高等代数（荣誉）II

第二次习题课

宋经天

上海交通大学致远学院

2022/03/03

习题 2.2-5

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, 有等式

$$\operatorname{rank} \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}).$$

习题 2.2-5

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, 有等式

$$\operatorname{rank}\mathcal{A} = \operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}).$$

考虑 $\mathcal{B}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}} : \operatorname{Im}\mathcal{A} \to V$.

习题 2.2-5

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, 有等式

$$\operatorname{rank} \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}).$$

考虑 $\mathcal{B}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}} : \operatorname{Im} \mathcal{A} \to V$.

习题 2.2-6

利用上一题的等式证明对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 弗罗宾纽斯不等式成立:

$$\operatorname{rank} \mathcal{B}\mathcal{A} + \operatorname{rank} \mathcal{A}\mathcal{C} \leq \operatorname{rank} \mathcal{A} + \operatorname{rank} \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

习题 2.2-5

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A},\mathcal{B}$, 有等式

$$\operatorname{rank}\mathcal{A}=\operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}+\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}\cap\operatorname{Ker}\mathcal{B}).$$

考虑 $\mathcal{B}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}:\operatorname{Im}\mathcal{A}\to V$.

习题 2.2-6

利用上一题的等式证明对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$, 弗罗宾纽斯不等式成立:

$$\operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}+\operatorname{rank}\mathcal{A}\mathcal{C}\leq\operatorname{rank}\mathcal{A}+\operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{A}=\operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}+\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}\cap\ker\mathcal{B}),\quad \operatorname{rank}\mathcal{A}\mathcal{C}=\operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}+\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}\mathcal{C}\cap\ker\mathcal{B}).$$

故所证问题化为

$$\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}\mathcal{C}\cap\ker\mathcal{B})\leq\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}\cap\ker\mathcal{B}).$$

习题 2.2-5

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, 有等式

$$\text{rank } \mathcal{A} = \text{rank } \mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\text{Im } \mathcal{A} \cap \text{Ker } \mathcal{B}).$$

考虑 $\mathcal{B}|_{\text{Im } \mathcal{A}} : \text{Im } \mathcal{A} \to V$.

习题 2.2-6

利用上一题的等式证明对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 弗罗宾纽斯不等式成立:

$$\text{rank } \mathcal{B}\mathcal{A} + \text{rank } \mathcal{A}\mathcal{C} \leq \text{rank } \mathcal{A} + \text{rank } \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

$$\text{rank}\mathcal{A} = \text{rank}\mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\text{Im } \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}), \quad \text{rank}\mathcal{A}\mathcal{C} = \text{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C} + \dim(\text{Im } \mathcal{A}\mathcal{C} \cap \ker \mathcal{B}).$$

故所证问题化为

$$\dim(\text{Im } \mathcal{A}\mathcal{C} \cap \ker \mathcal{B}) \leq \dim(\text{Im } \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}).$$

习题 2.2-7

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}$ 和任意正整数 i 都有等式

$$\dim(\text{Im } \mathcal{A}^{i-1} \cap \text{Ker } \mathcal{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{i} - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{i-1}.$$

习题 2.2-5

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, 有等式

$$\operatorname{rank} \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}).$$

考虑 $\mathcal{B}|_{\operatorname{Im} \mathcal{A}} : \operatorname{Im} \mathcal{A} \to V$.

习题 2.2-6

利用上一题的等式证明对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 弗罗宾纽斯不等式成立:

$$\operatorname{rank} \mathcal{B}\mathcal{A} + \operatorname{rank} \mathcal{A}\mathcal{C} \leq \operatorname{rank} \mathcal{A} + \operatorname{rank} \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

$$\operatorname{rank}\mathcal{A} = \operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}), \quad \operatorname{rank}\mathcal{A}\mathcal{C} = \operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C} + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}\mathcal{C} \cap \ker \mathcal{B}).$$

故所证问题化为

$$\dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}\mathcal{C} \cap \ker \mathcal{B}) \leq \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}).$$

习题 2.2-7

证明: 对有限维向量空间 V 上的任意线性算子 $\mathcal{A}$ 和任意正整数 i 都有等式

$$\dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}^{i-1} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{i} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{i-1}.$$

$$\operatorname{rank} \mathcal{A}^{i-1} = \operatorname{rank} \mathcal{A}^{i} + \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}^{i-1} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A}).$$

习题 2.2-12

设 K 是 q 元域，V 是 K 上的 n 维向量空间.
求出 Aut V 的阶数 $|\text{Aut } V|$. 由此知道 $|GL_n(K)|$.
进而求出 $GL_n(K)$ 中行列式为 1 的矩阵全体形成的群 $SL_n(K)$ 的阶数.

