Geometría Analítica I
Primavera 2017

Alain Cabrera
acabreraglz@hotmail.com
5532219826

Temario

Evaluación

La calificación final está compuesta por tres exámenes parciales y un examen final . Las fechas de presentación y los porcentajes se muestran a continuación:

- Examen Parcial 1 30 % 16 de febrero
- Examen Parcial 2 30 % 4 de abril/Tarea
- Examen Parcial 3 30 % 24 de abril
- Examen Final 10 % 22 al 31 de mayo

Examenes

- Exámenes parciales:
  - Valor: 100 puntos.
  - Calificación: Se realizará "campana" sobre la calificación más alta (aprobatoria).
  - Puntos extra: 10/100. La temática de dichas preguntas será determinada por el profesor.
- Examen final:
  - Para presentarlo es necesario llevar un promedio aprobatorio en los exámenes parciales.
  - Será de opción múltiple (10 preguntas con 4 incisos).

Puntos extra

- Exámenes parciales:
    - Valor: 100 puntos.
    - Calificación: Se realizará "campana" sobre la calificación más alta (aprobatoria).
    - Puntos extra: 10/100. La temática de dichas preguntas será determinada por el profesor.
- Examen final:
    - Para presentarlo es necesario llevar un promedio aprobatorio en los exámenes parciales.
    - Será de opción múltiple (10 preguntas con 4 incisos).

Lógica matemática

La lógica se ocupa de argumentaciones válidas.

Un argumento es una lista de proposiciones. El último enunciado es la conclusión del argumento (debe ser consecuencia de las otras) y las otras son las premisas o hipótesis (deben ser verdaderas).

Ejemplo

- *El 5 es un número primo,*
- *Los números primos no son divisibles entre 10*
- *El 5 no es divisible entre 10.*

Debemos tener cuidado de no caer en falacias, no utilizar premisas falsas y no generalizar de manera equivocada.

Ejemplo

- *Los franceses son europeos,*
- *Los italianos son europeos*
- *los franceses son italianos.*

Símbolos

- Si...entonces $\Rightarrow$
- Si y sólo si $\Leftrightarrow$
- Por lo tanto $\therefore$

Ejemplo

- *El 5 $\Rightarrow$ es número primo,*
- *Los números primos $\Rightarrow$ no son divisibles entre 10*
- $\therefore$ *El 5 no es divisible entre 10.*

Símbolos matemáticos

- Para todo $\forall$
- Existe $\exists$
- Pertenece $\in$
- Números Reales $\mathbb{R}$
- Números Enteros $\mathbb{Z}$
- Números Naturales $\mathbb{N}$

Ejemplo

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x + y = 0$

Axiomas de Campo de los Números Reales

Los Números Reales con la suma y la multiplicación $(\mathbb{R}, +, \times)$ son un Campo, es decir, cumple con los axiomas de Campo.
Suma

- Cerradura Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$
- Asociatividad Si $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z$
- Elemento Neutro $\exists! 0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- Elemento Inverso $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! - x$ tal que $x + (-x) = 0$
- Conmutatividad Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = y + x$

Multiplicación

- Cerradura Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \in \mathbb{R}$
- Asociatividad Si $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow x(yz) = (xy)z$
- Elemento Neutro $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $x1 = x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- Elemento Inverso $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0 \ \exists x^{-1}$ tal que $xx^{-1} = 1$
- Conmutatividad Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy = yx$

Distributiva

- $x(y + z) = xy + xz$

Proposición

$x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y)z = xz + yz$

$\boxed{\text{Demostración}}$ Hipótesis: $x, y, z \in \mathbb{R}$

PD: $(x+y)z = xz + yz$

$(x+y)z = z(x+y)$ Por conmutatividad de la multiplicación

$z(x+y) = zx + zy$ Por distributividad

$zx + zy = xz + yz$ Por conmutatividad de la multip. (dos veces)

$$\therefore (x+y)z = xz + yz$$

■

Naturaleza de la geometría analítica

Definición (Producto Cartesiano)

El producto cartesiano del conjunto A con el conjunto B es el conjunto de pares ordenados (x, y) tales que x es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

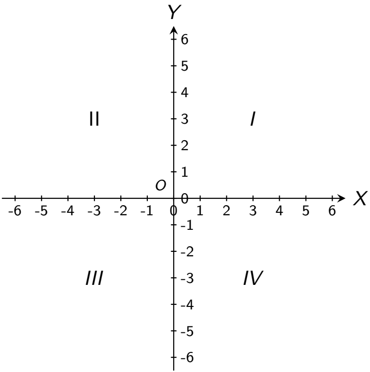
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{5, 6, 7\} \Rightarrow A \times B =$
$\{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}$

Definición (Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares)

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$



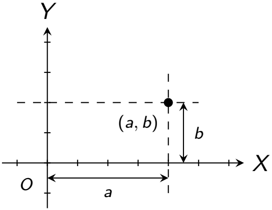
Los ejes del sistema son rectas perpendiculares. La intersección es llamada origen.

Las cuatro regiones en que los ejes dividen al plano se llaman cuadrantes.

Asociamos el par ordenado (a,b) a un punto del plano de la siguiente manera:

- trazar una recta vertical sobre el eje horizontal
- trazar una recta horizontal sobre el eje vertical
- la intersección se llama "la gráfica de (a,b)"

La primera componente se llama la abscisa; la segunda componente se llama la ordenada.
El origen tiene coordenadas (0,0).



Ejercicio

Graficar los puntos $A = (1, 2)$ *y* $B = (-3, 1)$.

Cada punto tiene una representación única con coordenadas cartesianas.

Teorema

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) corresponden al mismo punto si y sólo si $(\Leftrightarrow)$ $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo

¿Para qué valores de x, y se tiene que $(x + y, x - y) = (5, 3)$?

Solución

Para que sean iguales se debe cumplir que

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ x - y & = & 3 \end{array}\right\}$$

Necesitamos resolver el sistema de ecuaciones. Sugerencia: utilizar el método de suma y resta.

$$\begin{array}{rcl} x+y &=& 5 \\ x-y &=& 3 \\ \hline 2x+0y &=& 8 \end{array} \qquad 2x=8 \Rightarrow x=4 \Rightarrow 4+y=5 \Rightarrow y=1$$

Ejercicio

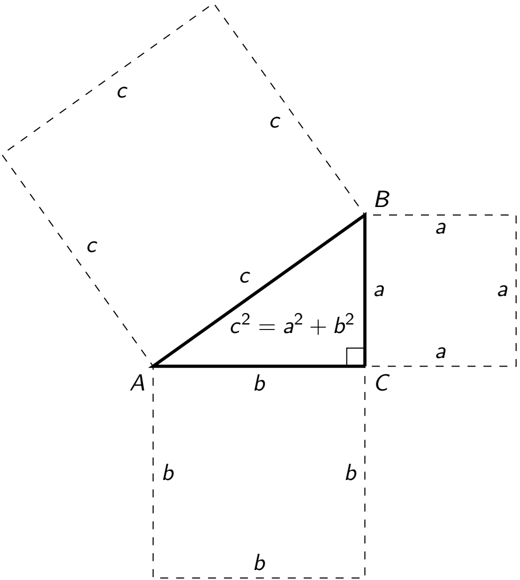
Determine para qué valores de x, y se tiene que

