评价类常见模型介绍

总结人：吴欣怡、刘俊涵

一、综合评价的基本理论和数据预处理

1.1 基本概念

评价对象：评价问题中研究的对象，或称为系统。通常情况下，一个问题中的评价对象属于同一类别，且个数大于1.

不妨设有个n评价对象，记$S=[S_1,S_2,\dots,S_n](n>1)$

评价指标：评价指标是反应对象属性的基本要素。通常的问题由多项指标构成，从不同的侧面刻画系统的特征。

设一个问题的评价指标有m个，则可用评价指标向量$x=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$表示。

指标选取的一般原则：系统性、独立性、可观测性、可比性、科学性
权重系数：综合评价问题均有相应的目的，而针对某种目的，各指标之间的相对重要性是不同的，这种差异可以用权重系数来刻画。

用$w_j(j=1,2,\ldots,m)$来表示指标x_j的权重系数，一般应满足：

$$w_j\geqslant 0, j=1,2,\ldots,m,\sum_{j=1}^{m}w_j=1$$

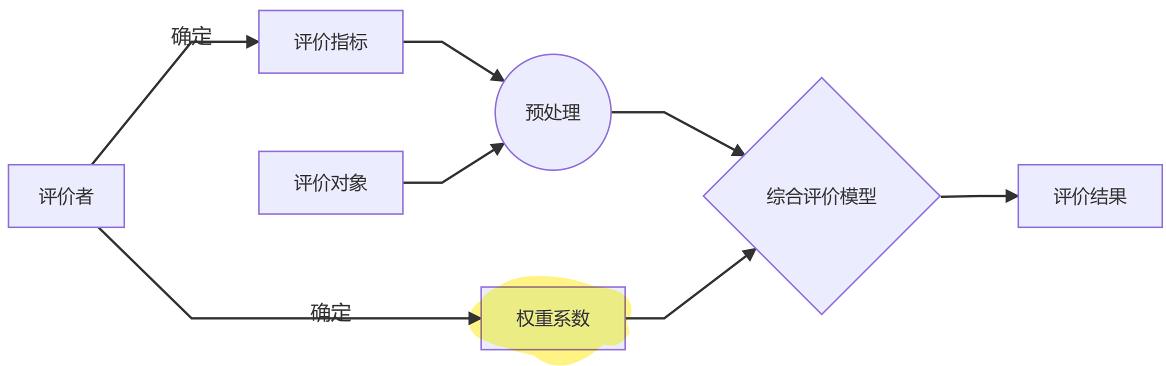
评价者：评价者是直接参与评价的主体，对于评价目的，评价指标，权重系数，评价模型的选择均有很大影响。因此，在尽可能客观进行综合评价的同时，不能忽略评价者主观因素的影响，且在评价过程中要尽量排除主观因素影响 。
综合评价模型：一般的评价问题都是多指标（因素）的，因此为了比较得出评价结果，需要建立一定的数学模型将多个评价指标值综合为一个整体的综合评价值，作为最终评价的依据。

设S_i的指标向量为x_i，权重向量为w，则综合评价模型可表示为

$$y=f(x,w)$$

S_i的综合评价值$b_i=f(x_i,w)$，根据b_i对评价对象进行排序或分类，即得评价结果。

解决综合评价模型的一般过程：



1.2 综合评价方法

1.2.1 综合评价体系的构建

综合评价过程包括评价指标体系的建立、评价指标的预处理、指标权重 的确定和评价模型的选择等重要环节。其中评价指标体系的构建与评价指 标的筛选是综合评价的重要基础，也是做好综合评价的保证。

1. 评价指标和评价指标体系

所谓指标就是用来评价系统的参量。例如，在校学生规模、教育质量、 师资结构、科研水平等，就可以作为评价高等院校综合水平的主要指标。一 般来说，任何一个指标都反映和刻画事物的一个侧面。

从指标值的特征来看，指标可以分为定性指标和定量指标。定性指标是用定性的语言作为指标描述值。例如，旅游景区质量等级有 5A、4A、3A、 2A 和 1A 之分，则旅游景区质量等级是定性指标，而景区年旅客接待量、 门票收入等就是定量指标。

指标的分类

从指标值的变化对评价目的的影响来看，可以将指标分为以下四类：

1. 及大型指标（又称为效益型指标）是指标值越大越好的指标；
2. 绩效性指标（又称为成本型指标）是指标值越小越好的指标；
3. 居中型指标 是指标值既不是越大越好，也不是越小越好，而是适中为最好的指标；
4. 区间型指标是指标值取在某个区间内为最好的指标。

例如，在评价企业的经济效益时，利润作为指标，其值越大，经济效益 就越好，这就是效益型指标；而管理费用作为指标，其值越小，经济效益就 越好，所以管理费用是成本型指标。投标报价既不能太高又不能太低，其值 的变化范围一般是(90%, 105%)$\times$标的价，超过此范围的都将被淘汰，因此 投标报价为区间型指标。投标工期既不能太长又不能太短，就是居中型指标。

在实际中，不论按什么方式对指标进行分类，**不同类型的指标可以通过相应的数学方法进行相互转换。** 所谓评价指标体系就是由众多评价指标组成的指标系统。在指标体系中，每个指标对系统的某种特征进行度量，共同形成对系统的完整刻画。

2. 评价指标的筛选方法

筛选评价指标，要根据综合评价的目的，针对具体的评价对象、评价内 容收集有关指标信息，采用适当的筛选方法对指标进行筛选，合理地选取主 要指标，剔除次要指标，以简化评价指标体系。常用的评价指标筛选方法主 要有专家调研法、最小均方差法、极大极小离差法等。

1. 专家调研法（Delphi 法）

   评价者根据评价目标和评价对象的特征，首先设计出一系列指标的调查表，向若干专家咨询和征求对指标的意见，然后进行统计处理，并反馈意 见处理结果，经几轮咨询后，当专家意见趋于集中时，将专家意见集中的指标作为评价指标，从而建立起综合评价指标体系。

