Xyba Project

Matematika Aktuaria 1

Pembahasan UTS Tahun 2017

1. This document is version: 0.8.9
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people
2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so
3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016
4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me
5. Last Updated: 21/10/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Diketahui

$$S_0(x) = \frac{(10-x)^2}{100}, 0 \le x \le 10$$

Hitunglah perbedaan antara *force of mortality* pada usia 1 tahun (μ_1) dan peluang seseorang yang berusia 1 tahun meninggal sebelum usia 2 tahun.

2. Diberikan *force of mortality* $\mu_x = 2x$. Untuk random variabel *future lifetime* dari seseorang yang baru lahir, tentukan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$, fungsi densitas $f(x)$, dan fungsi survival $S(x)$.

3. Diketahui $\mu_x = \frac{2}{100-x}, 0 \le x < 100$. Tentukan ${}_{10|}q_{65}$.

4. Tentukan q_{20}, jika diketahui:
   i. $\mathring{e}_{20} = 30$ dan
   ii. mortalitas mengikuti hukum De Moivre

5. Hitunglah masing-masing peluang berikut menggunakan *life table* di bawah ini. Kemudian ekspresikan peluang berikut dalam notasi aktuaria (misal ${}_tp_x$, ${}_tq_x$, ${}_{t|u}q_x$). Juga jelaskan dengan kata-kata (interpretasikan) masing-masing peluang berikut.

x	l_x	d_x
30	10000	34
31	9965	38
32	9927	41
33	9885	45
34	9839	50
35	9789	55
36	9734	60
37	9673	66
38	9607	72
39	9534	80

   a. $S_{35}(3)$
   b. $F_{31}(6)$
   c. $S_{33}(2) - S_{33}(5)$
   d. $S_{30}(8)/S_{30}(6)$

6. Anda bekerja di Fratama Life Consulting. Teman kerja Anda memberikan informasi sebagai berikut.

x	l_x
55	85916
56	84772
57	83507
58	82114

   a. Tentukan ${}_{1.4}p_{55}$ dan ${}_{0.5|1.6}q_{55}$ jika berlaku asumsi UDD pada *fractional ages.*
   b. Tentukan ${}_{1.4}p_{55}$ dan ${}_{0.5|1.6}q_{55}$ jika berlaku asumsi CFM pada *fractional ages.*
   c. Klien Anda tidak familiar dengan notasi aktuaria tersebut dan bertanya kepada Anda, "Apa arti dari ${}_{1.4}p_{55}$ dan ${}_{0.5|1.6}q_{55}$?" Jawab pertanyaannya menggunakan satu atau dua kalimat.

7. Untuk *select and ultimate table* dengan periode seleksi 1 tahun, diberikan

x	$l_{[x]}$	$d_{[x]}$	l_{x+1}	$\mathring{e}_{[x]}$
80	1000	90		8.5
81	920	90		

   i. Berlaku asumsi UDD.
   ii. Gunakan formula rekursif pada ekspektasi *future lifetime*.

   Tentukan $e_{[81]}$.

8. Seorang mahasiswa bernama Badu yang berusia x tahun mengendarai sepeda motor setiap hari tanpa menggunakan helm dan fungsi survival ${}_tp_x = e^{-t/80}, x \geq 0, t \geq 0$. Jika dia memutuskan untuk mulai menggunakan helm, fungsi survival Badu akan menjadi ${}_tp_x^* = \left({}_tp_x\right)^{0.8}$.
   a. Tentukan force of mortality Badu (μ_x^*) jika dia mulai menggunakan helm. Tentukan persentase penurunan force of mortality Badu tersebut.
   b. Tentukan harapan hidup lengkap Badu (*complete expectation of life*) $\mathring{e}_x$ jika ia tetap mengendarai motor tanpa menggunakan helm.
   c. Berapakah kenaikan harapan hidup lengkap Badu (*complete expectation of life*) $\mathring{e}_x$ jika ia mulai menggunakan helm.
   d. Tentukan $\mathring{e}_x$ untuk $x = 30$ dan $x = 90$. Jelaskan jawaban Anda.

Jawaban

1. Diketahui

$$S_0(x) = \frac{(10-x)^2}{100}, 0 \le x \le 10$$

   Hitunglah perbedaan antara *force of mortality* pada usia 1 tahun (μ_1) dan peluang seseorang yang berusia 1 tahun meninggal sebelum usia 2 tahun.

