Xyba Project

Analisis 2

Pembahasan UTS Susulan 2014

1. This document is version: 0.9.6
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people
2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so
3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016
4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me
5. Last Updated: 01/08/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Buktikan bahwa fungsi $f(x) = \ln(1 + x^2)$ kontinu seragam pada $[0, \infty)$.

2. Misalkan f dan g kontinu pada $[a, b]$, terturunkan pada (a, b) dan $f(a) = f(b) = 0$. Tunjukkan terdapat $x_0 \in (a, b) \ni g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

3. Untuk $x > 0$, buktikan ketaksamaan berikut:
$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Jawaban

1. Buktikan bahwa fungsi $f(x) = \ln(1 + x^2)$ kontinu seragam pada $[0, \infty)$.

Jawab:
Akan dibuktikan $f(x) \coloneqq \ln(1 + x^2)$ kontinu seragam pada $[0, \infty)$ dengan membuktikan bahwa f adalah sebuah fungsi Lipschitz.

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Perhatikan bahwa untuk sembarang $x, u \in [0, \infty)$, dengan $x \neq u$, karena $f(x)$ adalah fungsi monoton naik, maka berdasarkan Mean Value Theorem,

$$\exists c \in (\min\{x, u\}, \max\{x, u\}) \ni f'(c) = \left|\frac{f(x) - f(u)}{x - u}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x) - f(u)}{x - u}\right| = \frac{2c}{1 + c^2}$$

Perhatikan:

$$(c - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2c \leq c^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{2c}{1 + c^2} \leq 1$$

Sehingga kita bisa pilih $K \geq \max\left\{\frac{2c}{1 + c^2}\right\} = 1$, maka kita akan peroleh bahwa:

$$\exists K \geq 1 \ni \left|\frac{f(x) - f(u)}{x - u}\right| \leq K, \forall x, u \in [0, \infty), x \neq u$$

Ini memenuhi Definisi 5.4.4 bahwa f adalah fungsi Lipschitz.
Maka berdasarkan Teorema 5.4.5, maka f kontinu seragam pada $[0, \infty)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa fungsi $f(x) \coloneqq \ln(1 + x^2)$ kontinu seragam pada $[0, \infty)$.

2. Misalkan f dan g kontinu pada $[a,b]$, terturunkan pada (a,b) dan $f(a) = f(b) = 0$. Tunjukkan terdapat $x_0 \in (a,b) \ni g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

Jawab:
Definisikan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai $h(x) \coloneqq e^{g(x)}f(x)$ untuk $x \in [a,b]$.

Karena f, g kontinu pada $[a,b]$ maka h kontinu pada $[a,b]$.
Karena f, g terturunkan pada (a,b) maka h terturunkan pada (a,b).
Karena $f(a) = 0$ dan $f(b) = 0$ maka $h(a) = 0$ dan $h(b) = 0$, sehingga $h(a) = h(b) = 0$.

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$h'(x) = e^{g(x)}g'(x)f(x) + e^{g(x)}f'(x) = e^{g(x)}\big(g'(x)f(x) + f'(x)\big)$$

Karena h kontinu pada $[a,b]$, h terturunkan pada (a,b), dan $h(a) = h(b) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists x_0 \in (a,b) \ni h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{g(x_0)}\big(g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0)\big) = 0$$

Karena $e^{g(x_0)} \neq 0$ untuk sembarang $x_0 \in (a,b)$, maka haruslah $g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

$\therefore$ Tertunjuk bahwa $\exists x_0 \in (a,b) \ni g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

3. Untuk $x > 0$, buktikan ketaksamaan berikut:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Jawab:
Akan dibuktikan ketidaksamaan tersebut menggunakan Teorema Taylor.

Misal $f(x) \coloneqq \sqrt{1+x}, x > -1$ dan $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} & f(x_0) &= f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} & f'(x_0) &= f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= f''(0) = -\frac{1}{4} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & f'''(x_0) &= f'''(0) = \frac{3}{8} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}} & &
\end{aligned}$$

1) Akan dibuktikan bahwa:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x}$$

Karena $x > 0$ dan karena f, f', f'', f''' ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$P_2(x) \coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$R_2(x) \coloneqq \frac{f^{(3)}(c)(x-x_0)^3}{3!} = \frac{\frac{3}{8}(1+c)^{-\frac{5}{2}} \cdot x^3}{6} = \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}}, \qquad c \in (0, x)$$

Perhatikan:

$$\begin{aligned}
0 < c < x &\Leftrightarrow 1 < 1 + c < 1 + x \\
&\Leftrightarrow 1 < (1+c)^{\frac{5}{2}} < (1+x)^{\frac{5}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} < \frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^3}{16(1+x)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16}
\end{aligned}$$

Karena $x > 0$, maka:

$$0 < \frac{x^3}{16(1+x)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16}$$

Sehingga kita peroleh:

$$R_2(x) = \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

Dari Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_2 \coloneqq f - P_2$, maka:

$$f(x) - P_2(x) > 0 \Leftrightarrow P_2(x) < f(x) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x}$$

2) Akan dibuktikan bahwa:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Karena $x > 0$ dan karena $f, f', f'', f''', f^{(4)}$ ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$\begin{aligned} P_2(x) &\coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \end{aligned}$$

$$R_2(x) \coloneqq \frac{f^{(4)}(c)(x-x_0)^4}{4!} = \frac{-\frac{15}{16}(1+c)^{-\frac{7}{2}} \cdot x^4}{24} = \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}}, \qquad c \in (0, x)$$

Perhatikan:

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\Leftrightarrow 1 < 1 + c < 1 + x \\ &\Leftrightarrow 1 < (1+c)^{\frac{7}{2}} < (1+x)^{\frac{7}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^{\frac{7}{2}}} < \frac{1}{(1+c)^{\frac{7}{2}}} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5x^4}{108} < \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}} < \frac{-5x^4}{108(1+x)^{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Karena $x > 0$, maka:

$$\frac{-5x^4}{108} < \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}} < \frac{-5x^4}{108(1+x)^{\frac{7}{2}}} < 0$$

Sehingga kita peroleh:

$$R_2(x) = \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}} < 0$$

Dari Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_2 \coloneqq f - P_2$, maka:

$$f(x) - P_2(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < P_2(x) \Leftrightarrow \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Karena $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x}$ dan $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$, maka diperoleh:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

$\therefore$ Terbukti bahwa untuk $x > 0$, berlaku:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$