- $(x+3,5)=(-1,9+x)$
- $(x+3,3)=(-1,9+x)$
- $(x+y,5)=(3,2x+2y)$
- $(x^2+2x,-5)=(1,x^2-4x)$

Distancia entre dos puntos

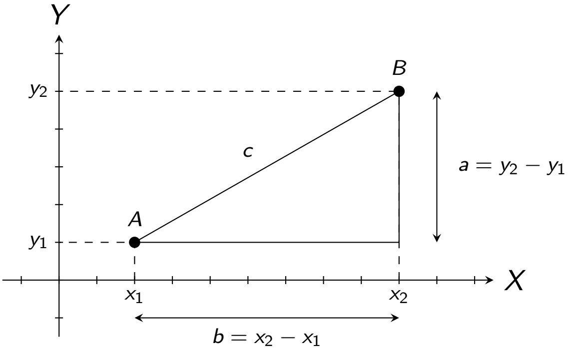
Teorema (Pitágoras)

Sea un triángulo con lados de longitudes a, b, *y* c *(lado más grande), es un triángulo rectángulo si y sólo si* $c^2 = a^2 + b^2$. *Se le llama hipotenusa al lado de longitud* c *y los otros son llamados catetos.*


c
c
c
B
a
c
a
a
$c^2 = a^2 + b^2$
a
A
b
C
b
b
b

Definición (Distancia entre dos puntos)

Sea $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre A y B denotado por $d(A, B)$ es igual a $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Ejemplo

Calcule la distancia de $A = (-4, 1)$ a $B = (3, 2)$.

Solución:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3 - (-4))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Proposición

Sean A y B dos puntos en el plano cartesiano, entonces $d(A,B) = d(B,A)$

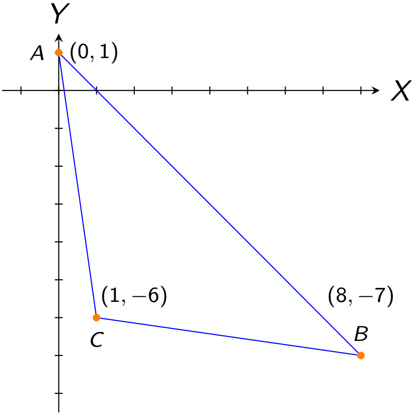
$\boxed{\text{Demostración}}$ Hipótesis: $A, B \in \mathbb{R}^2$
PD: $d(A,B) = d(B,A)$
Sabemos que $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Por otro lado sabemos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $(-a)^2 = a^2$. Vamos a aplicar este hecho a $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, es decir, $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$
Obtenemos que $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Además, sabemos que $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(B,A)$

$$\therefore d(A,B) = d(B,A)$$

■

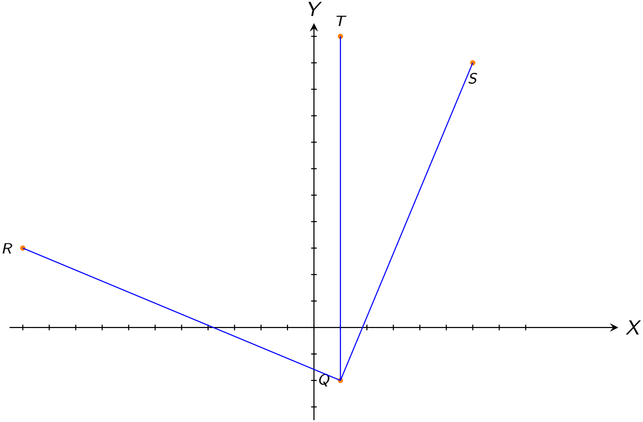
Ejercicio

Demostrar que el triángulo con vértices $A = (0, 1)$*,* $B = (8, -7)$ *y* $C = (1, -6)$ *es isósceles.*



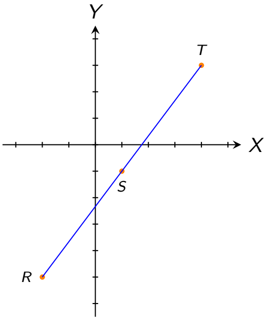
Ejercicio

Demuestre que el punto $Q = (1, -2)$ *es equidistante a los puntos* $R = (-11, 3)$, $S = (6, 10)$ *y* $T = (1, 11)$.

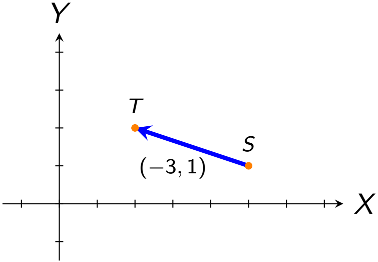


Ejercicio

Demuestre que los puntos $R = (-2, -5)$, $S = (1, -1)$ *y* $T = (4, 3)$ *están sobre una recta.*

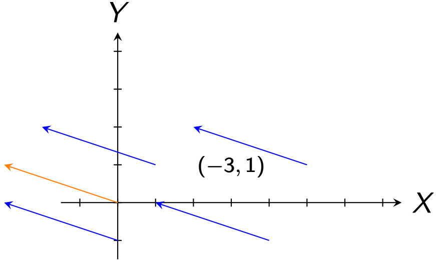


Hasta el momento, hemos asociado un punto del plano con un par ordenado (x, y). También podemos asociar un desplazamiento (o traslación) con el mismo par ordenado. Por ejemplo, considere una hormiga que se mueve en el plano desde un punto S hasta un punto T sobre una línea recta. Si la hormiga se desplaza tres unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba, entonces este desplazamiento se puede escribir como $(-3, 1)$.



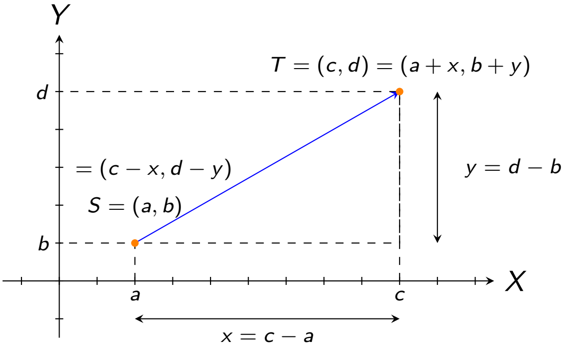
A este desplazamiento se le llama vector.

Un vector tienen una infinidad de representaciones pues podríamos tomar cualquier punto del plano como punto inicial del desplazamiento.



