neptune

Xyba Project

Matematika Keuangan

Ringkasan Bab 1 hingga Bab 4

1. This document is version: 0.9.3
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 01/04/2018

Thank you for your cooperation >v<

<u>*Chapter 1: The Measurement of Interest*</u>

1.2. Fungsi Akumulasi dan Fungsi Jumlah

- Nilai Pokok (*Principal Value*)
  Sejumlah uang yang diinvestasikan pada awal periode
- Nilai Akumulasi (*Accumulated Value*)
  Jumlah nilai setelah suatu periode waktu
- Jumlah Bunga (*Amount of Interest*)
  Selisih dari nilai akumulasi dan nilai pokok yang diterima selama periode investasi

- Fungsi Akumulasi
  Misalkan investasi awal kita sebesar 1.
  Notasi : $a(t)$
  Definisi : $a(t)$ adalah nilai akumulasi pada waktu $t \geq 0$ dari investasi sebesar 1.
  Sifat :
  1. $a(0) = 1$
  2. Umumnya $a(t)$ adalah fungsi naik
  3. Jika bunganya bertambah secara kontinu, fungsi akumulasi akan kontinu
- Fungsi Jumlah
  Secara umum, nilai pokok yang diinvestasikan bukan 1 tapi sebesar $k > 0$.
  Notasi : $A(t)$
  Definisi : $A(t)$ adalah nilai akumulasi pada waktu $t \geq 0$ dari investasi sebesar k.
  Sifat :
  1. $A(0) = k$
  2. $A(t) = k.a(t)$
  3. Umumnya $A(t)$ adalah fungsi naik
  4. Jika bunganya bertambah secara kontinu, fungsi jumlah akan kontinu

- Besar bunga yang diperoleh selama periode ke-n dinyatakan dengan:
$$I_n = A(n) - A(n-1), \qquad n = 1,2,3, \dots$$

1.3. Tingkat Bunga Efektif

- **Notasi** : i
  Definisi :
  1. Besarnya uang yang dihasilkan selama 1 periode dari investasi sebesar 1 pada awal periode. Bunganya dibayarkan di akhir periode.
  2. Rasio dari besarnya bunga yang diperoleh selama 1 periode dengan besarnya di awal periode.

$$i = \frac{(1+i)-1}{1} = \frac{a(1)-a(0)}{a(0)} = \frac{A(1)-A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)}$$

- i_n: Tingkat Bunga Efektif pada periode ke-n
$$i_n = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \qquad n = 1,2,3, \dots$$

1.4. Bunga Sederhana

- Bunga sederhana adalah bunga yang besarnya konstan yang diperoleh dari investasi sebesar 1. Fungsi akumulasi dari bunga sederhana adalah:
$$a(t) = 1 + it, \qquad t \geq 0$$

1.5. Bunga Majemuk

- Bunga majemuk adalah bunga yang diperoleh diinvestasikan kembali untuk mendapatkan tambahan bunga. Fungsi akumulasi dari bunga majemuk adalah:
$$a(t) = (1 + i)^t, \qquad t \geq 0$$

1.6. Nilai Sekarang

- $(1 + i)$ dikatakan sebagai faktor akumulasi karena mengakumulasikan nilai dari investasi awal periode terhadap nilainya pada akhir periode.
- Definisikan:
$$v = \frac{1}{1 + i}$$
sebagai faktor diskonto karena mendiskon nilai investasi pada akhir periode terhadap nilainya pada awal periode
- Generalisasi dari bentuk di atas adalah fungsi diskonto.
Notasi : $a^{-1}(t)$
Definisi : $a^{-1}(t)$ adalah besarnya uang yang harus diinvestasikan agar terakumulasi menjadi 1 pada akhir t periode.
- Untuk bunga sederhana:
$$a^{-1}(t) = \frac{1}{1 + it}, \qquad t \geq 0$$
- Untuk bunga majemuk:
$$a^{-1}(t) = \frac{1}{(1 + i)^t} = v^t, \qquad t \geq 0$$

1.7. Tingkat Diskonto Efektif

- **Notasi** : d
Definisi : Rasio antara besarnya diskonto yang diperoleh selama satu periode dengan besarnya investasi pada akhir periode.
$$d_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n)} = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}$$
- Diskonto Sederhana
$$a^{-1}(t) = 1 - dt, \qquad 0 \leq t < \frac{1}{d}$$
- Diskonto Majemuk
$$a^{-1}(t) = (1 - d)^t, \qquad t \geq 0$$

