

$$= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLO 4 Calcule $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$. (Veja a Figura 9.) Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx &= \iiint_E (x^2 + y^2) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 (2 - r) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right]_0^2 = \frac{16}{5}\pi \end{aligned}$$

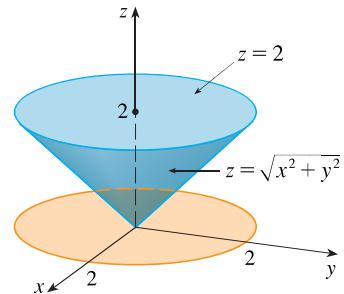


FIGURA 9

15.8 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$
 2. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ (b) $(1, 1, 1)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(-1, 1, 1)$ (b) $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$
 4. (a) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$ (b) $(4, -3, 2)$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$ 6. $r = 5$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$ 8. $2r^2 + z^2 = 1$

9–10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$
 10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11–12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leq r \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 1$
 12. $0 \leq \theta \leq \pi/2, r \leq z \leq 2$

13. Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

14. Use uma ferramenta gráfica para desenhar o sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.

15–16 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

$$15. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta \quad 16. \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r r dz d\theta dr$$

17–28 Utilize coordenadas cilíndricas.

17. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

18. Calcule $\iiint_E z dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.

19. Calcule $\iiint_E (x + y + z) dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

20. Calcule $\iiint_E x dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

21. Calcule $\iiint_E x^2 dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

2. É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

22. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
23. Determine o volume do sólido que é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
24. Determine o volume do sólido que está entre o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
25. (a) Encontre o volume da região E limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
 (b) Encontre o centroíde do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).
26. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
 (b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.
27. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ ($a > 0$), se S tem densidade constante K .
28. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância do eixo z .

29-30 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

29. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz \, dz \, dx \, dy$

30. $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

31. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho necessário para erguer uma montanha a partir do nível do mar. Considere uma montanha que tenha essencialmente o formato de um cone circular reto. Suponha que a densidade do material na vizinhança de um ponto P seja $g(P)$ e a altura seja $h(P)$.

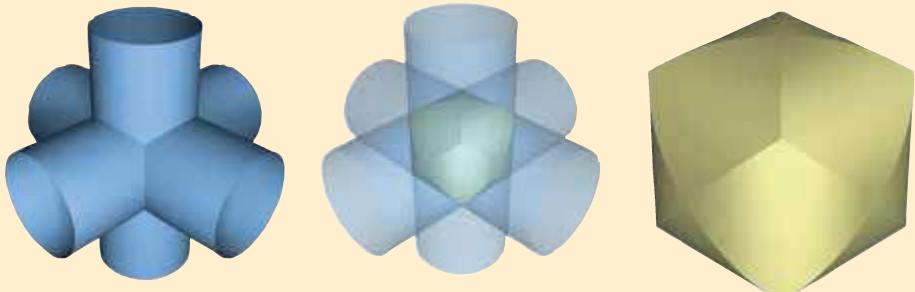
- (a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
 (b) Assuma que o monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 19 000 m, altura de 3 800 m e densidade constante de 3200 kg/m^3 . Quanto trabalho foi feito para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?



S.R. Lee Photo Traveller/Shutterstock

PROJETO DE LABORATÓRIO A INTERSECÇÃO DE TRÊS CILINDROS

A figura mostra o sólido limitado por três cilindros circulares de mesmo diâmetro que se interceptam em ângulos retos. Neste projeto, vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.



1. Esboce cuidadosamente o sólido limitado pelos três cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indique as posições dos eixos coordenados e rotule as faces com as equações dos cilindros correspondentes.
2. Determine o volume do sólido do Problema 1.
3. Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar as arestas do sólido.
4. O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilindro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.
5. Se o primeiro cilindro for $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a < 1$, escreva, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se $a > 1$?

SCA

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

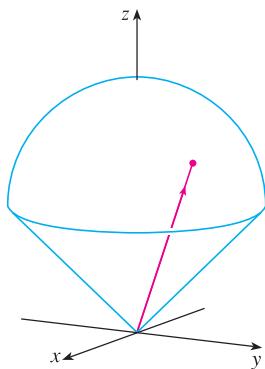
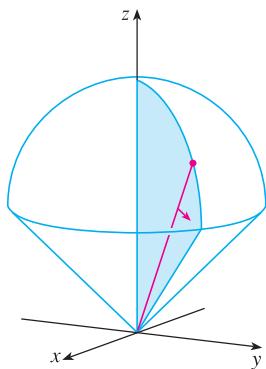
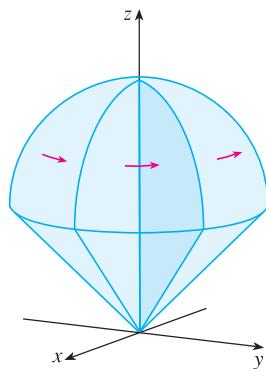


FIGURA 11



ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto
 ρ e θ são constantes.



