==

Dalam menjawab soal-soal berikut, saya mengasumsikan bahwa orang awam adalah orang-orang dengan kemampuan matematika yang cukup, yakni setidaknya memiliki pemahaman atas fungsi, deret, dan integral serta berkeinginan untuk mempelajari atau menerapkan Wolfram *Mathematica*.

Pekerjaan ini merupakan lanjutan dari yang sebelumnya, yakni tugas pertama, maka penjelasan tidak akan membahas secara detail seperti sebelumnya.

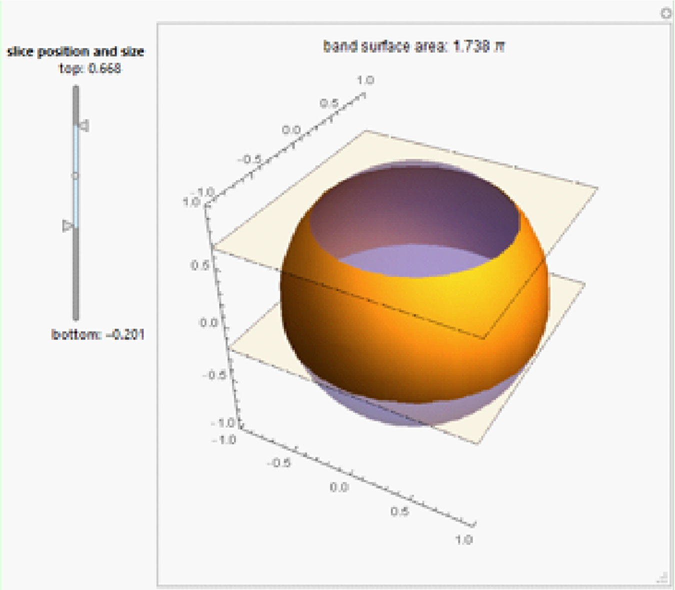
==
==

Bookmarks

==
==

Nomor 1

Buatlah program untuk menentukan **luas dan volume** suatu bola berjari-jari sebesar 1 yang dibatasi oleh 2 bidang yang parallel menggunakan manipulate. Berikut merupakan contoh output dari yang menentukan luas:



Keterangan: Bagian yang dihitung luasnya adalah bagian berwarna kuning

---

Jawab:

Kita ingin mencari volume dan luas permukaan unit bola yang dibatasi bidang $z = a$ dan $z = b$. Dengan menggunakan revolusi, kita akan peroleh:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_a^b \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)}\, dx \\ &= 2\pi \int_a^b \sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1+\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right)}\, dx \\ &= 2\pi \int_a^b \sqrt{1-x^2+x^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_a^b dx \\ &= 2\pi[b-a] \end{aligned}$$

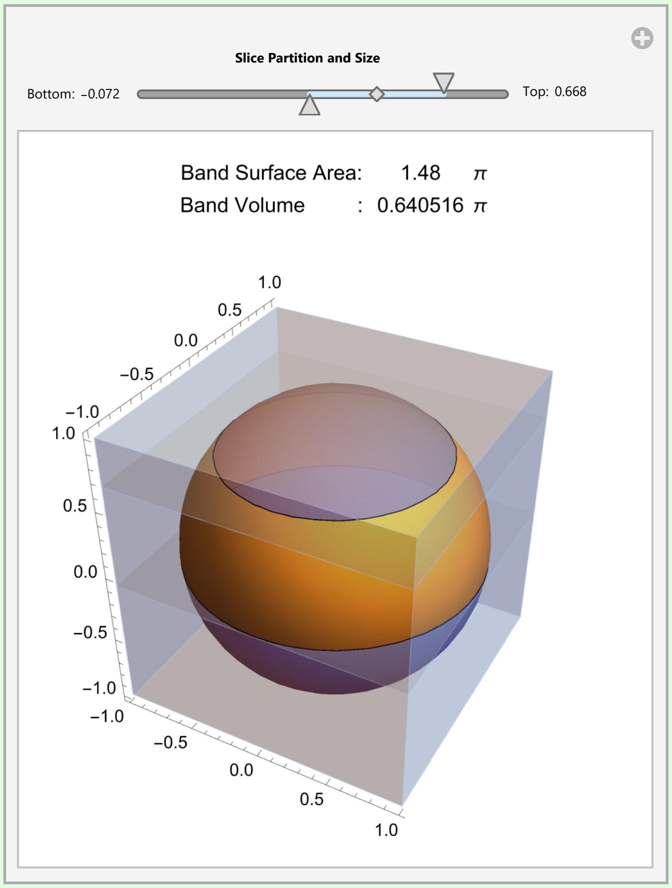
$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi\left(1-z^2\right) dz \\ &= \pi\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_b^a \\ &= \pi\left[b-\frac{1}{3}b^3-a+\frac{1}{3}a^3\right] \end{aligned}$$

Mari kita coba gambar secara dasar,

```
Manipulate[
 ContourPlot3D[{x^2 + y^2 + z^2 == 1, z == z1}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1},
  PlotLabel → Row[{"Band Surface Area: ", Dynamic[2 (z1[[2]] - z1[[1]])], "π\n",
     "Band Volume: ", Dynamic[z1[[2]] - z1[[2]]^3/3 - z1[[1]] + z1[[1]]^3/3], "π\n"}],
  Mesh → None,
  ContourStyle → {, Directive[Opacity[0.5], RGBColor[250/255, 240/255, 230/255]]},
  Boxed → False
 ],
 Control[{{z1, {-0.201, 0.668}, "\t"}, -1, 1, IntervalSlider,
   Method → "Stop", Appearance → {"Vertical", "Markers"}, MinIntervalSize → 0,
   ControlPlacement → Left}]
]
```

