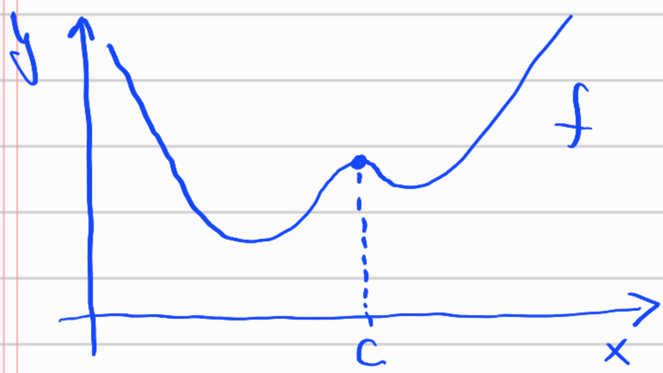
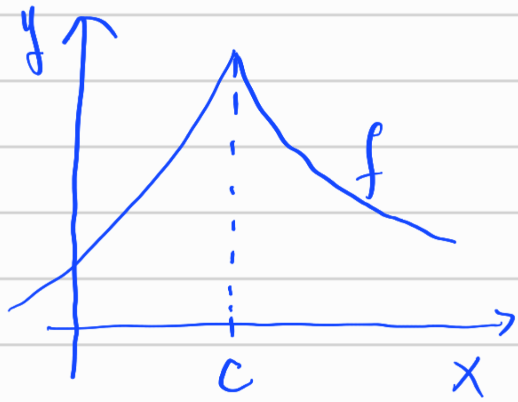
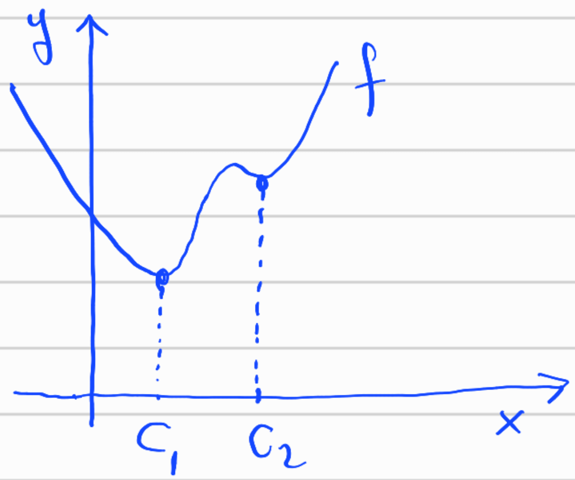
Máximos e Mínimos de Funções

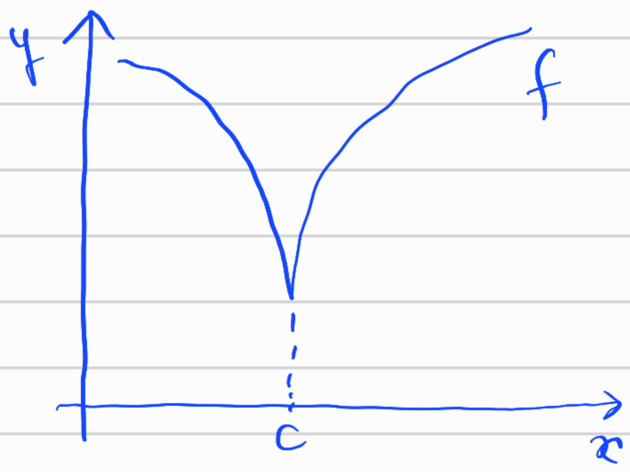
Definição: Uma função $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, terá um máximo relativo em $c \in \Omega$ se existir um intervalo aberto $I \subset \Omega$ tal que $c \in I$ e $\forall x \in I$ $f(x) \leq f(c)$.





Definição: Uma função $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, tem mínimo relativo em $c \in I \subset \Omega$ se $\forall x \in I$ tivermos $f(x) \geq f(c)$.





