Xyba Project

Statistika Matematika 2
Pembahasan Kuis 2 Tahun 2018

1. This document is version: 0.8.2
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 24/05/2018

Thank you for your cooperation >v<

1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak yang diambil dari suatu distribusi dengan p.d.f.

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-x} & ; x = 0,1 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

yang digunakan untuk menguji

$$H_0: \theta = \frac{1}{4} \text{ terhadap } H_1: \theta > \frac{1}{4}$$

a. Tentukan daerah kritis terbaik yang memenuhi UMPT!
b. Gunakan CLT untuk menentukan ukuran sampel acak yang memenuhi UMPT apabila

$$K\left(\frac{1}{4}\right) = 0.05 \quad \text{dan} \quad K\left(\frac{1}{2}\right) = 0.90$$

Jawab:

a. Akan ditentukan daerah kritis terbaik untuk menguji hipotesis θ yang terasosasi dengan p.d.f. dari X yakni $f(x;\theta)$ yang memenuhi UMPT.
Perhatikan bahwa $X\sim\text{Bernoulli}(\theta) \Leftrightarrow X\sim\text{Binomial}(1,\theta)$.
Tulis ulang Null Hypothesis H_0 dan Alternative Hypothesis H_1 sebagai:

$$H_0: \theta = \theta' = \tfrac{1}{4}, \qquad H_1: \theta = \theta'' \in \left\{\theta: \theta > \tfrac{1}{4}\right\}$$

Kita dapat mencari daerah kritis terbaik yang memenuhi UMPT sebagai berikut:

$$\frac{L(\theta')}{L(\theta'')} \le k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta'^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta')^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\theta''^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta'')^{n-\sum_{i=1}^n x_i}} \le k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{\theta'}{\theta''}\right) + \left(10 - \sum_{i=1}^n x_i\right)\ln\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta''}\right) \le \ln k$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\theta'}{\theta''}\right)\sum_{i=1}^n x_i + 10\ln\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta''}\right) - \ln\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta''}\right)\sum_{i=1}^n x_i \le \ln k$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\theta'(1-\theta'')}{\theta''(1-\theta')}\right)\sum_{i=1}^n x_i \le \ln k - 10\ln\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta''}\right)$$

Karena $\theta' < \theta''$, maka $-\theta'' < -\theta'$ sehingga $1-\theta'' < 1-\theta'$. Maka:

$$\frac{L(\theta')}{L(\theta'')} \le k$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\theta'(1-\theta'')}{\theta''(1-\theta')}\right)\sum_{i=1}^n x_i \le \ln k - 10\ln\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta''}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \ge \frac{\left(\ln k - 10\ln\left(\frac{1-\theta'}{1-\theta''}\right)\right)}{\ln\left(\frac{\theta'(1-\theta'')}{\theta''(1-\theta')}\right)} = c$$

Sehingga daerah kritisnya yang memenuhi UMPT adalah:

$$C = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n): \sum_{i=1}^n x_i \ge c\right\}$$

b. Akan digunakan Central Limit Theorem untuk menentukan ukuran sampel acak yang memenuhi UMPT apabila diketahui:

$$K\left(\frac{1}{4}\right) = 0.05 \quad \text{dan} \quad K\left(\frac{1}{2}\right) = 0.90$$

Power function dari uji tersebut diberikan oleh:

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \Pr(C; H_0 \text{ benar}) \\ &= \Pr\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq c; \theta\right) \end{aligned}$$

Karena $X \sim \text{Binomial}(1, \theta)$, maka $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(n, \theta)$.

