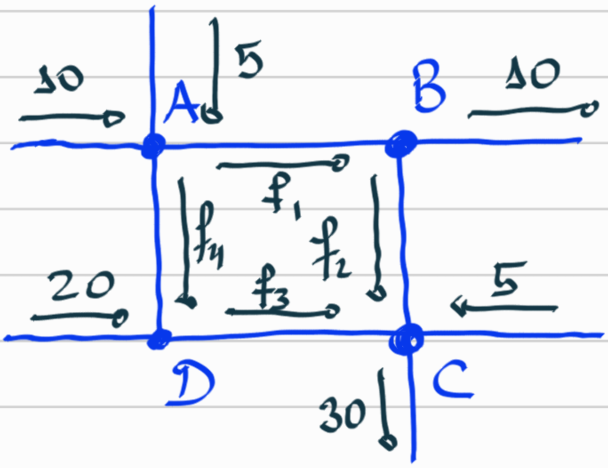
Álgebra Linear

Problema: Descreva os possíveis fluxos através da rede de encanamento de água mostrada abaixo, onde o fluxo é medido em l/min.



Considerar o princípio da conservação do fluxo em cada nó.

Nó A:

$$15 = f_1 + f_4$$

Nó B:

$$f_1 = 10 + f_2$$

Nó C:

$$f_2 + f_3 + 5 = 30$$

Nó D:

$$20 + f_4 = f_3$$

Temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} 15 = f_1 + f_4 \\ f_1 = f_2 + 10 \\ 25 = f_2 + f_3 \\ f_3 = 20 + f_4 \end{cases} \iff \begin{cases} 15 = f_1 + f_4 \\ 10 = f_1 - f_2 \\ 25 = f_2 + f_3 \\ 20 = f_3 - f_4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 15 = f_1 + f_4 \\ 5 = f_2 + f_4 \\ 25 = f_2 + f_3 \\ 20 = f_3 - f_4 \end{cases} \iff \begin{cases} 15 = f_1 + f_4 \\ 5 = f_2 + f_4 \\ 20 = f_3 - f_4 \\ 20 = f_3 - f_4 \end{cases}$$

Fazendo $f_4 = t$, tem-se

$$\begin{cases} f_1 = 15 - t \\ f_2 = 5 - t \\ f_3 = 20 + t \\ f_4 = t \end{cases}$$

<u>Fluxos máximo e mínimo</u>

Os fluxos não podem ser negativos!

$$\left.\begin{array}{lll} f_1 = 15 - t & \Longrightarrow & t \leq 15 \\ f_2 = 5 - t & \Longrightarrow & t \leq 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow t \leq 5$$

$f_3 = 20 + t \Longrightarrow$ Não impõe restrição.

Logo $0 \leq t \leq 5$.

Assim

$$\begin{cases} 10 \leq f_1 \leq 15 \\ 0 \leq f_2 \leq 5 \\ 20 \leq f_3 \leq 25 \\ 0 \leq f_4 \leq 5 \end{cases}$$

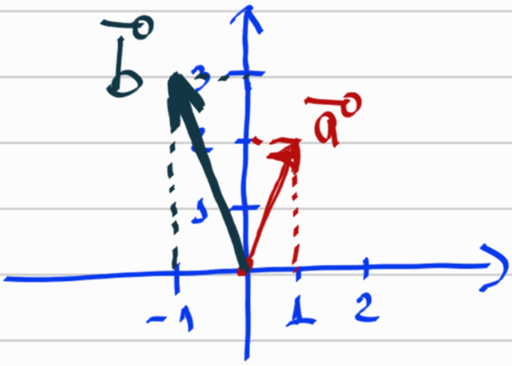
Vetores

Vetores no Plano

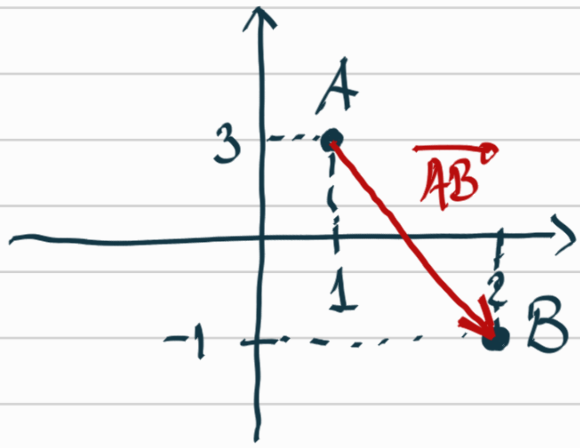
Um vetor no plano é uma lista ordenada de dois números reais.