名词解释

域 $(K, +, \cdot)$ 要求 $(K, +)$ 和 $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ 均为群.

- $K = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ 是一个 3 元域.
- $K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ 是一个 4 元域.

题目中将 V 视为了一个 (加法) 群去处理.
一个加法群的自同构是指保加法的双射. 群 G 所有的自同构构成的集合记为 Aut G.

- 在本题中，向量空间 V 上的自同构就是双射线性变换，也就相当于满秩矩阵.

一个群的阶是指其中所含元素的个数，记为 $|G|$.

习题 2.2-12

设 K 是 q 元域, V 是 K 上的 n 维向量空间.
求出 Aut V 的阶数 $|\text{Aut } V|$. 由此知道 $|GL_n(K)|$.
进而求出 $GL_n(K)$ 中行列式为 1 的矩阵全体形成的群 $SL_n(K)$ 的阶数.

名词解释

域 $(K,+,\cdot)$ 要求 $(K,+)$ 和 $(K\setminus\{0\},\cdot)$ 均为群.

- $K=\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$ 是一个 3 元域.
- $K=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ 是一个 4 元域.

题目中将 V 视为了一个 (加法) 群去处理.
一个加法群的自同构是指保加法的双射. 群 G 所有的自同构构成的集合记为 Aut G.

- 在本题中, 向量空间 V 上的自同构就是双射线性变换, 也就相当于满秩矩阵.

一个群的阶是指其中所含元素的个数, 记为 $|G|$.

题目所求 $|\text{Aut } V|$ 等于 $M_n(F)$ 中秩为 n 的矩阵个数, 即所有行向量均线性无关的矩阵. 逐行考虑取法, 第 i 行的取法数为 $q^n-q^{i-1}(1\leq i\leq n)$, 即不能取前 $i-1$ 行的线性组合. 故 $|\text{Aut } V|=|GL_n(K)|=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(q^n-q^{i-1})$.

由数乘映射可得 $|SL_n(K)|=|GL_n(K)|/(q-1)=q^{n-1}\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(q^n-q^{i-1})$

习题 2.2-17

设 A 是特征为 0 的域 K 上的 n 阶方阵, 证明: 如果 A 的迹为零, 那么 A 相似于某个主对角线均取零值的矩阵.

习题 2.2-17

设 A 是特征为 0 的域 K 上的 n 阶方阵, 证明: 如果 A 的迹为零, 那么 A 相似于某个主对角线均取零值的矩阵.

使用归纳法. 当 $n=1$ 时, 结论显然.
假设已经证明了 $n=k$ 的情况, 下证 $n=k+1$ 的情况.

- 若所有向量均是 A 的特征向量, 这说明 A 是数量矩阵, 由 $\operatorname{tr}(A)=0$ 可得 $A=O$, 直接证毕.
- 若存在非零向量 v 使得 v 不是 A 的特征向量, 则可将 $v, \mathcal{A}v$ 扩成一组 V 的基.

  在这组基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 0 & \alpha^T \\ \beta & B \end{pmatrix}$, 这时矩阵 B 也满足 $\operatorname{tr}(B)=0$.

  由归纳假设可知存在 P 使得 $P^{-1}BP$ 为一个对角线上均为零的矩阵, 故通过 $\operatorname{diag}\{1, P\}$ 可以将 A 相似为一个对角线上均为零的矩阵.

习题 2.2-17

设 A 是特征为 0 的域 K 上的 n 阶方阵, 证明: 如果 A 的迹为零, 那么 A 相似于某个主对角线均取零值的矩阵.

使用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然.
假设已经证明了 $n = k$ 的情况, 下证 $n = k + 1$ 的情况.

- 若所有向量均是 $\mathcal{A}$ 的特征向量, 这说明 A 是数量矩阵, 由 $\mathrm{tr}(A) = 0$ 可得 $A = O$, 直接证毕.
- 若存在非零向量 v 使得 v 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量, 则可将 $v, \mathcal{A}v$ 扩成一组 V 的基.

  在这组基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 0 & \alpha^T \\ \beta & B \end{pmatrix}$, 这时矩阵 B 也满足 $\mathrm{tr}(B) = 0$.

