Solução em Séries

Nesta seção vamos trabalhar com a equação

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0.$$

Definição: Dizemos que $x = x_0$ é um ponto ordinário da equação anterior se $P(x_0) \neq 0$. Se $P(x_0) = 0$, dizemos que $x = x_0$ é um ponto singular.

Vamos apresentar o método por meio do exemplo:

Exemplo: Determine a solução de

$$y'' + y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Vamos buscar uma solução em série de potências em torno de $x = 0$. Considere

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Temos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0$$

Segue que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \quad , \; n = 0, 1, \dots$$

Logo

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n .$$

Para os índices pares:

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0 ; \quad a_4 = -\frac{1}{4 \times 3} a_2 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2} a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6 \times 5} a_4 = -\frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} a_0$$

$$\dots \quad a_n = a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!} a_0$$

Para os índices ímpares:

$$a_3 = -\frac{1}{3\times 2}a_1$$

$$a_5 = -\frac{1}{5\times 4}a_3 = \frac{1}{5!}a_1$$

$$a_7 = -\frac{1}{7\times 6}a_5 = -\frac{1}{7!}a_1$$

$$\dots \Longrightarrow \quad a_n = a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}a_1$$

Assim,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

implica em

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4$$

$$+ \frac{a_1}{5!}x^5 - \frac{a_0}{6!}x^6 - \frac{a_1}{7!}x^7 + \dots$$

$$= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right] + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right]$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$ 4

As duas séries acima convergem $\forall x \in \mathbb{R}$.

Para $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ temos, pelo teste da razão:

$$\lim_n \left| \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| = \lim_n \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

Para $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, temos

$$\lim_n \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = \lim_n \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0.$$

Assim ambas as séries convergem, e mais,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \operatorname{sen} x.$$

Logo, a solução da equação é

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x.$$

Exemplo: Encontre uma solução em série para a equação

$$y'' - x\,y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vamos buscar uma solução da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Temos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na equação diferencial, temos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Longrightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Longrightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

Assim

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right]x^n = 0$$

Logo

$$a_2 = 0 \quad e \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0.$$

Assim,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

Como $a_2 = 0$, segue que

$$a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0.$$

Agora, temos

$$a_3 = \frac{a_0}{3\times 2}, \quad a_6 = \frac{a_3}{6\times 5} = \frac{a_0}{6\times 5\times 3\times 2}$$

$$a_9 = \frac{a_6}{9\times 8} = \frac{a_0}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}, \dots$$

$$a_{3n} = \frac{a_0}{3n\times(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 6\times 5\times 3\times 2}$$

Temos ainda, que

$$a_4 = \frac{a_1}{4\times 3}; \quad a_7 = \frac{a_4}{7\times 6} = \frac{a_1}{7\times 6\times 4\times 3}$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{10 \times 9} = \frac{a_1}{10 \times 9 \times 7 \times 6 \times 4 \times 3}, \ldots$$

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\ldots 7 \times 6 \times 4 \times 3}$$

Assim, a solução da equação é

$$y(x) = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2\times 3} + \frac{x^6}{2 \times 3 \times 5 \times 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)\ldots 3 \times 2} + \cdots\right]$$

$$+ a_1\left[x + \frac{x^4}{4 \times 3} + \frac{x^7}{7 \times 6 \times 4 \times 3} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)\cdots 4 \times 3} + \cdots\right]$$

$$= a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)\cdots 3 \times 2}\right]$$

$$+ a_1\left[x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)\cdots 4 \times 3}\right]$$

<u>Pontos Singulares Regulares</u>

Considere a equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

na vizinhança de um ponto singular $x = x_0$.

Com o método anterior, este problema não pode ser resolvido, pois na vizinhança de um ponto singular, as soluções não são analíticas.

Exemplo: A equação

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

tem um ponto singular em $x=0$. Sabe-se que

$$y_1(x) = x^2 \quad e \quad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

são soluções linearmente independentes para $x>0$ ou $x<0$

Quando $x \to 0$ $y_1(x) = x^2$ é limitada, mas $y_2(x) = 1/x$ não é. Logo y_1 é analítica em $x=0$ e $y_2(x)$ não é.

Exemplo: A equação

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

tem um ponto singular em $x=0$. As funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ são duas soluções linearmente independentes e ambas são analíticas em $x=0$. Contudo não é apropriado se colocar um problema de valor inicial com condições iniciais em $x=0$. Já que qualquer combinação linear entre x e x^2 em $x=0$ é zero.

<u>Definição</u>: Dizemos que um ponto singular $x=x_0$ da equação

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0$$

é regular, se as funções

$$(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

têm séries de Taylor convergentes na vizinhança de $x=x_0$ (ou seja, são analíticas na vizinhança de x_0)!
Qualquer outro ponto singular que não seja regular é chamado irregular.

<u>Exemplo</u>: Determine os pontos singulares da equação diferencial

$$2x(x-2)^2 y'' + 3x\,y' + (x-2)\,y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

Temos

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}\,y' + \frac{1}{2x(x-2)}\,y = 0 .$$

Os pontos singulares são $x=0$ ou $x=2$.

