Xyba Project

Analisis 2

Pembahasan UAS SP Agustus 2017

1. This document is version: 0.9.19
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 17/08/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Buktikan pernyataan berikut ini:
   Misalkan f dan g terdefinisi pada $[a, b]$, $f(a) = g(a) = 0$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $a < x < b$. Jika f dan g terdiferensiabel di a dan $g'(a) \neq 0$, maka
   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2. Buktikan untuk semua $x > 0$, berlaku:
   $$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x + 1)\ln(x + 1) < x + \frac{x^2}{2}$$

3. Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa $f \in \mathcal{R}[-2,2]$ dimana
   $$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x = -2 \\ -x & ; -2 < x < 0 \\ x - 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ -2 & ; x = 1 \\ 1 & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

4. Gunakan Teorema Dasar Kalkulus 1 untuk menghitung $\int_{-2}^{2} f$ untuk fungsi f pada no.3 di atas.

Jawaban

1. Buktikan pernyataan berikut ini:
   Misalkan f dan g terdefinisi pada $[a, b]$, $f(a) = g(a) = 0$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $a < x < b$.
   Jika f dan g terdiferensiabel di a dan $g'(a) \neq 0$, maka
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Jawab:
Karena $f(a) = g(a) = 0$ dan $g(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, maka untuk $x \in (a, b)$:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

Berdasarkan Teorema 4.2.4, karena $x \in (a, b)$, kita peroleh:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

Karena f, g terturunkan di a dan $g'(a) \neq 0$, maka berdasarkan Definisi 6.1.1, kita simpulkan:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

2. Buktikan untuk semua $x > 0$, berlaku:

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1)\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$$

Jawab:
Akan dibuktikan pertidaksamaan tersebut benar menggunakan Teorema Taylor.

Misal $f(x) \coloneqq (x+1)\ln(x+1)\,, x > -1$ dan $x_0 = 0$

Dengan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) \qquad f(x_0) = f(0) = 0$$
$$f'(x) = \ln(x+1) + 1 \qquad f'(x_0) = f'(0) = 1$$
$$f''(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f''(x_0) = f''(0) = 1$$
$$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

1) Akan dibuktikan bahwa:

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1)\ln(x+1)$$

Karena $x > 0$ dan karena $f, f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}$ ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$P_3(x) \coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$
$$= 0 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$
$$R_3(x) \coloneqq \frac{f^{(4)}(c)(x-x_0)^4}{4!} = \frac{\frac{2}{(c+1)^3} \cdot x^4}{24} = \frac{x^4}{12(c+1)^3}, \qquad c \in (0, x)$$

Karena $x > 0$ dan $c > 0$, maka jelas:

$$R_3(x) = \frac{x^4}{12(c+1)^3} > 0$$

Dari Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_3 \coloneqq f - P_3$, maka:

$$R_3 > 0 \Leftrightarrow f - P_3 > 0 \Leftrightarrow P_3 < f \Leftrightarrow x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1)\ln(x+1)$$

2) Akan dibuktikan bahwa:

$$(x+1)\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$$

Karena $x > 0$ dan karena $f, f', f'', f^{(3)}$ ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$P_2(x) \coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} = 0 + x + \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2}$$

$$R_2(x) \coloneqq \frac{f^{(3)}(c)(x-x_0)^3}{3!} = \frac{-\frac{1}{(c+1)^2} \cdot x^3}{6} = -\frac{x^3}{6(c+1)^2}, \qquad c \in (0, x)$$

Karena $x > 0$ dan $c > 0$, maka jelas:

$$R_2(x) = -\frac{x^3}{6(c+1)^2} < 0$$

Dari Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_2 \coloneqq f - P_2$, maka:

$$R_2 < 0 \Leftrightarrow f - P_2 < 0 \Leftrightarrow f < P_2 \Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$$

Karena $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1)\ln(x+1)$ dan $(x+1)\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$, maka diperoleh:

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1)\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa untuk $x > 0$, berlaku $x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < (x+1)\ln(x+1) < x + \frac{x^2}{2}$

3. Dengan menggunakan definisi limit, buktikan bahwa $f \in \mathcal{R}[-2,2]$ dimana

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x = -2 \\ -x & ; -2 < x < 0 \\ x - 1 & ; 0 \le x < 1 \\ -2 & ; x = 1 \\ 1 & ; 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Jawab:
Akan dibuktikan bahwa $f \in \mathcal{R}[-2,2]$ dengan definisi limit yaitu:

$$\exists L \in \mathbb{R} \ni \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \left\|\dot{\mathcal{P}}\right\| < \delta \Rightarrow \left|S\left(f, \dot{\mathcal{P}}\right) - L\right| < \varepsilon$$

Misal diberikan $\delta > 0$. Kita akan restriksi pemilihan δ kemudian.
Pilih $\dot{\mathcal{P}} \ni \left\|\dot{\mathcal{P}}\right\| < \delta$. Maka untuk sembarang $\dot{\mathcal{P}}_k$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}} \Rightarrow \left\|\dot{\mathcal{P}}_k\right\| < \delta$.