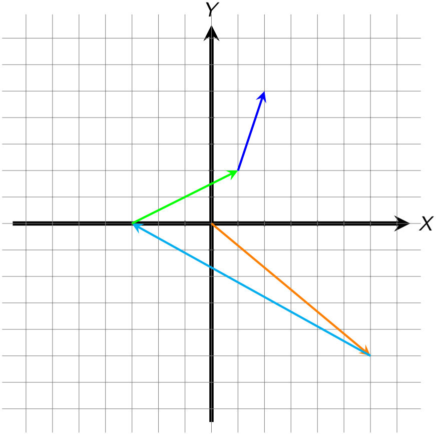
Si la flecha asociada con (x, y) tiene su punto inicial en el origen, se llama representación ordinaria de (x, y).

Si el vector (x, y) tiene punto inicial $S = (a, b)$, entonces el punto final $T = (c, d)$ tiene coordenadas $(a + x, b + y)$.
Si el vector (x, y) tiene punto final $T = (c, d)$, entonces el punto inicial $S = (a, b)$ tiene coordenadas $(c - x, d - y)$.



Ejercicio

¿Cuáles son los siguientes vectores?

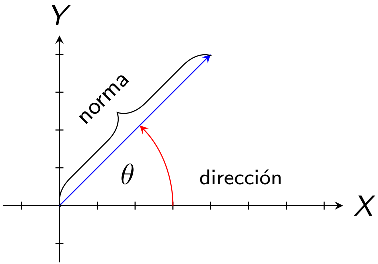


Ejercicio

- *¿Qué vector corresponde a la flecha cuyo punto inicial es el punto* $(0, 3)$ *y su punto final es* $(2, 5)$*?*
- *¿Cuál es punto inicial* S *del vector* $(3, -2)$ *si el vector tiene punto final* $T = (5, 8)$*?*
- *¿Cuál es punto final* T *del vector* $(3, -2)$ *si el vector tiene punto inicial* $S = (2, 5)$*?*

Los vectores tienen dos características:

- Norma
- Dirección



Definición (Norma de un vector)

Sea $u = (u_1, u_2)$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Definimos la norma de u como

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Ejemplo

Calcule la norma del vector $u = (3, 4)$

Solución:

$$||u|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Definición (Vector Unitario)

Se dice que un vector u es unitario si $||u|| = 1$

Ejemplo

- $\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$
- $\left\|\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$

Proposición

Sea $u \in \mathbb{R}^2$

$$||u|| = 0 \Leftrightarrow u = (0,0)$$

Demostración

- $(\Leftarrow)$
  PD: Si $u = (0,0) \Rightarrow ||u|| = 0$
  Por definición $||u|| = ||(0,0)|| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$
  $\Rightarrow \|u\| = 0$
- $(\Rightarrow)$
  PD: si $||u|| = 0 \Rightarrow u = (0,0)$
  como $||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 0$
  Sabemos que si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Supongamos que $u \neq (0,0)$, es decir, $u_1 \neq 0$ o $u_2 \neq 0$
Sin pérdida de generalidad, tomemos $u_1 \neq 0 \Rightarrow u_1^2 > 0$
$\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 > 0$ lo cual es una contradicción
$\Rightarrow$ nuestro supuesto es falso $\Rightarrow u = (0,0)$.

$$\therefore ||u|| = 0 \Leftrightarrow u = (0,0)$$

■

Definición (Dirección de un vector)

Sea $u = (u_1, u_2)$ *un vector en* $\mathbb{R}^2$ *y además* $u \neq (0,0)$. *Definimos la dirección de* u *como la medida del ángulo* θ *tal que*

$$sen\theta = \frac{u_2}{||u||} = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \text{ y } cos\theta = \frac{u_1}{||u||} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

$$0 \leq \theta \leq 360^\circ \text{ o } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

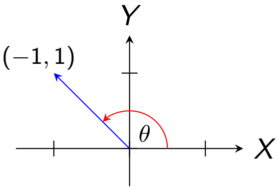
Es fácil ver que $u_1 = ||u||cos\theta$ y $u_2 = ||u||sen\theta$ entonces

$$u = (||u||cos\theta, ||u||sen\theta).$$

Ejemplo

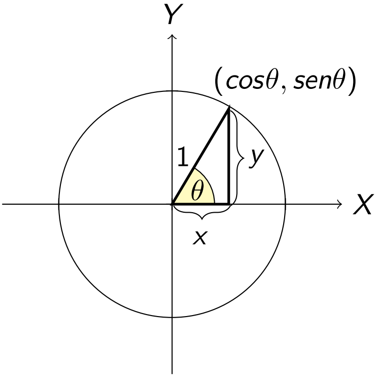
Calcular la norma y la dirección del vector $u = (-1, 1)$.

Solución: $||u|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$



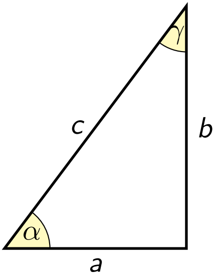
$$\theta = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi.$$

El círculo unitario centrado en el origen. Los puntos (x, y) sobre el círculo tienen coordenadas $(cos\theta, sen\theta)$ según su ángulo θ.



$x = cos\theta$
$y = sen\theta$
Con esto es fácil calcular estas funciones para ángulos como $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.
Por ejemplo,
El punto $(1, 0)$ está a 0°, entonces $cos0 = 1$ y $sen0 = 0$.

Principales funciones trigonométricas



$$sen\theta = \frac{co}{h}$$
$$cos\theta = \frac{ca}{h}$$
$$tan\theta = \frac{co}{ca}$$

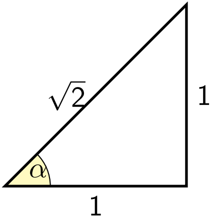
Para el ángulo α

$sen\alpha = \frac{b}{c}$
$cos\alpha = \frac{a}{c}$
$tan\alpha = \frac{b}{a}$

Para el ángulo γ

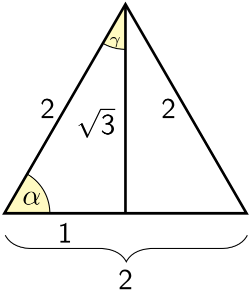
$sen\gamma = \frac{a}{c}$
$cos\gamma = \frac{b}{c}$
$tan\gamma = \frac{a}{b}$

Tomemos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que la hipotenusa es $\sqrt{2}$. Los ángulos opuestos son de 45°.



$$sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$tan\alpha = \frac{1}{1} = 1$$

Tomemos un triángulo equilátero cuyos lados midan 1 y sus ángulos 60°. Tracemos la altura del vértice superior dividiendo el ángulo en partes de 30°. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la izquierda obtenemos que el cateto mide $\sqrt{3}$.

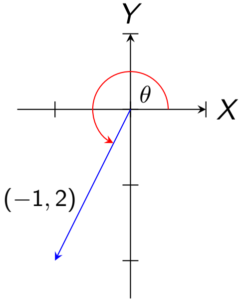


$$sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cos\alpha = \frac{1}{2}$$
$$tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$sen\gamma = \frac{1}{2}$$
$$cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tan\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo

Calcular la norma y la dirección del vector $u = (-1, -2)$.

