Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1] Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 4

Twierdzenie klasyfikacyjne dla krzywych

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną.

- *Translacja krzywej α, tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.*
- *Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną.*

- *Translacja krzywej* α*, tj. krzywa* $\beta = \alpha + q$*, gdzie* $q \in \mathbb{R}^3$ *jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak* α*.*
- *Niech* $A \in O(3)$ *będzie macierzą* 3×3 *o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku* ± 1 *oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α*.*

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną.*

- *Translacja krzywej* α*, tj. krzywa* $\beta = \alpha + q$*, gdzie* $q \in \mathbb{R}^3$ *jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak* α*.*
- *Niech* $A \in O(3)$ *będzie macierzą* 3×3 *o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku* ± 1 *oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A \cdot \alpha$$

  ma taką samą krzywiznę i torsję jak α*.*

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną.

- *Translacja krzywej α, tj. krzywa $\beta = \alpha + q$, gdzie $q \in \mathbb{R}^3$ jest wybranym stałym wektorem ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.*
- *Niech $A \in O(3)$ będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, o wyznaczniku ± 1 oraz ortnormalnych kolumnach. Krzywa*

$$\gamma \overset{def.}{=} A \cdot \alpha$$

ma taką samą krzywiznę i torsję jak α.

Uwaga

Dowód pierwszej części jest bardzo prosty. Dowód drugiej pozostawiamy jako bardziej ambitne zadanie.

Mnożenie przez taką macierz A oznacza obrót wokół środka układu współrzędnych, symetrię względem płaszczyzny, lub kombinację tych dwóch. Grupa $O(3)$ to tzw. grupa symetrii $\mathbb{R}^3$ i jej bazę stanowią macierze obrotów o dowolny kąt wokół każdej z osi, oraz macierz symetrii względem (dowolnie wybranej) płaszczyzny zawierającej punkt $(0, 0, 0)$.

Uwaga

Te dwie operacje definiują nam relację równoważności pomiędzy wykresami krzywych w $\mathbb{R}^3$*. Krzywą* α *uznajemy za równoważną krzywej* β*, jeśli wykres* β *można otrzymać przez zastosowanie odpowiednich translacji, obrotów i symetrii do wykresu* α*.*

Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

Niech $\kappa, \tau \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *będą gładkimi funkcjami, oraz niech* $\kappa(t) > 0$ *dla wszystkich* $t \in (a, b)$*. Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*

$$\alpha \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3,$$

  że jej krzywizna κ_α *i torsja* τ_α *są tożsamościowo równe funkcjom* κ *oraz* τ*.*

- *Jeśli*

$$\beta \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

  jest drugą taką krzywą, to krzywą β *można uzyskać z* α *stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*.*

Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

Niech $\kappa, \tau : (a, b) \to \mathbb{R}$ *będą gładkimi funkcjami, oraz niech* $\kappa(t) > 0$ *dla wszystkich* $t \in (a, b)$. *Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*

$$\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3,$$

  że jej krzywizna κ_α *i torsja* τ_α *są tożsamościowo równe funkcjom* κ *oraz* τ.

- *Jeśli*

$$\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

  jest drugą taką krzywą, to krzywą β *można uzyskać z* α *stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie (Klasyfikacyjne)

Niech $\kappa, \tau \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ *będą gładkimi funkcjami, oraz niech* $\kappa(t) > 0$ *dla wszystkich* $t \in (a, b)$. *Wówczas zachodzą następujące stwierdzenia.*

- *Istnieje taka krzywa gładka*

$$\alpha \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3,$$

  że jej krzywizna κ_α *i torsja* τ_α *są tożsamościowo równe funkcjom* κ *oraz* τ.

- *Jeśli*

$$\beta \colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

  jest drugą taką krzywą, to krzywą β *można uzyskać z* α *stosując przesunięcia obroty i symetrie w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha\colon(a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Szkic dowodu:

Niech $p \in (a, b)$. Pokażemy, że istnieje dokładnie jedyna krzywa unormowana $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{oraz}$$

$$T_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o zadanej krzywiźnie i torsji (dlaczego to wystarczy?).

