Regressão Quantílica

Aplicações na Engenharia de Avaliações

28/10/2019

1 Breve Histórico

Boscovich propôs a Laplace em 1760 – portanto ainda antes da introdução do método dos mínimos quadrados por Legendre em 1805[1], no seu trabalho intitulado *Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comètes* –, o seguinte problema:

Encontrar $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ tais que:

$$y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i + \hat{u}_i$$

com $\sum \hat{u}_i = 0$ e $\sum |\hat{u}_i| = \min!$.

Laplace resolveu o problema matematicamente em 1789.

Posteriormente, com a chegada do *methodes de moins carrés*, ou seja, do método dos mínimos quadrados ordinários, o método dos mínimos erros absolutos de Laplace ficou em segundo plano.

Até que Edgeworth, em 1887 propõe o primeiro algoritmo capaz de obter o intercepto e o coeficiente angular da reta do método dos mínimos desvios absolutos, relaxando a restrição de que a soma dos resíduos seja igual a zero ($\sum \hat{u}_i = 0$).

Na década de 40 surgiram os primeiros algoritmos simplex destinados à otimização, algoritmos estes que se ajustas às necessidades do métodos dos mínimos desvios absolutos, que não possui solução analítica, mas iterativa.

A primeira aplicação do método dos mínimos desvios absolutos se deve a Arrow e Hoffenberg, em 1959.

Em 1978, Koenker e Basset generalizaram o problema de minimização do erro médio absoluto, o que equivale à regressão à mediana, ao problema de encontrar os diversos quantis de distribuição através da aplicação de uma função de perda correspondente àquele quantil, chegando-se assim à regressão quantílica.

1.1 O problema de estimar quantis como um problema de minimização

Pode-se demonstrar que, assim como a média aritmética μ de uma variável aleatória tem a propriedade de minimizar a soma dos desvios quadráticos de cada

[1] Gauss ligou o método dos mínimos quadrados à distribuição normal em seu trabalho intitulado *Theoria Motus Corporum Coelestium* de 1809 mas a origem do método se deve ao trabalho pioneiro de Legendre. Houve discordâncias entre os dois na disputa pela invenção do método, e outros achados na época. Ver a este respeito

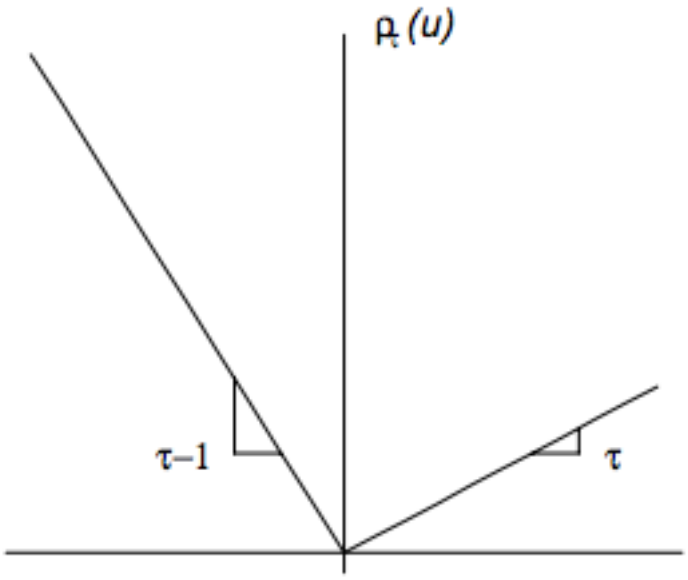
observação em relação a ela (MATLOFF, 2017, p. 50), a mediana tem a propriedade de minimizar a soma dos desvios médios absolutos de cada observação (MATLOFF, 2017, p. 260). Ou seja:

$$\mu(Y) = \mathbb{E}Y = \arg\min_c \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(y_i - c)^2$$

$$Me = \arg\min_c \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}|y_i - c|$$

Sabe-se que a mediana de uma variável equivale ao quantil de 50%. Assim, outros quantis podem ser obtidos com formulação análoga à formulação acima, porém com a aplicação de uma função de perda assimétrica ($\rho_\tau(.)$) em lugar da função módulo (ver figura 1):

$$Q_\tau(Y) = \arg\min_c \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(y_i - c)$$



1.2 Regressão linear e quantílica

A regressão linear pode ser vista como uma forma de minimização, assim como a média de uma população pode ser visto como o problema de minimização descrito acima.

