

Grupo ARCOS

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

Tema 2: Representación de la información

Estructura de Computadores

Grado en Ingeniería Informática
Grado en Matemática aplicada y Computación
Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas



Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas

1. Caracteres
2. Cadenas de caracteres

2. Numéricas

1. Naturales y enteras
2. Coma fija
3. Coma flotante (estándar IEEE 754)

Contenidos

1. Introducción

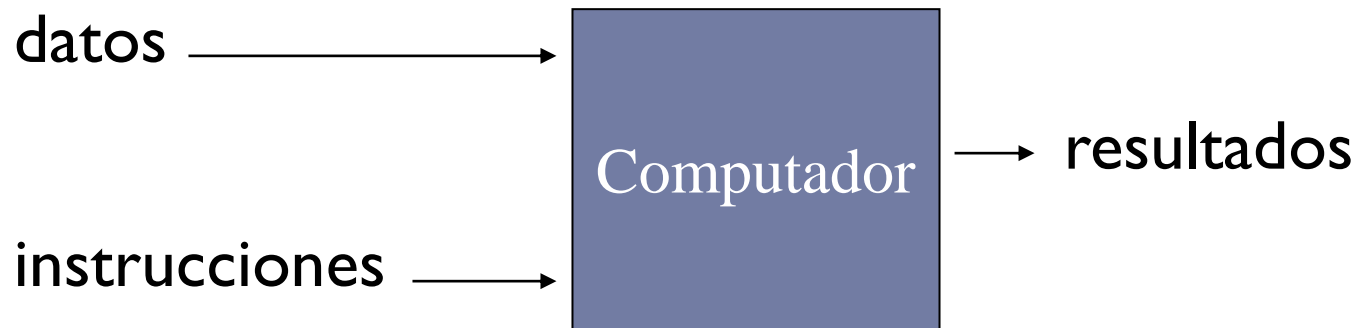
1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas
 1. Caracteres
 2. Cadenas de caracteres
2. Numéricas
 1. Naturales y enteras
 2. Coma fija
 3. Coma flotante (estándar IEEE 754)

Introducción: computador

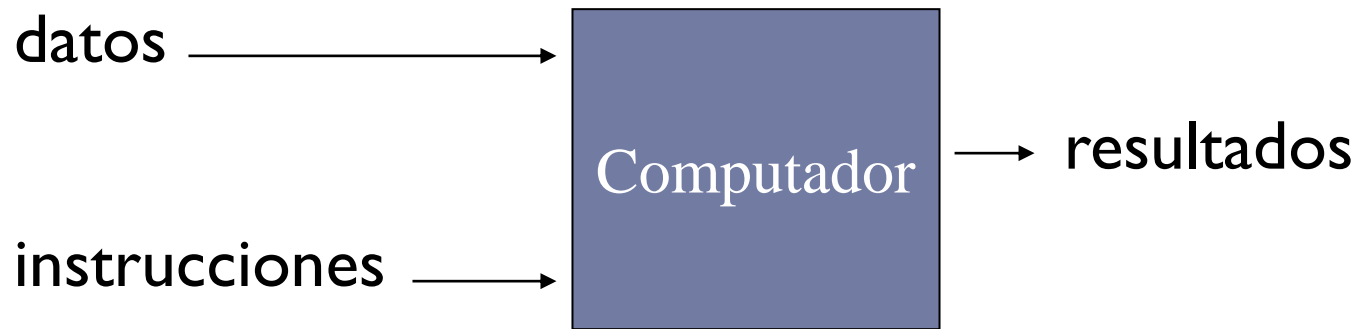
- ▶ Un computador es una máquina destinada a procesar datos.



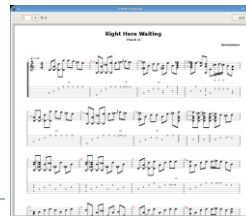
- ▶ Se aplican unas instrucciones y se obtiene unos resultados

Introducción: computador

- Un computador es una máquina destinada a procesar datos.

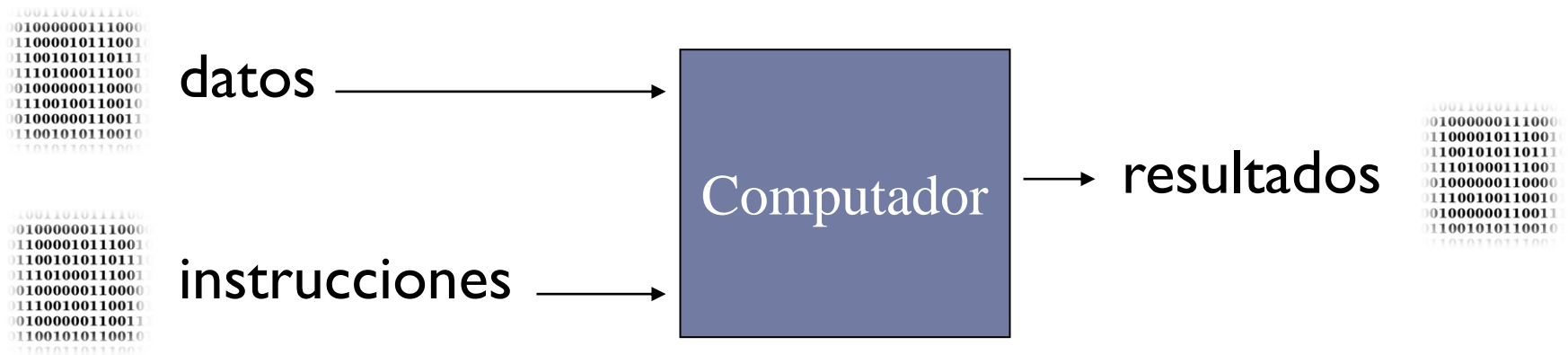


- Se aplican unas instrucciones y se obtiene unos resultados
- Los datos/información pueden ser de **distintos tipo**.



Introducción: computador

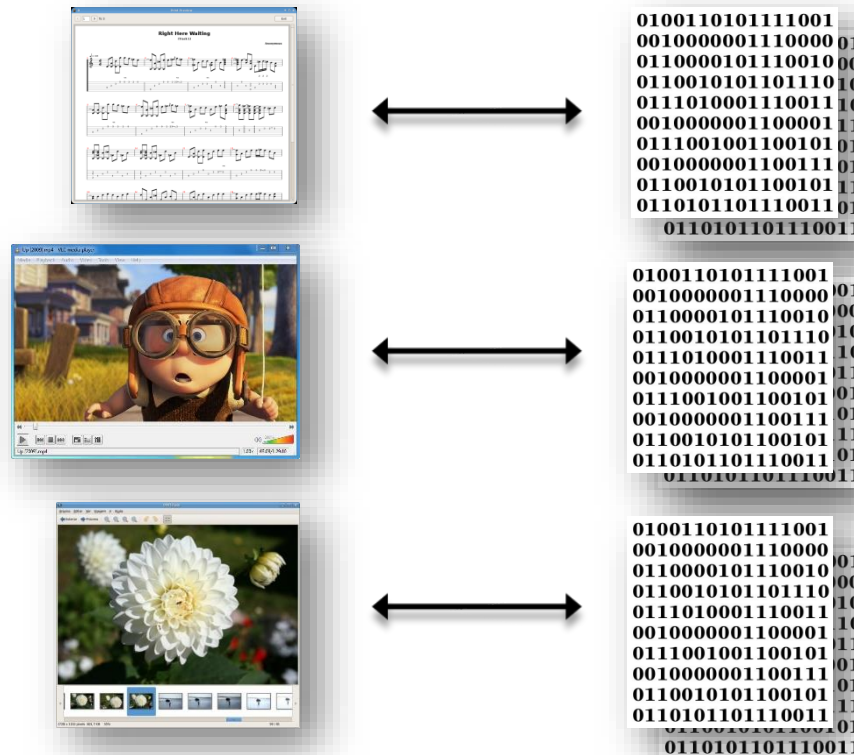
- Un computador es una máquina destinada a procesar datos.



- Se aplican unas instrucciones y se obtiene unos resultados
- Los datos/información pueden ser de **distintos tipo**
- Un computador solo usa una representación: **binario**.

Introducción: representación de la información

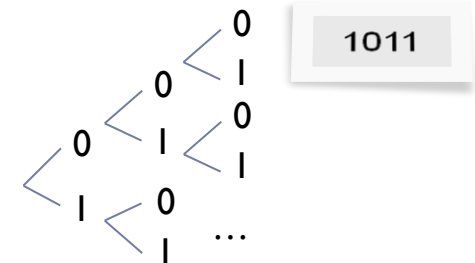
- El uso de una **representación** permite transformar los distintos tipos de información en binario (y viceversa)



Introducción: características de la información

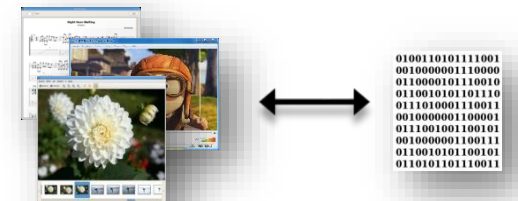
- ▶ Un **computador maneja un conjunto finito de valores**

- ▶ Tipo binario (dos estados)
- ▶ Finito (representación acotada)
 - ▶ N° de bits de palabra del computador o bit (1), nibble (4), byte (8), half w., double w., ...
 - ▶ Con **n** bits se pueden codificar **2ⁿ** valores distintos



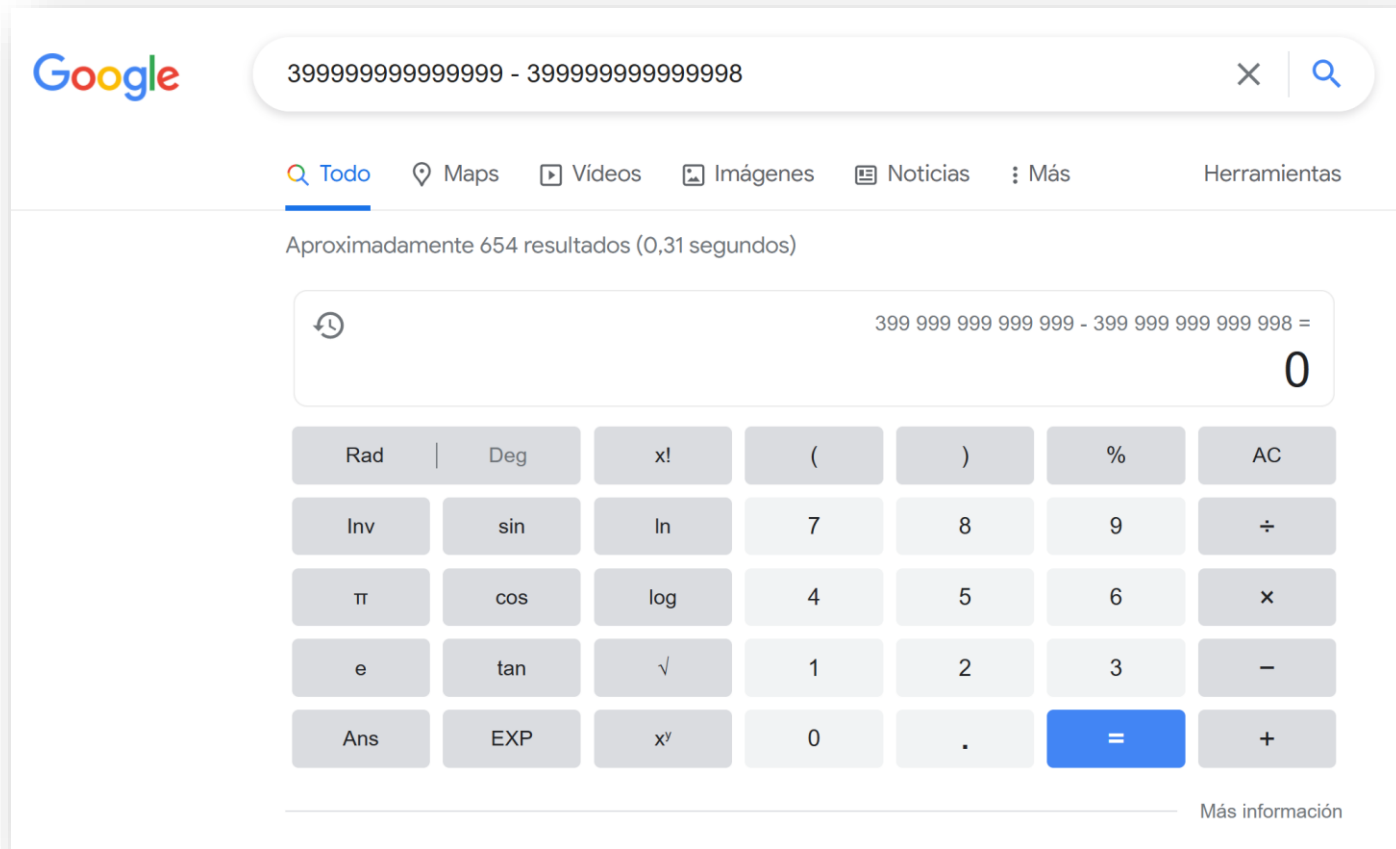
- ▶ Hay algunos tipos de información que son **infinitos**

- ▶ Imposible representar todos los valores de los números naturales, reales, etc.



- ▶ La representación elegida tiene **limitaciones**

Ejemplo 1: la calculadora de Google con 15 dígitos...



<http://www.20minutos.es/noticia/415383/0/google/restar/error/>

Ejemplo 2: la profundidad de color...

1 bit	2 colores
4 bits	16 colores
8 bits	256 colores



<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/imagen/conceptos.html>

Ejemplo 2: la profundidad de color...

1 bit	2 colores
4 bits	16 colores
8 bits	256 colores



<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/imagen/conceptos.html>

Ejemplo 2: la profundidad de color...

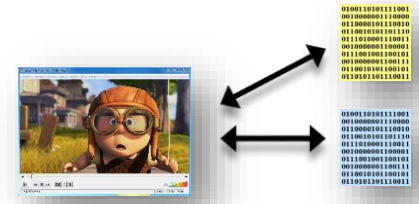
1 bit	2 colores
4 bits	16 colores
8 bits	256 colores



<http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/imagen/conceptos.html>

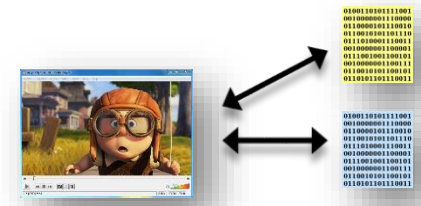
Necesitaremos...

- Conocer posibles representaciones:



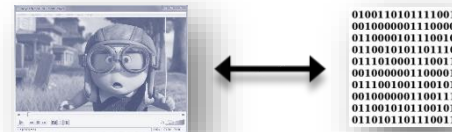
Necesitaremos...

