Xyba Project

Analisis 2

Persiapan Kuis 2 SP Tahun 2018

1. This document is version: 0.8.5
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 30/07/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

6.1 : The Derivative

1. [Soal Buku Nomor 6.1.2]
   Tunjukkan bahwa $f(x) \coloneqq x^{1/3}, x \in \mathbb{R}$, tidak terturunkan pada $x = 0$.

2. [Soal Buku Nomor 6.1.4/ UTS Maret 2012 Nomor 1]
   Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) \coloneqq x^2$ untuk x rasional dan $f(x) \coloneqq 0$ untuk x irrasional. Tunjukkan bahwa f dapat diturunkan pada $x = 0$ dan tentukan $f'(0)$.

3. [Soal Buku Nomor 6.1.6]
   Misal $n \in \mathbb{N}$ dan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) \coloneqq x^n$ untuk $x \geq 0$ dan $f(x) \coloneqq 0$ untuk $x < 0$. Untuk nilai bagaimanakah dari n yang membuat f' kontinu pada 0? Untuk nilai bagaimanakah dari n yang membuat f' terturunkan pada 0?

4. [Soal Buku Nomor 6.1.7]
   Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terturunkan pada c dan $f(c) = 0$. Tunjukkan bahwa $g(x) \coloneqq |f(x)|$ terturunkan pada c jika dan hanya jika $f'(c) = 0$.

5. [Soal Buku Nomor 6.1.9]
   Buktikan bahwa jika $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi genap dan memiliki turunan pada setiap titik, maka turunannya f' adalah fungsi ganjil. Buktikan juga bahwa jika $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi ganjil yang terturunkan, maka g' adalah fungsi genap.

6. [Soal Buku Nomor 6.1.10]
   Misal $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $g(x) \coloneqq x^2 \sin(1/x^2)$ untuk $x \neq 0$, dan $g(0) \coloneqq 0$. Tunjukkan bahwa g terturunkan untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan juga bahwa turunannya g' tidak terbatas pada interval $[-1,1]$.

7. [Soal Buku Nomor 6.1.12]
   Jika $r > 0$ adalah sebuah bilangan rasional, misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) \coloneqq x^r \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$, dan $f(0) \coloneqq 0$. Tentukan nilai-nilai dari r tersebut dimana $f'(0)$ ada.

8. [Soal Buku Nomor 6.1.13]
   Jika $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terturunkan pada $c \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa:
   $$f'(c) = \lim(n\{f(c + 1/n) - f(c)\})$$
   Namun, tunjukkan dengan contoh bahwa adanya limit dari barisan ini tidak menjamin adanya $f'(c)$.

9. [PR 2 Bu Suarsih Nomor 1]
   Didefinisikan
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$
   a. Tentukan himpunan titik-titik dimana f tidak terturunkan. Beri penjelasan.
   b. Tentukan suatu titik di $\mathbb{R}$ dimana f terturunkan. Buktikan dengan definisi.

6.2 : The Mean Value Theorem

10. [Soal Buku Nomor 6.2.5]
    Misal $a > b > 0$ dan misal $n \in \mathbb{N}$ memenuhi $n \geq 2$. Buktikan bahwa:
$$a^{1/n} - b^{1/n} < (a-b)^{1/n}$$

11. [Soal Buku Nomor 6.2.6]
    Gunakan Mean Value Theorem untuk membuktikan bahwa $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

12. [Soal Buku Nomor 6.2.7/ UTS Maret 2012 Nomor 2]
    Gunakan Mean Value Theorem untuk membuktikan bahwa $(x-1)/x < \ln x < x - 1$ untuk $x > 1$.

13. [Soal Buku Nomor 6.2.9]
    Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) := 2x^4 + x^4 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) := 0$. Tunjukkan bahwa f memiliki absolut minimum pada $x = 0$, namun bahwa turunannya memiliki kedua positif dan negatif di setiap lingkungan dari 0.

14. [Soal Buku Nomor 6.2.10]
    Misal $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $g(x) := x + 2x^2 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $g(0) := 0$. Tunjukkan bahwa $g'(0) = 1$, namun di setiap lingkungan dari 0, turunannya $g'(x)$ memiliki kedua positif dan negatif. Sehingga g tidak monoton di lingkungan apa pun dari 0.

15. [Soal Buku Nomor 6.2.11]
    Berikan sebuah contoh fungsi yang kontinu seragam pada [0,1] yang terturunkan pada (0,1) namun turunannya tidak terbatas pada (0,1).

16. [Soal Latihan Pak Arie Nomor 1/ UTS April 2013 Nomor 4]
    Buktikan jika f kontinu pada $[a, b]$, terturunkan pada (a, b) dan $f(a) = f(b) = 0$, maka untuk sebuah bilangan real α akan terdapat $x_0 \in (a, b) \ni \alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

17. [Soal Latihan Pak Arie Nomor 2/ UTS Susulan 2014 Nomor 2]
Misal f, g kontinu pada $[a, b]$, terturunkan pada (a, b) dan $f(a) = f(b) = 0$. Buktikan terdapat $x_0 \in (a, b) \ni g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

18. [Soal Latihan Pak Arie Nomor 3/ UTS April 2016 Nomor 3]
Misal f kontinu pada $[a, b], a > 0$ dan terturunkan pada (a, b). Buktikan bahwa jika:
$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$$
Maka akan terdapat $x_0 \in (a, b) \ni x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

19. [Soal Latihan Pak Arie Nomor 4]
Misal f, g kontinu pada $[a, b]$, tidak pernah bernilai nol pada $[a, b]$, dan terturunkan pada (a, b). Buktikan jika $f(a)g(b) = f(b)g(a)$, maka:
$$\exists x_0 \in (a, b) \ni \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$$

20. [Soal Latihan Pak Arie Nomor 5]
Misal f terturunkan secara kontinu pada $[a, b]$ dan terturunkan dua kali pada (a, b). Jika $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$, buktikan $\exists x_0 \in (a, b) \ni f''(x_0) = 0$.

