张静怡 20110180044@fudan.edu.cn
宋达 songd@fudan.edu.cn
办公室 逸夫楼 418

No.
Date.

例1. 确定一条曲线Γ，过曲线上(t,x)任意一点的曲线的切线与该点与坐标原点的连线垂直.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}, \quad \text{一阶常微分方程.}$$

$$x^2 + t^2 = C \quad (C>0) \quad \boxed{圆}$$

例2. $\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \lambda > 0.$ Malthus模型 种群自然增长

$\lambda < 0$ 放射性元素的衰变模型

一阶线性常系数.

$\lambda = \lambda(t)$：变系统 非自治

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N + \underbrace{f(t)}_{\text{非齐次项(系统外的)}}$$

$N(t) = C \cdot e^{\lambda t} \quad (C \in \mathbb{R})$ 是(*)的通解 $N(t) \equiv 0$，常值特解

↳ 无穷多个解

$$(CP) \begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \quad \text{初始条件}$$

$$(CP') \begin{cases} \frac{dN}{dt} = \lambda N \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

令 $T = t - t_0$, $t = T + t_0$, $N(t) = N(T + t_0)$

$$\lambda N(T+t_0) = \frac{dN}{dt} = \frac{dN(t+t_0)}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

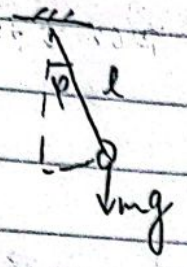
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dF(T)}{dT} = F(T) \\ F(0) = N_0 \end{cases}$$

作业：if $\lambda = \lambda(t)$. t是含. 则初值问题还相等吗?

No.

Date.

例3. 单摆模型



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$ 二阶常微分方程. 非线性、自治.

引入 $y = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \end{cases}$$

初值问题 一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_0 \\ y(0) = \omega_0. \end{cases}$$

常值特解 $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

一次近似 $\begin{cases} \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l}\varphi. \end{cases}$

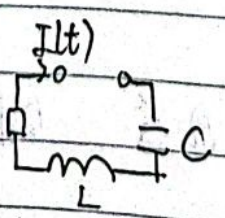
例4. Lorentz系统 chaos

一阶非线性自治的ODE组 $\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$ 其中 σ, r, b 为参数

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \Downarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 + \delta \\ z(0) = z_0 \end{cases} \Downarrow \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix}$$

作业1: 常值特解

例5. LRC电路.



$$RI - L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt = e(t)$$ 线性积分方程

No.

Date.

① $R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{e}(t)$

② 引入 $y(t) = \int_0^t I(t)\,dt$ 　　二阶常系数非齐次方程

$$R\dot{y} + L\ddot{y} + \frac{1}{C}y = e(t)$$

例7. 神经网络模型

$$\dot{\vec{x}} = -R\vec{x} + \underline{\underline{W\vec{f}(\vec{x})}} + \underline{\underline{\vec{I}(t)}}$$ 外界刺激

network

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

周五. 4201教室

常微分方程的基本概念

1. 阶. (未知数导数最高阶)

2. 线性. 非线性

齐次, 非齐次

3. 显式(显式, 隐式). 积分

通解. 特解 一切解.

(*) $F(y, x', x, \cdots, x^{(n)}) = 0$.

设 (a,b) 上的 $\varphi(t)$ 满足.

$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \ (\forall t \in (a,b))$

称 $\varphi(t)$ 是方程 (a,b) 上的解

$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$, $x^2+t^2=C$. $x(t)=\sqrt{C-t^2}$ 显式 $(C>0)$.

↳ 隐式解 积分

$\frac{dN}{dt} = \lambda N$, $N(t) = Ce^{\lambda t}$ $(C \in \mathbb{R})$.

n阶方程(*)的解中 n个独立的常数. 称 该解 为方程(*)的通解

$\varphi(t, C_1, \cdots, C_n)$, 并且 $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial C_1} & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial C_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial C_2}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}$ 在

$(t, C_1, \cdots, C_n)$ 所在邻域中非零

一般而言, 线性方程的通解是一切解.

例: $N(t) = e^{C} e^{\lambda t}$ 是通解, 但非一切解

例) $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{|x|}$

通解 $x(t) = \begin{cases} (t+C)^2, & t > -C \\ -(t+C)^2, & t < -C \end{cases}$

特解 $x(t) \equiv 0$ (满足特定初始条件的解)

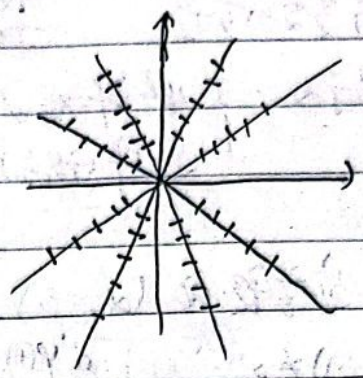
Date.

4 解的大致图形 ~~画出来~~ 绘制 → 积分曲线

① 瞬时

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$$

$$x = -\frac{1}{k}t.$$



② Euler 折线法

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

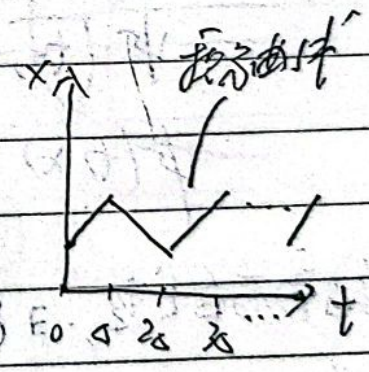
$$\frac{x(t+\Delta) - x(t)}{\Delta} = f(t, x(t)).$$

$$x(t+\Delta) = x(t) + \Delta f(t, x(t)).$$

$$t = 0, \Delta, 2\Delta, \cdots, k\Delta, (k+1)\Delta, \cdots$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta f(n\Delta, x_n)$$

$$x_0, x_1, \cdots$$



No.

Date.

第二章 初等解法

一、分离变量法

1. 可直接分离变量的方程 $\frac{dx}{dt}=f(t)g(x)$，f,g 为各自变量的连续函数

一切解可表示为 $\begin{cases}\text{奇解 } x=\alpha, \text{ 其中 } g(\alpha)=0.\\ \text{通解(不定积分)} \int_{x_0}^{x}\frac{ds}{g(s)}=\int_0^t f(s)ds\end{cases}$

设 $\varphi(t)$ 是方程在 (α,β) 上的非常值解的解

$g(\varphi(t))\neq 0$，$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f(t)\,g(\varphi(t))$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))}=\int_{t_0}^{t}f(t)\,dt,\quad t,t_0\in(\alpha,\beta)$$

$$\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{ds}{g(s)}=\int_{t_0}^{t}f(s)\,ds$$

反之，由 $\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{ds}{g(s)}=\int_{t_0}^{t}f(s)\,ds$ 确定出隐函数 $x=x(t)$

若令 $\psi(t,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{g(s)}-\int_{t_0}^{t}f(s)ds$

$\psi(t_0,x_0)=0$.

$\psi(t,x)$ 关 t,x 连续. ψ_x 连续

隐函数存在定理，$\exists\,\delta>0$，当 $t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$ 时，有函数 $x=\varphi(t)$

满足 1° $x_0=\varphi(t_0)$，2° $\psi(t,\varphi(t))=0$

$$\psi(t,\varphi(t))=\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{ds}{g(s)}-\int_{t_0}^{t}f(s)\,ds$$

$$\frac{1}{g(\varphi(t))}\frac{d\varphi}{dt}=f(t)$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

2. 通过变换求解变量

Ⓐ $\frac{dx}{dt}=f(\frac{x}{t})$ 齐次方程

$g(\lambda t,\lambda x)=\lambda^k g(t,x)$，称 g 为 k 次齐次方程.

令 $u=\frac{x}{t}$，$x=u\cdot t$，$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\cdot t+u=f(u)$

$$\frac{du}{dt}=\frac{f(u)-u}{t} \qquad u^*=f(u^*)$$

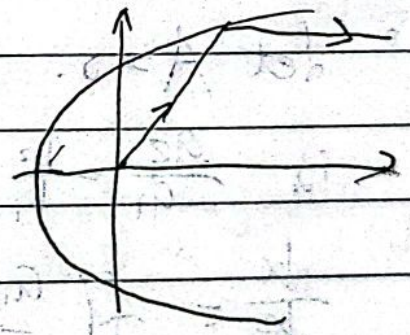
$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dt}{t}+C$$ 求积分

$u=u^*$ 奇解

例. 扫探照灯问题

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t+\sqrt{t^2+x^2}}$$

是齐次方程



作业：求解此方程（自拟探照灯速度）

Ⓑ $\frac{dx}{dt}=f(at+bx+c)$

令 $y=at+bx+C$

$$\frac{dy}{dt}=a+bx=a+bf(y) \qquad \int\frac{dy}{a+bf(y)}=\int dt+C$$

$$a+bf(y^*)=0,\ y=y^*.$$

No.

Date.

ⓒ $\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$

变为齐次方程. $\begin{cases} a_1v+b_1u=a_1t+b_1x+c_1 \\ a_2v+b_2u=a_2t+b_2x+c_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}+\vec{c}$$

1° 若 $A=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}+A^{-1}\vec{c}$

$$A^{-1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{vmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$\therefore \frac{du}{dv}=f\left(\frac{a_1v+b_1u}{a_2v+b_2u}\right)$, 齐次方程

2° $\det A=0$.

设 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$.

$$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{k(a_1+b_1x)+c_2}\right)$$

引入 $y=a_1t+b_1x$

2. 线性方程 $\frac{dx}{dt}=P(t)x+Q(t)$, 其中P、Q为区间上的连续函数

1° 当 $Q(t)\equiv 0$ 时, 为齐次线性方程

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x$$

2° $Q(t)\neq 0$ 时, 称为线性方程

Date.

$$\int \frac{dx}{x} = \int p(t)\,dt + C$$

$$\ln|x| = \int p(t)\,dt + C.$$

$$|x| = e^{\int p(t)\,dt} \cdot e^{C}$$

$$x = \pm e^{C} e^{\int p(t)\,dt}$$

$$x^* = 0, \quad x(t) = Ce^{\int p(t)\,dt}$$

2° $Q(t) \neq 0$ 时. 非齐次线性方程

$$e^{-\int p(t)\,dt} \frac{dx}{dt} - e^{-\int p(t)\,dt} p(t)\,x = Q(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) \cdot e^{-\int p(t)\,dt}\right) = Q(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}$$

$$\therefore x(t)\,e^{-\int p(t)\,dt} = \int Q(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}\,dt + C$$

$$x(t) = e^{\int p(t)\,dt}\left(C + \int Q(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}\,dt\right)$$

- 常数变易法

作业: 探照灯. P14. 4. 6.
P31 5, 9. 11

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

e.g. Bernoulli方程 $\frac{dx}{dt}+p(t)x=Q(t)x^k$

1° $k=0,1$. 利用常数变易法进行计算

2° $k\neq 0,1$, 引入 $y=x^{1-k}$, $\frac{dy}{dx}=(1-k)x^{-k}\frac{dx}{dt}$

$$(1-k)x^{-k}\frac{dx}{dt}+p(t)x(1-k)x^{-k}=Q(t)(1-k)$$

$$\frac{dy}{dx}+p(t)(1-k)y=Q(t)(1-k)$$

线性方程

例. Riccati方程

$$\frac{dx}{dt}+a(t)x+b(t)x^2=c(t)$$

设 $\varphi(t)$ 是上述方程的一个解

$$\frac{d\varphi}{dt}+a(t)\varphi+b(t)\varphi^2=c(t)$$

$$\frac{d(x-\varphi(t))}{dt}+a(t)(x-\varphi)+b(t)(x^2-\varphi^2)=0$$

引入 $y=x-\varphi$.

$$\frac{dy}{dt}+a(t)\varphi+b(t)(y+2\varphi)y=0$$

$$\frac{dy}{dt}+\left(a(t)+2b(t)\varphi(t)\right)y+b(t)y^2=0.$$

为Bernoulli方程

例 $\frac{dx}{dt}\left(e^{-\frac{t}{x}}+\frac{t}{x^2}\right)=1$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}t+e^{-\frac{1}{x}},\quad t=e^{-\frac{1}{x}}(C+x)$$

No.

Date.

例. $\frac{dx}{dt} = kx + f(t)$，$f(t)$ 为周期函数 $f(t)=f(t+w)$

证：方程有且仅有一个周期解. 并求这个解

$x(t) = Ce^{kt} + \int_0^t e^{k(t-s)} f(s)ds$. 常数变易式

$x(t) = x(t+w)$

特别地，$t=0$，$x(0)=x(w)$.

$x(t)$ 是上述方程的解

$x(t+w)$ 也是上述方程的解

令 $u(t) = x(t) - x(t+w)$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ku \\ u(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(t) = 0$$

$\Rightarrow x(t) = x(t+w)$.

三. 全微分方程和积分因子

$\frac{dy}{dx} = f(t,x)$

$M(t,x)dt - N(t,x)dx = 0$.

$M(t,x)$，$N(t,x)$ 在单连通区域内有连续一阶偏导数

$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ （充要条件）

则 (*) 可以写成全微分方程的形式，存在 $u(t,x)$，$du(t,x)=0$

方程 (*) 的通积分 $u(t,x)=C$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = M(t,x)$$

$$u(t,x) = \int M(t,x)dt + \varphi(t)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = N(t,x) = \int \frac{\partial M}{\partial x} dt + \varphi'(x)$$

$$\varphi(x) = \int N(t,x)dx - \iint \frac{\partial M}{\partial x} dt dx$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

例. $\frac{dx}{dt} = -\frac{e^t+x}{\cos x+t}$

$(e^t+x)\,dt + (\cos x+t)\,dx = 0$

$\frac{\partial u}{\partial t} = e^t + x.$ $\quad u(t,x) = \int (e^t+x)\,dt + \varphi(x)$

$= e^t + xt + \varphi(x)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + t = t + \varphi'(x)$

$\varphi'(x) = \cos x,\ \varphi(x) = \sin x$

$u(t,x) = xt + e^t + \sin x = C$ 是方程的通积分

$\mu(t,x)$ 且满足 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$

$\mu M\,dt + \mu N\,dx = 0$ 是全微分形式的方程

积分因子

① 表.

② $\frac{\partial \mu}{\partial x} M + \mu \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$

求PDE

$\mu(t,x) \equiv \mu(t)$ 仅与t有关, 与x无关.

$-\mu \frac{\partial N}{\partial t} + \mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N$

$\frac{d\mu(t)}{dt} = \underbrace{\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)}_{\text{仅与t有关, 与x无关}} \mu$ 一阶线性方程

例题 P33 ~ 例题

No.

Date.

四、导数未解出的一阶方程

1. 例. $(\dot{x})^2+2t\dot{x}+t^2-x^2=0$.

2. $x=f(t,\dot{x})$ 型

引入 $p=\dot{x}$. $x=f(t,p)$ $\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}$

解为 $p=\varphi(t,c)$

$x=f(t,\varphi(t,c))$

通解形式

解为 $\begin{cases} t=\eta(p,c) \\ x=f(t,p) \end{cases}$，p为参数

以p为参数的解

3. $t=g(x,\dot{x})$ 型

引入 $p=\dot{x}$, $t=g(x,p)$. $\frac{1}{p}=\frac{dt}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dx}$

$p=\psi(x,c)$

通解：$t=g(x,\psi(x,c))$

例：$x=t\varphi\left(\frac{dx}{dt}\right)+\psi\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 作业

看看不做

作业 P32. 15. 20, 21, 22, 26, $\boxed{28, 29}$,

P33 38

P40. 3. 6. 15

四 高阶方程的降阶法

(*) $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0$, $n \geq 2$.

(一). 方程(*)不显含未知函数

$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0$, $n \geq k \geq 1$.

引入 $y = x^{(k)}$, $F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}) = 0$

例: $m\ddot{x} = F = G - W - c\dot{x}$

引入 $\dot{y} = \ddot{x}$, $m\dot{y} = G - W - cy$.

(二) 方程(*)中不显含变量

$F(x, x', x'', \cdots, x^{(k)}) = 0$

$\dot{x} = y$.

$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$

$\dddot{x} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dt}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2}$

(三). 齐次方程的降阶

$F(t, kx, kx', \cdots, kx^{(n)}) = k^m F(t, x, x', \cdots, x^{(n)})$

$F \sim m$ 次齐次方程

$F(t, x, x', \cdots x^{(n)}) = 0$.

$x^m F(t, 1, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}, \cdots, \frac{x^{(n)}}{x}) = 0$

$\downarrow$ y $\quad$ $\downarrow$ $y' + y^2$

可以降一阶

引入 $y = \frac{x'}{x}$, $x' = yx$

$x = e^{\int y dt}$

$x' = y e^{\int y dt}$

$x'' = (y' + y^2) e^{\int y dt}$

$\frac{x''}{x} = y' + y^2$

No.

Date.

(四). 全微分方程及积分因子

例. $x\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$

$x^*=0$ 常值特解，不妨在下算中设 $x\neq 0$

两边同除 x^2，得 $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)=0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=Cx.$$

(五) 常微分方程组的首次积分

回顾: (**) $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,x)$，其中 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\vec{f}(t,x)=(f_1(t,\vec{x}),\cdots,f_n(t,\vec{x}))^T$

设 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 是方程 (**) 的解，$t\in(\alpha,\beta)$，且有一函数 $\Phi(t,\vec{x})$ 在 D 上具有连续 m 阶偏导数，非常值特解，若 $\Phi(t,\vec{\varphi}(t))\equiv C$，$(\forall t\in(\alpha,\beta))$ 则称 $\Phi(t,\vec{x})=C$ 为方程组 (**) 的一个首次积分

定理. 若 $\Phi(t,x)$ 是非常值函数并且有连续一阶偏导数，$\Phi(t,\vec{x})$ 是方程组 (**) 的首次积分 m 充要条件为 $\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial x_i}f_i(t,\vec{x})\equiv 0$，$(\forall t\in D)$

证: 充分性，设 $\vec{\varphi}(t)$ 是方程组 m 的解，要证 $\Phi(t,\vec{\varphi}(t))=C$

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t,\vec{\varphi}(t)))=\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial t}\Big|_{(t,\vec{x})=(t,\vec{\varphi}(t))}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi(t,\vec{x})}{\partial x_i}\Big|_{(t,\vec{x})=(t,\vec{\varphi}(t))}\cdot\frac{d\varphi_i(t)}{dt}$$

$$=f_i(t,\vec{\varphi})$$

$$\equiv 0.$$

从而 $\Phi(t,\vec{\varphi}(t))=C$

必要性: 反过来

例. 单摆模型 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$

引入 $y=\frac{d\varphi}{dt}$, $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} = y \end{cases}$

$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y}{-\frac{g}{l}\sin\varphi} \Rightarrow d\varphi \cdot \sin\varphi \cdot -\frac{g}{l} = y\,dy$

$\therefore \cos\varphi \cdot \frac{g}{l} = \frac{1}{2}y^2 + C$

$\Phi(y,\varphi) \triangleq \frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{l}\cos\varphi = C$

1° 设 $\Phi(t,\vec{x}) = C$ 是方程组(#)的一个首次积分

则可以把方程组(#)降一维

且不妨设 $\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \neq 0$, 隐函数存在定理, $x_n = \varphi(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, C)$

2° n维的方程组(#)要求解, 则需要 n个独立的首次积分 $\phi_i(t,\vec{x}) = C_i$

$i=1,2,\cdots,n$, $\left|\frac{\partial\phi_i(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}}\right| \neq 0$

例: $\begin{cases} \dot{x} = x+2y & ① \\ \dot{y} = 4x+3y & ② \end{cases}$

① × 2 − ②

$2\dot{x} - \dot{y} = -2x - y$

$(2\dot{x} - y) = C_1 e^{-t}$

例: $\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$

① $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = C_1 x$ 方程组的解

② $\frac{2x\,dx}{4x^2z} = \frac{2y\,dy}{4y^2z} = \frac{2z\,dz}{2z(z^2-x^2-y^2)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2z(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dx}{2xz}$

$\Rightarrow x = C_2(x^2+y^2+z^2)$

No.

Date.

第二章 常系数线性微分方程.

(1) $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0$. 常系数2阶齐次线性方程

$\dot{x}=ax$, $x(t)=Ce^{at}$

设 $e^{\lambda t}$ 是方程(1)的解. 则应有 $\lambda^2e^{\lambda t}+a_1\lambda e^{\lambda t}+a_2\lambda e^{\lambda t}=0$

解决方程.

(一) 复值函数 与 解析

1° 设 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是 (α,β) 上的实值函数. $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 是复值函数, 定义域 (α,β)

2°, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)\triangleq\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)$.

3° 连续性 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=z(t_0)$

4°, 导数. $z'(t)=\varphi'(t)+i\psi'(t)$

5° 积分 $\int_a^b z(t)dt=\int_a^b\varphi(t)dt+i\int_a^b\psi(t)dt$

若复值函数 $z(t)$ 满足 方程 (1). $z(t)$ 是复值解.

引理. 设 $z_1(t)$, $z_2(t)$ 为方程(1)的解, 则 $C_1z_1(t)+C_2z_2(t)$ 亦是方程(1)的解.

P50 5. P51 7.12 P62 3° 5. 8 10.

(*) $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = 0$.

特征方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{dx}{dt} + \lambda_1\lambda_2 x = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1\right) - \lambda_2\left(\frac{dx}{dt} - \lambda_1\right) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_1 = C_1 e^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_2 x = C_2 e^{\lambda_1 t}$$

解得 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时. $x(t) = \frac{C_1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{C_2}{\lambda_1-\lambda_2} e^{\lambda_1 t}$

$$= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时. $\frac{dx}{dt} - \lambda_1 t = C_1 e^{\lambda_1 t}$

$$x = e^{\lambda_1 t}\left(C_2 + \int C_1 e^{\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_1 t}\, dt\right)$$

$$= e^{\lambda_1 t}(C_2 + C_1 t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

定理2.1: 方程(*)的一切复数通解可表示为 $x = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{\lambda_1 t}(C_1 t + C_2) & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

定理2.2 方程(*)的一切实数通解可表示为

$$x(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{实} \\ (C_1 t + C_2) e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \text{实} \\ e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \end{cases}$$

证明. $x(t) = \overline{x(t)}$ $\qquad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = \overline{C_1} e^{\lambda_2 t} + \overline{C_2} e^{\lambda_1 t}$$

$$(C_1 - \overline{C_2}) e^{\lambda_1 t} = (\overline{C_1} - C_2) e^{\lambda_2 t}$$

$(C_1 - \overline{C_2}) = (\overline{C_1} - C_2) e^{-2i\beta t}$, 左右关于 t 常数

$0 = (\overline{C_1} - C_2) \cdot -2i\beta\, e^{-2i\beta t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, 从而 $\overline{C_1} = C_2$

...

No.

Date.

例. 求下列方程的反函数的实值解

(A) $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$.

(B) $\dot{x}+2x+\int_0^t x(s)\,ds=0$

解: (B) 求导, $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$.

$$x=(c_1+c_2t)e^{-t}$$

$\dot{x}(0)+2x(0)=0$. 得 $c_1=-c_2$

定理2.3

$$(CP):\begin{cases}\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0\\ x(0)=s_0,\ \dot{x}(0)=v_0\end{cases}$$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在且唯一.

证明 1° 常系数 $x(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$

$$\begin{cases}x(0)=c_1+c_2=s_0\\ \dot{x}(0)=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=v_0\end{cases}\quad \begin{vmatrix}1&1\\ \lambda_1&\lambda_2\end{vmatrix}\neq 0$$

例: $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+ta_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0$ $\quad t\neq 0$

Euler 方程

$$\begin{cases}t^2\lambda^2+ta_1\lambda+a_2=0\\ \lambda_{1,2}=\cdots\end{cases}$$

令 $s=\ln|t|$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{t}\qquad t\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{1}{t}$$

$$=-\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds}+\frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{ds^2}$$

于是 $\frac{d^2x}{ds^2}+(a_1-1)\frac{dx}{ds}+a_2x=0$

$$x(s)=\begin{cases}c_1|t|^{\lambda_1}+c_2|t|^{\lambda_2} & \lambda_1\neq\lambda_2\\ (c_1+c_2\ln|t|)\cdot|t|^{\lambda} & \lambda_1=\lambda_2\\ |t|^{\alpha}\left(c_1\cos(\beta\ln|t|)+c_2\sin(\beta\ln|t|)\right)\end{cases}$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

对于方程(A)，在什么条件下方程的一切解

1° $\to 0$ $(t\to+\infty)$

2° 有界的 $(t\to\infty)$

3° 存无界的解

定理2.3. $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=f(t)$

$$x(t)=\begin{cases} C_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot e^{\lambda_2 t}+\int_0^t \dfrac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)\,ds, & \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ 实} \\ (C_1+C_2t)e^{\lambda t}+\int_0^t (t-s)\,e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds, & \lambda_{1,2}=\lambda \\ e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right)+\int_0^t \dfrac{e^{\alpha(t-s)}}{\beta}\sin\beta(t-s)f(s)\,ds, & \lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta \end{cases}$$

常数变易公式

Proof: $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$.

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{dx}{dt}+\lambda_1\lambda_2=f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\right)-\lambda_2\left(\frac{dx}{dt}-\lambda_1x\right)=f(t)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}-\lambda_1x=C_1e^{\lambda_2 t}+\int_0^t e^{\lambda_2(t-s)}f(s)\,ds$$

$$\frac{dx}{dt}-\lambda_2x=C_2e^{\lambda_1 t}+\int_0^t e^{\lambda_1(t-s)}f(s)\,ds$$

1° $\lambda_1\neq\lambda_2$ 实

$$(\lambda_2-\lambda_1)x=C_1e^{\lambda_2 t}-C_1e^{\lambda_1 t}+\int_0^t\left(e^{\lambda_2(t-s)}-e^{\lambda_1(t-s)}\right)f(s)\,ds$$

2° $\lambda_{1,2}=\lambda$

$$\frac{dx}{dt}-\lambda x=C_1e^{\lambda t}+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds=F(t)$$

$$x(t)=C_2e^{\lambda t}+\int_0^t e^{\lambda(t-p)}\left[C_1e^{\lambda p}+\int_0^p e^{\lambda(p-s)}f(s)\,ds\right]dp$$

$$=C_2e^{\lambda t}+C_1t\cdot e^{\lambda t}+\int_0^t\int_0^p e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds\,dp$$

$$\parallel$$

$$\int_0^t\int_s^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,dp\,ds$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

$= (C_2+C_1t)e^{\lambda t} + \int_0^t (t-s)e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$

$x(t) = x_1(t) + x^*(t)$.

$x^*(t) = \int_0^t K(t-s) f(s)\,ds$

$K(t)$ 满足 $\ddot{K}(t) + a_1\dot{K}(t) + a_2K(t) = 0$

$K(0)=0,\ \dot{K}(0)=1$.

思考 思考 不作业

P83 1(3)(8) P84 3.4.(6).(13), (16)

三. n阶常系数线性方程

(#) $x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_nx = f(t)$

$f(t)=0$ 齐次 $f(t)\neq 0$, 非齐次

(C) $L_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

(C)为(#)的特征方程. $L_n(\lambda)$ 为n次特征多项式

$L_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\underbrace{(\lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1})}_{L_{n-1}(\lambda)}$

定理3.1 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是(C)的s个特征根. 对应重数为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 且 $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$, 则齐次方程的 n 个值函数可以表示为:

$x(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i t} p_i(t)$, 其中 $p_i(t)$ 是任意 n_i-1 次多项式

证: 用归纳法证. 特别地 n=2.

假设 $n-1$ 阶方程的数值函数都可以表示.

$L_n(\lambda) = L_{n-1}(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_1)$, 其中 λ_1 为(C)的一个特征根

$0 = L_n(D)x = L_{n-1}(D)(D-\lambda_1)x$, 其 $D=\frac{d}{dt}$

$L_{n-1}(\dot{x} - \lambda_1 x) = 0$.

