作业2

> 姓名：张乐，学号：201628013229047

11

> Sherman-Morrison公式：
>
> $$(\mathbf{A}+\mathbf{c}\mathbf{d}^T)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{d}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{d}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}}$$
>
> 对于矩阵某个元素(a_{ij})上发生扰动(α)，可变换为：
>
> $$\mathbf{B}^{-1}=(\mathbf{A}+\alpha\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\alpha\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\alpha\mathbf{e}_j^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i}=\mathbf{A}^{-1}-\alpha\frac{[\mathbf{A}^{-1}]_{*i}[\mathbf{A}^{-1}]_{j*}}{1+\alpha[\mathbf{A}^{-1}]_{ji}}$$

a)

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}=\mathbf{A}+2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\mathbf{A}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}$$

根据Sherman-Morrision变换公式得：

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{-1}&=\mathbf{A}^{-1}-\alpha\frac{[\mathbf{A}^{-1}]_{*3}[\mathbf{A}^{-1}]_{2*}}{1+\alpha[\mathbf{A}^{-1}]_{23}} \qquad \text{其中}\alpha=2\\&=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}-2\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}}{1+2\times(-1)}\\&=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\1&4&-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

b)

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}=\mathbf{B}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{B}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$$

根据Sherman-Morrision变换公式得：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{-1}&=\mathbf{B}^{-1}-\alpha\frac{[\mathbf{B}^{-1}]_{*3}[\mathbf{B}^{-1}]_{3*}}{1+\alpha[\mathbf{B}^{-1}]_{33}} \qquad \text{其中}\alpha=1\\&=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\1&4&-2\end{pmatrix}-\frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&-2\end{pmatrix}}{1+(-2)}\\&=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&3&-1\\-1&-4&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

12

a)

对A进行 LU 分解

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 18 & 26 & 2 \\ 3 & 16 & 30 & 3 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 18 & 26 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 16 & 30 & 3 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 18 & 26 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{21}{2} & 3 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 18 & 26 & 2 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{21}{2} & 3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 18 & 26 & 2 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{21}{2} & 3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & -\frac{6}{10} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 26 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{10} \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

b)

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 同解于 $\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$，同解于 $\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$， 也就是求解

$$
\begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{Pb} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{cases}
$$

将 **a)** 求得的 $\mathbf{L}$，$\mathbf{U}$ 带入，并分别将 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$， $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ 带入上式，可得

$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4.8 \end{pmatrix}$， $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 110 \\ -36 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 6 \end{pmatrix}$， $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 112 \\ -39 \\ 10 \end{pmatrix}$