- Conocer posibles representaciones:



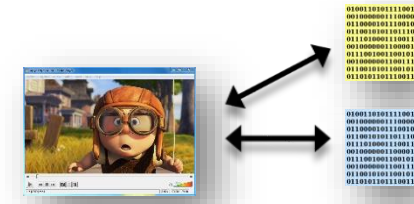
- Conocer las características de las mismas:

- Limitaciones



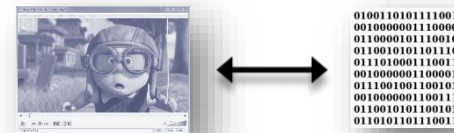
Necesitaremos...

- Conocer **posibles representaciones**:

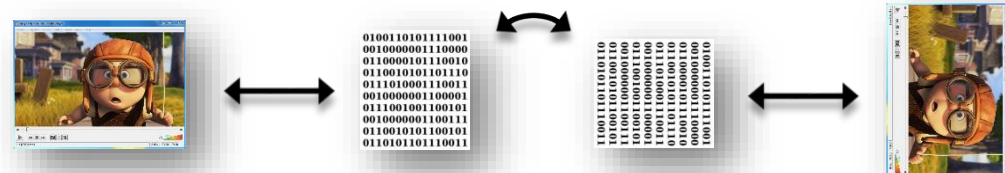


- Conocer las **características** de las mismas:

- Limitaciones



- Conocer **cómo operar** con la representación:



Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. **Sistemas posicionales**

2. Representaciones

1. Alfanuméricas
 1. Caracteres
 2. Cadenas de caracteres
2. Numéricas
 1. Naturales y enteras
 2. Coma fija
 3. Coma flotante (estándar IEEE 754)

Sistemas de representación posicionales

- ▶ Un número se define por una **cadena de dígitos**, estando **afectado** cada uno de ellos por un **factor de escala** que **depende** de la **posición** que ocupa en la cadena.

- ▶ Dada una base de numeración b , un número X se define como la cadena de dígitos:
$$X = (\dots x_2 x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \dots)_b \quad \text{Con } 0 \leq x_i < b$$
con una lista de pesos asociados:
$$P = (\dots b^2 b^1 b^0 \quad b^{-1} b^{-2} \dots)_b$$

- ▶ Su valor es:

$$V(X) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b^i \cdot x_i = \dots \underbrace{b^2 \cdot x_2}_{\text{peso}} + \underbrace{b^1 \cdot x_1}_{\text{peso}} + \underbrace{b^0 \cdot x_0}_{\text{peso}} + \underbrace{b^{-1} \cdot x_{-1}}_{\text{peso}} + \underbrace{b^{-2} \cdot x_{-2}}_{\text{peso}} \dots$$

Sistemas de representación posicionales

► Decimal

$$X = \quad 9 \quad 7 \quad 3 \quad 1 \\ \quad \dots 10^3 10^2 10^1 10^0$$

► Binario

$$X = \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \quad \dots 2^3 2^2 2^1 2^0$$

► Hexadecimal

$$X = \quad 1 \quad F \quad A \quad 8 \\ \quad \dots 16^3 16^2 16^1 16^0$$

Sistemas de representación posicionales

► Decimal

$$X = \quad 9 \quad 7 \quad 3 \quad 1 \\ \dots 10^3 \ 10^2 \ 10^1 \ 10^0$$

► Binario

$$X = \quad 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \dots 2^3 \ 2^2 \ 2^1 \ 2^0$$

► Hexadecimal

$$X = \quad 1 \quad F \quad A \quad 8 \\ \dots 16^3 \ 16^2 \ 16^1 \ 16^0$$


Paso de binario a hexadecimal:

- Agrupar de 4 en 4 bits, de derecha a izquierda
- Cada 4 bits es el valor del dígito hexadecimal

Ej.: $\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & A & & & \\ 0x & & & & & & 5 & \end{array}$

Sistemas de representación posicionales

► Decimal

$$X = \begin{array}{cccc} 9 & 7 & 3 & 1 \\ \dots & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \end{array}$$


► Binario

$$X = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

► Hexadecimal

$$X = \begin{array}{cccc} 1 & F & A & 8 \\ \dots & 16^3 & 16^2 & 16^1 & 16^0 \end{array}$$

Ejercicio

- Representar 342 en binario:

256	128	64	32	16	8	4	2	1
?	?	?	?	?	?	?	?	?

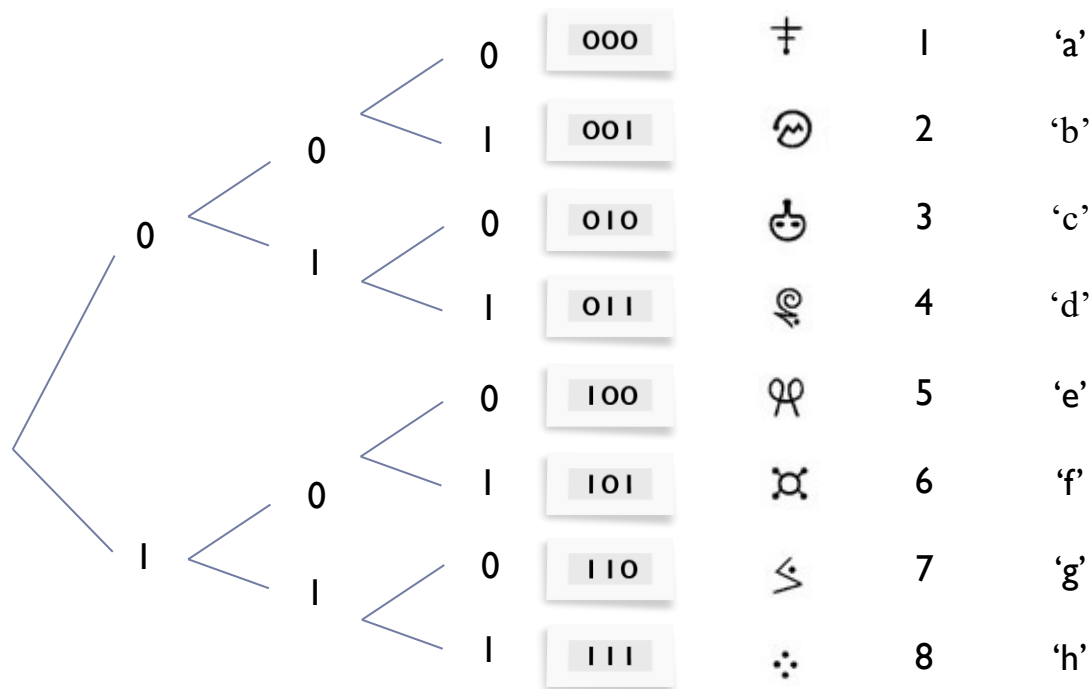
Ejercicio (solución)

- Representar 342 en binario:

256	128	64	32	16	8	4	2	1
	0		0		0			0
342-256=86	86-64=22	22-16=6	6-4=2	2-2=0				

Sistemas de representación posicionales


- ▶ Con **3 dígitos binarios**, se pueden representar **8 símbolos**:



Sistemas de representación posicionales

- ▶ ¿Cuántos valores se pueden representar con n bits?
- ▶ ¿Cuántos bits se necesitan para representar m 'valores'?
- ▶ Con n bits,
si el valor mínimo representable corresponde al número 0,
¿Cuál es el máximo valor numérico representable?

Sistemas de representación posicionales

- ▶ ¿Cuántos valores se pueden representar con n bits?
 - ▶ 2^n
 - 
 - ▶ Ej.: con 4 bits se pueden representar 16 valores
- ▶ ¿Cuántos bits se necesitan para representar m 'valores'?
 - ▶ $\lceil \text{Log}_2(n) \rceil$ ($\text{Log}_2(n)$ por exceso)
 - ▶ Ej.: para representar 35 valores se necesitan 6 bits
- ▶ Con n bits,
si el valor mínimo representable corresponde al número 0,
¿Cuál es el máximo valor numérico representable?
 - ▶ $2^n - 1$

Ejercicio

- Calcular el valor de (23 unos):

A horizontal number line with 20 equally spaced vertical tick marks. The rightmost tick mark is labeled with the number 2.

Operaciones con representación binaria

► Sumar en binario:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 10100 \\ + 11110 \\ \hline 110010 \end{array}$$

Operaciones con representación binaria

► Sumar en binario:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 10100 \\ + 11110 \\ \hline 110010 \end{array}$$

► Restar en binario:

$$\begin{array}{r} 1 \rightarrow 1 \rightarrow \\ 01100 \\ - 01011 \\ \hline 00001 \end{array}$$

Ejercicio

2 minutos máx.



Tienes una botella de 5 litros y otra de 3 litros.
¿Cómo conseguir justo 4 litros de agua?



Ejercicio (solución)

2 minutos máx.



Tienes una botella de 5 litros y otra de 3 litros. ¿Cómo conseguir justo 4 litros de agua?



- ▶ Llene la jarra de 5 litros
- ▶ Vacíalo en la jarra de 3 litros
 - ▶ Quedan 2 en la jarra de 5 litros (-3 a 5).
- ▶ Tira lo que hay en la jarra de 3 litros
- ▶ Transfiere los 2 de la jarra de 5 litros a la de 3 litros
 - ▶ Queda 1 en la jarra de 3 litros (-1 a 3).
- ▶ Rellena la jarra de 5 litros
- ▶ Llena la jarra de 3 litros hasta arriba, lo que queda en la jarra de 5 litros son 4 litros

Ejercicio

2 minutos máx.



- Utilizando los números 112 y -71 en base decimal, realiza la suma en complemento a 10 .

Ejercicio (solución)

2 minutos máx.



- ▶ Complemento a 10 de 112 es: 112
- ▶ Complemento a 10 de -71 es:

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -0071 \\ \hline 929 \end{array}$$

- ▶ Sumando ambos:

$$\begin{array}{r} 112 \\ 929 \\ \hline \text{X } 041 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ -071 \\ \hline 041 \end{array}$$

Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. **Representaciones**

1. **Alfanuméricas**

1. **Caracteres**
2. **Cadenas de caracteres**

2. Numéricas

1. Naturales y enteras
2. Coma fija
3. Coma flotante (estándar IEEE 754)

Representación alfanumérica

- ▶ Cada carácter se codifica con un byte.
- ▶ Para n bits $\Rightarrow 2^n$ caracteres representables:

# bits	# caracteres	Incluye...	Ejemplo
6	64	<ul style="list-style-type: none">• 26 letras: a...z• 10 números: 0...9• Puntuación: .,;:...• Especiales: + - [...	BCDIC
7	128	<ul style="list-style-type: none">• añade mayúsculas y caracteres de control	ASCII
8	256	<ul style="list-style-type: none">• añade letras acentuadas, ñ, caracteres semigráficos	EBCDIC ASCII extendido
16	34.168	<ul style="list-style-type: none">• Añade distintos idiomas (chino, árabe,...)	UNICODE

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♪	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	▲	DLE	048	0	080	P	112	p
017	▼	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019	!!	DC3	051	3	083	S	115	s
020	π	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	→	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☐

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1982, Loading Edge Computer Products, Inc.

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

caracteres de control

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♪	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	▲	DLE	048	0	080	P	112	p
017	▼	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019	!!	DC3	051	3	083	S	115	s
020	π	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	→	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☐

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1992, Loading Edge Computer Products, Inc.

< 32

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

distancia mayúsculas-minúsculas

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	<u>065</u>	<u>A</u>	<u>097</u>	<u>a</u>
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♪	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	▲	DLE	048	0	080	P	112	p
017	▼	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019	!!	DC3	051	3	083	S	115	s
020	π	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	→	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☐

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1992, Loading Edge Computer Products, Inc.

$$97-65=32$$

Ejemplo: tabla ASCII (7 bits)

conversión de un número a carácter

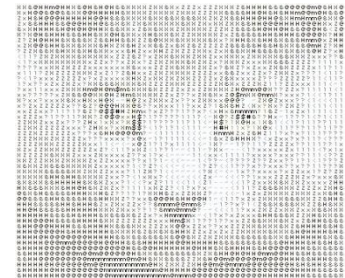
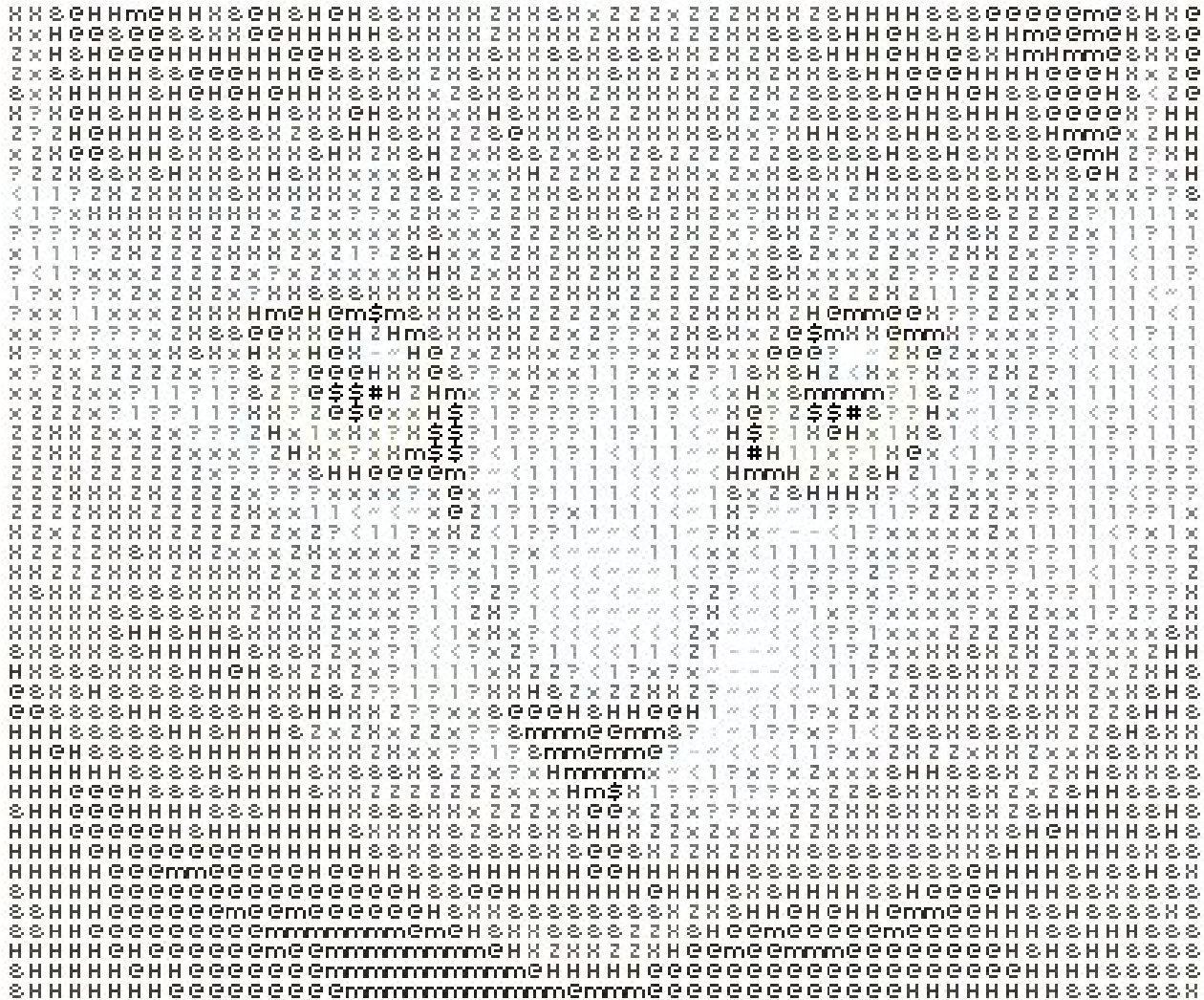
ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☹	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	\$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	■	BS	040	(072	H	104	h
009	(tab)	HT	041)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♪	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	▲	DLE	048	0	080	P	112	p
017	▼	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r
019	!!	DC3	051	3	083	S	115	s
020	π	DC4	052	4	084	T	116	t
021	\$	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↕	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↕	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↕	EM	057	9	089	Y	121	y
026	→	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	
029	(cursor left)	GS	061	=	093]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	☐

Copyright 1998, JimPrice.Com Copyright 1982, Loading Edge Computer Products, Inc.