$\dot{x} - \lambda_1 x = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i t}\,\widetilde{p_i(t)}$, 其中 $\widetilde{p_i(t)}$ 为 n_i-1 次多项式

$\dot{x} - \lambda_2 x = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_2(t)}\,\widetilde{p_i(t)}$, 则 $\widetilde{p_i(t)}$ 为 n_i-2 次多项式 (i≠1) (i≠2)

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

$$(\lambda_2-\lambda_1)x=\sum_{i=1}^{s}e^{\lambda_i t}\left(\overline{p_i(t)}-p_i(t)\right)$$

$$x(t)=\sum_{i=1}^{s}e^{\lambda_i t}\cdot\frac{\overline{p_i(t)}-p_i(t)}{\lambda_2-\lambda_1}$$

定理 3.2，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 (c) 特征根(实)，$n_1,\cdots,n_s$ 为其重数

$\alpha_1\pm i\beta_1,\cdots,\alpha_p\pm i\beta_p$ 为 (c) 特征复根，$m_1,\cdots,m_p$ 为其重数

$\sum n_i+2\sum m_i=s$，则方程通解为

$$x(t)=\sum_{i=1}^{s}e^{\lambda_i t}p_i(t)+\sum_{i=1}^{p}e^{\alpha_i t}\left[\underbrace{M_i(t)}_{\text{任意 } m_i-1 \text{ 次实系数多项式}}\cos\beta_i t+N_i(t)\sin\beta_i t\right]$$

参考非齐次方程(#)的解

$$x(t)=x_1(t)+x^*(t)$$

$$x^*(t)=\int_0^t k(t-s)f(s)\,ds$$

$$C(P)\begin{cases}k^{(n)}(t)+a_1k^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nk(t)=0\\ k(0)=0,\ k'(0)=0,\cdots,k^{(n-2)}(0)=0,\ k^{(n-1)}(0)=1\end{cases}$$

例① 求解 $x^{(4)}+2\ddot{x}+x=0$.

$x^{(4)}+2\ddot{x}+x=t$

回 $e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ te^t\cos t,\ te^t\sin t$ 构造方程，然后分量法

四. 运算法求特解

$D=\frac{d}{dt}$，$\dot{x}(t)=f(t)$，令 $\frac{1}{D}=\int_0^t dt=D^{-1}$

~~$Dx(t)=D\int f$~~ 则 $x^*(t)=\frac{1}{D}f(t)$

$P_n(D)x=f(t)$，其中 $P_n(\lambda)$ 为关于 λ 的 n 次多项式

$$x^*=\frac{1}{P_n(D)}f(t)$$

性质: 1° $\frac{1}{P(D)}[C_1 f(t)+C_2 g(t)]=C_1\frac{1}{P(D)}f(t)+C_2\frac{1}{P(D)}g(t)$

2° $P(D)=P_1(D)P_2(D) \Rightarrow \frac{1}{P(D)}=\frac{1}{P_1(D)}\frac{1}{P_2(D)}$

3°. $\frac{1}{P(D)}\cos\beta t=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\right\}$.

$\frac{1}{P(D)}\sin\beta t=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\right\}$

运算公式:

1° $P(\lambda)\neq 0$. $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t}$

2° 若 $P(-\beta^2)\neq 0$, $\frac{1}{P(D^2)}\sin\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\sin\beta t$, $\frac{1}{P(D^2)}\cos\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\cos\beta t$

$\frac{1}{P(D^2)}\left[\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}\right]$

P95, 1(1)(2)(3) P96 3.(1), 7,

3°. $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f(t)=e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$

证: 对 $P(D)$ 的次数归纳

1° 当 $n=1$ 时 $P(D)=D-a$,

$(D-a)\left[e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)+e^{\lambda t}D\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$

$-a_1 e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$

$=e^{\lambda t}[\lambda+D-a_1]\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)=e^{\lambda t}f(t)$

2° 当 $n-1$ 时成立, $P_n(D)=P_{n-1}(D)\cdot P_1(D)$

$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f(t)=\frac{1}{P_1(D)}\frac{1}{P_{n-1}(D)}\cdot e^{\lambda t}\cdot f(t)=\frac{1}{P_1(D)}\cdot e^{\lambda t}\frac{1}{P_{n-1}(D+\lambda)}\cdot f(t)$

$=e^{\lambda t}\frac{1}{P_1(D+\lambda)}\frac{1}{P_{n-1}(D+\lambda)}\cdot f(t)=e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$

No.

Date.

例：求解 $(D^4-4D^3+6D^2-4D+1)x(t)=(t+1)e^t$.

$$(D-1)^4 x(t)=(t+1)e^t$$

$$x(t)=x_1(t)+x^*(t) \qquad (\lambda-1)^4=0.$$

则通解：$x_1(t)=(C_1+C_2t+C_3t^2+C_4t^3)\cdot e^t$.

特解 $x(t)=\frac{1}{(D-1)^4}e^t(t+1)$

$$=e^t\cdot\frac{1}{D^4}(t+1)$$

$$=e^t\left(\frac{t^5}{5!}+\frac{t^4}{4!}\right)$$

例：$\frac{1}{D-a}f(t)$ ~~$=e^{at}\int e^{at}\cdot f(t)\,dt$~~

$$=\frac{1}{D-a}e^{at}e^{at}f(t)$$

$$=e^{at}\cdot\frac{1}{D}e^{-at}f(t)$$

$$=e^{at}\cdot\int e^{-as}f(s)\,ds$$

例. $\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{1}{D}(e^{at}\sin bt)=e^{at}\frac{1}{D+a}\sin bt$

$$=e^{at}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{D+a}\cdot e^{ibt}\right\}$$

$$=e^{at}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{a+ib}e^{ibt}\right\}$$

$$=e^{at}\left\{\frac{a-ib}{a^2+b^2}(\cos bt+i\sin bt)\right\}$$

$$=e^{at}\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos bt+\frac{b}{a^2+b^2}\sin bt\right)$$

例：若 $P(\lambda)=0$, $P(D)=(D-\lambda)^s g(D)$, $g(\lambda)\neq 0$.

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{(D-\lambda)^s}\cdot\frac{1}{g(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{(D-\lambda)^s}\cdot\frac{1}{g(\lambda)}e^{\lambda t}$$

$$=\frac{1}{g(\lambda)}\frac{1}{(D-\lambda)^s}e^{\lambda t}=\frac{1}{g(\lambda)}\cdot e^{\lambda t}\cdot\frac{1}{D^s}\cdot 1=\frac{1}{g(\lambda)}\cdot e^{\lambda t}\cdot\frac{1}{s!}\cdot t^s$$

4°. $f_k(t)\to k$次多项式 $\qquad \frac{1}{P(D)}f_k(t)=Q_k(D)f_k(t)$

其中满足 $1=P(\lambda)\cdot Q_k(\lambda)+R_{k+1}(\lambda)$，$R_{k+1}(\lambda)$表示最低次数为$k+1$的多项式

No.
Date.

设: $I = P(D)Q_k(D) + R_{k+1}(D)$

$f_k(t) = P(D)Q_k(D)\, f_k(t) + \underline{R_{k+1}(D)\cdot f_k(t)} = 0$

例: 求解 $(D^3-D)x=t$.

$x = x_1 + x^*(t)$ $\qquad \lambda^3-\lambda=0 \qquad \lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1.$

$\therefore\ x_1 = C_1 + C_2\cdot e^{t} + C_3\cdot e^{-t}$

$x^*(t) = \frac{1}{D^3-D}\,t = -\frac{1}{D}\frac{1}{1-D^2}\,t = -\frac{1}{D}(1+D^2+D^4+\cdots)\,t$

$= -\frac{1}{D}\cdot t = -\frac{t^2}{2}$

例 $(D^2+2D+1)x = t^2$

中间解 $x = \frac{1}{(D+1)^2}\,t^2$

$= \cancel{\frac{1}{(D+1)}\cdot(1-D+D^2)\,t^2}$

$= (1-D+D^2)(1-D+D^2)\,t^2$

$= t^2 - 2Dt^2 + 3D^2t^2$

$= t^2 - 4t + 6$

例. $(D^2+1)\,x(t) = t\,e^{t}\cdot\sin t$

中间解 $x(t) = \cancel{\frac{1}{(D+1)}\,\mathrm{Im}\,t\cdot e^{it}}$

$= \frac{1}{(D+1)^2}\,t\cdot e^{t}\cdot\sin t$

$= e^{t}\cdot\frac{1}{1+(D+1)^2}\cdot t\sin t$

$= e^{t}\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+D^2+2D+2}\cdot t\cdot e^{it}\right)$

$= e^{t}\,\mathrm{Im}\left\{e^{it}\,\frac{1}{(D+i+1)^2+1}\cdot t\right\}$

$= e^{t}\,\mathrm{Im}\left\{e^{it}\cdot\left(\frac{1}{1+2i+2(1+i)D+D^2}\,t\right)\right\}$

$= e^{t}\,\mathrm{Im}\left\{e^{it}\cdot\left(\frac{1}{1+2i} - \frac{2(1+i)}{(1+2i)^2}D+\cdots\right)t\right\}$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

Date.

第三章、常变系数线性方程组

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad \vec{x} = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} = (a_{ij}(t))_{n\times n}$$ 矩阵函数 (不是行列式)

$A(t) = A$ 常系数

$\vec{f}(t) \equiv 0$ 齐次方程组

$n=1$. $\frac{dx}{dt} = ax + f(t)$

$$x = Ce^{at} + \int_0^t a^{e(t-s)} f(s)\,ds$$

$n>1$ 时 $\vec{x}(t) = ?$

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 = f(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a_2 x - a_1 y + f(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

特征方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \vec{x}(t) = C\cdot e^{At}$$

1. 基本概念、工具

1° $A(t)$, $\vec{f}(t)$ 连续性、可导性、可积性.

$$\dot{A}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = (\dot{a}_{ij}(t))$$

2° $\int_\alpha^\beta A(t)\,dt = \left(\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)\,dt\right)_{n\times m}$

3° $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$

No.

Date.

T21 $\left([A(t)]^2\right)' = A'(t)A(t) + A(t)A'(t)$

4°. $\frac{d}{dt}(A^{-1}(t)) = ?$

$A(t)A^{-1}(t) = I$. $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

则 $A'(t)\cdot A^{-1}(t) + A(t)\cdot (A^{-1}(t))' = 0$

$A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)$

5°. 向量范数. 矩阵范数

定义 $\|\cdot\|$, 在 R^n 中满足如下性质,

1° $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in R^n$.

2° $\|\lambda\cdot\vec{x}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$, $\lambda \in R$, $\vec{x} \in R^n$.

3° $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$

则称之为 R^n 中的范数.

T21. (A). $\|\vec{x}\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 1-范数

(B). $\|\vec{x}\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 2-范数

(C) $\|\vec{x}\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ p-范数

(D) $\|\vec{x}\|_\infty \triangleq \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i|\}$, ∞-范数

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2$, $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$

性质. (2). R^n 中的范数均是等价的, 即 $C_1\|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_A \leq C_2\|\cdot\|_B$

其中 $C_{1,2} > 0$, $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$ 均为 R^n 中的范数

~~$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ 在 $\|\vec{x}\|_2$~~

HW P 103 1,3,5

No.

Date.

设$\|\cdot\|$是$\mathbb{R}^n$中任意范数. 证明 $f(x)=\|x\|$ 在$\mathbb{R}^n$关于$\|\cdot\|_2$是连续的, 连续函数$f(x)$在$\|x\|_2=1$可取到最大值.

$$\begin{cases} \forall \vec{y}\in\mathbb{R}^n,\ \vec{y}\neq\vec{0},\ \dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_2}\in\{\|\vec{x}\|_2=1\} \\ m\le f\left(\dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|_2}\right)\le M \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\forall\{\vec{x}_m\}\subset\mathbb{R}^n$, $\|\vec{x}_m-\vec{x}_0\|_2\to 0$ $(n\to+\infty)$.

要证 $|f(\vec{x}_n)-f(\vec{x}_0)|\to 0$ $(n\to\infty)$

$|f(\vec{x}_n)-f(\vec{x}_0)|=\big|\|\vec{x}_n\|-\|\vec{x}_0\|\big|\le\|\vec{x}_n-\vec{x}_0\|$

$\vec{x}_m=x_m^1\vec{e}_1+x_m^2\vec{e}_2+\cdots+x_m^n\vec{e}_n$, $\vec{x}_0=x_0^1\vec{e}_1+\cdots+x_0^n\vec{e}_n$

$$\|\vec{x}_m-\vec{x}_0\|=\left\|\sum_{j=1}^n(x_m^j\vec{e}_j-x_0^j\vec{e}_j)\right\|$$

$$\le\sum_{j=1}^n|x_m^j-x_0^j|\,\|\vec{e}_j\|$$

$$\triangleq\langle\vec{u}_m,\vec{E}\rangle$$

其中 $\vec{u}_m=(\cdots,x_m^j-x_0^j,\cdots)^T$

$\vec{E}=(\cdots\|\vec{e}_j\|,\cdots)^T$

$\langle\vec{u}_m,\vec{E}\rangle\le\|\vec{u}_m\|_2\cdot\|\vec{E}\|_2$

而$\|\vec{u}_m\|_2\to 0$, $\|\vec{E}\|_2$有界

以向量范数诱导出定义矩阵范数

对任$\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|A\|\triangleq\sup_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\\ \vec{x}\neq\vec{0}}}\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$\|A\|$称为矩阵范数

① $\|A\vec{x}\|\le\|A\|\cdot\|\vec{x}\|$

Date.

① $\|A\| = \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$

一方面. $\|A\vec{x}\| \le \|A\|\|\vec{x}\| = \|A\|$ $\forall \|\vec{x}\|=1$

$\sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\| \le \|A\|$

另一方面. $\forall \vec{y} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$, $\left\|A\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right\| \le \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$

由$\vec{y}$的任意性. 从而 $\|A\| \le \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$

例 $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ $\boxed{(1\text{-范})}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \left\{\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right\}$

证 ⑤ $\|A\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \left\{\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|\right\}$

$\le \max\limits_{1\le i\le n} \left\{\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\cdot|x_j|\right\}$

$\le \max\limits_{1\le i\le n} \left\{\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right\} \max\limits_{1\le i\le n} \left\{|x_i|\right\}$

$\|A\|_\infty = \sup\limits_{\substack{\|\vec{x}\|\in\mathbb{R}^n \\ \|\vec{x}\|\neq 0}} \frac{\|A\vec{x}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} = \max\limits_{1\le i\le n} \left\|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right\| \ge \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

限定$\|\vec{x}\|_\infty = 1$

$\vec{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T \in \{\|\vec{x}\|_\infty = 1\}$

令 $x_j^k = \begin{cases} 1, & a_{ij} \ge 0 \\ -1, & a_{ij} < 0 \end{cases}$

③ $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

$\|AB\vec{x}\| \le \|\vec{A}\| \cdot \|B\vec{x}\| \le \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \|\vec{x}\|$

$\frac{\|AB\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|$

$\Rightarrow \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

④ $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$

$\|A\vec{x}\|_2^2 = \langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle$

$= \langle A^TA\vec{x}, \vec{x} \rangle$

$\le \|A^TA\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{x}\|_2$

$\le \|A^T\|_2 \cdot \|A\vec{x}\|_2 \cdot \|\vec{x}\|$

$\Rightarrow \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} \le \|A^T\|_2$

$\Rightarrow \|A\|_2 \le \|A^T\|_2$

⑤ $\left\| \int_\alpha^\beta A(s)\, ds \right\| \le \left| \int_\alpha^\beta \|A(s)\|\, ds \right|$

△ e^{At} 的定义与性质

$e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}$

幂级数 函数项级数性质推广

$\{S_n\} \to D, (n \to +\infty)$ $\|S_{n-1}\| \to 0 \ (n \to +\infty)$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} A_j$ (部分和)

$\sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)$

$$\left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k t^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{m}\frac{\|A^k\cdot t^k\|}{k!} \le \sum_{k=0}^{m}\frac{\|A^k\|\,\|t^k\|}{k!} \le e^{\|A\|\cdot\|t\|}$$

由Mlf-W定理. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$ 在$(-\infty,+\infty)$上内闭一致收敛.

$$A\int_0^t e^{As}\,ds = A\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k s^k}{k!}\,ds = A\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t \frac{A^k s^k}{k!}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= e^{At}-I$$

① $\frac{d}{dt}e^{At} = A\cdot e^{At} = e^{At}\cdot A$

② $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

$\Leftrightarrow e^{At}\cdot e^{-At} = I,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$$\frac{d}{dt}(e^{At}e^{-At}) = A\cdot e^{At}\cdot e^{-At} + (-A)\cdot e^{At}\cdot e^{-At}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow e^{At}\cdot e^{-At} = C$

令$t=0$ 则 $C = I$

③ $(CP)\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}\\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0\end{cases}$ 一阶在$(-\infty,+\infty)$上的唯一解.

$$e^{-At}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} - Ae^{-At}\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}\cdot\vec{x}(t)) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-At}\cdot\vec{x}(t) = \vec{C} \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{At}\cdot\vec{C}$$

而 $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$

$\therefore \vec{x}(t)=e^{At}\cdot e^{-At_0}\cdot\vec{x}_0$

设 $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ 是 (CP) 的解

$\vec{x}(t)-\vec{y}(t)$ 也是 (CP) 的解

$\vec{x}(t_0)-\vec{y}(t_0)=0$

$\vec{x}(t)\equiv y(t)$

$\vec{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\cdot\vec{x}_0=e^{At}\cdot e^{-At_0}\cdot\vec{x}_0$

⑥ $e^{A(t+s)}=e^{At}\cdot e^{As}$

推论: ① "上范数" "2-范数"

P16 习题 1.

$$(CP)\begin{cases}\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\\ \dfrac{d\vec{x}}{dt}-A\vec{x}=\vec{f}(t)\end{cases}$$

$$e^{-At}\frac{d\vec{x}}{dt}-e^{-At}A\vec{x}=e^{-At}\vec{f}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\cdot\vec{x}(t)\right)=e^{-At}\vec{f}(t)$$

$$e^{-At}\vec{x}(t)-e^{-At_0}\vec{x}_0=\int_{t_0}^{t}e^{-As}\vec{f}(s)\,ds$$

$$\vec{x}(t)=\underbrace{e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t-t_0}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)\,ds}_{\text{非齐次方程的特解}}$$ 常数变易法

唯一性: 假不妨设 $\vec{y}(t)$ 是 (CP) 的解. $\vec{x}(t)-\vec{y}(t)$ 也是齐次方程的

$\Rightarrow \vec{x}(t)-\vec{y}(t)=\vec{0}$

Date.

e^{At} 的计算 $\qquad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

T24. ① $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

$$e^{At} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t})$$

② $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & & \\ & e^{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{A_s} \end{pmatrix}$

③ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\lambda I - A| = 0$, $\lambda = \pm i$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$AP = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$A(\vec{\beta}_1 \ \vec{\beta}_2) = (\vec{\beta}_1 \ \vec{\beta}_2) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\vec{\beta}_1 = i\vec{\beta}_1 \\ A\vec{\beta}_2 = -i\vec{\beta}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{\beta}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\therefore ③: e^{At} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

(4) $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}t^k}{k!}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right)t=e^{\lambda t}\cdot t$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & e^{\lambda t}\cdot t\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

(5) $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}=\lambda I+B$

$$e^{At}=e^{(\lambda I+B)t}=e^{\lambda It}\cdot e^{Bt}$$

$$=e^{\lambda t}\cdot e^{Bt}=e^{\lambda t}\left[I+Bt+\frac{1}{2!}B^2t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}B^{n-1}t^{n-1}\right]$$

$$\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\\ & e^{\lambda t} & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\\ & & & \ddots & te^{\lambda t}\\ & & & & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

$\vec{x}(t)=e^{At}\cdot e^{-At}\cdot\vec{x}=e^{At}\cdot\vec{c}$ (通解形式)

$P^{-1}AP=J$

$A=PJP^{-1}$

$\vec{x}(t)=Pe^{Jt}\cdot P^{-1}\vec{c}$

No.

Date.

(若可对角化)

$$\vec{x}(t)=Pe^{Jt}\underbrace{P^{-1}\vec{c}}_{\vec{c}}=Pe^{Jt}\cdot\vec{c}=C_1e^{\lambda_1 t}\vec{p_1}+C_2e^{\lambda_2 t}\vec{p_2}$$

例 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y\\ \frac{dy}{dt}=y.\end{cases}$ $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$ 则 $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A(\vec{p_1},\vec{p_2})=(\vec{p_1},\vec{p_2})\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

$(A-2I)\vec{p_1}=\vec{0}$, $(A-I)\vec{p_2}=0$

$\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$

$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^2&0\\0&e\end{pmatrix}\vec{c}=\ldots$

若A可对角化,

则 $\lambda_1\cdots,\lambda_n$ 为其特征值. $\vec{p_1},\vec{p_2},\cdots,\vec{p_n}$ 为特征向量

则 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ 的通解可表示为

$$\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{\lambda_i t}\vec{p_i},\quad C_i\in R$$

例 $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$, $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$ $\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{\lambda_i t}\vec{p_i}, C_i\in R$

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=-1$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

例. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

实值通解 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} (\vec{p_1}\ \vec{p_2}) \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

例: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 1$

$(A - I)\vec{p_1} = \vec{0}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{p_1} = \vec{0}$

$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}(t) = P e^{Jt} \cdot \vec{C}$

$(\vec{p_1}, \vec{p_2}) \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

$= C_1 \cdot e^t \vec{p_1} + C_2 e^t [t\vec{p_1} + \vec{p_2}]$, $C_{1,2} \in \mathbb{R}$

一般地, $P^{-1}AP = J$

其中 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ $P = (P_1, \cdots, P_s)$

$P_i = (\vec{p_{i1}}, \cdots, \vec{p_{in_i}})$ $J_i \sim n_i \times n_i$ 块

$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$

Date.

$$A(P_1, P_2 \cdots, P_{i}) = (P_1, \cdots, P_{i}) J.$$

$$AP_i = P_i J_i \qquad \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$A(\vec{P_{i1}}, \cdots, \vec{P_{in_i}}) = (\vec{P_{i1}}, \cdots, \vec{P_{in_i}})$$

$$\begin{cases} A\vec{P_{i1}} = \lambda_i \vec{P_{i1}} \\ A\vec{P_{i2}} = \lambda_i \vec{P_{i2}} + \vec{P_{i1}} \\ \vdots \\ A\vec{P_{in_i}} = \lambda_i \vec{P_{in_i}} + \vec{P_{in_{i-1}}} \end{cases}$$

$$(A - \lambda_i)\vec{P_{i1}} = 0$$

$$\vdots$$

$$(A - \lambda_i I)\vec{P_{in_i}} = \vec{P_{in_{i-1}}}$$

$$x(t) = P e^{Jt} \vec{c}$$

$$= (\cdots P_i \cdots) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & e^{J_i t} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= (\cdots \vec{P_{i1}}, \vec{P_{i2}}, \cdots, \vec{P_{in_i}} \cdots) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}e^{\lambda_i t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ c_{i1} \\ \vdots \\ c_{in_i} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \Big\{ c_{i1} e^{\lambda_i t} \vec{P_{i1}} + c_{i2} e^{\lambda_i t} \left[t\vec{P_{i1}} + \vec{P_{i2}} \right]$$

$$+ \cdots + c_{in_i} e^{\lambda_i t} \left[\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \vec{P_{i1}} + \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \vec{P_{i2}} + \cdots P_{in_i} \right] \Big\}$$

~~特~~ 解析函数多项式

~~特~~ Re

若 $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \le \alpha$, $\forall i = 1, 2, \cdots, s$

$\|e^{-\alpha t} \cdot \vec{x}(t)\| \le M$, $\forall t \in [t_0, +\infty)$

$\|\vec{x}(t)\| \le M e^{\alpha t}$

在此条件下 $\|\vec{x}(t)\| \to 0$ $(t \to +\infty)$

$\Updownarrow$

① $\forall \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$

② $\|\vec{x}(t)\|$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界

$\Updownarrow$

$\forall \mathrm{Re}\{\lambda_i\} \le 0$. 且 "=" 保证行列式之 Jordan 块阶数为 1

作业: P46 2 6 不写

P138 1 (1) (3) (3.)

复习: $X(t) = e^{At} \cdot \vec{c} = P e^{Jt} \cdot \vec{c}$

1° 上述方程组的一切解 $\vec{x}(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{Re}\lambda(A) < 0$.

2° —— 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界 $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{Re}\lambda(A) \le 0$ 且 Jordan 块阶数为 1

3° —— 存在无界解于 $(t_0, +\infty)$ 上 $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{Re}\lambda(t) > 0$ 或 Jordan 块阶数 ≥ 2

例. 设 $\varphi(t)$ 是线性方程组 $\dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \vec{f}(t)$ 的一组解. 其中 $A = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

试确定参数 α 的条件使得上述方程组的每个解一解.

1° $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| \to 0$, $(t \to +\infty)$

2° $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\| \le M$, $\forall t \in [t_0, +\infty)$

3° $\|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\|$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上无界

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & & \\ & & \\ & & e^{-Jt} \end{pmatrix}$$

No.

Date.

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$

$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & \hat{a}(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\lambda_{1,2} = -1 < 0$ 并不保证 $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\vec{x}(t)\| = 0$.

$\begin{cases} \dot{x} = -x + a(t)y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ 取 $a(t) = e^{2t}$，则不一定有 $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\vec{x}(t)\| = 0$.

对于 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$ 变系数

三. (CP) $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$，其中 $\vec{f}(t)$, $A(t)$ 均是 (α,β) 上的连续向量(矩阵)值函数

则解在 (α,β) 上是存在且唯一的.

(一) 设 $\vec{x}(t)$ 是 (CP) 的在 (α,β) 上的解.

(I) $\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}(s) + \vec{f}(s)]\,ds$

则 $\vec{x}(t)$ 满足上述 (I)，故是 (I) 在 (α,β) 上的解.

若 $\vec{x}(t)$ 是 (I) 在 (α,β) 上的连续解，由 $A(t)$, $\vec{f}(t)$ 的连续性可知，对 (I) 两边关于 t 求导是可行的，则 $\vec{x}(t)$ 满足 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$, $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$，即 $\vec{x}(t)$ 是 (CP) 的解

$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}(s) + \vec{f}(s)]\,ds$, $t \in (\alpha,\beta)$.

(二) 构造一列向量值函数列 $\{\vec{x}_k(t)\}$, $t \in (\alpha,\beta)$

$$\begin{cases} \vec{x}_0(t) \equiv \vec{x}_0 \\ \vec{x}_1(t) \triangleq \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_0(s) + \vec{f}(s)]\,ds \\ \vec{x}_2(t) \triangleq \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_1(s) + \vec{f}(s)]\,ds \\ \vdots \\ \vec{x}_{k+1}(t) \triangleq \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_k(s) + \vec{f}(s)]\,ds \end{cases}$$

(逐次逼近法)

皮卡序列

(三) 证明 $\{\vec{x}_k(t)\} \rightrightarrows x^*(t)$ 内闭一致收敛

即证明 $\vec{x}_0 + \vec{x}_1(t) - \vec{x}_0 + \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t) + \cdots + \vec{x}_{k+1}(t) - \vec{x}_k(t) + \cdots$

向量值函数级数

在 (α,β) 上内闭一致收敛

设 $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$

$$\|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_0(s) + \vec{f}(s)]\, ds \right\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\|\|\vec{x}_0(s)\| + \|\vec{f}(s)\|)\, ds$$

$H \triangleq \max\limits_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$, $N \triangleq \max\limits_{t\in[a,b]} \|\vec{f}(t)\|$

$$\le \int_{t_0}^{t} (H\|\vec{x}_0\| + N)\, ds$$

$$\le (H\|\vec{x}_0\| + N)(b-a) \triangleq M$$

$$\|\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\|\vec{x}_1(s) - \vec{x}_2(s)\|\, ds$$

$$\le \int_{t_0}^{t} HM\, ds \le HM|t-t_0|$$

$$\|\vec{x}_3(t) - \vec{x}_2(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| HM|s-t_0|\, ds \le H^2 M \frac{\|t-t_0\|^2}{2}$$

$$\|\vec{x}_k(t) - \vec{x}_{k-1}(t)\| \le H^{k-1} M \frac{|t-t_0|^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\|\vec{x}_{k+1}(t) - \vec{x}_k(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| H^{k-1} M \frac{\|s-t_0\|^{k-1}}{(k-1)!}\, ds \le H^k M \frac{|t-t_0|^k}{k!}$$

No.

