Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1] Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 6

Wektory styczne i normalne. I forma podstawowa

Uwaga

Na każdej powierzchni mamy naturalnie dane dwie rodziny krzywych . Dla każdego ustalonego $s_0 \in \mathbb{R}$ możemy rozpatrywać krzywą

$$x(s_0, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Podobnie dla dowolnego t_0 mamy krzywą

$$x(\cdot, t_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Krzywe te leżą na naszej powierzchni, a wektory styczne do tych krzywych będą grały bardzo ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Definicja

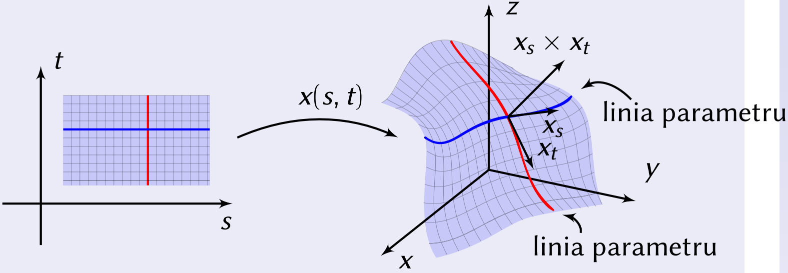
Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0)\Big|_{s=s_0}, \qquad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t)\Big|_{t=t_0}.$$

Definicja

Powyższe krzywe nazywamy **liniami parametru**. Jeśli oznaczymy punkt $p = x(s_0, t_0)$ wtedy wektory do nich styczne w punkcie p oznaczamy przez

$$x_s(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t_0)\Big|_{s=s_0}, \qquad x_t(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t)\Big|_{t=t_0}.$$



Definicja

Niech $\alpha_v \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha_v'(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v \in T_pM$, wtedy również $av \in T_pM$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v, w \in T_pM$, wówczas $av + bw \in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Definicja

Niech $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha_v'(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v \in T_pM$, wtedy również $av \in T_pM$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v, w \in T_pM$, wówczas $av + bw \in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Definicja

Niech $\alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M\subset\mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0)=p$, oraz $\alpha_v'(0)=v$. Ustalmy punkt $p\in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v\in T_pM$, wtedy również $av\in T_pM$ dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t)=\alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v,w\in T_pM$, wówczas $av+bw\in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*

Definicja

Niech $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ będzie krzywą gładką. Załóżmy, że $\alpha_v(0) = p$, oraz $\alpha_v'(0) = v$. Ustalmy punkt $p \in M$ i rozważmy wszystkie tego typu krzywe α_v. Wektory do nich styczne w punkcie p utworzą przestrzeń którą nazywamy **przestrzenią styczną** i oznaczamy T_pM.

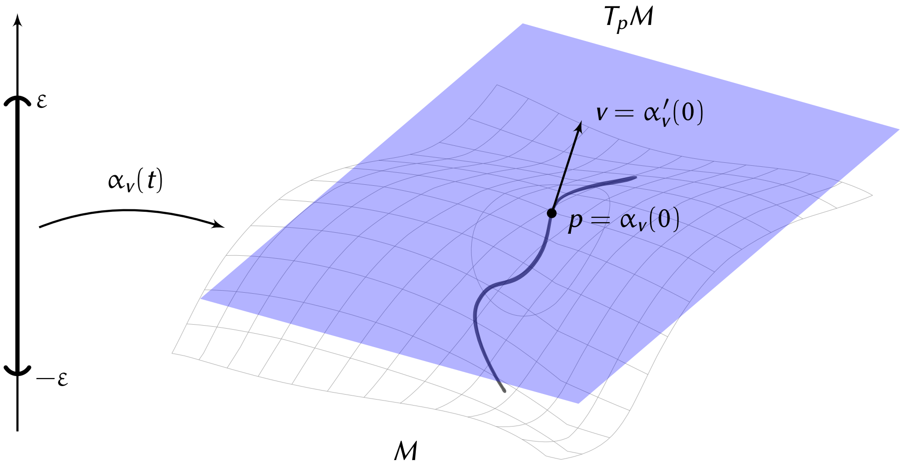
Uwaga

Przestrzeń styczna jest faktycznie przestrzenią liniową, tj.

