Xyba Project

Analisis 1

Pembahasan UTS 2017

1. This document is version: 0.9.6
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 25/03/2018

Thank you for your cooperation >v<

1. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$. Buktikanlah $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

Jawab:

- Kasus 1: $\max\{a,b\} = a$

  Karena $\max\{a,b\} = a$, maka $a > b$. Perhatikan:

$$
\begin{aligned}
\max\{a,b\} &= a \\
&= \frac{1}{2}(2a) \\
&= \frac{1}{2}(a + a) \\
&= \frac{1}{2}(a + b - b + a) \\
&= \frac{1}{2}(a + b + a - b) \qquad |a - b| = a - b \quad \text{karena } a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \\
&= \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)
\end{aligned}
$$

- Kasus 2: $\max\{a,b\} = b$
- Karena $\max\{a,b\} = b$, maka $a < b$. Perhatikan:

$$
\begin{aligned}
\max\{a,b\} &= b \\
&= \frac{1}{2}(2b) \\
&= \frac{1}{2}(b + b) \\
&= \frac{1}{2}(b + a - a + b) \\
&= \frac{1}{2}\big(a + b - (a - b)\big) \qquad |a - b| = -(a - b) \quad \text{karena } a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \\
&= \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)
\end{aligned}
$$

- Kasus 3: $\max\{a,b\} = a = b$

  Karena $\max\{a,b\} = a = b$, maka $a = b$. Perhatikan:

$$
\begin{aligned}
\max\{a,b\} &= a \\
&= \frac{1}{2}(2a) \\
&= \frac{1}{2}(a + b) \qquad |a - b| = 0 \quad \text{karena } a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \\
&= \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Terbukti bahwa: $\max\{a,b\} = \dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|)$

2. Buktikanlah bahwa himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ tak terhitung.

Jawab:
Akan dibuktikan bahwa himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ tidak terhitung dengan membuktikan interval $[0,1]$ tidak terhitung. Karena jika $[0,1]$ tidak terhitung, maka jelas $\mathbb{R}$ tidak terhitung karena $[0,1] \subset \mathbb{R}$.
Misal $I \coloneqq [0,1]$. Asumsikan I terhitung, maka kita bisa tulis $I = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.
Pilih subinterval tertutup I_1 dari $I \ni x_1 \notin I_1$
Pilih subinterval tertutup I_2 dari $I_1 \ni x_2 \notin I_2$
Dan seterusnya. Dari sini kita dapatkan interval-interval tertutup yang tidak kosong:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

sedemikian sehingga $I_n \subseteq I$ dan $x_n \notin I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Berdasarkan properti 2.5.2, maka $\exists \xi \in I \ni \xi \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Sehingga $\xi \neq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Artinya $I = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ tidak lengkap karena ξ tidak termasuk. Ini kontradiksi dengan klaim bahwa I terhitung. Sehingga $I \coloneqq [0,1]$ tidak terhitung. Karena $I \subset \mathbb{R}$ tidak terhitung, maka jelas $\mathbb{R}$ tidak terhitung.
$\therefore$ Terbukti bahwa himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ tak terhitung.

3. Tunjukkanlah bahwa $\lim(2n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

Jawab:

Perhatikan bahwa $(2n)^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Maka kita bisa tulis $(2n)^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n$, untuk suatu $k_n > 0$ ketika $n > 1$.
Sehingga $2n = (1 + k_n)^n, \forall n > 1$.
Berdasarkan Teorema Binomial, untuk $n > 1$, kita punya:

$$2n = 1 + nk_n + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2 + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$$

Sehingga:

$$2n \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$$

$$\Leftrightarrow 2n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad k_n^2 \leq \frac{2n-1}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{\frac{1}{2}n(n-1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_n^2 \leq \frac{4}{n} + \frac{2}{n(n-1)}, \forall n > 1$$

Berdasarkan properti Archimedean, $\forall \varepsilon > 0, \exists K \ni \frac{4}{K} + \frac{2}{K(K-1)} < \varepsilon^2$.

Artinya, untuk $n \geq \sup\{2, K\}$, maka berlaku $\frac{4}{K} + \frac{2}{K(K-1)} < \varepsilon^2 \ni$

$$0 < (2n)^{\frac{1}{n}} - 1 = k_n \leq \sqrt{\frac{4}{n} + \frac{2}{n(n-1)}} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$\therefore \lim(2n)^{\frac{1}{n}} = 1$

4. Misalkan diberikan himpunan A sebagai berikut:

$$A = \left\{\frac{1-m+n}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Apakah A terbatas? Jika iya buktikan dan tentukan $\sup A$ dan $\inf A$ beserta buktinya.

Jawab:
Akan ditentukan keterbatasan A.

Perhatikan:

$$A = \frac{1-m+n}{m+n} = \frac{1-2m+m+n}{m+n} = \frac{1-2m}{m+n} + 1 = -\frac{2m-1}{m+n} + 1, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Karena $m, n \in \mathbb{N}$, maka $2m - 1 > 0$ dan $m + n > 0$ sehingga:

$$\frac{2m-1}{m+n} > 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Artinya A terbatas di atas oleh 1.