Kita dapat menggambarkan lebih baik sebagai berikut.

```
Manipulate[
 Show[
  ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1},
   PlotLabel → Grid[{
      {"Band Surface Area: ", Dynamic[2 (z1[[2]] - z1[[1]])], "π"},
      {"Band Volume         : ",
       Dynamic[z1[[2]] (1 - z1[[2]]^2/3) - z1[[1]] (1 - z1[[1]]^2/3)], "π\n"}},
     Alignment → Center],
   Mesh → None, Boxed → False,
   RegionFunction → (z1[[1]] ≤ #3 ≤ z1[[2]] &)],

  ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1},
   Mesh → None, Boxed → False,
   ContourStyle → Directive[Opacity[0.8], RGBColor[165/255, 150/255, 200/255]],
   RegionFunction → (z1[[2]] < #3 ≤ 1 || -1 ≤ #3 < z1[[1]] &)
  ], ImageSize → 300],

 Labeled[Labeled[Control[{{z1, {-0.201, 0.668}, ""}, -1, 1, IntervalSlider,
     Method → "Push", Appearance → "Markers", MinIntervalSize → 0}],
   {"Top: " Dynamic[z1[[2]]], "Bottom: " Dynamic[z1[[1]]]}, {Right, Left}],
  Style["Slice Partition and Size", Bold], Top]
]
```



Dalam usaha melakukan plotting, saya menemukan bahwa memplot bidang $z = c1$, $z = c2$, dimana $c1, c2 \in [-1, 1]$ membuat program berjalan dengan berat. Oleh karenanya pada gambar terakhir yang diperhalus, tidak ada bidang lagi yang memotong. Namun saya rasa sudah cukup jelas di mana perpotongannya karena pewarnaan yang diberikan.

Maka dengan ini, soal nomor 1 telah terjawab.

==

==

Nomor 2

Persamaan umum lingkaran adalah $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ dengan (x_0, y_0) sebagai pusat lingkaran berjari-jari r. Aproksimasi luas lingkaran tersebut menggunakan aproksimasi Monte Carlo dengan (x_0, y_0) adalah dua digit terakhir NPM dan jari-jari 2 ($r = 2$)

a) Plot gambar lingkaran tersebut

b) Hitung luas aproksimasi dengan monte carlo untuk 1000 titik random

c) Hitung luas eksak dari lingkaran

d) Hitung errornya

Hint: untuk membuat plot dapat gunakan syntax “ContourPlot”

Jawab:

Integral Monte Carlo adalah salah satu metode integrasi untuk memperkirakan luas menggunakan persebaran acak titik-titik.
Rumus Monte Carlo:

Luas Approksimasi = $\frac{n}{N}$ * Luas Plot

n : Banyaknya titik yang berada di dalam daerah arsiran

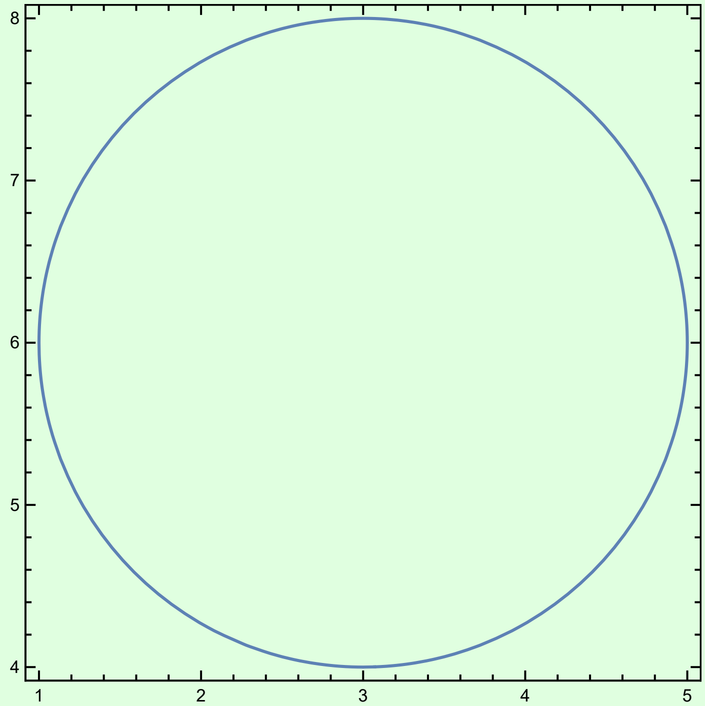
N : Banyaknya titik yang disebar

Luas Plot : Luas persegi panjang yang memuat fungsi

Pertama-tama, agar mendapat ide mengenai apa yang dikerjakan, mari buat gambar dari fungsi tersebut pada pusatnya, yaitu (x_0, y_0).

```
NPM = 1 606 884 136;
NPM = IntegerDigits[NPM];
x0 = NPM[[-2]]; y0 = NPM[[-1]]; r = 2;
```

```
ContourPlot[(x - x0)^2 + (y - y0)^2 == r^2, {x, x0 - r, x0 + r}, {y, y0 - r, y0 + r}]
```



Jelas bahwa fungsi tersebut memiliki batas-batas yang sama dengan batas-batas persegi
$x0 - r \le x \le x0 + r$, $y0 - r \le y \le y0 + r$

Maka kita akan dasarkan fungsi yang dibuat dengan membuat persebaran titik di X pada [x0 – r, x0 + r] dan persebaran titik di Y pada [y0 – r, y0 + r]

Untuk membuat fungsi ini, kita memerlukan input yaitu:

