Xyba Project

Analisis 2

Pembahasan UTS SP Juli 2017

1. This document is version: 0.9.3
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 01/08/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Misalkan $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$ fungsi-fungsi kontinu pada $[0,1]$ yang memenuhi:
$$\sup\{f(x): x \in [0,1]\} = \sup\{g(x): x \in [0,1]\}$$
Buktikan terdapat $c \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(c) = g(c)$.

2. Diketahui f kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $|f(x)| \geq M > 0$ untuk semua $x \in A$. Apakah $1/f$ kontinu seragam pada A? Jelaskan!

3. Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I. Jika f mempunyai maksimum absolute di sebuah titik dalam c pada I, buktikan f tidak injektif pada I.

4. Misalkan $f: I \to \mathbb{R}$ terturunkan pada interval I. Buktikan bahwa f tidak naik pada I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.

5. Berikan contoh sebuah fungsi kontinu seragam pada $[a, b]$ yang terturunkan pada (a, b) tetapi turunannya tidak terbatas pada (a, b). Jelaskan!

Jawaban

1. Misalkan $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$ fungsi-fungsi kontinu pada $[0,1]$ yang memenuhi:

$$\sup\{f(x): x \in [0,1]\} = \sup\{g(x): x \in [0,1]\}$$

   Buktikan terdapat $c \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(c) = g(c)$.

Jawab:

Misal: $\exists x_1 \in [0,1] \ni f(x_1) \geq f(x), \forall x \in [0,1]$ ... **(1)**, artinya $f(x_1) = \sup\{f(x): x \in [0,1]\}$.

$\exists x_2 \in [0,1] \ni g(x_2) \geq g(x), \forall x \in [0,1]$ ... **(2)**, artinya $g(x_2) = \sup\{g(x): x \in [0,1]\}$.

Apabila $x_1 = x_2$ maka kita bisa pilih $c = x_1 = x_2$ sehingga $\exists c \in [0,1] \ni f(c) = g(c)$.

Apabila $x_1 \neq x_2$,

WLOG misal $x_1 < x_2$ dan $I := [x_1, x_2]$.

Berdasarkan **(1)**, maka $f(x_1) \geq f(x), \forall x \in I$.

Berdasarkan **(2)**, maka $g(x_2) \geq g(x), \forall x \in I$.

Definisikan $h(x) := f(x) - g(x), \forall x \in I$.

$$f(x_1) = g(x_2) > g(x_1)$$
$$g(x_2) = f(x_1) > f(x_2)$$

Sehingga kita peroleh $f(x_1) > g(x_1) \Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) = h(x_1) > 0$ dan

$$g(x_2) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - g(x_2) = h(x_2) < 0$$

Artinya $h(x_2) < 0 < h(x_1)$ dengan $x_1, x_2 \in I = [x_1, x_2]$.

Berdasarkan Teorema Lokasi Akar 5.3.5, maka $\exists c \in I \ni h(c) = f(c) - g(c) = 0$.

Karena $I \subseteq [0,1]$, artinya $\exists c \in [0,1] \ni f(c) = g(c)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa terdapat $c \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(c) = g(c)$.

2. Diketahui f kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $|f(x)| \geq M > 0$ untuk semua $x \in A$. Apakah $1/f$ kontinu seragam pada A? Jelaskan!

Jawab:

1) Akan ditunjukkan f kontinu seragam pada $A \subseteq \mathbb{R}$.
   Misal $A \coloneqq [a, b] \subseteq \mathbb{R}$
   Karena f kontinu pada A dan karena A adalah himpunan tertutup terbatas, maka berdasarkan Teorema Kontinuitas Seragam 5.4.3, maka f kontinu seragam pada A.
   Apabila $A \coloneqq (a, b)$, maka berdasarkan Teorema Ekstensi Kontinuitas 5.4.8, karena f kontinu seragam di $[a, b]$ maka f juga kontinu seragam di (a, b).
   Karena f kontinu seragam di (a, b) dan di $[a, b]$, maka f juga kontinu seragam di:
   $$(a, b) \cup \{b\} = (a, b] \quad \text{dan} \quad (a, b) \cup \{a\} = [a, b)$$
   Artinya, untuk sembarang $A \subseteq \mathbb{R}$, f kontinu seragam pada A.

2) Akan ditentukan apakah $1/f$ kontinu seragam pada A.
   Karena $|f(x)| \geq M > 0, \forall x \in A$ maka kita akan punya:
   $$\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{M}, \forall x \in A \ldots (1)$$
   Karena f kontinu seragam pada A maka berdasarkan Definisi 5.4.1.:
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall x, u \in A, |x - u| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon. M^2$$
   Perhatikan $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall x, u \in A, |x - u| < \delta$, maka berlaku:
   $$\begin{aligned} \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(u)}\right| &= \left|\frac{f(u) - f(x)}{f(x)f(u)}\right| \\ &= \frac{1}{|f(x)||f(u)|} |f(x) - f(u)| \\ &\leq \frac{1}{M^2} |f(x) - f(u)| \\ &< \frac{1}{M^2} (\varepsilon. M^2) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$
   Artinya, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall x, u \in A, |x - u| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(u)}\right| < \varepsilon$.
   Berdasarkan Definisi 5.4.1, maka kita simpulkan bahwa $1/f$ kontinu seragam pada A.

