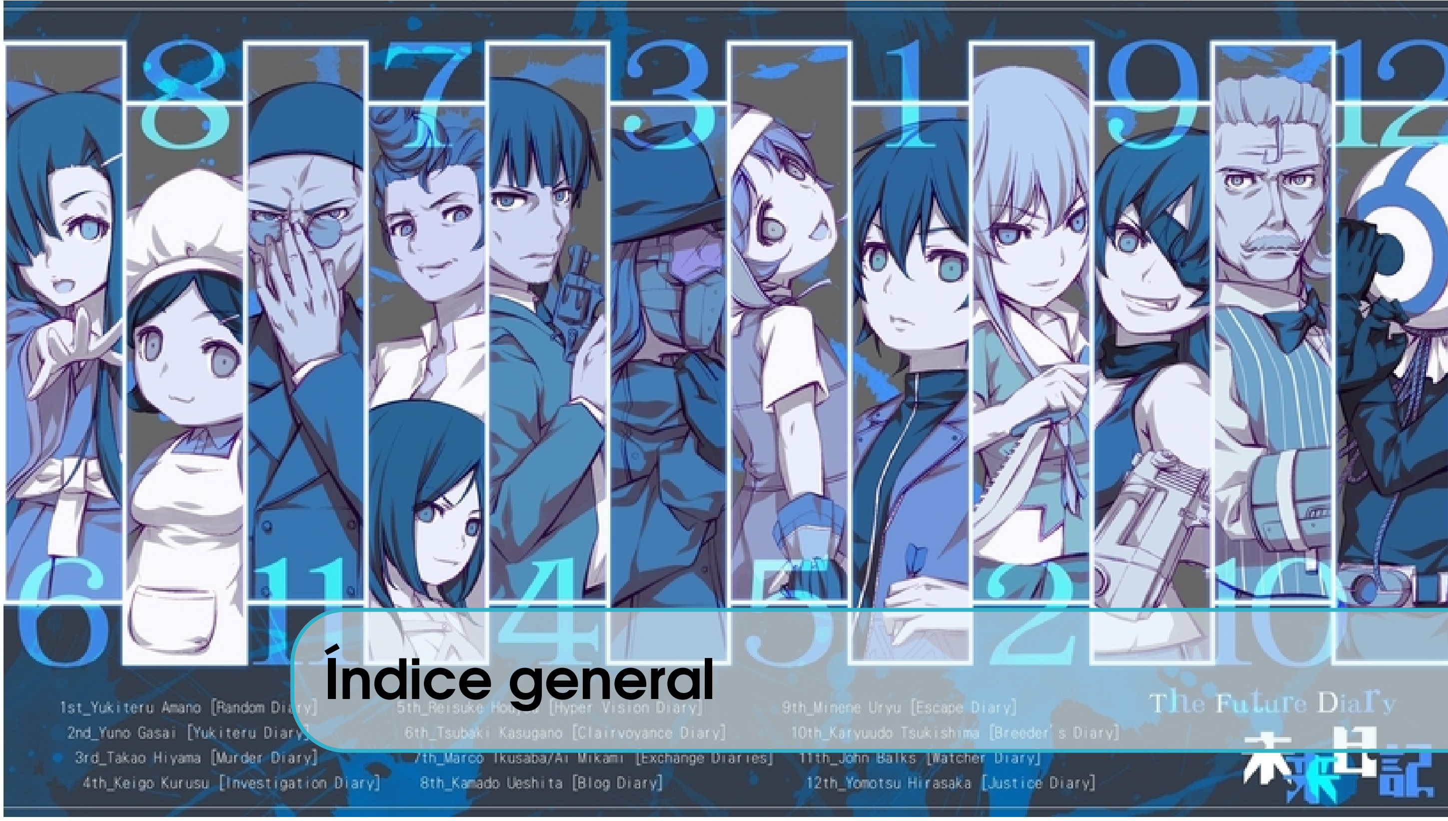
Geometría Analítica I

Notas Primavera 2017

Alain Cabrera

MATERIAL EXCLUSIVO PARA LOS ALUMNOS DE ALAIN CABRERA.

27 de enero de 2017



Índice general

1. Introducción

Este es un curso de geometría plana, para entender el contenido de estas notas se debe partir del conocimiento de los principios fundamentales de la geometría elemental, trigonometría y álgebra. A continuación se presenta un repaso de lógica matemática y las propiedades de los números reales. El conocimiento de estos temas es menester para el correcto entendimiento del curso.

1.1 Lógica Matemática

La lógica se ocupa de argumentaciones válidas. Utilizaremos la lógica matemática para demostrar todo lo que hagamos.
Una proposición es un enunciado que puede ser o no verdadero.

Ejemplo 1.1.1 "Al profesor le gusta el anime" es un ejemplo de una proposición verdadera.

Ejemplo 1.1.2 "Al profesor le gusta la música banda" es un ejemplo de una proposición falsa.

Un axioma es una roposición tan evidente que no requiere demostración.
Un argumento es una lista de proposiciones, en donde el último enunciado es la conclusión del argumento (debe ser consecuencia de las otras) y las otras deben ser verdaderas.

Ejemplo 1.1.3

- El 5 es un número primo,
- Los números primos no son divisibles entre 10
- El 5 no es divisible entre 10.

Debemos tener cuidado de no caer en falacias, no utilizar premisas falsas y no generalizar de manera equivocada.

Ejemplo 1.1.4

- Los franceses son europeos,

- Los italianos son europeos
- los franceses son italianos.

Símbolos lógicos matemáticos

- Si...entonces $\Rightarrow$
- Si y sólo si $\Leftrightarrow$
- Por lo tanto $\therefore$

Estos símbolos nos ayudarán a llevar el órden lógico de la argumentación.

Ejemplo 1.1.5

- Reprobar geometría $\Rightarrow$ perder la beca,
- Perder la beca $\Rightarrow$ Dejar el ITAM
- $\therefore$ Reprobar geometría $\Rightarrow$ Dejar el ITAM.

