Subespaço, Base e Dimensão

Definição: Um subespaço do $\mathbb{R}^n$ é um conjunto S de vetores do $\mathbb{R}^n$ tal que:

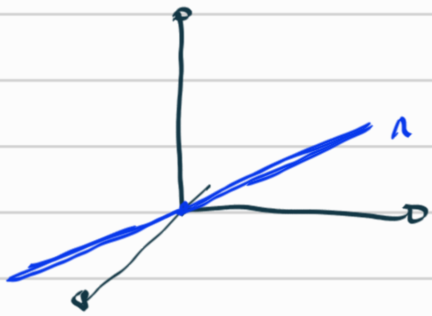
(i) $\vec{0} \in S$

(ii) Se $\vec{u}, \vec{v} \in S$ então $\vec{u} + \vec{v} \in S$

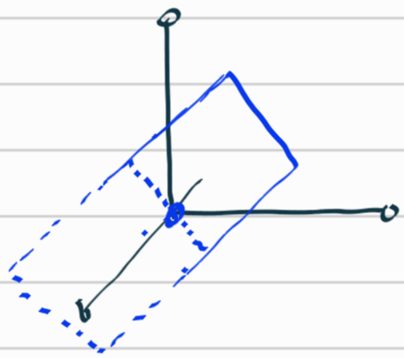
(iii) Se $\vec{v} \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda \vec{v} \in S$

Exemplos:

(i) Uma reta que passa pela origem



(ii) Um plano que passa pela origem.



No caso da reta $\vec{r}$: $\vec{x} = t\vec{\omega}$

(i) Como a reta passa pela origem, segue que $\vec{0} \in r$.

(ii) Suponha que $\vec{u}, \vec{v} \in r$. Logo ②

$$\vec{u} = \alpha \vec{w} \text{ e } \vec{v} = \beta \vec{w}.$$

Assim,

$$\vec{u} + \vec{v} = \alpha \vec{w} + \beta \vec{w} = (\alpha + \beta) \vec{w} \in r.$$

(iii) Se $\vec{u} \in r$ então $\vec{u} = \alpha \vec{w}$. Assim,
$\lambda \vec{u} = \lambda(\alpha \vec{w}) = (\lambda\alpha) \vec{w} \in r$.

No caso do plano π: $\vec{x} = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2}$.

(i) Como o plano passa pela origem, segue que $\vec{0} \in \pi$.

(ii) Se $\vec{u}, \vec{w} \in \pi$ então

$$\vec{u} = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2}$$
$$\vec{w} = \gamma \vec{v_1} + \mu \vec{v_2}$$

Logo

$$\vec{u} + \vec{w} = (\alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2}) + (\gamma \vec{v_1} + \mu \vec{v_2})$$
$$= (\alpha + \gamma) \vec{v_1} + (\beta + \mu) \vec{v_2} \in \pi$$

(iii) Se $\vec{u} \in \pi$ então $\vec{u} = \alpha \vec{v_1} + \beta \vec{v_2}$.
Logo

$$\lambda \vec{u} = (\lambda\alpha) \vec{v_1} + (\lambda\beta) \vec{v_2} \in \pi.$$

<u>Definição</u>: Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as combinações lineares entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ é denotado por

$$\text{ger}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k). \quad [\text{gerador}]$$

<u>Obs</u>: Note que, se $\vec{w} \in \text{ger}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k.$$

<u>Exemplo</u>: O conjunto $\text{ger}(1, x, x^2)$ é o gerador do conjunto de todos os polinômios de grau menor que ou igual a 2. Note que, qualquer

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

é gerado por $\{1, x, x^2\}$.

<u>Exemplo</u>: O espaço $\mathbb{R}^3$ é gerado por

$$\text{ger}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$

onde $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Basta notar que, para qualquer

$$\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

tem-se

$$\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3.$$

<u>Teorema</u>: Sejam $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\mathrm{gen}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = S$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

<u>Prova</u>:

(i) Nota-se que $\vec{0} \in S$, pois

$$\vec{0} = 0\,\vec{v}_1 + \dots + 0\,\vec{v}_k .$$

(ii) Se $\vec{u}, \vec{w} \in S$ então

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$$
$$\vec{w} = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_k \vec{v}_k$$

Logo

$$\vec{u} + \vec{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{v}_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k)\vec{v}_k \in S.$$

(iii) Se $\vec{u} \in S$ então

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k .$$

Assim

$$\lambda \vec{u} = (\alpha_1 \lambda)\vec{v}_1 + \dots + (\alpha_k \lambda)\vec{v}_k \in S.$$

<u>Exemplo</u>: Verifique se o conjunto dos vetores (x, y) tais que $y = \mathrm{sen}\, x$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Solução: O conjunto em questão é (5)

$$S = \{(x,y);\ x \in \mathbb{R},\ y = \operatorname{sen} x\}.$$

Assim, tem-se:

(i) $\vec{0} \in S$, pois $\vec{0} = (0,0) = (0, \operatorname{sen} 0)$.

