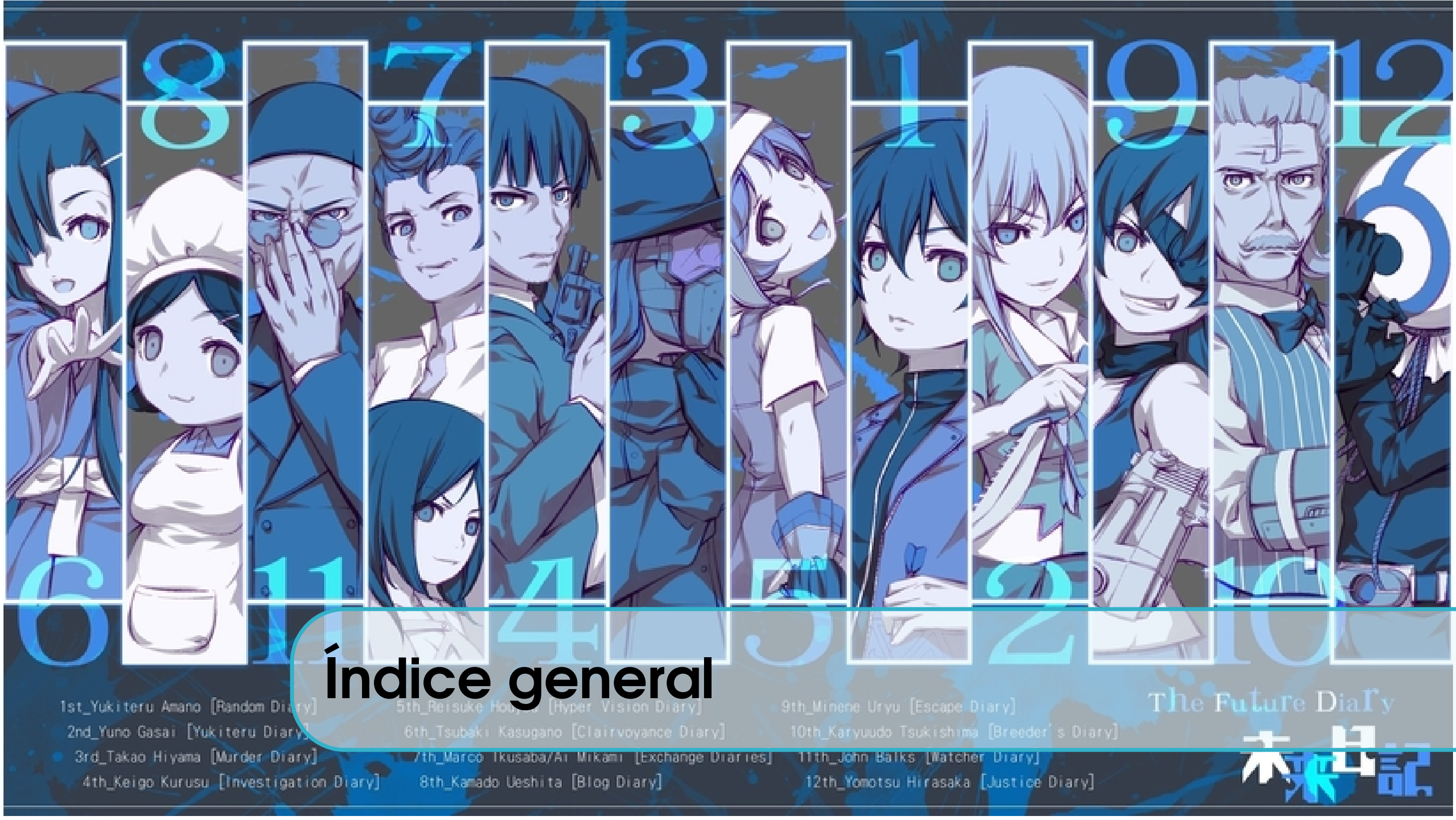
Geometría Analítica I

Notas Primavera 2017

Alain Cabrera

12 de enero de 2017



Índice general

1. Introducción

Este es un curso de geometría plana, para entender el contenido de estas notas se debe partir del conocimiento de los principios fundamentales de la geometría elemental, trigonometría y álgebra. A continuación se presenta un repaso de lógica matemática y las propiedades de los números reales. El conocimiento de estos temas es menester para el correcto entendimiento del curso.