Símbolos matemáticos

Dado que éste es un curso de matemáticas, utilizaremos algunos símbolos matemáticos para crear nuestras proposiciones. A continuación se presetnan los símbolos matemáticos más comunes:

- Para todo $\forall$
- Existe $\exists$
- Pertenece $\in$
- Números Reales $\mathbb{R}$
- Números Enteros $\mathbb{Z}$
- Números Naturales $\mathbb{N}$

Ejemplo 1.1.6 Para todo número real x existe un número real y tal que la suma de ambos es cero.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x+y=0$$

1.2 Axiomas de los números reales

Las matemáticas son como un juego, existe un conjunto de reglas que se deben seguir y necesitamos usar nuestra creatividad para usarlas (combinarlas).
Las reglas en nuestro juego de matemáticas se conocen como los axiomas de los número reales. Estos axiomas son válidos para las operaciones $(+,\times)$.

Suma

- Cerradura Si $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}$
- Asociatividad Si $x,y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow x+(y+z)=(x+y)+z$
- Elemento Neutro $\exists!0 \in \mathbb{R}$ tal que $x+0=x\ \forall x \in \mathbb{R}$
- Elemento Inverso $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! -x$ tal que $x+(-x)=0$
- Conmutatividad Si $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y=y+x$

Multiplicación

- Cerradura Si $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \in \mathbb{R}$
- Asociatividad Si $x,y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow x(yz)=(xy)z$
- Elemento Neutro $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $x1=x\ \forall x \in \mathbb{R}$

- Elemento Inverso $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$ $\exists x^{-1}$ tal que $xx^{-1} = 1$
- Conmutatividad Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy = yx$

Distributiva

- $x(y+z) = xy + xz$

A partir de este momento utilizaremos nuestro juego para demostrar la veracidad de proposiciones (si es que son verdaderas, tambien se puede demostrar la falsedad). A continuación haremos la primer demostración del curso.

Proposición 1.2.1 $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y)z = xz + yz$

Para comenzar a jugar necesitamos separar nuestra proposición en dos partes: la hipótesis y la conclusión. Utilizaremos la hipótesis como información conocida (verdadera) y la usaremos junto con los axiomas para llegar a la conclusión.

Demostración

Hipótesis: $x, y, z \in \mathbb{R}$
Conclusión: $(x+y)z = xz + yz$
$(x+y)z = z(x+y)$ Por conmutatividad de la multiplicación
$z(x+y) = zx + zy$ Por distributividad
$zx + zy = xz + yz$ Por conmutatividad de la multip. (dos veces)

$$\therefore (x+y)z = xz + yz$$

■

2. Vectores en el Plano

2.1 Naturaleza de la Geometría Analítica

A continuación vamos a definir el tablero de nuestro juego. Utilizaremos algunos objetos matemáticos para ello.

Definición 2.1.1 — Conjunto. Un conjunto es una colección de elementos considerada en sí misma como un objeto.

Ejemplo 2.1.1
El profesor tiene dos bicicletas: una amarilla con negro (la denotaremos A) y otra verde con negro (la denotaremos como V). Si nos queremos referir a ambas bicicletas, estamos hablando del conjunto de bicicletas y lo denotaremos como $\{A,V\}$.

Definición 2.1.2 — Producto Cartesiano. El producto cartesiano del conjunto A con el conjunto B es el conjunto de pares ordenados (x,y) tales que x es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

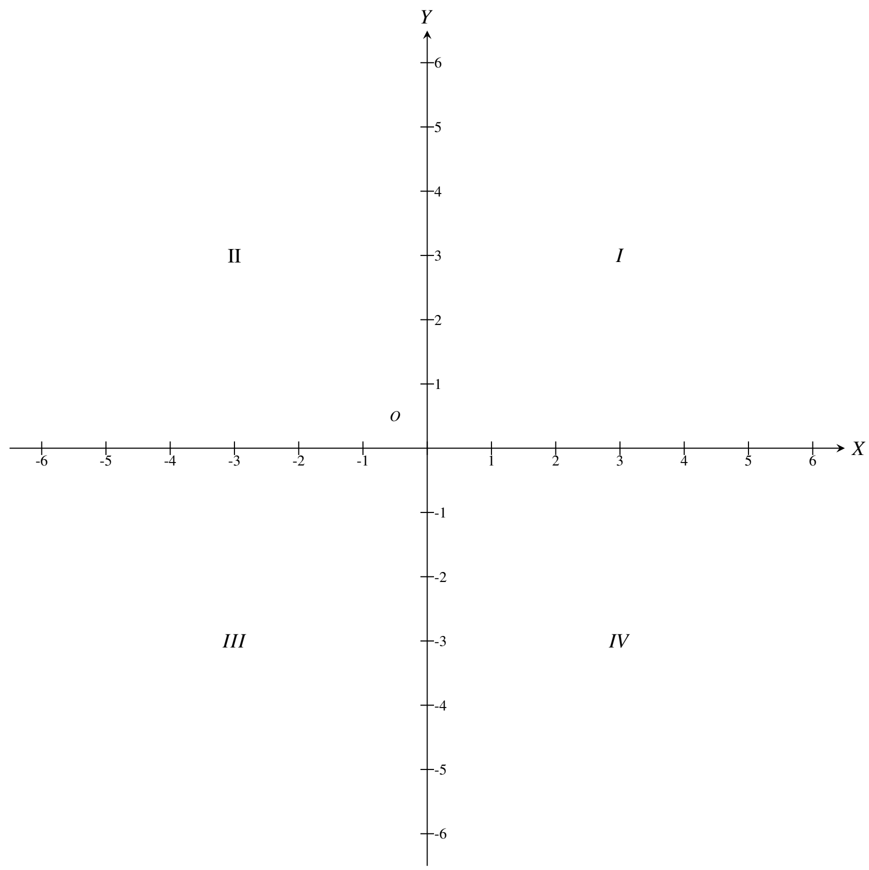
$$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo 2.1.2 Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{5,6,7\}$
$\Rightarrow A \times B = \{(1,5), (1,6), (1,7), (2,5), (2,6), (2,7), (3,5), (3,6), (3,7)\}$

Definición 2.1.3 — Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. El sistema de coordenadas cartesianas rectangulares o simplemente coordenadas rectangulares es el producto cartesiano del conjunto de los números reales consigo mismo.