$\therefore 1/f$ kontinu seragam pada A.

3. Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I. Jika f mempunyai maksimum absolute di sebuah titik dalam c pada I, buktikan f tidak injektif pada I.

Jawab:
Akan dibuktikan f tidak injektif pada I dengan kontradiksi.

Misal f injektif pada I. Artinya, $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Misal $a \leq x_1 < c$ dan $c < x_2 \leq b$
Karena f injektif, maka $f(x_1) < f(c)$ dan $f(x_2) < f(c)$ dengan $f(x_1) \neq f(x_2)$.

WLOG misal $f(x_1) < f(x_2) < f(c)$, maka berdasarkan Intermediate Value Theorem 5.3.7,
$$\exists \xi \in (x_1, c) \ni f(\xi) = f(x_2)$$
Karena $x_1 < \xi < c$ menghasilkan nilai yang sama dengan $x_2 > c$, artinya ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa f injektif. Maka haruslah f tidak injektif.

Untuk $f(x_2) < f(x_1) < f(c)$ akan serupa.

$\therefore$ Terbukti bahwa f tidak injektif pada I.

4. Misalkan $f: I \to \mathbb{R}$ terturunkan pada interval I. Buktikan bahwa f tidak naik pada I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.

Jawab:
Akan dibuktikan Teorema 6.2.7 yang membenarkan pernyataan tersebut.

$\Rightarrow$: Misal f tidak naik pada I.
Artinya $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
Akan dibuktikan $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.
Ambil sembarang $c \in I$.
Untuk $x \neq c$,
Misal $x < c$, maka $x - c < 0$ dan karena f tidak naik, $f(x) - f(c) \geq 0$ sehingga:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Misal $x > c$, maka $x - c > 0$ dan karena f tidak naik, $f(x) - f(c) \leq 0$ sehingga:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Berdasarkan Teorema 4.2.6, maka kita peroleh:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Karena f terturunkan pada I, maka f terturunkan pada c, dan berdasarkan Definisi 6.1.1,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Karena berlaku untuk sembarang $c \in I$, maka kita peroleh $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

$\Leftarrow$: Misal $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.
Akan dibuktikan f tidak naik pada $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
Ambil sembarang $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$.
Karena f terturunkan pada I, maka berdasarkan Teorema 6.1.2, f kontinu pada I.
Karena f kontinu pada $[x_1, x_2] \subseteq I$ dan f terturunkan pada $(x_1, x_2) \subset I$, maka berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4,

$$\exists c \in (x_1, x_2) \ni f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Karena $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, maka kita peroleh:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Artinya, untuk sembarang $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ berlaku $f(x_1) \geq f(x_2)$

$\therefore$ Terbukti bahwa f tidak naik pada I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.

5. Berikan contoh sebuah fungsi kontinu seragam pada $[a, b]$ yang terturunkan pada (a, b) tetapi turunannya tidak terbatas pada (a, b). Jelaskan!

Jawab:
Misal $f(x) \coloneqq \sqrt{x}$ untuk $x \in A$ dengan $A \coloneqq [0, b], b > 0$.

Akan ditunjukkan f kontinu seragam pada A.
Pilih $\delta = \varepsilon^2$ untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka $\forall x, u \in A, |x - u| < \delta$ akan berlaku:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(u)|^2 &= \left|\sqrt{x} - \sqrt{u}\right|^2 \\ &\leq \left|\sqrt{x} + \sqrt{u}\right|\left|\sqrt{x} - \sqrt{u}\right| \\ &= x - u \\ &< \delta \\ &= \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Artinya, $|f(x) - f(u)|^2 < \varepsilon^2$.
Karena f monoton naik pada A, maka kita peroleh $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.
Artinya, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon^2 > 0 \ni \forall x, u \in A, |x - u| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon$.
Berdasarkan Definisi 5.4.1, maka kita simpulkan bahwa f kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa f terturunkan pada $(0, b)$.
Ambil sembarang $c \in (0, b)$, perhatikan bahwa:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{c}\right)} = \lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Karena $c \in (0, b)$, artinya limit ini ada. Berdasarkan Definisi 6.1.1, maka:

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Karena berlaku untuk sembarang $c \in (0, b)$, maka f terturunkan pada $(0, b)$.

Namun, perhatikan bahwa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Untuk sembarang $V_\delta(0), \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ akan menjadi tidak terbatas,
artinya f terturunkan pada $(0, b)$ namun turunannya tidak terbatas pada $(0, b)$.

$\therefore$ Contoh sebuah fungsi kontinu seragam pada $[a, b]$ yang terturunkan pada (a, b) tetapi turunannya tidak terbatas pada (a, b) adalah $f(x) \coloneqq \sqrt{x}$ untuk $x \in [0, b], b > 0$.