Solución: $||u|| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
$sen\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ y $cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. El ángulo debe estar entre 180° y 270°
$arcsen\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \approx -63^\circ$ y $arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \approx 116^\circ$
$\theta \approx 116^\circ$.



Operaciones fundamentales de vectores

Definición (Suma Vectorial)

Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$*, entonces definimos la suma de* u *y* v *como* $u + v$ *y es igual a*

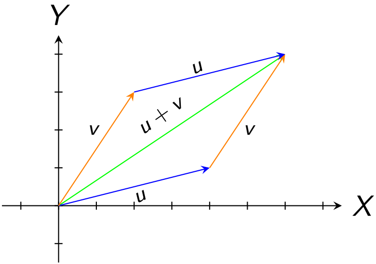
$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Ejemplo

Calcule $(1, 2) + (3, 4)$

Solución:
$(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6)$

Regla del Paralelogramo:



Para sumar dos vectores, dibujamos uno partiendo del origen y el segundo partiendo del punto final del primero. El resultado es el vector que parte del origen y tiene como punto final el último punto dibujado.

Teorema

Si u, v, w *son vectores en* $\mathbb{R}^2$*, entonces se cumple que:*

- $u + v \in \mathbb{R}^2$ *cerradura*
- $u + v = v + u$ *conmutatividad*
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ *asociatividad*
- $\exists!(0,0) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $u + (0,0) = u$ *neutro aditivo*
- $\exists! -u \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $u + (-u) = (0,0)$ *inverso aditivo*

Demostración [Conmutatividad]

Hipótesis: $u, v \in \mathbb{R}^2$

Supongamos que $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$.

Sabemos que $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ por definición de suma v.

$u_1 + v_1$ y $u_2 + v_2$ son sumas de números reales y sabemos que conmutan (por los axiomas de campo), es decir,

$u_1 + v_1 = v_1 + u_1$ y $u_2 + v_2 = v_2 + u_2$

Sustituyendo en $u + v$ tenemos que

$$u + v = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = v + u$$

$$\therefore u + v = v + u$$

■

$\boxed{\text{Demostración}}$ [Existencia y unicidad del elemento neutro]

Hipótesis: $u \in \mathbb{R}^2$

Supongamos que $u = (u_1, u_2)$.

Sea el vector $(0, 0)$, veamos que $u + (0, 0) = (u_1, u_2) + (0, 0) = (u_1 + 0, u_2 + 0)$ por definición de suma vectorial.

$u_1 + 0 = u_1$ y $u_2 + 0 = u_2$ por el axioma de elemento neutro de $\mathbb{R}$.

Sustituyendo tenemos que $u + (0, 0) = (u_1, u_2)$

$$\Rightarrow u + (0, 0) = u$$

Supongamos que existe otro elemento neutro aditivo $\smiley = (\smiley_1, \smiley_2)$ diferente de $(0, 0)$, es decir, $(\smiley_1, \smiley_2) \neq (0, 0)$ y $u + \smiley = u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

$(\smiley_1, \smiley_2) \neq (0, 0) \Rightarrow \smiley_1 \neq 0$ o $\smiley_2 \neq 0$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\smiley_1 \neq 0$.

Por el supuesto, tenemos que $u + \smiley = (u_1, u_2) + (\smiley_1, \smiley_2) = (u_1 + \smiley_1, u_2 + \smiley_2) = (u_1, u_2)$

$\Leftrightarrow u_1 + \smiley_1 = u_1$ y $u_2 + \smiley_2 = u_2$

Como $u_1 \in \mathbb{R}$ entonces existe $-u_1 \in \mathbb{R}$ tal que $u_1 + -u_1 = 0$

$u_1 + \smiley_1 + -u_1 = u_1 + -u_1$

aplicando conmutatividad, asociatividad, elemento neutro e inverso aditivo de los números reales $\Rightarrow \smiley_1 = 0$ lo cual es una contradicción.$\Rightarrow$ Nuestro supuesto es falso$\Rightarrow$ NO existe otro elemento neutro aditivo diferente de $(0, 0)$

$\blacksquare$

Definición (Multiplicación por escalares)

Sea $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ *y un escalar* $r \in \mathbb{R}$, *entonces definimos la multiplicación del vector* u *por el escalar* r *como* ru *y es igual a*

$$r(u_1, u_2) = (ru_1, ru_2)$$

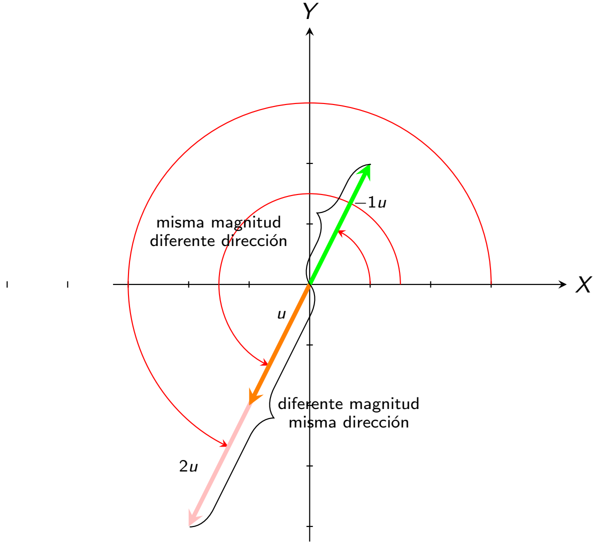
Ejemplo

Sean $u = (-1, -2)$, $r = -1$ *y* $s = 2$. *Calcule* ru *y* su

Solución:

$ru = -1(-1, -2) = (-1 \times -1, -1 \times -2) = (1, 2)$

$su = 2(-1, -2) = (2 \times -1, 2 \times -2) = (-2, -4)$



Y
X
−1u
misma magnitud
diferente dirección
u
diferente magnitud
misma dirección
2u

Teorema

Si u, v son vectores en $\mathbb{R}^2$ y r, s escalares, entonces se cumple que:

- $ru \in \mathbb{R}^2$ *cerradura*
- $(rs)u = r(su)$ *asociatividad*
- $\exists 1 \in \mathbb{R}$ *tal que* $1u = u$ *neutro multiplicativo*
- $ru = (0,0) \Leftrightarrow r = 0$ *o* $u = (0,0)$ *producto nulo*
- $\exists -u \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $-u = -1u$ *inverso aditivo*
- $r(u+v) = ru + rv$ *distributividad*
- $(r+s)u = ru + su$ *distributividad*
- $||rv|| = |r|||v||$