6+48=54

Curiosidad:

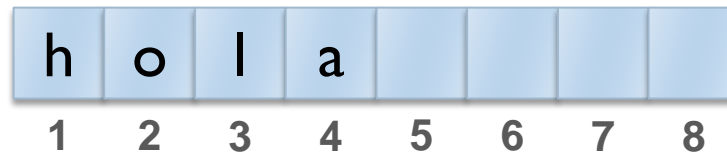
Visualización ‘gráfica’ con caracteres



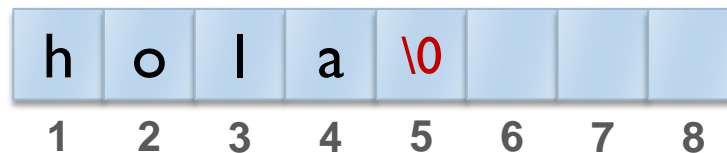
Cadenas de caracteres

1000	00110011
1001	01101100
...	
1008	10100011

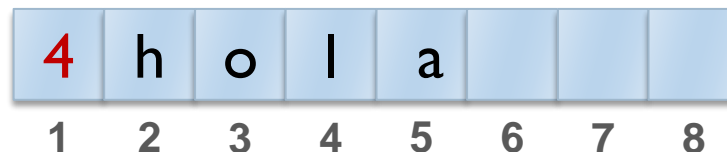
1. Cadenas de longitud fija:



2. Cadenas de longitud variable con separador:



3. Cadenas de longitud variable con longitud en cabecera:



Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas

1. Caracteres
2. Cadenas de caracteres

2. **Numéricas**

1. **Naturales y enteras**
2. Coma fija
3. Coma flotante (estándar IEEE 754)

Representación numérica

- ▶ Clasificación de números reales:
 - ▶ Naturales: 0, 1, 2, 3, ...
 - ▶ Enteros: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
 - ▶ Racionales: fracciones ($5/2 = 2,5$)
 - ▶ Irracionales: $2^{1/2}$, π , e, ...
- ▶ Conjuntos infinitos y espacio de representación finito:
 - ▶ Imposible representar todos
- ▶ Características de la representación usada:
 - ▶ Elemento representado:
Natural, entero, ...
 - ▶ Rango de representación:
Intervalo entre el menor y mayor n° representable
 - ▶ Resolución de representación:
Diferencia entre un n° representable y el siguiente.
Representa el máximo error cometido. Puede ser cte. o variable.

Sistemas de representación binarios más usados

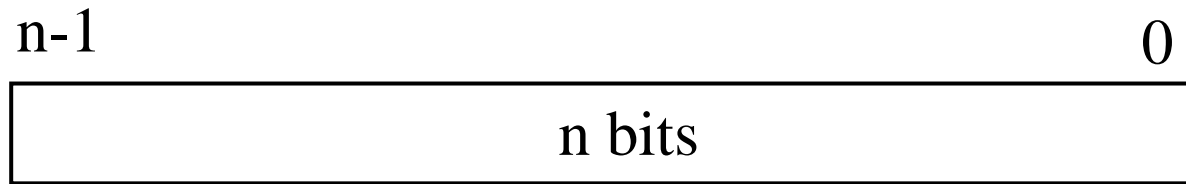
- A. Coma fija sin signo o binario puro naturales

- B. Signo magnitud
- C. Complemento a uno (Ca 1)
- D. Complemento a dos (Ca 2)
- E. Exceso $2^{n-1}-1$

- F. Coma flotante: Estándar IEEE 754 reales

Coma fija sin signo o binario puro [naturales]

- Sistema posicional con base 2 y sin parte fraccionaria.



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i$$

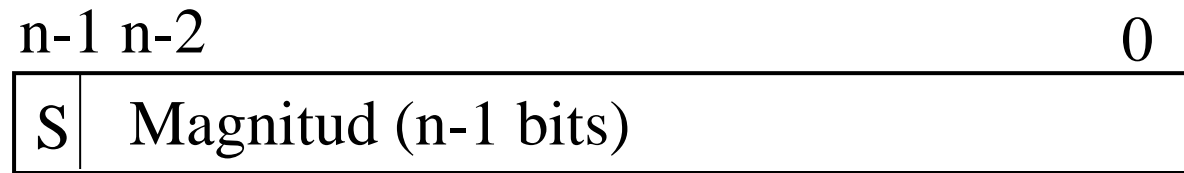
- Rango de representación: $[0, 2^n - 1]$
- Resolución: 1 unidad

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro
+7	111
+6	110
+5	101
+4	100
+3	011
+2	010
+1	001
+0	000
-0	N.D.
-1	N.D.
-2	N.D.
-3	N.D.
-4	N.D.
-5	N.D.
-6	N.D.
-7	N.D.

Coma fija con signo o signo magnitud [enteros]

- ▶ Se reserva un bit (S) para el signo ($0 \Rightarrow +$; $1 \Rightarrow -$)



$$\begin{array}{ll}
 \text{Si } x_{n-1} = 0 & V(X) = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i \\
 \text{Si } x_{n-1} = 1 & V(X) = -\sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i
 \end{array}
 \quad \left| \Rightarrow \right.
 \quad
 V(X) = (1 - 2 \cdot x_{n-1}) \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i$$

- Rango de representación: $[-2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1]$
- Resolución: 1 unidad
- Ambigüedad del 0

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud
+7	111	N.D.
+6	110	N.D.
+5	101	N.D.
+4	100	N.D.
+3	011	011
+2	010	010
+1	001	001
+0	000	000
-0	N.D.	100
-1	N.D.	101
-2	N.D.	110
-3	N.D.	111
-4	N.D.	N.D.
-5	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.

Ejemplo

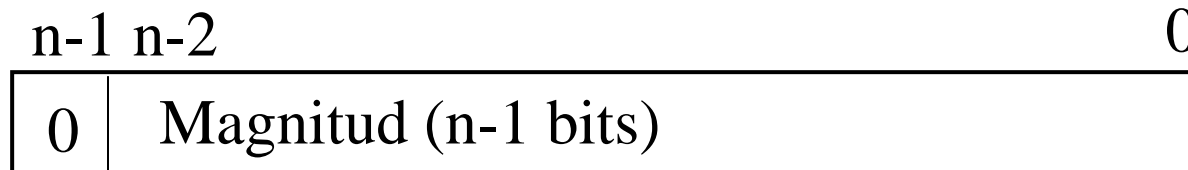
- ▶ ¿Se puede representar 745_{10} en signo magnitude con 10 bits?

Ejemplo (solución)

- ▶ ¿Se puede representar 745_{10} en signo magnitude con 10 bits?
- ▶ Con 10 bits el rango en signo magnitude es:
 $[-2^9+1, \dots, -0, +0, \dots, 2^9-1] \Rightarrow [-511, 511]$
y por tanto, **no podemos representar 745**

Complemento a uno (a la base menos uno) [enteros] (1 / 3)

- **Número positivo:**
se representa en binario puro con $n-1$ bits



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i$$

- Rango de representación (+): $[0, 2^{n-1} - 1]$
- Resolución: 1 unidad

Complemento a uno (a la base menos uno) [enteros] (2/3)

► **Número negativo:**

- Se complementa a la base menos uno
- El número $X < 0$ se representa como $2^n - X - 1$ con n bits



$$V(X) = -2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot y_i + 1$$

- Rango de representación (-): $[-(2^{n-1}-1), -0]$
- Resolución: **1 unidad**

Complemento a uno (a la base menos uno) [enteros] (3/3)

Truco: $C a 1 (X) = X$

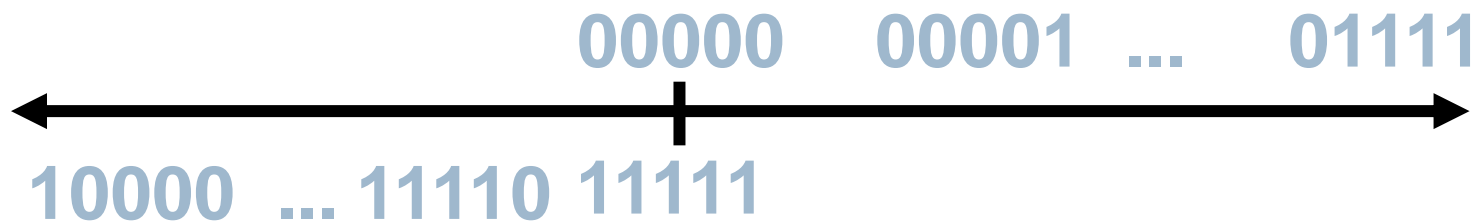
$C a 1 (-X) = \text{cambiar los 1 por 0 y los 0 por 1}$

- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow$ el valor $+3_{10} = 0011_2$
- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow$ el valor $-3_{10} = 1100_2$
 - ▶ $\Rightarrow 1$ (bit signo y también parte de magnitud)
 - ▶ $C a 1(3) \Rightarrow 2^4 - 0011_2 - 1 = 2^4 - 3 - 1 = 12 \Rightarrow 1100_2$

- Rango de representación: $[-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1]$
- Resolución: 1 unidad
- El 0 tiene doble representación (+0 y -0)
- Rango simétrico

Complemento a uno

- ▶ Los números positivos tienen un 0 en el bit más significativo



- ▶ Los números negativos tienen un 1 en el bit más significativo

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud	Complemento a uno
+7	111	N.D.	N.D.
+6	110	N.D.	N.D.
+5	101	N.D.	N.D.
+4	100	N.D.	N.D.
+3	011	011	011
+2	010	010	010
+1	001	001	001
+0	000	000	000
-0	N.D.	100	111
-1	N.D.	101	110
-2	N.D.	110	101
-3	N.D.	111	100
-4	N.D.	N.D.	N.D.
-5	N.D.	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.	N.D.

Ejemplo

Para $n = 5$ bits y usando complemento a uno:

- ▶ ¿Cómo se representa $X = 5$?
- ▶ ¿Cómo se representa $X = -5$?
- ▶ ¿Cuál es el valor de 00111 en complemento a 1?
- ▶ ¿Cuál es el valor de 11000 en complemento a 1?

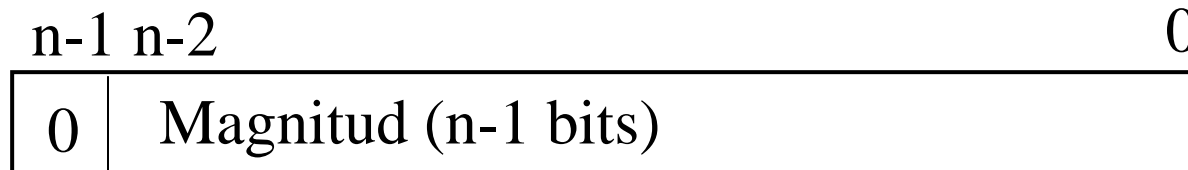
Ejemplo (solución)

Para $n = 5$ bits y usando complemento a uno:

- ▶ ¿Cómo se representa $X = 5$?
 - ▶ Como es positivo, en binario puro
 - ▶ 00101
- ▶ ¿Cómo se representa $X = -5$?
 - ▶ Como es negativo, se complementa el valor 5 (00101)
 - ▶ 11010
- ▶ ¿Cuál es el valor de 00111 en complemento a 1?
 - ▶ Como es positivo, su valor es directamente 7
- ▶ ¿Cuál es el valor de 11000 en complemento a 1?
 - ▶ Como es negativo, se complementa y se obtiene 00111 (7)
 - ▶ El valor es -7

Complemento a dos (complemento a la base) [enteros] (1 / 3)

- **Número positivo:**
se representa en binario puro con $n-1$ bits



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i$$

- Rango de representación (+): $[0, 2^{n-1} - 1]$
- Resolución: 1 unidad

Complemento a dos (complemento a la base) [enteros] (2/3)

► **Número negativo:**

- Se complementa a la base
- El número $X < 0$ se representa como $2^n - X$ con n bits



$$V(X) = -2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot y_i$$

- Rango de representación (-): $[-2^{n-1}, -1]$
- Resolución: **1 unidad**

Complemento a dos (complemento a la base) [enteros] (3/3)