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla ``}T' = \kappa N\text{'',}$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla ``}B' = -\tau N\text{'',}$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla ``}N' = -\kappa T + \tau B\text{''.}$$

$$\begin{aligned} u_1(p) &= 1 & u_4(p) &= 0 & u_7(p) &= 0 \\ u_2(p) &= 0 & u_5(p) &= 1 & u_8(p) &= 0 \\ u_3(p) &= 0 & u_6(p) &= 0 & u_9(p) &= 1 \end{aligned}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla ``}T' = \kappa N\text{''},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla ``}B' = -\tau N\text{''},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{dla ``}N' = -\kappa T + \tau B\text{''}.$$

$$\begin{array}{lll} u_1(p) = 1 & u_4(p) = 0 & u_7(p) = 0 \\ u_2(p) = 0 & u_5(p) = 1 & u_8(p) = 0 \\ u_3(p) = 0 & u_6(p) = 0 & u_9(p) = 1 \end{array}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla "}T' = \kappa N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla "}B' = -\tau N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{dla "}N' = -\kappa T + \tau B\text{"}.$$

$$\begin{matrix} u_1(p) = 1 & u_4(p) = 0 & u_7(p) = 0 \\ u_2(p) = 0 & u_5(p) = 1 & u_8(p) = 0 \\ u_3(p) = 0 & u_6(p) = 0 & u_9(p) = 1 \end{matrix}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla “}T' = \kappa N\text{”,}$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla “}B' = -\tau N\text{”,}$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{ dla “}N' = -\kappa T + \tau B\text{”.}$$

$$\begin{matrix} u_1(p) = 1 & u_4(p) = 0 & u_7(p) = 0 \\ u_2(p) = 0 & u_5(p) = 1 & u_8(p) = 0 \\ u_3(p) = 0 & u_6(p) = 0 & u_9(p) = 1 \end{matrix}$$

Dowód polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych zadanego przez równania Freneta wraz z warunkiem początkowym zadanym powyżej:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= \kappa(t)u_4(t) \\ u_2'(t) &= \kappa(t)u_5(t) \\ u_3'(t) &= \kappa(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla "} T' = \kappa N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_7'(t) &= \tau(t)u_4(t) \\ u_8'(t) &= \tau(t)u_5(t) \\ u_9'(t) &= \tau(t)u_6(t) \end{aligned}\right\} \text{dla "} B' = -\tau N\text{"},$$

$$\left.\begin{aligned} u_4'(t) &= -\kappa(t)u_1(t) + \tau(t)u_7(t) \\ u_5'(t) &= -\kappa(t)u_2(t) + \tau(t)u_8(t) \\ u_6'(t) &= -\kappa(t)u_3(t) + \tau(t)u_9(t) \end{aligned}\right\} \text{dla "} N' = -\kappa T + \tau B\text{"}.$$

$$\begin{aligned} u_1(p) &= 1 \qquad & u_4(p) &= 0 \qquad & u_7(p) &= 0 \\ u_2(p) &= 0 & u_5(p) &= 1 & u_8(p) &= 0 \\ u_3(p) &= 0 & u_6(p) &= 0 & u_9(p) &= 1 \end{aligned}$$

Twierdzenie (Picarda, o istnieniu i jedyności rozwiązania równania różniczkowego)

Niech $(a, b) \subset \mathbb{R}$*, oraz niech* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$*. Ustalmy liczbę* $t_0 \in (a, b)$ *i punkt* $v_0 \in \mathbb{R}^n$*. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka* $\omega\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *która spełnia*

$$\begin{aligned} \omega(t_0) &= v_0, \quad \text{oraz} \\ \omega'(t) &= A\omega(t) \quad \text{dla wszystkich } t \in (a, b). \end{aligned}$$

Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać ω, A, t_0 i v_0).

Twierdzenie (Picarda, o istnieniu i jedyności rozwiązania równania różniczkowego)

Niech $(a, b) \subset \mathbb{R}$, *oraz niech* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. *Ustalmy liczbę* $t_0 \in (a, b)$ *i punkt* $v_0 \in \mathbb{R}^n$. *Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja gładka* $\omega : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *która spełnia*

$$\begin{aligned} \omega(t_0) &= v_0, \quad \textit{oraz} \\ \omega'(t) &= A\omega(t) \quad \textit{dla wszystkich } t \in (a, b). \end{aligned}$$

Zadanie

Przepisać sformułowanie naszego problemu tak, aby zastosować do niego powyższe twierdzenie (podać ω, A, t_0 i v_0).