1. NPM untuk pusat lingkaran → NPM_

2. Jari-jari lingkaran → r_
3. Jumlah titik yang ingin disebar → n_

Setelah mengetahui input yang akan diproses, kita perlu mengidentifikasi parameter-parameter yang diperlukan.
Parameter-parameter tersebut yaitu:
1. Koordinat *x* lingkaran → x0
2. Koordinat *y* lingkaran → y0
3. RandomX (memetakan titik-titik acak di X) → RndX
4. RandomY (memetakan titik-titik acak di Y) → RndY
5. Plot Grafik → plt
6. Plot Sebaran Titik Random → ListTitik
7. Titik yang berada dalam area yang diarsir → Titik
8. Luas Approksimasi → LuasAppr
9. Luas Eksak atau Luas Sebenarnya → LuasAsli
10. Galat metode Monte Carlo → Galat

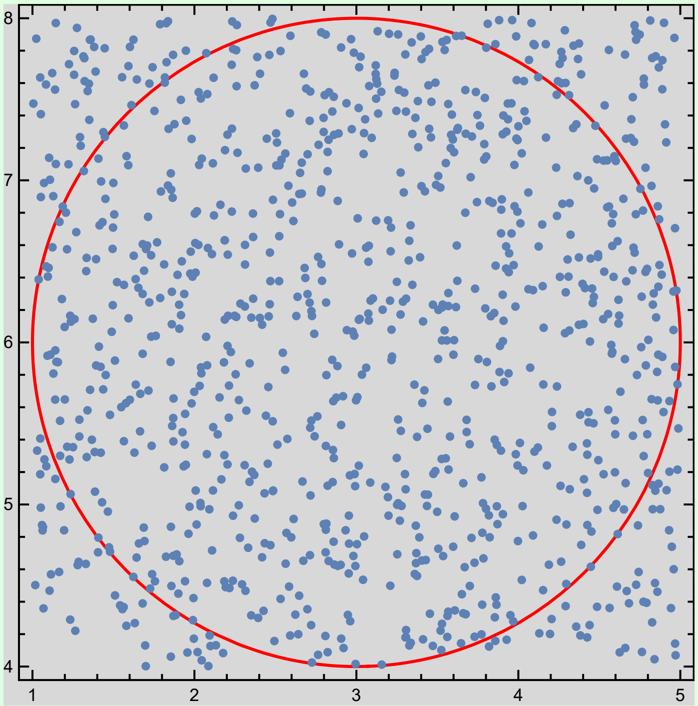
Kesepuluh parameter ini akan masuk dalam fungsi yang didefinisikan.

Sekarang mari kita definisikan fungsi MonteCarlo tersebut dengan nama CircleCarlo.

```
CircleCarlo[NPM_, r_, n_] := Module[
  {x0 = IntegerDigits[NPM][[-2]], y0 = IntegerDigits[NPM][[-1]],
   RndX, RndY, plt, ListTitik, Titik, LuasAppr, LuasAsli, Galat},

  RndX = Table[RandomReal[{x0 - r, x0 + r}], {x, 1, n}];
  RndY = Table[RandomReal[{y0 - r, y0 + r}], {y, 1, n}];

  plt = ContourPlot[
    (x - x0)^2 + (y - y0)^2 == r^2, {x, x0 - r, x0 + r}, {y, y0 - r, y0 + r},
    Mesh → None,
    ContourStyle → Directive[{Red, PointSize[Medium]}],
    PlotLegends → SwatchLegend["Expressions",
      LegendFunction → (Framed[#, Background → Gray] &)],
    Background → LightGray
   ];

  ListTitik = ListPlot[
    Table[
     {RndX[[i]], RndY[[i]]}, {i, n}
    ],
    PlotStyle → PointSize[Medium],
    Background → LightGray
   ];
```

```
  Titik = 0;
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
   If[
    (RndX[[i]] - x0)^2 + (RndY[[i]] - y0)^2 ≤ r^2, Titik = Titik + 1
   ]
  ];

  LuasAppr = N[Titik/n * 16];

  LuasAsli = N[π r^2];

  Galat = Abs[LuasAsli - LuasAppr];

  Print["Jumlah titik yang disebar\t\t\t\t     : ", n, " titik"];
  Print["Jumlah titik yang berada dalam lingkaran\t  : ", Titik, " titik"];
  Print["Luas lingkaran menggunakan metode Monte Carlo : ", LuasAppr, " satuan luas"];
  Print["Luas lingkaran yang sebenarnya\t\t\t\t: ", LuasAsli, " satuan luas"];
  Print["Galat metode Monte Carlo\t\t\t\t\t  : ", Galat, " satuan luas"];

  Show[plt, ListTitik]
 ]
CircleCarlo[1606884136, 2, 1000]
```

```
Jumlah titik yang disebar                     : 1000 titik
Jumlah titik yang berada dalam lingkaran      : 803 titik
Luas lingkaran menggunakan metode Monte Carlo : 12.848 satuan luas
Luas lingkaran yang sebenarnya                : 12.5664 satuan luas
Galat metode Monte Carlo                      : 0.281629 satuan luas
```



Maka dengan ini, soal nomor 2 telah terjawab.

