Xyba Project

Analisis 2

Pembahasan Kuis 2 SP Tahun 2018

1. This document is version: 0.9.4
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people
2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so
3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016
4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me
5. Last Updated: 01/08/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Diberikan fungsi $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ dengan
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\text{bilangan rasional } x \in (0,2) \\ 2x - 1 & ;\text{bilangan irasional } x \in (0,2) \end{cases}$$
Tunjukkan f terdiferensiabel pada $x = 1$ dan $f'(1) \neq 0$.

2. Misalkan fungsi f terdiferensiabel pada $[a,b]$ dengan f' kontinu pada $[a,b]$ dan f'' ada pada (a,b). Jika $f(a) = f(b)$ dan $f'(a) = f'(b)$, buktikan terdapat $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2$ sedemikian sehingga $f''(x_1) = f''(x_2)$.

3. Buktikan untuk semua $x > 0$ berlaku pertidaksamaan berikut:
$$e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

4. [Nomor 2 Versi Revisi Post-Test]
Misalkan fungsi f terdiferensiabel pada $[a,b]$ dengan f' kontinu pada $[a,b]$ dan f'' ada pada (a,b). Jika $f(a) = f(b)$ dan $f'(a) = f'(b) = 0$, buktikan terdapat $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2$ sedemikian sehingga $f''(x_1) = f''(x_2)$.

Jawaban

1. Diberikan fungsi $f: (0,2) \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{bilangan rasional } x \in (0,2) \\ 2x - 1 & ; \text{bilangan irasional } x \in (0,2) \end{cases}$$

Tunjukkan f terdiferensiabel pada $x = 1$ dan $f'(1) \neq 0$.

Jawab:

Untuk $x \in \mathbb{Q} \cap (0,2)$,

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Untuk $x \in \mathbb{Q}^c \cap (0,2)$,

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x - 1) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} 2 = 2$$

Karena $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, x \in \mathbb{Q} \cap (0,2) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, x \in \mathbb{Q}^c \cap (0,2)$,
maka f terturunkan pada $x = 1$ dan berdasarkan Definisi 6.1.1, kita peroleh:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \neq 0$$

$\therefore$ Tertunjuk f terdiferensiabel pada $x = 1$ dan $f'(1) \neq 0$.

2. Misalkan fungsi f terdiferensiabel pada $[a, b]$ dengan f' kontinu pada $[a, b]$ dan f'' ada pada (a, b). Jika $f(a) = f(b)$ dan $f'(a) = f'(b)$, buktikan terdapat $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \neq x_2$ sedemikian sehingga $f''(x_1) = f''(x_2)$

Jawab:
Soal ini dianulir karena kurangnya informasi yang diberikan.
Akan dibahas mengapa demikian.

Karena kita punya $f(a) = f(b)$, dengan Mean Value Theorem 6.2.4, kita bisa temukan bahwa $\exists c \in (a, b) \ni f'(c) = 0$, namun kita tidak tahu nilai $f'(a)$ maupun $f'(b)$ sehingga kita tidak dapat menggunakan informasi ini.

Hal yang serupa dapat dilakukan untuk fakta bahwa $f'(a) = f'(b)$, kita bisa temukan bahwa $\exists t \in (a, b) \ni f''(c) = 0$, namun informasi ini juga tidak akan berguna.

Untuk menjawab soal ini seharusnya diberikan $f'(a) = f'(b) = 0$. Dengan tidak adanya fakta ini, tidak mungkin untuk menjawab soal ini.

Dengan sedikit memanipulasi, kita akan temukan bahwa:

$$f''(x_1) - f''(x_2) = f'(a)\left(\frac{1}{a - c} - \frac{1}{b - c}\right)$$

Namun kita tidak bisa lanjutkan dari sini.

∴ Soal tidak dapat diselesaikan.

3. Buktikan untuk semua $x > 0$ berlaku pertidaksamaan berikut:

$$e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Jawab:
Akan dibuktikan pertidaksamaan tersebut benar dengan menggunakan Teorema Taylor.

Misal $f(x) \coloneqq e^x$ dan $x_0 = 0$.
Karena $f'(x) = e^x$ maka kita peroleh $f^{(k)}(x) = e^x, \forall k \in \mathbb{N}$ dan $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

Karena $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ada dan $x > 0$, maka berdasarkan Teorema Taylor 6.4.1,

$$\begin{aligned} P_n(x) &\coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

$$R_n(x) \coloneqq \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad c \in (0, x)$$

Karena $e^c > 0$ untuk sembarang $c \in (0, x)$, $x > 0$, dan $n \in \mathbb{N}$, maka kita peroleh:

$$R_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$

Berdasarkan Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_n \coloneqq f - P_n$ sehingga:

$$R_n(x) \Leftrightarrow f(x) - P_n(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > P_n(x) \Leftrightarrow e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa untuk $x > 0$ akan berlaku pertidaksamaan

$$e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

4. Misalkan fungsi f terdiferensiabel pada $[a,b]$ dengan f' kontinu pada $[a,b]$ dan f'' ada pada (a,b). Jika $f(a) = f(b)$ dan $f'(a) = f'(b) = 0$, buktikan terdapat $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2$ sedemikian sehingga $f''(x_1) = f''(x_2)$.

Jawab:
Karena f terturunkan pada $[a,b]$ maka berdasarkan Teorema 6.1.2, f kontinu pada $[a,b]$.

Karena f kontinu pada $[a,b]$, terturunkan pada $(a,b) \subset [a,b]$, dan karena $f(a) = f(b)$, maka berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4,

$$\exists c \in (a,b) \ni f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Karena f' kontinu pada $[a,c] \subset [a,b], f''$ ada pada $(a,c) \subset (a,b)$, dan karena $f'(a) = f'(c) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists x_1 \in (a,c) \ni f''(x_1) = 0$$

Karena f' kontinu pada $[c,b] \subset [a,b]$, f'' ada pada $(c,b) \subset (a,b)$, dan karena $f'(b) = f'(c) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists x_2 \in (c,b) \ni f''(x_2) = 0$$

Karena $x_1 \in (a,c) \subset (a,b)$ dan $x_2 \in (c,b) \subset (a,b)$ maka kita peroleh:

$$\exists x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2 \ni f''(x_1) = f''(x_2)$$

$\therefore$ Terbukti bahwa terdapat $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \neq x_2$ sedemikian sehingga $f''(x_1) = f''(x_2)$.