Xyba Project

Analisis 2

Pembahasan Kuis 3 SP Tahun 2018

1. This document is version: 0.9.5
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people
2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so
3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016
4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me
5. Last Updated: 16/08/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Misalkan diberikan fungsi $f: [0,3] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:
$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x < 2 \\ 3 & ; \quad x = 2 \\ 1 & ; 2 < x \le 3 \end{cases}$$
Gunakan definisi untuk membuktikan $f \in \mathcal{R}[0,3]$!

2. Misalkan diberikan fungsi $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:
$$h(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in \mathbb{Q} \\ (1-x)^2 & ; x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$
Apakah $h \in \mathcal{R}[0,1]$? Jelaskan.

3. Misalkan diberikan fungsi $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; x \le 0 \text{ atau } x > 1 \\ 1 - 4x & ; \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$
Gunakan Teorema Dasar Kalkulus 1 untuk mencari integral $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$.

4. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan fungsi $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:
$$f_n(x) = (1-x)^n x$$
Selidiki konvergensi dari barisan (f_n) tersebut ke sebuah fungsi f pada himpunan A. Apakah $f_n \rightrightarrows f$ pada A? Jelaskan!

Jawaban

1. Misalkan diberikan fungsi $f:[0,3] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:
$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x < 2 \\ 3 & ; \quad x = 2 \\ 1 & ; 2 < x \le 3 \end{cases}$$
Gunakan definisi untuk membuktikan $f \in \mathcal{R}[0,3]$!

Jawab:
Akan dibuktikan bahwa $f \in \mathcal{R}[0,3]$ dengan definisi yaitu:
$$\exists L \in \mathbb{R} \ni \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta \Rightarrow \left|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \varepsilon$$

Misal diberikan $\delta > 0$. Kita akan restriksi pemilihan δ kemudian.
Pilih $\dot{\mathcal{P}} \ni \|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Maka untuk sembarang $\dot{\mathcal{P}}_k$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}} \Rightarrow \|\dot{\mathcal{P}}_k\| < \delta$.
Misal: $\dot{\mathcal{P}}_1 = \{(I_{1i}, t_{1i}): i = 1,2,\dots,n\}$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{1i} \in [0,2)$
$\dot{\mathcal{P}}_2 = \{(I_{2i}, t_{2i}): i = 1,2,\dots,n\}$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{2i} = 2$
$\dot{\mathcal{P}}_3 = \{(I_{3i}, t_{3i}): i = 1,2,\dots,n\}$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{3i} \in (2,3]$
sedemikian sehingga $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{P}}_1 \cup \dot{\mathcal{P}}_2 \cup \dot{\mathcal{P}}_3$.

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_1$, definisikan tag dari interval $I_{1i} = [x_{i-1}, x_i]$ sebagai $t_{1i} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \in I_{1i}$.
Karena: $0 \le x_{i-1} \le x_i < 2$, maka: $0 \le \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) < 2$, sehingga $t_{1i} \in I_{1i} \subseteq [0,2]$, maka:
$$\begin{aligned} S(f,\dot{\mathcal{P}}_1) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{1i})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} t_{1i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(2^2 - 0^2) = \frac{1}{2}(4 - 0) = \frac{1}{2}(4) = 2 \end{aligned}$$

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_2$, misal $U_2 = \bigcup_{i=1}^{n} I_{2i} = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$ adalah gabungan subinterval di $\dot{\mathcal{P}}_2$.
Akan dibuktikan $\{2\} \subseteq U_2 \subseteq [2, 2+\delta]$… (1)
Jelas bahwa $\{2\} \subseteq U_2$, maka kita hanya perlu membuktikan bahwa $U_2 \subseteq [2, 2+\delta]$.
Ambil $u_2 \in U_2$, maka $\exists I_{2i} = [x_{i-1}, x_i]$ di $\dot{\mathcal{P}}_2$ dengan $t_{2i} = 3$ dan $u_2 \in I_{2i}$.
Sehingga kita peroleh $x_{i-1} \le 2 \le u_2 \le x_i$.
Karena $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta$, maka $x_i - x_{i-1} < \delta \Leftrightarrow x_i < x_{i-1} + \delta$.
Maka $u_2 \le x_i < x_{i-1} + \delta \le 2 + \delta$.
Sehingga kita peroleh $u_2 \in [2, 2+\delta]$.
Maka benar bahwa $U_2 \subseteq [2, 2+\delta]$.
Karena $\{2\} \subseteq U_2$ dan $U_2 \subseteq [2, 2+\delta]$, maka (1) benar.
Karena $f(t_{2i}) = 3$ untuk setiap tag dari $\dot{\mathcal{P}}_2$ dan karena panjang interval di (1) adalah 0 dan δ secara berurutan. Maka kita peroleh:
$$0 \le S(f,\dot{\mathcal{P}}_2) \le 3\delta$$

