高级人工智能

沈华伟
shenhuawei@ict.ac.cn
中国科学院计算技术研究所
2016.11.8

课程回顾

- 博弈
  - 基本概念
  - 纳什均衡
  - 机制设计
- 两个经济学的应用
  - 拍卖
  - 讨价

课堂作业回顾

- 海盗分金币
  - 问题描述：有5个海盗抢到了100个金币，经过激烈争论，就如何分配达成以下协议：
    - 抽签决定每个人提分配方案的顺序
    - 抽到1号签的海盗首先提出自己的分配方案，然后所有人表决（包括方案提出者），当且仅当半数或超过半数以上的人同意的时候，才按照他提出的方案执行，否则他会被扔进海里
    - 1号海盗的方案如果未被通过，那么2号海盗提自己的方案，规则和上述一样，直到某个方案通过
- 给出最终的分配方案
  - 提示：从后往前回滚

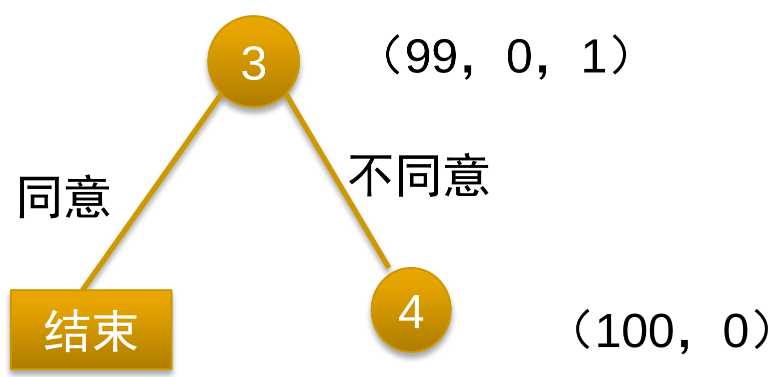
海盗分金币

- 从后向前回滚
  - 如果前三个海盗都死了，只剩最后两个海盗，那么4号海盗可以提出分配方案（100，0），他自己同意，满足规则，所以会执行

4 (100，0)

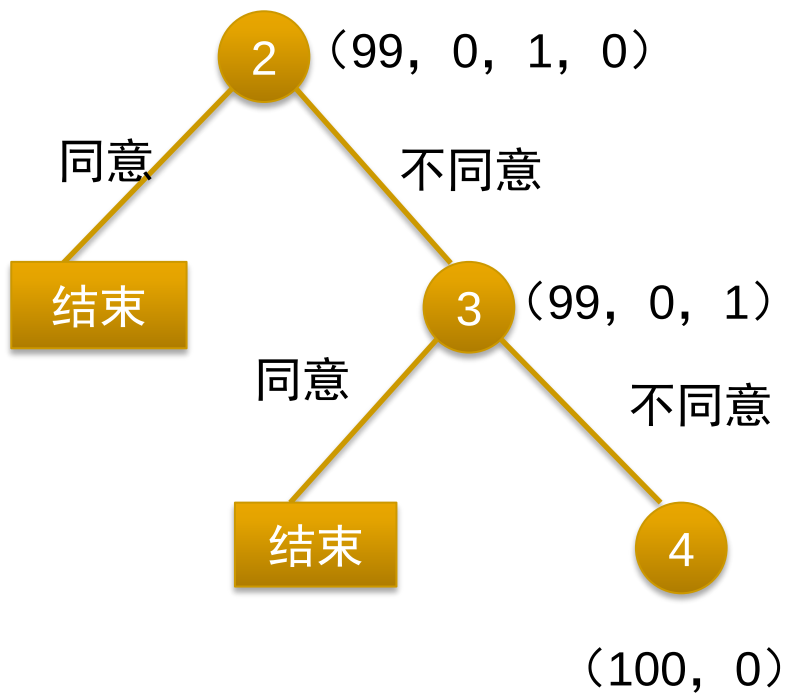
海盗分金币

- 所有的海盗都知道这一点，因此第三个海盗会给出如下策略
  - 如果前两个海盗死了，第三个海盗为了使自己的方案通过，并使自己获得最大的利益，那么他的分配方案即为（99，0，1），3号和5号肯定会同意。因为5号这样至少还能得到1个金币



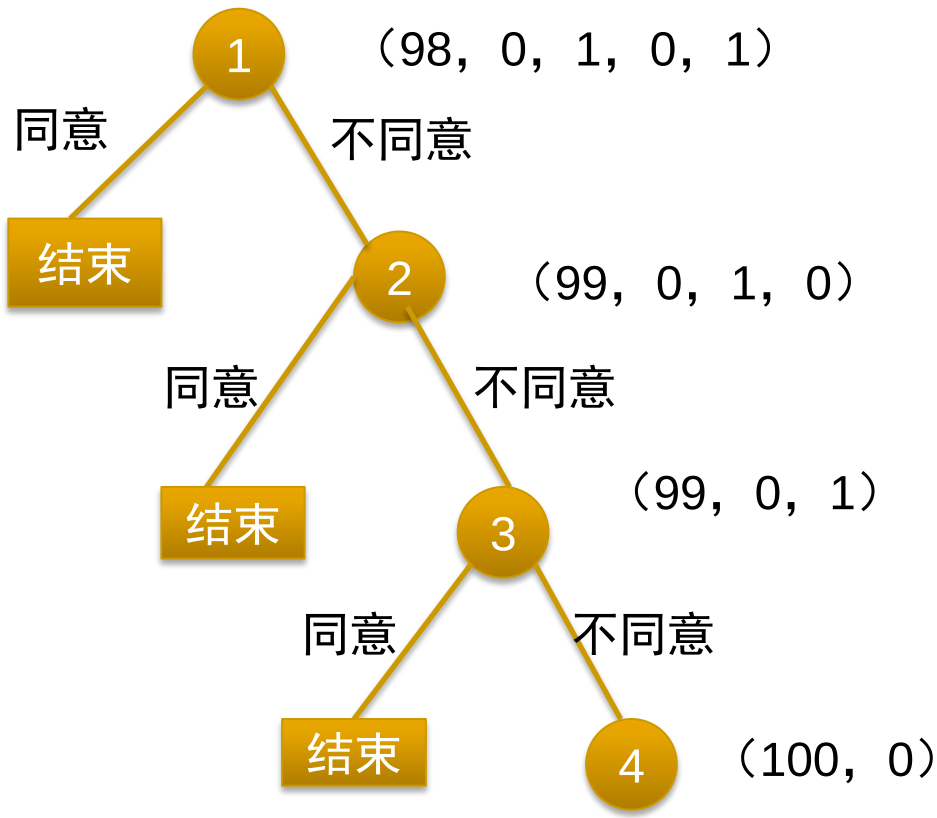
海盗分金币

- 同理，可以推出2号海盗的分配方案为（99，0，1，0）



海盗分金币

- 最终，1号海盗的方案（**98，0，1，0，1**）



课程内容

- **maxmin策略和minmax策略**

- 匹配市场

- 中介市场

- 议价权

maxmin策略

- maxmin策略
  - 最大化自己最坏情况时的效用（收益）

$$\arg\max_{\boxed{s_i}}\min_{\boxed{s_{-i}}} \boxed{u_i(s_i, s_{-i})}$$

局中人i的效用函数

局中人i的策略

除i之外其他局中人的策略

maxmin策略示例

- 性别大战
  - 妻子的策略：以概率p选择韩剧，以概率$1-p$选择体育
  - 丈夫的策略：以概率q选择韩剧，以概率$1-q$选择体育
- 妻子的期望收益

$$u_w(p,q) = 2pq + (1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1$$

- 妻子的期望收益关于丈夫的策略q是单调的
  - 最小值的可能取值点：$q=0$或$q=1$
- 妻子的最坏期望收益

$$\min_q u_w(p,q) = \min(1-p, 2p)$$

- 妻子的maxmin策略为

$$\arg\max_p \min_q u_w(p,q)$$

妻子

丈夫	韩剧	体育
韩剧	1,2	0,0
体育	0,0	2,1

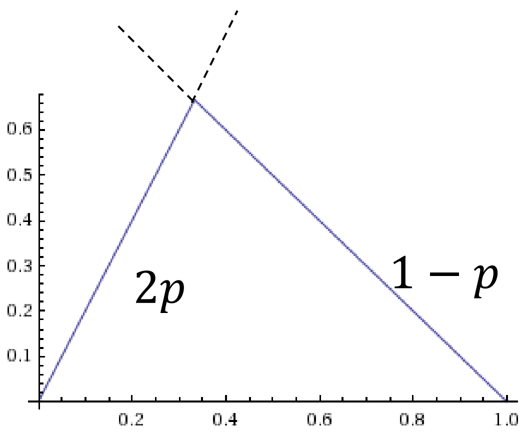
丈夫: h　　妻子: w

maxmin策略示例

- 性别大战

$$\arg\max_p \min_q u_w(p,q) = \arg\max_p \min(1-p, 2p)$$

- 解得
  - $p = \frac{1}{3}$



- 妻子的maxmin策略
  - 1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育
- 同理，丈夫的maxmin策略
  - 2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育

maxmin策略

- 为什么要用maxmin策略？
  - 最小化损失，控制风险
  - 预防其它局中人的不理性给自己带来损失
  - ……

minmax策略

- minmax策略
  - 最小化对手的最大收益（收益）

$$\arg\min_{\boxed{s_i}}\max_{\boxed{s_j}}\boxed{u_j\left(s_i, s_j\right)}$$

对手j的效用函数

局中人i的策略

对手j的策略

minmax策略示例

- 性别大战
  - 妻子的策略：以概率p选择韩剧，以概率$1-p$选择体育
  - 丈夫的策略：以概率q选择韩剧，以概率$1-q$选择体育
- 丈夫的期望收益（注意：妻子的minmax策略考虑到是丈夫的收益）