Definição: Um máximo relativo ou mínimo relativo é chamado extremo relativo.

Teorema: Seja $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $f'(c)$ existir para $c \in (a,b)$ e $x=c$ for um extremo relativo então $f'(c)=0$.

Prova:

Suponha que $x=c$ seja um máximo relativo. Logo, existe $I \subset (a,b)$ tal que $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in I$. Tem-se

$$f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Como $x > c$ e $f(x) \leq f(c)$ temos

$$f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Da mesma forma,

$$f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

implica $x < c$. Como $f(x) \leq f(c)$ tem-se

$$f'(c^-) \geq 0.$$

Como $f'(c)$ existe segue que $f'(c)=0$.

O mesmo vale se $x=c$ for um mínimo relativo de f.

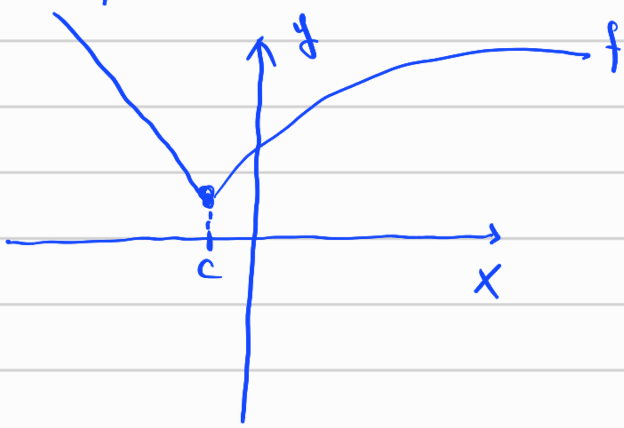
Exemplo: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad x \longmapsto x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$

f não tem extremo relativo em $x=0$.

Exemplo:



f tem mínimo relativo em $x = c$.
$f'(c)$ não existe.

Definição: Seja $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$. Se $c \in \Omega$ e $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir então c é chamado ponto crítico de f.

Exemplo: Determine os pontos críticos de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Assim,

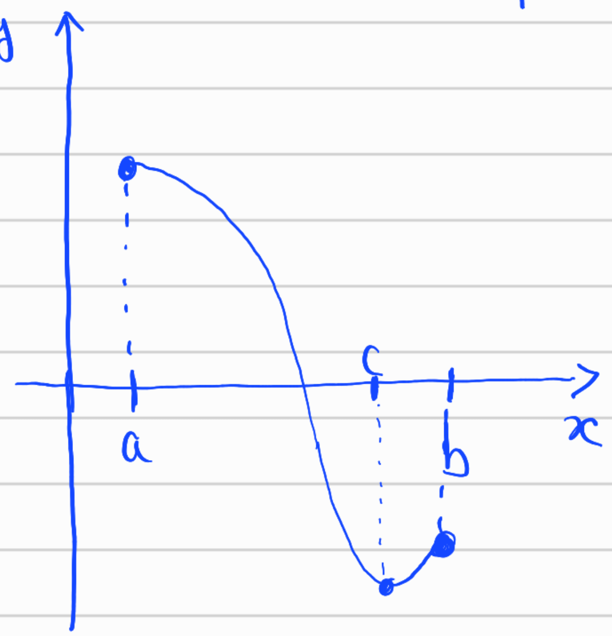
$$f'(x) = 4x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Logo $x=2$ é um ponto crítico de f.