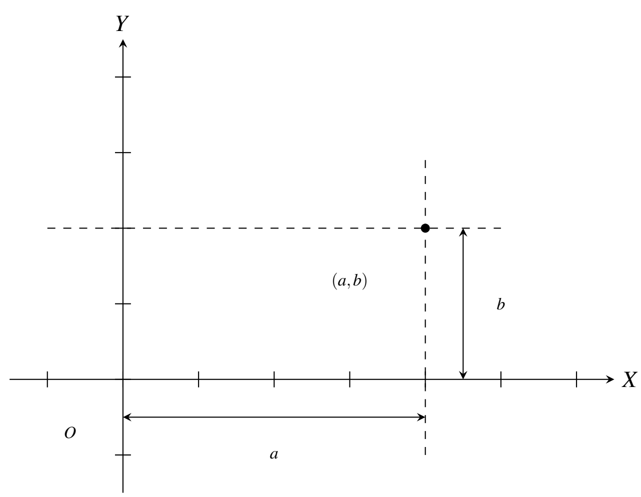
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Vamos a representar el Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares por medio de un plano (plano cartesiano). Los ejes del sistema son rectas perpendiculares. La intersección es llamada origen. Las cuatro regiones en que los ejes dividen al plano se llaman cuadrantes.



Asociamos el par ordenado (a,b) a un punto del plano de la siguiente manera:

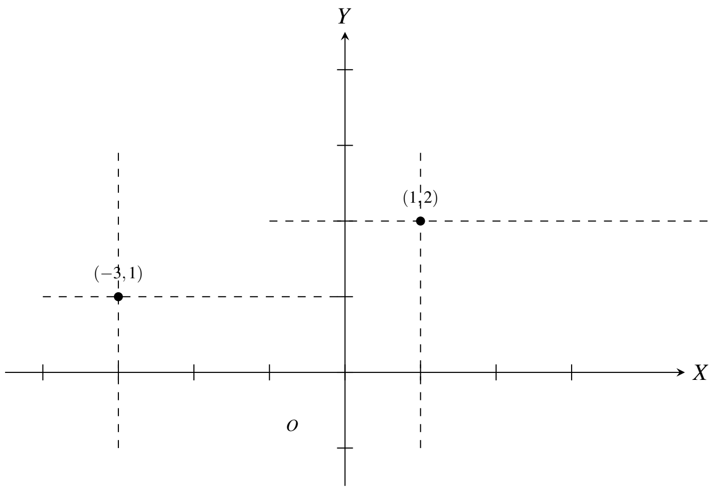
- trazar una recta vertical sobre el eje horizontal
- trazar una recta horizontal sobre el eje vertical
- la intersección se llama "la gráfica de (a,b)"



La primera componente se llama la abscisa; la segunda componente se llama la ordenada. El origen O tiene coordenadas $(0,0)$.

Ejercicio 2.1.1 Graficar los puntos $A = (1,2)$ y $B = (-3,1)$.

Solución:



2.2 Puntos

Hasta el momento ya sabemos ubicar puntos en el plano cartesiano.Debemos aclarar que cada punto tiene una representación única con coordenadas cartesianas. Veamos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1 Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) corresponden al mismo punto si y sólo si $(\Leftrightarrow)$ $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo 2.2.1 ¿Para qué valores de x,y se tiene que $(x+y, x-y) = (5,3)$?

Solución:
Para que sean iguales se debe cumplir que

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 5 \\ x-y &=& 3 \end{array}\right\} \text{Necesitamos resolver el sistema de ecuaciones.}$$

Sugerencia: utilizar el método de suma y resta.

$$\begin{array}{rcl} x+y &=& 5 \\ x-y &=& 3 \\ \hline 2x+0y &=& 8 \end{array} \quad \text{Es decir, } 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 4+y = 5 \Rightarrow y = 1$$

$$\therefore x = 4 \text{ y } y = 1$$

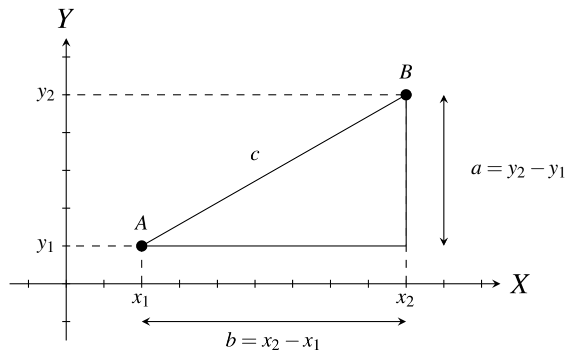
Ejercicio 2.2.1 Determine para qué valores de x,y se tiene que

- $(x+3,5) = (-1,9+x)$
- $(x+3,3) = (-1,9+x)$
- $(x+y,5) = (3,2x+2y)$
- $(x^2+2x,-5) = (1,x^2-4x)$

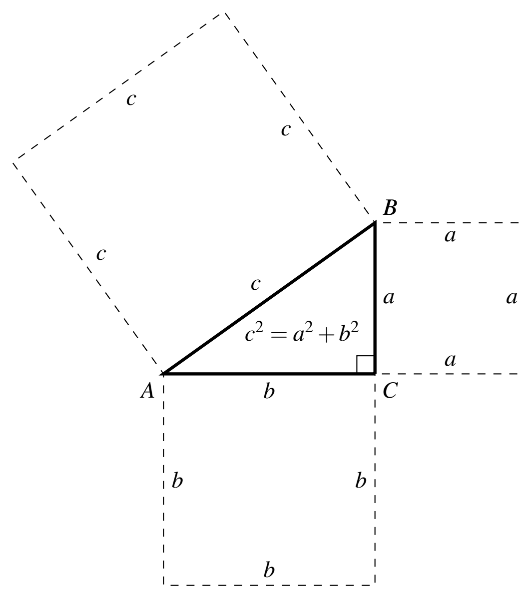
Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos puede definirse de muchas maneras. Piensen en la distancia entre el ITAM y su domicilio, podrían medir la distancia como el número de metros que caminan, el número de km que recorren en su auto, etc. Vamos a convenir en utilizar como definición de distancia a la longitud del segmento de recta que une a dichos puntos.