2. 最小均方差法

   对于n个评价对象$S_1, S_2, \ldots, S_n$，每个评价对象有m个指标，其观测值分别为

   $$a_{ij}(i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,m).$$

   如果n个评价对象关于某项指标的观测值都差不多，那么不管这个评价指标重要与否，对于这n个评价对象的评价结果所起的作用将是很小的。因此，在评价过程中就可以删除这样的评价指标。

   筛选过程：

   1. 求出第j项指标的平均值和均方差

      $$\mu_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}, s_j=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-u_j)^2}, j=1,2,\ldots,m$$

   2. 求出最小均方差

      $$s_{j_0}=\min_{1\leqslant j\leqslant m}\{s_j\}.$$

   3. 如果最小均方差$s_{j_0}\approx 0$，则可删除与s_{j_0}对应的指x_{j_0}。考察完所有指标，即可得到最终的评价指标体系。

      最小均方差法只考虑了指标的差异程度，容易将重要的指标删除。

3. 极大极小离差法

   对于n个评价对象$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$，每个评价对象有$m$个指标，其观测值分别为

   $$a_{ij}(i=1,2,\ldots,m).$$

   极大极小离差法的筛选过程如下：

   1. 求出第j项指标的最大离差

      $$d_j=\max_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\{|a_{ij}-a_{kj}|\}, j=1,2,\ldots,m.$$

   2. 求出最小离差

$$d_j=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{d_j\}$$

3. 如果最小离差$d_{j_0}\approx 0$，则可删除与d_{j_0}对应的指标x_{j_0}，考察完所有指标，即可得到最终的评价指标体系。

   与最小均方差相同，该方法也仅考虑了指标的差异程度，在实际操作过程中可能删除重要指标。

   常用的评价指标筛选方法还有条件广义方差极小法、极大不相关法等，详细介绍可参阅相关资料。

1.3 综合指标的预处理方法

一般情况下，在综合评价指标中，各指标值可能属于不同类型、不同单位或不同数量级，从而使得各指标之间存在着不可公度性，给综合评价带来了诸多不便。为了尽可能地反映实际情况，消除由于各项指标间的这些差别带来的影响，避免出现不合理的评价结果，就需要对评价指标进行一定的预 处理，包括对指标的一致化处理和无量纲化处理。 一般情况下，在综合评价指标中，各指标值可能属于不同类型、不同单位或不同数量级，从而使得各指标之间存在着不可公度性，给综合评价带来 了诸多不便。为了尽可能地反映实际情况，消除由于各项指标间的这些差别带来的影响，避免出现不合理的评价结果，就需要对评价指标进行一定的预处理，包括对指标的一致化处理和无量纲化处理。

1.3.1 指标的一致化处理

所谓一致化处理就是将评价指标的类型进行统一。一般来说，在评价指标体系中，可能会同时存在极大型指标、极小型指标、居中型指标和区间型指标，它们都具有不同的特点。若指标体系中存在不同类型的指标，必须在综合评价之前将评价指标的类型做一致化处理。例如，将各类指标都转化为极大型指标，或极小型指标。一般的做法是将非极大型指标转化为极大型指标。但是，在不同的指标权重确定方法和评价模型中，指标一致化处理也有差异。

1. 极小型指标化为及大型指标

   对极小型指标x_j，将其转化为极大型指标时，只需对指标x_j取倒数：

   $$x_j'=\frac{1}{x_j},$$

   或做平移变换：

   $$x_j'=M_j-x_j,$$

   其中

   $$M_j=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ij}\}$$

   即n个评价对象第j项指标值a_{ij}最大者。

2. 居中型指标转化为极大型指标

对居中型指标x_j，令

$$M_j=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ij}\},m_j=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ij}\}$$

取

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x_j-m_j)}{M_j-m_j},m_j\leqslant x_j\leqslant\dfrac{M_j+m_j}{2},\\ \dfrac{2(M_j-x_j)}{M_j-m_j},\dfrac{M_j+m_j}{2}<x_j\leqslant M_j.\end{cases}$$

就可以将x_j转化为极大型指标。

式(15)中$\times 2$是为了让指标取值范围为[0,1]

3. 区间型指标转化为极大型指标

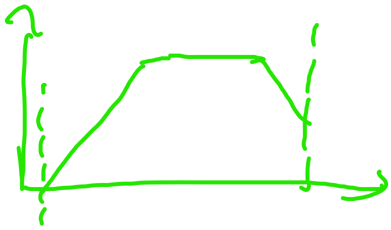
对区间型指标x_j，x_j是取值介于区间$[b_j^{(1)},b_j^{(2)}]$内时为最好，指标值离该区间越远就越差。

令

$$M_j=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ij}\},m_j=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ij}\},c_j=\max\{b_j^{(1)}-m_j,M_j-b_j^{(2)}\}$$

取

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b_j^{(1)}-x_j}{c_j},x_j<b_j^{(1)},\\ 1,b_j^{(1)}\leqslant x_j\leqslant b_j^{(2)}\\ 1-\dfrac{x_j-b_j^{(2)}}{c_j},x_j>b_j^{(2)}.\end{cases}$$



就可以将区间型指标x_j转化为极大型指标。

注意保证两边的对称一致性

类似地，通过适当的数学变换，也可以将极大型指标、居中型指标转化为极小型指标。

1.3.2 指标的无量纲化处理

所谓无量纲化，也称为指标的规范化，是通过数学变换来**消除原始指标的单位及其数值数量级影响**的过程。因此，就有指标的实际值和评价值之分。一般地，将指标无量纲化处理以后的值称为指标评价值。无量纲化过程就是将指标实际值转化为指标评价值的过程。

对于n个评价对象$S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n$，每个评价对象有m个指标，其观测值分别为

$$a_{ij}(i=1,2,\ldots,m).$$

1. 标准样本变换法

令$a_{ij}^*=\frac{a_{ij}-\mu_{ij}}{s_j}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$,

其中，样本均值$\mu_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_{ij}$,样本标准差$s_j=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(a_{ij}-\mu_j)^2}$。

根据指标偏离标准样本的程度变换，不保证结果大于0，因此对于要求评价指标值a_{ij}^*的评价方法，如熵权法和几何加权平均法等，该数据处理方法不适用

2. 比例变换法

对于极大型指标，令

$$a_{ij}^*=\frac{a_{ij}}{\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}}(\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}\neq 0,1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$$

对极小型指标，令

$$a_{ij}^*=\frac{\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}}{a_{ij}}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$$

或

$$a_{ij}^*=1-\frac{a_{ij}}{\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}}(\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ij}\neq 0,1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$$

该方法的优点是这些变换前后的属性值成比例。但对任一指标来说，变 换后的$a_{ij}^*=1$和$a_{ij}^*=0$不一定同时出现.