$$\vec{u} = (u_1, u_2); \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\vec{a} = (1, 2); \quad \vec{b} = (-1, 3).$$

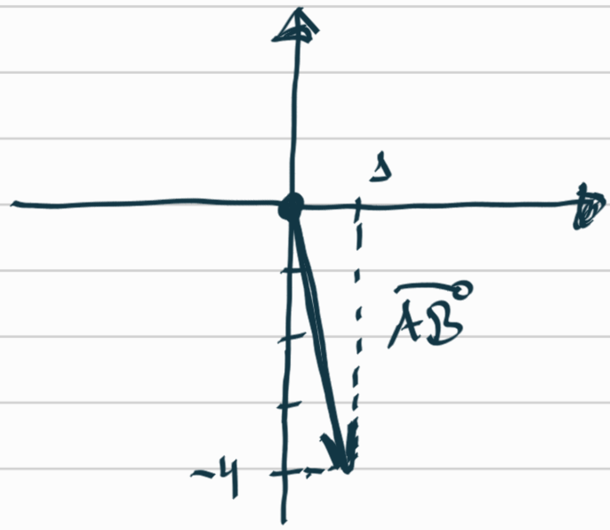


Obs: Um vetor pode ser obtido por meio da "diferença" entre dois pontos

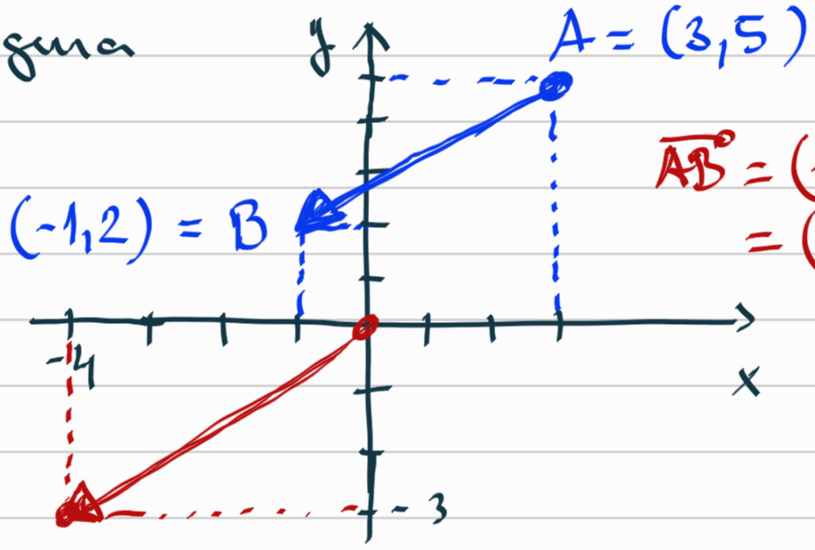


$A = (1,3)$
$B = (2,-1)$

$$\vec{AB} = B - A = (2,-1) - (1,3)$$
$$= (1,-4)$$



Obs: Sejam $A = (3,5)$ e $B = (-1,2)$ tem-se a figura



$$\vec{AB} = (-1,2) - (3,5)$$
$$= (-4,-3)$$

Operações com Vetores no Plano

Adição: $$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} , \quad (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$$