A diferença é que no caso da regressão linear, ao invés de minimizar em relação a um escalar, desta vez se minimiza o erro em prever uma variável Y em relação a] uma função de outra variável X, f(X). Pode-se demonstrar que entre todas

as funções f(X), a que minimiza o erro médio quadrático de Y dado X ($\mathbb{E}[(Y - f(X))^2]$) é a função de regressão $\mu(t) = \mathbb{E}(Y|X = t)$ (MATLOFF, 2017, pp. 49–50).

Analogamente, pode-se demonstrar que a mediana condicional é a função que minimiza o erro médio absoluto de Y dado X ($\mathbb{E}(|Y - f(X)|)$).

1.2.1 A regressão linear possui solução única e analítica

Pode-se demonstrar que a regressão linear, ou seja, a minimização de $\mathbb{E}[(Y - X\beta)^2]$ possui uma única solução e esta solução pode ser encontrada analiticamente, bastando para isso efetuar a derivação parcial deste termo e igualando-o a zero, obtendo-se assum um único solução para o cálculo do valor de β.

O mesmo não se pode dizer da regressão à mediana a mais genericamente da regressão quantílica. Nesta abordagem, há múltiplas soluções possíveis, assim como numa amostra de tamanho par existem duas medianas possíveis. Ainda, as soluções do problema de minimização da regressão quantílica não podem ser encontradas analiticamente, sendo necessária a utilização de precessos iterativos para a obtenção do(s) mínimo(s).

Contudo, deve-se ter em mente que, em ambos os processos de minimização, seja para a regressão linear ou para a regressão quantílica, trabalha-se com apenas uma amostra da população estudada. Desta forma, os valores de $\hat{\beta}$ encontrados são apenas estimativas dos valores reais de β, ou seja, os valores da população.

Assim, deve-se levar em conta que a diferença entre as múltiplas soluções da regressão quantílica é da ordem de $1/n$, enquanto a amplitude da precisão da estimativa é de tamanho $1/\sqrt{n}$. Assim, presume-se que as múltiplas soluções possíveis, para os casos práticos estão dentro da margem de erro para a primeira estimativa encontrada pelo algoritmo.

1.3 Robustez da solução

1.4 Transformação e retransformação

$$Q_{f(Y)}(\tau) = f(Q_Y(\tau))$$

1.5 Eficiência computacional

1.6 Estimador de máxima verossimilhança

Pode-se demonstrar que, quando a distribuição é normal o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro μ da distribuição é a média amostral.

Analogamente, se a distribuição dos dados for a distribuição de Laplace, o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro é a mediana.

Isto implica que, se a distribuição dos dados é normal, são necessários $\pi/2$ mais dados para que a estimativa de μ através da mediana seja tão eficiente quanto a estimativa através da média.

No entanto, se a distribuição dos dados for a distribuição de Laplace, pode-se demonstrar que são necessários duas vezes mais dados para que a média estime μ com a mesma precisão da mediana.

1.6.0.1 Média

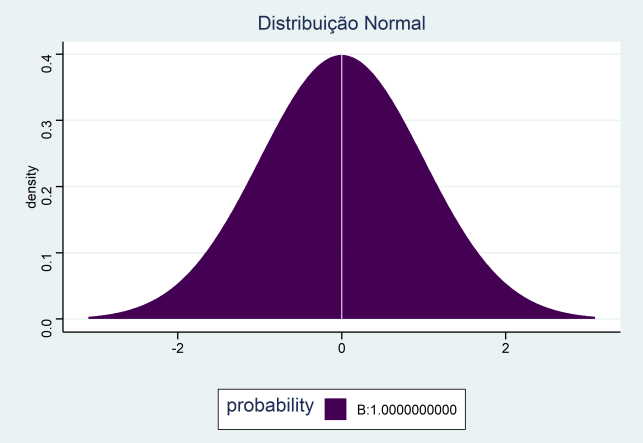


Figura 1: Distribuição Normal.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2$$

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2/\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

1.6.0.2 Mediana

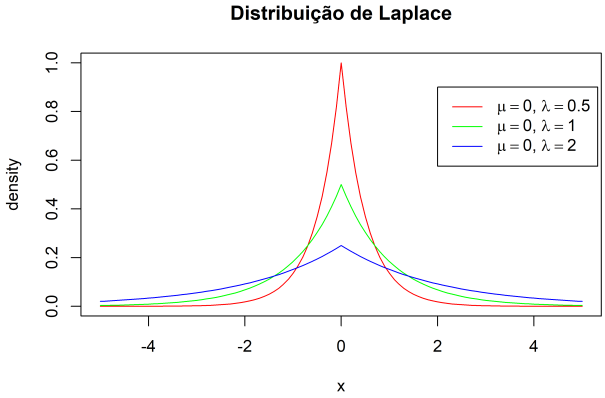


Figura 2: Distribuição de Laplace.

$$\hat{\mu} = \arg\min_{c} \sum |x_i - c|$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \hat{\mu}|$$

$$f(x|\mu, \lambda) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\lambda}\right)$$

2 Estudos de Caso

Para os estudos de caso foram utilizados os dados disponíveis em HOCHHEIM (2015).

