Xyba Project

Logika dan Himpunan

Pembahasan INSOM Radian 2016

1. This document is version: 1.0.1
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 06/12/2016

Thank you for your cooperation >v<

1. $n^3 + 5 = 2k + 1 \rightarrow n^3 = 2k - 4 = 2(k - 2) = 2k' \rightarrow n^3$ genap
    1. Akan dibuktikan apabila n^3 genap, maka n genap
    2. Misalkan n ganjil, maka dapat ditulis sebagai $n = 2l + 1$
    3. Maka $n^3 = (2l + 1)^3 = 8l^3 + 12l^2 + 6l + 1 \rightarrow n^3 = 2(4l^3 + 6l^2 + 3l) + 1 = 2l' + 1$ $\rightarrow n^3$ ganjil, ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa n^3 genap, maka n haruslah genap.

2. Misalkan n adalah bilangan rasional, maka dapat ditulis sebagai $n = \frac{a}{b}$, maka $n^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ sehingga n^3 adalah bilangan rasional. Ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa n^3 adalah bilangan irrasional, maka n haruslah bilangan irrasional

3. Misalkan $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ adalah bilangan rasional, maka dapat ditulis sebagai $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ dengan $FPB(a, b) = 1$
    1. Maka $\frac{a^2}{b^2} = 2 + 3 + 2\sqrt{6} \rightarrow a^2 = 5b^2 + 2\sqrt{6}b^2 \rightarrow a^2 - 5b^2 = 2\sqrt{6}b^2$
       $(a^2 - 5b^2)^2 = \left(2\sqrt{6}b^2\right)^2 \rightarrow a^4 + 25b^4 - 10a^2b^2 = 24b^2 \rightarrow a^4 + b^4 = 10a^2b^2$
    2. Maka $a^4 + b^4 \equiv 0 \ (mod\ 5)$
    3. Perhatikan untuk sembarang $x \in \mathbb{Z}$, $x^4 \equiv 0$ atau $1 \ (mod\ 5)$
        - $x \equiv 0 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 0 \ (mod\ 5)$
        - $x \equiv 1 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 1 \ (mod\ 5)$
        - $x \equiv 2 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 16 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 1 \ (mod\ 5)$
        - $x \equiv 3 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 81 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 1 \ (mod\ 5)$
        - $x \equiv 4 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 256 \ (mod\ 5) \rightarrow x^4 \equiv 1 \ (mod\ 5)$
    4. Maka agar $a^4 + b^4 \equiv 0 \ (mod\ 5)$, haruslah $a^4 \equiv 0 \ (mod\ 5)$ dan $b^4 \equiv 0 \ (mod\ 5)$
    5. Dan sebaliknya, $a \equiv 0 \ (mod\ 5)$ dan $b \equiv 0 \ (mod\ 5)$
    6. Maka $5|a$ dan $5|b$, maka $5|FPB(a, b)$. Ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $FPB(a, b) = 1$, maka $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ haruslah bilangan irrasional

4. Misalkan $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, n \in \mathbb{Z}^+$
    - $P(1)$: $1 = 1^2$ sehingga $P(1)$ benar
    - Asumsikan untuk sembarang $x \in \mathbb{Z}^+ \cup x \neq n$, $P(x)$ benar
    - Akan dibuktikan bahwa $P(x + 1)$ benar
    - $P(x + 1)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2x - 1) + (2x + 1) = (x + 1)^2$
      $< IH > \quad x^2 + (2x + 1) = (x + 1)^2$
    - Maka $P(x + 1)$ benar

    Sehingga terbukti untuk setiap bilangan bulat positif n bahwa $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$ benar

