Xyba Project

Persamaan Differensial Biasa

Short Summary for UAS

1. This document is version: 0.9.1
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 10/12/2017

Thank you for your cooperation >v<

A. PDB Deret

Misal sebuah pdb orde 2 homogen dengan sebuah variabel independen x sebagai berikut

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Di mana P, Q, dan R adalah polinomial-polinomial dan tidak ada faktor $(x - c)$ yang merupakan faktor dari ketiga polinomial tersebut. Jika ada, bisa dihilangkan dahulu.

Sebuah titik x_0 sedemikian sehingga $P(x_0) \neq 0$ dikatakan titik biasa. Karena P kontinu, maka ada interval sekitar x_0 sedemikian sehingga $P(x)$ tidak pernah nol. Pada interval tersebut, kita dapat sederhanakan persamaan itu menjadi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Di mana $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ dan $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$

Solusi untuk persamaan tersebut adalah

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

B. Transformasi Laplace

$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s),$ ada jika konvergen

$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0$	$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, s > 0$	$\mathcal{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^2 + b^2}$
$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, s > a$	$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}[\sin bt] = \frac{b}{s^2 + b^2}$

Sifat-sifat:

1. $\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)]$
2. $\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0)$$

Sifat Translasi

$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

$\mathcal{L}[t\,f(t)] = -F'(s)$

$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

C. Fungsi Heaviside

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{1}{s}e^{-as}$$

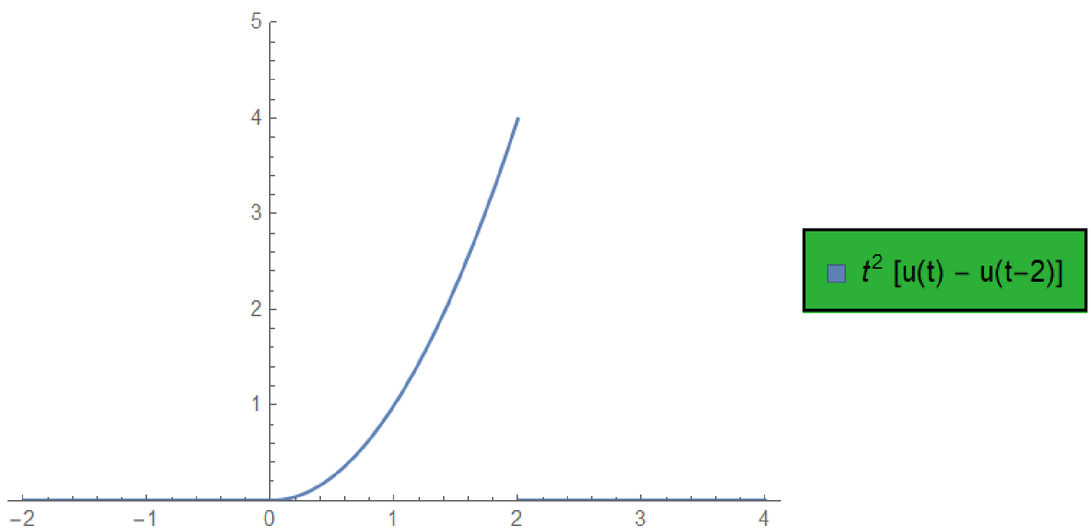
$$\mathcal{L}[u(t-a) - u(t-b)] = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

Fungsi Filter:

$f(t) = u(t-a) - u(t-b)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

e.g.:



Translasi t

$$f(t-a)\,u(t-a) = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(t-a)\,u(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

D. Konvolusi

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\omega)\, g(t-\omega) d\omega = \int_0^t f(t-\omega)\, g(\omega) d\omega = g(t) * f(t)$$

($*$: operator konvolusi)

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$

e.g.:

1. $H(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}$

   Ambil $F(s) = \dfrac{1}{s} \to f(t) = 1$

   Ambil $G(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \to g(t) = \sin t$

   $f(t) * g(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t-\omega)\, d\omega = -\int_0^t \sin(t-\omega)\, d(t-\omega) = -\cos t$

