Xyba Project

Pengantar Teori Probabilitas
Rangkuman UTS

1. This document is version: 0.8.91
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 03/05/2018

Thank you for your cooperation >v<

1.1. Kejadian

A. Definisi

- E : Experiment/Phenomenon
- ω : Sample Point/Outcome
- $\Omega = \{\omega\}$: Sample Space
- $A \subset \Omega$: Event
- $\mathcal{A} = \{A\}$: Class of Events

B. Catatan

- $|\Omega| = n$: Possible Outcomes
- $|\mathcal{P}\{\Omega\}| = 2^n$: All Possible Outcomes

$$|\mathcal{P}\{\Omega\}| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

- $\binom{n}{0}$ dinamakan Impposible Event
- $\binom{n}{1}$ dinamakan Singleton
- $\binom{n}{n}$ dinamakan Sure Event

1.2. Aljabar dari Himpunan

A. Operasi-operasi

Diberikan Ω.

(i) Komplemen

Untuk setiap himpunan A, kita definisikan A^C sebagai komplemen dari A dengan:

$$A^C = \{\omega : \omega \notin A\}$$

Artinya, $\Omega^C = \emptyset$ dan $\emptyset^C = \Omega$.

(ii) Inklusi dan Kesamaan

a. Inklusi

Jika setiap titik dari himpunan A juga titik dari himpunan B, maka kita katakan A adalah subset dari B. Ini dinotasikan sebagai $A \subset B$ atau $B \supset A$ yang didefinisikan dengan:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$$

Artinya:

(i) $A \subset A$ (sifat refleksif)

(ii) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B \Rightarrow \omega \in C)$

$\Rightarrow A \subset C$ (sifat transitivitas)

Jika $A \subset B$, maka $A^C \supset B^C$

b. Kesamaan

Jika $A \subset B$ dan $B \subset A$, maka $A = B$. Karena inklusi bersifat refleksif dan transitif maka relasi kesamaan juga bersifat refleksif dan transitif. Relasi ini juga bersifat simetris, yaitu $A = B \Leftrightarrow B = A$

(iii) Gabungan dan Irisan

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan, maka himpunan dari semua titik ω yang ada di A atau B dinamakan A gabung B dan dinotasikan $A \cup B$. Himpunan dari semua titik yang ada di A dan B dinamakan A iris B dan dinotasikan $A \cap B$. Secara matematis:

$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ atau } \omega \in B\} = \{\omega : \omega \text{ tergabung di setidaknya satu dari } A \text{ atau } B\}$
$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ dan } \omega \in B\} = \{\omega : \omega \in \text{kedua } A \text{ dan } B\}$

Jika $A \subset B$, maka $A \cup B = B$ dan $A \cap B = A$

Jika $A \cap B = \emptyset$, maka A dan B dikatakan saling lepas, *disjoint* atau *mutually exclusive*
Dalam kasus ini dan hanya dalam kasus ini, kita notasikan:

$$A + B = A \cup B$$

Artinya, $A + A^C = \Omega$.

Jika $B \subset A$, kita notasikan:

$$A - B = A \cap B^C$$

Kita namakan ini sebagai *proper difference* dari A dan B.
Artinya:
1. $A - B$ dan B disjoint sehingga $(A - B) + B = A$
2. $A^C = \Omega - A$

Kita notasikan:

$$AB = A \cap B$$

Perhatikan bahwa:

$$AB \subset A, A - AB = AB^C \subset B^C$$
$$AB \subset B, B - AB = BA^C \subset B$$

Artinya AB^C dan BA^C disjoint. Kita notasikan:

$$A \,\Delta\, B = AB^C + BA^C$$

Kita namakan ini sebagai *symmetric difference* dari A dan B.

Walau *proper difference* terdefinisi hanya jika $A \subset B$, namun *symmetric difference* selalu terdefinisi.