(ii) Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in S$. Logo

$$\vec{u} = (x, \operatorname{sen} x) \quad e \quad \vec{v} = (y, \operatorname{sen} y).$$

Tem-se

$$\vec{u} + \vec{v} = (x, \operatorname{sen} x) + (y, \operatorname{sen} y)$$
$$= (x+y, \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)$$

Note que, em geral,

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \neq \operatorname{sen}(x+y).$$

Logo S não é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.

Definição: Seja A uma matriz $m \times n$.

(i) O espaço linha de A, $\operatorname{lin}(A) \subset \mathbb{R}^n$, é o subespaço gerado pelas linhas de A.

(ii) O espaço coluna de A, $\operatorname{col}(A) \subset \mathbb{R}^m$, é o subespaço gerado pelas colunas de A.

Exemplo: Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique se $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ está no espaço coluna de A.

(ii) Determine se $\vec{w} = [4 \ \ 5]$ está no espaço linha de A.

(iii) Descreva $lin(A)$ e $col(A)$.

Solução:

(i) Para que $\vec{b} \in col(A)$ temos que ter

$$\vec{b} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Se $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ então

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$\begin{cases} 1 = \alpha - \beta \\ 2 = \beta \\ 3 = 3\alpha - 3\beta. \end{cases}$$

Segue que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Segue que

$$\alpha = 3 \quad e \quad \beta = 2.$$

(ii) Se $\vec{w} = [4 \ \ 5]$ então

$$[4 \ \ 5] = \alpha [1 \ \ -1] + \beta [0 \ \ 1] + \gamma [3 \ \ -3]$$

Logo

$$\begin{aligned} 4 &= \alpha + 3\gamma \\ 5 &= -\alpha + \beta - 3\gamma. \end{aligned}$$

Assim

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

Logo

$$\begin{cases} \alpha + 3\gamma = 4 \\ \beta = 9 \end{cases}.$$

Assim, podemos tomar $\alpha = 1, \gamma = 1, \beta = 9$ e notar que

$$[4 \;\; 5] = 1[1 \;\; -1] + 9[0 \;\; 1] + 1 \cdot [3 \;\; -3]$$

(ii) Temos

$$\text{lin}(A) = \text{ger}([1 \;\; -1], [0 \;\; 1], [3 \;\; -3]).$$

Logo,

$$[x \;\; y] = \alpha[1 \;\; -1] + \beta[0 \;\; 1] + \gamma[3 \;\; -3].$$

Segue que

$$\alpha + 3\gamma = x$$
$$-\alpha + \beta - 3\gamma = y$$

Assim

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ -1 & 1 & -3 & y \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & 0 & x+y \end{array}\right]$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha + 3\gamma = x \\ \beta = x + y \end{cases}$$

Portanto, dado qualquer $[x \;\; y]$, podemos escrever

$$[x \;\; y] = (x - 3\gamma)[1 \;\; -1] + (x+y)[0 \;\; 1] + \gamma[3 \;\; -3],$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$[x-3\gamma \;\;\; -x+3\gamma] + [0 \;\;\; x+y] + [3\gamma \;\;\; -3\gamma].$$

Assim $\operatorname{lin}(A) = \mathbb{R}^2$.

Agora,

$$\operatorname{col}(A) = \operatorname{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right).$$

Se $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \operatorname{col}(A)$ então

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \beta = y \\ 3\alpha - 3\beta = z \end{cases}$$

Logo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -3 & z \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -3 & z \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -3 & -3(x+y)+z \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 3y-3(x+y)+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3x \end{bmatrix}$$

Logo $\alpha = x+y$, $\beta = y$ e $z - 3x = 0$.
Assim,

$$\alpha - \beta = x \quad \text{e} \quad z = 3x.$$

Segue que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ deve satisfazer $z = 3x$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Portanto, o conjunto em questão trata-se do plano

$$3x - z = 0.$$

<u>Teorema</u>: Sejam A uma matriz $m \times n$ e N o conjunto de soluções do sistema

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Então N é subespaço do $\mathbb{R}^n$.

