A transformada de Laplace

Definição: A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é a função $F(s)$ dada por

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

desde que a integral convirja.

Exemplos:

1) Se $f(t) = 1$, $t \geq 0$ então

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

De fato,

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \int_0^{r} e^{-st}\, dt$$

$u = -st$
$du = -s\, dt$

$$= \lim_{r \to +\infty} \int_0^{-sr} \frac{1}{-s} e^{u}\, du$$

②

$$= -\frac{1}{s} \lim_{r \to +\infty} \int_0^{-sr} e^{u}\, du$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{r \to +\infty} \left[e^{-sr} - e^{0} \right]$$

$$= -\frac{1}{s} \left[-1 \right] = \frac{1}{s}.$$

2) Se $f(t) = t$, $t > 0$, a transformada de Laplace é

$$\frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

De fato,

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} -\left(\frac{d}{ds} \left(e^{-st} \right) \right) dt$$

$$= -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{s^2}.$$

3) Se $f(t) = e^{\alpha t}$, $t > 0$, então

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha.$$

De fato,

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha.$$

4) Se $f(t) = \cos \alpha t$, $t > 0$ então

$$\mathcal{L}[\cos \alpha t] = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}.$$

[Exercício]

Definição: Uma função f é de ordem exponencial em $[0, \infty)$ se existirem constantes $c > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(t)| \leq c e^{\alpha t}$$

para todo $t > 0$.

Exemplo: A função t^n, $t>0$, $n\in\mathbb{Z}^+$ é de ordem exponencial.

Temos

$$|t^n| = \left|\frac{t^n}{e^{\alpha t}} e^{\alpha t}\right| = \left|\frac{t^n}{e^{\alpha t}}\right| e^{\alpha t}$$

Note que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{\alpha^n e^{\alpha t}} = 0$$

Assim existe $t_0\in\mathbb{R}$ tal que para todo $t>t_0$ existe $C^*\in\mathbb{R}^+$ tal que

$$\left|\frac{t^n}{e^{\alpha t}}\right| < C^*.$$

Como $t^n/e^{\alpha t}$ é contínua segue que também é limitada em $[0,t_0]$. Assim existe $C\in\mathbb{R}^+$ tal que

$$\left|\frac{t^n}{e^{\alpha t}}\right| < C, \ \forall\, t\in[0,+\infty).$$

Segue então que $\forall\, t>0$ tem-se

$$|t^n| < Ce^{\alpha t}.$$

Teorema: Se f é contínua por partes de ordem exponencial, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

(5)

converge para todo $s > \alpha$.

Prova:

Como f é de ordem exponencial existem constantes $C > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(t)| \leq C e^{\alpha t}, \quad \forall\ t > 0.$$

Logo

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \leq \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right|$$

$$\leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt$$

$$\leq \int_0^\infty C e^{\alpha t} e^{-st} dt$$

$$= C \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt$$

$$= c \lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-(s-\alpha)t}\, dt.$$ (6)

Note que

$$\int_0^r e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \int_0^{-(s-\alpha)r} e^{u} \frac{1}{\alpha - s}\, du \qquad \begin{aligned} u &= -(s-\alpha)t \\ du &= -(s-\alpha)dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha - s} \int_0^{-(s-\alpha)r} e^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{\alpha - s} \left[e^{-(s-\alpha)r} - 1 \right]$$

Desde que $s > \alpha$ tem-se

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{1}{s-\alpha}$$

Portanto

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt \leq \frac{c}{s-\alpha}, \quad s > \alpha.$$

Logo a integral converge para todo $s > \alpha$.

Teorema: A transformada de Laplace é linear, ou seja, se f_1 e f_2 possuem transformada de Laplace então

$$\mathcal{L}\left[\alpha f_1(t) + f_2(t)\right] = \alpha F_1(s) + F_2(s),$$

onde $\mathcal{L}[f_1] = F_1$ e $\mathcal{L}[f_2] = F_2$.