2.1 Duas dimensões

Assim como na regressão linear, é mais fácil aa compreensão da regressão quantílica através de exemplos em duas dimensões, e depois generalizar para n dimensões.

Seja primeiramente o caso de dados heteroscedásticos. A figura 3 ilustra a aplicação da regressão quantílica e da regressão linear para este caso. Na figura 3, a reta vermelha é a reta de regressão linear entre as variáveis. A área sombreada em cinza é o intervalo de confiança para a regressão linear @80%. As retas azuis são as retas de regressão quantílica para os quantis 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 e 0,9.

A regressão quantílica neste caso pode ser usada para demonstrar a não validade dos intervalos de confiança (IC) e predição (IP) para a regressão linear para este tipo de dados: como a variância da população não é constante, mas aumenta com o aumento da área, as retas da regressão quantílica se abrem. Como os intervalos

de confiança e predição na inferência clássica são calculados considerando-se que a variância da população é constante, este efeito não se observa no formato do IC.

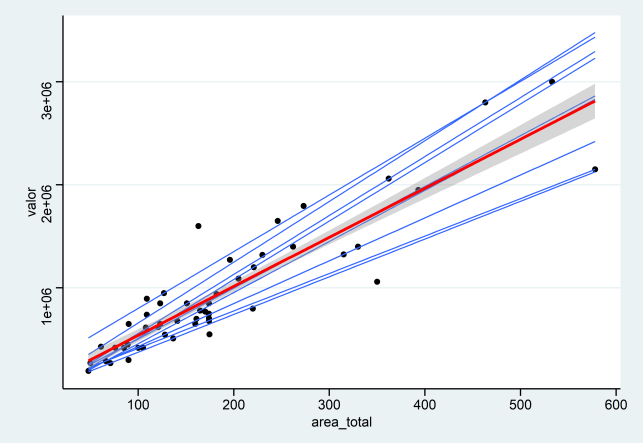


Figura 3: Regressão Linear e Quantílica para dados heteroscedásticos.

Assim como na regressão linear, uma conveniente transformação das variáveis pode ser aplicada para a obtenção da homoscedasticidade. Isto pode ser visto na figura 4, onde as retas para os diferentes quantis obtidas pela regressão quantílica agora são praticamente paralelas entre si, indicando que a heteroscedasticidade foi removida.

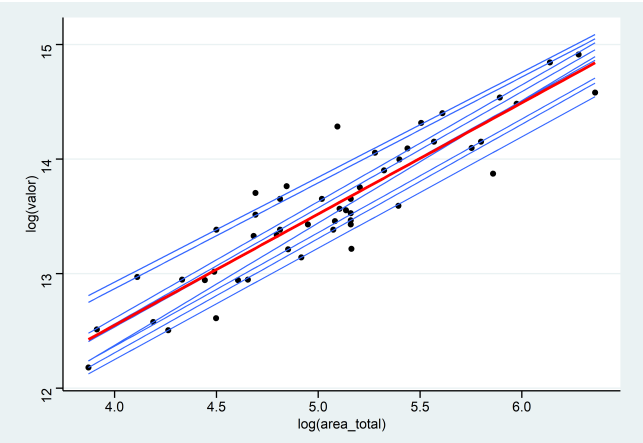


Figura 4: Regressão Linear e Quantílica com dados transformados.

Os coeficientes das retas de regressão quantílica podem ser plotados como na figura 5. Nesta figura, a reta cheia vermelha representa o coeficiente do modelo de regressão linear, enquanto a reta preta pontilhada representa os vários coeficientes da regressão quantílica. As retas vermelhas tracejadas representam o intervalo de confiança de estimação do coeficiente de regressão linear. A área

sombreada em cinza representa os intervalos de confiança para os coeficientes da regressão quantílica. Deve-se notar que, entre os quantis aproximados de 0,3 e 0,55, os coeficientes da regressão quantílica não são significamente diferentes, estatísticamente, do coeficiente da regreessão linear.

