高数B第四次课（5.12）

§10. 无穷级数

1. 函数项级数

• **定义及收敛域**

和式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 称为定义在集合D上的函数项级数. 取 $x_0 \in D$，若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛（发散），则称 x_0 为该函数项级数的收敛点（发散点）所有收敛点构成的集合称为它的收敛域.

• **常用的方法**

(1) 用比值判别法或根值判别法.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \rho(x) \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x).$$

然后解 $\rho(x)<1$，再解 $\rho(x)=1$.

(2) 作变量替换转化为幂级数.

(3) 用其它数项级数判别法.

• **一致收敛性及判别法**

定义：设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上每一点都收敛到 $f(x)$. 若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N$，$\forall n>N$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in I,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛到 $f(x)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 若该级数的部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛到 $S(x)$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

判别法.

(1) 柯西准则. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充要条件是 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x\in I.$$

(2) Weierstrass 判别法 (M 判别法). 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上满足

① $|u_n(x)| \le a_n$, $\forall x\in I$. ② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

(3) Dirichlet 判别法. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足:

① 序列 $\{a_n(x)\}$ 单调递减且 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛到 0;

② 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ 在 I 上一致有界.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛.

(4) Abel 判别法. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足

① $\{a_n(x)\}$ 单调且 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致有界.

② 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

• 和函数的性质.

(1) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 中的每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 即

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

(2) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 中每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，即

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

(3) 设函数项级数满足在 $[a,b]$ 上点点收敛，每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数 $u_n'(x)$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

注. (3) 的条件可减弱为 $\exists x_0 \in [a,b]$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，$u_n(x)$ 可导，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛.

2. 幂级数.

• 收敛半径、收敛区间与收敛域.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

对于每一个幂级数都存在一个非负数 R（包括 $+\infty$）满足

① $|x-x_0|<R$，幂级数绝对收敛.

② $|x-x_0|>R$，幂级数发散.

③ $|x-x_0|=R$，可能收敛也可能发散.

上述 R 称为收敛半径. (x_0-R, x_0+R) 称为收敛区间.

• R 的求法.　$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 或 $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

3. 泰勒级数

• 定义. 设 $y=f(x)$ 是任意给定的函数，且在 x_0 处有任意阶导数，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 的泰勒级数.

注. 并不是所有函数的泰勒级数都收敛到其本身.

• 初等函数的泰勒展开式.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad (|x|\le 1).$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots \qquad (-1<x\le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (-1<x<+\infty).$$

例题

例1. 利用M判别法证明下列级数在指定区间上一致收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$, $x\in(0,+\infty)$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2\ln n}\right)$, $x\in[0,1]$.

解. (1) 法一.

$$(x^2e^{-nx})' = 2xe^{-nx}-nx^2e^{-nx} = (2-nx)xe^{-nx}.$$

则

$$0< x^2e^{-nx} \le \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-n\cdot\frac{2}{n}} = \frac{4e^{-2}}{n^2}, \quad x\in(0,+\infty)$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4e^{-2}}{n^2}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

法二. 因为 $f(z)=z^2e^{-z}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim_{z\to+\infty}f(z)=0$, 故知 $f(z)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 于是 $\exists M>0$, s.t.

$$0\le f(z) = z^2e^{-z}\le M.$$

则

$$0< x^2e^{-nx} = (nx)^2e^{-nx}\cdot\frac{1}{n^2} \le \frac{M}{n^2}, \quad x\in(0,+\infty).$$

故由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 法一. 由

$$0< \ln(1+t) \le t$$

得

$$0\le \ln\left(1+\frac{x}{n^2\ln n}\right) \le \frac{x}{n^2\ln n} \le \frac{1}{n^2\ln n}, \quad x\in[0,1].$$

故由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2\ln n}\right)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

法二. 类似于(1)法二，考虑 $f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$, 证明 $f(z)\le M$, $0<z<\infty$. 细节留作练习.