Hubungan Tingkat Bunga Efektif dengan Tingkat Diskonto Efektif	
$i = \frac{d}{1-d}$ $d = \frac{i}{1+i}$	$d = iv$ $d = 1 - v$ $id = i - d$

1.8. Tingkat Bunga dan Diskonto Nominal

- Tingkat Bunga Nominal
  Notasi : $i^{(m)}, m \in \mathbb{Z}^+, m > 1$
  Definisi : Bunga dibayarkan beberapa kali dalam satu periode

  $i^{(m)}$ adalah tingkat bunga dimana bunga dibayarkan m kali dalam satu periode dengan tingkat bunga efektif untuk tiap $1/m$ periode adalah $i^{(m)}/m$
  e.g.:
  Tingkat bunga 8% convertible quarterly artinya per kuartal tingkat bunga efektifnya adalah $8\%/4 = 2\%$

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

- Tingkat Diskonto Nominal
  Notasi : $d^{(m)}, m \in \mathbb{Z}^+, m > 1$

  $d^{(m)}$ adalah tingkat diskonto yang membayar m kali dalam satu periode dengan tingkat diskonto efektif untuk tiap $1/m$ periode adalah $d^{(m)}/m$

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

Hubungan Tingkat Bunga Nominal dengan Tingkat Diskonto Nominal	
$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1}$	$\frac{i^{(m)}}{m}.\frac{d^{(m)}}{m}=\frac{i^{(m)}}{m}-\frac{d^{(m)}}{m}$

1.9. Force of Interest and Discount

- Force of Interest
  Notasi : δ_t
  Definisi : Force of Interest merupakan pengukuran bunga untuk tak berhingga interval waktu yang sangat kecil (setiap waktu)

$$\delta_t = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

- Untuk bunga sederhana:
  $a(t) = 1 + it \Rightarrow a'(t) = i$ sehingga:
$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{i}{1+it}$$
- Untuk bunga majemuk:
  $a(t) = (1+i)^t \Rightarrow a'(t) = (1+i)^t \ln(1+i)$ sehingga:
$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \ln(1+i) = \delta$$

- Untuk mencari $a(t)$ jika diketahui δ_t:
$$a(t) = \exp\left(\int_0^t \delta_s \, ds\right)$$

- Force of Discount
  Notasi : δ'_t
  Definisi : Force of Discount merupakan pengukuran diskonto untuk tak berhingga interval waktu yang sangat kecil (setiap waktu)

$$\delta_t = \lim_{m\to\infty} d^{(m)} = -\frac{\frac{d}{dt}\left(a^{-1}(t)\right)}{a^{-1}(t)}$$

- Dapat ditunjukkan $\delta_t = \delta'_t$
$$\delta'_t = -\frac{\frac{d}{dt}\left(a^{-1}(t)\right)}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)\frac{d}{dt}\left(a(t)\right)}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)a(t)\delta_t}{a^{-1}(t)} = \delta_t$$

2.4. Unknown Time

- Misal $s_1, s_2, \dots, s_n$ dibayarkan berturut-turut pada $t_1, t_2, \dots, t_n$ dengan tingkat bunga i per periode.
- Pada waktu t^* terdapat pembayaran single (*lumpsum*) sebesar $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$
- Kedua pernyataan tersebut ekuivalen
- Metode Langsung

$$t^* = \frac{\ln(\sum_{k=1}^{n} s_k) - \ln(\sum_{k=1}^{n} s_k v^{t_k})}{\delta}$$

- Metode Equated Value

$$t^* \approx \bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k t_k}{i}$$

- The Rule of 72
  Metode ini spesifik digunakan untuk menghitung lamanya periode untuk investasi awal terakumulasi menjadi dua kali lipat. Dengan kata lain:

$$(1+i)^n = 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \frac{\ln 2}{i} \cdot \frac{i}{\ln(1+i)}$$