  由归纳假设可知存在 P 使得 $P^{-1}BP$ 为一个对角线上均为零的矩阵, 故通过 $\mathrm{diag}\{1, P\}$ 可以将 A 相似为一个对角线上均为零的矩阵.

特征为 0 是必要条件吗?

习题 2.2-17

设 A 是特征为 0 的域 K 上的 n 阶方阵, 证明: 如果 A 的迹为零, 那么 A 相似于某个主对角线均取零值的矩阵.

使用归纳法. 当 $n=1$ 时, 结论显然.
假设已经证明了 $n=k$ 的情况, 下证 $n=k+1$ 的情况.

- 若所有向量均是 A 的特征向量, 这说明 A 是数量矩阵, 由 $\mathrm{tr}(A)=0$ 可得 $A=O$, 直接证毕.
- 若存在非零向量 v 使得 v 不是 A 的特征向量, 则可将 $v, \mathcal{A}v$ 扩成一组 V 的基.

  在这组基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} 0 & \alpha^T \\ \beta & B \end{pmatrix}$, 这时矩阵 B 也满足 $\mathrm{tr}(B)=0$.

  由归纳假设可知存在 P 使得 $P^{-1}BP$ 为一个对角线上均为零的矩阵, 故通过 $\mathrm{diag}\{1, P\}$ 可以将 A 相似为一个对角线上均为零的矩阵.

特征为 0 是必要条件吗?

考虑特征为 p 的域上的 p 阶单位矩阵.

习题 2.3-6/7

设 $\mathcal{A}$ 幂等, 即 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. 则有

- $\mathcal{B}:=\mathcal{E}-\mathcal{A}$ 幂等, 并且 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$.
- $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值 1 所对应的特征空间, $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 是特征值 0 所对应的特征空间.
- $\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\operatorname{Im}\mathcal{B}$.
- $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Im}\mathcal{B}$.

更一般地, 设 $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_m$ 均幂等并且两两正交 $(\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j=\mathcal{A}_j\mathcal{A}_i=\mathcal{O}(i\neq j))$. 则有

- $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\cdots+\mathcal{A}_m$ 幂等, 并且 $\mathcal{A}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_i\mathcal{A}=\mathcal{A}_i$.
- $\mathcal{B}:=\mathcal{E}-\mathcal{A}$ 幂等, 并且 $\mathcal{B}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_i\mathcal{B}=\mathcal{O}$.
- $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}\mathcal{A}_m\oplus\operatorname{Im}\mathcal{B}$.

习题 2.3-6/7

设 $\mathcal{A}$ 幂等, 即 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. 则有

- $\mathcal{B}:=\mathcal{E}-\mathcal{A}$ 幂等, 并且 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$.
- $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值 1 所对应的特征空间, $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 是特征值 0 所对应的特征空间.
- $\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\operatorname{Im}\mathcal{B}$.
- $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Im}\mathcal{B}$.

更一般地, 设 $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_m$ 均幂等并且两两正交 $(\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j=\mathcal{A}_j\mathcal{A}_i=\mathcal{O}(i\neq j))$. 则有

- $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\cdots+\mathcal{A}_m$ 幂等, 并且 $\mathcal{A}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_i\mathcal{A}=\mathcal{A}_i$.
- $\mathcal{B}:=\mathcal{E}-\mathcal{A}$ 幂等, 并且 $\mathcal{B}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_i\mathcal{B}=\mathcal{O}$.
- $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}\mathcal{A}_m\oplus\operatorname{Im}\mathcal{B}$.

Hint

由前半段得到 $V=\operatorname{Im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Im}\mathcal{B}$. 下证明 $\operatorname{Im}\mathcal{A}=\bigoplus_{i=1}^m\operatorname{Im}\mathcal{A}_i$.

- $\operatorname{Im}\mathcal{A}=\sum_{i=1}^m\operatorname{Im}\mathcal{A}_i$.
- 设 $0=\sum_{i=1}^m\mathcal{A}_i(v_i)$, 以 $\mathcal{A}_k$ 作用后得到 $\mathcal{A}_k(v_k)=0$.

习题 2.3-9

设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 V 上的线性算子, 对某个正整数 k 有 $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. 证明: 在这种情形有 $V = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^p \oplus \operatorname{Im}\mathcal{A}^p$ 是 V 的两个不变子空间的直和. (假定 $p \geq k$)

$\dim V = \infty$?