==
==

Nomor 3

Buatlah Polynomial Taylor derajat *n* (*n* adalah digit terakhir npm ditambah 2), dengan *a* adalah floor dari digit terakhir npm dibagi 2 dari fungsi ln(bx + 1), dimana *b* adalah ceiling dari digit terakhir npm dibagi 2

a) Buat Tabel untuk penjabaran Polynomial Taylor mulai dari *n* = 1 sampai *n*

b) Buat Plot dari fungsi asli dan Plot Polynomial Taylor untuk seluruh nilai *n* (Analisa pada interval mana polynomial Taylor berdekatan dengan fungsi aslinya)

c) Perkuat analisa dengan membuat Tabel untuk melihat error dengan derajat *n* adalah *n* – 1 pada interval yang diperoleh pada b)

d) Analisa error dari Polynomial Taylor tersebut berdasarkan derajat yang lebih kecil (artinya < *n*) dengan bantuan plot (Analisa)

Jawab:

Ekspansi Deret Taylor adalah ekspansi deret suatu fungsi real $f(x)$ pada suatu titik $x = a$ yang didefinisikan sebagai:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Jika $a = 0$, maka dikenal sebagai deret Maclaurin.

Di sini makna soal sedikit membingungkan sehingga saya akan menjelaskan interpretasi yang saya peroleh dari soal ini.
Makna yang sudah jelas: *n* adalah digit terakhir NPM ditambah 2, *b* adalah ceiling dari digit terakhir NPM dibagi 2
Asumsi:
- *a* yang dimaksud pada soal sesuai dengan definisi Ekspansi Taylor yang saya berikan di atas dimana *a* adalah floor dari digit terakhir NPM dibagi 2
- Fungsi yang ingin diekspansi adalah ln(bx+1)

```
NPM = 1 606 884 136;
L = IntegerDigits[NPM][[-1]];
n = L + 2;
a = Floor[L/2];
b = Ceiling[L/2];
h[x_] := Log[b x + 1];
```

```
Row[{SetterBar[Dynamic[z], Range[n]], "\n", Dynamic[Normal[Series[h[x], {x, a, z}]]]}]
```

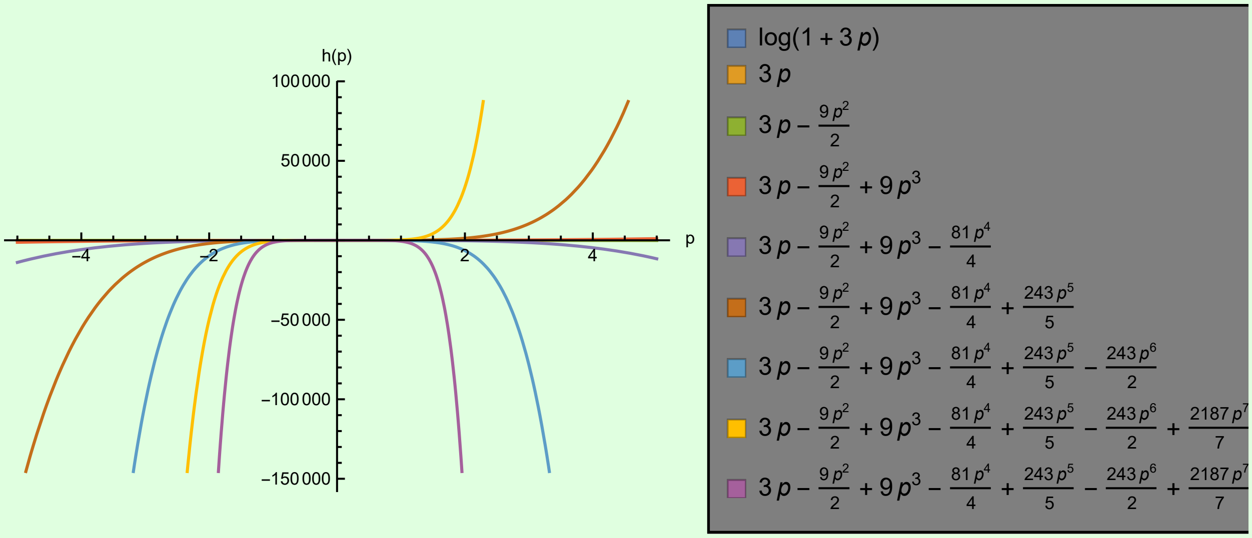
1	2	3	4	5	6	7	8

$h[a] + (-a + x)\, h'[a]$

Sekarang mari kita gambar ekspansi-ekspansi Taylornya.

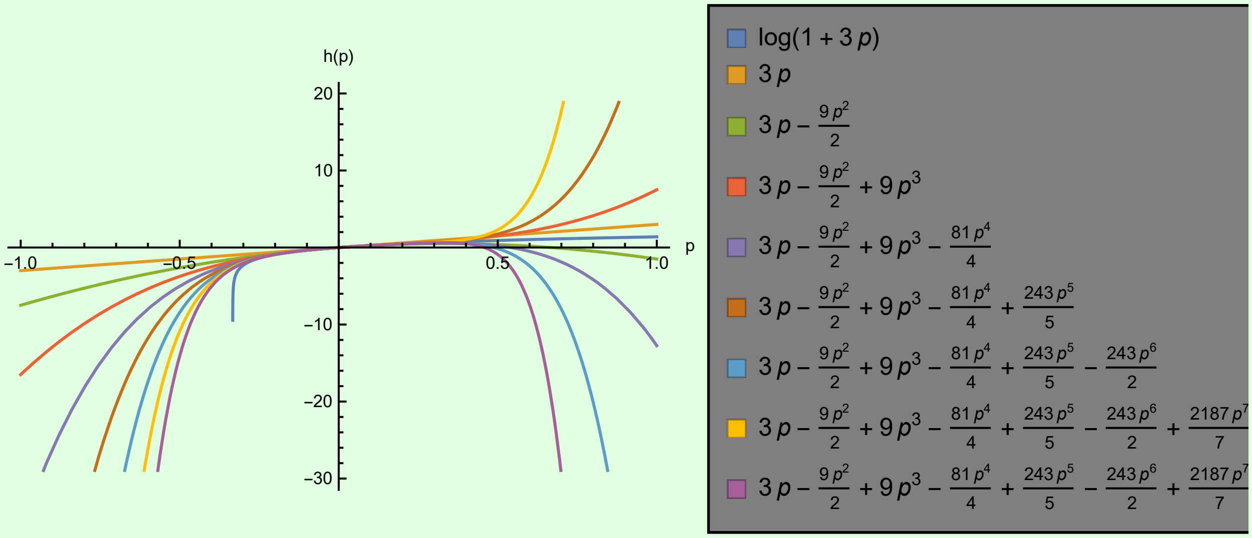
```
X = Table[Normal[Series[h[p], {p, 0, t}]], {t, n}];
X = Prepend[X, h[p]];
```

```
Plot[X, {p, -5, 5},
 AxesLabel → {"p", "h(p)"},
 PlotLegends → SwatchLegend["Expressions",
   LegendFunction → (Framed[#, Background → Gray] &)]
]
```