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_3$, misal $U_3 = \bigcup_{i=1}^{n} I_{3i} = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$ adalah gabungan subinterval di $\dot{\mathcal{P}}_3$.
Akan dibuktikan $[2,3-\delta] \subseteq U_3 \subseteq [2,3+\delta]$… (2)

1) Akan dibuktikan $[2,3-\delta] \subseteq U_3$.
   Ambil $v_3 \in [2,3-\delta]$, maka $\exists I_{3i} = [x_{i-1}, x_i]$ di $\dot{\mathcal{P}}_3$ dengan $t_{3i} \in (2,3]$ dan $v_3 \in I_{3i}$.
   Sehingga kita peroleh $x_{i-1} \le v_3 \le 3-\delta$.
   Karena $\|\dot{\mathcal{P}}_3\| < \delta$, maka $x_i - x_{i-1} < \delta \Leftrightarrow x_i < x_{i-1} + \delta$.
   Maka $x_i < x_{i-1} + \delta \le 3 - \delta + \delta = 3$.
   Maka tag $t_{3i} \in I_i$ memenuhi $t_{3i} < 3$ dan kita simpulkan $v_3 \in U_3$.
   Maka bagian kiri dari (2), yaitu $[2,3-\delta] \subseteq U_3$ benar.
2) Akan dibuktikan $U_3 \subseteq [2,3+\delta]$.
   Ambil $u_3 \in U_3$, maka $\exists I_{3i} = [x_{i-1}, x_i]$ di $\dot{\mathcal{P}}_3$ dengan $t_{3i} \in (2,3]$ dan $u_3 \in I_{3i}$.
   Sehingga kita peroleh $x_{i-1} \le x_i \le 3$ dan $2 \le u_3 \le x_i$.
   Karena $\|\dot{\mathcal{P}}_3\| < \delta$, maka $x_i - x_{i-1} < \delta \Leftrightarrow x_i < x_{i-1} + \delta$.
   Maka $u_3 \le x_i < x_{i-1} + \delta \le 3 + \delta$.
   Sehingga kita peroleh $u_3 \in [2,3+\delta]$.
   Maka bagian kanan dari (2), yaitu $U_3 \subseteq [2,3+\delta]$ benar.

Karena $f(t_{3i}) = 1$ untuk setiap tag dari $\dot{\mathcal{P}}_3$ dan karena panjang interval di (3) adalah $1-\delta$ dan $1+\delta$ secara berurutan. Maka kita peroleh:

$$1 - \delta \le S(f, \dot{\mathcal{P}}_3) \le 1 + \delta$$

Karena $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{P}}_1 \cup \dot{\mathcal{P}}_2 \cup \dot{\mathcal{P}}_3$ dan karena $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{P}}_2, \dot{\mathcal{P}}_3$ dibangun atas tag-tag yang tidak beririsan, kita peroleh:

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_2) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_3)$$

Karena $S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) = 2$, $0 \le S(f, \dot{\mathcal{P}}_2) \le 3\delta$, dan $1 - \delta \le S(f, \dot{\mathcal{P}}_3) \le 1 + \delta$, maka kita peroleh:

$$3 - \delta \le S(f, \dot{\mathcal{P}}) \le 3 + 4\delta \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - 3| \le 4\delta$$

Maka kita bisa pilih $L = 3 \in \mathbb{R}$ dan δ yang memenuhi $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$, dan kita akan peroleh:

$$\exists L = 3 \in \mathbb{R} \ni \forall \varepsilon > 0, \exists \delta : 0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4} \ni \|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - 3| < \varepsilon$$

Berdasarkan Definisi 7.1.1, kita simpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}[0,3]$ dan $\int_0^3 f = 3$

$\therefore$ Terbukti dengan definisi bahwa $f \in \mathcal{R}[0,3]$.

2. Misalkan diberikan fungsi $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in \mathbb{Q} \\ (1-x)^2 & ; x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Apakah $h \in \mathcal{R}[0,1]$? Jelaskan.

Jawab:
Klaim: $h \notin \mathcal{R}[0,1]$
Akan dibuktikan $h \notin \mathcal{R}[0,1]$ dengan Kriteria Terintegralkan Lebesgue 7.3.12.

