Ordem de Convergência

Definição: Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $\lim x_k = x^*$. Defina $e_k = x_k - x^*$. Se existir $\alpha \geq 1$ e uma constante $C > 0$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^\alpha} = C$$

então α é chamada de ordem de convergência da sequência $\{x_k\}$ e C é a constante assintótica de erro. Se

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = C, \quad 0 \leq C < 1,$$

então a convergência é, pelo menos, linear.

Teorema: A ordem de convergência do método do ponto fixo é linear.

Prova:

Seja x_k uma sequência gerada pelo método do ponto fixo que converge para x^*. Se ϕ a função de iteração satisfazendo as hipóteses para convergência do método.

Tem-se

$$x_{k+1} - x^* = \phi(x_k) - \phi(x^*)$$
$$= \phi'(\xi_k)\,(x_k - x^*)$$

com ξ_k entre x_k e x^*. Segue que

$$|x_{k+1} - x^*| = |\phi'(\xi_k)|\,|x_k - x^*|$$

$\Rightarrow$
$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = |\phi'(\xi_k)| \leq \eta.$$

Segue que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} \leq \eta < 1.$$

<u>Teorema</u>: Se $f'' \in C^0(V_\delta(x^*))$ e $f(x^*) = 0$ com $f'(x^*) \neq 0$ então, a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, ou seja, $\alpha = 2$.

<u>Prova</u>:
Seja $\{x_k\}$ sequência gerada pelo método de Newton. Assim

$$\left\| x_k \to x^* \right\| \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \phi(x_k)$$

Temos

$$x_{k+1} - x^* = \phi(x_k) - \phi(x^*)$$

Desenvolvendo ϕ em série de Taylor

$$\phi(x) = \phi(x^*) + \phi'(x^*)(x - x^*) + \frac{\phi''(\xi)}{2}(x - x^*)^2$$

para ξ entre x e x^*. Segue que

$$x_{k+1} - x^* = \phi(x^*) + \phi'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{\phi''(\xi)}{2}(x_k - x^*)^2 - \phi(x^*)$$

$$= \phi'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{\phi''(\xi)}{2}(x_k - x^*)^2$$

No método de Newton, tomamos $\phi'(x) = 0$. Logo

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\phi''(\xi)}{2}(x_k - x^*)^2.$$

Segue que

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = \frac{1}{2}|\phi''(\xi)| \leq C$$

para $\xi \in [x^* - \delta', x^* + \delta'] \subset V_\delta(x^*)$, $\delta' < \delta$.

Lembre-se que $\phi'' \in C^0$.

Obs: Para k suficientemente grande temos

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^\alpha} = \lambda .$$

Assim, definindo

$$E_k = |x_{k+1} - x^*|$$

temos

$$\frac{E_{k+1}}{E_k^\alpha} = \lambda .$$

Logo

$$\frac{E_{k+1}}{E_k^\alpha} = \frac{E_k}{E_{k-1}^\alpha} .$$

Segue que

$$\frac{E_{k+1}}{E_k} = \left(\frac{E_k}{E_{k-1}}\right)^\alpha .$$

Assim

$$\alpha = \frac{\log(E_{k+1}/E_k)}{\log(E_k/E_{k-1})} .$$

Acelerando a Convergência

Suponha $x_n \longrightarrow x^*$ linearmente. Suponha inicialmente que os sinais de

$$x_n - x^*, \; x_{n+1} - x^*, \; x_{n+2} - x^*$$

coincidam. Para n suficientemente grande,

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*}.$$

Logo

$$(x_{n+1} - x^*)^2 = (x_n - x^*)(x_{n+2} - x^*).$$

Segue que

$$x_{n+1}^2 + x^{*2} - 2x_{n+1}x^* = x_{n+2}x_n - x_n x^* - x_{n+2}x^* + x^{*2}$$

$$x_{n+1}^2 + \cancel{x^{*2}} - 2x_{n+1}x^* = x_{n+2}x_n - (x_n + x_{n+2})x^* + \cancel{x^{*2}}$$

Tem-se

$$(x_n + x_{n+2} - 2x_{n+1})x^* = x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2$$

Logo

$$x^* = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_n + x_{n+2} - 2x_{n+1}}.$$

Agora, note que

$$x^* = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2 + x_n^2 - x_n^2 + 2x_n x_{n+1} - 2x_n x_{n+1}}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

$\Rightarrow$

$$x^* = \frac{(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)x_n - (x_{n+1}^2 - 2x_n x_{n+1} + x_n^2)}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

logo

$$\boxed{x^* = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}}$$

Isto nos motiva a definir uma nova sequência

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Definição: Dada uma sequência $\{x_n\}$ a diferença Δx_n é chamada diferença progressiva, e é dada por

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Além disso, tem-se

$$\Delta^k x_n = \Delta \Delta^{k-1} x_n, \quad k \geq 2.$$

Obs:

$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n)$$

$$= \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$$

$$= (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)$$

$$= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n .$$

Assim, podemos escrever

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}, \quad n \geq 0.$$

Teorema: Suponha que $x_n \longrightarrow x^*$ linearmente e que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} < 1.$$

Então a sequência $\{\hat{x}_n\}$ converge para x^* tal que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\hat{x}_n - x^*}{x_n - x^*} = 0.$$

Prova:

Inicialmente, note que

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*)$$
$$= \phi'(\xi_n)\,(x_n - x^*)$$

Logo

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \phi'(\xi_n) \quad , \ \xi_n \text{ entre } x_n \text{ e } x^*.$$

Como ϕ' é contínua segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \lim_{n\to+\infty} \phi'(\xi_n)$$
$$= \phi'\left(\lim_{n\to+\infty} \xi_n\right)$$
$$= \phi'(x^*).$$

Podemos assumir que

$$|\phi'(x^*)| < 1.$$

Agora defina

$$\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \quad , \ n \geq 2.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \phi'(x^*) .$$

Temos

$$\lambda_n = \frac{(x^* - x_{n-1}) - (x^* - x_n)}{(x^* - x_{n-2}) - (x^* - x_{n-1})}$$

Segue que

$$\lambda_n = \frac{(x^* - x_{n-1}) - \phi'(\xi_{n-1})(x^* - x_{n-1})}{\left[(x^* - x_{n-1})/\phi'(\xi_{n-2})\right] - (x^* - x_{n-1})}$$

Observe que

$$x^* - x_{n-1} = \phi'(\xi_{n-2})(x^* - x_{n-2}) .$$

Logo

$$\lambda_n = \frac{(x^* - x_{n-1})\left(1 - \phi'(\xi_{n-1})\right)}{(x^* - x_{n-1})\left(\frac{1}{\phi'(\xi_{n-2})} - 1\right)}$$

De onde segue que

$$\lambda_n = \frac{1 - \phi'(\xi_{n-1})}{\frac{1}{\phi'(\xi_{n-2})} - 1}$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\phi'(\xi_{n-1})}{\frac{1}{\phi'(\xi_{n-2})}-1}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \frac{1-\phi'(x^*)}{\frac{1}{\phi'(x^*)}-1} = \phi'(x^*).$$

Agora, para n suficientemente grande, temos

$$x^* - x_n = \lambda_n (x^* - x_{n-1})$$

Por outro lado, note que

$$x^* - x_n = (x^* - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_n)$$

Segue que

$$x^* - x_n = \frac{1}{\lambda_n}(x^* - x_n) + (x_{n-1} - x_n)$$

Logo

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)(x^* - x_n) = (x_{n-1} - x_n)$$

Segue que

$$\left(\frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n}\right)(x^* - x_n) = (x_{n-1} - x_n)$$

$$x^* - x_n = \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1}).$$

Agora, observe que

$$x^* = x_n + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1})$$

Veja que

$$\hat{x}_n = x_n + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1}).$$

(basta substituir λ_n na expressão)

Agora, note que

$$\frac{\hat{x}_n - x^*}{x_n - x^*} = \frac{x_n - x^* + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}(x_n - x_{n-1})}{x_n - x^*}$$

$$= 1 + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\frac{(x_n - x_{n-1})}{x_n - x^*}$$

$$= 1 + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\frac{(x_n - x^* + x^* - x_{n-1})}{x_n - x^*}$$

$$= 1 + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\left(1 + \frac{x^* - x_{n-1}}{x_n - x^*}\right)$$

$$= 1 + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\left(1 - \frac{1}{\dfrac{x^* - x_n}{x^* - x_{n-1}}}\right)$$

Segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\hat{x}_n - x^*}{x_n - x^*} =$$

$$= 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\left(1 - \frac{1}{\dfrac{x^* - x_n}{x^* - x_{n-1}}}\right)$$

$$= 1 + \frac{\phi'(x^*)}{1-\phi'(x^*)}\left(1 - \frac{1}{\phi'(x^*)}\right)$$

$$= 1 + \frac{\phi'(x^*) - 1}{1 - \phi'(x^*)} = 0.$$