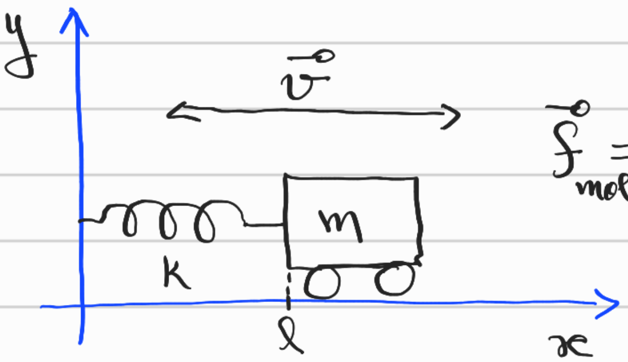
Algumas Aplicações
(Equações de 2ª Ordem)

Oscilador Harmônico Simples



$$\vec{f}_{mola} = -k(x-\ell)\vec{i}$$

$$k > 0$$

2ª Lei de Newton : $$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Segue que,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-\ell)$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k(x-\ell) = 0$$

Tomando

$$X = x - \ell$$

temos

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dx}(x-\ell) = \frac{dx}{dt}$$

e

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Segue que

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + kX = 0.$$

Dividindo por m, obtemos

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k}{m}X = 0.$$

Como $k, m > 0$, podemos tomar

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

de modo que a equação se torna

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = 0.$$

Resolvendo a equação:

Supondo $X = e^{mt}$, temos

$$\frac{dX}{dt} = m e^{mt} \quad e \quad \frac{d^2X}{dt^2} = m^2 e^{mt}.$$

Logo

$$m^2 e^{mt} + \omega^2 e^{mt} = 0.$$

Assim,

$$m^2 + \omega^2 = 0.$$

Segue que

$$m = \pm i\omega$$

Logo, temos as soluções:

$$e^{i\omega t} \quad e \quad e^{-i\omega t}.$$

Estas podem ser escritas como

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

A solução geral é

$$X(t) = a_1(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t) + a_2(\cos\omega t - i\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$= (a_1 + a_2)\cos\omega t + i(a_1 - a_2)\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Logo

$$X(t) = c_1 \cos\omega t + c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t.$$

Lembrando que

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b$$

podemos definir

$$c_1 = A\cos\delta \quad e \quad c_2 = A\,\mathrm{sen}\,\delta$$

Logo

$$X(t) = A\cos\delta\cos\omega t + A\,\mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

o que implica

$$X(t) = A\cos(\omega t - \delta).$$

Retornando à variável x: $(X = x - \ell)$

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta) + \ell.$$

A velocidade é dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

e consequentemente, a energia cinética é

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta)$$

Segue que

$$K = \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta)$$

Por outro lado, a energia potencial da força restauradora da mola:

$$U_{mola} = \frac{1}{2} k (x - \ell)^2.$$

Logo

$$U_{mola} = \frac{1}{2} k \left(A\cos(\omega t - \delta)\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t - \delta)$$

