Xyba Project

Analisis 2

Pembahasan UTS April 2013

1. This document is version: 0.9.0
   Version should be at least 0.9 if you want to share this document to other people

2. You may not share this document if version is less than 1.0 unless you have my permission to do so

3. This document is created by Xyba, Student of Mathematics University of Indonesia Batch 2016

4. Should there be any mistakes or feedbacks you'd like to give, please contact me

5. Last Updated: 01/08/2018

Thank you for your cooperation >v<

Soal

1. Berikan sebuah fungsi pada $[0,1]$ yang tidak memiliki nilai maksimum dan minimum, disertai dengan penjelasan.

2. Misalkan fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ kontinu. Buktikan bahwa f mempunyai titik tetap di $[0,1]$, artinya terdapat $x_0 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(x_0) = x_0$.

3. Buktikan jika fungsi f kontinu seragam di $(a, b]$ dan di $[b, c)$ maka f kontinu seragam di (a, c).

4. Buktikan jika f kontinu pada $[a, b]$, terturunkan pada (a, b) dan $f(a) = f(b) = 0$, maka untuk sebuah bilangan real α, terdapat $x_0 \in (a, b) \ni \alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

5. Misalkan f kontinu pada $[a, b], a > 0$ dan terturunkan pada (a, b). Buktikan terdapat $x_1 \in (a, b)$ sedemikian sehingga
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

Jawaban

1. Berikan sebuah fungsi pada [0,1] yang tidak memiliki nilai maksimum dan minimum, disertai dengan penjelasan.

Jawab:

Misal $f(x) \coloneqq \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 0 \text{ atau } x = 1 \end{cases}$

Akan ditunjukkan f tidak memiliki nilai maksimum dengan kontradiksi.

Misal f memiliki nilai maksimum.

Karena $2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, maka jika hipotesis benar:

$$\exists x^* \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \ni f(x^*) \geq f(x), \forall x \in [0,1]$$

Namun berdasarkan Properti Archimedean 2.4.3, maka kita pasti bisa temukan $c^* \in (x^*, 1)$ dan karena $2x$ adalah fungsi monoton naik, maka pastilah $f(c^*) > f(x^*)$. Ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa f memiliki nilai maksimum.

Akan ditunjukkan f tidak memiliki nilai minimum dengan kontradiksi.

Misal f memiliki nilai minimum.

Karena $2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, maka jika hipotesis benar:

$$\exists x_* \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \ni f(x_*) \leq f(x), \forall x \in [0,1]$$

Namun berdasarkan Properti Archimedean 2.4.3, maka kita pasti bisa temukan $c_* \in (0, x_*)$ dan karena $2x$ adalah fungsi monoton naik, maka pastilah $f(c_*) < f(x_*)$. Ini kontradiksi dengan fakta bahwa f memiliki nilai minimum.

$\therefore$ Sebuah fungsi pada [0,1] yang tidak memiliki nilai maksimum dan minimum adalah

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 0 \text{ atau } x = 1 \end{cases}$$

2. Misalkan fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ kontinu. Buktikan bahwa f mempunyai titik tetap di $[0,1]$, artinya terdapat $x_0 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(x_0) = x_0$.

Jawab:
Misal $h: [0,1] \to [-1,1]$ didefinisikan sebagai $h(x) \coloneqq f(x) - x$.

Karena f kontinu, maka h kontinu.

Karena $f(0) \in [0,1]$, maka $f(0) \geq 0$ sehingga $h(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$
Karena $f(1) \in [0,1]$, maka $f(1) \leq 1$ sehingga $h(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$
Artinya $h(1) \leq 0 \leq h(0)$.

Apabila $h(1) = 0$ atau $h(0) = 0$ maka jelas bahwa $f(1) = 1$ dan $f(0) = 0$ secara berurutan dan artinya benar bahwa $\exists x_0 \in [0,1] \ni f(x_0) = x_0$.

Apabila $h(1) < 0 < h(0)$, maka berdasarkan Teorema Lokasi Akar 5.3.5:

$$\exists x_0 \in [0,1] \ni h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

∴ Terbukti bahwa f mempunyai titik tetap di $[0,1]$.

3. Buktikan jika fungsi f kontinu seragam di $(a,b]$ dan di $[b,c)$ maka f kontinu seragam di (a,c).

Jawab:
Karena f kontinu seragam di $(a,b]$, maka berdasarkan Definisi 5.4.1,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0 \ni \forall x,u \in (a,b], |x-u| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \dots (1)$$

Karena f kontinu seragam di $[b,c)$, maka berdasarkan Definisi 5.4.1,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0 \ni \forall x,u \in [b,c), |x-u| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \dots (2)$$

Pilih $\delta = 2\max\{\delta_1, \delta_2\}$ dan $x \in (a,b], y \in [b,c) \ni |x-b| < \delta_1, |y-b| < \delta_2$,
maka berdasarkan Ketaksamaan Segitiga 2.2.3:

$$|x-y| = |x-b+b-y| \leq |x-b| + |y-b| < \delta_1 + \delta_2 \leq \delta$$

Kita juga akan peroleh berdasarkan Ketaksamaan Segitiga 2.2.3:

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |f(x)-f(b)+f(b)-f(y)| \\ &\leq |f(x)-f(b)| + |f(y)-f(b)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga kita peroleh $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon \dots (3)$

Dari (1), (2), dan (3), kita peroleh

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = 2\max\{\delta_1, \delta_2\} > 0 \ni \forall x,u \in (a,c), |x-u| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(u)| < \varepsilon$$

Ini memenuhi Definisi 5.4.1 bahwa f kontinu seragam di (a,c).

$\therefore$ Terbukti f kontinu seragam di (a,c).

4. Buktikan jika f kontinu pada $[a, b]$, terturunkan pada (a, b) dan $f(a) = f(b) = 0$, maka untuk sebuah bilangan real α, terdapat $x_0 \in (a, b) \ni \alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

Jawab:
Definisikan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai $h(x) \coloneqq e^{\alpha x} f(x)$ untuk $x \in [a, b]$.

Karena f kontinu pada $[a, b]$ maka h kontinu pada $[a, b]$.
Karena f terturunkan pada (a, b) maka h terturunkan pada (a, b).
Perhatikan bahwa $h(a) = h(b) = 0$.

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:

$$h'(x) = \alpha e^{\alpha x} f(x) + e^{\alpha x} f'(x) = e^{\alpha x}\big(\alpha f(x) + f'(x)\big)$$

Karena h kontinu pada $[a, b]$, h terturunkan pada (a, b), dan $h(a) = h(b) = 0$, maka berdasarkan Teorema Rolle 6.2.3,

$$\exists x_0 \in (a, b) \ni h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha x_0}\big(\alpha f(x_0) + f'(x_0)\big) = 0$$

Karena $e^{\alpha x_0} \neq 0$ untuk sembarang $x_0 \in (a, b)$, maka haruslah $\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

$\therefore$ Terbukti bahwa untuk sebuah bilangan real $\alpha, \exists x_0 \in (a, b) \ni \alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

5. Misalkan f kontinu pada $[a,b], a > 0$ dan terturunkan pada (a,b). Buktikan terdapat $x_1 \in (a,b)$ sedemikian sehingga
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

Jawab:
Definisikan $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai:
$$h(x) \coloneqq xf\left(\frac{ab}{x}\right) \text{ untuk } x \in [a,b], a > 0$$

Karena f terdefinisi dan $x \geq a > 0$ maka h terdefinisi untuk setiap $x \in [a,b], a > 0$.

Karena f kontinu pada $[a,b]$ maka h kontinu pada $[a,b]$.
Karena f terturunkan pada (a,b) maka h terturunkan pada (a,b).

Perhatikan bahwa:
$$h(a) = af\left(\frac{ab}{a}\right) = af(b), \qquad h(b) = bf\left(\frac{ab}{b}\right) = bf(a)$$

Berdasarkan Teorema 6.1.3, kita peroleh:
$$h'(x) = f\left(\frac{ab}{x}\right) - \frac{ab}{x} f'\left(\frac{ab}{x}\right)$$

Karena h kontinu pada $[a,b]$ dan h terturunkan pada (a,b), maka berdasarkan Mean Value Theorem 6.2.4,
$$\exists c \in (a,b) \ni h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a} \Leftrightarrow f\left(\frac{ab}{c}\right) - \frac{ab}{c} f'\left(\frac{ab}{c}\right) = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

Pilih $x_1 = \dfrac{ab}{c}$, perhatikan:
$$a < c < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow a < \frac{ab}{c} < b$$
Artinya, $x_1 \in (a,b)$ dan kita peroleh:
$$f(x_1) - x_1 f'(x_1) = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\exists x_1 \in (a,b) \ni \dfrac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$

Afterword

Pembuatan dokumen ini dibantu oleh:
1. 13,04, Matematika UI 2016.
2. illyasviel von einzbern, Statistika UI 2016.