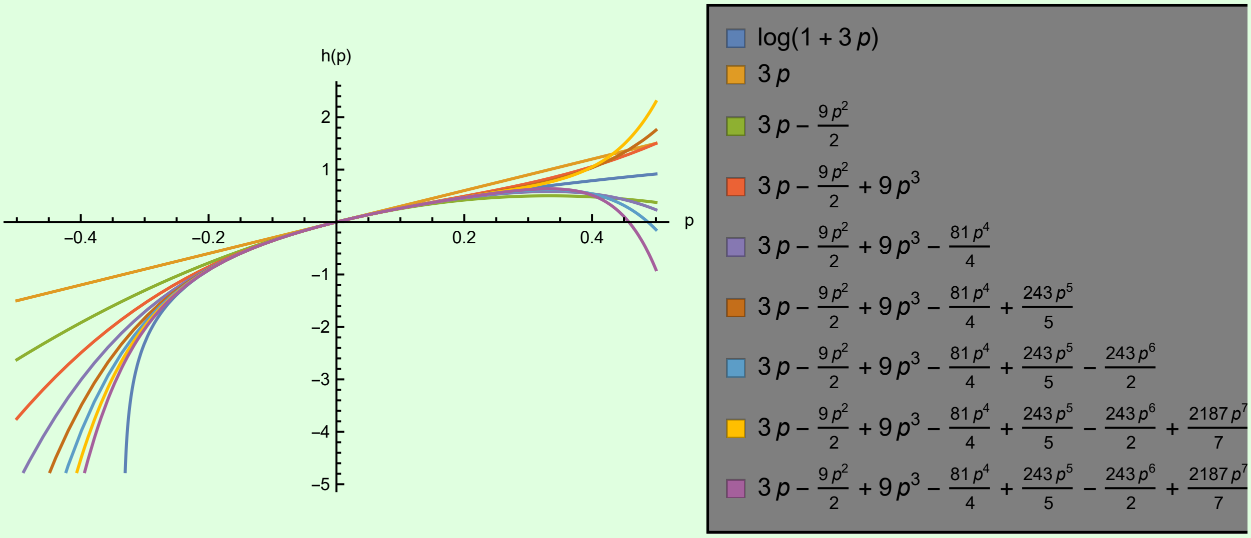
Kita inginkan fokus pada interval yang errornya sedikit, sehingga mari kita perkecil.

```
Plot[X, {p, -1, 1},
 AxesLabel → {"p", "h(p)"},
 PlotLegends → SwatchLegend["Expressions",
   LegendFunction → (Framed[#, Background → Gray] &)]
]
```



Mari kita perkecil lebih jauh.

```
Plot[X, {p, -0.5, 0.5},
 AxesLabel → {"p", "h(p)"},
 PlotLegends → SwatchLegend["Expressions",
   LegendFunction → (Framed[#, Background → Gray] &)]
]
```



Error dari polinomial ekspansi taylor didefinisikan sebagai:

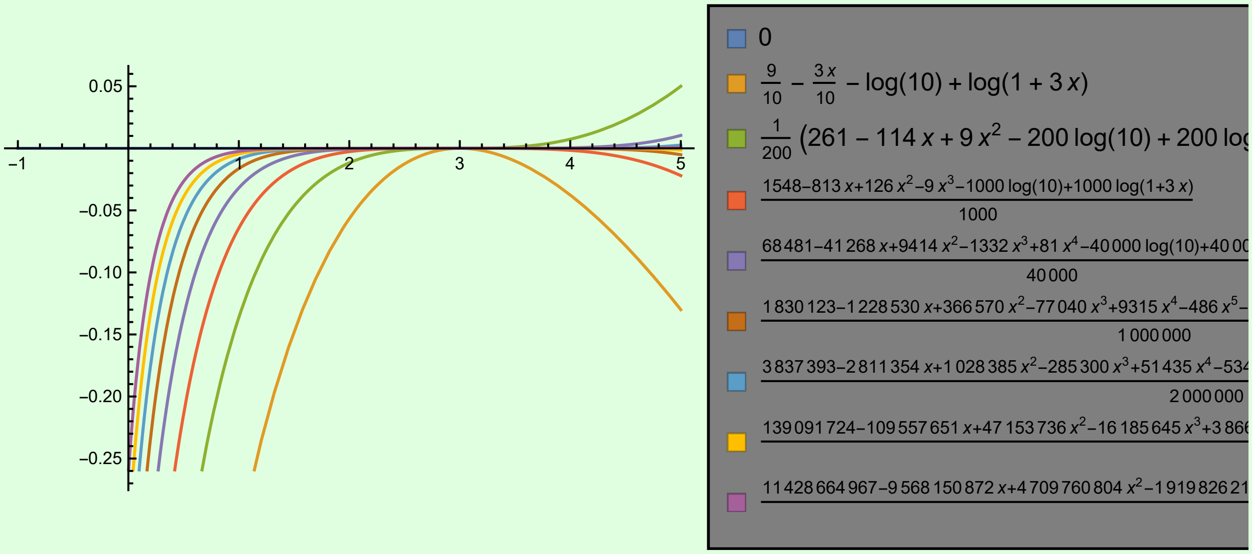
$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(u)\,du$$

```
T[x_, a_, n_] := Series[h[x], {x, a, n}]
R[x_, a_, n_] := 1/n! ∫_a^x D[h[u], {u, n + 1}] * (x - u)^n ⅆu

TableForm[
 Table[{i, Normal[R[x, a, i]]}, {i, 1, n}],
 TableHeadings → {{}, {"n", Row[{"Rn saat a = ", a}]}}
]
```