Truco: $C a 2 (X) = X$

$$C a 2 (-X) = C a 1 (X) + 1$$

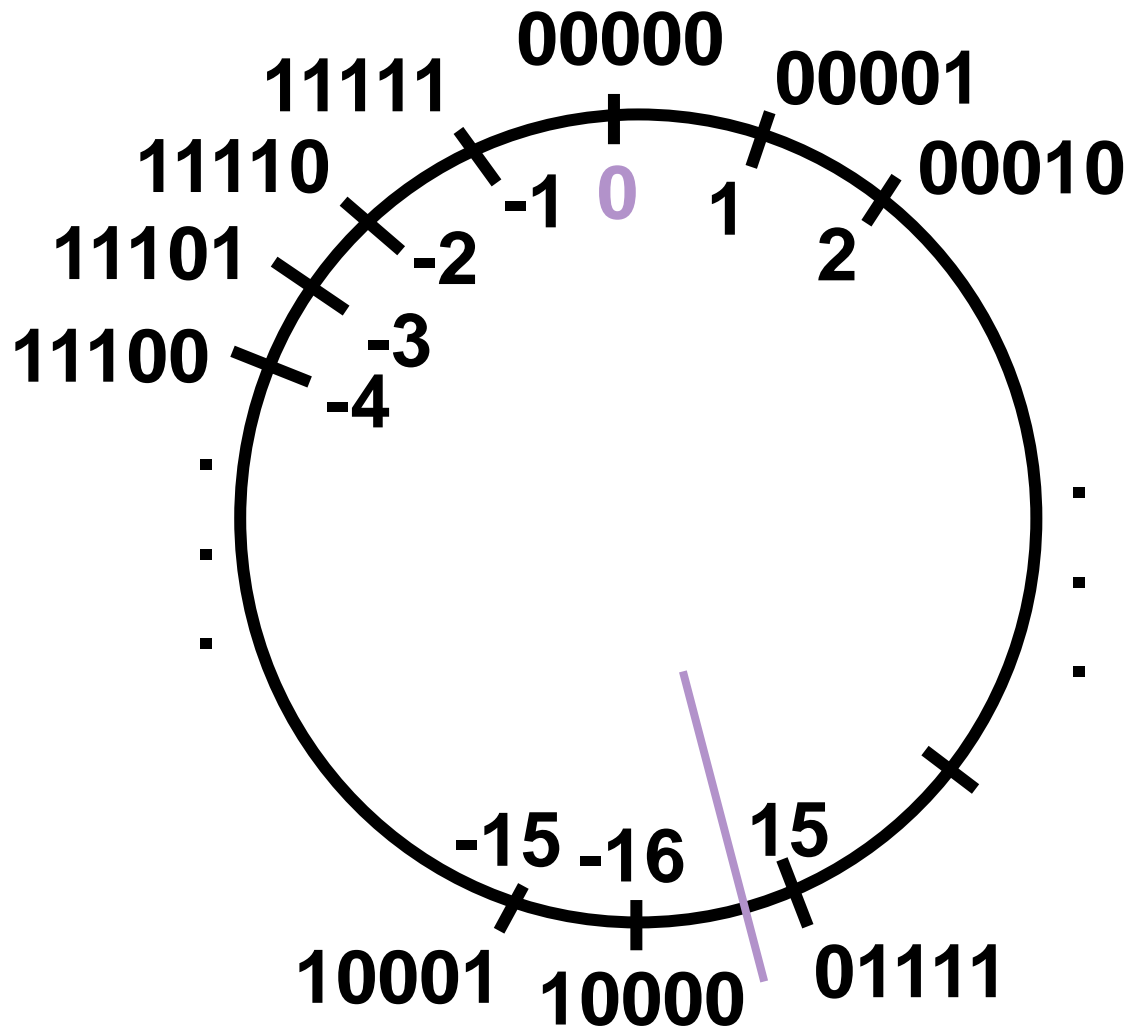
- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow +3 = 0011_2$
- ▶ Ejemplo: Para $n=4 \Rightarrow -3 = 1101_2$
 - ▶ $1 \Rightarrow -$ (bit signo y también parte de magnitud)
 - ▶ $C a 2 (3) = C a 2 (0011_2) = 2^4 - 3 = 13 \Rightarrow 1101_2$

- Rango de representación: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- Resolución: 1 unidad
- El 0 tiene una única representación (No $\exists -0$)
- Rango asimétrico

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud	Complemento a uno	Complemento a dos
+7	111	N.D.	N.D.	N.D.
+6	110	N.D.	N.D.	N.D.
+5	101	N.D.	N.D.	N.D.
+4	100	N.D.	N.D.	N.D.
+3	011	011	011	011
+2	010	010	010	010
+1	001	001	001	001
+0	000	000	000	000
-0	N.D.	100	111	N.D.
-1	N.D.	101	110	111
-2	N.D.	110	101	110
-3	N.D.	111	100	101
-4	N.D.	N.D.	N.D.	100
-5	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.

Complemento a dos



2^{N-1}	no negativos
2^{N-1}	negativos
	cero

Complemento a dos para 32 bits

$$0000 \dots 0000 \text{ dos} = 0_{(10)}$$

$$0000 \dots 0000 \text{ dos} = 1_{(10)}$$

$$0000 \dots 0000 \text{ dos} = 2_{(10)}$$

...

$$0111 \dots 1111 \text{ dos} = 2,147,483,645_{(10)}$$

$$0111 \dots 1111 \text{ dos} = 2,147,483,646_{(10)}$$

$$0111 \dots 1111 \text{ dos} = 2,147,483,647_{(10)}$$

$$1000 \dots 0000 \text{ dos} = -2,147,483,648_{(10)}$$

$$1000 \dots 0000 \text{ dos} = -2,147,483,647_{(10)}$$

$$1000 \dots 0000 \text{ dos} = -2,147,483,646_{(10)}$$

...

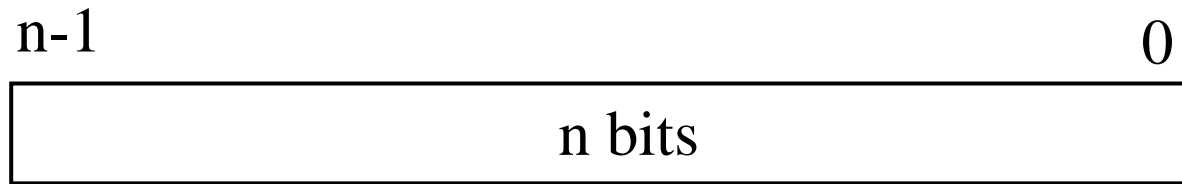
$$1111 \dots 1111 \text{ dos} = -3_{(10)}$$

$$1111 \dots 1111 \text{ dos} = -2_{(10)}$$

$$1111 \dots 1111 \text{ dos} = -1_{(10)}$$

Representación en Exceso $2^{n-1}-1$ [enteros]

- ▶ El valor X con n bits se representa como $X + 2^{n-1}-1$
- ▶ Se denomina sesgo a la cantidad $2^{n-1}-1$



$$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i - (2^{n-1} - 1)$$

- Rango de representación: $[-(2^{n-1}-1), 2^{n-1}-1]$
- Resolución: 1 unidad
- No existe ambigüedad con el 0

Ejemplo comparativo (3 bits)

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud	Complemento a uno	Complemento a dos	Exceso 3
+7	111	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+6	110	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+5	101	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+4	100	N.D.	N.D.	N.D.	111
+3	011	011	011	011	110
+2	010	010	010	010	101
+1	001	001	001	001	100
+0	000	000	000	000	011
-0	N.D.	100	111	N.D.	N.D.
-1	N.D.	101	110	111	010
-2	N.D.	110	101	110	001
-3	N.D.	111	100	101	000
-4	N.D.	N.D.	N.D.	100	N.D.
-5	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.

Representaciones

resumen

Nombre	Binario puro	Signo-magnitud	Ca1	Ca2	Exceso $2^{n-1}-1$
Representa	Natural	Entero	Entero	Entero	Entero
Signo	Todos los bits son magnitud, no hay signo	MSB es el signo ($0 \Rightarrow +$ y $1 \Rightarrow -$)	MSB es signo y magnitud ($0 \Rightarrow +$ y $1 \Rightarrow -$)	MSB es signo y magnitud ($0 \Rightarrow +$ y $1 \Rightarrow -$)	MSB es signo y magnitud ($0 \Rightarrow -$ o 0 y $1 \Rightarrow +$ no 0)
Rango	$[0, 2^n - 1]$	$[-2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1]$	$[-2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1]$	$[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$	$[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1}]$
Resolución	1 unidad	1 unidad	1 unidad	1 unidad	1 unidad
Inconveniente	No negativos	+0 y -0	+0 y -0	Rango asimétrico	Rango asimétrico
Ventaja		Rango simétrico	Rango simétrico	(No \exists -0)	(No \exists -0)
Truco		Quitar primer bit y con el resto es igual que binario	+ = binario - : cambiar 1 por 0 y 0 por 1	+ = binario - : Ca1 + 1	Restar siempre el sesgo ($2^{n-1} - 1$)
Valor		$V(X) = (1 - 2 \cdot x_{n-1}) \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i$	$\begin{aligned} +: V(X) &= \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i \\ -: V(X) &= -2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i + 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} +: V(X) &= \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \cdot x_i \\ -: V(X) &= -2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i \end{aligned}$	$V(X) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot x_i - (2^{n-1} - 1)$

Ejemplo comparativo (3 bits)

resumen

Decimal	Binario Puro	Signo magnitud	Complemento a uno	Complemento a dos	Exceso 3
+7	111	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+6	110	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+5	101	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
+4	100	N.D.	N.D.	N.D.	111
+3	011	011	011	011	110
+2	010	010	010	010	101
+1	001	001	001	001	100
+0	000	000	000	000	011
-0	N.D.	100	111	N.D.	N.D.
-1	N.D.	101	110	111	010
-2	N.D.	110	101	110	001
-3	N.D.	111	100	101	000
-4	N.D.	N.D.	N.D.	100	N.D.
-5	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-6	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
-7	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.

Ejercicio

Indique la representación de los siguientes números, razonando brevemente su respuesta:

1. **-32** en complemento a uno con **6 bits**
2. **-32** en complemento a dos con **6 bits**
3. **-10** en signo magnitud con **5 bits**
4. **+14** en complemento a dos con **5 bits**

Ejercicio (solución)

1. Con 6 bits **no es representable** en CI:
 $[-2^{6-1}+1, \dots, -0, +0, \dots, 2^{6-1}-1]$
2. CI + 1 -> **100000**
3. Signo=1, magnitud=1010 -> **11010**
4. Positivo -> CI=C2=SM -> **01110**

Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas

1. Caracteres
2. Cadenas de caracteres

2. Numéricas

1. Naturales y enteras

1. Operaciones aritméticas

2. Coma fija
3. Coma flotante (estándar IEEE 754)

Comparación de aritmética en BP, C1 y C2

	Binario puro	Complemento a 1	Complemento a 2
Suma	$\begin{array}{r} 10110 \\ 01100 \\ \hline 100010 \end{array}$	igual que B.P.	igual que B.P.
Resta	$\begin{array}{r} 10110 \\ 01100 \\ \hline 01010 \end{array}$	sumar y si hay Cn-1 entonces sumar Cn-1 al total	sumar y si hay Cn-1 entonces descartarlo

En hardware, es más fácil operar con complemento

Comparación de aritmética en BP, C1 y C2

por qué sumar el acarreo en Ca1

	Binario	Decimal	
Suma		<ul style="list-style-type: none"> • $-X$ se representa como $2^n - X - 1$ • $-Y$ se representa como $2^n - Y - 1$ • $-(X + Y)$ se representa como $2^n - (X+Y) - 1$ • $-(X + Y)$ operando resulta $2^n + 2^n - (X + Y) - 2$ + 1 	
Resta	<pre> 10110 01100 ----- 01010 </pre>	sumar y si hay C_{n-1} entonces sumar C_{n-1} al total	sumar y si hay C_{n-1} entonces descartarlo

Corrección de resultado sumando el acarreo...

Comparación de aritmética en BP, C1 y C2

por qué descartar el acarreo en Ca2

	Binario	Decimal	
Suma		<ul style="list-style-type: none"> • $-X$ se representa como $2^n - X$ • $-Y$ se representa como $2^n - Y$ • $-(X + Y)$ se representa como $2^n - (X+Y)$ • $-(X + Y)$ operando resulta $2^n + 2^n - (X + Y)$ 	
Resta	<pre> 10110 01100 ----- 01010 </pre>	sumar y si hay C_{n-1} entonces sumar C_{n-1} al total	sumar y si hay C_{n-1} entonces descartarlo

Corrección de resultado descartando el acarreo...

Comparación de aritmética en BP, C1 y C2

	Binario puro	Complemento a 1	Complemento a 2
<p>Detectar desbordamiento</p>	<p>El resultado necesita 1 bit más</p> <p>Hay C_n</p>	<p>Suma de + + es -, Suma de - - es +</p> <p>$C_n \neq C_{n-1}$</p>	<p>Suma de + + es -, Suma de - - es +</p> <p>$C_n \neq C_{n-1}$</p>
<p>Extensión de signo</p>	<p>0...0 10110</p>	<p>1...1[↙]10110 0...0[↙]00110</p>	<p>1...1[↙]10110 0...0[↙]00110</p>
...

Extensión de signo en complemento a dos

- ▶ ¿Cómo pasar de n bits a m bits, siendo $n < m$?
- ▶ Ejemplo:
 - ▶ $n = 4, m = 8$
 - ▶ Si $X = 0110$ con 4 bits $\Rightarrow X = 00000110$ con 8 bits
 - ▶ Si $X = 1011$ con 4 bits $\Rightarrow X = 11111011$ con 8 bits

Ejercicio

- ▶ Usando 5 bits para representarlo, haga las siguientes sumas en complemento a uno:
 - a) $4 + 12$
 - b) $4 - 12$
 - c) $-4 - 12$

Ejercicio (Solución Ca1 con 5 bits)

a) $4 + 12$

00100
01100

10000 \Rightarrow se obtiene un negativo $\Rightarrow -15 \Rightarrow$ **overflow**

b) $4 - 12$

00100
10011

10111 $\Rightarrow -8$

c) $-4 - 12$

11011
10011

101110 \Rightarrow negativo con 6 bits \Rightarrow **overflow**

Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas

1. Caracteres
2. Cadenas de caracteres

2. Numéricas

1. Naturales y enteras
2. **Coma fija**
3. Coma flotante (estándar IEEE 754)

Otras necesidades de representación

► ¿Cómo representar?

- Números muy grandes: $30.556.926.000_{(10)}$
- Números muy pequeños: $0.0000000000529177_{(10)}$
- Números con decimales: 1,58567

Ejemplo de fallo...

- ▶ Explosión del **Ariane 5** (primer viaje)
 - ▶ Enviado por ESA en junio de 1996
 - ▶ Coste del desarrollo:
10 años y 7000 millones de dólares
 - ▶ Explotó 40 segundos después de despegar, a 3700 metros de altura.
 - ▶ Fallo debido a la pérdida total de la información de altitud:
 - ▶ El software del sistema de referencia inercial realizó la conversión de un valor real en coma flotante de 64 bits a un valor entero de 16 bits. El número a almacenar era mayor de 32767 (el mayor entero con signo de 16 bits) y se produjo un fallo de conversión y una excepción.