Date.

$$\|\vec{x}_0 + \sum_{k=1}^{m} \vec{x}_k(t) - \vec{x}_{k-1}(t)\| \le \|\vec{x}_0\| + \sum_{k=1}^{m} \|\vec{x}_k(t) - \vec{x}_{k-1}(t)\|$$

$$\le \|\vec{x}_0\| + \sum_{k=1}^{m} H^k M \frac{\|t-t_0\|^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\le \|\vec{x}_0\| + M \cdot e^{H(b-a)}$$

以上估计对任意 m 成立，因此，上述向量值函数级数在 $[a,b]$ 上一致收敛

记极限函数 $\vec{x}^*(t)$，$t\in[a,b]$，且 $\vec{x}^*(t)$ 连续.

(四). $\vec{x}_{k+1}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_k(s) + \vec{f}(s)]\,ds$.

$\downarrow\downarrow$ $\vec{x}^*(t)$ $\qquad$ $\downarrow\downarrow$ $\vec{x}^*(t)$

$$\left\|\int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_k(s) + \vec{f}(s)]\,ds - \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}^*(s) + \vec{f}(s)]\,ds\right\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\|\,\|\vec{x}_k(s) - \vec{x}^*(s)\|)\,ds \le \int_{t_0}^{t} \left(\|A(s)\| \cdot \sup_{s\in[a,b]} \|\vec{x}_k(s) - \vec{x}^*(s)\|\right) ds$$

$$\le H(b-a) \cdot \sup_{s\in[a,b]} \|\vec{x}_k(s) - \vec{x}^*(s)\| \to 0 \quad (k\to+\infty).$$

故 $x^*(t)$ 是积分方程(I)在 $[a,b]$ 上的连续解

由 $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$ 的任意性，$\vec{x}^*(t)$ 仍在 (α,β) 是 (I) 的连续解.

(五) 证明唯一性

引理：设 $u(t)$，$v(t)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数. $k\ge 0$

(Gronwall不等式) $u(t) \le k + \int_a^t v(s)\,u(s)\,ds$，$t\in[a,b]$

则 $u(t) \le k\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$.

Date.

设 $y^*(t)$ 亦是积分方程 (I) 的连续解.

$$\|\vec{x}^*(t)-\vec{y}^*(t)\| \le \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \, \|\vec{x}^*(s)-\vec{y}^*(s)\| \, ds.$$

则由 Gronwall 不等式, $\|x^*(t)-y^*(t)\| \le 0$,

$\Rightarrow x^*(t)=y^*(t)$. (唯一性)

3 证明过程:

1° $k>0$. $u(t) \le k+\int_a^t v(s)u(s)\,ds$.

$$\frac{u(t)v(t)}{k+\int_a^t v(s)u(s)ds} \le v(t).$$

$$\int_a^t \frac{u(s)v(s)}{k+\int_a^s v(\xi)u(\xi)d\xi} \le \int_a^t v(s)\,ds$$

$$\int_a^t \frac{F'(s)ds}{F(s)} \le \int_a^t v(s)\,ds, \text{ 其中 } F(s) \triangleq k+\int_a^s v(\xi)u(\xi)d\xi$$

$$\ln(F(s))\Big|_a^t \le \int_a^t v(s)ds$$

$$\ln\left|k+\int_a^t v(s)u(s)\,ds\right| - \ln k \le \int_a^t v(s)ds$$

$$\ln u(t) - \ln k \le \int_a^t v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(t) \le k\cdot\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

2° $k=0$, $\{k_n\} \to 0$, $n\to\infty$. $k_n>0$.

$$u(t) \le k_n \exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

令 $n\to+\infty$ $k_n \to 0$, 则 证毕

No.

Date.

① 1° $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 2° $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

1°. $\lambda_1=1$. $\lambda_{2,3}=-1$

$\lambda_1=1$ 的特征向量 $\vec{p_1}$

$\lambda_{2,3}=-1$ 的特征向量 $\vec{p_2}$ $\vec{p_3}$ 广义特征向量.

$X(t)=C_1\cdot e^{\lambda_1 t}\vec{p_1}+C_2e^{\lambda_2 t}\vec{p_2}+C_3e^{\lambda_2 t}[t\vec{p_2}+\vec{p_1}]$

2° $\lambda_{1,2,3}=2$.

$(A-2I)\vec{p_1}=0$

$(A-2I)\vec{p_2}=\vec{p_1}$

$(A-2I)\vec{p_3}=\vec{p_2}$

若 $(A-\lambda I)\vec{p}=0$，此得 $\vec{p_1}$ $\vec{p_2}$ ，求 $\vec{p_3}$?

$(A-\lambda I)\vec{p}=\vec{p_1}/\vec{p_2}$?

$\underbrace{\alpha\vec{p_1}+\beta\vec{p_2}}$ ✓ 凑 α,β

$P=(\vec{p_1},\ \alpha\vec{p_1}+\beta\vec{p_2},\ \vec{p_3})$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

问题：对于一般的 $A(t)$，有没有显式表达公式

四、~~最~~线性方程组一般理论

1° 设 $\vec{x}(t)$，$\vec{y}(t)$ 为 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}(t)+\vec{f}(t)$ 任意两解，$\vec{x}(t)-\vec{y}(t)$ 是齐次 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}(t)$ 的解

2° 设 $\vec{x}_1(t)$，$\vec{x}_2(t)$ 是 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}(t)$ 任意两解，则 $C_1\vec{x}_1(t)+C_2\vec{x}_2(t)$ 是 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$ 的解

$S \triangleq \{\vec{x}(t) \mid x(t)$ 是 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$ 的解$\}$

记 $\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)$ 表示 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$，$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ 的解

则 $\vec{x}_0 \longrightarrow \vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)$

$\mathbb{R}^n \qquad S$ （有唯一性定理）

$\vec{x}(t,t_0,C_1\vec{x}_0+C_2\vec{y}_0) \overset{?}{=} C_1\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)+C_2\vec{x}(t,t_0,\vec{y}_0)$

表示初值 $(t_0, C_1\vec{x}_0+C_2\vec{y}_0)$ 是方程组一解，$t=t_0$，$C_1\vec{x}_0+C_2\vec{y}_0$

由唯一性定理，两者相等

3° $\mathbb{R}^n$ 与 S 同构

4° 基本解组 基本解方阵 及解的表示

设 $\vec{\varphi}_1(t),\dots,\vec{\varphi}_n(t)\in S$，$\{\vec{\varphi}_1(t),\dots,\vec{\varphi}_n(t)\}$ 称为一解组

进一步，若存在不全为0的 $C_1,\dots,C_m$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} C_i\vec{\varphi}_i(t)\equiv\vec{0},\ \forall t\in(\alpha,\beta)$$

称 $\{\vec{\varphi}_i(t)\}_{i=1}^{m}$ 线性相关于 (α,β)

若 $\sum_{i=1}^{m} c_i \vec{\varphi}_i(t) \equiv 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$, 则 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

则 $\{\vec{\varphi}_i(t)\}_{i=1}^{m}$ 是线性无关的 (相对于 (α, β) 上.

若向量组 $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{m}$ 是线性无关的, 则称其为基本解组

特别地, $m=n$ 时. $(\vec{\varphi}_1(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t))$ 一基本解方阵

记为 $\Phi(t)$.

性质1°. 线性齐次组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}(t)$ 的基本解方阵是存在的.

证明: 考虑如下 n 个初值问题.

$$(CP)_i \begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} \\ \vec{x}(t_0) = \vec{e}_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)^T \end{cases}$$ 的解为 $\vec{\varphi}_i(t)$

则若存在不全为0的 c_i, $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(t) \equiv \vec{0}$ $(t \in (\alpha, \beta))$

特别地, 令 $t = t_0$, $\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{e}_i = \vec{0}$

矛盾! $\Rightarrow c_i = 0$, $\forall i$

$(\vec{\varphi}_1(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t)) = \Phi(t)$ 是基本阵.

性质2°. $\Phi(t)$ 是基本阵 $\Leftrightarrow \det[\Phi(t)] \neq 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

证明: "$\Leftarrow$" 若 $\Phi(t)$ 是非基本阵.

存在不全为0的 c_i 使得 $\sum c_i \varphi_i(t) \equiv \vec{0}$. $\forall t \in (\alpha, \beta)$

这此得 $\det[\Phi(t)] = 0$, 矛盾.

"$\Rightarrow$" 若 $\exists t_0 \in (\alpha, \beta)$, $\det[\Phi(t_0)] = 0$

方程组 $\Phi(t_0)\vec{c} = \vec{0}$ 有非零解 $\vec{c}$

令 $\vec{y}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{c}$ 是方程 $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ 的解

且 $\vec{y}(t_0) = \Phi(t_0) \cdot \vec{c} = \vec{0}$

又 $\vec{x}(t_0) \equiv \vec{0}$ 是 $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ 的解

由存在唯一性知 $\vec{x}(t) = \vec{y}(t)$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$ 矛盾!

Date.

性质3：齐次线性方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$ 的通解可表示为 ~~$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{c}$~~

$\vec{x} = \Phi(t)\cdot\vec{c}$，其中 $\Phi(t)$ 为基本阵

证：设 $\vec{x}(t)$ 是任意一解，$\Phi(t)$ 是基本方阵，

$\vec{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$，$\Phi(t_0) = (\vec{\varphi}_1(t_0), \cdots, \vec{\varphi}_n(t_0))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基

存在 c_i，使得 $\vec{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{\varphi}_i(t_0)$

$y(t) = \Phi(t)\cdot\vec{c}$ 是解，$\vec{y}(t_0) = \vec{x}_0$

由唯一性 $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)$

性质4：$W(t) = \det[\Phi(t)]$，Wronski 行列式

Liouville公式 $W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\,ds\right)$

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \dot{\varphi}_{i1}(t) & \dot{\varphi}_{i2}(t) & \cdots & \dot{\varphi}_{in}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$\Phi(t)$ 满足的矩阵

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{i1}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{i1}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix}$$

No.

Date.

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_{i1}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,\varphi_{j1}(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\varphi}_{in}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,\varphi_{in}(t)$$

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\,W(t)$$

性质5. 设$\phi(t)$是方程组的基本解. 则$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$的解可表示为 $\vec{x}(t) = \underbrace{\phi(t)\,\phi^{-1}(t_0)}_{U(t,t_0)}\,\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\phi(t)\,\phi^{-1}(s)}_{U(t,s)}\,\vec{f}(s)\,ds.$ 状态转移矩阵

设 $\vec{x}(t) = \phi(t)\,\vec{c}(t)$.

$$\dot{\phi}(t)\,\vec{c}(t) + \phi(t)\,\dot{\vec{c}}(t) = A(t)\,\phi(t)\,\vec{c}(t) + \vec{f}(t)$$

$$A(t)\,\phi(t)\,\vec{c}(t) + \phi(t)\,\dot{\vec{c}}(t)$$

$$\Rightarrow \phi(t)\,\dot{\vec{c}}(t) = \vec{f}(t)$$

$$\dot{\vec{c}}(t) = \phi^{-1}(t)\,\vec{f}(t)$$

$$\therefore \vec{c}(t) = \vec{c} + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds.$$

$$\vec{x}(t) = \phi(t)\cdot\vec{c} + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\,\phi^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds$$

由$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$代入 $\vec{c} = \phi^{-1}(t_0)\,\vec{x}_0$

转移矩阵 $U(t,s)$ 的性质:

(a) $U(t,t) = I$

(b) $U(t,p)\,U(p,s) = U(t,s)$

(c) $\frac{d}{dt}U(t,s) = A(t)\,U(t,s)$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

Date.

题6、设$\Phi(t)$, $\Psi(t)$ 均为齐次线性方程组的基解方阵，则存在非奇异常数矩阵 H，s.t. $\Phi(t)=\Psi(t)\cdot H$

即要证：$\Psi^{-1}(t)\Phi(t)\equiv H$. $\forall t\in(\alpha,\beta)$.

对 t 求导

$$-\Psi^{-1}(t)\underbrace{\frac{d\Psi(t)}{dt}}_{A(t)\Psi(t)}\Psi^{-1}(t)\Phi(t)+\Psi^{-1}(t)\underbrace{\frac{d\Phi(t)}{dt}}_{A(t)\Phi(t)}$$

$=0$.

$H=\Psi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)$ 非奇异

$$U(t,s)=\Phi(t)\Phi^{-1}(s)=\Psi(t)H\cdot H^{-1}\Psi^{-1}(s)=\Psi(t)\Psi^{-1}(s)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0$$

$$\vec{x}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}_0$$

$$e^{A(t-t_0)}=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$$

$$e^{At}=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)$$

通过首次积分求与 $\Phi(t)$，$\vec{x}(t)=\Phi(t)\vec{c}$

No.

Date.

1° $e^{At} = \underbrace{\phi(t)\phi^{-1}(0)}_{\text{计算公式}}$ $\quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. $\vec{x}(t) = \phi(t)\vec{c}$

2° $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$\vec{u}_{1,2} = \vec{p}_1 \pm i\vec{p}_2$

$$\begin{pmatrix} \overline{x(t)} \\ \overline{y(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{e^{\alpha t}(p_1, p_2)\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2}\vec{u}_2$$

3°. 设 $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为基本解矩阵.

求 (1) $A(t)$ (2) $U(t,s)$ (3) $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{x}(0) = (1,1) \end{cases}$, $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt}\phi(t) = A(t)\phi(t)$

$$\begin{pmatrix} e^t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos t - \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U(t,s) = \phi(t)\phi^{-1}(s)$

4° $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t)$ 二阶线性非齐次方程

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-q(t)x-p(t)y+f(t) \end{cases}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\phi(t)\cdot\vec{c}+\int_{t_0}^{t}\phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$$

其中 $\phi(t)$ 为对应齐次方程组一基本方阵 $\phi(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{x}_2(s) & -x_2(s)}{-\dot{x}_1(s) & x_1(s)} \\ W(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix}ds$$

$$x(t)=\underbrace{c_1x_1(t)+c_2x_2(t)}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\frac{\begin{vmatrix} x_1(s) & x_2(s) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}}{W(s)}f(s)\,ds}_{\text{非齐次方程通解}}$$

→ 接着写

5° $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}-2x=t$, $s=\ln|t|$

设 $x_1(t)=t^2$, $x_2(t)=\frac{1}{t}$ 是方程的解

已知其中一个解，求另一个无关解

刘维尔式：$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}-p(s)\,ds\right)$

$$x_1(t)\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)x_2(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}-p(s)\,ds\right)$$

Date.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)=\frac{W(t_0)}{x_1^2(t)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}-p(s)\,ds\right).$$

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)}=C+\int_{t_0}^{t}\frac{W(t_0)}{x_1^2(s)}\exp\left(\int_{t_0}^{s}-p(\xi)\,d\xi\right)ds.$$

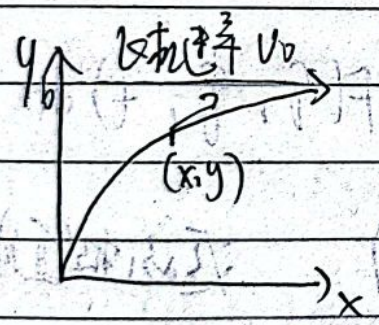
$$x_2(t)=Cx_1(t)+x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W(t_0)}{x_1^2(s)}\exp\left(\int_{t_0}^{s}-p(\xi)\,d\xi\right)ds$$

$$\cancel{x_2(t)=x_1(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{\exp\left(\int_{t_0}^{s}-p(\xi)\,d\xi\right)}{x_1^2(s)}\,ds}$$

$(t-1)\ddot{x}-t\dot{x}+p(t)x=0$ 有基本解 t 和 $\varphi(t)$，求 $p(t)$ 及 $\varphi(t)$.

五：二阶线性齐次方程 m 也值问题

十到



导弹速度 v_1 坐标 (x,y).

建立方程描述 导弹追踪的轨迹

$$\begin{cases}Y-y=\dfrac{dy}{dx}(X-x)\\ b-y=\dfrac{dy}{dx}(x_0+v_0t-x)\end{cases}$$

$$(b-y)\frac{dx}{dy}=x_0+v_0t-x$$

对 t 求导 $-\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dy}+(b-y)\cdot\underbrace{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}_{(b-y)\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dt}}=v_0-\dfrac{dx}{dt}$

No.

Date.

$$(b-y)\cdot\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dt}=v_0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=v_1^2$$

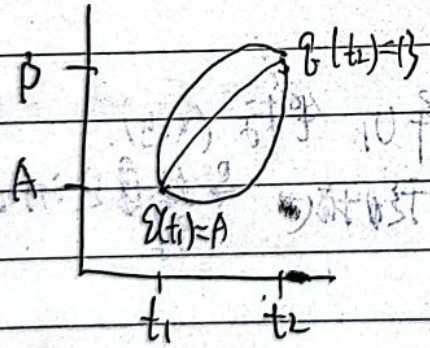
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]=v_1^2$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$$

$$(b-y)\cdot\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}=v_0$$

边值问题
$$\begin{cases}x(0)=0 & x(b)=v_0T\end{cases}$$

例 5.2



$$I(q)=\int_{t_1}^{t_2}F(q,\dot q,t)\,dt$$

$$\min_q I(q)$$ 泛函极值问题

$I(q+\alpha\eta)$，其中 $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$

$$0=\frac{d}{d\alpha}I(q+\alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2}F(q+\alpha\eta,\dot q+\alpha\dot\eta,t)\,dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\eta+\frac{\partial F}{\partial\dot q}\dot\eta\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\eta+\frac{\partial F}{\partial\dot q}\dot\eta+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot q}\eta\right)\right]$$

Date.

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)\eta\Big]dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)\right]\eta\, dt = 0$$

边值问题 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)=0\\ q(t_1)=A,\quad q(t_2)=B\end{cases}$

边值问题.

$$\begin{cases}x''+p(t)x'+q(t)x=f(t)\\ x(a)=A \quad x(b)=B.\end{cases}$$

$A=B=0$. 齐次边界条件

$f(t)=0$, $A=B=0$. 齐次方程齐次边值问题

$$\begin{cases}x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+x^*(t)\\ x(a)=C_1x_1(a)+C_2x_2(a)+x^*(a)=A\\ x(b)=C_1x_1(b)+C_2x_2(b)+x^*(b)=B\end{cases}$$

1° $\det\begin{pmatrix}x_1(a) & x_2(a)\\ x_1(b) & x_2(b)\end{pmatrix}\neq 0$. 边值问题唯一解

2° $\det\begin{pmatrix}\cdots\end{pmatrix}=0$. $\begin{cases}\text{无数解}\\ \text{无解}\end{cases}$

Date.

先求出方程的两个特解

$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$

(C1) $\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0 \\ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0. \end{cases}$ (C2) $\begin{cases} \text{———} \\ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=1 \end{cases}$

$\hookrightarrow x_1(t)$ $\hookrightarrow x_2(t)$

期中复习

No.

Date.

Chapter 0.

(CP) $\begin{cases} \frac{dN}{dt}=\lambda N \\ N(t_0)=N_0 \end{cases}$ 进行坐标变换，令 $T=t-t_0$，$F=N(t+t_0)$，则变为 (CP) $\begin{cases} \frac{dF(T)}{dt}=F(T) \\ F(0)=N_0. \end{cases}$

Chapter 1.

分离变量法. 1. $\frac{dx}{dt}=f(\frac{x}{t})$. 令 $u=\frac{x}{t}$，$x=ut$，$\frac{du}{dt}=\frac{f(u)-u}{t}$

2. $\frac{dx}{dt}=f(at+bx+c)$ 令 $y=at+bx+c$.

3. $\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$，令 $\begin{cases} a_1v+b_1u=a_1t+b_1x+c_1 \\ a_2v+b_2u=a_2t+b_2x+c_2 \end{cases}$

若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，化为2中情形. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$. 则令 $\frac{a_2}{a_1}=k$，$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{k(a_1t+b_1x)+c_2}\right)$，令 $y=a_1t+b_1x$

一阶线性方程 $\frac{dx}{dt}-p(t)x=Q(t)$，

1. 若 $Q(t)\equiv 0$. 则 $x(t)=Ce^{\int p(t)dt}$.

2. 若 $Q(t)\neq 0$. 则 $x(t)=e^{\int p(t)dt}\left(C+\int Q(t)e^{-\int p(t)dt}dt\right)$.

Bernoulli方程: $\frac{dx}{dt}+p(t)x=Q(t)x^k$.

1. $k=0,1$. 利用常数变易公式

2. $k\neq 0,1$. 令 $y=x^{1-k}$，$\frac{dy}{dx}=(1-k)x^{-k}\frac{dx}{dt}$，故 $\frac{dy}{dx}+p(t)(1-k)y=Q(t)(1-k)$，化为一阶线性方程

Ricatti方程 $\frac{dx}{dt}+a(t)x+b(t)x^2=c(t)$

设 $\varphi(t)$ 是一个解. 则 $\frac{d(x-\varphi(t))}{dt}+a(t)(x-\varphi)+b(t)(x^2-\varphi^2)=0$，令 $y=x-\varphi$.

则 $\frac{dy}{dt}+(a(t)+2b(t)\varphi(t))y+b(t)y^2=0$. 化为 Bernoulli 方程.

全微分方程与积分因子 $M(t,x)dt-N(t,x)dx=0$ 有解 $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$，可写为通积分 $u(t,x)=C$

积分因子: 找 $\mu(t,x)$ 满足 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$，一般可令 $\mu(t,x)=\mu(t)$

显式解法与降阶方程 1. $x=f(t,\dot{x})$ 型，引入 $p=\dot{x}$，则 $x=f(t,p)$，求导有 $p=\dot{x}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}$，关于 p 的微分方程，若解为 $p=\varphi(t,c)$，则 $x=f(t,\varphi(t,c))$

2. $t=g(x,\dot{x})$ 型. 引入 $p=\dot{x}$，则 $t=g(x,p)$，对 x 求导有 $\frac{1}{p}=\frac{dg}{dx}=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dx}$，若解得 $p=\psi(x,c)$，则 $t=g(x,\psi(x,c))$

高次方程的降阶. 1. 不显含未知函数，$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\dots,x^{(n)})=0$，引入 $y=x^{(k)}$

2. 不显含变量，$F(x,\dot{x},x^{(2)},\dots,x^{(n)})=0$. 引入 $y=\dot{x}$，则 $\ddot{x}=y\frac{dy}{dx}$，$\dddot{x}=y\cdot(\frac{dy}{dx})^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}$

3. 齐次方程. 若 $F(t,kx,kx^{(1)},\dots,kx^{(n)})=k^mF(t,x,x^{(1)},\dots,x^{(n)})$，$F(t,x,\dot{x},\dots,x^{(n)})=0$，引入 $y=\frac{\dot{x}}{x}$，$\dot{x}=yx$，则

$x^mF(t,1,\frac{\dot{x}}{x},\frac{x^{(2)}}{x},\dots,\frac{x^{(n)}}{x})=0$.

4. 全微分方程和积分因子(略)

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

Date.

(五) 常微分方程组与首次积分　例: 单摆 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$. 令 $y=\frac{d\varphi}{dt}$, 则 $\begin{cases}\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\varphi\\ \frac{d\varphi}{dt}=y\end{cases}$, 相除 $\frac{d\varphi}{dy}=-\frac{y}{\frac{g}{l}\sin\varphi}$

Chapter 2.

$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0$ 的解为 (a_1,a_2 为特征根): $x=\begin{cases}C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}, & \lambda_1\neq\lambda_2, 实\\ (C_1t+C_2)e^{\lambda_1t}, & \lambda_1=\lambda_2=\lambda, 实\\ e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t), & \lambda_1,2=\alpha\pm i\beta, 虚\end{cases}$

Euler方程 $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+ta_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0$, 令 $s=\ln|t|$, 得 $\frac{d^2x}{ds^2}+(a_1-1)\frac{dx}{ds}+a_2x=0$.

n阶常系数线性方程. $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)$

(Thm.) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 s 个实特征根, $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 为重数, $\alpha_p\pm i\beta_p,\cdots,\alpha_p\pm i\beta_p$ 为虚特征根, $m_1,\cdots,m_p$ 为重数

则实数解为 $x(t)=\sum_{i=1}^{s}e^{\lambda_it}\cdot P_i(t)+\sum_{k=1}^{p}e^{\alpha_kt}\left[M_k(t)\cos\beta_kt+N_k(t)\sin\beta_kt\right]$, 其中 $P_i(t)$ 为 n_i-1 次多项式, $M_k(t),N_k(t)$ 为 m_k-1 次多项式

运算法求特解: 性质: 1. $\frac{1}{P(D)}(C_1f(t)+C_2g(t))=C_1\frac{1}{P(D)}f(t)+C_2\frac{1}{P(D)}g(t)$; 2. $P(D)=P_1(D)P_2(D)\Rightarrow\frac{1}{P(D)}=\frac{1}{P_1(D)}\frac{1}{P_2(D)}$

3. $\frac{1}{P(D)}\cos\beta t=Re\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\}$, $\frac{1}{P(D)}\sin\beta t=Im\{\frac{1}{P(D)}e^{i\beta t}\}$

计算公式: 1. 若 $P(\lambda)\neq0$, $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t}$; 2. 若 $P(-\beta)\neq0$, $\frac{1}{P(D^2)}\sin\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\sin\beta t$, $\frac{1}{P(D^2)}\cos\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\cos\beta t$

3°. $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f(t)=e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f(t)$

Chapter 3.

$\frac{d}{dt}(A^{-1}(t))=-A^{-1}(t)\frac{d}{dt}A(t)\cdot A^{-1}(t)$

☆ 向量范数, 正实性, 齐次性, 三角性

$\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $\|\vec{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$, $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\le\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2$

向量诱导的范数 $\|A\|=\sup_{\substack{\vec{x}\in R^n\\ \vec{x}\neq0}}\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\Rightarrow\|A\|=\sup_{\|\vec{x}\|=1}\|A\vec{x}\|$

$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\}$, $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$, $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$

性质 1. $\|A\vec{x}\|\le\|A\|\|\vec{x}\|$ 2. $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$. 3. $\|A\|_2=\|A^T\|_2$ 4. $\|\int_\alpha^\beta A(s)ds\|\le\int_\alpha^\beta\|A(s)\|ds$

e^{At} 的计算 $e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}$

性质 1. $\frac{d}{dt}e^{At}=A\cdot e^{At}=e^{At}\cdot A$, $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

计算性质 1. $A=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $e^{At}=diag(e^{\lambda_1t},\cdots,e^{\lambda_nt})$. 2. $A=\begin{pmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&\ddots&\\&&&A_n\end{pmatrix}$, $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{A_1t}&&\\&e^{A_2t}&\\&&\ddots&\\&&&e^{A_nt}\end{pmatrix}$

3. $A=PJP^{-1}$. $e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$. 4. $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}$, $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}&\cdots&\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\\&e^{\lambda t}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&te^{\lambda t}\\&&&e^{\lambda t}\end{pmatrix}$

5. 方程 $\frac{d}{dt}\vec{x}=A\vec{x}$ 的解为 $\vec{x}=Pe^{Jt}\vec{c}$, 其中 $P^{-1}AP=J$

一般地, 若 $J=\begin{pmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_s\end{pmatrix}$ J_i 为 $n_i\times n_i$ 块, $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix}_{n_i}$

则 $\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^{s}\{C_{i1}e^{\lambda_it}\vec{P_{i1}}+C_{i2}e^{\lambda_it}[t\vec{P_{i1}}+\vec{P_{i2}}]+\cdots+C_{in_i}e^{\lambda_it}\underbrace{[\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{P_{i1}}+\frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\vec{P_{i2}}+\cdots+\vec{P_{in_i}}]}_{待定的广义特征向量}\}$

PS. $e^{At}=\phi(t)\phi^{-1}(0)$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

方程 $\begin{cases}\frac{d}{dt}\vec{x}=A\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ 的解为 $\vec{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)\,ds$

变次数问题：$(CP)\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ 在 (α,β) 上有唯一解.

