Xyba Project

Pengantar Teori Probabilitas

Rangkuman UAS 2018

1. This document is version: 0.7.2
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 25/05/2018

Thank you for your cooperation >v<

2.1. Fungsi dan Fungsi Invers

A. Pemetaan

Misal Ω adalah ruang sampel dengan titik-titik sampel ω. Terkadang kita tertarik dengan nilai $X(\omega)$ yang terasosiasi dengan ω, dan bukan ω sendiri. $X(\omega)$ mungkin dapat diobservasi namun ω belum tentu.

Sebuah fungsi X pada ruang Ω menuju ruang Ω' mengasosiasikan tiap titik dari Ω dengan titik dari Ω'. Ω dinamakan domain dari X dan Ω' dinamakan range dari X.

Himpunan $\Omega'' = \{X(\omega): \omega \in \Omega\}$ yang merupakan subset dari Ω', dinamakan strict range dari X.

Jika $\Omega' = \Omega''$, kita katakan X adalah mapping dari Ω onto Ω'.
Jika tidak, maka kita katakan X adalah mapping dari Ω into Ω'.

Kita hanya konsiderasikan fungsi bernilai satu saja. Sehingga, $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow X(\omega_1) = X(\omega_2)$. Fungsi seperti $X(\omega) = \pm\sqrt{\omega}, \omega \in \mathbb{R}$ tidak kita konsideransikan.

Secara umum, $X(\omega_1) = X(\omega_2) \nRightarrow \omega_1 = \omega_2$ karena mungkin terdapat lebih dari satu ω yang dipetakan ke peta ω' yang sama.

Jika $X(\omega_1) = X(\omega_2) \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$ untuk sembarang $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, maka X dikatakan sebuah fungsi satu-satu.

e.g.:
Misal $\Omega = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}, \Omega' = \{0,1,2,3, \dots\}$, dan $\Omega'' = \{0,1,4,9, \dots\}$.
Kita definisikan sebuah fungsi X sebagai $X(\omega) = \omega^2$.
Apabila $X: \Omega \to \Omega'$, maka X adalah fungsi into.
Apabila $X: \Omega \to \Omega''$, maka X adalah fungsi onto.
Apabila $X: \Omega' \to \Omega''$, maka X adalah fungsi satu-satu dan onto.

B. Fungsi Titik dan Fungsi Himpunan

Jika ruang rangenya adalah garis real $\mathbb{R}$ atau subsetnya, fungsinya dikatakan sebagai fungsi numerikal atau bernilai real. Artinya kita mempunyai pemetaan Ω ke $\mathbb{R}$.

Apabila argumen-argumen dari X adalah titik-titik dari ruang Ω, kita punya sebuah fungsi titik.

Apabila argument-argumen dari sebuah fungsi adalah himpunan dari suatu kelas, maka kita akan punya fungsi himpunan.

e.g.:
Misal $X: \Omega \to \mathbb{R}$ dan $X(\omega) = \omega + 2$.
$X(2) = 4$ dikatakan fungsi titik dan $X(\{1,3\}) = \{3,5\}$ dikatakan fungsi himpunan.

Definisikan μ sebagai panjang interval.
Sehingga kita akan punya:

$$\mu\big((a,b)\big) = b - a \text{ dan } \mu\big((a,b) \cup (c,d)\big) = (b-a) + (d-c)$$

dan sebagainya.

C. Perbandingan Himpunan

Misal X dan Y adalah fungsi bernilai real pada Ω.

$$X = Y \Leftrightarrow X(\omega) = Y(\omega), \forall\omega \in \Omega$$
$$X < Y \Leftrightarrow X(\omega) < Y(\omega), \forall\omega \in \Omega$$
$$X > Y \Leftrightarrow X(\omega) > Y(\omega), \forall\omega \in \Omega$$

Fungsi konstan $X(\omega) = c, \forall\omega \in \Omega$ dikatakan sebagai fungsi degenerate.

