Transformações Lineares

Definição: Uma aplicação $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear se

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $T(\vec{u}+\vec{v}) = T\vec{u} + T\vec{v}$

(ii) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T\vec{u}$.

Exemplo:

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$$

Teorema: Seja A uma matriz $m \times n$. A aplicação

$$T_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por

$$T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

é uma transformação linear.

Exemplo:

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

a aplicação que pega um $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e devolve $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ é linear.

$$F(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = F\left(\begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= F\left(\begin{bmatrix} \lambda u_1 + v_1 \\ \lambda u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda u_1 + v_1 \\ -\lambda u_2 - \lambda v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda F(\vec{u}) + F(\vec{v})$$

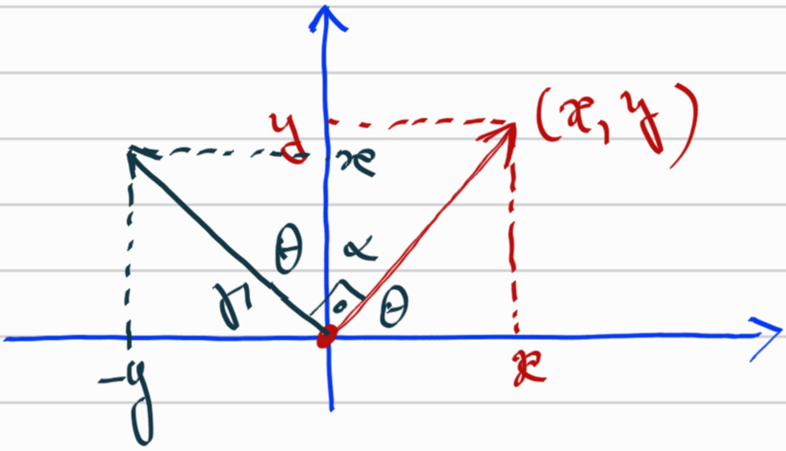
Obs: Note que

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

<u>Exemplo</u>: Seja $R: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação que faz a rotação de um ângulo de $90°$ no sentido anti-horário em relação à origem. Mostre que R é uma transformação linear.



Logo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Teorema: Considere $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então, T é uma transformação por meio de uma matriz, ou seja, existe uma matriz A, $m \times n$, tal que

$$T = T_A$$

Neste caso, fixada a base canônica do $\mathbb{R}^n$ tem-se

$$A = \left[T\vec{e}_1 \,\vdots\, T\vec{e}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, T\vec{e}_n \right].$$

Prova: Sejam os vetores da base canônica $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, do $\mathbb{R}^n$ e $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
Segue que

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Tem-se

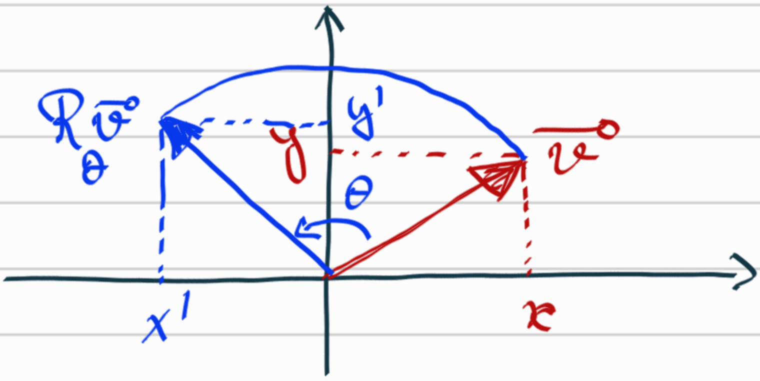
$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 T\vec{e}_1 + \cdots + x_n T\vec{e}_n \\ &= \left[T\vec{e}_1 \,\vdots\, T\vec{e}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, T\vec{e}_n \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= A\vec{x}. \end{aligned}$$

Exemplo: A rotação de um ângulo θ de um vetor em torno da origem é uma transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

cuja matriz, relativa à base canônica do $\mathbb{R}^2$ é

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$



Notemos que, se

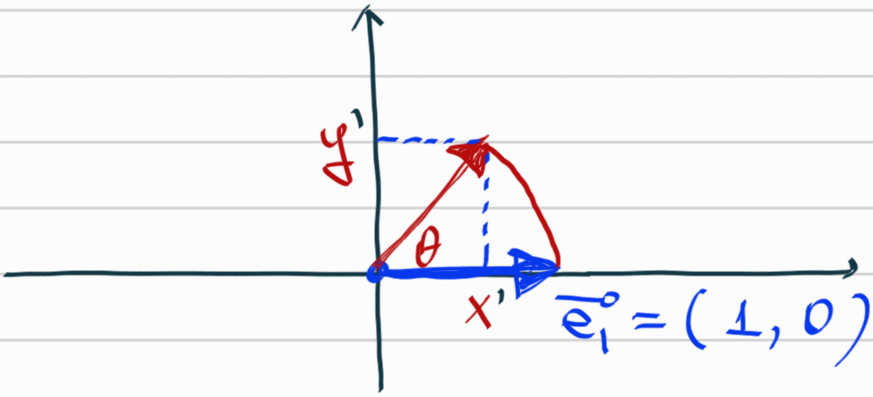
$$\vec{v} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2,$$