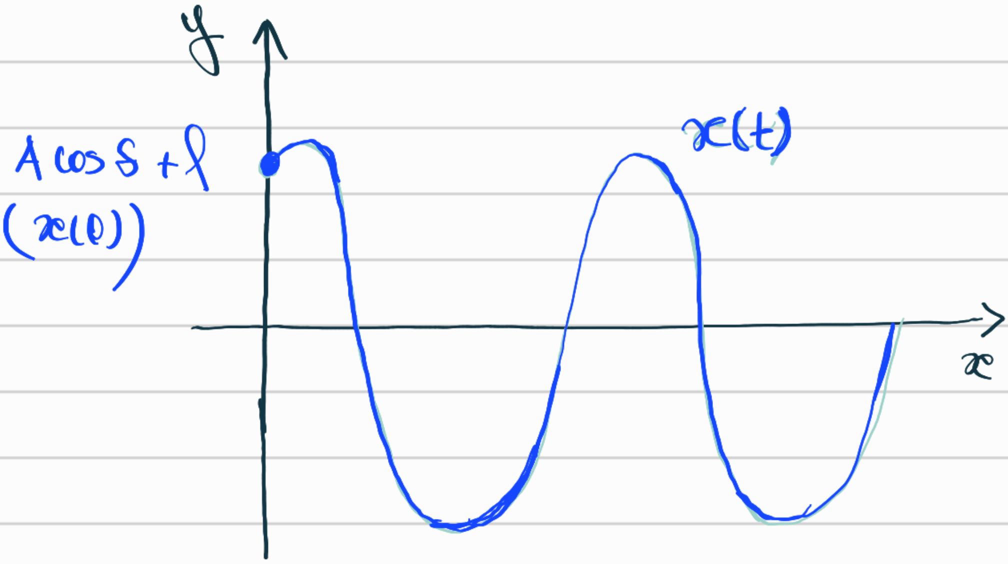
A energia mecânica total é dada por

$$E = K + U$$

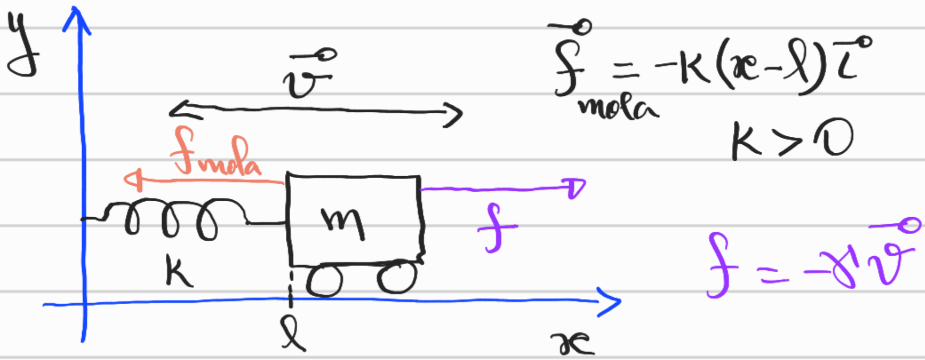
$$= \frac{1}{2} K A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - \delta) + \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t - \delta)$$

$$= \frac{1}{2} K A^2 .$$

O gráfico $x(t) \times t$ é o seguinte:



Oscilador Harmônico Amortecido



Aqui, o oscilador harmônico está sujeito a uma força de atrito:

$$\vec{f} = -\gamma \vec{v} = -\gamma \frac{d\vec{x}}{dt}$$

As forças que atuam no sistema:

$$\vec{F} = \vec{f}_{mola} + \vec{f}$$

$$= -K(x-\ell)\vec{i} - \gamma\vec{v}$$

$$= -K(x-\ell)\vec{i} - \gamma \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Da 2ª lei de Newton,

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

temos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K(x-\ell) - \gamma\frac{dx}{dt}$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}(x-\ell) - \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt}$$

ou ainda,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}(x-\ell) = 0.$$

Tomando $X = x - \ell$ temos

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad e \quad \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Segue que

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dX}{dt} + \frac{K}{m}X = 0$$

Tomando

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad e \quad \frac{\gamma}{m} = 2b$$

temos

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2b\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$$

Resolvendo a equação diferencial:

Vamos considerar:

$$X = e^{mt}, \quad \frac{dX}{dt} = m e^{mt}, \quad \frac{d^2X}{dt^2} = m^2 e^{mt}.$$

Logo,

$$m^2 e^{mt} + 2bm e^{mt} + \omega_0^2 e^{mt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m^2 + 2bm + \omega_0^2 = 0.$$

As soluções para a equação algébrica anterior são

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad e \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

ou

$$m_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \quad e \quad m_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

Se $b^2 - \omega_0^2 < 0$ então $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$. Neste caso assuma

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2.$$

($b^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow$ Oscilador Harmônico amortecido subcrítico)

Assim

$$m_1 = -b + \sqrt{-\omega^2} = -b + i\omega$$

e

$$m_2 = -b - \sqrt{-\omega^2} = -b - i\omega$$

As soluções complexas da equação diferencial são

$$e^{(-b+i\omega)t} \quad e \quad e^{(-b-i\omega)t}.$$

Segue que

$$e^{(-b+i\omega)t} = e^{-b} e^{i\omega t}$$
$$= e^{-b}(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t)$$

e

$$e^{(-b-i\omega)t} = e^{-b}(\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t)$$

Agora, segue que

$$X(t) = a_1 e^{-b}(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t)$$
$$+ b_1 e^{-b}(\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t)$$

Logo

$$X(t) = e^{-b}\left((a_1+a_2)\cos\omega t + (a_1-a_2) i \operatorname{sen}\omega t\right)$$

Segue que

$$X(t) = e^{-bt}\left(c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt\right)$$

