

Elementarna Geometria Różniczkowa Geometria hiperboliczna

Opracowanie: Marek Kaluba*

2013

Spis treści

| | |
|--|------------|
| 14 Geometria hiperboliczna | 103 |
| 14.1 Aksjomaty Euklidesa | 103 |
| 14.2 Definicja płaszczyzny hiperbolicznej I | 104 |
| 14.3 Model Poincarégo | 105 |
| 14.4 Geometria elementarna na półpłaszczyźnie Poincarégo | 105 |
| 14.5 Symetrie hiperboliczne | 108 |
| 15 Powierzchnie o stałej krzywiźnie | 111 |
| 15.1 Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo | 111 |
| 15.2 Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo | 112 |
| 15.3 Metryka hiperboliczna | 114 |
| 15.4 Izometrie płaszczyzny Poincarégo | 115 |
| 15.5 Torusy o stałej krzywiźnie | 118 |

*Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

14

Geometria hiperboliczna

W ujęciu tradycyjnym, nazywanym geometrią syntetyczną, geometria euklidesowa przedstawiana jest jako system aksjomatyczny, w którym wszystkie twierdzenia muszą wynikać z aksjomatów, czyli zdań przyjmowanych z góry jako prawdziwe.

14.1 Aksjomaty Euklidesa

W podanym przez siebie systemie Euklides wyróżnił pięć aksjomatów płaszczyzny nazywanej później również euklidesową:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Ponieważ piąty postulat wzbudzał wiele podejrzliwości (już chociażby przez swoją długość) każdy szanujący się matematyk w pomiędzy V-XVIIw. musiał podjąć się próby udowodnienia go jako twierdzenia wynikającego z pozostałych czterech. W XIXw. okazało się jednak, że piąty postulat jest niezależny od pozostałych czterech i na tej podstawie zostały sformułowane różne geometrie: system aksjomatyczny przyjmujący piąty postulat nazywamy **geometrią euklidesową**, zaś system przyjmujący *zaprzeczenie* piątego postulatu nazywany jest obecnie **geometrią hiperboliczną**.

Przez wieki prób dowodzenia powstało wiele innych twierdzeń *równoważnych* z piątym aksjomatem, np.

Playfair Przez dany punkt można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do danej prostej.

- Dla każdej prostej i każdego punktu poza nią istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do niej przechodząca przez ten punkt.
- Jeśli trzy kąty w czworokącie są proste, to i czwarty jest prosty.
- Istnieje prostokąt.
- Twierdzenie Pitagorasa.

W. Bolyai Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

J. Wallis Istnieją dwa trójkąty podobne, ale nieprzystające.

- Jeśli dwie proste są równoległe do trzeciej, to są również między sobą równoległe.
- Istnieje trójkąt o sumie kątów wewnętrznych równej π .
- Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest taka sama.

Aksjomat trójkąta Suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi π .

Zwłaszcza to ostatnie stwierdzenie powinno nas zaciekać w kontekście niedawno rozważanego lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta. Wnioskiem z niego będzie zerowa krzywizna całej powierzchni będącej modelem geometrii euklidesowej (tj. na której postulaty Euklidesa są spełnione).

14.2 Definicja płaszczyzny hiperbolicznej I

W sposób aksjomatyczny płaszczyznę hiperboliczną można zdefiniować analogicznie jak płaszczyznę euklidesową.

Definicja 14.1. Płaszczyzną hiperboliczną nazywamy dowolny zbiór \mathcal{P} wraz z rodziną podzbiorów zwanych prostymi i odległością geometryczną spełniającą *pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa*, oraz następujący **hiperboliczny aksjomat** o równoległych:

- 5'. Dla pewnej prostej $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ i pewnego punktu $M \in \mathcal{P}$ nieleżącego na \mathcal{D} istnieją co najmniej dwie różne proste Δ_1, Δ_2 przechodzące przez M i rozłączne z \mathcal{D} .

Uwaga. *Wszystkie własności płaszczyzny euklidesowej, które można udowodnić nie posługując się aksjomatem Euklidesa o równoległych (są to tzw. twierdzenia geometrii absolutnej), przysługują również płaszczyźnie hiperbolicznej.*

Układ aksjomatyczny ma sens tylko w takiej sytuacji, gdy jest niesprzeczny. W następnym paragrafie zbudujemy model arytmetyczny płaszczyzny hiperbolicznej, analogiczny do modelu kartezjańskiego płaszczyzny euklidesowej.

14.3 Model Poincarégo

Pierwszy model geometrii hiperbolicznej został zaproponowany przez H. Poincarégo w roku 1882 i nazywany jest **modelem Poincarégo** płaszczyzny hiperbolicznej na górną półpłaszczyźnie.