Catatan: $AB + AB^C = A$

Definisi gabungan dan irisan dari sembarang banyaknya himpunan diberikan oleh:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ untuk suatu } i \in I\}$$

dan

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ untuk semua } i \in I\}$$

dimana I adalah sembarang himpunan index yang diasumsikan tidak kosong.
Jika I finit maka kita akan punya gabungan finit atau irisan finit.
Jika I terhitung dan diberikan oleh 1,2, ..., maka kita akan punya gabungan terhitung yang dinotasikan dengan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ dan irisan terhitung $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Operasi $\cup$ dan $\cap$ bersifat refleksif, komutatif, asosiatif, dan distributif,

(i) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (sifat refleksif)
(ii) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (sifat komutatif)
(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$
$= (A \cup C) \cup B$
$(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$
$= (A \cap C) \cap B$ (sifat asosiatif)
(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (sifat distributif)

Dari (iv) kita dapat simpulkan bahwa $A(B + C) = AB + AC$, atau secara umum:

$$A\left(\sum_i B_i\right) = \sum_i AB_i$$

Dari definisi A^C, maka $A \cup A^C = \Omega$ dan $A \cap A^C = \emptyset$
Dan kita akan punya:

$$\begin{aligned}(A \cap B)^C &= \{\omega : \omega \notin A \cap B\} \\ &= \{\omega : \omega \text{ tidak tergabung di kedua } A \text{ dan } B\} \\ &= \{\omega : \text{salahsatu } \omega \notin A \text{ atau } \omega \notin B\} \\ &= A^C \cup B^C\end{aligned}$$

Dengan mengganti A dengan A^C dan B dengan B^C, maka kita akan peroleh:

$$(A^C \cap B^C)^C = A \cup B$$

Dan dengan mengkomplemen kedua sisa, kita akan peroleh:

$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$$

Aturan De Morgan

Misal $A_i, i \in I$ adalah sembarang himpunan-himpunan, maka:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C \qquad \text{dan} \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C$$

Lemma 1.1 Misal diberikan kelas $\{A_i; i = 1,2, \dots, n\}$ maka akan terdapat kelas $\{B_i; i = 1,2, \dots, n\}$ dengan $B_i, i = 1,2, \dots, n$ saling lepas $\ni$ $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} B_i$$
Corollary Lemma 1.1 $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_1^C A_2 + A_1^C A_2^C A_3 + A_1^C A_2^C A_3^C A_4 + \cdots$$

B. Barisan dan Limit

1. Definisi

Kita definisikan barisan himpunan $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$.

$\{A_n\}$ dikatakan monoton naik jika $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n$. Dengan kata lain:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$$

Maka berlaku:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$$

Jika berlaku:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

Maka dikatakan $\{A_n\}$ konvergen ke A dan dinotasikan dengan $A_n \uparrow A$.
Lebih lanjut, A dikatakan sebagai limit dari $\{A_n\}$.

$\{A_n\}$ dikatakan monoton turun jika $A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n$. Dengan kata lain:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$

Maka berlaku:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$$

Jika berlaku:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

Maka dikatakan $\{A_n\}$ konvergen ke A dan dinotasikan dengan $A_n \downarrow A$.
Lebih lanjut, A dikatakan sebagai limit dari $\{A_n\}$.

2. Catatan
   - $\{A_n\}$ monoton turun maka $\{A_n^C\}$ monoton naik
   - $\{A_n\}$ monoton naik maka $\{A_n^C\}$ monoton turun

- Jika $A_n \downarrow A$, maka berdasarkan Aturan De Morgan, kita akan punya $A_n^C \uparrow A^C$.

3. Limit sembarang barisan himpunan
   Definisikan:

$$B_n = \inf_{k \geq n} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \dots$$

dan

$$C_n = \sup_{k \geq n} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots$$

Dapat ditunjukkan bahwa $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots$
Maka $\{B_n\}$ monoton naik dan $B_n \uparrow B$ dimana:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\inf_{k \geq n} A_k \right) = \liminf A_n = \underline{\lim}\, A_n$$

Dapat ditunjukkan bahwa $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \cdots$
Maka $\{C_n\}$ monoton turun dan $C_n \uparrow C$ dimana:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\sup_{k \geq n} A_k \right) = \limsup A_n = \overline{\lim}\, A_n$$

Dapat ditunjukkan menggunakan Aturan De Morgan bahwa:

$$\underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, A_n$$

Apabila berlaku $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = A$ maka dikatakan limit dari $\{A_n\}$ ada dan A dinamakan limitnya.
Jika $\{A_n\}$ tidak monoton dan A ada, maka kita notasikan $A_n \to A$. Kita katakan $\{A_n\}$ konvergen ke A.

