Xyba Project

Matematika Keuangan
Pembahasan UTS 2015

1. This document is version: 0.8.3
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 01/04/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Rizky ingin membeli suatu perpetuitas yang membayarkan 100 per tahun dengan pembayaran pertama pada akhir tahun ke-11. Dia dapat membeli perpetuitas tersebut dengan salah satu cara berikut:
   (i) Membayar 90 setiap akhir tahun untuk waktu 10 tahun, atau
   (ii) Membayar K setiap akhir tahun untuk 5 tahun pertama dan tidak membayarkan apa-apa untuk 5 tahun berikutnya.

   Tentukan besarnya nilai K.

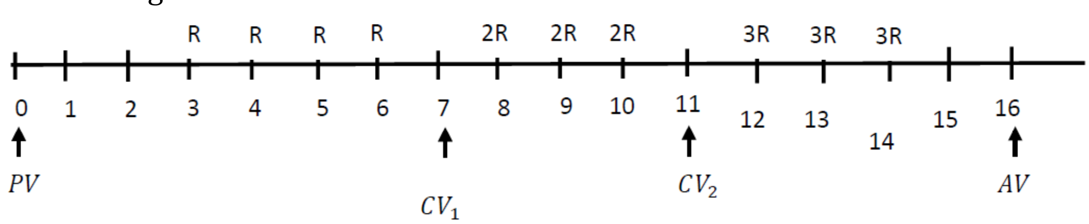
2. Diketahui nilai sekarang dari sebuah perpetuitas yang membayarkan 10 setiap akhir 3 tahun adalah 32. Pembayaran pertama dari perpetuitas ini adalah di akhir tahun ke-3 dengan tingkat bunga efektif tahunan $i, i > 0$. Dengan tingkat bunga yang sama, nilai sekarang dari perpetuitas yang membayarkan 1 setiap akhir 4 bulan adalah X. Jika pembayaran pertama dari perpetuitas ini adalah di akhir bulan ke-4, hitunglah X.

3. Diketahui pada waktu 0, uang sejumlah K didepositokan ke rekening X, yang terakumulasi pada *force of interest* $\delta_t = 0{,}006t^2$. Pada waktu m, uang sejumlah $2K$ didepositokan ke rekening Y, yang terakumulasi pada tingkat bunga efektif tahunan 10%. Pada waktu $n, n > m$, nilai akumulasi pada masing-masing rekening adalah $4K$. Tentukan n dan m.

4. Pada tingkat bunga tahunan efektif i, anda diberikan:
   a. Nilai sekarang dari annuitas immediate dengan pembayaran tahunan sebesar 1 selama n tahun adalah 40
   b. Nilai sekarang dari annuitas immediate dengan pembayaran tahunan sebesar 1 selama $3n$ tahun adalah 70

   Hitunglah nilai akumulasi dari annuitas immediate dengan pembayaran tahunan sebesar 1 untuk $2n$ tahun.

5. Perhatikan diagram waktu berikut ini:



   Tentukan Present Value (PV), Current Value (CV_1 dan CV_2), dan Accumulated Value (AV) dengan menggunakan 2 cara.

Jawaban

1. Rizky ingin membeli suatu perpetuitas yang membayarkan 100 per tahun dengan pembayaran pertama pada akhir tahun ke-11. Dia dapat membeli perpetuitas tersebut dengan salah satu cara berikut:
   (i) Membayar 90 setiap akhir tahun untuk waktu 10 tahun, atau
   (ii) Membayar K setiap akhir tahun untuk 5 tahun pertama dan tidak membayarkan apa-apa untuk 5 tahun berikutnya.

   Tentukan besarnya nilai K.

Jawab:
Saat $t = 10$, kita akan punya accumulated value dari (i) sama dengan present value dari perpetuitas dan begitu pula dengan (ii). Dengan kata lain, kedua cara tersebut bernilai sama pada $t = 10$. Sehingga bentuk Equation of Value pada $t = 10$:

$$90s_{\overline{10}|i} = Ks_{\overline{5}|i}(1+i)^5$$

$$90\left(\frac{(1+i)^{10}-1}{i}\right) = K\left(\frac{(1+i)^5-1}{i}\right)(1+i)^5$$

$$90((1+i)^{10}-1) = K((1+i)^{10}-(1+i)^5)$$

$$K = \frac{90((1+i)^{10}-1)}{(1+i)^{10}-(1+i)^5}$$

Cari i dengan menyamakan persamaan (i) dan present value perpetuitas:

$$90s_{\overline{10}|i} = 100a_{\overline{\infty}|i}$$

$$90\left(\frac{(1+i)^{10}-1}{i}\right) = \frac{100}{i}$$

$$9(1+i)^{10} - 9 = 10$$

$$(1+i)^{10} = \frac{19}{9}$$

$$(1+i)^5 = \frac{\sqrt{19}}{3}$$

Sehingga:

$$K = \frac{90((1+i)^{10}-1)}{(1+i)^{10}-(1+i)^5} = \frac{90\left(\frac{19}{9}-1\right)}{\frac{19}{9}-\frac{\sqrt{19}}{3}} = \frac{900}{19-3\sqrt{19}} = 151{,}94224 \approx 151{,}9422$$