n	R_n saat a = 3
1	$\frac{9}{10}-\frac{3x}{10}-\text{Log}[10]+\text{Log}[1+3x]$
2	$\frac{1}{200}\left(261-114x+9x^2-200\,\text{Log}[10]+200\,\text{Log}[1+3x]\right)$
3	$\frac{1548-813x+126x^2-9x^3-1000\,\text{Log}[10]+1000\,\text{Log}[1+3x]}{1000}$
4	$\frac{68\,481-41\,268x+9414x^2-1332x^3+81x^4-40\,000\,\text{Log}[10]+40\,000\,\text{Log}[1+3x]}{40\,000}$
5	$\frac{1\,830\,123-1\,228\,530x+366\,570x^2-77\,040x^3+9315x^4-486x^5-1\,000\,000\,\text{Log}[10]+1\,000\,000\,\text{Log}[1+3x]}{1\,000\,000}$
6	$\frac{3\,837\,393-2\,811\,354x+1\,028\,385x^2-285\,300x^3+51\,435x^4-5346x^5+243x^6-2\,000\,000\,\text{Log}[10]+2\,000\,000\,\text{Log}[1+3x]}{2\,000\,000}$
7	$\frac{139\,091\,724-109\,557\,651x+47\,153\,736x^2-16\,185\,645x^3+3\,866\,940x^4-600\,453x^5+54\,432x^6-2187x^7-70\,000\,000\,\text{Log}[10]+70\,000\,000\,\text{Log}[1}{70\,000\,000}$
8	$\frac{11\,428\,664\,967-9\,568\,150\,872x+4\,709\,760\,804x^2-1\,919\,826\,216x^3+569\,761\,290x^4-117\,477\,864x^5+15\,928\,164x^6-1\,277\,208x^7+45\,927x^8-5\,6}{5\,600\,000\,000}$

Sekarang kita dapat gambarkan errornya sebagai berikut.

```
Rs = Flatten[%104][[Range[2, Length[Flatten[%104]], 2]]];
Rs = Prepend[Rs, 0];

Plot[Rs, {x, -1, 5},
 PlotLegends → SwatchLegend["Expressions",
   LegendFunction → (Framed[#, Background → Gray] &)]
]
```



Dapat terlihat bahwa semakin banyak suku yang digunakan, error akan semakin halus.

Maka dengan ini, soal nomor 3 telah terjawab.

==

==

Nomor 4

Salah satu kegunaan Integral Monte-Carlo adalah mengaproksimasikan nilai integral dari sebuah fungsi yang sulit dipecahkan. Dengan menggunakan metode Integral Monte-Carlo, carilah volume yang dibentuk oleh fungsi:

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + \frac{9}{4} y^2 + z^2 - 1\right)^3 - x^2 z^3 - \frac{9}{80} y^2 z^3$$

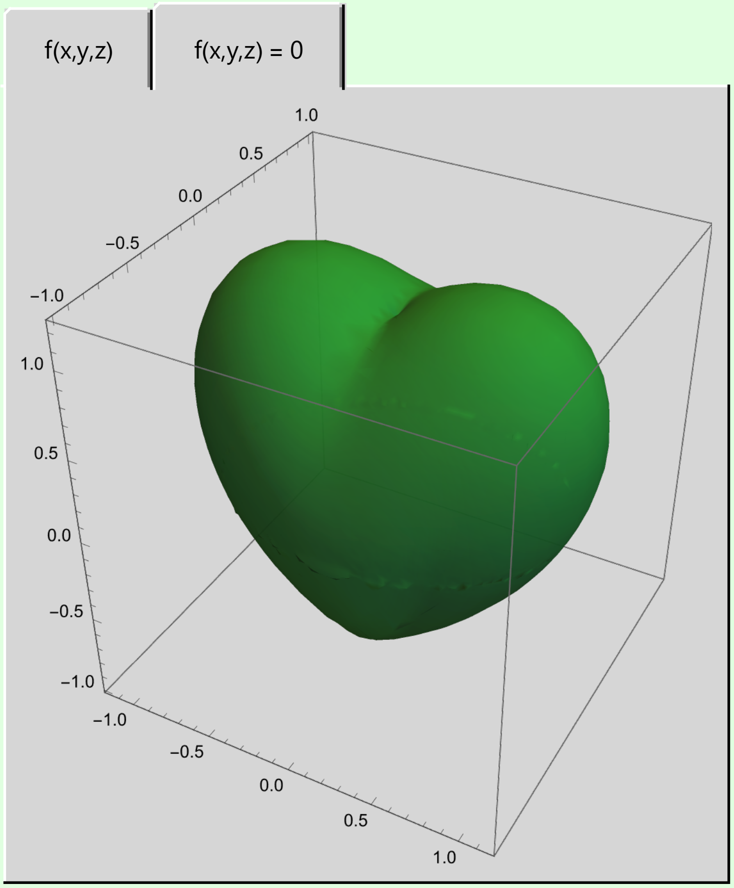
Gambarkan pula plot fungsi tersebut saat $f(x, y, z) = 0$.