21. [Soal Latihan Pak Arie Nomor 6]
Misal f kontinu pada $[0,2]$ dan terturunkan dua kali pada $(0,2)$. Jika $f(0) = 0, f(1) = 1$, dan $f(2) = 2$, buktikan $\exists x_1 \in (0,2) \ni f''(x_1) = 0$.

22. [PR 2 Bu Suarsih Nomor 2/ UTS Susulan 2014 Nomor 1]
Buktikan bahwa fungsi $f(x) \coloneqq \ln(1 + x^2)$ kontinu seragam pada $[0, \infty)$ dengan menggunakan Mean Value Theorem.

23. [PR 2 Bu Suarsih Nomor 3]
Misal f kontinu dan terturunkan pada $[-7,0]$. Misal pula $f(-7) = -3$ dan $f'(x) \leq -2$ untuk setiap $x \in [-7,0]$. Berapakah nilai terbesar yang mungkin bagi $f(0)$.

24. [PR 2 Bu Suarsih Nomor 4]
Misal f terdefinisi di $\mathbb{R}$ dan misal pula $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa f adalah fungsi konstan.

6.3 : Aturan L'Hôpital

25. [Soal Buku Nomor 6.3.1]

    Misal f dan g kontinu pada $[a,b]$, terturunkan pada (a,b), $c \in [a,b]$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $x \in [a,b], x \neq c$. Misal $A \coloneqq \lim_{x\to c} f$ dan $B \coloneqq \lim_{x\to c} g$. Jika $B = 0$ dan jika $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ ada di $\mathbb{R}$, tunjukkan bahwa haruslah $A = 0$.

26. [Soal Buku Nomor 6.3.2]

    Sebagai tambahan dari soal 6.3.1, misal $g(x) > 0$ untuk $x \in [a,b], x \neq c$.
    Jika $A > 0$ dan $B = 0$, buktikan bahwa haruslah $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \infty$.
    Jika $A < 0$ dan $B = 0$, buktikan bahwa haruslah $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = -\infty$.

27. [Soal Buku Nomor 6.3.3]

    Misal $f(x) \coloneqq x^2 \sin(1/x)$ untuk $0 < x \leq 1$, $f(0) \coloneqq 0$, dan $g(x) \coloneqq x^2$ untuk $x \in [0,1]$. Maka kedua f dan g terturunkan di $[0,1]$ dan $g(x) > 0$ untuk $x \neq 0$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$ dan $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ tidak ada.

28. [Soal Buku Nomor 6.3.14]

    Tunjukkan bahwa jika $c > 0$, maka:

    $$\lim_{x\to c} \frac{x^c - c^x}{x^x - c^c} = \frac{1 - \ln c}{1 + \ln c}$$

6.4: Teorema Taylor

29. [Soal Buku Nomor 6.4.4]

    Tunjukkan bahwa jika $x > 0$, maka:

    $$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$$

30. [Soal Buku Nomor 6.4.6]

    Gunakan Teorema Taylor dengan $n = 2$ untuk memeroleh approksimasi akurat untuk $\sqrt{1.2}$ dan $\sqrt{2}$.

31. [Soal Buku Nomor 6.4.7]

    Jika $x > 0$, tunjukkan bahwa:

    $$\left|(1+x)^{1/3} - \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right)\right| \leq (5/81)x^3$$

    Gunakan ketidaksamaan ini untuk mengapproksimasi $\sqrt[3]{1.2}$ dan $\sqrt[3]{2}$.

32. [Soal Buku Nomor 6.4.9]
Jika $g(x) \coloneqq \sin x$, tunjukkan bahwa suku sisa di Teorema Taylor konvergen ke nol saat $n \to \infty$ untuk setiap x_0 dan x yang tetap.

33. [Soal Buku Nomor 6.4.11]
Jika $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan bahwa:
$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
Gunakan ini untuk mengapproksimasi $\ln 1.5$ dengan error kurang dari 0.01 dan kurang dari 0.001.

34. [Soal Buku Nomor 6.4.12]
Kita ingin mengapproksimasi sinus dengan sebuah polinomial di $[-1,1]$ sedemikian sehingga errornya kurang dari 0.001. Tunjukkan bahwa akan diperoleh:
$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040} \qquad \text{untuk} \quad |x| \le 1$$

35. [Soal Buku Nomor 6.4.15]
Misal f kontinu pada $[a,b]$ dan asumsikan bahwa turunan kedua f'' ada pada (a,b). Misalkan kurva f dan garis segmen yang menyambungkan titik-titik $\big(a, f(a)\big)$ dan $\big(b, f(b)\big)$ berpotongan pada sebuah titik $\big(x_0, f(x_0)\big)$ dimana $a < x_0 < b$. Tunjukkan bahwa terdapat sebuah titik $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga $f''(x_0) = 0$.