$$u_h(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 2$$

- 丈夫的期望收益关于其策略q是单调的
  - 最大值的可能取值点：$q=0$或$q=1$
- 丈夫的最好期望收益

$$\max_q u_h(p,q) = \max(2-2p, p)$$

- 妻子的minmax的策略为

$$\arg\min_p \max_q u_h(p,q)$$

妻子

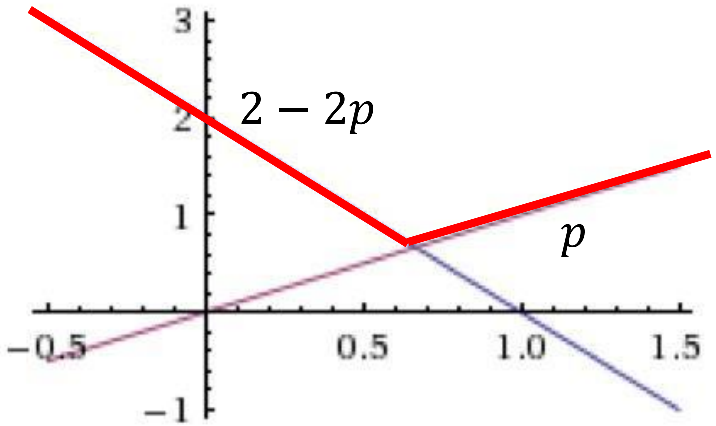
丈夫		韩剧	体育
	韩剧	1,2	0,0
	体育	0,0	2,1

丈夫: h　　妻子: w

minmax策略示例

- 性别大战

$$\arg\min_p \max(2-2p, p)$$



- 解得
  - $p=\frac{2}{3}$
- 妻子的minmax策略
  - 2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育
- 同理，丈夫的minmax策略
  - 1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育

maxmin策略和minmax策略

- 性别大战小结
  - maxmin策略（以我为主）
    - 妻子1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育
    - 丈夫2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育
  - minmax策略（抑制对手）
    - 妻子2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育
    - 丈夫1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育
  - 混合纳什均衡策略（抑制对手）
    - 妻子2/3概率选择韩剧，1/3概率选择体育
    - 丈夫1/3概率选择韩剧，2/3概率选择体育

maxmin策略和minmax策略

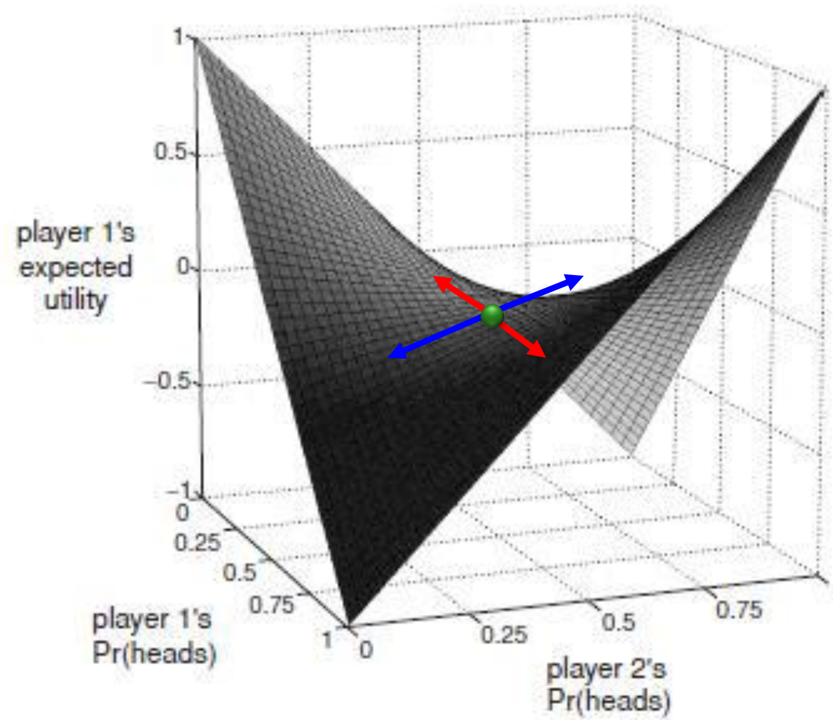
- 零和博弈情况下
  - minmax和maxmin是对偶的
  - minmax策略和maxmin策略等价于纳什均衡策略

玩家二

玩家一

	Heads	Tails
Heads	1,-1	-1,1
Tails	-1,1	1,-1

零和博弈的例子



课程内容

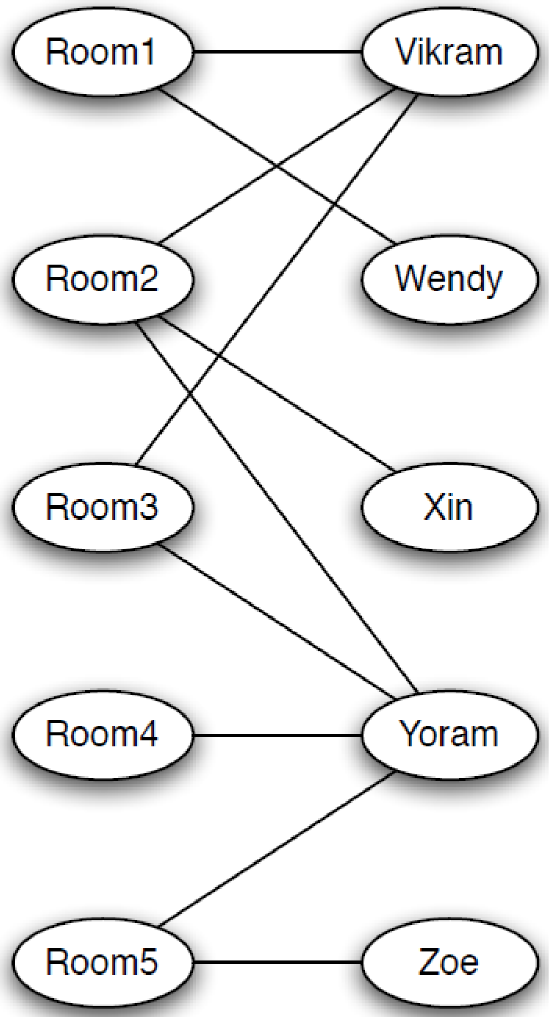
- maxmin策略和minmax策略
- 匹配市场
- 中介市场
- 议价权

匹配问题(matching)

- 生活中有很多匹配问题
  - 分宿舍：学生和宿舍之间的匹配
  - 结婚：男性和女性的匹配
  - 大作业分组：搭档匹配
  - ……
- 匹配蕴含着很多智能问题
  - 价格的作用
  - ……

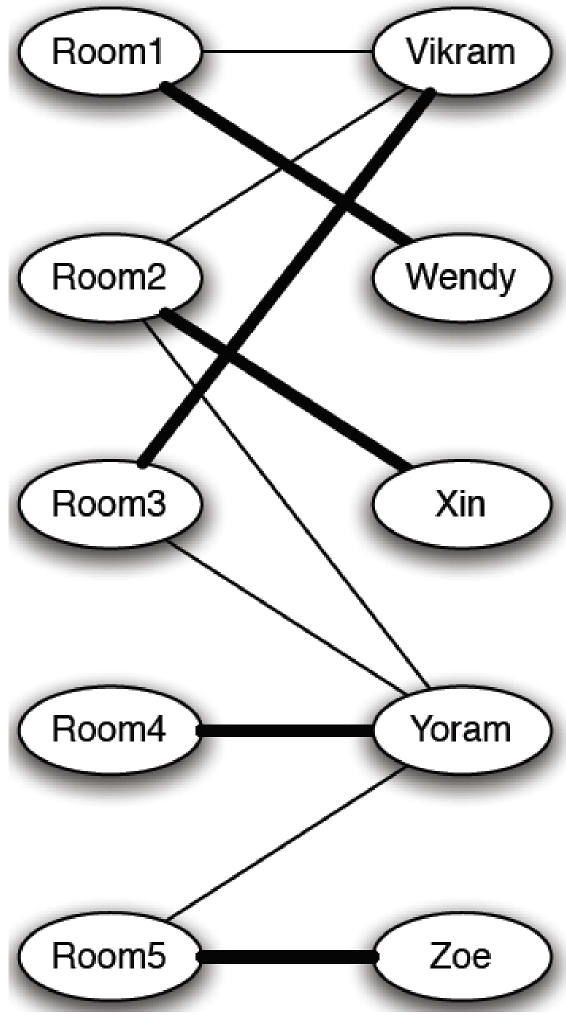
匹配问题示例

- 学生宿舍分配
  - 每个学生列出自己可以接受的宿房间
    - Vikram认为宿舍1,2,3均可接受
    - Wendy只接受房间1
  - 学生对房间偏好采用一个二部图表示
    - 左侧节点是房间
    - 右侧节点是学生
    - 连边表示偏好关系



完全匹配

- 完全匹配
  - 对于两类节点集合大小一样的二部图，选择数目和节点个数一样的边，使得每类节点中的任意一个节点在另一类节点中都有唯一的对应者
- 如何判断一个二部图是否存在完全匹配呢？
  - 如果存在，找到这个完全匹配即可
  - 如果不存在，怎么办呢？