3. 向量归一法

对于极大型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}(i=1,2,\ldots,n,1\leqslant j\leqslant m)$$

$$a_{ij}^* = 1-\frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}(i=1,2,\ldots,n,1\leqslant j\leqslant m)$$

该方法根据整个指标的大小对单个指标进行缩放

4. 极差变换法

   对于极大型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}}{\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$$

   对于极小型指标，令

$$a_{ij}^* = \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}-a_{ij}}{\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$$

   在上式中，分母代表指标的取值范围，变换结果保证在$[0,1]$里，最差取到0，最好取到1，且极大极小情况相同。
   指标通过平移与缩放进行变换，与原先的指标不成比例。

5. 功效系数法

   令

$$a_{ij}^* = c+\frac{a_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}}{\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}}\times d(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$$

   其中c，d均为确定的常数，c表示“平移量”，表示指标实际基础值，d表示“旋转量”，即表示“放大”或“缩小”倍数，则$a_{ij}^*\in[c,c+d]$

   通常取$c=60$，$d=40$，即

$$a_{ij}^* = 60+\frac{a_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}}{\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}-\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ij}}\times 40(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$$

   则a_{ij}^*实际基础值为 60，最大值为 100，即 $a_{ij}^*\in[60,100]$ 。

   与之前的极差法相比，该方法可控制指标的目标变化范围

1.3.3 定性指标的定量化

在综合评价工作中，有些评价指标是定性指标，即只给出定性的描述， 例如，质量很好、性能一般、可靠性高等。对于这些指标，在进行综合评价 时，必须先通过适当的方式进行赋值，使其量化。一般来说，对于指标最优值可赋值 1，对于指标最劣值可赋值 0。对极大型和极小型定性指标常按以下方式赋值。

1. 极大型定性指标量化方法

   对于极大型定性指标而言，如果指标能够分为很低、低、一般、高和很高五个等级，则可以分别取量化值为 0，0.3，0.5，0.7，1，对应关系如下表所示。介于两个等级之间的可以取两个分值之间的适当数值作为量化值。

   极大型定性指标对应量化值

等级	很低	低	一般	高	很高
量化值	0	0.3	0.5	0.7	1

2. 极小型定性指标量化方法

对于极小型定性指标而言，如果指标能够分为很高、高、一般、低和很 低五个等级，则可以分别取量化值为 0，0.3，0.5，0.7，1，对应关系如下表所示。介于两个等级之间的可以取两个分值之间的适当数值作为量化值。

极小型定性指标对应量化值

等级	很高	高	一般	低	很低
量化值	0	0.3	0.5	0.7	1

1.4 评价指标预处理示例

评价指标预处理：对数据的一致化、无量纲化

下面我们考虑一个战斗机性能的综合评价问题。

战斗机的性能指标主要包括最大速度、飞行半径、最大负载、 隐身性能、垂直起降性能、可靠性、灵敏度等指标和相关费用。综合各方面因素与条件，忽略了隐身性能和垂直起降性能，只考虑余下的 6 项指标，请就A_1, A_2, A_3 ，和A_4四种类型战斗机的性能进行评价分析，其 6 项指标值如下表所示。

四种战斗机性能指标数据

	最大速度(马赫)	飞行范围(km)	最大负载(磅)	费用(美元)	可靠性	灵敏度
A_1	2.0	1500	20000	5500000	一般	很高
A_2	2.5	2700	18000	6500000	低	一般
A_3	1.8	2000	21000	4500000	高	高
A_4	2.2	1800	20000	5000000	一般	一般

假设将 6 项指标依次记为$x_1, x_2, ..., x_6$，首先将x_5和x_6两项定性指标进行量化处理，量化后的数据如下表所示。

可靠性与灵敏度指标量化值

	最大速度(马赫)	飞行范围(km)	最大负载(磅)	费用(美元)	可靠性	灵敏度
A_1	2.0	1500	20000	5500000	0.5	1
A_2	2.5	2700	18000	6500000	0.3	0.5
A_3	1.8	2000	21000	4500000	0.7	0.7
A_4	2.2	1800	20000	5000000	0.5	0.5

数值型指标中x_1, x_2, x_3为极大型指标，费用x_4为极小型指标。下面给出几种处理方式的结果。

采用向量归一化法对各指标进行标准化处理，可得评价矩阵R_1为

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.4671 & 0.3662 & 0.5056 & 0.4931 & 0.4811 & 0.7089 \\ 0.5839 & 0.6591 & 0.4550 & 0.4010 & 0.2887 & 0.3544 \\ 0.4204 & 0.4882 & 0.5308 & 0.5853 & 0.6736 & 0.4962 \\ 0.5139 & 0.4394 & 0.5056 & 0.5392 & 0.4811 & 0.3544 \end{bmatrix}$$

采用比例变换法对各数值型指标进行标准化处理，可得评价矩阵R_2为

$$R_2=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5556 & 0.9524 & 0.8182 & 0.7143 & 1\\ 1 & 1 & 0.8571 & 0.6923 & 0.4286 & 0.5\\ 0.72 & 0.7407 & 1 & 1 & 1 & 0.7\\ 0.88 & 0.6667 & 0.9524 & 0.9 & 0.7143 & 0.5\end{bmatrix}$$

采用极差变换法对各数值型指标进行标准化处理，可得评价矩阵R_3为

$$R_3=\begin{bmatrix}0.2857 & 0 & 0.6667 & 0.5 & 0.5 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.4167 & 1 & 1 & 1 & 0.4\\ 0.5714 & 0.25 & 0.75 & 0.75 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