36. [Soal Buku Nomor 6.4.16/ PR 2 Bu Suarsih Nomor 6]
Misal $I \subseteq \mathbb{R}$ suatu interval buka dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang terturunkan di I. Misal pula $f''(a)$ ada untuk suatu $a \in I$. Buktikan bahwa:
$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

37. [Soal Buku Nomor 6.4.17]
Misal $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah sebuah interval buka dan $f''(x) \ge 0$ untuk semua $x \in I$. Jika $c \in I$, tunjukkan bahwa bagian dari kurva f pada I tidak pernah di bawah garis tangensial terhadap kurva pada $\big(c, f(c)\big)$.

38. [PR 2 Bu Suarsih Nomor 5/ UTS Susulan 2014 Nomor 3]
Untuk $x > 0$, buktiin ketidaksamaan berikut.
$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Jawaban 20 Soal Terpilih

---

1. Tunjukkan bahwa $f(x) \coloneqq x^{1/3}, x \in \mathbb{R}$, tidak terturunkan pada $x = 0$.

Jawab:

Akan ditunjukkan $f(x) = x^{1/3}$ tidak terturunkan pada $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tidak ada.

Perhatikan:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$$

Karena untuk sembarang lingkungan $V_\delta(0), \dfrac{1}{x^{2/3}}$ akan menjadi tak terbatas, maka $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2/3}}$ tidak ada.

Karena $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2/3}}$ tidak ada, maka f tidak terturunkan pada $x = 0$.

$\therefore$ Tertunjuk bahwa $f(x) \coloneqq x^{1/3}, x \in \mathbb{R}$, tidak terturunkan pada $x = 0$

---

2. Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) \coloneqq x^2$ untuk x rasional dan $f(x) \coloneqq 0$ untuk x irrasional. Tunjukkan bahwa f dapat diturunkan pada $x = 0$ dan tentukan $f'(0)$.

Jawab:

Untuk x rasional,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Untuk x irrasional,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

Karena $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}, x \in \mathbb{Q} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}, x \notin \mathbb{Q}$, maka f terturunkan pada $x = 0$

Dan berdasarkan Definisi 6.1.1, maka:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$\therefore$ Tertunjuk bahwa f dapat diturunkan pada $x = 0$ dan nilainya adalah $f'(0) = 0$.

---

4. Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terturunkan pada c dan $f(c) = 0$. Tunjukkan bahwa $g(x) \coloneqq |f(x)|$ terturunkan pada c jika dan hanya jika $f'(c) = 0$.

Jawab:

$\Rightarrow$: Misal $g(x) \coloneqq |f(x)|$ terturunkan pada c

$$\Leftrightarrow g(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , f(x) < 0 \end{cases} \text{ terturunkan pada } c$$

Akan ditunjukkan $f'(c) = 0$.

Untuk $f(x) \geq 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

Untuk $f(x) < 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{-f(x) - f(c)}{x - c} = -\lim_{x \to c} \frac{f(x) + f(c)}{x - c}$$
$$= -\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = -f'(c)$$

Karena g terturunkan pada c, maka haruslah:

$$f'(c) = -f'(c) \Leftrightarrow 2f'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = 0$$

$\Leftarrow$: Akan ditunjukkan $g(x) \coloneqq |f(x)|$ terturunkan pada c

$$\Leftrightarrow g(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , f(x) < 0 \end{cases} \text{ terturunkan pada } c$$

dengan kontrapositif.

WLOG, misal $f'(c) = k > 0$. Maka $-f'(c) = -k < 0$.

Untuk $f(x) \geq 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = k > 0$$

Untuk $f(x) < 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{-f(x) - f(c)}{x - c} = -\lim_{x \to c} \frac{f(x) + f(c)}{x - c}$$
$$= -\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = -f'(c) = -k < 0$$

Artinya, $g(x) \coloneqq |f(x)|$ tidak terturunkan pada c.

Karena kontrapositifnya benar, maka benar bahwa $g(x) \coloneqq |f(x)|$ terturunkan pada c

$\therefore$ Tertunjuk bahwa $g(x) \coloneqq |f(x)|$ terturunkan pada c jika dan hanya jika $f'(c) = 0$.

5. Buktikan bahwa jika $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi genap dan memiliki turunan pada setiap titik, maka turunannya f' adalah fungsi ganjil. Buktikan juga bahwa jika $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi ganjil yang terturunkan, maka g' adalah fungsi genap.

Jawab:

1) Diberikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi genap yang terturunkan pada setiap titik. Karena f adalah fungsi genap, maka $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ sehingga berdasarkan Aturan Rantai 6.1.6:
$$-f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
Artinya f' adalah fungsi ganjil.
2) Diberikan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi ganjil yang terturunkan pada setiap titik. Karena g adalah fungsi ganjil, maka $g(-x) = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ sehingga berdasarkan Aturan Rantai 6.1.6:
$$-g'(-x) = -g'(x) \Leftrightarrow g'(-x) = g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$$
Artinya g' adalah fungsi genap.

---

8. Jika $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terturunkan pada $c \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa:
$$f'(c) = \lim \left(n\left\{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right\}\right)$$
Namun, tunjukkan dengan contoh bahwa adanya limit dari barisan ini tidak menjamin adanya $f'(c)$.

