Distribuição Log-Normal

Propriedades e aplicações

Luiz Fernando Palin Droubi[*]
Norberto Hochheim[†]
Willian Zonato[‡]

13/06/2018

1 INTRODUÇÃO

A transformação de variáveis é um procedimento comum na Engenharia de Avaliações. No entanto, a transformação dos dados por vezes é realizada sem uma análise profunda do comportamento das variáveis. A *Food and Drug Administration* (FDA), órgão federal dos EUA que atua no controle da comercialização de alimentos e medicamentos no país, recomenda:

> A transformação desnecessária de dados deve ser evitada. Caso tenha sido realizada transformação de dados, uma justificativa para a escolha da transformação junto com a interpretação das estimativas dos efeitos do tratamento com base nos dados transformados deve ser fornecida.(FDA, 1988 apud KEENE (1985))

No entanto, a transformação logarítmica é especial, por uma série de aspectos, como pode ser visto em KEENE (1985).

A distribuição lognormal apresenta diversas aplicações práticas. É comum, na área de avaliação de imóveis, mas não apenas[1], nos depararmos com dados que seguem esta distribuição. Neste artigo pretendemos demonstrar as principais características da distribuição lognormal, sua relação com a distribuição normal de Gauss, assim como debatemos a melhor maneira de se lidar com dados lognormais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Formulação

A formulação da distribuição lognormal para os parâmetros μ e σ pode ser vista abaixo (ACTION)

$$\begin{cases} f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}) & \forall x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

2.2 Propriedades

2.2.1 Valor Esperado e Variância

O valor Esperado $\mathbb{E}$ de uma variável aleatória com distribuição lognormal X é (ACTION):

$$\mathbb{E}(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

E sua variância é:

$$\text{Var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$$

[*]SPU/SC, luiz.droubi@planejamento.gov.br
[†]UFSC, hochheim@gmail.com
[‡]SPU/SC, willian.zonato@planejamento.gov.br

[1]Dados estritamente positivos, como valores em moeda, altura, peso, etc, normalmente seguem a distribuição lognormal.

2.2.2 Medidas de Tendência Central

A figura 1 mostra a posição das medidas de tendência central (moda, média e mediana) para um variável aleatória de distribuição log-normal.

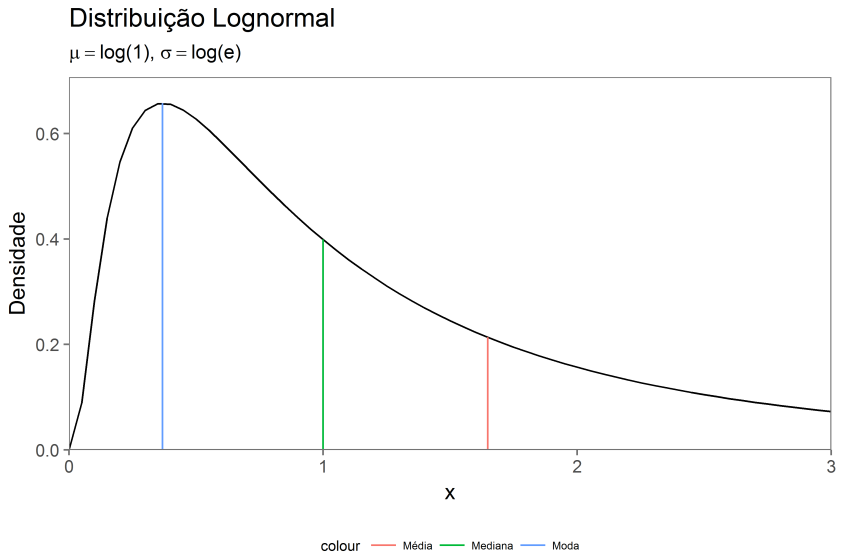


Figura 1: Ilustração das posições de medidas de tendência central numa distribuição lognormal.