Hint: Gunakan ContourPlot3D dengan batasan $-1.15 \le x \le 1.15$, $-1 \le y \le 1$, $-0.97 \le z \le 1.22$

Jawab:

Mari kita gambar dahulu fungsi tersebut.

```
TabView[
 {"f(x,y,z)" → ContourPlot3D[(x^2 + 9/4 y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 z^3 - 9/80 y^2 z^3,
    {x, -1.15, 1.15}, {y, -1, 1}, {z, -0.97, 1.22},
    ContourStyle → Directive[Opacity[0.8], LightCyan], Mesh → None],
  "f(x,y,z) = 0" → ContourPlot3D[
    (x^2 + 9/4 y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 z^3 - 9/80 y^2 z^3 == 0, {x, -1.15, 1.15}, {y, -1, 1}, {z, -0.97, 1.22},
    ContourStyle → Directive[Opacity[0.8], RGBColor[44/255, 176/255, 55/255]], Mesh → None]}, 2]
```



Fungsi ini akan sulit untuk ditentukan volume eksaknya. Dengan menggunakan Integral Monte Carlo, kita dapat approksimasi volumenya.

Karena kita tidak mengetahui batas-batasnya, kita setidaknya harus membuat kotak yang memuat seluruh fungsi tersebut seperti yang sudah dilakukan pada gambar di atas, sehingga kita akan gunakan batasan-batasan $-1.15 \leq x \leq 1.15$, $-1 \leq y \leq 1$, $-0.97 \leq z \leq 1.22$

Sebelum kita mendefinisikan fungsi tersebut, kita perlu mengidentifikasi parameter-parameter yang perlu digunakan.

Paramater-parameter tersebut yaitu:
1. RandomX (memetakan titik-titik acak di X) → RndX
2. RandomY (memetakan titik-titik acak di Y) → RndY
3. RandomZ (memetakan titik-titik acak di Z) → RndZ
4. Plot Grafik → plt
5. Plot Sebaran Titik Random → ListTitik
6. Titik yang berada dalam area yang diarsir → Titik
7. Luas Approksimasi → LuasAppr

Ketujuh parameter ini akan masuk dalam fungsi yang didefinisikan.

Kita definisikan sebuah fungsi bernama HeartCarlo di mana HeartCarlo akan menerima input *n* dimana *n* adalah jumlah titik yang disebar.

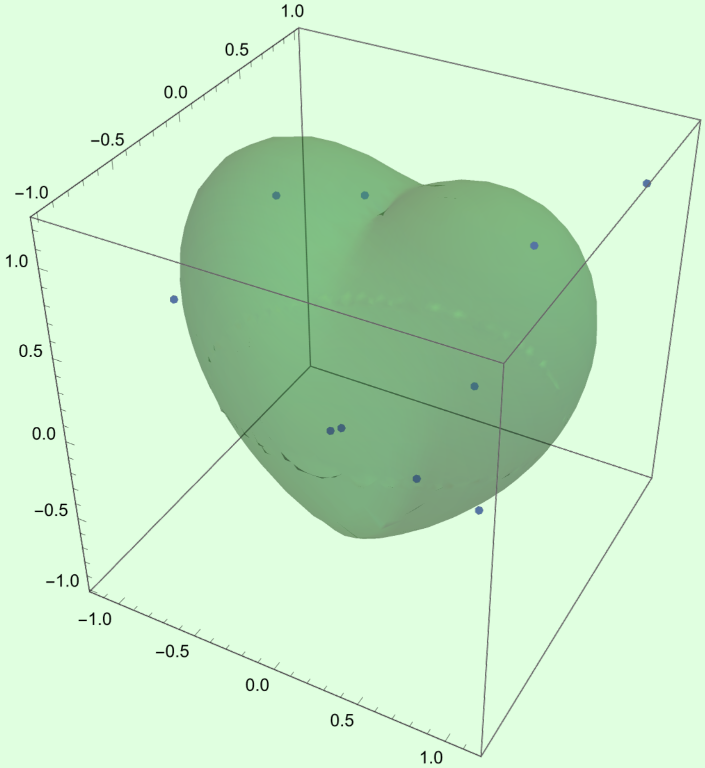
```
HeartCarlo[n_] := Module[
  {RndX, RndY, RndZ, plt, ListTitik, Titik, LuasAppr},

  RndX = Table[RandomReal[{-1.15, 1.15}], {x, 1, n}];
  RndY = Table[RandomReal[{-1, 1}], {y, 1, n}];
  RndZ = Table[RandomReal[{-0.97, 1.22}], {z, 1, n}];

  plt = ContourPlot3D[(x^2 + 9/4 y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 z^3 - 9/80 y^2 z^3 == 0,
    {x, -1.15, 1.15}, {y, -1, 1}, {z, -0.97, 1.22},
    ContourStyle → Directive[Opacity[0.3], RGBColor[44/255, 176/255, 55/255]], Mesh → None];

  ListTitik = ListPointPlot3D[
    Table[
     {RndX[[i]], RndY[[i]], RndZ[[i]]}, {i, n}
    ],
    PlotStyle → PointSize[Medium],
    Background → LightCyan
   ];

  Titik = 0;
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
   If[
    (RndX[[i]]^2 + 9/4 RndY[[i]]^2 + RndZ[[i]]^2 - 1)^3 ≤
     RndZ[[i]]^3 (RndX[[i]]^2 + 9/80 RndY[[i]]^2), Titik = Titik + 1
   ]
  ];

  LuasAppr = N[Titik/n * 2.3 * 2 * 2.19];

  Print["Jumlah titik yang disebar\t\t\t\t    : ", n, " titik"];
  Print["Jumlah titik yang berada dalam fungsi\t    : ", Titik, " titik"];
  Print["Volume fungsi menggunakan metode Monte Carlo : ", LuasAppr, " satuan luas"];

  Show[plt, ListTitik]
 ]
```

Mari kita panggil dengan beberapa input.