$\boxed{\text{Demostración}}$ [Propiedad de la norma] Hipótesis: $u \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$
PD: $||ru|| = |r|||u||$
Def. de producto escalar $\Rightarrow ru = (ru_1, ru_2)$
$||ru|| = ||(ru_1, ru_2)|| = \sqrt{(ru_1)^2 + (ru_2)^2}$ por Def. de norma.
$(ru_1)^2 + (ru_2)^2 = r^2u_1^2 + r^2u_2^2 = r^2(u_1^2 + u_2^2)$ por prop. en $\mathbb{R}$
A continuación se emplean más propiedades de los números reales y por último la definición de norma del vector u

$$\begin{aligned}\sqrt{(ru_1)^2 + (ru_2)^2} &= \sqrt{r^2(u_1^2 + u_2^2)} = \sqrt{r^2}\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)} \\ &= |r|\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)} = |r|||u||\end{aligned}$$

$$\therefore ||ru|| = |r|||u||$$

■

$\boxed{\text{Demostración}}$ [Producto nulo] Hipótesis: $u \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$

Esta demostración es de dos partes:

- PD: $ru = (0,0) \Rightarrow r = 0$ o $u = (0,0)$
  Def. prod escalar $\Rightarrow ru = (ru_1, ru_2)$ y sabemos que $ru = (0,0)$
  $\Rightarrow (ru_1, ru_2) = (0,0) \Rightarrow ru_1 = 0$ y $ru_2 = 0$
  $\Rightarrow (r = 0$ o $u_1 = 0)$ y $(r = 0$ o $u_2 = 0)$
  Si $r = 0 \Rightarrow r = 0$ o $u = (0,0)$
  Si $r \neq 0 \Rightarrow u_1 = 0$ y $u_2 = 0 \Rightarrow (u_1, u_2) = (0,0) \Rightarrow u = (0,0)$

- PD: $r = 0$ o $u = (0,0) \Rightarrow ru = (0,0)$
  Tenemos dos casos:
  1. $r = 0$,
     Def. prod escalar $\Rightarrow ru = 0u = (0u_1, 0u_2) = (0,0)$
  2. $u = (0,0)$,
     Def. prod escalar $\Rightarrow ru = r(0,0) = (r0, r0) = (0,0)$

$$\therefore ru = (0,0) \Leftrightarrow r = 0 \text{ o } u = (0,0)$$

$\blacksquare$

Ejercicio

Demostrar las demás propiedades

Definición (Resta de vectores)

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$*. Definimos la resta de* u *menos* v *como*

$$u - v = u + (-1v)$$

Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$, entonces $-1v = (-v_1, -v_2)$. Veamos que

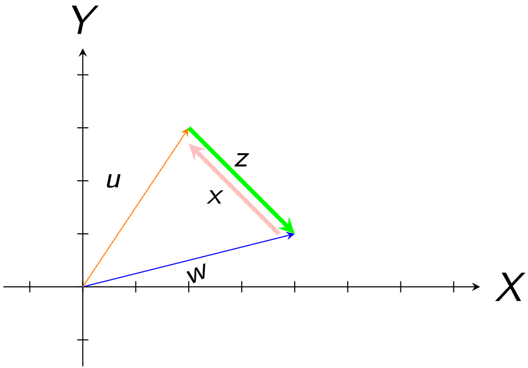
$$u - v = (u_1, u_2) + (-v_1, -v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

Ejemplo

Sea $u = (1, 2)$ *y* $v = (3, 5)$. *Calcular:*

- $u - v$
  $= (1, 2) - (3, 5) = (1 - 3, 2 - 5) = (-2, -3)$
- $v - u$
  $= -1(u - v) = -1(-2, -3) = (2, 3)$
- $2u - 3v$
  $= 2(1, 2) - 3(3, 5) = (2, 4) - (9, 15) = (2 - 9, 4 - 15)$
  $= (-7, -11)$

Regla del triángulo:

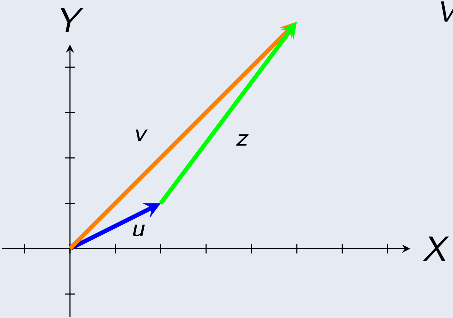


$$u + z = w \Rightarrow z = w - u$$
$$w + x = u \Rightarrow x = u - w$$

Vector pto. final - Vector pto. inicial

Ejemplo

¿Cuál es el vector que va del vector $u = (2, 1)$ al vector $v = (5, 5)$?



$$\begin{array}{cccccc} Vector & = & V_f & - & V_i \\ z & = & v & - & u \\ z & = & & (3,4) & \end{array}$$

Teorema

Sea $u \in \mathbb{R}^2$ un vector diferente de cero, entonces $\frac{1}{||u||}u$ es un vector unitario.

$\boxed{\text{Demostración}}$ Hipótesis: $u = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$

PD: $\left\| \frac{1}{||u||} u \right\| = 1$.

Veamos que $\frac{1}{||u||} u = \left(\frac{u_1}{||u||}, \frac{u_2}{||u||} \right)$

$$\Rightarrow \left\| \frac{1}{||u||} u \right\| = \sqrt{\left(\frac{u_1}{||u||} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{||u||} \right)^2} = \sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2}{||u||^2}} = \sqrt{\frac{||u||^2}{||u||^2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{||u||} u \text{ es un vector unitario.}$$

■

Definición (Producto punto)

Si $u = (u_1, u_2)$ *y* $v = (v_1, v_2)$ *vectores en* $\mathbb{R}^2$*. Definimos el producto punto entre* u *y* v *como*

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Observación: El resultado es un escalar.

Ejemplo

- $(1,3)\cdot(-1,2) = 1(-1)+3(2) = -1+6 = 5$
- $(2,3)\cdot(-2,-6) = 2(-2)+3(-6) = -4-18 = -22$
- $(0,0)\cdot(7,-5) = 0(7)+0(-5) = 0+0 = 0$
- $(1,2)\cdot(-4,2) = 1(-4)+2(2) = -4+4 = 0$

Podemos relacionar esta operación con la definición de norma de la siguiente manera

$$||u|| = \sqrt{u\cdot u}$$

Teorema

Sean u, v, w vectores en el plano y r un escalar. Se cumple que:

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $r(u \cdot v) = (ru) \cdot v = u \cdot (rv)$
- $w \cdot (u + v) = w \cdot u + w \cdot v$

Definición (Vectores Paralelos y Perpendiculares)

Dos vectores son paralelos si tienen la misma dirección o difieren por $\pm 180^\circ$. *En cambio, son perpendiculares si sus direcciones difieren por* $\pm 90^\circ$ *o* $\pm 270^\circ$.

Si los vectores u y v son paralelos, se escribe $u||v$. Si son perpendiculares se denota $u \perp v$.

