Equações Lineares de 2ª Ordem

Nesta seção vamos trabalhar com equações da forma

$$p(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = h(x).$$

Vamos considerar, inicialmente, problemas do tipo

$$a y'' + b y' + c y = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes.

Sabemos que o espaço solução da equação acima tem dimensão 2. Logo vamos encontrar duas funções linearmente independentes que sejam soluções do problema acima.

Nossa experiência sugere fazermos uma tentativa com funções do tipo

$$\phi(x) = e^{rx},$$

onde $r \in \mathbb{R}$ ou $r \in \mathbb{C}$.

Desse ponto de vista, para que ϕ seja solução da equação diferencial acima, temos que ter:

$$a\phi'' + b\phi' + c\phi = 0.$$

Assim, se
$$\phi = e^{rx}$$
então
$$\phi' = r e^{rx}$$
e
$$\phi'' = r^2 e^{rx}.$$

Assim, temos
$$a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx} = 0 .$$

Como $e^{rx} \neq 0$ segue que
$$\boxed{a r^2 + b r + c = 0 .}$$
Equação Característica

Se determinarmos r, teremos uma expressão para ϕ, que será solução da equação diferencial homogênea.

A equação
$$a r^2 + b r + c = 0$$
possui duas soluções:
$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Além disso, podemos ter:

(i) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, com $r_1 \neq r_2$ $\quad (b^2 - 4ac > 0)$

(ii) $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, com $r_1 \neq r_2$ $(b^2 - 4ac < 0)$

(iii) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, com $r_1 = r_2$ $(b^2 - 4ac = 0)$

Caso (i): Raízes reais e distintas.

Neste caso, basta verificar se

$$\phi_1(x) = e^{r_1 x} \quad e \quad \phi_2(x) = e^{r_2 x}$$

são linearmente independentes. De fato,

$$W[\phi_1, \phi_2] = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{bmatrix}$$

$$= r_2 e^{(r_1 + r_2)x} - r_1 e^{(r_1 + r_2)x}$$

$$= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x}$$

Como $e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$ segue que
$W[\phi_1, \phi_2] \neq 0$ sempre que $r_1 \neq r_2$.

Assim, se $r_1 \neq r_2$ então

$$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$$

é uma base para o espaço solução da equação

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Desse modo, a solução geral da equação acima é da forma

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad (r_1 \neq r_2)$$

Exemplo:

$$y'' - y = 0.$$

Se considerarmos $\phi = e^{rx}$, temos

$$\phi'(x) = r e^{rx} \quad \text{e} \quad \phi''(x) = r^2 e^{rx}.$$

Logo

$$r^2 - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad (r-1)(r+1) = 0.$$

Assim

$$r_1 = 1 \quad \text{e} \quad r_2 = -1.$$

Logo, a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

Caso (ii): Raízes complexas

Neste caso as raízes sempre aparecem aos pares: a própria e seu conjugado.

Assim,

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\mu.$$

Segue que

$$\phi_1(x) = e^{(\lambda+i\mu)x} \quad \text{e} \quad \phi_2(x) = e^{(\lambda-i\mu)x}.$$

<u>Exponencial Complexa:</u>

Sabemos que

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tomando $t = ix$ temos,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Segue que

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Assim

$$e^{(\lambda + i\mu)x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x}$$

$$= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x)$$

Logo

$$y_1(x) = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x)$$

e

$$y_2(x) = e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x).$$

Estamos interessados nas soluções reais de

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Sabemos que, se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial então

$$y_1 + y_2 \quad e \quad y_1 - y_2$$

também são soluções. Assim

$$y_1 + y_2 = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) + e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x)$$

$$= 2 e^{\lambda x} \cos \mu x$$

e

$$y_1 - y_2 = e^{\lambda x}(\cos\mu x + i\,\mathrm{sen}\,\mu x) - e^{\lambda x}(\cos\mu x - i\,\mathrm{sen}\,\mu x)$$
$$= 2i\,e^{\lambda x}\,\mathrm{sen}\,\mu x.$$

Deste modo, desprezando as constantes, temos

$$\phi_1 = e^{\lambda x}\cos\mu x \quad e \quad \phi_2 = e^{\lambda x}\,\mathrm{sen}\,\mu x$$

duas soluções da equação diferencial.