Prova:

De fato

$$\mathcal{L}\left[\alpha f_1(t) + f_2(t)\right] = \int_0^{\infty} \left(\alpha f_1(t) + f_2(t)\right) e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha f_1(t) e^{-st} + f_2(t) e^{-st}\, dt$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st}\, dt + \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st}\, dt$$

$$= \alpha F_1(s) + F_2(s).$$

Teorema: Se f possui transformada de Laplace e se f' é contínua por partes então

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0^+).$$

Prova

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt.$$

Integrando por partes, temos

$u = e^{-st}$

$dv = f'(t)dt$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})\,dt$$

$$= -f(0^+) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= -f(0^+) + s\,\mathcal{L}[f(t)].$$

Teorema: Se f possui transformada de Laplace e se $f^{(n)}$ é contínua por partes então

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - s^{n-3}f''(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Prova:
Vamos utilizar indução em n. Já vimos que

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0^+).$$

Vamos supor que

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Temos

$$\mathcal{L}[f^{(n+1)}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{df}{dt}\right)\right]$$

$$= s^n \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] - s^{n-1}\frac{df}{dt}(0^+) - s^{n-2}\frac{d^2 f}{dt^2}(0^+)$$

$$- s^{n-3}\frac{d^3 f}{dt^3}(0^+) - \dots - \frac{d^n f}{dt^n}(0^+)$$

$$= s^n\left[s\mathcal{L}[f] - f(0^+)\right] - s^{n-1} f'(0^+)$$

$$- s^{n-2} f''(0^+) - s^{n-3} f'''(0^+) - \dots - f^{(n)}(0^+)$$

$$= s^{n+1}\mathcal{L}[f] - s^n f(0^+) - s^{n-1} f'(0^+)$$

$$- s^{n-2} f''(0^+) - s^{n-3} f'''(0^+) - \dots - f^{(n)}(0^+)$$

Portanto, pelo princípio da indução segue o resultado.

<u>Obs:</u> Em particular

$$\mathcal{L}[f''] = s^2 \mathcal{L}[f] - s f(0^+) - f'(0^+).$$

Teorema (Translação) Se $\mathcal{L}[f]$ existe então para qualquer constante α tem-se

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s-a)$$

Prova:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-(s-\alpha)t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-s't}\, dt, \quad s' = s-\alpha.$$

$$= F(s') = F(s-\alpha).$$

Exemplo: Calcule

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos bt].$$

Como

$$\mathcal{L}[\cos bt] = \frac{s}{s^2+b^2}$$

segue que

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

Teorema: Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Prova:

Note que

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

implica em

$$F'(s) = \int_0^\infty f(t) \left(-t e^{-st}\right) dt$$

$$= -\int_0^\infty f(t) \left(t e^{-st}\right) dt$$

$$= -\int_0^\infty t f(t) \, e^{-st} dt$$

$$= -\mathcal{L}[t f(t)]$$

Da mesma forma,

$$F''(s) = (-1)^2 \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-st} dt = (-1)^2 \mathcal{L}[t^2 f(t)]$$

Logo,

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st}\, t^n f(t)\, dt = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]$$

Assim,

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

Exemplo: Calcule $\mathcal{L}[t^2]$.

Nota-se que

$$\mathcal{L}[t^2] = \mathcal{L}[t^2 \cdot 1] = (-1)^2 \cdot F''(s).$$

Veja que, aqui estamos considerando

$$f(t) = 1.$$

Assim, $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$.

Logo,

$$\mathcal{L}[t^2] = (-1)^2 F''(s) = \frac{2}{s^3}.$$

Teorema (Funções Periódicas): Se f é uma função periódica de período T então

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$

Prova:

Temos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^{T} f(t)e^{-st}\,dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$+ \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}\,dt + \dots$$

Fazendo $t = x + nT$, temos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{T} f(x+nT)\,e^{-s(x+nT)}\,dx$$

Como f é periódica, de período T, temos

$$f(x+nT) = f(x+(n-1)T) = \dots = f(x+T) = f(x).$$

Logo

$$\int_0^{T} f(x+nT)\,e^{-s(x+nT)}\,dx = \int_0^{T} f(x)\,e^{-s(x+nT)}\,dx$$

$$= e^{-snT}\int_0^{T} f(x)e^{-sx}\,dx$$

Logo, mostramos que $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ temos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt = e^{-snT}\int_0^T f(x)\,e^{-sx}\,dx$$

