Xyba Project

Matematika Dasar II

Pembahasan UAS 2017

1. This document is version: 0.8.8
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people.

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 01/06/2018

Thank you for your cooperation >v<

1. Diberikan suatu permukaan $x^3y + y\sin z + 2xz^2 = 0$
   a. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$
   b. Tentukan persamaan bidang singgung di titik (0,1,0).

Jawab:

a. Akan ditentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Karena fungsinya berbentuk $F(x,y,z) = x^3y + y\sin z + 2xz^2 = 0$ maka kita gunakan turunan implisit.

Pertama, kita tentukan terlebih dahulu $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$, dan $\frac{\partial F}{\partial z}$ sebagai berikut.

- Saat menurunkan secara parsial terhadap x, maka pandang y dan z sebagai konstanta, sehingga diperoleh:
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial(x^3y + y\sin z + 2xz^2)}{\partial x} = 3x^2y + 0 + 2z^2 = 3x^2y + 2z^2$$
- Saat menurunkan secara parsial terhadap y, maka pandang x dan z sebagai konstanta, sehingga diperoleh:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(x^3y + y\sin z + 2xz^2)}{\partial y} = x^3 + \sin z + 0 = x^3 + \sin z$$
- Saat menurunkan secara parsial terhadap z, maka pandang x dan y sebagai konstanta, sehingga diperoleh:
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial(x^3y + y\sin z + 2xz^2)}{\partial z} = 0 + y\cos z + 4xz = y\cos z + 4xz$$

Sehingga: $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2y + 2z^2}{y\cos z + 4xz}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x^3 + \sin z}{y\cos z + 4xz}$$

b. Akan ditentukan persamaan bidang singgung di titik (0,1,0).

Misal $f(x,y,z) = x^3y + y\sin z + 2xz^2 = 0$, maka persamaan bidang singgungnya di titik $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ diberikan oleh:
$$f_x(\mathbf{p})(x - x_0) + f_y(\mathbf{p})(y - y_0) + f_z(\mathbf{p})(z - z_0) = 0$$
Karena $f(x,y,z) = F(x,y,z)$ pada bagian sebelumnya, maka kita sudah temukan bahwa:
$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + 2z^2,\ \ f_y(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + \sin z,\ \ f_z(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial z} = y\cos z + 4xz$$
Sehingga pada titik $\mathbf{p} = (0,1,0)$, maka:
$$f_x(\mathbf{p}) = 0 + 0 = 0, \qquad f_y(\mathbf{p}) = 0 + 0 = 0, \qquad f_y(\mathbf{p}) = 1 + 0 = 1$$
Maka kita akan peroleh:
$$f_x(\mathbf{p})(x - x_0) + f_y(\mathbf{p})(y - y_0) + f_z(\mathbf{p})(z - z_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad 0(x - 0) + 0(y - 1) + 1(z - 0) = 0$$
Menyelesaikan persamaan ini, kita akan peroleh persamaan bidang singgung di titik $\mathbf{p} = (0,1,0)$ adalah $z = 0$.

2. Tentukan maksimum dan minimum dari $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3x - xy$ pada himpunan tutup dan terbatas $S = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 16\}$

Jawab:

Akan ditentukan maksimum dan minimum dari $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3x - xy$ di himpunan $S = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 16\}$ menggunakan metode pengali lagrange.

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3x - xy$ adalah fungsi objektif yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan.

Misal $g(x,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$ adalah kendala dari permasalahan ini.

Maka dengan metode pengali lagrange:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g \\ \Leftrightarrow \quad \langle f_x, f_y \rangle &= \lambda \langle g_x, g_y \rangle \\ \Leftrightarrow \langle 2x + 3 - y, 2y - x \rangle &= \lambda \langle 2x, 2y \rangle \end{aligned}$$

Sehingga kita akan peroleh SPLDV:

$$\begin{aligned} 2x + 3 - y &= 2\lambda x \\ 2y - x &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Kalikan persamaan pertama dengan y dan persamaan kedua dengan x kemudian kurangkan, sehingga kita akan peroleh:

$$\begin{aligned} y(2x + 3 - y) - x(2y - x) &= y(2\lambda x) - x(2\lambda y) \\ \Leftrightarrow \quad 2xy + 3y - y^2 - 2xy + x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= y^2 - 3y \end{aligned}$$