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym.
Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.

Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Na mocy powyższego twierdzenia istnieją więc trzy wektory (albo 9 funkcji)

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(t), \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}(t), \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}(t).$$

spełniające nasz układ wraz z warunkiem początkowym. Możemy myśleć o nich jako o $\{T, N, B\}$ dla krzywej która realizuje κ jako krzywiznę i τ jako torsję.
Aby pokazać, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzą bazę ortogonalną dla wszystkich $t \in (a, b)$ posłużymy się następującą funkcją:

$$p_{i,j}(t) = \langle X_i(t), X_j(t) \rangle, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Oczywiście mamy (warunek początkowy na X_1, X_2 i X_3)

$$p_{i,j}(p) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Zadanie

Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji $p'_{i,j}(t)$ z funkcjami $\{p_{i,j}(t)\}$ oraz $\kappa(t)$ i $\tau(t)$.

Przykład

$$\begin{aligned} p'_{1,1}(t) &= (\langle X_1(t), X_1(t)\rangle)' = \\ &= \langle \underbrace{X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}, X_1(t)\rangle + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}\rangle = \\ &= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t). \end{aligned}$$

Zadanie

Sformułować układ równań wiążących pochodne funkcji $p'_{i,j}(t)$ z funkcjami $\{p_{i,j}(t)\}$ oraz $\kappa(t)$ i $\tau(t)$.

Przykład

$$\begin{aligned} p'_{1,1}(t) &= (\langle X_1(t), X_1(t)\rangle)' = \\ &= \langle \underbrace{X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}, X_1(t)\rangle + \langle X_1(t), \underbrace{X'_1(t)}_{=\kappa(t)X_2(t)}\rangle = \\ &= \kappa(t)p_{2,1}(t) + \kappa(t)p_{1,2}(t). \end{aligned}$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.
Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\; ds.$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.

Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.

Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Uzyskany układ wraz z warunkami początkowymi (4.1) ponownie posiada *jednoznaczne* rozwiązanie na mocy twierdzenia cytowanego powyżej. Można sprawdzić, że delta Kroneckera

$$\delta_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

spełnia otrzymany układ, a zatem jest jedynym rozwiązaniem. Z definicji $p_{i,j}(t)$ wynika, że $\{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$ tworzy bazę ortogonalną dla wszystkich t.
Możemy wreszcie zdefiniować

$$\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_p^t X_1(s)\, ds.$$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) &= \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) &= \tau(t) X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.
Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

$\square$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\alpha'(t) = T_\alpha(t) = X_1(t)$$

$$\alpha''(t) = \kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) = \kappa(t)X_2(t)$$

$$|\tau_\alpha(t)|B_\alpha(t) = \tau(t)X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

$\square$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\alpha'(t) = T_\alpha(t) = X_1(t)$$
$$\alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t)$$
$$|\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) = \tau(t) X_3(t).$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

$\square$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) = \kappa_\alpha(t)N_\alpha(t) &= \kappa(t)X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)|B_\alpha(t) &= \tau(t)X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

□

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) &= \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) &= \tau(t) X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

□

Łatwo można sprawdzić, że dla tak zdefiniowanej krzywej zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= T_\alpha(t) = X_1(t) \\ \alpha''(t) &= \kappa_\alpha(t) N_\alpha(t) = \kappa(t) X_2(t) \\ |\tau_\alpha(t)| B_\alpha(t) &= \tau(t) X_3(t). \end{aligned}$$

Pozostaje jedynie pokazać, że zgadzają się zwroty wektorów $X_3(t)$ i $B_\alpha(t)$.

Jest to ładny argument wykorzystujący niezdegenerowanie naszego trójnogu, oraz to, że w jednym punkcie (czyli w p) ten zwrot jest taki sam. Zostawiamy to jako zadanie domowe.

$\square$