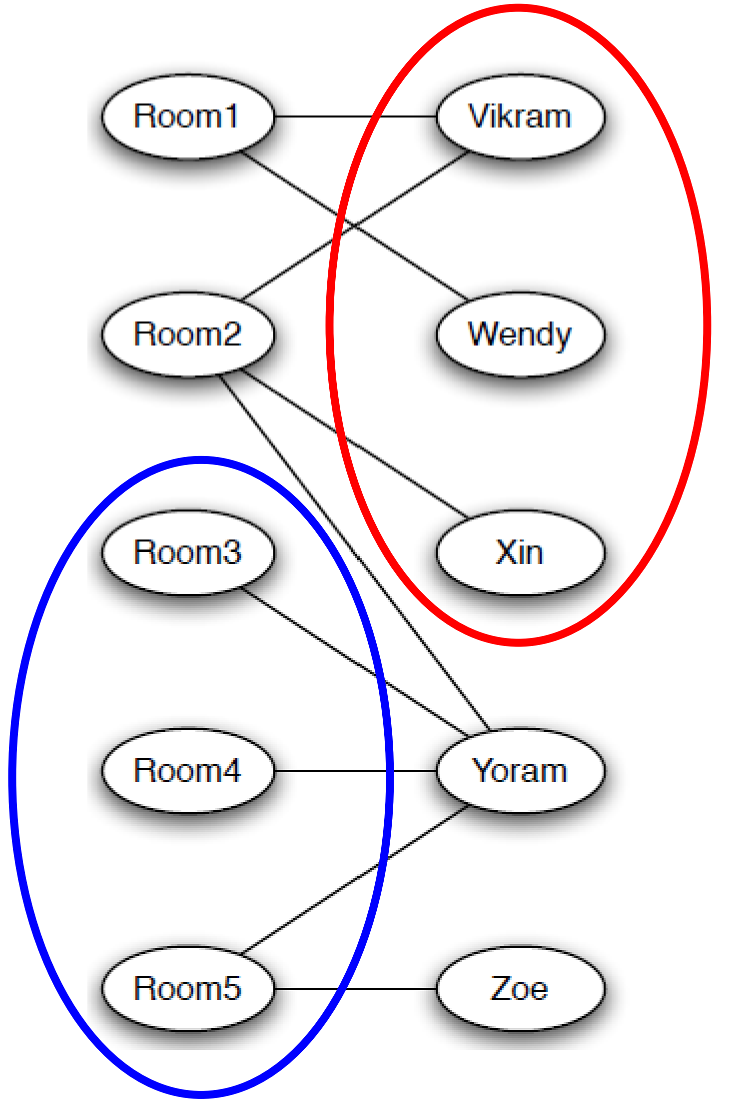


匹配定理

- 匹配定理
  - 对于左右两部节点数相同的二部图，如果其不存在完全匹配，那么该二部图一定包含一个受限集。
- 受限集
  - 假设S是二部图某部节点集的子集，$N(S)$是S的邻居节点集合（注意：该集合的节点一定来自二部图的另一部节点集合），如果$N(S)$中的节点个数$|N(S)|$小于S中的节点个数$|S|$，即$|N(S)| < |S|$，则称S为受限集

匹配定理

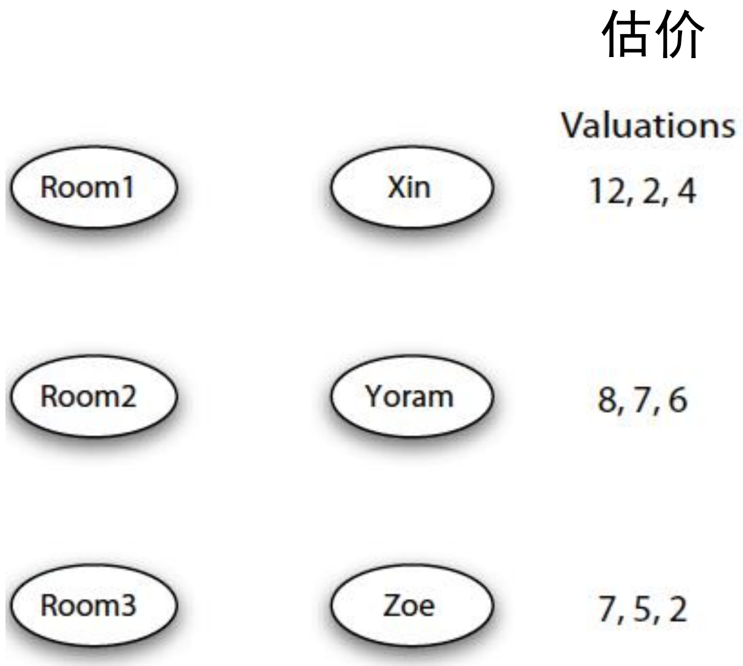
- 完全匹配不存在的例子
- 受限集
  - 受限集总是成对出现
  - {Vikram,Wendy,Xin}
  - {Room3,Room4,Room5}
  - ……



更一般的匹配问题

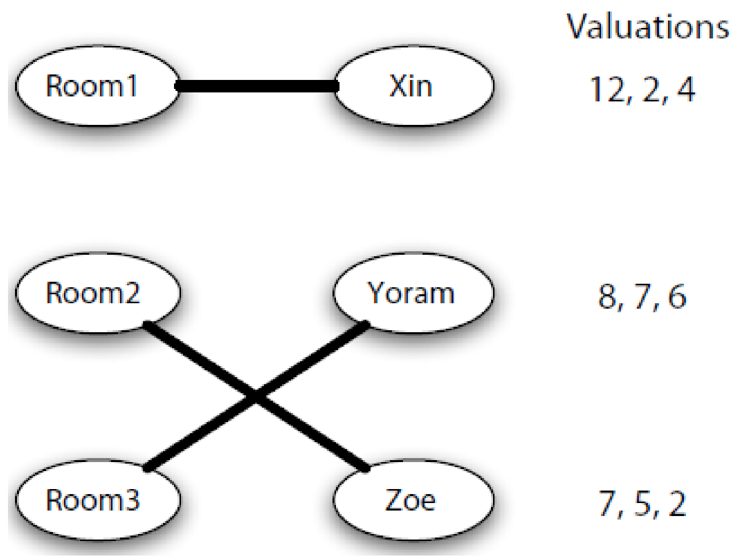
- 前面的宿舍分配问题中，每个人只列出可接受的房间，更一般的情形是每个人对于房间给出一个估价

- 前面的例子可以看成一个打分为0和1的特例



最优匹配

- 匹配的效用
  - 成功匹配的估价之和，称为匹配的效用
- 最优匹配
  - 效用最大的匹配
- 最优匹配对于个体而言不一定最优，甚至是最差的
  - Yoram和Zoe的最优选择是Room1
  - Yoram的最差选择是Room3



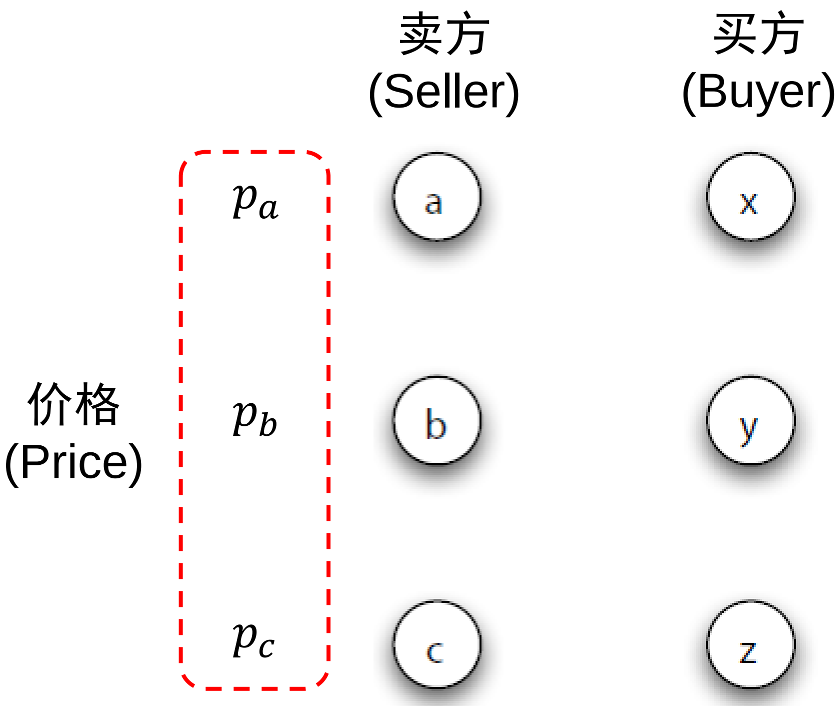
最优匹配
效用：12+6+5=23

最优匹配

- 如何找到最优匹配呢？
  - 穷举搜索
    - 时间复杂度：$O(n!)$
  - 有更高效的方法吗?
  - 需要宿舍管理员这样的全局角色吗？
    - 价格

价格导向的匹配

- 价格导向的匹配问题的形式化表示



估价
(Evaluation)