一. 证明 $(CP)\Leftrightarrow \vec{x}(t)=\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x}(s)+\vec{f}(s)]\,ds$ 二. 构造函数列 $\vec{x_0}(t)=\vec{x_0}$, $\vec{x_1}(t)=\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x_0}(s)+\vec{f}(s)]\,ds$, ...

$\vec{x_{k+1}}(s)=\int_{t_0}^{t}[A(s)\vec{x_k}(s)+\vec{f}(s)]\,ds$ 三. 证明 $\{\vec{x_k}(t)\}\to\vec{x^*}(t)$ 内闭一致收敛. 且 $\vec{x^*}(t)$ 连续 四. 证明 $\vec{x^*}(t)$ 为方程解

五. 证明唯一性. (Gronwall 不等式)

Gronwall 不等式：$u(t),v(t)$ 非负连续，$k\geq 0$. 若 $u(t)\leq k+\int_a^t v(s)u(s)\,ds$, $\forall t\in[a,b]$. 则 $u(t)\leq k\exp(\int_a^t v(s)\,ds)$

线性方程组的一般理论

基本解组，基本解矩阵 $\phi(t)=(\vec{\varphi_1}(t),\cdots,\vec{\varphi_n}(t))$. $\phi(t)$ 基本 $\Leftrightarrow$ Wronski 行列式 $\det[\phi(t)]\neq 0$, $\forall t\in(\alpha,\beta)$

齐次线性方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\cdot\vec{x}$ 的通解为 $\vec{x}=\phi(t)\cdot\vec{c}$

Liouville 公式：设 $W(t)=\det[\phi(t)]$, 则 $W(t)=W(t_0)\cdot\exp(\int_{t_0}^{t}tr(A(s))\,ds)$.

常数变易公式：$\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\cdot\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ 的解为 $\vec{x}(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\cdot\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}\phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$

$=U(t,t_0)\cdot\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}U(t,s)\cdot\vec{f}(s)\,ds$, 其中 $U(t,s)$ 为状态转移矩阵

基本解组的不变性：设 $\phi(t),\psi(t)$ 为基本解组，则 $\exists$ 非奇异常数阵 H, s.t. $\phi(t)=\psi(t)\cdot H$

状态转移矩阵的性质：1. $U(t,t)=I$ 2. $U(t,p)U(p,s)=U(t,s)$. 3. $\frac{d}{dt}U(t,s)=A(t)U(t,s)$, 其中 $U(t,s)=\phi(t)\phi^{-1}(s)$

二阶线性方程：$\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t)$. 令 $\dot{x}=y$. 则 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A(t)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\vec{f}(t)$, 其中 $A(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-q(t)&-p(t)\end{pmatrix}$, $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}0\\f(t)\end{pmatrix}$

已知一解求另解：由 Liouville 公式 $x_2(t)=x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\exp(\int_{t_0}^{s}-p(s)\,ds)}{x_1^2(s)}\,ds$ ($x_1(t),x_2(t)$ 为齐次方程解且 $x_1(t)\neq 0$)

一. 求 e^{At}, 和方程组实值解：先求出 $\vec{p}$, 得到 $\vec{p_1}e^{\lambda_1 t},\vec{p_2}e^{\lambda_2 t},\cdots,\vec{p_n}e^{\lambda_n t}$ 为基本解组 (若可对角化) 得 $\phi(t)$, 则 $e^{At}=\phi(t)\phi^{-1}(0)$ 得实际 e^{At}

这是一个基本解矩阵. 设 e^{At} 的 n 列为 $\vec{c_1},\vec{c_2},\cdots,\vec{c_n}$. 则通解为 $\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{c_i}$

边值问题：二阶齐次线性方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 的两个解 (线性无关) 为 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$. 则方程有齐次边界条件 $y(a)=y(b)=0$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}\varphi_1(a)&\varphi_2(a)\\\varphi_1(b)&\varphi_2(b)\end{pmatrix}\neq 0$, 否则有无穷解

设 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$, $y(a)=y(b)=0$. $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 为两个线性无关解且 $\phi(a)=I$, 令 $\begin{pmatrix}\varphi_1(a)&\varphi_2(a)\\\varphi_1'(a)&\varphi_2'(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

则 当 $\varphi_2(b)\neq 0$ 时, 方程解为 $y=\int_a^b G(x,s)f(s)\,ds$,

其中 $G(x,s)=\begin{cases}k(x,s)-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}k(b,s), & a\leq s\leq x\\ -\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}k(b,s), & x\leq s\leq b\end{cases}$, 其中 $k(t,s)=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(s)&\varphi_2(s)\\\varphi_1(t)&\varphi_2(t)\end{vmatrix}}{W(s)}$

$W(s)=\begin{vmatrix}\varphi_1(s)&\varphi_2(s)\\\varphi_1'(s)&\varphi_2'(s)\end{vmatrix}$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

Date.

高阶线性微分方程

补充：二阶线性方程 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t)$ 的基本方程 $\Phi=\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t) & x_2(t)\\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}$

方程解为：$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\begin{vmatrix}x_1(s) & x_2(s)\\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{vmatrix}}{W(s)}f(s)\,ds$

二阶常系数线性齐次微分方程 $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2=f(t)$ 的解为

$$x(t)=\begin{cases}C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}+\int_0^t\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)\,ds, & \lambda_1\neq\lambda_2\text{ 实}\\ (C_1+C_2t)e^{\lambda_1t}+\int_0^t(t-s)e^{\lambda_1(t-s)}f(s)\,ds, & \lambda_1=\lambda_2\text{ 实}\\ e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)+\int_0^t\frac{e^{\alpha(t-s)}}{\beta}\sin\beta(t-s)\,f(s)\,ds\end{cases}$$

重要：1. $\frac{dx}{dt}-p(t)\cdot x=Q(t)$

2. Bernoulli方程

3. Ricatti方程

4. 高次方程的降阶

5. Euler方程

☆ 6. $\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=f(t)$

7. $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)$

8. $\frac{d}{dt}\vec{x}=A\vec{x}+\vec{f}(t)$

☆ 9. $\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t)\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$

☆ 10. Gronwall 不等式

☆ 11. Liouville 公式

☆ 12. $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=f(t)$

☆ 13. 已知上述方程的一解 $x_1(t)$，求 $x_2(t)$

14. 边值问题的解

二阶线性方程的边值问题

$$\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=f(t) \\ x(a)=A \quad x(b)=B \end{cases}$$

$A=B=0$ 齐次边值条件 $f(t)$ 齐次边值问题.

$x(t)=C_1x_1(a)+C_2x_2(a)$，$x_1(t)$、$x_2(t)$ 是对齐次方程 m 一对线解.

例 $\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=0 \\ x(a)=1 \quad \dot{x}(a)=0 \end{cases}$ $(P)_2\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)=0 \\ x(a)=0 \quad \dot{x}(a)=1 \end{cases}$

$\Downarrow$ $x_1(t)$ $\qquad$ $\Downarrow$ $x_2(t)$

$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 线性无关

齐次边值条件，$x(a)=0$，$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t) \Rightarrow C_1=0$. $x(t)=C_2x_2(t)$

所有齐次边值问题有非零解 $C_2\neq 0$

例：$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0 \\ y(0)=y(l)=0 \end{cases}$ λ 为参数

试确定参数 λ 的值，使得上述齐次边值问题有非零解.

1° $\lambda<0$，$y(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ $\cancel{y(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_1e^{-\sqrt{-\lambda}}}$ $\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=0 \\ y(l)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=C_2=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}l} & e^{\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix}$ 行

2° $\lambda=0$ $y(x)=(C_1x+C_2)$. $\begin{cases} y(0)=C_2=0 \\ y(l)=C_1l+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=C_2=0$.

3° $\lambda>0$ $y(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$ $\begin{cases} y(0)=C_1 \\ y(l)=\cancel{C_1\cos\sqrt{\lambda}l}+C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases}$

若 $\sqrt{\lambda}l=k\pi$ 时有非零解 $y=C_2\sin\sqrt{\lambda_k}x$ 其中 $\lambda=\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$

使得该边值问题的 λ 称为特征值，对应非零 y 为特征函数

例 $\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=f(t) \\ x(a)=0,\ x(b)=0. \end{cases}$

$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\int_a^t K(t,s)f(s)\,ds$，$K(t,s)=\frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_1(s) \\ x_2(t) & x_2(s) \end{vmatrix}}{W(s)}$

$0=x(a)\Rightarrow C_1=0$

$0=x(b)=C_2x_2(b)+\int_a^b K(b,s)f(s)\,ds$，$C_2=-\frac{1}{x_2(b)}\int_a^b K(b,s)f(s)\,ds$

$$X(t) = -\frac{X_2(t)}{X_2(b)}\int_a^b K(b,s)f(s)ds + \int_a^{t} K(t,s)\, f(s)\,ds$$

$$= \int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds$$

格林函数 $G(t,s) = \begin{cases} K(t,s) - \frac{X_2(t)}{X_2(b)} K(b,s), & s\in[a,t] \\ -\frac{X_1(t)}{X_2(b)} K(b,s), & s\in[t,b] \end{cases}$

性质 1° $G(t,s)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数

2° $G(a,s) = G(b,s) = 0$

3° $\frac{\partial G(s+0,s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s-0,s)}{\partial t} = 1$

4° $\frac{d^2G(t,s)}{dt^2} + p(t)\frac{dG(t,s)}{dt} + q(t)\, G(t,s) = \delta(t-s) = \begin{cases} 0, & t\neq s \\ \infty, & t=s \end{cases}$

P169. 7. $\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-a(t)\cdot x(t)}_{f(t)}$ 看成非齐次

$$x = C_1 + C_2 t + \int_0^t (t-s)\left[-a(s)x(s)\right]ds$$

$$= 1 + \int_0^t (t-s)\left[-a(s)x(s)\right]ds$$

证明 $x(t)$ 在 $[0,T]$ 上大于 0，若 $x(t_0)>0$ 则 只有 恒常

~~暂不考虑~~ 假设 $x(t)$ 在 $t=T'$ 时第一次为 0，$x(0)=1$，$x(T')=0$.

~~则 $x(t)$~~

例：$\ddot{x}+e^{2t}x=0$ 的解在 $[0,\infty)$ 上有界

$\ddot{x}+x=(1-e^{2t})x$.

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \int_0^t \sin(t-s)\,\frac{\cancel{1-e^{2s}}}{(1-e^{2s})}\,x(s)\,ds$$

☆ 证明 $x(0)\cdot x(\infty)\le 0$

T21: 设 $A(t)$ 是 $n\times n$ 矩阵值函数，且满足 $\frac{dA(t)}{dt} = B(t)\cdot A(t)$ ……(*)

其中 $B(t)$ 为 $n\times n$ 矩阵值函数，连续可导 $t\in\mathbb{R}$

(1) 用逐次逼近法证明：(*) 的初值问题 的存在唯一性

(2) 确定 $\{A(t) \mid A(t)$ 满足 (*)$\}$ 的维数

问若 $\begin{cases} A^T(t)=A^{-1}(t), \ \forall t\in R. \\ A(0)=I \end{cases}$ 而能成立的充要条件是什么？

$\frac{dA^T(t)}{dt} = A^T(t)\,B^T(t)$, $\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\frac{d}{dt}A(t)A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)B(t)$

$= A^{-1}(t)B^T(t)$ $\qquad = -A^{-1}(t)B(t)$

$\Rightarrow \quad B(t) = -B^T(t)$

$$\begin{cases} \frac{d[A^{-1}(t)]^T}{dt} = -B^T(t)\,[A^{-1}(t)]^T \\ [A^{-1}(0)]^T = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = B(t)A(t) \\ A(0)=I \end{cases}$$

有 $\Rightarrow B(t)+B^T(t)=0.$

[6]. 考虑方程组 $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3+\xi xy^4 \\ \dot{y} = -x+x^2y \end{cases}$ 考虑 $\phi(x,y)=x^2+y^4$ 是否提供一个 Lyapunov 函数 ξ.

$2x\dot{x}+4y^3\dot{y} = 2x(2y^3+\xi xy^4)+4y^3(-x+x^2y)=0$

$= 4xy^3+2\xi x^2y^4-4xy^3+4x^2y^4 \Rightarrow 2\xi+4=0, \therefore \xi=-2$

思考: [当 $\xi<0$ 时, 有 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 一定的解 $\to 0$], $\frac{d}{dt}\phi(x,y)=(2\xi+4)x^2y^4\le 0$

若 $\phi(x,y)\to A$ 是否有 $\frac{d}{dt}x^2y^4\to 0$

[6]: $\begin{cases} \ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0 \\ x(0)=x(1)=0. \end{cases}$ 其中 $p(t+1)=p(t)$, $q(t+1)=q(t)$, $t\in R$

记 $x(n)=0$, $n\in Z$.

若 $x(t)$ 是解, 则 $x(t+1)$ 是一个解的分解

$C_1x(t)+C_2x(t+1)$ 也是解

构造 C_1, C_2 使 $C_1x(t)+C_2x(t+1)=0.$

Date.

~~$x(t)$ 与 $x(t+1)$ 线~~ $=0$.

$c_1 x(0) + c_2 x(1) = 0$ ✓.

$u(t) = x_1'(t) - x'(0)\, x(t+1)$ 是方程的解

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(t) \equiv 0$$

若 $x'(0) = 0$ ✓

若 $x'(0) \neq 0$, $x(t+1) = \dfrac{x'(1)}{x'(0)}\, x(t)$

P146. 7. $\dfrac{d}{dt}\|\vec{\varphi}(t)\|^2 = \dfrac{d}{dt}\langle \vec{\varphi}(t), \vec{\varphi}(t)\rangle$

$= \langle \dot{\vec{\varphi}}(t), \vec{\varphi}(t)\rangle + \langle \vec{\varphi}(t), \dot{\vec{\varphi}}(t)\rangle$

$= \cancel{A(t)\vec{\varphi}(t)}$

$= \vec{\varphi}^T(t)\left[A^T(t) + A(t)\right]\vec{\varphi}(t) \leq \lambda_{max}\|\vec{\varphi}(t)\|^2$

$t \in [a, b] \subset (\alpha, \beta)$

$\|\vec{\varphi}(t)\| \leq \cancel{e^{\lambda_{max}}\|\vec{\varphi}(t)\|}\ \|\vec{\varphi}(t_0)\|^2\, e^{\lambda_{max}(t - t_0)}$

No.

Date.

Chapter 4. 常微分方程的基本理论

一、初值问题的唯一性

(CP) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $f(t,x)$ 在闭矩形区域

$\bar{R} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t-t_0| \le a, |x-x_0| \le b\}$

上二元连续，并且关于 x 满足 Lipschitz 条件，即存在 $L>0$（Lipschitz 常数）

使得 $|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|$，$\forall (t,x),(t,y) \in \bar{R}$，

则 (CP) 的解在 ~~$[t_0-h, t_0+h]$~~ $[t_0-h, t_0+h]$ 上存在且唯一，其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

$M = \max\limits_{(t,x)\in\bar{R}} |f(t,x)|$

证明：(一) (I) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$；$t_0 - h \le t \le t_0 + h$.

若 $x(t)$ 是 (CP) 的解，易证 $x(t)$ 是 (I) 的解

若 $x(t)$ 是 (I) 在 $[t_0-h, t_0+h]$ 上连续解，易证 $x(t)$ 是 (CP) 上的解

(二) 构造函数序列 $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$，$t \in [t_0-h, t_0+h]$

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\,ds \\ \cdots \\ x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,ds \end{cases}$$

首先证明 每个 $x_k(t)$ 是 $[t_0-h, t_0+h]$ 上的连续函数，$\forall k$，$(t, x_k(t)) \in \bar{R}$

$k=0$，$(t, x_0) \in \bar{R}$，$t \in [t_0-h, t_0+h]$

$$|x_1(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x_0(s))|\,ds \le M|t-t_0| \le b.$$

$k=1$，$(t, x_1(t)) \in \bar{R}$

假设 k 成立.

$$|x_{k+1}(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s))|\,ds \le M|t-t_0| \le b$$

(三) $\{x_k(t)\} \rightrightarrows x^*(t)$（一致收敛）

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le M|t-t_0|$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))|\,ds \le \int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_0|\,ds \le \int_{t_0}^{t} LM|s-t_0|\,ds$$

$$\le LM\frac{|t-t_0|^2}{2}$$

假设 $|x_k(t)-x_{k+1}(t)| \le L^{k-1} M \cdot \frac{|t-t_0|^k}{k!}$

则 $|x_{k+1}(t)-x_{k+2}(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(s,x_k(s)) - f(s,x_{k-1}(s))| ds$

$\le \int_{t_0}^{t} L^k M \frac{|s-t_0|^k}{k!} ds \le L^{k+1} M \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$

$\sum_{k=0}^{\infty} L^k M \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}$ 收敛

$x_0 + x_1(t) - x_0 + x_2(t) - x_1(t) + \cdots + x_{k+1}(t) - x_k(t) + \cdots$

在 $[t_0-h, t_0+h]$ 上一致收敛

(四) 证明 $x^*(t)$ 是(1)的解

$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s)) ds$

$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s)) ds$

(前提: 说明 $x^*(t)$ 存在 $\bar{R}$ 中).

$\left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s)) ds \right| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x^*(s))| ds$

$\le \int_{t_0}^{t} L |x_k(s) - x^*(s)| ds$ ~~$\le L \int_{t_0}^{t} ds \le L|t-t_0| \le$~~

$\le L \underbrace{|t-t_0|}_{\text{有界}} \underbrace{\sup_{s\in[t_0-h,t_0+h]} |x_k(s) - x^*(s)|}_{\to 0} \to 0 \quad (k\to\infty)$

于是存在性得证.

(五) 唯一性证明 设 $x(t), y(t)$ 均为(CP)的解

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$

$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$

$|x(t) - y(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \le \int_{t_0}^{t} L |x(s) - y(s)| ds$

No.

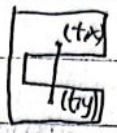
Date.

利用Gronwall不等式，$0 \le |x(t)-y(t)| \le 0$，唯一性得证.

注1° $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $\bar{R}$ 上连续.

$$|f(t,x)-f(t,y)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, \underbrace{\theta x+(1-\theta)y}_{\bar{R}})\cdot(x-y)\right| \le L|x-y|$$

注2° $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D（闭有界，凸）连续



注3. 若 $\lim\limits_{x\to y_0}\frac{\partial f}{\partial x}=\infty$. 则存在充分小的 (t,x_0) 的邻域 U 上 Lipschitz 条件均不成立.

$(t,x),(t,x+h)\in U$.

$$|f(t,x)-f(t,x+h)| \le L|h|$$

$$\left|\frac{f(t,x)-f(t,x+h)}{h}\right| \le L$$

预习：

利用逐次逼近法证明 Gronwall 不等式

$$u(t) \le k+\int_a^t u(s)v(s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(t) \le k\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)$$

令 $\{u_p(t)\}$

$$\begin{cases} u_0(t)=k \\ u_1(t)=k+\int_a^t u_0(s)v(s)\,ds \\ \vdots \\ u_{p+1}(t)=k+\int_a^t u_p(s)v(s)\,ds \end{cases}$$

$$u_1(t)=k+\int_a^t v(s)\,ds$$

$$u_2(t)=k+\int_a^t \left(k+\int_a^s v(\xi)\,d\xi\right)v(s)\,ds = k+k\int_a^t v(s)\,ds+k\int_a^t\int_a^s v(s)\,d\xi\,v(s)\,ds = k+k\int_a^t v(s)\,ds+k\cdot\frac{1}{2}\left(\int_a^t v(s)\,ds\right)^2$$

则 $u_p(t) = k + k\int_0^t v(s)ds + \cdots + k\frac{1}{p!}\left(\int_0^t v(s)ds\right)^p$

$\lim_{k\to\infty} u_p(t) \le k\cdot \exp \int_0^t v(s)ds$

$u(t) - u_k(t)$

$u(t) - u_0 \le \int_0^t u(s)v(s)ds \le M\int_0^t v(s)ds \quad (u(t)\le M)$

$u(t) - u_1(t) \le \int_0^t (u(s)v(s) - u_0(s)v(s))ds \le \int_0^t \left(\int_0^s u(\xi)v(\xi)d\xi\right)v(s)ds$

$\le M\int_0^t \left(\int_a^s v(\xi)d\xi\right)v(s)ds \le M\cdot\frac{1}{2!}\left(\int_a^t v(s)ds\right)^2$

$\vdots$

$u(t) - u_p(t) \le M\cdot\frac{1}{(p+1)!}\left(\int_a^t v(s)ds\right)^{p+1} \to 0 \ (k\to+\infty)$

(2) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$

1° $A(t)\equiv A$, $\forall Re\{\lambda(A)\}<0 \Leftrightarrow \vec{x}(t)\to\vec{0} \ (t\to+\infty)$

2° $A(t)$ 对称阵 $\forall Re\{\lambda(A(t))\}<\alpha<0$, $\forall t>t_0 \Rightarrow \vec{x}(t)\to\vec{0}\ (t\to+\infty)$

$\frac{d}{dt}\|\vec{x}(t)\|^2 = \langle\dot{\vec{x}}(t), \vec{x}(t)\rangle + \langle\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)\rangle$

$= \vec{x}^T(t)\cdot[A^T(t)+A(t)]\cdot\vec{x}(t) = 2\vec{x}^T(t)A(t)\vec{x}(t)$

$\le 2\alpha\|\vec{x}(t)\|^2$

$\|\vec{x}(t)\|^2 \le \|\vec{x}_0\|^2\cdot e^{2\alpha(t-t_0)}$

3° $A(t) = A + B(t)$ $\quad \forall Re\{\lambda(A)\}<0$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B(t)\vec{x}(t)$

$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}B(s)x(s)ds$

$\|e^{A(t-s)}\| \le M e^{\alpha(t-s)} \quad (M>0, \alpha<0)$

$e^{-\alpha t}\|\vec{x}(t)\| \le M\|\vec{x}_0\|e^{-\alpha t_0} + \int_{t_0}^t M\|B(s)\|e^{-\alpha s}\|\vec{x}(s)\|ds$

利用 Gronwall 引理 $e^{-\alpha t}\|\vec{x}(t)\| \le \hat{k}\exp\left(\int_{t_0}^t M\|B(s)\|ds\right)$

$\|\vec{x}(t)\| \le \hat{k}e^{\alpha t}e^{\int_{t_0}^t M\|B(s)\|ds} \to 0 \ (t\to\infty)$

(A) $\int_{t_0}^{+\infty}\|B(s)\|ds < +\infty$

(B) $\lim_{t\to+\infty}\|B(t)\| = 0$?

Date.

一、解的存在唯一性

(CP) $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$ $\quad R = \{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t-t_0| \le a,\ \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < b\}$

f 连续 $\Rightarrow$ 于 R $\Rightarrow$ 并关于 $\vec{x}$ 满足 Lipschitz 条件:

存在 $L>0$, $\|\vec{f}(t,\vec{x}) - f(t,\vec{y})\| \le L\|\vec{x}-\vec{y}\|$, $\forall (t,\vec{x}),(t,\vec{y}) \in R$

则 (CP) 在 $[t_0-h, t_0+h]$ 上有解且唯一, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ $\quad M = \max_{(t,\vec{x})\in R} \|\vec{f}(t,\vec{x})\|$

证: 反过来说, $f(t,x)$ 在 D 上连续, 并且 $f(t,x)$ 关于 x 于 D 上满足 Lipschitz 条件

则 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 必定存在且唯一.

$(t_0, x_0) \in D$

特别地, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D 上连续

例 在平面的区域 $x \ne 1, y > 0$ 上, 过其中的每一点 m 阶导方程 $(x-1)\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} - x$ 的唯一的解

为何必存在

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}-x}{x-1}$, $\frac{\sqrt{y}-x}{x-1}$ 连续 $\Rightarrow x \ne 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续 $\Rightarrow y > 0$.

例. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1+x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad$ ~~$x = tg t$~~

$x(t) = \operatorname{tg} t$, $\quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| \le a,\ |x| \le b\}$

解 $x = \varphi(t)$ 在于 $[-h, h]$ 上存在唯一

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ $\quad M = \max_{(t,x)\in R_{(a,b)}} |1+x^2| = 1+b^2$

$\frac{b}{1+b^2} \le \frac{1}{2}$

得到 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

二. 解的延展(拓展).

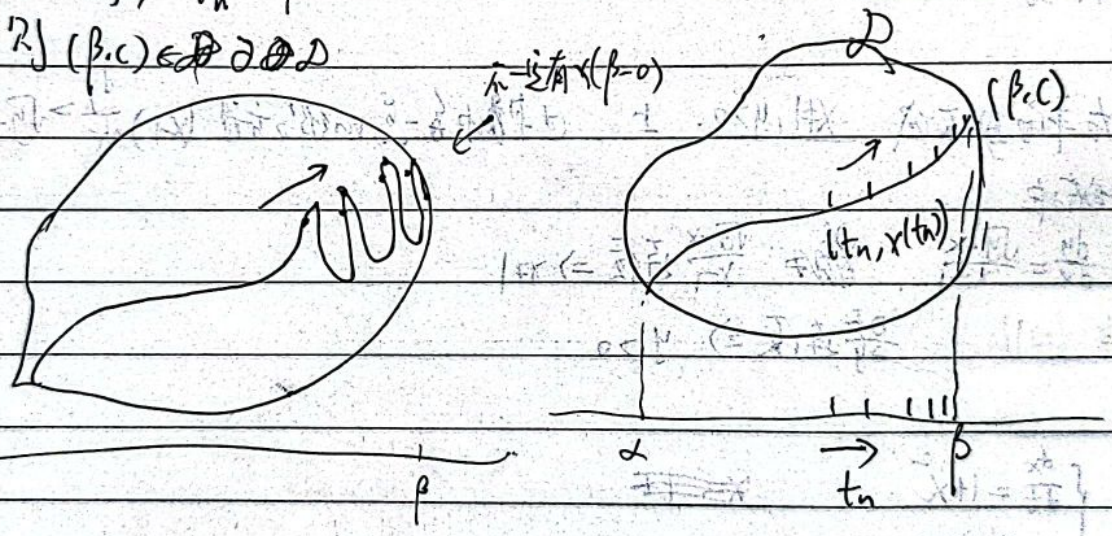
定义1 设 $x(t)$ 是初值问题在 (γ,δ) 上的解. $y(t)$ 是 (α,β) 上的解, $\alpha<\gamma<\delta<\beta$ 且 $x(t)\equiv y(t)$, $\forall t\in(\gamma,\delta)$.

则称 $y(t)$ 是 $x(t)$ 在 (α,β) 上的延展.

定义2 若 $x(t)$ 是 (α,β) 上的解, 并且不能再延展, 则称 $x(t)$ 是方程的饱和解.
(α,β) 为最大存在区间

饱和解的若干性质.

