Matrizes

Definição: Uma matriz é uma lista ordenada de elementos dispostos em linhas e colunas.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Notação: Usamos letras maiúsculas para fazer referência à matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Também usamos

$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$$

quantidade de linhas

quantidade de colunas

índice linha

índice coluna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & \boxed{a_{ij}} \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elemento da linha i e coluna j.

Obs: Podemos "olhar" para a matriz A acima como

$$A = \left[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n\right],$$

onde

$$\vec{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ (matriz coluna) ou vetores

ou ainda

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}'_1 \\ \vec{a}'_2 \\ \vdots \\ \vec{a}'_m \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$\vec{a}'_i = \left[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}\right];$$ (Matriz linha)

Definição: Se uma matriz possui a mesma quantidade de linhas e colunas ela é chamada matriz quadrada.

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$ Matriz quadrada 3×3

<u>Definição</u>: Dada uma matriz A (aqui assumiremos que ela é quadrada), os elementos a_{ij} tais que $i=j$ são chamados de diagonal da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Ex</u>:

Diagonal de B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

<u>Definição</u>: Uma matriz quadrada que possui todos os elementos fora da diagonal iguais a zero é chamada matriz diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad \text{(Matriz diagonal)}$$

<u>Definição</u>: Uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal são todos iguais a 1 é chamada matriz identidade.

Em geral, denota-se uma matriz identidade por I_n, onde n é o número de linhas (ou de colunas)

Ex

$$I_1 = [1]; \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição! Duas matrizes $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$ são iguais se possuírem a mesma quantidade de linhas (m) e a mesma quantidade de colunas (n) e

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1 \dots m; \; j = 1 \dots n.$$

Ex:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ y & 4 & z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} p & 2 & q \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $A = B$ então $m = 1$, $x = 2$, $q = 3$, $y = -1$, $z = 0$.

Adição de Matrizes

Definição: Sejam $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ e $B = \{b_{ij}\}_{m \times n}$.

A adição, $A + B$, é definida como

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}.$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ex: Se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

então

$$A+B=\begin{bmatrix} 0+1 & 1+0 \\ -1+0 & 3+1 \\ 4+1 & 1+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um escalar por uma Matriz

Definição: Seja $A=\{a_{ij}\}_{m\times n}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$.

Definimos a matriz

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Se

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

então

$$2A = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 3 & 2\times 4 \\ 2\times 5 & 2\times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Obs: Sejam A e B matrizes com mesma quantidade de linhas e de colunas. Temos

$$A - B = A + (-B) = A + (-1B).$$

Definição: Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero é chamada matriz nula.

Se O é a matriz nula, então

$$A + O = A.$$

Multiplicação de Matrizes

Definição: Sejam $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$ e $B = \{b_{ij}\}_{n\times p}$ duas matrizes. O produto de A por B é definido por

$$AB = C,$$

onde $C = \{c_{ij}\}_{m\times p}$ com $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ então

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 0\times 3 & 1\times 1 + 0\times 2 & 1\times 0 + 0\times 1 \\ -1\times 1 + 2\times 3 & -1\times 1 + 2\times 2 & -1\times 0 + 2\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Como já foi visto, podemos escrever

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

como

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

O sistema pode ainda ser escrito como

$$Ax = b,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}; \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Teorema: Sejam $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$, $\vec{e}_i$ um vetor canônico $1 \times m$ e $\vec{e}_j$ um vetor canônico $n \times 1$. Então

(i) $\vec{e}_i A$ é a i-ésima linha de A

(ii) $A \vec{e}_j$ é a j-ésima coluna de A.

Prova:

(i) Temos

$$\underset{1\times m}{\vec{e}_i} \, A_{m\times n} = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Segue que

$$\vec{e}_i A = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\underset{m\times n}{A} \, \vec{e}_{j\,n\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Logo

$$A\vec{e_j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

"Decomposição" de Matrizes (Matriz bloco)

Considere

$$\underset{5\times 5}{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Podemos reescrever A como

$$\underset{5\times 5}{A} = \begin{bmatrix} I_{3_{3\times 3}} & C_{3\times 2} \\ 0_{2\times 3} & E_{2\times 2} \end{bmatrix},$$

onde

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs: Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere $\vec{b}_1$ a primeira coluna de B e $\vec{b}_2$ a segunda coluna de B. Temos

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Agora, se calcularmos

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Notamos que

$$AB = \left[A\vec{b}_1 \,\vdots\, A\vec{b}_2 \right].$$

Exemplo:

Considere as matrizes

$$A = \begin{array}{c} \qquad A_{11} \qquad\qquad A_{12} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right] \\ \qquad A_{21} \qquad\qquad A_{22} \end{array} \quad e \quad B = \begin{array}{c} B_{11} \qquad B_{12} \qquad B_{13} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \\ B_{21} \qquad B_{22} \qquad B_{23} \end{array}$$

Podemos reescrever A e B como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos escrever

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{bmatrix}$$

Temos

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Calculando os outros produtos obtemos

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 6 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 12 \\ 5 & -5 & 3 & 3 & 9 \\ \hline 1 & 7 & 0 & 0 & 23 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right]$$

Potências de Matrizes:

Definição: Se A é uma matriz quadrada então

$$A^r = \underbrace{AA\cdots A}_{r\times}.$$

Definimos $A^1 = A$ e $A^0 = I$.

Propriedades:

Se A é uma matriz quadrada e r e s inteiros não negativos então

(i) $A^r A^s = A^{r+s}$

(ii) $(A^r)^s = A^{rs}$

Exemplo: Se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
então
$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix},$$
para $n \geq 1$.