Para $x=0$

Vamos verificar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{2(x-2)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x(x-2)} = 0$$

logo $x=0$ é ponto singular regular.

Para $x=2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{2(x-2)^2} = \text{não existe}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{2x(x-2)} = 0$$

logo $x=2$ é um ponto singular irregular.

Soluções em Séries na Vizinhança de um ponto Singular Regular

Vamos tratar do problema de determinar as soluções de

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (*)$$

na vizinhança de $x=x_0$ (ponto singular regular)

Sem perda de generalidade vamos considerar $x_0 = 0$. Como $x_0 = 0$ é singular regular temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\, Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x p(x) < \infty \text{ e } \lim_{x\to 0} \frac{x^2 R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) < \infty.$$

Assim

$$x\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{e} \quad x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n$$

em algum intervalo $|x| < \rho$, $\rho > 0$, convergem.

Temos

$$P(x) y'' + Q(x) y' + R(x) y = 0 \implies$$

$$x^2 y'' + x^2 \frac{Q(x)}{P(x)} y' + x^2 \frac{R(x)}{P(x)} y = 0 \implies$$

$$x^2 y'' + x\left(x p(x)\right) y' + \left(x^2 q(x)\right) y = 0 \implies$$

$$x^2 y'' + x \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n y' + \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n y = 0 .$$

<u>Observação</u>: Considerando x na vizinhança do ponto singular regular, temos:

$$\lim_{x\to 0} x p(x) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = p_0$$

e

$$\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = q_0 .$$

Logo, a equação $(*)$ se torna (Em uma vizinhança de $x_0=0$)

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 .$$

Uma equação desse tipo é conhecida por <u>Equação de Euler</u> (2ª ordem).

<u>Resolvendo a Equação de Euler</u>: (acima)

Vamos buscar soluções da forma:

$$y(x) = x^r .$$

Temos:

$$y'(x) = r x^{r-1} \quad \text{e} \quad y''(x) = r(r-1) x^{r-2} .$$

Assim,

$$x^2 r(r-1) x^{r-2} + p_0 x r x^{r-1} + q_0 x^r = 0 .$$

Segue que

$$r(r-1) x^r + p_0 r x^r + q_0 x^r = 0 .$$

Desde que $x \neq 0$, tem-se

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 ,$$

ou

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0$$

Logo

$$r=\frac{-(p_0-1)\pm\sqrt{(p_0-1)^2-4q_0}}{2}.$$

<u>Caso $(p_0-1)^2-4q_0>0$:</u>

Temos duas soluções

$$y_1(x)=x^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x)=x^{r_2}.$$

Note que

$$W[y_1,y_2]=\det\begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1}\end{bmatrix}$$

$$=r_2 x^{r_1+r_2-1}-r_1 x^{r_1+r_2-1}\neq 0,$$

pois $r_1\neq r_2$. Logo

$$y(x)=\alpha_1 x^{r_1}+\alpha_2 x^{r_2}$$

é solução geral.

<u>Caso $(p_0-1)^2-4q_0=0$:</u>

Segue que

$$y_1(x)=x^r, \left(r=\frac{1-p_0}{2}\right)$$

Vamos buscar uma outra solução da forma

$$y_2(x) = c(x)\, x^r.$$

Temos

$$y_2'(x) = c' x^r + r x^{r-1} c$$

$$y_2''(x) = c'' x^r + r x^{r-1} c' + r\left((r-1) x^{r-2} c + x^{r-1} c'\right)$$

$$= x^r c'' + 2 r x^{r-1} c' + r(r-1) x^{r-2} c.$$

Logo,

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0$$

implica em

$$x^2\left(x^r c'' + 2r x^{r-1} c' + r(r-1) x^{r-2} c\right)$$

$$+ p_0 x\left(c' x^r + r x^{r-1} c\right) + q_0 c x^r = 0.$$

Assim,

$$x^{r+2} c'' + (2r + p_0) x^{r+1} c' + \left(r(r-1) + r p_0 + q_0\right) x^r c = 0$$

Segue que, para $x \neq 0$, tem-se

$$x^2 c'' + (2r + p_0) x c' + \left(r(r-1) + r p_0 + q_0\right) c = 0.$$

Como $r = (1-p_0)/2$ tem-se

$$x^2 c'' + x c' = 0,$$

pois $(q_0-1)^2-4q_0=0$.

Fazendo $v=c'$, temos

$$x^2v'+xv=0,$$

de onde segue que

$$v'+\frac{1}{x}v=0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{v}v'=-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|v|=-\ln|x| \Rightarrow v=\frac{1}{x}.$$

Logo $c'=v \Rightarrow c'=\frac{1}{x} \Rightarrow c(x)=\ln x$, para $x>0$. Assim

$$y_2(x)=\ln x \, x^r$$

é outra solução da equação de Euler para o caso da equação característica possuir uma única raiz.

