高等代数（荣誉）II
第一次习题课

宋经天

上海交通大学致远学院

2022/02/24

习题 1.6-6

命 $V = M_n(K)$ 是域 K 上所有 n 阶方阵形成的空间.
证明: 对 V 上的每个线性函数 f 都能找到唯一的方阵 A 使得 $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

习题 1.6-6

命 $V = M_n(K)$ 是域 K 上所有 n 阶方阵形成的空间.
证明: 对 V 上的每个线性函数 f 都能找到唯一的方阵 A 使得 $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

记 V 的典范基为 $E_{ij}(1 \le i, j \le n)$.

- 存在性：构造 $A = (f(E_{ji}))_{i,j=1}^n$. 则对任意的 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n \in V$, 有

$$\mathrm{tr}(AX) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} f(E_{ij}) = f\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij} E_{ij}\right) = f(X).$$

- 唯一性：若 A, A' 均满足要求, 则对任意的 $X \in V$ 均有

$$\mathrm{tr}((A - A')X) = \mathrm{tr}(AX) - \mathrm{tr}(A'X) = f(X) - f(X) = 0.$$

  特别地, 考虑 $X = E_{ji}$, 则得到 $a_{ij} - a'_{ij} = 0$, 从而 $A = A'$, 唯一性得证.

习题 1.6-6

命 $V = M_n(K)$ 是域 K 上所有 n 阶方阵形成的空间.
证明: 对 V 上的每个线性函数 f 都能找到唯一的方阵 A 使得 $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

下述证明是否完整正确?

设满足要求的方阵 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.
取 $X = E_{ji}$, 则 $f(E_{ji}) = \mathrm{tr}(AE_{ji}) = a_{ij}$, 故 A 的每个分量都被 f 唯一确定.

习题 1.6-6

命 $V = M_n(K)$ 是域 K 上所有 n 阶方阵形成的空间.
证明: 对 V 上的每个线性函数 f 都能找到唯一的方阵 A 使得 $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

下述证明是否完整正确?

设满足要求的方阵 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.
取 $X = E_{ji}$, 则 $f(E_{ji}) = \mathrm{tr}(AE_{ji}) = a_{ij}$, 故 A 的每个分量都被 f 唯一确定.

Hint

将问题中最后的式子改为 $f(X) = \mathrm{tr}(AX) + 1$.
两种方法: 1. 将 A 代入验证 $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$; 2. 说明 $\mathrm{tr}(AX)$ 是一个 V 上的线性函数.

习题 1.6-7

证明: 如果一个向量空间的两个线性函数的核相同, 则这两个线性函数成比例.

习题 1.6-7

证明: 如果一个向量空间的两个线性函数的核相同, 则这两个线性函数成比例.

设 $f, g \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ 且 $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.
由于 $\mathrm{Im}\, f$ 为 K 的子空间, 故可分为以下两种情况讨论:

- 若 $\mathrm{Im}\, f = 0$, 则 $f \equiv 0$, $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f = V$, $g \equiv 0$, 得证.
- 若 $\mathrm{Im}\, f = K$, 则由同构 $V/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Im}\, f = K$ 可得直和分解

$$V = \mathrm{Ker}\, f \oplus K v_0,$$

  其中 $v_0 \in V$ 满足 $f(v_0) \neq 0$.
  令 $r = g(v_0)/f(v_0)$.
  对于任意的 $v \in V$, 存在分解 $v = u + cv_0$ 满足 $u \in \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$, $c \in K$. 从而

$$g(v) = g(u) + cg(v_0) = cg(v_0) = crf(v_0),$$
$$rf(v) = r(f(u) + cf(v_0)) = crf(v_0).$$

  故 $g = rf$, 得证.

综上, 证毕.

习题 1.6-7

证明: 如果一个向量空间的两个线性函数的核相同, 则这两个线性函数成比例.

设 $f, g \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ 且 $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.