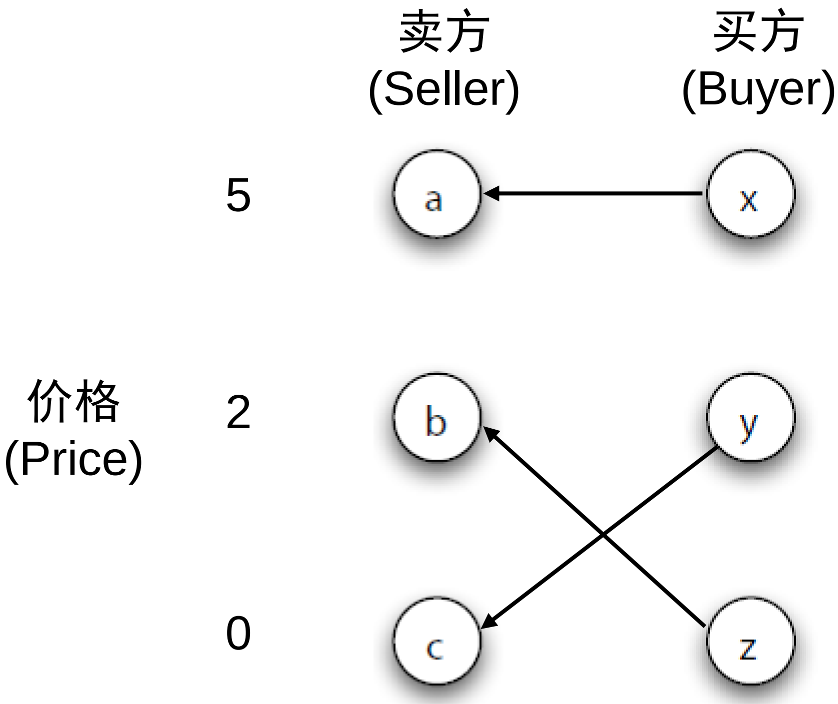
$$v = \begin{bmatrix} v_{x,a} & v_{x,b} & v_{x,c} \\ v_{y,a} & v_{y,b} & v_{y,c} \\ v_{z,a} & v_{z,b} & v_{z,c} \end{bmatrix}$$

价格导向的匹配

- 估价不低于价格时，买方可以接受
  - 如果$v_{x,a} \geq p_a$，则买方x可以接受卖方a的价格，如果成交，买方x获得的效用是
    $$v_{x,a} - p_a$$
  - 对于买方x，如果使其效用最大的卖方是a，那么在二部图中添加一条由x指向a的边
  - 对于同一个买方，如果有多个卖方使其效用最大，则添加多条边
  - 最终得到一个“买方偏好图”

价格导向的匹配

- 示例



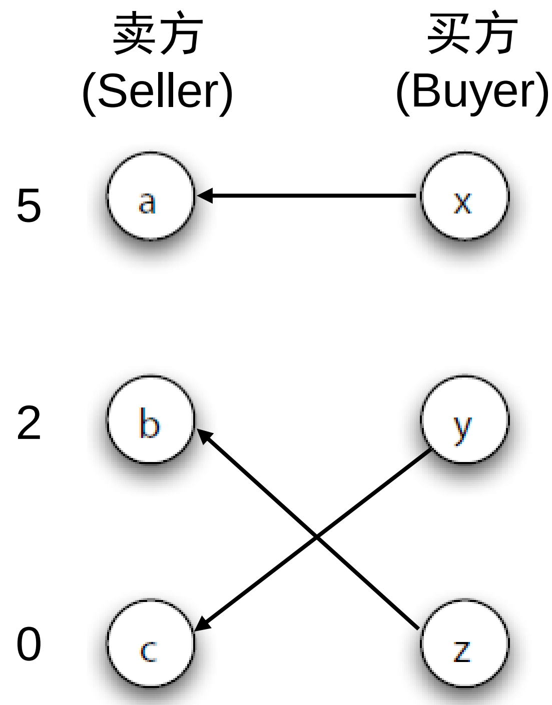
买方偏好图

估价
(Evaluation)

$$v = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12, & 4, & 2 \\ 8, & 7, & 6 \\ 7, & 5, & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

市场结清价格

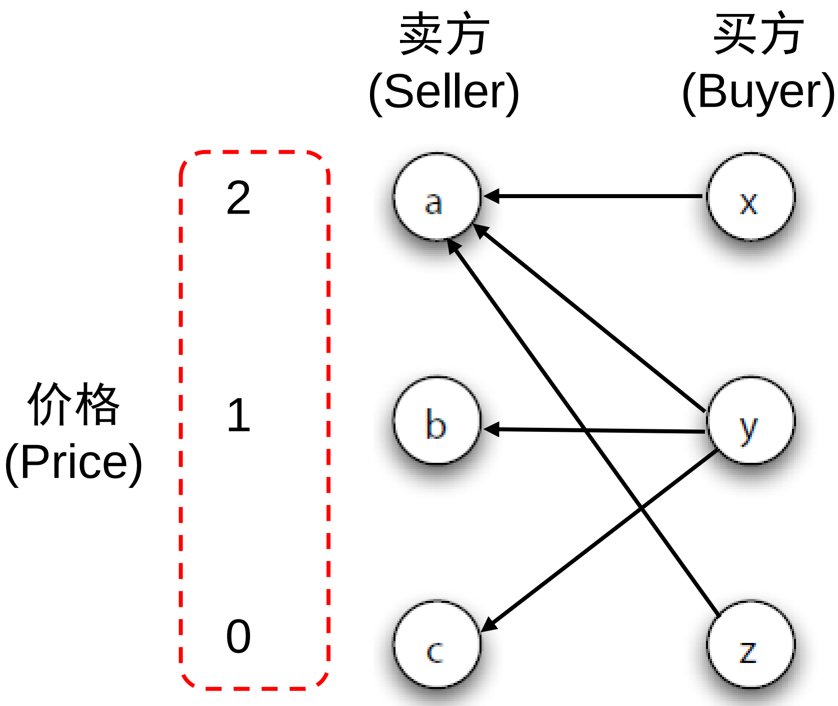
- 市场结清(Market-Clearing)
  - 每个卖方和买方都成交了
- 给定买方报价的情况下，如果卖方的某种价格使得对应的买方偏好图中存在完全匹配，则称卖方的这组价格为市场结清价格



买方偏好图

市场结清价格

- 未实现市场结清的价格



估价
(Evaluation)

$$v = \begin{bmatrix} 12, & 4, & 2 \\ 8, & 7, & 6 \\ 7, & 5, & 2 \end{bmatrix}$$

买方偏好图

市场结清价格的性质

- 最优性
  - 市场结清价格所对应的买方偏好图中得到的完全匹配是最优匹配
- 存在性
  - 对于任意买方估价，市场结清价格一定存在

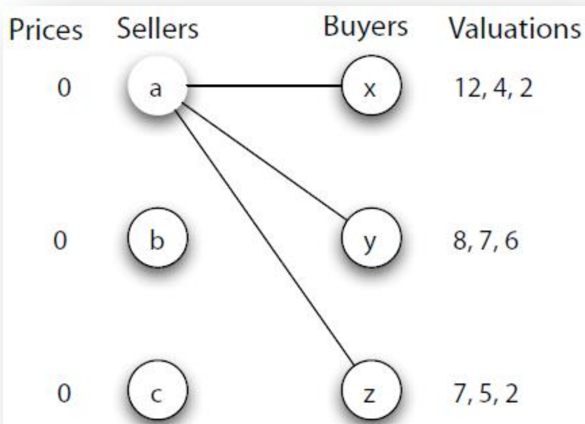
市场结清价格的存在性

- 寻找市场结清价格的过程
  - 步骤1：初始时，所有卖方的价格为0
  - 步骤2：构建买方偏好图，检查其是否存在完全匹配
    - 如果存在，当前价格是市场结清价格
    - 如果不存在，从图中找到一个受限集S（一定是买方）及其邻居$N(S)$，让 $N(S)$ 中的每个卖家的价格增加1
  - 回到步骤2（当所有价格都为正时，可以通过让所有价格减去最低价格，使最低价格为0，此操作不影响结果）
- 收敛性
  - 买卖双方的总收益有限
  - $|N(S)| < |S|$，总收益下降，但不会小于0

市场结清价格

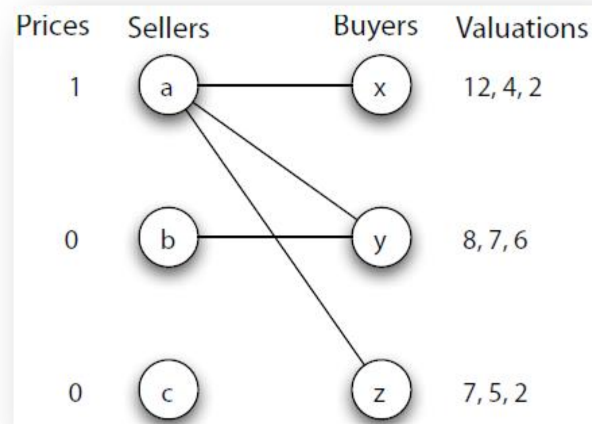
- 寻找市场结清价格的过程示例

第一轮



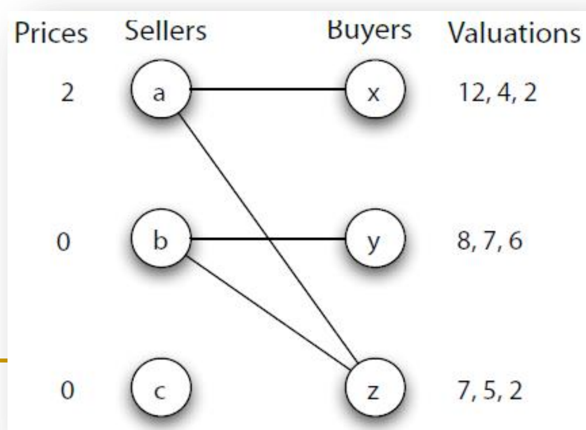
受限集S={x,y,z}，N(S)={a}

第二轮



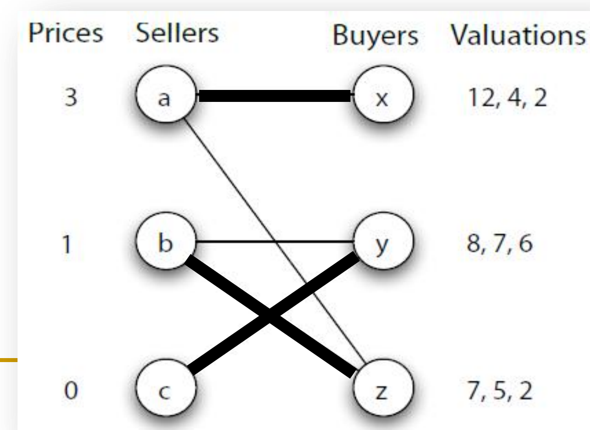
受限集S={x,z}，N(S)={a}

第三轮



受限集S={x,y,z}，N(S)={a,b}

第四轮



市场结清价格的存在性

- 小结
  - 完全匹配是否存在可以通过寻找受限集来判断
  - 价格能够引导市场优化配置
  - 市场结清价格总是存在
  - 市场结清价格使得买卖双方总效用最优