Misal: $\dot{\mathcal{P}}_1$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{1i} = -2$
$\dot{\mathcal{P}}_2$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{2i} \in (-2,0)$
$\dot{\mathcal{P}}_3$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{3i} \in [0,1)$
$\dot{\mathcal{P}}_4$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{4i} = 1$
$\dot{\mathcal{P}}_5$ subpartisi bertanda dari $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t_{5i} \in (1,2]$
sedemikian sehingga $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{P}}_1 \cup \dot{\mathcal{P}}_2 \cup \dot{\mathcal{P}}_3 \cup \dot{\mathcal{P}}_4 \cup \dot{\mathcal{P}}_5$.

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_1$, misal $U_1 = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$ adalah gabungan subinterval di $\dot{\mathcal{P}}_1$.
Akan dibuktikan $\{-2\} \subseteq U_1 \subseteq [-2, -2 + \delta] \ldots (1)$
Jelas bahwa $\{-2\} \subseteq U_1$, maka kita hanya perlu membuktikan bahwa $U_1 \subseteq [-2, -2 + 2\delta]$.
Ambil $u_1 \in U_1$, maka $\exists I_i = [x_{i-1}, x_i]$ di $\dot{\mathcal{P}}_1$ dengan $t_{1i} = -2$ dan $u_1 \in I_i$.
Sehingga kita peroleh $-2 \le u_1 \le x_i$.
Karena $\left\|\dot{\mathcal{P}}_1\right\| < \delta$, maka $x_i - x_{i-1} < \delta \Leftrightarrow x_i < x_{i-1} + \delta$.
Maka $u_1 \le x_i < x_{i-1} + \delta \le -2 + \delta$.
Sehingga kita peroleh $u_1 \in [-2, -2 + \delta]$.
Maka benar bahwa $U_1 \subseteq [-2, -2 + \delta]$.
Karena $\{-2\} \subseteq U_1$ dan $U_1 \subseteq [-2, -2 + \delta]$, maka (1) benar.
Karena $f(t_{1i}) = 2$ untuk setiap tag dari $\dot{\mathcal{P}}_1$ dan karena panjang interval di (1) adalah 0 dan δ secara berurutan. Maka kita peroleh:

$$0 \le S\left(f, \dot{\mathcal{P}}_1\right) \le 2\delta$$

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_2$, definisikan tag dari interval $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ sebagai $t_{2i} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \in I_i$.

Karena: $-2 < x_{i-1} \le x_i < 0$, maka: $-2 < \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) < 0$, sehingga $t_{2i} \in I_i \subseteq [0,2]$, maka:

$$\begin{aligned} S(f, \dot{\mathcal{P}}_2) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} -t_{2i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_{i-1}^2 - x_i^2) = \frac{1}{2}(x_0^2 - x_n^2) = \frac{1}{2}((-2)^2 - (0)^2) \\ &= \frac{1}{2}(4 - 0) = \frac{1}{2}(4) = 2 \end{aligned}$$

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_3$, definisikan tag dari interval $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ sebagai $t_{3i} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-i}) \in I_i$.

Karena: $0 \le x_{i-1} \le x_i < 1$, maka: $0 \le \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) < 1$, sehingga $t_{3i} \in I_i \subseteq [0,1]$, maka:

$$\begin{aligned} S(f, \dot{\mathcal{P}}_3) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{3i})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (t_{3i} - 1)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_{3i}(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i + x_{i-i})(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) - (x_n - x_0) = \frac{1}{2}(1 - 0) - (1 - 0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_4$, misal $U_4 = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$ adalah gabungan subinterval di $\dot{\mathcal{P}}_4$.

Akan dibuktikan $\{1\} \subseteq U_4 \subseteq [1, 1 + \delta]$… (2)

Jelas bahwa $\{1\} \subseteq U_4$, maka kita hanya perlu membuktikan bahwa $U_4 \subseteq [1, 1 + \delta]$.

Ambil $u_4 \in U_4$, maka $\exists I_i = [x_{i-1}, x_i]$ di $\dot{\mathcal{P}}_4$ dengan $t_{4i} = 1$ dan $u_4 \in I_i$.

Sehingga kita peroleh $1 \le u_4 \le x_i$. Karena $\|\dot{\mathcal{P}}_4\| < \delta$, maka $x_i - x_{i-1} < \delta \Leftrightarrow x_i < x_{i-1} + \delta$.