(Weierstrass)

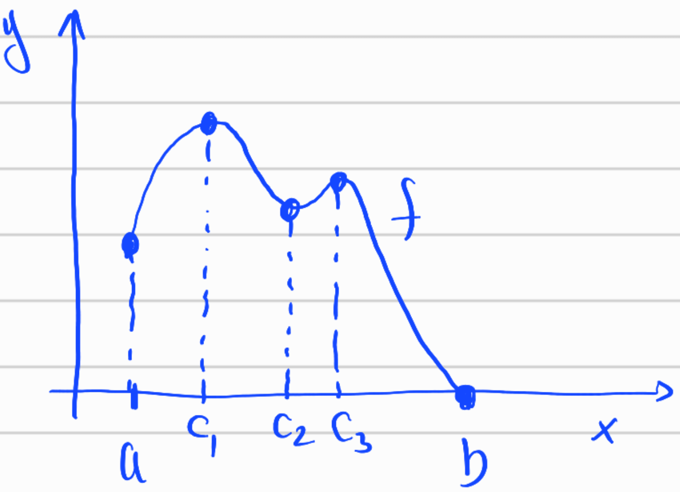
Teorema: Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ for contínua então f possui valor máximo e um valor mínimo em $[a,b]$.

Exemplo: Considere a figura abaixo



* f tem máximo absoluto em $x=a$

* f tem mínimo absoluto em $x=c$.



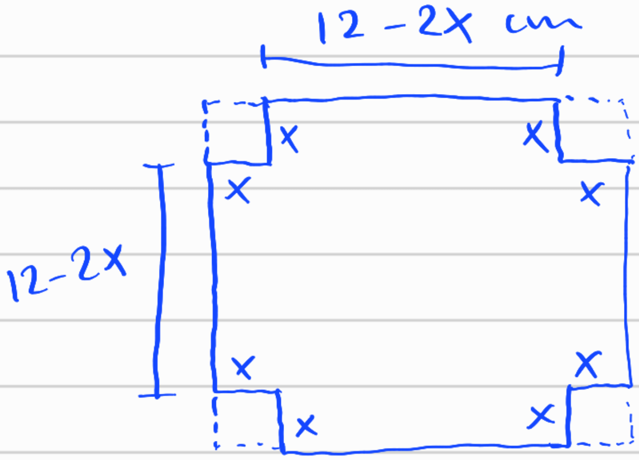
* f tem máximo absoluto em $x=c_1$

* f tem mínimo absoluto em $x=b$

* f tem máximos relativos em $x=c_1, c_3$
* f tem mínimo relativo em c_2.

Uma aplicação:

O problema da caixa de volume máximo:



12 cm^2 de papelão no formato ao lado.

Volume: $V(x) = (12-2x)^2 x$; $V : [0,6] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

$$x = 6 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Pontos críticos: 6 e 2

O máximo ocorre em 6, 2 ou nos extremos.

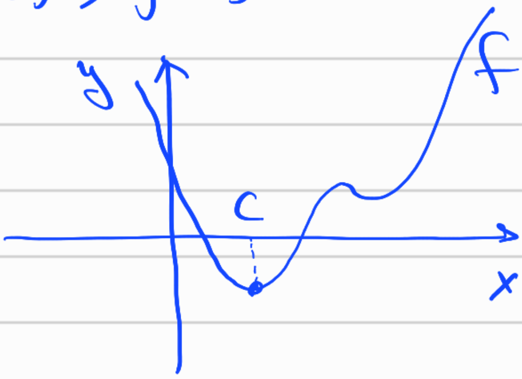
Assim:

$V(2) = 128$, $V(6) = 0$, $V(0) = 0$

implica em $x = 2$ ser o máximo de V.

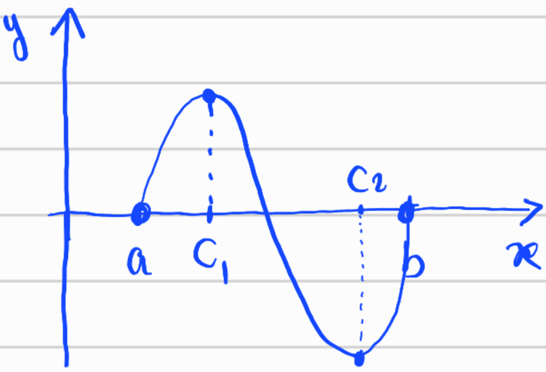
Definição: Dizemos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ possui um máximo absoluto em $x = c \in \Omega$ se $\forall x \in \Omega$ tivermos $f(x) \leq f(c)$.