Jawab:

$\Rightarrow$: Misal f terturunkan pada c.

Akan ditunjukkan $f'(c) = \lim \left(n\left\{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right\}\right)$

Dari Newton's Difference Quotient, kita tahu bahwa $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

Berdasarkan Teorema 4.1.8, karena $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, maka $\lim \left(n\left\{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right\}\right) = f'(c)$

Dengan kata lain, $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim \left(n\left\{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right\}\right)$

$\Leftarrow\!\!\!\!/$: Misal $\lim \left(n\left\{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right\}\right)$ ada.

Akan ditunjukkan $f'(c)$ belum tentu ada dengan counterexample

Misal $f(x) \coloneqq \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

Perhatikan bahwa pada $c = 0$, maka:
$$\lim \left(n\left\{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right\}\right) = \lim \left(n\left\{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right\}\right) = 0$$
Namun karena f tidak kontinu pada $c = 0$, berdasarkan kontrapositif dari Teorema 6.1.2, maka f tidak memiliki turunan pada $c = 0$.

11. Gunakan Mean Value Theorem untuk membuktikan bahwa $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Jawab:

Misal $f(a) \coloneqq \sin a$ untuk $a \in \mathbb{R}$.

Maka f kontinu di $[x, y]$ dan $f'(a) = \cos a$ ada di (x, y).

Berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4, maka:

$$\exists c \in (x, y) \ni f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow \cos c = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

Karena $-1 \leq \cos c \leq 1$ untuk sembarang $c \in (x, y)$ untuk sembarang $x, y \in \mathbb{R}$, maka:

$$-1 \leq \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \leq 1 \Leftrightarrow -(x - y) \leq \sin x - \sin y \leq x - y \Leftrightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$

---

12. Gunakan Mean Value Theorem untuk membuktikan bahwa $(x - 1)/x < \ln x < x - 1$ untuk $x > 1$.

Jawab:

Misal $f(t) \coloneqq \ln t$ untuk $t \in [1, x]$ dengan $x \in \mathbb{R}, x > 1$.

Maka f kontinu di $[1, x]$ dan $f'(t) = 1/t$ ada di $(1, x)$.

Berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4, maka:

$$\exists c \in (1, x) \ni f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln x}{x - 1} \Leftrightarrow \ln x = \frac{x - 1}{c}$$

Perhatikan:

$$1 < c < x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c} < 1 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} < \frac{x - 1}{c} < x - 1 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $(x - 1)/x < \ln x < x - 1$ untuk $x > 1$.

16. Buktikan jika f kontinu pada $[a,b]$, terturunkan pada (a,b) dan $f(a)=f(b)=0$, maka untuk sebuah bilangan real α akan terdapat $x_0 \in (a,b) \ni \alpha f(x_0)+f'(x_0)=0$.

Jawab:
Definisikan $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sebagai $h(x) \coloneqq e^{\alpha x}f(x)$ untuk $x\in[a,b]$.
Karena f kontinu pada $[a,b]$ maka h kontinu pada $[a,b]$.
Karena f terturunkan pada (a,b) maka h terturunkan pada (a,b).
Perhatikan bahwa $h(a)=h(b)=0$.

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$h'(x)=\alpha e^{\alpha x}f(x)+e^{\alpha x}f'(x)=e^{\alpha x}\big(\alpha f(x)+f'(x)\big)$$

Karena h kontinu pada $[a,b]$, h terturunkan pada (a,b), dan $h(a)=h(b)=0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists x_0\in(a,b)\ni h'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{\alpha x_0}\big(\alpha f(x_0)+f'(x_0)\big)=0$$

Karena $e^{\alpha x_0}\neq 0$ untuk sembarang $x_0\in(a,b)$, maka haruslah $\alpha f(x_0)+f'(x_0)=0$.
$\therefore$ Terbukti bahwa untuk sebuah bilangan real α, $\exists x_0\in(a,b)\ni \alpha f(x_0)+f'(x_0)=0$.

---

17. Misal f,g kontinu pada $[a,b]$, terturunkan pada (a,b) dan $f(a)=f(b)=0$. Buktikan terdapat $x_0\in(a,b)\ni g'(x_0)f(x_0)+f'(x_0)=0$.

Jawab:
Definisikan $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sebagai $h(x)\coloneqq e^{g(x)}f(x)$ untuk $x\in[a,b]$.
Karena f,g kontinu pada $[a,b]$ maka h kontinu pada $[a,b]$.
Karena f,g terturunkan pada (a,b) maka h terturunkan pada (a,b).
Karena $f(a)=0$ dan $f(b)=0$ maka $h(a)=0$ dan $h(b)=0$, sehingga $h(a)=h(b)=0$.
Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$h'(x)=e^{g(x)}g'(x)f(x)+e^{g(x)}f'(x)=e^{g(x)}\big(g'(x)f(x)+f'(x)\big)$$

Karena h kontinu pada $[a,b]$, h terturunkan pada (a,b), dan $h(a)=h(b)=0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists x_0\in(a,b)\ni h'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{g(x_0)}\big(g'(x_0)f(x_0)+f'(x_0)\big)=0$$

Karena $e^{g(x_0)}\neq 0$ untuk sembarang $x_0\in(a,b)$, maka haruslah $g'(x_0)f(x_0)+f'(x_0)=0$.
$\therefore$ Terbukti bahwa $\exists x_0\in(a,b)\ni g'(x_0)f(x_0)+f'(x_0)=0$.