Coma fija [racionales]

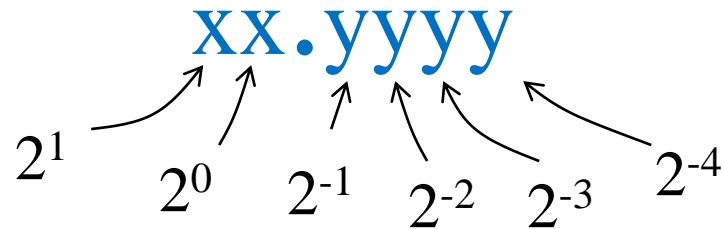
- ▶ Se fija la posición de la coma binaria y se utilizan los pesos asociados a las posiciones decimales

- ▶ Ejemplo:

$$1001.1010 = 2^4 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} = 9,625$$

Representación de fracciones con representación binaria en coma fija

- Ejemplo de representación con 6 bits:



- Ejemplo de número:
 $10,1010_{(2)} = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} = 2.625_{10}$
- Asumiendo esta coma fija, el rango sería:
□ $[0 \text{ a } 3.9375 \text{ (casi 4)}]$

Potencias negativas

i	2^{-i}	
0	1.0	1
1	0.5	1/2
2	0.25	1/4
3	0.125	1/8
4	0.0625	1/16
5	0.03125	1/32
6	0.015625	
7	0.0078125	
8	0.00390625	
9	0.001953125	
10	0.0009765625	

Contenidos

1. Introducción

1. Motivación y objetivos
2. Sistemas posicionales

2. Representaciones

1. Alfanuméricas

1. Caracteres
2. Cadenas de caracteres

2. **Numéricas**

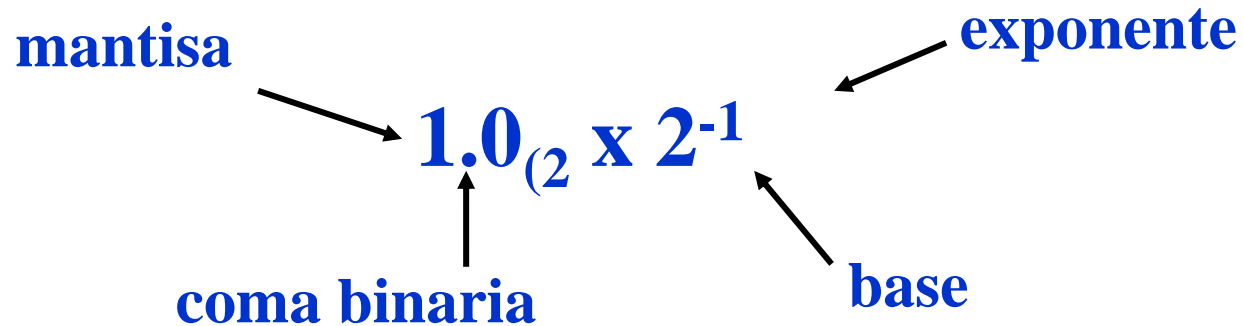
1. Naturales y enteras
2. Coma fija
3. **Coma flotante (estándar IEEE 754)**

Notación científica decimal

The diagram shows the scientific notation 9.12×10^{25} . The number 9.12 is underlined and labeled 'mantisa' with an upward arrow. The 'x' is in the middle. The '10' is labeled 'base' with an upward arrow. The '25' is labeled 'exponente' with an upward arrow. A grey arrow points from the '10' to the 'x'.

- ▶ Cada número lleva asociado una mantisa y un ^{exponente}
- ▶ Notación científica decimal usada: notación normalizada
 - ▶ Solo un dígito distinto de 0 a la izquierda del punto
- ▶ Se adapta el número al **orden de magnitud** del valor a representar, trasladando la *coma decimal* mediante el exponente

Notación científica en binario



- ▶ Forma normalizada: Un 1 (solo un dígito) a la izq. de la coma
 - ▶ Normalizada: 1.0001×2^{-9}
 - ▶ No normalizada: 0.0011×2^{-8} , 10.0×2^{-10}

Estándar IEEE 754

[racionales]



- ▶ Estándar para coma flotante usado en la mayoría de los ordenadores.
- ▶ **Características** (salvo casos especiales):
 - ▶ Exponente: en exceso con sesgo $2^{\text{num_bits_exponente} - 1} - 1$
 - ▶ Mantisa: signo-magnitud, normalizada, con bit implícito
- ▶ Diferentes **formatos**:
 - ▶ **Precisión simple**: 32 bits (signo: 1, exponente: 8 y mantisa: 23)
 - ▶ **Doble precisión**: 64 bits (signo: 1, exponente: 11 y mantisa: 52)
 - ▶ **Cuádruple precisión**: 128 bits (signo: 1, exponente: 15 y mantisa: 112)

Normalización y bit implícito

► Normalización

Para normalizar la mantisa se ajusta el exponente para que el bit más significativo de la mantisa sea 1

► Ejemplo: ~~1~~001000000000000000000000 $\times 2^3$ (ya está normalizado)

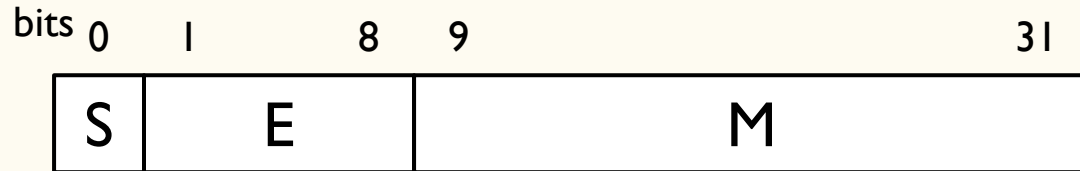
► Ejemplo: ~~000~~100000000010101 $\times 2^3$ (no lo está)
100000000010101000 $\times 2^0$ (ahora sí)

► Bit implícito

Una vez normalizado, dado que el bit más significativo es 1, **no** se almacena para dejar espacio para un bit más (aumenta la precisión)

► Así se puede representar mantisas con un bit más

Estándar IEEE 754 de precisión simple [racionales]



S es el signo (1 bit)

E es el exponente (8 bits)

M es la mantisa (23 bits)

- El valor se calcula con la siguiente expresión (salvo casos especiales):

$$N = (-1)^S \times 2^{E-127} \times 1.M$$

donde:

S = 0 indica número positivo, S = 1 indica número negativo

$0 < E < 255$ (E=0 y E=255 indican casos especiales)

$000000000000000000000000 \leq M \leq 111111111111111111111111$

Estándar IEEE 754 de precisión simple [racionales]

► Existencia de casos especiales:

Exponente	Mantisa	Valor especial
0 (0000 0000)	0	+/- 0 (según signo)
0 (0000 0000)	No cero	Número NO normalizado
255 (1111 1111)	No cero	NaN (0/0,...)
255 (1111 1111)	0	+/-infinito (según signo)
1-254	Cualquiera	Número normalizado (no especial)

$$(-1)^s * 0.\text{mantisa} * 2^{-126}$$

$$(-1)^s * 1.\text{mantisa} * 2^{\text{exponente}-127}$$

Ejemplos (incluyen casos especiales)

S	E	M	N
1	00000000	000000000000000000000000	-0 (Excepción 0) E=0 y M=0.
1	01111111	000000000000000000000000	$-2^0 \times 1.0_2 = -1$
0	10000001	111000000000000000000000	$+2^2 \times 1.111_2 = +2^2 \times (2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}) = +7.5$
0	11111111	000000000000000000000000	∞ (Excepción ∞) E=255 y M=0
0	11111111	100000000000000000000001	NaN (Not a Number) E=255 y M \neq 0.

Ejercicio

- a) Calcular el valor correspondiente al número
0 10000011 110000000000000000000000
dado en coma flotante según norma 754 de simple precisión

Ejercicio (solución)

- a) Calcular el valor correspondiente al número
0 10000011 110000000000000000000000
dado en coma flotante según norma 754 de simple precisión

- a) Bit de signo: $0 \Rightarrow (-1)^0 = +1$
b) Exponente: $10000011_2 = 131_{10} \Rightarrow E - 127 = 131 - 127 = 4$
c) Mantisa: $110000000000000000000000 \Rightarrow 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 0,75$

Por tanto el valor decimal del n° es $+1 \times 2^4 \times 1,75 = +28$

Ejercicio

- b) Expresar según norma IEEE 754 de simple precisión el n° -9

Ejercicio (solución)

b) Expresar según norma IEEE 754 de simple precisión el nº -9

$$-9_{10} = -1001_2 = -1001_2 \times 2^0 = -1,001_2 \times 2^3 \text{ (mantisa normalizada)}$$

- a) Bit de signo: negativo $\Rightarrow S=1$
- b) Exponente: $3+127$ (exceso) = $130 \Rightarrow 10000010$
- c) Mantisa: $1,001$ (bit impl.) $\Rightarrow 001000000000000000000000$

Por tanto $-9 = 1 \ 10000010 \ 001000000000000000000000$

Estándar IEEE 754 de precisión simple [racionales]

► Rango de magnitudes representables (sin considerar el signo):

► Menor normalizado:

$$2^{-127} \times 1.000000000000000000000000_2$$

► Mayor normalizado:

$$2^{254-127} \times 1.111111111111111111111111_2$$

► Menor no normalizado:

$$2^{-126} \times 0.000000000000000000000001_2$$

► Mayor no normalizado:

$$2^{-126} \times 0.111111111111111111111111_2$$

Exponente	Mantisa	Valor especial
0	$\neq 0$	No normalizado
1-254	cualquiera	normalizado

$$(-1)^s * 0.\text{mantisa} * 2^{-126}$$

$$(-1)^s * 1.\text{mantisa} * 2^{\text{exponente}-127}$$

Estándar IEEE 754 de precisión simple [racionales]

► Rango de magnitudes representables (sin considerar el signo):

► Menor normalizado:

$$2^{-127} \times 1.000000000000000000000000_2 = 2^{-126}$$

► Mayor normalizado:

$$2^{254-127} \times 1.111111111111111111111111_2 = 2^{127} \times (2 - 2^{-23}) = 2^{128} \times (1 - 2^{-24})$$

► Menor no normalizado:

$$2^{-126} \times 0.000000000000000000000001_2 = 2^{-149}$$

► Mayor no normalizado:

$$2^{-126} \times 0.111111111111111111111111_2 = 2^{-126} \times (1 - 2^{-23})$$

Truco:

$$\begin{array}{rcl} & 1.111111111111111111111111_2 & = X \\ + & 0.000000000000000000000001_2 & = 2^{-23} \\ \hline & 10.000000000000000000000000_2 & = 2 \\ & & X = 2 - 2^{-23} \end{array}$$

Estándar IEEE 754 de precisión simple [racionales]

► Rango de magnitudes representables (sin considerar el signo):

► Menor normalizado:

$$2^{-127} \times 1.000000000000000000000000_2 = 2^{-126} = 2^{-127} \times 0.5$$

► Mayor normalizado:

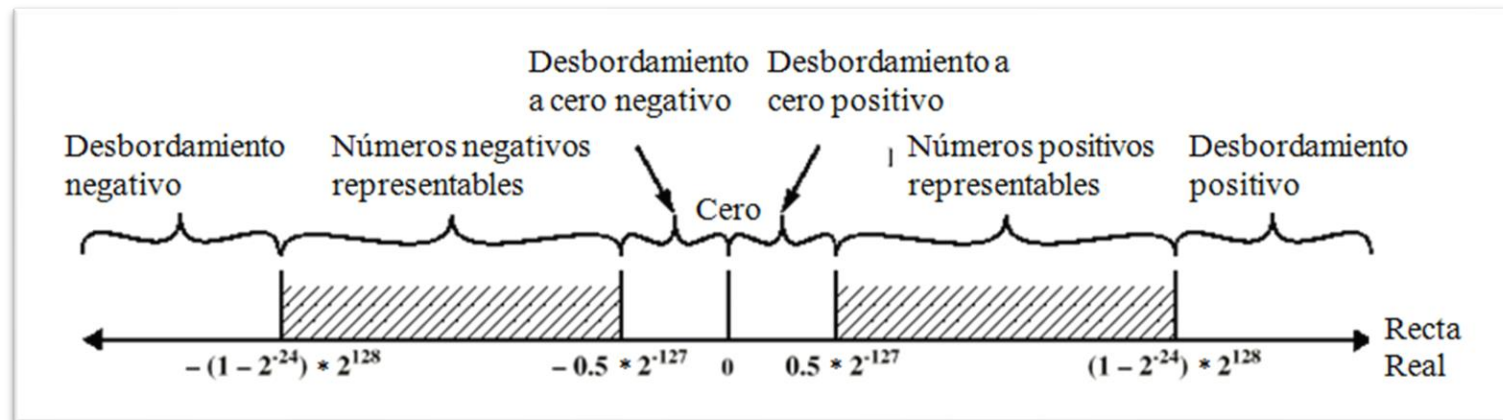
$$2^{254-127} \times 1.111111111111111111111111_2 = 2^{127} \times (2 - 2^{-23}) = 2^{128} \times (1 - 2^{-24})$$

► Menor no normalizado:

$$2^{-126} \times 0.000000000000000000000000_2 = 2^{-149}$$

► Mayor no normalizado:

$$2^{-126} \times 0.111111111111111111111111_2 = 2^{-126} \times (1 - 2^{-23})$$



Ejercicio

- ▶ ¿Cuántos números de *floats* (coma flotante de simple precisión) hay entre el 1 y el 2 (no incluido)?

- ▶ ¿Cuántos números de *floats* (coma flotante de simple precisión) hay entre el 2 y el 3 (no incluido)?

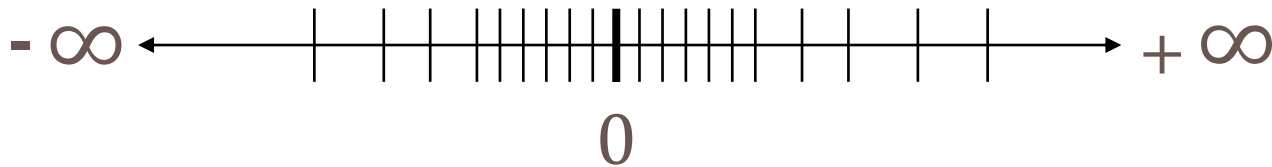
Ejercicio (solución)

- ▶ ¿Cuántos números de *floats* (coma flotante de simple precisión) hay entre el 1 y el 2 (no incluido)?
 - ▶ $1 = 1,000000000000000000000000 \times 2^0$
 - ▶ $2 = 1,000000000000000000000000 \times 2^1$
 - ▶ Entre 1 y 2 hay 2^{23} números
- ▶ ¿Cuántos números de *floats* (coma flotante de simple precisión) hay entre el 2 y el 3 (no incluido)?
 - ▶ $2 = 1,000000000000000000000000 \times 2^1$
 - ▶ $3 = 1,100000000000000000000000 \times 2^1$
 - ▶ Entre 2 y 3 hay 2^{22} números

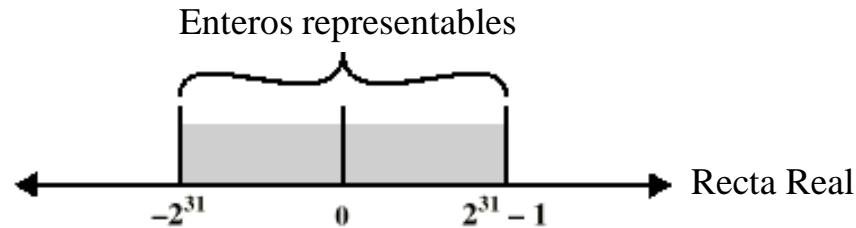
Números representables

- Resolución variable:

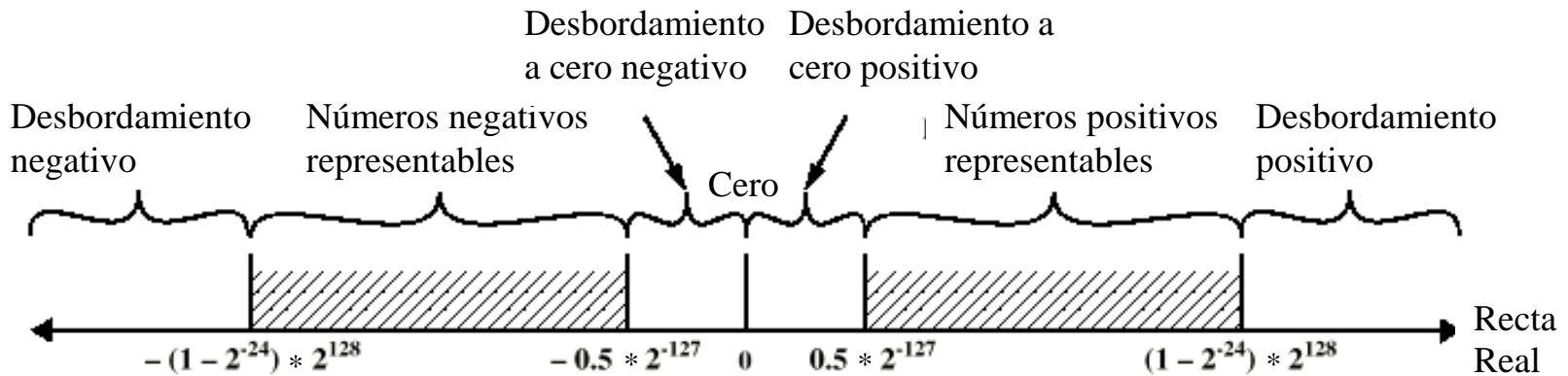
Más denso cerca de cero, menos hacia el infinito



