj. polem wektorowym). **Pochodną** f w punkcie $p \in M$ definiujemy jako

$$Df_p : T_pM \to R^3$$
$$v \mapsto \nabla_v f = (\nabla_v f_1, \nabla_v f_2, \nabla_v f_3) \,.$$

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_pM$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ oraz

$$Df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi, $p \in M$ punktem, oraz niech $f \colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego $v \in T_pM$ mamy $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ oraz

$$Df_p \colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ *będą powierzchniami gładkimi,* $p \in M$ *punktem, oraz niech* $f \colon M \to N$ *będzie odwzorowaniem gładkim. Wtedy dla każdego* $v \in T_pM$ *mamy* $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$ *oraz*

$$Df_p \colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Liniowość wynika natychmiast z liniowości pochodnej kierunkowej, (Lemat 7.3, punkt drugi) więc musimy tylko pokazać, że $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

Niech $v \in T_pM$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$. □

Niech $v \in T_pM$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$. □

Niech $v \in T_pM$. Wtedy istnieje taka krzywa $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, że $\alpha(0) = p$ oraz $\alpha'(0) = v$. Mamy wtedy

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Zauważmy, że krzywa

$$f \circ \alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to N$$

jest krzywą na powierzchni N, oraz $(f \circ \alpha)(0) = f(p)$. Zatem z definicji przestrzeni stycznej otrzymujemy $(f \circ \alpha)'(0) \in T_{f(p)}N$, czyli $Df_p(v) \in T_{f(p)}N$. $\square$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)

Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = \\ = (-a \sin at, a \cos at, b)\big|_{t=0} = (0, a, b).$$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.)
Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z) \colon y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f\circ\alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$\begin{aligned} Df_p(v) = \nabla_v f = (f\circ\alpha)'\big|_{t=0} &= \\ &= (-a\sin at, a\cos at, b)\big|_{t=0} = (0,a,b). \end{aligned}$$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = \\ = (-a \sin at, a \cos at, b)\big|_{t=0} = (0, a, b).$$

Przykład

Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t).$$

(Jest to odwzorowanie które owija walec arkuszem papieru.) Dla $p = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ mamy $f(p) = (1,0,0)$. Zauważmy, że

$$T_{f(p)}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{(1,y,z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Wybierzmy $v = (a,b) \in T_p\mathbb{R}^2$ i niech $\alpha\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana przez $\alpha(t) = (at, bt)$. Wtedy oczywiście

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v, \quad \text{oraz} \quad f \circ \alpha(t) = (\cos at, \sin at, bt).$$

$$Df_p(v) = \nabla_v f = (f \circ \alpha)'\big|_{t=0} = \\ = (-a \sin at, a \cos at, b)\big|_{t=0} = (0, a, b).$$

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}\big(Df_p(v), Df_p(w)\big),$$

  dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.
- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f\big|_U\colon U \to f(U)$ jest izometrią.

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f \colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.

- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f\big|_U \colon U \to f(U)$ jest izometrią.

Definicja

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f : M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim.

- Mówimy, że f jest **izometrią** jeśli f jest *dyfeomorfizmem*, oraz pierwsza forma podstawowa jest niezmiennicza ze względu na f, i.e.

$$I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w)),$$

  dla wszystkich $p \in M$ i wszystkich $v, w \in T_p(M)$.
- Funkcję f nazywamy **lokalną izometrią**, jeśli dla każdego punktu $p \in M$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset M$ takie, że $f(U) \subset N$ jest zbiorem otwartym (w N), oraz $f\big|_U : U \to f(U)$ jest izometrią.

Uwaga

Warto zauważyć, że izometria od lokalnej izometrii różni się tylko i wyłącznie tym, że lokalna izometria nie musi być dyfeomorfizmem całych przestrzeni. Jest to niewielka, lecz jak zobaczymy ważna różnica.

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Lemat

Niech $M, N \subset \mathbb{R}^3$ będą gładkimi powierzchniami i niech $f\colon M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Następujące warunki są równoważne.

1. *f jest lokalną izometrią.*
2. *Równość $I_p(v, w) = I_{f(p)}(Df_p(v), Df_p(w))$ zachodzi dla wszystkich $p \in M$ oraz $v, w \in T_pM$.*
3. *Dla każdego $p \in M$ istnieje lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p taki, że $f \circ x\colon U \to N$ jest lokalnym układem współrzędnych o takich samych współczynnikach metrycznych g_{ij} jak x.*
4. *Dla każdego punktu $p \in M$ istnieje takie jego otoczenie otwarte $A \subset M$, że jeśli $\alpha\colon (a, b) \to A$ jest gładką krzywą, to długość $\alpha \subset M$ jest taka sama jak długość $f \circ \alpha \subset N$.*

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.

Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$. Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$. Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$.
Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$.
Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Dowód:

Udowodnimy tylko, że lokalna izometria zachowuje współczynniki metryczne. Resztę implikacji pozostawiamy jako (opcjonalne) zadania.

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że pochodna złożenia $f \circ x$ ma rangę 2, więc z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że $f \circ x$ na pewnym otoczeniu $V \subset U$ jest dyfeomorfizmem na swój obraz.
Niech $\{e_1, e_2\}$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^2$.
Niech $q \in x(U)$ oraz niech $\overline{q} = x^{-1}(q)$.
Zdefiniujmy teraz krzywe

$$\alpha_{q,i}(t) = x(\overline{q} + te_i), \qquad i = 1, 2,$$

działające z $(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ dla odpowiednio małego ε.

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \qquad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\overline{q} \subset U$.

Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \qquad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\overline{q} \subset U$. Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

Z definicji $\alpha_{q,i}$ wiemy, że:

$$\alpha_{q,i}(0) = q, \qquad \alpha'_{q,i}(0) = x_i,$$

natomiast z reguły łańcuchowej wynika, że

$$f \circ \alpha_{q,i}(0) = f(q), \qquad (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = (f \circ x)_i,$$

gdzie wartości pochodnych x_i oraz $(f \circ x)_i$ są wzięte dla $\overline{q} \subset U$. Ponownie z definicji uzyskujemy

$$(f \circ x)_i = (f \circ \alpha_{q,i})'(0) = \nabla_{x_i} f = Df_q(x_i),$$

więc korzystając z założeninia mamy

$$\langle (f \circ x)_i, (f \circ x)_j \rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

dla wszystkich $i, j = 1, 2$.

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_j\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V\subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_j\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V\subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_j\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V\subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

$$\langle (f\circ x)_i, (f\circ x)_i\rangle = \langle Df_q(x_i), Df_q(xj)\rangle = \langle x_i, x_j\rangle$$

- Zatem $\|(f\circ x)_i\| = \|x_i\|$ i kąt między $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ jest taki sam jak między x_1 i x_2.
- Stąd $(f\circ x)_1$ i $(f\circ x)_2$ są liniowo niezależne (na odp. małym $V\subset U$).
- Zatem $f\circ x\colon V\to N$ jest lokalnym układem współrzędnych (tw. o funkcji uwikłanej),
- Współczynniki metryczne $f\circ x$ są takie same jak samego x (powyższa równość).

$\square$

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią).

Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x\colon U \to \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$, oraz $f \circ x\colon U \to S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią). Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x\colon U \to \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$, oraz $f \circ x\colon U \to S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Przykład

Pokażemy teraz, że funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ określona przez

$$f(s,t) = (\cos s, \sin s, t)$$

jest lokalną izometrią (ale oczywiście nie jest izometrią). Niech $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech $U = (p_1 - \pi, p_1 + \pi) \times \mathbb{R}$. Wtedy inkluzja $x\colon U \to \mathbb{R}^2$ jest lokalnym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$, oraz $f \circ x\colon U \to S^1 \times \mathbb{R}$ jest injekcją. Co więcej mamy

$$(f \circ x)_1 = (-\sin s, \cos s, 0) \quad \text{oraz} \quad (f \circ x)_2 = (0, 0, 1),$$

więc

$$(f \circ x)_1 \times (f \circ x)_2 = (\cos s, \sin s, 0) \neq (0, 0, 0)$$

czyli $f \circ x$ jest lokalnym układem współrzędnych.

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathbb{R}^2$ musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathbb{R}^2$ musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Przykład

Obliczenie współczynników metrycznych zarówno dla x jak i $f \circ x$ skutkuje wyznaczeniem macierzy pierwszej formy podstawowej, w każdym z przypadków równej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednocześnie jest jasnym, że f nie może być izometrią, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathbb{R}^2$ musiałoby być dyfeomorficzne z $S^1 \times \mathbb{R}$.

Wykład 8

Krzywizna Gaussa I

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(lub $\mathbb{R}^2 \to S^2$).

Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset R^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x: U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\widehat{n}: x(U) \to S^2$ zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \dfrac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(lub $\mathbb{R}^2 \to S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset R^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x : U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\widehat{n} : x(U) \to S^2$ zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \dfrac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Tak jak został zdefiniowany wektor normalny (jako $\frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$, definicja 6.4), jest on raczej funkcją z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(lub $\mathbb{R}^2 \to S^2$). Jednak dla celów dalszego wykładu chcielibyśmy, aby był funkcją gładką określoną *na powierzchni*. Stąd następująca definicja:

Definicja

Niech $M \subset R^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Odwzorowaniem Gaussa** nazywamy odwzorowanie $\widehat{n}\colon x(U) \to S^2$ zadane wzorem

$$\widehat{n}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} n \circ x^{-1}(p),$$

gdzie $n = \dfrac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$.

Uwaga

- *Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).*
- *Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w $\mathbb{R}^3$ (od lokalnego układu współrzędnych).*

Uwaga

- *Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).*
- *Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w $\mathbb{R}^3$ (od lokalnego układu współrzędnych).*

Uwaga

- *Dla różnych lokalnych układów współrzędnych dobrze określony jest tylko kierunek normalny, (a więc $\pm n$, znak zależy od wyboru kolejności zmiennych u i v). Przyjmujemy że wybieramy kierunek "zewnętrzny" (o ile ma to sens).*
- *Odwzorowanie Gaussa zależy od tego w jaki sposób powierzchnia M jest umieszczona w $\mathbb{R}^3$ (od lokalnego układu współrzędnych).*

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

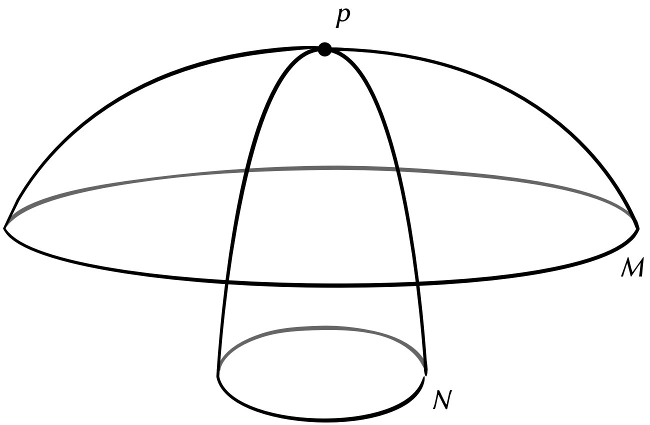
1. $K\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.

Aby zdefiniować krzywiznę potrzebujemy funkcji K o następujących własnościach:

1. $K\colon M \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką;
2. krzywizna $K(p)$ jest niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych, zależy tylko od kształtu powierzchni;
3. jeśli (otwarty, o niepustym wnętrzu) zbiór naszej powierzchni jest zawarty w płaszczyźnie, wtedy krzywizna na nim powinna znikać;
4. w sytuacji na rysunku krzywizna powierzchni M w punkcie p powinna być *mniejsza* niż krzywizna powierzchni N w tym punkcie, $K_M(p) < K_N(q)$.



p
M
N

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\overrightarrow{V \to p}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\overrightarrow{V \to p}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x \colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\overrightarrow{V \to p}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\overrightarrow{V \to p}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Spróbujmy zdefiniować krzywiznę w punkcie $p \in M$ następująco:

- Ustalmy punkt $p \in M$ i lokalny układ współrzędnych $x\colon U \to M$ wokół p.
- Wybierzmy niewielkie otoczenie otwarte $V \subset x(U)$ zawierające punkt p.
- Kiedy punkt p należy do zbioru V, wtedy $\widehat{n}(p)$ należy do zbioru $\widehat{n}(V) \subset S^2$,
- zbadajmy więc stosunek **pól powierzchni**

$$\frac{A(\widehat{n}(V)),\ \widehat{n}(V) \subset S^2}{A(V),\ V \subset M};$$

- Gauss definiował krzywiznę jako

$$K_{\mathcal{G}}(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\overrightarrow{V \to p}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)}.$$

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa “odwraca” obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Problemy:

1. Czy ta granica jest niezależna od wyboru otoczeń V? Jak to formalnie zdefiniować?
2. Jak zdefiniować pole wyznaczone przez $\widehat{n}(V)$ kiedy $\widehat{n}$ nie jest injekcją?
3. Co się stanie jeśli odwzorowanie Gaussa "odwraca" obszar V? Czy wtedy należałoby brać pole $A(\widehat{n}(V))$ ze znakiem ujemnym?