- 若 $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g = V$, 则 $f = g = 0$, 证毕.
- 若 $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g \subsetneq V$, 选取向量 $v_0 \in V$ 满足 $f(v_0) \neq 0$.
  对任意 $v \in V$, 考虑向量 $f(v_0)v - f(v)v_0$, 有
  $$f(f(v_0)v - f(v)v_0) = f(v_0)f(v) - f(v)f(v_0) = 0,$$
  故 $f(v_0)v - f(v)v_0 \in \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$, 即
  $$0 = g(f(v_0)v - f(v)v_0) = f(v_0)g(v) - f(v)g(v_0),$$
  即 $f(v_0)g(v) = f(v)g(v_0)$, $g(v) = \frac{g(v_0)}{f(v_0)}f(v)$, 得证.

综上，证毕.

习题 1.6-7

证明: 如果一个向量空间的两个线性函数的核相同, 则这两个线性函数成比例.

设 $f, g \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ 且 $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.
令 $U = V/\mathrm{Ker}\, f = V/\mathrm{Ker}\, g$. 考虑函数 $\bar{f}, \bar{g} \in U^*$, 定义为

$$\bar{f}(v + \mathrm{Ker}\, f) = f(v), \quad \bar{g}(v + \mathrm{Ker}\, g) = g(v).$$

由于

$$\dim U^* = \dim(V/\mathrm{Ker}\, f) = \dim \mathrm{Im}\, f \leq 1,$$

故 $\bar{f}, \bar{g}$ 必然成比例, 进而有 f, g 成比例.

习题 1.6-7

证明: 如果一个向量空间的两个线性函数的核相同, 则这两个线性函数成比例.

设 $f, g \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ 且 $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.
令 $U = V/\mathrm{Ker}\, f = V/\mathrm{Ker}\, g$. 考虑函数 $\bar{f}, \bar{g} \in U^*$, 定义为

$$\bar{f}(v + \mathrm{Ker}\, f) = f(v), \quad \bar{g}(v + \mathrm{Ker}\, g) = g(v).$$

由于

$$\dim U^* = \dim(V/\mathrm{Ker}\, f) = \dim \mathrm{Im}\, f \leq 1,$$

故 $\bar{f}, \bar{g}$ 必然成比例, 进而有 f, g 成比例.

思考: 该问题对一般的线性映射是否成立?

习题 1.7-10

设 $x = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{C}^3$, $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$, ε 是 1 的三次本原根. 利用等式

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)$$

证明: (1) 存在对称双线性型 $z_i = z_i(x, y) = \sum_{j,k} a_{jk}^{(i)} x_j y_k$ 使得 $q(x)q(y) = q(z)$, 其中 $z = [z_1, z_2, z_3]$; (2) 求出这些双线性型.

习题 1.7-10

设 $x=[x_1,x_2,x_3]\in\mathbb{C}^3$, $q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-3x_1x_2x_3$, ε 是 1 的三次本原根. 利用等式

$$q(x)=(x_1+x_2+x_3)(x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3)(x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon x_3)$$

证明: (1) 存在对称双线性型 $z_i=z_i(x,y)=\sum\limits_{j,k} a_{jk}^{(i)}x_jy_k$ 使得 $q(x)q(y)=q(z)$, 其中 $z=[z_1,z_2,z_3]$; (2) 求出这些双线性型.

设 $c_0=[1,1,1]$, $c_1=[1,\varepsilon,\varepsilon^2]$, $c_2=[1,\varepsilon^2,\varepsilon]$. 则有

$$\begin{aligned} q(x)q(y)=&(xc_0^T)(xc_1^T)(xc_2^T)(c_0y^T)(c_1y^T)(c_2y^T)\\ =&(xc_0^Tc_0y^T)(xc_1^Tc_1y^T)(xc_2^Tc_2y^T)\\ =&x(c_0^Tc_0)y^Tx(c_1^Tc_1)y^Tx(c_2^Tc_2)y^T. \end{aligned}$$

注意到 z_i 可以写为 $z_i=xA^{(i)}y^T$, 故 $q(z)$ 可以写为

$$\begin{aligned} q(z)=&x(A^{(1)}+A^{(2)}+A^{(3)})y^T\\ &x(A^{(1)}+\varepsilon A^{(2)}+\varepsilon^2 A^{(3)})y^T\\ &x(A^{(1)}+\varepsilon^2 A^{(2)}+\varepsilon A^{(3)})y^T. \end{aligned}$$