1.1 Lógica Matemática

La lógica se ocupa de argumentaciones válidas. Utilizaremos la lógica matemática para demostrar todo lo que hagamos.
Una proposición es un enunciado que puede ser o no verdadero.

Ejemplo 1.1.1 “Al profesor le gusta el anime” es un ejemplo de una proposición verdadera.

Ejemplo 1.1.2 “Al profesor le gusta la música banda” es un ejemplo de una proposición falsa.

Un axioma es una roposición tan evidente que no requiere demostración.
Un argumento es una lista de proposiciones, en donde el último enunciado es la conclusión del argumento (debe ser consecuencia de las otras) y las otras deben ser verdaderas.

Ejemplo 1.1.3

- El 5 es un número primo,
- Los números primos no son divisibles entre 10
- El 5 no es divisible entre 10.

Debemos tener cuidado de no caer en falacias, no utilizar premisas falsas y no generalizar de manera equivocada.

Ejemplo 1.1.4

- Los franceses son europeos,

- Los italianos son europeos
- los franceses son italianos.

Símbolos lógicos matemáticos

- Si...entonces $\Rightarrow$
- Si y sólo si $\Leftrightarrow$
- Por lo tanto $\therefore$

Estos símbolos nos ayudarán a llevar el órden lógico de la argumentación.

Ejemplo 1.1.5

- Reprobar geometría $\Rightarrow$ perder la beca,
- Perder la beca $\Rightarrow$ Dejar el ITAM
- $\therefore$ Reprobar geometría $\Rightarrow$ Dejar el ITAM.

Símbolos matemáticos

Dado que éste es un curso de matemáticas, utilizaremos algunos símbolos matemáticos para crear nuestras proposiciones. A continuación se presetnan los símbolos matemáticos más comunes:

- Para todo $\forall$
- Existe $\exists$
- Pertenece $\in$
- Números Reales $\mathbb{R}$
- Números Enteros $\mathbb{Z}$
- Números Naturales $\mathbb{N}$

Ejemplo 1.1.6 Para todo número real x existe un número real y tal que la suma de ambos es cero.

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x+y=0$$

1.2 Axiomas de los números reales

Las matemáticas son como un juego, existe un conjunto de reglas que se deben seguir y necesitamos usar nuestra creatividad para usarlas (combinarlas).
Las reglas en nuestro juego de matemáticas se conocen como los axiomas de los número reales. Estos axiomas son válidos para las operaciones $(+,\times)$.

Suma

- Cerradura Si $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}$
- Asociatividad Si $x,y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow x+(y+z)=(x+y)+z$
- Elemento Neutro $\exists!0 \in \mathbb{R}$ tal que $x+0=x \; \forall x \in \mathbb{R}$
- Elemento Inverso $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists! -x$ tal que $x+(-x)=0$
- Conmutatividad Si $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y=y+x$

Multiplicación

- Cerradura Si $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \in \mathbb{R}$
- Asociatividad Si $x,y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow x(yz)=(xy)z$
- Elemento Neutro $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tal que $x1=x \; \forall x \in \mathbb{R}$

- Elemento Inverso $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$ $\exists x^{-1}$ tal que $xx^{-1} = 1$
- Conmutatividad Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy = yx$

Distributiva

- $x(y+z) = xy + xz$

A partir de este momento utilizaremos nuestro juego para demostrar la veracidad de proposiciones (si es que son verdaderas, tambien se puede demostrar la falsedad). A continuación haremos la primer demostración del curso.

Proposición 1.2.1 $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y)z = xz + yz$

Para comenzar a jugar necesitamos separar nuestra proposición en dos partes: la hipótesis y la conclusión. Utilizaremos la hipótesis como información conocida (verdadera) y la usaremos junto con los axiomas para llegar a la conclusión.

Demostración

Hipótesis: $x, y, z \in \mathbb{R}$
Conclusión: $(x+y)z = xz + yz$
$(x+y)z = z(x+y)$ Por conmutatividad de la multiplicación
$z(x+y) = zx + zy$ Por distributividad
$zx + zy = xz + yz$ Por conmutatividad de la multip. (dos veces)

$$\therefore (x+y)z = xz + yz$$

■

2. Vectores en el Plano

2.1 Naturaleza de la Geometría Analítica

A continuación vamos a definir el tablero de nuestro juego. Utilizaremos algunos objetos matemáticos para ello.

Definición 2.1.1 — Conjunto. Un conjunto es una colección de elementos considerada en sí misma como un objeto.