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0,0,0)$ i niech

$$x(\phi, \psi) = (R\cos\phi\cos\psi, R\sin\phi\cos\psi, R\sin\psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

$$\begin{aligned} x_\phi &= R(-\sin\phi\cos\psi, \cos\phi\cos\psi, 0), \\ x_\psi &= R(-\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi\sin\psi, \cos\psi), \end{aligned}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\widehat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Przykład

Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i niech

$$x(\phi, \psi) = (R\cos\phi\cos\psi, R\sin\phi\cos\psi, R\sin\psi)$$

będzie na niej lokalnym układem współrzędnych. Mamy

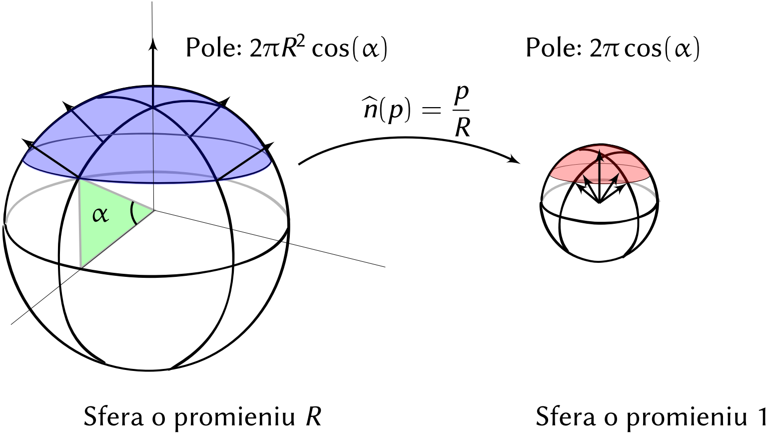
$$\begin{aligned} x_\phi &= R(-\sin\phi\cos\psi, \cos\phi\cos\psi, 0), \\ x_\psi &= R(-\cos\phi\sin\psi, -\sin\phi\sin\psi, \cos\psi), \end{aligned}$$

więc jeśli wybierzemy (zgodnie z konwencją) wektor normalny n wskazujący na zewnątrz, wtedy

$$\widehat{n}(p) = \frac{x_\phi \times x_\psi}{\|x_\phi \times x_\psi\|} = \frac{p}{R}$$

dla całej sfery.

Widzimy więc, że odwzorowanie Gaussa zmiejsza obszar o czynnik $\frac{1}{R^2}$ i nie ma żadnych problemów z definicją.

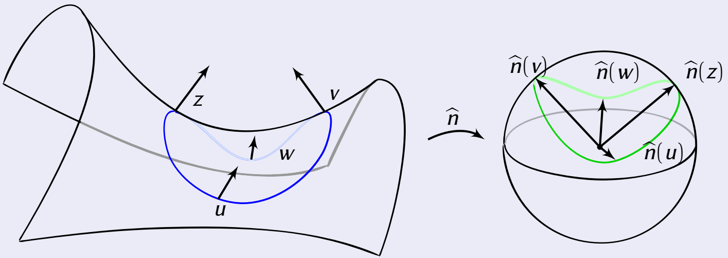


$$K_{\mathcal{G}}(p) = \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{2\pi\cos(\alpha)}{2\pi R^2\cos(\alpha)} = \frac{1}{R^2}.$$

Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

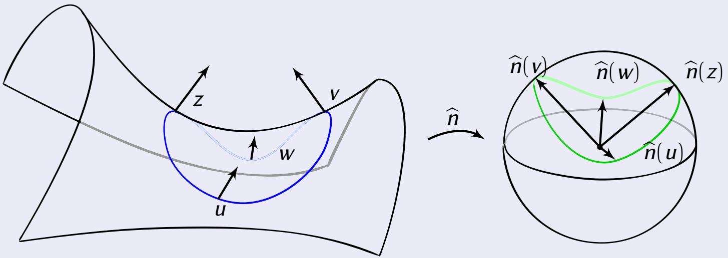
- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u,v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

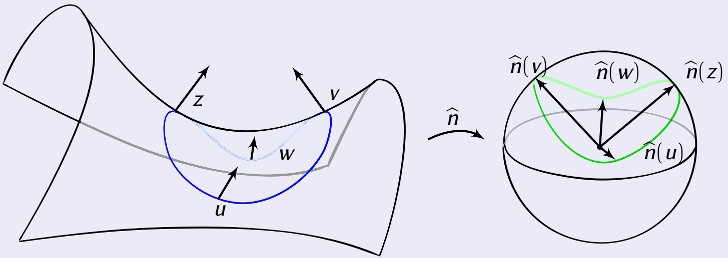
- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u,v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

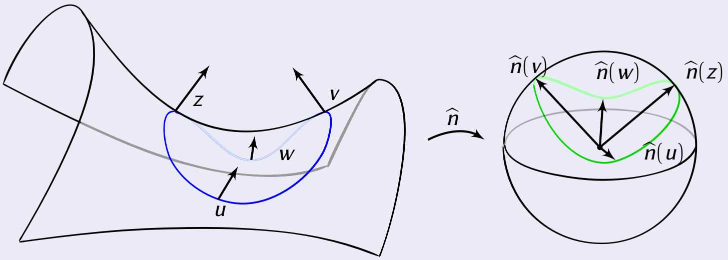
- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Przykład

Niech $x(u, v) = (x, y, xy)$ (powierzchnia siodłowa).

- Rozważmy okrąg $S = \{u^2 + v^2 = \varepsilon\}$, oraz jego obraz $x(S)$ leżący na powierzchni siodłowej.
- Obcięcie odwzorowania Gaussa do $x(S)$ jest również okręgiem (leżącym teraz na sferze).
- Jeśli obiegamy okrąg S (lub $x(S)$) w lewo, okrąg $\widehat{n}(x(S))$ jest obiegany w prawo.
- Zatem chcemy nadać znak ujemny polu $A(\widehat{n}(V))$ gdzie V jest ograniczony przez $x(S)$.



Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2, który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \overset{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det (g_{ij})|}\, ds\, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det (g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2, który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Podobnie jak wcześniej wyraziliśmy długość, teraz wyrazimy pole powierzchni w języku współczynników metrycznych.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. **Pole podzbioru** $S \subset x(U)$ wyraża się wzorem

$$A(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt.$$

Motywacją geometryczną jest to, że $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ jest równe polu równoległoboku rozpiętego przez x_1 i x_2, który jest styczny do powierzchni w tym punkcie.

Lemat

Załóżmy, że $S \subset x(U) \cap y(V)$ *dla dwóch lokalnych układów współrzędnych* x, y *na* M. *Niech* (g_{ij}), *[odpowiednio* $(\overline{g_{ij}})$*] oznacza macierz współczynników metrycznych dla* x *[odpowiednio* y*]. Wtedy*

$$\iint_{x^{-1}(S)} \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, ds\, dt = \iint_{y^{-1}(S)} \sqrt{|\det(\overline{g_{ij}})|}\, ds\, dt.$$

Dowód pomijamy.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.
To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n\rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n\rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.
To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n \rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n \rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n \rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.

To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Zauważmy teraz, że

$$\langle x_1 \times x_2, n\rangle = \langle \|x_1 \times x_2\| n, n\rangle = \|x_1 \times x_2\| = \sqrt{|\det(g_{ij})|},$$

zatem mamy

$$A(V) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt.$$

Analogicznie możemy zdefiniować pole $\widehat{n}(V)$ jako

$$A(\widehat{n}(V)) = \iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt,$$

gdzie n_1, n_2 są pochodnymi cząstkowymi n po zmiennych odpowiednio s i t.
To rozwiązuje problemy (2) i (3) powyżej, jednak problem (1) (niezależności definicji od wyboru otoczeń V) pozostaje.

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle\, , \,\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W.

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon W \to W$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon W \times W \to \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w \rangle.$$

Przykład

Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle\ ,\ \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W.

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon W \to W$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez F** nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon W \times W \to \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w\rangle.$$

Przykład

Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Powtórka z algebry liniowej II

Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech $\langle\ ,\ \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na W.