Ejemplo

Demostrar que los vectores $v = (a, b)$ *y* $u = (-b, a)$ *tienen la misma norma y son perpendiculares.*

Solución:

$\boxed{\text{Demostración}}$ Hipótesis: $v = (a, b)$ y $u = (-b, a)$

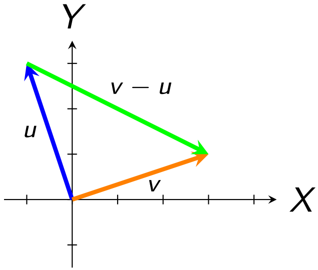
PD: $\|v\| = \|u\|$ y $v \perp u$

Por def. de norma $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\|u\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2}$

Utilizando el hecho de que $(-b)^2 = b^2$ y la prop. conmutativa de la suma de los reales

$\|u\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|v\|$

Para demostrar la perpendicularidad de los vectores utilizaremos el teorema de pitágoras. Vamos a demostrar que el triángulo inducido por los vectores es un triángulo rectángulo(el ángulo entre los vectores es el ángulo recto). $\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$



$$v - u = (a, b) - (-b, a)$$
$$= (a + b, b - a) \Rightarrow$$
$$\|v - u\|^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 =$$
$$(a^2+b^2+2ab)+(b^2+a^2-2ab) =$$
$$2(a^2 + b^2) = 2\|v\|^2 =$$
$$\|v\|^2 + \|v\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$$

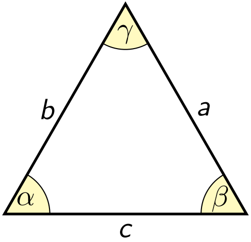
■

Teorema

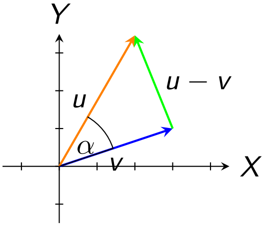
$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

$\boxed{\text{Demostración}}$ $u \perp v \Leftrightarrow \|v-u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$
$\|v-u\|^2 = (u-v)\cdot(u-v) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)\cdot(u_1 - v_1, u_2 - v_2) =$
$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = (u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1) + (u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2)$
Queremos que lo anterior sea igual a
$||v||^2 + ||u||^2 = (v_1^2 + v_2^2) + (u_1^2 + u_2^2)$,
es decir, $(u_1^2+v_1^2-2u_1v_1)+(u_2^2+v_2^2-2u_2v_2) = (v_1^2+v_2^2)+(u_1^2+u_2^2)$
esto ocurre si y sólo si $-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0 \Leftrightarrow$
$u \cdot v = 0$ ■

¿Cómo calcular el ángulo entre dos vectores?
Recordemos la Ley de Cosenos:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$
Generalización del teorema de Pitágoras.



Utilizando La ley de Cosenos sobre el ángulo α tenemos que

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\|\, cos\alpha$$

Por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u + u\cdot(-v) + (-v)\cdot u + (-v)\cdot(-v) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u\cdot v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2\,\|u\|\,\|v\|\, cos\alpha = -2u\cdot v \Rightarrow \|u\|\,\|v\|\, cos\alpha = u\cdot v$$

$$\therefore\ cos\alpha = \frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$$

Ejemplo

Encuentre el ángulo entre los vectores $u = (1,1)$ y $v = (1,0)$.

$||u|| = \sqrt{2}$ y $||v|| = 1$

$u \cdot v = 1$

$cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{(1)(\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{2}$

Teorema

Sean u y $v = (v_1, v_2)$ vectores, entonces $u||v$ si y sólo si $u \cdot v_\perp = 0$ con $v_\perp = (-v_2, v_1)$

¿Qué pasa si los vectores son paralelos?

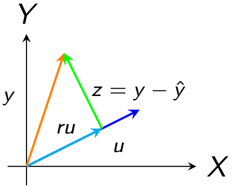
Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ tales que $u||v$, es decir, el ángulo entre los vectores es $180°$ o $0°$. Sabemos que $cos 180° = cos\pi = -1$ y $cos 0° = 1$. Entonces $cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = -1$ o $cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = 1$.

Descomposición de vectores

Dado un vector u diferente de cero en $\mathbb{R}^2$ considere el problema de descomponer un vector y en la suma de dos vectores, uno un múltiplo de u y el otro ortogonal a u. Se desea escribir

$$y = \hat{y} + z \tag{1}$$

donde $\hat{y} = ru$ para algún escalar r y z es algún vector ortogonal a u.



Dado cualquier escalar r, sea $z = y - ru$, de manera que (1) se cumple. Entonces $y - \hat{y}$ es ortogonal a u si y sólo si

$$0 = (y - ru) \cdot u = y \cdot u - (ru) \cdot u = y \cdot u - r(u \cdot u)$$

Es decir, (1) se cumple con z ortogonal a u si y sólo si $r = \frac{y \cdot u}{u \cdot u}$ y $\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u$. El vector $\hat{y}$ es la proyección ortogonal de y sobre u, y el vector z es la componente de y ortogonal a u.

Ejemplo

Sean $y = (7, 6)$ y $u = (4, 2)$. Encuentre la proyección ortogonal de y sobre u. Luego escriba a y como suma de dos vectores ortogonales.

Solución:
$y \cdot u = (7,6) \cdot (4,2) = 28 + 12 = 40$
$u \cdot u = (4,2) \cdot (4,2) = 16 + 4 = 20$
La proyección ortogonal de y sobre u es

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{40}{20} u = 2(4,2) = (8,4)$$

y la componente de y ortogonal a u es

$$y - \hat{y} = (7,6) - (8,4) = (-1,2)$$

Veamos que

$$y = (8,4) + (-1,2)$$

$$(8,4) \cdot (-1,2) = -8 + 8 = 0$$

Definición (Ecuación general lineal de dos variables)

$Ax + By + C = 0$ con $A^2 + B^2 \neq 0$ donde x, y pueden tomar cualquier valor.

También es conocida como forma cartesiana de la recta.

Definición (Lugar geométrico)

El conjunto de todos los puntos que tienen alguna característica común es llamado lugar geométrico.

Definición (Línea Recta)

Es el lugar geométrico de los puntos que cumplen la ecuación general lineal para A, B y C fijos, es decir,

$$\mathcal{L} = \{(x, y)|Ax + By + C = 0\}$$

Ejemplo

Sea la recta $\mathcal{L} = \{(x, y)|3x + 2y - 5 = 0\}$. ¿El punto $(3, 4)$ está en la recta? y ¿$(1, 1) \in \mathcal{L}$?