性质1° 设 D 是有界区域, $f(t,x)$ 于 D 上连续, 且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件
再设 $x(t)$ 是 $\dot{x}=f(t,x)$ 的饱和解, (α,β) 是最大存在区间
$\exists\{t_n\}$, $t_n\to\beta-0\ (n\to\infty)$ $\quad x(t_n)\to c\ (n\to\infty)$
则 $(\beta,c)\in\partial D$



证明

证: 显然 $(\beta,c)\in D$

$(t_n,\ x(t_n))\in D$

(CP)$_n$ $\begin{cases}\dot{x}=f(t,x)\\ x(t_n)=x_n\end{cases}$ 解在 $[t_n-h_n,t_n+h_n]$ 上有定义

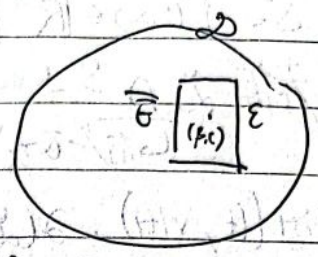
令 $n\to\infty$, $t_n+h_n\to\beta+h_n>\beta$

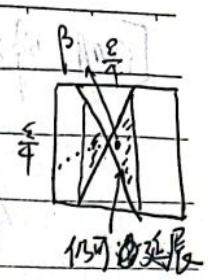
← 会产生矛盾 因为 h_n 可能 $\to\infty$

证:

$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，以 $(t_{0n}, x(t_{0n}))$ 为心的闭矩形区域 $\bar{E}$ 完全落于 E 中，

$a=b=\frac{\varepsilon}{8}$，$M=\max\limits_{(t,x)\in\bar{E}}|f(t,x)|$　　边长 $\frac{\varepsilon}{4}$





注：不保证 ~~$x(t_{0n})\to c$~~，$x(\beta-0)$ 存在

性质2° 若性质1°中的(1)，(2)成立，且 $\bar{\mathcal{D}}_1\subset\mathcal{D}$ 是闭有界区域，则 $\exists\delta>0$，当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，成立 $(t,x(t))\notin\bar{\mathcal{D}}_1$

[证明] 若不然，取 $\delta=\frac{1}{n}$，$\exists t_n\in(\beta-\frac{1}{n},\beta)$，成立 $(t_n,x(t_n))\in\bar{\mathcal{D}}_1$

$t_{n_k}\to\beta-0$，$(k\to\infty)$　$x(t_{n_k})\to c$ $(k\to+\infty)$ （~~子列收敛 B-W定理~~）（子列收敛 B-W定理）

由性质1°，$(\beta,c)\in\partial\mathcal{D}$，$(\beta,c)\in\bar{\mathcal{D}}_1$

$\partial\mathcal{D}\cap\bar{\mathcal{D}}_1=\phi$ 矛盾

性质3°. 性质1°中(1)(2)成立，记 $\rho(t)\triangleq dist((t,x(t)),\partial\mathcal{D})$

$dist(p,A)=\inf\limits_{q\in A}\|p-q\|$

则 $\lim\limits_{t\to\beta-0}\rho(t)=0$　　$\lim\limits_{t\to\alpha+0}\rho(t)=0$

[证明] $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，成立 $\rho(t)<\varepsilon$ （第12）

$\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon\triangleq\{(t,x)\in\mathcal{D}\mid dist((t,x),\partial\mathcal{D})\geq\varepsilon\}$ 闭有界区域

现根据性质2°，$\exists\delta$，成立 $(t,x(t))\notin\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon$

性质4° 若 $\mathcal{D}$ 是无界区域，$f(t,x)$ 于 $\mathcal{D}$ 上连续并且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，

$x(t)$ 是 (α,β) 上的极限解则以下情形必居其一：

1°. $\beta=+\infty$.　2° $\beta<+\infty$，$x(t)$ 无界　3° $\beta<+\infty$，$x(t)$ 有界 $dist((t,x(t)),\partial\mathcal{D})\to0$ $(t\to\beta-0)$

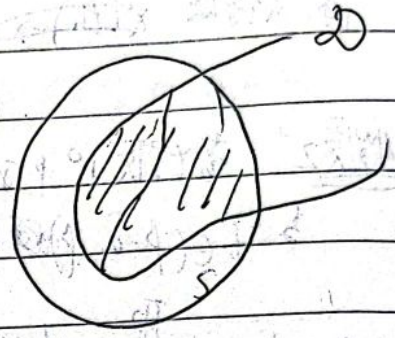
[证明] 解有界，$|x(t)| < M$.

$S = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2+x^2 < H\}$ $H >> M$.

考虑 $\mathcal{D} \cap S$ 上的解的最大存在区间，$x(t)$ 是 (α, β) 上的定义的

↳有界区域.

$dist((t, x(t)), \partial(\mathcal{D} \cap S)) \to 0 \ (t \to \beta - 0)$



[例] $f(t,x)$ 是整平面连续有界函数，$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ 在整平面上连续.

证明：$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ 的解的最大存在区间均为 $\mathbb{R}$

[证明] 1° $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 的解 $x = \varphi(t)$ 存在

不妨设 (α, β) 是最大的存在区间

2° 要证 $\beta = +\infty$ 首先显然 $\beta < +\infty$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$

$|x(t)| \le |x_0| + M|t-t_0| \le H$, $t \in (\alpha, \beta) \Rightarrow x(t)$ 有界

$\{t_n\} \to \beta - 0 \ (n \to \infty)$ $x(t_n) \to c \ (n \to \infty)$

(β, c)

$x(\beta-0)$ 存在的，$(\beta, x(\beta-0))$ 为初值，则初值问题的解在 $[\beta-h, \beta+h]$ 上存在

Date.

$$|x(t_1)-x(t_2)| \le \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds\right| \le M|t_1-t_2|$$

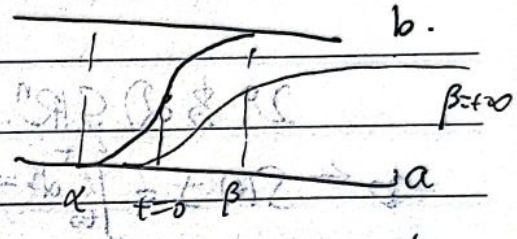
例 $\frac{dx}{dt}=t^2+x^2$ 的存在区间为有限数. (1 ~ 2).

(不妨设 $b>0$, $t_0>0$)

$$\frac{dx}{dt}=t^2+x^2 \ge t_0^2+x^2$$

例 设 $g\in C^1[(a,b),\mathbb{R}]$, $g(x)\ne 0\ (>0)$.

$$\lim_{x\to a+0} g(x)=\lim_{x\to b-0} g(x)=0.$$



证: (CP) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=g(x)\\ x(0)=x_0\in(a,b)\end{cases}$ 解的最大存在区间为 (α,β), 其中 $\alpha=\int_{x_0}^{a}\frac{dx}{g(x)}$

$$\beta=\int_{x_0}^{b}\frac{dx}{g(x)}$$

[证明]. 1° 由 $g(x)$ 及 $g'(x)$ 连续性知, (CP) 的解局部存在, 唯一性可以保证.

有最大存在区间, 记为 (α,β)

设 $\varphi(t)$ 是 (CP) 的解. $t\in(\alpha,\beta)$

$$\begin{cases}\frac{d\varphi(t)}{dt}=g(\varphi(t))>0\\ \varphi(0)=x_0\in(a,b)\end{cases}$$

$\varphi(t)$ 单调增加. $\varphi(t)$ 有界 则 $\varphi(\beta-0)$ 存在.

$$\int_0^t \frac{d\varphi(t)}{g(\varphi(t))}=\int_0^t dt=t$$

$t\to\beta-0$, 以下证 $t\to\beta-0$, $\varphi(t)\to b$?

1° $\beta<+\infty$ $\varphi(t)$ 有界, $d(\{(t,\varphi(t)), \partial D\}) \to 0\ (t\to\beta-0)$ 则 $\varphi(\beta-0)=b$.

2° $\beta=+\infty$ $\varphi(\beta-0)=\delta<b$. $g(x)$ 在 $[x_0,\delta]$ 上取到最小值, 记为 $m>0$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=g(\varphi(t))\ge m>0,\quad \varphi(t)\ge mt+x_0\to+\infty \Rightarrow \varphi(t) \text{ 解不存在!}$$

于是 $\delta=b$

$(CP)_n$

例: $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$, $\vec{f}(t,\vec{x})$ 定义在 $\mathbb{R}\times\Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在定义域上连续, 且 解, 初值满足 局部 Lipschitz 条件

1° 当 $\Omega = \mathbb{R}^n$, 证明 $(CP)_n$ 的解的最大存在区间为 $\mathbb{R}$

$$\|\vec{x}(t)\| = \|\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(s, \vec{x}(s))\, ds\| \le \|\vec{x}_0\| + M|t-t_0| < \hat{M}$$

$t<\beta$

2° 当 $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$. 解的最大存在区间 是开区间, 证明 $(CP)_n$ 的解的最大存在区间为 $\mathbb{R}$

$+\infty \leftarrow S(t) = S_{t_0} = \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_i \dot{x}_i^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t} \|\vec{f}(t,\vec{x}(t))\|\, dt \le \int_{t_0}^{t} M\, dt = M(t-t_0)$

$\le M(\beta - t_0)$

$\beta < +\infty$.

三. 用压缩映射原理证明 存在唯一性定理

度量空间的定义.

(X,ρ). 满足以下性质:

1° $\rho(x,y) \ge 0$. $\forall x,y \in X$

2° $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

3° $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

称 ρ 为 X 上的一个度量. (X,ρ) 为度量空间

3.1.2. 基本序列. (Cauchy 序列). $\{x_n\} \subset X$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n,m > N$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ 称 $\{x_n\}$ 为基本序列

3.1.3 完备性. 若 $\{x_n\} \subset X$ 是任一个基本序列. 存在 $x^* \in X$, 使 $\rho(x_n, x^*) \to 0$ $(n\to\infty)$. 称 (X,ρ) 为完备度量空间

No.

Date.

定义. 设 $A: X \to X$ 上的映射. 并且满足: $\rho(Ax, Ay) \le \theta\rho(x,y)$. $0<\theta<1$.
$\forall x, y \in X$. 称 A 为压缩的

引理. (X,ρ) 是完备度量空间. $A: X\to X$ 压缩映射. 则存在唯一的 $x^* \in X$.
使 $Ax^* = x^*$ ← 不动点

证明 构造 $\{x_n\} \subset X$, $x_{n+1} = Ax_n$.
容易证明 $\{x_n\}$ 基本. $x_n \xrightarrow{\rho} x^*$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & Ax_n \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho \\ x^* & = & Ax^* \end{array}$$

$\rho(Ax_n, Ax^*) \le \theta\rho(x_n, x^*) \to 0$.

$x^* = Ax^*$

$x^* = Ax^*$, $y^* = Ay^*$

$\rho(x^*, y^*) = \rho(Ax^*, Ay^*) \le \theta\rho(x^*, y^*)$, $\theta = (0,1)$
$\Rightarrow x^* = y^*$

证 $\{x_n\}$ 基本

设 $m>n$. $\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x_{m-1}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le \theta^n \frac{1-\theta^{m-n}}{1-\theta}\rho(x_1, x_2)$
$\le \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1, x_2) \to 0$ $(n\to\infty)$

~~$\rho(x_m - x_n) =$~~

$$(CP)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t-t_0| \le a, |x-x_0| \le b\}$
$f(t,x)$ 在 R 连续. 关于 x 是 Lipschitz 函数 (L 条件)

则 (CP) 的解在 $[t_0-h, t_0+h]$ 上存在且唯一, 其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$
$M = \max_{(t,x)\in R} |f(t,x)|$

用压缩映射证明: 1° $\Omega = \{\varphi \in C[t-h, t+h] \mid |\varphi(t) - y_0| \le b\}$
$\|\varphi\| = \max_{t\in[t_0-h, t_0+h]} |\varphi(t)|$, $\rho(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$, $\forall \varphi, \psi \in \Omega$.

2° 在Ω上定义映射：$\forall \varphi \in \Omega$，$[A\varphi](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds$

3° (Ω, ρ)是完备的度量空间.

设$\{\varphi_n\}$是Ω上的基本序列. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$. 当 $n, m > N$时，$\|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon$

固定$t \in I$，$\{\varphi_n(t)\} \subset \mathbb{R}$上的基本列 $\varphi^*(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$

$|\varphi^*(t) - \varphi_m(t)| \to 0$，$\forall t \in I$.

$\|\varphi^*(t) - \varphi_m\| \to 0$ $(m \to \infty)$

$\varphi^*(t)$是φ_m上的极限函数

4° $A: \Omega \to \Omega$的上的压缩映射.

用压缩映射原理证明：

$$(CP)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le b\}$.

其中$f(t,x)$ Lipschitz常数$L>0$.

(CP)解在$[t_0-\hat{h}, t_0+\hat{h}]$上存在 $\hat{h} = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{\theta}{L}\}$ $\theta \in (0,1)$.

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

$\|A\varphi - A\psi\| \le \theta\|\varphi - \psi\|$ 其中 $\|\varphi\| \triangleq \max\limits_{t\in[t_0-\hat{h}, t_0+\hat{h}]} |\varphi(t)|$.

定义$\|\varphi\|_\Delta \triangleq \max\limits_{t\in[t_0-\hat{h}, t_0+\hat{h}]} e^{-L|t-t_0|}|\varphi(t)|$ （Ω是$[t_0-h, t_0+h]$上连续函数全体）

易证$(\|\cdot\|_\Delta, \Omega)$是度量空间，完备性

$e^{-L|t-t_0|}|[A\varphi](t) - [A\psi](t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))|\,ds$

利用$t_0 \le s \le t$，$\le \int_{t_0}^{t} e^{-L|t-t_0|} L|\varphi(s) - \psi(s)|\,ds$

$= \int_{t_0}^{t} e^{-L(t-s)} L \cdot e^{-L(s-t_0)} |\varphi(s) - \psi(s)|\,ds$

$\le \left|\int_{t_0}^{t} e^{-L(t-s)} L\,ds\right| \cdot \|\varphi - \psi\|_\Delta$

$\|A\varphi - A\psi\| \leq \theta \|\varphi - \psi\|_\Delta \quad \theta \in (0,1)$.

例 用压缩映射原理证明隐函数定理

1° $F(x,y)$, $F_y(x,y)$ 在区域 $\bar{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b\}$ 上连续

2° $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0) \neq 0$. (不妨设 >0)

则存在 $\delta > 0$ 及 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上的连续函数 $\varphi(t)$ 满足

(A) $\varphi(x_0) = y_0$, (B) $F(x,\varphi(x)) = 0$. $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$.

[证明] 由 $F_y(x_0,y_0) > 0$ 及 函数的连续性, 存在 $r>0$, 使 $F_y(x,y)$ 于

$R_1 = \{(x,y) \in \bar{R} \mid |x-x_0| \leq r, |y-y_0| \leq r\}$ 为正的, 于是存在

$m \leq F_y(x,y) \leq M$. $M, m > 0$

$F(x,y_0)$ 于 $x = x_0$ 的连续性

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x-x_0| < \delta$ 时 有 $|F(x,y_0)| \leq \varepsilon$

解析此, $\varepsilon = mr$

$\Omega = \{\varphi \in C[x_0-\delta, x_0+\delta] \mid \varphi(x_0) = y_0, |\varphi(x) - y_0| \leq r\}$

$A: \Omega \to \Omega$, 对于 $\forall \varphi \in \Omega$, 定义 $[A\varphi](x) \triangleq \varphi(x) - \frac{1}{M} F(x, \varphi(x))$

再证 $A: \Omega \to \Omega$. 即, 连续性的证明

由 $[A\varphi](x_0) = \varphi(x_0) - \frac{1}{M} F(x_0, \varphi(x_0)) = y_0$

(c) $|[A\varphi](x) - y_0| = \left|\varphi(x) - y_0 - \frac{1}{M} F(x, \varphi(x))\right|$

$= \left|\varphi(x) - y_0 - \frac{1}{M} F(x,\varphi(x)) + \frac{1}{M} F(x, y_0) - \frac{1}{M} F(x, y_0)\right|$

$\leq \left|\varphi(x) - y_0 - \frac{1}{M}\left(F(x,\varphi(x)) - F(x, y_0)\right)\right| + \frac{1}{M} F(x, y_0)$

$$= \left|\varphi(x)-y_0-\frac{1}{M}\frac{\partial F}{\partial y}(x,\xi)\left(\varphi(x)-y_0\right)\right|+\frac{mr}{M}$$

$$\le \left(1-\frac{m}{M}\right)r+\frac{mr}{M}=r$$

证明 A 是 Ω 到 Ω 上的压缩映射.

$$\|A\varphi-A\psi\| = \max_{x\in[x_0-r,x_0+r]}\left|[A\varphi](x)-[A\psi](x)\right| = \left|\varphi(x)-\psi(x)-\frac{1}{M}\left[F(x,\varphi(x))-F(x,\psi(x))\right]\right|$$

$$= \left|\varphi(x)-\psi(x)-\frac{1}{M}\frac{\partial F}{\partial y}(x,\xi)\left(\varphi(x)-\psi(x)\right)\right| \le \left(1-\frac{m}{M}\right)\|\varphi-\psi\| \quad \#$$

$\varphi^*\in\Omega$ s.t. $A\varphi^*=\varphi^*$

$F(x,\varphi(x))\equiv 0$

$F_x+F_y\cdot\varphi'(x)=0$

$$\begin{cases}\varphi(x_0)=y_0\\ \varphi'(x)=\dfrac{-F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}\end{cases}$$

~~$\varphi^*\in\Omega$ s.t. $A\varphi^*=\varphi^*$~~

(四)四 证明. 关于初值参数依赖性

$$(CP)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

$f(t,x)$ 在 Ω 上可微关于 x 满足局部Lipschitz条件

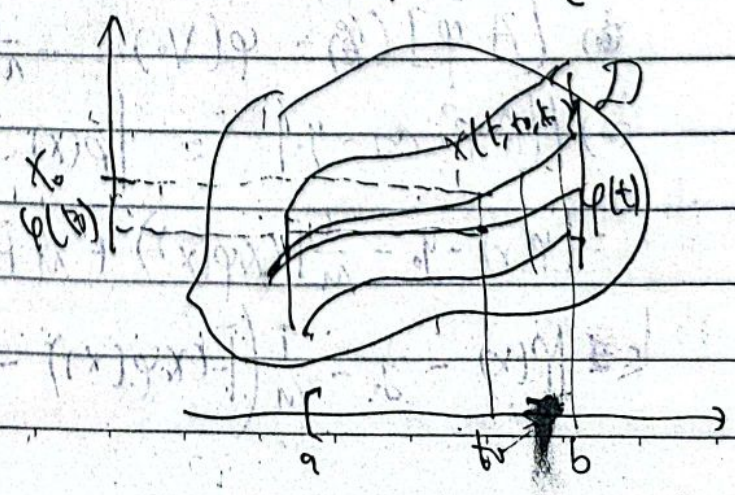
设 $\varphi(t)$ 是 $\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$ 在 $[a,b]$ 上一解, 则存在 $\eta>0$,

当 $|x_0-\varphi(t_0)|\le\eta$ 时, $(t_0\in[a,b])$, 则有

1° $x(t,t_0,x_0)$ 在 $[a,b]$ 上存在

2° $x(t,t_0,x_0)$ 连续 $\{(t,t_0,x_0\in\mathbb{R}^3 \mid t\in[a,b],\ t_0\in[a,b],\ |x_0-\varphi(t_0)|\le\eta\}$

是三元连续函数.



No.

Date.

$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$

$|x(t) - \varphi(t)| \le |x_0 - \varphi(t_0)| + \int_{t_0}^{t} L\,|x(s) - \varphi(s)|\, ds$

用Gronwall不等式 $|x(t) - \varphi(t)| \le \underbrace{|x_0 - \varphi(t_0)|}_{\eta} e^{L(t-t_0)}$.

[证明]: ① $\varphi(t)$ 在$[a,b]$上存在, $(t, \varphi(t)) \subset D$, 于是

存在 $\eta_1 > 0$. $Q = \{(t, x) \mid t \in [a,b], |x - \varphi(t)| \le \eta_1\} \subset D$

令 $\eta = \eta_1 \cdot e^{-L(b-a)} > 0$

(*) $\Omega = \{\psi \in C[a,b] \mid \|\varphi - \psi\|_\Delta \le \eta\}$,

易证 $(\Omega, \|\cdot\|_\Delta)$ 是一个完备的度量空间. $\|\psi\|_\Delta = \max_{t \in [a,b]} e^{-L|t-t_0|} \|\varphi(t)\|$

(**) 定义 Ω 上的映射 A:

$[A\psi](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds$, $\psi \in \Omega$.

(***) 证明: $A: \Omega \to \Omega$

(a) 首先 $[A\psi](t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数

(b) $|[A\psi](t) - \varphi(t)| = |x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds|$

$\le |x_0 - \varphi(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi(s)) - f(s, \varphi(s))|\, ds$

$\le \eta + \int_{t_0}^{t} L\,|\psi(s) - \varphi(s)|\, ds \le \eta + \int_{t_0}^{t} L \cdot e^{-L|s-t_0|} \underbrace{|\psi(s) - \varphi(s)|}_{\le \|\psi - \varphi\|_\Delta} e^{L(s-t_0)}\, ds$

$$\le \eta + \left(e^{L(s-t_0)}\Big|_{t_0}^{t}\right)\eta$$

$$\le \eta + \left(e^{L(t-t_0)} - 1\right)\eta = e^{L(t-t_0)}\cdot\eta$$

$$e^{-L(t-t_0)}\cdot\left|[A\psi](t)-\varphi(t)\right| \le \eta$$

$$\cancel{\|A\psi-\varphi\|\, e^{L(t-t_0)}}$$

$$\|A\psi-\varphi\|_\Delta \le \eta.$$

(****) 压缩性质与证明一致.

于是根据压缩映照原理. 存在 $\psi^* \in \Omega$. $A\psi^* = \psi^*$

证明 $x(t, t_0, x_0)$ 关于 (t_0, x_0) 二元连续

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0))\,ds$$

$$y(t, t_1, x_1) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s, t_1, x_1))\,ds$$

$a \le t_0, t_1 \le b$

$$|x(t)-y(t)| \le |x_0-x_1| + \left|\int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))\,ds\right| + \int_{t_1}^{t} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\,ds$$

[证明]: 由 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上存在. $(t, \varphi(t)) \subset D$,

$$\le |x_0-x_1| + M|t_1-t_0| + \int_{t_1}^{t} L\,|x(s)-y(s)|\,ds$$

用 Gronwall 不等式

$$|x(t)-y(t)| \le \left(|x_0-x_1| + M|t_1-t_0|\right) e^{L(b-a)}$$

$$\left((t_0, x_0) \to (t_1, x_1)\right) \to 0$$

Date.

作业：习题 P1.

2.. }

Date.

四、解关于初值、参数的连续依赖性

4.1 (CP) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 的解 $x(t, t_0, x_0)$. $t \in [a,b]$

性质 4.2. (CP) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (CP)$_y$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

(解关于右端函数的依赖性)

设 $x(t, t_0, x_0)$ 表示 (CP) 的解 $t \in [a,b]$.

若 $\|g\| < \delta \ll 1$ 时, 则 $y(t, t_0, x_0)$ 表示 (CP)$_y$ 只解在 $[a,b]$ 上都存在.

[证明] 反证法证明 (用反证法证明)

(印证!)

2° $|y(t) - x(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) + g(s, y(s))] ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds \right|$

$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, x(s))| ds + \int_{t_0}^{t} |g(s, y(s))| ds$

$\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)| ds + \delta(b-a)$

由 Gronwall 不等式, $|x(t) - y(t)| \leq \delta(b-a) e^{L(b-a)} \to 0 \ (\delta \to 0)$

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, μ 为参数 解关于参数的连续依赖性

$\Leftrightarrow$ $(CP)_{\mu_0} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $(CP)_\mu \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu_0) + [f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$ $\|g(t,x)\| < \delta \ll 1$

当 $f(t, x, \mu)$ 关于 (t, x, μ) 连续

当 $|\mu - \mu_0| < \hat{\delta} \ll 1$ 时, 可知 $|f(t, x, \mu_0) - f(t, x, \mu_0)| < \delta \ll 1$

Date.

第五章 定性理论初步

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$$

$\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 质点上的位移. $\dot{\vec{x}}(t)$ 速度

$\vec{f}(t, \vec{x})$ — 速度场, 方向场

$\vec{f}(t, \vec{x}) \equiv \vec{f}(\vec{x})$, 自治系统, 定常系统, 时不变系统 (*)

↳ 包含它, 非自治系统, 非定常系统, 时变系统

自治系统: e.g. $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

非自治系统: e.g. $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\cdot\vec{x}$

设 $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$. 使 $\vec{f}(t, \vec{x}^*) = \vec{0}$.

称之为系统 (*) 的平衡点, 特别地, 当自治系统时, $\vec{x}^*$ 称之为奇点

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}^* = 0$, $A\vec{x}^* = \vec{0}$

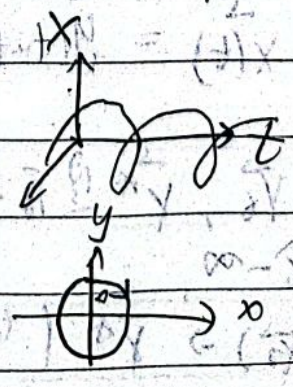
$\frac{dx}{dt} = \sin x$. 无穷多个 x_k^*, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

△ $\mathbb{R}^n$. 一阶之为相空间 ($n=2$ 相平面 $n=1$. 相线)

△ $(t, x(t))$ — 称为曲线在相空间中的投影. 称之为系统 (*) 的轨线 (相轨线), 随着时间 t 增加, 质点移动的方向称为轨线的方向. (用箭头来表示)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y & x(0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -x & y(0) = 1 \end{cases}$$

$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$, $x^2 + y^2 = 1$

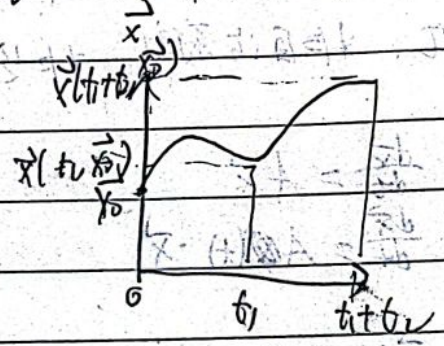


Date.

一、自治系统的若干性质

性质1. 设 $\vec{x}(t)$ 是自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 的任一解
(平移不变性). 则 $\vec{x}(t+C)$ 亦是该自治系统的解

性质2. 设 $\vec{x}(t,\vec{x}_0)$ 表示从 $(0,\vec{x}_0)$ 出发的自治系统的轨线,
则有 $\vec{x}(t_1+t_2,\vec{x}_0)=\vec{x}(t_2,\vec{x}(t_1,\vec{x}_0))$, $\forall t_1,t_2\in\mathbb{R}$
(群的性质)



$\vec{x}(t+t_1,\vec{x}_0)\equiv\vec{x}(t,\vec{x}(t_1,\vec{x}_0))$ (1° 平移不变性
2° 解的存在唯一性)

性质3 自治系统在相空间中任意两条不同轨线或不相交或在有限时间相交, 若相交, 即重合.

[证明] 设 $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ 是系统的两条轨线, $\vec{x}(t_1)=\vec{y}(t_2)$.

$$\vec{x}(t)\Big|_{t=t_1}=\vec{y}(t-t_1+t_2)\Big|_{t=t_1}$$

唯一性可知 $\vec{x}(t)=\vec{y}(t-t_1+t_2)$ $(\forall t)$

性质4 (1) 若 $\vec{x}^*\neq\vec{x}_0$, $\vec{x}^*$ 是自治系统的奇点, 有 $\vec{x}(t,\vec{x}_0)\to\vec{x}^*$ $(t\to\beta^{+\infty}_{-\infty})$
则 $\beta=+\infty$ 或 $-\infty$
2, 若 $\vec{x}(t,\vec{x}_0)\to\vec{x}^*$ $(t\to^{+\infty}_{-\infty})$ 则 $\vec{f}(\vec{x}^*)=\vec{0}$, 从而 $\vec{x}^*$ 为奇点
↳ 系统的奇点

[证明] 若不然 $f_i(\vec{x}^*) \neq 0$.