2. $H(s) = \frac{1}{s+1}\frac{s}{s^2+4}$

   Ambil $F(s) = \dfrac{1}{s+1} \to f(t) = e^{-t}$

   Ambil $G(s) = \dfrac{s}{s^2+4} \to g(t) = \cos 2t$

   $\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \displaystyle\int_0^t e^{-t} \cos(2t-2\omega)\, d\omega = -\frac{1}{2} e^{-t} \int_{2t}^0 \cos(2t-2\omega)\, d(2t-2\omega)$

   $\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \dfrac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$

E. Fungsi Delta Dirac

$$f_\epsilon = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, a < t < a + \varepsilon \\ 0, \qquad\quad t \text{ lain} \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 0, \qquad t \neq a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$$
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

F. Invers Transformasi Laplace (Fungsi Rasional)

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)} \Rightarrow F(s)=\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

1) Jika $Q(s)=(s-a)Q_2(s)$

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A}{s-a}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

-------------------------------------- $\times (s-a)$

$$(s-a)\frac{P(s)}{Q(s)}=A+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}(s-a)$$

$$W(s)=\frac{P(s)}{Q_2(s)}=A+P_2(s)\frac{s-a}{Q_2(s)}$$

$$W(a)=\frac{P(a)}{Q_2(a)}=A$$

2) Jika $Q(s)=(s-a)^2Q_2(s)$

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A}{(s-a)^2}+\frac{B}{s-a}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

--- $\times (s-a)^2$

$$(s-a)^2\frac{P(s)}{Q(s)}=A+B(s-a)+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}(s-a)^2$$

$$W(s)=\frac{P(s)}{Q_2(s)}=A+B(s-a)+P_2(s)\frac{(s-a)^2}{Q_2(s)}$$

$$W(a)=A$$

$$W'(b)=B$$

3) Jika $Q(s)=[(s-a)^2+b^2]Q_2(s)$

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A(s-a)+Bb}{(s-a)^2+b^2}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

-- $\times ((s-a)^2+b^2)$

$$W(s)=A(s-a)+Bb+H(s)[(s-a)^2+b^2]$$

$$W(a+bi)=Abi+Bb$$

$$A=\frac{1}{b}\Im\big(W(a+bi)\big)$$

$$B=\frac{1}{b}\Re\big(W(a+bi)\big)$$

e.g.:

Misal $F(s) = \frac{s^2}{[(s-2)^2+9](s-4)}$, tentukan $f(t)$

$$F(s) = \frac{A(s-2)+3B}{(s-2)^2+9} + \frac{C}{s-4}$$

- Mencari C

$$W(s) = \frac{s^2}{(s-2)^2+9}$$

$$C = W(4) = \frac{16}{4+9} = \frac{16}{13}$$

- Mencari A dan B

$$W(s) = \frac{s^2}{s-4}$$

$$W(2+3i) = \frac{4+12i-9}{2+3i-4} = \frac{12i-5}{3i-2}\frac{3i+2}{3i+2} = \frac{-36+9i-10}{-9-4} = \frac{-46+9i}{-11} = \frac{46}{11} - \frac{9}{11}i$$

$$A = \frac{1}{3}\Im\big(W(2+3i)\big) = \frac{1}{3}\left(-\frac{9}{11}\right) = -\frac{3}{11}$$

$$B = \frac{1}{3}\Re\big(W(2+3i)\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{46}{11}\right) = \frac{46}{33}$$

$$F(s) = \frac{-\frac{3}{11}(s-2)+3\left(\frac{46}{33}\right)}{(s-2)^2+9} + \frac{\frac{16}{13}}{s-4}$$

$$\therefore f(t) = -\frac{3}{11}e^{2t}\cos 3t + \frac{46}{33}e^{2t}\sin 3t + \frac{16}{13}e^{4t}$$

G. Sistem Persamaan Differensial Linier

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + g_1(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + g_2(t)$$

Sistem tersebut dapat ditulis sebagai

$$X' = AX + g(t)$$

dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}, g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