Se $\{\phi_1, \phi_2\}$ for L.I. então

$$y(x) = e^{\lambda x}(c_1\cos\mu x + c_2\,\mathrm{sen}\,\mu x)$$

é solução geral da equação diferencial.

Temos então:

$$W[\phi_1,\phi_2] = \det\begin{bmatrix} e^{\lambda x}\cos\mu x & e^{\lambda x}\,\mathrm{sen}\,\mu x \\ e^{\lambda x}(\lambda\cos\mu x - \mu\,\mathrm{sen}\,\mu x) & e^{\lambda x}(\lambda\,\mathrm{sen}\,\mu x + \mu\cos\mu x) \end{bmatrix}$$

$$= e^{2\lambda x}\cos\mu x(\lambda\,\mathrm{sen}\,\mu x + \mu\cos\mu x)$$
$$- e^{2\lambda x}\,\mathrm{sen}\,\mu x(\lambda\cos\mu x - \mu\,\mathrm{sen}\,\mu x)$$
$$= \mu\, e^{2\lambda x}$$

Segue então que $W[\phi_1, \phi_2] \neq 0$ se e somente se $\mu \neq 0$.

Logo, desde que $\mu \neq 0$ tem-se

$$y(x) = e^{\lambda x}\left(c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x\right)$$

é a solução geral para o caso de $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

Caso (ii): Raízes Repetidas

Vamos analisar o caso $b^2 - 4ac = 0$, ou seja, $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$. Já sabemos que

$$\phi_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$$

é uma solução da equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Vamos buscar uma outra solução do tipo

$$\phi_2(x) = v(x)\, e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Assim,

$$\phi_2'(x) = v' e^{-\frac{bx}{2a}} - \frac{b}{2a} v e^{-\frac{bx}{2a}} \quad \text{e}$$

$$\phi_2''(x) = v'' e^{-\frac{bx}{2a}} - \frac{b}{2a} v' e^{-\frac{bx}{2a}} - \frac{b}{2a} v' e^{-\frac{bx}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2} v e^{-\frac{bx}{2a}}$$

$$\Rightarrow \phi_2''(x) = e^{-\frac{bx}{2a}}\left[v'' - \frac{b}{a}v' + \frac{b^2}{4a^2}v\right]$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$a e^{-\frac{bx}{2a}}\left[v'' - \frac{b}{a}v' + \frac{b^2}{4a^2}v\right] + b\left[v' - \frac{b}{2a}v\right]e^{-\frac{bx}{2a}}$$

$$+ c\, v(x)\, e^{-\frac{bx}{2a}} = 0$$

$$\Rightarrow a\left[v'' - \frac{b}{\cancel{a}}\cancel{v'} + \frac{b^2}{4a^2}v\right] + b\left[\cancel{v'} - \frac{b}{2a}v\right] + cv = 0$$

$$\Rightarrow \quad a v'' + \left[\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right]v = 0$$

Como $b^2 = 4ac$ segue que

$$\frac{4ac}{4a} - \frac{4ac}{2a} + c = 0$$

Logo, a equação se reduz a

$$a v'' = 0.$$

Assim,

$$v = K_1 x + K_2.$$

Portanto,

$$\phi_2(x) = (K_1 x + K_2)e^{-\frac{b}{2a}x},$$

ou seja,

$$\phi_2(x) = K_2 e^{-\frac{b}{2a}x} + K_1 x e^{-\frac{b}{2a}x}$$

Podemos então considerar as duas soluções

$$y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \quad e \quad y_2(x) = x\, e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Agora, verificaremos que $\{y_1, y_2\}$ é L.I.

Temos

$$w[y_1, y_2] = \det \begin{bmatrix} e^{-\frac{b}{2a}x} & x\, e^{-\frac{b}{2a}x} \\ -\frac{b}{2a} e^{-\frac{b}{2a}x} & e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{bx}{2a} e^{-\frac{b}{2a}x} \end{bmatrix}$$

$$= \left(1 - \frac{\cancel{b}x}{\cancel{2a}}\right) e^{-\frac{b}{a}x} + \frac{x\cancel{b}}{\cancel{2}a} e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$= e^{-\frac{b}{a}x} \neq 0.$$

Assim, a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2\, x\, e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Exercícios:

① Resolva.

a) $\begin{cases} 16y'' - 8y' + 145y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ b) $y'' + 4y' + 4y = 0$