Definicja

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon W \to W$. Odwzorowaniem dwuliniowym **indukowanym przez** F nazywamy odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon W \times W \to \mathbb{R}$ zadane przez

$$\mathcal{B}_F(v, w) = \langle F(v), w\rangle .$$

Przykład

Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem (w bazie standardowej!)

$$F(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2, -v_2).$$

Przykład

Odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\mathcal{B}_F((v_1, v_2),(w_1, w_2)) = \langle F(v_1, v_2),(w_1, w_2)\rangle =$$
$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, (w_1, w_2) \right\rangle =$$
$$= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2),(w_1, w_2)\rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2 w_2.$$

Przykład

Odwzorowanie $\mathcal{B}_F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ indukowane przez F jest równe

$$\mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = \langle F(v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle =$$
$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, (w_1, w_2) \right\rangle =$$
$$= \langle (v_1 + 2v_2, -v_2), (w_1, w_2)\rangle = (v_1 + 2v_2)w_1 - v_2 w_2.$$

Lemat

Niech $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- *Oznaczmy przez $\mathbf{G}$ macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech $F \colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $\mathbf{A}$ w powyższej bazie.*
- *Niech $\mathbf{M}$ oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Lemat

Niech $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ *będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.*

- *Oznaczmy przez* $\mathbf{G}$ *macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech* $F: W \to W$ *będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy* $\mathbf{A}$ *w powyższej bazie.*
- *Niech* $\mathbf{M}$ *oznacza macierz odwzorowania* B_F *indukowanego przez* F *(znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Lemat

Niech $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- *Oznaczmy przez* $\mathbf{G}$ *macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech* $F \colon W \to W$ *będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy* $\mathbf{A}$ *w powyższej bazie.*
- *Niech* $\mathbf{M}$ *oznacza macierz odwzorowania* B_F *indukowanego przez* F *(znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Lemat

Niech $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.

- *Oznaczmy przez $\mathbf{G}$ macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $\mathbf{A}$ w powyższej bazie.*
- *Niech $\mathbf{M}$ oznacza macierz odwzorowania B_F indukowanego przez F (znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Lemat

Niech $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ *będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Ustalmy bazę tej przestrzeni.*

- *Oznaczmy przez* $\mathbf{G}$ *macierz iloczynu skalarnego w tej bazie.*
- *Niech* $F \colon W \to W$ *będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy* $\mathbf{A}$ *w powyższej bazie.*
- *Niech* $\mathbf{M}$ *oznacza macierz odwzorowania* B_F *indukowanego przez* F *(znów macierz w powyższej bazie).*

Wtedy $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}$.

Przykład

Niech F będzie tak jak z poprzedniego przykładu. Na $W = \mathbb{R}^2$ wybierzmy standardową bazę $\{e_1, e_2\}$. Naturalny iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$ ma w tej bazie macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$. Zatem macierzą odwzorowania $\mathcal{B}_F$ jest macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t \cdot \mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id},$$

zatem

$$\mathcal{B}_F((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Id} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz A odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
  1. *macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
  2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

Lemat

Niech W będzie przestrzenią wektorową i $\mathcal{B}$ formą dwuliniową na W.

- *$\mathcal{B}$ jest formą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz odwzorowania $\mathcal{B}$ w dowolnej bazie W jest macierzą symetryczną.*
- *Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*
    1. *macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej przestrzeni W,*
    2. *forma dwuliniowa $\mathcal{B}_F$ indukowana przez F jest symetryczna.*

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli $\mathbf{A}$ jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G} w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli $\mathbf{A}$ jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz **A** odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli **A** jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G}w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

- Symetryczność formy $\mathcal{B}$ oznacza

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

- Jeśli macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F jest symetryczna, wtedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t.$$

- Jeśli $\mathbf{A}$ jest symetryczna w każdej bazie, możemy wybrać taką, w której macierz $\mathbf{G} = \mathrm{Id}$ (macierz iloczynu skalarnego na W).
- Zatem

$$\mathcal{B}_F(v, w) = v\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{G} w = w^t \left(\mathbf{A}^t\right)^t v^t = \mathcal{B}_F(w, v).$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Założmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \textit{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \textit{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Lemat

Niech $F\colon W \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ formy F jest symetryczna w każdej bazie ortonormalnej W. Wtedy

- *F ma rzeczywiste wartości własne k_i.*
- *wektory odpowiadające wartościom własnym F są ortogonalne.*
- *Macierz $\mathbf{A}$ odwzorowania F w dowolnej bazie spełnia*

$$\det \mathbf{A} = \prod_i k_i \qquad \textit{oraz} \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_i k_i.$$

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{A}$:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{bmatrix} = t^2 - (a+c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne $\mathbf{A}$).

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{A}$:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a - t & b \\ b & c - t \end{bmatrix} = t^2 - (a + c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne $\mathbf{A}$).

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane przez symetryczną macierz rzeczywistą

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\mathbf{A}$:

$$f_{\mathbf{A}}(t) = \det \begin{bmatrix} a - t & b \\ b & c - t \end{bmatrix} = t^2 - (a + c)t - (b^2 - ac)$$

posiada deltę nieujemną $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2$, więc ma dwa pierwiastki rzeczywiste (są to wartości własne $\mathbf{A}$).

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Przykład

Niech $W = \mathbb{R}^2$ i niech $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana (w standardowej bazie) przez macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy wtedy

- $f_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$
- $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, oraz $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- $k_1 k_2 = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 = \det \mathbf{A}$, oraz $k_1 + k_2 = 1 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$.

Zadanie

Oswoić wszystkie nieznane definicje pojawiające się w powyższej powtórce z algebry liniowej i zrozumieć sformułowania powyższych twierdzeń (niekoniecznie z dowodami!)

Wykład 9

Krzywizna Gaussa II

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D\widehat{n}(v) \in T_pM$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^3$).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. Dla każdego wektora $v \in T_p(M)$ pochodna kierunkowa

$$D\widehat{n}(v) \in T_pM$$

(rozważanej abstrakcyjnie jako 2-wymiarowa podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^3$).

Dowód:

Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.
Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle D\widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. □

Dowód:

Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.

Wtedy

$$0 = D\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle(v) = \nabla_v\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 2\langle\nabla_v\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 2\langle D\widehat{n}(v),\widehat{n}\rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. $\square$

Dowód:
Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.
Wtedy

$$0 = D\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle(v) = \nabla_v\langle\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 2\langle\nabla_v\widehat{n},\widehat{n}\rangle = 2\langle D\widehat{n}(v),\widehat{n}\rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. □

Dowód:
Wektor normalny $\widehat{n}(p)$ ma długość 1 w każdym punkcie, więc możemy zapisać $\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 1$ wewnątrz $x(U)$.
Wtedy

$$0 = D\langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle(v) = \nabla_v \langle \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle \nabla_v \widehat{n}, \widehat{n} \rangle = 2\langle D\widehat{n}(v), \widehat{n} \rangle,$$

więc $D\widehat{n}(v)$ jest zawsze prostopadły do $\widehat{n}$, zatem musi należeć do T_pM. □

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L\colon T_pM \to T_pM$ zadane przez

$$L(v) \overset{\text{def.}}{=} -D\widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

