高数B第五次课（5.26）

§11. 广义积分与含参量积分

1. 广义积分

- **无穷积分**. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且对任意 $A>a$，$f(x)$ 在 $[a,A]$ 上可积. 若 $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在，则称无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛.

- **瑕积分**. 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义，且 $f(x)$ 在任意区间 $[a+\varepsilon,b]\subset(a,b]$ 上可积，但 $x\to a+0$ 时 $f(x)$ 无界，我们称 a 为瑕点. 若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

- **几个特殊的积分**.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \begin{cases} p>1 & \text{收敛} \\ p\le 1 & \text{发散} \end{cases} \qquad \int_0^1\frac{1}{x^p}dx \begin{cases} p<1 & \text{收敛} \\ p\ge 1 & \text{发散} \end{cases}$$

- **比较判别法**（类似于级数）

$f(x),\ g(x)\ge 0$ ， $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in(0,+\infty)$

则 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ 同敛散.（瑕积分类似）.

- **绝对收敛与条件收敛**.

狄里克雷判别法　　**阿贝尔判别法**.

2. 含参量积分

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

（a可以是瑕点，b可以是$+\infty$）

- **一致收敛** 设无穷积分

$$g(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

对于区间Y中的一切y收敛。若任给$\varepsilon>0$，存在一个与y无关的实数$N>a$，使当$A>N$时，对一切$y\in Y$有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

则称含参量积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$在Y上一致收敛。 （瑕积分类似）

- **柯西收敛准则**

$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$在Y上一致收敛的充分必要条件是对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{R}$，使当$A, A'>N$时，对一切$y\in Y$有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

- **判别法**

M判别法。　　狄里克雷判别法。　　阿贝尔判别法。

- **Γ函数**

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,\quad \alpha>0.$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\quad \alpha>0.$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}.\qquad \Gamma(n)=(n-1)!$$

- **B 函数**.

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad p,q>0.$$

$$B(p,q)=B(q,p).\qquad B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

$\boxed{\text{例题}}$

例1. 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明. 不妨设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减且 $f(x)\geq 0$. 于是由 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\forall x_2>x_1>X$, 有

$$0\leq f(x_2)\leq\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

例2. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\ (p>0)$ 的敛散性.

解. 注意到

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leq\frac{1}{x^p}.$$

又 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 在 $p>1$ 时收敛, 故 $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛.

当 $0<p\leq 1$, 对任意 $A>1$ 有

$$\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|=|\cos 1-\cos A|\leq 2.$$

即 $\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|$ 有界. 又 $\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋于 0. 故

由狄里克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛。下证当 $0<p\leq 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx$ 发散。注意到对于 $\forall x\in[1,+\infty)$ 有 $|\sin x|\geq \sin^2 x$，于是

$$\frac{|\sin x|}{x^p}\geq\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}.$$

由于 $0<p\leq 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^p}dx$ 发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$ 收敛（类似前面）。

故知 $\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^p}dx$ 发散，则 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx$ 发散。

综上，当 $0<p\leq 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛。

例3 对一切 $x\in(0,+\infty)$，定义变上限积分 $F(x)=\int_0^x\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\,dt$。

(1) 证明：$\forall x\in(0,+\infty)$，$F(x)$均收敛。

(2) 补充定义 $F(0)=0$，讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 是否可导。

(1) 证明。取 $a(t)=t$，$b(t)=\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}$。注意到

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\,dt\right|=\left|\cos\frac{1}{x_2}-\cos\frac{1}{x_1}\right|\leq 2$$

故由狄里克雷判别法知 $F(x)$ 收敛。

(2) 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\,dt&=t\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,dt\\&=x\cos\frac{1}{x}-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,dt\\&=x\cos\frac{1}{x}+t^2\sin\frac{1}{t}\Big|_0^x-2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,dt\\&=x\cos\frac{1}{x}+x^2\sin\frac{1}{x}-2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,dt.\end{aligned}$$

故知 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

例4 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限. $a,b>0$.
证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}.$$