Catatan:
$\underline{\lim}\, A_n$ dan $\overline{\lim}\, A_n$ selalu ada namun $\lim A_n$ belum tentu ada.

1.3. Lapangan dan Lapangan-σ

A. Ketertutupan

Misal $\mathcal{A}$ adalah kelas dari himpunan.

Jika setelah melakukan suatu operasi pada satu atau lebih elemen dari $\mathcal{A}$, kita peroleh elemen dari kelas yang sama, maka kita katakan kelas tersebut tertutup di bawah operasi tersebut.

Jika:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$$

Maka $\mathcal{A}$ dikatakan tertutup terhadap operasi komplemen.

Jika:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$

Maka $\mathcal{A}$ dikatakan tertutup terhadap operasi gabungan.

Dapat dibuktikan dengan induksi bahwa jika:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \forall n < \infty$$

Maka $\mathcal{A}$ dikatakan tertutup terhadap operasi gabungan finit.

Hal serupa berlaku jika:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

Maka $\mathcal{A}$ dikatakan tertutup terhadap operasi irisan.

Dan dapat dibuktikan dengan induksi bahwa jika:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \forall n < \infty$$

Maka $\mathcal{A}$ dikatakan tertutup terhadap operasi irisan finit.

B. Lapangan, Lapangan Minimal, dan Partisi

1. Lapangan (*Field*)

   Sebuah kelas himpunan tak kosong $\mathcal{A}$ yang tertutup terhadap operasi komplemen dan irisan finit, dinamakan *field*.

<u>Lemma 1.2</u> Sebuah lapangan tertutup terhadap operasi gabungan finit. Secara konvers, sebuah kelas yang tertutup terhadap komplemen dan gabungan finit adalah sebuah lapangan.
<u>Lemma 1.3</u> Setiap lapangan mengandung $\emptyset$ dan Ω.

Kelas yang mengandung hanya $\emptyset$ dan Ω adalah sebuah lapangan. Ini adalah lapangan terkecil dan terkandung dalam seluruh lapangan lain.

2. Lapangan Minimal (*Minimal Field*)
   Lapangan minimal adalah $\{\emptyset, \Omega\}$ dan dikenal sebagai *degenerate* atau *trivial field*.
   Lapangan maksimal adalah $\mathcal{P}\{\Omega\}$.

   Sebuah lapangan yang mengandung A harus mengandung A^C, sehingga harus mengandung kelas $\{A, A^C, \emptyset, \Omega\}$. Namun kelas ini adalah sebuah lapangan yang terkandung dalam setiap lapangan yang mengandung A. Artinya, kelas ini adalah lapangan minimal yang mengandung A. Ini dinotasikan dengan $\mathcal{F}\{A\} = \{A, A^C, \emptyset, \Omega\}$.

<u>Teorema 1.1</u> Irisan sembarang banyaknya lapangan adalah sebuah lapangan.

   <u>Warning</u>: Ini belum tentu berlaku untuk gabungan lapangan.
   Counterexample:
   $\{A, A^C, \emptyset, \Omega\}$ dan $\{B, B^C, \emptyset, \Omega\}$ adalah lapangan-lapangan, namun:
   $$\{A, A^C, B, B^C, \emptyset, \Omega\}$$
   bukan sebuah lapangan karena tidak tertutup terhadap operasi $\cap$.

3. Partisi (*Partition*)
   Misal kita punya kelas $S = \{A, B\}$ dengan A, B adalah himpunan-himpunan.
   Jika berlaku $A \cap B = \emptyset$ (*mutually exclusive*) dan $A \cup B = \Omega$ (*exhaustive*) maka S dikatakan sebuah partisi.

   Secara umum, misal $\{A_i; i = 1,2, \dots, n\}$ adalah kelas himpunan-himpunan disjoint $\ni$
   $$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$
   Maka $\{A_i\}$ dikatakan sebagai partisi dari Ω.

