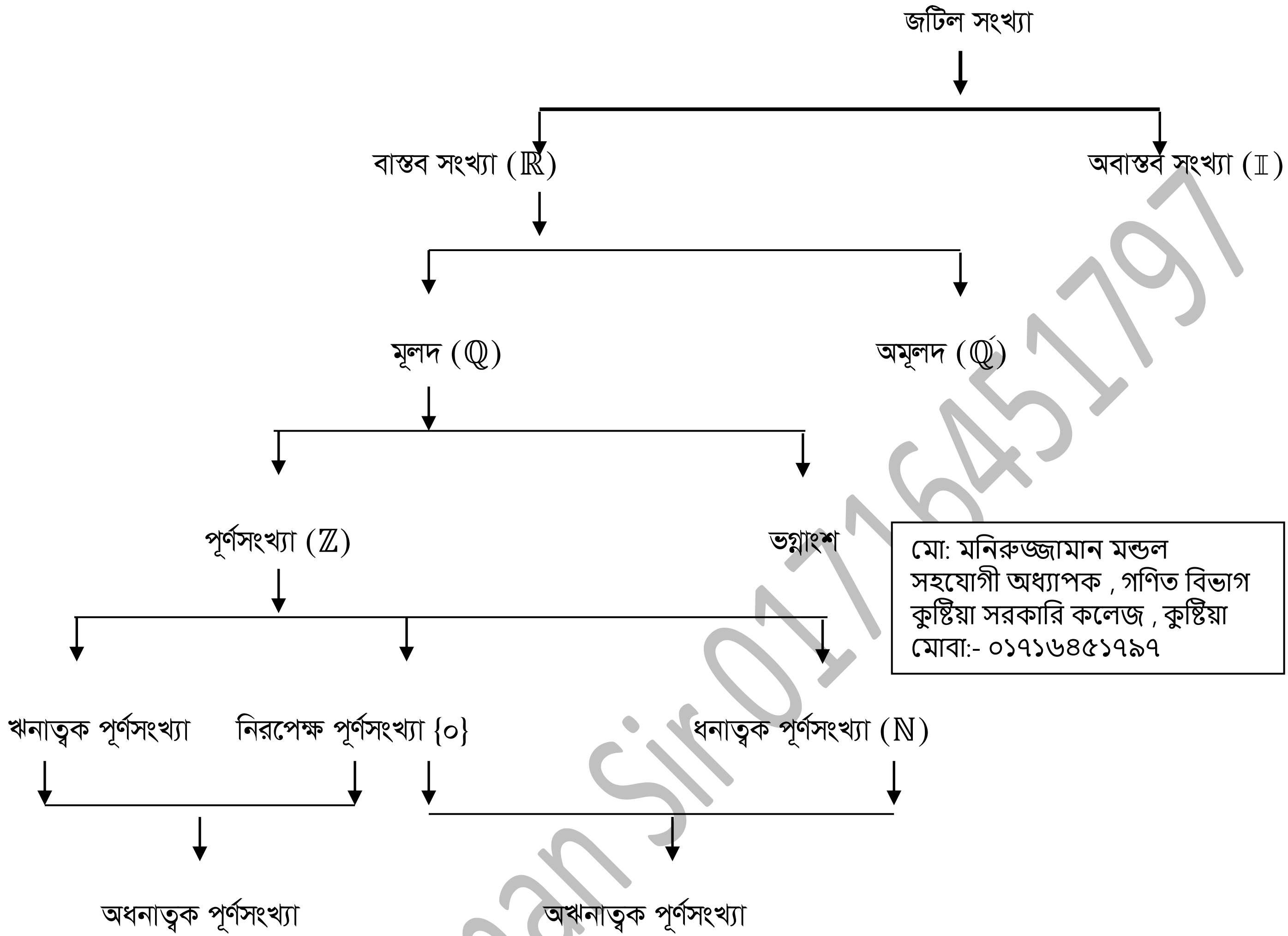
বাস্তব সংখ্যা গোষ্ঠী

সংখ্যার শ্রেনীবিন্যাস ঃ



মো: মনিরুজ্জামান মন্ডল
সহযোগী অধ্যাপক , গণিত বিভাগ
কুষ্টিয়া সরকারি কলেজ , কুষ্টিয়া
মোবা:- ০১৭১৬৪৫১৭৯৭