2.2.3 Efeito das variações do desvio-padrão na forma da distribuição

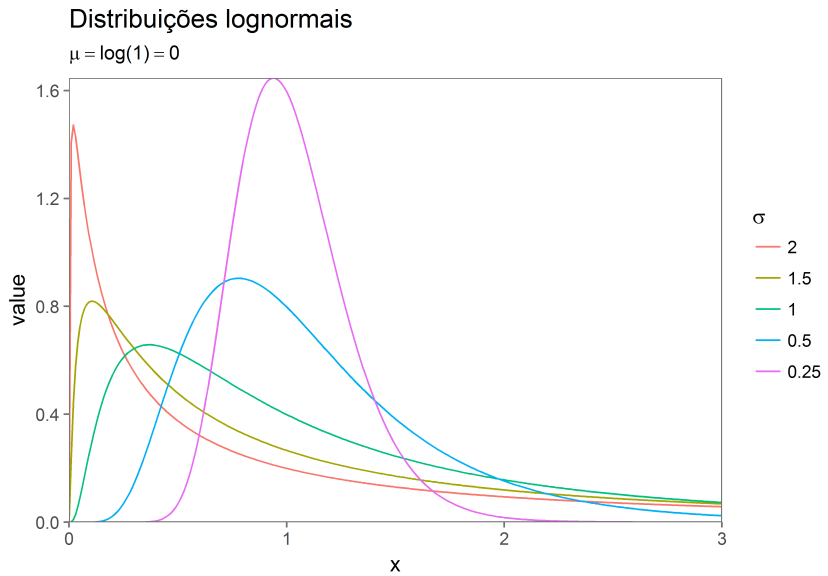


Figura 2: Distribuição lognormal com $\mu = 0$ e diversos valores de σ

2.2.4 Relação com a distribuição normal

Lembrando que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

E que para a distribuição normal-padrão ($N(0,1)$) a função densidade de probabilidade torna-se:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Seja X uma variável aleatória de distribuição normal padronizada ($X \sim N(0,1)$), f_X a função densidade de probabilidade e $Y = e^X$. Então (F_Y) é igual a:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq ln(Y)) = \int_{-\infty}^{ln(y)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{ln(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx$$

o que equivale a:

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ln(x)^2/2}$$

Ou seja, a distribuição de uma variável $Y = e^X$, em que $X \sim N(0,1)$ é equivalente a distribuição de uma variável lognormal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

A figura 3 ilustra este fato.

