高等代数（荣誉）II
第三次习题课

宋经天

上海交通大学致远学院

2022/03/09

习题 2.3-24

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是有限维复向量空间上的线性算子.
证明: 如果 $\mathcal{AB} - \mathcal{BA}$ 的秩不超过 1, 那么这两个算子有共同的特征向量.

思路

对讨论空间的维数逐步降低, 降低的方式为找到原向量空间的一个非平凡 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$-不变子空间, 然后考虑在其上的限制. (注意: 限制在不变子空间上仍保有性质 $\operatorname{rank}(\mathcal{AB} - \mathcal{BA}) \le 1$)
证明情况最终必能落到以下两种情况之一:

- $\mathcal{B}$ 为数量矩阵;
- $\mathcal{AB} - \mathcal{BA}$ 的秩为 0.

这两种情况下结论是显然的.
换言之, 我们假设这两种情况都不成立时一定能找到一个非平凡 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$-不变子空间即可.

Hint

(否定情况二) 设有 $\operatorname{rank}(\mathcal{AB} - \mathcal{BA}) = 1$, 记 $\operatorname{Im}(\mathcal{AB} - \mathcal{BA}) = \mathbb{C}x_0$.
(否定情况一) 令 $\lambda \in \operatorname{Spec}(\mathcal{B})$. 考虑 $\mathcal{B} \neq \lambda\mathcal{E}$ 的情况.
我们有 $F = \operatorname{Ker}(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})$, $G = \operatorname{Im}(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})$ 为非平凡 $\mathcal{B}$-不变子空间. (why?)
下证 F 和 G 中至少有一个是 $\mathcal{A}$-不变的.

- 若 F 不是 $\mathcal{A}$-不变的, 则存在 x 使得 $(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})x = 0$, $(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{A}x \neq 0$. 从而有
$$(\mathcal{AB} - \mathcal{BA})x = -(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{A}x \in \operatorname{Im}(\mathcal{AB} - \mathcal{BA}) \cap \operatorname{Im}(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E}) \setminus \{0\}.$$
因此 $x_0 \in G$. 故 G 是 $\mathcal{A}$-不变的, 因为对任意的向量 v, 均存在 $c \in \mathbb{C}$ 使得
$$\mathcal{A}(\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})v = (\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{A}v + cx_0.$$
- 若 G 不是 $\mathcal{A}$-不变的, 下略.

定理 2.51

设 $\theta(t)$ 零化 $\mathcal{A}$. 若 $\theta(t)=\xi(t)\eta(t)$, 其中 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 互素, 则

$$U=\{v\in V|\xi(\mathcal{A})v=0\},\ \ W=\{v\in V|\eta(\mathcal{A})v=0\}$$

是 $\mathcal{A}$-不变子空间且有直和 $V=U\oplus W$.

习题 2.5-1

如果 $\theta=\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 是特征多项式, $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的首项系数都是 1, 那么

$$\chi_{\mathcal{A}_U}(t)=\xi(t),\ \ \chi_{\mathcal{A}_W}(t)=\eta(t);$$

$$\dim U=\deg\xi,\ \ \dim W=\deg\eta.$$

记 $(\chi_{\mathcal{A}_U}(t),\eta(t))$ 为 $f(t)$. 下证 $f(t)=1$.
设 $f(t)\neq 1$, 则存在非零向量 $u\in U$ 使得 $f(\mathcal{A})u=0$, 从而 $\eta(\mathcal{A})u=0$, 由定义得 $u\in W$, 这与 $U\oplus W$ 矛盾.
故 $(\chi_{\mathcal{A}_U}(t),\eta(t))=1$. 同理 $(\chi_{\mathcal{A}_W}(t),\xi(t))=1$.
由于 $\eta\xi=\theta=\chi_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}_U}\chi_{\mathcal{A}_W}$ 且 η,ξ 首一, 故 $\chi_{\mathcal{A}_U}=\xi,\chi_{\mathcal{A}_W}=\eta$.

习题 2.5-2

证明如果 $\mathcal{A}$ 有 k 维不变子空间, 那么它有 $n-k$ 维不变子空间.