Definicja 14.2. **Górna półpłaszczyzną** lub **półpłaszczyzną Poincarégo** nazywamy zbiór

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

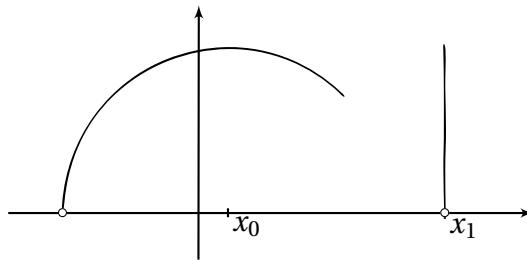
Prostą hiperboliczną w \mathcal{H} nazywamy każdy podzbiór $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ określony równaniem postaci:

$$x = x_0, \quad \text{albo} \quad r^2 = (x - x_0)^2 + y^2,$$

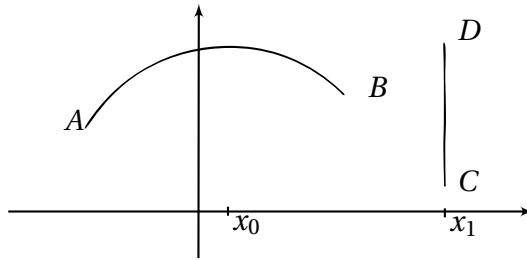
gdzie x_0 i $r > 0$ są dowolnymi stałymi.

14.4 Geometria elementarna na półpłaszczyźnie Poincarégo

Proste hiperboliczne na półpłaszczyźnie Poincarégo są to półproste otwarte na górną płaszczyźnie \mathbb{R}^2 mające początki na osi x i prostopadłe do tej osi albo półokręgi otwarte oparte na osi x .



Półproste hiperboliczne.



Odcinki hiperboliczne.

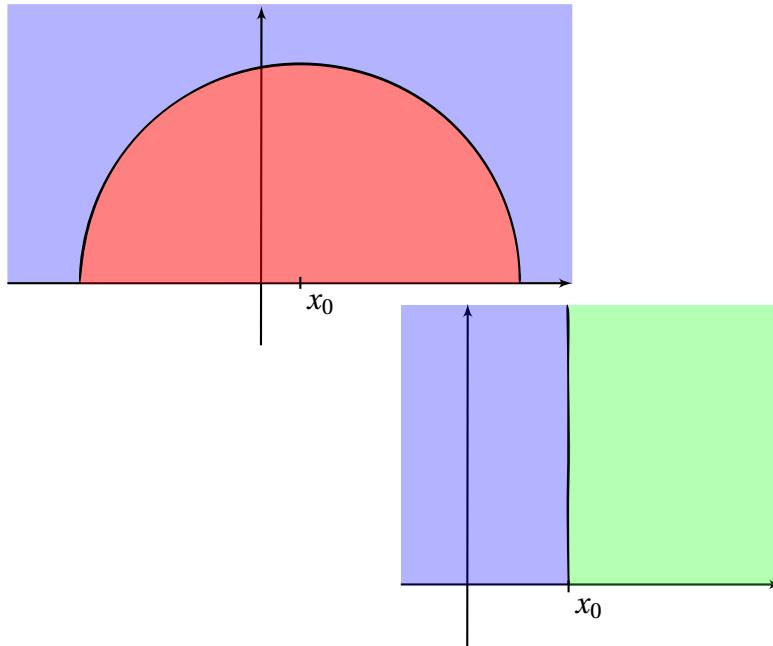
Definicja 14.3. Rozważmy funkcję $f_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ która dla prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zadana jest wzorem

$$f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 - r^2, & \text{jeśli } \mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \mathbf{y}^2 = r^2 \right\}. \end{cases}$$

Każda prosta hiperboliczna $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ o równaniu $f_{\mathcal{D}}(x, y) = 0$ dzieli półpłaszczyznę Poincarégo na dwa obszary domknięte:

$$\begin{aligned} &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\} \quad \text{oraz} \\ &\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} : f_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0\}, \end{aligned}$$

dla których jest ona wspólnym brzegiem. Naturalną rzeczą jest więc nazwanie każdego z tych obszarów **półpłaszczyznami hiperbolicznymi** ograniczonymi przez \mathcal{D} .

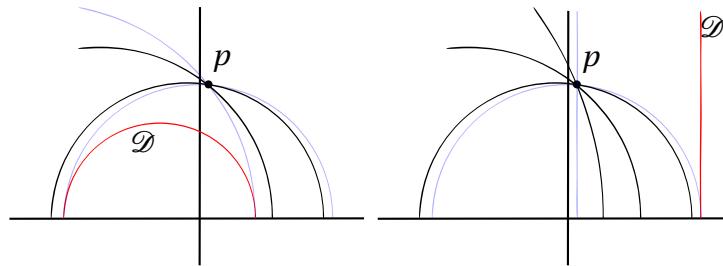


Aksjomat hiperboliczny

Łatwo podać przykład wskazujący, że na półpłaszczyźnie Poincarégo obowiązuje hiperboliczny aksjomat o równoległych. Jest pradziwe nawet bardziej ogólne twierdzenie:

Twierdzenie 14.4. *Niech \mathcal{D} będzie prostą hiperboliczną na półpłaszczyźnie Poincarégo niech $p \notin \mathcal{D}$ będzie punktem. Wówczas istnieje nieskończoność wielu prostych w \mathcal{H} przechodzących przez punkt p i rozłącznych z \mathcal{D} .*

Dowód: Dowód wynika ze sformalizowania poniższych dwóch rysункów.