从这三个评价矩阵可以看出，用不同的预处理方法得到的评价矩阵略有不同，即各指标的值略有不同，但对评价对象的特征反映趋势是一致的。

当拟定指标数据的量化值时，需要查询相关资料或咨询专家，根据具体需要将指标平移使差异更大或更小。

二、常用综合评价模型

2.1 线性加权模型

设指标变量的权重系数向量为$w=[w_1,w_2,\ldots,w_m]$，这里的权重向量可以 利用专家咨询主观赋权，也可以利用熵权法、主成分分析法等方法得到客观权重。

线性加权综合模型是使用最普遍的一种简单综合评价模型。其实质是在指标权重确定后，对每个评价对象求各个指标的加权和。

即令

$$f_i=\sum_{i=1}^{m}w_jb_{ij}(i=1,2,\ldots,n)$$

则f_i就是第i个评价对象的加权综合评价值。

线性加权模型的主要特点：

（1）由于总的权重之和为1，各指标可以线性相互补偿；

（2）权重系数对评价结果的影响明显，权重大的指标对综合指标作用较大；

（3）计算简单，可操作性强；

（4）线性加权综合评价模型适用于各评价指标之间相互独立的情况， 若m个评价指标不完全独立，其结果将导致各指标间信息的重复起作用，使评价结果不能客观地反映实际。

以上分析方法称为“层次分析法”（AHP, Analytic Hierarchy Process）是一种现代管理决策方法，由美国运筹学家T. L. Saaty提出，它的应用比较广泛，遍及经济计划与管理、能源政策与分配、行为科学、军事指挥、运输、农业、教育、环境、人才等诸多领域，如大学生的择业决策、科技人员要选择研究课题、医生要为疑难病确定治疗方案、经理要从若干个应试者中挑选秘书等，都可用这种方法，其特点是将定性分析用定量方法来解决。

2.2 熵值法

熵值法

观测值的信息熵大小来确定指标权重的赋权方法

信息熵

A: 抛出一枚硬币(1/2 : 1/2)的结果

B: 抛出一枚图钉(2/3 : 1/3)的结果

A的信息熵为 1 bit。

B的信息熵为 $\log_2 3 - 2/3 \approx 0.92$ bit。

我们希望评价指标中包含的信息量大，信息熵尽可能低。信息熵越小，越有能力确定权重大小，于是满足这样条件的指标就应当被赋予更高的权重。

信息熵公式

$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log P(x_i)$

由这个公式可知：概率分布"越不均匀",信息熵越小。

方法简述

假定有 n 个评价对象，m 个评价指标，
并且评价指标已经全部一致化为极大型指标

1. 计算特征比重
    - 其实就是去做归一化
    - 对指标进行比例缩放，采用熵值法时不用这一步处理
    - 代表概率，所以**不能有负指标**
    - 指标是否有量纲，数量级是否有差距，是无所谓的
      $p_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}}$
2. 计算指标熵值
    - 套用信息熵公式
      $e_j = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \ln p_{ij} \in [0, 1]$
    - 取自然对数，便于计算，指数的底不影响计算结果
3. 计算指标的差异系数
   $g_j = 1 - e_j$
4. 计算指标的权重系数
   $w_j = \frac{g_j}{\sum_{k=1}^{m} g_k}$

   各项指标权重和加起来是1
5. （计算评价值）

   代码实现：

```
from math import log
import numpy as np

b = np.array([
    [0.8,   0.5556, 0.9524, 0.8182, 0.7143, 1   ],
    [1,     1,      0.8571, 0.6923, 0.4286, 0.5 ],
    [0.72,  0.7407, 1,      1,      1,      0.7 ],
    [0.88,  0.6667, 0.9524, 0.9,    0.7143, 0.5 ]
])
[n, m] = b.shape

# step 1
```

纵向

```
p = np.divide(b, b.sum(axis=0))
# step 2
e = -1/log(n) * (p * np.log(p)).sum(axis=0)
# step 3
g = 1 - e
# step 4
w = g / g.sum()

# 计算评价值
f = p @ w
print(f)

# 第三项的评价值最大，可以被认为是最优
```

输出结果：[0.27855681 0.21033217 0.28674948 0.22436154]

2.3 灰度关联分析

灰色关联度分析

通过分析"比较数列"和"目标序列""距离"来判断评价对象优劣的方法

方法简述（Python数学实验与建模， P. 268）

假定有 n 个评价对象，m 个评价指标

1. 将评价指标进行预处理
   - 无量纲化
   - 转化为 **极大型，极小型，或者居中型** 指标，计算的结果代表指标间的差异而不是数值上的大小
2. 确定比较数列（评价对象）和参考数列（评价标准）
   - 比较数列
     $\mathbf{b_i} = \{b_{ij} | j = 1, \ldots, m\}$
   - 参考数列 b_0
     - 一般虚拟出一个最好的评价对象的各个指标值，但也要合适适当，符合实际情况
3. 计算灰色关联系数
   $$\xi_{ij} = \frac{\min\limits_s \min\limits_k |b_{0k} - b_{sk}| + \rho \max\limits_s \max\limits_k |b_{0k} - b_{sk}|}{|b_{0j} - b_{ij}| + \rho \max\limits_s \max\limits_k |b_{0k} - b_{sk}|}$$
   - $\rho \in [0, 1]$为分辨系数，ρ越大，评价对象差异越大
   - $\min\limits_s \min\limits_k |b_{0k} - b_{sk}|$ 称为两级最小差
   - $\max\limits_s \max\limits_k |b_{0k} - b_{sk}|$ 称为两级最大差
4. 计算灰色关联度
   $r_i = \sum_{j=1}^m w_j \xi_{ij}$
   - w_j 为第j项指标的权重
5. 根据关联度进行评价分析
   - 关联度越大，评价结果越好

灰度关联分析法是求解变量之间的关系有多大，例如上海人口数量与人均收入之间的关系，通过分析具体的评价对象与最优评价对象之间的关系，进而选取最优的评价对象。该方法克服了熵值法中可能因为倍数上的差异而而忽略重要指标的问题。