Números representables



(a) Enteros en complemento a dos



(b) Números en coma flotante

Ejemplo 1 imprecisión

0,4 →

0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



3.9999998×10^{-1}

0,1 →

0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



9.9999994×10^{-2}

Ejemplo 2

imprecisión

- ¿Cómo realiza C una división?

t2.c

```
#include <stdio.h>

int main ( )
{
    float a ;

    a = 3.0/7.0 ;
    if (a == 3.0/7.0)
        printf("Igual\n") ;
    else printf("No Igual\n") ;
    return (0) ;
}
```


Ejemplo 2

imprecisión

- ¿Cómo realiza C una división?

t2.c

```
#include <stdio.h>

int main ( )
{
    float a ;

    a = 3.0/7.0 ;
    if (a == 3.0/7.0)
        printf("Igual\n") ;
    else printf("No Igual\n") ;
    return (0) ;
}
```

```
$ gcc -o t2 t2.c
$ ./t2
No Igual
```

Ejemplo 2

imprecisión

- ¿Cómo realiza C una división?

t2.c

```
#include <stdio.h>

int main ( )
{
    float a ;
    a = 3.0/7.0 ;
    if (a == 3.0/7.0)
        printf("Igual\n") ;
    else printf("No Igual\n") ;
    return (0) ;
}
```

float

double

```
$ gcc -o t2 t2.c
$ ./t2
No Igual
```

Ejemplo 3

imprecisión

- ▶ La propiedad asociativa no siempre se cumple
 $a + (b + c) = (a + b) + c$?

t1.c

```
#include <stdio.h>

int main ( )
{
    float x, y, z ;

    x = 10e30; y = -10e30; z = 1;
    printf("(x+y)+z = %f\n", (x+y)+z) ;
    printf("x+(y+z) = %f\n", x+(y+z)) ;

    return (0) ;
}
```

Ejemplo 3

imprecisión

- ▶ La propiedad asociativa no siempre se cumple
 $a + (b + c) = (a + b) + c$?

t1.c

```
#include <stdio.h>

int main ( )
{
    float x, y, z ;

    x = 10e30;  y = -10e30;  z = 1;
    printf("(x+y)+z = %f\n", (x+y)+z) ;
    printf("x+(y+z) = %f\n", x+(y+z)) ;

    return (0) ;
}
```

\$ gcc -o t1 t1.c

\$./t1

(x+y)+z = 1.000000

x+(y+z) = 0.000000

Ejemplo

Asociatividad

- ▶ La coma flotante no es asociativa

- ▶ $x = -1.5 \times 10^{38}, y = 1.5 \times 10^{38}, y \text{ } z = 1.0$

- ▶ $x + (y + z) = -1.5 \times 10^{38} + (1.5 \times 10^{38} + 1.0)$
 $= -1.5 \times 10^{38} + (1.5 \times 10^{38}) = 0.0$

- ▶ $(x + y) + z = (-1.5 \times 10^{38} + 1.5 \times 10^{38}) + 1.0$
 $= (0.0) + 1.0 = 1.0$

- ▶ Las operaciones coma flotante no son asociativas

- ▶ Los resultados son aproximados

- ▶ 1.5×10^{38} es mucho más grande que 1.0

- ▶ $1.5 \times 10^{38} + 1.0$ en la representación en coma flotante sigue siendo 1.5×10^{38}

Ejemplo

Conversión $\text{int} \rightarrow \text{float} \rightarrow \text{int}$

```
if (i == (int) ((float) i)) {  
    printf("true");  
}
```

- ▶ No siempre es cierto
- ▶ Muchos valores enteros grandes no tienen una representación exacta en coma flotante
- ▶ ¿Qué ocurre con double?

Ejemplo

- ▶ El número 133000405 en binario es:
 - ▶ 111111011010110110011010101 (27 bits)
- ▶ 111111011010110110011010101 $\times 2^0$
- ▶ Se normaliza
 - ▶ 1,11111011010110110011010101 $\times 2^{26}$
 - ▶ S = 0 (positivo)
 - ▶ e = 26 \rightarrow E = 26 + 127 = 153
 - ▶ M = 11111011010110110011010 (se pierden los 3 últimos bits)
- ▶ El número realmente almacenado es
 - ▶ 1,11111011010110110011010 $\times 2^{26} =$
 - ▶ 111111011010110110011010 $\times 2^3 = 133000400$

Ejemplo

Conversión float → int → float

```
if (f == (float) ((int) f)) {  
    printf("true");  
}
```

- ▶ No siempre es cierto
- ▶ Los números con decimales no tienen representación entera

Redondeo

- ▶ El redondeo elimina cifras menos significativas de un número para obtener un valor aproximado.
- ▶ **Tipos** de redondeo:
 - ▶ Redondeo **hacia $+\infty$**
 - ▶ Redondeo “hacia arriba”: $2.001 \rightarrow 3$, $-2.001 \rightarrow -2$
 - ▶ Redondeo **hacia $-\infty$**
 - ▶ Redondea “hacia abajo”: $1.999 \rightarrow 1$, $-1.999 \rightarrow -2$
 - ▶ **Truncar**
 - ▶ Descarta los últimos bits: $1.299 \rightarrow 1.2$
 - ▶ Redondeo **al más cercano**
 - ▶ $2.4 \rightarrow 2$, $2.6 \rightarrow 3$, $-1.4 \rightarrow -1$

Redondeo

- ▶ El redondeo supone ir perdiendo precisión.
- ▶ El redondeo ocurre:
 - ▶ Al pasar a una representación con menos representables:
 - ▶ Ej.: Un valor de doble a simple precisión
 - ▶ Ej.: Un valor en coma flotante a entero
 - ▶ Al realizar operaciones aritméticas:
 - ▶ Ej.: Después de sumar dos números en coma flotante (al usar dígitos de guarda)

Dígitos de guarda

- ▶ Se utilizan **dígitos de guarda** para mejorar la precisión: internamente se usan dígitos adicionales para operar.
- ▶ Ejemplo: $2,65 \times 10^0 + 2,34 \times 10^2$

	SIN dígitos de guarda	CON dígitos de guarda
1.- igualar exponentes	$0,02 \times 10^2$ $+ 2,34 \times 10^2$	$0,02\textcolor{blue}{65} \times 10^2$ $+ 2,34\textcolor{blue}{00} \times 10^2$
2.- sumar	$2,36 \times 10^2$	$2,36\textcolor{blue}{65} \times 10^2$
3.- redondear	$2,3\textcolor{red}{6} \times 10^2$	$2,3\textcolor{red}{7} \times 10^2$

Operaciones en coma flotante

► Sumar

► Restar

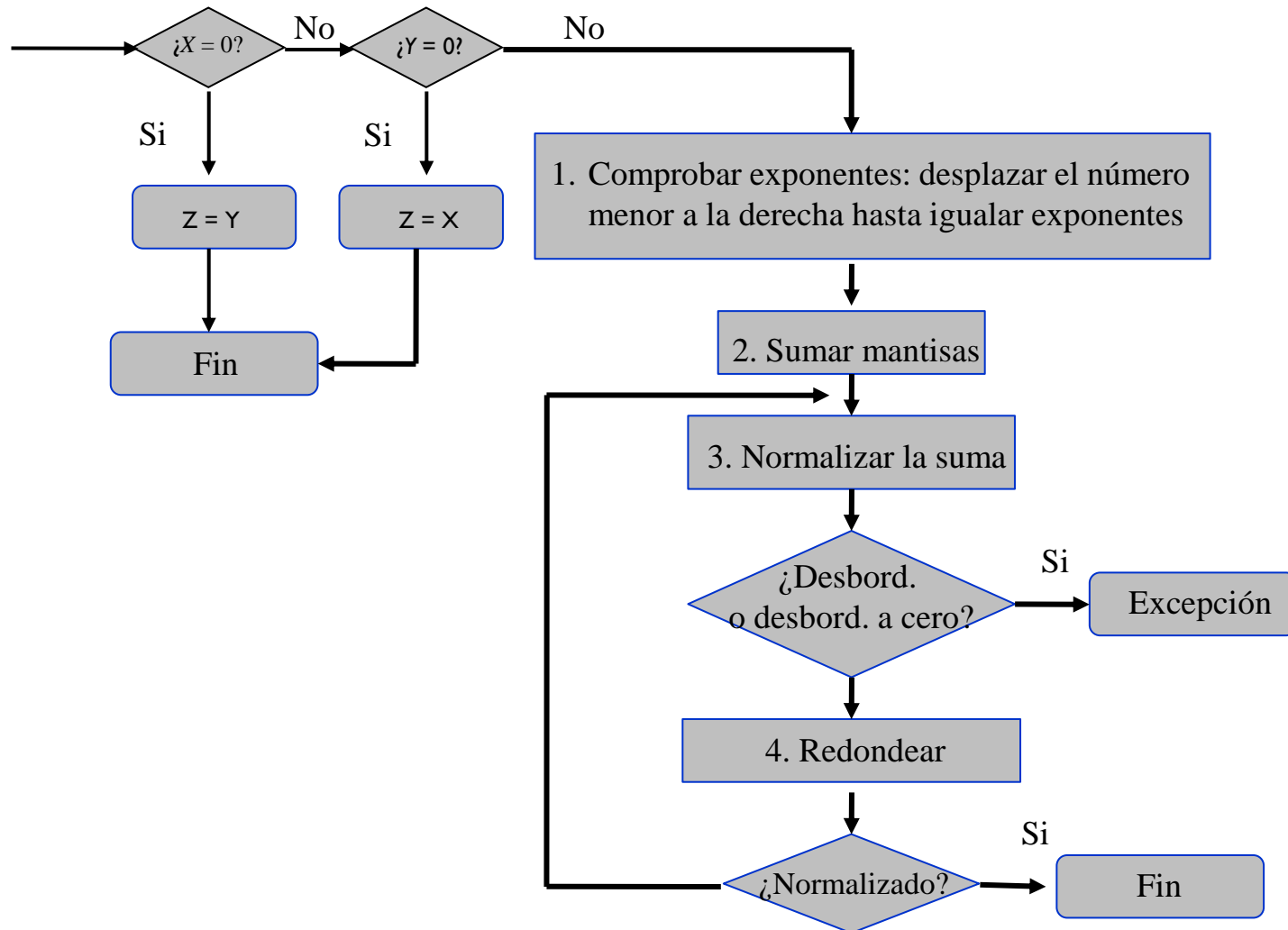
1. Comprobar valores cero.
2. Igualar exponentes (desplazar número menor a la derecha).
3. Sumar/restar las mantisas.
4. Normalizar el resultado.

► Multiplicar

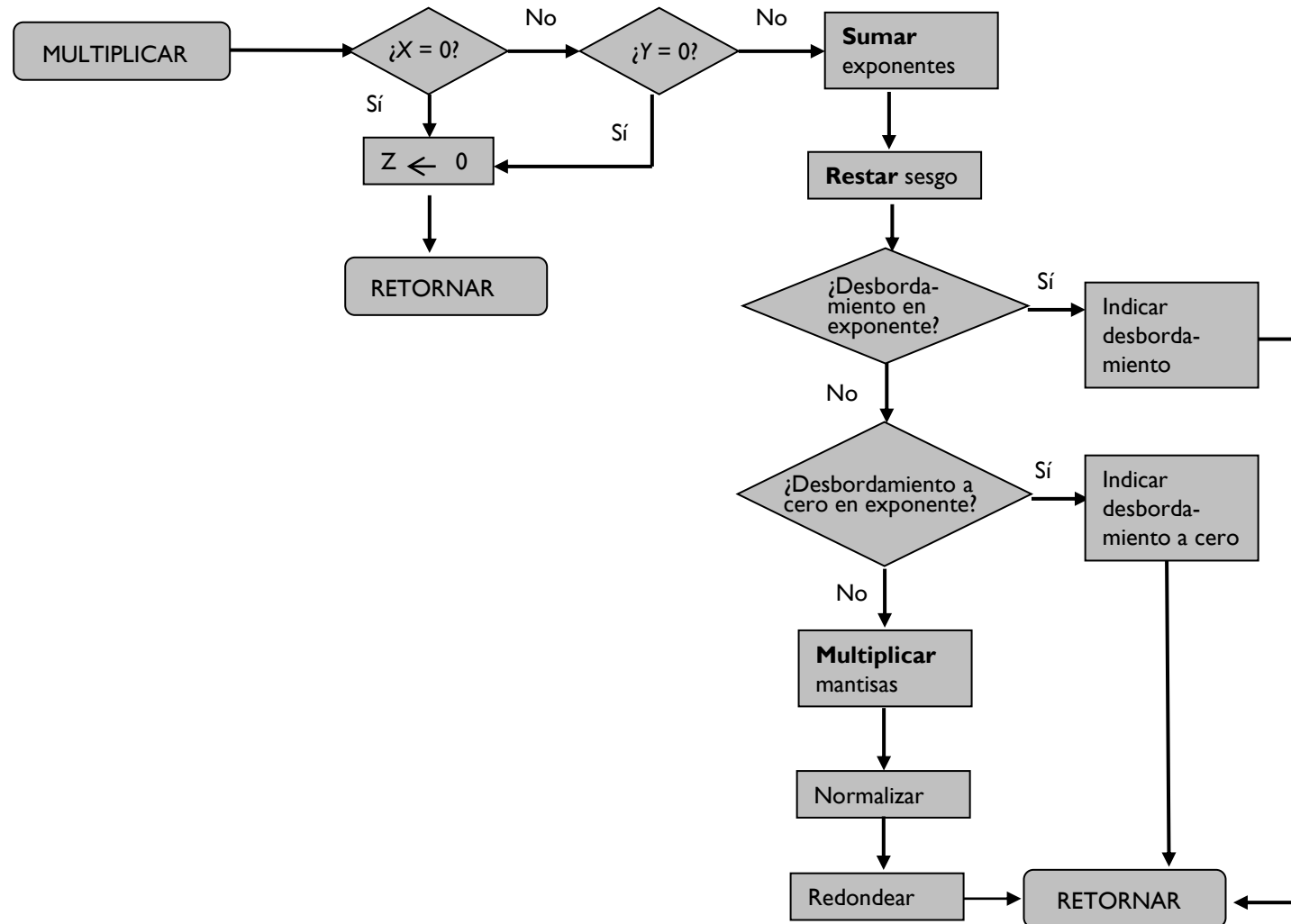
► Dividir

1. Comprobar valores cero.
2. Sumar/restar exponentes.
3. Multiplicar/dividir mantisas (teniendo en cuenta el signo).
4. Normalizar el resultado.
5. Redondear el resultado.

