数分III习题课(10.19)

1. 确定下列函数极限是否存在?

(1) $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}$, 其中 $E=\{(x,y):\ y>x^2\}$.

解. 存在. 事实上, 注意到

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}\right| \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y}\right| = \left|y^2-xy+x^4+\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}\right|$$

$$\le |y^2-xy+x^4| + \left|\frac{x^3(1-x^3)}{x^2+y}\right|$$

$$< |y^2-xy+x^4| + \left|\frac{x(1-x^3)}{2}\right|$$

$$\to 0,\quad (x,y)\to(0,0).$$

所以有 $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y} = 0$.

(2) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \dfrac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$

解. 不存在. 考虑点列 $\{(\frac{1}{k},1,\frac{1}{k})\}$ 和 $\{(0,1,\frac{1}{k})\}$, 则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k^2}}{2\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \ne 0 = \lim_{k\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{k^2}}.$$

(3) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

解. 存在. 注意到

$$\left|\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \le \left|\frac{xyz}{\sqrt{3}\sqrt[3]{xyz}}\right| = \frac{|xyz|}{\sqrt{3}} \to 0,\quad (x,y,z)\to(0,0,0).$$

2. 设 $y=f(x)$ 在 $U_0(0,\delta_0)\subset\mathbb{R}$ 中有定义，满足 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，且对于 $\forall x\in U_0(0,\delta_0)$ 有 $f(x)\neq 0$. 记 $E=\{(x,y):xy\neq 0\}$. 证明:

(1) $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在.

(2) $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\dfrac{yf^2(x)}{f^4(x)+f^2(y)}$ 不存在.

证明. (1) 任取 $x_1\in U_0(0,\delta_0)$，由 $f(x_1)\neq 0$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 知 $\exists\, x_2\in U_0(0,\frac{|x_1|}{2})$，使得

$$f(x_2)\in U_0\left(0,\frac{|f(x_1)|}{2}\right).$$

同理，假设 x_{n-1} 已取出，则 $\exists\, x_n\in U_0(0,\frac{|x_{n-1}|}{2})$，使得

$$f(x_n)\in U_0\left(0,\frac{|f(x_{n-1})|}{n}\right).$$

重复上述步骤，得到 $\{x_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0 \quad 及 \quad \lim_{n\to 0}\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=0.$$

于是考虑点列 $\{(x_n,x_n)\}$ 及 $\{(x_n,x_{n+1})\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^2(x_n)}{f^2(x_n)+f^2(x_n)}=\frac{1}{2}\neq 0=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)f(x_{n+1})}{f^2(x_n)+f^2(x_{n+1})}.$$

故 $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在.

(2) 考虑 $y=f(x)$ 及 $y=f^2(x)$.

3. 试构造二元函数 $f(x,y)$，使得对 $k=1,2,\cdots,K$，有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^k)=0$，

但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

解. $f(x,y)=\dfrac{x^{K+1}}{x^{K+1}+y}$.

注. 即使 $f(x,y)$ 在 (x,y) 以相当多的特殊方式趋向于 $(0,0)$ 时能得到相等极限，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 仍有可能不存在.

4. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内除直线 $x=a$ 与 $y=b$ 外处处有定义，并且满足

(a) $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=g(x)$ 存在；

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=h(y)$ 一致存在.

证明：存在 $c\in\mathbb{R}$，使得

(1) $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$；

(2) $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\lim\limits_{y\to b} h(y)=c$.

(3) $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=c$，其中 $E=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y): x=a \text{ 或 } y=b\}$.

证明. (1) 由 $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=h(y)$ 一致存在知 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，s.t.

$\forall\, x_1,x_2\in U_0(a,\delta)$，$y\neq b$ 有

$$|f(x_1,y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{4},\quad |f(x_2,y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

再由 $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=g(x)$ 知 $\exists\, y_0\neq b$ s.t.

$$|f(x_1,y_0)-g(x_1)|<\frac{\varepsilon}{4},\quad |f(x_2,y_0)-g(x_2)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

于是

$$|g(x_1)-g(x_2)| \le |g(x_1)-f(x_1,y_0)| + |f(x_1,y_0)-h(y_0)| + |f(x_2,y_0)-h(y_0)| + |f(x_2,y_0)-g(x_2)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

故由 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 存在，记其为 c.

