Xyba Project

Analisis 2

Pembahasan UTS April 2016

1. This document is version: 0.9.52
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people
2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so
3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016
4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me
5. Last Updated: 01/08/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Apakah fungsi $f(x) = \frac{2x}{1+2x^2}$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$? Jelaskan!

2. Diberikan fungsi $\delta: [0,1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:
$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & ; x = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}x & ; 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}x & ; \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$
Apakah terdapat sebuah partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dengan 4 buah *tag* sedemikian sehingga $\dot{\mathcal{P}}$ merupakan δ-fine.

3. Misalkan fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu dengan $a > 0$ dan terturunkan pada interval buka (a,b). Buktikan bahwa jika
$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$$
maka akan terdapat $x_0 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

4. Berikan contoh fungsi f dan g yang terturunkan sedemikian sehingga $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ tetapi $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ tidak ada.

Jawaban

1. Apakah fungsi $f(x) = \frac{2x}{1+2x^2}$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$? Jelaskan!

Jawab:

Pilih $\delta = \varepsilon/2$ untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka $\forall x, u \in \mathbb{R}, |x - u| < \delta$ akan berlaku:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(u)| &= \left|\frac{2x}{1+2x^2} - \frac{2u}{1+2u^2}\right| \\
&= 2\left|\frac{(x + 2u^2x) - (u + 2ux^2)}{(1+2x^2)(1+2u^2)}\right| \\
&= 2\left|\frac{(x-u) - 2ux(x-u)}{(1+2x^2)(1+2u^2)}\right| \\
&= 2|x-u|\frac{|1-2ux|}{(1+2x^2)(1+2u^2)}
\end{aligned}
$$

WLOG misal $x \geq u$, karena $u^2 \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}$, maka:

$$\frac{|1-2ux|}{(1+2x^2)(1+2u^2)} \leq \frac{1}{1+2u^2} < 1$$

Sehingga,

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(u)| &= 2|x-u|\frac{|1-2ux|}{(1+2x^2)(1+2u^2)} \\
&< 2|x-u| \\
&< 2(\varepsilon/2) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Artinya, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon/2 > 0 \ni \forall x, u \in \mathbb{R}, |x - u| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Berdasarkan Definisi 5.4.1, maka kita simpulkan bahwa f kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

$\therefore$ Fungsi $f(x) = \dfrac{2x}{1+2x^2}$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$

2. Diberikan fungsi $\delta: [0,1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x & ; 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Apakah terdapat sebuah partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dengan 4 buah *tag* sedemikian sehingga $\dot{\mathcal{P}}$ merupakan δ-fine.

Jawab:

1) Akan ditunjukkan bahwa δ adalah gauge pada $[0,1]$

Untuk $x = 0$: $\delta(x) = \frac{1}{4} > 0$

Untuk $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$: $\delta(x) = 1 - \frac{1}{2}x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$ maka $\delta(x) > 0$

Untuk $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$: $\delta(x) = \frac{1}{2}x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ maka $\delta(x) > 0$

Berdasarkan Definisi 5.5.2, karena δ adalah fungsi yang ketat positif yang didefinisikan pada $[0,1]$, maka δ adalah gauge pada $[0,1]$.

2) Akan ditentukan apakah terdapat partisi tertanda $\dot{\mathcal{P}}$ yang δ-fine dengan 4 buah tag

Misal $I \coloneqq [0,1]$.

Untuk $t = 0$: $[t - \delta(t), t + \delta(t)] = \left[0 - \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}\right] = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

Untuk $0 < t \leq \frac{1}{2}$: $[t - \delta(t), t + \delta(t)] = \left[t - \left(1 - \frac{1}{2}t\right), t + \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\right] = \left[\frac{3}{2}t - 1, \frac{1}{2}t + 1\right]$

Untuk $\frac{1}{2} < t \leq 1$: $[t - \delta(t), t + \delta(t)] = \left[t - \frac{1}{2}t, t + \frac{1}{2}t\right] = \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t\right]$

Perhatikan bahwa untuk $0 < t \leq \frac{1}{2}$ maka $\left[\frac{3}{2}t - 1, \frac{1}{2}t + 1\right] \subseteq \left((-1,1) \cup \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]\right) = \left(-1, \frac{5}{4}\right]$

Karena $I \subseteq \left(-1, \frac{5}{4}\right]$ maka pastilah kita dapat menemukan partisi tertanda $\dot{\mathcal{P}}$ yang δ-fine dengan 4 buah tag.

Sehingga terdapat (namun tidak terbatas pada) partisi tertanda $\dot{\mathcal{P}}$ yang δ-fine dengan tag-tag $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq \frac{1}{2}$.

Contoh $\dot{\mathcal{P}}$ yang δ-fine dengan 4 buah tag sebagai berikut.

$$\dot{\mathcal{P}} = \left\{\left(\left[0, \frac{1}{4}\right], \frac{1}{4}\right), \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right], \frac{1}{4}\right), \left(\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right], \frac{1}{2}\right), \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right], \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$\therefore$ Terdapat sebuah partisi bertanda $\dot{\mathcal{P}}$ dengan 4 buah tag sedemikian sehingga $\dot{\mathcal{P}}$ merupakan δ-fine.

3. Misalkan fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu dengan $a > 0$ dan terturunkan pada interval buka (a,b). Buktikan bahwa jika
$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$$
maka akan terdapat $x_0 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

Jawab:
Definisikan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai:
$$h(x) \coloneqq \frac{f(x)}{x} \qquad \text{untuk} \quad x \in [a,b]$$

Karena $a > 0$ dan $x \in [a,b]$, maka $x > 0$, sehingga karena f terdefinisi untuk setiap $x \in [a,b]$ maka h juga terdefinisi untuk setiap $x \in [a,b]$.
Karena f kontinu pada $[a,b]$ maka h kontinu pada $[a,b]$.
Karena f terturunkan pada (a,b) maka h terturunkan pada (a,b).

Diberikan $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$, maka diperoleh:
$$h(a) - h(b) = \frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} = 0 \Leftrightarrow h(a) = h(b)$$

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:
$$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

Karena h kontinu pada $[a,b]$, h terturunkan pada (a,b), dan karena $h(a) = h(b)$, maka berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4,
$$\exists x_0 \in (a,b) \ni h'(x_0) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{{x_0}^2} = 0$$

Sehingga kita peroleh:
$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0)$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\exists x_0 \in (a,b) \ni x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

4. Berikan contoh fungsi f dan g yang terturunkan sedemikian sehingga $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ tetapi $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ tidak ada.

Jawab:
Misal $f(x) \coloneqq x$ dan $g(x) \coloneqq x^2$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

Jelas bahwa $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Perhatikan bahwa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Karena untuk sembarang $V_\delta(0), \dfrac{1}{x}$ tidak terbatas,
maka berdasarkan kontrapositif dari Teorema 4.2.2, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ tidak ada

∴ Contoh fungsi f dan g yang terturunkan sedemikian sehingga $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ tetapi $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ tidak ada adalah $f(x) \coloneqq x$ dan $g(x) \coloneqq x^2$ untuk $x \in \mathbb{R}$.