Jawab:

Tulis ulang $S_0(x) = \dfrac{(10-x)^2}{100} = \dfrac{1}{100}(x-10)^2, 0 \le x \le 10$, maka:

$$\mu_x = -\frac{S_0'(x)}{S_0(x)} = -\frac{\frac{1}{50}(x-10)}{\frac{1}{100}(x-10)^2} = -\frac{2}{x-10}$$

Sehingga diperoleh $\mu_1 = -\dfrac{2}{1-10} = \dfrac{2}{9}$

Peluang seseorang yang berusia 1 tahun meninggal sebelum usia 2 tahun diberikan oleh:

$$q_1 = \Pr(T_1 \le 1) = F_1(1) = 1 - S_1(1) = 1 - \frac{S_0(2)}{S_0(1)} = 1 - \frac{(-8)^2}{(-9)^2} = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81}$$

Maka perbedaan antara μ_1 dan $\Pr(T_1 \le 1)$ diberikan oleh:

$$|\mu_1 - \Pr(T_1 \le 1)| = \left|\frac{2}{9} - \frac{17}{81}\right| = \left|\frac{18-17}{81}\right| = \left|\frac{1}{81}\right| = \frac{1}{81}$$

$\therefore$ Perbedaan antara μ_1 dan $\Pr(T_1 \le 1)$ adalah $\dfrac{1}{81} \approx 0.012$.

==

2. Diberikan *force of mortality* $\mu_x = 2x$. Untuk random variabel *future lifetime* dari seseorang yang baru lahir, tentukan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$, fungsi densitas $f(x)$, dan fungsi survival $S(x)$.

Jawab:

$$S(x) = S_0(x) = \exp\left[-\int_0^x \mu_s\, ds\right] = \exp\left[-\int_0^x 2s\, ds\right] = \exp[-[s^2]_0^x] = \exp[-x^2] = e^{-x^2}$$

$$F(x) = F_0(x) = 1 - S_0(x) = 1 - e^{-x^2}$$

$$\mu_x = -\frac{S_0'(x)}{S_0(x)} = \frac{f_0(x)}{S_0(x)} \Leftrightarrow f_0(x) = -S_0'(x) = -(-2x)e^{-x^2} = 2x\, e^{-x^2}$$

$$\therefore F(x) = 1 - e^{-x^2}, \qquad f(x) = 2x\, e^{-x^2}, \qquad S(x) = e^{-x^2}$$

==

3. Diketahui $\mu_x = \frac{2}{100-x}, 0 \le x < 100$. Tentukan ${}_{10|}q_{65}$.

Jawab:

$$S_0(x) = \exp\left[-\int_0^x \mu_s\,ds\right] = \exp\left[-\int_0^x \frac{2}{100-s}\,ds\right] = \exp\left[2\int_0^x \frac{1}{s-100}\,ds\right]$$

$$= \exp\left[2\int_0^x \frac{1}{s-100}\,ds\right] = \exp[2[\ln|s-100|]_0^x] = \exp[2(\ln|x-100| - \ln|-100|)]$$

$$= \exp\left[2\left(\ln\left|\frac{x-100}{-100}\right|\right)\right] = \exp\left[\ln\left(\frac{x-100}{-100}\right)^2\right] = \left(\frac{x-100}{-100}\right)^2 = \left(1-\frac{x}{100}\right)^2$$

$${}_{10|}q_{65} = {}_{10}p_{65} - {}_{11}p_{65} = S_{65}(10) - S_{65}(11) = \frac{S_0(75)}{S_0(65)} - \frac{S_0(76)}{S_0(65)} = \frac{1}{S_0(65)}\left(S_0(75) - S_0(76)\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{35}{100}\right)^2}\left(\left(\frac{25}{100}\right)^2 - \left(\frac{24}{100}\right)^2\right) = \left(\frac{100}{35}\right)^2\left(\frac{49}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{49}{35\cdot 35} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore\ {}_{10|}q_{65} = \frac{1}{25}$$

==

4. Tentukan q_{20}, jika diketahui:
   i. $\mathring{e}_{20} = 30$ dan
   ii. mortalitas mengikuti hukum De Moivre

Jawab:

Berdasarkan hukum De Moivre,

$$f_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, \qquad S_x(t) = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}, \qquad \mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}$$