Assim a expressão de $\mathcal{L}[f(t)]$ acima fica

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^T f(x)\,e^{-sx}\,dx + e^{-sT}\int_0^T f(x)\,e^{-sx}\,dx$$

$$+\, e^{-2sT}\int_0^T f(x)\,e^{-sx}\,dx + \cdots + e^{-nsT}\int_0^T f(x)\,e^{-sx}\,dx$$

$$+ \cdots$$

Segue que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \left[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots + e^{-nTs} + \cdots\right]\int_0^T f(x)\,e^{-sx}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(x)\,e^{-sx}\,dx$$

<u>Exemplo</u>: Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ -1, & \text{se } 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

que se repete com um período $T = 4$.

Temos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-4s}} \int_0^4 e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-4s}} \left[\int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt + \int_2^4 e^{-st} f(t)\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-4s}} \left[\int_0^2 e^{-st}\,dt - \int_2^4 e^{-st}\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-4s}} \left[\left(\frac{e^{-st}}{-s} \right)_0^2 - \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right)_2^4 \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-4s}} \left[-\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{1}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \right]$$

$$= \frac{1}{s(1-e^{-4s})} \left[1 - 2e^{-2s} + e^{-4s} \right]$$

$$= \frac{1}{s(1-e^{-4s})} \left(1 - e^{-2s} \right)^2 .$$

<u>Teorema</u>: Se f é uma função de ordem exponencial então

$$\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f] = 0.$$

<u>Prova</u>:

Vimos que

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt \leq \frac{C}{s-\alpha}, \quad s>\alpha.$$

Logo

$$\lim_{s\to+\infty} \mathcal{L}[f] \leq \lim_{s\to+\infty} \frac{C}{s-\alpha} = 0.$$

<u>Teorema</u>: Considere a função (Função Degrau)

$$\theta_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t<a \\ 1, & \text{se } t\geq a \end{cases}.$$

Tem-se

$$\mathcal{L}[\theta_a(t)] = \frac{e^{-as}}{s}.$$

<u>Prova</u>:

Temos

$$\mathcal{L}[\theta_a(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,\theta_a(t)\,dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st}\,\theta_a(t)\,dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}\,\theta_a(t)\,dt$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}\left(0 - e^{-as}\right) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Observação: Considere a função

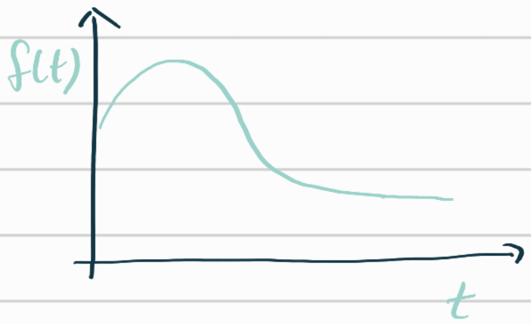
$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases}$$

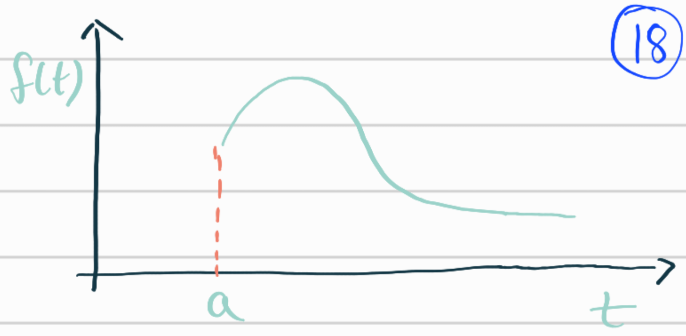
Essa função pode ser escrita como

$$g(t) = \theta_a(t)\, f(t-a).$$

Então

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)]$$





Temos

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[\theta_a(t) f(t-a)]$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}\theta_a(t) f(t-a)\, dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st}\, 0\, f(t-a)\, dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 \cdot f(t-a)\, dt$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt$$