D. Fungsi Invers

Himpunan dari semua titik $\omega \in \Omega$ dimana peta dari X adalah ω' adalah peta invers dari $\{\omega'\}$, yang dinotasikan sebagai $X^{-1}(\{\omega'\})$. Sehingga,

$$X^{-1}(\{\omega'\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = \omega'\}$$

Secara umum, misal $B' \subset \Omega'$. Himpunan dari semua titik dari Ω dimana $X(\omega) \in B'$ dinamakan peta invers dari B' di bawah X, dinotasikan $X^{-1}(B')$:

$$X^{-1}(B') = \{\omega : X(\omega) \in B'\}$$

Dengan setiap fungsi titik X, kita asosiasikan fungsi himpunan X^{-1}, dimana domainnya adalah sebuah kelas $\mathcal{B}'$ dari subset-subset dari Ω' dimana rangenya adalah kelas $\mathcal{B}$, adalah subset-subset dari Ω. X^{-1} dikatakan fungsi invers dari X. Kita notasikan:

$$X(B) = \{X(\omega) : \omega \in B\}, B \subset \Omega$$
$$X^{-1}(\mathcal{B}') = \{X^{-1}(B') : B' \in \mathcal{B}'\}$$

Sehingga kita akan punya:

$$X^{-1}(\Omega') = \{\omega : X(\omega) \in \Omega'\} = \Omega$$
$$X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

e.g.:
Misal $X(\omega) = \omega^2$ dan $B' = (1,2)$
Apabila $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, maka $X^{-1}(B') = \big(-\sqrt{2}, -1\big) \cup \big(1, \sqrt{2}\big)$
Apabila $X: (0,\infty) \to (0,\infty)$, maka $X^{-1}(B') = \big(1, \sqrt{2}\big)$

E. Fungsi Indikator

Definisikan fungsi bernilai real I_A atau $I(A)$ yang didefinisikan pada Ω sebagai fungsi indikator atau fungsi karakteristik dari A sebagai berikut:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$$

Strict range dari I_A adalah $I_A(\Omega) = \{I_A(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{0,1\}$.

Jika $B \subset \mathbb{R}$, maka:

$$I_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jika } B \text{ tidak mengandung 0 dan 1} \\ A, & \text{jika } B \text{ hanya mengandung 1} \\ A^c, & \text{jika } B \text{ hanya mengandung 0} \\ \Omega, & \text{jika } B \text{ mengandung kedua 0 dan 1} \end{cases}$$

Sehingga, $I_A^{-1}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(A)$.

Kita juga dapat definisikan:

$$cI_A(\omega) = \begin{cases} c, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(cI_A^{-1})(\mathcal{B}) = I_A^{-1}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(A)$

Lebih lanjut, kita bisa definisikan:

$$I_\Omega(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \Omega \\ 0, & \omega \in \emptyset \end{cases}$$

Jika $X(\omega) = c, \forall \omega \in \Omega$, maka $X = cI_\Omega$.
Pada kasus ini, kita akan punya $X^{-1}(B') = \emptyset$ atau Ω, apa pun $B' \subset \mathbb{R}$.

Sehingga:

$$cI_\Omega^{-1}(\omega) = I_\Omega^{-1}(\omega) = \{\emptyset, \Omega\}$$

F. Sifat-sifat Fungsi Indikator

$A \subset B \Leftrightarrow I_A \leq I_B$ $A = B \Leftrightarrow I_A = I_B$
$I_A = I_A^2 = \cdots = I_A^n$ $I_\Omega = 1$
$I_{A^c} = 1 - I_A$ $I_{B-A} = I_B - I_A$

$$I_{AB} = I_A I_B$$ $$I_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} I_{A_i} = \min\{I_{A_1}, \dots, I_{A_n}\}$$
$$\begin{aligned} I_{A\cup B} &= I_A + I_B - I_A I_B = \max\{I_A, I_B\} \\ I_{A+B} &= I_A + I_B \\ I_{\bigcup_i A_i} &= \sum_i I_{A_i} - \sum_{i\neq j} I_{A_i} I_{A_j} + \sum_{i\neq j\neq k} I_{A_i} I_{A_j} I_{A_k} - \cdots \\ &= \max\{I_{A_1}, \dots, I_{A_n}\} \end{aligned}$$

G. Lemma 2.1

> **<u>Lemma 2.1</u>**
> Pemetaan Invers mempertahankan semua relasi himpunan.