Jika $g(t) = 0$, maka dikatakan Sistem Persamaan Linier Homogen
Jika $g(t) \neq 0$, maka dikatakan Sistem Persamaan Linier Non Homogen

Misal $x = ue^{\lambda t}$
$x' = \lambda ue^{\lambda t}$

Solusi Homogen:

$$X' = AX$$
$$\lambda ue^{\lambda t} = Aue^{\lambda t}$$
$$\lambda u = Au$$
$$Au - \lambda u = 0$$
$$(A - \lambda I)u = 0$$

Dari sini kita bisa dapatkan λ_1, λ_2 kemudian mendapatkan solusinya yaitu:

$$x_1 = u_1 e^{\lambda_1} t$$
$$x_2 = u_2 e^{\lambda_2} t$$

Jika $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $x(t) = c_1 u_1 e^{\lambda_1} t + c_2 u_2 e^{\lambda_2} t$
Jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $x(t) = c_1 ue^{\lambda} t + c_2(ut + v)e^{\lambda} t$
Jika $\lambda = p \pm qi$: $x_1(t) = e^{pt}(a\cos qt - b\sin qt)$
$x_2(t) = e^{pt}(b\cos qt + a\sin qt)$

Solusi Khusus:

$$X' = AX + g(t)$$

1. Metode Koefisien Tak Tentu

$g(t)$	Pemisalan untuk x
t^2	$x = pt^2 + qt + r$
e^{mt}	$x = pe^{mt}$
$\cos mt$ $\sin mt$	$x = p\cos mt + q\sin mt$

2. Metode Variasi Parameter
   1. Matriks Fundamental

      $$\emptyset = [x_1 | x_2]$$
      $$\emptyset \text{ merupakan solusi maka berlaku } \emptyset' = A\emptyset$$

   2. Metode Variasi Paramater
      Misal $X = \emptyset V$
      $X' = \emptyset' V + \emptyset V'$

$$\begin{aligned}
X' &= AX + g \\
\emptyset' V + \emptyset V' &= A\emptyset V + g \\
\emptyset V' &= A\emptyset V - \emptyset' V + g \\
\emptyset V' &= V(A\emptyset - \emptyset') + g \\
\emptyset V' &= 0 + g \\
\emptyset V' &= g \\
V' &= \emptyset^{-1} g \\
V &= \int \emptyset^{-1} g \, dt \\
\therefore X &= \emptyset \int \emptyset^{-1} g \, dt
\end{aligned}$$

e.g.:
$x' = 2x - y + e^t$
$y' = 3x - 2y + t$

Solusi Homogen:
$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$
$-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 3 = 0$
$\lambda^2 - 1 = 0$
$\lambda_{1,2} = 1, -1$

Untuk $\lambda_1 = 1$:
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$3\xi_1 - \xi_2 = 0$
$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -1$:
$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$3\xi_1 - \xi_2 = 0$
$\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Substitusikan $\lambda_1 = 1, \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\lambda_2 = -1, \vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ke solusi homogen yaitu

$$X(t) = c_1 \vec{p} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{q} e^{\lambda_2 t} \text{ (bentuk } \lambda_1 \neq \lambda_2\text{)}$$

$\therefore$ Solusi Homogennya adalah $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$

Solusi Khusus menggunakan Metode Variasi Parameter:

$$\emptyset = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\emptyset^{-1} = \frac{1}{3-1}\begin{bmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t & \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}$$

$$\emptyset^{-1}g = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t & \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}te^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t \end{bmatrix}$$

$$\int \emptyset^{-1}g\,dt = \begin{bmatrix} \int \frac{3}{2} - \frac{1}{2}te^{-t}\,dt \\ \int -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}te^{-t} \\ -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}$$

$$X = \emptyset \int \emptyset^{-1}g\,dt = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}te^{-t} \\ -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{4}e^t + t - 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Solusi Khususnya adalah $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Solusi Lengkapnya adalah $X(t) = \begin{bmatrix} c_1 - \frac{1}{4} \\ c_1 - \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} c_2 \\ 3c_2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