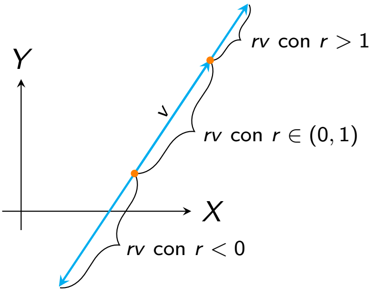
Solución:

Tenemos que sustituir los valores de x y y

$3(3) + 2(4) - 5 = 9 + 8 - 5 = 12 \neq 0 \Rightarrow (3, 4) \notin \mathcal{L}$

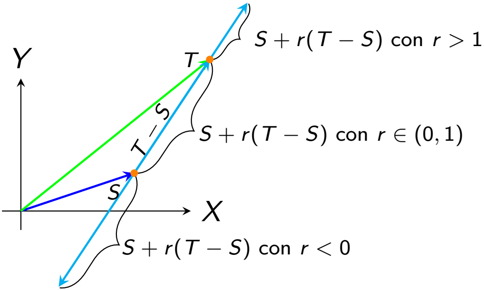
$3(1) + 2(1) - 5 = 3 + 2 - 5 = 0 \Rightarrow (1, 1) \in \mathcal{L}$

Sabemos el efecto de escalar un vector. Si variamos el valor del escalar r, generaríamos una línea recta.



Al vector v se le conoce como vector director de la recta.

Necesitamos anclar la recta en un punto, tomaremos el punto S como punto de referencia para colocar la recta.
Conociendo dos puntos sobre la recta, es fácil encontrar el vector director $v = T - S$.



Ecuación Paramétrica Vectorial Ordinaria

La recta que pasa por los puntos T y S tienen por ecuación paramétrica vectorial ordinaria a

$$\mathcal{L} = \{(x, y)|(x, y) = S + r(T - S) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}$$

Teorema

Un punto $(x, y) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}$ *tal que* $(x, y) = S + r(T - S)$

Ejemplo

Obtener la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(4, 4)$.

Solución:

Sea $T = (3, -2)$ y $S = (4, 4)$. Entonces tomemos como vector director a $v = T - S = (3, -2) - (4, 4) = (-1, -6)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(x, y) | (x, y) = S + r(T - S) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(x, y) | (x, y) = (4, 4) + r(-1, -6) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(x, y) | (x, y) = (4 - r, 4 - 6r) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

De lo anterior se desprende otra forma de la recta.

Ejercicio

Encontrar la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por los puntos (-1,1) (1,1). Grafique y encuentre la intersección con los ejes.

Ecuaciones Paramétricas Cartesianas

Sea una recta que pasa por los puntos $S = (x_1, y_1)$ y $T = (x_2, y_2)$, sabemos que la ecuación paramétrica vectorial está dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \{(x, y) | (x, y) = S + r(T - S) \text{ con } r \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, y) | (x, y) = (x_1, y_1) + r(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ con } r \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, y) | (x, y) = (x_1 + r(x_2 - x_1), y_1 + r(y_2 - y_1)) \text{ con } r \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, y) | x = x_1 + r(x_2 - x_1) \text{ y } y = y_1 + r(y_2 - y_1) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + r(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Ejemplo

Encontrar las ecuaciones paramétricas cartesianas del ejemplo anterior.

Solución:

Teníamos que la ecuación paramétrica vectorial de la recta era
$\mathcal{L} = \{(x, y)|(x, y) = S + r(T - S) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x, y)|(x, y) = (4, 4) + r(-1, -6) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}$ Aplicando el procedimiento anterior tenemos que
$\mathcal{L} = \{(x, y)|(x, y) = (4 - r, 4 - 6r) \text{ con } r \in \mathbb{R}\}$

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = 4 - r \\ y = 4 - 6r \end{cases}$$

Ejercicio

Encontrar la ecuación paramétrica vectorial, las ecuaciones paramétricas cartesianas y la intersección con los ejes de la recta que pasa por los puntos $(1, 5)$ *y* $(-3, 2)$.

Ecuación Simétrica

De las ecuaciones paramétricas cartesianas

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + r(y_2 - y_1) \end{cases}$$

podemos definir una nueva forma de la recta de la siguiente manera:
Tenemos que $x = x_1 + r(x_2 - x_1)$ y $y = y_1 + r(y_2 - y_1)$, es decir,

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ y } r = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ejemplo

Encontrar las ecuaciones simétrica de la recta del ejemplo anterior.

Solución:

Teníamos que la ecuación las ecuaciones paramétricas catesianas eran:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = 4 - r \\ y = 4 - 6r \end{cases}$$

$$r = 4 - x \text{ y } r = \frac{4 - y}{6}$$

$$4 - x = \frac{4 - y}{6}$$

Ecuación General

Dada la ecuación simétrica de la recta $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, podemos llegar a la ecuación general de la recta de la siguiente manera:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = yx_2 - yx_1 - x_2y_1 + x_1y_1$$

$$xy_2 - yx_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 + yx_1 + x_2y_1 - x_1y_1 = 0$$

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0$$

$A = y_2 - y_1$, $B = x_1 - x_2$ y $C = x_2y_1 - x_1y_2$

Ejemplo

Encontrar la ecuación general de la recta del ejemplo anterior.

Solución:
Teníamos que la ecuación la ecuación simétrica era:

$$4 - x = \frac{4 - y}{6}$$

$$6(4 - x) = (4 - y)$$

$$24 - 6x = 4 - y$$

$$6x - y - 20 = 0$$

Ejercicio

Encontrar todas las formas de la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

Ecuación Normal Vectorial

Definición (Vector Normal)

Sean una recta $\mathcal{L}$ y un vector $\eta \neq 0$ tal que $\eta \perp v$ con v un vector director de $\mathcal{L}$, se dice que η es un vector normal a la recta.

Teorema

$U \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (U - S) \cdot \eta = 0$ con $S \in \mathcal{L}$ y η un vector normal a $\mathcal{L}$.

A la expresión $(U - S) \cdot \eta = 0$ se le conoce como ecuación normal vectorial.

Sea $S = (x_1, y_1)$ cualquier punto sobre la recta $\mathcal{L}$ y $\eta = (A, B)$ un vector normal a $\mathcal{L}$. Sabemos que el punto $U = (x, y)$ pertenecerá a la recta si

$$(U - S) \cdot \eta = 0$$

$$((x, y) - (x_1, y_1)) \cdot (A, B) = 0$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (A, B) = 0$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

$$Ax - Ax_1 + By - By_1 = 0$$

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$$

Estamos llegando a la ecuación general con $C = -Ax_1 - By_1$

Ejemplo

Encuentre la ecuación normal y general de la recta que pasa por $S = (2, -1)$ y $T = (5, 3)$.

Solución:
Sea $v = T - S = (5, 3) - (2, -1) = (3, 4)$ un vector director para la recta.
Sea $\eta = v_{\perp} = (-4, 3)$ un vector normal a la recta.

- Ecuación normal: $((x, y) - (2, -1)) \cdot \eta = 0$

$$(x - 2, y + 1) \cdot (-4, 3) = 0$$

- Ecuación general: $-4(x - 2) + 3(y + 1) = 0$

$$-4x + 3y + 11 = 0$$

Ejercicio

- *Escribir las ecuaciones vistas en clase para el ejemplo anterior.*
- *Escribir todas las ecuaciones de la recta vista en clase para la recta que pasa por los puntos* $(1, 2)$ *y* $(0, 0)$

Definición (Pendiente de una recta)

Si $\mathcal{L}$ es una recta con vector director (h, k) con $k \neq 0$, la pendiente de la recta se denota como $m_{\mathcal{L}}$ y se define como $m_{\mathcal{L}} = \frac{k}{h}$.

