Elementarna Geometria Różniczkowa

Opracowanie: Marek Kaluba[1]

2013

[1]Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, kalmar@amu.edu.pl

Wykład 3

Niezmienniki krzywych

Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

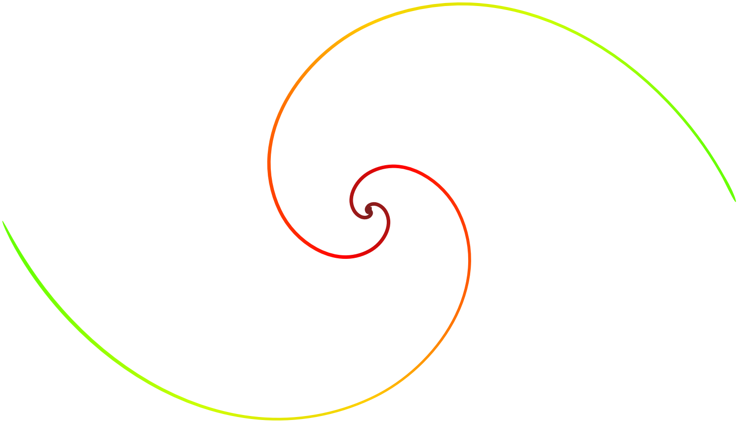
Krzywizna krzywej unormowanej

Definicja

Niech $\alpha\colon(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie (regularną) krzywą unormowaną. Dla każdego $t \in (a, b)$ **krzywiznę** definiujemy jako funkcję $\kappa\colon(a, b) \to \mathbb{R}$

$$\kappa(t) \overset{\text{def.}}{=} \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$$

Zauważmy, że krzywizna jest zawsze nieujemna, $\kappa(t) \geqslant 0$.



Zmiana koloru w zależności od krzywizny

Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech $\alpha\colon(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h\colon(c, d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h\colon(c, d) \to (a, b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t) \overset{\text{def.}}{=} \kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta=\alpha\circ h\colon(c,d)\to\mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h\colon(c,d)\to(a,b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t)\overset{\text{def.}}{=}\kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Krzywizna dowolnej krzywej

Dla regularnych krzywych nieunormowanych możemy posłużyć się odpowiednią reparametryzacją:

Definicja

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz niech $\beta = \alpha \circ h\colon (c, d) \to \mathbb{R}^3$ będzie jej reparametryzacją unormowaną ($h\colon (c, d) \to (a, b)$). Wówczas

$$\kappa_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \kappa_\beta(h^{-1}(t))$$

Czy definicja jest niezależna od wyboru parametryzacji?

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną i niech $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$ będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie $h_1\colon(c_1,d_1)\to(a,b)$, oraz $h_2\colon(c_2,d_2)\to(a,b)$ są dyfeomorfizmami. Jeśli κ_1 i κ_2 oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$, wtedy

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t))=\kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich $t\in(a,b)$.

Wniosek

Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną i niech $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$ będą dwiema reparametryzacjami unormowanymi, gdzie $h_1\colon(c_1,d_1)\to(a,b)$, oraz $h_2\colon(c_2,d_2)\to(a,b)$ są dyfeomorfizmami. Jeśli κ_1 i κ_2 oznaczają krzywizny krzywych odpowiednio $\alpha\circ h_1$ oraz $\alpha\circ h_2$, wtedy

$$\kappa_1(h_1^{-1}(t)) = \kappa_2(h_2^{-1}(t))$$

dla wszystkich $t\in(a,b)$.

Wniosek

Definicja krzywizny dla krzywej nieunormowanej nie zależy od wyboru parametryzacji.

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.
Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 \colon (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Dowód:

Najpierw pokażemy, że h_1 i h_2 (funkcje reparametryzujące do krzywych unormowanych) mogą się różnić jedynie znakiem i przesunięciem, tj. pokażemy, że złożenie

$$h_2^{-1} \circ h_1 : (c_1, d_1) \to (c_2, d_2)$$

jest równe

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C,$$

dla pewnej stałej $C \in \mathbb{R}$.