习题 2.3-9

设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 V 上的线性算子, 对某个正整数 k 有 $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. 证明: 在这种情形有 $V = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^p \oplus \operatorname{Im}\mathcal{A}^p$ 是 V 的两个不变子空间的直和. (假定 $p \geq k$)

$\dim V = \infty$?

$\mathcal{A}(e_1) = 0,\ \mathcal{A}(e_{k+1}) = e_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$.

习题 2.3-9

设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 V 上的线性算子, 对某个正整数 k 有 $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1}$. 证明: 在这种情形有 $V = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^p \oplus \operatorname{Im}\mathcal{A}^p$ 是 V 的两个不变子空间的直和. (假定 $p \geq k$)

dim $V = \infty$?

$\mathcal{A}(e_1) = 0,\ \mathcal{A}(e_{k+1}) = e_k(k = 1, 2, 3, \cdots)$.

Hint

- $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k = \operatorname{Im}\mathcal{A}^p$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^p$, 且均为不变子空间.
- $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^k + \operatorname{Im}\mathcal{A}^k = V$.
  考虑分解 $v = \mathcal{A}^k u + (v - \mathcal{A}^k u)$, 其中 u 满足 $\mathcal{A}^k v = \mathcal{A}^{2k} u$.

习题 2.3-9

设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 V 上的线性算子, 对某个正整数 k 有 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}^k = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^{k+1}$. 证明: 在这种情形有 $V = \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^p \oplus \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^p$ 是 V 的两个不变子空间的直和. (假定 $p \geq k$)

$\dim V = \infty$?

$\mathcal{A}(e_1) = 0,\ \mathcal{A}(e_{k+1}) = e_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$.

Hint

- $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}^k = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^p$, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^k = \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^p$, 且均为不变子空间.
- $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}^k + \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^k = V$.
  考虑分解 $v = \mathcal{A}^k u + (v - \mathcal{A}^k u)$, 其中 u 满足 $\mathcal{A}^k v = \mathcal{A}^{2k} u$.

是否总有这样的 k 存在?

习题 2.3-11

证明：次数不超过 n 的实多项式空间上的算子 $f(t) \mapsto f(at+b)$ 的特征值是 $1, a, \cdots, a^n$.

习题 2.3-11

证明：次数不超过 n 的实多项式空间上的算子 $f(t) \mapsto f(at+b)$ 的特征值是 $1, a, \cdots, a^n$.

Hint

注意到该算子在典范基 $1, t, t^2, \cdots, t^n$ 上的矩阵表示为上三角矩阵, 且对角值依次为 $1, a, a^2, \cdots, a^n$.

习题 2.3-12

证明如果 λ^2 是线性算子 $\mathcal{A}^2$ 的特征值, 那么 λ 和 $-\lambda$ 中有一个是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

特征向量不一定是相同的

习题 2.3-12

证明如果 λ^2 是线性算子 $\mathcal{A}^2$ 的特征值, 那么 λ 和 $-\lambda$ 中有一个是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

特征向量不一定是相同的

$\mathcal{A}e_1 = e_2, \ \mathcal{A}e_2 = e_1.$

习题 2.3-12

证明如果 λ^2 是线性算子 $\mathcal{A}^2$ 的特征值, 那么 λ 和 $-\lambda$ 中有一个是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

特征向量不一定是相同的

$\mathcal{A}e_1 = e_2, \ \mathcal{A}e_2 = e_1.$

Hint

注意到 $\lambda^2 E - A^2 = (\lambda E - A)(\lambda E + A)$.

习题 2.3-16

设 A 是 n 阶实方阵, 没有实的特征根, 特别, n 是偶数且 A 可逆.
证明: 存在实矩阵 B 使得 $AB = BA$ 且 $B^2 = -E$, 其中 E 是单位矩阵.

习题 2.3-16

设 A 是 n 阶实方阵, 没有实的特征根, 特别, n 是偶数且 A 可逆.
证明: 存在实矩阵 B 使得 $AB = BA$ 且 $B^2 = -E$, 其中 E 是单位矩阵.

Hint

实多项式的非实数根以共轭形式成对出现. (所以 n 是偶数且 A 可逆.)
若 A 可对角化, 则相似于矩阵 $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \cdots, \lambda_m, \overline{\lambda_m}\}$. 这里 $2m = n$ 且 λ_i 均非实数.
注意到下述结论:

- 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- 两个实矩阵相似, 则一定实相似.
- 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 交换.

矩阵 A 不可对角化时构造方式相同.

