Perumuman Edge Irregularity Strength pada $m \times n \times l$ Grid Graphs

Abyoso Hapsoro Nurhadi

Andry Wijaya

Eunike Setiawan

Rabiyatul Adawiyah Haserra

Abstrak

Edge irregularity strength dari sebuah graf sederhana G, dinotasikan es(G), didefinisikan sebagai nilai minimum k sedemikian sehingga G memiliki edge irregular k-labeling. Pelabelan simpul $\phi: V(G) \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ disebut dengan vertex k-labeling untuk G. Didefinisikan $w_\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$. Jika semua $w_\phi(xy)$ yang diperoleh saling berbeda, maka ϕ merupakan memiliki edge irregular k-labeling pada G.

Graf yang akan diteliti adalah $P_n \square P_m \square P_l$ dengan $n, m, l \geq 2$. Untuk $n, m \geq 2$ dan $l = 2$ sudah pernah diselesaikan. Pada penelitian ini, kami mencoba untuk menggeneralisasi untuk semua kasus l.

Definisi - 1

- Suatu graf $G = G(V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan simpul yang tak kosong dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul yang disebut busur.
- Graf yang tidak memuat gelang ataupun busur ganda disebut sebagai **graf sederhana** (*simple graph*)
- Suatu graf G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika terdapat suatu lintasan yang menghubungkan setiap pasang simpul di G.
- Banyak busur yang hadir pada suatu simpul v disebut sebagai **derajat** (*degree*) dari simpul v (ditulis $d(v)$)

Definisi - 2

- **Derajat terbesar** dinyatakan sebagai $\Delta(G)$
- Suatu graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua, kecuali dua simpul ujung yang berderajat satu disebut sebagai **graf lintasan** (*path graph*)**.** Graf lintasan dengan n simpul dinyatakan sebagai P_n.
- **Penandaan** (*labeling*) pada suatu graf G adalah pemetaan satu-satu dari himpunan simpul G ke himpunan bilangan asli.
- **Hasil kali Cartesian** (*Cartesian product*) dari graf G dan graf H, yang ditulis $G\square H$ atau $G \times H$, adalah graf dengan himpunan simpul $V(G) \times V(H)$ di mana simpul (u, v) bertetangga dengan simpul (u', v') jika dan hanya jika $u = u'$ dan $vv' \in E(H)$ atau $v = v'$ dan $uu' \in E(G)$

Teorema 1

Misal $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dengan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$. Maka:

$$es(G) \geq \max\left\{\left\lceil\frac{|E(G)| + 1}{2}\right\rceil, \Delta(G)\right\}$$

(Ahmad, A., Al-Mushayt, O. dan Baca, M.)

$m \times n \times l$ grid graph

- Pertimbangkan $P_n \square P_m \square P_l$ untuk $n, m, l \geq 2$.
- Ketika kita gambarkan, maka kita akan memeroleh $m \times n \times l$ grid graph.