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা / স্বাভাবিক সংখ্যা ($\mathbb{N}$ অথবা $\mathbb{Z}^+$) : $1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots$..পূর্ণসংখ্যাগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলে। স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে $\mathbb{N}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $\mathbb{N}$অথবা $\mathbb{Z}^+ = \{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots..\}$

ঋনাত্মক পূর্ণসংখ্যা: '-' চিহ্ন যুক্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে ঋনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলে । সুতরাং ঋনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z}^-$ হলে $\mathbb{Z}^- = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -3\ ,-2\ ,-1\ \}$

নিরপেক্ষ পূর্ণসংখ্যা: 0 কে নিরপেক্ষ পূর্ণসংখ্যা বলে। নিরপেক্ষ পূর্ণসংখ্যার সেট $O = \{0\}$

অঋনাত্মক পূর্ণসংখ্যা: অঋনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট হল $\{\ 0\ ,1\ ,2\ ,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

অধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা: অধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট হল $\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -3\ ,-2\ ,-1,\ 0\ \}$

পূর্ণসংখ্যা: পূর্ণসংখ্যার সেট হল $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -3\ ,-2\ ,-1,\ 0,1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots..\ \}$

মূলদ সংখ্যা: যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় যেখানে $p\ ,q\ \in \mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0$ তাদের মূলদ সংখ্যা বলে। মূলদ সংখ্যার সেট $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\ :\ p\ ,q\ \in \mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0\ \}$

অমূলদ সংখ্যা: যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না যেখানে $p\ ,q\ \in \mathbb{Z}$ এবং $q \neq 0$ তাদের অমূলদ সংখ্যা বলে। অমূলদ সংখ্যার সেট $\mathbb{Q}^c = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x \notin \mathbb{Q}\}$

বাস্তব সংখ্যা: সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা নিয়ে বাস্তব সংখ্যা গঠিত। বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$.

বাস্তব সংখ্যার স্বত:সিদ্ধ/ স্বীকার্য : বাস্তব সংখ্যার কিছু বৈশিষ্ট সর্বদা সত্য বলে ধরে নেওয়া হয়েছে। এগুলোকে বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য বলে অভিহিত করা হয়। বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্যসমূহ চার প্রকার। যথা -

ক) সম্প্রসারিত স্বীকার্য

খ) ফিল্ড স্বীকার্য

গ) ক্রমিত স্বীকার্য

ঘ) সম্পূর্ণতা স্বীকার্য

বাস্তব সংখ্যার ফিল্ড স্বীকার্য: [NUH(NM)-02,05,07,12,14 ,NUH-02,04,08,09]

বাস্তব সংখ্যার সেটে যোগ ও গুণন স্বীকার্যকে একত্রে ফিল্ড স্বীকার্য বলে।

যোগ স্বীকার্য:

আবদ্ধ বিধি : $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$

সহযোগ বিধি: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \ \Rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$

এককের অস্তিত্ব বিধি: $\exists\ 0 \in \mathbb{R}$ যেন $a + 0 = 0 + a = a\ ;\ \ \forall a \in \mathbb{R}$

বিপরীতের অস্তিত্ব বিধি: $\forall\, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\ -a \in \mathbb{R}$ যেন $a + (-a) = (-a) + a = 0$

বিনিময় বিধি: $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow a + b = b + a$

গুণন স্বীকার্য:

আবদ্ধ বিধি : $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}$

সহযোগ বিধি: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \ \Rightarrow a(bc) = (ab)c$

এককের অস্তিত্ব বিধি: $\exists\ 1 \in \mathbb{R}$ যেন $a.1 = 1.a = a\ ;\ \ \forall a \in \mathbb{R}$

বিপরীতের অস্তিত বিধি: $\forall\, a \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$ এর জন্য $a^{-1} \in \mathbb{R}$ যেন $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

বিনিময় বিধি: $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow a.b = b.a$

বাস্তব সংখ্যার ক্রম স্বীকার্য: [NUH(NM)-02,13 NUH-02,04,05,07,09,10]