Pertama mari kita panggil dengan titik yang disebar dikit.

```
HeartCarlo[10]
```

```
Jumlah titik yang disebar                  : 10 titik
Jumlah titik yang berada dalam fungsi      : 6 titik
Volume fungsi menggunakan metode Monte Carlo : 6.0444 satuan luas
```

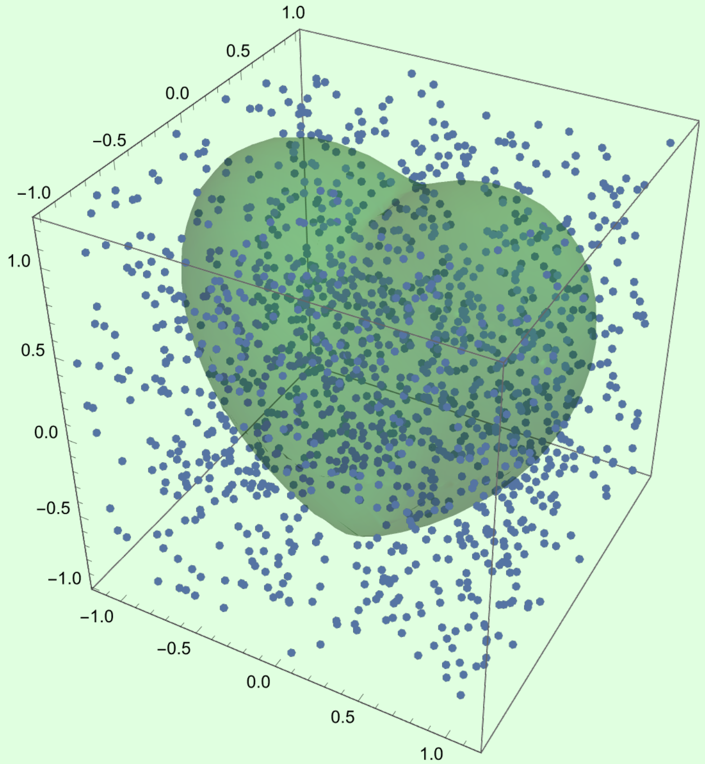


Penyebaran sedikit titik akan menyebabkan error yang besar karena tidak cukup untuk mengapproksimasi volumenya.

Sekarang kita panggil dengan titik yang disebar lebih banyak.

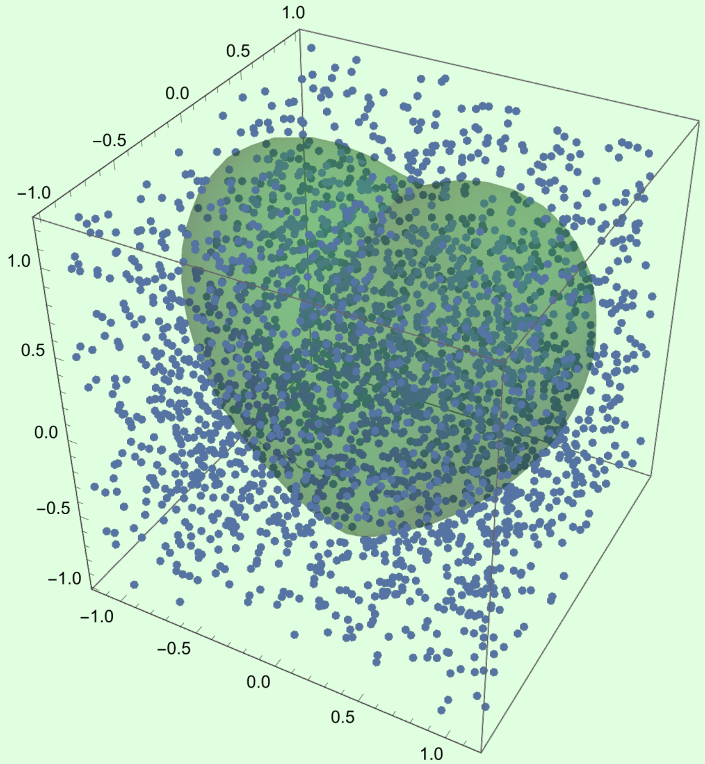
```
HeartCarlo[1500]
```

```
Jumlah titik yang disebar                   : 1500 titik

Jumlah titik yang berada dalam fungsi       : 491 titik

Volume fungsi menggunakan metode Monte Carlo : 3.29756 satuan luas
```



HeartCarlo[3000]

```
Jumlah titik yang disebar                    : 3000 titik
Jumlah titik yang berada dalam fungsi        : 1010 titik
Volume fungsi menggunakan metode Monte Carlo : 3.39158 satuan luas
```



Sehingga kita peroleh volumenya sekitar 3.3 satuan luas.

Maka dengan ini, soal nomor 4 telah terjawab.

==

==