Lemat

Odwozorowanie Weingartena $L\colon T_pM \to T_pM$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). □

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L\colon T_pM \to T_pM$ zadane przez

$$L(v) \overset{\text{def.}}{=} -D\widehat{n}(v) = -\nabla_v \widehat{n}.$$

Lemat

Odwozorowanie Weingartena $L\colon T_pM \to T_pM$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). □

Definicja

Przy powyższych oznaczeniach **odwzorowaniem Weingartena** w punkcie p nazywamy odwzorowanie $L\colon T_pM \to T_pM$ zadane przez

$$L(v) \overset{\text{def.}}{=} -D\widehat{n}(v) = -\nabla_v\widehat{n}.$$

Lemat

Odwozorowanie Weingartena $L\colon T_pM \to T_pM$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód:

Lemat wynika z liniowości pochodnej kierunkowej (lemat 7.3). □

Uwaga

Chociaż do definicji odwzorowania Weingartena używamy lokalnego układu współrzędnych, jednak przy innym wyborze $x\colon U \to M$, odwzorowanie L może się różnić tylko o znak $\pm$.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

Druga forma podstawowa w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$. **Druga forma podstawowa** w punkcie p to odwzorowanie dwuliniowe $\mathrm{II}_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ indukowane przez odwzorowanie Weingartena L, tj. zadane wzorem

$$\mathrm{II}_p(v, w) = \langle L(v), w \rangle,$$

dla wszystkich v, w z przestrzeni stycznej T_pM.

Uwaga

Tak jak odwzorowanie Weingartena, druga forma podstawowa jest zdefiniowana z dokładnością do znaku.

Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Uwaga (Oznaczenie)

Macierze odwzorowania Weingartena i drugiej formy podstawowej (w standardowej bazie przestrzeni stycznej x_1, x_2) oznaczamy odpowiednio przez

$$(L_{ij}) = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad (l_{ij}) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

Wniosek

Na podstawie powtórki z algebry liniowej II, mamy

$$(l_{ij}) = (L_{ij})^t (g_{ij}),$$

więc korzystając z własności odwrotności i transpozycji otrzymujemy

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1} (l_{ij})^t.$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

1. *(Równania Weingartena) Dla $i = 1, 2$ zachodzi*

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

2. *Dla indeksów $i, j = 1, 2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe*

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle,$$

gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

1. *(Równania Weingartena) Dla $i = 1, 2$ zachodzi*

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

2. *Dla indeksów $i, j = 1, 2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe*

$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j \rangle = \langle n, x_{ij} \rangle,$$

gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

1. *(Równania Weingartena) Dla $i = 1, 2$ zachodzi*
$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$
2. *Dla indeksów $i, j = 1, 2$, współczynniki macierzy drugiej formy podstawowej są równe*
$$l_{ij} = -\langle n_i, x_j\rangle = \langle n, x_{ij}\rangle,$$
gdzie x_{ij} jest oznaczeniem drugiej pochodnej cząstkowej (względem zmienych i-tej i j-tej).

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i}\widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i} \widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j \rangle \overset{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j \rangle = -\langle n_i, x_j \rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i \rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial \langle n, x_j \rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j \rangle + \langle n, x_{ij} \rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i}\widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j\rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j\rangle = -\langle n_i, x_j\rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i\rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial\langle n, x_j\rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j\rangle + \langle n, x_{ij}\rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i}\widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j\rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j\rangle = -\langle n_i, x_j\rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i\rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial\langle n, x_j\rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j\rangle + \langle n, x_{ij}\rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. □

Dowód:

(1.) Mamy następujący ciąg równości:

$$n_i = \frac{\partial(\widehat{n} \circ x)}{\partial u_i} = \nabla_{x_i}\widehat{n} = -L(x_i) = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2,$$

gdzie $x = x(u_1, u_2)$ (u_i są zmiennymi lokalnego układu współrzędnych x).

(2.) Mamy

$$l_{ij} = \mathrm{II}(x_i, x_j) = \langle L(x_i), x_j\rangle \stackrel{*}{=} -\langle \nabla_{x_i} n, x_j\rangle = -\langle n_i, x_j\rangle,$$

co dowodzi pierwszej równości w punkcie 2 (równość $*$ wynika z dowodu pierwszej części). Aby udowodnić drugą równość, skorzystamy z tego, że $\langle n, x_i\rangle = 0$. Mamy

$$0 = \frac{\partial\langle n, x_j\rangle}{\partial u_i} = \langle n_i, x_j\rangle + \langle n, x_{ij}\rangle,$$

skąd natychmiast wynika druga równość. $\square$

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :
Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). $\square$

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :
Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :
Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :
Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.
Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). □

Lemat

- *Druga forma podstawowa II jest symetryczna.*
- *Macierz (L_{ij}) odwzorowania Weingartena L jest symetryczna* ***w każdej bazie ortonormalnej****.*

Dowód :

Symetryczność macierzy (l_{ij}) wynika z równości $l_{ij} = \langle n, x_{ij} \rangle$ oraz $x_{12} = x_{21}$.

Druga teza wynika wtedy z powiązań macierzy symetrycznej z symetrycznością odwzorowania przez nią indukowanego (lemat 8.6 cytowany podczas powtórki z algebry liniowej II). $\square$

Uwaga

Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej $\{x_1, x_2\}$ nie będzie ortonormalna w punkcie p, wtedy najczęściej $L_{ij}(p)$ nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu 8.6).

Uwaga

Wiedząc, że macierz (l_{ij}) jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

Uwaga

Z powyższych rozważań wcale nie wynika, że macierz odwzorowania Weingartena (L_{ij}) *jest symetryczna. Jeśli baza przestrzeni stycznej* $\{x_1, x_2\}$ *nie będzie ortonormalna w punkcie* p*, wtedy najczęściej* $L_{ij}(p)$ *nie będzie macierzą symetryczną. (ogólniej: nie możemy wtedy zastosować do niej lematu 8.6).*

Uwaga

Wiedząc, że macierz (l_{ij}) *jest symetryczna, możemy przepisać uzyskaną wcześniej równość do prostszej*

$$(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij}).$$

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K\colon M \to \mathbb{R}$, $H\colon M \to \mathbb{R}$ nastepująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K: M \to \mathbb{R}$, $H: M \to \mathbb{R}$ nastepująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Krzywizna powierzchni

Macierz odwzorowania liniowego zależy od wyboru bazy przestrzeni, jednak wyznacznik i ślad tego odwzorowania są od bazy niezależne.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech L będzie oznaczało odwzorowanie Weingartena. Zdefiniujmy dwie funkcje skalarne $K\colon M \to \mathbb{R}$, $H\colon M \to \mathbb{R}$ nastepująco

$$K(p) = \det L(p) \qquad\qquad H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L(p).$$

Nazywamy je odpowiednio **krzywizną Gaussa** i **krzywizną średnią**.

Lemat

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej T_pM.

Dowód:

Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2, \operatorname{tr} L(p) = k_1 + k_2.$$

cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat 8.7). □

Lemat

Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia nie zależą od wyboru macierzy reprezentującej odwzorowanie Weingartena, tj. nie zależą od wyboru bazy przestrzeni stycznej T_pM.