Fazendo $x = t-a$, $dx = dt$. Logo

$$\int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt = \int_a^{+\infty} e^{-s(x+a)} f(x)\, dx$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-sx} e^{-sa} f(x)\, dx$$

$$= e^{-sa}\int_a^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= e^{-sa}\,\mathcal{L}[f(x)].$$

Teorema: Se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções de ordem exponencial tais que

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \text{ para } s > s_0,$$

então $f(x) = g(x)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Prova: (Ver Equações Diferenciais Aplicadas, Djairo Guedes de Figueiredo e Aloisio Freiria Neves).

A transformada de Laplace Inversa

Teorema: Se $f(t)$ e $g(t)$ forem funções de ordem exponencial tais que

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s),$$

para $s > s_0$, então $f(t) = g(t)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Obs:

Vimos que

$$\mathcal{L}[e^{Kx}] = \frac{s}{s-K}, \text{ se } s > K.$$

Logo, do teorema anterior,

$$e^{Kx} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s-K}\right], \quad s > K.$$

Em particular, vale

$$\mathcal{L}\left[e^{(K+iw)t}\right] = \frac{s}{s-(K+iw)}$$

$$= \frac{s}{s-K-iw}$$

$$= \frac{s-K+iw}{(s-K)^2+w^2}$$

Como

$$e^{(K+iw)t} = e^{Kt}(\cos wt + i \operatorname{sen} wt)$$

temos

$$\mathcal{L}\left[e^{(K+iw)t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{Kt}\cos wt + i e^{Kt}\operatorname{sen} wt\right]$$

$$= \mathcal{L}\left[e^{Kt}\cos wt\right] + i\,\mathcal{L}\left[e^{Kt}\operatorname{sen} wt\right].$$

Ora, temos

$$\mathcal{L}[e^{kt}\cos\omega t] + i\,\mathcal{L}[e^{kt}\operatorname{sen}\omega t] = \frac{s-k+i\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$$

$$= \frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2} + i\,\frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$$

Portanto

$$\mathcal{L}[e^{kx}\cos\omega t] = \frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2}$$

e

$$\mathcal{L}[e^{kx}\operatorname{sen}\omega t] = \frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}$$

Logo

$$e^{kx}\operatorname{sen}\omega t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}\right]$$

e

$$e^{kx}\cos\omega t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2}\right]$$

Teorema: A transformada inversa de Laplace é linear.

Prova:

Sabemos que $\mathcal{L}$ é linear. Logo, vale

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g].$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\alpha \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\alpha f + g]]$$

$$= \alpha f(t) + g(t)$$

$$= \alpha \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]] + \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[g]]$$

$$= \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s+13}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+9}\right]$$

$$= \frac{1}{3} e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$$

Além disso,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{(s-k)^2+\omega^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As}{(s-k)^2+\omega^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B}{(s-k)^2+\omega^2}\right]$$

$$= A\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-k)^2+\omega^2}\right] + B\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-k)^2+\omega^2}\right]$$

$$= A\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-k)+k}{(s-k)^2+\omega^2}\right] + \frac{B}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}\right]$$

$$= A\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-K}{(s-K)^2+\omega^2}\right] + \frac{K}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-K)^2+\omega^2}\right]\right)$$

$$+ \frac{B}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-K)^2+\omega^2}\right]$$

$$= A\left(e^{Kt}\cos\omega t + \frac{K}{\omega}e^{Kt}\,\text{sen}\,\omega t\right)$$

$$+ \frac{B}{\omega}e^{Kt}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$= e^{Kt}\left(A\cos\omega t + \frac{AK+B}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t\right)$$

<u>Exemplo</u>: Resolva o P.V.I

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-3t}\cos t$$

$$y(0) = 2; \quad y'(0) = 1.$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$s^2\mathcal{L}[y] - 2s - 1 + 4s\mathcal{L}[y] - 8 + 5\mathcal{L}[y] =$$

$$= \frac{s+3}{(s+3)^2+1}.$$

Assim

$$(s^2+4s+5)\mathcal{L}[y] = \frac{s+3}{(s+3)^2+1} + 2s + 9 \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s}{s^2+4s+5}\left(\frac{s+3}{(s+3)^2+1} + 2s+9\right).$$