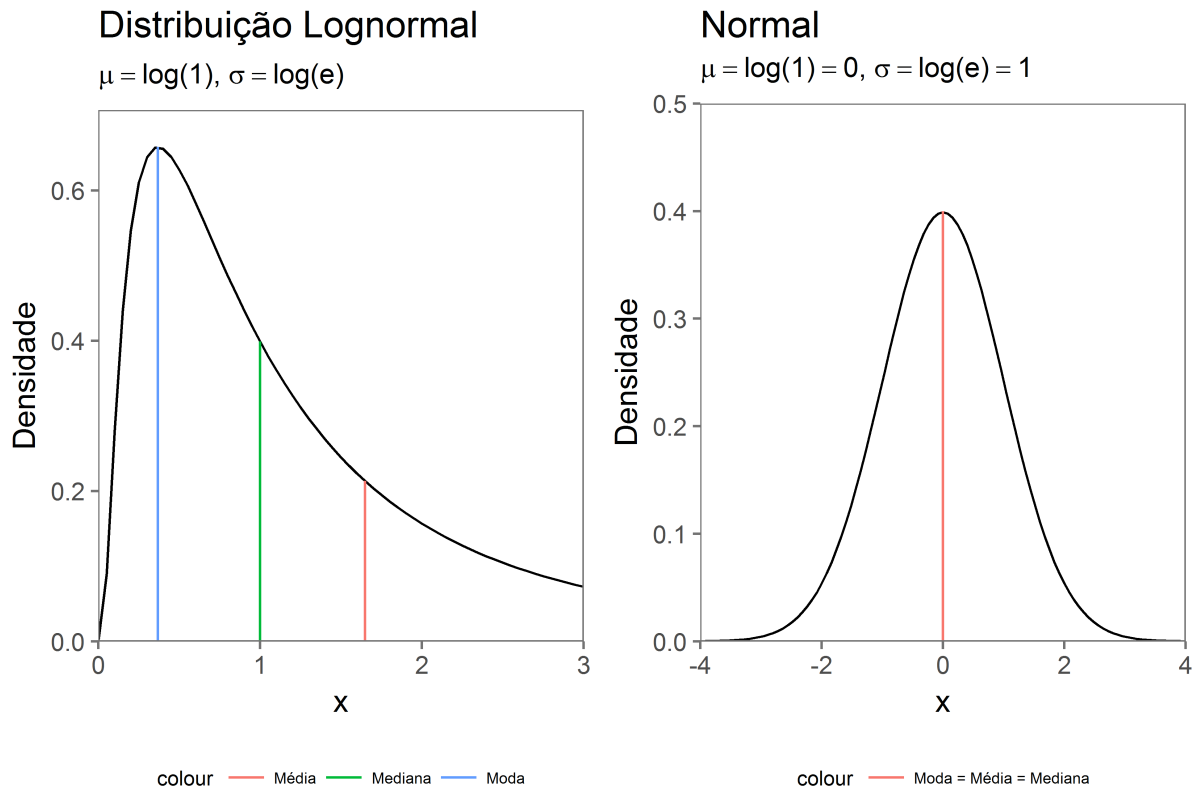


Figura 3: Comparação entre distribuições normal e lognormal padronizadas.

2.2.5 Analogia com o Teorema do Limite Central

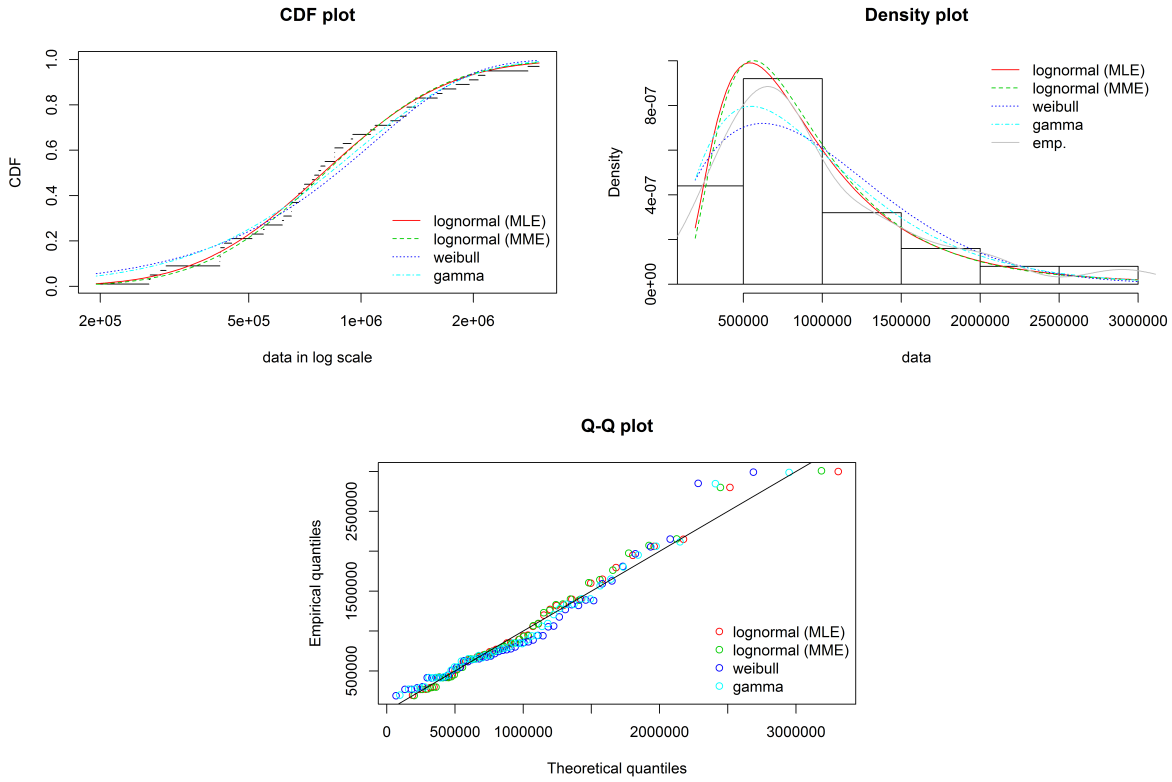
Assim como o resultado da soma de diversas variáveis independentes com distribuições quaisquer resulta numa variável aleatória de distribuição normal (Teorema do Limite Central), o produto de diversas variáveis aleatórias resulta numa distribuição lognormal.