不妨设 >0, $\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}(t)) > \frac{f_i(\vec{x}^*)}{2} > 0$.

二、平面线性自治系统奇点的分类

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ $\det(A) \neq 0$ $\vec{x}^* = \vec{0}$ 是惟一

设 λ_1, λ_2 为 A 的特征值.

1° $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. $\vec{x} = P\vec{y}$, $\frac{d\vec{y}}{dt} = P^{-1}AP\vec{y}$

2° $\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \dot{y}_2 = -\beta y_1 + \alpha y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = r\cos\theta \\ y_2 = r\sin\theta \end{cases}$

$y_1^2 + y_2^2 = r^2$. $2r\dot{r} = 2y_1 \cdot \dot{y}_1 + 2y_2 \cdot \dot{y}_2$

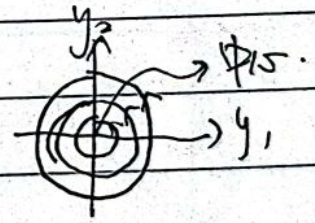
$\tan\theta = \frac{y_2}{y_1}$ $r\dot{r} = y_1(\alpha y_1 + \beta y_2) + y_2(-\beta y_1 + \alpha y_2)$

$= \alpha y_1^2 + \alpha y_2^2 = \alpha r^2$

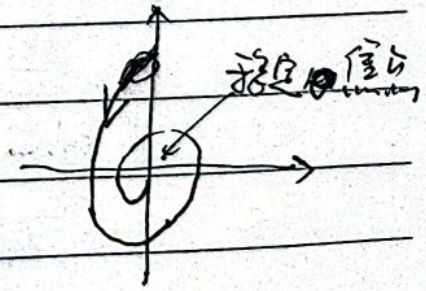
$\dot{\theta} = \frac{y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1}{y_1^2}$ $\frac{dr}{dt} = \alpha r$ $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$

$\frac{d\theta}{dt} = -\beta$ $\theta(t) = -\beta t + \theta_0$

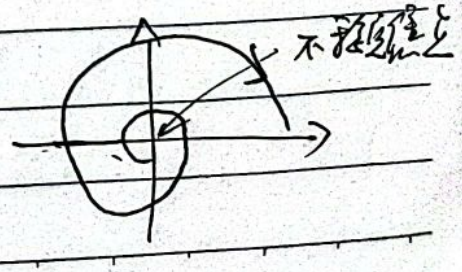
(1) $\alpha = 0$, $\begin{cases} r(t) \equiv r_0 \\ \theta(t) = -\beta t + \theta_0 \end{cases}$



(2) $\alpha < 0$. $\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \to 0 \ (t \to +\infty) \\ \theta(t) = -\beta t + \theta_0 \end{cases}$



(3) $\alpha > 0$.

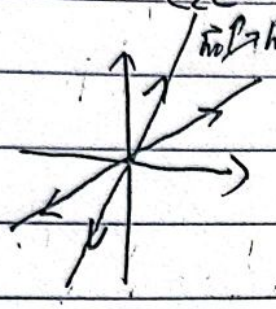


2° $\lambda_1>\lambda_2>0$. $\vec{h_1}$、$\vec{h_2}$ 特征向量

$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}$

$\vec{x_1}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1}$ 对应的参数曲线

$\vec{x_2}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}$

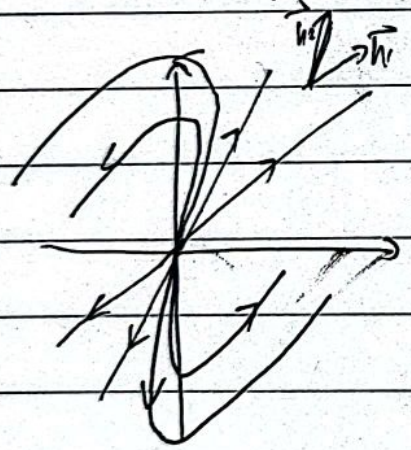


$$\frac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|} = \frac{c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}}{\|c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\vec{h_2}\|}$$

$$= \frac{c_1\lambda_1\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\vec{h_2}}{\|c_1\lambda_1\vec{h_1} + c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\vec{h_2}\|} \to \pm\frac{\vec{h_1}}{\|\vec{h_1}\|} \quad (t\to+\infty)$$

$\vec{x}(t) \to \vec{0} \quad (t\to-\infty)$

$\|\vec{x}(t)\| \to +\infty \quad (t\to+\infty)$.



不稳定结点 $(\lambda_1>\lambda_2>0)$

(稳定结点 $(\lambda_1<\lambda_2<0)$).

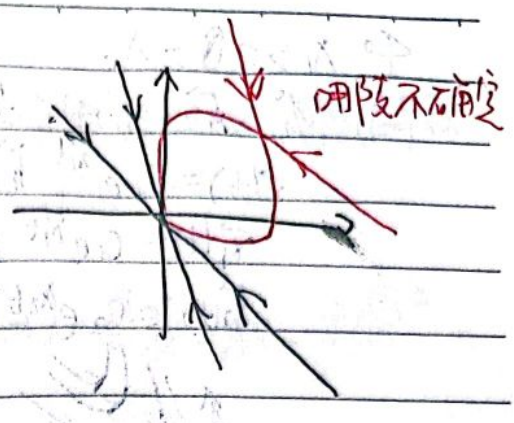
例. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dx} = -2x-3y\end{cases}$

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$.

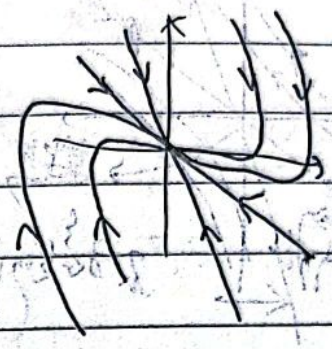
奇点 0 是稳定的结点

$y(t) = \underset{\text{待定}}{k}\,x(t)$ $\qquad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{-2x-3y}$

$\frac{1}{k} = \frac{1}{-2k-3}$ $\quad k_1 = -1,\ k_2 = -2$



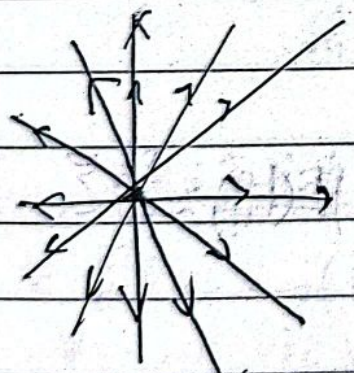
由第一象限中 $k>0$，~~得为~~ 不确定是哪段



3° $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. (<0)

3.1 若具有完整的特征向量 $\vec{h_1}, \vec{h_2}$

$\vec{x}(t) = (C_1\vec{h_1} + C_2\vec{h_2})e^{\lambda t}$



非常的稳定

(不稳定)

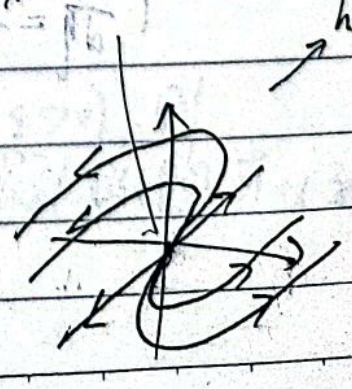
3.2. 设 $\vec{h_1}$ 是特征向量 $\vec{h_2}$ 是广义特征向量

不稳定的变化 情况

$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{h_1} + C_2 e^{\lambda t}(\vec{h_1} + \vec{h_2})$

$\vec{x_1}(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{h_1}$ 一条 半直线

$\frac{\vec{x}(t)}{\|\vec{x}(t)\|} \to \pm\frac{\vec{h_1}}{\|\vec{h_1}\|}$ $(t \to \pm\infty)$



4° $\lambda_1>0>\lambda_2$

$\vec{h}_1$、$\vec{h}_2$ 特征向量

$$\vec{x}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\vec{h}_2$$

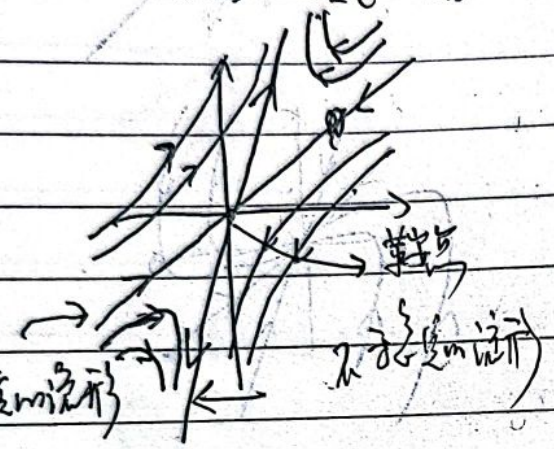
$$\vec{x}_1(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\vec{h}_1$$

$$\vec{x}_2(t)=c_2e^{\lambda_2 t}\vec{h}_2$$

对应四条半轨线

$$\|\vec{x}(t)-\vec{x}_1(t)\|\to 0\quad(t\to+\infty)$$

$$\|\vec{x}(t)-\vec{x}_2(t)\|\to 0\quad(t\to-\infty)$$



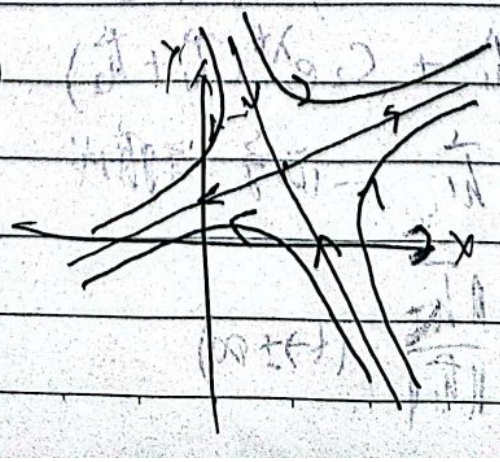
例 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-2\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}$

令 $\begin{cases}\xi=x-1\\ \eta=y-1\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\xi+\eta\\ \dfrac{d\eta}{dt}=\xi-\eta\end{cases}$

$\begin{cases}x+y-2=0\\ x-y=0\end{cases}\Rightarrow(x^*,y^*)=(1,1)$ 奇点

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}$，$(x^*,y^*)=(1,1)$ 为鞍点.

$\begin{cases}\eta=k\xi(t)\\ \dfrac{d\xi}{d\eta}=\dfrac{\xi+\eta}{\xi-\eta}\end{cases}\Rightarrow k_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$



三、平面自治系统奇点的性质

(**) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{g}(\vec{x})$ 其中 $\vec{g}(\vec{x})$ 具有连续的一阶偏导数 $\vec{g}(\vec{0}) = \vec{0}$

称 (**) 为 (*) 的扰动系统

反之称 (*) 为 (**) 的近似系统 (*) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x} \in R^2$

一般地，设 $\vec{x} = \vec{x}^*$ 是系统 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ 的奇点，$\vec{x} \in R^2$

作 $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}^*$ $\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{f}(\vec{x})}_{=\vec{0}} + \underbrace{D\vec{f}(\vec{x})}_{A}\vec{y} + o(\|\vec{y}\|)$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + o(\|\vec{y}\|)$$

$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^T$

$D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ ~ Jacobi 矩阵

Perron 定理（第一定理）

若 $\vec{g}(\vec{x}) = o(\|\vec{x}\|)$，$(\|\vec{x}\| \to 0)$，则系统 (*) 的奇点 O 的性质（稳定、不稳定、渐近稳定）可以被系统 (**) 的奇点 O 所继承

Perron 第二定理 若 $\vec{g}(\vec{x}) = o(\|\vec{x}\|^{1+\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$，则系统 (*) 奇点 O 的性质（鞍点、结点、焦点、临界点）可以被系统 (**) 的奇点 O 所继承

第二章

若 $g(\vec{x})=0$ ($\|\vec{x}\|$). 则称奇点 0 是系统(*)的中心. 则奇点 0 是系统(*)的中心或焦点(或中心焦点), 若 $\vec{f}(\vec{x})$ 是解析的, 则为中心或焦点

例 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y+y^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -b^2x-2ay+x^3 \end{cases}$ $(a\neq 0,\ b>0)$.

$\begin{cases} y+y^3=0 \\ -b^2x-2ay+x^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm b \end{cases}$

$O(0,0)$ $P_+(b,0)$ $P_-(-b,0)$

$D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1+3y^2 \\ -b^2+3x^2 & -2a \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-b^2}$

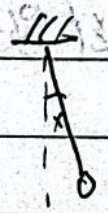
$D\vec{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{pmatrix}$ 1° $a>0$ $a^2>b^2$ 稳定结点 $a^2<b^2$ 稳定焦点

2° $a<0$ → 不稳定结点 → 不稳定焦点

$D\vec{f}(\pm b,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2b^2 & -2a \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2+2b^2}$

例. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\sin x=0$. $\begin{cases} y=0 \\ \sin x=0 \end{cases}$ $(k\pi,0)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l}\sin x \end{cases}$$

判断奇点类型

$$D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

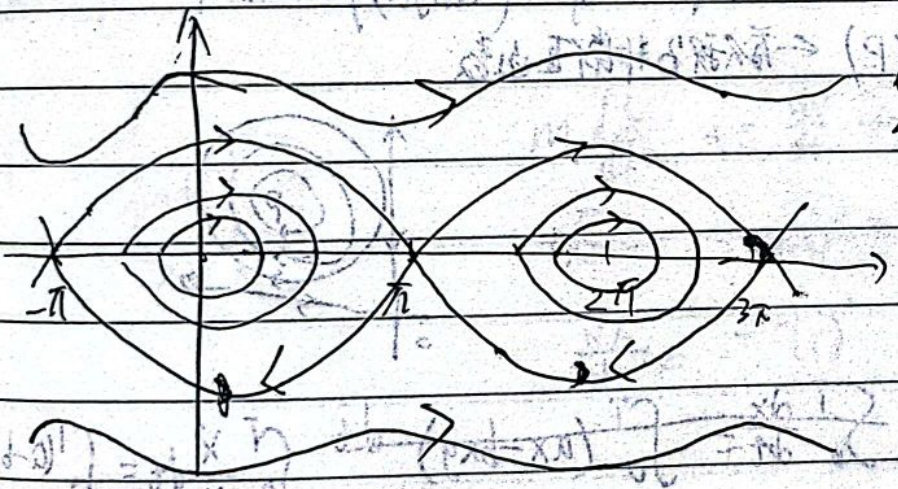
$k=2m$, $D\vec{f}(2m\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,i$ 中心/稳定 ✓

$k=2m+1$, $D\vec{f}((2m+1)\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ 鞍点.

$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-\frac{g}{l}\sin x}$, $-\frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}\cos x = C$ (首次积分)

奇为稳定

$(x(t), y(t)) \to \vec{0}$ $(t \to \pm\infty)$ 不存!



奇异轨

P148 6 (不一定稳定)

P166 (1)(3)(5) 2 6 5

P167 8 (分类讨论)

例. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$ $(a.b.c.d>0)$

奇点 $O(0,0)$ $P(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

$D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}$ $D\vec{f}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

鞍点

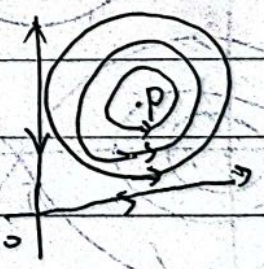
$D\vec{f}(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$

奇点P是为中心或焦点

$\frac{dx}{dy} = \frac{ax-bxy}{cy+dxy}$ $F(x,y) = C$. 首次积分

考虑轨道 $(t \to +\infty$ 或 $-\infty)$ $(x(t), y(t)) \xrightarrow{\|\cdot\|} P$

$C = F(P)$ ← 首次积分非常值函数



$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ $\cancel{\int_0^T \frac{dx}{dt} = \int_0^T (ax-bxy)dt}$ $\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}dt = \int_0^T (a-by)dy$

$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$ $0 = \int_0^T a\,dt - b\int_a^T y(t)dt$

$\bar{x} = \frac{c}{d}$ $\bar{y} = \frac{a}{b}$

No.

Date.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \overset{(a-\varepsilon)}{a}x - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -\underset{(c+\varepsilon)}{c}y + dxy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{c+\varepsilon}{d} \qquad \bar{y} = \frac{a-\varepsilon}{b}$$

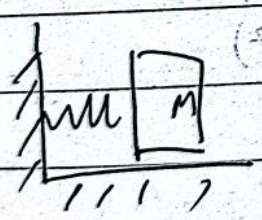
例 $\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r^3 \sin\frac{\pi}{r} \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$ $\quad r^3 \sin\frac{\pi}{r} = 0, \quad r_1^* = 0, \quad r_k^* = \frac{1}{k}$

$1 < r < 2 \quad \dot{r} < 0$

$2 < r < 3 \quad \dot{r} > 0$

四. 平面力学系统 — 闭轨线, 相轨图

例



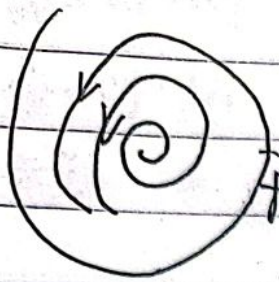
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -c(\dot{x})^2 \qquad C = c\ (x, \dot{x})$$ 同源之振荡

闭轨线,

相轨图.



稳定极限圆

不稳定极限圆.

极限圆(环) ① 极限闭轨线
② 闭轨线邻域中的其它轨线均向闭轨线盘旋地趋向于(或离开于)该闭轨线

例 Normal form
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

奇点 $(0,0)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

由Perron定理可知 $(0,0)$ 是不稳定焦点.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad x^2+y^2=r^2 \qquad 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1-r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases} \qquad 2r\frac{dr}{dt} = 2r^2(1-r^2)$$

$$\frac{dr^2}{dt} = 2r^2(1-r^2)$$

$$\frac{dr^2}{r^2(1-r^2)} = 2dr$$

$$\int \frac{1}{r^2}\,dr^2 = \int \frac{d(1-r^2)}{1-r^2} = \int 2dt$$

$$\ln|r^2| - \ln|1-r^2| = 2t + C$$

$$\ln\left|\frac{r^2}{1-r^2}\right| = 2t + C, \quad \frac{r^2}{1-r^2} = e^{2t}\cdot C$$

$$r^2 = \frac{e^{2t}\cdot C}{1+e^{2t}\cdot C} \qquad r^2 = \frac{1}{1+e^{-2t}\cdot C}$$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

$r=\sqrt{\frac{1}{1+e^{-2t}C}}$ $\quad r(1-r^2)=0$

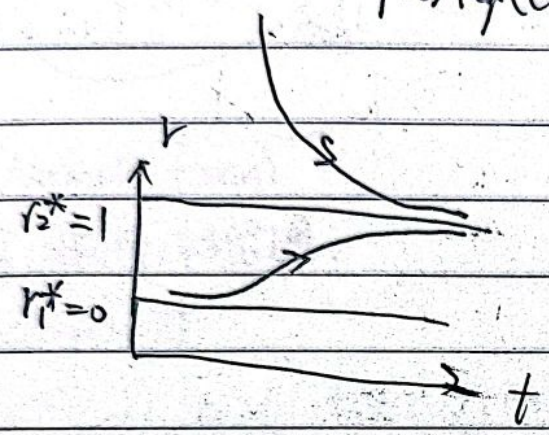
$r_1^*=0,\ r_2^*=1.$ $\quad r(t)=1$

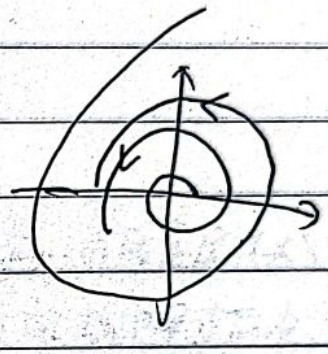
(1) 稳定的 $(C>0)$ $\quad r(t)\to 1\ (t\to+\infty)$

$r(t)\to 0\ (t\to-\infty)$

(2) 稳定的 $(C<0)$. $\quad r(t)\to 1\ (t\to+\infty)$

$r(t)$ 发散 $(t\to t^*)$



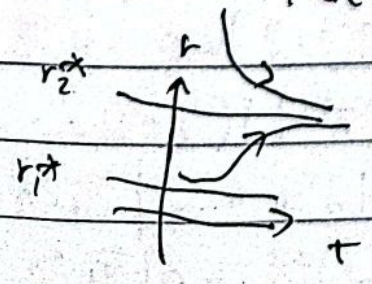


例 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\mu x-\omega y+\xi x(x^2+y^2)\\ \frac{dy}{dt}=\omega x+\mu y+\xi y(x^2+y^2)\end{cases}$ $(\mu\in\mathbb{R},\ \omega\neq 0,\ \xi=\pm1)$

$O(0,0)$, $\quad A=\begin{pmatrix}\mu & -\omega\\ \omega & \mu\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}\frac{dr}{dt}=r(\mu+\xi r^2)\\ \frac{d\theta}{dt}=\omega\end{cases}$

$1^\circ\ \xi=-1$ $\quad \begin{cases}\frac{dr}{dt}=r(\mu-r^2)\\ \frac{d\theta}{dt}=\omega\end{cases}$ $\quad r(\mu-r^2)=0,\ r^*=?$

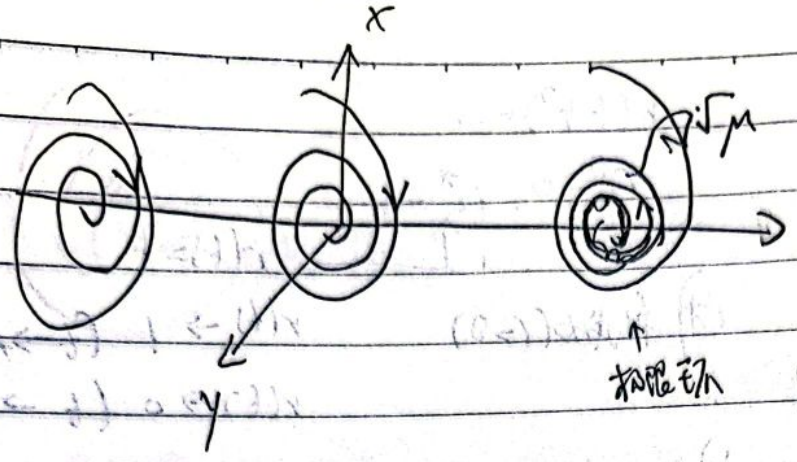
稳定性 $\begin{cases}(1)\ \mu<0,\ r_1^*=0.\quad r(t)\to r_1^*\ (t\to+\infty)\\ (2)\ \mu=0,\ \dot r=-r^3,\ r_1^*=0\quad r(t)\to r_1^*\ (t\to+\infty)\end{cases}$



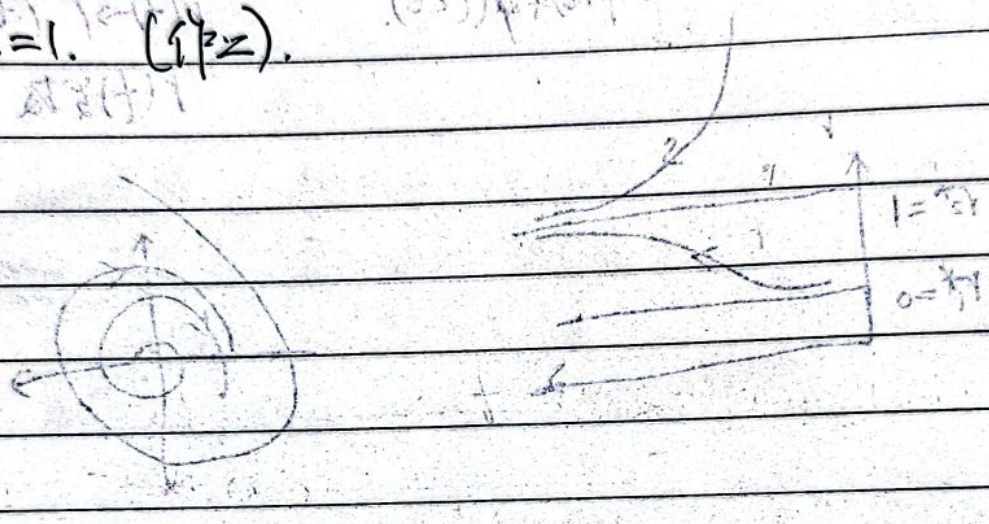
(3) $\mu>0,\ \dot r=r(\mu-r^2)$ $\quad r_1^*=0,\ r_2^*=\sqrt{\mu}$

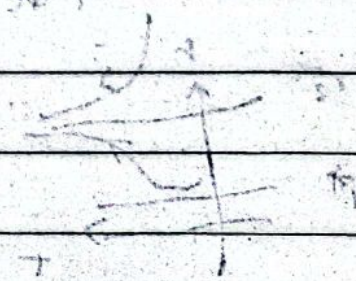
$r_1^*=0$ 对应奇点的稳定性

$r_2^*=\sqrt{\mu}$ 对应极限环 稳定性和相图



2°, $\xi=1$. (仅z).



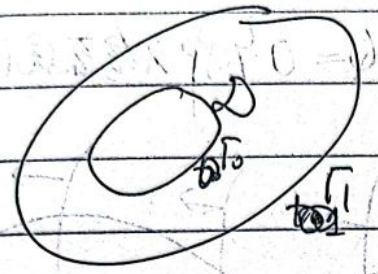


Date.

稳定的系统的极限圈. 闭轨线

$$(*)\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}\qquad (x(t),y(t))=(x(t+T),y(t+T))$$

周期解



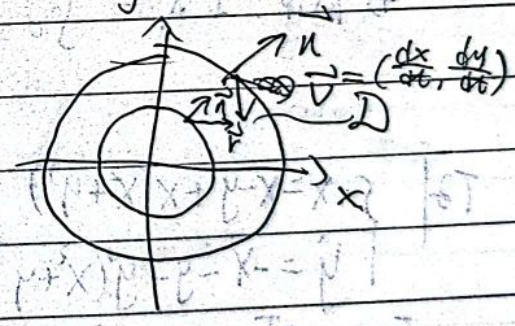
1 标准型 (Normal Form)

直接计算闭轨线, 极限圈.

2. Bendixson 定理

考虑一个环域 D, 在 D 中无系统 $(*)$ 的奇点, 并且系统 $(*)$ 轨线在环域 D 的 ① 外上, 同时进入(或离开) 环域 D, 则在环域 D 中至少存在系统 $(*)$ 的一个闭域

例 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y-x(x^2+y^2)\triangleq P\\ \frac{dy}{dt}=-x+y-y(x^2+y^2)\triangleq Q.\end{cases}$



系统在左端点的极限圈

在 D 中无系统的奇点.

$D=\{(x,y)\in R^2 \mid r\le x^2+y^2\le R,\ 0<r<1<R\}$

$\vec{n}=(x,y)$, $\vec{v}=(P,Q)$.

$\vec{n}\cdot\vec{v}|_r=r^2(1-r^2)>0$

$\vec{n}\cdot\vec{v}=\text{grad} f\cdot(P,Q)=(x,y)(x+y-x(x^2+y^2),\ -x+y-y(x^2+y^2))$

$=(x^2+y^2)(1-(x^2+y^2))$

$\vec{n}\cdot\vec{v}|_r=r^2(1-r^2)>0$

$\vec{n}\cdot\vec{v}|_R=R^2(1-R^2)<0$

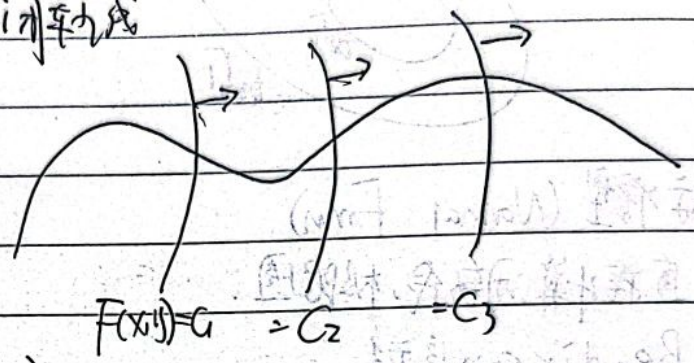
Date.