5. Misalkan $P(n): (1+h)^n > 1+nh,\ n,h \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$
   - $P(2): (1+h)^2 > 1+2h \to h^2+2h+1 > 2h+1$, karena $h \in \mathbb{Z}^+$, maka $P(2)$ benar
   - Asumsikan untuk sembarang $a \in \mathbb{Z}^+ \cup a \geq 2 \cup a \neq n$, $P(a)$ benar
   - Akan dibuktikan bahwa $P(a+1)$ benar
   - $P(a+1): (1+h)^{a+1} = (1+h)(1+h)^a \ > \ (1+h)(1+ah) = 1+(a+1)h+ah^2$
   - Karena $a > 0 \cup h^2 > 0$, maka $ah^2 > 0$ maka $1+(a+1)h+ah^2 = 1+(a+1)h+0$ maka $P(a+1): (1+h)^{a+1} > 1+(a+1)h$
   - Maka $P(a+1)$ benar

   Sehingga terbukti untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ bahwa $(1+h)^n > 1+nh$ berlaku

6. Misalkan $P(n): 3 \times 3^{2n} + 40n - 67 = 64q, n \in \mathbb{Z}^+$
   - $P(1): 3 \times 9 + 40 - 67 = 64q \to 0 = 64q$, karena $P(1)$ dapat dibagi 64, maka $P(1)$ benar
   - Asumsikan untuk sembarang $p \in \mathbb{Z}^+ \cup p \neq n$, $P(p)$ benar
   - Akan dibuktikan bahwa $P(p+1)$ benar

     $P(p+1)$: $3^{2p+3} + 40p \times 9 - 67 \times 9 = 64q$

     $3^{2p+3} + 40p + 40 + (40 \times 8p - 40) - 67 + (-67 \times 8) = 64q$

     $3^{2p+3} + 40(p+1) - 67 + (320p - 576) = 64q$

     $< IH >$ $\quad 64(q+1) + 64(5p-9) = 64q$
   - Maka $P(p+1)$ benar

   Sehingga terbukti untuk $n \in \mathbb{Z}^+, 64 | 3^{2n+1} + 40n - 67$

7. $f(a) + f(b) = f(a+b),\ a,b \in \mathbb{Q}$
   - Substitusi $b = 0$: $f(a) + f(0) = f(a) \leftrightarrow f(0) = 0$…………………(1)
   - Substitusi $b = -a$: $f(a) + f(-a) = f(0) \leftrightarrow f(-a) = -f(a)$……(2)

   Akan dibuktikan $P(n): f(nx) = nf(x)$
   - $P(1): f(x) = 1.f(x)$ sehingga $P(1)$ benar
   - Asumsikan untuk sembarang $k \in \mathbb{N} \cup k \neq n$, $P(k)$ benar
   - Akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ benar
   - $P(k+1): f\big((k+1)x\big) = f(kx) + (f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x)$
   - Maka terbukti bahwa $f(nx) = nf(x)$……………………………………………(3)

   Substitusi $x = 1$ ke (3) didapatkan $f(n) = nf(1), n \in \mathbb{N}$…………………….(4)

   Substitusi $x = \frac{k}{n}, k \in \mathbb{N}$ ke (3) didapatkan $f(k) = n.f\left(\frac{k}{n}\right)$……………………. (5)

Dari (4) dan (5) didapatkan $nf\left(\frac{k}{n}\right) = f(k) = kf(1) \rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}f(1),\ k,n \in \mathbb{N}$
Maka $f(c) = cf(1),\ c \in \mathbb{Q}^+$ .... (6)

Dari (2) dan (6) didapatkan $f(-c) = -f(c) = -cf(1),\ c \in \mathbb{Q}^+$ .... (7)