Dowód:

Dowód wynika z odpowiedniego przedstawienia wyznacznika i śladu:

$$\det L(p) = k_1 k_2, \operatorname{tr} L(p) = k_1 + k_2.$$

cytowanego w powtórce z algebry liniowej II (Lemat 8.7). $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \text{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11} l_{22} - 2 g_{12} l_{12} + g_{22} l_{11}}{2 \det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})} \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22} l_{11} - g_{21} l_{1}2 & * \\ * & -g_{12} l_{21} + g_{11} l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in x(U)$.

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad \textit{oraz} \quad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}$$

Dowód:

Przypomnijmy, że $(L_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(l_{ij})$. Mamy zatem

$$K(p) = \det(L_{ij}) = \det((g_{ij})^{-1}(l_{ij})) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Podobnie

$$H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{ij}) = \frac{1}{2\det(g_{ij})}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\det(g_{ij})}\begin{bmatrix} g_{22}l_{11} - g_{21}l_12 & * \\ * & -g_{12}l_{21} + g_{11}l_{22} \end{bmatrix}$$

Podsumowanie

Aby obliczyć krzywizny (średnią i Gaussa) powierzchni potrzebujemy następujące wielkości:

$$g_{11} = \langle x_1, x_1\rangle, \qquad g_{12} = g_{21} = \langle x_1, x_2\rangle, \qquad g_{22} = \langle x_2, x_2\rangle,$$

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|} = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

$$l_{11} = \langle n_1, x_1\rangle, \qquad l_{12} = l_{21} = \langle n_2, x_1\rangle, \qquad l_{22} = \langle n_2, x_2\rangle,$$

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}, \qquad H(p) = \frac{g_{11}l_{22} - 2g_{12}l_{12} + g_{22}l_{11}}{2\det(g_{ij})}.$$

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Oznaczmy przez $\overline{p} = x^{-1}(p)$.

Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt} = \\ = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt}.$$

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$.
Oznaczmy przez $\overline{p} = x^{-1}(p)$.
Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt}.$$

Agitacja na rzecz zgodności definicji

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Oznaczmy przez $\overline{p} = x^{-1}(p)$.
Przypomnijmy orginalną definicję Gaussa krzywizny i zastąpmy pola przez odpowiednie całki:

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{T \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle x_1 \times x_2, n\rangle| ds\, dt} =$$

$$= \frac{\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt}{\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt}.$$

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty $a_V, b_V \in x^{-1}(V)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n \rangle| ds\, dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V) \rangle| A(x^{-1}(V)),$$

$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Teraz użyjemy twierdzenia o wartości średniej które mówi, że dla każdego takiego zbioru V muszą istnieć takie punkty $a_V, b_V \in x^{-1}(V)$, że cała całka wyraża się jako wartość funkcji podcałkowej w tych punktach:

$$\iint_{x^{-1}(V)} |\langle n_1 \times n_2, n\rangle| ds\, dt = |\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V)),$$
$$\iint_{x^{-1}(V)} \sqrt{|\det(g_{ij})|} ds\, dt = \sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V)).$$

Zauważmy, że skoro $V \to \{p\}$, więc $a_V \to \overline{p}$ oraz $b_V \to \overline{p}$.

Mamy więc

$$\lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V\to\{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ = \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \big(-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)\big) \times \big(-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)\big) = \\ = (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Zauważmy, że skoro $V \to \{p\}$, więc $a_V \to \overline{p}$ oraz $b_V \to \overline{p}$. Mamy więc

$$\lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V\to\{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} = \\ = \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \big(-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)\big) \times \big(-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)\big) = \\ = (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Zauważmy, że skoro $V \to \{p\}$, więc $a_V \to \overline{p}$ oraz $b_V \to \overline{p}$. Mamy więc

$$\lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \lim_{V\to\{p\}} \frac{|\langle n_1(a_V) \times n_2(a_V), n(a_V)\rangle| A(x^{-1}(V))}{\sqrt{|\det(g_{ij}(b_V))|} A(x^{-1}(V))} =$$
$$= \frac{|\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle|}{\sqrt{|\det(g_{ij}(\overline{p}))|}}.$$

Z równań Weingartena na pochodne wektora normalnego ($n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2$) otrzymujemy

$$n_1 \times n_2 = \big(-(L_{11}x_1 + L_{21}x_2)\big) \times \big(-(L_{21}x_1 + L_{22}x_2)\big) =$$
$$= (x_1 \times x_2)(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{22}) = K(p)(x_1 \times x_2)$$

(jest to krzywizna $K(p)$ zdefiniowana jako $\det(L_{ij})$).

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p}) \rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \|x_1 \times x_2\|^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p}) \times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p) \left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} \|x_1 \times x_2\|^2 = \pm K(p) \sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V \to \{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p})\times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p)\left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\right\rangle =$$
$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\|x_1 \times x_2\|^2 = \pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p})\times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p)\left\langle x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p}) \times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\|x_1 \times x_2\|^2 = \pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V\to\{p\}} \frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Podstawiając wyliczony iloczyn wektorowy oraz korzystając z definicji wektora normalnego mamy

$$\langle n_1(\overline{p})\times n_2(\overline{p}), n(\overline{p})\rangle = \pm K(p)\left\langle x_1(\overline{p})\times x_2(\overline{p}), \frac{x_1(\overline{p})\times x_2(\overline{p})}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\right\rangle =$$

$$= \frac{\pm K(p)}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}\|x_1\times x_2\|^2 = \pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))},$$

zatem ostatecznie

$$K_{\mathcal{G}}(p) = \lim_{V\to\{p\}}\frac{A(\widehat{n}(V))}{A(V)} = \frac{\pm K(p)\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(\overline{p}))}} = \pm K(p).$$

Wykład 10

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Pochodne kierunkowe. Izometria.

Krzywizna Gaussa I

Krzywizna Gaussa II

Theorema Egregium i Twierdzenie klasyfikacyjne

- Symbole Christoffela
- Theorema Egregium
- Twierdzenie klasyfikujące

Symbole Christoffela

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij}.

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnych układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma^1_{ij}x_1 + \Gamma^2_{ij}x_2 + l_{ij}n. \tag{10.1}$$

Symbole Christoffela

Przypomnijmy najpierw równania Weingartena:

$$n_i = -L_{1i}x_1 - L_{2i}x_2.$$

Wyrażają one pochodne cząstkowe wektora normalnego w bazie $\{x_1, x_2, n\}$. Udowodnimy teraz podobne wzory dla drugich pochodnych cząstkowych x_{ij}.