H. Mengubah PDB Orde 2 ke SPD Linier

Misal sebuah pdb orde 2 : $y'' + a_0 y' + a_1 y = g(x)$
Tulis pdb tersebut sebagai : $y'' = g(x) - a_1 y - a_0 y'$

Misal

$$u = y, v = \frac{du}{dx} = y'$$

Maka

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = g(x) - a_1 u - a_0 v$$

Sehingga:

$$\frac{du}{dx} = v = 0u + 1v$$

$$\frac{dv}{dx} = g(x) - a_1 u - a_0 v = -a_1 u - a_0 v + g(x)$$

$\therefore y'' + a_0 y' + a_1 y = g(x)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} g(x)$$

e.g.:

Carilah solusi dari $y'' - 6y' + 8y = x$ menggunakan sistem persamaan differensial

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

Solusi Homogen:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -8 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_{1,2} = 2,4$

Untuk $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-2\xi_1 + \xi_2 = 0$

$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-4\xi_1 + \xi_2 = 0$

$\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Substitusikan $\lambda_1 = 2, \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\lambda_2 = 4, \vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ke solusi homogen yaitu

$$X(t) = c_1 \vec{p} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{q} e^{\lambda_2 t} \text{ (bentuk } \lambda_1 \neq \lambda_2\text{)}$$

$\therefore$ Solusi Homogennya adalah $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t}$

Solusi Khusus:

Misal: $X = px + q$

$X' = p$

Pandang sistem persamaan differensial kita sebagai

$X' = AX + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$ dengan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

Substitusikan permisalan

$p = A(px + q) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$

$Apx + Aq = p - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$

- $Apx = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$

  $Ap = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

  $p = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

  $p = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$

- $Aq = p$

  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$

  $q = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$

  $q = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$

  $q = \begin{bmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

Masukkan $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $q = \begin{bmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ ke permisalan $X = px + q$

$\therefore$ Solusi Khususnya adalah $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

$\therefore$ Solusi Lengkapnya adalah $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

I. Euler Method

$$y' = f(t, y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha$$

pada $(N + 1)$ bilangan terpisah berjarak sama pada interval $[a, b]$

$h = \dfrac{b - a}{N}, \qquad t = a, \qquad \omega = \alpha$

Output: (t_0, ω_0)

for i = 1 to N:

$\omega = \omega + h\, f(t, \omega)$

$t = a + ih$

Output: (t_i, ω_i)

e.g.:

```
def f(t, y):
    return y - t**2 + 1

def y(t): #exact solution
    return (t + 1)**2 - 0.5*exp(t)

Euler(f, y, 0, 2, 10, 0.5) #example algorithm appliance
```

```
i       t          w          y = y(t)     |y - w|
0    0.0000000  0.5000000  0.5000000   0.0000000
1    0.2000000  0.8000000  0.8292986   0.0292986
2    0.4000000  1.1520000  1.2140877   0.0620877
3    0.6000000  1.5504000  1.6489406   0.0985406
4    0.8000000  1.9884800  2.1272295   0.1387495
5    1.0000000  2.4581760  2.6408591   0.1826831
6    1.2000000  2.9498112  3.1799415   0.2301303
7    1.4000000  3.4517734  3.7324000   0.2806266
8    1.6000000  3.9501281  4.2834838   0.3333557
9    1.8000000  4.4281538  4.8151763   0.3870225
10   2.0000000  4.8657845  5.3054720   0.4396874
```

J. Improved Euler Method

$$y' = f(t,y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha$$

pada $(N+1)$ bilangan terpisah berjarak sama pada interval $[a, b]$

$$h = \frac{b-a}{N}, \qquad t = a, \qquad \omega = \alpha$$

Output: (t_0, ω_0)

for i = 1 to N:

$\omega = \omega + \frac{h}{2}\left(f(t,\omega) + f\left(t+h,\ \omega + h\, f(t,\omega)\right)\right)$