Definición 2.2.1 — Distancia entre dos puntos. Sea $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$, la distancia entre A y B denotado por $d(A,B)$ es igual a $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



La fórmula anterior proviene del teorema de pitágoras: [Pitágoras] Sea un triángulo con lados de longitudes a, b, y c (lado más grande), es un triángulo rectángulo si y sólo si $c^2=a^2+b^2$. Se le llama hipotenusa al lado de longitud c y los otros son llamados catetos.



Ejemplo 2.2.2 Calcule la distancia de $A=(-4,1)$ a $B=(3,2)$.

Solución:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(3-(-4))^2+(2-1)^2}=\sqrt{7^2+1^2} \\ &= \sqrt{49+1}=\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2} \\ &= \sqrt{25}\sqrt{2}=5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Proposición 2.2.1 Sean A y B dos puntos en el plano cartesiano, entonces $d(A,B) = d(B,A)$

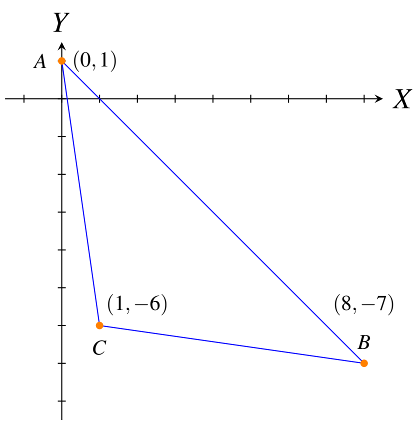
Demostración

Hipótesis: $A,B \in \mathbb{R}^2$
Conclusión: $d(A,B) = d(B,A)$
Sabemos que $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Por otro lado sabemos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $(-a)^2 = a^2$. Vamos a aplicar este hecho a $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, es decir, $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$
Obtenemos que $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Además, sabemos que $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(B,A)$

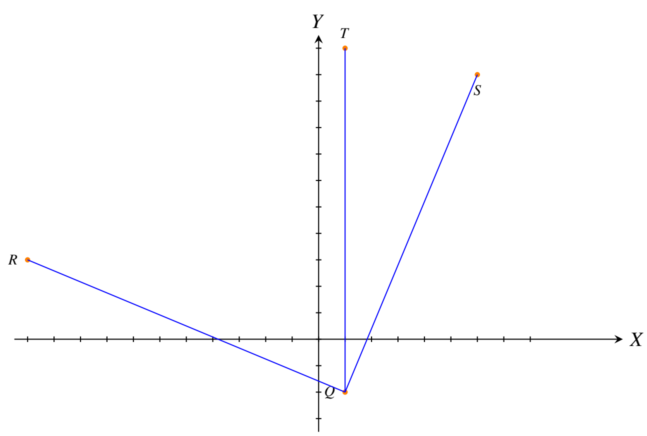
$$\therefore d(A,B) = d(B,A)$$

■

Ejercicio 2.2.2 Demostrar que el triángulo con vértices $A = (0,1)$, $B = (8,-7)$ y $C = (1,-6)$ es isósceles.



Ejercicio 2.2.3 Demuestre que el punto $Q = (1,-2)$ es equidistante a los puntos $R = (-11,3)$, $S = (6,10)$ y $T = (1,11)$.



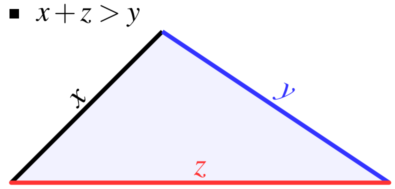
Considere tres puntos en el plano cartesiano. ¿Qué figura podemos dibujar si trazamos líneas rectas entre dichos puntos?
Lo primero que se nos viene a la mente es que obtendremos un triángulo, pero no siempre será así; es posible obtener una línea recta.

¿Cómo sabremos qué figura representan nuestros puntos? Veamos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.2 — Desigualdad del triángulo. En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.

Por ejemplo, si consideramos el triángulo de abajo, se tienen que cumplir las siguientes desigualdades:

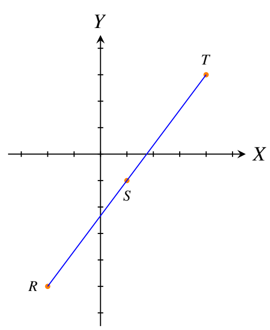
- $x+y>z$
- $y+z>x$
- $x+z>y$



Se puede deducir una proposición del teorema antetior, a este tipo de enunciados se les llaman corolarios.

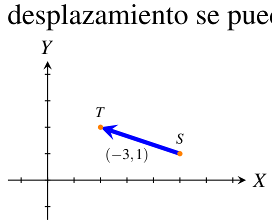
Corolario 1 Si tres puntos en el plano cartesiano no cumplen con la desigualdad del triángulo, entonces se encuentran sobre una línea recta.

Ejercicio 2.2.4 Demuestre que los puntos $R=(-2,-5)$, $S=(1,-1)$ y $T=(4,3)$ están sobre una recta.

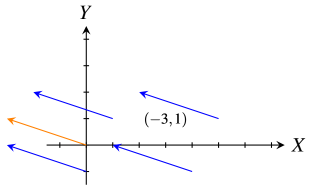


2.3 Vectores

Hasta el momento, hemos asociado un punto del plano con un par ordenado (x,y). También podemos asociar un desplazamiento (o traslación) con el mismo par ordenado. Por ejemplo, considere una hormiga que se mueve en el plano desde un punto S hasta un punto T sobre una línea recta. Si la hormiga se desplaza tres unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba, entonces este desplazamiento se puede escribir como $(-3,1)$.