Proste zaznaczone na niebiesko, które spotykają się z prostą D w nieskończoności nazywamy **ultra-równoległymi**. \square

Aksjomat Pascha

Lemat 14.5. *Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ są dwoma różnymi punktami pół-płaszczyzny Poincarégo, to dla dowolnej prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ zachodzi równoważność:*

$$(\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset) \iff (f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \leq 0).$$

Twierdzenie 14.6 (Aksjomat Pascha). *Jeśli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ są dowolnymi punktami półpłaszczyzny Poincarégo nieleżącymi na jednej prostej hiperbolicznej oraz pewna prosta hiperboliczna \mathcal{D} przecina jeden z odcinków hiperbolicznych $[AB]$, $[BC]$ lub $[CA]$, to przecina ona jeszcze co najmniej jeden z nich.*

Dowód: Przypuśćmy, że $\mathcal{D} \cap [AB] \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{D} \cap [BC] = \emptyset$ i $\mathcal{D} \cap [CA] = \emptyset$. Wówczas na mocy poprzedniego lematu (14.5) mamy

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) &\leq 0, \\ f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) &> 0, \\ f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) &> 0. \end{aligned}$$

Mnożąc stronami dwie ostatnie nierówności dostajemy w wyniku nierówność

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) \cdot (f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2 > 0.$$

Dzieląc przez $(f_{\mathcal{D}}(x_3, y_3))^2$ otrzymujemy

$$f_{\mathcal{D}}(x_1, y_1) \cdot f_{\mathcal{D}}(x_2, y_2) > 0,$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności. \square

14.5 Symetrie hiperboliczne

Z każdą prostą hiperboliczną można stwarzyszyć przekształcenie wzorowane na symetrii osiowej z płaszczyzny euklidesowej.

Definicja 14.7. *Symetrią hiperboliczną względem prostej hiperbolicznej $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ nazywamy:*

- jeśli \mathcal{D} dana jest równaniem $x = x_0$: obcięcie do \mathcal{H} **symetrii osiowej** względem prostej w \mathbb{R}^2 o równaniu $x = x_0$, lub

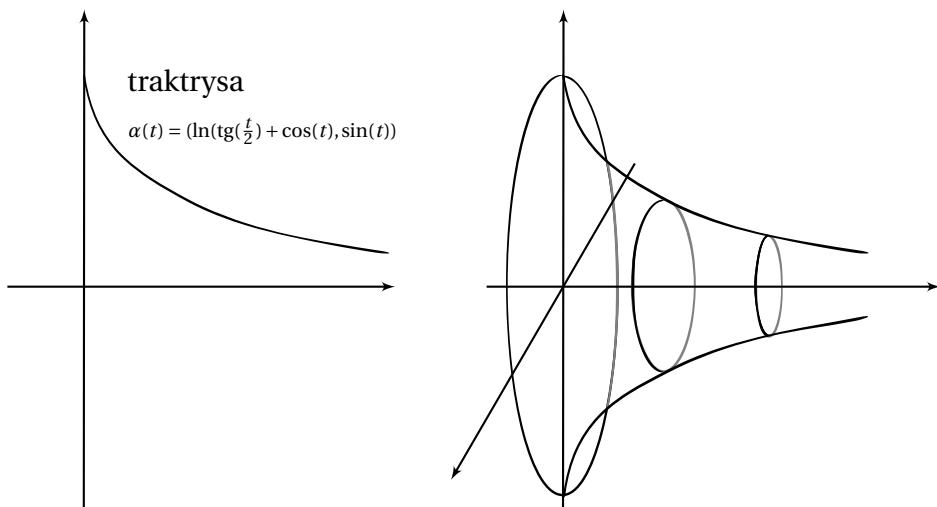
- jeśli \mathcal{D} dana jest równaniem $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$: obcięcie do \mathcal{H} **inwersji** względem okręgu w \mathbb{R}^2 mającego równanie $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

W następnym wykładzie pokażemy, że te symetrie są *izometriami* półpłaszczyzny Poincarégo.

15

Powierzchnie o stałej krzywiźnie

Istnieje przykład powierzchni pseudosfery (powstającej przez obrót traktrysy – krzywej pościgu), o stałej krzywiźnie równej -1 , jednak ta powierzchnia nie jest zamknięta i nie ma sposobu, aby ją zamknąć nie zaburzając krzywizny.



W roku 1901 D. Hilbert udowodnił, że zamknięta powierzchnia o ujemnej i stałej krzywiźnie nie może być zanurzona (gładko!) w \mathbb{R}^3 . Wspomnialiśmy jednak wcześniej (przy definicji powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$), że powierzchnia może funkcjonować jako abstrakcyjny twór bez konkretnego zanurzenia. Co więcej, aby policzyć symbole Christoffela, krzywiznę, oraz wyznaczyć geodezyjne wystarczy, że będziemy jej znać pierwszą formę podstawową.

15.1 Geometria różniczkowa płaszczyzny Poincarégo

Definicja 15.1. Płaszczyznę hiperboliczną \mathcal{H} definiujemy jako półpłaszczyznę

$$\mathcal{H} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\},$$

wyposażoną w pierwszą formę podstawową

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{I(u, v)\}_{(u, v) \in \mathcal{H}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{bmatrix} \right\}$$

Korzystając teraz z odpowiednich wzorów (lemat ??) możemy znaleźć symbole Christoffela:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0 & \Gamma_{11}^2 &= \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{22}} = \frac{1}{v} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{\frac{\partial g_{11}}{\partial v}}{2g_{11}} = -\frac{1}{v} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{22}} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial u}}{2g_{11}} = 0 & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\frac{\partial g_{22}}{\partial v}}{2g_{22}} = -\frac{1}{v} \end{aligned}$$

Teraz używając jawnej formuły na krzywiznę Gaussa powierzchni (np. z zadania po Theorema Egregium) możemy sprawdzić, że tak zdefiniowana powierzchnia ma stałą krzywiznę równą -1 . W szczególności z lokalnego twierdzenia Gaussa-Bonneta wiemy, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie geodezyjnym jest mniejsza niż π .