$t = a + ih$

Output: (t_i, ω_i)

e.g.:

```
def f(t, y):
    return y - t**2 + 1

def y(t): #exact solution
    return (t + 1)**2 - 0.5*exp(t)

ImprovedEuler(f, y, 0, 2, 10, 0.5) #example algorithm appliance
```

i	t	w	y = y(t)	|y - w|
0	0.0000000	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2000000	0.8260000	0.8292986	0.0032986
2	0.4000000	1.2069200	1.2140877	0.0071677
3	0.6000000	1.6372424	1.6489406	0.0116982
4	0.8000000	2.1102357	2.1272295	0.0169938
5	1.0000000	2.6176876	2.6408591	0.0231715
6	1.2000000	3.1495789	3.1799415	0.0303627
7	1.4000000	3.6936862	3.7324000	0.0387138
8	1.6000000	4.2350972	4.2834838	0.0483866
9	1.8000000	4.7556185	4.8151763	0.0595577
10	2.0000000	5.2330546	5.3054720	0.0724173

K. Higher-Order Taylor Method

$$y' = f(t,y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \qquad t = a, \qquad \omega = \alpha$$

Output: (t_0, ω_0)

$\omega_{i+1} = \omega_i + h * T^{(n)}(t_i, \omega_i)$

di mana $T^{(n)}(t_i, \omega_i) = f(t_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, \omega_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, \omega_i)$

n adalah order. Metode Euler adalah Metode Taylor dengan order 1.

e.g.: Taylor Method dengan order 2

```
def f(t, y):
    return y - t**2 + 1

def y(t): #exact solution
    return (t + 1)**2 - 0.5*exp(t)

Taylor(f, y, 2, 0, 2, 10, 0.5) #example algorithm appliance
```

```
 i      t          w        y = y(t)     |y - w|
 0   0.0000000  0.5000000  0.5000000   0.0000000
 1   0.2000000  0.8300000  0.8292986   0.0007014
 2   0.4000000  1.2158000  1.2140877   0.0017123
 3   0.6000000  1.6520760  1.6489406   0.0031354
 4   0.8000000  2.1323327  2.1272295   0.0051032
 5   1.0000000  2.6486459  2.6408591   0.0077868
 6   1.2000000  3.1913480  3.1799415   0.0114065
 7   1.4000000  3.7486446  3.7324000   0.0162446
 8   1.6000000  4.3061464  4.2834838   0.0226626
 9   1.8000000  4.8462986  4.8151763   0.0311223
10   2.0000000  5.3476843  5.3054720   0.0422123
```

L. Runge Kutta

Runge Kutta ini ada beberapa variasinya seperti Runge Kutta Order 2 (Midpoint Method), Runge Kutta Order 3 (Heun's Method), dan Runge Kutta Order 4 (Runge Kutta Method). Yang umum digunakan adalah Runge Kutta Order 4.

Runge Kutta Order 4 (Runge Kutta Method)

$$y' = f(t,y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha$$

$h = \dfrac{b-a}{N}, \qquad t = a, \qquad \omega = \alpha$

Output: (t_0, ω_0)

for i = 1 to N:

$K_1 = h\, f(t, \omega)$

$K_2 = h\, f\left(t + \frac{h}{2}, \omega + \frac{K_1}{2}\right)$

$K_3 = h\, f\left(t + \frac{h}{2}, \omega + \frac{K_2}{2}\right)$

$K_4 = h\, f(t + h, \omega + K_3)$

$\omega = \omega + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$

$t = a + ih$

Output: (t_i, ω_i)

e.g.:

```
def f(t, y):
    return y - t**2 + 1

def y(t): #exact solution
    return (t + 1)**2 - 0.5*exp(t)

RK(f, y, 0, 2, 10, 0.5) #example algorithm appliance
```

```
 i       t          w        y = y(t)     |y - w|
 0   0.0000000  0.5000000  0.5000000   0.0000000
 1   0.2000000  0.8292933  0.8292986   0.0000053
 2   0.4000000  1.2140762  1.2140877   0.0000114
 3   0.6000000  1.6489220  1.6489406   0.0000186
 4   0.8000000  2.1272027  2.1272295   0.0000269
 5   1.0000000  2.6408227  2.6408591   0.0000364
 6   1.2000000  3.1798942  3.1799415   0.0000474
 7   1.4000000  3.7323401  3.7324000   0.0000599
 8   1.6000000  4.2834095  4.2834838   0.0000743
 9   1.8000000  4.8150857  4.8151763   0.0000906
10   2.0000000  5.3053630  5.3054720   0.0001089
```