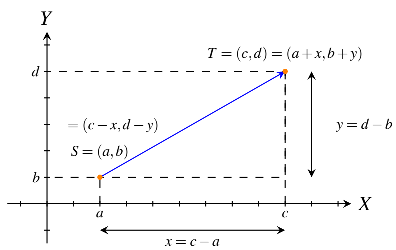


A este desplazamiento se le llama vector.
Un vector tienen una infinidad de representaciones pues podríamos tomar cualquier punto del plano como punto inicial del desplazamiento.

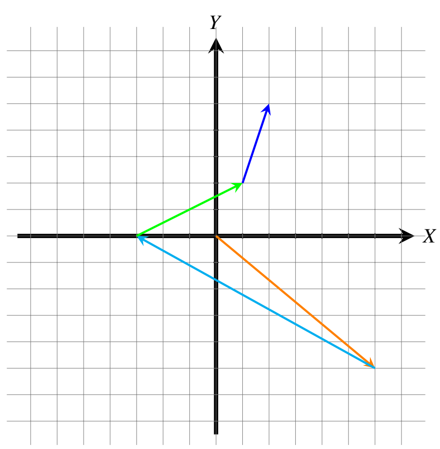


Si la flecha asociada con (x,y) tiene su punto inicial en el origen, se llama representación ordinaria de (x,y).

Si el vector (x,y) tiene punto inicial $S=(a,b)$, entonces el punto final $T=(c,d)$ tiene coordenadas $(a+x,b+y)$.
Si el vector (x,y) tiene punto final $T=(c,d)$, entonces el punto inicial $S=(a,b)$ tiene coordenadas $(c-x,d-y)$.



Ejercicio 2.3.1 ¿Cuáles son los siguientes vectores?



Ejercicio 2.3.2

- ¿Qué vector corresponde a la flecha cuyo punto inicial es el punto $(0,3)$ y su punto final es $(2,5)$?
- ¿Cuál es punto inicial S del vector $(3,-2)$ si el vector tiene punto final $T=(5,8)$?
- ¿Cuál es punto final T del vector $(3,-2)$ si el vector tiene punto inicial $S=(2,5)$?

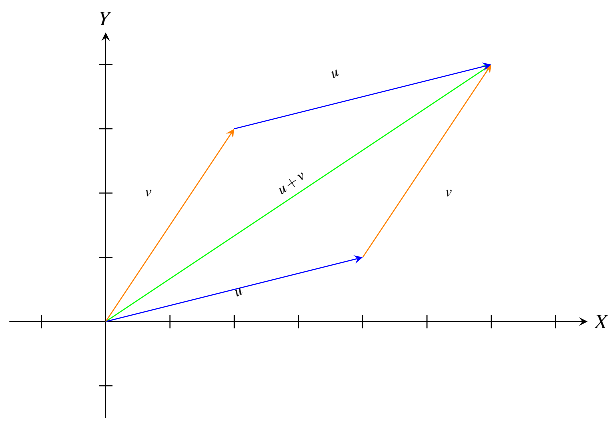
Operaciones fundamentales de vectores

Definición 2.3.1 — Suma Vectorial. Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces definimos la suma de u y v como $u + v$ y es igual a

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Ejemplo 2.3.1 Calcule $(1,2) + (3,4)$

Solución:
$(1,2) + (3,4) = (1+3, 2+4) = (4,6)$
Regla del Paralelogramo:



Para sumar dos vectores, dibujamos uno partiendo del origen y el segundo partiendo del punto final del primero. El resultado es el vector que parte del origen y tiene como punto final el último punto dibujado.

Teorema 2.3.1 Si u, v, w son vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces se cumple que:

- $u + v \in \mathbb{R}^2$ cerradura
- $u + v = v + u$ conmutatividad
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ asociatividad
- $\exists!(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $u + (0,0) = u$ neutro aditivo
- $\exists! -u \in \mathbb{R}^2$ tal que $u + (-u) = (0,0)$ inverso aditivo

Demostración [Conmutatividad]
Hipótesis: $u, v \in \mathbb{R}^2$
Supongamos que $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$.
Sabemos que $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ por definición de suma v.
$u_1 + v_1$ y $u_2 + v_2$ son sumas de números reales y sabemos que conmutan (por los axiomas de campo), es decir,
$u_1 + v_1 = v_1 + u_1$ y $u_2 + v_2 = v_2 + u_2$
Sustituyendo en $u + v$ tenemos que

$$u + v = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = v + u$$

$$\therefore u + v = v + u$$

■

$\boxed{\text{Demostración}}$ [Existencia y unicidad del elemento neutro]
Hipótesis: $u \in \mathbb{R}^2$
Supongamos que $u = (u_1, u_2)$.
Sea el vector $(0,0)$, veamos que $u + (0,0) = (u_1, u_2) + (0,0) = (u_1 + 0, u_2 + 0)$ por definición de suma vectorial.
$u_1 + 0 = u_1$ y $u_2 + 0 = u_2$ por el axioma de elemento neutro de $\mathbb{R}$.
Sustituyendo tenemos que $u + (0,0) = (u_1, u_2)$

$$\Rightarrow u + (0,0) = u$$

Supongamos que existe otro elemento neutro aditivo $\smiley = (\smiley_1, \smiley_2)$ diferente de $(0,0)$, es decir, $(\smiley_1, \smiley_2) \neq (0,0)$ y $u + \smiley = u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.
$(\smiley_1, \smiley_2) \neq (0,0) \Rightarrow \smiley_1 \neq 0$ o $\smiley_2 \neq 0$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\smiley_1 \neq 0$.
Por el supuesto, tenemos que $u + \smiley = (u_1, u_2) + (\smiley_1, \smiley_2) = (u_1 + \smiley_1, u_2 + \smiley_2) = (u_1, u_2)$
$\Leftrightarrow u_1 + \smiley_1 = u_1$ y $u_2 + \smiley_2 = u_2$
Como $u_1 \in \mathbb{R}$ entonces existe $-u_1 \in \mathbb{R}$ tal que $u_1 + -u_1 = 0$
$u_1 + \smiley_1 + -u_1 = u_1 + -u_1$
aplicando conmutatividad, asociatividad, elemento neutro e inverso aditivo de los números reales $\Rightarrow \smiley_1 = 0$ lo cual es una contradicción.$\Rightarrow$ Nuestro supuesto es falso$\Rightarrow$ NO existe otro elemento neutro aditivo diferente de $(0,0)$
■