Hint

注意到任意矩阵 A 相似于其转置矩阵 A^T.

$$A = \begin{pmatrix} A_{k\times k} & B \\ O & A_{n-k\times n-k} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} A_{k\times k}^T & O \\ B^T & A_{n-k\times n-k}^T \end{pmatrix}$$

习题 2.5-3

非零的 4 阶幂零方阵的约当标准形只有下面四个:

$$A_1 = J_2(0) + J_1(0) + J_1(0),\ A_2 = J_2(0) + J_2(0),$$

$$A_3 = J_3(0) + J_1(0),\ A_4 = J_4(0).$$

下列矩阵都是幂零的, 它们各相似于哪个 A_i:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & 2 & & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 2 & 1 & 0 & \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & 7 & & 0 \end{pmatrix}.$$

注意相似变换不改变矩阵的秩, 故第一个矩阵对应 A_1, 第三个矩阵对应 A_4. 剩下的两个矩阵应该对应 A_2 或 A_3. 考虑矩阵平方是否为零可知这两个矩阵均对应 A_3.

习题 2.5-7

设域 K 的特征为 0, A 是 K 上的 n 阶方阵. 证明: A 是幂零的当且仅当 $\mathrm{tr}(A^k)=0, 1\le k\le n$.

$\Rightarrow$ $\chi_A=t^n$, 故 A 的谱 Spec A 为 n 个 0.

$\Leftarrow$ 归纳法证明下面这个引理:

> **Theorem 2.6** (trace Cayley-Hamilton theorem). Let $n\in\mathbb{N}$. Let $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$. For every $j\in\mathbb{Z}$, define an element $c_j\in\mathbb{K}$ by $c_j=\left[t^{n-j}\right]\chi_A$. Then,
>
> $$kc_k+\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Tr}\left(A^i\right)c_{k-i}=0 \qquad \text{for every } k\in\mathbb{N}.$$

The trace Cayley-Hamilton theorem.pdf

习题 2.5-7

设域 K 的特征为 0, A 是 K 上的 n 阶方阵. 证明: A 是幂零的当且仅当 $\mathrm{tr}(A^k)=0, 1\le k\le n$.

K 为代数闭域情况的证明.

$\Leftarrow$ 设 A 的谱 $\mathrm{Spec}\, A$ 为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则由 $\mathrm{tr}(A^k)=0$ 可得

$$\lambda_1^k+\cdots+\lambda_n^k=0,\quad 1\le k\le n.$$

设 A 的谱 $\mathrm{Spec}\, A$ 为 t 个 0, t_1 个 $\lambda_1,\cdots,t_p$ 个 λ_p. 则

$$t_1\lambda_1^k+\cdots+t_p\lambda_p^k=0,\quad 1\le k\le n.$$

注意到

$$\det(\lambda_i^j)_{i,j=1}^p=\lambda_1\cdots\lambda_p\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j).$$

本题也可以考虑有限扩域 $K(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

习题 2.5-8

如果线性算子 $\mathcal{A}$ 的约当标准形只有一个约当块, 确定 $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间.

由题意可假定 $\mathcal{A}e_i = \lambda e_i + e_{i-1}(i = 2, \cdots, n)$, $\mathcal{A}e_1 = \lambda e_1$.
记子空间 $\langle e_i \rangle_{i=1}^k$ 为 V_k, 特别地, $V_0 = 0$.
易可知 V_k 均为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.
对于不变子空间 U, 存在 k 使得 $U \subset V_k$ 且 $U \not\subset V_{k-1}$.
故存在 $u = a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k \in U$ 使得 $a_k \neq 0$.
注意到对 $p = 1, \cdots, k-1$ 有

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^p u = a_{p+1} e_1 + \cdots a_k e_{k-p} \in U,$$

故由 $a_k \neq 0$ 可得 $e_i \in U(1 \leq i \leq k)$, 从而 $U = V_k$.
综上, $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间为 $V_0, V_1, \cdots, V_n$.

n 维复空间上的线性算子 $\mathcal{A}$ 必有 $k(1 \leq k \leq n)$ 维的不变子空间.

习题 2.5-10

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征根都等于 1. 证明: 对任意非零整数 k, A 和 A^k 相似.

Hint

考虑 Jordan 块.

习题 2.5-11

证明: 对于矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 等式 $A^m = E$ 成立当且仅当 A 可对角化且它的特征值都是 m 次单位根. 举例说明这个结论对 $\mathbb{Z}_p$ 上的方阵不成立, 即存在 $\mathbb{Z}_p$ 上的方阵, 其某个幂为单位矩阵, 但它不能对角化 (即不相似于对角矩阵).

$\Leftarrow$ 显然.