证明：由定义知

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx &= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\int_r^R\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx\\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\left[\int_r^R\frac{f(ax)}{x}\,dx-\int_r^R\frac{f(bx)}{x}\,dx\right]\\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\left[\int_{ar}^{aR}\frac{f(x)}{x}\,dx-\int_{br}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,dx\right]\\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\left[\int_{ar}^{br}\frac{f(x)}{x}\,dx-\int_{aR}^{bR}\frac{f(x)}{x}\,dx\right]\\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\left[f(\xi_1)\int_{ar}^{br}\frac{1}{x}\,dx-f(\xi_2)\int_{aR}^{bR}\frac{1}{x}\,dx\right]\\
&= \left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

例5 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$, $p>0$.

解. 注意到

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} &\overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^p}\right)}\cdot\frac{1}{t^2}\,dt\\
&= \int_1^{+\infty}\frac{t^p}{(1+t^2)(1+t^p)}\,dt.
\end{aligned}$$

于是便知

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{x^p}{(1+x^2)(1+x^p)}dx + \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^p)}dx$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

例6 讨论 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ 在下列区间上的一致收敛性.

(1) $0<\alpha_0\le\alpha<+\infty$. (2) $0<\alpha<+\infty$.

解. (1) 注意到

$$\left|e^{-\alpha x}\sin x\right| \le e^{-\alpha x} \le e^{-\alpha_0 x},$$

且 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx$ 收敛, 故由M判别法知 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 对于 $\forall N\in\mathbb{R}$, 取 $A=2k\pi>N$, $\alpha=\frac{1}{A}$, 则

$$\left|\int_A^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right| = \left|-e^{-\alpha x}\cos x\Big|_A^{+\infty} - \alpha\int_A^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos x\,dx\right|$$

$$\ge \frac{1}{e} - \alpha\frac{1}{e} > \frac{1}{2e}.$$

例7 求积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dx$ 的初等函数表达式.

解. 令 $F(t)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dx$. 易知 $F(t)$ 关于 $t\in\mathbb{R}$ 一致收敛.

直接求导得

$$F'(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos tx\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos tx\Big|_0^{+\infty}-t\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin tx\,dx$$

$$=1-t\left(-e^{-x}\sin tx\Big|_0^{+\infty}+t\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos tx\,dt\right)$$

$$=1-t^2F'(t)$$

则得

$$F'(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

于是

$$F(t)=\int_0^t F'(\tau)\,d\tau=\int_0^t\frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau=\arctan t.$$

例18. 利用Γ函数和B函数求下列积分的值.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. (2) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0)$.

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx\quad(m,n>-1)$.

解. (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int_0^{+\infty}x^{\frac{2}{3}-1}e^{-x}\,dx=\Gamma(\tfrac{2}{3}).$

(2) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\overset{t=(\frac{x}{a})^2}{=\!=}\int_0^1 a^2t\sqrt{a^2-a^2t}\,\frac{a}{2\sqrt{t}}\,dt$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}a^4B(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})=\frac{\pi a^4}{16}.$$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}\xlongequal{t=\frac{1}{1+x^3}}\int_0^1 t\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{t^2}\,dt$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}\,dt$$

$$=\frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx\xlongequal{t=\sin^2 x}\int_0^1 t^{\frac{n}{2}}(1-t)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right).$$

$\boxed{\text{练习}}$

1. 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛但 $f(x)$ 不单调，举例说明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不一定为 0.

提示：

$$f(x)=\begin{cases}n^2\left(x-n+\frac{1}{n^2}\right), & x\in\left[n-\frac{1}{n^2},n\right]\\ -n^2\left(x-n-\frac{1}{n^2}\right), & x\in\left(n,n+\frac{1}{n^2}\right]\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 收敛，$a,b>0$. 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

提示：类似于例 4.

3. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

提示: $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} \int_1^{+\infty} \frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}\,\frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{-\ln t}{1+t^2}\,dt$.

4. (1) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续且 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(2) 设 $f(x)$ 连续可微，积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 和 $\int_1^{+\infty} f'(x)\,dx$ 都收敛. 证明:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

提示: (1) 反证. 利用柯西准则.

(2) 先证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，再证明其为0.