Ejemplo 2.1.1
El profesor tiene dos bicicletas: una amarilla con negro (la denotaremos A) y otra verde con negro (la denotaremos como V). Si nos queremos referir a ambas bicicletas, estamos hablando del conjunto de bicicletas y lo denotaremos como $\{A,V\}$.

Definición 2.1.2 — Producto Cartesiano. El producto cartesiano del conjunto A con el conjunto B es el conjunto de pares ordenados (x,y) tales que x es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

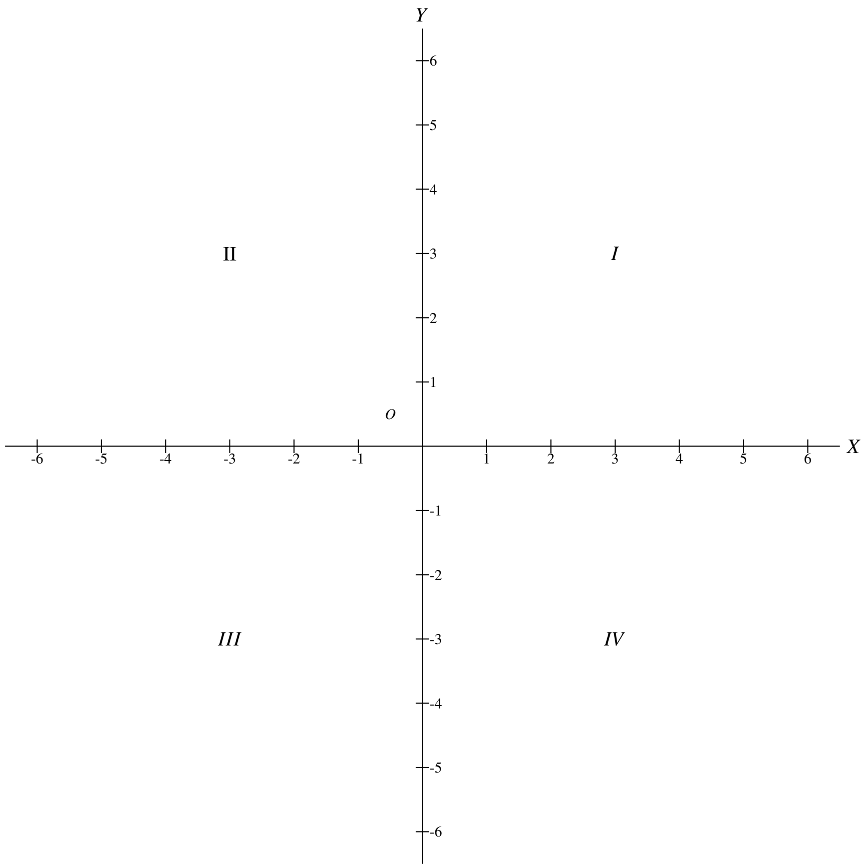
$$A \times B = \{(x,y)|x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo 2.1.2 Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{5,6,7\}$
$\Rightarrow A \times B = \{(1,5), (1,6), (1,7), (2,5), (2,6), (2,7), (3,5), (3,6), (3,7)\}$

Definición 2.1.3 — Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. El sistema de coordenadas cartesianas rectangulares o simplemente coordenadas rectangulares es el producto cartesiano del conjunto de los números reales consigo mismo.

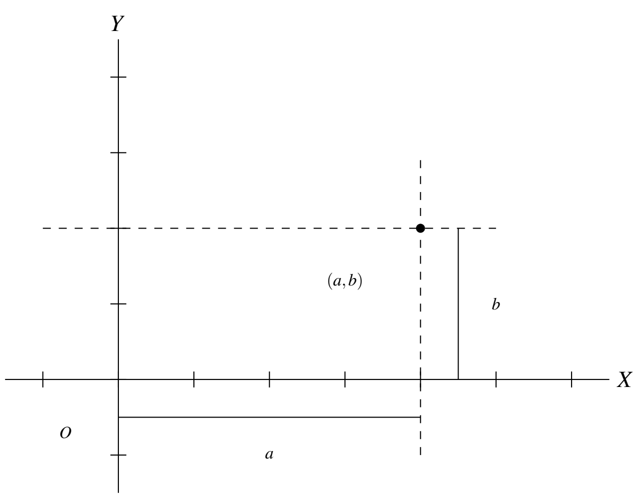
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Vamos a representar el Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares por medio de un plano (plano cartesiano). Los ejes del sistema son rectas perpendiculares. La intersección es llamada origen. Las cuatro regiones en que los ejes dividen al plano se llaman cuadrantes.