বাস্তব সংখ্যার ক্রম স্বীকার্য নিম্নরূপ-

O_1(ত্রিত্ব বিধি): $\forall\, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R} \ \Rightarrow a < b$ অথবা $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ অথবা $\mathrm{a} > b$

O_2(অনুবর্তী বিধি): $\forall\, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}$ এবং $\ \mathrm{a} > b\, , b > c \Rightarrow a > c$

O_3(যোগের অনন্যতা): $\forall\, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}$ এবং $\ \mathrm{a} > b \ \Rightarrow a + \mathrm{c} > b + c$

O_4(গুণের অনন্যতা): $\forall\, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}$ এবং $\ \mathrm{a} > b\, , c > 0 \ \Rightarrow a\mathrm{c} > bc$

উপপাদ্য : যদি $a \in \mathbb{R}$ হয় , তবে দেখাও যে $a.0 = 0$

প্রমাণঃ আমরা পাই , $0 = 0 + 0$

$\therefore a.0 = a(0 + 0)$

$\Rightarrow a.0 = a.0 + a.0$

$\Rightarrow -a0 + a0 = -a0 + (a0 + a0)$

$\Rightarrow -a0 + a0 = (-a0 + a0) + a0$

$\Rightarrow 0 = 0 + a0$

$\Rightarrow 0 = a0$

$\therefore a0 = 0$

মো: মনিরুজ্জামান মন্ডল
সহযোগী অধ্যাপক , গণিত বিভাগ
কুষ্টিয়া সরকারি কলেজ , কুষ্টিয়া
মোবা:- ০১৭১৬৪৫১৭৯৭

উপপাদ্য : যদি $a\, , b \ \in \mathbb{R}$ হয় , তবে দেখাও যে $(-a)(-b) = ab$ [NUH(NM)-2002]

প্রমাণ : আমরা জানি

$(-a)0 \ = 0, \forall\, a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (-a)\{b + (-b)\} = 0\, , \forall\, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (-a)b + (-a)(-b) = 0$
$\Rightarrow (-ab) + (-a)(-b) = 0$
$\Rightarrow ab + (-ab) + (-a)(-b) = ab + 0$ [উভয়পক্ষে ab যোগ করে]
$\Rightarrow 0 + (-a)(-b) = ab$ [$\because x + 0 = x$ এবং $x + (-x) = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$]
$\Rightarrow (-a)(-b) = ab$ [$\because 0 + x = x \;, \forall\, x \in \mathbb{R}$]

উপপাদ্য : $ab = 0 \;\;, \forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow a = 0$ অথবা $b = 0$ [NUH(NM)-03,11,13]

প্রমাণ : মনে করি , $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 0$ এবং $a \neq 0$ আমাদের দেখাতে হবে $b = 0$
যেহেতু $a \neq 0$, সুতরাং $a^{-1} \in \mathbb{R}$ বিদ্যমান যেন $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
এখন $ab = 0$
$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}0$
$\Rightarrow (a^{-1}a)b = 0$
$\Rightarrow 1.b = 0$
$\Rightarrow b = 0$

মো: মনিরুজ্জামান মন্ডল
সহযোগী অধ্যাপক , গণিত বিভাগ
কুষ্টিয়া সরকারি কলেজ , কুষ্টিয়া
মোবা:- ০১৭১৬৪৫১৭৯৭

আবার মনে করি , $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 0$ এবং $b \neq 0$ আমাদের দেখাতে হবে $a = 0$
যেহেতু $b \neq 0$, সুতরাং $b^{-1} \in \mathbb{R}$ বিদ্যমান যেন $bb^{-1} = b^{-1}b = 1$
এখন $ab = 0$
$\Rightarrow (ab)b^{-1} = 0b^{-1}$
$\Rightarrow a(bb^{-1}) = 0$
$\Rightarrow a.1 = 0$
$\Rightarrow a = 0$

বাস্তব সংখ্যার পরমমান: একটি বাস্তব সংখ্যার পরমমান $|a|$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং নিম্নলিখিতরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$|a| = \begin{cases} a & ; \; a \geq 0 \\ -a & ; \; a < 0 \end{cases}$$

উদাহরণ: $|7| = 7 \quad , \quad |-3| = -(-3) = 3 \quad , \quad |0| = 0$

সীমায়িত সেট : মনে করি S একটি বাস্তব সংখ্যা $\mathbb{R}$ এর উপসেট। যদি দুটি বাস্তব সংখ্যা l ও u বিদ্যমান থাকে যেন l≤ x≤ u , $\forall\, x \in S$ S কে সীমায়িত সেট বলে।
উদাহরণ : ধরি S={1,3,5,7}
এখানে ১≤ x≤ 7 , $\forall\, x \in S$. সুতরাং S সেটটি সীমায়িত ।

অসীমায়িত সেট : মনে করি S একটি বাস্তব সংখ্যা $\mathbb{R}$ এর উপসেট। যদি কোন বাস্তব সংখ্যা l ও u বিদ্যমান না থাকে যেন l≤ x≤ u , $\forall\, x \in S$ সত্য হয় তবে S কে অসীমায়িত সেট বলে।
উদাহরণ : $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -3, -2, -1, \; 0, 1 \;, 2 \;, 3 \;, 4 \;, \ldots\ldots\ldots\ldots.. \}$ সেটটি অসীমায়িত।

উপপাদ্য : A ও B সেটদ্বয় সীমায়িত হলে $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ সেটটি সীমায়িত। [NUH(NM)-11, NUH-05]

প্রমাণ : যেহেতু A ও B সেটদ্বয় সীমায়িত সুতরাং আমরা পাই $|a| \leq k_1, \; \forall\, a \in A$
এবং $|b| \leq k_2 \,, \; \forall\, b \in A$
এখানে k_1 ও k_2 বাস্তব সংখ্যা।
ধরি $c \in A + B$ যেখানে $c = a + b \,; a \in A \,, b \in B$
তাহলে $|c| = |a + b| \leq |a| + |b| \leq k_1 + k_2$

$\Rightarrow |c| \leq k_1 + k_2$

$\Rightarrow |c| \leq k$, যেখানে $k = k_1 + k_2$ বাস্তব সংখ্যা।

ইহা নির্দেশ করে $A + B$ সেটটি সীমায়িত।

আর্কিমিডিয়ান ধর্ম : যদি x কোন ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা এবং y যে কোন বাস্তব সংখ্যা হয় তবে একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n বিদ্যমান থাকবে যেন nx>y হয় ।

উপপাদ্যঃ দুইটি ভিন্ন বাস্তব সংখ্যার মধ্যে কমপক্ষে একটি মূলদ সংখ্যা বিদ্যমান ।[NUH(NM)-04,NUH-07,10]

প্রমাণঃ মনে করি a ও b দুইটি ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা এবং a<b

এখন $a < b$

$\Rightarrow a + b < b + b$

$\Rightarrow a + b < 2b$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} < b$ ....(1)

মো: মনিরুজ্জামান মন্ডল
সহযোগী অধ্যাপক , গণিত বিভাগ
কুষ্টিয়া সরকারি কলেজ , কুষ্টিয়া
মোবা:- ০১৭১৬৪৫১৭৯৭

আবার $a < b$

$\Rightarrow a + a < a + b$

$\Rightarrow 2a < a + b$

$\Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$ ....(2)

(১) এবং (২) হতে পাই

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

সুতরাং দুইটি ভিন্ন বাস্তব সংখ্যার মধ্যে কমপক্ষে একটি মূলদ সংখ্যা বিদ্যমান ।

উপপাদ্যঃ দুইটি স্বতন্ত্র বাস্তব সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা বিদ্যমান । [NUH-06,12]

প্রমাণঃ মনে করি a ও b দুইটি স্বতন্ত্র বাস্তব সংখ্যা এবং a<b অর্থাৎ b-a > ০ । এখন বাস্তব সংখ্যার আর্কিমিডিয়ান ধর্মানুসারে, এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n বিদ্যমান থাকবে যেন n(b-a)>m যেখানে m অমূলদ সংখ্যা ।

