Xyba Project

Metode Numerik

Short Summary for UAS

1. This document is version: 0.7.5
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 20/12/2017

Thank you for your cooperation >v<

Concept Points

Norm Vektor

Sebuah norm vektor di $\mathbb{R}^n$ adalah sebuah fungsi, $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memiliki properti yaitu:

1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
2) $\|\mathbf{x}\| = 0$ iff $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Norm l_1 untuk vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ diberikan oleh:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Norm l_2 untuk vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ diberikan oleh:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Norm l_∞ untuk vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ diberikan oleh:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Teorema 7.3 (Cauchy-Schwarz Inequality Theorem) Untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ di $\mathbb{R}^n$, berlaku: $$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} y_i^2} = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$
Teorema 7.7 $$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Kekonvergenan Vektor

Teorema 7.6 Barisan vektor $\{\mathbf{x}^k\}$ akan konvergen ke $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ relatif terhadap norm l_∞ jika dan hanya jika: $$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_i^k = \mathbf{x}_i, \forall i = 1,2, \dots, n$$

Norm Matriks

Sebuah norm matriks di himpunan dari semua matriks $n \times n$ adalah sebuah fungsi bernilai real, $\|\cdot\|$, yang didefinisikan pada fungsi ini yang memenuhi setiap matriks $n \times n$ A dan B serta semua bilangan real α dengan properti yaitu:

1) $\|A\| \geq 0$
2) $\|A\| = 0$ iff $A = O$, matriks dengan setiap elemen bernilai 0
3) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
5) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Norm l_1 untuk matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ diberikan oleh:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norm l_2 untuk matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ diberikan oleh:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

dimana $\rho(A^T A)$ adalah nilai eigen absolut terbesar (lihat bagian E. spectral radius)

Norm l_∞ untuk matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ diberikan oleh: (Teorema 7.11)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norm l_2 didekatkan dengan norm Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Kekonvergenan Matriks

Sebuah matriks A berukuran $n \times n$ konvergen jika:

$$\lim_{k \to \infty} (A^k)_{ij} = 0, \forall i = 1,2, \dots, n, j = 1,2, \dots, n$$

Matriks-matriks Spesial

1. Diagonally Dominant

   Sebuah matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan diagonally dominant jika:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \forall i = 1,2, \dots, n$$

Dan dikatakan strictly diagonally dominant jika

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \forall i = 1,2,\dots,n$$

Teorema 6.21 Sebuah matriks A yang strictly diagonally dominant adalah nonsingular. Artinya, eliminasi Gauss dapat dilakukan tanpa perlu melakukan operasi tukar baris dan komputasinya akan lebih stabil terhadap pertumbuhan round-off error

2. Definite Positive
   Sebuah matriks A dikatakan definit positif jika:
   1) $A^T = A$
   2) $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j > 0, \qquad \forall \mathbf{x} \neq 0$

   e.g.:
   Tunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   definit positif

   1) Jelas
   2) $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$
      $= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0$
      Artinya $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$

   $\therefore A$ definit positif

Teorema 6.23 Jika matriks A berukuran $n \times n$ adalah sebuah matriks definit positif, maka: 1. A memiliki invers 2. $a_{ii} > 0, \forall i = 1,2,\dots,n$ 3. $\max_{1\leq k,j\leq n} \lvert a_{kj} \rvert \leq \max_{1\leq i\leq n} \lvert a_{ii} \rvert$ 4. $\left(a_{ij}\right)^2 < a_{ii}a_{jj}, \forall i \neq j$

A. Dekomposisi LU

Teorema 6.19

Jika eliminasi Gauss dapat dilakukan pada sebuah sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tanpa melakukan operasi tukar baris, maka matriks A dapat difaktorkan menjadi $A = LU$ dengan:

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $m_{ji} = a_{ji}^{(i)} / a_{ii}^{(i)}$

e.g.:

Tentukan faktorisasi LU untuk matriks A pada sistem linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{b_2-2b_1 \\ b_3-3b_1 \\ b_4+b_1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{b_3-4b_2 \\ b_4+3b_2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{b_2-2b_1 \\ b_3-3b_1 \\ b_4+b_1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{b_3-4b_2 \\ b_4+3b_2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = LU$$