Sehingga kita dapatkan hubungan $x^2 = y^2 - 3y$

Substitusikan hubungan ini ke $g(x,y)$, maka kita akan peroleh:

$$x^2 + y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 16 = 0$$

Maka dengan menggunakan rumus kuadrat dengan $a = 2, b = -3, c = -16$, kita peroleh:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 128}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{137}}{4}$$

Tulis ulang $2y^2 - 3y - 16 = 0$ sebagai $y^2 - 3y = 16 - y^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 - y^2$

Jika $y = \dfrac{3 + \sqrt{137}}{4}$, maka diperoleh $x = \pm\sqrt{16 - y^2} = \pm\sqrt{16 - \left(\dfrac{3 + \sqrt{137}}{4}\right)^2}$

$$= \pm\sqrt{\frac{256 - \left(9 + 6\sqrt{137} + 137\right)}{16}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}$$

Jika $y = \dfrac{3 - \sqrt{137}}{4}$, maka diperoleh $x = \pm\sqrt{16 - y^2} = \pm\sqrt{16 - \left(\dfrac{3 - \sqrt{137}}{4}\right)^2}$

$$= \pm\sqrt{\frac{256 - \left(9 - 6\sqrt{137} + 137\right)}{16}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}$$

Sehingga kita peroleh 4 buah titik-titik kritis, yaitu:

$$\mathbf{p}_1 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}, \frac{3 + \sqrt{137}}{4}\right), \qquad \mathbf{p}_2 = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}, \frac{3 + \sqrt{137}}{4}\right),$$

$$\mathbf{p}_3 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}, \frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right), \qquad \mathbf{p}_4 = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}, \frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right)$$

Masukkan tiap titik ini ke fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan, yaitu $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x - xy$, sehingga:

$$f(\mathbf{p}_1) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}\right)^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{137}}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}\right) - \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}\right)\left(\frac{3 + \sqrt{137}}{4}\right)$$

$$= 16 + \frac{9}{16}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{137}{2}\left(55 - 3\sqrt{137}\right)} = 14.93393 \ldots \approx 14.9939$$

$$f(\mathbf{p}_2) = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}\right)^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{137}}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}\right) + \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}}\right)\left(\frac{3 + \sqrt{137}}{4}\right)$$

$$= 16 - \frac{9}{16}\sqrt{110 - 6\sqrt{137}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{137}{2}\left(55 - 3\sqrt{137}\right)} = 17.06607 \ldots \approx 17.0661$$

$$f(\mathbf{p}_3) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}\right)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}\right) - \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right)$$

$$= 16 + \frac{9}{16}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{137}{2}\left(55 + 3\sqrt{137}\right)} = 33.37242 \ldots \approx 33.3724$$

$$f(\mathbf{p}_4) = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}\right)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}\right) + \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right)$$

$$= 16 - \frac{9}{16}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{137}{2}\left(55 + 3\sqrt{137}\right)} = -1.37242 \ldots \approx -1.3724$$

Sehingga untuk fungsi yang diberikan $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x - xy$ pada himpunan tutup dan terbatas $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$, nilai maksimumnya dan minimumnya masing-masing diperoleh pada titik-titik:

$$\mathbf{p}_3 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}, \frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right), \qquad \mathbf{p}_4 = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{110 + 6\sqrt{137}}, \frac{3 - \sqrt{137}}{4}\right)$$

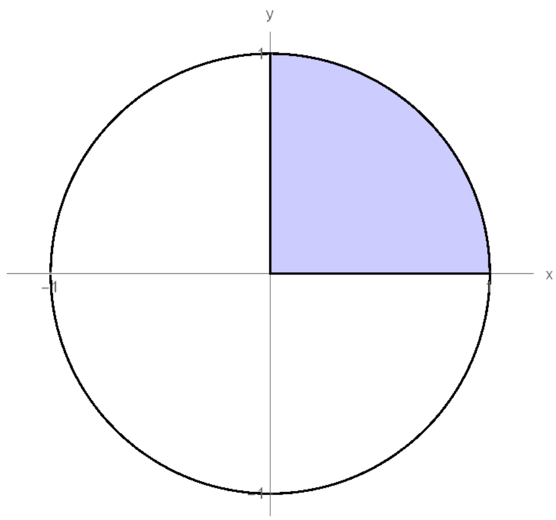
Dan menghasilkan nilai-nilai maksimum dan minimum fungsi masing-masing sekitar:

$$f(\mathbf{p}_3) \approx 33.3724, \qquad f(\mathbf{p}_4) \approx -1.3724$$

3. Kerjakan keduanya
   a. Hitung $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy$
   b. Benda pejal di oktan pertama dibatasi oleh tabung parabola $x^2 = 4y$, dan bidang-bidang $z = 0$, dan $5y + 9z - 45 = 0$. Sketsa benda pejal tersebut, kemudian hitung luas permukaan satu sisi dimana terdapat bidang $5y + 9z - 45 = 0$.

Jawab:

a. Akan dihitung $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy$.
   Bentuk ini akan lebih mudah dikerjakan menggunakan koordinat polar.
   Pertama, kita gambar dahulu daerah domainnya.
   Gambar berikut dibuat menggunakan Wolfram Mathematica.



   Domainnya diberikan oleh bagian yang diarsir pada gambar tersebut.
   Sehingga jika kita konversikan ke koordinat polar, kita akan punya:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin(r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin(r^2)\, r \frac{d(r^2)}{2r}\, d\theta$$

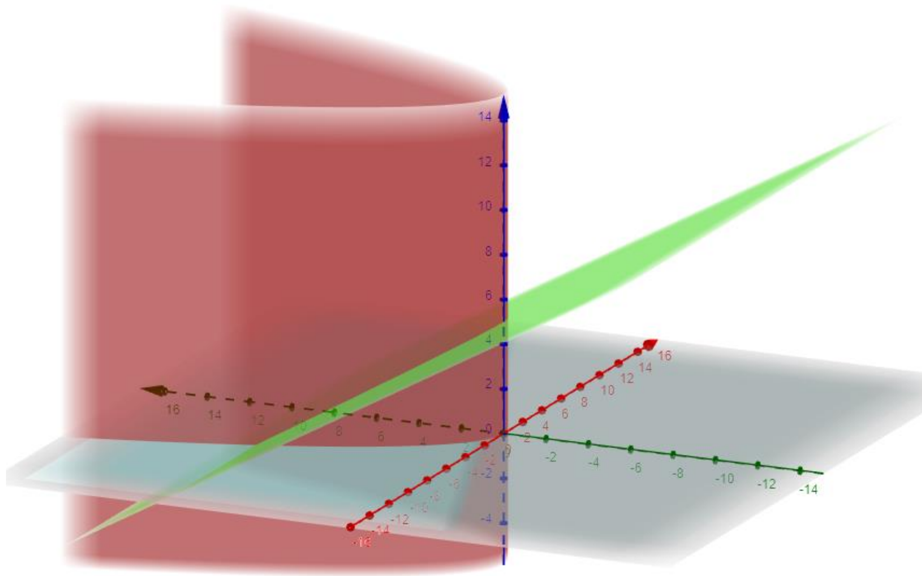
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin(r^2)\, d(r^2)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -[\cos(r^2)]_0^1\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos(1) - \cos(0))[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(1 - \cos 1)$$

b. Diberikan benda pejal di oktan pertama dibatasi oleh tabung parabola $x^2 = 4y$, dan bidang-bidang $z = 0$, dan $5y + 9z - 45 = 0$. Akan dihitung luas permukaan satu sisi dimana terdapat bidang $5y + 9z - 45 = 0$.
Pertama, mari kita gambar benda pejal tersebut.
Gambar berikut dibuat menggunakan Geogebra.



Sekarang untuk menentukan luas permukaannya, kita perlu mencari terlebih dahulu domain dari proyeksi benda pejal tersebut pada bidang-xy.
Domainnya dibatasi oleh titik-titik potong yang dapat kita temukan dengan menentukan solusi dari Sistem Persamaan Tiga Variabel berikut.

$$\begin{aligned} x^2 - 4y &= 0 \\ z &= 0 \\ 5y + 9z - 45 &= 0 \end{aligned}$$

Kita sudah memeroleh $z = 0$. Kita bisa substitusikan ini ke persamaan ketiga, sehingga:

$$5y + 0 - 45 = 0 \Leftrightarrow y = 9$$

Substitusikan ini ke persamaan pertama, sehingga:

$$x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6$$

Sehingga domain dari proyeksi benda pejal tersebut diberikan oleh:

$$D = \{(x, y): -6 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 9, x^2 \leq 4y\}$$

Akan ditentukan luas permukaan satu sisi dimana terdapat bidang $5y + 9z - 45 = 0$ dengan memanfaatkan y sebagai variabel bebas, dengan kata lain:

$$\iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy$$

Sebelum melanjut ke sini, kita perlu identifikasi fungsi f yang digunakan.