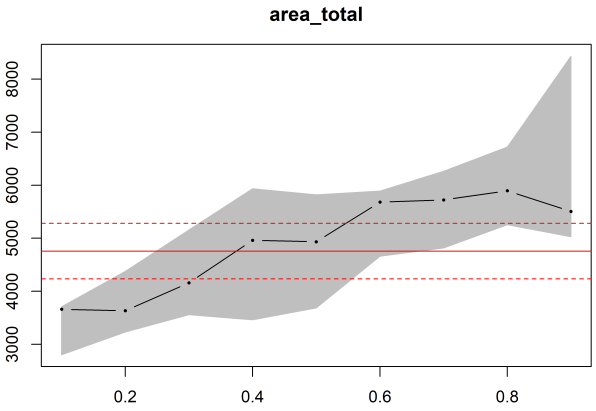


Figura 5: Variação dos coeficientes de regressão quantílica (variáveis originais).

Já para os dados transformados, pode-se notar na figura 6 que para todos os quantis, os coeficientes da regressão quantílica não podem ser considerados estatisticamente diferentes do coeficiente da regressão linear. Também se pode notar nesta figura como o estimador de regressão linear, para uma variável normalmente distribuída e na ausência de heteroscedasticidade, é mais eficiente do que o estimador da regressão quantílica, como a teoria já prevê (ver MATLOFF (2017), 238).

(Zilli, não sei se tu pesquisou isso na revisão bibliográfica, mas acho que se não, era bom colocar! Colocar algo do tipo: as vantagens e desvantagens da regressão quantílica. Apesar da regressão quantílica ser robusta à presença de *outliers*, ela é menos eficiente do que a regressao linear, caso a distribuição da variável estudada seja normal, claro.)

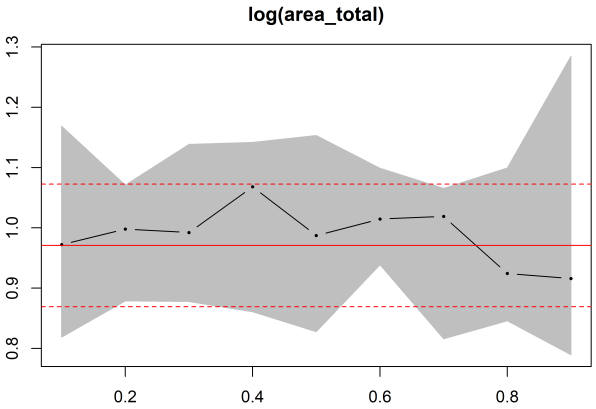


Figura 6: Variação dos coeficientes de regressão quantílica (variáveis transformadas).

2.2 Análise Multivariada

Para os dados obtidos de Hochheim (2015, pp. 22–23) foram ajustados dois modelos, um de regressão linear, com os dados saneados, e outro de regressão quantílica, utilizando-se a totalidade dos dados, para os quantis 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 e 0,9.

Na figura 7 podem ser vistos os valores dos coeficientes de cada variável para os diferentes quantis. Pode-se perceber, mais uma vez, que o valor dos coeficientes da regressão quantílica não diferem significantemente dos coeficientes da regressão linear (exceção para alguns quantis superiores nas variáveis `area_total` e `padrao`).

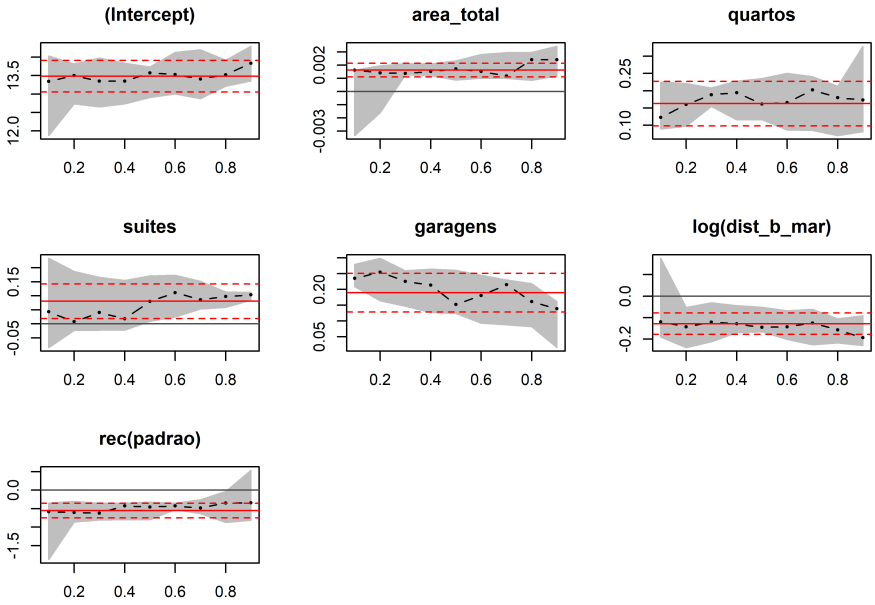


Figura 7: Coeficientes de regressão linear e quantílica. Análise multivariada.