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D}: M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D}: M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

- 证明 $\mathcal{D}$ 是双射.
  设存在非零矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 满足 $\mathcal{D}(A) = O$, 其中 $a_{st} \neq 0$.
  对任意的 i, j 有 $O = \mathcal{D}(E_{is}AE_{tj}) = a_{st}\mathcal{D}(E_{ij})$, 从而 $\mathcal{D}(E_{ij}) = O$.
  由 $\mathcal{D}$ 是线性算子可知 $\mathcal{D} \equiv 0$, 矛盾, 故 $\operatorname{Ker}\mathcal{D} = 0$, $\mathcal{D}$ 为单射.
  注意到 $\mathcal{D}$ 是相同维数的空间之间的线性映射, 故 $\mathcal{D}$ 是双射.

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D} : M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

- 证明 $\mathcal{D}$ 是双射.
  设存在非零矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 满足 $\mathcal{D}(A) = O$, 其中 $a_{st} \neq 0$.
  对任意的 i, j 有 $O = \mathcal{D}(E_{is}AE_{tj}) = a_{st}\mathcal{D}(E_{ij})$, 从而 $\mathcal{D}(E_{ij}) = O$.
  由 $\mathcal{D}$ 是线性算子可知 $\mathcal{D} \equiv 0$, 矛盾, 故 $\operatorname{Ker} \mathcal{D} = 0$, $\mathcal{D}$ 为单射.
  注意到 $\mathcal{D}$ 是相同维数的空间之间的线性映射, 故 $\mathcal{D}$ 是双射.
- 证明 $\mathcal{D}(I) = I$.
  由 $\mathcal{D}$ 是双射可知, 存在 A 满足 $\mathcal{D}(A)$ 可逆.
  注意到 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(I)\mathcal{D}(A)$, 故 $\mathcal{D}(I) = I$.

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D}: M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

- $\mathcal{D}$ 是双射; $\mathcal{D}(I) = I$.

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D}: M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

- $\mathcal{D}$ 是双射; $\mathcal{D}(I) = I$.
- 设 $F_{ij} = \mathcal{D}(E_{ij})$. 则有 $F_{ij}F_{kl} = \delta_{jk}F_{il}$ 成立.
  注意到 $(F_{kk})_{k=1}^n$ 是一组正交幂等线性算子且 $\sum F_{kk} = \mathcal{D}(I) = I$.
  由习题 2.3-7 可知 $K^n = \bigoplus \operatorname{Im} F_{kk}$.
  由于 F_{kk} 均非零, 故可假设 $\operatorname{Im} F_{kk} = Kv_k$, 从而有 $F_{ii}v_j = \delta_{ij}v_j$ 成立.
  存在非退化矩阵 C 满足 $CF_{ii}C^{-1}e_j = \delta_{ij}e_j$, 即 $CF_{kk}C^{-1} = E_{kk}$.

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D}: M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

- 存在非退化矩阵 C 满足 $\mathcal{D}(E_{kk}) = C^{-1}E_{kk}C$.
- 接下来想要证明 $\mathcal{D}(E_{ij}) = C^{-1}E_{ij}C$.

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D}: M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

- 存在非退化矩阵 C 满足 $\mathcal{D}(E_{kk}) = C^{-1}E_{kk}C$.
- 接下来想要证明 $\mathcal{D}(E_{ij}) = C^{-1}E_{ij}C$. 然而这并不成立!
- 注意到 $F_{ij}v_k = \begin{cases} F_{ij}F_{jj}v_k = 0, & k \neq j; \\ F_{ii}F_{ij}v_j = \lambda_{ij}v_i, & k = j. \end{cases}$, 即 $F_{ij} = \lambda_{ij}C^{-1}E_{ij}C$.

  由 $F_{ij}F_{jk} = F_{ik}$ 可得 $\lambda_{ij}\lambda_{jk} = \lambda_{ik}$. 特别地, $\lambda_{ij}\lambda_{ji} = 1$.

  考虑 $C_1 = \operatorname{diag}\{\lambda_{11}, \cdots, \lambda_{1n}\}$. 则

$$\begin{aligned}(C_1C)^{-1}E_{ij}C_1C =& C^{-1}C_1^{-1}E_{ij}C_1C = \lambda_{1i}^{-1}\lambda_{1j}C^{-1}E_{ij}C \\ =& \lambda_{i1}\lambda_{1j}C^{-1}E_{ij}C = \lambda_{ij}C^{-1}E_{ij}C = F_{ij}.\end{aligned}$$

  (也可以直接考虑过渡到 $v_1, F_{21}v_1, F_{31}v_1, \cdots, F_{n1}v_1$ 这组基的矩阵)

习题 2.3-8

设 $\mathcal{D}: M_n(K) \to M_n(K)$ 是域 K 上的 n 阶方阵空间上的非零线性算子 $\mathcal{A}$. 证明: 如果它保持乘法, 即对所有 $A, B \in M_n(K)$ 有

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),$$

那么，存在非退化矩阵 $C \in M_n(K)$ 使得 $\mathcal{D} = f_C(f_C(X) = CXC^{-1})$. 找出 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

- 存在非退化矩阵 C 满足 $\mathcal{D}(E_{kk}) = C^{-1}E_{kk}C$.
- 接下来想要证明 $\mathcal{D}(E_{ij}) = C^{-1}E_{ij}C$. 然而这并不成立!
- 注意到 $F_{ij}v_k = \begin{cases} F_{ij}F_{jj}v_k = 0, & k \neq j; \\ F_{ii}F_{ij}v_j = \lambda_{ij}v_i, & k = j. \end{cases}$, 即 $F_{ij} = \lambda_{ij}C^{-1}E_{ij}C$.

  由 $F_{ij}F_{jk} = F_{ik}$ 可得 $\lambda_{ij}\lambda_{jk} = \lambda_{ik}$. 特别地, $\lambda_{ij}\lambda_{ji} = 1$.

  考虑 $C_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_{11}, \cdots, \lambda_{1n}\}$. 则

$$\begin{aligned}(C_1C)^{-1}E_{ij}C_1C =& C^{-1}C_1^{-1}E_{ij}C_1C = \lambda_{1i}^{-1}\lambda_{1j}C^{-1}E_{ij}C \\ =& \lambda_{i1}\lambda_{1j}C^{-1}E_{ij}C = \lambda_{ij}C^{-1}E_{ij}C = F_{ij}.\end{aligned}$$

  (也可以直接考虑过渡到 $v_1, F_{21}v_1, F_{31}v_1, \cdots, F_{n1}v_1$ 这组基的矩阵)

所有与 C 可交换的矩阵构成 f_C 的以 1 为特征值的特征空间.

automorphism of a k-algebra: an isomorphism from the algebra to itself
i.e., a bijective linear map $\phi : A \to A$ satisfying

$$\phi(a_1 \cdot a_2) = \phi(a_1) \cdot \phi(a_2).$$

inner: ϕ is of the form $x \mapsto r^{-1}xr$ for some invertible $r \in R$.
outer: not inner.

Ex 2.3-8: All automorphisms of the K-algebra $M_n(K)$ are inner.

Skolem-Noether theorem

Every automorphism of a central simple k-algebra is an inner automorphism.
(A central simple algebra (CSA) over a field k is a finite-dimensional associative k-algebra A, which is simple, and for which the center is exactly k.)

automorphism of a k-algebra: an isomorphism from the algebra to itself
i.e., a bijective linear map $\phi : A \to A$ satisfying

$$\phi(a_1 \cdot a_2) = \phi(a_1) \cdot \phi(a_2).$$

inner: ϕ is of the form $x \mapsto r^{-1}xr$ for some invertible $r \in R$.
outer: not inner.

Ex 2.3-8: All automorphisms of the K-algebra $M_n(K)$ are inner.

Skolem-Noether theorem

Every automorphism of a central simple k-algebra is an inner automorphism.
(A central simple algebra (CSA) over a field k is a finite-dimensional associative k-algebra A, which is simple, and for which the center is exactly k.)

Find an outer group automorphism of $GL_n(K)$.

automorphism of a k-algebra: an isomorphism from the algebra to itself
i.e., a bijective linear map $\phi : A \to A$ satisfying

$$\phi(a_1 \cdot a_2) = \phi(a_1) \cdot \phi(a_2).$$

inner: ϕ is of the form $x \mapsto r^{-1}xr$ for some invertible $r \in R$.
outer: not inner.

Ex 2.3-8: All automorphisms of the K-algebra $M_n(K)$ are inner.

Skolem-Noether theorem

Every automorphism of a central simple k-algebra is an inner automorphism.
(A central simple algebra (CSA) over a field k is a finite-dimensional associative k-algebra A, which is simple, and for which the center is exactly k.)

Find an outer group automorphism of $GL_n(K)$. (Hint: $x \mapsto (x^T)^{-1}$)