Xyba Project

Persamaan Differensial Biasa

Pembahasan UAS Pak Zuherman 2016

1. This document is version: 0.7.2
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 20/12/2017

Thank you for your cooperation >v<

1. Tentukan solusi dari persamaan: $f(t) = 3t + \int_0^t \sin(t-x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$

   $\mathcal{L}\{f(t)\} = 3\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{\sin(t) * f(t)\}$ (Konvolusi)

   $F(s) = \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{1}{s^2+1} F(s)$

   $\dfrac{s^2}{s^2+1} F(s) = \dfrac{3}{s^2}$

   $F(s) = \dfrac{3s^2+3}{s^4} = \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{3}{s^4}$

   $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\}$

   $f(t) = 3t + \frac{1}{2}t^3$ (Ingat: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$)

   $\therefore$ Solusi dari persamaan tersebut adalah $f(t) = 3t + \dfrac{1}{2}t^3$

2. Tentukan stabilitas dan jenis titik-titik kritis dari sistem persamaan berikut:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -6x - y - 3x^2$$

   Untuk mencari titik-titik kritis, pertama tetapkan:

   $y = 0, \qquad -6x - y - 3x^2 = 0$

   Selanjutnya ambil $-6x - y - 3x^2 = 0$

   Dari sini kita dapatkan $y = -3x^2 - 6x$

   Substitusikan ke persamaan pertama, maka:

$$-3x^2 - 6x = 0$$
$$-3x(x+2) = 0$$
$$x = 0 \text{ atau } x = -2$$

   Sehingga titik-titik kritis sistem ini yaitu $(0,0)$ dan $(-2,0)$

   Untuk mencari stabilitasnya, kita harus mencari nilai-nilai eigennya namun sistem persamaan kita bukanlah sebuah sistem linier, sehingga harus kita ubah menjadi sistem almost linier terlebih dahulu.

$$J = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6-6x & -1 \end{bmatrix}_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$$

Artinya, di sekitar titik kritis $(0,0)$ dapat dibentuk sistem almost linier, yaitu:

$$X = AX \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan kestabilannya, cari nilai eigennya:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{23}i$$

Berdasarkan Teorema 9.3.2, maka titik kritis $(0,0)$ adalah titik spiral dan stabil asimptotik.

Dan di sekitar titik kritis $(-2,0)$:

$$X = AX \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan kestabilannya, cari nilai eigennya:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$$

Berdasarkan Teorema 9.3.2, maka titik kritis $(-2,0)$ adalah titik saddle dan tidak stabil.

∴ Titik-titik kritis sistem tersebut yaitu (0,0) yang berupa titik spiral dan stabil asimpotik dan (-2,0) yang berupa titik saddle dan tidak stabil.

3. Tentukan stabilitas dari titik kritis dari sistem persamaan berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + x^3y - x^5$$
$$\frac{dy}{dt} = y + y^3 + x^5$$

Sama seperti soal sebelumnya, pertama kita cari dahulu titik kritisnya dengan menetapkan:

$-x^3 + x^3y - x^5 = 0, \qquad y + y^3 + x^5 = 0$

Ambil $-x^3 + x^3y - x^5 = 0$
Tuliskan sebagai $x^3(y - 1 - x^2) = 0$
Persamaan ini dipenuhi jika $x^3 = 0$ atau $y - 1 - x^2 = 0$

Untuk $x^3 = 0 \rightarrow x = 0$:

$$y + y^3 + x^5 = 0$$
$$y + y^3 = 0$$
$$y(1 + y^2) = 0$$
$$y = 0 \text{ atau } 1 + y^2 = 0$$

Didapatkan titik-titik kritis yaitu (0,0)

Untuk $y - 1 - x^2 = 0 \rightarrow y = 1 + x^2$:

$$y + y^3 + x^5 = 0$$
$$1 + x^2 + (1 + x^2)^3 + x^5 = 0$$
$$1 + x^2 + 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6 + x^5 = 0$$
$$x^6 + x^5 + 3x^4 + 4x^2 + 2 = 0$$