Asociamos el par ordenado (a,b) a un punto del plano de la siguiente manera:

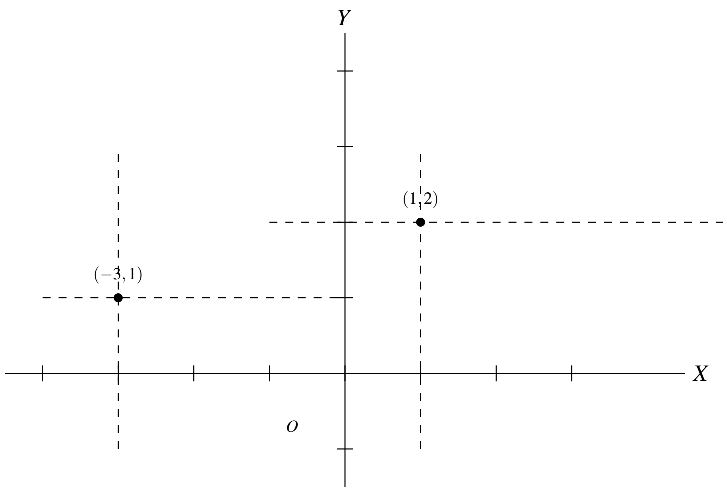
- trazar una recta vertical sobre el eje horizontal
- trazar una recta horizontal sobre el eje vertical
- la intersección se llama "la gráfica de (a,b)"



La primera componente se llama la abscisa; la segunda componente se llama la ordenada. El origen O tiene coordenadas $(0,0)$.

Ejercicio 2.1.1 Graficar los puntos $A=(1,2)$ y $B=(-3,1)$.

Solución:



2.2 Puntos

Hasta el momento ya sabemos ubicar puntos en el plano cartesiano.Debemos aclarar que cada punto tiene una representación única con coordenadas cartesianas. Veamos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1 Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) corresponden al mismo punto si y sólo si $(\Leftrightarrow)$ $a=c$ y $b=d$.

Ejemplo 2.2.1 ¿Para qué valores de x,y se tiene que $(x+y,x-y)=(5,3)$?

Solución:
Para que sean iguales se debe cumplir que

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 5 \\ x-y &= 3 \end{aligned}\right\} \text{Necesitamos resolver el sistema de ecuaciones.}$$

Sugerencia: utilizar el método de suma y resta.

$$\begin{array}{rcl} x+y &=& 5 \\ x-y &=& 3 \\ \hline 2x+0y &=& 8 \end{array} \quad \text{Es decir, } 2x=8 \Rightarrow x=4 \Rightarrow 4+y=5 \Rightarrow y=1$$

$$\therefore x=4 \text{ y } y=1$$

Ejercicio 2.2.1 Determine para qué valores de x,y se tiene que
- $(x+3,5)=(-1,9+x)$
- $(x+3,3)=(-1,9+x)$
- $(x+y,5)=(3,2x+2y)$
- $(x^2+2x,-5)=(1,x^2-4x)$

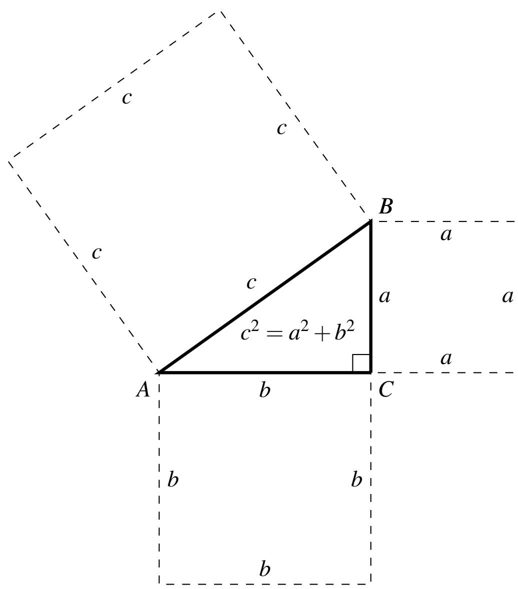
Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos puede definirse de muchas maneras. Piensen en la distancia entre el ITAM y su domicilio, podrían medir la distancia como el número de metros que caminan, el número de km que recorren en su auto, etc. Vamos a convenir en utilizar como definición de distancia a la longitud del segmento de recta que une a dichos puntos.