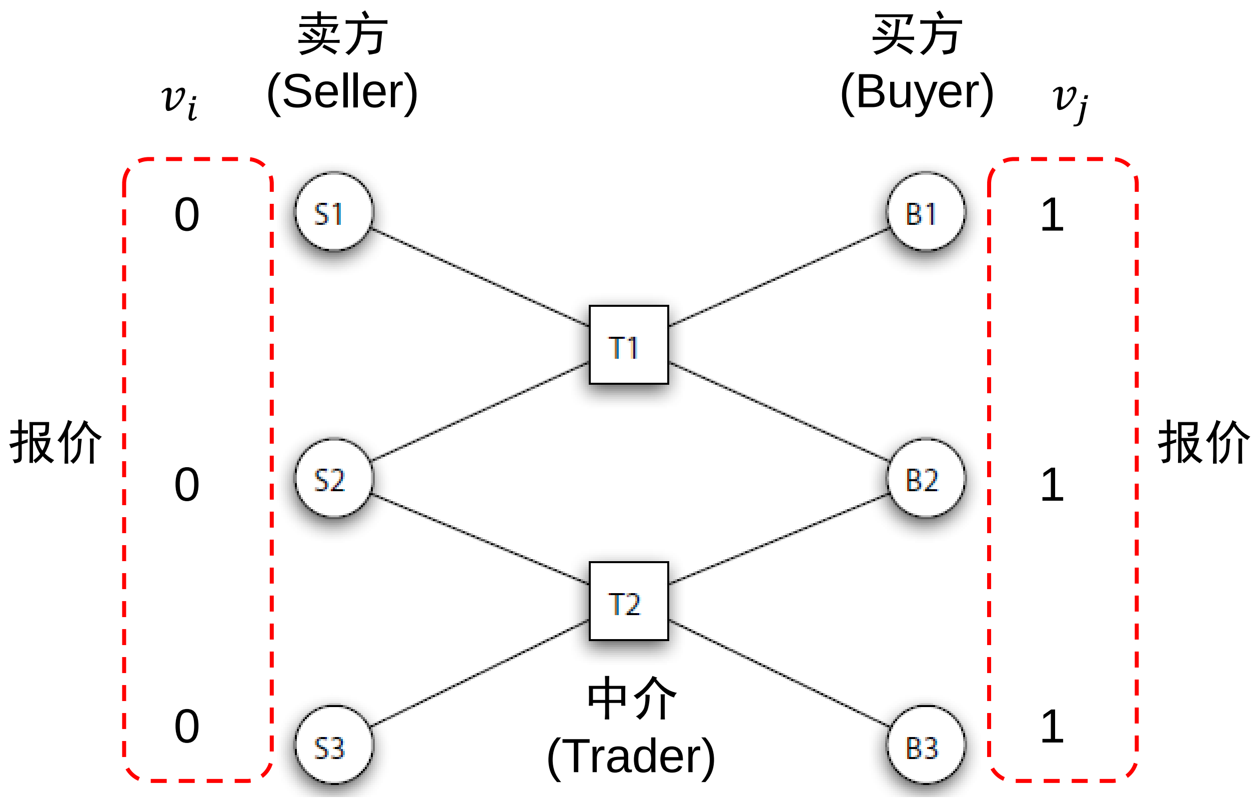
课间休息

课程内容

- maxmin策略和minmax策略
- 匹配市场
- **中介市场**
- 议价权

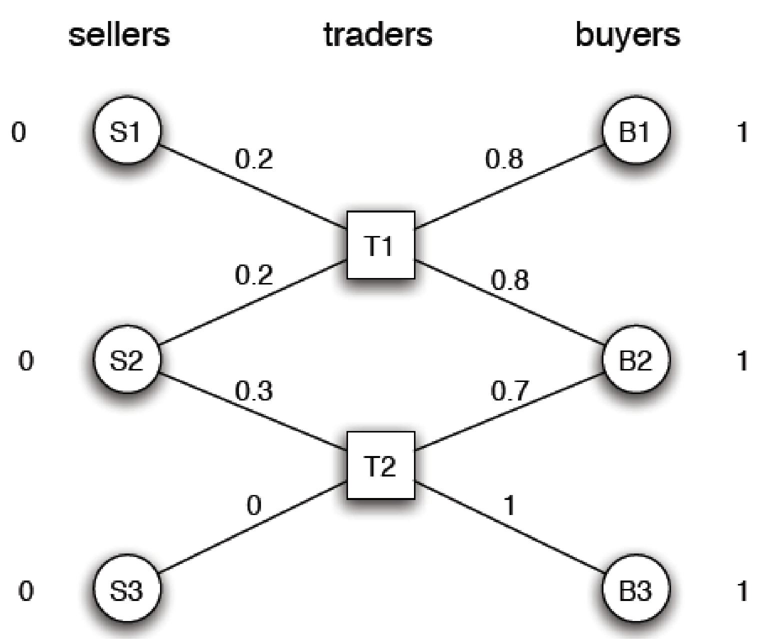
中介市场

- 中介市场的形式化表示

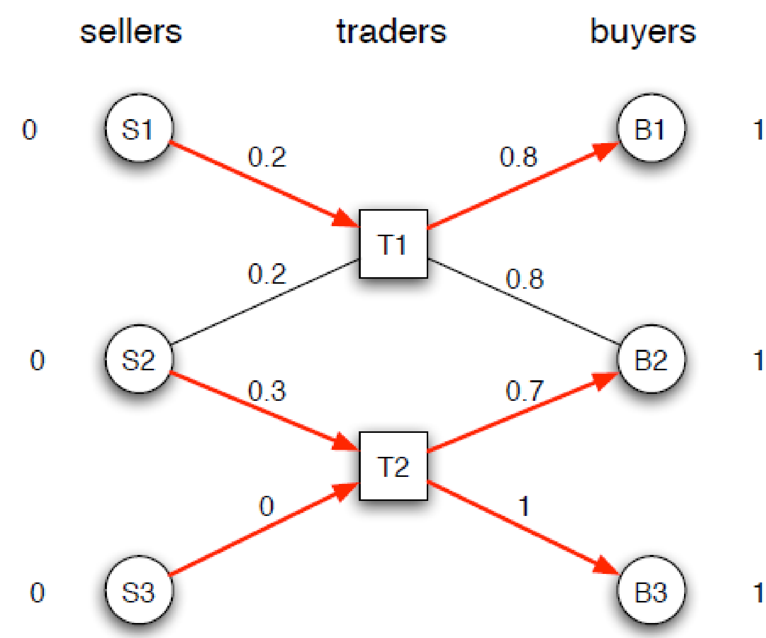


中介市场

- 中介市场博弈规则
  - 中介向买方、卖方报价
  - 买方和卖方根据中介报价选择是否交易



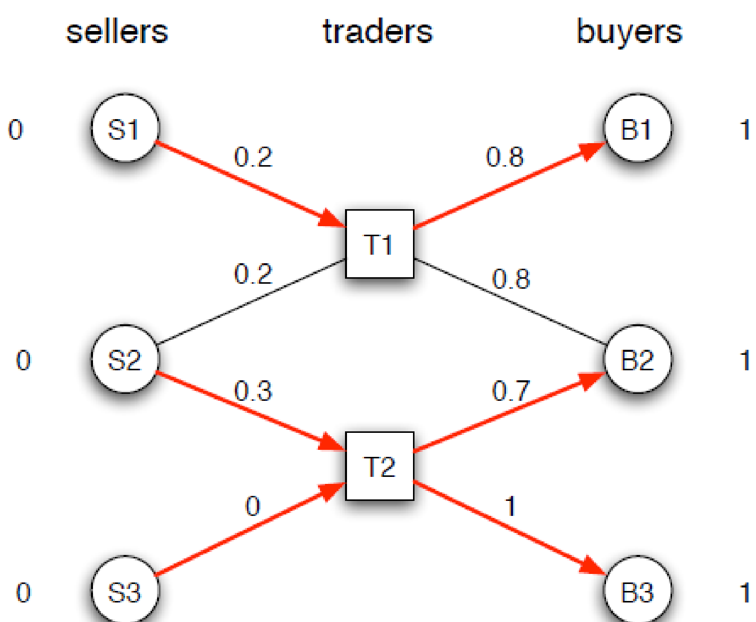
中介报价情况

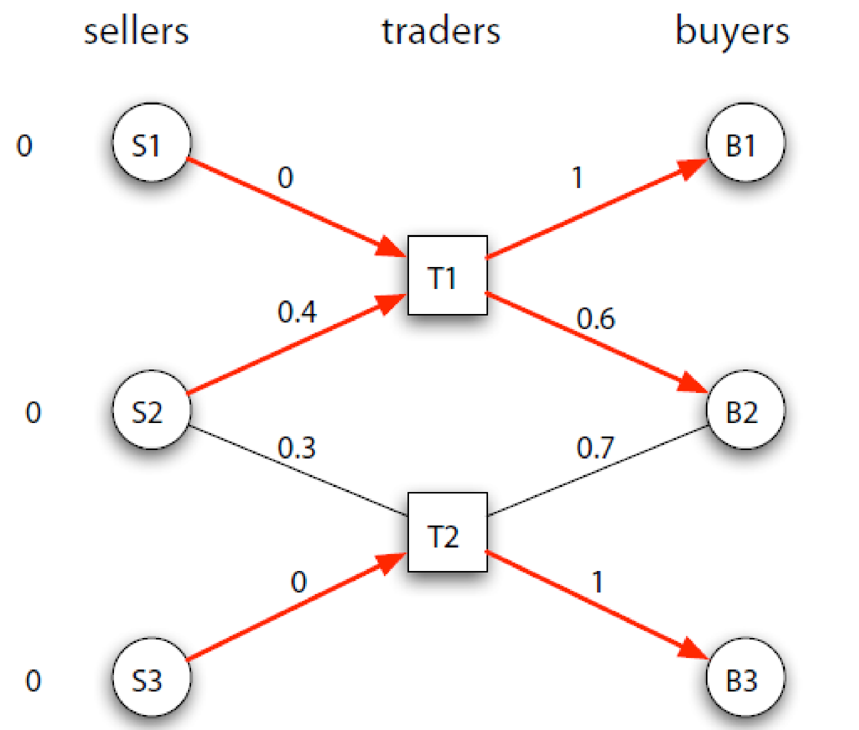


