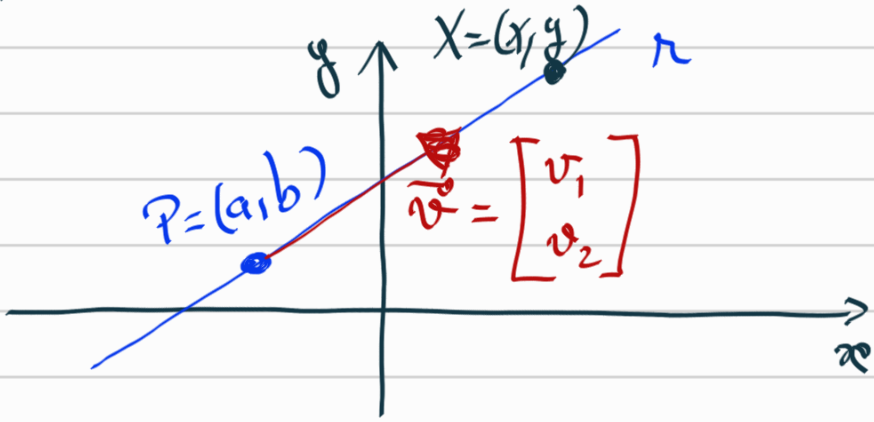
Retas e Planos

Equação da Reta no Plano $\mathbb{R}^2$.



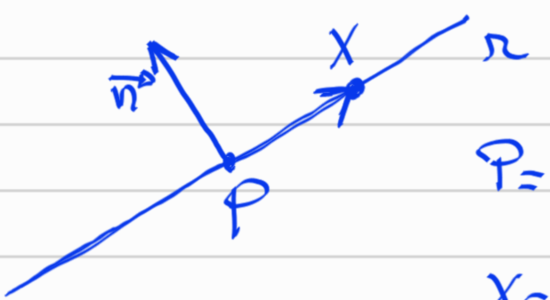
"A reta r é o conjunto dos pontos X tais que $\overrightarrow{PX} \,/\!/\, \vec{v}$."

Isto significa que

$$\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} \,/\!/\, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x-a = \lambda v_1 \\ y-b = \lambda v_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a+\lambda v_1 \\ y = b+\lambda v_2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Também podemos observar que uma reta pode ser interpretada como



$P=(p_1,p_2)$

$X=(x,y)$

$\vec{n}=(n_1,n_2)$

A reta r é o conjunto dos pontos X tais que

$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0.$$

(Equação da reta na forma normal)

Segue que

$$(x - p_1, y - p_2) \cdot (n_1, n_2) = 0 \implies$$

$$(x - p_1) n_1 + (y - p_2) n_2 = 0 \implies$$

$$x n_1 - p_1 n_1 + y n_2 - p_2 n_2 = 0 \implies$$

$$n_1 x + n_2 y - (p_1 n_1 + p_2 n_2) = 0$$

<u>Obs</u>: A equação de uma reta na forma

$$ax + by = c$$

é chamada equação na forma <u>geral</u>.

<u>Definição</u>: Dado um ponto P de uma reta r e um vetor $\vec{d}$, diretor de r, a equação

$$X = P + t\vec{d}$$

é chamada equação vetorial da reta r. (No nível de coordenadas a equação vetorial é chamada de equação paramétrica).

Obs:

$X=(x,y,z)$ e $P=(p_1,p_2,p_3)$ (Pontos em $\mathbb{R}$)

$t\in\mathbb{R}$ e $\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$ vetor diretor

Exemplo:

Determine as equações vetorial e paramétricas para a reta no $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(2,0,1)$ e é paralela ao vetor $\vec{d}=(1,-1,1)$.

A equação vetorial é

$$X=(2,0,1)+t(1,-1,1).$$

Esta equação pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

As equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 0-t \\ z = 1+t \end{cases}$$

Exemplo: Determine a equação da reta no $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos assumir

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como sendo o vetor diretor da reta.

Assim

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Planos no $\mathbb{R}^3$

Dado um ponto $P = (P_1, P_2, P_3)$ e $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ o conjunto de todos os pontos $X = (x, y, z)$ tais que

$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0$$

é chamado plano que contém o ponto P e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$.

Como

$$\vec{PX} = (x - P_1, y - P_2, z - P_3)$$

temos

$$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \implies \begin{pmatrix}\text{Equação}\\ \text{normal}\end{pmatrix} \quad (5)$$

$$(x - p_1, y - p_2, z - p_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0 \implies$$

$$(x - p_1)n_1 + (y - p_2)n_2 + (z - p_3)n_3 = 0 \implies$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3) = 0$$

(Equação geral)

Algumas vezes tem-se a forma

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d.$$