Prova:

Note que:

(i) $\vec{0} \in N$, pois $A\vec{0} = \vec{0}$.

(ii) Se $\vec{u}, \vec{v} \in N$ então $A\vec{u} = \vec{0}$ e $A\vec{v} = \vec{0}$. Logo

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Segue que $\vec{u} + \vec{v} \in N$.

(iii) Se $\vec{u} \in N$ então $A\vec{u} = \vec{0}$. Segue que

$$A(\lambda \vec{u}) = \lambda A\vec{u} = \lambda \vec{0} = \vec{0}.$$

Logo $\lambda \vec{u} \in N$.

Definição: O conjunto N acima é chamado de subespaço anulado por A, e é denotado por

$$\mathrm{anul}(A).$$

Definição: Uma base de um subespaço do $\mathbb{R}^n$ é um conjunto de vetores em S que

(i) gera S

(ii) É L.I.

Exemplo: Os vetores $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ do $\mathbb{R}^n$ são L.I. e geram o $\mathbb{R}^n$. Eles são chamados base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo: $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$

Exemplo: Ache uma base para o espaço linha de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada de A é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\text{lin}(A) = \text{lin}(R)$

$$\text{lin}(R) = \text{ger}\left([1\ 0\ 1\ 0\ -1], \dots, [0\ 0\ 0\ 1\ 4]\right)$$

<u>Teorema</u>: Seja S um subespaço do $\mathbb{R}^n$. Logo quaisquer duas bases em S terão o mesmo número de vetores.

Prova (Exercício)

<u>Definição</u>: O número de vetores de uma base de S é chamado dimensão de S.

<u>Teorema</u>: Os espaços linha e coluna de uma matriz têm a mesma dimensão.

Prova (Exercício)

<u>Definição</u>: O posto de uma matriz A, posto (A), é a dimensão de seus espaços linha e coluna.

<u>Teorema</u>: Para qualquer matriz A,

$$\text{posto}(A^T) = \text{posto}(A).$$

Definição: A nulidade de uma matriz A é a dimensão do espaço anulado por A, ou seja, a dimensão do espaço solução de

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Teorema: Se A é uma matriz $m \times n$ então

$$\text{posto}(A) + \text{nulidade}(A) = n.$$

Prova (Exercício)

Teorema: Seja A uma matriz $m \times n$. Então

(a) $\text{posto}(A^T A) = \text{posto } A$

(b) $A^T A$ é invertível se, e só se, $\text{posto}(A) = n$.

Prova:

Pelo teorema anterior

$$\text{posto}(A) + \text{nulidade}(A) = n$$

e

$$\text{posto}(A^T A) + \text{nulidade}(A^T A) = n.$$

Basta mostrarmos que

$$\text{nulidade}(A) = \text{nulidade}(A^T A).$$

Vamos mostrar que

$$\text{anul}(A) = \text{anul}(A^T A).$$

Para isso, mostraremos que

(i) $\text{anul}(A) \subset \text{anul}(A^T A)$ e
(ii) $\text{anul}(A^T A) \subset \text{anul}(A)$.

(i). Tome $\vec{u} \in \text{anul}(A)$. Logo

$$A\vec{u} = \vec{0}.$$

Logo

$$A^T A \vec{u} = A^T \vec{0} = \vec{0}.$$

Logo $\vec{u} \in \text{anul}(A^T A)$.

Assim $\text{anul}(A) \subset \text{anul}(A^T A)$.

(ii) Tome $\vec{u} \in \text{anul}(A^T A)$. Logo

$$A^T A \vec{u} = \vec{0}.$$

Tem-se

$$u^T A^T A \vec{u} = u^T \vec{0} = 0.$$

Assim

$$u^T A^T A \vec{u} = 0,$$

Isto é equivalente a

$$\vec{u} \cdot A^T A \vec{u} = 0$$

O que implica em

$$A\vec{u} \cdot A\vec{u} = 0 .$$

Logo

$$\|A\vec{u}\|^2 = 0 \implies A\vec{u} = \vec{0} .$$

Logo $\vec{u} \in \operatorname{anul}(A)$.

(b). (Exercício)