代码实现（Python数学实验与建模， P. 272）

```python
import numpy as np

b = np.array([
    [0.8,   0.5556, 0.9524, 0.8182, 0.7143, 1   ],
    [1,     1,      0.8571, 0.6923, 0.4286, 0.5 ],
    [0.72,  0.7407, 1,      1,      1,      0.7 ],
    [0.88,  0.6667, 0.9524, 0.9,    0.7143, 0.5 ]
])
[n, m] = b.shape
```

取max或理论范围

```python
# 参考序列
b_best = b.max(axis=0)

# 两级最小差 和 两级最大差
d = b - b_best
[m_min, m_max] = [np.min(np.abs(d)), np.max(np.abs(d))]

# 灰色关联系数
rho = 0.5
xi = (m_min + rho * m_max)/(rho * m_max + np.abs(b - b_best))

# 灰色关联度
# 因为权重没有给定，所以全部设为 1/m
w = np.ones(m) / m
r = xi @ w

print(r)
# 第三项的灰色关联度最大，可以被认为是最优
```

输出结果：[0.65797469 0.64083496 0.75284176 0.60455125]

2.4 TOPSIS法

概述

TOPSIS法是理想解的排序方法（Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution）的英文缩写。它借助于评价问题的正理想解和负理想解，对各评价对象进行排序。所谓正理想解是一个虚拟的最佳对象，其每个指标值都是所有评价对象中该指标的最好值；而负理想解则是另一个虚拟的最差对象，其每个指标值都是所有评价对象中该指标的最差值。求出各评价对象与正理想解和负理想解的距离，并以此对各评价对象进行优劣排序。

计算过程

设综合评价问题含有n个评价对象m个指标，相应的指标观测值分别为 $a_ij(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，则TOPSIS法的计算过程如下：

(1) 将评价指标进行预处理，即进行一致化（全部化为极大型指标）和无量纲化，并构造评价矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times m}$。

(2) 确定正理想解C^+和负理想解C^-。常见的指标如下表所示。

指标名称	指标特点	例子
极大型（效益型）指标	越大（多）越好	成绩、GDP增速、企业利润
极小型（成本型）指标	越小（少）越好	费用、坏品率、污染程度
中间型指标	越接近某个值越好	水质量评估时的PH值
区间型指标	落在某个区间最好	体温、水中植物性营养物量

设整理想解C^+的第j个属性值为c_j^+，即$C^+ = [c_1^+, c_2^+, \cdots, c_m^+]$；负理想解$C^-$第$j$个属性值为$c_j^-$，即$C^- = [c_1^-, c_2^-, \cdots, c_m^-]$，则

$$c_j^+ = \max_{1\le i\le n} b_{ij}, j = 1, 2, \cdots, m,$$

$$c_j^- = \min_{1\le i\le n} b_{ij}, j = 1, 2, \cdots, m.$$

(3) 计算各评价对象到正理想解及到负理想解的距离。

各评价对象到正理想解的距离为

$$s_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (b_{ij} - c_j^+)^2}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

各评价对象到负理想解的距离为

$$s_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (b_{ij} - c_j^-)^2}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

(4) 计算各评价对象对理想解的相对接近度。

$$f_i = s_i^- / (s_i^- + s_i^+), i = 1, 2, \cdots, n.$$

(5) 按f_i由大到小排列各评价对象的优劣次序。

注：若已求得指标权重向量$w = [w_1, w_2, \cdots, w_m]$，则可利用评价矩阵$B = (b_{ij})_{n\times m}$，构造加权规评价矩阵$\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$，其中$\tilde{b}_{ij} = w_j b_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m$。在上面计算步骤中以$\tilde{B}$代替$B$做评价。

示例

续例1.4 采用比例变化法得到的评价矩阵

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5556 & 0.9524 & 0.8182 & 0.7143 & 1 \\ 1 & 1 & 0.8571 & 0.6923 & 0.4286 & 0.5 \\ 0.72 & 0.7407 & 1 & 1 & 1 & 0.7 \\ 0.88 & 0.6667 & 0.9524 & 0.9 & 0.7143 & 0.5 \end{bmatrix}$$

作为标准化数据矩阵$B = (b_{ij})_{4\times 6}$。

利用TOPSIS法进行综合评价

(1) 确定正理想解和负理想解分别为

$$C^+ = [1, 1, 1, 1, 1, 1],$$

$$C^- = [0.72, 0.5556, 0.8571, 0.6923, 0.4286, 0.5],$$

(2) 由计算公式

$$s_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (b_{ij} - c_j^+)^2}, s_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (b_{ij} - c_j^-)^2}, i = 1, 2, 3, 4,$$

计算各评价对象到正理想解和负理想解的距离分别为

$$s^+ = [0.5924, 0.8316, 0.4854, 0.6851],$$

$$s^- = [0.6025, 0.5253, 0.7183, 0.4145],$$

(3) 由公式

$$f_i = s_i^- / (s_i^- + s_i^+), i = 1, 2, 3, 4.$$

计算各机型对理想解的相对接近度为

$$F = [f_1, f_2, f_3, f_4] = [0.5029, 0.3871, 0.5967, 0.3769].$$

(4) 根据相对接近度对各机型按优劣次序排序如下：

$$A_3 \geq A_1 \geq A_2 \geq A_4.$$

代码实现如下

```python
import numpy as np
a=np.array([[0.8,0.5556,0.9524,0.8182,0.7143,1],
            [1,1,0.8571,0.6923,0.4286,0.5],
            [0.72,0.7407,1,1,1,0.7],
            [0.88,0.6667,0.9524,0.9,0.7143,0.5]])
cplus=a.max(axis=0)
cminus=a.min(axis=0)
print('正理想解=',cplus,'负理想解=',cminus)
"""
正理想解= [1. 1. 1. 1. 1. 1.] 负理想解= [0.72   0.5556 0.8571 0.6923 0.4286 0.5    ]
"""
print(a-cplus)
"""
[[-0.2    -0.4444 -0.0476 -0.1818 -0.2857  0.    ]
 [ 0.      0.     -0.1429 -0.3077 -0.5714 -0.5   ]
 [-0.28   -0.2593  0.      0.      0.     -0.3   ]
 [-0.12   -0.3333 -0.0476 -0.1    -0.2857 -0.5   ]]
"""
d1=np.linalg.norm(a-cplus,axis=1)
d2=np.linalg.norm(a-cminus,axis=1)
print(d1,d2)
"""
[0.59534263 0.83162351 0.48542403 0.6851125 ] [0.60245945 0.52525361 0.71823372 0.41447446]
"""
f1=d2/(d1+d2)
print('topsis的评价值为：',f1)
"""
topsis的评价值为： [0.50297078 0.38710478 0.59670925 0.3769365 ]
"""
```