  Untuk $i = 8\%$:

$$n \approx \frac{0.6931}{i}(1.0395) = \frac{0.72}{i}$$

2.6. Determining Time Periods

- Actual/Actual (*Exact Simple Interest*)
  Menghitung persis banyaknya hari periode investasi dan dengan menggunakan 365 hari dalam 1 tahun.
- 30/360 (*Ordinary Simple Interest*)
  Diasumsikan dalam satu bulan terdapat 30 hari dan terdapat 360 hari dalam 1 tahun. Ada sebuah rumus untuk menghitung banyaknya hari antara 2 tanggal:

$$360(Y_2 - Y_1) + 30(M_2 - M_1) + (D_2 - D_1)$$

- Actual/360 (*Banker's Rule*)
  Menggunakan tepat banyaknya hari periode investasi namun menggunakan 360 hari dalam 1 tahun. Dapat dibuktikan Banker's Rule akan selalu memberikan bunga lebih banyak dibandingkan 2 metode sebelumnya.
- e.g.:
  Akan ditentukan besarnya bunga dari \$2000 yang didepositokan pada 17 Juni dan ditarik pada 10 September pada tahun yang sama dengan tingkat bunga efektif 8%.
  - Dengan Actual/Actual:

$$2000(0.08)\left(\frac{85}{365}\right) = \$37.26$$

  - Dengan 30/360:

$$2000(0.08)\left(\frac{83}{360}\right) = \$36.89$$

  - Dengan Banker's Rule:

$$2000(0.08)\left(\frac{85}{360}\right) = \$37.78$$

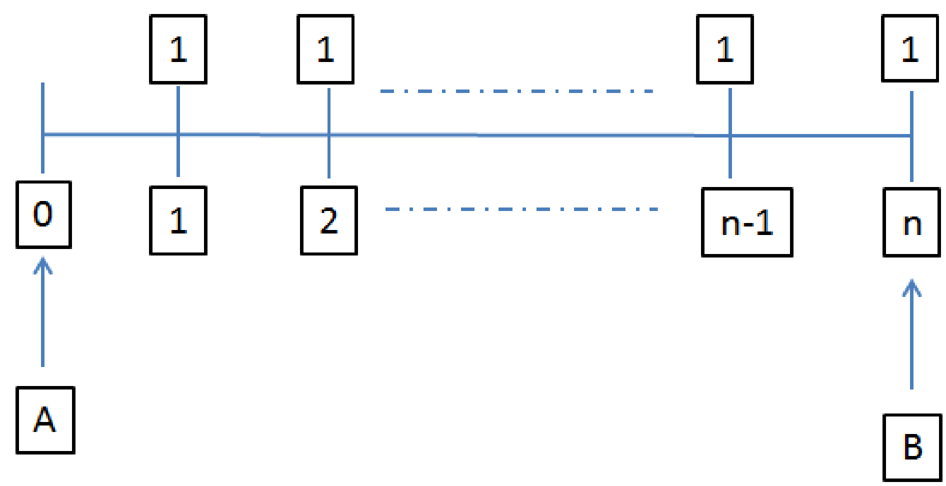
Chapter 3: Basic Annuities

3.1. Pengantar

- Anuitas didefinisikan sebagai rangkaian pembayaran atau penerimaan yang dilakukan pada selang waktu yang sama.
- Ada 2 macam anuitas dari segi pembayarannya:
  - Anuitas Tertentu (*Annuity-Certain*)
    Anuitas yang pembayaran berkalanya dilakukan secara pasti dalam jangka waktu tertentu. e.g.: Pembayaran cicilan sepeda motor secara bulanan selama 27 bulan.
  - Anuitas Tak Tentu (*Contingent Annuity*)
    Anuitas yang pembayarannya tak pasti. e.g.: Pembayaran uang pensiun yang dilakukan selama penerima uang pensiun masih hidup (*Life Annuity*).
- Ada 2 macam anuitas dari segi waktu pembayarannya:
  - Anuitas Di Muka (*Annuity-Due*)
    Anuitas yang pembayarannya dilakukan di awal selang/waktu
  - Anuitas Di Akhir (*Annuity-Immediate*)
    Anuitas yang pembayarannya dilakukan di akhir selang/waktu

3.2. Annuity-Immediate

- Berikut ilustrasi Anuitas Di Akhir



- Nilai sekarang dari serangkaian pembayaran tersebut diberikan oleh:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v(1-v^n)}{1-v}$$

$$\Leftrightarrow a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$$

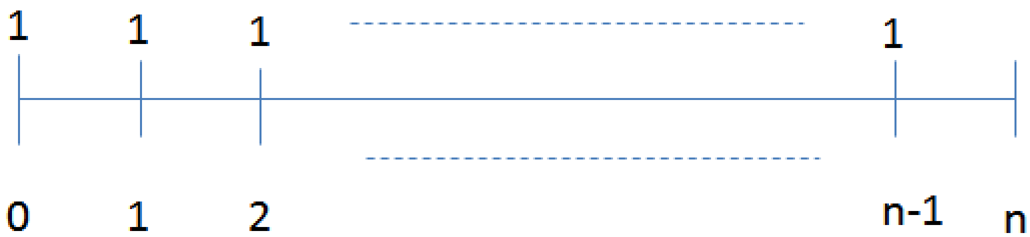
- Nilai akumulasi dari serangkaian pembayaran tersebut diberikan oleh:

$$s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^{n-1}(1-(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow s_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