Definición 2.2.1 — Distancia entre dos puntos. Sea $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia entre A y B denotado por $d(A,B)$ es igual a $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

La fórmula anterior proviene del teorema de pitágoras:

Teorema 2.2.2 — Pitágoras. Sea un triángulo con lados de longitudes a, b, y c (lado más grande), es un triángulo rectángulo si y sólo si $c^2 = a^2 + b^2$. Se le llama hipotenusa al lado de longitud c y los otros son llamados catetos.



Ejemplo 2.2.2 Calcule la distancia de $A = (-4, 1)$ a $B = (3, 2)$.

Solución:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(3-(-4))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Proposición 2.2.1 Sean A y B dos puntos en el plano cartesiano, entonces $d(A,B) = d(B,A)$

Demostración

Hipótesis: $A, B \in \mathbb{R}^2$

Conclusión: $d(A,B) = d(B,A)$

Sabemos que $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Por otro lado sabemos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $(-a)^2 = a^2$. Vamos a aplicar este hecho a $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, es decir, $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$

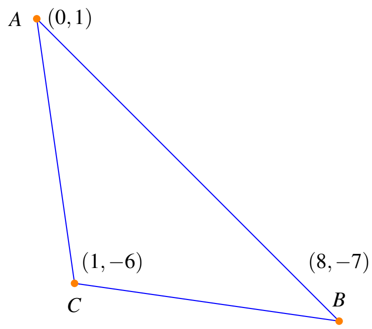
Obtenemos que $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Además, sabemos que $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d(B,A)$

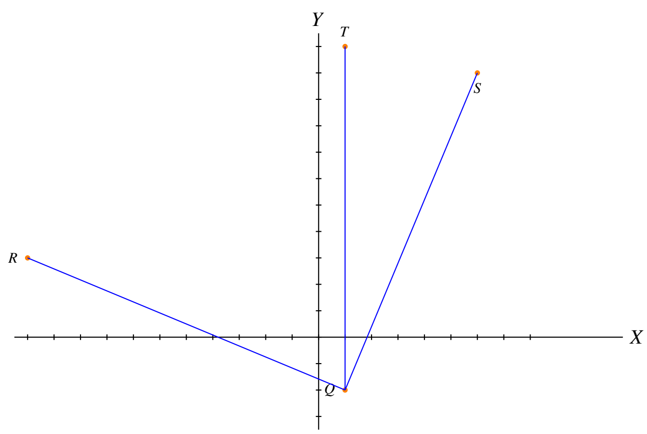
$$\therefore d(A,B) = d(B,A)$$

■

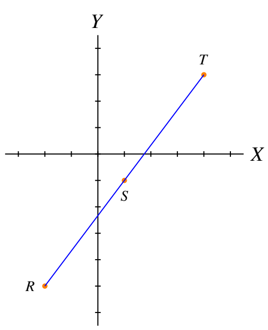
Ejercicio 2.2.2 Demostrar que el triángulo con vértices $A = (0,1)$, $B = (8,-7)$ y $C = (1,-6)$ es isósceles.



Ejercicio 2.2.3 Demuestre que el punto $Q = (1,-2)$ es equidistante a los puntos $R = (-11,3)$, $S = (6,10)$ y $T = (1,11)$.

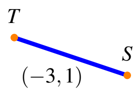


Ejercicio 2.2.4 Demuestre que los puntos $R = (-2,-5)$, $S = (1,-1)$ y $T = (4,3)$ están sobre una recta.



2.3 Vectores

Hasta el momento, hemos asociado un punto del plano con un par ordenado (x,y). También podemos asociar un desplazamiento (o traslación) con el mismo par ordenado. Por ejemplo, considere una hormiga que se mueve en el plano desde un punto S hasta un punto T sobre una línea recta. Si la hormiga se desplaza tres unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba, entonces este desplazamiento se puede escribir como $(-3,1)$.



Interpretación geométrica

tas en el Plano

nicas en el Plano

aciones paramétricas

aciones paramétricas

ordenadas Polares

7.0.1 Links you should check out

Most of them are listed in the useful resourses section of The Caltech-JPL Summer School on Big Data Analytics, the webpage `https://class.coursera.org/bigdataschool-001/wiki/Useful_resources`, you may need to create an account in Coursera and enroll in the course. And the rest of them are located in the References section on my GitHub page, `https://github.com/LaurethTeX/Clustering/blob/master/References.md`.

Wish you all the best, Andrea Hidalgo