Defina

$$c_1 = A \cos \delta$$

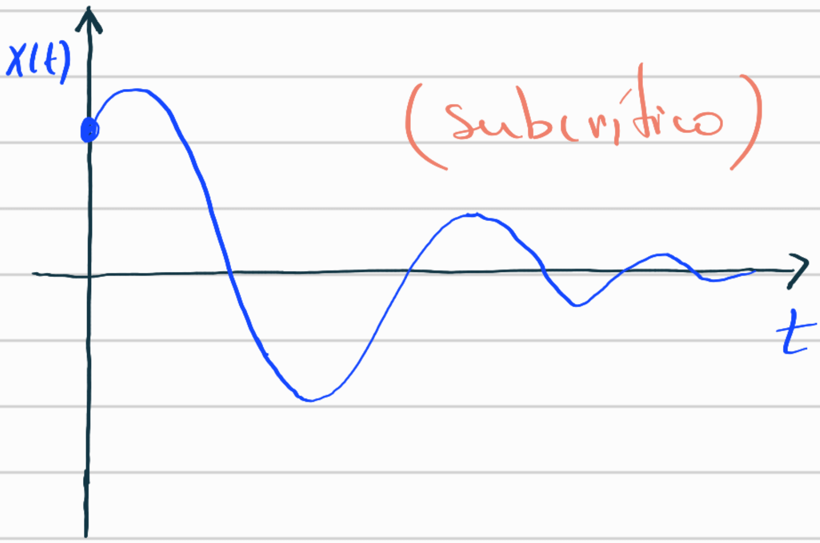
$$c_2 = A \operatorname{sen} \delta$$

Logo

$$X(t) = A e^{-bt} \cos(wt - \delta),$$

e finalmente,

$$x(t) = X(t) + \ell$$
$$= A e^{-bt} \cos(wt - \delta) + \ell$$



Se $\underline{\underline{b^2 - w_0^2 > 0}}$, defina $w^2 = b^2 - w_0^2$. Logo as raízes ficam:

(Oscilador harmônico amortecido supercrítico)

$$m_1 = -b + w \quad e \quad m_2 = -b - w.$$

Logo, a solução é

$$X(t) = a_1 e^{(-b+\omega)t} + a_2 e^{(-b-\omega)t}$$

Segue que

$$X(t) = e^{-bt}\left(a_1 e^{\omega t} + a_2 e^{-\omega t}\right)$$

Se definirmos

$$a_1 = \frac{A}{2} e^{-\delta} \quad e \quad a_2 = \frac{A}{2} e^{\delta}$$

temos

$$X(t) = e^{-bt}\left(\frac{A}{2} e^{-\delta} e^{\omega t} + \frac{A}{2} e^{\delta} e^{-\omega t}\right)$$

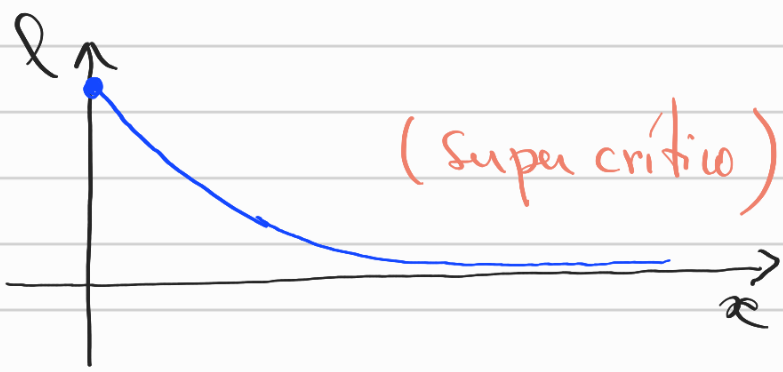
$$X(t) = A e^{-bt}\left(\frac{e^{\omega t-\delta} + e^{-(\omega t-\delta)}}{2}\right)$$