- *Jeśli $v \in T_pM$, wtedy również $av \in T_pM$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wynika to z reparametryzacji*

$$\alpha_{av}(t) = \alpha_v(at).$$

- *Addytywność (jeśli $v, w \in T_pM$, wówczas $av + bw \in T_pM$) wynika z dowodu następnego lematu.*


T_pM
$v = \alpha_v'(0)$
ε
$\alpha_v(t)$
$p = \alpha_v(0)$
$-\varepsilon$
M

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. *Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.*
2. *Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi*

$$\dim T_pM = 2.$$

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. *Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.*
2. *Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi*

$$\dim T_p M = 2.$$

Lemat

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym i niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie lokalnym układem współrzędnych.

1. *Przestrzeń styczna jest rozpięta przez wektory $\{x_s(p), x_t(p)\}$, styczne do linii parametru przecinających się w punkcie p.*
2. *Niech $p \in x(U)$, $p = x(s_0, t_0)$ będzie punktem na powierzchni. Wymiar przestrzeni stycznej w punkcie p wynosi*

$$\dim T_pM = 2.$$

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.
Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.
Rozważmy złożenie

$$\beta \overset{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β. Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.

Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.

Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$. Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β. Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.
Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.
Rozważmy złożenie

$$\beta \overset{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.
Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.
Rozważmy złożenie

$$\beta \overset{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

Dowód:

Wystarczy udowodnić pierwszą część lematu.
Niech $\langle x_s(p), x_t(p)\rangle_{\mathbb{R}}$ oznacza podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^3$ rozpiętą przez wektory x_s i x_t. Pokażemy, że każdy wektor z przestrzeni stycznej T_pM można przedstawić jako kombinację liniową wektorów stycznych do linii parametru.
Niech $v \in T_pM$. Z definicji przestrzeni stycznej istnieje krzywa $\alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\alpha_v(0) = p$, $\alpha_v'(0) = v \in T_pM$.
Rozważmy złożenie

$$\beta \stackrel{\text{def.}}{=} x^{-1} \circ \alpha_v\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$$

i niech $\beta_1, \beta_2\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami współrzędnych β.
Wtedy równość funkcji

$$\alpha_v(t) = \underbrace{x \circ x^{-1}}_{\mathrm{id}_{x(U)}} \circ \alpha_v(t) = x(\beta_1(t), \beta_2(t)),$$

pociąga równość pochodnych:

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$

$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. $\square$

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$
$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$
$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.

Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$
$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. $\square$

$$
\begin{aligned}
v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} = \\
= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} = \\
= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),
\end{aligned}
$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. □

$$\begin{aligned} v = \alpha_v'(t)\Big|_{t=0} &= x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\Big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\Big|_{t=0} = \\ &= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0), \end{aligned}$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0,0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. $\square$

$$v = \alpha_v'(t)\big|_{t=0} = x\big(\beta_1(t), \beta_2(t)\big)'\big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \beta_1}(s_0, t_0)\beta_1'(t)\big|_{t=0} + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}(s_0, t_0)\beta_2'(t)\big|_{t=0} =$$
$$= \beta_1'(0)x_s(s_0) + \beta_2'(0)x_t(t_0),$$

co daje szukany rozkład v w bazie $\{x_s, x_t\}$.
Teraz przypuśćmy, że $v = ax_s + bx_t$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że lokalny układ współrzędnych został w taki sposób wybrany, że $x(0, 0) = p$ (dlaczego?). Zdefiniujmy krzywą $\alpha\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$ przez $\alpha(t) = x(at, bt)$. Proste przeliczenie pokazuje, że $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = ax_s + bx_t = v$, czyli v należy do T_pM. $\square$

Uwaga

Zauważmy, że przestrzeń styczna nie ma ustalonej w kanoniczny sposób bazy. Wektory x_s i x_t ją rozpinające zależą od wybranego lokalnego układu współrzędnych. Natomiast niezależna od tego wyboru jest cała przestrzeń styczna, a więc i jej ortogonalne dopełnienie, które nazywać będziemy kierunkiem normalnym.