De fato, se fosse $n=1$ temos
$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{bmatrix}.$$

Suponha que vale
$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que
$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix}.$$

De fato,
$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{n} & 2^{n} \\ 2^{n} & 2^{n} \end{bmatrix}.$$

<u>Definição</u>: Seja $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$. A matriz transposta de A, denotada A^T, é definida como a matriz

$$\{A^T_{ij}\} = \{a_{ji}\}_{n \times m}.$$

<u>Exemplo</u>: Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

<u>Definição</u>: Seja A uma matriz quadrada. Dizemos que A é simétrica se

$$A = A^T.$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades Algébricas da Adição e da Multiplicação por escalar

Teorema: Sejam A, B, C matrizes e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

a) $A + B = B + C$
b) $(A+B)+C = A+(B+C)$
c) $A + 0 = A$
d) $A + (-A) = 0$
e) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
f) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta B$
g) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
h) $1 . A = A$

Prova: (Exercício)

Teorema: Sejam A, B, C matrizes e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

(i) $A(BC) = (AB)C$
(ii) $A(B+C) = AB + AC$
(iii) $(A+B)C = AC + BC$
(iv) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
(v) $I_m A = A = I_n$, se A é $m \times n$.

Prova:

(i) $$[A(BC)]_{ij} = \sum_k A_{ik}(BC)_{kj}$$

$$= \sum_k A_{ik} \sum_\ell B_{k\ell} C_{\ell j}$$

$$= \sum_k \sum_\ell A_{ik} B_{k\ell} C_{\ell j}$$

$$= \sum_\ell \sum_k A_{ik} B_{k\ell} C_{\ell j}$$

$$= \sum_\ell (AB)_{i\ell} C_{\ell j}$$

$$= [(AB)C]_{ij}$$

(ii) $$[A(B+C)]_{ij} = \sum_k A_{ik}(B+C)_{kj}$$

$$= \sum_k A_{ik}(B_{kj} + C_{kj})$$

$$= \sum_k (A_{ik} B_{kj} + A_{ik} C_{kj})$$

$$= \sum_k A_{ik} B_{kj} + \sum_k A_{ik} C_{kj}$$

$$= [AB + AC]_{ij}.$$

Propriedades da Transposta

Teorema: Sejam A e B matrizes e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

(v) $(A^n)^T = (A^T)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

(iv) $$[(AB)^T]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki}$$

$$= \sum_k B^T_{ik} A^T_{kj} = [B^T A^T]_{ij}$$

Obs: $$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$
$$= A^2 + AB + BA + B^2.$$

Teorema: Se A é uma matriz quadrada então $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

Prova: $$(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A + A^T.$$

Teorema: AA^T e A^TA são simétricas.

Prova

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

$$(A^TA)^T = A^T (A^T)^T = A^TA.$$

A inversa de uma Matriz

Definição: Se A é uma matriz $n \times n$, uma inversa de A é uma matriz $n \times n$, A^{-1}, que satisfaz

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Exemplo:

Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ então } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

não tem inversa.

Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_2 .$$

Assim

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$\begin{cases} x + 3z = 1 \longleftarrow (ii) \\ y + 3t = 0 \\ -2x - 6z = 0 \longleftarrow (i) \\ -2y - 6t = 1 \end{cases}$$

Segue que

$$0 = -2x - 6z = -2(x+3z) = -2(1) = -2.$$

Logo o sistema não tem solução. Portanto a matriz não é inversível.

<u>Teorema:</u> Se uma matriz é inversível então sua inversa é única.

Prova:

Suponha que
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Além disso, considere $\tilde{A}^{-1}$ tal que
$$A\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}A = I_n.$$

Logo,
$$A^{-1} = A^{-1}I_n = A^{-1}(A\tilde{A}^{-1}) = (A^{-1}A)\tilde{A}^{-1} = I_n\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}.$$

Teorema: Se
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
então, se $ad - bc \neq 0$ a matriz A é inversível e
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Se $ad-bc=0$, A não será inversível.

Exemplo: Resolva o sistema
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}.$$

O sistema acima pode ser escrito

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

então o sistema pode ser escrito

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Como $\det A = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -1 \neq 0$.
logo A é inversível.

Assim,

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6-2 \\ \frac{9}{2}+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

(i) Se A é invertível então A^{-1} é invertível e

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(ii) Se A é invertível e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}.$$

(iii) Se A e B são invertíveis então

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

(iv) Se A é invertível então

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

(v) Se A é invertível então

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Matrizes Elementares

Definição: Uma matriz elementar é uma matriz obtida por meio de operações elementares nas linhas da matriz identidade.

Fazer exemplos: $\begin{cases} \text{(i)} & L_i \leftrightarrow L_j \\ \text{(ii)} & L_j \leftarrow K L_j \\ \text{(iii)} & L_j \leftarrow L_j + K L_i \end{cases}$

Teorema: Seja A uma matriz $n\times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é inversível
b) $Ax=\vec{b}$ tem uma única solução para todo $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$.
c) $Ax=\vec{0}$ tem apenas a solução trivial
d) A forma escalonada reduzida de A é I_n
e) A é um produto de matrizes elementares.

Prova (Exercício)

Teorema: Seja A uma matriz quadrada. Se uma sequência de operações elementares em ~~nas~~ linhas reduz A a I, a mesma sequência de operações elementares transforma I_n em A^{-1}.

Exemplo: Encontre a inversa de

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & -3/2 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$