Tulis ulang: $S_x(t) = \dfrac{\omega - x - t}{\omega - x} = 1 - \dfrac{t}{\omega - x}, 0 \le t \le \omega - x$

Perhatikan:

$$\mathring{e}_{20} = \int_0^\infty {}_tp_{20}\,dt = \int_0^{\omega-20}\left(1 - \frac{t}{\omega-20}\right)dt = \left[t - \frac{t^2}{2(\omega-20)}\right]_0^{\omega-20} = \omega - 20 - \frac{(\omega-20)^2}{2(\omega-20)}$$

$$= \omega - 20 - \frac{\omega-20}{2} = \frac{1}{2}(\omega - 20)$$

Karena $\mathring{e}_{20} = 30$, maka diperoleh:

$$\mathring{e}_{20} = 30 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\omega-20) = 30 \Leftrightarrow \omega - 20 = 60 \Leftrightarrow \omega = 80$$

Sehingga:

$$S_x(t) = 1 - \frac{t}{80-x}, 0 \le t \le 80 - x \quad \text{maka} \quad S_{20}(x) = 1 - \frac{x}{60}, 0 \le x \le 60$$

$$q_{20} = \Pr(T_{20} \le 1) = F_{20}(1) = 1 - S_{20}(1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{60}\right) = \frac{1}{60}$$

$$\therefore\ q_{20} = \frac{1}{60}$$

5. Hitunglah masing-masing peluang berikut menggunakan *life table* di bawah ini. Kemudian ekspresikan peluang berikut dalam notasi aktuaria (misal ${}_tp_x$, ${}_tq_x$, ${}_{t|u}q_x$). Juga jelaskan dengan kata-kata (interpretasikan) masing-masing peluang berikut.

x	l_x	d_x
30	10000	34
31	9965	38
32	9927	41
33	9885	45
34	9839	50
35	9789	55
36	9734	60
37	9673	66
38	9607	72
39	9534	80

a. $S_{35}(3)$
b. $F_{31}(6)$
c. $S_{33}(2) - S_{33}(5)$
d. $S_{30}(8)/S_{30}(6)$

Jawab:

a. $S_{35}(3) = {}_3p_{35}$

$$= \frac{l_{38}}{l_{35}} = \frac{9607}{9789} = 0.98140\ldots \approx 0.9814$$

∴ Peluang seseorang yang berusia 35 tahun hidup 3 tahun kemudian sekitar 0.9814.

b. $F_{31}(6) = {}_6q_{31} = 1 - {}_6p_{31}$

$$= 1 - \frac{l_{37}}{l_{31}} = 1 - \frac{9673}{9965} = \frac{292}{9965} = 0.02930\ldots \approx 0.0293$$

∴ Peluang seseorang yang berusia 31 tahun meninggal 6 tahun kemudian sekitar 0.0293.

c. $S_{33}(2) - S_{33}(5) = {}_2p_{33} - {}_5p_{33}$

$$= \frac{l_{35}}{l_{33}} - \frac{l_{38}}{l_{33}} = \frac{d_{35} + d_{36} + d_{37}}{l_{33}} = \frac{55 + 60 + 66}{9885} = \frac{181}{9885} \approx 0.0183$$

∴ Peluang seseorang yang berusia 33 tahun meninggal di antara 2 tahun dan 5 tahun kemudian sekitar 0.0183.

d. $S_{30}(8)/S_{30}(6) = {}_8p_{30}/{}_6p_{30}$

$$= \frac{l_{38}}{l_{30}} \Big/ \frac{l_{36}}{l_{30}} = \frac{l_{38}}{l_{36}} = \frac{9607}{9734} = 0.98695\ldots \approx 0.9870$$

∴ Peluang seseorang yang berusia 36 tahun hidup 2 tahun kemudian sekitar 0.9870.

==

6. Anda bekerja di Fratama Life Consulting. Teman kerja Anda memberikan informasi sebagai berikut.

x	l_x
55	85916
56	84772
57	83507
58	82114

   a. Tentukan ${}_{1.4}p_{55}$ dan ${}_{0.5|1.6}q_{55}$ jika berlaku asumsi UDD pada *fractional ages.*
   b. Tentukan ${}_{1.4}p_{55}$ dan ${}_{0.5|1.6}q_{55}$ jika berlaku asumsi CFM pada *fractional ages.*
   c. Klien Anda tidak familiar dengan notasi aktuaria tersebut dan bertanya kepada Anda, "Apa arti dari ${}_{1.4}p_{55}$ dan ${}_{0.5|1.6}q_{55}$?" Jawab pertanyaannya menggunakan satu atau dua kalimat.