Segue que

$$X(t) = A e^{-bt} \cosh(\omega t - \delta).$$

Assim

$$x(t) = X(t) + \ell = A e^{-bt} \cosh(\omega t - \delta) + \ell$$



Se $\underline{\underline{b^2 = \omega_0^2}}$ então

$$m_1 = m_2 = -b \,.$$

Segue que a solução geral é

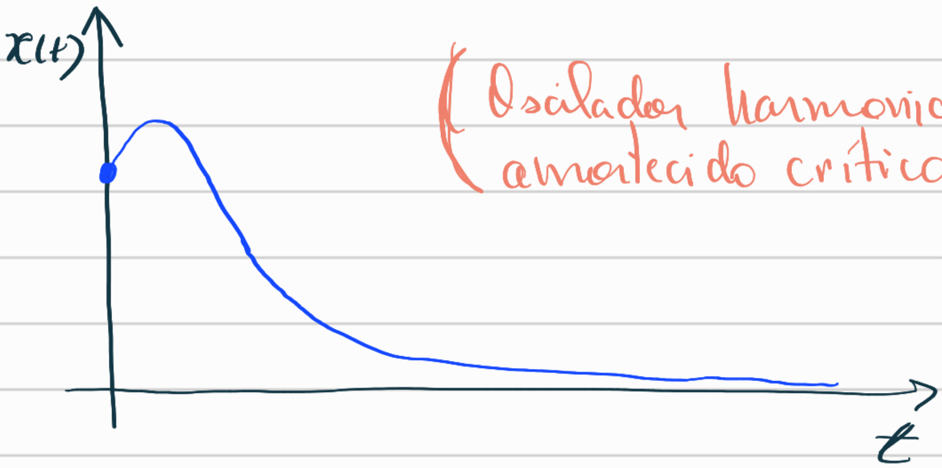
$$X(t) = a_1 e^{-bt} + a_2 t e^{-bt}$$

ou

$$X(t) = e^{-bt}(A + Bt)$$

Logo,

$$x(t) = X(t) + \ell = e^{-bt}(A + Bt) + \ell$$



(Oscilador harmonico amortecido crítico)

Oscilador Harmonico Forçado

Caso em que o oscilador harmônico está sujeito a uma força externa:

$$\vec{F} = \vec{f}_{mola} + \vec{f} + \vec{F}_{ext} \,.$$

Segue que

$$F = -k(x-\ell) - \gamma \frac{dx}{dt} + F_{ext} \,.$$

Assim,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-\ell) - \gamma\frac{dx}{dt} + F_{ext}$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + k(x-\ell) = F_{ext},$$

de onde segue

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}(x-\ell) = \frac{F_{ext}}{m}.$$

Fazendo $X = x-\ell$, $2b = \frac{\gamma}{m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

temos

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2b\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = \frac{F_{ext}}{m}.$$

<u>Oscilador Harmônico forçado: Força Ext. Senoidal</u>

Vamos estudar o caso em que

$$F_{ext} = F_0 \cos\omega_1 t.$$

Neste caso, temos a equação

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2b\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = F\cos\omega_1 t,$$

onde $F = F_0/m$.

Vamos obter uma solução particular para a equação acima. Consideremos

$$X_p = A \cos w_1 t + B \operatorname{sen} w_1 t \,.$$

Segue que

$$\frac{dX_p}{dt} = -w_1 A \operatorname{sen} w_1 t + w_1 B \cos w_1 t$$

e

$$\frac{d^2X_p}{dt^2} = -A w_1^2 \cos w_1 t - B w_1^2 \operatorname{sen} w_1 t$$

Assim,

$$\frac{d^2X_p}{dt^2} + 2b\frac{dX}{dt} + w_0^2 X_p = F \cos w_1 t \,.$$

Logo,

$$\left(-Aw_1^2 \cos w_1 t - Bw_1^2 \operatorname{sen} w_1 t\right) + 2b\left(-w_1 A \operatorname{sen} w_1 t + w_1 B \cos w_1 t\right)$$
$$+ w_0^2\left(A \cos w_1 t + B \operatorname{sen} w_1 t\right) = F \cos w_1 t \,.$$

Assim,

$$\left(-Aw_1^2 + 2bw_1 B + w_0^2 A\right) \cos w_1 t$$
$$+ \left(-Bw_1^2 - 2bw_1 A + w_0^2 B\right) \operatorname{sen} w_1 t = F \cos w_1 t$$

Segue que

$$\left((\omega_0^2-\omega_1^2)A + 2b\omega_1 B \right) \cos\omega_1 t$$
$$+ \left((\omega_0^2-\omega_1^2)B - 2b\omega_1 A \right) \operatorname{sen}\omega_1 t = F\cos\omega_1 t .$$

Assim, temos

$$\begin{cases} (\omega_0^2-\omega_1^2)A + 2b\omega_1 B = F \\ -2b\omega_1 A + (\omega_0^2-\omega_1^2)B = 0 \end{cases} ,$$

de onde obtemos

$$A = \frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)F}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4b^2\omega_1^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{2b\omega_1 F}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4b^2\omega_1^2}$$

Segue que a solução particular é

$$X_p(t) = \frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)F}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4b^2\omega_1^2}\cos\omega_1 t + \frac{2b\omega_1 F}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4b^2\omega_1^2}\operatorname{sen}\omega_1 t$$

Definindo

$$\cos\theta = \frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4b^2\omega_1^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2b\omega_1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4b^2\omega_1^2}}$$

obtemos

$$X_p(t) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4b^2\omega_1^2}}\left(\cos\theta\cos\omega_1 t + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega_1 t\right).$$

Como $\cos(a-b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$

obtemos

$$X_p(t) = \frac{F}{\sqrt{(w_0^2 - w_1^2)^2 + 4b^2 w_1^2}} \cos(w_1 t - \theta).$$

Portanto a solução geral é

$$X(t) = X_h + X_p ,$$

onde X_h é a solução da equação homogênea associada. Segue que

$$x(t) = X(t) + \ell = X_h(t) + X_p(t) + \ell .$$