Definición 2.3.2 — Multiplicación por escalares. Sea $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y un escalar $r \in \mathbb{R}$, entonces definimos la multiplicación del vector u por el escalar r como ru y es igual a

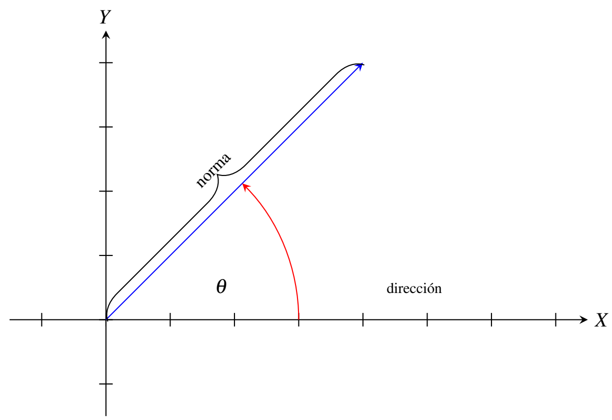
$$r(u_1, u_2) = (ru_1, ru_2)$$

Ejemplo 2.3.2 Sean $u = (-1, -2)$, $r = -1$ y $s = 2$. Calcule ru y su

Solución:
$ru = -1(-1, -2) = (-1 \times -1, -1 \times -2) = (1, 2)$
$su = 2(-1, -2) = (2 \times -1, 2 \times -2) = (-2, -4)$

Teorema 2.3.2 Si u, v son vectores en $\mathbb{R}^2$ y r, s escalares, entonces se cumple que:
- $ru \in \mathbb{R}^2$ cerradura
- $(rs)u = r(su)$ asociatividad
- $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1u = u$ neutro multiplicativo
- $ru = (0,0) \Leftrightarrow r = 0$ o $u = (0,0)$ producto nulo
- $\exists -u \in \mathbb{R}^2$ tal que $-u = -1u$ inverso aditivo
- $r(u + v) = ru + rv$ distributividad
- $(r + s)u = ru + su$ distributividad
- $||rv|| = |r|||v||$

Los vectores tienen dos características:
- Norma
- Dirección



Definición 2.3.3 — Norma de un vector. Sea $u = (u_1, u_2)$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Definimos la norma de u como

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Ejemplo 2.3.3 Calcule la norma del vector $u = (3,4)$

Solución:

$$||u|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Definición 2.3.4 — Vector Unitario. Se dice que un vector u es unitario si $||u|| = 1$

Ejemplo 2.3.4
- $\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$
- $\left\|\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$

Proposición 2.3.1 Sea $u \in \mathbb{R}^2$

$$||u|| = 0 \Leftrightarrow u = (0,0)$$

Demostración

- $(\Leftarrow)$
  PD: Si $u = (0,0) \Rightarrow ||u|| = 0$
  Por definición $||u|| = ||(0,0)|| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow ||u|| = 0$
- $(\Rightarrow)$
  PD: si $||u|| = 0 \Rightarrow u = (0,0)$
  como $||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 0$
  Sabemos que si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
  Supongamos que $u \neq (0,0)$, es decir, $u_1 \neq 0$ o $u_2 \neq 0$
  Sin pérdida de generalidad, tomemos $u_1 \neq 0 \Rightarrow u_1^2 > 0$
  $\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 > 0$ lo cual es una contradicción $\Rightarrow$ nuestro supuesto es falso $\Rightarrow u = (0,0)$.

$$\therefore ||u|| = 0 \Leftrightarrow u = (0,0)$$

■

Definición 2.3.5 — Dirección de un vector. Sea $u = (u_1, u_2)$ un vector en $\mathbb{R}^2$ y además $u \neq (0,0)$. Definimos la dirección de u como la medida del ángulo θ tal que

$$sen\theta = \frac{u_2}{||u||} = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \text{ y } cos\theta = \frac{u_1}{||u||} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

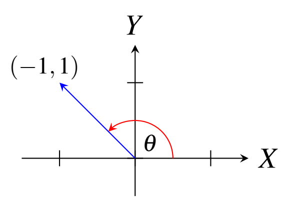
$$0 \leq \theta \leq 360^\circ \text{ o } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Es fácil ver que $u_1 = ||u||cos\theta$ y $u_2 = ||u||sen\theta$ entonces

$$u = (||u||cos\theta, ||u||sen\theta).$$

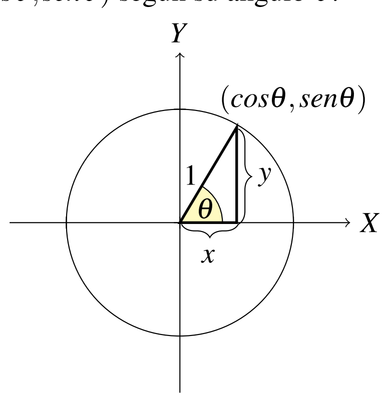
Ejemplo 2.3.5 Calcular la norma y la dirección del vector $u = (-1, 1)$.

Solución: $||u|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$



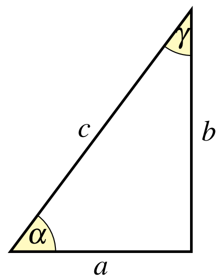
$\theta = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi.$

El círculo unitario centrado en el origen. Los puntos (x, y) sobre el círculo tienen coordenadas $(cos\theta, sen\theta)$ según su ángulo θ.