3.3. Annuity-Due

- Berikut ilustrasi Anuitas Di Awal



- Nilai sekarang dari serangkaian pembayaran tersebut diberikan oleh:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{(1 - v^n)}{1 - v}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - v^n}{iv} = \frac{1 - v^n}{d}$$

- Nilai akumulasi dari serangkaian pembayaran tersebut diberikan oleh:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1 + i)^n + (1 + i)^{n-2} + \cdots + (1 + i) = \frac{(1 + i)^n (1 - (1 + i)^{-n})}{1 - (1 + i)^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{iv} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d}$$

Beberapa Rumus Terkait
1. $\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1 + i)^n$
2. $\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d$
3. $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1 + i)$
4. $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1 + i)$
5. $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$
6. $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1$

3.5. Perpetuitas

- Perpetuitas adalah suatu anuitas yang pembayarannya berlangsung selamanya secara terus-menerus, artinya periode anuitas tidak berhingga.

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n \to \infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n \to \infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - v^n}{d} = \frac{1}{d}$$

Chapter 4: More General Annuities

4.3. Pembayaran lebih jarang dari periode konversi bunga

- Misal:
  - k adalah jumlah periode konversi bunga dalam satu periode pembayaran.
  - n adalah jangka waktu anuitas diukur dalam periode konversi bunga.
  - i adalah suku bunga per periode konversi bunga
  - Banyaknya pembayaran anuitasnya adalah n/k
- Annuity-Immediate
$$\mathrm{PV} = \frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}, \qquad \mathrm{ACC} = \frac{s_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}$$
- Annuity-Due
$$\mathrm{PV} = \frac{a_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}}, \qquad \mathrm{ACC} = \frac{s_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}}$$
- Perpetuity-Immediate
$$\mathrm{PV}_\infty = \frac{1}{i s_{\overline{k|}}}$$
- Perpetuity-Due
$$\mathrm{PV}_\infty = \frac{1}{i a_{\overline{k|}}}$$

e.g.:
Sebuah anuitas dibayarkan setiap akhir tahun selama 5 tahun sebesar \$100 dengan tingkat bunga convertible semiannually adalah 20%. Tentukan nilai sekarangnya dan nilai akumulasi setelah pembayaran terakhir.
Jawab:
Karena dibayarkan setiap akhir tahun, maka ini adalah anuitas immediate.
Pertama, ubah dulu tingkat bunga convertible semiannually menjadi tingkat bunga efektif.
$$i = \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{20\%}{2}\right)^2 - 1 = (1.1)^2 - 1 = 1.21 - 1 = 0.21$$
Masukkan rumus dengan $n = 10$ dan $k = 2$ sehingga:
$$\mathrm{PV} = 100.\frac{a_{\overline{n|}i}}{s_{\overline{k|}i}} = 100.\frac{\frac{1-v^n}{i}}{\frac{(1+i)^k-1}{i}} = 100.\frac{1-v^n}{(1+i)^k - 1}$$
$$\overset{n=10,k=2,i=21\%}{\Longrightarrow} \quad 100.\frac{1-\frac{1}{(1.21)^{10}}}{(1.21)^2-1} = 183.44244 \ldots \approx 183.4424$$
dan:
$$\mathrm{ACC} = 100.\frac{s_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} = 100.\frac{\frac{(1+i)^n-1}{i}}{\frac{(1+i)^k-1}{i}} = 100.\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^k - 1}$$
$$\overset{n=10,k=2,i=21\%}{\Longrightarrow} \quad 100.\frac{(1.21)^{10}-1}{(1.21)^2-1} = 1234{,}10901 \ldots \approx 1234{,}1090$$

4.4. Pembayaran lebih sering dari periode konversi bunga

- Misal:
  - m adalah jumlah periode pembayaran dalam satu periode konversi bunga.
  - n adalah jangka waktu anuitas diukur dalam periode konversi bunga.
  - i adalah suku bunga per periode konversi bunga
  - Banyaknya pembayaran anuitasnya adalah mn
- Annuity-Immediate

$$\text{PV} = a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}, \qquad \text{ACC} = s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