Perhatikan pula:

$$A = \frac{1-m+n}{m+n} = \frac{1+2n-m-n}{m+n} = \frac{1+2n}{m+n} - 1, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Karena $m, n \in \mathbb{N}$, maka $1 + 2n > 0$ dan $m + n > 0$ sehingga:

$$\frac{1+2n}{m+n} > 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Artinya A terbatas di bawah oleh -1.

Selanjutnya kita akan menentukan $\sup A$ dan $\inf A$

- Akan ditentukan $\sup A$

  Kita sebelumnya sudah buktikan bahwa A terbatas di atas oleh 1 karena:

$$-\frac{2m-1}{m+n} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2m-1}{m+n} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-m+n}{m+n} < 1, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

  Pilih $m = 1$, maka kita akan dapatkan:

$$\frac{1-m+n}{m+n} = 1 - \frac{2m-1}{m+n} = 1 - \frac{1}{1+n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

  $\forall \varepsilon_1 > 0, \dfrac{1}{1+n} < \varepsilon_1$ untuk setiap n, maka:

$$1 - \frac{1}{1+n} > 1 - \varepsilon_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon_1 > 0$, maka $\sup A = 1$.

- Akan ditentukan $\inf A$

  Kita sebelumnya sudah buktikan bahwa A terbatas di bawah oleh -1 karena:

$$\frac{1+2n}{m+n} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 + \frac{1+2n}{m+n} > -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-m+n}{m+n} > -1, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

  Pilih $n = 1$, maka kita akan dapatkan:

$$\frac{1-m+n}{m+n} = -1 + \frac{1+2n}{m+n} = -1 + \frac{3}{1+m}, \forall m \in \mathbb{N}$$

  $\forall \varepsilon_2 > 0, \frac{3}{1+m} < \varepsilon_2$ untuk setiap m, maka:

$$-1 + \frac{3}{1+m} < -1 + \varepsilon_2, \forall m \in \mathbb{N}$$

  Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon_2 > 0$, maka $\inf A = -1$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\sup A = 1$ dan $\inf A = -1$

- Akan dibuktikan $\sup A = 1$

  Kita tahu bahwa $\sup A$ adalah batas atas untuk A karena A terbatas di atas oleh 1.

  Akan dibuktikan $\sup A = 1$ adalah batas atas terkecil untuk A.

  Ambil suatu $p \in \mathbb{N}$, akan dibuktikan $1 - \frac{1}{p}$ bukan batas atas untuk A.

  Berdasarkan definisi, jika $1 - \frac{1}{p}$ adalah batas atas untuk A maka berlaku:

$$\frac{1-m+n}{m+n} = 1 - \frac{2m-1}{m+n} \leq 1 - \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2m-1}{m+n} \leq -\frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2m-1}{m+n} \geq \frac{1}{p}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

  Ambil $m = 1$ dan $n \geq p$, maka:

$$\frac{2m-1}{m+n} = \frac{1}{1+n} \leq \frac{1}{p}$$

  Sehingga ini adalah kontradiksi dengan klaim bahwa $1 - \frac{1}{p}$ adalah batas atas untuk A karena ada suatu $m, n \in \mathbb{N}$ yang tidak dibatasi di atas oleh $1 - \frac{1}{p}$. Maka $1 - \frac{1}{p}$ bukan batas atas untuk A, untuk suatu $p \in \mathbb{N}$.

Sehingga $\sup A = 1$ adalah batas atas terkecil untuk A.
$\therefore \sup A = 1$

- Akan dibuktikan $\inf A = -1$
  Kita tahu bahwa $\inf A$ adalah batas bawah untuk A karena A terbatas di bawah oleh -1.
  Akan dibuktikan $\inf A = -1$ adalah batas bawah terbesar untuk A.
  Ambil suatu $q \in \mathbb{N}$, akan dibuktikan $-1 + \frac{1}{q}$ bukan batas bawah untuk A.
  Berdasarkan definisi, jika $-1 + \frac{1}{q}$ adalah batas bawah untuk A maka berlaku:
  $$\frac{1 - m + n}{m + n} = -1 + \frac{1 + 2n}{m + n} \geq -1 + \frac{1}{q}$$
  $$\Leftrightarrow \qquad \frac{1 + 2n}{m + n} \geq \frac{1}{q}, \forall m, n \in \mathbb{N}$$
  Ambil $n = 1$ dan $m \geq 3q$, maka:
  $$\frac{1 + 2n}{m + n} = \frac{3}{1 + m} \leq \frac{1}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + m} \leq \frac{1}{3q}$$
  Sehingga ini adalah kontradiksi dengan klaim bahwa $-1 + \frac{1}{q}$ adalah batas bawah untuk A karena ada suatu $m, n \in \mathbb{N}$ yang tidak dibatasi di bawah oleh $-1 + \frac{1}{q}$. Maka $-1 + \frac{1}{q}$ bukan batas bawah untuk A, untuk suatu $q \in \mathbb{N}$.
  Sehingga $\inf A = -1$ adalah batas bawah terkecil untuk A.
  $\therefore \inf A = -1$

Afterword

Pembuatan dokumen ini dibantu oleh:

1. 13,04, Matematika UI 2016.
2. musejakarta, Matematika UI 2016.
3. namora03, Matematika UI 2016.
4. rilo_chand, Matematika UI 2016.