Kita ingin menentukan luas permukaan sisi dimana terdapat bidang $5y + 9z - 45 = 0$, maka tulis ulang fungsi tersebut sebagai $z = \frac{45-5y}{9} = 5 - \frac{5}{9}y$. Ini adalah $f(x, y)$ kita, dengan kata lain, $f(x, y) = z = 5 - \frac{5}{9}y$. Sehingga:

$$f_x(x, y) = 0, \qquad f_y(x, y) = -\frac{5}{9}$$

Sekarang kembali ke permasalah domain.

Karena kita ingin menggunakan y sebagai variabel bebas, maka x bergantung pada y. Gunakan persamaan pertama, sehingga $x = 0$ sampai $x^2 = 4y \Rightarrow x = 2\sqrt{y}$. ($x$ mulai dari 0 karena kita ingin menghitung hanya di oktan pertama.)

Maka luas permukaannya diberikan oleh:

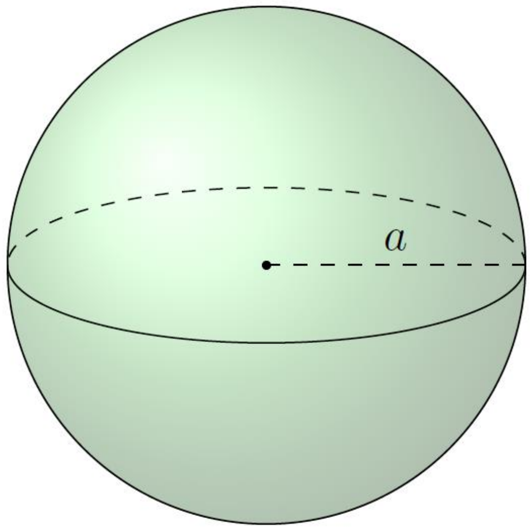
$$\iint\limits_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dxdy = \int_0^9 \int_0^{2\sqrt{y}} \sqrt{0 + \frac{25}{81} + 1}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{106}}{9} \int_0^9 \int_0^{2\sqrt{y}} dx\,dy$$

$$= \frac{\sqrt{106}}{9} \int_0^9 [x]_0^{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{\sqrt{106}}{9} \int_0^9 2\sqrt{y}\,dy = \frac{2}{9}\sqrt{106} \int_0^9 \sqrt{y}\,dy$$

$$= \frac{4}{27}\sqrt{106}\left[y\sqrt{y}\right]_0^9 = 4\sqrt{106}$$

4. Dengan menggunakan integral lipat tiga, **buktikanlah** bahwa volume bola yang berjari-jari a adalah $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Jawab:
Pertama, mari kita gambar dahulu bola dengan jari-jari a.
Gambar berikut dibuat menggunakan LaTeX.



Akan dibuktikan volume bola tersebut adalah $\frac{4}{3}\pi a^3$ menggunakan koordinat bola.
Bola tersebut diperoleh dari sebuah lingkaran dengan jari-jari a pada bidang-xy yang kemudian dirotasi pada poros pusat lingkaran sejauh π.
Sehingga kita akan peroleh batas-batas $\rho = 0$ sampai a, $\theta = 0$ sampai 2π karena merupakan lingkaran penuh dan $\phi = 0$ sampai π dari rotasi lingkaran pada poros pusat lingkaran sejauh π untuk membentuk bola.
Artinya, volume bola tersebut diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\phi\,[\rho^3]_0^a\,d\theta\,d\phi \\
&= \frac{1}{3}a^3\int_0^{\pi}\sin\phi\,[\theta]_0^{2\pi}\,d\phi \\
&= -\frac{2}{3}\pi a^3[\cos\phi]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{3}\pi a^3[\cos(\pi)-\cos(0)] \\
&= -\frac{2}{3}\pi a^3(-1-1) \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

Afterword

Pembuatan dokumen ini dibantu oleh:
1. namora03, Matematika UI 2016.
2. rilo_chand, Matematika UI 2016.