Perhatikan bahwa x^2 adalah fungsi naik dan $(1-x)^2$ adalah fungsi turun, maka pada $[0,1]$:
- x^2 mencapai nilai maksimum pada $x = 1$ dan nilai minimum pada $x = 0$
- $(1-x)^2$ mencapai nilai maksimum pada $x = 0$ dan nilai minimum pada $x = 1$

Karena h terdefinisi pada $[0,1]$ dan karena $0,1 \in \mathbb{Q}$, maka:
- $\sup\{h: x \in [0,1]\} = \sup\{\sup\{h: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}, \sup\{h: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c\}$
$= \sup\{\sup\{x^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}, \sup\{(1-x)^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c\}$
$= \max\{\max\{x^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}, \sup\{(1-x)^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c\}$
$= \max\{1^2, (1-0)^2\}$
$= 1$
Perhatikan bahwa $\sup\{h: x \in [0,1]\} = \max\{x^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \in h([0,1])$.
Sehingga $h(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]$. Artinya h terbatas di atas oleh 1.
- $\inf\{h: x \in [0,1]\} = \inf\{inf\{h: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}, inf\{h: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c\}\}$
$= \inf\{inf\{x^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}, inf\{(1-x)^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c\}\}$
$= \min\{\min\{x^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}, inf\{(1-x)^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c\}\}$
$= \min\{0^2, (1-1)^2\}$
$= 0$
Perhatikan bahwa $\inf\{h: x \in [0,1]\} = \min\{x^2: x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \in h([0,1])$.
Sehingga $h(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$. Artinya h terbatas di bawah oleh 0.

Karena h terbatas di atas oleh 1 dan di bawah oleh 0, artinya h terbatas.

Karena h adalah fungsi terbatas, maka kita memenuhi premis untuk menggunakan Kriteria Terintegralkan Lebesgue 7.3.12.

Berdasarkan Teorema Densitas 2.4.8, maka:

$$\forall c \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c, \exists (x_n) \subset [0,1] \cap \mathbb{Q} \ni (x_n) \to c$$

Karena $c \in \mathbb{Q}^c$, maka $\left(h(x_n)\right) \nrightarrow h(c)$.
Berdasarkan Kriteria Diskontinuitas 5.1.4, f diskontinu di c.
Karena c sembarang, maka kita simpulkan bahwa h diskontinu pada $[0,1] \cap \mathbb{Q}^c$.
Dengan cara serupa, kita dapat buktikan bahwa h diskontinu pada $[0,1] \cap \mathbb{Q} \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
Artinya, h diskontinu dimana-mana.
Berdasarkan kontrapositif dari Kriteria Terintegralkan Lebesgue 7.3.12, $h \notin \mathcal{R}[0,1]$.

$\therefore h \notin \mathcal{R}[0,1]$.

3. Misalkan diberikan fungsi $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; x \leq 0 \text{ atau } x > 1 \\ 1 - 4x & ; \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Gunakan Teorema Dasar Kalkulus 1 untuk mencari integral $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$.

Jawab:
Akan digunakan Teorema Dasar Kalkulus Pertama 7.3.1 untuk mencari $\int_{-1}^{2} f$.

Pertama, kita akan buktikan $f \in \mathcal{R}[-1,2]$.
Perhatikan bahwa $3x - 2$ kontinu dan $1 - 4x$ kontinu.
Artinya, f kontinu pada $[-1,0]$,
f kontinu pada $[a, 1]$, untuk sembarang $0 < a < 1$, dan
f kontinu pada $[b, 2]$, untuk sembarang $1 < b < 2$.
Berdasarkan Teorema 7.2.7, maka $f \in \mathcal{R}[-1,0], f \in \mathcal{R}[0,1], f \in \mathcal{R}[1,2]$.
Karena $f \in \mathcal{R}[-1,0], f \in \mathcal{R}[0,1], f \in \mathcal{R}[1,2]$, maka berdasarkan Teorema 7.2.9, $f \in \mathcal{R}[-1,2]$.

Definisikan $F: [-1,2] \to \mathbb{R}$ sebagai:

$$F(x) := \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 2x & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -2x^2 + x & , 0 < x < 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \\ \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Akan ditunjukkan F kontinu pada $[-1,2]$.
Kita akan cek titik-titik yang mungkin diskontinu, yaitu pada $x = 0$ dan $x = 1$.

1) Pada $x = 0$
   Perhatikan bahwa:
   $$F(0) = 0$$
   $$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right) = 0 - 0 = 0$$
   $$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} (-2x^2 + x) = 0 + 0 = 0$$
   Sehingga kita peroleh $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$, maka F kontinu pada $x = 0$.
2) Pada $x = 1$
   Perhatikan bahwa:
   $$F(1) = -1$$
   $$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^-} (-2x^2 + x) = -2 + 1 = -1$$
   $$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{2} = -1$$
   Sehingga kita peroleh $\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^+} F(x) = F(1)$, maka F kontinu pada $x = 1$.

Sehingga F kontinu pada $[-1,2]$.

Pilih $E = \{0,1\}$. Jelas bahwa E adalah himpunan yang berhingga dan $E \subset [-1,2]$.