15.2 Geodezyjne na płaszczyźnie Poincarégo

Kiedy zdefiniowaliśmy “proste hiperboliczne” naszą motywacją były oczywiście proste na płaszczyźnie wyznaczające najkrótsze drogi pomiędzy punktami. Pokażemy teraz, że te “proste hiperboliczne” są właśnie geodezyjnymi na płaszczyźnie hiperbolicznej.

Niech $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ będzie geodezyjną w \mathcal{H} . Wtedy równania geodezyjnych są następujące:

$$\begin{aligned} u''(t) - \frac{2}{v(t)} u'(t) v'(t) &= 0 \\ v''(t) + \frac{1}{v(t)} ((u'(t))^2 - (v'(t))^2) &= 0. \end{aligned}$$

Oczywiście jednym z rozwiązań jest $u(t) = \text{const}$, przez co otrzymujemy półproste prostopadłe do osi OX .

Zadanie. Pokazać, że wtedy te proste mają parametryzację

$$v(t) = C_1 e^{C_2 t}.$$

Przyjmijmy teraz, że $u(t) \neq \text{const}$, zatem $u'(t) \neq 0$ i spróbujmy wyznaczyć v jako funkcję $u(t)$. Mamy

$$\frac{d[v(u(t))]}{dt} = \frac{d[v(u(t))]}{du(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad \text{więc} \quad \frac{v'(u(t))}{u'(t)} = \frac{dv(u(t))}{du(t)}$$

gdzie notację primową rezerwujemy dla pochodnej po t . Stosując teraz regułę łańcuchową otrzymujemy (sprawdzić!)

$$\begin{aligned} \frac{d^2[v(u)]}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{v'(u)}{u'} \right) = \\ &= \frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'}. \end{aligned}$$

Podstawmy teraz drugie pochodne wyliczone z równań geodezyjnych:

$$\frac{u'v''(u) - v'(u)u''}{(u')^2} \cdot \frac{1}{u'} = \frac{1}{(u')^3} \left[u' \left(\frac{1}{v} ((v')^2 - (u')^2) \right) - v' \left(\frac{2}{v} u' v' \right) \right],$$

i uprośćmy to wyrażenie otrzymując

$$\begin{aligned} &= \frac{u'}{(u')^3} \cdot \frac{1}{v} [((v')^2 - (u')^2) - 2(v')^2] = \\ &= -\frac{1}{v} \left[1 + \left(\frac{v'}{u'} \right)^2 \right] = \frac{-1}{v} \left(1 + \left(\frac{dv(u)}{du} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Zatem

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} = -1 - \left(\frac{dv(u)}{du} \right)^2;$$

$$v \frac{d^2 v(u)}{du^2} + \left(\frac{dv(u)}{du} \right)^2 = \frac{d}{du} \left(v \frac{dv(u)}{du} \right) = -1,$$

i całkując to równanie dwukrotnie otrzymujemy wreszcie rozwiązanie

$$v^2(u) = -u^2 + C_1 u + C_2.$$

Jest to, jak można łatwo zauważyc (pamiętając, że $v > 0$) równanie półokręgu przesunięte o pewien wektor $[C, 0]$.

Uwaga. Jeśli pierwsze współrzędne punktów P i Q są równe, to geodezyjną je łączącą jest zwykła prosta. Jeśli pierwsze współrzędne nie są równe, wtedy istnieje dokładnie jeden okrąg o środku na osi OX na którym leżą oba punkty. W każdym przypadku widzimy, że na płaszczyźnie hiperbolicznej każde dwa punkty P i Q łączy dokładnie jedna krzywa geodezyjna.

15.3 Metryka hiperboliczna

Obliczymy teraz długość geodezyjną na powierzchni hiperbolicznej, $d_{\mathcal{H}}(P, Q)$ łączącej punkty P i Q .

Przypomnijmy wcześniej lemat wiążący długość krzywej na powierzchni z pierwszą formą podstawową:

Lemat 15.2. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką i niech $x: U \rightarrow M$ będzie lokalnym układem współrzędnych. Rozważmy krzywą gładką $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset U$. Wtedy długość obrazu krzywej $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} x \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ jest równa

$$L(\bar{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt,$$

co można bezpośrednio zapisać:

$$\int_a^b \sqrt{(\alpha'_1)^2 g_{11}(\alpha(t)) + 2\alpha'_1 \alpha'_2 g_{12}(\alpha(t)) + (\alpha'_2)^2 g_{22}(\alpha(t))} dt.$$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