3 EXEMPLO

3.1 Dados

Os dados utilizados aqui são oriundos de Hochheim (2015, pp. 21–22) e são reproduzidos no ANEXO I.

3.2 Ajuste de distribuições aos dados



3.3 Gráficos

As figuras 4 e 5 mostram que os valores observados para a variável `valor` do conjunto de dados mencionados acima (HOCHHEIM, 2015, pp. 21–22) apresentam distribuição aproximadamente lognormal, com parâmetros $\mu = ln(valor)$

a. Densidade

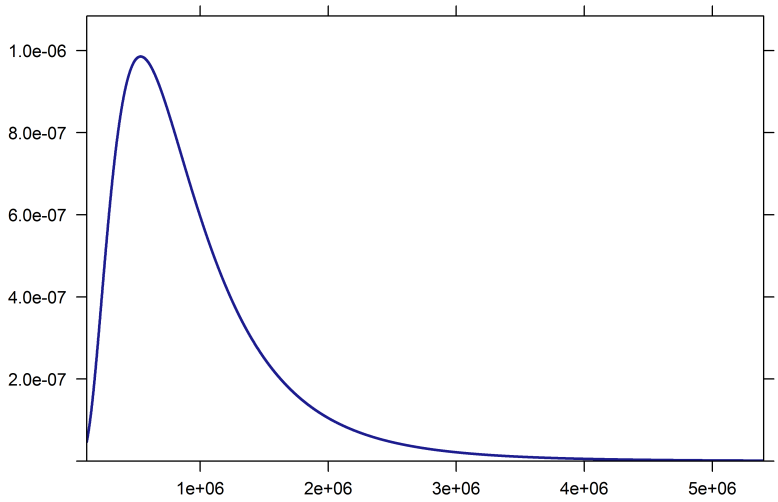


Figura 4: Função densidade de probabilidade com parâmetros obtidos dos dados da variável `valor`