Jawab:

Berdasarkan sifat ${}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t}$ dan ${}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x$, kita peroleh:

$$ {}_{1.4}p_{55} = p_{55} \cdot {}_{0.4}p_{56} = \frac{l_{56}}{l_{55}} \cdot {}_{0.4}p_{56} $$

$$ {}_{0.5|1.6}q_{55} = {}_{0.5}p_{55} - {}_{2.1}p_{55} = {}_{0.5}p_{55} - {}_{2}p_{55} \cdot {}_{0.1}p_{57} = {}_{0.5}p_{55} - \frac{l_{57}}{l_{55}} \cdot {}_{0.1}p_{57} $$

a. Karena berlaku asumsi UDD, maka:

$$ \begin{aligned} {}_{1.4}p_{55} &= \frac{l_{56}}{l_{55}} \cdot {}_{0.4}p_{56} = \frac{l_{56}}{l_{55}}(1 - 0.4q_{56}) = \frac{l_{56}}{l_{55}}\left(1 - 0.4\left(1 - \frac{l_{57}}{l_{56}}\right)\right) = \frac{l_{56}}{l_{55}}\left(0.6 + 0.4\frac{l_{57}}{l_{56}}\right) \\ &= 0.6\frac{l_{56}}{l_{55}} + 0.4\frac{l_{57}}{l_{55}} = \frac{0.6l_{56} + 0.4l_{57}}{l_{55}} = \frac{0.6 \cdot 84772 + 0.4 \cdot 83507}{85916} \\ &= 0.98079 \ldots \approx 0.9808 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} {}_{0.5|1.6}q_{55} &= {}_{0.5}p_{55} - \frac{l_{57}}{l_{55}} \cdot {}_{0.1}p_{57} = (1 - 0.5q_{55}) - \frac{l_{57}}{l_{55}}(1 - 0.1q_{57}) \\ &= \left(1 - 0.5\left(1 - \frac{l_{56}}{l_{55}}\right)\right) - \frac{l_{57}}{l_{55}}\left(1 - 0.1\left(1 - \frac{l_{58}}{l_{57}}\right)\right) \\ &= \left(0.5 + 0.5\frac{l_{56}}{l_{55}}\right) - \frac{l_{57}}{l_{55}}\left(0.9 + 0.1\frac{l_{58}}{l_{57}}\right) \\ &= \left(0.5 + 0.5\frac{l_{56}}{l_{55}}\right) - \left(0.9\frac{l_{57}}{l_{55}} + 0.1\frac{l_{58}}{l_{55}}\right) \\ &= 0.5 + \frac{0.5l_{56} - 0.9l_{57} - 0.1l_{58}}{l_{55}} \\ &= 0.5 + \frac{0.5 \cdot 84772 - 0.9 \cdot 83507 - 0.1 \cdot 82114}{85916} \\ &= 0.02300 \ldots \approx 0.0230 \end{aligned} $$

b. Karena berlaku asumsi CFM, maka:

$$
\begin{aligned}
{}_{1.4}p_{55} &= \frac{l_{56}}{l_{55}} \cdot {}_{0.4}p_{56} = \frac{l_{56}}{l_{55}}(p_{56})^{0.4} = \frac{l_{56}}{l_{55}}\left(\frac{l_{57}}{l_{56}}\right)^{0.4} = \frac{(l_{56})^{0.6}(l_{57})^{0.4}}{l_{55}} \\
&= \frac{(84772)^{0.6}(83507)^{0.4}}{85916} = 0.98076 \ldots \approx 0.9808
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{0.5|1.6}q_{55} &= {}_{0.5}p_{55} - \frac{l_{57}}{l_{55}} \cdot {}_{0.1}p_{57} = (p_{55})^{0.5} - \frac{l_{57}}{l_{55}}(p_{57})^{0.1} = \left(\frac{l_{56}}{l_{55}}\right)^{0.5} - \frac{l_{57}}{l_{55}}\left(\frac{l_{58}}{l_{57}}\right)^{0.1} \\
&= \frac{(l_{56})^{0.5}}{(l_{55})^{0.5}} - \frac{(l_{57})^{0.9}(l_{58})^{0.1}}{l_{55}} = \frac{(l_{55})^{0.5}(l_{56})^{0.5} - (l_{57})^{0.9}(l_{58})^{0.1}}{l_{55}} \\
&= \frac{(85916)^{0.5}(84772)^{0.5} - (83507)^{0.9}(82114)^{0.1}}{85916} = 0.02299 \ldots \approx 0.0230
\end{aligned}
$$

c. ${}_{1.4}p_{55}$: Peluang seseorang berusia 55 tahun hidup 1.4 tahun kemudian.