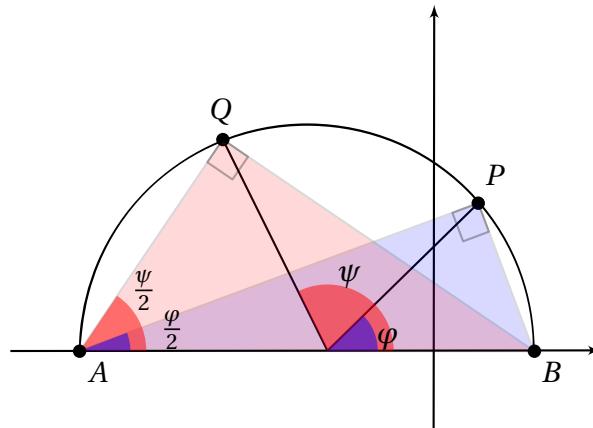
- Geodezyjna łącząca punkty jest odcinkiem pionowej prostej $u = u_0$, tj. $P = (u_0, a)$ i $Q = (u_0, b)$. Wtedy przy parametryzacji $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (u_0, t)$ otrzymujemy:

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{t^2} \underbrace{(\alpha'_1(t))^2}_{=0} + \frac{1}{t^2} \underbrace{(\alpha'_2(t))^2}_{=1}} dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a}.$$

Widzimy, że jeśli P zbliża się do osi OX jego odległość od ustalonego Q dąży do ∞ .

- Niech teraz geodezyjna łącząca punkty P i Q będzie łukiem okręgu $(u_0 + r \cos t, r \sin t)$ i niech φ i ψ będą kątami wyznaczonymi przez te punkty. Wtedy

$$\begin{aligned}
 d_{\mathcal{H}}(P, Q) &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin^2 t + \frac{1}{r^2 \sin^2 t} r^2 \cos^2 t} dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\varphi}^{\psi} \frac{dt}{\sin t} \right| = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|_{\varphi}^{\psi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right|
 \end{aligned}$$



Analizując powyższy rysunek łatwo dostrzec, że ten iloraz jest równy

$$d_{\mathcal{H}}(P, Q) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right| = \left| \ln \left(\frac{d_{\mathcal{E}}(A, P)}{d_{\mathcal{E}}(B, P)} \Big/ \frac{d_{\mathcal{E}}(A, Q)}{d_{\mathcal{E}}(B, Q)} \right) \right|$$

gdzie $d_{\mathcal{E}}$ oznacza zwykłą odległość euklidesową.

15.4 Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Przypomnijmy, że grupa izometrii danej powierzchni M składała się ze wszystkich dyfeomorfizmów $f: M \rightarrow M$ które zachowują pierwszą formę podstawową. Podczas dowodu twierdzenia klasyfikacyjnego dla krzywych mieliśmy do czynienia z działaniem grupy $E(3)$. Grupa izometrii sfery S^2 jest równa dokładnie $SO(3)$.

Izometrie płaszczyzny Poincarégo

Teraz zajmiemy się grupą izometrii płaszczyzny hiperbolicznej.

Rozważmy $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}$,

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

jako podzbiór płaszczyzny zespolonej utożsamiając punkt (u, v) z liczbą $u + iv$.

Definicja 15.3. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $ad - bc = 1$. Zdefiniujmy odpowiadającą im **specjalną transformację Möbiusa** jako funkcję $T_{c,d}^{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zadaną wzorem

$$T_{c,d}^{a,b}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{az + b}{cz + d}.$$

Twierdzenie 15.4. Niech $T_{c,d}^{a,b}(z)$ będzie specjalną transformacją Möbiusa. Wtedy

- $T_{c,d}^{a,b} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ jest bijekcją.
- składanie specjalnych funkcji Möbiusa odpowiada mnożeniu macierzy

$$T_{C,D}^{A,B} \circ T_{c,d}^{a,b} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

więc specjalne transformacje Möbiusa tworzą grupę.

- Każda specjalna transformacja Möbiusa jest izometrią płaszczyzny Poincarégo.

Uwaga. Wszystkie transformacje Möbiusa tworzą grupę $PGL(2, \mathbb{R})$. Jest to iloraz grupy liniowej $GL(2, \mathbb{R})$ przez podgrupę normalną $H = \{I, -I\}$. Specjalne transformacje są jej podgrupą wyznaczoną przez równanie $\det = 1$ są oznaczane $PSL(2, \mathbb{R})$.

Udowodnimy tylko trzecie stwierdzenie, pierwsze dwa jako proste pozostawiamy jako zadania.

Dowód:

Niech $z = u + iv$ oraz niech $T(z) = x + iy$. Musimy sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{T(z)}(DT, DT).$$

Musimy więc znaleźć $\frac{\partial T}{\partial u} = T_u$ i $\frac{\partial T}{\partial v} = T_v$ w punkcie $T(z) = x + iy$.

$$\begin{aligned} T(z) = \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \dots = \\ &= \frac{(ac(u^2 + v^2) + u + bd)}{|cz + d|^2} + i \frac{v}{|cz + d|^2} = x + iy. \end{aligned}$$

Zatem $y = \frac{v}{|cz + d|^2}$. Traktując $T(z)$ jako funkcję jednego argumentu możemy łatwo policzyć jej pochodną:

$$\frac{dT(z)}{dz} = \frac{a(cz + d) - c(az + d)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Z drugiej strony jest to funkcja zespolona, więc spełnia równania Cauchyego-Riemanna:

$$\begin{aligned} \frac{dT(z)}{dz} &= \frac{\partial \Re T(z)}{\partial u} + i \frac{\partial \Im T(z)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = T_u \\ \frac{dT(z)}{dz} &= -i \frac{\partial \Re T(z)}{\partial v} + \frac{\partial \Im T(z)}{\partial v} = -i \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} = -iT_v \end{aligned}$$

Policzmy teraz pierwszą formę podstawową na wektorze T_u . Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_u) &= \frac{1}{y^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] = \frac{1}{y^2} |T'(z)|^2 = \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{(cz + d)^4} = \frac{1}{v^2} = g_{11} \end{aligned}$$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{I}_{T(z)}(T_v, T_v) = \frac{1}{v^2} = g_{22}.$$

Wreszcie z równań Cauchyego-Riemanna wynika, że

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T(z)}(T_u, T_v) &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \left(-\frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0 = g_{12} \end{aligned}$$

□

Zadanie. Pokazać, że specjalne transformacje Möbiusa przenoszą geodezyjne na geodezyjne.