Dengan menggunakan Central Limit Theorem, maka kita peroleh:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \sim N(0,1)$$

Misal:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \sim N(0,1)$$

Perhatikan:

$$\begin{aligned} K\left(\frac{1}{4}\right) = 0.05 &\Leftrightarrow \Pr\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq c; \frac{1}{4}\right) = 0.05 \\ &\Leftrightarrow \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \geq \frac{c - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}; \frac{1}{4}\right) = 0.05 \\ &\Leftrightarrow \Pr\left(Z \geq \frac{c - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4} \cdot \frac{3}{4}}}\right) = 0.05 \\ &\Leftrightarrow \Pr\left(Z \geq \frac{4c - n}{\sqrt{3n}}\right) = 0.05 \\ K\left(\frac{1}{2}\right) = 0.90 &\Leftrightarrow \Pr\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq c; \frac{1}{2}\right) = 0.90 \\ &\Leftrightarrow \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \geq \frac{c - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}; \frac{1}{2}\right) = 0.90 \\ &\Leftrightarrow \Pr\left(Z \geq \frac{c - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = 0.90 \\ &\Leftrightarrow \Pr\left(Z \geq \frac{2c - n}{\sqrt{n}}\right) = 0.90 \end{aligned}$$

Sehingga untuk menentukan ukuran sampel acak yang memenuhi keduanya, kita akan peroleh SPLDV:

$$\Pr\left(Z \geq \frac{4c-n}{\sqrt{3n}}\right) = \Phi\left(\frac{4c-n}{\sqrt{3n}}\right) = 0.05 \Leftrightarrow \frac{4c-n}{\sqrt{3n}} = z_{0.05} \approx -1.645$$
$$\Pr\left(Z \geq \frac{2c-n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{2c-n}{\sqrt{n}}\right) = 0.90 \Leftrightarrow \frac{2c-n}{\sqrt{n}} = z_{0.90} \approx \quad 1.282$$

Tulis ulang sistem persamaan tersebut menjadi:

$$4c - n \approx -1.645\sqrt{3}\sqrt{n}$$
$$4c - 2n \approx 2.564\sqrt{n}$$

Kurangkan persamaan pertama dengan kedua maka kita akan peroleh:

$$n \approx \left(-1.645\sqrt{3} - 2.564\right)\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} \approx -1.645\sqrt{3} - 2.564$$

Sehingga kita akan peroleh ukuran sampel acak yang memenuhi keduanya adalah:

$$n = \left\lceil \left(-1.645\sqrt{3} - 2.564\right)^2 \right\rceil = \lceil 29.30298 \ldots \rceil = 30$$

2. $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari distribusi $N(\theta, \sigma^2), -\infty < \theta < \infty$, dan σ^2 diketahui.
   a. Tunjukkan bahwa $\bar{X}$ merupakan penaksir tak bias untuk θ!
   b. Tentukan batas bawah Rao-Cramer!
   c. Apakah $\bar{X}$ penaksir yang efisien untuk θ? Jelaskan!

Jawab:

a. Akan ditunjukkan bahwa $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ adalah penaksir tak bias untuk $\theta \Leftrightarrow E(\bar{X}) = \theta$.

   Karena $X_1, X_2, \dots, X_n \sim NIID(\theta, \sigma^2)$, maka $\bar{X} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

   Sehingga karena $\bar{X} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ maka akan diperoleh $E(\bar{X}) = \theta$.

   Sehingga benar bahwa $\bar{X}$ merupakan penaksir tak bias untuk θ.

b. Asumsikan bahwa soal menanyakan batas bawah Rao-Cramer dari sembarang statistik $Y = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

   $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ sehingga p.d.f. dari X diberikan oleh:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}\right]$$

   Pertama, kita akan tentukan terlebih dahulu informasi Fisher dari X yang diberikan oleh:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln\big(f(x;\theta)\big)}{\partial\theta^2}\right]$$

   Sebelum menghitung $I(\theta)$, kita tentukan terlebih dahulu turunan parsial orde dua dari $\ln\big(f(x;\theta)\big)$ sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \ln\big(f(x;\theta)\big)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \ln\big(f(x;\theta)\big)}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}\right]\right)}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}\right]\right)}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\left(\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \ln\left(exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}\right]\right)\right)}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\left(\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}\frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}\right)}{\partial\theta}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{2}\frac{-2(x-\theta)}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{x-\theta}{\sigma^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2}$$

   Sehingga informasi Fisher dari X adalah:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln\big(f(x;\theta)\big)}{\partial\theta^2}\right] = -E\left[-\frac{1}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}$$

