Xyba Project

Matematika Dasar III

Pembahasan Soal Pak Dipo

1. This document is version: 0.9.89
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 17/10/2017

Thank you for your cooperation >v<

Foreword

Berdasarkan perjanjian lisan kelas Matematika Dasar III yang diajar oleh Dipo Aldila S.Si., M.Si., file yang terkait dengan soal-soal berikut tidak boleh dishare, sehingga anggap saja konten berikut adalah kumpulan soal Matematika Dasar III dan pembahasannya.

11. Selidiki kekonvergenan barisan berikut dan tentukan limitnya bila konvergen

$$a_n = \frac{9n}{\sqrt{9n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(9)}{n\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}} = \frac{9}{3} = 3$$

$\therefore a_n$ konvergen ke 3

13. Selidiki kekonvergenan barisan berikut dan tentukan limitnya bila konvergen

$$a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{L}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(2)}{\sqrt{n}(\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

$\therefore a_n$ konvergen ke 0

(Mungkin kunci jawaban salah, seharusnya tidak divergen)

15. Selidiki kekonvergenan barisan berikut dan tentukan limitnya bila konvergen

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$$

Misal $f(n) = \frac{n}{n+2}$. Perhatikan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$

$\therefore$ Dengan menggunakan uji deret ganti tanda, maka a_n divergen

17. Selidiki kekonvergenan barisan berikut dan tentukan limitnya bila konvergen

$$a_n = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}$$

$$-1 \le \sin n \le 1$$

$$0 \le \sin^2 n \le 1$$

$$0 \le \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, sehingga berdasarkan teorema apit, maka $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} = 0$

$\therefore a_n$ konvergen ke 0

19. Tentukan jumlah parsial deret berikut dan jumlahnya bila konvergen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 2\frac{1}{1-\frac{1}{4}} + 3\frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{8}{3} + \frac{5}{2} = \frac{16+15}{6} = \frac{31}{6}$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)$ konvergen ke $\frac{31}{6}$

21. Tentukan jumlah parsial deret berikut dan jumlahnya bila konvergen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \ln n - \ln(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{k} \ln n - \ln(n+1) = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \cdots - \ln k + \ln k - \ln(k+1)$$

$$= \ln 1 - \ln(k+1)$$

$\lim_{k\to\infty} (\ln 1 - \ln(k+1)) \rightarrow$ Divergen

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ divergen

23. Tentukan jumlah parsial deret berikut dan jumlahnya bila konvergen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{(n-1)^2} - \frac{3}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{(n-1)^2} - \frac{3}{n^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{3}{(n-1)^2} - \frac{3}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{3}{(n-1)^2} - \frac{3}{n^2}\right) = \frac{3}{1} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{9} + \frac{3}{9} - \cdots - \frac{3}{(k-1)^2} + \frac{3}{(k-1)^2} - \frac{3}{k^2} = 3 - \frac{3}{k^2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(3 - \frac{3}{k^2}\right) = 3 - 0 = 3$$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{(n-1)^2} - \frac{3}{n^2}\right)$ konvergen ke 3

25. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt{n+2}}$$

$\therefore$ Dengan uji deret $-$ p, maka didapatkan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt{n+2}}$ divergen

27. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-3n^2}$$

Misal $f(n) = n\mathrm{e}^{-3n^2}$. Perhatikan bahwa $f(n)$ kontinu, f(n) > 0, dan $f(n)$ tak naik, $\forall$n $\in [1, \infty)$

$$\int_1^{\infty} n\mathrm{e}^{-3n^2}\, dn = \int_1^{\infty} n\mathrm{e}^{-3n^2} \frac{dn^2}{2n} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-3n^2}\, dn^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{-3} \lim_{b\to\infty} \left[\mathrm{e}^{-3n^2}\right]_1^b = -\frac{1}{6}\left(0 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right) = \frac{1}{6\mathrm{e}^3}$$

$\therefore$ Dengan uji integral, maka didapatkan $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-3n^2}$ konvergen

29. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$$

Misal $f(n) = \frac{1}{(\ln 2)^n}$. Perhatikan bahwa $f(n)$ kontinu, $f(n) > 0$, dan $f(n)$ tak naik, $\forall n \in [1, \infty)$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n} dn = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \left(\mathbb{e}^{\ln(\ln(2))}\right)^{-n} dn = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \mathbb{e}^{-\ln(\ln(2))n} dn = -\lim_{b\to\infty} \left[\frac{\mathbb{e}^{-\ln(\ln(2))n}}{\ln(\ln(2))}\right]_1^b$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{\ln(\ln(2))(\ln 2)^n}\right]_1^b \to \text{Divergen}$$

$\therefore$ Dengan uji integral, didapatkan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$ divergen

31. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 3}$$

$$\frac{n}{n^2 + 2n + 3} < \frac{n}{n^2}, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

$\therefore$ Dengan uji banding, didapatkan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 3}$ konvergen

33. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{8(8^n)}{(n+1)(n!)}, u_n = \frac{8^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{8}{n+1}\right| = 0$$

$\therefore$ Dengan uji rasio, didapatkan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ konvergen

35. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2\sqrt{n}}$$

$\therefore$ Dengan uji deret $-$ p, didapatkan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2\sqrt{n}}$ konvergen

37. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}$$

$$\frac{4^n + n}{n!} < \frac{4^n + 4^n}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{8(4^n)}{(n+1)(n!)}, u_n = \frac{2(4^n)}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4}{n+1}\right| = 0$$

Karena berdasarkan uji rasio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 4^n}{n!}$ konvergen,

$\therefore$ Maka dengan uji banding $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}$ pun akan konvergen

39. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji kekonvergenan deret suku positif

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{3(3^n)}, u_n = \frac{n}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ Dengan uji rasio, $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$ konvergen

41. Tunjukkan deret berikut konvergen dan tentukan hampiran $|S - S_9|, S =$ jumlah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$$

Misal $f(n) = \frac{2}{3n+1}$

Perhatikan bahwa $f(n) > 0, f(n)$ monoton turun, dan $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0, \forall n \in [1, \infty)$

Maka berdasarkan uji ganti tanda, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$ konvergen

$$|S - S_9| \le f(10) = \frac{2}{31} = 0.\overline{064516} \ldots \approx 0.065$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$ konvergen dan $|S - S_9| < 0.065$

43. Tunjukkan deret berikut konvergen dan tentukan hampiran $|S - S_9|, S =$ jumlah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

Misal $f(n) = \frac{\ln n}{n}$

Perhatikan bahwa $f(n) > 0, f(n)$ monoton turun, dan $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0, \forall n \in [2, \infty)$

Maka berdasarkan uji ganti tanda, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$ konvergen

$$|S - S_9| \le f(10) = \frac{\ln 10}{10} = 0.230258 \ldots \approx 0.2303$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$ konvergen dan $|S - S_9| < 0.2303$

45. Selidiki apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$$

Berdasarkan uji deret $-$ p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ akan konvergen

$\therefore$ Maka $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$ akan konvergen mutlak

47. Selidiki apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n \ln n}$$

$$\left|(-1)^{n} \frac{1}{n \ln n}\right| = \frac{1}{n \ln n}$$

Misal $f(n) = \frac{1}{n \ln n}$. Perhatikan bahwa $f(n)$ kontinu, $\mathrm{f(n)} > 0$, dan $f(n)$ tak naik, $\forall \mathrm{n} \in [1, \infty)$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n \ln n} dn = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{n \ln n} n \, d(\ln(n)) = \lim_{b \to \infty} [\ln(\ln(n))]_1^b \to \text{Divergen}$$

Namun,

Misal $f(n) = \frac{1}{n \ln n}$

Perhatikan bahwa $f(n) > 0, f(n)$ monoton turun, dan $\lim_{n \to \infty} f(n) = 0, \forall n \in [1, \infty)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n \ln n}$ konvergen bersyarat

49. Selidiki apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$$

$$\left|(-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$$

Berdasarkan uji deret $-$ p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergen, sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ divergen

Namun,

Misal $f(n) = \frac{n}{n^2+1}$

Perhatikan bahwa $f(n) > 0, f(n)$ monoton turun, dan $\lim_{n \to \infty} f(n) = 0, \forall n \in [1, \infty)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ konvergen bersyarat

