Xyba Project

Metode Numerik

Pembahasan UTS 2015

1. This document is version: 1.0.1
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you’d like to give, please contact me

5. Last Updated: 18/10/2017

Thank you for your cooperation >v<

1. Misal $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ dan $P_2(x)$ adalah sebuah polinomial interpolasi pada $x_0 = 0, x_1$, dan $x_2 = 1$. Tentukan nilai terbesar dari x_1 pada selang $(0,1)$ dimana $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$

   Dengan menggunakan interpolasi lagrange, didapatkan:
   $P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$

   Karena $f(x_0) = 0$ dan $f(x_2) = 0$, maka:
   $$P_2(x) = f(x_1)L_{2,1}(x) = \sqrt{x_1 - x_1^2}\,\frac{(x)(x-1)}{(x_1)(x_1-1)} = \frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1 - x_1^2}(x - x^2)$$

   $$f(0.5) = \sqrt{0.5 - 0.25} = \sqrt{0.25} = 0.5$$
   $$P_2(0.5) = \frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1 - x_1^2}(0.5 - 0.25) = (0.25)\left(\frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1 - x_1^2}\right)$$
   $$f(0.5) - P_2(0.5) = 0.5 - (0.25)\left(\frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1 - x_1^2}\right) = -0.25$$
   $$\Leftrightarrow -(0.25)\left(\frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1 - x_1^2}\right) = -0.75$$
   $$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_1 - x_1^2}}{x_1 - x_1^2} = 3$$
   $$\Leftrightarrow \sqrt{x_1 - x_1^2} = 3(x_1 - x_1^2)$$
   $$\Leftrightarrow x_1 - x_1^2 = 9(x_1^2 - 2x_1^3 + x_1^4)$$
   $$\Leftrightarrow 9x_1^4 - 18x_1^3 + 10x_1^2 - x_1 = 0$$
   $$\Leftrightarrow (9x_1)(x_1 - 1)\left(x_1^2 - x_1 + \frac{1}{9}\right) = 0$$
   $$x_1 = 0, 1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{5}$$
   ∴ Nilai terbesar x_1 pada selang $(0,1)$ dimana $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$ adalah $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{5}$

2. Anda diminta untuk mencari akar dari fungsi $f(x) = x^3 - x - 3$,
   a. Gunakan metode Newton untuk 5 iterasi
   b. Gunakan metode Fixed Point untuk 5 iterasi

   Gunakan 6 digit dalam setiap perhitungan dengan $p_0 = 0$. Bandingkan hasil dari kedua metode.

Diasumsikan 6 digit di sini adalah menghitung sampai 6 angka di belakang koma dan teknik yang digunakan adalah rounding

a. $f(x) = x^3 - x - 3$
   $f'(x) = 3x^2 - 1$
   $p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$

Iterasi	p_{n-1}	p_n
1	0.000000	−3.000000
2	−3.000000	−1.961538
3	−1.961538	−1.147176
4	−1.147176	−0.000658
5	−0.000658	−3.000389

   $f(-3.000389) = -27.009665$

b. Misal $g(x) = \sqrt[3]{x+3}$

Iterasi	p_{n-1}	p_n
1	0.000000	1.442250
2	1.442250	1.643871
3	1.643871	1.668374
4	1.668374	1.671303
5	1.671303	1.671653

   $f(1.671653) = -0.000346$

Perhatikan bahwa pada metode Newton, $\forall n \in [0, \infty), p_n < 0$
Perhatikan $f(p_n) = p_n^3 - p_n - 3$ adalah fungsi yang hanya memiliki pangkat ganjil sehingga $f(p_n) \leq -2$ (ambil $p_n = -1$, tunjukkan sendiri mengapa)

Sedangkan pada metode Fixed Point, dengan pemilihan fixed point $g(x)$ yang tepat, akan mendapatkan hasil yang akan membuat $f(p_n)$ konvergen ke 0

Pada soal ini, perhatikan saja $f(x) = x^3 - x - 1$. Jelas kita tidak menginginkan $f(x)$ menjauh dari 0, sehingga jangan gunakan $p_n < 0$.