使得 $q(x)q(y)=q(z)$ 成立的矩阵 $A^{(1)},A^{(2)},A^{(3)}$ 必存在 (why?), 其中一组由下述方程组给出:

$$\begin{cases} A^{(1)}+A^{(2)}+A^{(3)}=c_0^Tc_0\\ A^{(1)}+\varepsilon A^{(2)}+\varepsilon^2 A^{(3)}=c_1^Tc_1\\ A^{(1)}+\varepsilon^2 A^{(2)}+\varepsilon A^{(3)}=c_2^Tc_2 \end{cases}$$

习题 1.7-10

设 $x=[x_1,x_2,x_3]\in\mathbb{C}^3$, $q(x)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$, ε 是 1 的三次本原根. 利用等式

$$q(x)=(x_1+x_2+x_3)(x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2x_3)(x_1+\varepsilon^2x_2+\varepsilon x_3)$$

证明: (1) 存在对称双线性型 $z_i=z_i(x,y)=\sum\limits_{j,k}a_{jk}^{(i)}x_jy_k$ 使得 $q(x)q(y)=q(z)$, 其中 $z=[z_1,z_2,z_3]$; (2) 求出这些双线性型.

- $q(z)$ 可分解为六个因式, 其中三个为 x_1,x_2,x_3 的线性组合, 三个为 y_1,y_2,y_3 的线性组合;
- 由 $q(z)$ 每个关于 z_1,z_2,z_3 的因式形式以及因式分解的唯一性可知

$$zc_0^T=\lambda_0(xc_{i_0}^T)(yc_{j_0}^T),\ zc_1^T=\lambda_1(xc_{i_1}^T)(yc_{j_1}^T),\ zc_2^T=\lambda_2(xc_{i_2}^T)(yc_{j_2}^T),$$

其中 $\lambda_0\lambda_1\lambda_2=1$, $\{i_0,i_1,i_2\}=\{j_0,j_1,j_2\}=\{0,1,2\}$.

习题 1.7-11

设 A 是域 K 上的 n 阶方阵, $\operatorname{char} K \neq 2$. 证明: A 是斜对称的当且仅当对所有的 $X = [x_1, \ldots, x_n]$ 有 $X^T A X = O$.

习题 1.7-11

设 A 是域 K 上的 n 阶方阵, char $K \neq 2$. 证明: A 是斜对称的当且仅当对所有的 $X = [x_1, \ldots, x_n]$ 有 $X^T AX = O$.

$\Rightarrow$ 若 A 是斜对称的, 则 $A = -A^T$, 故对任意的 X,

$$X^T AX = -X^T A^T X = -(X^T AX)^T = -X^T AX.$$

由 char $K \neq 2$ 可得 $X^T AX = 0$.

$\Leftarrow$ 注意到对任意的 X, Y,

$$\begin{aligned} 0 &= (X+Y)^T A(X+Y) = X^T AX + Y^T AY + X^T AY + Y^T AX \\ &= X^T AY + Y^T AX, \end{aligned}$$

故 A 为斜对称的.

习题 1.7-13

设 A 是 n 阶斜对称实方阵, E 是 n 阶单位矩阵, λ 是复数.
如果 $\det(\lambda E - A) = 0$, 那么 λ 的实部为 0.

习题 1.7-13

设 A 是 n 阶斜对称实方阵, E 是 n 阶单位矩阵, λ 是复数.
如果 $\det(\lambda E - A) = 0$, 那么 λ 的实部为 0.

由行列式条件可知存在特征向量 v 使得 $Av = \lambda v$.
取共轭可得 $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.
考虑 $v^T A\bar{v}$ 可得

$$v^T A\bar{v} = -(Av)^T\bar{v} = -\lambda v^T\bar{v},$$

$$v^T A\bar{v} = v^T(A\bar{v}) = \bar{\lambda} v^T\bar{v}.$$

这说明 $-\lambda = \bar{\lambda}$, 即 λ 的实部为 0.