(2). 由 (b) 知 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_0>0$, s.t. $\forall x \in U_0(a,\delta_0)$, $y\neq b$ 有

$$|f(x,y)-h(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

再由 (1) 知 $\exists x_0 \in U_0(a,\delta_0)$, s.t.

$$|g(x_0)-c| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是结合 (1) 得 $\exists \delta>0$, s.t. $\forall y \in U_0(b,\delta)$，有

$$|f(x_0,y)-g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

综上便知

$$|h(y)-c| \le |h(y)-f(x_0,y)| + |f(x_0,y)-g(x_0)| + |g(x_0)-c|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(3) 由 (b) 知 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_1>0$, s.t. $\forall x \in U_0(a,\delta_1)$，有

$$|f(x,y)-h(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 (2) 得 $\exists \delta_2>0$, s.t. $\forall y \in U_0(b,y_2)$，有

$$|h(y)-c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则对 $\forall (x,y) \in U_0((a,b),\delta)$，有

$$|f(x,y)-c| \le |f(x,y)-h(y)| + |h(y)-c| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

从而得 $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=c$.

6. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上有定义，且对固定的 x，$f(x,y)$ 是 y 的连续函数. 对固定的 y，$f(x,y)$ 是 x 的连续函数. 证明：若 $f(x,y)$ 满足下列条件之一：

(1) 对固定的 x，$f(x,y)$ 是 y 的单调上升函数.

(2) 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. $\forall y_1,y_2\in[0,1]$：$|y_1-y_2|<\delta$ 有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$.

则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证明. (1) 只考虑内点的情形. 边界点可通过补充定义

$$f(x,y)=\begin{cases} f(0,y), & x<0,\ 0\le y\le 1 \\ f(1,y), & x>1,\ 0\le y\le 1 \\ f(x,0), & y<0 \\ f(x,1), & y>1 \end{cases}$$

变成内点的情况.

对于 $\forall (x_0,y_0)\in D^\circ$，由 $f(x_0,y)$ 关于 y 的连续性，知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$, s.t.

$$|f(x_0,y_0\pm\delta_2)-f(x_0,y_0)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

再由 $f(x,y_0\pm\delta_2)$ 的连续性知 $\exists\delta_1>0$, s.t. $\forall x$：$|x-x_0|<\delta_1$ 有

$$|f(x,y_0\pm\delta_2)-f(x_0,y_0\pm\delta_2)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

于是可得

$$|f(x,y_0\pm\delta_2)-f(x_0,y_0)| \le |f(x,y_0\pm\delta_2)-f(x_0,y_0\pm\delta_2)|+|f(x_0,y_0\pm\delta_2)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

由此及f关于y的单调性便知 对于$\forall (x,y)\in[x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]\times[y_0-\delta_2, y_0+\delta_2]$有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

事实上，例如当 $y_0<y<y_0+\delta_2$，有 $f(x,y)-f(x_0,y_0)\le f(x,y_0+\delta_2)-f(x_0,y_0)<\varepsilon$. 其余情况类似. 故知 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

(2) 只需注意到

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|.$$

7. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，则下列几个条件等价：

(1) $f(x)$ 连续

(2) 任何开集的原象是开集.

(3) 任何闭集的原象是闭集.

(4) 对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意点集 E，有 $f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一开集. 若 $f^{-1}(U)$ 是空集，则结论显然成立. 下设 $f^{-1}(U)$ 非空. $\forall x_0\in f^{-1}(U)$，则 $f(x_0)\in U$. 由 U 是开集知 $\exists\varepsilon>0$, s.t. $U(f(x_0),\varepsilon)\subset U$. 由 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续知 $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x$: $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 从而

$$U(x_0,\delta)\subset f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))\subset f^{-1}(U).$$

故知 $f^{-1}(U)$ 是开集.

(2) $\Rightarrow$ (3) 注意到 $\forall S\subset\mathbb{R}^n$，有

$$f^{-1}(S^c)=[f^{-1}(S)]^c.$$

于是对于 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是任一闭集，知

$$f^{-1}(F)=f^{-1}((F^c)^c)=[f^{-1}(F^c)]^c$$

是闭集.

(3) $\Rightarrow$ (4) 要证 $f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$，只需证 $\bar{E}\subset f^{-1}(\overline{f(E)})$. 注意到

$$E\subset f^{-1}(f(E))\subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

又 $\overline{f(E)}$ 为闭集，从而 $f^{-1}(\overline{f(E)})$ 也是闭集. 故

$$\bar{E}\subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

(4) $\Rightarrow$ (1) 反证. 若不然，$\exists x_0\in\mathbb{R}^n$，$f(x)$ 在 x_0 处不连续. 由 Heine 定理知 $\exists\varepsilon_0>0$ 及点列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0$，但

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0.$$

取 $E=\{x_n\}$，则 $x_0\in\bar{E}$. 注意到 $f(E)=\{f(x_n)\}$. 所以

$$f(x_0)\in f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}=\overline{\{f(x_n)\}},$$

矛盾.

8. 设 $E=\{(x,y):x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}\}$，证明：$\mathbb{R}^2\setminus E$ 是(道路)连通的.