Definisikan $R(\theta) = E(Y)$.
Batas bawah Rao-Cramer dari sembarang statistik Y diberikan oleh:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\left(R'(\theta)\right)^2}{I_n(\theta)} = \frac{\left(R'(\theta)\right)^2}{n.I(\theta)} = \frac{\left(R'(\theta)\right)^2}{n\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(R'(\theta)\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{\partial\left(E(Y)\right)}{\partial\theta}\right)^2$$

c. Akan dijawab apakah statistik $\bar{X}$ penaksir yang efisien untuk θ.
Dari bagian a, kita tahu bahwa $\bar{X}$ adalah penaksir tak bias untuk θ. Sehingga kita akan punya $R(\theta) = E(\bar{X}) = \theta$ dan lebih lanjut $R'(\theta) = 1$, maka:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(R'(\theta)\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Karena $\bar{X} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, maka $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
Perhatikan bahwa variansi dari $\bar{X}$ sama dengan batas bawah Rao-Cramer dari $\bar{X}$, artinya penaksir $\bar{X}$ adalah penaksir yang efisien untuk θ.

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel acak dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ dengan σ^2 tidak diketahui. Tentukan interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ, apabila:
   a. n besar
   b. n kecil

Jawab:

a. Akan ditentukan interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ apabila n besar.
   Dengan menggunakan Central Limit Theorem, maka kita peroleh:
$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$
   Sudah dibuktikan bahwa $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.
   Berdasarkan Teorema Konvergensi dalam Probabilitas, maka:
$$\frac{nS^2}{n-1} \xrightarrow{P} \frac{n}{n-1}\sigma^2$$
   Karena n besar, maka:
$$\frac{nS^2}{n-1} \xrightarrow{P} \sigma^2$$
   Berdasarkan Teorema 5.5.5, maka:
$$\sqrt{\frac{nS^2}{n-1}} \xrightarrow{P} \sigma$$
   Lebih lanjut:
$$\frac{\sqrt{\frac{nS^2}{n-1}}}{\sigma} \xrightarrow{P} 1$$
   Misal:
$$U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \qquad V = \frac{\sqrt{\frac{nS^2}{n-1}}}{\sigma} \xrightarrow{P} 1$$
   Berdasarkan Teorema 5.5.6, maka kita peroleh:
$$\frac{U}{V} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{\frac{nS^2}{n-1}}}{\sigma}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \xrightarrow{F} N(0,1)$$
   Misal $Z = U/V \xrightarrow{D} N(0,1)$.
   Maka jika diberikan α, kita bisa temukan interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ yang akan memiliki probabilitas:
$$\Pr\left(z_{\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$
Z simetris
$$\Leftrightarrow \Pr\left(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \Pr\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \Pr\left(\bar{X} - \frac{Sz_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + \frac{Sz_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Sehingga setelah mengambil sampel, kita akan memperoleh interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ sekitar:

$$\left(\bar{x}-\frac{sz_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}},\bar{x}+\frac{sz_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}}\right)$$

b. Akan ditentukan interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ apabila n kecil.
Untuk n kecil, gunakan distribusi t.

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{nS^2/\sigma^2(n-1)}}=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}\sim t_{n-1}$$

Maka jika diberikan α, kita bisa temukan interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ yang akan memiliki probabilitas:

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(t_{\alpha/2}<T<t_{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha \quad \text{t simetris}\\
\Leftrightarrow\ &\Pr\left(-t_{1-\alpha/2}<T<t_{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha\\
\Leftrightarrow\ &\Pr\left(-t_{1-\alpha/2}<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}<t_{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha\\
\Leftrightarrow\ &\Pr\left(\bar{X}-\frac{St_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}}<\mu<\bar{X}+\frac{St_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}}\right)=1-\alpha
\end{aligned}$$

Sehingga setelah mengambil sampel, kita akan memperoleh interval kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ adalah:

$$\left(\bar{x}-\frac{st_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}},\bar{x}+\frac{st_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-1}}\right)$$

Afterword

Pembuatan dokumen ini dibantu oleh:

1. namora03, Matematika UI 2016.
2. rilo_chand, Matematika UI 2016.