2. Diketahui nilai sekarang dari sebuah perpetuitas yang membayarkan 10 setiap akhir 3 tahun adalah 32. Pembayaran pertama dari perpetuitas ini adalah di akhir tahun ke-3 dengan tingkat bunga efektif tahunan $i, i > 0$. Dengan tingkat bunga yang sama, nilai sekarang dari perpetuitas yang membayarkan 1 setiap akhir 4 bulan adalah X. Jika pembayaran pertama dari perpetuitas ini adalah di akhir bulan ke-4, hitunglah X.

Jawab:
Dari perpetuitas pertama, pandang per periode sebagai per 3 tahun dengan tingkat bunga efektif j. i adalah pembayaran per tahun, sehingga kita akan punya:

$$1 + j = \left(1 + \frac{i}{3}\right)^3$$

Misal present value dari perpetuitas pertama adalah PV_1. Karena pembayarannya dilakukan setiap akhir periode, maka ini adalah perpetuity-immediate. Sehingga:

$$PV_1 = \frac{10}{j} \Leftrightarrow j = \frac{10}{PV_1} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Sehingga:

$$i = 3\left(\sqrt[3]{1 + j} - 1\right) = 3\left(\sqrt[3]{\frac{21}{16}} - 1\right)$$

Sekarang untuk perpetuitas kedua, pandang per periode sebagai per 4 bulan dengan tingkat bunga $i^* = i^{(3)}/3$. Untuk mencari tingkat bunga efektif i^* per 4 bulan:

$$i^* = \frac{i^{(3)}}{3} = \sqrt[3]{1 + i} - 1 = \sqrt[3]{1 + i} - 1 = \sqrt[3]{1 + 3\left(\sqrt[3]{\frac{21}{16}} - 1\right)} - 1$$

Misal present value dari perpetuitas kedua adalah PV_2. Karena pembayarannya dilakukan setiap akhir periode, maka ini adalah perpetuity-immediate. Sehingga:

$$PV_2 = \frac{1}{i^*} \Leftrightarrow X = \frac{1}{i^*} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 3\left(\sqrt[3]{\frac{21}{16}} - 1\right)} - 1} = 11{,}48405 \ldots \approx 11{,}4841$$

3. Diketahui pada waktu 0, uang sejumlah K didepositokan ke rekening X, yang terakumulasi pada *force of interest* $\delta_t = 0{,}006t^2$. Pada waktu m, uang sejumlah $2K$ didepositokan ke rekening Y, yang terakumulasi pada tingkat bunga efektif tahunan 10%. Pada waktu $n, n > m$, nilai akumulasi pada masing-masing rekening adalah $4K$. Tentukan n dan m.

Jawab:
Pada waktu n, uang yang didepositokan ke rekening X adalah sebesar:

$$A_X(n) = A_X(0).\, a_X(n)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4K = K \exp\left(\int_0^n \delta_s \, ds\right)$$

$$\Leftrightarrow \exp(0{,}002n^3) = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}002n^3 = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow \quad n = \sqrt[3]{\frac{\ln(4)}{0{,}002}} = 8{,}84997 \ldots \approx 8{,}85$$

Pada waktu n, uang yang didepositokan ke rekening Y adalah sebesar:

$$A_Y(n) = A_Y(m)(1+i)^{n-m}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4K = 2K(1+i)^{n-m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+i)^n}{(1+i)^m} = 2$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^m = \frac{(1+i)^n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{\ln\left(\frac{(1+i)^n}{2}\right)}{\ln(1+i)} = \frac{n\ln(1+i) - \ln(2)}{\ln(1+i)} = n - \frac{\ln(2)}{\ln(1+i)} = \sqrt[3]{\frac{\ln(4)}{0{,}002}} - \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}1)}$$

$$= 1{,}57742 \ldots \approx 1{,}5774$$

4. Pada tingkat bunga tahunan efektif i, anda diberikan:
   a. Nilai sekarang dari annuitas immediate dengan pembayaran tahunan sebesar 1 selama n tahun adalah 40
   b. Nilai sekarang dari annuitas immediate dengan pembayaran tahunan sebesar 1 selama $3n$ tahun adalah 70

   Hitunglah nilai akumulasi dari annuitas immediate dengan pembayaran tahunan sebesar 1 untuk $2n$ tahun.