Ejemplo

Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, 4)$.

Solución:
Sea v un vector director tal que $v = (1, 2) - (3, 4) = (-2, -2)$. entonces la recta tiene pendiente $m_{\mathcal{L}} = \frac{-2}{-2} = 1$

Teorema

$m_{\mathcal{L}}$ es la pendiente de $\mathcal{L} \Leftrightarrow (1, m_{\mathcal{L}})$ es vector director.

Demostración

- PD: $m_{\mathcal{L}}$ es la pendiente de $\mathcal{L} \Rightarrow (1, m_{\mathcal{L}})$ es vector director. Sea (h, k) un vector director con $k \neq 0$, entonces $m_{\mathcal{L}} = \frac{k}{h}$ como (h, k) es un vector director, podemos escribir a la recta como $\mathcal{L} = \{(x, y) | (x, y) = S + r(h, k)\}$ con $S \in \mathcal{L}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \{(x, y) | (x, y) = S + r(h, k) \text{ para toda } r \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, y) | (x, y) = S + r1(h, k) \text{ para toda } r \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, y) | (x, y) = S + r\frac{h}{h}(h, k) \text{ para toda } r \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left\{ (x,y) | (x,y) = S + rh\frac{1}{h}(h,k) \text{ para toda } r \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ (x,y) | (x,y) = S + rh\left(\frac{1}{h}h, \frac{1}{h}k\right) \text{ para toda } r \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ (x,y) | (x,y) = S + rh\left(\frac{h}{h}, \frac{k}{h}\right) \text{ para toda } r \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ (x,y) | (x,y) = S + rh\left(1, m_{\mathcal{L}}\right) \text{ para toda } r \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ (x,y) | (x,y) = S + r'\left(1, m_{\mathcal{L}}\right) \text{ para toda } r' \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

- PD: $(1, m_{\mathcal{L}})$ es vector director $\Rightarrow M_{\mathcal{L}}$ es la pendiente de $\mathcal{L}$.

■

Teorema

Si una recta $\mathcal{L}$ pasa por los puntos $S = (x_1, y_1)$ y $T = (x_2, y_2)$, entonces

$$m_{\mathcal{L}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejercicio

Demostrar el teorema anterior.

Ejemplo

Calcular la pendiente de la recta que pasa por $(5, 1)$ *y* $(3, -2)$.

Solución:

$$m_{\mathcal{L}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{3 - 5} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Teorema

Si $\mathcal{L}$ es una recta dada por $Ax + By + C = 0$, entonces

$$m_{\mathcal{L}} = -\frac{A}{B},\ B \neq 0$$

Ejercicio

Demostrar el teorema anterior.

Ecuación Punto-Pendiente

Sea $S = (x_1, y_1)$ un punto en $\mathcal{L}$ y m la pendiente, entonces $m(x - x_1) = y - y_1$ es conocida como forma punto-pendiente.

Ejemplo

Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por $(5, 1)$ *y tiene pendiente* $\frac{3}{2}$.

Solución:

$\frac{3}{2}(x - 5) = (y - 1)$

Ejercicio

Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ *y* $(0, 3)$.

Ecuación pendiente-ordenada al origen

Sea m la pendiente de $\mathcal{L}$ y b la ordenada al origen, es decir, la recta pasa por el punto $(0, b)$, entonces $y = mx + b$ es conocida como forma pendiente-ordenada al origen.

Ejemplo

Encuentre la ecuación pendiente-ordenada al origen de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ *y* $(-3, -4)$.

Ejercicio

Hallar las otras formas vistas en clase para la recta anterior.

Definición (Rectas Paralelas)

Se dice que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si y sólo si un vector director de $\mathcal{L}_1$ es paralelo a un vector director de $\mathcal{L}_2$.

Teorema

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas $\Leftrightarrow m_1 = m_2$ o $\eta_1 || \eta_2$

Ejercicio

Demostrar el teorema anterior.

Definición (Rectas Perpendiculares)

Se dice que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares si y sólo si un vector director de $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a un vector director de $\mathcal{L}_2$.

Teorema

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ rectas no verticales, son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$; donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas, respectivamente.

Ejercicio

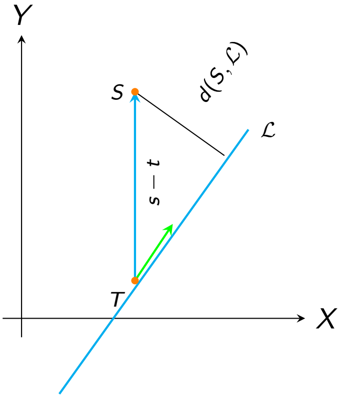
Demostrar el teorema anterior.

Ejemplo

Demuestre que la recta con ecuación $u = (3, -1) + r(2, 3)$*, es perpendicular a la recta* $u = (2, -1) + r(6, -4)$.

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto S a la recta $\mathcal{L}$, denotada por $d(S, \mathcal{L})$, se define como la longitud del segmento que es ortogonal.



Si la recta $\mathcal{L}$ está en su forma general, es decir, $Ax + By + C = 0$ y $S = (x_1, y_1)$ es un punto en el plano, entonces la distancia del punto a la recta es

$$d(S, \mathcal{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo

Calcule la distancia del punto $(1, 1)$ a la recta cuya ecuación general es $x + 2y + 5 = 0$.

Solución:
Vemos que $A = 1$, $B = 2$ y $C = 5$.
Calculamos $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
$d(S, \mathcal{L}) = \frac{|x_1 + 2y_1 + 5|}{\sqrt{5}}$ Esta fórmula es válida para cualquier punto (x_1, y_1).

Sustituyendo el punto $(1, 1)$ obtenemos que

$$d(S, \mathcal{L}) = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Definición (Lugar geométrico)

El conjunto de todos los puntos que tienen alguna característica común es llamado lugar geométrico.

Ejemplo

Obtener la ecuación del lugar geométrico $\mathcal{C}$ *de los puntos tales que el segmento que va de* $\mathcal{C}$ *al punto* $S = (0, -2)$ *es perpendicular al segmento que va del punto a* $T = (0, 2)$.

Circunferencia

Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, la distancia es llamada radio.

Hipérbola

Elipse

Hipérbola

Coordenadas Polares

Durante el curso, hemos estudiado propiedades geométricas por métodos analíticos en el sistema de ejes rectangulares.

Para concluir este curso, vamos a trabajar con un nuevo sistema de ejes coordenados: sistema de coordenadas polares. ¿Por qué cambiar? Este sistema presenta ventajas en el análisis de cierto lugares geométricos.