51. Selidiki apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$$

$$\left|(-1)^n \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \Rightarrow -\frac{1}{n\sqrt{n}} \le \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Berdasarkan uji deret $-$ p, $\sum_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{n\sqrt{n}}$ dan $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergen,

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$ konvergen mutlak

53. Tentukan himpunan kekonvergenan deret pangkat berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)(-1)^{n+1}(x)(x^n)}{n^2+2n+1}, u_n = \frac{(-1)^{n+1}(x^n)}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(x)(n^2)}{n^2+2n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

Untuk $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2}$$

Misal $\mathrm{f(n)} = \frac{1}{n^2}$

Perhatikan bahwa $f(n) > 0, f(n)$ monoton turun, dan $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0, \forall n \in [1,\infty)$

Untuk $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Misal $\mathrm{f(n)} = \frac{1}{n^2}$

Perhatikan bahwa $f(n) > 0, f(n)$ monoton turun, dan $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0, \forall n \in [1,\infty)$

$\therefore$ Himpunan konvergensinya adalah $\{\mathrm{x}: -1 \le \mathrm{x} \le 1\}$

55. Tentukan himpunan kekonvergenan deret pangkat berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)(-1)^n(x-2)(x-2)^n}{n+1}, u_n = \frac{(-1)^n(x-2)^n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(x-2)(n)}{n+1}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

Untuk $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to \text{Divergen}$$

Untuk $x = 3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Misal $\mathrm{f(n)} = \frac{1}{n}$

Perhatikan bahwa $f(n) > 0, f(n)$ monoton turun, dan $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0, \forall n \in [1, \infty)$

$\therefore$ Himpunan konvergensinya adalah $\{\mathrm{x}: 1 < \mathrm{x} \leq 3\}$

57. Tentukan himpunan kekonvergenan deret pangkat berikut

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)(-1)^{n+1}(x^2)(x^{2n-1})}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}, u_n = \frac{(-1)^{n+1}(x^{2n-1})}{(2n-1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)(x^2)}{4n^2+2n}\right| = |x^2| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2+2n} = 0 < 1$$

$\therefore$ Himpunan konvergensinya adalah $\{\mathrm{x}: \mathrm{x} \in \mathbb{R}\}$

59. Tentukan himpunan kekonvergenan deret pangkat berikut

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \cdots$$

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)(-1)^n(x)(x^n)}{(2)(2^n)}, u_n = \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)(x)}{2} = \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x < 2$$

Untuk $x = -2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \to \text{Divergen}$$

Untuk $x = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \to \text{Divergen}$$

$\therefore$ Himpunan konvergensinya adalah $\{\mathrm{x}: -2 < \mathrm{x} < 2\}$

61. Tentukan deret pangkat dari fungsi berikut beserta jari-jari kekonvergenannya

$$f(x) = \frac{1}{2-3x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2-3x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{2}x} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{16}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{2^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)(-1)^{n+1}(3)(3)^{n-1}(x)(x)^{n-1}}{2(2^n)}, u_n = \frac{(-1)^{n+1}3^{(n-1)}x^{n-1}}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)(3)(x)}{2}\right| = \frac{3}{2}|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Deret pangkat dari $f(x) = \frac{1}{2-3x}$ adalah $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{2^n}$

dan jari − jari kekonvergenannya adalah $\frac{2}{3}$

63. Tentukan deret pangkat dari fungsi berikut beserta jari-jari kekonvergenannya

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t)\, dt$$

Perhatikan bahwa:

$$\ln(1+t) = \int \frac{1}{1+t} dt = \int 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots dt = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \cdots$$

Sehinnga:

$$f(x) = \int_0^x t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \cdots dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)(-1)^{n+1}(x)(x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}, u_n = \frac{(-1)^{n+1}(x)^{n+1}}{(n)(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)(x)(n)}{n+2}\right| = |x| < 1$$