onde
$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

temos

$$R_\theta \vec{v} = \alpha R_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, analisando $R_\theta \vec{e}_1$:



segue que

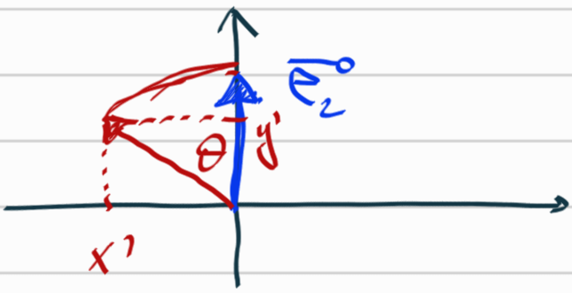
$$x' = \cos\theta$$
$$y' = \operatorname{sen}\theta$$

Assim,

$$R_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}.$$

Agora, para

$$R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$$



segue que

$$y' = \cos\theta$$

$$x' = -\operatorname{sen}\theta.$$

Assim, temos

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Note que

$$R_\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

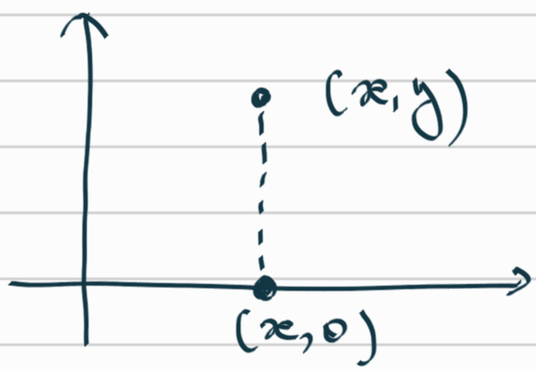
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

e

$$R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

<u>Exemplo:</u> Mostre que $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que projeta um ponto sobre o eixo x é uma transformação linear.



De fato, $P(x,y) = (x,0)$. Logo

(c) $$P\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ y_1 + \alpha y_2 \end{bmatrix}\right)$$ 8

$$= \begin{bmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \alpha P \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Novamente,

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{x} &\longmapsto P(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Temos $$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0) = (2,-1,0)$$
$$T(0,1) = (0,0,1)$$

Sabemos que

$$[T] = \left[T\vec{e_1} \,\vdots\, T\vec{e_2} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= (2x, -x, y)$$

Exemplo: Determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$.

Considerando os vetores $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ da base canônica do $\mathbb{R}^2$ temos

$$(1,1) = \vec{e_1} + \vec{e_2}$$

$$(0,-2) = -2\vec{e_2}$$

Logo

$$(3,2,1) = T(1,1) = T\vec{e}_1 + T\vec{e}_2$$

$$(0,1,0) = T(0,-2) = T(-2\vec{e}_2) = -2T\vec{e}_2$$

Assim

$$-2T\vec{e}_2 = (0,1,0) \Rightarrow$$

$$T\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}(0,1,0)$$

Consequentemente,

$$T\vec{e}_1 + T\vec{e}_2 = (3,2,1) \Rightarrow$$

$$T\vec{e}_1 - \frac{1}{2}(0,1,0) = (3,2,1) \Rightarrow$$

$$T\vec{e}_1 = (3,2,1) + \frac{1}{2}(0,1,0)$$

$$= (3, 5/2, 1)$$

Logo

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é definida como o conjunto

$$T(V) = \{\vec{w} \in W;\ T(\vec{v}) = \vec{w} \text{ para algum } \vec{v} \in V\}.$$

Obs.: Por definição

$$T(V) \subset W.$$

Além disso, $T(V)$ é um subespaço de W. De fato,

(i) $0 \in T(V)$, pois $\vec{0} \in V$ e $T\vec{0} = \vec{0}$.

(ii) Dados $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in T(V)$. Logo existem $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ tais que

$$\vec{w}_1 = T\vec{v}_1 \text{ e } \vec{w}_2 = T\vec{v}_2.$$

Vamos mostrar que $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in T(V)$. De fato,

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T\vec{v}_1 + T\vec{v}_2 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

logo $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in T(V)$.

(iii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in T(V)$. Temos

$$T(\alpha\vec{v}) = \alpha T\vec{v} = \alpha\vec{w}.$$

logo $\alpha\vec{w} \in T(V)$.

Definição: Seja $T: V \longrightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\vec{v} \in V$

tais que $T\vec{v}=\vec{0}$ é chamado núcleo de T.