   Misal kita punya kelas $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ dimana A_1, A_2, A_3, A_4 himpunan-himpunan yang mutually exclusive and exhaustive. Maka lapangan minimal dari S adalah:
   $$\begin{aligned}\mathcal{F}\{S\} = \{&\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_4, A_1 + A_2, A_1 + A_3, A_1 + A_4, A_2 + A_3, A_2 + A_4, A_3 + A_4,\\ &A_1 + A_2 + A_3, A_1 + A_2 + A_4, A_1 + A_3 + A_4, A_2 + A_3 + A_4,\\ &A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \Omega\}\end{aligned}$$

   Konsep ini dapat diperluas hingga $S = \{A_i; i = 1,2, \dots, n\}$.
   Dapat ditunjukkan bahwa $|\mathcal{F}\{S\}| = 2^n$.

Partisi $\mathcal{A}'$ dikatakan *finer* daripada partisi $\mathcal{A}$ jika lapangan minimal $\mathcal{F}\{\mathcal{A}'\}$ yang mengandung $\mathcal{A}'$ mengandung lapangan minimal $\mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$ yang mengandung $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ dikatakan *coarser* daripada partisi $\mathcal{A}'$.

e.g.:

$$\mathcal{A} = \{A, A^C\}, \qquad \mathcal{A}' = \{A, BA^C, (A \cup B)^C\}, \qquad \mathcal{A}'' = \{AB, AB^C, BA^C, (A \cup B)^C\}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $\mathcal{A}$ coarser daripada $\mathcal{A}'$ dan $\mathcal{A}''$ finer daripada $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}'$.

4. Mencari Lapangan Minimal dari sembarang Kelas

   Kita telah liat dari poin sebelumnya bahwa mudah untuk mencari lapangan minimal $\mathcal{F}\{\mathcal{C}\}$ yang mengandung $\mathcal{C}$ apabila $\mathcal{C}$ adalah sebuah partisi. Namun secara umum, jika $\mathcal{C}$ bukan partisi, maka kita dapat memeroleh $\mathcal{F}\{\mathcal{C}\}$ melalui tahapan-tahapan berikut:

   (i) Peroleh $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \Omega, A, A^C, \text{sedemikian sehingga } A \in \mathcal{C} \text{ atau } A^C \in \mathcal{C}\}$ dimana $A \subset \Omega$. Maka $\mathcal{C}_1$ tertutup terhadap operasi komplemen dan mengandung $\mathcal{C}$.

   (ii) Peroleh kelas $\mathcal{C}_2$ yang mengandung $\cap_{k=1}^{n} B_k$, kapan pun $B_k \in \mathcal{C}_1$, untuk sembarang n. Maka sekarang $\mathcal{C}_2$ tertutup terhadap irisan finit, namun tidak di bawah komplemen.

   (iii) Peroleh $\mathcal{C}_3$, kelas dari semua gabungan finit dari pair-wise disjoint subsets yang tergabung ke $\mathcal{C}_2$. Karena mereka juga mengandung komplemen, maka $\mathcal{C}_3$ adalah sebuah lapangan dan adalah lapangan minimal yang mengandung $\mathcal{C}$.

   e.g.:

   Misal $\mathcal{C} = \{A, B\}$

   1. Definisikan $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \Omega, A, B, A^C, B^C\}$ sebagai kelas yang mengandung $\emptyset, \Omega$, dan $\mathcal{C}$ beserta komplemennya.
   2. Definisikan $\mathcal{C}_2 = \{c: c \in \mathcal{C}_1\} \cup \{AB, AB^C, A^C B, A^C B^C\}$ sebagai kelas yang mengandung $\mathcal{C}_1$ beserta irisan tiap dua elemen di $\mathcal{C}_1$.
   3. Definisikan $\mathcal{C}_3 = \{c: c \in \mathcal{C}_2\} \cup \{AB + A^C B^C, AB^C + A^C B, AB + AB^C + A^C B, AB + AB^C + A^C B^C, AB + A^C B + A^C B^C, AB^C + A^C B + A^C B^C\}$ sebagai kelas yang mengandung $\mathcal{C}_2$ beserta gabungan tiap dua elemen disjoint di $\mathcal{C}_2$.

   Maka $\mathcal{F}\{C\} = \mathcal{C}_3$ adalah lapangan minimal yang mengandung $\mathcal{C}$.

   Dapat ditunjukkan bahwa ini akan sama dengan lapangan minimal yang mengandung partisi $\{AB, AB^C, A^C B, A^C B^C\}$.