Perhatikan bahwa:

$$F'(x) = \begin{cases} 3x-2 & , \quad x < 0 \\ \text{Tidak Ada} & , \quad x = 0 \\ -4x+1 & , 0 < x < 1 \\ \text{Tidak Ada} & , \quad x = 1 \\ 3x-2 & , \quad x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 3x-2 & ; x < 0 \text{ atau } x > 1 \\ 1-4x & ; \quad 0 < x < 1 \\ \text{Tidak Ada} & ; x = 0 \text{ atau } x = 1 \end{cases}$$

Artinya $F'(x) = f(x), \forall x \in [-1,2] \backslash E$.

Karena F kontinu pada $[-1,2]$, $F'(x) = f(x), \forall x \in [-1,2] \backslash E$, dan $f \in \mathcal{R}[-1,2]$, maka berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus Pertama 7.3.1,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} f &= F(2) - F(-1) \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot 4 - 2 \cdot 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 1 - 2 \cdot (-1)\right) \\ &= \left(6 - 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + 2\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Dengan Teorema Dasar Kalkulus 1, kita temukan bahwa integral $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = -2$.

4. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan fungsi $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:
$$f_n(x) = (1-x)^n x$$
Selidiki konvergensi dari barisan (f_n) tersebut ke sebuah fungsi f pada himpunan A. Apakah $f_n \rightrightarrows f$ pada A? Jelaskan!

Jawab:
Misal $f: A \to \mathbb{R}$ dengan $A \subseteq [0,1]$ didefinisikan sebagai $f(x) \coloneqq \lim\big(f_n(x)\big)$.

Jika $x = 0$, maka $f_n(0) = (1-0)^n \cdot 0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Maka $\lim\big(f_n(x)\big) = 0$.

Jika $0 < x < 1$, maka $\lim\big(f_n(x)\big) = \lim((1-x)^n x) = \lim((1-x)^n) \cdot x, \forall n \in \mathbb{N}$.
Perhatikan bahwa:
$$0 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - x < 1$$
Misal $(x_n) = ((1-x)^n)$. Perhatikan bahwa:
$$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{(1-x)^n}\right) = \lim(1-x) = 1 - x$$
Karena $0 < 1 - x < 1$, maka berdasarkan Teorema 3.2.11, $\lim((1-x)^n) = 0$.
Sehingga jika $0 < x < 1$, $\lim\big(f_n(x)\big) = \lim((1-x)^n) \cdot x = 0 \cdot x = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Jika $x = 1$, maka $f_n(1) = (1-1)^n \cdot 1 = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Maka $\lim\big(f_n(x)\big) = 0$.

Sehingga $f_n \to f$ pada $A = [0,1]$ dimana $f(x) \coloneqq 0, \forall x \in [0,1]$.

Perhatikan bahwa untuk sembarang $x \in [0,1]$,
$$f_n - f = (1-x)^n x - 0 = (1-x)^n x$$

Karena $0 < x < 1$ dan $0 < 1 - x < 1$, maka $0 < (1-x)^n x < 1$.
Artinya, $f_n - f = (1-x)^n x$ terbatas.

Karena $f_n - f$ terbatas dan karena A adalah himpunan tertutup, maka berdasarkan Definisi Norm Seragam 8.1.7,
$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_A &= \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|(1-x)^n x - 0| : x \in [0,1]\} \\ &= \sup\{(1-x)^n x : x \in [0,1]\} \\ &= \max\{(1-x)^n x : x \in [0,1]\} \end{aligned}$$

Berdasarkan Uji Turunan Pertama 6.2.8, f_n akan mencapai nilai maksimum pada $x \ni$
$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow -n(1-x)^{n-1}x + (1-x)^n = 0 \Leftrightarrow (1-x)^{n-1}\big(-nx + (1-x)\big) = 0$$
Berdasarkan Teorema 2.1.3, haruslah:
$$(1-x)^{n-1} = 0 \qquad \text{atau} \qquad -nx + (1-x) = 0$$
Untuk $(1-x)^{n-1} = 0$, kita peroleh $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Namun $f_n(1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Untuk $-nx + (1-x) = 0$, kita peroleh $1 - x(n+1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{n+1}$.

Sehingga,

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\|_A &= \max\{(1-x)^n x : x \in [0,1]\} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Karena $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to 0$ dan $\left(\frac{1}{n+1}\right) \to 0$, berdasarkan Teorema 3.2.3, $\|f_n - f\|_A \to 0$.

Karena $\|f_n - f\|_A \to 0$, maka berdasarkan Lemma 8.1.8, $f_n \rightrightarrows f$ pada A.

$\therefore f_n \rightrightarrows f$ pada A.