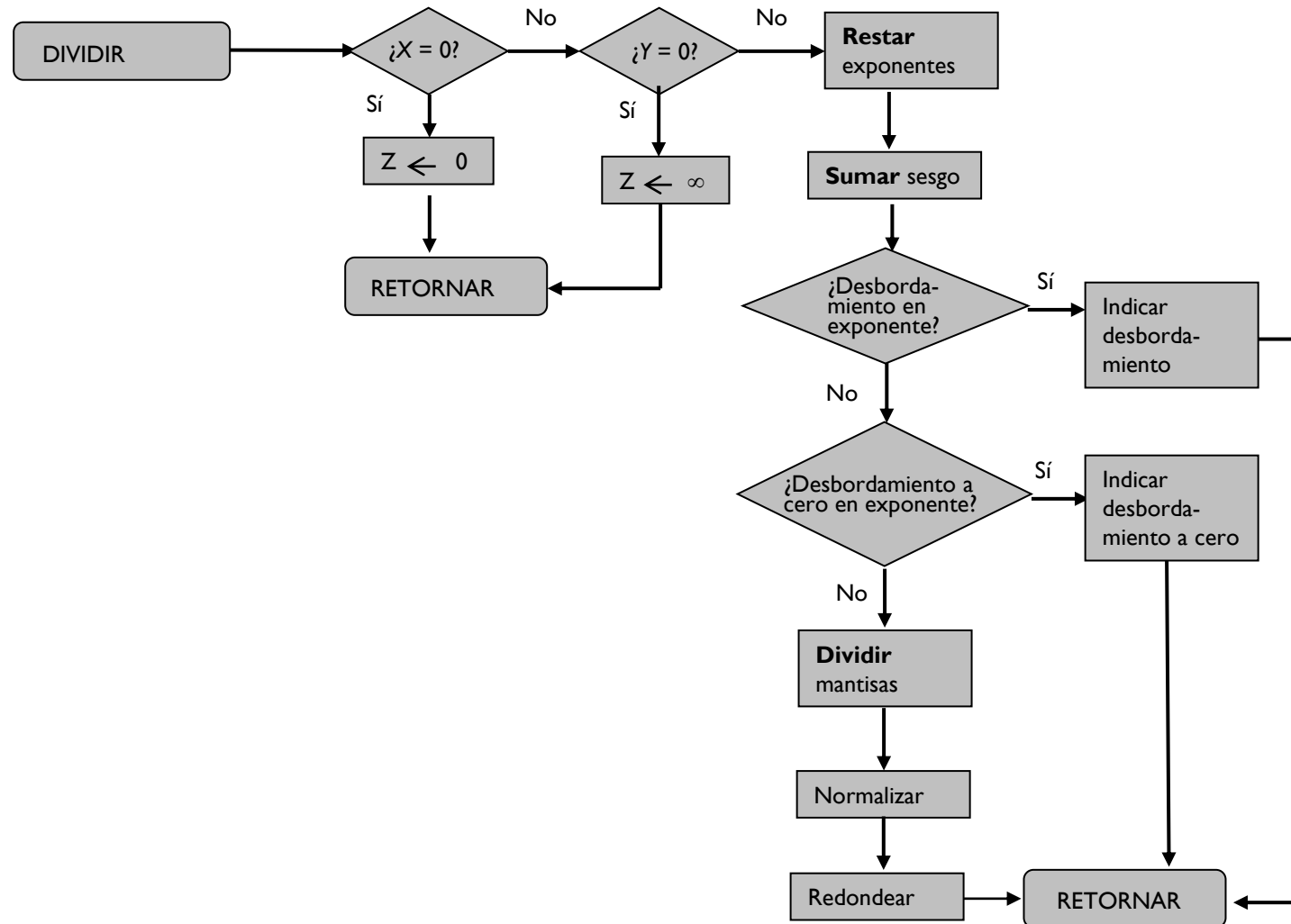
Suma y resta: $Z=X+Y$ y $Z=X-Y$



Multiplicación: $Z=X*Y$



División: $Z = X/Y$



Ejercicio

- ▶ Usando el formato IEEE 754, sumar 7,5 y 1,5 paso a paso

Solución

1) $7,5 + 1,5 =$

Pasar a binario

2) $1,111 * 2^2 + 1,1 * 2^0 =$

Igualar
exponentes

3) $1,111 * 2^2 + 0,011 * 2^2 =$

4) $10,010 * 2^2 =$

Sumar

5) $1,0010 * 2^3$

Ajustar
exponentes

Solución

► Representación de los números

$$\begin{array}{r} 7,5 \rightarrow 0 \ 10000001 \quad 111000000000000000000000 \\ + \quad 1,5 \rightarrow 0 \ 01111111 \quad 100000000000000000000000 \end{array}$$

Solución

- ▶ Se separa exponentes y mantisas y se añade el bit implícito

$$\begin{array}{r} 7,5 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 10000001 & 1.11100000000000000000000000 \\ \hline \end{array} \\ + 1,5 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 01111111 & 1.10000000000000000000000000 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

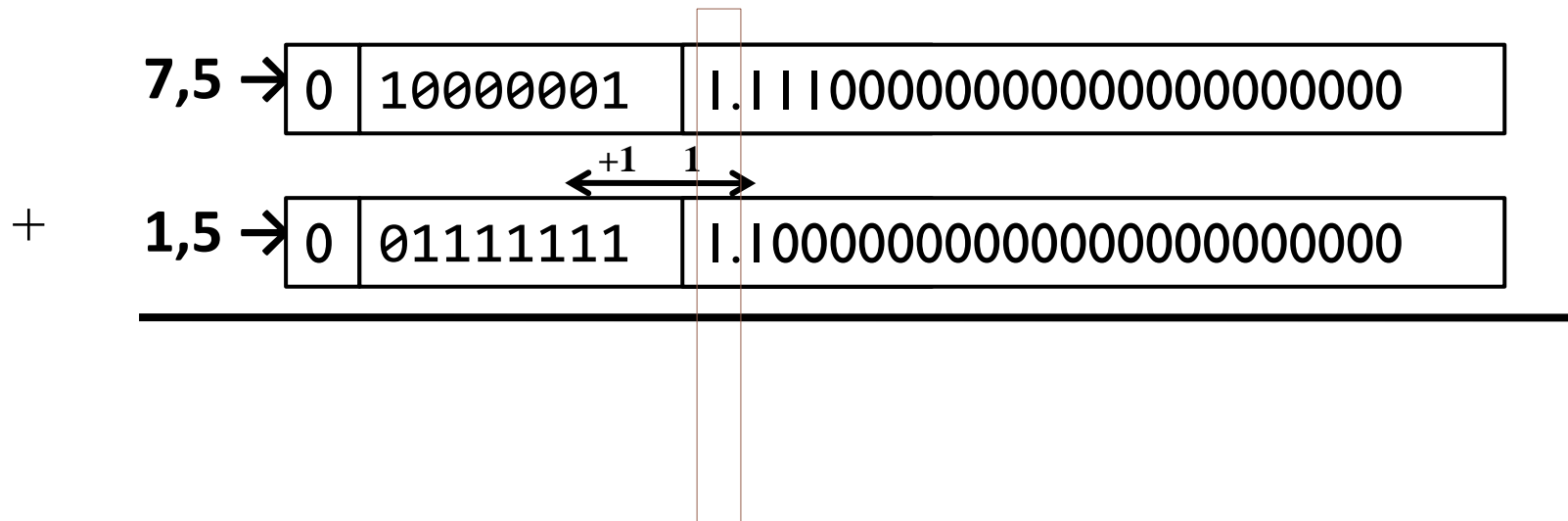
Solución

► Igualar exponentes

$$\begin{array}{r} 7,5 \rightarrow \boxed{0 \mid 10000001 \mid 1.111000000000000000000000000000} \\ + \quad 1,5 \rightarrow \boxed{0 \mid 01111111 \mid 1.100000000000000000000000000000} \\ \hline \end{array}$$