商品流动情况

中介市场

- 中介市场的均衡态
  - 买方和卖方的策略是确定的(首价竞拍），且为中介所知
  - 中介之间进行博弈





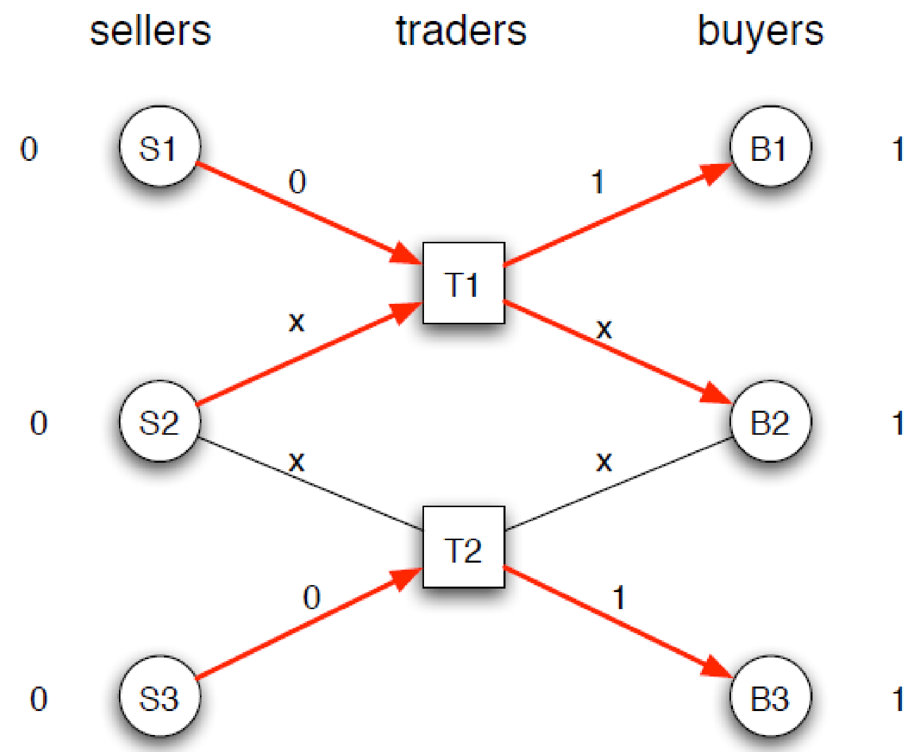
T1的收益：0.6
T2的收益：1.4

T1为提高收益而改变
对S2和B2的报价

T1的收益：1.2
T2的收益：1

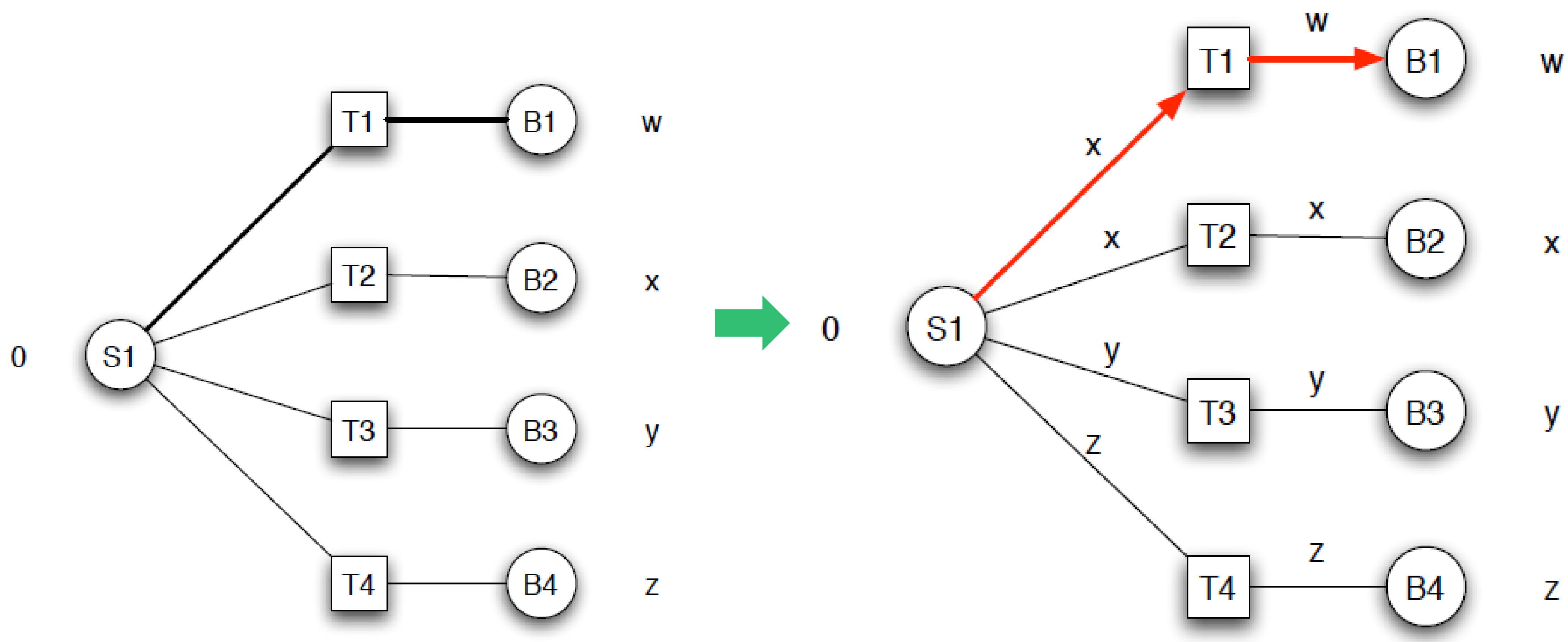
中介市场

- 中介市场的均衡态
  - 垄断
    - T1垄断和S1、B1的交易，T2垄断和S3、B3的交易
  - 充分竞争
    - T1和T2在和S2、B2的交易中充分竞争



