Xyba Project

Statistika Matematika 2

Pembahasan Kuis 2 Susulan 2018

1. This document is version: 0.7.9
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 30/05/2018

Thank you for your cooperation >v<

1. Misalkan $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$ adalah rataan dari dua sampel acak yang saling bebas, masing-masing berukuran n serta berasal dari distribusi $N(\mu_1, \sigma^2)$ dan $N(\mu_2, \sigma^2)$ dengan asumsi bahwa σ^2 diketahui. Tentukan ukuran sampel acak n sehingga

$$\Pr\left(\bar{X} - \bar{Y} - \frac{\sigma}{5} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \frac{\sigma}{5}\right) = 0.90$$

Jawab:
Kita tahu bahwa $\Pr(-1.645 < Z < 1.645) = 0.90$ dengan $Z \sim N(0,1)$.
Kita akan gunakan fakta ini untuk mencari ukurang sampel acak n.

Dengan menggunakan Central Limit Theorem, kita akan punya:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Misal:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Sehingga:

$$\Pr(-1.645 < Z < 1.645) = 0.90$$

$$\Leftrightarrow \quad \Pr\left(-1.645 < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}} < 1.645\right) = 0.90$$

$$\Leftrightarrow \Pr\left(\bar{X} - \bar{Y} - 1.645\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + 1.645\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0.90$$

Karena ini sama dengan:

$$\Pr\left(\bar{X} - \bar{Y} - \frac{\sigma}{5} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \frac{\sigma}{5}\right) = 0.90$$

Maka kita peroleh:

$$1.645\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sigma}{5}$$

Sehingga:

$$n = \lceil (1.645 \times 2 \times 5)^2 \rceil = \lceil 270.6025 \rceil = 271$$

$\therefore$ Ukuran sampel acak n sehingga $\Pr\left(\bar{X} - \bar{Y} - \frac{\sigma}{5} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \frac{\sigma}{5}\right) = 0.90$ adalah 271.

2. Misalkan $\bar{X}$ rataan sampel acak berukuran n dari distribusi $b(1, \theta), 0 < \theta < 1$. Tunjukkan bahwa $\bar{X}$ adalah estimator yang efisien untuk θ.

Jawab:
Syarat perlu sebuah penaksir efisien untuk θ adalah penaksir tersebut tak bias untuk θ.
Akan dibuktikan $\bar{X}$ penaksir tak bias untuk $\theta \Leftrightarrow E(\bar{X}) = \theta$.

Diberikan $X \sim b(1, \theta), 0 < \theta < 1$. Sehingga $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, \theta)$.
Perhatikan:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}(n\theta) = \theta$$

Sehingga benar bahwa $\bar{X}$ penaksir tak bias untuk θ.

Akan dibuktikan $\bar{X}$ penaksir efisien untuk θ.
Sebuah penaksir $Y = u(X_1, \dots, X_n)$ penaksir efisien untuk θ apabila Y penaksir tak bias untuk θ dan batas bawah Rao-Cramer Y sama dengan variansi dari distribusi Y.

p.d.f. dari X diberikan oleh:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} & , x = 0,1 \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Pertama, kita akan tentukan terlebih dahulu informasi Fisher dari X yang diberikan oleh:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln\big(f(x; \theta)\big)}{\partial \theta^2}\right]$$

Sebelum menghitung $I(\theta)$, kita tentukan terlebih dahulu turunan parsial orde dua dari $\ln\big(f(x; \theta)\big)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\big(f(x; \theta)\big)}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \ln\big(f(x; \theta)\big)}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \ln(\theta^x (1-\theta)^{1-x})}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial (\ln(\theta^x) + \ln((1-\theta)^{1-x}))}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial (x \ln \theta + (1-x)\ln(1-\theta))}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{x}{\theta} + \frac{1-x}{1-\theta}\right) \\
&= -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}
\end{aligned}$$

Sehingga informasi Fisher dari X adalah:

$$\begin{aligned} I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln\big(f(x;\theta)\big)}{\partial\theta^2}\right] &= -E\left[-\frac{x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}\right] \\ &= \frac{1}{\theta^2}E[x] + \frac{1}{(1-\theta)^2}E[1-x] \\ &= \frac{1}{\theta^2}E[x] + \frac{1}{(1-\theta)^2}(1-E[x]) \\ &= \frac{1}{\theta^2}\theta + \frac{1}{(1-\theta)^2}(1-\theta) \\ &= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} \\ &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \end{aligned}$$

Batas bawah Rao-Cramer untuk statistik $\bar{X}$ diberikan oleh:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{n.I(\theta)} = \frac{1}{n\frac{1}{\theta(1-\theta)}} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Sekarang kita akan tentukan variansi dari statistik $\bar{X}$.

Kita tahu bahwa $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,\theta)$, sehingga:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\big(n\theta(1-\theta)\big) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Perhatikan bahwa variansi dari $\bar{X}$ sama dengan batas bawah Rao-Cramer dari $\bar{X}$, artinya benar bahwa $\bar{X}$ adalah penaksir yang efisien untuk θ.

$\therefore$ Tertunjuk bahwa $\bar{X}$ adalah penaksir yang efisien untuk θ.

3. Perhatikan suatu distribusi Normal yang berbentuk $N(\theta, 4)$. Simple hipotesis $H_0: \theta = 0$ ditolak dan hipotesis alternative komposit $H_1: \theta > 0$ diterima jika dan hanya jika rataan $\bar{x}$ dari sampel acak berukuran 25 lebih besar atau sama dengan $\frac{3}{5}$. Tentukan *power function* $K(\theta), 0 \le \theta$ dari uji tersebut.

Jawab:

Karena $X \sim N(\theta, 4)$, maka $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{25} \sim N\left(\theta, \frac{4}{25}\right)$.

Daerah uji dari tes tersebut diberikan oleh:

$$C = \left\{(x_1, \dots, x_{25}) : \bar{x} \ge \frac{3}{5}\right\} \Leftrightarrow C = \left\{(x_1, \dots, x_{25}) : \sum_{i=1}^{25} x_i \ge 15\right\}$$

Definisikan power function untuk menolak H_0 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
K(\theta) &= \Pr(C; H_0 \text{ salah}) \\
&= \Pr\left(\bar{X} \ge \frac{3}{5}; \mu = \theta\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{2/5} \ge \frac{\frac{3}{5} - \mu}{2/5}; \mu = \theta\right) \quad \text{Standardisasi} \\
&= \Pr\left(Z \ge \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5} - \theta\right)\right) \\
&= \Pr\left(Z \ge \frac{3 - 5\theta}{2}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(Z \le \frac{3 - 5\theta}{2}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{3 - 5\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\therefore$ Power function dari uji tersebut adalah $K(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{3 - 5\theta}{2}\right), \theta \ge 0$

Afterword

Pembuatan dokumen ini dibantu oleh:
1. namora03, Matematika UI 2016.
2. rilo_chand, Matematika UI 2016.