Metode Numerik lainnya masih ada, tapi kita sampai sini saja

M. Persamaan Differensial Nonlinier dan Stabilitas

Misal sebuah sistem persamaan differensial

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Untuk menentukan titik-titik kritisnya, cari titik potong $F(x, y) = 0$ dan $G(x, y) = 0$

e.g.:

Carilah titik-titik kritis dari sistem berikut

$$\frac{dx}{dt} = x - y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + x^2$$

$x - y^2 = 0, \qquad x - 2y + x^2 = 0$

Ambil $x = y^2$. Masukkan ke persamaan kedua:

$$y^2 - 2y + y^4 = 0$$

$$y(y - 2 + y^3) = 0$$

Dari sini kita dapatkan $y = 0$ atau $y - 2 + y^3 = 0$

Ambil $y = 0$, maka $x = y^2 = 0$, maka titik kritis pertama adalah $(0,0)$

Ambil $y - 2 + y^3 = 0$
Menyelesaikan ini, kita akan dapatkan:

$$y = 1, x = y^2 = 1 \rightarrow (1,1)$$

dan

$$y^2 + y + 2 = 0$$
$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{7}$$

Ambil $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7}$, maka $x = y^2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7} \rightarrow \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7}\right)$
Ambil $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}$, maka $x = y^2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7} \rightarrow \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}\right)$

$\therefore$ Titik-titik kritisnya yaitu:

$$(0,0), (1,1), \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}\right), \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{7}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{7}\right)$$

Properti-properti stabilitas dari $X' = AX$ dengan $\det(A - \lambda I) = 0$ dan $\det(A) \neq 0$

Eigenvalues	Type of Critical Point	Stability
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Node	Unstable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Node	Asymptotically Stable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Saddle point	Unstable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Proper or Improper Node	Unstable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Proper or Improper Node	Asymptotically Stable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$ $a > 0$ $a < 0$	Spiral Point	 Unstable Asymptotically Stable
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm bi$	Center	Stable

N. Autonomous Systems and Stability

Misal sebuah sistem persamaan differensial nonlinier

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Di sekitar titik kritis (x_0, y_0) dapat dibentuk Sistem Almost Linear

$$J = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)}$$

$X' = JX \rightarrow$ Sistem Almost Linear

e.g.:
Carilah solusi homogen dari sistem berikut dengan titik kritis (0,0)

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + xy^3$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y - xy$$

$$J = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$$
$$J = \begin{bmatrix} 2 + y^3 & 1 + 3xy^2 \\ 1 - y & -2 - x \end{bmatrix}_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$$
$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 5 = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{5}$$

Untuk $\lambda = \sqrt{5}$:

$$\begin{bmatrix} 2 - \sqrt{5} & 1 \\ 1 & -2 - \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\xi_1 - \left(2 + \sqrt{5}\right)\xi_2 = 0$$
$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = -\sqrt{5}$

$$\begin{bmatrix} 2 + \sqrt{5} & 1 \\ 1 & -2 + \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\xi_1 - \left(2 - \sqrt{5}\right)\xi_2 = 0$$
$$\vec{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

∴ Solusi Homogen dari sistem tersebut: $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{5} \end{bmatrix} e^{\sqrt{5}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{5} \end{bmatrix} e^{-\sqrt{5}t}$

O. Mengubah sistem persamaan differensial menjadi polar

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$$
$$2r\,dr = 2x\,dx + 2y\,dy$$
$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$
$$r\frac{dr}{dt} = x\,F(x,y) + y\,G(x,y)$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}}$$
$$\sec^2\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$
$$\frac{r^2}{x^2}\,d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$
$$r^2 d\theta = x\,dy - y\,dx$$
$$r^2\frac{d\theta}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$$
$$r^2\frac{d\theta}{dt} = -y\,F(x,y) + x\,G(x,y)$$