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią, oraz niech

$$\begin{aligned} x\colon U &\longrightarrow M \\ (s_0, t_0) &\longmapsto p \in M \end{aligned}$$

będzie lokalnym układem współrzędnych. **Wektor normalny w** p definiujemy jako

$$N(p) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x_s \times x_t}{\|x_s \times x_t\|}(s_0, t_0),$$

gdzie x_s i x_t wektorami stycznymi do linii parametru przechodzących przez punkt p.

Uwaga

Ponieważ wektor normalny ma długość 1, więc koniec każdego wektora normalnego $N(p)$ leży na powierzchni sfery dwuwumiarowej $N(M) \subset S^2$. Zatem N może być traktowany jako ***odwzorowanie między powierzchniami***

$$N: M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

punktów na powierzchni M. Jest to tzw. ***odwzorowanie Gaussa*** *do którego wrócimy później.*

Powtórka z algebry liniowej I

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F\colon V \times V \to \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Powtórka z algebry liniowej I

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. **Forma dwuliniowa** na V to odwzorowanie

$$F\colon V \times V \to \mathbb{R},$$

które jest liniowe na każdej ze zmiennych, tj. spełnione są następujące równości

- $F(av + bw, z) = aB(v, z) + bB(w, z)$
- $F(v, aw + bz) = aB(v, w) + bB(v, z)$

dla wszystkich wektorów $v, w, z \in V$ oraz wszystkich liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$.

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, oraz niech B będzie formą dwuliniową na V. **Macierz fromy** B w tej bazie definiujemy jako

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Definicja

Formę dwuliniową B nazywamy **symetryczną** jeśli

$$B(v, w) = B(w, v)$$

dla wszystkich $v, w \in V$.

Definicja

Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, oraz niech B będzie formą dwuliniową na V. **Macierz fromy** B w tej bazie definiujemy jako

$$A \overset{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix}$$

Przy takiej definicji mamy $B(x, y) = xAy^T$ gdzie y^T oznacza transpozycję.

Przykład

Standardowy iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle = \sum x_i^2$ jest oczywiście formą dwuliniową. W standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jego macierzą jest $A = \mathrm{Id}$.

I forma podstawowa

Definicja

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $p \in M$ będzie punktem na niej. Dla powierzchni M definiujemy **pierwszą formę podstawową w punkcie** p jako formę dwuliniową

$$\begin{aligned} I_p \colon T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$. Oznaczamy ją symbolem I_p.

Definicja

Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathcal{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p \in M}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t. Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Definicja

Pierwsza forma podstawowa powierzchni M to zależna w sposób ciągły od punktu p rodzina wszystkich form dwuliniowych

$$\mathcal{I}_M \stackrel{\text{def.}}{=} \{I_p\}_{p\in M}.$$

Od teraz wektory styczne do linii parametru będziemy nazywać x_1 i x_2 zamiast x_s i x_t. Niech $x(s_0, t_0) = p$.

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2. *Przy tak przyjętych oznaczeniach niech*

$$g_{ij}(s_0, t_0) \overset{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, *w punkcie* p *ma postać*

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2. *Przy tak przyjętych oznaczeniach niech*

$$g_{ij}(s_0, t_0) \overset{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, *w punkcie* p *ma postać*

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Uwaga

W każdym punkcie powierzchni macierz formy podstawowej to macierz wymiaru 2×2. Przy tak przyjętych oznaczeniach niech

$$g_{ij}(s_0, t_0) \stackrel{def.}{=} \langle x_i(s_0), x_j(t_0) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Wtedy macierz formy podstawowej w bazie $\{x_1, x_2\}$, w punkcie p ma postać

$$I_p = \begin{bmatrix} g_{11}(s_0, t_0) & g_{12}(s_0, t_0) \\ g_{21}(s_0, t_0) & g_{22}(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

W przyszłości będziemy utożsamiać formę z jej macierzą w standardowej bazie przestrzeni stycznej.