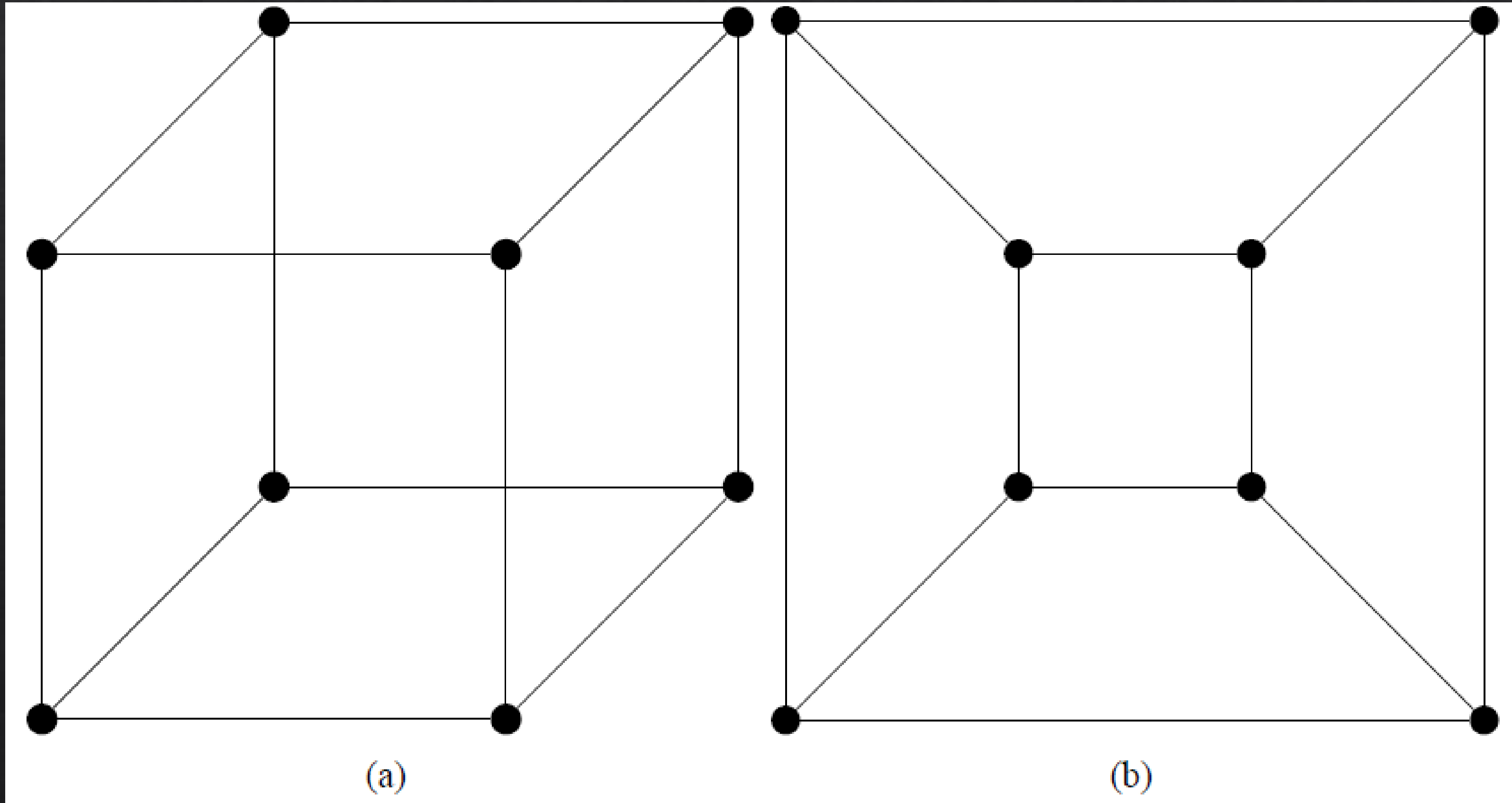


Figure 4: (a) Cubical Graph $Q_3 = P_2 \square P_2 \square P_2$, (b) The same simpler-drawn graph

Teorema 2

Misal $G = P_n \square P_m \square P_2$ dengan $m, n \geq 2$. Maka

$$es(G) = \left\lceil \frac{5mn - 2m - 2n + 1}{2} \right\rceil$$

(Tarawneh, I., Hasni, R., dan Ahmad, A.)