例2. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$, $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

证明. 法一. 显然 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ 一致有界. $\forall n\in N$. 又

$$0< \sqrt{\frac{n+1}{n(n+x)}} \le \sqrt{\frac{n+1}{n^2}} \to 0, \quad n\to\infty, \quad \forall x\in[0,+\infty).$$

且

$$\sqrt{\frac{n+1}{n(n+x)}} = \sqrt{\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n(n+x)}}$$

对 n 单调递减，所以由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

法二. 首先注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛（与 x 无关，收敛便是一致收敛）.

又

$$0<\sqrt{\frac{n+1}{n+x}} \le \sqrt{\frac{n+1}{n}} \le \sqrt{2},\quad \text{对 } x\in[0,+\infty) \text{ 一致有界},$$

且

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t+1}{t+x}\right)=\frac{x-1}{(t+x)^2}.$$

因此对给定的 $x\in[0,+\infty)$，$\sqrt{\frac{n+1}{n+x}}$ 对 n 单调，所以由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

例3. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$，$x\in[0,+\infty)$. 求证：

(1) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

(2) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可逐次求导，且 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

证明. (1) $u_n(x):=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续. 又

$$0<u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\le\frac{1}{1+n^2},\quad \forall x\in[0,+\infty)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，于是便知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

(2) 在 (1) 中已证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 收敛. 显然 $u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 具有

连续的导数. 又对于 $\forall\delta>0$, 当 $x\in[\delta,+\infty)$ 有

$$|u_n'(x)|=\left|\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}\right|\le\frac{n}{1+n^2}e^{-n\delta}\le(e^{-\delta})^n.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{-\delta})^n$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 于是 $f(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 有连续的导数, 且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}.$$

由 $\delta>0$ 的任意性知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有连续的导数.

例4. 求证: 函数项级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+|x|)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 不一致收敛.

证明. 法一.

$$\left(\frac{x}{(1+x)^n}\right)'=\frac{(1+x)^n-nx(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{1-(n-1)x}{(1+x)^{n+1}},\quad x>0.$$

于是

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}u_n(x)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{x}{(1+x)^n}=\frac{\frac{1}{n-1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}.$$

因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}$ 发散. 故知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x}{(1+|x|)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛.

法二. 注意到

$$S(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, & x\neq 0.\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

故 $S(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 但 $\frac{x}{(1+|x|)^n}$ 连续, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+|x|)^n}$ 不可能一致收敛.

例5. 计算数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{n+1}}$.

解. 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}x^n,\quad |x|<1.$$

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1.$$

所以知

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}.$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{n+1}}=f(-\tfrac{1}{2})=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

例16. 求幂级数 $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$ 的收敛半径和收敛域.

解. 将 x 看作取定的一个数. 原幂级数便是数项级数. 注意到此级数通项为

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n+1)}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\cdot x^2=x^2$$

故当 $|x|<1$ 时级数绝对收敛, $|x|>1$ 时级数发散. 于是 $R=1$. 又当 $|x|=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$ 收敛. 所以收敛域为 $[-1,1]$.

例7. 求 $f(x)=\sin^3 x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数.

解. 经典例

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

于是

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(3x)^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3+3^{2n-1})}{4\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

例8. 求函数 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 的麦克劳林级数.

解. 法一.

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^2)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x^2)^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{4n+2}, \quad |x|<1.$$

法二. 经典例

$$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}, \quad |x|<1.$$

于是

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\quad |x|<1.$$

代入 x^2 得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{4n+2},\quad |x|<1.$$

练习

1. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $f(1)=0$。请用一致收敛的定义证明 $f_n(x)=x^nf(x)$ 一致收敛。

提示：

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|x^nf(x)|\le\sup_{x\in[0,1-\delta]}|x^nf(x)|+\sup_{x\in[1-\delta,1]}|x^nf(x)|$$

$$\le(1-\delta)^n\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|+\sup_{x\in[1-\delta,1]}|f(x)|$$

$$<\varepsilon.$$

2. 求 $f(x)=\cos^3x$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数。

提示：$\cos^3x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$.

3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是正实数。求证：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

提示：$\frac{a_n}{n!}x^n=a_n\cdot a^n\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n$，其中 a 为小于收敛半径的正实数。

注意到 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n=0$，于是 $\forall x\in\mathbb{R}$，对充分大的 n 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|a^n \text{ 收敛}.$$