- Annuity-Due

$$\text{PV} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}, \qquad \text{ACC} = \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}}$$

- Perpetuity-Immediate

$$\text{PV}_\infty = a_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

- Perpetuity-Due

$$\text{PV}_\infty = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

e.g.: (SOA)
Ray deposits 100 into a fund at the end of each 2-year period for 20 years. The fund pays interest at an annual effective rate of i. The total amount of interest by the fund during the 19^{th} and 20^{th} years is 250. Calculate the accumulated amount in Ray's account at the end of year 20.
Jawab:
Karena dibayarkan setiap akhir dua tahun, maka ini adalah anuitas immediate.
Masukkan rumus dengan $n = 20$ dan $m = 2$ sehingga:

$$\text{ACC} = 100.\, s_{\overline{n}|i}^{(m)} = 100.\frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

Sekarang kita akan tentukan nilai dari i kemudian mencari nilai dari $i^{(m)}$.
Ingat bahwa:

$$I_n = A(n) - A(n-1)$$

Kita tahu bahwa $I_{20} = 250$, sehingga:

$$A(20) - A(19) = I_{20}$$

$$\Leftrightarrow \quad s_{\overline{20}|i} - \ddot{s}_{\overline{18}|i} = \frac{I_{20}}{100}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+i)^{20} - 1}{i} - \frac{(1+i)^{18} - 1}{iv} = 2.5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+i)^{20} - 1 - (1+i)^{19} + (1+i)}{i} = 2.5$$

$$\Leftrightarrow \quad \big((1+i) - 1\big)\left((1+i)^{19} + 1\right) = 2.5i$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+i)^{19} + 1 = 2.5$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+i)^{19} = 1.5$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + i = \sqrt[19]{1.5}$$

Dengan menggunakan hubungan i dengan $i^{(m)}$ maka:

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow i^{(2)} = 2\left(\sqrt{1+i} - 1\right) = 2\left(\sqrt[38]{1.5} - 1\right)$$

Substitusikan kembali maka kita peroleh:

$$\text{ACC} = 100.\, s_{\overline{n|}i}^{(m)} = 100. \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$\overset{n=20,m=2}{\leftrightarrows} \quad 100. \frac{(1+i)(1+i)^{19} - 1}{i^{(2)}} = 100. \frac{1.5\sqrt[19]{1.5} - 1}{2\left(\sqrt[38]{1.5} - 1\right)}$$

$$= 2481.31506 \ldots \approx 2481.3151$$

4.5. Anuitas Kontinu

- Hal khusus dari anuitas dengan periode pembayaran lebih sering dari pada periode konversi bunga adalah di mana frekuensi pembayaran menjadi tak berhingga seperti misalnya pembayaran-pembayarannya dilakukan secara kontinu. Anuitas tersebut dinamakan sebagai anuitas kontinu.
- Nilai sekarangnya disimbolkan sebagai $\bar{a}_{\overline{n|}}$ dan didefinisikan sebagai:

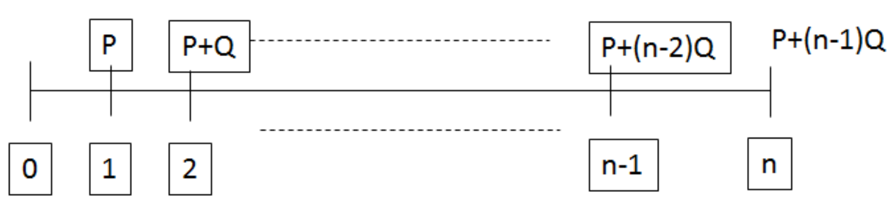
$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n v^t \, dt = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

- Nilai akumulasinya disimbolkan sebagai $\bar{s}_{\overline{n|}}$ dan didefinisikan sebagai:

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = \int_0^n (1+i)^t \, dt = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}$$

4.6. Anuitas dengan pembayaran bervariasi menurut deret aritmatika

- Ilustrasi:



- Syarat: $P > 0,\ P + (n-1)Q > 0$
- Misal A adalah nilai sekarang dari serangkaian pembayaran tersebut, maka:

$$A = Pv + (P+Q)v^2 + \cdots + (P + (n-1)Q)v^n$$
$$= Pa_{\overline{n|}} + Q\frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i}$$

- Misal S adalah nilai sekarang dari serangkaian pembayaran tersebut, maka:

$$S = a_{\overline{n|}}(1+i)^n$$
$$= Ps_{\overline{n|}} + Q\frac{s_{\overline{n|}} - n}{i}$$