Na tabela 1 podem ser vistos os coeficientes e estatísticas básicas dos modelos de regressão linear e de regressão à mediana (quantil 0,5).

2.2.1 Estimativas

É interessante comparar as estimativas obtidas com os modelos de regressão linear, com dados saneados, e o modelo de regressão à mediana, com a totalidade dos dados. Por um lado, o modelo de regressão linear tende a ser mais preciso para a estimação da média, como prevê a teoria. Por outro lado, com mais dados, o modelo de regressão à mediana pode tornar-se mais eficiente.

Deve-se levar em conta que as estimativas com o modelo de regressão linear aqui apresentadas são para a mediana da distribuição lognormal.

Pelo modelo de regressão linear, o valor da estimativa central encontrado foi de R$961.660,64, com intervalo de confiança entre R$ 924.768,13 e R$ 1.000.024,94. A amplitude do intervalo de confiança foi de 7.83%.

Já pelo modelo de regressão quantílica, o valor da estimativa central encontrado foi de R$946.467,87, com intervalo de confiança entre R$ 886.472,34 e R$ 1.010.523,85. A amplitude do intervalo de confiança foi de 13.1%.

O modelo de regressão linear mostrou-se, portanto, mais eficiente do que o modelo de regressão a mediana, apesar no menor número de dados.

Os limites inferior e superior do intervalo de predição @80% para o modelo de regressão linear são, respectivamente: R$ 802.017,63 e R$ 1.153.080,88.

Tabela 1: Comparação entre os modelos de regressão linear e regressão à mediana.

	Dependent variable:	
	log(valor)	
	OLS	*quantile regression*
	(1)	(2)
area_total	0.001	0.002
	(0.001, 0.002)	(0.001, 0.003)
	t = 5.113	t = 2.300
	p = 0.00001***	p = 0.027**
quartos	0.164	0.162
	(0.118, 0.209)	(0.107, 0.217)
	t = 4.626	t = 3.788
	p = 0.00004***	p = 0.0005***
suites	0.061	0.080
	(0.018, 0.104)	(0.020, 0.139)
	t = 1.810	t = 1.712
	p = 0.078*	p = 0.095*
garagens	0.209	0.152
	(0.166, 0.252)	(0.075, 0.230)
	t = 6.247	t = 2.520
	p = 0.00000***	p = 0.016**
log(dist_b_mar)	−0.141	−0.146
	(−0.176, −0.106)	(−0.210, −0.081)
	t = −5.174	t = −2.904
	p = 0.00001***	p = 0.006***
rec(padrao)	−0.563	−0.459
	(−0.697, −0.428)	(−0.650, −0.267)
	t = −5.360	t = −3.070
	p = 0.00001***	p = 0.004***
Constant	13.564	13.574
	(13.268, 13.859)	(13.100, 14.047)
	t = 58.847	t = 36.732
	p = 0.000***	p = 0.000***
Observations	48	50
R^2	0.956	
Adjusted R^2	0.950	
Residual Std. Error	0.136 (df = 41)	
F Statistic	148.921*** (df = 6; 41)	
Note:		*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Para o modelo de regressão quantílica, o intervalo de predição não faz qualquer sentido. No entanto, é possível estimar os valores diretamente para os quantis 0,1 e 0,9 da população. Nesta caso, os valores encontrados foram, respectivamente: R$ 810.629,32 e R$ 1.186.954,14.

Podem ainda ser calculados os intervalos de confiança @80% para as estimativas dos quantis 0,1 e 0,9.

Os limites inferior e superior do IC para o quantil 0,1 são, respectivamente: R$ 781.253,06 e R$ 841.110,17.

Os limites inferior e superior do IC para o quantil 0,9 são, respectivamente: R$ 1.116.547,53 e R$ 1.261.800,41.

Referências

HOCHHEIM, N. **Engenharia de avaliações - módulo básico**. Florianópolis: IBAPE - SC, 2015.

MATLOFF, N. **From linear models to machine learning: Regression and classification, with R examples**. Chapman & Hall, 2017.