Maka $u_4 \le x_i < x_{i-1} + \delta \le 1 + \delta$.

Sehingga kita peroleh $u_4 \in [1, 1 + \delta]$. Maka benar bahwa $U_4 \subseteq [1, 1 + \delta]$.

Karena $\{1\} \subseteq U_1$ dan $U_1 \subseteq [1, 1 + \delta]$, maka (2) benar.

Karena $f(t_{4i}) = -2$ untuk setiap tag dari $\dot{\mathcal{P}}_4$ dan karena panjang interval di (2) adalah 0 dan δ secara berurutan. Maka kita peroleh:

$$-2\delta \le S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) \le 0$$

Untuk $\dot{\mathcal{P}}_5$, misal $U_5 = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$ adalah gabungan subinterval di $\dot{\mathcal{P}}_5$.

Akan dibuktikan $[1,2-\delta] \subseteq U_5 \subseteq [1,2]$... (3)

1) Akan dibuktikan $[1,2-\delta] \subseteq U_5$.
   Ambil $v_5 \in [1,2-\delta]$, maka $\exists I_i = [x_{i-1}, x_i]$ di $\dot{\mathcal{P}}_5$ dengan $t_{5i} \in (1,2]$ dan $v_5 \in I_i$.
   Sehingga kita peroleh $x_{i-1} \leq v_5 \leq 2-\delta$.
   Karena $\|\dot{\mathcal{P}}_5\| < \delta$, maka $x_i - x_{i-1} < \delta \Leftrightarrow x_i < x_{i-1} + \delta$.
   Maka $x_i < x_{i-1} + \delta \leq 2 - \delta + \delta = 2$.
   Maka tag $t_{5i} \in I_i$ memenuhi $t_{5i} < 2$ dan kita simpulkan $v_5 \in U_5$.
   Maka bagian kiri dari (3), yaitu $[1,2-\delta] \subseteq U_5$ benar.
2) Akan dibuktikan $U_5 \subseteq [1,2+\delta]$.
   Ambil $u_5 \in U_5$, maka $\exists I_i = [x_{i-1}, x_i]$ di $\dot{\mathcal{P}}_5$ dengan $t_{5i} \in (1,2]$ dan $u_5 \in I_i$.
   Sehingga kita peroleh $1 \leq u_5 \leq x_i$.
   Karena $\|\dot{\mathcal{P}}_5\| < \delta$, maka $x_i - x_{i-1} < \delta \Leftrightarrow x_i < x_{i-1} + \delta$.
   Maka $u_5 \leq x_i < x_{i-1} + \delta \leq 2 + \delta$.
   Sehingga kita peroleh $u_5 \in [1,2+\delta]$.
   Maka bagian kanan dari (3), yaitu $U_5 \subseteq [1,2+\delta]$ benar.

Karena $f(t_{5i}) = 1$ untuk setiap tag dari $\dot{\mathcal{P}}_5$ dan karena panjang interval di (3) adalah $1-\delta$ dan $1+\delta$ secara berurutan. Maka kita peroleh:

$$1 - \delta \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}_5) \leq 1 + \delta$$

Karena $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{P}}_1 \cup \dot{\mathcal{P}}_2 \cup \dot{\mathcal{P}}_3 \cup \dot{\mathcal{P}}_4 \cup \dot{\mathcal{P}}_5$ dan karena $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{P}}_2, \dot{\mathcal{P}}_3, \dot{\mathcal{P}}_4, \dot{\mathcal{P}}_5$ dibangun atas tag-tag yang tidak beririsan (tidak ada tag dari $\dot{\mathcal{P}}_i$ yang sama dengan tag dari $\dot{\mathcal{P}}_j$ untuk $i \neq j$), kita peroleh:

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_2) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_3) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_4) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_5)$$

Karena $0 \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) \leq 2\delta$, $S(f, \dot{\mathcal{P}}_2) = 2$, $S(f, \dot{\mathcal{P}}_3) = -\frac{1}{2}$, $-2\delta \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) \leq 0$, dan $1 - \delta \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) \leq 1 + \delta$, maka kita peroleh:

$$\frac{5}{2} - 3\delta \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}) \leq \frac{5}{2} + 3\delta \Leftrightarrow \left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \frac{5}{2}\right| \leq 3\delta$$

Maka kita bisa pilih $L = \frac{5}{2} \in \mathbb{R}$ dan δ yang memenuhi $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$, dan kita akan peroleh:

$$\exists L = \frac{5}{2} \in \mathbb{R} \ni \forall \varepsilon > 0, \exists \delta : 0 < \delta < \frac{\varepsilon}{3} \ni \|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta \Rightarrow \left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon$$

Berdasarkan Definisi 7.1.1, kita simpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}[-2,2]$ dan $\int_{-2}^{2} f = \frac{5}{2}$

∴ Terbukti dengan definisi limit bahwa $f \in \mathcal{R}[-2,2]$.