onde, se
$$\vec{u} = (u_1, u_2) \text{ e } \vec{v} = (v_1, v_2)$$

então
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1 , u_2 + v_2).$$

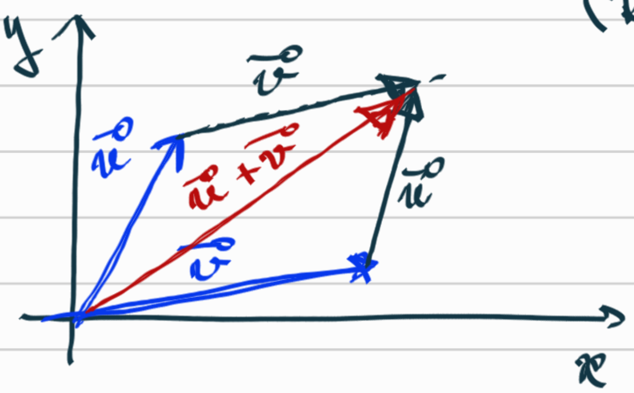
Exemplo: Se $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 3)$

então
$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (1, -1) + (2, 3) \\ &= (1+2, -1+3) \\ &= (3, 2). \end{aligned}$$

Geometricamente:

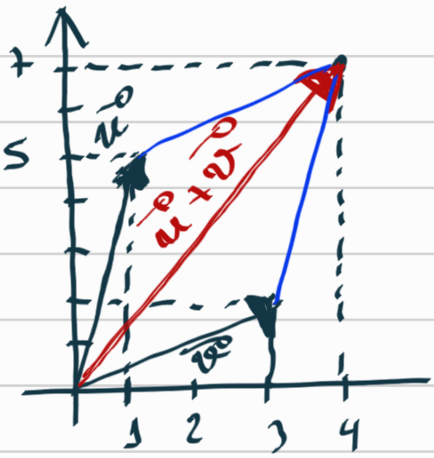
Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

(Regra do Paralelogramo)



Exemplo: Se $\vec{u} = (1,5)$ e $\vec{v} = (3,2)$ então

$\vec{u} + \vec{v} = (4,7)$ e



Multiplicação por Escalar:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\alpha, \vec{u}) \longmapsto \alpha \vec{u}$$

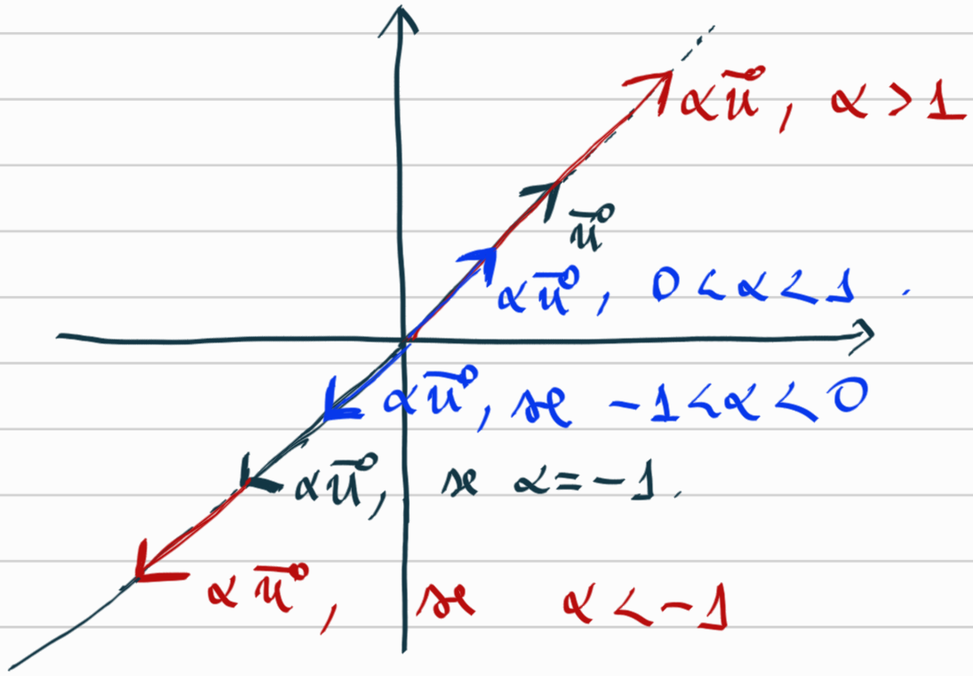
onde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\alpha \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$.