Bukti:

(i) Misal $B \subset C \subset \Omega'$. Akan ditunjukkan $X^{-1}(B) \subset X^{-1}(\mathcal{C})$.
Perhatikan:

$$X^{-1}(B) = \{\omega: X(\omega) \in B\} \subset \{\omega: X(\omega) \in C\}$$

$\therefore X^{-1}(B) \subset X^{-1}(C)$

(ii) Misal $B_k \subset \Omega'$. Akan ditunjukkan:

$$X^{-1}\left(\bigcap_k B_k\right) = \bigcap_k \left(X^{-1}(B_k)\right)$$

Ambil $\omega \in X^{-1}\left(\bigcap_k B_k\right)$, perhatikan:

$$\begin{aligned} \omega \in X^{-1}\left(\bigcap_k B_k\right) &\Leftrightarrow X(\omega) \in \bigcap_k B_k \\ &\Leftrightarrow X(\omega) \in B_k, \forall k \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in X^{-1}(B_k), \forall k \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcap_k \left(X^{-1}(B_k)\right) \end{aligned}$$

$\therefore X^{-1}\left(\bigcap_k B_k\right) = \bigcap_k \left(X^{-1}(B_k)\right)$

(iii) Misal $B_k \subset \Omega'$. Akan ditunjukkan:

$$X^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) = \bigcup_k \left(X^{-1}(B_k)\right)$$

Ambil $\omega \in X^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right)$, perhatikan:

$$\begin{aligned}
\omega \in X^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) &\Leftrightarrow X(\omega) \in \bigcup_k B_k \\
&\Leftrightarrow X(\omega) \in B_k, \text{untuk beberapa } k \\
&\Leftrightarrow \quad \omega \in X^{-1}(B_k), \text{untuk beberapa } k \\
&\Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcup_k \left(X^{-1}(B_k)\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore X^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) = \bigcup_k \left(X^{-1}(B_k)\right)$$

(iv) Misal $B \subset \Omega'$. Akan ditunjukkan $X^{-1}(B^c) = \left(X^{-1}(B)\right)^c$.
Ambil $\omega \in X^{-1}(B^c)$, perhatikan:

$$\begin{aligned}
\omega \in X^{-1}(B^c) &\Leftrightarrow X(\omega) \in B^c \\
&\Leftrightarrow X(\omega) \notin B \\
&\Leftrightarrow \quad \omega \notin X^{-1}(B) \\
&\Leftrightarrow \quad \omega \in \left(X^{-1}(\omega)\right)^c
\end{aligned}$$

$$\therefore X^{-1}(B^c) = \left(X^{-1}(B)\right)^c$$

H. Corollary Lemma 2.1

Corollary 2.1
Jika $\mathcal{A}$ adalah kelas dari subset-subset dari Ω dan adalah sebuah σ-field, maka kelas $\mathcal{B}$ dari semua himpunan yang peta inversnya tergabung dalam $\mathcal{A}$ juga adalah σ-field.

I. Corollary 2 Lemma 2.1

Corollary 2.2
Jika $\mathcal{C}$ adalah sebuah field (atau σ-field) dari subset-subset dari Ω', maka $X^{-1}(\mathcal{C})$ adalah sebuah field (atau σ-field) dari subset-subset dari Ω. Peta invers dari minimal σ-field dari kelas $\mathcal{C}$ apa pun adalah minimal σ-field dari $X^{-1}(\mathcal{C})$, yakni:

$$\sigma\left(X^{-1}(\mathcal{C})\right) = X^{-1}\left(\sigma(\mathcal{C})\right)$$