   Lapangan minimal yang mengandung $\{A, B, C\}$ adalah lapangan minimal yang mengandung partisi $\{ABC, A^C BC, AB^C C, ABC^C, A^C B^C C, AB^C C^C, A^C BC^C, A^C B^C C^C\}$.

C. σ-field, Borel Field

Ketertutupan terhadap operasi finit tidak berarti ketertutupan terhadap operasi terhitung. Sebuah kelas himpunan tak kosong yang tertutup terhadap komplemen dan gabungan terhitung (atau irisan terhitung) dinamakan σ-*field*.

Teorema 1.2
Irisan sembarang banyaknya lapangan-σ adalah sebuah lapangan-σ.

Untuk suatu kelas $\mathcal{C}$, lapangan-σ minimal yang mengandung kelas $\mathcal{C}$ akan dinotasikan dengan $\sigma(\mathcal{C})$. Ini adalah irisan dari semua lapangan-σ yang mengandung $\mathcal{C}$. Ini juga dinamakan sebagai lapangan-σ yang dibentuk oleh $\mathcal{C}$. Jika $\mathcal{C}$ finit, maka lapangan minimal $\mathcal{F}\{\mathcal{C}\}$ yang mengandung $\mathcal{C}$ akan sama dengan lapangan-σ minimal $\sigma(\mathcal{C})$ yang mengandung $\mathcal{C}$.

Untuk memeroleh $\sigma(\mathcal{C})$ dari suatu kelas $\mathcal{C}$, gunakan langkah-langkah (i) sampai (iii) yang digunakan untuk memeroleh $\mathcal{F}\{\mathcal{C}\}$ dari kelas $\mathcal{C}$ namun pada langkah (ii) kita membolehkan n menjadi ∞.

Kasus khusus dari σ-field adalah *Borel Field*.
Untuk lebih mudah memahami ini, kita mulai dari sebuah contoh.

Misal $\mathcal{C} = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$.
Perhatikan:
- $(-\infty, x)^C = [x, \infty) \notin \mathcal{C}$
- $(-\infty, x) \cap (-\infty, y) = (-\infty, u) \in \mathcal{C}$ dengan $u = \min\{x, y\}$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right) = (-\infty, x] \notin \mathcal{C}$

Artinya $\mathcal{C}$ bukan lapangan.

Sekarang kita akan tentukan $\sigma(\mathcal{C})$.

Langkah-langkah:
1. $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \Omega, (-\infty, x), [x, \infty)\}, x \in \mathbb{R}$
2. $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \cup \{\bigcap_{k=1}^{n} B_k : B_k \in \mathcal{C}_1\}$, n boleh tak hingga
3. $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 \cup \{\text{gabungan dari himpunan-himpunan disjoint di } \mathcal{C}_2\}$

Maka $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_3$.
Misal $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$.
Akan ditentukan $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = {} & \{\emptyset, \Omega\} \cup \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\} \cup \\
& \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right) = (-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\right\} \cup \{(x, \infty) : x \in \mathbb{R}\} \cup \\
& \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \\
& \{(a, b)^C : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, b)^C : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b]^C : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, b]^C : a, b \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Keterangan:
- Baris pertama adalah $\mathcal{C}_1$.
- Baris kedua adalah irisan tak berhingga dan komplemennya.

- Baris ketiga:
  - $(-\infty, b) \cap (a, \infty) = (a, b) \in \mathcal{B}$
  - $(-\infty, b) \cap [a, \infty) = [a, b) \in \mathcal{B}$
  - $(-\infty, b] \cap (a, \infty) = (a, b] \in \mathcal{B}$
  - $(-\infty, b] \cap [a, \infty) = [a, b] \in \mathcal{B}$
- Baris keempat adalah komplemen dari baris ketiga:
  - $(a, b)^C = (-\infty, a] \cup [b, \infty) \in \mathcal{B}$
  - $[a, b)^C = (-\infty, a) \cup [b, \infty) \in \mathcal{B}$
  - $(a, b]^C = (-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathcal{B}$
  - $[a, b]^C = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \mathcal{B}$

Sehingga, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ mengandung subset-subset dari garis bilangan real, $\mathcal{B}$ dinamakan Borel Field dari $\mathcal{C}$. $\mathcal{B}$ yang selanjutnya jika tidak dijelaskan akan sama dengan yang ini.