Note que $\{y_1,y_2\}$ é linearmente independente. Assim, a solução geral é

$$y(x)=\alpha_1 x^r+\alpha_2 \ln x \, x^r$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2\ln x)x^r.$$

Caso $(p_0-1)^2-4q_0<0$:

Agora temos
$$r_1=\lambda+i\mu \quad e \quad r_2=\lambda-i\mu.$$

logo a solução geral seria:
$$y(x)=c_1 x^{\lambda+i\mu}+c_2 x^{\lambda-i\mu}.$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, consideramos,
$$x^{\lambda+i\mu}=e^{(\lambda+i\mu)\ln x}=e^{\lambda\ln x}e^{i\mu\ln x}$$
$$=x^{\lambda}e^{i\mu\ln x}$$
$$=x^{\lambda}\left(\cos\mu\ln x+i\,\mathrm{sen}\,\mu\ln x\right)$$

Tomamos as soluções linearmente independentes:
$$y_1(x)=x^{\lambda}\cos\mu\ln x \quad e \quad y_2(x)=x^{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\mu\ln x, \quad x>0.$$

Assim a solução geral, para este caso é
$$y(x)=\alpha_1 x^{\lambda}\cos\mu\ln x+\alpha_2 x^{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\mu\ln x.$$

Considere a equação

$$P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + R(x)\, y = 0$$

na vizinhança de um ponto singular $x = x_0 = 0$. Vamos considerar $x > 0$. O caso $x < 0$ se reduz ao anterior assumindo $x = -\xi$, $\xi > 0$.

Vamos buscar uma solução em série da forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n},$$

$a_0 \neq 0$.

Exemplo: Resolva a equação diferencial

$$2x^2 y'' - x y' + (1+x) y = 0.$$

A equação de Euler associada é

$$2x^2 y'' - x y' + y = 0.$$

Vamos buscar soluções da forma

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n}.$$

Assim, tem-se

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}.$$

Logo

$$2x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}\right)$$
$$-x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}\right)+(1+x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n}=0.$$

$\Rightarrow$

$$2x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}\right)$$
$$-x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}\right)+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n}+\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n+1}}=0$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{r+n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n+1}}$$

$\Rightarrow$

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (r+n) x^{r+n}$$
$$+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{r+n} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\left(2a_0 r(r-1)x^r - a_0 r x^r + a_0 x^r\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[2a_n(r+n)$$
$$(r+n-1) - a_n(r+n) + a_n + a_{n-1}\Big] x^{r+n} = 0$$

$\Rightarrow$

$$a_0(2r^2-3r+1)x^r + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\big[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1\big]a_n$$
$$+a_{n-1}\Big\} x^{r+n} = 0$$

Temos que ter:

$$\begin{cases} 2r^2 - 3r + 1 = 0, \\ \left[\left(2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1\right]a_n + a_{n-1} = 0, \end{cases}$$

Da 1ª equação, temos:

$$2r^2 - 3r + 1 = 0 \implies r = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{4}$$

$$\implies r = \frac{3 \pm 1}{4} \implies r_1 = 1 \text{ ou } r_2 = \frac{1}{2}.$$

Obs: Os valores r_1 e r_2 são chamados expoentes na singularidade para o ponto singular $x_0 = 0$.

Temos ainda

$$\left[\left(2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1\right]a_n + a_{n-1} = 0.$$

Segue, que,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1}, \implies$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{[r+n-1][2(r+n) - 1]}, \quad n \geq 1.$$

Agora, para $r=1$, temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)\,n}, \quad n \geq 1.$$

Assim,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3\times 1}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5\times 2} = \frac{a_0}{(3\times 5)(1\times 2)}.$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{7\times 3} = -\frac{a_0}{(3\times 5\times 7)(1\times 2\times 3)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1))\,n!}\,a_0$$

Assim,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

ou

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= x\left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)$$

$$= x\left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_0}{(3\times 5\times\cdots(2n+1))\, n!}\right)$$

ou

$$y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3\times 5\times\cdots(2n+1))\, n!}\right)$$

<u>Determinando o raio de Convergência:</u>

$$\lim_n \frac{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)\, n!}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)(2n+3)(n+1)!}\, |x| =$$

$$\lim_n \frac{|x|}{(2n+3)\, n} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora, vamos analisar o caso $r = 1/2$.

Temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(n-1/2)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}.$$

Assim,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2\times 3} = \frac{a_0}{1\times 2\times 3}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3\times 5} = -\frac{a_0}{(1\times 2\times 3)(3\times 5)}$$

$$a_4 = -\frac{a_3}{4\times 7} = \frac{a_0}{(1\times 2\times 3\times 4)(3\times 5\times 7)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n \frac{a_0}{n!\,(3\times 5\times \cdots \times (2n-1))}$$

Segue que,

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} = x^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= x^{1/2}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)$$

$$= x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!\,(3\times 5\times \cdots \times (2n-1))}\right)$$