中介市场

- 次价拍卖在中介市场中的解释

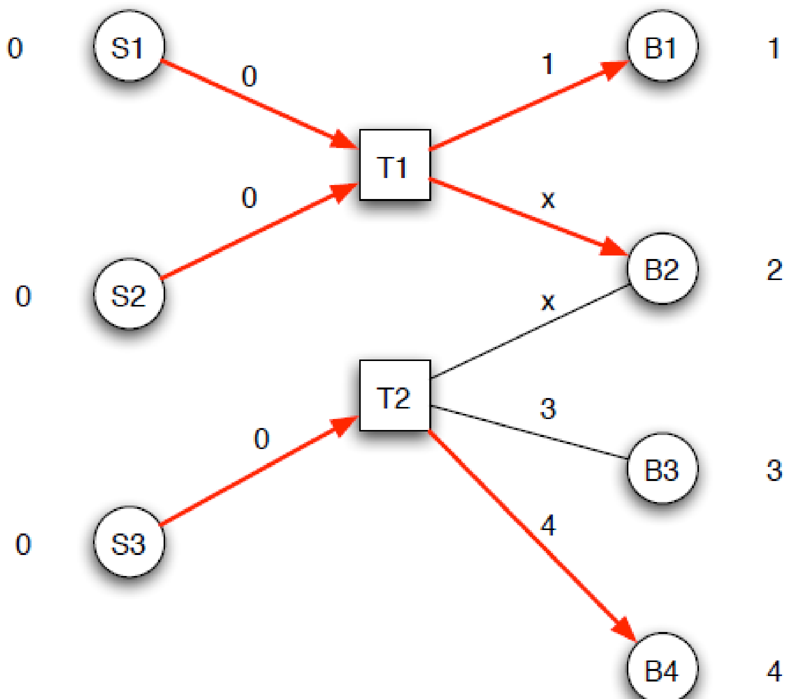


买方向中介报价： $w \geq x \geq y \geq z$

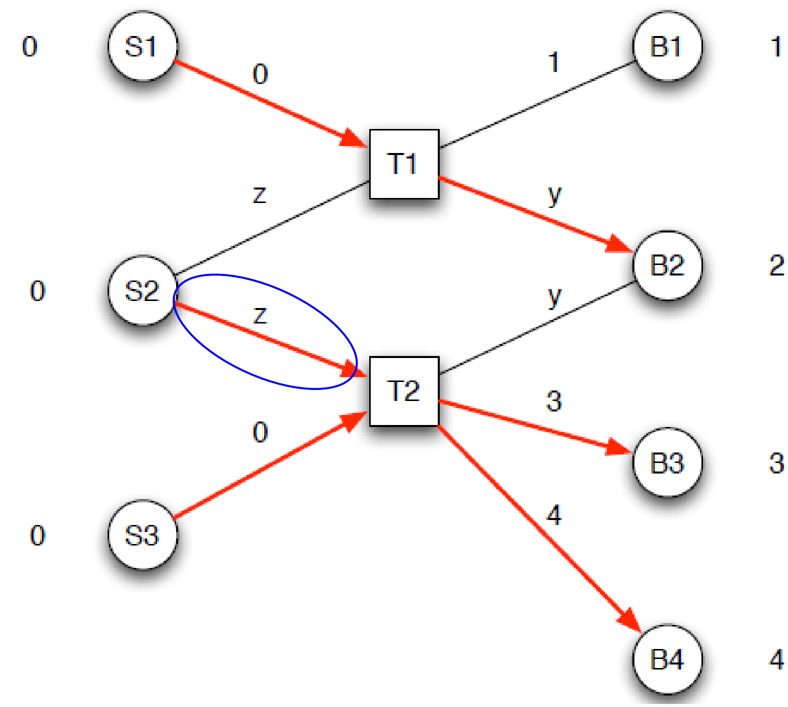
竞拍成功者以次价成交

中介市场

- 引入竞争带来的影响
  - 例子：在S2和T2之间增加一条边



均衡态：$0 \leq x \leq 2$



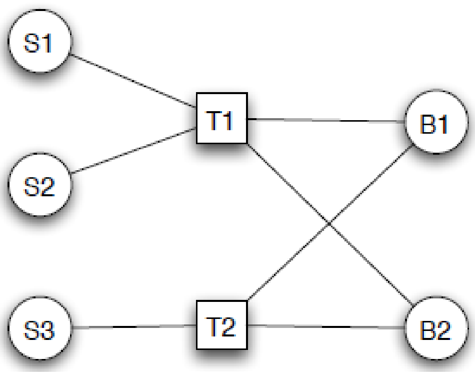
均衡态：$1 \leq y \leq 2, 2 \leq z \leq 3$

实现的社会效用：1+2+4=7

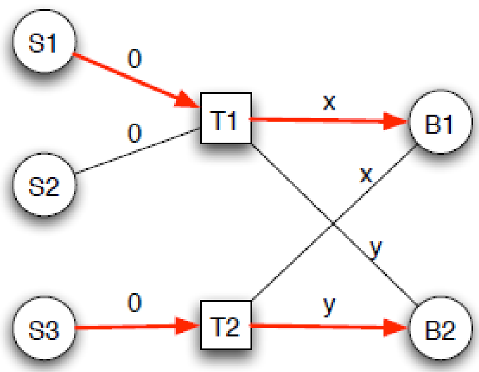
实现的社会效用：2+3+4=9

中介市场

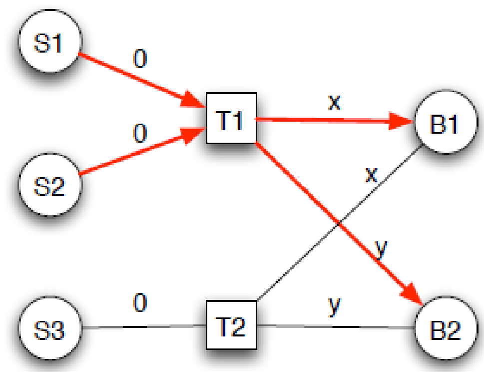
- 中介的效益
  - 小的竞争也可使中介的效益趋近于0



中介市场



均衡态1：x=y=0



均衡态2：x=y=0

中介市场

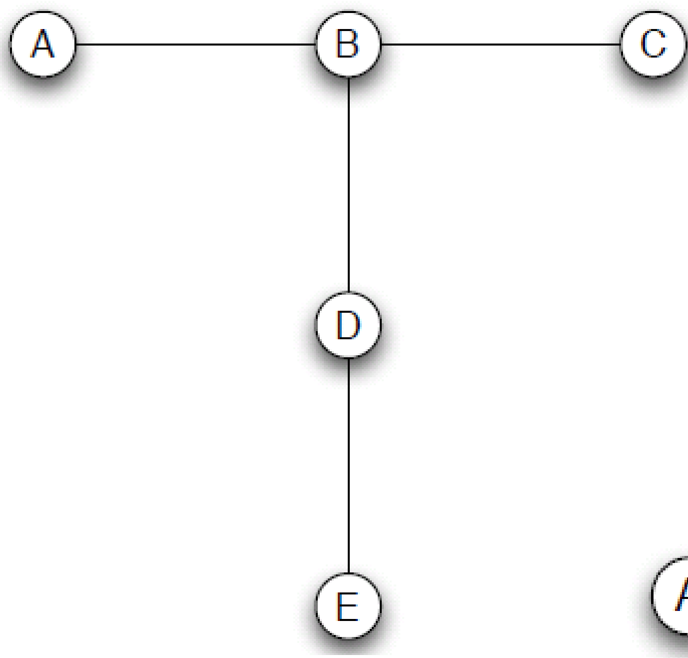
- 小结
  - 中介存在于市场竞争不充分的情况下
  - 买方和卖方通过中介交易
  - 竞争不充分的地方，中介垄断价格
  - 竞争充分的地方，中介的收益可以趋近于0

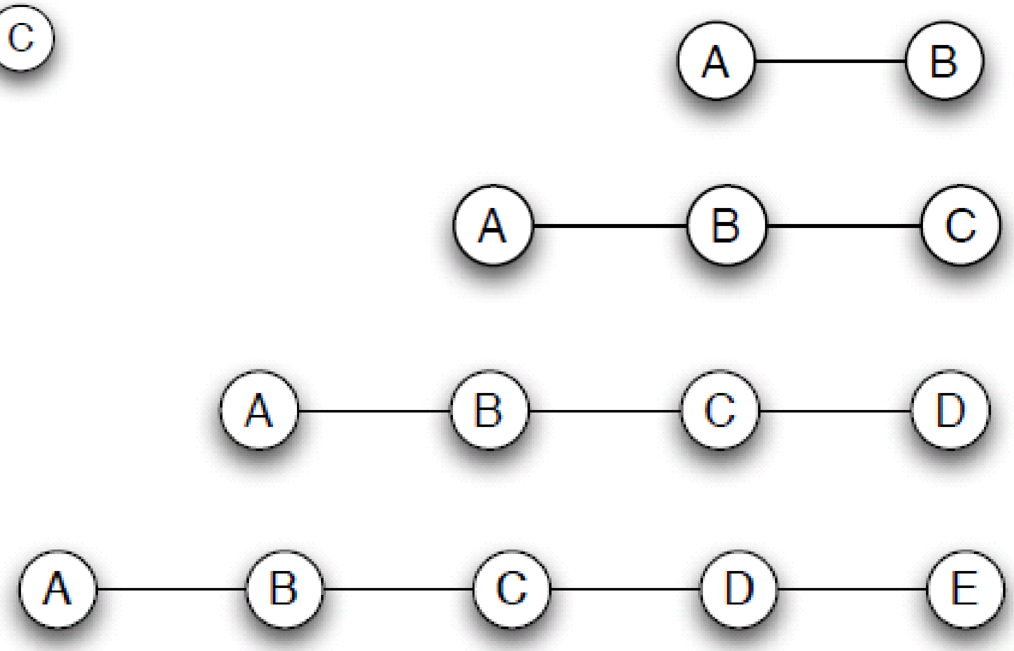
课程内容

- maxmin策略和minmax策略
- 匹配市场
- 中介市场
- 议价权

网络中节点位置的重要性

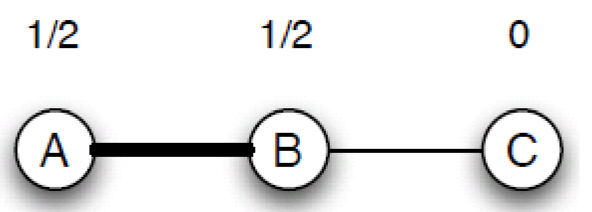
- 节点在网络中所处的位置不同，导致其在博弈中的权利不同





网络交换博弈(Network Exchange)

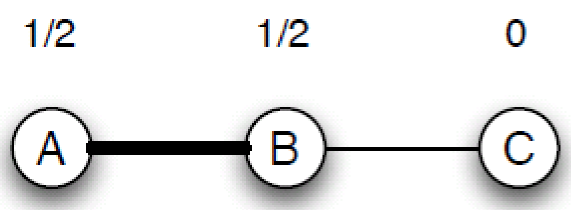
- 找朋友游戏
  - 给定一个网络，每个节点代表一个人
  - 每个人选择一个人作为自己的好友（Best friend）
  - 达成好友的两个人，可以分配价值为1的东西
  - 每个人可以在选择好友向对方报价



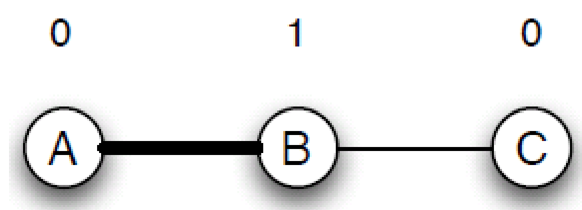
- 结局(outcome)
  - 游戏结果称为结局
  - 结局由节点配对结果和每个节点的收益构成
    - 右图中，配对结果是：A和B配对，C落单；收益是：A和B各1/2，C收益为0

