Equações Não Homogêneas

Vamos iniciar nosso estudo com as equações do tipo

$$ay'' + by' + cy = h(x),$$

com a, b, c constantes. Vamos considerar a solução geral como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Já sabemos determinar a solução da equação homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

denotada por $y_h(x)$. Vamos encontrar uma solução particular, $y_p(x)$ da equação

$$ay'' + by' + cy = h(x).$$

Suponha que

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Vamos buscar uma solução particular do tipo

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Substituindo a expressão anterior na equação diferencial temos:

$$y_p'(x) = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'$$

$$y_p''(x) = C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' + C_2y_2''$$

$$\begin{aligned}
ay_p'' + by_p' + cy_p = {} & a\left(C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + \cancel{C_1y_1''}\right. \\
& \left. + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' + \cancel{C_2y_2''}\right) \\
& + b\left(C_1'y_1 + \cancel{C_1y_1'} + C_2'y_2 + \cancel{C_2y_2'}\right) \\
& + c\left(\cancel{C_1y_1} + \cancel{C_2y_2}\right) \\
= {} & C_1\left(\cancelto{0}{ay_1'' + by_1' + cy_1}\right) + C_2\left(\cancelto{0}{ay_2'' + by_2' + cy_2}\right) \\
& + a\left(C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2'\right) + b\left(C_1'y_1 + C_2'y_2\right) \\
= {} & a\left(C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2'\right) + b\left(C_1'y_1 + C_2'y_2\right)
\end{aligned}$$

Segue então que, se

$$ay_p'' + by_p' + cy_p' = h(x)$$

então

$$a\left(C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2'\right) + b\left(C_1'y_1 + C_2'y_2\right) = h(x)$$

Se $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$ então

$$a(\cancel{c_1''y_1} + 2c_1'y_1' + \cancel{c_2''y_2} + 2c_2'y_2') = h(x)$$

ou

$$c_1''y_1 + c_2''y_2 + 2(c_1'y_1' + c_2'y_2') = \frac{h(x)}{a}$$

Agora, se $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$ então

$$0 = (c_1'y_1 + c_2'y_2)' = c_1''y_1 + c_1'y_1' + c_2''y_2 + c_2'y_2'$$
$$= (c_1''y_1 + c_2''y_2) + (c_1'y_1' + c_2'y_2')$$

Logo

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = h(x).$$

Até agora, em resumo temos que determinar c_1 e c_2 tais que

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = h(x) \end{cases}$$

Note que o sistema anterior é linear em c_1' e c_2'. Dessa forma

$$c_1' = -\frac{y_2 h}{W[y_1, y_2]} \qquad c_2' = \frac{y_1 h}{W[y_1, y_2]}.$$

Portanto para determinar c_1 e c_2 temos que calcular as integrais abaixo:

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)h(t)}{w[y_1,y_2]}\,dt$$

e

$$c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)h(t)}{w[y_1,y_2]}\,dt .$$

Como a solução particular é

$$y_p = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x)$$

temos

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)\,y_2(t)]}{w[y_1,y_2]}\,h(t)\,dt$$

a solução particular.

Exemplo: Determine a solução geral da equação

$$y'' + y = \tan x .$$

Vamos determinar solução da homogênea

$$y'' + y = 0$$

A equação característica é

$$r^2 + 1 = 0 .$$

As raízes são $r_1 = i$ e $r_2 = -i$.
Segue que a solução da homogênea é

$$y_h(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x.$$

Vamos buscar uma solução particular do tipo

$$y_p(x) = C_1(x) \operatorname{sen} x + C_2(x) \cos x.$$

As funções $C_1(x)$ e $C_2(x)$ são determinadas por meio do sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \; C_1'(x) + \cos x \; C_2'(x) = 0 \\ \cos x \; C_1'(x) - \operatorname{sen} x \; C_2'(x) = \tan x \end{cases}$$

Segue que

$$C_1'(x) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} C_2'(x).$$

Logo,

$$-\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} C_2'(x) - \operatorname{sen} x \; C_2'(x) = \tan x$$

Logo,

$$-C_2'(x)\left[\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x\right] = \tan x$$

Assim,

$$-C_2'(x)\left[\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\right] = \tan x$$

Logo

$$-c_2'(x)\left[\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right] = \tan x \quad \Rightarrow$$

$$c_2'(x) = -\operatorname{sen} x \tan x.$$

Como consequência,

$$c_1'(x) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\left(-\operatorname{sen} x \tan x\right)$$

$$= \operatorname{sen} x.$$

Segue que

$$c_1(x) = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

$$c_2(x) = -\int \operatorname{sen} x \tan x \, dx$$

$$= -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} \, dx$$

$$= \int \cos x \, dx - \int \sec x \, dx$$

$$= \operatorname{sen} x - \int \sec x \, dx$$

Calculando $\int \sec x \, dx$:

$$\int \sec x \, \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} \, dx = \int \frac{1}{u} \, du ,$$

onde $u = \sec x + \tan x$ e $du = (\sec^2 x + \sec x \tan x) \, dx$.
Assim

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| .$$

Logo

$$c_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln |\sec x + \tan x| .$$

Portanto,

$$y_p(x) = -\cos x \operatorname{sen} x + \cos x (\operatorname{sen} x - \ln |\sec x + \tan x|$$

$$= -\cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

A solução geral é dada por

$$\boxed{y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|}$$