Produto Vetorial

1

Definição: Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. O Produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

Obs: Se definirmos

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$, onde

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\vec{u}\times\vec{v} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$= (0+1)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (-1-0)\vec{k}$$
$$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Propriedades:

i) $\vec{u}\times\vec{u} = 0$

ii) $\vec{u}\times\lambda\vec{u} = 0$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$.

iii) $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{u}\times\vec{v})$

iv) $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$

Prova:

i) Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ então

$$\vec{u}\times\vec{u} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = 0$$

ii) $\vec{u} \times \lambda \vec{u} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \end{bmatrix} = 0$

iii) $\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

$$= -(v_2 u_3 - u_2 v_3)\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} - (u_2 v_1 - u_1 v_2)\vec{k}$$

$$= -\left[(v_2 u_3 - u_2 v_3)\vec{i} + (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} + (u_2 v_1 - u_1 v_2)\vec{k}\right]$$

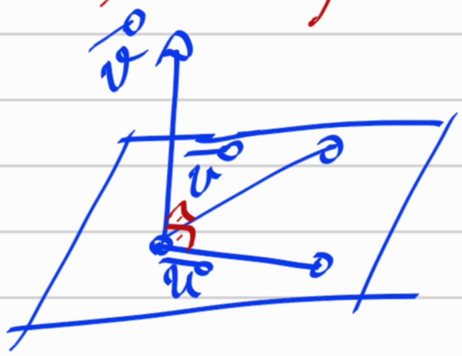
$$= -(\vec{v} \times \vec{u})$$

iv) Temos

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$

$$= u_1(\cancel{u_2}v_3 - \cancel{u_3}v_2) + u_2(\cancel{u_3}v_1 - \cancel{u_1}v_3)$$ (4)

$$+ u_3(\cancel{u_1}v_2 - \cancel{u_2}v_1) = 0$$



Sistemas de Equações Lineares:

Definição: Uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes e b o termo independente. Os coeficientes e o termo independente devem ser constantes em relação a $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Definição: A lista ordenada $s_1, s_2, \dots, s_n$ é chamada solução da equação linear, se

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0.$$

Note que a solução pode ser vista como um vetor

$$\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Definição: Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares nas mesmas variáveis.

Ex:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

m equações
n variáveis

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Matriz dos Coeficientes

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 \\ -x + 2z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

O sistema acima pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz dos Coeficientes.

Matriz Completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Matriz dos coeficientes

termo independente.

Definição: Uma matriz está na forma escalonada por linhas quando satisfaz as seguintes propriedades:

i) Todas as linhas que consistem inteiramente de zeros estão na parte inferior

ii) Em cada linha não nula, o primeiro elemento não nulo (elemento líder) está em uma coluna à esquerda de qualquer outro elemento líder abaixo dele.

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares com Linhas

Definição: São permitidas as seguintes operações (operações elementares) a serem realizadas em matrizes:

1) Trocar linhas $L_i \leftrightarrow L_j$

2) Multiplicar uma linha por uma constante não nula. kL_i

3) Somar um múltiplo de uma linha com outra linha. $L_i + kL_j$

Exemplo:

Reduza a matriz à sua forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Definição: Duas matrizes A e B são chamadas linhas-equivalentes se existir uma sequência finita de operações elementares que converta A em B.

Aplicação do Escalonamento de Matrizes à solução de Sistemas Lineares

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

A matriz completa do sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

Vamos escalonar a matriz acima!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Voltando à "forma do sistema"

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ -5x_3 = -10 \end{cases}$$

Temos $x_3 = 2$.

$x_2 = 1$ solução $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_1 = 0$