证明. 首先说明 E 是可数的. 事实上，由 $\mathbb{Q}$ 是可数的，知可将 $\mathbb{Q}$

中的元素排成序列 $\{a_n\}$. 利用对角线排法把 E 排成序列, 即

$$b_{\frac{n(n+1)}{2}+i} = (a_{n+1-i}, a_i).$$

故而 E 是可数集.

又从 $\mathbb{R}^2\setminus E$ 中任一点引出的射线都是不可数的, 故由 E 可数知必有无穷多条射线包含于 $\mathbb{R}^2\setminus E$, 从而 $\mathbb{R}^2\setminus E$ 中的任两点都存在一条道路, 从而 $\mathbb{R}^2\setminus E$ 是道路连通的.

9. 设 A 是非退化矩阵, 证明: $\exists \lambda>0$, 对于 $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 有 $|Ax|\geq\lambda|x|$.

证明. 若 $x=0$, 显然 $|Ax|\geq\lambda|x|$ 对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ 成立. 当 $x\neq0$ 时, $\hat{x}=\frac{x}{|x|}$ 为单位向量. 于是

$$|Ax| = |A\tfrac{x}{|x|}\cdot|x|| = |A\hat{x}|\cdot|x| := f(\hat{x})\,|x|.$$

由 A 非退化知 $f(\hat{x})>0$. 而易知 $f(x)$ 在 $\{x: |x|=1\}$ 上连续, 又 $\{x: |x|=1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集, 故 $\lambda:=\min\limits_{\{x:|x|=1\}} f(x)$ 可以达到, 故 $\lambda>0$.

所以便有 $f(\hat{x})\geq\lambda$, 即 $|Ax|\geq\lambda|x|$.

10. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 证明: 函数 $f(x)=\inf\limits_{y\in E}|x-y|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内 Lipschitz 连续.

证明. 对 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$, $y\in E$ 有

$$|x_1-y|\leq|x_2-y|+|x_1-x_2|$$

故

$$f(x_1)=\inf_{y\in E}|x_1-y|\leq|x_2-y|+|x_1-x_2|.$$

从而有

$$|x_2-y| \geq f(x_1) - |x_1-x_2|$$

于是

$$f(x_2) = \inf_{y\in E} |x_2-y| \geq f(x_1) - |x_1-x_2|.$$

同理有

$$f(x_1) \geq f(x_2) - |x_1-x_2|$$

故

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq |x_1-x_2|,$$

即 Lipschitz 连续.

11. 试构造 $\Delta = \{(x,y): x^2+y^2<1\}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的一个同胚映射.

解. $\alpha: \Delta \to \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{1-\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{1-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

延伸. 证明 $\Delta = \{(x,y): x^2+y^2<1\}$ 与 $D = (-1,1)\times(-1,1)$ 同胚.

证明. 注意到 $\tau: D \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (\tan\frac{\pi}{2}x, \tan\frac{\pi}{2}y)$ 是 D 到 $\mathbb{R}^2$ 的同胚. 故知

$$\tau^{-1}\circ\alpha: \Delta \to D$$

是同胚.

12. 设函数 $u=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)\subset\mathbb{R}^n$ ($\delta_0>0$) 内存在各个偏导数, 并且所有的偏导数在该邻域内有界. 证明 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

证明. 设 $x_0=(x_1,\cdots,x_n)$. 对 $\forall \Delta x_i \in U(0,\delta_0)$, 由 Lagrange 中值定理知

$\exists\ \theta_i\in(0,1),\ i=1,2,\cdots,n$, s.t.

$$f(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+\Delta x_1 f'_{x_1}(x_1+\theta_1\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,x_3,\cdots,x_n)=f(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots,x_n)+\Delta x_2 f'_{x_2}(x_1+\Delta x_1,x_2+\theta_2\Delta x_2,x_3,\cdots,x_n)$$

$$\vdots$$

$$f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_n+\Delta x_n)=f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n)+\Delta x_n f'_{x_n}(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\theta_n\Delta x_n)$$

又 $\exists\ M>0$, s.t. $\forall\ x\in U(x_0,\delta_0)$ 有 $|f'_{x_i}(x)|\le M$, $i=1,2,\cdots,n$. 所以得

$$|f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\cdots,x_n)|\le M(|\Delta x_1|+\cdots+|\Delta x_n|)\to 0$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 设 $p_1,\cdots,p_k$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 k 个相异的点. 证明: 存在一个最小半径的圆盘 B 覆盖这 k 个点.

2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, f 是 Ω 到 Ω 的一个映射, 满足

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,\quad \forall\ x,y\in\Omega,\ x\neq y.$$

证明: f 在 Ω 中存在唯一的不动点.