Twierdzenie (Formuła Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnych układem współrzędnych. Wtedy

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n. \tag{10.1}$$

Uwaga

Ponieważ funkcje Γ_{ij}^k zwane ***symbolami Christoffela*** *nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich* ***definicję*** *(z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).*

Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad dla\ k = 1, 2.$$

Uwaga

Ponieważ funkcje Γ_{ij}^k *zwane* ***symbolami Christoffela*** *nie pojawiły się jeszcze na tym wykładzie, możemy to sformułowanie przyjąć jako ich* ***definicję*** *(z resztą tak samo zdefiniowaliśmy torsję krzywej).*
Ponieważ $x_{ij} = x_{ji}$*, więc natychmiast otrzymujemy pierwszą własność tych symboli:*

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad dla\ k = 1, 2.$$

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned} \langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\ \langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\ \langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij} \end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. $\square$

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned} \langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\ \langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\ \langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij} \end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. $\square$

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned} \langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\ \langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\ \langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij} \end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. □

Dowód Formuły Gaussa:

Ponieważ układ $\{x_1, x_2, n\}$ tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc muszą istnieć współczynniki Γ_{ij}^k oraz Q_{ij} takie, że

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + Q_{ij} n.$$

Zrzutujmy ortogonalnie obie strony tego równania na wektory x_1, x_2 i n:

$$\begin{aligned} \langle x_{ij}, x_1 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{11} + \Gamma_{ij}^2 g_{12} \\ \langle x_{ij}, x_2 \rangle &= \Gamma_{ij}^1 g_{21} + \Gamma_{ij}^2 g_{22} \\ \langle x_{ij}, n \rangle &= Q_{ij} \end{aligned}$$

Natychmiast z tego wynika, że $Q_{ij} = \langle x_{ij}, n \rangle = \langle x_i, n_j \rangle = l_{ij}$. Pozostałe dwa równania potraktujmy jako własności symboli Christoffela. $\square$

Lemat

Niech $M \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Dla wszystkich $i, j = 1, 2$ zachodzi

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle .$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle \end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle .$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle .$$

Dowód:
Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle \end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Dowód:

Obliczmy pochodną cząstkową z g_{ij}:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \langle x_i, x_j \rangle}{\partial u_k} = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial u_k}, x_j \right\rangle + \left\langle x_i, \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right\rangle = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle.$$

Podobnie, permutując indeksy i, j, k (równocześnie pamiętając, że $g_{ij} = g_{ji}$, oraz $x_{ij} = x_{ji}$) otrzymujemy dwa kolejne równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_k, x_{ij} \rangle \end{aligned}$$

Dodając drugie i trzecie równanie, a następnie odejmując pierwsze otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) = \langle x_{ij}, x_k \rangle.$$

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma^1_{ij}\langle x_1, x_k \rangle + \Gamma^2_{ij}\langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma^r_{ij} g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma^r_{ij} g_{rk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ^k_{ij}. □

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k. □

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle x_1, x_k \rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle x_2, x_k \rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k. □

Z drugiej strony na podstawie formuły Gaussa mamy

$$\langle x_{ij}, x_k\rangle = \Gamma_{ij}^1\langle x_1, x_k\rangle + \Gamma_{ij}^2\langle x_2, x_k\rangle = \sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk},$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{2} \Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right).$$

Wystarczy teraz to równanie zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

i pomnożyć z lewej strony przez $(g_{ij})^{-1}$ aby otrzymać szukane przedstawienie Γ_{ij}^k. □

Twierdzenie

Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

- *Równanie Gaussa:*

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

- *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2}\right) = 0$$

Twierdzenie

Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

- *Równanie Gaussa:*

$$l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

- *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2} \right) = 0$$

Twierdzenie

Niec $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, oraz niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy zachodzą następujące równości.

- *Równanie Gaussa:*

$$l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

- *Równania Codazziego-Mainardiego:*

$$\frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^r l_{r1} - \Gamma_{21}^r l_{r2} \right) = 0$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.

Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:

Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.
Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:
Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.
Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:
Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Udowodnimy tylko Równania Codazziego-Mainardiego, równanie Gaussa pozostawiając jako ćwiczenie.
Chociaż równania te wyglądają groźnie, ich dowód sprowadza się do bardzo prostego faktu: trzecie pochodne cząstkowe są sobie równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$x_{ijk} = x_{ikj}.$$

Dowód:
Przypomnijmy formułę Gaussa:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + l_{ij} n,$$

a następnie zróżniczkujmy ją względem u_k:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^1}{\partial u_k} x_1 + \Gamma_{ij}^1 x_{1k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^2}{\partial u_k} x_2 + \Gamma_{ij}^2 x_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} n_k.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
x_{ijk} = {} & \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} = \\
= {} & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.
\end{aligned}
$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} +$$

$$+ \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} +$$

$$+ \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 +$$

$$+ \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$x_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} +$$

$$+ \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} +$$

$$+ \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} =$$

$$= \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 +$$

$$+ \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
x_{ijk} = \ & \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} = \\
= \ & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = \ A x_1 + B x_2 + C n.
\end{aligned}
$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
x_{ijk} = \; & \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} = \\
= & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = Ax_1 + Bx_2 + Cn.
\end{aligned}
$$

Korzystając teraz z równania Weingartena i fromuły Gaussa podstawmy za n_k i x_{ij} ich realizacje w bazie $\{x_1, x_2, n\}$, a następnie uporządkujmy wyrażenie:

$$
\begin{aligned}
x_{ijk} = {} & \frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} x_1 + \Gamma^1_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^2_{1k} x_1 + \Gamma^2_{1k} x_2 + l_{1k} n\right)}_{x_{1k}} + \\
& + \frac{\partial^2_{ij}}{\partial u_k} x_2 + \Gamma^2_{ij} \underbrace{\left(\Gamma^1_{2k} x_1 + \Gamma^2_{2k} x_2 + l_{2k} n\right)}_{x_{2k}} + \\
& + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} n + l_{ij} \underbrace{\left(-L_{1k} x_1 - L_{2k} x_2\right)}_{n_k} = \\
= {} & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^1_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{1k}\right] x_1 + \\
& + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^1_{ij}\Gamma^2_{1k} + \Gamma^2_{ij}\Gamma^2_{2k} - l_{ij} L_{2k}\right] x_2 + \\
& + \left[\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right] n = \; A x_1 + B x_2 + C n.
\end{aligned}
$$

Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
x_{ikj} = &\left[\frac{\partial \Gamma^1_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^1_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{1j}\right] x_1 + \\
&+ \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^2_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{2j}\right] x_2 + \\
&+ \left[\Gamma^1_{ik}l_{1j} + \Gamma^2_{ik}l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}\right] n = \\
&= A'x_1 + B'x_2 + C'n.
\end{aligned}
$$

Zamieniając miejscami j i k otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
x_{ikj} = &\left[\frac{\partial \Gamma^1_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^1_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{1j}\right] x_1 + \\
&+ \left[\frac{\partial \Gamma^2_{ik}}{\partial u_j} + \Gamma^1_{ik}\Gamma^2_{1j} + \Gamma^2_{ik}\Gamma^2_{2j} - l_{ik}L_{2j}\right] x_2 + \\
&+ \left[\Gamma^1_{ik}l_{1j} + \Gamma^2_{ik}l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}\right] n = \\
= &A'x_1 + B'x_2 + C'n.
\end{aligned}
$$

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma^1_{ij} l_{1k} + \Gamma^2_{ij} l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma^1_{ik} l_{1j} + \Gamma^2_{ik} l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma^1_{ij} l_{1k} - \Gamma^1_{ik} l_{1j}\right) + \Gamma^2_{ij} l_{2k} - \Gamma^2_{ik} l_{2j} =$$

$$= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^r_{12} l_{r1} - \Gamma^r_{11} l_{r2}\right) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. □