Podpowiedź: Pokazać, że następujące macierze generują grupę $PSL(2, \mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Następnie zinterpretować geometrycznie działanie poszczególnych macierzy.

15.5 Torusy o stałej krzywiźnie

Widzieliśmy wcześniej, że Twierdzenie Gaussa-Bonneta ujawnia głębokie związki między całkowitą krzywizną powierzchni a jej własnościami topologiczno-kombinatorycznymi (charakterystyka Eulera). W szczególności wynika z niego, że gładkie zanurzenie sfery w przestrzeń euklidesową musi mieć całkowitą krzywiznę dokładnie taką samą jak standardowa (okrągła) sfera (czyli 4π).

Torusy o stałej krzywiźnie

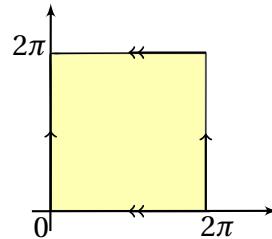
Zadanie. Jak wyglądają geodezyjne na torusie? Wskazać przykład triangulacji (najlepiej geodezyjnej) na torusie. Sprawdzić, że charakterystyka Eulera torusa jest równa 0.

Zatem (ponownie na podstawie twierdzenia Gaussa-Bonneta) jeśli powierzchnia M jest homeomorficzna z torusem T^2 , wtedy jej całkowita krzywizna musi być równa $2\pi\chi(T^2) = 0$.

Oczywiście nie istnieje gładkie zanurzenie *plaskiego* torusa w \mathbb{R}^3 (tj. o stałej krzywiźnie równej 0) (pokażemy to później). Możemy jednak w łatwy sposób wskazać płaskie zanurzenie T^2 w przestrzeń \mathbb{R}^4 ! Na początek przypomnijmy, że torus może być utożsamiony z $S^1 \times S^1$. Wtedy sposób zanurzenia na 4 współrzędne jest narzucający się.

Rozważmy kwadrat $U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Niech $x: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie określone wzorem

$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$$



Zauważmy, że funkcje \cos i \sin we wzorze powyżej wyrażają utożsamienie przeciwnieległych brzegów kwadratu.

Niezrażeni faktem, że tym razem x_1 i x_2 mają po 4 współrzędne możemy policzyć współczynniki metryczne:

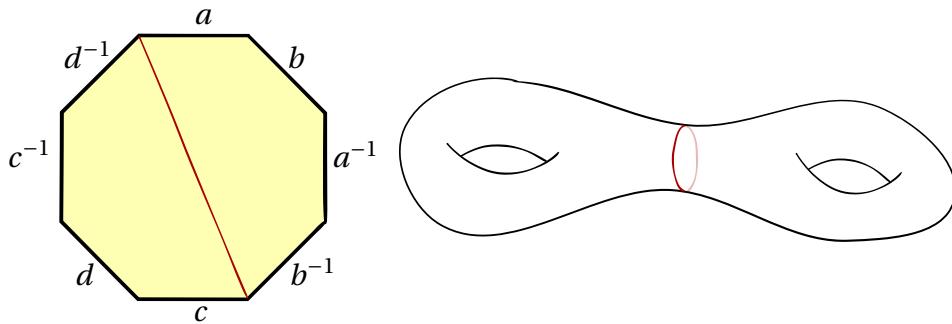
$$g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 = 1$$

$$g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2 = 1,$$

zatem nasz torus zanurzony w \mathbb{R}^4 jest faktycznie lokalnie izometryczny z płaszczyzną (więc płaski).

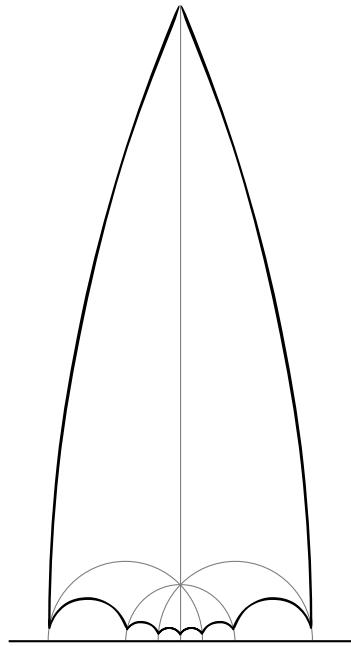
Torus genusu g



Jeśli utożsamimy opisane krawędzie 8-kąta zgodnie z przypisaną im orientacją, wtedy otrzymamy podwójny torus po prawej stronie. Można pokazać (sprawdzić!), że charakterystyka Eulera podwójnego torusa wynosi -2 (ogólnie: dla torusa genusu g to $2 - 2g$).