结局的稳定性

- 不稳定边
  - 对于结局中**未参与配对的边**，如果边的两个端点获得的收益之和小于1，则称这条边为不稳定边
  - 不稳定边的存在意味着其两个端点可以通过改变报价而改变结局
- 稳定结局(stable outcome)
  - 如果一个结局中不存在不稳定边，则称该结局为稳定结局



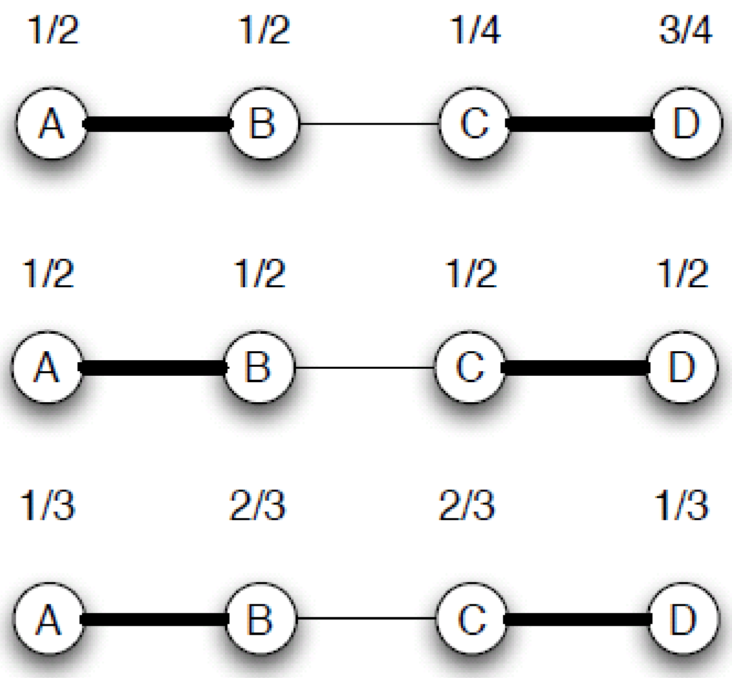
不稳定的结局
B和C的收益之和小于1



稳定的结局

结局的稳定性

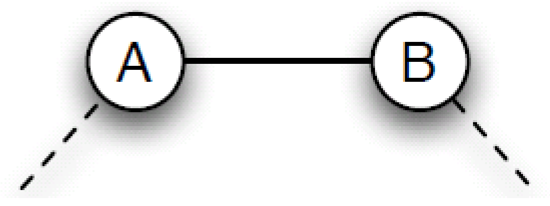
- 下列哪些结局是稳定的？



- 上面的例子中，后面两个稳定结局哪个更体现节点的议价权呢？如何判断呢？

网络中的议价权

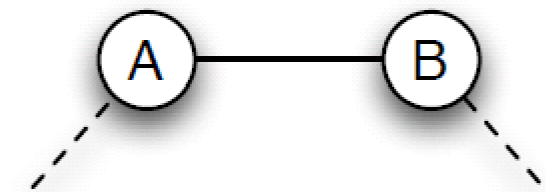
- 有备选项的议价
  - A和B二人议价，确定分配比例
  - A的备选项收益为x
  - B的备选项收益为y
  - 要求： $x + y \le 1$；否则A和B达不成交易



备选项 x　　　　备选项 y

纳什议价解

- 议价的对象
  - 如何分配“剩余价值”s $= 1 - x - y$



备选项 x 备选项 y

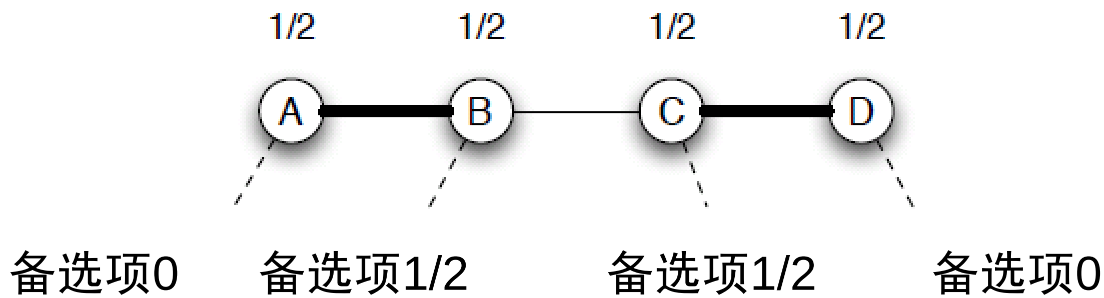
- 纳什议价解
  - A的收益是： $x + \frac{s}{2} = \frac{1+x-y}{2}$
  - B的收益是： $y + \frac{s}{2} = \frac{1+y-x}{2}$

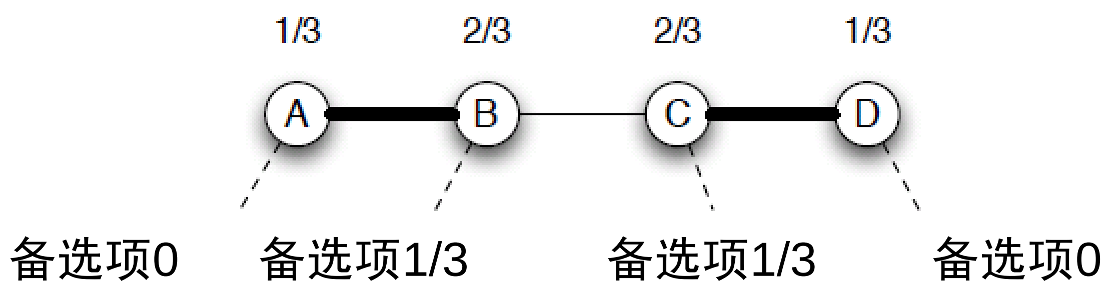
均衡结局

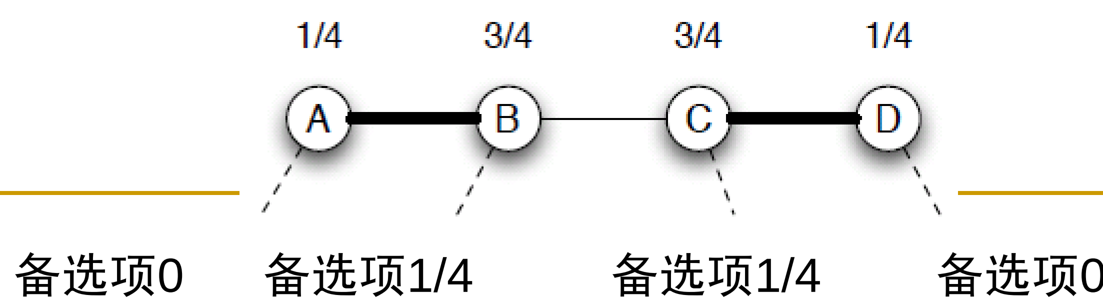
- 均衡结局（balanced outcome)
  - 给定一个结局，如果结局中的任意一个**参与配对的边**都满足纳什议价解的条件，则称该结局是均衡结局
- 注意：均衡结局一定是稳定结局
  - 因此，在寻找均衡结局时，可以先寻找稳定结局，进而确定均衡结局

均衡结局

- 下列哪些结局是均衡结局？

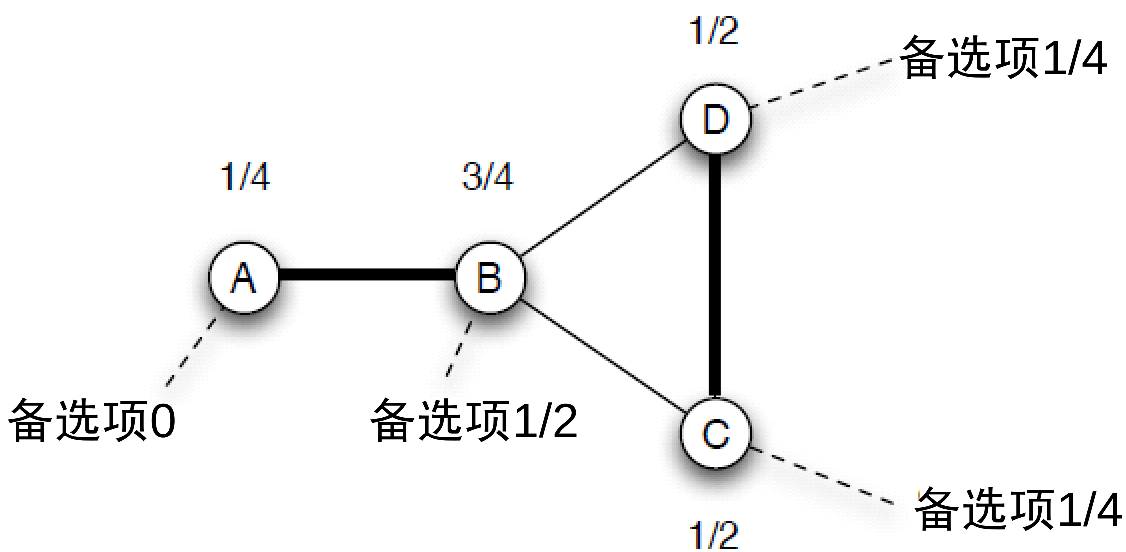






均衡结局

- 案例



总结

- 群体智能之博弈
  - 博弈的要素：局中人、策略、效用矩阵
  - 纳什均衡策略和混合纳什均衡策略
  - maxmin和minmax策略
  - 议价和拍卖
  - 匹配问题中价格的作用
  - 纳什议价解和均衡结局