Dari (1), (6), dan (7) didapatkan $f(d) = df(1),\ d \in \mathbb{Q}^+$

Maka terbukti bahwa $f(x) = xf(1),\ x \in \mathbb{Q}$ benar

8. Misalkan $P(n)$ adalah jumlah kota dalam negara tersebut dengan $n \geq 2$
   - $P(2)$: 2 kota pasti memiliki satu jalur
   - Misalkan ada k kota $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ memiliki jalur yang melewati semua kota
     WLOG, misalkan jalur mulai dari i_1 dan berakhir di i_2
   - Asumsikan bahwa benar untuk $2 \leq j \leq k$, setiap j benar
   - Ditambah 1 kota, dengan jalur $k+1$, karena dari i_k ada satu jalur penghubung berarti dari i_1 ke i_{k+1} juga ada jalur yang melewati semua kota

   Maka terbukti ada jalur yang melewati semua kota

9. Perhatikan bahwa sisi kiri akan semakin bertambah saat n bertambah namun sisi kanan akan tetap konstan, sehingga induksi tidak akan langsung bekerja. Untuk membuktikan pertidaksamaan ini, akan diberikan perubahan pada pertidaksamaan sebagai hipotesis induksi seperti berikut:
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2} - \frac{r}{2^n}$$

   Tujuannya adalah untuk mementukan konstan positif r yang akan membantu membuktikan pertidaksamaan menggunakan induksi. Apabila induksi ini benar, maka dapat disimpulkan pertidaksamaan awal benar

   $P(s)$: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^s}\right) < \frac{5}{2} - \frac{r}{2^s}$
   - Akan dibuktikan bahwa $P(s+1)$ benar
   - $P(s+1)$: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\frac{1}{2^{s+1}}\right) < \frac{5}{2} - \frac{r}{2^{s+1}}$
   - Menggunakan hipotesis induksi, kita mendapatkan
     $P(s+1)$: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\frac{1}{2^{s+1}}\right) < \left(\frac{5}{2} - \frac{r}{2^s}\right)\left(1+\frac{1}{2^{s+1}}\right) < \frac{5}{2} - \frac{r}{2^{s+1}}$

Perhatikan kedua sisi kanan, kemudian selesaikan

$$\left(\frac{5}{2}-\frac{r}{2^s}\right)\left(1+\frac{1}{2^{s+1}}\right)<\frac{5}{2}-\frac{r}{2^{s+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5(2^{s-1})-r}{2^s}\right)\left(\frac{2^{s+1}+1}{2^{s+1}}\right)<\frac{5(2^s)-r}{2^{s+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(2^{2s})+5(2^{s-1})-r(2^{s+1})-r}{2^{2s+1}}<\frac{5(2^s)-r}{2^{s+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(2^{2s})+5(2^{s-1})}{2^{2s+1}}-\frac{5(2^s)}{2^{s+1}}<\frac{r(2^{s+1})+r}{2^{2s+1}}-\frac{r}{2^{s+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(2^{2s})+5(2^{s-1})-5(2^{2s})}{2^{2s+1}}<\frac{2.r(2^s)+r-r(2^s)}{2^{2s+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(2^{s-1})}{2^{2s+1}}<\frac{r(2^s)}{2^{2s+1}}+\frac{r}{2^{2s+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2^{s+2}}<\frac{2r}{2^{s+2}}+\frac{r}{2^{2s+1}}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{5}{2^{s+2}}<\frac{2r}{2^{s+2}}$$

Maka, jelas terpenuhi untuk $r=3$

Kembali membuktikan hipotesis induksi, untuk $n=3$, kita mendapatkan

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{135}{64} \quad < \quad \frac{136}{64}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2^3}$$

- Maka terbukti $P(s+1)$ benar
- Untuk $n\geq 3$ dibuktikan dengan cara tersebut, namun $n=1,2$ harus dibuktikan terpisah
- $P(1)$: $\left(1+\frac{1}{2}\right)<\frac{5}{2}=\frac{3}{2}<\frac{5}{2}$, maka $P(1)$ benar

  $P(2)$: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)<\frac{5}{2}=\frac{15}{8}<\frac{20}{8}$, maka $P(2)$ benar

Sehingga terbukti untuk $n\in\mathbb{Z}$, maka $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{5}{2}$ berlaku