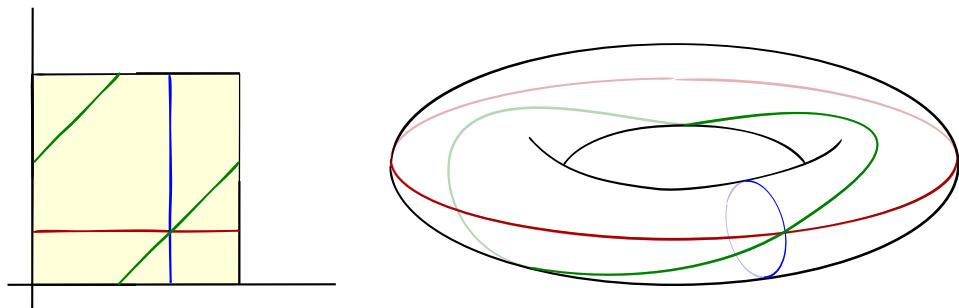
Na mocy twierdzenia Gaussa-Bonneta taki torus będzie miał krzywiznę całkowitą równą $-4\pi g$ więc możemy zapytać o zanurzenie o *stałej* krzywiznie ujemnej, równej -1 . Wystarczy znaleźć **foremny** $4g$ -kąt foremny zanurzony na płaszczyźnie hiperbolicznej o **sumie kątów wewnętrznych równej** 2π . Wtedy utożsamienie odpowiednich boków da nam 2-torus o krzywiznie indukowanej z \mathcal{H} ($= -1$).

Uwaga. *Nakładamy warunek na sumę kątów wewnętrznych ($= 2\pi$) żeby po odpowiednim utożsamieniu brzegów otrzymać gładką powierzchnię. Jeśli coś podobnego spójbujemy zrobić na płaszczyźnie Euklidesowej otrzymana powierzchnia nie będzie gładka! (co dzieje się wokół wierzchołka??)*



Płaski torus w \mathbb{R}^3

Standardowe zanurzenie torusa w przestrzeni \mathbb{R}^3 (jako powierzchni obrotowej) nie jest izometrią. Aby się o tym przekonać, wystarczy spojrzeć na linie parametru u i v aby zobaczyć, że ich obrazy (tj. południki i równoleżniki) są różnej długości.

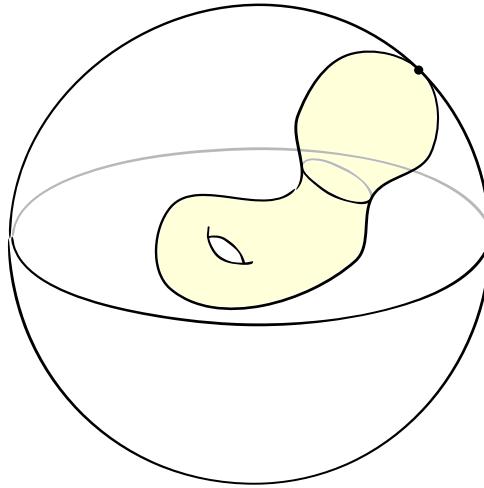


To oczywiście nie dowodzi, że płaskie zanurzenie torusa w \mathbb{R}^3 nie istnieje.

Twierdzenie 15.5. *Nie istnieje gładkie zanurzenie płaskiego torusa w \mathbb{R}^3 które zachowuje odległości. W szczególności żadne zanurzenie płaskiego torusa w \mathbb{R}^3 nie jest lokalną izometrią.*

Dowód:

Założymy przez moment, że takie zanurzenie istnieje. Ponieważ torus jest zowany, więc obraz jego zanurzenia będzie również zbiorem zwartym, więc ograniczonym. Niech K_R oznacza kulę o promieniu R , która zawiera w sobie obraz tego zanurzenia. Możemy tak wybrać środek tej kuli oraz promień R , żeby torus i sfera (będąca brzegiem kuli) stały się wewnętrznie styczne.



W punkcie styczności oczywiście współczynniki metryczne są takie same, więc krzywizny tych powierzchni muszą być takie same. Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ krzywizna torusa miała być $\equiv 0$ zaś krzywizna sfery jest $\equiv \frac{1}{R} > 0$. \square

Uwaga. W ostatniej części tego wykładu zawiesimy jak dotąd zawsze obowiązujące założenie o gładkości (C^∞) wszystkich odwzorowań.

Twierdzenie 15.6 (J. Nash (1954), M. Gromov (1986), M. Günther (1990)). *Niech M będzie powierzchnią klasy C^k ($3 \leq k \leq \infty$). Istnieje wówczas $n \geq 5$ oraz zanurzenie klasy C^k*

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

które jest izometrią na swój obraz.

Twierdzenie 15.7 (J. Nash (1954), N. Kuiper (1955)). *Niech M będzie powierzchnią i niech $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie gładkim zanurzeniem dla pewnego $n \geq 3$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zanurzenie*

$$f_\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

takie, że

- f_ε jest klasa C^1 ,
- f_ε jest izometrią, oraz
- f_ε przybliża zanurzenie f z dowolną dokładnością: dla wszystkich $x \in M$

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ krzywizna Gaussa dla powierzchni klasy C^1 nie jest zdefiniowana. Wobec tego izometryczność definiujemy następującą własnością:

$$\mathcal{I}^M(u, v) = \langle Df_\varepsilon(u), Df_\varepsilon(v) \rangle.$$

Postaramy się zobrazować teraz to zanurzenie klasy C^1 torusa w \mathbb{R}^3 .