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}\right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} =$$

$$= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}\right) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. □

Ponieważ wynik różniczkowania nie zależy od kolejności wyboru zmiennych, więc współczynniki tych przedstawień muszą być sobie równe:

$$\Gamma_{ij}^1 l_{1k} + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{ik}^1 l_{1j} + \Gamma_{ik}^2 l_{2j} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}, \qquad (C = C').$$

Odpowiednio grupując otrzymujemy

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} + \left(\Gamma_{ij}^1 l_{1k} - \Gamma_{ik}^1 l_{1j}\right) + \Gamma_{ij}^2 l_{2k} - \Gamma_{ik}^2 l_{2j} =$$

$$= \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} + \sum_{r=1}^{2} (\Gamma_{12}^r l_{r1} - \Gamma_{11}^r l_{r2}) = 0.$$

Ostatecznie podstawiając $(i = 1, j = 2, k = 1)$ [odpowiednio: $(i = 2, j = 2, k = 1)$] otrzymujemy pierwsze [drugie] równanie Codazziego-Mainardiego. □

Zadanie

Udowodnić Równanie Gaussa.

Podpowiedź: należy porównać współczynniki A, A', oraz B, B'. Następnie podstawić $(i = 2, j = 1, k = 2)$.

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N. Niech $f\colon M \to N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22}), oraz ich pochodnych.

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N. Niech $f\colon M \to N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22}), oraz ich pochodnych.

Twierdzenie (Theorema Egregium Gaussa)

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ oraz $N \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami gładkimi o krzywiznach odpowienio K_M i K_N. Niech $f\colon M \to N$ będzie lokalną izometrią. Wtedy

$$K_M(p) = K_N(f(p))$$

dla wszystkich $p \in M$.

Ponieważ pierwsza forma podstawowa powierzchni jest niezmienicza ze względu na lokalne izometrie (lemat 7.7, własność 3) wystarczy więc pokazać, że krzywizna Gaussa może być wyrażona w terminach współczynników metrycznych (funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22}), oraz ich pochodnych.

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).
Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Dowód:

Niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).

Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11}l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r}\left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^r\right)\right].$$

Wyraża ono $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Dowód:
Niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych wokół $p \in M$. Wiemy, że krzywizna wyraża się wzorem

$$K(p) = \frac{\det(l_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Wystarczy więc przedstawić wyrażenie $\det(l_{ij}) = l_{11} l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy funkcji g_{11}, g_{12}, g_{22} i ich pochodnych. (**Uwaga:** jest to możliwe, mimo, że żadnej pojedynczej funkcji l_{ij} w taki sposób przedstawić się nie da!).
Przypomnijmy równanie Gaussa (z twierdzenia 10.3):

$$l_{11} l_{22} - l_{12}^2 = \sum_{r=1}^{2} g_{1r} \left[\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2} \left(\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^r \right) \right].$$

Wyraża ono $l_{11} l_{22} - l_{12}^2$ przy pomocy g_{ij} oraz symboli Christoffela (i ich pochodnych).

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemu szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). □

Z drugiej strony dzięki wcześniejszemu lematowi charakteryzującego symbole Christoffela (lemat 10.2):

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

wiemy, że i je da się wyrazić przy pomocy współczynników metrycznych (i ich pochodnych). Zatem wstawiając równania z tego lematu do równania Gaussa otrzymujemu szukane wyrażenie $l_{11}l_{22} - l_{12}^2$ w tylko terminach funkcji g_{ij} (oraz ich pochodnych). $\square$

Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f\colon M \to N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Zadanie

Prześledzić dowód Theorema Egregium i wyprowadzić bezpośredni wzór na krzywiznę Gaussa zawierający tylko współczynniki metryczne i ich pochodne.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne do Theorema Egregium nie zachodzi. Mianowicie istnieją powierzchnie M i N oraz odwzorowania $f\colon M \to N$ dla których $K(f(p)) = K(p)$, lecz mimo wszystko f nie jest lokalną izometrią.

Przykład

Niech

$$M = \{y(u,v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$
$$N = \{x(u,v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f : M \to N$ jako

$$f(y(u,v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v,u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u,v))) = K(x(v,u)) = \frac{-1}{(1+u^2)^2} = K(y(u,v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u,v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u,v) = 1$.

Przykład

Niech

$$M = \{y(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$
$$N = \{x(u, v) = (v \sin u, v \cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi, \pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f : M \to N$ jako

$$f(y(u, v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v, u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u, v))) = K(x(v, u)) = \frac{-1}{(1 + u^2)^2} = K(y(u, v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u, v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u, v) = 1$.

Przykład

Niech

$$M = \{y(u,v) = (u\sin v, u\cos v, \ln u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi,\pi)\},$$
$$N = \{x(u,v) = (v\sin u, v\cos u, u) : u \in \mathbb{R}_+, v \in (-\pi,\pi)\},$$

oraz zdefiniujmy funkcję $f\colon M \to N$ jako

$$f(y(u,v)) \stackrel{\text{def.}}{=} x(v,u).$$

Wtedy (sprawdzić!)

$$K(f(y(u,v))) = K(x(v,u)) = \frac{-1}{(1+u^2)^2} = K(y(u,v)).$$

Gdyby jednak f była lokalną izometrią, wówczas lokalne układy współrzędnych x i y musiałyby mieć te same współczynniki metryczne (z zamienionymi zmiennymi). Jednak $g_{11}^M(u,v) = 1 + \frac{1}{u^2}$ podczas gdy $g_{11}^N(u,v) = 1$.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij}\colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij}\colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma^k_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x\colon U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ^k_{ij} tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym.
Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} : U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} : U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$, oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x : U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ^k_{ij} tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ_{ij}^k tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- (g_{ij}) *tworzą pierwszą formę podstawową,*
- (l_{ij}) *tworzą drugą formę podstawową,*
- Γ_{ij}^k *tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij} \colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k \colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x \colon U \to M$ dla której

- *(g_{ij}) tworzą pierwszą formę podstawową,*
- *(l_{ij}) tworzą drugą formę podstawową,*
- *Γ_{ij}^k tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne powierzchni)

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie spójnym zbiorem otwartym. Załóżmy, że mamy dane symetryczne macierze 2×2 funkcji $(g_{ij}\colon U \to \mathbb{R})$ oraz $(l_{ij}\colon U \to \mathbb{R})$ spełniających $\det(g_{ij}) > 0$,oraz mamy dane osiem funkcji $\Gamma_{ij}^k\colon U \to \mathbb{R}$ (dla $i, j, k = 1, 2$) spełniających z powyższmi (g_{ij}) i (l_{ij}) dwa równania Codazziego-Mainardiego i równanie Gaussa. Wówczas istnieje powierzchnia $x\colon U \to M$ dla której

- (g_{ij}) *tworzą pierwszą formę podstawową,*
- (l_{ij}) *tworzą drugą formę podstawową,*
- Γ_{ij}^k *tworzą układ funkcji Christoffela.*

Co więcej dowolne dwie takie powierzchnie są ze sobą lokalnie izometryczne.

Dowód: Pomijamy.