$\therefore$ Deret pangkat dari $f(x) = \int_0^x \ln(1+t)\, dt$ adalah $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

dan jari − jari kekonvergenannya adalah 1

65. Tentukan deret Maclaurin sampai x^5

$$f(x) = e^x \sin x$$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$
$$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(2\cos x)$$
$$f'''(x) = 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = e^x(-2\sin x + 2\cos x)$$
$$f^{(4)}(x) = -2e^x(\sin x + \cos x) + 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = e^x(-4\sin x)$$
$$f^{(5)}(x) = -4e^x(\sin x + \cos x) = e^x(-4\sin x - 4\cos x)$$
$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x) + \frac{1}{2}f''(0)(x^2) + \frac{1}{6}f'''(0)(x^3) + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)(x^4) + \frac{1}{120}f^{(5)}(0)(x^5)$$

$$\approx x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$$

∴ Deret Maclaurinnya sampai x^5 adalah $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$

(Suku x^5 berbeda tanda dengan kunci namun sudah dicek beberapa kali dan dengan menggunakan Wolfram Mathematica bahwa tetap seperti itu)

67. Tentukan deret Maclaurin sampai x^5

$$f(x) = e^x + x + \sin x$$

$f'(x) = e^x + 1 + \cos x$

$f''(x) = e^x - \sin x$

$f'''(x) = e^x - \cos x$

$f^{(4)}(x) = e^x + \sin x$

$f^{(5)}(x) = e^x + \cos x$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x) + \frac{1}{2}f''(0)(x^2) + \frac{1}{6}f'''(0)(x^3) + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)(x^4) + \frac{1}{120}f^{(5)}(0)(x^5)$$

$$\approx 1 + 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5$$

∴ Deret Maclaurinnya sampai x^5 adalah $1 + 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5$

69. Tentukan deret Maclaurin sampai x^5

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$

$f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1}$

$$f'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(2x + 1)^2}{(x^2 + x + 1)^3} - \frac{2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{6(1 + 2x)^3}{(x^2 + x + 1)^4} + \frac{12(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24(2x + 1)^4}{(x^2 + x + 1)^5} - \frac{72(2x + 1)^2}{(x^2 + x + 1)^4} + \frac{24}{(x^2 + x + 1)^3}$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{120(2x + 1)^5}{(x^2 + x + 1)^6} + \frac{480(2x + 1)^3}{(x^2 + x + 1)^5} - \frac{360(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4}$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x) + \frac{1}{2}f''(0)(x^2) + \frac{1}{6}f'''(0)(x^3) + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)(x^4) + \frac{1}{120}f^{(5)}(0)(x^5)$$

$$\approx 1 - x + x^3 - x^4$$

∴ Deret Maclaurinnya sampai x^5 adalah $1 - x + x^3 - x^4$

71. Tentukan deret Maclaurin sampai x^5 dan deret Taylor sampai $(x-a)^3$ dari fungsi $f(x)$

$$f(x) = e^x, a = 1$$

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3$$

$$\approx e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 + \frac{1}{6}e(x-1)^3$$

$\therefore$ Deret Taylornya sampai $(\mathrm{x}-\mathrm{a})^3$ dengan $a = 1$ adalah:

$$e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 + \frac{1}{6}e(x-1)^3$$

73. Tentukan sukubanyak Maclaurin derajat 3 untuk $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ dan batas galat $R_3(x)$ jika $|x| \leq 0.05$

$$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = -\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x) + \frac{1}{2}f''(0)(x^2) + \frac{1}{6}f'''(0)(x^3)$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + R_3(x)$$

$$f(-0.05) - \left(1 - \frac{1}{2}(-0.05) + \frac{3}{8}(-0.05)^2 - \frac{5}{16}(-0.05)^3\right) \leq R_3(x)$$

$$\leq f(0.05) - \left(1 - \frac{1}{2}(0.05) + \frac{3}{8}(0.05)^2 - \frac{5}{16}(0.05)^3\right)$$

$$1.78959 \times 10^{-6} \leq R_3(x) \leq 1.63545 \times 10^{-6}$$

$\therefore$ Sukubanyak Maclaurin derajat 3 untuk $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ adalah $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$ dan $|R_3(x)| \leq 1.78959 \times 10^{-6}$

(Galat sangat berbeda dengan kunci, tidak paham bagaimana menentukan galatnya)

Afterword

Pembuatan dokumen ini dibantu oleh:

1. 13,04, Matematika UI 2016.
2. namora03, Matematika UI 2016.
3. rilo_chand, Matematika UI 2016.
4. the_xyz, Matematika UI 2016.