Definição: Dizemos que $f: \Omega \to \mathbb{R}$ possui um mínimo absoluto em $x = c \in \Omega$, se $\forall x \in \Omega$ tivermos $f(x) \geq f(c)$.



Teorema de Rolle: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em (a,b). Se $f(a) = f(b) = 0$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Prova:
Se f for constante em $[a,b]$ então $f'(x) = 0$.
Vamos supor que f não seja constante.
Como f é contínua em $[a,b]$, f assume o seu máximo e seu mínimo em $[a,b]$ (weirstrass).
Sejam $c_1, c_2 \in [a,b]$ o máximo e o mínimo de f. Logo $\forall x \in [a,b]$ temos $f(x) \leq f(c_1)$ e $f(x) \geq f(c_2)$. Afirmamos que c_1 e c_2 não podem coincidir com a e b simultaneamente, pois se isso ocorresse f seria constante, o que não é o caso.



Nesse caso ou c_1 ou c_2 ocorre no interior do intervalo $[a,b]$. Como consequência ou c_1 ou c_2 é um extremo local. Logo $f'(c_1)=0$ ou $f'(c_2)=0$ e o teorema está provado.

Teorema do Valor Médio: Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua. Se f for diferenciável em (a,b) então existe $c\in(a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Prova:
Defina as funções

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

e

$$\phi(x)=f(x)-g(x).$$

Nota-se que ϕ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Como $\phi(a)=\phi(b)=0$, pelo Teorema de Rolle, existe $c\in(a,b)$ tal que $\phi'(c)=0$. Logo

$$0=\phi'(c)=f'(c)-g'(c).$$

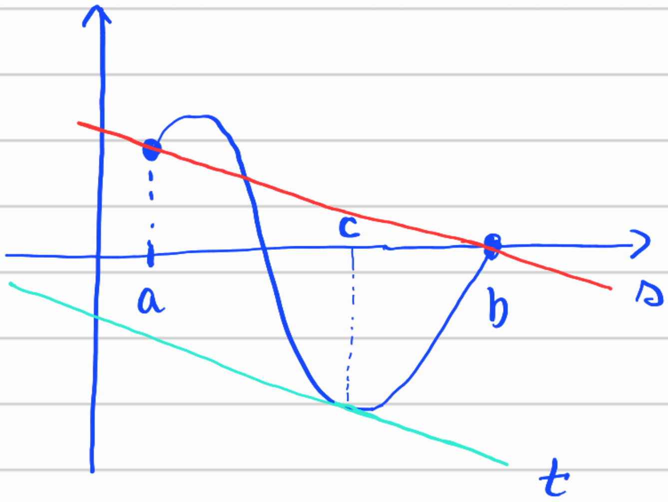
Logo

$$0=\phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Portanto

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Interpretação Geométrica



* declividade da reta s

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* Declividade da reta t

$$f'(c)$$

* s e t possuem a mesma declividade

Teorema: Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I um intervalo, tal que $f'(x)=0$ $\forall x \in I$ então f é constante em I.

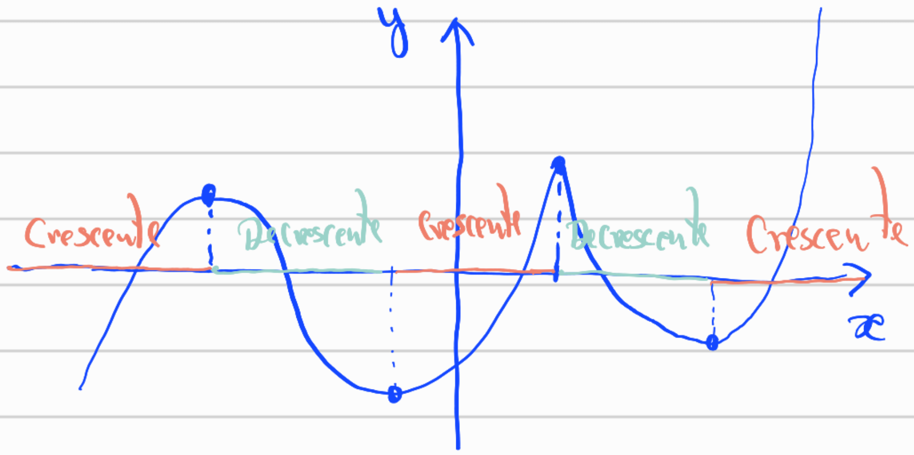
Prova:

Suponha que f não seja constante em I. Logo existem $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nota-se que $f'(x) \neq 0$ em $[x_1, x_2] \subset I$. Como f é derivável no interior de $[x_1, x_2]$, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f(x_2) \neq f(x_1)$ segue que $f'(c) \neq 0$. Contradição!

<u>Definição</u>: Seja $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é crescente em $A \subset \Omega$ se $\forall x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Dizemos que f é decrescente em $B \subset \Omega$ se $\forall x_1, x_2 \in B$ com $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.



<u>Teorema</u>: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f for diferenciável em (a,b) e se

(i) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$.

(ii) $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$.

<u>Prova</u>:

(i) Sejam $x_1, x_2 \in [a,b]$ com $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = \overset{>0}{f'(c)}\,\overset{>0}{(x_2 - x_1)}.$$

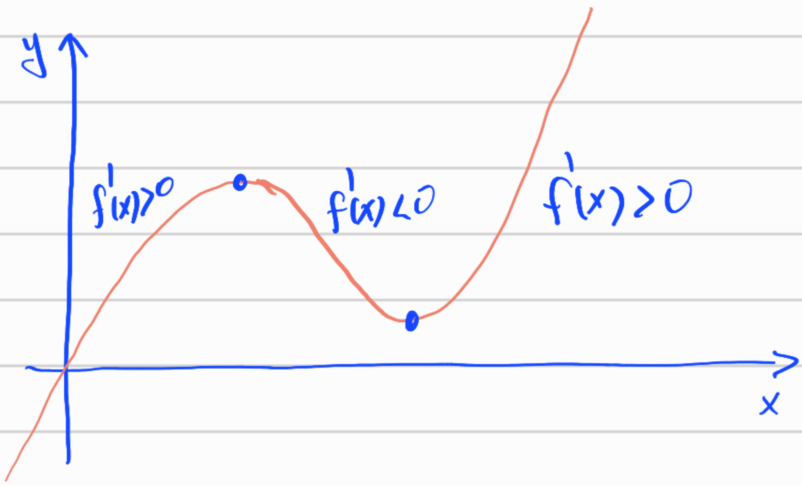
Logo $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou $f(x_2) > f(x_1)$.

(ii) Prova é análoga.

Teorema (Teste da 1ª Derivada) Seja f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), exceto em um $c \in (a,b)$.

(i) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em $x=c$ então f tem um máximo local em $x=c$.

(ii) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em $x=c$ então f tem um mínimo local em $x=c$.



Exemplo: Determine os máximos e mínimos locais de

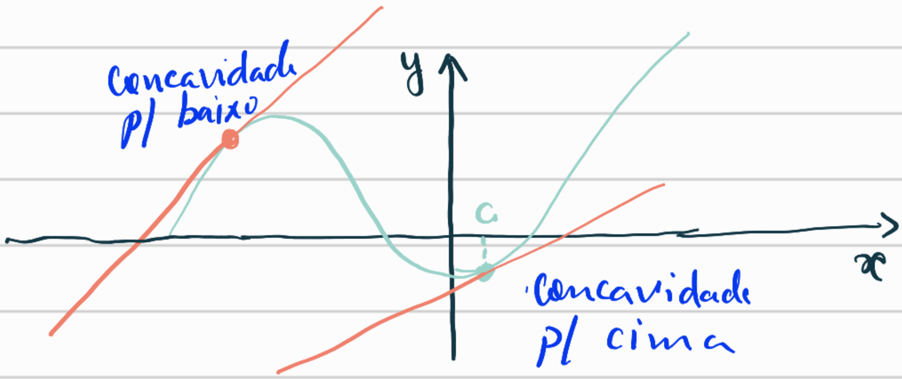
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

Exemplo: Determine os máximos e mínimos locais de

$$f(x) = x^3.$$

Definição: Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ possui concavidade voltada para cima em $c \in I \subset A$, onde I é um intervalo aberto, se $f'(c)$ existir e se a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ estiver abaixo do gráfico.