Lemma 1.4 Misal $\mathcal{C}_1$ adalah kelas dari semua interval dalam bentuk (a, b) dimana $a < b$ dan a, b sembarang bilangan $\mathbb{R}$. Maka $\sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}$
Corollary Lemma 1.4 Dengan membuktikan Lemma 1.4, menggunakan cara yang serupa kita akan peroleh bahwa Borel Field adalah lapangan-σ minimal yang mengandung satu kelas mana pun dari kelas-kelas berikut: - $\mathcal{C}_2 = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ - $\mathcal{C}_3 = \{(a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ - $\mathcal{C}_4 = \{[a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ - $\mathcal{C}_5 = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ - $\mathcal{C}_6 = \{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}$ dan sebagainya.

Sehingga, $\mathcal{B}$ mengandung semua subset-subset dari $\mathbb{R}$ dari bentuk di atas dan komplemen-komplemennya, gabungan-gabungan terhitungnya, dan irisan-irisannya.

Warning: Namun $\mathcal{B}$ bukan kelas dari semua subset dari $\mathbb{R}$.

Jika $x \in \mathbb{R}$, maka singleton set $\{x\}$ adalah Borel Set karena:

$$\{x\} = (-\infty, x] \cap [x, \infty)$$

(Karena $(-\infty, x] \in \mathcal{B}$ dan $[x, \infty) \in \mathcal{B}$, maka $\{x\} = (-\infty, x] \cap [x, \infty) \in \mathcal{B}$)

Dari sini, dapat ditunjukkan bahwa subset terhitung apa pun dari $\mathbb{R}$ adalah Borel Set.

D. Borel Field di $\mathbb{R}^n$

Misal $\mathcal{B}_2$ adalah Borel Field dari subset-subset di $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{B}_2$ didefinisikan sebagai σ-field minimal yang mengandung semua persegi panjang terbuka yang berbentuk:

$$B = \{(x, y): a < x < b, c < y < d; a < b, c < d; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Demikian pula, Borel Field $\mathcal{B}_n$ dari subset-subset di $\mathbb{R}^n$, ruang euclidean dimensi-n dengan titik umum $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dibentuk oleh persegi panjang terbuka dimensi-n yang berbentuk:

$$B = \{(x_1, \dots, x_n): a_i < x_i < b_i; i = 1,2, \dots, n\}$$

E. Monotone Field

σ-field juga dikenal sebagai σ-algebra di sumber-sumber lain.

Teorema berikutnya akan berguna dalam menentukan sebuah kelas adalah sebuah lapangan-σ atau bukan.

Sebuah lapangan $\mathcal{F}$ dikatakan sebagai *monotone field* apabila tertutup terhadap operasi monoton, yaitu $\lim A_n \in \mathcal{F}$, kapan pun $\{A_n\}$ adalah barisan monoton dari himpunan-himpunan dari $\mathcal{F}$, yaitu:

$$A_n \in \mathcal{F}, A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$$
$$A_n \in \mathcal{F}, A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$$

Teorema 1.3
$\mathcal{F}$ adalah σ-field $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ adalah monotone field

1.4. Kelas dari Kejadian

Misal kita melakukan sebuah percobaan random pelemparan sebuah dadu.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ adalah ruang sampel percobaan tersebut.

Misal kita ingin mengamati hasil yang ganjil, kita tulis sebagai $A = \{1,3,5\} \subseteq \Omega$.

Kita katakan A sebuah kejadian.

Suatu subset dari Ω belum tentu kejadian.

Misal kita melakukan percobaan random pelemparan sebuah dadu atau koin.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6, \text{Angka}, \text{Gambar}\}$ adalah ruang sampel percobaan tersebut.

Apabila kita ingin mengambil sebuah kejadian, maka kita harus memilih hanya salahsatu: pelemparan dadu atau pelemparan koin.

Misal kita mengambil $s = \{5,6, \text{Angka}\}$. Maka walaupun $s \subseteq \Omega$ namun s bukan kejadian.

$\emptyset$ adalah kejadian yang tidak mungkin terjadi.

Ω adalah kejadian yang pasti terjadi.