Przykład

Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t) = (s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s,t) = (1,0,t) \qquad x_2(s,t) = (0,1,s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $x \colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t) = (s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s,t) = (1,0,t) \qquad x_2(s,t) = (0,1,s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s, t) = (s, t, st).$$

Wtedy

$$x_1(s, t) = (1, 0, t) \qquad x_2(s, t) = (0, 1, s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Przykład

Niech $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią siodłową w parametryzacji Mongea.

$$x(s,t) = (s,t,st).$$

Wtedy

$$x_1(s,t) = (1,0,t) \qquad x_2(s,t) = (0,1,s).$$

Biorąc odpowiednie iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą postać macierzy pierwszej formy podstawowej:

$$I_p = I_{x(s,t)} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & st \\ st & 1+s^2 \end{bmatrix}$$

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* $(g_{12} = g_{21})$.
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń* E, F *i* G *na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* ($g_{12} = g_{21}$).
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń* E, F *i* G *na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j\rangle = \langle x_j, x_i\rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* $(g_{12} = g_{21})$.
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń E, F i G na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Definicja

Elementy macierzy I_p nazywamy **współczynnikami metrycznymi** lokalnego układu współrzędnych $x\colon U \to M$

Uwaga

- *Ponieważ* $\langle x_i, x_j\rangle = \langle x_j, x_i\rangle$, *więc* I_p *jest formą symetryczną* $(g_{12} = g_{21})$.
- *Gauss (a za nim część podręczników) używał oznaczeń* E, F *i* G *na (odpowienio)* g_{11}, g_{12} *i* g_{22}.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ = \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ = \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ = \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ = \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ = \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ = \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x \colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Wtedy

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Dowód:

Niech φ będzie kątem między x_1 i x_2. Wtedy

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle^2 = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2\|x_2\|^2\cos^2\varphi = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2(1-\cos^2\varphi) = \\ &= \|x_1\|^2\|x_2\|^2\sin^2\varphi = \|x_1 \times x_2\|^2,\end{aligned}$$

i lemat wynika z definicji N. $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. $\square$

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. □

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie gładką powierzchnią i niech $x\colon U \to M$, $y\colon V \to M$ będą lokalnymi układami współrzędnych. Załóżmy, że $x(U) \cap y(V) \neq \emptyset$. Niech (g_{ij}), [odpowiednio $(\overline{g_{ij}})$] oznacza macierz współczynników metrycznych dla x [odpowiednio y]. Jeśli przez J_Φ oznaczymy Jakobian (macierz pochodnych) funkcji zmiany układu współrzędnych $\Phi_{x,y}$ wtedy $(\overline{g_{ij}})$ wyrażają się następującymi wzorami

$$(\overline{g_{ij}} \circ \Phi_{x,y}) = (J_\Phi^{-1})^T (g_{ij}) J_\Phi^{-1}$$

Dowód:

Pomijamy. □

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha : \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \stackrel{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}\, dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość.

Jako przykład zastosowania pierwszej formy podstawowej mamy następujący lemat.

Lemat

Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x\colon U \to M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość krzywej $\overline{\alpha} \overset{def.}{=} x \circ \alpha\colon \mathbb{R} \to M$ na powierzchni jest równa

$$L(\overline{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}\left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)\right)}dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha_1')^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha_1'\alpha_2' g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha_2')^2 g_{22}(\alpha(t))}\, dt.$$

Dowód:

Ćwiczenie. Zauważyć, że $(x \circ \alpha)(t)$ jest zwykłą krzywą w $\mathbb{R}^3$. Wektor prędkości jest równy $x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2'$. Znaleźć jego długość. □