$x = cos\theta$
$y = sen\theta$
Con esto es fácil calcular estas funciones para ángulos como $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.
Por ejemplo,
El punto $(1, 0)$ está a 0°, entonces $cos0 = 1$ y $sen0 = 0$.

Principales funciones trigonométricas

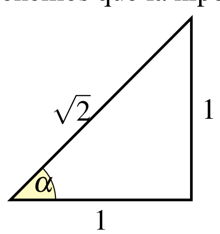


$sen\theta = \frac{co}{h}$, $cos\theta = \frac{ca}{h}$, $tan\theta = \frac{co}{ca}$

Para el ángulo α: $sen\alpha = \frac{b}{c}$, $cos\alpha = \frac{a}{c}$, $tan\alpha = \frac{b}{a}$

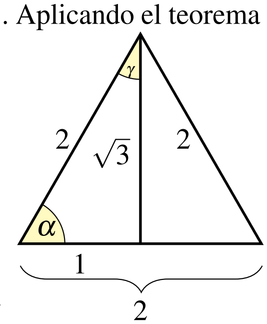
Para el ángulo γ: $sen\gamma = \frac{a}{c}$, $cos\gamma = \frac{b}{c}$, $tan\gamma = \frac{a}{b}$

Tomemos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que la hipotenusa es $\sqrt{2}$. Los ángulos opuestos son de 45°.



$sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $tan\alpha = \frac{1}{1} = 1$

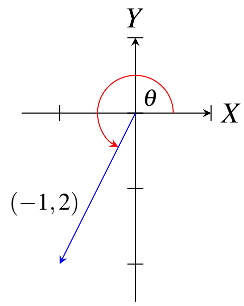
Tomemos un triángulo equilátero cuyos lados midan 1 y sus ángulos 60°. Tracemos la altura del vértice superior dividiendo el ángulo en partes de 30°. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la izquierda obtenemos que el cateto mide $\sqrt{3}$.



$sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\alpha = \frac{1}{2}$, $tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sen\gamma = \frac{1}{2}$, $cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tan\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ejemplo 2.3.6 Calcular la norma y la dirección del vector $u = (-1, -2)$.

Solución: $||u|| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
$sen\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ y $cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. El ángulo debe estar entre 180° y 270°
$arcsen\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \approx -63°$ y $arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \approx 116°$
$\theta \approx 116°$.



$\boxed{\text{Demostración}}$ [Propiedad de la norma] Hipótesis: $u \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$
PD: $||ru|| = |r|||u||$
Def. de producto escalar $\Rightarrow ru = (ru_1, ru_2)$
$||ru|| = ||(ru_1, ru_2)|| = \sqrt{(ru_1)^2 + (ru_2)^2}$ por Def. de norma.
$(ru_1)^2 + (ru_2)^2 = r^2u_1^2 + r^2u_2^2 = r^2(u_1^2 + u_2^2)$ por prop. en $\mathbb{R}$
A continuación se emplean más propiedades de los números reales y por último la definición de norma del vector u
$\sqrt{(ru_1)^2 + (ru_2)^2} = \sqrt{r^2(u_1^2 + u_2^2)} = \sqrt{r^2}\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}$
$= |r|\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)} = |r|||u||$

$$\therefore ||ru|| = |r|||u||$$

■

$\boxed{\text{Demostración}}$ [Producto nulo] Hipótesis: $u \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$
Esta demostración es de dos partes:

- PD: $ru = (0,0) \Rightarrow r = 0$ o $u = (0,0)$
  Def. prod escalar $\Rightarrow ru = (ru_1, ru_2)$ y sabemos que $ru = (0,0)$
  $\Rightarrow (ru_1, ru_2) = (0,0) \Rightarrow ru_1 = 0$ y $ru_2 = 0$
  $\Rightarrow (r = 0$ o $u_1 = 0)$ y $(r = 0$ o $u_2 = 0)$
  Si $r = 0 \Rightarrow r = 0$ o $u = (0,0)$
  Si $r \neq 0 \Rightarrow u_1 = 0$ y $u_2 = 0 \Rightarrow (u_1, u_2) = (0,0) \Rightarrow u = (0,0)$
- PD: $r = 0$ o $u = (0,0) \Rightarrow ru = (0,0)$
  Tenemos dos casos:
  1. $r = 0$,
     Def. prod escalar $\Rightarrow ru = 0u = (0u_1, 0u_2) = (0,0)$
  2. $u = (0,0)$,
     Def. prod escalar $\Rightarrow ru = r(0,0) = (r0, r0) = (0,0)$

$$\therefore ru = (0,0) \Leftrightarrow r = 0 \text{ o } u = (0,0)$$

■

Ejercicio 2.3.3 Demostrar las demás propiedades

Definición 2.3.6 — Resta de vectores. Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$. Definimos la resta de u menos v como

$$u - v = u + (-1v)$$

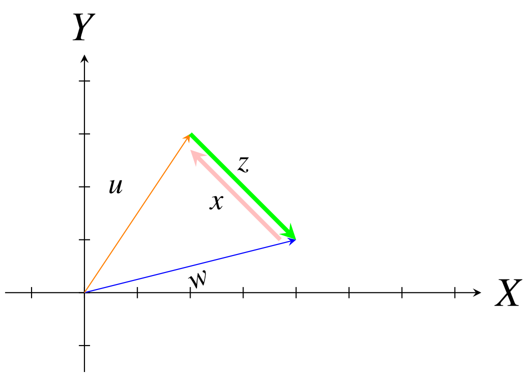
Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$, entonces $-1v = (-v_1, -v_2)$. Veamos que

$$u - v = (u_1, u_2) + (-v_1, -v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

Ejemplo 2.3.7 Sea $u=(1,2)$ y $v=(3,5)$. Calcular:

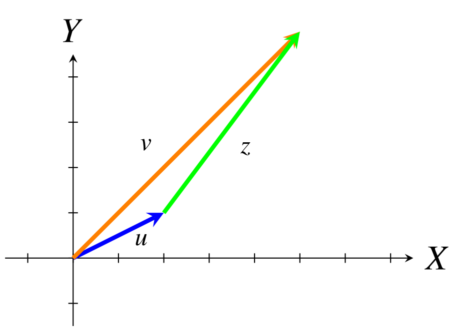
- $u-v$
  $=(1,2)-(3,5)=(1-3,2-5)=(-2,-3)$
- $v-u$
  $=-1(u-v)=-1(-2,-3)=(2,3)$
- $2u-3v$
  $=2(1,2)-3(3,5)=(2,4)-(9,15)=(2-9,4-15)$
  $=(-7,-11)$

Regla del triángulo:



$u+z=w \Rightarrow z=w-u$
$w+x=u \Rightarrow x=u-w$
Vector pto. final - Vector pto. inicial

Ejemplo 2.3.8 ¿Cuál es el vector que va del vector $u=(2,1)$ al vector $v=(5,5)$?



$$\begin{array}{ccccc} Vector & = & V_f & - & V_i \\ z & = & v & - & u \\ z & = & & (3,4) & \end{array}$$

Teorema 2.3.3 Sea $u \in \mathbb{R}^2$ un vector diferente de cero, entonces $\frac{1}{||u||}u$ es un vector unitario.

Demostración Hipótesis: $u=(u_1,u_2) \neq (0,0)$
PD: $\left\|\frac{1}{||u||}u\right\| = 1$.
Veamos que $\frac{1}{||u||}u = \left(\frac{u_1}{||u||}, \frac{u_2}{||u||}\right)$

$$\Rightarrow \left\|\frac{1}{||u||}u\right\| = \sqrt{\left(\frac{u_1}{||u||}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{||u||}\right)^2} = \sqrt{\frac{u_1^2+u_2^2}{||u||^2}} = \sqrt{\frac{||u||^2}{||u||^2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{||u||}u \text{ es un vector unitario.}$$

■

Definición 2.3.7 — Producto punto. Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ vectores en $\mathbb{R}^2$. Definimos el producto punto entre u y v como

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Observación: El resultado es un escalar.

Ejemplo 2.3.9
- $(1,3) \cdot (-1,2) = 1(-1) + 3(2) = -1 + 6 = 5$
- $(2,3) \cdot (-2,-6) = 2(-2) + 3(-6) = -4 - 18 = -22$
- $(0,0) \cdot (7,-5) = 0(7) + 0(-5) = 0 + 0 = 0$
- $(1,2) \cdot (-4,2) = 1(-4) + 2(2) = -4 + 4 = 0$

Podemos relacionar esta operación con la definición de norma de la siguiente manera

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u}$$

Teorema 2.3.4 Sean u, v, w vectores en el plano y r un escalar. Se cumple que:
- $u \cdot v = v \cdot u$
- $r(u \cdot v) = (ru) \cdot v = u \cdot (rv)$
- $w \cdot (u + v) = w \cdot u + w \cdot v$

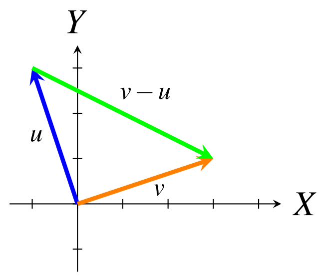
Definición 2.3.8 — Vectores Paralelos y Perpendiculares. Dos vectores son paralelos si tienen la misma dirección o difieren por $\pm 180°$. En cambio, son perpendiculares si sus direcciones difieren por $\pm 90°$ o $\pm 270°$.

Si los vectores u y v son paralelos, se escribre $u||v$. Si son perpendiculares se denota $u \perp v$.

Ejemplo 2.3.10 Demostrar que los vectores $v = (a,b)$ y $u = (-b,a)$ tienen la misma norma y son perpendiculares.

Solución:

Demostración Hipótesis: $v = (a,b)$ y $u = (-b,a)$
PD: $\|v\| = \|u\|$ y $v \perp u$
Por def. de norma $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\|u\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2}$
Utilizando el hecho de que $(-b)^2 = b^2$ y la prop. conmutativa de la suma de los reales
$\|u\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|v\|$
Para demostrar la perpendicularidad de los vectores utilizaremos el teorema de pitágoras. Vamos a demostrar que el triángulo inducido por los vectores es un triángulo rectángulo(el ángulo entre los vectores es el ángulo recto). $\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$



$v-u=(a,b)-(-b,a)=(a+b,b-a)\Rightarrow \|v-u\|^2=(a+b)^2+(b-a)^2=(a^2+b^2+2ab)+(b^2+a^2-2ab)=2(a^2+b^2)=2\,\|v\|^2=\|v\|^2+\|v\|^2=\|v\|^2+\|u\|^2$ ■

Teorema 2.3.5 $u\perp v \Leftrightarrow u\cdot v=0$

Demostración $u\perp v\Leftrightarrow \|v-u\|^2=\|v\|^2+\|u\|^2$
$\|v-u\|^2=(u-v)\cdot(u-v)=(u_1-v_1,u_2-v_2)\cdot(u_1-v_1,u_2-v_2)=(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2=(u_1^2+v_1^2-2u_1v_1)+(u_2^2+v_2^2-2u_2v_2)$

Queremos que lo anterior sea igual a
$||v||^2+||u||^2=(v_1^2+v_2^2)+(u_1^2+u_2^2)$,
es decir, $(u_1^2+v_1^2-2u_1v_1)+(u_2^2+v_2^2-2u_2v_2)=(v_1^2+v_2^2)+(u_1^2+u_2^2)$
esto ocurre si y sólo si $-2u_1v_1-2u_2v_2=0\Leftrightarrow u_1v_1+u_2v_2=0\Leftrightarrow u\cdot v=0$ ■

3. Rectas en el Plano

4. Cónicas en el Plano

5. Ecuaciones paramétricas

6. Ecuaciones paramétricas

7. Coordenadas Polares