Após muitas manipulações algébricas, podemos obter

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{5}\,\frac{9s+46}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{5}\,\frac{s+1}{(s+3)^2+1}.$$

Logo

$$y = \frac{1}{5}e^{-2t}\left(9\cos t + 28\,\mathrm{sen}\,t\right)$$

$$+\frac{1}{5}e^{-3t}\left(\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t\right).$$

Convolução

Definição: Dadas duas funções f e g contínuas por partes, a função

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

é chamada convolução de f e g.

Propriedade: $f*g = g*f$.

Prova:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

Fazendo $x = t-\tau$ tem-se $dx = -d\tau$. Logo

$$f(t) * g(t) = -\int_t^0 f(t-x)\, g(x)\, dx$$

$$= \int_0^t g(x)\, f(t-x)\, dx$$

$$= g(t) * f(t).$$

Propriedade: $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\, \mathcal{L}[g(t)]$.

Prova:

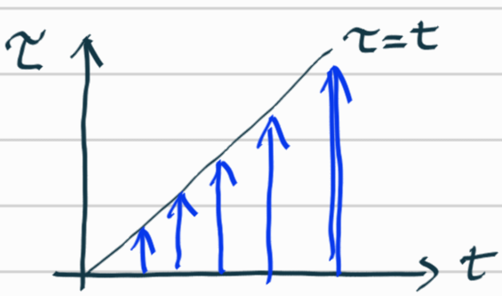
$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} [f(t) * g(t)]\, dt$$

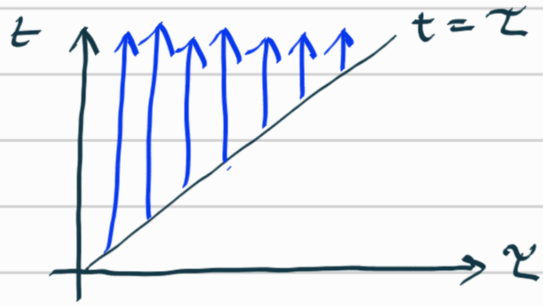
$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$

Para fixar as ideias vamos usar a seguinte notação

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \int_{t=0}^{t=+\infty} \int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$





Alterando a ordem de integração, temos

$$\mathcal{L}[f(t)*g(t)] = \int_{\tau=0}^{\tau=+\infty} \int_{t=\tau}^{t=+\infty} e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt\, d\tau$$

$$= \int_{\tau=0}^{\tau=+\infty} f(\tau) \int_{t=\tau}^{t=+\infty} e^{-st} g(t-\tau)\, dt\, d\tau$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = t-\tau$, $dx = dt$, obtemos

$$\mathcal{L}[f(t)*g(t)] = \int_{0}^{+\infty} f(\tau) \int_{0}^{+\infty} e^{-s(x+\tau)} g(x)\, dx\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \int_{0}^{+\infty} e^{-sx} g(x)\, dx\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \mathcal{L}[g(x)](s)\, d\tau$$

$$= \int_{0} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \; \mathcal{L}[g(x)]$$

$$= \mathcal{L}[f(x)]\, \mathcal{L}[g(x)].$$

Obs: Mostramos que

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\,\mathcal{L}[g(t)].$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ ambos os lados

$$f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[\mathcal{L}[f(t)]\,\mathcal{L}[g(t)]\big],$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)\,G(s)] = f(t) * g(t) = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau)\,d\tau$$

Exemplo: Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-1)}\right].$$

Faça $F(s) = 1/s$ e $G(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$.

Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[1/s] = 1$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] = \operatorname{senh} t.$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-1)}\right] = f(t) * g(t) = \int_0^t 1 \cdot \operatorname{senh}(t-\tau)\,d\tau$$

$$= [\cosh \tau]_0^t = \cosh t - 1$$