Comprimento e Ângulo: Produto Escalar

Definição: Sejam $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$. O produto escalar (ou produto interno) entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido como

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned},$$

onde

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n .$$

Exemplo: Se $\vec{u} = (1, 3, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 3)$ então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + 3 \times 0 + 0 \times 3$$

$$= -1 .$$

Teorema: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(iii) $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

(v) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

Norma de um vetor

Definição: Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Exemplo: Se $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1,0,2) \cdot (-1,0,2)}$$
$$= \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5}.$$

Teorema: Sejam $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

(i) $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$

(ii) $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \, \|\vec{v}\|$.

Prova:

(i) Segue do resultado anterior.

(ii)
$$\|\alpha \vec{v}\| = \sqrt{\alpha \vec{v} \cdot \alpha \vec{v}}$$
$$= \sqrt{\alpha^2 (\vec{v} \cdot \vec{v})}$$
$$= |\alpha| \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$
$$= |\alpha| \, \|\vec{v}\|.$$

Definição: Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é chamado unitário se

$$\|\vec{v}\| = 1.$$

Observação: Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

é unitário.

De fato,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$= \sqrt{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

$$= \sqrt{\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}}$$

$$= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1.$$

Definição: Os vetores canônicos:

$\mathbb{R}^2$: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3$: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^n$: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\ldots$, $\vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

__Teorema__: (Cauchy-Schwarz) Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

__Prova__: Sejam $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Tem-se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\vec{u} + \lambda \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \lambda \vec{v}) \geq 0.$$

Logo

$$\|\vec{u}\|^2 + 2\lambda \, \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 \geq 0.$$

Assim

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4 . \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

__Teorema__ (Desigualdade Triangular) Para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

__Prova__:

Tem-se

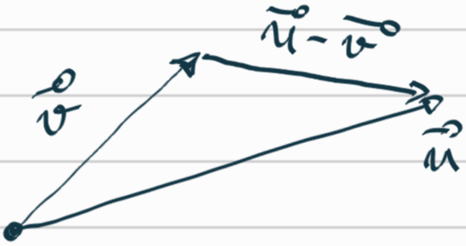
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$
$$\leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,|\vec{u}\cdot\vec{v}|$$
$$\leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$
$$= \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2$$

Logo

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

<u>Definição</u>: A distância entre dois vetores $\vec{u},\vec{v}$ $\in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|.$$



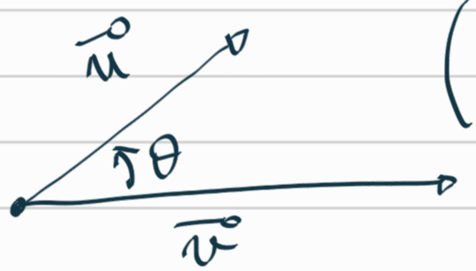
<u>Obs</u>:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+\dots+(u_n-v_n)^2}$$

<u>Exemplo</u>: Se $\vec{u}=(1,0,-2)$ e $\vec{v}=(-2,1,1)$ então

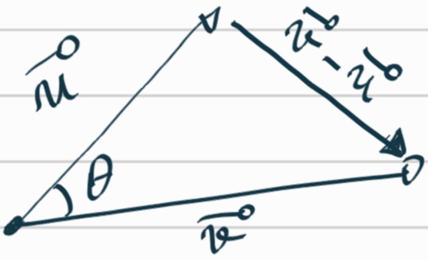
$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{(1+2)^2+(0-1)^2+(-2-1)^2}$$
$$= \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}.$$

Ângulos



(Menor valor entre θ e $2\pi - \theta$)

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.



Pela lei dos cossenos, temos

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta .$$

Notemos que

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$$
$$= \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 .$$

Segue que

$$\|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$$

Assim,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta .$$

Logo, podemos escrever

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}, \quad \vec{u},\vec{v} \neq \vec{0}.$$

Obs: Note que, para todo $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tem-se

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \Longrightarrow$$

$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \leq 1 \Longrightarrow$$

$$-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \leq 1.$$

Definição: Dizemos que dois vetores $\vec{u},\vec{v}$ são ortogonais se

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

Observação: Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ então

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = 0.$$

Logo $\theta = \pi/2$.

Proposição: Sejam $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Longleftrightarrow \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 0.$$

Prova:
Suponha

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

Logo

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Assim, da hipótese,

$$2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 0,$$

ou

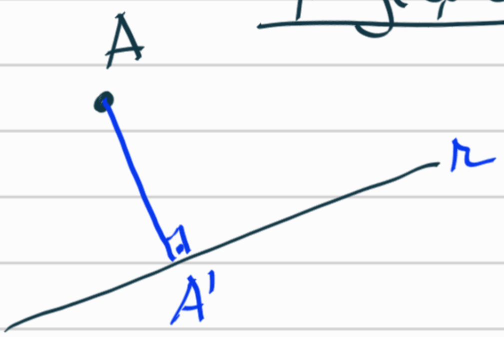
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

Logo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

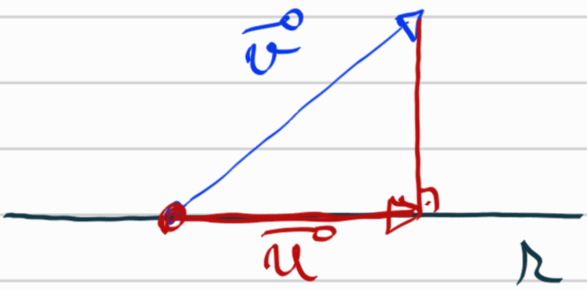
Reciprocamente, se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ então

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

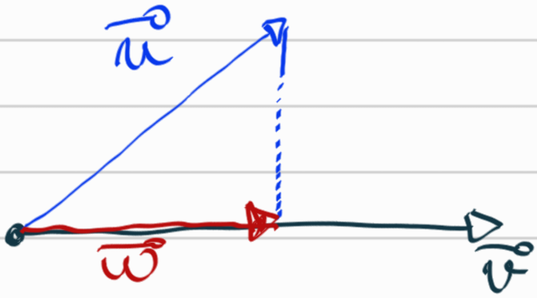
Projeções



A' é a projeção de A sobre a reta r.



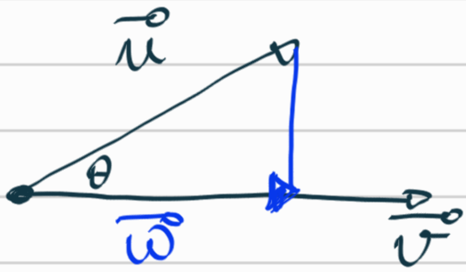
$\vec{u}$ é a projeção de $\vec{v}$ sobre a reta r.



$\vec{w}$ é a projeção de $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$.

9

Suponha que $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$.



Note que $\quad \vec{w} = \|\vec{w}\| \cdot \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Temos ainda que

$$\cos\theta = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{e}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

Logo

$$\vec{w} = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

$$= \frac{\|\vec{u}\| \cos\theta}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

$$= \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|^2} \|\vec{v}\| \cos\theta \, \vec{v}$$

$$= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

Definição: Se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é o vetor

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}.$$

Exemplo: Determine a projeção de $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ sobre $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$