Proyecto Estadística y Optimización

Master en Ciencia de Datos

2025

1 Planteamiento

O10 pág 7 (Cartera)

Tu equipo ha decidido invertir en un portafolio con 5 activos. Cuentas con un historico de rendimientos r_t^i para $t = 1, ..., T$ y $i = 1, ..., 5$. Quieres usar este histórico para decidir como repartiras tu inversión inicial I_0 en los 5 activos. Es decir que quieres decidir sobre los valores α_t^i con $\sum \alpha_t^i = 1$ para $t = T+1, ..., T+r$, en función del rendimiento que esperas de cada activo para el proximo periodo y de una función de utilidad que describe tus preferencias.

Objetivo:
Determinar los pesos alphas que hay quedarle a cada uno de los 5 activos de la inversión total

2 Predicción de rendimientos

1. Obten un modelo prónosticos para $X_t^i|X_0^i, ..., X_t - 1^i$ para $i = 1, 2, ..., 5$. Utilizando los datos X_{train} como consideres apropiado.

2. Obten tanto el valor esperado del pronóstico $E[X_t^i|X_0^i, ..., X_t - 1^i]$ como la varianza $V[X_t^i|X_0^i, ..., X_t - 1^i]$. Estos valores esperados y varianza serán los que se usen para la optimización

3. en cada momento $t = T + 1, ..., T + r$ podras utilizar todo el pasado de la serie como $1, ..., t - 1$ de la forma que consideres adecuado para realizar tu pronostico. Lo mismo que lo de clase

4. No veras el periodo de valuación $t = T+1, ..., T+r$ hasta después de entregar el proyecto por lo que debes generar un función oneStepAhead$(X_{1:t}, M_{\theta)})$... return $\hat{X}_t + 1)$. Es decir que toma el pasado de las 5 series, los modelos de predicción de las 5 series y que regresa un el pronostico a un paso (valor esperado y varianza) de los 5 activos.

3 Utilidad Media-Varianza

Se busca maximizar el rendimiento R minimizando la varianza (el riesgo)

El rendimiento R para el periodo t de tu portafolio se puede expresar como

$$R_t = \alpha_t^T r_t \quad (1)$$

$$\sum_i \alpha_{ti} = 1 \quad (2)$$

Donde r_t es un vector aleatorio con los redimientos de los activos durante el periodo t. Podemos expresar el rendimiento esperado del portafolio y su varianza como:

$$E[R_t] = E[\alpha_t^T r_t] = \alpha_t^T E[r_t] = \alpha_t^T \mu_t \tag{3}$$
$$V[R_t] = V[\alpha_t^T r_t] = \alpha_t^T V[r_t]\alpha = \alpha_t^T \Sigma_t \alpha \tag{4}$$

Con esto podemos definir una función de utilidad (utilidad media varianza) que podemos optimizar de tal forma que compensamos nuestro deseo de obtener mejores rendimientos con el deseo de mitigar el riesgo de los peores escenarios:

$$U_{MV}(\alpha_t, \gamma; \mu_t, \Sigma_t) = \alpha_t^T \mu_t - \frac{\gamma}{2}\alpha_t^T \Sigma_t \alpha \tag{5}$$

Notar que del apartado uno podemos obtener μ_t y la diagonal de Σ_t (que sera constante en t). Para estimar $Sigma_t$ en su notalidad notar que podemos descomponer la matriz de covarianzas como:

$$\Sigma_t = DRD \tag{6}$$

donde D es una matriz diagonal con valores $D_i i = \sigma_i$ y R es una matriz de correlación que debemos elegir/estimar.

Cuando permitimos valores negativos α_{ti}, se denomina tomar una posición *corta* con respecto al activo i y significa que permitimos que el inversionista tome prestado contra el activo i pero tendrá que pagar los rendimientos obtenidos por ese activo en lugar de recibirlos.

Para calcular el rendimiento obtenido total usamos la siguiente formula

NO CONFUNDIR

$$R = I_T \prod_{t=T+1}^{T+r} (1 + R_t) \tag{7}$$

donde $I_T = 100$ es nuestra inversión inicial.

1. Obtener α_t para $t = T+1, ..., T+r$ optimizando U_{MV}. Elegir γ y estimar Σ_t tomando en cuenta que evaluara el rendimiento total en un periodo de prueba. Se permite tomar posiciones *cortas*

2. Repetir pero ahora prohibiendo posiciones cortas.

3. ~~Ahora supongamos además que cada activo se vende en unidades enteras. Esto lo aproximaremos asumiendo que~~ $\cancel{\alpha_{ti} \in \{\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}\}}$~~. No se permiten posiciones cortas.~~

4 Log-utilidad

Otra función de utilidad que se suele usar y que reconoce la naturaleza *compuesta* del rendimiento de un portafolio durante un periodo es:

$$U_{\log}(\alpha_t) = E[\log(1 + \alpha^T r_t)] \tag{8}$$

Utilizando su serie de Taylor se puede aproximar como

$$U_{\log}(\alpha_t; \mu_t, \Sigma_t) \approx \log(1 + \alpha^T \mu_t) - \frac{1}{2} \frac{\alpha_t^T \Sigma_t \alpha_t}{(1 + \alpha_t^T \mu_t)^2} \tag{9}$$

1. Obtener α_t para $t = T+1, ..., T+r$ optimizando U_{log}. Se permite tomar posiciones *cortas* y no enteras.

5 Evaluación

La evaluación se hará en función del despempeño en 9 metricas durante el periodo test:

1. promedio simple del MAPE del pronostico (valor esperado) de los 5 activos.
2. Desempeño promedio durante el periodo de evaluación en la utilidad media-varianza. Con inversiones α_t^i positivas o negativas.
3. Rendimiento obtenido durante el periodo de evaluación optimizando utilidad media-varianza. Con inversiones α_t^i positivas o negativas.
4. Desempeño promedio durante el periodo de evaluación en la utilidad media-varianza. Con inversiones estrictamente α_t^i positivas.
5. Rendimiento obtenido durante el periodo de evaluación en la utilidad media-varianza. Con inversiones estrictamente α_t^i positivas.
6. Desempeño promedio durante el periodo de evaluación en la utilidad log-rendimiento. Con inversiones estrictamente α_t^i positivas o negativas.
7. Rendimiento obtenido durante el periodo de evaluación en la utilidad log-rendimiento. Con inversiones estrictamente α_t^i positivas o negativas.
8. Desempeño promedio durante el periodo de evaluación en la utilidad media-varianza. Con inversiones α_t^i y estrictamente positivas y enteras.
9. Rendimiento obtendido durante el periodo de evaluación en la utilidad media-varianza. Con inversiones α_t^i y estrictamente positivas y enteras.

Se les daran funciones en R para que puedan simular la evaluación de estas 9 metricas en un periodo de validación que elijan del historico de entrenamiento.