Notação: $\operatorname{Ker} T$.

Em notação matemática,

$$\operatorname{Ker} T=\{\vec{v}\in V;\ T\vec{v}=\vec{0}\}.$$

Obs: Por definição $\operatorname{Ker} T\subset V$.

Além disso, $\operatorname{Ker} T$ é um subespaço de V.

De fato,

(i) $0\in \operatorname{Ker} T$, pois $T\vec{0}=\vec{0}$.

(ii) Se $\vec{u},\vec{v}\in \operatorname{Ker} T$ então $T\vec{u}=\vec{0}$ e $T\vec{v}=\vec{0}$. Assim

$$T(\vec{u}+\vec{v})=T\vec{u}+T\vec{v}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$$

logo $\vec{u}+\vec{v}\in \operatorname{Ker} T$.

(iii) Se $\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec{v}\in \operatorname{Ker} T$ então

$$T(\alpha\vec{v})=\alpha T\vec{v}=\alpha\vec{0}=\vec{0}.$$

Logo $\alpha\vec{v}\in \operatorname{Ker} T$.

Exemplo: $$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x+y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; T(x,y) = 0 \} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x+y = 0 \} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = -x \} \end{aligned}$$

Logo
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \{ (x,-x) , x \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x(1,-1) , x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

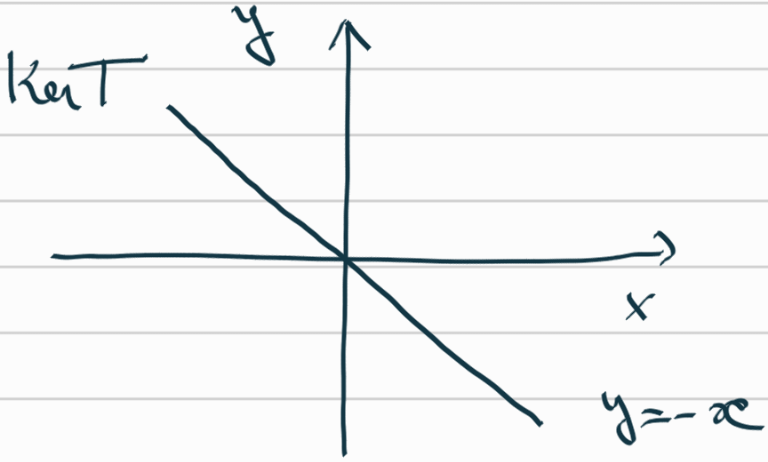


Imagem de T:

A imagem de T é o conjunto $\mathbb{R}$.
Pois, dado qualquer $w \in \mathbb{R}$ tem-se

$$T(0,w) = w.$$

Exemplo: $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x,y,z) = (x, 2y, 0).$$

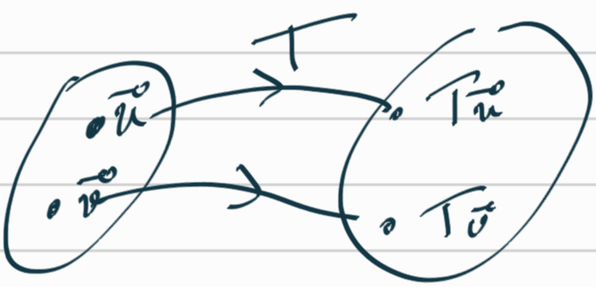
Imagem de T

$$T(\mathbb{R}^3) = \{(x,2y,0),\ x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,0,0) + y(0,2,0),\ x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Ger}\left((1,0,0),(0,2,0)\right).$$

Núcleo de T

$$\ker T = \{(x,y,z);\ T(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z);\ (x,2y,0) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z);\ x(1,0,0) + y(0,2,0) + z(0,0,0) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(0,0,z);\ z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{ger}(0,0,1)$$

Definição: Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora se para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ com $T\vec{u} = T\vec{v}$ temos $\vec{u} = \vec{v}$.



Definição: A aplicação $T: V \longrightarrow W$ será sobrejetora se

$$T(V) = W.$$

Teorema: Seja $T: V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então

$$\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\} \iff T \text{ é injetora.}$$

Prova:

Suponha que $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$. Vamos mostrar que T é injetora. Tome $\vec{u}, \vec{v} \in V$ com $T\vec{u} = T\vec{v}$. Logo

$$T\vec{u} - T\vec{v} = \vec{0} \implies$$

$$T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}. \implies$$

$$\vec{u} - \vec{v} \in \operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$$

Logo $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0} \implies \vec{u} = \vec{v}$.

Reciprocamente, suponha que T é injetora. Tome $\vec{v} \in \operatorname{Ker} T$.

Segue que $T\vec{v} = \vec{0} = T\vec{0}$. Como T é injetora, $\vec{v} = \vec{0}$.