তাহলে $b\text{-}a > \frac{m}{n}$

$\Rightarrow b > a + \frac{m}{n} > a + \frac{m}{2n} > a$

$\Rightarrow a < a + \frac{m}{2n} < a + \frac{m}{n} < b$.......................(1)

এখন m অমূলদ হওয়ায় $\left(a + \frac{m}{n}\right) - \left(a + \frac{m}{2n}\right) = \frac{m}{2n}$ অমূলদ হবে । ফলে $a + \frac{m}{n}$ এবং $a + \frac{m}{2n}$ এর মধ্যে অন্তত একটি অমূলদ হবে । অমূলদ সংখ্যাটি x হলে (1) হতে পাই a<x<b অর্থাৎ a ও b এর মধ্যে একটি অমূলদ সংখ্যা বিদ্যমান । এই প্রক্রিয়ায় অগ্রসর হলে a ও x এর মধ্যে একটি অমূলদ সংখ্যা x_1 এবং x ও b এর মধ্যে একটি অমূলদ সংখ্যা x_2 পাওয়া যাবে । তাহলে

$a < x_1 < x < x_2 < b$. স্পষ্টতই এভাবে আরও অগ্রসর হতে থাকলে a ও b এর মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা পাওয়া যাবে । অতএব দুইটি স্বতন্ত্র বাস্তব সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা বিদ্যমান ।

উপপাদ্য : $\varepsilon > 0$ এর জন্য দেখাও যে $|a - b| < \varepsilon$ যদি এবং কেবল যদি $b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$ [NUH-04,12,NU(NM)-16]

প্রমাণ : মনে করি $|a - b| < \varepsilon$ আমাদের দেখাতে হবে $b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$

এখন $|a - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < a - b < \varepsilon$

$\Rightarrow b - \varepsilon < a - b + b < b + \varepsilon$

$\Rightarrow\ b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$

বিপরীতক্রমে ,মনে করি $b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$ আমাদের দেখাতে হবে $|a-b|<\varepsilon$

এখন $b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$

$\Rightarrow\ b-\varepsilon-b<a-b<b+\varepsilon-b$

$\Rightarrow\ -\varepsilon<a-b<\varepsilon$

$\Rightarrow |a-b|<\varepsilon$ (প্রমাণিত)

সমস্যা : A=(-1,6) , B=(-∞,1) হলে A∪B ,A∩B, B-A নির্ণয় কর এবং ব্যবধি প্রতীকে লিখ। [NU(NM)-06]

সমাধান :

$A=(-1,6)=\{x:\ -1<x<6\}$

$B=(-\infty,1)=\{x: x<1\}$

$\therefore A\cup B=(-1,6)\cup(-\infty,1)=(-\infty,6)=\{x: x<6\}$

$A\cap B=(-1,6)\cap(-\infty,1)=(-1,1)=\{x: -1<x<1$

$B-A=(-\infty,1)-(-1,6)=(-\infty,-1]=\{x: x\leq -1\}$

মো: মনিরুজ্জামান মন্ডল
সহযোগী অধ্যাপক , গণিত বিভাগ
কুষ্টিয়া সরকারি কলেজ , কুষ্টিয়া
মোবা:- ০১৭১৬৪৫১৭৯৭

উপপাদ্য : r অশূন্য মূলদ এবং x অমূলদ হলে r+x এবং rx অমূলদ । [NU(NM)-08,12,NU-03,11,13]

প্রমাণ : মনে করি r+x মূলদ এবং r+x=z , যেখানে z মূলদ । তাহলে x= z-r , যা মূলদ , কেননা দুটি মূলদ সংখ্যার বিয়োগফল মূলদ সংখ্যা । কিন্তু ইহা শর্ত বিরোধী কারণ x অমূলদ। সুতরাং r+x মূলদ হতে পারে না বিধায় r+x অমূলদ । আবার ধরি rx মূলদ এবং rx=y , যেখানে y মূলদ । তাহলে x=$\frac{y}{r}$, যা মূলদ , কেননা দুটি মূলদ সংখ্যার ভাগফল মূলদ সংখ্যা । কিন্তু ইহা শর্ত বিরোধী কারণ x অমূলদ। সুতরাং rx মূলদ হতে পারে না বিধায় rx অমূলদ ।