Métodos Numéricos - 2017

Obligatorio 1

Sistemas Lineales con Matrices Esparsas

El objeto de estudio del presente obligatorio es la resolución de sistemas lineales, donde la matriz característica es simétrica, semidefinida positiva y además esparsa (la cantidad de elementos no nulos es baja). Estas matrices figuran en diversos problemas de Física e Ingeniería, y dada su relevancia existen métodos numéricos específicos. Aplicaremos la descomposición de Cholesky y un algoritmo de reordenamiento de filas/columnas, apuntando a lograr un resolución eficiente en matrices de gran tamaño.

Trabajaremos con dos sistemas reales:

1. $Bx = d$, utilizado por la NASA. Enlace: Click aquí
2. $Cx = e$, utilizado para el modelado de contenedores. Enlace: Click aquí

Parte 1: Problema en Miniatura

Se desea resolver $Ax = b$ donde a

$$A = \begin{pmatrix} 29 & 34 & -10 \\ 34 & 41 & -12 \\ -10 & -12 & 24 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Probar que A es simétrica y definida positiva.
2. Resolver el sistema $Ax = b$ mediante escalerización Gaussiana junto con sustitución hacia atrás. Reportar matriz triangular superior, solución y tiempo de ejecución.
3. Resolver utilizando la descomposición de Cholesky junto con sustitución hacia atrás y hacia adelante. Reportar matriz H (superior), solución y tiempo de ejecución.
4. Hallar la matriz Q y el vector r asociados al método de Jacobi. Estudiar convergencia. Usar una condición de parada acorde al problema y un máximo de 100 iteraciones. Reportar la solución y los tiempos de ejecución.
5. Hallar la matriz Q y el vector r asociados al método de Gauss-Seidel. Estudiar convergencia. Usar una condición de parada acorde al problema y un máximo de 100 iteraciones. Reportar la solución y los tiempos de ejecución.
6. Calcular el error absoluto y relativo cometido en cada parte tomando como referencia la solución que otorga Octave/Matlab u otro lenguaje utilizado.

Parte 2: Matrices Esparsas

Considere ahora el sistema $Bx = d$ definido al comienzo del obligatorio.

1. Resolver utilizando escalerización Gaussiana junto con sustitución hacia atrás. Reportar matriz triangular superior, solución y tiempo de ejecución.
2. Resolver utilizando la descomposición de Cholesky junto con sustitución hacia atrás y hacia adelante. Reportar el patrón de la matriz triangular superior H, la solución y tiempo de ejecución.

Sin hallar Q y r:

3. Ejecutar el método de Jacobi utilizando una condición de parada apropiada al problema y un máximo de 100 iteraciones. Graficar la evolución del error. Estudiar convergencia.
4. Dar una condición suficiente para la convergencia del método de Gauss-Seidel. Demostrar convergencia para el problema en consideración. Ejecutar dicho método hasta que se cumpla una condición de parada apropiada al problema o un máximo de 100 iteraciones. Graficar la evolución del error.
5. Resolver utilizando la descomposición de Cholesky junto con sustitución hacia atrás y hacia adelante. Reportar el patrón de la matriz triangular superior H, la solución y tiempo de ejecución.
6. Investigue sobre el método de reordenamiento de Cuthill-McKee y haga una breve descripción del mismo.
7. Resolver aplicando el reordenamiento de Cuthill-Mckee junto con la descomposición Cholesky, sutitución hacia adelante y hacia atrás. Reportar el patrón de la matriz triangular superior H, la solución y tiempo de ejecución.
8. Repetir el item (7) anterior para el sistema $Cx = e$ definido al principio del obligatorio.
9. Aplicar sobrerelajación a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para obtener convergencia en caso de que no la hubiese, o para mejorar su velocidad si ya había convergencia. Reportar tiempos de ejecución.

Parte 3: Profundización

1. Explicar el concepto de Fill-In.
2. Relacionarlo con la cantidad de operaciones realizadas en las Partes 2.5 y 2.6.
3. Explicar un algoritmo para calcular la decomposición de Cholesky.

Aclaraciones y Sugerencias:

1. La profundidad del análisis y su relación con el curso será bien valorada.
2. La correcta redacción es parte de la evaluación.
3. Editar el Informe preferentemente utilizando Latex.
4. Se recomienda el uso de Timbó para el acceso bibliográfico: http://www.timbo.org.uy/.

Lecturas Recomendadas

1. Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2010). Numerical mathematics (Vol. 37). Springer Science & Business Media. Capítulos 3 y 4.
2. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2012). Matrix computations (Vol. 3). JHU Press. Capítulos 4 y 11.
3. George, A., Liu, J., & Ng, E. (1994). Computer solution of sparse linear systems. Academic, Orlando. Capítulo 4.