关于 λ-矩阵需要初步了解的事情

1. λ-矩阵及其秩的定义
2. 可逆性的定义及其充要条件 (行列式为一非零数)
3. 求标准型 diag$\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda), 0, \ldots, 0\}$
   - 利用初等变换 (交换、数乘、多项式倍增) 将 λ-矩阵等价 (相抵) 转化
   - 先求 k 阶子式的最大公因式, 即 k 阶行列式因子, 再求不变因子
4. 不变因子: $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$

   行列式因子: $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \ldots, D_r(\lambda)$, 其中 $D_k(\lambda) = \prod_{i=1}^k d_i(\lambda)$
5. 初等因子的定义 (见书)
6. 下述等价
   - 矩阵 A, B 相似
   - 特征矩阵 $\lambda E - A, \lambda E - B$ 等价
   - 特征矩阵 $\lambda E - A, \lambda E - B$ 不变因子组相同
   - 特征矩阵 $\lambda E - A, \lambda E - B$ 行列式因子组相同
   - 特征矩阵 $\lambda E - A, \lambda E - B$ 初等因子组相同

利用 λ-矩阵得到的关于相似的一些结论

1. Jordan 块 $J_n(c)$ 的不变因子组为 $1, 1, \ldots, 1, (\lambda - c)^n$, 初等因子组为 $(\lambda - c)^n$
   由 Jordan 块 $J_{k_i}(c_i)$ 构成的分块对角矩阵, 其初等因子组为 $(\lambda - c_i)^{k_i}$
2. A 和 A^T 相似
3. 域 F 上两矩阵在扩域 E 上相似当且仅当其在原来的域 F 上相似
   特别地, 两个实矩阵复相似等价于实相似

经典问题: 已知秩和初等因子, 求不变因子或行列式因子

假设初等因子为 $\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, \lambda + 2$ 且秩为 5, 则不变因子为

$$d_5(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda + 2), d_4(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2, d_3(\lambda) = \lambda, d_2(\lambda) = d_1(\lambda) = 1.$$

方法可参考下表:

$$\begin{array}{llll} d_5: & \lambda^2 & (\lambda-1)^2 & \lambda+2 \\ d_4: & \lambda & (\lambda-1)^2 & \\ d_3: & \lambda & & \\ d_2: & & & \\ d_1: & & & \end{array}$$

第八章习题 1

化下列 λ-矩阵成标准型:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & \lambda^2 \\ & & \lambda^2-\lambda & \\ & (\lambda-1)^2 & & \\ \lambda^2-\lambda & & & \end{pmatrix}$$

第八章习题 1

化下列 λ-矩阵成标准型:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & & \lambda^2 \\ & & \lambda^2-\lambda & \\ & (\lambda-1)^2 & & \\ \lambda^2-\lambda & & & \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{diag}\{1, \lambda, \lambda(\lambda+1)\}, \ \mathrm{diag}\{1, \lambda(\lambda-1), \lambda(\lambda-1), \lambda^2(\lambda-1)^2\}.$$

第八章习题 2

求下列 λ-矩阵的不变因子:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \lambda+2 \\ & 1 & \lambda+2 & \\ 1 & \lambda+2 & & \\ \lambda+2 & & & \end{pmatrix}$$

第八章习题 2

求下列 λ-矩阵的不变因子:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \lambda+2 \\ & 1 & \lambda+2 & \\ 1 & \lambda+2 & & \\ \lambda+2 & & & \end{pmatrix}$$

$$1, 1, 1, \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 5;\ 1, 1, 1, (\lambda+2)^4.$$

第八章习题 3

证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & a_n \\ -1 & \lambda & & & & a_{n-1} \\ & -1 & \lambda & & & a_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & \lambda & a_2 \\ & & & & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

的不变因子是 $\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n-1}, f(\lambda)$, 其中 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

第八章习题 3

证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & a_n \\ -1 & \lambda & & & & a_{n-1} \\ & -1 & \lambda & & & a_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & \lambda & a_2 \\ & & & & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

的不变因子是 $\overbrace{1,1,\ldots,1}^{n-1},f(\lambda)$, 其中 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

由于左下角的 $n-1$ 阶子式行列式绝对值为 1, 故 $n-1$ 阶行列式因子应为 1.
从而前 $n-1$ 阶行列式因子均为 1, 前 $n-1$ 阶不变因子均为 1.
最后, 由于不变因子之积应为行列式, 故 n 阶不变因子为 $f(\lambda)$.