θ varia de 0 a 2π .

15.9 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| 1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ | (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$ |
| 2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ | (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$ |

3–4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| 3. (a) $(0, -2, 0)$ | (b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$ |
| 4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ | (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$ |

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

- | | |
|-------------------|---------------|
| 5. $\phi = \pi/3$ | 6. $\rho = 3$ |
|-------------------|---------------|

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

- | |
|---|
| 7. $\rho = \sin\theta \sin\phi$ |
| 8. $\rho^2(\sin^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi) = 9$ |

9–10 Escreva a equação em coordenadas esféricas.

- | | |
|------------------------------------|-----------------------|
| 9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ | (b) $x^2 + z^2 = 9$ |
| 10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ | (b) $x + 2y + 3z = 1$ |

11–14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

- | |
|---|
| 11. $2 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \phi \leq \pi/3$, $0 \leq \theta \leq \pi$ |
| 12. $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ |
| 13. $\rho \leq 1$, $3\pi/4 \leq \phi \leq \pi$ |
| 14. $\rho \leq 2$, $\rho \leq \operatorname{cosec}\phi$ |

15. Um sólido está cima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

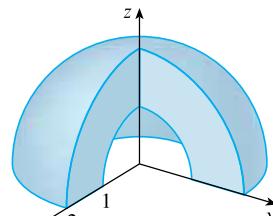
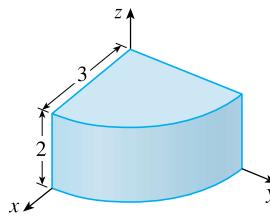
- | |
|---|
| 16. (a) Determine desigualdades que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas. |
| (b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades. |

17–18 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

- | |
|--|
| 17. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$ |
| 18. $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$ |

19–20 Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

- | | |
|-----|-----|
| 19. | 20. |
|-----|-----|



21–34 Utilize coordenadas esféricas.

- | |
|---|
| 21. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5. |
| 22. Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$. |
| 23. Calcule $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. |
| 24. Calcule $\iiint_E y^2 \, dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$. |
| 25. Calcule $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2} \, dV$, onde E é a porção da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que fica no primeiro octante. |
| 26. Calcule $\iiint_E xyz \, dV$, onde E fica entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$. |
| 27. Encontre o volume da parte da bola $\rho \leq a$ que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$. |
| 28. Encontre a distância média de um ponto em uma bola de raio a a seu centro. |

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

É necessário usar um sistema de computação algébrica

- 29.** (a) Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4 \cos \phi$.
 (b) Encontre o centroide do sólido na parte (a).
- 30.** Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 31.** (a) Encontre o centroide do sólido no Exemplo 4.
 (b) Encontre o momento de inércia em torno do eixo z para este sólido.
- 32.** Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
 (a) Determine a massa de H .
 (b) Determine o centro de massa de H .
 (c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.
- 33.** (a) Determine o centroide do hemisfério sólido homogêneo de raio a .
 (b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação a um diâmetro de sua base.
- 34.** Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância da base.

35–38 Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

- 35.** Determine o volume e o centroide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- 36.** Determine o volume da menor cunha esférica cortada de uma esfera de raio a por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.
- 37.** Calcule $\iiint_E z \, dV$, onde E está acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize a Tabela de Integrais (veja as Páginas de Referência 6–11) ou um sistema de computação algébrica para calcular a integral.
- 38.** (a) Determine o volume limitado pelo toro $\rho = \sin \phi$.
 (b) Utilize um computador para desenhar o toro.

39–41 Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned} 39. & \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \, dz \, dy \, dx \\ 40. & \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3) \, dz \, dx \, dy, \\ 41. & \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \, dz \, dx \, dy \end{aligned}$$

- 42.** Um modelo para a densidade δ da atmosfera terrestre próxima à superfície é

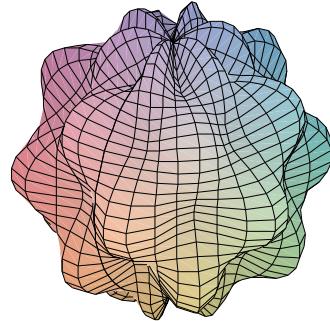
$$\delta = 619,09 - 0,000097\rho$$

onde ρ (a distância do centro da Terra) é medido em metros e δ é medido em quilogramas por metro cúbico. Se tomarmos a superfície da Terra como uma esfera com raio de 6 370 km, então, este modelo é razoável para $6370 \times 10^6 \leq \rho \leq 6375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar a massa da atmosfera entre o solo e uma altitude de 5 km.

- 43.** Use uma ferramenta gráfica para desenhar um silo que consiste em um cilindro de raio 3 e altura 10 com um hemisfério no topo.