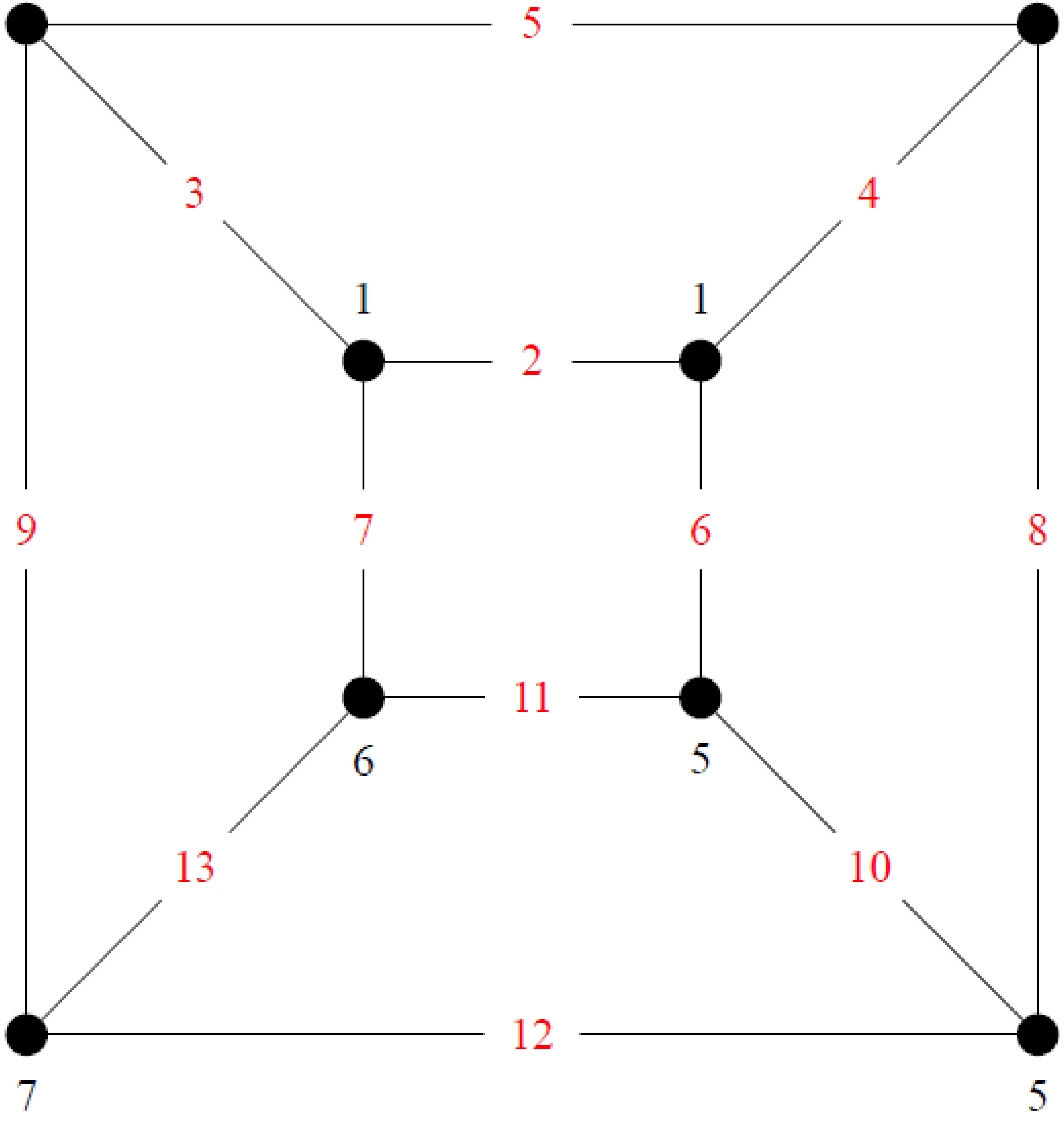


Figure 5: Edge Irregular 7-labeling of $P_2 \Box P_2 \Box P_2$

Masalah:

Menentukan es($P_n \square P_m \square P_l$) untuk $m, n \geq 2$ dan $l \geq 3$

Teorema 3

Misal $G = P_n \square P_m \square P_3$ dengan $m, n \geq 3$. Maka

$$es(G) \geq \left\lceil \frac{8mn - 2m - 2n + 1}{2} \right\rceil$$

Bukti

- Misal $m, n \geq 3$ dan $G = P_n \square P_m \square P_3$.
- Dengan mengambil sembarang simpul dalam, diperoleh $\Delta(G) = 6$.
- $|E(G)| = 3\big(n(m-1) + m(n-1)\big) + 2mn = 8mn - 3m - 3n$.
- Berdasarkan Teorema 1,

$$es(G) \geq \max\left\{\left\lceil \frac{|E(G)| + 1}{2} \right\rceil, \Delta(G)\right\} = \max\left\{\left\lceil \frac{8mn - 3m - 3n + 1}{2} \right\rceil, \Delta(G)\right\}$$

- Saat $m = n = 3$, $\left\lceil \frac{8mn-3m-3n+1}{2} \right\rceil = 28 > \Delta(G)$. Maka:

$$es(G) \geq \left\lceil \frac{8mn - 3m - 3n + 1}{2} \right\rceil$$

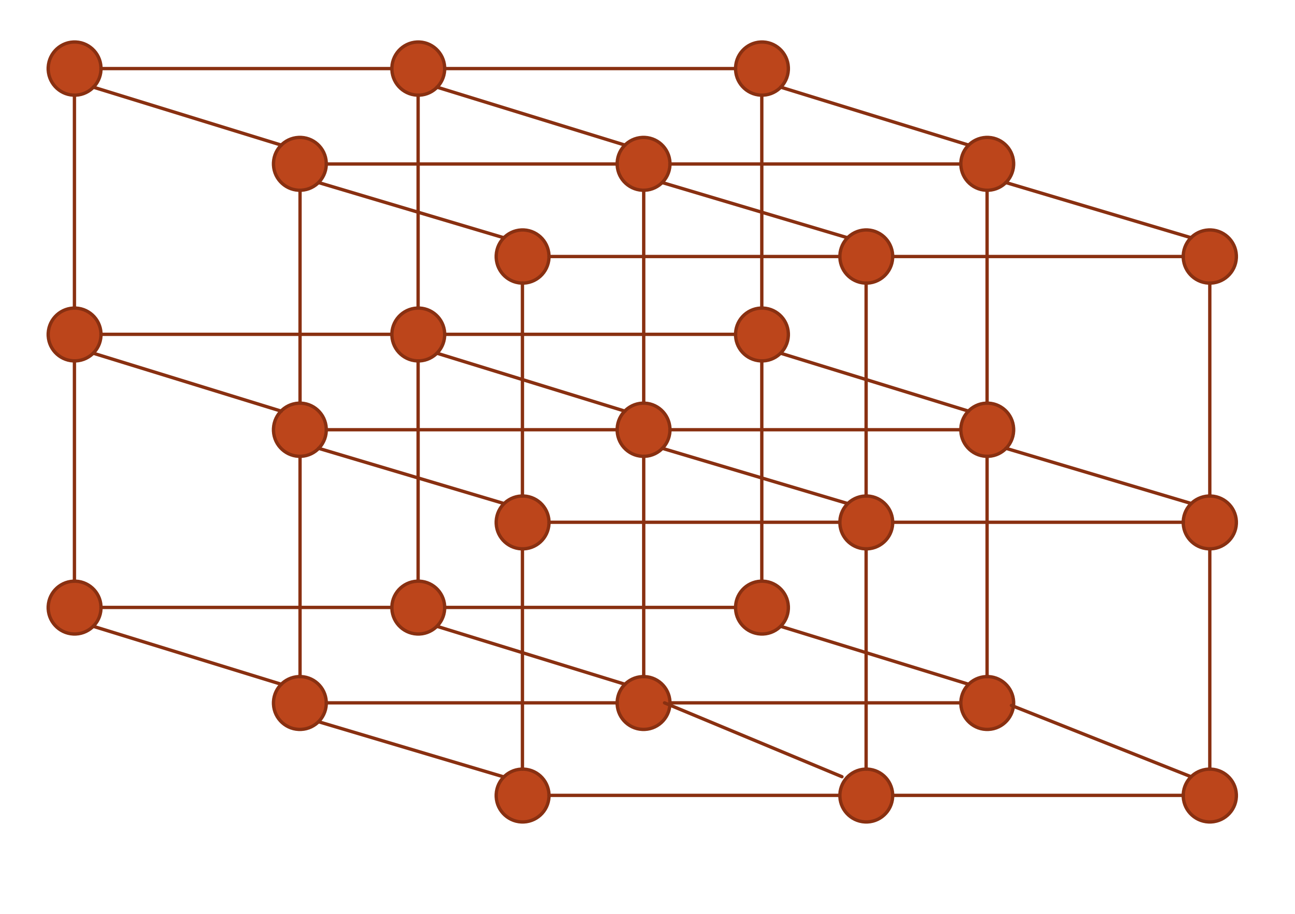
Konjektur 1

Misal $G = P_n \square P_m \square P_3$ dengan $m, n \geq 3$. Maka

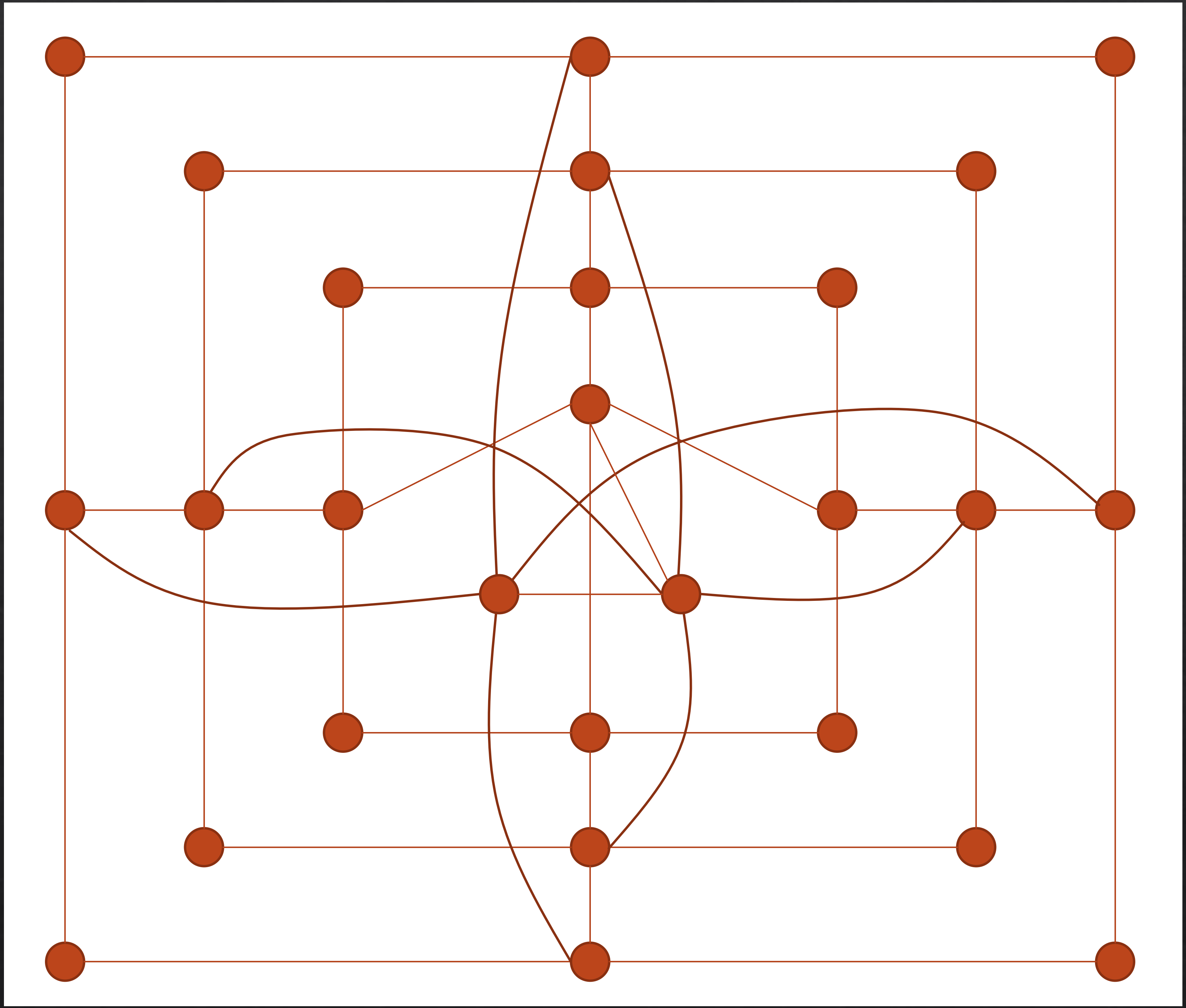
$$es(G) = \left\lceil \frac{8mn - 2m - 2n + 1}{2} \right\rceil$$

Pelabelan $P_3 \square P_3 \square P_3$ - 1

- Pertama, akan digambarkan $P_3 \square P_3 \square P_3$ dan bentuk lebih simpelnya.