18. Misal f kontinu pada $[a, b], a > 0$ dan terturunkan pada (a, b). Buktikan bahwa jika:

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$$

Maka akan terdapat $x_0 \in (a, b) \ni x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

Jawab:

Definisikan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai:

$$h(x) \coloneqq \frac{f(x)}{x} \qquad \text{untuk} \quad x \in [a, b]$$

Karena $a > 0$ dan $x \in [a, b]$, maka $x > 0$, sehingga karena f terdefinisi untuk setiap $x \in [a, b]$ maka h juga terdefinisi untuk setiap $x \in [a, b]$.

Karena f kontinu pada $[a, b]$ maka h kontinu pada $[a, b]$.

Karena f terturunkan pada (a, b) maka h terturunkan pada (a, b).

Diberikan $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$, maka diperoleh:

$$h(a) - h(b) = \frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} = 0$$

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$h'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

Berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4,

$$\exists x_0 \in (a, b) \ni h'(x_0) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{{x_0}^2} = 0$$

Sehingga kita peroleh:

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0)$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\exists x_0 \in (a, b) \ni x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

19. Misal f, g kontinu pada $[a, b]$, tidak pernah bernilai nol pada $[a, b]$, dan terturunkan pada (a, b). Buktikan jika $f(a)g(b) = f(b)g(a)$, maka:

$$\exists x_0 \in (a, b) \ni \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$$

Jawab:

Definisikan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai:

$$h(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{untuk} \quad x \in [a, b]$$

Karena f terdefinisi dan tidak pernah nol untuk setiap $x \in [a, b]$ dan karena g terdefinisi dan tidak pernah nol untuk setiap $x \in [a, b]$, maka h terdefinisi untuk setiap $x \in [a, b]$.

Karena f, g kontinu pada $[a, b]$ maka h kontinu pada $[a, b]$.

Karena f, g terturunkan pada (a, b) maka h terturunkan pada (a, b).

Diberikan $f(a)g(b) = f(b)g(a)$, maka diperoleh:

$$h(a) - h(b) = \frac{f(a)}{g(a)} - \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(a)g(b)} = 0$$

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4,

$$\exists x_0 \in (a, b) \ni h'(x_0) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2} = 0$$

Sehingga kita peroleh:

$$f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\exists x_0 \in (a, b) \ni \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}$

20. Misal f terturunkan secara kontinu pada $[a, b]$ dan terturunkan dua kali pada (a, b). Jika $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$, buktikan $\exists x_0 \in (a, b) \ni f''(x_0) = 0$.

Jawab:

Karena f terturunkan secara kontinu pada $[a, b]$ dan $f(a) = f(b) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3, $\exists c \in (a, b) \ni f'(c) = 0$.

Karena f terturunkan dua kali pada (a, b) maka f' terturunkan pada $(a, c) \subset (a, b)$ dan $f'(a) = f'(c) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3, $\exists x_0 \in (a, c) \ni f''(x_0) = 0$.

Karena $x_0 \in (a, c) \subset (a, b)$, maka $x_0 \in (a, b)$ artinya $\exists x_0 \in (a, b) \ni f''(x_0) = 0$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\exists x_0 \in (a, b) \ni f''(x_0) = 0$.

---

21. Misal f kontinu pada $[0,2]$ dan terturunkan dua kali pada $(0,2)$. Jika $f(0) = 0, f(1) = 1$, dan $f(2) = 2$, buktikan $\exists x_1 \in (0,2) \ni f''(x_1) = 0$.

Jawab:

Definisikan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai $h(x) \coloneqq f(x) - x$ untuk $x \in [0,2]$.

Karena f kontinu pada $[0,2]$ maka h kontinu pada $[0,2]$.

Karena f terturunkan dua kali pada $(0,2)$, maka f juga terturunkan satu kali pada $(0,2)$.

Karena f terturunkan pada $(0,2)$ maka h terturunkan pada $(0,2)$.

Karena $f(0) = 0$ dan $f(1) = 1$ maka $h(0) = f(0) - 0 = 0$ dan $h(1) = f(1) - 1 = 0$.

Karena h kontinu pada $[0,1] \subset [0,2]$, h terturunkan pada $(0,1) \subset (0,2)$, dan $h(0) = h(1) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists c_1 \in (0,1) \ni h'(c_1) = 0$$

Karena $f(1) = 1$ dan $f(2) = 2$ maka $h(1) = f(1) - 1 = 0$ dan $h(2) = f(2) - 2 = 0$.

Karena h kontinu pada $[1,2] \subset [0,2]$, h terturunkan pada $(1,2) \subset (0,2)$, dan $h(1) = h(2) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists c_2 \in (1,2) \ni h'(c_2) = 0$$

Karena f terturunkan dua kali pada $(0,2)$ maka h' terturunkan pada $(0,2)$.

Karena h kontinu pada $[c_1, c_2] \subset [0,2]$, h terturunkan pada $(c_1, c_2) \subset (0,2)$ dimana $0 < c_1 < 1 < c_2 < 2$, dan $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists x_1 \in (c_1, c_2) \ni h''(x_1) = 0$$

Karena $x_1 \in (c_1, c_2) \subset (0,2)$, maka $x_0 \in (0,2)$ artinya $\exists x_1 \in (0,2) \ni h''(x_1) = 0$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\exists x_1 \in (0,2) \ni h''(x_1) = 0$.