${}_{0.5|1.6}q_{55}$: Peluang seseorang berusia 55 tahun meninggal antara 0.5 tahun dan 1.6 tahun kemudian.

==

7. Untuk *select and ultimate table* dengan periode seleksi 1 tahun, diberikan

x	$l_{[x]}$	$d_{[x]}$	l_{x+1}	$\mathring{e}_{[x]}$
80	1000	90		8.5
81	920	90		

i. Berlaku asumsi UDD.

ii. Gunakan formula rekursif pada ekspektasi *future lifetime*.

Tentukan $e_{[81]}$.

Jawab:

Perhatikan bahwa:

$l_{81} = l_{[80]+1} = l_{[80]} - d_{[80]} = 1000 - 90 = 910$

$l_{82} = l_{[81]+1} = l_{[81]} - d_{[81]} = 920 - 90 = 830$

Sehingga tabelnya menjadi:

x	$l_{[x]}$	$d_{[x]}$	l_{x+1}	$\mathring{e}_{[x]}$
80	1000	90	910	8.5
81	920	90	830	

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
e_x &= \sum_{k=1}^{\infty} {}_{k}p_x = p_x + {}_{2}p_x + {}_{3}p_x + \cdots = p_x + p_x p_{x+1} + p_x\, {}_{2}p_{x+1} + \cdots \\
&= p_x\left(1 + p_{x+1} + {}_{2}p_{x+1} + \cdots\right) = p_x\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} {}_{k}p_{x+1}\right) = p_x(1 + e_{x+1})
\end{aligned}
$$

Berdasarkan asumsi UDD, $\dot{e}_x = e_x + 0.5$, maka:

$$\dot{e}_{[80]} = e_{[80]} + 0.5 \Leftrightarrow e_{[80]} = \dot{e}_{[80]} - 0.5 = 8.5 - 0.5 = 8$$

Berdasarkan rumus $e_x = p_x(1 + e_{x+1})$, maka kita peroleh:

$$\begin{aligned} p_{[80]}\left(1 + e_{[80]+1}\right) = e_{[80]} &\Leftrightarrow \frac{l_{[80]+1}}{l_{[80]}}\left(1 + e_{[80]+1}\right) = 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{l_{81}}{l_{[80]}}(1 + e_{81}) = 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{910}{1000}(1 + e_{81}) = 8 \\ &\Leftrightarrow e_{81} = 8 \cdot \frac{100}{91} - 1 = \frac{800}{91} - 1 = \frac{709}{91} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{81}(1 + e_{82}) = e_{81} &\Leftrightarrow \frac{l_{82}}{l_{81}}(1 + e_{82}) = \frac{709}{91} \\ &\Leftrightarrow \frac{830}{910}(1 + e_{82}) = \frac{709}{91} \\ &\Leftrightarrow e_{82} = \frac{709}{91} \cdot \frac{91}{83} - 1 = \frac{709}{83} - 1 = \frac{626}{83} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{[81]} &= p_{[81]}\left(1 + e_{[81]+1}\right) = \frac{l_{[81]+1}}{l_{[81]}}\left(1 + e_{[81]+1}\right) = \frac{l_{82}}{l_{[81]}}(1 + e_{82}) = \frac{830}{920}\left(1 + \frac{626}{83}\right) \\ &= \frac{830}{920}\left(\frac{709}{83}\right) = \frac{709}{92} = 7.70652 \ldots \approx 7.7065 \end{aligned}$$

$$\therefore e_{[81]} = \frac{709}{92}$$

==

8. Seorang mahasiswa bernama Badu yang berusia x tahun mengendarai sepeda motor setiap hari tanpa menggunakan helm dan fungsi survival ${}_tp_x = e^{-t/80}, x \geq 0, t \geq 0$. Jika dia memutuskan untuk mulai menggunakan helm, fungsi survival Badu akan menjadi ${}_tp_x^* = \left({}_tp_x\right)^{0.8}$.
   a. Tentukan force of mortality Badu (μ_x^*) jika dia mulai menggunakan helm. Tentukan persentase penurunan force of mortality Badu tersebut.
   b. Tentukan harapan hidup lengkap Badu (*complete expectation of life*) $\dot{e}_x$ jika ia tetap mengendarai motor tanpa menggunakan helm.
   c. Berapakah kenaikan harapan hidup lengkap Badu (*complete expectation of life*) $\dot{e}_x$ jika ia mulai menggunakan helm.
   d. Tentukan $\dot{e}_x$ untuk $x = 30$ dan $x = 90$. Jelaskan jawaban Anda.