3. 判别法 — 闭轨线不存在

(一) 判别法（切线判别法）

设 $F(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数于 $S\subset R^2$ 中，并且 $\operatorname{grad} F\cdot(P,Q)=\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q$ 保持常号于 S 中.

进一步，$\Omega=\{(x,y)\in S \mid \frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q=0\}$ 中不含系统(*)的非奇点后整条轨线，则系统(*)于 S 中无闭轨线



[证明] $0=\int_0^T \frac{dF(x(t),y(t))}{dt}dt$，其中 $(x(t),y(t))$ 为系统(*)于 S 中闭轨线，T 为周期数

另一方面，上式 $=\int_0^T\left[\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x(t),y(t))}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x(t),y(t))}\dot{y}\right]dt\neq 0$. 矛盾 #

例 $\begin{cases}\dot{x}=x-y+x(x^2+y^2)\\ \dot{y}=-x-y-y(x^2+y^2)\end{cases}$ $F(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2}$

$\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q=(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)$

$\Omega=\{(0,0)\}$

平面自治系统中无相交圆，闭轨线

(二) 设 $S\subset R^2$ 为单连通的区域，P、Q 于 S 中具有连续的一阶偏导数 u

Bendixon判别法 $\operatorname{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\neq 0$ 于 S 中 $\longrightarrow \operatorname{div}(Pu,Qv)=\frac{\partial Pu}{\partial x}+\frac{\partial Qv}{\partial y}\neq 0$

Dulac

则系统(*)于 S 中无闭轨线

No.

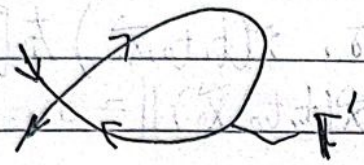
Date.

[证明] 设 $(x(t), y(t))$ 为闭轨线 Γ，周期为 T. 闭轨线 Γ 围成的区域为 $\tilde{\Omega} \subset S$.

$$0 \neq \iint_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\Gamma} P\,dy - Q\,dx = 0$$

Green 公式

注



同宿轨（奇点的闭轨线）

例 $\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha - \beta x)x + \left(\gamma - \delta \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = 0, \quad \gamma \neq 0.$

$\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q}$

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$

$\Downarrow$

$S(x,y) = C$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = -(\alpha - \beta x)x - (\gamma - \delta y)y = Q(x,y) \end{cases}$$

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2\delta y - \gamma$

1° $\delta = 0$ 时 $\gamma \neq 0$ ///

2° $\delta \neq 0$ 时 $y = \frac{\gamma}{2\delta}$ ///

$u(x,0) = \gamma e^{-2\delta x}$

$\frac{\partial Pu}{\partial x} + \frac{\partial Qu}{\partial y} = -\gamma^2 e^{-2\delta x} \neq 0$

五 稳定性（Lyapunov 意义下）

$$(*) \begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 & \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

并且设 $\vec{x}^* = \vec{\varphi}$ 是方程 $(*)$ 的解（零解） $\vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0)$

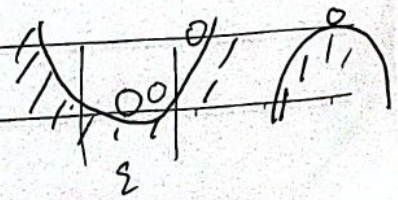
定义若干关于零解在 Lyapunov 意义下的稳定性

1° 零解稳定性

对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$，当 $\|\vec{x}_0\| < \delta$ 时，有 $\|\vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$

（对于 $\forall t \in [t_0, +\infty)$）

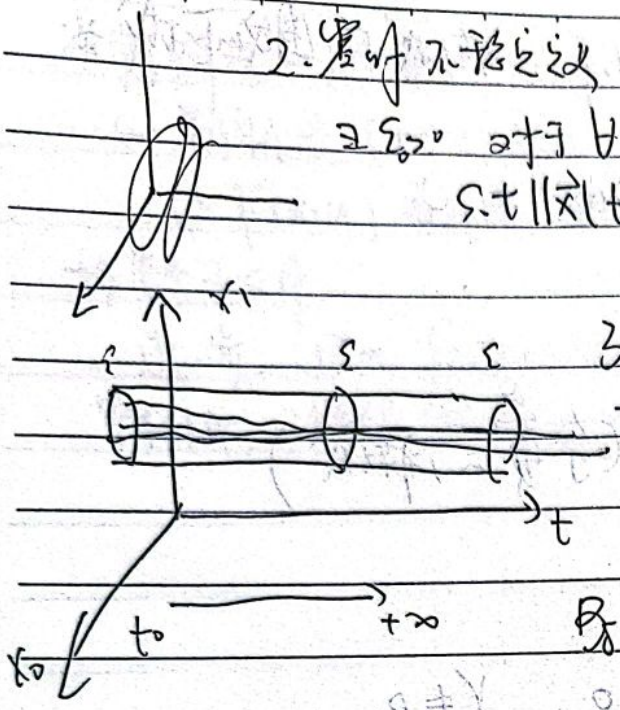
$\lim_{\|\vec{x}_0\| \to 0} \|\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)\| = 0 \quad (\forall t \in [t_0, +\infty))$



2. 零解不稳定定义（否定稳定的定义）

$\exists \varepsilon_0>0$ 对于 $\forall \delta>0$，$\|\vec{x}_0\|<\delta$，$\vec{x}_0\neq\vec{0}$，存在 $t^*\in[t_0,+\infty)$

s.t. $\|\vec{x}(t^*,t_0,\vec{x}_0)\|\geq\varepsilon_0$.



3° 零解的渐近性

$\exists\delta>0$，$\|\vec{x}_0\|<\delta$，$\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在

满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\|=0$

$B_\delta=\{\|\vec{x}_0\|<\delta\}$ 称之为零解的吸引域，零解为吸引的

局部吸引 → 全局吸引

4° 零解的渐近稳定 $\begin{cases}①\text{稳定}\\②\text{渐近收敛}\end{cases}$

例：$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$ 线性系统的零解在 Lyapunov 下的稳定性满足如下性质：

(1) 若系统(*)的一切解在 $[t_0,+\infty)$ 上有界 $\Leftrightarrow$ 系统(*)的零解是稳定的

(2) 若系统(*)的任意解满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x(t)\|=0$. $\Leftrightarrow$ 系统(*)的零解是渐近稳定的

(2) 由(1)直接推出，只需证(1)

[证明] (1) "$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，当 $\|\vec{x}_0\|<\delta$，成立 $\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|<\varepsilon$，(对于 $t\in[$

特别地，对 $\varepsilon=1$，成立

$\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)=U(t,t_0)\vec{x}_0=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}_0$

$=\underbrace{U(t,t_0)\dfrac{\vec{x}_0\delta}{\|\vec{x}_0\|_2}}_{}\cdot\dfrac{\|\vec{x}_0\|_2}{\delta}$

原来线性系统的解，并且以 $\left(t_0,\dfrac{\vec{x}_0\delta}{\|\vec{x}_0\|_2}\right)$ 为初值

$\|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\|=\left\|U(t,t_0)\dfrac{\vec{x}_0\delta}{\|\vec{x}_0\|_2}\right\|\cdot\dfrac{\|\vec{x}_0\|_2}{\delta}\leq\dfrac{\|\vec{x}_0\|_2}{\delta}$

Date.

"⇒"另一方面，$\|\vec{x}(t,t_0,\vec{x}_0)\| = \|\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(t_0)\cdot\vec{x}_0\| \le N\cdot\|\vec{x}_0\| < \varepsilon$ ...

注：(1) $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$，

(a) $A(t)$ 对称. $\lambda(A(t)) < \alpha < 0$ $(t\in[t_0,+\infty))$，$\vec{x}(t)\to\vec{0}$ $(t\to+\infty)$

(b) $A(t) = A + B(t)$. $Re\{\lambda(A(t))\} < 0$. $\lim\limits_{t\to+\infty}\|B(t)\| = 0$

或 $\int_{t_0}^{+\infty}\|B(s)\|ds < +\infty$

$\vec{x}(t)\to\vec{0}$ $(t\to+\infty)$

2° $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

(a) 零解稳定 $\Leftrightarrow$ $\forall Re\{\lambda(A)\} \le 0$ 并且 "=" 成立对应 Jordan 块 m 阶数为 1

(b) 零解不稳定 $\Leftrightarrow$ $\exists Re\{\lambda(A)\} > 0$ 并且 "=" 成立对应 Jordan 块 m 阶数 ≥ 2

(c) 零解渐近稳定 $\Leftrightarrow$ $\forall Re\{\lambda(A)\} < 0$.

设 $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ 是一个特解. (对于系统 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x})$)

① 特解 $\vec{\varphi}(t)$ 在 Lyapunov 意义下的稳定性. 引入 $\vec{y} = \vec{x} - \vec{\varphi}(t)$ $\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

(1). ~~特解稳定~~ ~~$\lim\limits_{\|\vec{x}_0\|\to 0}$ dim~~ $\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt}$

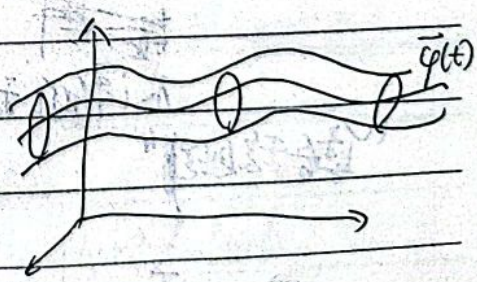
$= \vec{f}(t,\vec{y}+\vec{\varphi}(t)) - \vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))$

$\vec{y} = \vec{g}(t,\vec{y})$，$y^* = 0$

(a) 特解稳定 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)\|\to 0} \|\vec{x}(t,t_0,y_0) - \vec{\varphi}(t)\| = 0$.

(b) 特解不稳定

(c) 特解渐近稳定的定义.



例 $\begin{cases} \dot{x} = -a^2(t)\,y + b(t) \\ \dot{y} = a^2(t)\,x + c(t) \end{cases}$ 设 $x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ 是方程组的一个特解.

$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$，设 $\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t)$ 是一个特解

$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y}$ $\quad \vec{y} = \vec{x} - \vec{\varphi}(t)$

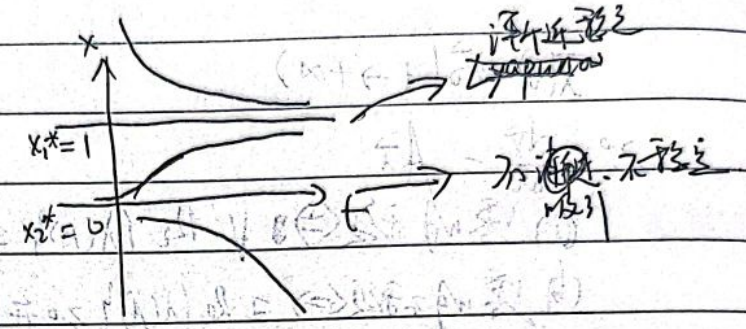
$$\begin{cases} \dot{u} = -a^2(t)\, v \\ \dot{v} = a^2(t)\, u \end{cases}$$

零时在Lyapunov意义下的稳定性.

$u^2+v^2=c^2$

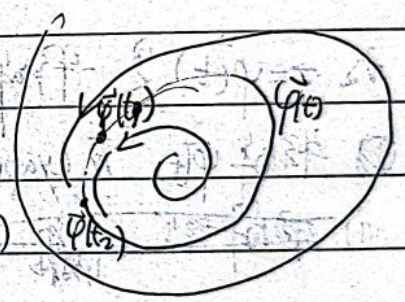
稳定，但不渐近

例 $\dot{x} = x - x^2$



例 设 $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ 是平面自治系统稳定的拓扑圆.

问 $\vec{\varphi}(t)$ 是否是Lyapunov意义下的渐近稳定的解



在周期解上找两点 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$

对 $t; \vec{\varphi}(t_1) - \vec{x}(t; \vec{\varphi}(t_2))$

$= \varphi(t; \vec{\varphi}(t_1)) - \vec{\varphi}(t; \vec{\varphi}(t_2))$

$= \varphi(t+t_1, \vec{\varphi}_0) - \varphi(t+t_2, \vec{\varphi}_0) = \vec{\varphi}(t+t_1) - \vec{\varphi}(t+t_2) \neq 0.$ $\left[\begin{array}{l} \text{令 } t_1 = n \\ \to +\infty \\ \text{as } n \to +\infty \end{array}\right]$

~~t_2~~

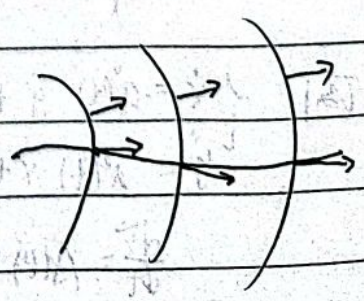
不渐近稳定

"稳定性理论"

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ $\quad \vec{x}^* = \vec{0}$

$\text{grad}\, V \cdot \vec{f} \leq 0$

> 0



六 Lyapunov 直接法

6.1 V函数

$V: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{C_H}} \to \mathbb{R}$ 实值函数 (C_H 包含原点)

1° 若 $V(\vec{x}) \geq 0$ (≤ 0). $V(\vec{0})=0$. 则称之为常正(负)V函数 (常负V函数)

2°. 若 $V(\vec{x})>0$, $\forall \vec{x} \in C_H \setminus 0$, $V(\vec{0})=0$, 则称为定正V函数 (定负V函数)

3°. $V(\vec{0})=0$. 且包含于 C_H 中的原点任意一个邻域, 既可以取到正值, 又可以取到负值, 则称之为变号V函数

例: (1). $V(x)=-x^2$ 定负

(2) $V(x,y)=x^2+y^2$. 定正

(3) $V(\vec{x})=x_1^2+x_2^2$ 若 $\vec{x}=(x_1,x_2)$, 定正

若 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 常正

(4) $V(\vec{x})=\vec{x}^T A\vec{x}$ 二次型. A正定 $\Leftrightarrow$ 定正

$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$ A半正定 $\Leftrightarrow$ 常正

(5) $V(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ 变号函数

(6) $V(x,y)=-x^2-y^2+4x^3y^5$

$(x,y)\in C_H$. (H 充分小) 定负函数

可写 $V(\vec{x})=U(\vec{x})+W(\vec{x})$ $U(\vec{x})$ ~k次齐次函数

$W(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|^k)$.

则 $V(\vec{x})$ 是定正

[证明] $U(\vec{x})$ 是定正

$U(\vec{x})$ 在 $\|\vec{x}\|=1$ 可以取到最小值 $m>0$

No.

Date.

一般地，$U(\vec{x}) = U(\|\vec{x}\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}) = \|\vec{x}\|^k U(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}) \geq m\|\vec{x}\|^k$

对于 $\varepsilon = \frac{m}{2} > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $\|\vec{x}\| < \delta$ 时，$|W(\vec{x})| \leq \frac{m}{2}\|\vec{x}\|^k$

$V(\vec{x}) = U(\vec{x}) + W(\vec{x}) \geq \frac{m}{2}\|\vec{x}\|^k$

☆ 一定有一道叙正并证明 Lyapunov 零解稳定性的定理中其中一个

2, 8

94 (12)*

Lyapunov 直接法

设 V 函数沿着系统 (*) 的导数

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x}) = \text{grad} f \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$ 简记为 $\dot{V}_{(*)}(\vec{x})$

$C_H \to \mathbb{R}$

$\frac{d}{dt} V(\vec{x}(t)) = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}(t)} \dot{x}_i(t)$

↑ 到 (*) 的时 $\quad f_i(\vec{x})\big|_{\vec{x}=\vec{x}(t)}$

Lyapunov 数不零解稳定性有关判定定理

<u>定理 6.1</u> (稳定) 若 $V(\vec{x})$ 定正，$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}$ 半负，则系统 (*) 的零解在 Lyapunov 意义下稳定

[证明] 对于 $\forall \varepsilon > 0$，在 $\varepsilon \leq \|\vec{x}\| \leq H$ 上 $U(\vec{x})$ 可以取到最小值 $m > 0$

对于 $m > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $\|\vec{x}\| < \delta$ 时，有 $U(\vec{x}) < m$.

$\delta(m) = \delta(\varepsilon)$

下证：若 $\|\vec{x}_0\| < \delta$ 则有 $\|\vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$. (对于 $t \in [t_0, +\infty)$ 均成立)

如果不然，$\exists \tilde{t} \in [t_0, +\infty)$，使得 $\|\vec{x}(\tilde{t}; t_0, \vec{x}_0)\| = \varepsilon$

$\|\vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$，$\forall t \in [t_0, \tilde{t})$.

Date.

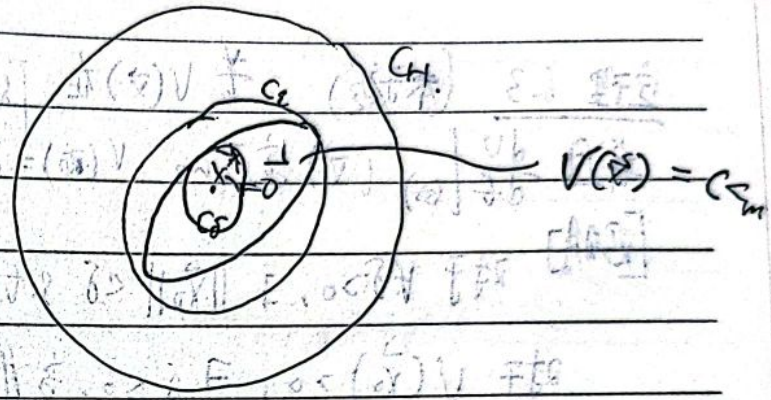
由 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 常负，$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} \le 0$ $\quad$ ~~$V(\vec{x}(t_0)) = V(\vec{x}_0) \ge V(\vec{x}(t))$~~ $t \ge t_0$

$$m > V(\vec{x}(t_0)) = V(\vec{x}_0) \ge V(\vec{x}(t))\Big|_{t=\tilde{t}} = V(\vec{x}(\tilde{t})) \ge m$$

$t \ge t_0$

$\|\vec{x}(\tilde{t})\| = \varepsilon$

矛盾！



定理 6.2（渐近稳定）. 若 $V(\vec{x})$ 定正，$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定负，则零解 $(*)$ 的零解在 Lyapunov 意义下渐近稳定

[证明] 由定理 6.1 知稳定，$\exists \delta > 0$，$\|x_0\| < \delta$ 时有 $\|\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)\| \le H$ $(t \in [t_0, +\infty)$ 一致成立$)$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 是定负的，对于 $\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} \le 0$，可知 $V(\vec{x}(t))$ 是单调减函数

$V(\vec{x})$ 下有界，由此，$\lim\limits_{t \to +\infty} V(\vec{x}(t)) = V_\infty$ 并且 $V_\infty \ge 0$

下证 $V_\infty = 0$

反证法 若不然，$V_\infty > 0$. 对于 $V_\infty > 0$，$\exists \lambda > 0$，$\|\vec{x}\| < \lambda$ 时，有 $V(\vec{x}) < V_\infty$

则有 $\lambda \le \|\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)\| \le H$，$t \in [t_0, +\infty)$

特别地，$-\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 在 $\lambda \le \|\vec{x}\| < H$ 可以取到最小值，记为 $l > 0$

$-\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x}) \ge l$. $\quad \frac{dV(\vec{x}(t; t_0, \vec{x}_0))}{dt} \le -l$.

$V(\vec{x}; t_0, \vec{x}_0) \le V(\vec{x}_0) - l(t - t_0)$，$\forall t \in [t_0, +\infty)$

$\to -\infty$，矛盾！

Date.

这意味着 $V_\infty = 0$ $\lim_{t\to+\infty} V(\vec{x}(t)) = 0$.

对于 $\forall \varepsilon>0$, $\min_{\varepsilon\le\|\vec{x}\|\le H} V(\vec{x}) = m > 0$.

对于 $m>0$, $\exists T>0$, 当 $t\ge t_0+T$ 时, 有 $V(\vec{x}(t)) < m$.

$\|\vec{x}(t)\| < \varepsilon$

定理 6.3 (不稳定) 若 $V(\vec{x})$ 在原点任何一个邻域中都取得到正值, 并且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定正的, $V(\vec{0})=0$ 则系统(*)的零解在 Lyapunov 意义下不稳定

证明 对于 $\forall\delta>0$, $\exists \|\vec{x}_0\|<\delta$ s.t. $V(\vec{x}_0)>0$. 若 $\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|<H$ $(t\in[t_0,+\infty))$

对于 $V(\vec{x}_0)>0$, $\exists \lambda>0$. 当 $\|\vec{x}\|<\lambda$ 时, 有 ~~$\|V(\vec{x})\|<\|V(\vec{x}_0)\|$~~

$V(\vec{x}) < V(\vec{x}_0)$

断言 $\lambda\le\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|\le H$.

($V(\vec{x}(t))$ 的全导数 $\dot{m}$ 符合可知等号成立)

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定正, 在 $\lambda\le\|\vec{x}\|\le H$ 可取到最小值 $l>0$

$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} \ge l$. $V(\vec{x}(t)) \ge V(\vec{x}_0) + l(t-t_0)$

令 $t\to+\infty$ $V(\vec{x}(t))\to+\infty$.

故 $\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|<H$ 不成立.

定理 6.4 (不稳定) 将 6.3 的 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})$ 定正改为 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x}) \ge \lambda V(\vec{x})$ $(\lambda>0)$

$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} \ge \lambda V(\vec{x}(t))$, $\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} - \lambda V(\vec{x}(t)) \ge 0$.

Date.

$$e^{-\lambda t}\left[\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt}-\lambda V(\vec{x}(t))\right]\geq 0.$$

$$V(\vec{x}(t))\geq \underset{>0}{V(\vec{x}_0)}\cdot e^{\lambda(t-t_0)}\to+\infty.\ (t\to+\infty)$$

例: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\omega y+x(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=\omega x+y(x^2+y^2)\end{cases}$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot(-\omega y+x(x^2+y^2))+\frac{\partial V}{\partial y}(\omega y+y(x^2+y^2))$

$=x^2(x^2+y^2)+y^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2>0$. 正定

例 6.3. 不稳定

由 Rerron 定理, 0为中心/焦点

故 0为不稳定焦点

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\omega y-x(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=\omega x-y(x^2+y^2)\end{cases}$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(x,y)=-(x^2+y^2)^2<0$. 负定. 渐近稳定

例. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y+y(x^2+y)\\ \dfrac{dy}{dt}=x-x(x+y)\end{cases}$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(x,y)=-x^2\leq 0$, 常负, 稳定

Date.

例. $\begin{cases} \dot{x} = x+3y+xy^2 \\ \dot{y} = 3x+y-x^2y \end{cases}$

$V(x,y)=x^2-y^2$

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(x,y) = 2(x^2-y^2)+4x^2y^2 \geq 2V(x,y)$ 不稳定

例. $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$

$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-by-\frac{g}{l}\sin x \end{cases}$ $V(x,y)=\frac{1}{2}m(ly)^2+mgl(1-\cos x)$

$V(x,y)$ 定正.

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(x,y)=-mbl^2y^2$ 常负 $S=\{(x,y)\in G_H \mid y=0\}$ $(x(t),y(t))$

将 $\dot{x}=(x(t),0)$ 代入系统可知 $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv 0$

定理

定理6.5 若 $V(\vec{x})$ 定正, $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\vec{x})$ 常负,

集合 $S=\{\vec{x}\in G_H \mid \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(\vec{x})=0\}$ 中不包含系统(*)

非零的轨, 则系统(*)的零解在Lyapunov意义下渐近稳定

例: $\dot{x}=-x^2$

$V(x)=e^x$

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(*)}(x)=-e^xx^2<0$

但注: $V(x)$ 不是定正的! $V(0)\neq 0$

No.

Date.

期末复习

chapter 4.

存在唯一性：$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，$f(t,x)$ 在 $\bar{R}=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}$ 上二元连续，并关于 x 满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L>0$，$|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|$，$\forall (t,x),(t,y)\in\bar{R}$，则方程的解在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$

$M=\max\limits_{(t,x)\in\bar{R}}|f(t,x)|$

注：一个充分条件为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 $\bar{D}$（闭有界，凸集）上连续

注：一般地，$f(t,x)$ 在 D 上连续，且关于 $f(t,x)$ 关于 x 于 D 上满足局部 Lipschitz 条件，则 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ 在 D 的解存在唯一

特别地，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D 上连续

解的延展：

定理 1：(1) 设 D 为有界区域，$f(t,x)$ 于 D 上连续，且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件 (2) 再设 $x(t)$ 为 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的定义于 (α,β) 为最大存在区间且存在 $\{t_n\}$，$t_n\to\beta-0\ (n\to+\infty)$，$x(t_n)\to c\ (n\to+\infty)$，则 $(\beta,c)\in\partial D$

定理 2：若定理 1 的 (1)(2) 成立，且 $\bar{D}_1\subset D$ 为 D 内闭子区域，则 $\exists\delta>0$，当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，成立 $(t,x(t))\notin\bar{D}_1$

定理 3：若定理 1 的 (1)(2) 成立，记 $\rho(t)\triangleq dist((t,x(t)),\partial D)$，$dist(p,A)=\inf\limits_{q\in A}\|p-q\|$，则 $\lim\limits_{t\to\beta-0}\rho(t)=0$

$\lim\limits_{t\to\alpha+0}\rho(t)=0$

定理 4：若 D 为无界区域，$f(t,x)$ 于 D 上连续且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，$x(t)$ 为 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的解，(α,β) 为最大存在区间，则以下情形必居其一：1° $\beta=+\infty$ 2° $\beta<+\infty$，$x(t)$ 无界 3° $\beta<+\infty$，$x(t)$ 有界，$dist((t,x(t)),\partial D)\xrightarrow[(t\to\beta-0)]{}0$

压缩映射原理：

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，$f(t,x)$ 在 $\bar{R}=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}$ 上二元连续，且关于 x 满足 Lipschitz 条件，L 为 Lipschitz 常数，则方程的解在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一，$h=\min\{a,\frac{b}{M},\frac{1}{L}\}$

证明思路：(1) 令 $\|\varphi\|_\lambda=\max\limits_{t\in[t_0-h,t_0+h]}e^{-\lambda|t-t_0|}|\varphi(t)|$，则 $(\Omega,\|\cdot\|_\lambda)$ 完备，Ω 为 $\bar{R}$ 全体连续函数集 (2) 证明压缩性，

(2) 令 $A\varphi=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds$，证明 $A\varphi\in\Omega$，(3) 证明压缩性，即 $\forall\varphi,\psi\in\Omega$，有 $\|A\varphi-A\psi\|_\lambda\le\theta\|\varphi-\psi\|$

其中 $\theta\in(0,1)$，事实上 $\theta=1-e^{-\lambda\cdot 2a}$

解关于初值函数的依赖性

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$，$f(t,x)$ 在 D 上连续且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件，设 $\varphi(t)$ 是 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个解，则存在 $\eta>0$，当 $|x_0-\varphi(t_0)|\le\eta$ 时 $(t_0\in[a,b])$，则有 1° $x(t;t_0,x_0)$ 在 $[a,b]$ 上存在；2° $x(t;t_0,x_0)$ 在 $\{(t,t_0,x_0)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in[a,b],\ t_0\in[a,b],\ |x_0-\varphi(t_0)|\le\eta\}$ 上二元连续

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

解关于~~初值、参数~~右端函数的连续依赖性

(CP) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$ (CP) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f(t,x)+g(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$，设 $x(t;t_0,x_0)$ 表示(CP)的解，$t\in[a,b]$，

若 $\|g\|<\delta \ll 1$，则 $y(t;t_0,x_0)$ 表示(CP)y的解在 $[a,b]$ 上亦存在，

解关于参数的连续依赖性.