Exemplo: Se $\vec{u} = (-1,3)$ e $\alpha = 2$

então

$$\alpha \vec{u} = (2 \times (-1), 2 \times 3)$$
$$= (-2, 6).$$

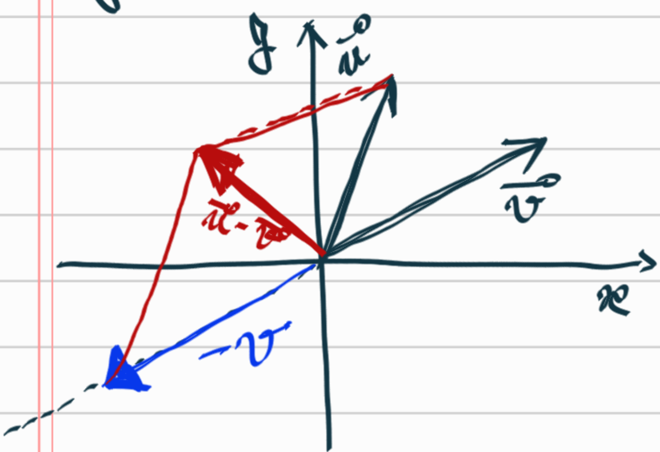
Obs.



Observação: A subtração de vetores pode ser entendida como

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\times\vec{v}.$$

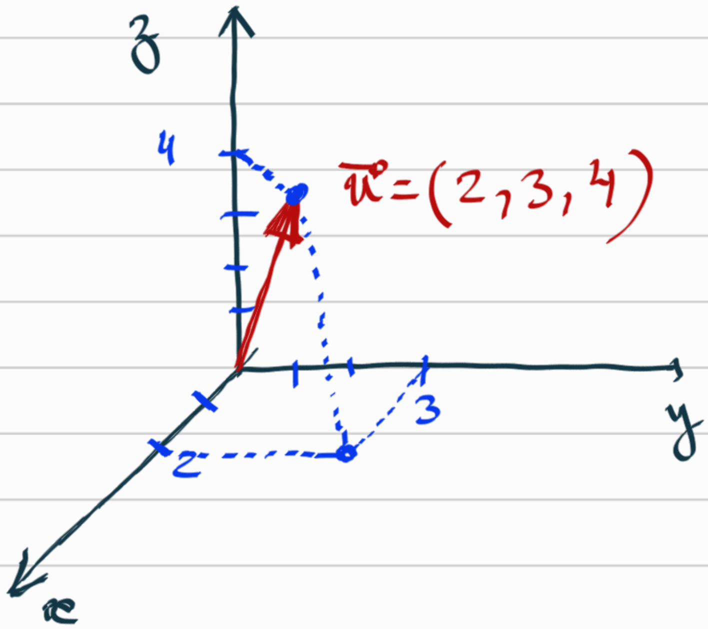
Geometricamente,



$$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$$

Vetores no Espaço: $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}\in\mathbb{R}^3 \Longrightarrow \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$$



Obs: A soma e o produto por escalar valem no $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)$$
$$=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$$

$$\alpha\vec{u}=\alpha\cdot(u_1,u_2,u_3)$$
$$=(\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3).$$

Inclusive, vale a regra do paralelogramo no $\mathbb{R}^3$.

Em geral, as operações valem para conjuntos mais gerais do tipo $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}.$$

$$\vec{u}\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$$

<u>Teorema:</u> Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(iii) Existe $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
(iv) Dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, existe $-\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} + -\vec{u} = \vec{0}$
(v) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
(vi) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
(vii) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
(viii) $1.\vec{u} = \vec{u}$.

<u>Exemplo:</u>

$$5\vec{u} - 3(\vec{v} + \vec{w}) - 2(\vec{u} + \vec{v}) =$$

$$= 3\vec{u} - 5\vec{v} - 3\vec{w}$$

<u>Exemplo:</u> Resolva a equação vetorial

$$3(\vec{x} + 5\vec{u}) = 2\vec{x} - 3\vec{v}.$$

Tem-se

$$3\vec{x} - 2\vec{x} = -15\vec{u} - 3\vec{v}$$

$$\vec{x} = -3(5\vec{u} + \vec{v}).$$

<u>Observação:</u> Também denotamos um vetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$

da seguinte forma $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

Definição: Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear de vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ se existirem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k.$$

Exemplo: O vetor

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

é uma combinação linear dos vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pois

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$