4. Gunakan Teorema Dasar Kalkulus 1 untuk menghitung $\int_{-2}^{2} f$ untuk fungsi f pada no.3 di atas, yaitu:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & ; x=-2 \\ -x & ; -2<x<0 \\ x-1 & ; 0\leq x<1 \\ -2 & ; x=1 \\ 1 & ; 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Jawab:
Definisikan $F:[-2,2]\to\mathbb{R}$ sebagai:

$$F(x)=\begin{cases} 2x+C_1 & ; x=-2 \\ -\frac{1}{2}x^2+C_2 & ; -2<x<0 \\ \dots(1)\dots & ; x=0 \\ \frac{1}{2}x^2-x+C_3 & ; 0<x<1 \\ -2x+C_4 & ; x=1 \\ x+C_5 & ; 1<x\leq 2 \end{cases}$$

dengan catatan ...(1)... akan kita isi kemudian.

Karena berlaku di satu titik, maka:
Untuk $x=-2$, $F(x)=2x+C_1=-4+C_1$ dan untuk $x=1$, $F(x)=-2x+C_4=-2+C_4$.

Agar F kontinu di $[-2,2]$, maka kita selidiki titik-titik yang mungkin diskontinu.
WLOG misal $C_1=0$.

1) Pada $x=-2$

   Perhatikan bahwa:

   $F(-2)=-4+C_1=-4+0=-4$

   $\lim\limits_{x\to-2^+} F(x)=-\frac{1}{2}(-2)^2+C_2=-2+C_2$

   Agar F kontinu pada $x=-2$, maka haruslah $\lim\limits_{x\to-2^+} F(x)=F(-2)\Leftrightarrow -2+C_2=-4$

   Sehingga kita peroleh $C_2=-2$

2) Pada $x=0$

   Perhatikan bahwa:

   $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=-\frac{1}{2}(0)+C_2=0-2=-2$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\frac{1}{2}(0^2)-0+C_3=0-0+C_3=C_3$

   Agar F kontinu pada $x=0$, maka haruslah $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)\Leftrightarrow -2=C_3$

   Sehingga kita peroleh $C_3=-2$

   Kita isi ...(1)... dengan -2 agar F kontinu pada $x=0$.

3) Pada $x = 1$

Perhatikan bahwa:

$F(1) = -2 + C_4$

$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{1}{2}(1^2) - 1 + C_3 = \frac{1}{2} - 1 - 2 = -\frac{5}{2}$

$\lim_{x\to 1^+} F(x) = 1 + C_5$

Agar F kontinu pada $x = 1$, maka haruslah $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x) = F(1)$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} \quad = \quad 1 + C_5 \quad = -2 + C_4$$

Sehingga kita peroleh $C_4 = -\frac{1}{2}$ dan $C_5 = -\frac{7}{2}$

Sehingga fungsi lengkap yang kita definisikan adalah:

$$F(x) \coloneqq \begin{cases} -4 & ; x = -2 \\ -\dfrac{1}{2}x^2 - 2 & ; -2 < x < 0 \\ -2 & ; x = 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - x - 2 & ; 0 < x < 1 \\ -\dfrac{5}{2} & ; x = 1 \\ x - \dfrac{7}{2} & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Atau kita dapat interpretasikan sebagai:

$$FF(x) \coloneqq \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 - 2 & ; -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - x - 2 & ; 0 \leq x < 1 \\ x - \dfrac{7}{2} & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Dan fungsi F maupun FF adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada $[-2,2]$.

Untuk F, pilih sembarang himpunan berhingga E yang memenuhi $\{-2,0,1\} \subseteq E \subset [-2,2]$ dan

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [-2,2] \backslash E$$

Untuk FF, pilih sembarang himpunan berhingga $EE \subseteq [-2,2]$ dan

$$FF'(x) = f(x), \forall x \in [-2,2] \backslash EE$$

Karena FF kontinu pada $[-2,2]$, $FF'(x) = f(x), \forall x \in [-2,2] \backslash EE$, dan dari nomor 3, kita tahu bahwa $f \in \mathcal{R}[-2,2]$, maka berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus Pertama 7.3.1, maka:

$$\int_{-2}^{2} f = FF(2) - FF(-2) = \left(2 - \frac{7}{2}\right) - (-2 - 2) = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ Dengan Teorema Dasar Kalkulus 1, kita peroleh $\int_{-2}^{2} f = \frac{5}{2}$