Dla obu indeksów $i = 1, 2$ i wszystkich $t \in (c_i, d_i)$ mamy

$$1 = \|(\alpha \circ h_i)'(t)\| = \|\alpha'(h_i(t))\| |h_i'(t)|.$$

Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) &= \pm t + C \\ h_1(t) &= h_2(\pm t + C) \\ h_2^{-1}(t) &= h_1^{-1}(\pm t) + C. \end{aligned}$$

Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1}\circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1}\circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right]h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1}\circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\left(h_2^{-1}\circ h_1\right)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C$$
$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$
$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}[h_1(t)]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right]h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) = \pm t + C$$

$$h_1(t) = h_2(\pm t + C)$$

$$h_2^{-1}(t) = h_1^{-1}(\pm t) + C.$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) &= \pm t + C \\ h_1(t) &= h_2(\pm t + C) \\ h_2^{-1}(t) &= h_1^{-1}(\pm t) + C. \end{aligned}$$

Zatem dla wszystkich $t \in (c_1, d_1)$ zachodzi

$$h_1'(t) = \frac{\pm 1}{\|\alpha'(h_1(t))\|} = \frac{\pm 1}{\left\|\alpha'\left(h_2\left(h_2^{-1}\left[h_1(t)\right]\right)\right)\right\|} = \\ = \pm h_2\left[\left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t)\right].$$

Możemy teraz policzyć pochodną funkcji wewnętrznej:

$$(h_2^{-1} \circ h_1)'(t) = \left(h_2^{-1}\right)'\left[h_1(t)\right] h_1'(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2'(h_2^{-1} \circ h_1(t))} = \pm 1$$

Całkując obie strony równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(h_2^{-1} \circ h_1\right)(t) &= \pm t + C \\ h_1(t) &= h_2(\pm t + C) \\ h_2^{-1}(t) &= h_1^{-1}(\pm t) + C. \end{aligned}$$

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

□

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

□

Podstawiając przedostatnią równość do α mamy

$$(\alpha \circ h_1)(t) = (\alpha \circ h_2)(\pm t + C),$$

więc zachodzi również $\kappa_1(t) = \kappa_2(\pm t + C)$. Podstawiając teraz $t = h_1^{-1}(s)$ otrzymujemy

$$\kappa_1(h_1^{-1})(s) = \kappa_2(h_1^{-1}(s) + C) = \kappa_2(h_2^{-1}(s)).$$

$\square$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) = $$
$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną. Wektor normalny do* α *jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy* α *jest prostą.*

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0, 0, 0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\, dt = \left(\int T_1'(t)\, dt, \int T_2'(t)\, dt, \int T_3'(t)\, dt \right) =$$
$$= \left(\int 0\, dt, \int 0\, dt, \int 0\, dt \right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \mathrm{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) = \\ = \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \text{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) =$$

$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1, c_2, c_3) = v = \mathrm{const}.$$

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną. Wektor normalny do α jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prostą.

Dowód:

Bez straty ogólności możemy założyć, że α jest krzywą unormowaną. Załóżmy, że wektor normalny do α jest zerowy,

$$\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = N(t) = (0,0,0).$$

Całkując to równanie otrzymujemy

$$T(t) = \int T'(t)\,dt = \left(\int T_1'(t)\,dt, \int T_2'(t)\,dt, \int T_3'(t)\,dt\right) =$$
$$= \left(\int 0\,dt, \int 0\,dt, \int 0\,dt\right) = (c_1,c_2,c_3) = v = \text{const}.$$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą.

Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. $\square$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. $\square$

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. □

Całkując ponownie mamy

$$\alpha(t) = vt + w,$$

gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$ są ustalonymi wektorami, czyli α jest prostą. Załóżmy teraz, że α jest prostą. Mamy wtedy (postać parametryczna prostej) $\alpha(t) = vt + w$, gdzie $v, w \in \mathbb{R}^3$. Wtedy oczywiście

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

zatem $T'(t) = 0$ więc automatycznie $N(t) = 0$. $\square$

Definicja

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t\in(a,b)$ zachodzi $N(t)\neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t)\rangle .$$

Uwaga

- *Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).*
- *Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, jednak torsja może mieć wartości ujemne.*

Definicja

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a,b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \overset{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t) \rangle.$$

Uwaga

- *Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).*
- *Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, jednak torsja może mieć wartości ujemne.*

Definicja

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną, oraz załóżmy, że dla wszystkich $t \in (a, b)$ zachodzi $N(t) \neq 0$. **Torsję** krzywej α w punkcie t definiujemy jako funkcję

$$\tau(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle B'(t), N(t)\rangle.$$

Uwaga

- *Torsja jest funkcją gładką (wynika to z gładkości iloczynu skalarnego).*
- *Podobnie jak w przypadku krzywizny mamy* $|\tau(t)| = \|B'(t)\|$, *jednak torsja może mieć wartości ujemne.*

Uwaga

Dla wygody od teraz będziemy opuszczać argument t jeśli nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności.

Twierdzenie (Wzory Freneta)

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Niezmienniki krzywych

Krzywizna

Torsja

Wzory Freneta

Wzory ogólne

Twierdzenie (Wzory Freneta)

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie unormowaną krzywą regularną, różną od stałej i prostej (tj. $N(t)\neq 0$ dla wszystkich $t\in(a,b)$). Wówczas zachodzą następujące równości.

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \tag{3.2}$$

$$B' = -\tau N \tag{3.3}$$

co można zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.

Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B \rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B \rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$).
Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$.
Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$).
Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$.
Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N. Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T \rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B \rangle$). Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T \rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B \rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B \rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Dowód:

Wzór 3.1 na T' wynika z przyjętych definicji κ i N.
Ponieważ wektory z repera Freneta są jednostkowe, więc N' jest prostopadły do N. Ponieważ jednak T, N, B tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, więc N' musi być kombinacją liniową wektorów T i B,

$$N' = aT + bB.$$

Mnożąc tę równość skalarnie przez wektor T (odpowiednio B) otrzymujemy $a = \langle N', T\rangle$ (odpowiednio $b = \langle N', B\rangle$).
Wyliczenie a rozpocznijmy od równości $0 = \langle N, T\rangle$.
Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = \langle N', T\rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N\rangle}_{=\kappa},$$

zatem $a = \langle N', T\rangle = -\kappa$. Ponieważ $\langle N, B\rangle = 0$, w podobny sposób możemy stwierdzić, że $\langle N', B\rangle = -\tau$. Pozostawiamy to jako zadanie domowe.

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

$\square$

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

$\square$

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

$\square$

Podobnie B' jest prostopadły do B, $\langle B, B' \rangle = 0$, więc

$$B' = aT + bN.$$

Musimy więc policzyć $a = \langle B', T \rangle$ i $b = \langle B', N \rangle$. Wyliczenie a rozpocznijmy od równości: $0 = \langle B, T \rangle$. Różniczkując obie strony otrzymujemy

$$0 = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, \kappa N \rangle = \langle B', T \rangle.$$

Tak więc B' jest współliniowy z N i równość 3.3 charakteryzująca B' wynika z definicji torsji τ.

$\square$

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Następujące warunki są równoważne.

1. *Zbiór $\alpha(a, b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. *$\tau \equiv 0$.*

Uwaga

*Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.*

Lemat

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Następujące warunki są równoważne.

1. *Zbiór $\alpha(a, b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. $\tau \equiv 0$.

Uwaga

*Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.*

Lemat

Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$. Następujące warunki są równoważne.