Pelabelan $P_3 \square P_3 \square P_3$ - 2

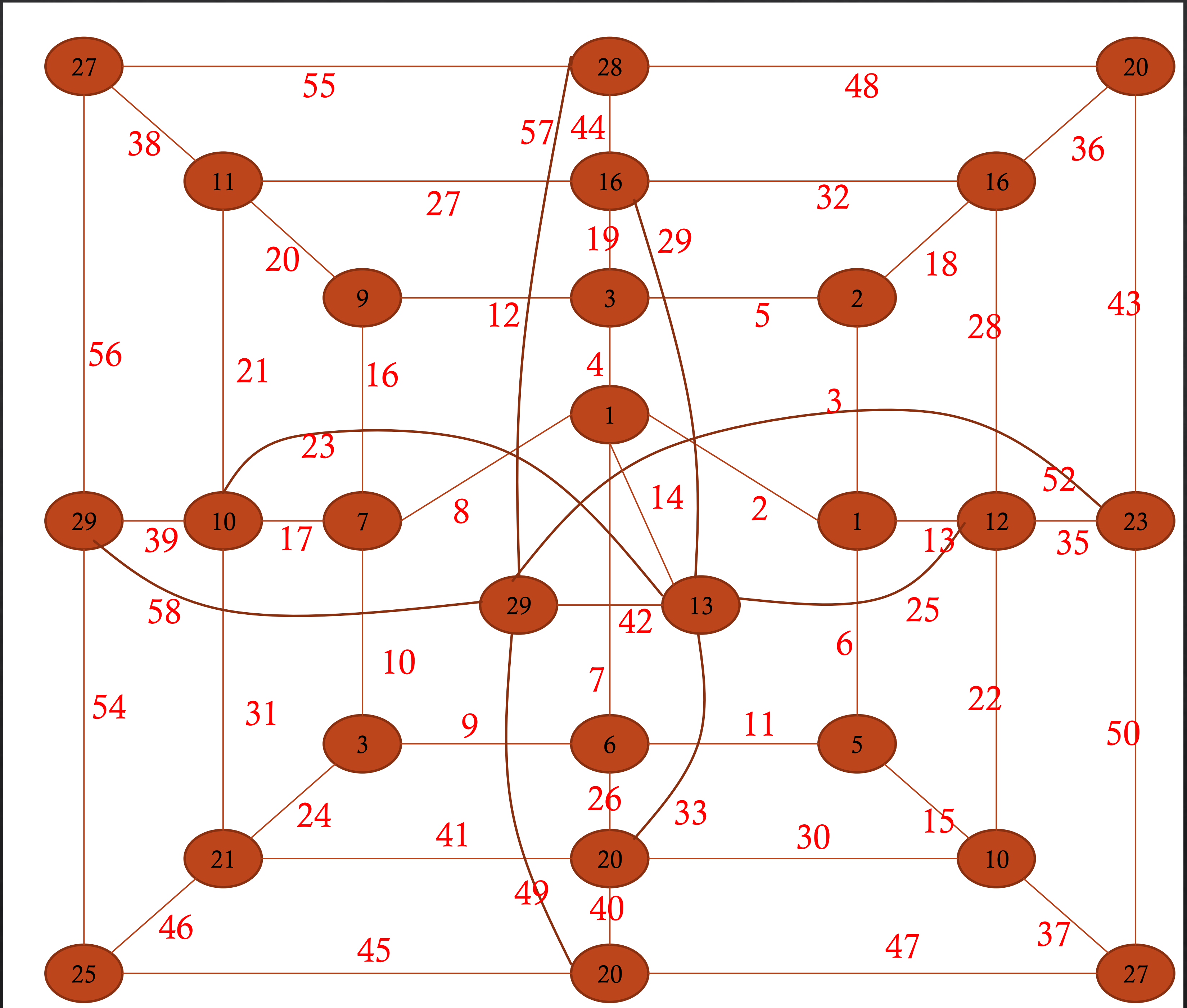


Pelabelan $P_3 \square P_3 \square P_3$ - 3

- Menurut Teorema 3, $es(P_3 \square P_3 \square P_3) \geq 28$.
- Menurut Konjektur 1, $es(P_3 \square P_3 \square P_3) = 28$.
- Namun, kami baru berhasil melakukan edge irregular 29-labeling.
- Artinya, dapat disimpulkan bahwa:

$$28 \leq es(P_3 \square P_3 \square P_3) \leq 29$$

Pelabelan $P_3 \square P_3 \square P_3$ - 4



Masalah:
Menentukan es($P_n \square P_m \square P_l$) untuk $m, n \geq 2$ dan $l \geq 3$

- Dengan ide yang sama, batas bawah dapat digeneralisasi untuk $l \geq 4$ bersama dengan $l = 3$ yang sudah ditemukan.