Jawab:
Dari a, kita dapatkan:

$$40 = a_{\overline{n}|i} \Leftrightarrow 40 = \frac{1 - v^n}{i} \Leftrightarrow i = \frac{1 - v^n}{40}$$

Dari b, kita dapatkan:

$$70 = a_{\overline{3n}|i} \Leftrightarrow 70 = \frac{1 - v^{3n}}{i} \Leftrightarrow i = \frac{1 - v^{3n}}{70}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} i &= i \\ \frac{1 - v^n}{40} &= \frac{1 - v^{3n}}{70} \\ 7(1 - v^n) &= 4(1 - v^{3n}) \\ 7 - 7v^n &= 4 - 4v^{3n} \\ 4v^{3n} - 7v^n + 3 &= 0 \\ v^n &= -\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

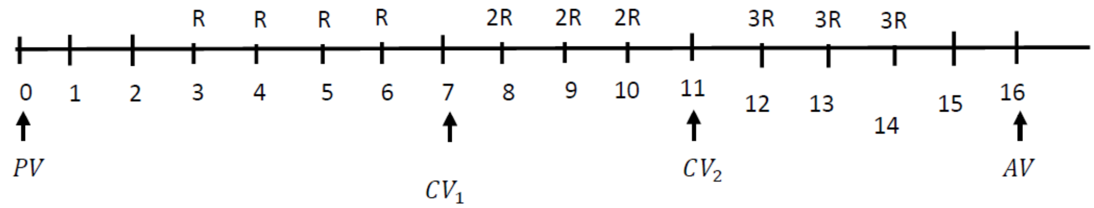
Karena $i > 0$, maka $v = \frac{1}{1+i} > 0$ artinya $v^n = -\frac{3}{2}$ tidak mungkin berlaku.
Jika $v^n = 1$, maka $n \ln v = 0$ dan kita tidak bisa temukan solusi untuk v. Sehingga $v^n = 1$ tidak mungkin berlaku. Artinya haruslah $v^n = \frac{1}{2}$. Sehingga:

$$i = \frac{1 - v^n}{40} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{40} = \frac{\frac{1}{2}}{40} = \frac{1}{80}$$

Nilai akumulasi dari anuitas immediate dengan pembayaran tahunan sebesar 1 untuk $2n$ tahun diberikan oleh:

$$s_{\overline{2n}|i} = \frac{(1 + i)^{2n} - 1}{i} = \frac{\frac{1}{v^{2n}} - 1}{i} = \frac{\left(\frac{1}{v^n}\right)^2 - 1}{i} = \frac{2^2 - 1}{\frac{1}{80}} = \frac{3}{\frac{1}{80}} = 240$$

5. Perhatikan diagram waktu berikut ini:



Tentukan Present Value (PV), Current Value (CV_1 dan CV_2), dan Accumulated Value (AV) dengan menggunakan 2 cara.

Jawab:

- Present Value
  Cara 1: $PV = Ra_{\overline{4|}}v^2 + 2Ra_{\overline{3|}}v^7 + 3Ra_{\overline{3|}}v^{11}$
  Cara 2: $PV = R\ddot{a}_{\overline{4|}}v^3 + 2R\ddot{a}_{\overline{3|}}v^8 + 3R\ddot{a}_{\overline{3|}}v^{12}$

- Accumulated Value
  Cara 1: $AV = Rs_{\overline{4|}}(1+i)^{10} + 2Rs_{\overline{3|}}(1+i)^6 + 3Rs_{\overline{3|}}(1+i)^2$
  Cara 2: $AV = R\ddot{s}_{\overline{4|}}(1+i)^9 + 2R\ddot{s}_{\overline{3|}}(1+i)^5 + 3R\ddot{s}_{\overline{3|}}(1+i)$

- Current Value 1
  Cara 1: $CV_1 = Rs_{\overline{4|}}(1+i) + 2Ra_{\overline{3|}} + 3Ra_{\overline{3|}}v^4$
  Cara 2: $CV_1 = R\ddot{s}_{\overline{4|}} + 2R\ddot{a}_{\overline{3|}}v + 3R\ddot{a}_{\overline{3|}}v^5$

- Current Value 2
  Cara 1: $CV_2 = Rs_{\overline{4|}}(1+i)^5 + 2Rs_{\overline{3|}}(1+i) + 3Ra_{\overline{3|}}$
  Cara 2: $CV_2 = R\ddot{s}_{\overline{4|}}(1+i)^4 + 2R\ddot{s}_{\overline{3|}} + 3R\ddot{a}_{\overline{3|}}v$