Definição: Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ possui concavidade voltada para baixo em $c \in I \subset A$, onde I é um intervalo aberto, se $f'(c)$ existir e se a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ estiver acima do gráfico.



Teorema: Seja $f: \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em um intervalo aberto $I \subset \Omega$ e seja $c \in I$.
(i) Se $f''(c) > 0$ então o gráfico de f possui concavidade para cima em $(c, f(c))$.
(ii) Se $f''(c) < 0$ então o gráfico de f possui concavidade para baixo em $(c, f(c))$.

Prova:
(i) Temos

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como $f''(c) > 0$, segue que

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0.$$

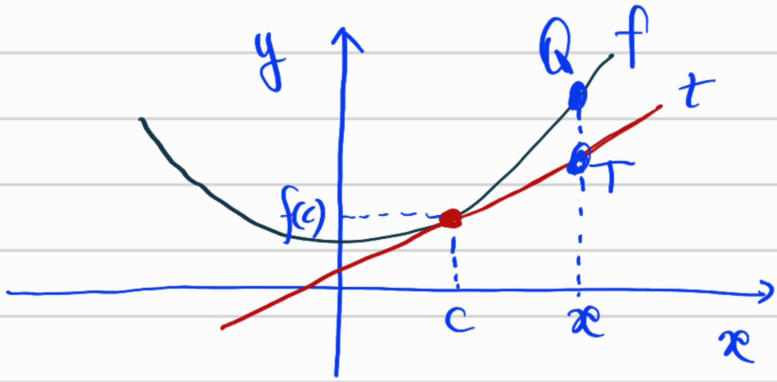
Logo existe um intervalo aberto $I \ni c$ tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0, \qquad (*)$$

para todo $x \in I \setminus \{c\}$.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é

$$t(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$



Vamos mostrar que a reta tangente está abaixo do gráfico de f em um intervalo I que contém c. Para isso, basta mostrar que

$$f(x) - t(x) > 0 \quad \forall x \in I \setminus \{c\}.$$

Temos

$$f(x) - t(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

Se $c < x$ então existe $d \in (c, x)$ tal que

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c)$$

Segue que

$$f(x) - t(x) = f'(d)(x - c) - f'(c)(x - c)$$

$$= \big(f'(d) - f'(c)\big)(x-c).$$

De $(*)$ segue que

$$\frac{\overbrace{f'(d)-f'(c)}^{>0}}{\underbrace{d-c}_{>0}} > 0.$$

Logo $f'(d)-f'(c) > 0$. Assim

$$f(x) - t(x) > 0 \Rightarrow f(x) > t(x).$$

Agora, se $c > x$ então existe $d \in (x,c)$ tal que

$$f(c) - f(x) = f'(d)(c-x).$$

Assim

$$f(x) - t(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)$$

$$= f'(d)(x-c) - f'(c)(x-c)$$

$$= \big(f'(d) - f'(c)\big)(x-c).$$

De $(*)$ segue que

$$\frac{f'(d)-f'(c)}{d-c} > 0.$$

Como $d < c$ segue que $f'(d) - f'(c) < 0$.