- 44.** A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas com as coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como a seguir. Tomamos a origem como o centro da Terra e o eixo z passando pelo polo norte. O eixo x positivo passa pelo ponto onde o meridiano principal (o meridiano por Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Então a latitude de P é $\alpha = 90^\circ - \phi^\circ$ e a longitude é $\beta = 360^\circ - \theta^\circ$. Encontre a distância sobre um círculo máximo de Los Angeles (lat. $34,06^\circ$ N, long. $118,25^\circ$ W) a Montreal (lat. $45,50^\circ$ N, long. $73,60^\circ$ W). Tome o raio da Terra como 6 370 km. (Um *círculo máximo* é o círculo de intersecção de uma esfera com um plano que passe pelo centro da esfera.)

- SCA 45.** As superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5} \sin m\theta \sin n\phi$ têm sido usadas para modelar tumores. A “esfera rugosa” com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



- 46.** Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dx \, dy \, dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.)

- 47.** (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = r \cot \phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3} (1 - \cos \phi_0)$$

- (b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

- (c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2 \sin \tilde{\phi} \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2 , $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2 , $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$.

Visto que $0 \leq \phi \leq \pi$, temos $\sin \phi \geq 0$. Portanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \sin \phi| = \rho^2 \sin \phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

que é equivalente à Fórmula 15.9.3.

15.10 Exercícios

1–6 Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = 5u - v, \quad y = u + 3v$
2. $x = uv, \quad y = u/v$
3. $x = e^{-r} \sin \theta, \quad y = e^r \cos \theta$
4. $x = e^{s+t}, \quad y = e^{s-t}$
5. $x = u/v, \quad y = v/w, \quad z = w/u$
6. $x = v + w^2, \quad y = w + u^2, \quad z = u + v^2$

7–10 Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\};$
 $x = 2u + 3v, \quad y = u - v$
8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1;$
 $x = v, \quad y = u(1 + v^2)$
9. S é a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 1), (0, 1);$
 $x = u^2, \quad y = v$
10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leq 1; \quad x = au, \quad y = bv$

11–14 Uma região R no plano xy é dada. Determine equações para a transformação T que mapeia uma região retangular S no plano uv sobre R , onde os lados de S são paralelos aos eixos u e v .

11. R é limitado por $y = 2x - 1, y = 2x + 1, y = 1 - x, y = 3 - x$
12. R é o paralelogramo com vértices $(0, 0), (4, 3), (2, 4), (-2, 1)$
13. R está entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$ no primeiro quadrante
14. R é ligado pelas hipérboles $y = 1/x, y = 4/x$ e pelas retas $y = x, y = 4x$ no primeiro quadrante

15–20 Utilize a transformação dada para calcular a integral.

15. $\iint_R (x - 3y) dA$, onde R é a região triangular com vértices $(0, 0), (2, 1)$ e $(1, 2); x = 2u + v, \quad y = u + 2v$
16. $\iint_R (4x + 8y) dA$, onde R é o paralelogramo com vértices $(-1, 3), (1, -3), (3, -1)$ e $(1, 5); x = \frac{1}{4}(u - v), \quad y = \frac{1}{4}(v - 3u)$
17. $\iint_R x^2 dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36; x = 2u, \quad y = 3v$
18. $\iint_R (x^2 - xy + y^2) dA$, onde R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2; x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v, \quad y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$
19. $\iint_R xy dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e as hipérboles $xy = 1, xy = 3; x = u/v, \quad y = v$
20. $\iint_R y^2 dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1, xy = 2, xy^2 = 1, xy^2 = 2; \quad u = xy, \quad v = xy^2$. Ilustre utilizando uma cal-

culadora gráfica ou um computador para traçar R .

- 21.** (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido limitado pelo elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au, \quad y = bv, \quad z = cw$.

- (b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6\ 378$ km e $c = 6\ 356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.
(c) Se o sólido do item (a) tiver densidade constante k , encontre seu momento de inércia em relação ao eixo z .

- 22.** Um problema importante na termodinâmica é determinar o trabalho realizado por um motor de Carnot ideal. Um ciclo consiste na expansão alternada e compressão de gás em um pistão. O trabalho realizado pelo motor é igual à área da região R limitada por duas curvas isotérmicas $xy = a, xy = b$ e duas curvas adiabáticas $xy^{1.4} = c, xy^{1.4} = d$, onde $0 < a < b$ e $0 < c < d$. Calcule o trabalho realizado determinando a área de R .

- 23–27** Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

23. $\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y} dA$, onde R é o paralelogramo limitado pelas retas $x - 2y = 0, x - 2y = 4, 3x - y = 1$ e $3x - y = 8$
24. $\iint_R (x + y)e^{x^2-y^2} dA$, onde R é o retângulo limitado pelas retas $x - y = 0, x - y = 2, x + y = 0$ e $x + y = 3$

25. $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ e $(0, 1)$

26. $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2) dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

27. $\iint_R e^{x+y} dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leq 1$

28. Seja f uma função contínua em $[0, 1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x + y) dA = \int_0^1 uf(u) du$$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador