Tema nr. 2

Date: n - dimensiunea sistemului, ϵ - precizia calculelor, matricea sistemului $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vectorul termenilor liberi $b \in \mathbb{R}^n$:

- Să se calculeze, când este posibil, o descompunere LU a matricii A ($A = LU$), unde L este matrice inferior triunghiulară, iar U este matrice superior triunghiulară cu 1 pe diagonală;
- Folosind această descompunere, să se calculeze determinantul matricii A ($\det A = \det L \det U$) ;
- Utilizând descompunerea LU calculată mai sus şi metodele substituţiei directe şi inverse, să se calculeze x_{LU}, o soluţie aproximativă a sistemului $Ax = b$;
- Să se verifice soluţia calculată prin afişarea normei:

  $$\|A^{init} x_{LU} - b^{init}\|_2$$

  (această normă ar trebui să fie mai mică decât $10^{-8}, 10^{-9}$)

  A^{init} şi b^{init} sunt datele iniţiale, nu cele modificate pe parcursul algoritmului. Am notat cu $\| \cdot \|_2$ norma Euclidiană.
- *Restricţie*: în program să se aloce doar două matrici, A şi A^{init} (o copie a matricii iniţiale). Descompunerea LU se va calcula direct în matricea A. Cu acest tip de memorare nu se reţine diagonala matricii U, dar se va ţine cont de faptul că $u_{ii} = 1, \forall i$ în rezolvarea sistemului superior triunghiular $Ux = y$ (se modifică procedura de rezolvare a sistemelor superior triunghiulare).
- Folosindu-se una din bibliotecile menţionate în pagina laboratorului, să se calculeze şi să se afişeze soluţia sistemului $Ax = b$ şi inversa matricei A. Să se afişeze următoarele norme:

  $$||x_{LU} - x_{lib}||_2$$

  $$||x_{LU} - A_{lib}^{-1} b^{init}||_2.$$

Scrieţi programul astfel încât să poată fi testat (şi) pe sisteme de dimensiuni mai mari ca 100.

Observaţii

1. Precizia calculelor ϵ, este un număr pozitiv de forma $\epsilon = 10^{-t}$ (cu $t = 5, 6, ..., 10, ...$ la alegere) care este dată de intrare în program (se citeşte de la tastatură sau din fişier) la fel ca şi dimensiunea n a datelor. Acest număr se foloseşte atunci când testăm dacă o variabilă este 0 sau nu înaintea unei operaţii de împărţire. Dacă vrem să efectuăm operaţia de împărţire $s = 1/v$ unde $v \in \mathbb{R}$, **NU** vom scrie:

   if($v! = 0$*)* $s = 1/v$*;*

   else Write(" nu se poate face impartirea");

   ci vom scrie în program:

   if($Math.Abs(v) > eps$*)* $s = 1/v$*;*

   else Write(" nu se poate face impartirea");

2. Dacă pentru o matrice A avem descompunerea LU, rezolvarea sistemului $Ax = b$ se reduce la rezolvarea a două sisteme triunghiulare:

$$Ax = b \longleftrightarrow LUx = b \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} Ly & = & b, \\ Ux & = & y. \end{array} \right.$$

   Se rezolvă întâi sistemul inferior triunghiular $Ly = b$. Apoi se rezolvă sistemul superior triunghiular $Ux = y$ unde y este soluţia obţinută din rezolvarea sistemului precedent $Ly = b$. Vectorul x rezultat din rezolvarea sistemului $Ux = y$ este şi soluţia sistemului iniţial $Ax = b$.

3. Pentru calculul $\|A^{init}x_{LU} - b^{init}\|_2$ avem:

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ Ax = y \in \mathbb{R}^n \ , \ y = (y_i)_{i=1}^n$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$z = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$$

Metodele substituţiei

Fie sistemul liniar:

$$Ax = b \tag{1}$$

unde matricea sistemului A este triunghiulară. Pentru a găsi soluţia unică a sistemului (1), trebuie ca matricea să fie nesingulară. Determinantul matricilor triunghiulare este dat de formula:

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Prin urmare pentru rezolvarea sistemului (1) vom presupunem că:

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Vom considera întâi cazul când matricea A este inferior triunghiulară. Sistemul (1) are forma:

$$\begin{array}{lllllllllll}
a_{11}x_1 & & & & & & & & & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & & & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ii}x_i & & & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ni}x_i & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_i
\end{array}$$

Necunoscutele x_1, x_2, ..., x_n se deduc folosind ecuaţiile sistemului de la prima către ultima.

Din prima ecuaţie se deduce x_1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \tag{2}$$

Din a doua ecuaţie, folosind (2), obţinem x_2:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

Când ajungem la ecuaţia i:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i = b_i$$

folosind variabilele x_1, x_2,...,x_{i-1} calculate anterior, avem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}}{a_{ii}}$$

Din ultima ecuaţie se deduce x_n astfel:

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Algoritmul de calcul a soluţiei sistemelor (1) cu matrice inferior triunghiulară este următorul:

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n \tag{3}$$

Acest algoritm poartă numele de *metoda substituţiei directe*. Pentru matricile inferior triunghiulare cu 1 pe diagonală ($a_{ii} = 1 \ , \forall i$) formula de mai sus devine:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n \tag{4}$$

Vom considera, în continuare sistemul (1) cu matrice superior triunghiulară:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1i}x_i & + & \cdots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & & & a_{ii}x_i & + & \cdots & + & a_{in-1}x_{n-1} & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Necunoscutele x_1, x_2,...,x_n se deduc pe rând, folosind ecuaţiile sistemului de la ultima către prima.
Din ultima ecuaţie găsim x_n:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \tag{5}$$

Folosnd valoarea lui x_n dedusă mai sus, din penultima ecuaţie a sistemului obţinem:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$$

Când ajungem la ecuaţia i:

$$a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

se cunosc deja x_{i+1},x_{i+2},..., x_n şi deducem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n}{a_{ii}}$$

Din prima ecuaţie găsim valoarea lui x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Procedeul descris mai sus poartă numele de *metoda substituţiei inverse* pentru rezolvarea sistemelor liniare cu matrice superior triunghiulară:

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}} \quad , \quad i = n, n-1, \ldots, 2, 1 \tag{6}$$

Pentru matricile superior triunghiulare cu $a_{ii} = 1, \forall i$ formula de mai sus devine:

$$x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \quad , \quad i = n, n-1, \ldots, 2, 1 \tag{7}$$

Descompunere LU

Dacă $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice reală pătratică de dimensiune n astfel încât $\det A_k \neq 0$, $\forall k = 1, \ldots, n$, unde $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$. Atunci, se ştie că există o unică matrice inferior triunghiulară $L = (l_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ şi o unică matrice superior triunghiulară $U = (u_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ cu $u_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$ astfel încât

$$A = LU \tag{8}$$

Algoritmul de calcul al descompunerii LU

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice reală pătratică de dimensiune n care satisface ipotezele teoremei de mai sus. Algoritmul de calcul al matricilor L şi U are n etape. La fiecare pas se determină simultan câte o coloană din matricea U şi câte o linie din matricea L.

Pasul p $(p = 1, 2, \dots, n)$

Se determină elementele coloanei p ale matricii U , $u_{ip}, i = 1, \dots, p-1$, $u_{pp} = 1$ şi elementele liniei p ale matricii L, $l_{pi}, i = 1, \dots, p$.

Sunt cunoscute de la paşii anteriori elementele primelor $p-1$ linii din L (elemente l_{kj} cu $k = 1, \dots, p-1$) şi elementele primelor $p-1$ coloane din U (elemente u_{ik} cu $k = 1, \dots, p-1$).

Calculul elementelor coloanei p *din matricea* U *:* u_{ip} $i = 1, \dots, p-1$ $(u_{pp} = 1,\ u_{ip} = 0, i = p+1, \dots, n)$

$$\begin{aligned} a_{ip} &= \sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kp} = (l_{ik} = 0, k = i+1, \dots, n) = \\ &= \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kp} = l_{ii}u_{ip} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kp} \end{aligned}$$

Dacă $l_{ii} \neq 0$ putem calcula elementele coloanei p a matricii U astfel:

$$u_{ip} = \frac{(a_{ip} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kp})}{l_{ii}},\ \ i = 1, \dots, p-1,\ \ u_{pp} = 1,\ \ u_{ip} = 0\ \ i = p+1, \dots, n \tag{9}$$

(u_{kp}, $k = 1, \dots, i-1$ sunt elemente de pe coloana p a matricii U calculate anterior în pasul curent iar l_{ik}, $i = 1, \dots, p-1$, $k = 1, \dots, i-1$ sunt elemente cunoscute de pe liniile din L fiind calculate la paşii anteriori)

Dacă avem un $l_{ii} = 0$, calculele se opresc, descompunerea LU nu poate fi calculată în acest caz matricea A are un minor nul, $\det A_p = 0$.

Calculul elementelor liniei p din matricea L: l_{pi} , $i = 1, \ldots, p$ ($l_{pi} = 0$, $i = p+1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} a_{pi} &= \sum_{k=1}^{n} l_{pk} u_{ki} = (u_{ki} = 0, k = i+1, \ldots, n, u_{ii} = 1) = \\ &= \sum_{k=1}^{i} l_{pk} u_{ki} = l_{pi} 1 + \sum_{k=1}^{i-1} l_{pk} u_{ki} \end{aligned}$$

Pentru $i = 1, \ldots, p$ avem:

$$l_{pi} = a_{pi} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{pk} u_{ki} \ , \quad i = 1, \ldots, p \quad l_{pi} = 0 \ \ i = p+1, \ldots, n \tag{10}$$

(elementele l_{pk}, $k = 1, \ldots, i-1$ sunt elemente de pe linia p a matricii L calculate anterior la pasul p iar u_{ki} $k = 1, \ldots, i-1$, $i = 1, \ldots, p$ sunt elemente de pe coloane deja cunoscute, fiind calculate anterior)

Observaţie:

Pentru memorarea matricilor L şi U se poate folosi matricea A iniţială. Vom folosi partea strict superior triunghiulară a matricii A pentru a memora elementele nenule u_{ij} ale matricii U cu $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = i+1, \ldots, n$ iar partea inferior triunghiulară a matricii A pentru a memora elementele l_{ij} ale matricii L , $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, i$. Se observă că nu am memorat nicăieri elementele $u_{ii} = 1$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Vom ţine cont de acest lucru la rezolvarea sistemului superior triunghiular. Calculele (9) şi (10) se pot face direct în matricea A.

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 3 \\ 2 & 6.5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 2 & 2.5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$