Rysunki płaskiego zanurzenia torusa w \mathbb{R}^3 pochodzą z pracy: Borrelli V., Jabrane S., Lazarus F., and Thibert B., *Flat tori in three-dimensional space and convex integration*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 2012

Zaczynamy od standardowego za-nurzenia torusa jako powierzchni obrotowej



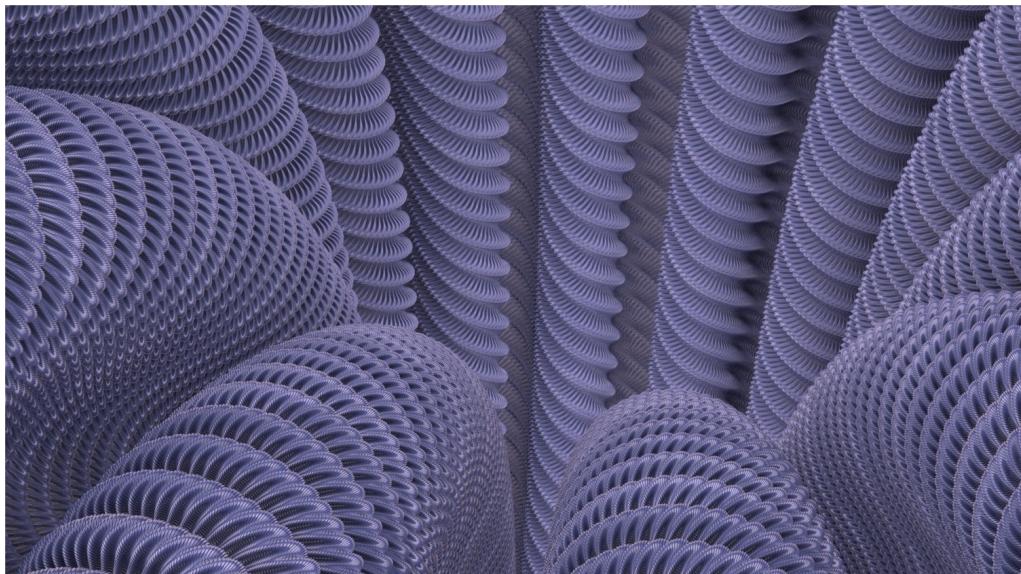
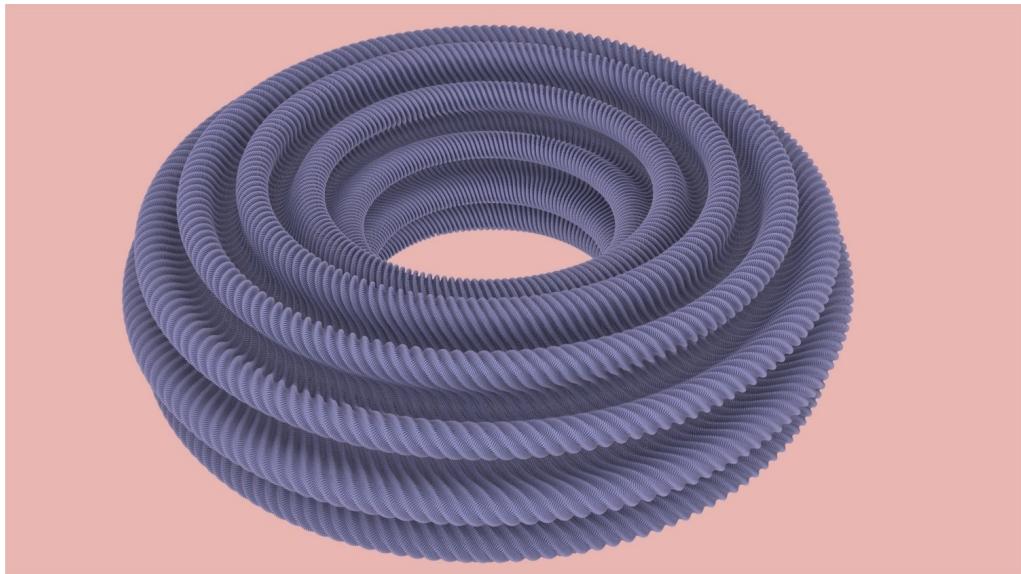
Ponieważ południki są znacznie krótsze niż równoleżniki, wprowadzamy zaburzenia wzdłuż równoleżników (falowanie).



Teraz południki są faktycznie dłuższe, ale równoleżniki są (były) różnej długości, więc wprowadzamy drugi poziom falowania (mniejsza amplituda, a większa częstotliwość), aby wyrównać te różnice.



itd...



- Chociaż wszystkie kroki można wykonać w klasie C^2 , proces ten kontynuujemy w nieskończoność, więc ostateczne zanurzenie jako granica tych odwzorowań może być tylko klasy C^1 .
- Odwzorowanie klasy C^1 oznacza, że przestrzeń styczna jest w każdym punkcie zdefiniowana, lecz wektor normalny może zdradzać „dziwaczne” zachowanie (w przypadku tego zanurzenia – fraktalne).

- Jednocześnie na rysunku poniżej widzimy, że południki i równoleżniki uzyskały tę samą długość.