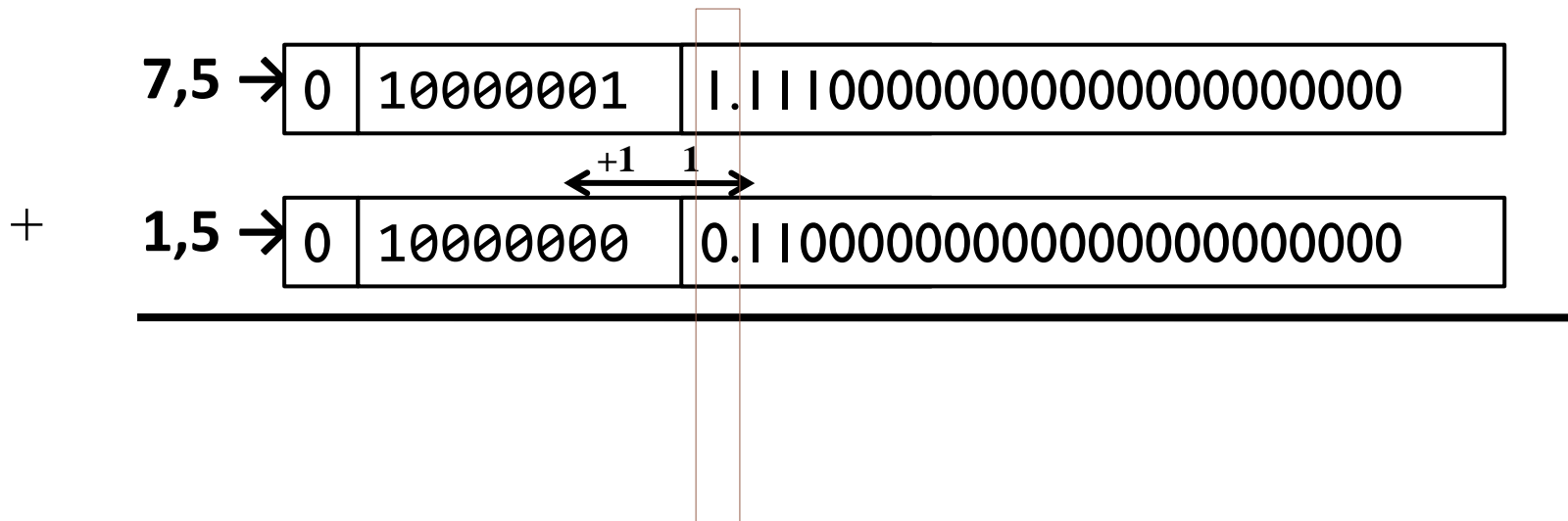
Solución

► Igualar exponentes



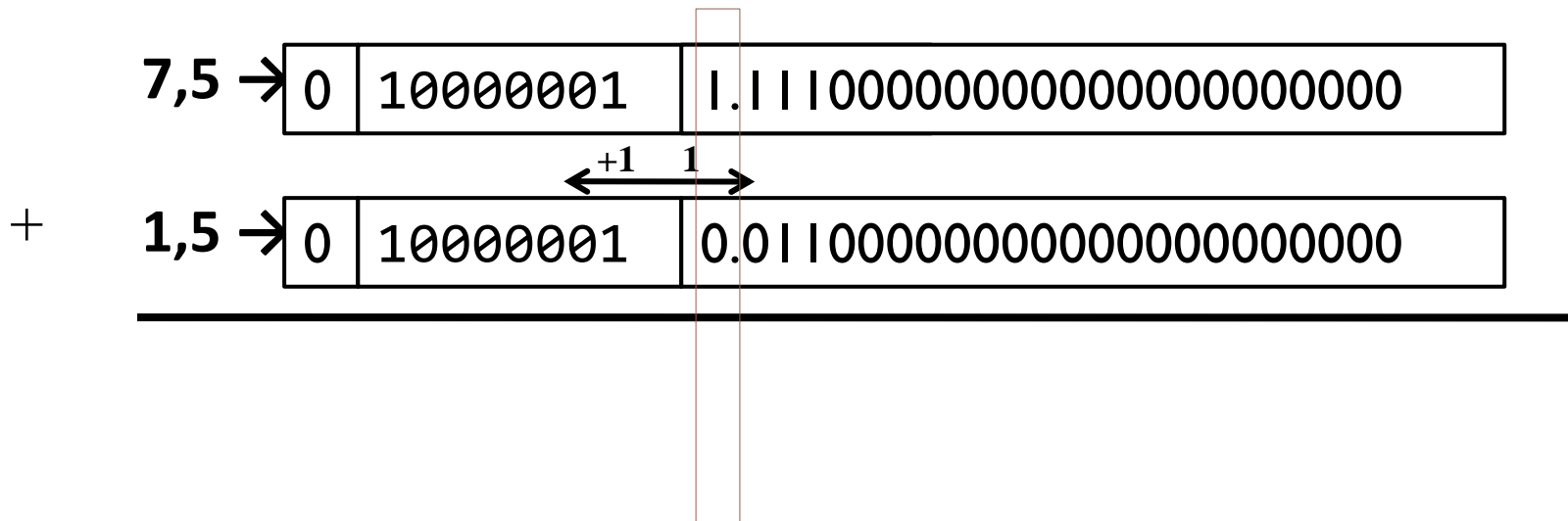
Solución

► Igualar exponentes



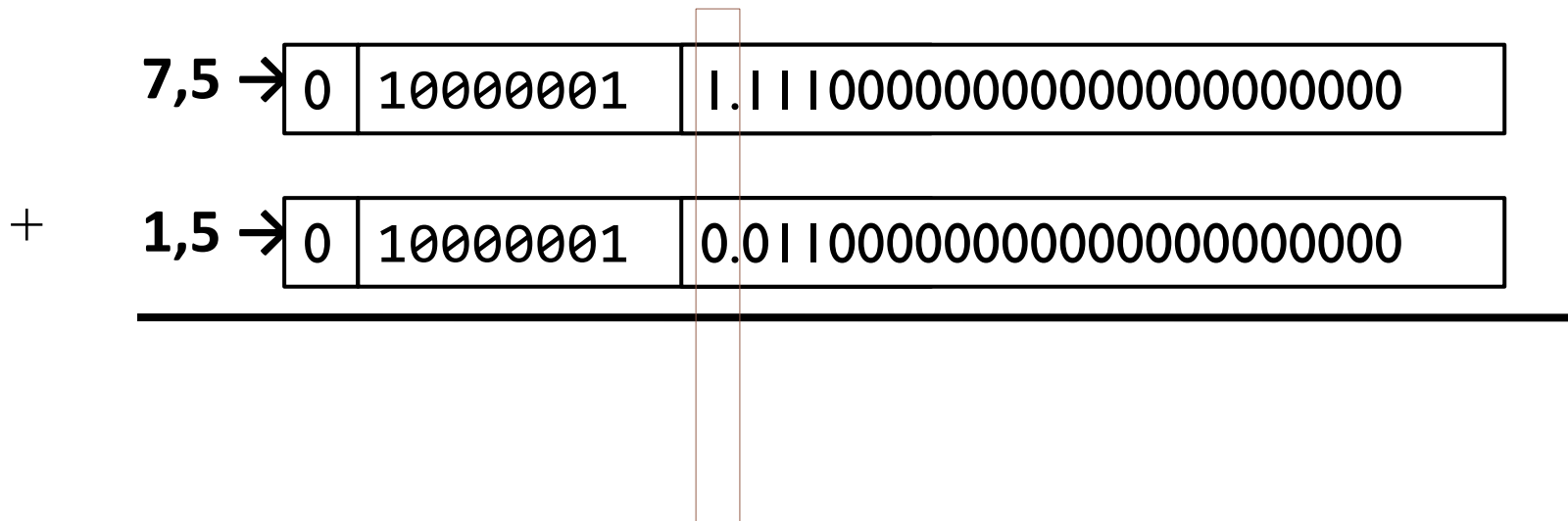
Solución

► Igualar exponentes



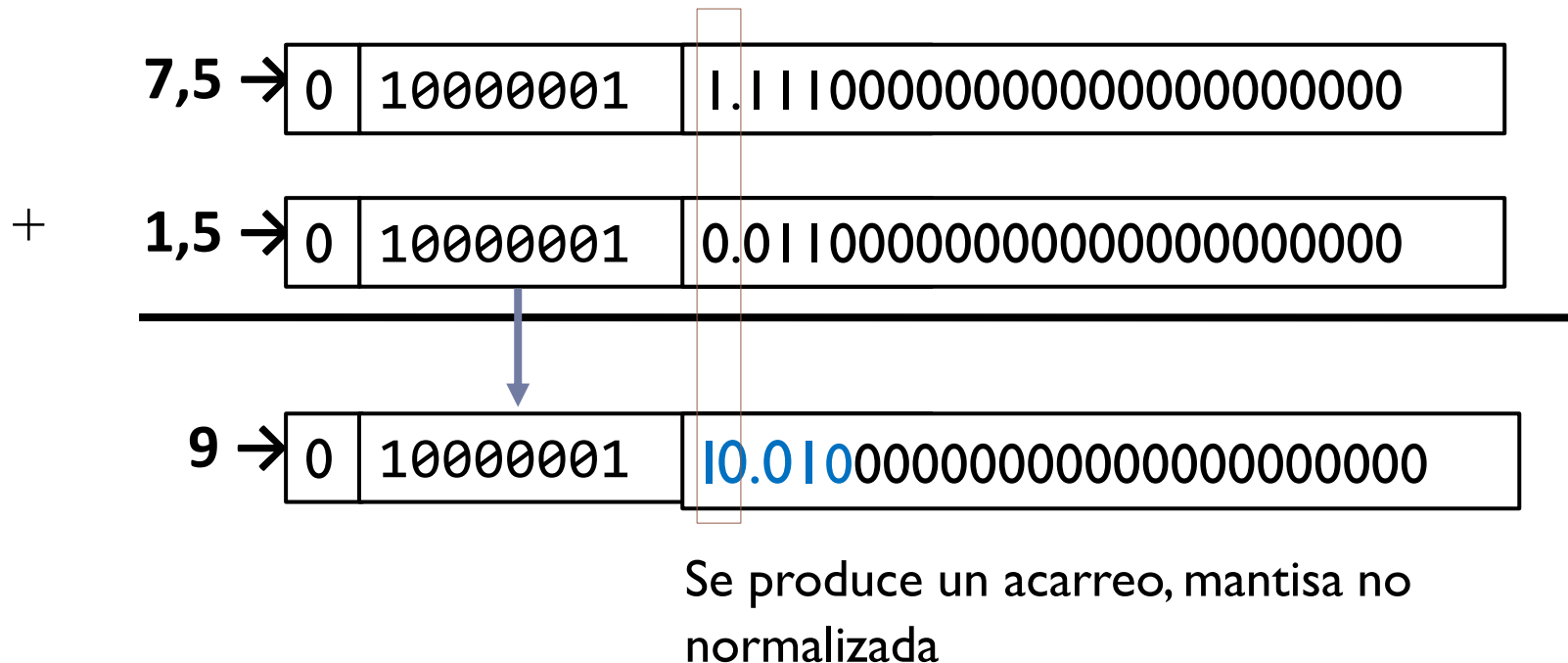
Solución

► Sumar mantisas



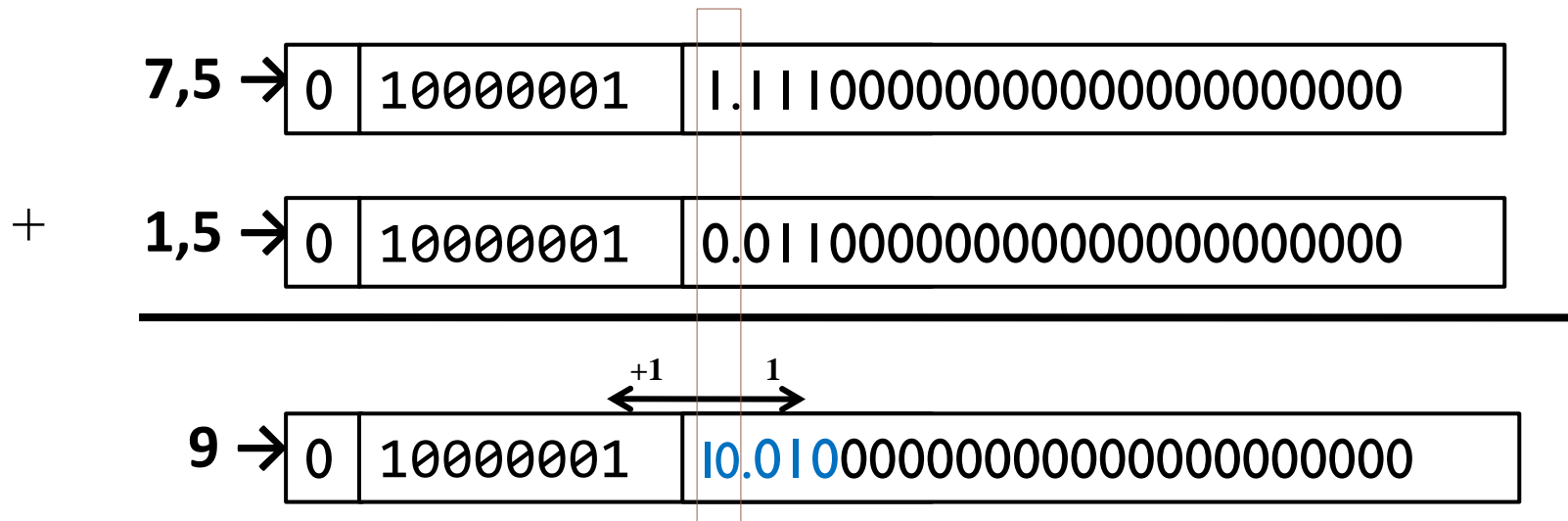
Solución

► Normalizar el resultado



Solución

► Normalizar el resultado



Solución

+

7,5 →	0	10000001	1.111000000000000000000000000000
1,5 →	0	10000001	0.011000000000000000000000000000
<hr/>			
9 →	0	10000010	1.001000000000000000000000000000

Solución

- ▶ Se almacena el resultado eliminando el bit implícito

9 → 0 10000010 001000000000000000000000

Ejercicio

- ▶ Usando el formato IEEE 754, multiplicar 7,5 y 1,5 paso a paso

Solución

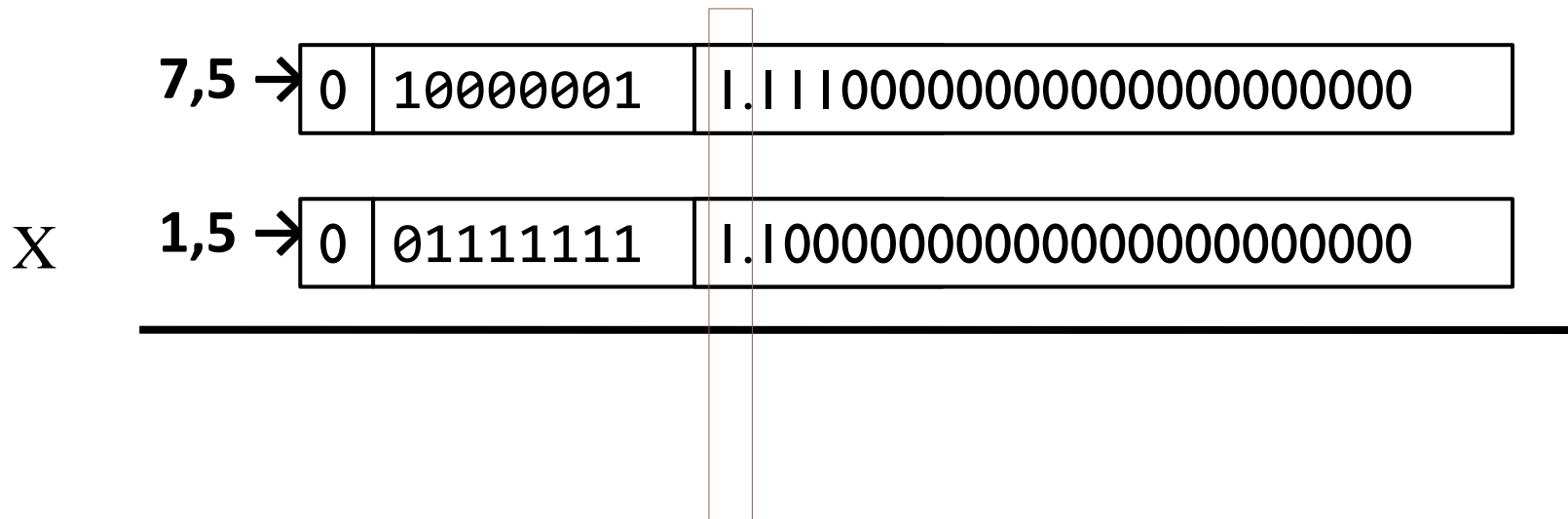
► Representación de los números

9 → 0 10000010 001000000000000000000000

- 7,5 → 1 10000001 111000000000000000000000

Solución

- ▶ Se separan exponentes y mantisas y se añade bit implícito



Se añade el bit implícito para operar

Solución

- Multiplicar: sumar exponentes y multiplicar mantisas

X

7,5 →	0	10000001	1.111000000000000000000000
1,5 →	0	01111111	1.100000000000000000000000
<hr/>			
		+	×
	0	100000000	10.110100000000000000000000

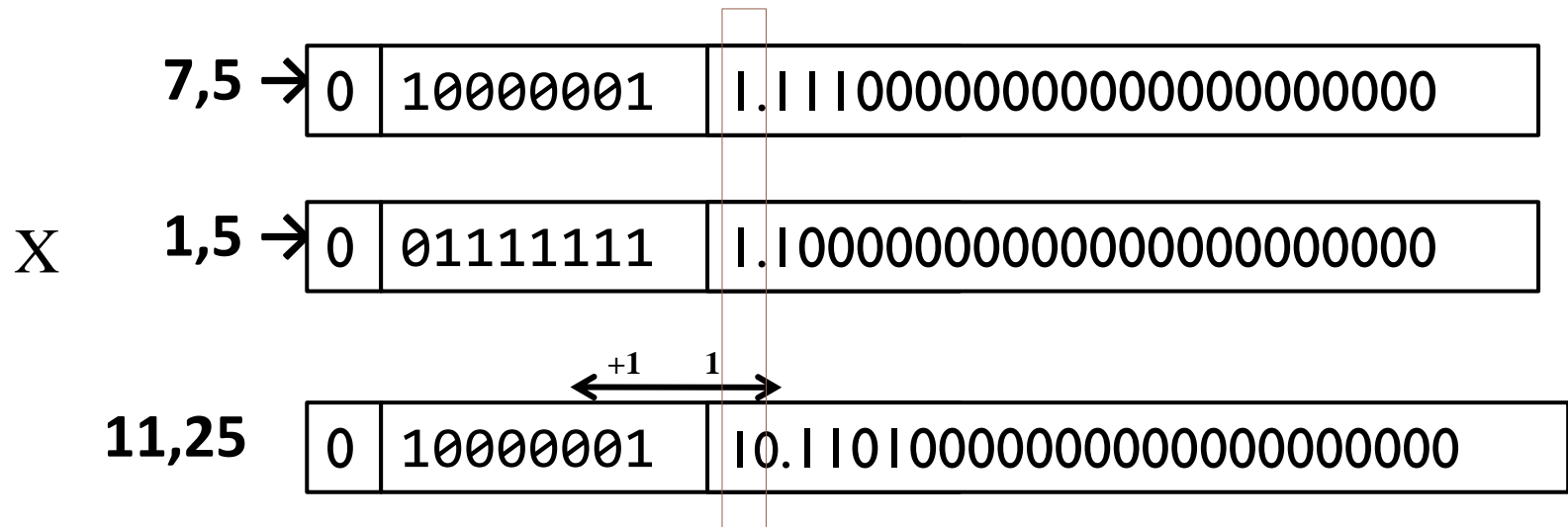
Solución

- Multiplicar: quitar el sesgo al exponente (hay dos)

$$\begin{array}{r} 7,5 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 10000001 & 1.111000000000000000000000 \\ \hline \end{array} \\ \times 1,5 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 01111111 & 1.100000000000000000000000 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 10000000 & 10.110100000000000000000000 \\ \hline \end{array} \\ - \quad 01111111 \end{array}$$

Solución

- Multiplicar: normalizar el resultado



Solución

► Resultado normalizado...

	7,5 →	0	10000001	1.111000000000000000000000
X	1,5 →	0	01111111	1.100000000000000000000000
	11,25	0	10000010	1.011010000000000000000000

Solución

- ▶ Se almacena el resultado eliminando el bit implícito

11,25 0 10000010 011010000000000000000000

Evolución de IEEE 754

- ▶ 1985 – IEEE 754
- ▶ 2008 – IEEE 754-2008 (754+854)
- ▶ 2011 – ISO/IEC/IEEE 60559:2011 (754-2008)

Name	Common name	Base	Digits	E min	E max	Notes	Decimal digits	Decimal E max
binary16	Half precision	2	10+1	−14	+15	storage, not basic	3.31	4.51
binary32	Single precision	2	23+1	−126	+127		7.22	38.23
binary64	Double precision	2	52+1	−1022	+1023		15.95	307.95
binary128	Quadruple precision	2	112+1	−16382	+16383		34.02	4931.77
decimal32		10	7	−95	+96	storage, not basic	7	96
decimal64		10	16	−383	+384		16	384
decimal128		10	34	−6143	+6144		34	6144

http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_floating_point

Grupo ARCOS

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

Tema 2: Representación de la información

Estructura de Computadores

Grado en Ingeniería Informática
Grado en Matemática aplicada y Computación
Doble Grado en Ingeniería Informática y Administración de Empresas