3. Misalkan $f(x) = 3xe^x - \cos x$. Gunakan data di bawah ini untuk mengapproksimasi $f''(1.3)$ dengan $h = 0.1$:

x	1.2	1.29	1.3	1.31	1.4
$f(x)$	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

Bandingkan dengan hasil dari $f''(1.3)$

Hanya ada satu kemungkinan di sini berdasarkan perintah soal,
Ambil $x_0 = 1.3, x_0 - h = 1.2, x_0 + h = 1.4$

Dengan menggunakan rumus turunan kedua dengan midpoint:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)]$$
$$f''(1.3) = \frac{1}{(0.1)^2}[f(1.2) - 2f(1.3) + f(1.4)]$$
$$f''(1.3) = 100(11.59006 - 28.08552 + 16.86187)$$
$$f''(1.3) = 100(0.36641) = 36.641$$

$\therefore$ Approksimasi $f''(1.3)$ dengan data tersebut menggunakan $h = 0.1$ adalah 36.641

Secara analitik:

$$f(x) = 3xe^x - \cos x$$
$$f'(x) = 3e^x + 3xe^x + \sin x$$
$$f''(x) = 6e^x + 3xe^x + \cos x$$
$$f''(1.3) = 6(e^{1.3}) + 3.9(e^{1.3}) + \cos\left(\frac{1.3\pi}{180}\right) = 36.32603701 +$$
$$\therefore f''(1.3) = 37.32603693$$

$\therefore$ Error antara approksimasi dan nilai aslinya sebesar 0.6847796188

4. Gunakan metode Aitken Δ^2 untuk membentuk $\{\hat{p}_n\}$ dari $p_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$ hingga dipenuhi $|\hat{p}_n| \leq 5 \times 10^{-2}$

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$
$$\hat{p}_1 = 1 - \frac{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2}{\frac{1}{9} - \frac{2}{4} + 1} = \frac{7}{88} = 0.079 \ldots$$
$$\hat{p}_2 = \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{16} - \frac{2}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{17}{468} = 0.036 \ldots$$
$$\therefore \{\hat{p}_n\} = \left\{\frac{7}{88}, \frac{17}{468}\right\}$$

5. Pada pembahasan mengenai stabilitas *round-off error*, dibahas metode numerik yang stabil dan tidak stabil dilihat dari stabilitas *round-off error* nya. Jelaskan masing-masing metode numerik yang dimaksud.

Metode-metode numerik yang dibahas di sini adalah metode-metode untuk mengapproksimasi turunan numerik, yaitu:

- Three-Point End Point (TPEP)
  Metode yang mengapproksimasi menggunakan 3 titik data dengan yang titik ingin diapproksimasi nilai turunannya berada di ujung
- Three-Point Mid Point (TPMP)
  Metode yang mengapproksimasi menggunakan 3 titik data dengan yang titik ingin diapproksimasi nilai turunannya berada di tengah
- Five-Point End Point (FPEP)
  Metode yang mengapproksimasi menggunakan 5 titik data dengan yang titik ingin diapproksimasi nilai turunannya berada di ujung
- Five-Point Mid Point (FPMP)
  Metode yang mengapproksimasi menggunakan 5 titik data dengan yang titik ingin diapproksimasi nilai turunannya berada di tengah
- Second Derivative Mid Point
  Metode yang mengapproksimasi menggunakan 3 titik data dengan yang titik ingin diapproksimasi nilai turunan keduanya berada di tengah

Sebenarnya titik-titik tersebut tidak hanya terbatas untuk 3 atau 5 titik namun dapat diperluas menjadi (n+1) titik untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$, namun jika menggunakan terlalu banyak titik, maka *round-off error* akan menjadi tidak stabil sehingga memperbesar error jika menggunakan terlalu banyak titik.