$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f(t,x,\mu) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$，$f(t,x,\mu)$ 在区域 Ω 上三元连续，且关于 x 满足局部Lipschitz条件. 设 $\varphi(t;\mu_0)$ 为 $[a,b]$ 上的解，则 $\exists\eta>0$，当 $|\mu-\mu_0|<\eta$ 时，方程之解 $x(t;\mu)$ 在 $[a,b]$ 上存在，且关于 (t,μ) 二元连续

~~Chapter 5. 方程组的存在唯一性~~

定理 0: $\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0 \end{cases}$，$\vec{f}(t,\vec{x})$ 在 Ω 内是关于 $t,\vec{x}$ 的连续函数，且关于 $\vec{x}$ 满足局部Lipschitz条件，则方程的解存在唯一

Chapter 5

自治系统的性质

(平移不变性) 1. 设 $\vec{x}(t)$ 为 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 的任一解，则 $\vec{x}(t+C)$ 亦是方程的解

(群的性质) 2. 设 $\vec{x}(t;\vec{x}_0)$ 表示从 $(0,\vec{x}_0)$ 出发的自治系统的轨线，则 $\vec{x}(t_1+t_2;\vec{x}_0)=\vec{x}(t_2,\vec{x}(t_1;\vec{x}_0))$，其中 t_1,t_2

3. 自治系统的轨线不相交

4. (1) $\vec{x}^*$ 为自治系统的奇点，$\vec{x}_0\neq\vec{x}^*$，若 $\vec{x}(t_0;\vec{x}_0)\to\vec{x}^*$ $(t\to\beta^{+0}_{-0})$，则 $\beta=+\infty$ 或 $-\infty$

(2) 若 $\vec{x}(t;\vec{x}_0)\to\vec{x}^*$ $(t\to+\infty/-\infty)$，则 $\vec{x}^*$ 为系统的奇点，即 $\vec{f}(\vec{x}^*)=\vec{0}$

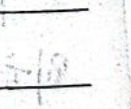
平面自治系统奇点分类

对 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$，$\vec{x}\in\mathbb{R}^2$，$\det A\neq0$，$\vec{x}^*=\vec{0}$ 为唯一奇点的自治系统，λ_1,λ_2 为A的特征值

1° $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ (1) $\alpha>0$ 不稳定焦点 (2) $\alpha=0$ 中心 (3) $\alpha<0$ 稳定焦点

2° (1) ~~λ_1,λ_2 为实数~~ $\lambda_1>\lambda_2>0$，不稳定结点，$t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\vec{v}_1$ 平行；$t\to-\infty$ 时，$x(t)\to\vec{v}_2$ 平行

(2) $\lambda_1<\lambda_2<0$，稳定结点，$t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\vec{v}_2$ 平行；$t\to-\infty$ 时 $x(t)\to\vec{v}_1$ 平行



3° (1) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ (1) 若具有完整特征系，则为临界的结点，$\lambda>0$ 时不稳定，$\lambda<0$ 时稳定

(2) 若无完整特征系，则为退化结点，$\lambda>0$ 时不稳定，$\lambda<0$ 时稳定

4° $\lambda_1>0>\lambda_2$，为鞍点

极限环的计算：多作变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$x^2+y^2=r^2$，$\Rightarrow xx'+yy'=rr'$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$，$\dot\theta=\frac{x\dot y-y\dot x}{x^2+y^2}$

~~极限环的存在性判别~~

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

极限环存在判别法 (Bendixon定理): $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$，$\Omega$为环域，$\Omega$中无系统的奇点，且系统的轨线在环域$\Omega$的边界上，同时进入或离开$\Omega$，则$\Omega$中一定存在一个系统的极限环。 (用算$\vec{n}\cdot\vec{v}$，$\vec{v}=(P,Q)$)

闭轨线不存在判别法 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$

1. (十字性判别法) 设$F(x,y)$有连续的一阶偏导数于S中，且$\mathrm{grad}F\cdot(P,Q)=\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q$保持常号于S中，若$\Omega=\{(x,y)\in S\mid \frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q=0\}$中不含系统的奇点，且非奇点的整条轨线，则系统于S中无闭轨线。

2. (Bendixon判别法) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$，设S为单连通区域，P,Q于S中有连续的一阶偏导数，~~$\mathrm{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$~~ $\mathrm{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$保持常号，且不在S的任一子区域中恒为0，则系统于S中不存在闭轨线

3. (Dulac判别法) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$ 设S为单连通区域，(P,Q)连续可微，若存在函数$B(x,y)\in C^1(S)$且在S中，$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}$保持常号，且不在S中任一子区域中恒为0，则系统于S中不存在闭轨线

Lyapunov稳定性，零解稳定性的定义.

(稳定)：对$\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$，$\forall\varepsilon>0$，$t_0\in I$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，$\forall\|\vec{x}_0\|<\delta$，$\vec{x}(t)=\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)$在$t_0\le t<+\infty$中成立$\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|<\varepsilon$，则系统的零解稳定

(不稳定). $\exists\varepsilon_0>0$，$t_0\in I$，$\forall\delta>0$，$\exists\vec{x}_0$满足$\|\vec{x}_0\|<\delta$及时刻$t_1>t_0$，使$\vec{x}(t)=\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)$满足$\|\vec{x}(t_1;t_0,\vec{x}_0)\|\ge\varepsilon_0$，则系统的零解不稳定。

(吸引). 设B是包含原点的一个开区域，$\forall x_0\in B$，$\forall\varepsilon>0$，$t_0\in I$，$\exists$时刻$T=T(\varepsilon;t_0,x_0)$，使$t>t_0+T$时，系统的解$\vec{x}(t)=\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)$满足$\|\vec{x}(t;t_0,\vec{x}_0)\|<\varepsilon$，则系统的零解是吸引的

线性系统$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$的零解

(1) 系统的一切解在$[t_0,+\infty)$上有界 $\Longleftrightarrow$ 系统的零解稳定

(2) 系统的一切解满足$\lim_{t\to+\infty}\|\vec{x}(t)\|=0$ $\Longleftrightarrow$ 系统的零解是~~稳定的~~渐近稳定的

特殊的线性系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\cdot\vec{x}$

1. $A(t)$对称，$\lambda(A(t))<\alpha<0$，$(\forall t\in[t_0,+\infty))$. 则$\vec{x}(t)\to0$ $(t\to+\infty)$. $\Rightarrow$ 渐近稳定

2. $A(t)=A+B(t)$. $Re(\lambda(A(t)))<0$，$\lim_{t\to\infty}\|B(t)\|=0$ 或 $\int_{t_0}^{+\infty}\|B(s)\|ds=0$，则$\vec{x}(t)\to0$，渐近稳定

3. $A(t)=A$，则零解稳定 $\Longleftrightarrow$ $\forall Re(\lambda(A))\le0$ 且等号成立的对应Jordan块的阶数为1

零解不稳定 $\Longleftrightarrow$ $\exists Re(\lambda(A))\ge0$ 且等号成立的对应Jordan块的阶数≥2

零解渐近稳定 $\Longleftrightarrow$ $\forall Re(\lambda(A))<0$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date.

Lyapunov直接方法　　定义 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(x)}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i(x)$

1. 零解稳定：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$，$V(\vec{x})$定正，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(x)}(\vec{x})$ 半负，则系统在Lyapunov意义下稳定。

2. 零解渐近稳定：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$. $V(\vec{x})$定正，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(x)}(\vec{x})$ 负定，则系统在Lyapunov意义下渐近稳定

3. 零解不稳定I：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$. $V(\vec{x})$在原点任一邻域中总能取到正值，$V(\vec{0})=\vec{0}$，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(x)}(\vec{x})$ 定正，则系统在Lyapunov意义下不稳定。

4. 零解不稳定II：对自治系统 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$. $V(\vec{x})$在原点任一邻域总能取到正值，$V(\vec{0})=\vec{0}$，且 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(x)}(\vec{x})\geq\lambda V(\vec{x})$ 其中λ为正的常数，则系统在Lyapunov意义下不稳定。

线性自治系统的Lyapunov函数

命题1. 设C为定正，对称的矩阵，则Lyapunov方程：$A^TB+BA=-C$具有定正，对称的解矩阵B ⇔ $R_e(\lambda(A))<0$　　(注：$B=\int_0^{+\infty}e^{A^Tt}Ce^{At}dt$)

命题2. 设C为对称阵，A的任一特征值满足 $\lambda_k+\lambda_l\neq0$；$k,l=1,2,\cdots,n$. 则Lyapunov方程 $A^TB+BA=-C$有对称的解矩阵B　　~~(注：$B=\int_0^{+\infty}e^{A^Tt}Ce^{At}dt$)~~

一次近似理论

设方程 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$ 有零解 $\vec{x}^*=\vec{0}$，则方程(1) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{g}(\vec{x})$，$A=Df(\vec{0})$，$\vec{g}(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|)$

系统(2) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$，$A=Df(\vec{0})$，则下列命题成立：

1° 系统(2)零解渐近稳定，则系统(1)零解亦渐近稳定

2° 若系统(2)的系数矩阵A有右实部大于0的特征值，则系统(1)的零解是不稳定的

No.

Date.

用Lyapunov直接方法判定

系统(*) $\dot{\vec{x}}=\vec{f}(\vec{x})$ 的零解各种性质

判定定理

V函数 $\begin{cases}\text{定正}\\ \text{全导数 } \dot{V}|_{(*)}(\vec{x}) \text{ 负}\end{cases}$ / $\vec{S}=\{\vec{x}\in G_H \mid \dot{V}|_{(*)}(\vec{x})=0\}$

↓

Lyapunov函数. $V(\vec{x})=x^2+y^2$, x^2-y^2, $\vec{x}^TB\vec{x}$

反之 已知系统(*)的零解在Lyapunov意义下的稳定性, 问 V函数是Lyapunov函数? (反问题)

七 Lyapunov函数的存在性

$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$, 零解是渐近稳定的 $\Leftrightarrow$ $\forall\, Re\{\lambda(A)\}<0$

命题: 给C定正 对称的矩阵, 考虑下矩阵方程

(Lyapunov方程) $A^TB+BA=-C$

具有定正、对称的解矩阵 B $\Leftrightarrow$ $\forall\, Re\{\lambda(A)\}<0$

[证明] "$\Rightarrow$" $V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$ 定正的

$=\langle B\vec{x},\vec{x}\rangle$

$\dot{V}_{(*)}|(\vec{x})=\langle B\dot{\vec{x}},\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},\dot{\vec{x}}\rangle=\langle BA\vec{x},\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},A\vec{x}\rangle$.

$=\vec{x}^T(A^TB+BA)\vec{x}=-\vec{x}^TC\vec{x}$ 负.

则系统(*)的零解是渐近稳定的.

$\Rightarrow Re\{\lambda(A)\}<0$.

"$\Leftarrow$" $B\triangleq\int_0^{+\infty}e^{A^Tt}Ce^{At}\,dt$

1° 适定的 (积分收敛) $\|e^{At}\|\le Me^{-\alpha t}$ ✓

2° 对称性 $B=B^T$

3° 定正的, $\forall\,\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{y}^TB\vec{y}=\int_0^{+\infty}\underbrace{\vec{y}^Te^{A^Tt}}_{\text{向量}}\cdot\underbrace{C}_{\text{定正}}\cdot\underbrace{e^{At}\vec{y}}\,dt>0$

4° $\int_0^{+\infty}[A^Te^{A^Tt}Ce^{At}+e^{A^Tt}C\cdot e^{At}\cdot A]\,dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}[e^{A^Tt}Ce^{At}]\,dt=-C$

Date.

命题7.2: A $\lambda_k+\lambda_l\neq 0$ $k,l=1,2,\dots,n$

$A^TB+BA=-C$, C对称

则 Lyapunov 方程有对称 m 阵解 B. (证明见书). (用高代方法可证)

利用命题7.2可给出证明命题7.1 m 充分性

条件 1° $\forall$ Re $\lambda_i(A)<0$ 2° C 定对称

根据命题7.2 解矩阵 B 存在, 以下证 B 定 m

若不然. 1° 对于 $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_0^TB\vec{x}_0<0$. $V(\vec{x})=-\vec{x}^TB\vec{x}$ 有取值

位置都成立 取得到正值 (可以压缩 $\vec{x}_0$, 取 $\mu\vec{x}_0$).

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})=\vec{x}^TC\vec{x}$ 定, 要时是对称的 m ⇒ 矛盾

2° $\exists\ \vec{x}^*\neq 0\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}^*B\vec{x}^*=0$, 其中 B 是半正 m. $B=B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$

$=\|B^{\frac{1}{2}}\vec{x}^*\|^2=0 \Rightarrow B^{\frac{1}{2}}\vec{x}^*=0$

$\Rightarrow B\vec{x}^*=0$, $A^TB+BA=-C$, $0=-\vec{x}^*C\vec{x}^*$, 矛盾!

~~$V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$~~

$m\vec{x}^T\vec{x}<V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}<M\vec{x}^T\vec{x}$

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)}(\vec{x})=-\vec{x}^T\vec{x}$

$\dot{V}\Big|_{(*)}(\vec{x})=-\vec{x}^T\vec{x}\le -\frac{1}{M}\vec{x}^TB\vec{x}\le -\frac{1}{M}V(\vec{x})$

$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt}\le -\frac{1}{M}V(\vec{x}(t))$

$m\|\vec{x}\|^2\le V(\vec{x}(t))\le V(\vec{x}_0)\exp(-\frac{1}{M}t)$

$\le M\|\vec{x}_0\|^2\exp(-\frac{1}{M}t)$

$\|\vec{x}(t)\|\le\sqrt{\frac{M}{m}}\|\vec{x}_0\|\exp(-\frac{1}{2M}t)$.

八 一次近似理论

$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x}^*=\vec{0}$

(1) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+g(\vec{x})$, $A=D\vec{f}(\vec{x})$, $g(\vec{x})=o(\|\vec{x}\|)$

(2) $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$

No.

Date.

命题 8.1 1° 若系统(2)零解渐近稳定的，则系统(1)的零解是渐近稳定的

2° 若系统(1)的系数矩阵 A 存在实部大于零的特征值，

则系统(1)的零解是不稳定的.

[证明] 1° $A^TB+BA=-C$ 具有唯一正对称解矩阵 B.

$V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$ 定正.

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)}(\vec{x})=\langle B\dot{\vec{x}},\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},\dot{\vec{x}}\rangle$$

$$=\langle B(A\vec{x}+\vec{g}(\vec{x})),\vec{x}\rangle+\langle B\vec{x},A\vec{x}+\vec{g}(\vec{x})\rangle$$

$$=\vec{x}^T(A^TB+BA)\vec{x}+\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})+\vec{g}^T(\vec{x})B\vec{x}$$

$$=-\vec{x}^TC\vec{x}+\underbrace{2\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})}_{o(\|\vec{x}\|^2)}$$ 定负

由定理 6.2 系统稳定

2° $A-\varepsilon I$ 特征值 满足 $\lambda_k+\lambda_l\neq 0$ $(k,l=1,2,\cdots,n)$.

ε 充分小

$$(A-\varepsilon I)^TB+B(A-\varepsilon I)=-C$$ ← 对称的，定负的

根据命题 7.2. 以上 Lyapunov 方程有解矩阵

断言 B 是非奇异的

考虑 1° $\hat{V}(\vec{x})=-\vec{x}^TB\vec{x}$ 定正

$$\frac{d\hat{V}}{dt}\Big|_{(A-\varepsilon I)}(\vec{x})=\vec{x}^TC\vec{x}$$ 定负 与 $\dot{\vec{x}}=(A-\varepsilon I)\vec{x}$ 的零解不稳定等价

2. 若 $\vec{x}^*\neq 0$，$\vec{x}^{*T}B\vec{x}^*=0$，同之前可证 矛盾

故 $V(\vec{x})=\vec{x}^TB\vec{x}$ 在系统任意邻域内取得正值

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)}(\vec{x})=\vec{x}^T(A^TB+BA)\vec{x}+2\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})$$

$$=-\vec{x}^TC\vec{x}+2\varepsilon\vec{x}^TB\vec{x}+2\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})$$

$$=2\varepsilon V(\vec{x})-\vec{x}^TC\vec{x}+2\vec{x}^TB\vec{g}(\vec{x})\geq 2\varepsilon V(\vec{x})$$

由定理 6.4. 系统(1)零解不稳定.

No.

Date.

常微分方程

(IP) $\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$, $\vec{x} \in R^n$

1° 初值问题的存在唯一性 (最大解的性质, 压缩映像原理)

↳ 局部的

度量空间, 完备性, $A\Omega \to \Omega$: 压缩的

2° 解的延展 (最大存在区间) (有限, 无限)

3° 解关于初值、参数的连续依赖性 (有限闭区间 $[a,b]$ 上)

(对具体问题论证).

用作论证明: $\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = A_\mu \vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{x}(t_0) = x_0 \end{cases}$

对于 Gronwall 公式 (证明与应用)

二. $f(t,\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{f}(t)$

$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds$, 常数变易公式

特别地 $n=2$ 时 二阶方程 $n \geq 2$ 高阶线性方程

第子数

算数变易公式

三. $f(t,\vec{x}) = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$

$\vec{x}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\vec{x} + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$

1° 初值问题的存在唯一性

2° $\vec{x}(t) = \phi(t)\vec{c} + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$

$\phi(t)$ 是对应齐次方程组的基本解

$U(t,s) = \phi(t)\phi^{-1}(s)$

刘维公式: $W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds\right)$

特别地 $n=2$ 时 二阶线性方程

齐次的 $x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$

非齐次的 $x(t) = x_1(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,s)f(s)ds$ $k(t,s) = \dfrac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{vmatrix}}{W(s)}$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

$$\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\varphi_1^2(t)}dt$$

△不好解法（分离变量，非线性方程，高阶方程降阶，有次数方程图）

[9]. 定性理论 初步

1°. 自治系统基本性质（平移不变性，解的性质，轨线相交性质…）

2°. 线性自治系统的奇点分类（中心，焦点，结点，临界，退化奇点，鞍点）

稳定，不稳定　　渐近稳定，不渐近稳定

3°. Perron 定理（一次近似系统）

第一章定理　焦点，结点（临界，退化）鞍点（直线类型与稳定性）

未定型　中心 → 中心，焦点，中心焦点

4°. 相图，消轨线（计算子标准型，临界参数变化进程描述）

（判别法：有无性 — 环不成立理　不有无 — 中性曲线法　Dulac 判别法）

5°. Lyapunov 意义下零解的若干形式性定义及分析（稳定，不稳定，渐近稳定，渐近稳定）

分析计算　　解析法

6°　——　特解

7° 直接法　V函数定义（Lyapunov 判别定理（稳定，渐近稳定，不稳定）全局渐近稳定）

（V 正，$\dot V|_{(*)}$ 负，$S=\{\dot V|_{(*)}=0\}$ 不包含非零的轨线，则稳定）

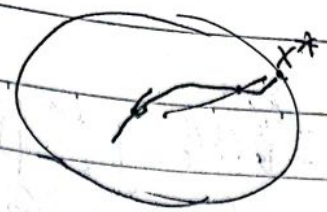
8° V函数存在性

线性微分系统，$A^TB+BA=-C$

基于V函数对于解的变化的估计实现进行控制

9° 一次近似理论　$D\vec f(0)=A$，$\forall Re\lambda(A)<0$，渐近稳定

$\exists Re(\lambda(A))>0$，不稳定



解8.

当 $t \to \beta - 0$. 几何左右有界

$\cancel{S(t) \Rightarrow S_\beta(\beta-0)}$ $\quad S_\beta < +\infty$

$$\frac{dS(t)}{dt} \le \rho(x(t), \alpha\alpha) \le \rho(x(t), x^*) \le S_\beta - S(t).$$

$$\left(\frac{dS(t)}{dt} = \left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\|_2 = \left\|\frac{\rho f(x)}{(\rho+1)(\|f(x)\|+1)}\right\|_2 \le \rho\right.$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} \le S_\beta - S(t).$$

$$\cancel{\left(e^{S(t)+t}\right)' = e^{S(t)} e^{t} + e^{S(t)} e^{t} \le e^{S(t)} \cdot e^{t} \cdot S_\beta}$$

$$t - t_0 \ge \ln \frac{S_\beta}{S_\beta - S(t)} \quad t \to \beta - 0.$$

$$H(p,q) = p^4 + \lambda q^2$$

$$[\xi] \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda y + xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^3 + \dfrac{\xi}{\lambda} x^4 y \end{cases}$$

(1) 若 $\phi(x,y) = c$ 是 $[\xi_0]$ 的一个首次积分，则 ξ_0 之值.

(2) 若 $\xi \ne \xi_0$. 证明 相平面中无系统 $[\xi]$ 的闭轨线

(3) 若 $\lambda > 0$, $\xi \in \xi_0$, 判断 $x=0$ 在 Lyapunov 意义下 的稳定性

(4) 关于参数连续依赖性？ (5) 解存在的区间 (后两小题不要求)

(1) $\cancel{a=1, \frac{\xi_0}{\lambda} = -2}$, $\xi_0 = -2$ $\quad \frac{\partial \phi}{\partial x} P(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial y} Q(x,y) =$

(2) $\cancel{y^2 + 3x^2 + \frac{\xi}{\lambda} x^4 y}$ $\phi(x,y) = (4+2\xi)\, x^4 y^2$ 作好函数

$\{\phi = 0\} = \{x=0 \text{ 或 } y=0\}$

$\{x(t), y(t)\} \subset \{x=0 \text{ 或 } y=0\}$

$\Rightarrow x(t) \equiv 0,\ y(t) = ? \quad \Rightarrow x(t) = y(t) = 0$

$y(t) \equiv 0,\ x(t) = ? \quad \Rightarrow x(t) = y(t) = 0$

(3) $V(x,y) \triangleq \phi(x,y)$. 定正

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(*)} = (4+2\xi)\, x^4 y^2$ 常定.

No.

Date.

设 f 连续，若 $\exists k>0$ 使得 $\int_0^{+\infty} |f(t)-k|\,dt < +\infty$.

则证明：$\ddot{x}+f(t)x=0$ 的零解在 Lyapunov 意义下稳定

$\Leftarrow$ 解析解 $\quad \ddot{x}+kx+f(t)x-kx=0.$

$\lambda^2+k \qquad \ddot{x}+kx = kx-f(t)x = (k-f(t))x$

$\cancel{x(t)=C_1 e^{\sqrt{k}t}+C_2 e^{\sqrt{k}t}+\int_0^t \frac{e^{\sqrt{k}(t-s)}-e^{-\sqrt{k}(t-s)}}{2\sqrt{k}}\cdot(k-f(s))x(s)\,ds}$

$x(t)=(C_1\cos\sqrt{k}t+C_2\sin\sqrt{k}t)+\int_0^t \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\sin\sqrt{k}(t-s)\cdot(k-f(s))x(s)\,ds$

$\cancel{x(t)\le (C_1\cos\sqrt{k}t+C_2\sin\sqrt{k}t)\cdot\exp(\int_0^t \frac{1}{k}}$

$\le \cdots$

~~(Gronwall) $x(t)\le\cdots$~~

设 $\ddot{x}+a(t)x=0$ 零解稳定.

$\int_0^{+\infty}|b(t)|\,dt<+\infty$

则 $\ddot{x}+(a(t)+b(t))x=0$ 零解稳定.

$\ddot{x}+a(t)\cdot x=-b(t)\cdot x(t).$ 解?

$x=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\int_0^t \underbrace{K(t,s)}\,\underbrace{f(s)}_{-b(s)x(s)}\,ds$

$K(t,s)=\dfrac{\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_1(t)\\ \varphi_2(s) & \varphi_2(t)\end{vmatrix}}{W(s)}$ 有界

$\hookrightarrow$ Liouville 公式算有界

设 $x(t)=e^{-2t}$ 是 $(2t+1)\ddot{x}+4t\dot{x}-4x=0$ 的一个解.

则该方程的零解在 Lyapunov 意义下 不稳定

若 $\xi(t)=t$，$\eta(t)=t\cos 2t$ 为方程 $\ddot{x}+\dot{x}=m(t,x)$ 的解

问是否存在连续可微的 $m(t,x)$ 使得上述结论成立？存在的话求出 $m(t,x)$

从 $x=0$，$\dot{x}=1$ 出发有两条积分曲线，矛盾！

压缩映射原理还值得学习

隐式代换 1.3 下午 & 1.4 上午

例：平面自治系统无极限环

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by\\ \dot{y}=cx+dy\end{cases}$$

考虑 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$，$\neq 0$ 或 无

$\equiv 0$ 时：利用 P82 11 结论

P194 12 (1) ✓ (2) 解关于初值连续依赖性 ✓

(3) ✓ (4) ✗

$$\begin{cases}\dot{x}=2y\\ \dot{y}=-2x-p(t)y^3\end{cases}$$

$p(t)>2$

$V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\frac{dV}{dt}=-p(t)y^4$

任意一解有界

$V(x(t),y(t))\to V_\infty<+\infty$

$V(x(t),y(t))-V(x_0,y_0)=\int_{t_0}^{t}-p(s)y^4(s)\,ds$

$\int_{t_0}^{+\infty}y^4(s)\,ds<+\infty$ 推到 $(y^4)'$ 有界

$\Rightarrow y(t)\to 0$

Date.

$$\Psi(t)=\begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \Psi(t)=\begin{pmatrix} e^{t-1} & e^{-t+1} \\ e^{-t+1} & e^{t-1} \end{pmatrix}$$

当 矩阵值函数 为 基本解方程 $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}$ 时. 求 A, e^{At}, $|e^{At}|$, $\|A\|$.

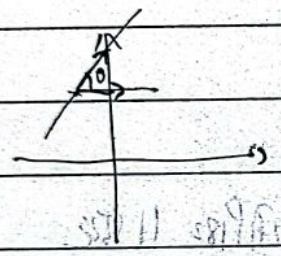
$$|\Psi(t)|=e^{2t-2}-e^{-2t+2}, \text{ 当 } t=1 \text{ 时 } |\Psi(t)|=0 \quad \times.$$

n阶方程 $x^{(n)}+x=g(t,x)$. → 初值问题

(t_0,x_0) 的 积分曲线上一点.

过 (t_0,x_0) 积分曲线 的 切线与 Ot 轴正向夹角为 θ

则 确定 此时 积分曲线: 斜率

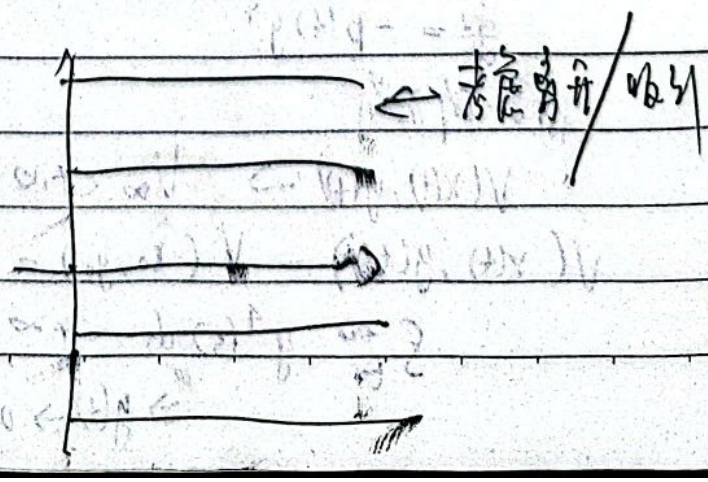


$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t_0)=\pm\tan\theta \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

具体讨论

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^4x^2\sin x}{t^2+x^2}$$

(1) 用压缩映照原理证明初值问题的解存在唯一性

(2) 画 $t-O-x$ 平面上 近似大致 积分曲线

(3) 确定 位奇异值 稳定 在 Lyapunov 意义下 的 稳定性