Sehingga sistem awal kita dapat diubah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y)\end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{\boldsymbol{x\,F(x,y) + y\,G(x,y)}}{r}\\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\boldsymbol{-y\,F(x,y) + x\,G(x,y)}}{r^2}\end{aligned}$$

P. Liapunov's Second Method

Bentuk umum:

$$V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Teorema 9.6.4:

V definit positif iff $a > 0, b^2 - 4ac > 0$

V definit negatif iff $a < 0, b^2 - 4ac > 0$

Contoh bentuk lain: $V(x,y) = ax^2 + cy^2, V(x,y) = ax^2 + cy^4$

Diberikan sebuah persamaan differensial Autonomous:

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

Didefinisikan rasio perubahan dari V terhadap trajektori-trajektori dari sistem yang melewati titik (x,y):

$$\dot{V}(x,y) = V_x(x,y)\,F(x,y) + V_y(x,y)\,G(x,y)$$

Teorema 9.6.1 Suatu fungsi V yang memenuhi: - V kontinu - Turunan parsial dari V kontinu - V definit positif Jika $\dot{V}$ definit negatif, titik kritisnya stabil asimptotik Jika $\dot{V}$ definit seminegatif, titik kritisnya stabil
Teorema 9.6.2 Suatu fungsi V yang memenuhi: - V kontinu - Turunan parsial dari V kontinu - $V(0,0) = 0$ Jika V definit positif dan $\dot{V}$ definit negatif, maka titik kritisnya tidak stabil Jika V definit negatif dan $\dot{V}$ definit positif, maka titik kritisnya tidak stabil
Teorema 9.6.3 Suatu fungsi V yang memenuhi: - V kontinu - Turunan parsial dari V kontinu Jika terdapat domain D_k memuat titik kritis $(0, x)$ dan $V(x, y) \leq k$. Jika V definit positif dan $\dot{V}$ definit negatif, maka solusi akan mendekati titik kritis semakin naik nilai t

Latihan:

Diberikan sistem persamaan differensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 - 3xy^4$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2y - 2y^3 - y^5$$

Tentukan stabilitas titik kritis sistem tersebut menggunakan fungsi Liapunov $ax^2 + by^2$ atau jika gagal, gunakan $ax^2 + by^4$

Q. Solusi Periodik dan Limit Cycle

Sebuah sistem autonomous $X' = f(X)$

Jika memiliki solusi yang memenuhi relasi:

$$X(t + T) = X(t), \qquad \forall t$$

Dan untuk suatu konstanta positif T (periode) dikatakan memiliki solusi periodik.

Teorema 9.7.1 Jika ada kurva tertutup dari suatu sistem persamaan differensial maka titik kritis sistem ada di dalam kurva tertutup.
Teorema 9.7.2 Jika $F_x + G_y$ bertanda sama $\forall (x, y) \in D$ maka di D tidak ada kurva tertutup
Teorema 9.7.3 (Poincaré-Bendixson Theorem) Misal D_1 daerah terbatas di D dan R memuat D_1 dan batasnya. Jika ada kurva yang melintasi titik di R dan tetap berada di R, maka untuk $t > t_0$, kurva tersebut merupakan solusi periodik (kurva tertutup)

e.g.:
Diberikan sistem persamaan differensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = x + 2xy + x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + x^2 y$$

Tentukan apakah sistem ini memiliki kurva tertutup atau tidak

$$\frac{dx}{dt} = x + 2xy + x^3 = F(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + x^2 y = G(x, y)$$

$F_x = 1 + 2y + 3x^2$
$G_y = -2y + x^2$
$F_x + G_y = 1 + 4x^2$

Perhatikan $F_x + G_y \geq 1 > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\therefore$ Berdasarkan Teorema 9.7.2, sistem ini tidak memiliki kurva tertutup.