Persamaan ini tidak punya solusi di $\mathbb{R}^2$

Sehingga titik kritis sistem ini hanyalah (0,0)

Selanjutnya kita cari sistem almost linier di sekitar titik kritis (0,0):

$$J = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} -3x^2 + 3x^2y - 5x^4 & x^3 \\ 5x^4 & 1 + 3y^2 \end{bmatrix}_{(x,y)\rightarrow(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan kestabilannya, cari nilai eigennya:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

∴ Titik kritis sistem tersebut adalah (0,0) yang tidak stabil.

4. Diberikan sistem persamaan:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - y - x(3 - x^2 - y^2)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y - y(3 - x^2 - y^2)$$

   a. Selesaikan solusi dari sistem tersebut (bentuk koordinat polar)
   b. Tentukan stabilitas limit cycle dari sistem tersebut (jika ada)

   a. Pertama ubah sistem persamaan tersebut menjadi sistem persamaan polar:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x\,F(x,y) + y\,G(x,y)}{r} = \frac{2x^2 - xy - x^2(3 - r^2) + xy + 2y^2 - y^2(3 - r^2)}{r}$$
$$= \frac{2r^2 - r^2(3 - r^2)}{r} = 2r - r(3 - r^2) = r^3 - r$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-y\,F(x,y) + x\,G(x,y)}{r^2} = \frac{-2xy + y^2 + xy(3 - r^2) + x^2 + 2xy - xy(3 - r^2)}{r^2}$$
$$= \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Sehingga kita dapatkan:

$$\frac{dr}{dt} = r^3 - r$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \rightarrow \theta = t + \theta_0$$

Sekarang kita akan selesaikan persamaan pertama:

$$\frac{dr}{dt} = r^3 - r$$
$$dt = \frac{1}{r^3 - r}\,dr$$

$$\frac{1}{r^3 - r} = \frac{1}{r(r^2 - 1)} = \frac{1}{r(r+1)(r-1)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r-1}$$

$$1 = A(r^2 - 1) + B(r^2 - r) + C(r^2 + r)$$
$$1 = (A + B + C)r^2 + (-B + C)r - A$$

$$A + B + C = 0$$
$$-B + C = 0$$
$$-A = 1$$

Sehingga akan kita dapatkan: $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$

$$dt = \frac{1}{r^3 - r}\,dr$$

$$\int dt = \int \frac{-1}{r} + \frac{\frac{1}{2}}{r+1} + \frac{\frac{1}{2}}{r-1}\,dr$$

$$t + C_0 = -\ln|r| + \frac{1}{2}\ln|r+1| + \frac{1}{2}\ln|r-1|$$

$$t + C_0 = \ln|r|^{-1} + \ln|r^2 - 1|^{\frac{1}{2}}$$

$$t + C_0 = \ln\left|\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\right|$$

$$e^{t+C_0} = \frac{\sqrt{r^2-1}}{r}$$

$$(C_1 e^t)^2 = \left(\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\right)^2$$

$$Ce^{2t} = \frac{r^2-1}{r^2}$$

$$Ce^{2t} = 1 - \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = 1 - Ce^{2t}$$

$$r^2 = \frac{1}{1 - Ce^{2t}}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{1 - Ce^{2t}}}$$

∴ Solusi dari sistem tersebut dalam bentuk koordinat polar adalah:

$$r = \sqrt{\frac{1}{1 - Ce^{2t}}} \text{ dan } \theta = t + \theta_0$$

b. Perhatikan:

$$\lim_{t\to\infty} r = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 - Ce^{2t}}} = 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} r = \lim_{t\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{1 - Ce^{2t}}} = 1$$

Berdasarkan kedua ini, dapat disimpulkan bahwa limit cyclenya adalah $r = 1$ dan tidak stabil.

$\therefore$ Limit Cycle dari sistem persamaan tersebut tidak stabil