6. Misalkan $N(h)$ adalah sebuah approksimasi terhadap M untuk setiap $h > 0$ dan $M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots$ untuk beberapa konstanta-konstanta $K_1, K_2, K_3, \ldots$ Gunakan nilai-nilai dari $N(h), N\left(\frac{h}{3}\right), N\left(\frac{h}{9}\right)$ untuk memperoleh sebuah approksimasi $\mathrm{O}(h^3)$ terhadap M

   Untuk $\mathrm{O}(h)$, kita punya:
   $M = N(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots$
   Karena $h > 0$, maka formula ini berlaku saat parameter h diubah dengan $\frac{h}{3}$

   $$M = N\left(\frac{h}{3}\right) + K_1\left(\frac{h}{3}\right) + K_2\left(\frac{h}{3}\right)^2 + K_3\left(\frac{h}{3}\right)^3 + \cdots$$

   Kurangkan persamaan pertama dari 3 kali persamaan kedua

   $$M = 2N\left(\frac{h}{3}\right) + \left[N\left(\frac{h}{3}\right) - N(h)\right] + K_2\left(\frac{h^2}{3} - h^2\right) + K_3\left(\frac{h^3}{9} - h^3\right) + \cdots$$

Definisikan

$$N_2(h) = 2N\left(\frac{h}{3}\right) + \left[N\left(\frac{h}{3}\right) - N(h)\right]$$

Sehingga didapatkan:

$$M = N_2(h) - \frac{2}{3}K_2h^2 - \frac{8}{9}K_3h^3 - \cdots, N_2(h) = 2N\left(\frac{h}{3}\right) + \left[N\left(\frac{h}{3}\right) - N(h)\right]$$

Sebagai approksimasi $O(h^3)$ terhadap M

7. Dengan menggunakan polinomial interpolasi Lagrange dan teorema nilai rata-rata berbobot sebagai berikut:

   Misalkan $f \in [a, b]$, integral Riemann dari g ada pada $[a, b]$, dan $g(x)$ tidak berubah tanda pada $[a, b]$. Maka terdapat sebuah bilangan c pada (a, b) dimana

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

   Tunjukkan bahwa suku error dari aturan Trapezoidal adalah $-\frac{h^3}{12}f''(\omega)$

   Untuk mengapproksimasi $\int_a^b f(x)\,dx$, misalkan $x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$ dan gunakan polinomial lagrange:

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1)$$

   Kita tahu bahwa error lagrange adalah:

$$\frac{f^{(n+1)}\big(\xi(x)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

   Maka didapatkan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1)\right]dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''\big(\xi(x)\big)(x - x_0)(x - x_1)\,dx$$

   Tujuan kita adalah errornya maka kita hanya akan fokus pada suku yang mengandung error, yaitu:

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''\big(\xi(x)\big)(x - x_0)(x - x_1)\,dx$$

   Dengan menggunakan Teorema Integral Riemann, Ambil $f(x) = f''\big(\xi(x)\big)$ dan $g(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''\big(\xi(x)\big)(x - x_0)(x - x_1)\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)\,dx$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1)\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_0 + x_1)}{2}x^2 + x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}\left[\left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_0x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{2} + x_0x_1^2\right) - \left(\frac{x_0^3}{3} - \frac{x_0^3}{2} - \frac{x_0^2x_1}{2} + x_0^2x_1\right)\right]$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}\left[\left(-\frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}x_0x_1^2\right) - \left(-\frac{1}{6}x_0^3 + \frac{1}{2}x_0^2x_1\right)\right]$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}\left[-\frac{1}{6}(x_1^3 - x_0^3) + \frac{1}{2}x_0x_1(x_1 - x_0)\right]$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{12}[(x_1^3 - x_0^3) - 3x_0x_1(x_1 - x_0)]$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{12}[(x_1^3 - 3x_0x_1^2 + 3x_0^2x_1 - x_0^3) + (3x_0x_1^2 - 3x_0^2x_1) - (3x_0x_1^2 + 3x_0^2x_1)]$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{12}[(x_1 - x_0)^3] = -\frac{f''(\xi)}{12}(h^3) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

$\therefore$ Terbukti error aturan Trapezoidal adalah $-\dfrac{h^3}{12}f''(\omega)$

Materi Integral Riemann akan dipelajari di Analisis 2 ;)