Assim

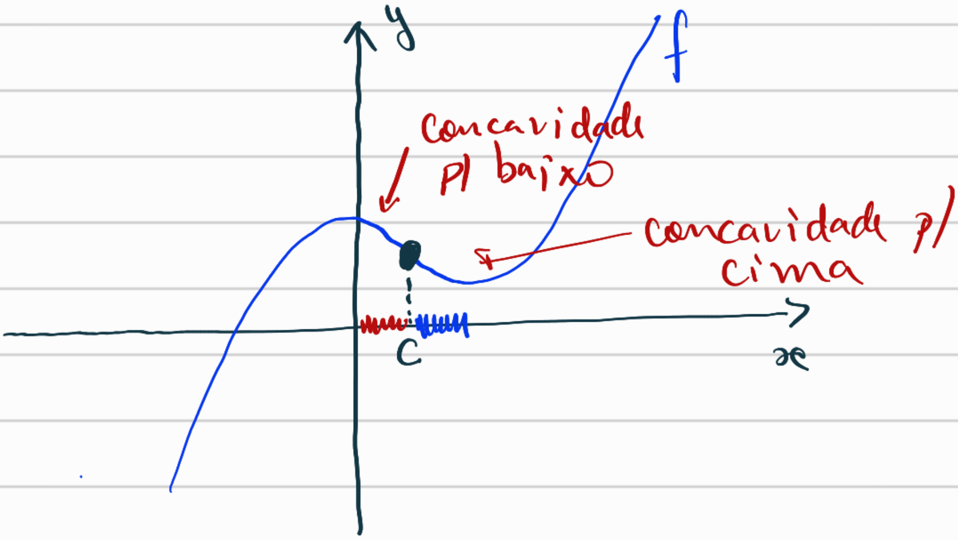
$$f(x) - t(x) = \underbrace{\big(f'(d) - f'(c)\big)}_{<0}\underbrace{(x-c)}_{<0} > 0$$

ou

$$f(x) > t(x).$$

(ii) A prova é análoga.

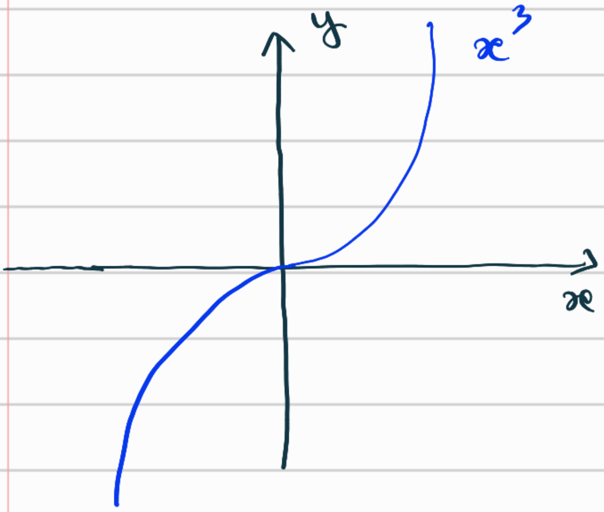
<u>Definição</u>: (Ponto de Inflexão). Seja $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $c \in I \subset \Omega$, I um intervalo. Se f'' existir em I e f'' mudar de sinal em c então o ponto $x = c$ é chamado ponto de inflexão.



<u>Exemplo</u>: $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x.$$



- Se $x < 0$ $f''(x) < 0$ (concavidade p/ baixo)
- Se $x > 0$ $f''(x) > 0$ (concavidade p/ cima)

Teorema: Seja $f: \Omega \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um intervalo $I \subset \Omega$. Se $c \in I$ for um ponto de inflexão de f então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Prova:

Faça $g(x) = f'(x)$. Logo $g'(x) = f''(x)$. Como f'' muda de sinal em c segue que g' muda de sinal nesse mesmo ponto. Logo $x = c$ é um extremo local de g. Logo $g'(c) = 0$, o que implica

$$f''(c) = g'(c) = 0.$$

Observação: A recíproca do teorema anterior é falsa. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^4.$$

Tem-se

$$f'(x) = 4x^3 \text{ e } f''(x) = 12x^2.$$

Note que $f''(0) = 0$ com $f''(x) > 0$ para $x > 0$ ou $x < 0$.