b. Histograma com densidade superposta

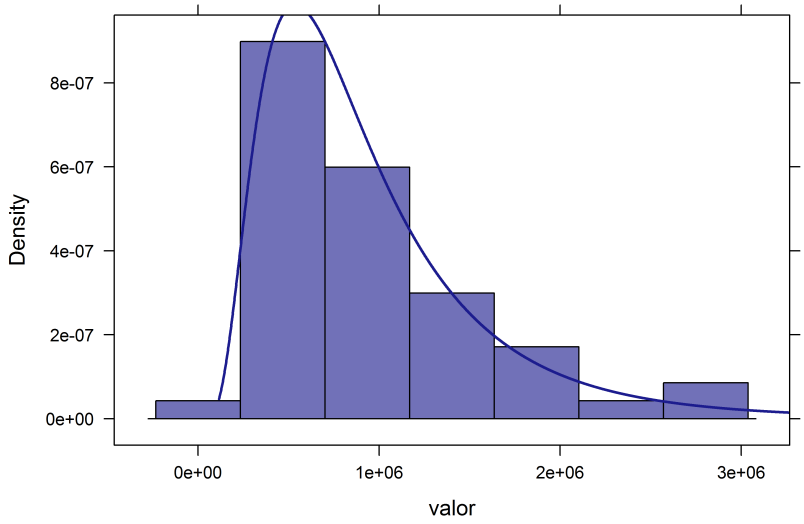


Figura 5: Histograma das variável `valor` com função densidade de probabilidade superposta.

c. Cumulativa

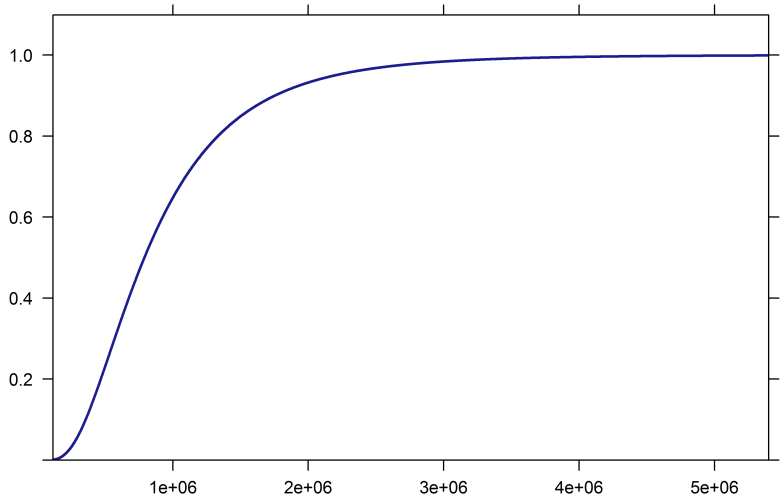


Figura 6: Função cumulativa de densidade de probabilidade com parâmetros obtidos dos dados da variável `valor`

d. Distribuição da variável $ln(valor)$

A figura 7

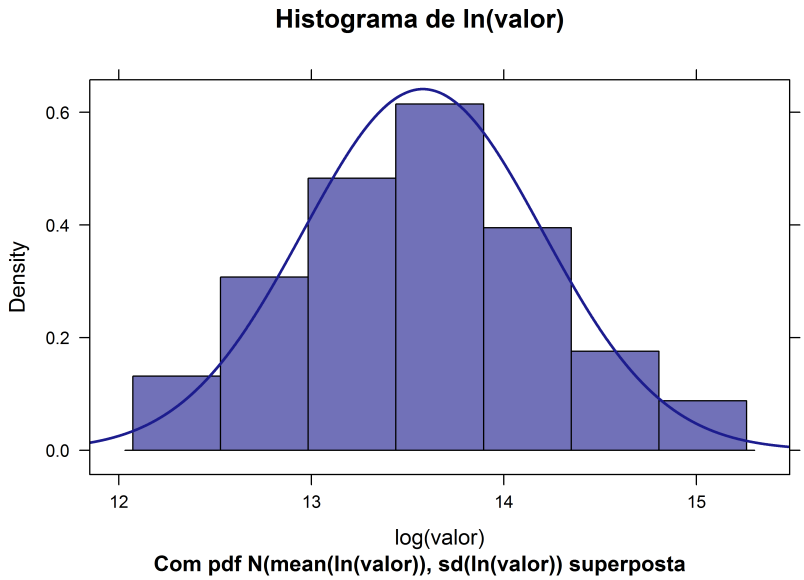


Figura 7: Histograma com função densidade de probabilidade normal superposta

3.4 Modelos

Detectando-se a presença de variável resposta com distribuição lognormal, pode-se proceder da seguinte maneira:

3.4.1 Modelo linear com a variável resposta transformada

É fácil mostrar que o modelo linear com a variável resposta logaritmizada, ou seja, com distribuição normal, é melhor ajustado que o modelo linear de uma variável resposta lognormal.