22. Buktikan bahwa fungsi $f(x) \coloneqq \ln(1+x^2)$ kontinu seragam pada $[0,\infty)$ dengan menggunakan Mean Value Theorem.

Jawab:

Akan dibuktikan $f(x) \coloneqq \ln(1+x^2)$ kontinu seragam pada $[0,\infty)$ dengan membuktikan bahwa f adalah sebuah fungsi Lipschitz.

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Perhatikan bahwa untuk sembarang $x, u \in [0,\infty)$, dengan $x \neq u$, karena $f(x)$ adalah fungsi monoton naik, maka berdasarkan Mean Value Theorem,

$$\exists c \in (\min\{x,u\}, \max\{x,u\}) \ni f'(c) = \left|\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\right| = \frac{2c}{1+c^2}$$

Perhatikan:

$$(c-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2c \leq c^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{2c}{1+c^2} \leq 1$$

Sehingga kita bisa pilih $K \geq \max\left\{\frac{2c}{1+c^2}\right\} = 1$, maka kita akan peroleh bahwa:

$$\exists K \geq 1 \ni \left|\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\right| \leq K, \forall x, u \in [0,\infty), x \neq u$$

Ini memenuhi definisi bahwa f adalah fungsi Lipschitz.

Maka berdasarkan Teorema 5.4.5, maka f kontinu seragam pada $[0,\infty)$.

$\therefore$ Terbukti bahwa fungsi $f(x) \coloneqq \ln(1+x^2)$ kontinu seragam pada $[0,\infty)$

---

25. Misal f dan g kontinu pada $[a,b]$, terturunkan pada (a,b), $c \in [a,b]$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $x \in [a,b], x \neq c$. Misal $A \coloneqq \lim_{x\to c} f$ dan $B \coloneqq \lim_{x\to c} g$. Jika $B = 0$ dan jika $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ ada di $\mathbb{R}$, tunjukkan bahwa haruslah $A = 0$.

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa $A = \lim_{x\to c} f(x) = 0$

Karena $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ ada di $\mathbb{R}$, maka kita misalkan $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = L \in \mathbb{R}$.

Perhatikan:

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x), \qquad x \neq c$$

Maka berdasarkan Teorema 4.2.4,

$$A = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot B = L \cdot 0 = 0$$

$\therefore$ Tertunjuk bahwa haruslah $A = 0$

26. Sebagai tambahan dari soal nomor 25, misal $g(x) > 0$ untuk $x \in [a, b], x \neq c$.

Jika $A > 0$ dan $B = 0$, buktikan bahwa haruslah $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \infty$.

Jika $A < 0$ dan $B = 0$, buktikan bahwa haruslah $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = -\infty$.

Jawab:

Diberikan $B = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_0 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_0 \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$

Maka diperoleh $0 < g(x) < \varepsilon$ sehingga $\dfrac{1}{g(x)} > \dfrac{1}{\varepsilon}$

1) Jika $A > 0$, akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \infty$

Diberikan $A = \lim_{x\to c} f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Maka diperoleh $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

Pilih $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ dan $\alpha = \dfrac{A}{\varepsilon} - 1$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} - 1 = \alpha, \forall x \in [a, b]$$

Karena ε sembarang artinya:

$$\forall\alpha > 0, \exists\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \alpha$$

Ini memenuhi Definisi 4.3.5 bahwa $\lim_{x\Rightarrow c} f(x)/g(x) = \infty$.

2) Jika $A < 0$, akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = -\infty$

Diberikan $A = \lim_{x\to c} f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Maka diperoleh $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

Pilih $\delta = \min\{\delta_0, \delta_2\}$ dan $\beta = \dfrac{A}{\varepsilon} + 1$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{A + \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} + 1 = \beta, \forall x \in [a, b]$$

Karena ε sembarang artinya:

$$\forall\beta < 0, \exists\delta = \min\{\delta_0, \delta_2\} > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \beta$$

Ini memenuhi Definisi 4.3.5 bahwa $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = -\infty$.

30. Gunakan Teorema Taylor dengan $n = 2$ untuk memeroleh approksimasi akurat untuk $\sqrt{1.2}$ dan $\sqrt{2}$.

Jawab:

Hanya akan dibahas Teorema Taylor dengan $n = 2$ untuk memeroleh approksimasi akurat untuk $\sqrt{1.2}$. Akan digunakan $f(x) \coloneqq \sqrt{1.21 + x}, x > -1.21$ karena $\sqrt{1.21}$ dekat dengan $\sqrt{1.2}$ dan $x_0 = 0$.

$$f(x) = (1.21 + x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(x_0) = f(0) = 1.1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1.21 + x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.1}\right) = \frac{1}{2.2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1.21 + x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(x_0) = f''(0) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.1}\right)^3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.331}\right) = -\frac{1}{5.324}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1.21 + x)^{-\frac{5}{2}}$$

Karena f, f', dan f'' ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$P_{21}(x) \coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} = 1.1 + \frac{x}{2.2} - \frac{x^2}{10.648}$$

$$R_{21}(x) \coloneqq \frac{f^{(3)}(c)(x - x_0)^3}{3!} = \frac{\frac{3}{8}(1.21 + c)^{-\frac{5}{2}} \cdot x^3}{6}$$

$$= \frac{1}{16}\frac{x^3}{(1.21 + c)^{\frac{5}{2}}}, \qquad c \in (\min\{0, x\}, \max\{0, x\})$$