$\Rightarrow$ 注意到 $\mu_A(t) | t^m - 1$, 故 $\mu_A(t)$ 无重根且根均为 m 次单位根.
Lemma: 代数闭域上, 矩阵可对角化当且仅当极小多项式无重根.

习题 2.5-11

证明: 对于矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 等式 $A^m = E$ 成立当且仅当 A 可对角化且它的特征值都是 m 次单位根. 举例说明这个结论对 $\mathbb{Z}_p$ 上的方阵不成立, 即存在 $\mathbb{Z}_p$ 上的方阵, 其某个幂为单位矩阵, 但它不能对角化 (即不相似于对角矩阵).

$\Leftarrow$ 显然.

$\Rightarrow$ 注意到 $\mu_A(t) | t^m - 1$, 故 $\mu_A(t)$ 无重根且根均为 m 次单位根.
Lemma: 代数闭域上, 矩阵可对角化当且仅当极小多项式无重根.

- 反例: 考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

  (如何说明 A 不能对角化?)

习题 2.5-12

有 Jordan 分解 $A = S + N$, 其中 $\lambda \neq \mu$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & 1 \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

求多项式 $s(t), m(t)$ 满足 $s(A) = S$, $m(A) = N$. (Cayley-Hamilton 定理)

$$m(t) = \frac{1}{\mu - \lambda}(t - \lambda)(t - \mu).$$

$$s(t) = t - m(t) = \frac{1}{\lambda - \mu}(t^2 - 2\mu t + \lambda\mu).$$

习题 3.1-2

在次数不超过 n 的实多项式形成的向量空间 P_{n+1} 中定义

$$(f|g)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. 证明: $(\cdot|\cdot)$ 是 P_{n+1} 的内积;
2. 对 $f=t, g=at+b$, 求 $(f|g)$;
3. 求出所有正交于 t 的多项式.

Hint

1. 验证正定双线性.
2. $(f|g)=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(ak+bn)=\dfrac{an(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\dfrac{b(n+1)}{2n}$.
3. 略.

习题 3.1-3

在次数不超过 2 的实多项式形成的向量空间 P_3 中对于内积

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt,$$

向量 1 和 t 是正交的, 找出:

1. 子空间 $\langle 1, t\rangle^{\perp}$;
2. 向量 1, $t+1$ 之间的夹角; 向量 t, $t+1$ 之间的夹角;
3. P_3 的一个标准正交基.

1. 由于 $(t^2|1) = 2/3, (t^2|t) = 0, (1|1) = 2$, 故子空间 $\langle 1, t\rangle^{\perp} = \langle t^2 - 1/3\rangle$;
2. $(1|t+1) = 2$, $(t|t+1) = 2/3$.
3. 利用正交化过程.

习题 3.1-4

在所有实多项式形成的向量空间 $\mathbb{R}[t]$ 中, 定义

$$(f|g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)dt.$$

1. 证明: $(\cdot|\cdot)$ 是 $\mathbb{R}[t]$ 的内积;
2. 求出与 1 正交的一个线性多项式 $at+b$.

Hint

1. 验证正定双线性.
2. 由于 $(1|t) = 1$, $(t|t) = 2$, 故 $t-2$ 满足条件.

习题 3.1-7

如果实方阵的列向量都是非零的且相互正交的, 求其逆矩阵.

假设该实方阵为 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 期中 α_i 均非零列向量且相互正交.
注意到

$$A = \left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \cdots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|} \right) \mathrm{diag}\{\|\alpha_1\|, \cdots, \|\alpha_n\|\} := A_0 D.$$

由于 A_0 的列向量构成标准正交基, 故其为正交矩阵, 从而 $(A_0)^{-1} = A_0^T$, 故

$$A^{-1} = D^{-1} A_0^{-1} = D^{-1} A_0^T = \left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|^2}, \cdots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|^2} \right)^T.$$

习题 3.1-8

运用正交化方法, 求出 $\mathbb{R}^4$ 中由向量 $(1,2,1,3),(4,1,1,1),(3,1,1,0)$ 张成的线性子空间的一个标准正交基.

Hint

重复以下操作:

1. 选取下一个向量;
2. 减去之前得到的向量于其内积部分 (坐标);

$$v_k' = v_k - \sum_{i=1}^{k-1}(v_k|e_i)e_i.$$

3. 调整到长度为 1.

$$e_k = v_k'/\|v_k'\|.$$