A função máxima verossimilhança de Box-Cox também vai apresentar como transformação ótima a transformação logarítimica, como demonstra a figura 8

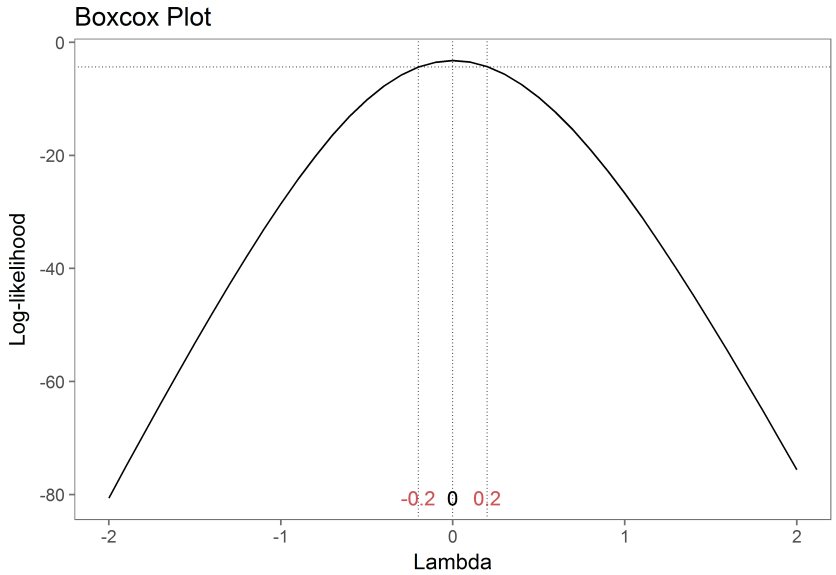


Figura 8: Gráfico da função verossimilhança de Box-Cox

Na tabela 1 é possível comparar os modelos com e sem a transformação da variável resposta, assim como o modelo de regressão de poisson, que será visto na próxima seção.

3.5 Retransformação de variáveis

O problema da transformação da variável resposta no logarítmo da variável resposta original, é que devemos estudar como proceder na retranformação da variável, para efetuar a avaliação do imóvel.

Para isto, utilizamos o valor esperado da variável log-normal, ou seja:

$$\mathbb{E}(X) = \exp(x + 0.5\sigma^2)$$

4 CONCLUSÃO

Foi possível demonstrar de maneira gráfica que os dados da variável `valor` apresentados se ajustam bem a uma distribuição lognormal equivalente. Por definição, então, o logaritmo da variável possui distribuição normal.

0 valor mais provável para a variável resposta, então, é Valor Esperado da variável. Logo, a retransformação da variável deve ser feita para a média da variável log-normal.

Tabela 1: Comparação entre modelos com e sem transformação da variável resposta

	Dependent variable:	
	valor	log(valor)
	(1)	(2)
area_total	2,893.178	0.002
	(2,065.405, 3,720.951)	(0.001, 0.002)
	t = 6.850	t = 4.886
	p = 0.00000***	p = 0.00002***
quartos	73,524.375	0.169
	(−34,814.143, 181,862.894)	(0.084, 0.255)
	t = 1.330	t = 3.870
	p = 0.191	p = 0.0004***
suites	111,000.591	0.088
	(8,045.131, 213,956.052)	(0.007, 0.170)
	t = 2.113	t = 2.121
	p = 0.041**	p = 0.040**
garagens	148,427.448	0.175
	(49,657.102, 247,197.795)	(0.097, 0.253)
	t = 2.945	t = 4.394
	p = 0.006***	p = 0.0001***
dist_b_mar	−223.217	−0.0003
	(−434.862, −11.571)	(−0.0004, −0.0001)
	t = −2.067	t = −3.215
	p = 0.045**	p = 0.003***
padraomedio	−146,549.393	0.268
	(−354,850.457, 61,751.672)	(0.103, 0.433)
	t = −1.379	t = 3.190
	p = 0.176	p = 0.003***
padraoalto	−56,064.550	0.334
	(−264,003.525, 151,874.426)	(0.169, 0.498)
	t = −0.528	t = 3.975
	p = 0.600	p = 0.0003***
Constant	33,953.788	12.315
	(−267,469.800, 335,377.375)	(12.076, 12.553)
	t = 0.221	t = 101.170
	p = 0.827	p = 0.000***
Observations	50	50
R^2	0.906	0.940
Adjusted R^2	0.890	0.930
Akaike Inf. Crit.	1,375.659	−29.275
Residual Std. Error (df = 42)	207,903.003	0.165
F Statistic (df = 7; 42)	57.731***	94.063***
Note:		*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

ANEXO I

valor	area_total	quartos	suites	garagens	dist_b_mar	padrao
1060000	350.00	3	1	2	720	medio
510000	136.56	3	1	1	665	medio
780000	164.77	3	1	2	415	medio
550000	174.58	3	1	1	320	medio
850000	123.01	3	1	3	895	alto
300000	89.83	2	0	1	645	baixo
750000	174.00	2	1	2	860	alto
650000	123.00	3	1	1	745	alto
620000	121.00	3	1	1	745	alto
740000	109.00	3	1	1	300	medio
770000	170.00	3	1	2	590	medio
680000	141.00	3	1	1	290	medio
850000	174.00	3	1	1	465	medio
420000	105.00	3	1	0	60	baixo
547000	128.00	3	1	1	745	alto
1600000	163.00	4	2	2	90	alto
1320000	230.00	3	1	2	215	alto
615000	108.00	3	1	1	745	alto
705000	174.00	2	1	2	900	alto
418000	85.00	1	0	1	620	alto
270000	71.00	2	0	0	1380	baixo
418000	100.00	1	1	1	620	alto
650000	90.00	2	1	1	215	alto
700000	161.00	2	1	2	500	alto
680000	174.00	2	1	2	860	alto
420000	76.00	2	1	1	700	baixo
195000	48.00	1	0	0	730	baixo
290000	66.00	1	0	1	745	baixo
272000	50.00	1	0	1	1430	baixo
430000	61.00	2	0	1	170	baixo
895000	109.00	3	1	1	530	medio
450000	89.00	2	0	1	745	medio
1950000	393.00	3	1	3	550	alto
2150000	578.00	3	2	3	260	alto
940000	182.00	3	1	2	200	medio
1400000	262.00	4	1	1	60	alto
1090000	205.00	3	0	3	465	medio
1272000	196.00	3	3	2	610	alto
2800000	463.00	3	3	3	590	alto
1796000	273.00	3	3	4	140	medio
1400000	330.00	4	2	2	655	alto
3000000	533.00	4	3	4	427	alto
1200000	221.00	3	3	2	607	alto
800000	220.00	3	1	1	1000	medio
950000	127.00	2	1	1	60	medio
2061000	362.00	3	3	4	310	alto
1326000	315.00	3	3	3	600	alto
850000	151.00	3	1	2	660	medio
1650000	246.00	3	3	3	307	alto
650000	159.72	3	1	1	120	medio

REFERÊNCIAS

ACTION, P. Distribuição log-normal.. Disponível em: <http://www.portalaction.com.br/probabilidades/615-distribuicao-log-normal>..

FDA. **Guideline for the format and content of the clinical and statistical sections of new drug applications**. Food and Drug Administration, Public Health Service, US Department of Health and Human Services, 1988.

HOCHHEIM, N. **Engenharia de avaliações - módulo básico**. Florianópolis: IBAPE - SC, 2015.

KEENE, O. N. The log transformation is special. **Statistics in Medicine**, v. 14, p. 811–819, 1985.