Jawab:

a. Akan ditentukan force of mortality tanpa helm μ_x dan dengan helm μ_x^*.

$$\mu_{x+t}=\frac{f_x(t)}{S_x(t)}=-\frac{S_x(t)'}{S_x(t)}=-\frac{\left({}_tp_x\right)'}{{}_tp_x}=-\frac{-\frac{1}{80}e^{-\frac{t}{80}}}{e^{-\frac{t}{80}}}=\frac{1}{80}\Rightarrow\mu_x=\frac{1}{80}$$

$$\mu_{x+t}^*=-\frac{\left({}_tp_x^*\right)'}{{}_tp_x^*}=-\frac{\left(\left({}_tp_x\right)^{0.8}\right)'}{\left({}_tp_x\right)^{0.8}}=-\frac{\left(\left(e^{-\frac{t}{80}}\right)^{0.8}\right)'}{\left(e^{-\frac{t}{80}}\right)^{0.8}}=-\frac{-\frac{1}{100}e^{-\frac{t}{100}}}{e^{-\frac{t}{100}}}=\frac{1}{100}\Rightarrow\mu_x^*=\frac{1}{100}$$

dengan $x\geq 0, t\geq 0$. Persentase penurunan force of mortality Badu diberikan oleh:

$$\frac{\mu_x-\mu_x^*}{\mu_x}\cdot 100\%=\left(\frac{\frac{1}{80}-\frac{1}{100}}{\frac{1}{80}}\right)\cdot 100\%=\left(\frac{\frac{1}{400}}{\frac{1}{80}}\right)\cdot 100\%=\frac{1}{5}\cdot 100\%=20\%$$

Dengan kata lain, $\mu_x^*=0.8\mu_x$.

b. Akan ditentukan harapan hidup lengkap tanpa helm $\dot{e}_x$.

$$\dot{e}_x=\int_0^\infty {}_tp_x\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\frac{t}{80}}\,dt=-\frac{1}{\frac{1}{80}}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\frac{t}{80}}\right]_0^b=-80\left(\lim_{b\to\infty}e^{-\frac{b}{80}}-1\right)=80$$

c. Akan ditentukan harapan hidup lengkap dengan helm $\dot{e}_x^*$.

$$\dot{e}_x^*=\int_0^\infty {}_tp_x^*\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\frac{t}{100}}\,dt=-\frac{1}{\frac{1}{100}}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\frac{t}{100}}\right]_0^b=-100\left(\lim_{b\to\infty}e^{-\frac{b}{100}}-1\right)=100$$

Sehingga kenaikan harapan hidup lengkap Badu diberikan oleh:

$$\frac{\dot{e}_x^*-\dot{e}_x}{\dot{e}_x}\cdot 100\%=\frac{100-80}{80}\cdot 100\%=\frac{1}{4}\cdot 100\%=25\%$$

Dengan kata lain, $\dot{e}_x^*=1.25\dot{e}_x$.

d. Asumsi: Soal meminta menentukan harapan hidup lengkap tanpa helm $\dot{e}_x$ dan dengan lengkap $\dot{e}_x^*$ untuk $x=30$ dan $x=90$.
Berdasarkan jawaban bagian c, dapat dilihat bahwa $\dot{e}_x$ maupun $\dot{e}_x^*$ tidak bergantung pada x, artinya $\dot{e}_{30}=\dot{e}_{90}=80$ dan $\dot{e}_{30}^*=\dot{e}_{90}^*=100$. Ini berarti saat Badu berumur 30 maupun 90, tidak ada perubahan harapan kehidupan untuk Badu. Harapan kehidupan Badu hanya bergantung pada Badu menggunakan helm atau tidak. Jika Badu menggunakan helm, maka Badu dapat hidup hingga 20 tahun lebih lama.

==