- Selanjutnya, terdapat dua kasus ditinjau dari nilai P dan Q, yaitu:
  - Jika $P = 1, Q = 1$, maka disebut sebagai anuitas yang meningkat
  - Jika $P = n, Q = -1$, maka disebut sebagai anuitas yang menurun

- Anuitas Meningkat Immediate
  Nilai sekarang anuitas tersebut didefinisikan sebagai:
  $$(Ia)_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} + \frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i}$$
  dan nilai akumulasinya sebagai:
  $$(Is)_{\overline{n|}} = (Ia)_{\overline{n|}}(1+i)^n = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{i} = \frac{s_{\overline{n+1|}} - (n+1)}{i}$$
- Anuitas Menurun Immediate
  Nilai sekarang anuitas tersebut didefinisikan sebagai:
  $$(Da)_{\overline{n|}} = na_{\overline{n|}} - \frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}$$
  dan nilai akumulasinya sebagai:
  $$(Ds)_{\overline{n|}} = (Da)_{\overline{n|}}(1+i)^n = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{i}$$

- Anuitas Meningkat Due
  Nilai sekarang anuitas tersebut didefinisikan sebagai:
  $$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{d}$$
  dan nilai akumulasinya sebagai:
  $$(I\ddot{s})_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{d} = \frac{s_{\overline{n+1|}} - (n+1)}{d}$$
- Anuitas Menurun Due
  Nilai sekarang anuitas tersebut didefinisikan sebagai:
  $$(D\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{d}$$
  dan nilai akumulasinya sebagai:
  $$(D\ddot{s})_{\overline{n|}} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{d}$$

- Perpetuitas Immediate
  $$A = \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}$$
- Perpetuitas Due
  $$A = \frac{P}{d} + \frac{Q}{d^2}$$

4.7. Anuitas dengan pembayaran bervariasi menurut deret geometri

- Misal suatu anuitas dibayarkan setiap akhir periode dengan jangka waktu n periode dimana pembayaran pertama sebesar 1 dan pembayaran selanjutnya meningkat dengan rasio $(1+k)$.
- Faktor k nilainya biasanya positif
- Formula nilai sekarang akan bergantung pada i dan k

- Annuitas Immediate dimana $i = k$
$$\text{PV} = nv, \qquad \text{ACC} = nv(1+i)^n = n(1+i)^{n-1}$$
- Annuitas Immediate dimana $i \neq k$
$$\text{PV} = \frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}, \qquad \text{ACC} = \frac{(1+i)^n-(1+k)^n}{i-k}$$
Atau jika $i > k$, definisikan $i' \ni$
$$i + i' = \frac{1+i}{1+k} \Leftrightarrow i' = \frac{i-k}{1+k}$$
Sehingga akan diperoleh:
$$\text{PV} = a_{\overline{n}|i'}, \qquad \text{ACC} = a_{\overline{n}|i'}(1+i)^n$$

- Annuitas Due dimana $i = k$
$$\text{PV} = n, \qquad \text{ACC} = n(1+i)^n$$
- Annuitas Due dimana $i \neq k$
$$\text{PV} = \frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1+k}{1+i}}, \qquad \text{ACC} = \frac{(1+i)^n-(1+k)^n}{1-\frac{1+k}{1+i}}$$
Atau jika $i > k$, definisikan $i' \ni$
$$i + i' = \frac{1+i}{1+k} \Leftrightarrow i' = \frac{i-k}{1+k}$$
Sehingga akan diperoleh:
$$\text{PV} = \ddot{a}_{\overline{n}|i'}, \qquad \text{ACC} = \ddot{a}_{\overline{n}|i'}(1+i)^n$$

- Perpetuitas akan ada hanya jika $i > k$ karena jika $i \leq k$, maka akan divergen.
- Untuk perpetuity-immediate:
$$\text{PV}_\infty = \frac{1}{i-k}$$
- Untuk perpetuity-due:
$$\text{PV}_\infty = \frac{1+i}{i-k}$$

Daftar Referensi (Bukan Daftar Pustaka)

1. Kellison, Stephen G. 2009. *The Theory of Interest 3rd edition*.
2. Malik, Maulana. 2018. *Anuitas*.
3. Malik, Maulana. 2018. *Anuitas Dasar*.
4. Sari, Suci F. 2018. *The Measurement of Interest.*
5. Sari, Suci F. 2018. *Solutions of problems in interest*.

ネップ
ノート