1. *Zbiór $\alpha(a, b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. $\tau \equiv 0$.

Uwaga

*Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy **krzywą płaską**.*

Lemat

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ *będzie krzywą unormowaną oraz niech* $N(t)\neq 0$ *dla każdego* $t\in(a,b)$*. Następujące warunki są równoważne.*

1. *Zbiór* $\alpha(a,b)$ *(tj. wykres* α*) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. B *jest wektorem stałym.*
3. $\tau\equiv 0$.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy ***krzywą płaską****.*

Lemat

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą unormowaną oraz niech $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$. Następujące warunki są równoważne.

1. *Zbiór $\alpha(a,b)$ (tj. wykres α) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.*
2. *B jest wektorem stałym.*
3. $\tau \equiv 0$.

Uwaga

Krzywą spełniającą jeden z tych warunków nazywamy ***krzywą płaską****.*

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

Dowód:

$1 \Rightarrow 2$ Jeśli krzywa leży w jednej płaszczyźnie to leżą w niej wektory styczny i normalny (dlaczego?), więc jest to płaszczyzna ściśle styczna. Wtedy kierunek prostopadły do tej płaszczyzny jest współliniowy z B. Zatem B nie zmienia ani zwrotu ani długości.

$2 \Leftrightarrow 3$ wynika ze wzoru Freneta (3.3):

$$B' = -\tau N$$

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

$2 \Rightarrow 1$ Niech $p \in (a, b)$ będzie punktem z dziedziny α.

- Rozważmy funkcję

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle.$$

- Przy założeniu, że $B(t) = B$ jest wektorem stałym, pokażemy, że funkcja f jest tożsamościowo równa 0, z czego wynika, że krzywa α w całości leży w płaszczyźnie normalnej do B i zawierającej punkt $\alpha(p)$.

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle\right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$
$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t) \rangle\right) =$$

$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t) \rangle}_{=\langle T(t), B(t) \rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t) \rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

- Obliczmy

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - \alpha(p), B(t)\rangle\right) =$$
$$= \underbrace{\langle \alpha'(t), B(t)\rangle}_{=\langle T(t), B(t)\rangle = 0} + \underbrace{\langle \alpha(t) - \alpha(p), B'(t)\rangle}_{=0 \text{ bo } B(t) \text{ jest stały}} = 0.$$

- Zatem f jest funkcją stałą. Jeśli podstawimy $t = p$ otrzymamy $f(p) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa 0.

$\square$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon(a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną różną od prostej (tj.* $N(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a, b)$*). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ *będzie krzywą regularną różną od prostej (tj.* $N(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a,b)$*). Wówczas zachodzą następujące wzory:*

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B \times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \tag{3.8}$$

Lemat (Wzory ogólne)

Niech $\alpha\colon(a,b)\to\mathbb{R}^3$ będzie krzywą regularną różną od prostej (tj. $N(t)\neq 0$ dla każdego $t\in(a,b)$). Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \tag{3.4}$$

$$B = \frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.5}$$

$$N = B\times T \tag{3.6}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \tag{3.7}$$

$$\tau = \frac{\langle\alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle}{\|\alpha'\times\alpha''\|} \tag{3.8}$$

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w $\mathbb{R}^3$) i nie zależą od parametryzacji.

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w $\mathbb{R}^3$) i nie zależą od parametryzacji.

Dowód:

Dowód polega na przeliczeniu odpowiednich pochodnych bez zakładania, że α jest krzywą unormowaną. Pozostawiamy go jako ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Powyższy lemat pozwala liczyć trójnóg Freneta, krzywiznę i torsję nie odwołując się do żadnej unormowanej parametryzacji. Dowodzi to, że T, N, B, κ i τ są funkcjami tylko i wyłącznie punktów na krzywej (rozumianej jako obraz wykresu w $\mathbb{R}^3$) i nie zależą od parametryzacji.