2.5 秩和比（RSR）法

概述

秩和比（Rank Sum Ratio简称RSR）综合评价法基本原理是在一个n行m列矩阵中，通过秩转换,获得无量纲统计量RSR；以RSR值对评价对象的优劣直接排序，从而对评价对象做出综合评价。

定义

样本秩：设$c_1, c_2, \cdots, c_n$是从一元总体抽取的容量为n的样本，其从小到大的顺序统计量是$c_{(1)}, c_{(2)}, \cdots, c_{(n)}$。若$c_i = c_{(k)}$，则称$k$是$c_i$在样本中的秩，记作$R_i$，对每一个$i = 1, 2, \cdots, n$，称$R_i$是第$i$个秩统计量。$R_1, R_2, \cdots, R_n$总称为秩统计量。

例如，对样本数据

$$-0.8, -3.1, 1.1, -5.2, 4.2,$$

顺序统计量为

$$-5.2, -3.1, -0.8, 1.1, 4.2,$$

而秩统计量为

$$3, 2, 4, 1, 5.$$

argsort

设综合评价问题含有n个评价对象，m个指标，相应的指标观测值分别为$a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m$，构造数据矩阵$A = (a_{ij})_{n\times m}$。

计算过程

(1) 编秩

对数据矩阵$A = (a_{ij})_{n\times m}$逐列编秩，即分别编出每个指标值的秩，其中极大型指标从小到大编秩，极小型指标从大到小编秩，指标值相同时编平均秩，得到的秩矩阵记为$R = (R_{ij})_{n\times m}$。

(2) 计算秩和比（RSR）

如果各评价指标权重相同，根据公式

$$RSR_i = \frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

计算秩和比。当各评价指标的权重不同时，计算加权秩和比，其计算公式为

$$RSR_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} w_j R_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中w_j为第j个评价指标的权重，$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$。

(3) 秩和比排序

根据秩和比$RSR_i(i = 1, 2, \cdots, n)$对各评价对象进行排序，秩和比越大其评价效果越好。

优缺点

优点：是非参数统计分析，对指标的选择无特殊要求，适于各种评价对象；由于计算用的数值是秩次，可以消除异常值的干扰，它融合了参数分析的方法，结果比单纯采用非参数法更为精确，既可以直接排序，又可以分档排序，使用范围广泛。

缺点：是排序的主要依据是利用原始数据的秩次，最终算得的RSR值反映的是综合秩次的差距，而与原始数据的顺位间的差距程度大小无关，这样在指标转化为秩次是会失去一些原始数据的信息，如原始数据的大小差别等。

示例

续例1.4

(1) 编秩

对于各机型的评价指标进行编秩，结果如下表所示。

	最大速度x_1	飞行范围x_2	最大负载x_3	费用x_4	可靠性x_5	灵敏度x_6
A_1	2	1	2.5	2	2.5	4
A_2	4	4	1	1	1	1.5
A_3	1	3	4	4	4	3
A_4	3	2	2.5	3	2.5	1.5

(2) 计算秩和比（RSR）

用公式$RSR_i=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{6}w_jR_{ij},i=1,2,3,4$，这里取$w_j=\frac{1}{6}(j=1,2,\cdots,6)$，计算加权秩和比为

$$RSR=[0.5833,0.5208,0.7917,0.6042].$$

(3) 秩和比排序

根据秩和比$RSR_i(i=1,2,3,4)$对四种机型的性能按优劣次序排序为

$$A_3\geq A_4\geq A_1\geq A_2$$

代码实现

```
import scipy
from scipy.stats import rankdata
R=[rankdata(a[:,i])for i in np.arange(6)]
R=np.array(R).T
print('1',R)
"""
1 [[2.  1.  2.5 2.  2.5 4. ]
 [4.  4.  1.  1.  1.  1.5]
 [1.  3.  4.  4.  4.  3. ]
 [3.  2.  2.5 3.  2.5 1.5]]
"""
[n,m]=a.shape
RSR=R.mean(axis=1)/n
print('RSR=',RSR)
"""
RSR= [0.58333333 0.52083333 0.79166667 0.60416667]
"""
```

2.6 AHP层次分析法

主讲人：王静颖

概述

AHP层次分析法是建模比赛中最基础的模型之一，主要解决评价类问题（选择哪种方案最好 哪位运动员或者员工更优秀）

主要思想是分治思想，把复杂问题分解为多个组成因素，再将这些因素按支配关系分别形成递阶层次结构，通过两两相比的方法确定准则和方案的权重，即把人类的判断转化为若干因素两两之间的重要度比较

第一层 目标层

第二层 准则层

第三层 方案层

主要缺陷是不适合应对比较大的数据

示例

世界这么大，小明想看看。但是他现在在苏杭、北戴河和桂林宝地三地间反复横跳，不知如何选择。

请你确定**评价指标、形成评价体系**来为小明同学选择最合适的方案。

为了解决这个问题，我们需要知道

① 我们评价的目标是什么?

答：为小明同学选择最佳的旅游景点。

② 我们为了达到这个目标有哪几种可选的方案?

答：三种，分别是去苏杭、北戴河和桂林。

③ 评价的准则或者说指标是什么？（我们根据什么东西来评价好坏）

答：题目没给相关数据支撑，需要我们查阅相关的资料。
优先选择知网（或者万方、百度学术、谷歌学术等平台）搜索相关的文献。
搜索引擎优先谷歌搜索（国内进不去就使用百度搜索吧）之后再微信搜索和知乎搜索。
这里也推荐一个搜索网站虫部落-快搜，例如本题我们可以搜索关键字：
旅游选择因素、根据什么因素选择旅游景点、旅游景点评价指标等等
如果木得相关文献可以选择：小组成员头脑风暴 || 搜索专家的看法

假如我们查询了资料以后选择了以下五个指标：

① 景点景色

② 旅游花费

③ 居住环境

④ 饮食情况

⑤ 交通便利程度

之后采用**分治思想**，分而治之，因为一次性考虑这五个指标之间的关系，往往考虑不周。考虑两个两个指标进行比较，从而得出权重，如果用1-9表示重要程度（见下表），请你两两比较上述这五个指标对于选择最终的旅游景点的重要性。

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2,4,6,8	上述两相邻判断的中值
倒数	A和B相比如果标度为3，那么B和A相比就是1/3

从而我们可以得到一个表示五个指标两两之间关系的表，如下所示。

	景色	花费	居住	饮食	交通
景色	1	1/2	4	3	3
花费	2	1	7	5	5
居住	1/4	1/7	1	1/2	1/3
饮食	1/3	1/5	2	1	1
交通	1/3	1/5	3	1	1

这是一个5×5的方阵，我们记为A，对应的元素为a_{ij}，这个方阵有如下特点

（1）a_{ij}表示的意义是，与指标j相比，i的重要程度

（2）当$i = j$时，两个指标相同，因此同等重要记为1，这就解释了主对角线元素为1.

（3）$a_{ij} > 0$且满足$a_{ij} \times a_{ji} = 1$（我们称满足这一条件的矩阵为正互反矩阵）

实际上，上面这个矩阵就是层次分析法中的**判断矩阵。**

同时，我们可以针对不同指标得到表示三个地点两两之间的关系的表，如下所示

花费	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	1/3	1/8
北戴河	3	1	1/3
桂林	8	3	1

居住	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	1	3
北戴河	1	1	3
桂林	1/3	1/3	1

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	5
北戴河	1/2	1	2
桂林	1/5	1/2	1

饮食	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	3	4
北戴河	1/3	1	1
桂林	1/4	1	1

交通	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	1	1/4
北戴河	1	1	1/4
桂林	4	4	1

标度	含义
1	同样重要性
3	稍微重要
5	明显重要
7	强烈重要
9	极端重要
2, 4, 6, 8	上述两相邻判断的中值
倒数	A和B相比如果标度为3，那么B和A相比就是1/3

注：判断矩阵中的元素只能是1至9和它们的倒数。

而上述表格中可能会出现不一致的地方，如下表所示

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	1
北戴河	1/2	1	2
桂林	1	1/2	1

从这个表中可以看出

- 苏杭景色比北戴河景色好一点
- 苏杭和桂林景色一样好
- 北戴河比桂林景色好一点

出现了矛盾之处，如果将表中的2换成更大的树，那么不一致会更加严重。

于是我们就引入了对矩阵的**一致性检验**。

关于正互反矩阵A，根据矩阵论的Perron-Frobenius定理，有下面的结论。

定理9.1 正互反矩阵A存在正实数的按模最大的特征值，这个特征值是单值，其余的特征值的模均小于它，并且这个最大特征值对应着正的特征向量。

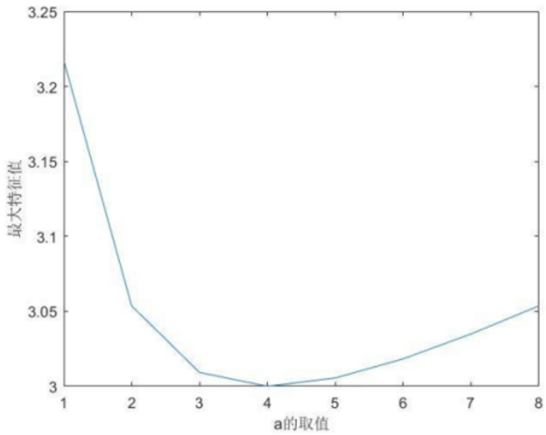
定理9.2 n阶正互反矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是一致阵当且仅当其最大特征值$\lambda_{max}=n$。

一致矩阵有一个特征值为n，其余特征值均为0。

另外，我们很容易得到，特征值为n时，对应的特征向量刚好为$k[\frac{1}{a_{11}},\frac{1}{a_{12}},\cdots,\frac{1}{a_{1n}}]^T(k\neq 0)$

这一特征向量刚好是一致矩阵的第一列

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	a
北戴河	1/2	1	2
桂林	1/a	1/2	1



从上图可以看出，判断矩阵越不一致时，最大特征值与n相差就越大。

一致性检验的步骤

第一步：计算一致性指标CI

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

衡量不一致程度的数量指标称为一致性指标。

由于矩阵A所有特征值之和为n，故CI是(n-1)个特征值的平均值的相反数。

对于一致性正互反矩阵来说，一致性指标CI=0。

第二步：查找对应的平均随机一致性指标RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

显然，仅仅依靠CI的值来判断A是否具有满意的一致性的标准是不够的，随着n的增大误差也会相应增大，RI是这样得到的：对于固定的n，随机构造正互反矩阵A',A'的元素是从
$1, 2, \ldots, 9, 1/2, 1/3, \ldots, 1/9$
中随机抽取，这样的A'是最不一致的，取充分大的子样本（500个样本）得到A'的最大特征值的平均值λ'，定义

$$RI = \frac{\lambda' - n}{n - 1}$$

于是提出了平均随机一致性指标RI

注：在实际运用中，n很少超过10，如果指标的个数大于10，则可考虑建立二级指标体系

第三步：计算一致性比例CR

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

如果$CR < 0.1$，则可认为判断矩阵的一致性可以接受；否则需要对判断矩阵进行修正。

0.1是通过一开始做了大量的蒙德卡洛实验得到的。

求权重矩阵

一致性检验通过后，我们归一化最大特征值对应的特征向量，得到权重。

第一步：求出矩阵A的最大特征值以及其对应的特征向量

第二步：对求出的特征向量进行归一化即可得到我们的权重

以下表为例

景色	苏杭	北戴河	桂林
苏杭	1	2	5
北戴河	1/2	1	2
桂林	1/5	1/2	1

其最大特征值为3.0055，一致性比例CR=0.0053，对应的特征向量：[-0.8902，-0.4132，-0.1918]，对其归一化：[0.5954,0.2764,0.1283]

	算数平均法	几何平均法	特征值法
苏杭	0.5949	0.5954	0.5954
北戴河	0.2766	0.2764	0.2764
桂林	0.1285	0.1283	0.1283

算数平均法求权重公式

$$w_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}a_{ij}}$$

几何平均法求权重公式

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{kj}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

计算得分

根据特征值法求得的权重矩阵，我们可以计算出每个旅游景点的得分

	指标权重	苏杭	北戴河	桂林
景色	0.2636	0.5954	0.2764	0.1283
花费	0.4758	0.0819	0.2363	0.6817
居住	0.0538	0.4286	0.4286	0.1429
饮食	0.0981	0.6337	0.1919	0.1744
交通	0.1087	0.1667	0.1667	0.6667

比如苏杭得分就是

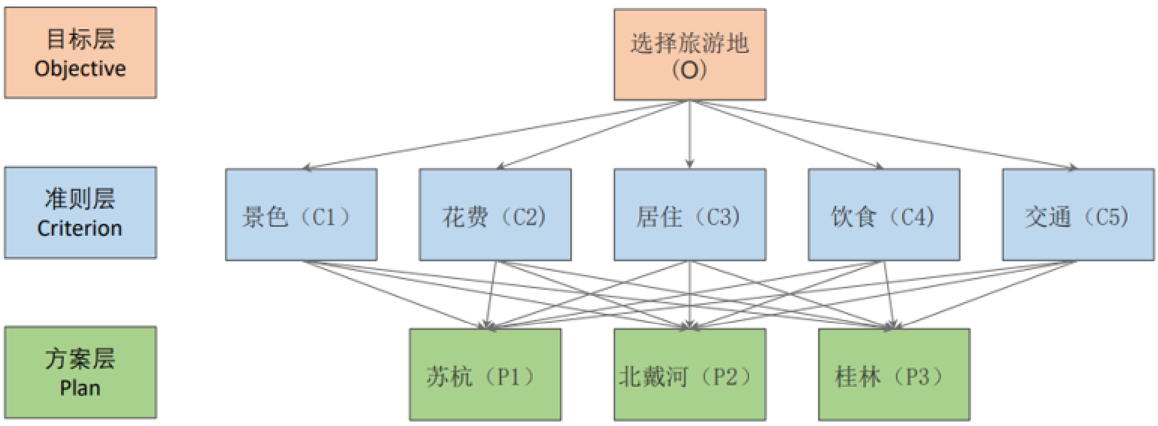
$$0.5954 \times 0.2636 + 0.0819 \times 0.4758 + \cdots + 0.1667 \times 0.1087 = 0.299$$

类似地，北戴河得分0.245，桂林得分0.455，因此最佳旅游景点是桂林。

步骤

根据上述示例，可以将层次分析法总结成以下几个步骤

1. 分析系统中各因素之间的关系，建立系统的递阶层次结构，如下图所示



2. 对于同一层次的各元素关于上一层次中某一准则的重要性进行两两比较，构造两两比较矩阵（判断矩阵）。

O	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1/2	4	3	3
C2	2	1	7	5	5
C3	1/4	1/7	1	1/2	1/3
C4	1/3	1/5	2	1	1
C5	1/3	1/5	3	1	1

任何评价类模型都具有主观性：

理想：采用专家群体判断

现实：几乎都是自己填的

准则层——方案层的判断矩阵的数值要结合实际来填写，如果题目中有其他数据，可以考虑利用这些数据进行计算。

C1	P1	P2	P3
P1	1	2	4
P2	1/2	1	2
P3	1/4	1/2	1

判断矩阵C1-P

C2	P1	P2	P3
P1	1	1/3	1/8
P2	3	1	1/3
P3	8	3	1

判断矩阵C2-P

C3	P1	P2	P3
P1	1	1	3
P2	1	1	3
P3	1/3	1/3	1

判断矩阵C3-P

C4	P1	P2	P3
P1	1	3	4
P2	1/3	1	1
P3	1/4	1	1

判断矩阵C4-P

C5	P1	P2	P3
P1	1	1	1/4
P2	1	1	1/4
P3	4	4	1

判断矩阵C5-P

3. 一致性检验

第一步：计算一致性指标CI

第二步：计算平均随机一次性指标RI

第三步：计算一次性比例CR

4. 由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重，计算各层元素对系统目标的合成权重，并进行排序。

代码实现

```
from scipy.sparse.linalg import eigs
from numpy import array, hstack
a = array([[1,1/2,4,3,3],[2,1,7,5,5],[1/4,1/7,1,1/2,1/3],[1/3,1/5,2,1,1],[1/3,1/5,3,1,1]])

L,V = eigs(a,1);#最大特征值为L
RI = 1.12
n = 5
CR = (L-n)/(n-1)/RI
W = V/sum(V);#最大特征值对应的特征向量归一化为W

B1 = array([[1,1/3,1/8],[3,1,1/3],[8,3,1]])
L1,P1 = eigs(B1,1)
P1 = P1/sum(P1)
B2 = array([[1,3,4],[1/3,1,1],[1/4,1,1]])
```

```
L2,P2 = eigs(B2,1)
P2 = P2/sum(P2)
B3 = array([[1,1,3],[1,1,3],[1/3,1/3,1]])
L3,P3 = eigs(B3,1)
P3 = P1/sum(P3)
B4 = array([[1,1,1/4],[1,1,1/4],[4,4,1]])
L4,P4 = eigs(B4,1);
P4 = P1/sum(P4)
B5 = array([[1,2,5],[1/2,1,2],[1/5,1/2,1]])
L5,P5 = eigs(B5,1);
P5 = P5/sum(P5)

K = hstack([P1,P2,P3,P4,P5])@W #矩阵乘法 得到结果
print(K)
"""
[[0.3849076 +0.j]
 [0.17518701+0.j]
 [0.2521881 +0.j]]
"""
```