B. Dekomposisi LDL^t

Corollary 6.27

Matriks A definit positif jika dan hanya jika A dapat difaktorkan sebagai LDL^t

e.g.:

Tentukan faktorisasi LDL^t dari matriks definit positif berikut

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL't$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & d_1 l_{31} \\ d_1 l_{21} & d_1 l_{21}^2 + d_2 & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} \\ d_1 l_{31} & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} & d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 \end{bmatrix}$$

Setelah menyelesaikannya, kita akan dapatkan

$$\therefore A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C. Dekomposisi LL^t (Cholesky)

Corollary 6.28

Matriks A definit positif jika dan hanya jika A dapat difaktorkan sebagai LL^t

e.g.:

Tentukan faktorisasi LL^t dari matriks definit positif berikut

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = LL^t$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11} l_{21} & l_{11} l_{31} \\ l_{11} l_{21} & l_{11}^2 + l_{22}^2 & l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} \\ l_{11} l_{31} & l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} & l_{11}^2 + l_{22}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Setelah menyelesaikannya, kita akan dapatkan:

$$\therefore A = LL^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D. Perbandingan Banyaknya Operasi Yang Dibutuhkan Untuk Menyelesaikan SPL

Metode	Banyaknya Operasi	Syarat
Gaussian Elimination	$\left(\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}\right)+\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}\right)=\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n$	
Gauss-Jordan Elimination	$\left(\frac{n^3}{2}+n^2-\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}\right)=n^3+n^2-n$	
Dekomposisi LDL^t	$\left(\frac{n^3}{6}+n^2-\frac{7n}{6}\right)+\left(\frac{n^3}{6}-\frac{n}{6}\right)=\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{4}{3}n$	Matriks Koefisien definit positif
Cholesky	$\left(\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}\right)+\left(\frac{n^3}{6}-\frac{n}{6}\right)=\frac{1}{3}n^3+\frac{n^2}{2}-\frac{5}{6}n$	Matriks Koefisien definit positif

E. Spectral Radius

Spectral Radius dari suatu matriks A diberikan oleh:

$$\rho(A)=\max|\lambda|$$

di mana λ adalah eigenvalue-eigenvalue dari A

(Ingat: Jika $\lambda=a\pm bi$, maka $|\lambda|=\sqrt{a^2+b^2}$)

> Teorema 7.15
>
> Jika A adalah matriks berukuran $n\times n$, maka:
> 1. $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}$
> 2. $\rho(A)\le\|A\|$, untuk norm tipe apa pun

F. Iterative Techniques

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$=D-L-U.$$

Definisikan notasi-notasi:
$T_j = D^{-1}(L + U)$
$T_g = (D - L)^{-1}U$

Teorema 7.22 (Stein-Rosenberg)

Jika $a_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$ dan $a_{ii} > 0, \forall i = 1,2,3, \dots, n$, maka satu dan hanya satu dari beberapa pernyataan berikut yang akan berlaku:
1. $0 \leq \rho(T_g) < \rho(T_j) < 1$
2. $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$
3. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 0$
4. $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 1$

Metode Gauss-Seidel akan konvergen untuk setiap titik awal jika $\rho(T_j) < 1$
Metode Jacobi akan konvergen untuk setiap titik awal jika $\rho(T_g) < 1$

G. Relaxation Techniques

Dengan definisi D, L, U sebelumnya, definisikan notasi:
$T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$

Teorema 7.24 (Kahan)

Jika $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1,2, \dots, n$, maka $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$.
Artinya metode SOR akan konvergen hanya jika $0 < \omega < 2$

Teorema 7.25 (Ostrowski-Reich)

Jika A adalah matriks definit positif dan $0 < \omega < 2$, maka metode SOR akan konvergen untuk setiap titik awal

Teorema 7.26

Jika A definit positif dan tridiagonal, maka $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$, dan ω yang optimal diberikan oleh:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}$$

Dan dengan pillihan ω ini, didapatkan $\rho(T_\omega) = \omega - 1$