Maka kita peroleh:

$$\sqrt{1.2} = \sqrt{1.21 - 0.01} \approx P_{21}(-0.01) = 1.1 - \frac{0.01}{2.2} - \frac{0.0001}{10.648}$$

Keakuratan approksimasi ini dapat dihitung dengan mencari batas galat sebagai berikut:

$$R_{21}(-0.01) = \frac{1}{16}\frac{(-10^{-2})^3}{(1.21 + c)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{16}\frac{10^{-6}}{(1.21 + c)^{\frac{5}{2}}}, \qquad c \in (-0.01, 0)$$

Perhatikan:

$$-0.01 < c < 0 \Leftrightarrow 1.2 < 1.21 + c < 1.21$$

$$\Leftrightarrow (1.2)^{\frac{5}{2}} < (1.21 + c)^{\frac{5}{2}} < (1.21)^{\frac{5}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1.21)^{\frac{5}{2}}} < \frac{1}{(1.21 + c)^{\frac{5}{2}}} < \frac{1}{(1.2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{16}\frac{10^{-6}}{(1.21)^{\frac{5}{2}}} < -\frac{1}{16}\frac{10^{-6}}{(1.21 + c)^{\frac{5}{2}}} < -\frac{1}{16}\frac{10^{-6}}{(1.2)^{\frac{5}{2}}}$$

Sehingga,

$$|R_{21}(x)| < \frac{1}{16}\frac{10^{-6}}{(1.2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{16(1.2)^{\frac{5}{2}}} \cdot 10^{-6} < 10^{-1} \cdot 10^{-6} = 10^{-7}$$

Artinya, $\left|\sqrt{1.2} - \left(1.1 - \frac{0.01}{2.2} - \frac{0.0001}{10.648}\right)\right| < \frac{1}{16}\frac{10^{-6}}{(1.2)^{\frac{5}{2}}} < 10^{-7}$

Dengan kata lain, $\sqrt{1.2} \approx 1.1 - \frac{0.01}{2.2} - \frac{0.0001}{10.648}$ akurat hingga 10^{-7}

32. Jika $g(x) \coloneqq \sin x$, tunjukkan bahwa suku sisa di Teorema Taylor konvergen ke nol saat $n \to \infty$ untuk setiap x_0 dan x yang tetap.

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa untuk suatu x_0 dan x yang tetap maka $\left(R_n(x)\right) \to 0$

Misal $\to$ berarti diturunkan satu kali, maka:

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x$$

WLOG misal $x > x_0$, maka:

$$\left(R_n(x)\right) = \left(\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right), \qquad c \in (x_0, x)$$

Karena $g^{(n+1)}(c) \in \{\sin c\,, \cos c\,, -\sin c\,, -\cos c\}$ maka pasti akan berlaku:

$$-1 \leq g^{(n+1)}(c) \leq 1 \Leftrightarrow \left|g^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$$

Sehingga:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Misal $x_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, perhatikan:

$$\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \lim\left(\frac{(x - x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+2)(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}}\right) = \lim\left(\frac{x - x_0}{n+2}\right) = 0 < 1$$

Berdasarkan Teorema 3.2.11, maka $(x_n) \to 0$.

Perhatikan:

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \Leftrightarrow -\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Karena $\lim\left(-\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \lim\left(\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 0$,

maka berdasarkan Teorema Apit 3.2.7, $\lim\left(R_n(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left(R_n(x)\right) \to 0$

$\therefore$ Tertunjuk bahwa suku sisa di Teorema Taylor konvergen ke nol saat $n \to \infty$ untuk setiap x_0 dan x yang tetap.

34. Kita ingin mengapproksimasi sinus dengan sebuah polinomial di $[-1,1]$ sedemikian sehingga errornya kurang dari 0.001. Tunjukkan bahwa akan diperoleh:

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040} \qquad \text{untuk} \quad |x| \leq 1$$

Jawab:
Akan ditunjukkan pertidaksamaan tersebut menggunakan Teorema Taylor.

Misal $f(x) \coloneqq \sin x\,, x \in [-1,1]$ dan $x_0 = 0$.
Misal $\rightarrow$ berarti diturunkan satu kali, maka:

$$\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x$$

WLOG misal $x > x_0$, maka:

$$R_n(x) \coloneqq \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad c \in (x_0, x)$$

Kita inginkan errornya kurang dari 0.001, dengan kata lain:

$$|R_n(x)| < 0.001 \Leftrightarrow \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| < 0.001$$

Karena $f^{(n+1)}(c) \in \{\sin c\,, \cos c\,, -\sin c\,, -\cos c\}$ maka pasti akan berlaku:

$$-1 \leq f^{(n+1)}(c) \leq 1 \Leftrightarrow \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$$

Sehingga akan diperoleh:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)}\right| < 0.001$$

Karena $x > x_0 = 0$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka kita peroleh:

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 0.001$$

Karena $0 < x \leq 1$, maka:

$$0 < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} < 0.001$$

Sehingga kita peroleh:

$$(n+1)! > \frac{1}{0.001} = 1000$$

Mari coba cari $n \in \mathbb{N}$ yang memenuhi.

$n = 1 \Rightarrow (n+1)! = 2! = 2 < 1000$
$n = 2 \Rightarrow (n+1)! = 3! = 6 < 1000$
$n = 3 \Rightarrow (n+1)! = 4! = 24 < 1000$
$n = 4 \Rightarrow (n+1)! = 5! = 120 < 1000$
$n = 5 \Rightarrow (n+1)! = 6! = 720 < 1000$
$n = 6 \Rightarrow (n+1)! = 7! = 5040 > 1000$

Artinya, $n = 6$ akan membuat error dari approksimasi kurang dari 0.001, dengan kata lain:

$$|R_6(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq \left|\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)}\right| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{5040} < 0.001$$

Sekarang kita akan konstruksi fungsi approksimasi Taylornya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x) &= f^{(4)}(x) = \sin x & f(0) &= f^{(4)}(0) = 0 \\ f'(x) &= f^{(5)}(x) = \cos x & f'(0) &= f^{(5)}(0) = 1 \\ f''(x) &= f^{(6)}(x) = -\sin x & f''(0) &= f^{(6)}(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) &= f^{(7)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1 \end{aligned}$$

Karena $f, f', f'', \dots, f^{(6)}$ ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$\begin{aligned} P_6(x) &\coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(6)}(x_0)(x - x_0)^6}{6!} \\ &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \end{aligned}$$

$$R_6(x) \coloneqq \frac{f^{(7)}(c)}{7!}(x - x_0)^7 = \frac{-\cos c \cdot x^7}{5040}, \qquad c \in (\min\{0, x\}, \max\{0, x\})$$

Kita sudah tunjukkan bahwa $|R_6(x)| \leq \dfrac{1}{5040} < 0.001, \forall x \in [-1,1]$

Dari Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_6 \coloneqq f - P_6$, maka:

$$|f(x) - P_6(x)| \leq \frac{1}{5040} \Leftrightarrow \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| \leq \frac{1}{5040}, \forall x \in [-1,1]$$

Karena kita tidak ada $x \in [-1,1] \ni |f(x) - P_6(x)| = \dfrac{1}{5040}$, kita simpulkan bahwa:

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| < \frac{1}{5040} \qquad \text{untuk} \quad |x| \leq 1$$

38. Untuk $x > 0$, buktiin ketidaksamaan berikut.

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Jawab:

Akan dibuktikan ketidaksamaan tersebut menggunakan Teorema Taylor.

Misal $f(x) \coloneqq \sqrt{1+x}, x > -1$ dan $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} & f(x_0) &= f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} & f'(x_0) &= f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= f''(0) = -\frac{1}{4} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & f'''(x_0) &= f'''(0) = \frac{3}{8} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}
\end{aligned}$$

1) Akan dibuktikan bahwa:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x}$$

Karena $x > 0$ dan karena f, f', f'', f''' ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$P_2(x) \coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$R_2(x) \coloneqq \frac{f^{(3)}(c)(x-x_0)^3}{3!} = \frac{\frac{3}{8}(1+c)^{-\frac{5}{2}} \cdot x^3}{6} = \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}}, \qquad c \in (0, x)$$

Perhatikan:

$$\begin{aligned}
0 < c < x &\Leftrightarrow 1 < 1 + c < 1 + x \\
&\Leftrightarrow 1 < (1+c)^{\frac{5}{2}} < (1+x)^{\frac{5}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} < \frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^3}{16(1+x)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16}
\end{aligned}$$

Karena $x > 0$, maka:

$$0 < \frac{x^3}{16(1+x)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}} < \frac{x^3}{16}$$

Sehingga kita peroleh:

$$R_2(x) = \frac{x^3}{16(1+c)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

Dari Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_2 \coloneqq f - P_2$, maka:

$$f(x) - P_2(x) > 0 \Leftrightarrow P_2(x) < f(x) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x}$$

2) Akan dibuktikan bahwa:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Karena $x > 0$ dan karena $f, f', f'', f''', f^{(4)}$ ada maka menurut Teorema Taylor 6.4.1,

$$P_2(x) \coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

$$R_2(x) \coloneqq \frac{f^{(4)}(c)(x-x_0)^4}{4!} = \frac{-\frac{15}{16}(1+c)^{-\frac{7}{2}} \cdot x^4}{24} = \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}}, \qquad c \in (0, x)$$

Perhatikan:

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\Leftrightarrow 1 < 1 + c < 1 + x \\ &\Leftrightarrow 1 < (1+c)^{\frac{7}{2}} < (1+x)^{\frac{7}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^{\frac{7}{2}}} < \frac{1}{(1+c)^{\frac{7}{2}}} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5x^4}{108} < \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}} < \frac{-5x^4}{108(1+x)^{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Karena $x > 0$, maka:

$$\frac{-5x^4}{108} < \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}} < \frac{-5x^4}{108(1+x)^{\frac{7}{2}}} < 0$$

Sehingga kita peroleh:

$$R_2(x) = \frac{-5x^4}{108(1+c)^{\frac{7}{2}}} < 0$$

Dari Teorema Taylor 6.4.1, kita tahu bahwa $R_2 \coloneqq f - P_2$, maka:

$$f(x) - P_2(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < P_2(x) \Leftrightarrow \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Karena $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x}$ dan $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$, maka diperoleh:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Afterword

Pembuatan dokumen ini dibantu oleh:

1. 13,04, Matematika UI 2016.
2. rilo_chand, Matematika UI 2016.