Teorema 4

Misal $G = P_n \square P_m \square P_l$ dengan $m, n \geq l$ dan $l \geq 3$. Maka

$$es(G) \geq \left\lceil \frac{3lmn - mn - lm - ln\ + 1}{2} \right\rceil$$

Bukti-1

- Perhatikan bahwa untuk graf $G\Box H$, simpul (u, v) bertetangga dengan simpul (u', v') jika dan hanya jika $u = u'$ dan $vv' \in E(H)$ atau $v = v'$ dan $uu' \in E(G)$. Sehingga
- Untuk graf P_n, P_m, P_l jelas bahwa $\Delta = 2$ untuk $n, m, l \geq 3$.
- Operasi $P_n\Box P_m$ akan menyebabkan $\Delta = 2 + 2 = 4$ karena setiap derajat dari sebuah simpul akan bertambah maksimal 2.
- Dengan cara yang sama, $P_n\Box P_m\Box P_l$ akan menyebabkan

$$\Delta = 4 + 2 = 6.$$

Bukti - 2

- Misal $G = P_n \square P_m \square P_l$ dengan $m, n \geq l$ dan $l \geq 3$
- Perhatikan bahwa $|E(G)| = 3lmn - mn - lm - ln$
- Maka menurut teorema 1,

$$es(G) \geq \max\left\{\left\lceil \frac{|E(G)| + 1}{2} \right\rceil, \Delta(G)\right\}$$

$$= \max\left\{\left\lceil \frac{3lmn - mn - lm - ln \ + 1}{2} \right\rceil, 6\right\}$$

Bukti – 3

- Jelas bahwa $\left\lceil\frac{3lmn-mn-lm-ln\ +1}{2}\right\rceil$ mencapai minimum saat $m = n = l = 3$ untuk $m, n, l \geq 3$
- Akibatnya diperoleh:

$$\left\lceil\frac{3lmn - mn - lm - ln\ + 1}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{81 - 9 - 9 - 9 + 1}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{55}{2}\right\rceil = 28 \geq 6$$

- Maka:

$$es(G) \geq \left\lceil\frac{3lmn - mn - lm - ln\ + 1}{2}\right\rceil$$

Konjektur 2

Misal $G = P_n \square P_m \square P_l$ dengan $m, n, l \geq 2$.

Misal $a \coloneqq \min\{m, n, l\}$, $b \coloneqq \mathrm{mid}\{m, n, l\}$, $c \coloneqq \max\{m, n, l\}$

$$es(G) = \left\lceil \frac{3abc - ab - bc - ca + 1}{2} \right\rceil$$

Akibat

- Dengan Konjektur 2, dapat diperoleh Teorema 2 dan Konjektur 1.

Kesimpulan

Misal $G = P_n \Box P_m \Box P_l$. Maka:

1. Untuk $m, n \geq 3$ dan $l = 3$ diperoleh $es(G) \geq \left\lceil \frac{8mn-3m-3n+1}{2} \right\rceil$
2. Untuk $m, n, l = 3$ diperoleh $28 \leq es(G) \leq 29$
3. Untuk $m, n \geq l$ dan $l = 3$ diperoleh $es(G) \geq \left\lceil \frac{3lmn-mn-lm-ln+1}{2} \right\rceil$

Daftar Pustaka

1. Ahmad, A., Al-Mushayt, O. dan Baca, M. (2014). On edge irregular strength of graphs. Appl. Math. Comput. 243, 607-610.

2. Gallian, J. A. (2017). A Dynamic Survey of Graph Labeling. The Electronic Journal of Combinatorics, 1-432.

3. Sabidussi, G. (1959). Graph Multiplication. Mathematische Zeitschrift, Volume 72, pp 446-457.

4. Sugeng, K. A., Slamet, S., dan Silaban, D. R. (2017). Teori Graf dan Aplikasinya. Departemen Matematika Universitas Indonesia.

5. Tarawneh, I., Hasni, R., dan Ahmad, A. (2018). On the edge irregularity strength of grid graphs. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics.

6. Weisstein, E. W. Grid Graph. MathWorld. Diakses 1 Januari 2019.